SIRLENE NEVES DE ANDRADE

POSSIBILIDADES DE ARTICULAÇÃO ENTRE AS DIFERENTES FORMAS DE CONHECIMENTO: A NOÇÃO DE FUNÇÃO AFIM

MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

UNICSUL
Universidade Cruzeiro do Sul
SÃO PAULO
2006

SIRLENE NEVES DE ANDRADE

POSSIBILIDADES DE ARTICULAÇÃO ENTRE AS DIFERENTES FORMAS DE CONHECIMENTO: A NOÇÃO DE FUNÇÃO AFIM

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Cruzeiro do Sul, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Ensino de Ciências e Matemática, sob a orientação da Profa. Dra. Marlene Alves Dias.

UNICSUL
Universidade Cruzeiro do Sul
SÃO PAULO
2006

Sumário

Introdução..1

Capítulo 1: Níveis de conhecimento esperados dos estudantes e a articulação entre as diferentes formas de conhecimento associadas à noção de Função Afim

1.Introdução..10

2. Flexibilidade cognitiva e a articulação de domínios e registros de representação semiótica e pontos de vista..11

2.1. Flexibilidade cognitiva e a articulação de domínios............................12

2.2. Flexibilidade cognitiva e a conversão de registros de representação semiótica..18

2.3 Flexibilidade cognitiva e a noção de ponto de vista..............................25

3. Os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes......................27

4. A abordagem antropológica de Chevallard..29

5. Saberes profissionais dos professores...34

Capítulo 2: Os Documentos Oficiais e a articulação das diferentes formas de conhecimento associadas à noção de Função Afim

1. Introdução..38

2. A Proposta Curricular para o Ensino de Matemática no nível ensino médio do Estado de São Paulo e a articulação entre formas de conhecimento e representações simbólicas em matemática.......................38

3. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM e PCN+) e a articulação entre formas de conhecimento e representações simbólicas em matemática..41

4. Conclusão..47

Capítulo 3: Estudo das possibilidades de articulação entre as diferentes formas de conhecimento associadas à noção de Função Afim
1. Introdução..53
2. As representações semióticas da função afim..54
3. A grade de análise...58
4. Exemplos de funcionamento da grade...60
5. Conclusão..76

Capítulo 4: Gestão Institucional da articulação entre as diferentes formas de conhecimento para a noção de Função Afim: Análise dos livros didáticos
1. Introdução..79
2. A obra de E. L. Lima, P.C.P. Carvalho, E.Wagner, A.C. Morgado intitulada “A matemática do ensino médio”...83
3.A obra de Edwaldo Roque Bianchini/Herval Paccola intitulada “matemática”..106
4. A obra de Luiz Roberto Dante intitulada “Matemática”.......................125
5. Conclusão..166

Capítulo 5: Gestão pessoal da articulação entre as diferentes formas de conhecimento para a noção de Função Afim: análise dos resultados obtidos na Saresp
1.Introdução...170
2. Desempenho nas provas de Matemática – Função afim.......................172
3.Conclusão..193

Capítulo 6: Considerações Finais..199

Bibliografia Consultada e Referenciada...212

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

____

Setembro, 2006

BANCA EXAMINADORA

AGRADECIMENTOS

À Deus, que me permitiu chegar até aqui.

À Professora Drª. Marlene Alves Dias, pela amizade e consideração, pela orientação segura, dedicação incansável e oportunidades que me proporcionou.

À professora Drª. Tânia Maria Mendonça Campos e ao Professor Dr. Luiz Henrique do Amaral pela atenção e sugestões que muito contribuíram para este trabalho.

Aos colegas e professores do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul, pelo apoio e troca de experiências.

À minha família, em especial, ao meu esposo Augusto pelo incentivo, compreensão e estímulo.

RESUMO

O objetivo desse trabalho é mostrar a importância de uma abordagem da noção de função afim que leve em conta a articulação entre as diferentes formas que podem ser assumidas por essa noção no ensino médio e suas respectivas representações simbólicas. Sendo assim, para o desenvolvimento da pesquisa escolheu-se como referencial teórico de base os trabalhos de Robert (1997), sobre os três níveis de conhecimento esperado dos estudantes; Douady (1984,1992), sobre articulação de domínios ou quadros; Duval (1993, 1995,2003), sobre a conversão de registros de representação semióticas; Chevallard (1992, 1996,1999), sobre as relações institucionais e pessoais e Tardif (2002) sobre os saberes dos professores. Em um primeiro momento, se analisa via Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2004) e Proposta Curricular do Estado de São Paulo (1992) para o ensino médio, quais articulações são consideradas nesses documentos e quais formas de tratamento são propostas. Em seguida, são escolhidos três livros para a análise, um destinado aos professores e os outros dois são livros didáticos avaliados pelo Ministério da Educação e Cultura para o Plano Nacional do Livro Didático. Na análise desses livros, tenta-se observar quais as propostas reais de articulação entre formas de conhecimento e representações simbólicas para a noção de função afim a partir de uma grade de análise construída para esse fim. Nessa análise se tenta, ainda, colocar em evidência que nível de conhecimento pode ser esperado dos estudantes que terminam o ensino médio, em relação às possibilidades de articulação entre formas de conhecimento e representações simbólicas quando se trabalha com a noção de função afim considerando a relação institucional que se pode desenvolver através dos livros didáticos escolhidos e que tipo de orientação, para o desenvolvimento desse trabalho, é dada ao professor considerando, aqui, um livro que apresenta o conteúdo desenvolvido em um curso destinado aos professores do ensino médio. Finalmente, se analisa que relação pessoal foi desenvolvida por um grupo de estudantes de uma escola pública do estado de São Paulo para a noção de função afim e suas possibilidades de articulação considerando os resultados obtidos por esses estudantes para as questões sobre essa noção no questionário objetivo proposto no SARESP. Os resultados obtidos permitem concluir, para esses estudantes e considerando os limites impostos por este tipo de avaliação, que quando se considera a possibilidade de articulação entre quadros ou domínios da própria matemática e de outras ciências existe uma dificuldade, em geral, associada à escolha de uma representação adequada para o desenvolvimento da tarefa proposta uma vez que essa além de servir de ferramenta para a execução do trabalho matemático em jogo pode auxiliar na interpretação da situação que pode tanto corresponder a um contexto escolar como profissional.

Palavras-Chave: função afim, níveis de conhecimento, domínios ou quadros, registros de representação semiótica. .

ABSTRACT

The aim of this job is to show the importance of approaching of the notion of function goal that take in account the articulation among the different ways that can be assumed by this notion, in the middle learning and its symbolic representations. Thus, for development of this survey, it was chosen as theory referential of base, the jobs of Robert (1997), about the three levels of knowledge that could come from the students; Douady (1984, 1992), about articulation of command or schedules; Duval (1993, 1995, 2003), about conversion of registries of semiotic representation; Chevallard (1992, 1996, 1999), about personal and institutional relations and Tardif (2002) about the knowledge of the teachers. At a first time, an analysis via National Curricular Parameters of Middle Learning (2004) and Curricular Proposal of the State of São Paulo (1992) for middle learning, which articulations are considered in these documents and which treatment ways they are proposed. After that, three books are chosen to be analyzed, one, for the teachers and the other two are didactic books, evaluated by the Education and Culture Ministry for the Didactic Book National Plan. On analyzing these books, is tried to observe which are the articulation real proposals among ways of knowledge and symbolic representation for the notion of function goal henceforward of an analysis frame, built for this purpose. On this analysis it is still tried to put on evidence which level of knowledge can be expected from students who conclude the middle learning, related to articulation possibilities between ways of knowledge and symbolic representations when working with notion of function goal considering the institutional relation which can be developed through didactic books chosen and which kind of orientation, for developing this work, is given to the teacher regarding, here, a book that presents the contents developed on a course designed to the middle learning teachers. Finally, an analysis is made to know which kind of personal relation was developed by a group of students of a public school of São Paulo state , to the notion of function goal and its possibilities of articulation considering the results gotten by these students for the questions about this notion in the objective questions proposed by **SARESP**. The obtained results allow to conclude, for these students and considering the limits imposed by this type of evaluation, that when is considered the possibilities of articulation between command or schedules of the proper mathematics and other sciences there is some difficulty, in general, associated to the choice of a adequate representation for development of the proposed task, beyond fit as a tool to execute the mathematical job, it can help on interpretation of the situation which can correspond to a scholar context or professional use.

INTRODUÇÃO

A deficiência do ensino em todos os níveis tem várias causas, mas analisam-se aqui apenas as deficiências relativas ao trabalho em matemática tanto do ponto de vista do professor quanto do aluno. Pretende-se, com essa análise, encontrar novos meios de reflexão que possibilitem uma melhora no nível do ensino e aprendizagem de matemática.

Deseja-se, portanto, fazer um estudo mais detalhado do ensino e da aprendizagem da noção de função afim para compreender melhor como trabalhar esta noção nas diferentes etapas da escolaridade de forma a desenvolver no estudante uma flexibilidade que o permita ser capaz de resolver problemas tanto em nível mobilizável quanto disponível.

Certamente, ao se elaborar um planejamento, devem-se ter claras as questões acima levantadas para que possamos fazer uma boa seleção das noções associadas a um determinado conteúdo, escolhendo quais devem ser aprofundadas e/ou direcionadas para as necessidades de interesse da escola, da comunidade ou de um determinado curso. Não se pode trabalhar uma determinada noção da mesma forma, não importando qual o contexto em que se encontra.

Verifica-se que existem poucos trabalhos nesse sentido e que tanto no ensino médio quanto no ensino superior, os estudantes têm grandes dificuldades, pois muitas vezes não dispõem das competências e habilidades necessárias para o seu desenvolvimento escolar e profissional. Muitas dessas dificuldades estão associadas à não mobilização dos conhecimentos matemáticos adquiridos no ensino fundamental. O que os conduz a uma situação de desinteresse difícil de ser ultrapassada, uma vez que, a falta de conhecimentos mobilizáveis tende a aumentar no decorrer das diferentes etapas da escolaridade.

Além disso, os professores, em geral, possuem poucas alternativas de trabalho, pois não refletiram sobre esse aspecto e não compreendem porque os estudantes não são capazes de resolver determinadas tarefas se já estão em uma determinada etapa escolar e, portanto, já deveriam dominar determinadas noções, não apresentando dificuldades em mobilizá-las quando necessário.

Essa situação se reflete na qualidade de ensino da matemática no ensino médio e superior. Sendo assim, escolhe-se trabalhar a questão da **flexibilidade cognitiva**[1], analisando quais as condições necessárias para que o estudante possa articular de forma autônoma, sendo capaz de resolver os problemas que se colocam em sua vida escolar e profissional relacionados à noção de função afim, pois esta noção parece fundamental para a maioria dos cursos, devendo ser facilmente mobilizada nas primeiras séries do ensino superior e permitindo o trabalho nas mais diversas áreas do conhecimento. Lembra-se, aqui, que atualmente a estatística é uma ferramenta de trabalho para a maioria dos profissionais das mais diversas áreas e que esta necessita da compreensão e interpretação de gráficos, principalmente do gráfico da função afim quando se trabalha com as questões de correlação e regressão, e que é a noção de função afim que permite a interpretação dos resultados encontrados.

Inicia-se, assim, este trabalho com o seguinte questionamento:

[1] **Flexibilidade cognitiva**: Funções mentais permitindo mudança de estratégia ou de passagem de uma disposição mental a uma outra, particularmente, no domínio da resolução de problemas. Disponível em: <http://www.med.univ-rennes1.fr/iidris/cache/fr/23/2377>, acesso em 01/03/2006

Considera-se, aqui, que em matemática a flexibilidade cognitiva corresponde à capacidade de trabalhar em diversos domínios ou quadros, podendo mudar de domínio quando necessário sem que para isso seja feito algum apelo explícito, utilizar a representação mais adequada para a resolução de um problema, articular diferentes pontos de vista e concepções; saber planejar, analisar, desenvolver, justificar e controlar o trabalho matemático executado. (Andrade e Dias, 2005, p. 2)

1) Quais os conhecimentos matemáticos necessários para compreender a noção de função afim no ensino médio e poder aplicá-la de forma eficaz quando necessário?
2) Sobre que níveis de conhecimento fundamentar essas necessidades: técnicos, mobilizáveis e disponíveis (segundo A. Robert)?
3) Em que sistema de tarefas e práticas podemos desenvolver esses três níveis de conhecimento?
4) Como estão sendo trabalhados institucionalmente esses diferentes níveis de conhecimento?
5) Quais as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes para a noção de função afim, quando se considera as relações institucionais existentes?

Para abordar as questões acima se fez um estudo de alguns trabalhos **didáticos**[2] e **epistemológicos**[3] nos quais os três níveis de conhecimento têm um papel central.

Analisa-se, ainda, o funcionamento institucional dos três níveis de conhecimento para a noção de função afim conforme definição proposta por Robert (1997).

Essa análise institucional foi feita através da pesquisa de um conjunto de livros didáticos com proposta para o ensino médio e a análise das relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes é feita considerando os resultados obtidos pelos estudantes de uma escola pública do estado de São Paulo para a prova realizada pela Secretária da Educação do Estado, denominada Saresp, cujo objetivo é avaliar o

[2] **Didática:** Abordamos a questão didática como uma forma de apoio ao estudo da transmissão e aquisição dos diferentes conteúdos matemáticos, cuidando particularmente das dificuldades específicas desses conteúdos. (Artigue, 1986)
[3] **Epistemológico:** A questão epistemológica será tratada do ponto de vista de J.L. Dorier, isto é, consiste em dispor de uma análise histórica da gênese do saber (institucional) que deverá ser transmitido ou adquirido, essa análise histórica constitui um banco de dados, que já subentende uma reflexão epistemológica. (Dorier, 1997)

sistema de ensino paulista, visando melhorar sua qualidade, através da aplicação de provas para medir o desempenho dos alunos em leitura/Escrita e Matemática. Escolheu-se analisar as questões associadas à noção de função afim desta prova, pois elas refletem nossas preocupações e foram elaboradas considerando as mudanças proposta pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM 2002) e Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio +: Ciências da Natureza e suas Tecnologias (PCN +, 2005), as quais muitas já faziam parte da Proposta Curricular para o ensino de matemática: 2º grau (1992) e, sendo assim, não deveriam causar grandes dificuldades para os estudantes do ensino médio das escolas públicas desse estado. É importante ressaltar que se analisou, aqui, apenas uma pequena amostra, pois se escolheu uma escola para a qual se conhecia os livros didáticos que vinham sendo utilizados e, portanto, podia-se compreender melhor o nível de conhecimento que podia ser esperado dos estudantes no trabalho com a noção de função afim.

No desenvolvimento da pesquisa escolheu-se como referencial teórico central o trabalho de Robert (1997) sobre os três níveis de conhecimento esperado dos estudantes por tratar-se de uma análise mais global onde é necessário considerar os trabalhos de Douady (1984,1992.), Duval (1993, 1995,2003), Chevallard (1992, 1996, 1999). Além disso, para justificar a escolha de compreender a relação institucional existente através da análise de livros didáticos estudam-se o trabalho de Tardif (2002) sobre os saberes profissionais dos professores.

Isto permitiu situar esta pesquisa em relação às pesquisas acima consideradas e conduziu a descrever no capítulo 1, no qual se articula o trabalho de Robert (1997) sobre os níveis de conhecimento esperados dos estudantes com as diferentes formas de conhecimento associadas à noção de função afim e tenta-se mostrar como esse referencial teórico pode servir de base para a nossa pesquisa. Além disso, o trabalho de Robert (1997) sobre níveis de conhecimentos esperados dos estudantes faz referência as noções de quadros ou domínios, pontos de vista e registros de representação semiótica.

Em um segundo momento, estuda-se as considerações feitas nos documentos oficiais em relação à articulação entre formas de conhecimento e representações simbólicas em matemática, isto é, o que a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática no Nível Médio do Estado de São Paulo (1992), os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM, 2004) e Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio +: Ciências da Natureza e suas Tecnologias (PCN +, 2005), propõem em termos dessas articulações e quais as orientações dadas aos professores.

No capítulo 3 apresenta-se em primeiro lugar as distinções em termos de registros de representação necessários para em seguida construir a grade de análise que permite apresentar, sem exaustividade, as possibilidades de articulação entre as diferentes formas de conhecimento associadas à noção de função afim e as representações simbólicas que as sustentam. Pretende-se neste estudo mostrar a existência de um grande número de aplicações que necessitam diferentes níveis de conhecimento que, em geral, em relação à própria noção de função afim estão associados as diferentes representações e possibilidades de conversões entre eles as e que quando se considera a possibilidade de articulação entre quadros da própria matemática como, por exemplo, a geometria analítica, as grandezas diretamente proporcionais e de outras ciências como a física, a biologia, a economia exige além da escolha da representação adequada que auxilia em uma melhor interpretação da situação proposta, que se disponha de conhecimentos prévios em relação às noções que servem de ferramenta para o desenvolvimento das diferentes tarefas que podem aparecer tanto no contexto escolar como no contexto profissional, considerando aqui como profissional a situação do professor de matemática que deverá trabalhar essas noções com seus estudantes em seus cursos. Certamente, essas tarefas irão envolver as mudanças de quadros, as conversões de registros de representação semiótica e as mudanças de ponto de vista.

A grade apresentada no capítulo 3 serve de instrumento para a análise dos livros didáticos descrita no capitulo 4. Para esta análise escolhe-se observar como é proposto o trabalho sobre a noção de função afim em apenas três livros, ou seja, o livro "A matemática do ensino médio" de Elon Lages Lima e outros, destinado a professores e no qual as articulações têm um papel fundamental mesmo se tratadas de forma genérica privilegiando o registro de representação algébrico intrínseco. Os outros dois livros "Matemática. Vol. 1" de Edwaldo Bianchini e Herval Paccola "Matemática Vol. 1" de Luiz Roberto Dante são destinados aos estudantes do ensino médio e fazem parte dos livros indicados no Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio PNLM/2005 do Ministério da Educação, logo seguem a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática no Nível Médio do Estado de São Paulo (1992), os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM, 2004) e Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio +: Ciências da Natureza e suas Tecnologias (PCN +, 2005), onde as articulações entre as diferentes formas de conhecimento associadas à noção de função afim devem ser levadas em conta.

No capítulo 5 apresentam-se os resultados obtidos pelos estudantes de uma escola pública estadual, localizada em um bairro da Zona Sul de

São Paulo para as questões do SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) que versam sobre a noção de função afim e algumas das articulações propostas tanto nos documentos oficiais como nos livros didáticos destinados aos estudantes do ensino médio.

Finalmente, na conclusão retomamos tanto as questões iniciais como as que apareceram no decorrer desta pesquisa em uma tentativa de responder através das análises efetuadas quais as dificuldades encontradas e indicar algumas possibilidades de articulação entre as diferentes formas de conhecimento associadas à noção de função afim que podem auxiliar na reflexão sobre estas dificuldades para que cada um possa encontrar a melhor forma de trabalhar de forma flexível escolhendo as que são mais adequadas aos seus conhecimentos prévios ou aos conhecimentos prévios do grupo de alunos com o qual está trabalhando em um determinado momento.

CAPÍTULO 1

NÍVEIS DE CONHECIMENTO ESPERADOS DOS ESTUDANTES E A ARTICULAÇÃO DAS DIFERENTES FORMAS DE CONHECIMENTO ASSOCIADAS À NOÇÃO DE FUNÇÃO AFIM

1. Introdução

Neste capítulo desenvolve-se o referencial teórico da pesquisa, que está centrada na abordagem sobre os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes, segundo definição de Robert (1997). Essa abordagem permite estudar a articulação entre as diferentes formas de conhecimento associado à noção de função afim.

Considerando que a pesquisa está centrada na abordagem teórica sobre os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes apresenta-se, primeiramente, as abordagens teóricas que servem de apóio a esse referencial teórico central. Sendo assim, para levar em conta a articulação entre as diferentes formas de conhecimento quando se estuda a noção de função afim, considera-se a articulação de domínios conforme definição de Douady (1984), a conversão de registros de representações semióticas, segundo definições de Duval (1995), e as relações institucionais e pessoais segundo a abordagem antropologia de Chevallard (1992, 1996, 1999). Além disso, como se escolhe trabalhar com a análise de livros didáticos para compreender quais as relações institucionais existentes quando se introduz a noção de função afim, escolhe-se estudar os saberes profissionais dos professores, segundo as definições de Tardif (2002), que auxiliam a justificar a importância dos livros didáticos no trabalho diário do professor e mostram que esses podem ser considerados como referência para a análise da relação institucional existente quando se deseja estudar o desenvolvimento de uma determinada noção. Considera-se, também, neste capítulo a noção de ponto de vista, que é uma noção que não tem uma definição precisa como as outras citadas acima, mas que intervêm na análise aqui proposta, pois, atualmente, os documentos oficiais propõem que se trabalhe a função afim articulando vários pontos de vista.

Neste capítulo apresenta-se, sucessivamente, os trabalhos escolhidos sobre os quais se apóiam as análises das relações institucionais existentes através de documentos oficiais, tais como, parâmetro, proposta curricular e livros didáticos, que mesmo não sendo aplicados em sua íntegra refletem as intenções institucionais existentes e as análises das relações pessoais associadas à noção de função que são realizadas a partir de uma avaliação institucional, isto é, a prova do Saresp.

Tenta-se colocar em evidência, através dos trabalhos escolhidos, as diferentes necessidades de articulação quando se deseja uma formação que leve em conta a capacidade de um trabalho flexível no desenvolvimento de uma determinada tarefa em ciências ou matemática. É importante lembrar aqui que, em matemática, a flexibilidade cognitiva esta associada à capacidade de trabalhar em diversos domínios, podendo mudar de domínio quando necessário, sem que para isso seja feito algum apelo explícito, utilizar a representação mais adequada para a resolução de um problema, articular diferentes pontos de vista e concepções; saber planejar, analisar, desenvolver, justificar e controlar o trabalho matemático desenvolvido em uma determinada tarefa, seja ela escolar ou profissional.

Para tornar mais clara a importância de uma determinada abordagem teórica em relação ao desenvolvimento de um sujeito capaz de trabalhar de forma flexível, quando lhe é proposta uma tarefa na qual a noção de função afim deve ser utilizada, tentar-se-á dar exemplos que associem essa noção matemática com a abordagem teórica em jogo.

2. Flexibilidade cognitiva e a articulação de domínios e registros de representação semiótica e pontos de vista

Será feito um breve estudo da relação entre as abordagens teóricas em torno das noções de domínios e registros de representação semiótica, tentando mostrar sua importância no desenvolvimento de atividades matemáticas associadas à noção de função afim, sempre com o objetivo de formar indivíduos que possam dispor dos conceitos associados a esta noção de forma a aplicá-los quando necessário, não ficando presos a determinados domínios e sabendo escolher o registro de representação semiótica mais adequado quando houver necessidade.

2.1. Flexibilidade cognitiva e a articulação de domínios

Inicialmente, considera-se a questão da flexibilidade cognitiva tal como definida acima, através da articulação de domínios, conforme a definição proposta por Douady (1984).

Douady introduz a noção de domínio em sua tese em 1984 em uma perspectiva de teorização didática, baseada sobre uma análise epistemológica, que coloca em evidência:

- A dualidade dos conceitos matemáticos, em geral, funcionando como **ferramentas** implícitas e em seguida explícitas da atividade matemática antes de adquirirem o status de objeto e ser trabalhado enquanto tal.
- O papel desempenhado pelas **mudanças de domínios** nas atividades e na produção matemática.

Sendo assim, Douady define as noções de **ferramentas implícita e explícita** como:

> **Ferramenta:** implícita e explícita: Uma ferramenta pode ser implícita se ela corresponde a um conceito em elaboração, e isto pode durar vários anos. Uma ferramenta pode ser explícita se ela corresponde a uma utilização intencional de um objeto para resolver um problema. (Douady, 1992, p.134)

Douady define **objeto** como:

> **Objeto:** Por objeto, entendemos o objeto cultural tendo seu lugar em um edifício mais amplo que é o saber das matemáticas, num dado momento, reconhecido socialmente. O objeto é

> matematicamente definido, independentemente de sua utilização. O status de objeto permite a capitalização do saber e, portanto, a extensão do corpo de conhecimentos. Ele permite também o reinvestimento em novos contextos, eventualmente, muito distintos do contexto original." (Douady, 1992, p.134)

Para ilustrar as noções de ferramenta implícita e explícita e objeto definidas por Douady, escolheu-se os exemplos que seguem relacionados à noção de função afim.

Quando se introduz a noção de função afim, em geral, consideram-se exemplos do tipo:

A taxa mensal de funcionamento do telefone é de R$ 35,00. Sabendo que o preço para cada pulso utilizado é de R$ 0,05, determine:

a) Qual o valor da fatura mensal de um usuário que utiliza, em média, 10 pulsos diários?

b) Quantos pulsos foram utilizados por um usuário cuja fatura mensal foi de R$ 135,00?

c) Encontre a função para o cálculo de uma fatura de qualquer usuário, isto é, a fatura mensal em função da quantidade média de pulsos mensais.

Nas questões a) e b), deste exemplo, não é necessária a noção de função afim, pois os estudantes podem resolvê-las utilizando apenas seus conhecimentos numéricos e as quatro operações, isto é, a noção de função afim funciona aqui como uma ferramenta implícita. Mas, quando se pede para que os estudantes encontrem uma função, esses podem pensar em outros casos particulares como o proposto e determinar uma fórmula que permita calcular a fatura mensal em função da taxa mensal e da quantidade média de pulsos mensais, neste caso, os estudantes podem reconhecer a noção de função afim e trabalhar intencionalmente com essa noção.

A partir deste exemplo, quando o professor define a função afim e suas representações, isto é, através de uma fórmula, tabela, gráfico e discute com os estudantes seus casos particulares, suas propriedades e a relação existente entre essas noção e outras noções que lhe são associadas, como a noção de função linear e proporcionalidade que permitem várias aplicações em outros domínios como, por exemplo, a geometria e a economia, a função afim é trabalhada enquanto um objeto do saber matemático e utilizada como uma ferramenta explícita para desenvolver e justificar tarefas e atividades em outros domínios.

O objeto matemático como é definido por Douady, é parte de um edifício mais amplo que é o saber matemático, constituindo assim o que ela denomina **domínio**, que corresponde:

> "[...] constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do domínio. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas." (Douady,1992,p.135).

Para a noção de função afim, quando esse conteúdo é trabalhado no ensino médio, observa-se que, em geral, ele é desenvolvido em pelo menos três domínios: o domínio da álgebra, isto é, quando a função afim é definida por um conjunto formado por pares ordenados, em geral, não se utiliza a representação da função através de um conjunto de pontos representados entre parênteses, sendo mais comum representá-los por uma tabela, o que facilita a sua representação gráfica em um sistema cartesiano ortogonal; o domínio da análise matemática, quando a função é definida por uma fórmula; o domínio da geometria analítica, quando a função afim é definida através de uma representação cartesiana, isto é, a função é definida de forma implícita através de uma equação em $\mathbf{R}^2$, ou através de uma representação paramétrica, considerando um de seus pontos e um vetor diretor. Quando trabalhamos a noção de reta em $\mathbf{R}^2$ no domínio da geometria analítica, pode-se fazer a articulação com a noção de função definida em álgebra ou em análise matemática. Além disso, a noção de função afim aparece como ferramenta explícita para o quadro da mecânica em física e um dos exemplos é o estudo dos movimentos em cinemática, no qual a noção de função afim e seus casos particulares, ou seja , a função constante e a função linear, permitem através de suas propriedades que se represente matematicamente as variações de espaço, velocidade e aceleração em função do tempo.

Douady define as **mudanças de domínios**, atividades constantes no trabalho dos matemáticos, como sendo:

> "É um meio de obter formulações diferentes de um problema que sem ser, necessariamente, equivalentes, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas para fazer funcionar as ferramentas e técnicas que não se impunham na primeira formulação.[...] Quaisquer que sejam, as traduções de um domínio em outro, elas terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, na criação de novos objetos matemáticos, em suma, no enriquecimento do domínio original e dos domínios auxiliares de trabalhos". (Douady, 1992, p.135 – 136)

A transposição feita por Douady das características do trabalho dos matemáticos para o domínio da didática, constitui o que ela denomina **jogos de domínios** e **dialética ferramenta-objeto**.

Os **jogos de domínio**, organizados pelos professores, são transposições didáticas das mudanças de domínios e são vistos na teoria de Douady como meios privilegiados para suscitar desequilíbrios cognitivos e permitir a ultrapassagem desses desequilíbrios em um novo equilíbrio de nível superior. Assim, a noção de domínio é centrada no fato que uma mesma noção pode funcionar em diferentes ambientes conceituais e técnicos e que ela pode apresentar características específicas para cada um desses ambientes, sendo as diferenças existentes um dos motores e ferramentas da criação matemática.

No caso da noção de função afim, a introdução dessa noção é feita, atualmente, via exemplos numéricos com problemas do tipo "problema do táxi", para o qual deve-se pagar um determinado valor por um serviço onde se estabelece uma taxa inicial e um valor que será cobrado pela variação da quantidade de serviço prestado. Esses exemplos servem apenas como motivador para a introdução da noção de função afim, mas não necessitam dessa noção para sua solução, exigindo assim que se coloque a questão da generalização, isto é, qual o valor final y a ser pago quando se considera uma quantidade x de serviço prestado. A partir desses exemplos pode-se introduzir a noção de função afim como uma função $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ com a, b constantes e $a,b \in \mathbf{R}$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

É essa definição da noção de função afim que permite estudar suas propriedades e suas diferentes representações, assim como seus casos particulares e, dessa forma, fazer as articulações com outros domínios, sejam eles intramatemáticos como a geometria, a geometria analítica ou a matemática financeira ou extramatemáticos como a física, as ciências sociais, a economia, etc.

No exemplo acima, pode-se verificar como funciona o processo denominado por Douady de **dialética ferramenta-objeto**. Trata-se de um processo cíclico que organiza os papeis do professor e dos alunos e para o qual os conceitos matemáticos podem desempenhar o papel de ferramenta para resolver um problema, como é o caso da função afim quando aplicada em física ou um outro domínio, ou de objeto, quando definimos a função afim e assim podemos considerar suas propriedades e representações permitindo a construção de um saber organizado.

Na dialética ferramenta-objeto, em determinado momento um certo conceito matemático é objeto de estudo e em outro ele é utilizado como ferramenta implícita na construção de um novo conceito, como por exemplo, se o objeto função afim é conhecido dos estudantes, ele poderá ser utilizado como ferramenta implícita na introdução da noção de reta em $\mathbf{R}^2$ em geometria analítica.

Um outro exemplo é o caso da equação do primeiro grau, que no ensino fundamental é estudada enquanto objeto matemático e que terá "status" de ferramenta implícita quando determinamos os zeros da função afim para estudar sua variação, isto é, os intervalos em que a função é positiva e negativa. Esse estudo terá seu status de ferramenta, por exemplo, em cinemática, quando se estuda se houve ou não mudança de sentido no movimento de um corpo.

É importante observar que para Douady o objeto e sua representação se confundem, mas é preciso reconhecer que diferentes representações apontam para um mesmo objeto e apenas ao se articular essas diferentes representações é que se pode obter uma melhor concepção do objeto em questão.

Mesmo levando em conta a questão das diferentes representações de um mesmo objeto matemático, a abordagem teórica de Duval trata mais especificamente dessa questão, sendo assim, considera-se a seguir a noção de registro de representação semiótica, conforme definição de Duval, lembrando que aqui é considerada, como flexibilidade cognitiva em matemática a possibilidade de utilizar a representação mais adequada, sem que para isto seja feito nenhum apelo explícito.

2.2. Flexibilidade cognitiva e a conversão de registros de representação semiótica

Para considerar a questão da flexibilidade cognitiva como a possibilidade de utilizar o registro de representação mais adequado, sem nenhum apelo explícito, considera-se nessa pesquisa a noção de registro de representação semiótica segundo definição de Duval (1995).

A abordagem teórica em termos de registros de representações semióticas, proposta por Duval, permite analisar o conhecimento matemático através da formação, do tratamento e da conversão dos diferentes registros.

No artigo "Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática", publicado no livro "Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica", organizado por Silvia Dias Alcântara Machado (2003), Duval descreve dois tipos de transformação das representações semióticas: os tratamentos e a conversão das representações.

- Os **tratamentos** são transformações de representações dentro de um mesmo registro. Exemplo: resolver uma equação ou um sistema de equações.
- As **conversões** são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmo objetos denotados.

Duval considera os exemplos abaixo de sistemas semióticos que não são sempre reconhecidos pelos estudantes, como representantes de um mesmo objeto:

- A escrita algébrica de uma relação e sua representação gráfica;
- A escrita numérica de uma razão e sua representação geométrica sobre uma reta ou em um plano;

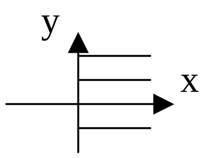
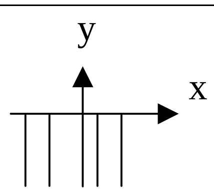
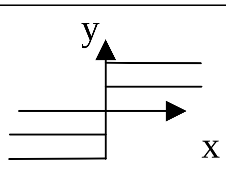
- O enunciado de uma fórmula em língua natural e a escrita dessa fórmula sob a forma literal.

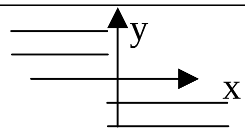
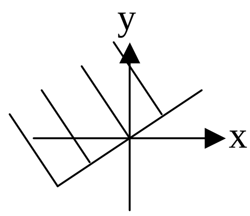
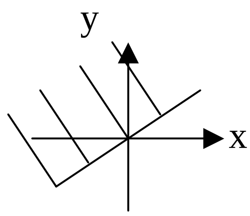
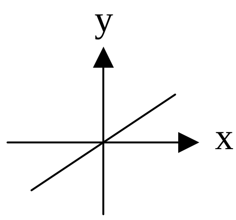
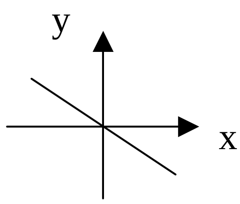
Essas dificuldades levam Duval a considerar a importância no sentido da conversão dos registros de representação, pois nem sempre a conversão se efetua quando se inverte o sentido dos registros. Exemplo: Na passagem da escrita algébrica de uma função à sua representação gráfica e vice-versa.

Para compreender melhor esta dificuldade reproduziu-se, aqui, o exemplo citado por Duval (1995) em seu livro “Sémiosis et pensée humaine” para as seguintes tarefas de conversão:

Conversão 1: Tracejar uma zona do plano descrita em língua natural

Conversão 2: Escolher entre as várias expressões algébricas (y=x, y>x, x>0, y=-x, xy ≤0...) aquela que corresponde a uma zona tracejada.

I	II	III	I→III tracejar	III → II Escolher a expressão
1...o conjunto dos pontos que tem uma abscissa positiva	$x > 0$		67%	51%
2..............que tem uma ordenada negativa	$y < 0$		67%	61%
3.......cuja abscissa e a ordenada têm o mesmo sinal	$xy \geq 0$		**56%**	**25%**
4. ....cuja abscissa e a				

ordenada têm os sinais contrários	$xy \leq 0$			**23%**
5.........cuja ordenada é superior à abscissa (reta y=x sendo traçada)	$y > x$		**38%**	**38%**
6.........cuja ordenada é superior à abscissa (reta y=x não sendo traçada)	$y > x$		19%	25%
7......cuja ordenada é igual à abscissa	$y = x$		**60%**	75%
8.....cuja ordenada é oposta à abscissa	$y = -x$		**34%**	58%

Fonte: (DUVAL, 1995 , p.55)

Para o exemplo 5, não existe diferença entre as duas conversões pois, segundo Duval: “a correspondência termo a termo entre as unidades significantes é suficiente para efetuar a conversão.” (Duval, 1995, p.46)

Para o exemplo 1, ele explica a diferença da seguinte maneira: “falta na escrita algébrica uma unidade significante que corresponda ao “positivo”. Devemos recorrer à perífrase “>0”, combinação de duas unidades significantes para ajustar essa ausência.” (Duval, 1995, p.46)

Duval dá a seguinte explicação, da diferença constatada para $xy \geq 0$:

> "Para a passagem I → III, existe correspondência semântica entre as unidades significantes da expressão lingüística da relação e de sua representação gráfica, existe igualmente univocidade semântica terminal, e a ordem considerada das unidades significantes é neutra. Cada parte do gráfico tendo um nome (" abscissa "," ordenada") e um sinal expresso por seu valor ("positivo", "negativo"), podemos, a partir de cada termo da expressão lingüística dada, encontrar de maneira pertinente a conversão das unidades semióticas elementares do gráfico. Ao contrario, para a passagem III → II não existe correspondência semântica entre as unidades significantes da expressão algébrica e o gráfico, pois nenhuma unidade semiótica no registro algébrico permite traduzir a observação "mesmo sinal para x e y". Devemos recorrer à globalização descritiva[1] das duas perífrases: ""(-).(-)>0" e "(+).(+)>)" ((Duval, 1995, p.56)

Isto o conduz a considerar que:

> "A coordenação entre as representações que dependem de sistemas semióticos diferentes não tem nada de espontâneo. [...] Um trabalho de aprendizagem específico centrado sobre a diversidade dos sistemas de representação, sobre a utilização de suas próprias possibilidades, sobre a comparação através das correspondências e sobre as "traduções" mútuas de um no outro parece necessária para favorecê-la" (Duval, 1995, p.56).

Duval considera, assim, a hipótese que uma aprendizagem desse tipo, quando as questões acima são levadas em conta, pode produzir um salto

---

[1] **globalização descritiva**: Duval define a globalização descritiva através do seguinte exemplo:
Um quadrilátero verificando uma das condições abaixo é um paralelogramo:
1. *Os dois lados opostos são paralelos;*
2. *Dois lados opostos paralelos e de mesmo comprimento. (coleção Pythagore, 1987, p.162-163)*

O enunciado (1) é um caso de globalização descritiva. Como o enunciado (2), que coordena duas proposições independentes, o enunciado (1) requer duas verificações independentes uma da outra, mas ele as formula em uma única proposição.

qualitativo no desenvolvimento das competências e das performances dos estudantes.

Duval observa, igualmente, o fato de que se, no ensino, as atividades cognitivas de formação e tratamento são consideradas, ao contrário, as atividades cognitivas de conversão são supostas como adquiridas por si só e sem relação direta com a compreensão dos objetos matemáticos nem de sua conceitualização. Muitos trabalhos em didática da matemática exploraram as análises em termos de registros, desenvolvida por Duval, e em domínios muito variados.

O exemplo acima, está bastante associado ao estudo da noção de função afim e mostra que as dificuldades de conversão podem ser muito diferentes, dependendo, inclusive, do sentido da conversão. Vale lembrar neste momento que, no ensino médio, quando se trabalha com a noção de função afim, é comum considerar as conversões entre fórmula, tabela e gráfico que, em geral, são trabalhadas nesta ordem e, certamente, sem nenhuma consideração sobre essa atividade matemática, pois como ressalta, Duval essa atividade é considerada como adquirida por si só e sem relação direta com a compreensão dos objetos matemáticos ou sua conceitualização. O que leva, em geral, os livros didáticos e, conseqüentemente, os professores a não considerarem todos os sentidos da conversão. Em geral, essas situações são tratadas através de regras aplicadas na primeira situação, isto é, para considerar a conversão entre fórmula e gráfico considera-se primeiramente pela conversão fórmula tabela, isto é, o estudante reconhece imediatamente o gráfico da função proposta e esboça seu gráfico utilizando apenas sua condição inicial que será bastante utilizada em outros domínios e seu sentido de variação, ou seja, se é ou não uma reta crescente ou decrescente. Em geral, as situações propostas exigem apenas que o estudante trabalhe em um nível puramente técnico, repetindo situações do tipo:

1º situação: Dada à lei de formação de uma função afim, construir o gráfico usando uma tabela

Nesta situação basta que o estudante faça uma correspondência entre o par ordenado obtido com valores numéricos determinados a partir da escolha de valores para a variável, em geral, x e que substitua na fórmula que representa a função e, considerando esse conjunto de pontos, represente-os em um sistema cartesiano ortogonal que após serem ligados representarão uma reta. Esse trabalho puramente técnico, se não for acompanhado de um discurso que justifique toda essa técnica e que mostre que se trata de diferentes formas de representar o mesmo objeto matemático, isto é, uma função afim, não permitirá que o estudante reconheça esse objeto em outros domínios e que possa utilizá-lo de forma autônoma, reconhecendo suas propriedades e podendo compreender suas possíveis aplicações.

2º situação: Dado o gráfico ou tabela (com pelo menos dois pontos conhecidos), achar a lei de formação da função afim.

Trata-se aqui de uma situação para a qual o estudante precisa fazer uma correspondência entre os pontos dados no traçado da reta num sistema cartesiano ortogonal ou os pontos dados através de uma tabela, com a lei de formação de uma função afim, isto é, o estudante necessita reconhecer na reta ou na variação dos valores da função através de uma tabela que essa variação é constante. Em geral, quando trabalhamos com a introdução desse sentido de conversão, verificamos que os estudantes apresentam dificuldades em compreender essas passagens do gráfico para a fórmula, muito utilizadas pelos físicos que, em geral, constroem o gráfico de uma experiência para depois encontrar a equação matemática que descreve o fenômeno. No caso particular da função afim, o estudante deverá dispor de conhecimentos sobre a solução de sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas ou de conhecimentos de trigonometria no triângulo retângulo para determinar o coeficiente a da fórmula $y = ax + b$, onde **a** é uma constante que corresponde a uma taxa de variação ou a tangente do ângulo que a reta representada em um sistema cartesiano ortogonal forma com o eixo das abscissas.

Nas situações apresentadas acima, observa-se que na mudança de sentido da conversão, além de ser necessário buscar outros modos de tratamento, é preciso aplicar outras noções matemáticas, o que exige a articulação com noções desenvolvidas anteriormente que nem sempre estão disponíveis na estrutura cognitiva dos estudantes, aumentando, assim as dificuldades por eles encontradas.

Há, ainda, o caso das situações onde o enunciado é dado em língua natural, pode-se considerar nessa categoria os chamados problemas do cotidiano, neste caso, o estudante deverá reconhecer no problema a noção ou as noções matemáticas em jogo, fazer a conversão do registro da língua natural para o registro de representação semiótica mais adequado à situação tornando a atividade de conversão mais complexa, pois exige um conjunto de operações para descrever os objetos matematicamente de forma a resolver o problema proposto. Pode-se considerar que as dificuldades dos estudantes em compreender para que serve a matemática estão, em geral, associadas a essa falta de conhecimentos que permite "traduzir" os dados de um problema e encontrar uma solução que esteja associada ao trabalho por eles desenvolvido na escola.

É importante lembrar aqui que, de acordo com Duval, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que conduz aos mecanismos subjacentes a compreensão e não apenas uma forma de tratamento, onde se aplica regras de correspondência. É necessária a articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos registros para a compreensão em matemática.

2.3 Flexibilidade cognitiva e a noção de ponto de vista

Nem sempre as atividades matemáticas estão associadas somente às mudanças de domínios ou às conversões de registros de representação semiótica, deve-se considerar, também, a noção de ponto de vista que, mesmo não tendo uma definição precisa como as apresentadas acima, é uma componente importante para as análises aqui propostas, pois como salienta Rogalski (1995):

> "Dois pontos de vista diferentes sobre um objeto matemático são diferentes maneiras de observá-los, de fazê-los funcionar, eventualmente de defini-los. Nesse sentido, observar um objeto em diferentes domínios, é considerar diferentes pontos de vista. Mas, pode-se considerar vários pontos de vista em um mesmo domínio." (Rogalski, 1995, notas do seminário de São Paulo, PUC-SP, Brasil)

Nesse seminário Rogalski apresenta diversos exemplos que permitem compreender melhor a definição acima. Escolhe-se, ainda, um exemplo em álgebra por estar mais associado ao trabalho aqui desenvolvido e por fazer uma correspondência entre a noção de ponto de vista e o registro de representação semiótica em jogo, a saber:

> "Em álgebra, uma desigualdade pode se exprimir sob diferentes formas, por exemplo:
>
> $|x-3| < 3$ $d(x, 2) < 3$ $-1 < x < 3$ $x \in]-1, 5[$, que segundo Rogalski colocam em jogo pontos de vista diferentes, mesmo se elas se exprimem todas no quadro algébrico e se situam todas no registro simbólico."

Esse exemplo, conduz a noção de função afim, pois ao estudarmos o sinal dessa função, em geral, é necessário utilizar a noção de desigualdade para expressar sua variação ou para estudar as funções produto e quociente desse tipo função.

Esse exemplo mostra que a noção de ponto de vista é muito extensiva e permite recortar várias categorias de análise o que dificulta sua caracterização.

As diferentes ferramentas de análise didática expostas acima, ressaltam a importância de um trabalho explícito de articulação entre os diferentes domínios em jogo quando da introdução de uma determinada noção matemática, assim como da conversão dos diferentes registros de representação semiótica que lhe estão associados e que podem, inclusive, permitir visualizar o mesmo objeto matemático sob diferentes pontos de vista.

Considerando a importância dessas ferramentas de análise matemática, Robert (1997) propõe a abordagem em torno dos três níveis de conhecimento esperado dos estudantes que segundo podem auxiliar ao professor a construir cenários de aprendizagem que permitam que os estudantes construam seus conhecimentos e, além disso, construam uma organização desses conhecimentos que permitam que estes disponham de pelo menos uma parte das noções visadas.

Esse trabalho poderá também auxiliar o professor na escolha dos saberes visados, como tentar-se-á mostrar na breve apresentação da abordagem proposta por Robert.

3. Os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes

Esse trabalho está centrado sobre a abordagem teórica dos três níveis de conhecimento esperados dos estudantes, segundo definição de A. Robert (1997), a saber:

O **nível técnico** corresponde a um trabalho isolado, local e concreto. Está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada tarefa.

Para o caso das funções afins, definidas dos reais nos reais, pode-se considerar os seguintes exemplos como correspondentes a um nível técnico da atividade matemática:

- Construir o gráfico da função f(x) = x + 1;
- Determinar os coeficientes a e b para a função f(x) = 2x + 3;
- Determinar o valor da função em pontos de seu campo de definição;
- Construir uma tabela a partir da função dada por uma representação fórmula;

O **nível mobilizável** corresponde a um início de justaposição de saberes de um certo domínio, podendo até corresponder a uma organização. Vários métodos podem ser mobilizados. O caráter ferramenta e objeto do conceito estão em jogo, mas o que se questiona é explicitamente pedido. Se um saber é identificado, ele é considerado mobilizado se acessível, isto é, se o estudante o utiliza corretamente.

Exemplos:

- Esboçar o gráfico da função f(x) = x + 1 e determinar seus coeficientes linear e angular;
- Identificar num conjunto de funções dadas quais são funções afim;

Nos exemplos aqui considerados; o trabalho a ser realizado é pedido explicitamente, logo, basta o estudante reconhecer a noção em jogo e mobilizar os conhecimentos necessários relativos a essa noção para resolver a tarefa proposta.

O **nível disponível** corresponde, a saber, responder corretamente o que é proposto sem indicações, de poder, por exemplo, dar contra-exemplos (encontrar ou criar), mudar de quadro (fazer relações), aplicar métodos não previstos.

Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas que o estudante sabe que as conhece (servem de terreno de experimentação), ao fato de dispor de referências, de questionamentos, de uma organização. Podendo funcionar para um único problema ou possibilitando fazer resumos.

Exemplos:

- Dada a representação gráfica de uma função, determinar sua lei de formação;
- Um operário ganha R$ 3,00 por hora de trabalho de sua jornada semanal regular, que é de 40 horas. Eventuais horas extras são pagas com um acréscimo de 50%. Encontre uma fórmula algébrica para expressar seu salário bruto semanal e uma fórmula algébrica para expressar seu salário para as semanas em que trabalha mais que 40 horas.

No caso do primeiro exemplo considerado acima, se no enunciado estivesse especificado tratar-se de uma função afim tratar-se-ia do nível mobilizável, mas como nenhuma indicação é dada, cabe ao estudante reconhecer em seu gráfico o tipo de função para determinar sua lei de formação.

No segundo exemplo, nem mesmo uma representação permite ao estudante identificar qual a função em jogo. Ele deve apresentar maior dificuldade e, em geral, os estudantes que não reconhecem na situação nada de familiar terão ainda mais dificuldades. Esse exemplo mostra que, em geral, situações desse tipo que são denominadas de “problemas cotidianos” são as que apresentam maior dificuldade, pois nem sempre fazem parte do cotidiano dos estudantes e correspondem ao nível disponível, exigindo que se reconheça nelas alguma situação familiar para que possam buscar em sua estrutura cognitiva os elementos necessários para sua solução.

Sendo assim, parece interessante verificar que tipos de situação são proposta aos estudantes, isto é, que tipo de relação institucional existe para que seja possível compreender melhor as relações pessoais que podem ser desenvolvidas.

Para isso, escolhe-se a abordagem antropológica de Chevarllard (1992), que permite levar em conta esta dimensão da análise proposta nessa pesquisa.

4. A abordagem antropológica de Chevallard

Em seu artigo “Concepts fondamentausx de la didactique” Chevallard mostra a importância da metáfora como ferramenta para o pensamento, justificando que não é ilegítimo pensar teorias e modelos em termos de imagens e representações como se pode verificar na citação abaixo:

> “Contrariamente ao que muitos pensam, eu afirmo , aqui, que toda a atividade científica (inclusive a matemática) se constitui (em sua linguagem) e se descreve (em sua metalinguagem) pela utilização das *metáforas*. O pensamento se torna forte quando se apóia em metáforas; mas geralmente, a “retórica” aparece constitutiva da atividade científica como de toda a economia gnosiológica. Não é, portanto, “a priori”, ilegítimo pensar teorias e modelos em termos de imagens e representações. Mas, o grande problema, deve-se, aqui, a escolha das

> “boas” metáforas, das metáforas realmente fecundas, e de seu controle.” (Chevallard, 1992, p.76)

Ainda se referindo a questão das metáforas como uma ferramenta importante para pensar teorias e modelos em termos de imagens e representações, Chevallard cita como exemplo a alta de audácia dos matemáticos gregos em considerar as relações entre naturais como números.

> “Os matemáticos gregos, dessa forma, não souberam olhar para as relações entre naturais *como números*. Faltou a eles audácia para assumir essa metáfora, e esse grande respeito pelas conveniências culturais fez obstáculo para o desenvolvimento da ciência que eles haviam sido os criadores.” (Chevallard, 1992, p.76)

Sendo assim, para Chevallard, a atividade matemática, como toda atividade humana é composta por um certo número de tarefas. Para cumprir essas tarefas, são desenvolvidas as técnicas, que para se tornarem viáveis devem ser compreensíveis e justificáveis, dando assim lugar ao desenvolvimento das “tecnologias” ou discurso sobre as técnicas, essas tecnologias sendo, por sua vez, objetos de novas tecnologias que Chevallard identifica como teorias.

Estudando a questão da articulação de domínios e pontos de vista e a conversão de registros de representação semiótica em relação à noção de função afim, lembrando que essas articulações que permitem ao estudante um trabalho flexível e considerando que esse trabalho emerge de um certo número de práticas matemáticas, parece importante tentar compreender em que tipos de tarefas ela pode, “*a priori*”, viver e se desenvolver, identificar as técnicas matemáticas existentes para efetuar essas tarefas, determinar os diferentes níveis de discurso que são suscetíveis de acompanhar essas técnicas, a título de comentários e justificativas, explorando a distinção entre tecnologia e teoria. Esse tipo de análise pode auxiliar a compreender melhor as práticas institucionais existentes, permitindo, assim, determinar como são exploradas as margens de manobra habitualmente utilizadas e, em seguida, tentar compreender seus efeitos sobre as relações construídas pelos estudantes em relação as abordagens consideradas.

A abordagem antropológica de Chevallard e a desenvolvida por Duval se reúnem pelo interesse que as duas darão à questão semiótica e por recusarem essa dimensão da atividade matemática como um simples subproduto da conceitualização. Para Chevallard, esse interesse e essa recusa irão se exprimir via as noções de ostensivos e não ostensivos e pelo princípio das relações dialéticas existente entre seus desenvolvimentos.

> "De um lado, existem os objetos que denomino ostensivos, como um nome, uma notação, um gráfico, ou ainda um esquema gestual, que podem estar realmente presentes e que podemos manipular efetivamente na sua materialidade. Por outro lado, existem os objetos não ostensivos, que denomino também emergentes, e que somente podemos evocá-los com a ajuda dos objetos ostensivos. Quando o matemático diz que manipula a função logarítmica, na realidade, serão certos objetos ostensivos que ele manipula. Bem entendido, os objetos ostensivos e não ostensivos tem sua existência e vivem em conjunto no interior da prática matemática que os reúne: eles se determinam reciprocamente. Só posso "manipular" a função logarítmica através de certos objetos ostensivos que lhe são associados; mas, inversamente, não posso manipular esses objetos como o faço quando eu pretendo manipular a função logarítmica se não existe para mim o objeto "Função Logarítmica"." (Chevallard, 1996, p.50)

Rejeitando, referindo-se a Derrida, o logocentrismo de nossas civilizações européias, Chevallard insiste sobre o fato que a utilização de palavras na atividade matemática só pode ser compreendida a partir da idéia englobante de ferramenta ou instrumento semiótico:

> "No lugar de tentar compreender o formalismo matemático como linguagem (formal), devemos, ao contrário, pensar na linguagem (verbal) como elemento da panóplia de instrumentos semióticos do trabalho matemático. [..] A noção de instrumento semiótico constitui o ponto de partida de uma teoria unitária do trabalho matemático. As palavras, os símbolos – aritméticos e algébricos, e aqueles de todos os formalismos que quisermos -, os próprios gestos, articulados em sistemas de regras de trabalho são, todos em conjunto, os instrumentos concretos – ostensivos – do trabalho matemático. Todo sistema de trabalho, segundo essa óptica, supõe a combinação de vários registros semióticos – oral, escrito, gestual." (Chevallard, 1996, p.52 – 53)

Os instrumentos de análise expostos acima, tentam ressaltar a importância de trabalhar com os diferentes sistemas de representação simbólica que, certamente, são fonte de dificuldade para os estudantes.

Além disso, a abordagem teórica proposta por Chevallard permite pensar de forma unificada os fenômenos didáticos encontrados em função das diferentes análises aqui propostas.

Em seu artigo "Concepts fondamentaux de la didactique", Chevallard apresenta um modelo que ele mesmo considera quase axiomático, que permite situar melhor as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes em relação as relações institucionais existentes e que nos auxilia a compreender melhor qual o nível que será escolhido para desenvolver uma determinada noção matemática, em um determinado momento, para um determinado público.

Para desenvolver sua teoria, Chevallard inicia introduzindo três termos primitivos e utiliza a forma de desenvolvimento de uma teoria axiomática de matemática, como se verifica na citação abaixo.

> “Três termos primitivos são necessários para iniciar (outros irão se juntar no que segue): os objetos O, as pessoas X, as instituições I. Os objetos, apesar disso, ocupam aqui uma posição privilegiada; ele são o “material e base” da construção teórica visada. Analogamente, no universo matemático contemporâneo, fundamentado sobre a teoria dos conjuntos, tudo é conjunto (os próprios números naturais são conjuntos), analogamente, no universo que eu considero, *tudo é objeto*. As pessoas X e as instituições I, assim como as outras entidades que serei conduzido a introduzir, *são, portanto, objetos de um tipo particular*. Por esta razão, ficarei um certo instante sobre a noção genérica de objeto, que a teoria coloca assim no princípio de seu desenvolvimento. Do ponto de vista da “semântica” da teoria, qualquer coisa pode ser um objeto. Um objeto existe no momento em que uma pessoa X ou uma instituição I reconhece esse objeto como *existente* (para ela). Mais precisamente, diremos que o objeto O *existe para* X (respectivamente, *para* I) se existe um objeto, que indicarei R(X, O) (resp.R_I(O)), que denominarei *relação pessoal de* X a O (resp. *relação institucional de I a O*). Em outros termos, o objeto O existe se existe pelo menos uma pessoa X ou uma instituição I, isto é, pelo menos uma pessoa ou uma instituição tem *uma relação com este objeto.* [...] Adicionarei aqui uma outra noção: a de *conhecimento, conhecer um objeto O*, no sentido da teoria apresentada (e não no sentido das diversas instituições que ele deve nos permitir de estudar), é – para uma pessoa como para uma instituição – ter uma relação com O. A pessoa X (ou a

> instituição I) conhece O se existe R(X,O) (respectivamente, $R^I(O)$). Podemos, então dizer que um objeto existe se ele é conhecido por pelo menos uma pessoa ou uma instituição (ele poderá, apesar disso, existir apenas – caso limite – para esta pessoa ou para esta instituição). Um objeto só existe quando ele é *objeto do conhecimento*. O quadro conceitual que acabo de esboçar é o que denominarei antropologia do conhecimento ou antropologia cognitiva." (Chevallard, 1992, p.86 – 87)

Além da abordagem antropológica de Chevallard ser útil para reunir um grande número de fenômenos didáticos, nesta pesquisa ela é utilizada mais particularmente para justificar as relações pessoais encontradas na análise dos resultados do Saresp em função da relação institucional existente, cujos resultados estão fundamentados na análise dos livros didáticos.

Para justificar a escolha da análise institucional, através dos livros didáticos, escolhe-se o trabalho de Tardif (2002), que trata mais especificamente dos saberes profissionais dos professores.

5. Saberes profissionais dos professores

Buscou-se em Tardif (2002) identificar os saberes profissionais dos professores, e, mais particularmente, compreender como os saberes provenientes dos programas e dos livros didáticos são utilizados no seu trabalho diário, isto é, se a utilização de programas, livros didáticos, cadernos de exercícios e fichas pode se considerada como uma relação institucional de um determinado objeto com a finalidade de justificar nossa análise institucional baseada em livros didáticos.

Segundo Tardif:

> "De fato, os professores utilizam constantemente seus conhecimentos pessoais e um saber-fazer personalizado, trabalham com seus programas e livros didáticos, baseam-se em

> saberes escolares relativos às matérias ensinadas, fiam-se em sua experiência e retêm certos elementos de sua formação.(Tardif, 2002, p.64).

Segundo Tardif, os saberes profissionais dos professores estão entre várias fontes de saberes que ele tenta classificar através das fontes sociais de aquisição e dos modos de integração desses saberes ao trabalho docente e que é possível visualizar através da tabela abaixo.

Saberes profissionais dos professores	**Fontes sociais de aquisição**	**Modos de integração no trabalho docentes**
Saberes pessoais dos professores	Família, ambiente de vida, educação	História de vida e socialização primária
Saberes provenientes da formação escolar anterior	A escola primária e secundaria, os estudos pós-secundários não especializados	Formação e socialização pré-profissionais
Saberes provenientes da formação profissional para o magistério	Instituição de formação, estágios, cursos de capacitação	Formação e socialização profissionais nas instituições de formação
Saberes provenientes dos programas e dos livros didáticos usados no trabalho	Utilização de programas, livros didáticos, cadernos de exercícios, fichas	Utilização das "ferramentas" de trabalho e adaptação às tarefas
Saberes provenientes de sua própria experiência na profissão, na sala de aula e na escola	Prática do ofício na escola e na sala de aula, a experiência dos pares	Pela prática do trabalho e pela socialização profissional

Fonte: Saberes Docentes e Formação Profissional. Maurice Tardif, 202 p. 63

Verifica-se através da tabela acima, que os programas e os livros didáticos são utilizados pelos professores como ferramentas para a elaboração de tarefas propostas aos estudantes. No quadro acima, propostos por Tardif, não encontram saberes provenientes de pesquisas mais avançadas, isto é, segundo a citada tabela, em geral, os professores não utilizam trabalhos de pesquisa da área de educação e, em particular, para o caso do ensino da matemática, trabalhos de pesquisas em educação matemática para auxiliar nas reflexões e na construção de seus próprios cenários quando da introdução de uma noção ou no desenvolvimento de tarefas que auxiliem os estudantes a desenvolverem as articulações aqui propostas nos diferentes níveis considerados por Robert.

Na realidade, pode-se considerar que, em geral, essas articulações e os diferentes níveis apresentados neste trabalho só serão utilizados a partir do momento que os livros didáticos apresentarem esse tipo de trabalho, mas deve-se lembrar que para que ele atinja realmente o professor, é necessário que seja acompanhado de um discurso que o justifique. Caso contrario, muitos ficarão perdidos e dificilmente irão compreender a razão de se trabalhar uma mesma noção articulando diferentes domínios e pontos de vista e efetuar conversões sistemáticas de representações de forma a permitir que o estudante tenha acesso ao conceito e possa dispor deste conhecimento para aplicá-lo quando necessário.

CAPÍTULO 2

OS DOCUMENTOS OFICIAIS E A ARTICULAÇÃO DAS DIFERENTES FORMAS DE CONHECIMENTO ASSOCIADAS À NOÇÃO DE FUNÇÃO AFIM

1. Introdução

Desde 1986 existe uma Proposta Curricular para o ensino médio no estado de São Paulo e a partir de 1999 foram introduzidos os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio.

Este capítulo mostra uma breve reflexão sobre as articulações que são levadas em conta, tanto na Proposta Curricular do Estado de São Paulo quanto nos Parâmetros Curriculares Nacionais, para compreender melhor a relação institucional que se deseja desenvolver no ensino médio em relação à noção de função afim.

2. A Proposta Curricular para o Ensino de Matemática no nível ensino médio do Estado de São Paulo e a articulação entre formas de conhecimento e representações simbólicas em matemática

A proposta Curricular para o Ensino de Matemática – 2º grau do Estado de São Paulo (1992), independente do número de aulas semanais ao longo do curso de matemática, considera importante trabalhar com a noção de função afim, em todas as opções de distribuição de conteúdos para a 1º série do ensino médio das escolas públicas do Estado de São Paulo.

Ao examinar esta proposta, nota-se que, desde 1992, ano em que foi publicada a sua 3º edição, já se tratavam em seu texto as questões associadas à articulação do conteúdo de função afim com outros objetos da própria matemática, como pode ser observado nas considerações abaixo:

> - As seqüências, principalmente a Progressão Aritmética, sejam tratadas como função afim, cujos domínios são subconjuntos dos números naturais
>
> - Situações que pretendam ser significativa para o aluno no sentido de relacionar Função Linear com grandezas diretamente proporcionais.

> -É importante relacionar o coeficiente angular com a inclinação da reta que representa graficamente a função afim.
>
> (Proposta Curricular do Estado de São Paulo, 1992, p.23)

Nessas considerações, sobre a articulação da noção de função afim com outros objetos matemáticos, verifica-se que existem objetos como a função linear e o coeficiente angular da reta que são noções que devem ser desenvolvidas simultaneamente com a noção de função afim e que permitem a articulação dessa noção com diferentes domínios, sejam eles intramatemáticos, como o domínio da geometria analítica, ou extramatemáticos como o domínio da física para a qual, em geral, na primeira série do ensino médio considera o estudo dos movimentos no qual a noção de função afim é essencial para a representação matemática dos fenômenos estudados. Além disso, a proposta exige que se trabalhe com os estudantes do ensino médio em um nível disponível em relação aos conhecimentos, por exemplo, de proporcionalidade, já considerados no ensino fundamental. É neste momento que os professores podem retomar essa noção e desenvolver de forma mais significativa suas propriedades, aproveitando para desenvolver a articulação extramatemática, isto é, considera os exemplos de aplicação no campo das finanças e economia.

Além de fazer considerações que colocam em evidência a importância das articulações entre os diferentes domínios da própria matemática e domínios extramatemáticos a Proposta Curricular do Estado de São Paulo estabelece os seguintes objetivos específicos para o estudo da noção de função afim.

> - Reconhecer, pela lei de associação se uma função é uma função fim ou se é de outro tipo.
> - Entender por que os gráficos de função afim são retas. - Construir gráficos da função afim e utilizar esses gráficos como instrumentos de análise.
>
> (Proposta Curricular do Estado de São Paulo, 1992, p.53)

Quando analisados os objetivos específicos da proposta, pode-se dizer que, mesmo que não se utilizem explicitamente às noções de registro de representação semióticas, é sobre este aspecto que se fundamentam esses objetivos, pois nessa etapa da escolaridade pretende-se que os estudantes relacionem as representações do objeto função afim com suas propriedades para que sejam capazes de aplicá-las no diferentes domínios da própria matemática e em outros domínios. Verifica-se, aqui, que nesses objetivos é dada uma ênfase ao registro de representação gráfica e o objetivo do trabalho com esta representação servir como ferramenta de análise do trabalho desenvolvido.

Sendo assim, de modo geral, em Matemática, o conteúdo a ser ensinado nessa etapa da escolaridade é um veículo para o desenvolvimento de uma série de ideais fundamentais, que, convenientemente articuladas, têm como objetivo principal à instrumentação para o trabalho cotidiano e o desenvolvimento do raciocínio.

Para isso, pode-se resumir o trabalho a ser efetuado na primeira série do ensino médio como o desenvolvimento de:

- Um programa onde as noções neles consideradas tenham um significado para o aluno;
- O tratamento significativo dos conteúdos supõe que esses devem levar em conta a realidade do aluno, suas aspirações, seu estágio de desenvolvimento biológico, psicológico e intelectual;
- As tarefas propostas aos estudantes devem servir para gerar a construção de conceitos, isto é, ao se trabalhar com tarefas onde o conceito funciona como ferramenta implícita pode-se, posteriormente, ter acesso às ferramentas implícitas até que se compreenda a noção como um objeto dentro do edifício do saber

matemático que permitirá sintetizar idéias já trabalhadas de forma a aplicá-las em outras situações ou tarefas nas quais estes conhecimentos estão em jogo, mas exigem que os próprios estudantes os reconheçam e os apliquem de forma disponível;

- O ensino da Matemática deve ser articulado dentro da própria matemática, bem como fora dela, e as tarefas propostas aos estudantes devem levar em conta tanto este trabalho intramatemático como o trabalho extramatemático uma vez que, em sua vida profissional e na continuidade de seus estudos, os estudantes serão levados a resolver problemas interdisciplinares, onde a noção de função afim, que foi desenvolvida no ensino médio, deverá estar disponível para auxiliar no planejamento, desenvolvimento, justificativo e controle de tarefas que exigem a aplicação dessa noção;

3. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM e PCN+) e a articulação entre formas de conhecimento e representações simbólicas em matemática

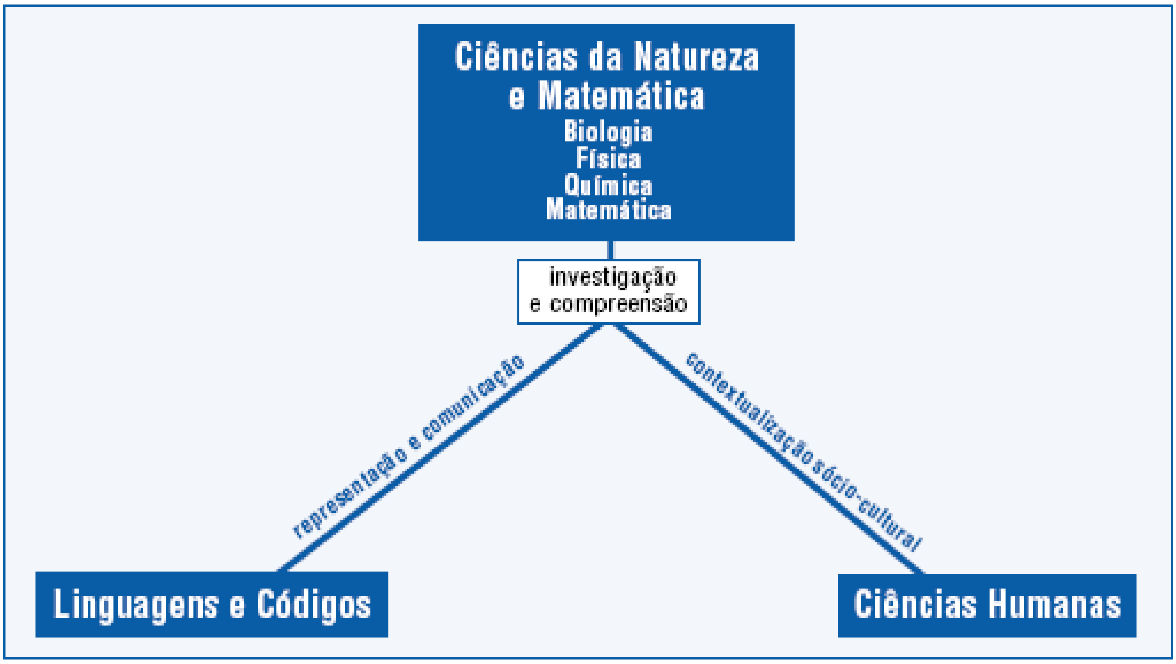
Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médios (PCNEM e PCN+), relativos à matemática, apresentam as finalidades do ensino da disciplina, tanto do ponto de vista de sua aplicação quanto dos conteúdos a serem trabalhados.

> *"...objetivos educacionais que organizam o aprendizado nas escolas do ensino médio em termos de conjuntos de competências. São eles:* ***representação e comunicação****;* ***investigação e compreensão****; e* ***contextualização sócio-cultural****, objetivos que convergem com a área de Linguagens e Códigos. As características comuns à Biologia, à Física, à Química e à Matemática recomendam uma articulação didática e pedagógica*

interna à sua área na condução do aprendizado, em salas de aula ou em outras atividades dos alunos.”

(PCN + ,Orientações Educacionais complementares, 2004, p.23)

O diagrama a seguir expressa como as áreas das Ciências da Natureza e da Matemática articulam-se com a área de Linguagens e Códigos, sobretudo através do desenvolvimento das competências de **representação e comunicação,** e com a área de Ciências Humanas, especialmente pelo desenvolvimento das competências de **contextualização sócio-cultural**.



Fonte:PCN + ,Orientações Educacionais complementares, 2004, p.25

Nesse trabalho, consideram-se apenas os PCNEM e PCN+ relativos à matemática, destes apresenta-se, aqui, as finalidades do ensino desta disciplina, tanto do ponto de vista de sua aplicação quanto das noções a serem trabalhadas. Dando-se um enfoque especial ao tratamento da noção de função afim.

Escolhe-se o texto abaixo, para que o leitor tenha uma dimensão da nova proposta para o desenvolvimento desse conteúdo, nesse texto observa-se que existe uma preocupação com o trabalho articulado dessa noção com as noções de progressões, as noções associadas ao domínio da geometria analítica, as noções de polinômio que devem permitir aos estudantes uma articulação intramatemática e, além disso, o texto mostra a importância desse trabalho para desenvolver as habilidades de leitura, interpretação dos registros de representação gráfica, mesmo se não tratam a questão com essa terminologia, incluindo a articulação com outros domínios como a física, a economia, etc. e com situações que podem ser encontradas no cotidiano.

Álgebra: números e funções

> [...], Álgebra, na vivência cotidiana se apresenta com enorme importância enquanto linguagem, como na variedade de gráficos presentes diariamente nos noticiários e jornais, e também enquanto instrumento de cálculos de natureza financeira e prática, em geral. No ensino médio, esse tema trata de números e variáveis em conjuntos infinitos e quase sempre contínuos, no sentido de serem completos.[...] Para o desenvolvimento desse eixo, são propostas duas unidades temáticas: **variação de grandezas** e **trigonometria**. Os procedimentos básicos desse tema se referem a calcular, resolver, identificar variáveis, traçar e interpretar gráficos e resolver equações de acordo com as propriedades das operações no conjunto dos números reais e as operações válidas para o cálculo algébrico. Esse tema possui fortemente o caráter de linguagem com seus códigos (números e letras) e regras (as propriedades das operações), formando os termos desta linguagem que são as expressões que, por sua vez, compõem as igualdades e desigualdades. O **estudo das funções** permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre

grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática.[...] Tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações.[...] A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas.[...] Com relação às **seqüências,** é preciso garantir uma abordagem conectada à idéia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas. [...] Com relação à álgebra, há ainda o estudo de **equações polinomiais** e de **sistemas lineares**. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural,[...], aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento.[...] (PCN + ,Orientações Educacionais complementares, 2004, p.121e 122)

Os conteúdos e habilidades propostos para variação de grandezas são:

- noção de função; funções analíticas e não-analíticas; representação e análise gráfica; seqüências numéricas: progressões e noção de infinito; variações exponenciais ou logarítmicas; funções seno, cosseno e tangente; taxa de variação de grandezas.

•Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências, necessária para expressar relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e fazendo conexões dentro e fora da Matemática.

• Compreender o conceito de função, associando-o a exemplos da vida cotidiana.

• Associar diferentes funções a seus gráficos correspondentes.

• Ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas.

• Identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis.
(PCN + ,Orientações Educacionais complementares, 2004, p.123)

As finalidades do ensino de matemática no nível médio, que são propostas no tópico de função afim, devem desenvolver Competências e Habilidades que estão associadas à Representação e Comunicação, Investigação e compreensão e Contextualização sociocultural. Apresenta-se, abaixo, a relação das Competências e Habilidades propostas no PCNEM, onde é possível verificar a importância do trabalho com as diferentes representações, incluindo a sua utilização correta e adequada para desenvolver textos onde a matemática terá seu papel de ferramenta para descrever de forma clara e precisa o fenômeno que está sendo observado, o que inclui um trabalho interdisciplinar, mesmo se essas dimensão não aparecem explicitamente nesse texto. Nesse sentido, é importante observar o tratamento dado à linguagem matemática e sua articulação com a língua materna, lembrando que esse trabalho exige uma atenção especial, pois é necessário um trabalho especial de conversão entre o registro simbólico, muito utilizado em matemática, e a língua materna.

Representação e Comunicação

Na área:
Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométrica
Em Matemática:
• Ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas.

• Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem discursiva em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa, assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações.

• Selecionar diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações, reconhecendo as vantagens e limites de cada uma delas; por exemplo, escolher entre uma equação, uma tabela ou um gráfico para representar uma dada variação ao longo do tempo, como a distribuição do consumo de energia elétrica em uma residência ou a classificação de equipes em um campeonato esportivo.

(PCN + ,Orientações Educacionais complementares, 2004, p.114)

Investigação e Compreensão

Na área:

Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas do conhecimento.

Em Matemática:

• Identificar os dados relevantes em uma dada situação problema para buscar possíveis resoluções; por exemplo, em situações com uma diversidade de dados apresentados por meio de tabelas, gráficos, especificações técnicas, reconhecer as informações relevantes para uma dada questão que se busca resolver.

•Identificar em dada situação problema as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para resolvê-la.

•Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada.

(PCN + ,Orientações Educacionais complementares, 2004, p 115 e 117)

Contextualização sócio-cultural

> Na área:
>
> Compreender a ciência e a tecnologia como partes integrantes da cultura humana contemporânea.
>
> • Compreender formas pelas quais a Matemática influencia nossa interpretação do mundo atual, condicionando formas de pensar e interagir. Por exemplo, comparando os cálculos feitos pelas máquinas com aqueles feitos "com lápis e papel", e identificando a função, especificidades e valores de cada um desses meios na construção do conhecimento.
>
> (PCN + ,Orientações Educacionais complementares, 2004, p.118)

A rápida consideração de alguns pontos relativos às propostas do PCNEM, mostra a importância dada a articulação de domínios e do tratamento de aplicações associadas ao contexto do estudante que são denominadas "situações cotidianas". Pode-se verificar, ainda, a ênfase dada ao trabalho sobre os diferentes registros de representação da noção de função afim que supõe a conversão de registros, mesmo se essa terminologia não é utilizada no texto. Além disso, o texto deixa evidente a importância desse trabalho e do estudo da noção de função para a preparação cientifica dos estudantes. É importante ressaltar, também, a importância do trabalho interdisciplinar que aparece através dessas propostas de articulação.

4. Conclusão

Os trechos do texto aqui apresentados mostram que os PCNEM propõe ao professor um trabalho onde as mudanças de domínios, conversão de registros de representação semiótica e mudanças de pontos de vista, mesmo se não tratadas com esta terminologia, são componentes essenciais que devem ser trabalhadas no ensino médio para desenvolver uma certa autonomia nos estudantes que os permita trabalhar de forma flexível, isto é, desenvolver nos estudantes a capacidade de questionar e buscar respostas dentro do seu universo de conhecimentos e quando verificar que este não é suficiente ter autonomia para ir além o que já permite a inserção no mundo da pesquisa.

Verifica-se que nos PCNEM existe uma preocupação de colocar em evidência as possibilidades de articulação entre os conhecimentos matemáticos que devem ser trabalhados no ensino médio do ponto de vista intramatemático, isto é, exigindo que os estudantes disponham de outros conhecimentos tanto do próprio domínio em que se desenvolve o conceito de função afim, quanto em outros domínios como, por exemplo, o domínio da geometria analítica. Mesmo se a questão de domínio não é tratada explicitamente, é possível reconhecê-la quando se propõe o estudo de funções afins articuladas com as progressões aritméticas, geometria analítica e estudo das funções polinomiais. Além disso, existe uma preocupação em mostrar que esse tipo de articulação, do ponto de vista introdutório, é importante para enriquecer o enfoque algébrico tradicional. Sendo assim, parece interessante observar que se trata de uma tentativa de enriquecimento do trabalho que vem sendo realizado, pois exige uma atenção maior de professores e estudantes que, ao invés de estudarem diferentes conceitos matemáticos isoladamente, necessitam articular esses conhecimentos e, conseqüentemente, suas representações simbólicas efetuando as conversões necessárias e muitas vezes necessitando, também, efetuar mudanças de pontos de vista. Além disso, os PCNEM propõem que se leve em conta os diferentes domínios extramatemáticos, tais como a Física, a Geometria e a Economia entre outros, que, da mesma forma, exigem as mudanças de domínio, as conversões de registros de representação semiótica e as mudanças de ponto de vista já consideradas do ponto de vista intramatemático.

Sendo assim, é importante observar que, mesmo não sendo colocado de forma explícita nos PCNEM, a articulação extramatemática supõe um trabalho que exige um compromisso real por parte dos estudantes, pois para que esses disponham dos conceitos necessários e das articulações em jogo, isto é, sejam capazes de mudar de domínio, efetuar conversões de registros, mudar de pontos de vista, sem que um apelo explícito seja feito, é necessário que se desenvolva uma organização desses conhecimentos, que se tenha um certo número de situações de referência, o que exige tempo, concentração e disposição do estudantes para efetuar seu próprio desenvolvimento, ou seja, o estudante deseja realmente se inserir no mundo científico e preparar-se para o trabalho nesse mundo.

Aqui, torna-se evidente a dificuldade que deverá ser enfrentada pelo professor, pois são necessários dois tipos de articulação, uma intramatemática e uma extramatemática, e cabe ao professor construir o seu curso levando em conta esses dois tipos de articulação, não esquecendo que é necessário desenvolver, também, as noções associadas ao domínio que está sendo estudado, assim como suas diferentes representações simbólicas para que o estudante seja capaz de aplicá-las de forma disponível, isto é, saber qual a noção em jogo em uma determinada tarefa e escolher representação mais adequada para desenvolvê-la.

Além da conversão entre os diferentes registros de representações simbólicas, o texto propõe um trabalho de conversão entre os diferentes registros de representação simbólica próprios da matemática e a língua materna, a associação é imediata quando se dispõe desse conhecimento, mas isto exige também a atenção do professor, pois não é sempre o caso e exige também que se trate a questão do ponto de vista da conversão.

Reconhecem-se, ainda, na proposta dos PCNEM, que os estudantes do ensino médio devem ser capazes de aplicar seus conhecimentos matemáticos em situações do mundo real, o que supõe que o mesmo disponha desses conhecimentos para aplicá-los quando necessário.

Considerando todas as necessidades de articulação proposta acima e que o que se deseja é formar indivíduos que utilizem a matemática de uma forma flexível, isto é, desenvolvendo as atividades que lhe são propostas, utilizando como forma de trabalho a mesma forma utilizada pelos matemáticos, se reconhece, aqui, que o nível de conhecimento esperado dos estudantes em relação às noções desenvolvidas no ensino médio é o disponível, o que supõe um trabalho articulado com os níveis técnico e mobilizável que fica ainda mais evidente nas sugestões encontradas no PCNEM relativas ao trabalho a ser efetuado com a noção de função afim.

Cabe ao professor construir seu curso de forma a favorecer o desenvolvimento do estudante para que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em tarefas que exigem qualquer um dos três níveis (técnico, mobilizável e disponível) e ao estudante de entrar no jogo proposto..

Os PCNEM vêm de encontro com a proposta dessa pesquisa que pretende contribuir para a reflexão sobre as questões de articulação entre formas de conhecimento e representações simbólicas através das noções domínio, segundo definição de Douady (1992) de registro de representação semióticas, conforme definição de Duval (1995), de níveis de conhecimento esperados dos estudantes, conforme definição de Robert (1997), e de pontos de vista para a qual na existe uma definição especifica, mas que para esse trabalho considerou-se a reflexão em relação a essa noção efetuada por Rogalski (1995).

É importante observar, ainda, que os PCNEM consideram a matemática como uma linguagem, para a qual existem diferentes registros de representações simbólicas mesmo, se esse termo não é utilizado explicitamente no texto, devem ser trabalhados entre eles, o que supõe implicitamente a atividade de conversão, proposta por Duval.

As observações acima mostram que no sentido proposto pela abordagem antropológica de Chevallard (1996) existe uma intenção institucional de que se desenvolva com os estudantes um trabalho como o que está sendo discutido nessa pesquisa ficando para o professor e para o aluno um grande trabalho que permitirá não somente um desenvolvimento para o trabalho científico, mas também para a inserção no mercado profissional que exige cada vez mais indivíduos bem preparados que são capazes de articular diferentes conhecimentos e que trabalhar com esses conhecimentos de forma flexível em grupos multidisciplinares.

CAPÍTULO 3

ESTUDO DAS POSSIBILIDADES DE ARTICULAÇÃO ENTRE AS DIFERENTES FORMAS DE CONHECIMENTO ASSOCIADAS À NOÇÃO DE FUNÇÃO AFIM

1. Introdução

Neste capítulo estudam-se as possibilidades de articulação entre as diferentes formas de conhecimento associadas à noção de função afim, pretendendo-se com esse estudo mostrar a existência de um grande número de aplicações que necessitam diferentes níveis de conhecimento que, em geral, em relação à própria noção de função afim, estão associados às diferentes representações e possibilidades de conversões entre eles que quando se considera a possibilidade de articulação entre quadros da própria matemática, por exemplo, a geometria analítica, as grandezas diretamente proporcionais e de outras ciências como a física, a biologia, a economia, exigem, além da escolha da representação adequada, que auxilia em uma melhor interpretação da situação proposta, que se disponha de conhecimentos prévios em relação às noções que servem de ferramenta para o desenvolvimento das diferentes tarefas que podem aparecer tanto no contexto escolar como no contexto profissional, considerando, aqui, como profissional a situação do professor de matemática que deverá trabalhar essas noções com seus estudantes em seus cursos. Certamente, essas tarefas irão envolver as mudanças de quadros, as conversões de registros de representação semiótica e as mudanças de ponto de vista.

Considerando as necessidades acima apresentadas e que a noção de função afim é indispensável para o estudo da Álgebra, Análise, Física, Economia e outros domínios da própria Matemática ou de outras ciências, isto é, ela deve ser uma ferramenta disponível para o trabalho nestas disciplinas ou áreas. Sendo assim, ela pode ser apresentada sob diversas formas e em situações bastante diversificadas, impondo vários desafios para o ensino aprendizagem desta noção.

Quando se considera sua introdução no contexto escolar, verifica-se que, em geral, ela é trabalhada com uma ênfase sobre suas representações no primeiro ano do ensino médio e logo o estudante é levado a utilizar tabelas, expressões algébricas e gráficos que serão aqui, tratados como registros de representação, segundo a definição de Duval (1995).

Neste momento, é importante lembrar que, para Duval, um conceito só é entendido em toda sua extensão quando há uma coordenação de registros de representação. Para isso, ele considera muito importante a atividade de conversão dos registros de representação, lembrando que, nem sempre dois sentidos da conversão impõem as mesmas dificuldades.

Desta forma, consideram-se, aqui, algumas das possíveis representações semióticas da função afim que são utilizadas, em geral, nos livros em que se introduz esta noção nos ensinos médio e superior.

2. As representações semióticas da função afim

Para as representações semióticas de função afim, distinguiram-se alguns registros de representação de função, para melhor compreensão das possibilidades de conversão entre esses registros e de suas necessidades quando se trabalha com a questão da articulação entre formas de conhecimento e representações semióticas.

- **Registro de representação algébrico intrínseco** a função afim é representada por um polinômio do 1ºgrau; definida por $f: A \rightarrow B$, tal que $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbf{R}$ e $x \in A$, com $a \neq 0$, e A e B dois conjuntos, em geral esse registro é utilizado para as definições e generalizações.
- **Registro de representação algébrico explícito** a função afim também é representada por um polinômio do 1º grau, mas neste caso a e b assumem valores em **R,** isto é, este registro é empregado para distinguir os valores numéricos reais para trabalhar com os casos

particulares. Exemplos: $f(x) = 2x + 3$; $y = 3x - 4$; $C(t) = 7 + 0{,}01t$; $a_5 = 8 + 3r$;

- **<u>Registro de representação da língua natural</u>** a função afim é interpretada por um conjunto de palavras apresentadas em um texto.

Além do **registro de representação algébrico intrínseco, registro de representação algébrico explícito e** do registro da **língua natural** distinguiu-se, ainda, os seguintes registros de representação para a função afim:

- **<u>Registro de representação algébrico intrínseco flecha</u>**: a função afim é definida como $f: A \rightarrow B$, tal que $x \mapsto a + b$ com $a, b \in R$, $x \in A$, $a \neq 0$. Também empregado para definições e generalizações. Esse registro mostra a dinâmica da transformação de um elemento do domínio em um elemento do conjunto imagem;

- **<u>Registro de representação algébrico explícito flecha</u>**: Esse registro facilita o trabalho no registro de representação tabela, pois deixa explícito o papel do x na função;

Além dos registros de representação da função afim, acima apresentados, é considerado também o espaço $\mathbf{R^2 = RxR}$ como um plano numérico, formado por um par de eixos ortogonais. Sendo assim, pode-se definir a função afim como a função que associa par de coordenadas a cada ponto desse plano, onde o primeiro elemento do par ordenado pertence ao conjunto denominado domínio da função e o segundo elemento do par ordenado pertence ao conjunto denominado contra-domínio desta mesma função. Desta forma, tanto a função como seu domínio e seu contra-domínio podem ser representados de diferentes maneiras.

Exemplos: Dom(f) = R e CD(f) = R; D = R e CD = R; f ={(x,y) ϵ AXB / y = ax + b}; f: R → R; (x,y) ϵ R^2 / y = ax + b ; f :A → B.

Quando se considera a noção de par ordenado, isto é, os elementos do produto cartesiano de dois conjuntos A e B ou o espaço $\mathbf{R^2}$ distingui-se ainda outros registros de representação para as funções, em particular, para a função afim.

- **Registro de representação par ordenado intrínseco**: a função afim é definida por um conjunto de pontos de AxB, onde os elementos (x, y) são pares ordenados, pertencendo o primeiro à A e o segundo elemento à B. Este registro permite traduzir conceitos e propriedades para uma linguagem algébrica. Exemplo: {(x, y) ϵ AxB, tal que y = ax + b, a ≠ 0, com a,b ϵ **R**, x ϵ A};

- **Registro de representação par ordenado explícito**: a função afim é definida por um conjunto de pontos de $\mathbf{R^2}$ ou **RxR**, onde os elementos (x, y) são pares ordenados de números reais. A utilização deste registro dificulta a identificação da função afim. Exemplo: {(1,3), (2,5), (3,7)....};

Observação: O registro de representação par ordenado explícito, em geral, é pouco utilizado em cursos de introdução à noção de função afim devido às dificuldades de reconhecimento da função que ele pode provocar.

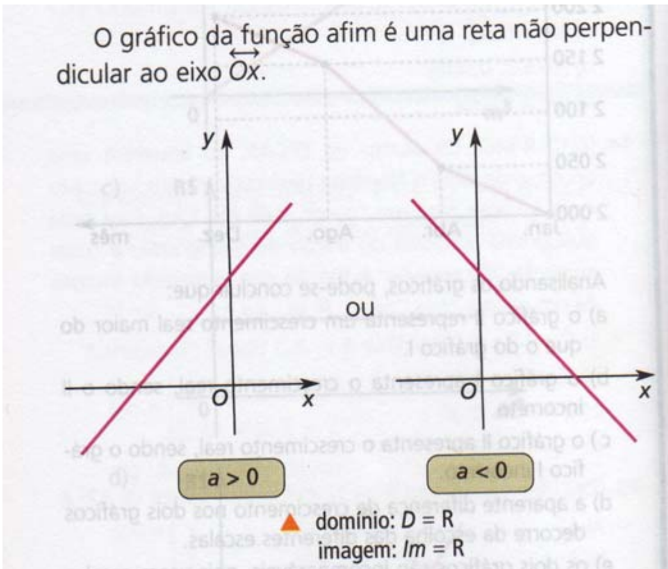
- **Registro de representação Tabela**: a função afim é representada por uma matriz onde se representa o elemento da função y = f(x) e o par ordenado que representa a função.

Exemplo: tabela montada através da atribuição de alguns valores para x, por exemplo: -1, 0 e 1, obtendo os valores correspondentes de y, para a função y = 2x.

x	y = f (x)	(x,y)
-1	-2	(-1, -2)
0	0	(0,0)
1	2	(1,2)

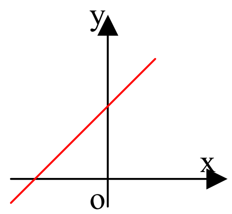
- **<u>Registro de representação gráfica</u>**: a função afim é representada pelo conjunto de todos os pontos (x, y) com x e y real, em geral, em um sistema cartesiano ortogonal o gráfico desta função é sempre uma reta.

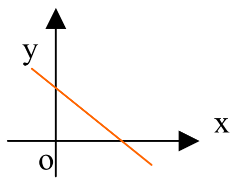
Exemplo: A reta destacada é o gráfico da função afim e plano cartesiano.



Fonte: Youssef, Soares, Fernandez, 2004. P.56.

Resumindo as representações apresentadas anteriormente, através do quadro a seguir, tem-se uma idéia geral do conjunto dos diferentes registros de representação possíveis para a noção de função afim deixando evidente a existência de um grande número de conversões a considerar.

<table>
<tr><th colspan="2">Registro Algébrico</th><th>Registro Tabela</th><th>Registro Gráfico</th><th>Registro da Linguagem Natural</th></tr>
<tr><th>Intrínseco</th><th>Explícito</th><td rowspan="2"><table><tr><td>x</td><td>y</td><td>(x,y)</td></tr><tr><td>-3</td><td>0</td><td>(-3,0)</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td><td>(0,3)</td></tr><tr><td>-1</td><td>2</td><td>(-1,2)</td></tr></table></td><td rowspan="2">


</td><td rowspan="2">Uma função
f: R→ R
chama-se afim
quando existem
constantes
a, b є R tais que
f(x) = ax + b para
todo x є R..</td></tr>
<tr><td>f(x) = ax + b,
a ≠ 0 a,b e
x є R

x :→ ax + b
com a, b є R,
x є A, a ≠ 0.</td><td>y = x + 3

f(x) = 2x - 1</td></tr>
</table>

Considerando que, além de ressaltar a grande quantidade de possibilidades de conversões de registros, deseja-se, ainda, neste trabalho, verificar quais os níveis de conhecimento esperados dos estudantes na solução de tarefas em que é necessária uma mudança de quadro, uma escolha do registro adequado que pode levar a uma conversão e mudanças de pontos de vista, constrói-se a seguinte grade de análise na tentativa de chamar a atenção sobre a importância que essas atividades podem desenvolver em um curso de introdução à noção de função afim.

3. A grade de análise

Para levar em conta as possíveis articulações de quadros, as conversões de registro de representação semiótica, as mudanças de ponto de vista e os "níveis de conhecimento esperados dos estudantes", é constituída a seguinte grade de analise, cujo propósito é servir de instrumento que permita analisar os diferentes níveis de conhecimento exigido dos estudantes num curso de introdução da noção de função afim para o ensino médio:

- Em função das tarefas associadas à noção de função afim encontrada no ensino médio;
- Em função das variáveis destas tarefas, para as quais se deu ênfase ao nível de conhecimento pedido explicitamente no enunciado e os diferentes níveis de conhecimento que podem se identificados em relação a outras noções que devem ser utilizadas para a solução da tarefa.

Primeiramente, estudam-se as diferentes tarefas usualmente encontradas nos livros didáticos de matemática, destinados a primeira série do ensino médio para a introdução da noção de função afim e, em seguida, os diferentes níveis de conhecimento exigidos dos estudantes na solução destas tarefas.

Para a noção de função afim, consideraram-se oito classes de noções:

- Noção de valor numérico;
- Noção de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais (regra de três simples);
- Noção de polinômio;
- Noções de sistema cartesiano ortogonal e do plano $\mathbf{R}^2$**;**
- Noção de sistemas lineares (formado por duas equações lineares com duas incógnitas);
- Noções de inclinação da reta e de trigonometria no triângulo retângulo (coeficiente angular);
- Noção de taxa de variação ou taxa de crescimento;
- Noções de perímetros e áreas de figuras planas

Para cada uma dessas noções, selecionaram-se as diferentes tarefas encontradas nos livros didáticos escolhidos para este estudo, de forma a considerar as articulações entre as diferentes formas de conhecimento e suas respectivas representações semióticas.

Para especificar as tarefas em relação à articulação entre as formas de conhecimento e as representações semióticas, consideraram-se as seguintes variáveis das tarefas:

- O nível de conhecimento exigido pela tarefa;
- Os registros de representação dadas no enunciado;
- O domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada;
- Os tipos de representação exigidos na solução da tarefa;
- Os níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação a outras noções que serão utilizadas.

Esta grade permite analisar os três níveis de conhecimento (técnico, mobilizável e disponível) esperados dos estudantes segundo definição de Robert (1997)**,** tanto para a introdução da noção de função afim, além disso, também permitem analisar as necessidades de conversão de registro de representação semiótica, as mudanças de domínio ou quadro e de ponto de vista.

4. Exemplos de funcionamento da grade

Nos exemplos abaixo de funcionamento da grade de análise, considera-se a tarefa geral e, em seguida, apresenta-se um ou mais exemplos. Estes exemplos são casos particulares e escolheu-se apresentar as questões do Saresp, pois ao mesmo tempo em que se tenta apresentar as possíveis tarefas, que podem ser trabalhadas em um curso de introdução da noção de função afim, apresenta-se as possibilidades em termos de articulação entre as diferentes formas de conhecimento que permite compreender melhor quais margens de manobra existia para "*os estudantes* *responderem a questão”*. Este trabalho servirá também como uma analise “a priori” auxiliando a análise e comentário dos resultados obtidos no Saresp por um grupo de estudantes de uma escola estadual da periferia de São Paulo, isto é, uma análise da relação pessoal que estes estudantes parecem ter desenvolvido em relação à noção de função afim e, além disso, pode se inferir sobre o nível de questões que os estudantes analisados são capazes de resolver.

1) Tarefa geral: Reconhecer em uma tabela a noção de grandezas inversamente ou diretamente proporcionais e associar à técnica de regra de três simples (ou composta) que permite determinar uma função do tipo y = a/x ou y = ax (linear) respectivamente.

Exemplo:

01. Um prêmio de loteria no valor total de R$ 500 000,00 será dividido pelo número de ganhadores de forma igual, conforme mostra a tabela abaixo:

Ganhadores	Valor (R$)
1	500 000,00
2	250 000,00
5	100 000,00
10	50 000,00

Da leitura desta tabela concluímos que:

(A) quando aumenta em 1 unidade o número de ganhadores, o valor do prêmio é sempre reduzido em R$ 250 000,00.
(B) se dobrar o número de ganhadores, o valor do prêmio será dobrado.
(C) se triplicar o número de ganhadores, o valor do prêmio será reduzido a terça parte.
(D) o número de ganhadores aumenta quando o valor do prêmio aumenta.

Gabarito: alternativa C

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

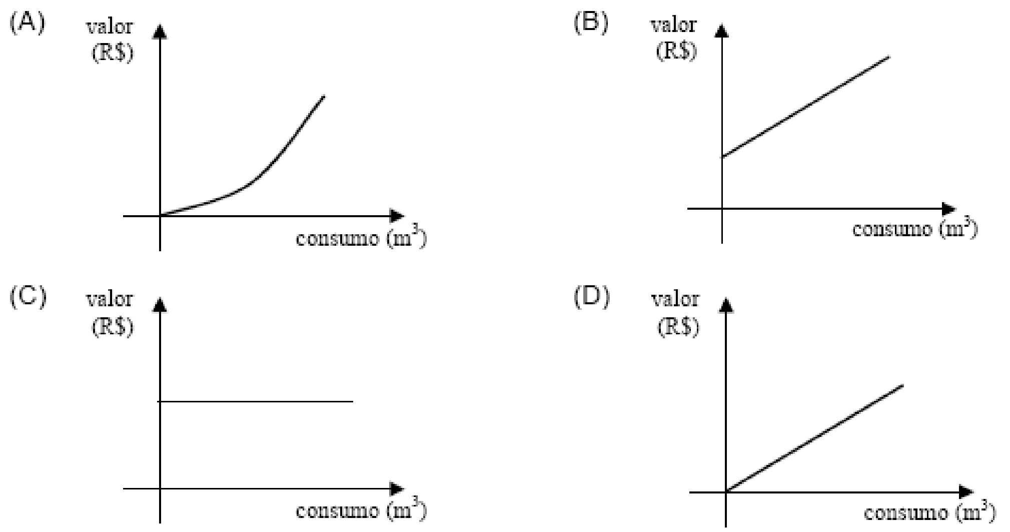
- Nível de conhecimento exigido na tarefa: disponível;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural e registro de representação tabela;
- Domínio em que a tarefa é enunciada: numérico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação gráfica, registro de representação tabela e registro de

representação algébrico intrínseco e registro de representação algébrico explícito;

- <u>Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas:</u> conversão do registro de representação tabela para o registro de representação gráfico. Além disso, a solução pode exigir outros conhecimentos disponíveis que dependam do caminho escolhido para solução. Exemplo: regra de três simples.

2) <u>Tarefa geral:</u> Reconhecer o gráfico de uma grandeza diretamente ou inversamente proporcional o que permite articular com a noção de função linear ou f(x) = a/x respectivamente**.**
<u>Exemplo</u>

02. Em uma certa cidade não há cobrança de taxa mínima de uso. O valor da conta de água é diretamente proporcional ao consumo. Dos gráficos abaixo, o que relaciona o valor da conta com o consumo é:



Gabarito: alternativa D

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

- <u>Nível de conhecimento exigido na tarefa</u>: mobilizável;
- <u>Registros de representação dados no enunciado:</u> registro de representação da língua natural e registro de representação gráfica;
- <u>Domínio em que a tarefa é enunciada:</u> algébrico;

- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação gráfica;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: articulação entre a noção de grandeza diretamente proporcional com a noção de função linear, como caso particular da função afim.

3) Tarefa geral: Dada uma função no registro de representação tabela fazer a conversão para o registro de representação algébrico explícito.

Exemplo:

03. A tabela abaixo mostra pares de valores correspondentes de duas grandezas relacionadas X e Y.

X	2	3	4	5	6
Y	4	8	12	16	20

A relação algébrica entre X e Y pode ser expressa como:

(A) $Y = 2^X$ (B) $Y = X^2 - X + 2$ (C) $Y = 4X - 4$ (D) $Y = 3X - 2$

Gabarito: alternativa C

Fonte: Saresp 2005 -Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

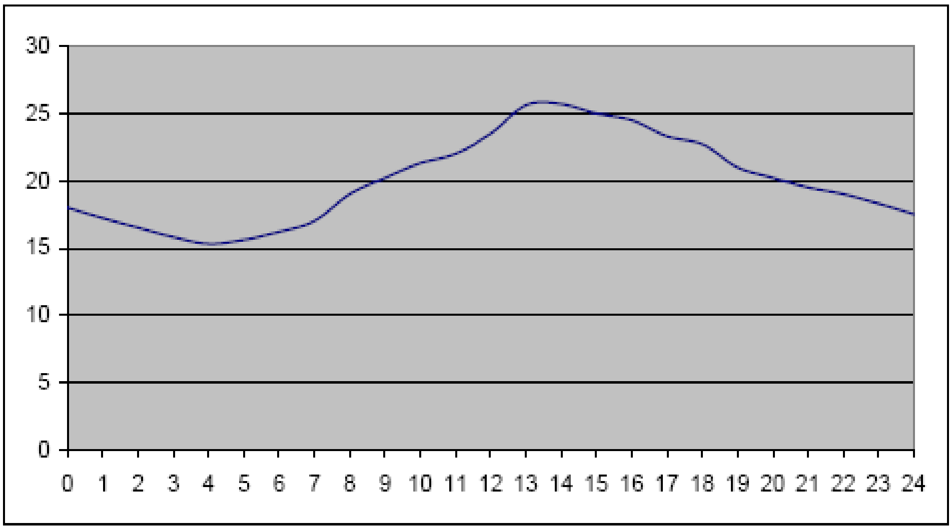
- Nível de conhecimento exigido na tarefa: disponível;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação tabela, registro de representação par ordenado explícito e registro de representação algébrico explícito;
- Domínio em que a tarefa é enunciada: numérico e algébrico
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico intrínseco e registro de representação explícito;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: reconhecimento da função afim através da tabela, articulação entre a noção de sistemas lineares (formado por duas equações lineares com duas incógnitas) com a

noção de função afim, ou entre a noção de taxa de variação e a noção de função afim exigindo a conversão de registro de representação algébrico intrínseco para o registro de representação algébrico explícito.

4) Tarefa geral: Leitura e interpretação dos dados em um gráfico.

Exemplo:

04. O gráfico abaixo mostra como variou a temperatura em uma cidade durante um certo dia.



Pode-se afirmar que:

(A) a temperatura máxima foi atingida ao meio-dia.
(B) a temperatura mínima ocorreu por volta das 4 da manhã.
(C) no período entre as 0 e as 12 horas a temperatura foi crescente.
(D) no período entre as 12 e as 24 horas a temperatura foi decrescente.

Gabarito: alternativa B

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

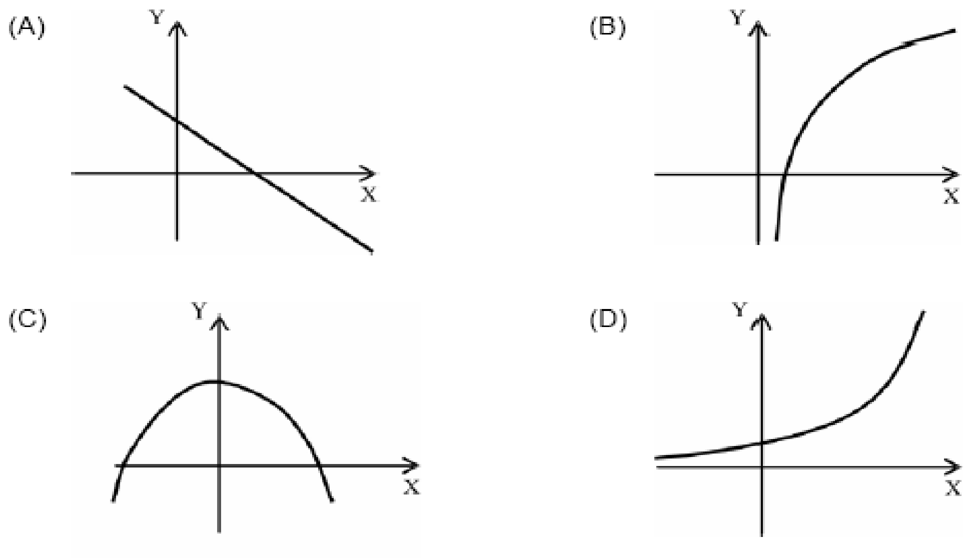
- Nível de conhecimento exigido na tarefa: técnico;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural e registro de representação gráfico;
- Domínio em que a tarefa é enunciada: numérico;

- <u>Tipos de representação exigidos na solução da tarefa:</u> registro de representação gráfico e registro de representação par ordenado explícito;
- <u>Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas:</u> articulação entre as noções de função crescente, decrescente, máximo e mínimo de uma função e situação problema dada através da representação gráfica, além disso, é necessário reconhecer que o eixo horizontal ou eixo das abscissas representa o dia e o eixo vertical ou eixo das ordenadas representa a temperatura, identificando assim o par ordenado (d,t) com o par ordenado (x,y), usualmente utilizado, sendo assim, pode-se considerar aqui que o estudante deve dispor de conhecimentos associados a esse tipo de conversão de representações.

5) <u>Tarefa geral:</u> Reconhecer o gráfico de uma função afim.

<u>Exemplo 1:</u>

05. Entre os gráficos abaixo, o único que representa uma função do tipo $y = ax + b$ é:



Gabarito: alternativa A

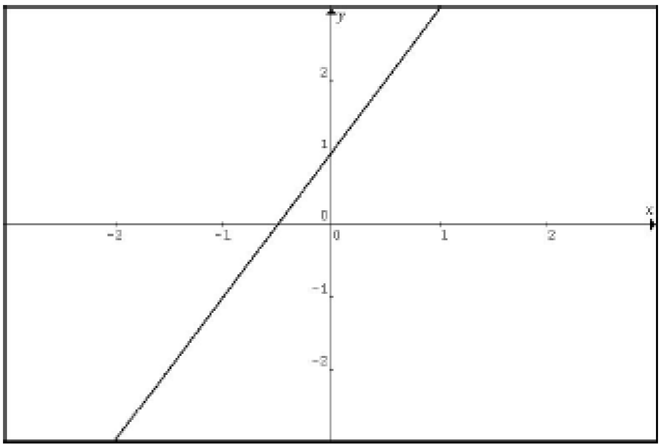
Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: técnico;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação algébrico intrínseco, registro de representação gráfico;
- Domínio em que a tarefa é enunciada: algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico intrínseco, registro de representação gráfico;

- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: conversão do registro de representação algébrico intrínseco para o registro de representação gráfico.

Exemplo 2:

06. Dentre as funções abaixo, identifique aquela que melhor representa o gráfico mostrado ao lado.



(A) $f(x) = 10x - 7$
(B) $f(x) = 2x + 1$
(C) $f(x) = x - 2$
(D) $f(x) = 6x - 1$

Gabarito: alternativa B

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: mobilizável;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural, registro de representação gráfico e registro de representação algébrico explícito;
- Domínio em que a tarefa é enunciada: algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação par ordenado explícito, registro de representação tabela e registro de representação algébrico intrínseco;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: articulação entre as coordenadas dos pontos nos eixos e a lei de formação de uma função afim. Além disso, a solução pode exigir outros conhecimentos disponíveis que dependam do caminho escolhido para solução. Exemplo: sistemas de equação de duas equações com duas incógnitas, inclinação da reta, taxa de variação.

6) Tarefa geral: Reconhecer uma função afim em uma situação problema.

Exemplo 1:

07. Para estipular o preço por seu trabalho, o pintor de paredes André cobra uma taxa fixa de R$ 50,00 e mais uma taxa de R$ 10,00 por m^2 pintado. André vai pintar uma parede de $10m^2$. Quanto André cobrará por esse trabalho?

(A) R$ 50,00
(B) R$ 100,00
(C) R$ 150,00
(D) R$ 200,00

Gabarito: alternativa C

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: disponível;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural;
- Domínio em que a tarefa é enunciada: numérico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico intrínseco e registro de representação algébrico explícito; quando se deseja encontrar uma fórmula que permite calcular todos os casos possíveis, isto é, generalizações;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: reconhecimento da função afim, no enunciado de situações, articulação entre a noção de função afim e a noção de taxa de crescimento. Na realidade, em geral, esse tipo de situação não exige conhecimentos disponíveis em relação a noção de função afim, basta aplicar logicamente as operações de adição e multiplicação.

Exemplo 2:

08. Uma companhia de telefonia celular possui dois planos de tarifação para seus usuários: Plano I: taxa de R$ 20,00 por mês, mais R$ 0,30 por minuto de conversação Plano II: sem taxa mensal e R$ 0,50 por minuto de conversação O plano I é o mais vantajoso para as pessoas que, por mês, falam

(A) mais do que 100 minutos
(B) menos do que 100 minutos
(C) mais do que 40 minutos
(D) menos do que 40 minutos

Gabarito: alternativa A

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: disponível;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural;

- Domínio em que a tarefa é enunciada: numérico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico intrínseco, registro de representação algébrico explícito e registro de representação gráfico;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: reconhecimento da função afim no anunciado da situação, articulação entre a noção de função afim e a noção de taxa de crescimento . Esta tarefa é ideal para mostrar a importância do registro de representação gráfico, pois quando se esboça o gráfico das funções torna-se mais simples a analise da estratégia mais vantajosa, através da interpretação dos dados no gráfico.

7) Tarefa geral: Conversão do registro de representação algébrico explícito para o registro de representação gráfico e interpretação do gráfico construído.

Exemplo:

07. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 \text{ se } x<0, \\ x^2-1 \text{ se } 0 \leq x<2; \\ x-2 \text{ se } x \geq 2; \end{cases}$$

o valor mínimo de f(x) é:

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 2

Gabarito: alternativa B

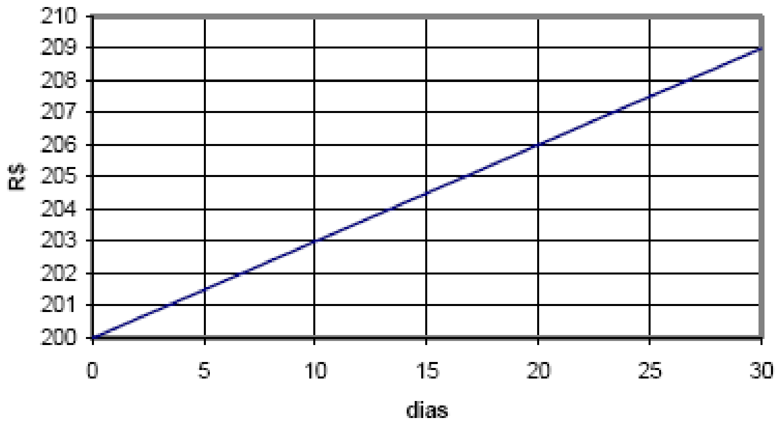
Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 2º série do Ensino Médio período noturno

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: mobilizável;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação algébrico explícito;
- Domínio em que a tarefa é enunciada: algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação par ordenado explícito, registro de representação algébrico explícito e registro de representação gráfico;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: reconhecimento das funções dadas através do registro de representação algébrico explícito, conversão do registro de representação algébrico explícito para o registro de representação gráfico, leitura e interpretação do gráfico exigindo articulação com as noções de função crescente, decrescente, máximo e mínimo de uma função.

8) Tarefa geral: Dado o gráfico de uma situação em um determinado contexto, reconhecer no gráfico a representação de uma função afim.

Exemplo:

04. O gráfico abaixo mostra o valor a ser pago por uma conta no valor de R$ 200,00, em função no número de dias de atraso no pagamento.



A taxa de juros diários cobrados pelo banco é de:

(A) 0,15% (B) 0,3% (C) 1,5% (D) 3%

Gabarito: alternativa A

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 3º série do Ensino Médio período noturno

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: disponível;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural e registro de representação gráfica;
- Domínio em que a tarefa é enunciada: situação cotidiana que envolve o conceito de função afim, logo seu domínio é o numérico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação gráfica, registro de representação tabela e registro de representação algébrico intrínseco implícito e registro de representação algébrico explícito;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: mobilizar a noção de função afim e articular com: noção de coordenadas no plano cartesiano, noção de sistemas de duas equações com duas incógnitas e noção de taxa de variação ou taxa de crescimento. Além disso, a solução pode exigir outros conhecimentos disponíveis que dependam do caminho

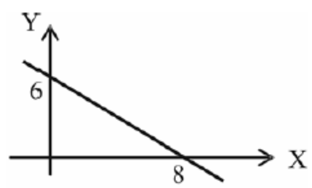
escolhido para solução. Exemplo: regra de três, juros simples (fórmula), inclinação da reta, progressão aritmética.

Esta tarefa deixa evidente a necessidade de conversão do registro de representação gráfico para o registro de representação tabela e registro de representação algébrico explícito e, dependendo dos conhecimentos prévios dos estudantes, ela poderá ser resolvida de diferentes formas em diferentes quadros da própria matemática, exigindo uma mudança de quadro (inclinação da reta) ou uma mudança de ponto de vista (regra de três, juros simples, progressão aritmética).

9) <u>Tarefa geral:</u> Conversão do registro de representação gráfico para o registro de representação algébrico explícito.

<u>Exemplo:</u>

14. No gráfico abaixo, você vê uma reta que corta o eixo X no ponto de abscissa 8, e o eixo Y no ponto de ordenada 6. A equação dessa reta é:



(A) $y = -\frac{3}{4}x + 6$

(B) $y = \frac{3}{4}x + 6$

(C) $y = -6x + 8$

(D) $y = 6x + 8$

Gabarito: alternativa A

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 3º série do Ensino Médio período noturno

- <u>Nível de conhecimento exigido na tarefa</u>: disponível;
- <u>Registros de representação dados no enunciado:</u> registro de representação da língua natural;
- <u>Domínio em que a tarefa é enunciada:</u> numérico e algébrico;

- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação gráfica, registro de representação algébrico intrínseco e registro de representação algébrico explícito;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: mobilizar a noção de função afim e articular com: a noção de inclinação da reta (coeficiente angular e coeficiente linear). Além disso, a solução pode exigir outros conhecimentos disponíveis que dependam do caminho escolhido para solução. Exemplos: trigonometria no triângulo retângulo, sistemas de duas equações com duas incógnitas, taxa de variação ou taxa de crescimento.

Esta questão mostra, também, a necessidade de conversão de registro e, dependendo dos conhecimentos prévios dos estudantes, ela poderá ser resolvida de diferentes formas, em diferentes quadros da própria matemática exigindo uma mudança de quadro (taxa de variação ou crescimento) ou de ponto de vista (trigonometria).

10) Tarefa geral: Passagem do registro de representação par ordenado explícito para o registro de representação algébrico explícito.

Exemplo:

15. A equação da reta que contém os pontos (1, 6) e (5, 4) é:

(A) $y = -x + 7$

(B) $y = \frac{x}{2} + \frac{11}{2}$

(C) $y = -2x + 8$

(D) $y = -\frac{x}{2} + \frac{13}{2}$

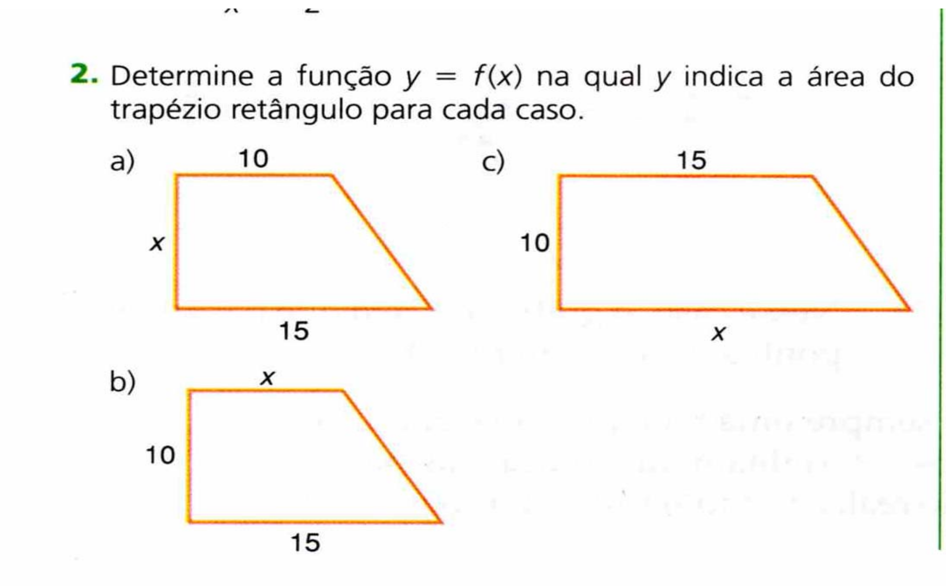
Gabarito: alternativa D

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 3º série do Ensino Médio período noturno

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: disponível;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação par ordenado explícito;
- Domínio em que a tarefa é enunciada: numérico e algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico intrínseco, registro de representação algébrico explícito e registro de representação gráfico;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: mobilizar a noção de função afim e articular com a noção de equação da reta, isto é, ambas têm o mesmo registro de representação algébrico explícito. Além disso, a solução pode exigir outros conhecimentos disponíveis que dependam do caminho escolhido para solução. Exemplos: trigonometria no triângulo retângulo, sistemas de duas equações com duas incógnitas;

Nesta questão, verifica-se a mudança de quadro na própria matemática, pois a tarefa é tratada como equação da reta (quadro da geometria analítica $ax + by + c = 0$), mas pode ser convertido como registro de representação algébrico intrínseco (quadro do estudo das funções $y = ax + b$) da função afim, pode-se também esboçar o gráfico da função definida pelos dois pontos, reconhecendo que se trata de uma reta através da articulação com as noções de sistema de equação lineares, taxa de variação ou inclinação da reta..

11) Tarefa geral: Passagem do domínio ou quadro geométrico para o domínio ou quadro algébrico.



2. Determine a função $y = f(x)$ na qual y indica a área do trapézio retângulo para cada caso.

Fonte: Bianchini e Paccola, 2004, p. 89.

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: mobilizável para a noção de área e disponível para a mudança de quadro;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural e representação geométrica de uma figura plana;
- Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada: situação que envolve o conceito de função afim e área de figura plana, logo seu domínio é o numérico, algébrico e geométrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: é necessário que o estudante conheça a fórmula para o cálculo da área do trapézio retângulo, já que sua representação geométrica é dada e após o calculo da área é necessário identificá-la com a lei de formação (fórmula) de uma função afim, isto é, com registro de representação algébrico explícito;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: É preciso mobilizar a noção de área do trapézio retângulo, e reconhecer nela uma função afim, o

que corresponde a dispor de conhecimentos associados a passagem do quadro geométrico para o quadro algébrico.

Neste tipo de tarefa é importante observar que aparecem noções de perímetro e área. Na realidade, o conhecimento necessário está mais relacionado à interpretação das representações utilizadas, isto é, na escolha da representação adequada para os quadros em que se desenvolve a tarefa.

5. Conclusão

O estudo das condições de aplicação da articulação das diferentes formas de conhecimento e registros de representações em função afim permitiu estabelecer um grupo de tarefas usuais em livros didáticos de matemática destinados a primeira série do ensino médio, onde se pode desenvolver essa articulação entre formas de conhecimentos e registros de representação que pode ser trabalhada tanto tecnicamente como conceitualmente em diversos domínios ou quadros, utilizando diversos registros de representação e vários pontos de vista, permitindo, assim, esclarecer os diferentes tipos de articulação que podem ter vida em relação as diferentes noções em jogo.

Verifica-se assim, que existe uma grande diversidade de formas de aplicação do conhecimento associado a noção de função afim para uma mesma tarefa, que dependem das noções em jogo.

Essas noções são desenvolvidas, das representações dadas e pedidas das aplicações. Encontra-se assim, um certo número de tarefas onde se pode trabalhar efetivamente a questão de flexibilidade entre formas de conhecimento e registro de representação para a noção de função afim como foi possível observar no desenvolvimento dos exemplos exibidos anteriormente.

Sendo a noção de função afim utilizada em muitas aplicações, tanto da matemática como em outras ciências e como ela se mostra um campo fértil para a articulação com noções desenvolvidas no ensino fundamental como as noções de proporcionalidade e sistemas lineares, que podem servir de ferramenta para a introdução de noção de função afim e de suas diferentes representações, é preciso considerar todos esses aspectos quando de sua introdução e pensar em **engenharias didáticas**[1] apropriadas que possam mostrar ao estudante a importância desta noção e suas possibilidades de aplicação.

O trabalho apresentado neste capítulo, mostra a quantidade de possibilidades existentes para explorar essa noção do ponto de vista didático e, portanto, indica algumas pistas para construção de engenharias didáticas, deve-se ressaltar que é importante levar em conta explicitamente no ensino, todas essas possibilidades, quando se deseja atingir o nível disponível em relação à articulação da noção de função afim, com todas as noções e nas áreas em que existe esta possibilidade.

---

[1] **Engenharia didática**: É a didática da matemática aplicada: com a ajuda dos instrumentos da didática fundamental e dos resultados da didática propriamente dita, ela propõe "ajudas" ao ensino. É a parte mais visível para os não especialistas mas, contrariamente ao que alguns desejavam, a didática não determina mais para a engenharia ou para a prática do ensino que a termodinâmica para a construção de motores. Esse estudo não pode abstrair os projetos didáticos da sociedade. Eles dependem de numerosos fatores (históricos, sociólogos, políticos,...), este aspecto da didática da matemática é necessariamente pluridisciplinar.
Para ser mais concreto, vejamos alguns domínios que são tipicamente da competência do didata da matemática ou do matemático didata:
- Descrever e analisar como os diversos utilizadores, notadamente os professores e alunos, adaptam os conhecimentos matemáticos e as utilizações que eles fazem desses conhecimentos. Identificar as causas dessas adaptações ou "transposições" e as dificuldades que elas provocam.
- Procurar as condições de difusão dos conhecimentos específicos de cada domínio da matemática (geometria elementar, álgebra linear, probabilidade e estatística, ...). Em particular, imaginar um universo de situações, de problemas e de exercícios nos quais esses conhecimentos encontram sua função e sua significação.
Reorganizar certas teorias matemáticas para que se tornem compatíveis com as dificuldades associadas a sua difusão para um público particular (por exemplo, como abordar a integração para os futuros físicos ou engenheiros que devem saber utilizar o teorema de Lebesque, mas têm pouco tempo para trabalhar essa teoria). (Kamiya, 2003, p.11) < http://www.dipmat.math.unipa.it/~grim/brousseau_macro_03.pdf> acesso em: 15.03.06

CAPÍTULO 4

GESTÃO INSTITUCIONAL DA ARTICULACAO ENTRE AS DIFERENTES FORMAS DE CONHECIMENTO PARA A NOÇÃO DE FUNÇÃO AFIM: ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

1. Introdução

A formação prática do professor é centrada no livro didático. O livro didático de matemática é uma ferramenta de grande importância para professores que dependem dele, no que se refere à abordagem, seqüência e profundidade de conteúdos é um forte instrumento de trabalho do aluno que muitas vezes só tem o livro como fonte de acesso à matemática fora do contexto da sala de aula.

Sendo assim, escolheu-se aqui analisar a gestão institucional entre as diferentes formas de conhecimento para a noção de função afim através dos livros didáticos que em geral, representam o desenvolvimento que é dado atualmente em uma grande maioria, instituições de ensino com uma ênfase maior ou menor para determinadas articulações, que dependem das escolhas pessoais, apesar disto o livro didático permite uma visão geral dos diferentes casos que podem ser considerados.

Dessa forma, escolheu-se analisar um conjunto de três livros didáticos de matemática dos quais, um é destinado a professores e alunos do curso de licenciatura e os outros dois destinados a alunos do ensino médio.

O livro "Matemática Ensino Médio 1ª série" (Edwaldo Roque Bianchini / Herval Paccola, 2004) avaliado e aprovado pelo PNLEM/2005 (Programa Nacional do Livro para o Ensino médio), foi escolhido por ter sido o livro enviado pelo Ministério da Educação e Cultura para a escola, cujo resultado do Saresp foi analisado neste trabalho e o livro "Matemática Ensino Médio 1ª série" (Luiz Roberto Dante, 2004) avaliado e aprovado pelo PNLEM/2005 (Programa Nacional do Livro para o Ensino médio), foi escolhido por se tratar da obra cujas articulações estavam mais bem adaptadas as ferramentas de análise propostas neste trabalho, mesmo se estas articulações não são tratadas com a mesma terminologia aqui utilizada.

A escolha dos livros do ensino médio além de privilegiar aqueles que de alguma forma articulam as diferentes formas de conhecimentos associados à noção de função afim, assim como, as necessidades em termos de representações semióticas que auxiliam no desenvolvimento e compreensão de tarefa, se baseou nos que oferecem uma gama maior de articulação de quadros ou domínios intramatematicos e extramatemáticos e que, dessa forma, favorecem uma analise em termos e níveis de conhecimento, pois diferentes noções são trabalhadas em diferentes níveis

Com relação ao livro didático de matemática do ensino superior, escolheu-se um livro destinado a professores e estudantes de licenciatura de matemática e para o qual a questão da articulação entre as diferentes formas de conhecimento tivesse um papel central mesmo que os autores não tratam essas questões da mesma maneira como se propõe este trabalho.

Esta análise foi estruturada em torno das questões levantadas a partir da grade de análise construída com a finalidade de identificar os três níveis de conhecimentos esperados dos estudantes, conforme definição de Robert (1997), e verificar como estes níveis são trabalhados no ensino atual ressaltando, ainda, as necessidades em termos de articulação de quadros ou domínios segundo a abordagem teórica de Douady (1984) e de conversão de registros de representação semiótica conforme a abordagem teórica de Duval (1996).

A análise dos livros, que servem de suporte para este trabalho, centrou-se nas articulações necessárias para a introdução do desenvolvimento da noção de função afim, que é o objeto desse estudo.

Os livros escolhidos foram os seguintes:

Matemática do Ensino Médio. Volume 1 (Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Margado) Volume 1, 2005

A obra trata de forma genérica as articulações entre as diferentes formas de conhecimento para a noção de função afim, dando várias pistas aos professores sobre este trabalho, mas deixando para cada um a possibilidade de criar seus próprios exemplos em função das necessidades do contexto em que está inserido.

Matemática Ensino Médio 1ª série (Edwaldo Roque Bianchini / Herval Paccola) Volume 1, 2004.

A obra trata quase que exaustivamente sobre as articulações possíveis para o trabalho de articulação intramatemática e extramatematica com a noção de função afim, utilizando as mudanças de quadros ou domínios e de pontos de vista e os diferentes registros de representação considerando também e suas conversões, mesmo que estas questões não são tratadas nestes termos.

Matemática Ensino Médio 1ª série (Luiz Roberto Dante) Volume 1, 2004.

A obra, como a anterior, trata quase exaustivamente sobre as diferentes articulações intramatematicas e extramatemáticas, dando ao professor e ao aluno várias pistas de trabalho que poderão ser ampliados em função dos interesses pessoais.

Uma vez escolhidas as obras existe a necessidade de levantar algumas questões que possam orientar a análise das mesmas. Sendo assim, apresentam-se a seguir as questões que orientam a análise:

- Quais os conhecimentos disponíveis para introduzir a noção de função afim?

- Como é introduzida a noção de função afim, quais representações são utilizadas e como elas se articulam?

- Que pesos respectivos ocupam os níveis: técnico, disponível e mobilizável nas tarefas propostas aos estudantes?

- Se existe um discurso do tipo **metamatemático**[1] no curso e no tratamento dos exemplos que o acompanham que auxilie os estudantes no desenvolvimento dos níveis mobilizável e disponível?

Inicia-se a análise dos livros com os objetivos específicos dos autores, o texto segue na íntegra para melhor compreensão do leitor.

Em seguida, apresenta-se uma idéia geral de como a obra está dividida, o que parece subentender uma interdependência de conhecimentos prévios.

Passa-se aos comentários e análise de tratamento, dado a noção de função afim e suas possíveis articulações, segundo a estrutura da própria obra.

Na seqüência apresenta-se em primeiro lugar a obra Matemática do Ensino Médio. Volume 1 (Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Margado) Volume 1, 2005 seguida da obra . Matemática Ensino Médio 1ª série (Edwaldo Roque Bianchini / Herval Paccola) Volume 1, 2004 e finalmente a obra Matemática Ensino Médio 1ª série (Luiz Roberto Dante) Volume 1, 2004, a ordem escolhida se deve ao fato de se levar em conta, primeiro uma articulação desenvolvida de forma mais genérica que é seguida por obras onde as articulações, considerando casos particulares, permitiu a aplicação da grade construída para este fim auxiliando nas possíveis escolhas de aplicações para os casos gerais considerados na primeira obra.

---

[1] **Metamatemático:** Entende-se por metamatemático o segundo sentido dado por Polya à palavra método, isto é, segundo ele, um método é "como pensar em algo que já funcionou para reutilizá-lo". [Enseigner autrement lês maths em Deug A premiere anée, 1990]

1. A obra de E. L. Lima, P.C.P. Carvalho, E.Wagner, A.C. Morgado intitulada "A matemática do ensino médio" (volume 1, 237 páginas) e designada na seqüência por "Lima".

Trata-se de uma obra que, segundo o autor, cobre o programa do ensino médio cujo tema central são as funções reais de uma variável real do ponto de vista elementar, isto é, sem o uso do Cálculo Infinitesimal.

A obra foi concebida a partir de um curso de aperfeiçoamento para professores de Matemática, iniciado no segundo semestre de 1996, no Impa, cujos instrutores são o autor Elon Lages Lima e seus colaboradores Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado.

Ainda segundo o autor a obra visa dar apóio bibliográfico ao professor que, em geral, conta praticamente com o livro texto que adota como única fonte de referência.

A obra foi dividida em três volumes, estando os assuntos divididos por séries.

Esta obra é escolhida considerando que para sua execução é necessário, conforme o autor esclarece no prefácio seu objetivo, mesmo se não é colocado explicitamente nessa terminologia, desenvolver um curso onde os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes possam ser levados em conta, uma vez que as aplicações em situações concretas exigem o nível disponível, existindo uma grande preocupação de articular os conhecimentos matemáticos em jogo, tanto do ponto de vista intramatemático como extramatemático, como se pode verificar no texto abaixo:

> "Em todo este livro, procuramos deixar claro que a Matemática oferece uma variedade de conceitos abstratos que servem de modelos para situações concretas, permitindo assim analisar, prever e tirar conclusões de forma eficaz em circunstâncias onde

> uma abordagem empírica muitas vezes não conduz a nada. Todos os temas aqui abordados são apresentados dentro dessa ótica. Assim é que os conjuntos são o modelo matemático para a organização do pensamento lógico; os números são o modelo para as operações de contagem e medida; as funções afins, as quadráticas, as exponenciais, as logarítmicas e as trigonométricas, cada uma delas é estudada como o modelo matemático adequado para representar uma situação específica." (Lima, 2005, prefácio)

Análise e Comentários:

Lima inicia introduzindo a noção de conjunto e ressalta sua importância, atual, para expressar os conceitos matemáticos, pois segundo ele a linguagem dos conjuntos permite dar aos conceitos e às proposições a precisão e a generalidade que são características da Matemática, como se pode verificar no texto abaixo:

> "Os conjuntos substituem as "propriedades" e as "condições". Assim, em vez de dizermos que "o objeto x goza da propriedade P" ou "o objeto y satisfaz a condição C", podemos escrever $x \in A$ e $y \in B$, onde A é o conjunto dos objetos que gozam da propriedade P e B é o conjunto dos objetos que satisfazem a condução C." (Lima, 2005, p1 – 2)

Seguindo sua introdução da noção de conjunto, o autor faz algumas recomendações sobre a linguagem adequada quando se trabalha com esta noção neste nível e apresenta exemplos que justificam essas recomendações.

Ainda, em relação à noção de conjunto, o autor trata a noção de relação de inclusão e suas propriedades, fazendo aqui, também, algumas recomendações, em particular, observa que a relação de inclusão entre conjuntos é uma noção que está estritamente relacionada com a lógica. Nesse momento, através de exemplos, o autor articula a noção de conjunto com a lógica, geometria e álgebra. A recomendação abaixo ilustra este tipo de articulação:

> "Em Geometria, uma reta, um plano e o espaço são conjuntos. Seus elementos são pontos. Se r é uma reta contida no plano π, escreve-se $r \subset \pi$ pois, neste caso, a reta r é um subconjunto do plano π. Não se deve escrever $r \in \pi$ nem dizer que a reta r pertence ao plano π, pois os elementos do conjunto π são pontos e não retas. A relação de inclusão entre conjuntos está estreitamente relacionada coma a implicação lógica. Vejamos como. Sejam P e Q propriedades referentes a um elemento genérico de um conjunto U. Essas propriedades definem os conjuntos A, formado pelos elementos de U que gozam da propriedade P, e B, conjunto formado pelos elementos de U que tem a propriedade Q. Diz-se então que a propriedade P *implica (ou acarreta)* a propriedade Q, e escreve-se $P \rightarrow Q$, para significar que $A \subset B$. Por exemplo, seja U o conjunto dos quadriláteros convexos do plano. Designemos com P a propriedade de um quadrilátero ter seus quatro ângulos retos e por Q a propriedade de um quadrilátero ter seus lados opostos paralelos. Então podemos escrever $P \rightarrow Q$. Com efeito, neste caso, A é o conjunto dos retângulos e B o conjunto dos paralelogramos, logo $A \subset B$." (Lima, 2005, p.5)

Ainda, referindo-se a relação de inclusão o autor faz a seguinte observação:

> "Não é raro que pessoas confundam "necessário" com "suficiente". A.C.M. notou que os alunos têm mais facilidade de usar corretamente esta última palavra do que a anterior, já que "suficiente" é sinônimo de "bastante". Talvez isso tenha a ver com o fato de que uma condição suficiente é geralmente mais forte do que a conclusão a que se quer chegar. Por exemplo, para que um número seja par é suficiente que seja múltiplo de 4. (ou basta ser múltiplo de 4 para ser par). Por outro lado, uma condição necessária é, em geral, mais fraca do que a conclusão

desejada. Assim, por exemplo, para que um quadrilátero convexo Q seja um retângulo é necessário que seus lados opostos sejam paralelos, mas esta propriedade apenas não assegura que Q tenha seus ângulos todos retos. É claro que um conjunto completo de condições necessárias para que seja válida uma propriedade P constitui uma condição suficiente para P." (Lima, 2005, p.10)

Procurando auxiliar o professor em relação a linguagem adequada para tratar as relações, propriedades e operações sobre a noção de conjunto e sempre mostrando as possíveis articulações com a lógica, a geometria e a álgebra, o autor segue definindo complementar de um conjunto, reunião e interseção.

O autor considera, ainda, o desenvolvimento teórico da noção de conjunto fazendo um comentário sobre a noção de igualdade para a qual a articulação com a geometria permite uma imagem mental mais clara sobre a noção de igualdade. Além disso, o autor trabalha a conversão entre o registro de representação simbólica e o registro da linguagem natural, mesmo se não utiliza essa terminologia.

"Uma coisa só é igual a si própria. Quando se escreve a = b, isto significa que a e b são símbolos usados para designar o mesmo objeto. Por exemplo, se a é a reta perpendicular ao segmento AB, levantada a partir de seu ponto médio e b é o conjunto dos pontos do plano que são eqüidistantes de A e B então a =b. Em Geometria, às vezes ainda se usam expressões como "os ângulos α e β são iguais" ou "os triângulos ABC e A'B'C' são iguais" para significar que as figuras que podem ser superpostas exatamente uma sobre a outra. A rigor, porém, esta terminologia é inadequada. Duas figuras geométricas que coincidem por superposição devem ser chamadas *congruentes*. Talvez valha a pena observar que a palavra "igual" em Geometria já foi usada num sentido até mais amplo. Euclides, que viveu há 2300 anos, chamava "iguais" a dois segmentos de reta com o mesmo comprimento, a dois polígonos com a mesma área e a dois sólidos com o mesmo volume. Na linguagem corrente, às vezes se diz que duas pessoas ou objetos são iguais quando um certo atributo, ao qual se refere o discurso naquele momento, é possuído igualmente pelas pessoas ou objetos em questão. Assim, por exemplo, quando dizemos que "todos são iguais perante a lei", isto significa que dois cidadãos quaisquer têm os mesmos direitos e deveres legais. A relação "a é igual a", que se escreve a = b, goza das seguintes propriedades: *Reflexividade*: a = a; *Simetria*: se a = b então b = a; *Transitividade*: se a = b e b = c então z = c. Diante da simetria, a transitividade também se exprime assim: se a = b e c = b então a = c. Em palavras: dois objetos (a e c) iguais a um terceiro (b) são iguais entre si. Formulada deste modo, esta propriedade era uma das *noções comuns* (ou axiomas) que Euclides enunciou nas primeiras páginas do seu famoso livro "Os Elementos".(Lima, 2005, p. 17 – 18)

Assim, o autor finaliza o capítulo com recomendações gerais para os professores referentes a própria noção de conjunto quanto à importância de sua articulação em diferentes domínios, mesmo não utilizando essa terminologia. Além disso, mostra a importância da autocrítica e da moderação em sala de aula, chegando até a apresentar alguns erros de linguagem que devem ser evitados como pode ser verificado no texto abaixo.

"[...] Portanto, se queremos iniciar os jovens em Matemática, é necessário que os familiarizemos com os rudimentos da linguagem e da notação de conjunto. Isto, inclusive, vai facilitar nosso próprio trabalho, pois a precisão dos conceitos é uma ajuda indispensável para a clareza das idéias. Mas, na sala de aula, há alguns cuidados a tomar. O principal deles refere-se ao comedimento, ao equilíbrio, à moderação. Isto consiste em evitar o pedantismo e os exageros que conduziram ao descrédito da onda de "Matemática Moderna". Não convém insistir em questões do tipo $\{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}$ ou mesmo naquele exemplo $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ dado acima. Procure, sempre que possível, ilustrar seus conceitos com exemplos de conjuntos dentro da Matemática. Além de contribuir para implantar a linguagem de conjuntos, este procedimento pode também ajudar a relembrar, ou até mesmo aprender, fatos interessantes de Geometria, Aritmética, etc. Seja cuidadoso, a fim de evitar cometer erros. A auto-crítica é o maior aliado do bom professor. Em cada aula, trate a si mesmo como um aluno cujo trabalho está sendo examinado. Pense antes no que vai dizer mas critique-se também depois: será que falei bobagem? Se achar que falou, não hesite em corrigir-se em público. Longe de desprestigiar, esse hábito fortalecerá a confiança dos alunos no seu mestre. Esteja atento também à correção gramatical. Linguagem correta é essencial para a limpidez do raciocínio. Muitos dos nosso colegas professores de Matemática, até mesmo autores de livros, são um tanto descuidados a esse respeito. Dizem, por exemplo que "a reta *r intercepta* o plano α no ponto P", quando deveriam dizer intersecta (ou interseta) já que o ponto P é a interseção (ou intersecção_ mas não a interceptação de r com α. Eis aqui outros erros comuns de linguagem que devem ser evitados: "Maior ou igual a". O correto é: "maior do que ou igual a". (Tente dizer "igual ou maior a" e veja como soa mal.) "Euclideano". O correto é "euclidiano". "Assumir", no lugar de "supor" (vamos assumir que as retas r e s sejam paralelas). Isto é correto em inglês mas não em português. Não diga "completude", diga "completeza'. (Belo $\rightarrow$ beleza; rico $\rightarrow$ riqueza; nobre $\rightarrow$ nobreza; completo $\rightarrow$ completeza.) Não diga "Espaço de tempo". Espaço e tempo são conceitos físicos fundamentais e independentes. Não se deve misturá-los. Diga "intervalo de tempo". (Lima, 2005, p. 19 – 20)

Após introduzir a noção de conjunto, o autor passa a noção de número observando que se os conjuntos auxiliam a Matemática os números são junto com o espaço os principais objetos de que se ocupa a Matemática.

O autor faz um comentário sobre o que são definições, axiomas, teoremas, corolários sempre aproveitando par articular noções matemáticas de diferentes domínios, o que lhe permite ressaltar a importância da Matemática tanto do ponto de vista matemático quanto sócia, como mostra o texto abaixo:

> "Provar o óbvio transmite a falsa impressão de que a Matemática é inútil. Por outro lado, usar argumentos elegantes e convincentes para demonstrar resultados inesperados é uma maneira de exibir sua força e sua beleza. As demonstrações, quando objetivas e bem apresentadas, contribuem para desenvolver o raciocínio, o espírito crítico, a maturidade e ajudam a entender o encadeamento lógico das proposições matemáticas. Ter sempre em mente que, embora a Matemática possa ser cultivada por si mesma, como um todo coerente, de elevado padrão intelectual, formado por conceitos e proposições de natureza abstrata, sua presença no currículo escolar não se deve apenas ao valor dos seus métodos para a formação mental dos jovens. A importância social da Matemática provém de que ela fornece *modelos* para analisar situações da vida real. Assim, por exemplos, conjuntos são o modelo para disciplinar o raciocínio lógico, números naturais são o modelo para contagem e números reais são o modelo para a medida; funções afins servem de modelo para situações, como o movimento uniforme, em que os acréscimos da função são proporcionais aos acréscimos da variável independente. E assim por diante. Todos os tópicos deste livro são abordados sob o seguinte lema: a Matemática fornece modelos abstratos para serem utilizados em situações concretas, do dia-a-dia e das Ciências. Para pode empregar estes modelos é necessário verificar, em cada caso, que as hipóteses que lhe servem de base são satisfeitas." (Lima, 2005, p. 29)

Nesse momento, o autor trata, mais especificamente, o conjunto dos números naturais partindo do histórico modelo abstrato de contagem e chegando a sua descrição concisa e precisa através dos axiomas de Peano, que permite ao autor destacar o axioma da indução como base de um eficiente método de demonstração de proposições referentes aos números naturais e considerar as operações de adição e multiplicação, destacando a diferença entre essas operações e seus respectivos resultados, isto é, a soma e o produto, e citar suas propriedades ressaltando que essas podem ser demonstradas por indução.

O autor termina a descrição do conjunto dos números naturais definindo a relação de ordem entre os naturais e suas propriedades.

Através do comentário gramatical abaixo, o autor anuncia a diferença entre números naturais ou números ordinais e números cardinais.

> "Quando dizemos "o número um", "o número dois" ou "o número três", as palavras "um", "dois" e "três" são substantivos, pois são nomes de objetos. Isto contrasta com o uso destas palavras em frases como "um ano, dois meses e três dias", onde elas aparecem para dar a idéia de número cardinal, isto é, como resultados de contagens. Nesta frase, "um", "dois" e "três" não são substantivos. Pertencem a uma categoria gramatical que, noutras línguas (como francês, inglês e alemão, por exemplo) é chamada de *adjetivo numeral* e que os gramáticos brasileiros e portugueses, há um par de décadas, resolveram chamar de *numeral* apenas. Este comentário visa salientar a diferença entre os números naturais, olhados como elementos do conjunto **N**, e o seu emprego como números cardinais." (Lima, 2005, p. 31)

No capítulo 3, o autor ante de introduzir a noção de números cardinais, ressalta a importância dos números naturais, justificando sua utilização no processo de contagem e articula essa noção com a noção de função, introduzindo assim essa noção.

> "A importância dos números naturais provém do fato de que eles constituem o modelo matemático que torna possível o processo de

contagem. Noutras palavras, eles respondem a perguntas do tipo: "Quantos elementos tem este conjunto?" Para contar os elementos de um conjunto é necessário usar a noção de correspondência biunívoca, ou bijeção. Trata-se de um caso particular do conceito de função [...]" (Lima, 2005, p.38)

Dessa forma, o autor introduz a noção de função de um conjunto X em um conjunto Y definindo domínio, contra-domínio e imagem de uma função. Nesse momento, o autor aproveita para fazer algumas recomendações que, na realidade, são justificativas para as representações atualmente utilizadas para a noção de função.

"1. É importante ressaltar que f(x) é imagem do elemento $x \in X$ pela função f, ou o valor da função no ponto $x \in X$. Os livros antigos, bem como alguns atuais, principalmente os de Cálculo, costumam dizer "a função f(x)" quando deveriam dizer "a função f". Algumas vezes esse linguagem inexata torna a comunicação mais rápida e fica difícil resistir à tentação de usá-la. Mas é indispensável a cada momento ter a noção precisa do que se está fazendo. [...] 2. Deve-se ainda observar que uma função consta de três ingredientes: domínio, contra-domínio e a lei de correspondência $x : \rightarrow f(x)$. Mesmo quando dizemos simplesmente "a função f", ficam subtendidos seu domínio X e seu contra-domínio Y. Sem que eles sejam especificados, não existe a função. Assim sendo, uma pergunta do tipo "Qual é o domínio da função $f(x) = 1/x$?", estritamente falando, não faz sentido. A pergunta correta seria: "Qual é o maior subconjunto $X \subset \mathbf{R}$ tal que a fórmula $f(x) = 1/x$ define uma função $f: X :\rightarrow \mathbf{R}$? "Novamente, a pergunta incorreta é mais simples de formular. Se for feita assim, é preciso saber seu significado." (Lima, 2005, p.38 – 39)

Em seguida, o autor apresenta três exemplos nos quais a noção de função é articulada com os domínios geométrico e algébrico e que sendo exemplos genéricos podem auxiliar o professor a construir seus próprios exemplos para casos mais específicos ou até para casos cotidianos mais adaptados aos seus estudantes.

> "1. Sejam X o conjunto dos triângulos do plano π e **R** o conjunto dos números reais [...]. Se, a cada t ∈ X, fizermos corresponder a número real f(t) – área do triângulo t, obteremos uma função f: X :→ R. 2. Sejam S o conjunto dos segmentos de reta do plano π e Δ o conjunto de retas desse mesmo plano. A regra que associa a cada segmento AB ∈ S sua mediatriz g(AB) define uma função de g: S :→ Δ. 3. A correspondência que associa a cada número natural n seus sucessor n + 1 define uma função s: **N** :→ **N**, com s(n) = n + 1." (Lima, 2005, p. 40)

O autor segue sempre seu estilo fazendo recomendações sobre as noções introduzidas e dando exemplos e contra-exemplos para ilustrá-las. Aqui é importante observar que o autor busca contra-exemplo que mostra que nem sempre o que é verdadeiro num sentido vale para o outro. Essa prática não é muito comum nos livros didáticos que, em geral, apresentam somente exemplos, o que pode levar os estudantes a considerarem que a propriedade é sempre verdadeira e que se pode utilizá-la nos dois sentidos. Como no ensino fundamental e médio não se demonstram teoremas e propriedades, é importante esse trabalho com os contra-exemplos, pois são eles que mostram a forma de funcionar do trabalho dos matemáticos que estão sempre questionando sobre quais as condições que uma determinada propriedade é verdadeira ou falsa, bastando encontrar um contra-exemplo para mostrar que ela não se aplica. A citação abaixo mostra o contra-exemplo do exemplo 1 dado acima, isto é, a impossibilidade de considerar a mesma propriedade nos dois sentidos.

> "5. Indiquemos com X o conjunto dos números reais positivos e Y o conjunto dos triângulos do plano. Para cada x ∈ X, ponhamos

> $f(x) = t$ caso t seja um triângulo cuja área é x. Esta regra não define uma função $f: X \to Y$ porque é ambígua: dado o número $x > 0$, existe uma infinidade de triângulos diferentes com área x." (Lima, 2005, p. 42)

A partir da noção de função e bijeção, o autor define número cardinal e apresenta exemplos e contra-exemplos articulando conhecimentos nos domínios da álgebra e da geometria e até buscando fatos históricos para ilustrar a definição e introduzir novas noções associadas à noção que está sendo trabalhado, como é o caso da noção de subconjunto próprio que da forma como é tratado no exemplo deve levar o professor a colocar a questão: "O que é um subconjunto próprio?", isto é, o professor de matemática funciona aqui como o matemático, questiona sobre a nova noção que aparece relacionada ao desenvolvimento da noção de número cardinal. Esse trabalho de questionamento é o motor da compreensão da atividade matemática e cabe ao professor incentivar seus alunos a esta prática. Além disso, o professor pode utilizar o primeiro exemplo para relembrar com seus estudantes a forma como eles iniciaram sua aprendizagem matemática onde se trabalhava essa questão da correspondência biunívoca, mas sem o formalismo aqui apresentado que deixa evidente a necessidade do conceito de função para que se compreenda essa relação o que é impossível fazer com os alunos do ensino fundamental, mas que seria interessante trabalhar com os alunos mais avançados e futuros professores para que eles possam distinguir o número natural ou ordinal do número cardinal, isto é, um tratamento mais formal e científico de uma noção matemática pode ser trabalhado como uma ferramenta que permite justificar noções já conhecidas, mas que, muitas vezes, ainda não são claras para alunos mais avançados e professores.

> "6. Sejam $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Definindo f: X · Y pela regra $f(n) = 2n$, temos uma correspondência biunívoca,

onde f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6, f(4) = 8 e f(5) = 10. 7. Um exemplo particularmente curioso de correspondência biunívoca foi descoberto pelo físico Galileu Galilei, que viveu há quatrocentos anos. Seja P o conjunto dos números naturais pares: P= {2, 4, 6, ..., 2n, ...}> Obtém-se uma correspondência biunívoca f: N · P pondo-se f(n) = 2n. O interessante deste exemplo é que P é um subconjunto próprio de N. (Lima, 2005, p.42)".

O autor segue definindo conjunto finito e faz alguns comentários sobre os conjuntos infinitos esclarecendo qual a maior contribuição de Cantor e apresenta o que ele denomina Fantasia Matemática, isto é, o conhecido problema sobre o Grande Hotel de Georg Cantor. Na citação abaixo é possível verificar a importância do trabalho de Cantor para o desenvolvimento da matemática e a forma como o assunto é tratado deve permitir ao leitor compreender a distinção entre finito, infinito e muito grande através de um discurso no qual não se aplica todo o formalismo da teoria que está sendo discutida.

"Em primeiro lugar, convém esclarecer que a maior contribuição de Cantor não foi a adoção da linguagem e da notação dos conjuntos e sim suas descobertas sobre os números cardinais de conjuntos infinitos. Ele foi o primeiro a descobrir que existem conjuntos infinitos com diferentes cardinalidades ao provar que não pode haver uma correspondência biunívoca entre **N** e o conjunto **R** dos números reais e que nenhum conjunto X pode estar em correspondência biunívoca com o conjunto $\wp$(X) cujos elementos são os subconjuntos de X. Além disso, ele mostrou que a reta, o plano e o espaço tridimensional (ou mesmo espaços com dimensão superior a três) têm o mesmo número cardinal. Estes fatos, que atualmente são considerados corriqueiros entre os matemáticos, causaram forte impacto na época(meados do século dezenove)." (Lima, 2005, p. 47-48- 49)

Após o exemplo do Grande Hotel, de Georg Cantor o autor faz a recomendação abaixo sobre a distinção entre conjunto infinito com um conjunto que tem um número muito grande de elementos, utilizando a linguagem cotidiana e exemplos do domínio da física para ilustrar essa diferença e mostrar que existe sempre um número natural maior que um número natural dado.

> "4. Não confunda conjunto infinito com aquele que tem um número muito grande (porém finito) de elementos. Quando na linguagem comum, se diz algo como "-Já ouvi isto uma infinidade de vezes", trata-se de uma mera força de expressão. Não há distâncias infinitas (mesmo entre duas galáxias bem afastadas) e até o número de átomos do universo é finito. $135 \mathrm{x} 2^{256}$. (O físico Arthur Eddington estimou o número de prótons do universo em $135 \mathrm{x} 2^{256}$. O número de átomos é certamente menor pois todo átomo contém ao menos um próton). É importante ter sempre em mente que nenhum número natural *n* é maior do que todos os demais: tem-se sempre $n < n + 1$." (Lima, 2005, p. 49)

Para terminar o capítulo, Lima propõe uma lista de exercícios na qual todos os exercícios exigem o nível disponível e como já observamos acima, são tarefas genéricas que podem auxiliar o professor a construir seus casos particulares.

Seguindo a mesma estrutura, o autor introduz a noção de números reais articulando domínios como a álgebra, a geometria, a história da matemática, a análise matemática e quando possível outros domínios como física e considerando também situações cotidianas. Em relação às representações utilizadas, verifica-se aqui a necessidade de introduzir a representação decimal e a representação fracionária numérica para tratar as expressões decimais, mas as operações com decimais é tratada no registro de representação algébrico intrínseco certamente por considerar apenas as definições e as propriedades dessas operações.

Ainda neste capítulo sobre os números reais, o autor trata a questão das desigualdades e dos intervalos para introduzir a noção de valor absoluto que é articulada com a noção de distância entre dois pontos.

Para finalizar o capítulo, o autor introduz a noção de seqüência articulando essa noção com as noções de funções anteriormente introduzidas e as noções de números naturais e números reais e como exemplos de seqüências ele considera as progressões aritmética e geométrica que, em geral, são os exemplos de seqüências trabalhados no ensino médio e que podem ser articulados com outras noções da própria matemática ou com outros domínios como a biologia, a física e a economia.

Em relação aos exercícios que são deixados ao leitor no final de cada capítulo, para os números reais encontramos tarefas que exigem um nível de conhecimento disponível e onde o registro de representação algébrico intrínseco é privilegiado, deixando para o professor o tratamento dos casos particulares.

É somente no capítulo 5 que o autor introduz a noção de função afim, mas para isto retoma as definições de produto cartesiano e considera sua representação algébrica simbólica intrínseca e sua representação gráfica, mesmo se não utiliza esta terminologia, mas certamente não trata das conversões entre elas, pois este trabalho não faz parte do objetivo de sua obra.

Mas, ao definir gráfico de uma função, fica evidente a necessidade de introduzir a noção de produto cartesiano e considerar suas propriedades para fazer a passagem da função $f(x) = y$ para o par ordenado $(x, f(x))$.

> "O *gráfico* de uma função f: $X \rightarrow Y$ é o subconjunto G(f) do produto cartesiano X x Y formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um ponto qualquer de X e y = f(x). Assim, G(f) = $\{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in X\}$. A fim de que um subconjunto $G \subset X \times Y$ seja p gráfico de alguma função f: $X \rightarrow Y$ é necessário e suficiente que G cumpra as seguintes condições: G1. Para todo $x \in X$ existe um par ordenado $(x, y) \in G$ cuja primeira ordenada é x. G2. Se p = (x, y) e p' = (x', y') são pares pertencentes a G com a mesma primeira ordenada x então y = y' (isto é, p = p'). É claro que estas condições podem ser resumidas numa só dizendo que para cada $x \in X$ existe um, e somente um, $y \in Y$ tal que $(x, y) \in G$." (Lima, 2005, p.80)

Ao explicitar a relação entre o produto cartesiano e a noção de relação, o autor aproveita para explorar exemplos que permitem articular geometria e álgebra. Certamente, o trabalho aqui desenvolvido, é para professores e não para estudantes do ensino médio, supondo que o leitor tenha certa familiaridade com as noções que estão sendo tratadas e suas diferentes representações, como é possível verificar na definição de gráfico apresentada pelo autor.

> "O *gráfico* de uma relação R entre os conjunto X e Y é o subconjunto G(R) do produto cartesiano X x Y formado pelos pares (x, y) tais que x Ry. Assim, $G(R) = \{(x, y) \in X \times Y; x R y\}$. Esta noção inclui o caso particular do gráfico de uma função." (Lima, 2005, p. 81)

Na tentativa de mostrar as dificuldades que podem surgir quando se define função como subconjunto do produto cartesiano, o autor recomenda que a função seja considerada como uma correspondência, uma transformação e não simplesmente como um conjunto de pares ordenados que o autor deixa para a definição de gráfico de uma função, isto é, mesmo não utilizando essa terminologia, o autor faz um discurso sobre a diferença entre a representação de uma função no registro de representação algébrico intrínseco, que nos apresenta a transformação que está sendo efetuada e o registro de representação gráfico, que permite visualizar o conjunto de pares ordenados que representam a função sem que se possa perceber qual a transformação, correspondência, dependência ou resultado de um movimento que se está efetuando.

> "Praticamente todos os textos escolares em uso em nosso país definem uma função f: X → Y como um subconjunto do produto cartesiano X x Y com as propriedades G1 e G2 acima enunciadas. Essa definição apresenta o inconveniente de ser formal, estática e não transmitir a idéia intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência (uma grandeza função de outra) ou resultado de um movimento. Quem pensaria numa rotação como um conjunto de pares ordenados? Os matemáticos e (principalmente) os usuários da Matemática olham para uma função como uma correspondência, não como um conjunto de pares ordenados. Poder-se-ia talvez abrir exceção para os lógicos, quando querem mostrar que todas as noções matemáticas se reduzem, em última análise, à idéia pura de conjunto. Mas certamente este não é o caso aqui. Se definimos uma função f: X → Y como um subconjunto particular do produto cartesiano X x Y, qual seria a definição matemática de gráfico de uma função. Em suma, a terminologia que consideramos adequada é a seguinte: um subconjunto qualquer de X x Y é o *gráfico* de uma relação de X para Y. Se esse conjunto cumpre as condições G1 e G2 acima estipuladas, ele é o *gráfico* de uma função." (Lima, 2005, p. 81 – 82)

Ao fazer a distinção entre a definição da função que, em geral, é dada por uma fórmula, o que neste trabalho denomina-se registro de representação algébrico intrínseco, e seu gráfico, que neste trabalho é denominado registro de representação gráfico, o autor, utilizando as representações adequadas, e termina mostrando que o registro de representação gráfico poderá colocar mais dificuldades que o registro de representação algébrico intrínseco quando se deseja fazer a conversão no sentido de passagem do registro de representação gráfico para o algébrico, pois é necessário enxergar o par ordenado (x, y) com y = f(x), isto é, é preciso que se relacione o gráfico com a função em jogo para que seja possível pensar na conversão, o que não acontece com o outro sentido da conversão, pois basta determinar alguns pontos e construir o gráfico sem necessidade de reconhecer qual o caso que se está estudando, este reconhecimento é interessante para controlar os resultados, mas não interfere diretamente no trabalho a ser efetuado.

Em seguida, o autor introduz o plano numérico $\mathbf{R}^2$ e considera alguns exemplos geométricos para os quais ele necessita fazer recomendações a fim de transformá-los em funções definidas de um intervalo real em **R** como, por exemplo, a definição de uma função a partir da noção de círculo que o autor mostra ser ambígua, podendo significar circunferência ou disco e que lhe permite considerar o exemplo da fórmula da distância entre dois pontos como uma função e mostrar que seu gráfico pode adquirir uma forma mais geométrica que lhe permite enunciar a propriedade abaixo que é muito utilizada quando se deseja reconhecer a partir do gráfico quando se trata ou não de uma função.

> "Seja $X \subset R$ um subconjunto que consideraremos situado sobre o eixo horizontal. Um subconjunto $G \subset \mathbf{R}^2$ é o gráfico de uma função $f: X \to R$ se, e somente se, toda reta paralela ao eixo vertical, traçada a partir de um ponto de X, intersecta G num único ponto." (Lima, 2005, p.86)

Finalmente, o autor define a função afim e considera como exemplos seus casos particulares, isto é, a função identidade, as translações, as funções lineares e as funções constantes.

Utilizando o valor da função em dois pontos, o autor determina o coeficiente a da função afim aproveitando para mostrar que ele representa uma taxa de crescimento ou taxa de variação o que lhe permite considerar os casos em que a função afim é crescente ou decrescente e monótona não decrescente e monótona não crescente.

Após esse trabalho de esclarecimento sobre o que representa o coeficiente **a** de uma função afim, que esclarece seu papel no estudo de problemas cotidianos ou de outros domínios como a física, economia, biologia o autor apresenta o exemplo atualmente muito utilizado da corrida de táxi, mas o interesse da sua apresentação é que este problema é tratado de forma bastante genérica permitindo ao professor que crie outros exemplos a partir deste, mas que para ser compreendido necessita que se conheça pelo menos a fórmula que representa uma função afim, isto é seu registro de representação gráfico intrínseco.

> "O preço a pagar por uma corrida de táxi é dado por uma função afim f: x $\mapsto$ ax + b, onde x é a distancia percorrida (usualmente medida em quilômetros), o valor inicial b é a chamada *bandeirada* e o coeficiente a é o preço de cada quilômetro rodado." (Lima, 2005, p.88)

Continuando o estudo da função afim, o autor diz que seu gráfico é uma linha reta e tomando três pontos genéricos e articulando a noção de função afim que está sendo trabalhada no quadro algébrico com a noção de distância entre dois pontos que, em geral, é introduzida no quadro da geometria analítica, o autor demonstra que os três pontos quaisquer estão alinhados determinando uma reta (o gráfico da função f) e a partir deste resultado o autor passa ao quadro geométrico para definir b como o ponto onde a reta intersecta o eixo OY e chamar a de inclinação ou coeficiente angular dessa reta em relação ao eixo OX. Aqui além da mudança de quadros e da explicitação dessa mudança que representa uma mudança de ponto de vista, verifica-se que o autor necessita de uma conversão de registros de representação para fazer a passagem do registro de representação algébrico intrínseco para o registro de representação gráfico.

> "*O gráfico G de uma função afim* f: $x \mapsto ax + b$ *é uma linha reta*. Para ver isto basta mostrar que três pontos quaisquer $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ desse gráfico são colineares. [...] Do ponto de vista geométrico b é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função f: $x \mapsto ax + b$, intersecta o eixo OY. O número a chama-se *a inclinação*, ou *coeficiente angular*, dessa reta (em relação ao eixo OX)." (Lima, 2005, p.88 – 89- 90)

Dessa forma, o autor define a como inclinação ou coeficiente angular e estuda as propriedades do gráfico para o coeficiente a, que poderão ser trabalhadas pelo professor para exemplos em outros domínios, como a física e a economia, que permitem mostrar a importância dessa discussão em aplicações desse tipo.

> "Quanto maior o valor de a mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$, o gráfico de f é uma reta ascendente (quando se caminha para a direita) e quando $a < 0$, a reta é descendente." (Lima, 2005, p.90)

O autor demonstra a unicidade da função afim quando são dados dois pontos arbitrários e demonstra também que toda reta não vertical é o gráfico de uma função afim. Essa demonstração não precisa ser trabalhada com estudantes do ensino médio, mas permite ao professor esclarecer seus estudantes no caso de aparecer esse tipo de questionamento durante o curso, pois em matemática os resultados quando generalizados devem ser demonstrados.

Após apresentar e demonstrar as propriedades da função afim e introduzir a nomenclatura adequada para as diferentes representações, o autor faz um comentário sobre a terminologia utilizada que pode auxiliar a compreender melhor a noção de função afim e suas representações permitindo fazer as distinções quando necessário.

> "1. Se a função afim f é dada por f(x) = ax + b, não é adequado chamar o número a de *coeficiente angular* da função f. O nome mais apropriado, que usamos, é taxa de variação (ou taxa de crescimento). Em primeiro lugar não há, na maioria dos casos, ângulo algum no problema estudado. Em segundo lugar, mesmo considerando o gráfico de f, o ângulo que ele faz com o eixo horizontal depende das unidades escolhidas para medir as grandezas x ∈ f(x) . Em resumo: tem-se taxa de variação de uma função e coeficiente angular de uma reta. 2. A maioria dos nossos textos escolares refere-se à função afim como "função do primeiro grau". Essa nomenclatura sugere a pergunta: o que é grau de uma função? Função não tem grau. O que possui grau é um polinômio." (Lima, 2005, p.92)

O autor volta à noção de função linear para articulá-la com a noção de proporcionalidade, enunciando e demonstrando o teorema fundamental da proporcionalidade a partir da noção de função linear e explicitando o resultado encontrado através do exemplo de uma aplicação cotidiana como a caderneta de poupança onde o autor distingue a questão desse investimento da questão do crescimento do capital em função do tempo que não é linear, mas exponencial.

> "A função linear, dada pela formula f(x) = ax, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. [...] Se investimos a quantia x, digamos numa caderneta de poupança, depois de um ano teremos um capital f(x). [...] O Teorema Fundamental nos permite concluir que f(x) é proporcional a x. [...] (Não confundir este exemplo com o crescimento de um capital em função do tempo. Este não é proporcional e será tratado quando estudarmos a função exponencial)." (Lima, 20005, p. 97)

Ele volta, ainda, à noção de função afim para articular essa noção matemática com outros quadros intramatemáticos e mostrar aplicações com o cotidiano onde uma delas corresponde à observação de um de seus colaboradores e que permite ao professor mostrar aos seus alunos que se ficamos atentos as aplicações da matemática podemos encontrar as mais variadas possíveis.

> "E.W. observou, numa sapataria, que o vendedor determinava o número do sapato do cliente medindo seu pé com uma escala na qual, em vez de centímetros, estavam marcados os números ..., 36, 37, 38, ... O fato mais importante que ele percebeu foi que esses números estavam igualmente espaçados, isto é, a distância de cada um deles para o seguinte era constante. Isto queria dizer que a acréscimos iguais no tamanho do pé corresponderiam acréscimos iguais no número do sapato. [...] Isto lhe deu certeza de que a função que faz corresponder a cada comprimento x de um pé o número f(x) do sapato adequado é uma função afim: $f(x) = ax + b$. E.W. sabia que, para determinar os coeficientes a, b da função afim, bastava conhecer $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ para dois valores diferentes quaisquer de x_1 e x_2. Ele atravessou a rua. Do outro lado havia uma papelaria, onde comprou uma régua. Voltou à sapataria e pediu a escala do vendedor. Como sua régua media até milímetros enquanto a escala do vendedor só marcava pontos e meio pontos, escolheu dois valores $x_1 \neq x_2$ tais que os números de sapato correspondentes, $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, assinalados na escala, fossem inteiros. Tomou $x_1 = 20$, $x_2 = 28$ e viu que $f(x_1) = 32$, $f(x_2) = 42$. A partir daí, calculou os coeficientes $a = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2)$ e $b = y_1 - ax_1$ chegando a fórmula $f(x) = (5x + 28)/4$ que dá o número do sapato de uma pessoa em função do comprimento do seu pé em centímetros". (Lima, 2005, p.99 – 100).

Após apresentar o exemplo acima, o autor demonstra o teorema que garante o trabalho efetuado por E.W. utilizando o Teorema Fundamental da Proporcionalidade na sua demonstração. Segue apresentando um exemplo de movimento uniforme articulando o novo conhecimento com uma noção que, em geral é trabalhada no primeiro ano do ensino médio na disciplina de física. Aproveita também para articular a noção de função afim com a noção de progressão aritmética, utilizando o quadro geométrico para demonstrar a relação entre as duas noções.

Para terminar o capítulo, o autor introduz a noção de funções poligonais, dizendo que são funções muito utilizadas em Analise, Cálculo Numérico, Equações Diferenciais, Topologia. Verifica-se aqui a importância da definição de intervalo para definir tais funções.

Após todas as articulações tratadas de um ponto de vista mais teórico, onde o registro de representação algébrico intrínseco é o privilegiado e o registro de representação gráfico é tratado em seus aspectos teóricos mostrando a importância dos pares ordenados para sua utilização, o autor propõe uma lista de exercícios, onde cabe ao professor introduzir os outros registros. O interessante da lista proposta é a diversidade de aplicações existentes, tais como: a questão do táxi, identificação de um valor em escala linear sobre uma reta, conversão de temperaturas, vazão de uma caixa de água, número de palitos para formar quadrados, proporcionalidade, física enunciando a Lei da gravitação universal, relação pressão x temperatura para os Gases Perfeitos, Resistência Elétrica e comprimento e área de sua seção reta, dilatação térmica, porcentagem, progressão aritmética e soma de uma progressão aritmética, tempo e percurso sobre uma escada rolante, “fórmula 95” para o cálculo da aposentadoria, média escolar, distância e tempo de encontro de dois veículos, dois trens ou um pedestre e um trem, gráfico de uma função g conhecido o gráfico da função f, inequações do primeiro grau, compra em um supermercado com porcentagem de desconto, cálculo de alguns casos de imposto de renda com tabela da Secretaria da Receita Federal, promoção de uma copiadora, funções poligonais e seus gráficos, problema da locadora de automóveis e alguns exercícios onde é necessário demonstrar alguma propriedade da noção em jogo.

Verifica-se que o autor propõe situações das mais variadas possíveis, possibilitando ao professor desenvolver um curso em diferentes níveis onde se pode considerar casos específicos para as diferentes turmas. Cabe ao professor fazer as escolhas mais adequadas tanto em termos de articulação de quadros, pois o autor propõe vários tipos de articulação deste tipo como em termos de situações cotidianas, ficando para o professor a escolha do registro de representação mais apropriado e se desejar tratar a questão da conversão entre os diferentes registros de representação deverá preparar seu próprio material.

O livro é muito rico em articulações de quadros, dando ao professor muitas possibilidades de escolha, mas certamente exigindo algum esforço principalmente para a escolha de um trabalho mais genérico ou mais especifico que exigirá a introdução de outros registros de representação. A dificuldade que o livro pode apresentar é justamente pela sua riqueza de articulações que exige um nível disponível em relação às noções em jogo.

2. A obra de Edwaldo Roque Bianchini / Herval Paccola intitulada "matemática" (volume 1, 236 páginas) e designada na seqüência por "Bianchini".

No texto abaixo, os autores observam como a obra será desenvolvida e mesmo não utilizando a terminologia articulação, os autores consideram essas articulações através de exemplos e de uma secção especial para as articulações com situações cotidianas, que eles denominam secção matemática no mundo.

> "A exposição teórica dos assuntos vem acompanhada de exemplos e boxes laterais, cuja finalidade é elucidar e ampliar a teoria apresentada, para auxiliar o entendimento [...]. A seção Matemática no mundo mostra uma aplicação do conteúdo estudado".
> (Bianchini e Paccola, 2004, p. de apresentação).

Comentários e analise

O livro está dividido em doze capítulos, sendo que a noção de função afim é apresentada no capítulo 5 como "Função polinomial do 1º grau", nos capítulos 1 e 2, os autores fazem uma pequena revisão de Aritmética, Álgebra e Geometria Plana estudadas no ensino fundamental, no capítulo 3, eles desenvolvem a noção intuitiva de conjunto e suas representações, relações e operações, assim como os conjuntos numéricos e os intervalos com suas representações na reta real. Em seguida, tratando como uma relação particular entre dois conjuntos definiu-se domínio, contra domínio e conjunto imagem utilizando a noção de intervalo para estudar o domínio das funções e no capítulo 4 considera-se o conceito geral de função.

No capítulo 5, os autores introduzem a noção de função afim iniciando por um texto com informações históricas sobre o tema, destacando a associação da função afim aos conceitos de proporção, equação e uso da representação gráfica. Verifica-se aqui, que os autores já introduzem a noção de função afim articulando com noções que já se supões disponíveis para os estudantes e que já exigem uma mudança de quadro e ponto de vista e uma conversão de registro de representação. Certamente, nesse momento os autores, sem utilizar essa terminologia anunciam estas articulações que serão desenvolvidas na seqüência.

A história das funções polinomiais do 1º grau está diretamente associada aos conceitos de proporção e de equação, antecedentes diretos no seu processo de evolução. O matemático francês Nicole Oresme (1323-1382) fez uma das primeiras tentativas de representar graficamente a maneira como uma quantidade varia em função de outra, embora ainda não houvesse o conceito de função nem a idéia de coordenadas.

O uso da representação gráfica de Oresme reapareceu nos séculos XVI e XVII em um trabalho de Galileu Galilei (1564-1642), físico e astrônomo italiano, que utilizou essa teoria como suporte para seus experimentos. Assim, essa teoria foi divulgada e aprimorada até se chegar à idéia de função do 1º grau como a conhecemos hoje. Atualmente, esse tipo de função está presente em muitas áreas científicas servindo de modelos para situações físicas, químicas, de economia, etc.

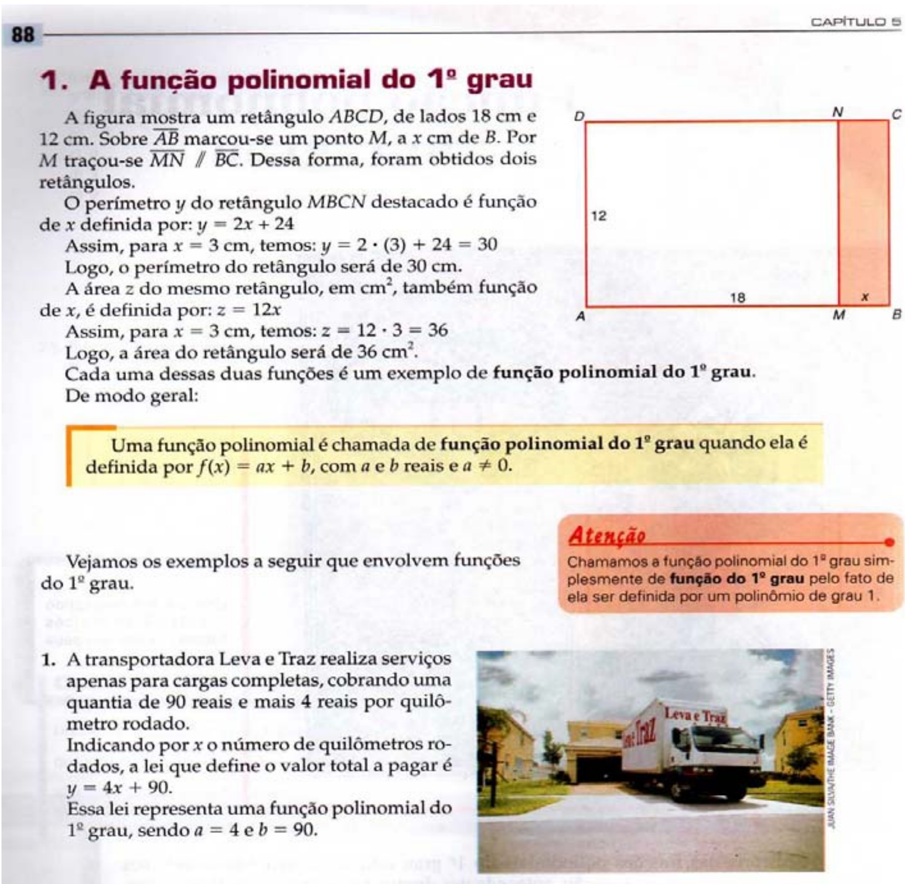
Neste capítulo, vamos estudar as funções polinomiais do 1º grau, seus gráficos e suas principais propriedades.

Bianchini e Paccola, 2004, p. 87.

Os autores iniciam, utilizando um discurso para a apresentação de função afim, onde essa noção é articulada com a geometria plana e situações do cotidiano. Dessa forma, o conteúdo função polinomial do 1^{o} grau (denominação dos autores para função afim) foi dividido em três partes.

A parte: A função polinomial do 1º grau

O conceito de função afim é introduzido através de um exemplo geométrico do calculo de perímetro e área, em seguida, considera-se a definição de função polinomial do 1º grau uma situação problema, isto é, articulando a nova noção a ser introduzida com noções de geometria, situação cotidiana e polinômios. É importante observar que no exemplo os autores utilizam y = 2x – 24 e z = 12x e passam para a definição da função f(x) = ax + b, com a e b reais e a ≠ 0 sem nenhum discurso que justifique as diferentes representações utilizadas para o mesmo objeto matemático, neste caso, eles supõem que os estudantes já possuem conhecimentos suficientes para compreender a conversão entre registros de representação algébrico explícito para o registro de representação algébrico intrínseco.


88 CAPÍTULO 5

1. A função polinomial do 1º grau

A figura mostra um retângulo $ABCD$, de lados 18 cm e 12 cm. Sobre $\overline{AB}$ marcou-se um ponto M, a x cm de B. Por M traçou-se $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$. Dessa forma, foram obtidos dois retângulos.

O perímetro y do retângulo $MBCN$ destacado é função de x definida por: $y = 2x + 24$

Assim, para $x = 3$ cm, temos: $y = 2 \cdot (3) + 24 = 30$

Logo, o perímetro do retângulo será de 30 cm.

A área z do mesmo retângulo, em cm², também função de x, é definida por: $z = 12x$

Assim, para $x = 3$ cm, temos: $z = 12 \cdot 3 = 36$

Logo, a área do retângulo será de 36 cm².

Cada uma dessas duas funções é um exemplo de **função polinomial do 1º grau**.

De modo geral:

Uma função polinomial é chamada de **função polinomial do 1º grau** quando ela é definida por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$.

Vejamos os exemplos a seguir que envolvem funções do 1º grau.

Atenção

Chamamos a função polinomial do 1º grau simplesmente de **função do 1º grau** pelo fato de ela ser definida por um polinômio de grau 1.

1. A transportadora Leva e Traz realiza serviços apenas para cargas completas, cobrando uma quantia de 90 reais e mais 4 reais por quilômetro rodado.
Indicando por x o número de quilômetros rodados, a lei que define o valor total a pagar é $y = 4x + 90$.
Essa lei representa uma função polinomial do 1º grau, sendo $a = 4$ e $b = 90$.

Bianchini e Paccola, 2004, p. 88.

Os autores chamam a atenção para a denominação que será utilizada na seqüência, justificando que função polinomial do 1º grau será tratada simplesmente como “função do 1º grau” por ser definida por um polinômio de grau 1, isto é, os autores dão ênfase a articulação entre função afim e polinômio do 1º grau.

Após essa introdução de noção de função afim, os autores, propõem dez questões, das quais as cinco primeiras são bem semelhantes aos exemplos e as outras cinco envolvem articulações com outras noções matemáticas (noção de valor numérico, noção de polinômio**,** noção de sistemas lineares formado por duas equações lineares com duas incógnitas), porém de forma direta sem explorar muito o cotidiano.

Escolhe-se apresentar aqui, três tarefas destinadas aos estudantes, onde os autores explicitam o conteúdo em jogo e as técnicas que pretendem desenvolver. Aplica-se a grade de analise sobre essas tarefas para compreender melhor os diferentes níveis de conhecimento esperados dos estudantes.

1. Dentre as leis dadas abaixo, identifique as que são de função de 1º grau e nesse caso expresse-as na forma $y = ax + b$.

a) $y = 2(x + 8)$

b) $y = x^2 + 8$

c) $y = 3^x$

d) $y = \frac{8}{x} + \frac{1}{2}$

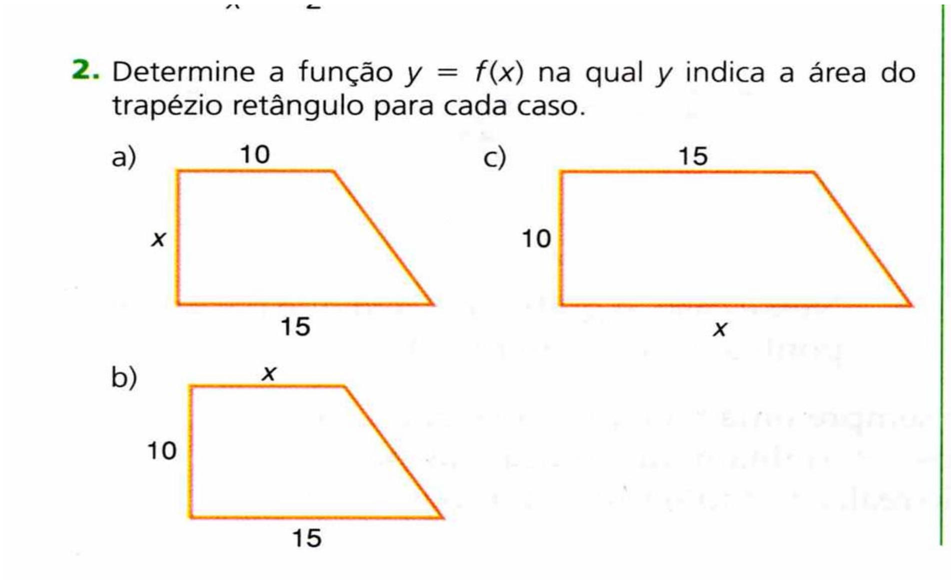
e) $y = \frac{2 + x}{8}$

f) $y = \frac{x - 8}{3}$

g) $y = \sqrt{x + 1}$

Bianchini e Paccola, 2004, p. 89.

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: técnico;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural, registro de representação algébrico e registro de representação algébrico explícito;
- Domínio em que a tarefa é enunciada: algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico intrínseco e registro de representação algébrico explícito;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: supõe-se que sejam disponíveis as propriedades e operações sobre os conjuntos dos números reais e a conversão entre o registro de representação algébrico intrínseco e o registro de representação algébrico explícito.


2. Determine a função $y = f(x)$ na qual y indica a área do trapézio retângulo para cada caso.

Fonte: Bianchini e Paccola, 2004, p. 89.

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: mobilizável para a noção de área e disponível para a mudança de quadro;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural e representação geométrica de uma figura plana;
- Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada: situação que envolve o conceito de função afim e área de figura plana, logo seu domínio é o numérico, algébrico e geométrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: é necessário que o estudante conheça a fórmula para o cálculo da área do trapézio retângulo, já que sua representação geométrica é dada e após o calculo da área é necessário identificá-la com a lei de formação (fórmula) de uma função afim, isto é, com registro de representação algébrico explícito;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: É preciso mobilizar a noção de área do trapézio retângulo, e reconhecer nela uma função afim, o que corresponde a dispor de conhecimentos associados a passagem do quadro geométrico para o quadro algébrico.

Neste tipo de tarefa é importante observar que, aparecem noções de perímetro e área como no exemplo apresentado na introdução, e o tratamento dessas noções é suposta pelo autor como natural, como nenhum discurso que as justifique acompanhou o trabalho apresentado, pode-se esperar que os estudantes tenham dificuldades em reconhecer esses casos e fazer as mudanças de quadro necessárias. Na realidade, o conhecimento necessário está mais relacionado à interpretação das representações utilizadas, isto é, na escolha da representação adequada para os quadros em que se desenvolve a tarefa.

3. O preço de uma corrida de táxi inclui uma parte fixa (bandeirada) mais um valor variável que depende do número de quilômetros rodados. Numa cidade, a bandeirada custa R$ 5,20 e o quilômetro rodado custa R$ 0,68.

a) Indicando por x o número de quilômetros rodados e por y o preço a pagar, determine a função $y = f(x)$.

b) Determine o preço a pagar por uma corrida de 7,5 km.

c) Calcule a distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 8,26.

Bianchini e Paccola, 2004, p. 89

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: disponível;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação língua natural;
- Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada: numérico e algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: Para as questões a e b, o estudante deve reconhecer que se trata de uma função afim e utilizar os registros de representação algébrico intrínseco e registro de representação algébrico explícito. Para as questões b e, é necessário que o estudante aplique os conhecimentos de valor numérico à lei de formação da função afim, isto é, a função dado no registro de representação algébrico explícito;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: reconhecer que se trata de uma função afim e articular com a lei de formação de uma função, além de dispor do conhecimento de valor numérico e expressões numéricas.

Nas tarefas deste gênero, sendo o livro destinado aos estudantes, eles devem sentir falta do discurso sobre as diferentes representações utilizadas na situação que introduz a noção de função afim, pois como se vê acima, ela exige a conversão do registro de representação algébrico intrínseco para o registro de representação algébrico explícito.

Nessa primeira parte, verifica-se que os autores se preocupam com a linguagem para justificar o nome dado a função articulando com a noção de polinômio. Neste momento, é necessário que os alunos mobilizem seus conhecimentos de polinômio, equação do 1º grau, valor numérico e expressões numéricas, apesar de utilizar diferentes tipos de representações e explicitar os domínios ou quadros em jogo, os autores deixam o discurso sobre as articulações de domínios ou quadros e as conversões dos registros de representações a cargo do professor.

A parte: Gráfico da função do 1º grau

A apresentação do gráfico da função afim é feita de forma tradicional, ou seja, pela construção de tabelas e passagem a representação do ponto, isto é, par ordenado para em seguida, fazer a passagem para uma representação gráfica em um plano cartesiano, ou seja, no $\mathbf{R}^2$**,**o que representa a conversão do registro de representação tabela para o registro de representação par ordenado que permite a conversão para o registro de representação gráfico e que é considerado num único sentido e como sendo uma simples descrição da noção de função afim sem que se considere as dificuldades que essas conversões podem apontar. Os autores consideram a noção de Domínio e Imagem da função afim, e através de um exemplo fazem a conversão de registro de representação gráfico para o registro de representação algébrico explícito (fórmula). Nesse momento, para efetuar a passagem, os autores utilizam a noção de sistemas de duas equações e duas incógnitas.

O quadro "recorde" atenta para o fato que y = f(x) e resolução de sistema de duas equações com duas incógnitas, isto é, os autores fazem uma rápida recordação de noção de sistema de duas equações e duas incógnitas, que deve ser disponível para a mudança de representação efetuada.

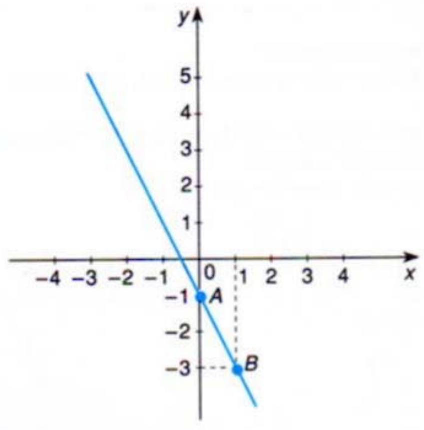
Para $x = 0$, temos: $y = -2 \cdot 0 - 1 = -1$

Para $x = 1$, temos: $y = -2 \cdot 1 - 1 = -3$

Tabela:

x	y	Ponto
0	-1	$A(0, -1)$
1	-3	$B(1, -3)$

Gráfico:



Bianchini e Paccola, 2004, p. 91

Podemos também encontrar a lei de uma função do 1º grau conhecidos dois pontos de seu gráfico. Como exemplo, vamos determinar a lei da função f do 1º grau cujo gráfico passa pelos pontos $A(2, 3)$ e $B(4, 7)$.

Sabemos que essa função é do tipo $y = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$.

As coordenadas de A e B satisfazem essa lei. Assim:

- para $x = 2$ e $y = 3$, temos: $3 = 2a + b$
- para $x = 4$ e $y = 7$, temos: $7 = 4a + b$

Obtemos o sistema $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 4a + b = 7 \end{cases}$ cuja solução é $a = 2$ e $b = -1$. Logo, a lei da função f é $y = 2x - 1$.

Recorde

$$\begin{cases} 2a + b = 3 & \times(-1) \\ 4a + b = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a - b = -3 \\ 4a + b = 7 \end{cases}$$

$$2a = 4$$

$$a = 2$$

$2a + b = 3$

$2 \cdot 2 + b = 3$

$4 + b = 3$

$b = 3 - 4$

$b = -1$

Bianchini e Paccola, 2004, p. 91

É realizada a conversão do registro de representação algébrico explícito para o registro de representação gráfico (fórmula-tabela-gráfico) bem como a inversão desse sentido, mesmo que esta questão não seja com o termo conversão que segundo Duval *"Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela idéia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido."*

(Duval 2004, p.20). O sentido da conversão dos registros de representação é muito importante, pois a mudança de sentido da conversão, coloca em evidência a necessidade de dispor de outros conhecimentos sobre outras noções matemáticas, além da que está sendo estudada.

Após apresentar a noção de gráfico de uma função afim e suas representações, os autores propõem um grupo de exercícios denominados "exercícios propostos", que contêm dez questões numeradas de 11 a 21. Nesses exercícios é possível desenvolver os três níveis de conhecimento segundo Robert (1997), através da aplicação direta da lei de formação (nível técnico), isto é, conversão do registro do registro de representação algébrico intrínseco para o registro de representação algébrico explícito ou conversão do registro de representação gráfico para o registro de representação algébrico explícito, que supõe aplicar o registro de representação algébrico intrínseco, em geral, que também podem exigir uma mudança de quadro ou de ponto de vista.

11. Considerando x real, construa os gráficos das funções dadas por:

a) $f(x) = -3x$

b) $y = \frac{1}{2} \cdot x$

c) $y = 2x + 1$

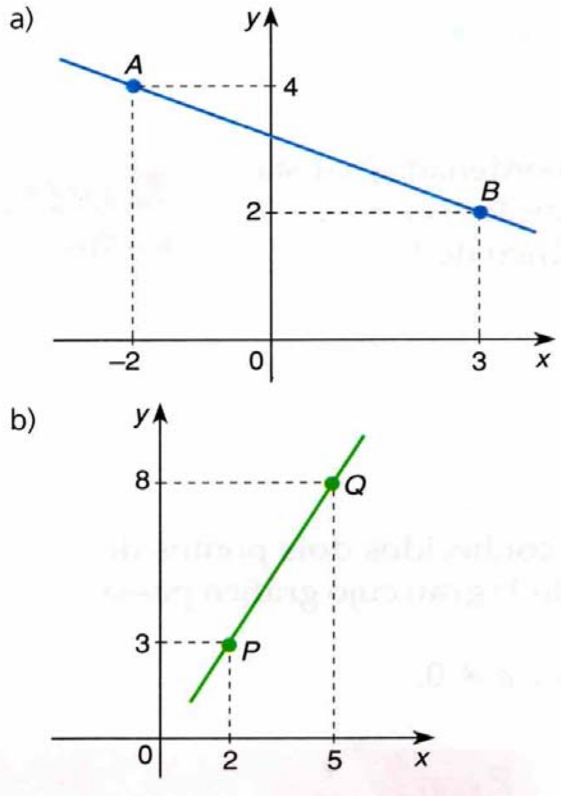
d) $y = -x + 3$

Bianchini e Paccola, 2004, p. 91

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: técnico;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural e registro de representação algébrico explícito;
- Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada: algébrico;

- <u>Tipos de representação exigidos na solução da tarefa:</u> registro de representação gráfico, registro de representação tabela, registro de representação algébrico intrínseco (fórmula) e registro de representação algébrico explícito;
- <u>Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas:</u> conversão fórmula-tabela-gráfico, com a aplicação do conceito de valor numérico, expressões numéricas e coordenadas no plano cartesiano, isto é, alem da conversão é necessária uma mudança de ponto de vista.

14. Os gráficos abaixo se referem a funções polinomiais do 1º grau dadas por $y = ax + b$. Ache em cada caso a lei que relaciona y com x.



Bianchini e Paccola, 2004, p. 92

- <u>Nível de conhecimento exigido na tarefa</u>: mobilizável;
- <u>Registros de representação dados no enunciado:</u> registro de representação da língua natural e registro de representação gráfico;
- <u>Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada:</u> algébrico;

- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação gráfico, registro de representação tabela e registro de representação algébrica intrínseco (fórmula) e registro de representação algébrico explícito;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: articulação do conceito de coordenadas no plano cartesiano com o conceito que dois pontos formam uma reta, isto é, passagem do quadro algébrico para o quadro geométrico o que possibilita encontrar a lei que relacione y com x conhecidos dois pontos de seu gráfico. A solução exige, ainda, outros conhecimentos disponíveis que dependem do ponto de vista ou do quadro escolhido para solução. Exemplo: sistema de duas equações com duas incógnitas, inclinação da reta ou trigonometria no triângulo retângulo.

Nessa tarefa, mesmo exigindo apenas o nível mobilizável verifica-se que para a sua execução os estudantes devem dispor de outros conhecimentos que exigem uma mudança de ponto de vista que pode ou não corresponder a uma mudança de domínio ou quadro.

18. Na locadora Loka Dora, a locação de uma fita tem preço único. Marina retirou uma fita por dois dias e pagou R$ 11,50. Aline retirou outra por um dia e pagou R$ 6,00. A lei que expressa o preço (y) da locação de uma fita em função do número de dias (x) de aluguel é dada por uma função polinomial do 1º grau do tipo $y = ax + b$, onde b representa a parte fixa e a o valor único da locação por dia.

a) Descubra a lei que relaciona y com x.
b) Quantos reais se pagaria por 4 dias de locação de uma fita?
c) Se Bruno pagou R$ 17,00 pela locação de uma fita, durante quantos dias ele ficou com essa fita?
d) Joana tem R$ 15,00 para alugar uma fita. Qual o máximo de dias que ela pode alugar essa fita?

Bianchini e Paccola, 2004, p. 92

- <u>Nível de conhecimento exigido na tarefa</u>: mobilizável, pois o enunciado do problema além de explicar qual a lei a ser utilizada, faz a relação entre os elementos do problema e suas respectivas representações;
- <u>Registros de representação dados no enunciado:</u> registro de representação da língua natural;
- <u>Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada:</u> numérico;
- <u>Tipos de representação exigidos na solução da tarefa:</u> Para a primeira questão, é preciso aplicar a lei de formação de uma função afim aos dados do anunciado, isto é, conversão do registro de representação algébrico intrínseco para o registro de representação algébrico explícito, mas para isto, é necessário dispor do conhecimento sobre sistema de duas equações com duas incógnitas para determinar os coeficientes **a** e **b**. Para a segunda questão é preciso aplicar os conhecimentos de valor numérico sobre a lei encontrada na primeira questão. Para a terceira questão, após substituir o valor de y = 17

reais na lei de formação da função encontrada, é preciso dispor de conhecimentos associados à noção de equação do primeiro grau.

Nessa questão o estudante não precisa dispor da noção de função afim, pois esta é dada através de sua representação explicita no enunciado Para a última questão, deve ser feita uma articulação com a noção de intervalos, usando o conjunto dos números naturais.

Resumindo, pode-se dizer que se exige apenas o em nível técnico por ser de aplicação direta da fórmula da função afim, fazendo a conversão fórmula-tabela-gráfico, isto é, exige-se apenas uma conversão de registro de representação semiótica em um único sentido. Mesmo sendo, em geral, considerando como um dos casos mais simples, exige que o estudante disponha de conhecimentos sobre determinação de valor numérico, expressões numéricas e coordenadas no plano cartesiano ou R^2.

Para a tarefa 14, cujo nível esperado já é o mobilizável, o estudante também precisa dispor de outras noções e conhecimentos já adquiridos anteriormente, os utilizam as noções de sistemas de duas equações com duas incógnitas e conhecimento de geometria plana.

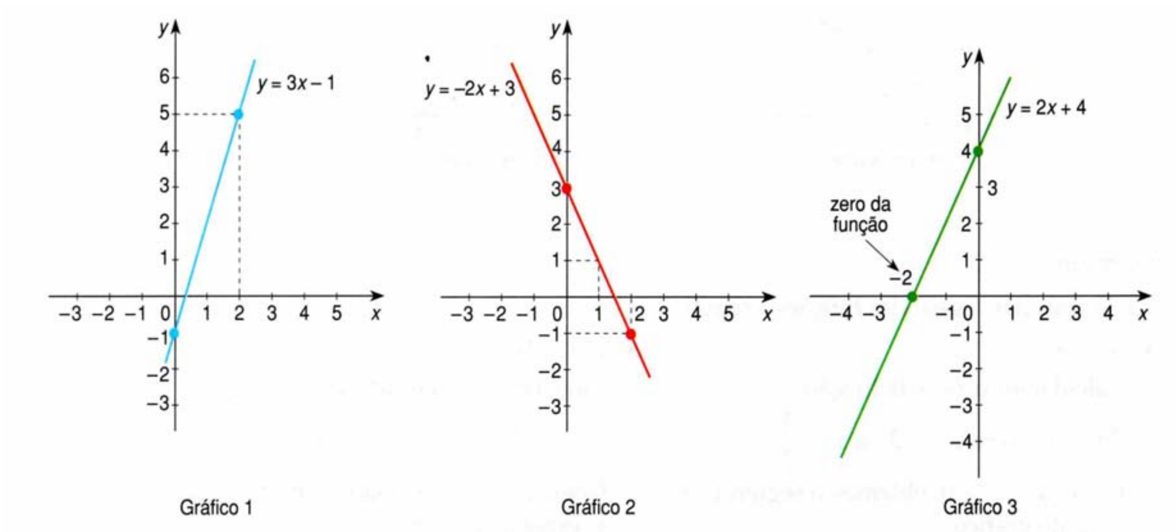
Para a tarefa 18, que já exige o nível mobilizável em relação à noção de função afim, pois o estudante deve dispor de conhecimentos sobre as noções de valor numérico e sistemas lineares (formado por duas equações lineares com duas incógnitas).

Sendo assim, verifica-se que em relação às representações de uma função afim, o livro dá ênfase os níveis técnico e mobilizável, mas chagando ao nível disponível, articulando essa noção com as noções de valor numérico, coordenadas no plano cartesiano e sistemas lineares de duas equações com duas incógnitas, que se supõe terem sido desenvolvidas no ensino fundamental, isto é, o trabalho sobre as diferentes formas de representação de função afim, exige mudança de domínio ou quadro e de ponto de vista.

Essa articulação, se bem organizada, parece suficiente para o ensino médio e o nível disponível poderia ser trabalhado no ensino superior, onde o estudante poderia aplicá-lo em situações da carreira profissional que escolheu. A questão que se pode colocar nesse momento é se não seria conveniente desenvolver corretamente os níveis técnico e mobilizável, de forma a possibilitar um trabalho efetivo? Isso não impossibilita que se considere alguma tarefa em nível disponível, mas é importante observar que, o estudante só será capaz de reconhecer esses casos particulares estudados. Em geral, dificilmente ele visualiza e faz a transposição de um caso para outro. Para que se habilite a aplicar noções matemáticas, é necessário, além de um trabalho intenso, tempo para reconhecer e aplicar as noções conhecidas.

A parte: Analisando gráficos de funções do 1º grau

Neste item os autores introduzem outros conceitos, como zeros de uma função, funções crescentes e funções decrescentes, com aplicações diretas para a função afim, dando como exemplos gráficos com funções crescentes e decrescentes, observando o fato que a reta cruza o eixo x apenas uma vez, caracterizando assim, o zeros da função. Um pequeno quadro lembra que Zero da função é o valor de x do domínio para o qual a função se anula.



Bianchini e Paccola, 2004, p. 93

Os autores propõem 5 exercícios, e estes exigem apenas os níveis técnico e mobilizável com aplicação direta dos conhecimentos apresentados através de exemplos ou articulação com os conhecimentos introduzidos anteriormente, isto é, nos itens de apresentação da noção de função e sua representação gráfica.

22. Classifique as funções dadas a seguir como crescentes ou decrescentes.

a) $y = 2x - 3$ c) $f(x) = \dfrac{x}{4} + 1$ e) $f(x) = 7 - x$

b) $y = -3x$ d) $y = -4 + x$ f) $y = -\dfrac{2x}{5}$

Bianchini e Paccola, 2004, p. 93

- <u>Nível de conhecimento exigido na tarefa</u>: técnico;
- <u>Registros de representação dados no enunciado:</u> registro de representação da língua natural e registro de representação algébrica explícita;
- <u>Domínio em que a tarefa é enunciada:</u> algébrico;

- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: representação gráfica ou registro de representação algébrico intrínseco (fórmula) de uma função afim, para através do sinal do coeficiente **a** em y = ax+ b, que representa uma taxa de variação, determinar se a função é crescente ou decrescente.
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: É necessária apenas a observação do sinal do coeficiente a, para o caso do estudante que utiliza o registro de representação algébrico intrínseco e registro de representação algébrico explícito. Se o estudante utilizar o gráfico para estudar o crescimento da função, o exercício exigirá a conversão do registro de representação algébrico explícito para o registro de representação tabela e deste para o registro de representação gráfico, exigindo assim uma mudança de ponto de vista, além da conversão de registros.

23. Sabe-se que $A(p, 5)$ e $B(3, 7)$ pertencem ao gráfico de uma função polinomial do 1º grau crescente. Determine o valor de p para que isso ocorra.

Bianchini e Paccola, 2004, p. 93

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: mobilizável;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural e registro de representação de pontos cartesianos; isto é, ponto em R^2;
- Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada: algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico intrínseco e registro de representação algébrico explícito;

- <u>Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas:</u> articulação com: noção de coordenadas no plano cartesiano, noção de geometria plana que dois pontos formam uma reta, logo, é possível encontrar a lei de uma função afim conhecido dois pontos, dadas as coordenadas cartesianas.

Para a análise dos gráficos da função afim, os autores fazem a conversão do registro de representação algébrico intrínseco (fórmula) para registro de representação tabela e depois registro de representação gráfica e também a inversão desse sentido, mesmo que esta questão não seja tratada explicitamente com esse termo.

Mesmo considerando que a função afim é um caso particular das funções numéricas, os autores fazem uma rápida introdução de noção de domínio, contra-domínio e imagem de uma função utilizando as representações indicadas pela notação de intervalos. Exemplos: D(f) = R; CD (f) = R; Im(f) = R; f: R→ R, Im(f) = [-1,3]

No entanto, os autores não apresentam a denominação coeficiente angular para **a** e linear para **b,** para a lei de formação y = ax+ b, isto é, não se a faz articulação com geometria analítica, nem com trigonometria no triangulo retângulo, embora essa seja uma alternativa na resolução de alguns exercícios, e uma boa oportunidade para resgatar a trigonometria no triângulo retângulo introduzida na 8ª série do ensino fundamental, já que o mesmo será ou está sendo tratado em outros domínios ou quadros do conhecimento, como física, que é umas das recomendações das propostas governamentais.

É importante observar que, os autores têm uma preocupação em explicar os domínios ou quadros que eles chamam de "conteúdos", nos quais as tarefas propostas estão sendo articuladas e as habilidades em jogo em cada tarefa, deixando para o professor o trabalho de articulação propriamente dito e, em particular, as explicitações das conversões entre os diferentes registros de representação em jogo.

Espera-se ainda, que o estudante disponha de conhecimento sólido em relação às noções de valor numérico, coordenadas no plano cartesiano e sistemas lineares de duas equações com duas incógnitas, que são noções que devem ser trabalhadas no ensino fundamental, mas quando não for o caso, pode-se introduzi-las nesse novo contexto aproveitando para mostrar sua importância.

Trata-se de uma obra destinada a estudantes, mas que deve ser complementada pelo professor, ou seja, as diferentes noções e conceitos são introduzidos para que se compreendam os registros de representações da noção de função afim utilizados, mas necessitam ainda das articulações entre a noção de função afim e as noções em jogo.

Nos exercícios propostos pelos autores, os estudantes necessitam aplicar as técnicas e procedimentos de passagem entre representações de função afim, algumas são tratadas pelos autores, mas em geral, essa atividade de conversão ainda é deixada a cargo do professor.

Verifica-se, ainda, que todos os registros de representação semiótica de função afim considerados neste trabalho, são utilizados na obra e introduzidos através de exemplos e observações por parte dos autores, mesmo se o termo registro de representação não é utilizado.

3. A obra de Luiz Roberto Dante intitulada “Matemática” (volume 1, 320 páginas) e designada na seqüência por “Dante”.

Trata-se de uma obra endereçada a estudantes da primeira série do ensino médio. O objetivo da obra é levar o estudante a compreender as idéias da matemática básica estudada e ser capaz de aplicá-las na resolução de problemas, como se observa no texto baixo:

> “O objetivo é fazer com que o aluno compreenda as idéias básicas da Matemática desse nível de ensino e, quando necessário, saiba aplicá-las na resolução de problemas do mundo real”. (Dante, 2004, p.3)

Desta forma, o autor divide a obra em 10 capítulos que tratam as noções matemáticas abaixo relacionadas cuja ordem estabelece uma interdependência de conhecimentos prévios:

- **Conjuntos**: Noção intuitiva de conjunto, relações de pertinência, inclusão e igualdade, conjunto das partes, operações com conjuntos e aplicações;
- **Conjuntos Numéricos**: Introdução das representações associadas aos conjuntos numéricos e da relação de inclusão entre eles, representação dos intervalos reais e aplicações;
- **Funções:** Noção intuitiva de função; noção de função via conjuntos; conjunto domínio, contradomínio e imagem; representação e análise gráfica, função injetora, sobrejetora e bijetora, função composta e inversa;
- **Função Afim:** Noção intuitiva de função afim; taxa de variação e coeficiente angular, progressão aritmética, proporcionalidade, representações associadas à função afim, associação com outras áreas de conhecimento e aplicações;
- **Função Quadrática:** Noção intuitiva de função quadrática, taxa de variação, progressão aritmética, representações associadas à função

quadrática, associação com outras áreas de conhecimento e aplicações;

- **Função Modular:** Módulo, distância, definição da função modular, equações e inequações;
- **Noções de Geometria Plana:** Figuras geométricas: suas propriedades e congruência, estudo de polígonos, retas e circunferência;
- **Progressões:** Noção intuitiva de progressões, progressão aritmética (PA), progressão geométrica (PG) e aplicações;
- **Matemática Financeira:** Empréstimo, juros e taxa de juros;
- **Trigonometria no triângulo retângulo:** Estudo da trigonometria e suas aplicações;

Para o objeto de estudo deste trabalho, isto é, a noção de função afim observa-se uma real articulação entre quadros ou domínios, conversões de registros de representação semiótica e mudanças de pontos de vista, mesmo não sendo tratado com essa terminologia, como se pode verificar nos comentários e análise que seguem.

Comentários e análise

O livro está dividido em 10 capítulos, com a noção de função afim apresentada no capítulo 4, com essa terminologia, sendo os três primeiros capítulos dedicados a: Conjuntos, Conjuntos numéricos e funções como vimos acima.

O conteúdo de função afim foi dividido em 17 itens, onde o autor apresenta em cada item de forma detalhada às definições e os exercícios resolvidos, para os quais existe um discurso tecnológico sobre as noções e técnicas necessárias para o seu desenvolvimento. Observa-se nesta obra que o autor está preocupado em articular o máximo de noções possíveis com a noção de função afim contemplando assim as recomendações das propostas governamentais.

Como anunciado na introdução deste capítulo, os comentários e análise dos livros de ensino médio seguem a ordem estabelecida pelos autores. Comenta-se e analisa-se item por item para melhor compreender a proposta dos autores.

O item Introdução

Neste item, o autor introduz a noção de função afim de forma intuitiva utilizando três situações problema relacionadas a salário, saldo bancário e volume de água em um reservatório conforme figura abaixo.

1) Um representante comercial recebe, mensalmente, um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R$ 1 500,00, e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 6% (0,06) sobre o total das vendas que ele faz durante o mês. Nessas condições, podemos dizer que:

salário mensal = 1 500,00 + 0,06 · (total das vendas do mês)

Observamos então que o salário mensal desse vendedor é dado em função do total de vendas que ele faz durante o mês, ou seja:

$s(x) = 1\,500{,}00 + 0{,}06x$ ou $s(x) = 0{,}06x + 1\,500{,}00$ ou $y = 0{,}06x + 1\,500{,}00$

em que **x** é o total das vendas do mês.
Esse é um exemplo de *função afim*.

2) Uma pessoa tinha no banco um saldo positivo de R$ 230,00. Após um saque no caixa eletrônico que fornece apenas notas de R$ 50,00, o novo saldo é dado em função do número **x** de notas retiradas. A lei da função é dada por $f(x) = 230 - 50x$ ou $f(x) = -50x + 230$ ou $y = -50x + 230$.

Dante, 2005, p.73

3) Em um reservatório havia 50 ℓ de água quando foi aberta uma torneira que despeja 20 ℓ de água por minuto. A quantidade de água no tanque é dada em função do número **x** de minutos em que a torneira fica aberta. A lei dessa função é f(x) = 20x + 50 ou y = 20x + 50.

Para Refletir

Compare as leis dessas funções e procure escrever a lei geral de uma função afim.

Dante, 2005, p.74

Além disso, chama-se a atenção do estudante para que o mesmo procure escrever a lei geral de uma função afim para estas situações.

O item definição de Função Afim

A definição é apresentada através do registro de representação algébrico intrínseco, isto é, f(x) = ax + b, com a e b reais e a≠ 0, seguida de cinco exemplos no registro de representação algébrico explicito e um exemplo no registro de representação da língua natural e registro de representação algébrico explícito por se tratar da situação problema tratada em todos os livros, isto é, o exemplo do táxi suposto parte do cotidiano de todos os estudantes. O autor ainda observa que a definição de função afim, cuja representação neste trabalho é denominada de registro de representação algébrico intrínseco é o **modelo**[2] matemático para as situações reais.

O item Casos Particulares Importantes da Função Afim f(x) = ax + b

Os casos particulares tratados pela obra são: Função linear, Função Constante, Função Identidade e Translação, nota-se que para todos esses casos são exibidos apenas exemplos algébricos onde a função é definida como f: R → R, sem a identificação de que se trata do domínio e contra-domínio das funções consideradas, pois pode se supor que o autor considera que essas noções já fazem parte dos conhecimentos disponíveis dos estudantes uma vez que foram definidas nos capítulos anteriores.

[2] **Modelo**: Para Henry. e Rousset-Bert (1996). um modelo é uma interpretação abstrata, simplificada e idealizada de um objeto do mundo real, ou de um sistema de relações, ou de um processo evolutivo concebido de uma descrição da realidade. (Henry e Rousset-Bert, 1996).

O item valor de uma Função Afim

Neste item calcula-se o valor de f (x) dado x e o valor de x dado f(x) exigindo a conversão entre os registros de representação algébrico explícito e intrínseco nos dois sentidos.

Os exercícios propostos permitem desenvolver apenas o nível técnico, pois a função é dada no registro de representação algébrico explicito e pede-se apenas para determinar o valor da função para um determinado valor de x como se pode verificar no exemplo abaixo.

1. Determine o valor da função afim $f(x) = -3x + 4$ para:

a) $x = 1$
b) $x = \frac{1}{3}$
c) $x = 0$
d) $x = 1,5$
e) $x = k + 1$
f) $x = a + b$

Dante, 2005, p. 75

- <u>Nível de conhecimento exigido na tarefa</u>: técnico;
- <u>Registros de representação dados no enunciado:</u> registro de representação algébrico explícito;
- <u>Domínio em que a tarefa é enunciada:</u> algébrico;
- <u>Tipos de representação exigidos na solução da tarefa:</u> registro de representação algébrico explícito;
- <u>Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas:</u> noção de polinômio suas operações e propriedades e noção de valor numérico.

O item taxa de variação de uma Função

Neste momento, o autor demonstra algebricamente que o coeficiente a de f(x) = ax + b é a taxa de variação de uma afim utilizando a razão

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, mas deixa para o leitor a interpretação sobre o que representa esta razão, o que poderia ser tratado graficamente dando ao leitor uma imagem visual da noção de taxa de variação.

Taxa de variação da função afim f(x) = ax + b

Vamos demonstrar que a taxa de variação (ou taxa de crescimento) de qualquer função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, no intervalo $[x, x + h]$, para $x \in \mathbb{R}$ e $x + h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, é a constante *a*.

Temos que:

$$f(x) = ax + b$$
$$f(x + h) = a(x + h) + b = ax + ah + b$$

Assim:

$$f(x + h) - f(x) = \cancel{ax} + ah + \cancel{b} - \cancel{ax} - \cancel{b} = ah$$

Logo, $\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{a\cancel{h}}{\cancel{h}} = a$.

Portanto, a taxa de variação de qualquer função afim $f(x) = ax + b$ é igual a **a**. Essa é a principal característica das funções afins: sua taxa de variação ou taxa de crescimento é *constante*.

Por exemplo, a taxa de variação da função afim $f(x) = 5x + 2$ é 5 e a da função $g(x) = -2x + 3$ é -2.

Observações:

1) A taxa de variação de $f(x) = ax + b$ pode ser obtida fazendo $f(1) - f(0)$. Observe que $f(1) = a + b$; $f(0) = b$. Logo, $f(1) - f(0) = (a + b) - b = a$. Assim, $f(1) - f(0) = a$.

2) *Caracterização da função afim*
Para verificar se uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (crescente ou decrescente) é afim, basta verificar se a diferença $f(x + h) - f(x)$ não depende de **x**, mas apenas de **h**. Se isso ocorrer, a função é afim. Por exemplo, $f(x) = 3x - 4$ é crescente e $f(x + h) - f(x) = [3(x + h) - 4] - (3x - 4) = 3h$. Como a expressão $3h$ não depende de **x**, mas apenas de **h**, a função $f(x) = 3x - 4$ é afim.

Fonte: Dante, 2004, p. 76.

Sendo assim, verifica-se a importância do trabalho explícito sobre as representações para esta definição do coeficiente da função afim como taxa de variação. A conversão do registro de representação algébrico intrínseco para o registro de representação gráfico, nesse momento, fica a cargo do professor.

Em seguida, são propostos 20 exercícios que, em geral, são enunciados no registro de representação da língua natural e que permitem desenvolver os três níveis de conhecimento técnico, mobilizável e disponível como se pode verificar nos três exemplos abaixo.

10. Escreva a taxa de variação para cada uma das funções e, depois, constate se sua resposta está correta.

a) $f(x) = 4x + 5$

b) $f(x) = -3x + 7$

c) $f(x) = 3$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$

Dante, 2005, p. 77

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: técnico;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de língua natural e registro de representação algébrico explicito;
- Domínio em que a tarefa é enunciada: algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação da língua natural e registro de representação algébrico explícito;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: articulação entre os conhecimentos de polinômio suas operações e propriedades e noção de valor numérico.

12. Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R$ 8,00 mais um custo variável de R$ 0,50 por unidade produzida. Sendo **x** o número de unidades produzidas:

a) escreva a lei da função que fornece o custo total de **x** peças;

b) calcule o custo de 100 peças;

c) escreva a taxa de crescimento da função.

Dante, 2005, p. 77

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: disponível;
- Registros de representação dados no enunciado: língua natural;
- Domínio em que a tarefa é enunciada: numérico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico explícito;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: sendo a questão enunciada no registro da língua natural, o estudante deve reconhecer que se trata da função afim para responder os itens a e b, isto é deve dispor de conhecimentos associados a esta noção. Em relação a taxa de variação basta mobilizar a fórmula $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ e a noção de valor numérico de uma função. Na realidade, bastaria o estudante reconhecer na lei da função que o coeficiente de x representa a taxa de variação ou crescimento da função dada.

18. (Fuvest-SP) A função que representa o valor a ser pago após um desconto de 3% sobre o valor **x** de uma mercadoria é:

a) $f(x) = x - 3$.
b) $f(x) = 0{,}97x$.
c) $f(x) = 1{,}3x$.
d) $f(x) = -3x$.
e) $f(x) = 1{,}03x$.

Dante, 2005, p. 77

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: disponível;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural;
- Domínio em que a tarefa é enunciada: algébrico;

- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico intrínseco e registro de representação explícito;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: articulação entre a noção de função afim e função linear com a noção de porcentagem exigindo que o estudante disponha deste conhecimento.

O item Função Afim e Progressão Aritmética

Este item é apresentado a partir da definição de Progressão Aritmética como uma seqüência, estabelecendo uma conexão entre as noções de Progressão Aritmética e Função Afim que é estruturada no registro de representação algébrico explícito através de um caso particular para, em seguida, articular essas duas noções através do registro de representação algébrico intrínseco, isto é, para tratar o caso geral.

6. Função afim e progressão aritmética

Há um relacionamento muito important e entre a função afim e uma progressão aritmética, que veremos agora.

Já vimos que uma progressão aritmética (PA) é uma seqüência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do termo anterior mais uma constante, chamada *razão* da progressão aritmética. Por exemplo, a seqüência:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots$$

é uma progressão aritmética de razão 3.

Consideremos agora a função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$.

Vamos constatar que:

$$f(1), f(4), f(7), f(10), f(13), f(16), f(19), \ldots$$

é também uma progressão aritmética.

Assim,

$f(x) = 2x + 1$

$f(1) = 3$; $f(4) = 9$; $f(7) = 15$; $f(10) = 21$; $f(13) = 27$; $f(16) = 33$; $f(19) = 39$; etc.

Podemos observar que:

$$3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, \ldots$$

é uma progressão aritmética e sua razão é 6 $(2 \cdot 3)$.

Para Refletir

Observe que os acréscimos iguais a 3 (razão da primeira PA) dados aos elementos da primeira PA provocaram acréscimos iguais a 6 (razão da segunda PA) na segunda PA. Essa é uma característica da função afim.

78

Fonte: Dante, 2004, p. 78.

Na seqüência, são propostos 3 exercícios, que exigem o nível disponível, visto que o estudante precisará dispor de conhecimentos prévios, em relação ao domínio e contra-domínio de uma função afim, ficando mais uma vez a cargo do professor retomar a definição e buscar outros exemplos ou até mesmo, outras ferramentas para um melhor entendimento por parte do estudante..

27. Se f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função afim que transforma a PA 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ..., em outra PA 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, ..., qual é a lei dessa função afim?

Dante, 2005, p. 79

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: disponível;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação língua natural;
- Domínio em que a tarefa é enunciada: numérico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico intrínseco e registro de representação algébrico explícito;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: articulação entre as noções de função afim e a noção de PA, neste caso, é necessário visualizar que a primeira PA é o domínio da função considerada e a segunda PA o contradomínio e a partir daí estabelecer a lei de formação, ou seja, representar a função no registro de representação algébrico explícito o que supõe a passagem pelo registro de representação algébrico intrínseco. Neste caso, a tarefa supõe uma articulação de quadros e a conversão entre registros de representação semiótica.

O item Função Afim e graduações do termômetro

Este item foi estruturado com um discurso tecnológico de introdução sobre o que representam as escalas Celsius e Fahrenheit, onde são abordadas as noções de intervalo, de passagem de uma temperatura em graus Fahrenheit para graus Celsius e vice-versa. O autor articula estas noções para passar do quadro das temperaturas que, em geral, é trabalhado em física para o quadro das funções mostrando que é possível tratar as funções encontradas para determinar as temperaturas nas diferentes escalas através de uma função afim. Neste exemplo, o autor além da articulação acima considerada necessita da articulação entre as noções de proporcionalidade e funções, isto é, mudança do quadro das proporções para o quadro das funções.

Em relação aos exercícios propostos para os estudantes, não há diversidade e exigem apenas que o estudante aplique as noções já trabalhadas pelo autor nos exercícios resolvidos, isto é, basta considerar a fórmula encontrada na passagem do quadro das temperaturas para o quadro das funções conforme figura a seguir.

7. Função afim e graduações do termômetro

Entre as escalas termométricas usadas para a graduação de um termômetro, as mais utilizadas são a escala Fahrenheit, usada principalmente nos países de língua inglesa (como Estados Unidos e Inglaterra), e a escala Celsius, no restante do mundo. Elas se baseiam na altura de uma coluna de mercúrio, que aumenta ou diminui conforme a temperatura sobe ou desce.

Para graduar um termômetro na escala Celsius escolhem-se duas temperaturas determinadas: a da fusão do gelo, à qual se atribui o valor zero, e a da ebulição da água (à pressão do nível do mar), à qual se atribui o valor 100. Dividindo-se o intervalo entre os dois pontos fixos (0 e 100) em 100 partes iguais, obtém-se o termômetro graduado na escala Celsius ou centesimal.

Na escala Fahrenheit, divide-se o intervalo entre os pontos fixos em 180 partes iguais. Atribui-se ao nível inferior o valor 32 e, ao superior, o valor 212; então, o zero dessa escala está 32 graus Fahrenheit abaixo da temperatura de fusão. Assim, 0 °C = 32 °F e 100 °C = 212 °F.

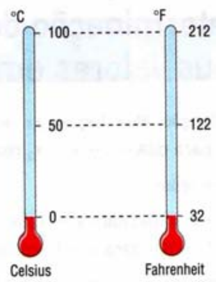
Como obter uma temperatura em graus Fahrenheit sendo a mesma dada em graus Celsius?

Há duas maneiras:

1ª) Examinando a figura ao lado, pode-se estabelecer entre as duas escalas a seguinte relação:

$$\frac{C}{100} = \frac{F-32}{180} \Rightarrow \frac{C}{5} = \frac{F-32}{9} \Rightarrow 5F - 160 = 9C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5F = 9C + 160 \Rightarrow F = \frac{9}{5}C + 32 \Rightarrow \boxed{F = 1{,}8C + 32}$$



Observa-se, então, que a transformação de uma temperatura da escala Fahrenheit (F) para a escala Celsius (C) é um importante exemplo de função afim

$$\boxed{F = 1{,}8C + 32 \text{ ou } f(x) = 1{,}8x + 32}$$

2ª) A mudança de escala de Celsius para Fahrenheit é uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa à medida **x** em **C** a medida f(x) em **F** da mesma coluna de mercúrio. Essa função é crescente e a diferença f(x + h) − f(x) depende apenas de **h** e não de **x**. Assim, **f** é uma função afim da forma f(x) = ax + b. Sabemos que f(0) = 32 e f(100) = 212. Como f(0) = b, então b = 32. Temos também que f(100) = 100a + 32. Ou seja, 100a + 32 = 212, donde a = 1,8.

Portanto, $\boxed{f(x) = 1{,}8x + 32}$

Dante, 2005, p.79

O item Determinação de uma Função Afim conhecendo-se seus valores em dois pontos distintos

Para este estudo, o autor justifica a determinação da lei de formação de uma função afim, o que neste trabalho é denominado de registro de representação algébrico intrínseco. Através da noção de sistema de duas equações com duas incógnitas, conhecendo-se dois de seus pares ordenados, e utilizando a definição de que dois pontos formam uma reta, o autor justifica o seu trabalho com uma mudança do quadro das funções para o quadro dos sistemas lineares e deste para o quadro da geometria analítica. Certamente, essas mudanças de quadros ou domínios não são tratadas explicitamente com essa terminologia.

O discurso que segue este estudo é denominado pelo autor de Generalização (leitura optativa), isto é, o autor apresenta uma série de cálculos que dificulta a interpretação em termos de mudança dos quadros considerados. Para isto, seria necessário um discurso tecnológico mais adequado para justificar as técnicas empregadas, conforme ilustra o quadro abaixo.

Generalização (leitura optativa)

De modo geral, conhecendo $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ para $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ reais quaisquer, com $x_1 \neq x_2$, podemos explicitar os valores **a** e **b** da função $f(x) = ax + b$, determinando-a completamente.

Assim:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f(x_1) = ax_1 + b \\ y_2 &= f(x_2) = ax_2 + b \end{aligned}\right\}$$

$$y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1) \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_1 \neq x_2$$

Substituindo esse valor de **a** em $y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$, obtemos o valor de **b**:

$$y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x_1 + b \Rightarrow y_1(x_2 - x_1) = y_2x_1 - y_1x_1 + b(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1x_2 - \cancel{y_1x_1} - y_2x_1 + \cancel{y_1x_1} = b(x_2 - x_1) \Rightarrow b = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1},\ x_1 \neq x_2$$

Para Refletir

Colocamos $x_1 \neq x_2$ para que no denominador $(x_2 - x_1)$ não apareça o zero, pois não existe divisão por zero. Este procedimento é muito comum. Sempre que colocamos $x_1 \neq x_2$ é porque aparecerá $x_2 - x_1$ no denominador.

Dante, 2005, p. 81

Apesar de todo o trabalho algébrico aqui desenvolvido, esta articulação entre quadros fica apenas como sugestão de leitura complementar e sendo assim o autor propõe apenas um exercício aos estudantes que exige apenas o nível técnico, em relação à noção de função afim. Neste caso, o conhecimento suposto disponível é a solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas ou a substituição dos valores de x e y de cada ponto nas equações de a e b como as da figura cima.

34. Escreva a função afim $f(x) = ax + b$, sabendo que:

a) $f(1) = 5$ e $f(-3) = -7$

b) $f(-1) = 7$ e $f(2) = 1$

Dante, 2005, p. 81

- <u>Nível de conhecimento exigido na tarefa</u>: técnico;
- <u>Registros de representação dados no enunciado:</u> registro de representação da língua natural, registro de representação algébrico intrínseco;

- Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada: numérico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico intrínseco e registro de representação explícito;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: articulação entre as noções de função afim e sistema de duas equações com duas incógnitas. O estudante deve dispor de um método de solução de sistemas de duas equações e duas incógnitas;

O item gráfico da Função afim f(x) = ax + b

O autor introduz o registro de representação gráfico de uma função afim em um plano de **R^2,** mostrando que três pontos colineares do plano cartesiano estão em uma mesma reta. Considerando esta propriedade geométrica no quadro da geometria analítica em particular, do estudo da reta, isto é, três pontos colineares formam uma reta.

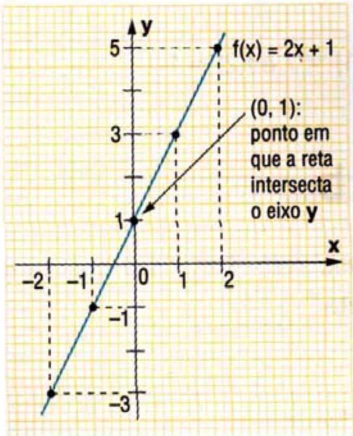
Traçado de gráficos de funções afins

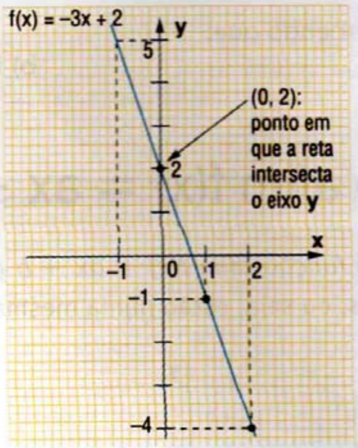
As representações da função afim no registro de representação gráfico são feitas através de exemplos onde são considerados: Função afim $a \neq 0$ e $b \neq 0$, Função linear $b = 0$, Função identidade $a = 1$ e $b = 0$, Translação $a = 1$ e $b \neq 0$ e Função constante $a = 0$, em que todas as representações são dadas no registro de representação algébrico explícito, como se verifica a seguir:

Função afim com $a \neq 0$ e $b \neq 0$

$f(x) = 2x + 1$

x	f(x)
−2	−3
2	5





$f(x) = -3x + 2$

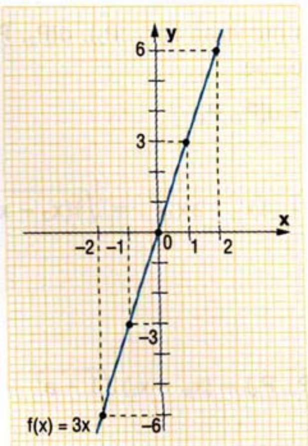
x	f(x)
0	2
1	−1

Dante, 2005, p. 82

Função linear ($b = 0$)

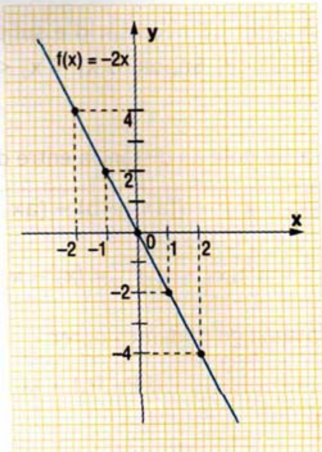
$f(x) = 3x$

x	f(x)
−1	−3
1	3



$f(x) = -2x$

x	f(x)
−2	4
1	−2



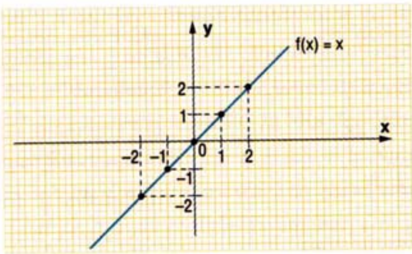
O gráfico da função linear $f(x) = ax$ é uma reta não-vertical que passa pela origem (0, 0).

Dante, 2005, p. 82

Função identidade (a = 1 e b = 0)

$f(x) = x$

x	f(x)
−2	−2
1	1



Para Refletir
O que é bissetriz de um ângulo?

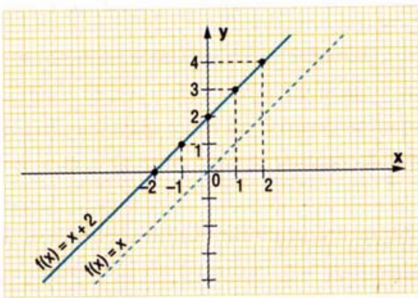
Observe que o gráfico da *função identidade* $f(x) = x$ é a bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

Translação (a = 1 e b ≠ 0)

A seguir temos a construção do gráfico da *translação* $f(x) = x + 2$ no plano cartesiano:

$f(x) = x + 2$

x	f(x)
−2	0
1	3



Para Refletir
Por que a função $f(x) = x + b$ recebe o nome de translação?

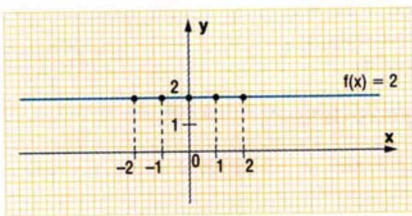
Observe que o gráfico da translação $f(x) = x + b$ é uma reta paralela à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

Função constante (a = 0)

Observe agora a construção do gráfico da *função constante* $f(x) = 2$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, no plano cartesiano.

$f(x) = 2$

x	f(x)
−2	2
2	2



Para Refletir
Por que a função $f(x) = b$ recebe o nome de função constante?

O gráfico da função constante $f(x) = b$ é uma reta paralela ao eixo **x** que passa pelo ponto (0, b). Nesse caso, $Im(f) = \{b\}$.

Dante, 2005, p. 83

O autor faz as conversões do registro de representação algébrico explícito para o registro de representação gráfico, acompanhado de um discurso tecnológico, mas nesse discurso não aparece explicitamente a questão da articulação entre as diferentes representações consideradas e qual o papel que elas desempenham, o que é compreensível, pois não faz parte dos objetivos do autor que nem mesmo trabalha com essa terminologia. Algumas observações sobre o gráfico da função afim são feitas através de pequenos questionamentos para o estudante refletir como mostra a figura acima.

Sendo assim, fica a cargo do professor trabalhar esses pontos de reflexão através de um discurso tecnológico que articule as diferentes noções de função com as propriedades geométricas que elas representam.

Em seguida, são propostos doze exercícios aos estudantes, que apresentam diversidade em relação às articulações entre quadros e pontos de vista e conversões entre registros de representação, além disso, os três níveis de conhecimentos técnico, mobilizável e disponível são exigidos.

35. Construa, num sistema cartesiano ortogonal, o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = x + 3$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$

d) $f(x) = -2x + 5$

e) $f(x) = -2 - 2x$

f) $f(x) = 3 + 3x$

Dante, 2005, p. 84

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: técnico;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural e registro de representação algébrico explícito;
- Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada: algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação gráfico, registro de representação tabela, registro de representação algébrico intrínseco (fórmula) e registro de representação algébrico explícito;

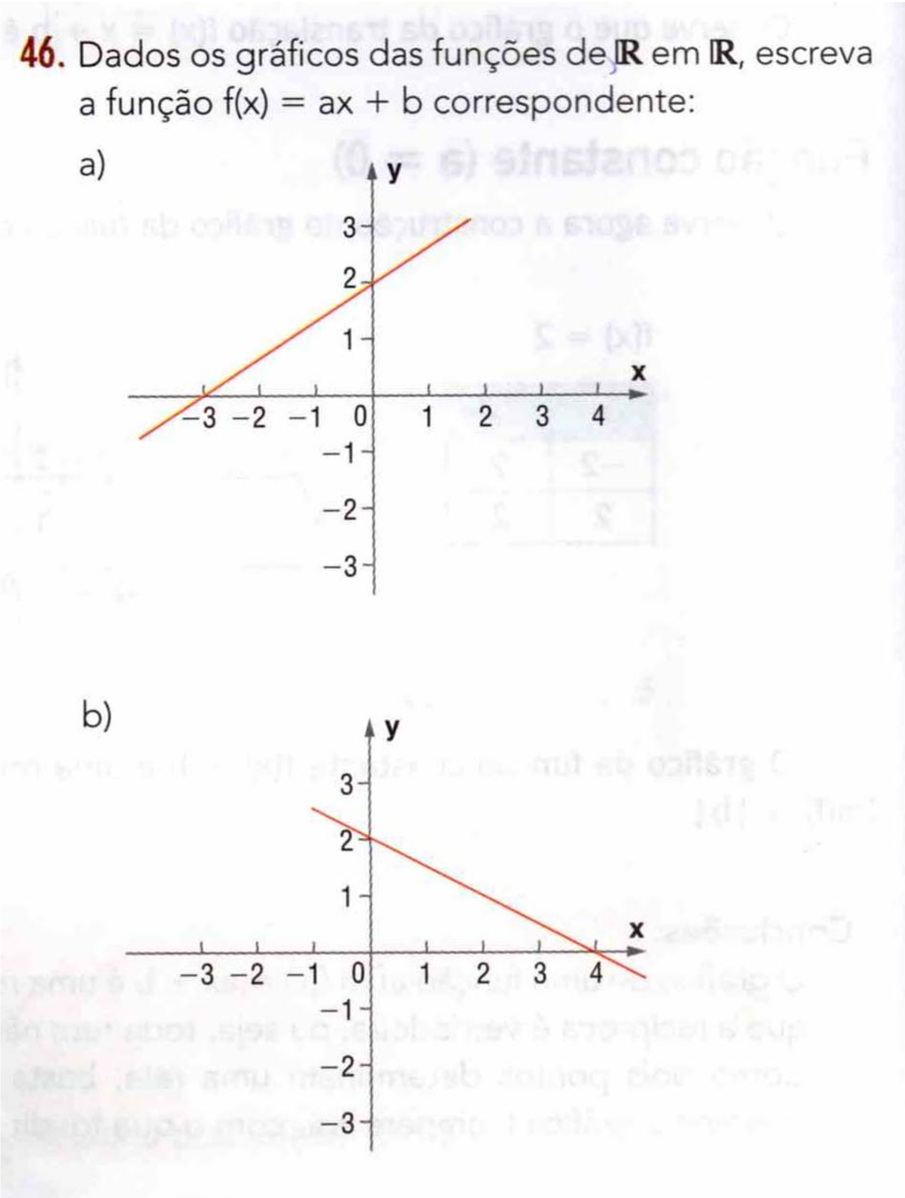
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: conversão do registro de representação algébrico explícito para o registro de representação tabela e desse para o registro de representação gráfico, isto é, fórmula-tabela-gráfico, com a aplicação da noção de valor numérico, expressões numéricas e coordenadas no plano cartesiano, além da conversão é necessária uma mudança de ponto de vista.

39. Um corpo se movimenta em velocidade constante de acordo com a fórmula matemática $s = 2t - 3$, em que **s** indica a posição do corpo (em metros) no instante **t** (em segundos). Construa o gráfico de **s** em função de **t**.

Dante, 2005, p. 84

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: mobilizável;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural e registro de representação algébrico explícito;
- Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada: algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação gráfico, registro de representação tabela, registro de representação algébrico intrínseco (fórmula) e registro de representação algébrico explícito;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: conversão do registro de representação algébrico explícito para o registro de representação tabela e desse para o registro de representação gráfico, isto é, fórmula-tabela-gráfico, com a aplicação da noção de valor numérico, expressões numéricas e coordenadas no plano cartesiano, além da

mudança de domínio ou quadro da física em especial o movimento uniforme para o quadro ou domínio do estudo da função.


46. Dados os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, escreva a função $f(x) = ax + b$ correspondente:

a)

b)

Dante, 2005, p. 84

- <u>Nível de conhecimento exigido na tarefa</u>: mobilizável;
- <u>Registros de representação dados no enunciado:</u> registro de representação da língua natural e registro de representação gráfico;
- <u>Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada:</u> algébrico;
- <u>Tipos de representação exigidos na solução da tarefa:</u> registro de representação gráfico, registro de representação tabela, registro de

representação algébrico intrínseco (fórmula) e registro de representação algébrico explícito;

- <u>Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas:</u> articulação da noção de coordenadas no plano cartesiano com a noção que dois pontos formam uma reta, isto é, passagem do quadro algébrico para o quadro geométrico o que possibilita encontrar a lei que relacione y com x conhecidos dois pontos de seu gráfico. A solução exige, ainda, outros conhecimentos disponíveis que dependem do ponto de vista ou do quadro escolhido para solução. Exemplo: sistema de duas equações com duas incógnitas, inclinação da reta ou trigonometria no triângulo retângulo.

O item Função Afim e Geometria Analítica

Neste item, o autor introduz o estudo da Geometria Analítica, em particular o estudo da reta, fazendo a articulação entre esse conteúdo e as noções de função afim introduzidos até esse ponto. Nesse estudo, fica ainda mais evidente a necessidade da articulação entre as noções de função afim e o estudo da reta e a necessidade de um discurso tecnológico que as acompanhem.

Neste caso, toda estruturação, é feita através dos diversos registros de representação: registro de representação algébrico intrínseco, registro de representação algébrico explícito, registro de representação tabela, registro de representação da língua natural, mesmo se estes registros não são tratados com esta terminologia.

O autor considera duas representações para a equação da reta, uma no quadro da geometria analítica "y = mx + q" (equação reduzida) e a outra no quadro do estudo das funções "f (x) = ax + b" (equação funcional), fazendo um discurso tecnológico que explicita a igualdade dessas representações, isto é, trata-se de pontos de vista diferentes para representar o mesmo objeto matemático, ou seja, no caso da equação reduzida pode-se dizer que a reta é tratada do ponto de vista analítico e no caso da equação funcional pode-se considerar que a reta é tratada do ponto de vista funcional, estes diferentes pontos de vista facilitam o trabalho e a interpretação dos resultados de determinadas questões.

Nenhum exercício foi proposto para esse item, apenas o exemplo a seguir.

10. Função afim e Geometria analítica

No estudo da Geometria analítica, que veremos posteriormente, os elementos geométricos são descritos por equações. Entre eles, a reta, que particularmente nos interessa, pois a equação que descreve uma reta não-vertical é uma função afim.

Para Refletir

A reta vertical não é gráfico de uma função. Por quê?

Na Geometria analítica podemos escrever a equação da reta de várias maneiras, e uma dessas maneiras, a equação reduzida, é dada por $y = mx + q$. Note que não há diferença entre escrever $f(x) = ax + b$ ou $y = mx + q$ exceto as letras empregadas em cada caso.

Na Geometria analítica, chamamos o **m** de coeficiente angular, e o **q** do coeficiente linear. O coeficiente angular da reta é exatamente a taxa de variação da função afim, sendo dada por:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

enquanto você já viu que a taxa de variação no intervalo $[x, x + h]$ é dada por:

$$a = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

São apenas maneiras diferentes de dizer a mesma coisa: Sabemos que $y = f(x)$. Então, se $x_1 = x + h$ e $x_2 = x$, temos que $h = x_1 - x_2$; $y_1 = f(x_1) = f(x + h)$ e $y_2 = f(x_2) = f(x)$. Compare e verifique que, nestas condições, $m = a$.

O nome coeficiente angular é dado pelo fato de **m** ser o responsável pela inclinação da reta. Sua relação com o ângulo de inclinação α é dado por $m = \text{tg}\ \alpha$. O nome *taxa de variação* é referente à relação entre a variação da grandeza **y** e a variação da grandeza **x**.

A diferença de nomenclatura, *coeficiente angular* nas equações da reta e *taxa de variação* nas funções afins, é fruto somente da interpretação que se pretende em cada caso. Numa equação da reta, é mais importante a informação relativa ao ângulo de inclinação da reta do que sobre a variação de **y** em relação a **x**. Na função afim é o oposto, privilegiamos a informação relativa à variação de **y** em relação a **x** e não nos interessa tanto saber qual é o ângulo de inclinação da reta.

O importante é que você saiba que, a qualquer momento, é possível usar elementos de Geometria analítica no estudo de funções e vice-versa. Só depende da conveniência. Experimente, por exemplo, refazer o exemplo do item 8 da página 80 usando o conceito de coeficiente angular.

Se $f(2) = -2$ e $f(1) = 1$ então montamos a tabela:

x	y
2	−2
1	1

De onde tiramos que $\Delta y = -2 - 1 = -3$ e $\Delta x = 2 - 1$. Portanto, $a = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{1} = -3$.
Assim, $y = -3x + b$.
Substituindo qualquer um dos pares (x, y) da tabela, obtemos o **b**.
$1 = -3(1) + b \Rightarrow b = 4$.
Então, $y = -3x + 4$, ou, se preferir, $f(x) = -3x + 4$.

Dante, 2005, p.85

O item uma propriedade característica da Função Afim f(x) = ax + b

O autor justifica neste item que as funções afins (crescentes ou decrescentes) são as únicas para as quais os acréscimos dados a x, isto é, (x + h) e a x’, isto é, (x’ + h) correspondem a acréscimos iguais dados por f (x + h) – f(x) e f’ (x’ + h) – f (x’), essa propriedade é trabalhada através do registro de representação gráfico em um caso particular e um caso geral, para os quais são utilizados os registros de representação algébrico explícito e registro de representação intrínseco, respectivamente, o que permite uma melhor visualização e compreensão desta propriedade. Nesse momento, cabe ao professor através de um discurso tecnológico sobre a representação do acréscimo **h** articular o trabalho desenvolvido para o registro de representação gráfico com o trabalho desenvolvido algebricamente para a definição da taxa de variação da função afim, mostrando a importância da conversão de registros e da mudança de ponto de vista para uma melhor compreensão da noção em jogo, esmo não utilizando essa terminologia em seu discurso.

Os exercícios propostos aos estudantes são bastante parecidos com os exemplos apresentados, exigindo a conversão do registro de representação algébrico explicito para o registro de representação gráfico.

47. Dada a função afim $f(x) = 3x - 1$, mostre que dando acréscimos iguais a 2 em **x** provocaremos acréscimos iguais a 6 em $y = f(x)$.

Dante, 2005, p.86

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: mobilizável;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural e registro de representação algébrico explícito;
- Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada: algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico explícito, registro de representação gráfico;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: articulação entre os conhecimentos de polinômio suas operações e propriedades e noção

de valor numérico, através da aplicação direta das fórmulas e procedimentos dados nos exercícios resolvidos.

O item gráfico de uma função definida por mais de uma sentença

Para este item, o autor introduz o gráfico de uma função definida por mais de uma sentença utilizando a situação problema abaixo apresentada, onde aparecem todos os registro de representação utilizados anteriormente: registro de representação algébrico intrínseco, registro de representação algébrico explícito, registro de representação tabela e registro de representação gráfico, além da representação de domínio e contra-domínio para conjuntos quaisquer. Isto pode causar dificuldades aos estudantes uma vez que o autor trabalha quase que totalmente com as funções numéricas de **R** em **R**, sem considerar os casos de domínios particulares definidos apenas em intervalos de **R.**

Os exemplos apresentados são exercícios resolvidos através da conversão destes registros de representação, mesmo se essa terminologia não é utilizada pelo autor, nenhum discurso sobre a conversão de um registro de representação para outro, tanto do registro de representação algébrico explícito (fórmula) para o registro de representação tabela (tabela), quanto do registro de representação tabela (tabela) para o registro de representação gráfico (gráfico) é feita, mesmo sem a termologia aqui utilizada, elas foram introduzidas anteriormente, logo são consideradas pelo autor como natural, isto é, a passagem fórmula-tabela-gráfico, é vista como um trabalho próprio do desenvolvimento matemático da noção de função afim que esta sendo trabalhada. Certamente, o autor não trata das conversões de registros de representação, pois não faz parte do objetivo do seu trabalho, mas pode-se verificar a necessidade destas conversões e seria interessante considerá-las em todos os sentidos observando as que causam maior dificuldade.

Nos três exercícios propostos para os estudantes é exigida apenas a conversão entre os registros de representação da mesma forma como foi tratado pelo autor nos exercícios resolvidos, sempre sem utilizar esta terminologia.

Verifica-se, também a necessidade de um discurso tecnológico por parte do professor para acompanhar essas conversões, onde não se pode deixar de tratar a questão dos intervalos, suas respectivas representações e conversões entre elas.

50. Construa, num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x \geq 0 \\ x + 2, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \geq 1 \\ -x + 1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 2 \\ -1, \text{ se } 0 \leq x < 2 \\ x - 1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \geq 0 \\ 0, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 < x \leq 1 \\ 2, \text{ se } 1 < x \leq 2 \\ 3, \text{ se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \geq 0 \\ x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

51. Construa o gráfico da função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ 1, \text{ se } x = 1 \end{cases}$

Dante, 2005, p.89

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: mobilizável;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural e registro de representação algébrico explícito;
- Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada: algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico explícito, registro de representação tabela, registro de representação gráfico;

- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: articulação entre a conversão do registro de representação algébrico explícito para o registro de representação gráfico, passando pelo registro de representação tabela (fórmula-tabela-gráfico) e a noção de intervalos.

O item função afim crescente e decrescente

O autor inicia esse item introduzindo a noção de função afim crescente e decrescente com um texto que reforça a idéia que função afim é toda função cujo gráfico é uma reta. Essa introdução é feita no registro de representação da língua natural, registro de representação algébrico intrínseco $f(x) = ax + b$ registro de representação gráfico, onde é utilizada a noção de classificação de ângulo (agudo e obtuso) para justificar o sinal do **a** e definir a função como crescente ou decrescente, isto é, o autor faz uma mudança de quadro para considerar a como coeficiente angular e explicar os diferentes sinais deste coeficiente e sua interpretação, através do registro de representação gráfico.

Nesse caso, o autor não tem necessidade de denominar b como coeficiente linear, apenas o apresenta como o valor que intercepta o eixo das ordenadas.

São propostos sete exercícios aos estudantes, que apresentam diversidade em relação às articulações entre quadros e pontos de vista e conversões entre registros de representação, além disso, verifica-se a necessidades dos níveis de conhecimentos, mobilizável e disponível.

52. Considere as funções afins dadas por

$f(x) = -3x + 4$, $g(x) = \frac{x}{3}$ e $h(x) = x - 2$. Para cada uma das funções, responda:

a) Em que pontos a reta correspondente corta os eixos **x** e **y**?

b) A função é crescente ou decrescente? O ângulo de declividade é agudo ou obtuso?

c) Construa os gráficos e confira neles as respostas dadas nos itens anteriores.

Dante, 2005, p. 92

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: mobilizável;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural e registro de representação algébrico explícito;
- Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada: algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico explícito, registro de representação tabela, registro de representação gráfico;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: **primeira questão:** disponibilidade da noção de zeros da função e coeficiente linear mesmo que o autor não tenha utilizado essa terminologia, **segunda questão**: dada a função no registro de representação algébrico intrínseco reconhecer o sinal do valor de **a** como indicador da função crescente ou decrescente associado a noção de classificação de ângulos, **terceira questão**: articulação entre a conversão do registro de representação algébrico explícito para o registro de representação

gráfico, passando pelo registro de representação tabela (fórmula-tabela-gráfico) e todas as noções utilizadas nas questões anteriores;

57. As retas das funções afins **f** e **g** e da função constante **h** determinam um triângulo.

a) Determine os vértices desse triângulo, sabendo que as leis dessas funções são
$f(x) = -x + 3$, $g(x) = x - 3$ e $h(x) = 3$.

b) Construa os três gráficos num mesmo sistema de eixos.

Dante, 2005, p. 92

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: disponível;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural e registro de representação algébrico explícito;
- Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada: algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico explícito, registro de representação tabela, registro de representação gráfico;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: **primeira questão:** reconhecimento do vértice do triângulo como os pontos em que as funções se interceptam, o que corresponde a dispor dos conhecimentos da noção de sistemas de equações com duas incógnitas, **segunda questão**: articulação entre a conversão do registro de representação algébrico explícito para o registro de representação gráfico, passando pelo registro de representação tabela (fórmula-tabela-gráfico) em cada uma das funções dadas em um mesmo plano cartesiano.

Nessa tarefa, verifica-se que para a sua solução os estudantes podem mudar a ordem da sua execução, pois se eles em primeiro lugar construírem os três gráficos em um mesmo plano cartesiano, terão os pontos, usando apenas a conversão entre os registros de representações em jogo.

Neste tipo de tarefa, especificamente na primeira questão, é importante observar que é exigido o reconhecimento dos vértices do triângulo como os pontos em que as funções se interceptam, que se pode considerar como uma mudança de quadro ou domínio, nenhum discurso tecnológico que justifique essa mudança de quadro ou domínio foi apresentado anteriormente pelo autor, sendo assim, pode-se esperar que os estudantes tenham dificuldade em reconhecer esse caso.

Funções afins com a mesma taxa de variação

O autor define funções afins com a mesma taxa de variação ou com o mesmo coeficiente angular (posição relativa entre retas), isto é, o autor mostra a importância da mudança de ponto de vista, mesmo se esta mudança não é tratada com esta terminologia, para estudar as posições relativas das retas, tratando os casos de retas coincidentes, concorrentes e paralelas do ponto de vista algébrico. O caso das retas concorrentes e paralelas também é tratado através do registro de representação gráfico.

Nos três exercícios propostos verifica-se que além de tratar da conversão entre os registros de representação algébrico explícito e registro de representação gráfico, faz-se também uma mudança do quadro ou domínio do estudo das funções para o quadro ou domínio da geometria analítica, em particular, o estudo da reta, o que se pode observar, no exemplo abaixo:

61. Seja **f** a função afim definida por $f(x) = 3x - 2$ e cujo gráfico é a reta **r**. Determine a função afim **g** cuja reta correspondente passa por $(-1, 2)$ e é paralela à reta **r**.

Dante, 2005, p.93

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: disponível;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural e registro de representação algébrico explícito e registro de representação par ordenado;
- Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada: algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico intrínseco, registro de representação algébrico explícito, registro de representação gráfico;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: reconhecer que a função **g** difere da função f(x) = 3x – 2, apenas pelo valor de **b**.

Estudo do sinal da Função Afim

Para apresentação desta noção, o autor através de um exemplo faz um breve discurso sobre o estudo do sinal de uma função afim, mostrando que para isso, é preciso determinar o zero desta função. No enunciado do exemplo o registro de representação utilizado é o da língua natural. A solução da questão é feita algebricamente com a conversão do registro de representação da língua natural para o registro de representação algébrico explícito.

Nesse ponto, é evidente a necessidade de um discurso tecnológico sobre o tratamento utilizado na conversão de uma representação à outra como é possível verificar na figura abaixo:

Estudo do sinal da função afim

Um comerciante gastou R$ 300,00 na compra de um lote de maçãs. Como cada maçã será vendida a R$ 2,00, ele deseja saber quantas maçãs devem ser vendidas para que haja lucro no final da venda.

Observe que o resultado final (receita menos despesa) é dado em função do número **x** de maçãs vendidas e a lei da função é
$f(x) = 2x - 300$.

- Vendendo 150 maçãs não haverá lucro nem prejuízo.
  Para $x = 150$, temos $f(x) = 0$.
- Vendendo mais de 150 maçãs haverá lucro.
  Para $x > 150$, temos $f(x) > 0$.
- Vendendo menos de 150 maçãs haverá prejuízo.
  Para $x < 150$, temos $f(x) < 0$.

Dante, 2005, p.94

Zeros da Função Afim

Para o caso dos zeros da função afim, o autor faz a apresentação algébrica, utilizando o registro de representação algébrico intrínseco. No exemplo é utilizado o registro de representação algébrico explícito e registro de representação gráfico. O autor, ainda, faz uma observação sobre o que acontece com a função antes e depois do ponto de intersecção da reta com o eixo x, que sugere o estudo do sinal da função que é o tema a seguir.

Estudo do sinal pela análise do gráfico

Como o próprio título sugere a análise do sinal da função fim, é feita graficamente, isto é, verifica-se o que acontece com a função antes e depois da intersecção da reta com o eixo das abscissas, para essa análise é preciso efetuar a conversão do registro de representação algébrico explícito para o registro de representação gráfico de uma função afim crescente ou decrescente, mas não existe nenhum discurso tecnológico que justifique esta conversão, pois não faz parte do objetivo do autor, ficando este trabalho mais uma vez a cargo do professor.

Os cinco exercícios propostos trabalham os procedimentos apresentados nos exercícios resolvidos, isto é, encontrar o ponto de intersecção da função com o eixo das abscissas, para, em seguida, estudar o sinal da função da função afim.

63. Estude a variação do sinal das seguintes funções afins:

a) $f(x) = x + 4$ b) $f(x) = -2x + 1$

Dante, 2005,p.96

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: mobilizável;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural e registro de representação algébrico explícito;
- Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada: algébrico;
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação gráfico;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: conversão do registro de representação algébrico explícito para o registro de representação gráfico, cálculo do zero da função, além do conhecimento das noções de intervalos.

66. Qual é o zero da função afim cujo gráfico, que é uma reta, passa pelos pontos (2, 5) e (−1, 6)?

Dante, 2005,p.96

- Nível de conhecimento exigido na tarefa: mobilizável;
- Registros de representação dados no enunciado: registro de representação da língua natural e registro de representação par ordenado explícito;
- Domínio ou quadro em que a tarefa é enunciada: algébrico
- Tipos de representação exigidos na solução da tarefa: registro de representação algébrico intrínseco e registro de representação algébrico explícito;
- Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas: conversão do registro de representação par ordenado explícito para o registro de representação algébrico explícito, passando pelo registro de representação algébrico intrínseco, articulação do conceito de coordenadas no plano cartesiano com o conceito que dois pontos formam uma reta, isto é, passagem do quadro algébrico para o quadro geométrico o que possibilita encontrar a lei que relacione y com x conhecidos dois pontos de seu gráfico, exigindo, ainda, outros conhecimentos disponíveis que dependem do ponto de vista ou do quadro escolhido para solução. Exemplo: sistema de duas equações com duas incógnitas, inclinação da reta ou trigonometria no triângulo retângulo, depois de encontrada a lei de formação da função, ou seja, o registro de representação algébrico explícito será necessário encontrar o zero da função, isto é, achar o valor de x quando o valor de y for igual zero, isto exigirá a aplicação de conhecimentos prévios da noção de equação do 1^0grau com uma incógnita.

O item Inequações do 1º grau com uma variável

A articulação entre as inequações do 1º grau com uma variável em **R** e a função afim, é feita através de exemplo onde primeiramente é feita a conversão do registro de representação algébrico explícito para o registro de representação gráfico. Em seguida, analisa-se o sinal da função antes e depois da intersecção com o eixo das abscissas, isto é, a análise gráfica do estudo do sinal é a solução da tarefa, como se pode verificar nos exemplos que seguem. É importante verificar que para esta análise gráfica onde se utiliza apenas o eixo das abscissas é necessário dispor de conhecimentos sobre a representação de conjuntos, em particular, dos conjuntos numéricos, pois a interseção através da análise do quadro de sinais só pode ser compreendida quando se dispõem das definições das operações de interseção e reunião de conjuntos. Além disso, é preciso considerar o domínio em que a função está definida.

Neste ponto, é evidente, a importância da conversão entre os diferentes registros de representação, pois é através destas conversões que se pode estabelecer as articulações intramatemáticas, onde as conversões servem para justificar a necessidade de conhecimentos disponíveis sobre outros objetos matemáticos.

Nos doze exercícios propostos aos estudantes, há diversidade em relação às articulações entre quadros e pontos de vista e conversões entre registros de representação, além disso, os níveis de conhecimentos, mobilizável e disponível são considerados nestes exercícios.

69. Um comerciante teve uma despesa de R$ 230,00 na compra de certa mercadoria. Como vai vender cada unidade por R$ 5,00, o lucro final será dado em função das **x** unidades vendidas. Responda:

a) Qual a lei dessa função **f**?

b) Para que valores de **x** temos $f(x) < 0$? Como pode ser interpretado esse caso?

c) Para que valor de **x** haverá um lucro de R$ 315,00?

d) Para que valores de **x** o lucro será maior que R$ 280,00?

e) Para que valores de **x** o lucro estará entre R$ 100,00 e R$ 180,00?

Dante, 2005,p.100

O item Função Afim e movimento uniforme

Este item é introduzido com um pequeno texto de conteúdo de física que faz a articulação entre o quadro da física, em particular dos movimentos uniformes e o quadro da função afim e seus respectivos registros de representação, onde a noção de movimento uniforme e a noção de função afim são apresentadas através de um discurso tecnológico que explicita a igualdade para suas representações.

Deve-se ressaltar a importância e a utilidade deste tipo de articulação, considerada extramatemática, para o estudante ao longo do ensino médio e posteriormente no ensino superior, pois, muitas vezes o estudante não é capaz de transferir seus conhecimentos de um quadro para o outro e este trabalho interdisciplinar é indispensável para o estudante possa desenvolver o hábito de trabalhar de forma articulada, percebendo o caráter de ferramenta é objeto das noções em jogo.

Os registros de representação utilizados para essas articulações são: registro de representação algébrico intrínseco, registro de representação algébrico explícito, registro de representação tabela e registro de representação gráfico.

O autor apresenta dois exercícios resolvidos cujo nível de conhecimento esperado dos estudantes é o mobilizável, pois necessitam apenas de conversões entre registros de representação semiótica como se verifica no exemplo abaixo:

15. Um motociclista percorre uma estrada movimentando-se de acordo com a função horária $S(t) = 100t - 50$, em que S(t) representa sua posição (em km) e **t** representa o tempo (em **h**). Depois de quanto tempo o motociclista passa pelo marco quilômetro zero (km 0)?

Resolução:

Para que o motociclista passe pelo marco 0 km, temos que S(t) = 0 km. Logo:

$$0 = 100t - 50 \Rightarrow 100t = 50 \Rightarrow t = \frac{50}{100} \Rightarrow t = 0{,}5\ h$$

Interpretação:

A função $S(t) = 100t - 50$ é uma função afim do tipo $S(t) = vt + S(0)$.

Quando t = 0, temos S(0) = −50 km, que representa a posição inicial que o motociclista ocupava no início do movimento (estava 50 km antes do marco 0 km). Ele movimentava-se com velocidade constante de 100 km/h para a frente (velocidade positiva), isto é, v = 100 km/h.

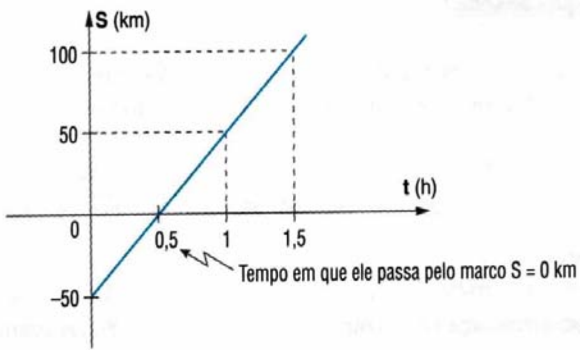
Para que ele chegue ao marco 0 km partindo do marco −50 km, ele precisa percorrer uma distância de 50 km. Como se desloca com velocidade constante de 100 km/h, temos:

100 km —— 1 h

50 km —— t

Assim, t = 0,5 h.

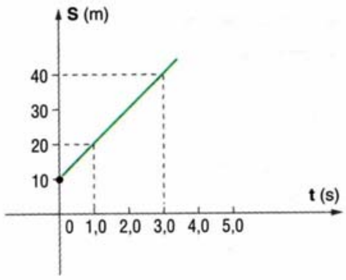
Graficamente, temos:



Dante, 2005,p.101

Finalmente, são propostos três exercícios, que exigem do estudante apenas a aplicação dos conhecimentos apresentados nos exemplos desenvolvidos pelo autor. Sendo assim estes exercícios podem ser classificados no máximo como mobilizável.

80. Analise o gráfico da posição (**S**) de um ponto material dada em função do tempo (**t**) e determine:



a) a velocidade desse ponto material;

b) a função do movimento desse ponto material;

c) a posição desse ponto material no instante t = 3,0 s.

81. A função da posição em relação ao tempo do movimento de um ponto material é S = 50 − 10t. Determine:

a) a velocidade e a posição inicial desse ponto material.

b) o gráfico da posição (**S**) em função do tempo (**t**).

c) o gráfico da velocidade (**v**) em função do tempo (**t**).

Dante, 2005, p.103

O item Proporcionalidade e função linear

Através de uma situação problema apresentada no registro de representação da língua natural e registro de representação tabela, o autor introduz o assunto com uma pequena revisão sobre a noção de proporcionalidade, como é possível verificar na figura a seguir.

16. Proporcionalidade e função linear

Um motorista mantém seu carro numa rodovia a uma velocidade constante de 90 km/h.

a) Em quanto tempo ele percorrerá 225 km?

b) Quantos quilômetros ele percorrerá em 3,5 horas?

Esta é uma situação que envolve os conceitos de proporcionalidade e de função linear.

Proporcionalidade

Analisando a tabela ao lado, que representa a situação anterior, observe que:

a) quanto maior o tempo, maior será a distância percorrida;

b) se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor do tempo (**t**), então o valor correspondente da distância (**d**) fica dobrado, triplicado, etc.

Quando isso ocorre entre duas grandezas, dizemos que elas são proporcionais (ou diretamente proporcionais). Logo, tempo e distância percorrida são grandezas proporcionais, quando se tem velocidade constante.

t (em horas)	d (em km)
$\frac{1}{3}$	30
$\frac{1}{2}$	45
1	90
2	180
3	270
4	360
t	d = 90t

Dante, 2005, p. 103

Em seguida, para generalizar a situação o autor introduz o que ele denomina “linguagem matemática”, que na realidade é a modelagem do caso particular de uma situação de proporcionalidade através de uma função como é possível verificar na ilustração abaixo.

Linguagem matemática

Na linguagem matemática, essa noção de proporcionalidade pode ser assim expressa:

Duas *grandezas* são *proporcionais* se para cada valor **x** de uma delas corresponde um valor **y** bem definido na outra ($x \rightarrow y$), satisfazendo:

a) Quanto maior for **x**, maior será **y**, ou seja:
se $x \rightarrow y$ e $x' \rightarrow y'$, então $x < x'$ implica $y < y'$.

b) Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de **x**, então o valor correspondente de **y** será dobrado, triplicado, etc., ou seja:
se $x \rightarrow y$, então $nx \rightarrow ny$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

A correspondência $x \rightarrow y$ que satisfaz essas duas condições chama-se *proporcionalidade*.

Dante, 2005, p.103

Passando aos exercícios resolvidos que também são apresentados através de situações problemas e onde são resgatadas as noções de área de triângulo e juros simples, isto é, o autor efetua aqui uma articulação entre o quadro das funções e o quadro da geometria e da matemática financeira respectivamente.

Os quatro exercícios propostos pelo autor seguem a mesma linha dos exercícios resolvidos com mudanças de quadro onde as noções geométricas de perímetro, área, volume e retas estão em jogo. .

Este item funciona como uma introdução o próximo item, que é função linear.

Função linear

Considerando a revisão de proporcionalidade apresentada anteriormente, o autor introduz o assunto a partir do conceito de proporcionalidade, mas agora de forma algébrica utilizando o registro de representação algébrico intrínseco.

Sendo assim, ele faz uma apresentação da função linear como caso particular da função afim, utilizando como exemplo o gráfico do deslocamento de um corpo em função do tempo que parte da origem de um sistema cartesiano ortogonal e cujo gráfico é uma reta. A partir deste gráfico o autor conclui que a função linear é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.

Grandezas inversamente proporcionais

O autor procura mostrar o que são as grandezas inversamente proporcionais utilizando os mesmos mecanismos da função linear, isto é, estudando as noções associadas a noção de função afim o que favorece as articulações entre esta noção e as noções intramatemáticas, tais como razão e proporção teoricamente vistas no ensino fundamental II e aqui são tratadas não apenas como uma revisão, mas como uma forma de articulação que permite mudanças de quadros e pontos de vista além da conversão de diferentes registros de representação semiótica.

Em seguida, são propostos 20 exercícios que em geral, são anunciados no registro de representação da língua natural e que permitem desenvolver os três níveis de conhecimento. .

87. A distância entre duas cidades é de 400 km. O tempo gasto para um veículo percorrer essa distância depende da sua velocidade média.

a) Faça uma tabela com valores para velocidade (km/h) e tempo (h).

b) Construa o gráfico com os valores da tabela.

c) Verifique se essa é uma função com proporcionalidade direta ou inversa.

Dante, 2005, p.107

91. O preço de venda de um livro é de R$ 15,00 por unidade. A receita total obtida pela venda desse livro pode ser calculada pela fórmula: receita total = = preço de venda por unidade vezes quantidade de livros vendidos.

a) Indicando por **x** a quantidade de livros vendidos, escreva a lei dessa função.

b) Essa função é linear?

c) A receita total é diretamente proporcional ao número de livros vendidos?

Dante, 2005, p.107

O item Outras aplicações da Função Afim

Nenhum discurso acompanha este item, apenas exercícios propostos para os estudantes, onde são exigidos os três níveis de conhecimento segundo Robert (1997) e, alem disso, são consideradas todas as articulações propostas anteriormente no capítulo, entre quadros, registros de representações e pontos de vista.

É neste item que o nível disponível aparece realmente, pois a inexistência do discurso tecnológico que acompanham os exemplos deixa a cargo dos estudantes reconhecerem em cada uma das doze tarefas propostas os diferentes itens desenvolvidos anteriormente.

Este livro deixa evidente a importância das articulações entre as diferentes noções de diferentes quadros ou domínios da própria matemática a noção de função afim, que são agentes facilitadores para retomadas dessas noções ao longo de todo curso de matemática do ensino médio, pois muitas destas articulações exigem que o estudante disponha de conhecimentos sobre noções trabalhadas no ensino fundamental.

Em relação, aos registros de representação considerados neste trabalho, além de utilizá-los justificando as conversões entre eles, mesmo se não tratadas com esta terminologia, o livro também faz as articulações entre a noção de função afim e os conhecimentos intramatemáticos e extramatemáticos, considerando os diferentes registros de representação associados a estes conhecimentos, facilitando assim, o trabalho do professor.

Dessa forma, a obra apresenta uma grande diversidade de articulações, tratando exaustivamente as possibilidades de articulações entre as diferentes formas de conhecimento e suas representações para a noção de função afim, mas para que ela posa ser trabalhada em sua totalidade é necessário que o professor fique atento para o nível de seus estudantes em relação às noções em jogo. Verifica-se, assim, que existem muitas possibilidades de articulação e que é necessário que um trabalho neste mesmo nível venha sendo desenvolvido no ensino fundamental para que os estudantes desenvolvam o hábito deste trabalho flexível o que permitirá o desenvolvimento de um trabalho exaustivo de articulação dos conhecimentos associados a noção de função afim como proposto por este auto, mas o professor precisa levar em conta aqueles estudantes com lacunas relativas às noções em jogo, para não dificultar ainda mais a compreensão dessas articulações.

4. Conclusão

Em geral, os livros trazem a definição de função afim e pode se considerar que utilizam as conversões no sentido fórmula-tabela-gráfico, isto é, a passagem do registro de representação algébrico intrínseco para o registro de representação algébrico explícito e deste, para o registro de representação tabela ou registro de representação par ordenado e deste para o registro de representação gráfico, mas dos livros didáticos deixa como exercício proposto a conversão no sentido contrário, isto é, registro de representação gráfico ou registro de representação tabela ou registro de representação par ordenado para o registro de representação algébrico explícito ou registro de representação intrínseco, e muitos estudantes não reconhecem a conversão gráfico- fórmula ou tabela-fórmula, isto é, registro de representação gráfico para o registro de representação algébrico explícito ou registro de representação tabela ou registro de representação par ordenado para o registro de representação algébrico explícito respectivamente, pois essas conversões exigem que o estudante disponha de conhecimentos já adquiridos em séries anteriores, ou seja, quando a conversão é pedida na ordem fórmula-tabela-gráfico, isto é, a passagem do registro de representação algébrico intrínseco para o registro de representação algébrico explicito e deste, para o registro de representação tabela ou registro de representação par ordenado e deste para o registro de representação gráfico basta que o estudante mobilize seus conhecimentos de valor numérico, expressões numéricas, coordenadas no plano cartesiano, o que caracteriza, conforme A. Robert, o nível mobilizável, mas se o estudante tiver que fazer a conversão no sentido contrário por exemplo gráfico-fórmula ou tabela fórmula, isto é, registro de representação gráfico para o registro de representação algébrico explícito ou registro de representação tabela ou registro de representação par ordenado para o registro de representação algébrico explícito, respectivamente ele terá que articular conhecimentos e conceitos já adquiridos anteriormente, o que "dificulta" o nível da tarefa para o estudante, uma vez que o nível exigido é o disponível, além disso, quando estas tarefas apresentam um contexto de uma situação-problema, a tarefa torna-se ainda mais "difícil" para o estudante, pois além de exigir o nível disponível para a conversão de registro de representação, ela também coloca em jogo a articulação de conhecimentos intramatemáticos e extramatemáticos que devem ser disponíveis para que possam ser reconhecidos pelo estudante, além disso, o estudante precisa "traduzir" o enunciado, exigindo assim, um reconhecimento do novo contexto e um bom nível de leitura e interpretação de textos, o que reforça a questão de escrever em matemática".

Os livros tentam mudar este panorama, mas em alguns casos, a conversão fórmula-tabela-gráfico, isto é, a passagem do registro de representação algébrico intrínseco para o registro de representação algébrico explícito e deste, para o registro de representação tabela ou registro de representação par ordenado e deste para o registro de representação gráfico, ainda é privilegiada e o outro sentido de conversão é deixado para o professor e para o estudante.

Portanto, antes de escolher o livro o professor necessita conhecer melhor seus estudantes para saber quais as noções que os mesmos dispõe, não podendo ficar simplesmente preso aos planos de ensino. Neste caso, verifica-se que quando se deseja trabalhar a noção de função afim articulando domínios ou quadros, efetuando mudanças de pontos de vista e conversões de registros de representação semióticas é necessário reconhecer o nível de conhecimento dos estudantes em relação às noções que permitem essas articulações para que o estudante seja capaz de trabalhar de forma flexível buscando em sua estrutura cognitiva, os conhecimentos necessários para o trabalho que lhe é proposto.

O professor estando consciente desta situação e do fato que existem várias formas de articular as diferentes representações para a noção de função afim, todas associadas aos conhecimentos trabalhados anteriormente, e também sabendo que os livros necessitam fazer suas escolhas, deve estudar e identificar aquelas que melhor se adapta aos seus estudantes levando em consideração os conhecimentos prévios dos mesmos.

Por exemplo, na literatura, o conceito de função é introduzido através do registro de representação diagrama de Venn e uma das dificuldades dos estudantes pode estar em fazer as conversões desse registro de representação para os registros de algébrico intrínseco, isto é, $f: A \rightarrow B$ $x :\rightarrow f(x)$ com $x \in A$, $f(x) \in B$, $a \neq 0$, o que dificulta o trabalho com os casos gerais que são tratados nos cursos da área de exatas ensino superior. Esta falta de um trabalho explícito sobre a conversão das diferentes representações, que em geral, é deixado totalmente a cargo do estudante pode ser um dos fatores das dificuldades encontradas pelos estudantes para reconhecer e utilizar o conceito de função, que é essencial para o estudo de um grande número e problemas de ciências naturais, matemática e tecnologia.

Além disso, a articulação constante das noções matemáticas que estão sendo introduzidas com aquelas que foram trabalhadas anteriormente, permite que o estudante se habitue a procurar no “arquivo” de seus conhecimentos, aqueles que podem ser relacionados com a noção de função, sendo assim capazes de encontrar novos meios e solução de uma tarefa diferente do proposto nos livros didáticos ou pelo professor, que seja mais coerente com os conhecimentos que ele mesmo possua.

CAPÍTULO 5

GESTÃO PESSOAL DA ARTICULACAO ENTRE AS DIFERENTES FORMAS DE CONHECIMENTO PARA A NOÇÃO DE FUNÇÃO AFIM: ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS NO SARESP

1.Introdução

Desde 1996 a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo - SEE/SP realizou nove edições do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo - Saresp, cujo objetivo é avaliar o sistema de ensino paulista, visando melhorar sua qualidade através da aplicação de provas para medir o desempenho dos alunos em Leitura/Escrita e Matemática. A última edição do Saresp realizada em novembro de 2005 será objeto dessa análise, pois possui elementos que permitem a análise das diferentes formas de conhecimento associadas à noção de função afim.

O exame do Saresp está fundamentado nas propostas curriculares da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP/SEE e nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEMs, para os quais estudaram-se os objetivos e finalidades no segundo capítulo desse trabalho, na tentativa de identificar as articulações de domínio ou quadros, registros de representação semióticas a serem trabalhados, assim como as suas possíveis conversões e as mudanças de ponto de vista sugeridas, mesmo se essas articulações não são tratadas utilizando essa terminologia.

Optou-se por apresentar apenas os itens que tratam essencialmente de noções associadas à construção do conceito de função afim.

Observa-se ainda que, segundo o Saresp, é importante que a avaliação leve em conta:

- Entre as competências e habilidades esperadas dos alunos do ensino médio estão: *Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas; reconhecer representações equivalentes de um mesmo* *conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações. (Encontro de Matemática – Avaliações Externas, 2005).*

- E entre algumas discussões e propostas referentes ao ensino está: *a ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas e não a mera mecanização de regras e técnicas. (Encontro de Matemática – Avaliações Externas, 2005)*

Foram sugeridas como indicações para a elaboração da prova a classificação, conforme o artigo "Ferramentas de análise de conteúdos a ensinar" de Robert (1998), em particular, explora-se a questão dos níveis de conhecimento esperados dos estudantes, no qual está centrado o referencial teórico dessa pesquisa.

O objetivo de apresentar esses resultados é para verificar quais as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes de uma escola da Zona Sul da cidade de São Paulo, em relação ao objeto de estudo função afim com base nas relações institucionais existentes.

A análise das relações institucionais, desenvolvida através da análise dos livros didáticos mostra a importância de levar o estudante a trabalhar os níveis mobilizável e disponível, portanto, espera-se que o estudante disponha dos conhecimentos associados à noção de função afim e que disponha de suas possibilidades de articulações, isto é, seja capaz de efetuar mudanças de domínios ou quadros, escolher os registros de representação adequados e mudar de ponto de vista quando necessário.

Para observar as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes em relação ao objeto função afim, selecionam-se aqui, as provas das três séries do ensino médio do período noturno do Saresp 2005, aplicadas para os alunos de uma escola publica Estadual localizada na zona Sul da cidade de São Paulo.

Trata-se de um resultado parcial que permite compreender melhor a relação que os alunos dessa determinada escola desenvolveu em relação ao objeto função afim.

Primeiro, antes da análise dos resultados de cada questão considera-se a matriz de especificação dos conteúdos e das habilidades com o respectivo gabarito para a respectiva série e os relacionado às questões onde a noção de função afim está em jogo.

Para isso, consideram-se as seguintes questões para a análise dos resultados:

I – Nível de conhecimento esperado dos estudantes: técnico, mobilizável e disponível (segundo Robert);

II - Conhecimentos disponíveis para solução da tarefa.

Em seguida, apresenta-se o desempenho dos estudantes em relação à cada questão, seguidos de um comentário.

2. Desempenho nas provas de Matemática – Função afim

2.1 Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

Questões de 01 à 08

Número de alunos: 58

MATRIZ DE ESPECIFICAÇÃO – MATEMÁTICA
Ensino Médio – 1ª Série

Conteúdos	Habilidades	Gabarito
Álgebra: números e funções	1. Reconhecer grandezas direta ou inversamente proporcionais e grandezas nem direta nem inversamente proporcionais, dada uma tabela de valores.	C
	2. Reconhecer grandezas direta ou inversamente proporcionais e grandezas nem direta nem inversamente proporcionais, dada um gráfico cartesiano.	D
	3. Expressar algebricamente a dependência de uma variável em relação à outra, a partir da análise de tabelas.	C
	4. Interpretar gráfico conferindo significado às variações das grandezas envolvidas.	B

5. Identificar gráfico que representa uma função afim.	A
6. Identificar uma função afim a partir de seu gráfico.	B
7. Aplicar propriedades da função afim para resolver situações em contextos variados.	C
8. Utilizar inequação do 1º grau para resolver situação-problema.	A

01. Um prêmio de loteria no valor total de R$ 500 000,00 será dividido pelo número de ganhadores de forma igual, conforme mostra a tabela abaixo:

Ganhadores	Valor (R$)
1	500 000,00
2	250 000,00
5	100 000,00
10	50 000,00

Da leitura desta tabela concluímos que:

(A) quando aumenta em 1 unidade o número de ganhadores, o valor do prêmio é sempre reduzido em R$ 250 000,00.
(B) se dobrar o número de ganhadores, o valor do prêmio será dobrado.
(C) se triplicar o número de ganhadores, o valor do prêmio será reduzido a terça parte.
(D) o número de ganhadores aumenta quando o valor do prêmio aumenta.

Gabarito: alternativa C

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

I – Nível de conhecimento esperado dos estudantes: técnico, mobilizável e disponível (segundo Robert):

Disponível;

II - Conhecimentos disponíveis para solução da tarefa:

Interpretação da tabela; Grandezas inversamente proporcionais;

Desempenho dos alunos

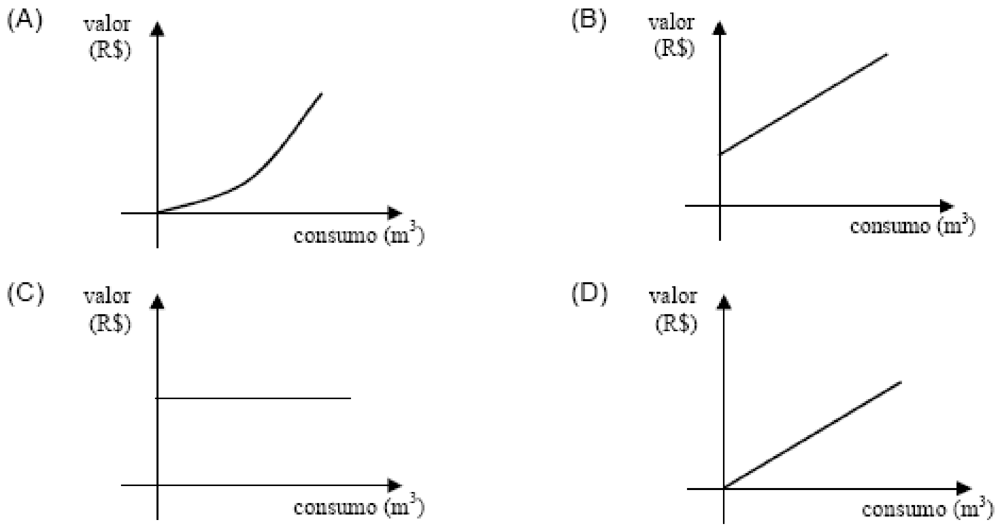
Questão 01	Turma D	Turma E	Total	%
A	9	15	24	41,4
B	2	1	3	5,2
C	12	12	24	41,4
D	5	2	7	12
Total	28	30	58	100

Comentários:

Os dados mostram que o mesmo número de alunos que escolheu a alternativa A, escolheu a alternativa C que é a única resposta correta. A primeira alternativa corresponde a uma interpretação errônea na qual o estudante: identifica que o número de ganhadores aumenta uma unidade, o valor do premio é reduzido para R$ 250.000,00, considerando apenas os dois primeiros dados da tabela ou não levando em consideração as outras linhas ou, ainda, não levando em consideração a palavra “sempre” que aparece na alternativa A.

Considerando que apenas 41,4% dos estudantes deram uma resposta correta, levando-se em conta que se trata de um teste objetivo no qual alguns estudantes podem ter dado a resposta correta por acaso, pode-se dizer que a noção de grandezas inversamente proporcionais ainda não é disponível para muitos estudantes ou que esses estudantes não têm o hábito de trabalhar com a interpretação desse tipo de texto desprezando palavras como “sempre”, o que modifica os resultados encontrados, isso faz com que fiquem presos a uma análise local da questão.

02. Em uma certa cidade não há cobrança de taxa mínima de uso. O valor da conta de água é diretamente proporcional ao consumo. Dos gráficos abaixo, o que relaciona o valor da conta com o consumo é:



Gabarito: alternativa D

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

I – Nível de conhecimento esperado dos estudantes: técnico, mobilizável e disponível (segundo Robert):

Mobilizável;

II - Conhecimentos disponíveis para solução da tarefa:

Articulação entre a representação gráfica da função linear com a noção de grandezas diretamente proporcionais;

Desempenho dos alunos

Questão 02	Turma D	Turma E	Total	%
A	10	11	21	36,2
B	5	2	7	12
C	9	8	17	29,4
D	4	9	13	22,4
Total	28	30	58	100

Comentários:

Apenas 22,4% dos estudantes deram uma resposta correta para essa questão, o que deixa ainda mais evidente que para os estudantes analisados existe uma dificuldade associada à articulação entre a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais e a de identificação de suas representações gráficas.

Os dados da questão mostram que a maioria dos alunos escolheram a alternativa A e apenas 13 escolheram a alternativa D, que é a resposta correta. Escolher a primeira alternativa corresponde a uma interpretação errônea por parte dos estudantes, pois mostra que eles não identificam a noção de grandeza diretamente proporcional com a noção de função linear que corresponde a uma importante articulação entre formas de domínios ou quadros e que, além disso, exige uma conversão de registro de representação.

03. A tabela abaixo mostra pares de valores correspondentes de duas grandezas relacionadas X e Y.

X	2	3	4	5	6
Y	4	8	12	16	20

A relação algébrica entre X e Y pode ser expressa como:

(A) $Y = 2^X$ (B) $Y = X^2 - X + 2$ (C) $Y = 4X - 4$ (D) $Y = 3X - 2$

Gabarito: alternativa C

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

I – Nível de conhecimento esperado dos estudantes: técnico, mobilizável e disponível (segundo Robert):

Disponível;

II - Conhecimentos disponíveis para solução da tarefa

Tabela-fórmula; Valor numérico; identificação da função através da fórmula f(x) = ax + b, sistema de equação do 1º grau com duas incógnitas;

Desempenho dos alunos

Questão 03	Turma D	Turma E	Total	%
A	12	6	18	31
B	5	15	20	34,5
C	8	6	14	24,1
D	3	3	6	10,4
Total	28	30	58	100

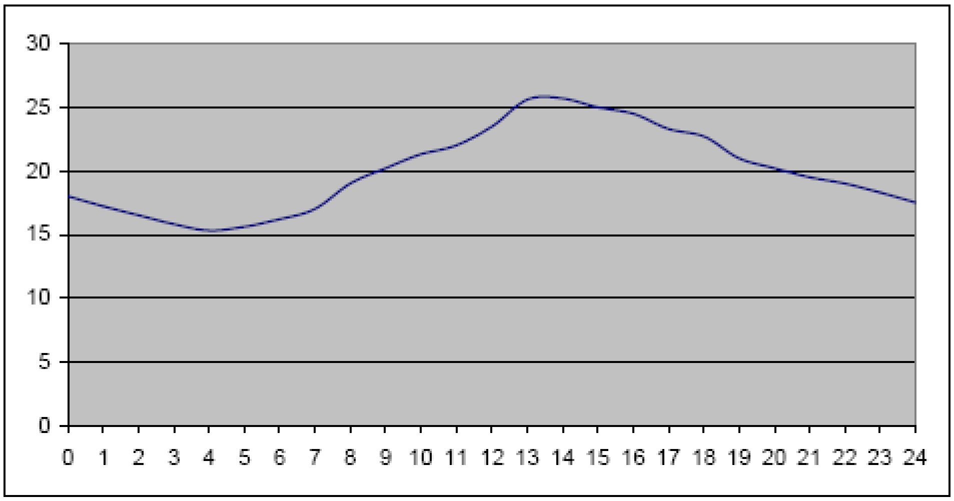
Comentários:

Mesmo tratando-se de uma questão simples, verifica-se que apenas 24,1% responderam corretamente.

Não é proposto um problema nessa questão. É dada uma tabela, que deve ser compreendida e interpretada, o que permitiria escolher diretamente as alternativas C e D, por uma simples verificação chegar à resposta correta, isto é, calculando o valor numérico. Sendo a alternativa C a única correta. Os dados mostram que a alternativa B foi a mais escolhida, o valor correspondente de X apresenta o valor correto de Y nas duas primeiras colunas da tabela, o que pode ser interpretado como uma leitura parcial da questão pelos estudantes, isto é, falta de hábito de trabalhar com esse tipo de questão, levando-os a não analisar todos os casos possíveis, isto é, nesse caso, esse resultado parece mostrar que os estudantes não analisam os dados do problema, mas escolhem aleatoriamente suas respostas.

É importante observar que muitas vezes para controlar os resultados pode-se utilizar o cálculo do valor numérico, mas devem-se habituar os estudantes a efetuar o controle para todos os dados do problema. Esse trabalho, só será efetuado quando desenvolvido explicitamente nas aulas durante o período escolar dos estudantes, ou seja, essa é uma atividade que necessita ser trabalhada para que os estudantes se habituem a utilizá-la em seu trabalho diário.

04. O gráfico abaixo mostra como variou a temperatura em uma cidade durante um certo dia.



Pode-se afirmar que:

(A) a temperatura máxima foi atingida ao meio-dia.
(B) a temperatura mínima ocorreu por volta das 4 da manhã.
(C) no período entre as 0 e as 12 horas a temperatura foi crescente.
(D) no período entre as 12 e as 24 horas a temperatura foi decrescente.

Gabarito: alternativa B

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

I – Nível de conhecimento esperado dos estudantes: técnico, mobilizável e disponível (segundo Robert):

Técnico;

II - Conhecimentos disponíveis para solução da tarefa

Plano Cartesiano; coordenadas no plano cartesiano;

Desempenho dos alunos

Questão 04	Turma D	Turma E	Total	%
A	5	3	8	13,8
B	8	10	18	31
C	5	3	8	13,8
D	10	14	24	41,4
Total	28	30	58	100

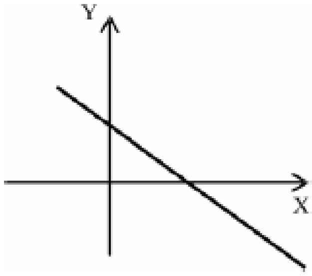
Comentários:

Mesmo sendo uma questão que exige apenas a leitura de um ponto no gráfico verifica-se que apenas 31% dos estudantes encontraram esse ponto tendo dificuldade em distinguir pontos de máximo e mínimo e crescimento de uma curva.

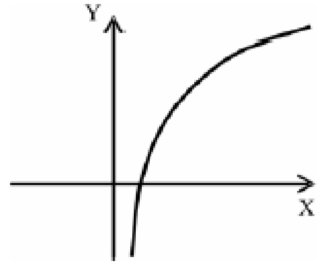
Nessa questão, o gráfico é usado para representar as temperaturas de uma cidade durante um certo dia. Na cidade a temperatura mínima ocorreu por volta das 4 horas da manhã, o que corresponde à alternativa B, observa-se que a alternativa errada D, que foi escolhida pela maioria dos estudantes com 24 das escolhas, fornece uma informação que no primeiro momento parece correta, aparentemente, este erro pode ter ocorrido pela falta de hábito dos estudantes de determinar pontos de máximo e mínimo em gráficos representados em um sistema cartesiano ortogonal. Em geral, no ensino médio se estuda o intervalo em que a função é crescente ou decrescente e não se trabalha com a questão dos máximos e mínimos.

05. Entre os gráficos abaixo, o único que representa uma função do tipo $y = ax + b$ é:

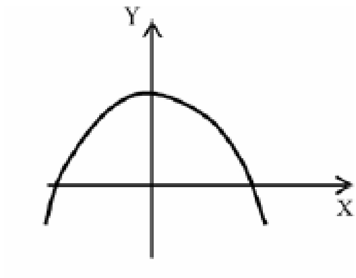
(A)



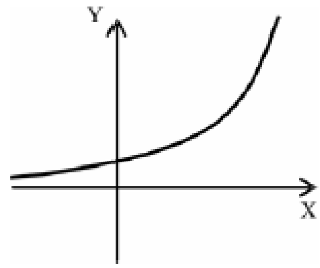
(B)



(C)



(D)



Gabarito: alternativa A

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

I – Nível de conhecimento esperado dos estudantes: técnico, mobilizável e disponível (segundo Robert):

Técnico;

II - Conhecimentos disponíveis para solução da tarefa

Fórmula-gráfico; identificação da reta no plano cartesiano usando a lei de formação (fórmula) de uma função afim através da fórmula f(x) = ax + b;

Desempenho dos alunos

Questão 05	Turma D	Turma E	Total	%
A	10	11	21	36,2
B	7	11	18	31,1
C	3	4	7	12
D	8	4	12	20,7

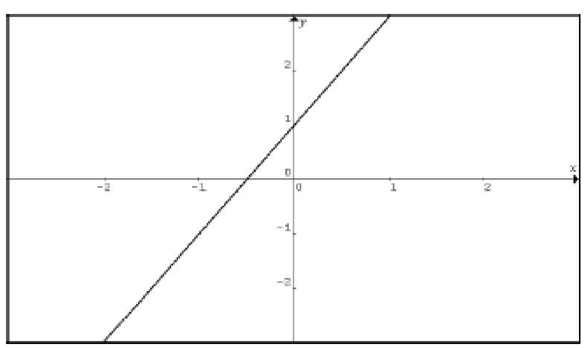
Total	28	30	58	100

Comentários:

Essa questão teve um bom índice de acertos, com 21 das escolhas feitas para a alternativa A, que é a verdadeira, isso pode estar associado ao fato da questão exigir apenas o nível técnico e assemelhar-se com questões provenientes de livros didáticos. Sendo assim, os estudantes reconhecem mais facilmente seu enunciado, pois este está mais próximo da realidade encontrada em sala de aula.

Nessa questão, o gráfico é usado para representar a lei de formação da função afim, basta o estudante reconhecer o gráfico da função representado por uma reta como a lei de formação de uma função afim. Em geral, no ensino médio se privilegia o sentido de conversão fórmula-gráfico, ou seja, a conversão do registro de representação algébrico intrínseco para o registro de representação gráfico, o que deve facilitar a interpretação por parte dos estudantes que estão habituados a esse tipo de articulação de registros de representação semióticas.

06. Dentre as funções abaixo, identifique aquela que melhor representa o gráfico mostrado ao lado.



(A) $f(x) = 10x - 7$
(B) $f(x) = 2x + 1$
(C) $f(x) = x - 2$
(D) $f(x) = 6x - 1$

Gabarito: alternativa B

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

I – Nível de conhecimento esperado dos estudantes: técnico, mobilizável e disponível (segundo Robert):

Mobilizável;

II - Conhecimentos disponíveis para solução da tarefa

Gáfico-fórmula; lei de formação de uma função afim através da fórmula $f(x) = ax + b$; identificar o coeficiente linear como um ponto que pertence ao eixo das ordenadas; sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas;

Desempenho dos alunos

Questão 06	Turma D	Turma E	Total	%
A	4	4	8	13,8
B	10	13	23	39,7
C	5	9	14	24,1
D	9	4	13	22,4
Total	28	30	58	100

Comentários:

Mesmo sendo uma questão que costuma ser bastante trabalhada no ensino médio, e para a qual basta mobilizar a noção de função afim, verifica-se que apenas 39,9% dos estudantes encontraram a resposta correta. As dificuldades encontradas podem estar associadas aos conhecimentos supostos disponíveis para solução da questão. Verifica-se aqui, também, que pode ter havido dificuldade na interpretação do gráfico dado, que foi constituído através de um sofware, mas deve-se lembrar que os estudantes dessa escola não utilizam o computador, pois a escola não dispõe dessa ferramenta.

07. Para estipular o preço por seu trabalho, o pintor de paredes André cobra uma taxa fixa de R$ 50,00 e mais uma taxa de R$ 10,00 por m^2 pintado. André vai pintar uma parede de $10m^2$. Quanto André cobrará por esse trabalho?

(A) R$ 50,00
(B) R$ 100,00
(C) R$ 150,00
(D) R$ 200,00

Gabarito: alternativa C

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

I – Nível de conhecimento esperado dos estudantes: técnico, mobilizável e disponível (segundo Robert):

Disponível;

II - Conhecimentos disponíveis para solução da tarefa:

Aplicação das quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão); lei de formação (fórmula) de uma função afim através da fórmula f(x) = ax + b.

Desempenho dos alunos

Questão 07	Turma D	Turma E	Total	%
A	1	1	2	3,4
B	2	9	11	19
C	8	12	20	34,5
D	17	8	25	43,1
Total	28	30	58	100

Comentários:

Essa questão é uma situação problema aparentemente simples, onde a noção de função afim pode ser utilizada para a sua solução, mas da forma como está enunciada, basta o estudante efetuar uma operação simples (10x10+50 = 150) para encontrar a solução.

Através dos dados obtidos, verifica-se que apenas 34,5% dos estudantes responderam corretamente à questão, pode-se considerar que a dificuldade está na interpretação do problema, quando o estudante precisa mobilizar os conhecimentos prévios da noção de cálculo de área para saber quantos metros quadrados foram pintados, que parece ainda não está disponível para muitos estudantes, em especial para os estudantes da Turma D. Vale ressaltar a diferença estabelecida entre as turmas D e E, pois na Turma D, a maioria dos estudantes optou pela alternativa D, o que já não ocorreu com a Turma E, onde um número maior de estudantes optou pela alternativa correta. Certamente, para compreender melhor essa diferença, seria interessante analisar o caminho dos estudantes das duas turmas, o que não é a proposta desse trabalho, mas que poderá ser objeto de novos trabalhos.

08. Uma companhia de telefonia celular possui dois planos de tarifação para seus usuários: Plano I: taxa de R$ 20,00 por mês, mais R$ 0,30 por minuto de conversação Plano II: sem taxa mensal e R$ 0,50 por minuto de conversação O plano I é o mais vantajoso para as pessoas que, por mês, falam

(A) mais do que 100 minutos
(B) menos do que 100 minutos
(C) mais do que 40 minutos
(D) menos do que 40 minutos

Gabarito: alternativa A

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 1º série do Ensino Médio período noturno

I – Nível de conhecimento esperado dos estudantes: técnico, mobilizável e disponível (segundo Robert)

Disponível;

II - Conhecimentos disponíveis para solução da tarefa

Aplicação das quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão); lei de formação (fórmula) de uma função afim através da fórmula $f(x) = ax + b$, sistema equação do 1º grau com duas incógnitas; inequação do 1º grau.

Questão 08	Turma D	Turma E	Total	%
A	7	14	21	36,2
B	13	4	17	29,3
C	5	4	9	15,5
D	3	8	11	19
Total	28	30	58	100

Comentários:

Essa questão está contextualizada no cotidiano, apesar de estar situada no conteúdo de função afim, basta que o estudante efetue algumas operações simples, como adição e multiplicação ou resolva uma inequação do 1ºgrau ($0,3x + 20 < 0,5x$) para achar a sua solução.

No entanto, mais uma vez, se estabelece uma diferença entre as turmas, pois na Turma D, parece que ainda há uma grande dificuldade de interpretação de anunciados, isto é, a maioria dos estudantes desta turma optou pela alternativa B (menos do que 100 minutos), que é a resposta justamente contrária à alternativa correta e que pode ser interpretada como uma dificuldade por parte dos alunos em trabalhar com intervalos, o que já não ocorreu com a Turma E, onde a maioria optou pela alternativa correta (mais do que 100 minutos).

2.2 Prova de Matemática da 2º série do Ensino Médio período noturno

Questão 07

Número de alunos: 61

MATRIZ DE ESPECIFICAÇÃO – MATEMÁTICA

Ensino Médio – 2ª Série

Conteúdos	**Habilidades**	**Gabarito**
Álgebra: números e funções	7. Identificar propriedades de um gráfico de funções expressas por várias sentenças.	B

07. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } x<0, \\ x^2-1 & \text{se } 0 \leq x < 2; \\ x - 2 & \text{se } x \geq 2; \end{cases}$$

o valor mínimo de f(x) é:

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 2

Gabarito: alternativa B

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 2º série do Ensino Médio período noturno

I – Nível de conhecimento esperado dos estudantes: técnico, mobilizável e disponível (segundo Robert)

Mobilizável;

II - Conhecimentos disponíveis para solução da tarefa

Valor numérico; inequação do 1º e 2º grau; mínimo de uma função.

Desempenho dos alunos

Questão 07	Turma C	Turma D	Total	%
A	6	7	13	20,5
B	13	4	17	27,4
C	8	4	12	19,7
D	13	7	20	32,4
Total	40	22	62	100

Comentários:

Apesar dessa questão exigir o conhecimento de função definida por mais de uma sentença, seja da função afim ou da função quadrática, o estudante poderia chegar à solução da questão efetuando apenas algumas operações simples como adição, subtração e potência.

Aparentemente, devido à diversidade de escolhas de alternativas, os estudantes não reconheceram a possibilidade de conversão do registro de representação algébrico explícito para o registro de representação gráfico, que facilitaria a interpretação do resultado. Pode-se ainda supor que a dificuldade dos estudantes tenha sido a falta de conhecimento das técnicas de trabalho com intervalos, isto é, os estudantes não dispunham de conhecimentos associados à noção de intervalos.

2.3 Prova de Matemática da 3º série do Ensino Médio período noturno

Questões: 04, 14 e 15

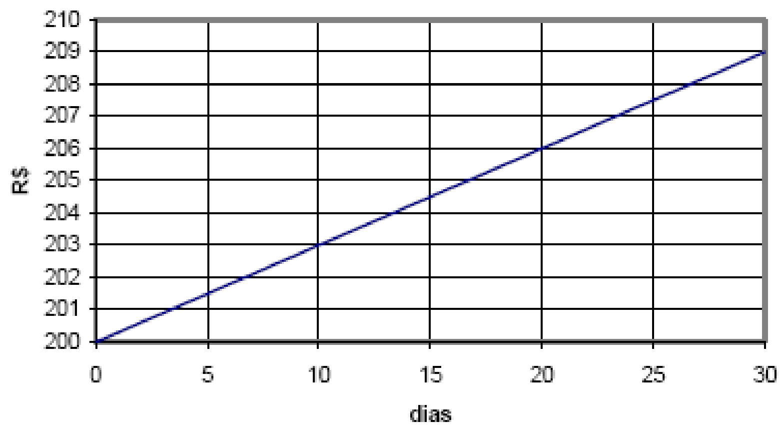
Número de alunos: 96

MATRIZ DE ESPECIFICAÇÃO – MATEMÁTICA

Ensino Médio – 3ª Série

Conteúdos	**Habilidades**	**Gabarito**
Álgebra: números e funções	4. Identificar o gráfico de uma função polinomial do primeiro grau como um gráfico que representa os juros simples em função do tempo.	A
Geometria e medidas	14. Determinar a equação geral da reta.	A
	15. Determinar a equação reduzida da reta.	D

04. O gráfico abaixo mostra o valor a ser pago por uma conta no valor de R$ 200,00, em função no número de dias de atraso no pagamento.



A taxa de juros diários cobrados pelo banco é de:

(A) 0,15% (B) 0,3% (C) 1,5% (D) 3%

Gabarito: alternativa A

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 3º série do Ensino Médio período noturno

I – Nível de conhecimento esperado dos estudantes: técnico, mobilizável e disponível (segundo Robert)

Disponível;

II - Conhecimentos disponíveis para solução da tarefa

Regra de três; juros simples (fórmula); taxa de variação ou de crescimento; interpretação gráfica.

Desempenho dos alunos

Questão 04	Turma B	Turma C	Turma D	Total	%
A	2	13	2	17	17,7
B	10	8	8	26	27,1
C	9	9	10	28	29,2
D	14	4	7	25	26
Total	35	34	27	96	100

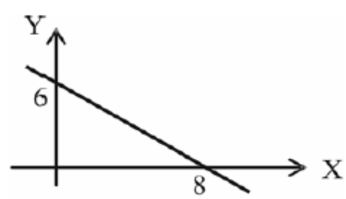
Comentários:

Para a solução dessa questão, existem várias opções, a mais simples é aplicar os juros cobrados dados nas alternativas e verificar qual deles corresponde a R$ 3,00 de aumento no valor inicial.

Apenas na turma C teve um número razoável de estudantes que optou pela alternativa correta, as turmas B e D foram exatamente o contrário, nelas apenas dois estudantes de cada Turma optou pela alternativa correta. Isso mostra que há uma grande discrepância entre as turmas no que diz respeito ao conhecimento de situações relativas à noção de função afim e de suas representações, além da dificuldade no tratamento de juros simples e porcentagens.

Nesse caso, como as turmas apresentam resultados diferentes, aqui também seria interessante estudar o caminho dos estudantes para compreender melhor essa diferença. Esse estudo não está previsto nessa pesquisa, mas poderá ser objeto de estudo para as pesquisas futuras.

14. No gráfico abaixo, você vê uma reta que corta o eixo X no ponto de abscissa 8, e o eixo Y no ponto de ordenada 6. A equação dessa reta é:



(A) $y = -\frac{3}{4}x + 6$

(B) $y = \frac{3}{4}x + 6$

(C) $y = -6x + 8$

(D) $y = 6x + 8$

Gabarito: alternativa A

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 3º série do Ensino Médio período noturno

I – Nível de conhecimento esperado dos estudantes: técnico, mobilizável e disponível (segundo Robert)

Mobilizável;

II - Conhecimentos disponíveis para solução da tarefa

Gáfico-fórmula; lei de formação de uma função afim através da fórmula f(x) = ax + b, usando sistema de duas equações do 1º grau com duas variáveis; determinante de uma matriz; tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas como inclinação da reta dado o cateto oposto e o cateto adjacente.

Desempenho dos alunos

Questão 14	Turma B	Turma C	Turma D	Total	%
A	9	4	0	13	13,5
B	11	6	9	26	27,1
C	6	5	8	19	19,8
D	9	19	10	38	39,6
Total	35	34	27	96	100

Comentários:

Devido à diversidade de escolhas de alternativas e o índice de acerto ser de apenas 13,5%, é provável que os estudantes não tenham reconhecido a questão da conversão de representações, isto é, a conversão do registro de representação gráfico para o registro de representação algébrico explícito, que supõe a passagem pelo registro de representação algébrico intrínseco e que envolve procedimentos técnicos que devem estar disponíveis como, por exemplo, um sistema de duas equações com duas incógnitas, isto é, como a questão dizia tratar-se de uma reta, o estudante poderia iniciar pelo registro de representação algébrico intrínseco e a partir dele fazer a passagem para o registro de representação algébrico explícito onde é esperado que o estudante disponha de conhecimentos associados à noção de sistema de duas equações e duas incógnitas.

Pode-se ainda fazer a passagem do registro de representação par ordenado para o registro de representação gráfico e em seguida utilizar as noções de coeficiente linear e angular para determinar a equação da reta, o que corresponde a esperar que o estudante disponha de conhecimentos de trigonometria no triângulo retângulo.

A questão poderia ser revolvida de várias formas, mas seria necessário dispor de conhecimentos anteriores que precisam ser articulados explicitamente no processo de ensino-aprendizagem quando se deseja mudar esse panorama.

15. A equação da reta que contém os pontos (1, 6) e (5, 4) é:

(A) $y = -x + 7$

(B) $y = \frac{x}{2} + \frac{11}{2}$

(C) $y = -2x + 8$

(D) $y = -\frac{x}{2} + \frac{13}{2}$

Gabarito: alternativa D

Fonte: Saresp 2005-Prova de Matemática da 3º série do Ensino Médio período noturno

I – Nível de conhecimento esperado dos estudantes: técnico, mobilizável e disponível (segundo Robert)

Disponível;

II - Conhecimentos disponíveis para solução da tarefa

Lei de formação de uma função afim através da fórmula f(x) = ax + b, usando o sistema de duas equações do 1º grau com duas variáveis; determinante de uma matriz.

Desempenho dos alunos

Questão 15	Turma B	Turma C	Turma D	Total	%
A	9	2	4	15	15,7
B	9	12	9	30	31,2
C	8	10	7	25	26
D	9	10	7	26	27,1
Total	35	34	27	96	100

Comentários:

Os métodos de resolução dessa questão são bem semelhantes aos da questão anterior, mais uma vez, devido à diversidade de escolhas de alternativas, provavelmente os estudantes não encontraram os conceitos e procedimentos técnicos que deveriam estar disponíveis e que permitiriam encontrar a solução correta como, por exemplo, o de que dois pontos determinam uma reta e sistema de duas equações com duas incógnitas.

Verifica-se, ainda, que esse tipo de questão coloca muitas dificuldades devendo, portanto, ser muito trabalhado para que os estudantes disponham de situações de referência associadas a esse tipo de questão para que sejam capazes de reconhecê-las em testes como o Saresp.

3. Conclusão:

Em geral, nas diferentes modalidades de avaliações institucionais, sejam elas preparadas pelo professor, pelos órgãos governamentais ou nos concursos públicos e vestibulares, pode-se verificar que os diferentes tipos de questões que aparecem no Saresp são tratados em um ou outro momento, mas algumas vezes não é dada toda a ênfase necessária nas articulações de quadros ou domínios, registros de representação semiótica e mudanças de pontos de vista, pois estas dependem dos conhecimentos prévios dos estudantes, o que dificulta para o avaliador quando deve fazer suas escolhas, esse trabalho é mais simples para o professor que por conhecer seus alunos pode escolher qual o nível mais adequado para desenvolver com uma determinada turma. Deve-se lembrar que algumas vezes o professor é obrigado a trabalhar somente em nível técnico e aos poucos tentar introduzir o nível mobilizável.

Certamente, em função das representações pessoais tanto para os professores quanto para os organizadores de provas a ênfase pode ser dada sobre o que ele pensa ser mais importante e que deve ser considerado como disponível na etapa posterior do processo de ensino aprendizagem.

Além disso, a análise dos livros didáticos atuais mostra a importância das diferentes articulações tanto intramatemáticas como extramatemáticas e existe uma grande quantidade de exemplos e aplicações que deveriam preparar o estudante para esse trabalho flexível em relação à noção de função afim, esperando-se que disponham desses conhecimentos e sejam capazes de aplicá-los em sua vida escolar ou profissional.

Nos livros são ainda levados em conta as questões sobre a noção de função afim ou relacionadas a essa noção, que mostram a importância das diferentes formas de representação no que se refere a essa noção, valorizando as mudanças de quadros ou domínios e de pontos de vista e, principalmente, as conversões entre os diferentes registros de representação semiótica.

Considerando-se, ainda, as propostas governamentais, e que essas propostas, em geral, só são colocadas em prática através dos livros didáticos e que os autores constroem suas obras em função do que é proposto, deve-se levar em conta que não seria possível esperar que todas essas articulações estivessem sendo trabalhadas de uma forma mais eficaz no ensino médio, pois os novos livros didáticos que trabalham de forma mais intensa essas articulações só estão sendo implantados a partir deste ano de 2006, portanto, pode-se considerar que a proposta seja realmente trabalhada a partir desse momento em que estudantes e professores dispõem de um material especialmente preparado para auxiliar esse trabalho de articulação.

Sendo assim, como se trata de uma mudança de ponto de vista, pois anteriormente dava-se uma ênfase maior ao nível técnico e, em muitos casos, a conversão fórmula, tabela e gráfico era a mais utilizada, mesmo porque esse sentido da conversão, como algumas pesquisas têm mostrado, apresenta um menor nível de dificuldade para os estudantes, pois essas conversões podem ser tratadas de forma puramente técnica; sendo esperado no máximo um nível mobilizável das noções em jogo, o que não é o caso da conversão no outro sentido, isto é, tabela-gráfico-fórmula ou gráfico-tabela-fórmula onde o estudante deve dispor de conhecimentos relacionados a outros quadros ou domínios, ou seja, nesse caso o estudante precisa fazer uma correspondência entre os pontos dados e o traçado da reta num plano cartesiano ou os pontos dados através de uma tabela, com a lei de formação de uma função afim.

Verificou-se na avaliação do Saresp justamente esse sentido como o privilegiado, pois em várias questões, para o estudante encontrar o resultado correto, era preciso articular a noção de função afim com os conhecimentos de sistema de duas equações com duas incógnitas ou tangente de um ângulo, não é difícil compreender os resultados que tendem a mostrar que esse sentido de conversão necessita de mais atenção por parte dos professores e estudantes.

Além disso, é necessário considerar que o uso do registro de representação da língua natural para o caso dos chamados problemas do cotidiano, a conversão de registros torna-se ainda mais complexa, pois exige uma “tradução” dos dados do problema. Portanto, deve-se considerar na avaliação do resultado dos estudantes esse dado, pois esse tipo de tarefa exige o nível disponível e, muitas vezes, o que é cotidiano para um determinado estudante não tem nenhum sentido para outro.

Sendo assim, isso leva às seguintes questões: Como encontrar situações cotidianas que tenham sentido para todos os estudantes? Quando nas situações cotidianas é realmente necessário empregar a noção que está sendo trabalhada, nesse caso a noção de função afim? Que tipo de registro de representação uma situação cotidiana pode privilegiar? Como esse trabalho pode se tornar significativo para os estudantes?

As observações acima e essas questões nos levam a ser prudentes na avaliação dos resultados encontrados, pois se os estudantes não reconhecem as diferentes representações que foram utilizadas na prova, se não estão habituados ao trabalho de conversão de registros de representação semiótica onde a articulação entre as diferentes formas de conhecimento da noção de função afim é indispensável, não trabalharam suficientemente com leitura e interpretação de gráficos, o que subentende a conversão no sentido registro de representação gráfico para registro de representação algébrico explícito que por sua vez exige a passagem pelo registro de representação algébrico intrínseco e ainda são levados a associar situações que para eles podem não ter significado, como dizer que o resultado é bom ou ruim. Nesse caso, parece mais adequado utilizar essa avaliação como um meio de identificar pistas para que melhore o trabalho do professor e que permita ao estudante o acesso ao nível disponível, sendo capaz de trabalhar de forma flexível em relação à noção de função afim, articulando essa noção com outras noções, tanto dentro da própria matemática como fora dela.

Considerando, ainda, que em média as respostas das questões do Saresp estão dentro do nível do provável (25% para cada item) uma vez que se trata de uma avaliação objetiva, mesmo tendo um resultado favorável pode-se supor que esse seria ainda pior no caso de uma avaliação escrita. Esse tipo de avaliação permite compreender melhor as dificuldades dos estudantes.

Mesmo com uma indicação de que a noção de função afim ainda é uma noção que para os estudantes do ensino médio, em geral, coloca muitas dificuldades do ponto de vista da articulação de quadros ou domínios, registros de representação semiótica e mudanças de pontos de vista, não se deve abandonar esse tipo de trabalho com esses estudantes, considerando o pequeno número de tarefas encontradas no capítulo 3 que permitem essa articulação, devemos analisar esse resultado como uma necessidade de um trabalho efetivo sobre essas articulações que permita que o estudante trabalhe de forma autônoma e em um nível disponível quando da aplicação dos conhecimentos associados à noção de função afim e aos conhecimentos que a ela estão relacionados.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo desenvolvem-se algumas considerações conclusivas, a partir das informações obtidas nos capítulos anteriores, buscando fechar as seguintes questões que, como anunciado na introdução, iniciaram esse trabalho.

1) Quais os conhecimentos matemáticos necessários para compreender a noção de função afim no ensino médio e poder aplicá-la de forma eficaz quando necessário?
2) Sobre que níveis de conhecimento fundamentar essas necessidades: técnicos, mobilizáveis ou disponíveis (segundo A. Robert)?
3) Em que sistema de tarefas e práticas pode ser desenvolvido esses três níveis de conhecimento?
4) Como estão sendo trabalhados institucionalmente esses diferentes níveis de conhecimento?
5) Quais as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes para a noção de função afim e quando se considera a relação institucional existente?

Ao longo do trabalho, na tentativa de melhor justificar as escolhas e melhor compreender quais as relações institucionais existentes para o desenvolvimento da noção de função afim no ensino médio e que nível de conhecimento é esperado dos estudantes que terminam essa etapa da escolaridade, escolheu-se um referencial teórico que foi sendo utilizado durante o trabalho, auxiliando a encontrar pistas para esclarecimento das questões acima apresentadas e de outras questões que apareceram naturalmente. Esse referencial teórico está centrado na abordagem sobre os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes, segundo definição de A.Robert (1997); na articulação de domínios ou quadros conforme definição de Douady (1984), na conversão de registros de representações semióticas segundo definição de Duval (1995), nas relações institucionais e pessoais existentes, segundo a abordagem antropológica de Chevallard (1992, 1996, 1999) e no trabalho de Tardif (2002), que trata mais especificamente dos saberes profissionais dos professores, tal trabalho foi considerado como um apoio importante, sendo tratado no referencial teórico, por nos deixar a vontade na escolha da análise da relação institucional existente através dos livros didáticos, uma vez que o autor mostra que o professor utiliza o livro didático como uma das fontes de pesquisa mais importantes para preparar suas aulas.

Sendo assim, a análise dos livros didáticos pode ser considerada como um meio eficaz para compreender quais os conhecimentos matemáticos necessários para compreender a noção de função afim e como esses mesmos conhecimentos podem ser aplicados de forma eficaz. Além disso, com essa mesma análise é possível saber qual o nível de conhecimento (técnico, mobilizável e disponível) pode ser esperado dos estudantes que terminam o ensino médio e qual o nível de conhecimento que era esperado dos estudantes que terminam o ensino fundamental em relação aos conhecimentos matemáticos que podem ser associados à noção de função afim.

Dessa forma, considerou-se necessário um estudo preliminar dos documentos oficiais e, sendo assim, escolheu-se a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática no nível do ensino médio do Estado de São Paulo e os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM e PCN+), pois esses documentos permitem compreender melhor qual a relação institucional, em relação ao objeto função afim, é proposta nos níveis estadual e nacional e quais os níveis de conhecimento que se espera para o tratamento dessa noção. Certamente, ao propor um trabalho matemático sobre uma determinada noção, deve-se levar em conta todas as possibilidades de articulação entre quadros ou domínios, pontos de vista e as possibilidades de conversão entre os diferentes registros de representação semiótica que serão considerados. Verificou-se que mesmo a proposta sendo mais antiga que os parâmetros, essas questões de articulação entre quadros ou domínios, pontos de vista e conversão dos diferentes registros de representação em jogo já eram consideradas como essenciais nessa etapa da escolaridade. Na realidade, esses documentos propõem que o professor desenvolva um trabalho onde as mudanças de domínios ou quadros, conversão de registros de representação semiótica e mudanças de pontos de vista, mesmo se não tratadas com esta terminologia, são componentes essenciais que devem ser trabalhadas no ensino médio.

Verifica-se, ainda, que a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática, no nível do ensino médio do Estado de São Paulo, existe desde 1992, ano em que foi publicada e desde essa época já se tratava em seu texto das questões associadas à articulação da noção de função afim com outros objetos da própria matemática e também já era proposto o trabalho interdisciplinar, quando possível. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM e PCN+) vêm fortalecer o que se propunha em 1992 em relação às possibilidades de articulação entre quadros ou domínios, pontos de vista e conversão de registros de representação semiótica quando se trabalha a noção de função afim.

A proposta inicial desse trabalho é analisar essas possibilidades de articulação entre as diferentes formas de conhecimento e representações semióticas associadas à noção de função afim. Dessa forma, foi necessário distinguir os seguintes registros de representação: registro de representação algébrico, registro de representação tabela, registro de representação gráfico e registro e registro de representação da língua natural, além da construção de uma grade de análise, cujo exemplo de funcionamento descreve-se no capítulo 3, página 60. Essa grade, além de permitir a análise dessas possibilidades de articulação e de mostrar a importância das diferentes noções que devem ser desenvolvidas no próprio ensino médio ou que deveriam ser desenvolvidas no ensino fundamental e, portanto, já são esperadas como disponível para os estudantes nesse momento, mostra que existe uma boa diversidade de possibilidades para explorar essa noção do ponto de vista didático, o que indica a importância de se levar em conta, explicitamente no ensino, todas as diferentes formas de articulação dos conhecimentos associados à noção de função afim no desenvolvimento de uma mesma tarefa, pois esse trabalho permite ao professor reconhecer quais os conhecimentos que seus estudantes dispõem e em função desses conhecimentos desenvolverem seu trabalho, auxiliando-os a atingir o nível disponível em relação às possibilidades de articulação entre as diferentes formas de conhecimento associadas à noção de função afim. É importante ressaltar que essa articulação pode ser efetuada com outras noções da própria matemática ou através de um trabalho que leve em conta outras possibilidades relacionadas a outras áreas do conhecimento, o que pode ser tratado pelo próprio professor de matemática ou através de um trabalho interdisciplinar que vem sendo sempre discutido e que como sabemos não é evidente de ser colocado em prática.

Além disso, a construção da grade de análise foi essencial, pois mostrou a quantidade de possibilidades existentes para explorar a noção do ponto de vista didático, permitindo, ainda, estabelecer as diferentes tarefas e práticas que podem ser consideradas quando se introduz a noção de função afim no ensino médio. A diversidade de aplicações possíveis para a noção de função afim tanto para o trabalho matemático como para sua aplicação em outras áreas do conhecimento além de mostrar sua importância enquanto conteúdo matemático a ser desenvolvido na escola permite desenvolvê-la através de situações que o estudante poderá encontrar em sua vida profissional.

A grade de análise serviu, também, como instrumento para a análise das relações institucionais existentes, pois foi aplicada na análise dos livros didáticos permitindo verificar as regularidades e diferenças existentes nos livros escolhidos e se esses estavam ou não levando em conta as propostas oficiais. Além disso, a grade ao ser aplicada sobre as questões de uma avaliação estadual de final de cada série dos ensinos fundamental e médio, denominada SARESP, permitiu reconhecer que nível de conhecimento é realmente esperado dos estudantes no final de cada série em relação à noção de função afim e as suas possíveis articulações. Nesse caso, verificou-se que foi dada ênfase à interpretação de enunciados cujos dados eram apresentados no registro de representação gráfico e que era necessário ter disponível a atividade de conversão de registros de representação para responder as questões propostas. Além disso, as mudanças de quadro ou domínio e de pontos de vista também puderam ser observadas.

Levando-se em conta que as relações institucionais existentes aparecem tanto na proposta como nos parâmetros e nos livros didáticos analisados, a análise dos resultados do SARESP deixa uma grande questão: Se a proposta deveria estar sendo colocada em prática desde 1992 e se os parâmetros e livros didáticos continuam reforçando a necessidade das articulações propostas nesse trabalho, qual o motivo de não ser possível encontrar a relação pessoal ao objeto função afim esperada?

Para melhor compreender o resultado da análise institucional existente, que foi realizada via livros didáticos, é interessante lembrar as novas questões que foram colocadas para orientar o trabalho:

- Quais os conhecimentos disponíveis para introduzir a noção de função afim?

- Como é introduzida a noção de função afim, quais representações são utilizadas e como elas se articulam?

- Que pesos respectivos ocupam os níveis: técnico, disponível e mobilizável nas tarefas propostas aos estudantes?

- Existe um discurso do tipo metamatemático no curso e no tratamento dos exemplos que o acompanham que auxilie os estudantes no desenvolvimento dos níveis mobilizável e disponível?

Colocadas as questões acima, escolhe-se analisar três livros didáticos de matemática, o primeiro por ser destinado a professores do ensino médio e aos alunos do curso de licenciatura e para o qual foi possível observar que a questão da articulação entre as diferentes formas de conhecimento tem um papel central, mesmo se o autor não coloca a questão explicitamente dessa forma. Os dois outros livros escolhidos são destinados a estudantes do ensino médio e por seguirem a proposta consideram de algumas das articulações entre os quadros ou domínios, pontos de vista e conversões de registro de representação semiótica como as que foram destacadas no capítulo 3 desse trabalho, mesmo se os autores não tratam essas questões com a mesma terminologia utilizada no desenvolvimento desta pesquisa.

No livro destinado aos professores, isto é, o livro de Lima (2005) existe uma grande ênfase as articulações entre quadros ou domínios e mudanças de pontos de vista, mesmo se não é essa a terminologia utilizada, mas as conversões entre os registros de representação semiótica para a função afim dificilmente aparecem, pois os autores trabalham mais especificamente as definições, propriedades e os casos gerais servem de exemplos que permitem ao professor criar seus casos particulares em função dos diferentes contextos em que trabalha.

Já nos outros dois livros didáticos que são destinados aos estudantes do ensino médio se pode observar a uma preocupação em desenvolver atividades que exigem a conversão dos registros de representação semiótica considerados, mesmo se essa terminologia não é utilizada. Os autores mostram, sem serem exaustivos como essas possibilidades podem ser realizadas, com uma ênfase maior ou menor para determinadas conversões que dependem das escolhas pessoais, permitindo assim, uma visão geral dos diferentes casos que podem ser considerados.

Com relação às tarefas destinadas aos estudantes que foram analisadas nos dois livros didáticos do ensino médio, verificou-se que na maioria dos casos, fica a cargo do estudante desenvolver a maioria das tarefas que apresentam um contexto de uma situação-problema, exigindo dele um bom nível de leitura e interpretação de textos, além de conhecimentos matemáticos ou relacionados a outras ciências que se supõe tenham sido adquiridos anteriormente e que nesse momento são considerados disponíveis.

Sendo assim, é importante lembrar que conforme observa Tardif (2002) o livro didático é um guia de trabalho para a maior parte dos professores, portanto é necessário que o professor reconheça as articulações intramatemática e extramatemática, que são tratadas de uma forma mais genérica no livro a eles destinados e com exemplos de casos particulares nos livros destinados aos estudantes do ensino médio, e que faça a relação entre os dois níveis de tratamento para que seja capaz de auxiliar seus estudantes a trabalharem de uma forma flexível, podendo utilizar seus conhecimentos específicos de função afim para desenvolver questões do domínio da própria matemática ou de outras ciências onde essa noção aparece como ferramenta para desenvolver a tarefa que lhe é proposta.

Dessa forma, cabe tanto ao professor como ao estudante estar atento para todas as possibilidades de articulação entre as diferentes formas de conhecimento relacionadas à noção de função afim e suas respectivas representações, necessitando ter como referência o maior número de casos possíveis para ser capaz de trabalhar de forma autônoma em um nível disponível. Certamente, não é uma tarefa fácil, mas para os estudantes do ensino médio que desejam continuar seus estudos, principalmente nas áreas de ciências exatas onde a noção de função afim e suas representações são essenciais para o desenvolvimento de tarefas tanto intramatemáticas como extramatemáticas.

Sendo assim, quando se considera a análise dos resultados de algumas questões das provas das três séries do ensino médio do período noturno do Saresp 2005, aplicadas para todas as escolas públicas estaduais do estado de São Paulo, mas que para esse trabalho foram considerados apenas os resultados obtidos por alunos de uma escola pública Estadual localizada na zona sul da cidade de São Paulo, que foi elaborada através da quantidade de respostas dadas a questões objetivas com quatro alternativas, onde o estudante poderia acertar sem mesmo ter os conhecimentos necessários para resolver a questão o que impossibilita uma análise que trata mais especificamente das possíveis causas dos erros encontrados, mas que permitia avaliar se o estudante era capaz de articular seus conhecimentos de função afim com outras noções da própria matemática ou de um determinado contexto, sendo ainda capaz de interpretar as representações gráficas e realizar determinadas conversões, verificou-se que em relação ao trabalho apresentado nessa pesquisa os resultados estão muito distantes da possibilidade desses estudantes alcançarem um nível mobilizável para a solução das tarefas que lhe foram propostas.

Dessa forma, mesmo que as propostas de articulação das diferentes formas de conhecimento associadas à noção de função afim e suas respectivas representações, ainda que não sejam tratadas através dessa terminologia, vêm sendo consideradas essenciais, como mostra a análise institucional fundamentada no estudo da proposta curricular do estado de São Paulo, dos parâmetros curriculares nacionais e dos livros didáticos ainda existem uma imensa distância entre o que é proposto institucionalmente e o que os estudantes foram capazes de desenvolver. Isso mostra que temos um enorme caminho a percorrer e que é necessária uma maior atenção por parte dos professores em relação a este tipo de articulação, pois na maioria dos casos apresentados, o nível de conhecimento exigido dos estudantes é o disponível e não se pode dizer se o desempenho dos estudantes foi bom ou ruim, apenas constatou-se que eles têm dificuldades em reconhecer as articulações entre a noção de função afim com outras noções tanto dentro quanto fora da matemática, o que nos permite supor que essas dificuldades estão associadas a uma falta de trabalho com tarefas em que os níveis de conhecimento em jogo são o mobilizável e disponível.

Nesse momento, é importante observar que não se pode deixar essa tarefa somente para o ensino médio e para atividades envolvendo a noção de função afim, pois o trabalho em matemática, não importa qual a etapa a escolaridade que se está levando em conta deve ser desenvolvido de forma que os três níveis de conhecimento possam ser considerados, pois esses auxiliam a preparar o estudante para um questionamento constante sobre que noções estão associadas àquela que se está trabalhando e quais as situações reais que elas permitem resolver, isto é, o estudante deve procurar dentro de seu campo de conhecimentos aquele que é mais adequado e pode ser aplicado naquele determinado momento.

Vale lembrar que também em relação a esse trabalho, os livros didáticos analisados parecem ser de grande valia aos estudantes e professores, pois podem servir de apoio uma vez que tendem a mostrar quase que exaustivamente todas as possibilidades de articulação entre a noção de função afim e outras noções, sejam elas intramatemáticas ou extramatemáticas.

Na realidade as articulações e os diferentes níveis de tratamento das mesmas que foram apresentados neste trabalho, em geral, só serão utilizados de forma autônoma tanto pelos professores quanto pelos estudantes, a partir do momento que esses reconhecerem a razão de se trabalhar uma mesma noção articulando diferentes domínios e pontos de vista e efetuar conversões sistemáticas de representações e, pode-se avançar na hipótese que esse reconhecimento só será possível quando as representações forem tratadas como novas formas de acesso ao conceito propriamente dito e que as conversões de umas para as outras não apresentam as mesmas dificuldades como mostra Duval (1995) quando considera que não existe noésis sem sémiosis.

Além disso, essa tarefa não é simples e exige um trabalho disciplinado, constante, reflexivo e flexível, principalmente da parte do estudante, pois em muitos casos, o próprio estudante deverá procurar em outras áreas o conhecimento que precisa para aplicar em uma determinada tarefa, principalmente quando esta é enunciada em um contexto que não é o da própria matemática, mas onde as ferramentas matemáticas é que possibilitam sua solução.

Pode-se, ainda, dizer que a grande dificuldade dos estudantes para perceberem nas situações cotidianas onde se aplica a matemática se deve ao fato que esse tipo de situação, em geral, exige o nível disponível em relação à noção matemática em jogo e quando estes não reconhecem nenhuma situação de referência que lhes é associada, dificilmente serão capazes de propor uma solução correta para a situação, para isso, verifica-se que os livros didáticos analisados são uma fonte importante de estudo que pode permite o acesso a esses tipos de situações.

Certamente, não é possível tratar todas as situações cotidianas ou contextualizadas associadas a uma determinada noção matemática e sempre ficará para o estudante um trabalho em nível disponível que ele, mesmo depois de certo tempo, deverá ser capaz de desenvolver.

Para isso, é necessário um grande esforço, e que se perceba que as soluções de tarefas que exigem um nível disponível em matemática ou em qualquer outra área do conhecimento são as que exigem que o estudante esteja realmente interessado em desenvolver um trabalho nessa área.

Além disso, em geral, em muitas situações cotidianas, a noção de função afim pode ser aplicada sem ser necessária, ela tem um papel facilitador que só será percebido quando o estudante é capaz de trabalhar no nível disponível ou quando se deseja encontrar uma fórmula que permita generalizar o caso particular que está sendo estudado ou quando se trabalha com valores altos, situação em que é difícil encontrar rapidamente a solução.

Na realidade, essa situação, em geral, dificilmente ocorre na escola, onde se procura trabalhar com exemplos simples para não dificultar a situação por questões de cálculos que se supõem disponíveis, portanto, nesse momento se justifica o trabalho com calculadoras, pois não é o trabalho sobre os cálculos que está em jogo.

Verifica-se, ainda, claramente, através das análises efetuadas, que as articulações de domínios ou quadros, registros de representação semiótica, pontos de vista devem ser explicitadas através de um discurso tecnológico que as justifique e que só assim é possível compreender quais os diferentes níveis de conhecimento em jogo no desenvolvimento da noção de função afim.

Certamente, não se deve utilizar toda essa terminologia no trabalho em sala de aula com os alunos, mas uma reflexão por parte dos professores sobre essas questões poderá facilitar a compreender as dificuldades dos estudantes e a criar meios de ajuda que possam levá-los a trabalhar, no nível disponível, as tarefas que lhe são propostas.

Essa ampliação da articulação entre os conhecimentos em jogo para a noção de função afim permite organizar e aproveitar de uma forma mais produtiva o trabalho do aluno e do professor, favorecendo a atribuição de significados aos conceitos e, portanto, intensificando sua aprendizagem, pois ela permite tratar uma mesma tarefa de várias formas, o que poderá ser discutido em grupos favorecendo o diálogo sobre a diversidade do conhecimento em jogo, o que acontece geralmente no mundo profissional, isto é, um trabalho desse tipo poderá favorecer a independência e a criatividade dos estudantes que poderão tender a procurar suas próprias soluções para as tarefas propostas na escola e que faz parte do trabalho do pesquisador, pois esse deve encontrar soluções para os problemas ainda sem solução.

Além disso, essa reflexão poderá auxiliar os professores a pensar nas articulações que integram a noção de função afim e promover as relações intramatemáticas e extramatemáticas para compreender melhor os conceitos relacionados a essa noção, de forma que possam trabalhá-los de forma mais consciente, contribuindo para mudanças nas práticas de sala de aula, o que deverá possibilitar aos estudantes identificarem as características comuns à noção de função afim, isto é, um real desenvolvimento dos estudantes, modificando o panorama observado na análise dos resultados obtidos na avaliação proposta pelo Saresp.

Vale observar, ainda, que essa avaliação é objetiva e que quando se deseja compreender o real desenvolvimento dos estudantes, é preciso um trabalho mais refinado que leve em conta o raciocínio utilizado por eles, pois dessa forma é possível identificar os pontos de maior dificuldade para que possam se reorganizar em possíveis seqüências didáticas, isto é, permitindo a construção de engenharias didáticas adequadas aos diferentes grupos de estudantes.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA E REFERENCIADA

ANDRADE, Sirlene Neves et al. As articulações necessárias para trabalhar os conceitos matemáticos nas diferentes etapas da escolaridade. In: ENCONTRO NACIONAL DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA (1.: 2005 abr, 20-23: Campo Grande) – MS) **Caderno de resumos e programação [do] 1º Encontro Nacional de Aprendizagem Significativa**. Campo Grande, UCDB. Programa de Mestrado em Educação, 2005.p. 96.

ANDRADE, Sirlene Neves et al. Níveis de conhecimento esperado dos estudantes e flexibilidade cognitiva: A noção intuitiva de conjunto e o conceito de função.In: XI Encontro Baiano de educação matemática (11.: 2005, jul, 2005, Salvador – BA) **Anais do XI Encontro Baiano de Educação Matemática.**

ANDRADE, Sirlene Neves; DIAS, Marlene Alves. As articulações necessárias para trabalhar o conceito de função nas diferentes etapas da escolaridade. In: V CIBEM CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (5.: 2005, jul 2005, Porto – Portugal) **Anais do V CIBEM congresso ibero-americano de educação matemática.**

ANDRADE, Sirlene Neves.; DIAS, Marlene Alves. Análise dos níveis de conhecimento esperados dos estudantes para a noção de função afim. In: III CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA (3.: 2005, out 2005, Canoas–RS) **Anais do III Congresso Internacional de Ensino da Matemática**..

ARTIGUE, M. 1989. Epistémologie et Didactique, Cahier DIDIREM n^0 3, IREM de Paris VII.

ARTIGUE, M.1992. Notas do curso de DEA da Universidade de Paris VII, França. 1992.

ARTIGUE, M.1996. Rapports entre dimensions technique et conceptuelle dans l'activié mathématique avec des systémes de mathématiques symboliques, Actes de l'Université d'Eté de Rennes, Août 1996, IREM de Rennes (à paraître).

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Parâmetros Curriculares nacionais: ensino médio** / Ministério da educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. – Brasília: MEC, SEMTEC, 2002. 360p

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Parâmetros Curriculares nacionais: ensino médio + : Ciências da Natureza e suas tecnologias** / Ministério da educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. – Brasília: MEC, SEMTEC, 2005. Acesso em : 20 de março. 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

BRASIL. **Catálogo do programa Nacional do Livro para o Ensino Médio PNLM/2005.** Matemática Brasília 2004. Ministério da Educação Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. 83 p.

CHEVALLARD, 1992. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.12-1, La Pensée Sauvage, Grenoble, 73-112. 1992.

CHEVALLARD, 1995. La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique. *Actes de la VIII école d'été de Saint_Sauves d'Auvergne*, 83-122. 1995.

CHEVALLARD, 1996. Les outils sémiotiques du travail mathématique, Petit-x, n.42, 33-57. 1996.

CHEVALLARD e BOSCH, 1999. M., La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs, *RDM 19.01*, Grenoble. 1999.

DIAS, M. 1998.Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. Thèse de doctorat d'état. Université Paris VII.

DIAS, M. A et al. As articulações necessárias para trabalhar os conceitos matemáticos nas diferentes etapas da escolaridade. In: ENCONTRO NACIONAL DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA (1.: 2005 abr, 20-23: Campo Grande) – MS) **Caderno de resumos e programação [do] 1º Encontro Nacional de Aprendizagem Significativa**. Campo Grande, UCDB. Programa de Mestrado em Educação, 2005.p. 96.

DIAS, M. A et al. Níveis de conhecimento esperado dos estudantes e flexibilidade cognitiva: A noção intuitiva de conjunto e o conceito de função.In: XI ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (11.: 2005, jul, 2005, Salvador – BA) **Anais do XI Encontro Baiano de Educação Matemática.** CD-ROM

DIAS, M. A; ANDRADE, S. N. As articulações necessárias para trabalhar o conceito de função nas diferentes etapas da escolaridade. In: V CIBEM CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (5.: 2005, jul 2005, Porto – Portugal) **Anais do V CIBEM congresso ibero-americano de educação matemática.** CD-ROM

DIAS, M. A; ANDRADE, S. N. Análise dos níveis de conhecimento esperados dos estudantes para a noção de função afim. In: III CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA (3.: 2005, out 2005, Canoas–RS) **Anais do III Congresso Internacional de Ensino da Matemática.** CD-ROM

DORIER, 1997. J.L. L'enseignement de l'algèbre linéaire en question. La Penseé Sauvage.1997.

DOUADY, 1984. Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques.Thèse de Doctorat, Paris: Université de Paris VII. 1984.

DOUADY, 1992. Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères IREM, n.6.1992.

DUVAL, 1993. R. Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives 5, Strasbourg : IREM.1993.

DUVAL, 1995. Sémiosis et pensée humaine. Peter Lang, Paris.1995.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática In: Machado, S.D.A. Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 11-33.

ENSEIGNER AUTREMENT LES MATHÉMATIQUES EN DEUG A PRÉMIERE ANNÉE. Brochures de la comission Inter IREM Université.1990.

KAMIYA, Kelly Mitie**.** Níveis de conhecimento esperados: Análise dos três níveis de conhecimento esperados dos estudantes em Análise Combinatória e Cálculo de Probabilidade, 2003. 143 f. Monografia (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Cientifica) UNIFIEO-Centro Universitário FIEO, Osasco.

PAVLOPOULOU, K. 1994.Propédeutique de l'algèbre linéarie : la coordination des registres de représentation sémiotique. Thése de Doctorat, Université Louis Pasteur (Strasbourg 1), prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée.

ROBINET, 1984 Robinet, J. Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur. 1984.

ROGALSKI, 1995 Rogalski, M. Notas du seminaire à São Paulo. Brasil.1995.

ROBERT, 1997. Quelques outils d'analyse epistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques. Houlgate. França.1997.

SÃO PAULO (ESTADO) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de matemática: 2º grau**. 3.ed. São Paulo: SE/CENP, 1992. 414 p.

SÃO PAULO **(**ESTADO) **Saresp Encontro de Matemática Avaliações Externas**. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP. São Paulo Junho/2005

TARDIF, M. (2002) Saberes docentes e formação profissional / Maurice Tardif. – Petrópolis, RJ : Vozes, 2002p. 59-70.In Por que esse interesse pelo tempo na construção dos saberes?

Livros analisados

LIMA, Elon Lages/ Paulo Cezar pinto Carvalho/ Eduardo Warner e Augusto César Morgado; A Matemática no Ensino Médio. Vol. 1. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. p. 1 - 113

BIANCHINI, Edvaldo Matemática / Edwaldo Bianchini, Herval Paccola. Matemática. Vol 1. São Paulo : Moderna, 2004.236 p.

DANTE, Luiz Roberto Matemática: livro do professor/ Luiz Roberto Dante. – 1.ed. – São Paulo : Ática, 2004. p. 7 - 110