

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENERGIA NUCLEAR
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM TECNOLOGIAS
ENERGÉTICAS E NUCLEARES

**SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS QUASE INCOMPRESSÍVEIS NO
PRESSURIZADOR DO REATOR IRIS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

PERINALDO SEVERINO JÚNIOR

RECIFE – PERNAMBUCO – BRASIL

MAIO – 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS QUASE INCOMPRESSÍVEIS NO
PRESSURIZADOR DO REATOR IRIS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

PERINALDO SEVERINO JÚNIOR

**SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS QUASE INCOMPRESSÍVEIS NO
PRESSURIZADOR DO REATOR IRIS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Tecnologias Energéticas e Nucleares do Departamento de Energia Nuclear da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciência. Área de concentração: Engenharia de Reatores

ORIENTADOR: PROF. DR. CARLOS ALBERTO BRAYNER DE OLIVEIRA LIRA

CO-ORIENTADOR: PROF. DR. GUSTAVO KOURY COSTA

RECIFE – PERNAMBUCO – BRASIL

MAIO - 2007

S498s

Severino Júnior, Perinaldo.

Simulação de escoamentos quase incompressíveis no pressurizador do reator Iris via método dos elementos finitos / Perinaldo Severino Júnior. – Recife : O Autor, 2007.

118 folhas. : il., fig. tab.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Energia Nuclear, 2007.

Inclui bibliografia.

1. Energia nuclear – Engenharia de reatores. 2. Engenharia de reatores – Fluidos. 3. Engenharia de reatores – Simulação computacional. 4. Formulação SUPG. I. Título.

621.4835 CDD (22.ed.)

UFPE/BCTG/2007-82

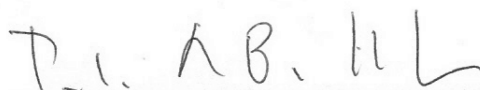
SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS QUASE INCOMPRESSÍVEIS NO PRESSURIZADOR DO REATOR IRIS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Perinaldo Severino Júnior

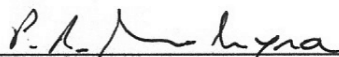
APROVADO EM: 25.05.2007

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira
CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Gustavo Koury Costa**

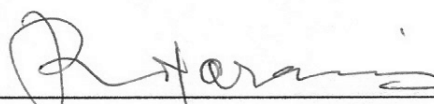
COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. Dr. Paulo Augusto Berquó de Sampaio – IEN-CNEN/RJ

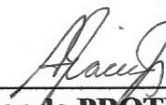


Prof. Dr. Paulo Roberto Maciel Lyra – DEMEC/UFPE



Prof. Dr. Rajendra Narain – DEN/UFPE

Visto e permitida a impressão



Coordenador do PROTEN/DEN/UFPE

Ao meu irmão Fabiano (*in memoriam*), a
minha irmã Vlória e a meus pais, Perinaldo
e Terezinha

Dedico

AGRADECIMENTOS

A Deus.

A minha família pelo apoio inegável neste trabalho.

Aos meus orientadores Brayner e Gustavo por acreditarem em meus esforços.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	8
LISTA DE TABELAS	11
LISTA DE SÍMBOLOS	12
RESUMO	14
ABSTRACT	15
1 INTRODUÇÃO	16
1.1 Escoamentos fluidos no contexto do reator IRIS	16
1.2 Motivação	18
1.3 Definição do Problema	18
1.4 Objetivos	18
2 REVISÃO DA LITERATURA	20
2.1 Equações Fundamentais	20
2.1.1 As equações de Navier-Stokes	20
2.1.2 A Incompressibilidade nos Escoamentos	25
2.2 O Método dos Elementos Finitos	27
2.2.1 Os Métodos dos Resíduos Ponderados	27
2.2.2 O Método de Galerkin	36
2.2.3 O operador de advecção-difusão	37
2.2.4 Instabilidades no Método de Galerkin	38
2.2.5 O Método de Petrov-Galerkin	44
2.2.6 O Método SUPG	49
2.3 O Tratamento da Incompressibilidade	52
2.3.1 O Caso Incompressível	52
2.3.2 O Caso Quase Incompressível	55

2.3.2.1. Fluidos reais: Módulo de Elasticidade Volumétrica.....	55
2.4 Forma fraca do caso quase incompressível	58
2.4.1 Síntese da formulação quase incompressível	58
2.4.2 O Método de Galerkin descontínuo no tempo	60
2.4.3 Forma fraca discreta	62
2.5 Uma função de perturbação no caso quase incompressível	64
2.6 Formulação numérica em computador digital	65
2.6.1 O código computacional	71
3 METODOLOGIA	72
3.1 Hipóteses adotadas	73
3.2 Parâmetro de Courant-Friedrich-Levy	74
4 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO	76
4.1 O escoamento entre placas paralelas	76
4.1.1 Descrição e condições de contorno	76
4.1.2 Uma caracterização para o regime permanente	79
4.1.3 O escoamento entre placas paralelas: experimento computacional	79
4.2 O escoamento na cavidade	82
4.2.1 Descrição e condições de contorno	82
4.2.2 O escoamento na cavidade: experimentos computacionais	86
4.2.2.1. O escoamento na cavidade com $Re = 100$	86
4.2.2.2. O escoamento na cavidade com $Re = 1000$	90
4.2.2.3. O escoamento na cavidade com $Re = 5000$	93
4.2.3 Interpretação dos resultados da cavidade	96
5 APLICAÇÃO DO CÓDIGO AO PRESSURIZADOR DO REATOR IRIS	97
5.1 Geometria, propriedades do fluido, condições de contorno e iniciais	97
5.1.1 Definição da geometria	97

5.1.2 Propriedades físicas do fluido	98
5.1.3 Condições de contorno e iniciais	98
5.2 Experimentos computacionais	100
CONCLUSÕES	104
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	106
APÊNDICE 1 – DEMONSTRAÇÃO DA EQUAÇÃO 2.41	109
APÊNDICE 2 – DEMONSTRAÇÃO DAS EQUAÇÕES 2.48 a 2.50	116

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Corte transversal do vaso do reator IRIS	16
Figura 2.1: Funções de forma unidimensionais tipo "chapéu"	32
Figura 2.2: Função de forma unidimensional no sistema local de coordenadas.....	32
Figura 2.3: Gráfico da solução exata da equação (2.38), com $u_1 = 200$ m/s, $k = 0.5$ J/msK, $L = 1$ m, $T_0 = 1$ K e $T_L = 0$ K.	40
Figura 2.4: Gráfico da solução aproximada pelo método de Galerkin para a equação (2.38), com diferentes valores do número de Péclet. $L = 1$ m, $T_0 = 1$ K e $T_L = 0$ K.....	42
Figura 2.5: Variação do parâmetro G em função do número de Péclet.....	45
Figura 2.6: Sistema de coordenadas de linhas de corrente.....	50
Figura 3.1: Corte transversal da câmara do pressurizador do reator IRIS.....	73
Figura 4.1: Placas planas paralelas.....	77
Figura 4.2: Escoamento entre placas planas - sistema de coordenadas e condições de contorno.....	78
Figura 4.3: Malha para o escoamento entre placas paralelas.....	78
Figura 4.4: Escoamento entre placas paralelas - variação do resíduo.....	80
Figura 4.5: Escoamento entre placas planas - transição do perfil de velocidades.....	80
Figura 4.6: Escoamento entre placas paralelas - variação da pressão.....	81
Figura 4.7: Esboço da secção transversal da cavidade.....	83
Figura 4.8: Malhas para o escoamento na cavidade.....	86
Figura 4.9: Escoamento na cavidade - $Re = 100$ - variação do resíduo.....	87
Figura 4.10: Escoamento na Cavidade - $Re = 100$ - variação de $u_2(x)$ e de $u_1(y)$	88
Figura 4.11: Escoamento na Cavidade - $Re = 100$ - Vetores Velocidade e Isolinhas de pressão no regime permanente – malha 1.....	89
Figura 4.12: Escoamento na Cavidade - $Re = 100$ - Vetores Velocidade e Isolinhas de pressão no regime permanente – malha 2.....	89

Figura 4.13: Escoamento na Cavidade - $Re = 100$ - Vetores Velocidade e Isolinhas de pressão no regime permanente – malha 3.....	89
Figura 4.14: Escoamento na cavidade - $Re = 1000$ - variação do resíduo.....	90
Figura 4.15: Escoamento na Cavidade - $Re = 1000$ - variação de $u_2(x)$ e de $u_1(y)$	91
Figura 4.16: Escoamento na Cavidade - $Re = 1000$ - Vetores Velocidade e Isolinhas de pressão no regime permanente – malha 1.....	92
Figura 4.17: Escoamento na Cavidade - $Re = 1000$ - Vetores Velocidade e Isolinhas de pressão no regime permanente – malha 2.....	92
Figura 4.18: Escoamento na Cavidade - $Re = 1000$ - Vetores Velocidade e Isolinhas de pressão no regime permanente – malha 3.....	93
Figura 4.19: Escoamento na cavidade - $Re = 5000$ - variação do resíduo.....	93
Figura 4.20: Escoamento na Cavidade - $Re = 5000$ - variação de $u_2(x)$ e de $u_1(y)$	94
Figura 4.21: Escoamento na Cavidade - $Re = 5000$ - Vetores Velocidade e Isolinhas de pressão no regime permanente – malha 1.....	95
Figura 4.22: Escoamento na Cavidade - $Re = 5000$ - Vetores Velocidade e Isolinhas de pressão no regime permanente – malha 2.....	95
Figura 4.23: Escoamento na Cavidade - $Re = 5000$ - Vetores Velocidade e Isolinhas de pressão no regime permanente – malha 3.....	96
Figura 5.1: Base da câmara do reator IRIS - proporções geométricas.....	97
Figura 5.2: Base da câmara do IRIS - geometria $D_f 30$ mm - condições de contorno e iniciais.....	99
Figura 5.3: Base da câmara do IRIS - geometria $D_f 70$ mm - condições de contorno e iniciais.....	99
Figura 5.4: Base da câmara do IRIS - malhas uniformes.....	100
Figura 5.5: Base da câmara do IRIS - vetores velocidade espúrios na geometria $D_f 70$ mm.....	101
Figura 5.6: Base da câmara do IRIS - variação do resíduo.....	101
Figura 5.7: Base do IRIS - Vetores velocidade no regime permanente.....	102
Figura 5.8: Base da câmara do IRIS - variação do resíduo - condições de contorno e iniciais	

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.2.1: Escoamento na cavidade - propriedades físicas do fluido.....	85
Tabela 5.1.1: Base da câmara do reator IRIS - dimensões.....	98

LISTA DE SÍMBOLOS

Grandezas físicas

ρ massa específica, kg / m³

V volume, m³

u volume específico, m³ / kg

K_e módulo de elasticidade volumétrica, N / m²

\mathbf{u} vetor velocidade; função vetorial

u_i i-ésima componente do vetor velocidade \mathbf{u} , m / s

p pressão termodinâmica absoluta, N / m²

h entalpia total por unidade de massa de fluido, J / kg

e energia total por unidade de massa de fluido, J / kg

ϵ energia interna por unidade de massa de fluido, J / kg

f_i i-ésima componente da força de corpo \mathbf{f} , N

q_h calor por unidade de massa proveniente de uma fonte interna, J / m³s

q_i i-ésima componente do vetor fluxo de calor \mathbf{q} , J / (m²s)

τ_{ij} componente do tensor de tensões, N / m²

σ_{ij} componente do tensor de tensões de Cauchy, N / m²

\mathbf{K} tensor de condutividade térmica

k condutividade térmica, J / (msK)

μ viscosidade dinâmica, primeiro coeficiente de viscosidade, Ns / m²

λ segundo coeficiente de viscosidade, Ns / m²

T temperatura, K

c_p calor específico a pressão constante, J / (kg K)

t tempo, s

c velocidade do som no meio considerado, m / s

Pe número de Péclet

Símbolos matemáticos

δ_{ij} delta de Kronecker

$I_{m \times m}$ matriz identidade de ordem (m)

∇ operador vetorial gradiente

∇^T operador divergente

∇^2 operador laplaciano

$\frac{D}{Dt}$ operador derivada material

Ω domínio espacial

Γ fronteira espacial

n_d número de dimensões espaciais

\mathbf{n} vetor normal unitário exterior

Sub-índices

e relativo ao elemento

SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS QUASE INCOMPRESSÍVEIS NO PRESSURIZADOR DO REATOR IRIS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Autor: Perinaldo Severino Júnior

Orientadores:

Prof. Dr. Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira

Prof. Dr. Gustavo Koury Costa

RESUMO

Problemas de alta complexidade intratáveis pelas vias analíticas tornaram-se passíveis de análise com o advento dos computadores. É neste contexto que o presente trabalho aborda a simulação computacional de escoamentos quase incompressíveis no pressurizador do reator nuclear IRIS (International Reactor Innovative and Secure). O Método dos Elementos Finitos é empregado com vistas a resolver as equações de Navier-Stokes. As particularidades inerentes às equações de Navier-Stokes são tratadas no âmbito do assim chamado método SUPG (Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin). O objetivo deste trabalho foi a obtenção de soluções aproximadas das equações da Dinâmica dos Fluidos aplicadas ao escoamento de água líquida para o interior da câmara do pressurizador do reator IRIS, empregando um código computacional. A metodologia compreendeu a validação do código computacional mencionado e seu posterior uso para simulação dos escoamentos na câmara do IRIS. O escoamento para dentro da câmara do pressurizador do IRIS foi tratado como bidimensional, com fronteiras fixas e monofásico. A validação consistiu na comparação entre as soluções dadas pelo código computacional e soluções disponíveis na literatura. Os resultados para o IRIS referiram-se a dois diâmetros de orifício de entrada de fluido para a câmara do pressurizador e foram obtidos os campos de velocidade e de pressão para cada uma destas duas geometrias.

Palavras-chave: reator IRIS, escoamentos quase incompressíveis, método dos elementos finitos

SIMULATION OF QUASI INCOMPRESSIBLE FLOWS IN THE PRESSURIZER OF THE IRIS REACTOR USING THE FINITE ELEMENT METHOD

Author: Perinaldo Severino Júnior

Advisers:

Prof. Dr. Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira

Prof. Dr. Gustavo Koury Costa

ABSTRACT

Problems of high complexity, impossible to solve by analytical methods, became treatable with the help of computers. It is in this context that this work approaches the computational simulation of quasi incompressible flows in the pressurizer of the IRIS (International Reactor Innovative and Secure) nuclear reactor. The Finite Element Method is employed for solving the Navier-Stokes equations numerically. The peculiarities, inherent to the Navier-Stokes equations, are dealt with in the scope of the so-called SUPG (Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin) method. The aim of this work was the obtainance of approximate solutions of the Fluid Dynamics equations applied to the flow of liquid water into the IRIS pressurizer chamber, by employing a computational code. The methodology precluded the numerical validation and its later use for simulating the flows into the IRIS pressurizer chamber. The flows into the IRIS pressurizer chamber were considered two-dimensional, with fixed boundaries and single phased. The validation consisted of a comparison between the numerical solutions obtained and those published in the literature. Results for the IRIS pressurizer referred to two diameters of the fluid inlet orifices. Velocity and pressure fields were obtained for these two configurations.

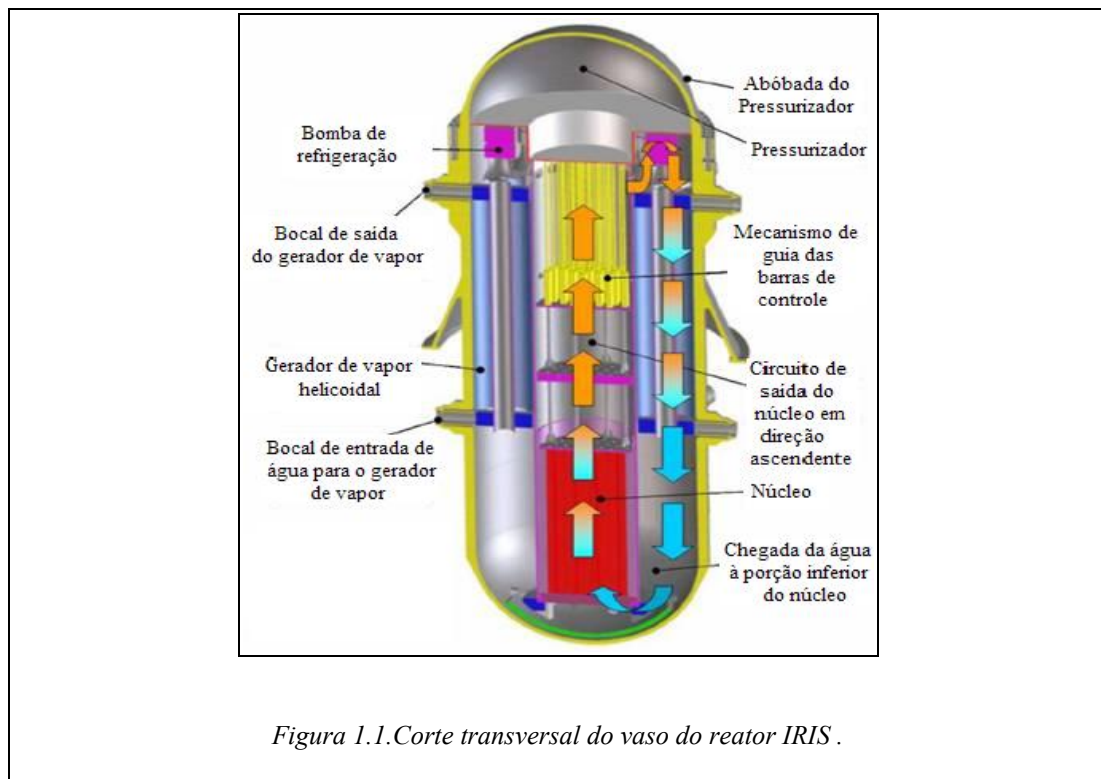
Keywords: IRIS reactor, quasi incompressible flows, finite element method

1 INTRODUÇÃO

1.1 Escoamentos fluidos no contexto do reator IRIS

O projeto do reator nuclear IRIS (International Reactor Innovative and Secure) está a ser conduzido por várias organizações internacionais. Este projeto representa um esforço no sentido de conceber um reator nuclear integrado com vistas a mitigar o acidente chamado de LOCA (Loss of Coolant Accident).

A Figura 1.1 (CARELLI et al., 2004) ilustra o aspecto constitutivo do vaso do reator IRIS.



Desequilíbrios entre a potência gerada pelo núcleo do reator e a potência demandada no gerador de vapor podem acarretar variações na temperatura do circuito primário. Como consequência disto, podem ocorrer escoamentos de fluido do primário para dentro da câmara do pressurizador (*insurge*) e vice-versa (*outsurge*).

O ácido bórico diluído na água do primário atua como auxiliar no controle da reatividade no núcleo. O boro tem alta capacidade de absorção de nêutrons térmicos e deste modo a homogeneidade da concentração de ácido bórico na água do circuito primário do reator IRIS tem relação direta com a manutenção da estabilidade da potência instantânea gerada pelo reator. O entendimento dos campos de escoamentos que ocorram na câmara do pressurizador do IRIS pode ser de grande utilidade para a compreensão da dinâmica da homogeneização do boro no pressurizador do reator IRIS.

A importância do conhecimento acerca dos escoamentos fluidos no pressurizador do IRIS está já demonstrada. Há que se focalizar a abordagem adotada aqui para a simulação destes escoamentos.

O modelo matemático que é adotado neste trabalho corresponde às equações de Navier-Stokes. Os algoritmos computacionais disponíveis atualmente para a solução das equações de Navier-Stokes dividem-se fundamentalmente em duas famílias, por assim dizer:

- Algoritmos para escoamentos compressíveis;
- Algoritmos para escoamentos incompressíveis.

Um código computacional escrito segundo a abordagem quase incompressível das equações de Navier-Stokes foi empregado para resolução numérica destas equações. A implementação computacional incluiu o uso do Método dos Elementos Finitos do tipo estabilizado chamado SUPG (Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin). O sistema de equações lineares oriundo da discretização da região da câmara do pressurizador do reator IRIS foi tratado com o emprego de um método do tipo Preditor-Multicorretor. As soluções aproximadas obtidas foram comparadas com soluções disponíveis na literatura científica para fins de validação. O código computacional assim validado foi usado então para a simulação de escoamentos fluidos no pressurizador do IRIS.

1.2 Motivação

À luz do exposto na Secção 1.1 deste trabalho, vê-se que o conhecimento dos campos associados a um escoamento no pressurizador do reator IRIS pode ser de grande utilidade para um estudo da dinâmica da homogeneização do boro no reator IRIS. Embora o presente trabalho não tenha lidado com a difusão de ácido bórico no pressurizador do reator IRIS, os resultados aqui apresentados poderão servir como primeira aproximação para o tratamento da homogeneização do ácido bórico no pressurizador do IRIS no futuro.

1.3 Definição do Problema

Uma vez que o princípio geral de operação do reator nuclear IRIS foi explanado e a motivação para o estudo de escoamentos fluidos no interior daquele reator apresentada, a proposição para o presente trabalho pode ser estabelecida como:

Estudo do escoamento interno de água líquida para dentro da câmara do pressurizador do reator nuclear IRIS, com a aproximação das equações do modelo matemático que descreve o fenômeno pelo Método dos Elementos Finitos, mediante o uso de formalismo matemático matricial e resolução numérica por computador digital.

1.4 Objetivos

Tendo sido convenientemente definido o problema central a que este trabalho se refere na Secção 1.3, os objetivos específicos que se pretenderam alcançar podem ser postos como segue.

1. Validação do código computacional escrito por COSTA¹ para solução aproximada das equações de Navier-Stokes quase incompressíveis transitórias via Método dos Elementos Finitos. Este código foi adaptado por COSTA de um código computacional pré-existente de sua própria autoria, só que destinado aos casos compressível e incompressível (COSTA, 2004). Ao aluno de Mestrado, autor deste trabalho, coube a escrita da formulação

1 COSTA, G.K.. (CEFET-PE. Centro Federal de Educação Tecnológica de PE). Comunicação pessoal, 2006.

teórica do caso quase incompressível de modo a subsidiar a adaptação do código supracitado.

2. Uma vez validado o código mencionado ao item (1) acima, utilizá-lo para obter soluções aproximadas das equações da Dinâmica dos Fluidos aplicadas ao problema descrito no item 1.3 deste trabalho.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Equações Fundamentais

2.1.1 As equações de Navier-Stokes

Os fluidos encontrados na natureza são intrinsecamente descontínuos devido a sua microestrutura. Não obstante esta descontinuidade intrínseca, se as dimensões características associadas a um escoamento são muito maiores que uma dimensão característica associada à microestrutura do fluido que está a escoar, a hipótese da continuidade física do fluido produz resultados bastante satisfatórios com respeito aos comportamentos medidos, i.e, observados. A dimensão característica do escoamento pode ser o diâmetro de tubos circulares ou a corda de uma asa de avião. A dimensão característica da microestrutura é referida pela literatura como o caminho médio livre dos entes constituintes do fluido (moléculas, íons, etc.); veja-se, por exemplo, FOX e MACDONALD (1995).

Nas circunstâncias descritas, constitui-se a chamada Hipótese do Contínuo, com a qual este trabalho essencialmente lida.

A formulação matemática do comportamento dos fluidos pode ser obtida através dos princípios da conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia.

Os pesquisadores europeus Claude Louis Marie Henri Navier e George Gabriel Stokes propuseram o conjunto de equações que hoje leva o seu nome: as equações de Navier-Stokes. A dedução detalhada destas expressões pode ser achada em textos de Mecânica dos Fluidos como, por exemplo, WHITE (1991).

Na forma conservativa vetorial as equações de Navier-Stokes podem ser escritas como segue (ZIENKIEWICZ e TAYLOR ,1991):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}^i}{\partial x_i} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

em que (i) varia desde 1 até o número de dimensões espaciais do problema em estudo, n_d .

Na situação mais geral de três dimensões na equação (2.1) acima tem-se:

\mathbf{U} = vetor de estado do fluido ($\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$);

\mathbf{F}^i = termo de fluxo advectivo \mathbf{F}^i ($\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$);

\mathbf{G}^i = termo de fluxo difusivo \mathbf{G}^i ($\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$);

\mathbf{Q} = vetor de forças de corpo e de termo fonte de energia ($\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$).

O vetor de estado do fluido é:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho e \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

O termo de fluxo advectivo é:

$$\mathbf{F}^i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + p \delta_{1i} \\ \rho u_2 u_i + p \delta_{2i} \\ \rho u_3 u_i + p \delta_{3i} \\ \rho h u_i \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

A função δ_{ji} , com (j) variando desde 1 até n_d , é o delta de Kronecker.

O termo de fluxo difusivo é:

$$\mathbf{G}^i = - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1i} \\ \tau_{2i} \\ \tau_{3i} \\ \tau_{ji} u_j + q_i \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

O sub-índice (j) varia desde 1 até n_d .

O vetor de forças de corpo e de termo fonte de energia é:

$$\mathbf{Q} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \rho f_1 \\ \rho f_2 \\ \rho f_3 \\ \rho f_i u_i + q_h \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

A notação usada nas expressões (2.1) a (2.5) acima considera que:

ρ é a massa específica;

p é a pressão termodinâmica absoluta ;

h é a entalpia total por unidade de massa de fluido;

e é a energia total por unidade de massa de fluido;

f_i é a i -ésima componente da força de corpo \mathbf{f} ;

q_h é o calor por unidade de massa proveniente de uma fonte interna;

q_i é a i -ésima componente do vetor fluxo de calor por unidade de massa \mathbf{q} ;

u_i é a i -ésima componente do vetor velocidade \mathbf{u} .

Se o campo de velocidades é $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{3 \times 1}$ no caso geral em que $n_d = 3$, então as matrizes de fluxo difusivo e advectivo podem ser escritas, respectivamente, como segue (STORTI et al.,1997).

Matriz de fluxo difusivo:

$$\mathbf{G}_{5 \times 3} = - \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \boldsymbol{\tau}_{3 \times 3} \\ ((\boldsymbol{\tau} \mathbf{u} + \mathbf{q})^T)_{1 \times 3} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

em que \mathbf{q} é o vetor fluxo de calor e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor tensão para fluidos newtonianos abaixo transcrito:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (2.7)$$

Veja-se as equações (2.9) e (2.10) adiante para uma discussão mais detalhada acerca do tensor $\boldsymbol{\tau}$.

Matriz de fluxo advectivo:

$$\mathbf{F}_{5 \times 3} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u}^T \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T + p \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \rho h \mathbf{u}^T \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

em que $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ é a matriz identidade de ordem três, p é a pressão termodinâmica e \mathbf{u} é o campo de velocidades.

As equações de Navier-Stokes foram resolvidas neste trabalho pela abordagem quase incompressível. Nesta abordagem, as equações de quantidade de movimento e de continuidade são resolvidas para a obtenção dos campos de velocidade e de pressão. Embora a equação de energia pudesse ter sido resolvida posteriormente, neste trabalho isto não foi efetivado.

Há que se examinar agora as relações constitutivas envolvendo as tensões viscosas.

A relação entre o campo de tensões viscosas e o campo de velocidades para um fluido newtoniano é dada por (WHITE, 1991):

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (2.9)$$

em que σ_{ij} é um componente do tensor tensão simétrico, p é a pressão termodinâmica, u_i é uma componente do campo de velocidades, x_i é uma componente do vetor posição \mathbf{x} , δ_{ij} é o delta de Kronecker e λ é o segundo coeficiente de viscosidade.

O tensor tensão σ tal como explicitado na equação (2.9) acima é aquele cujas componentes atuam nas faces de um elemento infinitesimal de fluido. A relação entre o tensor σ e o tensor τ que aparece nas equações (2.4), (2.6) e (2.7) acima é (WHITE, 1991 e ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1991):

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - \delta_{ij} p \quad (2.10)$$

δ_{ij} o delta de Kronecker.

No que concerne ao segundo coeficiente de viscosidade presente na equação (2.9) acima, cabe uma observação. Segundo WHITE (1991), em 1845 Stokes fez a hipótese de que:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (2.11)$$

em que λ é o segundo coeficiente de viscosidade e μ é a viscosidade dinâmica do fluido. De acordo com WHITE (1991), a hipótese (2.11) acima foi introduzida por Stokes sem base em experimento físico algum. No caso dos escoamentos quase incompressíveis, tal como o abordado por nós, o último termo do membro direito da equação (2.9), que é reconhecido como a divergência do campo de velocidades em notação indicial, aproxima-se muito de zero devido à conservação da massa (continuidade). Como conseqüência disto, para escoamentos quase incompressíveis, caso do presente trabalho, o termo que envolve o segundo coeficiente de viscosidade na equação (2.9) pode ser desprezado diante dos outros e a hipótese de Stokes não tem influência significativa sobre os

resultados. Este é exatamente o problema em estudo aqui.

A hipótese de Stokes então não tem influência para o caso incompressível. A equação (2.9) para o caso incompressível não permite validar ou anular a hipótese de Stokes, pelas razões explicitadas no parágrafo anterior. Segundo WHITE (1991), a hipótese de Stokes desvia-se bastante da realidade no caso da onda de choque frontal e no caso de absorção e atenuação de ondas sonoras. Ainda segundo WHITE (1991), experimentos têm mostrado que, para muitos líquidos, λ seria não apenas positivo como também proporcionalmente bem maior em magnitude do que μ , os próprios experimentos sendo objeto de controvérsia na comunidade científica.

2.1.2 A Incompressibilidade nos Escoamentos

O objetivo desta seção é o de fazer-se uma primeira abordagem sobre a incompressibilidade nos escoamentos fluidos, distinguindo-se os casos totalmente incompressível e o quase incompressível. Uma discussão mais completa acerca do tratamento da incompressibilidade será feita mais tarde.

O escoamento fluido absoluta e totalmente incompressível é uma abstração da mente humana. Ainda que extremamente pequenas, sempre haverá de se esperar por variações volumétricas quando fluidos sofrem compressões, i.e., um campo de tensões normais atua sobre eles. Entretanto, casos há nos quais a compressibilidade é tão pequena que para todos os propósitos de modelagem teórica e de medições experimentais o escoamento pode ser tomado quase incompressível.

No caso dos gases, uma relação constitutiva que relacione os campos de pressão absoluta, de massa específica e de temperatura absoluta é escrita na forma de uma equação de estado. No caso dos gases perfeitos, a equação de estado correspondente possui a forma bem conhecida a seguir:

$$p = \rho R T \quad (2.12)$$

Há que se observar que na equação (2.12) acima a constante R não é a constante universal dos gases perfeitos, mas sim o quociente da constante universal dos gases perfeitos pela massa molecular do gás que se esteja a analisar.

No caso dos líquidos, que se constituem no foco de interesse para o presente trabalho, há que se constituir também uma expressão que relacione as grandezas pressão, massa específica e temperatura.

O modo pelo qual o campo escalar de massas específicas ρ é modelado determina a metodologia numérica que será seguida. Isto posto, distinguem-se essencialmente dois tratamentos teóricos que podem ser dados ao campo de massas específicas:

1. O campo de massas específicas ρ é constante. Isto implica que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.13)$$

2. O campo ρ relaciona-se com o campo de pressões do escoamento por meio do módulo de elasticidade volumétrica:

$$K_e = \frac{\delta p}{\left(\frac{\delta \rho}{\rho}\right)} \quad (2.14)$$

em que p é a pressão e ρ é a massa específica no escoamento que se esteja a considerar.

O caso completamente incompressível seria aquele no qual não há variação volumétrica por maior que seja o campo de pressões sobre o fluido. Um fluido que se comportasse deste modo teria um módulo de elasticidade volumétrica K_e que tenderia a um valor ilimitado (infinito) de acordo com a equação (2.14) acima.

Por outro lado, um líquido como a água, por exemplo, apresenta um valor elevado do módulo K_e que, todavia, tem uma magnitude definida, i.e., é limitado (não infinito).

2.2 O Método dos Elementos Finitos

2.2.1 Os Métodos dos Resíduos Ponderados

O Método dos Elementos Finitos (MEF) pertence à classe dos Métodos de Resíduos Ponderados. No Método dos Elementos Finitos, a aproximação da solução para uma dada equação diferencial sujeita a condições de contorno e iniciais é escrita como uma combinação linear das chamadas “funções de forma” ou “funções de interpolação” (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1994). Na discussão que se segue, a formulação tem lugar apenas no domínio espacial.

Sejam:

$\Omega \in \mathbb{R}^n$, um domínio geométrico aberto, i.e, que não inclui o seu contorno Γ ;

$\bar{\Omega}$, um domínio geométrico fechado, i.e, que inclui o seu contorno Γ ;

Γ_D , a porção do contorno de $\bar{\Omega}$ na qual uma condição de Dirichlet é pré-estabelecida;

Γ_N , a porção do contorno de $\bar{\Omega}$ na qual uma condição de Neumann é pré-estabelecida;

$\Gamma = \partial \Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, o contorno do domínio $\bar{\Omega}$;

$\Gamma_D \cap \Gamma_N = \phi$, chamada condição de disjunção dos contornos de Dirichlet e de Neumann;

$\mathbf{u}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$, uma função vetorial na formulação geral;

$L(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ em Ω , em que L é um operador diferencial espacial, um conjunto de equações diferenciais definidas em Ω e sujeitas às condições de Dirichlet em Γ_D e de Neumann em Γ_N ;

$F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ em Γ , uma função vetorial que especifica as condições de contorno em Γ .

Então, um problema de valores de contorno pode ser definido como:

Determinar: $\mathbf{u}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$

, tal que:

$$L(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \text{ em } \Omega \quad (2.15)$$

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma$$

Considere-se agora as seguintes definições (HUGHES, 2000):

Sub-domínio Ω_e : uma sub-divisão do domínio $\bar{\Omega}$ qualquer;

Elemento: cada um dos sub-domínios nos quais o domínio $\bar{\Omega}$ é “discretizado, i.e., sub-dividido.

No presente trabalho estes elementos são triângulos planos;

Ponto nodal: uma entidade geométrica abstrata (um ponto) que pode ocupar literalmente qualquer posição no elemento. No presente trabalho estes pontos nodais, nós ou nodos serão tomados como coincidentes com os vértices de seus respectivos elementos, i.e., os nós serão os vértices dos triângulos planos;

$\eta = \{1, 2, \dots, n_{pn}\}$: conjunto de todos pontos nodais de $\bar{\Omega}$, com n_{pn} sendo o número total de pontos nodais;

η_d : conjunto de pontos nodais de $\bar{\Omega}$ nos quais uma condição de Dirichlet foi pré-estabelecida;

$\{\eta - \eta_d\}$: complemento de η_d em η , é o conjunto de nós nos quais a solução aproximada há que ser determinada. O cardinal deste conjunto, i.e., o número de elementos que ele encerra, multiplicado pelo número de graus de liberdade de cada nó é numericamente igual ao número de equações a serem resolvidas para a determinação da solução aproximada.

O Método dos Elementos Finitos tem então soluções discretas para o problema (2.15) acima, escritas na seguinte forma (HUGHES, 2000):

$$\hat{\mathbf{u}} \equiv \sum_{i \in \eta - \eta_d} N(\mathbf{x}_i) \mathbf{u}_i + \sum_{j \in \eta_d} N(\mathbf{x}_j) (\mathbf{u}_D)_j \quad (2.16)$$

em que:

$\hat{\mathbf{u}}$ é o vetor solução aproximado procurado (também chamado “função tentativa”);

\mathbf{u}_i é o vetor solução em pontos pré-determinados do domínio $\bar{\Omega}$ nos quais não há condição de Dirichlet prescrita:

$$\mathbf{u}_i = [u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^m]^T \quad (2.17)$$

onde (u_i^j) é o valor escalar da componente (j) do vetor (\mathbf{u}) no nó (i) e (m) é numericamente igual à dimensão do campo (\mathbf{u}) ;

$(\mathbf{u}_D)_j$ é o valor prescrito como em (2.16) para a solução \mathbf{u} nos pontos pertencentes ao conjunto η_d , i.e., os pontos de Γ_D , nos quais o valor da solução foi prescrito;

$N(\mathbf{x}_i)$ é a função matricial de interpolação, de forma ou de base avaliada no ponto \mathbf{x}_i de $\bar{\Omega}$. No presente trabalho esta função é tal que o escalar $N_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$, em que (δ_{ij}) é o delta de Kronecker. A forma explícita da matriz $(N(\mathbf{x}_i))$ é como abaixo:

$$N(\mathbf{x}_i) = \mathbf{diag}[N^1(\mathbf{x}_i), N^2(\mathbf{x}_i), \dots, N^m(\mathbf{x}_i)] \quad (2.18)$$

onde (m) é o número de componentes do vetor (\mathbf{u}) , $(N^j(\mathbf{x}_i))$ é a função de forma escalar empregada para construir a (j) -ésima componente de (\mathbf{u}) . A matriz $(N(\mathbf{x}_i))$ é portanto diagonal quadrada de ordem (m) .

Observe-se que a expressão dada pela equação (2.18) acima para a função de forma permite que cada componente do campo (\mathbf{u}) seja aproximada por uma função interpoladora específica, i.e., cada componente pode ser aproximada por uma função de interpolação diferente das demais. O caso particular no qual todas as componentes do campo (\mathbf{u}) são interpoladas pela mesma função de forma tem interesse prático. Neste caso, a função $(N(\mathbf{x}_i))$ pode ser escrita como segue:

$$N(\mathbf{x}_i) = N(\mathbf{x}_i) \mathbf{I} \quad (2.19)$$

em que $(N(\mathbf{x}_i))$ é a função de forma escalar avaliada no ponto (\mathbf{x}_i) e (\mathbf{I}) é a matriz identidade de ordem (m) , em que (m) é o número de componentes do campo (\mathbf{u}) .

A forma explícita (2.19) para a função de interpolação será a adotada no presente trabalho, salvo menção em contrário.

Observe-se que com a forma (2.16) escolhida para a solução aproximada e com a função de forma satisfazendo a seguinte propriedade:

$$N_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad (2.20)$$

satisfaz-se a condição de contorno para o problema (2.15).

De fato, quando $\mathbf{x} \in \Gamma_D$, i.e., $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j$ e a função de forma satisfaz a propriedade (2.20) acima, o primeiro somatório no membro direito da equação (2.16) resulta identicamente nulo. Deste modo, quando $\mathbf{x} \in \Gamma_D$, $\hat{\mathbf{u}}(x_j) = \mathbf{u}_D(x_j)$ e a condição de contorno de Dirichlet para o problema (2.15) está satisfeita.

Uma vez que $\hat{\mathbf{u}}$ tal como dada por (2.16) acima é apenas uma aproximação para a solução do problema (2.15), quando o operador L tal como em (2.15) atua em $\hat{\mathbf{u}}$ o resultado que daí emerge não é identicamente nulo. Surge então um resíduo:

$$L\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R} \quad (2.21)$$

em que \mathbf{R} é o resíduo vetorial. No Método dos Elementos Finitos, o resíduo \mathbf{R} é multiplicado ou ponderado por uma função, dita função peso ou de ponderação, e o produto assim constituído é integrado em Ω . Nos métodos em epígrafe busca-se então avaliar o valor da integral assim formada, de modo a obter-se uma condição expressa matematicamente sobre o erro associado à solução aproximada $\hat{\mathbf{u}}$ (KWON e BANG, 2000).

A formulação matemática destas idéias pode ser escrita como segue:

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}^T(\mathbf{x}_i) L(\hat{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{W}}^T(\mathbf{x}_i) F(\hat{\mathbf{u}}) d\Gamma \equiv 0 \quad (2.22)$$

em que $\mathbf{W}(\mathbf{x}_i)$ é a função de ponderação ou função peso relativa à ponderação no domínio geométrico e $\bar{\mathbf{W}}(\mathbf{x}_i)$ é relativa à ponderação sobre a função das condições de contorno F , cujas formas explícitas são como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= [W_1, W_2, \dots, W_r]^T \\ \bar{\mathbf{W}} &= [\bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_r]^T \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde m é o número de componentes do vetor $L(\hat{\mathbf{u}})$, i.e., o número de equações diferenciais definidas em Ω . A função $\bar{\mathbf{W}}(\mathbf{x}_i)$ é tal que é identicamente nula em Γ_D (veja-se PARS, 1962, para detalhes acerca da nulidade de $\bar{\mathbf{W}}(\mathbf{x}_i)$ em Γ_D).

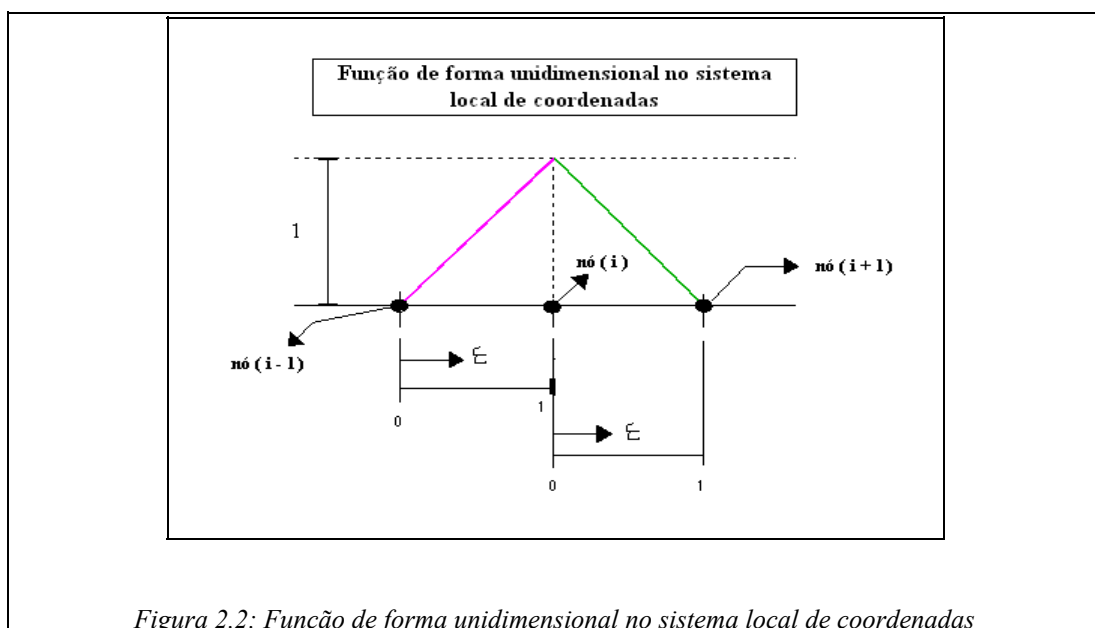
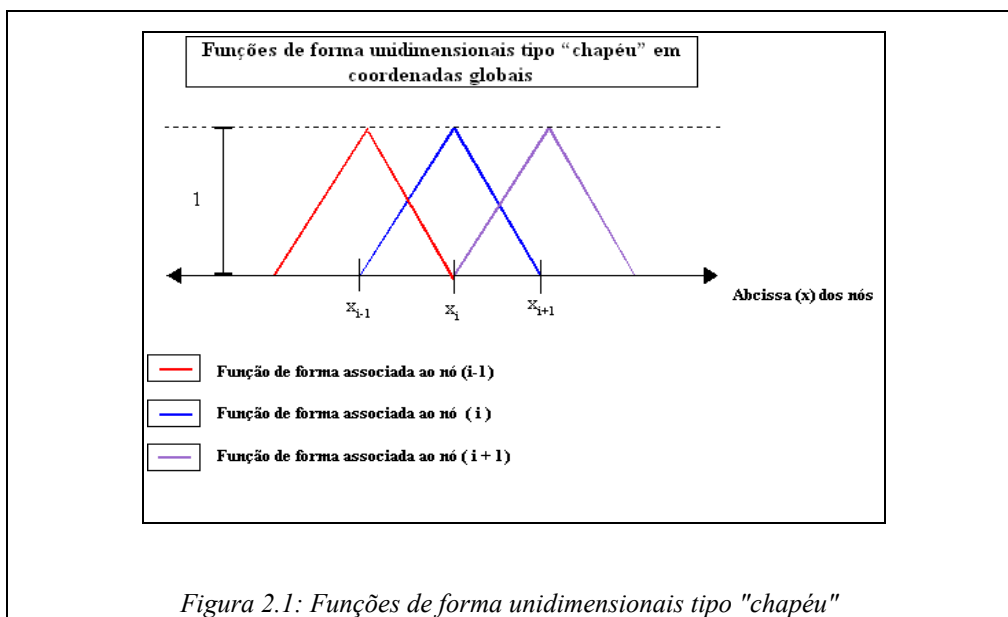
O ponto central no Método dos Elementos Finitos é exatamente a definição das funções peso $\mathbf{W}(\mathbf{x}_i)$.

A forma enunciada pelas equações (2.15) acima para determinação da função \mathbf{u} é chamada a Forma Forte do problema. A Forma Fraca do Problema é obtida mediante a aplicação do Teorema da Integração por Partes Multidimensional (Teorema de Green, para o que se veja, por exemplo, ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1994) à equação (2.22). A terminologia “forte” e “fraca” empregada neste contexto é aquela do Cálculo Variacional (PARS, 1962). A equivalência entre as formas fraca e forte é assegurada pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional, uma vez que a solução exata \mathbf{u} também satisfaz a equação (2.22).

As funções de interpolação a serem empregadas para a construção da solução aproximada $\hat{\mathbf{u}}$ tal como explicitada pela equação (2.16) podem ser as mais diversas. Elas podem ser polinômios, combinações lineares de funções trigonométricas naturais, funções exponenciais ou outras funções transcendentais (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1994). As combinações lineares de

funções seno e co-seno naturais com número finito de termos, portanto uma série de Fourier truncada, são especialmente interessantes uma vez que as duas funções trigonométricas naturais básicas, o seno e o co-seno, podem ser vistas como bases naturais para o espaço das funções reais. Neste trabalho adotam-se as funções de interpolação como combinações lineares de polinômios de grau um.

Nas Figuras (2.1) e (2.2) a seguir, ilustra-se o aspecto das funções de interpolação de grau um unidimensionais:



Esta escolha para as funções de interpolação juntamente com a forma fraca do problema (2.15) oriunda da equação (2.22) pela aplicação da integração por partes multidimensional à Equação (2.22) conduz a uma equação matricial na qual as incógnitas são os valores desejados para a função $\hat{\mathbf{u}}$ nos pontos previamente determinados do domínio $\bar{\Omega}$.

O domínio $\bar{\Omega}$ há que ser discretizado com vistas à aplicação do formalismo matricial supracitado. Esta discretização consiste na divisão física de $\bar{\Omega}$ em uma quantidade finita de subdomínios Ω_e , cujas formas podem ser as mais variadas. Entidades geométricas abstratas chamadas nós ou nodos são associadas a cada um destes subdomínios.

A forma fraca do problema (2.15) obtida a partir da equação (2.22) pelo uso do Teorema de Green vale em cada subdomínio Ω_e tal como descrito no parágrafo anterior, tratando-se com funções suficientemente contínuas. Isto significa que operações de integração haverão de ser levadas a efeito em cada um destes subdomínios, o que pode ser extremamente complexo, dependendo do tipo de função de forma utilizado. Adota-se na prática um “mapeamento”, no qual um elemento de referência serve como base para a execução de operações nos elementos reais, por meio de uma transformação de coordenadas conveniente. Fala-se em coordenadas locais, associadas ao elemento de referência e em coordenadas globais, associadas aos elementos reais.

As funções peso $W(\mathbf{x}_i)$ podem ser escritas como abaixo (HUGHES, 2000):

$$W(\mathbf{x}_i) \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{M}(\mathbf{x}_i) \mathbf{c}_i \quad (2.24)$$

em que:

a matriz ($\mathbf{M}(\mathbf{x}_i)$) é a base empregada para construção da função de ponderação;

o vetor (\mathbf{c}_i) possui componentes constantes;

$N = (\text{número de graus de liberdade por nó}) \times [\eta - \eta_d]$, em que $[\eta - \eta_d]$ é o cardinal do conjunto $\{\eta - \eta_d\}$, ou seja, (N) é o número de pontos em $\bar{\Omega}$ nos quais a solução é

procurada e para os quais não há condição de Dirichlet prescrita.

As formas explícitas para $(\mathbf{M}(\mathbf{x}_i))$ e para (\mathbf{c}_i) são como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{x}_i) &= \mathit{diag}[M^1(\mathbf{x}_i), M^2(\mathbf{x}_i), \dots, M^m(\mathbf{x}_i)] \\ \mathbf{c}_i &= [c_i^1, c_i^2, \dots, c_i^m]^T \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde:

$(M^j(\mathbf{x}_i))$ é a função escalar empregada para construir a (j) -ésima componente de (\mathbf{W}) ;

(c_i^j) é o valor escalar da componente (j) do vetor (\mathbf{c}) no nó (i) ;

(m) é o número de componentes dos vetores $L(\mathbf{u})$ e $F(\mathbf{u})$. A matriz $(\mathbf{M}(\mathbf{x}_i))$ é portanto diagonal quadrada de ordem (m) .

De acordo com o modo pelo qual a função peso como em (2.24) é estabelecida ou definida, distinguem-se os diferentes Métodos de Resíduos Ponderados (KWON e BANG, 2000):

1. *Método do sub-domínio:*

O domínio é dividido em sub-domínios, com:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{x}_i) &= W(\mathbf{x}_i) \equiv 1, \forall \mathbf{x}_i \in \Omega_e; \\ &0, \forall \mathbf{x}_i \notin \Omega_e \end{aligned} \quad (2.26)$$

em que (Ω_e) é o sub-domínio como já definido, de modo que a integral (2.22) é levada a efeito dentro de cada sub-domínio (Ω_e) .

1.1 *Método dos Volumes Finitos:*

O Método dos Volumes Finitos pode ser visto como uma espécie de Método de Sub-domínio, de consonância com o que será visto adiante.

Nesta abordagem o resíduo, tal como em (2.21), é integrado no volume definido pelo domínio $\bar{\Omega}$ e a integral resultante é então aproximada por uma soma discreta, mediante a divisão do domínio do problema em subdomínios em quantidade finita. Deste modo, no método dos

volumes finitos a função de ponderação é escalar e identicamente igual à unidade, i.e.:

$$W(\mathbf{x}_i) = W(\mathbf{x}_i) \equiv 1, \forall \mathbf{x}_i \in \Omega \quad (2.27)$$

com a notação já definida anteriormente.

2. *Método da Colocação:*

Neste método, a função peso é escolhida como o limite de uma seqüência delta de Dirac, a saber:

$$W(\mathbf{x}_i) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (2.28)$$

de tal maneira que a condição sobre o erro é feita exatamente no ponto selecionado (\mathbf{x}_i). Este método origina o Método das Diferenças Finitas.

3. *Método dos Mínimos Quadrados:*

Aqui a função peso é definida como:

$$W(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial a_i} \quad (2.29)$$

em que a_i é a forma geral das constantes que aparecem na equação (2.16) e \mathbf{R} é o resíduo (ver Eq. (2.21)). Há que se salientar que, dentro da abordagem das assim chamadas funções de forma hierárquicas, estes a_i não têm significação física (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1991).

Substituindo-se W como dada por (2.29) em (2.22) e tomando-se em consideração a equação (2.21), vê-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W(\mathbf{x}_i) L \hat{\mathbf{u}} d\Omega &\equiv \int_{\Omega} \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial a_i} d\Omega \\ &\equiv \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{R}^2}{\partial a_i} d\Omega \end{aligned}$$

e uma vez que os a_i 's são constantes, a imposição de que a integral do resíduo ponderado em Ω seja nula conduz a:

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}(\mathbf{x}_i) L \hat{\mathbf{u}} d\Omega \equiv \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{R}^2}{\partial a_i} d\Omega \equiv 0$$

$$\text{i.e., } \frac{\partial}{\partial a_i} \int_{\Omega} \mathbf{R}^2 d\Omega \equiv 0$$
(2.30)

i.e., a escolha da função peso tal como em (2.29) equivale a minimizar-se o quadrado do resíduo.

4. *Método de Galerkin:*

Neste método as componentes da função peso vetorial são idênticas às funções escalares de interpolação, i.e.,

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_i) \equiv \mathbf{N}(\mathbf{x}_i)$$
(2.31)

com a forma explícita de $(\mathbf{N}(\mathbf{x}_i))$ como segue:

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}_i) = [N_1(\mathbf{x}_i), N_2(\mathbf{x}_i), \dots, N_m(\mathbf{x}_i)]^T$$
(2.32)

em que (m) é o número de componentes dos vetores $L(\mathbf{u})$ e $F(\mathbf{u})$. Assim, $\mathbf{N}(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}^m$.

5. *Método de Petrov-Galerkin:*

Para os operadores diferenciais que não são auto-adjuntos o método de Galerkin referido ao item (4) acima é instável (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1991). O Método de Petrov-Galerkin vem transpor esta limitação através da adição de uma nova função à função peso de Galerkin, tal como a seguir:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_i) \equiv \mathbf{N}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{P}(\mathbf{x}_i)$$
(2.33)

A forma da função $\mathbf{P}(\mathbf{x}_i)$, denominada função de perturbação, será estudada em seus pormenores.

2.2.2 O Método de Galerkin

Este método aplica-se com sucesso a vários problemas importantes da física matemática,

dentre os quais as equações do potencial de Laplace, a equação de condução de calor de Fourier, a equação de onda e o estudo dos deslocamentos longitudinais de uma viga hookeana. Vê-se que estes casos têm um aspecto em comum: os operadores diferenciais associados às equações que os descrevem são auto-adjuntos (para uma discussão sobre as características dos operadores auto-adjuntos veja-se, por exemplo, ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1994). É desejável que um método possa ter uma abrangência tão ampla quanto possível, e assim é interessante o conhecimento dos resultados que o método de Galerkin dá no caso geral de operadores diferenciais que não sejam auto-adjuntos, assunto das próximas secções deste trabalho.

2.2.3 O operador de advecção-difusão

A execução de um balanço de energia em um elemento de fluido a escoar, considerando-se de menor importância os termos relativos à energia potencial e aqueles referentes às dissipações viscosas conduz à equação a seguir:

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} + \nabla^T(\rho h \mathbf{u}) - \nabla^T(\mathbf{K} \nabla T) - q_h = 0 \quad (2.34)$$

em que:

ρ é o campo escalar de massa específica do fluido;

ϵ é a energia interna por unidade de massa de fluido;

h é a entalpia por unidade de massa do fluido;

\mathbf{u} é o campo de velocidades do escoamento;

\mathbf{K} é o tensor de condutividade térmica do fluido;

T é o campo escalar de temperatura do fluido;

q_h é a taxa temporal de energia gerada internamente no fluido por unidade de massa;

∇^T é o operador divergência.

A entalpia h relaciona-se com a energia interna ϵ através da bem conhecida relação ter-

modinâmica a seguir:

$$h = \epsilon + \frac{p}{\rho} \quad (2.35)$$

em que p é a pressão termodinâmica e ρ é a massa específica.

A escrita da equação (2.34) para o caso da hipótese de incompressibilidade e regime de baixas velocidades quando comparadas à do som no meio, conduz à equação a seguir (LIENHARD IV e LIENHARD V, 2006):

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{u}^T \nabla T - \nabla^T (\mathbf{K} \nabla T) - q_h = 0 \quad (2.36)$$

em que c_p é o calor específico a pressão constante do fluido, os outros símbolos com mesmo significado que na equação (2.34). Da equação (2.36) depreende-se que a forma geral do operador de advecção-difusão para uma função escalar é:

$$A \frac{\partial}{\partial t} + B \mathbf{u}^T \nabla - C \nabla^T (\mathbf{K} \nabla) \quad (2.37)$$

em que A, B e C são funções das coordenadas espaciais e temporal no caso geral, \mathbf{K} é um tensor de difusão.

A comparação entre as equações (2.1) e (2.34) a (2.37) permite concluir que as Equações de Navier-Stokes tal como escritas em (2.1) estão na forma advectiva-difusiva. Há ampla discussão na literatura no que concerne as vias para sua resolução através do Método dos Elementos Finitos (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1991).

2.2.4 Instabilidades no Método de Galerkin

O método de Galerkin apresenta resultados bastante satisfatórios para operadores diferenciais auto-adjuntos, como foi comentado na Secção 2.2.2 do presente trabalho.

Na Secção 2.2.3 deste trabalho foi examinada a motivação para o estudo da resolução de

equações diferenciais cujo operador é o de advecção-difusão. A observação cuidadosa das Equações (2.34) a (2.37) permite concluir-se que o operador de advecção-difusão não é auto-adjunto devido à presença do termo advectivo, que é o termo relativo à convecção nas Equações (2.34) a (2.37) acima. Verique-se então quais resultados o método de Galerkin proporciona neste caso.

Considere-se o caso unidimensional, sem termo fonte de energia e em regime permanente para a equação (2.36), considerando-se ainda o produto da massa específica pelo calor específico a pressão constante como unitário e que a condutividade do fluido é constante e vale (k). Neste caso, a equação (2.36) torna-se:

$$u_1 \frac{dT}{dx} - k \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (2.38)$$

com as condições de contorno de Dirichlet:

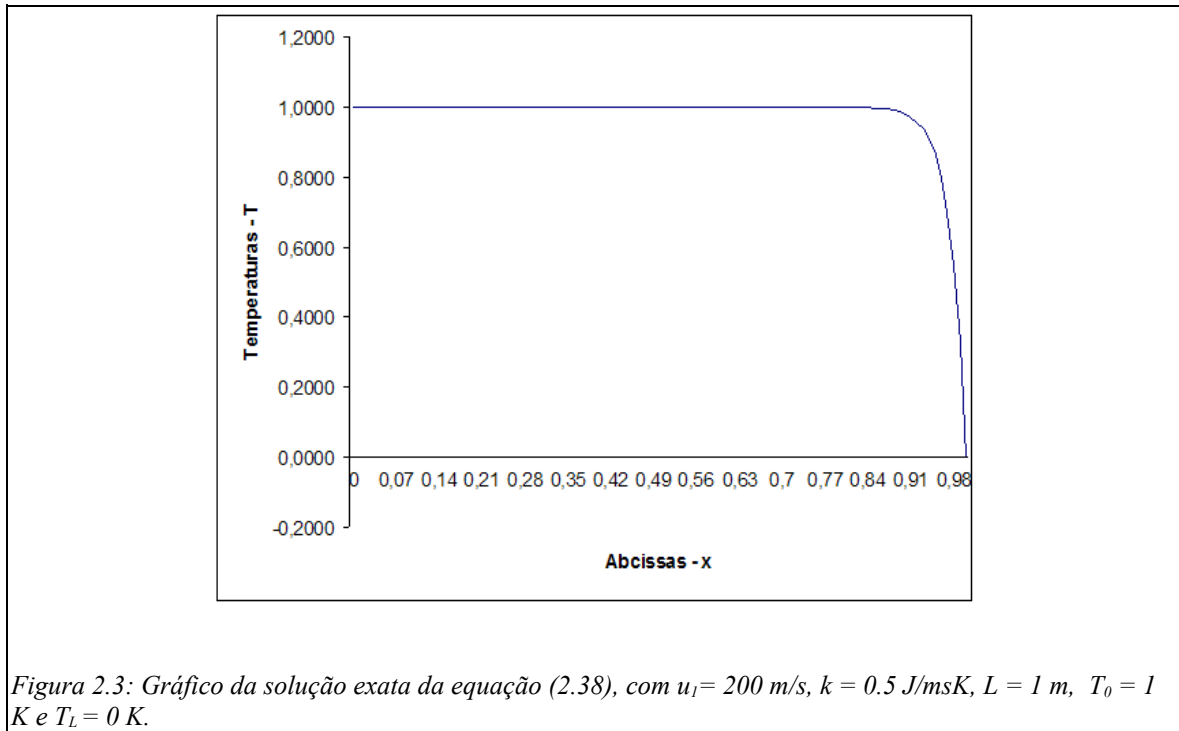
$$\begin{aligned} T(x = 0) &= T_0 \\ T(x = L) &= T_L \end{aligned} \quad (2.39)$$

em que u_1 é a velocidade do escoamento, também tomada como constante, e L é o comprimento do domínio geométrico unidimensional.

A solução exata para o problema (2.38) sujeito às condições (2.39) é dada por:

$$T(x) = \frac{T_0 \exp\left(\frac{u_1}{k} L\right) - T_L}{\exp\left(\frac{u_1}{k} L\right) - 1} - \frac{(T_0 - T_L)}{\exp\left(\frac{u_1}{k} L\right) - 1} \exp\left(\frac{u_1}{k} x\right) \quad (2.40)$$

A visualização do comportamento da solução exata dada pela Equação (2.40) pode ser obtida com o auxílio da figura (2.3).



A substituição da ponderação de Galerkin, representada pela equação (2.31), na equação (2.22), com a aplicação da ponderação de Galerkin assim obtida à equação (2.38) e a posterior integração por partes, resulta na seguinte equação nodal:

$$(1 - Pe)T_{(i+1)} - 2T_i + (1 + Pe)T_{(i-1)} = 0 \quad (2.41)$$

em que:

$$Pe = \frac{u_1 h}{2k} \quad (2.42)$$

é designado como o número de Peclét associado ao elemento de comprimento h , em estreita analogia com o parâmetro adimensional de mesmo nome da Mecânica dos Fluidos.

A demonstração detalhada da obtenção da equação nodal (2.41) está no Apêndice 1.

O exame cuidadoso da equação (2.41) acima permite concluir que a aproximação de Galerkin para o problema (2.38) sujeito às condições de contorno (2.39) resulta idêntica à aproximação obtida via método das diferenças finitas, com o termo advectivo sendo discretizado pelo operador centrado e o difusivo pelo operador avançado (CODINA, 1993).

A equação (2.41) pode então ser vista como uma equação de diferenças, para a qual o tratamento dado na Teoria das Equações Diferenciais pode ser aplicado, i.e., a solução particular da equação (2.41) pode ser escrita como (WYLIE, 1966):

$$T_i = \exp(mi) \quad (2.43)$$

e o Princípio da Superposição aplicado a equações de diferenças homogêneas como a (2.41) acima permite escrever-se a solução geral para (2.41) como uma combinação linear de todas as funções da forma dada por (2.43). Isto posto, a solução geral para o problema (2.41) pode ser escrita como:

$$T = \sum_{j=1}^n c_j \exp(m_j i) \quad (2.44)$$

em que (n) é a quantidade de valores que (m) pode assumir e (i) é um número inteiro positivo não-nulo. De fato, a substituição da Equação (2.43) na Equação (2.41) origina a assim chamada “equação característica” em (m). Esta equação, que é polinomial, tem grau igual à ordem da equação (2.41). O número de soluções da equação característica iguala o grau desta equação, de acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, de Gauss. A equação (2.44) é exatamente a superposição de soluções obtidas quando o parâmetro (m) assume o valor de cada uma das soluções da equação característica.

A expressão (2.43) acima levada à equação (2.41) conduz à equação abaixo transcrita:

$$(1 - Pe)\exp(mi+m) - 2\exp(mi) + (1 + Pe)\exp(mi-m) = 0 \quad (2.45)$$

e uma vez que a exponencial não se anula, esta expressão pode ter ambos membros divididos por $\exp(mi)$ e depois multiplicados por $\exp(m)$, após o que se obtém uma equação do segundo grau em $\exp(m)$:

$$(1 - Pe)(\exp(m))^2 - 2(\exp(m)) + (1 + Pe) = 0 \quad (2.46)$$

Resolvendo-se a equação (2.46) e substituindo-se as expressões encontradas na equação (2.44) obtém-se a solução geral para o problema (2.38) segundo o método de Galerkin:

$$T_i = c_1 + c_2 \left(\frac{1+Pe}{1-Pe} \right)^i \quad (2.47)$$

em que c_1 e c_2 são constantes.

Na Figura (2.4), visualiza-se o comportamento da solução aproximada tal como dada pela Equação (2.47), para três valores do número de Péclet.

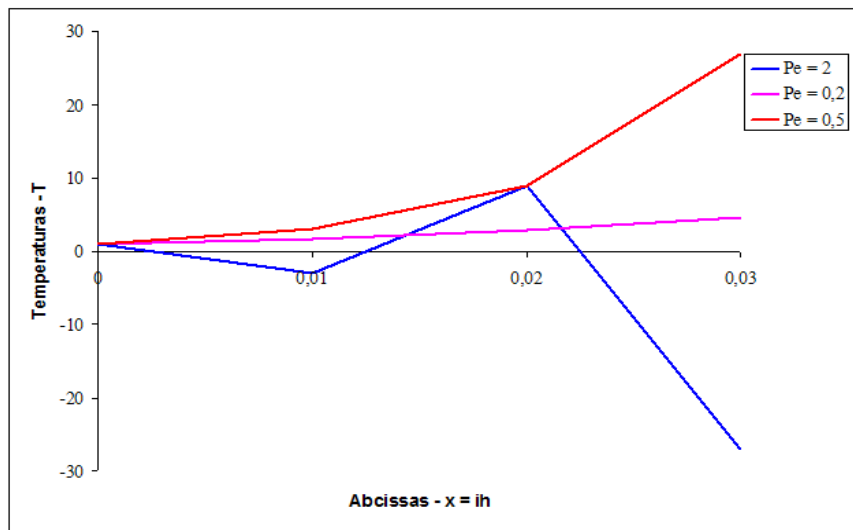


Figura 2.4: Gráfico da solução aproximada pelo método de Galerkin para a equação (2.38), com diferentes valores do número de Péclet. $L = 1 \text{ m}$, $T_0 = 1 \text{ K}$ e $T_L = 0 \text{ K}$.

Observe-se na Figura (2.4) a grande magnitude das oscilações nos valores aproximados para a temperatura obtidos a partir da Equação (2.47) com $Pe = 2$. Já a partir de três por cento do comprimento do domínio geométrico o módulo do valor aproximado obtido para a temperatura com $Pe = 2$ na equação (2.47) alcança vinte e sete vezes o maior valor exato para a temperatura.

A solução obtida pelo método de Galerkin como dada na forma da equação (2.47) acima, bem diferente da solução exata dada por (2.40), oscila indefinidamente entre valores positivos e negativos, quando Pe é maior que a unidade, à medida que i cresce e portanto o método de

Galerkin falha na resolução do problema advectivo-difusivo representado pelas equações (2.38) e (2.39).

O fato observado na equação (2.47) acima foi primeiro reportado pelos pesquisadores que trabalhavam com o método das diferenças finitas aplicado ao operador de advecção-difusão, usando-se o operador de diferenças centrado. Estes pesquisadores propuseram meios de se superar estas limitações já na década de cinquenta, segundo CODINA (1993). O método dos elementos finitos passou a fazer parte do cabedal de técnicas empregadas na Mecânica dos Fluidos Computacional somente no início da década de setenta, de acordo com aquele mesmo autor.

Uma questão natural que pode ser posta é a de como definir o erro de truncamento associado à aproximação dada pela equação nodal (2.41). Esta definição pode ser obtida mediante o emprego de séries de Taylor para a variável dependente temperatura, o que está detalhado no Apêndice 2.

A expansão em série de Taylor das temperaturas nos nós $(i - 1)$ e $(i + 1)$ conduz aos seguintes resultados para a equação (2.38) e seu respectivo erro de truncamento associado ao uso da ponderação de Galerkin:

$$u_1 \frac{dT}{dx} - k \frac{d^2 T}{dx^2} + k_h \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

, ou equivalentemente: (2.48)

$$u_1 \frac{dT}{dx} - (k - k_h) \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

O último termo do primeiro membro das equações (2.48) é reconhecido como o erro de truncamento procurado:

$$ET = k_h \frac{d^2 T}{dx^2} \tag{2.49}$$

em que k_h é como a seguir:

$$k_h = -k \left(\frac{1}{2Pe} \right) \left[\frac{1}{Pe} (\cosh(2Pe) - 1) - \sinh(2Pe) \right] \quad (2.50)$$

Os meios através dos quais as instabilidades que afetam o método de Galerkin, vistas nesta secção, foram suplantadas são o objeto da próxima secção deste trabalho.

2.2.5 O Método de Petrov-Galerkin

Na sub-secção anterior viu-se, sob a forma das Equações (2.48) a (2.49), qual a forma do erro introduzido pela aplicação da ponderação de Galerkin ao problema unidimensional de advecção-difusão definido pelas Equações (2.38) e (2.39).

O erro de truncamento tal como definido pela Equação (2.49) pode ser escrito sob a seguinte forma:

$$ET = kG \frac{d^2 T}{dx^2} \quad (2.51)$$

com:

$$G = - \frac{1}{2Pe} \left[\frac{1}{Pe} (\cosh(2Pe) - 1) - \sinh(2Pe) \right]$$

Acompanhando-se o argumento de CODINA (1993), a análise das equações (2.51) acima permite concluir que a ponderação de Galerkin aplicada ao problema (2.38) sujeito às condições de contorno (2.39) equivale à resolução de um problema diferente do original. Posto de outro modo, a ponderação de Galerkin introduz uma difusão negativa no problema original.

A comparação entre as equações (2.49) e (2.51) anteriores permite ainda escrever-se que:

$$k_h = kG \quad (2.52)$$

A substituição da expressão (2.52) acima na equação diferencial modificada dada por (2.48) permite que se escreva a equação diferencial associada à aplicação da ponderação de Galerkin ao problema (2.38) do modo como segue:

$$u_1 \frac{dT_i}{dx} - k(1 - G) \frac{d^2 T_i}{dx^2} = 0 \quad (2.53)$$

A figura (2.5) a seguir ilustra o comportamento do parâmetro $G(\text{Pe})$ tal como definido pelas equações (2.51) acima:

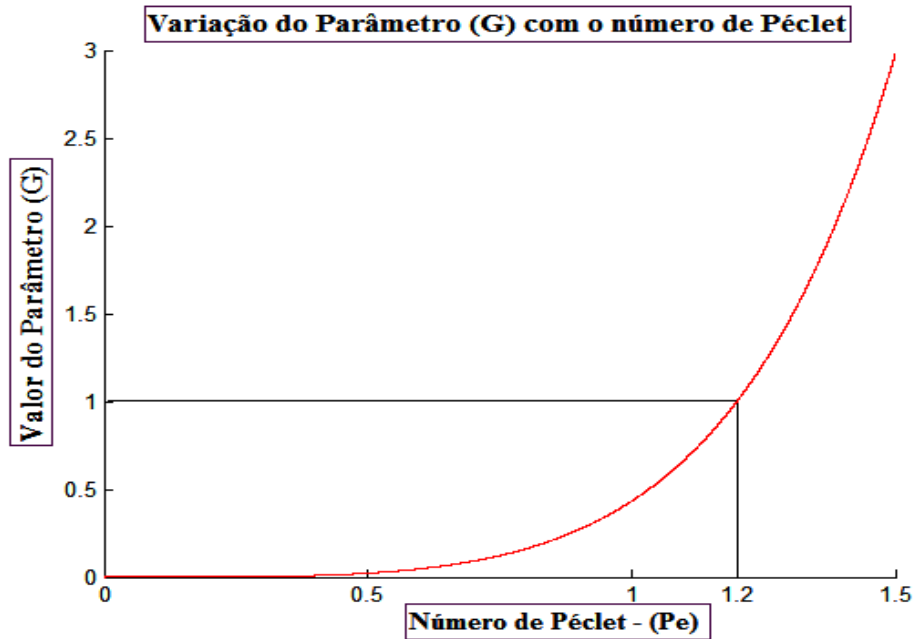


Figura 2.5: Variação do parâmetro G em função do número de Péclet

A análise comparativa das Equações (2.51) e (2.53) e da figura (2.5) permite a distinção de três casos, a saber:

1. $G \rightarrow 0$: Se o número de Péclet tender a zero, o parâmetro G também o fará e a ponderação de Galerkin aplicada ao problema (2.38) produzirá valores nodais exatos. Isto é o esperado, pois que um número de Péclet tendendo a zero indica uma natureza

eminentemente difusiva do escoamento;

2. $0 < G < 1$: Neste caso a ponderação de Galerkin estará a resolver um problema sub-difusivo quando comparado ao (2.38);

3. $G > 1$: Aqui a constante de difusão resultante associada à equação (2.53) resultará negativa e a ponderação de Galerkin estará a resolver um problema desprovido de significação física quando comparado ao original (2.38).

A primeira proposição elaborada com vistas a resolver os problemas de instabilidade em equações da forma (2.38) surgiu no método das diferenças finitas com a introdução de uma “difusão numérica”. A idéia central é a adição de uma difusão numérica ao termo difusivo natural presente na equação (2.38), de modo que a forma desta difusão numérica no caso unidimensional seja a seguinte:

$$k' = \alpha \frac{u_1 h}{2} \quad (2.54)$$

em que:

α é uma função do número de Péclet;

u_1 é a velocidade do escoamento unidimensional;

h é o tamanho físico de cada elemento.

A introdução da difusão numérica k' como dada por (2.54) leva em consideração a direção segundo a qual o escoamento tem lugar e, mais especificamente para o caso unidimensional, o sinal do número u_1 . CODINA (1993) então ensina-nos que, devido a esta consideração da direção e sentido do escoamento, as primeiras abordagens efetuadas com vistas a superar as instabilidades vistas na secção anterior receberam a designação de “upwind methods”, i.e., métodos que consideram a direção segundo a qual o escoamento está a ocorrer.

A introdução da difusão numérica como dada pela expressão (2.54) acima na equação (2.38) resulta na seguinte equação diferencial modificada:

$$u_1 \frac{dT}{dx} - (k + k') \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (2.55)$$

A aplicação da ponderação de Galerkin ao problema (2.55) resulta na seguinte equação nodal:

$$\begin{aligned} (1 + Pe(\alpha - 1))T_{(i+1)} - \\ 2(1 + \alpha Pe)T_i + \\ (1 + Pe(\alpha + 1))T_{(i-1)} = 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

A obtenção da Equação (2.56) passa precisamente pela mesma seqüência de operações efetivadas com vistas à obtenção da Equação (2.41). Os detalhes de obtenção da Equação (2.41) estão no Apêndice 1, onde a seqüência de operações necessárias à explicitação da Equação (2.56) pode portanto ser obtida.

Seguindo-se o argumento de CODINA (1993), a introdução da função T , solução exata da Equação (2.55), semelhante à Equação (2.40), na equação nodal (2.56) e a expansão dos termos da equação resultante em série de Taylor conduz à seguinte expressão para o erro de truncamento:

$$ET = - \frac{k}{2Pe} \left[\left(\frac{1}{Pe} + \alpha \right) (\cosh(2Pe) - 1) - \sinh(2Pe) \right] \frac{d^2 T}{dx^2} \quad (2.57)$$

Os detalhes relativos à seqüência de procedimentos necessários à explicitação da equação (2.57) podem ser obtidos do Apêndice 2.

A imposição de que a solução aproximada forneça resultados nodais exatos para a equação (2.55) acima equivale a buscar-se as condições pelas quais o erro de truncamento tal como dado pela equação (2.57) seja identicamente nulo. Em assim se procedendo, obtem-se a seguinte expressão para a função α :

$$\alpha = \cotgh(Pe) - \frac{1}{Pe} \quad (2.58)$$

STORTI et al. (1997) denominam a função (α) como expressa em (2.58) de “magic function”, i.e., função mágica, denotando-a $\psi(Pe)$.

A inconsistência desta abordagem pelo método dos elementos finitos reside no fato de que a equação nodal obtida pela aplicação do método de Galerkin à Equação (2.55) não satisfaz a formulação variacional relativa ao problema original. A equação nodal (2.56) equivale à aplicação da seguinte ponderação apenas ao termo convectivo da equação diferencial (2.55):

$$\bar{N} = N + \alpha \frac{h}{2} \frac{dN}{dx} \quad (2.59)$$

em que (N) é a função de interpolação do método de Galerkin. Esta ponderação diferenciada apenas no termo convectivo leva a resultados satisfatórios quando o termo de fonte no operador de advecção-difusão é constante e dá aproximações pobres quando o termo de fonte não é constante (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1991 e BROOKS e HUGHES, 1982).

A obtenção de um método consistente e abrangente do ponto de vista numérico passa pela formulação de uma ponderação que afete todos os termos do operador de advecção-difusão. Este objetivo é logrado com o emprego do assim chamado Método de Petrov-Galerkin. Este método consiste essencialmente no uso de diferentes espaços de funções para a interpolação e a ponderação no sentido que estes termos possuem no Método dos Elementos Finitos. No caso unidimensional, a ponderação pode ser dada pela expressão (2.59) (agora aplicada ao operador de advecção-difusão como um todo), com a definição das funções de interpolação que lhe é implícita.

O número de Péclet Pe tem importância básica na descrição do comportamento que a solução aproximada pode exibir. De acordo com o que se viu na secção precedente, quando Pe é maior que a unidade no método de Galerkin aplicado à Equação (2.38), soluções oscilantes são obtidas. O que ocorre de fato, de consonância com o que se viu nesta secção, é que há uma inconsistência quando da aplicação da Ponderação de Galerkin ao problema (2.38), no sentido de que a solução discretizada não reproduz a equação original quando o comprimento físico do

elemento unidimensional, h , tende para zero. CODINA (1993) mostra que quando a relação abaixo é satisfeita:

$$|\alpha| > \alpha_{critico} = 1 - \frac{1}{|Pe|} \quad (2.60)$$

a solução aproximada não será oscilante. Por outro lado, uma vez que a função α satisfaça à relação (2.58) a solução aproximada assumirá valores nodais exatos.

2.2.6 O Método SUPG

O método SUPG é uma espécie dos assim chamados métodos estabilizados para problemas que envolvam a advecção. Um outro exemplo de método estabilizado neste contexto é o método de Taylor-Galerkin, que não será discutido aqui por fugir ao foco de interesse deste trabalho.

A escrita da equação (2.36) para o caso do regime permanente e com o produto ρC_p unitário dá a equação a seguir:

$$\mathbf{u}^T \nabla T - \nabla^T (\mathbf{K} \nabla T) - q_h = 0 \quad (2.61)$$

em que os símbolos têm a mesma significação que na equação (2.36).

A aplicação do método de Galerkin à equação (2.61) acima produzirá os mesmos efeitos de oscilação observados no caso unidimensional, de modo que é natural pensar-se na extensão da estabilização proporcionada no método de Petrov-Galerkin para a situação multidimensional. Trata-se então de generalizar-se os conceitos obtidos da experiência unidimensional.

Considere-se um campo de escoamento bidimensional descrito por suas linhas de corrente como ilustrado na figura (2.6) a seguir.

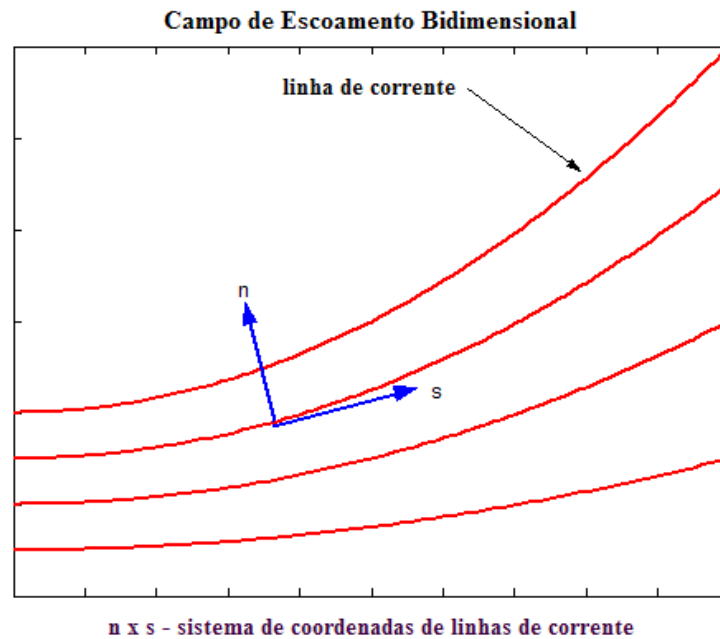


Figura 2.6: Sistema de coordenadas de linhas de corrente

Acompanhando o argumento de CODINA (1993), pode-se re-escrever a equação (2.61) para o caso multidimensional mais simples, qual seja o bidimensional, sem qualquer perda de generalidade, em coordenadas ortogonais de linhas de corrente como segue:

$$|u| \frac{\partial T}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \left(k \frac{\partial T}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial n} \left(k \frac{\partial T}{\partial n} \right) - q_h = 0 \quad (2.62)$$

em que s é o comprimento de arco seguindo-se as linhas de corrente do escoamento e a condutividade térmica k é constante. Vê-se facilmente a partir da equação (2.62) que apenas a difusão na direção s há que ser “equilibrada” para que a solução seja estabilizada. De fato, observa-se que apenas na direção s há termo advectivo não identicamente nulo. A observância deste argumento extremamente simples permite que se escreva a função de ponderação multidimensional no método de Petrov-Galerkin na seguinte forma geral:

$$W_i^T = N_i^T + \alpha_{\acute{o}timo} \frac{h}{2} \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \nabla N^T \quad (2.63)$$

em que ∇ é o operador gradiente e a ponderação há de ser levada a efeito de forma a atingir todo o operador, de conformidade com o que se viu na secção precedente.

A formulação deste parágrafo precedente permite compreender a escolha para a designação desta metodologia: SUPG. Esta palavra é formada pelas iniciais da seguinte frase no idioma inglês: “Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin method”, i.e., Método de Petrov-Galerkin que considera a direção segundo a qual o escoamento está a ocorrer e seguindo-se as linhas de corrente.

Na busca por uma metodologia numérica consistente, tem-se destacado o fato de que a ponderação deve alcançar todo o operador diferencial em estudo. A observância deste requisito leva naturalmente à questão de como definir o termo de ponderação que atua sobre a parcela difusiva do operador de advecção-difusão, tendo-se em mente que as funções de interpolação a serem empregadas são de classe C^0 . Ou seja, qual o sentido da expressão:

$$\int_{\Omega} (\alpha_{\acute{o}timo} \frac{h}{2} \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \nabla N^T) \nabla^T (\mathbf{K} \nabla T) d\Omega \quad (2.64)$$

se há uma descontinuidade através das fronteiras entre os elementos finitos? A resposta para esta questão fica clara quando se considera que a função $\nabla^T (\mathbf{K} \nabla T)$ no integrando da expressão (2.64) há de atuar somente no interior dos elementos finitos do domínio. Isto posto, a integral em todo domínio explicitada pela expressão (2.64) é re-escrita como a soma de todas integrais no interior de cada domínio elementar:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} (\alpha_{\acute{o}timo} \frac{h}{2} \frac{\mathbf{u}_e}{|\mathbf{u}_e|} \nabla N^T) \nabla^T (\mathbf{K} \nabla T_e) d\Omega \quad (2.65)$$

O presente trabalho lida fundamentalmente com elementos triangulares planos. CODINA (1993) chama a atenção para o fato de que se a condutividade térmica k do fluido for constante e se se fizer o emprego de elementos finitos triangulares lineares (caso deste trabalho) ou tetraédricos, a seguinte equação valerá:

$$\nabla^T(\mathbf{K}\nabla T_e) = k\nabla^2(T_e) \equiv 0 \quad (2.66)$$

o que significa que o termo difusivo na ponderação SUPG para esta categoria de elementos será identicamente nulo dentro de cada elemento. Entrementes, há que se enfatizar a questão da necessidade da consideração destes termos quando elementos de ordem superior forem empregados.

2.3 O Tratamento da Incompressibilidade

A sub-secção 2.1.1 deste trabalho tratou das equações de Navier-Stokes e das relações constitutivas cujas formulações são necessárias para uma completa caracterização das soluções. A sub-secção 2.1.2 introduziu dois pontos de vista para o tratamento da assim chamada restrição de incompressibilidade: o escoamento totalmente incompressível e a abordagem quase incompressível. A secção 2.2 descreveu o Método dos Elementos Finitos com ênfase na metodologia SUPG, indicada que é para o tratamento de escoamentos fluidos.

Nesta secção objetiva-se aprofundar a discussão acerca do estado atual dos conhecimentos acerca da restrição de incompressibilidade e como tal restrição vem sendo tratada pelos pesquisadores. A indicação do caminho que será seguido neste trabalho com respeito à restrição de incompressibilidade também será assinalada.

2.3.1 O Caso Incompressível

Considere-se as seguintes hipóteses no escoamento completamente incompressível transitório:

$$\begin{aligned} \rho &= \textit{constante} \\ \mu &= \textit{constante} \end{aligned} \quad (2.67)$$

com ρ sendo o campo escalar da massa específica e μ o primeiro coeficiente de viscosidade, i.e., a viscosidade dinâmica.

Nas circunstâncias das hipóteses (2.67) acima, as Equações de Navier-Stokes (2.1) reduzem-se às seguintes equações vetoriais multi-dimensionais:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \equiv \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.68)$$

$$\nabla^T \mathbf{u} \equiv 0 \quad (2.69)$$

com:

ρ = massa específica (aqui constante);

μ = viscosidade dinâmica (aqui constante);

\mathbf{f} = campo das forças de corpo;

p = campo de pressões absolutas;

\mathbf{u} = campo de velocidades do escoamento;

∇ é o operador gradiente;

∇^T é o operador divergente;

∇^2 é o operador laplaciano;

$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i}$, é o assim chamado operador derivada material ou substancial

em notação indicial, que nada mais é do que a derivada total aplicada a seu argumento (regra da cadeia).

A observação acurada das equações (2.68) e (2.69) acima permite que se faça algumas observações importantes, a saber:

1. O sistema original de Equações (2.1) de Navier-Stokes envolve cinco incógnitas a serem determinadas, quais sejam: as três componentes espaço-temporais do campo de velocidades \mathbf{u} , o campo escalar de pressões p e o campo escalar da energia e .
2. Com as hipóteses (2.67), é possível resolver o sistema de Equações (2.68) *versus*

(2.69) para obter os campos \mathbf{u} e p . Levando-se os campos \mathbf{u} e p obtidos à equação da energia é possível por fim calcular o campo e .

3. Está deste modo caracterizado um desacoplamento no sistema de equações (2.1): as equações de conservação de *momentum* e de massa são desacopladas da equação da energia e a equação da energia pode ser resolvida posteriormente.

Neste trabalho a equação de energia foi desacoplada das equações de quantidade de movimento e de continuidade. Entrementes, a equação de energia assim desacoplada não foi resolvida aqui.

As equações (2.68) e (2.69) podem ser escritas na forma advectiva-difusiva a seguir:

$$\mathbf{B}_{4 \times 4}(\mathbf{U}_{,t})_{4 \times 1} + (\mathbf{A}_i)_{4 \times 4}(\mathbf{U}_{,x_i})_{4 \times 1} - \mathbf{K}_{4 \times 4}[\nabla^2 \mathbf{U}_{4 \times 1}]_{4 \times 1} - \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{3 \times 1} \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} \equiv \mathbf{0}_{4 \times 1} \quad (2.70)$$

com:

$$\mathbf{B}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

$$\mathbf{U}_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{3 \times 1} \\ (\frac{p}{\rho}) \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_1)_{4 \times 4} &= \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
(\mathbf{A}_2)_{4 \times 4} &= \begin{pmatrix} u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
(\mathbf{A}_3)_{4 \times 4} &= \begin{pmatrix} u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.73}$$

$$\mathbf{K}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} \nu \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{com:} \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{2.74}$$

em que (ν) é a viscosidade cinemática do fluido.

A observação das equações (2.70) a (2.74) permite concluir que a matriz Jacobiana difusiva resulta singular, uma vez que a linha correspondente à equação da continuidade é constituída por elementos nulos.

2.3.2 O Caso Quase Incompressível

2.3.2.1. Fluidos reais: Módulo de Elasticidade Volumétrica

A descrição Lagrangiana de um escoamento fluido (FOX e MACDONALD, 1995) permite escrever a massa de uma determinada partícula e a sua respectiva variação como segue:

$$\begin{aligned}
m &= \rho V \\
\delta m &= (\delta \rho)V + \rho(\delta V)
\end{aligned} \tag{2.75}$$

em que m é massa, ρ é massa específica e V é o volume.

O fato de que a massa da partícula é conservada juntamente com a consideração das equações (2.14) e (2.75) acima permite relacionar o campo de massas específicas ρ com o campo de pressões, para os líquidos, do modo como segue:

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{1}{K_e} \delta p \quad (2.76)$$

BROOKS e HUGHES (1982) abordam o caso quase incompressível ou levemente compressível através da compressibilidade artificial, escrevendo então a divergência do campo de velocidades em termos de um parâmetro β , como segue:

$$\begin{aligned} P - P_{ref} &= \beta(\rho - \rho_{ref}) \\ u_{i,i} &= - \frac{1}{\rho \beta} P_{,t} \end{aligned} \quad (2.77)$$

A comparação entre as equações (2.76) e (2.77) permite inferir que o parâmetro (β) poderia assumir o significado físico expresso pela equação (2.78) a seguir:

$$\beta = \frac{K_e}{\rho} \quad (2.78)$$

em que K_e é o módulo de elasticidade volumétrica e ρ é a massa específica, tomada como quase constante.

A velocidade do som em um meio fluido é definida em termos do módulo de elasticidade volumétrica e da massa específica do fluido através da seguinte relação:

$$c^2 = \frac{K_e}{\rho} \quad (2.79)$$

A partir das equações (2.76) e (2.79) é possível escrever a equação da continuidade da

seguinte maneira modificada:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \nabla^T \mathbf{u} = 0 \quad (2.80)$$

em que c é a velocidade do som no fluido em estudo, p é a pressão, ρ é a massa específica, tomada como muito aproximadamente constante, e \mathbf{u} é o campo de velocidades.

A equação (2.80) acima, juntamente com a equação de *momentum* (2.68), constitui-se em um conjunto de equações que servem de base para o estudo dos assim chamados escoamentos quase incompressíveis.

As equações (2.68) e (2.80) podem ser então escritas sob a forma advectiva-difusiva a seguir:

$$\mathbf{B}_{4 \times 4} (\mathbf{U}_{,t})_{4 \times 1} + (\mathbf{A}_i)_{4 \times 4} (\mathbf{U}_{,x_i})_{4 \times 1} - \mathbf{K}_{4 \times 4} [\nabla^2 \mathbf{U}_{4 \times 1}]_{4 \times 1} - \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{3 \times 1} \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} \equiv \mathbf{0}_{4 \times 1} \quad (2.81)$$

em que o vetor de estado $\mathbf{U}_{4 \times 1}$, as matrizes Jacobianas advectivas $(\mathbf{A}_i)_{4 \times 4}$ e a matriz Jacobiana difusiva $\mathbf{K}_{4 \times 4}$ são exatamente como nas equações (2.72) a (2.74). A matriz $\mathbf{B}_{4 \times 4}$ na equação (2.81), por seu turno, assume a forma dada a seguir:

$$\mathbf{B}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \left(\frac{1}{\rho c^2} \right) \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

Esta formulação quase incompressível apresenta o interessante aspecto de que algumas das técnicas empregadas para a formulação dos escoamentos compressíveis podem ser usadas para o caso quase incompressível.

2.4 Forma fraca do caso quase incompressível

2.4.1 Síntese da formulação quase incompressível

O termo difusivo da equação (2.81) pode ser re-escrito do modo como segue:

$$\mathbf{K}_{4 \times 4} [\nabla^2 \mathbf{U}]_{4 \times 1} \equiv \sum_{k=1}^{nd} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{K}_{4 \times 4} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k} \right) \right) \quad (2.83)$$

em que nd é o número de dimensões espaciais consideradas.

O uso de notação indicial permite ainda a escrita da equação (2.83) do seguinte modo:

$$\mathbf{K}_{4 \times 4} [\nabla^2 \mathbf{U}]_{4 \times 1} \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{D}^k}{\partial x_k} \right)_{4 \times 1} \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{K}_{4 \times 4} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k} \right) \right)_{4 \times 1} \quad (2.84)$$

Uma vez que o tensor $\mathbf{K}_{4 \times 4}$ é constante. O sub-índice (k) varia desde 1 até nd .

A análise da equação (2.84) permite que se escreva o seguinte:

$$(\mathbf{D}^k)_{4 \times 1} \equiv \sum_{k=1}^{nsd} \mathbf{K}_{4 \times 4} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k} \right)_{4 \times 1}$$

em que :

nd = número de dimensões espaciais

$$\mathbf{U}_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{3 \times 1} \\ \left(\frac{p}{\rho} \right) \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

$$\mathbf{K}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} \nu \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

O termo advectivo da equação (2.81) pode por sua vez ser escrito sob a seguinte forma:

$$(\mathbf{A}_i)_{4 \times 4} (\mathbf{U}_{,x_i}) \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{F}^k}{\partial x_k} \right)_{4 \times 1} = (\mathbf{A}_k)_{4 \times 4} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k} \right)_{4 \times 1} \quad (2.86)$$

em que sub-índice (k) varia desde 1 até nd e:

$$(\mathbf{A}_k)_{4 \times 4} \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{F}^k}{\partial \mathbf{U}} \right)_{4 \times 4} \quad (2.87)$$

Tomando-se em conta as equações (2.83) a (2.86) acima, a equação (2.81) pode ser escrita na forma abaixo:

$$\mathbf{B}_{4 \times 4} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)_{4 \times 1} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}^k}{\partial x_k} \right)_{4 \times 1} - \left(\frac{\partial \mathbf{D}^k}{\partial x_k} \right)_{4 \times 1} - \mathbf{Q}_{4 \times 1} = \mathbf{0}_{4 \times 1} \quad (2.88)$$

em que:

A matrix $\mathbf{B}_{4 \times 4}$ é como na equação (2.82);

O vetor de estado $\mathbf{U}_{4 \times 1}$ é como na equação (2.72);

O termo advectivo é como na equação (2.86);

O termo difusivo é como na equação (2.84);

O vetor \mathbf{Q} é:

$$\mathbf{Q}_{4 \times 1} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{3 \times 1} \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} \quad (2.89)$$

em que \mathbf{f} é a força de corpo.

A forma variacional do problema representado pela equação (2.88) pode ser escrita com base na ponderação dada pela equação (2.22) deste trabalho. Considerando-se somente o primeiro termo do membro esquerdo da equação (2.22), a forma procurada é escrita do modo como segue:

$$\int_0^{t_{\max}} \int_{\Omega} (\mathbf{W}^T)_{1 \times 4} \left(\mathbf{B}_{4 \times 4} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)_{4 \times 1} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}^k}{\partial x_k} \right)_{4 \times 1} - \left(\frac{\partial \mathbf{D}^k}{\partial x_k} \right)_{4 \times 1} - \mathbf{Q}_{4 \times 1} \right) d\Omega dt \equiv 0 \quad (2.90)$$

O presente trabalho tratará do estudo do caso quase incompressível quando o termo $\mathbf{Q}_{4 \times 1}$ pode ser desprezado sem prejuízo para a pesquisa. Neste caso, a equação (2.90) é re-escrita assim:

$$\int_0^{t_{\max}} \int_{\Omega} (\mathbf{W}^T)_{1 \times 4} (\mathbf{B}_{4 \times 4} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)_{4 \times 1} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}^k}{\partial x_k} \right)_{4 \times 1} - \left(\frac{\partial \mathbf{D}^k}{\partial x_k} \right)_{4 \times 1}) d\Omega dt \equiv 0 \quad (2.91)$$

A equação (2.91) define a forma variacional associada ao problema que é objeto de estudo do presente trabalho.

Agora é necessário aplicar o Teorema de Green para integração por partes multidimensional à equação (2.91) a fim de se obter a forma fraca do problema em estudo.

Antes disto é necessário definir-se os aspectos relativos à discretização espaço-temporal e ao uso do assim chamado Método de Galerkin descontínuo no tempo. Isto será feito na próxima sub-secção.

2.4.2 O Método de Galerkin descontínuo no tempo

O Método de Galerkin descontínuo no tempo será empregado com vistas a obter uma solução para o problema (2.88) que poderá ser descontínua entre cada partição do sub-domínio temporal considerado. Vê-se que neste método a posição dos nós do sub-domínio espacial pode perfeitamente mudar com o tempo. Não pode mudar dentro de cada partição do sub-domínio temporal.

Problemas com fronteira móvel são então especialmente adequados para receber tratamento via método descontínuo no tempo. Não obstante a possibilidade de emprego do Método de Galerkin descontínuo no tempo para os casos onde se tem fronteiras não fixas, este trabalho lida com fronteiras essencialmente fixas.

A solução do problema representado pela equação (2.88) há que ser definida num domínio espaço-temporal. Este domínio será representado neste trabalho por (Q) . O domínio espaço-temporal (Q) é agora definido:

$$\begin{aligned}
Q &= \Omega \times I \\
\Omega &\subset \mathbb{R}^{nd} \\
I &=] 0, t_{max} [\subset \mathbb{R}^+
\end{aligned}
\tag{2.92}$$

em que (nd) é o número de dimensões espaciais.

Na equação (2.92) tem-se:

Q é o domínio espaço-temporal;

Ω é o sub-domínio espacial;

I é o sub-domínio temporal.

Defina-se agora uma partição do sub-domínio temporal I :

$$I_n =] t_n, t_{n+1} [\tag{2.93}$$

Observa-se que a partição definida pela expressão (2.93) considera o sub-domínio I dividido em partes iguais. A rigor, isto não é absolutamente necessário. Neste trabalho, entretantes, considerar-se-á partições temporais com divisões iguais.

A cada partição do sub-domínio temporal I , denotada por I_n , está associado um sub-domínio espacial Ω_n , com sua respectiva fronteira Γ_n .

As designações das partições do sub-domínio espacial Ω_n serão designadas neste trabalho do modo como segue:

$$\begin{aligned}
\Omega_n &: \text{dividido em elementos } \Omega_e^n \\
\Gamma_n &: \text{dividido em elementos } \Gamma_e^n
\end{aligned}
\tag{2.94}$$

À luz das equações (2.92) a (2.94) pode-se definir o elemento espaço-tempo como segue:

$$\hat{Q}_e^n = \hat{\Omega}_e^n \times I_n \tag{2.95}$$

Uma consequência imediata do uso do Método de Galerkin descontínuo no tempo é que a integração de funções que envolvam a derivada da solução deve levar em conta a descontinuidade temporal da solução $U(\mathbf{X}, t)$.

2.4.3 Forma fraca discreta

Sejam os seguintes espaços de funções:

$$S_n^h = \hat{U} \mid \hat{U} \in [C^0(\hat{Q}^n)]^m \text{ com } \hat{U} = U_D, \forall (\mathbf{x}, t) \in \hat{I}_D^n \times I_n \quad (2.96)$$

$$V_n^h = W \mid W \in [C^0(\hat{Q}^n)]^{m \times m} \text{ com } W = \mathbf{0}, \forall (\mathbf{x}, t) \in \hat{I}_D^n \times I_n \quad (2.97)$$

Nas equações (2.96) e (2.97) tem-se que:

S_n^h é o espaço das soluções aproximadas;

V_n^h é o espaço das variações ou das funções de ponderação W ;

(m) é o número de componentes da solução vetorial $U(\mathbf{X}, t)$.

A partir das equações (2.96) e (2.97) tem-se então que:

$$\begin{aligned} \hat{U} &\in S_n^h \\ W &\in V_n^h \end{aligned} \quad (2.98)$$

A obtenção da forma fraca associada à equação (2.91) passa pela integração por partes multidimensional. A execução desta integração por partes deve considerar a descontinuidade temporal da solução $U(\mathbf{X}, t)$, bem como as equações (2.96) e (2.97).

A adoção de funções de forma lineares no espaço e constantes no tempo conduz a seguinte forma fraca:

$$\begin{aligned}
& \int_{\hat{\Omega}^n} \mathbf{W}^T \mathbf{B} (\hat{\mathbf{U}}_{n+1} - \hat{\mathbf{U}}_n) d\Omega - \int_{\hat{\Omega}^n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{W}^T}{\partial t} \hat{\mathbf{U}} dt d\Omega \\
& - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\hat{\Omega}^n} \frac{\partial \mathbf{W}^T}{\partial x_k} (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k) d\Omega dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\hat{\Gamma}^n} [\mathbf{W}^T (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k) n_k] d\Gamma dt \equiv 0
\end{aligned} \tag{2.99}$$

As Equações (2.19) e (2.24) definem as funções de forma e de ponderação, respectivamente.

As Sub-seções 2.2.3 a 2.2.6 ilustraram a instabilidade do Método de Galerkin quando aplicado a operadores que não são auto-adjuntos. Acompanhando o argumento de COSTA (2004) e tendo-se em conta as equações (2.19) e (2.24) deste trabalho, escreve-se a função de ponderação Petrov-Galerkin como segue:

$$\mathbf{W}_{m \times 1} \equiv \sum_{\eta} (N_i \mathbf{I}_{m \times m} + (\mathbf{P}_i)_{m \times m}) (\mathbf{w}_i)_{m \times 1} \tag{2.100}$$

em que:

m é o número de componentes da solução $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$;

\mathbf{w}_i são constantes nodais.

A forma explícita da função de perturbação \mathbf{P}_i será examinada em momento oportuno.

Há que se observar ainda que a função de interpolação N_i empregada neste trabalho é tal que satisfaz a Equação (2.20) e que a função de ponderação é constante no tempo.

A substituição da Equação (2.100) na Equação (2.99), considerando-se a observação feita no parágrafo imediatamente anterior a este, permite escrever a forma fraca (2.99) como segue:

$$\begin{aligned}
& \int_{\hat{\Omega}^n} N_i \mathbf{B} (\hat{\mathbf{U}}_{n+1} - \hat{\mathbf{U}}_n) d\Omega - (\Delta t) \int_{\hat{\Omega}^n} \frac{\partial N_i}{\partial x_k} (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k) d\Omega \\
& + (\Delta t) \int_{\hat{\Gamma}^n} N_i (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k) n_k d\Gamma + (\Delta t) \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\hat{\Omega}_e^n} \mathbf{P}_i \frac{\partial (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k)}{\partial x_k} d\Omega \equiv \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{2.101}$$

em que N_e é o número de elementos no sub-domínio espacial Ω_n . Na Equação (2.101), há que se destacar que $\Delta t = t_{n+1} - t_n$.

2.5 Uma função de perturbação no caso quase incompressível

A discretização da forma variacional expressa pela equação (2.101) no contexto do Método dos Elementos Finitos passa pela explicitação da matriz de perturbação \mathbf{P}_i .

HUGHES e MALLET (1986) chegaram a seguinte forma para a função \mathbf{P}_i :

$$\mathbf{P}_i \equiv \mathbf{A}_k \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \boldsymbol{\tau} \quad (2.102)$$

em que:

$\mathbf{A}_k = k$ -ésima matriz Jacobiana advectiva ;

$N_i =$ função de forma escalar ;

$x_k = k$ -ésima coordenada espacial ;

$\boldsymbol{\tau} =$ matriz SUPG de tempos intrínsecos .

Na Equação (2.102) todos os termos, à exceção da matriz $\boldsymbol{\tau}$, foram já definidos. Resta pois definir a matriz $\boldsymbol{\tau}$.

Há várias formas para a matriz $\boldsymbol{\tau}$ que podem ser encontradas na literatura relativa ao Método dos Elementos Finitos, dentre as quais as formas propostas por HUGHES e MALLET (1986) e por FRANCA e FREY (1992).

No presente trabalho, utiliza-se a seguinte forma para a matriz $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \frac{h_e}{2} \text{diag} \{ \lambda_1^{-0,5}, \lambda_2^{-0,5}, \lambda_3^{-0,5} \} \quad (2.103)$$

em que h_e é uma dimensão característica do elemento finito (raiz quadrada da área do elemento

triangular plano neste trabalho) e λ_i é o i -ésimo auto-valor da matriz A_k^2 . A matriz A_k^2 para o caso de duas dimensões espaciais é como segue:

$$A_k^2 \equiv \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 1 \\ 0 & u_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} u_2 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv \begin{pmatrix} u_1^2+u_2^2+1 & 0 & u_1 \\ 0 & u_1^2+u_2^2+1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

Os três auto-valores associados à matriz A_k^2 são como segue:

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = (|\mathbf{u}_e|^2 + 1) \quad , \quad \lambda_3 = (|\mathbf{u}_e|^2 + 2) \quad (2.105)$$

em que $|\mathbf{u}_e|$ é a norma euclideana do campo de velocidades no elemento finito.

A substituição da Equação (2.105) na Equação (2.103) fornece a forma final para a matriz τ .

2.6 Formulação numérica em computador digital

A equação que emerge da discretização espaço-temporal da equação (2.101) pode ser tratada por um método do tipo Preditor-multicorretor.

A aplicação do método Preditor-multicorretor para a solução do problema (2.101) passará a ser tratada agora.

A equação (2.101) pode ser re-escrita como segue:

$$\begin{aligned} \Pi(\hat{\mathbf{u}}^{(n+1)}, \hat{\mathbf{u}}^n) &\equiv \int_{\hat{\Omega}^n} N_i \mathbf{B} (\hat{\mathbf{U}}_{n+1} - \hat{\mathbf{U}}_n) d\Omega - (\Delta t) \int_{\hat{\Omega}^n} \frac{\partial N_i}{\partial x_k} (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k) d\Omega \\ &+ (\Delta t) \int_{\hat{\Gamma}^n} N_i (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k) n_k d\Gamma + (\Delta t) \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\hat{\Omega}_e^n} \mathbf{P}_i \frac{\partial (\hat{\mathbf{F}}_k - \hat{\mathbf{D}}_k)}{\partial x_k} d\Omega \equiv \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.106)$$

em que:

$\Pi(\hat{\mathbf{u}}^{(n+1)}, \hat{\mathbf{u}}^n)$ é um funcional não linear

$$\hat{\mathbf{U}}_{n+1} = \sum_i N_i \hat{\mathbf{u}}_i^{n+1}$$

$$\hat{\mathbf{U}}_n = \sum_i N_i \hat{\mathbf{u}}_i^n \quad (2.107)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_k = \hat{\mathbf{F}}_k(\hat{\mathbf{U}}_{n+1})$$

$$\hat{\mathbf{D}}_k = \hat{\mathbf{D}}_k(\hat{\mathbf{U}}_{n+1})$$

Na equação (2.107), a função de forma N_i satisfaz as equações (2.19) e (2.20) e o vetor $\hat{\mathbf{u}}_i$ é o valor nodal da solução $\hat{\mathbf{U}}$ no nó (i) . Observa-se a partir das equações (2.107) que a solução $\hat{\mathbf{U}}$ é aproximada exatamente como nas equações (2.16) deste trabalho.

A condição inicial fornecerá a solução $\hat{\mathbf{U}}$ no instante $t = 0$. No Método Predictor-multicorretor, admite-se como conhecida a solução $\hat{\mathbf{u}}^n$. Faz-se então uma predição para $\hat{\mathbf{u}}^{n+1}$, denotando-a por $\hat{\mathbf{u}}_1^{n+1}$, em que o sub-índice 1 denota que se trata do primeiro valor predito ou arbitrado para $\hat{\mathbf{u}}^{n+1}$.

A expansão em série de Taylor do funcional não linear Π da equação (2.106), truncada no termo de primeira ordem, pode ser escrita como segue:

$$\Pi(\hat{\mathbf{u}}_2^{(n+1)}, \hat{\mathbf{u}}^n) \approx \Pi(\hat{\mathbf{u}}_1^{(n+1)}, \hat{\mathbf{u}}^n) + \frac{\partial \Pi(\hat{\mathbf{u}}_1^{(n+1)}, \hat{\mathbf{u}}^n)}{\partial \hat{\mathbf{u}}_1^{n+1}} (\hat{\mathbf{u}}_2^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_1^{n+1}) \quad (2.108)$$

O pesquisador está especialmente interessado no valor de $\hat{\mathbf{u}}_2^{n+1}$ que torna o membro direito da equação (2.108) o mais próximo do vetor nulo possível. Com isto, $\hat{\mathbf{u}}_2^{n+1}$ da equação (2.108) será tal que:

$$\Pi(\hat{\mathbf{u}}_2^{(n+1)}, \hat{\mathbf{u}}^n) \approx \mathbf{0} \quad (2.109)$$

A consideração da equação (2.109) na (2.108) permite que se escreva o que segue:

$$\frac{\partial \Pi(\hat{\mathbf{u}}_1^{(n+1)}, \hat{\mathbf{u}}^n)}{\partial \hat{\mathbf{u}}_1^{n+1}} (\hat{\mathbf{u}}_2^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_1^{n+1}) \approx -\Pi(\hat{\mathbf{u}}_1^{n+1}, \hat{\mathbf{u}}^n) \quad (2.110)$$

Vê-se que, na i -ésima solução arbitrada $\hat{\mathbf{u}}_i^{n+1}$, a partir da equação (2.110) pode-se escrever o que segue:

$$\frac{\partial \Pi(\hat{\mathbf{u}}_i^{(n+1)}, \hat{\mathbf{u}}^n)}{\partial \hat{\mathbf{u}}_i^{n+1}} (\hat{\mathbf{u}}_{i+1}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_i^{n+1}) \approx -\Pi(\hat{\mathbf{u}}_i^{n+1}, \hat{\mathbf{u}}^n) \quad (2.111)$$

Na equação (2.111), tem-se:

$\hat{\mathbf{u}}_i^{n+1}$ é a i -ésima solução predita ou arbitrada;

$\hat{\mathbf{u}}_{i+1}^{n+1}$ é a solução corrigida.

A equação (2.111) pode ser re-escrita como segue:

$$\mathbf{A}_i \Delta \hat{\mathbf{u}} \approx -\mathbf{R}_i \quad (2.112)$$

em que:

$$\mathbf{A}_i = \frac{\partial \Pi(\hat{\mathbf{u}}_i^{(n+1)}, \hat{\mathbf{u}}^n)}{\partial \hat{\mathbf{u}}_i^{n+1}} \quad (2.113)$$

$$\Delta(\hat{\mathbf{u}}) = \hat{\mathbf{u}}_{i+1}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_i^{n+1}$$

$$\mathbf{R}_i = \Pi(\hat{\mathbf{u}}_i^{n+1}, \hat{\mathbf{u}}^n)$$

Há que se destacar os seguintes fatos:

- O vetor \mathbf{R}_i e a matriz \mathbf{A}_i são explicitados já quando da primeira predição da solução, denotada por \mathbf{u}_1^{n+1} ;
- A correção da solução, denotada por \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} , é conseguida mediante a solução do

sistema de equações lineares (2.112);

- O pesquisador pode pré-fixar o número de correções para a solução predita \mathbf{u}_i^{n+1} .

Neste trabalho foi empregada apenas uma correção da solução predita \mathbf{u}_i^{n+1} nos experimentos computacionais que foram executados.

Há que se ressaltar o fato de que, na equação (2.112), a matriz \mathbf{A}_i e o vetor \mathbf{R}_i podem ser explicitados através de uma operação de montagem de matrizes e vetores ditos elementares, por estarem associados a cada um dos elementos finitos do problema em estudo. Nestes termos, é possível escrever o que segue:

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{M}_{e=1}^{N_e} (\mathbf{A}_i)_e \quad (2.114)$$

em que:

\mathbf{A}_i = matriz global do sistema de equações lineares (2.112);

e = sub-índice que denota “elementar” ou “relativo ao elemento finito”;

\mathbf{M} = operador de montagem;

N_e = número de elementos finitos;

i = sub-índice que denota a i -ésima solução predita ou arbitrada (vide equação 2.111).

Analogamente, tem-se:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{M}_{e=1}^{N_e} (\mathbf{R}_i)_e \quad (2.115)$$

em que:

\mathbf{R}_i = vetor global de resíduos do sistema de equações lineares (2.112);

e = sub-índice que denota “elementar” ou “relativo ao elemento finito”;

\mathbf{M} = operador de montagem;

N_e = número de elementos finitos;

i = sub-índice que denota a i -ésima solução predita ou arbitrada (vide equação 2.111).

A solução do problema representado pela formulação variacional (2.106) no contexto do Método dos Elementos Finitos é completada com a explicitação das matrizes elementares $(\mathbf{A}_i)_e$ e dos vetores elementares $(\mathbf{R}_i)_e$ associados às equações (2.112), (2.114) e (2.115).

A consideração das equações (2.106), (2.112) e (2.113) permite que se escreva o que segue:

$$(\mathbf{A}_i)_e = \mathbf{B}(\mathbf{a}_M)_e + (\Delta t)[\mathbf{a}_e + (\mathbf{a}_{PG})_e + (\mathbf{a}_h)_e] \quad (2.116)$$

Também:

$$(\mathbf{R}_i)_e = \mathbf{B}(\mathbf{a}_M)_e[\hat{\mathbf{u}}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}^n] + (\Delta t)[-\mathbf{r}_e + (\mathbf{r}_\Gamma)_e + (\mathbf{r}_{PG})_e + (\mathbf{r}_h)_e] \quad (2.117)$$

A matriz \mathbf{B} nas equações (2.116) e (2.117) é como na equação (2.82).

Na equação (2.116) tem-se que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_M)_e &= \left[\int_{\hat{\Omega}_e} N_i N_j d\Omega \right] \mathbf{I} \text{ é a matriz de massa elementar} \\ (\mathbf{a})_e &= \left(A_k \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \right) \int_{\hat{\Omega}_e} N_i d\Omega \text{ é a matriz de advecção elementar} \\ (\mathbf{a}_{PG})_e &= \left(A_k \boldsymbol{\tau} \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \right) \left(A_h \frac{\partial N_j}{\partial x_h} \right) \int_{\hat{\Omega}_e} d\Omega \end{aligned} \quad (2.118)$$

é a matriz de Petrov–Galerkin elementar

$$(\mathbf{a}_h)_e = \frac{\partial N_i}{\partial x_k} (\mathbf{K} \frac{\partial N_j}{\partial x_h}) \int_{\hat{\Omega}_e} d\Omega \text{ é a matriz de difusão elementar}$$

Nas equações (2.118) tem-se que:

\mathbf{I} é a matriz identidade;

N é a função de forma escalar que satisfaz (2.19) e (2.20);

A_k é como na equação (2.87);

$\boldsymbol{\tau}$ é como na equação (2.103);

\mathbf{K} é como na equação (2.74).

Na equação (2.117) tem-se que:

$$(\mathbf{r})_e = (\mathbf{F}_k \frac{\partial N_i}{\partial x_k}) \int_{\hat{\Omega}_e^n} d\Omega \text{ é o termo advectivo elementar}$$

$$(\mathbf{r}_\Gamma)_e = \int_{\hat{\Gamma}_e^n} N_i (\mathbf{F}_k - \mathbf{D}_k) n_k d\Gamma \text{ é o fluxo na fronteira}$$

elementar

$$(\mathbf{r}_{PG})_e = [(A_k \boldsymbol{\tau} \frac{\partial N_i}{\partial x_k}) (A_h \boldsymbol{\tau} \frac{\partial N_i}{\partial x_h}) \int_{\hat{\Omega}_e^n} d\Omega] \hat{\mathbf{u}}_j$$

é o termo de Petrov–Galerkin elementar

$$(\mathbf{r}_h)_e = (\mathbf{D}_k \frac{\partial N_i}{\partial x_k}) \int_{\hat{\Omega}_e^n} d\Omega \text{ é o termo difusivo elementar}$$

(2.119)

Na equação (2.117), $(\mathbf{a}_M)_e$ é como na equação (2.118).

Nas equações (2.119) tem-se:

N é a função de forma escalar que satisfaz (2.19) e (2.20);

\mathbf{F}_k é como na equação (2.87);

\mathbf{D}_k é como na equação (2.85);

n_k é uma componente do vetor normal unitário exterior ao sub-domínio espacial $\hat{\Omega}^n$;

$\boldsymbol{\tau}$ é como na equação (2.103);

$\hat{\mathbf{u}}_j$ é a solução U no nó (j) .

2.6.1 O código computacional

O código computacional desenvolvido por COSTA² e utilizado neste trabalho, emprega um método iterativo do tipo GMRES (Generalised Minimum Residue) para resolução do sistema de equações lineares representado pela equação (2.112). O código fonte do GMRES foi obtido do site do CERFACS (Centre Europeen de Recherche et de Formation Avancée em Calcul Scientifique), que por ocasião da escrita deste trabalho era <http://www.cerfacs.fr>. Trata-se de um código de distribuição livre. O preconditionador empregado foi o de tipo bloco-diagonal. O código foi escrito em FORTRAN 95.

No que respeita aos aspectos de operacionalização do código, cabem algumas observações. O aplicativo GMSH, um gerador de malhas para Elementos Finitos de distribuição livre, gerou arquivos com extensão .geo (contendo a geometria do caso estudado) e .msh (contendo a malha relativa à geometria específica). Este aplicativo estava disponível no URL <http://geuz.org/gmsh/>, por ocasião da escrita deste compêndio. A partir dos dados da malha e dos dados físicos, as etapas para resolução do problema foram as usuais, com um programa pré-processador e o resolvedor. Para o pós-processamento dos dados, o próprio GMSH foi utilizado.

² COSTA, G.K.. (CEFET-PE. Centro Federal de Educação Tecnológica de PE). Comunicação pessoal, 2006.

3 METODOLOGIA

A metodologia empregada neste estudo teórico de simulação de fenômeno físico em computador digital compreendeu a consecução das etapas assim enumeradas:

1. Estudo e revisão da literatura atinente à aplicação do Método dos Elementos Finitos para aproximação das soluções das equações de Navier-Stokes para escoamentos fluidos quase incompressíveis;

2. Validação do código computacional escrito por COSTA³ para solução aproximada das equações de Navier-Stokes quase incompressíveis transitórias via Método dos Elementos Finitos. Este código foi adaptado por COSTA de um código computacional pré-existente de sua própria autoria, só que destinado aos casos compressível e incompressível (COSTA, 2004). Ao aluno de Mestrado, autor deste trabalho, coube a escrita da formulação teórica do caso quase incompressível de modo a subsidiar a adaptação do código supracitado. A validação consistiu em comparação entre as soluções geradas pelo código acima citado e os dados disponíveis na literatura para o escoamento na cavidade (GHIA et al., 1982) e na comparação entre as soluções geradas pelo código e a solução analítica para o caso do escoamento entre placas planas paralelas;

3. Emprego do código computacional mencionado no item (2) acima para estudo do escoamento interno de água líquida para dentro (*insurge*) da câmara do pressurizador do reator nuclear IRIS.

Há que ser ressaltado aqui o papel importante desempenhado pela Validação do código computacional usado para simular os escoamentos no pressurizador do IRIS. De fato, instalações físicas, mesmo que experimentais, para o reator nuclear IRIS ainda estão em fase de execução. Uma validação sólida e consistente do código computacional empregado para simulações do pressurizador em epígrafe é portanto condição indispensável para a existência de confiabilidade nas

³ COSTA, G.K.. (CEFET-PE. Centro Federal de Educação Tecnológica de PE). Comunicação pessoal, 2006.

simulações feitas.

3.1 Hipóteses adotadas

A Figura (3.1) (BOTELHO et al., 2005) ilustra a câmara do pressurizador do reator nuclear IRIS, sede dos eventos objeto de estudo deste trabalho.

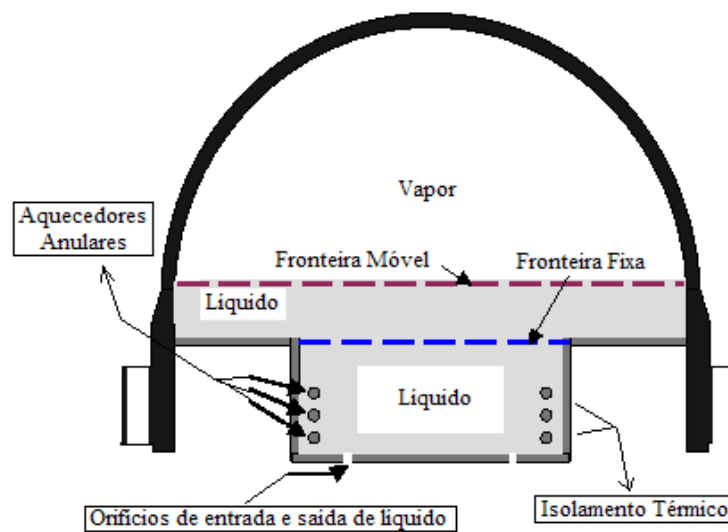


Figura 3.1: Corte transversal da câmara do pressurizador do reator IRIS.

O volume total da câmara do pressurizador IRIS está assim distribuído: setenta e um metros cúbicos de volume total, dos quais quarenta e nove metros cúbicos são de vapor, de acordo com CARELLI et al., (2004).

A secção transversal da câmara do pressurizador do reator IRIS ilustrada pela figura (3.1) acima exhibe dois dos oito orifícios previstos para a entrada e saída de líquido neste componente. Estes orifícios de *insurge* e *outsurge* estão contidos num plano perpendicular ao eixo vertical do reator e dispostos simetricamente sobre este plano.

Considerar-se-á neste trabalho que o jato líquido em um orifício não interfere com os demais jatos dos outros orifícios e portanto, é suficiente para a análise bidimensional do fenômeno

considerar apenas um par de orifícios contido num plano vertical.

A observação da Figura (3.1) permite dizer-se que, a rigor, os escoamentos que têm lugar na câmara do pressurizador do reator nuclear IRIS são de natureza bifásica e com fronteira móvel. O presente trabalho lidou com uma fronteira essencialmente fixa e um escoamento monofásico do circuito primário do reator para a câmara do pressurizador e vice-versa. A intenção deste trabalho foi a efetivação de simulações baseadas nestas aproximações iniciais com vistas a subsidiar análises mais realísticas no futuro, seja por este autor ou por outrem.

3.2 Parâmetro de Courant-Friedrich-Levy

Há que se explicitar aqui a forma do parâmetro CFL (número de Courant-Friedrich-Levy) empregada em todos os experimentos computacionais feitos neste trabalho:

$$CFL = \frac{\Delta t_{local}(c + |\mathbf{u}_e|)}{h_e} \quad (3.1)$$

em que:

CFL = número de Courant-Friedrich-Levy;

Δt = passo de tempo local;

c = velocidade do som no meio fluido em estudo;

$|\mathbf{u}_e|$ = norma euclideana do campo de velocidades no elemento finito;

h_e = raiz quadrada da área do elemento finito triangular plano (é portanto uma dimensão característica do elemento finito).

A Equação (3.1) permite então a obtenção do passo de tempo local a partir do arbitramento do parâmetro CFL.

O passo de tempo global utilizado neste trabalho, por seu turno, tem a seguinte forma:

$$(\Delta t)_{global} = \min. (\Delta t)_{local}$$

ou :

$$(\Delta t)_{global} = \min. \left(\frac{h_e CFL}{c + |\mathbf{u}_e|} \right) \quad (3.2)$$

O passo de tempo global foi portanto tomado como o menor passo de tempo local calculado em toda a malha para um número CFL fixo.

Vê-se a partir das Equações (3.1) e (3.2) que o número CFL possui aqui apenas a função de permitir a obtenção dos passos de tempo local e depois global. A influência do número CFL tal como definido na Equação (3.1) não é determinante no que concerne à estabilidade do método matemático aqui empregado, que é totalmente implícito.

4 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO

4.1 O escoamento entre placas paralelas

4.1.1 Descrição e condições de contorno

O escoamento entre placas paralelas pode ser descrito como segue:

- Considere-se duas placas planas paralelas distanciadas de h unidades de comprimento, cujas dimensões longitudinais sejam L_1 unidades de comprimento e cujas dimensões normais à dimensão longitudinal sejam b unidades de comprimento.

- Considere-se agora o escoamento de fluido newtoniano incompressível entre as placas planas referenciadas acima. Se a condição representada pela expressão (4.1) a seguir for satisfeita, então o escoamento considerado pode ser tratado como bidimensional:

$$h \ll b \quad (4.1)$$

com (h) e (b) como definidos no último parágrafo.

- Considere-se ainda que o estudo do escoamento limita-se a um trecho de dimensão longitudinal das placas planas denotado por L . Já se disse que a dimensão longitudinal total das placas planas é L_1 unidades de comprimento. Considere-se também que o trecho de dimensão longitudinal L está centrado com respeito à extensão total das placas. Se a condição da Equação (4.2) for satisfeita, então o escoamento considerado pode ser tratado como completamente desenvolvido:

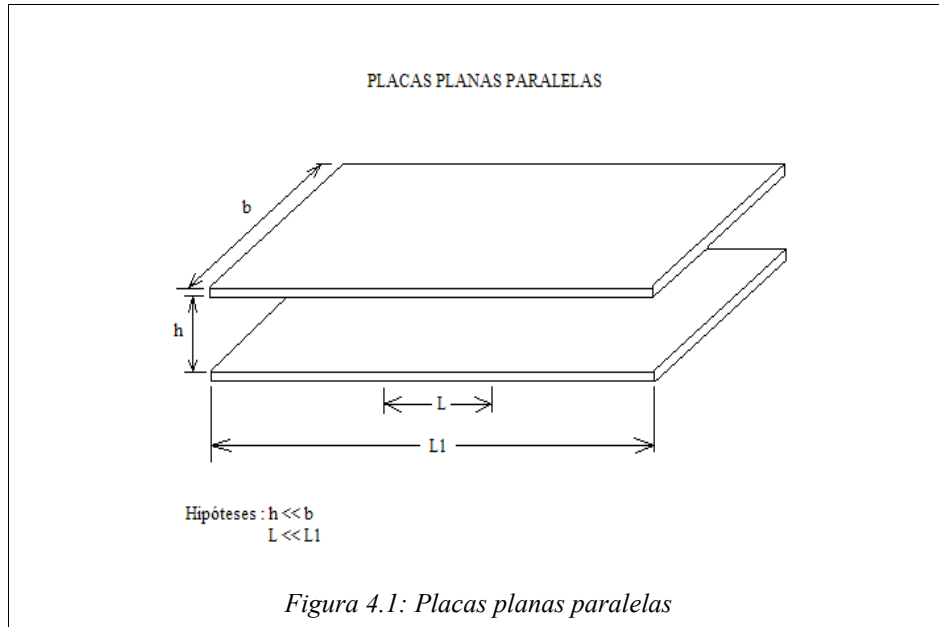
$$L \ll L_1 \quad (4.2)$$

Nas condições descritas pelos tópicos acima, estabelece-se o seguinte caso de escoamento:

Escoamento bidimensional completamente desenvolvido de fluido newtoniano

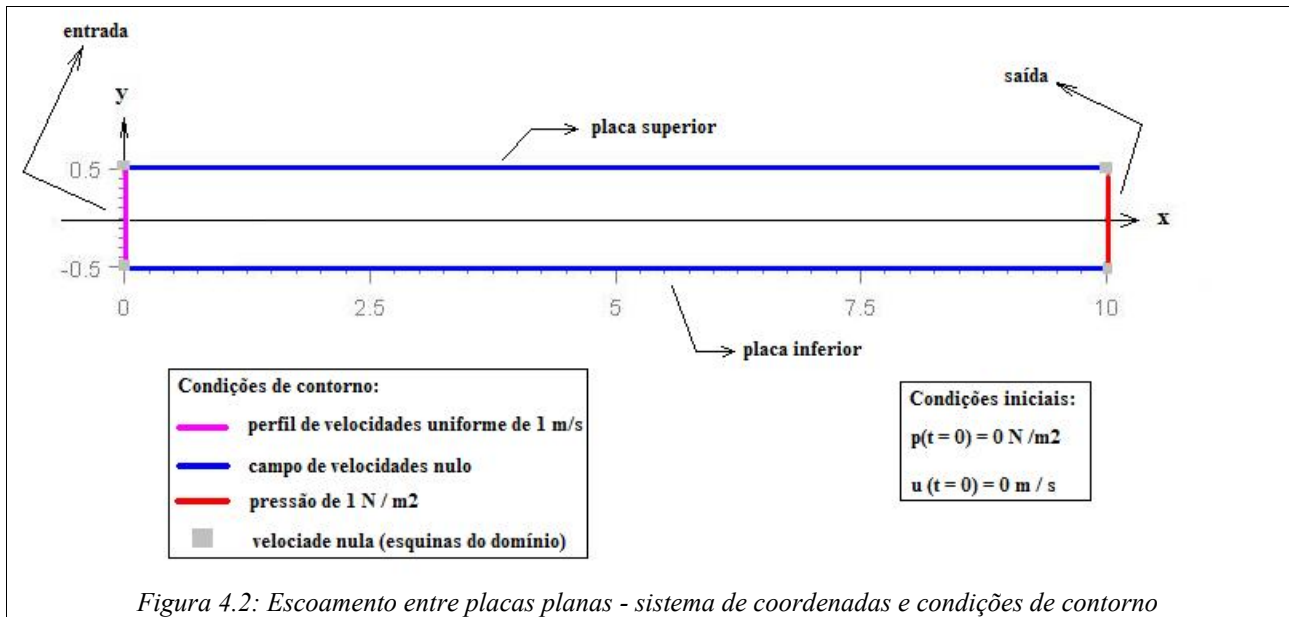
incompressível entre placas planas paralelas distanciadas de h unidades de comprimento.

A figura a seguir ilustra as placas planas entre as quais ocorre o escoamento citado neste último parágrafo:



Neste trabalho considerou-se um perfil de velocidades de magnitude u , uniforme na direção da distância entre as placas, a adentrar o volume de controle representado na Figura (4.1). Com a evolução temporal do escoamento transitório para o de regime permanente, observou-se a transição gradual do perfil uniforme para o parabólico. As comparações entre os dados obtidos da simulação computacional e aqueles oriundos da solução analítica concentraram-se então na região do escoamento completamente desenvolvido, i.e., na região a partir da qual o perfil de velocidades passou completamente de uniforme a parabólico, até a saída do volume de controle.

A definição das condições de contorno e iniciais foi efetivada com referência ao ilustrado pela Figura (4.2):



O número de Reynolds para a configuração de escoamento da Figura (4.2) pode ser escrito como segue:

$$R_e = \frac{u \times h \times \rho}{\mu} \quad (4.3)$$

com:

$$[u] = \text{m/s} \quad [h] = \text{m} \quad [\rho] = \text{kg/m}^3 \quad [\mu] = \text{N s/m}^2$$

Os parâmetros mencionados assumiram então valores que representavam um fluido hipotético, posto que o objetivo era precisamente a obtenção de um valor específico para o número de Reynolds.

A malha considerada está reproduzida na Figura (4.3).



Os resultados obtidos com a malha da Figura (4.3) mostraram-se providos de sensível precisão, como será visto adiante.

4.1.2 Uma caracterização para o regime permanente

A iteração computacional na qual foi atingido o regime permanente do escoamento pode ser definida mediante vários critérios. Por exemplo, pode-se definir uma tolerância para a variação do resíduo do método preditor-multicorretor em duas iterações sucessivas. Quando a variação da norma do resíduo ficasse inferior a referida tolerância, estaria alcançado o regime permanente. Outras formas seriam prefixar o número máximo de iterações após o qual o processamento seria interrompido ou estabelecer o tempo máximo de computação. No caso do presente trabalho os três critérios mencionados mostraram-se insuficientes para uma caracterização satisfatória do regime permanente. De fato, o critério da tolerância da norma do resíduo não foi adequado devido à natureza oscilatória do resíduo, tanto nas regiões de pronunciado gradiente do resíduo com o número de iterações quanto nas regiões nas quais a linha de tendência apresentava-se próxima à horizontal. A magnitude das oscilações variou sensivelmente em torno de sua média de experimento para experimento, como será visto. Os critérios de número máximo de iterações e de tempo máximo de computação mostraram-se insuficientes devido às diferenças pronunciadas nestes parâmetros em cada experimento.

O critério usado aqui foi então eminentemente gráfico. Para cada experimento, fez-se o gráfico resíduo *versus* iterações em escala semi-logarítmica, com as ordenadas sendo o logaritmo da norma do resíduo. Buscou-se então a região na qual a linha média deste gráfico ficasse muito próxima à horizontal. Os experimentos cujas quantidades de iterações foram suficientes para alcançar esta região foram caracterizados como havendo alcançado o regime estacionário e vice-versa.

4.1.3 O escoamento entre placas paralelas: experimento computacional

Neste experimento, as propriedades físicas, dimensão geométrica h (distância entre as placas paralelas) e magnitude no perfil uniforme de velocidade à entrada do volume de controle considerados para o escoamento fluido foram os seguintes:

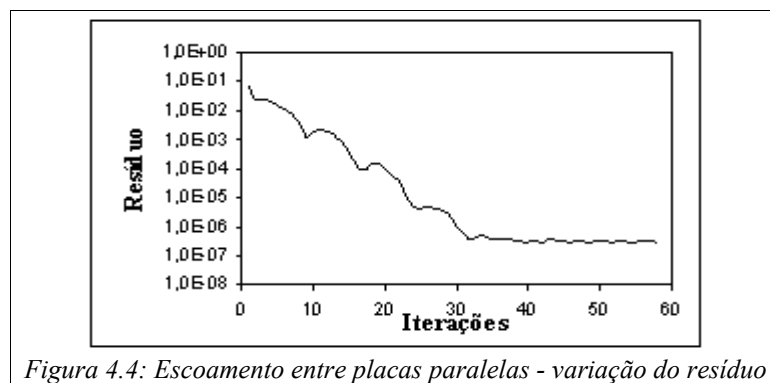
$$\rho = 1 \text{ kg/m}^3 \quad , \quad \mu = 1 \text{ Ns/m}^2 \quad (4.4)$$

$$h = 1 \text{ m} \quad , \quad u = 1 \text{ m/s}$$

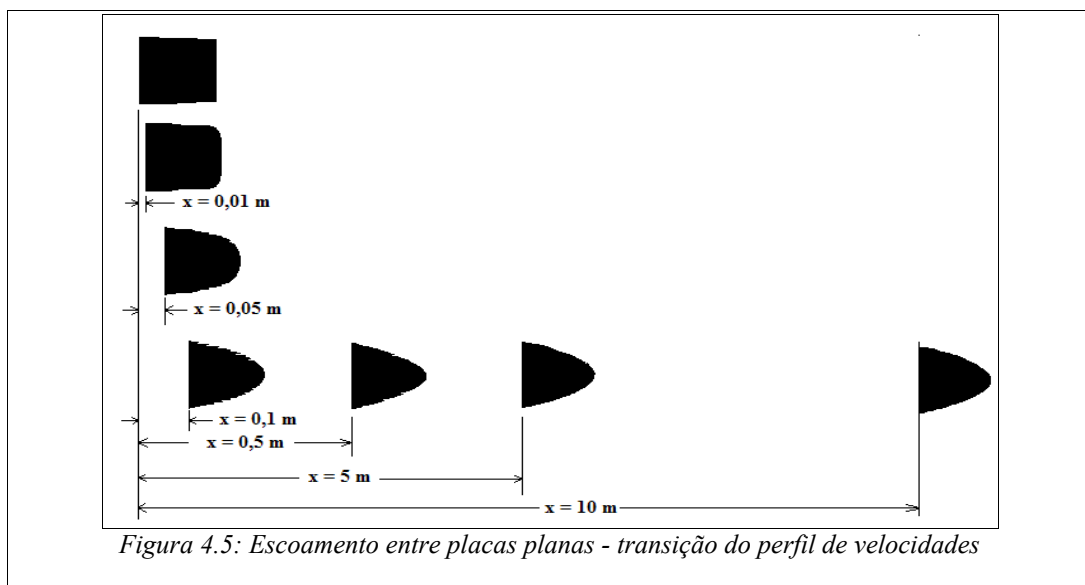
A substituição dos valores dados em (4.4) na Equação (3.2) resulta em $R_e = 1$.

O valor do número CFL como definido na Equação (4.1) foi de 1000 neste experimento. Neste trabalho não foi efetivado um estudo com vistas a definir como o número CFL afeta o atingimento do regime permanente. O valor utilizado foi arbitrariamente escolhido e envidou a caracterização do regime permanente, como mostrado adiante.

A variação do resíduo do método predictor-multicorretor está reproduzida na Figura (4.4).



A Figura (4.5) reproduz a transição do perfil uniforme de velocidades para o perfil parabólico:



O perfil de velocidades foi considerado como totalmente desenvolvido a partir da abscissa $x = 5\text{ m}$ (vide Figura 4.5).

A variação da pressão em função da abscissa x no trecho de escoamento plenamente desenvolvido pode ser vista na Figura (4.6).

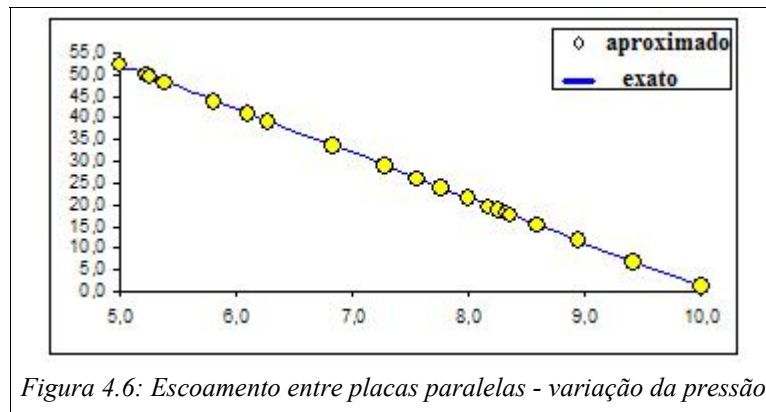


Figura 4.6: Escoamento entre placas paralelas - variação da pressão

A solução analítica para o escoamento entre placas paralelas em estudo pode ser escrita na seguinte forma (FOX e MACDONALD, 1995):

$$u(y) = \frac{a^2}{2\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \left[\left(\frac{y}{a} \right)^2 - 1 \right] \quad (4.5)$$

com:

$$a = \frac{h}{2} \text{ e } (h) \text{ é como na Figura (4.3).}$$

Substituindo-se os dados da geometria deste escoamento conforme a Figura (4.2), i.e.,

$$a = \frac{h}{2} = 0,5\text{ m}, \quad \mu = 1\text{ N s/m}^2 \quad \text{e} \quad y = 0\text{ m}, \quad \text{juntamente com o valor}$$

$u_{\text{máx}}(x = 5\text{ m}) = 1,28\text{ m/s}$ obtido da simulação, na Equação (4.5), obtém-se o valor para o gradiente de pressão:

$$\frac{dp}{dx} = - 10,25 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \quad (4.6)$$

Considerando-se a Equação (4.6) e as condições de contorno, obtém-se que o valor exato

de $p(x = 5 \text{ m}, y = 0 \text{ m}) \approx 52,26 \text{ N/m}^2$. O resultado obtido com o código foi de $52,14 \text{ N/m}^2$: uma diferença absoluta de $2,2 \times 10^{-3}$, i.e., 0,22 %.

A comparação entre os resultados numéricos e a solução analítica para o campo de velocidades é feita agora.

O erro cometido nas aproximações foi definido com respeito à solução analítica para o campo de velocidades da maneira como especifica a expressão a seguir:

$$erro_{\hat{u}} = \frac{\left| \|\hat{u}_{aproximação}\| - \|\hat{u}_{exato}\| \right|}{\|\hat{u}_{exato}\|} \quad (4.7)$$

em que:

| | denota módulo;

|| || denota norma euclideana;

$\hat{u}_{aproximação}$ é um vetor cujas componentes são as componentes dos valores nodais aproximados obtidos para o campo de velocidades;

\hat{u}_{exato} é um vetor cujas componentes são as componentes dos valores nodais exatos obtidos mediante o uso da solução analítica para o campo de velocidades.

No caso dos experimentos em análise, encontrou-se que o valor do erro, tal como definido pela expressão (4.7), foi de $5,14 \times 10^{-3}$ em termos absolutos, i.e., 0,51 %.

Observa-se deste modo que os resultados obtidos com a malha da Figura (4.3) tiveram precisão aceitável.

4.2 O escoamento na cavidade

4.2.1 Descrição e condições de contorno

O escoamento na cavidade pode ser descrito como segue:

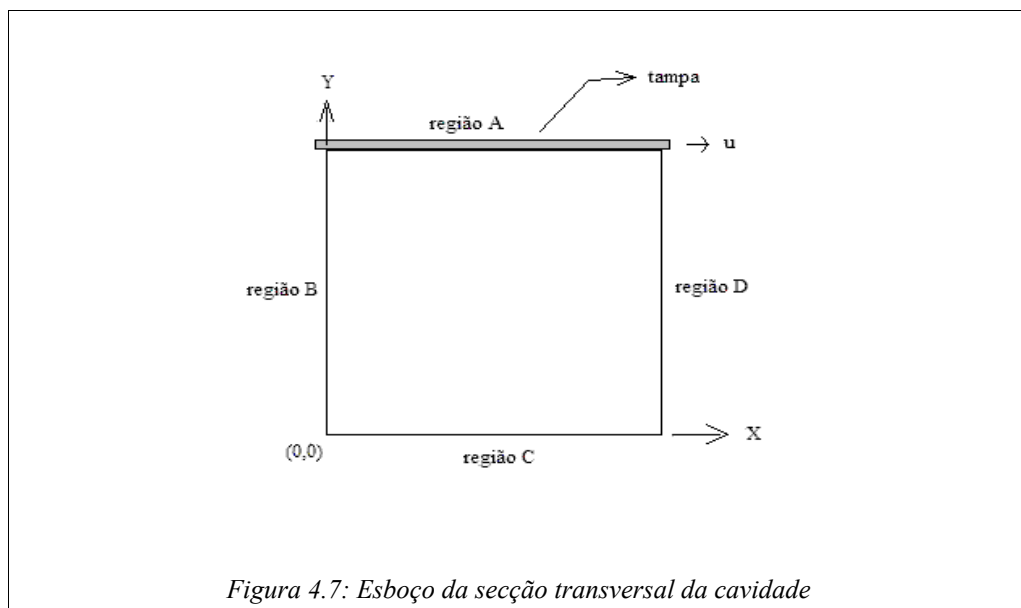
Considere-se uma cavidade de dimensão longitudinal (L unidades de comprimento)

cuja secção transversal é um quadrado de lado unitário (a) ($a = 1$ unidade de comprimento). Na porção superior desta cavidade há uma tampa que se movimenta relativamente ao corpo da cavidade com velocidade cuja magnitude é (u). No interior da cavidade, considere-se que há um fluido newtoniano quase incompressível. Se:

$$a \ll L \quad (4.8)$$

então o escoamento pode ser aproximado como bidimensional.

A descrição da cavidade tal como fornecida no parágrafo anterior pode ser melhor visualizada com o auxílio da figura a seguir:



Na Figura (4.7), (u) é o valor escalar da magnitude da velocidade da tampa da cavidade.

O vetor velocidade da tampa tem então a seguinte forma:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

As condições de contorno para o escoamento na cavidade são as seguintes:

Regiões *B*, *C* e *D*: $\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ m/s}$

$$\text{Região } A: \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m/s} \quad (4.10)$$

$$p(x = 0,5 \text{ m}; y = 0 \text{ m}) = 0 \text{ N/m}^2$$

As condições iniciais, por seu turno, são tomadas como segue:

$$p(t = 0 \text{ s}) = 0 \text{ N/m}^2 \quad (4.11)$$

$$\mathbf{u}(t = 0 \text{ s}) = \mathbf{0} \text{ m/s}$$

Os resultados disponíveis na literatura científica baseiam-se no adimensional de Reynolds relativo à cavidade. O número de Reynolds para a configuração de escoamento da Figura (4.7) pode ser escrito como segue:

$$R_e = \frac{u \times 1 \times \rho}{\mu}$$

i.e.,

$$R_e = \frac{u \rho}{\mu} \quad (4.12)$$

com:

$$[u] = \text{m/s} \quad [\rho] = \text{kg/m}^3 \quad [\mu] = \text{Ns/m}^2$$

Os parâmetros mencionados assumiram então valores que representavam um fluido hipotético, posto que o objetivo era precisamente reproduzir os experimentos cujos resultados estão disponíveis na literatura. Foram considerados os seguintes valores do número de Reynolds: $R_e = 100$, $R_e = 1000$ e $R_e = 5000$. Os valores dos parâmetros para cada número de Reynolds estão dispostos na Tabela (4.2.1).

Propriedade do fluido	Número de Reynolds		
	100	1000	5000
Viscosidade absoluta Ns / m ²	0,01	0,001	0,0002
Massa específica kg / m ³	1	1	1

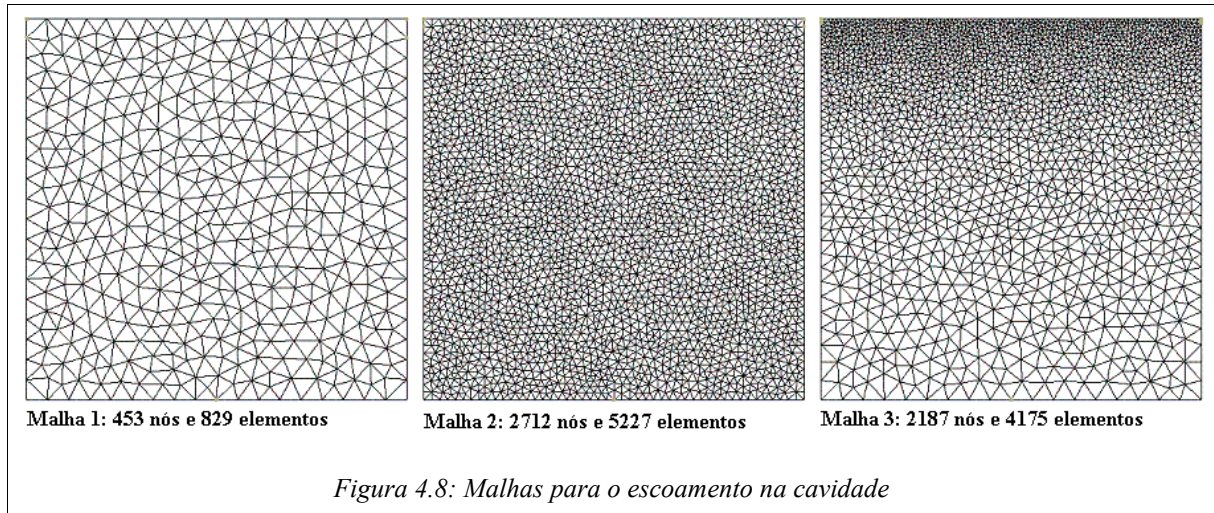
Tabela 4.2.1: escoamento na cavidade - propriedades físicas do fluido

A observação da Figura (4.7) leva à conclusão de que há uma singularidade nos dois nós das quinas superiores esquerda e direita. De fato, a tampa é dotada de velocidade (u) como representado na Figura (4.7): no limite em que houvesse apenas um nó em cada esquina superior, haveria de se definir se cada um deles pertenceria à tampa (velocidade u), ou à parede vertical adjacente (velocidade nula). Assim, foi prescrita uma distribuição linear de velocidades a qual, para funções de forma lineares no espaço, é equivalente a prescrever-se a velocidade em ambos os nós das quinas superiores como a seguir:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} m/s \quad (4.13)$$

Nos nós adjacentes aos das quinas superiores, por seu turno, localizados nas faces verticais da cavidade, foi prescrita a velocidade $\mathbf{u} = \mathbf{0} m/s$. Neste trabalho não foi feito um estudo da influência do grau de refinamento das malhas sobre o comportamento do campo de pressões nas esquinas superiores da cavidade. Há que se mencionar, entretanto, que quanto mais refinada for a malha naquela região, maior haverá de ser a pressão. No entanto, sabe-se que esta não se constitui na melhor aproximação para o problema (ver, por exemplo, a abordagem do “leaky lid driven cavity” em LYRA, 1994 e nas referências citadas naquele trabalho).

As malhas utilizadas para os experimentos foram como na Figura (4.8).



Bem se vê que a malha 1 é a mais grosseira. A malha 3 é mais refinada que a 2 só na região próxima à tampa, ao passo que na região inferior tem elementos com dimensão próxima à dos elementos da malha 1. A malha 2 é então a mais precisa dentre as três. Estes fatos serão importantes quando da observação dos resultados quantitativos obtidos neste trabalho frente aos dados de GHIA et al. (1982).

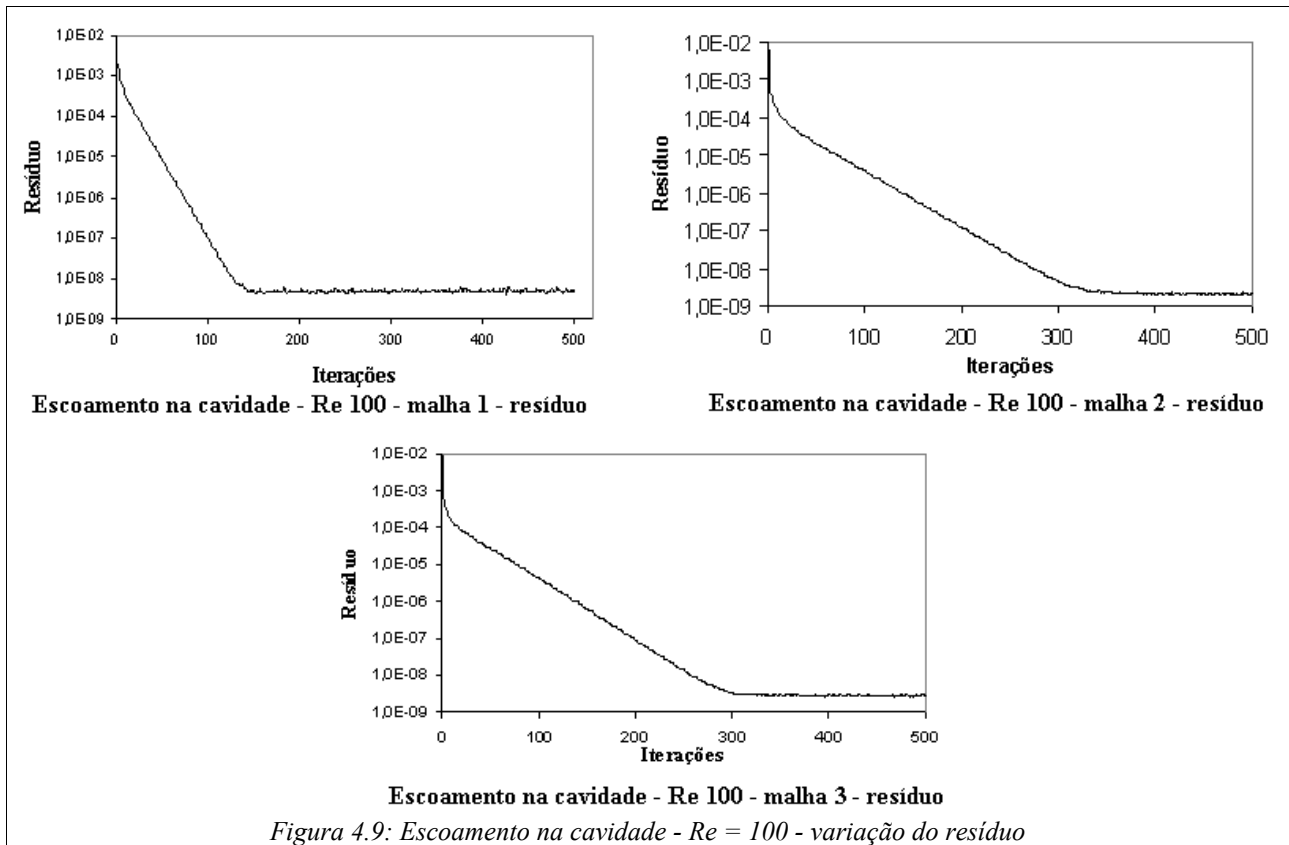
4.2.2 O escoamento na cavidade: experimentos computacionais

Para cada malha representada na Figura (4.8) foram executados experimentos correspondendo aos números de Reynolds considerados neste trabalho.

A próxima sub-seção apresenta os resultados específicos para cada um dos valores do número de Reynolds mencionados. O valor do número CFL em todos os experimentos na cavidade foi de 10000 e foi arbitrariamente escolhido. Não foi feito neste compêndio um estudo com a intenção de determinar a influência do CFL sobre os experimentos computacionais.

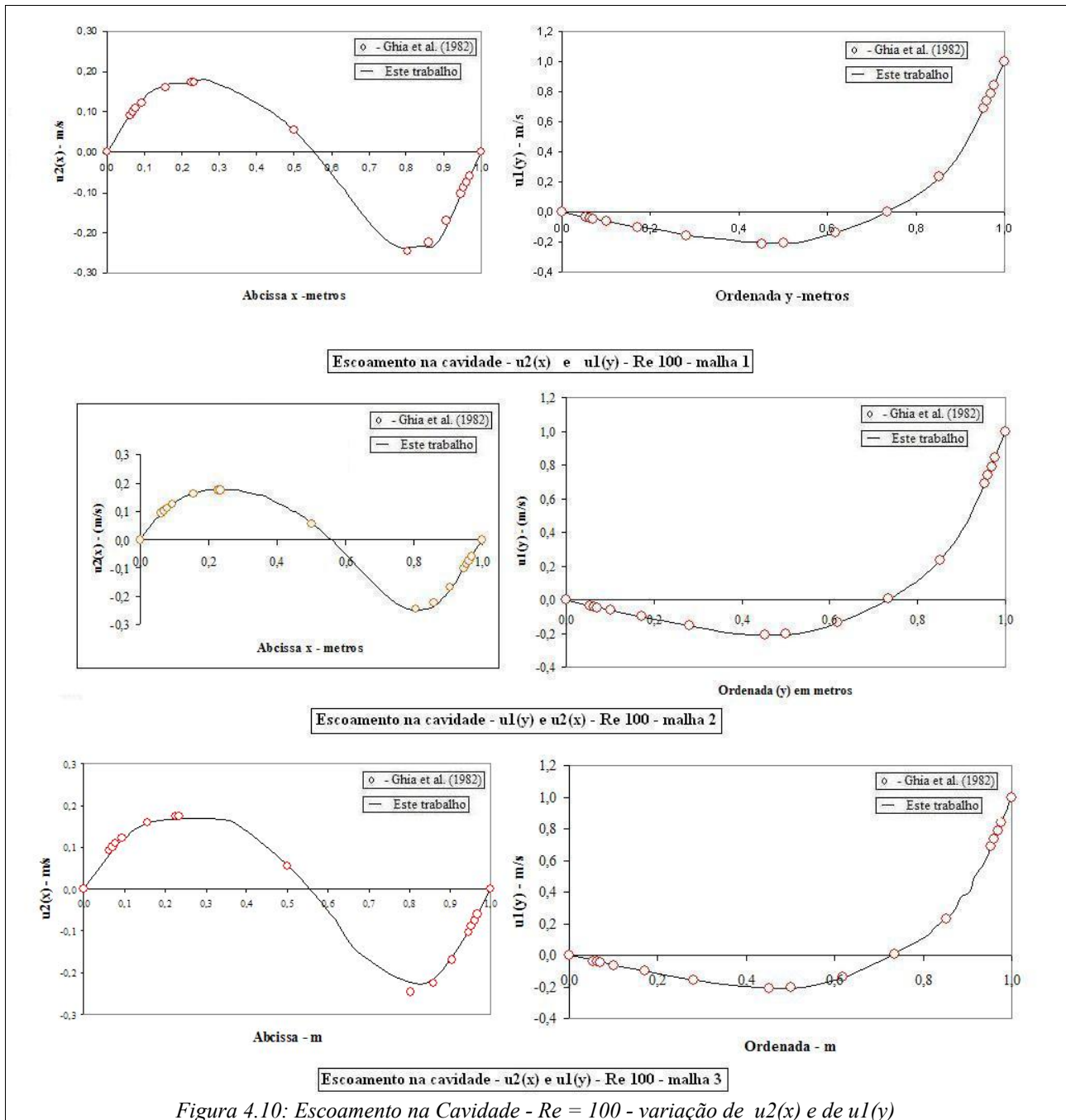
4.2.2.1. O escoamento na cavidade com $Re = 100$

A variação da norma euclidiana do vetor de resíduos com o número de iterações neste experimento, para cada uma das malhas, pode ser visualizada na Figura (4.9).

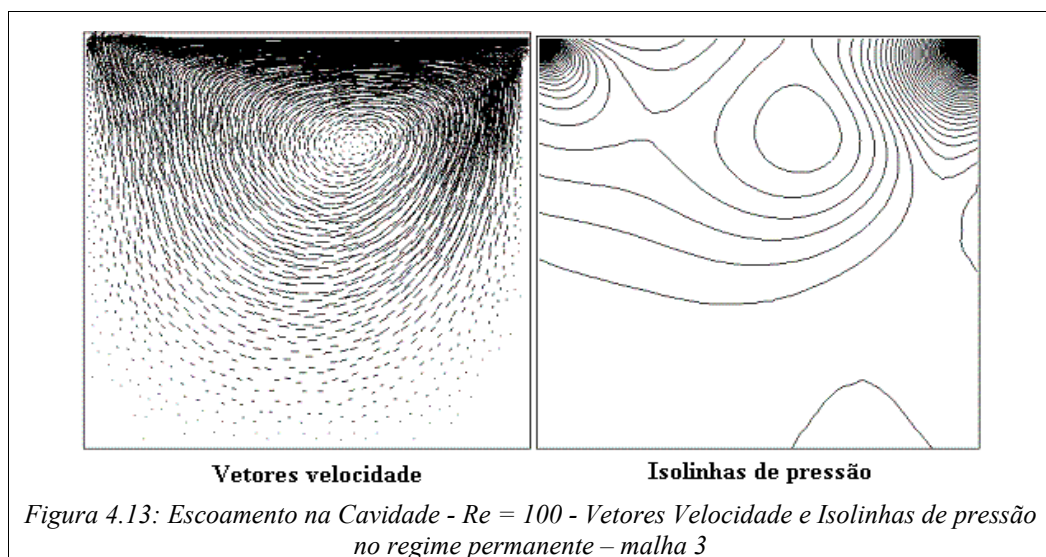
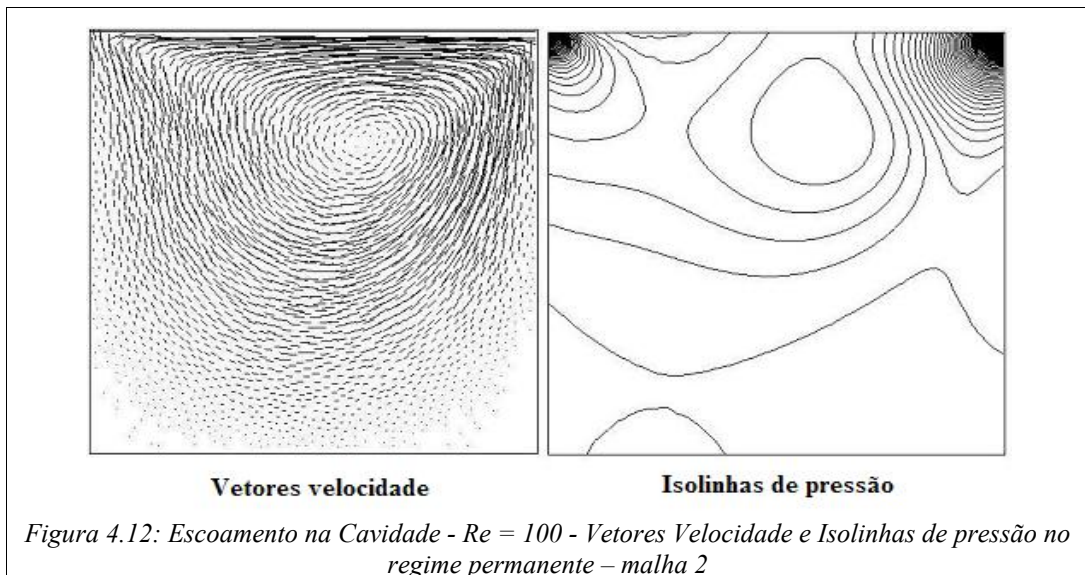
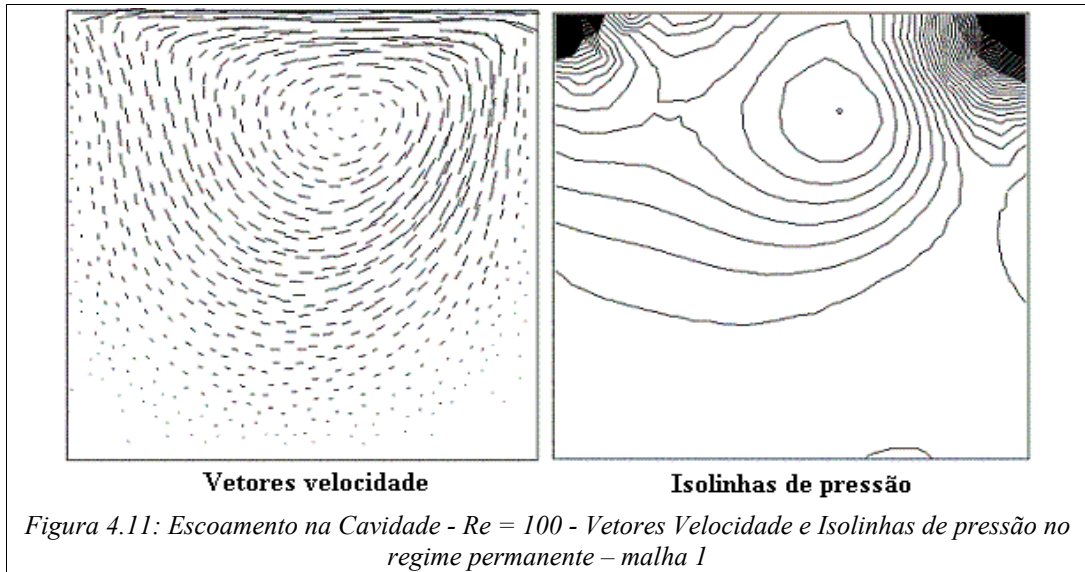


O atingimento do regime permanente ficou então caracterizado para as três malhas, de acordo com o critério usado neste trabalho.

A variação da componente u_2 do campo de velocidades em função da abcissa (x) para a ordenada constante $y = 0,5 \text{ m}$ e a variação da componente u_1 em função da ordenada (y) para a abcissa constante $x = 0,5 \text{ m}$ estão ilustradas na Figura (4.10).



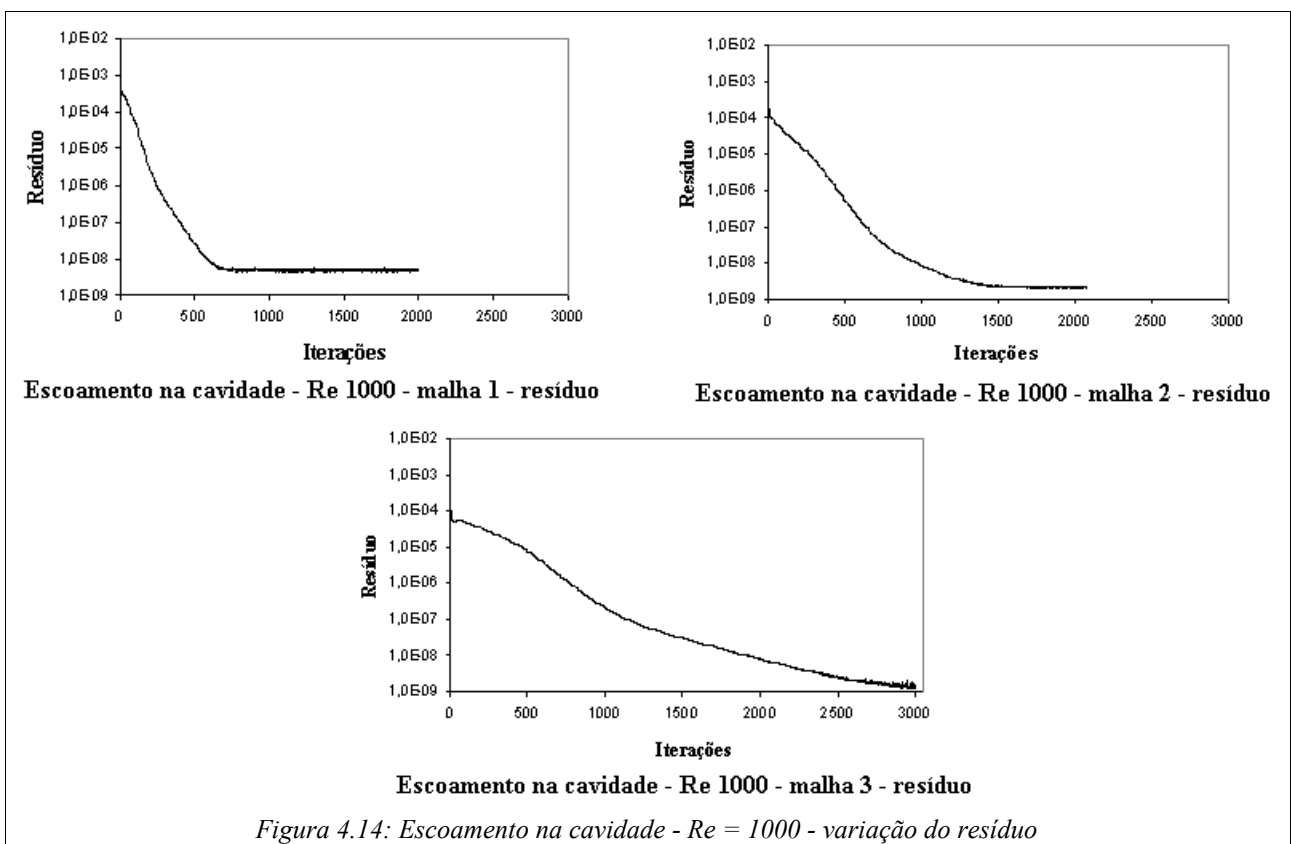
As Figuras (4.11) a (4.13) mostram os vetores velocidade e as isolinhas de pressão no regime permanente para este experimento com $Re = 100$.



Nas figuras (4.11) a (4.13) observa-se o vórtice primário um pouco acima e à direita da região central da cavidade, o que corrobora os dados de GHIA et al. (1982). Não são observadas formações espúrias no campo de pressões para qualquer das três malhas analisadas. No entanto, a malha 3 apresenta-se ligeiramente superior.

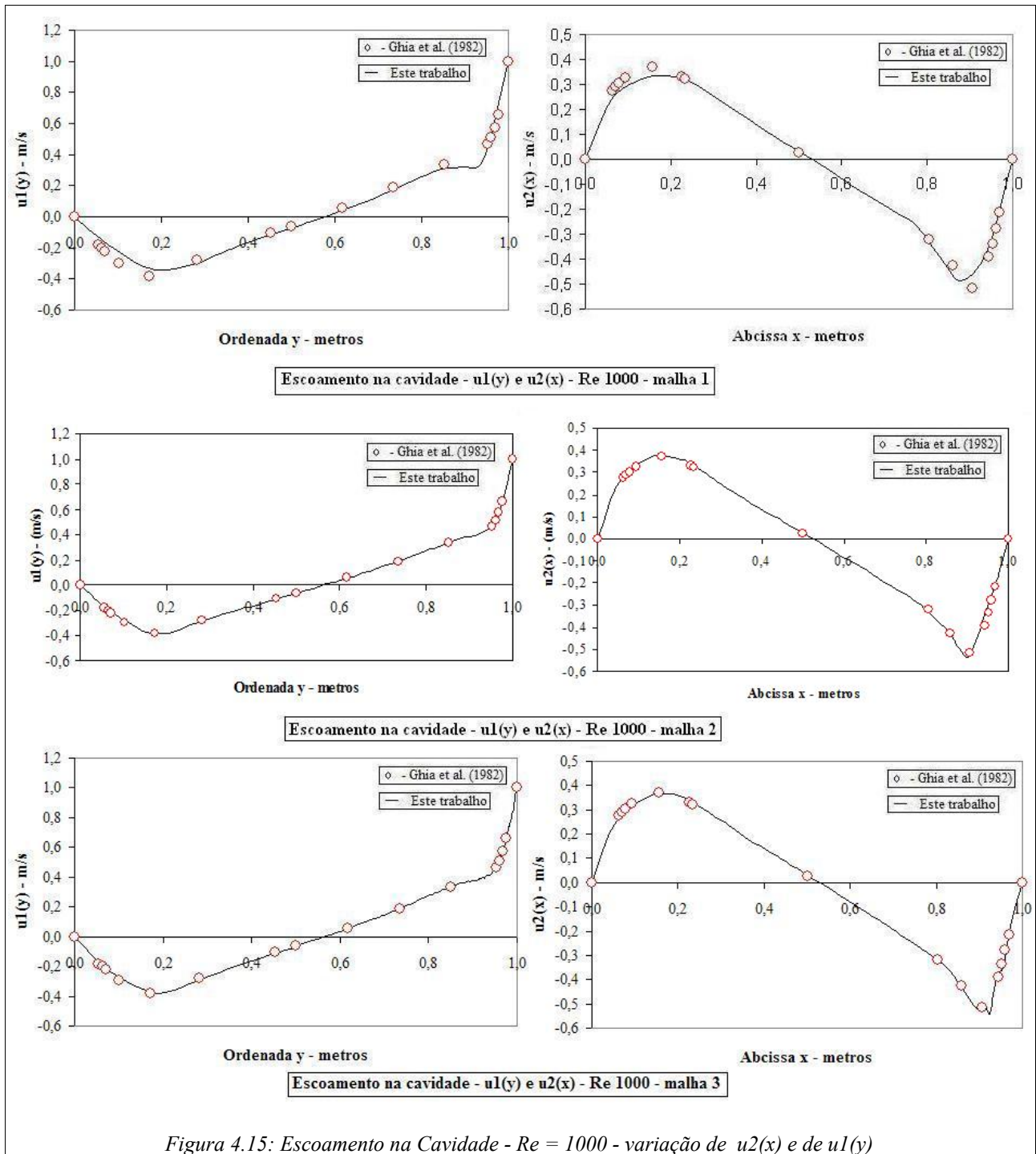
4.2.2.2. O escoamento na cavidade com $Re = 1000$

A variação do resíduo para as malhas 1 a 3 e $Re = 1000$ está na Figura (4.14).

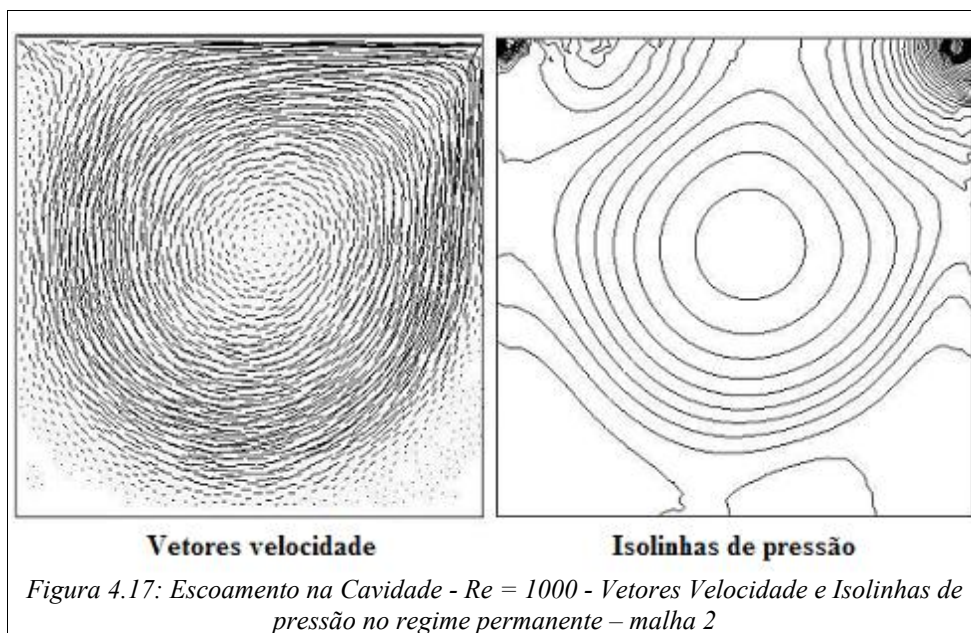
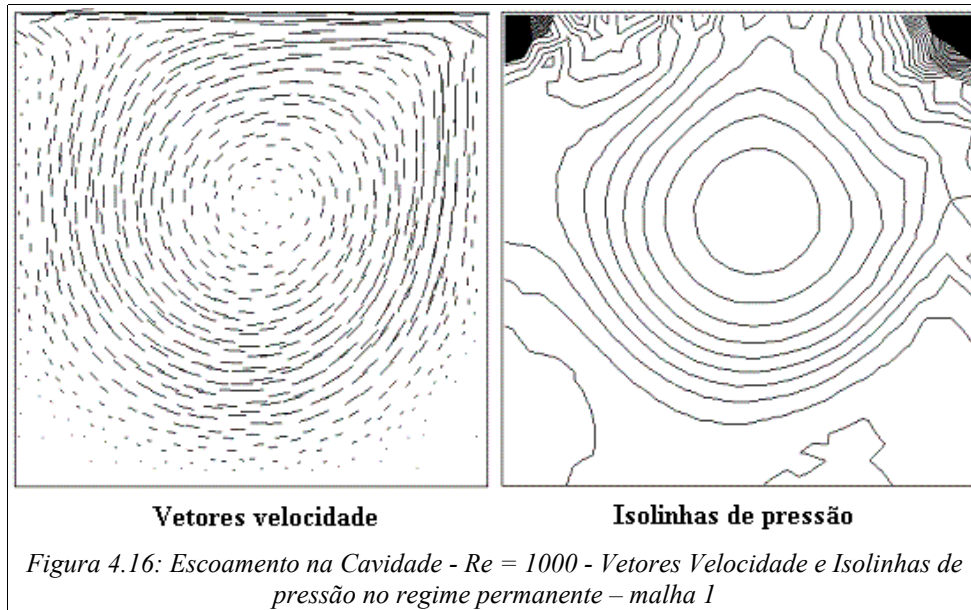


A Figura (4.14) mostra que o regime permanente foi atingido para as malhas 1 e 2, de acordo com o critério deste trabalho. Não o foi para a malha 3 que, a despeito deste fato, forneceu resultados já próximos aos de GHIA et al. (1982), como será visto adiante.

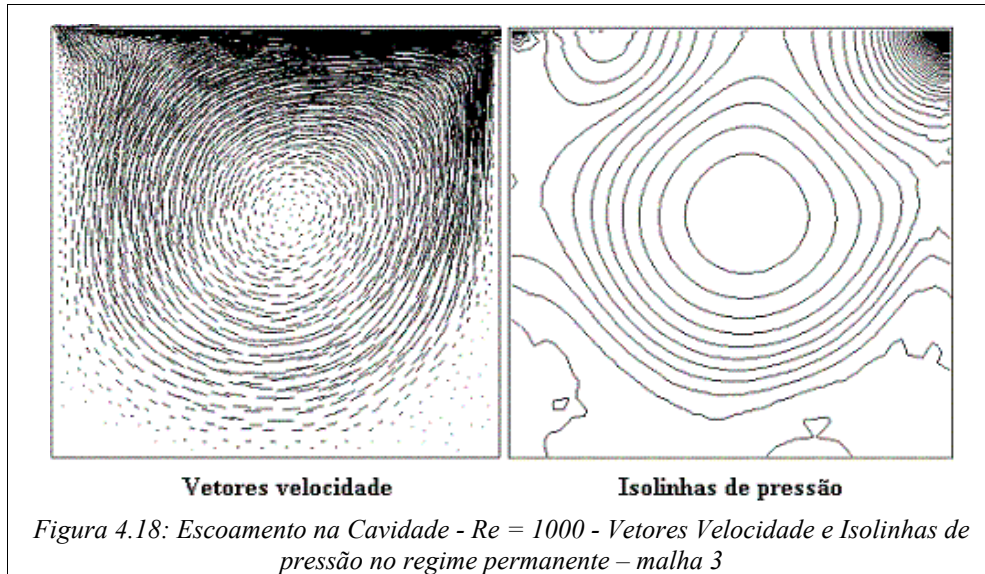
A variação das componentes $u_2(x)$ para $y = 0,5 m$ e $u_1(y)$ para $x = 0,5 m$ está ilustrada na Figura (4.15).



As Figuras (4.16) a (4.18) reproduzem os vetores velocidade e as isolinhas de pressão no regime permanente.

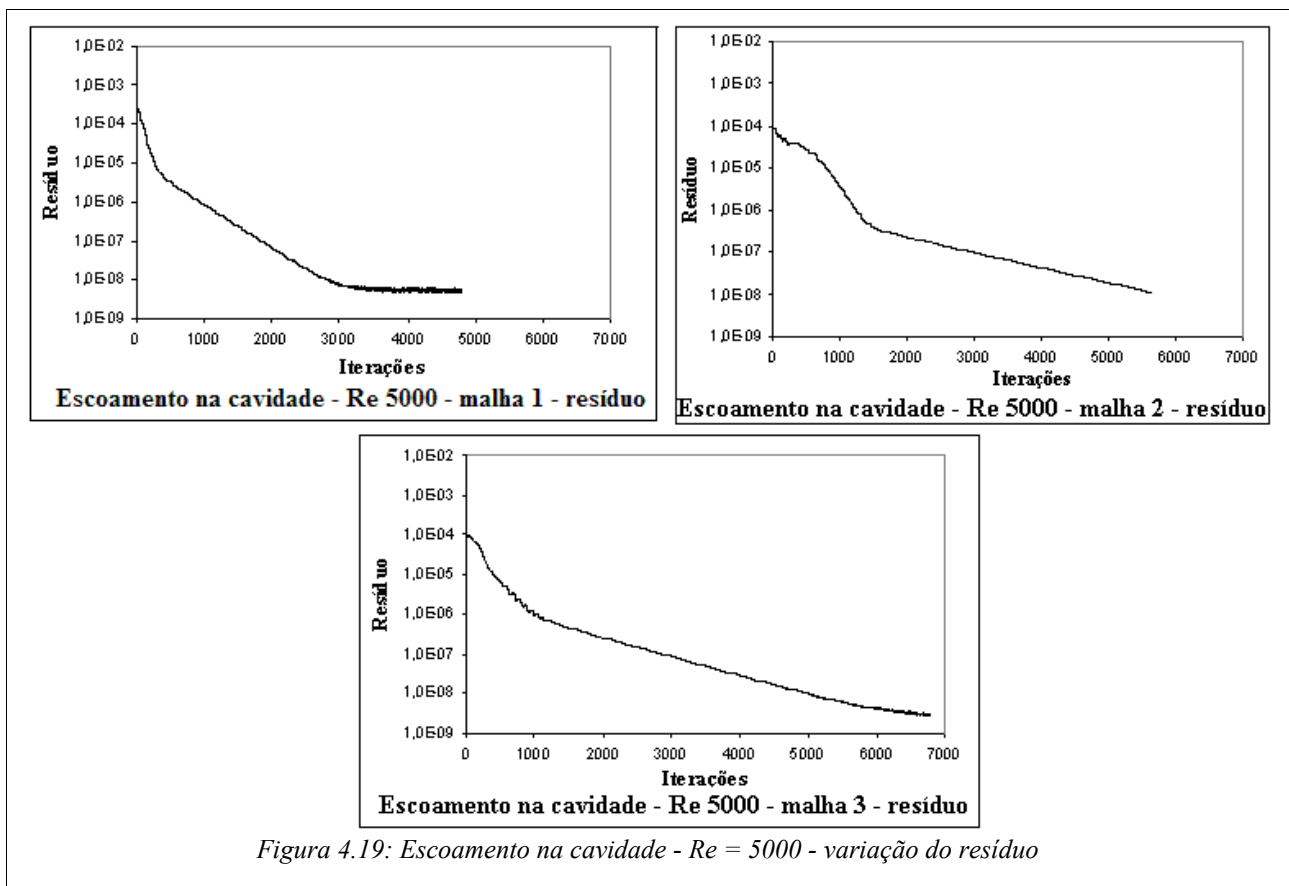


Nas Figuras (4.16) e (4.17) à direita, é possível vislumbrar-se singularidades nas isolinhas de pressão na região da tampa, próximo à esquina superior esquerda da cavidade. Novamente, o refinamento da malha na região próxima à tampa, feito na malha 3, mostrou-se suficiente para reduzir estas componentes espúrias, como o leitor pode ver na Figura (4.18).



4.2.2.3. O escoamento na cavidade com $Re = 5000$

A variação do resíduo para as malhas 1, 2 e 3 está representada na Figura (4.19).



Vê-se na Figura (4.19) que, de acordo com o critério usado neste trabalho, só foi atingido

o regime permanente para a malha 1. Não obstante este fato, adiante será visto que tanto qualitativa quanto quantitativamente o grau de precisão atingido com as malhas 2 e 3 ficou já sensivelmente próximo àquele de GHIA et al. (1982).

A variação de $u_2(x)$ para $y = 0,5 \text{ m}$ e $u_1(y)$ para $x = 0,5 \text{ m}$ está na Figura (4.20).

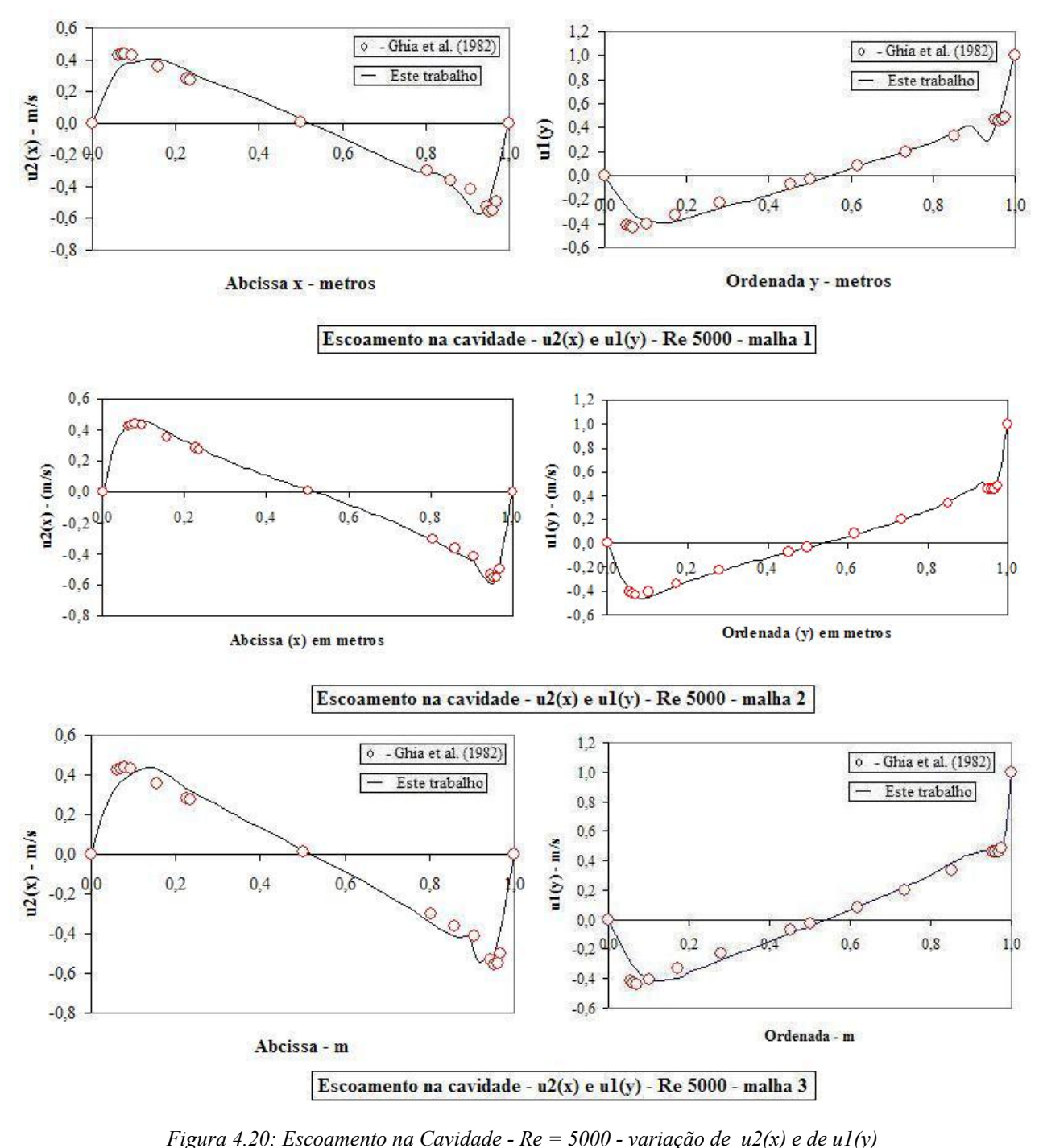
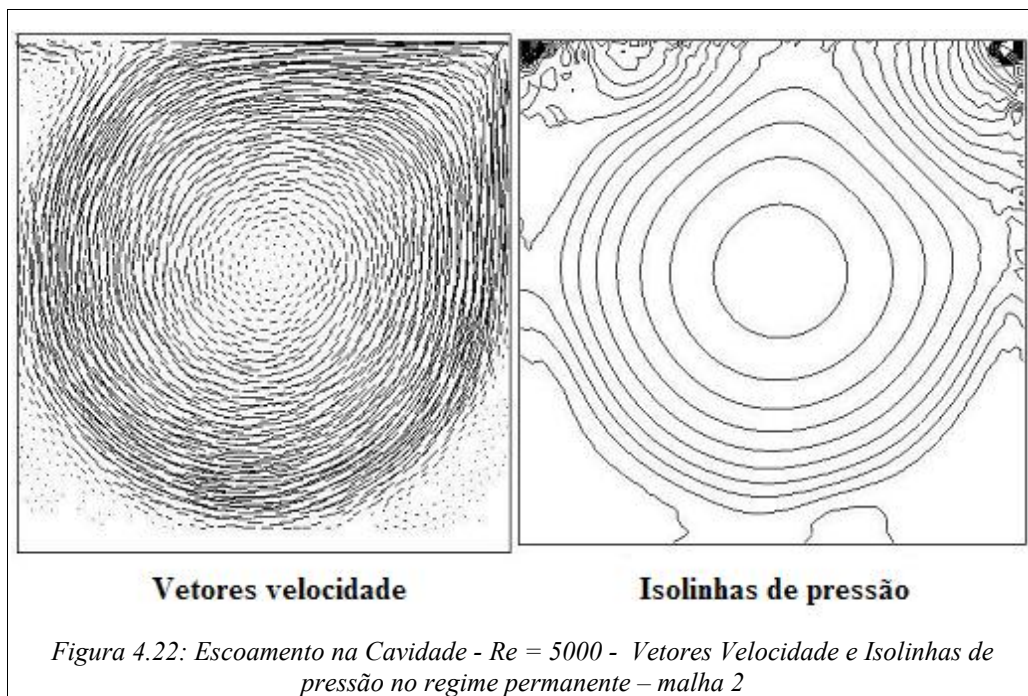
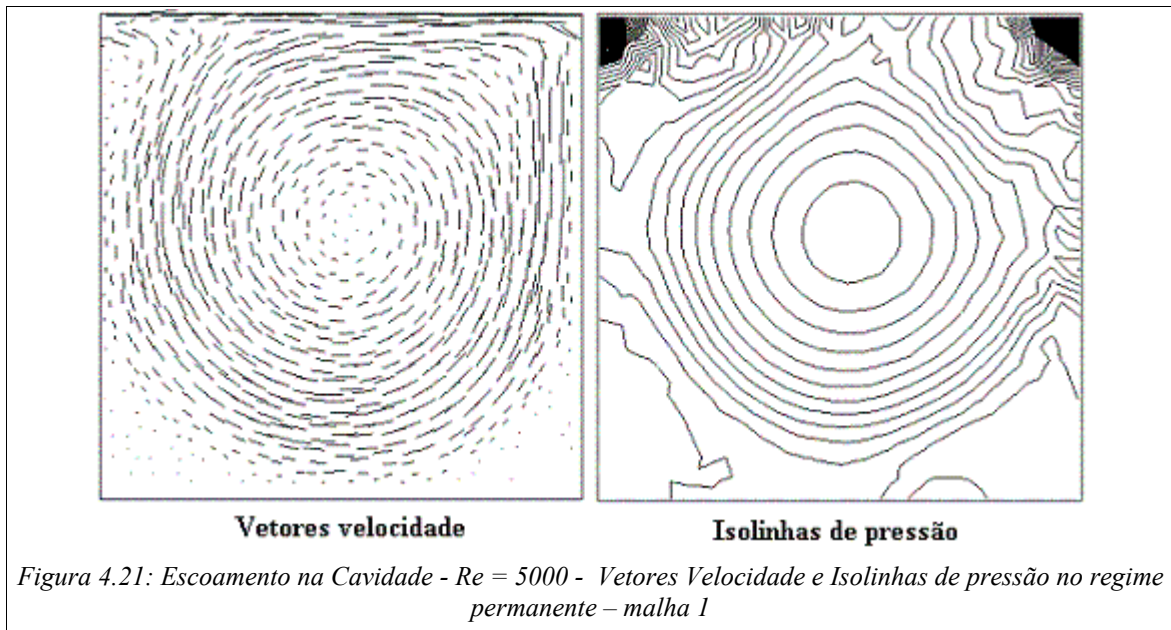
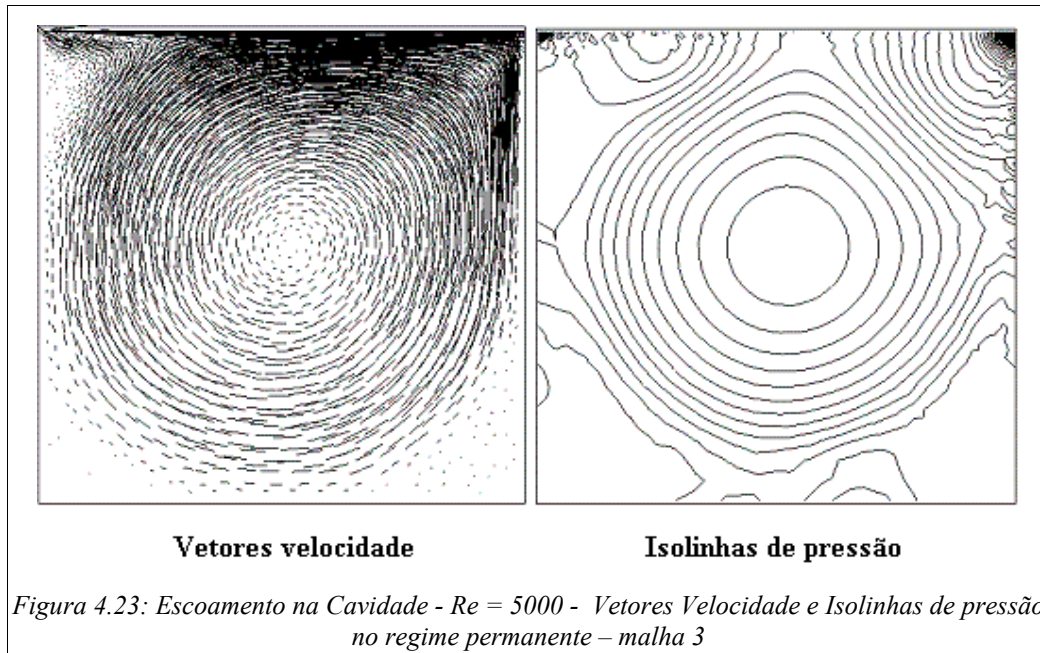


Figura 4.20: Escoamento na Cavidade - $Re = 5000$ - variação de $u_2(x)$ e de $u_1(y)$

As Figuras (4.21) a (4.23) a seguir exibem os vetores velocidade e as isolinhas de pressão no regime permanente.





Nas Figuras (4.21) a (4.23) vê-se componentes espúrias no campo de pressões, na região superior esquerda da cavidade. Mesmo o refinamento constituído com a malha 3 não foi suficiente para eliminar aquelas singularidades.

4.2.3 Interpretação dos resultados da cavidade

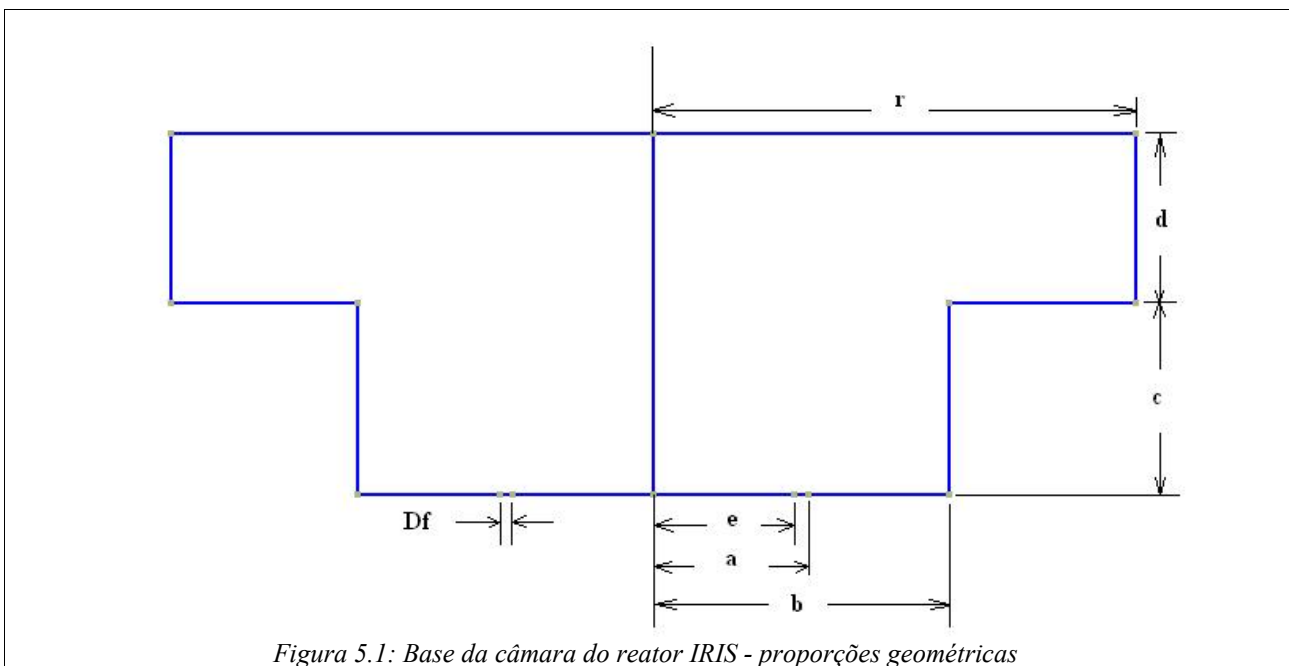
Na sub-secção 4.2.2 foram apresentados os resultados da cavidade sob forma qualitativa. No que concerne aos campos de velocidade, observou-se que a malha 1 ficou associada aos resultados mais pobres. A malha 3 apresentou melhores resultados na região superior da cavidade, onde o grau de refinamento foi maior. A malha 2, entretanto, apresentou de modo geral resultados superiores aos das outras duas.

5 APLICAÇÃO DO CÓDIGO AO PRESSURIZADOR DO REATOR IRIS

5.1 Geometria, propriedades do fluido, condições de contorno e iniciais

5.1.1 Definição da geometria

A região em cinza na Figura (3.1) será denominada neste trabalho de “*base da câmara do reator IRIS*” ou mais simplesmente de “*base da câmara*”. Isto posto, considerou-se a geometria para a base da câmara tal como ilustra a figura a seguir:



Na Figura (5.1), (Df) denota o diâmetro de cada furo de *insurge*. Foram consideradas duas geometrias para as simulações, nas quais (Df) assumiu os valores de 30 mm ou de 70 mm . Definiram-se nestes termos duas geometrias para a base da câmara designadas como segue:

- Geometria ($Df\ 30\text{ mm}$);
- Geometria ($Df\ 70\text{ mm}$).

As outras dimensões geométricas, tais como representadas na Figura (5.1), para cada geometria considerada estão detalhadas na tabela a seguir (DZODZO et al., 2004):

Dimensões geométricas da base da câmara do pressurizador do reator nuclear IRIS

Df	e	a	b	c	d	r
0,030	0,783	0,813	1,596	1,034	0,921	2,605
0,070	0,763	0,833	1,596	1,034	0,921	2,605

Todas dimensões em metros (m)

Tabela 5.1.1: Base da câmara do reator IRIS - dimensões

5.1.2 Propriedades físicas do fluido

Para as propriedades físicas da água consideradas para as simulações, foram utilizados os valores a seguir:

- $\mu = 7,57 \times 10^{-5} \frac{N \cdot s}{m^2}$ (*viscosidade absoluta*);
- $\rho = 625,29 \frac{kg}{m^3}$ (*massa específica*);
- $c = 703,38 \frac{m}{s}$ (*velocidade do som*).

A pressão de operação do circuito primário do reator IRIS será de cerca de 155 atm , o que equivale a $1,5199 \times 10^7 \text{ N/m}^2$. A temperatura de operação na saída do núcleo será de cerca de $320 \text{ }^\circ\text{C}$.

Os valores tomados para as propriedades físicas da água a escoar no *insurge* foram a média aritmética dos valores nas condições de operação do circuito primário e dos valores nas condições de saturação para a pressão nominal de trabalho do circuito primário.

5.1.3 Condições de contorno e iniciais

A vazão de água através dos oito orifícios de *insurge* é de $5,4 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, de conformidade com DZODZO et al. (2004). Considerando-se este valor e os dois diâmetros

admitidos para estes orifícios, obtém-se a velocidade através de um só orifício, para cada diâmetro de orifício. O resultado é $8,9 \times 10^{-2} \text{ m/s}$ para a geometria $Df \text{ } 30 \text{ mm}$ e $1,6 \times 10^{-2} \text{ m/s}$ para a geometria $Df \text{ } 70 \text{ mm}$.

As condições de contorno e iniciais para a geometria $Df \text{ } 30 \text{ mm}$ foram como na Figura (5.2).

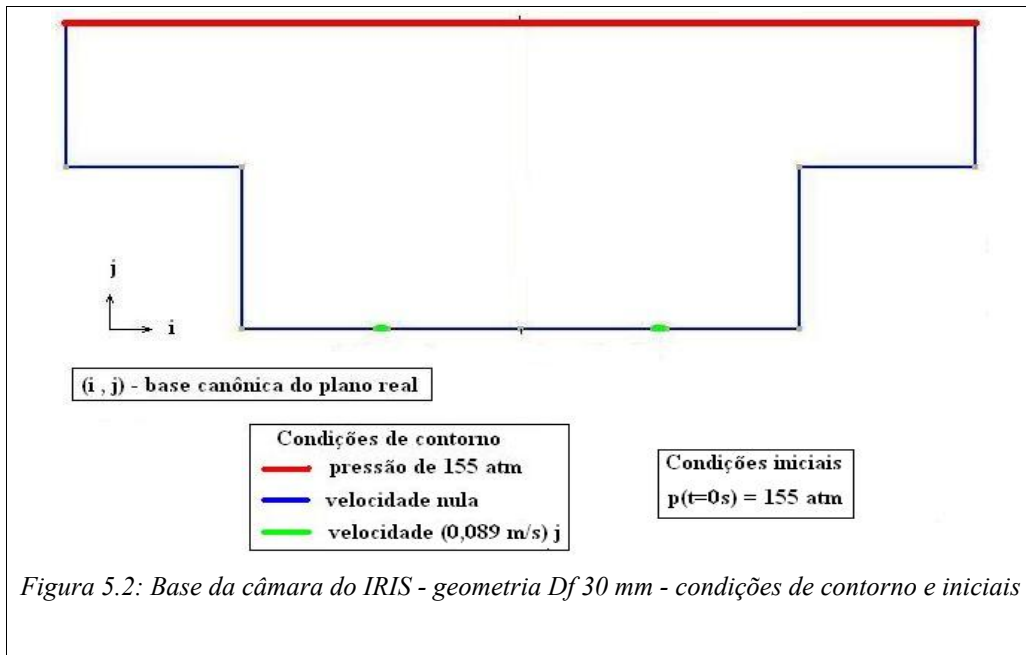


Figura 5.2: Base da câmara do IRIS - geometria $Df \text{ } 30 \text{ mm}$ - condições de contorno e iniciais

Para a geometria $Df \text{ } 70 \text{ mm}$, as referidas condições foram como na Figura (5.3).

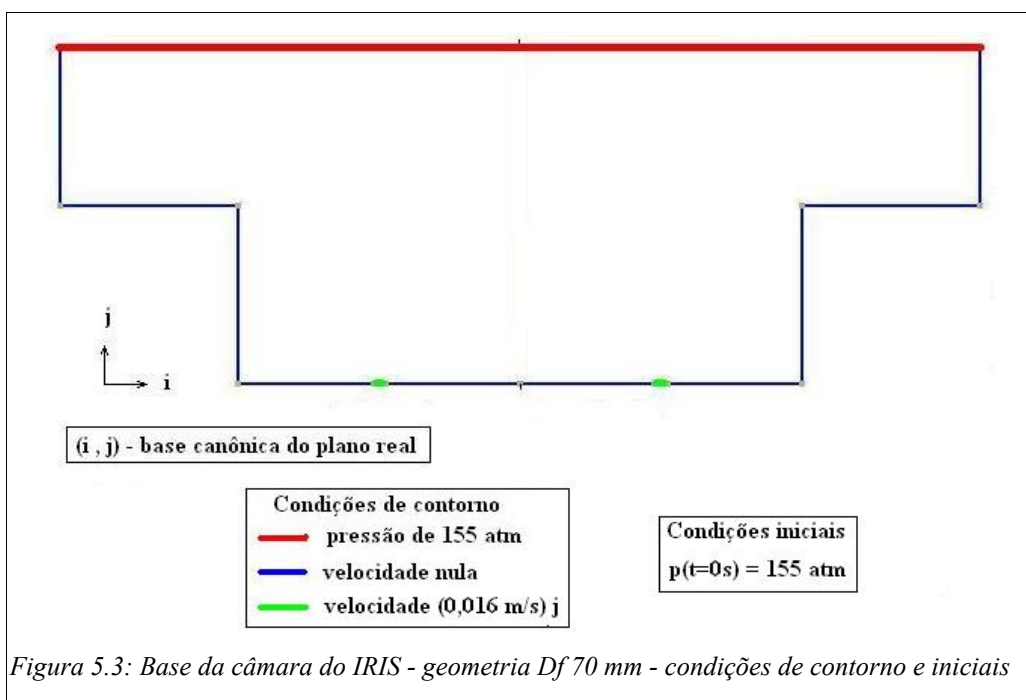
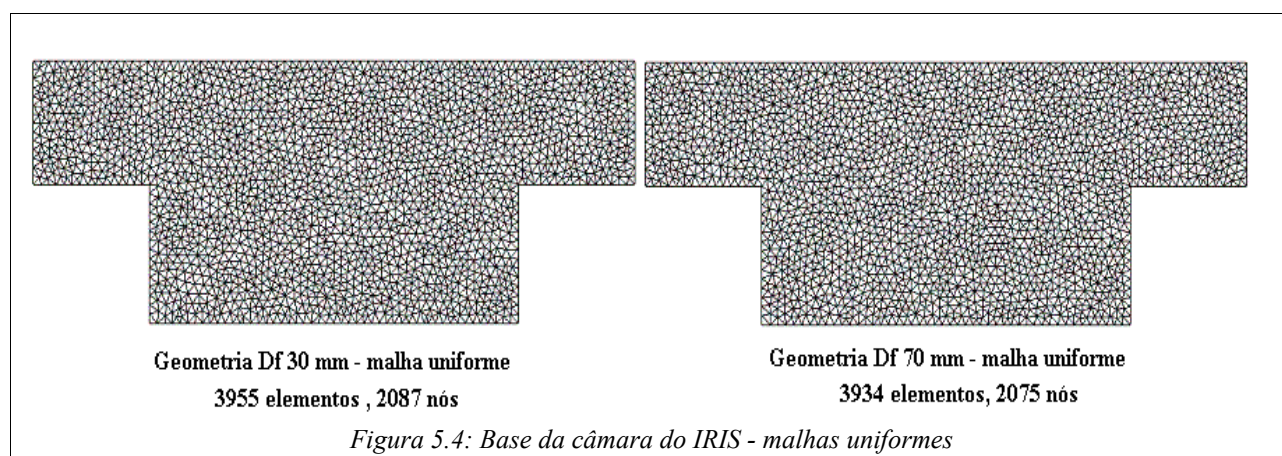


Figura 5.3: Base da câmara do IRIS - geometria $Df \text{ } 70 \text{ mm}$ - condições de contorno e iniciais

5.2 Experimentos computacionais

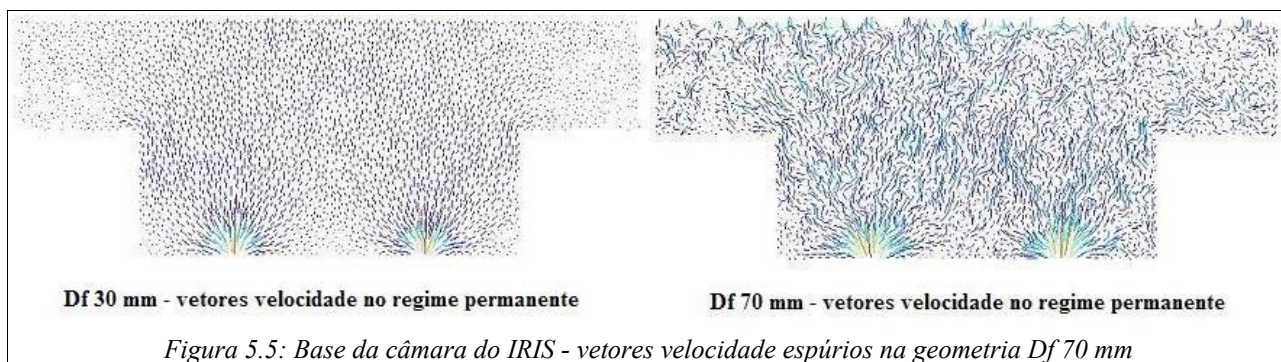
Os primeiros experimentos com a base da câmara do IRIS usaram as malhas não estruturadas uniformes reproduzidas na Figura (5.4). A escolha para estas malhas foi arbitrária.



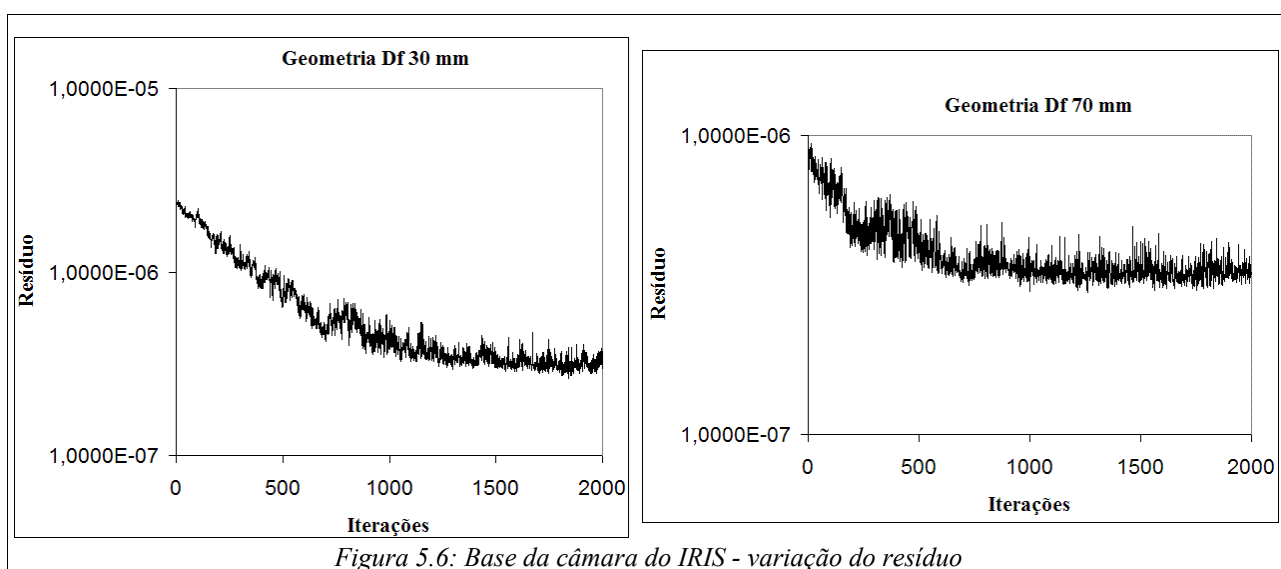
Nestes experimentos foi usado $CFL = 1$ e valores superiores deste parâmetro, em número de potências de dez inteiras, não possibilitaram a estabilidade do resolvidor.

Os campos de pressões no regime quase estático associados aos experimentos com as geometrias $Df\ 30\ mm$ e $Df\ 70\ mm$, com as condições de contorno e inicial definidas nas Figuras (5.2) e (5.3), mostraram-se aproximadamente isobáricos e com valor médio de $1,5199 \times 10^7\ N/m^2$. A amplitude das variações dos valores aproximados obtidos para as pressões foi da ordem de $10^{-4}\ N/m^2$.

Na prática o campo de velocidades obtido para a geometria $Df\ 70\ mm$ mostrou-se espúrio. Isto ocorreu devido ao fato de, em unidades do Sistema Internacional de unidades, a razão entre o valor numérico da pressão e o valor numérico da velocidade ser da ordem de 10^8 . Os vetores de velocidade no regime quase estático para estes primeiros experimentos estão reproduzidos na Figura (5.5).



A variação dos resíduos associados ao método preditor-multicorretor para estes experimentos pode ser vista na Figura (5.6).



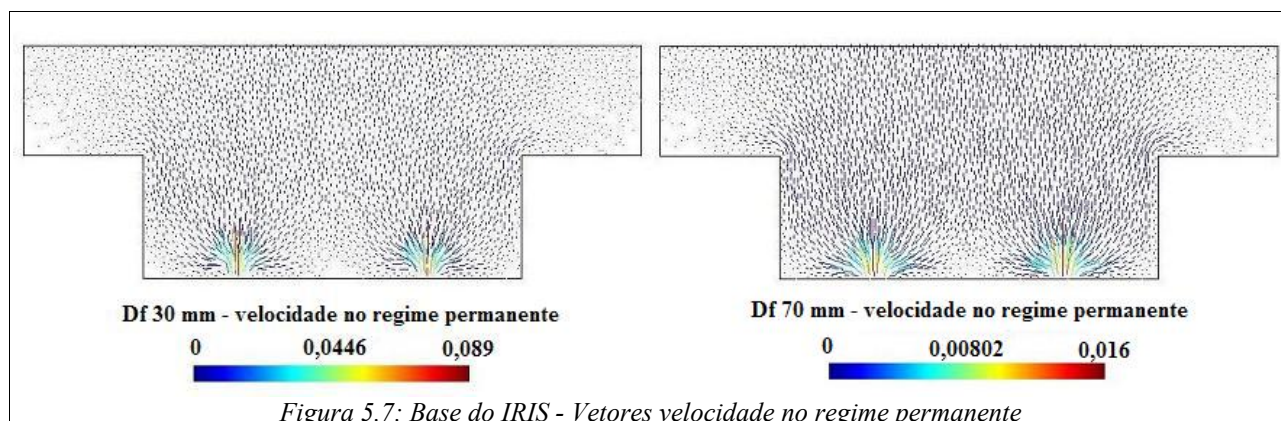
Na Figura (5.6) ficou caracterizado o regime quase estático para ambas geometrias, de acordo com o critério empregado neste compêndio.

Uma vez que se constatou que os campos de pressões obtidos no regime permanente foram praticamente isobáricos, pode-se obter os campos de velocidades considerando-se condições de contorno e iniciais para a pressão tais que se tenha gradiente de pressão nulo e valor de magnitude de pressão de ordem de grandeza próxima à das velocidades dos jatos de *insurge*. Considerou-se então novas condições de contorno e inicial homogêneas ($p = 0 \text{ N/m}^2$) para a pressão.

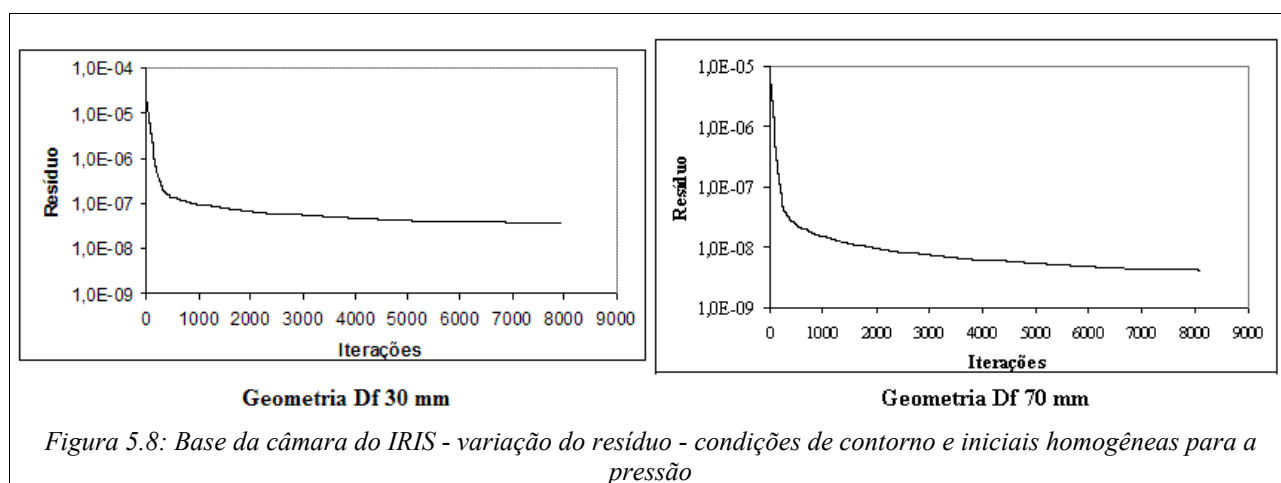
Nos novos experimentos foi usado o $CFL = 10$ e valores maiores segundo potências de

dez inteiras geraram instabilidade do resolvidor.

Os campos de velocidades em regime quase estático associados a estas condições de contorno e iniciais homogêneas para a pressão para as geometrias Df 30 mm e Df 70 mm ficaram como ilustrado na Figura (5.7).



A variação dos resíduos do método preditor-multicorretor para estas condições homogêneas sobre o campo de pressões está reproduzida na Figura (5.8).



Na Figura (5.8) vê-se que não foi atingido o regime quase estático segundo o critério usado aqui. Todavia, percebe-se que o decremento no valor do resíduo é acentuadamente pequeno. Ademais, os valores de norma do resíduo alcançados foram já sensivelmente baixos: da ordem de 10^{-8} para a geometria Df 30 mm e da ordem de 10^{-9} para a geometria Df 70 mm. Considerou-se que estes resultados representam uma primeira aproximação provida de sensível precisão. Esta aproximação poderá servir de ponto de partida para trabalhos que explorem

características mais realísticas dos fenômenos envolvidos.

CONCLUSÕES

Os resultados qualitativos e numéricos relativos ao caso do escoamento entre placas planas que foram apresentados neste trabalho mostraram concordância satisfatória com os resultados obtidos com o emprego da solução analítica.

Os resultados referentes aos experimentos com o escoamento na cavidade mostraram proximidade aceitável com os dados numéricos e qualitativos de GHIA et al. (1982). GHIA et al. (1982) usaram a formulação de função de corrente-vorticidade em seu trabalho. Um fato a ser mencionado, é que GHIA et al. (1982) serviram-se de uma malha com 16641 pontos para seus resultados, enquanto que, neste trabalho, viu-se que a malha de melhor desempenho global foi a uniforme de apenas 2712 pontos. A malha refinada junto à tampa da cavidade, a despeito de sua menor precisão nas regiões inferiores da cavidade, mostrou-se efetiva no que tange à redução das singularidades no campo de pressões até $Re = 1000$.

Há que se destacar o fato de que estes resultados foram obtidos com o uso de uma matriz de estabilização SUPG muito simples e que não contém qualquer termo difusivo. Esta simplicidade possibilitou que se evitasse o emprego de rotinas computacionais de integração numérica, simplificando o código implementado.

Os experimentos com o pressurizador do IRIS tiveram natureza difusiva devido às baixas velocidades dos jatos de *insurge*. Apesar disto, a matriz de estabilização SUPG mostrou-se robusta o suficiente para a obtenção das soluções, desde que com condições de contorno e iniciais não tão díspares para velocidade e pressão.

Os vetores velocidade para os experimentos com as geometrias $Df = 30 \text{ mm}$ e $Df = 70 \text{ mm}$ foram satisfatoriamente obtidos. Viu-se que as regiões com magnitude de velocidade próximas às dos jatos de *insurge* ficaram restritas a muito próximo dos orifícios de *insurge*. Para além destas pequenas áreas, o campo de velocidades praticamente não foi perturbado pelos *insurges*.

O campo de pressões no regime permanente mostrou-se praticamente isobárico para

ambos os experimentos $D_f = 30 \text{ mm}$ e $D_f = 70 \text{ mm}$.

A obtenção do campo de velocidades para os *insurges* na base da câmara do pressurizador do IRIS pode, no futuro, subsidiar a simulação computacional da difusão de ácido bórico na câmara do pressurizador deste reator. Além disto, os seguintes aspectos podem servir como ponto de partida para trabalhos futuros:

- Consideração de fronteiras móveis;
- Adoção de funções de forma dependentes também do tempo;
- Consideração de fluidos com ocorrência de mudança de fase;
- Consideração de escoamentos tridimensionais;
- Inclusão de técnicas de adaptação de malhas;
- Resolução da equação de conservação de energia a partir dos campos de velocidade e de pressão obtidos;
- Modelagem de turbulência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOTELHO, D.A.; SAMPAIO, P.A.B.; LAPA, C.M.F.; PEREIRA, C.M.N.A. **Optimization procedure to design pressurizer experiments**. In: INAC 2005. Santos, Brasil, 2005.
- BROOKS, N.; HUGHES, T. J. R. **Streamline Upwind / Petrov-Galerkin fomulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 32: 199-259, 1982.
- CARELLI, M.D.; CONWAY,L.E.; ORIANI, L.; PETROVIC,B.; LOMBARDI, C.V.; RICOTTI, M.E.; BARROSO, A.C.O.; COLLADO, J.M.; CINOTTI, L.; TODREAS, N.E.; GRGIC, D.; MORAES, M.M.; BOROUGHS, R.D.; NINOKATA, H.; INGERSOLL, D.T.; ORIOLLO, F. **The design and safety features of the IRIS reactor**. Nuclear Engineering Design, 2004. v.230, p.151-167.
- CODINA, R. **A finite element formulation for the numerical solution of the convection-diffusion equation**, Barcelona: CIMNE, 1993. 120p.
- COSTA, G. K. **Simulação tridimensional de escoamentos compressíveis e incompressíveis através do método dos elementos finitos**, 2004. 175p. (Tese de Doutorado – Universidade Federal de Pernambuco, Recife – Brasil).
- DZODZO, MILORAD D.; ORIANI, LUCA; CONWAY, LAWRENCE E.. **Scaling Analysis for IRIS Pressurizer Mixing**. Westinghouse Electric Company, USA, 2004.
- FOX, R. W.; MACDONALD, A.T. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. Quarta edição. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1995, 662p.
- FRANCA, L. P.; FREY, S. L.. **Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 99: 209-233, 1992.

- GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T.. **High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method.** Journal of Computational Physics, 48: 387-411, 1982.
- GLASSTONE, S.; SESONSKE, A.. **Nuclear Reactor Engineering.** Third edition. Krieger Publishing, 1991, 805p.
- HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.** New York: Dover Publications, 2000, 682p.
- HUGHES, T. J. R.; MALLET, M.. **A new finite element formulation for computational fluid dynamics: III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Estados Unidos, 58: 305-328, 1986.
- KWON, Y. W.; BANG, H. **The Finite Element Method using Matlab.** Second edition. Boca Raton: CRC Press , 2000, 607p.
- LIENHARD IV, J. H.; LIENHARD V, J. H. **A Heat Transfer Textbook.** Third edition. Cambridge: Phlogiston Press, 2006, 762p. Disponível em: <<http://web.mit.edu/lienhard/www/ahtt.html>>. Acesso em: 16 abr. 2006.
- LYRA, P. R. M. **Unstructured grid adaptive algorithms for fluid dynamics and heat conduction.** Swansea, 1994. 333 p. (Tese de Doutorado – University of Wales, Swansea – Reino Unido).
- PARS, L. A. **An Introduction to The Calculus of Variations.** London: Heinemann, 1962, 350p.
- STORTI, M.; NIGRO, N; IDELSOHN, S. **Equal-order interpolations: a unified approach to stabilize the incompressible and advective effects.** [S.L]: Elsevier Science, 1997, 15p.

STREETER, V. L.; WYLIE, E. B. **Mecânica dos Fluidos**. Sétima edição. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1982, 585p.

WHITE, F. M. **Viscous Fluid Flow**. Second edition. Boston: McGraw-Hill, 1991, 614p.

WYLIE, JR., C. R. **Advanced Engineering Mathematics**. Third edition. New York: McGraw-Hill, 1966, 813p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**. Basic formulation and linear problems. Fourth edition. London: McGraw-Hill. 1994, 648p., Vol 1.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**. Solid and fluid mechanics and nonlinearity. Fourth edition. London: McGraw-Hill, 1991, 807p., Vol 2.

APÊNDICE 1 – DEMONSTRAÇÃO DA EQUAÇÃO 2.41

Este apêndice trata da demonstração da equação (2.41) deste trabalho.

O operador $L(\mathbf{u})$ tal como em (2.15) para o caso da equação (2.38) é um escalar e por esta razão a função de ponderação do método de Galerkin como em (2.31) para a equação (2.38) em epígrafe assume a seguinte forma:

$$W(x) = N(x) \quad (\text{A1.1})$$

em que $(N(x))$ é a função de forma ou de interpolação, com W e N ambos escalares.

Neste caso, a ponderação dada pela equação (2.22) sem o termo relativo às condições de contorno fica como segue:

$$\int_{\Omega} W \left(u_1 \frac{dT}{dx} - k \frac{d^2 T}{dx^2} \right) dx = 0 \quad (\text{A1.2})$$

A equação (A1.2) é a formulação variacional do problema dado pelas equações (2.38) e (2.39).

A integração por partes da equação (A1.2), considerando-se que a função de ponderação (W) é identicamente nula no contorno de Dirichlet, que no caso é constituído pelos dois pontos extremos do domínio unidimensional Ω , fornece a forma fraca desejada:

$$-\int_{\Omega} u_1 \frac{dW}{dx} T dx + \int_{\Omega} k \frac{dW}{dx} \frac{dT}{dx} dx \equiv 0 \quad (\text{A1.3})$$

A discretização da forma fraca dada pela equação (A1.3) acima deve ser executada agora. A aproximação da função $(T(x))$ será escrita tomando-se em conta a equação (2.16) deste trabalho, considerando-se pontos \mathbf{x}_j do domínio unidimensional tais que $j \notin \eta_d$. Isto equivale a considerar pontos do domínio $\bar{\Omega}$ que não estejam no contorno de Dirichlet, neste caso os dois pontos extremos do domínio unidimensional. Em assim se procedendo, $T(x)$ pode ser aproximada

do seguinte modo:

$$T(x) \approx \sum_{j \in \eta - \eta_d} N(\mathbf{x}_j) \hat{T}_j$$

ou, mais simplificadamente,

$$T \approx \sum N(x) \hat{T}$$

em que \hat{T}_j é a temperatura no nó (j) a ser calculada, pois $j \notin \eta_d$.

A equação (A1.4) acima pode ser escrita em forma mais compacta considerando-se os seguintes vetores:

$$\begin{aligned} N(x)_{n \times 1} & \text{ o vetor das funções de forma} \\ \hat{T}_{n \times 1} & \text{ o vetor de temperaturas nodais} \end{aligned}$$

em que (n) é o cardinal do conjunto $\{\eta - \eta_d\}$

A consideração das expressões (A1.4) e (A1.5) acima permite escrever a aproximação para a função ($T(x)$) como segue:

$$\begin{aligned} T(x) & \approx [N(x)_{n \times 1}]^T \hat{T}_{n \times 1} \quad , \text{ ou mais simplificadamente:} \\ T & \approx N^T \hat{T} \end{aligned}$$

A substituição da equação (A1.6) na forma fraca (A1.3) fornece a discretização da forma fraca desejada. Há que se considerar que as temperaturas nodais \hat{T}_j independem da abcissa dos pontos do domínio unidimensional. Com isto em mente, a discretização procurada assume a seguinte forma:

$$-\int_{\Omega} u_1 \frac{dN}{dx} N^T \hat{T} dx + \int_{\Omega} k \frac{dN}{dx} \frac{dN^T}{dx} \hat{T} dx \equiv 0$$

Há que se lembrar de que a função de ponderação é identicamente nula em Γ_D .

Na sub-seccção 2.2.1 deste trabalho já foi feita alusão ao fato de que as funções de interpolação podem ser as mais diversas. Disse-se também que no presente trabalho as funções de forma que serão empregadas correspondem a polinômios de grau um.

Nas figuras (2.1) e (2.2) tem-se a representação das funções de forma unidimensionais chamadas do tipo “chapéu”, designação naturalmente devida ao seu aspecto.

Tem-se na figura (2.1) três funções de forma (linhas em vermelho, azul e magenta escuro) associadas aos seus respectivos nós, designados nessa figura por $(i - 1)$, (i) e $(i + 1)$. Nessa figura as coordenadas dos nós estão referidas ao sistema global de coordenadas. O sistema global de coordenadas é aquele que situa o nó com respeito a sua posição no domínio $\bar{\Omega}$.

A análise da figura (2.1) permite escrever a expressão da função de forma associada ao (i) -ésimo nó, em coordenadas globais, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} N(x_i) &= \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} & \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \\ N(x_i) &= \frac{(x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_i)} & \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \\ N(x_i) &= 0 & \forall x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{aligned} \tag{A1.8}$$

As operações de derivação e de integração associadas com a forma fraca de um problema de valor de contorno podem ser executadas com as funções de forma escritas com respeito ao sistema global de coordenadas. Entretanto, os pesquisadores logo perceberam que estas operações resultavam demasiado complexas, principalmente nos problemas envolvendo mais de uma dimensão espacial. O sistema local de coordenadas foi então introduzido com vistas a simplificar as operações relativas à forma fraca dos problemas em estudo.

O sistema local de coordenadas está vinculado a cada elemento do domínio $\bar{\Omega}$, de consonância com o que ilustra a figura (2.2). Aqui o termo *elemento* é empregado no contexto já definido na sub-seccção 2.2.1 deste trabalho. No caso em epígrafe do problema representado pelas

equações (2.38) e (2.39), cada elemento finito do domínio unidimensional consiste em um segmento de reta que tem por extremos o par de nós $(i - 1)$ e (i) . O comprimento de cada elemento unidimensional é definido como o parâmetro de malha e denotado por (h_e) . Este parâmetro de malha pode ser constante ou variar de elemento para elemento. Na presente análise, considerar-se-á que é constante.

Os cálculos de derivadas e de integrais necessários à explicitação da forma fraca tornam-se sobremaneira mais simples com a adoção deste sistema local de coordenadas.

Os elementos finitos do domínio $\bar{\Omega}$ são fisicamente os mesmos, sejam referidos ao sistema local, sejam ao global. Isto posto, é possível escrever uma transformação de coordenadas que relacione os dois sistemas.

A análise da figura (2.2) permite que se escreva o que segue:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x_i) &= \frac{(x - x_{i-1})}{h_e} && \text{entre os nós } (i - 1) \text{ e } (i) \\ \varepsilon(x_i) &= \frac{(-x + x_{i+1})}{h_e} && \text{entre os nós } (i) \text{ e } (i + 1) \end{aligned} \tag{A1.9}$$

A comparação entre as expressões (A1.8) e (A1.9) possibilita a escrita das funções de forma tipo chapéu em coordenadas locais, como segue:

$$\begin{aligned} N_i &= \varepsilon && \text{entre os nós } (i - 1) \text{ e } (i) \\ N_i &= (1 - \varepsilon) && \text{entre os nós } (i) \text{ e } (i + 1) \\ N_i &= 0 && \text{fora do intervalo entre} \\ &&& \text{os nós } (i - 1) \text{ e } (i + 1) \end{aligned} \tag{A1.10}$$

A comparação entre as equações (A1.8) e (A1.10) permite, por seu turno, a escrita de uma relação entre a derivada de uma função de forma no sistema global e a mesma derivada no sistema local. Realmente:

$$\frac{\partial N_{global}}{\partial x} = \frac{1}{h_e} \frac{\partial N_{local}}{\partial \varepsilon} \quad (A1.11)$$

A observação atenta das equações (A1.8) e (A1.10) permite concluir que a função de forma associada com o nó (i) é não-nula apenas no intervalo entre os nós ($i - 1$) e ($i + 1$). Considere-se a função de forma N associada ao nó (i) e denotada por N_i tal como nas equações (A1.10). Tendo-se em mente o intervalo no qual ela é não-nula, observa-se imediatamente o que segue:

$$\left(\frac{dN_i}{dx} \mathbf{N}^T \right)_{1 \times n} \equiv [0, \dots, 0, \frac{dN_i}{dx} N_{i-1}, \frac{dN_i}{dx} N_i, \frac{dN_i}{dx} N_{i+1}, 0, \dots, 0] \quad (A1.12)$$

O produto interno entre o vetor dado pela equação (A1.12) acima e o vetor das temperaturas nodais $\hat{\mathbf{T}}$, como já definido, terá então a seguinte forma:

$$\left(\frac{dN_i}{dx} \mathbf{N}^T \right)_{1 \times n} \hat{\mathbf{T}}_{n \times 1} = \frac{dN_i}{dx} N_{i-1} T_{i-1} + \frac{dN_i}{dx} N_i T_i + \frac{dN_i}{dx} N_{i+1} T_{i+1} \quad (A1.13)$$

Procedimento análogo ao executado nas equações (A1.12) e (A1.13) acima leva ao seguinte resultado:

$$\left(\frac{dN_i}{dx} \frac{dN_i}{dx} \right)_{1 \times n} \hat{\mathbf{T}}_{n \times 1} = \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_{i-1}}{dx} T_{i-1} + \left(\frac{dN_i}{dx} \right)^2 T_i + \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_{i+1}}{dx} T_{i+1} \quad (A1.14)$$

Substituindo-se as equações (A1.13) e (A1.14) acima na forma fraca (A1.7), levando-se em conta as equações (A1.10) e (A1.11), escreve-se agora a forma fraca com referência ao sistema local de coordenadas do modo como segue:

$$- u_1(A+B+C) + k(D+E+F) = 0 \quad , \text{ com:}$$

$$A = T_{i-1} \int_0^1 \frac{1}{h} (1 - \varepsilon) h d \varepsilon$$

$$B = T_i \left(\int_0^1 \frac{1}{h} \varepsilon h d \varepsilon + \int_0^1 \frac{-1}{h} (1 - \varepsilon) h d \varepsilon \right)$$

$$C = T_{i+1} \int_0^1 \frac{-1}{h} \varepsilon h d \varepsilon \tag{A1.15}$$

$$D = T_{i-1} \int_0^1 \frac{1}{h} \left(\frac{-1}{h} \right) h d \varepsilon$$

$$E = T_i \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{h} \right)^2 h d \varepsilon + \int_0^1 \left(\frac{-1}{h} \right)^2 h d \varepsilon \right)$$

$$F = T_{i+1} \int_0^1 \left(\frac{-1}{h} \right) \left(\frac{1}{h} \right) h d \varepsilon$$

em que ε é como nas equações (A1.9).

As integrais envolvidas nas equações (A1.15) acima são bastante simples. Executando-se as operações e substituindo-se as expressões para A , B , C , D , E e F na primeira das equações (A1.15), obtém-se a equação nodal resultante da aplicação da ponderação de Galerkin clássica ao problema definido pelas equações (2.38) e (2.39):

$$\left(1 - \frac{u_1 h}{2k} \right) T_{(i+1)} - 2T_i + \left(1 + \frac{u_1 h}{2k} \right) T_{(i-1)} = 0 \tag{A1.16}$$

em que (h) corresponde ao “tamanho de cada elemento” unidimensional.

O parâmetro:

$$Pe = \frac{u_1 h}{2k} \tag{A1.17}$$

é designado como o número de Peclét associado ao elemento de comprimento (h) , em estreita analogia com o parâmetro adimensional de mesmo nome da Mecânica dos Fluidos.

Com a convenção introduzida pela equação (A1.17) acima, a equação (A1.16) pode ser re-escrita como segue:

$$(1 - Pe)T_{(i+1)} - 2T_i + (1 + Pe)T_{(i-1)} = 0 \quad (\text{A1.18})$$

que é precisamente a equação (2.41).

APÊNDICE 2 – DEMONSTRAÇÃO DAS EQUAÇÕES 2.48 A 2.50

Este apêndice trata da demonstração das equações (2.48) a (2.50).

A expansão em série de Taylor das temperaturas nos nós $(i - 1)$ e $(i + 1)$ pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned} T_{i+1} &= T_i + h \frac{dT_i}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2T_i}{dx^2} + O_1(h^3) \\ T_{i-1} &= T_i - h \frac{dT_i}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2T_i}{dx^2} + O_2(h^3) \end{aligned} \quad (\text{A2.1})$$

Defina-se agora o seguinte parâmetro:

$$\gamma = Pe \quad (\text{A2.2})$$

em que Pe é o número de Péclet tal como definido pela equação (2.42).

A substituição da equação (A2.2) acima na equação (2.41) permite que se escreva a equação nodal do seguinte modo:

$$(1 + \gamma)T_{(i-1)} - 2T_i + (1 - \gamma)T_{(i+1)} = 0 \quad (\text{A2.3})$$

Substituindo-se as equações (A2.1) na equação nodal (A2.3) obtém-se:

$$h^2 \frac{d^2T_i}{dx^2} - 2\gamma h \frac{dT_i}{dx} + \xi = 0 \quad (\text{A2.4})$$

em que o resíduo ξ é explicitado como segue:

$$\xi = O_2(h^3) + \gamma O_2(h^3) + O_1(h^3) - \gamma O_1(h^3) \quad (\text{A2.5})$$

e os termos em $O_i(h^3)$, $i = 1, 2$, são como nas equações (A2.1).

A derivação da solução analítica (2.40) fornece a seguinte expressão:

$$\frac{dT}{dx} = \left(\frac{u_1}{k}\right)[T + \epsilon] \quad , \text{com:}$$

$$\epsilon = \frac{-T_0 \exp\left(\frac{u_1}{k}L\right) + T_L}{\exp\left(\frac{u_1}{k}L\right) - 1} \quad (\text{A2.6})$$

A equação (A2.6) possibilita a escrita da seguinte fórmula:

$$\frac{d^n T}{dx^n} = \left(\frac{u_1}{k}\right)^{n-2} \frac{d^2 T}{dx^2} \quad (\text{A2.7})$$

, para: ($n \geq 3$)

A substituição da equação (A2.7) na equação (A2.5) resulta:

$$\xi = (H_1 + H_2) \frac{d^2 T}{dx^2}$$

, com:

$$H_1 = -2\gamma h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{(n+2)!} \left(\frac{u_1}{k}\right)^n \quad (\text{A2.8})$$

$$H_2 = 2h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2n}}{(2n+2)!} \left(\frac{u_1}{k}\right)^{2n}$$

A substituição da equação (A2.2) nas equações (A2.8) resulta no que segue:

$$H_1 = -\frac{h^2}{2Pe} [\sinh(2Pe) - 2Pe]$$

$$H_2 = \frac{h^2}{2Pe^2} [\cosh(2Pe) - 1 - 2Pe^2]$$

(A2.9)

Substituindo-se as equações (A2.9) na primeira das equações (A2.8) e levando-se a equação resultante à expressão (A2.4) obtém-se:

$$u_1 \frac{dT}{dx} - k \frac{d^2 T}{dx^2} + k_h \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

, ou equivalentemente: (A2.10)

$$u_1 \frac{dT}{dx} - (k - k_h) \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

em que:

$$k_h = -k \left(\frac{1}{2Pe} \right) \left[\frac{1}{Pe} (\cosh(2Pe) - 1) - \sinh(2Pe) \right] \quad (A2.11)$$

O último termo do primeiro membro das equações (A2.10) é precisamente identificado como o erro de truncamento procurado:

$$ET = k_h \frac{d^2 T}{dx^2} \quad (A2.12)$$

em que k_h é como na equação (A2.11).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)