Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Renato Teixeira Gomes

Conexões e Curvaturas: Uma Abordagem Algébrica

Recife

2009

Renato Teixeira Gomes

Conexões e Curvaturas: Uma Abordagem Algébrica[1]

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ramón Mendoza

Recife

2009

[1]Este trabalho contou com o apoio financeiro da CNPQ.

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: Ramón Mendoza

Ramón Orestes Mendoza Ahumada, UFPE

Orientador

Aron Simis, UFPE

Ediel Azevedo Guerra, UFAL

CONEXÃO E CURVATURA: UMA ABORDAGEM ALGÉBRICA

Por

Renato Teixeira Gomes

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Agosto – 2009

Gomes, Renato Teixeira
Conexões e curvaturas: uma abordagem algébrica / Renato Teixeira Gomes. - Recife: O Autor, 2009.
58 folhas

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2009.

Inclui bibliografia.

1. Geometria riemaniana. 2. Fibrados vetoriais. I. Título.

516.373 CDD (22. ed.) MEI2010 – 0115

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pela companhia em muitas madrugadas de estudo no departamento e pela força que muitos amigos de trabalho me perguntavam como conseguia passar tanto tempo sem dormir. Com Deus do lado tudo é possivél;

Ao Professor, Amigo e Orientador Ramón Mendoza pela compreenção, paciência e pelo valioso conhecimento que me transferiu, que certamente vai muito além da realização deste trabalho;

A minha mãe, Roseane, meu pai Severino e minha irmã Chirstiane pela ajuda, incentivo, compreenção e por ter me acordado em muitas manhãs nas quais o cansaço era muito forte, para que eu não perdesse o horário de aula.

A uma doce e amável pessoa chamada Giovana Siracusa, minha amiga e companheira de trabalho, pelos conselhos, pela companhia, pela indispensável ajuda na construção deste trabalho com respeito a programação em Tex e por ter me aberto os olhos com respeito a muitas outras questões profissionais.

Ao amigo Abiel, por sua genialidade, pela ajuda bibliográfica e por ter me cedido a atenção em muitas questões filosóficas deste trabalho.

Ao amigo Marcos Luiz Henrique por sua tese de mestrado "‘Derivação e Campos de Vetores"’ que serviu de base para o desenvolvimento deste trabalho, e ao amigo Nivan, pela valiosa ajuda na demonstração do Teorema de Levi-Civita no caso que existe em

$\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ uma aplicação bilinear simétrica g que permite identificar $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ com o seu dual via a aplicação $X \longrightarrow g(\bullet\,, Y)$;

A todos os alunos da pós graduação em especial aos amigos e ex alunos da Pós Arlucio Viana, Dayenne Halley, Marcelo Pedro, Bruno, Fillippi e claro não poderia deixar de citar o amigo Thiago Dias ("‘Dk"’) pelo caráter, bom coração, pela amizade e por ter tornado divertido os momentos em que as questões das listas de exercícios pareciam insoluveis;

Aos amigos e amigas Karlinha, Renatinha, Nataly, Marlon, Popó, Lelesk, Secretário, Do Shopping, Thiago bad boy, Thiago Negão, Negão, Allan, Gilson, Bob, Tatinha, Rafinha, Manaíra, Neto, Leandro, Binho e muitos outros que não lembro o nome agora, pelo apoio e pelo incentivo;

Aos Professores Cláudio Cuevas, Francesco Russo, Aron Simis, Francisco Brito, Lucas Catão, Fernando Cardoso e Hildeberto Cabral pelo conhecimento transferido nas disciplinas que cursei durante minha formação;

A todos os funcionários do DMAT em especial a Dona Tânia e Dona Fátima, pela boa vontade, orientação com a parte burocrática e por ter me lembrado varias vezes de assinar o Livro de Matricula.

Ao amigo Marco Antônio Ferreira e familia, pela singular amizade e pela valiosa ajuda em minha vida acadêmica;

Aos professores Antônio Carlos e Marcus Vinicios pela recomendação ao curso;

E por fim, a todos que contribuiram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho estudaremos os conceitos de conexões e curvaturas num contexto um pouco mais geral que espaços fibrados. Vamos desenvolver expressões e relações entre conexões e curvaturas e alguns resultados que relacionam álgebra e geometria, resultados esses, que nos permitirá desenvolver softwares computacionais para o cálculo de conexões especiais (Levi-Civita) e curvaturas, facilitando a pesquisa em áreas que necessitam dos cálculos dessas grandezas.

Palavras-chave: Conexões; Curvaturas; Fibrados; Módulos Projetivos.

Abstratc

In this work we will study the concepts of connections and curvature in a bit general way than in bundle spaces. We will develop expressions and relations between connections and curvature and some results relating algebra and geometry, such results will allow us develop computational softwares for the evaluations of special connections (Levi-Civita) and curvatures, making easier the research in fields wich require the evaluation of these quantities

Keywords: Connections; Curvatures; bundles; Projective Modules.

Introdução

O estudo da teoria de conexões e curvaturas é de grande importância em varias aplicações, por exemplo o estudo da mecânica quântica, relatividade geral e a própria mecânica clássica. O conceito de conexões e curvaturas foi introduzido inicialmente por Gauss (Braunschweig, 30 de Abril de 1777 - Göttingen, 23 de Fevereiro de 1855), quando um Rei de seu país o pediu para calcular a extenção territorial de seu reino. Mas tarde essas ideias foram generalizadas por muitos matemáticos para espaços fibrados. Neste trabalho, vamos tomar uma postura um pouco mais geral, definindo conexões em $\mathcal{A}$-módulos livres e projetivos. Este último, de grande importância, pois sabemos que dado um fibrado $\pi : E \longrightarrow B$, o conjunto das seções deste fibrado denotado por $\Gamma(E)$ é um $C^{\infty}(B)$ módulo projetivo (ver [4] pag. 623 corolário A3.3). A Dissertação esta dividida em três capítulos. No primeiro, fazemos definições e resultados preliminares que serão úteis no desenvolvimento dos outros capítulos, com destaque para o resultado que diz que um fibrado é trivial se e só se o conjunto das seções deste fibrado é um módulo livre de posto finito. No capítulo dois definimos conexões em módulos livres e projetivos, além de mostrar que o espaço das conexões em um $\mathcal{A}$-módulo denotado por $Con(\mathcal{M})$ é um espaço afim sobre o espaço das aplicações bilineares $Bil(D_{\mathcal{A}} \times \mathcal{M}, \mathcal{M})$, resultado de grande importância para o cálculo de funções de partição (ver Tese de Doutorado de Ediel Guerra). No último capítulo, tratamos o conceito de curvatura, formas conexão e curvatura e algumas aplicações, como o cálculo de conexões e curvaturas em alguns módulos e mostramos varias relações de grande interesse computacional das quais surgiu a motivação deste trabalho.

Sumário

1 Preliminares **8**

2 Conexões **19**

2.1 Conexões em um $\mathcal{A}$-módulo Livre 20

2.2 Conexões em um $\mathcal{A}$-módulo Projetivo 23

2.3 O espaço das Conexões 26

2.4 A conexão de Levi-Civita 29

3 O Operador Curvatura K^{∇} **33**

3.1 Alguns exemplos 42

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, faremos a exposição dos conceitos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Definiremos módulos livres, módulos projetivos, fibrados vetoriais e triviais, álgebras, derivações e ação de grupo. Demonstraremos um teorema de caracterização dos fibrados triviais e apresentaremos alguns exemplos importantes relativo aos conceitos desenvolvidos.

Definição 1.1. *Seja $\mathcal{A}$ um anel comutativo com unidade. Um* $\mathcal{A}$**-Módulo** *é um grupo abeliano $\mathcal{M}$ com uma multiplicação*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}\times\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ (a,\, s) & \longrightarrow & as, \end{array}$$

satisfazendo as seguintes condições:

(i) $a(s+t) = as + at$

(ii) $(a+b)s = as + bs$

(iii) $(ab)s = a(bs)$

(iv) $1_A s = s$

$\forall\ a,\ b \in \mathcal{A}$ e $s,\ t \in \mathcal{M}$, onde $1_{\mathcal{A}}$ denota a unidade do anel $\mathcal{A}$.

Definição 1.2. *Um* **$\mathcal{A}$-módulo livre** $\mathcal{M}$ *é um $\mathcal{A}$-módulo que admite uma base, ou seja, um conjunto de geradores linearmente independente sobre $\mathcal{A}$ no mesmo sentido da teoria de espaços vetoriais. Assim, se $\mathcal{M}$ é um módulo livre com base $\mathcal{B}$ então existe um isomorfismo de $\mathcal{A}$-módulos $\mathcal{M} \cong \mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ onde $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ denota o conjunto de somas formais $\sum_i a_i x_i$ com $a_i \in \mathcal{A}$, $x_i \in \mathcal{B}$ com óbvias adição e multiplicação por escalar. Se além disso $\mathcal{B}$ é um conjunto finito de N elementos então $\mathcal{M} \cong \mathcal{A}^N$ onde $\mathcal{A}^N$ é identificado com o conjunto de n-uplas de elementos de $\mathcal{A}$ com familiares adição e multiplicação por escalar.*

. Em outras palavras dizemos que um $\mathcal{A}$-módulo $\mathcal{M}$ é livre se $\forall\ s \in \mathcal{M}$, s se escreve de forma única como $s = \sum_{\alpha \in I} \lambda^\alpha s_\alpha$, $\lambda^\alpha \in \mathcal{A}$ com $\#\{\alpha : \lambda^\alpha \neq 0\} < \infty$ e $\sum_{\alpha \in I} \lambda^\alpha s_\alpha = 0 \Leftrightarrow \lambda^\alpha = 0, \forall\ \alpha$. No caso em que $\#\{s_\alpha\}_{\alpha \in I} = N$ dizemos que $\mathcal{M}$ é finitamente gerado e o número N é o mesmo independentemente da escolha da base e é chamado o posto de $\mathcal{M}$ (ver [2]).

Definição 1.3. *Dizemos que um $\mathcal{A}$-Módulo P é* **Projetivo** *se para todo homomorfismo sobrejetivo de $\mathcal{A}$-módulos $\alpha : M \longrightarrow N$ e para todo homomorfismo $\beta : P \longrightarrow N$ existe um homomorfismo $\varphi : P \longrightarrow M$ tal que $\beta = \alpha \circ \varphi$.*

Proposição 1.1. *Seja $\mathcal{A}$ um anel comutativo com unidade e P um $\mathcal{A}$-módulo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *P é projetivo*

(ii) *P é um somando direto de um módulo livre, isto é, existe um A-módulo M tal que $P \oplus M = L$ é um módulo livre.*

Exemplo 1.1. Todo módulo livre é projetivo.

Antes de citar o próximo exemplo, vamos relembrar algumas definições importantes da teoria de espaços fibrados.

Definição 1.4. *Seja B uma variedade C^∞. Um* **fibrado vetorial real de dimensão n** *sobre B é uma variedade C^∞ E junto com uma aplicação sobrejetiva $\pi : E \longrightarrow B$ C^∞ que satisfaz as seguintes condições:*

(i) *para cada $p \in B$, $\pi^{-1}(p)$ tem a estrutura de um n-dimensional espaço vetorial real;*

(ii) *Trivialidade local: Para cada $p \in B$ existe uma vizinhança aberta U e um difeomorfismo $\varphi|_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times V$, com V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão n, tal que para cada $q \in U$ sua restrição a $\pi^{-1}(q)$ é um difeomorfismo linear $\varphi|_U : \pi^{-1}(q) \longrightarrow \{q\} \times V$.*

Definição 1.5. *Uma seção do fibrado $\pi : E \longrightarrow B$ é uma aplicação $s : B \longrightarrow E$ tal que $s \in C^\infty(B, E)$ e $\pi \circ s = 1_B$. Denotaremos o conjunto das seções do fibrado E por $\Gamma(E)$.*

Observação 1.1. Seja B uma variedade paracompacta. Então $\Gamma(E)$ é um C^∞_B-módulo projetivo (ver [4] pag. 623 Corolário A3.3)

Definição 1.6. *Um fibrado vetorial E é* **trivial** *se existe um isomorfismo $I : E \longrightarrow B \times V$ com B variedade e V um espaço vetorial de dimensão finita tal que o diagrama abaixo*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "I"] \arrow[d, "\pi"] & B \times V \arrow[dl, "\pi"] \\ B & \end{tikzcd}$$

comuta e além disso, $I_{|E_p} : E_p \longrightarrow \{p\} \times V$ é um isomorfismo de espaços vetoriais $\forall$ $p \in B$.

Observação 1.2. Seja G um grupo de Lie e $TG \longrightarrow G$ o fibrado tangente de G. Então, TG é um fibrado trivial. Com efeito, considere

$$\begin{tikzcd} TG \arrow[r, "I"] \arrow[d] & G \times T_eG \arrow[dl] \\ G & \end{tikzcd}$$

onde I é um difeomorfismo linear dado por $I([\sigma]) = (\sigma(0), [\tau])$, onde $\tau(t) = ((\sigma(0))^{-1}\sigma(t)) \in G$ é tal que $\tau(0) = e$ e $[\tau] \in T_eG$, e denota o elemento neutro do grupo G, $TG \longrightarrow G$ é a projeção do fibrado e $G \times T_eG \longrightarrow G$ é a projeção na primeira coordenada (ver [5]).

Exemplo 1.2. Considere o conjunto $TS^2 = \{(p, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 :< p, p >= 1\, e\, < p, v >= 0\} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ chamado o fibrado tangente à esfera. O conjunto $\Gamma(TS^2) = \{s \in C^\infty(S^2, TS^2) : \pi \circ s = 1_{S^2}\}$, onde π é a projeção definida por

$$\begin{aligned} \pi : TS^2 &\longrightarrow S^2 \\ (p, v) &\longrightarrow p, \end{aligned}$$

é chamado o **conjunto das seções** do fibrado tangente à esfera S^2. Vamos mostrar que $\Gamma(TS^2)$ é um $C^\infty(S^2)$-módulo projetivo que não é livre. Com efeito, consideremos $s_1, ..., s_N, \in \Gamma(TS^2)$ tal que, qualquer que seja $X \in \Gamma(TS^2)$,

$$X = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i s_i,$$

com $\alpha_i \in C^\infty(S^2)$, e tal escritura é única. Então $X(p) = X_p = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(p)s_i(p)$ e $\{s_1(p), ..., s_N(p)\}$ é um conjunto gerador de $T_pS^2 = \{X_p : X \in \Gamma(TS^2)\}$. Suponha que $s_1, ..., s_N$ não é linearmente dependente no ponto p. Sabemos, $\{s_1(p), s_2(p)\}$ é uma base de T_pS^2. De fato, podemos tomar $s_i \in C^\infty(S^2, TS^2)$ tais que $\{s_1(q), s_2(q)\}$ forme uma base de T_qS^2, $\forall$ q $\in V_p$ onde V_p é uma vizinhança aberta de p. Seja então $s_3(q) \in T_qS^2$, $s_3(q) = \lambda_1(q)s_1(q) + \lambda_2(q)s_2(q)$. Assim, $s_3 \mid_{V_p} = \lambda_1 s_1 \mid_{V_p} + \lambda_2 s_2 \mid_{V_p}$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in C^\infty(V_p, \mathbb{R})$. Considere agora $\varphi \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$, tal que supp $(\varphi) \subset V_p$. Logo,

$$\varphi s_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin V_p, \\ \varphi(x)s_3(x) & \text{se } x \in V_p \end{cases}$$

$$\varphi\lambda_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin V_p, \\ \varphi(x)\lambda_1(x) & \text{se } x \in V_p \end{cases}$$

$$\varphi\lambda_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin V_p, \\ \varphi(x)\lambda_2(x) & \text{se } x \in V_p \end{cases}$$

Observe que $\varphi s_3 \in \Gamma(TS^2)$, $\varphi\lambda_1 \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$ e $\varphi\lambda_2 \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$. Assim temos $\varphi s_3 = \varphi\lambda_1 s_1 + \varphi\lambda_2 s_2$, em S^2. Se $\{s_1, s_2, s_3\}$ for um conjunto linearmente independente então $\varphi s_3 + \varphi\lambda_1 s_1 + \varphi\lambda_2 s_2 = 0$ é uma combinação linear de vetores L.I e igual a zero. Assim $\varphi \equiv 0$, o que é um absurdo, pois o supp $(\varphi) \subset V_p$. Logo, $\{s_1, ..., s_n\}$ com $n \geq 3$ é linearmente dependente. Como $\dim(T_pS^2) = 2$, então $n = 2$. Assim, existem elementos $E_1, E_2 \in \Gamma(TS^2)$ tais que $\{E_1, E_2\}$ é uma base do $C^\infty(S^2)$ - módulo $\Gamma(TS^2)$. Então, $E_1(p), E_2(p) \neq 0$, $\forall$ p $\in S^2$. Mas tal fato não pode ocorrer, por um resultado bastante conhecido chamado o "Teorema da Esfera não penteável"' que tem como consequência não ser possível definir um campo contínuo de vetores tangente à esfera de forma que ele seja diferente de zero em todos os pontos. Em outras palavras, se existe um campo E de vetores tangente à esfera tal que este campo é contínuo. Então existe um p onde $E(p) = 0$.

Mostramos até agora que o conjunto $\Gamma(TS^2)$ não é um $C^\infty(S^2)$-módulo livre. Mostremos então que $\Gamma(TS^2)$ é um módulo projetivo. Para isto, considere o fibrado $NS^2 = \{(p, v) : p \in S^2, p \wedge v = 0\}$, chamado o fibrado normal a esfera, e o conjunto $\Gamma(NS^2) = \{n \in C^\infty(S^2, NS^2) : \pi \circ n = 1_{S^2}\}$, onde π é a projeção definida por

$$\begin{aligned} \pi : NS^2 &\longrightarrow S^2 \\ (p, v) &\longrightarrow p, \end{aligned}$$

é chamado o conjunto das seções do fibrado normal. Observamos que $\Gamma(NS^2)$ é um $C^\infty(S^2)$-módulo livre de posto 1 com base $\{E\} \in \Gamma(NS^2)$, onde $E_p = (p, p)$, pois dado $X \in \Gamma(NS^2)$ e $\lambda \in C^\infty(S^2)$, $X(p) = (p, \lambda(p) \cdot p) = \lambda_p E_p$. Para concluir, observamos que $\Gamma(TS^2) \oplus \Gamma(NS^2) = \Gamma(S^2 \times \mathbb{R}^3)$ onde $\Gamma(S^2 \times \mathbb{R}^3)$ é um $C^\infty(S^2)$-módulo livre de posto 3 com base $E_i(p) = (p, e_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Mostramos acima que $\Gamma(TS^2)$ é um módulo projetivo que não é livre. No entanto sabemos que $\Gamma(TS^2)$ é um fibrado vetorial, que não é trivial, ou seja, não se pode definir um difeomorfismo que aplique TS^2 em $S^2 \times \mathbb{R}^2$ linearmente. Assim, o exemplo acima motiva a seguinte questão: quando é que um fibrado vetorial é trivial? O seguinte teorema dá a condição necessária e suficiente para que um fibrado vetorial seja trivial.

Teorema 1.1. *Seja $\pi : E \longrightarrow B$ um fibrado vetorial onde B é uma variedade conexa. Então $\pi : E \longrightarrow B$ é um fibrado trivial se, e somente se, $\Gamma(E)$ é um $C^\infty(B)$-módulo livre de posto n. Além disso, para cada fibra E_p, $p \in B$, temos $dim(E_p) = posto(\Gamma(E))$*

Demonstração. Se E é um fibrado trivial então, seja $\pi : E \longrightarrow B$, $p : B \times V \longrightarrow B$ e $I : E \longrightarrow B \times V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão m com $m < \infty$, π a projeção do fibrado, p a projeção na primeira coordenada e I um difeomorfirmo que aplica E_b em $\{b\} \times V$ linearmente. Seja $E_\alpha(b) = I^{-1}(b, v_\alpha)$, $\forall\ b \in B$ onde $\{v_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ é uma base de V. Então o conjunto $\{E_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ é uma base de $\Gamma(E)$. Logo $\Gamma(E)$ é um $C^\infty(B)$-módulo livre de posto m. Seja $\Gamma(E)$ um $C^\infty(B)$-módulo livre de posto N. Então $s = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha E_\alpha$. Para demonstrar a reciproca, vamos precisar dos seguintes lemas:

Lema 1.1. *O conjunto* $\{E_\alpha(b)\}_{\alpha=1}^m \subset E_b$ *é linearmente independente.*

Demonstração. Considere a combinação linear:

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha(b) E_\alpha(b) = 0_{E_b}. \tag{1.1}$$

Então, temos

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha(b) I^{-1}(b, v_\alpha) = 0_{E_b} &\iff \sum_{\alpha=1}^{m} I^{-1}(b, \lambda_\alpha(b) v_\alpha) = 0_{E_b}\\ &\iff I^{-1}(b, \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha(b) v_\alpha) = 0_{E_b}.\end{aligned}$$

Como I é isomorfismo,

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha(b) v_\alpha = 0 \Longrightarrow \lambda_\alpha(b) = 0 \ \forall\ b \in E_b. \tag{1.2}$$

■

Lema 1.2. *Seja* $e \in E_b$. *Então existe* $s \in \Gamma(E)$ *tal que* $s(b) = s_b = e$.

Demonstração. Seja $e \in E_b$. Então $I(e) = (b,\, g(e))$ com $g : E_b \longrightarrow V$ um isomorfismo. Como $g(e) \ \in V$ temos,

$$g(e) = \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha(b) v_\alpha \tag{1.3}$$

assim,

$$I(e) \ \ = (b, \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha(b) v_\alpha)$$

o que implica,

$$\begin{aligned}
I^{-1}I(e) &= I^{-1}((b, \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha(b)v_\alpha)) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha(b) I^{-1}(b, v_\alpha) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha(b) E_\alpha(b)
\end{aligned}$$

Logo, $e = \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha(b)E_\alpha(b)$. Desta forma, se tomarmos $s = \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha E_\alpha$, teremos $s(b) = \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha(b)E_\alpha(b) = e$

■

Observe que na demonstração do lema acima está implícito que dado $e \in E_b$ então $e = \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha(b)E_\alpha(b)$. Assim o conjunto $\{E_\alpha(b)\}_{\alpha=1}^{N}$ é um conjunto gerador do espaço E_b.

Agora, considere $s \in \Gamma(E)$. Logo $s = \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha E_\alpha$ onde $\lambda_\alpha \in C^\infty(B)$. Então, $s_b = e = s(b) = \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha(b)E_\alpha(b)$, onde $N \geq m = dim(E_b)$. Vamos supor que $N > m$ e chegar a um absurdo. Com efeito, como $\{E_1(b), ..., E_m(b)\}$ é base de E_b pela continuidade das seções $\{E_1, ..., E_m\}$ temos que $\{E_1(q), ..., E_m(q)\}$ é base de E_q $\forall\ q \in U_b$ onde U_b é uma vizinhança aberta de b. Considere então,

$$E_{m+1}|_U = \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha E_\alpha|_U,\ com\ \lambda_\alpha \in C^\infty(U) \tag{1.4}$$

e seja $\varphi \in C^\infty(B)$ tal que supp $(\varphi) \subset U_b$. Assim,

$$\varphi E_{m+1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin U_b, \\ \varphi(x)E_{m+1}(x) & \text{se } x \in U_b \end{cases}$$

$$\varphi \lambda_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin U_b, \\ \varphi(x)\lambda_1(x) & \text{se } x \in U_b \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\varphi\lambda_m(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin U_b, \\ \varphi(x)\lambda_m(x) & \text{se } x \in U_b \end{cases}$$

assim,

$$\varphi E_{m+1} = \sum_{\alpha=1}^{m} \varphi\lambda_\alpha E_\alpha, \ \textit{com } \varphi\lambda_\alpha \in C^\infty(U) \tag{1.5}$$

Agora se supuzermos que $posto(\Gamma(E)) = N > m$ então poderiamos tomar $E_1, ..., E_{m+1}$ conjunto linearmente independente. Então,

$$\varphi E_{m+1} + \sum_{\alpha=1}^{m} \varphi\lambda_\alpha E_\alpha = 0_{\Gamma(E)} \tag{1.6}$$

seria uma combinação linear de seções linearmente independente dando zero, assim $\varphi \equiv 0_{C^\infty(B)}$ o que é um absurdo. Assim temos $posto(\Gamma(E)) = N = m = dim(E_b)$ e $\{E_1(b), ..., E_m(b)\}$ é base de E_b $\forall\ b\ \in B$. Assim, podemos tomar a aplicação,

$$\begin{aligned} I : E &\longrightarrow B \times \mathbb{R}^m \\ e &\longrightarrow (b, \lambda_1(e), ..., \lambda_m(e)) \end{aligned}$$

onde $e \in E_b$ e $e = \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha(e) E_\alpha|_b$. Logo E é um fibrado trivial.

$\blacksquare$

Exemplo 1.3. Seja G um grupo de Lie. Então $\Gamma(TG)$ é um módulo livre de posto $N = dim(G)$.

Definição 1.7. *Uma* **Ação de um grupo** G **num conjunto** S *é uma função*

$$\begin{aligned} G \times S &\longrightarrow S \\ (g,\, s) &\longrightarrow gs. \end{aligned}$$

tal que $\forall\ s \in S$ *e* $g_1, g_2 \in G$, $es = s$ *e* $(g_1g_2)s = g_1(g_2s)$, *onde e é o elemento neutro do grupo. Quando uma tal ação é dada nós dizemos que* G **age no conjunto** S.

Definição 1.8. *Seja* $f : A \longrightarrow B$ *um homomorfismo de anéis. Então dizemos que* B *é uma* A**-álgebra**, *ou que* B *é uma* **álgebra sobre** A.

Observe que se definimos a ação:

$$\begin{aligned} A \times B &\longrightarrow B \\ (a,\, b) &\longrightarrow ab = f(a) * b, \end{aligned}$$

onde $*$ é o produto em B, então claramente esta ação induz uma estrutura de A-módulo sobre B. No caso particular onde o anel A é um corpo, f é um homomorfismo injetivo. Assim, como um elemento A se identifica com sua imagem em B, podemos olhar A como um anel de escalares contido no anel B.

Uma outra definição do conceito de A-álgebra quando $A = K$, e K é um corpo é a seguinte:

Definição 1.9. *Seja K um corpo. Se um K-módulo Λ tem estrutura de anel pela operação produto:*

$$\begin{aligned} * : \Lambda \times \Lambda &\longrightarrow \Lambda \\ (v,\, w) &\longrightarrow vw, \end{aligned}$$

e a condição $a(vw) = (av)w = v(aw)$, é satisfeita $\forall\ a \in K$, $v, w \in \Lambda$, então Λ é chamada uma K-**álgebra** *ou uma* **álgebra sobre** K.

Exemplo 1.4. Seja $\mathcal{U}$ uma variedade diferenciável. O conjunto das funções $C^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ com as operações de soma de funções, multiplicação por escalar e produto de funções é uma $\mathbb{R}$-álgebra.

Definição 1.10. *Seja $\mathcal{A}$ um anel comutativo com unidade e $\mathcal{M}$ um $\mathcal{A}$-módulo. Uma* **derivação** *de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{M}$ (ou a valores em $\mathcal{M}$) é uma aplicação $D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $D(f + g) = D(f) + D(g)$;

(ii) $D(fg) = fD(g) + D(f)g$,

para quaisquer $f, g \in \mathcal{A}$.

Denotaremos o conjunto de todas as derivações de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{M}$ por $Der(\mathcal{A}, \mathcal{M})$. Se definirmos as operações naturais $(D_1 + D_2)(f) = D_1(f) + D_2(f)$ e $(fD)(g) = fD(g)$

então $Der(\mathcal{A},\mathcal{M})$, torna-se um $\mathcal{A}$-módulo. Se $\mathcal{A}$ é uma k-álgebra via um homomorfismo $\psi : k \longrightarrow \mathcal{A}$, colocamos:

$$Der_k(\mathcal{A},\mathcal{M}) = \{D \in Der(\mathcal{A},\mathcal{M}) : D \circ \psi \equiv 0\}.$$

Pode-se mostrar que $Der_k(\mathcal{A},\mathcal{M})$ é um $\mathcal{A}$-submódulo de $Der(\mathcal{A},\mathcal{M})$. Os elementos de $Der_k(\mathcal{A},\mathcal{M})$ são chamados **k-derivações** (ou derivações sobre k). Quando $\mathcal{M} = \mathcal{A}$ denotaremos o $\mathcal{A}$-módulo das k derivações a valores em $\mathcal{A}$ por $Der_k(\mathcal{A})$. Quando for claro o homomorfismo $\psi : k \longrightarrow \mathcal{A}$ em que $\mathcal{A}$ torna-se uma k-álgebra, denotaremos $Der_k(A)$ simplesmente por $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$. De agora em diante, sempre que falarmos em derivações, estaremos assumindo elementos de $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$.

Considere agora um elemento $e \neq 0$, $e \in \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A}$ é uma $\mathcal{R}$-álgebra, tal que $e^2 = e$. Se $D \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{A}$ é um dominio de integridade, então,

$$D(e) = D(e.e) = eD(e) + eD(e).$$

Multiplicando por e em ambos os membros temos,

$$eD(e) = e^2D(e) + e^2D(e) = eD(e) + eD(e)$$

Logo,

$$eD(e) = 2eD(e) \Rightarrow D(e) = 0.$$

Assim, $D(1_{\mathcal{A}}) = 0$ e $D(k) = 0 \ \forall \ k \in \mathcal{R}$. A seguir vamos mostrar que informações a respeito do conjunto das derivações da álgebra pode dar informações importantes da álgebra. Assim,

Proposição 1.2. *Se $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = 0$ então $\mathcal{A}$ é uma álgebra comutativa.*

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} D : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ x &\longrightarrow D(x) = ax - xa \end{aligned}$$

$\forall \ x \in \mathcal{A}$ e $a \in \mathcal{A}$ um elemento fixo. Observe que

$$D(xy) = axy - xya = (ax - xa)y + x(ay - ya) = D(x)y + xD(y) \tag{1.7}$$

Desta forma vemos que a aplicação D satisfaz a regra de Leibniz. É facil ver que tal aplicação é linear. Assim faça $D = D_a$. Então D_a é uma derivação. Logo $D_a \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \equiv 0$. Logo,

$$ax - xa = 0 \tag{1.8}$$

$\forall\, x \in \mathcal{A}$ e também $\forall\, a \in \mathcal{A}$. Assim temos $ax = xa$ donde segue que a álgebra é comutativa.

Note que em geral, a reciproca não é valida, isto é, se a álgebra é comutativa não tem-se necessáriamente que $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \equiv 0$. Por exemplo, se $\mathcal{A} = \mathbb{R}[x]$, $x = (x_1, ..., x_n)$ então $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = [\partial_1, ..., \partial_n] \neq 0$, onde $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ é um $\mathcal{A}$-módulo livre de posto n, com base $\{\partial_1, ...\partial_n\}$ as "derivadas parciais usuais".

Observação 1.3. O conjunto $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra de Lie com o colchete definido por $[D_1,\, D_2](a) = D_1 D_2(a) - D_2 D_1(a)$. Além disso, verifica-se que $[D_1,\, D_2](ab) = [D_1,\, D_2](a).b + a.[D_1,\, D_2](b)$.

Capítulo 2

Conexões

Neste capítulo, vamos trabalhar o conceito de conexões em módulos livres e projetivos. O problema da existência de conexões em módulos, é uma vasta área de pesquisa e se extende a álgebras não comutativas. Não entraremos em detalhes neste texto. No entanto, apresentaremos um exemplo de módulo que não admite conexões, estudado por Jacqueline Rojas e Ramón Mendoza. Demonstraremos um importante resultado com respeito ao conjunto $Con(\mathcal{M})$, mostrando que ele é um espaço afim sobre $Bil(\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{M}, \mathcal{M})$, resultado este que tem grande importancia no cálculo de funções de partição (ver[15]) relacionadas com o funcional de Yang-Mills (ver [13]) onde é preciso integrar sobre o espaço $Con(\mathcal{M})$. Por fim trataremos um importante tipo de conexão, a conexão de Levi-Civita.

Definição 2.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{R}$-álgebra e $\mathcal{M}$ um $\mathcal{A}$-módulo. Uma conexão em $\mathcal{M}$ é uma aplicação,*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (X,\, s) &\longrightarrow \nabla(X, s) \equiv \nabla_X s \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{X+Y} s = \nabla_X s + \nabla_X s$

(ii) $\nabla_{\alpha X} s = \alpha \nabla_X s$ *, ou seja,* $\nabla(\cdot\,, s) : D_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{M}$ *é* $\mathcal{A}$ *linear;*

(iii) $\nabla_X(s_1 + s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2$

(iv) $\nabla_X(\alpha s) = X(\alpha)s + \alpha\nabla_X s$ *(Regra de Leibniz generalizada)*

$\forall\ \alpha \in \mathcal{A}$ *e* s, s_1 *e* $s_2 \in \mathcal{M}$.

Podemos entender $\nabla_X s$ como a derivada covariante de s na direção do campo (derivação) X. Denotaremos o conjunto de todas as conexões sobre um $\mathcal{A}$-módulo $\mathcal{M}$ por $Con(\mathcal{M})$.

Observação 2.1. Existe uma definição um pouco mais algébrica para o conceito de conexão que a apresentada acima. De fato podemos definir uma conexão da seguinte forma:

Definição 2.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{R}$-álgebra e $\mathcal{M}$ um $\mathcal{A}$-módulo. Uma* **conexão** *é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{M} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{M} \tag{2.1}$$

onde $\Omega^1_{\mathcal{A}}$ denota o módulo de diferenciais de Kälher de $\mathcal{A}$ e ∇ satisfaz

$$\nabla(\alpha s) = d\alpha \otimes s + \alpha\nabla s \tag{2.2}$$

onde d é a diferencial universal.

Observação 2.2. A menos que mencionemos o contrário, de agora em diante estaremos sempre supondo que $Con(\mathcal{M}) \neq \phi$ e a existência das 1-formas $\omega^\beta_\alpha : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}$, elementos de $(\mathcal{D}_{\mathcal{A}})^*$ que trataremos futuramente.

2.1 Conexões em um $\mathcal{A}$-módulo Livre

A seguir, mostraremos como definir conexões em $\mathcal{A}$-módulos Livres. Vamos supor primeiramente o caso em que $\mathcal{L}$ seja um $\mathcal{A}$-módulo livre de posto N, com base $\{s_1, ..., s_N\}$. Assuma então que existe conexão em $\mathcal{L}$. Um elemento $s \in \mathcal{L}$ é da forma $s = \alpha^1 s_1 + ... +$

$\alpha^N s_N$. Assim temos:

$$\begin{aligned}\nabla_X s &= \nabla_X(\alpha^1 s_1 + ... + \alpha^N s_N)\\ &= \nabla_X(\alpha^1 s_1) + ... + \nabla_X(\alpha^N s_N)\\ &= X(\alpha^1)s_1 + ... + X(\alpha^N)s_N + \alpha^1\nabla_X s_1 + ... + \alpha^N\nabla_X s_N\end{aligned}$$

Logo, para resolver o caso em que nosso $\mathcal{A}$-módulo $\mathcal{L}$ é livre, temos que saber quanto vale $\nabla_X s_1, ..., \nabla_X s_N$.

Afirmação 1. *Sejam $\omega_\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}_{\mathcal{A}}, \mathcal{L})$, $\alpha = 1, ...N$. Se definirmos*

$$\nabla_X s_\alpha = \omega_\alpha(X) = \sum_{\beta=1}^{N} \omega_\alpha^\beta(X) s_\beta \tag{2.3}$$

onde $\omega_\beta^\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}_{\mathcal{A}}, \mathcal{A}) = (\mathcal{D}_{\mathcal{A}})^*$, então $\nabla_X s$ é uma conexão.

De fato, é facíl ver que definindo $\nabla_X s_1, ..., \nabla_X s_N$ como acima, verificamos que ∇ satisfaz a definição de conexão.

Assim, no caso em que $\mathcal{L}$ é um $\mathcal{A}$-módulo livre defina $\nabla_X s$ como acima. É fato que ∇ desta forma está bem definida e é uma conexão. Observe que ω_α e consequentemente ω_β^α independem das derivações.

Observação 2.3. Note que acima supomos que o $\mathcal{A}$ módulo tem posto N. No caso em que o módulo livre não é finitamente gerado, definimos da mesma forma, isto é, temos que definir quem são $\nabla_X s_i$, onde s_i é um elemento da base.

Exemplo 2.1. Seja $\mathcal{L}$ um $\mathcal{A}$-módulo livre de posto N com base $\{s_1, ..., s_N\}$. Defina $\nabla_X^0 s_i = 0$, $i = 1, ..., N$ e $\nabla_X^0 s \equiv X(\alpha^1)s_1 + ... + X(\alpha^N)s_N$. Vamos mostrar que ∇^0 é uma conexão para $\mathcal{L}$. Com efeito, verificaremos que satisfaz as propriedades (i) a (iv) da definição de conexão. Assim, para $s = \sum_{i=1}^{N} \alpha^i s_i$ e $v = \sum_{i=1}^{N} \beta^i s_i$ e $s + v = \sum_{i=1}^{N} (\alpha^i + \beta^i) s_i$ temos:

(i)

$$\begin{aligned}\nabla^0_{(X+Y)}s &= (X+Y)(\alpha^1)s_1 + ... + (X+Y)(\alpha^n)s_n \\ &= (X(\alpha^1)+Y(\alpha^1))s_1 + ... + (X(\alpha^n)+Y(\alpha^n))s_n \\ &= X(\alpha^1)s_1 + ... + X(\alpha^n)s_n + ... + Y(\alpha^1)s_1 + ... + Y(\alpha^n)s_n \\ &= \nabla^0_X s + \nabla^0_Y s\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\nabla^0_{(\alpha X)}s &= (\alpha X)(\alpha^1)s_1 + ... + (\alpha X)(\alpha^n)s_n \\ &= \alpha(X(\alpha^1)s_1 + ... + X(\alpha^n)s_n) \\ &= \alpha\nabla^0_X s\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\nabla^0_X(s+v) &= X(\alpha^1+\beta^1)s_1 + ... + X(\alpha^n+\beta^n)s_n \\ &= (X(\alpha^1)+X(\beta^1))s_1 + ... + (X(\alpha^n)+X(\beta^n))s_n \\ &= X(\alpha^1)s_1 + ... + X(\alpha^n) + X(\beta^1)s_1 + ... + X(\beta^n)s_n \\ &= \nabla^0_X s + \nabla^0_X v\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\nabla^0_X(\alpha s) &= X(\alpha\alpha^1)s_1 + ... + X(\alpha\alpha^n)s_n \\ &= (\alpha X(\alpha^1) + \alpha^1 X(\alpha))s_1 + ... + (\alpha X(\alpha^n) + \alpha^n X(\alpha))s_n \\ &= \alpha^1 X(\alpha)s_1 + ... + \alpha^n X(\alpha)s_n + (\alpha X(\alpha^1)s_1 + ... + (\alpha X(\alpha^n)s_n \\ &= X(\alpha)(\alpha^1 s_1 + ... + \alpha^n s_n) + \alpha(X(\alpha^1)s_1 + ... + X(\alpha^n)s_n) \\ &= X(\alpha)s + \alpha\nabla^0_X s\end{aligned}$$

2.2 Conexões em um $\mathcal{A}$-módulo Projetivo

Mostraremos agora como definir conexões num módulo projetivo $\mathcal{P}$ qualquer. Observe que num $\mathcal{A}$-módulo projetivo, não livre, não podemos definir da mesma forma que fizemos para o caso do $\mathcal{A}$-módulo ser livre, pois um módulo projetivo em geral não tem base. Para resolver esse inconveniente lembramos que da proposição 1 do capítulo 1, temos que um $\mathcal{A}$-módulo $\mathcal{P}$ é projetivo se e só se $\mathcal{P}$ é um somando direto de um módulo livre, ou seja, existe um $\mathcal{A}$-módulo $\mathcal{N}$ tal que $\mathcal{P} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{L}$ e $\mathcal{L}$ é um $\mathcal{A}$-módulo livre. Desta forma, dado um elemento $l \in \mathcal{L}$ ele é da forma $l = p + n$, com $p \in \mathcal{P}$ e $n \in \mathcal{N}$. Assim, dada uma conexão $\nabla \in Con(\mathcal{L})$ vamos induzir uma conexão em $\mathcal{P}$ como segue.

Proposição 2.1. *Todo Módulo projetivo admite conexões.*

Demonstração. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ l &\longrightarrow \pi(l) = p \end{aligned}$$

onde π é a projeção de $\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{P}$. É facil ver que π assim definida é linear, ou seja, $\pi(l_1 + l_2) = \pi(l_1) + \pi(l_2)$ e $\pi(al) = a\pi(l)$ (pois, $al = ap + an$ logo $\pi(al) = ap = a\pi(l)$) $\forall$ l,l_1,$l_2 \in \mathcal{L}$ e $a \in \mathcal{A}$. Assim, para $p \in \mathcal{P}$ definimos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ (X,\, p) &\longrightarrow \bar{\nabla}_X p = \pi(\nabla_X p) \end{aligned}$$

Mostremos então que $\bar{\nabla}$ assim definida é uma conexão. Com efeito, para $\alpha \in \mathcal{A}$ e p,p_1 e $p_2 \in \mathcal{P}$, temos:

(i)

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{(X+Y)}p &= \pi(\nabla_{(X+Y)}p) \\ &= \pi(\nabla_X p + \nabla_Y p) \\ &= \bar{\nabla}_X p + \bar{\nabla}_Y p \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{(\alpha X)}p &= \pi(\nabla_{(\alpha X)}p)\\ &= \pi(\alpha\nabla_X p)\\ &= \alpha\pi(\nabla_X p)\\ &= \alpha\bar{\nabla}_X p)\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X(p_1+p_2) &= \pi(\nabla_X(p_1+p_2))\\ &= \pi(\nabla_X p_1+\nabla_X p_2)\\ &= \pi(\nabla_X p_1)+\pi(\nabla_X p_2)\\ &= \bar{\nabla}_X p_1+\bar{\nabla}_X p_2\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X(\alpha p) &= \pi(\nabla_X(\alpha p))\\ &= \pi(X(\alpha)p+\alpha\nabla_X p)\\ &= \pi(X(\alpha)p)+\pi(\alpha\nabla_X p)\\ &= X(\alpha)\pi(p)+\alpha\pi(\nabla_X p)\\ &= X(\alpha)p+\alpha\bar{\nabla}_X p\end{aligned}$$

■

Observação 2.4. considere $\mathcal{M}$ um $\mathcal{A}$-módulo e seja $D \in Con(\mathcal{M})$ tal que $D_X s \equiv 0$. Então temos que $D_X(\alpha s) = X(\alpha)s + \alpha D_X s$. Se supusermos que o conjunto $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \neq 0$ então existe uma derivação $X \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ e $\alpha \in \mathcal{A}$ com $X(\alpha) \neq 0$. Assim teríamos

$$D_X(\alpha s) = 0 = X(\alpha)s + \alpha D_X s \tag{2.4}$$

e como $D_X s = 0$ teriamos que $X(\alpha)s = 0\ \forall s \in \mathcal{M}$. Desta forma $X(\alpha) \in Ann(\mathcal{M})$. Caso contrário não seria possivel definir uma conexão. É claro que se $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \equiv 0$ e a única conexão existente é a conexão nula.

Exemplo 2.2. Seja $C^0_{\mathbb{R}}$ a $\mathbb{R}$-álgebra das funções contínuas. Verifica-se que $\mathcal{D}_{C^0_{\mathbb{R}}} = 0$. Seja $\mathcal{M}$ um $C^0_{\mathbb{R}}$-módulo. Então, a única conexão existente é a conexão nula, ou seja, $\nabla_X s \equiv 0$ $\forall\ s \in \mathcal{D}_{C^0_{\mathbb{R}}}$

Até agora definimos conexões em módulos livres e projetivos. No entanto, nem todo módulo admite conexões. Pesquisas recentes feita por Jacqueline Rojas e Ramón Mendoza, mostram um exemplo de módulo que não admite conexões o qual exibiremos a seguir.

Exemplo 2.3. Considere a $\mathbb{R}$-álgebra dada por

$$\mathcal{A} = \{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + b_1y + ... + b_my^m : n, m \in \mathbb{N}, a_0, a_i, b_j \in \mathbb{R}\}$$

com $xy = yx = 0$ e as operações usuais de adição e multiplicação de polinômios. Como cada elemento de $\mathcal{A}$ pode ser escrito de forma única como $f = f_0 + f_1(x)x + f_2(y)y$, então definimos $D_i : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ para $i = 1, 2$ por

$$\partial_1(c + xp(x) + yq(y)) = x(p(x) + xp'(x)) \quad e \quad \partial_2(c + xp(x) + yq(y)) = y(q(y) + yq'(y))$$

onde p' e q' denotam as derivadas usuais dos polinomios p e q respectivamente. Pode-se mostrar que ∂_1 e ∂_2 satisfazem as seguintes propriedades:

(i) ∂_1 e $\partial_2 \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$

(ii) $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}\partial_1 + \mathcal{A}\partial_2$

(iii) $\alpha\partial_1 + \beta\partial_2 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = y\alpha_1$ e $\beta = x\beta_1$ com α_1,$\beta_1 \in \mathcal{A}$.

Seja agora Ω o $\mathcal{A}$-módulo dado pelo quociente $\frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{N}}$ onde $\mathcal{N} = \{\lambda(y, x) \in \mathcal{A}^2 : \lambda \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{A}^2$. Observe que $\delta_1 = \overline{(1, 0)}$ e $\delta_1 = \overline{(0, 1)}$ são geradores para o $\mathcal{A}$-módulo Ω e

$$\alpha\delta_1 + \beta\delta_2 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = y\delta \ e \ \beta = x\delta, \ \delta \in \mathcal{A}. \tag{2.5}$$

em particular temos que

$$y\delta_1 + x\delta_2 = 0. \tag{2.6}$$

Agora vamos supor que existe uma conexão ∇ em Ω. Por simplicidade, nós vamos denotar $\nabla_i\delta = \nabla_{\partial_i}\delta$. Assim,

$$\nabla_2\delta_1 = A\delta_1 + B\delta_2 \quad para \ \ algum \ \ A, B \in \mathcal{A}. \tag{2.7}$$

Desde que $x\partial_2 = 0$ nós obtemos

$$0 = \nabla_{x\partial_2}\delta_1 = x\nabla_2\delta_1 = x(A\delta_1 + B\delta_2) = xA\delta_1 + xB\delta_2 \tag{2.8}$$

Então segue de (2.8) e (2.5) que

$$xA = \mu y \quad e \quad xB = \mu x \quad para \;\; algum \;\; \mu \in \mathcal{A}.$$

Escrevendo $\mu = \mu_0 + x\mu_1(x) + y\mu_2(y)$ (com $\mu_0 \in \mathbb{R}$) nós encontramos que

$$xA = (\mu_0 + y\mu_1(y))y \quad e \quad xB = (\mu_0 + x\mu_1(x))x \tag{2.9}$$

Definindo $A = A_0 + xA_1(x) + yA_2(y)$, segue da primeira igualdade em (2.9) que $A_0 = 0$. Por outro lado, tendo em mente que $y\delta_1 + x\delta_2 = 0$ e $x\nabla_2(\delta_2) = 0$, pois, $x\partial_2 = 0$, nós concluímos que

$$0 = \nabla_2(y\delta_1 + x\delta 2) = \nabla_2(y\delta_1) + \nabla_2(x\delta_2) = y\delta_1 + y\nabla_2(\delta_1) = y(1 + A)\delta_1 + yB\delta_2.$$

Então, segue de (2.5) que

$$y(A + 1) = \nu y \quad e \quad yB = \nu x \quad para \;\; algum \;\; \nu \in \mathcal{A}.$$

Agora escrevendo $\nu = \nu_0 + x\nu_1(x) + y\nu_2(y)$ (com $\nu_0 \in \mathbb{R}$), temos

$$y(1 + A) = (\nu_0 + y\nu_1(y))y \quad yB = (\nu_0 + x\nu_1(x))x. \tag{2.10}$$

Então segue da segunda igualdade em (2.10) que $\nu_0 = 0$ e consequentemente que $1+A_0 = 0$, isto é, $A_0 = -1$ (após a substituição de $\nu_0 = 0$ na primeira igualdade de (2.9)). Assim, chegamos a um absurdo.

2.3 O espaço das Conexões

Definição 2.3. *Seja*

$$\begin{aligned} A : G \times S &\longrightarrow S \\ (g, s) &\longrightarrow gs. \end{aligned}$$

uma ação de G no conjunto S. Dizemos que A é **transitiva** *se $S = \mathcal{O}(s)$, $\forall\ s \in S$, onde $\mathcal{O}(s) = \{gs : g \in G\} \subset S$ é chamado a órbita de G passando por s.*

Definição 2.4. *Dizemos que um grupo G age num conjunto S* **sem pontos fixos** *se dados $s \in S$ e $g \in G$, $gs = s$ ocorre se e só se $g = e$ onde e é a identidade de G.*

Definição 2.5. *Dizemos que um conjunto E é* **um espaço afim sobre um espaço vetorial** *V se a ação:*

$$\begin{array}{rcl} A : V \times E & \longrightarrow & E \\ (v,\, P) & \longrightarrow & A(v,\, P) = v \oplus P. \end{array}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $w \oplus (v \oplus P) = (w + v) \oplus P$, *onde $v, w \in V$ e $P \in E$*

(ii) *A é transitiva e sem pontos fixos.*

Desta forma a aplicação

$$\begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & \mathcal{O}(P) = E \\ v & \longrightarrow & v \oplus P \end{array}$$

é uma bijeção, e é chamada bijeção afim. Vamos mostrar agora que o espaço das conexões de um módulo $\mathcal{M}$ é um espaço afim sobre $Bil(\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{M}, \mathcal{M})$.

Proposição 2.2. *$Con(\mathcal{M})$ é um espaço afim sobre o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $Bil(\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{M}, \mathcal{M})$*

Demonstração. Defina a ação

$$\begin{array}{rcl} A : Bil(\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{M}, \mathcal{M}) \times Con(\mathcal{M}) & \longrightarrow & Con(\mathcal{M}) \\ (B,\, \nabla) & \longrightarrow & A(B,\, \nabla) \end{array}$$

onde

$$A(B,\, \nabla)(X,\, s) = B(X, s) + \nabla_X s \tag{2.11}$$

. Fixemos agora uma conexão $\nabla^0 \in Con(\mathcal{M})$. Vamos mostrar que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} I : Con(\mathcal{M}) & \longrightarrow & Bil(\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{M}, \mathcal{M}) \\ \nabla & \longrightarrow & I(\nabla) \end{array}$$

onde

$$I(\nabla)(X,\, s) = \nabla_X s - \nabla^0_X s \tag{2.12}$$

é uma bijeção afim. Primeiramente vamos mostrar que $I(\nabla) \in Bil(\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{M}, \mathcal{M})$. Sejam $f, g \in \mathcal{A}$ e $s, t \in \mathcal{M}$. Então,

$$\begin{aligned}
I(\nabla)(fX+gY,\, s) &= \nabla_{fX+gY}(s) - \nabla^0_{fX+gY}(s)\\
&= f\nabla_X s + g\nabla_Y s - (f\nabla^0_X s + g\nabla^0_Y s)\\
&= f(\nabla_X s - \nabla^0_X s) + g(\nabla_Y s - \nabla^0_Y s)\\
&= fI(\nabla)(X,\, s) + gI(\nabla)(Y,\, s).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(\nabla)(X, fs+gt) &= \nabla_X(fs+gt) - \nabla^0_X(fs+gt)\\
&= \nabla_X(fs) + \nabla_X(gt) - \nabla^0_X(fs) - \nabla^0_X(gt)\\
&= X(f)s + f\nabla_X s + X(g)t + g\nabla_X t - (X(f)s + f\nabla^0_X s) - (X(g)t + g\nabla^0_X t)\\
&= X(f)s - X(f)s + X(g)t - X(g)t + f\nabla_X s - f\nabla^0_X s + g\nabla_X t - g\nabla^0_X t\\
&= f(\nabla_X s - \nabla^0_X s) + g(\nabla_X t - \nabla^0_X t)\\
&= fI(\nabla)(X,\, s) + gI(\nabla)(X,\, t).
\end{aligned}$$

Assim, temos que $I(\nabla)$ é bilinear. Seja agora a aplicação J dada por:

$$\begin{aligned}
J : Bil(\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{M}, \mathcal{M}) &\longrightarrow Con(\mathcal{M})\\
B &\longrightarrow J(B)
\end{aligned}$$

onde

$$J(B)(X,\, s) = \nabla^0_X s + B(X,\, s). \tag{2.13}$$

Mostremos que $J(B)$ é uma conexão. Assim, sejam $f, g \in \mathcal{A}$ e $s, t \in \mathcal{M}$. Então,

$$\begin{aligned}
J(B)(fX+gY,\, s) &= \nabla^0_{fX+gY}(s) + B(fX+gY,\, s)\\
&= (f\nabla^0_X s + g\nabla^0_Y s) + fB(X, s) + gB(Y, s)\\
&= f(\nabla^0_X s + B(X, s)) + g(\nabla^0_Y s + B(Y, s))\\
&= fJ(B)(X,\, s) + gJ(B)(Y,\, s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(B)(X, fs+gt) &= \nabla^0_X(fs+gt) + B(X, fs+gt)\\
&= \nabla^0_X(fs) + \nabla^0_X(gt) + fB(X,s) + gB(X,\, t)\\
&= X(f)s + f\nabla^0_X s + X(g)t + g\nabla^0_X t + fB(X,\, s) + gB(X,\, t)\\
&= X(f)s + f(\nabla^0_X s + B(X,s)) + X(g)t + g(\nabla^0_X t + B(Y,\, t))\\
&= X(f)s + fJ(B)(X,\, s) + X(g)t + gJ(B)(X,t).
\end{aligned}$$

Logo, J(B) é uma conexão. Para mostrar que I é bijeção, vamos mostrar que $J \circ I = 1_{Con(\mathcal{M})}$ e que $I \circ J = 1_{Bil(D_{\mathcal{A}} \times \mathcal{M}, \mathcal{M})}$. Com efeito,

$$J(I(\nabla))(X,\, s) = \nabla^0_X s + I(\nabla)(X,\, s) = \nabla^0_X s + \nabla_X s - \nabla^0_X s = \nabla_X s \tag{2.14}$$

assim, $J(I(\nabla)) = \nabla$, $\forall\ \nabla \in Con(\mathcal{M})$. Além disso,

$$I(J(B))(X,\, s) = J(B)(X,\, s) - \nabla^0_X s = \nabla^0_X s + B(X,\, s) - \nabla^0_X s = B(X,\, s) \tag{2.15}$$

logo, $I(J(B)) = B$, $\forall\ B \in Bil(D_{\mathcal{A}} \times \mathcal{M}, \mathcal{M})$. Assim mostramos que a aplicação I é de fato uma bijeção. Como ∇^0 é arbitrário, então temos que a ação é transitiva. Mostremos agora que a ação assim definida não fixa pontos. Seja $\nabla^0 \in Con(\mathcal{M})$ uma conexão fixa. Vimos que $\forall\ \nabla \in Con(\mathcal{M})$, $\exists\ B \in Bil(\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{M}, \mathcal{M})$, a saber, $B = I(\nabla)$ tal que $A(B,\, \nabla^0) = \nabla$. Na notação da definição de ação de grupos temos,

$$\nabla^0 B = \nabla \tag{2.16}$$

Se para $\nabla \in Con(\mathcal{M})$ e $B \in Bil(\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{M}, \mathcal{M})$ tivermos

$$A(B,\, \nabla) = \nabla B = \nabla \iff \nabla_X s + B(X,\, s) = \nabla_X s \iff B(X,\, s) \equiv 0 \tag{2.17}$$

Assim, $Bil(\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{M}, \mathcal{M})$ age em $Con(\mathcal{M})$ sem pontos fixos. É fácil ver que a condição (i) da definição 2.5 é satisfeita.

■

2.4 A conexão de Levi-Civita

Nesta seção estudaremos um importante tipo de conexão, que corresponde ao caso em que consideramos conexões no $\mathcal{A}$-módulo $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$. Antes precisamos de algumas definições.

Definição 2.6. *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{R}$-álgebra. Uma* **métrica** *é uma aplicação*

$$g : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) *g é bilinear simétrica;*

(ii) *seja $(\mathcal{D}_{\mathcal{A}})^* = Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$. A função*

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} &\longrightarrow (\mathcal{D}_{\mathcal{A}})^* \\ X &\longrightarrow \psi(X) = g(*, X) \end{aligned}$$

é um isomorfismo, ou seja g satisfaz o teorema da representação de Riesz.

Observação 2.5. A definição de métrica inclui as métricas Riemannianas, caracterizadas pela condição $g(X, X) = 0 \iff X = 0$, e também as métricas lorentzianas, que têm grande importância na Teoria da Relatividade e é caracterizada por existir $T \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ tal que $g(T, T) = -1$. Um exemplo de métrica lorentziana é dado a seguir. Considere a $\mathbb{R}$-álgebra $C^\infty(\mathbb{R}^4)$ e o $C^\infty(\mathbb{R}^4)$-módulo $\mathcal{D}_{C^\infty(\mathbb{R}^4)}$ com base $[\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3]$. Então a métrica definida por

$$g(\partial_0, \partial_0) = -1; \quad g(\partial_i, \partial_j) = 0, se \quad i \neq j; \quad g(\partial_i, \partial_i) = 1, i = 1, 2, 3. \tag{2.18}$$

é uma métrica Lorentziana.

Definição 2.7. *Seja τ^∇ a aplicação definida por*

$$\begin{aligned} \tau^\nabla : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{D}_{\mathcal{A}} &\longrightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \\ (X, Y) &\longrightarrow \tau^\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

A aplicação τ^∇ assim definida é chamada a **torção da conexão** *∇.*

Definição 2.8. *Dizemos que a conexão ∇ é* **simétrica** *se $\forall\ X, Y, \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ tivermos que a torção $\tau^\nabla \equiv 0$, ou seja,*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]\,. \tag{2.19}$$

Definição 2.9. *Dizemos que a conexão ∇ é* **compatível com a métrica** g *se* $\forall\ X, Y, Z \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ *tivermos*

$$X(g(Y,\ Z)) = g(\nabla_X Y,\ Z) + g(Y,\ \nabla_X Z). \tag{2.20}$$

Teorema 2.1. (Levi-Civita) *Dada uma métrica g, existe uma única conexão denotada por $\nabla^g \in Con(\mathcal{D}_{\mathcal{A}})$ que possui as seguintes propriedades:*

(i) ∇^g *é simétrica*

(ii) $X(g(Y,\ Z)) = g(\nabla^g_X Y,\ Z) + g(Y,\ \nabla^g_X Z),\ \forall\ X, Y, Z \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$.

Demonstração. Suponhamos que exista tal conexão. Então ela deve satisfazer as seguintes identidades:

$$X(g(Y,\ Z)) = g(\nabla^g_X Y,\ Z) + g(Y,\ \nabla^g_X Z) \tag{2.21}$$

$$Y(g(Z,\ X)) = g(\nabla^g_Y Z,\ X) + g(Z,\ \nabla^g_Y X) \tag{2.22}$$

$$Z(g(X,\ Y)) = g(\nabla^g_Z X,\ Y) + g(X,\ \nabla^g_Z Y) \tag{2.23}$$

somando (20) e (21) e subtrindo (22) temos,

$$\begin{aligned} X(g(Y,\ Z)) + Y(g(Z,\ X)) - Z(g(X,\ Y)) \ &= g(\nabla^g_X Y,\ Z) + g(Y,\ \nabla^g_X Z) + g(\nabla^g_Y Z,\ X) \\ &+ g(Z,\ \nabla^g_Y X) - g(\nabla^g_Z X,\ Y) - g(X,\ \nabla^g_Z Y) \end{aligned}$$

somando e subtraindo o termo $g(\nabla^g_Y X,\ Z)$ temos,

$$\begin{aligned} X(g(Y,\ Z)) + Y(g(Z,\ X)) - Z(g(X,\ Y)) \ &= g(\nabla^g_X Y,\ Z) + g(Y,\ \nabla^g_X Z) + g(\nabla^g_Y Z,\ X) \\ &+ g(Z,\ \nabla^g_Y X) - g(\nabla^g_Z X,\ Y) - g(X,\ \nabla^g_Z Y) \\ &+ (\nabla^g_Y X,\ Z) - g(\nabla^g_Y X,\ Z) \\ &= g(Y,\ \nabla^g_X Z) - g(\nabla^g_Z X,\ Y) + g(\nabla^g_Y Z,\ X) \\ &- g(X,\ \nabla^g_Z Y) + g(\nabla^g_X Y,\ Z) - g(\nabla^g_Y X,\ Z) \\ &+ 2g(Z,\ \nabla^g_Y X) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(Z,\,\nabla^g_Y X) &= \tfrac{1}{2}\{X(g(Y,\,Z)) + Y(g(Z,\,X)) - Z(g(X,\,Y)) \\ &\quad - g(Y,\,[X,\,Z]) - g(X,\,[Y,\,Z]) - g(Z,\,[X,\,Y])\} \end{aligned}$$

Desta forma se uma tal conexão existir ela deve satisfazer a última igualdade acima. Logo, para encontrarmos uma conexão que satisfaça tal identidade, fixamos $X, Y \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ e definimos a seguinte função:

$$\begin{aligned} \psi(Z) &= \tfrac{1}{2}\{X(g(Y,\,Z)) + Y(g(Z,\,X)) - Z(g(X,\,Y)) \\ &\quad - g(Y,\,[X,\,Z]) - g(X,\,[Y,\,Z]) - g(Z,\,[X,\,Y])\}. \end{aligned}$$

É fácil ver que ψ assim definida pertence a $(\mathcal{D}_{\mathcal{A}})^*$. Assim, pela definição de métrica existe uma única derivação, que denotaremos por $\nabla^g_Y X$, tal que $\psi(Z) = g(Z,\,\nabla^g_Y X)$. Resta agora verificarmos que a derivação $\nabla^g_Y X$ é uma conexão. É fácil ver que as propriedades de (i) a (iii) da definição de conexão são satisfeitas. Verificaremos então a propriedade (iv) da definição de conexão. Para isso, seja $\alpha \in \mathcal{A}$ e seja $\nu(Z)$ definida por:

$$\begin{aligned} \nu(Z) &= \tfrac{1}{2}\{\alpha X(g(Y,\,Z)) + Y(g(Z,\,\alpha X)) - Z(g(\alpha X,\,Y)) \\ &\quad - g(Y,\,[\alpha X,\,Z]) - g(\alpha X,\,[Y,\,Z]) - g(Z,\,[\alpha X,\,Y])\} \end{aligned}$$

Sabemos que existe uma única derivação que vamos denotar por $\nabla^g_Y(\alpha X)$ tal que $\nu(Z) = g(Z,\,\nabla^g_Y \alpha X)$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \nu(Z) &= \tfrac{1}{2}\{\alpha X(g(Y,\,Z)) + Y(\alpha)(g(Z,\,X)) + \alpha Y g(Z,\,X) - Z(\alpha)(g(X,\,Y)) - \alpha Z g(X,\,Y) \\ &\quad - \alpha g(Y,\,[X,\,Z]) + Z(\alpha) g(Y,\,X) - \alpha g(Z,\,[X,\,Y]) + Y(\alpha) g(Z,\,X) - \alpha g(X,\,[Y,\,Z])\} \\ &= \alpha\psi(Z) + Y(\alpha) g(Z,\,X) \\ &= g(Z,\,\alpha\nabla^g_Y X) + g(Z, Y(\alpha) X) \\ &= g(Z,\,\alpha\nabla^g_Y X + Y(\alpha) X) \\ &. \end{aligned}$$

E pela unicidade da representação, concluímos que $\nabla^g_Y(\alpha X) = \alpha\nabla^g_Y X + Y(\alpha) X$.

Capítulo 3

O Operador Curvatura K^{∇}

Neste capítulo definiremos o operador curvatura associado a uma conexão. Demonstraremos importantes relações entre estas grandezas, explicitando os cálculos, para uma futura implementação algoritmica. Veremos que localmente, a cada conexão pode-se associar uma matriz de 1-formas diferenciais e a cada curvatura uma matriz de 2-formas diferenciais. Esses resultados tem grande importancia para o desenvolvimento da teoria de classes caracteristicas. Por fim, faremos cálculos explícitos das conexões de Levi-civita em H^+ e S^2, e calcularemos suas respectivas curvaturas seccionais. Veremos que pela forma como será definida a curvatura, obteremos que a curvatura seccional de S^2 é -1 e a de H^+ será 1.

Definição 3.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{R}$-álgebra e $\mathcal{M}$ um $\mathcal{A}$-módulo. O* **operador curvatura associado a uma conexão** ∇ *é uma aplicação,*

$$\begin{aligned} K^{\nabla} : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (X,\, Y,\, s) &\longrightarrow K^{\nabla}(X, Y, s) \end{aligned}$$

definida por

$$K^{\nabla}(X, Y, s) = [\nabla_X,\, \nabla_Y]\, s - \nabla_{[X,Y]} s, \tag{3.1}$$

onde $\nabla_X, \nabla_Y \in \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$.

No caso em que $\mathcal{M}$ é um $\mathcal{A}$-módulo livre de posto finito n com base $\{s_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, pelo que vimos no capítulo anterior, podemos definir o operador curvatura na base do módulo.

Se definirmos

$$K^{\nabla}(X,\,Y,\,s_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{n} K_\alpha^\beta(X,\,Y)s_\beta = ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]})s_\alpha. \tag{3.2}$$

Para cada K_α^β temos:

Proposição 3.1. *As aplicações* $K_\alpha^\beta : \mathcal{D}_\mathcal{A} \times \mathcal{D}_\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ *satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) $K_\alpha^\beta(X,\,Y) = -K_\alpha^\beta(Y,\,X)$;

(ii) $K_\alpha^\beta(\lambda X,\,Y) = \lambda K_\alpha^\beta(X,\,Y)$ *com* $\lambda \in \mathcal{A}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
-K_\alpha^\beta(Y,\,X)s_\alpha &= -([\nabla_Y,\,\nabla_X] - \nabla_{[Y,\,X]})s_\alpha \\
&= -(\nabla_Y\nabla_X - \nabla_X\nabla_Y)s_\alpha + \nabla_{(YX-\;XY)}s_\alpha \\
&= (-\nabla_Y\nabla_X + \nabla_X\nabla_Y)s_\alpha + (\nabla_{YX} - \nabla_{XY})s_\alpha \\
&= (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X)s_\alpha - (\nabla_{XY} - \nabla_{YX})s_\alpha \\
&= ([\nabla_X,\,\nabla_Y] - \nabla_{[X,\,Y]})s_\alpha \\
&= K_\alpha^\beta(X,\,Y)s_\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_\alpha^\beta(\lambda X,\,Y)(s_\alpha) &= ([\nabla_{\lambda X},\,\nabla_Y]\,s_\alpha - \nabla_{[\lambda X,\,Y]}s_\alpha) \\
&= (\nabla_{\lambda X}\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_{\lambda X})s_\alpha - \nabla_{(\lambda XY-\;Y(\lambda X))}s_\alpha \\
&= (\lambda\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y(\lambda\nabla_X))s_\alpha - (\lambda\nabla_{XY} - \nabla_{Y(\lambda X)})s_\alpha \\
&= (\lambda\nabla_X\nabla_Y - (Y(\lambda)\nabla_X + \lambda\nabla_Y\nabla_X))s_\alpha - (\lambda\nabla_{XY} - (\nabla_{Y(\lambda)X+\lambda YX}))s_\alpha \\
&= (\lambda\nabla_X\nabla_Y - \lambda\nabla_Y\nabla_X - Y(\lambda)\nabla_X)s_\alpha - (\lambda\nabla_{XY} - Y(\lambda)\nabla_X - \lambda\nabla_{YX})s_\alpha \\
&= (\lambda(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X))s_\alpha - Y(\lambda)\nabla_X s_\alpha + Y(\lambda)\nabla_X s_\alpha - (\lambda(\nabla_{XY} - \nabla_{YX}))s_\alpha \\
&= \lambda(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X)s_\alpha - \lambda(\nabla_{XY} - \nabla_{YX})s_\alpha \\
&= \lambda((\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X)s_\alpha - \nabla_{XY-YX}s_\alpha) \\
&= \lambda([\nabla_X,\,\nabla_Y]\,s_\alpha - \nabla_{[X,\,Y]}s_\alpha) \\
&= \lambda K_\alpha^\beta(X,\,Y)(s_\alpha)
\end{aligned}$$

■

De forma análoga, podemos mostrar que $K_\alpha^\beta(X,\, \alpha Y)(s_\alpha) = \alpha K_\alpha^\beta(X,\, Y)(s_\alpha)$ onde $\alpha \in \mathcal{A}$.

Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{R}$-álgebra e $\mathcal{M}$ um $\mathcal{A}$-módulo livre de posto finito N. Vimos no capítulo II que para definir uma conexão em $\mathcal{M}$ basta dizer quanto ela vale em sua base. Assim, se $\{s_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ é base de $\mathcal{M}$, então

$$\nabla_X s_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} \omega_\alpha^\beta(X) s_\beta = \omega_\alpha^\beta(X) s_\beta, \tag{3.3}$$

com $\omega_\alpha^\beta(X) \ \in \mathcal{A}$. Pela propriedade (iv) da definição de conexão, temos que $\omega_\alpha^\beta(\varphi X) = \varphi\omega_\alpha^\beta(X)$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{A}$ e $\omega_\alpha^\beta(X+Y) = \omega_\alpha^\beta(X) + \omega_\alpha^\beta(Y)$, então podemos entender ω_α^β como uma aplicação $\omega_\alpha^\beta : \mathcal{D}_\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$. Assim, temos que $\omega_\alpha^\beta(X) \ \in \Omega_\mathcal{A}^1$, o $\mathcal{A}$-módulo das 1-formas diferenciais de $\mathcal{A}$. Desta forma, para cada conexão em $\mathcal{M}$ podemos associar a matriz

$$\begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_N^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^N & \cdots & \omega_N^N \end{bmatrix}$$

onde $\left[\omega_\alpha^\beta\right] \ \in M_{N\times N}(\Omega_\mathcal{A}^1)$. Tal matriz será chamada *a matriz da conexão* ∇ na base $\{s_1, ...s_N\}$. Considere agora $\{t_1, ..., t_N\}$ uma outra base de $\mathcal{M}$. Então temos

$$\nabla_X t_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} \tilde{\omega}_\alpha^\beta(X)\ t_\beta = \tilde{\omega}_\alpha^\beta(X)\ t_\beta, \tag{3.4}$$

denotaremos a matriz da conexão ∇ na base $\{t_1, ..., t_N\}$ por $\left[\tilde{\omega}_\alpha^\beta\right]$. É natural questionar sobre a relação existente entre $\left[\tilde{\omega}_\alpha^\beta\right]$ e $\left[\omega_\alpha^\beta\right]$.

Proposição 3.2. *Sejam $\{s_1, ..., s_N\}$ e $\{t_1, ..., t_N\}$ bases distintas de um $\mathcal{A}$-módulo livre $\mathcal{M}$. Faça $\omega = \left[\omega_\alpha^\beta\right]$, $\tilde{\omega} = \left[\tilde{\omega}_\alpha^\beta\right]$ e seja $t_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} a_\alpha^\beta\ s_\beta$. Então*

$$\tilde{\omega} = A^{-1}dA + A^{-1}\omega A, \tag{3.5}$$

onde $A = \left[a_\alpha^\beta\right]$ é a matriz,

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_N^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^N & \cdots & a_N^N \end{bmatrix}$$

Demonstração. Temos que:

$$\nabla_X s_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} \omega_\alpha^\beta \; t_\beta, \quad e \quad \nabla_X t_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} \tilde{\omega}_\alpha^\beta \; t_\beta. \tag{3.6}$$

Além disso,

$$t_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} a_\alpha^\beta \; s_\beta \tag{3.7}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_X t_\alpha = \nabla_X \left(\sum_{\beta=1}^{N} a_\alpha^\beta \; s_\beta \right) \; &= \sum_{\beta=1}^{N} \nabla_X (a_\alpha^\beta \; s_\beta) \\
&= \sum_{\beta=1}^{N} X(a_\alpha^\beta) \; s_\beta + \sum_{\beta=1}^{N} a_\alpha^\beta \; \nabla_X s_\beta \\
&= \sum_{\beta=1}^{N} X(a_\alpha^\beta) \; s_\beta + \sum_{\beta=1}^{N} a_\alpha^\beta \left(\sum_{j=1}^{N} \omega_\beta^j s_j \right) \\
&= \sum_{\beta=1}^{N} X(a_\alpha^\beta) \; \left(\sum_{k=1}^{N} (a_\beta^k)^{-1} t_k \right) + \sum_{\beta=1}^{N} a_\alpha^\beta \left(\sum_{j=1}^{N} \omega_\beta^j \left(\sum_{k=1}^{N} (a_\beta^k)^{-1} t_k \right) \right).
\end{aligned}$$

Expandindo as somas acima, temos:

$$\begin{gathered}
\left(X(a_\alpha^1)(a_1^1)^{-1} + \cdots + X(a_\alpha^N)(a_N^1)^{-1} + a_\alpha^1 \omega_1^1 (a_1^1)^{-1} + \cdots + a_\alpha^N \omega_N^N (a_N^1)^{-1} \right) t_1 + \\
\vdots \\
+ \left(X(a_\alpha^1)(a_1^N)^{-1} + \cdots + X(a_\alpha^N)(a_N^N)^{-1} + a_\alpha^1 \omega_1^1 (a_1^N)^{-1} + \cdots + a_\alpha^N \omega_N^N (a_N^N)^{-1} \right) t_N.
\end{gathered}$$

Logo,

$$\sum_{\beta=1}^{N} \tilde{\omega}_\alpha^\beta \; t_\beta \; = \sum_{\beta=1}^{N} \left(\sum_{l=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} X(a_\alpha^l)(a_k^\beta)^{-1} + \sum_{l=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} a_\alpha^l \omega_l^k (a_k^\beta)^{-1} \right) t_\beta.$$

Em forma matricial,

$$\left[\tilde{\omega}_\alpha^\beta\right] = \left[a_k^\beta\right]^{-1} \left[X(a_\alpha^l)\right] + \left[a_k^\beta\right]^{-1} \left[\omega_l^k\right] \left[a_\alpha^l\right]. \tag{3.8}$$

Como $\left[a_k^\beta\right] = \left[a_\alpha^l\right] = A$, $\omega = \left[\omega_l^k\right]$ e, pela definição de diferencial exterior, $df(X) = X(f)$ temos

$$\tilde{\omega} = \left[\tilde{\omega}_\alpha^\beta\right] = A^{-1} d(A) + A^{-1} \omega A \tag{3.9}$$

■

De forma analoga a forma conexão, se nós tivermos $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{R}$-álgebra, $\mathcal{M}$ um $\mathcal{A}$-módulo livre de posto finito N e ∇ uma conexão em $\mathcal{M}$, como ∇ é definida na base de $\mathcal{M}$, podemos também definir o operador curvatura em tal base. Vimos anteriormente que

$$K^{\nabla}(X,\, Y,\, s_{\alpha}) = \sum_{\beta=1}^{N} K_{\alpha}^{\beta}(X,\, Y)(s_{\beta}), \tag{3.10}$$

satisfaz

$$K_{\alpha}^{\beta}(X,\, Y) = -K_{\alpha}^{\beta}(Y,\, X) \tag{3.11}$$

$$K_{\alpha}^{\beta}(\lambda X,\, Y) = \lambda K_{\alpha}^{\beta}(X,\, Y), \quad com \quad \lambda \in \mathcal{A}. \tag{3.12}$$

Assim temos que cada $K_{\alpha}^{\beta} \in \Omega_{\mathcal{A}}^{2}$, o $\mathcal{A}$-módulo das 2-formas diferenciais de $\mathcal{A}$. Logo, podemos formar a matriz associada ao operador curvatura K e a denotaremos por

$$K^{\nabla} = \left[(K^{\nabla})_{\alpha}^{\beta}\right] \tag{3.13}$$

Chamaremos a matriz $\left[(K^{\nabla})_{\alpha}^{\beta}\right] \in M_{N\times N}(\Omega_{\mathcal{A}}^{2})$ *a forma curvatura associada à conexão* ∇. Quando não houver ambiguidade denotaremos K^{∇} simplesmente por K.

Agora estudaremos a relação existente entre a forma conexão e a forma curvatura.

Proposição 3.3. *Seja $\mathcal{M}$ um $\mathcal{A}$-módulo livre de posto finito N. Dadas uma forma conexão $\left[(\omega^{\nabla})_{j}^{i}\right] = \omega$ e uma forma curvatura $\left[(K^{\nabla})_{j}^{i}\right] = K$ na mesma base $\{s_1, ..., s_N\}$, elas estão relacionadas por*

$$K = d\omega + \omega \wedge \omega \tag{3.14}$$

isto é, para cada entrada da forma curvatura temos,

$$K_{j}^{i} = d\omega_{j}^{i} + \sum_{k=1}^{N} \omega_{k}^{i} \wedge \omega_{j}^{k} \tag{3.15}$$

Demonstração. Da definição da forma curvatura temos

$$K^{\nabla}(X,\, Y,\, s_{j}) = \sum_{i=1}^{N} K_{j}^{i}(X,\, Y)(s_{i}) \tag{3.16}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
K(X,\,Y)(s_j) &= (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,\,Y]})s_j\\
&= \nabla_X\left(\sum_{i=1}^{N}\omega_j^i(Y)s_i\right) - \nabla_Y\left(\sum_{i=1}^{N}\omega_j^i(X)s_i\right) - \sum_{i=1}^{N}\omega_j^i([X,\,Y])s_i\\
&= \sum_{i=1}^{N}\nabla_X(\omega_j^i(Y)s_i) - \sum_{i=1}^{N}\nabla_Y(\omega_j^i(X)s_i) - \sum_{i=1}^{N}\omega_j^i([X,\,Y])s_i\\
&= \sum_{i=1}^{N}X(\omega_j^i(Y))s_i + \omega_j^i\nabla_X s_i - \sum_{i=1}^{N}Y(\omega_j^i(X))s_i + \omega_j^i\nabla_Y s_i - \sum_{i=1}^{N}\omega_j^i([X,\,Y])s_i\\
&= \sum_{i=1}^{N}X(\omega_j^i(Y))s_i + \sum_{i,k=1}^{N}\omega_j^k(Y))\omega_k^i(X)s_i - \sum_{i=1}^{N}Y(\omega_j^i(X))s_i\\
&- \sum_{i,k=1}^{N}\omega_j^k(X))\omega_k^i(Y)s_i
\end{aligned}$$

Agora lembramos, que da definição de produto exterior, temos

$$\omega_j^k \wedge \omega_k^i(X_1,\,X_2) = \sum_{\sigma} sgn\ \sigma\omega_j^k(X_{\sigma(1)})\omega_k^i(X_{\sigma(2)}). \tag{3.17}$$

Assim,

$$\omega_j^k \wedge \omega_k^i(X,\,Y) = (\omega_j^k(X)\omega_k^i(Y) - \omega_j^k(Y)\omega_k^i(X)). \tag{3.18}$$

Além disso,

$$d\omega_j^i(X,\,Y) = (X\omega_j^i(Y) - Y\omega_j^i(X) - \omega_j^i([X,\,Y])). \tag{3.19}$$

Logo,

$$K(X,\,Y)(s_j) = \sum_{i=1}^{N} d\omega_j^i(X,\,Y)s_i + \sum_{i,k=1}^{N}\omega_j^k \wedge \omega_k^i(X,\,Y)s_i, \tag{3.20}$$

donde

$$\sum_{i=1}^{N}K_j^i(X,\,Y)(s_i) = \sum_{i=1}^{N}\{d\omega_j^i(X,\,Y) + \sum_{k=1}^{N}\omega_j^k \wedge \omega_k^i(X,\,Y)\}s_i. \tag{3.21}$$

Assim

$$K_j^i = d\omega_j^i + \sum_{k=1}^{N}\omega_k^i \wedge \omega_j^k \tag{3.22}$$

■

Da mesma forma que foi feito para a forma conexão, estudaremos a relação existente entre as formas curvaturas quando a definimos em bases diferentes de $\mathcal{M}$. A próxima proposição mostra como se relacionam as formas curvaturas quando definidas em bases diferentes do mesmo módulo. O mais curioso é que a expressão que relaciona tais formas além de ser mais fácil que a da conexão, tem um aspecto bastante familiar.

Proposição 3.4. *Sejam $\{s_1, ..., s_N\}$ e $\{t_1, ..., t_N\}$ bases distintas do $\mathcal{A}$-módulo livre $\mathcal{M}$. Se K denota a forma curvatura na base $\{s_i\}_{i=1}^N$ e $\tilde{K}$ denota a forma curvatura na base $\{t_i\}_{i=1}^N$ então*

$$\tilde{K} = A^{-1}KA, \tag{3.23}$$

onde A é a matriz

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_N^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^N & \cdots & a_N^N \end{bmatrix}$$

tal que $t_\alpha = \sum_{\beta=1}^N a_\alpha^\beta s_\beta$.

Demonstração. Observe primeiramente que no enunciado do teorema acima, funções e 1-formas aparecem como matrizes, mas suas diferenciais exteriores podem ser facilmente manuseadas por suas regras usuais. Assim se $A^{-1}A = I$, onde I é a matriz identidade, então aplicando a diferencial exterior em ambos os membros temos

$$\begin{aligned} d(A^{-1}dA) &= dA^{-1} \wedge dA + A^{-1}d(dA) \\ &= dA^{-1} \wedge dA \\ &= -A^{-1}dAA^{-1} \wedge dA \\ &= -A^{-1}dA \wedge A^{-1}dA \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega} &= d(A^{-1}dA) + d(A^{-1}\omega A) \\ &= -A^{-1}dA \wedge A^{-1}dA + dA^{-1} \wedge \omega A + A^{-1}d\omega A + A^{-1}\omega \wedge dA \end{aligned}$$

Como $\tilde{K} = d\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}$ temos,

$$\begin{aligned}
\tilde{K} &= -A^{-1}dA \wedge A^{-1}dA + dA^{-1} \wedge \omega A + A^{-1}d\omega A + A^{-1}\omega \wedge dA + \\
&\quad (A^{-1}dA + A^{-1}\omega A) \wedge (A^{-1}dA + A^{-1}\omega A) \\
&= -A^{-1}dA \wedge A^{-1}dA + dA^{-1} \wedge \omega A + A^{-1}d\omega A + A^{-1}\omega \wedge dA + \\
&\quad A^{-1}dA \wedge A^{-1}dA + A^{-1}dA \wedge A^{-1}\omega A + A^{-1}\omega A \wedge A^{-1}dA + A^{-1}\omega A \wedge A^{-1}\omega A \\
&= -A^{-1}dA \wedge A^{-1}dA - A^{-1}dAA_1 \wedge \omega A + A^{-1}d\omega A + A^{-1}\omega \wedge dA \\
&\quad +A^{-1}dA \wedge A^{-1}dA + A^{-1}dA \wedge A^{-1}\omega A + A^{-1}\omega A \wedge A^{-1}dA + A^{-1}\omega A \wedge A^{-1}\omega A.
\end{aligned}$$

Observe que o primeiro e o quinto termo se cancelam, temos também que $A^{-1}dAA^{-1} \wedge \omega A$ $= A^{-1}dA \wedge A^{-1}\omega A$. Assim, o segundo e o sexto termo se cancelam. Pelo mesmo motivo, o quarto e o sétimo termo também se cancelam. Logo, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{K} &= -A^{-1}d\omega A + A{-}1\omega A \wedge A^{-1}\omega A \\
&= (A^{-1}d\omega + A^{-1}\omega \wedge A^{-1}\omega)A \\
&= A^{-1}(d\omega + \omega \wedge \omega)A.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\tilde{K} = A^{-1}KA \tag{3.24}$$

■

Observe ainda que do resultado anterior temos

$$\begin{aligned}
(\tilde{K})^{\alpha} &= (A^{-1}KA)^{\alpha} \\
&= (A^{-1}KA)(A^{-1}KA)...(A^{-1}KA).
\end{aligned}$$

Como $A^{-1}A = I$, tem-se que

$$\tilde{K}^{\alpha} = A^{-1}K^{\alpha}A. \tag{3.25}$$

Isso mesmo: a forma curvatura se comporta como um operador linear. Desta forma, como o traço de uma matriz é invariante por mudança de base temos que

$$Tr(\tilde{K}^{\alpha}) = Tr(K^{\alpha}) \ \in \Omega^{2\alpha}_{\mathcal{A}}. \tag{3.26}$$

Observação 3.1. A identidade acima é a chave para definir Classes de Chern para fibrados vetoriais complexos, nesta direção, é importante observar que se ∇ e $\tilde{\nabla}$ são duas conexões para o fibrado E, então

$$Tr(\tilde{K}^{\alpha}) - Tr(K^{\alpha}) \cong d(\omega), \quad \omega \in \Omega_{\mathcal{A}}^{2\alpha-1} \quad \alpha = 1, ..., N$$

isto é, as classes de cohomologia de DeRhan são as mesmas. Exceto por um fator de normalização, $[Tr(K^{\alpha})]$ é a $ch^{\alpha}(E)$, no caso em que E é um fibrado complexo.

Neste último parágrafo vamos desenvolver uma expressão para a curvatura K associada a conexão ∇ para o caso em que o módulo que estamos trabalhando é livre e de posto finito m e $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ é um $\mathcal{A}$-módulo livre e de posto finito N com base $\{\partial_1, ..., \partial_N\}$. Tal expressão é importante do ponto de vista computacional, e é dada em termos dos coeficientes da conexão. Vamos assumir que $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Assim, se $\mathcal{M}$ é um $\mathcal{A}$-módulo livre de posto m com base $\{s_1, ..., s_m\}$, então

$$\begin{aligned}
K^{\nabla}(\partial_i, \partial_j, s_\alpha) &= \left[\nabla_{\partial_i}, \nabla_{\partial_j}\right] s_\alpha - \nabla_{[\partial_i, \partial_j]} s_\alpha \\
&= \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} s_\alpha - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} s_\alpha \\
&= \nabla_{\partial_i} \left(\sum_{\beta=1}^{m} \omega_\alpha^\beta(\partial_j) s_\beta \right) - \nabla_{\partial_j} \left(\sum_{\beta=1}^{m} \omega_\alpha^\beta(\partial_i) s_\beta \right) \\
&= \sum_{\beta=1}^{m} \nabla_{\partial_i} \left(\omega_\alpha^\beta(\partial_j) s_\beta \right) - \sum_{\beta=1}^{m} \nabla_{\partial_j} \left(\omega_\alpha^\beta(\partial_i) s_\beta \right) \\
&= \sum_{\beta=1}^{m} \partial_i \left(\omega_\alpha^\beta(\partial_j) s_\beta \right) + \omega_\alpha^\beta(\partial_j) \nabla_{\partial_i} s_\beta - \left(\sum_{\beta=1}^{m} (\partial_j \left(\omega_\alpha^\beta(\partial_i) s_\beta \right) + \omega_\alpha^\beta(\partial_i) \nabla_{\partial_j} s_\beta \right) \\
&= \sum_{\beta=1}^{m} (\partial_i(\omega_\alpha^\beta(\partial_j)) - \partial_j(\omega_\alpha^\beta(\partial_i))) s_\beta + \sum_{\beta=1}^{m} \omega_\alpha^\beta(\partial_j) \nabla_{\partial_i} s_\beta - \sum_{\beta=1}^{m} \omega_\alpha^\beta(\partial_i) \nabla_{\partial_j} s_\beta \\
&= \sum_{\beta=1}^{m} (\partial_i(\omega_\alpha^\beta(\partial_j)) - \partial_j(\omega_\alpha^\beta(\partial_i))) s_\beta \\
&+ \sum_{\beta=1}^{m} \sum_{\gamma=1}^{m} \omega_\alpha^\beta(\partial_j) \omega_\beta^\gamma(\partial_i) s_\gamma - \sum_{\beta=1}^{m} \sum_{\gamma=1}^{m} \omega_\alpha^\beta(\partial_i) \omega_\beta^\gamma(\partial_j) s_\gamma \\
&= \sum_{\beta=1}^{m} (\partial_i(\omega_\alpha^\beta(\partial_j)) - \partial_j(\omega_\alpha^\beta(\partial_i))) s_\beta + \sum_{\gamma=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{m} (\omega_\alpha^\gamma(\partial_j) \omega_\gamma^\beta(\partial_i) - \omega_\alpha^\gamma(\partial_i) \omega_\gamma^\beta(\partial_j)) s_\beta.
\end{aligned}$$

Logo, temos

$$K_{ij\alpha}^{\beta} = \partial_i(\omega_\alpha^\beta(\partial_j)) - \partial_j(\omega_\alpha^\beta(\partial_i)) + \sum_{\gamma=1}^{m} \omega_\alpha^\gamma(\partial_j) \omega_\gamma^\beta(\partial_i) - \omega_\alpha^\gamma(\partial_i) \omega_\gamma^\beta(\partial_j). \tag{3.27}$$

Quando $\mathcal{A} = C_U^\infty$ onde U é uma variedade Riemanniana, denotamos $K_{ij\alpha}^k$ por $R_{ij\alpha}^k$ e K^∇ por R^∇, em homenagem a Riemann. Dentre os coeficientes $R_{ij\alpha}^k$ existem alguns especiais dos quais trataremos a seguir.

Definição 3.2. *Seja (U, g) uma variedade riemanniana de dimensão pelo menos 2, $p \in U$ e $\sigma \subset T_pU$ um subespaço bidimensional. Seja $\{\partial_1, ..., \partial_n\}$ base de T_pU e $\{\partial_i, \partial_j\}$ uma base de σ. Então definimos a* **curvatura seccional** *de σ em p denotada por $s_p(\partial_i, \partial_j) = s_p(\sigma)$, o valor*

$$s_p(\sigma) = \frac{g(R^\nabla(\partial_i, \partial_j)\partial_i, \partial_j)}{(|\partial_i \wedge \partial_j|)^2} \tag{3.28}$$

onde $|\partial_i \wedge \partial_j|^2 = \sqrt{|\partial_i|\,|\partial_j| - g(\partial_i,\, \partial_j)}$.

Pode-se mostrar que o valor $s_p(\sigma)$ depende apenas de σ e não da particular escolha da base de T_pU e em particular de σ, e que o conhecimento de $s(\sigma)$, $\forall\ \sigma$ determina completamente a curvatura R (ver [3] para um tratamento particular do módulo $\Gamma(TU)$ onde U é uma Variedade Riemanniana). No caso especial de uma 2-variedade Riemanniana, existe um único tal subespaço e consequentemente uma única curvatura seccional para cada p, de fato, tomando $\{\partial_1, \partial_2\}$ base ortonormal temos,

$$s_p(\partial_1, \partial_2) = g(R^\nabla(\partial_1, \partial_2)\partial_1, \partial_2) = R_{121}^2. \tag{3.29}$$

Além disso, se $U \subset \mathbb{R}^3$ é uma variedade de dimensão 2 com a métrica induzida, então a curvatura Gaussiana e a curvatura seccional coincidem (ver [6] exercicio 21 cap 9).

3.1 Alguns exemplos

Nesta seção faremos algumas aplicações da teoria desenvolvida nos capítulos anteriores. Iniciaremos então com o seguinte exemplo.

Exemplo 3.1. Seja $H^+ = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Como H^+ é um aberto de $\mathbb{R}^2$ consideremos o conjunto das funções C^∞ em H^+. É sabido (ver [14]) que o conjunto $\mathcal{D}_{C^\infty(H^+)}$ é um $C^\infty(H^+)$-módulo livre de posto 2 com base $\{\partial_1, \partial_2\}$, onde

$$(\partial_i\varphi)_p = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_p = \lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(p+t) - \varphi(p)}{t}. \tag{3.30}$$

Vamos agora definir uma conexão em $\mathcal{D}_{C^\infty_{(H^+)}}$ e calcular a curvatura associada a esta conexão. Para isso, como $\mathcal{D}_{C^\infty_{(H^+)}}$ é um módulo livre, vimos no capítulo II que para definir uma conexão em $\mathcal{D}_{C^\infty_{(H^+)}}$ basta dizer quanto ela vale na base do módulo. Assim definimos

$$\nabla : \mathcal{D}_{C^\infty_{(H^+)}} \times \mathcal{D}_{C^\infty_{(H^+)}} \longrightarrow \mathcal{D}_{C^\infty_{(H^+)}}$$

$$\nabla_X \partial_1 = 2x\partial_1, \nabla_X \partial_2 = x\partial_1 + y\partial_2. \tag{3.31}$$

Como a matriz ω associada à conexão ∇ é tal que $\omega \in M_{n\times n}(\Omega^1_{C^\infty(H^+)})$, cada entrada é uma 1-forma diferencial em H^+. Então, por simplicidade, trocando a notação dx_1 por dx e dx_2 por dy, temos

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= adx + bdy \\ \omega_1^2 &= cdx + ddy \\ \omega_2^1 &= edx + fdy \\ \omega_2^2 &= gdx + bdy. \end{aligned}$$

Como $\nabla_X \partial_i = \sum_{j=1}^{2} \omega_i^j(X)\partial_j$, então

$$\begin{aligned} \nabla_X \partial_1 &= \omega_1^1(X)\partial_1 + \omega_1^2(X)\partial_2 \\ \nabla_X \partial_2 &= \omega_2^1(X)\partial_1 + \omega_2^2(X)\partial_2. \end{aligned}$$

Calculemos então as funções a, b, c, d, e, f, g e h. Temos que

$$\nabla_X \partial_1 = 2x\partial_1 = \omega_1^1(X)\partial_1 + \omega_1^2(X)\partial_2, \tag{3.32}$$

donde segue-se diretamente que $\omega_1^2 = 0$. Logo $c = d = 0$. No entanto, temos

$$2x = \omega_1^1(X) = adx(X) + bdy(X). \tag{3.33}$$

Então, para determinar a e b calculamos $\omega_1^1(\partial_1)$ e $\omega_1^1(\partial_2)$. Assim,

$$\omega_1^1(\partial_1) = adx(\partial_1) + bdy(\partial_1). \tag{3.34}$$

Como $\{dx,\, dy\}$ é base dual de $\{\partial_1, \partial_2\}$ então $dx_i(\partial_j) = \delta_{ij}$. Desta forma, temos

$$2(1) = \nabla_{\partial_1}\partial_1 = \omega_1^1(\partial_1) = a \Longrightarrow a = 2. \tag{3.35}$$

Da mesma forma temos

$$\omega_1^1(\partial_2) = adx(\partial_2) + bdy(\partial_2), \tag{3.36}$$

e assim

$$0 = \nabla_{\partial_2}\partial_1 = \omega_1^1(\partial_2) = b \Longrightarrow b = 0. \tag{3.37}$$

Agora,

$$\nabla_X\partial_2 = x\partial_1 + y\partial_2 = \omega_2^1(X)\partial_1 + \omega_2^2(X)\partial_2. \tag{3.38}$$

Logo $x = \omega_1^2(X)$ e $y = \omega_2^2(X)$. Assim,

$$x = \omega_1^2(X) = ed(X) + fdy(X), \tag{3.39}$$

donde temos que $e = \omega_2^1(\partial_1) = 1$ e $f = \omega_2^1(\partial_2) = 0$. Além disso, de

$$y = \omega_2^2(X) = gd(X) + hdy(X), \tag{3.40}$$

temos que $g = \omega_2^2(\partial_1) = 0$ e $h = \omega_2^2(\partial_2) = 1$. Portanto, a matriz associada à conexão ∇ é

$$\omega = \begin{bmatrix} 2dx & dx \\ & \\ 0 & dy \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

Vamos calcular agora a matriz curvatura. Lembramos que

$$K = d\omega + \omega \wedge \omega. \tag{3.42}$$

Como

$$\omega \wedge \omega = \begin{bmatrix} 2dx & dx \\ & \\ 0 & dy \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2dx & dx \\ & \\ 0 & dy \end{bmatrix} = \tag{3.43}$$

$$= \begin{bmatrix} 4dx \wedge dx + 0 & 2dx \wedge dx + dx \wedge dy \\ & \\ 0 & dy \wedge dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & dx \wedge dy \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

e

$$d\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

então

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & dx \wedge dy \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & dx \wedge dy \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

Exemplo 3.2. Agora vamos calcular a matriz da conexão de Levi-Civita em $\mathcal{D}_{C^{\infty}_{H^+}}$, onde a métrica g será dada por

$$g(\partial_1,\, \partial_1) = g(\partial_2,\, \partial_2) = \frac{1}{y^2} \quad e \quad g(\partial_1,\, \partial_2) = g(\partial_2,\, \partial_1) = 0.$$

Observe que para determinar a matriz da conexão, por $\mathcal{D}_{C^{\infty}_{H^+}}$ ser um módulo livre de posto 2, deveremos detrerminar os coeficientes da conexão. Estes coeficientes aparecem quando escrevemos os valores de $\nabla^g_{\partial_i}\partial_j$ na base do módulo. Assim temos

$$\begin{aligned} \nabla^g_{\partial_1}\partial_1 &= \omega^1_{11}\partial_1 + \omega^2_{11}\partial_2 \\ \nabla^g_{\partial_1}\partial_2 &= \omega^1_{12}\partial_1 + \omega^2_{12}\partial_2 \\ \nabla^g_{\partial_2}\partial_1 &= \omega^1_{21}\partial_1 + \omega^2_{21}\partial_2 \\ \nabla^g_{\partial_2}\partial_2 &= \omega^1_{22}\partial_1 + \omega^2_{22}\partial_2 \end{aligned}$$

Agora, pelo teorema de Levi-Civita, a conexão a ser determinada deve satisfazer as condições de simetria e compatibilidade com a métrica, isto é,

(i) $\nabla^g_X Y$ - $\nabla^g_Y X = [X,\, Y]$

(ii) $Xg(Y,\, Z) = g(\nabla^g_X Y,\, Z) + g(Y,\, \nabla^g_X Z)$

Desta forma temos que

(i) $\nabla^g_{\partial_i}\partial_j$ - $\nabla^g_{\partial_j}\partial_i = [\partial_i,\, \partial_j]$

(ii) $\partial_i g(\partial_j,\, \partial_k) = g(\nabla^g_{\partial_i}\partial_j,\, \partial_k) + g(\partial_j,\, \nabla^g_{\partial_i}\partial_k)$

Então vamos aos cálculos. Temos que

$$\partial_1 g(\partial_1,\, \partial_1) = \partial_1(\frac{1}{y^2}) = 0 \tag{3.47}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla^g_{\partial_1}\partial_1,\, \partial_1) + g(\partial_1,\, \nabla^g_{\partial_1}\partial_1) \\ &\Longrightarrow 2g(\nabla^g_{\partial_1}\partial_1,\, \partial_1) = 0 \\ &\Longrightarrow g(\omega^1_{11}\partial_1 + \omega^2_{11}\partial_2,\, \partial_1) = 0 \\ &\Longrightarrow g(\omega^1_{11}\partial_1,\, \partial_1) + g(\omega^2_{11}\partial_2,\, \partial_1) = 0 \\ &\Longrightarrow \omega^1_{11} g(\partial_1,\, \partial_1) + \omega^2_{11} g(\partial_2,\, \partial_1) = 0 \\ &\Longrightarrow \omega^1_{11}(\frac{1}{y^2}) = 0 \end{aligned}$$

Logo, $\omega^1_{11} = 0$. Da mesma forma,

$$\partial_2 g(\partial_1,\, \partial_1) = \partial_2(\frac{1}{y^2}) = -\frac{2}{y^3} \tag{3.48}$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\frac{2}{y^3} &= g(\nabla^g_{\partial_2}\partial_1,\, \partial_1) + g(\partial_1,\, \nabla^g_{\partial_2}\partial_1) \\ &\Longrightarrow 2g(\nabla^g_{\partial_2}\partial_1,\, \partial_1) = -\frac{2}{y^3} \\ &\Longrightarrow g(\omega^1_{21}\partial_1 + \omega^2_{21}\partial_2,\, \partial_1) = -\frac{1}{y^3} \\ &\Longrightarrow g(\omega^1_{21}\partial_1,\, \partial_1) + g(\omega^2_{21}\partial_2,\, \partial_1) = -\frac{1}{y^3} \\ &\Longrightarrow \omega^1_{21} g(\partial_1,\, \partial_1) + \omega^2_{21} g(\partial_2,\, \partial_1) = -\frac{1}{y^3} \\ &\Longrightarrow \omega^1_{21}\left(\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{y^3} \end{aligned}$$

Logo $\omega^1_{21} = -\frac{1}{y}$. Antes de continuar façamos a seguinte observação: Como $g(\partial_j,\, \partial_k) = g(\partial_k,\, \partial_j)$, então, $\partial_1 g(\partial_j,\, \partial_k) = \partial_1 g(\partial_k,\, \partial_j)$, o que reduz um pouco nosso trabalho. Como

$$\partial_1 g(\partial_1,\, \partial_2) = \partial_1(0) = 0, \tag{3.49}$$

temos

$$\begin{aligned}
0 &= g(\nabla^g_{\partial_1}\partial_1,\, \partial_2) + g(\partial_1,\, \nabla^g_{\partial_1}\partial_2) \\
&\Longrightarrow g(\omega^1_{11}\partial_1 + \omega^2_{11}\partial_2,\, \partial_2) + g(\partial_1,\, \omega^1_{12}\partial_1 + \omega^2_{12}\partial_2) = 0 \\
&\Longrightarrow \omega^1_{11} g(\partial_1,\, \partial_2) + \omega^2_{11} g(\partial_2,\, \partial_2) + \omega^1_{12} g(\partial_1,\, \partial_1) + \omega^2_{12} g(\partial_1,\, \partial_2) = 0 \\
&\Longrightarrow \omega^2_{11}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \omega^1_{12}\left(\frac{1}{y^2}\right) = 0 \\
&\Longrightarrow \left(\frac{1}{y^2}\right)(\omega^2_{11} + \omega^1_{12}) = 0 \\
&\Longrightarrow \omega^2_{11} + \omega^1_{12} = 0
\end{aligned}$$

Logo, $\omega^2_{11} = -\omega^1_{12}$. Continuando,

$$\partial_2 g(\partial_1,\, \partial_2) = \partial_2(0) = 0, \tag{3.50}$$

temos

$$\begin{aligned}
0 &= g(\nabla^g_{\partial_2}\partial_1,\, \partial_2) + g(\partial_1,\, \nabla^g_{\partial_2}\partial_2) \\
&\Longrightarrow g(\omega^1_{21}\partial_1 + \omega^2_{21}\partial_2,\, \partial_2) + g(\partial_1,\, \omega^1_{22}\partial_1 + \omega^2_{22}\partial_2) = 0 \\
&\Longrightarrow \omega^1_{21} g(\partial_1,\, \partial_2) + \omega^2_{21} g(\partial_2,\, \partial_2) + \omega^1_{22} g(\partial_1,\, \partial_1) + \omega^2_{22} g(\partial_1,\, \partial_2) = 0 \\
&\Longrightarrow \omega^2_{21}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \omega^1_{22}\left(\frac{1}{y^2}\right) = 0 \\
&\Longrightarrow \left(\frac{1}{y^2}\right)(\omega^2_{21} + \omega^1_{22}) = 0 \\
&\Longrightarrow \omega^2_{21} + \omega^1_{22} = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\omega^2_{21} = -\omega^1_{22}$.

$$\partial_2 g(\partial_2,\, \partial_2) = \partial_2(\frac{1}{y^2}) = -\frac{2}{y^3}. \tag{3.51}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
-\frac{2}{y^3} &= g(\nabla^g_{\partial_2}\partial_2,\, \partial_2) + g(\partial_2,\, \nabla^g_{\partial_2}\partial_2) \\
&\Longrightarrow 2g(\nabla^g_{\partial_2}\partial_2,\, \partial_2) = -\frac{2}{y^3} \\
&\Longrightarrow g(\omega^1_{22}\partial_1 + \omega^2_{22}\partial_2,\, \partial_2) = -\frac{1}{y^3} \\
&\Longrightarrow g(\omega^1_{22}\partial_1,\, \partial_2) + g(\omega^2_{22}\partial_2,\, \partial_2) = -\frac{1}{y^3} \\
&\Longrightarrow \omega^1_{22} g(\partial_1,\, \partial_2) + \omega^2_{22} g(\partial_2,\, \partial_2) = -\frac{1}{y^3} \\
&\Longrightarrow \omega^2_{22}(\frac{1}{y^2}) = -\frac{1}{y^3}.
\end{aligned}
$$

Logo $\omega^2_{22} = -\frac{1}{y}$. Finalmente,

$$
\partial_1 g(\partial_2,\, \partial_2) = \partial_1(\frac{1}{y^2}) = 0 \tag{3.52}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
0 &= g(\nabla^g_{\partial_1}\partial_2,\, \partial_2) + g(\partial_2,\, \nabla^g_{\partial_1}\partial_2) \\
&\Longrightarrow 2g(\nabla^g_{\partial_1}\partial_2,\, \partial_2) = 0 \\
&\Longrightarrow g(\omega^1_{12}\partial_1 + \omega^2_{12}\partial_2,\, \partial_2) = 0 \\
&\Longrightarrow g(\omega^1_{12}\partial_1,\, \partial_2) + g(\omega^2_{12}\partial_2,\, \partial_2) = 0 \\
&\Longrightarrow \omega^1_{12} g(\partial_1,\, \partial_2) + \omega^2_{12} g(\partial_2,\, \partial_2) = 0 \\
&\Longrightarrow \omega^2_{12}\left(\frac{1}{y^2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Logo, $\omega^2_{12} = 0$. Elencando os resultados encontrados temos

$$
\omega^1_{11} = 0; \quad \omega^2_{11} = -\omega^1_{12}; \quad \omega^2_{12} = 0 \quad ; \omega^2_{21} = -\omega^1_{22}; \quad \omega^2_{22} = -\tfrac{1}{y}.
$$

Usando a hipótese da simetria da conexão,

$$
\nabla^g_{\partial_1}\partial_2 - \nabla^g_{\partial_2}\partial_1 = [\partial_1,\, \partial_2], \tag{3.53}
$$

e como $[\partial_1,\, \partial_2] = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\omega_{12}^1\partial_1 + \omega_{12}^2\partial_2 - \omega_{21}^1\partial_1 - \omega_{21}^2\partial_2 &= 0\\
\omega_{12}^1\partial_1 + \omega_{12}^2\partial_2 &= \omega_{21}^1\partial_1 + \omega_{21}^2\partial_2,
\end{aligned}$$

donde segue-se que $\omega_{12}^1 = \omega_{21}^1$ e $\omega_{12}^2 = \omega_{21}^2$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
\omega_{11}^1 = 0;\quad \omega_{11}^2 = \tfrac{1}{y};\quad \omega_{12}^1 = -\tfrac{1}{y}&\\
\omega_{12}^2 = 0;\quad \omega_{21}^1 = -\tfrac{1}{y};\quad \omega_{21}^2 = 0;&\\
\omega_{22}^1 = 0;\quad \omega_{22}^2 = -\tfrac{1}{y}&
\end{aligned}$$

Assim como foi feito no exemplo anterior, vamos agora encontrar a matriz de 1-formas da conexão. Para isso vamos utilizar os coeficientes encontrados da seguinte forma. Como temos

$$\begin{aligned}
\nabla_X^g\partial_1 &= \omega_1^1(X)\partial_1 + \omega_1^2(X)\partial_2\\
\nabla_X^g\partial_2 &= \omega_2^1(X)\partial_1 + \omega_2^2(X)\partial_2,
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_1}^g\partial_1 &= \omega_1^1(\partial_1)\partial_1 + \omega_1^2(\partial_1)\partial_2\\
\nabla_{\partial_2}^g\partial_1 &= \omega_1^1(\partial_2)\partial_1 + \omega_1^2(\partial_2)\partial_2\\
\nabla_{\partial_1}^g\partial_2 &= \omega_2^1(\partial_1)\partial_1 + \omega_2^2(\partial_1)\partial_2\\
\nabla_{\partial_2}^g\partial_2 &= \omega_2^1(\partial_2)\partial_1 + \omega_2^2(\partial_2)\partial_2
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_1}^g\partial_1 &= \omega_{11}^1\partial_1 + \omega_{11}^2\partial_2\\
\nabla_{\partial_2}^g\partial_1 &= \omega_{21}^1\partial_1 + \omega_{21}^2\partial_2\\
\nabla_{\partial_1}^g\partial_2 &= \omega_{12}^1\partial_1 + \omega_{12}^2\partial_2\\
\nabla_{\partial_2}^g\partial_2 &= \omega_{22}^1\partial_1 + \omega_{22}^2\partial_2
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla^g_{\partial_1}\partial_1 &= \omega^1_1(\partial_1)\partial_1 + \omega^2_1(\partial_1)\partial_2 &&= \omega^1_{11}\partial_1 + \omega^2_{11}\partial_2\\
\nabla^g_{\partial_2}\partial_1 &= \omega^1_1(\partial_2)\partial_1 + \omega^2_1(\partial_2)\partial_2 &&= \omega^1_{21}\partial_1 + \omega^2_{21}\partial_2\\
\nabla^g_{\partial_1}\partial_2 &= \omega^1_2(\partial_1)\partial_1 + \omega^2_2(\partial_1)\partial_2 &&= \omega^1_{12}\partial_1 + \omega^2_{12}\partial_2\\
\nabla^g_{\partial_2}\partial_2 &= \omega^1_2(\partial_2)\partial_1 + \omega^2_2(\partial_2)\partial_2 &&= \omega^1_{22}\partial_1 + \omega^2_{22}\partial_2
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\omega^1_{11} &= \omega^1_1(\partial_1) &&= adx(\partial_1) + bdy(\partial_1) &&\Longrightarrow a = \omega^1_{11} = 0\\
\omega^2_{11} &= \omega^2_1(\partial_1) &&= cdx(\partial_1) + ddy(\partial_1) &&\Longrightarrow c = \omega^2_{11} = \tfrac{1}{y}\\
\omega^1_{21} &= \omega^1_1(\partial_2) &&= adx(\partial_2) + bdy(\partial_2) &&\Longrightarrow b = \omega^1_{21} = -\tfrac{1}{y}\\
\omega^2_{21} &= \omega^2_1(\partial_2) &&= cdx(\partial_2) + ddy(\partial_2) &&\Longrightarrow d = \omega^2_{21} = 0\\
\omega^1_{12} &= \omega^1_2(\partial_1) &&= edx(\partial_1) + fdy(\partial_1) &&\Longrightarrow e = \omega^1_{12} = -\tfrac{1}{y}\\
\omega^2_{12} &= \omega^2_2(\partial_1) &&= gdx(\partial_1) + hdy(\partial_1) &&\Longrightarrow g = \omega^2_{12} = 0\\
\omega^1_{22} &= \omega^1_2(\partial_2) &&= edx(\partial_2) + fdy(\partial_2) &&\Longrightarrow f = \omega^1_{22} = 0\\
\omega^2_{22} &= \omega^2_2(\partial_2) &&= gdx(\partial_2) + hdy(\partial_2) &&\Longrightarrow h = \omega^2_{22} = -\tfrac{1}{y}.
\end{aligned}$$

Então a matriz da conexão de Levi-Civita tem a forma

$$\omega^g = \begin{bmatrix} -\frac{1}{y}dy & -\frac{1}{y}dx \\ \\ \frac{1}{y}dx & -\frac{1}{y}dy \end{bmatrix}. \tag{3.54}$$

Observe que a matriz encontrada não é anti-simétrica. De fato, isso só ocorre quando a base do módulo é ortonormal na métrica, ou seja,

$$g(\partial_1,\, \partial_1) = g(\partial_2,\, \partial_2) = 1 \quad e \quad g(\partial_1,\, \partial_2) = g(\partial_2,\, \partial_1) = 0.$$

Observe que se definimos as matrizes

$$\omega^1_{ji} = \begin{bmatrix} \omega^1_{11} & \omega^1_{21} \\ \\ \omega^1_{12} & \omega^1_{22} \end{bmatrix} \quad \omega^2_{ji} = \begin{bmatrix} \omega^2_{11} & \omega^2_{21} \\ \\ \omega^2_{12} & \omega^2_{22} \end{bmatrix}, \tag{3.55}$$

então obtemos a matriz da conexão tomando os produtos matriciais

$$(\omega^1_{ji})\,[dx \;\; dy]^t \quad (\omega^2_{ij})\,[dx \;\; dy]^t\,, \tag{3.56}$$

onde $((\omega^1_{ji})\,[dx \;\; dy]^t)^t$ é a 1ª linha da matriz e $((\omega^2_{ij})\,[dx \;\; dy]^t)^t$ a segunda. Vamos agora calcular a curvatura associada à conexão ∇^g. Temos que

$$K^{\nabla^g} = d\omega^g + \omega^g \wedge \omega^g \tag{3.57}$$

Assim, como

$$d\omega^g = \begin{bmatrix} \frac{1}{y^2}dy \wedge dy & \frac{1}{y^2}dy \wedge dx \\ -\frac{1}{y^2}dy \wedge dx & \frac{1}{y^2}dy \wedge dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{y^2}dx \wedge dy \\ \frac{1}{y^2}dx \wedge dy & 0 \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

e

$$\omega^g \wedge \omega^g = \begin{bmatrix} \frac{1}{y^2}dy \wedge dy + \frac{1}{y^2}dx \wedge dx & \frac{1}{y^2}dy \wedge dx + \frac{1}{y^2}dx \wedge dy \\ -\frac{1}{y^2}dx \wedge dy - \frac{1}{y^2}dy \wedge dx & -\frac{1}{y^2}dx \wedge dx + \frac{1}{y^2}dy \wedge dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.59}$$

então

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{y^2}dx \wedge dy \\ \frac{1}{y^2}dx \wedge dy & 0 \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

Agora vamos calcular a curvatura secional $s(g)$ na métrica g. Primeiramente escolhamos uma base ortonormal. Assim definindo $\tilde{\partial}_1 = y\partial_1$ e $\tilde{\partial}_2 = y\partial_2$ é fácil ver que

$$g(\tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_1) = 1, \quad g(\tilde{\partial}_2, \tilde{\partial}_2) = 1 \quad e \quad g(\tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2) = g(\tilde{\partial}_2, \tilde{\partial}_1) = 0 \tag{3.61}$$

Assim, temos que a base é ortonormal na métrica. Desta forma temos

$$s(\tilde{\partial}_2, \tilde{\partial}_1) = g(R(\tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2)\tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2) = g(R(y\partial_1, y\partial_2)y\partial_1, y\partial_2) = y^4 R^2_{121} g(\partial_2, \partial_2) = y^2 R^2_{121} \tag{3.62}$$

Assim, calculemos R^2_{121}.

$$\begin{aligned} R^2_{121} &= \partial_1(\omega_1^2(\partial_2)) - \partial_2(\omega_1^2(\partial_1)) + \omega_1^1(\partial_2)\omega_1^2(\partial_1) - \omega_1^1(\partial_1)\omega_1^2(\partial_2) \\ &+ \omega_1^2(\partial_2)\omega_2^2(\partial_1) - \omega_1^2(\partial_1)\omega_2^2(\partial_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) + \left(\frac{-1}{y}\right)\left(\frac{1}{y}\right) - 0 + 0 - \frac{1}{y}\left(\frac{-1}{y}\right) \\ &= \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2} \\ &= \frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

Desta forma,

$$s(\tilde{\partial}_2, \tilde{\partial}_1) = (y^2)R^2_{121} = (y^2)\frac{1}{y^2} = 1 \tag{3.63}$$

O próximo exemplo é de grande importância computacional, pois encontramos uma forma de calcular a curvatura seccional num módulo projetivo via um artifício bastante útil. Como vimos, módulos projetivos em geral não têm base. Nesses casos como calcularíamos a conexão de Levi-Civita e as curvaturas seccionais nesses módulos? Façamos então a seguinte observação. Se $f : M \longrightarrow N$ é um difeomorfismo, então a diferencial $f_* : TM \longrightarrow TN$ é um isomorfismo. Desse isomorfismo, podemos induzir um isomorfismo de álgebras entre $C^\infty(M)$ e $C^\infty(N)$ de tal forma que $Con(\Gamma(TM)) \cong Con(\Gamma(TN))$ por uma bijeção. Dessa forma, em virtude do isomorfismo das álgebras, as curvaturas seccionais das duas variedades coincidem. Vamos utilizar essa observação para encontrar a conexão de Levi-Civita no $C^\infty(S^2)$-módulo projetivo $\mathcal{D}_{C^\infty(S^2)}$.

Exemplo 3.3. Vamos calcular a conexão de Levi-Civita de S^2, com a métrica que iremos definir abaixo. Assim, seja

$$\psi : (0,\, 2\pi) \times (0, \pi) \quad \longrightarrow \quad S^2$$

onde

$$\psi(\theta,\, \phi) = (sen\phi cos\theta, sen\phi sen\theta, cos\phi) \tag{3.64}$$

Observe que esta aplicação cobre a esfera S^2 menos uma semi-circunferência que contém os polos norte e sul. Temos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = (-sen\phi sen\theta, sen\phi cos\theta, 0) \tag{3.65}$$

e

$$\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = (cos\phi cos\theta, cos\phi sen\theta, -sen\phi) \tag{3.66}$$

Agora, sendo $<,>$ o produto interno canônico do $\mathbb{R}^n$, temos que

$$\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right\rangle = sen^2\phi, \quad \left\langle \frac{\partial\psi}{\partial\phi}, \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \right\rangle = 1 \quad e \quad \left\langle \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \right\rangle = 0 \tag{3.67}$$

Assim fazendo $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial\theta}$ e $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial\phi}$, definimos a métrica g pondo

$$g(\partial_1, \partial_1) = sen^2\phi, \quad g(\partial_2, \partial_2) = 1 \quad e \quad g(\partial_1, \partial_2) = g(\partial_2, \partial_1) = 0 \tag{3.68}$$

Vamos então calcular a conexão de Levi-Civita associada a essa métrica no $\mathcal{A}$-módulo $D_{\mathcal{A}}$ onde $\mathcal{A} = C^{\infty}_{(0,\,2\pi)\times(0,\pi)}$. Seremos um pouco mais breve nos cálculos. Da compatibilidade com a métrica temos

$$\partial_i g(\partial_j, \partial_k) = g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) + g(\partial_j, \nabla_{\partial_i}\partial_k) \tag{3.69}$$

Escrevendo os coeficientes da conexão na base temos

$$\begin{array}{lcl} \nabla^g_{\partial_1}\partial_1 = \omega^1_1(\partial_1)\partial_1 + \omega^2_1(\partial_1)\partial_2 & ; & \nabla^g_{\partial_2}\partial_1 = \omega^1_1(\partial_2)\partial_1 + \omega^2_1(\partial_2)\partial_2 \\ \nabla^g_{\partial_1}\partial_2 = \omega^1_2(\partial_1)\partial_1 + \omega^2_2(\partial_1)\partial_2 & ; & \nabla^g_{\partial_2}\partial_2 = \omega^1_2(\partial_2)\partial_1 + \omega^2_2(\partial_2)\partial_2 \end{array}$$

assim,

$$\begin{array}{rcl} 0 = \partial_1 g(\partial_1, \partial_1) & = & 2g(\nabla_{\partial_1}\partial_1, \partial_1) \\ & \Longrightarrow & g(\omega^1_{11}\partial_1 + \omega^2_{11}\partial_2, \partial_1) = 0 \\ & \Longrightarrow & \omega^1_{11} g(\partial_1, \partial_1) + \omega^2_{11} g(\partial_2, \partial_1) = 0 \\ & \Longrightarrow & \omega^1_{11}(sen^2\phi) = 0 \end{array}$$

donde $\omega^1_{11} = 0$

$$\begin{array}{rcl} 0 = \partial_1 g(\partial_1, \partial_2) = \partial_1 g(\partial_2, \partial_1) & = & g(\nabla_{\partial_1}\partial_1, \partial_2) + g(\partial_1, \nabla_{\partial_1}\partial_2) \\ & \Longrightarrow & g(\omega^1_{11}\partial_1 + \omega^2_{11}\partial_2, \partial_2) + g(\partial_1, \omega^1_{12}\partial_1 + \omega^2_{12}\partial_2) = 0 \\ & \Longrightarrow & \omega^1_{11} g(\partial_1, \partial_2) + \omega^2_{11} g(\partial_2, \partial_2) + \omega^1_{12} g(\partial_1, \partial_1) + \omega^2_{12} g(\partial_1, \partial_2) = 0 \\ & \Longrightarrow & \omega^1_{12} = -\omega^1_{12}(sen^2\phi) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
0 = \partial_1 g(\partial_2, \partial_2) &= 2g(\nabla_{\partial_1}\partial_2, \partial_2) \\
&\Longrightarrow g(\omega_{12}^1\partial_1 + \omega_{12}^2\partial_2, \partial_2) = 0 \\
&\Longrightarrow \omega_{12}^1 g(\partial_1, \partial_1) + \omega_{12}^2 g(\partial_2, \partial_1) = 0 \\
&\Longrightarrow \omega_{12}^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2 g(\partial_1, \partial_1) &= \frac{\partial(sen^2\phi)}{\partial\phi} = 2sen\phi cos\phi = sen2\phi \\
&\Longrightarrow sen2\phi = g(\nabla_{\partial_2}\partial_1, \partial_1) \\
&\Longrightarrow g(\omega_{21}^1\partial_1 + \omega_{21}^2\partial_2, \partial_1) = \frac{sen2\phi}{2} \\
&\Longrightarrow \omega_{21}^1 g(\partial_1, \partial_1) + \omega_{21}^2 g(\partial_2, \partial_1) = \frac{sen2\phi}{2} \\
&\Longrightarrow \omega_{21}^1(sen^2\phi) = \frac{sen2\phi}{2} \\
&\Longrightarrow \omega_{21}^1 = \frac{2sen\phi cos\phi}{2sen^2\phi} = \frac{cos\phi}{sen\phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = \partial_2 g(\partial_1, \partial_2) = \partial_2 g(\partial_2, \partial_1) &= g(\nabla_{\partial_2}\partial_1, \partial_2) + g(\partial_1, \nabla_{\partial_2}\partial_2) \\
&\Longrightarrow g(\omega_{21}^1\partial_1 + \omega_{21}^2\partial_2, \partial_2) + g(\partial_1, \omega_{22}^1\partial_1 + \omega_{22}^2\partial_2) = 0 \\
&\Longrightarrow \omega_{21}^1 g(\partial_1, \partial_2) + \omega_{21}^2 g(\partial_2, \partial_2) + \omega_{22}^1 g(\partial_1, \partial_1) + \omega_{22}^2 g(\partial_1, \partial_2) = 0 \\
&\Longrightarrow \omega_{21}^2 = -\omega_{22}^1(sen^2\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = \partial_2 g(\partial_2, \partial_2) &= 2g(\nabla_{\partial_2}\partial_2, \partial_2) \\
&\Longrightarrow g(\omega_{22}^1\partial_1 + \omega_{22}^2\partial_2, \partial_2) = 0 \\
&\Longrightarrow \omega_{22}^1 g(\partial_1, \partial_2) + \omega_{22}^2 g(\partial_2, \partial_2) = 0 \\
&\Longrightarrow \omega_{22}^2(1) = 0
\end{aligned}$$

donde $\omega_{22}^2 = 0$. Da simetria da conexão temos $\omega_{12}^1 = \omega_{21}^1$ e $\omega_{12}^2 = \omega_{21}^2$. Logo

$$\begin{array}{llll} \omega_{11}^1 = 0 & ;\omega_{11}^2 = -cos\phi sen\phi & ;\omega_{12}^1 = \frac{cos\phi}{sen\phi} & ;\omega_{12}^2 = 0 \\ & \omega_{21}^1 = \frac{cos\phi}{sen\phi} & ;\omega_{21}^2 = 0 & ;\omega_{22}^1 = 0; \omega_{22}^2 = 0 \end{array}$$

Tomando as matrizes (ω_{ji}^1) e (ω_{ji}^2) temos

$$(\omega_{ji}^1) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{cos\phi}{sen\phi} \\ \\ \frac{cos\phi}{sen\phi} & 0 \end{bmatrix}, \quad (\omega_{ji}^2) = \begin{bmatrix} -cos\phi sen\phi & 0 \\ \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

então a matriz da conexão é

$$\omega = \begin{bmatrix} \frac{cos\phi}{sen\phi} d\phi & \frac{cos\phi}{sen\phi} d\theta \\ \\ -cos\phi sen\phi & 0 \end{bmatrix} \tag{3.71}$$

Vamos agora calcular a curvatura seccional $s(g)$. Definindo $\tilde{\partial}_1 = \frac{\partial_1}{sen\phi}$ e $\tilde{\partial}_2 = \partial_2$, é facil ver que a nova base é ortonormal na métrica. Logo,

$$s(\tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2) = g(R(\tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2)\tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2) = \frac{1}{sen^2\phi} R_{121}^2 g(\partial_2, \partial_2) \tag{3.72}$$

Calculando R_{121}^2, temos

$$\begin{array}{rcl} R_{121}^2 & = & \partial_1(\omega_1^2(\partial_2)) - \partial_2(\omega_1^2(\partial_1)) + \omega_1^1(\partial_2)\omega_1^2(\partial_1) - \omega_1^1(\partial_1)\omega_1^2(\partial_2) \\ & + & \omega_1^2(\partial_2)\omega_2^2(\partial_1) - \omega_1^2(\partial_1)\omega_2^2(\partial_2) \\ & = & \frac{\partial}{\partial\theta}(0) - \frac{\partial}{\partial\phi}(-cos\phi sen\phi) + \left(\frac{cos\phi}{sen\phi}\right)(-cos\phi sen\phi) - 0 + 0 - 0 \\ & \Longrightarrow & R_{121}^2 = -(sen^2\phi - cos^2\phi) + (-cos^2\phi) \\ & \Longrightarrow & R_{121}^2 = -sen^2\phi \end{array}$$

Assim,

$$s(\tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2) = \frac{1}{sen^2\phi} R_{121}^2 g(\partial_2, \partial_2) = \frac{1}{sen^2\phi}(-sen^2\phi)(1) \tag{3.73}$$

Donde $s(\tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2) = -1$. Observe que o que calculamos foi a curvatura seccional de $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$. No entanto do isomorfismo das álgebras $C^\infty((0, 2\pi) \times (0, \pi))$ e $C^\infty(S^2 - C)$, onde

C é um meridiano de S^2, da diferenciabilidade da curvatura seccional atrelado ao fato de o fecho da imagem do difeomorfismo é S^2, pela continuidade de $s(g)$ segue que a curvatura seccional da esfera S^2 é -1. Observe que de forma contraria a nossa experiencia, a curvatura seccional da esfera H^+ e S^2 tiveram valores 1 e -1 respectivamente.

Referências Bibliográficas

[1] Aron Simis, *A Leisurely primer on commutative Algebra*

[2] Atiyah. M. & Macdonald. I.G., *Introducion al Álgebra Comutativa*, Revertés, S.A., 1972.

[3] Do Carmo, M., *Geometria Riemanniana*, IMPA, 1979.

[4] Eisenbud, D., *Commutative álgebra*, Springer-Verlag, 1995.

[5] Warner, F., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Velag, 1983.

[6] Darling, R.W.R., *Differential Forms and Connections*, Springer-Velag, 1983.

[7] Levi-Civita, T. Ricci, G.(1900),*Méthodes de calcul Différential absolu et leurs applications*, math Ann. **54**: 125-201, doi: 10.1007/BF01454201.

[8] Koszul, J. L. (1950), *Homologie et cohomologie des algebres de Lie*, Bulletin de la Société Mathématique **78**: 65-127

[9] Osserman, B. (2004) (PDF), *Connection, curvature, and p-curvature*, http://math.berkeley.edu/∼ osserman/math/connections.pdf

[10] T. Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietá qualunque e consequente specificazione geométrica della curvatura Riemanniana*, Rend. Cir. Mat. Palermo, **42**(1917): 65-127.

[11] H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, Springer (1923).

[12] Alain Connes, *Commutative Geometry, Quantum Fields and motives* , (2009).

[13] Jacqueline Rojas, *O Funcional de Yang-Mills* , Tese de Mestrado, DMAT-UFPE (1990).

[14] Marcos Luiz Henrique, *Derivações e Campos de Vetores*,Tese de Mestrado, DMAT-UFPE (2001).

[15] Ediel Guerra, *Modelo Sigma Não Linear e Função de Partição*,Tese de Doutorado, DMAT-UFPE (2000).

[16] Cleto Brasileiro Miranda Neto, *Derivações e a Conjectura de Zariski-Limpman*,Tese de Mestrado, DMAT-UFPE (2002).

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo