



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**ESTIMAÇÃO EM PROCESSOS
FRACIONARIAMENTE INTEGRADOS
MULTIVARIADOS**

Dissertação de Mestrado

Marcio Valk

Porto Alegre, 05 de março de 2007.

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática
como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em
Matemática Pura com ênfase em Probabilidade e
Estatística Matemática

Professor Orientador:
Dr^a. Sílvia Regina Costa Lopes

Banca Examinadora:
Dr. Alexandre Tavares Baravieira
Dr. Aluísio De Souza Pinheiro
Dr. Artur Oscar Lopes

Data da Defesa: 05 de março de 2007.

Sumário

1	Introdução	3
2	Processos Estocásticos Multivariados	5
2.1	DEFINIÇÕES PRELIMINARES	6
2.2	FUNÇÕES DE COVARIÂNCIA E CORRELAÇÃO CRUZADA	7
2.2.1	PROCESSOS ESTACIONÁRIOS	7
2.3	ESPECTRO CRUZADO	11
2.3.1	REPRESENTAÇÃO ESPECTRAL	13
2.3.2	FILTROS LINEARES	15
2.4	ESTIMAÇÃO	17
2.4.1	ESTIMAÇÃO DA MÉDIA E DA COVARIÂNCIA	18
2.4.2	JANELAS ESPECTRAIS	19
2.4.3	ESTIMAÇÃO DO ESPECTRO CRUZADO	23
3	Processos Estacionários com Longa Dependência	28
3.1	PROCESSOS ARMA MULTIVARIADOS	29
3.2	PROCESSOS VARFIMA(p, d, q)	33
3.3	FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICAS	36
3.4	CÁLCULO DAS FUNÇÕES DE COVARIÂNCIA E CORRELAÇÃO CRUZADA EXATA	37
3.5	APROXIMAÇÕES LOCAIS PARA A MATRIZ DAS FUNÇÕES DEN- SIDADES ESPECTRAIS	45
4	Estimação Semi-Paramétrica Multivariada	50
4.1	Estimador GSE Multivariado	51
4.1.1	CONSTRUÇÃO DA FUNÇÃO OBJETIVA	53
4.2	ESTIMADOR GPH	56
4.3	ESTIMADOR SEMI-PARAMÉTRICO MULTIVARIADO CGPH	57
4.3.1	CONSTRUÇÃO DO ESTIMADOR CGPH	58
4.3.2	ESTIMADOR CGPH SUAVIZADO	61
5	Simulações	63
5.1	COMPORTAMENTO DOS ESTIMADORES GPH E CGPH NA PRESENÇA DE CORRELAÇÃO	63

5.2	SIMULAÇÕES PARA O ESTIMADOR SCGPH	65
5.3	COMPARANDO OS ESTIMADORES SCGPH E GSE	68
6	Análise de Séries Reais	70
6.1	SÉRIE TEMPORAL DOS RETORNOS DIÁRIOS	70
6.2	ANÁLISE DAS SÉRIES TEMPORAIS DO IBOVESPA, BRASIL TELECOM E GERDAU	71
7	Conclusões e Propostas para Futuros Trabalhos	79
7.1	CONCLUSÕES	79
7.2	PROPOSTAS PARA FUTUROS TRABALHOS	80
	REFERÊNCIAS	81
	APÊNDICE A	85
A.1	ESTIMADOR DE COVARIÂNCIA SUAVIZADA	86
A.2	ESTIMADOR DE PERIODOGRAMA SUAVIZADO	86
	APÊNDICE B	89
B.1	SIMULAÇÕES PARA O PARÂMETRO α	89
B.2	SIMULAÇÕES PARA O PARÂMETRO q_n	102

Capítulo 1

Introdução

Durante os últimos anos, a idéia de modelar processos estacionários univariados e multivariados, através de modelos com longa dependência, tem atraído a atenção, principalmente de economistas, em diferentes áreas. O exemplo mais notável é a modelagem da volatilidade de ativos financeiros (ver Baillie et al., 1996, Bollerslev e Mikkelsen, 1996). Nesses trabalhos, os autores normalmente utilizam os chamados *processos auto-regressivos de médias móveis fracionariamente integrados*, aqui denotados por $ARFIMA(p, d, q)$, onde p e q denotam, respectivamente, os graus dos polinômios auto-regressivo e médias móveis e d é o parâmetro de integração fracionária. Esses parâmetros são estimados utilizando-se, geralmente, procedimentos paramétricos, tais como aqueles propostos por Fox e Taqqu (1986), Dahlhaus (1989) e Sowell (1992).

Os *processos auto-regressivos de médias móveis fracionariamente integrados multivariados*, denotados aqui por $VARFIMA(p, \mathbf{d}, q)$, onde \mathbf{d} é um vetor de parâmetros de integração fracionária, são a extensão, para o caso multivariado, dos processos $ARFIMA(p, d, q)$. Esses processos são estudados por Lobato (1999) e Shimotsu (2004). Nesses trabalhos, os autores propõem dois estimadores para o parâmetro de longa dependência \mathbf{d} denotados, respectivamente, por estimador *semi-paramétrico de dois passos multivariado* e estimador *semi-paramétrico Gaussiano multivariado* ou GSE (“Gaussian Semiparametric Estimator”). Shimotsu (2004), analisou através de simulações de Monte Carlo, o comportamento do estimador GSE quando as séries temporais componentes são correlacionadas.

Um caso particular dos processos $VARFIMA(p, \mathbf{d}, q)$, ocorre quando os parâmetros p e q são zero, ou seja, $p = 0 = q$. Nesse trabalho, determinamos as expressões exatas das funções de covariância, densidade espectral e de correlação cruzada para esses processos utilizando propriedades da classe de funções *hipergeométricas*. Esse resultado está demonstrado no Teorema 3.4. Para os processos $ARFIMA(0, d, 0)$, essas expressões podem ser encontradas no trabalho de Hosking (1981).

No caso univariado, destacamos o trabalho pioneiro de Geweke e Porter-

Hudak (1983). Esse trabalho trata da estimação do parâmetro de integração fracionária d , utilizando um procedimento semi-paramétrico, obtido através do método de regressão linear baseado na função periodograma, e esse estimador é denotado aqui por GPH. No entanto, quando as séries temporais componentes passam a ser correlacionadas, estamos ignorando informações relevantes acerca das inter-relações entre as componentes do processo multivariado se utilizarmos apenas métodos propostos para o caso univariado como, por exemplo, GPH.

Na tentativa de estender o GPH, desenvolvemos um estimador para o parâmetro \mathbf{d} , em processos VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0), baseado em informações obtidas através da relação entre quaisquer duas séries temporais componentes como, por exemplo, a função periodograma cruzada suavizada. Este estimador é denotado por SCGPH e é aplicável sempre que existirem três ou mais séries temporais presentes no vetor multivariado.

No Capítulo 2, abordamos alguns tópicos fundamentais para o estudo de processos estocásticos multivariados, incluindo as definições de séries temporais multivariadas e função densidade espectral cruzada. Também apresentamos um estimador não-viciado e consistente para a função densidade espectral cruzada.

No Capítulo 3, definimos os processos VARFIMA(p , \mathbf{d} , q). Além disso, através das funções hipergeométricas, calculamos as expressões exatas para as funções de covariância, densidade espectral e correlação cruzada dos processos VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0).

No Capítulo 4, apresentamos três estimadores semi-paramétricos: o estimador GSE, proposto por Shimotsu (2004); o estimador GPH, proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983); e o estimador SCGPH, proposto neste trabalho e obtido a partir da idéia pioneira de Geweke e Porter-Hudak (1983).

No Capítulo 5 determinamos, através de simulações de Monte Carlo, os parâmetros α , utilizado para calcular o número de regressores e q_n , definido como sendo o ponto de truncamento da função de ponderação, para o estimador SCGPH e comparamos esse estimador com o estimador GSE proposto por Shimotsu (2004). Além disso, analisamos o desempenho dos estimadores CGPH e GPH quando as séries temporais componentes são correlacionadas.

No Capítulo 6 analisamos três séries temporais reais correlacionadas. Utilizamos as séries temporais de valores absolutos dos retornos diários do índice Ibovespa e do valor das ações da Brasil Telecom e da Gerdau. No Capítulo 7, apresentamos as conclusões e propostas para futuros trabalhos.

Capítulo 2

Processos Estocásticos Multivariados

Séries temporais multivariadas aparecem quando observamos vários fenômenos aleatórios simultaneamente e os ordenamos no tempo. Assim, no contexto da engenharia, podemos estudar a variação simultânea no tempo da corrente e da tensão ou da pressão, da temperatura e do volume ou, ainda, de registros sísmicos tomados em diferentes localizações geográficas. Na economia, podemos analisar a variação simultânea da taxa de inflação, da reserva de mercado, do desemprego e da taxa de juros ou, do estoque e da demanda de uma certa mercadoria. Podemos, obviamente, estudar cada caso em particular, tratando cada qual como uma série temporal univariada. No entanto, estaríamos ignorando informações importantes advindas da relação entre as diferentes séries presentes na série temporal multivariada. Séries temporais multivariadas serão abordadas novamente na Seção 2.1 deste Capítulo.

Uma ferramenta importante para descrever a evolução de um processo através do tempo é a função de autocorrelação. Inferências baseadas nessa função são chamadas de *análise no domínio do tempo*. Mas também podemos analisar estes processos no domínio da frequência, utilizando para isso, a *função densidade espectral* do processo $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. O procedimento de estimação desta função é chamado de *análise espectral*.

Na análise de séries temporais multivariadas no domínio da frequência, uma ferramenta importante que permite examinar a relação entre duas ou mais séries, em um intervalo de frequências, é a função chamada *espectro cruzado*. Neste capítulo, apresentamos essa função e algumas funções decorrentes dela, como, por exemplo, a *função coerência*, a qual mede a correlação entre as componentes de um processo multivariado em função da frequência. Na Seção 2.2, definimos processos estocásticos multivariados estacionários e apresentamos as *funções de covariância e correlação cruzada*. A *função densidade espectral cruzada* e sua representação matricial são apresentadas na Seção 2.3. Na Seção 2.4, descrevemos duas maneiras de estimar a *função*

densidade espectral cruzada, onde uma das abordagens é feita através da *função periodograma*.

2.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Uma *série temporal multivariada* é um vetor de séries temporais unidimensionais onde cada série temporal componente é uma realização finita de um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Um estudo mais completo de séries temporais multivariadas pode ser encontrado em Brillinger (1975), Hannan (1970) e Koopmans (1974). Brockwell e Davis (1991), Priestley (1981) e Wei (1990) são recomendados para um estudo mais geral de séries temporais unidimensionais. Nesta seção, caracterizamos uma série temporal multivariada como uma realização finita de um processo estocástico multivariado.

Definição 2.1. Um *processo estocástico* é uma família de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t \in T}$, onde todas as variáveis $X_t \in \mathbb{R}$ e estão definidas em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. O conjunto $T \neq \emptyset$ é um conjunto de índices, Ω é o espaço amostral, \mathcal{A} é a classe de eventos aleatórios e $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ é a função que associa a probabilidade a um evento aleatório qualquer.

Se o conjunto de índices T for o intervalo (a, b) ou mesmo o próprio \mathbb{R} , diz-se que o processo estocástico é a parâmetro contínuo. Se T for finito ou enumerável como, por exemplo, $T = \{1, 2, \dots, N\}$, $T = \mathbb{Z}$ ou $T = \mathbb{N}$, obtemos um processo estocástico à parâmetro discreto.

A seguir, definimos um *processo estocástico multivariado* ou *processo estocástico vetorial*. Neste caso, uma *série temporal multivariada* será uma realização finita (ou uma amostra aleatória de tamanho n do mesmo) e será denotada por $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1}^n$.

Observação 2.1. Usaremos as notações A' para denotar a matriz transposta de A e A^* para denotar a matriz transposta conjugada de A .

Definição 2.2. Dizemos que $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}} = \{X_{1,t}, X_{2,t}, \dots, X_{m,t}\}'_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo estocástico multivariado*, se cada $\{X_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$, para $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, é um processo estocástico no sentido da Definição 2.1.

Alguns autores como, por exemplo, Brockwell e Davis (1991), referem-se aos processos da Definição 2.2 como *processos m -dimensionais*. Esta nomenclatura também foi incorporada neste trabalho.

Na seção a seguir, apresentamos as *funções de covariância e correlação cruzada* de um processo estocástico multivariado.

2.2 FUNÇÕES DE COVARIÂNCIA E CORRELAÇÃO CRUZADA

Nesta seção, definimos as funções de covariância e correlação cruzada e a estacionariedade para processos estocásticos multivariados. Também apresentamos as matrizes de covariância e correlação com suas respectivas propriedades.

Para descrever um processo multivariado $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é necessário conhecer os momentos de segunda ordem. No caso univariado, os momentos de segunda ordem são a *média* e a *função de autocovariância*. No entanto, para o caso multivariado, as propriedades até segunda ordem são especificadas pelo *vetor da média*:

$$\boldsymbol{\mu}_t = \mathbb{E}(\mathbf{X}_t) = (\mu_{1,t}, \dots, \mu_{m,t})', \quad (2.1)$$

onde $\mu_{j,t} = \mathbb{E}(X_{j,t})$, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$; pelas *funções de covariância* das componentes $\{X_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ do processo $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dadas por

$$\gamma_{jj}(t+h, t) = \text{Cov}(X_{j,t+h}, X_{j,t}) = \mathbb{E}[(X_{j,t+h} - \mu_{j,t+h})(X_{j,t} - \mu_{j,t})], \quad (2.2)$$

para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ e $h \in \mathbb{Z}$ e por uma nova função chamada *função de covariância cruzada*, a qual será definida a seguir.

Definição 2.3. Seja $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico m -dimensional. A função de *covariância cruzada* entre as componentes $\{X_{j,t}\}$ e $\{X_{k,t}\}$ do processo $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\gamma_{jk}(t+h, t) = \text{Cov}(X_{j,t+h}, X_{k,t}) = \mathbb{E}[(X_{j,t+h} - \mu_{j,t+h})(X_{k,t} - \mu_{k,t})], \quad (2.3)$$

para $j, k \in \{1, \dots, m\}$, $j \neq k$ e $t, h \in \mathbb{Z}$.

Uma classe de processos estocásticos muito utilizada na literatura é a classe dos processos estacionários. Esses processos podem ser *estritamente estacionários* ou *fracamente estacionários*. Estas definições são apresentadas na seção a seguir.

2.2.1 PROCESSOS ESTACIONÁRIOS

Uma importante característica dos processos estocásticos multivariados é a *estacionariedade*. Intuitivamente, um processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é *estritamente estacionário* se ele se desenvolve no tempo de modo que a origem dos tempos não é importante. Em outras palavras, as características de $\{X_{t+h}\}_{t \in \mathbb{Z}}$, para todo $h \in \mathbb{Z}$, são as mesmas de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Nas definições a seguir, apresentamos os processos estocásticos *estritamente estacionários* e *fracamente estacionários*.

Definição 2.4. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ diz-se *estritamente estacionário* se as funções de distribuição conjunta dos vetores $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ e $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$ são as mesmas, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $h, t_i, t_{i+h} \in \mathbb{Z}$, com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definição 2.5. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser *fracamente estacionário* ou somente *estacionário* (como serão chamados daqui por diante), se

- i) $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$;
- ii) $\mathbb{E}(X_t) = \mu$, uma constante independente de t ;
- iii) $\gamma(r, s) = \gamma(r + t, s + t)$, para quaisquer $r, s, t \in \mathbb{Z}$.

A estacionariedade definida acima é também chamada *estacionariedade no sentido largo, estacionariedade de segunda ordem ou estacionariedade de covariância*.

Observação 2.2. Uma propriedade importante dos processos estocásticos estacionários é que todo *processo estritamente estacionário* é também *estacionário*. Quando o processo em questão é Gaussiano, vale a recíproca, ou seja, todo *processo estocástico estacionário Gaussiano* é *estritamente estacionário* (ver Brockwell e Davis, 1991).

Para que um processo estocástico multivariado seja estacionário, é necessário que cada processo componente seja estacionário no sentido da Definição 2.5, e que a função de covariância cruzada seja independente do tempo. A definição formal de *estacionariedade* para processos estocásticos multivariados é dada a seguir.

Definição 2.6. Um processo estocástico multivariado $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser *estacionário* se, para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$, tem-se

- i) $\mathbb{E}|X_{j,t}|^2 < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$;
- ii) $\mathbb{E}(X_{j,t}) = \mu_j$, é uma constante independente de t ;
- iii) $\text{Cov}(X_{j,t+h}, X_{k,t}) = \gamma_{jk}(h)$, para $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $t, h \in \mathbb{Z}$, depende somente de h e não de t .

Sempre que $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ for um processo estocástico estacionário multivariado, usaremos a notação

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}(\mathbf{X}_t) = (\mu_1, \dots, \mu_m)' \quad (2.4)$$

e

$$\gamma_{jk}(h) = \text{Cov}(X_{j,t+h}, X_{k,t}) = \mathbb{E}[(X_{j,t+h} - \mu_j)(X_{k,t} - \mu_k)], \quad (2.5)$$

para descrever o vetor das médias e as funções de covariância que independem de t , onde $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $t, h \in \mathbb{Z}$.

Observação 2.3. Quando houver alguma possibilidade de confusão, utilizaremos a notação $\gamma_{j,k}^X(\cdot)$ para especificar a função de covariância cruzada entre as componentes $\{X_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{X_{k,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ do processo $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Essa mesma notação será utilizada ao longo desse trabalho para qualquer função de um processo estocástico $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

O principal interesse no estudo de séries temporais multivariadas é entender o inter-relacionamento entre elas. As funções de autocovariância e covariância cruzada fornecem uma medida de dependência, não somente entre observações da mesma série, mas também entre séries diferentes. No entanto, as funções de covariância cruzada diferem das funções de autocovariância, pois elas não são funções pares, ou seja,

$$\gamma_{jk}(h) \neq \gamma_{jk}(-h), \text{ para todo } j, k \in \{1, \dots, m\} \text{ e } h \in \mathbb{Z}. \quad (2.6)$$

Para as funções de covariância cruzada, vale a relação

$$\gamma_{jk}(h) = \gamma_{kj}(-h), \quad (2.7)$$

para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $h \in \mathbb{Z}$, isto é, além da simetria dos incrementos, os sub-índices são alternados (ver Koopmans, 1974 e Chatfield, 1975).

A equação (2.5) pode ser escrita na forma matricial, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}(h) &\equiv \mathbb{E}[(\mathbf{X}_{t+h} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})'] = (\gamma_{jk}(h))_{j,k=1}^m \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_{11}(h) & \gamma_{12}(h) & \cdots & \gamma_{1m}(h) \\ \gamma_{21}(h) & \gamma_{22}(h) & \cdots & \gamma_{2m}(h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1}(h) & \gamma_{m2}(h) & \cdots & \gamma_{mm}(h) \end{pmatrix}, \text{ para } h \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Neste caso, $\mathbf{\Gamma}(\cdot)$ é chamada de *matriz das funções de covariância* ou simplesmente *matriz de covariâncias* de incremento h .

Observação 2.4. Se admitimos a possibilidade de que o processo $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tenha valores complexos, então a matriz $\mathbf{\Gamma}(\cdot)$ é definida por

$$\mathbf{\Gamma}(h) = \mathbb{E}[(\mathbf{X}_{t+h} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})^*]. \quad (2.9)$$

Daqui em diante, supomos que $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo real. Se for necessário considerar um processo complexo, isto será explicitado no texto.

A versão normalizada da função de covariância cruzada, $\gamma_{jk}(\cdot)$, para $j, k \in \{1, \dots, m\}$, é chamada *função de correlação cruzada*.

Definição 2.7. Seja $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário m -dimensional dado na Definição 2.6. Se $\gamma_{jk}(\cdot)$ é a função de covariância cruzada dada pela expressão (2.5), então a *função de correlação cruzada* entre as componentes $\{X_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{X_{k,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\rho_{jk}(h) = \frac{\gamma_{jk}(h)}{\sqrt{\gamma_{jj}(0)\gamma_{kk}(0)}}, \quad (2.10)$$

para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $h \in \mathbb{Z}$.

Assim, a *matriz das funções de correlação* ou abreviadamente *matriz de correlação* $\mathbf{R}(\cdot)$, com incremento $h \in \mathbb{Z}$, é definida por

$$\mathbf{R}(h) \equiv \left(\frac{\gamma_{jk}(h)}{\sqrt{\gamma_{jj}(0)\gamma_{kk}(0)}} \right)_{j,k=1}^m = (\rho_{jk}(h))_{j,k=1}^m. \quad (2.11)$$

Observação 2.5. A matriz de covariâncias $\mathbf{\Gamma}(\cdot)$ de um processo estocástico estacionário m -dimensional $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\mathbf{\Gamma}(h) = \mathbf{\Gamma}'(-h)$, para todo $h \in \mathbb{Z}$;
- ii) $|\gamma_{jk}(h)| \leq \sqrt{\gamma_{jj}(0)\gamma_{kk}(0)}$, para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $h \in \mathbb{Z}$;
- iii) $\gamma_{jj}(\cdot)$ é a função de autocovariância da componente $\{X_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ do processo $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$;
- iv) $\sum_{h,\ell=1}^n \mathbf{a}_h \mathbf{\Gamma}(h - \ell) \mathbf{a}_\ell \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$.

Em Brockwell e Davis (1991), podemos encontrar a extensão das propriedades acima, para a matriz de correlação $\mathbf{R}(\cdot)$, a qual possui a propriedade adicional:

- v) $\rho_{jj}(0) = 1$, para $j \in \{1, \dots, m\}$.

No entanto, $\rho_{jk}(0)$ não é necessariamente igual a 1 se $j \neq k$, mas, vale a seguinte propriedade:

- vi) $|\rho_{jk}(h)| \leq 1$, para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $h \in \mathbb{Z}$.

Também é possível que

- vii) $|\gamma_{jk}(h)| > |\gamma_{jk}(0)|$, se $j \neq k$, para algum $h \in \mathbb{Z}$.

Para um estudo mais geral sobre as funções de covariância cruzada e correlação cruzada referenciamos o leitor a Hannan (1970).

Na seção subsequente, apresentamos a função densidade espectral cruzada e algumas funções decorrentes da mesma.

2.3 ESPECTRO CRUZADO

As funções de covariância e correlação cruzada são ferramentas utilizadas para examinar o relacionamento entre diferentes séries no domínio do tempo. Nesta seção, apresentamos uma nova função chamada *função densidade espectral cruzada* ou simplesmente *espectro cruzado*, a qual é uma ferramenta natural para análise de séries temporais multivariadas no domínio da frequência. Considere processos estocásticos estacionários multivariados $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}} = \{X_{1,t}, \dots, X_{m,t}\}'$ com média zero e com funções de covariância cruzada satisfazendo

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma_{jk}(h)| < \infty, \text{ para todo } j, k \in \{1, \dots, m\}. \quad (2.12)$$

Definição 2.8. Seja $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário m -dimensional e $\gamma_{jk}(\cdot)$ a função de covariância cruzada entre as componentes $\{\mathbf{X}_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{\mathbf{X}_{k,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$, para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$, dada na equação (2.5). A *função densidade espectral cruzada* ou *espectro cruzado* é definida como sendo a transformada de Fourier da função de covariância cruzada, isto é,

$$f_{jk}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_{jk}(h) e^{-ih\lambda}, \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi]. \quad (2.13)$$

Observação 2.6. As funções de *autocovariância* e *covariância cruzada* do processo $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dado pela Definição 2.6, podem ser obtidas a partir do espectro cruzado $f_{jk}(\cdot)$, utilizando-se a transformada de Fourier inversa, ou seja,

$$\gamma_{jk}(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f_{jk}(\lambda) e^{ih\lambda} d\lambda, \text{ para } h \in \mathbb{Z}. \quad (2.14)$$

Podemos representar a função densidade espectral na forma matricial. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\mathbf{X}}(\lambda) &\equiv \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Gamma}(h) e^{-ih\lambda} = (f_{jk}(\lambda))_{j,k=1}^m \\ &= \begin{pmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) & \cdots & f_{1m}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda) & \cdots & f_{2m}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1}(\lambda) & f_{m2}(\lambda) & \cdots & f_{mm}(\lambda) \end{pmatrix}, \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi], \end{aligned} \quad (2.15)$$

é chamada *matriz de densidades espectrais* do processo $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

A versão multivariada do Teorema de Herglotz (ver Brockwell e Davis, 1991) caracteriza a matriz de covariâncias de um processo multivariado $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ utilizando o conceito de função não-negativa definida. Dessa maneira, a matriz de covariâncias pode ser escrita como

$$\mathbf{\Gamma}(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{f}_{\mathbf{X}}(\lambda) e^{ih\lambda} d\lambda, \text{ para } h \in \mathbb{Z}, \quad (2.16)$$

onde $\mathbf{f}_{\mathbf{X}}(\cdot)$ é a matriz de densidades espectrais do processo $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Uma característica importante das funções densidade espectral cruzada $\gamma_{jk}(\cdot)$, para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$, é que essas funções são reais e simétricas em torno de zero, quando $j = k$. No entanto, quando $j \neq k$, essas funções são, em geral, de valor complexo e não são simétricas em torno de zero. Conseqüentemente, $f_{jk}(\cdot)$ pode ser escrita como a soma de duas funções, a *função co-espectro* (“*co-spectrum*”) e a *função quadratura do espectro* (“*quadrature spectrum*”), as quais são dadas na definição a seguir.

Definição 2.9. Seja $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário multivariado com função densidade espectral cruzada $f_{jk}(\cdot)$, como na Definição 2.8. Então, $f_{jk}(\cdot)$ pode ser escrita da forma

$$f_{jk}(\lambda) = c_{jk}(\lambda) - iq_{jk}(\lambda), \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi], \quad (2.17)$$

onde $c_{jk}(\cdot)$ é chamada de *função co-espectro* e $q_{jk}(\cdot)$ é chamada de *função quadratura do espectro*.

Essa terminologia pode ser encontrada em Priestley (1981), Brockwell e Davis (1991), Chatfield (1975) e Koopmans (1970). Utilizando a relação dada na equação (2.7), a parte real do espectro cruzado é dada por

$$\begin{aligned} c_{jk}(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \left[\sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_{jk}(h) \cos(\lambda h) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\gamma_{jk}(0) + \sum_{h=1}^{\infty} \left(\gamma_{jk}(h) + \gamma_{kj}(h) \right) \cos(\lambda h) \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

e a parte complexa é dada por

$$\begin{aligned} q_{jk}(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \left[\sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_{jk}(h) \text{sen}(\lambda h) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\sum_{h=1}^{\infty} \left(\gamma_{jk}(h) - \gamma_{kj}(h) \right) \text{sen}(\lambda h) \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $\lambda \in [(-\pi, \pi]$.

Um caminho alternativo para representar o espectro cruzado $f_{jk}(\cdot)$ é utilizar as *funções amplitude cruzada* e *fase do espectro*, as quais são definidas a seguir.

Definição 2.10. Sejam $c_{jk}(\cdot)$ e $q_{jk}(\cdot)$, para $j, k \in \{1, \dots, m\}$, funções como na Definição 2.9. As funções *amplitude cruzada* e *fase do espectro* são dadas, respectivamente, por

i)

$$\alpha_{jk}(\lambda) = \sqrt{c_{jk}^2(\lambda) + q_{jk}^2(\lambda)}, \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi]; \quad (2.20)$$

ii)

$$\phi_{jk}(\lambda) = -\arctan \left[\frac{q_{jk}(\lambda)}{c_{jk}(\lambda)} \right], \text{ para } \lambda \neq \ell\pi, \text{ onde } \ell \in \mathbb{Z}. \quad (2.21)$$

Outras funções importantes no estudo de séries temporais multivariadas são a *função coerência do espectro* e a *função ganho do espectro*, as quais são definidas, respectivamente, por

$$\mathcal{K}_{jk}(\lambda) = \frac{q_{jk}^2(\lambda) + c_{jk}^2(\lambda)}{f_{jj}(\lambda)f_{kk}(\lambda)} = \frac{\alpha_{jk}^2(\lambda)}{f_{jj}(\lambda)f_{kk}(\lambda)}, \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi], \quad (2.22)$$

onde f_{jj} e f_{kk} são dadas na Definição 2.8 e

$$\mathcal{G}_{jk}(\lambda) = \sqrt{\frac{f_{kk}(\lambda)c_{jk}(\lambda)}{f_{jj}(\lambda)}} = \frac{\alpha_{jk}(\lambda)}{f_{jj}(\lambda)}, \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi]. \quad (2.23)$$

A *função coerência*, dada na equação (2.22), mede a correlação entre duas componentes de um processo multivariado em uma frequência $\lambda \in (-\pi, \pi]$, enquanto a *função ganho do espectro*, dada na equação (2.23), é, essencialmente, o coeficiente de regressão de um processo $\{X_{k,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ no processo $\{X_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ em uma frequência λ . Essa é uma terminologia utilizada no estudo de sistemas lineares, onde se considera o processo $\{X_{k,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ como a entrada e $\{X_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ como a saída do sistema (ver Chatfield, 1975 e Priestley, 1981).

Uma interpretação mais completa para essas funções pode ser encontrada em Priestley (1981) e Chatfield (1975). Na Seção 2.4, apresentamos os estimadores para as funções definidas nesta seção.

2.3.1 REPRESENTAÇÃO ESPECTRAL

A representação espectral é uma forma de decompor um processo estocástico estacionário em uma soma de senos e cossenos com coeficientes aleatórios. A idéia é a mesma utilizada na representação de Fourier para

funções determinísticas. Essa forma de representar um processo estocástico estacionário também é conhecida como a representação de Cramér (ver Brillinger, 1975). Nesta seção, apresentamos a versão multivariada do Teorema da Representação Espectral o qual pode ser encontrado em Brockwell e Davis (1991).

Definição 2.11. Dizemos que um processo unidimensional $Z(\cdot)$, associado a $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, tem *incrementos ortogonais*, quando apresenta as seguintes propriedades:

- i) $\mathbb{E}(dZ(\lambda)) = 0$, para todo $\lambda \in (-\pi, \pi]$;
- ii) $\mathbb{E}(|dZ(\lambda)|^2) = dF_X(\lambda)$, para todo $\lambda \in (-\pi, \pi]$;
- iii) $\text{Cov}(dZ(\lambda), dZ(w)) = \mathbb{E}(dZ(\lambda)d\bar{Z}(w)) = 0$, se $\lambda \neq w$,

onde $F_X(\cdot)$ é denominada *função distribuição espectral* do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, e \bar{Z} denota o conjugado do vetor Z . A função $F_X(\cdot)$ é real, não-decrescente e limitada (ver Morettin e Tolo, 2004).

Quando $F_X(\cdot)$ for absolutamente contínua, o item ii) da Definição 2.11 pode ser reescrito da seguinte forma

- ii') $\mathbb{E}(|dZ(\lambda)|^2) = f_X(\lambda)d\lambda$, para todo $\lambda \in (-\pi, \pi]$,

onde $f_X(\cdot)$ é a função densidade espectral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

O teorema a seguir é a versão multivariada do Teorema da Representação Espectral para processos univariados, o qual permite que um processo estacionário seja representado como um limite de somas de senos e cossenos.

Teorema 2.1. (*Teorema da Representação Espectral*). *Seja $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo como na Definição 2.6, com média $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ e matriz de covariâncias satisfazendo a equação (2.12). Então, existe um processo estocástico m -dimensional $\mathbf{Z}_X(\cdot)$, tal que*

$$\mathbf{X}_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} d\mathbf{Z}_X(\lambda), \quad (2.24)$$

para $t \in \mathbb{Z}$, com probabilidade um, onde $\mathbf{Z}_X(\cdot)$ é um processo cujas componentes $Z_j(\cdot)$, para $j \in \{1, \dots, m\}$, têm incrementos ortogonais e satisfazem

$$\mathbb{E}(dZ_j(\lambda)d\bar{Z}_k(w)) = \begin{cases} f_{j^k}^X(\lambda), & \text{se } \lambda = w; \\ 0, & \text{se } \lambda \neq w, \end{cases} \quad (2.25)$$

e

$$\text{Cov}(d\mathbf{Z}_X(\lambda), d\bar{\mathbf{Z}}_X(w)) = \mathbf{f}_X(\lambda), \quad (2.26)$$

onde $\mathbf{f}_X(\cdot)$ é a matriz de densidades espectrais do processo $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Para ver os detalhes da demonstração desse teorema referenciamos o leitor a Hannan (1970) e Brillinger (1975).

Na seção a seguir, tratamos da relação linear entre dois processos estocásticos estacionários multivariados. Na engenharia, essa relação é denominada “filtro”.

2.3.2 FILTROS LINEARES

Uma das principais razões da ampla utilização da análise espectral como ferramenta analítica reside no fato de que as funções definidas anteriormente, tais como as funções *coerência do espectro* e *ganho do espectro*, descrevem, de maneira simples, o efeito de uma transformação linear de um processo estacionário. No caso univariado, quando analisamos a relação linear entre dois processos $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ da forma

$$Y_t = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a(\ell)X_{t-\ell}, \quad (2.27)$$

encontramos uma dependência entre as suas funções densidades espectrais. Essa relação de dependência é dada por

$$f_Y(\lambda) = |A(\lambda)|^2 f_X(\lambda), \quad (2.28)$$

onde

$$A(\lambda) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{-i\ell\lambda} a(\ell), \quad (2.29)$$

para $\lambda \in (-\pi, \pi]$ (ver Morettin e Toloi, 2004). Neste caso, uma condição necessária para que $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tenha variância finita é

$$\int_{-\pi}^{\pi} |A(\lambda)|^2 f_X(\lambda) d\lambda < \infty. \quad (2.30)$$

No contexto de sistemas lineares, $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ são, respectivamente, a *entrada* e a *saída* de um sistema linear, $A(\cdot)$ é a *função de transferência* e $a(\cdot)$ é a *função resposta de impulso*.

No caso multivariado, fazendo uma analogia com a equação (2.27), consideramos m processos de entrada $X_{1,t}, \dots, X_{m,t}$, para $t \in \mathbb{Z}$ e m processos de saída $Y_{1,t}, \dots, Y_{m,t}$, para $t \in \mathbb{Z}$. Em geral, cada saída será uma soma de funções lineares de todos os processos de entrada. Assim, podemos escrever a j -ésima saída como

$$Y_{j,t} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{j,1}(\ell)X_{1,t-\ell} + \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{j,2}(\ell)X_{2,t-\ell} + \dots + \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{j,m}(\ell)X_{m,t-\ell}, \quad (2.31)$$

para $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, ou na forma matricial

$$\mathbf{Y}_t = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathbf{a}(\ell) \mathbf{X}_{t-\ell}, \text{ para } t \in \mathbb{Z}, \quad (2.32)$$

onde \mathbf{Y}_t é um vetor-coluna com elementos $Y_{1,t}, \dots, Y_{m,t}$, assim como \mathbf{X}_t e

$$\mathbf{a}(\ell) = (a_{jk}(\ell))_{j,k=1}^m, \text{ para } \ell \in \mathbb{Z}, \quad (2.33)$$

é chamada *matriz resposta de impulso*. Assim, se definirmos a função de transferência relativa à k -ésima entrada e a j -ésima saída como

$$A_{jk}(\lambda) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{-i\ell\lambda} a_{jk}(\ell), \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi], \quad (2.34)$$

então, a *matriz de funções de transferência* é dada por

$$\mathbf{A}(\cdot) = (A_{jk}(\cdot))_{j,k=1}^m. \quad (2.35)$$

A versão multivariada do resultado da equação (2.28) é dada pelo teorema a seguir o qual pode ser encontrado em Hannan (1970) e Brillinger (1975).

Teorema 2.2. *Sejam $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{\mathbf{Y}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ processos estocásticos estacionários m -dimensionais com matrizes de densidades espectrais dadas, respectivamente, por $\mathbf{f}_X(\cdot)$ e $\mathbf{f}_Y(\cdot)$. Seja $\mathbf{A}(\cdot)$ a matriz de funções de transferência dada pela equação (2.35). Então,*

$$\mathbf{f}_Y(\lambda) = \mathbf{A}(\lambda) \mathbf{f}_X(\lambda) \mathbf{A}(\lambda)^*, \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi]. \quad (2.36)$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.1, temos que

$$\mathbf{X}_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} d\mathbf{Z}_X(\lambda).$$

Se $\mathbf{A}(\lambda) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a(\ell) e^{-i\ell\lambda}$, para $\lambda \in (-\pi, \pi]$, com

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{A}(\lambda) \mathbf{f}_X(\lambda) \mathbf{A}(\lambda)^* d\lambda < \infty. \quad (2.37)$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_t &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a(\ell) \mathbf{X}_{t-\ell} \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a(\ell) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-\ell)\lambda} d\mathbf{Z}_X(\lambda) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} a(\ell) e^{-i\ell\lambda} d\mathbf{Z}_X(\lambda) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a(\ell) e^{-i\ell\lambda} \right) d\mathbf{Z}_X(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \mathbf{A}(\lambda) d\mathbf{Z}_X(\lambda). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Por outro lado, novamente pelo Teorema 2.1, temos que

$$\mathbf{Y}_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} d\mathbf{Z}_{\mathbf{X}}(\lambda).$$

Concluimos então, que

$$d\mathbf{Z}_{\mathbf{Y}}(\lambda) = \mathbf{A}(\lambda)d\mathbf{Z}_{\mathbf{X}}(\lambda), \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi].$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(d\mathbf{Z}_{\mathbf{Y}}(\lambda), d\mathbf{Z}_{\mathbf{Y}}(\lambda)\right) &= \text{Cov}\left(\mathbf{A}(\lambda)d\mathbf{Z}_{\mathbf{X}}(\lambda), \mathbf{A}(\lambda)d\mathbf{Z}_{\mathbf{X}}(\lambda)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbf{A}(\lambda)d\mathbf{Z}_{\mathbf{X}}(\lambda)\overline{[\mathbf{A}(\lambda)d\mathbf{Z}_{\mathbf{X}}(\lambda)]'}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbf{A}(\lambda)d\mathbf{Z}_{\mathbf{X}}(\lambda)\overline{[d\mathbf{Z}_{\mathbf{X}}(\lambda)]'}[\mathbf{A}(\lambda)]'\right) \\ &= \mathbf{A}(\lambda)\mathbb{E}\left(d\mathbf{Z}_{\mathbf{X}}(\lambda)\overline{[d\mathbf{Z}_{\mathbf{X}}(\lambda)]'}\right)\mathbf{A}(\lambda)^* \\ &= \mathbf{A}(\lambda)\text{Cov}\left(d\mathbf{Z}_{\mathbf{X}}(\lambda), d\mathbf{Z}_{\mathbf{X}}(\lambda)\right)\mathbf{A}(\lambda)^*. \end{aligned}$$

Portanto, pela equação (2.26), temos que

$$\mathbf{f}_{\mathbf{Y}}(\lambda) = \mathbf{A}(\lambda)\mathbf{f}_{\mathbf{X}}(\lambda)\mathbf{A}(\lambda)^*, \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi].$$

□

Observação 2.7. A variância de $\{Y_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada pela integral do j -ésimo elemento da diagonal da matriz $\mathbf{f}_{\mathbf{Y}}(\cdot)$. Assim, a condição necessária para que cada processo de saída tenha variância finita é que

$$\text{tr} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{A}(\lambda)\mathbf{f}_{\mathbf{X}}(\lambda)\mathbf{A}(\lambda)^* d\lambda \right] < \infty, \quad (2.39)$$

onde $\text{tr}[B]$ denota o traço da matriz quadrada B (ver Koopmans, 1974). Essa condição é análoga à condição dada na equação (2.30) para o caso univariado.

Na seção seguinte, tratamos da estimação da média, das funções de covariância e correlação e apresentamos duas maneiras de estimar o espectro cruzado.

2.4 ESTIMAÇÃO

Nesta seção, apresentamos os estimadores para as funções densidade espectral cruzada, de covariância e correlação cruzada.

2.4.1 ESTIMAÇÃO DA MÉDIA E DA COVARIÂNCIA

Como no caso univariado, a estimação do vetor das médias e da função de covariância cruzada de um processo estacionário multivariado desempenha um papel fundamental na representação e modelagem da estrutura de dependência entre os processos componentes.

Um maneira de estimar as funções de covariância e correlação cruzada é através dos seus respectivos estimadores amostrais, os quais são definidos a seguir.

Definição 2.12. Considere $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1}^n$ uma amostra aleatória de tamanho n de um processo estocástico estacionário m -dimensional $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado pela Definição 2.6. Um estimador não-viciado para $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)'$ é dado pelo vetor das médias amostrais

$$\bar{\mathbf{X}}_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{1,t}, \dots, \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{m,t} \right)' = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m). \quad (2.40)$$

Observe que a média do j -ésimo processo estocástico $\{X_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estimada por $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{j,t}$, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$.

Definição 2.13. Seja $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1}^n$ uma amostra aleatória de tamanho n de um processo estocástico estacionário m -dimensional $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado pela Definição 2.6. A *função de covariância cruzada amostral* entre as componentes $\{X_{j,t}\}_{t=1}^n$ e $\{X_{k,t}\}_{t=1}^n$ é dada por

$$\hat{\gamma}_{jk}(h) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_{j,t+h} - \bar{X}_j)(X_{k,t} - \bar{X}_k), & \text{se } h \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}; \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1-h}^n (X_{j,t+h} - \bar{X}_j)(X_{k,t} - \bar{X}_k), & \text{se } h \in \{-1, \dots, -(n-1)\}, \end{cases} \quad (2.41)$$

para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$ (ver Chatfield, 1975).

Segue imediatamente da Definição 2.13, que a *função de correlação cruzada amostral* é dada por

$$\hat{\rho}_{jk}(h) = \frac{\hat{\gamma}_{jk}(h)}{\sqrt{\hat{\gamma}_{jj}(0)\hat{\gamma}_{kk}(0)}}, \quad (2.42)$$

para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $h \in \mathbb{Z}$, onde $\hat{\gamma}_{jj}(0)$ é a variância amostral da componente $\{X_{j,t}\}_{t=1}^n$ da série temporal m -dimensional $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1}^n$.

As funções de covariância cruzada amostral e correlação cruzada amostral são estimadores consistentes e não-viciados para as respectivas funções de covariância e correlação cruzadas (ver Chatfield, 1975 e Brockwell e Davis, 1991).

2.4.2 JANELAS ESPECTRAIS

A função densidade espectral cruzada de um processo estocástico estacionário (ver Definição 2.8) é uma função contínua. Na prática, o estimador dessa função é obtido a partir de um conjunto discreto de frequências, como veremos na Subseção 2.4.3. É natural considerar um estimador ponderado dessas frequências e isso se dá através das chamadas *funções de ponderação*, as quais são definidas a seguir.

Definição 2.14. Seja q_n , para $n \in \mathbb{N}$, uma seqüência de inteiros positivos. Dizemos que $\Lambda_n(\cdot)$ é uma *função de ponderação* ou “*weight function*” se ela satisfaz as seguintes propriedades:

i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{n} = 0; \quad (2.43)$$

ii)

$$\Lambda_n(\ell) = \Lambda_n(-\ell) \text{ e } \Lambda_n(\ell) \geq 0, \text{ para todo } \ell \in \mathbb{N}; \quad (2.44)$$

iii)

$$\sum_{\ell=-q_n}^{q_n} \Lambda_n(\ell) = 1; \quad (2.45)$$

iv)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=-q_n}^{q_n} \Lambda_n^2(\ell) = 0. \quad (2.46)$$

As funções de ponderação são simétricas em torno de zero e assumem seu máximo em zero. Essas funções também são discretas e sua versão contínua é chamada *Kernel* ou *janela espectral*.

Na literatura são sugeridas várias janelas espectrais (ver Priestley, 1981). Entre elas, destacamos duas. A primeira, é a *janela de Bartlett* que é definida por

$$\Lambda_B(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{se } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.47)$$

para $x \in \mathbb{R}$. Essa janela tem sido chamada de *Bartlett modificada* ou *triangular* (ver Fuller, 1976). A segunda, é a janela de Parzen, que é definida por

$$\Lambda_P(x) = \begin{cases} 1 - 6|x|^2 + 6|x|^3, & \text{se } |x| < \frac{1}{2}; \\ 2(1 - |x|)^3, & \text{se } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.48)$$

Um estudo mais completo sobre janelas espectrais pode ser encontrado em Brockwell e Davis (1991), Morettin e Tolo (2004) e Priestley (1981).

A Proposição 2.1 caracteriza as versões discretas das janelas de Bartlett e de Parzen.

Proposição 2.1. *Seja q_n , para $n \in \mathbb{N}$, uma seqüência de inteiros positivos satisfazendo o item i) da Definição 2.14. Então,*

$$\Lambda_{B,n}(h) = \begin{cases} \frac{1}{q_n} \left(1 - \left|\frac{h}{q_n}\right|\right), & \text{se } h \leq q_n; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.49)$$

e

$$\Lambda_{P,n}(h) = \begin{cases} \frac{4}{3q_n} \left(1 - 6\left|\frac{h}{q_n}\right|^2 + 6\left|\frac{h}{q_n}\right|^3\right), & \text{se } |h| \leq \frac{q_n}{2}; \\ \frac{8}{3q_n} \left(1 - \left|\frac{h}{q_n}\right|\right)^3, & \text{se } \frac{q_n}{2} < |h| \leq q_n; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.50)$$

são funções de ponderação, onde q_n é definido como o ponto de truncamento das mesmas.

Demonstração: Devemos mostrar que os itens i) - iv) da Definição 2.14 estão satisfeitos tanto para $\Lambda_{B,n}(h)$ como para $\Lambda_{P,n}(h)$.

O item i) da Definição 2.14 é uma condição imposta para q_n e o item ii) é imediato para as equações (2.49) e (2.50).

Decorre do item ii) da Definição 2.14 que

$$\begin{aligned} \sum_{h=-q_n}^{q_n} \Lambda_{B,n}(h) &= \frac{1}{q_n} + 2 \sum_{h=1}^{q_n} \Lambda_{B,n}(h) \\ &= \frac{1}{q_n} \left[1 + 2 \sum_{h=1}^{q_n} \left(1 - \frac{h}{q_n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{q_n} \left[1 + 2 \left(q_n - \frac{q_n(q_n + 1)}{2q_n} \right) \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{h=-q_n}^{q_n} \Lambda_{P,n}(h) &= \sum_{h=-\frac{q_n}{2}}^{\frac{q_n}{2}} \frac{4}{3q_n} \left(1 - 6 \left| \frac{h}{q_n} \right|^2 + 6 \left| \frac{h}{q_n} \right|^3 \right) \\
&\quad + \sum_{h=-n}^{-\frac{q_n}{2}-1} \frac{8}{3q_n} \left(1 - \left| \frac{h}{q_n} \right| \right)^3 + \sum_{h=\frac{q_n}{2}+1}^n \frac{8}{3q_n} \left(1 - \left| \frac{h}{q_n} \right| \right)^3 \\
&= \frac{4}{3q_n} + 2 \sum_{h=1}^{\frac{q_n}{2}} \frac{4}{3q_n} \left(1 - 6 \left(\frac{h}{q_n} \right)^2 + 6 \left(\frac{h}{q_n} \right)^3 \right) \\
&\quad + 2 \sum_{h=\frac{q_n}{2}+1}^n \frac{8}{3q_n} \left(1 - \left(\frac{h}{q_n} \right) \right)^3 \\
&= \frac{4}{3q_n} + \frac{8}{3q_n} \times \frac{q_n}{2} - \frac{42}{3q_n} \sum_{h=1}^{\frac{q_n}{2}} \left(\frac{h}{q_n} \right)^2 + \frac{42}{3q_n} \sum_{h=1}^{\frac{q_n}{2}} \left(\frac{h}{q_n} \right)^3 \\
&\quad + \frac{16}{3q_n} \sum_{h=\frac{q_n}{2}+1}^n \left(1 - \frac{h}{q_n} \right)^3 \\
&= \frac{4}{3q_n} + \frac{4}{3} - \frac{14}{q_n^3} \left(\frac{\frac{q_n}{2}(\frac{q_n}{2}+1)(q_n+1)}{6} \right) + \frac{14}{q_n^4} \left(\frac{\frac{q_n}{2}(\frac{q_n}{2}+1)}{2} \right)^2 \\
&\quad + \frac{16}{3q_n^4} \left(\left(\frac{q_n-2}{2} \right) \left(\frac{q_n}{2} \right) \right)^2 \\
&= \frac{4}{3q_n} + \frac{4}{3} - \frac{3}{8q_n^2} (q_n^2 + 3q_n + 2) + \frac{3}{16q_n^4} (q_n^4 + 4q_n^3 + 4q_n^2) \\
&\quad + \frac{1}{16q_n^2} (q_n^2 - 4q_n + 4) \\
&= \frac{4}{3q_n} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3q_n^2} (q_n^2 + 3q_n + 2) + \frac{1}{4q_n^4} (q_n^4 + 4q_n^3 + 4q_n^2) \\
&\quad + \frac{1}{12q_n^2} (q_n^2 - 4q_n + 4) \\
&= \frac{4}{3q_n} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{q_n} - \frac{4}{3q_n^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{q_n} + \frac{1}{q_n^2} \\
&\quad + \frac{1}{12} - \frac{1}{3q_n} + \frac{1}{3q_n^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Dessa forma vale o item iii) para as duas funções de ponderação.

Observe que

$$\Lambda_{B,n}(h)^2 = \frac{1}{q_n^2} \left(1 - \left|\frac{h}{q_n}\right|\right)^2 = \frac{1}{q_n^4} (q_n^2 - 2|h|q_n + h^2).$$

Então,

$$\begin{aligned} \sum_{h=-q_n}^{q_n} \Lambda_{B,n}(h)^2 &= \frac{1}{q_n^4} \sum_{h=-q_n}^{q_n} (q_n^2 - 2|h|q_n + h^2) \\ &= \frac{1}{q_n^4} \left[q_n^2(2q_n + 1) - 4q_n \left(\frac{q_n(q_n + 1)}{2} \right) + \frac{2q_n(q_n + 1)(2q_n + 1)}{6} \right] \\ &= \frac{1}{q_n^4} \left[2q_n^3 + q_n^2 - 2q_n^3 - 2q_n^2 + \frac{2q_n^3 + 3q_n^2 + q_n}{3} \right] \\ &= \frac{1}{q_n^4} \left(\frac{2q_n^3 + q_n}{3} \right) = \frac{2}{3q_n} + \frac{1}{3q_n^3}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=-q_n}^{q_n} \Lambda_{B,n}(h)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3q_n} + \frac{1}{3q_n^3} \right) = 0,$$

o que completa a demonstração dos quatro itens da Definição 2.14 para a função de ponderação $\Lambda_{B,n}(h)$, dada na equação (2.49). Para mostrar o item iv) para a função de ponderação $\Lambda_{P,n}(h)$, dada na equação (2.50), observamos que

$$\begin{aligned} \sum_{h=-q_n}^{q_n} \Lambda_{P,n}(h)^2 &= \sum_{h=-\frac{q_n}{2}}^{\frac{q_n}{2}} \left(\frac{4}{3q_n} \right)^2 \left(1 - 6 \left| \frac{h}{q_n} \right|^2 + 6 \left| \frac{h}{q_n} \right|^3 \right)^2 \\ &\quad + \sum_{h=-n}^{-\frac{q_n}{2}-1} \left(\frac{8}{3q_n} \right)^2 \left(1 - \left| \frac{h}{q_n} \right| \right)^5 + \sum_{h=\frac{q_n}{2}+1}^n \left(\frac{8}{3q_n} \right)^2 \left(1 - \left| \frac{h}{q_n} \right| \right)^5 \\ &= \left(\frac{4}{3q_n} \right)^2 + 2 \sum_{h=1}^{\frac{q_n}{2}} \left(\frac{4}{3q_n} \right)^2 \left(1 - 6 \left| \frac{h}{q_n} \right|^2 + 6 \left| \frac{h}{q_n} \right|^3 \right)^2 \\ &\quad + 2 \sum_{h=\frac{q_n}{2}+1}^n \left(\frac{8}{3q_n} \right)^2 \left(1 - \left| \frac{h}{q_n} \right| \right)^5 \\ &= \frac{16}{9q_n^2} + \frac{32}{9q_n^2} \sum_{h=1}^{\frac{q_n}{2}} \left(1 - 6 \left(\frac{h}{q_n} \right)^2 + 6 \left(\frac{h}{q_n} \right)^3 \right)^2 \\ &\quad + \frac{128}{9q_n^2} \sum_{h=1}^{n-\frac{q_n}{2}} \left(1 - \frac{h + \frac{q_n}{2}}{q_n} \right)^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{945q_n^7} \left(6720n^5 + 2240n^6 + 5600n^4 - 1120n^2 - 1344q_n^2 \right. \\
&\quad - 6615q_n^5 + 5460q_n^4 + 1314q_n^6 - 13440nq_n^5 + 2240nq_n \\
&\quad + 33600q_n^4n^2 + 33600q_n^4n - 44800q_n^3n^3 - 67200q_n^3n^2 \\
&\quad - 22400q_n^3n - 22400n^3q_n + 33600n^2q_n^2 + 33600q_n^2n^4 \\
&\quad \left. + 67200q_n^2n^3 - 33600n^4q_n - 13440q_nn^5 - 1440 \right). \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Aplicando seguidamente a regra de l'Hopital em (2.51), concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=-q_n}^{q_n} \Lambda_{P,n}(h)^2 = 0,$$

o que completa a demonstração do item iv) da Definição 2.14 para a função de ponderação $\Lambda_{P,n}(h)$. Isso completa a demonstração da proposição. \square

2.4.3 ESTIMAÇÃO DO ESPECTRO CRUZADO

Apresentaremos agora duas maneiras de estimar a função densidade espectral cruzada entre componentes de um processo estocástico multivariado estacionário. A primeira maneira consiste em calcular a transformada de Fourier da função de covariância amostral (ou da correlação amostral para obter os espectros cruzados normalizados).

Definição 2.15. Seja $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1}^n$ uma amostra aleatória de tamanho n de um processo estocástico m -dimensional $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado pela Definição 2.6. *Os estimadores para as funções co-espectro e quadratura do espectro*, apresentadas na Definição 2.9, são dados, respectivamente, por

$$\hat{c}_{jk}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \Lambda_n(h) \hat{\gamma}_{jk}(h) \cos(\lambda h), \tag{2.52}$$

e

$$\hat{q}_{jk}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \Lambda_n(h) \hat{\gamma}_{jk}(h) \text{sen}(\lambda h), \tag{2.53}$$

para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $\lambda \in (-\pi, \pi]$, onde $\hat{\gamma}_{jk}(\cdot)$ é a função de covariância cruzada amostral apresentada na Definição 2.13 e $\Lambda_n(\cdot)$ é uma função de ponderação, a qual é dada na Definição 2.14.

Devido a igualdade (2.7), as equações (2.52) e (2.53) são freqüentemente utilizadas na forma

$$\hat{c}_{jk}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left[\Lambda_n(0) \hat{\gamma}_{jk}(0) + \sum_{h=1}^{n-1} \Lambda_n(h) \left(\hat{\gamma}_{jk}(h) + \hat{\gamma}_{kj}(h) \right) \cos(\lambda h) \right] \quad (2.54)$$

e

$$\hat{q}_{jk}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left[\sum_{h=1}^{n-1} \Lambda_n(h) \left(\hat{\gamma}_{jk}(h) - \hat{\gamma}_{kj}(h) \right) \text{sen}(\lambda h) \right], \quad (2.55)$$

para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $\lambda \in (-\pi, \pi]$.

A partir dos estimadores das funções co-espectro e quadratura do espectro dados, respectivamente, pelas equações (2.52) e (2.53) obtemos, de maneira natural, os estimadores para as funções *amplitude*, *fase*, *coerência* e *ganho* do espectro. Esses estimadores são dados, respectivamente, por

$$\hat{\alpha}_{jk}(\lambda) = \sqrt{\hat{c}_{jk}^2(\lambda) + \hat{q}_{jk}^2(\lambda)}, \quad (2.56)$$

$$\tan(\hat{\phi}_{jk}(\lambda)) = \frac{\hat{q}_{jk}(\lambda)}{\hat{c}_{jk}(\lambda)}, \text{ para } \lambda \neq \ell\pi, \text{ onde } \ell \in \mathbb{Z}, \quad (2.57)$$

$$\hat{\mathcal{K}}_{jk}(\lambda) = \frac{\hat{\alpha}_{jk}^2(\lambda)}{\hat{f}_{jj}(\lambda) \hat{f}_{kk}(\lambda)}, \quad (2.58)$$

$$\hat{\mathcal{G}}_{jk}(\lambda) = \frac{\hat{\alpha}_{jk}(\lambda)}{\hat{f}_{jj}(\lambda)}, \quad (2.59)$$

para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $\lambda \in (-\pi, \pi]$ (ver Priestley, 1981).

A segunda abordagem para a estimação do espectro cruzado é através de uma função suave chamada *periodograma*.

Definição 2.16. Seja $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1}^n$ uma amostra aleatória de tamanho n de um processo estocástico estacionário m -dimensional $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado na Definição 2.6. A *transformada finita de Fourier* da componente $\{X_{j,t}\}_{t=1}^n$, para $j \in \{1, \dots, m\}$, é definida por

$$J_{j,n}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{t=1}^n X_{j,t} e^{-it\lambda}, \quad \lambda \in (-\pi, \pi]. \quad (2.60)$$

Definição 2.17. Seja $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1}^n$ uma amostra aleatória de tamanho n de um processo estocástico estacionário m -dimensional $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado na Definição 2.6. A *função periodograma* da componente $\{X_{j,t}\}_{t=1}^n$, para $j \in \{1, \dots, m\}$, é definida por

$$I_{jj,n}(\lambda) = J_{j,n}(\lambda)J_{j,n}(\lambda)^*, \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi], \quad (2.61)$$

onde $J_{j,n}(\cdot)$ é dada na Definição 2.16 e $J_{j,n}(\cdot)^*$ denota o conjugado de $J_{j,n}(\cdot)$.

A Definição 2.17 equivale a definição do periodograma para o caso univariado e a equação (2.63) pode ser escrito da forma

$$I_n(\lambda_\ell) = \frac{1}{2\pi} \left[\hat{\gamma}(0) + 2 \sum_{h=1}^{n-1} \hat{\gamma}_X(h) \cos(\lambda_\ell h) \right], \quad (2.62)$$

onde $\hat{\gamma}_X(\cdot)$ é autocovariância amostral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

No estudo de séries temporais multivariadas é necessário introduzir uma nova função chamada *periodograma cruzado*, a qual é dada na definição a seguir.

Definição 2.18. Seja $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1}^n$ uma amostra aleatória de tamanho n de um processo estocástico estacionário m -dimensional $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado na Definição 2.6. A *função periodograma cruzado* entre as componentes $\{X_{j,t}\}_{t=1}^n$ e $\{X_{k,t}\}_{t=1}^n$, para $j, k \in \{1, \dots, m\}$, é definida por

$$I_{jk,n}(\lambda) = J_{j,n}(\lambda)J_{k,n}(\lambda)^*, \lambda \in (-\pi, \pi], \quad (2.63)$$

onde $J_{j,n}(\cdot)$ é dada na Definição 2.16.

Para escrever a função periodograma na forma matricial, consideramos um vetor cujas componentes são as transformadas finitas de Fourier

$$\mathbf{J}_n(\lambda) = (J_{1,n}(\lambda), \dots, J_{m,n}(\lambda)), \lambda \in (-\pi, \pi]. \quad (2.64)$$

Então, a função periodograma da série temporal m -dimensional $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1}^n$ é dada por

$$\mathbf{I}_n(\lambda) = \mathbf{J}_n(\lambda)\mathbf{J}_n(\lambda)^*, \lambda \in (-\pi, \pi], \quad (2.65)$$

onde o vetor $\mathbf{J}_n(\cdot)$ é dado na equação (2.64) e $\mathbf{J}_n^*(\cdot)$ denota o transposto conjugado de $\mathbf{J}_n(\cdot)$.

Como a função $J_{j,n}(\cdot)$, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, é par e tem período 2π , basta considerar as frequências no intervalo $(-\pi, \pi]$. Embora a equação (2.60) seja definida em todas as frequências, na prática, é calculada para frequências $w_\ell = \frac{2\pi\ell}{n}$, para $-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \leq \ell \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, denominadas *frequências de Fourier*, onde $\lfloor x \rfloor$ indica a parte inteira de x . Assim,

$$\mathbf{J}_n(\lambda_\ell) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t e^{-it\lambda_\ell} = (J_{1,n}(\lambda_\ell), \dots, J_{m,n}(\lambda_\ell)), \quad (2.66)$$

é denominada *transformada de Fourier discreta*, onde $\lambda_\ell = \frac{2\pi\ell}{n}$, para $\ell \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.

O resultado a seguir mostra que a matriz de funções periodogramas é um estimador para a matriz de funções densidades espectrais. Esse resultado pode ser encontrado em Brockwell e Davis (1991).

Teorema 2.3. *Seja $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1}^n$ uma amostra aleatória de tamanho n de um processo estocástico estacionário m -dimensional $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado na Definição 2.6, com média $\boldsymbol{\mu}$, dada na Definição 2.12. Se $\lambda_\ell \neq 0$ é uma frequência de Fourier, então,*

$$\mathbf{I}_n(\lambda_\ell) = \sum_{|h| < n} \hat{\boldsymbol{\Gamma}}(h) e^{-ih\lambda_\ell}, \quad (2.67)$$

onde as entradas da matriz $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(\cdot)$ são dadas na Definição 2.13 e o periodograma na frequência zero é dado por

$$\mathbf{I}_n(0) = n\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}'. \quad (2.68)$$

O periodograma dado pela equação (2.65) é um estimador não-viciado, mas, inconsistente para a matriz densidade espectral. Assim, como no caso univariado, podemos definir um estimador consistente para a matriz de densidades espectrais (ver Brillinger, 1975).

Definição 2.19. *A matriz de periodogramas suavizados, denotada por $\hat{\mathbf{f}}^s(\cdot)$, é definida por*

$$\hat{\mathbf{f}}^s(\lambda_\ell) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-q_n}^{q_n} \Lambda_n(h) \mathbf{I}_n(\lambda_{\ell+h}), \quad (2.69)$$

onde $\lambda_\ell \neq 0$ são as frequências de Fourier, $\mathbf{I}_n(\cdot)$ é a matriz de periodogramas dada na equação (2.65) e $\Lambda_n(\cdot)$ é uma função de ponderação.

O estimador da Definição 2.19 é consistente para a matriz das funções de densidades espectrais (ver Brockwell e Davis, 1991 e Priestley, 1981).

Decorre da Definição 2.19 que o estimador suavizado da função densidade espectral cruzada para as componentes $\{X_{j,t}\}_{t=1}^n$ e $\{X_{k,t}\}_{t=1}^n$ é dado por

$$\hat{f}_{jk}^s(\lambda_\ell) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-q_n}^{q_n} \Lambda_n(h) I_{j,k,n}(\lambda_{\ell+h}), \quad (2.70)$$

para $\lambda_\ell \neq 0$, onde $I_{j,k,n}(\cdot)$ é o periodograma cruzado dado na equação (2.63).

Esse estimador será utilizado no Capítulo 4 para construir estimadores semi-paramétricos do parâmetro de dependência fracionária de processos estocásticos com longa dependência, assunto do próximo capítulo.

Capítulo 3

Processos Estacionários com Longa Dependência

Estudos empíricos, principalmente em Climatologia e Hidrologia, na década de 50, revelaram a presença de longa dependência em dados de séries temporais e espaciais. Esse fenômeno foi notado por Hurst (1951,1957), Mandelbrot e Wallis (1968) e McLeod e Hipel (1978), juntamente com problemas na área de Hidrologia. Modelos de longa dependência também são de interesse na análise de estudos climáticos, como no estudo da aparente tendência crescente em temperaturas globais devido ao efeito estufa.

Recentemente os economistas notaram que há evidências que processos de longa dependência descrevem de modo satisfatório dados econômicos e financeiros, tais como taxas de juros e inflação. Estudos recentes na modelagem da volatilidade de ativos financeiros mostram que tais processos são de grande utilidade (ver Morettin, 2006).

Podemos definir a propriedade de longa dependência para um processo estocástico de diferentes maneiras, podendo ser no domínio do tempo ou no domínio da frequência. O ponto fundamental é que processos com longa dependência são definidos em termos de restrições do segundo momento, tais como as funções de autocorrelação e densidade espectral.

Uma abordagem mais formal para longa dependência é dada na próxima definição.

Definição 3.1. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estacionário com funções de autocorrelação $\rho_X(\cdot)$ e densidade espectral $f_X(\cdot)$. No domínio do tempo, dizemos que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui *longa dependência* se, para algum $a \in (0, 1)$,

$$\rho_X(k) \sim c_1 k^{-a}, \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

Equivalentemente (ver Bary, 1964), no domínio da frequência, dizemos que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui *longa dependência* se, para algum número real $b \in (0, 1)$,

$$f_X(\lambda) \sim c_2 |\lambda|^{-b}, \text{ quando } \lambda \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

Na Definição 3.1, é verdadeiro que $a = 1 - b$ (ver Olbermann, 2002).

Dizemos que o processo possui *dependência intermediária* se vale a expressão (3.1) com $a \in (1, 2)$.

Observação 3.1. Neste trabalho, a notação $h(x) \sim g(x)$, quando $x \rightarrow x_0$, significa que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = 1$.

Note que o decaimento hiperbólico lento da função de autocorrelação de um processo estacionário com longa dependência implica que

$$\sum_{k=-n}^n |\rho_X(k)| \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

Isto é, a não somabilidade da função de autocorrelação captura a essência da longa dependência, mesmo que para intervalos grandes as autocorrelações sejam individualmente pequenas, seu efeito acumulativo é de grande importância.

Os processos cuja função de autocorrelação é somável, ou seja,

$$\sum_{k=-n}^n |\rho_X(k)| < \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

são chamados processos com *memória curta*.

Os processos auto-regressivos de médias móveis fracionalmente integrados, definidos na Seção 3.2, possuem a propriedade de *longa dependência*, ao contrário dos processos auto-regressivos de médias móveis que são considerados processos com *memória curta*. Estes processos são definidos na Seção 3.1. Na Seção 3.3, apresentamos alguns resultados de uma classe de funções especiais chamadas funções hipergeométricas. Essas funções são utilizadas na Seção 3.4 para calcular a função de covariância cruzada exata dos processos auto-regressivos de médias móveis fracionalmente integrados multivariados. Na Seção 3.5, apresentamos algumas propriedades da matriz das funções de densidades espectrais desses processos.

A maior parte da teoria básica de séries temporais univariadas estende-se naturalmente às séries multivariadas. Neste capítulo, mostramos como algumas técnicas, desenvolvidas anteriormente, para séries temporais univariadas são estendidas para o caso multivariado.

3.1 PROCESSOS ARMA MULTIVARIADOS

Em um contexto univariado, uma importante classe de processos são os *auto-regressivos de médias móveis* (ARMA), os quais foram introduzidos por G.E.P. Box e G.M. Jenkins, definidos em termos de equações de diferenças

lineares com coeficientes constantes. Posteriormente, Mandelbrot (1965) e Mandelbrot e van Ness (1968) definiram o *movimento Browniano fracionário*, que é um processo estocástico estacionário com longa dependência a tempo contínuo, usado para explicar o efeito Hurst. O nome de *efeito Hurst* foi dado para explicar o comportamento de dependência entre as observações, mesmo distantes, proposto primeiramente pelo hidrologista Harold E. Hurst, em 1951, enquanto investigava a série temporal dos níveis do rio Nilo. Em seguida, Mandelbrot e Wallis (1969) definiram o *ruído Gaussiano fracionário* que é uma versão do movimento Browniano fracionário a tempo discreto, mostrando que este processo também exibe o efeito Hurst. Mais tarde, Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981) estendem a classe de processos definidos em Box et al. (1994) para os chamados *processos auto-regressivos de médias móveis fracionariamente integrados*, denotados por ARFIMA(p, d, q).

Nesta seção, apresentamos a classe dos *processos auto-regressivos de médias móveis multivariados* de ordem p e q . Um estudo completo destes processos pode ser encontrado em Brockwell e Davis (1991), Lütkepohl (1991) e Reinsel (1993). Para definir essa classe de processos será necessário definir primeiramente os chamados processos *ruído branco multivariados*.

Definição 3.2. Um processo estocástico m -variado $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser um *ruído branco multivariado* com média zero e matriz de variâncias e covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$, denotado por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim RB(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad (3.5)$$

se e somente se, $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estacionário multivariado com média $\mathbf{0}$ e matriz de variâncias e covariâncias dada por

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} (\sigma_1^\varepsilon)^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\sigma_2^\varepsilon)^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\sigma_m^\varepsilon)^2 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

com componentes $(\sigma_j^\varepsilon)^2 = \text{Var}(\varepsilon_{j,t}) = \gamma_{jj}^\varepsilon$ e $\gamma_{jk}^\varepsilon = \text{Cov}(\varepsilon_{j,t}, \varepsilon_{k,t}) = 0$, para todo $j \neq k \in \{1, \dots, m\}$.

Um exemplo muito utilizado é o *ruído branco multivariado Gaussiano*, onde, nesse caso, $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. Usaremos também a notação

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim IID(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (3.7)$$

para indicar que as componentes de $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ são independentes e identicamente distribuídas com média $\mathbf{0}$ e matriz de variâncias e covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$, dada na equação (3.6). Esses processos são utilizados para construir uma enorme variedade de processos multivariados, como por exemplo, os processos auto-regressivos de médias móveis multivariados que são definidos a seguir.

Definição 3.3. Dizemos que um processo estocástico m -variado $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo auto-regressivo de médias móveis multivariado*, denotado aqui por $\text{VARMA}(p, q)$, se ele for uma solução estacionária da equação de diferenças

$$\mathbf{X}_t - \phi_1 \mathbf{X}_{t-1} - \cdots - \phi_p \mathbf{X}_{t-p} = \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\theta}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\theta}_q \boldsymbol{\varepsilon}_{t-q}, \quad (3.8)$$

onde $\phi_1, \dots, \phi_p, \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_q$ são matrizes reais $m \times m$ e $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco multivariado, dado na Definição 3.2.

A equação (3.8) pode ser escrita na forma compacta

$$\Phi(\beta) \mathbf{X}_t = \Theta(\beta) \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.9)$$

onde β denota o operador de defasagem usual,

$$\Phi(\beta) = \phi_0 - \sum_{\ell=1}^p \phi_\ell \beta^\ell \quad \text{e} \quad \Theta(\beta) = \boldsymbol{\theta}_0 + \sum_{\ell=1}^q \boldsymbol{\theta}_\ell \beta^\ell, \quad (3.10)$$

com $\phi_1, \dots, \phi_p, \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_q$ matrizes reais $m \times m$ e $\phi_0 = \mathbf{I}_{m \times m} = \boldsymbol{\theta}_0$, onde $\mathbf{I}_{m \times m}$ é a matriz identidade de tamanho $m \times m$.

Exemplo 3.1. Quando a ordem do polinômio $\Theta(\beta)$, na equação (3.10), for zero, ou seja $q = 0$, obtemos o *processo auto-regressivo m -variado* de ordem p , denotado por $\text{VAR}(p)$. Da mesma forma, se $p = 0$ na equação (3.10), obtemos o *processo de média móvel multivariado* de ordem q , denotado por $\text{VMA}(q)$.

No contexto univariado, um enfoque maior é dado aos processos estocásticos $\text{ARMA}(p, q)$ causais e invertíveis. A seguir, apresentamos os critérios de causalidade e invertibilidade para os processos $\text{VARMA}(p, q)$.

Teorema 3.1. (*Critério de causalidade*). *Considere o polinômio com coeficientes matriciais dado por*

$$\Phi(z) = \mathbf{I}_{m \times m} - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p. \quad (3.11)$$

Se

$$\det[\Phi(z)] \neq 0, \quad (3.12)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq 1$, então a equação (3.9) tem exatamente uma solução estacionária dada por

$$\mathbf{X}_t = \sum_{\ell=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_\ell \boldsymbol{\varepsilon}_{t-\ell}, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z}, \quad (3.13)$$

onde ψ_ℓ são matrizes unicamente determinadas por

$$\Psi(z) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \psi_\ell z^\ell = \Phi^{-1}(z)\Theta(z), \quad (3.14)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq 1$.

Teorema 3.2. (*Critério de invertibilidade*). *Considere o polinômio com coeficientes matriciais dado por*

$$\Theta(z) = \mathbf{I}_{m \times m} + \boldsymbol{\theta}_1 z + \cdots + \boldsymbol{\theta}_q z^q. \quad (3.15)$$

Se

$$\det[\Theta(z)] \neq 0, \quad (3.16)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq 1$ e $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma solução estacionária da equação (3.9), então

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \sum_{\ell=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_\ell \mathbf{X}_{t-\ell}, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z}, \quad (3.17)$$

onde as matrizes $\boldsymbol{\pi}_\ell$ são unicamente determinadas por

$$\Pi(z) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_\ell z^\ell = \Theta^{-1}(z)\Phi(z), \quad (3.18)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq 1$.

As demonstrações desses teoremas podem ser encontradas em Brockwell e Davis (1991).

Os processos VARMA(p, q) não são muito utilizados devido as dificuldades computacionais e aos problemas de identificabilidade. A matriz de variâncias e covariâncias (ou a matriz das funções de densidades espectrais) não determina univocamente Φ , Θ e Σ , a menos que condições mais restritivas sejam impostas (ver Morettin, 2006). Não-identificabilidade implica que a superfície de verossimilhança não tem um único máximo. Um método para identificar a ordem dos processos VARMA(p, q), baseado na análise de correlação canônica, foi proposto por Akaike (1974,1975,1976) e modificado por Cooper e Wood (1982). A restrição desse método é que ele somente identifica modelos onde as ordens são idênticas, ou seja, VARMA(h, h), onde $h = \max(p, q)$. Esse problema é conhecido como o problema da superparametrização ou “overparameterization”, o qual é corrigido no trabalho de Tsay (1989). Um segundo método, também baseado na análise de correlação canônica, foi desenvolvido por Tsay e Tiao (1985,1989).

3.2 PROCESSOS VARFIMA(p, \mathbf{d}, q)

Nesta seção, definimos uma classe de processos chamados *auto-regressivos de médias móveis fracionalmente integrados*, onde $d \in \mathbb{R}$, nas situações univariadas e multivariadas. Esses processos são conhecidos por possuírem longa dependência. A situação univariada é apresentada na próxima definição.

Definição 3.4. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico satisfazendo a equação

$$\Phi(\beta) \nabla^d(\beta)(X_t - \mu) = \Theta(\beta) \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (3.19)$$

onde μ é a média do processo, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco, $\Phi(\cdot)$ e $\Theta(\cdot)$ são os polinômios em β , sendo β o operador de defasagem e $\nabla^d(\beta)$ o operador diferença. Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é chamado de *processo auto-regressivo de médias móveis fracionalmente integrados* de ordem (p, d, q) , denotado por $ARFIMA(p, d, q)$, onde d é o grau ou parâmetro de diferenciação, p é o grau do polinômio $\Phi(\cdot)$ e q é o grau do polinômio $\Theta(\cdot)$.

A generalização do processo $ARFIMA(p, \mathbf{d}, q)$, para o caso multivariado, é definido a seguir.

Definição 3.5. Dizemos que o processo m -dimensional $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo auto-regressivo de médias móveis fracionalmente integrados multivariado*, denotado aqui por $VARFIMA(p, \mathbf{d}, q)$, se ele é uma solução estacionária da equação de diferenças

$$\Phi(\beta)(1 - \beta)^{\mathbf{d}}(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}) = \Theta(\beta)\boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.20)$$

onde β é o operador de defasagem, $\boldsymbol{\mu}$ é o vetor das médias, $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco multivariado como na Definição 3.2 e $\Phi(\beta)$ e $\Theta(\beta)$ são os polinômios em β dados na equação (3.10).

Assumimos que os coeficientes polinomiais $\Phi(\beta)$ e $\Theta(\beta)$ satisfazem as condições de causalidade e invertibilidade dadas, respectivamente, nos Teoremas 3.1 e 3.2. O operador $\nabla^{\mathbf{d}}(\beta) = (1 - \beta)^{\mathbf{d}}$ é uma matriz diagonal $m \times m$ caracterizada pelos parâmetros d_1, d_2, \dots, d_m , dada por

$$\nabla^{\mathbf{d}}(\beta) = \begin{pmatrix} (1 - \beta)^{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1 - \beta)^{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (1 - \beta)^{d_m} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

onde $d_j \in (-0.5, 0.5)$, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$. O termo $(1 - \beta)^{d_j}$ é definido pela expansão

$$(1 - \beta)^{-d_j} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \psi_{j,\ell} \beta^\ell \equiv \psi_{j,\ell}(\beta), \quad (3.22)$$

onde

$$\psi_{j,\ell} = \frac{\Gamma(d_j + \ell)}{\Gamma(\ell + 1)\Gamma(d_j)}, \quad \psi_0^0 = 1 \text{ e } \psi_\ell^0 = 0, \quad (3.23)$$

para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ e $\ell \neq 1$. Conseqüentemente, temos que

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathbf{d}}(\beta)^{-1} &\equiv \begin{pmatrix} (1-\beta)^{-d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1-\beta)^{-d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (1-\beta)^{-d_m} \end{pmatrix} \\ &\equiv \Psi^{\mathbf{d}}(\beta) = \mathbf{I}_{m \times m} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \Psi_\ell^{\mathbf{d}} \beta^\ell, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde $\mathbf{I}_{m \times m}$ é a matriz identidade $m \times m$ e cada $\Psi_\ell^{\mathbf{d}}$, para $\ell \in \mathbb{N}$, é uma matriz diagonal $m \times m$ com $\Psi_\ell^{d_j}$ sendo o ℓ -ésimo elemento da diagonal.

Um caso particular do processo estacionário VARFIMA(p, \mathbf{d}, q) dado na Definição 3.5, é quando os graus p e q dos polinômios $\Phi(\beta)$ e $\Theta(\beta)$ são zero, ou seja, quando $\Phi(\beta) \equiv \mathbf{I} \equiv \Theta(\beta)$. Esse caso é definido a seguir.

Definição 3.6. Dizemos que um processo estocástico m -dimensional $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo fracionariamente integrado multivariado*, denotado aqui por VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0), com vetor de parâmetros de integração $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$, com $d_j \in (-0.5, 0.5)$, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, se ele é uma solução estacionária da equação de diferenças

$$\nabla^{\mathbf{d}}(\beta)\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.25)$$

onde β é o operador de defasagem, $\nabla^{\mathbf{d}}(\beta)$ é dado pela equação (3.21) e $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco multivariado.

Exemplo 3.2. Seja $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0) bivariado, ou seja, com dimensão $m = 2$. Então, $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaz a equação

$$\begin{pmatrix} (1-\beta)^{d_1} & 0 \\ 0 & (1-\beta)^{d_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

para todo $t \in \mathbb{Z}$, onde $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})'$ é um processo ruído branco bivariado com média $\mathbf{0}$ e matriz de variâncias e covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$. Nesse caso, decorre da teoria para processos univariados, que para cada $j \in \{1, 2\}$, com $d_j > -1$,

$$\nabla^{d_j}(\beta) = (1-\beta)^{d_j} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi_{j,\ell} \beta^\ell, \quad (3.27)$$

onde

$$\pi_{j,\ell} = \frac{\Gamma(\ell - d_j)}{\Gamma(\ell + 1)\Gamma(-d_j)} = \prod_{0 < \kappa \leq \ell} \frac{\kappa - 1 - d_j}{\kappa}, \quad (3.28)$$

para $\ell \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\pi_0 = 1$ e

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, & \text{se } x > 0; \\ \infty, & \text{se } x = 0; \\ x^{-1}\Gamma(1+x), & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Observação 3.2. No exemplo 3.2, consideramos um processo bivariado VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0), ou seja, $m = 2$, mas as equações (3.27) e (3.28) são válidas para um m qualquer.

Observação 3.3. Na Definição 3.6 é necessário que, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$,

$$\nabla^{d_j}(\beta)X_{j,t} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi_{j,\ell} X_{j,t-\ell}, \quad (3.30)$$

seja convergente em quadrado médio, onde $\pi_{j,\ell}$ é dado na equação (3.28). Assim, se o processo $\{X_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tem representação espectral dada por

$$X_{j,t} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dZ_{X_j}(\lambda), \quad (3.31)$$

então,

$$\nabla^{d_j}(\beta)X_{j,t} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} (1 - e^{-i\lambda})^{d_j} dZ_{X_j}(\lambda), \quad (3.32)$$

para todo $j \in \{1, \dots, m\}$.

Observação 3.4. A convergência de seqüências de variáveis aleatórias significa convergência em quadrado médio ou convergência em \mathcal{L}^2 , a qual é amplamente discutida por Brockwell e Davis (1991).

Em vista da representação (3.26) de $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dizemos que $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é invertível mesmo se os coeficientes $\pi_{j,\ell}$ não são absolutamente somáveis. Dizemos que $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal se cada componente $\{X_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$, para $j \in \{1, \dots, m\}$, pode ser expressa como

$$X_{j,t} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \psi_{\ell} \varepsilon_{j,t-\ell}, \quad (3.33)$$

onde $\sum_{\ell=0}^{\infty} \psi_{\ell}^2 < \infty$. A existência de uma solução causal estacionária de (3.25) será discutida no Teorema 3.4 e, para demonstrá-lo, necessitamos utilizar uma classe de funções especiais chamadas *hipergeométricas*. Na próxima seção, apresentamos alguns resultados dessas funções.

3.3 FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICAS

Estamos interessados em calcular as funções de covariância e de correlação cruzada de um processo VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0). Para isso, definimos a classe de funções chamadas *funções hipergeométricas*. Essas funções foram utilizadas por Brietzke et al. (2005) para encontrar a fórmula fechada do algoritmo de Durbin-Levinson para processos fracionariamente integrados sazonais.

Para um estudo mais completo sobre essas funções remetemos o leitor a Andrews et al. (1999).

Definição 3.7. Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}$. A *função hipergeométrica* é dada por

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(a)_{\ell}(b)_{\ell}}{(c)_{\ell} \ell!} x^{\ell}, \quad (3.34)$$

para $|x| < 1$, onde $(a)_{\ell}$ é chamado *símbolo de Pochhammer* e é dado por

$$(a)_{\ell} = \frac{\Gamma(a + \ell)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} a(a+1) \cdots (a + \ell - 1), & \text{se } \ell \geq 1; \\ 1, & \text{se } \ell = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Quando $|x| < 1$, a série dada por (3.34), converge uniformemente em todo domínio compacto de \mathbb{C} , onde a, b e c pertencem a esse domínio. Quando impomos a condição $Re(c - a - b) > 0$, a série converge também para $|x| = 1$. Esse resultado é dado pelo próximo teorema.

Teorema 3.3. (*Fórmula da Soma de Gauss*). Se $Re(c - a - b) > 0$, então

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(a)_{\ell}(b)_{\ell}}{(c)_{\ell} \ell!} = {}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)}. \quad (3.36)$$

Demonstração: As funções hipergeométricas podem ser representadas através de integrais da forma

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c - b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt, \quad (3.37)$$

se $Re(c) > Re(b) > 0$. Esse resultado é chamado de *representação integral de Euler*.

Fazendo $x \rightarrow 1^-$ na equação (3.37), segue do teorema da continuidade de Abel que

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c - b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-a-b-1} dt = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)}, \quad (3.38)$$

para $Re(c) > Re(b) > 0$ e $Re(c - a - b) > 0$. A condição $Re(c) > Re(b) > 0$ pode ser removida pela continuidade. Uma demonstração que não recorre ao princípio da continuidade analítica é dada por Andrews et al. (1999). \square

Corolário 3.1. *Se $Re(c - a - b) > 0$, então,*

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + \ell)\Gamma(b + \ell)}{\Gamma(c + \ell)\ell!} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)}. \quad (3.39)$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.3 e pela equação (3.35) temos que

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(a)_{\ell}(b)_{\ell}}{(c)_{\ell}\ell!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + \ell)\Gamma(b + \ell)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c + \ell)\ell!} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + \ell)\Gamma(b + \ell)}{\Gamma(c + \ell)\ell!} \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. \square

3.4 CÁLCULO DAS FUNÇÕES DE COVARIÂNCIA E CORRELAÇÃO CRUZADA EXATA

Hosking (1981) determina as expressões exatas para as funções densidade espectral, de covariância, de correlação e de autocorrelação parcial, para os processos ARFIMA(0, d , 0). No caso multivariado, esses cálculos tornam-se um pouco mais complicados, a medida que a função densidade espectral cruzada entre os processos componentes $\{X_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{X_{k,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$, para $j, k \in \{1, \dots, m\}$, de um processo multivariado VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0), depende dos parâmetros d_j e d_k . Nesta seção, determinamos as expressões exatas das funções de covariância, densidade espectral e de correlação cruzada para os processos multivariados VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0). Para encontrar a função densidade espectral cruzada desses processos necessitamos do seguinte resultado.

Lema 3.1. *Sejam $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário multivariado com média zero e γ_{jk}^X , para $j, k \in \{1, \dots, m\}$, sua função de covariância cruzada. Se, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, existe uma seqüência de constantes*

reais $\psi_{j,\ell}$, para $\ell \in \mathbb{Z}$, tal que $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\psi_{j,\ell}| < \infty$, então

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} \beta^{\ell}(X_{j,t}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} X_{j,t-\ell}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (3.40)$$

converge absolutamente com probabilidade 1 e em quadrado médio para o mesmo limite. Se, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$,

$$Y_{j,t} \equiv \Psi_j(\beta)X_{j,t} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} X_{j,t-\ell}, \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (3.41)$$

então o processo $\{Y_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário com função de covariância cruzada dada por

$$\gamma_{j,k}^Y(h) = \sum_{\ell, r=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} \psi_{k,r} \gamma_{j,k}^X(h - \ell + r), \quad (3.42)$$

para todo $h \in \mathbb{Z}$ e $j, k \in \{1, \dots, m\}$.

Demonstração: O problema da convergência da série pode ser tratado componente a componente e a demonstração, nesse caso, pode ser encontrada em Brockwell e Davis (1991). Para a afirmação feita na equação (3.42), observe que, pela convergência em quadrado médio de (3.40) e pela continuidade do produto interno,

$$\mathbb{E}(Y_{j,t}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=-n}^n \psi_{j,\ell} X_{j,t-\ell} \right) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} \mathbb{E}(X_{j,t}), \quad (3.43)$$

para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ e

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{j,t+h}Y_{k,t}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\ell=-n}^n \psi_{j,\ell} X_{j,t+h-\ell} \right) \left(\sum_{r=-n}^n \psi_{k,r} X_{k,t-r} \right) \right] \\ &= \sum_{\ell, r=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} \psi_{k,r} \mathbb{E}(X_{j,t+h-\ell} X_{k,t-r}) \\ &= \sum_{\ell, r=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} \psi_{k,r} \mathbb{E}(X_{j,t+h-\ell+r} X_{k,t}) \\ &= \sum_{\ell, r=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} \psi_{k,r} \left[\gamma_{j,k}^X(h - \ell + r) + \mathbb{E}(X_{j,t})\mathbb{E}(X_{k,t}) \right], \end{aligned} \quad (3.44)$$

para $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $h \in \mathbb{Z}$.

Assim, $\mathbb{E}(Y_{j,t})$ e $\mathbb{E}(Y_{j,t+h}Y_{k,t})$ são finitas e independentes de t . Como

$$\text{Var}(Y_{j,t}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left(\sum_{\ell=-n}^n \psi_{j,\ell} X_{j,t-\ell} \right) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell}^2 \text{Var}(X_{j,t-\ell}) \quad (3.45)$$

e $\{X_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário, segue que $\text{Var}(Y_{j,t}) < \infty$. Logo, $\mathbb{E}|Y_{j,t}|^2 = \text{Var}(Y_{j,t}) + [\mathbb{E}(Y_{j,t})]^2 < \infty$, o que prova a estacionariedade. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{j,t})\mathbb{E}(Y_{k,t}) &= \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} \right) \mathbb{E}(X_{j,t}) \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} \psi_{k,r} \right) \mathbb{E}(X_{k,t}) \\ &= \sum_{\ell,r=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} \psi_{k,r} \mathbb{E}(X_{j,t}) \mathbb{E}(X_{k,t}). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Segue das equações (3.44) e (3.46) e da estacionariedade do processo $\{\mathbf{Y}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ que a função de covariância cruzada $\gamma_{jk}^Y(\cdot)$ entre as componentes $Y_{j,t}$ e $Y_{k,t}$ é dada por

$$\begin{aligned} \gamma_{jk}^Y(h) &= \mathbb{E}(Y_{j,t+h}Y_{k,t}) - \mathbb{E}(Y_{j,t+h})\mathbb{E}(Y_{k,t}) \\ &= \mathbb{E}(Y_{j,t+h}Y_{k,t}) - \mathbb{E}(Y_{j,t})\mathbb{E}(Y_{k,t}) \\ &= \sum_{\ell,r=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} \psi_{k,r} \gamma_{jk}^X(h+r-\ell), \end{aligned} \quad (3.47)$$

para $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $h \in \mathbb{Z}$. □

O principal objetivo do próximo teorema é dar as condições necessárias e suficientes para a existência e unicidade de uma solução estacionária para a equação (3.25) e calcular as funções de densidade espectral, de covariância e de correlação cruzada exata para os processos VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0).

Teorema 3.4. *Se $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$, com $d_j \in (-0.5, 0.5)$, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, então existe uma única solução estacionária $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ de (3.25), dada por*

$$\mathbf{X}_t = \sum_{\ell=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_\ell \boldsymbol{\varepsilon}_{t-\ell} = \nabla^{-\mathbf{d}}(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (3.48)$$

ou, equivalentemente,

$$X_{j,t} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \psi_{j,\ell} \varepsilon_{j,t-\ell} = \nabla^{-d_j}(\beta) \varepsilon_{j,t}, \quad (3.49)$$

para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, onde

$$\psi_{j,\ell} = \frac{\Gamma(d_j + \ell)}{\Gamma(\ell + 1)\Gamma(d_j)} = \prod_{0 < \kappa \leq \ell} \frac{\kappa - 1 + d_j}{\kappa}, \quad (3.50)$$

$\psi_0^0 = 1$, $\psi_\ell^0 = 0$, para todo $\ell \geq 1$, e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco multivariado como na Definição 3.2.

Se $f_{jk}^X(\cdot)$, $\gamma_{jk}^X(\cdot)$ e $\rho_{jk}^X(\cdot)$, para $j, k \in \{1, \dots, m\}$, denotam respectivamente, a função densidade espectral cruzada, a função de covariância cruzada e a função de correlação cruzada entre as componentes do processo $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\psi_{j,\ell}| < \infty$, então,

i)

$$f_{jk}^X(\lambda) = \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon}{2\pi} (1 - e^{-i\lambda})^{-d_j} (1 - e^{i\lambda})^{-d_k}, \quad \lambda \in (-\pi, \pi]; \quad (3.51)$$

ii)

$$\gamma_{jk}^X(h) = \gamma_{jk}^\varepsilon \frac{\Gamma(d_j + h) \Gamma(1 - d_j - d_k)}{\Gamma(d_j) \Gamma(1 - d_j) \Gamma(h + 1 - d_k)}, \quad \text{para } h \in \mathbb{N}; \quad (3.52)$$

iii)

$$\gamma_{jk}^X(0) = \gamma_{jk}^\varepsilon \frac{\Gamma(1 - d_j - d_k)}{\Gamma(1 - d_j) \Gamma(1 - d_k)}; \quad (3.53)$$

iv)

$$\rho_{jk}^X(h) = \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon \Gamma(1 - d_k) \Gamma(d_j + h) \Gamma(1 - d_j - d_k)}{\sigma_j^\varepsilon \sigma_k^\varepsilon \Gamma(d_j) \Gamma(h + 1 - d_k) \left(\Gamma(1 - 2d_j) \Gamma(1 - 2d_k) \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.54)$$

para todo $h \in \mathbb{N}$.

Demonstração: A demonstração da existência e unicidade de uma solução estacionária para a equação (3.48), pode ser feita termo a termo e, além disso, o leitor poderá encontrar esta demonstração em Brockwell e Davis (1991).

i) Para provar esse item, observe que pelo Lema 3.1

$$\gamma_{jk}^X(h) = \sum_{\ell, r=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} \psi_{k,r} \gamma_{jk}^\varepsilon(h + r - \ell), \quad (3.55)$$

para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $h \in \mathbb{Z}$. Consideramos a representação espectral da função $\gamma_{jk}^\varepsilon(\cdot)$, a qual é dada pelo Teorema de Herglotz, e substituímos na equação (3.55) para obtermos

$$\begin{aligned} \gamma_{jk}^X(h) &= \sum_{\ell, r=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} \psi_{k,r} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(h+r-\ell)\lambda} dF_{jk}^\varepsilon(\lambda) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} e^{-i\ell\lambda} \right) \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} \psi_{k,r} e^{ir\lambda} \right) dF_{jk}^\varepsilon(\lambda), \quad (3.56) \end{aligned}$$

onde $F_{jk}^\varepsilon(\cdot)$ é a função de distribuição espectral cruzada entre as componentes $\{\varepsilon_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{\varepsilon_{k,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ do processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (ver Brockwell e Davis, 1991). Como

$$\gamma_{jk}^X(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} dF_{jk}^X(\lambda), \quad (3.57)$$

comparando as equações (3.56) e (3.57), segue que

$$F_{jk}^X(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} e^{-i\ell\nu} \right) \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} \psi_{k,r} e^{ir\nu} \right) dF_{jk}^\varepsilon(\nu), \quad (3.58)$$

para $j, k \in \{1, \dots, m\}$. Portanto,

$$f_{jk}^X(\lambda) = \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} e^{-i\ell\lambda} \right) \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} \psi_{k,r} e^{ir\lambda} \right) f_{jk}^\varepsilon(\lambda). \quad (3.59)$$

Da expansão através do binômio de Newton, temos, para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$, que

$$(1 - e^{-i\lambda})^{-d_j} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \psi_{j,\ell} e^{-i\ell\lambda} \quad (3.60)$$

e

$$(1 - e^{i\lambda})^{-d_k} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \psi_{k,r} e^{ir\lambda}, \quad (3.61)$$

onde os coeficientes $\psi_{j,\ell}$, para $\ell \in \mathbb{N}$, são dados na equação (3.50) e são absolutamente somáveis (ver Brockwell e Davis, 1991). Além disso, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco multivariado cuja função densidade espectral cruzada é dada por

$$f_{jk}^\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_{jk}^\varepsilon(h) e^{-ih\lambda} = \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon}{2\pi}, \quad \text{para } \lambda \in (-\pi, \pi]. \quad (3.62)$$

Substituindo (3.60), (3.61) e (3.62) na equação (3.59) obtemos

$$f_{jk}^X(\lambda) = \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon}{2\pi} (1 - e^{-i\lambda})^{-d_j} (1 - e^{i\lambda})^{-d_k}, \quad \text{para } \lambda \in (-\pi, \pi], \quad (3.63)$$

o que demonstra o item i).

ii) A partir da função densidade espectral cruzada de um processo m -dimensional, VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0), dada no item i), podemos calcular a função de covariância cruzada exata e, conseqüentemente, a função de correlação cruzada exata para esses processos. Pela definição da função densidade espectral cruzada, segue que

$$\begin{aligned}
\gamma_{jk}^X(h) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} f_X(\lambda) d\lambda \\
&= \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} (1 - e^{-i\lambda})^{-d_j} (1 - e^{i\lambda})^{-d_k} d\lambda \\
&= \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \psi_{j,\ell} e^{-i\ell\lambda} \right) \left(\sum_{r=0}^{\infty} \psi_{k,r} e^{ir\lambda} \right) d\lambda \\
&= \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} \left(\sum_{\ell,r=0}^{\infty} \psi_{j,\ell} \psi_{k,r} e^{i(r-\ell)\lambda} \right) d\lambda \\
&= \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon}{2\pi} \sum_{\ell,r=0}^{\infty} \psi_{j,\ell} \psi_{k,r} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} e^{i(r-\ell)\lambda} d\lambda \\
&= \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon}{2\pi} \sum_{\ell,r=0}^{\infty} \frac{\psi_{j,\ell} \psi_{k,r}}{h+r-\ell} \left(\frac{e^{i(h+r-\ell)} - e^{-i(h+r-\ell)}}{i} \right) \\
&= \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon}{2\pi} \sum_{\ell,r=0}^{\infty} \frac{\psi_{j,\ell} \psi_{k,r}}{h+r-\ell} \left\{ 2 \operatorname{sen} \left[(h+r-\ell)\pi \right] \right\} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

se $h+r-\ell \neq 0$.

Queremos calcular

$$\gamma_{jk}^X(h) = \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon}{2\pi} \sum_{\ell,r=0}^{\infty} \psi_{j,\ell} \psi_{k,r} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(h+r-\ell)\lambda} d\lambda$$

com a restrição $h+r-\ell = 0$. Como $\ell = h+r$, segue da expressão (3.23) que

$$\begin{aligned}
\gamma_{jk}^X(h) &= \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon}{2\pi} \sum_{\ell, r=0}^{\infty} \psi_{j,\ell} \psi_{k,r} 2\pi = \gamma_{jk}^\varepsilon \sum_{r=0}^{\infty} \psi_{j,r+h} \psi_{k,r} \\
&= \gamma_{jk}^\varepsilon \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d_j + r + h) \Gamma(d_k + r)}{\Gamma(r + h + 1) \Gamma(d_j) \Gamma(r + 1) \Gamma(d_k)} \\
&= \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon}{\Gamma(d_j) \Gamma(d_k)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d_j + r + h) \Gamma(d_k + r)}{\Gamma(r + h + 1) \Gamma(r + 1)}. \tag{3.64}
\end{aligned}$$

Considerando $a = d_j + h$, $b = d_k$ e $c = h + 1$, segue que $Re(c - a - b) = 1 - d_j - d_k > 0$, pois $d_j, d_k \in (0.0, 0.5)$, para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$. Pelo Corolário 3.1, a expressão dada na equação (3.64) converge para

$$\begin{aligned}
\gamma_{jk}^X(h) &= \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon}{\Gamma(d_j) \Gamma(d_k)} \frac{\Gamma(d_j + h) \Gamma(d_k) \Gamma(1 - d_j - d_k)}{\Gamma(1 - d_j) \Gamma(h + 1 - d_k)} \\
&= \gamma_{jk}^\varepsilon \frac{\Gamma(d_j + h) \Gamma(1 - d_j - d_k)}{\Gamma(d_j) \Gamma(1 - d_j) \Gamma(h + 1 - d_k)}. \tag{3.65}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\gamma_{jk}^X(h) = \gamma_{jk}^\varepsilon \frac{\Gamma(d_j + h) \Gamma(1 - d_j - d_k)}{\Gamma(d_j) \Gamma(1 - d_j) \Gamma(h + 1 - d_k)}, \tag{3.66}$$

para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $h \in \mathbb{N}$ o que demonstra o item ii).

Observação 3.5. Quando $d_j = d_k = d$, a equação (3.66) é equivalente a

$$\begin{aligned}
\gamma_{jj}^X(h) \equiv \gamma_X(h) &= (\sigma_j^\varepsilon)^2 \frac{\Gamma(d + h) \Gamma(1 - 2d)}{\Gamma(d) \Gamma(1 - d) \Gamma(h + 1 - d)} \\
&= (\sigma_j^\varepsilon)^2 \frac{\Gamma(1 - 2d)}{\Gamma(h + 1 - d)} \frac{\Gamma(h + d)}{\Gamma(d) \Gamma(1 - d)} \\
&= (\sigma_j^\varepsilon)^2 \frac{\Gamma(1 - 2d)}{\Gamma(h + 1 - d)} \frac{\Gamma(1 - d) (-1)^h}{\Gamma(1 - d) \Gamma(1 - h - d)} \\
&= (\sigma_j^\varepsilon)^2 \frac{\Gamma(1 - 2d)}{\Gamma(h + 1 - d)} \frac{(-1)^h}{\Gamma(1 - h - d)}, \tag{3.67}
\end{aligned}$$

para $h \in \mathbb{N}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$, onde a última igualdade é devida ao seguinte resultado (ver Sowell, 1992),

$$\frac{\Gamma(y+n)}{\Gamma(y)} = \frac{\Gamma(1-y)(-1)^n}{\Gamma(1-y-n)}. \quad (3.68)$$

Portanto, quando $d_j = d_k = d$, obtemos a equação (3.67), que é exatamente a função de autocovariância de um processo ARFIMA(0, d , 0), como era esperado.

iii) Substituindo $h = 0$ na equação (3.65), obtemos

$$\gamma_{jk}^X(0) = \gamma_{jk}^\varepsilon \frac{\Gamma(d_j)\Gamma(1-d_j-d_k)}{\Gamma(d_j)\Gamma(1-d_j)\Gamma(1-d_k)} = \gamma_{jk}^\varepsilon \frac{\Gamma(1-d_j-d_k)}{\Gamma(1-d_j)\Gamma(1-d_k)}. \quad (3.69)$$

Observação 3.6. Novamente se $d_j = d_k = d$, recaímos no caso univariado. Nesse caso, a partir da equação (3.69), temos que

$$\gamma_{jj}^X(0) \equiv \gamma_x(0) = (\sigma_j^\varepsilon)^2 \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-d)^2}, \quad (3.70)$$

que é exatamente a função de autocovariância, em zero, de um processo ARFIMA(0, d , 0) (ver Brockwell e Davis, 1981).

iv) Pela Definição 2.7,

$$\begin{aligned} \rho_{jk}^X(h) &= \frac{\gamma_{jk}^X(h)}{\sqrt{\gamma_{jj}^X(0)\gamma_{kk}^X(0)}} \\ &= \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon \frac{\Gamma(d_j+h)\Gamma(1-d_j-d_k)}{\Gamma(d_j)\Gamma(1-d_j)\Gamma(h+1-d_k)}}{\sigma_j^\varepsilon \sigma_k^\varepsilon \sqrt{\frac{\Gamma(1-2d_j)\Gamma(1-2d_k)}{\Gamma(1-d_j)^2\Gamma(1-d_k)^2}}} \\ &= \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon \Gamma(1-d_k)\Gamma(d_j+h)\Gamma(1-d_j-d_k)}{\sigma_j^\varepsilon \sigma_k^\varepsilon \Gamma(d_j)\Gamma(h+1-d_k) \left(\Gamma(1-2d_j)\Gamma(1-2d_k)\right)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

para todo $h \in \mathbb{Z}$, o que conclui a demonstração do teorema. \square

Observação 3.7. No Teorema 3.4 nos preocupamos somente com o caso em que $j \neq k$, pois quando $j = k$, recaímos no processo ARFIMA univariado, o qual foi completamente analisado por Hosking (1981).

3.5 APROXIMAÇÕES LOCAIS PARA A MATRIZ DAS FUNÇÕES DENSIDADES ESPECTRAIS

No estudo de séries temporais multivariadas é muito importante entender o comportamento da função densidade espectral cruzada, localmente em uma vizinhança da frequência zero, dos processos com longa dependência, como por exemplo o VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0). No caso univariado, a função densidade espectral de um processo ARFIMA(0, d , 0) é dada por

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right|^{-2d}, \quad (3.71)$$

(ver Hosking, 1981). Utilizando o fato de que, $\operatorname{sen}(\lambda) \sim \lambda$, quando $\lambda \rightarrow 0$, temos que

$$f_X(\lambda) \sim \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \lambda^{-2d}, \text{ quando } \lambda \rightarrow 0. \quad (3.72)$$

Lobato (1997) mostrou que a matriz $\mathbf{f}_X(\cdot)$ das funções densidades espectrais de um processo fracionariamente integrados m -dimensional qualquer satisfaz a condição

$$\mathbf{f}_X(\lambda) \sim \mathbf{D}(\lambda) \mathbf{G} \mathbf{D}(\lambda)^*, \text{ quando } \lambda \rightarrow 0^+, \quad (3.73)$$

onde $\mathbf{G} = (g_{jk})_{j,k=1}^m$ é uma matriz positiva-definida Hermitiana e

$$\mathbf{D}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{-d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{-d_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{-d_m} \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

Segue que, para quaisquer componentes $\{X_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{X_{k,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$, para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $d_j, d_k \in (0.0, 0.5)$,

$$f_{jj}^X(\lambda) \sim g_{jj} \lambda^{-2d_j}, \text{ quando } \lambda \rightarrow 0, \quad (3.75)$$

e

$$f_{jk}^X(\lambda) \sim g_{jk} \lambda^{-d_j - d_k}, \text{ quando } \lambda \rightarrow 0, \quad (3.76)$$

com $0 < g_{jj} < \infty$ e $0 < |g_{jk}| < \infty$.

Essa é uma propriedade muito geral e inclui a estrutura de qualquer processo fracionariamente integrados m -dimensional como, por exemplo, os processos VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0).

O resultado a seguir é necessário para que possamos mostrar que em uma vizinhança da frequência zero, a matriz das funções densidades espectrais de

um processo VARFIMA(0, \mathbf{d} ,0) satisfaz a equação (3.73). Este resultado foi demonstrado por Phillips e Shimotsu (2004).

Lema 3.2. *Se $\lambda \in (-\pi, \pi]$ e $0 < |a| < 1$, então*

$$\text{i) } \lambda^{-a}(1 - e^{i\lambda})^a = e^{-\frac{ia\pi}{2}} + O(\lambda), \text{ quando } \lambda \rightarrow 0;$$

$$\text{ii) } \lambda^{-a}(1 - e^{-i\lambda})^a = e^{\frac{ia\pi}{2}} + O(\lambda), \text{ quando } \lambda \rightarrow 0,$$

onde a notação $O(g(x)) = f(x)$, quando $x \rightarrow x_0$ em \mathbb{R} , significa que existe uma constante c , independente de x , e uma vizinhança V_0 de x_0 , tal que

$$|f(x)| \leq k|g(x)|, \quad (3.77)$$

para todo $x \in V_0 \cap \mathbb{R}$.

Demonstração: Para o item i), como

$$|1 - e^{i\lambda}| = \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right| \quad \text{e} \quad \arg(1 - e^{i\lambda}) = \frac{\lambda - \pi}{2}, \quad (3.78)$$

para $\lambda \in [0, \pi]$, podemos escrever $(1 - e^{i\lambda})^a$ na forma polar

$$(1 - e^{i\lambda})^a = \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right|^a e^{ia \frac{(\lambda - \pi)}{2}}. \quad (3.79)$$

As representações em série de Taylor dos termos do lado direito da equação (3.79) são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\lambda}{2} \right) &= 2 \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2^3} \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{1}{2^5} \frac{\lambda^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \lambda - \frac{1}{2^2} \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{1}{2^4} \frac{\lambda^5}{5!} - \dots \\ &= \lambda + O(\lambda^3) \end{aligned} \quad (3.80)$$

e

$$\begin{aligned} e^{ia \frac{(\lambda - \pi)}{2}} &= e^{-\frac{ia\pi}{2}} \left(1 + \frac{ia\lambda}{2} + \frac{i^2 a^2 \lambda^2}{2^2 2!} + \frac{i^3 a^3 \lambda^3}{2^3 3!} + \dots \right) \\ &= e^{-\frac{ia\pi}{2}} (1 + O(\lambda)) \\ &= e^{-\frac{ia\pi}{2}} + O(\lambda). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Segue de (3.80) e (3.81) que

$$\begin{aligned}\lambda^{-a}(1 - e^{i\lambda})^a &= \lambda^{-a} \left[\lambda + O(\lambda^3) \right]^a \left[e^{-\frac{ia\pi}{2}} + O(\lambda) \right] \\ &= e^{-\frac{ia\pi}{2}} + O(\lambda), \text{ quando } \lambda \rightarrow 0.\end{aligned}$$

A demonstração do item ii) pode ser feita de maneira semelhante a demonstração do item i). \square

O próximo teorema mostra que a matriz das funções densidades espectrais de um processo VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0) satisfaz a propriedade na expressão (3.76).

Teorema 3.5. *Seja $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0) satisfazendo a equação*

$$(1 - \beta)^{\mathbf{d}} \mathbf{X}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.82)$$

para todo $t \in \mathbb{Z}$, onde $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco multivariado como na Definição 3.2. Então, para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$,

$$f_{j\,k}^X(\lambda) \sim c_{j\,k} \lambda^{-d_j - d_k}, \text{ quando } \lambda \rightarrow 0^+, \quad (3.83)$$

onde $c_{j\,k}$ é uma constante positiva.

Demonstração: Mostramos no Teorema 3.4 que

$$f_{j\,k}^X(\lambda) = \frac{\gamma_{j\,k}^\varepsilon}{2\pi} (1 - e^{-i\lambda})^{-d_j} (1 - e^{i\lambda})^{-d_k}. \quad (3.84)$$

Segue do Lema 3.2 que

$$\begin{aligned}f_{j\,k}^X(\lambda) &\sim \frac{\gamma_{j\,k}^\varepsilon}{2\pi} \lambda^{-d_j} e^{-\frac{i\pi}{2}d_j} \lambda^{-d_k} e^{\frac{i\pi}{2}d_k} \\ &= \frac{\gamma_{j\,k}^\varepsilon}{2\pi} \lambda^{-d_j - d_k} e^{\frac{i\pi}{2}(d_k - d_j)}, \text{ quando } \lambda \rightarrow 0^+.\end{aligned} \quad (3.85)$$

Portanto,

$$f_{j\,k}^X(\lambda) \sim c_{j\,k} \lambda^{-d_j - d_k}, \text{ quando } \lambda \rightarrow 0^+, \quad (3.86)$$

onde $c_{j\,k}$ é a constante dada por

$$c_{jk} = \frac{\gamma_{jk}^\varepsilon}{2\pi} e^{\frac{i\pi}{2}(d_k - d_j)}, \quad (3.87)$$

para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$. Assim, os processos estocásticos multivariados VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0) satisfazem a propriedade da equação (3.76). \square

A aproximação para a função densidade espectral cruzada, dada na equação (3.83), foi utilizada por Lobato e Robinson (1998) para analisar um teste não-paramétrico para dependência fraca, e por Lobato (1999), para desenvolver um estimador semi-paramétrico de dois passos, baseado na função de máxima verossimilhança, para o parâmetro de longa dependência de processos fracionalmente integrados multivariados.

Exemplo 3.3. Seja $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processos VARFIMA(p, \mathbf{d}, q) satisfazendo a equação

$$(1 - \beta)^{\mathbf{d}} \mathbf{X}_t = \mathbf{U}_t, \quad (3.88)$$

onde $\{\mathbf{U}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo VARMA(p, q) dado na Definição 3.3. Então,

$$\mathbf{f}_{\mathbf{U}}(\lambda) \sim \mathbf{H}, \text{ quando } \lambda \rightarrow 0, \quad (3.89)$$

onde \mathbf{H} é uma matriz com entradas constantes (ver Shimotsu, 2004) e a matriz das funções densidades espectrais de $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tem a seguinte especificação

$$\mathbf{f}_{\mathbf{X}}(\lambda) \sim \mathbf{\Delta}(\lambda) \mathbf{H} \mathbf{\Delta}(\lambda)^*, \text{ quando } \lambda \rightarrow 0, \quad (3.90)$$

onde $*$ denota a matriz transposta conjugada e

$$\mathbf{\Delta}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{-d_1} e^{\frac{i\pi d_1}{2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{-d_2} e^{\frac{i\pi d_2}{2}} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{-d_m} e^{\frac{i\pi d_m}{2}} \end{pmatrix}, \quad (3.91)$$

pois, pelo Lema 3.2

$$(1 - e^{i\lambda})^a = \lambda^a e^{\frac{ia\pi}{2}} + O(\lambda), \text{ quando } \lambda \rightarrow 0. \quad (3.92)$$

Essa aproximação da matriz das funções de densidades espectrais difere da aproximação dada por Lobato (1997), a qual está especificada na equação (3.73), pelo fato que a matriz \mathbf{H} não depende mais do vetor de parâmetros \mathbf{d} , pois, esse aparece na matriz $\mathbf{\Delta}(\cdot)$, ao contrário da matriz \mathbf{G} da especificação (3.73).

Shimotsu (2004) reforça a especificação da matriz das funções densidades espectrais dada na equação (3.90), impondo a razão de suavidade dada por

$$f_{j\ k}^X(\lambda) - e^{\frac{(\pi-\lambda)(d_j-d_k)}{2}} \lambda^{-d_j-d_k} g_{j\ k} = O(\lambda^{-d_j-d_k+\beta}), \text{ quando } \lambda \rightarrow 0^+, \quad (3.93)$$

para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$, onde $g_{j\ k}$ é o (j, k) -ésimo elemento da matriz \mathbf{G} e $\beta \in (0, 2]$. Shimotsu (2004) mostra, através de simulações, que o estimador baseado na especificação da matriz das funções densidades espectrais, dada na equação (3.90), tem menor variância que o estimador de Lobato (1999), o qual baseia-se na aproximação (3.73).

No próximo capítulo apresentamos alguns estimadores semi-paramétricos do parâmetro de longa dependência já conhecidos na literatura, como por exemplo, o estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), para o caso univariado, e o estimador de dois passos de Shimotsu (2004), para o caso multivariado. Também apresentamos um estimador semi-paramétrico multivariado, que é obtido através do método de regressão linear baseado na aproximação da função densidade espectral cruzada, dada na equação (3.83). Esse estimador utiliza o periodograma cruzado como estimador da função densidade espectral cruzada e é uma proposta desse trabalho.

Capítulo 4

Estimação Semi-Paramétrica Multivariada

A modelagem de processos estocásticos estacionários univariados e multivariados, através de modelos com longa dependência tem atraído a atenção, principalmente de economistas, em diferentes áreas. Dentre outros, destacamos os trabalhos que tratam da modelagem da volatilidade de ativos financeiros (ver Baillie et al., 1996, Bollerslev e Mikkelsen, 1996). Esse trabalhos utilizam os processos ARFIMA(p, \mathbf{d}, q), cujos parâmetros geralmente são estimados via procedimentos paramétricos, tais como aqueles propostos por Fox e Taquq (1986), Dahlhaus (1989) e Sowell (1992). Se o modelo é corretamente especificado, esse procedimento resulta em estimadores consistentes e, sob suposições apropriadas, eficientes. A desvantagem dos procedimentos paramétricos é que, na presença de qualquer erro de especificação, ele resulta em estimadores inconsistentes (ver Robinson, 1995b). O interesse em utilizar técnicas que resultam em estimadores consistentes nos conduzem aos procedimentos semi-paramétricos (ver Geweke e Porter-Hudak, 1983 e Robinson, 1994a) e não-paramétricos (ver Lopes e Pinheiro, 2004). Em uma série de artigos, Robinson (1994a, 1994b, 1995a, 1995b) estabeleceu uma análise rigorosa dos procedimentos semi-paramétricos.

Quando o objetivo é modelar séries temporais multivariadas com longa dependência, a primeira sugestão é utilizar os processos VARFIMA(p, \mathbf{d}, q). Quando as componentes do processo são independentes podemos utilizar as técnicas já desenvolvidas para o caso univariado. No caso independente, a estimação do vetor de parâmetros de longa dependência, $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$, pode ser obtida utilizando-se algum procedimento disponível na literatura, estimando o parâmetro d_j individualmente para cada componente $\{X_{t,j}\}_{t \in \mathbb{Z}}$, para $j \in \{1, \dots, m\}$, do processo $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Entre os procedimentos semi-paramétricos destacamos o trabalho pioneiro de Geweke e Porter-Hudak (1983). Esse trabalho trata da estimação do parâmetro de integração fracionária, obtido através do método de regressão

linear baseado na função periodograma e denotado aqui por GPH. Mas, à medida que as séries temporais componentes passam a ser correlacionadas, estamos ignorando informações relevantes acerca das inter-relações entre as componentes do processo multivariado se utilizarmos apenas métodos propostos para o caso univariado como, por exemplo, GPH.

Na tentativa de estender GPH, desenvolvemos um estimador para o parâmetro \mathbf{d} , de processos VARFIMA(p, \mathbf{d}, q), baseado em informações obtidas através da relação entre quaisquer duas séries temporais componentes como, por exemplo, a função periodograma cruzado suavizado. Este estimador é aplicável sempre que existirem três ou mais séries temporais presentes na análise.

Neste capítulo, apresentamos alguns métodos para estimar o parâmetro de longa dependência, tanto no caso univariado como no caso multivariado. Na Seção 4.1, apresentamos um estimador semi-paramétrico Gaussiano multivariado ou “Gaussian Semiparametric Estimator”, que utiliza a função de verossimilhança Gaussiana, proposto por Shimotsu (2004), o qual será denotado por GSE. Na Seção 4.2, apresentamos o estimador univariado obtido através do método de regressão linear baseado na função periodograma, proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983). Na Seção 4.3, apresentamos um estimador semi-paramétrico multivariado, também obtido através do método de regressão linear, baseado na função periodograma cruzado, o qual será denotado por CGPH.

4.1 Estimador GSE Multivariado

Shimotsu (2004) analisa a estimação semi-paramétrica de processos com longa dependência multivariados. Nesse trabalho, o autor considera uma classe de funções densidades espectrais que inclui aquela dos processos fracionalmente integrados, dados na Definição 3.5. Para essa classe de processos, o autor prova a consistência e a normalidade assintótica de um estimador semi-paramétrico Gaussiano multivariado. Além disso, o autor também compara o estimador GSE com o estimador semi-paramétrico Gaussiano de dois passos estudado por Lobato (1999).

No caso univariado, onde a função densidade espectral de um processo ARFIMA(p, d, q) é dada pela expressão

$$f_X(\lambda) \sim g\lambda^{-2d}, \text{ quando } \lambda \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

com g sendo uma constante real, um estimador semi-paramétrico útil foi proposto por Künsch (1987) e analisado por Robinson (1995b). Lobato (1999) generalizou esse estimador e o denominou *estimador semi-paramétrico de dois passos multivariado*: o primeiro passo é realizado através da estimação univariada e individualizada dos parâmetros d_1, \dots, d_m ; e o segundo passo

consta em minimizar a função objetiva através do método de Newton, que pode ser caracterizado pelo sistema de iterações

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{df}{dx}(x_n)}, \quad (4.2)$$

onde $f(\cdot)$ é uma função real qualquer derivável, para o qual é necessário fornecer um ponto inicial x_0 .

Além disso, o autor prova a normalidade assintótica do estimador de dois passos multivariado.

O estimador GSE, proposto por Shimotsu (2004), é uma versão corrigida do estimador de dois passos multivariado de Lobato (1999). Enquanto o estimador de dois passos é obtido a partir da aproximação da matriz das funções densidades espectrais dada pela equação

$$\mathbf{f}_X(\lambda) \sim \mathbf{D}(\lambda)\mathbf{G}\mathbf{D}(\lambda)^*, \text{ quando } \lambda \rightarrow 0^+, \quad (4.3)$$

onde $*$ denota a matriz transposta conjugada, $\mathbf{G} = (g_{j,k})_{j,k}^m$ é uma matriz positiva-definida Hermitiana e

$$\mathbf{D}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{-d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{-d_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{-d_m} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

o estimador GSE é obtido a partir da aproximação

$$\mathbf{f}_X(\lambda) \sim \mathbf{\Delta}(\lambda)\mathbf{H}\mathbf{\Delta}(\lambda)^*, \text{ quando } \lambda \rightarrow 0, \quad (4.5)$$

onde $\mathbf{H} = (h_{j,k})_{j,k}^m$ é uma matriz com entradas constantes e

$$\mathbf{\Delta}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{-d_1} e^{\frac{i\pi d_1}{2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{-d_2} e^{\frac{i\pi d_2}{2}} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{-d_m} e^{\frac{i\pi d_m}{2}} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Essa especificação estende a aproximação (4.1) para o caso multivariado incluindo também a matriz das funções densidades espectrais dos processos VARFIMA(p, \mathbf{d}, q). Na especificação (4.5), o parâmetro de longa dependência \mathbf{d} aparece nos termos λ^{-d_j} e $e^{i\pi d_j/2}$, para $j \in \{1, \dots, m\}$, da matriz $\mathbf{\Delta}(\cdot)$ dada na equação (4.6). Observamos que essa diferença entre as matrizes $\mathbf{D}(\cdot)$ e $\mathbf{\Delta}(\cdot)$ dadas, respectivamente, pelas equações (4.4) e (4.6) acrescenta informações que podem ser utilizadas para melhorar o procedimento de estimação proposto por Lobato (1999). Assim, a principal diferença entre o estimador GSE e o estimador de dois passos multivariado é que o primeiro utiliza a aproximação para a matriz das funções densidades espectrais dada na

equação (4.5), onde os elementos da diagonal da matriz $\mathbf{\Delta}(\cdot)$ têm parte imaginária não-desprezível em uma vizinhança da origem, enquanto o segundo utiliza a especificação (4.3), cuja matriz $\mathbf{D}(\cdot)$ não possui parte imaginária. Segue que, para os processos VARFIMA(p, \mathbf{d}, q), o estimador baseado em (4.5) apresenta menor variância que o estimador baseado na especificação (4.3) (ver Shimotsu, 2004).

Na subseção 4.1.1, construímos a função objetiva além do estimador GSE.

4.1.1 CONSTRUÇÃO DA FUNÇÃO OBJETIVA

Para construir a função objetiva, Lobato (1999) utilizou a aproximação Whittle do logaritmo da função de verossimilhança Gaussiana no domínio da frequência. Essa aproximação é dada pela equação

$$\mathcal{L}(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \ln [\det(\mathbf{f}(\lambda, \theta))] + \text{tr}[\mathbf{f}(\lambda, \theta)^{-1} \mathbf{I}_n(\lambda)] \right\} d\lambda, \quad (4.7)$$

onde a matriz das funções densidades espectrais depende do parâmetro desconhecido θ e $\mathbf{I}_n(\cdot)$ denota a matriz das funções periodogramas dada na equação (2.65), cuja componente $I_{jk,n}(\cdot)$, para $j, k \in \{1, \dots, m\}$, é a função periodograma cruzado dada na equação (2.63).

Como a aproximação da matriz das funções densidades espectrais, dada pela equação (4.5), é restrita a uma vizinhança da frequência zero, considera-se somente as frequências de Fourier $\lambda_\ell = \frac{2\pi\ell}{n}$, com $\ell \in \{1, \dots, g(n)\}$, onde $g(n)$ é uma função do tamanho amostral, de tal forma que $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \infty$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{n} = 0.$$

A partir da versão discreta da equação (4.7) e da aproximação (4.5) da matriz das funções densidades espectrais, a função objetiva inicial é dada pela expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{G}, \mathbf{d}) &= \frac{1}{g(n)} \sum_{\ell=1}^{g(n)} \left\{ \ln [\det(\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell) \mathbf{G} \mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^*)] \right. \\ &\quad \left. + \text{tr}[(\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell) \mathbf{G} \mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^*)^{-1} \mathbf{I}_n(\lambda_\ell)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para simplificar a equação (4.8), observe que, apesar de

$$(\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell) \mathbf{G} \mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^*)^{-1} \mathbf{I}_n(\lambda_\ell) \neq \mathbf{G}^{-1} \mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^{-1} \mathbf{I}_n(\lambda_\ell) [\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^*]^{-1}, \quad (4.9)$$

os seus correspondentes traços são iguais, ou seja,

$$\text{tr}[(\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell) \mathbf{G} \mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^*)^{-1} \mathbf{I}_n(\lambda_\ell)] = \text{tr}[\mathbf{G}^{-1} \mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^{-1} \mathbf{I}_n(\lambda_\ell) [\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^*]^{-1}]. \quad (4.10)$$

Esse resultado se deve ao fato da matriz $\mathbf{\Delta}(\cdot)$ ser uma matriz diagonal, o que implica que podemos calcular o produto

$$(\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)\mathbf{G}\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^*)^{-1}\mathbf{I}_n(\lambda_\ell) = [\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^*]^{-1}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^{-1}\mathbf{I}_n(\lambda_\ell) \quad (4.11)$$

permutando seus elementos sem alterar o valor do seu traço. Com isso, uma expressão simplificada para a equação (4.8) é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{G}, \mathbf{d}) &= \frac{1}{g(n)} \sum_{\ell=1}^{g(n)} \left\{ \ln [\det(\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell))] + \ln [\det(\mathbf{G})] + \ln [\det(\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^*)] \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{tr} \left[[\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^*]^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^{-1} \mathbf{I}_n(\lambda_\ell) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

visto que $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$, para quaisquer matrizes complexas \mathbf{A} e \mathbf{B} .

A derivada parcial de primeira ordem, com respeito à \mathbf{G} , da função $\mathcal{L}(\cdot, \mathbf{d})$, dada em (4.12), é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{G}, \mathbf{d})}{\partial \mathbf{G}} &= \frac{1}{g(n)} \sum_{\ell=1}^{g(n)} \left\{ (\mathbf{G}')^{-1} \right. \\ &\quad \left. - [\mathbf{G}^{-1} \mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^{-1} \mathbf{I}_n(\lambda_\ell) [\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^{-1}]^* \mathbf{G}^{-1}]' \right\}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde \mathbf{A}' denota a transposta da matriz \mathbf{A} .

Igualando a zero a expressão (4.13), para que possamos encontrar os pontos críticos da função $\mathcal{L}(\cdot, \mathbf{d})$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\ell=1}^{g(n)} \left\{ (\mathbf{G}')^{-1} - [\mathbf{G}^{-1} \mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^{-1} \mathbf{I}_n(\lambda_\ell) [\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^{-1}]^* \mathbf{G}^{-1}]' \right\} \\ &= (\mathbf{G}')^{-1} \sum_{\ell=1}^{g(n)} \left\{ 1 - [\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^{-1} \mathbf{I}_n(\lambda_\ell) [\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^{-1}]^* \mathbf{G}^{-1}]' \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

o que resulta na igualdade

$$g(n) = \sum_{\ell=1}^{g(n)} 1 = \sum_{\ell=1}^{g(n)} \left\{ [\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^{-1} \mathbf{I}_n(\lambda_\ell) [\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^{-1}]^* \mathbf{G}^{-1}]' \right\}. \quad (4.15)$$

Multiplicando por \mathbf{G}' em ambos os lados da equação (4.15), obtemos

$$\hat{\mathbf{G}} = \frac{1}{g(n)} \sum_{\ell=1}^{g(n)} \{ \mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^{-1} \mathbf{I}_n(\lambda_\ell) [\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^{-1}]^* \}. \quad (4.16)$$

Shimotsu (2004) define a função objetiva como sendo

$$R(\mathbf{d}) = \ln [\det(\mathbf{G})] + \ln \left\{ [\det(\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell))] [\det(\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^*)] \right\}, \quad (4.17)$$

a qual pode ser obtida substituindo $\hat{\mathbf{G}}$ na função $\mathcal{L}(\cdot, \mathbf{d})$, dada na equação (4.12).

Considerando o fato de que

$$\begin{aligned} \ln [\det(\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell))] + \ln [\det(\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^*)] &= \ln [\det(\mathbf{\Delta}(\lambda_\ell) \mathbf{\Delta}(\lambda_\ell)^*)] \\ &= -2 \sum_{j=1}^m d_j \ln(\lambda_\ell), \end{aligned} \quad (4.18)$$

podemos reescrever a função objetiva, de forma simplificada, dada por

$$R(\mathbf{d}) = \ln [\det(\hat{\mathbf{G}})] - \frac{2}{g(n)} \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^{g(n)} d_j \ln(\lambda_\ell), \quad (4.19)$$

onde $\hat{\mathbf{G}}$ é dada pela expressão (4.16).

O estimador GSE do parâmetro \mathbf{d} é definido como

$$\hat{\mathbf{d}} = \arg \min_{\mathbf{d} \in \mathcal{S}} R(\mathbf{d}), \quad (4.20)$$

onde \mathcal{S} é o espaço dos valores estimados admissíveis para \mathbf{d} e é da forma $\mathcal{S} = [S_1, S_2]^m$, com $-\frac{1}{2} < S_1 < S_2 < \frac{1}{2}$ e m o número de componentes do processo $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Para minimizar a função $R(\cdot)$, necessitamos encontrar os zeros da sua derivada $\frac{dR(\cdot)}{d\mathbf{d}}$. Para isso, utiliza-se o método de Newton descrito em (4.2). Para aplicar esse método, é necessário conhecer a primeira e a segunda derivada da função $R(\cdot)$ e dar um ponto inicial \mathbf{d}_0 . As derivadas podem ser encontradas em Shimotsu (2004) e o ponto inicial é dado através da estimativa univariada individual de cada um dos parâmetros d_j , para $j \in \{1, \dots, m\}$. Por esse motivo, o estimador de Lobato (1999) é chamado estimador de dois passos multivariado.

Observamos que é necessário definir um estimador univariado para que possa ser utilizado para o primeiro passo do estimador de Lobato (1999) e, conseqüentemente, para o estimador GSE.

4.2 ESTIMADOR GPH

Nesta seção, apresentamos o estimador univariado proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), o qual é obtido através do método de regressão linear baseado na função periodograma. A seguir, descrevemos tal método de estimação.

Considere $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARFIMA(p, d, q), conforme Definição 3.4, com média $\mu = 0$. Sabemos que a função densidade espectral desse processo é dada por

$$f_X(\lambda) = f_U(\lambda) \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right]^{-2d}, \text{ para } \lambda \in (0, \pi], \quad (4.21)$$

onde

$$f_U(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-i\lambda})|^2}{2\pi |\phi(e^{-i\lambda})|^2}, \text{ para } \lambda \in (0, \pi], \quad (4.22)$$

é a função densidade espectral do processo ARMA(p, q)

$$(1 - \mathcal{B})^d X_t = U_t, \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}. \quad (4.23)$$

Aplicando o logaritmo e somando $\ln[f_U(0)]$ em ambos os lados da equação (4.21), obtemos a expressão

$$\ln[f_X(\lambda)] = \ln[f_U(0)] - d \ln \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right]^2 + \ln \left[\frac{f_U(\lambda)}{f_U(0)} \right]. \quad (4.24)$$

Substituindo, na equação (4.24), a frequência λ pelas frequências de Fourier $\lambda_\ell = \frac{2\pi\ell}{n}$, para $\ell = 1, \dots, g(n)$ e somando $\ln[I_n(\lambda_\ell)]$ em ambos os lados da equação (4.24), onde $I_n(\cdot)$ é a função periodograma dada na equação (2.62), obtemos

$$\begin{aligned} \ln[I_n(\lambda_\ell)] &= \ln[f_U(0)] - d \ln \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\lambda_\ell}{2} \right) \right]^2 \\ &\quad + \ln \left[\frac{I_n(\lambda_\ell)}{f_X(\lambda_\ell)} \right] + \ln \left[\frac{f_U(\lambda_\ell)}{f_U(0)} \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Se λ_ℓ está próximo de zero, digamos $\lambda_\ell \leq \lambda_{g(n)}$, onde $g(n)$ é pequeno, então o último termo é negligível se comparado com os outros termos do lado direito da igualdade (4.25) (ver Geweke e Porter-Hudak, 1983). Desta forma, podemos escrever (4.25) como uma equação de regressão linear simples

$$y_\ell = a + b x_\ell + \varepsilon_\ell, \text{ para } \ell \in \{1, \dots, g(n)\}, \quad (4.26)$$

onde

$$\begin{aligned} y_\ell &= \ln[I_n(\lambda_\ell)], \quad x_\ell = \ln \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\lambda_\ell}{2} \right) \right], \quad a = \ln[f_U(0)], \quad b = -d, \\ \epsilon_\ell &= \ln \left[\frac{I_n(\lambda_\ell)}{f_X(\lambda_\ell)} \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Geralmente, utiliza-se $g(n) = n^\alpha$, para $\alpha \in (0, 1)$.

Como a seqüência $\{\epsilon_\ell\}_{\ell=1}^{g(n)}$ é aproximadamente independente (ver Geweke e Porter-Hudak, 1983), a estimação de d é dada pelo método dos mínimos quadrados de $y_1, y_2, \dots, y_{g(n)}$ em $x_1, x_2, \dots, x_{g(n)}$, o que fornece o estimador

$$\hat{d}_{GPH} = - \frac{\sum_{\ell=1}^{g(n)} (x_\ell - \bar{x})(y_\ell - \bar{y})}{\sum_{\ell=1}^{g(n)} (x_\ell - \bar{x})^2}, \quad (4.28)$$

onde

$$\bar{x} = \frac{1}{g(n)} \sum_{\ell=1}^{g(n)} x_\ell. \quad (4.29)$$

Robinson (1991, 1994) demonstrou a consistência e a normalidade assintótica para o estimador GPH para processos com longa dependência, quando $d \in (-0.5, 0.5)$.

4.3 ESTIMADOR SEMI-PARAMÉTRICO MULTIVARIADO CGPH

Uma estimação semi-paramétrica tem a característica de não necessitar o conhecimento dos parâmetros de memória curta, presentes nos polinômios $\Phi(\cdot)$ e $\Theta(\cdot)$ no caso dos processos ARFIMA(p, d, q). Essa característica leva a estimadores consistentes.

No caso multivariado, segundo Shimotsu (2004), o estimador GSE é consistente e fornece boas estimativas para o parâmetro \mathbf{d} , até mesmo se as componentes do processo são correlacionadas. Mas, é necessário outro estimador univariado para fornecer a estimativa inicial utilizada para minimizar a função objetiva, o que torna esse procedimento mais lento computacionalmente.

Para agilizar o processo de estimação do parâmetro \mathbf{d} propomos, a partir da idéia pioneira de Geweke e Porter-Hudak (1983), um estimador semi-paramétrico multivariado utilizando a função periodograma cruzado. Esse estimador é dado na subseção 4.3.1.

4.3.1 CONSTRUÇÃO DO ESTIMADOR CGPH

No Teorema 3.5 mostramos que a função densidade espectral cruzada entre as componentes $\{X_{j,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{X_{k,t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$, para $j, k \in \{1, \dots, m\}$, de um processo VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0) $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, é proporcional a $\lambda^{-d_j-d_k}$ em uma vizinhança da frequência zero, ou seja,

$$f_{jk}^X(\lambda) \sim c_{jk} \lambda^{-d_j-d_k}, \text{ quando } \lambda \rightarrow 0^+, \quad (4.30)$$

onde c_{jk} é uma constante positiva.

Tomando o módulo em ambos os lados da equação (4.30), resulta

$$|f_{jk}^X(\lambda)| \sim |c_{jk}| |\lambda|^{-d_j-d_k}, \text{ quando } \lambda \rightarrow 0^+. \quad (4.31)$$

Assim, aplicando o logaritmo na equação (4.31), obtemos

$$\ln(|f_{jk}^X(\lambda)|) \sim \ln(|c_{jk}|) - (d_j + d_k) \ln(|\lambda|), \text{ quando } \lambda \rightarrow 0^+. \quad (4.32)$$

Segue imediatamente da Definição 2.18, que a função periodograma cruzado não é uma função par, ou seja, $I_{jk,n}(\lambda) \neq I_{jk,n}(-\lambda)$, para todo $j, k \in \{1, \dots, m\}$ e $\lambda \in (-\pi, \pi]$, mas, vale a igualdade

$$I_{jk,n}(\lambda) = I_{jk,n}^*(-\lambda). \quad (4.33)$$

A igualdade (4.33) implica que $|I_{jk,n}(\lambda)| = |I_{jk,n}(-\lambda)|$. Portanto, o conjunto de frequências a ser considerado é o das frequências de Fourier λ_ℓ , para $\ell \in \{1, \dots, g(n)\}$ e n o tamanho amostral. Sendo assim, não é necessário considerar as frequências negativas como na definição do periodograma cruzado.

É conhecido que se $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1}^n$ é uma amostra do processo $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, então um estimador não-viciado para a função densidade espectral cruzada $f_{jk}^X(\cdot)$ é a função periodograma cruzado dada na Definição 2.18 (ver Teorema 2.3).

Somando $\ln \left[|I_{jk,n}(\lambda_\ell)| \right]$ em ambos os lados da equação (4.32), obtemos a expressão

$$\ln \left[|I_{jk,n}(\lambda_\ell)| \right] = \ln(|c_{jk}|) - (d_j + d_k) \ln(|\lambda_\ell|) + \ln \left[\frac{|I_{jk,n}(\lambda_\ell)|}{|f_{jk}^X(\lambda_\ell)|} \right], \quad (4.34)$$

que é exatamente uma equação da forma de uma regressão linear simples

$$y_{jk,\ell} = a_{jk} + b_{jk} x_{jk,\ell} + \epsilon_{jk,\ell}, \text{ para } \ell \in \{1, \dots, g(n)\}, \quad (4.35)$$

onde

$$y_{jk,\ell} = \ln \left[|I_{jk,n}(\lambda_\ell)| \right], \quad x_{jk,\ell} = \ln(|\lambda_\ell|), \quad a_{jk} = \ln(|g_{jk}|),$$

$$b_{jk} = -(d_j + d_k), \quad \epsilon_{jk,\ell} = \ln \left[\frac{|I_{jk,n}(\lambda_\ell)|}{|f_{jk}(\lambda_\ell)|} \right], \quad (4.36)$$

e $g(n) = n^\alpha$, para $\alpha \in (0, 1)$.

O próximo teorema apresenta a distribuição e função de covariância assintóticas da matriz das funções periodogramas. Esse resultado é essencial para que possamos aplicar o método dos mínimos quadrados à equação (4.35) e finalizar o estimador.

Teorema 4.1. *Seja $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico multivariado*

$$\mathbf{X}_t = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathbf{C}_\ell \boldsymbol{\varepsilon}_{t-\ell}, \quad (4.37)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim IID(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma}$ é não-singular e com as componentes das matrizes $\mathbf{C}_\ell = (\mathbf{C}_\ell(j, k))_{j,k=1}^m$ satisfazendo

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\mathbf{C}_\ell(j, k)| |\ell|^{1/2} < \infty, \quad \text{para } j, k \in \{1, \dots, m\}, \quad (4.38)$$

e $\mathbf{I}_n(\lambda) = (I_{jk,n}(\lambda))_{j,k=1}^m$, para $\lambda \in (-\pi, \pi]$, a matriz das funções periodogramas do processo $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

i) Se $0 < \lambda_1, \dots, \lambda_{g(n)} < \pi$, então $\mathbf{I}_n(\lambda_1), \dots, \mathbf{I}_n(\lambda_{g(n)})$ convergem conjuntamente, em distribuição, para matrizes aleatórias independentes cujo ℓ -ésimo elemento é distribuído como $\mathbf{W}_\ell \mathbf{W}_\ell^*$, onde \mathbf{W}_ℓ tem distribuição normal multivariada complexa, ou seja, $\mathbf{W}_\ell \sim \mathcal{N}_c(\mathbf{0}, 2\pi \mathbf{f}_X(\lambda_\ell))$, onde $\mathbf{f}_X(\cdot)$ é a matriz das funções densidades espectrais do processo $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

ii) Se $\lambda_\ell, \lambda_r \in (0, \pi]$, para $\ell, r \in \{1, \dots, g(n)\}$, são frequências de Fourier, então

$$Cov(I_{jk,n}(\lambda_\ell), I_{ab,n}(\lambda_\ell)) = \begin{cases} 4\pi^2 [f_{ja}(\lambda_\ell)f_{bk}(\lambda_\ell) + f_{jb}(\lambda_\ell)f_{ka}(\lambda_\ell)], & \text{se } \lambda_\ell = \lambda_r = 0 \text{ ou } \pi; \\ 4\pi^2 [f_{ja}(\lambda_\ell)f_{bk}(\lambda_\ell)] + O(n^{-\frac{1}{2}}), & \text{se } 0 < \lambda_\ell = \lambda_r < \pi; \\ O(n^{-1}), & \text{se } \lambda_\ell \neq \lambda_r, \end{cases} \quad (4.39)$$

onde $O(\cdot)$ é dado em (3.77) e os termos $O(n^{-\frac{1}{2}})$ e $O(n^{-1})$ são uniformemente limitados, respectivamente, por $c_1 n^{-\frac{1}{2}}$ e $c_2 n^{-1}$ para determinadas constantes positivas c_1 e c_2 .

A demonstração desse teorema é um pouco complicada e pode ser encontrada em Hannan (1970).

Segue do Teorema 4.1, que a seqüência $\{\epsilon_{jk,\ell}\}_{\ell=1}^{g(n)}$ é formada por variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, o que permite estimar $d_j + d_k$ pelo método dos mínimos quadrados.

Pelo método dos mínimos quadrados, aplicado à equação de regressão (4.35), a estimativa da soma $d_j + d_k$ é dada por

$$\hat{d}_j + \hat{d}_k = - \frac{\sum_{\ell=1}^{g(n)} (x_{jk,\ell} - \bar{x}_{jk})(y_{jk,\ell} - \bar{y}_{jk})}{\sum_{\ell=1}^{g(n)} (x_{jk,\ell} - \bar{x}_{jk})^2}, \quad (4.40)$$

onde

$$\bar{x}_{jk} = \frac{1}{g(n)} \sum_{\ell=1}^{g(n)} x_{jk,\ell}.$$

Fazendo este processo para cada $j, k \in \{1, \dots, m\}$, $j \neq k$, temos um sistema linear simples. Por exemplo, para $m = 3$, o sistema é dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{d}_1 \\ \hat{d}_2 \\ \hat{d}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{d}_1 + \hat{d}_2 \\ \hat{d}_1 + \hat{d}_3 \\ \hat{d}_2 + \hat{d}_3 \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Como o procedimento utilizado aqui é semelhante ao procedimento utilizado para construir o GPH, denotamos o estimador dado na equação (4.40) por CGPH, pelo fato dele utilizar a função periodograma cruzado, a qual contém informações de quaisquer duas séries temporais presentes na amostra $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1}^n$.

Observação 4.1. Uma das restrições desse estimador é o fato de que necessitamos de, no mínimo, três séries temporais para que o sistema (4.41) tenha solução.

Observação 4.2. Para construir esse estimador consideramos um processo VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0) para simplificar o procedimento. No entanto, o estimador CGPH pode ser utilizado também para processos VARFIMA(p , \mathbf{d} , q). Nesse caso, podemos estimar o parâmetro de integração fracionária, \mathbf{d} , utilizando o CGPH e então utilizar, em um segundo passo, o método de máxima verossimilhança (ver Brockwell e Davis, 1991) para estimar as matrizes $\Phi(\cdot)$ e $\Theta(\cdot)$ definidas na equação (3.10), após diferenciar cada componente $X_{j,t}$ do estimador \hat{d}_j .

4.3.2 ESTIMADOR CGPH SUAVIZADO

Como visto no Teorema 2.3, a função periodograma cruzado $I_{jk,n}(\cdot)$, dada na equação (2.63), é um estimador não-viciado, porém, inconsistente para a função densidade espectral cruzada. Quando suavizamos a função periodograma cruzado obtemos um estimador consistente para a função densidade espectral cruzada. Esse estimador é dado por

$$\hat{f}_{jk}^s(\lambda_\ell) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-q_n}^{q_n} \Lambda_n(h) I_{jk,n}(\lambda_{\ell+h}), \text{ para } \ell \in \{1, \dots, g(n)\}, \quad (4.42)$$

onde $\Lambda_n(\cdot)$ é uma função de ponderação, dada na Definição 2.14.

Substituindo $I_{jk,n}(\cdot)$ por $\hat{f}_{jk}^s(\cdot)$ na equação (4.34), obtemos um estimador multivariado para o parâmetro de longa dependência \mathbf{d} . Este estimador será denotado por SCGPH, em virtude da suavização feita, e é dado por

$$(\hat{d}_j + \hat{d}_k)_{SCGPH} = -\frac{\sum_{\ell=1}^{g(n)} (x_{jk,\ell} - \bar{x}_{jk})(y_{jk,\ell} - \bar{y}_{jk})}{\sum_{\ell=1}^{g(n)} (x_{jk,\ell} - \bar{x}_{jk})^2}, \quad (4.43)$$

onde

$$y_{jk,\ell} = \ln \left[\left| \hat{f}_{jk}^s(\lambda_\ell) \right| \right], \quad x_{jk,\ell} = \ln(|\lambda_\ell|), \quad \bar{x}_{jk} = \frac{1}{g(n)} \sum_{\ell=1}^{g(n)} x_{jk,\ell},$$

$$b_{jk} = -(d_j + d_k), \quad a_{jk} = \ln(|g_{jk}|), \quad \epsilon_{jk,\ell} = \ln \left[\frac{|I_{jk,n}(\lambda_\ell)|}{|\hat{f}_{jk}^s(\lambda_\ell)|} \right] \quad (4.44)$$

e $g(n) = n^\alpha$, para $\alpha \in (0, 1)$.

Observação 4.3. Em geral, pode-se utilizar qualquer função de ponderação na equação (4.42). Nosso estudo baseia-se na utilização das janelas de Parzen e de Bartlett e suas correspondentes funções de ponderação, as quais são apresentadas na Proposição 2.1.

Capítulo 5

Simulações

O estimador GSE, proposto por Shimotsu (2004) e descrito na Seção 4.1, é um estimador multivariado para o parâmetro \mathbf{d} e apresenta bons resultados para amostras correlacionadas. Como a proposta inicial do nosso trabalho é considerar dados correlacionados, na Seção 5.3 comparamos os estimadores GSE e SCGPH através de simulações de Monte Carlo. Na Seção 5.1, estudamos o comportamento dos estimadores CGPH e GPH em amostras correlacionadas. Finalmente, na Seção 5.2, determinamos o inteiro q_n , denominado *ponto de truncamento*, para a função de ponderação de Parzen, também através de simulações de Monte Carlo.

5.1 COMPORTAMENTO DOS ESTIMADORES GPH E CGPH NA PRESENÇA DE CORRELAÇÃO

Nesta seção, estudamos o comportamento dos estimadores GPH e CGPH quando as séries temporais componentes são correlacionadas.

Para simular os dados correlacionados, geramos o vetor erro com distribuição normal multivariada, com média $\mathbf{0}$ e matriz de variâncias e covariâncias

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

o que pode ser realizado facilmente utilizando-se uma rotina do “software” MATLAB. Esse software foi utilizado para realizar todas as simulações desse trabalho.

No Apêndice B, apresentamos os dados das simulações para determinar o melhor valor do parâmetro α para os estimadores GPH e CGPH. Podemos observar, através destas simulações, que ambos os estimadores apresentam melhores resultados quando $\alpha \in \{0.75, 0.76\}$.

Simulamos amostras de processos VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0) com dimensão três, cujas componentes são correlacionadas com coeficiente de correlação $\rho \in \{0.0, 0.1, \dots, 0.9\}$. Comparamos os estimadores CGPH e GPH para tamanho de série $n \in \{500, 1000, 1500, 2000\}$ e $\mathbf{d} = (0.2, 0.3, 0.4)$, considerando 1000 replicações para cada conjunto $\{n, \mathbf{d}, \rho\}$. A análise do comportamento do estimador é feita através do cálculo do vício, do erro quadrático médio e do desvio padrão (denotados, respectivamente, por vício, eqm e dp nas figuras e tabelas). Neste trabalho, utilizamos somente correlações positivas pois a rotina do MATLAB exige que a matriz de correlações seja positiva definida.

Os resultados podem ser observados nas Figuras 5.1 e 5.2. Como podemos verificar, ambos os estimadores têm comportamento semelhante, mas, o estimador CGPH apresenta menor vício, erro quadrático médio e desvio padrão do que o GPH em todos os casos. No entanto, não podemos afirmar que o estimador CGPH apresenta melhoras significativas à medida que a correlação aumenta. Além disso, é possível notar que o estimador CGPH apresenta um comportamento que depende do parâmetro d .

Através de simulações, apresentadas no apêndice B, podemos observar que o estimador CGPH apresenta vício relativamente pequeno quando $\alpha = 0.75$. Por essa razão, utilizamos o valor $\alpha = 0.75$ para as simulações, cujos resultados são apresentados nas Figuras 5.1 e 5.2.

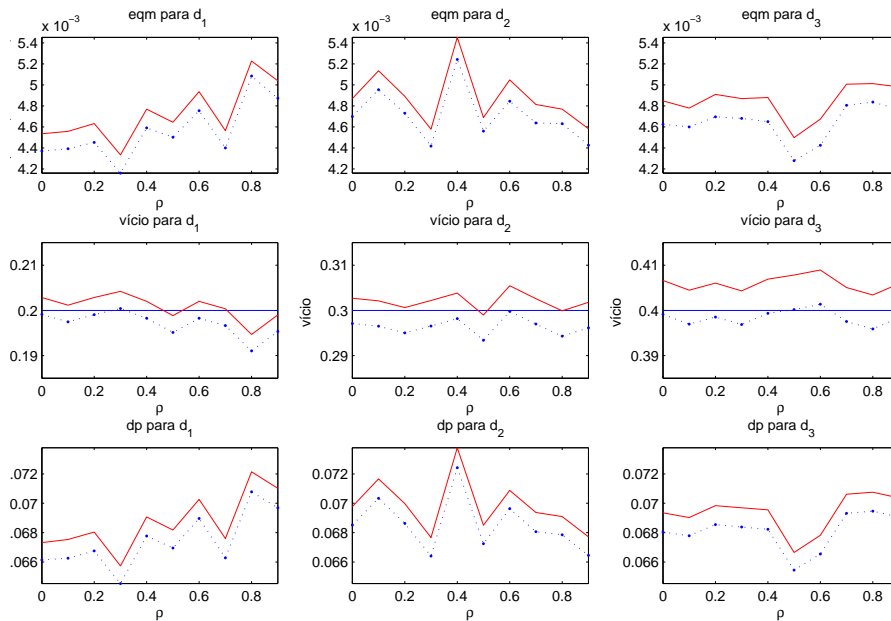


Figura 5.1: Erro quadrático médio, vício e desvio padrão para a estimação de \mathbf{d} , quando $\rho \in \{0.0, 0.1, \dots, 0.9\}$, $\mathbf{d} = (0.2, 0.3, 0.4)$, $\alpha = 0.75$ e $n = 500$.

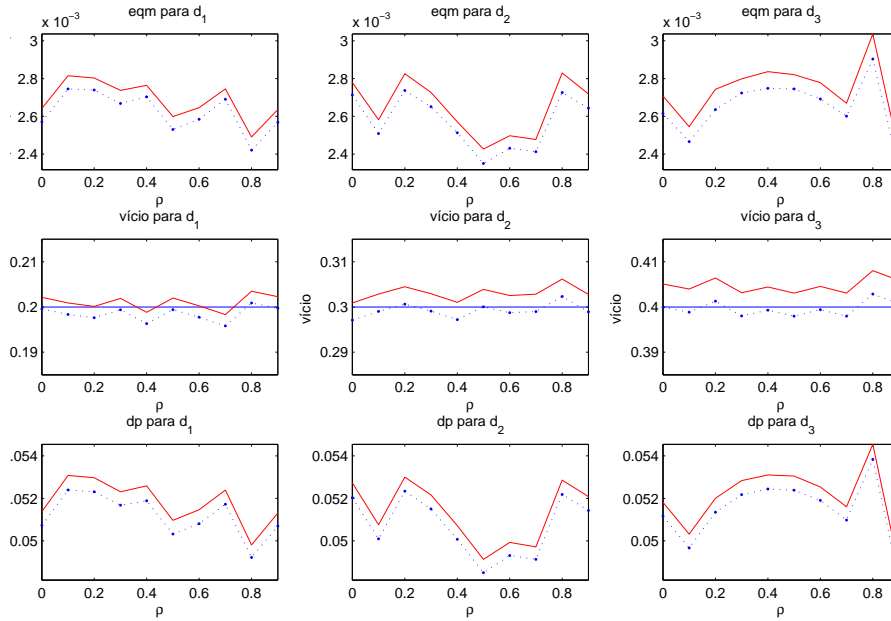


Figura 5.2: Erro quadrático médio, vício e desvio padrão para a estimação de \mathbf{d} , quando $\rho \in \{0.0, 0.1, \dots, 0.9\}$, $\mathbf{d} = (0.2, 0.3, 0.4)$, $\alpha = 0.75$ e $n = 1000$.

5.2 SIMULAÇÕES PARA O ESTIMADOR SCGPH

Para suavizar o estimador SCGPH, dado pela equação (4.42), utilizamos uma função de ponderação, para a qual necessitamos determinar o ponto de truncamento q_n . Para determinar o melhor q_n para a função de ponderação de Parzen, através de simulações de Monte Carlo, escolhemos $\mathbf{d} \in \{(0.4, 0.4, 0.4), (0.3, 0.3, 0.3), (0.2, 0.2, 0.2), (-0.2, -0.2, -0.2)\}$ e amostras de tamanho $n = 500$ realizando 1000 replicações para cada \mathbf{d} . Todas as simulações foram feitas utilizando correlação $\rho = 0.5$ entre as amostras. No Apêndice B, apresentamos os resultados das simulações para $n \in \{1000, 1500, 2000\}$, $\rho \in \{0.0, 0.8\}$ e $\mathbf{d} \in \{(0.4, 0.4, 0.4), (0.3, 0.3, 0.3), (0.2, 0.2, 0.2), (-0.2, -0.2, -0.2)\}$.

As Figuras B.6-5.6 mostram os resultados do erro quadrático médio, vício e desvio padrão do estimador SCGPH para vários valores de q_n na função de ponderação de Parzen, a qual apresentou melhores resultados para esse estimador. É importante observar que o estimador SCGPH reduz-se ao estimador CGPH quando $q_n = 0$. Podemos verificar que o estimador SCGPH já apresenta bons resultados para vício, erro quadrático médio e desvio padrão para todos os pares (n, \mathbf{d}) quando $q_n = 1$, apesar de q_n ser uma função de n . Também podemos observar que o desvio padrão e o erro médio quadrático parecem depender de \mathbf{d} . Isso já era esperado, visto que, quando $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é

um processo VARFIMA(p, \mathbf{d}, q) e $\rho \neq 0$, a matriz \mathbf{G} , em (3.73), depende do parâmetro \mathbf{d} .

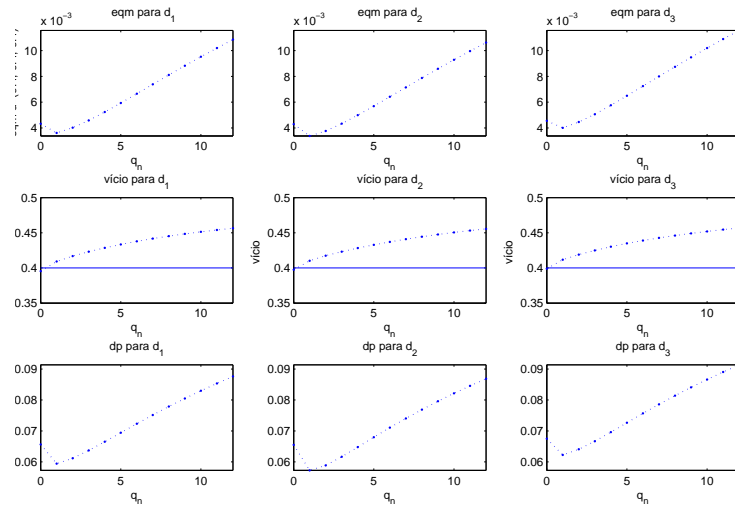


Figura 5.3: Resultados para a estimação de \mathbf{d} , através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.3, 0.3, 0.3)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.5$ e $n = 500$.

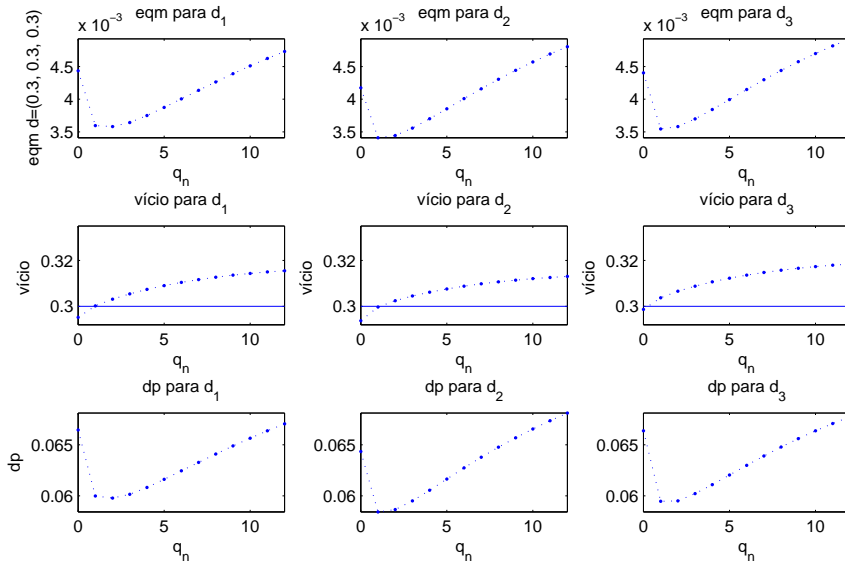


Figura 5.4: Resultados para a estimação de \mathbf{d} , através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.3, 0.3, 0.3)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.5$ e $n = 500$.

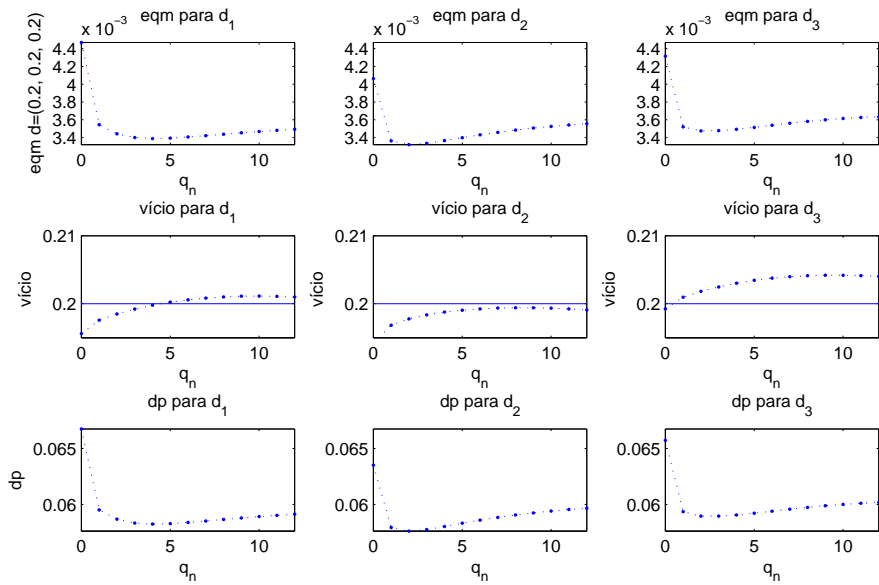


Figura 5.5: Resultados para a estimação de \mathbf{d} , através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.2, 0.2, 0.2)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.5$ e $n = 500$.

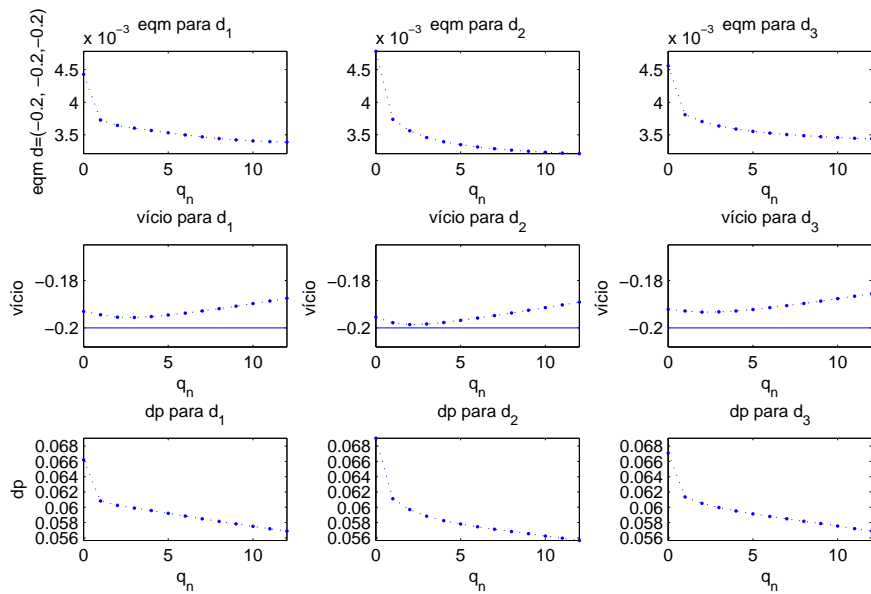


Figura 5.6: Resultados para a estimação de \mathbf{d} , através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (-0.2, -0.2, -0.2)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.5$ e $n = 500$.

5.3 COMPARANDO OS ESTIMADORES SCGPH E GSE

O objetivo desta seção é comparar o estimador SCGPH com o estimador GSE, proposto por Shimotsu (2004). Os dados para o estimador GSE foram retirados de Shimotsu (2004), visto que, a implementação computacional desse estimador é um pouco complicada, o que resultou em uma rotina muito lenta, inviabilizando a realização de simulações de Monte Carlo.

A média, o vício, o desvio padrão e a raiz quadrada do erro quadrático médio são calculados utilizando-se 10.000 replicações. O tamanho amostral escolhido é $n = 500$ e $g(n) = n^\alpha$, com $\alpha = 0.75$ para o estimador SCGPH e $\alpha = 0.65$ para o estimador GSE. Utilizamos a janela de Parzen com $q_n = 1$. Shimotsu (2004) escolheu $\mathbf{d} \in \{(0.2, -0.2), (0.2, 0.2), (0.2, 0.4)\}$. No entanto, o estimador SCGPH necessita de no mínimo três séries temporais, consideramos o conjunto de parâmetros $\{(0.2, -0.2, 0.2), (0.2, 0.2, 0.2), (0.2, 0.4, 0.2)\}$ para realizar as simulações. Foram geradas $n + 2000$ observações e descartadas as primeiras 2000.

As Tabelas 5.1-5.3 comparam os estimadores SCGPH e GSE. Ambos os estimadores têm vícios relativamente pequenos para todos os valores de \mathbf{d} , mas o estimador SCGPH apresenta, sistematicamente, menor desvio padrão e menor erro quadrático médio para $\rho \in \{0.0, 0.5\}$, isso porque o estimador SCGPH não apresenta variação nas estimativas à medida que modificamos a correlação. No entanto, quando $\rho = 0.8$ observamos que o estimador GSE apresenta melhores resultados para vício, desvio padrão e erro quadrático médio com relação ao estimador SCGPH (ver Tabela 5.3). O tempo computacional para uma simulação para um par (ρ, \mathbf{d}) foi de cerca de três horas em um PC com capacidade de processamento de 2GHz.

Tabela 5.1. Comparação do vício, desvio padrão e erro quadrático médio entre os estimadores SCGPH e GSE, quando $\rho = 0.0$, $m = 3$, $\alpha = 0.75$, $\mathbf{d} \in \{(0.2, -0.2, 0.2), (0.2, 0.2, 0.2), (0.2, 0.4, 0.2)\}$ e $n = 500$.

SCGPH				GSE		
$\rho = 0.0$						
$\hat{\mathbf{d}}$	vício	dp	eqm	vício	dp	eqm
$\mathbf{d} = (0.2, -0.2, 0.2)$						
\hat{d}_1	-0.0020	0.0655	0.0042	-0.0064	0.0789	0.0062
\hat{d}_2	0.0057	0.0659	0.0043	-0.0038	0.0777	0.0060
\hat{d}_3	-0.0029	0.0655	0.0042			
$\mathbf{d} = (0.2, 0.2, 0.2)$						
\hat{d}_1	-0.0029	0.0650	0.0042	-0.0060	0.0781	0.0061
\hat{d}_2	-0.0029	0.0657	0.0043	-0.0074	0.0781	0.0061
\hat{d}_3	-0.0040	0.0651	0.0042			
$\mathbf{d} = (0.2, 0.4, 0.2)$						
\hat{d}_1	-0.0020	0.0655	0.0042	-0.0062	0.0785	0.0061
\hat{d}_2	-0.0035	0.0662	0.0043	-0.0020	0.0790	0.0062
\hat{d}_3	-0.0029	0.0655	0.0042			

Tabela 5.2. Comparação do vício, desvio padrão e erro quadrático médio entre os estimadores SCGPH e GSE, quando $\rho = 0.5$, $m = 3$, $\alpha = 0.75$, $\mathbf{d} \in \{(0.2, -0.2, 0.2), (0.2, 0.2, 0.2), (0.2, 0.4, 0.2)\}$ e $n = 500$.

SCGPH				GSE		
$\rho = 0.5$						
$\hat{\mathbf{d}}$	vício	dp	eqm	vício	dp	eqm
$\mathbf{d} = (0.2, -0.2, 0.2)$						
\hat{d}_1	-0.0029	0.0650	0.0042	-0.0043	0.0672	0.0045
\hat{d}_2	0.0064	0.0661	0.0042	-0.0007	0.0665	0.0044
\hat{d}_3	-0.0040	0.0652	0.0042			
$\mathbf{d} = (0.2, 0.2, 0.2)$						
\hat{d}_1	-0.0020	0.0655	0.0042	-0.0059	0.0667	0.0044
\hat{d}_2	-0.0033	0.0650	0.0042	-0.0055	0.0665	0.0044
\hat{d}_3	-0.0025	0.0653	0.0042			
$\mathbf{d} = (0.2, 0.4, 0.2)$						
\hat{d}_1	-0.0029	0.0650	0.042	-0.0034	0.0670	0.0045
\hat{d}_2	-0.0027	0.0662	0.043	-0.0016	0.0673	0.0045
\hat{d}_3	-0.0040	0.0652	0.042			

Tabela 5.3. Comparação do vício, desvio padrão e erro quadrático médio entre os estimadores SCGPH e GSE, quando $\rho = 0.8$, $m = 3$, $\alpha = 0.75$, $\mathbf{d} \in \{(0.2, -0.2, 0.2), (0.2, 0.2, 0.2), (0.2, 0.4, 0.2)\}$ e $n = 500$.

SCGPH				GSE		
$\rho = 0.8$						
$\hat{\mathbf{d}}$	vício	dp	eqm	vício	dp	eqm
$\mathbf{d} = (0.2, -0.2, 0.2)$						
\hat{d}_1	-0.0020	0.0655	0.0042	0.0022	0.0597	0.0035
\hat{d}_2	0.0061	0.0651	0.0042	0.0056	0.0599	0.0036
\hat{d}_3	-0.0024	0.0644	0.0041			
$\mathbf{d} = (0.2, 0.2, 0.2)$						
\hat{d}_1	-0.0020	0.0655	0.0042	-0.0052	0.0587	0.0034
\hat{d}_2	-0.0031	0.0651	0.0042	-0.0047	0.0585	0.0034
\hat{d}_3	-0.0024	0.0644	0.0041			
$\mathbf{d} = (0.2, 0.4, 0.2)$						
\hat{d}_1	-0.0029	0.0650	0.0042	0.0001	0.0595	0.0035
\hat{d}_2	-0.0029	0.0660	0.0043	0.0004	0.0597	0.0036
\hat{d}_3	-0.0033	0.0651	0.0042			

Capítulo 6

Análise de Séries Reais

O objetivo aqui é analisar dados reais utilizando a metodologia desenvolvida ao longo deste trabalho. Analisamos um conjunto de três séries temporais correlacionadas. O conjunto de séries temporais é composto pelo Ibovespa, que é o índice da Bolsa de Valores de São Paulo e mede o comportamento das ações mais negociadas. Esse índice indica o desempenho médio das cotações de uma carteira teórica de ações negociadas no pregão. A carteira considerada possui ações de 55 empresas selecionadas entre as que representaram 80% do volume negociado no mercado nos últimos doze meses. Compõem o conjunto ainda, as séries temporais dos valores das ações das empresas Brasil Telecom e Gerdau. Os dados foram retirados dos respectivos endereços eletrônicos “www.brasiltelecom.com.br” e “www.gerdau.com.br”, que também forneceram os dados para o índice Ibovespa, e ajustados conforme os “*splits*” ocorridos. “*Split*” é um termo utilizado pelos economistas para denotar uma multiplicação ou uma divisão do número de ações de cada acionista. Por exemplo, em um “*split*” de 2, quem tinha 100 ações a R\$ 60,86 passou a ter 200 a R\$ 31,00. Para ajustar, multiplica-se a série temporal por 2 do dia em que ocorreu o split até o final da série.

6.1 SÉRIE TEMPORAL DOS RETORNOS DIÁRIOS

Em finanças, um dos objetivos é a avaliação de riscos de uma carteira de ativos (instrumentos) financeiros. O risco é freqüentemente medido em termos de variações de preços dos ativos.

Definição 6.1. Seja P_t o preço de um ativo no instante t . O *retorno* destes ativos é dado por

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \quad (6.1)$$

Morettin (2006) analisou a série temporal de valores absolutos dos retornos diários das ações da Petrobrás no período de 02/01/1995 a 27/12/2000

e ajustou um modelo ARFIMA(p, d, q), com $p = 2$, $\hat{d} = 0.346$ e $q = 1$, utilizando o “software” FinMetrics + S-plus através do método da máxima verossimilhança. Como $\hat{d} \in (0.0, 0.5)$, esse resultado indica a presença de longa dependência nesses dados. O autor também encontrou longa dependência ao analisar a série temporal dos retornos diários do IBovespa no mesmo período. Para essa estimação o método de estimação utilizado por Morettin (2006) foi o de Hurst (ver Beran, 1994) cujo valor estimado foi $\hat{d} = 0.21$, o que também indica a presença de longa dependência para esses dados.

6.2 ANÁLISE DAS SÉRIES TEMPORAIS DO IBOVESPA, BRASIL TELECOM E GERDAU

Analizamos os dados do IBovespa e as séries dos preços das ações da Brasil Telecom e Gerdau no período de 02/01/1995 a 27/12/2000. É importante lembrar que esses dados são altamente correlacionados. Para essas séries temporais, a matriz das correlações cruzadas amostrais é dada por

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.8150 & 0.9145 \\ 0.8150 & 1.0000 & 0.6759 \\ 0.9145 & 0.6759 & 1.0000 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

O gráfico das séries do IBovespa e das ações da Brasil Telecom e da Gerdau são apresentados na Figura 6.1.

A característica de longa dependência é visível quando consideramos a série temporal de valores absolutos dos retornos diários para o IBovespa, Brasil Telecom e Gerdau. Para o cálculo dos retornos diários das ações, dados na Definição 6.1, utilizamos o preço de fechamento, em reais.

Quando utilizamos as séries temporais de valores absolutos dos retornos diários de qualquer conjunto de séries reais, modificamos informações, como, por exemplo, a correlação entre as componentes. Por exemplo, a matriz das correlações cruzadas amostrais das séries temporais de valores absolutos dos retornos diários do Ibovespa, Brasil Telecom e Gerdau é dada por

$$\hat{\mathbf{R}}_{ra} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.1490 & 0.3381 \\ 0.1490 & 1.0000 & 0.0713 \\ 0.3381 & 0.0713 & 1.0000 \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

que é diferente da matriz \hat{R} dada em (6.2).

A Figura 6.2 apresenta as séries temporais dos valores absolutos dos retornos diários do IBovespa, Brasil Telecom e Gerdau.

Podemos observar nas Figuras 6.3 e 6.4 que o decaimento lento da função de autocorrelações e o alto valor da função periodograma na origem mostram claramente a presença de longa dependência nessas séries temporais.

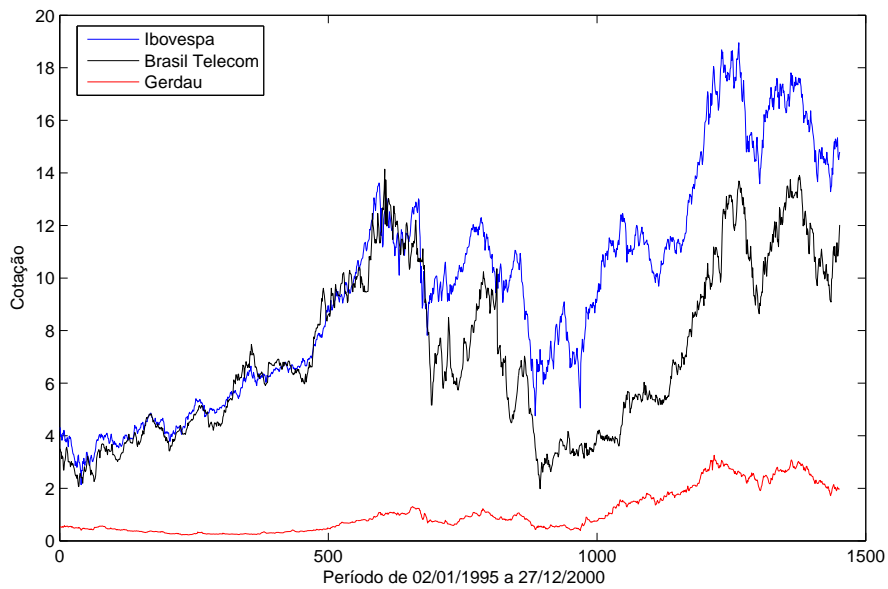


Figura 6.1: Séries Temporais das ações do Ibovespa, Brasil Telecom e Gerdau durante o período de 02/01/1995 a 27/12/2000.

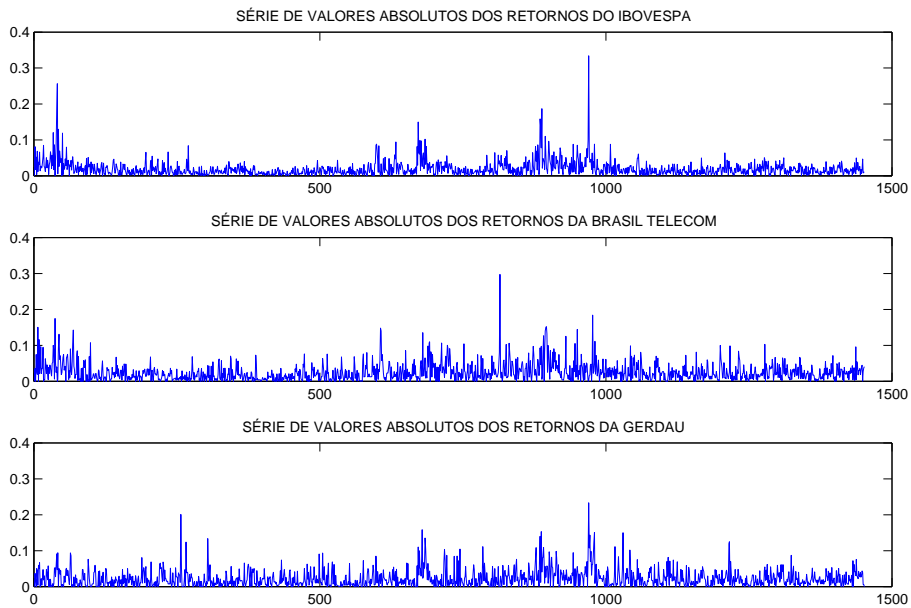


Figura 6.2: Séries temporais dos valores absolutos dos retornos diários do Ibovespa, Brasil Telecom e Gerdau.

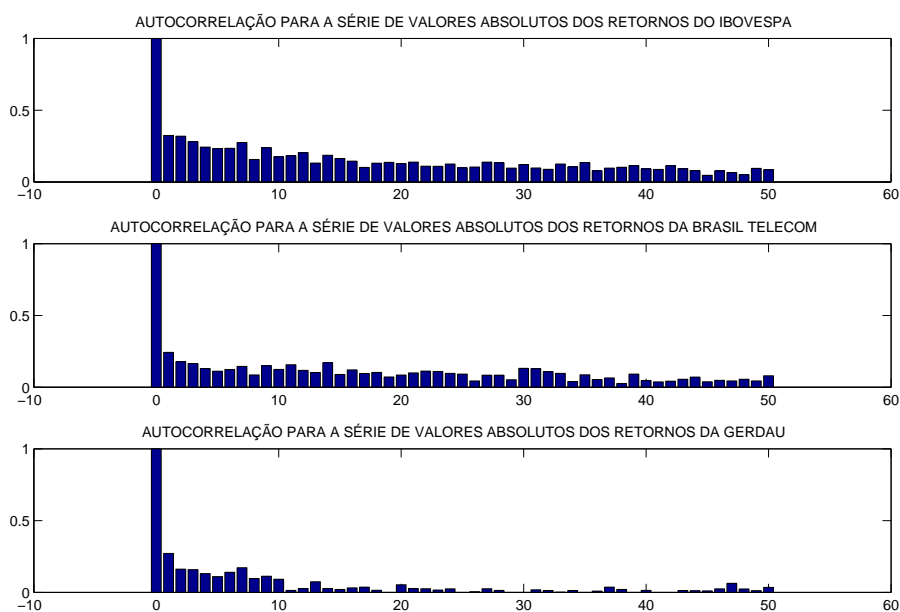


Figura 6.3: Função de autocorrelação amostral para as séries temporais dos valores absolutos dos retornos diários do IBovespa, Brasil Telecom e Gerdau.

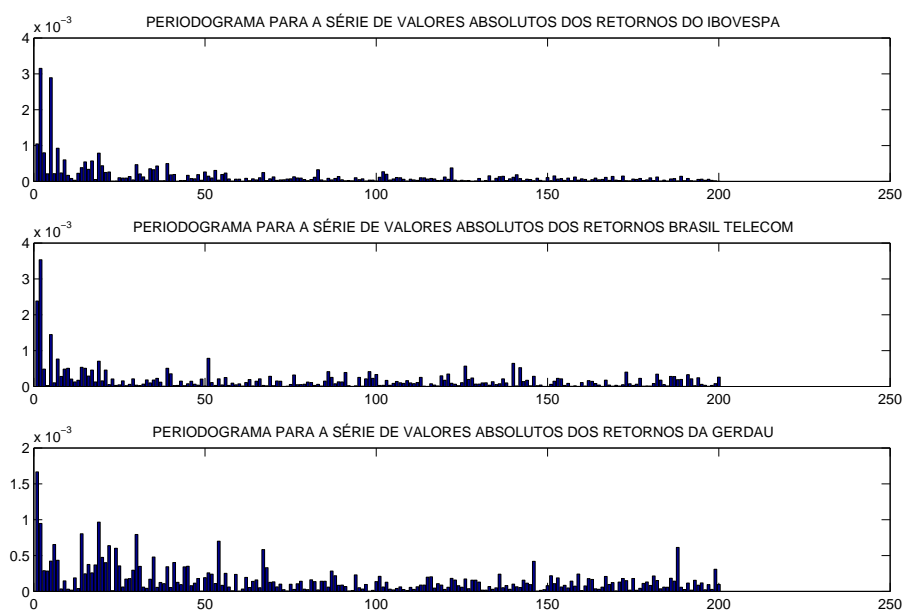


Figura 6.4: Função periodograma para as séries temporais dos valores absolutos dos retornos diários do IBovespa, Brasil Telecom e Gerdau.

O exemplo a seguir mostra a análise da série temporal do IBovespa durante o período de 30/01/2001 a 29/01/2007, período diferente do considerado anteriormente. Os procedimentos para essa análise são semelhantes aos que foram feitos nessa seção.

Exemplo 6.1. Análise da série temporal do IBovespa durante o período de 30/01/2001 a 29/01/2007.

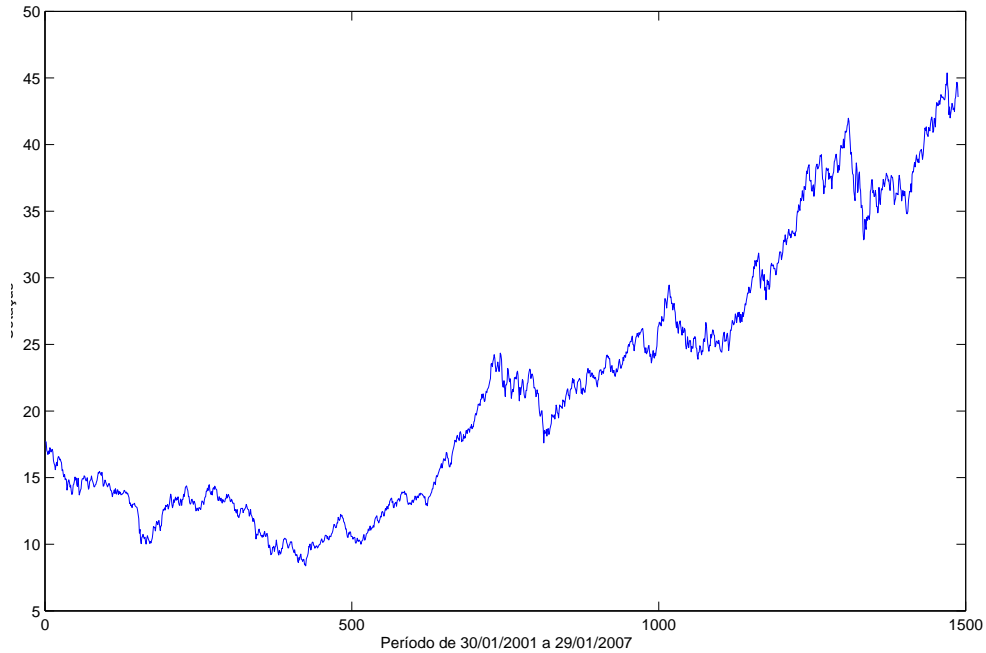


Figura 6.5: Série temporal do IBovespa no período de 30/01/2001 a 29/01/2007.

Embora no período de 02/01/1995 a 27/12/2000, a série temporal tenha apresentado longa dependência, não detectamos presença forte de longa dependência durante o período de 02/01/1995 a 27/12/2000. Isso pode ser explicado pela ineficiência do mercado acionário brasileiro nesse período, pelo fato desse ser um mercado emergente. No entanto, essa ineficiência reduz-se ao longo do tempo (ver Torres et al., 2002). Portanto, até o ano de 2000 o mercado acionário brasileiro era pouco eficiente e por esse motivo apresentava a característica de longa dependência. Depois do ano de 2000, esse mercado tornou-se mais eficiente.

Os resultados para a série de valores absolutos dos retornos diários do IBovespa, no período de 30/01/2001 a 29/01/2007, podem ser vistos na Figura 6.6. A função de autocorrelação amostral decai mais rapidamente para zero e a função periodograma apresenta um valor relativamente baixo em

zero. Baseado nisso, não podemos afirmar que a série temporal dos valores absolutos dos retornos diários do IBovespa possuem longa dependência.

A Figura 6.5 mostra a série temporal do IBovespa e a Figura 6.6 mostra a série temporal dos valores absolutos, funções de autocorrelação e periodograma da série temporal de valores absolutos dos retornos diários do IBovespa.

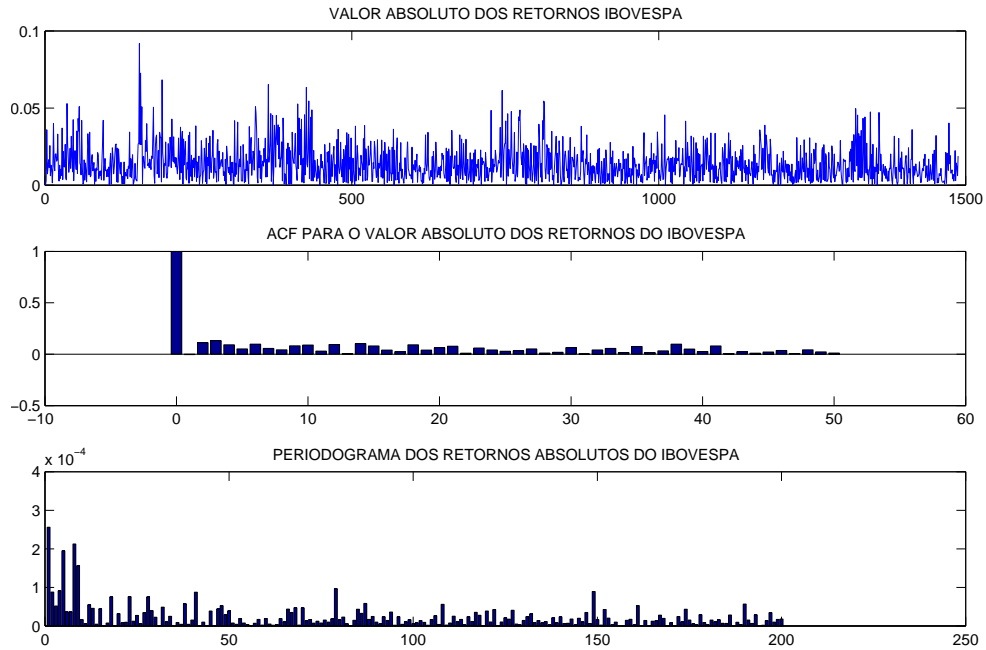


Figura 6.6: Série temporal, funções de autocorrelação amostral e periodograma para a série temporal dos valores absolutos dos retornos diários do IBovespa.

Utilizando os estimadores GPH e SCGPH, obtivemos uma estimativa do vetor de parâmetros de longa dependência $\mathbf{d} = (d_I, d_B, d_G)$, onde d_I, d_B e d_G correspondem aos parâmetros de longa dependência das séries temporais dos valores absolutos dos retornos diários do IBovespa, Brasil Telecom e Gerdau, respectivamente.

Tabela 6.1. Estimativa do parâmetro \mathbf{d} para as séries temporais dos valores absolutos dos retornos diários do IBovespa, Brasil Telecom e Gerdau.

$\hat{\mathbf{d}}$	GPH	SCGPH
\hat{d}_I	0.3023	0.2984
\hat{d}_B	0.2562	0.2529
\hat{d}_G	0.2119	0.2090

A partir dos resultados do estimador SCGPH, diferenciamos as séries temporais dos valores absolutos dos retornos diários do IBovespa, Brasil Telecom e Gerdau, respectivamente, de \hat{d}_I , \hat{d}_B e \hat{d}_G e realizamos a análise dos resíduos. Observando os resultados, verificamos que poderíamos encontrar um modelo que se ajustasse melhor a esses dados. Utilizamos a função VAR, do pacote FinMetrics + S-plus, para ajustar um modelo às séries temporais diferenciadas. O resultado é apresentado na Figura 6.7.

```

> var.fit=VAR(IBG.ts,max.ar=4, criterion="BIC")
> var.fit$info
      ar(1)      ar(2)      ar(3)      ar(4)
BIC -20591.35 -20541.81 -20511.96 -20476.92
> summary(var.fit)
Call:
VAR(data = IBG.ts, max.ar = 4, criterion = "BIC")

Coefficients:|
      ibovdiff brasdiff gerdaudiff
(Intercept)  0.0023  0.0045  0.0051
(std.err)    0.0005  0.0007  0.0006
(t.stat)     4.1793  6.6148  7.8295

      ibovdiff.lag1 -0.1266  0.0260  0.0684
(std.err)          0.0265  0.0336  0.0319
(t.stat)          -4.7738  0.7733  2.1478

      brasdiff.lag1  0.0467 -0.0751  0.0325
(std.err)          0.0207  0.0262  0.0248
(t.stat)           2.2580 -2.8643  1.3067

      gerdaudiff.lag1  0.1063  0.0128 -0.0012
(std.err)            0.0224  0.0284  0.0270
(t.stat)             4.7361  0.4516 -0.0430

Regression Diagnostics:
      ibovdiff brasdiff gerdaudiff
R-squared 0.0279  0.0063  0.0045
Adj. R-squared 0.0259  0.0043  0.0025
Resid. Scale 0.0197  0.0249  0.0236

Information Criteria:
      logL      AIC      BIC      HQ
10357.44 -20690.88 -20627.53 -20667.24

      total residual
Degree of freedom: 1450 1446
Time period: from 2 to 1451

```

Figura 6.7: Resultados do ajuste do modelo VAR às séries temporais dos valores absolutos dos retornos diários do IBovespa, Brasil Telecom e Gerdau, utilizando o pacote FinMetrics + S-plus.

Observe que critério BIC é menor para o valor $p = 1$. Portanto, o melhor modelo ajustado é um VAR(p), com $p = 1$, com matriz de coeficientes $\hat{\phi}_1$, dada por

$$\hat{\phi}_1 = \begin{pmatrix} -0.1266 & 0.0260 & 0.0684 \\ 0.0467 & -0.0751 & 0.0325 \\ 0.1063 & 0.0128 & -0.0012 \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Realizando a análise de resíduos, observamos nas Figuras 6.8-6.10, que o modelo VARFIMA(p, \mathbf{d}, q), com $p = 1$, $\hat{\mathbf{d}} = (0.2984, 0.2529, 0.2090)$ e $q = 0$, não ajusta perfeitamente as séries temporais dos valores absolutos dos

retornos diários do IBovespa, Brasil Telecom e Gerdau. Na Figura 6.8, os resíduos estão concentrados dentro do intervalo de confiança, embora existam valores fora desses limites. As funções de autocorrelação parcial dos resíduos, na Figura 6.9, também possuem alguns pontos fora desses limites. E o “plot” normal dos resíduos não é exatamente uma reta com inclinação 1.

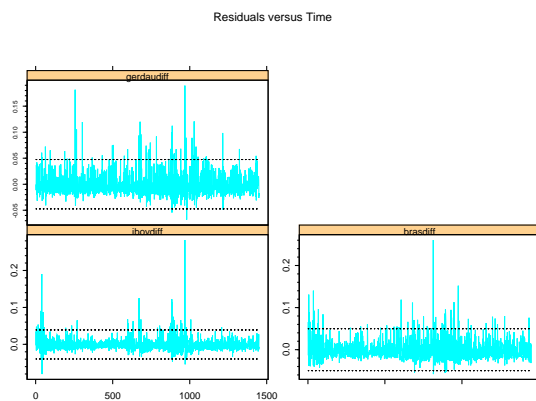


Figura 6.8: Resíduos resultantes do ajuste de um modelo VARFIMA(p, \mathbf{d}, q), com $p = 1$, $\hat{\mathbf{d}} = (0.2984, 0.2529, 0.2090)$ e $q = 0$, para as séries temporais dos valores absolutos dos retornos diários do IBovespa, Brasil Telecom e Gerdau.

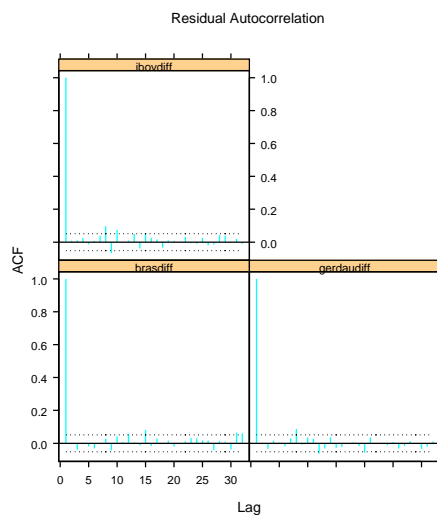


Figura 6.9: Função de autocorrelação amostral dos resíduos resultantes do ajuste de um modelo VARFIMA(p, \mathbf{d}, q), com $p = 1$, $\hat{\mathbf{d}} = (0.2984, 0.2529, 0.2090)$ e $q = 0$, para as séries temporais dos valores absolutos dos retornos diários do IBovespa, Brasil Telecom e Gerdau.

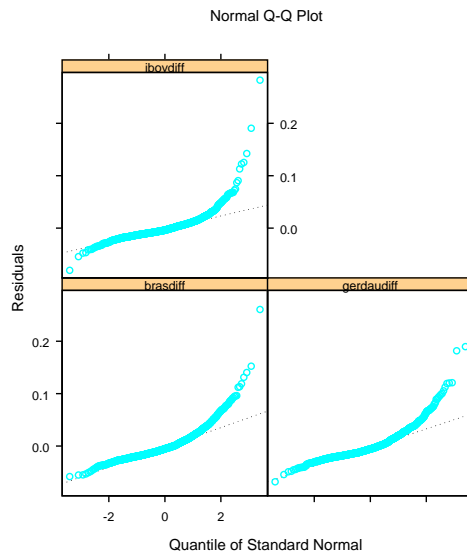


Figura 6.10: “Plot” normal dos resíduos resultantes do ajuste de um modelo VARFIMA(p, \mathbf{d}, q), com $p = 1$, $\hat{\mathbf{d}} = (0.2984, 0.2529, 0.2090)$ e $q = 0$, para as séries temporais dos valores absolutos dos retornos diários do IBovespa, Brasil Telecom e Gerdau.

Portanto, o modelo ajustado às séries temporais dos valores absolutos dos retornos do IBovespa, Brasil Telecom e Gerdau, um VARFIMA(p, \mathbf{d}, q), com $p = 1$, $\hat{\mathbf{d}} = (0.2984, 0.2529, 0.2090)$ e $q = 0$, pode não ser o que melhor ajusta esse conjunto. Isso se deve, possivelmente, ao fato de não considerarmos a possibilidade de que esse conjunto de séries temporais possua componente média móvel.

Essa verificação não foi realizada pois, ainda não temos implementado os recursos computacionais necessários para testar se esse conjunto de séries temporais possui componente média móvel.

Capítulo 7

Conclusões e Propostas para Futuros Trabalhos

7.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho, demonstramos alguns resultados teóricos, entre os quais destaca-se o cálculo das expressões exatas das funções de covariância, de correlação e densidade espectral cruzada para os processos VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0).

Desenvolvemos um estimador semi-paramétrico multivariado, CGPH e sua versão suavizada denotada por SCGPH. Realizamos diversas simulações de Monte Carlo para determinar o valor α , onde $g(n) = n^\alpha$ é o número de regressores considerados no método dos mínimos quadrados. Podemos observar que o estimador CGPH apresenta menor vício para $\alpha = 0.75$ em todas as escolhas do vetor \mathbf{d} , apesar dos resultados, aparentemente, dependerem de \mathbf{d} . O erro quadrático médio e o desvio padrão têm um comportamento semelhante à medida que α varia, onde ambos decrescem quando α aumenta. O estimador CGPH apresenta menores vício, erro quadrático médio e desvio padrão, quando comparado ao GPH, em todos os tamanhos amostrais. À medida que o tamanho amostral aumenta, os valores do erro quadrático médio e desvio padrão do CGPH diminuem. No entanto, é importante ressaltar que ambos os estimadores têm comportamento semelhante, exceto para o vício, no qual o CGPH subestima os valores reais, enquanto que o GPH super-estima esses valores.

Para obtermos o estimador SCGPH, suavizamos o CGPH utilizando uma função de ponderação. O resultado desse procedimento, fornece estimadores assintoticamente equivalentes àqueles obtidos a partir da suavização da função de covariância, como elucidado no Apêndice A. Foram realizadas simulações para o estimador SCGPH, utilizando as funções de ponderação de Bartlett e de Parzen. Podemos observar que a função de ponderação de Parzen apresenta melhores resultados, quando comparada a de Bartlett. Para encontrar o ponto de truncamento q_n da função de ponderação de Parzen, re-

alizamos simulações com $q_n \in \{0, 1, \dots, 13\}$. Observamos que para $q_n = 0$, os resultados são equivalentes àqueles obtidos pelo estimador CGPH. Observamos que $q_n = 1$ apresenta bons resultados com respeito aos valores do vício, erro quadrático médio e desvio padrão, para $n \in \{500, 1000, 1500, 2000\}$, apesar de q_n ser uma função de n . É importante observar que o estimador SCGPH superestima os valores reais.

Comparamos o estimador SCGPH com o estimador GSE, proposto por Shimotsu (2004). Observamos que o estimador GSE apresenta melhores resultados à medida que a correlação aumenta, enquanto o SCGPH não apresenta nenhuma variação. No entanto, o estimador SCGPH apresenta menor erro quadrático médio e menor desvio padrão para correlações pequenas, isto é, $\rho < 0.7$, enquanto o GSE apresenta menor erro quadrático médio e menor desvio padrão para correlações altas, isto é, $\rho > 0.7$. Os vícios desses dois estimadores são semelhantes.

Quando as séries temporais componentes são fortemente correlacionadas, o estimador GSE apresenta uma melhora significativa nos resultados (menor erro quadrático médio e menor desvio padrão), à medida que a correlação aumenta. No entanto, não podemos afirmar o mesmo para os estimadores CGPH e SCGPH.

Analisamos uma série temporal real multivariada formada pelo conjunto das séries temporais dos valores absolutos dos retornos diários do IBovespa, e das ações das empresas Brasil Telecom e Gerdau e ajustamos um modelo VARFIMA(p, \mathbf{d}, q), com $p = 1$, $\hat{\mathbf{d}} = (0.2984, 0.2529, 0.2090)$ e $q = 0$ para essas séries temporais.

7.2 PROPOSTAS PARA FUTUROS TRABALHOS

Neste trabalho, analisamos um conjunto de três séries temporais reais correlacionadas, ajustando um modelo VARFIMA(p, \mathbf{d}, q), com parâmetros $p = 1$, $\hat{\mathbf{d}} = (0.2984, 0.2529, 0.2090)$ e $q = 0$, onde $\hat{\mathbf{d}}$ é obtido utilizando o estimador SCGPH. Esse estimador foi desenvolvido a partir da idéia pioneira de Geweke e Porter-Hudak (1983). Analisamos o comportamento dos estimadores CGPH e SCGPH através de simulações de Monte Carlo. Como proposta para futuros trabalhos, pretendemos:

- i) Considerar a teoria de previsão em dados reais utilizando os modelos VARFIMA(p, \mathbf{d}, q);
- ii) Analisar o estimador SCGPH sob aspecto das propriedades estatísticas, tais como vício, consistência e normalidade assintótica;
- iii) Utilizar a aproximação da matriz das funções densidades espectrais, dada pela expressão (4.5) em vez de (4.3), na expressão dada na equação (4.30). Acreditamos que esse procedimento melhorará o estimador SCGPH.

REFERÊNCIAS

- Andrews, G.E., R. Askey e R. Roy (1999). *Special Functions*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Akaike, H. (1973). “Maximum Likelihood Identification of Gaussian Autoregressive Moving Average Models”. *Biometrika*, Vol. **60**, pp. 255-265.
- Akaike, H. (1974). “A New Look at the Statistical Model Identification”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19, pp. 716-723.
- Akaike, H. (1977). “On Entropy Maximization Principle”. In Applications of Statistics (P.R. Krishnaiah, ed.), pp. 27-41. Amsterdam: North-Holland.
- Baillie, R., T. Bollerslev e H.O. Mikkelsen (1996). “Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”. *Journal of Econometrics*, Vol. **74**(1), pp. 3-30.
- Bary, N.K. (1964). *A Treatise on Trigonometric series*, Vol **2**. Pergamon Press, New York.
- Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*. New York: Chapman & Hall.
- Bollerslev, T. e H.O. Mikkelsen (1996). “Modelling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility”. *Journal of Econometrics*, Vol. **73**, pp. 151-184.
- Box, G.E.P., G.M. Jenkins e G.C. Reinsel (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. New Jersey: Prentice Hall.
- Brietzke, E.H.M., S.R.C. Lopes e C. Bisognin (2005). “A Closed Formula for the Durbin-Levinson’s Algorithm in Seasonal Fractionally Integrated Process”. *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. **42**, pp. 1191-1206.
- Brillinger, D.R. (1975). *Time Series: Data Analysis and Theory*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

- Brockwell, P.J. e R.A. Davis (1991). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag.
- Chatfield, C. (1999). *The Analysis of Time Series: An Introduction*. New York: Chapman & Hall.
- Cooper, D.M. e E.F. Wood (1982). "Identifying Multivariate Time Series Models". *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **3**, pp. 153-164.
- Dahlhaus, R. (1989). "Efficient Parameter Estimation for Self-Similar Processes". *Annals of Statistics*, Vol. **17**, pp. 1749-1766.
- Fox, R. e M.S. Taqqu (1986). "Large-Sample Properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series". *The Annals of Statistics*, Vol. **14**, pp. 517-532.
- Fuller, W.A. (1976). *Introduction to Statistical Time Series*. New York: John Wiley.
- Geweke, J. e S. Porter-Hudak (1983). "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models". *Journal of Times Series Analysis*, Vol. **4**, pp. 221-238.
- Granger, C.W.J. e R. Joyeux (1980). "An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing". *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **1**(1), pp. 15-29.
- Grenander, U. e M. Rosenblatt (1957) *Statistical Analysis of Stationary Time Series*. New York: John Wiley.
- Hannan, E.J. (1970). *Multiple Time Series*. New York: John Wiley.
- Hosking, J.R.M. (1981). "Fractional Differencing". *Biometrika*, Vol. **68**(1), pp. 165-176.
- Hurst, H.E. (1951). "Long-Term Storage Capacity of Reservoirs". *Transactions of American Society in Civil Engineers*, Vol. **116**, pp. 165-167.
- Hurst, H.E. (1957). "A Suggested Statistical Model of Time Series that Occur in Nature". *Nature*, Vol. **180**, pp. 494-494.
- Koopmans, L.H. (1974). *The Spectral Analysis of Time Series*. New York: Academic Press.
- Lobato, I.N. (1997). "Consistency of the Averaged Cross-Periodogram in Long Memory Series". *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **18**(2), pp. 138-155.

- Lobato, I.N. (1999). “A Semiparametric Two-Step Estimator in a Multivariate Long Memory Model”. *Journal of Econometrics*, Vol. **90**, pp. 129-153.
- Lobato, I.N. e P.M. Robinson (1998). “A Nonparametric Test for $I(0)$ ”. *Review of Economic Studies*, Vol. **65**, pp. 475-495.
- Lopes, S.R.C. e A.S. Pinheiro (2007). “Wavelets for Estimating the Fractional Parameter in Non-Stationary ARFIMA Process”. Em revisão.
- Lütkepohl, H. (1991). *Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Berlin: Springer-Verlag.
- Mandelbrot, B.B. (1965). “Une Classe de Processus Stochastiques Homothétiques à soi; Application a la loi Climatologique de E. Hurst”. *Comptés Rendus Academ. Sci. Paris*, Vol. **260**, pp. 3274-3277.
- Mandelbrot, B.B. e J.W. van Ness (1968). “Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications”. *SIAM Review*, Vol. **10**(4), pp. 422-437.
- Mandelbrot, B.B. e J.R. Wallis (1969). “Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part One, Averages and Variances”. *Water Resources Research*, Vol. **5**(1), pp. 228-241.
- Morettin, P.A. (2006). *Econometria Financeira: Um Curso em Séries Temporais Financeiras*. São Paulo: ABE.
- Morettin, P.A. e C.M.C. Toloi (2004). *Análise de Séries Temporais*. São Paulo: Edgard Blücher.
- Olbermann, B.P. (2002). “Estimação em Classes de Processos Estocásticos com Decaimento Hiperbólico da Função de Autocorrelação”. Tese de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS, Porto Alegre. O endereço URL é: <http://mat.ufrgs.br/slopes/artigos/teseBarbara.pdf>.
- Phillips, P.C.B. e K. Shimotsu (2004). “Local Whittle Estimation in Nonstationary and Unit Root Cases”. *Annals of Statistics*, Vol. **32**, pp. 656-692.
- Priestley, M.B. (1981). *Spectral Analysis in Time Series*. New York: Academic Press.
- Reinsel, G.C. (1993). *Elements of Multivariate Time Series Analysis*. New York: Springer-Verlag.
- Robinson, P.M. (1994a). “Semiparametric Analysis of Long-Memory Time Series”. *Annals of Statistics*, Vol. **22**, pp. 515-539.
- Robinson, P.M. (1994b). “Rates of Convergence and Optimal Spectral Bandwidth for Long Range Dependence”. *Probability Theory and Related Fields*, Vol. **99**, pp. 443-473.

- Robinson, P.M. (1995a). “Gaussian Semiparametric Estimation of Long Range Dependence”. *Annals of Statistics*, Vol. **13**, pp. 1630-1661.
- Robinson, P.M. (1995b). “Log-Periodogram Regression of Time Series with Long Range Dependence”. *Annals of Statistics*, Vol. **23**(3), pp. 1048-1072.
- Shimotsu, K. (2004). “Gaussian Semiparametric Estimation of Multivariate Fractionally Integrated Process”. Aceito para publicação em *Journal of Econometrics*.
- Tiao, G.C. e R.S. Tsay (1985). “Use of Canonical Analysis in Time Series Model Identification”. *Biometrika*, Vol. **72**, pp. 299-315.
- Tiao, G.C. e R.S. Tsay (1989). “Model Specification in Multivariate Time Series (With Discussion)”. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, Vol. **51**, pp. 157-213.
- Torres, R., M. Bonomo e C. Fernandes (2002). “A Aleatoriedade do Passeio na Bovespa: Testando a Eficiência do Mercado Acionário Brasileiro”. *Revista Brasileira de Economia*, Vol. **56**(2), pp. 199-247.
- Tsay, R.S. (1989). “Identifying Multivariate Time Series Models”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **10**, pp. 357-372.
- Tukey, J.W. (1949). “One Degree of Freedom for Non-Additivity”. *Biometrics*, Vol. **5**(3), pp. 232-242.
- Wei, W. (1990). *Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods*. New York: Addison Wesley.

APÊNDICE A

Estimadores Suavizados do Espectro

Neste apêndice, mostramos que existem dois métodos para se obter estimadores consistentes em vez do estimador obtido pela função periodograma, ambos conduzindo aos *denominados estimadores suavizados do espectro* para a função densidade espectral. Pelo Teorema 2.3, a função periodograma dada por

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-i\lambda t} \right|^2, \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi], \quad (\text{A.1})$$

é um estimador não-viciado mas inconsistente para a função densidade espectral

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} \gamma_X(k), \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi]. \quad (\text{A.2})$$

Um estimador natural para $f_X(\cdot)$ é obtido substituindo $\gamma_X(k)$ por $\hat{\gamma}_X(k)$ em (A.2), onde

$$\hat{\gamma}_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|k|} X_{t+|k|} X_t, & \text{se } |k| \leq n-1; \\ 0, & \text{se } |k| > n-1. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

No entanto, pode-se mostrar que

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} \hat{\gamma}_X(k) = I_n(\lambda), \quad (\text{A.4})$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n+1}^{n-1} e^{-i\lambda k} \widehat{\gamma}_X(k) = I_n(\lambda). \quad (\text{A.5})$$

No entanto, como dito acima, esse estimador é inconsistente para a função densidade espectral. Analisando essa dificuldade concluímos que, quando o argumento $|k|$ é grande, i.e., próximo de $n-1$, as variáveis aleatórias $\widehat{\gamma}_X(k)$ são médias de um número relativamente pequeno de produtos $X_{t+|k|}X_t$. Também é fato que a função periodograma tem variância que nunca se aproxima de zero quando n cresce. Essas dificuldades indicam a necessidade de eliminar a inconsistência da função periodograma sem prejudicar seu vício assintótico.

A.1 ESTIMADOR DE COVARIÂNCIA SUAVIZADA

Podemos realizar o procedimento de suavização no domínio do tempo e depois transformar para o domínio das frequências, ou fazer o procedimento de suavização no próprio domínio das frequências. O procedimento de suavização no domínio do tempo resulta em um estimador chamado de *estimador de covariância suavizada*.

Definição A.1. Seja $\omega_{q_n}(k)$, para $k \in \mathbb{Z}$ e $q_n < n$, um inteiro dependendo do tamanho amostral n , uma seqüência de pesos satisfazendo

- (i) $0 \leq \omega_{q_n}(k) \leq \omega_{q_n}(0) = 1$,
- (ii) $\omega_{q_n}(-k) = \omega_{q_n}(k)$, para todo k ,
- (iii) $\omega_{q_n}(k) = 0$, para $|k| > q_n$.

O *estimador de covariância suavizada* é dado por

$$\widehat{f}_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} \omega_{q_n}(k) \widehat{\gamma}_X(k), \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi]. \quad (\text{A.6})$$

Esse estimador foi introduzido por Tukey (1949). Grenander e Rosenblatt (1957) provaram a teoria de distribuição para esta classe de estimadores sob suposições gerais para os processos estocásticos. A *função peso* $\omega_{q_n}(\cdot)$ é chamada “*lag window*” e o inteiro q_n é chamado “*bandwidth*”. Note que na propriedade (iii) da janela espectral, os produtos $\omega_{q_n}(k)\widehat{\gamma}_X(k)$ são zero para $|k| > q_n$.

A.2 ESTIMADOR DE PERIODOGRAMA SUAVIZADO

Quando realizamos o procedimento de suavização no domínio das frequências, obtemos os chamados *estimadores de periodogramas suavizados*.

A transformada de Fourier da *função peso* ou *núcleo* $\omega_{q_n}(\cdot)$ é chamada *janela espectral*, e é dada por

$$W_{q_n}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} \omega_{q_n}(k), \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi]. \quad (\text{A.7})$$

A janela espectral $W_{q_n}(\cdot)$ satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $W_{q_n}(-\lambda) = W_{q_n}(\lambda)$;
- (ii) $\int_{-\pi}^{\pi} W_{q_n}(\lambda) d\lambda = 1$.

Note que (A.6) é a transformada de Fourier do produto $\omega_{q_n}(k)\widehat{\gamma}_X(k)$ e essa transformada é a convolução das transformadas de Fourier de $\omega_{q_n}(k)$ e de $\widehat{\gamma}_X(k)$. Conseqüentemente, (A.6) é equivalente a

$$\widehat{f}_X(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_{q_n}(\lambda - \mu) I_n(\mu) d\mu. \quad (\text{A.8})$$

Um estimador com a mesma expressão dada na equação (A.6) pode ser obtido aproximando a integral acima pela sua soma de Riemann

$$\widehat{f}_X(\lambda) = \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=-[\frac{n-1}{2}]}^{\frac{n}{2}} W_{q_n}(\lambda - \lambda_\ell) I_n(\lambda_\ell). \quad (\text{A.9})$$

Decorre também da soma de Riemann, que

$$\frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=-[\frac{n-1}{2}]}^{\frac{n}{2}} W_{q_n}(\lambda_\ell) \cong \int_{-\pi}^{\pi} W_{q_n}(\lambda) d\lambda = 1, \quad (\text{A.10})$$

isto é, (A.10) é assintoticamente equivalente ao estimador da forma

$$\widehat{f}_X(\lambda) = \sum_{\ell=-[\frac{n-1}{2}]}^{[\frac{n}{2}]} K(\lambda - \lambda_\ell) I_n(\lambda_\ell), \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi], \quad (\text{A.11})$$

onde $K(\cdot)$ é simétrica, periódica, de valor real e é chamada de *função de ponderação*, para a qual

$$\sum_{\ell=-[\frac{n-1}{2}]}^{\frac{n}{2}} K(\lambda_\ell) = 1, \quad (\text{A.12})$$

onde $\lambda_\ell = \frac{2\pi\ell}{n}$, com $\ell \in \{1, \dots, g(n)\}$.

Estimadores desta forma são chamados *estimadores de periodograma suavizado* ou “smoothed periodogram estimators”.

Em ambos os casos, obtemos estimadores que são assintoticamente não-viciados e com variâncias que decrescem à medida que o número de observações da série temporal aumenta (ver Koopmans, 1974).

APÊNDICE B

B.1 SIMULAÇÕES PARA O PARÂMETRO α

Como visto no Capítulo 4, os estimadores semi-paramétricos GPH e CGPH dependem de uma função de n , a qual denotamos por $g(n)$, onde normalmente utiliza-se $g(n) = n^\alpha$, para $\alpha \in (0, 1)$. Neste apêndice, foram realizadas simulações com três séries correlacionadas, onde $\alpha \in \{0.65, \dots, 0.81\}$, $n \in \{500, 1000, 1500, 2000\}$ e $\rho \in \{0.0, 0.5, 0.8\}$, para encontrar o melhor valor de α para os estimadores GPH e CGPH.

Como α é um parâmetro do estimador, geramos três séries correlacionadas obtidas de um modelo VARFIMA(0, \mathbf{d} , 0), onde $\mathbf{d} = (0.2, 0.3, 0.4)$. Para cada valor de α estimamos o parâmetro \mathbf{d} , repetindo o processo 1000 vezes, ou seja, considerando 1000 replicações.

As Tabelas B.1-B.12, contém os resultados dessas simulações apresentando a média, vício, desvio padrão (dp) e erro quadrático médio (eqm) dos estimadores GPH e CGPH.

Observamos que, à medida que o parâmetro α aumenta, os valores do desvio padrão e do erro quadrático médio diminuem para ambos os estimadores. No entanto, o vício é menor para o estimador CGPH quando $\alpha = 0.75$.

Tabela B.1. Valores da média, desvio padrão e erro quadrático médio para os estimadores GPH e CGPH, quando $\alpha \in \{0.65, 0.66, \dots, 0.81\}$, $\rho = 0.0$ $\mathbf{d} = (0.2, 0.3, 0.4)$ e $n = 500$.

α	\mathbf{d}	GPH			CGPH		
		média	dp	eqm	média	dp	eqm
0.65	\hat{d}_1	0.2015	0.0959	0.0092	0.2004	0.0953	0.0091
	\hat{d}_2	0.3048	0.1006	0.0101	0.3031	0.1000	0.0100
	\hat{d}_3	0.4031	0.1012	0.0102	0.4008	0.1006	0.0101
0.66	\hat{d}_1	0.2012	0.0923	0.0085	0.1999	0.0917	0.0084
	\hat{d}_2	0.3039	0.0976	0.0095	0.3019	0.0970	0.0094
	\hat{d}_3	0.4032	0.0979	0.0096	0.4006	0.0973	0.0095
0.67	\hat{d}_1	0.2010	0.0890	0.0079	0.1995	0.0883	0.0078
	\hat{d}_2	0.3033	0.0944	0.0089	0.3010	0.0937	0.0088
	\hat{d}_3	0.4020	0.0945	0.0089	0.3991	0.0938	0.0088
0.68	\hat{d}_1	0.2011	0.0856	0.0073	0.1995	0.0849	0.0072
	\hat{d}_2	0.3032	0.0915	0.0084	0.3007	0.0908	0.0082
	\hat{d}_3	0.4020	0.0920	0.0085	0.3988	0.0913	0.0083
0.69	\hat{d}_1	0.2008	0.0832	0.0069	0.1990	0.0825	0.0068
	\hat{d}_2	0.3034	0.0882	0.0078	0.3006	0.0874	0.0076
	\hat{d}_3	0.4019	0.0888	0.0079	0.3983	0.0880	0.0077
0.70	\hat{d}_1	0.2014	0.0810	0.0066	0.1993	0.0802	0.0064
	\hat{d}_2	0.3033	0.0851	0.0072	0.3002	0.0842	0.0071
	\hat{d}_3	0.4012	0.0861	0.0074	0.3971	0.0852	0.0073
0.71	\hat{d}_1	0.2020	0.0785	0.0062	0.1997	0.0777	0.0060
	\hat{d}_2	0.3031	0.0824	0.0068	0.2996	0.0814	0.0066
	\hat{d}_3	0.4028	0.0837	0.0070	0.3981	0.0827	0.0068
0.72	\hat{d}_1	0.2019	0.0761	0.0058	0.1993	0.0752	0.0056
	\hat{d}_2	0.3022	0.0791	0.0063	0.2983	0.0781	0.0061
	\hat{d}_3	0.4031	0.0808	0.0065	0.3979	0.0797	0.0064
0.73	\hat{d}_1	0.2004	0.0729	0.0053	0.1974	0.0718	0.0052
	\hat{d}_2	0.3020	0.0765	0.0058	0.2975	0.0753	0.0057
	\hat{d}_3	0.4029	0.0776	0.0060	0.3970	0.0764	0.0058
0.74	\hat{d}_1	0.2004	0.0706	0.0050	0.1971	0.0694	0.0048
	\hat{d}_2	0.3027	0.0735	0.0054	0.2977	0.0722	0.0052
	\hat{d}_3	0.4032	0.0750	0.0056	0.3966	0.0737	0.0054
0.75	\hat{d}_1	0.1999	0.0687	0.0047	0.1962	0.0674	0.0046
	\hat{d}_2	0.3035	0.0716	0.0051	0.2979	0.0703	0.0049
	\hat{d}_3	0.4027	0.0736	0.0054	0.3953	0.0723	0.0052
0.76	\hat{d}_1	0.1998	0.0666	0.0044	0.1956	0.0652	0.0043
	\hat{d}_2	0.3040	0.0686	0.0047	0.2976	0.0671	0.0045
	\hat{d}_3	0.4024	0.0713	0.0051	0.3940	0.0698	0.0049
0.77	\hat{d}_1	0.1997	0.0644	0.0041	0.1950	0.0629	0.0040
	\hat{d}_2	0.3032	0.0665	0.0044	0.2960	0.0649	0.0042
	\hat{d}_3	0.4022	0.0692	0.0048	0.3926	0.0676	0.0046
0.78	\hat{d}_1	0.2000	0.0623	0.0039	0.1946	0.0606	0.0037
	\hat{d}_2	0.3034	0.0644	0.0041	0.2953	0.0626	0.0039
	\hat{d}_3	0.4023	0.0672	0.0045	0.3915	0.0654	0.0043
0.79	\hat{d}_1	0.1999	0.0606	0.0037	0.1939	0.0588	0.0035
	\hat{d}_2	0.3037	0.0629	0.0040	0.2945	0.0610	0.0037
	\hat{d}_3	0.4018	0.0650	0.0042	0.3896	0.0630	0.0041
0.80	\hat{d}_1	0.1999	0.0584	0.0034	0.1930	0.0565	0.0032
	\hat{d}_2	0.3038	0.0602	0.0036	0.2934	0.0580	0.0034
	\hat{d}_3	0.4027	0.0636	0.0041	0.3889	0.0615	0.0039
0.81	\hat{d}_1	0.2000	0.0568	0.0032	0.1922	0.0546	0.0030
	\hat{d}_2	0.3037	0.0580	0.0034	0.2920	0.0556	0.0032
	\hat{d}_3	0.4031	0.0614	0.0038	0.3876	0.0589	0.0036

Tabela B.2. Valores da média, desvio padrão e erro quadrático médio para os estimadores GPH e CGPH, quando $\alpha \in \{0.65, 0.66, \dots, 0.81\}$, $\rho = 0.5$ $\mathbf{d} = (0.2, 0.3, 0.4)$ e $n = 500$.

α	\mathbf{d}	GPH			CGPH		
		média	dp	eqm	média	dp	eqm
0.65	\hat{d}_1	0.2022	0.0976	0.0095	0.2011	0.0970	0.0094
	\hat{d}_2	0.3061	0.0985	0.0097	0.3044	0.0980	0.0096
	\hat{d}_3	0.4091	0.0987	0.0098	0.4068	0.0982	0.0097
0.66	\hat{d}_1	0.2016	0.0942	0.0089	0.2003	0.0936	0.0087
	\hat{d}_2	0.3059	0.0951	0.0091	0.3039	0.0945	0.0089
	\hat{d}_3	0.4090	0.0956	0.0092	0.4063	0.0951	0.0091
0.67	\hat{d}_1	0.2010	0.0905	0.0082	0.1996	0.0898	0.0081
	\hat{d}_2	0.3059	0.0909	0.0083	0.3037	0.0902	0.0081
	\hat{d}_3	0.4099	0.0925	0.0086	0.4069	0.0919	0.0085
0.68	\hat{d}_1	0.2007	0.0868	0.0075	0.1991	0.0861	0.0074
	\hat{d}_2	0.3054	0.0871	0.0076	0.3029	0.0864	0.0075
	\hat{d}_3	0.4100	0.0889	0.0080	0.4066	0.0882	0.0078
0.69	\hat{d}_1	0.2017	0.0855	0.0073	0.1999	0.0848	0.0072
	\hat{d}_2	0.3061	0.0839	0.0071	0.3034	0.0832	0.0069
	\hat{d}_3	0.4106	0.0855	0.0074	0.4069	0.0848	0.0072
0.70	\hat{d}_1	0.2009	0.0812	0.0066	0.1989	0.0804	0.0065
	\hat{d}_2	0.3059	0.0800	0.0064	0.3028	0.0791	0.0063
	\hat{d}_3	0.4100	0.0814	0.0067	0.4058	0.0806	0.0065
0.71	\hat{d}_1	0.2005	0.0788	0.0062	0.1982	0.0779	0.0061
	\hat{d}_2	0.3051	0.0765	0.0059	0.3016	0.0755	0.0057
	\hat{d}_3	0.4097	0.0788	0.0063	0.4050	0.0779	0.0061
0.72	\hat{d}_1	0.2004	0.0762	0.0058	0.1978	0.0752	0.0057
	\hat{d}_2	0.3053	0.0737	0.0055	0.3014	0.0727	0.0053
	\hat{d}_3	0.4089	0.0764	0.0059	0.4036	0.0754	0.0057
0.73	\hat{d}_1	0.2007	0.0732	0.0054	0.1977	0.0721	0.0052
	\hat{d}_2	0.3051	0.0708	0.0050	0.3006	0.0697	0.0049
	\hat{d}_3	0.4091	0.0731	0.0054	0.4031	0.0720	0.0052
0.74	\hat{d}_1	0.2006	0.0708	0.0050	0.1972	0.0696	0.0048
	\hat{d}_2	0.3036	0.0677	0.0046	0.2985	0.0665	0.0044
	\hat{d}_3	0.4085	0.0704	0.0050	0.4017	0.0692	0.0048
0.75	\hat{d}_1	0.2007	0.0683	0.0047	0.1969	0.0670	0.0045
	\hat{d}_2	0.3034	0.0674	0.0046	0.2977	0.0662	0.0044
	\hat{d}_3	0.4084	0.0681	0.0047	0.4008	0.0668	0.0045
0.76	\hat{d}_1	0.1996	0.0655	0.0043	0.1954	0.0640	0.0041
	\hat{d}_2	0.3028	0.0654	0.0043	0.2964	0.0641	0.0041
	\hat{d}_3	0.4083	0.0652	0.0043	0.3997	0.0638	0.0041
0.77	\hat{d}_1	0.1995	0.0634	0.0040	0.1948	0.0619	0.0039
	\hat{d}_2	0.3021	0.0637	0.0041	0.2948	0.0622	0.0039
	\hat{d}_3	0.4072	0.0630	0.0040	0.3975	0.0615	0.0038
0.78	\hat{d}_1	0.2000	0.0615	0.0038	0.1946	0.0598	0.0036
	\hat{d}_2	0.3016	0.0616	0.0038	0.2934	0.0600	0.0036
	\hat{d}_3	0.4072	0.0611	0.0038	0.3962	0.0594	0.0035
0.79	\hat{d}_1	0.1998	0.0600	0.0036	0.1937	0.0582	0.0034
	\hat{d}_2	0.3011	0.0599	0.0036	0.2918	0.0581	0.0034
	\hat{d}_3	0.4074	0.0594	0.0036	0.3950	0.0576	0.0033
0.80	\hat{d}_1	0.2001	0.0584	0.0034	0.1932	0.0565	0.0032
	\hat{d}_2	0.3012	0.0581	0.0034	0.2907	0.0561	0.0032
	\hat{d}_3	0.4078	0.0576	0.0034	0.3938	0.0556	0.0031
0.81	\hat{d}_1	0.1995	0.0567	0.0032	0.1918	0.0546	0.0030
	\hat{d}_2	0.3020	0.0569	0.0032	0.2903	0.0548	0.0031
	\hat{d}_3	0.4074	0.0560	0.0032	0.3916	0.0538	0.0030

Tabela B.3. Valores da média, desvio padrão e erro quadrático médio para os estimadores GPH e CGPH, quando $\alpha \in \{0.65, 0.66, \dots, 0.81\}$, $\rho = 0.8$ $\mathbf{d} = (0.2, 0.3, 0.4)$ e $n = 500$.

α	\mathbf{d}	GPH			CGPH		
		média	dp	eqm	média	dp	eqm
0.65	\hat{d}_1	0.1991	0.0999	0.0100	0.1980	0.0994	0.0099
	\hat{d}_2	0.3016	0.0991	0.0098	0.2999	0.0985	0.0097
	\hat{d}_3	0.4095	0.0936	0.0088	0.4072	0.0930	0.0087
0.66	\hat{d}_1	0.1985	0.0964	0.0093	0.1973	0.0957	0.0092
	\hat{d}_2	0.3006	0.0956	0.0091	0.2986	0.0950	0.0090
	\hat{d}_3	0.4085	0.0913	0.0084	0.4059	0.0908	0.0083
0.67	\hat{d}_1	0.1987	0.0926	0.0086	0.1973	0.0919	0.0084
	\hat{d}_2	0.2998	0.0928	0.0086	0.2977	0.0922	0.0085
	\hat{d}_3	0.4086	0.0885	0.0079	0.4057	0.0879	0.0077
0.68	\hat{d}_1	0.1982	0.0896	0.0080	0.1966	0.0889	0.0079
	\hat{d}_2	0.2994	0.0900	0.0081	0.2970	0.0893	0.0080
	\hat{d}_3	0.4075	0.0857	0.0074	0.4042	0.0851	0.0072
0.69	\hat{d}_1	0.1985	0.0863	0.0075	0.1967	0.0856	0.0073
	\hat{d}_2	0.2988	0.0877	0.0077	0.2961	0.0869	0.0076
	\hat{d}_3	0.4072	0.0830	0.0069	0.4035	0.0822	0.0068
0.70	\hat{d}_1	0.1977	0.0837	0.0070	0.1956	0.0828	0.0069
	\hat{d}_2	0.2976	0.0836	0.0070	0.2945	0.0827	0.0069
	\hat{d}_3	0.4076	0.0800	0.0065	0.4035	0.0792	0.0063
0.71	\hat{d}_1	0.1984	0.0804	0.0065	0.1961	0.0795	0.0063
	\hat{d}_2	0.2984	0.0804	0.0065	0.2949	0.0795	0.0063
	\hat{d}_3	0.4071	0.0773	0.0060	0.4024	0.0764	0.0058
0.72	\hat{d}_1	0.1985	0.0774	0.0060	0.1959	0.0764	0.0058
	\hat{d}_2	0.2983	0.0771	0.0059	0.2944	0.0761	0.0058
	\hat{d}_3	0.4077	0.0747	0.0056	0.4025	0.0737	0.0054
0.73	\hat{d}_1	0.1992	0.0757	0.0057	0.1963	0.0746	0.0056
	\hat{d}_2	0.2985	0.0737	0.0054	0.2941	0.0725	0.0053
	\hat{d}_3	0.4074	0.0735	0.0055	0.4015	0.0725	0.0053
0.74	\hat{d}_1	0.2001	0.0734	0.0054	0.1969	0.0721	0.0052
	\hat{d}_2	0.2988	0.0707	0.0050	0.2939	0.0695	0.0049
	\hat{d}_3	0.4076	0.0710	0.0051	0.4008	0.0699	0.0049
0.75	\hat{d}_1	0.1996	0.0709	0.0050	0.1959	0.0696	0.0049
	\hat{d}_2	0.2987	0.0691	0.0048	0.2931	0.0678	0.0046
	\hat{d}_3	0.4075	0.0677	0.0046	0.4000	0.0665	0.0044
0.76	\hat{d}_1	0.1998	0.0682	0.0047	0.1956	0.0668	0.0045
	\hat{d}_2	0.2989	0.0659	0.0043	0.2926	0.0644	0.0042
	\hat{d}_3	0.4077	0.0660	0.0044	0.3991	0.0647	0.0042
0.77	\hat{d}_1	0.2001	0.0664	0.0044	0.1954	0.0648	0.0042
	\hat{d}_2	0.2991	0.0634	0.0040	0.2921	0.0618	0.0039
	\hat{d}_3	0.4070	0.0644	0.0042	0.3974	0.0629	0.0040
0.78	\hat{d}_1	0.2002	0.0637	0.0041	0.1949	0.0620	0.0039
	\hat{d}_2	0.2997	0.0612	0.0037	0.2917	0.0594	0.0036
	\hat{d}_3	0.4067	0.0623	0.0039	0.3958	0.0606	0.0037
0.79	\hat{d}_1	0.2001	0.0618	0.0038	0.1941	0.0599	0.0036
	\hat{d}_2	0.2998	0.0592	0.0035	0.2908	0.0573	0.0034
	\hat{d}_3	0.4061	0.0604	0.0037	0.3938	0.0586	0.0035
0.80	\hat{d}_1	0.2004	0.0597	0.0036	0.1936	0.0576	0.0034
	\hat{d}_2	0.2993	0.0580	0.0034	0.2890	0.0560	0.0032
	\hat{d}_3	0.4059	0.0585	0.0035	0.3918	0.0565	0.0033
0.81	\hat{d}_1	0.2005	0.0576	0.0033	0.1928	0.0553	0.0031
	\hat{d}_2	0.2995	0.0566	0.0032	0.2880	0.0544	0.0031
	\hat{d}_3	0.4046	0.0571	0.0033	0.3888	0.0549	0.0031

Tabela B.4. Valores da média, desvio padrão e erro quadrático médio para os estimadores GPH e CGPH, quando $\alpha \in \{0.65, 0.66, \dots, 0.81\}$, $\rho = 0.0$ $\mathbf{d} = (0.2, 0.3, 0.4)$ e $n = 1000$.

α	\mathbf{d}	GPH			CGPH		
		média	dp	eqm	média	dp	eqm
0.65	\hat{d}_1	0.2006	0.0754	0.0057	0.1999	0.0751	0.0056
	\hat{d}_2	0.3058	0.0762	0.0058	0.3048	0.0759	0.0058
	\hat{d}_3	0.4006	0.0775	0.0060	0.3992	0.0773	0.0060
0.66	\hat{d}_1	0.2012	0.0722	0.0052	0.2004	0.0719	0.0052
	\hat{d}_2	0.3052	0.0732	0.0054	0.3040	0.0729	0.0053
	\hat{d}_3	0.4002	0.0749	0.0056	0.3987	0.0747	0.0056
0.67	\hat{d}_1	0.2020	0.0685	0.0047	0.2011	0.0682	0.0046
	\hat{d}_2	0.3052	0.0701	0.0049	0.3039	0.0697	0.0049
	\hat{d}_3	0.4015	0.0717	0.0051	0.3998	0.0714	0.0051
0.68	\hat{d}_1	0.2027	0.0651	0.0042	0.2017	0.0648	0.0042
	\hat{d}_2	0.3068	0.0676	0.0046	0.3053	0.0673	0.0046
	\hat{d}_3	0.4019	0.0686	0.0047	0.4000	0.0682	0.0046
0.69	\hat{d}_1	0.2033	0.0630	0.0040	0.2021	0.0626	0.0039
	\hat{d}_2	0.3064	0.0646	0.0042	0.3046	0.0643	0.0041
	\hat{d}_3	0.4017	0.0649	0.0042	0.3994	0.0645	0.0042
0.70	\hat{d}_1	0.2031	0.0609	0.0037	0.2018	0.0605	0.0037
	\hat{d}_2	0.3057	0.0626	0.0039	0.3038	0.0622	0.0039
	\hat{d}_3	0.4017	0.0641	0.0041	0.3991	0.0637	0.0041
0.71	\hat{d}_1	0.2029	0.0578	0.0033	0.2014	0.0574	0.0033
	\hat{d}_2	0.3053	0.0611	0.0038	0.3031	0.0606	0.0037
	\hat{d}_3	0.4021	0.0621	0.0039	0.3992	0.0617	0.0038
0.72	\hat{d}_1	0.2024	0.0564	0.0032	0.2007	0.0559	0.0031
	\hat{d}_2	0.3054	0.0581	0.0034	0.3028	0.0576	0.0033
	\hat{d}_3	0.4033	0.0599	0.0036	0.3999	0.0594	0.0035
0.73	\hat{d}_1	0.2020	0.0543	0.0029	0.2001	0.0538	0.0029
	\hat{d}_2	0.3060	0.0562	0.0032	0.3030	0.0557	0.0031
	\hat{d}_3	0.4041	0.0575	0.0033	0.4003	0.0570	0.0032
0.74	\hat{d}_1	0.2021	0.0533	0.0028	0.1999	0.0527	0.0028
	\hat{d}_2	0.3063	0.0538	0.0029	0.3029	0.0532	0.0028
	\hat{d}_3	0.4039	0.0552	0.0031	0.3995	0.0546	0.0030
0.75	\hat{d}_1	0.2021	0.0511	0.0026	0.1996	0.0505	0.0025
	\hat{d}_2	0.3057	0.0518	0.0027	0.3018	0.0512	0.0026
	\hat{d}_3	0.4032	0.0528	0.0028	0.3982	0.0521	0.0027
0.76	\hat{d}_1	0.2022	0.0498	0.0025	0.1992	0.0491	0.0024
	\hat{d}_2	0.3052	0.0506	0.0026	0.3007	0.0499	0.0025
	\hat{d}_3	0.4030	0.0504	0.0025	0.3972	0.0496	0.0025
0.77	\hat{d}_1	0.2018	0.0478	0.0023	0.1984	0.0470	0.0022
	\hat{d}_2	0.3055	0.0488	0.0024	0.3004	0.0480	0.0023
	\hat{d}_3	0.4030	0.0481	0.0023	0.3963	0.0473	0.0022
0.78	\hat{d}_1	0.2020	0.0462	0.0021	0.1982	0.0454	0.0021
	\hat{d}_2	0.3050	0.0476	0.0023	0.2992	0.0467	0.0022
	\hat{d}_3	0.4031	0.0467	0.0022	0.3955	0.0458	0.0021
0.79	\hat{d}_1	0.2015	0.0448	0.0020	0.1971	0.0439	0.0019
	\hat{d}_2	0.3051	0.0461	0.0022	0.2984	0.0452	0.0020
	\hat{d}_3	0.4035	0.0452	0.0020	0.3947	0.0441	0.0020
0.80	\hat{d}_1	0.2013	0.0434	0.0019	0.1962	0.0424	0.0018
	\hat{d}_2	0.3043	0.0451	0.0021	0.2966	0.0441	0.0020
	\hat{d}_3	0.4033	0.0436	0.0019	0.3932	0.0425	0.0019
0.81	\hat{d}_1	0.2012	0.0421	0.0018	0.1954	0.0409	0.0017
	\hat{d}_2	0.3038	0.0437	0.0019	0.2950	0.0425	0.0018
	\hat{d}_3	0.4038	0.0416	0.0017	0.3922	0.0404	0.0017

Tabela B.5. Valores da média, desvio padrão e erro quadrático médio para os estimadores GPH e CGPH, quando $\alpha \in \{0.65, 0.66, \dots, 0.81\}$, $\rho = 0.5$ $\mathbf{d} = (0.2, 0.3, 0.4)$ e $n = 1000$.

α	\mathbf{d}	GPH			CGPH		
		média	dp	eqm	média	dp	eqm
0.65	\hat{d}_1	0.1959	0.0757	0.0057	0.1952	0.0755	0.0057
	\hat{d}_2	0.3069	0.0741	0.0055	0.3058	0.0739	0.0055
	\hat{d}_3	0.4079	0.0753	0.0057	0.4065	0.0751	0.0057
0.66	\hat{d}_1	0.1982	0.0728	0.0053	0.1974	0.0725	0.0053
	\hat{d}_2	0.3058	0.0717	0.0052	0.3046	0.0714	0.0051
	\hat{d}_3	0.4070	0.0722	0.0053	0.4054	0.0719	0.0052
0.67	\hat{d}_1	0.1980	0.0694	0.0048	0.1971	0.0690	0.0048
	\hat{d}_2	0.3053	0.0689	0.0048	0.3040	0.0686	0.0047
	\hat{d}_3	0.4073	0.0696	0.0049	0.4056	0.0693	0.0048
0.68	\hat{d}_1	0.1979	0.0665	0.0044	0.1969	0.0662	0.0044
	\hat{d}_2	0.3048	0.0655	0.0043	0.3033	0.0652	0.0043
	\hat{d}_3	0.4070	0.0659	0.0044	0.4049	0.0656	0.0043
0.69	\hat{d}_1	0.1977	0.0635	0.0040	0.1965	0.0632	0.0040
	\hat{d}_2	0.3037	0.0628	0.0040	0.3020	0.0624	0.0039
	\hat{d}_3	0.4070	0.0641	0.0042	0.4047	0.0638	0.0041
0.70	\hat{d}_1	0.1973	0.0619	0.0038	0.1960	0.0615	0.0038
	\hat{d}_2	0.3032	0.0611	0.0037	0.3013	0.0607	0.0037
	\hat{d}_3	0.4062	0.0620	0.0039	0.4036	0.0616	0.0038
0.71	\hat{d}_1	0.1971	0.0600	0.0036	0.1957	0.0596	0.0036
	\hat{d}_2	0.3034	0.0595	0.0036	0.3012	0.0591	0.0035
	\hat{d}_3	0.4057	0.0595	0.0036	0.4027	0.0591	0.0035
0.72	\hat{d}_1	0.1972	0.0577	0.0033	0.1955	0.0572	0.0033
	\hat{d}_2	0.3032	0.0565	0.0032	0.3006	0.0561	0.0031
	\hat{d}_3	0.4050	0.0576	0.0033	0.4016	0.0572	0.0033
0.73	\hat{d}_1	0.1974	0.0548	0.0030	0.1955	0.0542	0.0030
	\hat{d}_2	0.3033	0.0544	0.0030	0.3004	0.0539	0.0029
	\hat{d}_3	0.4052	0.0560	0.0032	0.4012	0.0555	0.0031
0.74	\hat{d}_1	0.1972	0.0521	0.0027	0.1950	0.0515	0.0027
	\hat{d}_2	0.3041	0.0529	0.0028	0.3008	0.0523	0.0027
	\hat{d}_3	0.4053	0.0532	0.0029	0.4008	0.0526	0.0028
0.75	\hat{d}_1	0.1981	0.0499	0.0025	0.1956	0.0492	0.0024
	\hat{d}_2	0.3039	0.0507	0.0026	0.3001	0.0501	0.0025
	\hat{d}_3	0.4043	0.0508	0.0026	0.3992	0.0502	0.0025
0.76	\hat{d}_1	0.1982	0.0492	0.0024	0.1954	0.0485	0.0024
	\hat{d}_2	0.3035	0.0487	0.0024	0.2991	0.0480	0.0023
	\hat{d}_3	0.4045	0.0487	0.0024	0.3986	0.0480	0.0023
0.77	\hat{d}_1	0.1990	0.0475	0.0023	0.1957	0.0467	0.0022
	\hat{d}_2	0.3033	0.0469	0.0022	0.2982	0.0461	0.0021
	\hat{d}_3	0.4039	0.0470	0.0022	0.3971	0.0462	0.0021
0.78	\hat{d}_1	0.1989	0.0454	0.0021	0.1952	0.0445	0.0020
	\hat{d}_2	0.3034	0.0447	0.0020	0.2976	0.0439	0.0019
	\hat{d}_3	0.4038	0.0464	0.0022	0.3961	0.0455	0.0021
0.79	\hat{d}_1	0.1990	0.0439	0.0019	0.1947	0.0429	0.0019
	\hat{d}_2	0.3026	0.0431	0.0019	0.2960	0.0421	0.0018
	\hat{d}_3	0.4036	0.0450	0.0020	0.3947	0.0441	0.0020
0.80	\hat{d}_1	0.1998	0.0427	0.0018	0.1949	0.0416	0.0018
	\hat{d}_2	0.3023	0.0416	0.0017	0.2946	0.0405	0.0017
	\hat{d}_3	0.4036	0.0427	0.0018	0.3935	0.0416	0.0018
0.81	\hat{d}_1	0.2004	0.0415	0.0017	0.1947	0.0403	0.0017
	\hat{d}_2	0.3025	0.0404	0.0016	0.2937	0.0393	0.0016
	\hat{d}_3	0.4038	0.0408	0.0017	0.3921	0.0396	0.0016

Tabela B.6. Valores da média, desvio padrão e erro quadrático médio para os estimadores GPH e CGPH, quando $\alpha \in \{0.65, 0.66, \dots, 0.81\}$, $\rho = 0.8$ $\mathbf{d} = (0.2, 0.3, 0.4)$ e $n = 1000$.

α	\mathbf{d}	GPH			CGPH		
		média	dp	eqm	média	dp	eqm
0.65	\hat{d}_1	0.2001	0.0714	0.0051	0.1994	0.0712	0.0051
	\hat{d}_2	0.2989	0.0730	0.0053	0.2979	0.0727	0.0053
	\hat{d}_3	0.4043	0.0756	0.0057	0.4030	0.0753	0.0057
0.66	\hat{d}_1	0.2009	0.0693	0.0048	0.2002	0.0690	0.0048
	\hat{d}_2	0.2995	0.0712	0.0051	0.2983	0.0709	0.0050
	\hat{d}_3	0.4044	0.0725	0.0053	0.4028	0.0722	0.0052
0.67	\hat{d}_1	0.2015	0.0670	0.0045	0.2006	0.0668	0.0045
	\hat{d}_2	0.2994	0.0682	0.0047	0.2981	0.0679	0.0046
	\hat{d}_3	0.4038	0.0698	0.0049	0.4021	0.0695	0.0048
0.68	\hat{d}_1	0.2016	0.0650	0.0042	0.2006	0.0647	0.0042
	\hat{d}_2	0.2998	0.0658	0.0043	0.2983	0.0654	0.0043
	\hat{d}_3	0.4038	0.0672	0.0045	0.4018	0.0669	0.0045
0.69	\hat{d}_1	0.2027	0.0613	0.0038	0.2015	0.0610	0.0037
	\hat{d}_2	0.3002	0.0628	0.0039	0.2985	0.0624	0.0039
	\hat{d}_3	0.4037	0.0643	0.0041	0.4015	0.0639	0.0041
0.70	\hat{d}_1	0.2024	0.0587	0.0034	0.2011	0.0583	0.0034
	\hat{d}_2	0.3002	0.0600	0.0036	0.2983	0.0596	0.0035
	\hat{d}_3	0.4036	0.0621	0.0039	0.4010	0.0617	0.0038
0.71	\hat{d}_1	0.2030	0.0572	0.0033	0.2015	0.0567	0.0032
	\hat{d}_2	0.3013	0.0576	0.0033	0.2991	0.0572	0.0033
	\hat{d}_3	0.4043	0.0596	0.0036	0.4013	0.0592	0.0035
0.72	\hat{d}_1	0.2025	0.0551	0.0030	0.2008	0.0546	0.0030
	\hat{d}_2	0.3019	0.0552	0.0031	0.2993	0.0548	0.0030
	\hat{d}_3	0.4036	0.0574	0.0033	0.4001	0.0569	0.0032
0.73	\hat{d}_1	0.2028	0.0526	0.0028	0.2008	0.0521	0.0027
	\hat{d}_2	0.3018	0.0530	0.0028	0.2989	0.0525	0.0028
	\hat{d}_3	0.4036	0.0553	0.0031	0.3997	0.0548	0.0030
0.74	\hat{d}_1	0.2027	0.0512	0.0026	0.2005	0.0506	0.0026
	\hat{d}_2	0.3014	0.0513	0.0026	0.2981	0.0508	0.0026
	\hat{d}_3	0.4034	0.0548	0.0030	0.3990	0.0542	0.0029
0.75	\hat{d}_1	0.2028	0.0495	0.0025	0.2003	0.0489	0.0024
	\hat{d}_2	0.3012	0.0488	0.0024	0.2974	0.0482	0.0023
	\hat{d}_3	0.4037	0.0528	0.0028	0.3986	0.0521	0.0027
0.76	\hat{d}_1	0.2024	0.0482	0.0023	0.1994	0.0475	0.0023
	\hat{d}_2	0.3007	0.0477	0.0023	0.2963	0.0470	0.0022
	\hat{d}_3	0.4029	0.0509	0.0026	0.3970	0.0502	0.0025
0.77	\hat{d}_1	0.2026	0.0469	0.0022	0.1992	0.0462	0.0021
	\hat{d}_2	0.3005	0.0456	0.0021	0.2955	0.0448	0.0020
	\hat{d}_3	0.4028	0.0495	0.0025	0.3960	0.0486	0.0024
0.78	\hat{d}_1	0.2017	0.0451	0.0020	0.1978	0.0442	0.0020
	\hat{d}_2	0.2998	0.0441	0.0019	0.2940	0.0433	0.0019
	\hat{d}_3	0.4024	0.0483	0.0023	0.3947	0.0474	0.0023
0.79	\hat{d}_1	0.2008	0.0430	0.0018	0.1963	0.0420	0.0018
	\hat{d}_2	0.2994	0.0427	0.0018	0.2928	0.0418	0.0018
	\hat{d}_3	0.4020	0.0467	0.0022	0.3932	0.0457	0.0021
0.80	\hat{d}_1	0.2010	0.0413	0.0017	0.1960	0.0403	0.0016
	\hat{d}_2	0.2998	0.0418	0.0017	0.2923	0.0408	0.0017
	\hat{d}_3	0.4021	0.0455	0.0021	0.3920	0.0444	0.0020
0.81	\hat{d}_1	0.2013	0.0408	0.0017	0.1955	0.0397	0.0016
	\hat{d}_2	0.2994	0.0405	0.0016	0.2907	0.0394	0.0016
	\hat{d}_3	0.4021	0.0443	0.0020	0.3904	0.0430	0.0019

Tabela B.7. Valores da média, desvio padrão e erro quadrático médio para os estimadores GPH e CGPH, quando $\alpha \in \{0.65, 0.66, \dots, 0.81\}$, $\rho = 0.0$ $\mathbf{d} = (0.2, 0.3, 0.4)$ e $n = 1500$.

α	\mathbf{d}	GPH			CGPH		
		média	dp	eqm	média	dp	eqm
0.65	\hat{d}_1	0.2021	0.0628	0.0039	0.2016	0.0626	0.0039
	\hat{d}_2	0.3020	0.0651	0.0042	0.3013	0.0649	0.0042
	\hat{d}_3	0.4033	0.0643	0.0041	0.4023	0.0642	0.0041
0.66	\hat{d}_1	0.2017	0.0617	0.0038	0.2011	0.0616	0.0038
	\hat{d}_2	0.3019	0.0632	0.0040	0.3011	0.0631	0.0040
	\hat{d}_3	0.4037	0.0622	0.0039	0.4025	0.0620	0.0038
0.67	\hat{d}_1	0.2013	0.0592	0.0035	0.2006	0.0590	0.0035
	\hat{d}_2	0.3022	0.0604	0.0036	0.3012	0.0602	0.0036
	\hat{d}_3	0.4035	0.0599	0.0036	0.4022	0.0597	0.0036
0.68	\hat{d}_1	0.2014	0.0560	0.0031	0.2007	0.0558	0.0031
	\hat{d}_2	0.3027	0.0581	0.0034	0.3016	0.0579	0.0033
	\hat{d}_3	0.4029	0.0576	0.0033	0.4014	0.0574	0.0033
0.69	\hat{d}_1	0.2019	0.0540	0.0029	0.2010	0.0537	0.0029
	\hat{d}_2	0.3015	0.0553	0.0031	0.3002	0.0551	0.0030
	\hat{d}_3	0.4038	0.0558	0.0031	0.4021	0.0556	0.0031
0.70	\hat{d}_1	0.2018	0.0517	0.0027	0.2008	0.0515	0.0026
	\hat{d}_2	0.3021	0.0540	0.0029	0.3005	0.0537	0.0029
	\hat{d}_3	0.4033	0.0530	0.0028	0.4013	0.0527	0.0028
0.71	\hat{d}_1	0.2016	0.0500	0.0025	0.2004	0.0497	0.0025
	\hat{d}_2	0.3019	0.0524	0.0027	0.3002	0.0521	0.0027
	\hat{d}_3	0.4028	0.0516	0.0027	0.4005	0.0513	0.0026
0.72	\hat{d}_1	0.2021	0.0478	0.0023	0.2008	0.0474	0.0022
	\hat{d}_2	0.3010	0.0501	0.0025	0.2990	0.0497	0.0025
	\hat{d}_3	0.4034	0.0500	0.0025	0.4007	0.0497	0.0025
0.73	\hat{d}_1	0.2016	0.0458	0.0021	0.2000	0.0454	0.0021
	\hat{d}_2	0.3009	0.0484	0.0023	0.2986	0.0480	0.0023
	\hat{d}_3	0.4037	0.0479	0.0023	0.4006	0.0475	0.0023
0.74	\hat{d}_1	0.2012	0.0444	0.0020	0.1994	0.0440	0.0019
	\hat{d}_2	0.3011	0.0476	0.0023	0.2984	0.0471	0.0022
	\hat{d}_3	0.4037	0.0458	0.0021	0.4001	0.0454	0.0021
0.75	\hat{d}_1	0.2008	0.0429	0.0018	0.1987	0.0425	0.0018
	\hat{d}_2	0.3010	0.0462	0.0021	0.2979	0.0457	0.0021
	\hat{d}_3	0.4035	0.0443	0.0020	0.3994	0.0439	0.0019
0.76	\hat{d}_1	0.2007	0.0412	0.0017	0.1984	0.0407	0.0017
	\hat{d}_2	0.3005	0.0440	0.0019	0.2970	0.0435	0.0019
	\hat{d}_3	0.4035	0.0427	0.0018	0.3987	0.0422	0.0018
0.77	\hat{d}_1	0.2005	0.0401	0.0016	0.1977	0.0396	0.0016
	\hat{d}_2	0.3006	0.0424	0.0018	0.2965	0.0418	0.0018
	\hat{d}_3	0.4029	0.0414	0.0017	0.3975	0.0408	0.0017
0.78	\hat{d}_1	0.2006	0.0384	0.0015	0.1975	0.0378	0.0014
	\hat{d}_2	0.3010	0.0406	0.0016	0.2963	0.0400	0.0016
	\hat{d}_3	0.4024	0.0394	0.0016	0.3961	0.0388	0.0015
0.79	\hat{d}_1	0.2004	0.0374	0.0014	0.1968	0.0368	0.0014
	\hat{d}_2	0.3009	0.0389	0.0015	0.2954	0.0382	0.0015
	\hat{d}_3	0.4020	0.0380	0.0014	0.3947	0.0373	0.0014
0.80	\hat{d}_1	0.2010	0.0360	0.0013	0.1968	0.0353	0.0013
	\hat{d}_2	0.3009	0.0375	0.0014	0.2946	0.0367	0.0014
	\hat{d}_3	0.4027	0.0363	0.0013	0.3942	0.0355	0.0013
0.81	\hat{d}_1	0.2006	0.0345	0.0012	0.1957	0.0336	0.0011
	\hat{d}_2	0.3009	0.0359	0.0013	0.2936	0.0350	0.0013
	\hat{d}_3	0.4027	0.0352	0.0012	0.3930	0.0343	0.0012

Tabela B.8. Valores da média, desvio padrão e erro quadrático médio para os estimadores GPH e CGPH, quando $\alpha \in \{0.65, 0.66, \dots, 0.81\}$, $\rho = 0.5$ $\mathbf{d} = (0.2, 0.3, 0.4)$ e $n = 1500$.

α	\mathbf{d}	GPH			CGPH		
		média	dp	eqm	média	dp	eqm
0.65	\hat{d}_1	0.1996	0.0653	0.0043	0.1991	0.0652	0.0042
	\hat{d}_2	0.3030	0.0616	0.0038	0.3023	0.0615	0.0038
	\hat{d}_3	0.4018	0.0641	0.0041	0.4008	0.0639	0.0041
0.66	\hat{d}_1	0.1990	0.0642	0.0041	0.1985	0.0640	0.0041
	\hat{d}_2	0.3030	0.0594	0.0035	0.3022	0.0593	0.0035
	\hat{d}_3	0.4021	0.0619	0.0038	0.4010	0.0617	0.0038
0.67	\hat{d}_1	0.1990	0.0616	0.0038	0.1984	0.0614	0.0038
	\hat{d}_2	0.3031	0.0564	0.0032	0.3021	0.0563	0.0032
	\hat{d}_3	0.4015	0.0596	0.0036	0.4002	0.0594	0.0035
0.68	\hat{d}_1	0.1980	0.0587	0.0034	0.1972	0.0584	0.0034
	\hat{d}_2	0.3030	0.0553	0.0031	0.3019	0.0551	0.0030
	\hat{d}_3	0.4020	0.0574	0.0033	0.4005	0.0572	0.0033
0.69	\hat{d}_1	0.1987	0.0563	0.0032	0.1979	0.0561	0.0031
	\hat{d}_2	0.3028	0.0534	0.0029	0.3015	0.0531	0.0028
	\hat{d}_3	0.4018	0.0558	0.0031	0.4001	0.0556	0.0031
0.70	\hat{d}_1	0.1987	0.0530	0.0028	0.1978	0.0528	0.0028
	\hat{d}_2	0.3018	0.0512	0.0026	0.3003	0.0510	0.0026
	\hat{d}_3	0.4020	0.0543	0.0030	0.4000	0.0541	0.0029
0.71	\hat{d}_1	0.1991	0.0511	0.0026	0.1979	0.0508	0.0026
	\hat{d}_2	0.3013	0.0501	0.0025	0.2996	0.0498	0.0025
	\hat{d}_3	0.4017	0.0521	0.0027	0.3994	0.0518	0.0027
0.72	\hat{d}_1	0.1988	0.0495	0.0024	0.1975	0.0491	0.0024
	\hat{d}_2	0.3011	0.0485	0.0024	0.2991	0.0482	0.0023
	\hat{d}_3	0.4017	0.0501	0.0025	0.3990	0.0498	0.0025
0.73	\hat{d}_1	0.1986	0.0476	0.0023	0.1971	0.0472	0.0022
	\hat{d}_2	0.3009	0.0463	0.0021	0.2985	0.0460	0.0021
	\hat{d}_3	0.4015	0.0481	0.0023	0.3985	0.0477	0.0023
0.74	\hat{d}_1	0.1985	0.0451	0.0020	0.1967	0.0447	0.0020
	\hat{d}_2	0.3001	0.0445	0.0020	0.2974	0.0441	0.0019
	\hat{d}_3	0.4019	0.0460	0.0021	0.3984	0.0456	0.0021
0.75	\hat{d}_1	0.1982	0.0433	0.0019	0.1962	0.0428	0.0018
	\hat{d}_2	0.3000	0.0425	0.0018	0.2969	0.0421	0.0018
	\hat{d}_3	0.4020	0.0445	0.0020	0.3979	0.0440	0.0019
0.76	\hat{d}_1	0.1989	0.0411	0.0017	0.1965	0.0405	0.0017
	\hat{d}_2	0.3000	0.0414	0.0017	0.2964	0.0410	0.0017
	\hat{d}_3	0.4022	0.0430	0.0018	0.3975	0.0424	0.0018
0.77	\hat{d}_1	0.1985	0.0401	0.0016	0.1958	0.0395	0.0016
	\hat{d}_2	0.2996	0.0400	0.0016	0.2955	0.0394	0.0016
	\hat{d}_3	0.4020	0.0415	0.0017	0.3965	0.0409	0.0017
0.78	\hat{d}_1	0.1987	0.0383	0.0015	0.1955	0.0377	0.0014
	\hat{d}_2	0.2996	0.0382	0.0015	0.2948	0.0376	0.0014
	\hat{d}_3	0.4023	0.0394	0.0016	0.3959	0.0388	0.0015
0.79	\hat{d}_1	0.1986	0.0371	0.0014	0.1950	0.0365	0.0014
	\hat{d}_2	0.3004	0.0373	0.0014	0.2950	0.0367	0.0014
	\hat{d}_3	0.4021	0.0379	0.0014	0.3948	0.0372	0.0014
0.80	\hat{d}_1	0.1987	0.0357	0.0013	0.1945	0.0350	0.0013
	\hat{d}_2	0.3007	0.0361	0.0013	0.2944	0.0354	0.0013
	\hat{d}_3	0.4017	0.0367	0.0014	0.3933	0.0360	0.0013
0.81	\hat{d}_1	0.1986	0.0347	0.0012	0.1938	0.0339	0.0012
	\hat{d}_2	0.3005	0.0357	0.0013	0.2932	0.0349	0.0013
	\hat{d}_3	0.4017	0.0357	0.0013	0.3919	0.0348	0.0013

Tabela B.9. Valores da média, desvio padrão e erro quadrático médio para os estimadores GPH e CGPH, quando $\alpha \in \{0.65, 0.66, \dots, 0.81\}$, $\rho = 0.8$ $\mathbf{d} = (0.2, 0.3, 0.4)$ e $n = 1500$.

α	\mathbf{d}	GPH			CGPH		
		média	dp	eqm	média	dp	eqm
0.65	\hat{d}_1	0.1999	0.0646	0.0042	0.1994	0.0645	0.0042
	\hat{d}_2	0.3027	0.0668	0.0045	0.3020	0.0666	0.0044
	\hat{d}_3	0.4030	0.0695	0.0048	0.4020	0.0693	0.0048
0.66	\hat{d}_1	0.2003	0.0614	0.0038	0.1997	0.0612	0.0037
	\hat{d}_2	0.3024	0.0636	0.0040	0.3015	0.0634	0.0040
	\hat{d}_3	0.4030	0.0664	0.0044	0.4019	0.0662	0.0044
0.67	\hat{d}_1	0.2005	0.0583	0.0034	0.1998	0.0581	0.0034
	\hat{d}_2	0.3018	0.0609	0.0037	0.3008	0.0607	0.0037
	\hat{d}_3	0.4037	0.0631	0.0040	0.4024	0.0629	0.0040
0.68	\hat{d}_1	0.2010	0.0564	0.0032	0.2003	0.0562	0.0032
	\hat{d}_2	0.3016	0.0585	0.0034	0.3004	0.0583	0.0034
	\hat{d}_3	0.4043	0.0600	0.0036	0.4028	0.0598	0.0036
0.69	\hat{d}_1	0.2014	0.0547	0.0030	0.2005	0.0545	0.0030
	\hat{d}_2	0.3010	0.0560	0.0031	0.2997	0.0558	0.0031
	\hat{d}_3	0.4036	0.0578	0.0034	0.4018	0.0575	0.0033
0.70	\hat{d}_1	0.2021	0.0528	0.0028	0.2011	0.0526	0.0028
	\hat{d}_2	0.3016	0.0537	0.0029	0.3001	0.0534	0.0028
	\hat{d}_3	0.4035	0.0560	0.0031	0.4015	0.0557	0.0031
0.71	\hat{d}_1	0.2020	0.0517	0.0027	0.2009	0.0514	0.0026
	\hat{d}_2	0.3011	0.0522	0.0027	0.2994	0.0519	0.0027
	\hat{d}_3	0.4029	0.0544	0.0030	0.4006	0.0541	0.0029
0.72	\hat{d}_1	0.2011	0.0497	0.0025	0.1998	0.0494	0.0024
	\hat{d}_2	0.3006	0.0506	0.0026	0.2986	0.0503	0.0025
	\hat{d}_3	0.4030	0.0530	0.0028	0.4003	0.0527	0.0028
0.73	\hat{d}_1	0.2008	0.0478	0.0023	0.1993	0.0474	0.0022
	\hat{d}_2	0.3004	0.0481	0.0023	0.2981	0.0477	0.0023
	\hat{d}_3	0.4026	0.0507	0.0026	0.3995	0.0503	0.0025
0.74	\hat{d}_1	0.2015	0.0462	0.0021	0.1997	0.0458	0.0021
	\hat{d}_2	0.3008	0.0463	0.0021	0.2981	0.0459	0.0021
	\hat{d}_3	0.4032	0.0494	0.0024	0.3996	0.0489	0.0024
0.75	\hat{d}_1	0.2013	0.0452	0.0020	0.1993	0.0448	0.0020
	\hat{d}_2	0.3007	0.0451	0.0020	0.2977	0.0447	0.0020
	\hat{d}_3	0.4030	0.0476	0.0023	0.3989	0.0471	0.0022
0.76	\hat{d}_1	0.2017	0.0440	0.0019	0.1993	0.0435	0.0019
	\hat{d}_2	0.3008	0.0430	0.0018	0.2972	0.0424	0.0018
	\hat{d}_3	0.4029	0.0454	0.0021	0.3981	0.0449	0.0020
0.77	\hat{d}_1	0.2021	0.0423	0.0018	0.1993	0.0417	0.0017
	\hat{d}_2	0.3012	0.0418	0.0017	0.2971	0.0412	0.0017
	\hat{d}_3	0.4031	0.0441	0.0020	0.3976	0.0435	0.0019
0.78	\hat{d}_1	0.2022	0.0403	0.0016	0.1990	0.0397	0.0016
	\hat{d}_2	0.3011	0.0404	0.0016	0.2964	0.0397	0.0016
	\hat{d}_3	0.4030	0.0423	0.0018	0.3967	0.0416	0.0017
0.79	\hat{d}_1	0.2025	0.0389	0.0015	0.1989	0.0382	0.0015
	\hat{d}_2	0.3014	0.0390	0.0015	0.2959	0.0383	0.0015
	\hat{d}_3	0.4032	0.0409	0.0017	0.3959	0.0401	0.0016
0.80	\hat{d}_1	0.2021	0.0376	0.0014	0.1979	0.0368	0.0014
	\hat{d}_2	0.3010	0.0375	0.0014	0.2947	0.0367	0.0014
	\hat{d}_3	0.4029	0.0391	0.0015	0.3944	0.0383	0.0015
0.81	\hat{d}_1	0.2023	0.0368	0.0014	0.1974	0.0359	0.0013
	\hat{d}_2	0.3008	0.0363	0.0013	0.2935	0.0354	0.0013
	\hat{d}_3	0.4028	0.0379	0.0014	0.3931	0.0370	0.0014

Tabela B.10. Valores da média, desvio padrão e erro quadrático médio para os estimadores GPH e CGPH, quando $\alpha \in \{0.65, 0.66, \dots, 0.81\}$, $\rho = 0.0$ $\mathbf{d} = (0.2, 0.3, 0.4)$ e $n = 2000$.

α	\mathbf{d}	GPH			CGPH		
		média	dp	eqm	média	dp	eqm
0.65	\hat{d}_1	0.2012	0.0592	0.0035	0.2008	0.0591	0.0035
	\hat{d}_2	0.3032	0.0569	0.0032	0.3026	0.0568	0.0032
	\hat{d}_3	0.4030	0.0607	0.0037	0.4022	0.0605	0.0037
0.66	\hat{d}_1	0.2016	0.0562	0.0032	0.2011	0.0560	0.0031
	\hat{d}_2	0.3021	0.0547	0.0030	0.3014	0.0546	0.0030
	\hat{d}_3	0.4028	0.0579	0.0034	0.4019	0.0577	0.0033
0.67	\hat{d}_1	0.2016	0.0541	0.0029	0.2011	0.0539	0.0029
	\hat{d}_2	0.3018	0.0525	0.0028	0.3010	0.0524	0.0027
	\hat{d}_3	0.4029	0.0554	0.0031	0.4018	0.0553	0.0031
0.68	\hat{d}_1	0.2015	0.0521	0.0027	0.2008	0.0520	0.0027
	\hat{d}_2	0.3015	0.0500	0.0025	0.3005	0.0499	0.0025
	\hat{d}_3	0.4025	0.0526	0.0028	0.4012	0.0524	0.0027
0.69	\hat{d}_1	0.2011	0.0503	0.0025	0.2004	0.0501	0.0025
	\hat{d}_2	0.3023	0.0479	0.0023	0.3012	0.0477	0.0023
	\hat{d}_3	0.4022	0.0505	0.0025	0.4007	0.0503	0.0025
0.70	\hat{d}_1	0.2017	0.0483	0.0023	0.2009	0.0481	0.0023
	\hat{d}_2	0.3027	0.0455	0.0021	0.3014	0.0453	0.0021
	\hat{d}_3	0.4029	0.0476	0.0023	0.4012	0.0474	0.0022
0.71	\hat{d}_1	0.2016	0.0466	0.0022	0.2006	0.0464	0.0021
	\hat{d}_2	0.3031	0.0442	0.0020	0.3017	0.0440	0.0019
	\hat{d}_3	0.4035	0.0466	0.0022	0.4016	0.0464	0.0022
0.72	\hat{d}_1	0.2017	0.0442	0.0020	0.2006	0.0440	0.0019
	\hat{d}_2	0.3027	0.0425	0.0018	0.3010	0.0423	0.0018
	\hat{d}_3	0.4031	0.0447	0.0020	0.4008	0.0445	0.0020
0.73	\hat{d}_1	0.2015	0.0431	0.0019	0.2002	0.0428	0.0018
	\hat{d}_2	0.3029	0.0407	0.0017	0.3009	0.0404	0.0016
	\hat{d}_3	0.4028	0.0429	0.0019	0.4002	0.0427	0.0018
0.74	\hat{d}_1	0.2017	0.0418	0.0017	0.2002	0.0415	0.0017
	\hat{d}_2	0.3030	0.0394	0.0016	0.3007	0.0392	0.0015
	\hat{d}_3	0.4029	0.0409	0.0017	0.3999	0.0406	0.0016
0.75	\hat{d}_1	0.2016	0.0395	0.0016	0.1999	0.0391	0.0015
	\hat{d}_2	0.3034	0.0380	0.0015	0.3007	0.0376	0.0014
	\hat{d}_3	0.4037	0.0390	0.0015	0.4001	0.0386	0.0015
0.76	\hat{d}_1	0.2013	0.0378	0.0014	0.1993	0.0374	0.0014
	\hat{d}_2	0.3025	0.0369	0.0014	0.2994	0.0365	0.0013
	\hat{d}_3	0.4033	0.0374	0.0014	0.3992	0.0370	0.0014
0.77	\hat{d}_1	0.2010	0.0364	0.0013	0.1986	0.0360	0.0013
	\hat{d}_2	0.3024	0.0357	0.0013	0.2989	0.0353	0.0012
	\hat{d}_3	0.4033	0.0361	0.0013	0.3985	0.0357	0.0013
0.78	\hat{d}_1	0.2005	0.0349	0.0012	0.1978	0.0344	0.0012
	\hat{d}_2	0.3022	0.0346	0.0012	0.2980	0.0341	0.0012
	\hat{d}_3	0.4029	0.0351	0.0012	0.3973	0.0346	0.0012
0.79	\hat{d}_1	0.2006	0.0334	0.0011	0.1974	0.0328	0.0011
	\hat{d}_2	0.3016	0.0335	0.0011	0.2968	0.0329	0.0011
	\hat{d}_3	0.4025	0.0333	0.0011	0.3961	0.0327	0.0011
0.80	\hat{d}_1	0.2003	0.0319	0.0010	0.1966	0.0312	0.0010
	\hat{d}_2	0.3014	0.0324	0.0010	0.2958	0.0318	0.0010
	\hat{d}_3	0.4022	0.0324	0.0011	0.3948	0.0318	0.0010
0.81	\hat{d}_1	0.2001	0.0310	0.0009	0.1958	0.0303	0.0009
	\hat{d}_2	0.3012	0.0313	0.0009	0.2947	0.0307	0.0009
	\hat{d}_3	0.4022	0.0312	0.0009	0.3935	0.0305	0.0009

Tabela B.11. Valores da média, desvio padrão e erro quadrático médio para os estimadores GPH e CGPH, quando $\alpha \in \{0.65, 0.66, \dots, 0.81\}$, $\rho = 0.5$ $\mathbf{d} = (0.2, 0.3, 0.4)$ e $n = 2000$.

α	\mathbf{d}	GPH			CGPH		
		média	dp	eqm	média	dp	eqm
0.65	\hat{d}_1	0.2009	0.0570	0.0032	0.2005	0.0569	0.0032
	\hat{d}_2	0.3022	0.0597	0.0036	0.3016	0.0595	0.0035
	\hat{d}_3	0.4078	0.0575	0.0034	0.4070	0.0574	0.0033
0.66	\hat{d}_1	0.2012	0.0546	0.0030	0.2007	0.0544	0.0030
	\hat{d}_2	0.3028	0.0569	0.0032	0.3021	0.0568	0.0032
	\hat{d}_3	0.4068	0.0549	0.0031	0.4059	0.0548	0.0030
0.67	\hat{d}_1	0.2018	0.0527	0.0028	0.2013	0.0526	0.0028
	\hat{d}_2	0.3024	0.0543	0.0030	0.3016	0.0542	0.0029
	\hat{d}_3	0.4065	0.0530	0.0028	0.4054	0.0528	0.0028
0.68	\hat{d}_1	0.2008	0.0510	0.0026	0.2002	0.0509	0.0026
	\hat{d}_2	0.3020	0.0521	0.0027	0.3011	0.0519	0.0027
	\hat{d}_3	0.4059	0.0513	0.0027	0.4046	0.0512	0.0026
0.69	\hat{d}_1	0.2003	0.0490	0.0024	0.1996	0.0488	0.0024
	\hat{d}_2	0.3018	0.0491	0.0024	0.3007	0.0489	0.0024
	\hat{d}_3	0.4058	0.0488	0.0024	0.4043	0.0486	0.0024
0.70	\hat{d}_1	0.2003	0.0468	0.0022	0.1994	0.0466	0.0022
	\hat{d}_2	0.3017	0.0470	0.0022	0.3004	0.0468	0.0022
	\hat{d}_3	0.4049	0.0460	0.0021	0.4032	0.0458	0.0021
0.71	\hat{d}_1	0.2010	0.0446	0.0020	0.2000	0.0444	0.0020
	\hat{d}_2	0.3017	0.0447	0.0020	0.3003	0.0445	0.0020
	\hat{d}_3	0.4052	0.0453	0.0021	0.4033	0.0451	0.0020
0.72	\hat{d}_1	0.2006	0.0424	0.0018	0.1994	0.0422	0.0018
	\hat{d}_2	0.3019	0.0424	0.0018	0.3002	0.0422	0.0018
	\hat{d}_3	0.4052	0.0434	0.0019	0.4029	0.0432	0.0019
0.73	\hat{d}_1	0.2009	0.0410	0.0017	0.1996	0.0408	0.0017
	\hat{d}_2	0.3018	0.0416	0.0017	0.2999	0.0413	0.0017
	\hat{d}_3	0.4050	0.0419	0.0018	0.4024	0.0416	0.0017
0.74	\hat{d}_1	0.2011	0.0392	0.0015	0.1996	0.0389	0.0015
	\hat{d}_2	0.3012	0.0397	0.0016	0.2989	0.0394	0.0016
	\hat{d}_3	0.4045	0.0399	0.0016	0.4015	0.0396	0.0016
0.75	\hat{d}_1	0.2009	0.0379	0.0014	0.1991	0.0375	0.0014
	\hat{d}_2	0.3017	0.0377	0.0014	0.2991	0.0373	0.0014
	\hat{d}_3	0.4044	0.0385	0.0015	0.4009	0.0382	0.0015
0.76	\hat{d}_1	0.2013	0.0365	0.0013	0.1993	0.0361	0.0013
	\hat{d}_2	0.3021	0.0365	0.0013	0.2991	0.0361	0.0013
	\hat{d}_3	0.4044	0.0374	0.0014	0.4003	0.0370	0.0014
0.77	\hat{d}_1	0.2013	0.0355	0.0013	0.1989	0.0351	0.0012
	\hat{d}_2	0.3016	0.0351	0.0012	0.2981	0.0347	0.0012
	\hat{d}_3	0.4042	0.0361	0.0013	0.3995	0.0357	0.0013
0.78	\hat{d}_1	0.2013	0.0344	0.0012	0.1986	0.0340	0.0012
	\hat{d}_2	0.3017	0.0338	0.0011	0.2976	0.0333	0.0011
	\hat{d}_3	0.4041	0.0351	0.0012	0.3986	0.0347	0.0012
0.79	\hat{d}_1	0.2013	0.0335	0.0011	0.1981	0.0330	0.0011
	\hat{d}_2	0.3013	0.0329	0.0011	0.2965	0.0324	0.0011
	\hat{d}_3	0.4041	0.0343	0.0012	0.3976	0.0338	0.0011
0.80	\hat{d}_1	0.2014	0.0322	0.0010	0.1977	0.0316	0.0010
	\hat{d}_2	0.3017	0.0313	0.0010	0.2961	0.0308	0.0010
	\hat{d}_3	0.4042	0.0331	0.0011	0.3967	0.0325	0.0011
0.81	\hat{d}_1	0.2015	0.0312	0.0010	0.1972	0.0306	0.0009
	\hat{d}_2	0.3016	0.0302	0.0009	0.2951	0.0296	0.0008
	\hat{d}_3	0.4042	0.0319	0.0010	0.3955	0.0312	0.0009

Tabela B.12. Valores da média, desvio padrão e erro quadrático médio para os estimadores GPH e CGPH, quando $\alpha \in \{0.65, 0.66, \dots, 0.81\}$, $\rho = 0.8$ $\mathbf{d} = (0.2, 0.3, 0.4)$ e $n = 2000$.

α	\mathbf{d}	GPH			CGPH		
		média	dp	eqm	média	dp	eqm
0.65	\hat{d}_1	0.2000	0.0571	0.0033	0.1996	0.0570	0.0032
	\hat{d}_2	0.3030	0.0572	0.0033	0.3024	0.0571	0.0033
	\hat{d}_3	0.4045	0.0580	0.0034	0.4037	0.0578	0.0034
0.66	\hat{d}_1	0.2013	0.0545	0.0030	0.2009	0.0544	0.0030
	\hat{d}_2	0.3038	0.0556	0.0031	0.3031	0.0555	0.0031
	\hat{d}_3	0.4050	0.0554	0.0031	0.4041	0.0552	0.0031
0.67	\hat{d}_1	0.2013	0.0522	0.0027	0.2007	0.0521	0.0027
	\hat{d}_2	0.3040	0.0529	0.0028	0.3032	0.0528	0.0028
	\hat{d}_3	0.4050	0.0527	0.0028	0.4039	0.0526	0.0028
0.68	\hat{d}_1	0.1998	0.0506	0.0026	0.1992	0.0504	0.0025
	\hat{d}_2	0.3033	0.0508	0.0026	0.3023	0.0506	0.0026
	\hat{d}_3	0.4043	0.0509	0.0026	0.4031	0.0508	0.0026
0.69	\hat{d}_1	0.1997	0.0492	0.0024	0.1990	0.0491	0.0024
	\hat{d}_2	0.3032	0.0496	0.0025	0.3021	0.0494	0.0024
	\hat{d}_3	0.4044	0.0491	0.0024	0.4029	0.0489	0.0024
0.70	\hat{d}_1	0.1991	0.0472	0.0022	0.1983	0.0471	0.0022
	\hat{d}_2	0.3022	0.0475	0.0023	0.3009	0.0474	0.0022
	\hat{d}_3	0.4037	0.0469	0.0022	0.4020	0.0467	0.0022
0.71	\hat{d}_1	0.1993	0.0457	0.0021	0.1984	0.0455	0.0021
	\hat{d}_2	0.3020	0.0460	0.0021	0.3005	0.0457	0.0021
	\hat{d}_3	0.4041	0.0456	0.0021	0.4021	0.0454	0.0021
0.72	\hat{d}_1	0.1994	0.0435	0.0019	0.1983	0.0433	0.0019
	\hat{d}_2	0.3021	0.0444	0.0020	0.3004	0.0442	0.0020
	\hat{d}_3	0.4043	0.0435	0.0019	0.4020	0.0433	0.0019
0.73	\hat{d}_1	0.1994	0.0414	0.0017	0.1981	0.0412	0.0017
	\hat{d}_2	0.3022	0.0433	0.0019	0.3002	0.0431	0.0019
	\hat{d}_3	0.4037	0.0421	0.0018	0.4011	0.0418	0.0017
0.74	\hat{d}_1	0.1992	0.0389	0.0015	0.1977	0.0386	0.0015
	\hat{d}_2	0.3014	0.0413	0.0017	0.2991	0.0410	0.0017
	\hat{d}_3	0.4028	0.0403	0.0016	0.3997	0.0400	0.0016
0.75	\hat{d}_1	0.2000	0.0375	0.0014	0.1983	0.0371	0.0014
	\hat{d}_2	0.3018	0.0390	0.0015	0.2991	0.0386	0.0015
	\hat{d}_3	0.4029	0.0387	0.0015	0.3994	0.0383	0.0015
0.76	\hat{d}_1	0.1998	0.0359	0.0013	0.1978	0.0355	0.0013
	\hat{d}_2	0.3014	0.0381	0.0014	0.2984	0.0377	0.0014
	\hat{d}_3	0.4030	0.0376	0.0014	0.3989	0.0373	0.0014
0.77	\hat{d}_1	0.2001	0.0349	0.0012	0.1977	0.0345	0.0012
	\hat{d}_2	0.3008	0.0362	0.0013	0.2973	0.0358	0.0013
	\hat{d}_3	0.4026	0.0363	0.0013	0.3978	0.0359	0.0013
0.78	\hat{d}_1	0.2004	0.0340	0.0012	0.1977	0.0335	0.0011
	\hat{d}_2	0.3008	0.0348	0.0012	0.2966	0.0343	0.0012
	\hat{d}_3	0.4027	0.0349	0.0012	0.3971	0.0344	0.0012
0.79	\hat{d}_1	0.2006	0.0325	0.0011	0.1974	0.0320	0.0010
	\hat{d}_2	0.3003	0.0330	0.0011	0.2955	0.0325	0.0011
	\hat{d}_3	0.4023	0.0331	0.0011	0.3959	0.0325	0.0011
0.80	\hat{d}_1	0.2005	0.0315	0.0010	0.1968	0.0309	0.0010
	\hat{d}_2	0.2999	0.0317	0.0010	0.2943	0.0311	0.0010
	\hat{d}_3	0.4025	0.0324	0.0011	0.3951	0.0319	0.0010
0.81	\hat{d}_1	0.2005	0.0306	0.0009	0.1962	0.0300	0.0009
	\hat{d}_2	0.2999	0.0305	0.0009	0.2934	0.0298	0.0009
	\hat{d}_3	0.4025	0.0314	0.0009	0.3938	0.0307	0.0009

B.2 SIMULAÇÕES PARA O PARÂMETRO q_n

Para suavizar o estimador CGPH, resultando no estimador dado pela expressão (4.42) e denotado por SCGPH, utilizamos uma função de ponderação, para a qual necessitamos determinar o ponto de truncamento q_n . Para determinar o melhor valor de q_n para a função de ponderação de Parzen, através de simulações de Monte Carlo, utilizamos o conjunto $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} \in \{(0.4, 0.4, 0.4), (0.3, 0.3, 0.3), (0.2, 0.2, 0.2), (-0.2, -0.2, -0.2)\}$, $\rho \in \{0.0, 0.8\}$ e $n \in \{1000, 1500, 2000\}$, considerando-se 1000 replicações. As simulações para $n = 500$ e $\rho = 0.5$ foram apresentadas no Capítulo 5.

As Tabelas B.2-B.22 e as suas correspondentes Figuras mostram os resultados dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio do estimador SCGPH para os diversos valores de q_n na função de ponderação de Parzen. Ressaltamos que essa janela espectral apresentou melhores resultados para esse estimador. É importante observar que o estimador SCGPH reduz-se ao estimador CGPH quando $q_n = 0$. Podemos verificar que o estimador SCGPH já apresenta bons resultados para vício, desvio padrão e erro quadrático médio para todos os pares (n, \mathbf{d}) quando $q_n = 1$, apesar de q_n ser uma função de n . Também podemos observar que o desvio padrão e o erro médio quadrático parecem depender de \mathbf{d} . Isso já era esperado, visto que, quando $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo VARFIMA(p, \mathbf{d}, q) e $\rho \neq 0$, a matriz \mathbf{G} , dada na expressão (3.73), depende do parâmetro \mathbf{d} .

Tabela B.13. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.0$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 1000$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.4003	0.0003	0.0500	0.0025
	\hat{d}_2	0.3976	-0.0024	0.0519	0.0027
	\hat{d}_3	0.3990	-0.0010	0.0490	0.0024
1	\hat{d}_1	0.4081	0.0081	0.0459	0.0022
	\hat{d}_2	0.4050	0.0050	0.0469	0.0022
	\hat{d}_3	0.4067	0.0067	0.0449	0.0021
2	\hat{d}_1	0.4128	0.0128	0.0470	0.0024
	\hat{d}_2	0.4100	0.0100	0.0475	0.0024
	\hat{d}_3	0.4111	0.0111	0.0458	0.0022
3	\hat{d}_1	0.4168	0.0168	0.0486	0.0026
	\hat{d}_2	0.4142	0.0142	0.0486	0.0026
	\hat{d}_3	0.4151	0.0151	0.0473	0.0025
4	\hat{d}_1	0.4203	0.0203	0.0504	0.0030
	\hat{d}_2	0.4178	0.0178	0.0501	0.0028
	\hat{d}_3	0.4186	0.0186	0.0490	0.0027
5	\hat{d}_1	0.4235	0.0235	0.0523	0.0033
	\hat{d}_2	0.4212	0.0212	0.0517	0.0031
	\hat{d}_3	0.4219	0.0219	0.0508	0.0031
6	\hat{d}_1	0.4264	0.0264	0.0542	0.0036
	\hat{d}_2	0.4242	0.0242	0.0534	0.0034
	\hat{d}_3	0.4249	0.0249	0.0527	0.0034
7	\hat{d}_1	0.4291	0.0291	0.0561	0.0040
	\hat{d}_2	0.4270	0.0270	0.0552	0.0038
	\hat{d}_3	0.4277	0.0277	0.0547	0.0038
8	\hat{d}_1	0.4316	0.0316	0.0579	0.0044
	\hat{d}_2	0.4296	0.0296	0.0569	0.0041
	\hat{d}_3	0.4303	0.0303	0.0566	0.0041
9	\hat{d}_1	0.4339	0.0339	0.0598	0.0047
	\hat{d}_2	0.4320	0.0320	0.0586	0.0045
	\hat{d}_3	0.4328	0.0328	0.0584	0.0045
10	\hat{d}_1	0.4361	0.0361	0.0615	0.0051
	\hat{d}_2	0.4343	0.0343	0.0603	0.0048
	\hat{d}_3	0.4350	0.0350	0.0603	0.0049
11	\hat{d}_1	0.4382	0.0382	0.0633	0.0055
	\hat{d}_2	0.4364	0.0364	0.0620	0.0052
	\hat{d}_3	0.4372	0.0372	0.0620	0.0052
12	\hat{d}_1	0.4401	0.0401	0.0649	0.0058
	\hat{d}_2	0.4384	0.0384	0.0636	0.0055
	\hat{d}_3	0.4392	0.0392	0.0637	0.0056

Tabela B.14. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.0$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 1500$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.3974	-0.0026	0.0406	0.0017
	\hat{d}_2	0.3997	-0.0003	0.0427	0.0018
	\hat{d}_3	0.3987	-0.0013	0.0417	0.0017
1	\hat{d}_1	0.4036	0.0036	0.0373	0.0014
	\hat{d}_2	0.4060	0.0060	0.0387	0.0015
	\hat{d}_3	0.4043	0.0043	0.0383	0.0015
2	\hat{d}_1	0.4073	0.0073	0.0380	0.0015
	\hat{d}_2	0.4096	0.0096	0.0388	0.0016
	\hat{d}_3	0.4081	0.0081	0.0388	0.0016
3	\hat{d}_1	0.4106	0.0106	0.0391	0.0016
	\hat{d}_2	0.4127	0.0127	0.0395	0.0017
	\hat{d}_3	0.4113	0.0113	0.0397	0.0017
4	\hat{d}_1	0.4135	0.0135	0.0404	0.0018
	\hat{d}_2	0.4155	0.0155	0.0406	0.0019
	\hat{d}_3	0.4141	0.0141	0.0408	0.0019
5	\hat{d}_1	0.4162	0.0162	0.0418	0.0020
	\hat{d}_2	0.4182	0.0182	0.0419	0.0021
	\hat{d}_3	0.4168	0.0168	0.0419	0.0020
6	\hat{d}_1	0.4187	0.0187	0.0433	0.0022
	\hat{d}_2	0.4206	0.0206	0.0433	0.0023
	\hat{d}_3	0.4192	0.0192	0.0432	0.0022
7	\hat{d}_1	0.4210	0.0210	0.0448	0.0024
	\hat{d}_2	0.4228	0.0228	0.0448	0.0025
	\hat{d}_3	0.4214	0.0214	0.0444	0.0024
8	\hat{d}_1	0.4232	0.0232	0.0463	0.0027
	\hat{d}_2	0.4249	0.0249	0.0462	0.0028
	\hat{d}_3	0.4235	0.0235	0.0457	0.0026
9	\hat{d}_1	0.4252	0.0252	0.0478	0.0029
	\hat{d}_2	0.4269	0.0269	0.0477	0.0030
	\hat{d}_3	0.4255	0.0255	0.0470	0.0029
10	\hat{d}_1	0.4271	0.0271	0.0493	0.0032
	\hat{d}_2	0.4288	0.0288	0.0491	0.0032
	\hat{d}_3	0.4274	0.0274	0.0483	0.0031
11	\hat{d}_1	0.4288	0.0288	0.0507	0.0034
	\hat{d}_2	0.4306	0.0306	0.0505	0.0035
	\hat{d}_3	0.4292	0.0292	0.0495	0.0033
12	\hat{d}_1	0.4305	0.0305	0.0520	0.0036
	\hat{d}_2	0.4323	0.0323	0.0518	0.0037
	\hat{d}_3	0.4309	0.0309	0.0507	0.0035

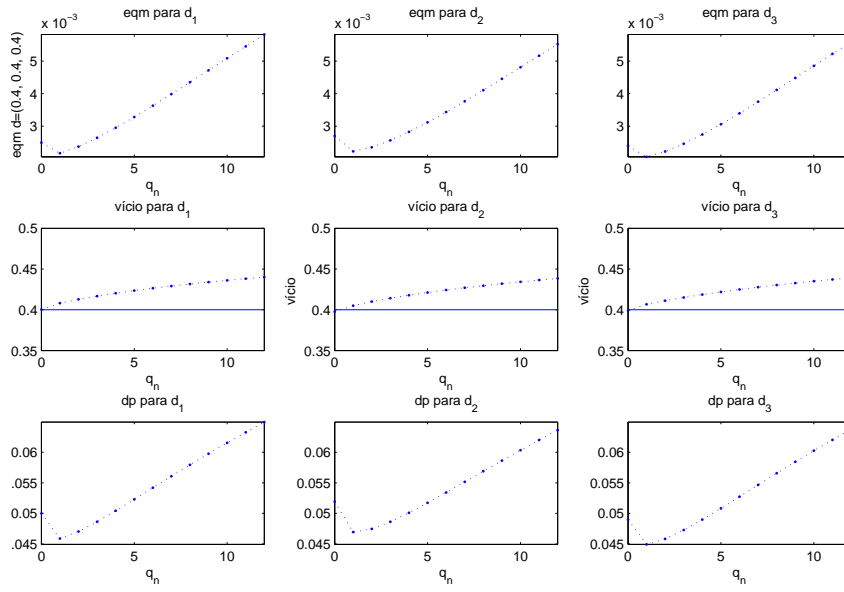


Figura B.1: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.0$ e $n = 1000$.

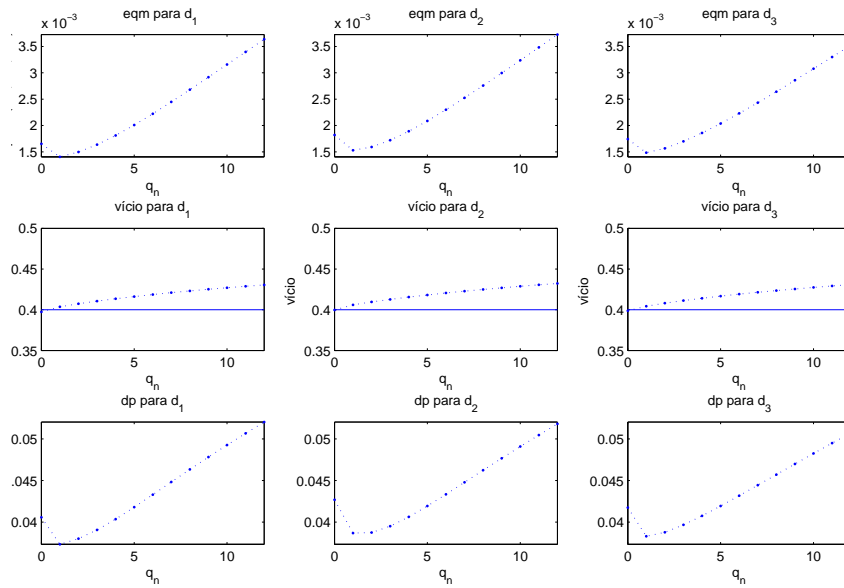


Figura B.2: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.0$ e $n = 1500$.

Tabela B.15. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.0$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 2000$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.3984	-0.0016	0.0378	0.0014
	\hat{d}_2	0.4009	0.0009	0.0374	0.0014
	\hat{d}_3	0.3989	-0.0011	0.0371	0.0014
1	\hat{d}_1	0.4029	0.0029	0.0339	0.0012
	\hat{d}_2	0.4055	0.0055	0.0346	0.0012
	\hat{d}_3	0.4037	0.0037	0.0339	0.0012
2	\hat{d}_1	0.4057	0.0057	0.0341	0.0012
	\hat{d}_2	0.4090	0.0090	0.0349	0.0013
	\hat{d}_3	0.4066	0.0066	0.0345	0.0012
3	\hat{d}_1	0.4082	0.0082	0.0348	0.0013
	\hat{d}_2	0.4120	0.0120	0.0355	0.0014
	\hat{d}_3	0.4091	0.0091	0.0354	0.0013
4	\hat{d}_1	0.4106	0.0106	0.0357	0.0014
	\hat{d}_2	0.4147	0.0147	0.0364	0.0015
	\hat{d}_3	0.4114	0.0114	0.0365	0.0015
5	\hat{d}_1	0.4127	0.0127	0.0367	0.0015
	\hat{d}_2	0.4171	0.0171	0.0373	0.0017
	\hat{d}_3	0.4135	0.0135	0.0376	0.0016
6	\hat{d}_1	0.4147	0.0147	0.0378	0.0016
	\hat{d}_2	0.4194	0.0194	0.0384	0.0018
	\hat{d}_3	0.4155	0.0155	0.0388	0.0017
7	\hat{d}_1	0.4166	0.0166	0.0390	0.0018
	\hat{d}_2	0.4215	0.0215	0.0394	0.0020
	\hat{d}_3	0.4174	0.0174	0.0400	0.0019
8	\hat{d}_1	0.4184	0.0184	0.0401	0.0019
	\hat{d}_2	0.4235	0.0235	0.0405	0.0022
	\hat{d}_3	0.4192	0.0192	0.0412	0.0021
9	\hat{d}_1	0.4201	0.0201	0.0413	0.0021
	\hat{d}_2	0.4254	0.0254	0.0416	0.0024
	\hat{d}_3	0.4209	0.0209	0.0423	0.0022
10	\hat{d}_1	0.4217	0.0217	0.0425	0.0023
	\hat{d}_2	0.4273	0.0273	0.0427	0.0026
	\hat{d}_3	0.4225	0.0225	0.0435	0.0024
11	\hat{d}_1	0.4232	0.0232	0.0436	0.0024
	\hat{d}_2	0.4290	0.0290	0.0438	0.0028
	\hat{d}_3	0.4240	0.0240	0.0447	0.0026
12	\hat{d}_1	0.4247	0.0247	0.0447	0.0026
	\hat{d}_2	0.4307	0.0307	0.0448	0.0029
	\hat{d}_3	0.4255	0.0255	0.0458	0.0027

Tabela B.16. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.5$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 1000$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.3994	-0.0006	0.0491	0.0024
	\hat{d}_2	0.4009	0.0009	0.0503	0.0025
	\hat{d}_3	0.3973	-0.0027	0.0500	0.0025
1	\hat{d}_1	0.4062	0.0062	0.0450	0.0021
	\hat{d}_2	0.4080	0.0080	0.0462	0.0022
	\hat{d}_3	0.4070	0.0070	0.0464	0.0022
2	\hat{d}_1	0.4106	0.0106	0.0459	0.0022
	\hat{d}_2	0.4130	0.0130	0.0470	0.0024
	\hat{d}_3	0.4120	0.0120	0.0475	0.0024
3	\hat{d}_1	0.4143	0.0143	0.0474	0.0024
	\hat{d}_2	0.4172	0.0172	0.0484	0.0026
	\hat{d}_3	0.4161	0.0161	0.0490	0.0027
4	\hat{d}_1	0.4177	0.0177	0.0491	0.0027
	\hat{d}_2	0.4209	0.0209	0.0502	0.0030
	\hat{d}_3	0.4197	0.0197	0.0507	0.0030
5	\hat{d}_1	0.4209	0.0209	0.0509	0.0030
	\hat{d}_2	0.4243	0.0243	0.0521	0.0033
	\hat{d}_3	0.4229	0.0229	0.0524	0.0033
6	\hat{d}_1	0.4238	0.0238	0.0527	0.0033
	\hat{d}_2	0.4274	0.0274	0.0541	0.0037
	\hat{d}_3	0.4259	0.0259	0.0542	0.0036
7	\hat{d}_1	0.4265	0.0265	0.0545	0.0037
	\hat{d}_2	0.4303	0.0303	0.0561	0.0041
	\hat{d}_3	0.4286	0.0286	0.0560	0.0039
8	\hat{d}_1	0.4290	0.0290	0.0562	0.0040
	\hat{d}_2	0.4330	0.0330	0.0581	0.0045
	\hat{d}_3	0.4311	0.0311	0.0577	0.0043
9	\hat{d}_1	0.4313	0.0313	0.0580	0.0043
	\hat{d}_2	0.4354	0.0354	0.0600	0.0049
	\hat{d}_3	0.4334	0.0334	0.0595	0.0046
10	\hat{d}_1	0.4335	0.0335	0.0596	0.0047
	\hat{d}_2	0.4377	0.0377	0.0619	0.0053
	\hat{d}_3	0.4356	0.0356	0.0612	0.0050
11	\hat{d}_1	0.4356	0.0356	0.0613	0.0050
	\hat{d}_2	0.4399	0.0399	0.0638	0.0057
	\hat{d}_3	0.4376	0.0376	0.0628	0.0054
12	\hat{d}_1	0.4375	0.0375	0.0629	0.0054
	\hat{d}_2	0.4419	0.0419	0.0655	0.0060
	\hat{d}_3	0.4395	0.0395	0.0644	0.0057

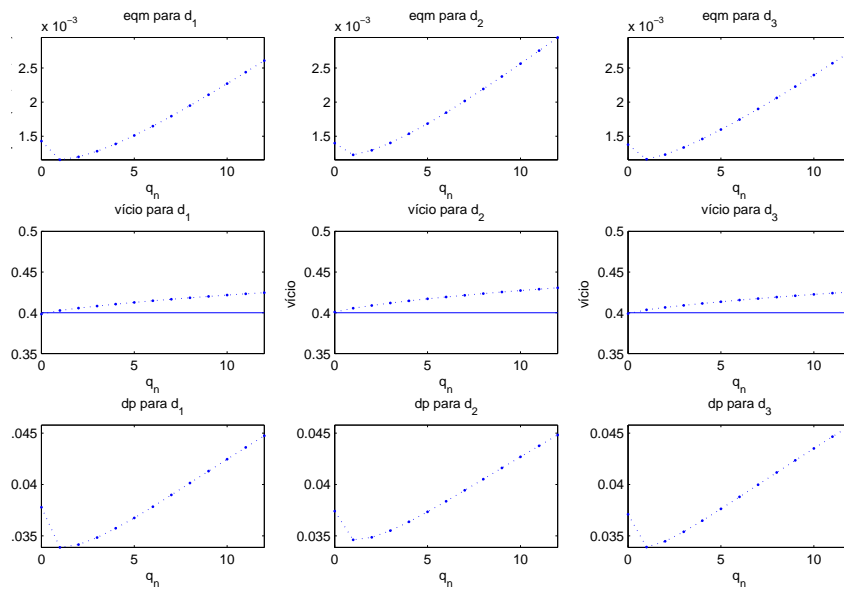


Figura B.3: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.0$ e $n = 2000$.

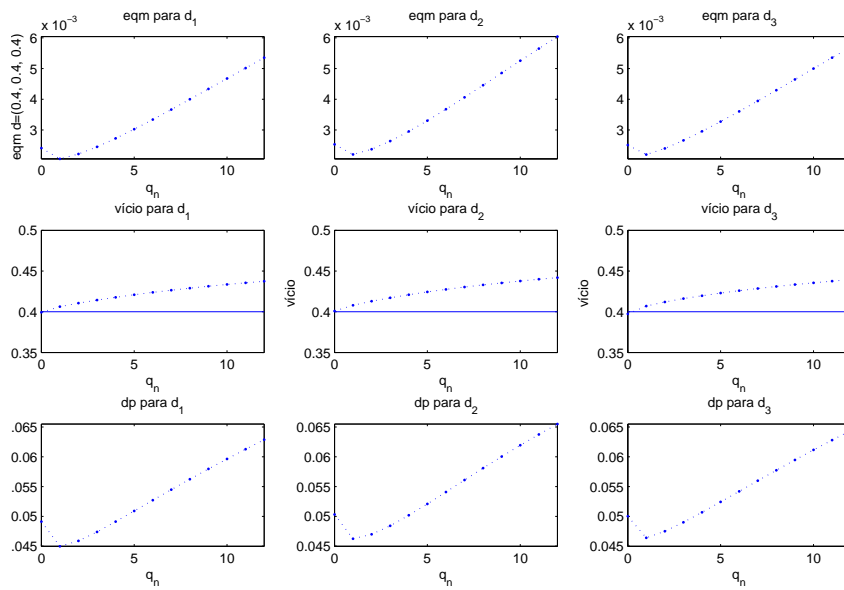


Figura B.4: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.5$ e $n = 1000$.

Tabela B.17. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.5$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 1500$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.3992	-0.0008	0.0411	0.0017
	\hat{d}_2	0.3989	-0.0011	0.0433	0.0019
	\hat{d}_3	0.3997	-0.0003	0.0427	0.0018
1	\hat{d}_1	0.4061	0.0061	0.0385	0.0015
	\hat{d}_2	0.4049	0.0049	0.0406	0.0017
	\hat{d}_3	0.4052	0.0052	0.0391	0.0016
2	\hat{d}_1	0.4100	0.0100	0.0394	0.0017
	\hat{d}_2	0.4087	0.0087	0.0411	0.0018
	\hat{d}_3	0.4090	0.0090	0.0396	0.0016
3	\hat{d}_1	0.4134	0.0134	0.0405	0.0018
	\hat{d}_2	0.4119	0.0119	0.0420	0.0019
	\hat{d}_3	0.4124	0.0124	0.0405	0.0018
4	\hat{d}_1	0.4165	0.0165	0.0418	0.0020
	\hat{d}_2	0.4148	0.0148	0.0431	0.0021
	\hat{d}_3	0.4154	0.0154	0.0417	0.0020
5	\hat{d}_1	0.4193	0.0193	0.0432	0.0022
	\hat{d}_2	0.4174	0.0174	0.0444	0.0023
	\hat{d}_3	0.4181	0.0181	0.0430	0.0022
6	\hat{d}_1	0.4219	0.0219	0.0446	0.0025
	\hat{d}_2	0.4198	0.0198	0.0458	0.0025
	\hat{d}_3	0.4207	0.0207	0.0443	0.0024
7	\hat{d}_1	0.4243	0.0243	0.0460	0.0027
	\hat{d}_2	0.4221	0.0221	0.0471	0.0027
	\hat{d}_3	0.4230	0.0230	0.0456	0.0026
8	\hat{d}_1	0.4266	0.0266	0.0474	0.0029
	\hat{d}_2	0.4243	0.0243	0.0485	0.0029
	\hat{d}_3	0.4252	0.0252	0.0469	0.0028
9	\hat{d}_1	0.4287	0.0287	0.0488	0.0032
	\hat{d}_2	0.4263	0.0263	0.0498	0.0032
	\hat{d}_3	0.4273	0.0273	0.0483	0.0031
10	\hat{d}_1	0.4307	0.0307	0.0502	0.0035
	\hat{d}_2	0.4283	0.0283	0.0511	0.0034
	\hat{d}_3	0.4292	0.0292	0.0496	0.0033
11	\hat{d}_1	0.4325	0.0325	0.0515	0.0037
	\hat{d}_2	0.4302	0.0302	0.0524	0.0037
	\hat{d}_3	0.4311	0.0311	0.0509	0.0036
12	\hat{d}_1	0.4343	0.0343	0.0528	0.0040
	\hat{d}_2	0.4320	0.0320	0.0537	0.0039
	\hat{d}_3	0.4328	0.0328	0.0521	0.0038

Tabela B.18. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.5$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 2000$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.3994	-0.0006	0.0383	0.0015
	\hat{d}_2	0.3994	-0.0006	0.0378	0.0014
	\hat{d}_3	0.3982	-0.0018	0.0384	0.0015
1	\hat{d}_1	0.4041	0.0041	0.0343	0.0012
	\hat{d}_2	0.4050	0.0050	0.0332	0.0011
	\hat{d}_3	0.4027	0.0027	0.0352	0.0012
2	\hat{d}_1	0.4073	0.0073	0.0343	0.0012
	\hat{d}_2	0.4080	0.0080	0.0334	0.0012
	\hat{d}_3	0.4059	0.0059	0.0358	0.0013
3	\hat{d}_1	0.4100	0.0100	0.0347	0.0013
	\hat{d}_2	0.4105	0.0105	0.0341	0.0013
	\hat{d}_3	0.4086	0.0086	0.0367	0.0014
4	\hat{d}_1	0.4125	0.0125	0.0355	0.0014
	\hat{d}_2	0.4128	0.0128	0.0351	0.0014
	\hat{d}_3	0.4111	0.0111	0.0378	0.0016
5	\hat{d}_1	0.4148	0.0148	0.0364	0.0015
	\hat{d}_2	0.4150	0.0150	0.0362	0.0015
	\hat{d}_3	0.4133	0.0133	0.0389	0.0017
6	\hat{d}_1	0.4169	0.0169	0.0374	0.0017
	\hat{d}_2	0.4170	0.0170	0.0374	0.0017
	\hat{d}_3	0.4155	0.0155	0.0401	0.0018
7	\hat{d}_1	0.4189	0.0189	0.0385	0.0018
	\hat{d}_2	0.4190	0.0190	0.0385	0.0018
	\hat{d}_3	0.4174	0.0174	0.0412	0.0020
8	\hat{d}_1	0.4207	0.0207	0.0396	0.0020
	\hat{d}_2	0.4208	0.0208	0.0397	0.0020
	\hat{d}_3	0.4193	0.0193	0.0424	0.0022
9	\hat{d}_1	0.4225	0.0225	0.0406	0.0022
	\hat{d}_2	0.4226	0.0226	0.0409	0.0022
	\hat{d}_3	0.4211	0.0211	0.0435	0.0023
10	\hat{d}_1	0.4241	0.0241	0.0417	0.0023
	\hat{d}_2	0.4242	0.0242	0.0421	0.0024
	\hat{d}_3	0.4228	0.0228	0.0446	0.0025
11	\hat{d}_1	0.4257	0.0257	0.0428	0.0025
	\hat{d}_2	0.4258	0.0258	0.0432	0.0025
	\hat{d}_3	0.4244	0.0244	0.0457	0.0027
12	\hat{d}_1	0.4273	0.0273	0.0438	0.0027
	\hat{d}_2	0.4274	0.0274	0.0444	0.0027
	\hat{d}_3	0.4259	0.0259	0.0468	0.0029

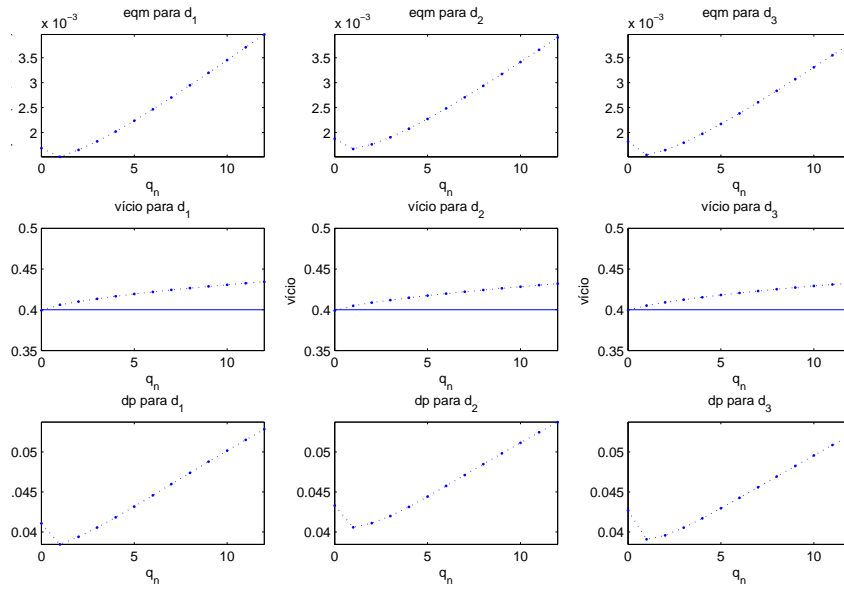


Figura B.5: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.5$ e $n = 1500$.

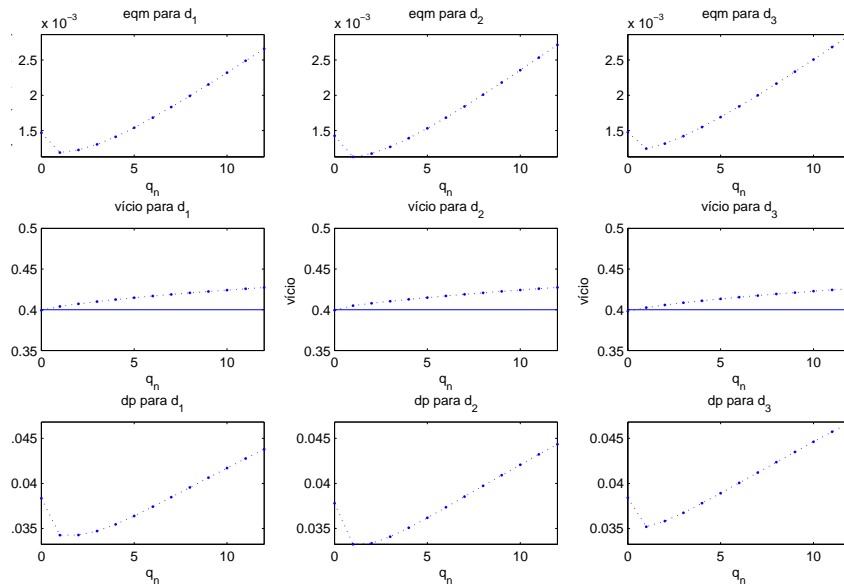


Figura B.6: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.5$ e $n = 2000$.

Tabela B.19. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.8$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 500$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.3961	-0.0039	0.0659	0.0044
	\hat{d}_2	0.3985	-0.0015	0.0647	0.0042
	\hat{d}_3	0.3966	-0.0034	0.0659	0.0043
1	\hat{d}_1	0.4094	0.0094	0.0581	0.0035
	\hat{d}_2	0.4099	0.0099	0.0556	0.0032
	\hat{d}_3	0.4103	0.0103	0.0580	0.0035
2	\hat{d}_1	0.4164	0.0164	0.0599	0.0039
	\hat{d}_2	0.4168	0.0168	0.0565	0.0035
	\hat{d}_3	0.4178	0.0178	0.0592	0.0038
3	\hat{d}_1	0.4222	0.0222	0.0625	0.0044
	\hat{d}_2	0.4224	0.0224	0.0586	0.0039
	\hat{d}_3	0.4239	0.0239	0.0615	0.0044
4	\hat{d}_1	0.4274	0.0274	0.0653	0.0050
	\hat{d}_2	0.4272	0.0272	0.0613	0.0045
	\hat{d}_3	0.4292	0.0292	0.0642	0.0050
5	\hat{d}_1	0.4320	0.0320	0.0682	0.0057
	\hat{d}_2	0.4316	0.0316	0.0641	0.0051
	\hat{d}_3	0.4339	0.0339	0.0669	0.0056
6	\hat{d}_1	0.4362	0.0362	0.0711	0.0064
	\hat{d}_2	0.4355	0.0355	0.0669	0.0057
	\hat{d}_3	0.4381	0.0381	0.0697	0.0063
7	\hat{d}_1	0.4399	0.0399	0.0739	0.0070
	\hat{d}_2	0.4390	0.0390	0.0697	0.0064
	\hat{d}_3	0.4418	0.0418	0.0725	0.0070
8	\hat{d}_1	0.4433	0.0433	0.0765	0.0077
	\hat{d}_2	0.4422	0.0422	0.0724	0.0070
	\hat{d}_3	0.4452	0.0452	0.0751	0.0077
9	\hat{d}_1	0.4463	0.0463	0.0790	0.0084
	\hat{d}_2	0.4451	0.0451	0.0749	0.0076
	\hat{d}_3	0.4483	0.0483	0.0776	0.0084
10	\hat{d}_1	0.4491	0.0491	0.0813	0.0090
	\hat{d}_2	0.4478	0.0478	0.0773	0.0083
	\hat{d}_3	0.4511	0.0511	0.0800	0.0090
11	\hat{d}_1	0.4517	0.0517	0.0836	0.0096
	\hat{d}_2	0.4502	0.0502	0.0796	0.0088
	\hat{d}_3	0.4536	0.0536	0.0823	0.0096
12	\hat{d}_1	0.4540	0.0540	0.0857	0.0102
	\hat{d}_2	0.4524	0.0524	0.0817	0.0094
	\hat{d}_3	0.4560	0.0560	0.0845	0.0103

Tabela B.20. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.8$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 1000$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.3952	-0.0048	0.0484	0.0024
	\hat{d}_2	0.3977	-0.0023	0.0492	0.0024
	\hat{d}_3	0.3955	-0.0045	0.0508	0.0026
1	\hat{d}_1	0.4046	0.0046	0.0431	0.0019
	\hat{d}_2	0.4060	0.0060	0.0434	0.0019
	\hat{d}_3	0.4042	0.0042	0.0440	0.0019
2	\hat{d}_1	0.4100	0.0100	0.0440	0.0020
	\hat{d}_2	0.4113	0.0113	0.0440	0.0021
	\hat{d}_3	0.4094	0.0094	0.0443	0.0021
3	\hat{d}_1	0.4145	0.0145	0.0455	0.0023
	\hat{d}_2	0.4157	0.0157	0.0452	0.0023
	\hat{d}_3	0.4136	0.0136	0.0455	0.0023
4	\hat{d}_1	0.4184	0.0184	0.0473	0.0026
	\hat{d}_2	0.4197	0.0197	0.0467	0.0026
	\hat{d}_3	0.4174	0.0174	0.0471	0.0025
5	\hat{d}_1	0.4219	0.0219	0.0491	0.0029
	\hat{d}_2	0.4232	0.0232	0.0483	0.0029
	\hat{d}_3	0.4208	0.0208	0.0488	0.0028
6	\hat{d}_1	0.4251	0.0251	0.0510	0.0032
	\hat{d}_2	0.4265	0.0265	0.0500	0.0032
	\hat{d}_3	0.4239	0.0239	0.0506	0.0031
7	\hat{d}_1	0.4280	0.0280	0.0529	0.0036
	\hat{d}_2	0.4295	0.0295	0.0518	0.0035
	\hat{d}_3	0.4268	0.0268	0.0525	0.0035
8	\hat{d}_1	0.4307	0.0307	0.0547	0.0039
	\hat{d}_2	0.4323	0.0323	0.0535	0.0039
	\hat{d}_3	0.4294	0.0294	0.0543	0.0038
9	\hat{d}_1	0.4332	0.0332	0.0565	0.0043
	\hat{d}_2	0.4349	0.0349	0.0553	0.0043
	\hat{d}_3	0.4319	0.0319	0.0561	0.0042
10	\hat{d}_1	0.4356	0.0356	0.0582	0.0047
	\hat{d}_2	0.4374	0.0374	0.0570	0.0046
	\hat{d}_3	0.4342	0.0342	0.0578	0.0045
11	\hat{d}_1	0.4378	0.0378	0.0599	0.0050
	\hat{d}_2	0.4397	0.0397	0.0586	0.0050
	\hat{d}_3	0.4364	0.0364	0.0595	0.0049
12	\hat{d}_1	0.4399	0.0399	0.0615	0.0054
	\hat{d}_2	0.4418	0.0418	0.0602	0.0054
	\hat{d}_3	0.4385	0.0385	0.0611	0.0052

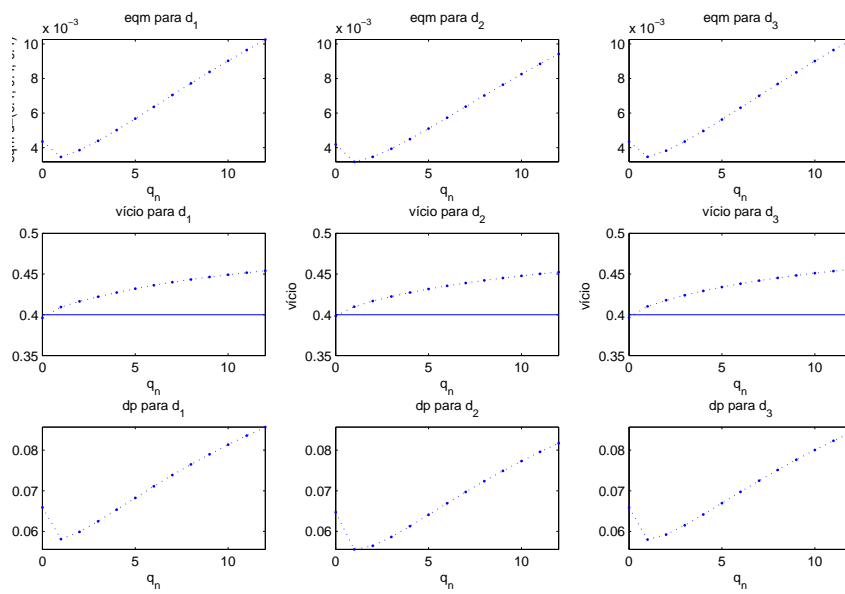


Figura B.7: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.8$ e $n = 500$.

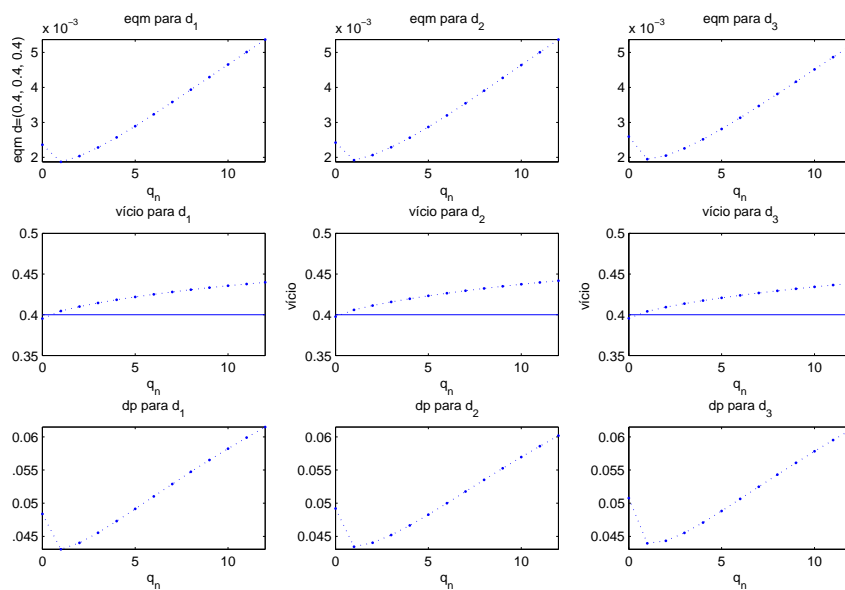


Figura B.8: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.8$ e $n = 1000$.

Tabela B.21. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.8$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 1500$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.3958	-0.0042	0.0397	0.0016
	\hat{d}_2	0.3970	-0.0030	0.0405	0.0016
	\hat{d}_3	0.3967	-0.0033	0.0404	0.0016
1	\hat{d}_1	0.4029	0.0029	0.0357	0.0013
	\hat{d}_2	0.4035	0.0035	0.0367	0.0014
	\hat{d}_3	0.4033	0.0033	0.0365	0.0013
2	\hat{d}_1	0.4069	0.0069	0.0360	0.0013
	\hat{d}_2	0.4077	0.0077	0.0369	0.0014
	\hat{d}_3	0.4075	0.0075	0.0369	0.0014
3	\hat{d}_1	0.4102	0.0102	0.0368	0.0015
	\hat{d}_2	0.4112	0.0112	0.0374	0.0015
	\hat{d}_3	0.4110	0.0110	0.0378	0.0016
4	\hat{d}_1	0.4132	0.0132	0.0378	0.0016
	\hat{d}_2	0.4143	0.0143	0.0384	0.0017
	\hat{d}_3	0.4140	0.0140	0.0390	0.0017
5	\hat{d}_1	0.4159	0.0159	0.0390	0.0018
	\hat{d}_2	0.4171	0.0171	0.0395	0.0019
	\hat{d}_3	0.4168	0.0168	0.0403	0.0019
6	\hat{d}_1	0.4184	0.0184	0.0401	0.0019
	\hat{d}_2	0.4197	0.0197	0.0407	0.0020
	\hat{d}_3	0.4193	0.0193	0.0417	0.0021
7	\hat{d}_1	0.4207	0.0207	0.0413	0.0021
	\hat{d}_2	0.4222	0.0222	0.0420	0.0023
	\hat{d}_3	0.4217	0.0217	0.0431	0.0023
8	\hat{d}_1	0.4229	0.0229	0.0425	0.0023
	\hat{d}_2	0.4244	0.0244	0.0433	0.0025
	\hat{d}_3	0.4239	0.0239	0.0445	0.0025
9	\hat{d}_1	0.4249	0.0249	0.0438	0.0025
	\hat{d}_2	0.4266	0.0266	0.0446	0.0027
	\hat{d}_3	0.4259	0.0259	0.0458	0.0028
10	\hat{d}_1	0.4269	0.0269	0.0449	0.0027
	\hat{d}_2	0.4286	0.0286	0.0458	0.0029
	\hat{d}_3	0.4279	0.0279	0.0472	0.0030
11	\hat{d}_1	0.4287	0.0287	0.0461	0.0029
	\hat{d}_2	0.4305	0.0305	0.0471	0.0031
	\hat{d}_3	0.4297	0.0297	0.0485	0.0032
12	\hat{d}_1	0.4305	0.0305	0.0473	0.0032
	\hat{d}_2	0.4324	0.0324	0.0483	0.0034
	\hat{d}_3	0.4315	0.0315	0.0497	0.0035

Tabela B.22. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.8$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 2000$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.3985	-0.0015	0.0390	0.0015
	\hat{d}_2	0.3969	-0.0031	0.0369	0.0014
	\hat{d}_3	0.3973	-0.0027	0.0377	0.0014
1	\hat{d}_1	0.4033	0.0033	0.0349	0.0012
	\hat{d}_2	0.4031	0.0031	0.0326	0.0011
	\hat{d}_3	0.4025	0.0025	0.0331	0.0011
2	\hat{d}_1	0.4066	0.0066	0.0349	0.0013
	\hat{d}_2	0.4065	0.0065	0.0327	0.0011
	\hat{d}_3	0.4056	0.0056	0.0332	0.0011
3	\hat{d}_1	0.4094	0.0094	0.0355	0.0013
	\hat{d}_2	0.4096	0.0096	0.0333	0.0012
	\hat{d}_3	0.4083	0.0083	0.0338	0.0012
4	\hat{d}_1	0.4120	0.0120	0.0362	0.0015
	\hat{d}_2	0.4123	0.0123	0.0341	0.0013
	\hat{d}_3	0.4108	0.0108	0.0346	0.0013
5	\hat{d}_1	0.4144	0.0144	0.0371	0.0016
	\hat{d}_2	0.4147	0.0147	0.0350	0.0014
	\hat{d}_3	0.4130	0.0130	0.0355	0.0014
6	\hat{d}_1	0.4167	0.0167	0.0381	0.0017
	\hat{d}_2	0.4170	0.0170	0.0360	0.0016
	\hat{d}_3	0.4151	0.0151	0.0365	0.0016
7	\hat{d}_1	0.4187	0.0187	0.0391	0.0019
	\hat{d}_2	0.4191	0.0191	0.0370	0.0017
	\hat{d}_3	0.4171	0.0171	0.0376	0.0017
8	\hat{d}_1	0.4207	0.0207	0.0401	0.0020
	\hat{d}_2	0.4211	0.0211	0.0380	0.0019
	\hat{d}_3	0.4189	0.0189	0.0386	0.0018
9	\hat{d}_1	0.4225	0.0225	0.0411	0.0022
	\hat{d}_2	0.4230	0.0230	0.0390	0.0020
	\hat{d}_3	0.4207	0.0207	0.0397	0.0020
10	\hat{d}_1	0.4243	0.0243	0.0422	0.0024
	\hat{d}_2	0.4248	0.0248	0.0401	0.0022
	\hat{d}_3	0.4224	0.0224	0.0407	0.0022
11	\hat{d}_1	0.4260	0.0260	0.0432	0.0025
	\hat{d}_2	0.4265	0.0265	0.0411	0.0024
	\hat{d}_3	0.4240	0.0240	0.0418	0.0023
12	\hat{d}_1	0.4276	0.0276	0.0443	0.0027
	\hat{d}_2	0.4281	0.0281	0.0421	0.0026
	\hat{d}_3	0.4256	0.0256	0.0428	0.0025

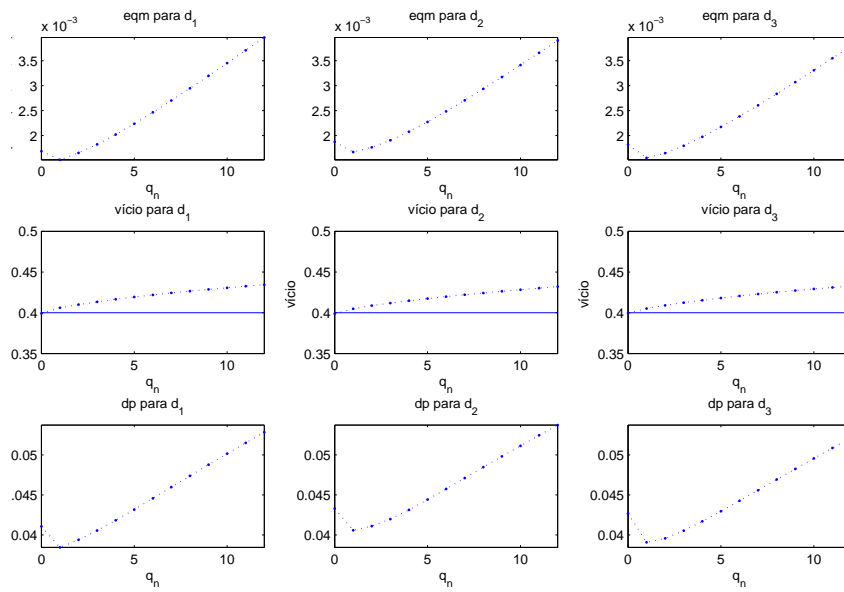


Figura B.9: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.8$ e $n = 1500$.

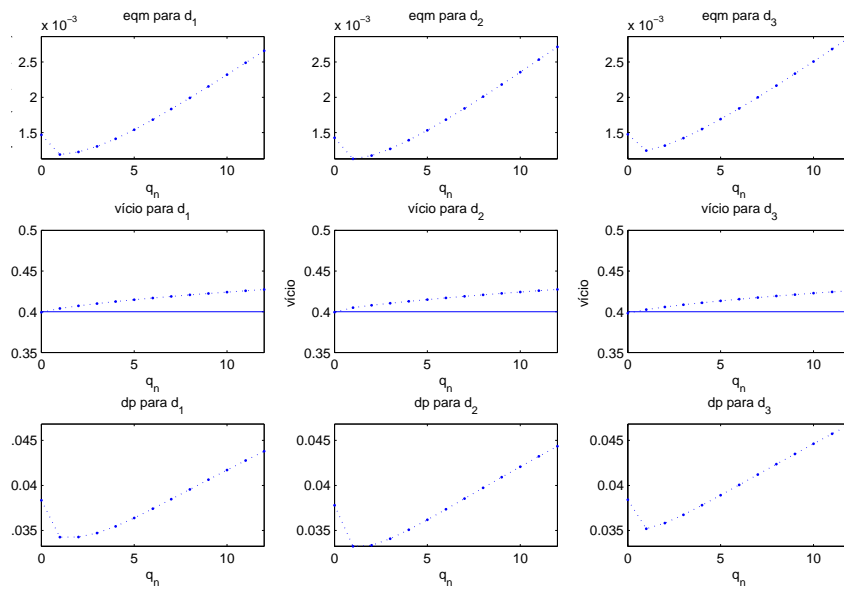


Figura B.10: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.4, 0.4, 0.4)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.8$ e $n = 2000$.

Tabela B.23. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.0$, $\mathbf{d} = (0.2, 0.2, 0.2)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 1000$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.1979	-0.0021	0.0485	0.0024
	\hat{d}_2	0.1978	-0.0022	0.0502	0.0025
	\hat{d}_3	0.1977	-0.0023	0.0463	0.0021
1	\hat{d}_1	0.1990	-0.0010	0.0437	0.0019
	\hat{d}_2	0.1985	-0.0015	0.0449	0.0020
	\hat{d}_3	0.1984	-0.0016	0.0430	0.0019
2	\hat{d}_1	0.1995	-0.0005	0.0433	0.0019
	\hat{d}_2	0.1991	-0.0009	0.0445	0.0020
	\hat{d}_3	0.1989	-0.0011	0.0431	0.0019
3	\hat{d}_1	0.1998	-0.0002	0.0433	0.0019
	\hat{d}_2	0.1996	-0.0004	0.0445	0.0020
	\hat{d}_3	0.1994	-0.0006	0.0432	0.0019
4	\hat{d}_1	0.2001	0.0001	0.0434	0.0019
	\hat{d}_2	0.2000	0.0000	0.0446	0.0020
	\hat{d}_3	0.1999	-0.0001	0.0433	0.0019
5	\hat{d}_1	0.2004	0.0004	0.0436	0.0019
	\hat{d}_2	0.2004	0.0004	0.0447	0.0020
	\hat{d}_3	0.2003	0.0003	0.0434	0.0019
6	\hat{d}_1	0.2006	0.0006	0.0437	0.0019
	\hat{d}_2	0.2008	0.0008	0.0448	0.0020
	\hat{d}_3	0.2007	0.0007	0.0435	0.0019
7	\hat{d}_1	0.2008	0.0008	0.0439	0.0019
	\hat{d}_2	0.2010	0.0010	0.0449	0.0020
	\hat{d}_3	0.2010	0.0010	0.0437	0.0019
8	\hat{d}_1	0.2010	0.0010	0.0440	0.0019
	\hat{d}_2	0.2013	0.0013	0.0451	0.0020
	\hat{d}_3	0.2012	0.0012	0.0438	0.0019
9	\hat{d}_1	0.2011	0.0011	0.0441	0.0019
	\hat{d}_2	0.2014	0.0014	0.0452	0.0020
	\hat{d}_3	0.2014	0.0014	0.0440	0.0019
10	\hat{d}_1	0.2012	0.0012	0.0443	0.0020
	\hat{d}_2	0.2015	0.0015	0.0453	0.0020
	\hat{d}_3	0.2016	0.0016	0.0441	0.0019
11	\hat{d}_1	0.2013	0.0013	0.0444	0.0020
	\hat{d}_2	0.2016	0.0016	0.0454	0.0021
	\hat{d}_3	0.2017	0.0017	0.0442	0.0020
12	\hat{d}_1	0.2013	0.0013	0.0445	0.0020
	\hat{d}_2	0.2017	0.0017	0.0455	0.0021
	\hat{d}_3	0.2018	0.0018	0.0443	0.0020

Tabela B.24. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.0$, $\mathbf{d} = (0.2, 0.2, 0.2)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 1500$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.2002	0.0002	0.0417	0.0017
	\hat{d}_2	0.1976	-0.0024	0.0433	0.0019
	\hat{d}_3	0.1980	-0.0020	0.0410	0.0017
1	\hat{d}_1	0.1996	-0.0004	0.0379	0.0014
	\hat{d}_2	0.1988	-0.0012	0.0386	0.0015
	\hat{d}_3	0.1995	-0.0005	0.0373	0.0014
2	\hat{d}_1	0.1998	-0.0002	0.0374	0.0014
	\hat{d}_2	0.1995	-0.0005	0.0380	0.0014
	\hat{d}_3	0.2001	0.0001	0.0368	0.0014
3	\hat{d}_1	0.2001	0.0001	0.0372	0.0014
	\hat{d}_2	0.2000	0.0000	0.0378	0.0014
	\hat{d}_3	0.2005	0.0005	0.0366	0.0013
4	\hat{d}_1	0.2004	0.0004	0.0371	0.0014
	\hat{d}_2	0.2005	0.0005	0.0377	0.0014
	\hat{d}_3	0.2007	0.0007	0.0365	0.0013
5	\hat{d}_1	0.2007	0.0007	0.0371	0.0014
	\hat{d}_2	0.2009	0.0009	0.0377	0.0014
	\hat{d}_3	0.2010	0.00010	0.0366	0.0013
6	\hat{d}_1	0.2009	0.0009	0.0372	0.0014
	\hat{d}_2	0.2012	0.0012	0.0377	0.0014
	\hat{d}_3	0.2011	0.0011	0.0366	0.0013
7	\hat{d}_1	0.2012	0.0012	0.0372	0.0014
	\hat{d}_2	0.2015	0.0015	0.0377	0.0014
	\hat{d}_3	0.2013	0.0013	0.0367	0.0013
8	\hat{d}_1	0.2014	0.0014	0.0373	0.0014
	\hat{d}_2	0.2017	0.0017	0.0378	0.0014
	\hat{d}_3	0.2014	0.0014	0.0367	0.0013
9	\hat{d}_1	0.2015	0.0015	0.0373	0.0014
	\hat{d}_2	0.2019	0.0019	0.0379	0.0014
	\hat{d}_3	0.2015	0.0015	0.0368	0.0014
10	\hat{d}_1	0.2017	0.0017	0.0374	0.0014
	\hat{d}_2	0.2021	0.0021	0.0379	0.0014
	\hat{d}_3	0.2016	0.0016	0.0369	0.0014
11	\hat{d}_1	0.2018	0.0018	0.0375	0.0014
	\hat{d}_2	0.2022	0.0022	0.0380	0.0014
	\hat{d}_3	0.2017	0.0017	0.0369	0.0014
12	\hat{d}_1	0.2019	0.0019	0.0376	0.0014
	\hat{d}_2	0.2023	0.0023	0.0381	0.0015
	\hat{d}_3	0.2017	0.0017	0.0370	0.0014

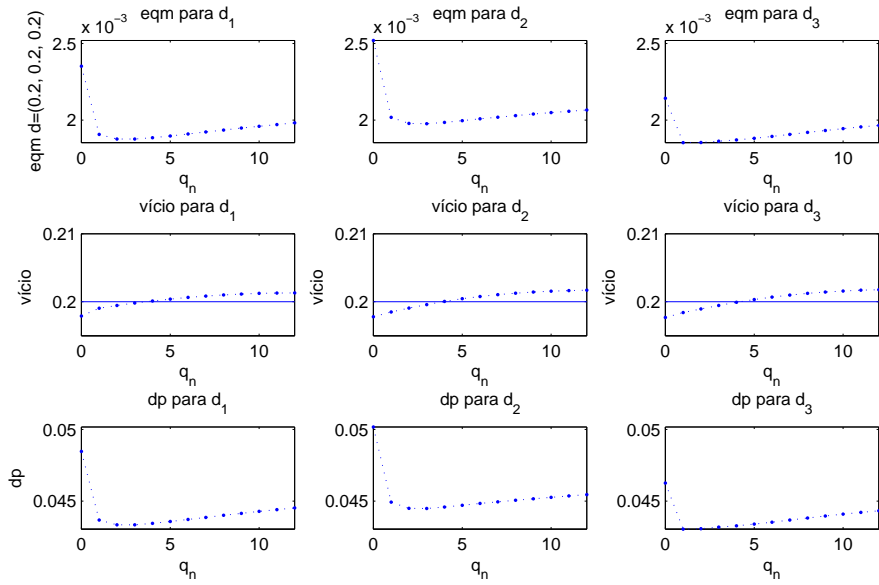


Figura B.11: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.2, 0.2, 0.2)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.0$ e $n = 1000$.

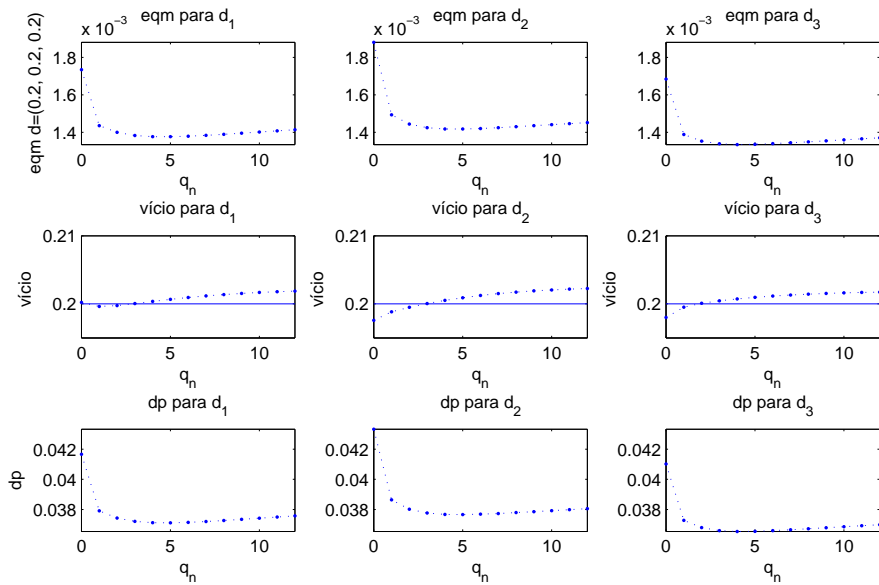


Figura B.12: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.2, 0.2, 0.2)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.0$ e $n = 1500$.

Tabela B.25. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.0$, $\mathbf{d} = (0.2, 0.2, 0.2)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 2000$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.1993	-0.0007	0.0361	0.0013
	\hat{d}_2	0.1972	-0.0028	0.0358	0.0013
	\hat{d}_3	0.1996	-0.0004	0.0377	0.0014
1	\hat{d}_1	0.2000	0.0000	0.0331	0.0011
	\hat{d}_2	0.1980	-0.0020	0.0338	0.0011
	\hat{d}_3	0.2003	0.0003	0.0346	0.0012
2	\hat{d}_1	0.2004	0.0004	0.0329	0.0011
	\hat{d}_2	0.1985	-0.0015	0.0336	0.0011
	\hat{d}_3	0.2005	0.0005	0.0343	0.0012
3	\hat{d}_1	0.2007	0.0007	0.0329	0.0011
	\hat{d}_2	0.1989	-0.0011	0.0335	0.0011
	\hat{d}_3	0.2007	0.0007	0.0342	0.0012
4	\hat{d}_1	0.2009	0.0009	0.0329	0.0011
	\hat{d}_2	0.1993	-0.0007	0.0334	0.0011
	\hat{d}_3	0.2009	0.0009	0.0341	0.0012
5	\hat{d}_1	0.2011	0.0011	0.0330	0.0011
	\hat{d}_2	0.1996	-0.0004	0.0335	0.0011
	\hat{d}_3	0.2011	0.0011	0.0341	0.0012
6	\hat{d}_1	0.2013	0.0013	0.0330	0.0011
	\hat{d}_2	0.1998	-0.0002	0.0335	0.0011
	\hat{d}_3	0.2013	0.0013	0.0341	0.0012
7	\hat{d}_1	0.2015	0.0015	0.0331	0.0011
	\hat{d}_2	0.2000	0.0000	0.0335	0.0011
	\hat{d}_3	0.2015	0.0015	0.0341	0.0012
8	\hat{d}_1	0.2017	0.0017	0.0332	0.0011
	\hat{d}_2	0.2002	0.0002	0.0336	0.0011
	\hat{d}_3	0.2016	0.0016	0.0341	0.0012
9	\hat{d}_1	0.2018	0.0018	0.0333	0.0011
	\hat{d}_2	0.2003	0.0003	0.0336	0.0011
	\hat{d}_3	0.2018	0.0018	0.0341	0.0012
10	\hat{d}_1	0.2020	0.0020	0.0334	0.0011
	\hat{d}_2	0.2004	0.0004	0.0337	0.0011
	\hat{d}_3	0.2019	0.0019	0.0341	0.0012
11	\hat{d}_1	0.2021	0.0021	0.0335	0.0011
	\hat{d}_2	0.2005	0.0005	0.0337	0.0011
	\hat{d}_3	0.2020	0.0020	0.0342	0.0012
12	\hat{d}_1	0.2022	0.0022	0.0336	0.0011
	\hat{d}_2	0.2006	0.0006	0.0338	0.0011
	\hat{d}_3	0.2021	0.0021	0.0342	0.0012

Tabela B.26. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.5$, $\mathbf{d} = (0.2, 0.2, 0.2)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 1000$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.1994	-0.0006	0.0475	0.0023
	\hat{d}_2	0.1967	-0.0033	0.0476	0.0023
	\hat{d}_3	0.1973	-0.0027	0.0483	0.0023
1	\hat{d}_1	0.1994	-0.0006	0.0427	0.0018
	\hat{d}_2	0.1972	-0.0028	0.0438	0.0019
	\hat{d}_3	0.1982	-0.0018	0.0442	0.0020
2	\hat{d}_1	0.1998	-0.0002	0.0424	0.0018
	\hat{d}_2	0.1976	-0.0024	0.0434	0.0019
	\hat{d}_3	0.1987	-0.0013	0.0440	0.0019
3	\hat{d}_1	0.2002	0.0002	0.0424	0.0018
	\hat{d}_2	0.1980	-0.0020	0.0433	0.0019
	\hat{d}_3	0.1992	-0.0008	0.0439	0.0019
4	\hat{d}_1	0.2005	0.0005	0.0425	0.0018
	\hat{d}_2	0.1984	-0.0016	0.0433	0.0019
	\hat{d}_3	0.1997	-0.0003	0.0439	0.0019
5	\hat{d}_1	0.2008	0.0008	0.0426	0.0018
	\hat{d}_2	0.1987	-0.0013	0.0434	0.0019
	\hat{d}_3	0.2000	0.0000	0.0440	0.0019
6	\hat{d}_1	0.2011	0.0011	0.0427	0.0018
	\hat{d}_2	0.1989	-0.0011	0.0436	0.0019
	\hat{d}_3	0.2003	0.0003	0.0441	0.0019
7	\hat{d}_1	0.2013	0.0013	0.0429	0.0018
	\hat{d}_2	0.1991	-0.0009	0.0438	0.0019
	\hat{d}_3	0.2005	0.0005	0.0442	0.0020
8	\hat{d}_1	0.2015	0.0015	0.0430	0.0019
	\hat{d}_2	0.1993	-0.0007	0.0440	0.0019
	\hat{d}_3	0.2007	0.0007	0.0443	0.0020
9	\hat{d}_1	0.2016	0.0016	0.0432	0.0019
	\hat{d}_2	0.1994	-0.0006	0.0441	0.0019
	\hat{d}_3	0.2008	0.0008	0.0444	0.0020
10	\hat{d}_1	0.2017	0.0017	0.0433	0.0019
	\hat{d}_2	0.1995	-0.0005	0.0443	0.0020
	\hat{d}_3	0.2009	0.0009	0.0445	0.0020
11	\hat{d}_1	0.2018	0.0018	0.0434	0.0019
	\hat{d}_2	0.1995	-0.0005	0.0444	0.0020
	\hat{d}_3	0.2010	0.0010	0.0446	0.0020
12	\hat{d}_1	0.2018	0.0018	0.0435	0.0019
	\hat{d}_2	0.1996	-0.0004	0.0445	0.0020
	\hat{d}_3	0.2010	0.0010	0.0447	0.0020

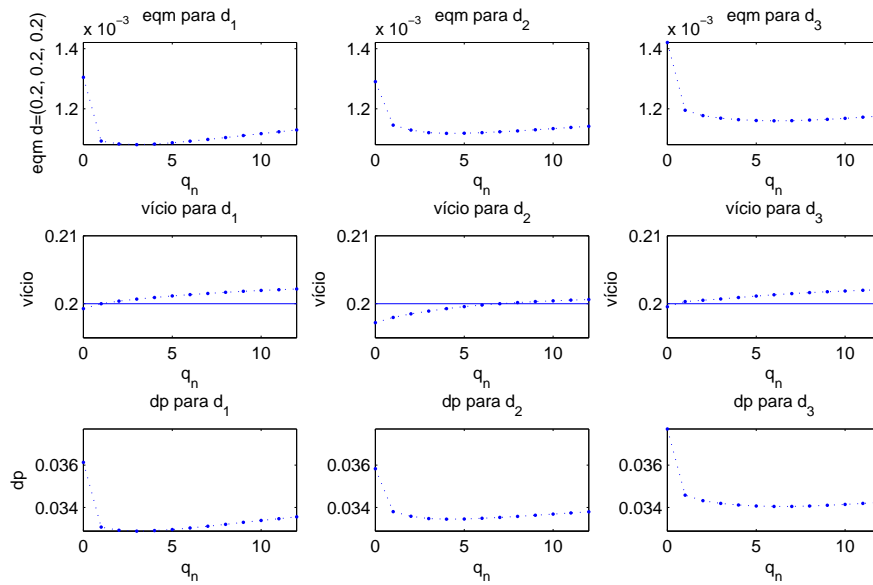


Figura B.13: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.2, 0.2, 0.2)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.0$ e $n = 2000$.

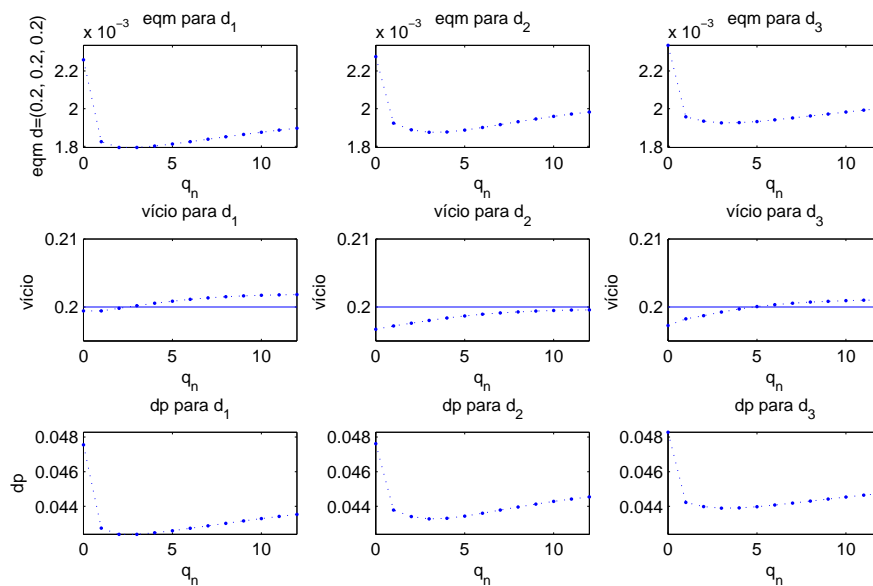


Figura B.14: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.2, 0.2, 0.2)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.5$ e $n = 1000$.

Tabela B.27. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.5$, $\mathbf{d} = (0.2, 0.2, 0.2)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 1500$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.1993	-0.0007	0.0435	0.0019
	\hat{d}_2	0.1960	-0.0040	0.0421	0.0018
	\hat{d}_3	0.1982	-0.0018	0.0433	0.0019
1	\hat{d}_1	0.2001	0.0001	0.0394	0.0015
	\hat{d}_2	0.1978	-0.0022	0.0388	0.0015
	\hat{d}_3	0.1995	-0.0005	0.0392	0.0015
2	\hat{d}_1	0.2004	0.0004	0.0389	0.0015
	\hat{d}_2	0.1984	-0.0016	0.0389	0.0015
	\hat{d}_3	0.2001	0.0001	0.0388	0.0015
3	\hat{d}_1	0.2008	0.0008	0.0387	0.0015
	\hat{d}_2	0.1989	-0.0011	0.0390	0.0015
	\hat{d}_3	0.2006	0.0006	0.0386	0.0015
4	\hat{d}_1	0.2011	0.0011	0.0387	0.0015
	\hat{d}_2	0.1993	-0.0007	0.0391	0.0015
	\hat{d}_3	0.2010	0.0010	0.0387	0.0015
5	\hat{d}_1	0.2014	0.0014	0.0386	0.0015
	\hat{d}_2	0.1996	-0.0004	0.0392	0.0015
	\hat{d}_3	0.2012	0.0012	0.0388	0.0015
6	\hat{d}_1	0.2016	0.0016	0.0386	0.0015
	\hat{d}_2	0.1999	-0.0001	0.0392	0.0015
	\hat{d}_3	0.2015	0.0015	0.0389	0.0015
7	\hat{d}_1	0.2018	0.0018	0.0387	0.0015
	\hat{d}_2	0.2002	0.0002	0.0393	0.0015
	\hat{d}_3	0.2016	0.0016	0.0391	0.0015
8	\hat{d}_1	0.2020	0.0020	0.0387	0.0015
	\hat{d}_2	0.2004	0.0004	0.0394	0.0015
	\hat{d}_3	0.2018	0.0018	0.0393	0.0015
9	\hat{d}_1	0.2022	0.0022	0.0388	0.0015
	\hat{d}_2	0.2006	0.0006	0.0395	0.0016
	\hat{d}_3	0.2020	0.0020	0.0394	0.0016
10	\hat{d}_1	0.2023	0.0023	0.0388	0.0015
	\hat{d}_2	0.2007	0.0007	0.0395	0.0016
	\hat{d}_3	0.2021	0.0021	0.0395	0.0016
11	\hat{d}_1	0.2024	0.0024	0.0389	0.0015
	\hat{d}_2	0.2008	0.0008	0.0396	0.0016
	\hat{d}_3	0.2022	0.0022	0.0397	0.0016
12	\hat{d}_1	0.2025	0.0025	0.0390	0.0015
	\hat{d}_2	0.2009	0.0009	0.0397	0.0016
	\hat{d}_3	0.2023	0.0023	0.0398	0.0016

Tabela B.28. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.5$, $\mathbf{d} = (0.2, 0.2, 0.2)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 2000$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.1978	-0.0022	0.0355	0.0013
	\hat{d}_2	0.1980	-0.0020	0.0374	0.0014
	\hat{d}_3	0.1982	-0.0018	0.0359	0.0013
1	\hat{d}_1	0.1991	-0.0009	0.0326	0.0011
	\hat{d}_2	0.1988	-0.0012	0.0345	0.0012
	\hat{d}_3	0.1990	-0.0010	0.0332	0.0011
2	\hat{d}_1	0.1995	-0.0005	0.0324	0.0010
	\hat{d}_2	0.1992	-0.0008	0.0344	0.0012
	\hat{d}_3	0.1996	-0.0004	0.0329	0.0011
3	\hat{d}_1	0.1998	-0.0002	0.0322	0.0010
	\hat{d}_2	0.1995	-0.0005	0.0344	0.0012
	\hat{d}_3	0.2001	0.0001	0.0328	0.0011
4	\hat{d}_1	0.2002	0.0002	0.0322	0.0010
	\hat{d}_2	0.1998	-0.0002	0.0344	0.0012
	\hat{d}_3	0.2005	0.0005	0.0328	0.0011
5	\hat{d}_1	0.2005	0.0005	0.0322	0.0010
	\hat{d}_2	0.2001	0.0001	0.0345	0.0012
	\hat{d}_3	0.2009	0.0009	0.0329	0.0011
6	\hat{d}_1	0.2007	0.0007	0.0323	0.0010
	\hat{d}_2	0.2003	0.0003	0.0346	0.0012
	\hat{d}_3	0.2012	0.0012	0.0330	0.0011
7	\hat{d}_1	0.2010	0.0010	0.0323	0.0010
	\hat{d}_2	0.2005	0.0005	0.0347	0.0012
	\hat{d}_3	0.2014	0.0014	0.0330	0.0011
8	\hat{d}_1	0.2012	0.0012	0.0324	0.0010
	\hat{d}_2	0.2007	0.0007	0.0348	0.0012
	\hat{d}_3	0.2017	0.0017	0.0331	0.0011
9	\hat{d}_1	0.2013	0.0013	0.0324	0.0011
	\hat{d}_2	0.2008	0.0008	0.0349	0.0012
	\hat{d}_3	0.2018	0.0018	0.0332	0.0011
10	\hat{d}_1	0.2015	0.0015	0.0325	0.0011
	\hat{d}_2	0.2009	0.0009	0.0350	0.0012
	\hat{d}_3	0.2020	0.0020	0.0333	0.0011
11	\hat{d}_1	0.2016	0.0016	0.0325	0.0011
	\hat{d}_2	0.2010	0.0010	0.0351	0.0012
	\hat{d}_3	0.2021	0.0021	0.0334	0.0011
12	\hat{d}_1	0.2017	0.0017	0.0326	0.0011
	\hat{d}_2	0.2011	0.0011	0.0352	0.0012
	\hat{d}_3	0.2022	0.0022	0.0335	0.0011

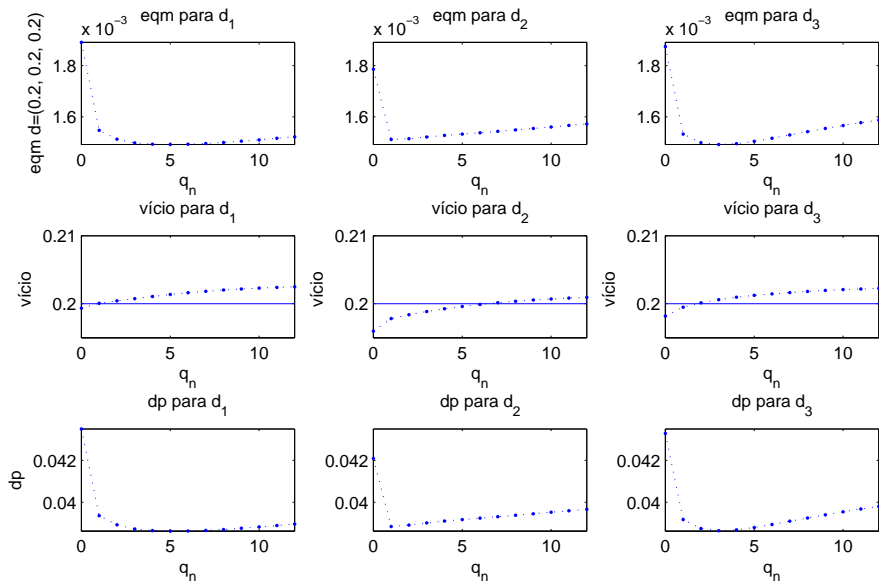


Figura B.15: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.2, 0.2, 0.2)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.5$ e $n = 1500$.

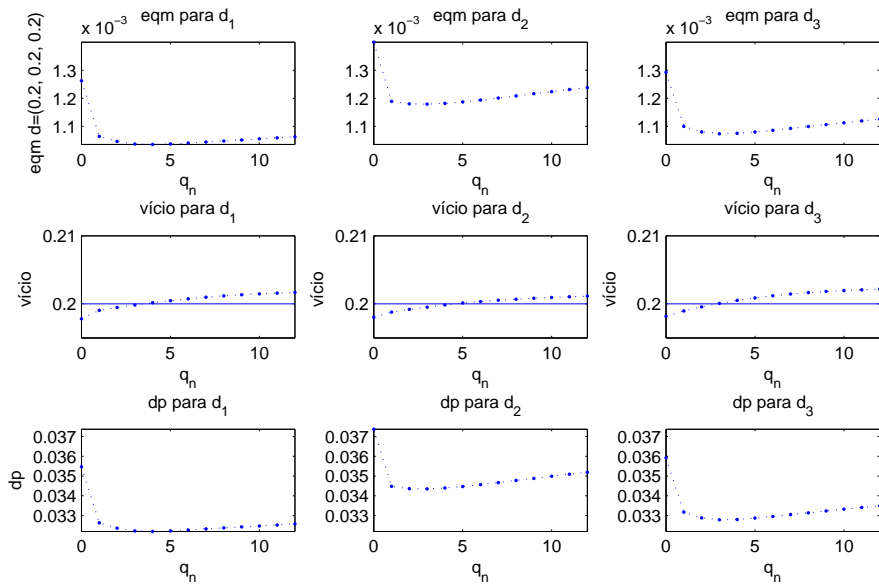


Figura B.16: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.2, 0.2, 0.2)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.5$ e $n = 2000$.

Tabela B.29. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.5$, $\mathbf{d} = (0.3, 0.3, 0.3)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 1000$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.2991	-0.0009	0.0474	0.0022
	\hat{d}_2	0.2966	-0.0034	0.0481	0.0023
	\hat{d}_3	0.2966	-0.0034	0.0488	0.0024
1	\hat{d}_1	0.3013	0.0013	0.0426	0.0018
	\hat{d}_2	0.2992	-0.0008	0.0440	0.0019
	\hat{d}_3	0.3001	0.0001	0.0444	0.0020
2	\hat{d}_1	0.3031	0.0031	0.0425	0.0018
	\hat{d}_2	0.3009	0.0009	0.0438	0.0019
	\hat{d}_3	0.3020	0.0020	0.0444	0.0020
3	\hat{d}_1	0.3045	0.0045	0.0428	0.0019
	\hat{d}_2	0.3023	0.0023	0.0441	0.0019
	\hat{d}_3	0.3037	0.0037	0.0448	0.0020
4	\hat{d}_1	0.3058	0.0058	0.0433	0.0019
	\hat{d}_2	0.3036	0.0036	0.0445	0.0020
	\hat{d}_3	0.3052	0.0052	0.0453	0.0021
5	\hat{d}_1	0.3070	0.0070	0.0438	0.0020
	\hat{d}_2	0.3047	0.0047	0.0451	0.0021
	\hat{d}_3	0.3065	0.0065	0.0458	0.0021
6	\hat{d}_1	0.3080	0.0080	0.0444	0.0020
	\hat{d}_2	0.3057	0.0057	0.0458	0.0021
	\hat{d}_3	0.3076	0.0076	0.0464	0.0022
7	\hat{d}_1	0.3090	0.0090	0.0450	0.0021
	\hat{d}_2	0.3066	0.0066	0.0464	0.0022
	\hat{d}_3	0.3086	0.0086	0.0470	0.0023
8	\hat{d}_1	0.3098	0.0098	0.0456	0.0022
	\hat{d}_2	0.3074	0.0074	0.0471	0.0023
	\hat{d}_3	0.3094	0.0094	0.0476	0.0023
9	\hat{d}_1	0.3105	0.0105	0.0461	0.0022
	\hat{d}_2	0.3081	0.0081	0.0477	0.0023
	\hat{d}_3	0.3102	0.0102	0.0481	0.0024
10	\hat{d}_1	0.3112	0.0112	0.0467	0.0023
	\hat{d}_2	0.3087	0.0087	0.0483	0.0024
	\hat{d}_3	0.3110	0.0110	0.0487	0.0025
11	\hat{d}_1	0.3118	0.0118	0.0472	0.0024
	\hat{d}_2	0.3093	0.0093	0.0489	0.0025
	\hat{d}_3	0.3116	0.0116	0.0492	0.0026
12	\hat{d}_1	0.3124	0.0124	0.0477	0.0024
	\hat{d}_2	0.3099	0.0099	0.0494	0.0025
	\hat{d}_3	0.3122	0.0122	0.0497	0.0026

Tabela B.30. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.5$, $\mathbf{d} = (0.3, 0.3, 0.3)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 1500$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.2993	-0.0007	0.0437	0.0019
	\hat{d}_2	0.2959	-0.0041	0.0421	0.0018
	\hat{d}_3	0.2982	-0.0018	0.0437	0.0019
1	\hat{d}_1	0.3017	0.0017	0.0396	0.0016
	\hat{d}_2	0.2994	-0.0006	0.0389	0.0015
	\hat{d}_3	0.3011	0.0011	0.0395	0.0016
2	\hat{d}_1	0.3031	0.0031	0.0393	0.0016
	\hat{d}_2	0.3011	0.0011	0.0390	0.0015
	\hat{d}_3	0.3027	0.0027	0.0393	0.0015
3	\hat{d}_1	0.3043	0.0043	0.0393	0.0016
	\hat{d}_2	0.3025	0.0025	0.0393	0.0016
	\hat{d}_3	0.3040	0.0040	0.0395	0.0016
4	\hat{d}_1	0.3054	0.0054	0.0396	0.0016
	\hat{d}_2	0.3037	0.0037	0.0397	0.0016
	\hat{d}_3	0.3051	0.0051	0.0398	0.0016
5	\hat{d}_1	0.3064	0.0064	0.0399	0.0016
	\hat{d}_2	0.3048	0.0048	0.0400	0.0016
	\hat{d}_3	0.3060	0.0060	0.0402	0.0017
6	\hat{d}_1	0.3073	0.0073	0.0402	0.0017
	\hat{d}_2	0.3058	0.0058	0.0404	0.0017
	\hat{d}_3	0.3068	0.0068	0.0407	0.0017
7	\hat{d}_1	0.3081	0.0081	0.0405	0.0017
	\hat{d}_2	0.3067	0.0067	0.0407	0.0017
	\hat{d}_3	0.3076	0.0076	0.0412	0.0018
8	\hat{d}_1	0.3088	0.0088	0.0409	0.0017
	\hat{d}_2	0.3075	0.0075	0.0411	0.0017
	\hat{d}_3	0.3083	0.0083	0.0417	0.0018
9	\hat{d}_1	0.3095	0.0095	0.0412	0.0018
	\hat{d}_2	0.3083	0.0083	0.0415	0.0018
	\hat{d}_3	0.3090	0.0090	0.0422	0.0019
10	\hat{d}_1	0.3101	0.0101	0.0416	0.0018
	\hat{d}_2	0.3090	0.0090	0.0419	0.0018
	\hat{d}_3	0.3096	0.0096	0.0426	0.0019
11	\hat{d}_1	0.3107	0.0107	0.0420	0.0019
	\hat{d}_2	0.3096	0.0096	0.0422	0.0019
	\hat{d}_3	0.3102	0.0102	0.0431	0.0020
12	\hat{d}_1	0.3113	0.0113	0.0424	0.0019
	\hat{d}_2	0.3102	0.0102	0.0426	0.0019
	\hat{d}_3	0.3107	0.0107	0.0435	0.0020

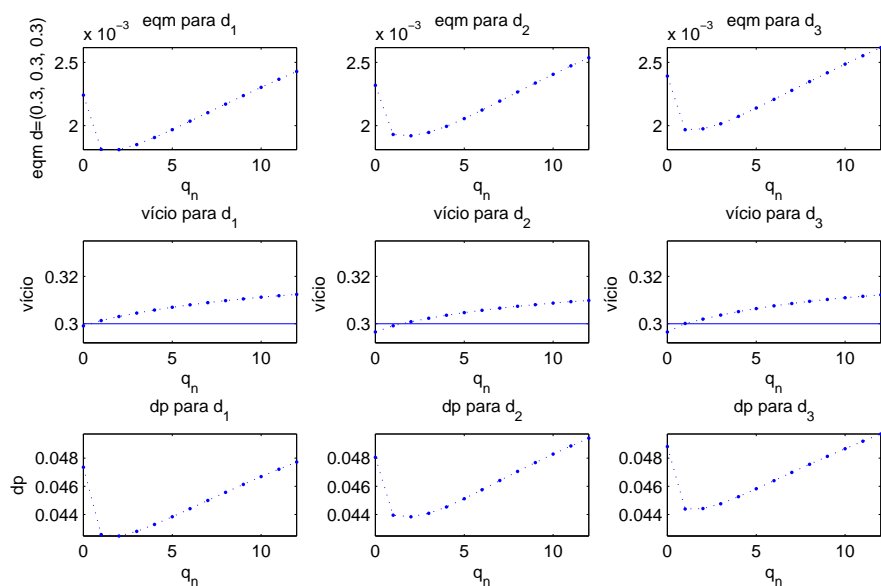


Figura B.17: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.3, 0.3, 0.3)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.5$ e $n = 1000$.

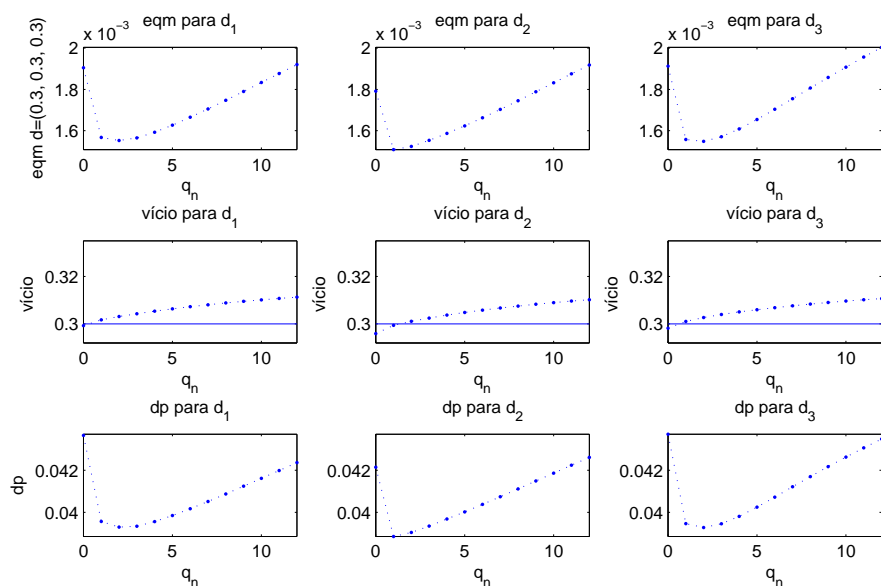


Figura B.18: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.3, 0.3, 0.3)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.5$ e $n = 1500$.

Tabela B.31. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.5$, $\mathbf{d} = (0.3, 0.3, 0.3)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 2000$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	0.2976	-0.0024	0.0358	0.0013
	\hat{d}_2	0.2980	-0.0020	0.0374	0.0014
	\hat{d}_3	0.2981	-0.0019	0.0360	0.0013
1	\hat{d}_1	0.3002	0.0002	0.0329	0.0011
	\hat{d}_2	0.3002	0.0002	0.0347	0.0012
	\hat{d}_3	0.3004	0.0004	0.0332	0.0011
2	\hat{d}_1	0.3015	0.0015	0.0328	0.0011
	\hat{d}_2	0.3015	0.0015	0.0347	0.0012
	\hat{d}_3	0.3019	0.0019	0.0330	0.0011
3	\hat{d}_1	0.3026	0.0026	0.0329	0.0011
	\hat{d}_2	0.3026	0.0026	0.0349	0.0012
	\hat{d}_3	0.3032	0.0032	0.0331	0.0011
4	\hat{d}_1	0.3036	0.0036	0.0332	0.0011
	\hat{d}_2	0.3036	0.0036	0.0353	0.0013
	\hat{d}_3	0.3043	0.0043	0.0333	0.0011
5	\hat{d}_1	0.3045	0.0045	0.0335	0.0011
	\hat{d}_2	0.3045	0.0045	0.0356	0.0013
	\hat{d}_3	0.3053	0.0053	0.0336	0.0012
6	\hat{d}_1	0.3053	0.0053	0.0338	0.0012
	\hat{d}_2	0.3052	0.0052	0.0360	0.0013
	\hat{d}_3	0.3062	0.0062	0.0339	0.0012
7	\hat{d}_1	0.3061	0.0061	0.0341	0.0012
	\hat{d}_2	0.3059	0.0059	0.0364	0.0014
	\hat{d}_3	0.3070	0.0070	0.0342	0.0012
8	\hat{d}_1	0.3068	0.0068	0.0344	0.0012
	\hat{d}_2	0.3066	0.0066	0.0368	0.0014
	\hat{d}_3	0.3077	0.0077	0.0345	0.0013
9	\hat{d}_1	0.3074	0.0074	0.0347	0.0013
	\hat{d}_2	0.3072	0.0072	0.0372	0.0014
	\hat{d}_3	0.3084	0.0084	0.0349	0.0013
10	\hat{d}_1	0.3080	0.0080	0.0350	0.0013
	\hat{d}_2	0.3078	0.0078	0.0376	0.0015
	\hat{d}_3	0.3090	0.0090	0.0352	0.0013
11	\hat{d}_1	0.3085	0.0085	0.0353	0.0013
	\hat{d}_2	0.3083	0.0083	0.0380	0.0015
	\hat{d}_3	0.3095	0.0095	0.0355	0.0014
12	\hat{d}_1	0.3090	0.0090	0.0356	0.0013
	\hat{d}_2	0.3088	0.0088	0.0384	0.0016
	\hat{d}_3	0.3101	0.0101	0.0358	0.0014

Tabela B.32. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.5$, $\mathbf{d} = (-0.2, -0.2, -0.2)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 1000$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	-0.1964	0.0036	0.0505	0.0026
	\hat{d}_2	-0.1965	0.0035	0.0516	0.0027
	\hat{d}_3	-0.1962	0.0038	0.0482	0.0023
1	\hat{d}_1	-0.1970	0.0030	0.0457	0.0021
	\hat{d}_2	-0.1979	0.0021	0.0466	0.0022
	\hat{d}_3	-0.1974	0.0026	0.0446	0.0020
2	\hat{d}_1	-0.1974	0.0026	0.0451	0.0020
	\hat{d}_2	-0.1984	0.0016	0.0459	0.0021
	\hat{d}_3	-0.1980	0.0020	0.0444	0.0020
3	\hat{d}_1	-0.1973	0.0027	0.0448	0.0020
	\hat{d}_2	-0.1983	0.0017	0.0455	0.0021
	\hat{d}_3	-0.1980	0.0020	0.0441	0.0020
4	\hat{d}_1	-0.1971	0.0029	0.0446	0.0020
	\hat{d}_2	-0.1980	0.0020	0.0454	0.0021
	\hat{d}_3	-0.1978	0.0022	0.0439	0.0019
5	\hat{d}_1	-0.1966	0.0034	0.0444	0.0020
	\hat{d}_2	-0.1976	0.0024	0.0452	0.0020
	\hat{d}_3	-0.1973	0.0027	0.0437	0.0019
6	\hat{d}_1	-0.1961	0.0039	0.0442	0.0020
	\hat{d}_2	-0.1972	0.0028	0.0450	0.0020
	\hat{d}_3	-0.1968	0.0032	0.0435	0.0019
7	\hat{d}_1	-0.1955	0.0045	0.0440	0.0020
	\hat{d}_2	-0.1966	0.0034	0.0449	0.0020
	\hat{d}_3	-0.1962	0.0038	0.0433	0.0019
8	\hat{d}_1	-0.1949	0.0051	0.0439	0.0019
	\hat{d}_2	-0.1960	0.0040	0.0447	0.0020
	\hat{d}_3	-0.1955	0.0045	0.0431	0.0019
9	\hat{d}_1	-0.1942	0.0058	0.0437	0.0019
	\hat{d}_2	-0.1954	0.0046	0.0446	0.0020
	\hat{d}_3	-0.1948	0.0052	0.0429	0.0019
10	\hat{d}_1	-0.1935	0.0065	0.0435	0.0019
	\hat{d}_2	-0.1948	0.0052	0.0445	0.0020
	\hat{d}_3	-0.1941	0.0059	0.0427	0.0019
11	\hat{d}_1	-0.1928	0.0072	0.0434	0.0019
	\hat{d}_2	-0.1941	0.0059	0.0443	0.0020
	\hat{d}_3	-0.1933	0.0067	0.0426	0.0019
12	\hat{d}_1	-0.1921	0.0079	0.0432	0.0019
	\hat{d}_2	-0.1934	0.0066	0.0442	0.0020
	\hat{d}_3	-0.1926	0.0074	0.0424	0.0019

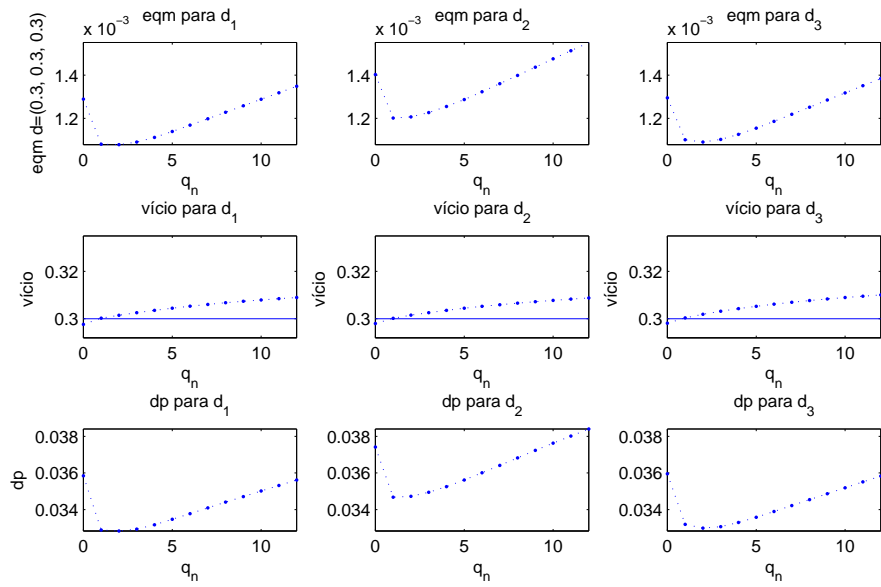


Figura B.19: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (0.3, 0.3, 0.3)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.5$ e $n = 2000$.

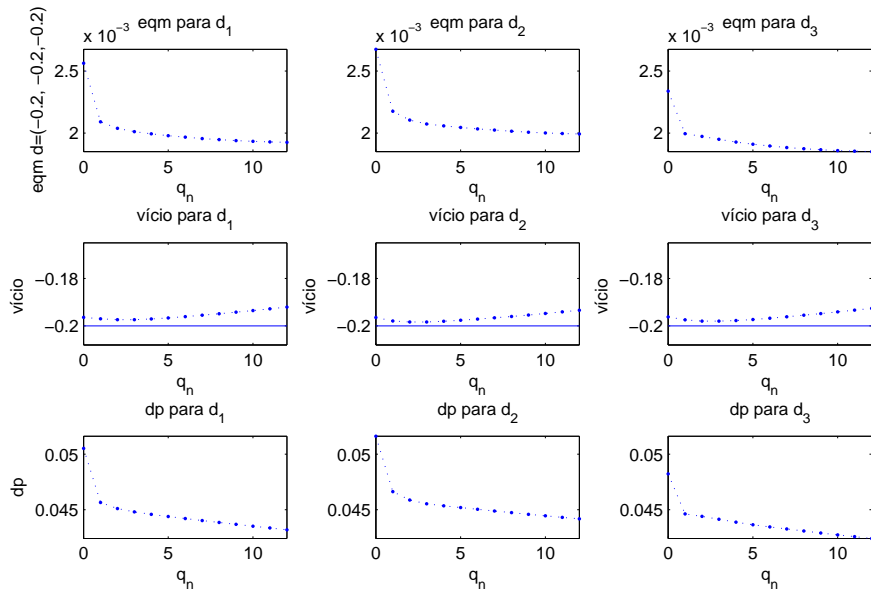


Figura B.20: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (-0.2, -0.2, -0.2)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.5$ e $n = 1000$.

Tabela B.33. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.5$, $\mathbf{d} = (-0.2, -0.2, -0.2)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 1500$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	-0.1945	0.0055	0.0436	0.0019
	\hat{d}_2	-0.1978	0.0022	0.0452	0.0020
	\hat{d}_3	-0.1967	0.0033	0.0431	0.0019
1	\hat{d}_1	-0.1969	0.0031	0.0400	0.0016
	\hat{d}_2	-0.1980	0.0020	0.0404	0.0016
	\hat{d}_3	-0.1972	0.0028	0.0388	0.0015
2	\hat{d}_1	-0.1976	0.0024	0.0394	0.0016
	\hat{d}_2	-0.1981	0.0019	0.0398	0.0016
	\hat{d}_3	-0.1975	0.0025	0.0382	0.0015
3	\hat{d}_1	-0.1978	0.0022	0.0390	0.0015
	\hat{d}_2	-0.1979	0.0021	0.0394	0.0016
	\hat{d}_3	-0.1975	0.0025	0.0378	0.0014
4	\hat{d}_1	-0.1976	0.0024	0.0387	0.0015
	\hat{d}_2	-0.1975	0.0025	0.0392	0.0015
	\hat{d}_3	-0.1973	0.0027	0.0376	0.0014
5	\hat{d}_1	-0.1974	0.0026	0.0385	0.0015
	\hat{d}_2	-0.1972	0.0028	0.0390	0.0015
	\hat{d}_3	-0.1970	0.0030	0.0375	0.0014
6	\hat{d}_1	-0.1970	0.0030	0.0384	0.0015
	\hat{d}_2	-0.1967	0.0033	0.0389	0.0015
	\hat{d}_3	-0.1966	0.0034	0.0374	0.0014
7	\hat{d}_1	-0.1966	0.0034	0.0383	0.0015
	\hat{d}_2	-0.1963	0.0037	0.0388	0.0015
	\hat{d}_3	-0.1962	0.0038	0.0373	0.0014
8	\hat{d}_1	-0.1962	0.0038	0.0382	0.0015
	\hat{d}_2	-0.1958	0.0042	0.0387	0.0015
	\hat{d}_3	-0.1958	0.0042	0.0372	0.0014
9	\hat{d}_1	-0.1957	0.0043	0.0381	0.0015
	\hat{d}_2	-0.1953	0.0047	0.0386	0.0015
	\hat{d}_3	-0.1953	0.0047	0.0371	0.0014
10	\hat{d}_1	-0.1952	0.0048	0.0381	0.0015
	\hat{d}_2	-0.1948	0.0052	0.0385	0.0015
	\hat{d}_3	-0.1948	0.0052	0.0369	0.0014
11	\hat{d}_1	-0.1947	0.0053	0.0380	0.0015
	\hat{d}_2	-0.1943	0.0057	0.0384	0.0015
	\hat{d}_3	-0.1943	0.0057	0.0368	0.0014
12	\hat{d}_1	-0.1942	0.0058	0.0379	0.0015
	\hat{d}_2	-0.1937	0.0063	0.0383	0.0015
	\hat{d}_3	-0.1938	0.0062	0.0367	0.0014

Tabela B.34. Resultados para o estimador SCGPH, através dos valores da média, vício, desvio padrão e erro quadrático médio, quando $\rho = 0.5$, $\mathbf{d} = (-0.2, -0.2, -0.2)$, $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$ e $n = 2000$.

		SCGPH			
q_n	\mathbf{d}	média	vício	dp	eqm
0	\hat{d}_1	-0.1972	0.0028	0.0368	0.0014
	\hat{d}_2	-0.1989	0.0011	0.0371	0.0014
	\hat{d}_3	-0.1962	0.0038	0.0386	0.0015
1	\hat{d}_1	-0.1977	0.0023	0.0339	0.0012
	\hat{d}_2	-0.1992	0.0008	0.0345	0.0012
	\hat{d}_3	-0.1968	0.0032	0.0361	0.0013
2	\hat{d}_1	-0.1980	0.0020	0.0337	0.0011
	\hat{d}_2	-0.1994	0.0006	0.0342	0.0012
	\hat{d}_3	-0.1971	0.0029	0.0358	0.0013
3	\hat{d}_1	-0.1981	0.0019	0.0336	0.0011
	\hat{d}_2	-0.1993	0.0007	0.0340	0.0012
	\hat{d}_3	-0.1971	0.0029	0.0355	0.0013
4	\hat{d}_1	-0.1979	0.0021	0.0336	0.0011
	\hat{d}_2	-0.1991	0.0009	0.0338	0.0011
	\hat{d}_3	-0.1970	0.0030	0.0354	0.0013
5	\hat{d}_1	-0.1977	0.0023	0.0335	0.0011
	\hat{d}_2	-0.1987	0.0013	0.0336	0.0011
	\hat{d}_3	-0.1969	0.0031	0.0352	0.0012
6	\hat{d}_1	-0.1974	0.0026	0.0335	0.0011
	\hat{d}_2	-0.1984	0.0016	0.0335	0.0011
	\hat{d}_3	-0.1966	0.0034	0.0351	0.0012
7	\hat{d}_1	-0.1971	0.0029	0.0335	0.0011
	\hat{d}_2	-0.1980	0.0020	0.0334	0.0011
	\hat{d}_3	-0.1963	0.0037	0.0349	0.0012
8	\hat{d}_1	-0.1967	0.0033	0.0335	0.0011
	\hat{d}_2	-0.1976	0.0024	0.0333	0.0011
	\hat{d}_3	-0.1960	0.0040	0.0348	0.0012
9	\hat{d}_1	-0.1962	0.0038	0.0335	0.0011
	\hat{d}_2	-0.1972	0.0028	0.0333	0.0011
	\hat{d}_3	-0.1956	0.0044	0.0347	0.0012
10	\hat{d}_1	-0.1958	0.0042	0.0335	0.0011
	\hat{d}_2	-0.1968	0.0032	0.0332	0.0011
	\hat{d}_3	-0.1952	0.0048	0.0346	0.0012
11	\hat{d}_1	-0.1954	0.0046	0.0335	0.0011
	\hat{d}_2	-0.1964	0.0036	0.0331	0.0011
	\hat{d}_3	-0.1948	0.0052	0.0345	0.0012
12	\hat{d}_1	-0.1949	0.0051	0.0335	0.0011
	\hat{d}_2	-0.1959	0.0041	0.0331	0.0011
	\hat{d}_3	-0.1944	0.0056	0.0345	0.0012

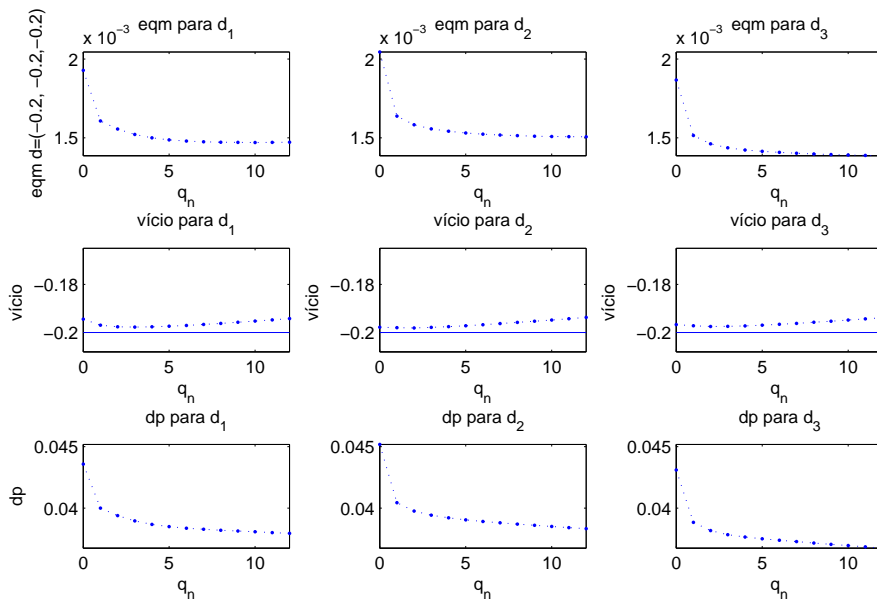


Figura B.21: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (-0.2, -0.2, -0.2)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.5$ e $n = 1500$.

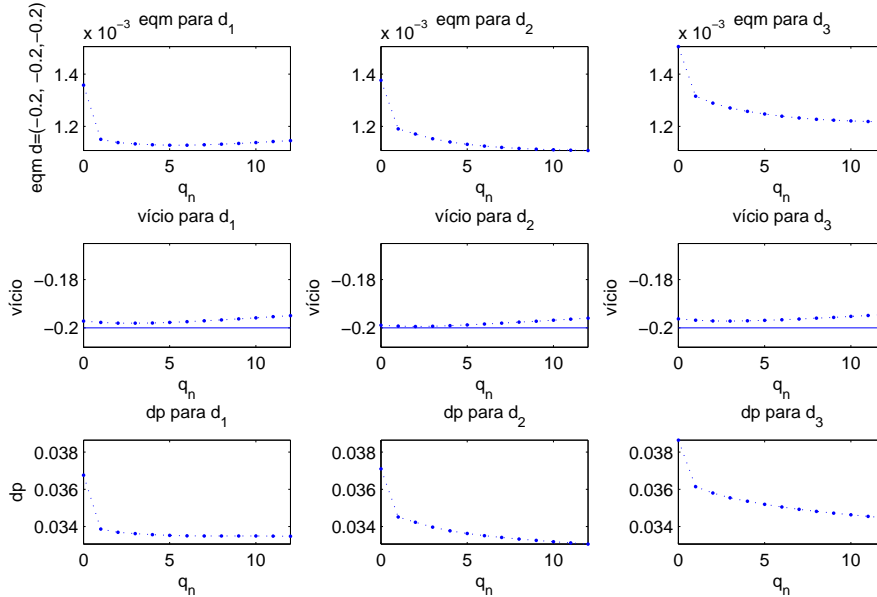


Figura B.22: Resultados para o estimador SCGPH através do erro quadrático médio, vício e desvio padrão, quando $q_n \in \{0, 1, \dots, 12\}$, $\mathbf{d} = (-0.2, -0.2, -0.2)$, $\alpha = 0.75$, $\rho = 0.5$ e $n = 2000$.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)