Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Soluções Fracas para um Sistema Não-Linear Envolvendo o Operador p-Laplaciano

Por

André Francisco Santos Siqueira

João Pessoa-Paraíba

Agosto 2010

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Soluções Fracas para um Sistema Não-Linear Envolvendo o Operador p-Laplaciano

Por

André Francisco Santos Siqueira

sob orientação do

Prof. Dr. Nélson Nery de Oliveira Castro

João Pessoa-Paraíba

Agosto 2010

S618s Siqueira, André Francisco Santos.
Soluções fracas para um sistema não-linear envolvendo o operador p-Laplaciano / André Francisco Santos Siqueira - João Pessoa, 2010.
83f.
Orientador: Nélson Nery de Oliveira Castro
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Soluções fracas. 3. Pseudo-Laplaciano. 4. Evolução não-linear. 5. Método de Faedo-Galerkin.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Soluções Fracas para um Sistema Não-Linear Envolvendo o Operador p-Laplaciano

Por

André Francisco Santos Siqueira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

Área de Concentração: Análise Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Nelson Nery de Oliveira Castro(Orientador)

Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

Marivaldo Pereira Matos

Prof. Dr. Marivaldo Pereira Matos

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Agosto 2010

Dedicatória

Àqueles que
me ajudaram e incentivaram.

Agradecimentos

- Aos meus pais, Etelmar Siqueira e Maria do Rosário, que através do exemplo me ensinaram a maior parte do que sei. A Giovana Santos pelo apoio sempre constante e incondicional.

- Ao Professor Marcondes Clark pela ajuda em momentos importantes e pela constante atenção. Ao Professor Nelson Nery por sua disposição em me ensinar, orientar e por suas correções no texto desta dissertação. Ao Professor Marivaldo Matos pela disposição em fazer parte da banca examinadora, pelas correções e sugestões à dissertação.

- Aos amigos de conversa fiada e estudo, Marcos Ferreira, Elano Diniz (*Excelente* piadista...), Maicon Livi, dentre outros. Aos meus dois grandes amigos de graduação e pós-Graduação Diego Souza e Maurício Cardoso pela ajuda prestada em minha chegada a João Pessoa.

- Ao povo brasileiro que, por meio da Coordenação de Aperfeiçoamente de pessoal de Ensino Superior(Capes), financiou este trabalho.

Resumo

Neste trabalho provaremos a existência de soluções fracas para um problema misto de equações diferenciais parciais não-lineares do tipo Klein-Gordon envolvendo o operador pseudo-Laplaciano. Com esse fim, usaremos o método de Faedo-Galerkin juntamente com argumentos de compacidade e monotonicidade.

Palavras-chave: Soluções Fracas, Pseudo- Laplaciano, Problema de Evolução Não-Linear, Método de Faedo-Galerkin.

Abstract

In this work we'll prove existence of weak solutions to a coupled mixed problem of nonlinear partial diferential equation in the class of systems of nonlinear Klein-Gordon equations involving pseudo-Laplacian operator. For proving existence of weak solutions we use Faedo-Galerkin's method with compacity and monotonicity properties.

Keywords: Weak-Solutions, Pseudo-Laplacian, Non-Linear Evolution Problem, Faedo-Galerkin's Method.

Sumário

Introdução

O sistema de equações diferenciais não-lineares do tipo Klein-Gordon:

$$\begin{cases} Bu + \alpha^2 u + g^2 v^2 u = 0 \\ Bv + \beta^2 v + h^2 u^2 v = 0, \end{cases}$$

onde $B = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta$ é o operador D'Alambertiano, g, h, α e β são constantes, foi utilizado por Segal [23] para descrever o movimento de mésons carregados em um campo eletromagnético.

Em 1985, Medeiros-Miranda [18] estudaram a existência e unicidade de soluções fracas de uma generalização do sistema anterior, a saber:

$$\begin{cases} Bu + |v|^{\rho+2} |u|^{\rho} u = f_1 \\ Bv + |u|^{\rho+2} |v|^{\rho} v = f_2, \qquad \rho > -1. \end{cases}$$

Naquele trabalho, os autores provaram e existência de soluções para $n \geq 1$ e a unicidade para $n = 1, 2, 3;$, onde n é a dimensão do espaço $\mathbb{R}^n$.

Em 1990, A. Biazutti [2] estudou a existência de soluções para uma equação mais geral, do tipo:

$$\left\{ u''(t) + Au(t) + B(t)u'(t) + Gu'(t) = f(t), \right.$$

onde A é um operador não-linear, $B(t)$é linear e limitado e G é não-linear.

Nesse mesmo trabalho, Biazutti estudou a exstência e o comportamento assintótico para o sistema:

$$\begin{cases} u''(t) + Au(t) - \Delta u'(t) + G_1(u', v') = f_1 \\ v''(t) + Av(t) - \Delta v'(t) + G_2(u', v') = f_2, \end{cases}$$

onde A é o operador p-Laplaciano e G_1 e G_2 são operadores não-lineares.

Além desses trabalhos, outros sistemas semelhantes foram estudados em [5],[6] e [10], dentre outros.

Neste trabalho estudaremos a existência de soluções fracas para o seguinte problema:

$$\begin{cases} u'' + Au - \Delta u' + \left(|v|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2}\right)|u|^{\rho} u = f_1 \\ v'' + Av - \Delta v' + \left(|u|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2}\right)|v|^{\rho} v = f_2 \\ w'' + Aw - \Delta w' + \left(|v|^{\rho+2} + |u|^{\rho+2}\right)|w|^{\rho} w = f_3 \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0, w(0) = w_0 \\ u'(0) = u_1, v'(0) = v_1, w'(0) = w_1. \end{cases} \tag{1}$$

onde cada equação interage com as outras duas. Esse fato pode ser notado quando observamos os termos não lineares das nossas equações.

Esta Dissertação está organizada da seguinte maneira:

- No capítulo I serão dadas algumas definições e resultados básicos, para tornar a leitura clara e auto-suficiente.

- No Capítulo II daremos resultados que serão bastante úteis para dar sentido a algumas dualidades e quando formos limitar ρ e $u_m v_m$, quando $u_m, v_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

- No capítulo III formulamos e demonstramos o teorema de existência, principal resultado desta dissertação. Usaremos o método de Faedo-Galerkin para provar a existência de soluções fracas para um problema em dimensão finita associado ao sistema (1). Posteriormente, faremos alguma estimativas *a priori* e como consequência, obteremos uma convergência a fim de *passar ao limite* e resolver o problema original. Nesta etapa, usaremos algumas propriedades do operador p-Laplaciano.

Notações

Notações necessárias para o melhor entendimento desta dissertação:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, limitado e bem regular;

- $Q = \Omega \times (0, T),\ T > 0$ é o cilindro em $\mathbb{R}^{n+1}$ com base Ω e altura T;

- $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ é a fronteira lateral de Q, onde Γ é a fronteira de Ω.

Além disso, $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ é o Laplaciano, e $A : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ é o operador pseudo-Laplaciano definido por:

$$\begin{array}{rcl} A : W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,p'}(\Omega) \\ u & \longmapsto & Au \end{array}$$

onde $Au = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i})$.
No apêndice provaremos que A tem as seguintes propriedades:

- A é monótono, hemicontínuo, coercivo e limitado.
- $\langle Au(t), u(t)\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = \|u(t)\|_0^p$;
- $\langle Au(t), u'(t)\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u\|_0^p$, onde ' indica $\frac{d}{dt}$;
- $\|Au\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C\, \|u\|_0^{p-1}$.

- $\|.\|_0$ −Norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$;

- $\|.\|, ((.))$ − Norma e produto interno em $H_0^1(\Omega)$, respectivamente;

- $|.|, (.)$ − Norma(ocasionalmente $|.|$ denotará o valor absoluto, e o contexto deixará claro a distinção) e produto interno em $L^2(\Omega)$;

- V^*, V', em geral, denotam o espaço dual de V;

- $V \hookrightarrow H$ e $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$ denotam imersão contínua e densa e imersão compacta, respectivamente, de V em H.

Por fim, ρ é um número real variando em um intervalo a ser determinado posteriormente.

Capítulo 1

Terminologia e Resutados Preliminares

O objetivo deste capítulo é listar algumas definições e notações básicas da Teoria das Equações diferenciais Parciais afim de Apresentar os resultados preliminares fundamentais para o desenvolvimento do cerne deste trabalho. Entretanto, não nos preocupamos, neste capítulo, em demonstrar os resultados enunciados, apenas mencionaremos as referências bibliográficas onde os mesmos podem ser encontrados.

1.1 Resultados de Convergência

Teorema 1.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** Sejam X um espaço de Banach separável e $(f_n)_n$ uma sequência fortemente limitada em X^*(dual de X). Então $(f_n)_n$ tem uma subsequência $(f_{nk})_k$ que converge fraco-$\star$, isto é, $f_{nk} \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em X^*.

Demonstração. Ver [3] □

Teorema 1.2 (Kakutani)**.** Sejam X um espaço de Banach. X é reflexivo se, e somente se, $(x_n)_n$ fortemente limitada em X possui uma subsequência (x_{nk}) que converge fraco, isto é, $x_{nk} \rightharpoonup x$ em X.

Demonstração. Ver [3] □

Teorema 1.3. *(Aubin-Lions)* Sejam X, Y e B espaços de Banach, X reflexivo e $X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$. Suponha que $(u_n)_n$ seja uma sequência uniformemente limitada em

$L^p(0,T;X)$ tal que $(\frac{du_n}{dt})_n = (u'_n)_n$ seja limitada em $L^p(0,T;Y)$, para algum $p > 1$. Então existe uma subsequência de $(u_n)_n$ que converge fortemente em $L^2(0,T;B)$.

Demonstração. Ver [8] □

Teorema 1.4 (Lebesgue)**.** Seja $(u_n)_n$ uma sequência de funções integráveis em (a,b), que converge quase sempre para uma função u. Se existir uma função integrável u_0 tal que $|u_n(t)| \leq u_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então u será integrável e tem-se que

$$\int u = \lim_{n\to\infty} \int u_n$$

Demonstração. Ver [16] □

Teorema 1.5 (Lema de Fatou)**.** Seja $(u_n)_n$ uma sequência de funções integráveis tal que

$$u_n(t) \to u(t) \ \ em\ X, \ \ q.s.\ \ em\ (a,b)$$

Suponhamos que exista uma constante positiva C tal que $\displaystyle\int_a^b \|u_n(t)\|\, dt \leq C$, $\forall n$. Então u é integrável e

$$\int_a^b \|u(t)\|\, dt \leq \liminf \int_a^b \|u_n(t)\|\, dt$$

Demonstração. Ver [16] □

Lema 1.1 (Lions)**.** Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, g e g_j funções de $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, tais que

$$\|g_j\|_{L^q(\Omega)} \leq C, \ \ para\ todo\ j,$$

e

$$g_j \to g, \ \ q.s.\ \ em\ \Omega.$$

Então

$$g_j \rightharpoonup g, \ \ em\ L^q(\Omega).$$

Demonstração. Ver [8] □

Proposição 1.1. Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em X^*. Então, $f_n \rightharpoonup f$ em X^*.

Demonstração. Ver [8] □

1.2 Desigualdades

- Desigualdade de Gronwall

  Sejam C uma constante não-negativa, $\varphi : (s,T) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa, $u : (s,T) \to \mathbb{R}^n$ integrável com $u \geq 0$ q.s. em (s,T) tal que

  $$\varphi \leq C + \int_s^t u(\xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad \forall t \in [s,T].$$

  Então

  $$\varphi(t) \leq C\exp(\int_s^t u(\xi)d\xi), \quad t \in [s,T].$$

  Demonstração. Seja $\psi(t) = C + \displaystyle\int_s^t u(\xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad t \in [s,T].$

  Então

  $$\frac{d\psi(t)}{dt} = u(t)\varphi(t) \leq u(t)\psi(t), \quad \text{q.s. em } (s,T).$$

  Daí,

  $$\frac{d}{dt}\left(\psi(t)e^{-\int_s^t u(\xi)d\xi}\right) \leq 0,, \quad \text{q.s. em } (s,T).$$

  Logo,

  $$e^{-\int_s^t u(\xi)d\xi} \leq \psi(s) = C.$$

  Portanto,

  $$\psi(t) \leq Ce^{\int_s^t u(\xi)d\xi}, \quad \forall t \in [s,T].$$

  Ou seja,

  $$\varphi(t) \leq \psi(t) \leq Ce^{\int_s^t u(\xi)d\xi}, \quad \forall t \in [s,T].$$

  □

- Desigualdade de Gronwall Generalizada

  Sejam $v, f : [0,T] \to \mathbb{R}$ funções integráveis e não-negativas e $a : [0,T] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, não-negativa tal que

  $$v(t) \leq v_0 + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t a(s)v(s)ds,$$

onde v_0 é uma constante não-negativa. Então

$$v(t) \leq (v_0 + \int_0^t f(s)ds)e^{\int_0^t a(s)ds}.$$

- Desigualdade de Poincaré
  Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_0 , \forall u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

  As provas dessas desigualdades podem ser vistas em [8].

- Desigualdade de Young.
  Sejam $p > 1, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \forall a \geq 0, \quad \forall b \geq 0.$$

  Demonstração. Prova: Ver [3]. □

- Desigualdade de Hölder
  Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então $f.g \in L^1(\Omega)$ e

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} .$$

  Demonstração. Prova: Ver [3] □

- Desigualdade de Minkowsky
  Sejam $f, g \in L^p, p \geq 1$. Então $f + g \in L^p$ e

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^q} .$$

  Demonstração. Prova: Ver [3]. □

1.3 Resultados de Existência

Teorema 1.6. Sejam V e H dois espaços de Hilbert tais que $V \subset H$ e $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$. Então existe uma base espectral $\{w_j\}$ de V, formando um sistema ortonormal completo em H.

Demonstração. Ver [15] $\square$

Lema 1.2 (Browder-B. An Ton)**.** Seja W um espaço de Banach separável e reflexivo. Existe um espaço de Hilbert H, separável, tal que $H \subset W$, com imersão contínua e densa.

Demonstração. Ver [4] $\square$

Teorema 1.7 (Representação de Riesz)**.** Sejam $1 < p < \infty$ e p' o expoente conjugado de p. Dado $\varphi \in (L^p(\Omega))'$, existe uma única $u \in L^{p'}(\Omega)$, tal que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega u f dx, \quad \forall \ f \in L^p(\Omega),$$

e $\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Demonstração. Ver [22] $\square$

Teorema 1.8. Todo espaço de Hilbert possui base ortonormal.

Demonstração. Ver [12] $\square$

Teorema 1.9. Se H é um espaço de Hilbert separável, então todo conjunto ortonormal completo em H é enumerável.

Demonstração. Ver [12] $\square$

Seja D um subconjunto do $\mathbb{R}^{n+1}$, cujos elementos são denotados por (t, x), onde $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ e considere $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ não necessariamente contínua. Se existir uma função absolutamente contínua $x(t)$, definida em algum intervalo I da reta, tal que $(t, x(t)) \in D$, para todo $t \in I$ e

$$x' = f(t, x) \tag{1.1}$$

para quase todo $t \in I$, então, dizemos que $x(t)$ é uma solução de (1.1) sobre I. Se $(t_0, x_0) \in D$, associado a (1.1) tem-se o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

Dizemos que uma solução $x(t)$ de (1.2) é uma solução de (1.1) tal que $x(t_0) = x_0$.

Definição 1.1 (Condições de Carathéodory)**.** Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^{n+1}$. Então f satisfaz as condições de Carathéodory se:

1. $f(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixo;

2. $f(t, x)$ é contínua em x para cada t fixo;

3. Para cada compacto U em D, existe uma função real integrável $m_U(t)$ tal que:

$$|f(t, x)| \leq m_U(t), \quad \forall (t, x) \in U.$$

Teorema 1.10 (Carathéodory)**.** Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre $\mathbf{R}$. Então existe uma solução $x(t)$ de (1.2) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta, \beta > 0$, onde $\mathbf{R}$ é o retângulo definido por:

$$\mathbf{R} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}, \qquad com\ a > 0, b > 0.$$

Demonstração. Ver [19] □

Corolário 1.1. Sejam D um aberto do $\mathbb{R}^{n+1}$ e f uma função satisfazendo as Condições de Carathéodory sobre D. Então o problema (1.2) tem solução para qualquer $(t_0, x_0) \in D$.

Demonstração. Ver [19] □

Teorema 1.11. Seja D um aberto limitado e conexo do $\mathbb{R}^{n+1}$ e suponha que f satisfaça as duas primeiras condições de Carathéodory sobre D e que exista uma função integrável $m(t)$ tal que $|f(t, x)| \leq m(t)$, para todo $(t, x) \in D$. Seja φ uma solução de (1.1) sobre o intervalo aberto (a,b). Então:

1. *Existem os limites laterais* $\varphi(a + 0), \varphi(b - 0)$;

2. *Se $(b, \varphi(b-0)) \in D$, então φ pode ser prolongada até (a,b+δ] para algum $\delta > 0$. Resultado análogo é válido para a extremidade a.*

3. *Se ∂D denota a fronteira de D, então $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo (γ, ω) tal que $(\gamma, \varphi(\gamma + 0)), (\omega, \varphi(\omega - 0)) \in \partial D$;*

4. *Se f estende-se até $\overline{D}$ preservando suas propriedades, então $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo $[\gamma, \omega]$ tal que $(\gamma, \varphi(\gamma + 0)), (\omega, \varphi(\omega - 0)) \in \partial D$.*

Demonstração. Ver [19] □

Corolário 1.2. Seja $D = [0, T] \times \Omega,\ T > 0, \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}, b > 0$, e f nas condições do teorema anterior. Seja $\varphi(t)$ uma solução de

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = x_0, \quad |x_0| \leq b \end{cases}$$

Suponha que em um intervalo qualquer I, onde $\varphi(t)$ está definida, tenhamos $|\varphi(t)| \leq C, \forall\, t \in I, M$ independente de I e $C < b$. Então φ tem um prolongamento até [0,T].

Demonstração. Ver [19] □

Teorema 1.12 (Princípio da Extensão)**.** Sejam X e Y espaços de Banach , M um subespaço denso de X e $T : M \to Y$ linear tal que:

$$\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X , \quad \forall x \in M, C > 0 \text{ constante } .$$

Então existe um único $\overline{T} : X \to Y$ linear e contínuo tal que

$$\overline{T} \mid M = T \text{ e } \left\|\overline{T}(x)\right\|_Y \leq C \|x\|_X , \quad \forall x \in X.$$

Demonstração. Ver [3] □

1.4 Espaço das Distribuições Escalares

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função real contínua. O *suporte* de u é, por definição, o fecho em Ω, do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. Este conjunto será representado por *supp(u).* Segue diretamente da definição que o suporte é o menor fechado fora do qual u se anula, e valem as seguintes relações:

- *supp(u+v)* $\subset$ *supp u + supp v;*
- *supp(uv)* $\subset$ *supp u* $\cap$ *supp v;*
- *supp*(λv) = *supp v.* $\lambda \neq 0$.

Se $u \in L^p(\Omega)$, definimos o suporte de u, o qual ainda denotamos por *supp* u, como o conjunto obtido pela interseção de todos os subconjuntos fechados em Ω fora dos quais u se anula quase sempre. Notemos que se $u \in C(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ então as noções de suporte definidas para funções contínuas em Ω e para funções de $L^p(\Omega)$ coicidem.

Aqui, usaremos inicialmente o espaço das funções infinitamente diferenciáveis cujo suporte é um conjunto compacto contido em Ω, com notação $C_0^\infty(\Omega)$.

Um multi-índice é uma *n-upla* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}, i = 1, ..., n$. Escrevemos $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ e representaremos D^α o operador derivação

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} .... \partial^{\alpha_n}}.$$

Observemos que, para $\alpha = (0, ..., 0)$ temos $D^0 u = u$. Notemos também, que *supp*$(D^\alpha u) \subset$ *supp*(u), $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, quando u for suficientemente diferenciável.

Aqui também é importante darmos a noção de convergência no espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$. Tal convergência torna $C_0^\infty(\Omega)$ um espaço topológico. Dizemos que uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se:

- Existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que:

$$supp(\varphi) \subset K \text{e } supp(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N};$$

- $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$, uniformemente em $K, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da convergência acima, será denotado por $D(\Omega)$ e denominado de espaço das funções testes. Notemos que, se $\varphi_n \to \varphi$ em $D(\Omega)$ então $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, em $D(\Omega)$.

Uma distribuição sobre Ω é uma forma linear e contínua $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ com respeito à topologia de $D(\Omega)$. Assim, se uma sequência $(\varphi_n)_n$ convergir para φ em $D(\Omega)$, então $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$, cujo valor de T aplicada a φ será denotado por $\langle T, \varphi \rangle$. Denotamos por $D'(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as distribuições escalares sobre Ω.

Considere $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, u é integrável a Lebesgue sobre todo compacto $K \subset \Omega$. O funcional $T_u : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,$$

é linear e contínuo. Logo uma distribuição sobre Ω. Para mais detalhes veja [11]. A distribuição T_u é dita gerada pela função localmente integrável u.

Observe que se $T_u = T_v$, então $u = v$ (Ver [11]), logo T é univocamente determinada por u, portanto, neste sentido, podemos identificar u com a distribuição T_u.

Exemplo 1.1. Dado $x_0 \in \Omega$, o funcional δ_{x_0} definida por

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \varphi \in D(\Omega)$$

é uma distribuição sobre Ω, denominada distribuição delta de Dirac centrada em x_0. Prova-se (Ver [11]) que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função localmente integrável, isto é, não existe uma função $u \in L^1_{loc}$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x), \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Logo, o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ não é igual ao espaço $D'(\Omega)$, uma vez que existem distribuições sobre Ω que não são geradas por uma função integrável.

1.4.1 Convergência e Derivação em $D'(\Omega)$

Dizemos que a sequência de distribuições escalares (T_n) converge para T em $D'(\Omega)$ se

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle, \text{ em } \mathbb{R}, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Com essa noção de convergência, $D'(\Omega)$ torna-se um espaço vetorial topológico, e temos a seguinte cadeia de imersões contínuas:

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega), 1 \le p \le \infty.$$

Além disso, necessitamos do conceito de derivada distribucional, uma vez que isso se faz necessário para o estudo dos espaços de Sobolev, que veremos a seguir.

O que motivou a definição de derivada fraca e consequentemente a derivada distribucional foi a fórmula de integração por partes do cálculo. De fato, em dimensão 1, temos a fórmula de integração:

$$\int_a^b u'(x)\varphi(x)dx = u(b)\varphi(b) - u(a)\varphi(a) - \int_a^b u(x)\varphi'(x)dx,$$

e quando $\varphi \in D(a,b)$ temos

$$\int_a^b u'(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx.$$

Motivado pela igualdade acima, Sobolev definiu a derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(a,b)$ como sendo a distribuição $v \in L^1_{loc}(a,b)$, caso exista, tal que:

$$\int_a^b u'(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(a,b).$$

Esse conceito foi generalizado (por Schwarz) para distribuições quaisquer, em $D'(\Omega)$, da seguinte maneira: Dados $T \in D'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, definimos a derivada distribucional de ordem α de T como a forma linear $D^\alpha T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \varphi \in D(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição (Ver [11]).

1.5 Distribuições Vetoriais

Dado um número real positivo T e um espaço de Banach X, representamos por $L^p(0,T;X), 1 \leq p < \infty$, o espaço das funções $u : (0,T) \to X$ que são mensuráveis e tais que $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$. Em $L^p(0,T;X)$, o funcional

$$\|.\|_{L^p(0,T;X)} : L^p(0,T;X) \to \mathbb{R}$$

dado por

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = (\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt)^{\frac{1}{p}},$$

é uma norma, m relação a qual $L^p(0,T;X)$ é um espaço de Banach.
No caso $p = \infty$, a norma em $L^\infty(0,T;X)$ é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = supess \, \|\mathrm{u(t)}\|_{\mathrm{X}},$$

e $L^\infty(0,T;X)$ com esta norma é um espaço de Banach.

A cada $u \in L^p(0,T;X), 1 \leq p \leq \infty$, associamos a função vetorial $T_u : D(0,T) \to X$, definida por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(s)\varphi(s)ds, \quad \forall\, \varphi \in D(0,T),$$

onde a integral é entendida como sua integral de Bochner em X. Prova-se que T_u é linear e contínua(Ver [14]). Diz-se então que T_u é uma distribuição vetorial sobre $(0,T)$ à valores em X, definida por uma função $u \in L^p(0,T;X)$, e escreve-se

$$T_u \in \mathcal{L}(D(0,T), X).$$

O espaço $\mathcal{L}(\mathrm{D}(0,\mathrm{T}),\mathrm{X})$ denomina-se espaço vetorial das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ a valores em X e contém, em particular, as distribuições vetoriais definidas pelas funções de $L^p(0,T,X)$. O espaço $\mathcal{L}(\mathrm{D}(0,\mathrm{T}),\mathrm{X})$ será denotado por $D'(0,T;X)$.

1.6 Espaços de Sobolev

1.6.1 Os espaços $W^{m,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, p um número real tal que $1 \leq p < \infty$ e m um número natural. Denota-se por $W^{m,p}(\Omega)$, o espaço vetorial:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\, |\alpha| \leq m\},$$

com norma definida por

$$\|u\|_{m,p} = (\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}.$$

Com essa norma $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Os espaços de Banach $W^{m,p}(\Omega)$ são ditos espaços de Sobolev de ordem m sobre Ω. Quando $p = 2$, os espaços $W^{m,2}(\Omega)$ são normalmente denotados por $H_0^m(\Omega)$, isto é,:

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Verifica-se que $H^m(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert com o produto interno definido por

$$(u,v) = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

e norma definida por:

$$\|u\|_{m,2} = \|u\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 dx + \int_\Omega u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $(.)_{L^2(\Omega)}$ é o produto interno em $L^2(\Omega)$.

É possível definir espaços análogos aos espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, onde k é um número real arbitrário. Para $p = 2$, os espaços de Sobolev de ordem fracionária $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$, podem ser definidos usando a transformada de Fourier (usando o fato de que a transformada de Fourier é uma transformação unitária) do seguinte modo:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}| \, \|f\|^s_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty\}$$

No caso em que Ω é um aberto, limitado e bem-regular, temos a seguinte definição:

$$H^s(\Omega) = \{f|_\Omega; f \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

1.6.2 Os espaços $W^{m,\infty}(\Omega)$

Dado $m \in \mathbb{N}$, representaremos por $W^{m,\infty}(\Omega)$ o espaço vetorial

$$W^{m,\infty}(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega); D^\alpha u \in L^\infty(\Omega), \forall \, |\alpha| \leq m\},$$

munido da norma

$$\|u\|^m_\infty = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Com essa norma $W^{m,\infty}(\Omega)$ torna-se um espaço de Banach.

1.6.3 Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$

Note que o espaço das funções testes, $C_0^\infty(\Omega)$, é denso em $L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$ (Ver [11]). Porém, não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ seja denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Denotamos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$W^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Como consequência da desigualdade de Poincaré, a expressão

$$\|u\|_0 = \sum_{0<|\alpha|\leq m} (\|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}},$$

define uma norma natural para esse espaço.
No caso particular $m = 1$,

$$\|u\|_0 = (\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}, \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

e

$$\|u\|_{1,p} = (\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u\|^p_{L^p})^{\frac{1}{p}}, \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Prova-se que

$$\|u\|_0 \leq \|u\|_{1,p} \leq \|u\|_0\,, \quad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Existem outras caracterizações para tal espaço, veja por exemplo [11].
Uma atenção especial deve ser dada ao espaço dual de $W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, denotado por $W^{-1,q}(\Omega), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, que é constituído pelos funcionais lineares contínuos

$$T : W_0^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

Mostra-se que, se $T \in D'(\Omega)$, então $T \in W^{-1,q}(\Omega)$ se, e somente se, existem funções $g_\alpha \in L^q(\Omega), |\alpha| \leq m$, tais que

$$T = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha g_\alpha.$$

Veja a demonstração em [11], por exemplo.

1.7 Teoremas de Imersão

A seguir enunciamos alguns resultados de imersão, cujas demonstrações podemos encontrar em [2] ou [12]. Para maior clareza, separamos os casos em $\Omega = \mathbb{R}^n$ e Ω é aberto. limitado com fronteira bastante regular.

- 1º Caso: $\Omega = \mathbb{R}^n$

Teorema 1.13. *Se* $1 \leq p < n$ *então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

para $q = \dfrac{np}{n - mp} > 0$

Teorema 1.14. *Se* $n > mp$ *e* $p \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp}$ *então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

Teorema 1.15. *Se* $n > kp$ *e* $q_k = \dfrac{np}{n-kp}$ *então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m-k,p}(\Omega)$$

Teorema 1.16. *Se* $1 \leq p < \infty$ *e* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ *com* $n \geq 2$ *então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \geq 1$$

Teorema 1.17. *Sejam* $\alpha = m - \frac{n}{p} > 0$ *e* $k \in \{1, ...\}$ *tais que* $k < \alpha \leq k+1$. *então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega)$$

.

- 2º Caso: $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado e bem-regular.

Teorema 1.18. *Suponha que* $n > mp$. *Então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para $q \leq \dfrac{np}{n-mp}$. *Tem-se ainda,*

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),$$

para $q = \dfrac{np}{n-mp}$.

Teorema 1.19. *Se* $k \leq m$ *e* $n > (m-k)p$, *então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega),$$

desde que $q \leq \dfrac{np}{n-(m-k)p}$. *Além disso,*

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{k,p}(\Omega),$$

desde que $q = \dfrac{np}{n-(m-k)p}$

Teorema 1.20. *Se $mp = n$. Então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, \infty).$$

Teorema 1.21. *Se $mp > n$. Então*

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{0,\mu}(\overline{\Omega}),$$

para,

$$\mu = m - \frac{n}{p}, \ \ se\ m - \frac{n}{p} < 1,$$
$$\mu < 1, \ \ se\ m - \frac{n}{p} = 1,$$
$$\mu = 1, \ \ se\ m - \frac{n}{p} > 1.$$

Teorema 1.22 (Rellich-Kondrachov)**.** Seja Ω um subconjunto aberto, limitado e bem-regular do $\mathbb{R}^n$, n$\geq$ 2. Então as seguintes imersões são compactas:

(i) $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega); \quad 1 \leq q < \frac{np}{n-p}, \qquad se\ p < n,$

(ii) $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega); \quad 1 \leq q < +\infty, \qquad se\ p = n,$

(iii) $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^0(\overline{\Omega}), \qquad se\ p > n.$

Observação 1.1. As imersões no teoremas acima, caso $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, permanecem verdadeiras quando se considera Ω limitado e se substitui $W^{m,p}(\Omega)$ por $W_0^{m,p}(\Omega)$.

As demonstrações desses teoremas podem ser vistas em [11].
Seja I um intervalo real, isto é, $I = (0, T)$ ou $I = [0, T]$, com $T > 0$. Consideremos X um espaço de Banach e denotemos por $C(0, T; X)$ o espaço das funções contínuas definidas em $I = (0, T)$ à valores em X, isto é,

$$u \in C(0, T; X) \Leftrightarrow u : (0, T) \to X, \text{ é contínua},$$

onde a continuidade é definida no seguinte sentido: "Se $t \to t_0$ em $(0, T)$ então $u(t) \to u(t_0)$ na norma de X."

Lema 1.3. Sejam X e Y espaços de Banach, tais que X está imerso contínua e densamente em Y. Suponha que $u \in L^p(0, T; X)$ e $u' \in L^p(0, T; Y)$, $\quad 1 \leq p \leq \infty$. Então $u \in C(0, T; Y)$.

Demonstração. Ver [15]. □

Teorema 1.23. O espaço das funções $\sum \varphi_i(t)v_i(x)$, soma finita, com $\varphi_i \in D(0,T)$, nula numa vizinhança de T, $v_i \in W_0^{1,p}(\Omega)$, é denso no espaço

$$V = \{v \in L^2(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)); v' \in L^2(0,T; L^2(\Omega))\}$$

Demonstração. Ver [14] □

Teorema 1.24 (Hellinger-Toeplitz)**.** Se um operador linear T é definido sobre todo um espaço de Hilbert H e satisfaz $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ para todo $x, y \in H$, então T é limitado.

Demonstração. Ver [12] □

Capítulo 2

Resultados Auxiliares

A fim de encontrar um espaço de dimensão finita V_m para trabalharmos o problema aproximado, será demonstrado o lema abaixo. Ele será utilizado no próximo capítulo para explicitar tal espaço.

Lema 2.1. Se $s > n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + 1$, então $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Sendo $W_0^{1,p}(\Omega)$ um espaço de Banach separável e reflexivo, tem-se, via lema de Browder-B. An Ton, a existência de um espaço de Hilbert separável com imersão contínua e densa em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Construiremos um tal espaço.
Mediante as imersões de Sobolev, tem-se:

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{m-k,q_k}(\Omega), \quad \text{onde } \frac{1}{q_k} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}, \quad k > 0.$$

Considere, $m - k = 1$, $q_k = p$ em $W_0^{m-k,q_k}(\Omega)$ e $p = 2$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$. Daí, temos

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \text{ com } \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{m-1}{n}.$$

De $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{m-1}{n}$, temos

$$\frac{m-1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \Leftrightarrow m - 1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \Leftrightarrow m = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + 1.$$

Logo

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \text{ para } m = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + 1.$$

Tomando-se $s > n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + 1$, temos:

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega).$$

Sendo $H^s(\Omega)$ um espaço de Hilbet separável e $H_0^s(\Omega) \subset H^s(\Omega)$, segue-se que $H_0^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável com imersão contínua e densa em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

$\square$

Lema 2.2. Sejam $n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{R}$, e $2 < p < n$. Se $-1 < \rho \leq \frac{4(1-n+p)}{2(n-p-1)+np}$. Então:

(i) $\rho < \dfrac{4}{np-2}$.

(ii) $\dfrac{4n+2}{np-2} \leq \dfrac{np}{n-p}$.

Demonstração:

(i) $2 < p < n \Rightarrow np(n-p) > 0$. Daí,

$$np(n-p) > 0 \Leftrightarrow np^2 - n^2p < 0 \Leftrightarrow$$

$$np - n^2p + np^2 - 2 + 2.n - 2p < np - 2 + 2.n - 2p \Leftrightarrow$$

$$np(1-n+p) - 2(1-n+p) < 2(n-p-1) + np \Leftrightarrow$$

$$(np-2)(1-n+p) < 2(n-p-1) + np \Leftrightarrow$$

$$\frac{1-n+p}{2(n-p-1)+np} < \frac{1}{np-2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4(1-n+p)}{2(n-p-1)+np} < \frac{4}{np-2}.$$

(ii)

$$2 < p \Rightarrow 21p^2 > 42p \Rightarrow 36p - 12p^2 < 9p^2 - 6p \Rightarrow$$

$$4np(n-p) < np(np-2).$$

Sendo $p < n$, segue o resultado.

Lema 2.3. Sejam p e ρ como no lema anterior e consideremos

$$\theta = \frac{2np(\rho+2)}{(np-2)(\rho+2) + 2np(\rho+1)}, \qquad \gamma = \frac{2np(\rho+2)}{(np-2)(\rho+2) - 2np(\rho+1)}.$$

Então:

(i) $1 < \theta < \dfrac{\rho+2}{\rho+1}$

(ii) $1 < \gamma \leq \dfrac{np}{n-p}$

(iii) $\dfrac{1}{\theta} + \dfrac{1}{\gamma} = 1$

Demonstração. Imediata. $\square$

Lema 2.4. Sejam n, p, ρ como nos lems anteriores e defina

$$\alpha = \frac{\rho+2}{(\rho+1)\theta}, \quad \beta = \frac{\rho+2}{(\rho+2)-(\rho+1)\theta}.$$

Então:

(i) $\alpha > 1, \quad \beta > 1,$

(ii) $\theta\beta = \dfrac{2np}{np-2},$

(iii) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1.$

Demonstração. Imediata $\square$

Devido à sua importância no desenvolvimento deste trabalho, daremos uma demonstração clara do lema a seguir. Analisaremos os casos onde $p < n, p = n$ e $p > n$.

Lema 2.5. *Sejam* $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*Então:*

(i) $uv \in L^{\rho+2}(\Omega)$;

(ii) $|v|^{\rho+2}\,|u|^{\rho}\,u$ pertence a $L^{\theta}(\Omega)$.

Demonstração:

$(\mathrm{i})_1$ Caso $p > n$:

Por Rellich-Kondrachov, temos:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}), \quad p > n.$$

Daí, como $C^0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \geq 1$, segue que

$$C^0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^{2(\rho+2)}(\Omega), \quad \text{se } \rho > -1$$

Assim,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+2)}(\Omega).$$

Agora,

$$\int_\Omega |uv|^{\rho+2}\,dx = \left(\int_\Omega |u|^{2(\rho+2)}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u|^{2(\rho+2)}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Em virtude de

$$\left(\int_\Omega |u|^{2(\rho+2)}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \text{ e } \left(\int_\Omega |v|^{2(\rho+2)}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

pois $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+2)}(\Omega)$.

$(\mathrm{i})_2$ Caso $p = n$:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty).$$

Em Particular, temos $2(\rho+2) > 1$, se $\rho > -1$.
Logo

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+2)}(\Omega).$$

Analogamente ao caso (a), $uv \in L^{\rho+2}(\Omega)$.

$(\mathrm{i})_3$ Caso $p < n$:
Temos, pelo Lema (2.2), que $-1 \leq \rho < \frac{4}{np-2}, \frac{4np}{np-2} \leq \frac{np}{n-p}$.Assim,

$$2(\rho+2) < \frac{4np}{np-2} \leq \frac{np}{n-p}.$$

Logo, pelo teorema de Imersão de Sobolev, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+2)}(\Omega) \hookrightarrow L^{(\rho+2)}(\Omega)$.
Analogamente,

$$uv \in L^{\rho+2}(\Omega).$$

Do mesmo modo, nas três ocasiões, temos:

$$uw, vw \in L^{\rho+2}(\Omega).$$

$(\mathrm{ii})_1$ Caso $p > n$
Por Rellich-Kondrachov, se $p > n$ então:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}).$$

Como

$$C^0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega).$$

Temos

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega).$$

Que implica

$$(L^\gamma(\Omega))' \hookrightarrow W^{1,p'}(\Omega).$$

Portanto:

$$L^\theta(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$$

Como $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$, tem-se:

$$u, v \in C^0(\overline{\Omega})$$

Sendo $\theta > 1$, segue que

$$C^0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^\theta(\Omega),$$

donde

$$|v|^{\rho+2} |u|^\rho u \in L^\theta(\Omega).$$

(ii)$_2$ Caso $p = n$

$$\begin{aligned} \int_\Omega | \, |v|^{\rho+2} |u|^\rho u \, |^\theta \, dx &= \int_\Omega |v|^{(\rho+2)\theta} |u|^{(\rho+1)\theta} \, dx = \int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta} |v|^\theta \, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta\alpha} \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} . \left(\int_\Omega |v|^{\theta\beta} \, dx \right)^{\frac{1}{\beta}} . \end{aligned}$$

Sendo $(\rho+1)\theta\alpha = (\rho+2)$, segue, via (i), que:

$$\left(\int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta\alpha} \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\int_\Omega |uv|^{(\rho+2)} \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} < \infty$$

Agora, sendo $1 < \beta\theta = \frac{2np}{np-2} < \frac{np}{n-p}$, segue, pelo teorema de imersão de Sobolev, que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\beta\theta}(\Omega)$.
Dessa forma,

$$\left(\int_\Omega |v|^{\theta\beta} \, dx \right)^{\frac{1}{\beta}} = \|v\|^\theta_{L^{\beta\theta}(\Omega)} \leq c \, \|v\|_0^\theta < \infty.$$

Logo,

$$\int_\Omega |\ |v|^{\rho+2}\,|u|^\rho\, u\ |^\theta\, dx \leq \left(\int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta\alpha}\, dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} . \left(\int_\Omega |v|^{\theta\beta}\, dx\right)^{\frac{1}{\beta}} < \infty.$$

(ii)$_3$ Caso $p < n$.

Segue das imersões de Sobolev, que:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \quad \forall 1 < r \leq \frac{np}{n-p} := q$$

Em particular,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

Nosso objetivo é colocar $|v|^{\rho+2}\,|u|^\rho\, u$ em $L^\theta(\Omega)$. Logo temos que ter

$$\int_\Omega \left||v|^{\rho+2}\,|u|^\rho\, u\right|^\theta dx < \infty.$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left||v|^{\rho+2}\,|u|^\rho\, u\right|^\theta dx &= \int_\Omega |v|^{(\rho+2)\theta}\,|u|^{(\rho+1)\theta}\, dx \\
&= \int_\Omega |v|^{(\rho+1)\theta}\,|v|^\rho\,|u|^{(\rho+1)\theta}\, dx \\
&= \int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta}\,|v|^\theta\, dx
\end{aligned}$$

Como

$$\int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta}\,|v|^\theta\, dx \leq \left(\int_\Omega |uv|^{(\rho+1)\theta\alpha}\, dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_\Omega |v|^{\theta\beta}\, dx\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

resta-nos mostrar que

$$\int_\Omega |v|^{\theta\beta}\, dx < \infty.$$

Como $1 < \theta\beta = \dfrac{2np}{np-2} < \dfrac{np}{n-p}$, segue que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\theta\beta}(\Omega)$ e $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^{\theta\beta}(\Omega)$. Dessa forma,

$$\left(\int_\Omega |v|^{\theta\beta}\, dx\right)^{\frac{1}{\beta}} = \|v\|^\theta_{L^{\theta\beta}(\Omega)} \leq C\,\|v\|_0^\theta < \infty.$$

Logo

$$\int_\Omega \left||v|^{\rho+2}\,|u|^\rho\, u\right|^\theta dx < \infty.$$

Analogamente faz-se o cálculo com as outras partes não-lineares.

Capítulo 3

Dedução e Demonstração do Teorema Principal

Neste capítulo deduziremos formalmente um teorema que nos assegura a existência de soluções fracas para o sistema abaixo, que é o principal resultado desta dissertação.

$$
\begin{cases}
u'' + Au - \Delta u' + \left(|v|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2}\right)|u|^{\rho}\, u = f_1 \\
v'' + Av - \Delta v' + \left(|u|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2}\right)|v|^{\rho}\, v = f_2 \qquad \text{em } Q = \Omega \times (0,T) \\
w'' + Aw - \Delta w' + \left(|v|^{\rho+2} + |u|^{\rho+2}\right)|w|^{\rho}\, w = f_3 \\
u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \\
v(0) = v_0, v'(0) = v_1, \qquad\qquad \text{em } \Omega, \\
w(0) = w_0, w'(0) = w_1 \\
u = 0, v = 0, w = 0 \qquad\qquad \text{sobre } \Sigma = \Gamma \times (0,T)
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

A demonstração do teorema principal será feita usando o método de Faedo-Galerkin, que consiste em aproximar o problema inicial por sistemas aproximados equivalentes, porém em dimensão finita. Além disso, serão usados argumentos de compacidade e monotonicidade.

Observação 3.1. Depois de Feita a demonstração do teorema principal, resultará do Lema 1.3 e de $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, que $u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$, e de $u'' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, que $u' \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$, logo faz sentido o cálculo de $u(0)$ e $u'(0)$. Analogamente, faz sentido $v(0)$ e $v'(0)$, assim como $w(0)$ e $w'(0)$.

3.1 Espaços de Funções

Nesta seção mostraremos, a partir do problema dado, quais os espaços adequados para trabalharmos. Para se usar o método de Faedo-Galerkin, encontraremos um espaço de dimensão finita V_m, a fim de que, para $u_m(t), v_m(t)$ e $w_m(t)$ em V_m, tenhamos o seguinte problema aproximado:

$$\begin{cases} (u''_m(t), z) + \langle Au_m(t), z\rangle + \langle -\Delta u'_m(t), z\rangle + \left\langle \left(|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}\right)|u_m(t)|^{\rho}\, u_m(t), z\right\rangle \\ = (f_1(t), z) \quad \forall z \in V_m \\ (v''_m(t), z) + \langle Av_m(t), z\rangle + \langle -\Delta v'_m(t), z\rangle + \left\langle \left(|u_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}\right)|v_m(t)|^{\rho}\, v_m(t), z\right\rangle \\ = (f_2(t), z) \quad \forall z \in V_m \\ (w''_m(t), z) + \langle Aw_m(t), z\rangle + \langle -\Delta w'_m(t), z\rangle + \left\langle \left(|v_m(t)|^{\rho+2} + |u_m(t)|^{\rho+2}\right)|w_m(t)|^{\rho}\, w_m(t), z\right\rangle \\ = (f_3(t), z) \quad \forall z \in V_m \end{cases} \tag{3.2}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} A : W_0^{1,p}(\Omega) &\rightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\ u &\mapsto Au \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -\Delta : H_0^1(\Omega) &\rightarrow H^{-1}(\Omega) \\ u &\mapsto -\Delta u, \end{aligned}$$

e, para dar sentido às dualidades $\langle Au_m, z\rangle, \langle Av_m, z\rangle, \langle Aw_m, z\rangle$, é suficiente tomarmos $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, sendo $p > 2$, temos $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, logo as dualidades $\langle -\Delta u'_m(t), z\rangle, \langle -\Delta v'_m(t), z\rangle, \langle -\Delta w'_m(t), z\rangle$ fazem sentido, para todo $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Por outro lado temos, via capítulo 2, que $H_0^s(\Omega) \subset H^s(\Omega)$, com $H_0^s(\Omega)$ imerso densa e contínuamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$, para $n = 1, 2, ...$ e $s > n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + 1$. Daí, existe uma base espectral $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $H_0^s(\Omega)$ ortonormal completa em $L^2(\Omega)$, ou seja:

- Todo subconjunto finito $\{z_i\}$ é L.I.;
- As combinações lineares finitas de combinações lineares finitas dos z_j são densas em $H_0^s(\Omega)$

Assim, podemos tomar V_m como o espaço gerado pelos m primeiros vetores da base $\{z_j\}_{z\in\mathbb{N}}$, isto é,

$$V_m = Span\{z_1, ..., z_m\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Note que, como $u_m(t), v_m(t), w_m(t)$ foram tomados em $V_m \subset H_0^s(\Omega)$, concluímos então que $u''_m(t), v''_m(t)$ e $w''_m(t)$ estão em V_m. Faz sentido, pois, tomarmos $(u''_m(t), z)$, $(v''_m(t), z)$ e $(w''_m(t), z)$ como produtos interno em $L^2(\Omega)$ já que, para $p > 2$, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, espaço esse que pode ser identificado com seu dual.

Se tomarmos $f_1(t), f_2(t)$ e $f_3(t)$ em $L^2(\Omega)$, temos $(f_1(t), z)$,$(f_2(t), z)$,$(f_3(t), z)$ como produtos internos em $L^2(\Omega)$. Como consequência dessas deduções, ocorre a seguinte cadeia de imersões contínuas e densas:

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega).$$

Como consequência do teorema da representação de Riesz para espaços $L^2(\Omega)$, temos a seguinte dualidade:

$$\langle -\Delta u'_m(t), z\rangle = \int_\Omega -\Delta u'_m(t).z, \qquad \forall z \in V_m.$$

Pelo teorema da divergência de Gauss, segue que:

$$\langle -\Delta u'_m(t), z\rangle = \int_\Omega -\Delta u'_m(t).z = \int_\Omega \nabla u'_m \nabla z = ((u'_m, z)).$$

No capítulo 2 demos sentido às dualidades:
$\left\langle |v_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t), z\right\rangle$, $\left\langle |u_m(t)|^{\rho+2} |v_m(t)|^\rho v_m(t), z\right\rangle$, $\left\langle |w_m(t)|^{\rho+2} |u_m(t)|^\rho u_m(t), z\right\rangle$,
$\left\langle |w_m(t)|^{\rho+2} |v_m(t)|^\rho v_m(t), z\right\rangle$, $\left\langle |v_m(t)|^{\rho+2} |w_m(t)|^\rho w_m(t), z\right\rangle$ e $\left\langle |u_m(t)|^{\rho+2} |w_m(t)|^\rho w_m(t), z\right\rangle$.

3.2 Existência de Soluções para o Problema Aproximado

Queremos encontrar funções $u_m(t), v_m(t)$ e $w_m(t)$ em V_m tais que:

$$\begin{cases} (u''_m(t), z) + \langle Au_m(t), z\rangle + ((u'_m(t), z))+ \\ + \left\langle \left(|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}\right)|u_m(t)|^{\rho}\, u_m(t), z\right\rangle = (f_1(t), z) \quad \forall z \in V_m \\ (v''_m(t), z) + \langle Av_m(t), z\rangle + ((v'_m(t), z))+ \\ + \left\langle \left(|u_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}\right)|v_m(t)|^{\rho}\, v_m(t), z\right\rangle = (f_2(t), z) \quad \forall z \in V_m \\ (w''_m(t), z) + \langle Aw_m(t), z\rangle + ((w'_m(t), z))+ \\ + \left\langle \left(|v_m(t)|^{\rho+2} + |u_m(t)|^{\rho+2}\right)|w_m(t)|^{\rho}\, w_m(t), z\right\rangle = (f_3(t), z) \quad \forall z \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), u'_m(0) = u_{1m} \to u_1 \text{ em } L^2(\Omega); \\ v_m(0) = v_{0m} \to v_0 \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), v'_m(0) = v_{1m} \to v_1 \text{ em } L^2(\Omega); \\ w_m(0) = w_{0m} \to w_0 \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), w'_m(0) = w_{1m} \to w_1 \text{ em } L^2(\Omega). \end{cases} \tag{3.3}$$

Temos que $u_m(t), v_m(t)$ e $w_m(t)$ pertencem a V_m, logo:

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} a_{im}(t)z_i, \quad v_m(t) = \sum_{i=1}^{m} b_{im}(t)z_i, \quad w_m(t) = \sum_{i=1}^{m} c_{im}(t)z_i$$

$$u_{0m}(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t)z_i, \quad v_{0m}(t) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(t)z_i, \quad w_{0m}(t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(t)z_i$$

$$u_{1m}(t) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i(t)z_i, \quad v_{1m}(t) = \sum_{i=1}^{m} \phi_i(t)z_i, \quad w_{1m}(t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t)z_i$$

Fazendo $z = z_j$ em (3.3), com $j = 1, ..., m$, vemos que $a_{im}(t), b_{im}(t)$ e $c_{im}(t)$ são soluções do sistema:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a''_{im}(t)(z_i, z_j) + \langle Au_m(t), z_j\rangle + \sum_{i=1}^{m} a'_{im}(z_i, z_j) + \\ + \left\langle \left(|\sum_{i=1}^{m} b_{im}(t) z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^{m} c_{im}(t) z_i|^{\rho+2} \right) |\sum_{i=1}^{m} a_{im}(t) z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^{m}(t) a_{im} z_i, z_j \right\rangle \\ = (f_1(t), z_j), \\ \sum_{i=1}^{m} b''_{im}(t)(z_i, z_j) + \langle Av_m(t), z_j\rangle + \sum_{i=1}^{m} b'_{im}(z_i, z_j) + \\ + \left\langle \left(|\sum_{i=1}^{m} a_{im}(t) z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^{m} c_{im}(t) z_i|^{\rho+2} \right) |\sum_{i=1}^{m} b_{im}(t) z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^{m} b(t) z_i, z_j \right\rangle \\ = (f_2(t), z_j), \\ \sum_{i=1}^{m} c''_{im}(t)(z_i, z_j) + \langle Aw_m(t), z_j\rangle + \sum_{i=1}^{m} c'_{im}(z_i, z_j) + \\ + \left\langle \left(|\sum_{i=1}^{m} b_{im}(t) z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^{m} a_{im}(t) z_i|^{\rho+2} \right) |\sum_{i=1}^{m} c_{im}(t) z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^{m} c(t) z_i, z_j \right\rangle \\ = (f_3(t), z_j), \\ a_{im}(0) = \alpha_i \text{ e } a'_{im}(0) = \theta_i; \qquad i = 1, ..., m \\ b_{im}(0) = \beta_i \text{ e } b'_{im}(0) = \phi_i; \qquad i = 1, ..., m \\ c_{im}(0) = \gamma_i \text{ e } c'_{im}(0) = \varphi_i, \qquad i = 1, ..., m \end{cases} \tag{3.4}$$

Obviamente, assegurando a existência de $a_{im}(t), b_{im}(t)$ e $c_{im}(t)$, estaremos mostrando que $(u_m(t), v_m(t), w_m(t))$ será solução, em V_m, para o problema aproximado. Transforma-lo-emos, agora, em sistemas vetoriais equivalentes.

Definindo:

- $C = [(z_i, z_j)]_{m\times m}; B = [((z_i, z_j))]_{m\times m};$
- $K = [a_{1m}, ..., a_{mm}]^*; L = [b_{1m}, ..., b_{mm}]^*;$
  $M = [c_{1m}, ..., c_{mm}]^*;$
- $F = [(f_1(t), z_1), ..., (f_1(t), z_m)]^*; G = [(f_2(t), z_1), ..., (f_2(t), z_m)]^*;$
  $H = [(f_3(t), z_1), ..., (f_3(t), z_m)]^*.$

onde * denota a matriz transposta, o sistema (3.4) assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} CK'' + BK' = F - [\langle Au_m(t), z_j\rangle]_{m\times 1} \\ + \left[\left\langle \left(|\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2}\right) |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m a_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle\right]_{m\times 1} \\ CL'' + BL' = G - [\langle Av_m, z_j\rangle]_{m\times 1} \\ + \left[\left\langle \left(|\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2}\right) |\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m b_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle\right]_{m\times 1} \\ CM'' + BM' = H - [\langle Aw_m(t), z_j\rangle]_{m\times 1} \\ + \left[\left\langle \left(|\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho+2}\right) |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m c_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle\right]_{m\times 1} \\ K(0) = K_0, \qquad K'(0) = K_1, \\ L(0) = L_0, \qquad L'(0) = L_1, \\ M(0) = M_0, \qquad M'(0) = M_1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Como $\{w_j\}$ é uma base ortonormal em $L^2(\Omega)$, o sistema

$$\begin{cases} K'' + BK' = F - [\langle Au_m(t), z_j\rangle]_{m\times 1} \\ + \left[\left\langle \left(|\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2}\right) |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m a_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle\right]_{m\times 1} \\ L'' + BL' = G - [\langle Av_m, z_j\rangle]_{m\times 1} \\ + \left[\left\langle \left(|\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2}\right) |\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m b_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle\right]_{m\times 1} \\ M'' + BM' = H - [\langle Aw_m(t), z_j\rangle]_{m\times 1} \\ + \left[\left\langle \left(|\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho+2}\right) |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m c_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle\right]_{m\times 1} \\ K(0) = K_0, \qquad K'(0) = K_1, \\ L(0) = L_0, \qquad L'(0) = L_1, \\ M(0) = M_0, \qquad M'(0) = M_1. \end{cases} \tag{3.6}$$

é equivalete a (3.5).

Agora, tomando

$$X = \begin{bmatrix} K \\ K' \end{bmatrix}_{2m\times 1}, \quad Y = \begin{bmatrix} L \\ L' \end{bmatrix}_{2m\times 1}, \quad Z = \begin{bmatrix} M \\ M' \end{bmatrix}_{2m\times 1}, \quad D = \begin{bmatrix} \bar{0} & I \\ \bar{0} & -B \end{bmatrix}_{2m\times m+1}.$$

$$P = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \overline{P} \end{bmatrix}_{2m\times 1}, \quad Q = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \overline{Q} \end{bmatrix}_{2m\times 1}, \quad R = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \overline{R} \end{bmatrix}_{2m\times 1}.$$

onde

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} [F - \langle Au_m(t), z_j\rangle \\ + \left\langle \left(|\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2} \right) |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^\rho \sum_{i=m}^m a_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle] \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$\overline{Q} = \begin{bmatrix} [G - \langle Av_m, z_j\rangle + \\ + \left\langle \left(|\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2} \right) |\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^\rho \sum_{i=m}^m b_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle] \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} [H - \langle Aw_m(t), z_j\rangle + \\ + \left\langle \left(|\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho+2} \right) |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^\rho \sum_{i=m}^m c_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle] \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

e $\overline{0}$ é a matriz nula $m \times 1$,o sistema (3.6) assume a seguinte forma equivalente

$$\begin{cases} X' = \Phi(t, X) = DX + P \\ Y' = \Psi(t, Y) = DY + Q \\ Z' = \Theta(t, Z) = DZ + R \\ X(0) = X_0, \\ Y(0) = Y_0, \\ Z(0) = Z_0, \end{cases} \tag{3.7}$$

onde

$$X_0 = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} L_0 \\ L_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Z_0 = \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \end{pmatrix}.$$

Vamos verificar agora que $\Phi(t, X)$ satisfaz as condições de Carathéodory.

1. Fixado X, observemos que os termos $a_{ij}(t)$, com $j = 1, 2..., m$, tornam-se constantes

   - As matrizes D e X são constantes, acarretando DX constante e, portanto, mensurável;
   - $F = \{(f_1(t), z_i)\}, \quad i = 1, ..., m$, é mensurável, já que $f_1(t) \in L^2(\Omega)$;

- Fixado X, as funções $\Big\langle \Big(|\sum_{i=1}^{m} b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^{m} c_{im}(t)z_i|^{\rho+2} \Big) |\sum_{i=1}^{m} a_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^{m} a_{im}($
e $\langle Au_m(t), z_i \rangle$ tornam-se mensuráveis, tornando,assim, P mensurável.

Portanto, fixando X, $\Psi(t, X) = DX + P$ é mensurável.

2. Fixado t, vamos analisar a continuidade de $\Psi(t, X)$.

   (a) Analisemos DX.
   Notemos que
   $$DX = \begin{bmatrix} K' \\ -BK' \end{bmatrix}$$
   Consideremos as aplicações :
   - Projeção, $\Pi : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^m$, dada por $\Pi(X) = K'$;
   - $\Gamma : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^m$, dada por $\Gamma(X) = -BK'$.

   Assim, $\Gamma(X) = -B\Pi(X)$.
   Como a aplicação projeção é contínua, temos que:
   $$\|\Pi(X)\|_m \leq C \|X\|_{2m}$$
   Logo,
   $$\|\Gamma(X)\|_m = \|-B\Pi(X)\|_m \leq C \|-B\| \|X\|_{2m}$$
   Desta forma, Γ é contínua e, consequentemente, DX também o é.

   (b) Analisemos P. Observemos que :
   $$A : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$$
   $$u_m(t) \longmapsto Au_m(t) : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
   $$z_i \longmapsto \langle Au_m(t), z_i \rangle .$$
   Consideremos as aplicações:

- $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow V_m$, dada por $T(y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} y_j z_j = u$, onde $y = (y_1, ..., y_m)$.. Então T é contínua.
- $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(y) = \langle Au_m(t), u\rangle$ é contínua, uma vez que é composta de funções contínuas. De fato, $\varphi = T \circ (Au_m(t))$.

Por outro lado, $\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i, \sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i$ e $\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i$ são funções lineares em dimensão finita, então $|\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^\rho$, $|\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2}$ e $|\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2}$ são funções contínuas.
Consequentemente,

$$\left\langle \left(\left|\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i\right|^{\rho+2} + \left|\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i\right|^{\rho+2} \right) \left|\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i\right|^{\rho} \sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle$$

é contínua, o que acarreta a continuidade de P.
Assim, fixado t, $\Phi(t, X)$ é contínua, uma vez que é soma de funções contínuas.
De forma análoga, mostramos que $\Psi(t, Y)$ e $\Theta(t, Z)$ são funções contínuas.

(c) Dado um compacto K de $\mathbb{R}^{2m}$, como DX e $\left\langle \left(|\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2} \right) |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle$ são contínuas, existem constantes L_1 e M tais que
$\|DX\|_{2m} \leq L_1$
e
$\left|\left\langle \left(|\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2} \right) |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle\right| \leq M.$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&| \ F - \langle Au_m(t), z_j\rangle + \\
&+ \left\langle \left(|\textstyle\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2} \right) |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=m}^m a_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle \ | \\
&\leq \|F\|_{\mathbb{R}^m} + |\langle Au_m(t), z_j\rangle| \\
&+ \left|\left\langle (|\textstyle\sum_{i=1}^m b_{im}(t)z_i|^{\rho+2} + |\sum_{i=1}^m c_{im}(t)z_i|^{\rho+2}) |\sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i|^{\rho} \sum_{i=1}^m a_{im}(t)z_i, z_j \right\rangle\right| \\
&\leq |(f_1(t), z_i)| + N + M \\
&\leq |f_1(t)| \, \|z_i\|_0 + N + M
\end{aligned}$$

$$\leq \tfrac{|f_1(t)|^2}{2} + \tfrac{\|z_i\|_0^2}{2} + N + M$$
$$\leq |f_1(t)|^2 + C_1.$$

Portanto,

$$|\Phi(t, X)| = |DX + P| \leq |DX| + |P| \leq L_1 + |f_1(t)|^2 = \phi_1(t).$$

De maneira semelhante, encontramos que:

$$|\Psi(t, Y)| = |DY + Q| \leq |DY| + |Q| \leq L_2 + |f_2(t)|^2 = \phi_2(t).$$

e

$$|\Theta(t, Z)| = |DZ + R| \leq |DZ| + |R| \leq L_3 + |f_3(t)|^2 = \phi_3(t).$$

Como $f_1(t), f_2(t)$ e $f_3(t) \in L^2(\Omega)$, então $|f_1(t)|^2, |f_2(t)|^2$ e $|f_3(t)|^2 \in L^1(\Omega)$ logo são integráveis. Consequentemente, $\phi_1(t), \phi_2(t)$ e $\phi_3(t)$ também o são.

Agora, consideremos $S = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$, então $S(0) = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}$ e $S' = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$ Daí, temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} S' = \Xi(t, S) = \begin{bmatrix} \Phi(t, X) \\ \Psi(t, Y) \\ \Theta(t, Z) \end{bmatrix} \\ S(0) = S_0. \end{cases} \tag{3.8}$$

- Para S fixo, $\Xi(t, S)$ é mensurável, pois $\Phi(t, X), \Psi(t, Y)$ e $\Theta(t, Z)$ são mensuráveis;
- Para t fixo, temos que $\Xi(t, S)$ é contínua, pois $\Phi(t, X), \Psi(t, Y)$ e $\Theta(t, Z)$ são contínuas;
- Dado um compacto K' temos que:

$$|\Xi(t, S)| \leq \phi_1(t) + \phi_2(t) + \phi_3(t) = \phi_4(t)$$

é integrável, uma vez que $\phi_1(t), \phi_2(t)$ e $\phi_3(t)$ são integráveis.
O sistema (3.3) satisfaz, pois, as condições de Carathéodory. Logo existe uma solução $\{u_m(t), v_m(t), w_m(t)\}$ em $[0, t_m)$, $t_m < T$ satisfazendo (3.3).

3.3 Estimativas *a Priori I*

Serão estendidas ao intervalo [0,T] as soluções encontradas na seção anterior. Para isso, faremos algumas estimativas *a priori* . Consideremos, primeiramente, $z = u_m'(t)$ em $(3.3)_1$, então segue-se que:

$$\begin{cases} (u_m''(t), u_m'(t)) + \langle Au_m(t), u_m'(t)\rangle + ((u_m'(t), u_m'(t)))+ \\ + \left\langle (|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\, |u_m(t)|^{\rho}\, u_m(t), u_m'(t)\right\rangle = (f_1(t), u_m'(t)) \qquad \forall z \in V_m \end{cases} \tag{3.9}$$

Note que

- $(u_m''(t), u_m'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m'(t)\right|^2$;
- $\langle Au_m(t), u_m'(t)\rangle = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|u_m(t)\right\|_0^p$;
- $((u_m'(t), u_m'(t))) = \left\|u_m'(t)\right\|^2$;
- $\left\langle |v_m(t)|^{\rho+2}\, |u_m(t)|^{\rho}\, u_m(t), u_m'(t)\right\rangle = \int_\Omega |v_m(t)|^{\rho+2}\, |u_m(t)|^{\rho}\, u_m(t).u_m'(t)dx = \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |v_m(t)|^{\rho+2}\, \frac{d}{dt}\, |u_m(t)|^{\rho+2}\, dx.$
- $\left\langle |w_m(t)|^{\rho+2}\, |u_m(t)|^{\rho}\, u_m(t), u_m'(t)\right\rangle = \int_\Omega |w_m(t)|^{\rho+2}\, |u_m(t)|^{\rho}\, u_m(t).u_m'(t)dx = \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |w_m(t)|^{\rho+2}\, \frac{d}{dt}\, |u_m(t)|^{\rho+2}\, dx.$

Substituindo essas identidades em (3.9), obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|u_m(t)\right\|_0^p + \left\|u_m'(t)\right\|^2 + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega \left(|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}\right)\frac{d}{dt}\left|u_m(t)\right|^{\rho+2} dx \\ &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m'(t)\right|^2 = (f_1(t), u_m'(t)) \le |(f_1(t), u_m'(t))| \le |f_1(t)|\,|u_m'(t)| \overset{1}{\le} \frac{1}{2}(|f_1(t)|^2 + |u_m'(t)|^2). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Analogamente, fazendo $z = v_m'(t)$ e $z = w_m'(t)$ em $(3.3)_2$ e $(3.3)_3$, tem-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|v_m(t)\right\|_0^p + \left\|v_m'(t)\right\|^2 + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega \left(|u_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}\right)\frac{d}{dt}\left|v_m(t)\right|^{\rho+2} dx \\ &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|v_m'(t)\right|^2 = (f_2(t), v_m'(t)) \le |(f_1(t), v_m'(t))| \le |f_2(t)|\,|v_m'(t)| \le \frac{1}{2}(|f_2(t)|^2 + |v_m'(t)|^2). \end{aligned} \tag{3.11}$$

e

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|w_m(t)\|_0^p + \|w_m'(t)\|^2 + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega \left(|v_m(t)|^{\rho+2} + |u_m(t)|^{\rho+2}\right)\frac{d}{dt}|w_m(t)|^{\rho+2}\,dx$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_m'(t)|^2 = (f_3(t), w_m'(t)) \le |(f_3(t), w_m'(t))| \le |f_3(t)|\,|w_m'(t)| \le \frac{1}{2}(|f_3(t)|^2 + |w_m'(t)|^2). \tag{3.12}$$

Somando (3.10),(3.11) e (3.12), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(\frac{d}{dt}|u_m'(t)|^2 + \frac{d}{dt}|v_m'(t)|^2 + \frac{d}{dt}|w_m'(t)|^2\Big) + \frac{1}{p}\Big(\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_0^p + \frac{d}{dt}\|v_m(t)\|_0^p + \frac{d}{dt}\|w_m(t)\|_0^p\Big)\\
&+ \|u_m'(t)\|^2 + \|v_m'(t)\|^2 + \|w_m'(t)\|^2 + \frac{1}{\rho+2}\Big(\int_\Omega\Big[\left(|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}\right)\frac{d}{dt}|u_m(t)|^{\rho+2}\,dx\\
&+ \left(|u_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}\right)\frac{d}{dt}|v_m(t)|^{\rho+2} + \left(|v_m(t)|^{\rho+2} + |u_m(t)|^{\rho+2}\right)\frac{d}{dt}|w_m(t)|^{\rho+2}\Big]dx\\
&\le \frac{1}{2}(|f_1(t)|^2 + |f_2(t)|^2 + |f_3(t)|^2) + \frac{1}{2}(|u_m'(t)|^2 + |v_m'(t)|^2 + |w_m'(t)|^2).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Note que

- $\frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |v_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^{\rho+2}\,dx + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|v_m(t)|^{\rho+2}\,dx$
  $= \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |v_m(t)|^{\rho+2}|u_m(t)|^{\rho+2}\,dx = \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}.$

- $\frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |w_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^{\rho+2}\,dx + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|w_m(t)|^{\rho+2}\,dx$
  $= \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_m(t)|^{\rho+2}|w_m(t)|^{\rho+2}\,dx = \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)w_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}.$

- $\frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |w_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|v_m(t)|^{\rho+2}\,dx + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |v_m(t)|^{\rho+2}\frac{d}{dt}|w_m(t)|^{\rho+2}\,dx$
  $= \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |v_m(t)|^{\rho+2}|w_m(t)|^{\rho+2}\,dx = \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|v_m(t)w_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}.$

Portanto, 3.13 torna-se:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left|u_m'(t)\right|^2 + \dfrac{1}{p}\dfrac{d}{dt}\left\|u_m(t)\right\|_0^p + \left\|u_m'(t)\right\|^2 + \dfrac{1}{\rho+2}\dfrac{d}{dt}\left\|u_m(t)v_m(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left|v_m'(t)\right|^2 + \dfrac{1}{p}\dfrac{d}{dt}\left\|v_m(t)\right\|_0^p + \left\|v_m'(t)\right\|^2 + \dfrac{1}{\rho+2}\dfrac{d}{dt}\left\|u_m(t)w_m(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left|w_m'(t)\right|^2 + \dfrac{1}{p}\dfrac{d}{dt}\left\|w_m(t)\right\|_0^p + \left\|w_m'(t)\right\|^2 + \dfrac{1}{\rho+2}\dfrac{d}{dt}\left\|v_m(t)w_m(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \\ \leq \dfrac{1}{2}\left|f_1(t)\right|^2 + \dfrac{1}{2}\left|u_m'(t)\right| + \dfrac{1}{2}\left|f_2(t)\right|^2 + \dfrac{1}{2}\left|v_m'(t)\right| + \dfrac{1}{2}\left|f_3(t)\right|^2 + \dfrac{1}{2}\left|w_m'(t)\right|. \end{cases} \tag{3.14}$$

Integrando (3.14) de 0 a t, $t < T$,temos:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\left|u_m'(t)\right|^2 + \left|v_m'(t)\right|^2 + \left|w_m'(t)\right|^2) + \frac{1}{p}(\left\|u_m(t)\right\|_0^p + \left\|v_m(t)\right\|_0^p + \left\|w_m(t)\right\|_0^p) \\ &+ \int_0^t (\left\|u_m'(s)\right\| + \left\|v_m'(s)\right\| + \left\|w_m'(s)\right\|)ds + \frac{1}{\rho+2}[\left\|u_m(t)v_m(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \\ &+ \left\|u_m(t)w_m(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \left\|v_m(t)w_m(t)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}] \leq \frac{1}{2}\int_0^T (\left|f_1(s)\right|^2 + \left|f_2(s)\right|^2 + \left|f_3(s)\right|^2)ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t (\left|u_m'(s)\right|^2 + \left|v_m'(s)\right|^2 + \left|w_m'(s)\right|^2)ds + \frac{1}{2}\left|u_m'(0)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|v_m'(0)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|w_m'(0)\right|^2 \\ &+ \frac{1}{p}\left(\left\|u_m(0)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \left\|v_m(0)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \left\|w_m(0)\right\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}\right) + \frac{1}{\rho+2}[\left\|u_m(0)v_m(0)\right\| \\ &+ \left\|u_m(0)w_m(0)\right\| + \left\|v_m(0)w_m(0)\right\|] \end{aligned} \tag{3.15}$$

Apartir de agora extrairemos os dados que fazem parte do principal teorema desta dissertação. Tomando,

(I) f_1, f_2 e $f_3 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$;

(II) $u_m(0) \to u_0, v_m(0) \to v_0, w_m(0) \to w_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$;

(III) $u_m'(0) \to u_1, v_m'(0) \to v_1, w_m'(0) \to w_1$ em $L^2(\Omega)$.

Segue-se que:

- $\displaystyle\int_0^T (\left|f_1(t)\right|^2 + \left|f_2(t)\right|^2 + \left|f_3(t)\right|^2)dt$ é limitada;
- $\left\|u_m(0)\right\|_0 \leq C, \left\|v_m(0)\right\|_0 \leq C$ e $\left\|w_m(0)\right\|_0 \leq C, \quad \forall m$;

- $|u'_m(0)| \leq C, |v'_m(0)| \leq C$ e $|w'_m(0)| \leq C, \quad \forall m.$

Além disso, pelo lema (2.5), $\{u_m(0)v_m(0)\}_{m=1}^{\infty}, \{v_m(0)w_m(0)\}_{m=1}^{\infty}$ e $\{u_m(0)w_m(0)\}_{m=1}^{\infty}$ são limitados em $L^{\rho+2}(\Omega)$. Temos também, da desigualdade (3.15) que:

$$\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|v'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|w'_m(t)|^2 \leq C + \frac{1}{2}\int_0^t (|u'_m(s)|^2 + |v'_m(s)|^2 + |w'_m(s)|^2)ds.$$

Segue-se, via desigualdade de Gronwall que u'_m, v'_m e w'_m são limitadas. Consequentemente, (3.15) assume a seguinte forma:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|v'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|w'_m(t)|^2 + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p}\|v_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p}\|w_m(t)\|_0^p \\ +\frac{1}{\rho+2}\|u_m(t)v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \frac{1}{\rho+2}\|u_m(t)w_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \frac{1}{\rho+2}\|v_m(t)w_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \\ +\int_0^t \|u'_m(s)\|\,ds + \int_0^t \|v'_m(s)\|\,ds + \int_0^t \|w'_m(s)\|\,ds \leq C, \end{array}\right. \tag{3.16}$$

onde C é uma constante independente de $t \geq 0$ e m.

Da desigualdade (3.16) e via resultados de prolongamento, segue-se que podemos estender as soluções $\{u_m(t), v_m(t), w_m(t)\}$ ao intervalo $[0, T]$.Daí

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|v'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|w'_m(t)|^2 + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p}\|v_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p}\|w_m(t)\|_0^p \\ +\frac{1}{\rho+2}\left(\|u_m(t)v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \|u_m(t)w_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \|v_m(t)w_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}\right) \\ +\int_0^t \|u'_m(s)\|\,ds + \int_0^t \|v'_m(s)\|\,ds + \int_0^t \|w'_m(s)\|\,ds \leq C, \end{array}\right. \tag{3.17}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todo $t \in [0, T]$.
De (3.17) concluímos que:

$$\|u_m(t)\|_0 + \|v_m(t)\|_0 + \|w_m(t)\|_0 \leq C, \tag{3.18}$$

$$|u'_m(t)| + |v'_m(t)| + |w'_m(t)| \leq C, \tag{3.19}$$

$$\|u_m(t)v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|u_m(t)w_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|v_m(t)w_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)} \leq C, \tag{3.20}$$

$$\int_0^T \|u'_m(t)\|^2 dt + \int_0^T \|v'_m(t)\|^2 dt + \int_0^T \|w'_m(t)\|^2 dt < C, \tag{3.21}$$

onde as desigualdades (3.18)-(3.21) ocorrem para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todo $t \in [0, T]$.

Dessas últimas conclusões, deduz-se que:

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} + \|v_m\|_{L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} + \|w_m\|_{L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \leq C \tag{3.22}$$

$$\|u_m'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|v_m'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|w_m'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \tag{3.23}$$

$$\|u_m v_m\|_{L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega))} + \|u_m w_m\|_{L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega))} + \|v_m w_m\|_{L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega))} \leq C \tag{3.24}$$

Por outro lado, de (3.21) segue-se

$$\|u_m'\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} + \|v_m'\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} + \|w_m'\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N} \tag{3.25}$$

De (3.22) a (3.25) temos:

$$(u_m)_m, (v_m)_m, (w_m)_m, \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)); \tag{3.26}$$

$$(u_m')_m, (v_m')_m, (w_m')_m, \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)); \tag{3.27}$$

$$(u_m')_m, (v_m')_m, (w_m')_m, \text{ são limitadas em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)); \tag{3.28}$$

$$(u_m v_m)_m, (u_m w_m)_m, (v_m w_m)_m, \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)). \tag{3.29}$$

Além disso, A é limitado, portanto:

$$(Au_m)_m, (Av_m)_m, (Aw_m)_m, \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{3.30}$$

3.4 Estimativas *a Priori II*

Mostraremos que $(u_m'')_m, (v_m'')_m$ e $(w_m'')_m$ são limitadas em $L^2(0, T; H^{-s}(\Omega))$. Seja $P_m : L^2(\Omega) \to V_m \subset H_0^s(\Omega)$, o operador projeção sobre $L^2(\Omega)$, dado por

$$P_m(h) = \sum_{j=1}^{m} (h, z_j) z_j.$$

Temos que

1. $P_m \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ e $P_m = P_m^*$, onde * denota a adjunta de P_m

2. $P_m \in \mathcal{L}(H_0^s(\Omega))$

3. $P_m(\omega) = \omega, \quad \forall \omega \in V_m.$

Com efeito,

1. Pela linearidade do produto interno em $L^2(\Omega)$, segue que P_m é linear. Agora, para todo $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}(P_m(h_1), h_2) = (\sum_{j=1}^{m}(h_1, z_j)z_j, h_2) &= \sum_{j=1}^{m}((h_1, z_j)(z_j, h_2) \\ &= \sum_{j=1}^{m}(h_1, z_j)z_j, h_1) = (h_1, P_m(h_2))\end{aligned} \tag{3.31}$$

Logo, pelo teorema de Hellinger-Toeplitz,$P_m \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ e $P_m = P_m^*$.

2. Seja $h \in H_0^s(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned}\|P_m(h)\|_{H_0^s(\Omega)} = \left\|\sum_{j=1}^{m}(h, \omega_j)\omega_j\right\|_{H_0^s(\Omega)} &\leq \sum_{j=1}^{m}\|(h, \omega_j)\omega_j\|_{H_0^s(\Omega)} \leq \\ \leq \sum_{j=1}^{m}|(h, \omega_j)|\,\|\omega_j\|_{H_0^s(\Omega)} &\leq \sum_{j=1}^{m}|h|\,|\omega_j|\,\|\omega_j\|_{H_0^s(\Omega)} \leq \\ &\leq C\,\|h\|_{H_0^s(\Omega)}\sum_{j=1}^{m}\|\omega_j\|_{H_0^s(\Omega)},\end{aligned} \tag{3.32}$$

donde, $P_m \in \mathcal{L}(H_0^s(\Omega))$.

3. Seja $\omega \in V_m$. Então, $\omega = \sum_{i=1}^{m} C_i\omega_i$. Assim,

$$P_m(\omega) = P_m(\sum_{i=1}^{m} C_i\omega_i) = \sum_{i=1}^{m} C_i P_m(\omega_i) = \sum_{i=1}^{m} C_i \sum_{j=1}^{m}(\omega_i, \omega_j)\omega_j = \sum_{i=1}^{m} C_i\omega_i = \omega. \tag{3.33}$$

Temos que

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega),$$

e, pelo Lema (2.5), $L^\theta(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$. Logo, segue da equação aproximada $(3.3)_1$, que

$$\left\langle u_m''(t) + Au_m(t) - \Delta u_m'(t) + (|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^\rho\, u_m(t) - f_1(t), \omega\right\rangle = 0$$

$$\left\langle u''_m(t) + Au_m(t) - \Delta u'_m(t) + (|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^{\rho}\,u_m(t) - f_1(t), P_m(\omega)\right\rangle = 0$$

para todo $\omega \in V_m$, onde $\langle , \rangle$ denota a dualidade $H^{-s}(\Omega) \times H_0^s(\Omega)$. Logo

$$(u''_m(t)+Au_m(t)-\Delta u'_m(t)+(|v_m(t)|^{\rho+2}+|w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^{\rho}\,u_m(t)-f_1(t), P_m(\omega)) = 0$$

para todo $w \in V_m$. Daí, sendo $P_m = P_m^*$, segue que

$$P_m^*(u''_m(t) + Au_m(t) - \Delta u'_m(t) + (|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^{\rho}\,u_m(t) - f_1(t)) = 0$$

em V_m.

O teorema da extensão de Hahn-Banach afirma que se X é um espaço normado, Y é um espaço de Banach, M um subespaço denso de X e $T : M \subset X \to Y$ é uma transformação linear limitada, então existe uma única transformação linear limitada $\overline{T} : X \to Y$ tal que $\overline{T}(x) = T(x)$ para todo $x \in M$, e $\left\|\overline{T}(x)\right\| = \|T(x)\|$.

Usando este resultado, obtemos

$$P_m^*(u''_m(t) + Au_m(t) - \Delta u'_m(t) + (|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^{\rho}\,u_m(t) - f_1(t)) = 0$$

em $H_0^s(\Omega)$.Daí, pela linearidade de P_m^* e do fato de que $u''_m(t) \in V_m$, segue que

$$\begin{aligned} u''_m(t) = -P_m^*(Au_m(t)) + P_m^*(\Delta u'_m(t)) - P_m^*(|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^{\rho}\,u_m(t) \\ +P_m^*(f_1(t)), \end{aligned}$$

em $H^{-s}(\Omega)$. Aplicando a norma em ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned} &\|u''_m(t)\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq \|P_m^*(Au_m(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} + \|P_m^*(\Delta u'_m(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} \\ &+ \left\|P_m^*(|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\,|u_m(t)|^{\rho}\,u_m(t))\right\|_{H^{-s}(\Omega)} + \|P_m^*(f_1(t))\|_{H^{-s}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Mas, $P_m^* \in \mathcal{L}(H^{-s}(\Omega))$ e $W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$. Logo $P_m^* \in \mathcal{L}(W^{-1,p'}(\Omega), H^{-s}(\Omega))$ e, então,

$$\|P_m^*(Au_m(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq C\,\|Au_m(t)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C\,\|u_m(t)\|_0^{p-1} \tag{3.35}$$

Temos ainda $P_m^* \in \mathcal{L}(H^{-s}(\Omega))$ e $H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$.Assim $P_m^* \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega), H^{-s}(\Omega))$ e daí obtemos

$$\|P_m^*(\Delta u'_m(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq \|\Delta u'_m(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C\|u'_m(t)\|. \tag{3.36}$$

Também, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega)$ e $L^\theta(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$. Assim, como $P_m^* \in \mathcal{L}(H^{-s}(\Omega))$, segue que $P_m^* \in \mathcal{L}(L^\theta(\Omega), H^{-s}(\Omega))$. Obtemos então

$$\begin{aligned} &\left\| P_m^*(|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}) \, |u_m(t)|^\rho \, u_m(t)) \right\|_{H^{-s}(\Omega)} \\ &\leq C \left\| |v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}) \, |u_m(t)|^\rho \, u_m(t)) \right\|_{L^\theta(\Omega)} \\ &\leq C_2. \end{aligned} \tag{3.37}$$

pois $(|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2}) \, |u_m(t)|^\rho \, u_m(t)$ é limitada em $L^\infty(0,T; L^\theta(\Omega))$.

Por fim, sendo $P_m^* \in \mathcal{L}(H^{-s}(\Omega))$ e $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$, segue que $P_m^* \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^{-s}(\Omega))$. Assim,

$$\|P_m^* f_1(t)\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq C \, |f_1(t)| \, , \quad f_1(t) \in L^2(\Omega). \tag{3.38}$$

Levando em consideração as limitações (3.35)-(3.38), concluímos, via expressão (3.34), que

$$(u_m''(t))_m \text{ é limitada em } L^2(0,T; H^{-s}(\Omega)) \tag{3.39}$$

Um raciocínio semelhante, usando as equações aproximadas $(3.3)_2$ e $(3.3)_3$, conduz a

$$(v_m''(t))_m \text{ é limitada em } L^2(0,T; H^{-s}(\Omega)) \tag{3.40}$$

e

$$(w_m''(t))_m \text{ é limitada em } L^2(0,T; H^{-s}(\Omega)) \tag{3.41}$$

3.5 Estimativas *a Priori III*

Foi visto anteriormente, mediante utilização do operador projeção sobre $L^2(\Omega)$, que:

$$\|u_m''(t)\|_{H^{-s}(\Omega)} + \|v_m''(t)\|_{H^{-s}(\Omega)} + \|w_m''(t)\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq C.$$

e, portanto:

$$\|u_m''\|_{L^2(0,T;H^{-s}(\Omega))} + \|v_m''\|_{L^2(0,T;H^{-s}(\Omega))} + \|w_m''\|_{L^2(0,T;H^{-s}(\Omega))} \leq C, \qquad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.42}$$

Já pelo lema (2.5), foi visto que se $u_m(t), v_m(t), w_m(t)$ pertencem a $W_0^{1,p}(\Omega)$, então $|v_m(t)|^{\rho+2} \, |u_m(t)|^\rho \, u_m(t) \in L^\theta(\Omega)$ em qualquer situação estudada. Logo:

$$\left\| |v_m|^{\rho+2} |u_m|^\rho u_m \right\|_{L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega))} \leq C, \qquad m \in \mathbb{N} \tag{3.43}$$

donde

$$(|v_m|^{\rho+2} |u_m|^\rho u_m)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega)). \tag{3.44}$$

Analogamente, todas as outras partes não lineares do problema (1.1) são limitadas em $L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega))$. Além disso, de (3.42), segue que:

$$(u''_m)_m \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-s}(\Omega)); \tag{3.45}$$

$$(v''_m)_m \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-s}(\Omega)); \tag{3.46}$$

$$(w''_m)_m \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-s}(\Omega)). \tag{3.47}$$

Formularemos agora o conceito de solução.
Seja $\Psi(x,t) = w(x)\theta(t),\ w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\theta \in D(0,T)$. Multiplicando a equação $(1.1)_1$ por $\Psi(x,t)$, temos:

$$u''.\Psi + Au.\Psi - \Delta u'\Psi + (|v|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2}) |u|^\rho u.\Psi = f_1.\Psi,$$

e integrando em Q, tem-se

$$\int_Q u''.\Psi + \int_Q Au.\Psi - \int_Q \Delta u'\Psi + \int_Q (|v|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2}) |u|^\rho u.\Psi = \int_Q f_1.\Psi.$$

Utilizando o teorema de Green, temos

$$-\int_Q u'.\Psi' + \int_Q Au.\Psi + \int_\Omega \nabla u'\nabla\Psi + \int_Q (|v|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2}) |u|^\rho u.\Psi = \int_Q f_1.\Psi. \Leftrightarrow$$

$$-\int_0^T \theta' \left(\int_Q u'.wdx \right) dt + \int_0^T \theta \left(\int_Q Au.wdx \right) dt + \int_0^T \theta \left(\int_Q \nabla u'\nabla w dx \right) dt$$

$$+ \int_0^T \theta \left(\int_Q (|v|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2}) |u|^\rho u.wdx \right) dt = \int_0^T \theta \left(\int_Q f_1.wdx \right) dt. \Leftrightarrow$$

$$\int_0^T \theta \frac{d}{dt} \left(\int_Q u'.wdx \right) dt + \int_0^T \langle Au, w\rangle \theta dt + \int_0^T ((u', w)) \theta dt +$$

$$+ \int_0^T \left\langle (|v|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2}) |u|^\rho u, w \right\rangle \theta dt = \int_0^T (f_1, w)\theta dt, \quad \forall \theta \in D(0,T). \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(u', z) + \langle Au, z\rangle + ((u', z)) + \left\langle (|v|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2}) |u|^\rho u, z \right\rangle = (f_1, z), \tag{3.48}$$

$$\forall\ z \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \text{em}\ D'(0,T).$$

Analogamente,

$$\frac{d}{dt}(v',z) + \langle Av, z\rangle + ((v',z)) + \left\langle \left(|u|^{\rho+2} + |w|^{\rho+2}\right)|v|^{\rho}\, v, z\right\rangle = (f_2, z), \tag{3.49}$$
$$\forall\ z \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \text{em}\ D'(0,T).$$

e

$$\frac{d}{dt}(w',z) + \langle Aw, z\rangle + ((w',z)) + \left\langle \left(|v|^{\rho+2} + |u|^{\rho+2}\right)|w|^{\rho}\, w, w\right\rangle = (f_3, z), \tag{3.50}$$
$$\forall\ z \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \text{em}\ D'(0,T).$$

Definição 3.1. Uma solução de (3.1) é uma trinca de funções reais $\{u = u(x,t), v = v(x,t)$ e $w = w(x,t))\}$ definida em todo $(x,t) \in Q$, onde $Q = \Omega \times (0,T)$, para $T > 0$ fixado, tais que:

$$u, v, w \in L^{\infty}(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)),$$
$$u', v', w' \in L^{\infty}(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),$$

satisfazendo $(3.48), (3.49)$ e (3.50).

Das estimativas (I), (II) e (III), temos

- $f_1, f_2, f_3 \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$;
- $u_0, v_0, w_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$;
- $u_1, v_1, w_1 \in L^2(\Omega)$.

E de (II) e (3.16) , segue-se:

$$u'_m, v'_m \text{ e } w'_m \in L^{\infty}(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), \tag{3.51}$$

ainda por (3.16), temos:

$$u_m, v_m, w_m \in L^{\infty}(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)). \tag{3.52}$$

Assim, devido a essas observações, podemos enunciar o teorema principal desta monografia.

3.5.1 Teorema Principal

Sejam n, p e ρ como no capítulo 2 e suponha que

$$\begin{gathered} f_1, f_2, f_3 \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ u_0, v_0, w_0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ u_1, v_1, w_1 \in L^2(\Omega). \end{gathered} \tag{3.53}$$

Então existem $u, v, w : Q \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{gathered} u, v, w \in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \\ u', v', w' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \end{gathered} \tag{3.54}$$

e para todo $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u'(t),z) + \langle Au(t),z\rangle + ((u'(t),z)) + \left\langle \left[|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2}\right]|u(t)|^\rho u(t), z\right\rangle \\ = (f_1(t),z), \end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v'(t),z) + \langle Av(t),z\rangle + ((v'(t),z)) + \left\langle \left[|u(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2}\right]|v(t)|^\rho v(t), z\right\rangle \\ = (f_2(t),z), \end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(w'(t),z) + \langle Aw(t),z\rangle + ((w'(t),z)) + \left\langle \left[|u(t)|^{\rho+2} + |v(t)|^{\rho+2}\right]|w(t)|^\rho w(t), z\right\rangle \\ = (f_3(t),z) \end{aligned} \tag{3.57}$$

e as igualdades (3.55),(3.56) e (3.57) são entendidas no sentido de $D'(0,T)$.
Além disso

$$\begin{cases} u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \\ v(0) = v_0, v'(0) = v_1, \\ w(0) = w_0, w'(0) = w_1. \end{cases} \tag{3.58}$$

3.6 Passagem do Limite

Observe que, considerando X um espaço de Banach reflexivo, temos que $L^\infty(0,T;X) = (L^1(0,T,X'))'$ e $L^2(0,T;X) = (L^2(0,T,X'))'$. Logo, das limitações obtidas de (3.26) a (3.28),(3.30) e de (3.45) a (3.47), segue, via teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, a existência de subsequências $(u_\nu)_\nu, (v_\nu)_\nu$ e $(w_\nu)_\nu$ de $(u_m)_m, (v_m)_m$ e $(w_m)_m$, respectivamente, tais que:

$$u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u, v_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} v, w_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} w, \text{ em } L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \tag{3.59}$$

$$u'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u', v'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} v', w'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} w', \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.60}$$

$$u'_\nu \rightharpoonup u', v'_\nu \rightharpoonup v', w'_\nu \rightharpoonup w', \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.61}$$

$$u''_\nu \rightharpoonup u'', v''_\nu \rightharpoonup v'', w''_\nu \rightharpoonup w'', \text{ em } L^2(0,T;H^{-s}(\Omega)), \tag{3.62}$$

$$Au_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \chi, Av_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \eta, Aw_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \xi \text{ em } L^\infty(0,T,W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{3.63}$$

Observação: Note que se $u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ e $u'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} w$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, então, como $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset D'(0,T;L^2(\Omega))$ e $L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \subset D'(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \subset D'(0,T;L^2(\Omega))$, tem-se que

$$u_\nu \to u, \qquad u'_\nu \to w$$

em $D'(0,T;L^2(\Omega))$, e pela continuidade da derivada distribucional, se $u_\nu \to u$ e $u'_\nu \to w$ deduzimos $w = u'$, donde (3.61) faz sentido. De modo semelhante, analisa-se as outras situações.

Consideremos a equação aproximada $(3.3)_1$ na forma:

$$\left| \begin{array}{l} (u''_m(t),z) + \langle Au_m(t),z\rangle + ((u'_m(t),z)) \\ + \left\langle (|v_m(t)|^{\rho+2} + |w_m(t)|^{\rho+2})\, |u_m(t)|^\rho\, u_m(t), z\right\rangle = (f_1(t),z), \end{array} \right.$$

para todo $z \in V_m, \nu \geq m$.

Agora, multiplicando-a por $\varphi \in D(0,T)$, obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} (u''_\nu(t),z)\varphi + \langle Au_\nu(t),z\rangle\varphi + ((u'_\nu(t),z))\varphi + \\ + \left\langle (|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2})\, |u_\nu(t)|^\rho\, u_\nu(t), z\right\rangle\varphi = (f_1(t),z)\varphi, \end{array} \right.$$

para todo $z \in V_m, \nu \geq m$. Integrando-se 0 a T, temos:

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T (u''_\nu(t), z)\varphi dt + \int_0^T \langle Au_\nu(t), z\rangle \varphi dt + \int_0^T ((u'_\nu(t), z))\varphi dt + \\ \displaystyle + \int_0^T \left\langle (|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2})\, |u_\nu(t)|^\rho\, u_\nu(t), z \right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_1(t), z)\varphi dt \end{array} \right.$$

para todo $z \in V_m, \nu \geq m$.
Daí, via integração por partes, obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle -\int_0^T (u'_\nu(t), z)\varphi' dt + \int_0^T \langle Au_\nu(t), z\rangle \varphi dt + \int_0^T ((u'_\nu(t), z))\varphi dt + \\ \displaystyle + \int_0^T \left\langle (|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2})\, |u_m(t)|^\rho\, u_\nu(t), z \right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_1(t), z)\varphi dt. \end{array} \right. \tag{3.64}$$

para todo $z \in V_m, \nu \geq m$.

Como $u'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) = (L^1(0, T, L^2(\Omega)))'$ então

$$\langle u'_\nu, \phi\rangle \to \langle u', \phi\rangle, \qquad \forall \phi \in L^1(0, T, L^2(\Omega)). \tag{3.65}$$

Daí, sendo $\langle u'_\nu, \phi\rangle = \displaystyle\int_0^T (u'_\nu(t), \phi(t))dt$, temos, para $\psi(x, t) = z(x)\psi(t)$ que:

$$\int_0^T (u'_\nu(t), \phi(t))dt = \int_0^T (u'_\nu(t), z(x))\psi(t))dt, \quad \forall\ z \in L^2(\Omega), \forall\ \psi \in L^1(0, T).$$

Donde, de (3.65),

$$\int_0^T (u'_\nu(t), z(x))\varphi'(t))dt \to \int_0^T (u'(t), z(x))\varphi'(t))dt, \quad \forall\ z \in L^2(\Omega), \forall\ \psi \in L^1(0, T). \tag{3.66}$$

Em particular,

$$\int_0^T (u'_\nu(t), z(x))\psi(t)dt \to \int_0^T (u'(t), z(x))\psi(t)dt, \tag{3.67}$$

$$\forall\ z \in V_m \subset W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega), \quad \forall\ \psi = \varphi', \quad \varphi \in D(0, T) \subset L^1(0, T).$$

Analogamente temos, de (3.63), que

$$\int_0^T \langle Au_\nu(t), z(x)\rangle\, \psi(t)dt \to \int_0^T \langle \chi(t), z(x)\rangle\, \psi(t)dt, \tag{3.68}$$

$$\forall z \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall \psi \in L^1(0,T).$$

Em particular,

$$\int_0^T \langle Au_\nu(t), z(x)\rangle\, \varphi(t)dt \to \int_0^T \langle \chi(t), z(x)\rangle\, \varphi(t)dt, \tag{3.69}$$

$$\forall z \in V_m \subset W_0^{1,p}(\Omega), \forall\ \varphi\ \in D(0,T) \subset L^1(0,T).$$

De (3.61) segue que:

$$\int_0^T \langle u'_\nu(t)dt, s(x)\rangle\, \psi(t)dt \to \int_0^T \langle u'(t)dt, s(x)\rangle\, \psi(t)dt, \tag{3.70}$$

$$\forall s \in H^{-1}(\Omega), \quad \forall \psi \in L^2(0,T).$$

Em particular,

$$\int_0^T \langle u'_\nu(t)dt, -\Delta z(x)\rangle\, \varphi(t)dt \to \int_0^T \langle u'(t)dt, \Delta z(x)\rangle\, \varphi(t)dt, \tag{3.71}$$

$$\forall z \in V_m \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega), \quad \forall \psi = \varphi', \quad \varphi \in D(0,T) \subset L^2(0,T).$$

Assim,

$$\int_0^T ((u'_\nu(t), z(x)))\varphi(t)dt \to \int_0^T ((u'(t), z(x)))\varphi(t)dt, \tag{3.72}$$

$\forall z \in V_m \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega), \quad \forall \psi = \varphi', \quad \varphi \in D(0,T) \subset L^2(0,T).$

De (3.44) temos que $(|v_m|^{\rho+2}\,|u_m|^\rho\, u_m)_m$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega))$. Portanto $(|v_m(t)|^{\rho+2}\,|u_m(t)|^\rho\, u_m(t))_m$ é limitada em $L^\theta(\Omega)$, ou seja:

$$\left\| |v_m(t)|^{\rho+2}\,|u_m(t)|^\rho\, u_m(t)) \right\|_{L^\theta(\Omega)} \le C, \quad \forall t \in [0,T], \tag{3.73}$$

donde,

$$\int_0^T \left\| |v_m(t)|^{\rho+2}\,|u_m(t)|^\rho\, u_m(t)) \right\|_{L^\theta(\Omega)}^\theta dt \le C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.74}$$

Logo,

$$\left\| |v_m(t)|^{\rho+2}\,|u_m(t)|^\rho\, u_m(t)) \right\|_{L^\theta(0,T;L^\theta(\Omega))} \le C, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{3.75}$$

e portanto, $(|v_m|^{\rho+2}|u_m|^{\rho}u_m)_m$ é limitada em $L^{\theta}(0,T;L^{\theta}(\Omega))$. De (3.44) existe uma subsequência $(|v_\nu|^{\rho+2}|u_\nu|^{\rho}u_\nu)_\nu$ de $(|v_m|^{\rho+2}|u_m|^{\rho}u_m)_m$ tal que

$$|v_\nu|^{\rho+2}|u_\nu|^{\rho}u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda, \text{ em } L^{\infty}(0,T;L^{\theta}(\Omega)). \tag{3.76}$$

Por (3.75) temos

$$|v_\nu|^{\rho+2}|u_\nu|^{\rho}u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda, \text{ em } L^{\theta}(0,T;L^{\theta}(\Omega)). \tag{3.77}$$

Sendo $L^{\theta}(0,T;L^{\theta}(\Omega))$ reflexivo, segue que

$$|v_\nu|^{\rho+2}|u_\nu|^{\rho}u_\nu \rightharpoonup \lambda, \text{ em } L^{\theta}(0,T;L^{\theta}(\Omega)). \tag{3.78}$$

Como, de (3.26) e (3.27)

$$(u'_m)_m, \text{ é limitada em } L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$(u_m)_m, \text{ é limitada em } L^{\infty}(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$$

e como

$$W_0^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega),$$

temos, mediante o teorema de Aubin-Lions, a existência de uma subsequência $(u_\nu)_\nu$ tal que

$$u_\nu \to u, \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q) \tag{3.79}$$

$$u_\nu \to u, \text{q.s. em } Q. \tag{3.80}$$

Como as sequências $(w_m)_m, (w'_m)_m, (v_m)_m$ e $(v'_m)_m$ estão nas mesmas condições acima, existem subsequências $(w_\nu)_\nu$ e $(v_\nu)_\nu$ tais que

$$w_\nu \to w, \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q) \tag{3.81}$$

$$w_\nu \to w, \text{q.s. em } Q. \tag{3.82}$$

e

$$v_\nu \to v, \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q) \tag{3.83}$$

$$v_\nu \to v, \text{q.s. em } Q. \tag{3.84}$$

De (3.80), (3.82) e (3.84), temos:

$$|v_\nu|^{\rho+2} |u_\nu|^\rho u_\nu \to |v|^{\rho+2} |u|^\rho u, \text{ q.s. em } Q, \tag{3.85}$$

$$|w_\nu|^{\rho+2} |u_\nu|^\rho u_\nu \to |w|^{\rho+2} |u|^\rho u, \text{ q.s. em } Q. \tag{3.86}$$

Agora, de (3.75) e (3.85) temos, via Lema de Lions, que

$$|v_\nu|^{\rho+2} |u_\nu|^\rho u_\nu \rightharpoonup |v|^{\rho+2} |u|^\rho u, \text{ em } L^\theta(0,T;L^\theta(\Omega)). \tag{3.87}$$

Disso e de (3.78) segue que

$$\lambda = |v|^{\rho+2} |u|^\rho u$$

e

$$|v_\nu|^{\rho+2} |u_\nu|^\rho u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} |v|^{\rho+2} |u|^\rho u, \text{ em } L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega)). \tag{3.88}$$

Analogamente, segue que

$$|w_\nu|^{\rho+2} |u_\nu|^\rho u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} |w|^{\rho+2} |u|^\rho u, \text{ em } L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega)). \tag{3.89}$$

A convergência em (3.88) acarreta

$$\int_0^T \left\langle |v_\nu|^{\rho+2} |u_\nu|^\rho u_\nu, z(x) \right\rangle \psi(t)dt \to \int_0^T \left\langle |v|^{\rho+2} |u|^\rho u, z(x) \right\rangle \psi(t)dt, \tag{3.90}$$

$\forall z \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^\gamma(\Omega), \quad \forall \psi \in L^1(0,T),$
Em particular,

$$\int_0^T \left\langle |v_\nu|^{\rho+2} |u_\nu|^\rho u_\nu, z(x) \right\rangle \varphi(t)dt \to \int_0^T \left\langle |v|^{\rho+2} |u|^\rho u, z(x) \right\rangle \varphi(t)dt, \tag{3.91}$$

$\forall z \in V_m \subset W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^\gamma(\Omega), \quad \forall \varphi \in D(0,T) \subset L^1(0,T).$

Tomando o limite quando $\nu \to \infty$ em (3.64) e utilizando (3.67), (3.68), (3.71) e (3.91), temos

$$\left| \begin{array}{l} -\displaystyle\int_0^T (u'(t), z)\varphi' dt + \int_0^T \langle \chi(t), z\rangle \varphi dt + \int_0^T ((u'(t), z))\varphi dt + \\ + \displaystyle\int_0^T \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2}) |u(t)|^\rho u(t), z \right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_1(t), z)\varphi dt, \end{array} \right. \tag{3.92}$$

para todo $z \in V_m$, e toda $\varphi \in D(0,T)$.
Com raciocínio semelhante, obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} -\displaystyle\int_0^T (v'(t),z)\varphi' dt + \int_0^T \langle \eta(t), z\rangle \varphi dt + \int_0^T ((v'(t),z))\varphi dt + \\ + \displaystyle\int_0^T \left\langle (|u(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2})\, |v(t)|^{\rho}\, v(t), z\right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_2(t),z)\varphi dt, \end{array} \right. \tag{3.93}$$

para todo $z \in V_m$, e toda $\varphi \in D(0,T)$.
e

$$\left| \begin{array}{l} -\displaystyle\int_0^T (w'(t),z)\varphi' dt + \int_0^T \langle \xi(t), z\rangle \varphi dt + \int_0^T ((w'(t),z))\varphi dt + \\ + \displaystyle\int_0^T \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |u(t)|^{\rho+2})\, |w(t)|^{\rho}\, w(t), z\right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_3(t),z)\varphi dt, \end{array} \right. \tag{3.94}$$

para todo $z \in V_m$, e toda $\varphi \in D(0,T)$.

Usando a definição de base e o fato de que V_m é denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então (3.92),(3.93) e (3.94) assumem as seguintes formas:

$$\left| \begin{array}{l} -\displaystyle\int_0^T (u'(t),z)\varphi' dt + \int_0^T \langle \chi(t), z\rangle \varphi dt + \int_0^T ((u'(t),z))\varphi dt + \\ + \displaystyle\int_0^T \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2})\, |u(t)|^{\rho}\, u(t), z\right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_1(t),z)\varphi dt, \end{array} \right. \tag{3.95}$$

para todo $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e toda $\varphi \in D(0,T)$.

$$\left| \begin{array}{l} -\displaystyle\int_0^T (v_\nu'(t),z)\varphi' dt + \int_0^T \langle \eta(t), z\rangle \varphi dt + \int_0^T ((v'(t),z))\varphi dt + \\ + \displaystyle\int_0^T \left\langle (|u(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2})\, |v(t)|^{\rho}\, v(t), z\right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_2(t),z)\varphi dt, \end{array} \right. \tag{3.96}$$

para todo $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e toda $\varphi \in D(0,T)$.
e

$$\left| \begin{array}{l} -\int_0^T (w'(t),z)\varphi' dt + \int_0^T \langle \xi(t),z\rangle \varphi dt + \int_0^T ((w'(t),z))\varphi dt + \\ + \int_0^T \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |u(t)|^{\rho+2})\,|w(t)|^{\rho}\, w(t), z \right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_3(t),z)\varphi dt, \end{array} \right. \tag{3.97}$$

para todo $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e toda $\varphi \in D(0,T)$.

Note que, sendo $t \mapsto (u'(t),z), t \mapsto (v'(t),z)$ e $t \mapsto (w'(t),z)$ funções de $L^\infty(0,T)$, elas definem distribuições sobre (0,T).Logo (3.95),(3.96) e (3.97) podem ser postos na seguintes formas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u'(t),z) &+ \langle \chi(t),z\rangle + ((u'(t),z)) + \\ &+ \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2})\,|u(t)|^{\rho}\, u(t), z \right\rangle = (f_1,z), \end{aligned} \tag{3.98}$$

$\forall z \in W_0^{1,p}(\Omega),$ em $D'(0,T)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v'(t),z) &+ \langle \eta(t),z\rangle + ((v'(t),z)) + \\ &+ \left\langle (|u(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2})\,|v(t)|^{\rho}\, v(t), z \right\rangle = (f_2,z), \end{aligned} \tag{3.99}$$

$\forall z \in W_0^{1,p}(\Omega),$ em $D'(0,T)$. e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(w'(t),z) &+ \langle \xi(t),z\rangle + ((w'(t),z)) + \\ &+ \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |u(t)|^{\rho+2})\,|w(t)|^{\rho}\, w(t), z \right\rangle = (f_3,z), \end{aligned} \tag{3.100}$$

$\forall z \in W_0^{1,p}(\Omega),$ em $D'(0,T)$.

3.6.1 Condições iniciais

- $u(0) = u_0$

De (3.59) e (3.60) temos $u \in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Logo, sendo $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$ e portanto faz sentido o cálculo de $u(0)$.

$$\int_0^T \langle u_\nu, z(x)\rangle\, \psi(t)dt \to \int_0^T \langle u, z(x)\rangle\, \psi(t)dt, \quad \forall\ z \in W^{-1,p'}(\Omega), \forall\ \psi\ \in L^1(0,T).$$

Tomando $z \in L^2(\Omega)$, a dualidade $\langle u_\nu, z(x)\rangle$ torna-se um produto interno em $L^2(\Omega)$. Portanto, a convergência torna-se:

$$\int_0^T (u_\nu, z(x))\psi(t)dt \to \int_0^T (u, z(x))\psi(t)dt, \quad \forall\ z \in L^2(\Omega), \forall\ \psi \in L^1(0,T). \quad (3.101)$$

Consideremos agora $\varphi \in C^1([0,T])$, com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$.
Daí, $\varphi' \in C^0([0,T]) \subset L^1(0,T)$; Logo, e, em particular, tomando $\psi = \varphi'$, temos de (3.101) que

$$\int_0^T (u_\nu, z(x))\varphi'(t)dt \to \int_0^T (u, z(x))\varphi'(t)dt, \quad (3.102)$$

para todo $z \in L^2(\Omega)$, toda $\varphi \in C^1([0,T])$, com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$.

Como $u'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ por (3.59), temos

$$\int_0^T (u'_\nu, z(x))\psi(t)dt \to \int_0^T (u', z(x))\psi(t)dt, \quad \forall\ z \in L^2(\Omega), \forall\ \psi \in L^1(0,T).$$

Em particular, para toda $\varphi \in C^1([0,T]) \subset L^1([0,T])$ com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$, temos

$$\int_0^T (u'_\nu, z(x))\varphi(t)dt \to \int_0^T (u', z(x))\varphi(t)dt, \quad (3.103)$$

Somando (3.102) e (3.103) obtemos

$$\int_0^T (u_\nu, z(x))\varphi'(t)dt + \int_0^T (u'_\nu, z(x))\varphi(t)dt \to \int_0^T (u, z(x))\varphi'(t)dt + \int_0^T (u', z(x))\varphi(t)dt,$$

para todo $z \in L^2(\Omega)$, toda $\varphi \in C^1([0,T])$, com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$.

Segue que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_\nu, z(x))\varphi(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(u, z(x))\varphi(t)dt, \quad (3.104)$$

para todo $z \in L^2(\Omega)$, toda $\varphi \in C^1([0,T])$, com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$.

Logo, de (3.104), obtém-se:

$$(u_\nu(T), z)\varphi(T) - (u_\nu(0), z)\varphi(0) \to (u(T), z)\varphi(T) - (u(0), z)\varphi(0), \qquad \forall\ z \in L^2(\Omega),$$

donde

$$(u_\nu(0), z) \to (u(0), z), \qquad \forall\ z \in L^2(\Omega).$$

Desse modo,

$$u_\nu(0) \rightharpoonup u(0) \text{ em } L^2(\Omega). \tag{3.105}$$

Por outro lado, temos que $u_\nu(0) \to u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos $u_\nu(0) \to u_0$ em $L^2(\Omega)$, donde

$$u_\nu(0) \rightharpoonup u_0 \text{ em } L^2(\Omega). \tag{3.106}$$

De (3.105) e (3.106) e pela unicidade do limite fraco tem-se

$$u(0) = u_0$$

- $\mathbf{u'(0) = u_1}$

De (3.61) e (3.62), temos $u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, $u'' \in L^2(0, T; H^{-s}(\Omega))$. Logo, $u' \in C([0, T]; H^{-s}(\Omega))$ e portanto faz sentido o cálculo de $u'(0)$. Note que, sendo $u''_\nu \rightharpoonup u''$ em $L^2(0, T; H^{-s}(\Omega))$, temos:

$$\int_0^T \langle u''_\nu, z(x)\rangle\, \psi(t) dt \to \int_0^T \langle u'', z(x)\rangle\, \psi(t) dt, \tag{3.107}$$

$$\forall\ z \in H_0^s(\Omega),\ \forall\ \psi \in L^2(0, T).$$

Em particular,

$$\int_0^T \langle u''_\nu, z(x)\rangle\, \varphi(t) dt \to \int_0^T \langle u'', z(x)\rangle\, \varphi(t) dt, \tag{3.108}$$

para todo $z \in H_0^s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, toda $\varphi \in C^1([0, T])$, com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$.

Entretanto, é sabido que $u'_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, donde segue, via (3.104), que

$$\int_0^T (u'_\nu, z(x))\varphi'(t) dt \to \int_0^T (u', z(x))\varphi'(t) dt,$$

para todo $z \in L^2(\Omega)$, toda $\varphi \in C^1([0,T])$, com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$.

Em Particular,

$$\int_0^T \langle u'_\nu, z(x) \rangle \varphi'(t) dt \to \int_0^T \langle u', z(x) \rangle \varphi'(t) dt, \tag{3.109}$$

para todo $z \in H_0^s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, toda $\varphi \in C^1([0,T])$, com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$.

Somando (3.108) e (3.109) obtemos:

$$\int_0^T \langle u''_\nu, z(x) \rangle \varphi(t) dt + \int_0^T \langle u'_\nu, z(x) \rangle \varphi'(t) dt \to \int_0^T \langle u'', z(x) \rangle \varphi(t) dt + \int_0^T \langle u', z(x) \rangle \varphi'(t) dt,$$

para todo $z \in H_0^s(\Omega)$, toda $\varphi \in C^1([0,T])$, com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$.

Donde

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \langle u'_\nu, z(x) \rangle \varphi(t) dt \to \int_0^T \frac{d}{dt} \langle u', z(x) \rangle \varphi(t) dt, \tag{3.110}$$

para todo $z \in H_0^s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, e toda $\varphi \in C^1([0,T])$, com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$.

Logo,

$$(u'_\nu(T), z)\varphi(T) - (u'_\nu(0), z)\varphi(0) \to (u'(T), z)\varphi(T) - (u'(0), z)\varphi(0), \quad z \in H_0^s(\Omega).$$

Sendo $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$, temos

$$\langle u'_\nu(0), z \rangle \to \langle u'(0), z \rangle, \quad \forall\, z \in H_0^s(\Omega). \tag{3.111}$$

Daí,

$$u'_\nu(0) \to u'(0) \text{ em } H^{-s}(\Omega). \tag{3.112}$$

Por outro lado, de $(3.3)_4$, temos $u'_\nu(0) \to u_1$ em $L^2(\Omega)$. Como $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$ temos que $u'_\nu(0) \rightharpoonup u_1$ em $H^{-s}(\Omega)$, donde

$$u'_\nu(0) \rightharpoonup u_1 \text{ em } H^{-s}(\Omega). \tag{3.113}$$

De (3.112) e (3.113) e pela unicidade do limite fraco, temos que

$$u'(0) = u_1.$$

De modo análogo se mostra que

$$v(0) = v_0, v'(0) = v_1.$$

e

$$w(0) = w_0, w'(0) = w_1.$$

3.6.2 $Au(t) = \chi(t)$, $Av(t) = \eta(t)$ e $Aw(t) = \xi(t)$

Nesta seção será explorada, essencialmente, a monotonicidade e hemicontinuidade do operador pseudo-Laplaciano A e propriedadaes do $\limsup$.

Como A é monótono, temos

$$\int_0^T \langle Au_\nu(t) - Az, u_\nu(t) - z\rangle \, dt \geq 0, \quad \forall\, z \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Ou seja,

$$0 \leq \int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle \, dt - \int_0^T \langle Au_\nu(t), z\rangle \, dt - \int_0^T \langle Az, u_\nu(t) - z\rangle \, dt, \quad \forall\, z \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Daí, tomando o $\limsup$ na desigualdade acima, temos:

$$0 \leq \limsup \int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle \, dt - \int_0^T \langle \chi(t), z\rangle \, dt - \int_0^T \langle Az, u(t) - z\rangle \, dt, \tag{3.114}$$

para todo $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Consideremos a equação aproximada $(3.3)_1$ com $m = \nu$ e $z = u_\nu(t)$, então

$$\left| \begin{array}{l} (u_\nu''(t), u_\nu(t)) + \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle + ((u_\nu'(t), u_\nu(t))) + \\ \left\langle \left(|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2}\right) |u_\nu(t)|^\rho u_\nu(t), u_\nu(t)\right\rangle = (f_1(t), u_\nu(t)) \end{array} \right.$$

Observando que

- $(u_\nu''(t), u_\nu(t)) = \dfrac{d}{dt}(u_\nu'(t), u_\nu(t)) - |u_\nu'(t)|^2$
- $((u_\nu'(t), u_\nu(t))) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|u_\nu(t)\|^2$
- $\left\langle \left(|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2}\right) |u_\nu(t)|^\rho u_\nu(t), u_\nu(t)\right\rangle = \|u_\nu(t)v_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|u_\nu(t)w_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}$

Logo,

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(u'_\nu(t), u_\nu(t)) - |u'_\nu(t)|^2 + \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\nu(t)\|^2 \\ + \|u_\nu(t)v_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|u_\nu(t)w_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} = (f_1(t), u_\nu(t)) \end{array} \right.$$

Daí, integrando de 0 a T, temos

$$\left| \begin{array}{l} \int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle\, dt = (u'_\nu(0), u_\nu(0)) - (u'_\nu(T), u_\nu(T)) + \int_0^T |u'_\nu(t)|^2\, dt + \frac{1}{2}\|u_\nu(0)\|^2 \\ -\frac{1}{2}\|u_\nu(T)\|^2 - \int_0^T (\|u_\nu(t)v_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|u_\nu(t)w_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)})dt + \int_0^T (f_1(t), u_\nu(t))dt. \end{array} \right. \tag{3.115}$$

Vamos analizar agora cada parcela da equação anterior.

- Temos: $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Logo, como $u_\nu(0) \to u(0)$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, tem-se $u_\nu(0) \to u(0)$ em $L^2(\Omega)$.Por outro lado, $u'_\nu(0) \to u'(0)$ em $L^2(\Omega)$. Portanto

$$(u'_\nu(0), u_\nu(0)) \to (u'(0), u(0)). \tag{3.116}$$

- De (3.18), $(u_m(T))_m$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De (3.19), $(u'_m(T))_m$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Como, para $p > 1$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo e $(u_m(T))_m$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, temos, via teorema de *Kakutani* que existe uma subsequência $(u_\nu(T))_\nu$ tal que $u_\nu(T) \rightharpoonup u(t)$, em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Analogamente, $L^2(\Omega)$ é reflexivo, logo existe uma subsequência $(u'_\nu(T))_\nu$ de $(u'_m(T))_m$ tal que $u'_\nu(T) \rightharpoonup u(t)$, em $L^2(\Omega)$. Segue que:

$$(u'_\nu(T), u_\nu(T)) \to (u'(T), u(T)). \tag{3.117}$$

- Em (3.28) e (3.45) foi visto que:

$$(u'_m)_m \text{ é limitada em } L^2(0,T; H_0^1(\Omega));$$

$$(u''_m)_m \text{ é limitada em } L^2(0,T; H^{-s}(\Omega)).$$

  Além disso, note-se:

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega).$$

  Logo, pelo teorema de Aubin-Lions, existe uma subsequência, que ainda denotaremos por $(u'_\nu)_\nu$ de $(u'_m)_m$ tal que $u'_\nu \to u'$ em $L^2(0,T; L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q)$. Desse modo

$$\int_0^T |u'_\nu(t)|^2 \, dt \to \int_0^T |u'(t)|^2 \, dt \tag{3.118}$$

- Temos também que, $u_\nu(0) \to u(0)$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, logo $u_\nu(0) \to u(0)$ em $H_0^1(\Omega)$. Daí,

$$\|u_\nu(0)\| \to \|u(0)\| \tag{3.119}$$

OBS.: A identificação $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q)$ é feita via teorema de Fubini. De fato, dada, $u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tem-se, para cada $t \in [0,T]$, que $u(t) \in L^2(\Omega)$ e portanto $u(t)$ é uma função de $\Omega \to \mathbb{R}$, cujo valor em x é $u(x,t)$. Assim

$$\int_0^T \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \, dt = \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^2 \, dxdt = \int_Q |u(x,t)|^2 \, dQ = \|u\|^2_{L^2(Q)} .$$

Com isto, estabelecemos uma tal isometria.

- Sendo $(u_m(T))_m$ limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, temos que $(u_m(t))_m$ limitada em $H_0^1(\Omega)$. Logo, pela reflexividade de $H_0^1(\Omega)$, mediante o teorema de Kakutani, existe uma subsequência $(u_\nu(T))_\nu$ de $(u_m(T))_m$ tal que $u_\nu(T) \rightharpoonup u(T)$ em $H_0^1(\Omega)$. Assim

$$\|u(T)\|^2 \leq \liminf \|u_\nu(T)\|^2 . \tag{3.120}$$

- Finalmente, por (3.29),$(u_m v_m)_m$ e $(u_m w_m)_m$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega))$. Podemos extrair, pois, subsequências $(u_\nu v_\nu)_\nu$ de $(u_m v_m)_m$ e $(u_\nu w_\nu)_\nu$ de $(u_m w_m)_m$ tais que

$$u_\nu v_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \sigma \text{ em } L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)), \tag{3.121}$$

$$u_\nu w_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \tau \text{ em } L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)). \tag{3.122}$$

Ainda por (3.29) e por $L^\infty(Q) \equiv L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)) \hookrightarrow L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)) \equiv L^{\rho+2}(Q)$ em qualquer das situações estudadadas no capítulo 2, temos

$$\|u_\nu v_\nu\|_{L^{\rho+2}(Q)} \leq C \|u_\nu v_\nu\|_{L^\infty(Q)} , \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \tag{3.123}$$

$$\|u_\nu w_\nu\|_{L^{\rho+2}(Q)} \leq C \|u_\nu v_\nu\|_{L^\infty(Q)} , \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \tag{3.124}$$

De (3.80),(3.82)e (3.84) segue que

$$u_\nu v_\nu \to uv \text{ q.s. em } Q, \tag{3.125}$$

$$u_\nu w_\nu \to uw \text{ q.s. em } Q. \tag{3.126}$$

De(3.123)-(3.126) e do Lema de Lions, temos que

$$u_\nu v_\nu \rightharpoonup uv \text{ em } L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)), \tag{3.127}$$

$$u_\nu w_\nu \rightharpoonup uw \text{ em } L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)). \tag{3.128}$$

Donde $\sigma = uv$ e $\tau = uw$. Além disso

$$u_\nu v_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} uv \text{ em } L^{\infty}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)), \tag{3.129}$$

$$u_\nu w_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} uw \text{ em } L^{\infty}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)). \tag{3.130}$$

De (3.127) e (3.128), temos

$$\|uv\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(Q)} \le \liminf \|u_\nu v_\nu\|_{L^{\rho+2}(Q)}, \tag{3.131}$$

$$\|uw\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(Q)} \le \liminf \|u_\nu w_\nu\|_{L^{\rho+2}(Q)}. \tag{3.132}$$

ou seja,

$$\int_0^T \|uv\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(Q)}\, dt \le \liminf \int_0^T \|u_\nu v_\nu\|_{L^{\rho+2}(Q)}\, dt, \tag{3.133}$$

$$\int_0^T \|uw\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(Q)}\, dt \le \liminf \int_0^T \|u_\nu w_\nu\|_{L^{\rho+2}(Q)}\, dt. \tag{3.134}$$

Tomando o limite superior em (3.115), usando (3.116)-(3.119), (3.133) e (3.134), obtemos:

$$\left|\begin{array}{l} \limsup \displaystyle\int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t)\rangle\, dt \le (u'_\nu(0), u_\nu(0)) - (u'_\nu(T), u_\nu(T)) + \int_0^T |u'_\nu(t)|^2\, dt \\ +\dfrac{1}{2}\|u_\nu(0)\|^2 - \dfrac{1}{2}\|u_\nu(T)\|^2 - \displaystyle\int_0^T (\|u_\nu(t)v_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|u_\nu(t)w_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)})dt \\ +\displaystyle\int_0^T (f_1(t), u_\nu(t))dt. \end{array}\right. \tag{3.135}$$

Através de (3.135), (3.114) torna-se

$$\left| \begin{array}{l} 0 \leq (u'(0), u(0)) - (u'(T), u(T)) + \displaystyle\int_0^T |u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u(0)\|^2 - \frac{1}{2}\|u(T)\|^2 \\ - \displaystyle\int_0^T (\|u_\nu(t)v_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|u_\nu(t)w_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)})dt + \int_0^T \langle \chi(t), z\rangle\, dt \\ - \displaystyle\int_0^T \langle Az, u(t) - z\rangle\, dt + \int_0^T (f_1(t), u_\nu(t))dt, \qquad \forall\ z\ \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.136}$$

Buscaremos agora uma expressão para $\int_0^T (f_1(t), u_\nu(t))dt$. Voltemos à equação aproximada:

$$\left| \begin{array}{l} (u''_\nu(t), z) + \langle Au_\nu(t), z\rangle + ((u'_\nu(t), z)) + \left\langle (|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2})\, |u_\nu(t)|^\rho\, u_\nu(t), z\right\rangle = \\ = (f_1(t), z), \quad \forall z \in V_m, \quad \nu \geq m. \end{array} \right.$$

Multiplicando-a por $\varphi \in C^1([0,T])$ obtemos

$$\left| \begin{array}{l} (u''_\nu(t), z)\varphi + \langle Au_\nu(t), z\rangle\, \varphi + ((u'_\nu(t), z))\varphi + \\ \left\langle (|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2})\, |u_\nu(t)|^\rho\, u_\nu(t), z\right\rangle \varphi = (f_1(t), z)\varphi, \quad \forall z \in V_m, \quad \nu \geq m. \end{array} \right.$$

Integrando de 0 a T, temos

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T (u''_\nu(t), z)\varphi dt + \int_0^T \langle Au_\nu(t), z\rangle\, \varphi dt + \int_0^T ((u'_\nu(t), z))\varphi dt + \\ + \displaystyle\int_0^T \left\langle (|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2})\, |u_\nu(t)|^\rho\, u_\nu(t), z\right\rangle \varphi dt = \int_0^T (f_1(t), z)\varphi dt, \end{array} \right.$$

para todo $z \in V_m, \nu \geq m$. Daí, via integração por partes, obtemos

$$\left| \begin{array}{l} (u'_\nu(T), z)\varphi(T) - (u'_\nu(0), z)\varphi(0) - \displaystyle\int_0^T (u'_\nu(t), z)\varphi' dt + \int_0^T \langle Au_\nu(t), z\rangle\, \varphi dt \\ \displaystyle\int_0^T ((u'_\nu(t), z))\varphi dt + \int_0^T \left\langle (|v_\nu(t)|^{\rho+2} + |w_\nu(t)|^{\rho+2})\, |u_\nu(t)|^\rho\, u_\nu(t), z\right\rangle \varphi dt = \\ = \displaystyle\int_0^T (f_1(t), z)\varphi dt, \quad \forall z\ \in V_m, \quad \forall \varphi\ \in\ C^1([0,T]), \nu \geq m. \end{array} \right.$$

Agora, observando (3.66), (3.68) e (3.90), juntamente com $u'_\nu(T) \rightharpoonup u'(T)$, $u'_\nu(0) \rightharpoonup u'(0), w'_\nu(T) \rightharpoonup w'(T)$ e $w'_\nu(0) \rightharpoonup w'(0)$, todas essas convergências em

$L^2(\Omega)$, é possível tomar o limite na expressão acima quando $\nu \to +\infty$.

Assim, quando $\nu \to +\infty$, obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} (u'(T), z)\varphi(T) - (u'(0), z)\varphi(0) - \displaystyle\int_0^T (u'(t), z)\varphi' dt + \int_0^T \langle \chi(t), z \rangle \varphi dt \\ \displaystyle\int_0^T ((u'(t), z))\varphi dt + \int_0^T \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2}) \, |u(t)|^{\rho} \, u(t), z \right\rangle \varphi dt = \\ = \displaystyle\int_0^T (f_1(t), z)\varphi dt, \quad \forall z \in V_m, \quad \forall \varphi \in C^1([0,T]). \end{array} \right.$$

Pela definição de base e argumentos de densidade, temos que

$$\left| \begin{array}{l} (u'(T), z)\varphi(T) - (u'(0), z)\varphi(0) - \displaystyle\int_0^T (u'(t), z)\varphi' dt + \int_0^T \langle \chi(t), z \rangle \varphi dt \\ \displaystyle\int_0^T ((u'(t), z))\varphi dt + \int_0^T \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2}) \, |u(t)|^{\rho} \, u(t), z \right\rangle \varphi dt = \\ = \displaystyle\int_0^T (f_1(t), z)\varphi dt, \quad \forall z \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall \varphi \in C^1([0,T]). \end{array} \right. \tag{3.137}$$

Observando que o conjunto das combinações lineares finitas do tipo $\omega\varphi$ com $\omega \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\varphi \in C^1([0,T])$ é denso no espaço

$$V = \{v \in L^2(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)); v' \in L^2(0,T; L^2(\Omega))\},$$

Segue que (3.136) é verdadeira no espaço V.

Observe que, de (3.59) e (3.60) tem-se

$$u \in L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$$

$$u' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T; L^2(\Omega)).$$

Logo, $u \in V$ e (3.137) toma a forma

$$\left| \begin{array}{l} (u'(T), u(T)) - (u'(0), u(0)) - \displaystyle\int_0^T (u'(t), u'(t)) dt + \int_0^T \langle \chi(t), u(t) \rangle dt \\ \displaystyle\int_0^T ((u'(t), u(t))) dt + \int_0^T \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2}) \, |u(t)|^{\rho} \, u(t), u(t) \right\rangle dt = \\ = \displaystyle\int_0^T (f_1(t), u(t)) dt. \end{array} \right. \tag{3.138}$$

Substituindo (3.138) em (3.136),temos:

$$
\left|\begin{array}{l}
0 \leq (u'(0),u(0)) - (u'(T),u(T)) - \displaystyle\int_0^T (\|u_\nu(t)v_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|u_\nu(t)w_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)})dt \\
+\displaystyle\int_0^T |u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u(0)\|^2 - \frac{1}{2}\|u(T)\|^2 + \int_0^T \langle \chi(t), z\rangle\, dt - \int_0^T \langle Az, u(t)-z\rangle\, dt \\
+(u'(T),u(T)) - (u'(0),u(0)) - \displaystyle\int_0^T (u'(t),u'(t))dt + \int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle\, dt \\
+\displaystyle\int_0^T ((u'(t),u(t)))dt + \int_0^T \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2})\, |u(t)|^\rho\, u(t), u(t)\right\rangle dt
\end{array}\right.
\tag{3.139}
$$

Observando que:

- $((u'(t),u(t))) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|u(t)\|^2$;
- $\displaystyle\int_0^T \left\langle (|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2})\, |u(t)|^\rho\, u(t), u(t)\right\rangle dt = \int_0^T (\|u_\nu(t)v_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \|u_\nu(t)w_\nu(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)})dt,$

a expressão acima se escreve como

$$0 \leq \int_0^T \langle \chi(t), u(t)-z\rangle\, dt - \int_0^T \langle Az, u(t)-z\rangle\, dt, \quad \forall\, z \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Considere $z = u(t) + \lambda v(t)$[2], $\lambda > 0$. Logo, substituindo z na desigualdade acima, temos

$$0 \leq \int_0^T \langle \chi(t), -\lambda v(t)\rangle\, dt + \int_0^T \langle Au(t) + \lambda v(t), \lambda v(t)\rangle\, dt, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Dividindo esta desigualdade por $\lambda > 0$, temos,

$$0 \leq -\int_0^T \langle \chi(t), v(t)\rangle\, dt + \int_0^T \langle Au(t) + \lambda v(t), v(t)\rangle\, dt, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Fazendo $\lambda \to 0$ temos, pela hemicontinuidade do operador A que

$$0 \leq -\int_0^T \langle \chi(t), v(t)\rangle\, dt + \int_0^T \langle Au(t), v(t)\rangle\, dt, \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

[2] u,v $\in L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$

Desse modo,

$$\int_0^T \langle (Au(t)-\chi(t)), v(t)\rangle \, dt \geq 0, \quad \forall \; v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.140}$$

Em particular, para $-v(t)$, tem-se:

$$\int_0^T \langle (Au(t)-\chi(t)), v(t)\rangle \, dt \leq 0, \quad \forall \; v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.141}$$

Donde, de (3.140) e (3.141), segue que

$$0 \leq \int_0^T \langle (Au(t)-\chi(t)), v(t)\rangle \, dt \leq 0, \quad \forall \; v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ou seja,

$$Au(t) = \chi(t), \text{q.s. em [0,T]}.$$

Analogamente mostra-se que

$$Av(t) = \eta(t), \text{q.s. em [0,T]}.$$

e

$$Aw(t) = \xi(t), \text{q.s. em [0,T]}.$$

Portanto, de (3.59)-(3.61),(3.90)-(3.100) e das condições iniciais, temos

$$u, v, w \in L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(\Omega));$$
$$u', v', w' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega));$$

$$\frac{d}{dt}(u'(t),z) + \langle Au(t), z\rangle + ((u'(t),z)) + \left\langle \left[|v(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2}\right] |u(t)|^\rho \, u(t), z \right\rangle$$
$$= (f_1(t), z), \quad \forall z \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

no sentido de $D'(0,T)$.

$$\frac{d}{dt}(v'(t),z) + \langle Av(t), z\rangle + ((v'(t),z)) + \left\langle \left[|u(t)|^{\rho+2} + |w(t)|^{\rho+2}\right] |v(t)|^\rho \, v(t), z \right\rangle$$
$$= (f_2(t), z), \; \forall z \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

no sentido de $D'(0,T)$.

$$\frac{d}{dt}(w'(t),z) + \langle Aw(t), z\rangle + ((w'(t),z)) + \left\langle \left[|u(t)|^{\rho+2} + |v(t)|^{\rho+2}\right] |w(t)|^\rho \, w(t), z \right\rangle$$
$$= (f_3(t), z), \; \forall z \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

no sentido de $D'(0,T)$.

$$
\begin{aligned}
&u(0) = u_0, u'(0) = u_1,\\
&v(0) = v_0, v'(0) = v_1,\\
&w(0) = w_0, w'(0) = w_1.
\end{aligned}
$$

O que encerra a demonstração do teorema.

Apêndice A

Propriedades do Operador p-Laplaciano A

A.1 Definições e Resultados

Definição A.1. Dado um espaço de Banach X e um funcional $J : X \to \mathbb{R}$, suponha que exista

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda}[J(u + \lambda v) - J(u)] = J'(u)(v).$$

Se para cada $u \in X$ fixado, $J'(u)(v)$ é uma forma linear contínua em v, então dizemos que o funcional J é derivável no sentido de Gateaux, e sua derivada é $J'(u)$.

Notação: $J'(u, v) = \langle J'(u), v \rangle = J'(u)(v)$.

Exemplo A.1. Seja $X = L^p(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, e $1 \leq p < \infty$.

Suponha que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça:

1. $|g(s)| \leq \alpha |s|^p , \alpha > 0$.

2. g é continuamente diferenciável e existe $\beta > 0$ tal que $|g'(s)| \leq \beta |s|^{p-1}$.

Considere o funcional $J : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(v) = \int_\Omega g(v(x))dx.$$

Tem-se, usando o teorema do valor médio, que

$$\begin{aligned} J(u+\lambda v)-J(u) &= \int_\Omega g(u(x)+\lambda v(x))-g(v(x)))dx \\ &= \int_\Omega g'(u(x)+\theta\lambda v(x))\lambda(v(x))dx \end{aligned}$$

onde $\theta=\theta(x), 0<\theta<1$. Daí, se $\lambda\neq 0$, temos

$$\frac{1}{\lambda}[J(u+\lambda v)-J(u)]=\int(g'(u(x)+\theta\lambda v(x)))v(x)dx.$$

Tomando o limite quando $\kappa\to\infty$ e usando a continuidade de g', obtemos

$$\langle J'(u),v\rangle=\int_\Omega g'(u(x))v(x)dx. \tag{A.1}$$

Observação A.1. As integrais anteriores existem em virtude das hipóteses sobre g e g'.

Considera-se, a seguir, um caso geral do exemplo anterior, do qual obter-se-á um operador significativo para o que se tem em mente estudar.

Exemplo A.2. Seja $A: D(A)\subset L^p(\Omega)\to L^p(\Omega)$ um operador linear onde

$$D(A)=\{v\in L^p(\Omega); Av\in L^p(\Omega)\}.$$

O espaço vetorial $D(A)$ com a norma do gráfico de A, isto é

$$\|v\|^p_{D(A)}=\|v\|^p_{L^p(\Omega)}+\|Av\|^p_{L^p(\Omega)}$$

é um subespaço de Banach de $L^p(\Omega)$. O funcional

$$J(u)=\int_\Omega g(Au(x))dx, \qquad u\in D(A)$$

está bem definido em $D(A)$ e pelo mesmo método anterior constata-se que J, assim definido, possui derivada de Gateaux. De fato, o funcional $J'(u)$ dado por

$$J'(u).v=\int_\Omega g'(A(x)).Av(x)dx \tag{A.2}$$

é linear. Para provar que ele é limitado, observamos que

Observação A.2. Resta apenas provar que $J'(u)$ é uma forma linear limitada em $D(A)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\langle J'(u), v\rangle &\leq \int_\Omega \mid g'(Au(x)) \mid\mid Av(x) \mid dx \\
&\leq (\int_\Omega \mid g'(Au(x)) \mid^{p'} dx)^{\frac{1}{p'}} \int_\Omega \mid Au(x) \mid^p dx)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C(\int_\Omega \mid g'(Au(x)) \mid^{(p-1)p'} dx)^{\frac{1}{p'}} \int_\Omega \mid Au(x) \mid^p dx)^{\frac{1}{p}} \\
&= C(\int_\Omega \mid g'(Au(x)) \mid^{p} dx)^{\frac{1}{p'}}. \parallel A(v) \parallel_{L^p} (\Omega) \\
&\leq C \parallel v \parallel_{D(A)} .
\end{aligned}$$

Logo $J'(u)$ é limitado em $D(A)$

Exemplo A.3. Seja Ω um aberto, limitado e bem regular do $\mathbb{R}^n$. Tomemos o espaço $W_0^{1,p}$ com a norma $\parallel . \parallel_0$ e seja $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, o funcional dado por

$$J(u) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^p dx.$$

Pelo exemplo anterior, com $A = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, 2...., n,$ e $g(s) = |s|^p$, então $g'(s) = p \mid s \mid^{p-2}$, $p > 2$ e, portanto:

$$\langle J'(u), v\rangle = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx,$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Em Particular, para $v = \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\langle J'(u), \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega [\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i})]\varphi dx.$$

Portanto,

$$J'(u) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i})]\varphi, \quad p \geq 2,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
J' : W_0^{1,p}(\Omega) &\to W^{-1,p'}(\Omega) \\
u &\mapsto J'(u) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}).
\end{aligned}$$

Daí, concluimos que a derivada de Gateaux do funcional

$$J(u) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^p dx, \quad 2 \leq p < \infty,$$

é o operador

$$J'(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(| \frac{\partial u}{\partial x_i} |^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}), \quad p \geq 2.$$

Este operador, que denotamos por A, é o operador do nosso sistema, isto é,

$$A(u) = J'(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(| \frac{\partial u}{\partial x_i} |^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}), \quad p \geq 2,$$

denominado de operador p-Laplaciano. Note que

$$A : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p}(\Omega)$$

$$u \mapsto A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(| \frac{\partial u}{\partial x_i} |^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}),$$ te-

mos que $Au : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é linear e contínuo. Além disso, como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,p}(\Omega)(Ver[10])$, e

$$\langle J'(u), \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega | \frac{\partial u}{\partial x_i} |^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$\langle J'(u), w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega | \frac{\partial u}{\partial x_i} |^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx,$$

para todo $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Definição A.2. Seja V um espaço de Banach e V' seu dual. Dizemos que $A : V \to V'$ é um operador **hemicontínuo** se, para u, v, w em V, a função $\lambda \longrightarrow \langle A(u + \lambda v), w \rangle$ é contínua de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

Definição A.3. Diz-se que um operador $A : V \to V'$ é **monótono** se

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in V.$$

Onde $\langle , \rangle$, denota a dualidade $V' \times V$.

Proposição A.1. Se $J : V \to \mathbb{R}$ é um funcional convexo, então sua derivada de Gateaux $J' : V' \to V'$ é um operador monótono.

Demonstração. Sendo J convexo, temos

$$J[(1-\theta)u+\theta v] \leq (1-\theta)J(u)+\theta J(v), \quad 0<\theta<1,$$

isto é:

$$J[u+\theta(v-u)]-J(u) \leq \theta[J(v)-J(u)],$$

dividindo por $\theta \neq 0$, temos

$$\frac{1}{\theta}J[u+\theta(v-u)]-J(u) \leq [J(v)-J(u)],$$

fazendo $\theta \to 0$ tem-se

$$\langle J'(u), v-u\rangle \leq J(u)-J(v).$$

Agora, trocando u por v, temos

$$\langle J'(v), u-v\rangle \leq J(v)-J(u)$$

Daí,

$$\langle J'(u), u-v\rangle + \langle J'v, v-u\rangle \leq 0,$$

donde concluímos que

$$\langle J'(u)-J'(v), u-v\rangle \geq 0.$$

□

Definição A.4. Dizemos que um operador $A : V \to V'$ é **coercivo** , se

$$\lim_{\|u\|_V \to +\infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_V} = +\infty$$

A.2 Propriedades do operador p-Laplaciano

A.2.1 A é hemicontínuo

De fato, dados $u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos:

$$\langle A(u+\lambda v), w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2} (\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i})\frac{\partial w}{\partial x_i}dx.$$

Observe que

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2} (\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i})\frac{\partial w}{\partial x_i} \leq 2^{p-3}(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}+\lambda^{p-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2})(\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i})\frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

e

$$\left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2}(\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i})\frac{\partial w}{\partial x_i}\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|$$

$$= \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right| \to \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda_0\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|,\ q.s.\text{ em }\Omega,\ \text{quando } \lambda\to\lambda_0$$

Observando que as funções do segundo membro da desigualdade acima são integráveis, temos, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, que

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\langle A(u+\lambda v), w\rangle = \langle A(u+\lambda_0 v), w\rangle .$$

Logo A é hemicontínuo.

A.2.2 A é monótono

De fato, observando que o funcional $J(u)$ é convexo, uma vez que a função $\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p, p>2$, é convexa, temos, da *Proposição A.1*, que A é monótono, pois A é a derivada de Gateaux desse funcional.

A.2.3 $\langle Au, u\rangle = \|u\|_0^p$

De fato,

$$\langle Au, u\rangle = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p}dx = \|u\|_0^p .$$

A.2.4 A é coercivo

Temos $\langle Au, u\rangle = \|u\|_0^p$, logo

$$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_0} = \|u\|_0^{p-1},$$

donde

$$\lim_{\|u\|_0\to\infty}\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_0} = \infty.$$

A.2.5 A é limitado

A limitação aqui, é no sentido que A leva conjuntos limitados em conjuntos limitados. De fato, temos

$$\|Au\|_{1,p'} = \sup_{v\neq 0} \frac{\langle Au, v\rangle}{\|v\|_0}.$$

Como,

$$\begin{aligned}
|\langle Au, v\rangle| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx\right| \le \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|dx \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-1)p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-1)p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-1)p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_0^{p-1}\|v\|_0,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{|\langle Au, v\rangle|}{\|v\|_0} \le \|u\|_0^{p-1}.$$

Portanto,

$$\sup_{v\neq 0}\frac{|\langle Au, v\rangle|}{\|v\|_0} \le \|u\|_0^{p-1},$$

isto é,

$$\|Au\|_{-1,p'} \le \|u\|_0^{p-1}.$$

A.2.6 $\langle Au, u'\rangle = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_0^p$

De fato, observe que, se $u : (0,T) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ é tal que $u'(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que

$$\langle Au, u'\rangle = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u'}{\partial x_i}dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_0^p &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{d}{dt}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{-1}\frac{\partial u'}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u'}{\partial x_i} \\
&= \langle Au, u'\rangle\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle Au, u'\rangle = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_0^p\,.$$

Referências Bibliográficas

[1] Adams,R. A.: *Sobolev Spaces*, Academic Press,1975.

[2] Biazuti,A.: *Sobre uma Equação não Linear de Vibrações: Existência de Soluções Fracas e comportamento Assintótico*. Tese de Doutorado.IM/UFRJ

[3] Brézis,Haim: *Análise Functionelle:Teoria e Aplicaciones*, Masson Paris,1984.

[4] Browder,F.E.,Tom,Buy An: *Nonlinear functional equations in Banach Spaces and elliptic super regularization*, Math Zeitsch. 105(1968),177-195.

[5] Clark,M.R.,Maciel,A: *On a mixed problem for a nonlinear kxk system*. International Journal of Apllied Mathematics,Vol 9 n° 2,2002,207-218.

[6] Clark,M.R.;Clark,H.R.;Lima,O.A.: *On a Nonlinear Coupled System*. International Journal of Apllied Mathematics,Vol 20 n°1,2005, 81-95.

[7] Evans,L.C.: *Partial Differential Equations*. Graduate Sudies in Mathematics, Vol 19, AMS, 1998.

[8] Castro, N.N. de O.: *Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p-Laplaciano*. João Pessoa:Universidade Federal da Paraíba. Notas de um Curso de Verão, 2005.

[9] Castro, N.N. de O.: *Existence and Asyntotic Behaviour of Solutions of a Nonlinear Evolution Problem*. Apllied Mathematics, 42(1997) n° 6, 411-420.

[10] Castro, N.N. de O.: *Weak Solutions to a Coupled Nonlinear System With the p-Laplacian Operator:Asymtotic Behaviour*. Advances in Differential Equations and Control Process, Vol 1, n°2, 2008, 163-170.

[11] Cavalcante, M.M.;Cavalcante,V.N.D.: *Introdução à Teoria das Distribuições e aos espaços de Sobolev*. Vol 1 e 2. Maringá: Universidade Estadual de Maringá. Notas de Aulas,2000.

[12] Kreyszig, E.: *Introductory Functional Analysis with Apllications*. New York. John Wiley and Sons.

[13] Lions, J.L.: *Quelques Méthodes de Résolution des Probléms aux Limites Non Linéaires*. Dunod, Paris,1969.

[14] Lions, J.L.: *Equations Differentielles Operationnelles et Probléms aux Limites*. Springer-Verlag, Berlim.Göttingen.Heidelberg, 1961.

[15] Medeiros. L.A.,Miranda,M.M.: *Introdução aos espaço de Sobolev e às equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 1989.

[16] Medeiros, L.A.,Miranda,M.M.,Malta,S.: *Tópicos de Equações Differenciais Parciais* Rio de Janeiro: Editora da UFRJ,1998.

[17] Medeiros,L.A.,Melo, E.A.: *Teoria da Integração*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ.1989.

[18] Medeiros,L.A.;Miranda,M.M.: *Weak Solutions for a System of Nonlinear Klein-Gordon equations*. Analli di Matemática Pura ed Apllicata, IV (CXLVI), 173-183.

[19] Medeiros,L.A.,P.H. Rivera Rodrigues, P.H.: *Espaços de Sobolev e EDP*. Rio de Janeiro:Editora da UFRJ.1975.

[20] Miranda,M.M.: *Análise Espectral em Espaços de Hilbert: Notas de Aula*. Rio de Janeiro, IM-UFRJ;1990.

[21] Oliveira,A. M.: *Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p-Laplaciano no* $\mathbb{R}^3$. João Pessoa, UFPB;2006.

[22] Ray, William O.: *Real Analysis*. Prentice Hall, New Jersey, 1988.

[23] Segal,I.: *Nonlinear Partial Differential Equations in Quantum Field Theory*. Proc. Symp. Appl. Math, 17(1965), 210-226.