

Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas
Departamento de Astronomia

Adrián Rodríguez Colucci

Evolução Orbital de Planetas Quentes
Atribuída ao Efeito de Maré

São Paulo

2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Adrián Rodríguez Colucci

Evolução Orbital de Planetas Quentes

Atribuída ao Efeito de Maré

Tese apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Astronomia

Orientador: Prof. Dr. Sylvio Ferraz-Mello

São Paulo

2010

A mi familia y a Cíntia, mi mujer.

Agradecimentos

Quero agradecer especialmente à minha família que, apesar da distância, sempre tem me apoiado em todos os momentos da minha vida.

À minha grande amiga, parceira e mulher, Cíntia. Junto com ela me foi possível construir a pessoa que eu sou.

Ao Professor Sylvio Ferraz-Mello pela orientação, dedicação e paciência.

Aos Professores Tatiana Michtchenko e Cristián Beaugé pela colaboração e confiança.

Aos colegas do IAG: Raul (“*El Compadre*”), Gustavo, Juan, Maxi, Denise, Marcelle e aos meus companheiros de sala Gleidson, Marcos, Eduardo e Victor.

Ao Nelson Callegari Junior, Hauke Hussmann e Cristian Giuppone pela colaboração e amizade.

Aos meus amigos de longa data, Diego e Javier.

Aos colegas alunos e professores do Departamento de Astronomia da Faculdade de Ciências do Uruguai.

Ao Octavio Miloni, um ser de alma grande com quem aprendi o verdadeiro significado da palavra amizade.

Aos camaradas do Grupo Nzinga de Capoeira Angola de São Paulo, pela contínua troca da energia.

Ao IAG, à USP, a São Paulo e ao Brasil, pelos cinco anos de acolhimento e pelo tempo que virá.

A Montevideú, por saber me receber cada vez que a visito e pela vontade que sempre tenho de voltar.

“La vida de todo ser humano es un camino en dirección a sí mismo.”

Hermann Hesse

Resumo

Estudamos as variações de elementos orbitais e da rotação de planetas quentes devido ao efeito de maré. As escalas de tempo para a variação média de semi-eixo maior, excentricidade e inclinação são calculadas através de uma abordagem em que a teoria de Darwin é revisitada. A evolução orbital em sistemas de dois planetas é investigada, incluindo o caso em que uma super-Terra quente é acompanhada por um planeta gigante. Uma aplicação é feita sobre o sistema extra-solar CoRoT-7.

Abstract

We study the variations of orbital elements and the rotation of hot planets due to the action of tidal effect. The timescales for the mean variation of semi-major axis, eccentricity and inclination are computed through one approach in which the Darwin's theory of tides is re-visited. The orbital evolution in two-planet systems is investigated, including the case of a hot super-Earth accompanied by a giant planet. An application is done to the CoRoT-7 extrasolar system.

Sumário

1. <i>Introdução</i>	17
2. <i>Desenvolvimento da teoria de maré</i>	21
2.1 Objetivo	21
2.2 A maré estática	21
2.2.1 Figura de equilíbrio do corpo deformado	22
2.2.2 O potencial de maré	24
2.2.3 O potencial do corpo deformado	26
2.2.4 Desenvolvimento do potencial de maré	30
2.2.5 Ondas de maré	32
2.3 A maré dinâmica	34
2.3.1 Os atrasos das marés	34
2.3.2 Desenvolvimento do potencial de maré dinâmica	35
2.3.3 Força de maré	36
2.3.4 Torque de maré	38
3. <i>Evolução orbital e rotacional</i>	41
3.1 Objetivo	41
3.2 Rotação	41
3.2.1 Conservação do momento angular	41
3.2.2 Aplicações	43
3.2.3 Rotação Tipo II (planeta)	43
3.2.4 Rotação Tipo III (estrela)	46

3.3	Evolução orbital	46
3.3.1	Equações de Gauss	47
3.3.2	Variação de semi-eixo maior, excentricidade e inclinação orbital	48
3.3.3	Aplicação ao Tipo II	49
3.3.4	Dissipação de energia	51
3.3.5	Aplicação ao Tipo III	52
3.4	Modelo linear	52
3.4.1	Rotação	53
3.4.2	Variação média dos elementos	54
3.4.3	Evolução orbital acumulada	55
3.4.4	Argumento do pericentro e longitude do nodo ascendente	57
3.5	Outros modelos	59
3.5.1	Função de dissipação Q	59
3.5.2	Sobre a aplicação do modelo independente da frequência	61
4.	<i>Aplicação ao problema estrela-planeta quente</i>	63
4.1	Objetivo	63
4.2	Variações médias dos elementos	63
4.3	Escalas de tempo	64
4.3.1	Semi-eixo maior	65
4.3.2	Excentricidade	66
4.4	Decaimento orbital para diferentes tipos de planetas	67
4.4.1	Excentricidade crítica	67
4.4.2	Júpiter, Netuno e super-Terras quentes	68
4.4.3	Evolução no plano dos parâmetros de maré	69
4.5	Simulações numéricas	70
4.5.1	O modelo	70
4.5.2	Os sistemas	72
4.5.3	Resultados	74
4.5.4	O limite de Roche	77
4.5.5	Grande e_{ini}	79
4.6	Evolução no plano $e - a$	80

4.6.1	Conservação do momento angular	82
4.7	Rotação	84
4.7.1	Rotação do planeta	86
4.7.2	Rotação da estrela	90
4.8	Distribuição de exoplanetas quentes no plano $m_1 - P_{orb}$	94
5.	<i>Evolução dinâmica em sistemas de dois planetas</i>	97
5.1	Objetivo	97
5.2	Simulações numéricas	97
5.2.1	Sistema 1	98
5.2.2	Evolução a longo prazo	99
5.2.3	Evolução a curto prazo	100
5.2.4	Sistema 2	102
5.2.5	Sistema 3	104
5.2.6	Sobre fator de escala	106
5.3	Conservação do momento angular	107
5.3.1	Varição de e_2	108
5.3.2	Equações médias	111
5.4	Solução estacionária	112
5.5	Efeitos relativistas	113
6.	<i>Aplicação ao sistema CoRoT-7</i>	117
6.1	Objetivo	117
6.2	O sistema	117
6.3	Simulações numéricas	118
6.3.1	O modelo	118
6.3.2	Varição no plano dos elementos	118
6.3.3	Varição dos elementos	119
6.3.4	A rotação de CoRoT-7b	120
6.4	Escala de tempo para o decaimento orbital. O papel da maré estelar	121
6.5	Dissipação de energia	123
6.6	Comentários finais	124

6.6.1 Trabalho a ser feito	125
7. <i>Conclusões</i>	127
<i>Referências</i>	131
<i>Apêndice</i>	137
A. <i>O efeito da rotação</i>	139
A.1 Comparação entre as deformações devidas à maré e à rotação	139

Introdução

Há séculos é conhecido o efeito que a Lua exerce sobre os oceanos terrestres, provocando um fenômeno periódico que varia de intensidade ao longo do dia e do mês. Por causa do efeito ser mais intenso e facilmente observável sobre os oceanos, o fenômeno recebeu o nome de efeito de maré.

As primeiras teorias foram construídas para investigar a influência do efeito de maré na rotação da Terra e na órbita geocêntrica da Lua. O trabalho de Darwin (1880) foi um dos pioneiros, permitindo explicar a diminuição da velocidade angular de rotação da Terra e, ao mesmo tempo, o aumento no semi-eixo maior da órbita lunar (aumento da duração do dia e do mês), este último conhecido desde a época de Johannes Kepler. A interação de maré no sistema Terra-Lua continuou sendo analisada em trabalhos posteriores baseados na teoria de Darwin (Mignard, 1979; Touma & Wisdom, 1994). A aplicação das primeiras teorias também permitiu estudar a influência do efeito de maré na evolução orbital e rotacional de sistemas de satélites do Sistema Solar, sendo destacados alguns trabalhos clássicos (Jeffreys, 1961; Goldreich, 1963, 1965; Kaula, 1964; MacDonald, 1964; Goldreich & Soter, 1966). Posteriormente, começou a ser investigado o vínculo entre o efeito de maré e a evolução de sistemas de estrelas binárias (Alexander, 1973; Zahn, 1977; Hut, 1981).

O interesse no estudo do efeito de maré teve um importante crescimento a partir da última década do século XX, motivado pela descoberta de planetas gigantes em órbitas de curto período (interiores à órbita de Mercúrio), conhecidos como Júpiter quentes. Graças ao avanço nas técnicas de detecção foi possível a descoberta de planetas do tipo Netuno e, mais recentemente, tem sido descobertos planetas do tipo super-Terra (planetas com massa entre cinco e dez vezes a massa da Terra). O fato da maioria dos exoplanetas se

encontrarem muito próximos da estrela central evidencia uma evolução orbital influenciada pela ação do efeito de maré. Assim, as teorias já existentes foram adaptadas para investigar a aplicação ao caso estrela-planeta quente. A principal diferença com o problema planeta-satélite é o estado de rotação do corpo principal, em que o período de rotação da estrela é muito maior do que o período orbital do planeta quente.

A teoria de Darwin (1880) ainda fornece resultados gerais que podem ser aplicados ao caso específico em consideração. Alguns trabalhos recentes já exploraram a aplicação da teoria de Darwin na evolução orbital de um sistema estrela-planeta quente. Jackson *et al.* (2008a) investigaram a evolução orbital de exoplanetas reais de curto período através da integração numérica de equações médias, reproduzindo a distribuição observada de excentricidades orbitais (ver também Levrard *et al.*, 2009; Pont, 2009 por mais trabalhos sobre evolução orbital de exoplanetas reais atribuída ao efeito de maré). Jackson *et al.*, (2008b) analisaram o aquecimento de exoplanetas provocado pela dissipação de energia devida ao efeito de maré e as consequências para a habitabilidade (ver também Barnes *et al.*, 2009b). Outros trabalhos estudaram a determinação das propriedades físicas de planetas quentes através de uma abordagem em que a dinâmica orbital, influenciada pelo efeito de maré, é explorada (Barnes *et al.*, 2009b, Barnes *et al.*, 2010). O efeito de maré também está presente no contexto de sistemas múltiplos, em que a dinâmica orbital em sistemas contendo um planeta quente acompanhado por um planeta externo é investigada (Wu & Goldreich, 2002; Mardling & Lin, 2004; Mardling, 2007).

No entanto, os principais resultados para a variação média dos elementos orbitais e das rotações encontram-se espalhados em um grande número de trabalhos, incluindo diversos modelos relacionando os atrasos das ondas de maré com as frequências das mesmas. Portanto, resulta útil uma abordagem geral e auto-suficiente, sendo essa uma das primeiras tarefas a serem desenvolvidas neste trabalho. A vantagem do modelo de Darwin consiste em que a relação funcional entre atrasos e frequências das ondas de maré não é especificada, podendo ser adaptada à lei desejada. Todavia, alguns resultados obtidos através de uma abordagem em que as equações médias são integradas numericamente apresentam uma limitação natural por causa de desenvolvimentos em excentricidade e inclinação orbital. Nesse caso, é necessária a utilização de simulações numéricas para resolver as equações exatas do movimento no caso de órbitas muito excêntricas ou inclinadas.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar um estudo completo sobre a evolução orbital e rotacional de exoplanetas quentes atribuída ao efeito de maré. O Cap. 2 contém a fundamentação teórica da teoria de maré baseada na formulação de Darwin (1880). Através do potencial do corpo deformado obtemos a força e torque de maré em um ponto arbitrário do espaço para logo serem calculados na posição do corpo que cria a maré. No Cap. 3 calculamos a variação média de semi-eixo maior, excentricidade e inclinação da órbita relativa, assim como a variação média da velocidade angular de rotação de ambos corpos. Os resultados são válidos para qualquer sistema binário, sendo aplicado ao caso específico da interação estrela-planeta quente. Um modelo linear é utilizado para relacionar atrasos e frequências das ondas de maré. As escalas de tempo para a evolução dos elementos é analisada no Cap. 4, usando equações médias e simulações numéricas das equações exatas do movimento. As soluções estacionárias das rotações são obtidas, comparando escalas de tempo de evolução. Também, a possibilidade de cruzamento do limite de Roche via decaimento orbital é ilustrada com vários exemplos. O Cap. 5 é reservado para o estudo de sistemas com dois planetas, mostrando como a presença do planeta externo modifica a evolução devida ao efeito de maré do planeta quente. Três tipos diferentes de sistemas são investigados. A aplicação ao sistema real CoRoT-7, contendo duas super-Terras quentes, é estudada no Cap. 6, incluindo uma estimativa do tempo de vida médio de CoRoT-7b. Finalmente, o Cap. 7 está dedicado às conclusões do trabalho.

Desenvolvimento da teoria de maré

2.1 *Objetivo*

Neste capítulo inicial apresentaremos o desenvolvimento da teoria de maré tomando como base a teoria de Darwin (Darwin, 1880). Primeiramente introduziremos alguns conceitos básicos como figura de equilíbrio de uma massa fluida sob ação gravitacional de uma massa pontual externa, assim como o cálculo do potencial de maré criado por um corpo de forma arbitrária. Começaremos discutindo a maré estática, considerando que o corpo que sofre a maré é um corpo elástico, isto é, que se deforma instantaneamente. Quando há viscosidade e os movimentos orbitais e de rotação são considerados, o atraso na deformação provoca um torque de maré, responsável pela posterior evolução dinâmica do sistema.

2.2 *A maré estática*

Nesta seção estudaremos o efeito da força de maré sobre um corpo deformável (não rígido), produzida por uma massa pontual externa. Um corpo é chamado de *elástico* se, no processo de deformação, o deslocamento das diferentes partes do corpo com respeito às partes adjacentes é produzido sem atrito interno ou *fricção*. Se a força externa desaparecesse, o corpo elástico recuperaria a sua figura inicial, sem perda de energia por fricção. O caso em que a deformação é acompanhada por perda de energia será analisado na próxima seção.

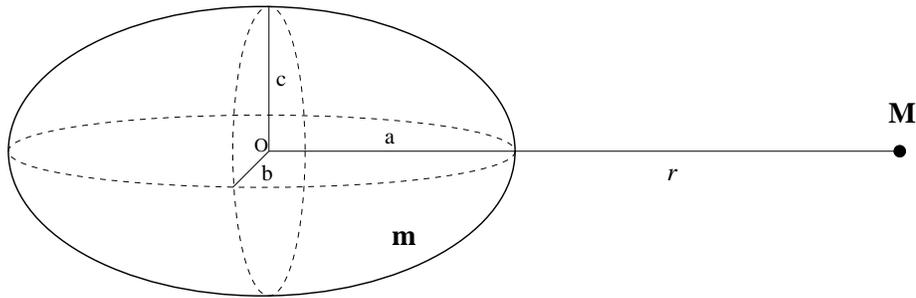


Figura 2.1: Ilustração do elipsóide prolato. O ponto O indica o centro de massa e a origem do sistema de referência. r é a distância desde O até o corpo perturbador \mathbf{M} . As dimensões do esferóide da figura estão exageradas para melhor visualização.

2.2.1 Figura de equilíbrio do corpo deformado

Considere-se um corpo extenso, homogêneo e incompressível (densidade e volume constantes) de massa m e um corpo pontiforme (partícula) de massa M a uma distância r do centro de massa O do corpo extenso. Estes corpos serão chamados de \mathbf{m} e \mathbf{M} , respectivamente. Supondo que o corpo \mathbf{m} tenha a capacidade de se deformar sob a ação gravitacional de \mathbf{M} , o nosso objetivo é investigar qual será a *figura de equilíbrio* adotada na deformação. A forma do corpo \mathbf{m} é determinada pelo efeito combinado da gravidade do próprio corpo mais a presença da massa externa. De maneira geral, vamos considerar o caso em que a figura de equilíbrio seja um *elipsóide*. Por definição, um elipsóide é uma superfície cuja equação, em coordenadas cartesianas (x, y, z) , está dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2.1)$$

onde a , b e c são os valores dos semi-eixos nas direções x , y e z , respectivamente (ver Fig. 2.1). Um resultado clássico mostra que, a figura de equilíbrio atingida por um corpo deformado sob ação de uma massa externa é um *esferóide* (ver Chandrasekhar, 1969, p. 194). Um esferóide é um caso particular de elipsóide em que dois dos semi-eixos são iguais. Escrevendo $b = c$, temos dois casos possíveis chamados *esferóide prolato* ($c < a$) e *esferóide oblato* ($c > a$). De acordo à geometria do nosso problema, o semi-eixo maior (a) estará apontando na direção OM , sendo assim um esferóide prolato. Note-se que, em geral, um esferóide prolato é a superfície de revolução obtida através de uma rotação de uma elipse ao redor do seu eixo maior. É fácil verificar que a equação de superfície de um esferóide

prolato está dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1. \quad (2.2)$$

Quando a rotação do corpo deformado é considerada (sem a presença da massa externa), a figura de equilíbrio obtida é um esferóide oblato, isto é, um elipsóide achatado na direção do eixo de rotação. É possível provar que para objetos com rotação livre quase síncrona (ver Sec. 2.2.5), a deformação provocada pela rotação é três vezes menor do que a provocada pela maré (ver Apêndice A). As consequências dinâmicas atribuídas à deformação por causa da rotação não serão consideradas neste trabalho.

A intersecção do esferóide com o plano definido pelos semi-eixos a e b é uma elipse de semi-eixos a (maior) e b (menor). Pela definição, a *elipticidade*, \hat{e} , está dada por

$$\hat{e} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}. \quad (2.3)$$

É claro que se $\hat{e} = 0$, temos $a = c$, em cujo caso o esferóide se transforma em uma esfera (já que $a = b = c$). Um outro parâmetro importante na análise é o *alongamento* (ou *prolateness*), ϵ , do esferóide, que mede a deformação do corpo na direção da massa externa e está definido como

$$\epsilon = 1 - \frac{c}{a}. \quad (2.4)$$

Usando as equações (2.3) e (2.4) obtemos $\hat{e}^2 = 2\epsilon - \epsilon^2$. Vamos considerar apenas o caso em que a deformação provoca um afastamento da forma esférica muito pequeno. Matematicamente, isto significa que $\epsilon \ll 1$, e assim, termos proporcionais a ϵ^2 serão desprezados. Então, segundo a aproximação anterior, temos a seguinte relação entre a elipticidade e o alongamento da deformação:

$$\hat{e}^2 \simeq 2\epsilon. \quad (2.5)$$

Por outro lado, o valor de ϵ pode ser expressado em função de massas e distâncias. Nós não vamos reproduzir aqui o procedimento para se obter tal resultado já que não é tão direto. O leitor pode encontrar a dedução em Chandrasekhar (1969, p. 194) e Danby (1988, p. 119). O valor de ϵ é

$$\epsilon = \frac{15 M}{4 m} \left(\frac{R}{r} \right)^3, \quad (2.6)$$

onde R é o raio médio de \mathbf{m} .

2.2.2 O potencial de maré

Para começar com uma visão intuitiva sobre o efeito de maré, vamos calcular o potencial da massa \mathbf{M} em um ponto no interior do corpo \mathbf{m} . Considere-se um sistema de referência com origem em O e direção do eixo x (em coordenadas cartesianas) coincidindo com OM e, seguindo a notação da seção anterior, $OM = \mathbf{r}$ (ver Fig. 2.2). Seja \mathbf{r}_p a posição de um ponto P do interior de \mathbf{m} e $\mathbf{d} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}$. O potencial criado por \mathbf{M} em P está dado por

$$V_P = -\frac{GM}{d} = \frac{-GM}{\sqrt{r_p^2 + r^2 - 2r_p r \cos \chi}}, \quad (2.7)$$

onde G é a constante de gravitação universal e $\chi = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}}{r_p r}\right)$ é o ângulo formado entre os vetores \mathbf{r}_p e \mathbf{r} . A equação (2.7) ainda pode ser escrita como

$$V_P = -\frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{r_p}{r} \right)^2 - 2 \frac{r_p}{r} \cos \chi \right]^{-1/2}. \quad (2.8)$$

Supondo que $r_p \ll r$, isto é, quando a massa externa está posicionada a uma grande distância do corpo deformado, a expressão dentro do parêntese da equação (2.8) pode ser desenvolvida em polinômios de Legendre, obtendo assim

$$V_P = -\frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_p}{r} \right)^l P_l(\cos \chi), \quad (2.9)$$

onde P_l é o polinômio de Legendre de grau l . Sabendo que $P_0(u) = 1$, o termo do potencial para $l = 0$ está dado por $-GM/r$. Até aqui estamos supondo que a partícula encontra-se a uma distância r constante de O . Nos próximos capítulos essa situação mudará quando estudarmos a maré dinâmica. Então, o termo em $l = 0$ tem um valor constante, e a sua origem pode ser explicada pelo fato de estarmos calculando o potencial criado pela massa M em um sistema de referência que não está centrado nela. Já que todo potencial está definido salvo uma constante aditiva, é possível somar a constante GM/r ao potencial V_P na equação (2.9), eliminando o termo em $l = 0$. Para $l = 1$ temos $P_1(u) = u$ e o potencial fica

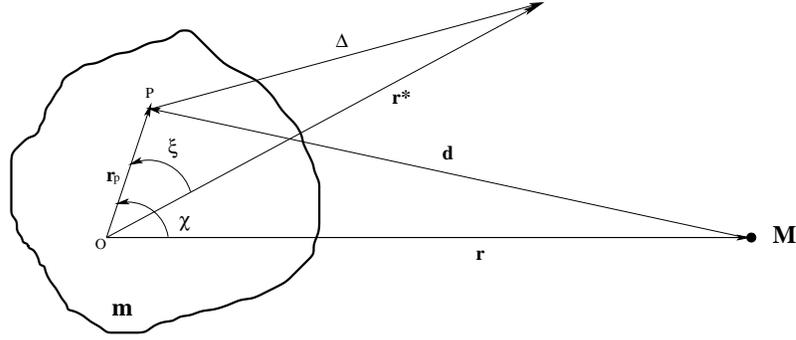


Figura 2.2: A figura mostra as variáveis utilizadas para calcular o potencial de corpo deformado em um ponto arbitrário do espaço.

$$-\frac{GM\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_P}{r^3}. \quad (2.10)$$

Este termo produz uma força (por unidade de massa, ou aceleração) no ponto P que pode ser calculada através de¹ $\mathbf{F}_P = -\nabla V_P$, obtendo assim, para $l = 1$

$$\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}. \quad (2.11)$$

Trata-se de uma força que não depende da posição do ponto P , motivo pelo qual será sentida com a mesma intensidade, direção e sentido por todos os pontos do corpo extenso. Note-se ainda que esta força é equivalente à força calculada em $P = O$, sendo então a força que o corpo extenso sofreria se toda a sua massa estivesse concentrada no centro de massa.

O resto do desenvolvimento da equação (2.9), isto é, para $l \geq 2$, leva em conta o fato de que o corpo \mathbf{m} não é puntiforme e recebe o nome de *potencial de maré*. Ele vale

$$V_M = -\frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r_P}{r}\right)^l P_l(\cos \chi) = V_P - \left(-\frac{GM\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_P}{r^3}\right). \quad (2.12)$$

A força que dá origem a este potencial se conhece como *força de maré*, e pode ser interpretada como a diferença entre a força produzida por \mathbf{M} em um ponto de \mathbf{m} e a produzida no centro de massa O . Isto é, aplicando $-\nabla_P$ na equação (2.12) temos

$$\mathbf{F}_M = \mathbf{F}_P - \frac{GM}{r^3}\mathbf{r}. \quad (2.13)$$

¹ Note-se que estamos usando a convenção de sinal usualmente adotada em Física, onde a força está dada pelo valor negativo do gradiente do potencial.

A força de maré é a responsável pela deformação do corpo extenso e, na maioria dos problemas, é suficiente considerar apenas o termo para $l = 2$.

2.2.3 O potencial do corpo deformado

Nesta seção vamos calcular o potencial criado em um ponto arbitrário devido à deformação produzida pela força de maré no corpo \mathbf{m} . Para isso, é necessário saber como calcular o potencial em um ponto exterior criado por um corpo de forma arbitrária. O cálculo do potencial pode ser consideravelmente simplificado se, a distância desde o centro de massa de \mathbf{m} até o ponto onde o potencial vai ser calculado é muito maior se comparada com as dimensões do próprio corpo. Existe uma forma simples de calcular dito potencial conhecida como *fórmula de MacCullagh*.

Considere-se um diferencial de massa dm no interior do corpo deformado \mathbf{m} , cuja posição está dada pelo ponto P , onde $OP = \mathbf{r}_p$. Seja \mathbf{r}^* a posição de um ponto arbitrário exterior a \mathbf{m} (Figura 2.2). O potencial criado pela massa m no ponto arbitrário é

$$U = -G \int \frac{dm}{\Delta} = -G \int \frac{dm}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}^*|} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} &= -G \int \frac{dm}{(r_p^2 + r^{*2} - 2r_p r^* \cos \xi)^{1/2}} \\ &= -\frac{G}{r^*} \int dm \left(1 - 2\frac{r_p}{r^*} \cos \xi + \frac{r_p^2}{r^{*2}} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $\xi = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}^*}{r_p r^*}\right)$ e $\Delta = \mathbf{r}^* - \mathbf{r}_p$. Assumindo $r_p \ll r^*$, a equação acima pode ser escrita como

$$\begin{aligned} U &= -\frac{G}{r^*} \int dm \left[1 + \frac{r_p}{r^*} \cos \xi - \frac{1}{2} \frac{r_p^2}{r^{*2}} + \frac{3}{2} \frac{r_p^2}{r^{*2}} \cos^2 \xi + O\left(\frac{r_p}{r^*}\right)^3 \right] \\ &= -\frac{G}{r^*} \left[\int dm + \frac{1}{r^*} \int dm (r_p \cos \xi) + \frac{1}{2r^{*2}} \int dm (2r_p^2 - 3r_p^2 \sin^2 \xi) + O\left(\frac{r_p}{r^*}\right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

A primeira integral é o valor da massa total m , enquanto que a segunda integral é nula já que a origem do sistema coincide com o centro de massa do corpo \mathbf{m} . Para calcular a terceira integral da equação (2.16), vamos lembrar brevemente algumas definições.

O *momento de inércia* de um corpo de forma arbitrária ao redor da direção \mathbf{r}^* , que passa pelo centro de massa O , está definido como

$$I_{\mathbf{r}^*} = \int dm (r_p \sin \xi)^2. \quad (2.17)$$

Considerando um sistema de referência com origem em O e eixos coordenados (x, y, z) , os momentos de inércia ao redor de cada eixo são

$$A = \int dm (y_p^2 + z_p^2) \quad B = \int dm (x_p^2 + z_p^2) \quad C = \int dm (x_p^2 + y_p^2), \quad (2.18)$$

onde (x_p, y_p, z_p) são as coordenadas do ponto P , ou $\mathbf{r}_p = (x_p, y_p, z_p)$, em tanto que as quantidades

$$F = \int dm (y_p z_p) \quad G = \int dm (x_p z_p) \quad H = \int dm (x_p y_p), \quad (2.19)$$

se conhecem como *produtos de inércia*. Das definições anteriores é fácil verificar que

$$2 \int dm (r_p^2) = A + B + C. \quad (2.20)$$

Assim, substituindo (2.17) e (2.20) na equação (2.16), obtemos

$$U_2 = -\frac{Gm}{r^*} - \frac{G}{2r^{*3}}(A + B + C - 3I_{\mathbf{r}^*}), \quad (2.21)$$

onde o sub-índice 2 se deve ao fato de estarmos considerando termos até segunda ordem em r_p/r^* . A equação (2.21) é a forma mais conhecida da fórmula de MacCullagh. É importante mencionar que, até aqui, nenhuma hipótese foi feita sobre a figura específica do corpo \mathbf{m} , sendo a análise válida para um corpo de forma arbitrária. No entanto, é imediato verificar que se o corpo é uma esfera, então $U_2 = -Gm/r^*$, já que $A = B = C = I_{\mathbf{r}^*}$. Em geral, a maioria dos corpos celestes se afastam muito pouco da forma esférica, sendo o segundo termo de (2.21) uma quantidade muito pequena, mas não só devido ao fato de $1/r^{*3}$ ser muito pequeno.

Vamos expressar a fórmula de MacCullagh de uma maneira um pouco diferente. É possível provar que qualquer corpo de forma arbitrária possui três *eixos de simetria* ou *eixos principais de inércia*, que se interceptam no centro de massa. Se escolhermos um

sistema de referência com origem no centro de massa e de tal maneira que os eixos coordenados coincidam com os eixos principais de inércia, as quantidades A, B, C recebem o nome de *momentos principais de inércia*, ao tempo que F, G, H são nulos nesse sistema. Chamaremos este sistema como EPI (eixos principais de inércia).

Usando a definição de $I_{\mathbf{r}^*}$ (2.17) e (2.20), temos

$$I_{\mathbf{r}^*} = \int dm \left[r_p^2 - \frac{(\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{r}_p)^2}{r^{*2}} \right] = \frac{A + B + C}{2} - \frac{1}{r^{*2}} \int dm (x^* x_p + y^* y_p + z^* z_p)^2, \quad (2.22)$$

onde $\mathbf{r}^* = (x^*, y^*, z^*)$. A partir das definições (2.18) também temos (ver Beutler, 2005, p. 71)

$$\begin{aligned} \int dm (x_p^2) &= \frac{1}{2}(A + B + C) - A, \\ \int dm (y_p^2) &= \frac{1}{2}(A + B + C) - B, \\ \int dm (z_p^2) &= \frac{1}{2}(A + B + C) - C. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Substituindo na equação (2.22) e sabendo que no sistema EPI, $F = G = H = 0$, obtemos

$$I_{\mathbf{r}^*} = \frac{Ax^{*2} + By^{*2} + Cz^{*2}}{r^{*2}}. \quad (2.24)$$

Assim, a fórmula de MacCullagh fica

$$U_2 = -\frac{Gm}{r^*} - \frac{G}{2r^{*3}} \left[(A + B + C) - 3 \frac{Ax^{*2} + By^{*2} + Cz^{*2}}{r^{*2}} \right]. \quad (2.25)$$

Os resultados até agora apresentados, podem ser aplicados ao esferóide que estamos estudando (ver Seção 2.2.1). Vamos supor que os eixos coordenados (x, y, z) coincidam com as direções dos semi-eixos do esferóide (a, b, c) (Fig. 2.3). Devido a que os eixos do esferóide também são eixos de simetria, o sistema escolhido é o sistema EPI. Os momentos principais de inércia podem ser calculados usando as definições (2.18). Os resultados são, para um elipsóide de semi-eixos a, b, c (ver Danby, 1988, p. 95)

$$A = \frac{1}{5}m(b^2 + c^2), \quad B = \frac{1}{5}m(a^2 + c^2), \quad C = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2). \quad (2.26)$$

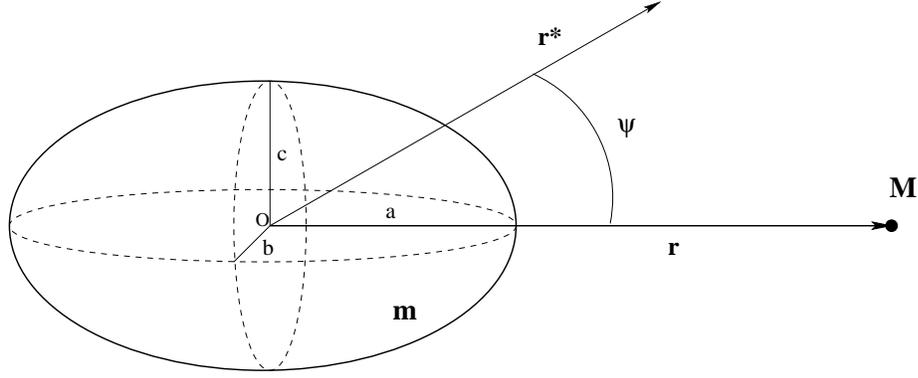


Figura 2.3: Figura anterior aplicada ao esferóide. Os vetores indicam a posição do corpo M e de um ponto arbitrário no espaço, enquanto ψ é o ângulo formado entre eles.

Sabendo que no caso do nosso esferóide $c = b < a$, segue $C = B > A$. Da figura, ψ é o ângulo formado entre os vetores \mathbf{r}^* (posição do ponto arbitrário) e \mathbf{r} (posição de M). Então temos $x^{*2} = (r^* \cos \psi)^2$ e $(y^{*2} + z^{*2}) = (r^* \sin \psi)^2$, e assim, tendo em conta que $\sin^2 \psi = 1 - \cos^2 \psi$, a equação (2.25) pode ser escrita como

$$U_2 = -\frac{Gm}{r^*} \left[1 + \frac{B - A}{2mr^{*2}} (3 \cos^2 \psi - 1) \right]. \quad (2.27)$$

O potencial ainda pode ser escrito em função do alongamento ϵ , definido na Sec. 2.2.1. Sabendo que $B - A = A(B/A - 1)$, e usando as equações (2.26) para $b = c$, temos

$$\frac{B}{A} - 1 = \frac{a^2 + c^2}{2c^2} - 1 = \frac{a^2 - c^2}{2c^2}. \quad (2.28)$$

Da definição de elipticidade (equação (2.3)), $c^2 = a^2(1 - \widehat{e}^2)$ e a equação acima fica

$$\frac{B}{A} - 1 = \frac{\widehat{e}^2}{2(1 - \widehat{e}^2)} \simeq \frac{\widehat{e}^2}{2} \simeq \epsilon, \quad (2.29)$$

onde o resultado (2.5) foi usado. Desta maneira temos $B - A \simeq \epsilon A$, e assim, substituindo em (2.27) junto com o valor de ϵ dado por (2.6), obtemos

$$U_2 = -\frac{Gm}{r^*} - \frac{15}{8}GA \left(\frac{M}{m} \right) \left(\frac{R}{rr^*} \right)^3 (3 \cos^2 \psi - 1), \quad (2.30)$$

ou, definindo o parâmetro $k_f \equiv 15A/4mR^2$,

$$U_2 = -\frac{Gm}{r^*} - \frac{k_f GMR^5}{2r^3 r^{*3}} (3 \cos^2 \psi - 1). \quad (2.31)$$

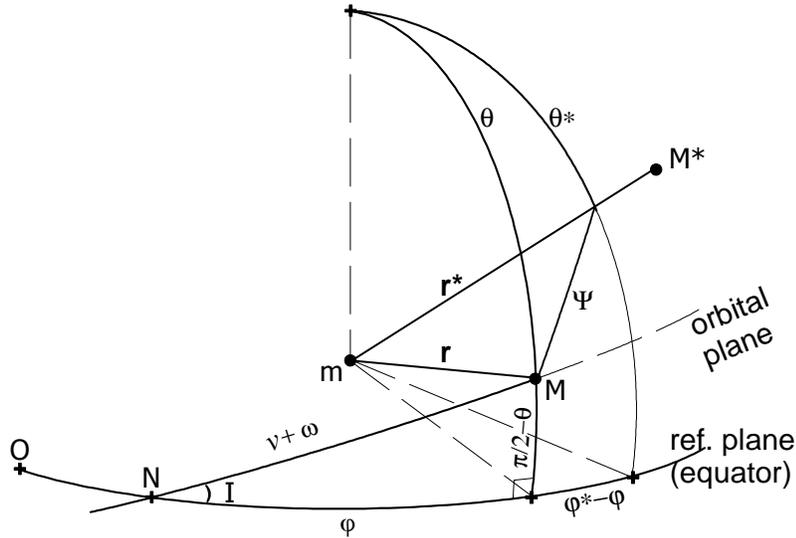


Figura 2.4: Sistema de coordenadas esféricas com origem no centro de massa de \mathbf{m} . O equador do corpo deformado é o plano de referência, formando um ângulo I com o plano orbital.

O parâmetro k_f é usualmente chamado de *número de Love fluido*. No caso de uma esfera homogênea, $A = 2mR^2/5$, e então $k_f = 3/2$.

U_2 é o potencial, em um ponto arbitrário \mathbf{r}^* , atribuído à deformação do corpo \mathbf{m} provocada pela força de maré de \mathbf{M} . Por simplicidade, chamaremos U_2 como *potencial de maré* (sem confundir com o potencial V_M de (2.12)), e a força devida a ele como *força de maré*.

2.2.4 Desenvolvimento do potencial de maré

Vamos considerar que o corpo \mathbf{M} possui um movimento elíptico ao redor de \mathbf{m} . Desta maneira poderemos escrever o ângulo ψ como função das coordenadas do ponto arbitrário e dos elementos orbitais de \mathbf{M} . Escolhemos um sistema de coordenadas esféricas centrado em \mathbf{m} , onde os vetores de posição de \mathbf{M} e do ponto arbitrário são $\mathbf{r} \equiv (r, \theta, \varphi)$ e $\mathbf{r}^* \equiv (r^*, \theta^*, \varphi^*)$, respectivamente. Os ângulos θ e θ^* são co-latitudes, enquanto φ e φ^* são longitudes medidas desde o ponto N (ver Figura 2.4). O *plano de referência* é o *equador* do corpo deformado. O ângulo I formado entre o equador e o *plano orbital* é chamado de *inclinação*². Então temos

² Note ainda que por definição, se o plano de referência é o equador então o ângulo I também pode ser chamado de *obliquidade*.

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta^* + \sin \theta \sin \theta^* \cos(\varphi - \varphi^*). \quad (2.32)$$

Do triângulo esférico da parte inferior da figura, podemos obter algumas relações entre as coordenadas de \mathbf{r} e os elementos orbitais de \mathbf{M} . Isto é

$$\sin \theta = \cos(\omega + v) \cos \varphi + \sin(\omega + v) \sin \varphi \cos I, \quad (2.33)$$

$$\cos \theta = \sin(\omega + v) \sin I, \quad (2.34)$$

e

$$\varphi = v + \omega - \frac{1}{4} \sin(2v + 2\omega) \sin^2 I + O(I^4), \quad (2.35)$$

onde ω é o *argumento do pericentro* e v é a *anomalia verdadeira* de \mathbf{M} . A partir das equações do movimento Kepleriano temos, introduzindo a *anomalia média* ℓ

$$v = \ell + 2e \sin \ell + \frac{5}{4} e^2 \sin 2\ell + O(e^3), \quad (2.36)$$

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos \ell + \frac{1}{2} e^2 (1 - \cos 2\ell) + O(e^3), \quad (2.37)$$

(ver Brouwer and Clemence, 1961) onde e é a *excentricidade* da órbita e a é o *semi-eixo maior*. Notamos que as expansões do movimento elíptico foram tomadas até *segunda ordem* em excentricidade e inclinação orbital³.

Substituindo as equações (2.33)–(2.37) nas (2.32) e (2.31), obtemos finalmente

$$\begin{aligned} U_2 = & -\frac{3k_f G M R^5}{4a^3 r^{*3}} \left[-\frac{2}{3} - e^2 + \left(1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}S^2\right) P^2 \right. \\ & + \left(1 - \frac{5}{2}e^2 - \frac{1}{2}S^2\right) P^2 \cos(2\varphi^* - 2\ell - 2\omega) + \frac{7}{2}eP^2 \cos(2\varphi^* - 3\ell - 2\omega) \\ & - \frac{1}{2}eP^2 \cos(2\varphi^* - \ell - 2\omega) + \frac{17}{2}e^2 P^2 \cos(2\varphi^* - 4\ell - 2\omega) \\ & - \left(2 - 3P^2\right) e \cos \ell - \left(3 - \frac{9}{2}P^2\right) e^2 \cos 2\ell \\ & \left. + QS \left(\sin \varphi^* - \sin(\varphi^* - 2\ell - 2\omega) \right) + \frac{1}{2}P^2 S^2 \left(\cos 2\varphi^* + \cos(2\ell + 2\omega) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde por simplicidade adotamos as seguintes notações

³ As expansões deverão ser consideradas até quarta ordem para calcular a variação do argumento do pericentro (ver Sec. 3.4.4)

$$S = \sin I \quad (2.39)$$

$$P = \sin \theta^* \quad (2.40)$$

$$Q = \sin 2\theta^*. \quad (2.41)$$

U_2 é o potencial de maré estático gerado pelo corpo deformado \mathbf{m} , calculado em um ponto arbitrário \mathbf{r}^* .

2.2.5 Ondas de maré

O potencial U_2 é uma função multi-periódica, em que cada termo pode ser representado por um período (ou frequência) determinado. Para identificar cada um deles, vamos considerar um ponto fixo na superfície do corpo \mathbf{m} . A longitude deste ponto é $\varphi^* = \Omega t + \varphi_0^*$, onde $\Omega = \Omega \hat{\mathbf{k}}$ é o vetor *velocidade angular de rotação* de \mathbf{m} , assumido normal ao plano de referência, enquanto φ_0^* é uma constante. Cada termo de U_2 que depende de φ^* corresponde a uma onda de maré que viaja através do corpo com direção e velocidade bem determinadas. Todos os termos contribuem, de diferentes maneiras, à formação e evolução do “calombo de maré” no corpo deformado.

Vamos tomar como exemplo o termo em U_2 proporcional a $\cos(2\varphi^* - 2\ell - 2\omega)$. Substituindo o valor de φ^* , junto com a definição de anomalia média, $\ell = nt + T_0$, fica $\cos(2\Omega t - 2nt - 2\omega - 2T_0 - 2\varphi_0^*)$, onde n é o *movimento médio* e T_0 o tempo de passagem pelo pericentro da órbita. Portanto, o cosseno pode ser escrito na forma $\cos(\nu t + \alpha_0)$, onde ν seria a frequência da onda e α_0 uma constante de fase. É fácil verificar que neste exemplo temos $\nu = 2\Omega - 2n$. Assim por diante, é possível identificar cada uma das frequências que formam parte do potencial de maré (ver Tabela 2.1).

Três casos podem ser identificados, dependendo da velocidade angular de rotação do corpo deformado. O *Tipo I* corresponde a um corpo rodando muito mais de pressa do que o movimento médio da órbita do outro corpo ($\Omega \gg n$). Este é o caso do sistema Terra-Lua, com a Terra sendo \mathbf{m} e a Lua \mathbf{M} (lembrando que o período de rotação da Terra é 24 horas e o período orbital da Lua é 27.3 dias). Note que o período P_0 da onda com frequência $\nu_0 = 2\Omega - 2n \simeq 2\Omega$ é $P_0 \equiv 2\pi\nu_0^{-1} \simeq \pi\Omega^{-1}$. Por outro lado, sabemos que da definição de *período de rotação* P_{rot} , temos $P_{rot} \equiv 2\pi\Omega^{-1}$, então $P_0 \simeq P_{rot}/2$, que aplicado ao caso

No.	Frequência	Tipo I $\Omega \gg n$	Tipo II $\Omega \simeq n$	Tipo III $\Omega \ll n$
0	$2\Omega - 2n$	semi-diurna	–	semi-anual
1	$2\Omega - 3n$	semi-diurna	mensal	1/3 de ano
2	$2\Omega - n$	semi-diurna	mensal	anual
3	$2\Omega - 4n$	semi-diurna	semi-mensal	1/4 de ano
4	2Ω	semi-diurna	semi-mensal	“semi-diurna”
5	n	mensal (radial)	mensal (radial)	anual (radial)
6, 7	$2n$	semi-mensal (radial)	semi-mensal (radial)	semi-anual (radial)
8	$\Omega - 2n$	diurna	mensal	semi-anual
9	Ω	diurna	mensal	“diurna”

Tabela 2.1 - Identificação de todas as frequências do potencial de maré, dado pela equação (2.38).

da Terra daria $P_0 = 12$ horas. Essa é a razão de porque a onda de maré de frequência ν_0 chama-se *maré semi-diurna*. Ainda no Tipo I, as ondas de frequências $\nu_1 \dots \nu_4$ também são marés semi-diurnas, enquanto as de frequências ν_8, ν_9 são *marés diurnas* ($P_0 = 24$ horas). As frequências $\nu_5 \dots \nu_7$ não dependem de Ω e têm origem em aqueles termos de U_2 independentes da longitude φ^* . São ondas cujo período depende apenas do movimento médio n e são usualmente conhecidas como *marés radiais*. No caso do sistema Terra-Lua temos $P_5 = P_{orb}$ e $P_6 = P_7 = P_{orb}/2$, onde $P_{orb} \equiv 2\pi n^{-1}$ é o *período orbital*, ou seja que correspondem às *marés mensais* e *semi-mensais*.

O *Tipo II* é o caso em que a rotação e o movimento médio têm valores similares. Por esse motivo o movimento é conhecido como *síncrono* ($\Omega = n$) ou *quase-síncrono* ($\Omega \simeq n$). O sistema Terra-Lua ainda serve como exemplo, porém neste caso temos $\mathbf{m} = \text{Lua}$ e $\mathbf{M} = \text{Terra}$, já que é bem conhecido o estado de sincronismo rotação-órbita que o movimento da Lua apresenta. Com exceção da onda de frequência ν_0 , cujo período pode ser infinito, todas as ondas serão do tipo mensais ou semi-mensais (ver Tabela 2.1).

Finalmente, o *Tipo III* corresponde ao caso em que a rotação do corpo deformado é

muito mais lenta do que o movimento médio orbital ($\Omega \ll n$). Notamos que no Sistema Solar não existe exemplo que se ajuste ao movimento Tipo III⁴, já que se tomarmos o caso extremo onde $\mathbf{m} = \text{Sol}$ e $\mathbf{M} = \text{Mercúrio}$, temos $P_{rot} \simeq 25.4$ dias⁵ e $P_{orb} = 88$ dias ($\Omega > n$). Portanto, o Tipo III é especialmente aplicável no caso de *exoplanetas quentes* ou muito quentes, para os quais o período orbital é de apenas alguns dias (< 4 dias). É importante lembrar que até o momento, o exoplaneta descoberto de menor período orbital é WASP-19, com $P_{orb} = 0.79$ dias⁶. Introduzindo a aproximação $\Omega \ll n$ vamos ter *marés anuais, semi-anuais, etc.*

É importante mencionar que os nomes diurno, mensal e anual não necessariamente correspondem a valores dos sistemas Terra-Lua e Terra-Sol (24 horas, 27.3 dias e 365.25 dias, respectivamente). Note por exemplo que no caso do exoplaneta WASP-19, 1 “ano” = 0.79 dias.

A Tabela 2.1 está limitada às componentes do potencial de maré U_2 , originalmente desenvolvido até segunda ordem em excentricidade e inclinação. Quando termos de ordem maior são considerados, muitas outras frequências aparecem.

2.3 A maré dinâmica

2.3.1 Os atrasos das marés

Nas seções anteriores temos considerado que \mathbf{m} é um corpo perfeitamente elástico, que atinge a sua figura de equilíbrio instantaneamente sob a ação de \mathbf{M} . Porém, no caso de um corpo real, a *viscosidade* introduz um atraso entre a ação da força de maré e a deformação correspondente. Esse atraso se conhece como *atraso da onda de maré* ou simplesmente atraso de maré e vem acompanhado por perda de energia interna devido à fricção.

Na teoria de Darwin, o potencial de maré é uma composição de termos periódicos com diferentes frequências, como no caso de U_2 . O atraso de maré é introduzido em cada termo periódico na forma de *ângulo de defasagem* e, assim, o potencial é então desenvolvido a primeira ordem nesse ângulo (Darwin, 1880). Chamando $\Phi_i = \nu_i t + \alpha_i$ um dos argumentos, os desenvolvimentos são feitos da seguinte maneira:

⁴ No sistema Marte (\mathbf{m}) - Phobos (\mathbf{M}) temos $P_{rot} \sim 1$ dia e $P_{orb} = 0.32$ dias ($\Omega < n$)

⁵ O valor exato depende da latitude.

⁶ <http://exoplanet.eu>

$$\begin{aligned}\cos(\Phi_i - \varepsilon_i) &\simeq \cos \Phi_i + \varepsilon_i \sin \Phi_i \\ \sin(\Phi_i - \varepsilon_i) &\simeq \sin \Phi_i - \varepsilon_i \cos \Phi_i,\end{aligned}\tag{2.42}$$

onde ε_i é o ângulo de defasagem da onda de frequência ν_i .

É importante mencionar que na teoria de Darwin os atrasos das marés são introduzidos sem fazer nenhuma hipótese sobre a dependência dos ângulos de defasagem com as frequências correspondentes. Ao longo deste capítulo trabalharemos de forma genérica, sem o conhecimento da função $\varepsilon_i(\nu_i)$. Porém, por razões físicas é necessário assumir as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i = 0 &\quad \text{se} \quad \nu_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots \\ \varepsilon_i = \varepsilon_j &\quad \text{se} \quad \nu_i = \nu_j, \quad \forall i \neq j \\ sg(\varepsilon_i) = sg(\nu_i) &\quad \forall i = 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{2.43}$$

Desta forma, no caso das marés Tipo I temos (ver Tabela 2.1), $\varepsilon_0 \simeq \varepsilon_1 \simeq \varepsilon_2 \simeq \varepsilon_3 \simeq \varepsilon_4 > 0$, além de $\varepsilon_8 \simeq \varepsilon_9 > 0$. Para o Tipo II, $\varepsilon_0 \simeq 0$, $\varepsilon_1 \simeq -\varepsilon_2 \simeq \varepsilon_8 \simeq -\varepsilon_9 < 0$, $\varepsilon_3 \simeq -\varepsilon_4 < 0$. Para o Tipo III, $\varepsilon_i < 0$ ($i = 0, 1, 2, 3, 8$) e $\varepsilon_i > 0$ ($i = 4, 5, 6, 7, 9$).

Nas aplicações estudadas nos próximos capítulos, vamos impor um modelo linear para estudar a variação dos elementos orbitais, assim como a rotação dos corpos envolvidos, no caso da interação de maré estrela-planeta quente. Portanto, nos limitaremos apenas aos Tipos II e III (ver próximos capítulos).

2.3.2 Desenvolvimento do potencial de maré dinâmica

Além do atraso das ondas de maré, introduzido na forma de ângulo de fase na seção anterior, o corpo \mathbf{m} não atinge a deformação total correspondente ao seu número de Love. Por causa do atraso, a deformação final será menor do que a deformação máxima possível. Assim, em lugar de k_f devemos considerar, para cada uma das ondas de maré, um número de Love $k_i > 0$ que depende da frequência ν_i correspondente. Para simplificar, vamos definir um novo parâmetro da forma

$$\varepsilon'_i = \frac{k_i}{k_d} \varepsilon_i, \quad (2.44)$$

onde $k_d > 0$ é o *número de Love dinâmico*, correspondente à onda de maré principal. Note que no Tipo I a contribuição mais importante é devida à maré semi-diurna, e portanto nesse caso teríamos $k_d = k_0 (= k_1 = \dots = k_4)$.

Introduzindo os atrasos na forma (2.42) no potencial (2.38), obtemos

$$\hat{U}_2 = U_2 + U_{lag}, \quad (2.45)$$

onde

$$\begin{aligned} U_{lag} = & -\frac{3k_d GMR^5}{8a^3 r^{*3}} \left[P^2 \varepsilon'_0 (2 - 5e^2 - S^2) \sin(2\varphi^* - 2\ell - 2\omega) \right. \\ & + eP^2 (7\varepsilon'_1 \sin(2\varphi^* - 3\ell - 2\omega) - \varepsilon'_2 \sin(2\varphi^* - \ell - 2\omega)) \\ & + 17e^2 P^2 \varepsilon'_3 \sin(2\varphi^* - 4\ell - 2\omega) + P^2 S^2 \varepsilon'_4 \sin 2\varphi^* \\ & - e\varepsilon'_5 (4 - 6P^2) \sin \ell - 3e^2 \varepsilon'_6 (2 - 3P^2) \sin 2\ell \\ & \left. + P^2 S^2 \varepsilon'_7 \sin(2\ell + 2\omega) + 2QS (\varepsilon'_8 \cos(\varphi^* - 2\ell - 2\omega) - \varepsilon'_9 \cos \varphi^*) \right]. \quad (2.46) \end{aligned}$$

Desta maneira o potencial de maré fica dividido em duas partes, correspondentes às marés estática e dinâmica.

Note que através da definição (2.44), evitamos usar um número de Love (k_i) para cada frequência, sendo absorvidos nos ε'_i e trabalhando apenas com k_d .

Em alguns trabalhos clássicos dedicados a estudar o efeito das marés na Terra, os atrasos são introduzidos como $2\varepsilon_i$ devido a que, como já mencionamos, o termo principal do potencial (ordem zero em e e S) corresponde à maré semi-diurna (ver Jeffreys, 1961; Goldreich, 1963; MacDonald, 1964; Goldreich & Soter, 1966).

2.3.3 Força de maré

O potencial \hat{U}_2 gera uma força sobre uma massa pontual M^* , localizada em um *ponto arbitrário* do espaço $\mathbf{r}^* = (r^*, \theta^*, \varphi^*)$, que pode ser calculada como

$$\mathbf{F} = -M^* \nabla_{\mathbf{r}^*} \hat{U}_2 = \underbrace{-M^* \frac{\partial \hat{U}_2}{\partial r^*}}_{F_1} \hat{\mathbf{r}}^* - \underbrace{\frac{M^*}{r^*} \frac{\partial \hat{U}_2}{\partial \theta^*}}_{F_2} \hat{\theta}^* - \underbrace{\frac{M^*}{r^* \sin \theta^*} \frac{\partial \hat{U}_2}{\partial \varphi^*}}_{F_3} \hat{\varphi}^*, \quad (2.47)$$

onde $\nabla_{\mathbf{r}^*}$ representa a função gradiente aplicada no ponto \mathbf{r}^* . A terna $(\hat{r}^*, \hat{\theta}^*, \hat{\varphi}^*)$ forma em \mathbf{r}^* um conjunto ortogonal de vetores unitários na direção positiva dos incrementos $(\hat{\varphi}^* = \hat{r}^* \times \hat{\theta}^*)$, e assim a força fica decomposta em três componentes ortogonais, F_1 , F_2 e F_3 . A força \mathbf{F} é a *força de maré* gerada pelo corpo deformado \mathbf{m} em um ponto arbitrário \mathbf{r}^* .

Sabendo que $\nabla_{\mathbf{r}^*} \hat{U}_2 = \nabla_{\mathbf{r}^*} U_2 + \nabla_{\mathbf{r}^*} U_{lag}$, podemos calcular separadamente as contribuições atribuídas a cada uma das componentes para depois serem somadas. As expressões destas componentes podem ser vistas em Ferraz-Mello *et al.* (2008) (versão astro-ph).

Para calcular a força de maré *no corpo que gera a maré*, \mathbf{M} , é suficiente fazer a identificação $(M^*, r^*, \theta^*, \varphi^*) \rightarrow (M, r, \theta, \varphi)$, lembrando que $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$ e M são a posição e massa de \mathbf{M} . É muito importante mencionar que essa identificação é feita *depois* do cálculo do gradiente de \hat{U}_2 .

As forças devidas a U_2 são

$$F_1^{U_2} = -\frac{3k_f GM^2 R^5}{r^7}, \quad F_2^{U_2} = F_3^{U_2} = 0. \quad (2.48)$$

Neste caso só a componente radial não é nula na ausência dos atrasos, como era de se esperar levando em conta a simetria do problema (ver Fig. 2.3).

As forças devidas a U_{lag} são, usando as equações (2.33)–(2.37)

$$F_1(\mathbf{r}) = \frac{3k_d GM^2 R^5}{8a^7} \left[\begin{aligned} & -3e(8\varepsilon'_0 - 7\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2 + 2\varepsilon'_5) \sin \ell \\ & -3e^2(21\varepsilon'_0 - 4\varepsilon'_2 - 17\varepsilon'_3 + 4\varepsilon'_5 + 3\varepsilon'_6) \sin 2\ell \\ & +3S^2(\varepsilon'_0 - \varepsilon'_4 - \varepsilon'_7 - 2\varepsilon'_8 + 2\varepsilon'_9) \sin(2\ell + 2\omega) \end{aligned} \right] \quad (2.49)$$

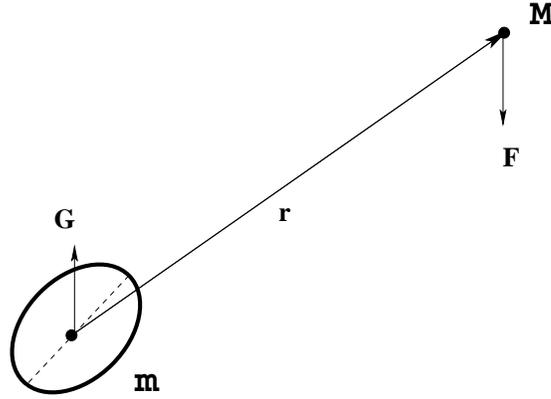


Figura 2.5: Ilustração das forças agindo nos corpos envolvidos na interação de maré. As direções reais dos vetores \mathbf{F} e \mathbf{G} não são necessariamente as mostradas no desenho. Neste exemplo $\Omega > n$.

$$\begin{aligned}
 F_2(\mathbf{r}) = & \frac{3k_d GM^2 R^5}{8a^7} \left[eS(+8\varepsilon'_0 - 7\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2 + 6\varepsilon'_5 - 12\varepsilon'_8 + 4\varepsilon'_9 + 6\varepsilon'_{15} + 2\varepsilon'_{16}) \cos \omega \right. \\
 & - eS(8\varepsilon'_0 - 7\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2 + 6\varepsilon'_5 + 4\varepsilon'_8 - 12\varepsilon'_9 - 6\varepsilon'_{14} + 14\varepsilon'_{17}) \cos(2\ell + \omega) \\
 & \left. - 4S(\varepsilon'_8 - \varepsilon'_9) \cos(\ell + \omega) \right] \quad (2.50)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_3(\mathbf{r}) = & \frac{3k_d GM^2 R^5}{8a^7} \left[(4 - 14e^2 - 3S^2)\varepsilon'_0 + 56e^2\varepsilon'_1 + 2S^2(\varepsilon'_8 + \varepsilon'_9) \right. \\
 & + e(16\varepsilon'_0 + 14\varepsilon'_1 - 2\varepsilon'_2) \cos \ell \\
 & + e^2(44\varepsilon'_0 - 8\varepsilon'_2 + 34\varepsilon'_3) \cos 2\ell \\
 & \left. + S^2(\varepsilon'_0 + 2\varepsilon'_4 - 2\varepsilon'_8 - 2\varepsilon'_9) \cos(2\ell + 2\omega) \right]. \quad (2.51)
 \end{aligned}$$

Notamos que quando $I = 0$, segue $S = 0$ e então F_2 se anula. De fato, F_2 é a componente em $\hat{\theta}^*$, que não existe no caso em que os planos de referência e orbital coincidem⁷ (ver Fig. 2.4).

2.3.4 Torque de maré

O fato de que exista um atraso na deformação do corpo \mathbf{m} faz com que o calombo provocado pela maré não esteja alinhado com a direção de \mathbf{r} , causando a aparição de um *torque de maré*. Pela definição, o torque está dado por

⁷ Note também que se $e = I = 0$, então $F_1 = 0$

$$\mathcal{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (2.52)$$

É muito importante notar que, ao ser calculado em \mathbf{r} , o torque \mathcal{M} “age na órbita” de \mathbf{M} . O torque *no corpo* \mathbf{m} seria formalmente nulo se calculado a partir da definição, já que a origem do sistema de referência é precisamente o centro de massa de \mathbf{m} . Porém, sabendo que $\mathbf{G} = -\mathbf{F}$ é a *força de reação* aplicada em \mathbf{m} (ver Fig. 2.5), o torque no corpo deformado é simplesmente $-\mathcal{M}$. O torque \mathcal{M} será o responsável pela mudança no momento angular orbital do sistema, enquanto $-\mathcal{M}$ controlará o movimento de rotação de \mathbf{m} . No próximo capítulo vamos explicar mais em detalhe no contexto da conservação do momento angular total do sistema.

Continuando com o cálculo do torque da equação (2.52), no sistema de referência $(\hat{r}^*, \hat{\theta}^*, \hat{\varphi}^*)$, onde $\mathbf{r} = (r, 0, 0)$ e $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, temos

$$\mathcal{M} \equiv (0, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3) = -rF_3\hat{\theta}^* + rF_2\hat{\varphi}^*. \quad (2.53)$$

Não vamos escrever explicitamente o resultado já que é simplesmente o produto de r com as componentes de \mathbf{F} , dadas nas equações (2.50) e (2.51). Por outro lado, nas aplicações precisaremos calcular o *valor médio* do torque e, portanto, deve ser calculado em um sistema de referência fixo, lembrando que o sistema $(\hat{r}^*, \hat{\theta}^*, \hat{\varphi}^*)$ é solidário ao movimento orbital de \mathbf{M} . Em um sistema com coordenadas (x, y, z) e cujo eixo x esteja apontando ao *nodo ascendente* N (ver Fig. 2.6), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \mathcal{M}_2 \cos \theta \cos \varphi - \mathcal{M}_3 \sin \varphi \\ \mathcal{M}_y &= \mathcal{M}_2 \cos \theta \sin \varphi + \mathcal{M}_3 \cos \varphi \\ \mathcal{M}_z &= -\mathcal{M}_2 \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.54)$$

O valor médio é tomado no tempo t durante um período orbital P_{orb} , supondo que as mudanças causadas pelo efeito de maré acontecem em tempos maiores ao período orbital. Em geral, o valor médio no tempo durante um período orbital de uma variável X é definido como

$$\langle X \rangle_t \equiv \frac{1}{P_{orb}} \int_0^{P_{orb}} X dt. \quad (2.55)$$

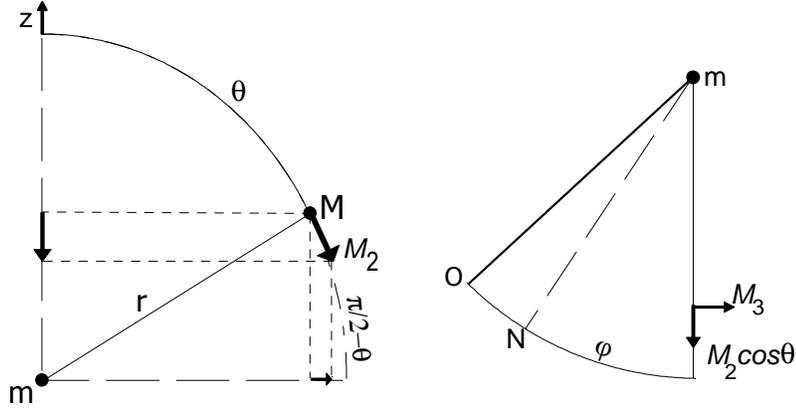


Figura 2.6: Projeções das componentes do torque no plano do meridiano de \mathbf{M} (esquerda) e no plano de referência (direita).

Sabendo que $\ell = 2\pi P_{orb}^{-1}t + T_0$, segue $dt = (P_{orb}/2\pi) d\ell$, o valor médio tomado agora com respeito à anomalia média ℓ é

$$\langle X \rangle_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X d\ell. \quad (2.56)$$

A média em ℓ torna-se mais útil no nosso caso, já que temos escrita a força de maré explicitamente em função de ℓ . Assim, usando (2.54), (2.53), (2.50), (2.51) e novamente as equações (2.33)–(2.37) obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}_x \rangle &= 0 \\ \langle \mathcal{M}_y \rangle &= -\frac{3k_d GM^2 R^5}{4a^6} S(\varepsilon'_0 + \varepsilon'_8 - \varepsilon'_9) \\ \langle \mathcal{M}_z \rangle &= \frac{3k_d GM^2 R^5}{8a^6} \left(4\varepsilon'_0 + e^2(-20\varepsilon'_0 + 49\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2) + 2S^2(-2\varepsilon'_0 + \varepsilon'_8 + \varepsilon'_9) \right). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Notamos que quando $I = 0$ o torque médio é normal ao plano orbital, sendo evidente da definição (2.52). Se além de não haver inclinação a órbita for circular, o torque médio não é nulo, já que ainda temos $\langle \mathcal{M}_z \rangle \neq 0$

Um detalhe importante é que o torque devido à força produzida pelo potencial U_2 (maré estática) é nulo. Isto é fácil de comprovar levando em conta o resultado das equações (2.48), onde somente a componente radial, que não contribui ao torque, é diferente de zero. Assim, apenas quando existe atraso na deformação haverá torque de maré (o que resulta evidente da simetria do problema, ver Fig. 2.5).

Evolução orbital e rotacional

3.1 *Objetivo*

Calcular a variação média dos elementos orbitais e das rotações dos objetos envolvidos na interação de maré. O estudo da rotação será feito através do princípio de conservação do momento angular, enquanto a evolução orbital será analisada usando as equações de Gauss, aproveitando a força e torque de maré calculados no capítulo anterior. Primeiramente calcularemos resultados gerais, isto é, válidos para qualquer estado de rotação do corpo deformado e, posteriormente, aplicaremos os resultados aos Tipos II e III. Finalmente, vamos considerar um modelo linear para relacionar os atrasos com as frequências das ondas de maré correspondentes.

3.2 *Rotação*

3.2.1 *Conservação do momento angular*

O *momento angular* total do sistema, \mathbf{L} , é a soma dos momentos angulares de rotação de \mathbf{m} , \mathbf{L}_{rot} , e o momento angular orbital, \mathbf{L}_{orb} . Assim

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{rot} + \mathbf{L}_{orb}. \quad (3.1)$$

O princípio de conservação do momento angular estabelece $d\mathbf{L}/dt = 0$, então temos $d\mathbf{L}_{rot}/dt = -d\mathbf{L}_{orb}/dt$. Sabendo que $d\mathbf{L}_{orb}/dt = \mathcal{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, obtemos $d\mathbf{L}_{rot}/dt = -\mathcal{M} = -\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{G}$, onde \mathbf{F} e \mathbf{G} são as forças de maré calculadas no capítulo anterior, que agem na órbita e no corpo deformado, respectivamente (ver Fig. 2.5).

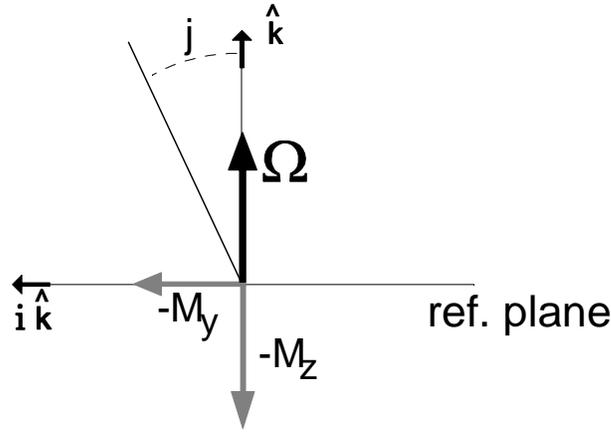


Figura 3.1: Componentes do torque no corpo deformado. $\hat{\mathbf{k}}$ e $i\hat{\mathbf{k}}$ são vetores unitários ($i = e^{i\pi/2}$). O ângulo J mede a variação da direção do vetor $\hat{\mathbf{k}}$.

Da definição sabemos que $\mathbf{L}_{rot} = C\Omega\hat{\mathbf{k}}$, onde C é o momento de inércia de \mathbf{m} com respeito ao eixo de rotação c e $\hat{\mathbf{k}}$ é um vetor unitário normal ao plano de referência. A equação $d\mathbf{L}_{rot}/dt = -\mathcal{M}$ pode ser decomposta em duas partes e estudar cada uma delas separadamente. A variação da rotação se calcula como

$$\frac{d}{dt}\Omega\hat{\mathbf{k}} = \frac{d\Omega}{dt}\hat{\mathbf{k}} + \Omega\frac{dJ}{dt}i\hat{\mathbf{k}}, \quad (3.2)$$

onde o primeiro termo corresponde à variação do módulo do vetor velocidade angular de rotação, enquanto o segundo termo leva em conta a variação do vetor $\hat{\mathbf{k}}$ (ver Fig. 3.1).

Usando a equação (3.2) obtemos

$$C\frac{d\Omega}{dt} = -\mathcal{M}_z \quad (3.3)$$

$$\Omega\frac{dJ}{dt} = -\mathcal{M}_y, \quad (3.4)$$

onde \mathcal{M}_y e \mathcal{M}_z são as componentes não nulas do torque de maré já calculadas nas equações (2.57) do capítulo anterior. Assim, substituindo as expressões para os torques e fazendo a média no período orbital obtemos

$$\langle \dot{\Omega} \rangle = -\frac{3k_dGM^2R^5}{8Ca^6} \left[4\varepsilon'_0 + e^2(-20\varepsilon'_0 + 49\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2) + 2S^2(-2\varepsilon'_0 + \varepsilon'_8 + \varepsilon'_9) \right] \quad (3.5)$$

e

$$\langle J \rangle = \frac{3k_d GM^2 R^5}{4C\Omega a^6} S(\varepsilon'_0 + \varepsilon'_8 - \varepsilon'_9). \quad (3.6)$$

Os resultados (3.5) e (3.6) são válidos para qualquer estado de rotação do corpo deformado, sendo assim consideradas *equações gerais*. Nas próximas seções faremos as aplicações aos Tipos II e III.

É importante mencionar que o plano de referência (equador) não será mais inercial, já que está-se movendo devido à variação de $\hat{\mathbf{k}}$. Uma possível solução para essa dificuldade é considerar ao equador em cada instante como sendo um plano fixo. Uma outra possibilidade é incluir os efeitos das forças centrífugas e de Coriolis agindo nos corpos devido ao movimento não uniforme do plano de referência. Nós vamos adotar a primeira aproximação, enquanto a segunda é discutida em Ferraz-Mello *et al.* (2008) (versão astro-ph).

3.2.2 Aplicações

Em geral, o objetivo principal deste trabalho será estudar a evolução de um sistema estrela-planeta quente atribuída à ação do efeito de maré em ambos corpos. Como mostraremos no próximo capítulo através de simulações numéricas, a rotação do planeta rapidamente atinge o seu valor estacionário que, para órbitas de baixa excentricidade (≤ 0.1), pode ser aproximada por um estado de rotação quase-síncrono, onde $\Omega \simeq n$. Portanto, o estado de rotação Tipo II discutido no capítulo anterior é uma boa aproximação para estudarmos a maré em planetas quentes.

No caso em que a estrela seja o corpo deformado pela ação da maré do planeta, o estado de rotação Tipo III ($\Omega \ll n$) resulta a aproximação mais adequada, já que em geral o período de rotação das estrelas tipo Sol é bem maior do que o movimento médio de um planeta quente, onde o período orbital é de apenas alguns dias.

3.2.3 Rotação Tipo II (planeta)

Com motivo de ilustrar, vamos supor que \mathbf{m} = planeta e \mathbf{M} = estrela. Neste caso então, estudaremos a evolução da rotação do planeta (corpo deformado) sob ação da maré da estrela (massa pontual), supondo um estado de rotação Tipo II, como discutido acima. Assim, a relação entre os ângulos de defasagem será (ver Tabela 2.1, Sec. 2.2.5)

$$\varepsilon'_2 \simeq \varepsilon'_5 \simeq -\varepsilon'_1 \simeq \varepsilon'_9 \simeq -\varepsilon'_8 > 0. \quad (3.7)$$

Note que as propriedades dos ε_i (2.43) foram usadas, porém, também assumimos que $k_i = k_j$ se $i = j \quad \forall i \neq j$ (ver definição de ε'_i em (2.44)). Substituindo (3.7) nas equações gerais (3.5) e (3.6) obtemos

$$\langle \dot{\Omega} \rangle = -\frac{3k_d GM^2 R^5}{2Ca^6} \left(\varepsilon'_0 - e^2(5\varepsilon'_0 + 12\varepsilon'_2) - S^2 \varepsilon'_0 \right) \quad (3.8)$$

$$\langle \dot{J} \rangle = \frac{3k_d SGM^2 R^5}{4C\Omega a^6} (\varepsilon'_0 - 2\varepsilon'_2). \quad (3.9)$$

Rotação estacionária

Por definição, a rotação atinge um estado estacionário quando o valor médio da aceleração angular é nulo. Assim, a *solução estacionária* calcula-se como $\langle \dot{\Omega} \rangle = 0$, ou, substituindo (3.8), temos a segunda ordem em e, I

$$\varepsilon'_0 = 12e^2 \varepsilon'_2. \quad (3.10)$$

Uma importante consequência do resultado (3.10) é o fato de que o sincronismo exato ($\Omega = n$ ou $\varepsilon'_0 = 0$) será uma solução estacionária da rotação apenas para órbitas circulares ($e = 0$), já que $\varepsilon'_2 > 0$ ($\nu_2 \simeq n > 0$).

Substituindo a condição para a solução estacionária (3.10) na equação (3.9) obtemos

$$\langle \dot{J} \rangle = -\frac{3k_d SGM^2 R^5}{2C\Omega a^6} \varepsilon'_2 (1 - 6e^2). \quad (3.11)$$

É fácil verificar que $\langle \dot{J} \rangle \leq 0$, a menos que $e \geq \sqrt{1/6} \simeq 0.41$, um valor que está fora do limite de validade do modelo (segunda ordem em e).

Sincronização rotação-órbita

Substituindo a condição para o sincronismo exato entre a rotação e o movimento orbital do planeta quente, $\Omega = n$ ou $\varepsilon'_0 = 0$ na equação (3.8) obtém-se

$$\langle \dot{\Omega} \rangle = \frac{18k_d GM^2 R^5}{Ca^6} e^2 \varepsilon'_2, \quad (3.12)$$

que não pode se anular se $e \neq 0$. Desta forma, o sincronismo não seria uma solução estacionária quando $e \neq 0$, verificando o resultado da seção anterior.

Sincronização de corpos assimétricos

Os resultados anteriores foram obtidos supondo que \mathbf{m} é deformado apenas pela ação da força de maré devido a \mathbf{M} . Quando o corpo possui uma elipticidade permanente (rígida) do equador, resultados diferentes podem ser encontrados. De fato, neste caso deve se somar ao potencial U_2 a contribuição atribuída à assimetria do equador, cujo potencial está dado por

$$U_{22} = \frac{GmR^2}{r^3} J_{22} P_{22}(\cos \theta) \cos 2(\varphi - \varphi_{22}), \quad (3.13)$$

onde P_{22} é uma função de Legendre. $J_{22} > 0$ e φ_{22} são os dois parâmetros que caracterizam a assimetria do campo de gravidade do corpo deformado. Em particular, J_{22} depende dos momentos principais de inércia, da massa e do raio de \mathbf{m} , enquanto φ_{22} é a longitude de um ponto da superfície sobre o eixo menor do equador (ver Beutler, 2005).

Assim como acontece com o potencial de maré, U_{22} será responsável por criar uma força e um torque. Como pode ser verificado da equação (3.10), a solução estacionária da rotação devida ao torque de maré é super-síncrona, já que $\varepsilon'_0 > 0$ quando $e \neq 0$ e então, de acordo com as propriedades dos atrasos, $\nu_0 = 2\Omega - 2n > 0$. Como $\Omega > n$, o corpo estará deslocado um certo ângulo positivo medido com respeito ao vetor \mathbf{r} e, por causa da assimetria, o torque devido a U_{22} terá a direção contrária ao torque de maré.

De acordo com Goldreich (1966), a sincronização exata ocorrerá quando J_{22} supere certo valor crítico. Nesse caso, a solução estacionária será, em lugar de (3.10)

$$\varepsilon'_0 = 0. \quad (3.14)$$

É importante mencionar que o sincronismo exato é uma solução estacionária quando a rotação do corpo deformado encontra-se sob o efeito combinado de dois torques: o torque de maré e o torque devido à deformação permanente do equador. Note que neste caso, o sincronismo exato não requer órbitas circulares. Por mais detalhes sobre rotação de corpos assimétricos ver Ferraz-Mello *et al.* (2008).

3.2.4 Rotação Tipo III (estrela)

Neste caso temos \mathbf{m} = estrela (corpo deformado) e \mathbf{M} = planeta (massa pontual). Como a teoria foi formulada de maneira geral, os resultados das equações (3.5) e (3.6) são válidos independentemente de quem seja o corpo \mathbf{m} , tanto estrela quanto planeta. Portanto, vamos manter a notação usada em que m , R , k_d e ε_i são a massa, raio, número de Love dinâmico e ângulo de defasagem do corpo deformado, enquanto M é a massa do corpo que exerce a maré (neste caso o planeta).

No estado de rotação Tipo III ($\Omega \ll n$) temos

$$\varepsilon'_0 \simeq \varepsilon'_8 < 0, \quad \varepsilon'_2 \simeq -\varepsilon'_5 < 0. \quad (3.15)$$

Substituindo nas equações gerais obtemos

$$\langle \dot{\Omega} \rangle = -\frac{3k_d GM^2 R^5}{8Ca^6} \left(4\varepsilon'_0 + e^2(-20\varepsilon'_0 + 49\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2) + 2S^2(-\varepsilon'_0 + \varepsilon'_9) \right) \quad (3.16)$$

$$\langle \dot{J} \rangle = \frac{3k_d SGM^2 R^5}{4C\Omega a^6} (2\varepsilon'_0 - \varepsilon'_9). \quad (3.17)$$

Rotação estacionária

A rotação estacionária da estrela pode ser calculada impondo $\langle \dot{\Omega} \rangle = 0$ na equação (3.16), obtendo, a segunda ordem em e, I

$$\varepsilon'_0 = -\frac{1}{4}(49\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)e^2 - \frac{1}{2}\varepsilon'_9 S^2. \quad (3.18)$$

Note que neste caso não há uma relação simples como para a rotação estacionária do planeta (3.10).

3.3 Evolução orbital

Nesta seção vamos calcular a variação média dos elementos orbitais para depois aplicarmos aos estados de rotação Tipo II e III, correspondentes a um sistema estrela-planeta quente. Aplicaremos um modelo linear para relacionar ângulos de fase com as frequências

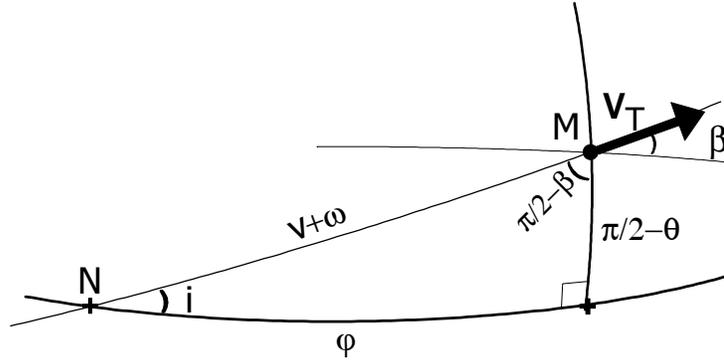


Figura 3.2: Velocidade transversal de M mostrando o ângulo β , para relacionar as componentes das forças calculadas com as componentes radial, transversa e normal ao plano orbital.

das ondas de maré. Finalmente, vamos obter a variação média dos elementos quando o efeito acumulado das marés em ambos corpos é considerado.

3.3.1 Equações de Gauss

As equações de Gauss são um conjunto de equações através das quais é possível obter a variação dos elementos orbitais de um objeto que encontra-se sob a ação de uma força perturbadora do movimento Kepleriano (neste caso, a força de maré). Nas equações de Gauss, a força perturbadora aparece decomposta nas componentes *radial*, *transversa* e *normal* ao plano orbital (F_R, F_S, F_W). Essas forças estão relacionadas às componentes (F_1, F_2, F_3) do Cap. 2 através de (ver Fig. 3.2)

$$\begin{aligned} F_R &= F_1 \\ F_S &= -F_2 \sin \beta + F_3 \cos \beta \\ F_W &= -F_2 \cos \beta - F_3 \sin \beta, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde, do triângulo esférico da Fig. 3.2 seguem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{\sin \varphi}{\sin(\omega + v)} \\ \sin \beta &= S \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.20)$$

O conjunto de equações de Gauss é (ver Beutler, 2005)

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= \frac{2}{n(1-e^2)^{1/2}} \left[e \sin v F_R + \frac{p}{r} F_S \right] \\
\dot{e} &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na} \left[\sin v F_R + \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a} \right) F_S \right] \\
\dot{I} &= \frac{r \cos(\omega + v)}{na^2(1-e^2)^{1/2}} F_W \\
\dot{\omega} &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{nae} \left[-\cos v F_R + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v F_S \right] - \cos I \dot{\widehat{ON}} \\
\dot{\widehat{ON}} &= \frac{r \sin(\omega + v)}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin I} F_W,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

onde ON é a longitude do nodo ascendente, $p \equiv a(1-e^2)$ e $\dot{I} = dI/dt$.

É importante mencionar que as componentes das forças de maré introduzidas nas equações de Gauss devem ser multiplicadas pelo fator $(1 + M/m)$ para levar em conta as forças de reação dentro do sistema (ver Ferraz-Mello *et al.*, 2008; ver também Sec. 4.5.1).

3.3.2 Variação de semi-eixo maior, excentricidade e inclinação orbital

Substituindo as expressões das forças (F_1, F_2, F_3) nas equações (3.19) obtemos, depois de fazer a média no período orbital nas primeiras três equações (3.21)

$$\langle \dot{a} \rangle = \frac{3nk_d MR^5}{4ma^4} \left[4\varepsilon'_0 - e^2(20\varepsilon'_0 - \frac{147}{2}\varepsilon'_1 - \frac{1}{2}\varepsilon'_2 + 3\varepsilon'_5) - 4S^2(\varepsilon'_0 - \varepsilon'_8) \right] \tag{3.22}$$

$$\langle \dot{e} \rangle = -\frac{3nek_d MR^5}{8ma^5} \left(2\varepsilon'_0 - \frac{49}{2}\varepsilon'_1 + \frac{1}{2}\varepsilon'_2 + 3\varepsilon'_5 \right) \tag{3.23}$$

$$\langle \dot{I} \rangle = \frac{3nk_d SM R^5}{4ma^5} \left(-\varepsilon'_0 + \varepsilon'_8 - \varepsilon'_9 \right). \tag{3.24}$$

Note-se que estes resultados são *gerais*, independentemente de quem seja o corpo deformado \mathbf{m} (estrela ou planeta). As aplicações aos estados de rotação Tipos II e III serão feitas na próxima seção.

Notamos ainda que não é possível saber a priori o sinal das variações dos elementos, já que há uma dependência explícita com vários ângulos de defasagem cujos sinais, no caso geral, são desconhecidos .

A força radial $F_R = F_1$, também inclui aquela parte da força devido ao potencial de maré estática U_2 (ver equação 2.48). Portanto, uma expressão mais adequada para a força radial seria $F_R = F_1 + F_1^{U_2}$. Como veremos, $F_1^{U_2}$ contribui apenas para a variação do argumento do pericentro ω .

Sobre a variação da inclinação

Como vimos até aqui, o torque na órbita produz variação do ângulo I , enquanto o torque (igual e oposto) no corpo \mathbf{m} faz variar o ângulo J . Portanto, a variação média total do ângulo formado entre os planos orbital e de referência será $\langle \dot{I} + \dot{J} \rangle$. Usando os resultados gerais (3.6) e (3.24), obtemos

$$\langle \dot{I} + \dot{J} \rangle = \frac{3k_d S G M^2 R^5}{4C\Omega a^6} \left[\left(1 - \frac{C\Omega a n}{GMm}\right) \varepsilon'_0 + \left(1 + \frac{C\Omega a n}{GMm}\right) (\varepsilon'_8 - \varepsilon'_9) \right]. \quad (3.25)$$

3.3.3 Aplicação ao Tipo II

Usando a relação entre os ângulos de defasagem dada na equação (3.7) e substituindo nas equações (3.22)–(3.24), obtemos a variação dos elementos orbitais no caso de um planeta com rotação quase síncrona

$$\langle \dot{a} \rangle = \frac{3nk_d M R^5}{ma^4} ((1 - 5e^2 - S^2)\varepsilon'_0 - (19e^2 + S^2)\varepsilon'_2), \quad (3.26)$$

$$\langle \dot{e} \rangle = -\frac{3nek_d M R^5}{4ma^5} (\varepsilon'_0 + 14\varepsilon'_2), \quad (3.27)$$

$$\langle \dot{I} \rangle = -\frac{3nSk_d M R^5}{4ma^5} (\varepsilon'_0 + 2\varepsilon'_2). \quad (3.28)$$

Supondo que a rotação atingiu o seu estado estacionário, a relação entre ε'_0 e ε'_2 está dada por (3.10) e, substituindo nas equações acima obtemos, a segunda ordem em e, I

$$\langle \dot{a} \rangle = -\frac{3nk_d M R^5}{ma^4} (7e^2 + S^2)\varepsilon'_2, \quad (3.29)$$

$$\langle \dot{e} \rangle = -\frac{21nek_d M R^5}{2ma^5} \varepsilon'_2, \quad (3.30)$$

$$\langle \dot{I} \rangle = -\frac{3nSk_d M R^5}{2ma^5} \varepsilon'_2. \quad (3.31)$$

É importante notar que o sinal das variações médias é negativo ($\varepsilon'_2 > 0$), indicando que o efeito de maré no planeta devido à estrela provoca *decaimento orbital e circularização*, além da diminuição do ângulo formado entre os planos de referência e orbital (lembre-se do resultado (3.11)). Os resultados obtidos são os mesmos encontrados em trabalhos anteriores (Goldreich, 1963; Goldreich & Soter, 1966, Peale *et al.*, 1980), no caso de satélites com rotação síncrona ou estacionária. Para conversão de resultados, os parâmetros Q e Q' que aparecem nos citados trabalhos devem ser relacionados considerando $Q = 1/\varepsilon_2$ e $Q' \equiv 3Q/2k_d$ (ver Sec. 3.5.1).

Rotação síncrona

Impondo a condição de rotação síncrona ($\varepsilon'_0 = 0$) na equação (3.26), ou mesmo no resultado geral (3.22), obtemos

$$\langle \dot{a} \rangle = -\frac{3nk_dMR^5}{ma^4} (19e^2 + S^2)\varepsilon'_2. \quad (3.32)$$

(ver Mardling & Lin¹, 2004). Porém, esse resultado não leva em conta o fato de que quando $e \neq 0$, o sincronismo exato só pode acontecer se um torque adicional é considerado, como discutido na seção (3.2.3). A variação de semi-eixo maior devido a esse torque adicional criado pelo potencial U_{22} é (ver Ferraz-Mello *et al.*, 2008)

$$\langle \dot{a} \rangle_{22} = \frac{3nk_dMR^5}{ma^4} (12e^2 + S^2)\varepsilon'_2. \quad (3.33)$$

A variação total do semi-eixo maior encontra-se somando as duas variações (3.32) e (3.33), obtendo finalmente

$$\langle \dot{a} \rangle = -\frac{3nk_dMR^5}{ma^4} (7e^2 + S^2)\varepsilon'_2. \quad (3.34)$$

Portanto, a segunda ordem em excentricidade e inclinação, o resultado para a variação do semi-eixo maior no caso de rotação síncrona coincide com o resultado obtido no caso de rotação estacionária. Para ordens maiores, diferentes resultados são obtidos (Wisdom, 2008; Levrard, 2008).

¹ Existe um erro de fator numérico na equação (4) desse trabalho, o fator 171/4 deve ser corrigido por 171/2 (ver Mardling, 2007).

As contribuições do torque adicional para as variações de excentricidade e inclinação são de ordem superior à considerada neste trabalho. Desta maneira, os resultados (3.30) e (3.31) também são válidos no caso de rotação síncrona.

3.3.4 Dissipação de energia

A energia total do sistema está dada pela soma da energia orbital, a energia de rotação do corpo deformado mais a energia dissipada no interior dele devido à fricção interna. A energia orbital se calcula como

$$E_{orb} = -\frac{GmM}{2a}, \quad (3.35)$$

ao tempo que a variação no tempo está dada por

$$\dot{E}_{orb} = \frac{GmM}{2a^2}\dot{a}. \quad (3.36)$$

Substituindo a expressão para \dot{a} calculada em (3.29) obtemos

$$\langle \dot{E}_{orb} \rangle = -\frac{3nk_dGM^2R^5}{2a^6}(7e^2 + S^2)\varepsilon'_2. \quad (3.37)$$

Note-se que, ao usarmos (3.29), estamos supondo que o planeta já chegou ao seu estado final de rotação estacionária, onde por definição $\langle \dot{\Omega} \rangle = 0$ e, portanto, a variação média da energia de rotação é nula. Assim, a troca de energia no sistema obedece a seguinte relação

$$\langle \dot{E}_{orb} \rangle - W = 0, \quad (3.38)$$

ou

$$W = \langle \dot{E}_{orb} \rangle = -\frac{3nk_dGM^2R^5}{2a^6}(7e^2 + S^2)\varepsilon'_2, \quad (3.39)$$

onde W é a *energia dissipada* em forma de calor no interior do planeta. Note ainda que na equação (3.38) estamos supondo que $W < 0$ por se tratar de energia dissipada. Como acontece no caso do semi-eixo maior, o resultado é válido quando a rotação é estacionária ou síncrona. Um resultado idêntico foi obtido por Segatz *et al.* (1988) e Wisdom (2008), através do cálculo direto da energia dissipada no interior do corpo deformado.

3.3.5 Aplicação ao Tipo III

Nesta seção calcularemos as variações médias dos elementos orbitais atribuídas à maré estelar, isto é, considerando a estrela como corpo deformado (\mathbf{m}) e o planeta como massa pontual (\mathbf{M}). Novamente faremos uso das equações que dão as variações médias gerais dos elementos, (3.22)–(3.24), aplicando-as a o estado de rotação Tipo III ($\Omega \ll n$), onde a relação entre os atrasos está dada na equação (3.15). Assim obtemos

$$\langle \dot{a} \rangle = \frac{3nk_d MR^5}{ma^4} \left[\varepsilon'_0 - e^2 \left(5\varepsilon'_0 - \frac{147}{8}\varepsilon'_1 - \frac{7}{8}\varepsilon'_2 \right) \right], \quad (3.40)$$

$$\langle \dot{e} \rangle = -\frac{3nek_d MR^5}{4ma^5} \left(\varepsilon'_0 - \frac{49}{4}\varepsilon'_1 - \frac{5}{4}\varepsilon'_2 \right), \quad (3.41)$$

$$\langle \dot{I} \rangle = -\frac{3nSk_d MR^5}{4ma^5} \varepsilon'_9. \quad (3.42)$$

Notamos que não é possível saber a priori o sinal das variações médias, já que os resultados dependem de vários ângulos de defasagem que são, por enquanto, desconhecidos. Porém, a variação média da inclinação depende apenas de $\varepsilon'_9 > 0$, logo sabemos que $\langle \dot{I} \rangle < 0$.

Lembramos que I é o ângulo formado entre o equador do corpo deformado (plano de referência) e o plano orbital. Portanto, temos dois ângulos diferentes dependendo de qual seja o corpo que sofre a maré. Por enquanto vamos continuar com a convenção da notação adotada até agora, em que I se refere à inclinação da órbita do corpo deformado, com $S = \sin I$.

3.4 Modelo linear

Ainda não temos feito nenhuma hipótese sobre a dependência funcional entre os ângulos de defasagem e as frequências correspondentes, apenas consideramos que frequências iguais dão origem a ângulos iguais e que uma frequência nula corresponde a um ângulo também nulo. Nesta seção vamos supor que a relação entre ângulos e frequências está dada por uma lei do tipo *linear*, isto é

$$\varepsilon_i = \nu_i \Delta t, \quad (3.43)$$

onde Δt é constante e igual para todas as componentes, ou $\Delta t_i = \Delta t \quad \forall i = 1, 2, \dots$. O tempo Δt é conhecido como *tempo de atraso*, e pode ser interpretado como o intervalo de tempo entre a ação da força produzida pelo corpo \mathbf{M} e a deformação provocada pela maré em \mathbf{m} (ver Mignard, 1979; Hut, 1981).

3.4.1 Rotação

Com motivo de ilustrar os resultados da aplicação do modelo linear, vamos começar estudando a variação média da rotação, incluindo a solução estacionária. Partindo do resultado geral (3.5) e substituindo cada ângulo pela lei (3.43), obtemos

$$\langle \dot{\Omega} \rangle = \frac{3nk_d \Delta t G M^2 R^5}{C a^6} \left[\left(1 + \frac{27}{2}e^2 - \frac{1}{2}S^2\right) - \left(1 + \frac{15}{2}e^2 - \frac{1}{2}S^2\right) \frac{\Omega}{n} \right]. \quad (3.44)$$

A equação (3.44) reproduz o resultado de Dobbs-Dixon *et al.* (2004) a segunda ordem em e , exceto por simplificações usadas na terceira lei de Kepler, o efeito do vento estelar e algumas outras considerações sobre a fração de massa dos corpos que participam no intercâmbio de momento angular. O parâmetro Q , que aparece no citado trabalho, está relacionado com Δt na forma $Q = 1/n\Delta t$ (ver Sec. 3.5.1).

A *solução estacionária*, Ω_{est} , encontra-se impondo $\langle \dot{\Omega} \rangle = 0$, obtendo, sempre a segunda ordem em excentricidade e inclinação

$$\Omega_{est} = n(1 + 6e^2), \quad (3.45)$$

(ver Hut, 1981; Levrard *et al.*, 2007, Correia *et al.*, 2008). O resultado confirma o fato, já discutido na Seção (3.2.3), de que o sincronismo exato ($\Omega = n$) só é possível no caso de órbitas circulares, se apenas o torque de maré é considerado. Notamos ainda que a solução estacionária é *super-síncrona* ($\Omega > n$). De fato, o resultado (3.45) poderia ser obtido a partir da equação (3.10) impondo a lei linear para ε_0 e ε_2 .

Um fato importante que merece atenção, é que a solução estacionária obtida na equação (3.45) é válida tanto para o planeta quanto para a estrela, já que foi calculada a partir do resultado geral para a variação média da rotação. Porém, como veremos no próximo capítulo, a *escala de tempo* para o valor Ω_{est} ser atingido é muito maior para a estrela, enquanto a rotação do planeta rapidamente alcança o seu valor estacionário. Basicamente,

isso se deve ao fato de que, em geral, a massa da estrela é muito maior. É por esse motivo que se justificam as hipóteses sobre os estados de rotação Tipo II ($\Omega \simeq n$) e Tipo III ($\Omega \ll n$). Note que, quando $e \ll 1$, $\Omega_{est} \simeq n$.

3.4.2 Variação média dos elementos

No caso do planeta em rotação estacionária ou síncrona, as variações médias dos elementos dependem apenas de um dos ângulos de defasagem, ε_2 (ver equações (3.29)–(3.31)). Porém, a contribuição devida ao efeito de maré sofrido pela estrela, dada nas equações (3.40)–(3.42), depende de quatro ângulos, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_9$, sendo que $\langle \dot{I} \rangle$ depende apenas de ε_9 . Aplicando o modelo linear, a relação entre esses ângulos será, usando a aproximação Tipo III ($\Omega \ll n$)

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= (2\Omega - 2n)\Delta t \simeq -2n\Delta t \\ \varepsilon_1 &= (2\Omega - 3n)\Delta t \simeq -3n\Delta t \\ \varepsilon_2 &= (2\Omega - n)\Delta t \simeq -n\Delta t,\end{aligned}\tag{3.46}$$

ou

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &\simeq 2\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 &\simeq 3\varepsilon_2.\end{aligned}\tag{3.47}$$

Como os resultados dependem dos ε_i através dos ε'_i é preciso fazer hipóteses sobre os números de Love k_i . Por simplicidade, vamos assumir que, no modelo linear, $k_i = k_d \quad \forall i = 1, 2, \dots$. Desta forma teremos

$$\begin{aligned}\varepsilon'_0 &\simeq 2\varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_1 &\simeq 3\varepsilon'_2,\end{aligned}\tag{3.48}$$

substituindo (3.48) nas (3.40)–(3.42) obtemos

$$\langle \dot{a} \rangle = \frac{3nk_d MR^5}{ma^4} (2 + 46e^2)\varepsilon'_2,\tag{3.49}$$

$$\langle \dot{e} \rangle = \frac{27nek_d MR^5}{ma^5} \varepsilon'_2, \quad (3.50)$$

$$\langle \dot{I} \rangle = -\frac{3nSk_d MR^5}{4ma^5} \varepsilon'_9. \quad (3.51)$$

Se substituirmos cada ε_i pela lei (3.43), os resultados coincidem com aqueles encontrados em outros trabalhos em que se aplica o modelo linear baseados na formulação de Hut (1981) (Dobbs-Dixon *et al.*, 2004; Mardling & Lin, 2004). A equação para $\langle \dot{I} \rangle$ não resultou modificada já que $\varepsilon_9 = \Omega \Delta t$ não está relacionado com ε_2 . No entanto, note que na aproximação Tipo III é possível verificar $\varepsilon'_9 \ll |\varepsilon'_2|$, já que $\Omega \ll n$.

Segundo os resultados das equações (3.49) e (3.50), podemos afirmar que o efeito de maré na estrela também provoca decaimento orbital e circularização, assim como no caso em que o planeta é afetado pela maré da estrela (ver (3.29) e (3.30)). A afirmação anterior se deve ao fato de que $\varepsilon'_2 < 0$, como pode ser visto em (3.46)².

3.4.3 Evolução orbital acumulada

Ainda no modelo linear, vamos calcular a variação média dos elementos orbitais devida ao efeito acumulado das marés em ambos corpos. Para isso, devemos diferenciar os parâmetros relacionados a cada corpo, já que até agora estávamos chamando m , R , k_d , ε_i e M à massa, raio, número de Love dinâmico e ângulo de defasagem do corpo deformado \mathbf{m} , e M à massa do perturbador \mathbf{M} , o corpo que cria a maré. Vamos identificar com subíndices p e $*$ às quantidades correspondentes ao planeta e estrela, respectivamente, incluindo as variáveis Ω e I .

Semi-eixo maior e excentricidade

Começando pelo semi-eixo maior, a variação média *total* será

$$\langle \dot{a} \rangle = \langle \dot{a} \rangle_p + \langle \dot{a} \rangle_*, \quad (3.52)$$

onde $\langle \dot{a} \rangle_p$ e $\langle \dot{a} \rangle_*$ estão dadas nas equações (3.29) e (3.49), respectivamente. Substituindo os resultados, temos

² Note porém que não é necessário assumir um modelo linear para se ter $\varepsilon'_2 < 0$. A hipótese $\Omega \ll n$ leva a esse resultado qualquer que seja o modelo.

$$\langle \dot{a} \rangle = -3k_{d*} |\varepsilon'_{2*}| \frac{m_p}{m_*} \left(\frac{R_*}{a} \right)^5 na[2 + 46e^2 + (7e^2 + S_p^2)D], \quad (3.53)$$

onde $\varepsilon'_{2*} = -|\varepsilon'_{2*}|$ e o parâmetro D é definido como

$$D \equiv \frac{k_{dp}}{k_{d*}} \frac{\varepsilon'_{2p}}{|\varepsilon'_{2*}|} \left(\frac{m_*}{m_p} \right)^2 \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^5. \quad (3.54)$$

Note que $D > 0$, já que $\varepsilon'_{2p} > 0$. É fácil confirmar que $\langle \dot{a} \rangle < 0$, já que cada componente contribui ao decaimento orbital.

A variação média total da excentricidade se calcula somando os resultados (3.30) e (3.50), obtendo

$$\langle \dot{e} \rangle = -3k_{d*} |\varepsilon'_{2*}| \frac{m_p}{m_*} \left(\frac{R_*}{a} \right)^5 ne \left(9 + \frac{7}{2}D \right). \quad (3.55)$$

A equação (3.55) verifica $\langle \dot{e} \rangle < 0$, indicando que o efeito de maré (total) produz circularização orbital.

Inclinações

Não é possível fazer uma análise similar no caso da inclinação orbital, já que temos duas inclinações, dependendo de quem seja o corpo deformado. Note que $I_p(I_*)$ é o ângulo formado entre o equador do planeta (estrela) e o plano orbital. Porém, sabemos que a inclinação tem duas componentes de variação, atribuídas a I e J . Vamos coletar os resultados já obtidos nas seções anteriores para obter a variação média total da cada uma das inclinações.

Poderíamos usar os resultados (3.31), (3.11) para o *planeta* e (3.42), (3.17) para a estrela. No entanto, vamos aproveitar o resultado geral (3.25) e aplicar os Tipos II e III. Assim obtemos,

$$\langle \dot{I} + \dot{J} \rangle_p = -\frac{3k_{dp}Gm_*^2R_p^5}{2C_p\Omega_p a^6} S_p \varepsilon'_{2p} \left(1 + \frac{C_p\Omega_p a n}{Gm_*m_p} \right), \quad (3.56)$$

onde supomos que o *planeta* tem um estado de rotação estacionária ($\varepsilon'_{0p} = 12e^2\varepsilon'_{2p}$), lembrando que no Tipo II, $-\varepsilon'_{8p} \simeq \varepsilon'_{9p} \simeq \varepsilon'_{2p}$. Note-se que

$$\frac{C_p \Omega_p a n}{G m_* m_p} \simeq \frac{C_p}{m_p a^2} \frac{\Omega_p}{n} \ll 1, \quad (3.57)$$

indicando que a contribuição principal para a variação média da inclinação do planeta é devido a $\langle \dot{J} \rangle_p$ (ver (3.11)).

O resultado aplicado à *estrela* em rotação Tipo III é

$$\langle \dot{I} + \dot{J} \rangle_* = -\frac{3k_{d*} G m_p^2 R_*^5}{C_* \Omega_* a^6} S_* |\varepsilon'_{2*}|, \quad (3.58)$$

onde usamos $\varepsilon'_{0*} \simeq \varepsilon'_{8*}$ e, no modelo linear, $\varepsilon'_{0*} \simeq 2\varepsilon'_{2*} \gg \varepsilon'_{9*}$ (ver (3.48)). Neste caso também temos que a principal contribuição é devido à variação média de J_* (ver (3.17)).

Os resultados das equações (3.56) e (3.58) indicam que os planos dos equadores se aproximam do plano orbital devido ao efeito de maré.

É importante mencionar que os resultados até aqui obtidos para a variação média total dos elementos, usando o modelo linear, são válidos apenas para o caso de planetas em rotação estacionária ou síncrona (Tipo II) e estrelas de rotação lenta (Tipo III). Nos casos intermediários, o modelo linear deverá ser aplicado nas equações gerais.

3.4.4 Argumento do pericentro e longitude do nodo ascendente

Analisaremos a variação média dos ângulos ω e \widehat{ON} (ver Fig. 2.4). Apresentaremos apenas os resultados das variações médias *gerais* e, para isso, faremos uso das equações de Gauss (3.21). No caso do *argumento do pericentro*, é necessário desenvolver o potencial U_2 até quarta ordem em e, I com motivo de obter o resultado correto a segunda ordem (ver Ferraz-Mello *et al.*, 2009). Assim obtemos

$$\begin{aligned} \langle \dot{\omega} \rangle_{lag} = & \frac{9k_{dn} M R^5}{16ma^5} \left[(3\varepsilon'_0 - \varepsilon'_2 - \varepsilon'_5 + 3\varepsilon'_6 - 3\varepsilon'_8 - \varepsilon'_{15} + \varepsilon'_{16} + 3\varepsilon'_{25}) e^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (6\varepsilon'_0 - \varepsilon'_2 - \varepsilon'_5 - 6\varepsilon'_7 - 12\varepsilon'_8 + \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{12} - 2\varepsilon'_{15} + 2\varepsilon'_{16}) S^2 \right] \sin 2\omega. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Note que, além dos atrasos que já tínhamos (até ε_9), novos atrasos surgem devido à presença de novas frequências, produto do desenvolvimento à quarta ordem. Ainda existe a contribuição devido ao potencial de maré estático U_2 , dada por

$$\langle \dot{\omega}^{U_2} \rangle = \frac{15k_{fn} M R^5}{2ma^5} \left(1 + \frac{13}{2} e^2 \right). \quad (3.60)$$

(ver também Wu & Goldreich, 2002). A comparação entre ambas contribuições mostra que $\langle \dot{\omega} \rangle_{lag}$ é atenuada pelos ε'_i e por e^2 e S^2 , indicando que o movimento do pericentro é dominado pela maré estática. Segundo (3.60), vemos que a razão entre as contribuições devidas às marés no planeta e na estrela é

$$\frac{k_{fp}}{k_{f*}} \left(\frac{\bar{\rho}_*}{\bar{\rho}_p} \right)^2 \frac{R_*}{R_p}, \quad (3.61)$$

onde $\bar{\rho}$ é a densidade média. Se tomarmos valores típicos, por exemplo, no sistema Sol-Júpiter, a quantidade (3.61) é $\gg 1$. Portanto, a maré agindo no planeta domina a variação média de ω .

No caso de planetas com rotação síncrona, é preciso considerar a contribuição atribuída à assimetria do equador. Desta forma, usando U_{22} em lugar de U_2 na equação de Gauss, obtemos

$$\langle \dot{\omega}_{p22} \rangle = -\frac{3nR_p^2 J_{22}}{4a^2} (16 - 15e^2 - 7S_p^2 + 9(e^2 - S_p^2) \cos 2\omega_p). \quad (3.62)$$

Note que $\langle \dot{\omega}_{p22} \rangle$ é da ordem de $\mathcal{O}(R_p^2/a^2)$.

Através da equação de Gauss correspondente, obtemos a variação média geral da *longitude do nodo ascendente*

$$\langle \dot{\widehat{\text{ON}}} \rangle = -\frac{9k_d n M R^5}{16ma^5} (3\varepsilon'_0 - \varepsilon'_2 - \varepsilon'_5 + 3\varepsilon'_6 - 3\varepsilon'_8 - \varepsilon'_{15} + \varepsilon'_{16} + 3\varepsilon'_{25}) e^2 \sin 2\omega. \quad (3.63)$$

Aplicando o *modelo linear* se obtém o resultado geral

$$\langle \dot{\widehat{\text{ON}}} \rangle = -\frac{9k_d \Delta t M R^5}{4ma^5} n \Omega e^2 \sin 2\omega. \quad (3.64)$$

Para planetas com rotação síncrona, temos a variação média adicional

$$\langle \dot{\widehat{\text{ON}}}_{p22} \rangle = -\frac{3J_{22} n R_p^2}{a^2} \left(1 - 2e^2 - \frac{1}{4} S_p^2 - \frac{9}{4} e^2 \cos 2\omega_p \right). \quad (3.65)$$

3.5 Outros modelos

Além do modelo linear, podem existir outras dependências funcionais entre ângulos de defasagem e frequências. Supondo uma lei do tipo

$$\varepsilon_i = \kappa \nu_i^\lambda, \quad (3.66)$$

onde $\kappa > 0$ e λ é um número real, é possível reproduzir alguns dos modelos encontrados na literatura, dependendo do valor de λ . É claro que para $\lambda = 1$ obtemos o *modelo linear* (ver Mignard, 1979; Hut, 1981), com $\kappa = \Delta t$.

Para $\lambda = 0$, se obtém $\varepsilon_i = \kappa$ para qualquer valor de i . Esse modelo é conhecido como *modelo independente da frequência*³. Alguns exemplos de aplicação do modelo independente da frequência, no estudo da evolução de exoplanetas devido ao efeito de maré, podem ser encontrados em Jackson *et al.* (2008a, 2009), Barnes *et al.* (2009b, 2010). O resultado da aplicação deste modelo apresenta apenas diferenças de fatores numéricos comparadas como a aplicação usando o modelo linear.

Em Efroimsky & Lainey (2007) é proposto um modelo em que a dependência funcional entre atrasos e frequências segue uma lei de potência com expoente negativo, $-0.4 < \lambda < -0.2$.

Modelos intermediários, com $\lambda > 0$ são discutidos em Sears *et al.* (1993) no caso do sistema Saturno-Titã.

3.5.1 Função de dissipação Q

Em analogia com a teoria do oscilador harmônico forçado e amortecido, a *função de dissipação*, Q_i , é definida como

$$Q_i \equiv -2\pi \frac{E_0(\nu_i)}{\Delta E(\nu_i)}, \quad (3.67)$$

onde ΔE é a energia dissipada em um ciclo, E_0 é o pico de energia armazenada durante o ciclo e ν_i é uma das frequências que participam do problema. Supondo que $\Delta E < 0$ pelo fato de ser energia perdida, Q_i é uma função positiva. No caso do oscilador harmônico, é simples de se obter a dependência funcional $Q_i(\nu_i)$ de forma explícita (ver Murray &

³ Note, porém, que ε'_i depende da frequência de forma implícita através dos números de Love k_i .

Dermott, 1999, p. 160). Porém, em problemas mais complexos, onde a física envolvida não é bem conhecida (como a dissipação devida ao efeito de maré), essa dependência não está bem determinada, sendo necessária a adoção de modelos. É possível vincular Q_i com o responsável pela introdução de dissipação de energia no problema, no nosso caso, os ângulos de defasagem ε_i . A relação é

$$Q_i = \cot |\varepsilon_i| \quad (3.68)$$

(ver deduções em Efroimsky & Lainey, 2007; Greenberg, 2009), em que o resultado é válido para qualquer sistema dissipativo, não só para o oscilador harmônico. No caso de pequenos ângulos ($\sin |\varepsilon_i| \ll 1$), temos

$$Q_i \simeq \frac{1}{|\varepsilon_i|}. \quad (3.69)$$

Este resultado nos permite trabalhar com Q_i em lugar de ε_i , já que a função de dissipação é mais utilizada em trabalhos sobre evolução dinâmica de exoplanetas como consequência do efeito de maré. Desta maneira, os resultados obtidos nas seções anteriores (e da seção atual, sobre modelos) podem ser levados à linguagem da função de dissipação simplesmente fazendo a substituição $|\varepsilon_i| \simeq 1/Q_i$ (ver capítulo seguinte).

Sobre o sincronismo

O caso de um planeta cuja rotação está sincronizada com o movimento orbital médio, merece uma atenção especial. Segundo a relação (3.69), quando o movimento se aproxima do sincronismo, $Q_0 \rightarrow \infty$, já que $\varepsilon_0 \rightarrow 0$. Essa singularidade pode ser explicada levando em conta que, segundo a definição (3.67), não é o valor de Q_i quem mede a importância da dissipação de energia no sistema, mas é $1/Q_i$. Portanto, a singularidade pode ser transformada rescrevendo a equação (3.69), onde para $\varepsilon_0 \rightarrow 0$, temos $1/Q_0 \rightarrow 0$.

Na literatura, frequentemente encontramos resultados escritos em função de Q , sem referência à frequência correspondente (no modelo independente da frequência, não é necessária tal identificação). Todavia, é usualmente adotada a notação de trabalhos mais antigos sobre as marés no sistema Terra-Lua, em que a função de dissipação é associada à maré semi-diurna da Terra, de frequência $\nu_0 \simeq \nu_1 \simeq \nu_2 \simeq 2\Omega$ (ver Tabela 1). Portanto, é comum encontrar a relação $\varepsilon = 1/Q$, sem referência à frequência já que $\varepsilon_i = \varepsilon$

para $i = 0, 1, 2$. Um exemplo que pode dar origem a confusão, é o resultado da equação (3.37), que é independente do modelo adotado. Vemos que, a dissipação de energia em um planeta com rotação estacionária ou síncrona é não nula se $e \neq 0$ ou $I \neq 0$, apesar de termos $\varepsilon_0 = 1/Q_0 \simeq 0$. Neste caso, a função de dissipação que interessa é $Q = Q_2$, onde $\varepsilon_2 = 1/Q_2$.

3.5.2 Sobre a aplicação do modelo independente da frequência

O modelo independente da frequência não é o mais adequado para o estudo da evolução orbital, atribuída ao efeito de maré, de planetas de curto período. Como vimos, as variações médias dos elementos orbitais e da rotação, quando a maré na estrela é analisada, dependem de vários ε_i . No Tipo III, onde $\Omega \ll n$, temos

$$\begin{aligned}\nu_0 &= 2\Omega - 2n \simeq -2n \\ \nu_1 &= 2\Omega - 3n \simeq -3n \\ \nu_2 &= 2\Omega - n \simeq -n.\end{aligned}\tag{3.70}$$

Todas as frequências são diferentes entre si, portanto, dificilmente poderíamos esperar que $\varepsilon_0 \simeq \varepsilon_1 \simeq \varepsilon_2$.

É importante notar que, se aplicarmos o estado de rotação Tipo I para a estrela, onde $\Omega \gg n$, teríamos, como já vimos na seção anterior, $\nu_0 \simeq \nu_1 \simeq \nu_2 \simeq 2\Omega$. Portanto, seguindo as hipóteses que fizemos sobre os atrasos, $\varepsilon_0 \simeq \varepsilon_1 \simeq \varepsilon_2$. Assim, o modelo independente da frequência é mais adequado no caso em que o corpo central tenha uma rotação rápida (comparada com o movimento médio do outro corpo). É o caso dos sistemas Terra-Lua, Júpiter-galileanos, Saturno-Titã, além de alguns outros exemplos no Sistema Solar.

Aplicação ao problema estrela-planeta quente

4.1 *Objetivo*

Neste capítulo, estudaremos a evolução orbital atribuída ao efeito de maré em um sistema formado por uma estrela e um planeta de curto período ($\lesssim 4$ dias). Os resultados serão obtidos através das equações médias do capítulo anterior para diferentes tipos de planetas, classificados segundo o valor da massa. Também faremos simulações numéricas das equações exatas, com motivo de comparar com os resultados das equações médias. Estudaremos as variações de semi-eixo maior e excentricidade da órbita relativa quando as deformações atribuídas ao efeito de maré são consideradas tanto no planeta quanto na estrela. As escalas de tempo de decaimento orbital e circularização serão calculadas e comparadas para as marés planetária e estelar. Calcularemos um valor crítico da excentricidade para o qual uma das marés fica dominante e começa a governar o decaimento orbital. As rotações dos objetos também serão analisadas, comparando as escalas de tempo das evoluções. Finalmente, apresentaremos algumas possíveis explicações para a distribuição observada de períodos orbitais em função da massa planetária, no caso de exoplanetas reais de curto período.

4.2 *Variações médias dos elementos*

Consideremos um sistema composto por uma estrela e um planeta de massas m_0, m_1 e raios R_0, R_1 , respectivamente. Vamos supor que o planeta possui um período orbital muito curto se comparado como o período de rotação da estrela, isto é, $\Omega_0 \ll n$. Este é o caso do movimento Tipo III e, conseqüentemente, podemos usar as equações médias correspon-

dentes (3.53) e (3.55). Como discutimos no final do capítulo anterior, o modelo linear é o mais adequado para estudar a evolução de um sistema estrela-planeta. Vamos supor que a obliquidade é nula, ou seja, que os planos de referência e orbital são coincidentes. Para simplificar a notação, definimos as constantes

$$\hat{s} = \frac{9 k_{d0} m_1}{2 Q_0 m_0} R_0^5 \quad \hat{p} = \frac{9 k_{d1} m_0}{2 Q_1 m_1} R_1^5, \quad (4.1)$$

onde os parâmetros que aparecem nas definições já foram mencionados anteriormente, lembrando que $Q_0 = |\varepsilon_{2,0}|^{-1}$ e $Q_1 = |\varepsilon_{2,1}|^{-1}$, com o primeiro sub-índice indicando a frequência da onda de maré (ν_2), enquanto k_d é o número de Love dinâmico. Notamos que

$$\frac{\hat{p}}{\hat{s}} = \frac{k_{d1} Q_0}{k_{d0} Q_1} \left(\frac{m_0}{m_1} \right)^2 \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^5 = D, \quad (4.2)$$

onde D já foi definido na equação (3.54). Introduzindo as definições de \hat{s} e \hat{p} nas equações (3.53) e (3.55) obtemos

$$\langle \dot{a} \rangle = -\frac{2}{3} n a^{-4} [(2 + 46e^2)\hat{s} + 7e^2\hat{p}] \quad (4.3)$$

$$\langle \dot{e} \rangle = -\frac{1}{3} n e a^{-5} (18\hat{s} + 7\hat{p}). \quad (4.4)$$

O efeito de maré provocado *pela* estrela *no* planeta será chamado de *maré planetária* e, similarmente, o efeito *do* planeta *na* estrela será chamado de *maré estelar*. Os termos proporcionais a \hat{s} e \hat{p} nas equações (4.3) e (4.4) são as contribuições à variação média total dos elementos devido às marés estelar e planetária, respectivamente (ver Rodríguez & Ferraz-Mello, 2009).

4.3 Escalas de tempo

Como já foi antecipado no capítulo anterior, o efeito da interação de maré entre a estrela e o planeta é o de reduzir o tamanho e elipticidade da órbita relativa. O objetivo desta seção é calcular as escalas de tempo em que esses fenômenos acontecem.

4.3.1 Semi-eixo maior

Vamos começar estudando a escala temporal de decaimento do semi-eixo maior, que pode ser definida como $\tau_a \equiv a/|\dot{a}|$. Usando (4.3) temos

$$\tau_a = \frac{3}{2}n^{-1}a^5[(2 + 46e^2)\hat{s} + 7e^2\hat{p}]^{-1}. \quad (4.5)$$

Para calcular a escala de tempo de decaimento orbital só devido à maré planetária (τ_a^p) é suficiente impor $\hat{s} = 0$ (ou $Q_0^{-1} = 0$) na equação (4.5), obtendo assim

$$\tau_a^p = \frac{3n^{-1}a^5}{14e^2\hat{p}}. \quad (4.6)$$

Notamos que

$$\lim_{e \rightarrow 0} \tau_a^p = \infty, \quad (4.7)$$

indicando que, quando só a maré planetária é considerada, a queda no valor do semi-eixo maior é detida a partir do momento em que a circularização orbital acontece.

Uma análise similar permite calcular a escala de tempo de decaimento orbital só devido à maré estelar (τ_a^s), impondo $\hat{p} = 0$ (ou $Q_1^{-1} = 0$) na equação (4.3), obtendo

$$\tau_a^s = \frac{3n^{-1}a^5}{2(2 + 46e^2)\hat{s}}. \quad (4.8)$$

Da equação anterior chegamos ao resultado

$$\lim_{e \rightarrow 0} \tau_a^s = \frac{3n^{-1}a^5}{4\hat{s}} < \infty, \quad (4.9)$$

mostrando que, mesmo depois da circularização, o semi-eixo maior continua a decair devido ao efeito da maré estelar. Na Sec. 4.4 faremos uma análise mais detalhada para saber qual é o tipo de maré que domina o decaimento orbital.

É importante mencionar que a escala de tempo dada por $\tau_a \equiv a/|\dot{a}|$ pode não representar de forma precisa o tempo para o qual o decaimento orbital ocorre. A razão é que a definição de τ_a é mais adequada no caso em que a excentricidade seja tomada como constante. De fato, da equação (4.3) com $\hat{s} = 0$ sabemos que se e for constante temos $\dot{a} \propto a^{-11/2}$ e, integrando, $\tau_a = -(2/13)a/|\dot{a}|$. Porém, a excentricidade também muda no processo de evolução orbital por causa do efeito de maré, em uma escala temporal que será

analisada a seguir. Portanto, simulações numéricas das equações exatas do movimento são necessárias para se obter uma análise mais detalhada da evolução dinâmica do sistema estrela-planeta quente (ver Sec. 4.5).

4.3.2 Excentricidade

A escala de tempo de circularização orbital é definida como $\tau_e \equiv e/|\dot{e}|$. Fazendo uso da equação (4.4), obtém-se

$$\tau_e = \frac{3n^{-1}a^5}{18\hat{s} + 7\hat{p}}. \quad (4.10)$$

Assim como no caso do semi-eixo maior, podemos calcular as escalas de tempo correspondentes a cada tipo de maré. A partir da equação (4.10) temos

$$\tau_e^p = \frac{3n^{-1}a^5}{7\hat{p}} \quad (4.11)$$

para a maré planetária, e

$$\tau_e^s = \frac{3n^{-1}a^5}{18\hat{s}} \quad (4.12)$$

para a maré estelar. É importante notar que τ_e^p e τ_e^s são independentes de e . Com motivo de comparar as escalas de tempo para a circularização da órbita, fazemos

$$\frac{\tau_e^p}{\tau_e^s} = \frac{18\hat{s}}{7\hat{p}}. \quad (4.13)$$

É necessário ilustrar com um exemplo para se ter uma idéia do valor numérico de τ_e^p/τ_e^s . Considere-se o caso de um sistema em que os valores de massas e raios correspondem aos de um sistema do tipo *Sol-Júpiter quente*. Neste caso temos

$$\frac{\hat{p}}{\hat{s}} \simeq 12.5 \frac{k_{d1} Q_0}{k_{d0} Q_1}. \quad (4.14)$$

Neste exemplo, os valores dos parâmetros de maré verificam $Q_1/k_{d1} \sim Q_0/k_{d0} \sim 3 \times 10^5$ (Mardling & Lin, 2004). Então temos $\frac{k_{d1} Q_0}{k_{d0} Q_1} \sim 1$, e, conseqüentemente $\frac{\hat{p}}{\hat{s}} \gg 1$. Substituindo na equação (4.13) concluímos que, para o caso de um sistema do tipo Sol-Júpiter quente

$$\tau_e^p \ll \tau_e^s, \quad (4.15)$$

indicando que a evolução da excentricidade devida ao efeito de maré é principalmente determinada pela maré planetária. No caso em que o planeta seja uma *super-Terra*, vamos ter $\frac{k_{d1}}{k_{d0}} \frac{Q_0}{Q_1} \gg 1$, já que o valor da função de dissipação Q_1 é várias ordens de magnitude menor (dissipação maior) no caso de planetas terrestres, se comparado com o valor dos planetas gasosos. Neste caso, a maré estelar fica pouco eficiente e pode ser desprezada, sendo a maré planetária a responsável pela circularização da órbita.

Assim como no caso de τ_a , a definição de τ_e não é uma forma precisa de calcular o tempo de circularização orbital, já que o semi-eixo maior muda com o tempo por causa do decaimento orbital do planeta. Porém, em muitos casos a variação de a é muito mais lenta do que a variação de e (ver Sec. 4.4.2 junto com as simulações numéricas da Sec. 4.5), e por esse motivo, a definição de τ_e pode ser uma boa aproximação. Em Jackson *et al.* (2008a), encontra-se uma discussão detalhada sobre o fato de considerar a e e como constantes na hora de calcular as escalas de tempo para a evolução dos elementos orbitais.

4.4 Decaimento orbital para diferentes tipos de planetas

4.4.1 Excentricidade crítica

Da mesma maneira que fizemos na seção anterior com a excentricidade, é possível comparar as escalas de tempo do decaimento orbital devidas às marés planetária e estelar. Usando as equações (4.6) e (4.8), obtemos

$$\frac{\tau_a^p}{\tau_a^s} = \frac{(2 + 46e^2) \hat{s}}{7e^2 \hat{p}}. \quad (4.16)$$

É muito importante notar que a razão entre as duas escalas temporais depende de e , que é uma variável do problema. Vamos calcular um *valor crítico da excentricidade* para o qual $\tau_a^p/\tau_a^s = 1$. Isto é

$$e_c = \sqrt{\frac{2}{7\hat{p}/\hat{s} - 46}}, \quad (4.17)$$

(ver também Levrard *et al.*, 2009). Se $e > e_c$, então $\tau_a^p < \tau_a^s$, ou seja, a maré planetária é dominante. Se $e < e_c$, então $\tau_a^p > \tau_a^s$ e a maré estelar fica mais eficiente para produzir o decaimento orbital. Por eficiente, entende-se que uma das marés pode provocar uma diminuição de semi-eixo determinada Δa em um tempo menor do que a outra maré.

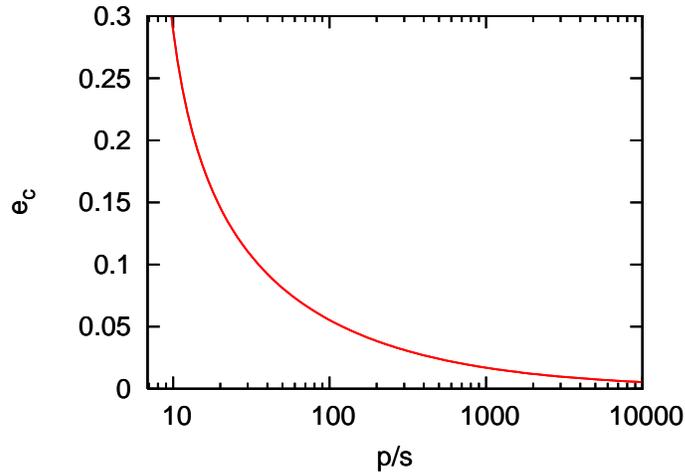


Figura 4.1: Variação da excentricidade crítica com \hat{p}/\hat{s} , segundo o resultado da equação (4.17). Note que $\lim_{\hat{p}/\hat{s} \rightarrow \infty} e_c = 0$.

A Fig. 4.1 apresenta o gráfico de e_c como função de \hat{p}/\hat{s} . Da equação (4.17) vemos que $\hat{p}/\hat{s} > 48/7$ deve ser verificado para que a função $e_c(\hat{p}/\hat{s})$ tenha solução ($e_c < 1$). Para valores grandes de \hat{p}/\hat{s} , e_c é pequeno e a condição $e > e_c$ pode ser facilmente verificada. Nesse caso, o decaimento orbital é dominado pela maré planetária ($\tau_a^p < \tau_a^s$). Para valores pequenos de \hat{p}/\hat{s} , é necessária uma grande excentricidade para que os efeitos atribuídos às duas marés sejam comparáveis. É importante lembrar que o modelo através do qual as equações médias foram obtidas é válido até segunda ordem na excentricidade.

4.4.2 Júpiter, Netuno e super-Terras quentes

Nesta seção vamos analisar a evolução orbital considerando um sistema formado por uma estrela tipo Sol e três tipos diferentes de planetas. De maneira geral, chamaremos *Júpiter quente*, *Netuno quente* e *super-Terra quente* àqueles planetas de curto período para os quais $m_1 \sim m_J$, $m_1 \sim m_N$ e $m_1 \sim 5m_\oplus$, em que m_J , m_N e m_\oplus são as massas de Júpiter, Netuno e Terra, respectivamente¹. A partir das equações (4.5) e (4.10) sabemos que

$$\frac{\tau_a}{\tau_e} = \frac{1}{2} \frac{18\hat{s} + 7\hat{p}}{[(2 + 46e^2)\hat{s} + 7e^2\hat{p}]} \quad (4.18)$$

É fácil observar que para valores baixos de e , $\tau_a \gg \tau_e$ é verificado (no caso extremo em que $e = 0$ e $\hat{p}/\hat{s} \ll 1$, teríamos $\tau_a/\tau_e \simeq 9/2$). Isto indica que o efeito de maré provoca

¹ Estas definições não são precisas. Eventualmente poderão ser alteradas por algum fator numérico.

a circularização orbital antes mesmo de produzir uma diminuição apreciável do semi-eixo maior. Como consequência, a contribuição da maré planetária ao decaimento orbital é muito pequena, já que após a circularização somente a maré estelar produz mudança de semi-eixo maior (ver equação (4.3)).

A equação (4.1) mostra que $\hat{s} \propto m_p$, onde o fator de proporcionalidade depende apenas de parâmetros estelares, mostrando que a contribuição da maré estelar é proporcional à massa do planeta. Então, o semi-eixo maior dos planetas mais massivos é mais eficientemente afetado devido à maré estelar, indicando que os Júpiter quentes devem se aproximar da estrela mais rapidamente do que os Netuno e super-Terras quentes (ver Sec. 4.8).

4.4.3 Evolução no plano dos parâmetros de maré

Em um sistema particular de dois corpos os valores de massas e raios podem ser obtidos através dos dados fornecidos pelos métodos de detecção, como velocidade radial e trânsito. No entanto, outros parâmetros necessários para analisar os efeitos produzidos pela interação de maré não estão bem determinados. É o caso dos valores dos números de Love e funções de dissipação, os quais podem ser encontrados na literatura com valores que diferem em várias ordens de magnitude, dependendo do tipo de objeto em consideração. É por essa razão que pode resultar útil construir um gráfico tomando valores de k_{d0}/Q_0 e k_{d1}/Q_1 como variáveis, supondo conhecida (por exemplo) a escala de tempo durante a qual o decaimento orbital do planeta acontece (τ_a).

A Fig. 4.2 apresenta como exemplo o resultado no caso do sistema Sol-Júpiter quente ($m_0 = m_\odot$, $R_0 = R_\odot$, $m_1 = m_J$, $R_1 = R_J$), em que os valores iniciais dos elementos são $a = 0.04$ UA e $e = 0.1$ (ver seguinte seção). Usando a equação (4.5) junto com as definições de \hat{p} e \hat{s} , é possível escrever k_{d0}/Q_0 como função de k_{d1}/Q_1 para um valor fixo de τ_a . Três escalas de tempo foram consideradas e apresentadas na figura. Notamos que no gráfico os valores de k_d/Q para cada corpo podem variar até duas ordens de magnitude. É fácil observar que, fixando o valor de k_d/Q em um dos eixos do gráfico, τ_a será menor quanto maior for o valor no outro eixo. De fato, segundo a equação (4.5) vemos que $\tau_a \propto (\hat{p} + \hat{s})^{-1}$ e $\hat{p} \propto k_{d1}/Q_1$, $\hat{s} \propto k_{d0}/Q_0$.

Um segundo exemplo é apresentado na Fig. 4.3, tratando-se de um sistema Sol-super-Terra quente, com $m_1 = 5m_\oplus$ e, supondo uma densidade média igual à da Terra, $R_1 =$

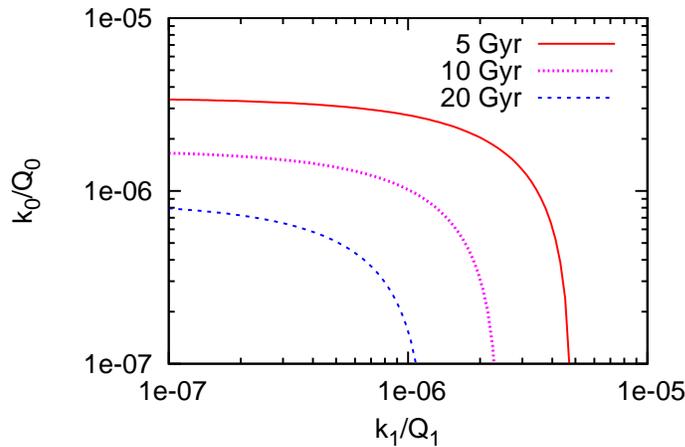


Figura 4.2: Evolução no plano dos parâmetros de maré para três escalas de tempo fixas do decaimento orbital, no caso de um sistema do tipo Sol-Júpiter quente. A equação (4.5) foi usada para obter a dependência entre k_{d0}/Q_0 e k_{d1}/Q_1 , supondo conhecidos os valores de massas e raios.

$5^{1/3}R_{\oplus}$. Os elementos iniciais são os mesmos do exemplo anterior. Notamos que para ter uma evolução de semi-eixo maior com as mesmas escalas de tempo do exemplo anterior são necessários valores maiores dos k_d/Q . De fato, os planetas rochosos em geral têm um valor menor da função de dissipação Q . Porém, como veremos nas próximas seções, a maré planetária contribui pouco ao decaimento orbital quando a excentricidade é baixa, sendo a maré estelar a principal fonte para a diminuição do semi-eixo maior. É por isso que no exemplo da Fig. 4.3 temos valores de k_{d0}/Q_0 duas ordens de magnitude maior do que no exemplo com um planeta tipo Júpiter para os mesmos τ_a .

4.5 Simulações numéricas

Com motivo de verificar alguns dos resultados obtidos nas seções anteriores, apresentaremos os resultados das simulações numéricas da evolução orbital devida ao efeito de maré em um sistema estrela-planeta quente. As simulações foram feitas usando o código RA15 (Everhart, 1985).

4.5.1 O modelo

Através do código, resolvemos numericamente a *equação exata* do movimento, dada pela lei de gravitação de Newton no contexto do problema (coplanar) de dois corpos, mais

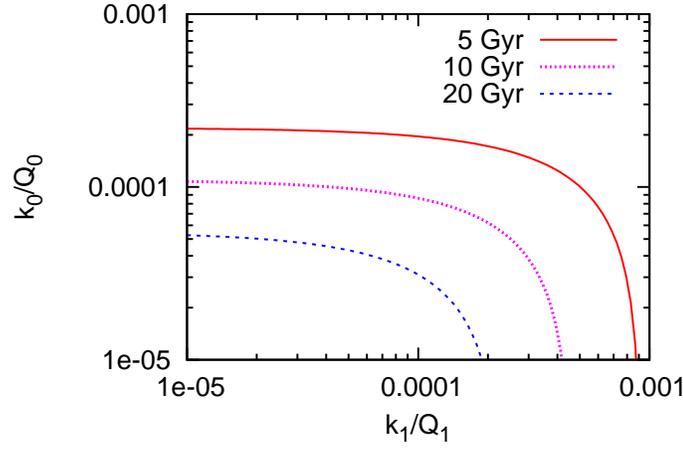


Figura 4.3: Análogo da Fig. 4.2 no caso de um sistema do tipo Sol-super-Terra quente.

os termos correspondentes às forças de maré \mathbf{f} e \mathbf{h} , que atuam no planeta e na estrela, respectivamente (ver Fig. 4.4). Chamando \mathbf{R}_0 e \mathbf{R}_1 às posições baricêntricas dos corpos, as equações de movimento nesse sistema ficam

$$\ddot{\mathbf{R}}_0 = \frac{Gm_1}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{h}}{m_0} - \frac{\mathbf{f}}{m_0} \quad (4.19)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = -\frac{Gm_0}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{f}}{m_1} - \frac{\mathbf{h}}{m_1}, \quad (4.20)$$

onde $\mathbf{g} = -\mathbf{f}$ e $\mathbf{i} = -\mathbf{h}$ são as reações das forças \mathbf{f} e \mathbf{h} , respectivamente. Assim, a equação de movimento do planeta no sistema astrocêntrico (com origem na estrela) pode ser encontrada sabendo que $\mathbf{r} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0$, e então $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}}_1 - \ddot{\mathbf{R}}_0$. Usando (4.19) e (4.20), obtemos

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_0 + m_1)}{r^3}\mathbf{r} + \frac{(m_0 + m_1)}{m_0m_1}\mathbf{f} - \frac{(m_0 + m_1)}{m_0m_1}\mathbf{h}, \quad (4.21)$$

onde $r \equiv \|\mathbf{r}\|$.

Adotamos o *modelo linear* para relacionar atrasos com as frequências das ondas de maré, tanto para a estrela quanto para o planeta. Desta maneira, as forças de maré estão dadas por

$$\mathbf{f} = -3k_{d1}\Delta t_1 \frac{Gm_0^2 R_1^5}{r^{10}} [2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + r^2(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}_1 + \mathbf{v})] \quad (4.22)$$

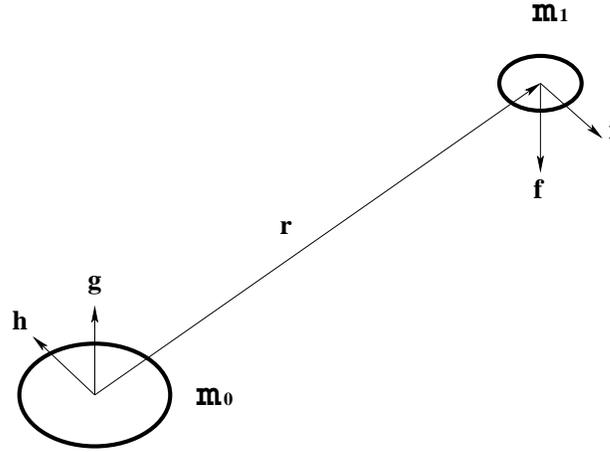


Figura 4.4: Forças envolvidas na interação de maré no caso geral em que os dois corpos são deformados, incluindo as forças de reação em cada corpo.

$$\mathbf{h} = 3k_{d0}\Delta t_0 \frac{Gm_1^2 R_0^5}{r^{10}} [2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + r^2(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}_0 + \mathbf{v})], \quad (4.23)$$

(Mignard, 1979), onde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ e $\boldsymbol{\Omega}_0, \boldsymbol{\Omega}_1$ são os vetores velocidade de rotação dos corpos envolvidos na interação. É importante mencionar que as forças (4.22) e (4.23) são *válidas para qualquer valor de e* , sendo que a segunda ordem na excentricidade coincidem com os resultados da força de maré calculada no Cap. 2. Os valores dos parâmetros Δt podem ser encontrados sabendo que, no modelo linear $|\varepsilon| = |\nu|\Delta t = Q^{-1}$, em que ν é uma das frequências de maré. Então, conhecendo o valor de Q é possível calcular um valor *constante* para Δt sempre que ν seja *fixa*. Notamos que nos Tipos II e III estudados neste capítulo, $|\nu| \propto n$ (para estrela e planeta), sendo n uma quantidade que varia lentamente. Portanto, podemos supor que a frequência é fixa e Δt é constante. Isto nos permite, em lugar de trabalhar com Δt , fazê-lo com Q , uma quantidade mais familiar.

4.5.2 Os sistemas

Escolhemos os mesmos sistemas estudados na Seção 4.4.2, isto é, uma estrela tipo Sol e planetas de curto período similares a Júpiter, Netuno e super-Terra. As condições iniciais estão apresentadas na Tabela 4.1. Note-se que o valor inicial do semi-eixo a_{ini} corresponde, para uma estrela de uma massa solar, a um período inicial de 2.92 dias. Uma distância curta facilita o fato de que, para valores típicos de Q_0 e Q_1 , a evolução orbital devida ao

Planeta	$m_1(m_J)$	Q_1	a_{ini} (UA)	e_{ini}	\hat{p}/\hat{s}	e_c
Júpiter quente	1.0	1×10^5	0.04	0.1	125	0.05
Netuno quente	0.1	1×10^4	0.04	0.1	2.40×10^3	0.01
Super-Terra quente	0.016	1×10^2	0.04	0.1	4.20×10^4	0.0026

Tabela 4.1 - Dados utilizados nas simulações numéricas. Para a estrela $m_0 = m_\odot$, $R_* = R_\odot$ e $Q_0 = 1 \times 10^6$. Adotamos $k_{d0} = k_{d1} = 1.5$.

efeito de maré aconteça em escalas de tempo razoáveis (menores que a idade do próprio sistema), sempre lembrando que as taxas de decaimento de semi-eixo e excentricidade são proporcionais a $a^{-11/2}$ e $a^{-13/2}$, respectivamente (ver equações (4.3) e (4.4)). Os valores dos raios foram calculados supondo que $\bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_{J,N,\oplus}$, onde $\bar{\rho}_{J,N,\oplus}$ são as densidades médias de Júpiter, Netuno e Terra, respectivamente, enquanto para a estrela $R_0 = R_\odot$. Note ainda que a massa no caso do Netuno quente verifica $m_1 \sim 2m_N$, ou seja, um planeta com o dobro da massa de Netuno (a escolha foi arbitrária e não contradiz nossa definição anterior de Netuno quente). Para a super-Terra temos $m_1 = 5m_\oplus$.

No caso de Júpiter, o valor típico de Q_J é estimado, baseado na configuração ressonante dos satélites Galileanos, no intervalo $10^5 \leq Q_J \leq 2 \times 10^6$, sendo o limite inferior o valor mais representativo (Goldreich & Soter, 1966). Estimativas mais modernas obtidas estudando o sistema Júpiter-Io indicam $Q_J/k_{dJ} = 9 \times 10^4$ (Lainey *et al.*, 2009). Cálculos recentes no caso de Netuno indicam $9 \times 10^3 \leq Q_N \leq 3.6 \times 10^4$ (Zhang & Hamilton, 2008). Assim, nas simulações numéricas foram assumidos $Q = 10^5$ e $Q = 10^4$ para planetas do tipo Júpiter e Netuno, respectivamente. No caso da super-Terra, adotamos o valor normalmente assumido para o caso de satélites naturais do Sistema Solar, $Q = 100$.

Os valores iniciais de excentricidade e_{ini} são baixos. Poderíamos então esperar que os resultados obtidos através das simulações numéricas coincidam com aqueles obtidos através da resolução numérica das equações médias, que são válidas até segunda ordem em e . No entanto, a comparação entre ambos resultados será feita na Seção 4.5.5, quando estudarmos o caso de uma órbita com uma grande e_{ini} .

Finalmente, conhecendo os valores dos parâmetros envolvidos podemos calcular, para cada caso, o valor de \hat{p}/\hat{s} usando a equação (4.2) e a excentricidade crítica e_c usando (4.17).

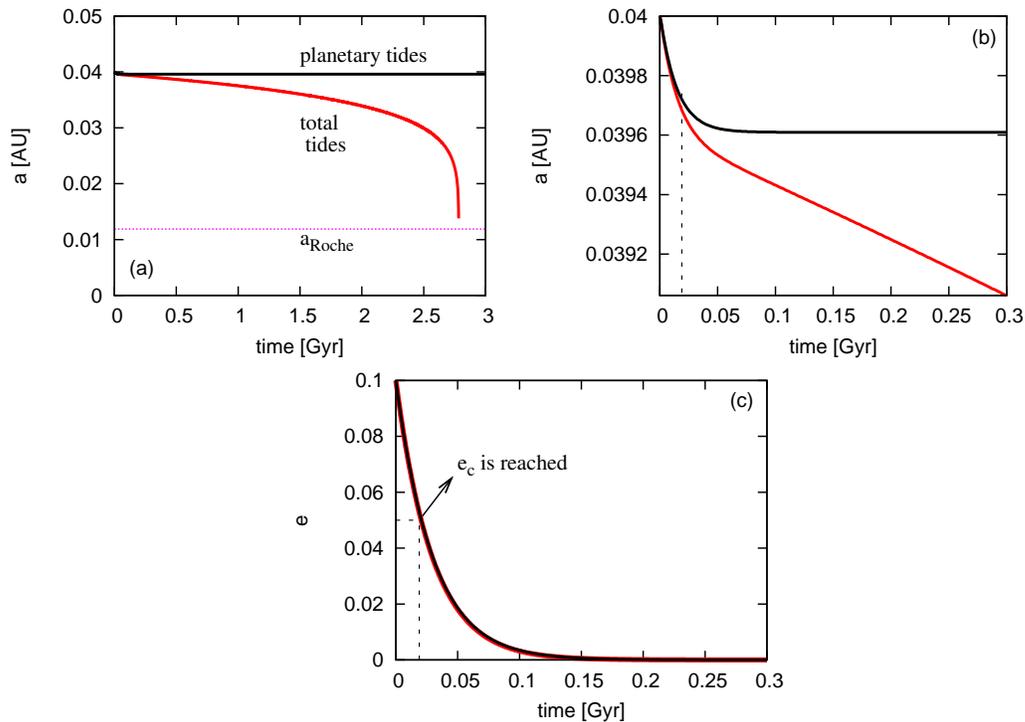


Figura 4.5: Variação do semi-eixo maior e excentricidade ao longo de 3 bilhões de anos de evolução sob o efeito de maré, no caso de um sistema do tipo Sol-Júpiter quente. (a) Evolução de a . Os casos com e sem a maré estelar são apresentados. (b) Evolução de a nos primeiros 0.3 bilhões de anos. A partir de 0.05 bilhões de anos, a maré estelar é a única fonte capaz de produzir o decaimento orbital. (c) Evolução de e . Note que $\tau_e \ll \tau_a$, assim, a órbita circulariza muito antes do decaimento orbital ser importante.

Em todas as simulações apresentadas nestes exemplos foi utilizado um *fator de escala* de 10^4 , com motivo de acelerar os processos de evolução pelo efeito das marés.

4.5.3 Resultados

A Fig. 4.5 apresenta a evolução temporal de semi-eixo maior e excentricidade no caso de um sistema Sol-Júpiter quente. O primeiro a destacar é o fato de que a escala de tempo para a circularização τ_e é muito menor do que a escala de tempo de decaimento orbital τ_a , como foi antecipado na Seção 4.4.2. A figura também mostra a comparação entre os casos com e sem maré estelar. É bem claro como a inclusão da maré estelar muda a evolução do semi-eixo maior, se comparada com o caso em que só a maré planetária é considerada. A Figura 4.5b é uma ampliação da 4.5a nos primeiros 0.3 bilhões de anos, indicando o momento para o qual a maré estelar começa a ficar dominante. Precisamente para esse

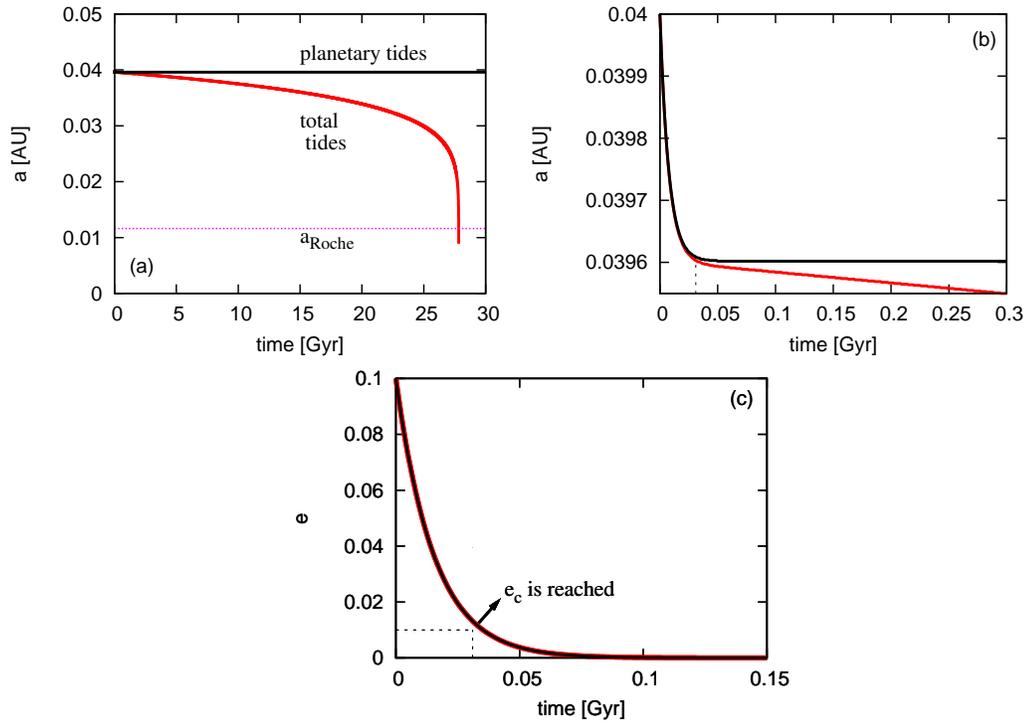


Figura 4.6: Variação do semi-eixo maior e excentricidade ao longo de 30 bilhões de anos de evolução sob o efeito de maré, no caso de um sistema do tipo Sol-Netuno quente. (a) Evolução de a . A maré estelar começa a ter um efeito importante em uma escala de tempo muito longa, comparável à idade do Universo. (b) Ampliação da figura anterior no começo da evolução. A partir de 0.05 bilhões de anos, a maré estelar fica dominante, porém, a taxa de decaimento orbital é menor do que no caso do Júpiter quente. (c) Evolução de e indica que a circularização orbital é controlada pela maré planetária.

tempo, a excentricidade atinge o seu valor crítico $e_c = 0.05$, como é mostrado na Fig. 4.5c. Durante o período em que $e > e_c$, a maré planetária domina, no entanto, dado que $\tau_e^p \ll \tau_a^p$, a excentricidade crítica é atingida rapidamente e, a partir de então, o decaimento orbital passa a ser governado pela maré estelar. Note-se ainda na Fig. 4.5c que a evolução da excentricidade não é afetada pela inclusão da maré estelar. Isto acontece devido a que $\tau_e^p \ll \tau_e^s$, como já foi mostrado na Seção 4.3.2. Portanto, neste exemplo a contribuição da maré estelar à circularização orbital é quase desprezível.

A Fig. 4.6 mostra o resultado da evolução orbital no caso de um planeta do tipo Netuno quente ($m_1 \sim 2m_N$), interagindo pelo efeito de maré com uma estrela igual ao Sol sob as mesmas condições iniciais do exemplo anterior. A maré estelar contribui ao decaimento orbital do planeta, porém, isto acontece em escalas de tempo muito maiores do que no caso do Júpiter quente (maior que a idade do Universo). De fato, comparando

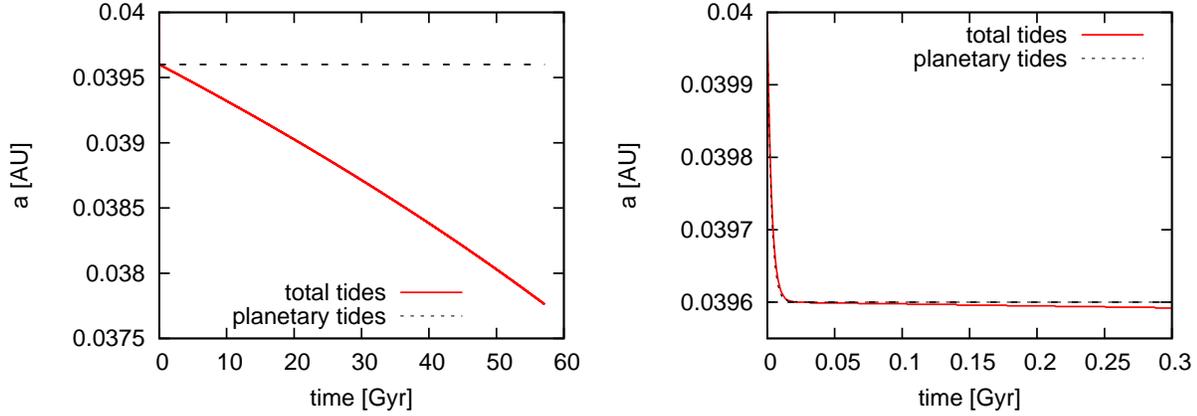


Figura 4.7: Evolução do semi-eixo maior no caso de um sistema Sol-super-Terra quente. A maré estelar não é forte o suficiente como para produzir um decaimento orbital importante, mesmo ao longo de um intervalo temporal extremamente grande.

as Figs. 4.6a e 4.5a notamos que $\tau_{aN} \sim 10\tau_{aJ}$. Por outro lado temos $e_{cN} = 0.01 = \frac{1}{5}e_{cJ}$ (ver Fig. 4.6c), indicando que a maré planetária domina quase até a circularização total da órbita. Depois disso, a maré estelar é a responsável de controlar a diminuição do semi-eixo maior. Porém, dado que $2m_N \ll m_J$, a influência da maré estelar no caso do Netuno quente não é tão efetiva quanto no caso do Júpiter quente para produzir o decaimento orbital. Esse resultado era de se esperar, já que $\hat{s} \propto m_1$, sendo mais fraca a intensidade da maré estelar no caso dos planetas de menor massa. A evolução da excentricidade, assim como no exemplo anterior, não é afetada quando a maré estelar é incluída. A razão é a mesma que no caso do Júpiter quente, já que novamente temos $\tau_e^p \ll \tau_e^s$, indicando que a variação de e está bem determinada apenas pela maré planetária.

O decaimento orbital de um planeta do tipo super-Terra quente está ilustrado na Fig. 4.7. Neste caso temos $e_c = 0.0026$, indicando que a maré planetária é dominante quase até a circularização total da órbita. A evolução a longo prazo mostra que o decaimento orbital é muito menor do que nos exemplos com Júpiter e Netuno quentes. De fato, a maré estelar (responsável pelo decaimento orbital quase na totalidade da evolução) é bem menor do que nos casos anteriores por causa do valor da massa do planeta.

A Fig. 4.8 mostra a evolução da excentricidade nos três exemplos, atribuída à maré total. Como já foi discutido na Sec. 4.3.2, a maré planetária domina a evolução da

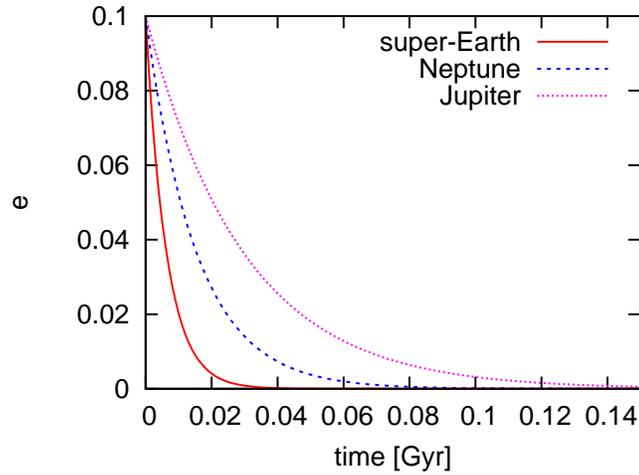


Figura 4.8: Variação de excentricidade, comparando as evoluções nos três exemplos apresentados. A escala de tempo de circularização orbital, τ_e , é menor no caso da super-Terra devido ao grande valor de \hat{p}/\hat{s} .

excentricidade em todos os casos. Como \hat{p}/\hat{s} é maior no caso da super-Terra, o processo de circularização orbital ocorre antes do que nos planetas tipo Júpiter e Netuno quentes.

Em todos os casos, é possível observar que no final da evolução acontece uma queda violenta no valor do semi-eixo maior devido à maré estelar. A explicação pode ser encontrada olhando a equação (4.3), vendo que $\dot{a} \propto na^{-4}$ ou, usando a terceira lei de Kepler, $\dot{a} \propto a^{-11/2}$, indicando que quanto menor for o valor de a maior será a taxa de decaimento orbital. De fato, no exemplo do Júpiter quente, a primeira metade da diminuição total do semi-eixo maior acontece ao longo de 2.7 bilhões de anos, enquanto a segunda metade precisa apenas 0.1 bilhões de anos de evolução.

Podemos resumir que, sob as mesmas condições iniciais, os planetas mais massivos evoluem mais rapidamente até a região dos planetas muito quentes, principalmente devido à ação da maré estelar. Notamos que este resultado já tinha sido antecipado na análise das equações médias, na Sec.4.4 (ver também Sec. 4.8).

4.5.4 O limite de Roche

Quando a distância entre estrela e planeta atinge certo valor crítico, o planeta pode sofrer um processo destrutivo em que a força de maré supera às forças internas de coesão, responsáveis por manter as distintas partes do corpo ligadas entre si. Essa distância se

conhece como *limite de Roche*. No Sistema Solar, o cinturão principal de asteróides e os anéis de Saturno são dois exemplos nos quais os conceitos de força de maré e limite de Roche estão envolvidos e relacionados entre si.

O limite de Roche, a_{Roche} , pode ser escrito como

$$a_{Roche} = \frac{R_1}{0.407} \left(\frac{m_0}{m_1} \right)^{1/3}, \quad (4.24)$$

(Faber *et al.*, 2005). No exemplo da Fig. 4.5 vemos que o planeta atinge o seu limite de Roche com a estrela, indicando um estado final do tipo catastrófico, no qual o planeta pode ser destruído. Notamos ainda que o limite de Roche é atingido só no final da evolução, no momento em que a taxa de decaimento orbital é fortemente acentuada.

O exemplo do Netuno quente (Fig. 4.6) mostra que o limite de Roche também é atingido, porém o tempo de evolução neste caso é muito maior comparado com o exemplo de Júpiter quente. Assumindo que um sistema planetário típico tem uma idade média de alguns bilhões de anos (≤ 10), podemos dizer que um planeta do tipo Netuno não conseguirá atingir o seu limite de Roche através do decaimento orbital provocado pela maré estelar (para uma estrela do tipo Sol), quando a excentricidade inicial for pequena ($\simeq 0.1$) e o período inicial da ordem de 3 dias.

Já no caso da super-Terra quente, usando a equação (4.24) temos $a_{Roche} = 0.0072$ UA e, portanto, o planeta tampouco poderá atingir o seu limite de Roche com a estrela. Note o valor pequeno de a_{Roche} no caso de uma super-Terra, levando em conta que o raio da estrela é $1R_{\odot} = 0.0046$ UA.

O limite de Roche pode fornecer informação sobre tempo de vida de uma determinada população de planetas que estão evoluindo sob ação do efeito de maré. De fato, como Jackson *et al.* (2009) provaram através da modelagem de uma população hipotética de exoplanetas de curto período, a distribuição de semi-eixos maiores com a idade dos sistemas indica uma evidência de que parte da população é destruída assim que os planetas vão atingindo os seus limites de Roche com a estrela correspondente.

A expressão utilizada para calcular o valor do limite de Roche dada pela equação (4.24) envolve algumas hipóteses sobre o corpo deformado pela maré, como densidade, estrutura, etc. Portanto, o valor de a_{Roche} pode mudar dependendo do valor de alguns parâmetros

físicos². Porém, o valor exato do limite de Roche não é importante já que uma vez que o planeta atinge um valor de semi-eixo maior de algumas 0.01 UA, a evolução é tão rápida que a escala de tempo para a destruição do planeta não é sensível ao valor exato de a_{Roche} (Jackson *et al.*, 2009).

Um outro fato a ser destacado é que, no caso de planetas gasosos que se aproximam da estrela central, pode acontecer perda de camadas superficiais de gás por causa do efeito de maré, diminuindo assim os valores da massa e raio do planeta³. A perda de massa faz com que o decaimento orbital seja mais lento devido ao efeito da maré estelar, além de diminuir o valor do limite de Roche, já que de acordo à equação (4.24) $a_{Roche} \propto \rho^{-1/3}$, possibilitando que o planeta possa sobreviver por mais tempo.

4.5.5 Grande e_{ini}

Já mencionamos antes que os resultados obtidos através das equações médias são válidos apenas para excentricidades baixas. Com motivo de quantificar essa validade, vamos ilustrar com um exemplo e comparar com os resultados da integração numérica das equações exatas, válidos para qualquer valor de e . Escolhemos o sistema Sol-Júpiter quente (ver Tabela 4.1), porém, colocamos o planeta inicialmente em uma órbita mais excêntrica, $e_{ini} = 0.4$. Os resultados são apresentados na Fig. 4.9, mostrando as variações de semi-eixo maior e excentricidade. Os efeitos das marés estelar e planetária foram considerados na análise. As equações médias (4.3) e (4.4) foram integradas numericamente, notando que as taxas de variação dependem de a e e , sendo um par de equações diferenciais acopladas. A Fig. 4.9c mostra como a circularização da órbita acontece antes no caso da análise com as equações exatas, indicando que, ao menos neste exemplo, os resultados obtidos através das equações médias superestimam a escala de tempo da circularização. Devido a essas diferenças e levando em conta que \dot{a} depende de e , as evoluções do semi-eixo maior deveriam ser diferentes em cada caso. Isso está mostrado nas Figs. 4.9a e 4.9b. Nos primeiros 0.3 bilhões de anos a diferença entre os dois métodos é apreciável, sendo mais importante no começo da evolução. Precisamente, no começo é quando acontece a diferença na

² De fato, a equação (4.24) é válida para um corpo incompressível. Quando se assume compressibilidade, o fator numérico muda para 0.462 (ver Faber *et al.* (2005))

³ Em casos extremos, é possível que a perda de gás seja quase total, sobrando apenas um caroço rochoso de densidade maior do que o corpo original.

evolução da excentricidade que provoca a diferença na variação do semi-eixo maior. Porém, é possível notar que durante toda a evolução as diferenças entre resultados não é muito significativa. Inclusive vemos que o valor final de a atingido é o mesmo em cada caso. Desta maneira e principalmente para valores baixos de e , os resultados obtidos através da integração numérica das equações médias se aproximam bastante daqueles obtidos através da simulação numérica do problema usando as equações exatas do movimento.

É importante notar mais uma vez que, antes da excentricidade crítica ser atingida ($e_c = 0.05$, ver Sec. 4.5.2) a maré planetária domina completamente o decaimento orbital, e quando $e < e_c$ a maré estelar é responsável pela variação do semi-eixo maior até o fim da evolução.

Um outro fato a ser destacado é que o planeta consegue atingir o seu limite de Roche muito antes do que no exemplo com $e_{ini} = 0.1$ (a razão entre as escalas de tempo é ~ 4 , comparar Figs. 4.5 e 4.9). Durante o processo de circularização orbital, a maré planetária provoca uma diminuição apreciável do semi-eixo maior, já que a contribuição da maré planetária ao decaimento orbital é proporcional a e^2 . Portanto, após a circularização a maré estelar começa a dominar a evolução a partir de um valor menor de a do que no caso com $e_{ini} = 0.1$ e, assim, a evolução do semi-eixo se torna mais rápida quando a excentricidade inicial é grande.

4.6 Evolução no plano $e - a$

O objetivo desta seção é estudar o problema desde um ponto de vista qualitativo, sem recorrer à utilização de simulações numéricas. Consideramos novamente as variações médias de semi-eixo maior e excentricidade atribuídas ao efeito acumulado das marés estelar e planetária, dadas pelas equações médias (4.3) e (4.4). Vamos escrevê-las como função do parâmetro D , já definido na equação (3.54), lembrando que a relação entre D , \hat{p} e \hat{s} vem dada pela equação (4.2). Assim temos

$$\langle \dot{a} \rangle = -\frac{2}{3}na^{-4}\hat{s}[(2 + 46e^2) + 7e^2D] \quad (4.25)$$

$$\langle \dot{e} \rangle = -\frac{1}{3}nea^{-5}\hat{s}[18 + 7D]. \quad (4.26)$$

Da razão entre as equações (4.25) e (4.26) obtemos

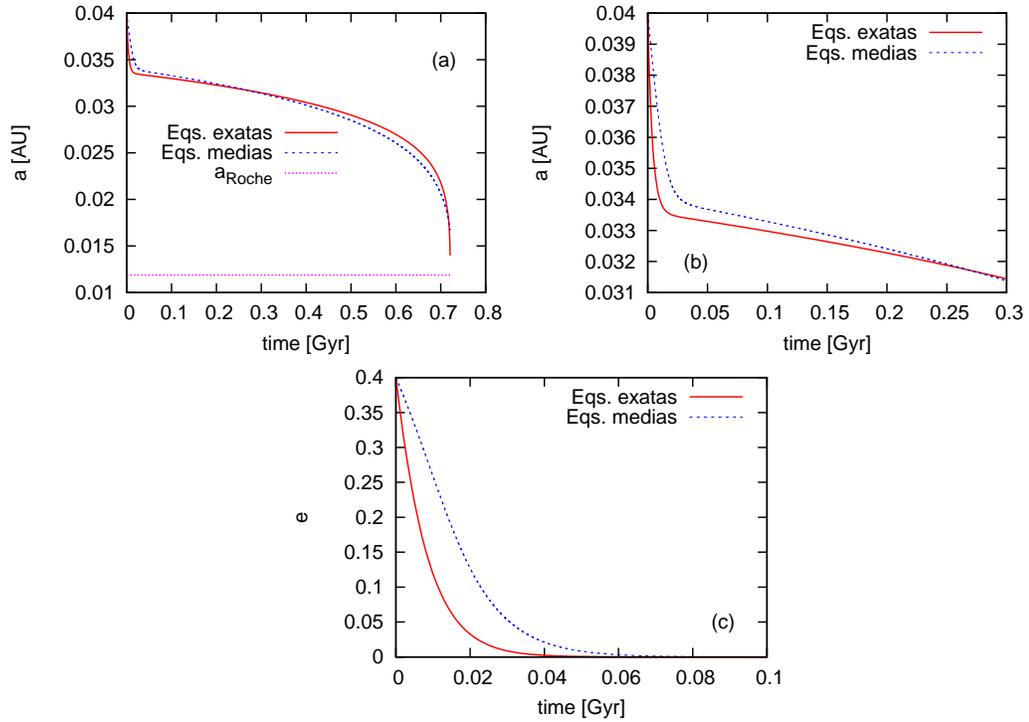


Figura 4.9: Variação do semi-eixo maior e excentricidade incluindo marés planetária e estelar, no caso de um sistema do tipo Sol-Júpiter quente com $e_{ini} = 0.4$, comparando os dois métodos descritos no texto. (a) Evolução de a . As diferenças entre os resultados não é de grande importância (b) Ampliação da figura anterior no começo da evolução mostra as diferenças nos primeiros 0.3 bilhões de anos de evolução. (c) Evolução de e é mais afetada pelo método de obtenção dos resultados.

$$\frac{da}{a} = F(e, D) \frac{de}{e}, \quad (4.27)$$

onde

$$F(e, D) \equiv \frac{2[2 + (7D + 46)e^2]}{7D + 18}. \quad (4.28)$$

Depois da integração da equação (4.27) chegamos ao resultado

$$a = a_{ini} \exp \left[\frac{(7D + 46)(e^2 - e_{ini}^2) + 4 \log(e/e_{ini})}{7D + 18} \right]. \quad (4.29)$$

Quando a maré estelar é desprezada ($\hat{s} = 0$ ou $D \rightarrow \infty$) temos

$$a = a_{ini} \exp(e^2 - e_{ini}^2), \quad (4.30)$$

indicando que quando só a maré planetária é considerada, a posição final do planeta depende apenas dos valores iniciais dos elementos. Parâmetros como massa, raio e função de dissipação não modificam o decaimento orbital. Tomando os valores iniciais dos exemplos anteriores, $a_{ini} = 0.04$ UA e $e_{ini} = 0.1$ obtemos que, após a circularização ser atingida ($e = 0$) o valor do semi-eixo final é, usando a equação (4.30), $a_f = 0.0396$ UA (ver Figs. 4.5, 4.6 e 4.7).

A Fig. 4.10 apresenta o gráfico da função $a(e)$ dada pela equação (4.30). Com motivo de comparar, mostramos também o resultado da simulação numérica para o caso do sistema Sol-Júpiter quente usando os dados da Tabela 4.1 e incluindo apenas a maré planetária. Note-se que as duas curvas são quase coincidentes, indicando também que o desenvolvimento a segunda ordem em e funciona bem neste exemplo de baixa excentricidade.

4.6.1 Conservação do momento angular

Assumindo que $m_0 \gg m_1$ e sem considerar as contribuições atribuídas às rotações da estrela e do planeta, o momento angular total do sistema pode ser escrito como

$$L = m_1 \sqrt{Gm_0} \sqrt{a(1 - e^2)}. \quad (4.31)$$

Usando o principio de conservação, sabemos que

$$L = m_1 \sqrt{Gm_0} \sqrt{a_{ini}(1 - e_{ini}^2)}. \quad (4.32)$$

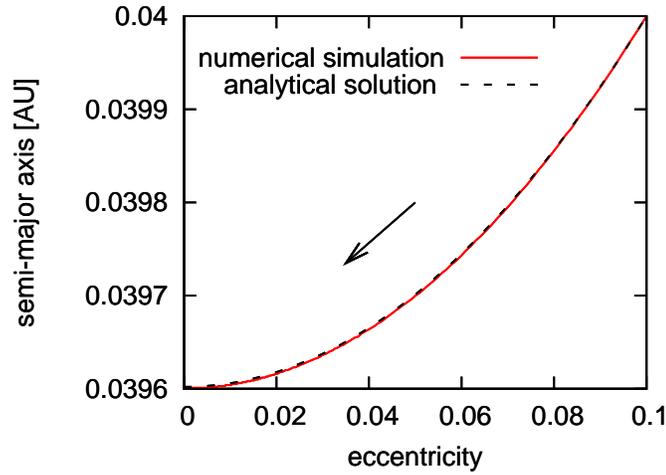


Figura 4.10: Evolução no plano $a - e$, sem maré estelar. No exemplo, a comparação é feita entre os resultados das equações médias e da simulação numérica com os mesmos valores iniciais dos elementos orbitais. A seta indica a direção da evolução.

Igualando as duas equações acima e definindo $\alpha \equiv a_{ini}(1 - e_{ini}^2)$ obtemos

$$a = \frac{\alpha}{1 - e^2}. \quad (4.33)$$

Desta maneira, a conservação do momento angular também pode ser representada por uma curva no plano $a - e$, através da equação (4.33). A Fig. (4.11) mostra a comparação entre as equações (4.29) e (4.33) (identificada como AM) para diferentes valores de D . Notamos que, para D pequeno os resultados apresentam diferenças, enquanto que para D grande as curvas são quase idênticas. De fato, a curva dada pela equação (4.33) não leva em conta a variação da rotação da estrela devida à maré estelar. Essa variação é muito pequena, levando em consideração que a estrela é muito mais massiva do que o planeta (ver Sec. 4.7.2). Porém, a variação do momento angular de rotação pode ser significativa devido aos grandes valores de massa e raio estelar. Nesse caso, a conservação do momento angular total do sistema não pode ser mais representada pela equação (4.33). Quando a intensidade da maré estelar não é importante (\hat{s} pequeno ou D grande) o efeito na rotação da estrela é pequeno e as curvas dadas pelas equações (4.29) e (4.33) se aproximam entre elas. Como exemplo vamos considerar os casos de planetas gasosos e terrestres interagindo com uma estrela igual ao Sol. No caso dos gasosos, escolhamos um planeta tipo Júpiter, $m_1 = 1m_J$ e $R_1 = R_J$. Introduzindo valores numéricos na equação (4.2) temos, assumindo $k_1/k_0 = 1$,

$D = 12.5 Q_0/Q_1$. Para ilustrar o caso dos planetas terrestres escolhemos um planeta tipo super-Terra quente, $m_1 = 5m_\oplus$ e, supondo uma densidade média igual à da Terra, $\bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_\oplus$, calcula-se o valor do raio e finalmente obtemos $D = 4.2 Q_0/Q_1$. Note-se que D não é muito sensível aos valores de massas e raios, dependendo principalmente da razão entre as funções de dissipação. Assumindo valores típicos temos, $Q_0/Q_1 = 10^4$ para planetas terrestres e $Q_0/Q_1 = 10^2$ para os gasosos. Esses valores correspondem aproximadamente aos exemplos das curvas com $D = 10^4$ e $D = 10^2$ na Fig. (4.11). Portanto, como $D_{terrestre} \gg D_{gasoso}$, a maré estelar pode ser desprezada, como primeira aproximação, no caso dos planetas terrestres e a conservação do momento angular total do sistema fica bem representada pela equação (4.33). Pensando fisicamente, o resultado anterior é razoável desde que, no nosso exemplo, $m_{1terrestre} \ll m_{1gasoso}$ e portanto um planeta de baixa massa é menos eficiente para poder produzir mudanças na rotação da estrela.

Já discutimos quais as consequências que tem o fato de não incluir a variação da rotação da estrela na equação (4.31). Porém, para calcular o momento angular total do sistema ainda deve ser somada a componente da rotação do planeta. Dita rotação sofrerá mudanças importantes ao longo da evolução, no entanto, a variação do momento angular de rotação será muito pequena, sempre supondo $m_0 \gg m_1$. Na Sec. 4.7.1 vamos fazer uma análise da rotação do planeta, onde discutiremos este ponto com mais detalhe.

É importante notar que a equação (4.33) é válida para qualquer valor de e . Porém, a equação (4.29) foi obtida através dos resultados das equações médias, válidos até segunda ordem na excentricidade. É possível fazer uma comparação entre os resultados das duas equações para vários valores de e . Para facilitar, vamos supor que a maré estelar pode ser desprezada, em cujo caso a equação (4.29) simplifica-se pela (4.30). A Fig. 4.12 mostra o resultado para três valores de e_{ini} : 0.1, 0.3 e 0.5. Observa-se que para grandes excentricidades, a evolução no plano $a - e$ dada pelas equações médias não segue à curva correspondente à conservação do momento angular total do sistema.

4.7 Rotação

No Cap. 2 vimos que, o atraso na resposta à força de maré provoca variações na velocidade angular de rotação do corpo deformado. Nesta seção vamos analisar com mais detalhe a evolução da rotação dos corpos (principalmente do planeta), usando simulações

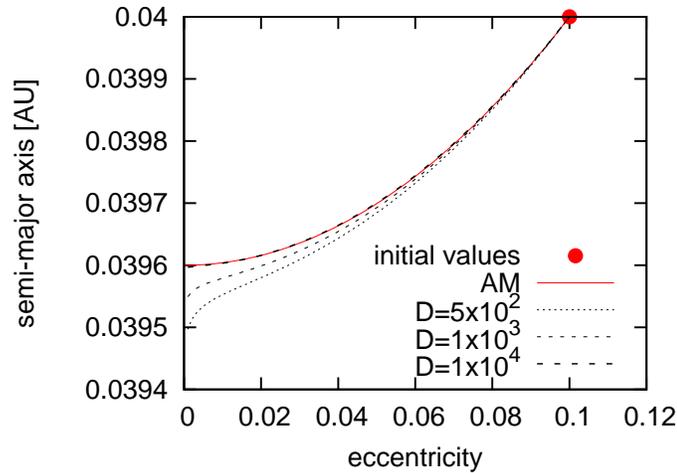


Figura 4.11: Comparação entre as equações (4.29) e (4.33) para diferentes valores de D . Quando D é grande a contribuição da maré estelar é muito fraca e a rotação da estrela não é afetada, sendo a conservação do momento angular total do sistema bem representada pela equação (4.33). Já quando D é pequeno, a maré estelar pode ser importante para produzir uma variação considerável no momento angular de rotação e , nesse caso, a equação (4.33) não pode ser usada. Os exemplos com $D = 10^4$ e $D = 10^2$ correspondem a planetas do tipo super-Terra e Júpiter, respectivamente (detalhes no texto).

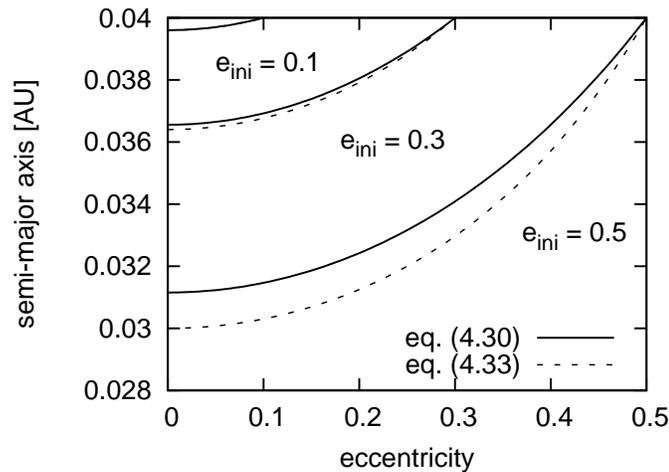


Figura 4.12: Comparação entre as equações (4.30) e (4.33) para diferentes valores de e_{ini} . As curvas coincidem para $e_{ini} = 0.1$, que corresponde ao caso do exemplo anterior. Para grandes e_{ini} , a evolução no plano dos elementos dada pelas equações médias não obedece a conservação do momento angular do sistema.

numéricas das equações exatas e alguns resultados das equações médias.

4.7.1 Rotação do planeta

A variação em função do tempo da rotação do planeta pode ser obtida calculando o torque provocado pela força de maré que age no corpo deformado (neste caso o planeta, ver Fig. 4.4), $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$, onde \mathbf{f} está dado na equação (4.22). Sabendo que o módulo do momento angular de rotação pode ser escrito como $L_{rot} = C_1 \Omega_1$, em que C_1 , o momento de inercia do planeta verifica $C_1 \propto m_1 R_1^2$ (o coeficiente de proporcionalidade é um número positivo menor ou igual a 2/5, ver Cap. 2), obtemos

$$C_1 \dot{\Omega}_1 = \mathbf{r} \times \mathbf{f}. \quad (4.34)$$

A equação (4.34) é a equação do movimento para a rotação do planeta. Resolvendo para $\dot{\Omega}_1$ e substituindo o valor de \mathbf{f} , temos finalmente

$$\dot{\Omega}_1 = -3k_{d1} \Delta t_1 \frac{Gm_0^2 R_1^5}{C_1 r^8} [(\mathbf{r} \cdot \Omega_1) \mathbf{r} - r^2 \Omega_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{v}]. \quad (4.35)$$

A Fig. 4.13 mostra as evoluções dos períodos de rotação e orbital, definidos como $P_{rot} \equiv 2\pi/\Omega_1$ e $P_{orb} \equiv 2\pi/n$, no caso do sistema Sol-Júpiter quente. Os valores iniciais dos períodos foram 16.7 hs (P_{rot}) e 2.92 dias (P_{orb} , $a_{ini} = 0.04$ UA), enquanto o resto dos parâmetros usados na simulação são os mesmos das seções anteriores (ver Tabela 4.1). No começo da evolução, notamos que P_{rot} aumenta rapidamente seguido de uma variação lenta. Em 0.05 bilhões de anos o planeta atinge o sincronismo rotação-órbita ($P_{rot} = P_{orb}$), mantido até o fim da simulação. O período orbital diminui desde o começo como consequência do decaimento orbital, ao tempo que a rotação acompanha o sincronismo.

É importante mencionar que tanto a maré planetária quanto a estelar foram consideradas na simulação. Já vimos na Sec. 4.5.3 que a maré estelar é a principal responsável pelo decaimento orbital no caso de planetas tipo Júpiter quente em órbitas de baixa excentricidade. Portanto, se só a maré planetária for incluída o valor final de P_{rot} não seria tão pequeno quanto no caso que estamos estudando aqui (ver Fig. 4.5).

Solução estacionária

Vamos relembrar alguns resultados sobre os planetas que têm um estado de rotação Tipo II, em que $\Omega_1 \simeq n$ (quase síncrono). Já vimos que, a solução estacionária atingida pela rotação quando se aplica o modelo linear é

$$\Omega_1^{est} = n(1 + 6e^2), \quad (4.36)$$

ou, escrevendo em função dos períodos

$$P_{rot}^{est} = \frac{P_{orb}}{1 + 6e^2}, \quad (4.37)$$

A Fig. 4.13 mostra a evolução de P_{rot}^{est} , dado pela equação (4.37) em linha pontilhada. No começo da simulação é possível observar como a rotação atinge o seu valor estacionário, se aproximando do sincronismo quando a órbita perde excentricidade (ver Fig. 4.5). Isso é verificado pela equação (4.37), mostrando também que assim que a excentricidade diminuiu, o valor estacionário se aproxima do sincronismo exato, onde $P_{rot} = P_{orb}$. De qualquer maneira e como já foi discutido no Cap. 3, a solução estacionária para a rotação dos planetas que evoluem sob ação apenas do efeito de maré é super-síncrona ($P_{rot} < P_{orb}$), enquanto que o sincronismo exato só é possível a partir do momento em que a circularização é atingida.

Momento angular de rotação

Na Sec. 4.6.1 foi feita uma análise baseada na conservação do momento angular do sistema, sob a hipótese de que a componente de rotação do planeta não contribuía ao momento total. Nesta seção vamos justificar tal hipótese.

A Fig. 4.14 apresenta o resultado das evoluções do momento angular orbital, dado pela equação (4.31), e do momento angular de rotação do planeta, dado por $L_{rot} = 2\pi C_1/P_{rot}$. Os resultados correspondem ainda ao sistema Sol-Júpiter quente. É claro que neste caso temos $L_{rot} \ll L_{orb}$, ou mais precisamente $L_{rot}/L_{orb} \sim 10^{-4}$. Este resultado poderia ser provado de uma forma geral notando que, usando as definições, temos

$$\frac{L_{rot}}{L_{orb}} \sim \frac{2\pi m_1 R_1^2 / P_{rot}}{m_1 \sqrt{Gm_0} \sqrt{a(1-e^2)}}. \quad (4.38)$$

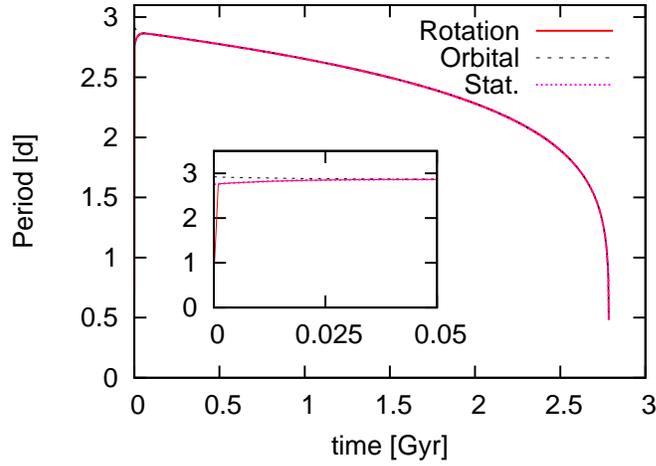


Figura 4.13: Variação temporal dos períodos de rotação e orbital no caso de um planeta tipo Júpiter. A solução estacionária é rapidamente atingida pela rotação. Assim que a órbita começa a perder excentricidade, o sincronismo entre os períodos vai se aproximando até ser finalmente atingido, e mantido até o fim, quando $e = 0$, verificando o resultado da equação (4.37), obtido através das equações médias.

Usando a terceira lei de Kepler para introduzir o período orbital e levando em conta que $P_{rot} \sim P_{orb}$, obtemos, para baixas excentricidades

$$\frac{L_{rot}}{L_{orb}} \sim \frac{2\pi R_1^2}{a^2}, \quad (4.39)$$

indicando que a razão entre período de rotação e orbital é da ordem de $(R_1/a)^2 \ll 1$. Note que a razão é menor no caso de planetas menores do que Júpiter.

Outros efeitos que afetam a rotação do planeta

Além da interação de maré entre estrela e planeta discutida ao longo deste trabalho, outros efeitos podem alterar a solução estacionária para a rotação de um planeta de curto período. Um deles é conhecido como *maré atmosférica*, que age sobre aqueles planetas que possuem uma atmosfera suficientemente densa.

A absorção diferencial do calor estelar pela atmosfera planetária provoca variações locais de temperatura e, conseqüentemente, gradientes de pressão. As partículas da atmosfera se movimentam desde as regiões de alta temperatura para as áreas de menor temperatura. Dessa forma, a massa atmosférica é permanentemente redistribuída, ajustando-se a uma figura de equilíbrio (Correia *et al.*, 2008). Similarmente ao caso da maré gravitacional, é

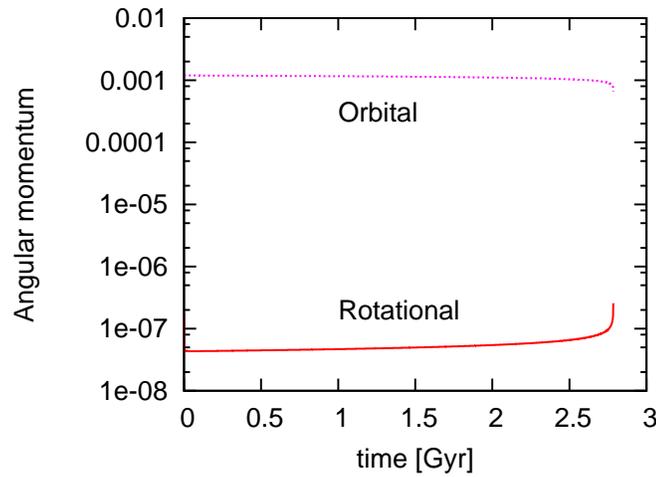


Figura 4.14: Evolução dos momentos angulares orbital e de rotação do planeta em unidades de $m_{\odot} U A^2 \text{ano}^{-1}$. A componente da rotação é desprezível se comparada com a componente orbital e, portanto, pode ser desprezada na hora de calcular o momento total.

possível calcular o potencial gerado pela deformação da atmosfera. Também haverá um atraso entre a perturbação provocada pelo aquecimento e a resposta da atmosfera (análogo do Δt) e, por esse motivo, também existirá um torque associado à demora na deformação (ver Fig. 4.15).

A solução estacionária da rotação poderá ser calculada através dos efeitos combinados das marés gravitacional e atmosférica. Dependendo da intensidade da componente atmosférica, a solução estacionária pode se afastar consideravelmente de $\Omega_1^{est} = n(1 + 6e^2)$ (impondo o modelo linear nas duas marés) e, em alguns casos, a solução estacionária pode dar origem a uma rotação retrógrada, como acontece no planeta Vênus (Correia *et al.*, 2003)

Correia *et al.* (2008) analisaram as possíveis soluções estacionárias da rotação no caso de super-Terras quentes, mostrando que o sincronismo (solução estacionária no caso livre de maré atmosférica e órbita circular) pode ser deslocado da solução de equilíbrio, deixando de ser uma das possíveis soluções estacionárias.

Devido a que algumas super-Terras encontram-se localizadas na região conhecida como “zona habitável”, torna-se importante o estudo da evolução da rotação com motivo de poder entender melhor o clima do planeta. No entanto, cabe o questionamento sobre a capacidade que um planeta tão próximo da estrela possa ter como para poder sustentar

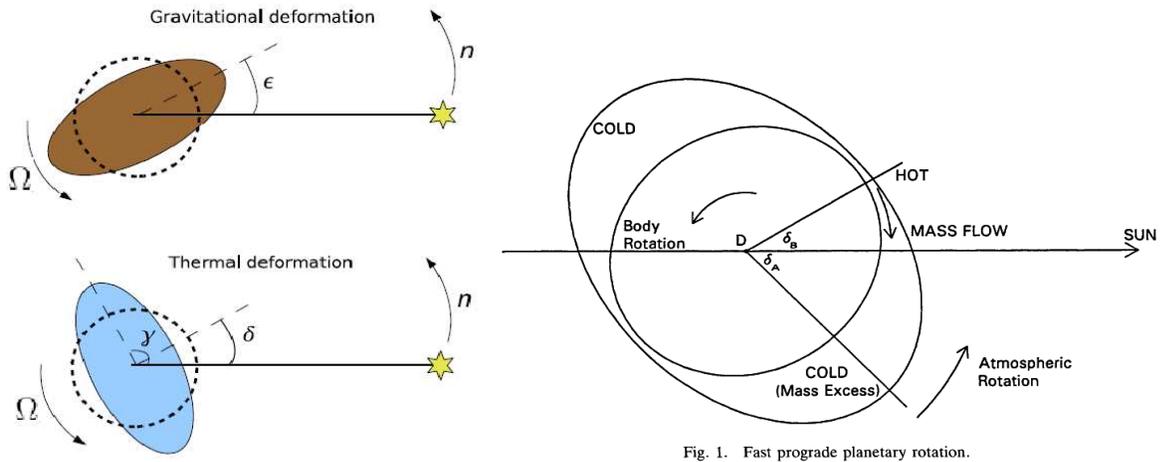


Fig. 1. Fast prograde planetary rotation.

Figura 4.15: Ilustração das marés atmosférica e gravitacional, no caso de um planeta com rotação direta (*prograde*) e super-síncrona ($\Omega > n$). O aquecimento da atmosfera provoca um excesso de massa nas regiões que formam ângulo reto com a direção da estrela. A figura de equilíbrio resultante da atmosfera deformada é um esferóide com semi-eixo menor na direção da estrela. Os atrasos nas deformações produzem dois torques de maré que afetam a rotação do planeta. Note que neste caso os torques agem em direções opostas (ver McCue & Dormand, 1993).

uma atmosfera densa.

4.7.2 Rotação da estrela

A equação (3.5), representa a variação média geral (sem aplicação aos Tipos I, II ou III) da velocidade angular de rotação do corpo deformado. Usando a definição de momento de inercia temos

$$\langle \dot{\Omega}_0 \rangle \propto \frac{m_1^2 R_0^3}{m_0}, \quad \langle \dot{\Omega}_1 \rangle \propto \frac{m_0^2 R_1^3}{m_1}. \quad (4.40)$$

Assim, a razão entre as variações médias fica

$$\frac{\langle \dot{\Omega}_0 \rangle}{\langle \dot{\Omega}_1 \rangle} \propto \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^3 \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^3. \quad (4.41)$$

Substituindo valores numéricos para o sistema Sol-Júpiter quente na equação (4.41) obtemos

$$\frac{\langle \dot{\Omega}_\odot \rangle}{\langle \dot{\Omega}_J \rangle} \sim 8 \times 10^{-7}, \quad (4.42)$$

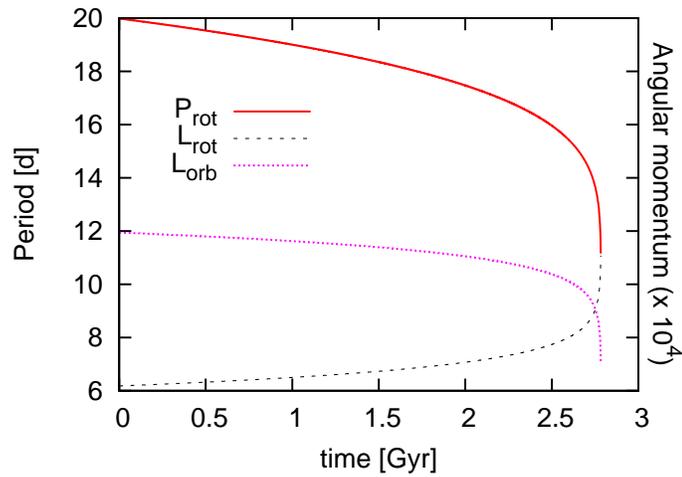


Figura 4.16: Variações do período e momento angular de rotação da estrela. Ao longo da evolução, a maré na estrela atribuída ao Júpiter quente provoca uma importante aceleração da rotação estelar. O momento angular orbital é mostrado para verificar a conservação do momento total. A unidade dos momentos angulares é $m_{\odot}UA^2ano^{-1}$ ($\times 10^4$).

indicando que a taxa de variação média da rotação da estrela é muito menor do que a taxa correspondente à variação média do planeta.

Momento angular

Continuando com o exemplo do sistema Sol-Júpiter quente, vamos analisar alguns resultados obtidos através das simulações numéricas. A Fig. 4.16 mostra a variação do período de rotação da estrela na curva sólida, onde inicialmente $P_{rot} = 20$ dias. Note que trata-se de uma estrela em rotação lenta (no Sol, $P_{rot} \simeq 25$ dias). Durante a evolução, o período de rotação diminui até perder aproximadamente a metade do seu valor inicial, indicando uma importante aceleração na rotação estelar. Conseqüentemente, o momento angular de rotação da estrela, cuja variação está indicada pela curva tracejada na Fig. 4.16, é uma função crescente do tempo. Esse resultado pode ser explicado desde o ponto de vista da conservação do momento angular total do sistema. O decaimento orbital do planeta produz uma diminuição da componente orbital do momento angular (Fig. 4.14) e, desprezando a rotação do planeta, o momento de rotação da estrela deve aumentar para conservar o momento total. Com motivo de verificar, também mostramos novamente a variação de L_{orb} (curva pontilhada).

Solução estacionária

Como vimos no exemplo com valores numéricos, a taxa de variação média da rotação da estrela é muito menor do que a do planeta. Porém, a simulação numérica do mesmo exemplo mostrou que a rotação da estrela pode sofrer uma importante aceleração por causa do efeito da maré provocado pelo planeta. De fato, o resultado da equação (4.42) foi obtido considerando apenas os valores dos parâmetros como massas e raios da equação (3.5). No entanto, notamos que nessa equação $\langle \dot{\Omega} \rangle \propto \varepsilon_0$ e, seguindo o modelo linear sabemos que quando $\Omega \rightarrow n$, $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ e então $\langle \dot{\Omega} \rangle \rightarrow 0$, e a rotação atinge assim o seu valor estacionário. De fato, como já foi discutido, o sincronismo ($\Omega = n$) é a solução estacionária da rotação do corpo deformado para órbitas circulares. No caso do planeta, vimos que a rotação atinge rapidamente o seu valor estacionário, dado por $n(1 + 6e^2)$. Assim, a razão entre as taxas de variação dada pela equação (4.41) tenderia a infinito, já que $\dot{\Omega}_1 \rightarrow 0$. Desta maneira, o resultado da equação (4.41) deve ser considerado naqueles casos em que a rotação está longe do valor estacionário.

A solução estacionária para a rotação estelar pode ser encontrada analisando o resultado da equação (3.44). Notamos que dito resultado foi obtido aplicando o modelo linear na equação (3.5) e, portanto, trata-se de um resultado geral, válido para qualquer regime de rotação. A solução estacionária para a rotação será aquele valor de Ω que verifique

$$1 + \frac{27}{2}e^2 = \left(1 + \frac{15}{2}e^2\right)\frac{\Omega}{n}, \quad (4.43)$$

ou, fazendo um desenvolvimento a segunda ordem em excentricidade

$$\frac{\Omega}{n} \simeq 1 + 6e^2. \quad (4.44)$$

É importante destacar que esse resultado pode ser aplicado tanto no caso da rotação da estrela quanto do planeta. No exemplo numérico da Fig. 4.16, notamos que mesmo no fim da simulação ainda temos $\Omega_0 \ll n$ ($P_{rot} \simeq 11$ dias, $P_{orb} = 0.5$ dias, ver também Fig. 4.13), indicando que a rotação da estrela nunca vai atingir o seu estado estacionário dado por (4.44).

Com motivo de complementar os resultados anteriores, apresentamos na Fig. 4.17 a evolução da rotação estelar junto com os momentos angulares no caso de um sistema do tipo Sol-Netuno quente (ver valores numéricos na Tabela 4.1). As condições iniciais são

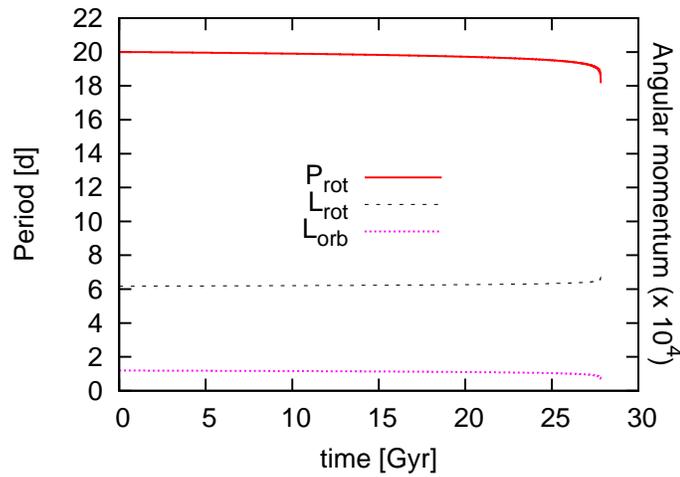


Figura 4.17: Análise da rotação estelar, similar à Fig. 4.16, no caso de um sistema Sol-Netuno quente. A diminuição de P_{rot} é muito menor se comparada com o caso de Júpiter.

as mesmas que no caso Sol-Júpiter quente. Notamos que durante 30 bilhões de anos de evolução, o período de rotação da estrela diminui aproximadamente 10 % do seu valor inicial, indicando claramente que a maré estelar não é eficiente para produzir uma aceleração considerável na rotação da estrela.

Os resultados anteriores reforçam a idéia intuitiva de que a rotação do planeta deve ser a mais afetada na interação de maré com a estrela. No entanto, vimos que a rotação estelar pode sofrer uma forte alteração na interação com um planeta gigante do tipo Júpiter quente. Porém, a solução estacionária não deve ser atingida em escalas de tempo comparáveis à idade de um sistema planetário típico (muito menos ainda no caso de planetas menores). Possivelmente, em sistemas com massas similares (sistemas binários, etc.) os dois corpos possam atingir os seus estados de rotação estacionária durante a evolução através do efeito de maré.

O excesso de velocidade angular de rotação em algumas estrelas pode indicar evidência de evolução atribuída ao efeito de maré. O trabalho de Pont (2009) discute a evidência empírica de que, em sistemas com planetas gigantes ($m_1 \geq 2m_J$) em órbitas de curto período (≤ 3 dias), os processos de decaimento orbital e circularização são acompanhados por um forte aumento na rotação estelar. Assim, a evidência empírica de evolução através do efeito de maré pode ajudar a entender a distribuição de períodos de exoplanetas reais em função da massa planetária (ver Sec. 4.8).

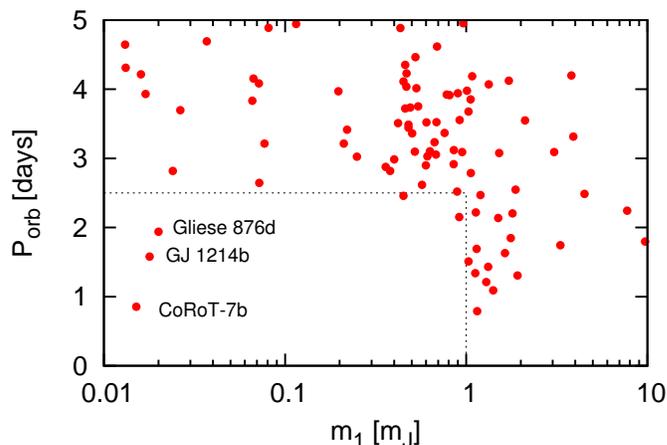


Figura 4.18: Período orbital de 92 exoplanetas reais em função da massa planetária, incluindo todos os possíveis métodos de detecção. A distribuição de períodos indica uma falta de planetas de baixa massa com curtos períodos orbitais (≤ 2.5 dias). Os dados foram tomados da enciclopédia de exoplanetas (<http://exoplanet.eu>), com data 23/02/2010.

4.8 Distribuição de exoplanetas quentes no plano $m_1 - P_{orb}$

A Fig. 4.18 apresenta a distribuição do período orbital de exoplanetas reais em função da massa planetária (<http://exoplanet.eu>). Há um total de 92 planetas, dos quais 60 foram descobertos através do método de trânsito. O fato a ser destacado é que existe uma espécie de “vazio” na distribuição, definido aproximadamente pela região do plano em que $m_1 < m_J$ e $P_{orb} < 2.5$ dias (retângulo de linhas pontilhadas na figura). Os planetas com $m_1 > m_J$ têm um limite inferior de $P_{orb} \sim 1$ dia.

Existem três planetas do tipo super-Terra dentro do “vazio”, CoRoT-7b, Gliese 876d e GJ 1214b. Os dois primeiros formam parte de sistemas com mais de um planeta e, como veremos no Cap. 5, o decaimento orbital de super-Terras quentes é fortemente dependente da presença de planetas companheiros em órbitas externas. Portanto, esses dois planetas podem ser considerados como casos patológicos da distribuição. É importante mencionar que o “vazio” parece ser real, isto é, não deve ser produzido por efeitos tendenciosos introduzidos pelos métodos de detecção (viés observacional. Note que existem vários planetas de baixa massa com grandes períodos orbitais, os quais são mais difíceis de serem detectados).

A existência do “vazio” pode ser explicada como uma consequência natural do efeito

de maré. Como foi discutido na Sec. 4.4 e verificado pelas simulações numéricas da Sec. 4.5, no caso de órbitas com excentricidade inicial pequena (≤ 0.1), a maré estelar é a principal responsável pelo decaimento orbital de planetas quentes. Também vimos que são os planetas mais massivos aqueles que têm maior chance de atingir a região de objetos muito quentes ($P_{orb} < 2$ dias) em uma escala de tempo comparável à idade de um sistema planetário típico (≤ 10 bilhões de anos). Na Fig. 4.18 vemos que os planetas tipo Júpiter (e mais massivos) têm um período orbital menor do que planetas tipo Netuno ou super-Terras, indicando que a distribuição de exoplanetas da figura pode ser explicada pela interação de maré estrela-exoplaneta.

Na literatura é possível encontrar alguns trabalhos relacionados com a distribuição observada de períodos orbitais de exoplanetas reais. Em Pont (2009), encontra-se uma análise baseada na evidência empírica de que o efeito de maré pode ser responsável pela distribuição no caso de planetas descobertos pelo método de trânsito. Jackson *et al.* (2009) estudaram a distribuição de semi-eixos maiores em função da idade dos sistemas (para planetas do tipo Júpiter), concluindo que, devido à evolução pelo efeito de maré, os sistemas mais antigos têm uma tendência a estarem mais afastados da estrela central, indicando uma evidência de possível destruição de uma população mais jovem via cruzamento do limite de Roche. Porém, nestes trabalhos não encontra-se uma explicação sobre a existência do “vazio” no plano $m_1 - P_{orb}$.

A distribuição de exoplanetas de curto período no plano $m_1 - P_{orb}$ evidencia uma evolução através do efeito de maré capaz de explicar a origem do “vazio”. Porém, essa explicação não deve ser tomada como uma conclusão definitiva, já que podem existir outros fenômenos cujos efeitos possam induzir uma distribuição similar à observada.

Davis & Wheatley (2009) mostraram que a correlação entre massa, gravidade superficial e período orbital de planetas quentes descobertos pelo método de trânsito é consistente com um modelo simples de evaporação.

Um mecanismo primordial como o processo de migração planetária através da interação disco-planeta, também poderia explicar a distribuição de períodos observada (Beaugé e Masset, comunicação pessoal). A idéia é que um disco com uma cavidade interna pode capturar planetas migrantes em diferentes posições finais, dependendo do valor da massa do planeta. Segundo uma análise em progresso, planetas de baixa massa são detidos mais

longe da estrela do que os planetas de grande massa.

Evolução dinâmica em sistemas de dois planetas

5.1 *Objetivo*

Estudar o comportamento dinâmico de um sistema formado por dois planetas orbitando uma estrela central, em que o planeta interno é afetado pela força de maré devida à estrela. Analisaremos de que forma as variações de elementos orbitais e da rotação do planeta quente, atribuídas ao efeito de maré, são modificadas pela presença de um planeta externo. Investigaremos também quais os efeitos dinâmicos sobre a órbita externa. A análise será feita através de simulações numéricas das equações exatas do movimento, enquanto a interpretação dos resultados será abordada usando o princípio de conservação do momento angular total do sistema. Com motivo de ilustrar possíveis cenários evolutivos, serão estudados vários sistemas com diferentes razões de massa.

5.2 *Simulações numéricas*

Nesta seção simularemos numericamente um sistema formado por dois planetas e uma estrela central. Assim como no capítulo anterior, utilizaremos o código RA 15 (Everhart, 1985), através do qual são resolvidas as equações exatas do movimento dos dois planetas. A órbita do planeta interno evolui sob a ação combinada do efeito de maré e da interação secular com o segundo planeta. Apenas o planeta interno é afetado pela força de maré (devida à estrela), enquanto a estrela e o planeta externo são considerados como massas pontuais. Novamente usaremos o *modelo linear* para relacionar atrasos das marés com as frequências correspondentes, em que a força está dada pela expressão

Corpo	m_i	R_i	a_i^{ini} (UA)	e_i^{ini}	$(k_d/Q)_i$
0	$1m_\odot$	-	-	-	-
1	$5m_\oplus$	$5^{1/3}R_\oplus$	0.04	0.1	1.5×10^{-2}
2	$1m_J$	-	0.1	0.1	-

Tabela 5.1 - Dados iniciais do sistema 1. O raio do planeta interno foi calculado assumindo uma densidade média igual à da Terra. O período de rotação inicial é de 16.7 hs.

$$\mathbf{f} = -3k_{d1}\Delta t_1 \frac{Gm_0^2 R_1^5}{r_1^{10}} [2\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v}_1) + r_1^2(\mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{\Omega}_1 + \mathbf{v}_1)], \quad (5.1)$$

(Mignard, 1979). Assim, as equações do movimento do par de planetas em um sistema centrado na estrela são

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{G(m_0 + m_1)}{r_1^3} \mathbf{r}_1 + Gm_2 \left(\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right) + \frac{(m_0 + m_1)}{m_0 m_1} \mathbf{f}, \quad (5.2)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{G(m_0 + m_2)}{r_2^3} \mathbf{r}_2 + Gm_1 \left(\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) + \frac{\mathbf{f}}{m_0}. \quad (5.3)$$

Ao longo deste capítulo, as quantidades identificadas com subíndices 0, 1, e 2 correspondem à estrela, planeta interno e planeta externo, respectivamente. O superíndice *ini* indica valores iniciais. Note que nas equações (5.2) e (5.3) a força de reação a \mathbf{f} foi considerada (ver Fig. 4.4). A força de maré modifica os elementos orbitais do planeta interno, enquanto o torque de maré ($\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}$) produz variações no período de rotação.

Nesta seção faremos uma descrição qualitativa dos resultados obtidos a partir das simulações numéricas, destacando os fenômenos dinâmicos mais importantes. A interpretação dos resultados, assim como algumas possíveis explicações, serão discutidas na Sec. 5.3 em diante.

5.2.1 Sistema 1

Analisaremos primeiramente a evolução de um sistema formado por uma estrela do tipo *Sol*, um planeta interno do tipo *super-Terra quente*, acompanhado por um planeta do tipo *Júpiter* em uma órbita externa ($m_1/m_2 = 0.0157$). Os parâmetros físicos e elementos

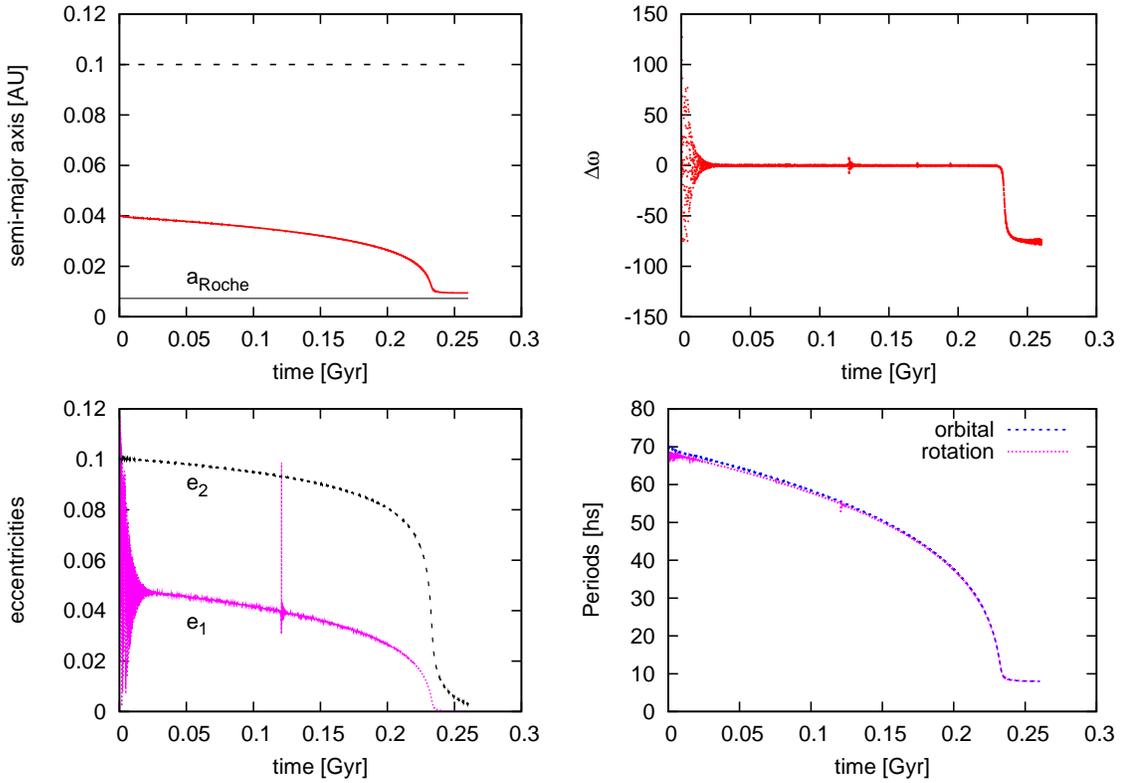


Figura 5.1: Variação dos elementos orbitais do par de planetas e da rotação do planeta interno durante o tempo total da simulação. O efeito de maré provoca decaimento orbital e circularização da órbita interna, ao tempo que a órbita externa também é circularizada (ver texto para mais detalhes).

orbitais iniciais estão mostrados na Tabela 5.1. Vamos supor que o sistema é planar, isto é, os planos orbitais coincidem com o plano de referência. Assumindo um estado de rotação Tipo II ($\Omega_1 \simeq n_1$), a relação entre a função de dissipação e o tempo de atraso é $Q_1 = (n_1 \Delta t_1)^{-1}$. Neste exemplo, adotamos $Q_1 = 100$, um valor típico para planetas terrestres, além de $k_{d1} = 1.5$. Note que os valores iniciais dos semi-eixos maiores correspondem a períodos orbitais de 2.92 e 11.6 dias.

5.2.2 Evolução a longo prazo

A Fig. 5.1 mostra a variação temporal de a_1 , a_2 , e_1 , e_2 , P_{orb} , P_{rot} e $\Delta\varpi \equiv \varpi_1 - \varpi_2$. O decaimento orbital do planeta interno é bem apreciável, enquanto o semi-eixo maior do externo permanece fixo. Note que o valor final de a_1 é próximo de $a_{Roche} = 0.0072$ UA (ver definição em (4.24)), indicando que o decaimento orbital pode resultar na destruição do planeta interno se o limite de Roche for atingido. Note-se ainda que, para um valor de

a_1 tão pequeno (≤ 0.01 UA), a maré estelar deveria contribuir o suficiente ao decaimento orbital de forma de acelerar o cruzamento do limite de Roche, inclusive para um planeta de baixa massa, como neste exemplo.

A evolução das excentricidades mostra como a órbita interna é circularizada em aproximadamente 0.24 bilhões de anos, ao tempo que e_2 também diminui o seu valor, porém, sem completar totalmente o processo de circularização. Note como a excentricidade da órbita externa é fortemente modificada, apesar do planeta gigante não estar sofrendo diretamente o efeito de maré. A passagem pela ressonância de movimentos médios 5/1 ($n_1/n_2 = 5$), que acontece próximo dos 0.12 bilhões de anos de evolução, exita fortemente o valor de e_1 .

O ângulo $\Delta\varpi$ (medido em graus) é temporariamente capturado ao redor de 0° até escapar, atingindo um valor final de -75° . Note que o momento do escape coincide com o instante em que $e_1 \sim 0$.

Após uma leve diferença no começo da evolução, os períodos orbitais e de rotação evoluem de forma quase síncrona, atingindo o sincronismo exato ($P_{orb} = P_{rot}$) no fim da simulação.

5.2.3 Evolução a curto prazo

A Fig. 5.2 mostra o comportamento durante os primeiros 50 milhões de anos de evolução. O semi-eixo maior da super-Terra quente apresenta uma diminuição muito pequena do seu valor inicial, enquanto e_1 tem uma oscilação com amplitude amortecida. Após 25 milhões de anos, essa amplitude fica próxima de zero e e_1 atinge um *primeiro valor de equilíbrio*, $e_1^{eq} \simeq 0.0475$. A evolução segue com e_1 diminuindo até a circularização em uma escala de tempo maior, como mostrado na seção anterior. De acordo com Mardling (2007), e_1^{eq} está dado por

$$e_1^{eq} = \frac{(5/4)(a_1/a_2)e_2\delta_2^{-2}}{|1 - \sqrt{a_1/a_2}(m_1/m_2)\delta_2^{-1} + \gamma\delta_2^3|}, \quad (5.4)$$

onde $\delta_2 \equiv \sqrt{1 - e_2^2}$ e $\gamma \equiv 4(n_1 a_1/c)^2(m_0/m_2)(a_2/a_1)^3$ é uma quantidade associada com a introdução de relatividade geral, sendo c a velocidade da luz. Aplicando a equação (5.4) com $\gamma = 0$ para nosso sistema e substituindo os valores dos elementos para o tempo em que e_1 atinge o valor de equilíbrio ($\simeq 25$ milhões de anos), obtemos $e_1^{eq} = 0.0486$. A diferença com o valor obtido diretamente da simulação se deve ao fato de que a equação (5.4) tende

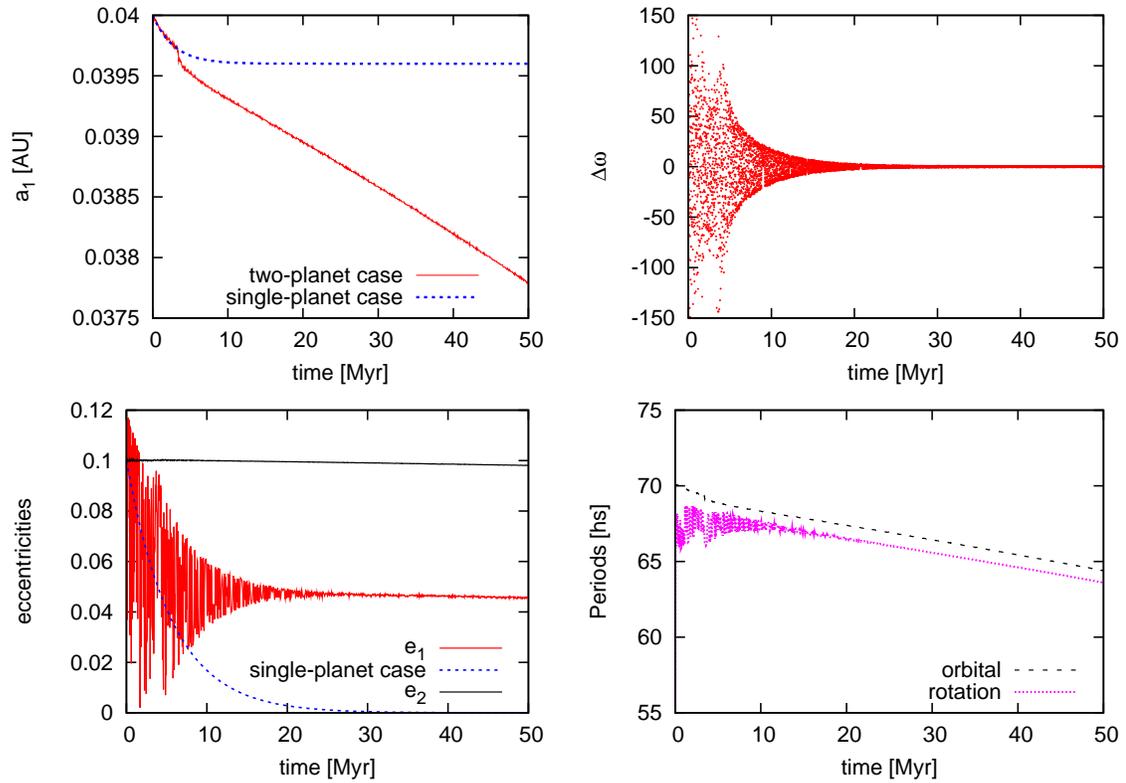


Figura 5.2: Evolução a curto prazo do sistema 1, mostrando o valor de equilíbrio atingido por e_1 e comparando com o caso sem planeta externo. O decaimento orbital é atribuído à excitação de e_1 provocada pelo planeta gigante. Note que o sincronismo exato não acontece na escala temporal mostrada na figura.

a superestimar o valor real de e_1^{eq} , por causa de algumas hipóteses feitas para obtê-la (ver Mardling, 2007 por mais detalhes).

Na Fig. 5.2 mostramos também a evolução de a_1 e e_1 no caso em que o sistema está formado apenas pela estrela e a super-Terra quente. Note que a_1 atinge um valor constante mantido até o final, enquanto e_1 decai a zero em uma escala de tempo similar à escala de tempo em que e_1^{eq} é atingido (ver Mardling, 2007). É importante mencionar que no caso do sistema com um planeta, não existe o equivalente de e_1^{eq} , indicando que, para sistemas com dois planetas, o planeta externo é responsável por excitar o valor de e_1 até e_1^{eq} . Sabendo que a variação média do semi-eixo maior é proporcional a e_1^2 (ver (4.3) com $\hat{s} = 0$), o decaimento orbital do planeta quente é intensificado no caso em que exista um companheiro em uma órbita externa, devido a que e_1 decai em uma escala de tempo muito maior do que no caso sem companheiro.

Segundo o resultado da equação (5.4), $e_1^{eq} = 0$ se $e_2 = 0$, portanto, é preciso um planeta externo em uma órbita excêntrica para poder excitar a excentricidade do planeta interno. Note-se ainda que e_1^{eq} é independente do valor inicial de e_1 , atingindo o mesmo valor inclusive para $e_{01} = 0$.

A evolução para tempos curtos de $\Delta\varpi$ mostra que, após um breve período de circulação, o ângulo começa a librar ao redor de 0° com amplitude amortecida até finalmente atingir o valor de equilíbrio.

O período de rotação rapidamente atinge o valor estacionário dado por $P_{rot} = P_{orb}/(1 + 6e_1^2)$, como discutido no capítulo anterior, com uma oscilação inicial devida à oscilação de e_1 . Em uma escala de tempo maior, $P_{rot} \rightarrow P_{orb}$ quando $e_1 \rightarrow 0$, como foi mostrado na seção anterior.

5.2.4 Sistema 2

Neste caso, a diferença com o sistema 1 é que o planeta externo é do tipo *Netuno*. Os parâmetros físicos e elementos iniciais estão mostrados na Tabela 5.2. Devido principalmente à mudança nas massas planetárias (note-se que agora temos $m_1/m_2 = 0.0292$), é de se esperar uma evolução dinâmica diferente. Com motivo de não repetir todos os fenômenos já descritos no sistema 1, destacaremos as principais características observadas.

A evolução para tempos grandes dos elementos orbitais e da rotação do planeta interno

Corpo	m_i	R_i	a_i^{ini} (UA)	e_i^{ini}	$(k_d/Q)_i$
0	$1m_\odot$	-	-	-	-
1	$5m_\oplus$	$5^{1/3}R_\oplus$	0.04	0.1	1.5×10^{-2}
2	$1m_N$	-	0.1	0.1	-

Tabela 5.2 - Dados do sistema 2. Os elementos iniciais são os mesmos que no sistema 1.

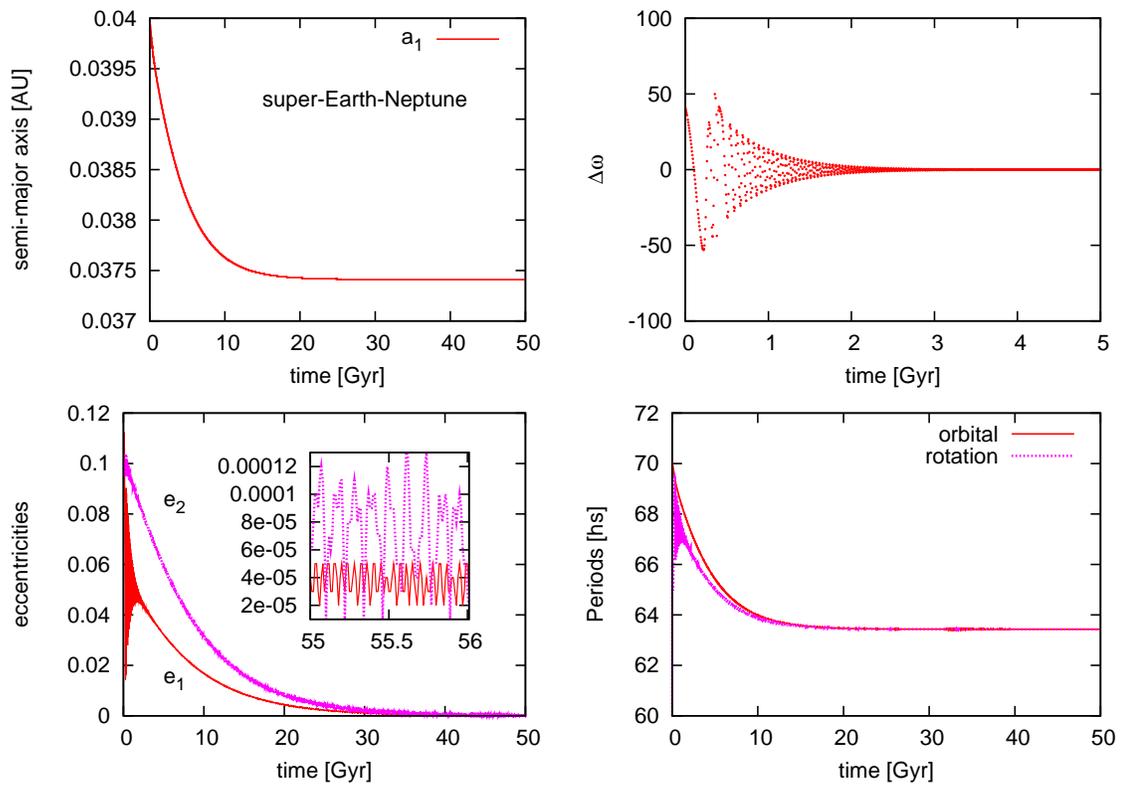


Figura 5.3: Variação dos elementos orbitais e da rotação da super-Terra quente no caso de um companheiro externo igual a Netuno (ver texto para mais detalhes). O ângulo $\Delta\varpi$ está medido em graus.

é mostrada na Fig. 5.3. Note como o decaimento orbital não é tão significativo quanto no exemplo anterior, diminuindo apenas 6.5 % do valor inicial. O valor final de a_1 é muito maior do que $a_{Roche} = 0.0072$ UA, assim, o limite de Roche não é atingido neste caso.

A excentricidade da órbita interna também atinge um valor de equilíbrio, neste caso $e_1^{eq} = 0.0478$, calculado usando (5.4). Porém, entre outras hipóteses, o resultado (5.4) assume que e_2 se mantém constante durante o período em que e_1^{eq} é atingida, uma suposição válida no exemplo anterior. No entanto, notamos que neste caso e_2 diminui aproximadamente um 20 % do seu valor inicial durante o tempo em que e_1^{eq} é atingido. Portanto, o valor $e_2 = 0.08$ foi adotado no cálculo anterior de e_1^{eq} (ver Fig. 5.3).

Outro fenômeno a destacar é o estado final de dupla circularização orbital. Porém, esse estado não é perfeito, devido a que as duas excentricidades preservam valores remanentes ($2 \times 10^{-5} < e_1 < 5 \times 10^{-5}$, $1 \times 10^{-5} \leq e_2 \leq 1.2 \times 10^{-4}$).

$\Delta\varpi$ permanece capturado ao redor de $\Delta\varpi = 0^\circ$ até que $e_1 \simeq e_2 \simeq 0$, momento para o qual o ângulo começa a ficar mal definido (na figura só mostramos o começo da evolução, afim de destacar a oscilação com amplitude modulada ao redor do ponto de equilíbrio).

Os períodos orbitais e de rotação do planeta interno rapidamente são sincronizados entre si, mantendo esse estado até o fim da evolução.

5.2.5 Sistema 3

O último exemplo deste capítulo consiste de um sistema formado por um planeta interno do tipo Júpiter quente e um planeta externo do tipo super-Terra, orbitando uma estrela do tipo Sol. A Tabela 5.3 mostra os parâmetros físicos utilizados, assim como as condições iniciais. Adotamos $Q_1 = 10^5$, um valor típico para a função de dissipação no caso de planetas gasosos (Goldreich & Soter, 1966). Note que a razão de massa, $m_1/m_2 = 63.7$ é inversa à do sistema 1.

Na Fig. 5.4 é apresentado o resultado da evolução para *tempos grandes* de elementos orbitais e rotação do Júpiter quente. O decaimento orbital é de apenas 1 %, menor do que no sistema 2, enquanto $a_{Roche} = 0.012$ UA. A evolução das excentricidades mostra uma rápida circularização da órbita interna, enquanto a circularização da órbita da super-Terra acontece em uma escala de tempo muito maior (inclusive maior do que a idade do Universo). Note que a circularização da órbita externa não é perfeita, já que no fim da

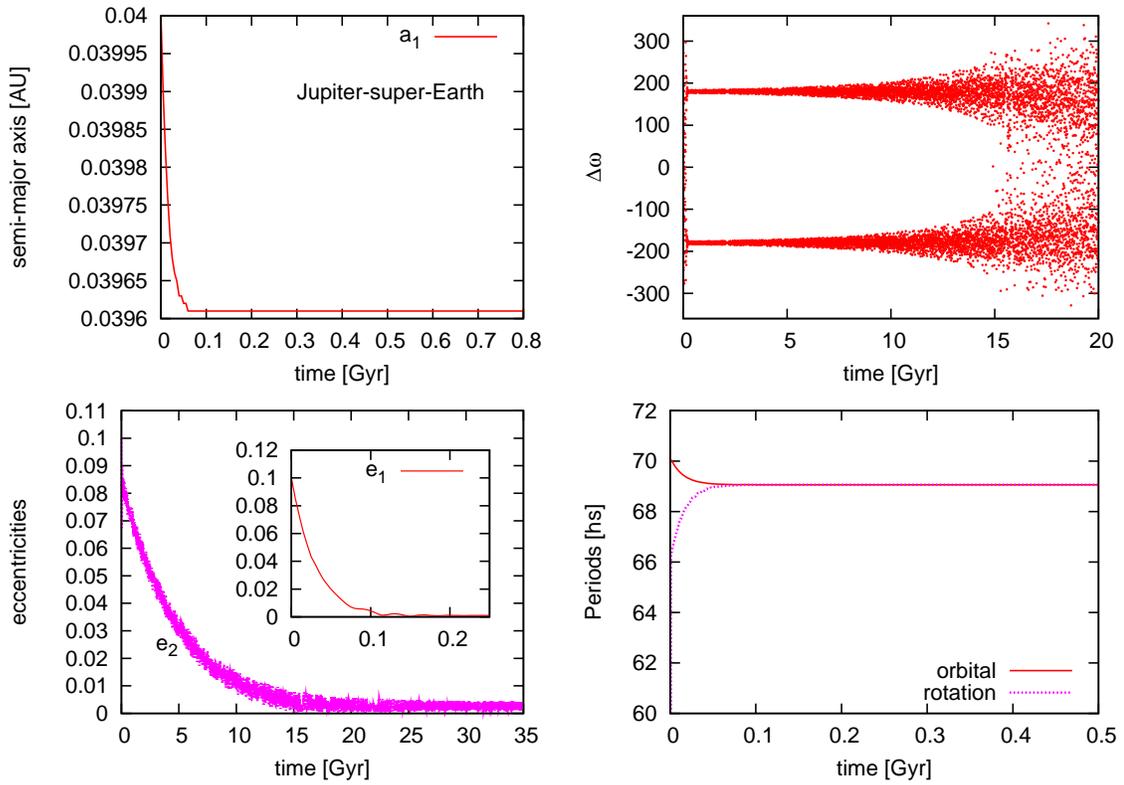


Figura 5.4: Variação dos elementos orbitais do par de planetas e da rotação do interno no caso de um sistema do tipo Júpiter quente-super-Terra (ver texto para mais detalhes).

Corpo	m_i	R_i	a_i^{ini} (UA)	e_i^{ini}	$(k_d/Q)_i$
0	$1m_\odot$	-	-	-	-
1	$1m_J$	$5^{1/3}R_\oplus$	0.04	0.1	1.5×10^{-5}
2	$5m_\oplus$	-	0.1	0.1	-

Tabela 5.3 - Dados do sistema 3. Os elementos iniciais são os mesmos que nos sistemas anteriores.

evolução $1 \times 10^{-3} \leq e_2 \leq 4.3 \times 10^{-3}$.

É importante destacar que a evolução de $\Delta\varpi$ tem uma oscilação de pequena amplitude ao redor de $\Delta\varpi = 180^\circ$, diferenciando-se assim das evoluções nos sistemas anteriores. A rápida circularização da órbita interna implica na rápida sincronização entre períodos orbitais e de rotação do Júpiter quente.

A excentricidade do Júpiter atinge um valor de equilíbrio que pode ser visto na Fig. 5.5, em que se mostra a evolução a *curto prazo* de e_1 . Através de um cálculo simples usando a equação (5.4), obtemos $e_1^{eq} = 0.00128$, mostrado em linha horizontal na Fig. 5.5. A figura também mostra a variação de e_1 no caso em que só o planeta interno está presente no sistema. Note como a presença da super-Terra em uma órbita externa provoca um valor de equilíbrio não nulo na excentricidade do planeta gigante. É possível comprovar mais uma vez que o tempo para o qual $e_1 \simeq e_1^{eq}$ é verificado é similar ao tempo da circularização orbital no caso sem super-Terra. Por causa do efeito de maré, a excentricidade continua a evoluir em uma escala de tempo maior até circularizar, como mostrado a Fig. 5.4.

Devido a que e_1^{eq} é próximo de zero, o decaimento orbital do Júpiter é fraco (ver Fig. 5.4), já que como discutido antes, a taxa de variação média do semi-eixo maior do planeta afetado pela maré é proporcional ao quadrado da excentricidade.

5.2.6 Sobre fator de escala

Com motivo de acelerar o processo computacional das simulações numéricas, foi necessário multiplicar o parâmetro responsável pelo efeito de maré (Δt_1 ou $1/Q_1$) por um fator de escala, já que a evolução é muito lenta e, em muitos casos, é preciso esperar um tempo muito grande para poder observar algum efeito dinâmico apreciável. No entanto, dependendo do sistema, o fator de escala pode mudar a evolução, principalmente nas pas-

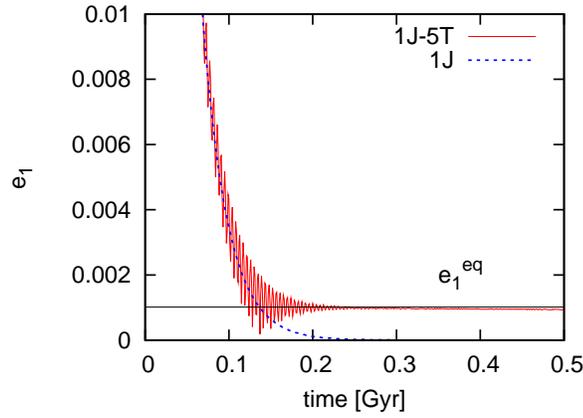


Figura 5.5: Variação temporal de e_1 nos casos com e sem super-Terra para o sistema 3. O valor de equilíbrio de e_1 é bem apreciável.

sagens por ressonâncias de movimentos médios. Nas experiências numéricas feitas no caso do sistema 1, a passagem pela ressonância 5/1 se mostrou sensível à introdução do fator de escala. Por esse motivo, não foi introduzido nenhum fator de escala na análise numérica do sistema 1. Nos sistemas 2 e 3, um fator de escala de 10^3 foi utilizado e considerado também nas escalas de tempo que aparecem nas Figs. 5.3–5.5.

5.3 Conservação do momento angular

Afim de explicar a evolução da excentricidade da órbita externa, apresentaremos uma abordagem usando o princípio de conservação do momento angular total do sistema de três corpos. A componente *orbital* do momento angular total está dada por

$$\mathbf{L}_{orb} = \sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i - \frac{1}{m'} \sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{r}_i \times \sum_{i=1}^2 m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \quad (5.5)$$

onde $m' \equiv \sum_{i=0}^2 m_i$, e \mathbf{r}_i são os vetores posição no sistema astrocêntrico. O segundo termo do lado direito da equação (5.5) aparece por causa da escolha do sistema astrocêntrico para escrever as equações (note que esse termo contém apenas contribuições de segunda ordem nas massas). Levando em conta que $m_J/m_\odot \simeq 10^{-3}$, consideraremos apenas o primeiro termo da equação (5.5). Sabemos que $\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \sqrt{G(m_0 + m_i)a_i(1 - e_i^2)} \hat{\mathbf{k}}$, em que a_i e e_i são os elementos da órbita Kepleriana osculadora, enquanto \mathbf{k} é um vetor unitário normal ao plano orbital. Assim, o momento angular orbital total fica

$$\mathbf{L}_{orb} \simeq \sum_{i=1}^2 \beta_i \sqrt{a_i(1 - e_i^2)} \hat{\mathbf{k}}, \quad (5.6)$$

onde $\beta_i \equiv m_i \sqrt{G(m_0 + m_i)}$.

O momento angular de *rotação* está dado por $\mathbf{L}_i^{rot} = \sum_{i=0}^2 C_i \boldsymbol{\Omega}_i$, com C_i e $\boldsymbol{\Omega}_i$ o momento de inércia com respeito ao eixo de rotação e velocidade angular de rotação, respectivamente. Lembrando que apenas o planeta interno é deformado pela maré, temos $\mathbf{L}_1^{rot} = C_1 \Omega_1 \hat{\mathbf{k}}$, com $\boldsymbol{\Omega}_1 = \Omega_1 \hat{\mathbf{k}}$ devido a que a obliquidade é zero. Portanto, o momento angular *total* do sistema é

$$\mathbf{L} \simeq (\beta_1 \sqrt{a_1(1 - e_1^2)} + \beta_2 \sqrt{a_2(1 - e_2^2)} + I_1 \Omega_1) \hat{\mathbf{k}}. \quad (5.7)$$

A Fig. 5.6 apresenta as evoluções das componentes orbital e rotacional do momento angular total para cada sistema. Primeiro notamos que L_1^{rot} aumenta para tempos grandes, já que a rotação acompanha o estado de sincronismo rotação-órbita. Isso é mais evidente no caso do sistema 1 devido a que, nesse sistema, o decaimento orbital é mais importante e também por causa da escala de tempo utilizada na figura. Porém, é importante destacar que $L_1^{rot} \ll L_1^{orb}$ em todos os casos, portanto, como primeira aproximação, a contribuição do momento angular de rotação pode ser desprezada.

Notamos que L_1^{orb} diminui devido ao decaimento orbital do planeta interno, ao tempo que L_2^{orb} aumenta para poder manter constante o momento angular total. Para valores baixos de e_1 , $\sqrt{1 - e_1^2} \simeq 1$ e, da definição, sabemos que a diminuição de L_1^{orb} é quase totalmente determinada pela diminuição de a_1 . Portanto, para compensar a perda de L_1^{orb} e sabendo que a_2 é constante, e_2 deve diminuir. Assim, o decaimento orbital, que é um fenômeno diretamente associado ao efeito de maré no planeta interno, tem como consequência indireta a circularização da órbita do planeta externo, inclusive no caso $m_1/m_2 \ll 1$ (sistemas 1 e 2).

5.3.1 Variação de e_2

A equação (5.7) pode ser usada para expressar e_2 como

$$e_2 \simeq \sqrt{1 - \left(L' - \frac{\beta_1}{\beta_2} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \sqrt{1 - e_1^2} \right)^2}, \quad (5.8)$$

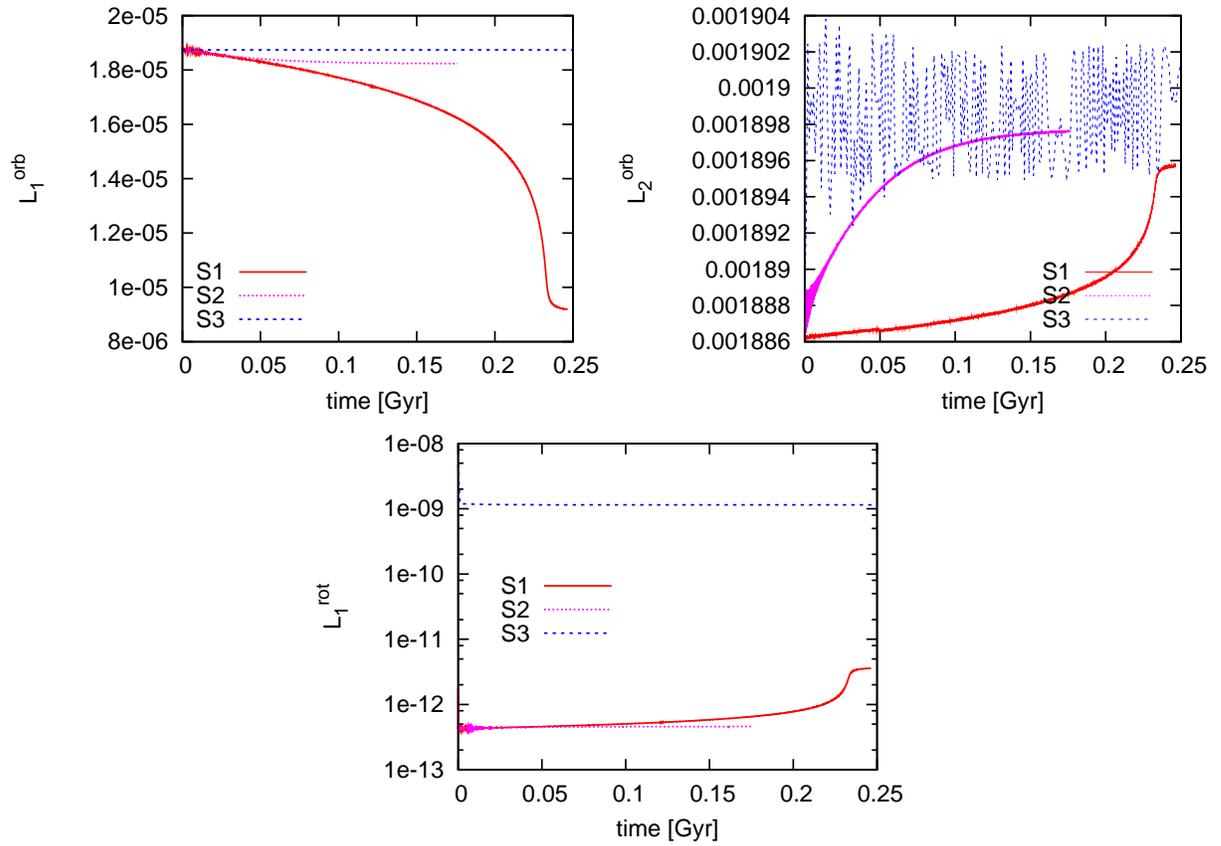


Figura 5.6: Variações dos momentos angulares orbitais e de rotação para cada sistema, em unidades de $m_{\odot}UA^2ano^{-1}$. Os sistemas 1, 2 e 3 estão identificados como S1, S2 e S3, respectivamente. No sistema 3, L_2^{orb} aumenta em uma escala de tempo maior do que a escala mostrada na figura. Note que em todos os casos, $L_1^{rot} \ll L_{1,2}^{orb}$.

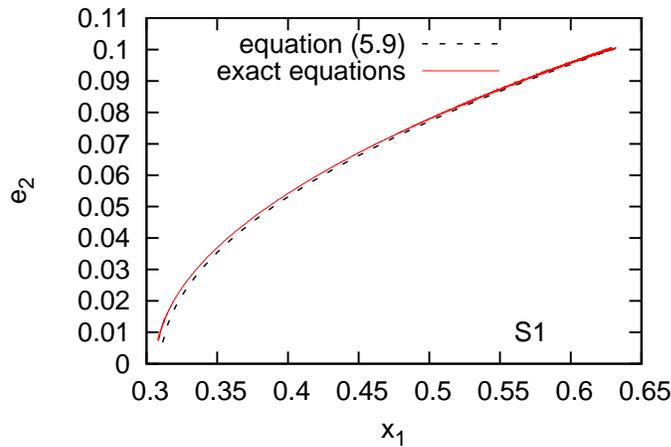


Figura 5.7: Gráfico da função $e_2(x_1)$ dado pela equação (5.9) no caso do sistema 1, comparado com o resultado da simulação numérica do mesmo sistema.

onde $L' \equiv L/\beta_2\sqrt{a_2}$ é também uma constante. Já que nenhum desenvolvimento em séries de potências foi utilizado para obter a equação (5.8), o resultado é válido para *qualquer* valor das excentricidades. Da definição de β_i e sabendo que $m_i \ll m_0$, temos $\beta_1/\beta_2 \simeq m_1/m_2$. Portanto, e_2 é uma função do tipo $e_2 = e_2(L', m_1/m_2, a_1/a_2)$, indicando que a excentricidade da órbita externa pode ser expressada como função das razões de massa e semi-eixos maiores, além de uma constante que depende do momento angular total do sistema.

Definindo $x_1 \equiv \sqrt{(a_1/a_2)(1 - e_1^2)}$, a equação (5.8) pode ser escrita para $m_i \ll m_0$ como

$$e_2 = \sqrt{1 - \left(L' - \frac{m_1}{m_2}x_1\right)^2}. \quad (5.9)$$

No caso do sistema 1 e usando valores iniciais de semi-eixos maiores, excentricidades e massas, temos $L' = 1.00487$, além de $m_1/m_2 = 0.0157068$. Para esses valores, é possível construir um gráfico de e_2 como função de x_1 através da equação (5.9). A Fig. 5.7 apresenta a função $e_2(x_1)$ junto com a curva resultante da simulação numérica das equações exatas do movimento, mostrando um bom acordo entre ambos resultados.

É importante notar que a equação (5.9) pode ser usada para fazer uma análise paramétrica, tomando diferentes valores de L' e m_1/m_2 . Notamos ainda que a equação (5.9) é independente do valor de Q_1 .

A conservação do momento angular total também indica que e_2 deve se estabilizar quando o decaimento orbital do planeta interno cessa, fato que ocorre para $e_1 \simeq 0$. Assim, o sistema entra em uma situação final de equilíbrio, com valores contantes dos elementos orbitais e da rotação do planeta deformado pela maré.

O fato de que o efeito de maré no planeta interno indiretamente afeta a excentricidade do externo, já foi antecipado em trabalhos prévios. Em Mardling (2007), além dos resultados fornecidos pela integração numérica das equações seculares na formulação de Legendre, uma equação foi obtida para a variação temporal de e_2 . No entanto, a derivação não leva em conta a variação de a_1 , devido a que o semi-eixo maior evolui em uma escala de tempo muito maior do que a idade dos sistemas analisados no citado trabalho.

5.3.2 Equações médias

A variação média do semi-eixo maior da órbita interna, pode ser calculada através da equação (3.29), com $\varepsilon_2 = 1/Q_1$ (ou a equação (4.3) com $\hat{s} = 0$), inclusive no problema de dois planetas. O planeta externo não participa do processo de transferência de energia no sistema, devido a que a_2 é constante e a contribuição da perturbação mútua ($-Gm_1m_2/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$) é muito menor do que a parte Kepleriana ($-Gm_0m_i/2a_i$). Além disso, a contribuição da rotação à energia total é desprezível, portanto, a energia dissipada em forma de calor no interior do corpo deformado deve ser compensada pela variação da energia orbital como consequência do decaimento orbital do planeta interno. Portanto, para calcular a variação média de a_1 , é suficiente considerar a interação de maré entre a estrela e o planeta interno.

Por outro lado, a equação para calcular a variação média de e_1 , (3.30) ou (4.4) com $\hat{s} = 0$, não é válida no sistema com dois planetas. Os valores de equilíbrio de e_1 se calculam impondo $\dot{e}_1 = 0$ que, usando (3.30), se obtém apenas $e_1 = 0$. Porém, já vimos que existe um outro valor de equilíbrio, e_1^{eq} , dado pela equação (5.4). De fato, para calcular os pontos de equilíbrio deve-se impor $\dot{e}_1 = 0$ usando (3.30) com um termo adicional atribuído à interação secular mútua entre o par de planetas (ver equação (39) de Mardling, 2007). Portanto, a equação usualmente adotada para calcular a escala de tempo para a circularização orbital ($e_1/|\dot{e}_1|$, com \dot{e}_1 dado por (3.30)) não pode ser usada em sistemas com dois planetas.

5.4 Solução estacionária

O problema secular planar de três corpos possui um grau de liberdade que, no formalismo Hamiltoniano, pode ser descrito por uma variável angular, $\Delta\varpi$, e o seu momento canônico conjugado, uma variável que depende de m_0 , m_1 , a_1 e e_1 (ver Michtchenko & Ferraz-Mello, 2001). As *soluções estacionárias* (ou pontos de equilíbrio) são calculadas igualando a zero as equações de Hamilton e calculando os valores de $\Delta\varpi$ e e_1 . O valor de e_2 se calcula a partir de uma das constantes de movimento do problema, que depende de massas e semi-eixos maiores (constantes no problema conservativo) e excentricidades. Existem duas soluções correspondentes a $\Delta\varpi = 0^\circ$ e $\Delta\varpi = 180^\circ$, conhecidas como *Modo I* e *Modo II*, respectivamente. É fácil verificar que se $m_2/m_1 > (<) \sqrt{a_1/a_2}(1 - e_2)^{-1/2}$ a solução corresponde ao Modo I (II). Nos casos dos sistemas analisados neste capítulo, apenas o sistema 3 verifica a condição para uma oscilação ao redor do Modo II (ver Fig. 5.4).

As soluções periódicas são movimentos ao redor dos Modos I e II. Para um valor fixo do momento angular total, os valores de equilíbrio das excentricidades são unicamente determinados pelos valores de massas e semi-eixos maiores. Esses valores de equilíbrio podem ser representados por um ponto no espaço de variáveis (e_1, e_2) .

No problema não conservativo, como no estudado aqui, em que existe dissipação de energia por causa do efeito de maré, sabemos que o semi-eixo maior do planeta interno diminui. Portanto, a_1 já não pode ser considerado como um parâmetro fixo. No entanto, é possível repetir a técnica discutida para calcular as soluções estacionárias mudando (de forma adiabática) o valor de a_1 . Para $a_1 - \delta a_1$, com $\delta a_1 > 0$ sendo uma variação diferencial do valor de a_1 , calculam-se os novos valores de equilíbrio de e_1 e e_2 , obtendo assim um novo ponto no plano das excentricidades. Para uma variação total $\Delta a_1 = \sum \delta a_1$, se obtém uma *curva* no espaço (e_1, e_2) , que representa o *lugar das soluções estacionárias* (LSE). Por definição, todos os pontos pertencentes à curva LSE possuem o mesmo valor do momento angular.

A Fig. 5.8 apresenta o resultado da obtenção das soluções estacionárias para o sistema 1, nos espaços de variáveis (e_1, e_2) e (a_1, e_1) . Além da curva LSE, o resultado da simulação numérica também é mostrado¹. Após $e_1 \simeq e_1^{eq} = 0.0475$, as duas curvas coincidem (exceto

¹ Por simplicidade, a curva de soluções estacionárias no espaço (e_1, a_1) também é chamada de curva

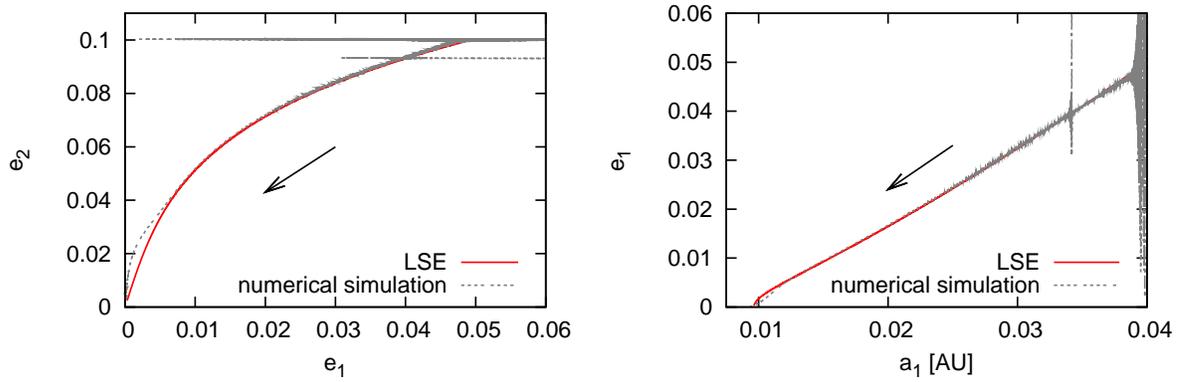


Figura 5.8: Evolução no espaço dos elementos orbitais do sistema 1, comparando as curvas numérica e LSE. Note que a dupla circularização ($e_1 = e_2 = 0$) é uma solução estacionária. As setas indicam a direção da evolução.

na passagem pela ressonância 5/1 de movimentos médios). Porém, no final da evolução ($e_1 \sim 0.05$) as curvas se separam, sendo essa separação mais acentuada no espaço (e_1, e_2) . É importante notar que a separação coincide com o momento em que o ângulo $\Delta\varpi$ escapa da captura ao redor de 0° (ver Fig. 5.1). De fato, a curva LSE foi construída supondo que o sistema está evoluindo ao longo do Modo I ($\Delta\varpi = 0$), já que essa particularidade foi confirmada numericamente (ver Fig. 5.1). Portanto, quando o sistema escapa do Modo I ($\Delta\varpi \neq 0$), é de se esperar que a curva numérica se separe da curva LSE.

É interessante mencionar que o método de obtenção das soluções estacionárias pode ser utilizado para obter informação sobre o passado dinâmico do sistema, impondo $\delta a_1 < 0$, de maneira de fazer com que a_1 aumente (para o passado). Esse método pode ser aplicado para sistemas nos quais são conhecidos os elementos orbitais atuais, podendo reconstruir a evolução dinâmica atribuída à ação conjunta do efeito de maré e interação secular entre os planetas. No próximo capítulo daremos um exemplo dessa aplicação para o sistema CoRoT-7.

5.5 Efeitos relativistas

A migração em direção à estrela central, atribuída ao efeito de maré no planeta interno, pode fazer com que os efeitos de um potencial relativístico sejam importantes. Como já foi

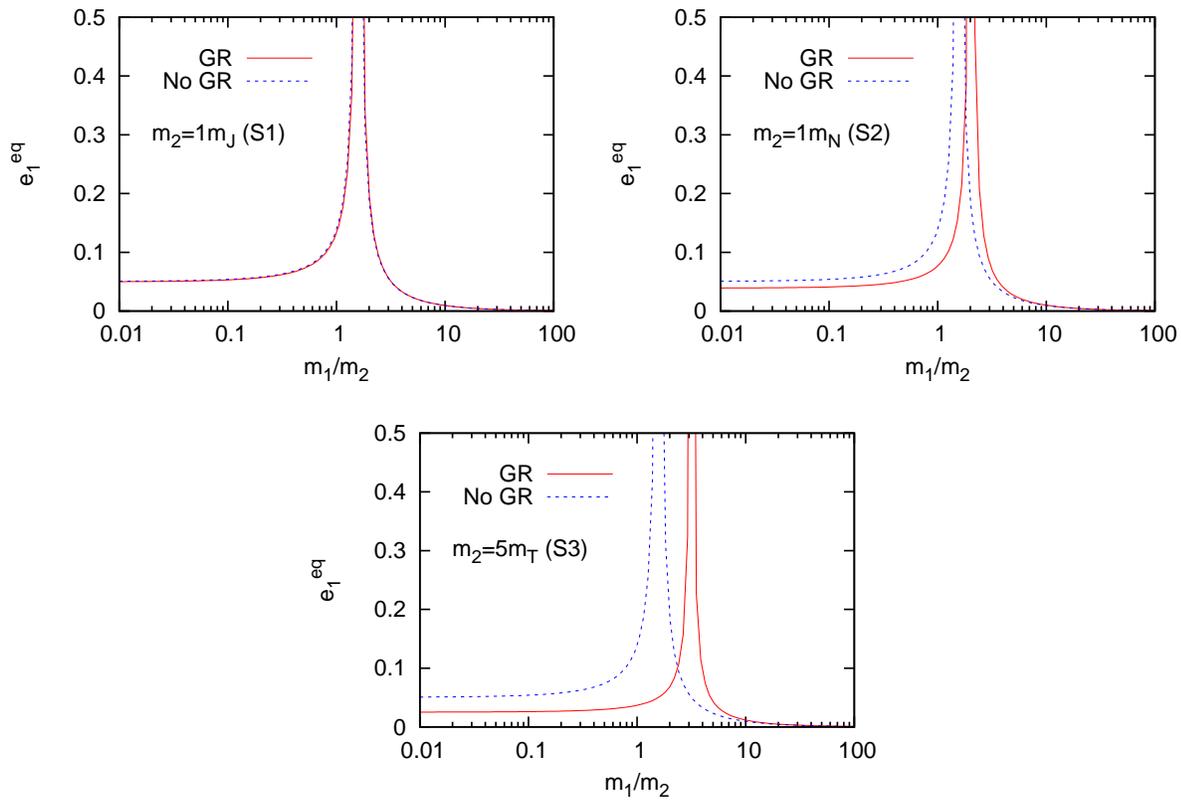


Figura 5.9: Variação de e_1^{eq} em função de m_1/m_2 usando a equação (5.4) para $\gamma = 0$ e $\gamma \neq 0$, mostrando a importância da relatividade geral (GR) para o decaimento orbital nos diferentes sistemas.

discutido, o planeta externo excita o valor da excentricidade da órbita interna até o valor e_1^{eq} , possibilitando o decaimento orbital, que será importante ou não dependendo de que e_1^{eq} seja grande ou pequeno, respectivamente. Porém, a equação (5.4) mostra que existe uma dependência de e_1^{eq} com γ , uma quantidade que mede a importância da contribuição relativística. Assim, com motivo de investigar o efeito da relatividade geral, vamos calcular qual a contribuição de γ ao valor de e_1^{eq} nos sistemas analisados neste capítulo. Lembrando a definição, $\gamma \equiv 4(n_1 a_1/c)^2 (m_0/m_2) (a_2/a_1)^3$, temos que, a contribuição do termo $\gamma \delta_2^3$ ao valor da equação (5.4) é de 1.6 %, 27 % e 2.6 %, nos sistemas 1, 2 e 3, respectivamente.

A Fig. 5.9 mostra a variação de e_1^{eq} em função da razão de massa m_1/m_2 nos três sistemas, usando a equação (5.4). Sabendo que nos sistemas 1, 2 e 3 temos $m_1/m_2 = 0.0157$, $m_1/m_2 = 0.292$ e $m_1/m_2 = 63.7$, respectivamente, notamos que no caso do sistema 2, a contribuição da relatividade ($\gamma \neq 0$) é muito mais importante do que nos sistemas 1 e 3. Portanto, a contribuição ao decaimento orbital devido ao efeito relativista pode ser

desprezada nos sistemas 1 e 3.

É importante notar que se $\sqrt{a_1/a_2}(m_1/m_2)\delta_2^{-1} < 1$, e_1^{eq} diminui para valores grandes de $\gamma (> 0)$. Isso pode ser muito importante para a sobrevivência de planetas de curto período, os quais são obrigados a migrar na direção da estrela por causa do efeito de maré, já que um valor baixo de e_1^{eq} implica decaimento orbital pequeno. O efeito da maré na estrela também contribui à diminuição do semi-eixo maior do planeta interno, porém, em uma escala de tempo muito maior ($\simeq 3$ bilhões de anos para Júpiter quente, ver Fig. 4.5), principalmente no caso de planetas terrestres. Em Mardling & Lin (2004), encontram-se detalhes sobre a inclusão do efeito relativista na dinâmica secular de um sistema de dois planetas com dissipação. O trabalho conclui que o potencial relativista pode ter um papel determinante na sobrevivência de planetas migrantes de curto período.

Aplicação ao sistema CoRoT-7

6.1 *Objetivo*

Afim de aplicar os resultados obtidos no capítulo anterior, vamos estudar a evolução dinâmica do sistema extra-solar CoRoT-7. Através da técnica das soluções estacionárias investigaremos a variação dos elementos orbitais do par de planetas, além de estudar a rotação de CoRoT-7b. A partir dos elementos orbitais atuais, calcularemos a escala de tempo do decaimento orbital incluindo a maré estelar.

6.2 *O sistema*

O sistema está composto por uma estrela e dois planetas. A estrela, CoRoT-7, é do tipo espectral G9, com massa $m_0 = 0.93m_\odot$ e raio $R_0 = 0.87R_\odot$, enquanto a idade é de 1.2-2.3 bilhões de anos (Léger *et al.*, 2009). Os planetas, CoRoT-7b (interno) e CoRoT-7c (externo), têm massas $m_1 = 4.8m_\oplus$ e $m_2 = 8.4m_\oplus$, respectivamente, tratando-se de um par de planetas do tipo super-Terras. Os períodos orbitais são $P_1^{orb} = 0.854$ e $P_2^{orb} = 3.69$ dias, assim, CoRoT-7b é o segundo exoplaneta de período orbital mais curto descoberto até hoje. Os dados do sistema estão resumidos na Tabela 6.1, notando que as órbitas são circulares (Queloz *et al.*, 2009).

Corpo	m_i	R_i	a_{atual_i} (UA)	e_{atual_i}	$(k_d/Q)_i$
0	$1m_\odot$	$0.87R_\odot$	-	-	-
1	$4.8m_\oplus$	$1.68R_\oplus$	0.017	0	20
2	$8.4m_\oplus$	-	0.046	0	-

Tabela 6.1 - Parâmetros físicos e elementos orbitais atuais do sistema CoRoT-7 (Léger *et al.*, 2009; Queloz *et al.*, 2009).

6.3 Simulações numéricas

6.3.1 O modelo

Vamos assumir que o sistema evolui sob a ação combinada da interação secular entre os planetas e o efeito de maré. Assim como nos exemplos estudados no capítulo anterior, somente incluímos o efeito de maré no planeta interno. O efeito da maré na estrela será discutido na Sec. 6.4. Assumimos também que os planos orbitais coincidem e que a obliquidade de CoRoT-7b é zero.

As equações de movimento estão dadas por (5.2) e (5.3), enquanto a força de maré, supondo o modelo linear, está dada pela equação (5.1). Adotamos valores terrestres para os parâmetros da maré, $k_{d1} = 0.3$ e $Q_1 = 20$. Assumindo um estado de rotação síncrono (Tipo II, ver Sec. 6.3.4), sabemos que, usando o modelo linear temos $1/Q_1 \simeq n_1 \Delta t_1$ e, substituindo valores numéricos, $k_{d1} \Delta t_1 = 3$ min. Nenhum fator de escala foi utilizado nas simulações numéricas.

6.3.2 Variação no plano dos elementos

A configuração orbital atual indica que o sistema já atingiu o seu estado estacionário, com um par de órbitas circulares. A única fonte de decaimento orbital é atribuída ao efeito de maré na estrela (ver Sec. 6.4). A técnica das soluções estacionárias discutida na Sec. 5.4, nos permite reconstruir a evolução dinâmica quando a maré no planeta interno é considerada. Desta maneira, é possível obter informação sobre a variação dos elementos orbitais até a configuração atual ser atingida.

A Fig. 6.1 apresenta a evolução nos planos $e_1 - e_2$ e $e_1 - a_1$, junto com a curva resultante

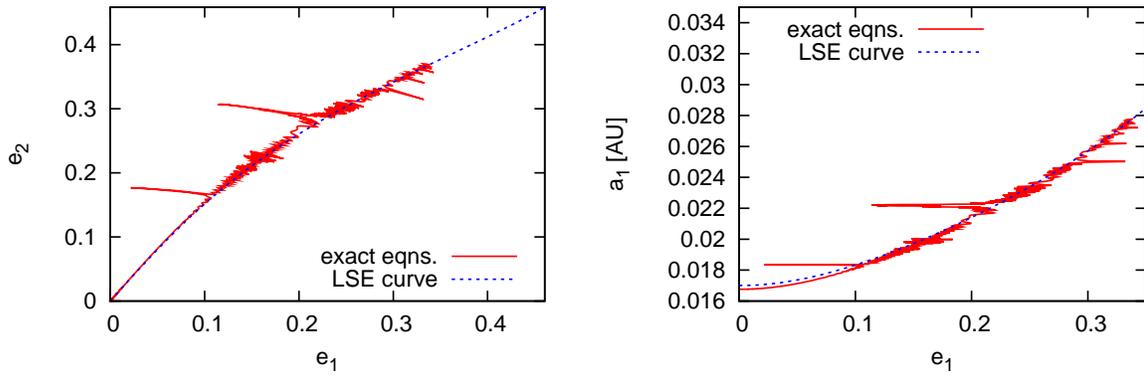


Figura 6.1: Evolução no plano dos elementos orbitais, a partir de uma configuração orbital inicial em que $n_1/n_2 = 2.13$.

da obtenção das soluções estacionárias (LSE). Notamos que a curva correspondente ao resultado da simulação numérica é afetada pelos sucessivos cruzamentos de ressonâncias de movimentos médios (RMM), como veremos na Sec. 6.3.3. No entanto, vemos que existe coincidência entre as curvas naquelas regiões onde a influência das RMM não é significativa. Note ainda os grandes valores iniciais das excentricidades. Esses valores iniciais foram escolhidos supondo que o sistema começou a sua evolução para $n_1/n_2 > 2$, isto é, uma configuração orbital em que a RMM 2/1 já tenha sido atravessada. Destacamos que as soluções estacionárias foram obtidas supondo que o sistema evolui ao longo do Modo I (ver Fig. 6.3).

6.3.3 Variação dos elementos

A Fig. 6.2 apresenta a variação temporal de semi-eixos maiores e excentricidades. Os valores iniciais são $a_1^{ini} = 0.0278$ UA, $a_2^{ini} = 0.0460$ UA, $e_1^{ini} = 0.339$, $e_2^{ini} = 0.369$. O decaimento orbital produz uma diminuição de a_1 até o valor atual¹ de 0.017 UA em aproximadamente 1.5 milhões de anos. O limite de Roche para CoRoT-7b é 0.0062 UA, não sendo atingido durante a evolução (ver Sec. 6.4).

As excentricidades (principalmente e_1) são fortemente excitadas nos cruzamentos das RMM, atingindo um estado final de dupla circularização. Note porém que a circularização

¹ De fato, o valor final resultou ser 0.01676 UA, já que, produto das passagens pelas RMM, o valor de a_2 tem um pequeno aumento em forma de pulso (ver Fig. 6.2).

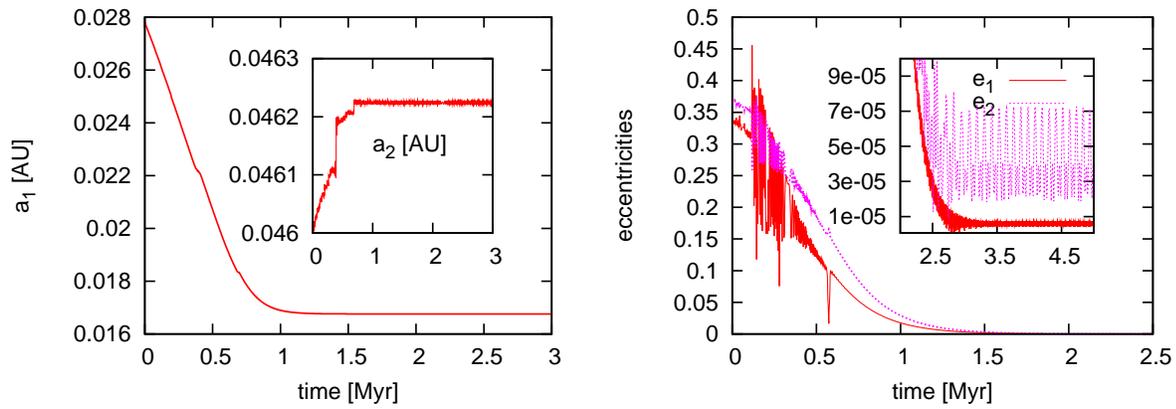


Figura 6.2: Variação temporal de semi-eixos maiores e excentricidades. Os processos de decaimento e circularização orbital são temporariamente afetados pelas passagens através de RMM. No fim da evolução, a configuração orbital atual do sistema é reproduzida.

não é perfeita, já que existe um remanente nos valores finais, em que $e_1 < 10^{-5}$, $2 \times 10^{-5} < e_2 < 7 \times 10^{-5}$.

O sucessivo cruzamento de RMM pode ser apreciado na Fig. 6.3, onde mostramos a variação de $n_1/n_2 = P_2^{orb}/P_1^{orb}$. Quatro RMM são destacadas, todas de ordem > 1 . É importante mencionar que, devido ao processo de decaimento orbital do planeta interno, a migração entre os planetas é divergente. Portanto, a possibilidade de captura em RMM é nula (Peale, 1986). Note-se que a situação é contrária ao caso de satélites naturais orbitando um planeta de rotação rápida, em que algumas configurações ressonantes podem ser explicadas através de um processo de captura devido a uma migração convergente (ver Tittlemore & Wisdom, 1990).

Ainda na Fig. 6.3, mostramos a variação do ângulo $\Delta\varpi$, confirmando que o sistema evolui ao longo do Modo I ($\Delta\varpi = 0$) até o momento da circularização do par de órbitas.

6.3.4 A rotação de CoRoT-7b

A evolução da rotação do planeta interno do sistema é mostrada na Fig. 6.4, juntamente com a evolução do período orbital. Note como o período de rotação rapidamente atinge o seu valor estacionário, que na segunda ordem em e_1 está dado por $P_{rot}^{est} = P_{orb}/(1 + 6e_1^2)$. O período orbital diminui como consequência do decaimento orbital. Após 1 milhão de anos de evolução, quando a órbita interna se aproxima da circularização, o sincronismo entre os

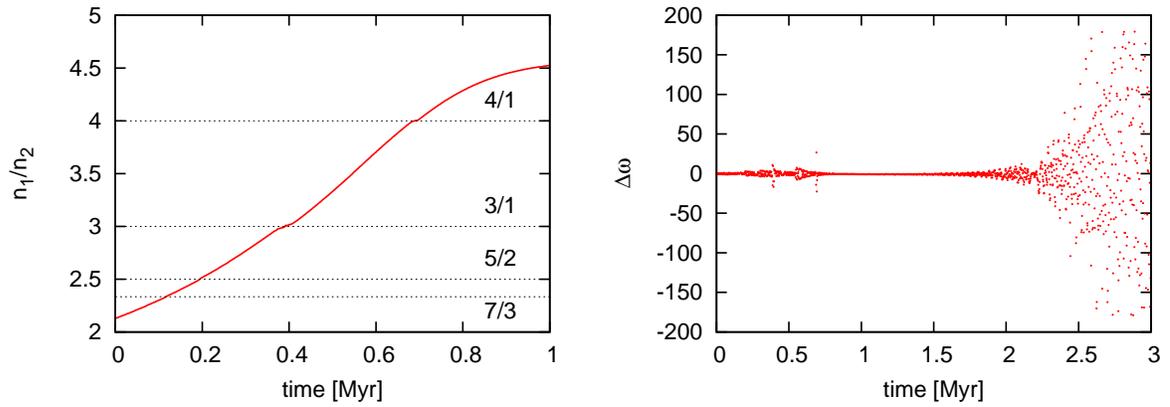


Figura 6.3: Variação temporal da razão de movimentos médios e do ângulo $\Delta\varpi$. Os cruzamentos de RMM podem ser apreciados, assim como a oscilação de $\Delta\varpi$ ao redor de 0° , indicando uma evolução ao longo do Modo I.

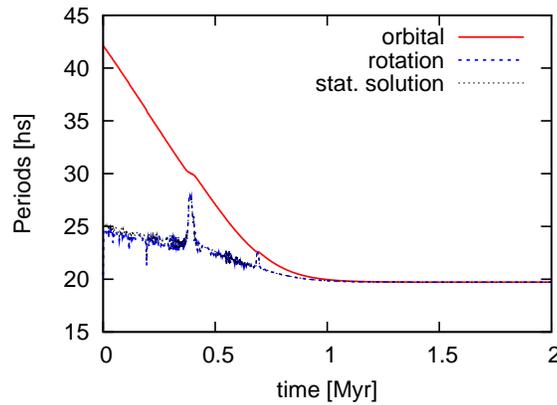


Figura 6.4: Variação temporal dos períodos orbitais e de rotação. A solução estacionária é rapidamente atingida, evoluindo até o sincronismo ($P_{rot} = P_{orb}$) quando a órbita interna é circularizada.

movimentos de rotação e orbital é atingido e mantido até o fim da evolução. Note ainda como as passagens pelas RMM, principalmente a 3/1, afetam temporariamente a evolução da rotação.

6.4 Escala de tempo para o decaimento orbital. O papel da maré estelar

Como já discutimos, após a circularização total da órbita a maré estelar torna-se a única fonte de decaimento orbital do planeta deformado. O planeta externo não é capaz de excitar o valor de e_1 , já que a configuração atual possui um par de órbitas circulares

e, segundo a equação (5.4), $e_1^{eq} \propto e_2$. Em lugar de utilizar as simulações numéricas das equações exatas desde o começo, incluindo o efeito da maré estelar, vamos usar as equações médias para estudar a variação de semi-eixo maior a partir da configuração orbital atual do sistema². A taxa de variação média do semi-eixo maior está dada por (4.3), que para $\hat{p} = e_1 = 0$ e substituindo o valor de \hat{s} fica

$$\langle \dot{a}_1 \rangle = -6n_1 a_1^{-4} \frac{k_{d0}}{Q_0} \frac{m_1}{m_0} R_0^5, \quad (6.1)$$

ou, sabendo que $m_1 \ll m_0$

$$\langle \dot{a}_1 \rangle = -\frac{6\sqrt{Gm_0}}{a_1^{11/2}} \frac{k_{d0}}{Q_0} \frac{m_1}{m_0} R_0^5. \quad (6.2)$$

Notamos que a equação diferencial (6.2) depende apenas da variável a_1 , podendo assim ser integrada. Temos

$$da_1 a_1^{11/2} = -\mathcal{K} dt, \quad (6.3)$$

onde $\mathcal{K} \equiv 6\sqrt{Gm_0}(k_{d0}/Q_0)(m_1/m_0)R_0^5$. Integrando em ambos lados obtemos

$$\int_{a_{atual_1}}^{a_{Roche}} da_1 a_1^{11/2} = -\mathcal{K} \tau_{a_1}, \quad (6.4)$$

em que a integração em semi-eixo maior foi tomada entre o valor atual de a_1 , a_{atual_1} , e o limite de Roche, a_{Roche} , enquanto τ_{a_1} é o tempo para o decaimento orbital atribuído à maré estelar. Resolvendo (6.4) para τ_{a_1} , obtemos

$$\tau_{a_1} = -\frac{2}{13}(a_{Roche}^{13/2} - a_{atual_1}^{13/2})/\mathcal{K}. \quad (6.5)$$

Substituindo a definição de \mathcal{K} , obtemos finalmente

$$\tau_{a_1} = \frac{(a_{atual_1}^{13/2} - a_{Roche}^{13/2})}{39\sqrt{Gm_0}R_0^5} \frac{Q_0}{k_{d0}} \frac{m_0}{m_1}. \quad (6.6)$$

A Fig. 6.5 apresenta a variação de τ_{a_1} como função de k_{d0}/Q_0 , supondo $a_{atual_1} = 0.017$ UA e lembrando que $a_{Roche} = 0.0062$ UA. Notamos que τ_{a_1} pode ser chamado de *tempo de vida médio* do planeta interno, desde que o valor de a_{Roche} seja atingido. Da figura, é fácil observar que o tempo de vida médio do planeta CoRoT-7b diminui (aumenta) para valores grandes (pequenos) da dissipação na estrela central.

² Esse método resulta muito mais rápido que a simulação numérica, devido ao grande tempo computacional necessário para que as equações exatas sejam resolvidas sem a utilização de fator de escala.

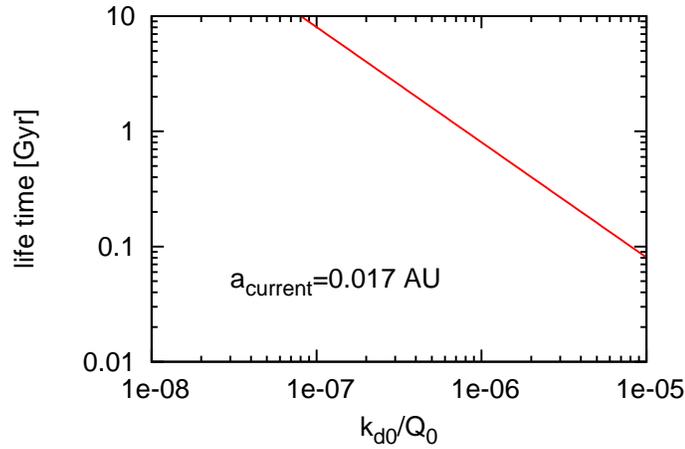


Figura 6.5: Variação do tempo de vida médio do planeta CoRoT-7b em função da dissipação na estrela central. Apenas a maré estelar é considerada devido à configuração orbital atual do planeta interno, em que $a_{atual_1} = 0.017$ UA e $e_{atual_1} = 0$. O raio estelar foi calculado assumindo uma densidade igual à Solar.

6.5 Dissipação de energia

Com vimos no Cap. 3, a variação de semi-eixo maior provoca variação de energia orbital que é liberada em forma de calor no interior do corpo deformado pela maré. No caso do CoRoT-7b, temos $m_1 \ll m_0$ e, portanto, a variação da energia de rotação da estrela pode ser desprezada. Nesse caso, lembrando o resultado 3.39 temos

$$W = \langle \dot{E}_{orb} \rangle = -\frac{21n_1 k_{d1} G m_0^2 R_1^5}{2Q_1 a_1^6} e_1^2. \quad (6.7)$$

Definindo $h = W/4\pi R_1^2$ como a taxa de dissipação de energia por unidade de superfície, temos

$$h = -\frac{21n_1 k_{d1} G m_0^2 R_1^3}{8\pi Q_1 a_1^6} e_1^2. \quad (6.8)$$

Segundo Barnes *et al.* (2010), a Fig. 6.6 mostra a variação de $|h|$ em função da excentricidade orbital do CoRoT-7b para três valores de Q_1 , assumindo o valor atual de semi-eixo maior, $a_1 = a_{atual_1} = 0.017$ UA. É claro que $|h|$ é maior (menor) para valores pequenos (grandes) de Q_1 .

Órbitas excêntricas favorecem a alta dissipação de energia, já que $|h| \propto e_1^2$. Note-se que para $e_1 = 4.3 \times 10^{-5}$ temos $|h| \simeq 2$ w/m², um valor similar ao do satélite galileano

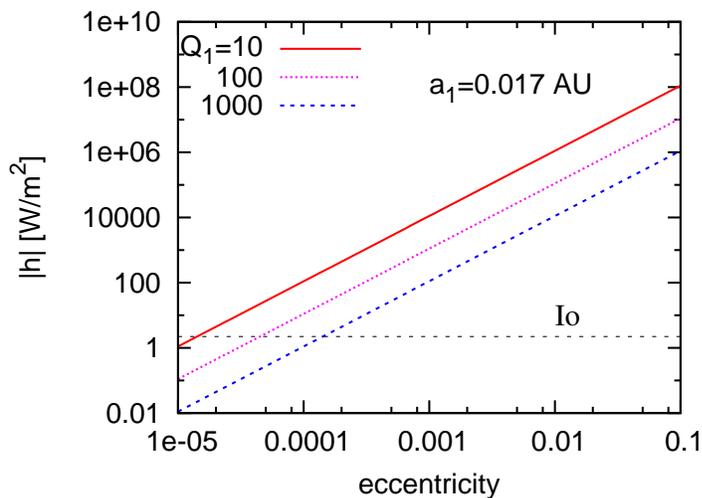


Figura 6.6: Taxa de dissipação de energia por unidade de superfície em função da excentricidade, correspondente ao planeta CoRoT-7b.

Io, como mostrado na figura. Portanto, um valor pequeno de e_1 pode ser responsável por uma alta taxa de dissipação de energia e, por esse motivo, CoRoT-7b já tem sido chamado de *Super-Io* (Barnes *et al.*, 2010). No entanto, as simulações numéricas mostraram que $e_1 < 10^{-5}$ e, portanto, $|h|_{\text{CoRoT-7b}} \ll |h|_{\text{Io}}$.

6.6 Comentários finais

É importante mencionar que a análise baseada nas soluções estacionárias da Sec. 6.3.2 prevê grandes excentricidades primordiais. Porém, essa análise somente leva em consideração a evolução secular do sistema. Possivelmente, o passado do sistema tenha sofrido de alguns dos fenômenos mais comuns após a formação planetária, como processos migratórios devido a interações com o disco primordial com posterior captura na ressonância de movimentos médios 2/1. Nesse cenário evolutivo, após a captura o par de planetas continua migrando em direção à estrela mantendo a configuração ressonante, até o momento em que o efeito de maré sobre o planeta interno (devido à estrela) seja suficientemente forte como para provocar a saída da ressonância, continuando com o decaimento orbital.

Um outro fato a destacar é que na análise numérica foi incluído apenas o efeito da maré planetária e, sendo assim, o decaimento orbital é totalmente atribuído à maré no planeta. No entanto, seguramente a maré estelar também tenha contribuído (em menor

quantidade) à diminuição de semi-eixo maior, sendo o valor final $a_1 = 0.017$ UA produto da combinação dos dois efeitos de maré.

6.6.1 Trabalho a ser feito

Finalmente, uma outra consideração é o fato da não inclusão do efeito de maré no planeta externo. De fato, CoRoT-7c possui um período orbital de 3.69 dias, pequeno o suficiente como para ser afetado pelo efeito da maré da estrela³. Uma análise mais completa, incluindo os efeitos das marés na estrela e no planeta externo podem fornecer uma informação mais precisa sobre a evolução passada do sistema.

³ Note que nas simulações do Cap. 5, o período orbital da super-Terra era 2.9 dias.

Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre o efeito das marés na evolução orbital e na rotação de planetas de curto período. A construção do modelo, baseado na teoria de Darwin (1880), permitiu obter um conjunto de equações através das quais foi possível estudar a variação média de semi-eixo maior, excentricidade, inclinação orbital e velocidade angular de rotação em um sistema estrela-planeta quente. Após a obtenção de equações gerais, os resultados foram aplicados para uma estrela em rotação lenta (Tipo III, $\Omega_* \ll n$) e um planeta quente quase-síncrono (Tipo II, $\Omega_p \simeq n$). A aplicação de um modelo linear mostrou que o efeito cumulativo das marés provoca diminuição de semi-eixo maior e excentricidade, assim como aproximação entre os planos equatoriais com o plano orbital.

O modelo, construído de forma geral, pode ser adaptado para qualquer dependência funcional entre os ângulos de defasagem com as correspondentes frequências das ondas de maré. Isso representa uma vantagem ante outros modelos, contruídos a partir de leis específicas. A validade dos resultados na segunda ordem em excentricidade e inclinação orbital representa uma limitação do modelo.

A escala de tempo para o decaimento orbital depende das contribuições das marés planetária e estelar, podendo ser calculado um valor crítico da excentricidade para o qual as duas contribuições são igualmente eficientes. A circularização orbital é quase completamente dominada pela maré planetária, em uma escala de tempo muito menor do que a escala correspondente ao decaimento orbital. Após a circularização total ser atingida, a migração planetária é controlada pela maré estelar, sendo os planetas mais massivos aqueles que têm a maior chance de atingirem o limite de Roche com a estrela central durante o processo de decaimento orbital. O acúmulo de planetas gigantes na região de

planetas muito quentes ($P_{orb} \lesssim 2$ dias) indica uma evidência de evolução orbital atribuída ao efeito de maré, fornecendo assim uma possível explicação para a distribuição observada de período orbital em função da massa de exoplanetas reais. No entanto, outros efeitos dissipativos podem ter contribuído à formação da distribuição de períodos, sendo assim necessário um estudo mais detalhado.

A solução estacionária para a rotação do planeta é super-síncrona e acontece em uma escala de tempo muito menor do que as escalas de tempo para as variações médias dos elementos. O sincronismo exato é atingido apenas para órbitas circulares. A rotação estelar poder sofrer aceleração apreciável no caso de interação como um planeta maior ou igual a Júpiter. Porém, a solução estacionária não deve ser atingida em escalas de tempo comparáveis à idade do sistema.

A análise de sistemas com dois planetas mostrou que a presença de um planeta em órbita externa excêntrica modifica a evolução do planeta interno devida ao efeito de maré, ao tempo que a órbita externa é também afetada. No exemplo em que uma super-Terra quente interage com um planeta do tipo Júpiter, o decaimento orbital da super-Terra é potenciado devido à excitação da excentricidade, podendo inclusive atingir o limite de Roche com a estrela durante o processo migratório. Como consequência da conservação do momento angular total a excentricidade do Júpiter é fortemente afetada, terminando a evolução com um valor próximo de zero ($e_2 \simeq 0.003$). A conservação do momento angular total pode ser usada para se obter a variação de e_2 em função da razão de massas e da razão de semi-eixos maiores.

A excitação da excentricidade é também observada (em menor quantidade) quando um Júpiter quente é acompanhado por uma super-Terra em órbita externa, porém, sem afetar o decaimento orbital do Júpiter quente.

A evolução secular dos planetas do sistema CoRoT-7 (duas super-Terras quentes) indica um estado estacionário, com um par de órbitas circulares. A técnica das soluções estacionárias se mostrou uma ferramenta útil para obter informação sobre o passado evolutivo do sistema próximo dos valores de equilíbrio.

A migração de CoRoT-7b continua sendo induzida pela maré estelar. Assim, o planeta pode sofrer um estado final do tipo catastrófico via cruzamento do limite de Roche em uma escala de tempo que depende da função de dissipação da estrela. Para $k_{do}/Q_0 \sim 10^{-6}$, o

tempo de vida médio de CoRoT-7b é aproximadamente 0.80 bilhões de anos.

Referências Bibliográficas

- Alexander, M. E. 1973. The Weak Friction Approximation and Tidal Evolution in Close Binary Systems. *Astrophysics and Space Science* 23, 459-510.
- Barnes, R., Jackson, B., Greenberg, R., Raymond, S. N. 2009a. Tidal Limits to Planetary Habitability. *Astrophysical Journal* 700, L30-L33.
- Barnes, R., Jackson, B., Raymond, S. N., West, A. A., Greenberg, R. 2009b. The HD 40307 Planetary System: Super-Earths or Mini-Neptunes?. *Astrophysical Journal* 695, 1006-1011.
- Barnes, R., Raymond, S. N., Greenberg, R., Jackson, B., Kaib, N. A. 2010. CoRoT-7b: Super-Earth or Super-IO?. *Astrophysical Journal* 709, L95-L98.
- Beutler, G. 2005. *Methods of celestial mechanics. Vol. I: Physical, mathematical, and numerical principles.* Astronomy and Astrophysics Library. Berlin, Springer.
- Brouwer, D., Clemence, G. M. 1961. *Methods of celestial mechanics.* New York: Academic Press, 1961.
- Chandrasekhar, S. 1969. *Ellipsoidal figures of equilibrium. The Silliman Foundation Lectures,* New Haven: Yale University Press, 1969.
- Correia, A. C. M., Laskar, J., de Surgy, O. N. 2003. Long-term evolution of the spin of Venus I. theory. *Icarus* 163, 1-23.
- Correia, A. C. M., Levrard, B., Laskar, J. 2008. On the equilibrium rotation of Earth-like extra-solar planets. *Astronomy and Astrophysics* 488, L63-L66.

- Danby, J. M. A. 1988. *Fundamentals of celestial mechanics*. Richmond, Va., U.S.A. : Willmann-Bell, 1988. 2nd ed., rev. enl.
- Darwin, G. H. 1880. On the Secular Changes in the Elements of the Orbit of a Satellite Revolving about a Tidally Distorted Planet. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series I* 171, 713-891.
- Davis, T. A., Wheatley, P. J. 2009. Evidence for a lost population of close-in exoplanets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 396, 1012-1017.
- Dobbs-Dixon, I., Lin, D. N. C., Mardling, R. A. 2004. Spin-Orbit Evolution of Short-Period Planets. *Astrophysical Journal* 610, 464-476.
- Efroimsky, M., Lainey, V. 2007. Physics of bodily tides in terrestrial planets and the appropriate scales of dynamical evolution. *Journal of Geophysical Research (Planets)* 112, 12003.
- Everhart, E. 1985. An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution*, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11-15, 1984. Edited by Andrea Carusi and Giovanni B. Valsecchi. Dordrecht: Reidel, *Astrophysics and Space Science Library*. Volume 115, 1985,, p.185 185.
- Faber, J. A., Rasio, F. A., Willems, B. 2005. Tidal interactions and disruptions of giant planets on highly eccentric orbits. *Icarus* 175, 248-262.
- Ferraz-Mello, S., Rodríguez, A., Hussmann, H. 2008. Tidal friction in close-in satellites and exoplanets: The Darwin theory re-visited. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 101, 171-201 (versão astro-ph: arXiv:0712.1156).
- Ferraz-Mello, S., Rodríguez, A., Hussmann, H. 2009. Erratum: Errata to “Tidal friction in close-in satellites and exoplanets. The Darwin theory re-visited”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 104, 319-320.
- Goldreich, P. 1963. On the eccentricity of satellite orbits in the solar system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 126, 257.

- Goldreich, P. 1965. An explanation of the frequent occurrence of commensurable mean motions in the solar system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 130, 159.
- Goldreich, P. 1966. Final spin states of planets and satellites. *Astronomical Journal* 71, 1.
- Goldreich, P., Soter, S. 1966. Q in the Solar System. *Icarus* 5, 375-389.
- Greenberg, R. 2009. Frequency Dependence of Tidal q. *Astrophysical Journal* 698, L42-L45.
- Hut, P. 1981. Tidal evolution in close binary systems. *Astronomy and Astrophysics* 99, 126-140.
- Jackson, B., Greenberg, R., Barnes, R. 2008a. Tidal Evolution of Close-in Extrasolar Planets. *Astrophysical Journal* 678, 1396-1406.
- Jackson, B., Barnes, R., Greenberg, R. 2008b. Tidal heating of terrestrial extrasolar planets and implications for their habitability. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 391, 237-245.
- Jackson, B., Barnes, R., Greenberg, R. 2009. Observational Evidence for Tidal Destruction of Exoplanets. *Astrophysical Journal* 698, 1357-1366.
- Jeffreys, H. 1961. The effect of tidal friction on eccentricity and inclination. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 122, 339-343.
- Kaula, W. M. 1964. Tidal Dissipation by Solid Friction and the Resulting Orbital Evolution. *Reviews of Geophysics and Space Physics* 2, 661-685.
- Lainey, V., Arlot, J.-E., Karatekin, Ö., van Hoolst, T. 2009. Strong tidal dissipation in Io and Jupiter from astrometric observations. *Nature* 459, 957-959.
- Léger, A., and 160 colleagues 2009. Transiting exoplanets from the CoRoT space mission. VIII. CoRoT-7b: the first super-Earth with measured radius. *Astronomy and Astrophysics* 506, 287-302.
- Levrard, B., Correia, A. C. M., Chabrier, G., Baraffe, I., Selsis, F., Laskar, J. 2007. Tidal dissipation within hot Jupiters: a new appraisal. *Astronomy and Astrophysics* 462, L5-L8.

- Levrard, B. 2008. A proof that tidal heating in a synchronous rotation is always larger than in an asymptotic nonsynchronous rotation state. *Icarus* 193, 641-643.
- Levrard, B., Winisdoerffer, C., Chabrier, G. 2009. Falling Transiting Extrasolar Giant Planets. *Astrophysical Journal* 692, L9-L13.
- MacDonald, G. J. F. 1964. Tidal Friction. *Reviews of Geophysics and Space Physics* 2, 467-541.
- Mardling, R. A., Lin, D. N. C. 2004. On the Survival of Short-Period Terrestrial Planets. *Astrophysical Journal* 614, 955-959.
- Mardling, R. A. 2007. Long-term tidal evolution of short-period planets with companions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 382, 1768-1790.
- McCue, J., Dormand, J. R. 1993. Evolution of the spin of Venus. *Earth Moon and Planets* 63, 209-225.
- Michtchenko, T. A., Ferraz-Mello, S. 2001. Modeling the 5 : 2 Mean-Motion Resonance in the Jupiter-Saturn Planetary System. *Icarus* 149, 357-374.
- Mignard, F. 1979. The evolution of the lunar orbit revisited. I. *Moon and Planets* 20, 301-315.
- Murray, C. D., Dermott, S. F. 1999. *Solar system dynamics*. Solar system dynamics by Murray, C. D., 1999 .
- Peale, S. J., Cassen, P., Reynolds, R. T. 1980. Tidal dissipation, orbital evolution, and the nature of Saturn's inner satellites. *Icarus* 43, 65-72.
- Peale, S. J. 1986. Orbital resonances, unusual configurations and exotic rotation states among planetary satellites. *IAU Colloq. 77: Some Background about Satellites* 159-223.
- Pont, F. 2009. Empirical evidence for tidal evolution in transiting planetary systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 396, 1789-1796.
- Queloz, D., and 39 colleagues 2009. The CoRoT-7 planetary system: two orbiting super-Earths. *Astronomy and Astrophysics* 506, 303-319.

- Rodriguez, A., Ferraz-Mello, S. 2009. Tidal decay and circularization of the orbits of short-period planets. ArXiv e-prints arXiv:0903.0763.
- Sears, W. D., Lunine, J. I., Greenberg, R. 1993. Equilibrium Nonsynchronous Rotation of Titan. *Icarus* 105, 259-262.
- Segatz, M., Spohn, T., Ross, M. N., Schubert, G. 1988. Tidal dissipation, surface heat flow, and figure of viscoelastic models of Io. *Icarus* 75, 187-206.
- Tittemore, W. C., Wisdom, J. 1990. Tidal evolution of the Uranian satellites. III - Evolution through the Miranda-Umbriel 3:1, Miranda-Ariel 5:3, and Ariel-Umbriel 2:1 mean-motion commensurabilities. *Icarus* 85, 394-443.
- Touma, J., Wisdom, J. 1994. Evolution of the Earth-Moon system. *Astronomical Journal* 108, 1943-1961.
- Wisdom, J. 2008. Tidal dissipation at arbitrary eccentricity and obliquity. *Icarus* 193, 637-640.
- Wu, Y., Goldreich, P. 2002. Tidal Evolution of the Planetary System around HD 83443. *Astrophysical Journal* 564, 1024-1027.
- Zahn, J. P. 1977. Tidal friction in close binary stars. *Astronomy and Astrophysics* 57, 383-394.
- Zhang, K., Hamilton, D. P. 2008. Orbital resonances in the inner neptunian system. II. Resonant history of Proteus, Larissa, Galatea, and Despina. *Icarus* 193, 267-282.

Apêndice

O efeito da rotação

A.1 Comparação entre as deformações devidas à maré e à rotação

O objetivo é estudar a deformação provocada pela rotação do corpo \mathbf{m} e compará-la com a deformação devida ao efeito de maré. A figura de equilíbrio adotada pela deformação devida à rotação é um *esferóide oblato*, achatado na direção do eixo de rotação (ver Fig. A.1), em que $a = b > c$ e a elipticidade, definida por

$$\hat{e}' = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}, \quad (\text{A.1})$$

depende da quantidade $\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}$ através da relação

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} = \frac{3 - 2\hat{e}'^2}{\hat{e}'^3} (1 - \hat{e}'^2)^{1/2} \sin^{-1} \hat{e}' - 3 \left(\frac{1}{\hat{e}'^2} - 1 \right), \quad (\text{A.2})$$

(Jeans, 1929), onde ρ é a densidade do corpo (uniforme). O *achatamento* (ou *oblateness*) pode ser definido como

$$\epsilon_r \equiv 1 - \left(\frac{c}{a} \right)_{rot}. \quad (\text{A.3})$$

De (A.1) e (A.3) obtemos, a primeira ordem em ϵ_r

$$\hat{e}'^2 \simeq 2\epsilon_r. \quad (\text{A.4})$$

Por outro lado, sabemos que a figura de equilíbrio resultante da deformação provocada pelo efeito de maré é um *esferóide prolato* ($b = c < a$) cujo *alongamento* (ou *prolateness*) está dado por (ver (2.6))

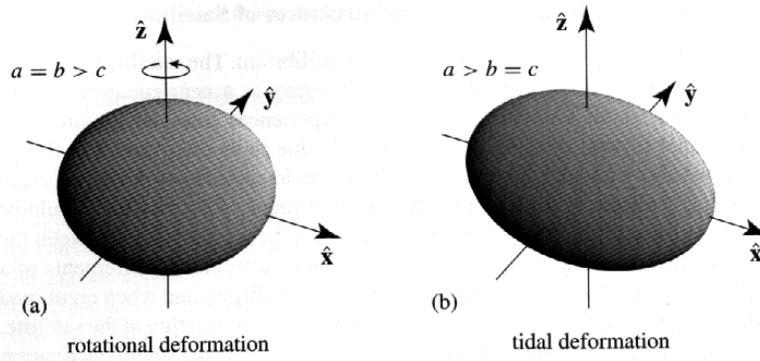


Figura A.1: Deformações devidas à rotação e a maré. Note como a rotação provoca achatamento do esferóide na direção do eixo de rotação, enquanto a maré é responsável pela figura alongada do esferóide na direção do corpo perturbador. (Figura tomada de Murray & Dermott, 1999)

$$\epsilon_t \equiv 1 - \left(\frac{c}{a}\right)_{tid} = \frac{15}{4} \left(\frac{M}{m}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^3. \quad (\text{A.5})$$

Afim de ilustrar com um exemplo, escolhemos um sistema formado por uma estrela igual ao Sol e um planeta igual a Júpiter a uma distância $r = 0.04$ UA da estrela. Assumindo um estado de rotação síncrono ($\Omega = n$), o valor de Ω pode ser calculado através da terceira lei de Kepler. Note-se que o valor de \hat{e}' deve ser calculado numericamente. Substituindo o valor dos parâmetros obtemos $\hat{e}' = 0.0665$ e, substituindo na equação (A.4) resulta $\epsilon_r = 2.22 \times 10^{-3}$. Além disso temos $\epsilon_t = 0.00665$ e comparando os dois resultados vemos que

$$\frac{\epsilon_t}{\epsilon_r} = 3. \quad (\text{A.6})$$

O resultado de (A.6) não é acidental e também não está restrito apenas ao exemplo ilustrado. De fato, pode ser provado que é válido para um corpo que roda com velocidade angular de rotação igual ao movimento médio que teria um corpo perturbador externo responsável pelo efeito de maré. Um resultado clássico mostra que o achatamento atribuído à rotação está dado por

$$\epsilon_r \equiv 1 - \left(\frac{c}{a}\right)_{rot} = \frac{15}{16\pi} \frac{\Omega^2}{G\bar{\rho}}, \quad (\text{A.7})$$

(Danby, 1988, p. 121). Através da terceira lei de Kepler¹, com $\Omega = n$, temos $\Omega^2 = GM/r^3$, e, junto com a definição de densidade média obtemos

$$\epsilon_r \equiv 1 - \left(\frac{c}{a}\right)_{rot} = \frac{5}{4} \left(\frac{M}{m}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^3. \quad (\text{A.8})$$

Assim, de (A.5) e (A.8) segue $\epsilon_t/\epsilon_r = 3$, confirmando o resultado de (A.6).

Uma outra forma de ver o problema pode ser abordada através do cálculo dos potenciais atribuídos à rotação e à maré. Considere-se um sistema de referência solidário à rotação de \mathbf{m} com origem no centro de massa, em que o eixo \hat{z} coincide com a direção do vetor $\mathbf{\Omega}$. Nesse sistema, qualquer ponto da superfície de \mathbf{m} sentirá a ação da força centrífuga dada por $-\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{R})$. Essa força não tem componente na direção \hat{z} e pode ser calculada através do gradiente do potencial

$$U_{rot} = -\frac{1}{2}\Omega^2 R^2 \sin^2 \vartheta, \quad (\text{A.9})$$

onde $R^2 \sin^2 \vartheta = x^2 + y^2$, sendo ϑ o ângulo formado entre \hat{z} e \mathbf{R} . Sabendo que $\sin^2 \vartheta/2 = 1/3 - P_2(\cos \vartheta)/2$, temos

$$U_{rot} = -\frac{1}{3} \frac{GMR^2}{r^3} [1 - P_2(\cos \vartheta)], \quad (\text{A.10})$$

onde $\Omega = n$ foi calculado através da terceira lei de Kepler.

O potencial de maré no mesmo ponto da superfície de \mathbf{m} calcula-se usando o resultado (2.12), que para $r_p = R$ e $l = 2$ fica (ver Fig. 2.2)

$$U_{tid} = -\frac{GMR^2}{r^3} P_2(\cos \xi). \quad (\text{A.11})$$

Portanto, comparando os resultados das equações (A.10) e (A.11) vemos que a magnitude do potencial de maré é três vezes maior do que o potencial centrífugo, atribuído à rotação síncrona.

¹ Note que estamos supondo uma órbita relativa quase-circular, além de $m \ll M$.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)