

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SOLUÇÕES PARTICULARES PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES  
TRIDIMENSIONAIS TRANSIENTES.

por

Daniel Beck

Tese para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Dezembro de 2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

SOLUÇÕES PARTICULARES PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES  
TRIDIMENSIONAIS TRANSIENTES.

por

Daniel Beck

Mestre em engenharia

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de transporte

Orientador: Prof. Dr. Jorge R. S. Zabadal

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Bardo Ernest Josef bodmann – PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Jorge A. V. Ale – PUC/RS

Prof. Dr. Nilo Sérgio Medeiros Cardozo – PPGEQ/UFRGS

Prof. Dr. Sérgio Luiz Frey – PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. **Horácio A. Vielmo**

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 11 de dezembro de 2009.

## RESUMO

Este Trabalho apresenta novas soluções exatas para as equações de Navier – Stokes transientes tridimensionais para escoamentos viscosos incompressíveis. Estas soluções são obtidas por meio de Split e Transformações Auto-Bäcklund. O procedimento de Split desacopla as equações de Navier – Stokes em dois sistemas de equações diferenciais parciais, um linear e outro não-linear, ambos não-homogêneos. O sistema linear, que contém somente termos viscosos e derivadas temporais, é resolvido via Transformações Auto-Bäcklund induzidas por relações de comutação, fornecendo o campo de velocidades. Os componentes do vetor velocidade são então substituídos no sistema não-linear a fim de obter o correspondente campo de pressões. A resolução do sistema não-linear para a pressão pode ser obtida tanto numericamente (via integração direta) quanto analiticamente, empregando a equação de Helmholtz.

O objetivo do presente trabalho é encontrar expressões analíticas para o campo de velocidades e obter resultados numéricos para o campo de pressão associado. O caráter híbrido das soluções proporciona uma redução significativa do tempo de processamento requerido para a simulação de escoamentos viscosos, o qual praticamente se reduz ao tempo demandado para a tarefa de pós-processamento. Com esse objetivo em mente, foi desenvolvida uma formulação tridimensional escalar para a função corrente, a fim de reduzir o tempo requerido na tarefa mais dispendiosa de pós-processamento, a saber, o traçado das linhas de corrente em torno de corpos submersos de formato arbitrário. Neste estágio de desenvolvimento, esta formulação é empregada para produzir mapas de linhas de corrente para escoamentos viscosos em torno de uma esfera para números de Reynolds elevados.

**PALAVRAS-CHAVE:** Sistema Navier-Stokes; Transformações Auto-Bäcklund, escoamento turbulento; Campo de pressão.

## ABSTRACT

This work presents new exact solutions to the unsteady three dimensional Navier-Stokes equations for incompressible viscous flows. These solutions are obtained by means of split and auto-Bäcklund transformations. The splitting procedure decouples the Navier-Stokes equations into a linear and a nonlinear inhomogeneous system of partial differential equations. The linear system, which contains only viscous terms and time derivatives, is solved via auto-Bäcklund transformations induced by commutation relations, furnishing the velocity field. The components of the velocity vector are then replaced into the nonlinear system to obtain the corresponding pressure field. The solution of the nonlinear system for the pressure variable can be carried out either numerically (by direct integration) or analytically, using the Helmholtz equation .

The aim of the proposed work is to find analytical expressions for the velocity field and to obtain numerical results to the associated pressure field. The hybrid character of the solutions provides a significant reduction on the time processing required to simulate viscous flows, which virtually reduces to the time demanded to execute post-processing tasks. Taking this fact in mind, a three dimensional scalar formulation for the streamfunction was developed in order to simplify the most time-consuming post-processing task required, e.g., plotting the streamlines around arbitrary shaped bodies. At this stage of development, this formulation is employed to produce streamline maps for viscous flows around a sphere for high Reynolds numbers.

**KEYWORDS:** Navier-Stokes system; auto-Bäcklund transformations; turbulent flow; pressure profile.

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>8</b>
1.1. ABORDAGEM NUMÉRICA E ANALÍTICA .....	11
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>14</b>
2.1. MÉTODOS BASEADOS EM SIMETRIAS .....	14
2.2. MÉTODOS BASEADOS EM SPLIT .....	15
2.3. SIMETRIAS OBTIDAS VIA SUBSTITUIÇÃO DIRETA .....	20
2.4. SIMETRIAS OBTIDAS VIA TRANSFORMAÇÕES DE BÄCKLUND .....	21
2.5. SIMETRIAS OBTIDAS VIA APLICAÇÃO DO GRUPO DE LIE .....	23
2.6. SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS VIA SOLUÇÕES ANALÍTICAS .....	27
2.7. SIMULAÇÕES DE ESCOAMENTOS VIA SOLUÇÕES NUMÉRICAS E/OU HÍBRIDAS .....	28
2.8. SIMULAÇÃO ANALÍTICA DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS .....	30
<b>3. DESCRIÇÃO DO MÉTODO .....</b>	<b>42</b>
3.1. TRANSFORMAÇÕES AUTO-BÄCKLUND INDUZIDAS POR OPERADORES .....	43
3.2. TRANSFORMAÇÃO AUTO-BÄCKLUND INDUZIDA POR UMA RELAÇÃO DE COMUTAÇÃO EM COORDENADAS CILINDRICAS .....	51
3.3. CORRELAÇÃO ENTRE EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES E HELMHOLTZ .....	52
<b>4. MODELO ESCALAR PARA A FUNÇÃO CORRENTE .....</b>	<b>55</b>
4.1. CORRESPONDÊNCIA ENTRE OS ESPAÇO NULO DAS COMPONENTES DA VELOCIDADE E DA FUNÇÃO CORRENTE .....	57
<b>5. RESULTADOS .....</b>	<b>60</b>
5.2. RESULTADOS PRELIMINARES .....	60
5.1. CONDIÇÕES RESTRITIVAS .....	62
5.2. RESULTADOS OBTIDOS VIA SOLUÇÃO EM COORDENADAS CILINDRICAS .....	67
5.2.3. APLICAÇÃO DO GRUPO DE LIE .....	68
5.3. SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO EM TORNO DE UMA ESFERA .....	69
<b>6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>78</b>
<b>7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>81</b>
APÊNDICE A .....	86
APÊNDICE B .....	88
APÊNDICE C .....	92
APÊNDICE D .....	93
APÊNDICE E .....	94
ESTIMATIVA DO RAIO MÉDIO DOS VÓRTICES EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE REYNOLDS .....	94

## LISTA DE SÍMBOLOS

$C_D$	Coeficiente de arrasto.	[ ]
$C_L$	Coeficiente de sustentação.	[ ]
$f$	Frequência.	[ $H_z$ ]
$F_D$	Força de arrasto	[ ]
$F_L$	Força de sustentação	[ ]
$p$	Pressão	[ ]
$u$	Velocidade longitudinal.	[ ]
$v$	Velocidade transversal.	[ ]
$w$	Velocidade transversal.	[ ]
$\psi$	Função Corrente.	[ ]
$\psi_0$	Função Corrente referente à condição inicial.	[ ]
$\rho$	Massa Específica.	[ $kg/m^3$ ]
$\mu$	Viscosidade.	[ $kg/m.s$ ]
$\nu$	Viscosidade cinemática.	[ $m^2/s$ ]
$L$	Comprimento característico.	[ $m$ ]
$u_0$	Velocidade inicial.	[ $m/s$ ]
$Re$	Número de Reynolds. [ $\rho u_0 L / \mu$ ]	[ ]
$r_0$	Raio médio dos vórtices.	[ ]
$r$	Raio da esfera.	[ ]

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1: Processo de Verificação. Fonte [Oberkampf, 2002].....	13
Figura 2.1: Escoamento em torno de um cilindro. Fonte: Oñate (2007).....	29
Figura 2.2: escoamento em torno de um cilindro, $Re = 10^4$ .....	35
Figura 2.3: Escoamento em torno de um cilindro, $Re = 10^5$ . .....	36
Figura 2.4 : Função corrente em perspectiva, fonte: [Beck, 2005] .....	39
Figura 2.5: Perfil da componente $u$ ao longo da superfície do cilindro. [Beck, 2005] .....	40
Figura 2.6: Coeficiente de Pressão ( $Re=6,7.10^5$ ) .....	40
Figura 5.1: Esteira completa, $Z=0$ .....	63
Figura 5.2: Esteira: Descolamento, $Z=0$ .....	63
Figura 5.3: Esteira completa, $Z=0.3$ .....	64
Figura 5.4: Esteira: Descolamento , $Z=0.3$ .....	64
Figura 5.5: Esteira completa, $Z=0.6$ .....	65
Figura 5.6: Esteira: Descolamento, $Z=0.6$ .....	65
Figura 5.7: Esteira completa, $Z=0.9$ .....	66
Figura 5.8: Esteira: Descolamento, $Z=0.9$ .....	66
Figura 5.9: Coeficiente de pressão em função do ângulo da esfera. ....	71
Figura 5.10: Coeficiente de pressão invíscido e para $Re$ tendendo a infinito (simulação). ....	71
Figura 5.11: Coeficiente de Arrasto em função do número de Reynolds. ....	72
Figura 5.12: Esteira de vórtices completa, $z = 0$ , $Re = 10^4$ . ....	73
Figura 5.13: A interface como fonte de vorticidade ( $z = 0$ , $Re = 10^4$ ). ....	74
Figura 5.14: Esteira completa, $z = 0.6$ . $Re = 10^4$ .....	75
Figura 5.15: Esteira completa, $z = 0.9$ . $Re = 10^4$ .....	75
Figura 5.16: Esteira completa, $z = 1.5$ . $Re = 10^4$ .....	76
Figura 5.17: Esteira completa, $z = 1.8$ , $Re = 10^4$ .....	76
Figura 5.18: Esteira completa, $z = 2.4$ , $Re = 10^4$ .....	77



## 1. INTRODUÇÃO

A simulação de escoamentos turbulentos para altos números de Reynolds, assim como uma teoria para a turbulência que explique de forma consistente e relativamente acurada os mecanismos físicos envolvidos, vem sendo continuamente objeto de pesquisa científica. Todavia, apesar do esforço despendido durante décadas no estudo deste fenômeno, mesmo uma definição conceitual concisa do fenômeno em questão parece, a princípio, de difícil formulação. Segundo Hinze (1959), o movimento turbulento de um fluido é uma condição irregular de escoamento em que vários parâmetros apresentam uma variação randômica nas coordenadas espaciais e temporais, de modo que, estatisticamente, valores médios podem ser discernidos. A natureza aparentemente randômica do escoamento turbulento é um dos principais fatores que dificultam a obtenção e até mesmo a aceitação de modelos determinísticos para a descrição do surgimento e da amplificação das componentes flutuantes. Outra característica importante que vem a oferecer dificuldades adicionais é o comportamento essencialmente tridimensional da turbulência, que combinado ao fato de que o movimento ocorre em uma ampla faixa de escalas, da ordem de  $10^{-4}m$  até  $10^3m$  [Liggett, 1994], (em casos de escoamentos atmosféricos), gera enorme dificuldade no que diz respeito à própria compreensão, e portanto, no modelamento e na simulação destes fenômenos.

Basicamente, a modelagem matemática de escoamentos incompressíveis de fluidos newtonianos baseia-se na resolução do sistema de equações de Navier-Stokes [Schlichting, 1968], que na sua forma vetorial é dado por

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V} - \nabla p + \vec{f}, \quad (1.1)$$

onde  $\vec{V}$  corresponde ao vetor velocidade e  $p$  à pressão. Aqui,  $\vec{f}$  é o vetor força de campo. Além de satisfazer esta equação, o perfil de velocidades deve igualmente satisfazer  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ , ou seja, o divergente do vetor velocidade deve ser nulo. Esta restrição é conhecida como Equação da Continuidade e garante que o balanço de massa não seja violado [White, 1974].

Devido à dificuldade de resolução analítica destas equações, especialmente devido à presença de termos não-lineares, a simulação de escoamentos turbulentos em geral, tem sido tradicionalmente efetuada por via numérica.

Os métodos numéricos constituem ferramentas extremamente versáteis na obtenção de soluções de problemas de contorno em diversas áreas de interesse prático. Seu horizonte de aplicação em engenharia é bastante amplo, pois as formulações numéricas praticamente não encontram restrições no que diz respeito à geometria do domínio e à natureza da equação a resolver, bem como das condições de contorno a aplicar. Todavia, existe uma dificuldade de ordem prática no que diz respeito à aplicação direta de métodos numéricos a determinados problemas em Mecânica de Fluidos. Ao efetuar simulações de escoamentos para altos Reynolds ( $Re \cong 10^6$ ), o custo computacional dessas formulações é consideravelmente elevado, devido à necessidade de refino da malha, que ocorre em função do surgimento de pequenos vórtices e oscilações de elevado número de onda. Essas perturbações, produzidas pela ação dos termos inerciais das equações de Navier-Stokes e Helmholtz, caracterizam uma estrutura típica das esteiras de vórtices, denominada cascata de Kolmogorov. Ocorre que a necessidade de refino da malha para elevados números de Reynolds constitui um sério inconveniente na simulação de escoamentos turbulentos via métodos numéricos, devido ao elevado tempo de processamento requerido para a obtenção das respectivas soluções aproximadas. Além disso, mesmo as malhas mais finas não são capazes de amostrar as componentes flutuantes produzidas na escala da rugosidade (da ordem de frações de milímetros) e na escala molecular (da ordem de nanômetros), razão pela qual se torna necessário implementar modelos de turbulência, que implicam no surgimento de termos extras nas equações de Navier-Stokes. Esses termos extras não apenas são supérfluos, uma vez que as próprias parcelas não-lineares já existentes nas equações de Navier-Stokes produzem todo o espectro das flutuações, mas também violam algumas das próprias leis de conservação que originam as equações de balanço. Um exemplo evidente de tal violação é facilmente verificado quando se aplica o operador rotacional sobre as equações de Navier-Stokes providas de modelos de turbulência. Essa operação resulta na produção de termos adicionais na equação de Helmholtz, que constituem uma violação flagrante do balanço de vorticidade.

A principal premissa que orienta o trabalho proposto é bastante simples e absolutamente objetiva: se a principal finalidade do emprego de um modelo matemático consiste em efetuar previsões, o horizonte de predição desse modelo não pode ser ampliado através da inclusão de equações auxiliares sem qualquer respaldo lógico, ainda que os respectivos dados experimentais sejam fielmente reproduzidos para cenários específicos de interesse. Em primeiro lugar, havendo sido reproduzidos com alto grau de exatidão os resultados experimentais para cenários particulares, não existe qualquer garantia de que novos cenários venham a ser reproduzidos pelo modelo provido de tais equações auxiliares. Nesse caso, é mais conveniente efetuar ajustes de

equações utilizando princípios de análise dimensional e análise estatística multivariada, procedimento bastante simples, que além de não demandar esforço computacional apreciável, constitui acima de tudo uma abordagem honesta no que se refere ao pretense conhecimento sobre o dito "estado da arte" na área de interesse. Em segundo lugar, a ampliação do horizonte de predição de um modelo baseado em leis de conservação deve ser efetuada exclusivamente através da incorporação de novas leis de conservação, correspondentes a mecanismos até então não considerados na análise. Esta é a única forma de evitar retrocessos no que diz respeito ao refinamento da formulação e à extensão do seu conjunto de aplicações.

Os argumentos anteriores induzem naturalmente a formular modelos baseados em simetrias. Simetrias são mudanças de variável que convertem soluções exatas de uma equação diferencial em novas soluções exatas, que contém maior número de elementos arbitrários. Essas mudanças de variável estão associadas a leis de conservação admitidas pela equação diferencial, que por sua vez correspondem a mecanismos físicos que governam a dinâmica do sistema. O objetivo do presente trabalho consiste em apresentar uma linha metodológica analítica baseada em simetrias, a partir da qual possam ser obtidas soluções exatas capazes de reproduzir as principais características dos escoamentos turbulentos para altos números de Reynolds, utilizando apenas equações diferenciais oriundas de balanços em sua forma original, sem lançar mão de artifícios inconsistentes com leis básicas de conservação. Nesta proposta, as únicas hipóteses simplificativas a princípio admissíveis consistem nas premissas clássicas de escoamento incompressível, fluido newtoniano e desconsideração de forças de campo atuantes, que constituem hipóteses fracas sobre o fenômeno em estudo. Ainda que as soluções exatas obtidas através dessa formulação sejam particulares, e portanto não venham a reproduzir todas as características dos escoamentos turbulentos, a incorporação de novas simetrias correspondentes a mecanismos ainda não considerados pode ser efetuada de modo progressivamente mais simples. A abordagem analítica está baseada em métodos para obtenção indireta de simetrias de Lie [Olver, 2000; Bluman, G.; Kumei, S, 1989; Dattoli *et alli*, 1998; Ibragimov, 1995], bem como métodos baseados em Split [Zwillinger, 1992]. Como mencionado anteriormente, as simetrias de consistem em mudanças de variável, utilizadas para transformar soluções exatas de equações diferenciais previamente obtidas em novas soluções, que por sua vez possuem maior número de elementos arbitrários em sua composição. A presença desses elementos arbitrários faz com que a solução obtida seja capaz de satisfazer uma classe mais ampla de condições de contorno, ou, de forma alternativa, seja capaz de satisfazer a um determinado conjunto de condições de contorno em regiões relativamente extensas do domínio considerado. Assim, as simetrias podem ser

utilizadas para resolver problemas de contorno em malha grossa, ou mesmo dispensar a discretização do domínio, produzindo soluções analíticas válidas em toda a sua extensão.

### 1.1. ABORDAGEM NUMÉRICA E ANALÍTICA

A resolução das equações de Navier-Stokes, desde a época de sua formulação, vem sendo alvo de pesquisas científicas no sentido de se obter soluções exatas que de fato consigam reproduzir aspectos físicos reais de escoamentos de fluidos, sejam eles de características laminares ou turbulentas. Porém, apesar de todo esforço empregado, e, de fato, consideráveis avanços terem ocorrido ao longo das décadas passadas, a obtenção de soluções que simulem, principalmente, escoamentos turbulentos ainda fica aquém das expectativas.

Devido o grau de dificuldade de obtenção de soluções analítica para as equações de Navier-Stokes, principalmente por se tratar de um sistema de três equações não lineares de segunda ordem, a utilização da mesma para simular escoamentos reais, historicamente, esteve atrelada a hipóteses simplificativas que restringissem a modelagem pela simplificação de determinados termos nas equações originais, o que resultava em equações simplificadas cuja solução era obtida via métodos clássicos de resolução. Dentre estes casos, pode-se citar os escoamentos de Couette e Hagen-Poiseuille, ou os problemas de Stokes [Schlichting, 1968]. Entretanto, grande parte da modelagem de escoamentos reais não permite que se faça hipóteses simplificativas a ponto de se obter uma solução analítica para o problema via métodos clássicos de resolução de equações diferenciais, como por exemplo, integração direta. Sendo assim, a abordagem mais difundida no meio acadêmico, aplicada à simulação de escoamentos, sejam eles, transitivos ou turbulentos foi, inevitavelmente, a resolução das equações de Navier-Stokes por via numérica.

Atualmente, algumas técnicas numéricas vêm sendo empregadas no sentido de simular escoamentos turbulentos ou em transição. Dentre elas, vale destacar a simulação de grandes vórtices (LES) e também, por outro lado, a simulação numérica direta (DNS) [Nezu, 1993]. A simulação numérica direta permite simular escoamentos transientes tridimensionais a partir da resolução numérica das equações de Navier-Stokes, sem modelos auxiliares adicionais, da mesma maneira do que se faz para o caso de escoamentos laminares. Contudo, devido o fato de a turbulência ter um grande espectro de energia, desde a macroescala até a microescala, soluções para altos números de Reynolds são difíceis de obter, mesmo em supercomputadores. Isto se deve ao elevado número de pontos necessários na malha para englobar os efeitos físicos, tanto em macro e em micro escala. Segundo Nezu e Nakagawa (1993), o número de pontos

necessários para simulação direta das equações de Navier-Stokes é proporcional à potência do número de Reynolds na forma

$$N \approx \text{Re}^{\frac{9}{4}} \quad (1.2)$$

A simulação numérica direta necessita um grande tempo de processamento e considerável memória para armazenamento dos dados. Por exemplo,  $N$  é da ordem de  $10^9$  para número de Reynolds igual a  $10^4$ . Outra limitação numérica intrínseca é a impossibilidade de reprodução de efeitos como flutuações de altas frequências, devido necessidade de utilização de malha, que por mais refinada que seja, ainda não consegue reproduzir estas flutuações.

Ao contrário dos métodos numéricos, a abordagem analítica oferece meios que podem vir a possibilitar a obtenção de soluções exatas capazes de descrever cenários físicos reais, sem os ônus relativos ao emprego de métodos discretos citados anteriormente. Além disso, a validação e verificação de simulações computacionais, no que tange principalmente aos pacotes comerciais de simulações numéricas, tem sido objeto de discussão de diferentes órgãos e institutos ligados a simulações computacionais [Oberkampf, 2002], como *American Institute of Aeronautics and Astronautics* (AIAA) e *Defence Modeling and Simulation Organization* (DMSO). O Objetivo do debate é estabelecer uma metodologia hierárquica que abranja a área de Mecânica dos Fluidos Computacional (CFD), no sentido de estabelecer uma forma de garantir a validação e acuracidade dos resultados.

Em 1992, a AIAA começou um projeto cujo objetivo foi formular e padronizar a terminologia básica e metodologia na validação e verificação de simulações realizadas via CFD. Deste projeto resultou a publicação do *Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations* [AIAA, 1998]. A estratégia fundamental de verificação proposta por este guia é a identificação, quantificação e redução de erros em modelos computacionais e suas respectivas soluções.

Segundo Oberkampf (2002), a fim de quantificar erros das respectivas soluções numéricas, “uma fonte altamente acurada e confiável deve estar disponível”. Esta fonte a que o autor se refere diz respeito, em primeira instância, a soluções analíticas, obviamente, seguido de comparações via dados experimentais. Entretanto, o mesmo cita a dificuldade de obtenção destas soluções.

As comparações de resultados realizadas entre as soluções obtidas via métodos computacionais e soluções analíticas, propiciam a garantia de que o modelo conceitual é resolvido corretamente pela matemática discreta referentes ao código computacional utilizado

para tal tarefa. Ilustrativamente, a figura 1.1 exemplifica o processo de verificação e comparação das soluções numéricas provenientes dos códigos computacionais em questão.

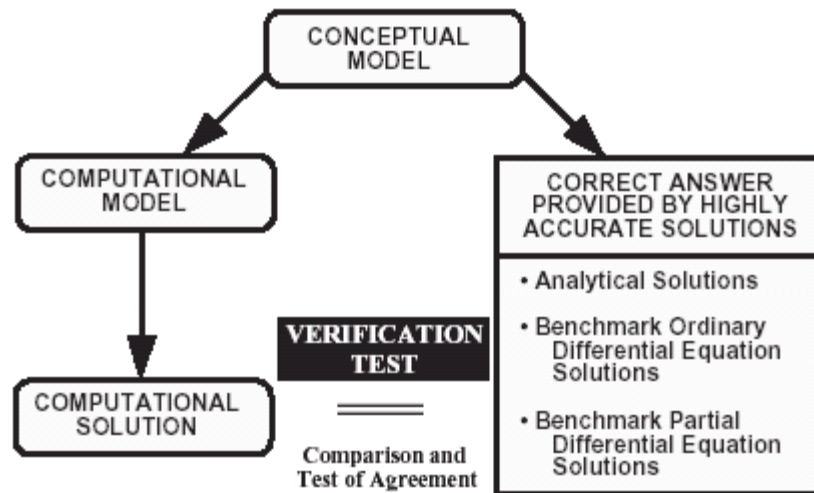


Figura 1.1

Figura 1.1: Processo de Verificação. Fonte [Oberkampff, 2002].

Com isso, é mais do que justificável a abordagem analítica, no que diz respeito à obtenção de soluções exatas capazes de simular escoamentos em dinâmica de fluidos, devido sua importância no que tange à utilização das soluções obtidas como fonte de comparação com métodos computacionais, a fim de validá-los. Em adição, a abordagem analítica não encontra barreiras de aplicação prática no que diz respeito a tempo de processamento. Outro ponto importante a ser citado sobre as vantagens em se utilizar métodos analíticos para simulação de escoamentos turbulentos é a possibilidade de obtenção de soluções que prevejam flutuações de alta frequência, como já mencionado, fato que será exemplificado posteriormente.

No capítulo subsequente, será realizada uma revisão a respeito de alguns métodos analíticos disponíveis na literatura, os quais podem ser utilizados como ferramenta de obtenção de soluções para equações lineares e não-lineares. Dando continuidade, será comentada a motivação para a metodologia utilizada neste trabalho para a obtenção de soluções analíticas para as equações de Navier-Stokes, bem como o ponto de partida para esta linha de raciocínio e sua posterior evolução até este trabalho. Por fim, serão apresentados os resultados obtidos, incluindo simulação e comparação com dados da literatura, com posterior discussão dos resultados e conclusão.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.

Neste Capítulo é feita a exposição e exemplificação de uma série de métodos analíticos que terão aplicação direta ou indireta na solução do problema proposto. Este resumo tem por objetivo exemplificar cada forma de manipulação que poderá ser utilizada mais adiante, visto que estes métodos têm sido mais utilizados por pesquisadores ligados à escola européia do que à escola norte-americana, esta última a mais difundida no meio acadêmico brasileiro. O leitor já familiarizado com formulações envolvendo *split*, simetrias de Lie e mapeamentos entre equações diferenciais pode passar diretamente ao Capítulo 2.3.

### 2.1. MÉTODOS BASEADOS EM SIMETRIAS.

De forma geral, métodos de resolução de equações diferenciais baseados em simetrias consistem em mapear um subconjunto de soluções exatas, em outro subconjunto, que contém o anterior. Dessa forma, mesmo que as soluções pré-existentes não sejam capazes de satisfazer às condições de contorno exigidas, é possível utilizá-las para produzir novas soluções, com número maior de elementos arbitrários, capazes de satisfazer as restrições impostas.

Como ilustração, uma possível forma de obtenção de simetrias pode ser exemplificada tomando como ponto de partida a equação

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$

onde  $\alpha$  corresponde à uma constante. Uma possível solução particular para esta equação é dada por

$$f_1 = c_2(x^2 + 2\alpha t) + c_1x + c_0. \quad (2.2)$$

Esta solução obedece a um conjunto relativamente restrito de condições de contorno. Entretanto, a partir dessa expressão é possível construir novas soluções exatas contendo maior número de constantes arbitrárias. A solução

$$f_2 = c_3(x^3 + 6x\alpha t) + c_2(x^2 + 2\alpha t) + c_1x + c_0, \quad (2.3)$$

obtida a partir de  $f_1$  através da aplicação de um operador íntegro-diferencial, contém maior número de constantes arbitrárias, e se reduz a  $f_1$  para  $c_3 = 0$ , podendo, portanto, satisfazer a um conjunto mais amplo de restrições.

Todas as mudanças de variáveis que transformam soluções exatas de determinada equação diferencial em novas soluções ou em soluções equivalentes são denominadas *simetrias admitidas pela equação* ou simplesmente *simetrias*. Pode-se utilizar diversas técnicas analíticas desenvolvidas para obter simetrias [Ibragimov, 1995; Dattoli et al., 1998; Zwillinger, 1992], como o *método de substituição direta* [Bluman e Kumei, 1989], as quais serão detalhadas nos próximos sub-capítulos.

No entanto, devido o fato de qualquer método de simetria estar baseado em mudanças de variáveis em soluções previamente encontradas, para dar início ao processo de obtenção de novas soluções, é necessária ao menos uma solução particular, a qual, dentre outras formas, pode ser obtida por *métodos baseados em split*, descritos a seguir.

## 2.2. MÉTODOS BASEADOS EM SPLIT.

Os métodos baseados em Split consistem em desmembrar a equação diferencial, em geral, em duas partes, gerando um sistema de duas equações distintas. Para equações diferenciais expressas na forma  $Lf = 0$ , onde  $L$  é um operador linear que pode ser escrito na forma  $L = A - B \rightarrow Af - Bf = 0$ , e  $B$  representa um operador facilmente inversível, para o qual o espaço nulo seja conhecido. Dessa forma, diversas soluções exatas podem ser obtidas através do seguinte esquema iterativo:

$$\begin{cases} Af_{k+1} = f_k \\ Bf_{k+1} = f_k \end{cases}, \quad (2.4)$$

onde  $f_0 = 0$ . Neste sistema, as funções  $f_k$  representam soluções exatas da equação original.

Para que o processo iterativo possa ser aplicado nas equações geradas pelo Split, é necessário que  $[A, B] = 0$ , ou seja, os operadores  $A$  e  $B$  devem comutar. Como exemplo, a equação



$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (2.5)$$

pode ser resolvida com a aplicação do Split, resultando no sistema

$$\begin{cases} Af = Q \\ Bf = Q \end{cases} \quad (2.6)$$

onde  $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  e  $B = \frac{\partial}{\partial t}$ . A comutatividade do sistema (2.6) pode ser verificada aplicando

$$AB = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial t} \right] = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial t} \quad (2.7)$$

$$BA = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] = \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3}{\partial t \partial y^2}$$

O que implica em  $[A, B] = 0$ .

A condição de comutatividade pode ser demonstrada da seguinte maneira: tomando o sistema

$$\begin{cases} Af = Q, \\ Bf = Q; \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} Af = Q, \\ Bf = Q; \end{cases} \quad (2.9)$$

aplica-se o operador  $B$  em (2.8) e o operador  $A$  em (2.9), o que resulta em

$$\begin{cases} BAf = BQ \\ ABf = AQ \end{cases} \quad (2.10)$$

Subtraindo as equações do sistema (2.10), obtêm-se

$$BAf - ABf = BQ - AQ. \quad (2.11)$$

Invertendo o sinal da equação (2.11) resulta em

$$AQ - BQ = ABf - BAf = [A, B]f \quad (2.12)$$

Assim,  $[A, B]f = 0$  implica em  $AQ - BQ = 0$ . Este resultado possibilita alimentar a fonte  $Q$  com a própria solução do sistema gerado pelo split, o que resulta no processo iterativo

$$\begin{cases} Af_{k+1} = f_k \\ Bf_{k+1} = f_k \end{cases} \quad (2.13)$$

Porém, vale salientar que a resolução do sistema de equações que é gerado por uma aplicação de Split, não necessariamente precisa ser resolvido via processo iterativo, como descrito acima, mas também via outras ferramentas matemáticas de resolução.

Um exemplo deste método pode ser dado partindo-se da equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (2.14)$$

a qual é expressa em termos dos operadores  $A$  e  $B$  da seguinte forma:

$$\begin{cases} A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ B = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} \end{cases} \quad (2.15)$$

Como os coeficientes de  $A$  e  $B$  são constantes, conclui-se que os operadores comutam, ou seja,  $AB = BA$ . Com isso, parte-se para o método iterativo descrito em (2.4), começando com uma fonte nula, ou seja,

$$\begin{cases} Af = Q \\ Bf = Q \end{cases} \quad (2.16)$$

onde  $Q = 0$ . Como o operador  $B$  é facilmente inversível e seu espaço nulo é conhecido, é possível encontrar uma solução para a equação referente ao operador  $B$  integrando a mesma com relação ao tempo e somando o espaço nulo correspondente. Assim,

$$f_1 = g_1(x, y). \quad (2.17)$$

O próximo passo é aplicar a solução (2.17) na equação referente ao operador  $A$  do sistema (2.16), o que resulta em

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g_1(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} g_1(x, y) = 0. \quad (2.18)$$

A fim de solucionar esta equação, aplica-se um novo Split, o que resulta no sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_1(x, y) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} g_1(x, y) = 0 \end{cases}. \quad (2.19)$$

Integrando a primeira equação do sistema (2.19) duas vezes, chega-se a uma expressão para  $g_1$  com o formato

$$g_1 = a(y)x + b(y). \quad (2.20)$$

onde  $a(y)$  e  $b(y)$  são funções arbitrárias de  $y$ . Substituindo esta expressão na segunda equação do sistema (2.19), resulta em

$$a''(y)x + b''(y) = 0. \quad (2.21)$$

A única maneira de satisfazer esta equação é fazendo  $a''(y) = 0$  e  $b''(y) = 0$ . Dessa forma, estas funções resultam lineares em  $y$ :

$$a(y) = c_3 y + c_1, \quad b(y) = c_2 y + c_4, \quad (2.22)$$

gerando uma solução com o formato

$$f_1 = g_1 = c_1x + c_2y + c_3xy + c_4. \quad (2.23)$$

Encontrada esta solução, aplica-se o mesmo processo novamente, agora introduzindo a solução (2.23) como nova fonte. Assim,  $Q = c_1x + c_2y + c_3xy + c_4$ , e a nova solução toma a forma

$$f_2 = k \int (c_1x + c_2y + c_3xy + c_4) dt + g_2(x, y) = k(c_1xt + c_2yt + c_3xyt + c_4t) + g_2(x, y). \quad (2.24)$$

Substituindo esta expressão na primeira equação do sistema (2.16), resulta em

$$\nabla^2 f_2 = \nabla^2 (k(c_1xt + c_2yt + c_3xyt + c_4t) + g_2(x, y)) = c_1x + c_2y + c_3xy + c_4, \quad (2.25)$$

o que gera a seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g_2(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} g_2(x, y) = c_1x + c_2y + c_3xy + c_4. \quad (2.26)$$

A fim de resolver a equação (2.26), aplica-se um novo Split, o que resulta no sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_2(x, y) = \frac{1}{2}(c_1x + c_2y + c_3xy + c_4) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} g_2(x, y) = \frac{1}{2}(c_1x + c_2y + c_3xy + c_4) \end{cases}. \quad (2.27)$$

Integrando a primeira equação deste sistema duas vezes com relação a  $x$ , resulta em

$$g_2(x, y) = \frac{c_1}{12}x^3 + \frac{c_2}{12}y^3 + \frac{c_3}{12}(x^3y) + \frac{c_4}{4}(x^2) + a_2(y)x + b_2(y). \quad (2.28)$$

Substituindo esta expressão na segunda equação do sistema (2.27) resulta em

$$a_2''(y)x + b_2''(y) = \frac{1}{2}(c_1x + c_3xy + c_4). \quad (2.29)$$

Esta equação é resolvida fazendo  $a_2''(y) = c_1 + c_3y$  e  $b_2''(y) = c_4$ . Assim,

$$a_2 = \frac{c_1}{2}y^2 + \frac{c_3}{6}y^3 + c_5y + c_6, \quad b_2 = \frac{c_4}{2}y^2 + c_7y + c_8, \quad (2.30)$$

e a solução para  $g_2$  vem na forma

$$g_2(x, y) = \frac{c_1}{12}(x^3 + 6xy^2) + \frac{c_2}{12}y^3 + \frac{c_3}{12}(x^3y + 2xy^3) + \frac{c_4}{4}(x^2 + 2y^2) + (c_5xy + c_6x) + c_7y + c_8. \quad (2.31)$$

Substituindo esta expressão em (2.24), resulta

$$\begin{aligned} f_2 = & c_1 \left( \frac{x^3}{12} + \frac{1}{2}xy^2 + kxt \right) + c_2 \left( \frac{y^3}{12} + kyt \right) + c_3 \left( \frac{x^3y}{12} + \frac{1}{6}xy^3 + kxyt \right) + \\ & c_4 \left( \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}y^2 + kt \right) + (c_5xy + c_6x) + c_7y + c_8 \end{aligned} \quad (2.32)$$

a qual é uma solução exata para a equação (2.5)

### 2.3. SIMETRIAS OBTIDAS VIA SUBSTITUIÇÃO DIRETA.

Outra forma possível de se obter simetrias para as soluções da equação (2.1) é através da aplicação de uma mudança de variável na equação diferencial via regra da cadeia [Zwillinger, 1992]. Assim, substituindo  $x = \beta(x, t)$ ,  $t = \gamma(x, t)$  na equação (2.1) resulta em

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma}(\gamma_t - \alpha \gamma_{xx}) = \alpha \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \beta_x^2 + \frac{\partial f}{\partial \beta} \left( \beta_{xx} - \frac{1}{\alpha} \beta_t \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} \gamma_x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \gamma} \beta_x \gamma_x \right). \quad (2.33)$$

Para que  $\gamma$  e  $\beta$  constituam uma nova solução, é necessário que a equação diferencial permaneça invariante, a não ser pela mudança das variáveis, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \quad (2.34)$$

Esta condição é chamada de *Cr terio de Invari ncia* [Bluman, G.; Kumei, S, 1989] e deve ser obedecida a fim de que a substitui o de  $t$  e  $x$  por  $\gamma$  e  $\beta$ , respectivamente, resulte em nova solu o para a equa o (2.1).

Dividindo a equa o (2.33) por  $\beta_x^2$  e aplicando o crit rio (2.34) resulta nas seguintes restri es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_t - \alpha \gamma_{xx} = \beta_x^2 \\ \beta_t - \alpha \beta_{xx} = 0 \\ \gamma_x^2 = 0 \\ \gamma_x \beta_x = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.35a) \\ (2.35b) \\ (2.35c) \\ (2.35d) \end{array}$$

Este sistema de equa es diferenciais pode ser resolvido em *cascata*, ou seja, substituindo a solu o de uma equa o em outra, de forma a ir simplificando o sistema sucessivamente.

Todas as mudan as de vari veis que transformam solu es exatas de uma determinada equa o diferencial em novas solu es s o denominadas *simetrias admitidas pela equa o* [Bluman, G.; Kumei, S, 1989]. Estas simetrias podem ser geradas seja a partir de t cnicas como Substitui o Direta, Transforma es de B cklund [Zwillinger, 1992] ou mesmo pela aplica o direta dos grupos de Lie [Olver, 2000].

#### 2.4. SIMETRIAS OBTIDAS VIA TRANSFORMA ES DE B CKLUND

O m todo de substitui o direta   aquele atrav s do qual se obt m simetrias admitidas pela equa o alvo utilizando mudan as de vari vel, que constituem um caso particular das chamadas *transforma es auto-B cklund*. Conforme foi explicado, ap s fazer uma substitui o direta aplica-se uma condi o de invari ncia de estrutura   equa o resultante. Caso a condi o de invari ncia n o seja imposta obteremos uma *transforma o de B cklund*, cuja equa o resultante ter  uma estrutura diferente da equa o alvo original.

Por exemplo, para mapear a equa o

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2.36)$$

realizamos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \alpha(x, y) \\ y &\rightarrow \beta(x, y) \end{aligned} \quad (2.37)$$

que resulta na equação transformada

$$(\alpha_{xx} + f\alpha_y - \alpha_x) \frac{\partial f}{\partial \alpha} + (\beta_{xx} + f\beta_y - \beta_x) \frac{\partial f}{\partial \beta} + \alpha_x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \beta_x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} + 2\alpha_x \beta_x \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \quad (2.38)$$

Dividindo a equação (2.38) por  $\alpha_x^2$  e impondo as seguintes restrições aos seus coeficientes,

$$\begin{cases} \frac{\alpha_{xx} + f\alpha_y - \alpha_x}{\alpha_x^2} = 0 \\ \frac{\beta_{xx} + f\beta_y - \beta_x}{\alpha_x^2} = 0 \\ \frac{\beta_x^2}{\alpha_x^2} = 1 \text{ ou } \frac{\beta_x}{\alpha_x} = 1, \quad \text{logo } \beta_x = \alpha_x \end{cases} \quad (2.39)$$

torna-se possível obter como equação-alvo

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \beta} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \quad (2.40)$$

cuja solução é imediata, uma vez que admite a fatoração

$$\left( \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \right) f = 0 \quad (2.41)$$

A equação (2.41) pode ser resolvida em duas etapas, uma vez que sua forma fatorada pode ser convertida no sistema

$$\begin{cases} g = \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \\ \frac{\partial g}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial \beta} = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

cuja solução pode ser facilmente obtida utilizando softwares de processamento simbólico. Este exemplo da primeira forma de aplicação das transformações de Bäcklund mostra claramente como uma equação parcial não-linear pode ser resolvida através de dois sistemas de equações parciais lineares.

## 2.5. SIMETRIAS OBTIDAS VIA APLICAÇÃO DO GRUPO DE LIE

Simetrias de Lie, sucintamente falando, são mudanças de variáveis capazes de transformar uma solução exata, em se tratando de equações diferenciais, em outra solução também exata para a mesma equação. Porém, estas mudanças de variáveis não estão explicitamente tabeladas na literatura. Essas simetrias estão implicitamente determinadas através de grupos de operadores responsáveis pelas transformações. Sendo assim, este sub-capítulo tem por objetivo esclarecer a idéia central por trás da aplicação dos grupos de Lie na resolução de equações diferenciais, bem como o processo de aplicação do grupo de simetria sobre soluções exatas previamente encontradas.

Do ponto de vista operacional, grupos de Lie são conjuntos de operadores diferenciais de primeira ordem, denotados por  $v_i$ , e chamados *geradores infinitesimais do grupo de simetria admitido pela equação diferencial* [Olver, 2000; Ibragimov, 1995], que possuem a seguinte propriedade:

$$e^{v_i} f(x, y, \dots) = g(x, y, \dots) \quad (2.43)$$

Essa propriedade pode ser traduzida em termos operacionais da seguinte forma: a aplicação da exponencial de um gerador sobre uma solução exata  $f$  produz uma nova solução exata, dada por  $g$ .

A obtenção do grupo de simetria de Lie, capaz de gerar simetrias de soluções exatas de determinada equação diferencial, se baseia na resolução do problema de valor inicial



$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = [V]f \\ f = f_0 \text{ para } \varepsilon = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Aqui,  $V$  corresponde a um operador linear de primeira ordem. A expressão (2.44), de fato, insere a idéia de que a evolução de uma determinada função,  $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}$ , com relação a um parâmetro  $\varepsilon$ , é equivalente a aplicação de um operador,  $V$ , sobre esta mesma função.

A solução para a equação (2.44) vem na forma

$$f = [e^{\varepsilon V}] f_0 \quad (2.45)$$

Onde  $f_0$  é a função inicial para  $\varepsilon = 0$  e  $V$  é um operador linear de primeira ordem. Esta solução implica na necessidade da aplicação da exponencial do operador  $V$  sobre  $f_0$ . Em geral, o processo de aplicação de  $e^{\varepsilon V}$  se dá via expansão em série de Taylor, como segue:

$$[e^{\varepsilon V}] f_0 = f_0 + [\varepsilon V] f_0 + \frac{[\varepsilon^2 V^2]}{2!} f_0 + \dots + \frac{[\varepsilon^k V^k]}{k!} f_0 \quad (2.46)$$

onde  $V^k$  representa a potência  $k$  do operador  $V$  aplicado em  $f_0$ .

Até este ponto, pouca informação a respeito do operador  $V$  foi fornecida, a não ser o fato de ele ser linear de primeira ordem. De fato, se o objetivo com esta formulação é de gerar simetrias para soluções de equações diferenciais, é preciso garantir que a aplicação da exponencial do operador  $V$ , nos moldes de (2.44) gere uma nova solução. De forma sucinta, esta garantia só será obtida caso a aplicação de  $e^{\varepsilon V}$  sobre a função diferencial  $g(x, y, z, t, f_x, f_y, \dots)$  – função esta que gera a própria equação diferencial alvo, quando  $g(x, y, z, t, f_x, f_y, \dots) = 0$  – permaneça invariante, ou seja,

$$[e^{\varepsilon V}] g = g \quad (2.47)$$

Esta condição exige que a função diferencial  $g$  deve permanecer invariante quando da aplicação da exponencial do operador  $V$  sobre a mesma. Esta condição é obtida com a restrição

$$[\varepsilon V]g = 0, \quad (2.48)$$

o que é facilmente demonstrado a partir da expansão da expressão (2.47) em série de Taylor:

$$\left[ e^{\varepsilon V} \right] g = g + [\varepsilon V]g + \frac{[\varepsilon^2 V^2]}{2!} g + \dots + \frac{[\varepsilon^k V^k]}{k!} g \quad (2.49)$$

cuja única forma de chegar à condição (2.47) é fazendo  $[\varepsilon V]g = 0$ .

A restrição (2.48) é o próprio *Critério de Invariancia* [Ibragimov, 1995], sendo que desta imposição se obtém o formato para o operador  $V$ , o qual deve ser tal que garanta este critério. Este operador é, na verdade, a combinação linear dos próprios geradores do grupo de simetria,  $v_i$ , os quais formam o grupo de Lie propriamente dito.

O grupo de Lie responsável pela geração de simetrias para as equações de Navier-stokes já foi mapeado desde a década de setenta por Bucnachev e Kruchnev [Olver, 2000], e possui os seguintes geradores infinitesimais:

$$\left. \begin{aligned}
V_1 &= \frac{\partial}{\partial t} & (2.50a) \\
V_2 &= a_1(t) \frac{\partial}{\partial p} & (2.50b) \\
V_3 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} + v \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial v} & (2.50c) \\
V_4 &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} + w \frac{\partial}{\partial v} - v \frac{\partial}{\partial w} & (2.50d) \\
V_5 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} + w \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial w} & (2.50e) \\
V_6 &= a_2(t) \frac{\partial}{\partial x} + a_2'(t) \frac{\partial}{\partial u} - xa_2''(t) \frac{\partial}{\partial p} & (2.50f) \\
V_7 &= a_3(t) \frac{\partial}{\partial y} + a_3'(t) \frac{\partial}{\partial v} - ya_3''(t) \frac{\partial}{\partial p} & (2.50g) \\
V_8 &= a_4(t) \frac{\partial}{\partial z} + a_4'(t) \frac{\partial}{\partial w} - za_4''(t) \frac{\partial}{\partial p} & (2.50h) \\
V_9 &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} - u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v} - w \frac{\partial}{\partial w} - 2p \frac{\partial}{\partial p} & (2.50i)
\end{aligned} \right\}$$

Estes geradores podem ser empregados na forma

$$\left[ e^{\mathcal{E}_1 V_1 + \mathcal{E}_2 V_2 + \dots + \mathcal{E}_9 V_9} \right] f_0 = g, \quad (2.51)$$

onde  $g$  é uma nova solução exata, obtida a partir da aplicação do grupo de simetria sobre a solução prévia  $f_0$ . Evidentemente, a aplicação do grupo de simetria de Navier-Stokes, nos moldes da expressão (2.51) resulta na necessidade de manipulação da exponencial do grupo, aqui representado como combinação linear de todos os geradores infinitesimais. Apesar de já existirem regras para manipulação de exponenciais de operadores disponíveis na literatura [Datolli, 1998], geralmente esta tarefa gera enorme dificuldade, e por vezes pode vir a inviabilizar a aplicação do grupo. No caso do grupo de simetria de Navier-Stokes, ainda existe o agravante pelo fato de os geradores infinitesimais não comutarem entre si; isto impede que a aplicação do grupo possa ser fatorada, ou seja, aplicar a exponencial de cada gerador

individualmente, como por exemplo  $\left[ e^{\mathcal{E}_1 V_1} \left[ e^{\mathcal{E}_2 V_2} f_0 \right] \right] = h$ . Caso não seja possível aplicar alguma regra de manipulação de exponenciais de operadores, disponíveis na literatura (Datoli, 1998), a expansão em série de Taylor, nos moldes de (2.46), acarretará em grande dificuldade de manipular o grande número de termos da série, impossibilitando sua utilização em aplicações práticas de engenharia.

## 2.6. SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS VIA SOLUÇÕES ANALÍTICAS.

Historicamente, a obtenção de soluções exatas para as equações de Navier-Stokes capazes de simular escoamentos reais tem sido uma tarefa difícil, devido principalmente à não-linearidade do sistema. Embora algumas soluções exatas tenham sido obtidas para casos simplificados, onde a natureza de alguns escoamentos permite simplificações de termos nas equações originais [Schlichting, 1968], soluções exatas, capazes de simular escoamentos complexos, como escoamentos em corpos submersos de formato arbitrário, ou escoamentos turbulentos para altos números de Reynolds, até alguns anos atrás, ainda não tinham sido obtidas. De fato, nem mesmo havia a garantia de que era possível encontrar soluções exatas para o sistema de Navier-Stokes capazes de reproduzir algumas características que são observadas em escoamentos reais, como por exemplo, componentes de alta frequência, no caso de escoamentos turbulentos.

Nas últimas décadas, devido principalmente ao surgimento de softwares de manipulação simbólica, como Maple e Mathematica, fez com que reacendesse a pesquisa científica no sentido de encontrar soluções analíticas para as equações de Navier Stokes que pudessem ser usadas na simulação de escoamentos. Infelizmente, muitas dessas soluções encontradas até o momento [Irmay, 1997; Zharinov, 2002; Profilo, 1998; Mdallal, 2008], inclusive soluções analíticas tridimensionais [Nugruho, 2009; Rashidi, 2009], não possuem elementos arbitrários o suficiente, capazes de satisfazer as condições de contorno empregadas nas simulações, por exemplo, de escoamentos em torno de corpos submersos com diferentes geometrias, bem como escoamentos turbulentos. A maioria das soluções analíticas encontradas pelas recentes pesquisas na área, aplicam-se somente a escoamentos laminares [Tsangaris, 2006; Wang, 2002], ou para casos de escoamentos muito lentos (creeping flow) [Fang, 2008; Liao, 2002]. Aqui, vale destacar o trabalho de Hayat (2009), o qual aplicou o grupo de simetria de Navier-Stokes, a fim de gerar novas soluções a partir de uma solução exata prévia. Contudo, as expressões iniciais utilizadas para as componentes do vetor velocidades e pressão não são capazes de descrever cenários

físicos de forma realista, ou satisfazer condições de contorno para casos de escoamentos em torno de corpos submersos. A consequência foi que as soluções obtidas pela aplicação do grupo de simetria resultaram em expressões com poucos elementos arbitrários. Porém, a utilização de uma metodologia baseada no grupo de simetria de Navier-Stokes se mostrou bastante promissora, no sentido de, futuramente, se obter soluções mais gerais.

Outra linha de pesquisa importante, relativa à aplicação do grupo de simetria de Navier-Stokes, diz respeito à aplicação dos geradores do grupo como base para o desenvolvimento de modelos de turbulência e modelos de sub-malha. Esta linha de pesquisa, atualmente, está sendo desenvolvida por Razafindralandy (2005, 2007), onde o foco é mantido no fato de que cada gerador do grupo de simetria está associado a alguma lei física de conservação (Noether, 1918), onde o mesmo fornece informações a respeito das invariâncias, por exemplo, de escala e/ou translação que as equações de Navier-Stokes admitem. De fato, qualquer modelo auxiliar consistente que seja desenvolvido para fins de aplicação em simulações de escoamentos, deve respeitar as mesmas leis de conservação e invariância que as próprias equações de Navier-Stokes admitem, sendo, portanto, imperativo que os mesmos permaneçam invariantes sob uma transformação de qualquer dos geradores do grupo.

## 2.7. SIMULAÇÕES DE ESCOAMENTOS VIA SOLUÇÕES NUMÉRICAS E/OU HÍBRIDAS.

Devido, principalmente, à não-linearidade das equações de Navier-Stokes, as soluções analíticas obtidas até o momento ainda não são capazes de reproduzir aspectos turbulentos dos escoamentos observados na natureza. Conseqüentemente, a pesquisa científica, no que tange à mecânica de fluidos, utiliza, em geral, ferramentas matemáticas numéricas como via de obtenção de soluções para simulações de escoamentos. De fato, a abordagem numérica é constantemente reiterada no meio acadêmico, principalmente pela rápida evolução computacional, no que diz respeito ao desenvolvimento ininterrupto de computadores com capacidade de processamento cada vez maior, associado a espaço para armazenamento de dados, praticamente, sem limites.

Atualmente, dentre as várias abordagens numéricas existentes na literatura, tem se destacado a utilização do método de elementos finitos (FEM) na simulação de escoamentos diversos [Aksan, 2002, Trofimova *et al*, 2009; Liu, 2009], desde simulações de escoamentos em torno de cilindros [Selvam, 1997], ou escoamentos em torno de esferas [Tezduyar, 1998], onde este método é utilizado tanto na simulação numérica direta (DNS) [Trofimova, 2009; Oñate, 2007], quanto na aplicação de modelos auxiliares, como no caso da simulação de grandes

vórtices (LES) . Dentre os trabalhos pesquisados, vale destacar os resultados obtidos por Oñate (2007), o qual apresentou uma formulação para análise de escoamentos incompressíveis a partir do método de elementos finitos, o qual conseguiu solucionar uma gama de problemas de escoamento de fluidos para baixos e moderados números de Reynolds (até  $Re = 10^3$ ) sem a necessidade de modelos de turbulência auxiliares.

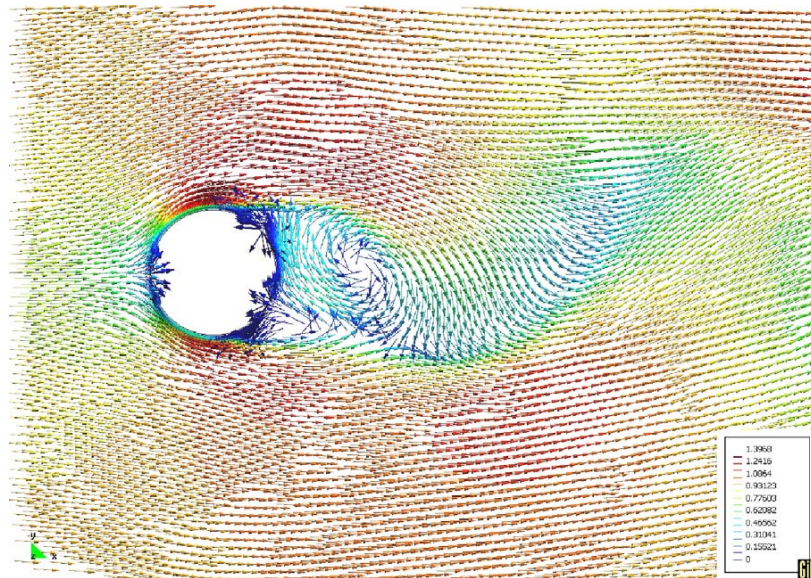


Figura 2.1: Escoamento em torno de um cilindro. Fonte: Oñate (2007).

A figura 2.1 mostra as linhas de corrente em torno de um cilindro para  $Re = 10^3$ . Aqui, vê-se claramente a formação de dois vórtices gerados pela onda de turbulência gerada pelo corpo submerso. Neste trabalho, Oñate também apresenta dados a respeito da oscilação das componentes do vetor velocidades, nas proximidades do corpo.

Apesar de já existirem vastos trabalhos – com ótimos resultados – em simulações de escoamentos em torno de corpos submersos para números de Reynolds de baixos a moderados ( $Re \leq 10^3$ ), a simulação de escoamentos para altos números de Reynolds ( $Re \approx 10^6$ ), atualmente, está atrelada a aplicação de modelos de turbulência, os quais não são capazes de simular fielmente um escoamento turbulento real, no que diz respeito a reprodução de flutuações de alta frequência e sua evolução temporal. Dentre a pesquisa nesta área, pode-se citar os trabalhos de Ong (2009), o qual apresenta simulações numéricas de escoamentos em torno de um cilindro para números de Reynolds da ordem de  $10^6$ , utilizando as equações médias de Reynolds (RANS) (Freire, 1998) em conjunto com o modelo  $k-\varepsilon$ . Também é interessante citar os trabalhos de Kalitzin (2008) e Martinat (2008), os quais simulam escoamentos para altos números de Reynolds com o auxílio de modelos de turbulência variados, como simulação de grandes vórtices, entre outros.

Uma alternativa numérica para a reprodução acurada de escoamentos em geral, nas ultimas décadas, vem sendo a simulação numérica direta. Esta abordagem é vantajosa no sentido de possibilitar a obtenção de soluções confiáveis, as quais inclusive são aceitas como *Benchmark* para outros métodos. Além disso, com a utilização da DNS, é possível uma melhor compreensão dos próprios fenômenos físicos envolvidos na simulação, a partir da análise dos resultados obtidos. Dentre os inúmeros trabalhos nesta área, vale citar Zikanov (2004), o qual aplicou a DNS a fim de investigar propriedades gerais de escoamentos turbulentos de metais líquidos na presença de um campo magnético constante. Os resultados obtidos foram bastante interessantes, como por exemplo, o fato de o escoamento, inicialmente turbulento, se tornar abruptamente laminar, a partir de um determinado alinhamento do campo magnético.

Infelizmente, a abordagem via DNS esbarra no alto custo computacional, em se tratando de simulações de escoamentos para altos números de Reynolds, como comentado anteriormente. Esta restrição impede o uso da DNS como ferramenta de estudo em casos turbulência plenamente desenvolvida.

Outra área interessante no estudo da dinâmica de fluidos diz respeito a simulações de escoamentos em máquinas de fluxo [Baoling *et al.*, 2006; Gonçalves, 2009]. Atualmente, devido principalmente ao ganho computacional cada vez maior com processadores cada vez mais rápidos, associados à utilização de modelos de turbulência, já é possível simular escoamentos em máquinas de fluxo, para determinados casos. O trabalho de Anagnostopoulos (2009) apresenta uma metodologia numérica para simulação de escoamentos em rotores de bombas centrífugas, a partir de uma abordagem bidimensional das equações médias de Reynolds (RANS), em conjunto com um modelo  $k-\varepsilon$ . Neste trabalho, foram levantadas curvas de eficiência e vazão da bomba, as quais apresentaram boa concordância com os dados experimentais.

## 2.8. SIMULAÇÃO ANALÍTICA DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS.

A busca de soluções capazes de simular escoamentos turbulentos não é uma tarefa fácil, em primeiro lugar, porque não se tem a garantia de que elas podem ser encontradas, e sem segundo lugar, porque é necessário tomar mão de ferramentas matemáticas e métodos analíticos específicos, e muitas vezes, de difícil compreensão. Porém, a partir de meados de 2003, começou-se a vislumbrar a possibilidade de obtenção de soluções capazes de reproduzir flutuações de alta frequência em escoamentos turbulentos [Zabada *et al.*, 2004].

A abordagem inicial estava baseada na modelagem a partir da equação de Helmholtz [White, 1974] (Apêndice A), que na forma bidimensional, é dada por

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega \quad (2.52)$$

onde  $\omega$  é a vorticidade. O objetivo consistia em obter alguma solução exata que pudesse ser usada na simulação de escoamentos.

A fim de obter uma solução particular para a equação (2.52), foi produzido um sistema auxiliar de equações homogêneas:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \nabla^2 \omega = 0 \quad (2.53)$$

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \quad (2.54)$$

Neste sistema, a solução geral da equação (2.54) é uma função arbitrária da função corrente. De fato, substituindo  $\omega = f(\psi)$  em (2.54), aplicando a regra da cadeia e colocando  $\frac{df}{d\psi}$  em evidência, resulta

$$\frac{df}{d\psi} \left( u \frac{\partial \psi}{\partial y} + v \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.55)$$

uma vez que o termo entre parênteses é identicamente nulo. Dessa forma, a função corrente pode ser expressa como uma função arbitrária da vorticidade: se  $\omega = f(\psi)$ ,  $\psi = f^{-1}(\omega) = g(\omega)$ , sendo  $\omega$  qualquer solução da equação (2.53). Tomando uma solução particular dessa equação, dada por

$$\omega = e^{c_0 + c_1 x + c_2 y + \nu(c_1^2 + c_2^2)t} \quad (2.56)$$

a respectiva função corrente resulta



$$\psi = g(e^h) + \psi_0 \quad (2.57)$$

onde  $h$  é o argumento da exponencial presente na solução (2.56), e a parcela  $\psi_0$  corresponde à função corrente relativa ao escoamento potencial em torno do corpo submerso. Embora a expressão obtida não constitua a solução geral da equação de Helmholtz, a função arbitrária nela contida pode satisfazer identicamente às condições de não-deslizamento e não-penetração na interface do corpo submerso. Impondo as condições  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$  resulta  $g'(h) = 0$  na fronteira. Além disso, a solução se reduz à função corrente relativa ao escoamento potencial à medida que são tomados pontos progressivamente mais afastados da interface sólida. Basta para tanto impor a condição

$$\lim_{x,y \rightarrow \infty} g(h) = 0 \quad (2.58)$$

Essa expressão constitui o ponto de partida para a obtenção de novas soluções exatas para equação de Helmholtz válidas para qualquer geometria a considerar. O processo de obtenção dessas soluções válida para todo o domínio, que consiste na aplicação de simetrias admitidas pela equação de Helmholtz. Para tanto, são efetuadas as seguintes mudanças de variável:

$$x \rightarrow a(x,y), \quad y \rightarrow b(x,y), \quad (2.59)$$

onde  $a$  e  $b$  representam as partes real e imaginária de uma função de variável complexa  $f(z)$ , sendo  $z = x + iy$ . Isto ocorre porque qualquer transformação conforme constitui uma simetria admitida pela equação de Helmholtz, isto é, quando  $x$  for substituído por  $a$  e  $y$  por  $b$  em (2.52) uma nova solução exata é produzida. A aplicação de uma transformação conforme (Apêndice B) sobre a solução obtida tem por objetivo introduzir a rugosidade sobre a superfície do corpo submerso.

Efetuando as mudanças dadas por (2.59) na equação de Helmholtz obtém-se a seguinte equação auxiliar nas novas variáveis:

$$(ua_x + va_y - v \nabla^2 a) \frac{\partial \omega}{\partial a} + (ub_x + vb_y - v \nabla^2 b) \frac{\partial \omega}{\partial b} - v \left[ (a_x^2 + a_y^2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial a^2} + (b_x^2 + b_y^2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial b^2} + 2(a_x b_x + a_y b_y) \frac{\partial^2 \omega}{\partial a \partial b} \right] = 0 \quad (2.60)$$

Para que as mudanças dadas por (2.60) constituam simetrias admitidas pela equação de Helmholtz, basta que a equação permaneça invariante em relação a essa troca de variáveis, isto é, que a equação (2.60) assuma a forma

$$U \frac{\partial \omega}{\partial a} + V \frac{\partial \omega}{\partial b} - \sqrt{\left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial b^2} \right]} = 0, \quad (2.61)$$

onde as componentes do vetor velocidade nas novas variáveis são definidas como

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial b} \quad e \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial a} \quad (2.62)$$

Essa definição é análoga à das componentes de velocidade presentes na equação em sua forma original:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.63)$$

Assim, o chamado *critério de invariância* (Olver, 2000; Bluman, 1989) consiste na preservação da forma da equação original, exceto pela troca de variáveis, e constitui uma condição suficiente para que a mudança transforme uma determinada solução da equação em uma nova solução exata. Isso ocorre porque, se  $f(x,y)$  é solução da equação original,  $f(a(x,y), b(x,y))$  será automaticamente solução da equação mapeada.

Uma forma prática de estabelecer a invariância da equação consiste em dividir todos os termos por  $(a_x^2 + a_y^2)$ , e em seguida impor as restrições

$$\begin{cases} b_x^2 + b_y^2 = a_x^2 + a_y^2 \\ a_x b_x + a_y b_y = 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

$$\begin{cases} u a_x + v a_y = (a_x^2 + a_y^2) \frac{\partial \psi}{\partial b} \\ \pm u a_{yy} \mp v a_x = -(a_x^2 + a_y^2) \frac{\partial \psi}{\partial a} \end{cases} \quad (2.65)$$

Impondo as primeiras duas restrições, dadas por (2.64), obtém-se

$$b_x = \pm a_y \quad e \quad b_y = \mp a_x, \quad (2.66)$$

o que implica em

$$\nabla^2 a = \nabla^2 b = 0. \quad (2.67)$$

Assim, a equação (2.60) resulta

$$\left( \frac{ua_x + va_y}{a_x^2 + a_y^2} \right) \frac{\partial \omega}{\partial a} + \left( \frac{ub_x + vb_y}{a_x^2 + a_y^2} \right) \frac{\partial \omega}{\partial b} - v \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial b^2} \right) = 0 \quad (2.68)$$

Impondo agora as restrições dadas por (2.65), obtém-se

$$\left( \frac{ua_x + va_y}{a_x^2 + a_y^2} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial b} \quad e \quad \frac{\pm ua_y \mp va_x}{(a_x^2 + a_y^2)} = -\frac{\partial \psi}{\partial a}. \quad (2.69)$$

Reescrevendo  $u$  e  $v$  em termos da função corrente, e utilizando a regra da cadeia, resulta

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = a_y \frac{\partial \psi}{\partial a} + b_y \frac{\partial \psi}{\partial b}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = a_x \frac{\partial \psi}{\partial a} + b_x \frac{\partial \psi}{\partial b}. \quad (2.70)$$

Substituindo as definições de  $u$  e  $v$  em (2.65), resulta

$$(\mp a_x^2 \mp a_y^2) \frac{\partial \psi}{\partial b} = (a_x^2 + a_y^2) \frac{\partial \psi}{\partial b} \quad (2.71)$$

e

$$(\pm a_y^2 \pm a_x^2) \frac{\partial \psi}{\partial b} = -(a_x^2 + a_y^2) \frac{\partial \psi}{\partial b} \quad (2.72)$$

Ambas as equações se reduzem a identidades ao especificar os sinais nas relações presentes em (2.66). Desse modo, para

$$b_y = a_x \quad (2.73)$$

e

$$b_x = -a_y. \quad (2.74)$$

As equações (2.73) e (2.74) são identicamente satisfeitas. Entretanto, essas restrições constituem as condições de Cauchy-Riemann relativas a uma transformação conforme cujas partes real e imaginária correspondem, respectivamente, às funções  $b$  e  $a$ . Portanto, ***qualquer transformação conforme é uma simetria de Lie admitida pela equação de Helmholtz. Portanto, uma vez obtida qualquer solução exata para simular escoamentos em torno de um corpo submerso qualquer (inclusive placa plana), basta efetuar uma transformação conforme para converter a solução disponível em uma nova solução exata, válida para escoamentos em torno de corpos submersos com formato arbitrário.***

As figuras 2.1 e 2.2 mostram as isolinhas da função corrente para o escoamento viscoso em torno de um cilindro, para  $Re = 10^4$  e  $Re = 10^5$ , respectivamente. Embora o modelo utilizado seja bidimensional, algumas características qualitativas relevantes dos escoamentos reais foram reproduzidas pela solução obtida, tais como o atraso no descolamento da camada limite e a redução das dimensões dos vórtices com o aumento do número de Reynolds.

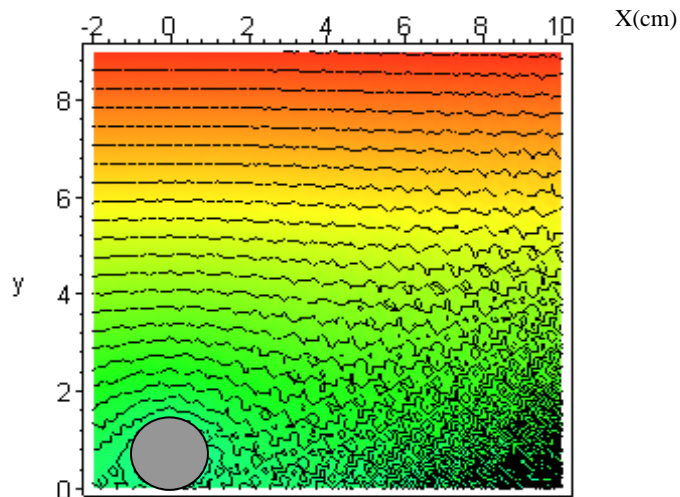


Figura 2.2: escoamento em torno de um cilindro,  $Re = 10^4$

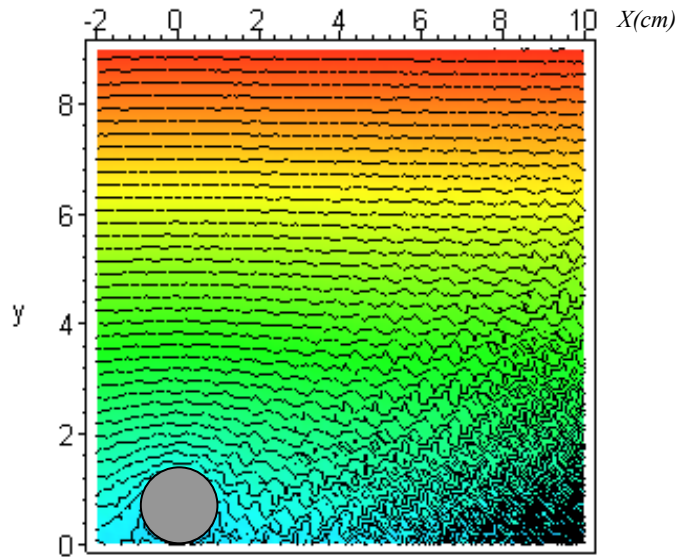


Figura 2.3: escoamento em torno de um cilindro,  $Re = 10^5$ .

Outra característica qualitativa importante da solução obtida reside na formação e na amplificação de componentes flutuantes, produzidas pela incorporação da rugosidade à geometria do corpo submerso. Naturalmente, a turbulência é um fenômeno essencialmente tridimensional, e produzido não apenas na escala da rugosidade, mas também em escala molecular, razão pela qual o modelo foi utilizado apenas para checar a consistência qualitativa da solução resultante com os respectivos fenômenos.

A obtenção destes resultados motivou a continuidade da linha de pesquisa, no que resultou a dissertação de mestrado [Beck, 2005], na qual novas soluções exatas para a equação de Helmholtz bidimensional transiente foram obtidas. Estas soluções foram capazes de reproduzir características do escoamento turbulento em torno de um cilindro para  $Re = 10^6$ , como o atraso do descolamento da camada limite e a geração de termos flutuantes de alta frequência e baixa amplitude. Abaixo, seguem alguns resultados obtidos com as novas soluções encontradas, a partir da equação de Helmholtz. Nesta ocasião, foram obtidas diferentes famílias de soluções exatas, uma para cada metodologia utilizada. A primeira família foi obtida a partir da aplicação de uma transformação de Bäcklund, do mapeamento da equação original em uma equação ordinária. Para tal, primeiramente se expressou a equação de Helmholtz em termos da função corrente aplicando-se as seguintes identidades:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.75)$$

Dessa forma, considerando que  $\omega = -\nabla^2 \psi$ , a equação (2.52) resulta em

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial y} = \frac{I}{Re} \nabla^4\psi. \quad (2.76)$$

O primeiro conjunto de soluções foi encontrado com a introdução do argumento

$$h = c_0 + c_1x + c_2y + c_3t, \quad (2.78)$$

o qual é aplicado na equação (2.76) via regra da cadeia. Os operadores diferenciais correspondentes a essa mudança de variável são descritos por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial x} \frac{d}{dh} = c_1 \frac{d}{dh}, & \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= c_1 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{d^2}{dh^2} = c_1^2 \frac{d^2}{dh^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial h}{\partial y} \frac{d}{dh} = c_2 \frac{d}{dh}, & \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= c_2 \frac{\partial h}{\partial y} \frac{d^2}{dh^2} = c_2^2 \frac{d^2}{dh^2}. \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial h}{\partial t} \frac{d}{dh} = c_3 \frac{d}{dh}, & \nabla^2 &= (c_1^2 + c_2^2) \frac{d^2}{dh^2} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Assim, o biarmônico da equação (2.76) toma a forma

$$\nabla^4\psi = (c_1^2 + c_2^2) \frac{d^2}{dh^2} \left[ (c_1^2 + c_2^2) \frac{d^2}{dh^2} \right] = (c_1^2 + c_2^2)^2 \frac{d^4}{dh^4}. \quad (2.80)$$

Substituindo os operadores descritos em (2.79) e (2.80) na equação (2.76), resulta em

$$c_3(c_1^2 + c_2^2) \frac{d^3\psi}{dh^3} + \underbrace{c_2 \frac{d\psi}{dh} c_1(c_1^2 + c_2^2) \frac{d^3\psi}{dh^3} - c_1 \frac{d\psi}{dh} c_2(c_1^2 + c_2^2) \frac{d^3\psi}{dh^3}}_{=0} = \frac{I}{Re} (c_1^2 + c_2^2)^2 \frac{d^4\psi}{dh^4} \quad (2.81)$$

Uma vez que os termos não lineares se anulam, chega-se a

$$c_3 \frac{d^3\psi}{dh^3} = \frac{I}{Re} (c_1^2 + c_2^2) \frac{d^4\psi}{dh^4}. \quad (2.82)$$

A equação (2.82) pode ser resolvida via redução de ordem. Dessa forma, fazendo

$$f = \frac{d^3 \psi}{dh^3} \quad (2.83)$$

e substituindo na equação (2.82), resulta em

$$f = \frac{(c_1^2 + c_2^2)}{c_3 Re} \frac{df}{dh}, \quad (2.84)$$

cuja solução é imediata:

$$f = k_0 e^{k_1 h} \quad , \text{onde} \quad k_1 = \frac{(c_1^2 + c_2^2)}{c_3 Re}. \quad (2.85)$$

Como  $f$  é a derivada terceira da função corrente, é necessário integrar a expressão (2.85) até obter a expressão para a função corrente. A primeira integração gera

$$\frac{d^2 \psi}{dh^2} = \int k_0 e^{k_1 h} dh = \frac{k_0}{k_1} e^{k_1 h} + k_2. \quad (2.86)$$

Integrando o resultado acima mais uma vez com relação a  $h$  resulta em

$$\frac{d\psi}{dh} = \int \left( \frac{k_0}{k_1} e^{k_1 h} + k_2 \right) dh = \frac{k_0}{k_1^2} e^{k_1 h} + k_2 h + k_3. \quad (2.87)$$

Por fim, a solução para a função corrente vem com uma terceira integração, o que gera

$$\psi = \int \left( \frac{k_0}{k_1^2} e^{k_1 h} + k_2 h + k_3 \right) dh = \frac{k_0}{k_1^3} e^{k_1 h} + \frac{k_2}{2} h^2 + k_3 h + k_4. \quad (2.88)$$

A expressão (2.88) é solução exata para a equação de Helmholtz bidimensional. Um caso particular de transformação de Bäcklund consiste nos métodos de solução por similaridade

[Bejan, 1984], onde a equação diferencial original é mapeada através de uma mudança de variável via introdução de um adimensional.

A segunda família de soluções foi obtida a partir da aplicação de um Split na equação de Helmholtz com posterior resolução via Solução Formal e Transformação Auto-Bäcklund para determinar a condição inicial (Apêndice D). Neste caso, a solução encontrada apresentou o seguinte formato:

$$f(\psi) = e^{(\lambda t)} f_1 \left( -b_1 x + \frac{1}{2} a_2 x^2 + a_1 y + \frac{1}{2} a_2 y^2 \right) e^{\left( \frac{\arctan \left( \frac{\sqrt{a_2^2 (b_1 - a_2 x)}}{a_2 \sqrt{(a_1 + a_2 y)^2}} \right) (c-1)}{\sqrt{a_2^2}} \right)} \quad (2.89)$$

Esta solução foi capaz de reproduzir algumas características de um escoamento em torno de um cilindro para altos números de Reynolds.

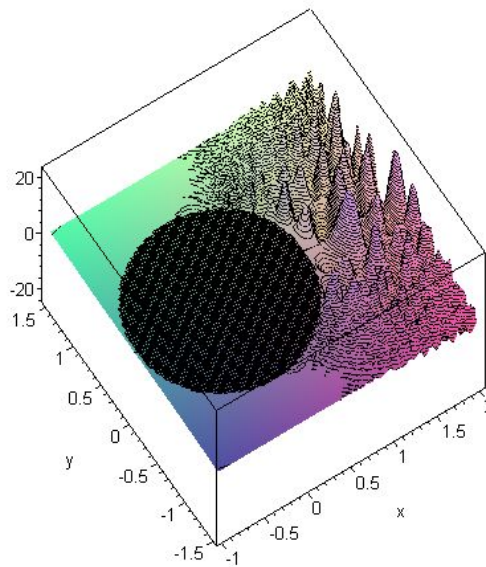


Figura 2.4 : Função corrente em perspectiva, fonte: [Beck, 2005]

Nesta figura, pode-se ver em perspectiva a vorticidade à jusante do centro do cilindro. Aqui, pode-se notar a formação de micro-vórtices junto a parede, bem como nas regiões periféricas. Nas regiões centrais, percebe-se a formação de vórtices com diâmetros maiores, indicando um descolamento efetivo da camada limite.



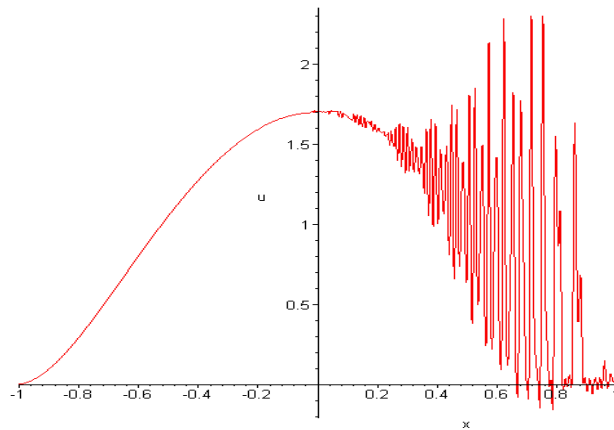


Figura 2.5: Perfil da componente  $u$  ao longo da superfície do cilindro. [Beck, 2005]

Aqui, está plotado o comportamento do perfil de velocidade na direção longitudinal ao escoamento principal, ao longo da superfície do cilindro. A partir de  $x = 0$ , pode ser visto o início das flutuações, resultantes da formação dos vórtices. Aproximadamente em  $x = 0.3$  as flutuações começam a aumentar, evidenciando o descolamento efetivo da camada limite. A amplitude máxima das flutuações se encontra em torno de 2 vezes o valor da velocidade de entrada.

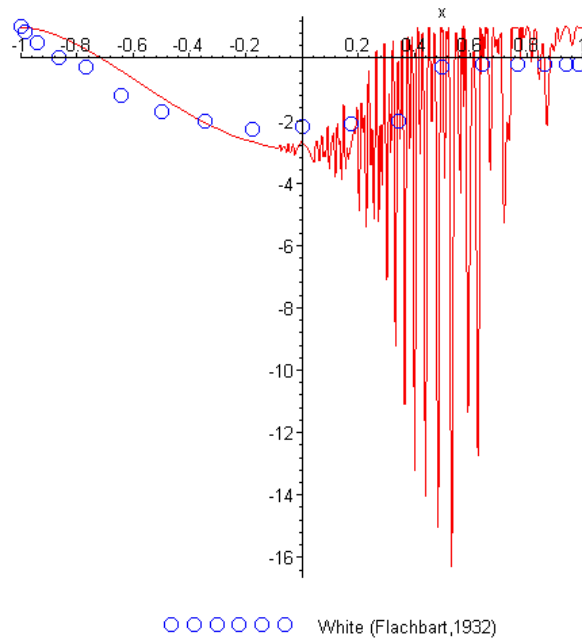


Figura 2.6: Coeficiente de Pressão ( $Re=6,7.10^5$ )

Na Figura 2.5 está plotado o coeficiente de pressão referente à simulação para  $Re = 6,7.10^5$ . Pode-se observar que a simulação acompanha a tendência central dos dados experimentais coletados por Flachbart (White, 1974).

A partir destes resultados, vislumbrou-se a possibilidade de se partir diretamente para as equações de Navier-Stokes, na busca de soluções exatas que reproduzissem características de escoamentos turbulentos em corpos submersos, tornando-se, então, tema deste trabalho.

No capítulo subsequente, é descrita a metodologia empregada para a obtenção de soluções particulares para a equação de Navier-Stokes tridimensionais transientes. O objetivo deste capítulo será expor, da forma mais clara possível, os métodos e ferramentas matemáticas utilizadas no desenvolvimento do processo de obtenção das soluções.

### 3. DESCRIÇÃO DO MÉTODO

O desenvolvimento de um método baseado em simetrias capaz de gerar soluções exatas que simulem escoamentos turbulentos em torno de corpos submersos tem como ponto de partida a equação de Navier-Stokes, que na sua forma vetorial é dada por

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V} - \nabla p, \quad (3.1)$$

onde  $\vec{V} = \{u, v, w\}$  é o vetor velocidade, e  $p$  é a pressão dinâmica atuante ao longo do escoamento. Uma breve análise sobre a equação (3.1) mostra que a aplicação do divergente sobre a mesma anula determinados termos, como

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) = \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{V})}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla^2 \vec{V}) = \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{V}) = 0. \quad (3.2)$$

Isto ocorre porque tanto o operador laplaciano quanto a derivada temporal comutam com o operador divergente e, pela equação da continuidade, imperativamente o divergente do vetor de velocidades deve ser nulo. Este fato abre precedentes para a realização de um Split [Zwillinger, 1992], pois reagrupando termos, temos

$$\underbrace{\nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V} \right)}_{=0} = -\nabla \cdot ((\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \nabla p). \quad (3.3)$$

Assim, o Split resultante é dado por

$$\left\{ \nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V} \right) = 0, \right. \quad (3.4a)$$

$$\left. \nabla \cdot ((\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \nabla p) = 0. \right. \quad (3.4b)$$

Note que este Split não restringe a obtenção de soluções para a equação de Navier-Stokes.

O próximo passo é repor o espaço nulo do operador divergente no sistema anterior, gerando

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \bar{V} = \bar{Q}, \\ (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} + \nabla p = \bar{Q}, \end{array} \right. \quad (3.5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \bar{V} = \bar{Q}, \\ (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} + \nabla p = \bar{Q}, \end{array} \right. \quad (3.5b)$$

onde  $\bar{Q}$  deve satisfazer  $\nabla \cdot \bar{Q} = 0$ .

### 3.1. TRANSFORMAÇÕES AUTO-BÄCKLUND INDUZIDAS POR OPERADORES.

Uma vez obtido o sistema (3.5), parte-se para a resolução da parte linear do mesmo, a qual é resolvida através do emprego de Transformações de Bäcklund. Para este caso, uma forma bastante prática de se obter simetrias consiste na aplicação de um operador linear de primeira ordem na forma

$$B = a(x, y, z, t) \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + b(x, y, z, t) \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} + c(x, y, z, t) \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} + g(x, y, z, t) \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + h(x, y, z, t)(\cdot) \quad (3.6)$$

sobre qualquer solução exata previamente conhecida da equação (3.5a). Assim, as simetrias são geradas partindo-se de uma solução particular para  $C[f(x, y, z, t)] = q(x, y, z, t)$ , onde  $C$  corresponde ao operador

$$C = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2(\cdot) \quad (3.7)$$

e  $q(x, y, z, t)$  corresponde à componente do vetor fonte  $\bar{Q}$ . Uma vez encontrada uma solução particular para  $C[f(x, y, z, t)] = q(x, y, z, t)$ , as simetrias podem ser obtidas aplicando-se o operador B da seguinte forma:

$$C[B[f(x, y, z, t)]] = q((x, y, z, t)). \quad (3.8)$$

Esta condição garante que  $B[f(x, y, z, t)] = g(x, y, z, t)$  seja uma nova solução exata. Nestas condições, o formato deste Operador B é definido através da determinação dos coeficientes  $a(x, y, z, t), b(x, y, z, t), c(x, y, z, t), g(x, y, z, t), h(x, y, z, t)$  que estão em aberto, os quais são determinados com a resolução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} C[f(x, y, z, t)] = q(x, y, z, t), \\ C[B[f(x, y, z, t)]] = q((x, y, z, t)). \end{array} \right. \quad (3.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C[f(x, y, z, t)] = q(x, y, z, t), \\ C[B[f(x, y, z, t)]] = q((x, y, z, t)). \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Assim, com a aplicação da condição (3.10), gera-se a equação

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \left[ \begin{array}{l} a(x, y, z, t) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y, z, t) \frac{\partial}{\partial y} + \\ c(x, y, z, t) \frac{\partial}{\partial z} + g(x, y, z, t) + h(x, y, z, t) \end{array} \right] f(x, y, z, t) \right] = q(x, y, z, t). \quad (3.11)$$

A fim de satisfazer a condição (3.9), isola-se o termo referente à derivada parcial no tempo da mesma, gerando

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, y, z, t) = q(x, y, z, t) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 f(x, y, z, t) \quad (3.12)$$

e substitui-se esta expressão em todas as derivadas parciais no tempo contidas na equação (3.11). Esta equação resultante é resolvida zerando os coeficientes que multiplicam as derivadas parciais em  $f$ . Dessa forma,  $f(x, y, z, t)$  continuará em aberto, sendo as restrições impostas somente sobre as funções  $a(x, y, z, t), b(x, y, z, t), c(x, y, z, t), g(x, y, z, t), h(x, y, z, t)$ . Esta metodologia gera um sistema de treze equações diferenciais, uma para cada coeficiente das derivadas em  $f$ , que é dado por

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, y, z, t) - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 h(x, y, z, t) = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} a(x, y, z, t) - \frac{1}{\text{Re}} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z, t) + \nabla^2 a(x, y, z, t) \right) = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} b(x, y, z, t) - \frac{1}{\text{Re}} \left( 2 \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z, t) + \nabla^2 b(x, y, z, t) \right) = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} c(x, y, z, t) - \frac{1}{\text{Re}} \left( 2 \frac{\partial}{\partial z} h(x, y, z, t) + \nabla^2 c(x, y, z, t) \right) = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x, y, z, t) - \frac{1}{\text{Re}} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x} a(x, y, z, t) + \nabla^2 g(x, y, z, t) \right) = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x, y, z, t) - \frac{1}{\text{Re}} \left( 2 \frac{\partial}{\partial y} b(x, y, z, t) + \nabla^2 g(x, y, z, t) \right) = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x, y, z, t) - \frac{1}{\text{Re}} \left( 2 \frac{\partial}{\partial z} c(x, y, z, t) + \nabla^2 g(x, y, z, t) \right) = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} c(x, y, z, t) + \frac{\partial}{\partial z} a(x, y, z, t) = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} b(x, y, z, t) + \frac{\partial}{\partial y} a(x, y, z, t) = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} c(x, y, z, t) + \frac{\partial}{\partial z} b(x, y, z, t) = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, y, z, t) = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x, y, z, t) = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} g(x, y, z, t) = 0 \quad (3.25)$$

Analisando este sistema, percebe-se que sua solução pode ser obtida a partir de uma resolução em cascata, ou seja, resolvendo as equações uma a uma e substituindo sucessivamente os resultados obtidos nas remanescentes. De início, vê-se que as equações (3.23) – (3.25) restringem o parâmetro  $g(x, y, z, t)$  de forma que ele somente pode ser dependente da variável tempo. Assim, as três últimas equações do sistema são satisfeitas e o laplaciano nas equações (3.17) – (3.19) desaparece. A fim de resolver as equações (3.17) – (3.19), restringe-se novamente a função  $g(t)$ , assumindo que ele é igual a uma constante. Dessa forma, as derivadas no tempo

destas equações resultam nulas e, se assumirmos que os parâmetros  $a(x, y, z, t)$ ,  $b(x, y, z, t)$ ,  $c(x, y, z, t)$  não dependem de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente, as equações (3.17) – (3.19) também resultam nulas.

Assim, o sistema é simplificado para

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} h(x, y, z, t) - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 h(x, y, z, t) = 0 \quad (3.26) \\ \frac{\partial}{\partial t} a(y, z, t) - \frac{1}{\text{Re}} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z, t) + \nabla^2 a(y, z, t) \right) = 0 \quad (3.27) \\ \frac{\partial}{\partial t} b(x, z, t) - \frac{1}{\text{Re}} \left( 2 \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z, t) + \nabla^2 b(x, z, t) \right) = 0 \quad (3.28) \\ \frac{\partial}{\partial t} c(x, y, t) - \frac{1}{\text{Re}} \left( 2 \frac{\partial}{\partial z} h(x, y, z, t) + \nabla^2 c(x, y, t) \right) = 0 \quad (3.29) \\ \frac{\partial}{\partial x} c(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial z} a(y, z, t) = 0 \quad (3.30) \\ \frac{\partial}{\partial x} b(x, z, t) + \frac{\partial}{\partial y} a(y, z, t) = 0 \quad (3.31) \\ \frac{\partial}{\partial y} c(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial z} b(x, z, t) = 0. \quad (3.32) \end{array} \right.$$

As equações (3.30) – (3.32) mostram que a função  $a(y, z, t)$  é linear na variável  $z$  e  $b(x, z, t)$  e  $c(x, y, t)$  lineares na variável  $x$ . Esta operação transforma estas funções em

$$a(y, z, t) = a_{11}(y, t)z + a_{21}(y, t), \quad (3.33)$$

$$b(x, z, t) = b_{11}(z, t)x + b_{21}(z, t), \quad (3.34)$$

$$c(x, y, t) = c_{11}(y, t)x + c_{21}(y, t), \quad (3.35)$$

Onde

$$a_{11}(y, t) = a_{12}(t)y + a_{13}(t), \quad (3.36)$$

$$a_{21}(y, t) = a_{22}(t)y + a_{23}(t), \quad (3.37)$$

$$b_{11}(z, t) = -a_{22}(t) - a_{12}(t)z, \quad (3.38)$$

$$b_{21}(z, t) = b_{22}(t)z + b_{23}(t), \quad (3.39)$$

$$c_{11}(y, t) = -a_{11}(y, t). \quad (3.40)$$

$$c_{21}(y, t) = c_{22}(t)y + c_{23}(t), \quad (3.41)$$

As equações (3.36) – (3.41) são obtidas pela análise do sistema (3.26) – (3.32) após a substituição das equações (3.33) – (3.35). Este processo é recursivo e a solução do sistema é construída passo a passo, conforme os parâmetros vão sendo restringidos. Após estas substituições, o sistema resulta em

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} h(x, y, z, t) - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 h(x, y, z, t) = 0 \quad (3.42) \\ \left( \frac{d}{dt} a_{13}(t) \right) z + \left( \frac{d}{dt} a_{22}(t) \right) y + \left( \frac{d}{dt} a_{12}(t) \right) yz + \left( \frac{d}{dt} a_{23}(t) \right) - \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z, t) \right) = 0 \quad (3.43) \\ \left( \frac{d}{dt} b_{22}(t) \right) z - \left( \frac{d}{dt} a_{22}(t) \right) x - \left( \frac{d}{dt} a_{12}(t) \right) xz + \left( \frac{d}{dt} b_{23}(t) \right) - \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z, t) \right) = 0 \quad (3.44) \\ \left( \frac{d}{dt} c_{22}(t) \right) y - \left( \frac{d}{dt} a_{13}(t) \right) x - \left( \frac{d}{dt} a_{12}(t) \right) xy + \left( \frac{d}{dt} c_{23}(t) \right) - \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial z} h(x, y, z, t) \right) = 0 \quad (3.45) \\ 2a_{12}(t)x - c_{22}(t) - b_{22}(t) = 0 \quad . \quad (3.46) \end{array} \right.$$

Pela equação (2.46) vê-se que  $a_{12}(t)$  deve ser nulo e que  $b_{22}(t) = -c_{22}(t)$ . Pelo sistema anterior, pode-se observar que  $h(x, y, z, t)$  deve ter o formato

$$h(x, y, z, t) = xk_5 + yk_6 + zk_7 + k_8 \quad (3.47)$$

e

$$a_{13}(t) = ka_1 t + ka_2, \quad (3.48)$$

$$a_{22}(t) = ka_3 t + ka_4, \quad (3.49)$$

$$c_{23}(t) = kc_1 t + kc_2, \quad (3.50)$$

$$c_{22}(t) = kc_3 t + kc_4, \quad (3.51)$$



O sistema resultante passa a ser algébrico e é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} ka_1z + ka_3y - \frac{2}{\text{Re}}k_5 + ka_5 = 0 \\ -kc_3z - ka_3x - \frac{2}{\text{Re}}k_6 + kb_1 = 0 \\ kc_3y - ka_1x - \frac{2}{\text{Re}}k_7 + kc_1 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.52) \\ (3.53) \\ (3.54) \end{array}$$

Sendo resolvido fazendo  $ka_1 = ka_3 = kc_3 = 0$ ,  $kc_1 = \frac{2}{\text{Re}}k_7$ ,  $ka_5 = \frac{2}{\text{Re}}k_5$  e  $kb_1 = \frac{2}{\text{Re}}k_6$ . Com isso, o Operador B resultante das restrições sobre as funções  $a(x, y, z, t), b(x, y, z, t), c(x, y, z, t), g(x, y, z, t), h(x, y, z, t)$  da expressão (3.6) é dado por

$$B = \left( ka_2z + ka_4y + \frac{2}{R}k_5t + ka_6 \right) \left( \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \right) + \left( -ka_4x - kc_4z + \frac{2}{R}k_6t + kb_2 \right) \left( \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \right) + \left( -ka_2x + kc_4y + \frac{2}{R}k_7t + kc_2 \right) \left( \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \right) + k_g \left( \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \right) + (k_5x + k_6y + k_7z + k_8)(\cdot) \quad (3.55)$$

Este operador é capaz de gerar simetrias admitidas pela equação  $C[f(x, y, z, t)] = q(x, y, z, t)$  através do seguinte processo iterativo:

$$B[f_k(x, y, z, t)] = f_{k+1}(x, y, z, t), \quad (3.56)$$

ou seja, a aplicação do Operador B sobre uma solução conhecida  $f_k$  gera uma nova solução  $f_{k+1}$ . Apesar de o processo iterativo ser facilmente implementado, é interessante conhecer qual a solução mais geral que este processo pode produzir. Para tanto basta fazer

$$B[f(x, y, z, t)] = f(x, y, z, t). \quad (3.57)$$

Esta equação de ponto fixo marca o limite das iterações, onde a aplicação do operador B não muda mais o formato da função  $f(x, y, z, t)$ , sendo então a equação que gera a solução mais geral do processo iterativo (3.56).

Observando as condições (3.9) e (3.10), vemos que as mesmas geram uma equação resultante que também possui termos na função fonte  $q(x, y, z, t)$ , sendo igualmente necessário satisfazer a equação nesta variável. A equação na função fonte é dada por

$$\begin{aligned} & \left( b_1 z + b_2 y + \frac{2}{R} b_3 t + b_4 \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} (q(x, y, z, t)) \right) + \left( -b_2 x - b_5 z + \frac{2}{R} b_6 t + b_7 \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} q(x, y, z, t) \right) + \\ & \left( -b_1 x + b_5 y + \frac{2}{R} b_8 t + b_9 \right) \left( \frac{\partial}{\partial z} q(x, y, z, t) \right) + k_g \left( \frac{\partial}{\partial t} q(x, y, z, t) \right) + \\ & (b_3 x + b_6 y + b_8 z + b_{10} - 1) q(x, y, z, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

e é equivalente à aplicação do Operador B sobre  $q(x, y, z, t)$ , ou seja,  $B[q(x, y, z, t)] = q(x, y, z, t)$ . Este fato leva a uma conclusão importante: Se  $B[f(x, y, z, t)] = f(x, y, z, t)$  gera soluções que equivalem às componentes do vetor velocidade  $\vec{V}$ , então a fonte  $q(x, y, z, t)$  também deve representar estas componentes. Dessa forma, o Split (3.5) muda para

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V} - \vec{V} = 0, \end{array} \right. \quad (3.59a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \nabla p - \vec{V} = 0, \end{array} \right. \quad (3.59b)$$

A Equação de Ponto Fixo (3.58) pode ser resolvida através do Método das Características [Copson, 1975; Ayres, 1995]. Todavia, a obtenção da solução geral para esta equação requer a resolução de equações características cujas variáveis não são separáveis. A alternativa encontrada para este problema consiste na simplificação da equação (3.58) com a anulação de alguns coeficientes arbitrários. Assim, fazendo  $b_3 = b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = b_9 = 0$ , resulta em uma solução com o formato

$$\begin{aligned}
f(x, y, z, t) = e & \left( \frac{b10 \arctan \left( \frac{y b2^2}{\sqrt{b2^2 x^2} \sqrt{b1^2 + b2^2}} + \frac{b1 z b2}{\sqrt{b2^2 x^2} \sqrt{b1^2 + b2^2}} + \frac{b4 b2}{\sqrt{b2^2 x^2} \sqrt{b1^2 + b2^2}} \right)}{\sqrt{b1^2 + b2^2}} \right) \text{F1} \left( \right. \\
& \left. - \frac{-z b2 + b1 y}{b2}, \frac{y^2 b1^2 - 2 (-z b2 + b1 y) b1 y + y^2 b2^2 + 2 b4 y b2 + b2^2 x^2}{b2^2}, \right. \\
& \left. \frac{t \sqrt{b1^2 + b2^2} + kg \arctan \left( \frac{y b1^2 + y b2^2 - b1 (-z b2 + b1 y) + b4 b2}{\sqrt{b1^2 + b2^2} \sqrt{b2^2 x^2}} \right)}{\sqrt{b1^2 + b2^2}} \right)
\end{aligned} \tag{3.60}$$

onde  $F_1$  é uma função arbitrária. Embora esta expressão não seja a solução geral para a equação de ponto fixo, será verificado se a mesma é capaz de gerar esteiras de vórtices bem como a envoltória correspondente à camada limite.

Outras soluções podem ser geradas a partir da equação de ponto fixo, tais como

$$\begin{aligned}
f(x, y, z, t) = \text{F1} & \left( -\frac{b5 y^2}{2} - b9 y - \frac{b5 z^2}{2} + b7 z, \right. \\
& \left. \frac{\sqrt{b5^2} \left( b4 \arctan \left( \frac{\sqrt{b5^2} \sqrt{(b5 z - b7)^2 (b5 y + b9)}}{b5 (b7^2 + b5^2 z^2 - 2 b5 b7 z)} \right) + x \sqrt{b5^2} \right)}{b5^2}, t \right)
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$e \left( \frac{b10 \arctan \left( \frac{\sqrt{b5^2} \left( y + \frac{b9}{b5} \right)}{\sqrt{b7^2 - b5^2 y^2 - 2 b5 b9 y - 2 b5 \left( -\frac{b5 y^2}{2} - b9 y - \frac{b5 z^2}{2} + b7 z \right)}}{\sqrt{b5^2}} \right)}{\sqrt{b5^2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
f(x, y, z, t) = \text{F1} & \left( -\frac{x^2 b1}{2} + b9 x - \frac{z^2 b1}{2} - b4 z, \frac{b1^2 y - \sqrt{b1^2} b7 \arctan \left( \frac{\sqrt{b1^2} \sqrt{(z b1 + b4)^2 (x b1 - b9)}}{b1 (b4^2 + z^2 b1^2 + 2 b1 b4 z)} \right)}{b1^2}, \right. \\
& \left. \frac{b1^2 t - \sqrt{b1^2} kg \arctan \left( \frac{\sqrt{b1^2} \sqrt{(z b1 + b4)^2 (x b1 - b9)}}{b1 (b4^2 + z^2 b1^2 + 2 b1 b4 z)} \right)}{b1^2} \right) \\
& e \left( \frac{b10 \arctan \left( \frac{\sqrt{b1^2} \left( x - \frac{b9}{b1} \right)}{\sqrt{b4^2 - x^2 b1^2 + 2 b1 b9 x + (x^2 b1 - 2 b9 x + z^2 b1 + 2 b4 z) b1}}{\sqrt{b1^2}} \right)}{\sqrt{b1^2}} \right)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Como a equação de ponto fixo é linear, estas soluções podem ser usadas como combinação linear.

Embora as soluções acima não constituam soluções gerais para a equação de ponto fixo, a anulação de alguns termos do Operador B propiciou a obtenção de soluções com funções arbitrárias de diferentes argumentos, cada qual constituído de diferentes constantes também arbitrárias. Mesmo anulando alguns coeficientes do operador, foi possível obter uma solução que é capaz de satisfazer às condições de contorno impostas, no caso de simulações de escoamentos para altos números de Reynolds em corpos submersos, como veremos a seguir. Evidentemente, é possível tentar outras alternativas para obtenção de soluções para a equação de ponto fixo, porém, seria bem provável que não fosse possível se conseguir soluções mais gerais do que as já obtidas, tendo em vista o que já foi conquistado a partir do método das características, mesmo com a anulação de alguns coeficientes. Em adição a isto, através da aplicação dos grupos de Lie existentes para o sistema Navier-Stokes, é possível, a partir destas soluções, gerar simetrias que permitam satisfazer um conjunto maior de condições de contorno.

### 3.2. TRANSFORMAÇÃO AUTO-BÄCKLUND INDUZIDA POR UMA RELAÇÃO DE COMUTAÇÃO EM COORDENADAS CILINDRICAS.

Outra forma de obter novas soluções para a equação de ponto fixo é transcrever a relação de comutação em coordenadas cilíndricas. Nestas condições a equação linear do Split muda para

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, r, \theta, t) - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial r} f(x, r, \theta, t) + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(x, r, \theta, t) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f(x, r, \theta, t) - 2 \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, r, \theta, t) \right) \right) - q(x, r, \theta, t) = 0 \quad (3.63)$$

Neste caso, o operador B toma a forma

$$a(x, r, \theta, t) \frac{\partial}{\partial r} f(x, r, \theta, t) + b(x, r, \theta, t) \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, r, \theta, t) + c(x, r, \theta, t) \frac{\partial}{\partial z} f(x, r, \theta, t) + g(x, r, \theta, t) \frac{\partial}{\partial t} f(x, r, \theta, t) + h(x, r, \theta, t) f(x, r, \theta, t) = 0 \quad (3.64)$$

A fim de determinar as funções  $a(x, r, \theta, t), b(x, r, \theta, t), c(x, r, \theta, t), g(x, r, \theta, t), h(x, r, \theta, t)$ , aplica-se a condição de comutação entre os operadores da equação (3.63) e (3.64), cujo processo gera uma equação resultante a qual deve ser satisfeita. Da mesma forma que a sistemática descrita na seção anterior, a resolução desta equação vem através da anulação dos coeficientes das derivadas na função  $f(x, r, \theta, t)$ , o que gera um sistema de equações, análogo ao sistema (3.13) – (3.25),

porém em coordenadas cilíndricas. Uma vez realizado este processo, a equação (3.64) toma a forma

$$B = (a_0 + a_1 t) \frac{\partial}{\partial x} f(x, r, \theta, t) + \left( h_0 + a_1 \frac{\text{Re}}{2} x \right) f(x, r, \theta, t). \quad (3.65)$$

Da mesma forma, a solução para a equação de ponto fixo relativa a expressão (3.65) é obtida via método das características, possuindo o seguinte formato:

$$f = {}_x F_1(r, \theta, t) e^{-\frac{x \left( \frac{4h_0}{\text{Re}} + xa_1 \right)}{\frac{4}{\text{Re}} (a_0 + a_1 t)}} \quad (3.66)$$

Aqui,  $F_1(r, \theta, t)$  é uma solução arbitrária da equação (3.63) e  $a_0, a_1, h_1$  são constantes arbitrárias.

### 3.3. CORRELAÇÃO ENTRE EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES E HELMHOLTZ.

Esta seção tem por objetivo demonstrar uma relação entre as equações de Navier-Stokes e Helmholtz, que permite a obtenção do campo de pressões a partir do respectivo campo de velocidades, sem que haja a necessidade de efetuar integrações sobre as equações de Navier-Stokes. Obviamente, a equação de Helmholtz é obtida a partir da aplicação do operador rotacional sobre as equações de Navier-Stokes (Apêndice A), sendo que o termo relativo à pressão nas equações de Navier-Stokes acaba caindo no espaço nulo do operador rotacional, portanto não aparece na equação de Helmholtz. Entretanto, é possível obter uma nova expressão que relaciona estas duas equações partindo-se da equação de Helmholtz, que na sua forma tridimensional transiente é dada por

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \vec{\omega} = \vec{V} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} \quad (3.67)$$

onde  $\vec{\omega}$  representa a vorticidade, e  $\vec{V}$  é o vetor velocidade. Porém, o termo  $\vec{V} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V}$  pode ser reescrito na forma

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} = \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{V}) - \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{V}) + \vec{V} (\nabla \cdot \vec{\omega}) = \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{V}) \quad (3.68)$$

Substituindo este resultado na equação (3.67), resulta em

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \vec{\omega} = \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{V}) \quad (3.69)$$

Como  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$ , esta equação pode ser reescrita na forma

$$\nabla \times \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \vec{V} - (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} \right) = 0 \quad (3.70)$$

Repondo o espaço nulo do operador rotacional nesta equação, vem

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \vec{V} - (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} = \nabla f \quad (3.71)$$

Mas

$$(\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} = -\vec{V} \times \nabla \times \vec{V} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} - \frac{1}{2} \nabla (\vec{V} \cdot \vec{V}) \quad (3.72)$$

Substituindo este resultado na equação (3.71), resulta em

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \vec{V} - \left( (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} - \frac{1}{2} \nabla (\vec{V} \cdot \vec{V}) \right) = \nabla f \quad (3.73)$$

que pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \vec{V} - (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla \left( f + \frac{1}{2} (\vec{V} \cdot \vec{V}) \right) \quad (3.74)$$

A fim de comparar a equação acima com a equação de Navier-Stokes, obviamente, o termo à direita da igualdade desta equação deve corresponder ao gradiente de pressão. Disto resulta que

$$-\frac{p}{\rho} = f + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} \quad (3.75)$$

Esta expressão relaciona a pressão com o vetor velocidades, onde a função  $f$  corresponde ao termo de pressão relativo à contribuição da parcela potencial da função corrente. Este resultado possibilita evitar a necessidade de integração da equação não-linear do Split para obtenção de uma expressão explícita para o perfil de pressão.

#### 4. MODELO ESCALAR PARA A FUNÇÃO CORRENTE.

Na última seção, a abordagem da equação de Navier-Stokes foi baseada na obtenção direta de expressões para as componentes de velocidade  $u, v, w$ . Porém, é interessante saber qual a função corrente referente a este escoamento. Segundo White (1974), a função corrente é uma função matemática  $\psi(x, y, t)$ , a qual se relaciona com as duas componentes de velocidade  $u(x, y, t)$  e  $v(x, y, t)$  de forma a satisfazer identicamente a equação da continuidade, sendo que a mesma também deve ser uma função tangente às componentes da velocidade em qualquer ponto do escoamento. Para o caso de escoamento bidimensional incompressível, estas condições são alcançadas através das relações

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y, t) & \text{e} \\ v(x, y, t) = -\frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y, t). \end{cases} \quad (4.1)$$

$$(4.2)$$

Assim, é de forte interesse que se encontre uma relação entre as componentes da velocidade e a função corrente que descreva escoamentos tridimensionais. Para tanto, é necessário verificar quais os requisitos que uma função corrente tridimensional deve possuir. Como descrito acima, esta função deve ser tangente às componentes do vetor velocidade  $u(x, y, z, t), v(x, y, z, t)$  e  $w(x, y, z, t)$ . Esta condição é matematicamente representada por

$$\vec{V} \cdot \nabla \psi(x, y, z, t) = 0 \quad (4.3)$$

onde  $\vec{V} = \{u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)\}$  e corresponde ao vetor velocidade. Adicionalmente, as relações entre as componentes da velocidade e a função corrente devem satisfazer  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ . Por último, a fim de garantir a consistência da função corrente tridimensional, esta deve recair nas relações descritas em (4.1) – (4.2) quando simplificada para o caso 2-D.



Como ponto de partida, consideremos a propriedade vetorial  $\nabla \cdot \nabla \times \vec{f} = 0$ , onde  $\vec{f}$  é um vetor qualquer. Se  $\vec{f}$  tiver o formato  $\vec{f} = \lambda_1 \psi(x, y, z, t) \vec{i} + \lambda_2 \psi(x, y, z, t) \vec{j} + \lambda_3 \psi(x, y, z, t) \vec{k}$ , onde  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  são constantes arbitrárias, é possível encontrar uma relação entre a função corrente e cada componente do vetor  $\nabla \times \vec{f} = \left( \lambda_3 \frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y, z, t) - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, y, z, t) \right) \vec{i} + \left( \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, y, z, t) - \lambda_3 \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y, z, t) \right) \vec{j} + \left( \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y, z, t) - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y, z, t) \right) \vec{k}$  correspondente às respectivas componentes do vetor velocidade. Assim sendo, as relações entre componentes de velocidade e função corrente ficam com o formato

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = \lambda_3 \frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y, z, t) - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, y, z, t) & (4.4) \\ v(x, y, z, t) = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, y, z, t) - \lambda_3 \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y, z, t) & (4.5) \\ w(x, y, z, t) = \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y, z, t) - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y, z, t) & (4.6) \end{cases}$$

Obviamente, estas relações satisfazem identicamente a equação da continuidade, pois foram derivadas a partir da aplicação do operador rotacional sobre  $\vec{f}$ . Este sistema de equações diferenciais satisfaz identicamente a equação (4.3) quando nela substituído, mostrando que a função corrente obtida a partir destas relações é também tangente às componentes do vetor velocidade. Note que estas relações para a função corrente recaem no formato do caso bidimensional descrito em (4.1) e (4.2) quando a dimensão  $z$  não é considerada, para  $\lambda_3 = 1$ .

As equações (4.4) – (4.6) são diretamente aplicáveis para o caso onde a solução do escoamento esteja previamente expressa em termos da função corrente e se queira achar as respectivas componentes da velocidade. Porém, a solução obtida no capítulo anterior para o sistema Navier-Stokes já está escrita em termos das componentes da velocidade, sendo que, para descobrir qual a função corrente correspondente é preciso resolver o sistema (4.4) – (4.6).

A determinação de uma expressão para a função corrente é interessante e necessária, tendo em vista que as soluções obtidas para o campo de velocidades possuem diferentes elementos arbitrários, como coeficientes e funções; caso se partisse para a simulação de escoamentos diretamente a partir das componentes  $u, v, w$ , seria preciso determinar uma condição inicial para cada uma delas, e ainda, relacionar estas condições entre si de forma a reproduzir o escoamento de forma consistente. Porém, com a obtenção de uma solução em

termos da função corrente, esta pode ser usada para a determinação da condição inicial a partir das linhas de corrente do escoamento, fazendo com que as expressões para as componentes do vetor velocidade sejam determinadas por simples substituição nas relações (4.4) – (4.6).

#### 4.1. CORRESPONDÊNCIA ENTRE OS ESPAÇO NULO DAS COMPONENTES DA VELOCIDADE E DA FUNÇÃO CORRENTE.

Esta seção tem por objetivo demonstrar que as soluções exatas para as equações de Navier – Stokes encontradas no capítulo 3 para as componentes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  e a função corrente tridimensional no formato descrito no capítulo 4 compartilham o mesmo espaço de soluções.

Inicialmente, considere o sistema (4.4) – (4.6), reescrito na forma

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = A\psi(x, y, z, t) & (4.7) \\ v(x, y, z, t) = B\psi(x, y, z, t) & (4.8) \\ w(x, y, z, t) = C\psi(x, y, z, t) & (4.9) \end{cases}$$

onde  $A, B, C$  correspondem aos operadores  $A = \lambda_3 \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial z}(\cdot)$ ,  $B = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z}(\cdot) - \lambda_3 \frac{\partial}{\partial x}(\cdot)$ ,  $C = \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y}(\cdot)$ . Considere ainda os operadores

$$L = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2(\cdot) - (\cdot) \quad \text{e} \quad (4.10)$$

$$R = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2(\cdot), \quad (4.11)$$

onde  $L$  é o operador correspondente à equação linear (3.59a), e  $R$  é o operador correspondente à mesma equação, porém homogênea. Com isso, aplica-se o operador  $R$  no sistema (4.7) – (4.9), representado por

$$\left\{ \begin{array}{l} R[u(x, y, z, t)] = R[A[\psi(x, y, z, t)]] \\ R[v(x, y, z, t)] = R[B[\psi(x, y, z, t)]] \\ R[w(x, y, z, t)] = R[C[\psi(x, y, z, t)]] \end{array} \right. \quad (4.12)$$

$$(4.13)$$

$$(4.14)$$

A partir do operador  $L$ , conclui-se que  $R[u(x, y, z, t)] = u(x, y, z, t)$ ,  $R[v(x, y, z, t)] = v(x, y, z, t)$  e  $R[w(x, y, z, t)] = w(x, y, z, t)$ . Além disso, os operadores  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $R$  são lineares e comutam, ou seja,  $[A, R] = 0$ ,  $[B, R] = 0$ ,  $[C, R] = 0$ . Disto resulta

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z, t) - A[R[\psi(x, y, z, t)]] = 0 \\ v(x, y, z, t) - B[R[\psi(x, y, z, t)]] = 0 \\ w(x, y, z, t) - C[R[\psi(x, y, z, t)]] = 0 \end{array} \right. \quad (4.15)$$

$$(4.16)$$

$$(4.17)$$

Aplicando o inverso dos operadores  $A$ ,  $B$  e  $C$  nas equações (4.15), (4.16) e (4.17), vem

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{-1}[u(x, y, z, t)] - R[\psi(x, y, z, t)] + N_A = 0 \\ B^{-1}[v(x, y, z, t)] - R[\psi(x, y, z, t)] + N_B = 0 \\ C^{-1}[w(x, y, z, t)] - R[\psi(x, y, z, t)] + N_C = 0 \end{array} \right. \quad (4.18)$$

$$(4.19)$$

$$(4.20)$$

onde  $N_A$ ,  $N_B$  e  $N_C$  são os respectivos espaços nulos dos operadores  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Porém, a partir das equações (4.7) – (4.9) é possível chegar a

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{-1}[u(x, y, z, t)] + N_A = \psi(x, y, z, t) \\ B^{-1}[v(x, y, z, t)] + N_B = \psi(x, y, z, t) \\ C^{-1}[w(x, y, z, t)] + N_C = \psi(x, y, z, t) \end{array} \right. \quad (4.21)$$

$$(4.22)$$

$$(4.23)$$

Substituindo estas expressões em (4.7) – (4.9), o sistema se reduz a

$$\psi(x, y, z, t) - R[\psi(x, y, z, t)] = 0 \quad (4.24)$$

Porém, esta equação é idêntica a  $L[\psi(x, y, z, t)] = 0$ , calculada via operador B para as componentes do vetor velocidade. Com isso, conclui-se que as componentes da velocidade, calculadas no capítulo 3, a partir da equação (3.59a), e a função corrente compartilham o mesmo espaço de soluções.

## 5. RESULTADOS.

Durante a realização deste trabalho, o foco esteve mantido na obtenção de soluções exatas que satisfizessem às condições de contorno de cenários físicos relativos a escoamentos para altos números de Reynolds. Como já mencionado, o conjunto de soluções exatas para o sistema Navier-Stokes, obtidas através da resolução da equação de ponto fixo, pode ser incrementado a partir de métodos para obtenção de simetrias, ou mesmo com a aplicação direta dos grupos de Lie. No sub-capítulo que segue, são apresentadas simulações preliminares de um escoamento plenamente turbulento em torno de uma esfera a partir das soluções (3.60) – (3.62), as quais foram obtidas via Transformações de Bäcklund. Nesta etapa, não existe a pretensão de apresentar resultados numéricos comparativos com dados experimentais, senão somente uma análise qualitativa a respeito das características gerais dos escoamentos simulados, como a formação de termos flutuantes e o descolamento da camada limite. Vale salientar que estas simulações são importantes no sentido de caracterizar de forma preliminar escoamentos desta natureza. Nesta etapa, a condição inicial é ajustada seguindo-se parâmetros macro. Obviamente, é possível gerar, a partir das soluções (3.60) – (3.62), novas simulações, bastando para isso, ajustar a condição inicial adequada.

Nessa análise preliminar, foram utilizadas algumas referências clássicas em Mecânica de Fluidos [Achenbach e Heineken, 1981; Borthwick, 1986; Karniadakis, 1988; Fromm e Harlow, 1963] como base para a estimativa qualitativa da função corrente correspondente ao estado inicial do sistema, sendo, a seguir, verificada sua evolução temporal. Não foi verificado, pela inspeção visual, qualquer indício de comportamento anômalo no que diz respeito à evolução temporal da função corrente, tais como singularidades e amplificação da esteira de vórtices à longa distância ou deformações abruptas em sua envoltória.

### 5.2. RESULTADOS PRELIMINARES.

No decorrer deste sub-capítulo, são apresentados alguns resultados obtidos com a simulação de escoamentos em torno de uma esfera com raio unitário, para escoamentos turbulentos plenamente desenvolvidos. Dentre as soluções obtidas no capítulo 3, a que melhor se adaptou à aplicação das condições iniciais foi a solução referente à expressão (3.62), onde seus argumentos correspondem a

$$\alpha = -\frac{x^2 b1}{2} + b9 x - \frac{z^2 b1}{2} - b4 z \quad (5.1)$$

$$\beta = \frac{b1^2 y - \sqrt{b1^2} b7 \arctan\left(\frac{\sqrt{b1^2} \sqrt{(z b1 + b4)^2} (x b1 - b9)}{b1 (b4^2 + z^2 b1^2 + 2 b1 b4 z)}\right)}{b1^2} \quad (5.2)$$

$$\gamma = \frac{b1^2 y - \sqrt{b1^2} b7 \arctan\left(\frac{\sqrt{b1^2} \sqrt{(z b1 + b4)^2} (x b1 - b9)}{b1 (b4^2 + z^2 b1^2 + 2 b1 b4 z)}\right)}{b1^2} \quad (5.3)$$

$$\eta = -\frac{b10 \arctan\left(\frac{\sqrt{b1^2} \left(x - \frac{b9}{b1}\right)}{\sqrt{b4^2 - x^2 b1^2 + 2 b1 b9 x - 2 b1 \left(-\frac{x^2 b1}{2} + b9 x - \frac{z^2 b1}{2} - b4 z\right)}}\right)}{\sqrt{b1^2}} \quad (5.4)$$

A partir destes argumentos, a função arbitrária da expressão (3.62) foi determinada com base nos resultados obtidos em [Zabadal *et alli*, 2004] e [Beck, 2005], tendo a função corrente do escoamento em torno de uma esfera o seguinte formato:

$$f4 = \psi_0 + k2 e^{(k1 (\alpha - k3 \beta^2))} \sin(c0 (c1 \alpha + c2 \beta^2 + c3 \beta + c4 \phi^2)) \cos(c2 (\alpha - \beta^3 + c4 \phi^2)) e^\eta \quad (5.5)$$

Onde o termo  $\psi_0$  corresponde à função corrente referente ao escoamento potencial. O termo potencial vai depender da posição no quadrante  $z$ , isto é, do plano de corte da esfera. O raio do cilindro em cada plano deve depender da variável  $z$ , pela equação  $r^2 = r_0^2 - z^2$ . As constantes  $k_1, k_2, k_3$  são constantes de amplificação e amortecimento da esteira. As constantes  $c_1, c_2, c_3, c_4$  auxiliam no controle da frequência da esteira.

## 5.1. CONDIÇÕES RESTRITIVAS

A condição restritiva clássica para a simulação de escoamentos em geral, tanto para corpos submersos quanto para escoamentos internos, impõe condição de segunda espécie na fronteira fluido-corpo, ou seja,  $\frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial z} = 0$ . Este tipo de restrição esteve historicamente baseado na observação de escoamentos e nas medições de velocidade realizadas junto à parede, as quais sempre corroboraram esta premissa. Porém, mesmo medições de velocidade junto à parede, por dependerem da precisão de instrumentos, não são irrestritamente fiéis ao que de fato ocorre nas regiões de interface do corpo submerso. Fatores de influência nas perturbações, tais como rugosidade do corpo, choques aleatórios entre partículas adjacentes nesta região, afinidade química, etc, não são considerados pela abordagem restritiva clássica e, de fato, pode ela ser fator de influência na dificuldade de obtenção de flutuações de alta frequência em escoamentos para altos números de Reynolds.

Segundo Santiago (2007), uma restrição mais realista é alcançada com o uso de uma condição de terceira espécie na função corrente, onde a diferencial da mesma seria proporcional a própria função, na fronteira corpo-fluido. Uma forma indireta de se aplicar isto é pela prescrição de uma flutuação de velocidade de baixa amplitude e alta frequência no contorno do corpo submerso, cujo objetivo é simular o que seria o resultado de choques de alta frequência entre partículas na interface.

Afim de garantir que a flutuação na parede seja de baixa amplitude, o termo referente ao escoamento potencial  $\psi_0$  deve respeitar a condição de não deslizamento clássica no contorno do corpo submerso, de forma que somente a segunda parcela da solução (5.5) será responsável pela prescrição na fronteira. Assim, a partir da função

$$\psi_0 = \psi_p - \psi_p e^{-a(\psi_p)^2} \quad (5.6)$$

onde  $\psi_p = u_0 \left( y - \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \right)$ , é possível obter a condição de não deslizamento na parede,

pois esta função possui derivada nula no contorno, para  $\psi_p|_{\Gamma} = 0$ .

Na figura 5.2, pode-se visualizar a simulação realizada para escoamento em torno de uma esfera com raio unitário e velocidade  $u_{\infty} = 1$ . Para tanto, foram plotados cortes planos em diversas profundidades ao longo da esfera.

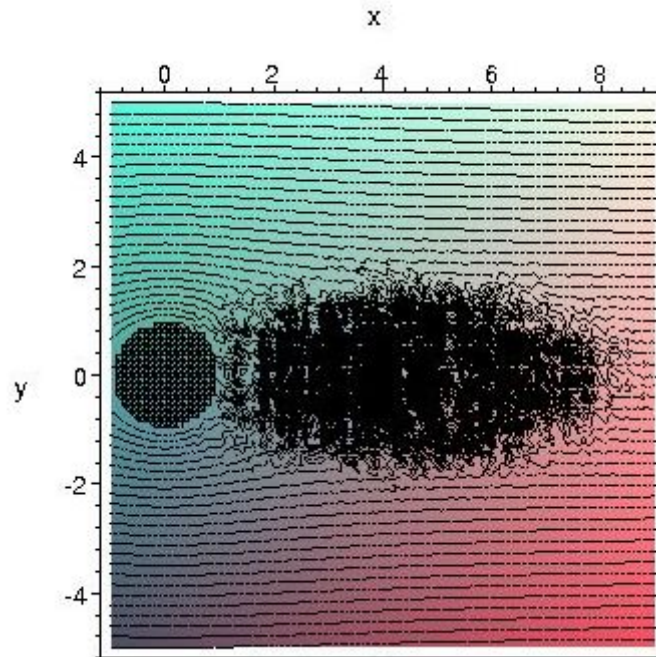


Figura 5.1: Esteira completa,  $Z=0$ .

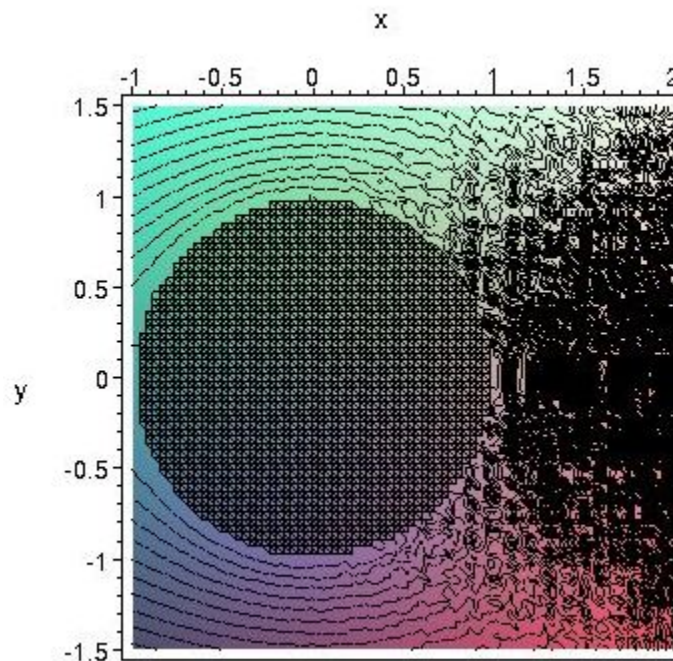


Figura 5.2: Esteira: Descolamento,  $Z=0$ .

Nas figuras 5.2 e 5.3, pode-se observar o caráter flutuante do escoamento a montante do corpo submerso. Na figura 5.2, nota-se o comprimento da esteira atingindo em torno de 8 vezes o raio do corpo submerso. Na figura 5.3, observa-se o descolamento da camada limite acontecendo à aproximadamente  $120^\circ$ , a partir do centro da esfera, o que condiz com a observação para altos números de Reynolds desta ordem.



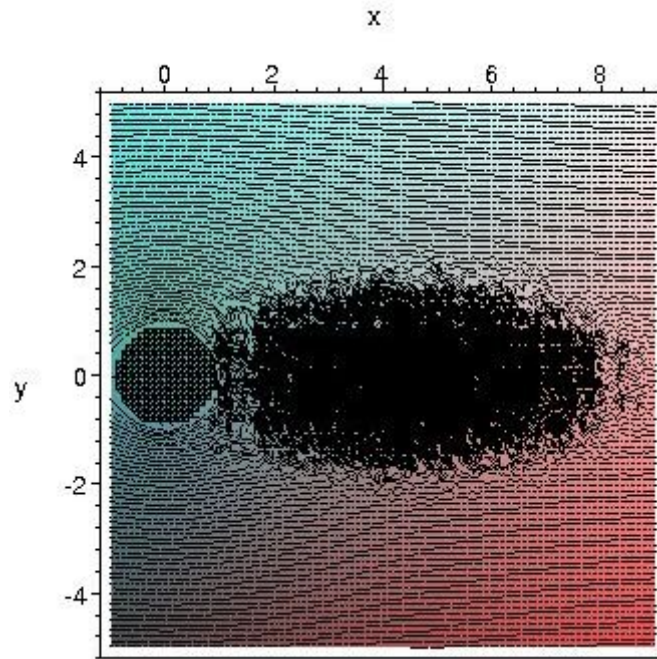


Figura 5.3: Esteira completa,  $Z=0.3$

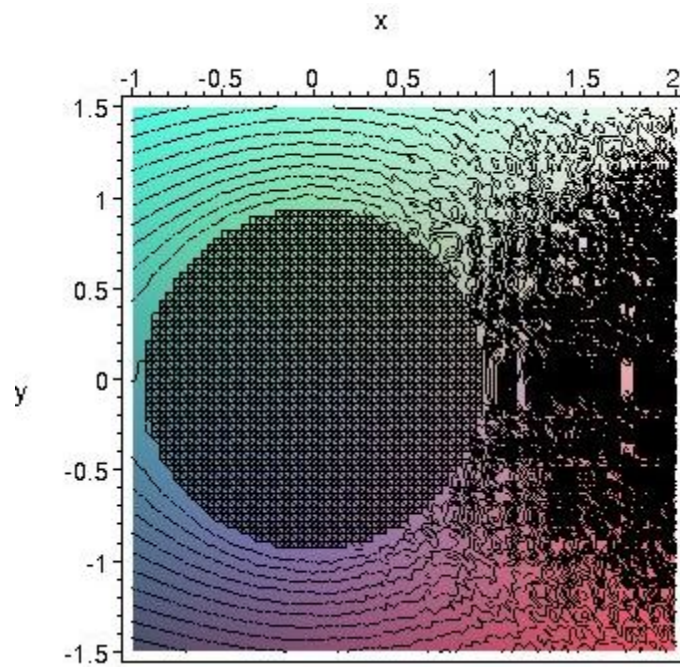


Figura 5.4: Esteira: Descolamento,  $Z=0.3$ .

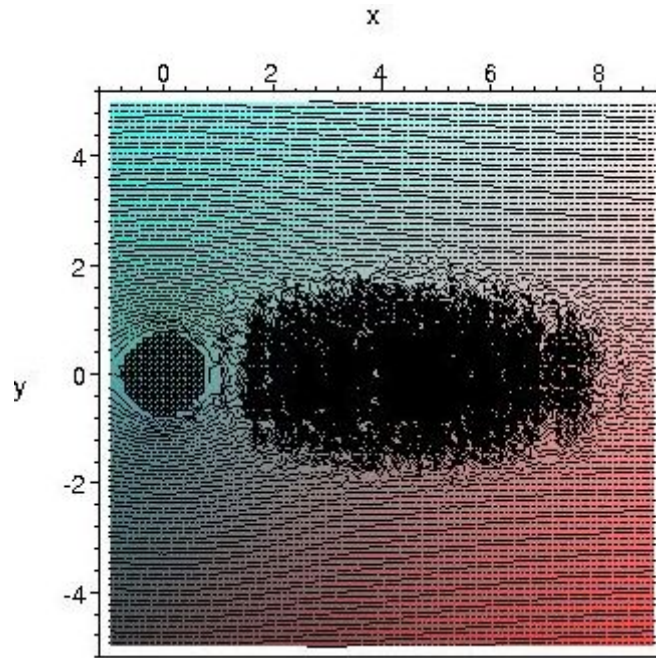


Figura 5.5: Esteira completa,  $Z=0.6$

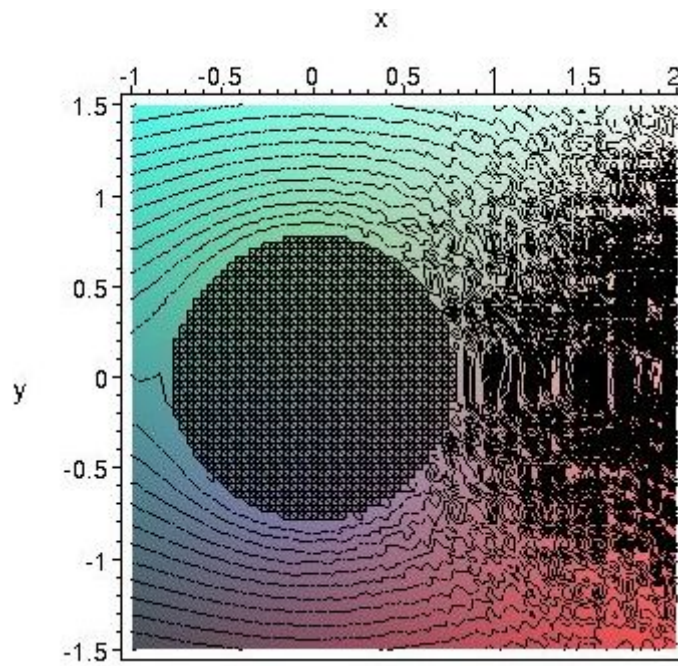


Figura 5.6: Esteira: Descolamento,  $Z=0.6$ .



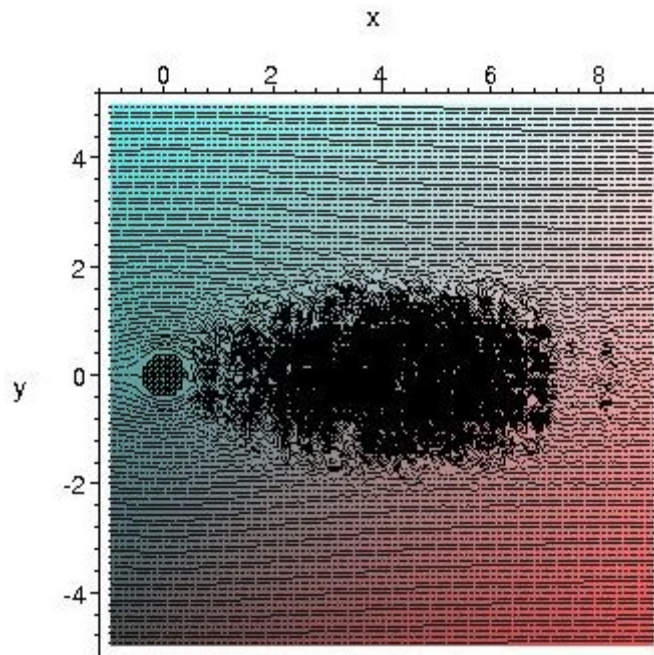


Figura 5.7: Esteira completa,  $Z=0.9$

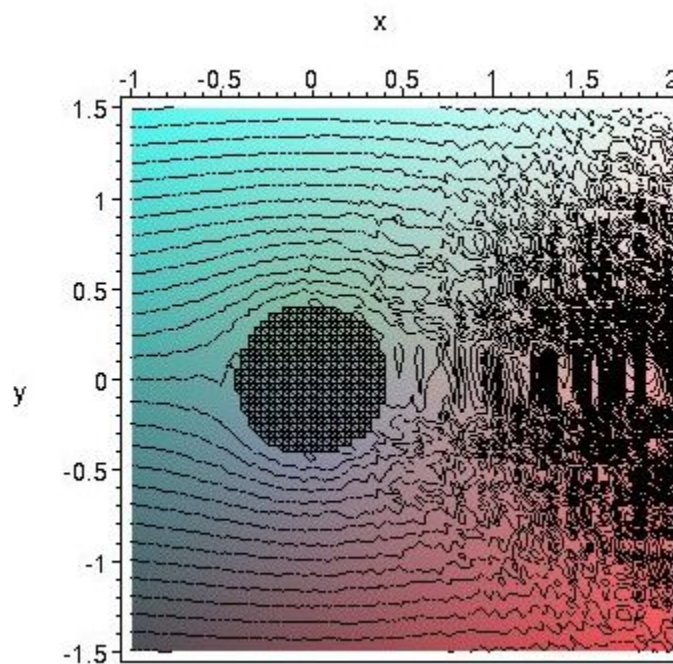


Figura 5.8: Esteira: Descolamento,  $Z=0.9$ .

Nas figuras 5.3 a 5.8, pode-se notar o decréscimo das flutuações devido o avanço na profundidade da esfera. Nestas figuras, observa-se não somente o decaimento total da esteira, agora em torno de 7 vezes o raio da esfera (figura 5.7), mas também uma diminuição na amplitude do descolamento nas figuras 5.6 e 5.8 devido seu afastamento do centro da esfera. Estas observações estão condizentes com os aspectos qualitativos de um escoamento desta natureza, de forma que constituem um estimulante ponto de partida para a continuação deste trabalho.

Durante a utilização das soluções (3.60) – (3.62), para a aplicação da condição inicial, referente à simulação do escoamento, foram observadas algumas limitações no que tange a geração das esteiras de vórtices; dentre elas, a dificuldade de controle das frequências das flutuações em um dos planos em  $z$ , de forma que não foi possível realizar a simulação para o domínio inteiro. Todavia, estas limitações não invalidam a utilização das soluções acima citadas, posto que o domínio pode ser dividido em duas partes, uma para cada quadrante  $z$ , aplicando a mesma solução em cada bloco, porém com diferentes coeficientes, de forma a evitar a simetria da esteira nestes quadrantes.

## 5.2. RESULTADOS OBTIDOS VIA SOLUÇÃO EM COORDENADAS CILINDRICAS.

A partir do resultado obtido com a solução (3.66), em conjunto com (3.61), foi possível chegar a uma solução para a equação linear do Split com o formato

$$f = {}_F_0(r, \theta, t) e^{\frac{x \left( \frac{4h_0}{\text{Re}} + \alpha_1 \right)}{\frac{4}{\text{Re}}(a_0 + \alpha_1 t)}} \quad (5.7)$$

onde  $F_0(r, \theta, t)$ , já transformada para coordenadas cartesianas, é dada por

$$f(x, y, z, t) = {}_F_1 \left( \frac{-\frac{b5 y^2}{2} - b9 y - \frac{b5 z^2}{2} + b7 z, \sqrt{b5^2} \left( b4 \arctan \left( \frac{\sqrt{b5^2} \sqrt{(b5 z - b7)^2 (b5 y + b9)}}{b5 (b7^2 + b5^2 z^2 - 2 b5 b7 z)} \right) + x \sqrt{b5^2} \right)}{b5^2}, t \right) \quad (5.8)$$

$$e^{\left( \frac{b10 \arctan \left( \frac{\sqrt{b5^2} \left( y + \frac{b9}{b5} \right)}{\sqrt{b7^2 - b5^2 y^2 - 2 b5 b9 y - 2 b5 \left( -\frac{b5 y^2}{2} - b9 y - \frac{b5 z^2}{2} + b7 z \right)}}} \right)}{\sqrt{b5^2}} \right)}$$

Aqui,  ${}_F_1$  é qualquer solução da equação linear do Split. A solução utilizada, neste caso, possui o formato

$$\psi_1 = e^{c_0 + c_1 y + c_2 z + \frac{(c_1^2 + c_2^2)}{\text{Re}} t} \quad (5.9)$$

Assim, a solução final para a função corrente simulada é obtida adicionando um termo de escoamento potencial  $\psi_0$ , na forma  $\psi_s = \psi_0 + \psi_1$ .

### 5.2.3. APLICAÇÃO DO GRUPO DE LIE

A primeira tarefa a ser realizada para a aplicação do grupo de Lie das equações de Navier-Stokes deve ser a análise prévia a respeito de seus geradores infinitesimais, buscando entender qual o resultado que pode ser obtido com a aplicação de cada um, ou em outras palavras, o que cada um é capaz de fazer, no sentido não somente de deixar a solução mais geral, mas também que as possíveis simetrias a serem geradas por eles possam vir a serem úteis no sentido de reproduzir algum outro efeito físico o qual as soluções já obtidas (5.7) e (5.8) não consigam reproduzir. Neste sentido, os geradores cuja aplicação se mostrou mais vantajosa correspondem às expressões (2.50g) e (2.50h), referentes aos geradores  $v_7$  e  $v_8$ , dados por

$$V_7 = a_3(t) \frac{\partial}{\partial y} + a_3'(t) \frac{\partial}{\partial v} - ya_3''(t) \frac{\partial}{\partial p} \quad (5.10)$$

$$V_8 = a_4(t) \frac{\partial}{\partial z} + a_4'(t) \frac{\partial}{\partial w} - za_4''(t) \frac{\partial}{\partial p} \quad (5.11)$$

Aqui, as funções  $a_3(t)$  e  $a_4(t)$  são funções arbitrárias do tempo. Dessa forma, estes geradores são capazes de introduzir estas funções na solução prévia encontrada, o que possibilita reproduzir mais fielmente as perturbações transientes de um escoamento turbulento, como por exemplo, variações de flutuação na esteira de vórtices.

A aplicação da exponencial destes operadores, *a priori*, deveria ser dada através de sua aplicação conjunta, sem a possibilidade de fatoração, ou seja, na forma

$$\left[ e^{\epsilon_1 v_7 + \epsilon_2 v_8} \right] f_0 = f_1 \quad (5.12)$$

onde  $f_0$  é a solução previamente encontrada. Porém, realizando uma pequena análise sobre estes geradores, em conjunto com a solução (5.8), é possível justificar a aplicação de uma fatoração na aplicação da exponencial destes geradores. Isto porque os primeiros termos dos geradores  $v_7$  e  $v_8$ , respectivamente,  $a_3(t) \frac{\partial}{\partial y}$  e  $a_4(t) \frac{\partial}{\partial z}$ , são responsáveis por uma translação nas variáveis  $y$  e  $z$ , na forma

$$y \rightarrow y + a_3(t) \text{ e } z \rightarrow z + a_4(t). \quad (5.13)$$

Porém, na solução (5.8), as variáveis  $y$  e  $z$  aparecem multiplicadas por constantes arbitrárias, no caso,  $b_5$ ,  $b_7$  e  $b_9$ . Como já existem estes fatores de escala nestes variáveis, é possível aplicar unicamente uma transformação infinitesimal dos geradores, posto que as constantes já existentes na solução (5.8) dão conta de compensar o fato dos parâmetros  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  da expressão (5.12) serem infinitesimais. Inclusive, é possível fatorar cada gerador individualmente, ou seja, aplicar a transformação unicamente nos termos que possibilitem obter o desejado, que é a introdução das funções arbitrárias  $a_3(t)$  e  $a_4(t)$ . Dessa forma, a aplicação dos geradores  $v_7$  e  $v_8$  se reduzem a

$$\left[ e^{\varepsilon_1 a_3(t) \frac{\partial}{\partial y}} \right] \left[ e^{\varepsilon_2 a_4(t) \frac{\partial}{\partial z}} \right] f_0 = f_1 \quad (5.14)$$

cuja simetria a ser gerada por esta aplicação corresponde a (5.13). Vale salientar que este procedimento só gera o resultado citado devido à característica da solução (5.8), a qual possui elementos arbitrários em sua composição, que dão conta de compensar o fato de a transformação ser infinitesimal.

### 5.3. SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO EM TORNO DE UMA ESFERA.

Uma vez obtida a solução final, partiu-se para a simulação de um escoamento, também em torno de uma esfera, a fim de avaliar e comparar os dados obtidos desta simulação com a já realizada nos resultados preliminares. Essa comparação foi feita com o intuito de observar quais as melhorias obtidas com esta nova solução. Da mesma forma, para realizar o ajuste da condição inicial, foram utilizadas referências clássicas em Mecânica de Fluidos [Achenbach e Heinecke, 1981; Borthwick, 1986; Karniadakis, 1988; Fromm e Harlow, 1963] como base qualitativa para a estimativa da função corrente correspondente ao estado inicial do sistema. Em adição, também foi realizado uma estimativa do tamanho médio dos vórtices em função do número de Reynolds (Apêndice E). Nesta fase, foram simulados escoamentos em torno de uma esfera de raio unitário para diferentes números de Reynolds, com objeto de levantar dados quantitativos a respeito dos coeficientes de pressão e arrasto.

Devido o fato da equação (3.5a) ser linear, é possível construir novas soluções a partir de uma combinação linear das soluções exatas já encontradas. Para o caso simulado, a solução final tem a forma de uma combinação de 5 termos, dada por

$$\psi = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \psi_0 \quad (5.15)$$

Nessa solução, construída com o intuito de representar a condição inicial de forma mais realista, as funções  $\eta_i$  possuem forma análoga à definida por (5.7), porém com diferentes coeficientes, os quais estão listados na tabela a seguir. Aqui,  $\psi_0$  é o termo referente ao escoamento potencial, nos moldes de (5.6). Obviamente, a escolha desta combinação linear depende das características do estado inicial do sistema. Entretanto, vale salientar que quanto maior for a quantidade de termos utilizados maior será o tempo de pós-processamento para a geração dos dados quantitativos e qualitativos. Contudo, este grau de liberdade pode vir a permitir – embora isso dependa também de um ajuste fino dos coeficientes arbitrários – uma especificação mais refinada não apenas para a condição inicial, mas para a evolução temporal da esteira de vórtices.

Tabela 5.1: Parâmetros da função corrente.

$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\eta_4$
$\lambda = 1.3 \times 10^6$	$\lambda = 1.3 \times 10^6$	$\lambda = 1.3 \times 10^6$	$\lambda = 1.3 \times 10^6$
$k_0 = -1$	$k_0 = -1$	$k_0 = -1$	$k_0 = -1$
$c_x = -1.2$	$c_x = -1.15$	$c_x = -1.22$	$c_x = -1.18$
$c_0 = 1.4$	$c_0 = 1.4$	$c_0 = 1.4$	$c_0 = 1.4$
$c_1 = 1$	$c_1 = 1$	$c_1 = 1$	$c_1 = 1$
$c_2 = 1$	$c_2 = 1$	$c_2 = 1$	$c_2 = 1$
$b_5 = -1.5 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}}$	$b_5 = -1.5 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}}$	$b_5 = -1.5 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}}$	$b_5 = -1.5 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}}$
$b_7 = 1 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}} - 20i$	$b_7 = 1 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}} - 20i$	$b_7 = 1 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}} - 20i$	$b_7 = 1 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}} - 20i$
$b_9 = -0.1 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}} - 10i$	$b_9 = -0.1 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}} - 10i$	$b_9 = -0.1 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}} - 10i$	$b_9 = -0.1 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}} - 10i$
$\text{Re} = 10^4$	$\text{Re} = 10^4$	$\text{Re} = 10^4$	$\text{Re} = 10^4$
$b_{10} = 0.01$	$b_{10} = 0.02$	$b_{10} = 0.015$	$b_{10} = 0.018$
$a_0 = 20 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}}$	$a_0 = 20 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}}$	$a_0 = 20 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}}$	$a_0 = 20 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}}$
$a_1 = 0.02 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}} + 2i$	$a_1 = 0.02 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}} + 2i$	$a_1 = 0.02 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}} + 2i$	$a_1 = 0.02 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}} + 2i$
$h_0 = -32 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}} - 4i$	$h_0 = -32 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}} - 4i$	$h_0 = -32 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}} - 4i$	$h_0 = -32 \times 10^{-2} \sqrt{\text{Re}} - 4i$

Nesta tabela,  $i$  representa a unidade imaginária; os valores  $b_n$  são funções do número de Reynolds e foram determinadas com base na estimativa do raio médio dos vórtices (apêndice E). A especificação destes coeficientes está detalhada no apêndice F, o qual contém o código de programação em Maple da simulação realizada.

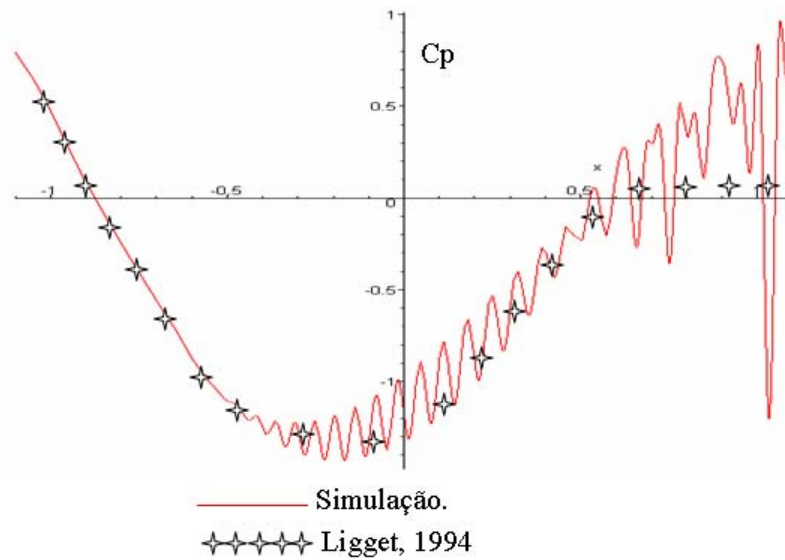


Figura 5.9: Coeficiente de pressão em função do ângulo da esfera.

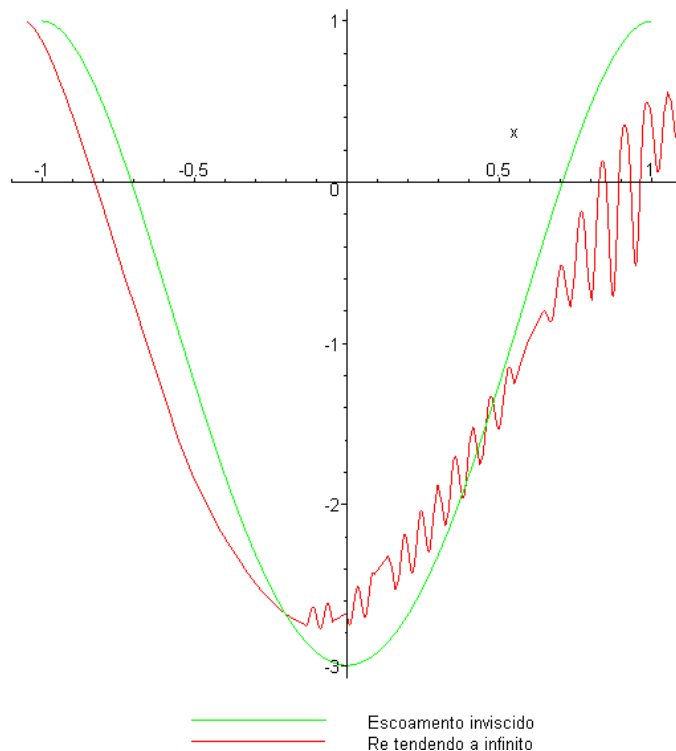


Figura 5.10: Coeficiente de pressão invíscido e para  $Re$  tendendo a infinito (simulação).



Os resultados referentes ao coeficiente de pressão apresentaram boa concordância com os dados da literatura até o ponto de descolamento da camada limite. A partir desse ponto, as oscilações oriundas da formação da esteira de vórtices produzem efeitos transientes cuja reprodutibilidade se torna inviável, devido à sensibilidade da solução em relação a perturbações sobre a condição inicial. Essa característica não é inerente ao método proposto, mas à própria natureza das equações diferenciais em questão, que contém termos não-lineares de primeira ordem. A fim de obter curvas suaves para o campo de pressão e o respectivo coeficiente adimensional, poderiam ser tomadas médias temporais a intervalos de tempo relativamente longos, resultando no cancelamento das oscilações, e conseqüentemente em uma maior concordância com os dados disponíveis. Entretanto, é conveniente apresentar os resultados em sua forma original, a fim de investigar em maior detalhe os mecanismos de geração e propagação das perturbações.

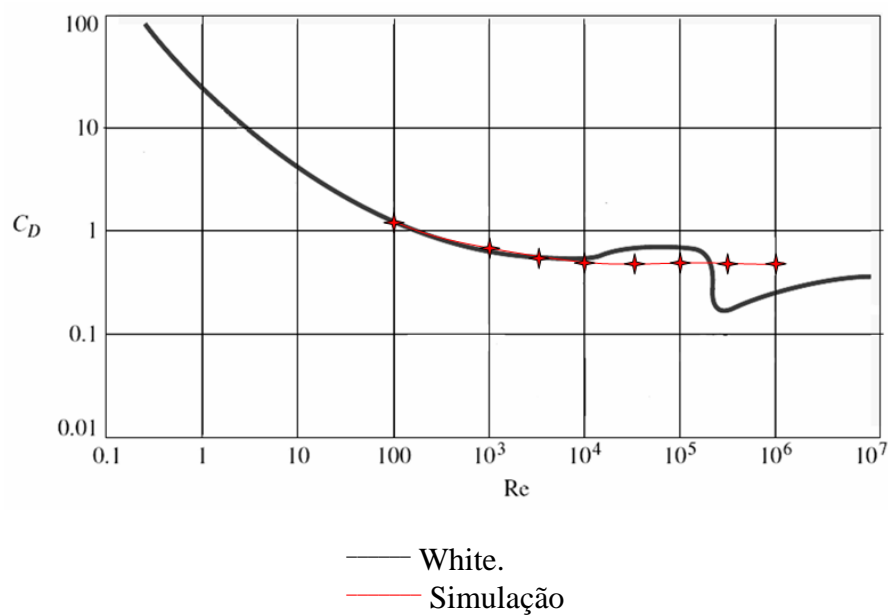


Figura 5.11: Coeficiente de Arrasto em função do número de Reynolds.

Com relação ao coeficiente de arrasto, o sistema reproduz de forma razoável os valores experimentais para uma faixa relativamente ampla de números de Reynolds, além de esboçar adequadamente importantes características do escoamento, tais como o deslocamento do ponto de descolamento da camada limite e a redução do valor médio dos raios dos vórtices à medida que se avança de montante a jusante, efeito característico da formação da cascata de Kolmogorov (ver figura 5.4). Entretanto, o sistema não reproduz corretamente a queda súbita do coeficiente de arrasto com o número de Reynolds entre  $10^5$  e  $10^6$ , fenômeno conhecido como “drag crisis”. O sistema prevê nesse intervalo apenas uma redução gradual no coeficiente de arrasto com o

número de Reynolds, correspondente a um deslocamento contínuo do ponto de descolamento da camada limite. Além disso, o sistema não reproduz a região ascendente que precede a queda súbita do coeficiente de arrasto, ao longo da qual a curva  $C_D \times Re$  se comporta basicamente como uma sigmóide crescente.

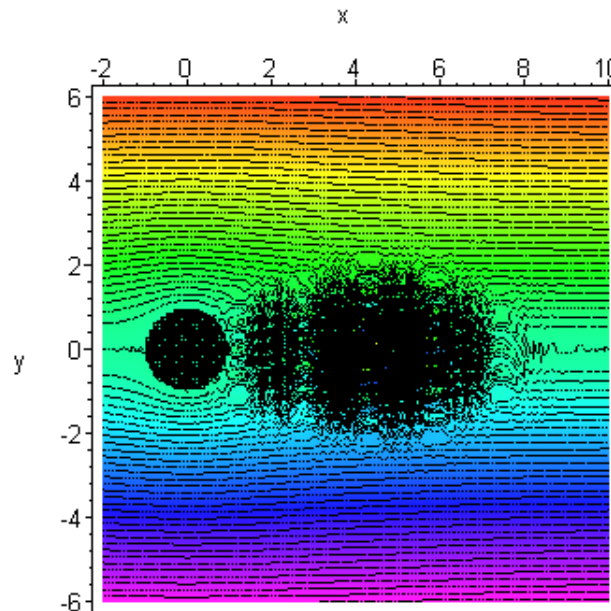


Figura 5.12: Esteira de vórtices completa,  $z = 0$ ,  $Re = 10^4$ .

Existem ao menos dois fortes indícios de que as deficiências mencionadas anteriormente se devam ao fato do modelo de escoamento haver sido originalmente concebido como um problema de contorno, ao invés de um fenômeno em meio infinito. Em primeiro lugar, quando o fenômeno é analisado em meio infinito, a viscosidade cinemática (ou mesmo o número de Reynolds) depende das coordenadas espaciais, sofrendo uma variação pronunciada ao passar do fluido para o interior do corpo submerso. Nessa formulação não são prescritas condições de contorno de qualquer espécie sobre as interfaces. As verdadeiras condições de contorno tendem a emergir naturalmente como consequência de efeitos de borda. Assim, parece razoável inferir que a causa imediata da “drag crisis”, a saber, o deslocamento súbito do ponto de descolamento da camada limite, seja resultado de uma mudança brusca nas condições de contorno originadas por efeitos de interface, tais como variações locais bastante acentuadas nas tensões de cisalhamento com o número de Reynolds. Ocorre que essas variações não poderiam ser simplesmente prescritas como condições de contorno, pois os efeitos transientes oriundos da interação entre o fluido e a interface se tornam extremamente complexos à medida que o escoamento avança de montante à jusante. Na pior das hipóteses, um modelo local para o comportamento do fluido

junto à interface poderia ser desenvolvido com o intuito de obter restrições diferenciais para a função corrente. Esse procedimento seria equivalente à prescrição de condições de deslizamento parcial entre o fluido e o contorno sólido.

Em segundo lugar, a concepção clássica do contorno sólido atuando como uma "fonte de vorticidade" na equação de Helmholtz não apenas corrobora o argumento anterior, mas também é consistente com os próprios resultados qualitativos obtidos (ver figuras 5.5 a 5.8).

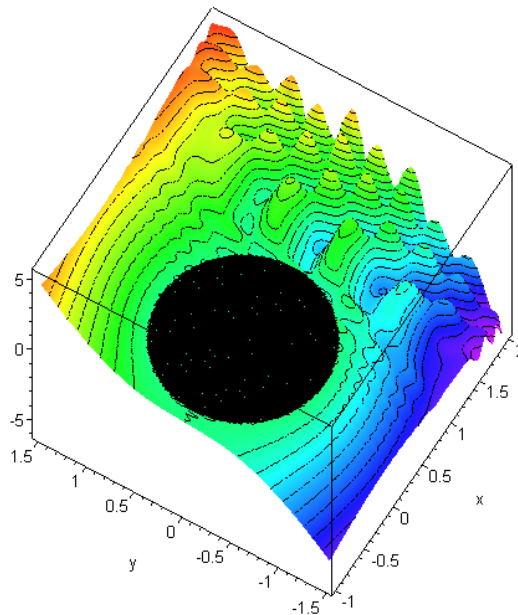


Figura 5.13: A interface como fonte de vorticidade ( $z = 0$ ,  $Re = 10^4$ ).

Nas figuras 5.1 e 5.2, pode-se observar o caráter oscilante da função corrente à jusante do corpo submerso. Na figura 5.1, nota-se o comprimento da esteira atingindo em torno de 8 vezes o raio do corpo submerso. Na figura 5.2, observa-se o descolamento da camada limite acontecendo à aproximadamente  $120^\circ$ , a partir do centro da esfera, o que condiz aproximadamente com a observação para altos números de Reynolds desta ordem

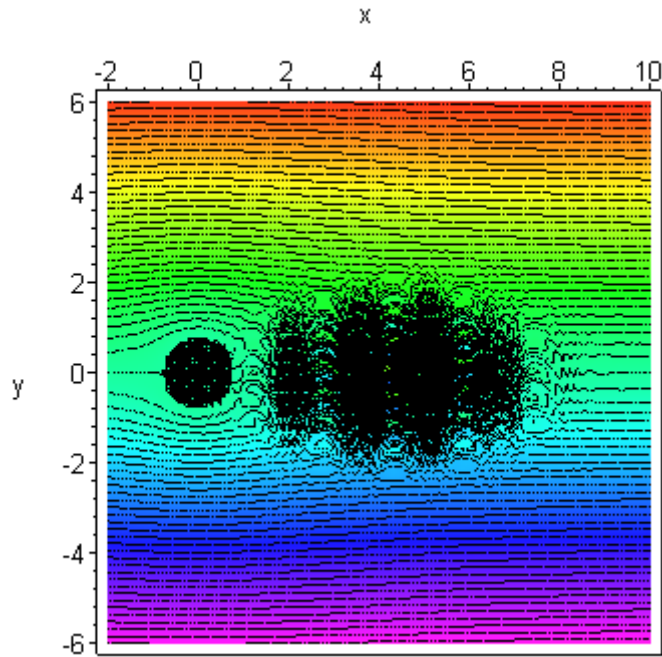


Figura 5.14: Esteira completa,  $z = 0.6$ .  $Re = 10^4$ .

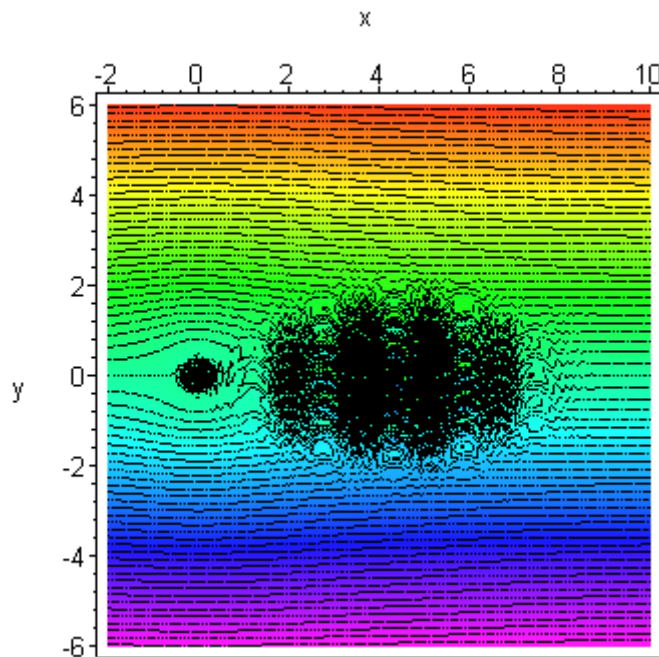


Figura 5.15: Esteira completa,  $z = 0.9$ .  $Re = 10^4$ .

O conceito de interface como fonte de vorticidade é qualitativamente corroborado por simulações para número de Reynolds elevados, devido ao fato da esteira de microvórtices se comportar basicamente como a emissão de um poluente a partir da interface. Verifica-se que, ao contrário dos escoamentos para baixos  $Re$ , a esteira tende a se comportar como uma emissão que

possui alcance relativamente longo, fato que pode ser diretamente constatado quando são tomados planos de corte mais distantes de  $z=0$  (ver figuras 5.8 a 5.10).

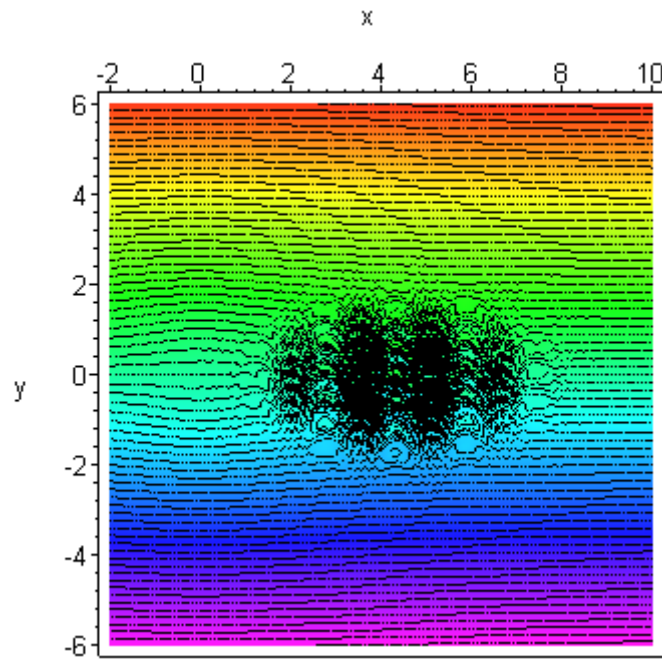


Figura 5.16: Esteira completa,  $z = 1.5$ ,  $Re = 10^4$ .

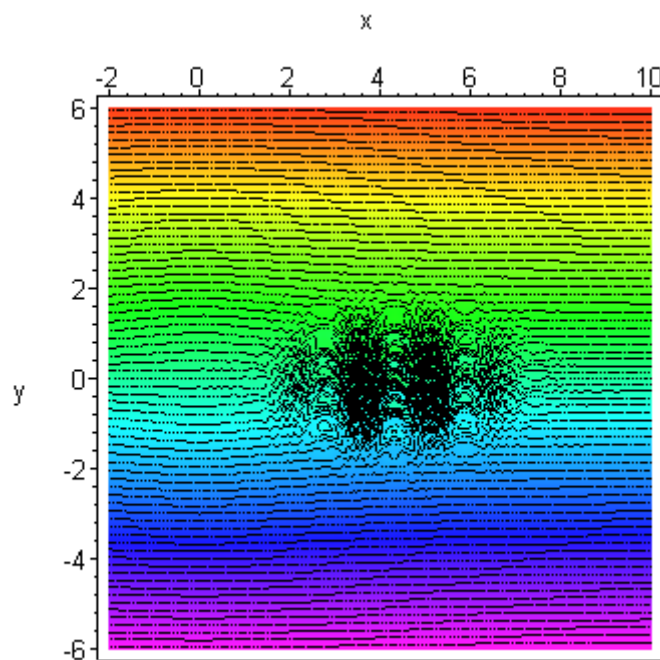


Figura 5.17: Esteira completa,  $z = 1.8$ ,  $Re = 10^4$ .

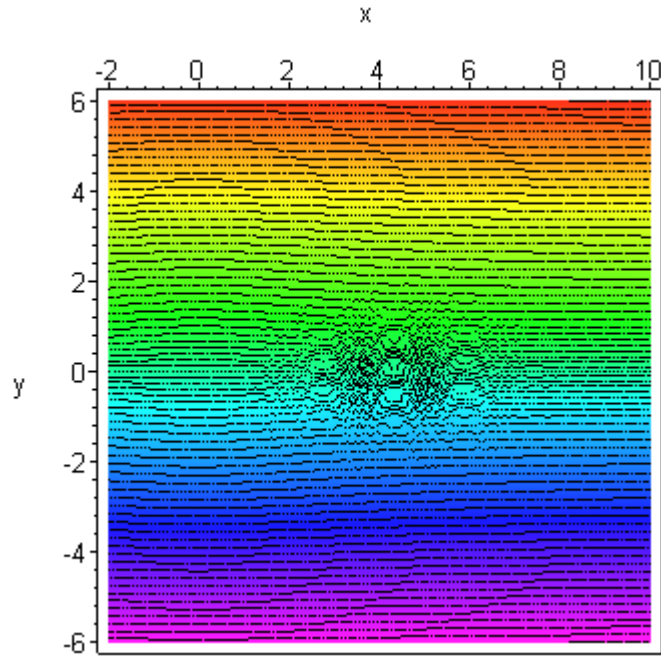


Figura 5.18: Esteira completa,  $z = 2.4$ ,  $Re = 10^4$ .

Embora corroborado pelos resultados qualitativos, esse conceito entra em conflito direto com a noção de subcamada laminar, usualmente adotado em textos clássicos. Para eliminar o aparente paradoxo, convém ressaltar que a aceitação do conceito de subcamada laminar implica no surgimento de uma questão insolúvel. Como justificar a existência de uma subcamada laminar precisamente nas vizinhanças da interface sólida? Cabe lembrar que essa é justamente a região onde os termos não-lineares atuam de forma mais efetiva como geradores de ruído de alta frequência, devido às elevadas tensões de cisalhamento e aos desvios da corrente principal junto à interface rugosa. Se nessa região não existisse turbulência, em nenhuma outra poderia haver sequer flutuações de baixa amplitude.

## 6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Este capítulo sumariza as principais conclusões obtidas através da análise dos resultados apresentados, salientando as principais vantagens e deficiências da formulação proposta. Além disso, são fornecidas sugestões para contornar as principais deficiências mencionadas, levando em consideração que devem ser preservadas algumas características operacionais relevantes, como o tempo de processamento, a quantidade de memória requerida e a facilidade de depuração do respectivo código fonte. Essas características agilizam consideravelmente o processo de implementação de novas rotinas, uma vez que permitem a execução de uma série de simulações a título de teste, com o objetivo de detectar erros e otimizar procedimentos, viabilizando a continuidade do trabalho iniciado.

Como já foi mencionado, os resultados referentes ao coeficiente de pressão apresentaram boa concordância com os dados da literatura até o ponto de descolamento da camada limite, região na qual as oscilações oriundas da formação da esteira de vórtices produzem efeitos transientes cuja reprodutibilidade se torna inviável devido à sensibilidade em relação a perturbações sobre a condição inicial.

Naturalmente, o cancelamento das oscilações se torna mais eficiente à medida que a dimensão característica dos vórtices diminui, o que ocorre com o aumento do número de Reynolds. Além disso, a própria extensão da área de contato da esteira de vórtices com a interface sólida sofre uma redução significativa com o aumento do número de Reynolds, ocasionada pelo atraso no ponto de descolamento da camada limite. Dessa forma, no que diz respeito ao coeficiente de pressão, a amplitude das oscilações se torna menor à medida que o número de Reynolds aumenta, o que não ocorre na solução preliminar apresentada na seção 2.8.

Para o coeficiente de arrasto, foi também mencionado que o sistema reproduz de forma razoável os valores experimentais para uma faixa relativamente ampla de números de Reynolds, e que adicionalmente é capaz de delinear características relevantes do escoamento (o deslocamento do ponto de descolamento da camada limite e a redução do valor médio dos raios dos vórtices ao longo da esteira). Entretanto, o sistema não reproduz a “drag crisis”, prevendo somente uma redução gradual no coeficiente de arrasto com o número de Reynolds, relativo a um deslocamento suave do ponto de descolamento da camada limite turbulenta. O sistema também não é capaz de reproduzir a região ascendente que precede a queda súbita de  $C_D$ .

Ao observar os resultados qualitativos em busca de informações que permitam implementar futuros refinamentos no modelo, foi encontrada uma causa de erro, relacionada basicamente à prescrição das condições de contorno. Essa causa de erro é corroborada por dois argumentos aparentemente independentes. O primeiro leva em conta o fato do escoamento ter

sido modelado como um problema de contorno, ao invés de um evento em meio infinito, as variações da viscosidade cinemática junto à parede não foram levadas em consideração. Como consequência, os efeitos de borda que caracterizam a interação fluido-estrutura foram simplesmente prescritos sobre a interface, quando deveriam surgir como decorrência natural do comportamento local do modelo. Desse modo, parece razoável concluir que o deslocamento súbito do ponto de descolamento da camada limite resulte de uma mudança repentina nas condições de contorno, devido a variações nas tensões de cisalhamento com o número de Reynolds.

O segundo argumento, que parece corroborar fortemente a hipótese segundo a qual a causa de erro está relacionada à aplicação das condições de contorno clássicas, diz respeito à concepção clássica do contorno sólido atuando como uma "fonte de vorticidade" na equação de Helmholtz. Esse argumento não apenas parece corroborar a hipótese mencionada, mas também fornece um ponto de partida bastante promissor para a elaboração de modelos em meio infinito. Para tanto, basta ter em mente que, quando a viscosidade é considerada variável, surgem novos termos inerciais nas equações de Navier-Stokes e Helmholtz. O efeito desses termos sobre o campo de velocidades é bastante pronunciado, embora de curto alcance, produzindo perturbações significativas sobre o campo de velocidades nas imediações do contorno. Esse efeito se torna bastante claro quando os novos termos são reagrupados às parcelas inerciais já existentes, colocando em evidência as derivadas de primeira ordem. Nestas condições, as componentes do vetor velocidade sofrem as transformações:

$$u \rightarrow u - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v \rightarrow v - \frac{\partial v}{\partial y}, \quad w \rightarrow w - \frac{\partial v}{\partial z}$$

Verifica-se, portanto, que a interface sólida atua realmente como uma fonte de perturbações sobre o campo de velocidades, que pode não apenas produzir vorticidade ao interagir com a corrente principal, mas também flutuações devido à existência de irregularidades na interface sólida, caracterizando a geração de turbulência tanto na escala da rugosidade quanto na dos defeitos cristalinos. Em resumo, a referida "fonte de vorticidade" surge de fato como consequência direta do tratamento em meio infinito, sem que a equação de Helmholtz seja violada através da inclusão artificial de uma função fonte no sentido rigoroso do termo. Basta, para tanto, considerar as variações da viscosidade cinemática ou do número de Reynolds com as coordenadas espaciais. Consequentemente, ao incorporar a rugosidade da parede na geometria do respectivo corpo submerso, as componentes flutuantes são espontaneamente produzidas ao longo



da interface, dando origem a um “modelo natural” de turbulência, que apresenta duas vantagens tanto de ordem prática quanto conceitual: não viola os balanços de vorticidade e de quantidade de movimento, além de permitir a resolução das equações de Helmholtz ou Navier-Stokes em coordenadas cartesianas, independente da geometria do domínio. É importante recordar que, ao tratar o escoamento em meio infinito, o formato dos obstáculos é definido exclusivamente pela função que descreve a viscosidade cinemática, não havendo condições de contorno a aplicar sobre a solução correspondente uma vez resolvida a equação diferencial.

Com base nos argumentos apresentados, são propostas duas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros. A primeira consiste em elaborar modelos em meio infinito, sejam estes locais, a fim de obter condições de contorno mais realistas, ou mesmo válidos para toda a extensão do domínio, para dispensar a prescrição de condições de contorno.

A segunda sugestão diz respeito à elaboração de um modelo adicional, válido apenas para o escoamento de líquidos, a fim de considerar a produção de componentes flutuantes no interior do escoamento, e não apenas junto às interfaces sólidas. Uma vez que a viscosidade passa a ser função das variáveis espaciais, um fenômeno relacionado ao escoamento em fase líquida pode ser também considerado: a variação local da viscosidade com as tensões de cisalhamento. Ocorre que as moléculas em fase líquida se encontram agrupadas em oligômeros cuja distribuição de peso molecular depende do comportamento local do campo de velocidades. Esses agregados são mantidos coesos por interações eletromagnéticas residuais cuja intensidade é da ordem de grandeza das forças de Van der Waals, e portanto consideravelmente inferior à das ligações químicas típicas. Essas ligações intermoleculares que caracterizam o estado líquido podem ser facilmente rompidas e restauradas devido a colisões ocorridas ao longo do escoamento, tanto sobre a interface sólida quanto entre os próprios agregados. Uma vez que a viscosidade varia com a massa molecular dos oligômeros, torna-se possível elaborar um modelo auxiliar em microescala para estimar as flutuações dos valores da viscosidade no interior do líquido.

Do ponto de vista operacional, uma vez implementados os modelos relativos a ambas as sugestões propostas, o sistema preservará essencialmente as mesmas características mencionadas no início do capítulo. De fato, considerando que novas soluções exatas passíveis de obtenção através de simetrias possuirão estruturas similares às das funções dadas por (5.7) e (5.8), evitando assim o emprego de expansões em série e soluções implícitas, sua implementação não provocará aumento apreciável tanto na extensão do código fonte quanto no tempo de processamento correspondente. Convém ressaltar que a simples inclusão de termos inerciais extras em equações advectivo-difusivas não exige o uso de novos métodos analíticos para a obtenção de soluções exatas.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anagnostopoulos, J. **A fast numerical method for flow analysis and blade design in centrifugal pump impellers.** Computers and fluids 38 (2009) 284-289. Elsevier.

AIAA. **Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations.** AIAA-G-077-1998. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA, 1998.

Aksan, E. **A finite element approach for solution of Burger's equation.** Applied mathematics and computation 139 (2003) 417-428. Elsevier.

Ayres, F. **Equações Diferenciais.** Coleção Schaum. McGraw Hill, 6<sup>o</sup> edição, 1995.

Baoling, C; Zuchao, Z; Jianci, Z; Ying, C. **The flow simulation and experimental study of low-specific-speed high-speed complex centrifugal impellers.** Chinese Journal of chemical engineering 14(4) 435-441 (2006).

Beck, D. **Soluções exatas para a Equação de Helmholtz bidimensional em Regime Transiente.** Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PROMEC/UFRGS. Porto Alegre, 2005

Bejan A., 1984, Convection Heat Transfer, John Wiley.

Bluman, G.; Kumei, S, 1989.- **Symmetries and differential equations.**- Springer Verlag, N. York.

Copson, E. T. **Partial Differential Equations.** Cambridge University Press, 1975.

Dattoli, G., Gianessi, M., Quattromini, M., Torre, A, 1998. – **Exponential operators, operational rules and evolutional problems** – Il Nuovo Cimento, V.113B, N.6, pp 699-710 .

Ibragimov, N, 1995. - **Lie Group Analysis of partial differential equations.**- CRC Press, Boca Raton .

Fakhar, K; Hayat, T; Zhao, K. **Symmetry transformation of solutions for the Navier-Stokes equations.** Applied Mathematics and Computation 207 (2009) 213-224. Elsevier.

Fang, T; Zhang, J. **Flow between two stretchable disks – an exact solution of the Navier-Stokes equations.** International communications in heat and mass transfer 35 (2008) 892-895. Elsevier.

FRANCA, L. P. ; FREY, Sérgio ; HUGHES, T. J. R. . **Stabilized Finite Element Methods: I. Application to the Advective-Diffusive Model.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier Science Publishers, v. 95, p. 253-276, 1992

Freire, A.; Mennut, P.; Su, J; 1998. **Turbulência: Anais da I Escola de Primavera em Transição e Turbulência.** Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, ABCM.

Gonçalvez, E; Patella, R. **Numerical simulation of cavitating flows with homogeneous models.** Computers & Fluids 38 (2009) 1682-1696. Elsevier.

Hinze, J, O. **Turbulence.** 2nd ed, McGraw-Hill, 1975

Kalitzin, G; Medic, G; Templeton, J. **Wall modeling for LES of high Reynolds number channel flows: what turbulence information is retained?.** Computers and fluids 37 (2008) 809-815. Elsevier.

Landau, L. D. **Fluid Mechanics.** Pergamon, London 1971.

Liao, S. **An analytical approximation of the drag coefficient for the viscous flow past a sphere.** International journal of non-linear mechanics 37 (2002) 1-18. Elsevier.

Liggett, James, A. **Fluid Mechanics.** McGraw-Hill International Editions, 1994.

Liu, W. **A triple level finite element method for large eddy simulations.** Journal of Computational Physics 228 (2009) 2690-2706. Elsevier.

Irmay, S. **Note: A family of Analytical Solutions of the Navier-Stokes Equations in Space.** Int. J. Engng. Sci. Vol. 35, N°12/13. pp. 1261-1263. 1997

Martinat, G; Braza, M; Hoarau, Y; Harran, G. **Turbulence modeling of the past a pitching NACA0012 airfoil at  $10^5$  e  $10^6$  Reynolds numbers.** Journal of fluids and structures 24 (2008) 1294-1303. Elsevier.

Mdallal, Q. **A new family of exact solutions to the unsteady Navier-Stokes equations using canonical transformation with complex coefficients.** Applied Mathematics and Computation 196 (2008) 303-308. Elsevier.

Nezu, I; Nakagawa, H. **Turbulence in open-channel Flows.** Balkema, 1993.

Noether, E. **Invariante variations probleme.** In: Köning Gesell Wissen, Göttingen, 1918. p. 235-257.

Nugroho, G; Ali, A; Karim, Z. **On a special class of analytical solutions to the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations.** Applied Mathematics Letters 22 (1639-1644). 2009. Elsevier.

Oberkampf, W; Trucano, T. **Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics.** Progress in Aerospace Science 38 (2002) 209-272. Elsevier.

Oñate, E; Valls, A; Garcia, J. **Modeling incompressible flows at low and high Reynolds numbers via a finite calculus – finite element approach.** Journal of computational physics 224 (2007) 332-351. Elsevier.

Olver, P, 2000.- **Applications of Lie Groups to differential equations.** Springer Verlag, N. York

Ong, M. C; Utnes, T; Holmedal, L. E; Myrhaug, D. **Numerical simulation of flow around a smooth circular cylinder at very high Reynolds numbers.** Marine Structures 22 (2009) 142-153. Elsevier.

Rashidi, M; Shamohamadi, H. **Analytical solutions of three-dimensional Navier-Stokes equations for the flow near an infinite rotating disk.** Communication in nonlinear science and numerical simulation 14 2999-3006 (2009). Elsevier.

Razafindralandy, D; Hamdouni. **Subgrid models preserving the symmetry group of Navier-Stokes equations.** C.R. Mecanique 333 (2005) 481-486. Elsevier.

Razafindralandy, D; Hamdouni, A; Béghein C. **A class of subgrid-scale models preserving the symmetry group of Navier-Stokes equations.** Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 12 (2007) 243-253. Elsevier.

Profilo, G; Soliani, G; Tebaldi, C. **Some Exact Solutions of the Two-Dimensional Navier-Stokes Equations.** International Journal of Engineering Science. Vol. 36, N° 4. PP 459-471. 1998.

Santiago, G. F., 2007. **Simulação de Escoamentos Viscosos Utilizando Mapeamentos entre Equações.** Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica – PROMEC/UFRGS.

Selvam, R. **Finite element modeling of flow around a circular cylinder using LES.** Journal of wind engineering and industrial aerodynamics 67 & 68 (1997) 129-139. Elsevier.

Schlichting, Hermann, 1968. **Boundary-layer Theory**, sixth edition. McGraw-Hill, New York.

Tezduyar, T; Karlo, V. **3D computation of unsteady flow past a sphere with parallel finite element method.** Computers methods in applied mechanics and engineering 151 (1998) 267-276. Elsevier.

Trofimova, A; Martinez, A; Jansen, K; Lahey, R. **Direct numerical simulation of turbulent channel flows using a stabilized finite element method.** Computers and Fluids 38 (2009) 924-938. Elsevier.

Tsangaris, S; Kondaxakis, D; Vlachakis, N. **Exact solutions of the Navier-Stokes equations for the pulsating dean flow in a channel with porous walls.** International journal of engineering science 44 (2006) 1498-1509. Elsevier.

Whitaker, S. **Introduction to Fluid Mechanics.** First edition, 1968. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

White, Frank M, 1974. **Viscous fluid Flow**, Second edition. McGraw-Hill, New York.

Zabadal, J; Beck, D; Santiago, G; 2004. **Soluções Exatas para a Equação de Helmholtz em duas Dimensões - IV Escola de Primavera em Transição e Turbulência.**

Zwillinger, D, 1992.- **Handbook of Differential equations.**- Academic Press, Boston.

Karniadakis, G; 1988. **Numerical simulation of forced convection heat transfer from a cylinder in crossflow.** International journal for heat mass transfer. Vol 31, N° 1, 107-118.

Fromm, J; Harlow, F; 1963. **Numerical solution of the problem of vortex street development.** The physics of fluids. Vol. 6, N° 7.

Borthwick, A; 1986. **Comparison between two finite-difference schemes for computing the flow around a cylinder.** International journal for numerical methods in fluids. Vol. 6, 275-290

Achenbach, E; Heinecke, E; 1981. **On vortex shedding from smooth and rough cylinders in the range of Reynolds numbers  $6 \times 10^3$  to  $5 \times 10^6$ .** J. Fluid Mechanics, vol. 109, pp. 239-251

Wang, C. **Flow due to a stretching boundary with partial slip – an exact solution of the Navier-Stokes equations.** Chemical engineering science 57 (2002) 3745-3747. Elsevier.

Zharinov, V, G. **Exact Solutions of Problems of the Three-Dimensional Flow of Ideal Viscous incompressible Fluids Near Cylindrical Surfaces.** J. Appl. Maths Mechs, Vol. 66, N° 5, pp. 767-773. 2002.

Zikanov, O; Thess, A. **Direct numerical simulation as a tool for understanding MHD liquid metal turbulence.** Applied mathematical modeling 28 (2004) 1-13. Elsevier.

## APÊNDICES

### APÊNDICE A

Obtenção da equação de Helmholtz.

A equação de Helmholtz é obtida através da aplicação do operador rotacional no sistema Navier-Stokes. Para o caso de regime transiente, bidimensional e incompressível, as equações de Navier-Stokes têm o seguinte formato:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right], \quad (\text{A.2})$$

onde  $\rho$  corresponde à massa específica do fluido e  $Re$  corresponde ao Número de Reynolds do escoamento.

Aplicando o operador rotacional nas equações (A.1) e (A.2), obtêm-se

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \vec{k} - \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right] \vec{k} - \left[ \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \vec{k} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \vec{k} - \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right] \vec{k} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \vec{k} + \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] \vec{k} - \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \vec{k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \vec{k} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right] \vec{k}, \quad (\text{A.4})$$

onde  $\vec{k}$  representa a componente do vetor na direção  $z$ .

Somando as equações (A.3) e (A.4), e reagrupando os termos, resulta em

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] + u \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right] + \frac{\partial v}{\partial y} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \\ & + v \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Considerando a vorticidade como sendo

$$\nabla \times V = \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \vec{k} = \omega_z \quad (\text{A.6})$$

onde  $V = u\vec{i} + v\vec{j}$ , aplica-se a mesma na equação (A.5), obtendo-se

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + \omega_z \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z. \quad (\text{A.7})$$

O termo entre colchetes na equação (A.7) é nulo, pois corresponde à equação da continuidade, Com isso, a equação (A.7) toma a forma

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega_z \quad (\text{A.8})$$

e corresponde à equação de Helmholtz bidimensional em regime transiente para escoamento incompressível.



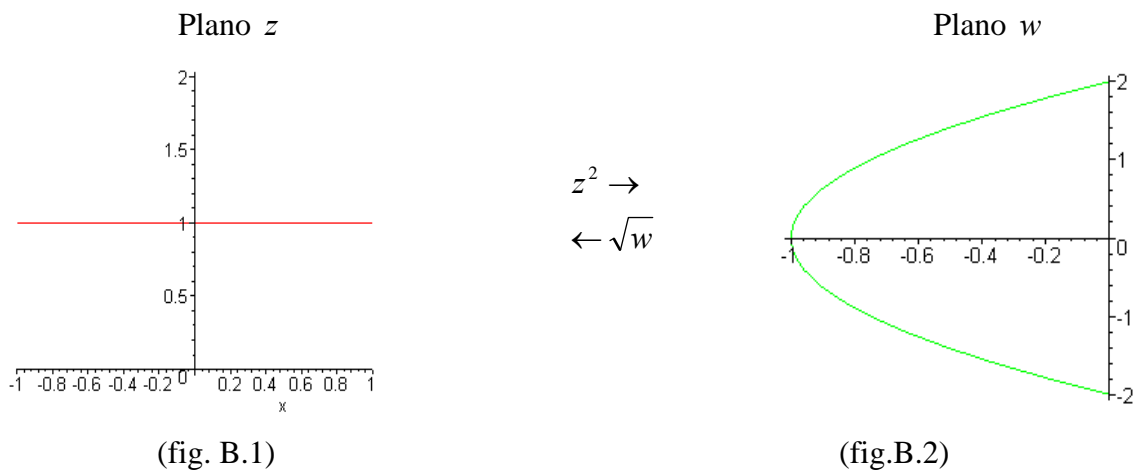
## APÊNDICE B

### TRANSFORMAÇÕES CONFORMES

A aplicação das transformações conformes consiste em um mapeamento de pontos entre dois domínios distintos. Seu objetivo é transformar a geometria do domínio original em uma outra geometria. Esta transformação é conseguida através da aplicação de uma função analítica na variável complexa (DETTMAN, 1965).

Para exemplificar o método, vejamos o caso da função  $f(z) = z^2$ . Esta função pode ser expressa em termos das coordenadas cartesianas  $(x, y)$  fazendo  $z = x + iy$ , e, substituindo na equação original, resulta em  $f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , sendo expressa também em termos das variáveis  $u$  e  $v$ .

Define-se então um ponto arbitrário no plano  $w$  como sendo  $w = u(x, y) + iv(x, y)$  e tomando-se uma reta horizontal no plano  $z$ , ou seja,  $y = cte$  (fig. B.1) e aplicando a transformação acima descrita, obtêm-se uma nova geometria no plano  $w$  (fig. B.2):



(fig. B.1)

(fig. B.2)

Figura A 1: Transformação conforme aplicada ao plano  $z$  gera a curva do plano  $w$ .

Neste caso, foi aplicado uma transformação através da função  $f(z) = z^2$  no plano  $z$ , de forma que ocorresse uma mudança entre os pontos correspondentes do plano  $z$  para o plano  $w$ .

Segundo Dettman (1965), para que uma transformação possa ser conforme, existem dois requisitos que precisam ser satisfeitos:

1º - A função  $f(z)$  aplicada no plano  $z$  precisa ser analítica no domínio.

2º - A derivada da função  $f(z)$  não pode ser nula, i.e.,  $f'(z) \neq 0$

Qualquer transformação de variável complexa que satisfaça estes dois requisitos é dita conforme,

tendo como característica o fato de preservar a estrutura da equação de Laplace frente à mudança de variável (ver apêndice A).

## CONDIÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

Outra característica de uma transformação conforme é o fato de ela preservar os ângulos de um elemento de área frente a uma transformação. Isto significa que a malha de um determinado domínio preserva seus ângulos quando mapeada em outro domínio. Segundo Dettman (1965), esta propriedade decorre diretamente das condições de Cauchy-Riemann: tomando  $z = x + iy$ , qualquer função desta variável complexa pode ser expressa como  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . A derivada desta função pode ser representada por

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - (u(x, y) + iv(x, y))}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (\text{B.1})$$

Para que  $f(z)$  seja analítica, este limite deve existir independentemente de como  $\Delta z$  tenda para zero, seja pela aproximação por  $x$  ou pela aproximação por  $y$ . Assim, fazendo  $\Delta y$  tender a zero antes de  $\Delta x$ , resulta em

$$f_1'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y) + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{B.2})$$

Por outro lado, fazendo  $\Delta x$  tender a zero antes de  $\Delta y$ , obtêm-se

$$f_2'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y) + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{i\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (\text{B.3})$$

Para que  $f(z)$  seja analítica,  $f'(z)$  deve ser única, assim  $f_1'(z) = f_2'(z)$ . Isto implica em

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{B.5})$$

Estas equações são conhecidas como condições de Cauchy-Riemann e necessariamente precisam ser respeitadas em qualquer função de variável complexa. Estas condições também garantem a ortogonalidade entre as isolinhas de uma função de variável complexa (Apêndice C).

## PARAMÉTRICAS QUE MAPEIAM O DOMÍNIO.

A descrição das transformações conformes apresentada até este momento se refere aos casos onde a função  $f(z)$  aplicada na transformação é conhecida, ou seja, aplica-se a função no domínio original de forma a obter o domínio transformado. Porém, para problemas práticos em engenharia, muitas vezes é necessário estabelecer uma forma de determinar qual a função  $f(z)$  responsável pelo mapeamento entre dois domínios já conhecidos, ou seja, transformar o domínio original em algum outro domínio (conhecido) que facilite a solução. Para que este tipo de abordagem possa ser realizado, é necessária a aplicação das funções paramétricas, as quais são responsáveis pelo mapeamento entre os domínios dos planos. As paramétricas que mapeiam o domínio podem ser vistas como a função pela qual se dará a transformação conforme. Esta etapa do processo pode exigir tratamento numérico, consistindo no ajuste de curva dos pontos do domínio original. A transformação conforme realizada neste trabalho consiste em transformar o domínio original de um determinado problema em um semi-plano  $w$  positivo. Isto significa que independentemente do formato do domínio original, este sempre será transformado em uma reta horizontal no plano  $w$ .

As paramétricas podem ser determinadas percorrendo-se o contorno do domínio original e relacionando-os com os pontos desejados no domínio transformado.

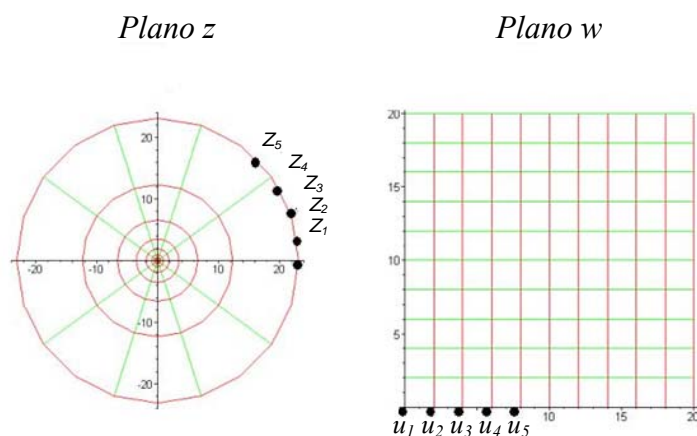


Figura B.3: Ajuste das paramétricas.

Para que o levantamento das paramétricas seja efetuado, é necessário um mapeamento entre os pontos do contorno nos plano  $z$  e plano  $w$ . Para isso utiliza-se o parâmetro  $u$ , a fim de determinar a função que correlaciona os pontos de um contorno no outro.

Pelo ajuste de curva surge então duas funções dependentes da variável  $u$ ,

$$\begin{cases} X = X(u) \\ Y = Y(u) \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Para a determinação das paramétricas no interior do domínio, basta fazer a substituição da variável  $u$  por  $u + iv$ , a fim de garantir que as funções ajustadas respeitem as condições de Cauchy-Riemann. Assim,

$$\begin{cases} X = X(u + iv) \\ Y = Y(u + iv) \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Uma vez obtida as funções paramétricas, aplica-se as mesmas aos pontos do plano  $z$ , onde  $z = X(u + iv) + iY(u + iv)$ . Assim, os pontos  $(x, y)$  são determinados extraindo-se a parte real e imaginária, respectivamente, isto é,

$$\begin{cases} x = \Re(z) \\ y = \Im(z) \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

A transformação conforme via paramétricas pode ser utilizada para introduzir a rugosidade do corpo submerso. Uma vez obtida a solução que mapeie o formato original do corpo submerso em um outro formato qualquer, é possível aplicar-se uma segunda transformação, agora utilizando as paramétricas, a fim de descrever a rugosidade no contorno do corpo, onde as paramétricas são determinadas conforme a rugosidade desejada.

## APÊNDICE C

### ORTOGONALIDADE ENTRE AS ISOLINHAS DE UMA FUNÇÃO DE VARIÁVEL COMPLEXA

Sendo

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (\text{C.1})$$

e tomando  $\phi = c_1$  e  $\psi = c_2$  como sendo as respectivas curvas das parcelas real e imaginária, e tendo o vetor normal a curva  $c_2$  como sendo  $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$ , a ortogonalidade pode ser mostrada fazendo:

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (\text{C.2})$$

Aplicando as condições de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

A equação (C.2) fica

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \quad (\text{C.4})$$

A equação (C.4) mostra que os vetores normais às curvas  $c_1$  e  $c_2$  são também mutuamente ortogonais.

## APÊNDICE D

Obtenção da solução Formal.

Para equações na forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Af, \quad (\text{D.1})$$

onde  $A$  é um operador linear, é possível obter uma solução para  $f$  tratando  $A$  como um parâmetro. Assim, a solução pode ser obtida via variáveis separáveis, resultando em

$$f = e^{tA} [f_0]. \quad (\text{D.2})$$

onde  $f_0$  corresponde à condição inicial do sistema físico. A dificuldade de utilização desta solução diz respeito à exponencial do operador  $A$ , a qual é aplicada sobre a função inicial  $f_0$ , pois nem sempre é possível se obter uma solução explícita para a função  $f$ . Uma forma de gerar soluções a partir de (D.2) é expandindo a função em série de Taylor, o que resulta em

$$f = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right] f_0, \quad (\text{D.3})$$

onde  $A^k$  representa as potências do operador  $A$ , isto é, o número  $k$  de vezes em que o operador será aplicado sobre a função  $f_0$ .

Atualmente, a pesquisa na área de soluções formais está voltada para a obtenção de alternativas que viabilizem sua utilização (Datolli et al, 1998). Uma alternativa à expansão da solução (D.2) em série de Taylor é a introdução de funções auxiliares que possibilitem simplificar a aplicação das potências do operador  $A$  sobre a condição inicial. Uma destas alternativas é objeto do método utilizado neste trabalho, onde a introdução da autofunção do laplaciano como função auxiliar possibilita a obtenção de uma solução explícita via solução formal.

## APÊNDICE E

Estimativa do raio médio dos vórtices em função do número de Reynolds.

O tamanho inicial médio dos vórtices pode ser estimado a partir de correlações entre o número de Strouhal e o número de Reynolds, disponíveis na literatura [Achenbach e Heineken, 1981; Schlichting, 1968]. Entretanto, a elevada dispersão dos dados experimentais  $Re$  vs.  $St$  para números de Reynolds superiores a  $10^5$  tende a impedir a identificação da tendência central da correlação. A fim de obter valores típicos para o raio dos vórtices em função do número de Reynolds, e assim prescrever uma condição inicial qualitativamente consistente com cenários físicos realistas, foi utilizada uma solução particular para a equação

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (E.1)$$

a fim de estimar o valor médio do raio do vórtice. A solução utilizada, dada por

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi t / Re}} e^{-\frac{Re(x^2+y^2)}{4\pi}}. \quad (E.2)$$

é também solução exata da equação, mas válida para aplicações em meio infinito [Reichl, 1980]. Esta expressão foi escolhida devido sua maior facilidade de manipulação. A região da esteira onde o raio médio dos vórtices é calculado corresponde aproximadamente à distancia de um comprimento característico após o descolamento da camada limite. Dessa forma, para uma vorticidade fixa  $\omega_0$ , o termo correspondente ao tempo resulta em  $t_0 = L/U_\infty$ , onde  $L$  corresponde ao comprimento característico. Na solução (E.2), o termo  $(x^2 + y^2)$  presente no argumento da exponencial corresponde ao quadrado do raio do vórtice, correspondendo à isolinha de vorticidade  $\omega = \omega_0$ . Assim, para uma condição de vorticidade inicial  $\omega_0$ , a expressão resultante toma a forma

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Re}{4\pi t_0}} e^{-\frac{Re r_0^2}{4\pi}}. \quad (E.3)$$

Lembrando que  $\omega$  corresponde à metade da velocidade angular de rotação do vórtice,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{U_\infty}{2\pi r_0} = \frac{U_\infty}{2r_0} \quad \left[ \frac{rad}{s} \right]. \quad (E.4)$$

Assim, a expressão (E.3) resulta em

$$\sqrt{\frac{\pi t_0 U_\infty^2}{Re r_0^2}} = e^{\frac{-Re r_0^2}{4\pi}}. \quad (E.5)$$

Uma vez que  $Re = \frac{U_\infty L}{\nu}$  e  $t_0 = \frac{L}{U_\infty}$ , chega-se a

$$r_0^2 = \frac{2\pi\nu}{U_\infty D} \left[ \ln(r_0^2) - \ln(\pi\nu) \right]. \quad (E.6)$$

Esta expressão pode ser reescrita na forma recursiva por

$$f_{k+1} = \frac{2\pi\nu}{U_\infty D} \left[ \ln(f_k) - \ln(\pi\nu) \right]. \quad (E.7)$$

Uma análise preliminar da ordem de grandeza dos termos resultantes revela que  $O(-\ln(\pi\nu)) \ll O(\ln(f_k))$ , ou seja, a maior contribuição para o valor do raio médio provém do termo referente à viscosidade cinemática, o que resulta em uma expressão para  $r_0$  com o formato

$$f_{k+1} \cong \frac{k}{Re}, \quad r_0 \cong \frac{c}{\sqrt{Re}} \quad (E.8)$$

Esta constatação é qualitativamente consistente com a observação física, uma vez que o tamanho médio dos vórtices deve diminuir com o aumento do número de Reynolds. O resultado obtido em (E.8) será utilizado como parâmetro para a determinação das constantes arbitrárias nas soluções exatas obtidas para a equação de Navier-Stokes, auxiliando na aplicação da condição inicial do problema.



## APÊNDICE F

Código fonte da simulação em Maple.

```
> restart:
> with(PDEtools):
> with(DEtools):
> with(plots):
> alias(f=f(x,r,theta,t)):
> alias(Q=Q(x,r,theta,t)):
> alias(a=a(t)):
> alias(b=b(x,r,theta,t)):
> alias(c=c(x,r,theta,t)):
> alias(g=g(x,r,theta,t)):
> alias(h=h(x,t)):
```

**Operador A: equacao a ser resolvida.(homogenea)**

```
> A:=f->diff(f,t)-
nu*(diff(f,x$2)+diff(r*diff(f,r),r)+1/r^2*diff(f,theta$2)-
2/r^2*diff(f,theta));
```

$$A := f \rightarrow \left( \frac{d}{dt} f \right) - \nu \left[ \left( \frac{d^2}{dx^2} f \right) + \left( \frac{d}{dr} \left( r \left( \frac{d}{dr} f \right) \right) \right) + \frac{d^2}{d\theta^2} f - \frac{2}{r^2} \left( \frac{d}{d\theta} f \right) \right]$$

**Operador B: operador responsavel pela obtencao das simetrias.**

```
> B:=f-
(a0+t*a1)*diff(f,x)+0*diff(f,r)+0*diff(f,theta)+0*diff(f,t)+(h0
+x/2/nu*a1)*f;
```

$$B := f \rightarrow (a_0 + t a_1) \left( \frac{d}{dx} f \right) + 0 \left( \frac{d}{dr} f \right) + 0 \left( \frac{d}{d\theta} f \right) + 0 \left( \frac{d}{dt} f \right) + \left( h_0 + \frac{x a_1}{2 \nu} \right) f$$

**##SEQUÊNCIA DA OBTENCAO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS##**

**Condição Af=Q**

```
> e1:=A(f)-Q;
```

$$e1 := \left( \frac{\partial}{\partial t} f \right) - \nu \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} f \right) + \left( \frac{\partial}{\partial r} f \right) + r \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} f \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f - \frac{2}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} f \right) \right] - Q$$

**Isola-se o termo referente a derivada no tempo da equacao eq1.**

```
> fxx:=rhs(isolate(e1,diff(f,x$2)));
```

$$fxx := -\frac{-\left( \frac{\partial}{\partial t} f \right) + Q}{\nu} - \left( \frac{\partial}{\partial r} f \right) - r \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} f \right) - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f + \frac{2}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} f \right)$$

```
> e2:=A(B(f))-Q:
```

**Agora aplica na condicao ABf=Q.**

**Esta é a equação resultante das condições ABf=Q e Af=Q.**

```
> e3:=numer(simplify(subs(diff(f,x$2)=fxx,e2))):
```

```
> e4:=(expand(subs(Q=0,e3))):
```

**Esta ultima equação é resolvida zerando-se os coeficientes das derivadas parciais em f(x,y,z,t):**

```

>
e5:=expand(subs(f=exp(m*x+n*r+p*theta+q*t),e4)/exp(m*x+n*r+p*theta+q*t));
e5:=0

> n3:=coeff(e5,n,3);
n3:=0

> p3:=coeff(e5,p,3);
p3:=0

> m2q:=coeff(coeff(e5,m,2),q);
m2q:=0

> mp:=coeff(coeff(e5,m),p);
mp:=0

> n2:=coeff(e5,n,2);
n2:=0

> mn:=coeff(coeff(e5,m),n);
mn:=0

> p1:=coeff(e5,p);
p1:=0

> n1:=coeff(e5,n);
n1:=0

> m1:=coeff(e5,m);
m1:=0

> mlx:=diff(m1,x);
mlx:=0

>
>
> alias(phi=phi(x,r,theta,t));
> eb:=eval(B(phi));
eb:=(a0+t*a1)*(∂/∂x φ)+h0+(x*a1)/(2*v) φ

> pdsolve(eb,phi);
φ = _F1(r, θ, t) e(-x(4*h0*v+x*a1)/(4*v*(a0+t*a1)))

> sim1:=_F1(r,theta,t)*exp(-1/4*x*(4*h0*nu+x*a1)/nu/(a0+t*a1));
sim1 := _F1(r, θ, t) e(-x(4*h0*v+x*a1)/(4*v*(a0+t*a1)))

```

**FORMATO DE  $\_F1(r,\theta,t)$  - Vem da solução (3.61).**

```

> sim2 :=subs(b4=0, _F1(-1/2*b5*y^2-b9*y-1/2*b5*z^2+b7*z, (b5^2)^(1/2)/b5^2*(b4*arctan((b5^2)^(1/2)*((b5*z-b7)^2)^(1/2)/b5/(b7^2+b5^2*z^2-2*b5*b7*z)*(b5*y+b9))+x*(b5^2)^(1/2)), t)*exp(b10/(b5^2)^(1/2)*arctan((b5^2)^(1/2)*(y+1/b5*b9)/(b7^2-b5^2*y^2-2*b5*b9*y-2*b5*(-1/2*b5*y^2-b9*y-1/2*b5*z^2+b7*z))^(1/2)));

```

$$sim2 := \_F1\left(-\frac{b5 y^2}{2} - b9 y - \frac{b5 z^2}{2} + b7 z, x, t\right)$$

$$e^{\left(\frac{b10 \arctan\left(\frac{\sqrt{b5^2}\left(y + \frac{b9}{b5}\right)}{\sqrt{b7^2 - b5^2 y^2 - 2 b5 b9 y - 2 b5\left(-\frac{b5 y^2}{2} - b9 y - \frac{b5 z^2}{2} + b7 z\right)}}\right)}{\sqrt{b5^2}}\right)}$$

> sim3:=subs(\_F1(r,theta,t)=sim2,sim1);

$$sim3 := \_F1\left(-\frac{b5 y^2}{2} - b9 y - \frac{b5 z^2}{2} + b7 z, x, t\right)$$

$$e^{\left(\frac{b10 \arctan\left(\frac{\sqrt{b5^2}\left(y + \frac{b9}{b5}\right)}{\sqrt{b7^2 - b5^2 y^2 - 2 b5 b9 y - 2 b5\left(-\frac{b5 y^2}{2} - b9 y - \frac{b5 z^2}{2} + b7 z\right)}}\right)}{\sqrt{b5^2}}\right)} e^{\left(-\frac{x(4 h0 v + x a1)}{4 v(a0 + t a1)}\right)}$$

> #arg1:=-1/2\*b5\*y^2-b9\*y-1/2\*b5\*z^2+b7\*z;

#arg2:=b10/(b5^2)^(1/2)\*arctan((b5^2)^(1/2)\*(y+1/b5\*b9)/(b7^2-b5^2\*y^2-2\*b5\*b9\*y-2\*b5\*(-1/2\*b5\*y^2-b9\*y-1/2\*b5\*z^2+b7\*z))^(1/2));

#arg3:=-1/4\*x\*(4\*h0\*nu+x\*a1)/nu/(a0+t\*a1);

**SOLUCAO PRÉVIA INICIAL, A SER SUBSTITUIDA EM \_F1.**

> s2 :=

c0\*exp(k0\*(c1+c2\*y+c3\*z+(nu\*k0^2\*c2^2+nu\*k0^2\*c3^2+1)/k0\*t));

$$s2 := c0 e^{\left(k0\left(c1 + c2 y + c3 z + \frac{(v k0^2 c2^2 + v k0^2 c3^2 + 1)t}{k0}\right)\right)}$$

**Montagem da expressão.**

>

sf:=psi[0]+subs({x=x+cx,y=y+cy,z=z+cz,t=t+ct},subs(y=arg1,t=0,s2))\*exp(arg2)\*exp(arg3);

$$sf := \psi_0 + c0 e^{\left(k0\left(c1 + c2\left(-\frac{b5(y+cy)^2}{2} - b9(y+cy) - \frac{b5(z+cz)^2}{2} + b7(z+cz)\right) + c3(z+cz)\right)\right)} e^{\left(\frac{b10 \arctan\left(\frac{\sqrt{b5^2}\left(y+cy + \frac{b9}{b5}\right)}{\sqrt{b7^2 - b5^2(y+cy)^2 - 2 b5 b9(y+cy) - 2 b5\left(-\frac{b5(y+cy)^2}{2} - b9(y+cy) - \frac{b5(z+cz)^2}{2} + b7(z+cz)\right)}}\right)}{\sqrt{b5^2}}\right)} e^{\left(-\frac{(x+cx)(4 h0 v + (x+cx) a1)}{4 v(a0 + (t+ct) a1)}\right)}$$

**Termo potencial.**

> psi[0]:=((arctan(y)\*(y^2+z^2)^(1/2)-arctan(y)\*(y^2+z^2)^(1/2)/(x^2+y^2+z^2))-(arctan(y)\*(y^2+z^2)^(1/2)-arctan(y)\*(y^2+z^2)^(1/2)/(x^2+y^2+z^2)))\*exp(-lambda\*((arctan(y)\*(y^2+z^2)^(1/2)-arctan(y)\*(y^2+z^2)^(1/2)/(x^2+y^2+z^2))^2));

> sf12:=sf;

$$\begin{aligned}
 sf12 := & \arctan(y) \sqrt{y^2 + z^2} - \frac{\arctan(y) \sqrt{y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \\
 & - \left( \arctan(y) \sqrt{y^2 + z^2} - \frac{\arctan(y) \sqrt{y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \right) e^{\left( -\lambda \left( \arctan(y) \sqrt{y^2 + z^2} - \frac{\arctan(y) \sqrt{y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2 \right)} \\
 & + c0 e^{\left( k0 \left( c1 + c2 \left( -\frac{b5 (y + cy)^2}{2} - b9 (y + cy) - \frac{b5 (z + cz)^2}{2} + b7 (z + cz) \right) + c3 (z + cz) \right) \right)} e^{\left( \right. \\
 & \left. b10 \arctan \left( \frac{\sqrt{b5^2} \left( y + cy + \frac{b9}{b5} \right)}{\sqrt{b7^2 - b5^2 (y + cy)^2 - 2 b5 b9 (y + cy) - 2 b5 \left( -\frac{b5 (y + cy)^2}{2} - b9 (y + cy) - \frac{b5 (z + cz)^2}{2} + b7 (z + cz) \right)}} \right) \right)} \\
 & \left. e^{\left( -\frac{(x + cx) (4 h0 v + (x + cx) a1)}{4 v (a0 + (t + ct) a1)} \right)} \right)
 \end{aligned}$$

Aplic-se uma Heaviside somente para excluir a parte fora do domínio, ou seja, o interior da esfera.

> sf2:=Heaviside(x^2+y^2+z^2-1)\*sf12;

$$\begin{aligned}
 sf2 := & \text{Heaviside}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \left( \arctan(y) \sqrt{y^2 + z^2} - \frac{\arctan(y) \sqrt{y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \right. \\
 & - \left( \arctan(y) \sqrt{y^2 + z^2} - \frac{\arctan(y) \sqrt{y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \right) e^{\left( -\lambda \left( \arctan(y) \sqrt{y^2 + z^2} - \frac{\arctan(y) \sqrt{y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2 \right)} \\
 & + c0 e^{\left( k0 \left( c1 + c2 \left( -\frac{b5 (y + cy)^2}{2} - b9 (y + cy) - \frac{b5 (z + cz)^2}{2} + b7 (z + cz) \right) + c3 (z + cz) \right) \right)} e^{\left( \right. \\
 & \left. b10 \arctan \left( \frac{\sqrt{b5^2} \left( y + cy + \frac{b9}{b5} \right)}{\sqrt{b7^2 - b5^2 (y + cy)^2 - 2 b5 b9 (y + cy) - 2 b5 \left( -\frac{b5 (y + cy)^2}{2} - b9 (y + cy) - \frac{b5 (z + cz)^2}{2} + b7 (z + cz) \right)}} \right) \right)} \\
 & \left. e^{\left( -\frac{(x + cx) (4 h0 v + (x + cx) a1)}{4 v (a0 + (t + ct) a1)} \right)} \right)
 \end{aligned}$$

### ##### DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES #####

```
> l1:={lambda=1e6,k0=-1,cx=-
1.2,cy=0,cz=0,ct=0,c0=1.4,c1=1,c2=1,c3=0,b5=-1.5+I*0,b7=-1-
I*20,b9=-.1-I*10,nu=1e-3,b10=0.01,a0=20,a1=.02+I*2,h0=-32-I*4}:
l2:={lambda=1e6,k0=-1,cx=-
1.15,cy=0,cz=0,ct=0,c0=1.4,c1=1,c2=1,c3=0,b5=-1.5+I*0,b7=1-
I*20,b9=-.1+I*10,nu=1e-3,b10=0.02,a0=20,a1=.02+I*2,h0=-32-I*4}:
l3:={lambda=1e6,k0=-1,cx=-
1.2,cy=0,cz=0,ct=0,c0=1.4,c1=1,c2=1,c3=0,b5=-1.5+I*0,b7=1-
I*20,b9=-.1-I*10,nu=1e-3,b10=0.018,a0=20,a1=.02+I*2,h0=-32-I*4}:
l4:={lambda=1e6,k0=-1,cx=-
1.18,cy=0,cz=0,ct=0,c0=1.4,c1=1,c2=1,c3=0,b5=-1.5+I*0,b7=1-
I*20,b9=-.1+I*10,nu=1e-3,b10=0.022,a0=20,a1=.02+I*2,h0=-32-I*4}:

sfv:=subs(l1,sf2)+subs(l2,sf2)+subs(l3,sf2)+subs(l4,sf2):
#sfv:=subs(l1,sfv):
> sf3:=evalc(Re(subs(l1,sfv))):
> plot3d(subs({z=0,t=0},sf3),x=-2..10,y=-
6..6,axes=boxed,shading=zhue,grid=[150,150],style=patchcontour,o
rientation=[-90,0],contours = 55);

> plot3d(subs({z=0.5,t=0},sf3),x=-1..3,y=-
2..2,axes=boxed,shading=zhue,grid=[150,150],style=patchcontour,o
rientation=[-90,0],contours = 20);

> animate3d(subs({z=0},sf3),x=-1..3,y=-
2..2,t=0..1,axes=boxed,shading=xyz,grid=[80,80],style=patchcontou
ur,orientation=[-90,0],contours = 30,frames=20);
```

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)