

*Universidade de São Paulo*  
*Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas*  
*Departamento de Astronomia*

Eduardo Andrade Inês

# **Movimento Planetário nos Sistemas de Estrelas Múltiplas**

São Paulo

2010

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Eduardo Andrade Inês

# Movimento Planetário nos Sistemas de Estrelas Múltiplas

Dissertação apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Astronomia

Orientador(a): Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Tatiana Michtchenko

São Paulo

2010



# Agradecimentos

À minha família, por sempre acreditarem em mim;

À Bia, pelo incondicional apoio nos momentos bons e ruins;

À orientadora Tatiana, sem a qual esse projeto não teria nem se iniciado;

Aos professores Boczko, Silvia, Sylvio, Rama, pelas aulas elucidantes e por sempre esclarecerem minhas dúvidas;

Aos colegas de sala Adrian, Alan, Gleidson, Marcos, Victor, pela paciência, dúvidas tiradas, idéias e boas risadas;

Aos amigos, que são tantos que prefiro não citar para não correr o risco de esquecer algum;

À FAPESP, pelo apoio financeiro, sob o projeto n<sup>o</sup>: 07/57123-6;

Ao IAG e seus funcionários, por propiciarem uma boa estrutura e um sempre agradável ambiente de trabalho.



*“We roll tonight to the guitar bite (...) For those about to rock, we salute you”*

Angus Young





# Resumo

Inicialmente foi feito o trabalho introdutório, com o desenvolvimento e aplicação de programas de integração numérica do sistema de três corpos. Foram estudadas e implementadas rotinas de mudança de sistemas de coordenadas entre os sistemas astrocêntrico, baricêntrico, de Jacobi e de Poincaré, assim como a definição dos elementos orbitais em cada um dos sistemas, o que é essencial para a definição das variáveis canônicas de Delaunay. Foram feitas comparações entre os diferentes elementos orbitais dos sistemas para se verificar a importância da escolha conveniente do sistema de referência utilizado.

Foram desenvolvidos programas de análise espectral, para a transformada de Fourier, e com esse pacote de programas, foram construídos espectros dinâmicos para o sistema, que mostram a evolução dos termos periódicos com relação a algum parâmetro variável do sistema. Essa técnica se mostrou muito eficiente na determinação das frequências fundamentais dos sistemas, assim como na detecção de caos e ressonâncias.

Paralelamente, foi elaborado um critério de estabilidade baseado na esfera de Hill, solução do problema de três corpos restrito, e comparado com outros critérios, o método da máxima excentricidade e do número espectral. Esses critérios foram implementados na construção dos mapas dinâmicos do espaço paramétrico do problema a ser estudado. O novo critério, denominado  $AD_{max}$ , apresentou compatibilidade com os outros critérios e a vantagem de uma simples aplicação, o que levou a construção de um simples modelo que limita a relação entre os elementos orbitais de um planeta para que a órbita seja estável.

Foram feitas comparações entre a relação teórica proposta com simulações numéricas para verificar a qualidade do modelo, e também feitas comparações com um modelo similar encontrado na literatura, o de Holman e Wiegert (1999). Os resultados obtidos mostraram que o modelo desenvolvido nesse trabalho apresentou desvios menores em relação às

simulações quando comparado ao modelo de Holman e Wiegert (1999).

# Abstract

Initially it was done the preliminary work, in order to develop and implement the program package of numerical integration for the three-body system. We studied and implemented the change of coordinate system routines between the astrometric, barycentric, Jacobi and Poincaré systems, as well as the definition of the orbital elements in each system, which is essential for the definition for the Delaunay's canonical variables. Comparisons were made between the different orbital elements of the systems to verify the importance of the appropriate choice of the reference system

Programs of spectral analysis were developed, for the Fourier transform, and with this package of programs, dynamic spectra, showing the evolution of the periodic terms with respect to any variable parameter of the system, were constructed. This technique proved to be very efficient in determining the fundamental frequencies of the systems, as well as for the detection of chaos and resonances.

In addition, it was elaborated a new stability criterion based on the Hill's sphere, solution of the restricted three-body problem, and compared with other criteria, the method of maximum eccentricity and the spectral analysis method. These criteria were implemented in the construction of dynamic maps of the parametric space for the problem to be studied. The new criterion, denominated as  $AD_{max}$ , presented compatibility with the other criteria and the advantage of a simple application, which led to the construction of a simple model that limits the possible values between the planet's orbital elements in a stable orbit.

Comparisons between the proposed theoretical relation with numerical simulations were made, in order to verify the quality of the model. Also, comparisons were made with a model similar in the literature, that of Holman e Wiegert (1999). The results have shown that the model developed in this work presented smaller deviations in relation with the

simulations when compared to the model of Holman e Wiegert (1999).

# Lista de Figuras

2.1	Descrição dos Parâmetros Orbitais . . . . .	24
2.2	Representação das curvas de velocidade zero e dos pontos de lagrange . . .	27
2.3	Representação dos corpos no referencial girante . . . . .	28
2.4	Definição do sistema Baricêntrico ( $\vec{r}_i^*$ ) a partir do sistema Astrocêntrico ( $\vec{r}_i$ )	31
2.5	Definição do sistema Astrocêntrico ( $\vec{r}_i^*$ ) a partir do sistema Baricêntrico ( $\vec{r}_i$ )	32
2.6	Definição do sistema de coordenadas de Jacobi ( $\vec{r}_i^*$ ) a partir do sistema Baricêntrico ( $\vec{r}_i$ ) . . . . .	33
3.1	Distribuição das estrelas binárias do catálogo construído com relação ao semi-eixo maior . . . . .	49
3.2	Distribuição das estrelas binárias do catálogo construído com relação à excentricidade . . . . .	50
3.3	Valores dos semi-eixos maiores e excentricidades para os sistemas binários do catálogo de binárias . . . . .	50
5.1	Simulação do sistema com parâmetros iniciais dados na tabela 5.1 . . . . .	60
5.2	Simulação do sistema com parâmetros dados na tabela 5.1, com semi-eixo maior inicial do planeta $a = 75UA$ . . . . .	61
5.3	Simulação do sistema com parâmetros dados na tabela 5.1, com semi-eixo maior inicial do planeta $a = 100UA$ . . . . .	61
5.4	Simulação do sistema com parâmetros dados na tabela 5.2 . . . . .	62
5.5	Simulação do sistema com parâmetros dados na tabela 5.3 . . . . .	63
5.6	Simulação do sistema com parâmetros dados na tabela 5.4 para 80 anos de integração . . . . .	64

5.7	Simulação do sistema com parâmetros dados na tabela 5.4 para 100 mil anos de integração . . . . .	65
5.8	Simulação do sistema com parâmetros dados na tabela 5.4 por 100 mil anos de integração, perspectiva superior . . . . .	65
5.9	Simulação do sistema com parâmetros dados na tabela 5.4 por 100 mil anos de integração, perspectiva lateral . . . . .	66
5.10	Evolução temporal dos semi-eixos maiores astrocêntrico, de Jacobi e de Poincaré para o planeta . . . . .	67
5.11	Evolução temporal das excentricidades astrocêntrica, de Jacobi e de Poincaré para o planeta . . . . .	67
5.12	Evolução temporal dos semi-eixos maiores astrocêntrico, de Jacobi e de Poincaré para a estrela . . . . .	68
5.13	Evolução temporal das excentricidades astrocêntrica, de Jacobi e de Poincaré para a estrela . . . . .	68
5.14	Espectro de Fourier para a evolução temporal do semi-eixo maior nas coordenadas Astrocêntrica, de Jacobi e de Poincaré da estrela . . . . .	70
5.15	Espectro de Fourier para a evolução temporal da excentricidade nas coordenadas Astrocêntrica, de Jacobi e de Poincaré da estrela . . . . .	70
5.16	Espectro de Fourier para a evolução temporal do semi-eixo maior nas coordenadas Astrocêntrica, de Jacobi e de Poincaré do planeta . . . . .	71
5.17	Espectro de Fourier para a evolução temporal do semi-eixo maior nas coordenadas Astrocêntrica, de Jacobi e de Poincaré do planeta . . . . .	71
5.18	Espectro de Fourier para a evolução temporal do semi-eixo maior nas coordenadas Astrocêntrica, de Jacobi e de Poincaré do planeta num sistema de movimento não-harmônico . . . . .	72
5.19	Espectro de Fourier para a evolução temporal da excentricidade nas coordenadas Astrocêntrica, de Jacobi e de Poincaré do planeta num sistema de movimento não-harmônico . . . . .	73
5.20	Evolução dos termos periódicos do elemento $a_p$ com relação ao valor inicial de $a_p$ . . . . .	74

5.21	Evolução dos termos periódicos do elementos $e_p$ com relação ao valor inicial de $a_p$ . . . . .	75
5.22	Evolução dos termos periódicos de $\lambda_e$ com relação ao valor inicial de $a_p$ . .	75
5.23	Evolução dos termos periódicos de $\lambda_p$ com relação ao valor inicial de $a_p$ . .	75
5.24	Evolução dos termos periódicos de $\varpi_p$ com relação ao valor inicial de $a_p$ . .	76
6.1	Superfície de velocidade zero e circunferências com as distâncias máxima ( $R_{L_1}$ ) e mínima ( $R_{L_{min}}$ ) da superfície até a estrela 1 . . . . .	80
6.2	Mapa dinâmico para o sistema <i>HIP 82817</i> com o critério da <i>Esfera de Hill</i> para 200 anos de integração . . . . .	86
6.3	Mapa dinâmico para o sistema <i>HIP 82817</i> com o critério da <i>Esfera de Hill</i> para 1000 anos de integração . . . . .	86
6.4	Mapa dinâmico para o sistema <i>HIP 82817</i> com o critério da <i>Esfera de Hill</i> para 10 mil anos de integração . . . . .	87
6.5	Mapa dinâmico para o sistema <i>HIP 82817</i> com o critério da <i>Excentricidade Máxima</i> para 200 anos de integração . . . . .	88
6.6	Mapa dinâmico para o sistema <i>HIP 82817</i> com o critério da <i>Excentricidade Máxima</i> para 1000 anos de integração . . . . .	88
6.7	Mapa dinâmico para o sistema <i>HIP 82817</i> com o critério da <i>Excentricidade Máxima</i> para 10 mil anos de integração . . . . .	89
6.8	Mapa dinâmico para o sistema <i>HIP 82817</i> com o critério do <i>Número Espectral</i> para 200 anos de integração . . . . .	89
6.9	Mapa dinâmico para o sistema <i>HIP 82817</i> com o critério do <i>Número Espectral</i> para 1000 anos de integração . . . . .	90
6.10	Mapa dinâmico para o sistema <i>HIP 82817</i> com o critério do <i>Número Espectral</i> para 10 mil anos de integração . . . . .	90
6.11	Mapa dinâmico para o sistema <i>HIP 82817</i> com o critério $AD_{max}$ para 1000 anos de integração . . . . .	92
6.12	Mapa dinâmico para o sistema <i>HIP 82817</i> com a comparação entre o valor obtido numericamente para $m_{max}$ e o valor teórico limite $d_{crit}$ definido por (2.18) . . . . .	93



6.13	Mapa dinâmico para o sistema <i>HIP 82817</i> com a diferença entre o valor máximo que a distância apocêntrica atingiu e seu valor inicial . . . . .	94
7.1	Diferença relativa percentual entre os semi-eixos maiores críticos calculados a partir das relações 7.1 e 7.2, para o espaço paramétrico $a_e \times e_e$ , com $\mu = 0.5$	96
7.2	Diferença relativa percentual entre os semi-eixos maiores críticos calculados a partir das relações 7.1 e 7.2, para o espaço paramétrico $a_e \times \mu$ , com $e_e = 0$	97
7.3	$AD_{max}$ que um planeta atingiu em uma órbita estável para o espaço paramétrico $a_e \times e_e$ , com $\mu = 0.5$ . . . . .	98
7.4	Maior valor do semi-eixo maior inicial que obteve uma órbita estável para o espaço paramétrico $a_e \times e_e$ , com $\mu = 0.5$ . . . . .	98
7.5	$AD_{max}$ que um planeta atingiu em uma órbita estável para o espaço paramétrico $a_e \times \mu$ , com $e_e = 0$ . . . . .	99
7.6	Maior valor do semi-eixo maior inicial que obteve uma órbita estável para o espaço paramétrico $a_e \times \mu$ , com $e_e = 0$ . . . . .	99
7.7	Compatibilidade entre o valor calculado teórico e o valor obtido por meio de simulações para a relação definida a partir do critério $AD_{max}$ , para o espaço de fases $a_e \times e_e$ , com $\mu = 0.5$ . . . . .	100
7.8	Compatibilidade entre o valor calculado teórico e o valor obtido por meio de simulações para a relação definida a partir da relação empírica de Holman e Wiegert (1999), para o espaço paramétrico $a_e \times e_e$ , com $\mu = 0.5$ . . . . .	100
7.9	Compatibilidade entre o valor calculado teórico e o valor obtido por meio de simulações para a relação definida a partir do critério $AD_{max}$ , para o espaço de fases $a_e \times \mu$ , com $e_e = 0$ . . . . .	101
7.10	Compatibilidade entre o valor calculado teórico e o valor obtido por meio de simulações para a relação definida a partir da relação empírica de Holman e Wiegert (1999), para o espaço paramétrico $a_e \times \mu$ , com $e_e = 0$ . . . . .	101

# Lista de Tabelas

5.1	Valores iniciais dos parâmetros orbitais para a primeira simulação . . . . .	60
5.2	Valores iniciais dos parâmetros orbitais para a simulação de órbita do tipo satélite . . . . .	62
5.3	Valores iniciais dos parâmetros orbitais para a primeira simulação da órbita planetária não coplanar . . . . .	63
5.4	Valores iniciais dos parâmetros orbitais para a simulação da órbita tipo satélite orbitando a estrela secundária . . . . .	64
5.5	Elementos orbitais e massas do sistema <i>HIP 82817</i> . . . . .	66
7.1	Percentual do número de dados presente em cada intervalo de compatibilidade para o critério $AD_{max}$ e para a relação de Holman e Wiegert (1999), para o espaço paramétrico $a_e \times e_e$ , com $\mu = 0.5$ , das figuras 7.7 e 7.8 . . . .	100
7.2	Percentual do número de dados presente em cada intervalo de compatibilidade para o critério $AD_{max}$ e para a relação de Holman e Wiegert (1999), para o espaço paramétrico $a_e \times \mu$ , com $e_e = 0$ , das figuras 7.9 e 7.10 . . . .	102



# Sumário

1. <i>Introdução</i> . . . . .	19
2. <i>Fundamentos Teóricos</i> . . . . .	23
2.1 Problema de Dois Corpos . . . . .	23
2.2 Problema de Três Corpos . . . . .	25
2.3 Formalismo Hamiltoniano . . . . .	29
2.3.1 Transformação do Sistema Astrocêntrico para Sistema Baricêntrico	31
2.3.2 Transformação do Sistema Baricêntrico para Sistema Astrocêntrico	32
2.3.3 Transformação do Sistema Baricêntrico para Sistema de Jacobi . . .	33
2.3.4 Transformação do Sistema de Jacobi para Sistema Baricêntrico . . .	35
2.3.5 Transformação do Sistema Baricêntrico para Sistema de Poincaré .	36
2.3.6 Transformação do Sistema de Poincaré para Sistema Baricêntrico .	37
2.3.7 Representações do Hamiltoniano . . . . .	38
2.4 Teoria de Perturbações - Dinâmica Secular . . . . .	42
3. <i>Catálogos de Binárias</i> . . . . .	47
4. <i>Implementação dos Pacotes de Programas</i> . . . . .	53
4.1 Mudança de Coordenadas . . . . .	53
4.2 Integração Numérica . . . . .	54
4.3 Zero de Funções . . . . .	55
4.4 Transformada Rápida de Fourier - <i>Fast Fourier Transform</i> . . . . .	56

5. <i>Simulações</i> . . . . .	59
5.1 Integração de Movimento . . . . .	59
5.2 Mudanças de Coordenadas . . . . .	65
5.3 Análise Espectral dos Dados de Saída . . . . .	69
5.4 Espectros Dinâmicos . . . . .	73
6. <i>Critérios de Estabilidade</i> . . . . .	79
6.1 Esfera de Hill . . . . .	79
6.2 Máxima Distância Apocêntrica . . . . .	81
6.3 Máxima Excentricidade . . . . .	82
6.4 Número Espectral . . . . .	82
6.5 Resultados e Comparações entre os Critérios . . . . .	84
6.5.1 Esfera de Hill . . . . .	86
6.5.2 $e_{max}$ . . . . .	87
6.5.3 SAM . . . . .	88
6.5.4 $AD_{max}$ . . . . .	92
7. <i>Aplicação do Critério <math>AD_{max}</math> na Caracterização Dinâmica do Problema de Três Corpos Restrito</i> . . . . .	95
8. <i>Conclusões</i> . . . . .	103
<i>Referências</i> . . . . .	107

## Introdução

Estima-se atualmente que mais de 50% das estrelas da sequência principal constituem um sistema binário ou múltiplo estelar (Abt, 1979; Duquennoy e Mayor, 1991). Além disso, modelos de formação estelar recentes mostram que mesmo para estrelas pré-sequência principal o número de ocorrências de multiplicidades é maior que 50% (Mathieu, 1994; Mathieu et al., 2000).

Por ser um fenômeno tão frequente no universo, e com as recentes descobertas de sistemas planetários, astrônomos começaram a se perguntar sobre a possibilidade de existência de planetas em sistemas múltiplos. De fato, apesar de que as técnicas de detecção de planetas extrassolares atuais não favorecerem a detecção de planetas em sistemas estelares múltiplos, aproximadamente 20% dos sistemas planetários conhecidos encontram-se em um sistema com uma ou mais companheiras estelares (Eggenberger et al., 2004a, 2007).

O assunto de sistemas planetários em estrelas binárias é motivo de estudo para muitos trabalhos. Apesar dos resultados obtidos, grande parte do problema ainda se encontra em aberto. Um fator para isso é o grande número de graus de liberdade, a complexidade das equações, as altas excentricidades, perturbações e inclinações envolvidas, o que dificulta abordagens analíticas. Estudos numéricos começaram a ser feitos a partir da segunda metade do século XX, mas devido aos avanços tecnológicos, a qualidade dos resultados numéricos é maior para os trabalhos feitos na última década, já que, como há caos envolvido no problema de três corpos, instabilidades podem demorar muito tempo para aparecer.

Determinar a estabilidade de uma órbita é o primeiro passo para qualquer estudo que se deseja realizar relacionado a um planeta, como habitabilidade. Em Szebehely (1984) é feita uma revisão de critérios de estabilidade de Hill e do expoente de Lyapunov, para

detecção de caos. São comparados os critérios e analisados onde podem ser aplicados. Já em Graziani e Black (1981), Black (1982) e Pendleton e Black (1983) são feitos estudos puramente numéricos, com resultado uma relação empírica de estabilidade dependendo apenas da razão de massas das estrelas e da distância inicial do planeta à estrela principal.

Mais recentemente, em Holman e Wiegert (1999) é feito um estudo numérico para um grande número de configurações iniciais, o que não havia sido feito anteriormente, e chega-se em uma relação empírica para as condições iniciais de uma órbita planetária inicialmente circular, dependendo da razão de massas, da excentricidade e do semi-eixo maior das estrelas binárias, além do semi-eixo maior inicial do planeta. Esse estudo foi aplicado amplamente em diversos trabalhos, sendo os mais recentes entre esses estudos Pilat-Lohinger (2009) e Funk et al. (2009), Saleh e Rasio (2009), que abordam diferentes aspectos dos planetas extrassolares, como cálculo de zonas habitáveis, modelos de formação planetária e também estabilidade orbital baseada em integrações numéricas.

Entretanto, poucos estudos conhecidos de modelagem analíticas foram feitos, e a maioria deles podem ser aplicados apenas em sistemas em configurações singulares, como é o caso do sistema hierárquico de três estrelas Ford et al. (2000). Devido aos valores elevados de excentricidade, inclinação e da massa do perturbador, as séries utilizadas nos outros problemas de mecânica celeste, como problemas de satélites naturais e asteróides do sistema solar, demandariam muitos termos das expansões para convergir, o que torna a prática inviável. Em Michtchenko e Malhotra (2004) foi realizada uma modelagem semi-analítica do problema de caso planetário secular coplanar. No método semi-analítico, o desenvolvimento do problema envolve o cálculo numérico de média, eliminando assim a necessidade de expansões da função perturbadora e obtendo-se um resultado com erro da ordem da precisão do computador. Porém, essa abordagem, feita nessa forma, não é mais válida para o caso que o corpo perturbador possua massa da ordem da massa da estrela.

Para o estudo de órbitas planetárias em estrelas binárias, é possível separar qualitativamente os casos de movimentos em dois casos, divisão essa primeiramente introduzida em Dvorak (1986). Caso o planeta orbita o centro de massas das duas estrelas numa órbita externa à órbita das estrelas, é definido o caso *órbita tipo planetária* (ou *P-type*), enquanto caso o planeta orbita apenas uma das estrelas, em uma órbita interior à órbita das estrelas, é definido o caso *órbita tipo satélite* (ou *S-type*). Devido ao favorecimento das

técnicas utilizadas para detecção de exoplanetas para órbitas mais próximas da estrela, as órbitas do tipo satélite são as primeiras a serem analisadas, enquanto que as órbitas do tipo planetária serão estudadas no futuro.

No capítulo 2, são introduzidos conceitos básicos para o desenvolvimento do presente trabalho, relativo aos problemas clássicos de dois corpos e de três corpos restrito. É também feita a introdução do formalismo de Hamilton para a aplicação no problema de três corpos, a definição de diferentes sistemas de coordenadas canônicos e a definição dos elementos orbitais nesses referenciais. Por fim, é feita uma breve introdução dos conceitos fundamentais da teoria de perturbações para o problema planetário de três corpos, que descreve a dinâmica secular de movimento.

No capítulo 3 é apresentada uma das fases iniciais, porém essenciais, do desenvolvimento desse trabalho, a fase de pesquisa dos dados e parâmetros necessários para o estudo dos sistemas planetários em estrelas binárias. Nesse capítulo foram introduzidas as ferramentas de buscas utilizadas, a metodologia de pesquisa e as referências utilizadas para a construção do banco de dados utilizado no trabalho.

No capítulo 4 são introduzidos os conceitos básicos das ferramentas numéricas desenvolvidas para o estudo, tais como as rotinas numéricas para as mudanças de coordenadas, aplicação de um integrador numérico para resolução das equações diferenciais de movimento do problema de três corpos geral, a rotina da transformada rápida de Fourier, etc..

No capítulo 5 são apresentados de forma simplificada os algoritmos desenvolvidos para os programas, assim como resultados de cada fase do pacote de programas desenvolvidos, com testes de consistência interna separadas para cada fase do programa para que os resultados obtidos com o pacote sejam confiáveis. Inicialmente são feitas simulações de órbitas no espaço, onde são testadas diversas órbitas com parâmetros iniciais e tempos de integração diferentes. Em seguida, aplicando-se o programa de integração numérica, é introduzido o programa de mudanças de sistemas de coordenadas e transformação de coordenadas retangulares para elementos orbitais, onde são realizadas comparações entre os diferentes sistemas. Na seção de análise espectral são implementadas as rotinas de cálculo da transformada rápida de Fourier para os elementos orbitais osculadores obtidos dos programas anteriores. São discutidos os espectros para os diferentes sistemas de coordenadas, e com base nessas discussões é feita a escolha do sistema de coordenadas adequado para



ser utilizado no sistema de estudo. A última seção do capítulo de simulações consta a introdução do algoritmo para o cálculo dos espectros dinâmicos, que é a análise da variação das componentes harmônicas do movimento com relação a uma mudança contínua dos elementos orbitais.

No capítulo 6 são introduzidos e discutidos diferentes critérios de estabilidade para planetas em sistemas de estrelas binárias. É feita a introdução do critério da esfera de Hill, baseado na solução do problema de três corpos restrito, e feita uma extensão para o critério  $AD_{max}$ , onde é introduzida uma relação que limita os elementos orbitais para que uma órbita seja estável. Também é feita uma revisão dos critérios da máxima excentricidade e do número espectral e todos os critérios aplicados para um mesmo sistema com o fim de comparar seus resultados. São construídos mapas dinâmicos e feitas discussões sobre as vantagens e desvantagens de cada critério, assim como os diferentes tipos de informação que os mesmos fornecem. Por fim, é feita uma discussão separada para o critério da máxima distância apocêntrica pelo fato do mesmo possuir uma relação analítica que pode ser comparada.

No capítulo 7 é feito um estudo com a aplicação do critério  $AD_{max}$  no caso do problema de três corpos restrito, no espaço paramétrico dos elementos orbitais das estrelas. São feitas simulações aplicando as técnicas desenvolvidas nos capítulos anteriores, explorando diferentes condições iniciais e cobrindo um amplo conjunto de configurações orbitais. São feitas comparações com o trabalho de Holman e Wiegert (1999), que, apesar de uma abordagem diferente, chega ao mesmo tipo de resultado do presente trabalho.

No capítulo 8 são feitas as conclusões do trabalho e apresentadas as perspectivas futuras para a continuação do projeto.

## Fundamentos Teóricos

### 2.1 Problema de Dois Corpos

O problema de dois corpos de Mecânica Celeste consiste no caso de dois corpos que interagem apenas entre eles por meio da força gravitacional. Sejam dois corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$ , com posições em relação ao centro de referência inercial  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ , respectivamente. Defini-se o vetor  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  como sendo a posição do corpo 2 em relação ao corpo 1. A partir da segunda lei e da lei da gravitação universal de Newton, teremos as duas equações de movimento:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad (2.1)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad (2.2)$$

onde  $G$  é a constante da gravitação universal. Com mudanças de referencial convenientes, pode-se demonstrar que o problema de dois corpos se resume apenas à resolução da equação 2.3, onde o coeficiente  $\mu$  vai depender da origem do referencial adotado.

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu \vec{r}}{r^3}, \quad (2.3)$$

onde  $\mu$  será, no caso do referencial estar em um dos corpos dado por  $\mu = G \cdot (m_1 + m_2)$ , e no caso do referencial estar no centro de massas,  $\mu_1 = \frac{G \cdot m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$  para o movimento de  $m_1$  e  $\mu_2 = \frac{G \cdot m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$  para o movimento de  $m_2$ . Na resolução da equação 2.3 são feitas mudanças de coordenadas convenientes e rotações de eixos, definindo constantes arbitrárias a serem determinadas pelas condições iniciais do problema. A solução desse problema é

uma relação paramétrica do tipo  $\vec{r} = \vec{r}(\theta)$ ,  $t = t(\theta)$ , que não pode ser escrita numa forma analítica que relaciona  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , pois isso envolve uma equação transcendental. A resolução do problema em detalhes pode ser encontrar em Murray e Dermott (1999). Como a equação 2.3 é uma equação vetorial de segunda ordem, são necessárias seis condições iniciais para se determinar o problema, sendo três deles as posições iniciais e os outros três as velocidades. As constantes arbitrárias definidas ao longo da resolução do problema de três corpos podem ser relacionadas com esses parâmetros iniciais (cf. Murray e Dermott (1999)), e essas constantes definem o conjunto chamado *elementos orbitais*. Ou seja:

$$(x_0, y_0, z_0, V_{x_0}, V_{y_0}, V_{z_0}) \rightarrow (a, e, i, \Omega, \omega, M_0).$$

Esses parâmetros possuem interpretação geométrica, conforme pode ser verificado na figura 2.1 e nas equações 2.4 e 2.5.

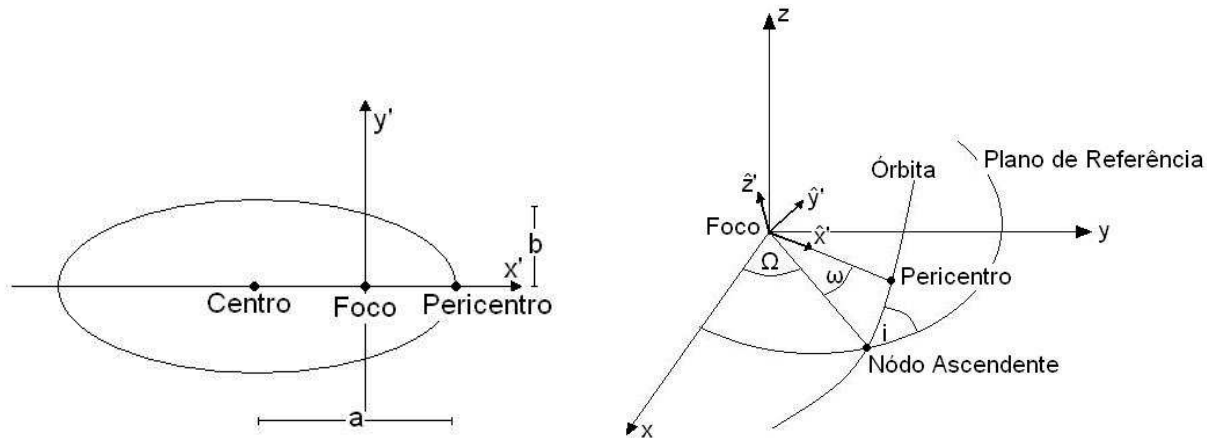


Figura 2.1: Descrição dos Parâmetros Orbitais

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad (2.4)$$

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cdot t \rightarrow M_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cdot t_0, \quad (2.5)$$

onde  $t_0$  é definido como o instante em que o corpo passa pelo periélio, isso é, o ponto mais próximo do foco da elipse.

## 2.2 Problema de Três Corpos

O problema genérico de  $N$  corpos possui ao todo 10 vínculos que são determinados pelas conservação de momento angular total, momento linear total e de energia total. Para um problema ser integrável, o número de graus de liberdade, dado pela relação  $n_{gl} = \frac{6N - N_{vinc}}{2}$ , deve ser igual a 1. É fácil perceber que a partir de  $N = 3$  o sistema não será integrável, pois o número de vínculos a serem tirados é dez. Portanto, para resolver o problema de três corpos, devem ser impostos novos vínculos.

As equações 2.6 e 2.7 são as equações genéricas de movimento para o problema de três corpos, considerando o referencial no primeiro corpo. Elas são deduzidas a partir das leis movimento de Newton, e dão origem às chamadas *funções perturbadoras*.

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = G \cdot m_3 \cdot \left( \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} - \frac{\vec{r}_3}{|\vec{r}_3|^3} \right) - G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|^3}, \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_3}{dt^2} = G \cdot m_2 \cdot \left( \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|^3} \right) - G(m_1 + m_3) \frac{\vec{r}_3}{|\vec{r}_3|^3}, \quad (2.7)$$

onde  $G$  é a constante da gravitação universal, e as posições  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$ , assim como as massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  dizem respeito aos corpos 1, 2 e 3, respectivamente.

Na solução particular, o primeiro vínculo é que o terceiro corpo não irá agir sobre os outros dois, ou seja,  $m_3 \ll m_1, m_2$ . Portanto, nesse caso deseja-se estudar o movimento de  $m_3$  devido à  $m_1$  e  $m_2$ , já que o movimento dos últimos é descrito pelo problema de dois corpos. Essa aproximação é conhecida como *problema restrito de três corpos*. Outro vínculo é imposto no meio da resolução do problema, e é que o movimento dos corpos 1 e 2 se dá com frequência angular constante, ou seja, a excentricidade da órbita relativa  $e \approx 0$ . Por conveniência, adota-se um sistema de referências girante com velocidade angular igual à dos corpos 1 e 2, em torno da origem, de modo que ambos os corpos 1 e 2 encontram-se alinhados sobre o eixo  $x$ .

É possível demonstrar que não há conservação de momento angular nem da energia do corpo 3, o que nos limita totalmente na resolução do problema, pois não existem vínculos suficientes para se determinar o movimento do corpo 3, já que os vínculos são tirados, em geral, de conservações de grandezas. Sendo  $\vec{r}$  a posição do corpo 3 em relação ao baricentro do sistema,  $U(\vec{r})$  o potencial gravitacional total gerado por  $m_1$  e  $m_2$ ,  $V$  o

módulo da velocidade do corpo 3 e  $\omega$  a velocidade angular do referencial girante, pode-se demonstrar que a seguinte relação 2.8 é válida.

$$\frac{V^2}{2} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + U(\vec{r}) = -\frac{C}{2} = \text{const.} \quad (2.8)$$

A equação 2.8 é conhecida como *integral de Jacobi*, e a constante  $C$  é conhecida como a *constante de Jacobi*. A equação 2.8 pode ser reescrita em termos de um potencial efetivo  $\Omega(\vec{r})$ , onde chegamos em uma relação muito similar à conservação de energia.

$$\frac{V^2}{2} - \Omega(\vec{r}) = -\frac{C}{2} = \text{const.} \quad (2.9)$$

Dada a constante de Jacobi de um corpo, portanto, é possível determinar as zonas permitidas e zonas proibidas para aquela constante de Jacobi. As superfícies de velocidade zero são determinadas então por 2.10.

$$F(\vec{r}) = 2\Omega - C = V^2 \geq 0. \quad (2.10)$$

As curvas de velocidade zero são, como o próprio nome já diz, domínios do espaço onde a velocidade do corpo será nula, e portanto não conseguirá ultrapassar, delimitando, assim, as superfícies de velocidade zero. As curvas de velocidade zero são determinadas pelo  $\vec{r}$  que satisfaz a relação 2.11.

$$2\Omega - C = 0. \quad (2.11)$$

A figura 2.2 representa as curvas de velocidade zero para diferentes valores da constante de Jacobi, para um dado sistema de 3 corpos.

A figura 2.2 também ilustra as posições dos 5 pontos singulares das superfícies de velocidade zero, que são conhecidos como os *pontos de Lagrange*. Como  $\vec{r} = (x, y, z)$ , teremos que os pontos singulares serão determinados por:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

onde pode-se deduzir que  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  estão localizados no eixo  $x$  girante, e  $L_4$  e  $L_5$  equidistam dos corpos 1 e 2 pela mesma distância que eles distam deles mesmos, isto é, o ponto de Lagrange delimita um triângulo equilátero com outros vértices nos corpos 1 e 2.

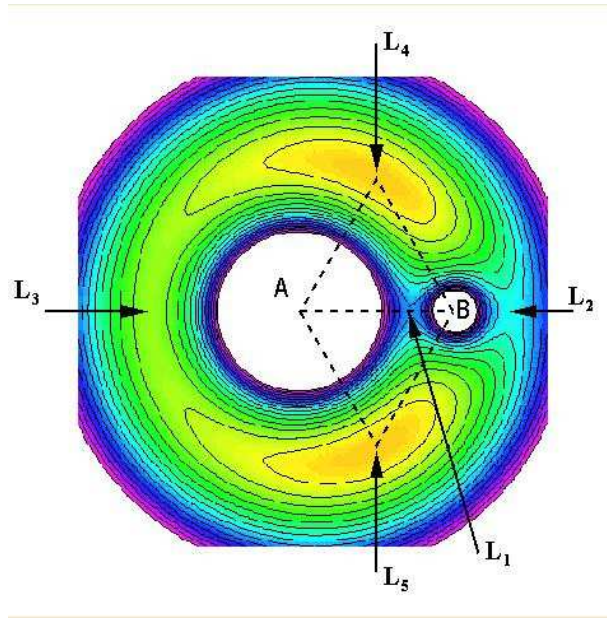


Figura 2.2: Representação das curvas de velocidade zero e dos pontos de lagrange

Serem pontos de equilíbrio quer dizer que, caso o corpo 3 seja disposto com velocidade zero em algum dos pontos de Lagrange, ele ficará parado no referencial girante e estará girando junto com os dois outros corpos no referencial inercial.

Entretanto, ser ponto de equilíbrio apenas não é o suficiente para determinar a possibilidade de se encontrar corpos nos pontos de Lagrange; é necessário determinar a estabilidade dos pontos. Pode ser demonstrado que os pontos  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  são totalmente instáveis. Os pontos  $L_4$  e  $L_5$  possuem uma peculiaridade: se a massa reduzida do sistema,  $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$  estiver contida no intervalo:

$$0 < \mu < 0.385 \quad 0.9615 < \mu < 1, \quad (2.12)$$

então os pontos  $L_4$  e  $L_5$  serão *estáveis*, caso contrário serão *instáveis*.

Seja então um sistema com dois corpos principais, de massas  $m_1$  e  $m_2$  e vetores posição  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ , movendo-se em uma órbita circular, no referencial não inercial do centro de massas girante, tal que ambos os corpos permaneçam no eixo coordenado de referência, como foi descrito anteriormente. Seja também uma partícula de massa  $m_3 \ll m_1, m_2$  movendo-se no mesmo plano da órbita dos corpos principais, com vetor posição  $\vec{R}$  em relação ao centro de massas, conforme representado na figura 2.3.

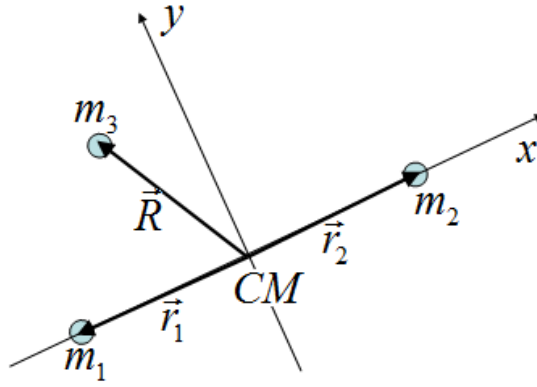


Figura 2.3: Representação dos corpos no referencial girante

As superfícies de velocidade zero serão então dadas, para cada valor de  $S$ , por (2.13) (Marchal e Bozis, 1982).

$$S(\vec{R}) = \frac{m_1}{M} \left[ \frac{(\vec{R} - \vec{r}_1)^2}{d^2} + \frac{2d}{|\vec{R} - \vec{r}_1|} \right] + \frac{m_2}{M} \left[ \frac{(\vec{R} - \vec{r}_2)^2}{d^2} + \frac{2d}{|\vec{R} - \vec{r}_2|} \right], \quad (2.13)$$

onde  $d = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$  é a distância mútua entre os corpos principais e  $M = m_1 + m_2 + m_3$ . Considerando o caso colinear, em que a partícula se encontra no eixo das abcissas, a equação (2.13) pode ser simplificada em (2.14).

$$S(X) = \frac{m_1}{M} \left[ \frac{(X - x_1)^2}{d^2} + \frac{2d}{|X - x_1|} \right] + \frac{m_2}{M} \left[ \frac{(X - x_2)^2}{d^2} + \frac{2d}{|X - x_2|} \right], \quad (2.14)$$

onde  $x_1$  e  $x_2$  são as coordenadas abcissas dos corpos principais e  $X$  é a coordenada abcissa da partícula de prova. Considerando agora somente a região entre os dois corpos principais, a equação (2.14) simplifica-se novamente, para (2.15).

$$S'(X) = \frac{m_1}{M} \left[ \frac{(X - x_1)^2}{d^2} + \frac{2d}{X - x_1} \right] + \frac{m_2}{M} \left[ \frac{(X - x_2)^2}{d^2} + \frac{2d}{x_2 - X} \right]. \quad (2.15)$$

O único ponto no intervalo  $x_1 < X < x_2$  de  $S'(X)$  que apresenta derivada nula é o ponto  $L_1$ . Calculando  $\frac{dS'}{dX}$  chega-se a (2.16).

$$\frac{dS'}{dX} = \frac{2m_1}{M} \left[ \frac{X - x_1}{d^2} - \frac{d}{(X - x_1)^2} \right] + \frac{2m_2}{M} \left[ \frac{X - x_2}{d^2} + \frac{2d}{(x_2 - X)^2} \right]. \quad (2.16)$$

Dessa maneira, a posição do ponto  $L_1$  será  $x_{L_1}$  tal que  $\frac{dS'}{dX}|_{X=x_{L_1}} = 0$ , ou seja,  $x_{L_1}$  será a raiz da equação (2.17) no intervalo  $x_1 < x_{L_1} < x_2$ .

$$\frac{2m_1}{M} \left[ \frac{x_{L_1} - x_1}{d^2} - \frac{d}{(x_{L_1} - x_1)^2} \right] + \frac{2m_2}{M} \left[ \frac{x_{L_1} - x_2}{d^2} + \frac{2d}{(x_2 - x_{L_1})^2} \right] = 0. \quad (2.17)$$

A partir da figura 2.2, é possível notar que o ponto  $L_1$  é o ponto mais distante do corpo principal  $A$  à curva de velocidade zero que contém o ponto  $L_1$ . Um ponto da curva de velocidade zero mais próximo do corpo central de simples cálculo é aquele colinear com os pontos lagrangianos  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , localizado numa posição oposta ao ponto  $L_1$ . Seja definido esse ponto como  $L_{min}$ , seu vetor posição  $\vec{R}_{L_{min}}$  e sua coordenada abcissa  $x_{L_{min}}$ . O ponto  $L_{min}$ , por estar na mesma curva de nível de  $L_1$ , satisfaz a relação  $S(x_{L_{min}}) - S(x_{L_1}) = 0$ . Dessa maneira,  $x_{L_{min}}$  pode ser calculado como sendo a raiz da equação (2.18) no intervalo  $x_{L_{min}} < x_1$ .

$$\frac{m_1}{M} \left[ \frac{(x_{L_{min}} - x_1)^2}{d^2} + \frac{2d}{x_1 - x_{L_{min}}} \right] + \frac{m_2}{M} \left[ \frac{(x_{L_{min}} - x_2)^2}{d^2} + \frac{2d}{x_2 - x_{L_{min}}} \right] - S(x_{L_1}) = 0. \quad (2.18)$$

Para o caso da órbita das estrelas possuir excentricidade, a equação (2.8) não será válida globalmente. O artifício matemático que é utilizado nesse caso é considerar a órbita das estrelas, em cada instante, como sendo uma órbita circular. Assim, ao longo da órbita com excentricidade, como as distâncias relativas das estrelas irá mudar, a posição do ponto  $L_1$  relativa à ambas as estrelas também irá mudar, assim como a posição de  $L_{min}$ , num movimento oscilatório com o mesmo período da oscilação da órbita das estrelas. Dessa maneira, são introduzidos os *pontos de Lagrange instantâneos*.

### 2.3 Formalismo Hamiltoniano

Uma outra forma de se abordar o problema de três corpos é utilizar o formalismo Hamiltoniano no lugar do formalismo Newtoniano. Essa nova abordagem, apesar de ser mais trabalhosa conceitualmente, permite outros tipos de resultados e análises mais profundas dos sistemas dinâmicos, como pode-se observar em trabalhos como Michtchenko e Ferraz-Mello (2001) Michtchenko e Malhotra (2004) e Michtchenko et al. (2005). Uma apresentação detalhada de todo o formalismo Hamiltoniano pode ser encontrado em Ferraz-Mello (2007).

Para o desenvolvimento no formalismo Hamiltoniano, é necessário que o conjunto de coordenadas com que se esteja trabalhando seja um *conjunto canônico*, isto é, *que seja*



preservada a forma canônica quando operado por uma transformação canônica. Dado um Hamiltoniano  $H(q_i, p_i)$  como função de coordenadas  $q_i$  e momentos  $p_i$ , ele será canônico se:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (2.19)$$

Supondo um novo conjunto de coordenadas  $q_j^*(q_i, p_i)$  e momentos  $p_j^*(q_i, p_i)$  para o mesmo Hamiltoniano  $H^*(q_i^*, p_i^*)$ , é possível demonstrar que esse novo conjunto de variáveis será canônico se a condição (2.20) for satisfeita.

$$\sum_{i=1}^N p_i dq_i - \sum_{i=1}^N p_i^* dq_i^* = dS(q_i, q_i^*) = 0, \quad (2.20)$$

onde  $S$  é a função geradora da transformação. A condição (2.20) pode ser escrita em outras formas, com a função geradora da transformação como função de outras variáveis, utilizando por exemplo:

$$d \sum_{i=1}^N q_i^* p_i^* = \sum_{i=1}^N p_i^* dq_i^* + \sum_{i=1}^N q_i^* dp_i^*. \quad (2.21)$$

Substituindo (2.21) em (2.20) chega-se em:

$$\sum_{i=1}^N p_i dq_i + \sum_{i=1}^N q_i^* dp_i^* = dS(q_i, q_i^*) + d \sum_{i=1}^N q_i^* p_i^* = dS'(q_i, p_i^*) = 0, \quad (2.22)$$

onde  $S'$  é a função geradora da nova transformação.

É possível se demonstrar que o sistema baricêntrico de coordenadas possui a forma canônica. Entretanto, do ponto de vista prático e numérico, é conveniente desenvolver a teoria em sistemas com ponto de referência localizado em um dos corpos, eliminando assim três graus de liberdade, reduzindo o número de equações a serem trabalhadas. Por outro lado, o sistema mais comum com o referencial centrado em um dos corpos, o sistema astrocêntrico, não possui a forma canônica em suas coordenadas e momentos. Isso levou à busca e definições de outros sistemas de coordenadas, que apresentem a forma canônica e que também possuem a origem do sistema localizada em um dos corpos. A seguir serão feitas as definições e transformações dos sistemas de coordenadas para o sistema baricêntrico, que será tomado como o padrão de transformação para o sistema de três corpos.

## 2.3.1 Transformação do Sistema Astrocêntrico para Sistema Baricêntrico

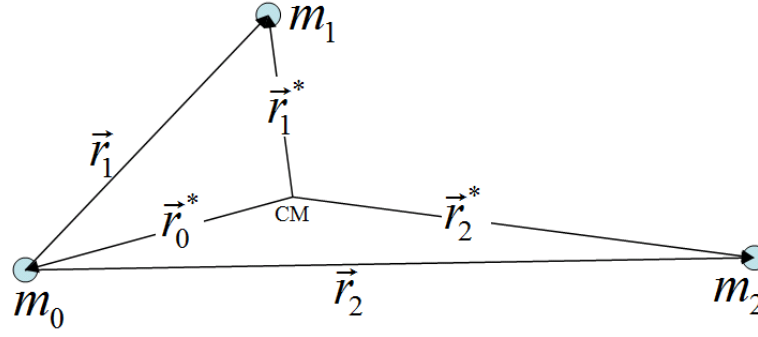


Figura 2.4: Definição do sistema Baricêntrico ( $\vec{r}_i^*$ ) a partir do sistema Astrocêntrico ( $\vec{r}_i$ )

Da definição da posição do centro de massa:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_0\vec{r}_0 + m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_0 + m_1 + m_2}. \quad (2.23)$$

Mas  $\vec{r}_0 = \vec{0}$ , e da figura tira-se que:

$$\vec{r}_0^* = -\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \quad (2.24)$$

$$\vec{r}_1^* = \vec{r}_0^* + \vec{r}_1 = \frac{m_0\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \quad (2.25)$$

$$\vec{r}_2^* = \vec{r}_0^* + \vec{r}_2 = \frac{m_0\vec{r}_2 + m_1\vec{r}_2 - m_1\vec{r}_1}{m_0 + m_1 + m_2}. \quad (2.26)$$

Para as velocidades teremos as mesmas definições, já que  $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ :

$$\vec{v}_0^* = -\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \quad (2.27)$$

$$\vec{v}_1^* = \frac{m_0\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \quad (2.28)$$

$$\vec{v}_2^* = \frac{m_0\vec{v}_2 + m_1\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1}{m_0 + m_1 + m_2}. \quad (2.29)$$

Finalmente, os momentos são calculados da definição  $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$ :

$$\vec{p}_0^* = -\frac{m_0}{m_0 + m_1 + m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2), \quad (2.30)$$

$$\vec{p}_1^* = \frac{m_0\vec{p}_1 + m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \quad (2.31)$$

$$\vec{p}_2^* = \frac{m_0\vec{p}_2 + m_1\vec{p}_2 - m_2\vec{p}_1}{m_0 + m_1 + m_2}. \quad (2.32)$$

### 2.3.2 Transformação do Sistema Baricêntrico para Sistema Astrocêntrico

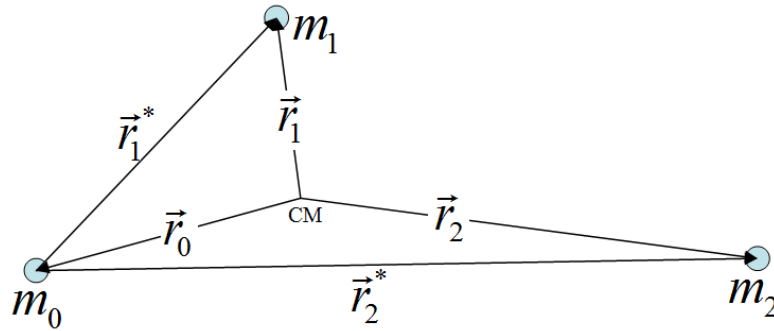


Figura 2.5: Definição do sistema Astrocêntrico ( $\vec{r}_i^*$ ) a partir do sistema Baricêntrico ( $\vec{r}_i$ )

A partir da figura 2.5 tira-se:

$$\vec{r}_0^* = \vec{r}_0 - \vec{r}_0 = \vec{0}, \quad (2.33)$$

$$\vec{r}_1^* = \vec{r}_1 - \vec{r}_0, \quad (2.34)$$

$$\vec{r}_2^* = \vec{r}_2 - \vec{r}_0. \quad (2.35)$$

Analogamente para as velocidades:

$$\vec{v}_0^* = \vec{0}, \quad (2.36)$$

$$\vec{v}_1^* = \vec{v}_1 - \vec{v}_0, \quad (2.37)$$

$$\vec{v}_2^* = \vec{v}_2 - \vec{v}_0. \quad (2.38)$$

Finalmente para os momentos:

$$\vec{p}_0^* = \vec{0}, \quad (2.39)$$

$$\vec{p}_1^* = m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}_0 = \vec{p}_1 - \frac{m_1}{m_0} \vec{p}_0, \quad (2.40)$$

$$\vec{p}_2^* = m_2 \vec{v}_2 - m_2 \vec{v}_0 = \vec{p}_2 - \frac{m_2}{m_0} \vec{p}_0. \quad (2.41)$$

### 2.3.3 Transformação do Sistema Baricêntrico para Sistema de Jacobi

O sistema de coordenadas de Jacobi é definido com o primeiro corpo numa posição fixa (arbitrariamente tomada como sendo a origem do sistema), e cada corpo  $i$  a partir do primeiro é medido em relação do centro de massa dos  $i - 1$  corpos anteriores, como pode-se ver esquematizado para 3 corpos na figura 2.6

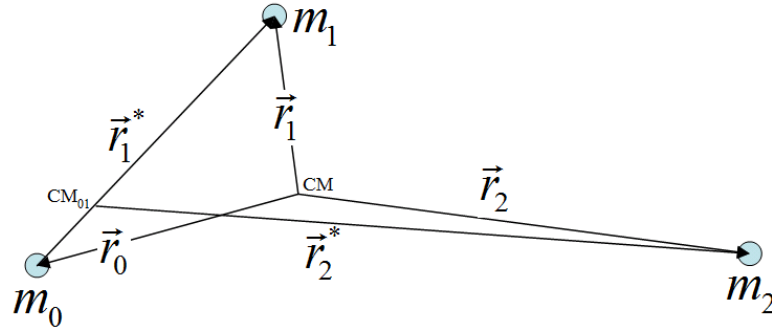


Figura 2.6: Definição do sistema de coordenadas de Jacobi ( $\vec{r}_i^*$ ) a partir do sistema Baricêntrico ( $\vec{r}_i$ )

Da definição, portanto:

$$\vec{r}_0^* = \vec{0}, \quad (2.42)$$

$$\vec{r}_1^* = \vec{r}_1 - \vec{r}_0, \quad (2.43)$$

$$\vec{r}_2^* = \vec{r}_2 - \frac{m_0 \vec{r}_0 + m_1 \vec{r}_1}{m_0 + m_1}. \quad (2.44)$$

O conjunto de momentos é definido de forma a se manter a forma canônica do conjunto. Usando a condição de canonicidade (eq.(2.20)):

$$\sum_{i=0}^2 (\vec{p}_i d\vec{r}_i - \vec{p}_i^* d\vec{r}_i^*) = 0. \quad (2.45)$$

Assim:

$$\vec{p}_0 d\vec{r}_0 + \vec{p}_1 d\vec{r}_1 + \vec{p}_2 d\vec{r}_2 = \vec{p}_0^* d\vec{r}_0^* + \vec{p}_1^* d\vec{r}_1^* + \vec{p}_2^* d\vec{r}_2^*. \quad (2.46)$$

Calculando os diferenciais  $\vec{r}_0^*$ ,  $\vec{r}_1^*$  e  $\vec{r}_2^*$  e substituindo em (2.46) chega-se em:

$$\vec{p}_0 d\vec{r}_0 + \vec{p}_1 d\vec{r}_1 + \vec{p}_2 d\vec{r}_2 = d\vec{r}_0 \left( -\vec{p}_1^* - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \vec{p}_2^* \right) + d\vec{r}_1 \left( \vec{p}_1^* - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{p}_2^* \right) + d\vec{r}_2 (\vec{p}_2^*), \quad (2.47)$$

de onde se tira que:

$$\vec{p}_0 = -\vec{p}_1^* - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \vec{p}_2^*, \quad (2.48)$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1^* - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{p}_2^*, \quad (2.49)$$

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_2^*. \quad (2.50)$$

Finalmente, resolvendo o sistema para  $\vec{p}_1^*$  e  $\vec{p}_2^*$ , com  $\vec{p}_0^* = \vec{0}$  chega-se finalmente em:

$$\vec{p}_0^* = \vec{0}, \quad (2.51)$$

$$\vec{p}_1^* = \vec{p}_1 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{p}_2 = -\vec{p}_0 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \vec{p}_2, \quad (2.52)$$

$$\vec{p}_2^* = \vec{p}_2. \quad (2.53)$$

As velocidades para o sistema de Jacobi serão definidas mais adiante, na definição dos elementos orbitais nos diferentes sistemas de referência.

### 2.3.4 Transformação do Sistema de Jacobi para Sistema Baricêntrico

A partir das equações (2.42), (2.43) e (2.44) tira-se que:

$$\vec{r}_1^* - \vec{r}_0^* = \vec{r}_1, \quad (2.54)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_2^* - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \vec{r}_0^* - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{r}_1^* + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{r}_0^* - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{r}_0^*, \quad (2.55)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_2^* - \vec{r}_0^* - \frac{m_1}{m_0 + m_1} (\vec{r}_1^* - \vec{r}_0^*). \quad (2.56)$$

Usando (2.54) chega-se em:

$$\vec{r}_2^* - \vec{r}_0^* = \vec{r}_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{r}_1. \quad (2.57)$$

Note que  $(\vec{r}_1^* - \vec{r}_0^*)$  e  $(\vec{r}_1^* - \vec{r}_0^*)$  são as coordenadas astrocêntricas dos corpos 1 e 2, respectivamente. Portanto, utilizando a definição do centro de massas, podemos calcular as posições baricêntricas dos três corpos.

$$\vec{r}_0^* = -\frac{m_1}{m_0 + m_1 + m_2} \vec{r}_1 - \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2} (\vec{r}_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{r}_1). \quad (2.58)$$

Rearranjando os termos chega-se em (2.59).

$$\vec{r}_0^* = -\vec{r}_1 \left( \frac{m_1^2 + 2m_1m_2}{(m_0 + m_1 + m_2)(m_0 + m_1)} \right) - \vec{r}_2 \left( \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2} \right), \quad (2.59)$$

e portanto, de (2.54) e (2.57) chega-se em:

$$\vec{r}_1^* = \vec{r}_1 + \vec{r}_0^*, \quad (2.60)$$

$$\vec{r}_2^* = \vec{r}_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{r}_1 + \vec{r}_0^*, \quad (2.61)$$

com  $\vec{r}_0^*$  dado por (2.59).

O cálculo dos momentos é feito utilizando a mesma relação de canonicidade que foi feito na transformação anterior, caindo no mesmo sistema apenas invertendo a simbologia que define quais as coordenadas dadas e quais as coordenadas desconhecidas. Assim, de (2.48), (2.49) e (2.50) tem-se:

$$\vec{p}_0^* = -\vec{p}_1 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \vec{p}_2, \quad (2.62)$$

$$\vec{p}_1^* = \vec{p}_1 - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{p}_2, \quad (2.63)$$

$$\vec{p}_2^* = \vec{p}_2. \quad (2.64)$$

### 2.3.5 Transformação do Sistema Baricêntrico para Sistema de Poincaré

O sistema de Poincaré é definido como sendo coordenadas astrocêntricas e momentos baricêntricos para todos os corpos depois do primeiro. Para o primeiro corpo, define-se sua coordenada igual à do sistema baricêntrico, e seu momento conjugado igual ao momento total do sistema, de forma a se preservar a canonicidade da transformação. Futuramente, será mostrado que o Hamiltoniano não dependerá de  $\vec{r}_0^*$ , e portanto  $\vec{p}_0^*$  será uma constante de movimento, que poderá ser tomada arbitrariamente como sendo igual a zero. A transformação do sistema baricêntrico  $(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$  para o sistema de Poincaré  $(\vec{r}_i^*, \vec{p}_i^*)$  será simplesmente:

$$\vec{r}_0^* = \vec{r}_0, \quad (2.65)$$

$$\vec{r}_1^* = \vec{r}_1 - \vec{r}_0, \quad (2.66)$$

$$\vec{r}_2^* = \vec{r}_2 - \vec{r}_0. \quad (2.67)$$

Os momentos são definidos como sendo:

$$\vec{p}_0^* = \vec{p}_0 + \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad (2.68)$$

$$\vec{p}_1^* = \vec{p}_1, \quad (2.69)$$

$$\vec{p}_2^* = \vec{p}_2. \quad (2.70)$$

Para demonstrar que o sistema de Poincaré é um sistema canônico, será demonstrado que a relação de canonicidade  $\sum_{i=0}^N (\vec{p}_i d\vec{r}_i - p_i^* dr_i^*) = 0$  é satisfeita. Aplicando então a definição:

$$\vec{p}_0 d\vec{r}_0 + \vec{p}_1 d\vec{r}_1 + \vec{p}_2 d\vec{r}_2 - \vec{p}_0^* dr_0^* - \vec{p}_1^* dr_1^* - \vec{p}_2^* dr_2^*. \quad (2.71)$$

Aplicando as definições do sistema de Poincaré, de (2.65) a (2.70) tem-se:

$$\vec{p}_0 d\vec{r}_0 + \vec{p}_1 d\vec{r}_1 + \vec{p}_2 d\vec{r}_2 - (\vec{p}_0 + \vec{p}_1 + \vec{p}_2) d\vec{r}_0 - \vec{p}_1 (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_0) - \vec{p}_2 (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_0), \quad (2.72)$$

e finalmente:

$$\vec{p}_0 d\vec{r}_0 + \vec{p}_1 d\vec{r}_1 + \vec{p}_2 d\vec{r}_2 - \vec{p}_0 d\vec{r}_0 - \vec{p}_1 d\vec{r}_0 - \vec{p}_2 d\vec{r}_0 - \vec{p}_1 d\vec{r}_1 + \vec{p}_1 d\vec{r}_0 - \vec{p}_2 d\vec{r}_2 + \vec{p}_2 d\vec{r}_0 = 0. \quad (2.73)$$

A definição das velocidades de Poincaré será feita mais adiante, com a definição dos elementos orbitais nos diferentes sistemas de referência.

### 2.3.6 Transformação do Sistema de Poincaré para Sistema Baricêntrico

Para as coordenadas, a transformação inversa será igual à transformação do sistema astrocêntrico para o sistema baricêntrico, ou seja:

$$\vec{r}_0^* = -\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \quad (2.74)$$

$$\vec{r}_1^* = \frac{m_0 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \quad (2.75)$$

$$\vec{r}_2^* = \frac{m_0 \vec{r}_2 + m_1 \vec{r}_2 - m_1 \vec{r}_1}{m_0 + m_1 + m_2}. \quad (2.76)$$

Os momentos serão simplesmente a transformação inversa de (2.68), (2.69) e (2.70), o que resulta em:

$$\vec{p}_0^* = \vec{p}_0 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2, \quad (2.77)$$



$$\vec{p}_1^* = \vec{p}_1, \quad (2.78)$$

$$\vec{p}_2^* = \vec{p}_2. \quad (2.79)$$

### 2.3.7 Representações do Hamiltoniano

O Hamiltoniano completo para o sistema de três corpos no sistema baricêntrico  $H(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$  é dado como a soma da energia cinética total  $T(\vec{p}_i)$  e a energia potencial total  $U(\vec{r}_i)$ , que são dadas por:

$$H(\vec{r}_i, \vec{p}_i) = T(\vec{p}_i) + U(\vec{r}_i), \quad (2.80)$$

$$T(\vec{p}_i) = \sum_{i=0}^2 \left( \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} \right), \quad (2.81)$$

$$U(\vec{r}_i) = - \sum_{i=0}^2 \sum_{j=i+1}^2 \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (2.82)$$

No sistema de coordenadas astrocêntrico, é possível demonstrar que a energia total do sistema pode ser escrita da forma  $H = H_0 + R$ , com:

$$H_0 = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\vec{p}_i^2}{2\beta_i} - \frac{\mu_i m_i}{|\vec{r}_i|} \right), \quad (2.83)$$

$$R = - \frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad (2.84)$$

onde  $(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$  são as coordenadas e os momentos astrocêntricos dos corpos de índice  $i$ ,  $\mu_i = G(m_0 + m_i)$ ,  $\beta_i = m_i$  e  $G$  a constante de gravitação universal. Cada termo de  $H_0$  é o Hamiltoniano do problema de dois corpos de um corpo com massa  $m_i$  se movendo em torno de outro corpo, com massa  $m_0$ , e definindo  $\vec{v}_i = \frac{\vec{p}_i}{\beta_i}$ , podem ser calculados os elementos orbitais osculadores de cada um dos corpos. A definição dos elementos orbitais a partir do Hamiltoniano (2.83) é feito da seguinte maneira:

$$a = \frac{\mu |\vec{r}|}{2\mu - |\vec{r}| \vec{v}^2}, \quad (2.85)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{\vec{h}^2}{\mu a}}, \quad (2.86)$$

com  $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = (h_x, h_y, h_z)$ . O cálculo dos outros elementos é feito a partir da definição usual como foi feito em Murray e Dermott (1999).

Da mesma maneira como foi feito para coordenadas astrocêntricas para a definição dos elementos orbitais astrocêntricos para os corpos, um cálculo similar pode ser feito nas coordenadas de Jacobi e de Poincaré.

### Sistema de Jacobi

A energia cinética total para o problema de três corpos em elementos baricêntricos é dada por (2.87).

$$T = \frac{\vec{p}_0^2}{2m_0} + \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2}. \quad (2.87)$$

Escrevendo os momentos baricêntricos em termos dos momentos de Jacobi utilizando (2.62), (2.63) e (2.64), tem-se (2.88).

$$T = \frac{1}{2m_0} \left( -\vec{p}_1^* - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \vec{p}_2^* \right)^2 + \frac{1}{2m_1} \left( \vec{p}_1^* - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{p}_2^* \right)^2 + \frac{1}{2m_1} (\vec{p}_2^*)^2. \quad (2.88)$$

Desenvolvendo os binômios quadráticos e rearranjando os termos chega-se em (2.89).

$$T = \frac{\vec{p}_1^{*2}}{2} \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} + \frac{\vec{p}_2^{*2}}{2} \frac{m_0 + m_1 + m_2}{m_0(m_0 + m_1)}. \quad (2.89)$$

Definindo  $\beta_i = \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_i}$ , com  $\sigma_i = \sum_{j=0}^i m_j$  a expressão (2.89) reduz-se a (2.90).

$$T = \frac{\vec{p}_1^{*2}}{2\beta_1} + \frac{\vec{p}_2^{*2}}{2\beta_2}. \quad (2.90)$$

Analogamente, a energia potencial é dada por (2.91).

$$U(\vec{r}_i) = - \sum_{i=0}^2 \sum_{j=i+1}^2 \frac{G m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (2.91)$$

Pode-se fazer uma separação nesse potencial na forma  $U = U_0 + R$ , com  $U_0$  e  $R$  definidos por (2.92) e (2.93), e assim introduzir as coordenadas de Jacobi.

$$U_0 = -G \sum_{k=1}^2 \frac{\sigma_{k-1} m_k}{|\vec{r}_k^*|}. \quad (2.92)$$

$$R = -G \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^2 \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} - G \sum_{k=1}^2 m_k \left( \frac{m_0}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_k|} - \frac{\sigma_{k-1}}{|\vec{r}_k^*|} \right). \quad (2.93)$$

Assim, o Hamiltoniano total do sistema será dado por  $H = H_0 + R$  com  $R$  dado por (2.93) e  $H_0$  dado por (2.94).

$$H_0 = T + U_0 = \frac{\vec{p}_1^{*2}}{2\beta_1} + \frac{\vec{p}_2^{*2}}{2\beta_2} - \frac{G\sigma_0 m_1}{|\vec{r}_1^*|} - \frac{G\sigma_1 m_2}{|\vec{r}_2^*|}. \quad (2.94)$$

Definindo  $\mu_i = G\sigma_i$  e aplicando a definição de  $\beta_i = \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_i}$  e  $\sigma_i = \sum_{j=0}^i m_j$  no termo da energia potencial como foi feito com o termo da energia cinética chega-se em (2.95).

$$H_0 = \left( \frac{\vec{p}_1^{*2}}{2\beta_1} - \frac{\mu_1 \beta_1}{|\vec{r}_1^*|} \right) + \left( \frac{\vec{p}_2^{*2}}{2\beta_2} - \frac{\mu_2 \beta_2}{|\vec{r}_2^*|} \right). \quad (2.95)$$

Cada termo de (2.95) possui a mesma forma de cada termo da definição de  $H_0$  em coordenadas astrocêntricas para o problema de dois corpos 2.83, portanto a solução para o Hamiltoniano  $H_0$  em coordenadas de Jacobi deverá possuir a mesma forma que em coordenadas astrocêntricas, definindo assim os elementos orbitais de Jacobi.

As equações para as definições dos elementos orbitais serão as mesmas (2.85) e (2.86), mas definindo as velocidades de Jacobi como sendo  $\vec{v}_i^* = \frac{\vec{p}_i^*}{\beta_i}$ . Assim:

$$a^* = \frac{\mu |\vec{r}^*|}{2\mu - |\vec{r}^*| |\vec{v}^{*2}}, \quad (2.96)$$

$$e^* = \sqrt{1 + \frac{\vec{h}^{*2}}{\mu a^*}}, \quad (2.97)$$

onde introduzimos  $\vec{h}^* = \vec{r}^* \times \vec{v}^* = (h_x^*, h_y^*, h_z^*)$ .

### Sistema de Poincaré

Partindo da definição da energia cinética no sistema baricêntrico e escrevendo os momentos baricêntricos em suas definições em termos dos momentos de Poincaré (eq. (2.77), (2.78) e (2.79)) temos (2.98).

$$T = \frac{1}{2m_0}(\bar{p}_0^* - \bar{p}_1^* - \bar{p}_2^*)^2 + \frac{\bar{p}_1^{*2}}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2^{*2}}{2m_2}. \quad (2.98)$$

Assim:

$$T = \frac{\bar{p}_0^{*2}}{2m_0} + \frac{\bar{p}_1^{*2}}{2} \left( \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} \right) + \frac{\bar{p}_2^{*2}}{2} \left( \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_2} \right) - \frac{1}{m_0} (\bar{p}_0^* \bar{p}_1^* + \bar{p}_0^* \bar{p}_2^* - \bar{p}_1^* \bar{p}_2^*). \quad (2.99)$$

Definindo  $\beta_i = \frac{m_0 m_i}{m_0 + m_i}$  temos:

$$T = \frac{\bar{p}_0^{*2}}{2\beta_0} + \frac{\bar{p}_1^{*2}}{2\beta_1} + \frac{\bar{p}_2^{*2}}{2\beta_2} - \frac{1}{m_0} (\bar{p}_0^* \bar{p}_1^* + \bar{p}_0^* \bar{p}_2^* - \bar{p}_1^* \bar{p}_2^*). \quad (2.100)$$

Analogamente para o potencial:

$$U(\vec{r}_i) = - \sum_{i=0}^2 \sum_{j=i+1}^2 \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (2.101)$$

Escrevendo explicitamente os termos da somatória e usando as definições das coordenadas de Poincaré (eq. (2.66) e (2.67)), e também notando que  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1^* - \vec{r}_2^*$  podemos escrever (2.102).

$$U = - \frac{Gm_0 m_1}{|\vec{r}_1^*|} - \frac{Gm_0 m_2}{|\vec{r}_2^*|} - \frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_1^* - \vec{r}_2^*|}. \quad (2.102)$$

Introduzindo a definição de  $\beta_i = \frac{m_0 m_i}{m_0 + m_i}$  e definindo  $\mu_i = G(m_0 + m_i)$  chega-se em:

$$U = - \frac{\mu_1 \beta_1}{|\vec{r}_1^*|} - \frac{\mu_2 \beta_2}{|\vec{r}_2^*|} - \frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_1^* - \vec{r}_2^*|}. \quad (2.103)$$

Pode-se perceber que o Hamiltoniano total  $H = T + U$  não depende de  $|\vec{r}_0^*|$  (variável ignorável), e portanto seu momento conjugado  $\vec{p}_0$  será uma constante de movimento, e é arbitrariamente tomada como sendo igual a zero. Podemos então separar o Hamiltoniano total em dois termos, da forma  $H = H_0 + R$ , com  $H_0$  e  $R$  definidos a seguir.

$$H_0 = \left( \frac{\bar{p}_1^{*2}}{2\beta_1} - \frac{\mu_1 \beta_1}{|\vec{r}_1^*|} \right) + \left( \frac{\bar{p}_2^{*2}}{2\beta_2} - \frac{\mu_2 \beta_2}{|\vec{r}_2^*|} \right), \quad (2.104)$$

$$R = \frac{\bar{p}_1^* \bar{p}_2^*}{m_0} - \frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_1^* - \vec{r}_2^*|}. \quad (2.105)$$

Novamente pode-se notar que a forma funcional do Hamiltoniano  $H_0$  é similar à forma do Hamiltoniano para o problema de dois corpos em coordenadas Astrocêntricas (2.83), o

que implica que é possível definir elementos orbitais de Poincaré de maneira análoga como foi feito para os elementos orbitais de Jacobi. Definindo as velocidades de Poincaré como sendo  $\vec{v}_i^* = \frac{\vec{p}_i^*}{\beta_i}$ . Finalmente:

$$a^* = \frac{\mu |\vec{r}^*|}{2\mu - |\vec{r}^*| |\vec{v}^{*2}}, \quad (2.106)$$

$$e^* = \sqrt{1 + \frac{\vec{h}^{*2}}{\mu a^*}}, \quad (2.107)$$

onde novamente introduzimos  $\vec{h}^* = \vec{r}^* \times \vec{v}^* = (h_x^*, h_y^*, h_z^*)$ .

## 2.4 Teoria de Perturbações - Dinâmica Secular

Uma abordagem que pode ser considerada para o estudo do problema com duas estrelas e um planeta é a própria abordagem para o sistema de três corpos clássico, composto por uma estrela e dois planetas, sendo os planetas de massas próximas. Dessa maneira, a interação mútua entre os planetas possui uma magnitude inferior em relação à interação dos planetas com a estrela.

Diferentes maneiras existem de ser realizado esse estudo, com diferentes aproximações, e naturalmente, com regimes de validade diferentes. Entre algumas abordagens, podem ser citadas Brouwer e Clemence (1961), Roy (1978) e Ferraz-Mello (2007). Entretanto, os métodos citados não são ideais para aplicação em sistemas com altas excentricidades, que é o caso que deve se esperar para um planeta perturbado por uma estrela. Em Michtchenko e Malhotra (2004) é introduzido o que foi definido *modelo semi-analítico*, que consiste em realizar uma das passagens do método clássico numericamente. Com isso, é possível ser obtido um regime de validade maior para o modelo, sendo válido para grandes excentricidades.

O Hamiltoniano para o sistema de três corpos, tanto em coordenadas de Poincaré quanto em coordenadas de Jacobi pode ser escrito da forma  $H = U + R$ , onde  $U$  é a parte *Kepleriana*, relacionado apenas com a interação de cada corpo com o corpo central, e  $R$  é a *função perturbadora*, relacionada apenas com a interação mútua dos corpos secundários. Como foi mostrado na seção 2.3, para a parte Kepleriana do Hamiltoniano é possível definir elementos orbitais para cada um dos corpos, que são convenientes para o estudo, já que

o movimento dos corpos será aproximadamente de elipses. Além disso, é conveniente a definição de um sistema de coordenadas canônico baseado nesses elementos orbitais. As *variáveis de Delaunay* foram utilizadas inicialmente para o estudo do movimento da Lua. Com  $a_i, e_i, i_i, M_i, \omega_i$  e  $\Omega_i$  os elementos orbitais em coordenadas de Poincaré, as coordenadas de Jacobi  $l_i, g_i, h_i$  e seus respectivos momentos conjugados  $L_i, G_i, H_i$  são dados por (2.108).

$$\begin{aligned} l_i &= M_i & L_i &= m'_i \sqrt{\beta_i a_i}, \\ g_i &= \omega_i & G_i &= L_i \sqrt{1 - e_i^2}, \\ h_i &= \Omega_i & H_i &= G_i \cos i_i, \end{aligned} \quad (2.108)$$

onde  $\beta_i = \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_i}$ , com  $\sigma_i = \sum_{j=0}^i m_j$ , e  $\mu_i = G(m_0 + m_i)$ , como foi definido na seção anterior.

Para o estudo da dinâmica de três corpos, é conveniente definirmos os ângulos em relação a um mesmo ponto de referência da órbita. É possível então definirmos novos momentos conjugados tais que utilizemos a longitude média  $\lambda_i$  no lugar da anomalia média  $M_i$ , e a longitude do pericentro  $\varpi_i$  no lugar do argumento do pericentro  $\omega_i$ , mantendo o terceiro ângulo, da longitude do nodo ascendente o mesmo. Assim, é possível demonstrar que o novo conjunto de variáveis será escrito como (2.109).

$$\begin{aligned} l'_i &= \lambda_i = M_i + \varpi_i & L'_i &= L_i = m'_i \sqrt{\beta_i a_i}, \\ g'_i &= -\varpi_i = -\omega_i - \Omega_i & G'_i &= L_i - G_i = L_i (1 - \sqrt{1 - e_i^2}), \\ h'_i &= \Omega_i & H'_i &= G_i - H_i = L_i \sqrt{1 - e_i^2} (1 - \cos i_i). \end{aligned} \quad (2.109)$$

Com esse novo conjunto de variáveis e supondo o caso planar, o Hamiltoniano do sistema poderá ser escrito da forma geral (2.110).

$$H = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2L_i'^2} - \frac{Gm_1 m_2}{a_2} \cdot R(L'_i, G'_i, \lambda_i, \varpi_i). \quad (2.110)$$

Um resultado que pode ser esperado, a partir das equações de Hamilton para as variáveis de Delaunay do problema, é que  $L_i$ , e portando  $a_i$ , têm suas variações ligadas somente às variações de  $\lambda_i$ .

Para o estudo do problema secular, a diferença entre as longitudes do pericentro dos corpos ( $\Delta\varpi$ ) desempenha papel importante. Realizando então uma nova transformação canônica de variáveis tal que um dos ângulos seja  $\Delta\varpi$ , chega-se no conjunto de variáveis dado por (2.111).

$$\begin{aligned}
l_1'' &= \lambda_1 & L_1'' &= L_1, \\
l_2'' &= \lambda_2 & L_2'' &= L_2, \\
g_1'' &= \Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2 & G_1'' &= G_1' = L_1 - G_1, \\
g_2'' &= -\varpi_2 & G_2'' &= G_1' + G_2' = (L_1 - G_1) + (L_2 - G_2).
\end{aligned} \tag{2.111}$$

Empiricamente, sabe-se que a evolução temporal das longitudes médias é ordens de grandeza mais rápida que a evolução temporal das longitudes do pericentro. Como o caso secular visa estudar a evolução a longo período do sistema, é realizado um procedimento de *média* no Hamiltoniano sobre os ângulos de curto período. Dessa maneira é definido o Hamiltoniano *Secular* do sistema:

$$H_{\text{sec}} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Gm_1m_2}{a_2} \cdot R(L_i'', G_i'', \lambda_i, \Delta\varpi, \varpi_2) d\lambda_1 d\lambda_2. \tag{2.112}$$

O Hamiltoniano secular não possuirá dependência, então, dos ângulos rápidos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Assim, aplicando as equações de Hamilton, teremos:

$$\frac{\partial H_{\text{sec}}}{\partial \lambda_i} = 0 = \frac{dL_i}{dt} \Rightarrow L_i = \text{constante}, \tag{2.113}$$

e portanto, no caso secular não há variações temporais no semi-eixo maior. Dessa maneira, teremos também que no caso secular, a evolução de  $G_i''$ , e portanto  $e_i$  estará ligada somente à evolução de  $\varpi_i$ . Vários estudos foram feitos sobre as características da função perturbadora, e deles algumas propriedades foram tiradas, sobre os coeficientes. Uma dessas propriedades é a *regra de d'Alembert* (Murray e Dermott, 1999; Klioner, 2000), que diz, dada a função perturbadora na forma:

$$R = \sum S_j(a_1, a_2, e_1, e_2, i_1, i_2) \cos(j_1\lambda_1 + j_2\lambda_2 + j_3\varpi_1 + j_4\varpi_2 + j_5\Omega_1 + j_6\Omega_2), \tag{2.114}$$

os coeficientes dos ângulos obedecerão a relação:

$$\sum_{i=1}^6 j_i = 0. \tag{2.115}$$

Dessa maneira, apenas os termos dependentes apenas de  $\Delta\varpi$  estarão presentes no Hamiltoniano médio, não havendo portanto dependências de apenas  $\varpi_2$ . Assim, aplicando novamente as equações de Hamilton para essas variáveis, chega-se em (2.116) e (2.117).

$$\frac{\partial H_{\text{sec}}}{\partial \varpi_2} = 0 = \frac{dG_2''}{dt} \Rightarrow G_2'' = \text{constante}, \quad (2.116)$$

$$\frac{\partial H_{\text{sec}}}{\partial G_2''} = -\frac{d\varpi_2}{dt},$$

$$\frac{\partial H_{\text{sec}}}{\partial \Delta\varpi} = -\frac{dG_1''}{dt}, \quad (2.117)$$

$$\frac{\partial H_{\text{sec}}}{\partial G_1''} = \frac{d\Delta\varpi}{dt}.$$

Pode-se concluir a partir de (2.117) que as variações de  $G_1''$ , e portando  $e_1$  e  $e_2$ , serão determinadas apenas pela variação de  $\Delta\varpi$ , variando com a mesma frequência fundamental. Com esse resultado, retornando ao caso não-secular, pode-se concluir que as excentricidades  $e_1$  e  $e_2$  possuirão dois termos de curto período, com os períodos de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , e um tempo de longo período, com o período de  $\Delta\varpi$ .

Observação final: este modelo supõe que as frequências orbitais são ordens de grandezas mais altas que as frequências seculares. Isto é válido apenas para sistemas de uma estrela e dois planetas, no caso *problema de três corpos secular planetário*. Para o caso do movimento de um planeta sob a ação gravitacional de duas estrelas, a teoria secular clássica deve ser revisada.





## Catálogos de Binárias

No início do trabalho foram desenvolvidos trabalhos introdutórios ao projeto de pesquisa, de busca, leitura e compreensão de artigos científicos sobre os sistemas binários. Foram procurados artigos com temas diversos, centrados em exoplanetas orbitando estrelas binárias. Foi utilizado o sistema de buscas *SAO/NASA Astrophysics Data System (ADS)*, e lidos os trabalhos Eggenberger et al. (2004b) Porto de Mello et al. (2006), , Mugrauer et al. (2006).

Em Porto de Mello et al. (2006) foram discutidos critérios necessários à existência de vida em estrelas num raio de 10 parsecs do Sol. Para isso foram escolhidas todas as estrelas conhecidas nessa região e descartadas várias delas por diversos critérios. Um deles foi a multiplicidade do sistema, *i.e.*, duas ou mais estrelas num mesmo sistema dinâmico.

Em Eggenberger et al. (2004b) são apresentados os planetas extra-solares até então descobertos que fazem parte de sistemas binários de estrelas. São apresentados dados aproximados para os parâmetros das órbitas, e são feitas algumas estatísticas dos dados desses planetas.

Mugrauer et al. (2006), como alguns outros, foi procurado já em outro contexto: desejava-se montar um banco de dados com os valores dos parâmetros orbitais de estrelas binárias. Os parâmetros orbitais que descrevem uma órbita podem ser o semi-eixo maior, o período e a excentricidade. O parâmetro razão de massas é equivalente em termos de caracterização da órbita ao período (Roy, 1978; Danby, 1988). Esse trabalho, porém, é lento, pois trata-se de procurar os valores orbitais das estrelas uma a uma, sendo que muitas vezes os formatos dos dados eram diferentes. Também alguns valores necessários para o estudo das órbitas apareceram simplesmente como estimativas, não sendo adequado

portanto para um trabalho científico.

Pode-se realizar um estudo sobre essas estrelas, e determinar, a partir das características da estrela, a possibilidade de haver vida nessas estrelas binárias. Temos pouco conhecimento sobre a possibilidade de se desenvolver vida nos sistemas múltiplos.

No catálogo Mason e Hartkopf (2006) constam os valores dos parâmetros orbitais tais como excentricidade, período e semi-eixo maior angular de aproximadamente 2000 estrelas. Para verificar a confiabilidade desses dados, foi feita uma busca na referência *ADS* dos autores e das citações desse catálogo em artigos, e em que tipo de revistas de divulgação científica esses artigos apareciam. Como foram encontradas várias citações em diversos artigos em revistas conceituadas de astronomia, foi assumido que os dados eram confiáveis.

Entretanto, o semi-eixo maior angular não é adequado como parâmetro orbital sem que se saiba a distância do dado sistema à Terra. O semi-eixo maior angular é apenas um ângulo medido da própria Terra, e ângulos maiores não significam distâncias maiores entre as estrelas, já que os sistemas podem estar localizados a diferentes distâncias. Entretanto, como a maioria das estrelas do catálogo possuía nomenclatura *HIPPARCOS*, e que o catálogo ESA (1997) disponibiliza os valores das paralaxes para suas estrelas.

O catálogo *HIPPARCOS* possui vários tipos de informações, fotométricas e astrométricas, e várias de suas colunas possuem os chamados *flags*, que são marcadores e servem para verificar a confiabilidade das medidas dos dados do catálogo. Além desses *flags*, outro indicador da confiabilidade dos dados medidos pela missão *HIPPARCOS* é a magnitude de cada medida. Existe um limite de confiabilidade da magnitude medida pelo *HIPPARCOS* e a respectiva medida astrométrica.

Desejava-se então extrair as informações de paralaxe, magnitude, seus erros e outros *flags* pertinentes aos dados do catálogo *HIPPARCOS* para as estrelas do catálogo Mason e Hartkopf (2006). Para isso foi criado um arquivo de entrada com os identificadores na nomenclatura *HIPPARCOS* do catálogo Mason e Hartkopf (2006), e outro arquivo com todos os valores do catálogo *HIPPARCOS*. Por limitações computacionais, o arquivo com todos os valores do catálogo *HIPPARCOS* foi dividido em três partes. Foi desenvolvido então um programa em linguagem C para realizar essa associação, e com isso obteve-se finalmente os valores das distâncias dos sistemas do catálogo Mason e Hartkopf (2006) à Terra. Desta maneira, foi construído um banco de dados com os valores dos parâmetros

orbitais de aproximadamente 2000 estrelas, que poderia ser utilizado para as simulações numéricas. O fato do catálogo construído dessa forma por possuir tantos dados tornou a apresentação do mesmo nessa dissertação inviável. A solução foi então disponibilizar o mesmo em rede, no endereço:

<http://www.astro.iag.usp.br/~dinamica>

As figuras 3.1 e 3.2 mostram histogramas construídos a partir desse catálogo, com o intuito de se verificar a distribuição geral dos elementos orbitais de estrelas binárias.

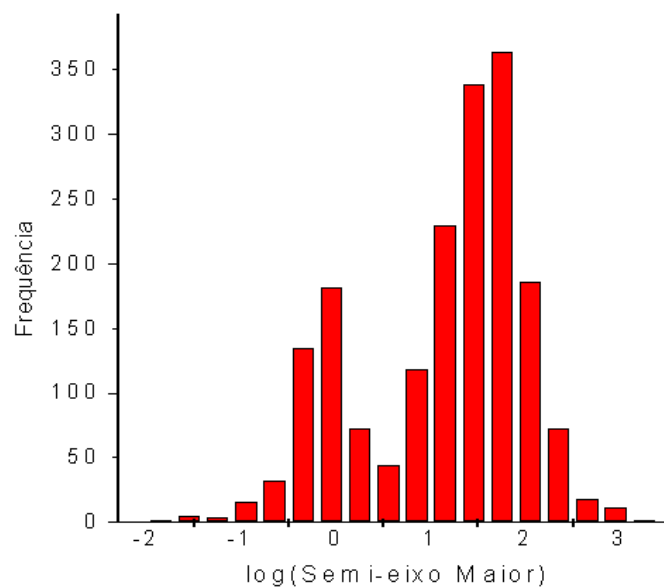


Figura 3.1: Distribuição das estrelas binárias do catálogo construído com relação ao semi-eixo maior

A partir do gráfico 3.1 pode se notar que a amostra do catálogo possui semi-eixos maiores desde pequenas frações de uma unidade astronômica, de estrelas binárias super próximas, até mil unidades astronômicas. É possível identificar dois picos no histograma 3.1, o primeiro localizado aproximadamente em  $a_e \approx 1AU$  e o segundo localizado entre  $a_e = 10AU$  e  $a_e = 100AU$ . O histograma da excentricidade, no gráfico 3.2, mostra uma distribuição bem uniforme, com um número considerável de estrelas binárias tanto em órbitas circulares quanto em órbitas altamente excêntricas, com excentricidade próxima de 1.

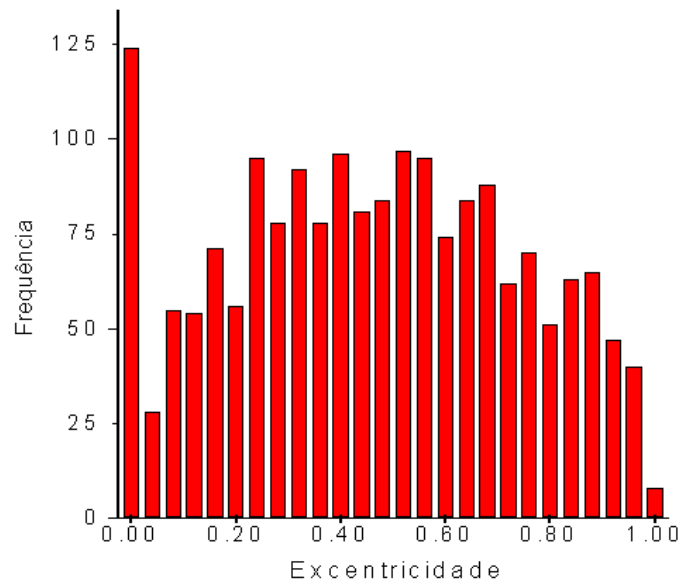


Figura 3.2: Distribuição das estrelas binárias do catálogo construído com relação à excentricidade

O gráfico 3.3 mostra a correlação entre o semi-eixo maior e a excentricidade para as estrelas do catálogo construído.

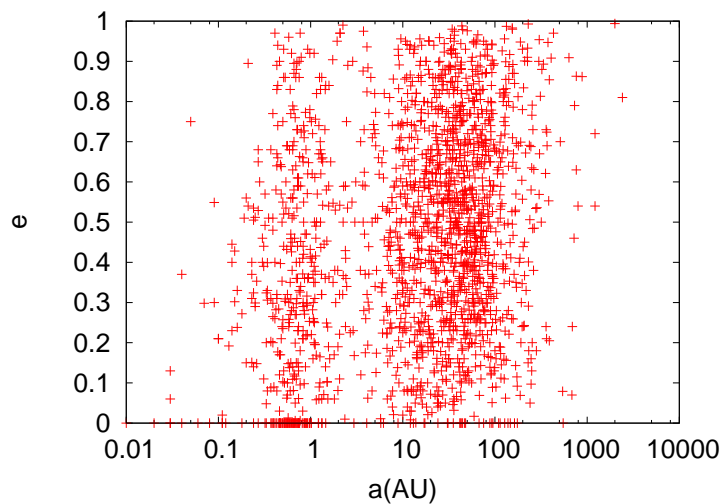


Figura 3.3: Valores dos semi-eixos maiores e excentricidades para os sistemas binários do catálogo de binárias

Ao analisar o gráfico 3.3, pode-se notar que não há nenhuma correlação entre os elementos orbitais das binárias, mas pelo contrário, a dispersão é tal que pode-se perceber que sistemas de baixa e altas excentricidades existem para tanto baixos semi-eixos maiores

quanto altos. Com isso, pode-se verificar novamente a dificuldade de se aplicar teorias de perturbações clássicas para o estudo do movimento planetário em estrelas binárias, já que para uma órbita com excentricidade próxima de 1, expansões da função perturbadora que considerem a excentricidade como um pequeno parâmetro necessitarão de um número grande de termos para que a série consiga convergir.

No andamento do projeto, no entanto, verificou-se que outra informação essencial para a análise que anteriormente não se tinha conhecimento, era a razão de massas entre as estrelas principais. Esse parâmetro possui uma determinação muito mais delicada, pois depende da análise do movimento próprio das duas estrelas, para uma estimativa dinâmica, ou uma estimativa com base nos tipos espectrais das estrelas. Foi encontrado o catálogo de Soederhjelm (1998), que constavam todos os parâmetros orbitais necessários, além das razões de massas de aproximadamente 30 estrelas binárias. Como o trabalho para cálculos de órbitas e estabilidade deve ser feito caso a caso, e devido às limitações de tempo para o projeto, foram impostos critérios de seleção para a análise sobre o catálogo, de modo que apenas um sistema real foi analisado.

Os critérios utilizados consistiam em possíveis candidatas a possuírem um planeta em uma zona habitável, mas que teriam uma dinâmica do problema de dois corpos influente. Assim, foram selecionadas estrelas não muito separadas, com separação média da ordem de  $50UA$  e de massas similares à do Sol, da ordem de  $1M_{\odot}$ . Outro critério foi selecionar estrelas próximas ao Sol, de modo que teoricamente seria mais fácil a identificação dos planetas. Para o segundo critério foram selecionadas estrelas num raio de  $10pc$  centrado no Sol.



## Implementação dos Pacotes de Programas

Como as equações de movimento do problema de três corpos, mesmo no caso restrito, não são integráveis analiticamente, uma alternativa para esse problema é integrar numericamente as equações diferenciais que descrevem o movimento planetário.

### 4.1 *Mudança de Coordenadas*

Integradores numéricos das equações exatas de movimento possuem como parâmetros de entrada posições e velocidades dos corpos, intervalo de tempo para a integração e, logicamente, a equação diferencial, ou sistema de equações diferenciais. Sua saída consiste nas posições e velocidades dos corpos no instante de tempo desejável.

Entretanto os catálogos citados no capítulo anterior descrevem as órbitas por meio dos parâmetros orbitais. Assim, é necessário o desenvolvimento de dois programas de mudanças de coordenadas: um dos parâmetros orbitais para as coordenadas retangulares, e outro fazendo a mudança inversa, de coordenadas retangulares para os parâmetros orbitais.

$$(a, e, i, \Omega, \omega, M_0; M) \rightarrow (x, y, z, V_x, V_y, V_z; t),$$

$$(x, y, z, V_x, V_y, V_z; t) \rightarrow (a, e, i, \Omega, \omega, M_0; M).$$

Essas rotinas de mudanças de coordenadas foram aplicadas de maneira genérica, isto é, as mesmas rotinas são aplicadas para os cálculos de elementos orbitais nos sistemas Astrocêntrico, de Jacobi e de Poincaré (Ferraz-Mello et al., 2006), mudando apenas os parâmetros de entrada (definições das coordenadas e velocidades) e do parâmetro  $\mu$ , definido na seção 2.3.7, na introdução.



Foram implementadas rotinas também das mudanças dos sistemas de coordenadas entre si, com as equações das mudanças apresentadas na introdução. As rotinas possuíam como entrada as massas dos corpos, coordenadas e velocidades em um dado referencial, e possuíam como saída as coordenadas e velocidades no referencial desejado, assim como o parâmetro  $\mu$ .

Vale lembrar que o problema de dois corpos foi resolvido em termos de relações paramétricas, e que a relação explícita dentre  $\vec{r}$  e  $t$  não era possível de ser obtida porque se chega em uma equação transcendental. Essa equação transcendental é resolvida numericamente, e seu resultado é necessário para as transformações de coordenadas. Isso significa também que os programas de transformação de coordenadas podem nos dar a solução do problema de dois corpos, apenas introduzindo como entrada um instante de tempo qualquer no lugar de  $t_0$ , ou seu equivalente no sistema de parâmetros orbitais  $M$  no lugar de  $M_0$ , dado um conjunto de condições iniciais.

## 4.2 Integração Numérica

Existem diversos métodos que integram numericamente equações diferenciais, que vão implicar em programas com precisões diferentes e tempos diferentes para convergência no resultado. Como deseja-se diferenciar orbitas de planetas por longos intervalos de tempo (da ordem de  $10^9$  anos), é necessário um programa com uma precisão maior que  $10^{-9}$ . Um programa usado em dinâmica planetária é conhecido como integrador *RADAU* (Everhart, 1985) de ordem 15, ou simplesmente *RA15*, por ter um tempo de convergência relativamente alta, dada sua precisão, que é da ordem de  $10^{-15}$ .

O programa *RA15* possui como parâmetros de entrada as posições, as velocidades, o intervalo de tempo para a integração e uma sub rotina com as equações diferenciais a serem integradas. Existem quatro outros parâmetros internos do *RA15* que precisam ser dados, que dizem respeito ao número de equações diferenciais simultâneas que devem ser integradas, à ordem das equações e outros parâmetros, sobre a funcionalidade do próprio integrador.

Entretanto, o programa *RA15* foi originalmente desenvolvido para a linguagem de programação *FORTRAN*, mas em Goździewski e Maciejewski (1995) foi feita a conversão do algoritmo de *FORTRAN* para C.

Como não existem limitações na resolução numérica, foi implementado o sistema de equações genérico no integrador, equações dadas por 2.6 e 2.7, para assim estudar também perturbações do terceiro corpo nas órbitas dos outros dois.

Apesar das equações 2.6 e 2.7 não tratarem de um sistema de coordenadas canônico, o esforço numérico que se economiza ao resolver um sistema de 6 equações diferenciais no lugar de um sistema de 9 equações diferenciais é considerável. E com rotinas de mudança de coordenadas, pode-se integrar em cada passo em coordenadas Astrocêntricas, e automaticamente obter o valor das posições e velocidades dos corpos em qualquer outro sistema de coordenadas. Da mesma maneira, podem ser dados como entrada parâmetros em outro sistema de coordenadas, e com as rotinas de mudanças de sistemas, transformar essas coordenadas em coordenadas astrocêntricas para serem integradas. Esses são passos fundamentais ao se desenvolver um modelo teórico e realizar comparações com integrações numéricas, já que modelos teóricos são desenvolvidos em geral em sistemas de coordenadas canônicos como os descritos na seção 2.3.

### 4.3 Zero de Funções

Em diversas passagens dos pacotes de programas desenvolvidos, se faz necessário o cálculo do zero de funções complexas, que em geral não possuem solução exata analítica. Para contornar esse problema, é utilizado um algoritmo para cálculo de zeros de funções. Diversos algoritmos existem para o cálculo numérico de zeros de funções. Um dos mais simples e confiáveis é o método da *Bissecação* (Press, 2002). Seja uma função  $f(x)$  que se conhece possuir uma raiz no intervalo limitado inferiormente por  $x_a$  e superiormente por  $x_b$ . Como a função possui apenas uma raiz no intervalo, necessariamente os sinais de  $f(x_a)$  e  $f(x_b)$  serão opostos. O método da bissecção definirá um ponto médio dado por  $x_m = \frac{x_b + x_a}{2}$ , e realizará uma comparação entre os sinais entre  $f(x_m)$ ,  $f(x_a)$  e  $f(x_b)$ . Caso os sinais de  $f(x_m)$  e  $f(x_a)$  sejam iguais, a raiz estará localizada então entre  $x_m$  e  $x_b$ , e caso os sinais de  $f(x_m)$  e  $f(x_b)$  sejam iguais, a raiz estará localizada entre  $x_a$  e  $x_m$ . Para ambos os casos será realizada uma redefinição do intervalo e uma nova aplicação da bissecção. No primeiro caso teremos  $x_a \rightarrow x_m$  e  $x_b \rightarrow x_b$ , e no segundo caso teremos  $x_a \rightarrow x_a$  e  $x_m \rightarrow x_b$ . O procedimento pode ser repetido indefinidamente, dependendo da precisão desejada.

#### 4.4 Transformada Rápida de Fourier -Fast Fourier Transform

A transformada de Fourier é uma operação definida para funções de variáveis complexas, cujo objetivo é expressar a dada função como uma combinação de funções trigonométricas. Isso é possível devido ao fato das funções  $\cos(ax)$ ,  $\sin(bx)$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  formarem uma base ortonormal (Butkov, 1988). Dada uma função  $h(t)$ , sua transformada de Fourier  $H(f)$  é definida como sendo:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{2\pi ift} dt. \quad (4.1)$$

A operação inversa é definida apenas como sendo:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{-2\pi ift} df. \quad (4.2)$$

Para o caso de variáveis discretas, como dados numéricos, a definição da transformada irá depender do espaçamento  $\Delta$  entre os pontos. Supondo então que a função seja definida nos pontos  $h_n = h(n\Delta)$ , com  $n \in \mathbb{N}$  e  $\Delta = \text{constante}$ , o teorema de Nyquist diz que se o intervalo  $\Delta$  for menor que o menor período da função  $h(t)$ , esta pode ser totalmente determinada por suas amostras, dada por (4.3)

$$h(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \frac{\sin[2\pi f_c(t - n\Delta)]}{\pi(t - n\Delta)}, \quad (4.3)$$

onde:

$$f_c = \frac{1}{2\Delta} \quad (4.4)$$

é a *frequência de Nyquist*, ou *frequência crítica*. Portanto, para o caso de um número de termos finito, a identidade (4.3) não será satisfeita, sendo esta uma limitação numérica do processo, cujos efeitos de discrepância serão minimizados quanto maior o número de amostras da função.

Supondo então que o número total de amostras seja  $N$  e que cada ponto da amostra seja dado por  $h_k = h(k\Delta)$ , com  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , a transformada de Fourier de  $h_k$  será dada por (4.5)

$$H(f_n) = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} k_k e^{\frac{2\pi i k n}{N}}. \quad (4.5)$$

Para ser calculado, esse algoritmo precisa da ordem de  $N^2$  operações. Um outro algoritmo, conhecido como *transformada rápida de Fourier*, ou *fast Fourier transform (FFT)* permite que a transformada seja calculada por um número de operações da ordem de  $N \log(N)$ . Entretanto, para a implementação desse algoritmo, outra imposição precisa ser feita, de que o número de pontos total seja uma potência inteira do número 2, ou seja,  $N = 2^j$ , com  $j \in \mathbb{N}$ .

O algoritmo para a *FFT* pode ser encontrado em detalhes em Press (2002), assim como o código fonte utilizado. O algoritmo consiste então em, dada a função de entrada em um vetor com as posições de  $h(k\Delta)$  em cada coordenada, ele fornece a saída com as amplitudes em ordem crescente de frequências. A frequência para cada amplitude é definida então com a posição  $i$  da amplitude no vetor e com o intervalo entre os dados  $\Delta$ , como sendo:

$$f_i = \frac{i - 1}{N\Delta}$$

No caso ideal, uma transformada de Fourier de uma função periódica seria uma sequência de funções  $\delta$  de Dirac, com amplitude infinita e largura nula. Entretanto, como o número de pontos que o algoritmo faz a transformada é finito, as linhas do espectro de Fourier não mais serão funções  $\delta$  de Dirac, mas possuirão uma largura, que será inversamente proporcional ao número de pontos da função.

A *FFT* possui diversas aplicações na física e engenharia, na análise de sinais, e se mostra conveniente para o estudo da evolução dos elementos orbitais dos corpos do problema planetário descrito pois apresenta representações das funções sob uma perspectiva diferente. Por exemplo, com a *FFT* é possível o cálculo e construção de *espectros dinâmicos*, que serão descritos em mais detalhes na seções 5.3 e 5.4.



## Simulações

### 5.1 *Integração de Movimento*

Para serem calculadas as posições do planeta e das estrelas, foi montado um programa cujo algoritmo pode ser representado esquematicamente por:

1. Entrada dos parâmetros orbitais das estrelas e do planeta, assim como suas massas.
2. Mudança de coordenadas dos parâmetros orbitais para coordenadas retangulares para as estrelas e para o planeta.
3. Dado um instante inicial e um intervalo de tempo, calcular com o integrador as posições e as velocidades do planeta e das estrelas no instante seguinte.
4. Realizar mudanças de coordenadas para o sistema o qual se deseja obter a saída, como Astrocêntrico, de Jacobi ou de Poincaré.
5. Com as novas posições e velocidades, fazer a mudança de coordenadas retangulares para parâmetros orbitais para as estrelas e o planeta.
6. Adicionar um intervalo de tempo e voltar para o passo 3, até que o tempo atinja um certo máximo, correspondente a quanto tempo passou na integração.

O programa de integração de órbitas foi testado inicialmente para um sistema binário fictício, com estrelas de massas iguais  $m_1 = m_2 = M_\odot$  e, inicialmente, parâmetros orbitais simétricos, como constam na tabela 5.1. Inicialmente foi integrado o movimento com um planeta com massa  $m_p = 10^{-5}M_\odot$  e parâmetros orbitais que também constam na tabela 5.1.

Parâmetro	Estrela 2	Planeta
a(UA)	5.0	50.0
e	0.0	0.0
i (rad)	0.0	0.0
$\Omega$ (rad)	0.0	0.0
$\omega$ (rad)	0.0	0.0
M (rad)	0.0	0.0

Tabela 5.1 - Valores iniciais dos parâmetros orbitais para a primeira simulação

O gráfico 5.1 mostra o resultado da integração do sistema por 100 anos. Essa integração foi feita apenas para se visualizar o formato das órbitas da estrela e do planeta.

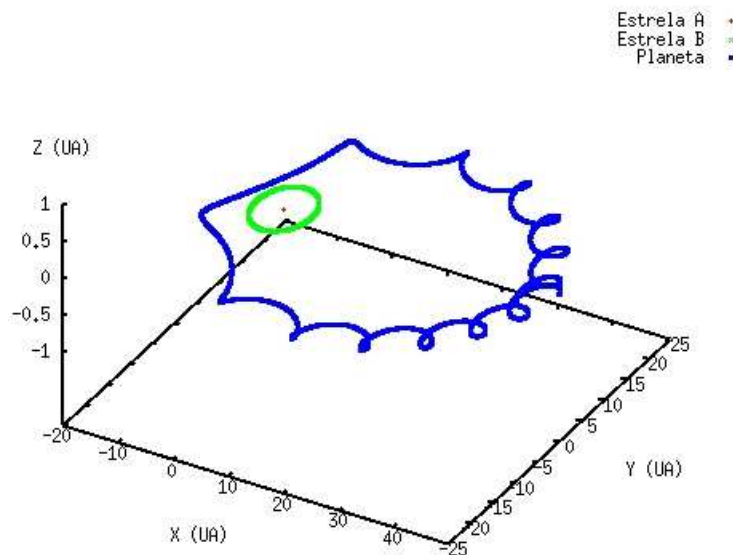


Figura 5.1: Simulação do sistema com parâmetros iniciais dados na tabela 5.1

Foi feito o mesmo procedimento variando o semi-eixo maior inicial do planeta, mantendo todos os outros parâmetros orbitais iniciais. Os gráficos 5.2 e 5.3 mostram as formas das órbitas para os semi-eixos maiores  $a = 75UA$  e  $a = 100UA$  respectivamente.

Pode-se notar nos gráficos 5.1, 5.2 e 5.3 que menor é a oscilação do corpo quanto maior o semi-eixo maior. Isso é razoável de se pensar, já que num limite que o planeta esteja suficientemente distante do par de estrelas, não poderá distinguir as duas estrelas, o que implica que irá se mover numa boa aproximação, regido pelo movimento do problema de

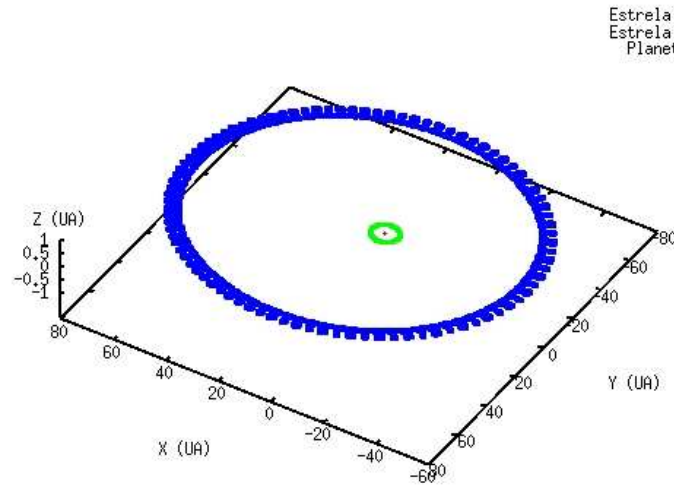


Figura 5.2: Simulação do sistema com parâmetros dados na tabela 5.1, com semi-eixo maior inicial do planeta  $a = 75UA$

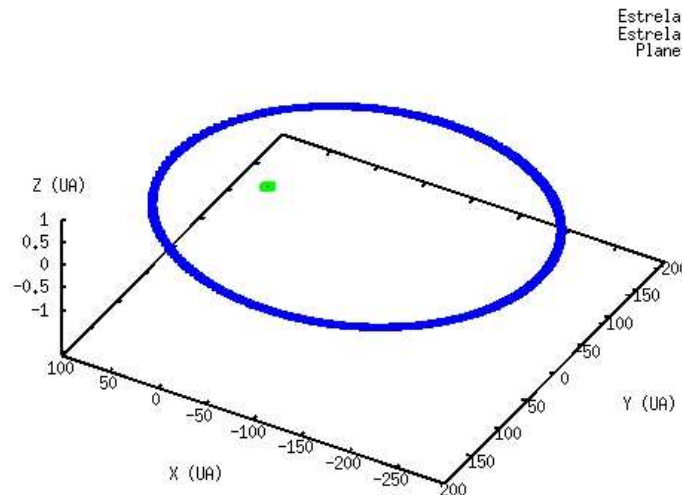


Figura 5.3: Simulação do sistema com parâmetros dados na tabela 5.1, com semi-eixo maior inicial do planeta  $a = 100UA$

dois corpos, numa órbita elíptica.

Esse tipo de órbita, em que o planeta orbita as duas estrelas é chamada de *órbita do tipo planetária* (Dvorak, 1986). Um outro tipo de órbita, conhecida como *órbita do tipo satélite*, é quando o planeta orbita apenas uma das estrelas. No gráfico 5.4 pode-se ver um exemplo desse tipo de órbita, utilizando como parâmetros iniciais da estrela os valores da tabela 5.2.

Do gráfico 5.4 pode-se notar que o planeta está orbitando apenas a estrela A, apesar de ter sua órbita fortemente afetada pela estrela B, que é responsável pelo movimento de



Parâmetro	Estrela 2	Planeta
a(UA)	10.0	2.0
e	0.0	0.8
i (rad)	0.0	0.0
$\Omega$ (rad)	0.0	0.0
$\omega$ (rad)	0.0	$\pi$
M (rad)	0.0	$\pi$

Tabela 5.2 - Valores iniciais dos parâmetros orbitais para a simulação de órbita do tipo satélite

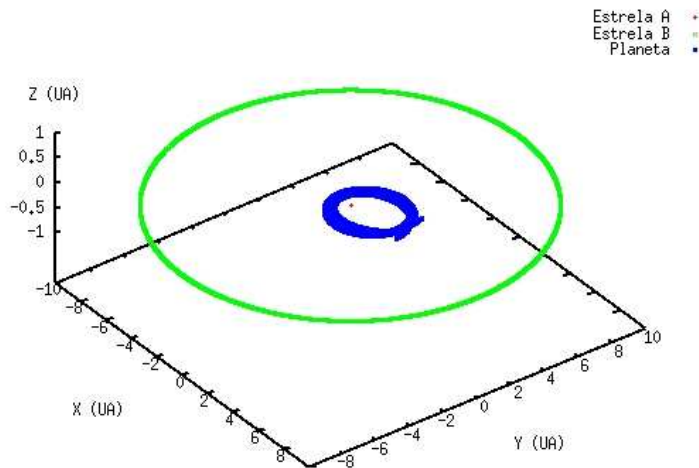


Figura 5.4: Simulação do sistema com parâmetros dados na tabela 5.2

precessão da órbita planetária. Esse sistema serve para ilustrar o que poderia acontecer com o Sistema Solar caso Júpiter fosse mais massivo, pois sua perturbação seria mais intensa.

Esses gráficos são exemplos de órbitas aparentemente estáveis a curtos períodos, mas todas mostram o planeta se movendo no plano orbital das estrelas. Podem existir orbitas estáveis (a curto período) de planetas com movimentos fora do plano da órbita das estrelas. A figura 5.5 ilustra uma órbita não co-planar, com os parâmetros iniciais dados pela tabela 5.3.

Esse é apenas um exemplo de órbita não coplanar, mas que levanta uma questão importante: caso exista um tipo de órbita de um planeta não coplanar à nossa linha de visada, aquele planeta não poderá ser detectado pelos métodos mais comuns que são utilizados

Parâmetro	Estrela 2	Planeta
a(UA)	10.0	2.0
e	0.0	0.9
i (rad)	0.0	$\frac{\pi}{2}$
$\Omega$ (rad)	0.0	0.0
$\omega$ (rad)	0.0	$\pi$
M (rad)	0.0	$\pi$

Tabela 5.3 - Valores iniciais dos parâmetros orbitais para a primeira simulação da órbita planetária não coplanar

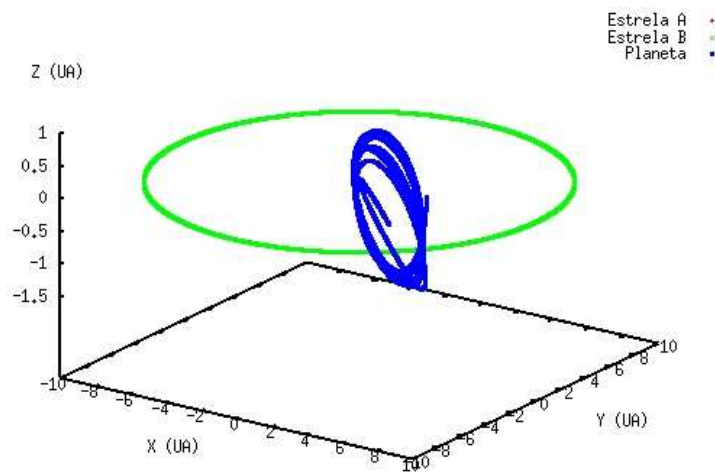


Figura 5.5: Simulação do sistema com parâmetros dados na tabela 5.3

atualmente, como o de velocidade radial ou de trânsito. Um planeta com esse tipo de órbita pode ser detectado apenas com observações detalhadas do movimento próprio da estrela transversal à linha de visada, ou observação direta. Simulações numéricas desse tipo podem estudar as regiões a se explorar e observar, para verificar a presença de um planeta, e estudar o movimento que a estrela deveria apresentar se possuísse um planeta nesse tipo de órbita.

Sobre a questão da estabilidade do movimento do planeta, a tabela 5.4 nos dá os parâmetros iniciais para uma órbita similar à do gráfico 5.5, mas com o planeta orbitando a estrela secundária. Foram feitas 2 simulações para esse sistema, uma com uma integração de 80 anos, para se verificar a forma da órbita, e outra por 100 mil anos, para verificar o

estado do sistema e uma estabilidade parcial do mesmo. O gráfico 5.6 mostra a simulação de 80 anos, enquanto as figuras 5.7, 5.8 e 5.9 mostram diferentes pontos de vista da simulação de 100 mil anos.

Parâmetro	Estrela 2	Planeta
a(UA)	10.0	2.0
e	0.0	0.8
i (rad)	0.0	1.0
$\Omega$ (rad)	0.0	0.0
$\omega$ (rad)	0.0	$\pi$
M (rad)	0.0	$\pi$

Tabela 5.4 - Valores iniciais dos parâmetros orbitais para a simulação da órbita tipo satélite orbitando a estrela secundária

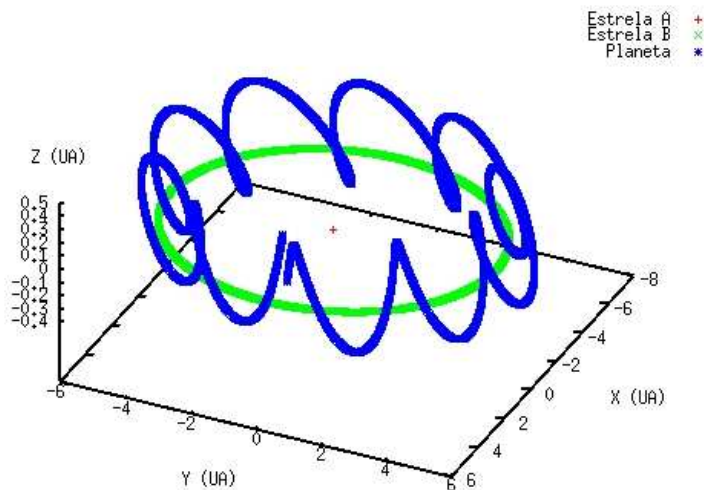


Figura 5.6: Simulação do sistema com parâmetros dados na tabela 5.4 para 80 anos de integração

Comparando os gráficos 5.6 e 5.7, podemos notar que a forma geral da órbita continua a mesma, apesar de que no gráfico 5.7 pareça mais difusa. Isto acontece, porque, apesar do tempo maior de integração, o tamanho médio de cada passo, isto é,  $\Delta t$  é sempre tal que o número total de passos integrados, ou seja, o número total de pontos para cada órbita seja 10 mil. O gráfico 5.7, associado com os gráficos 5.8 e 5.9, sugere fortemente que o sistema seja estável, pois aparenta ter uma região delimitada que o planeta pode estar,

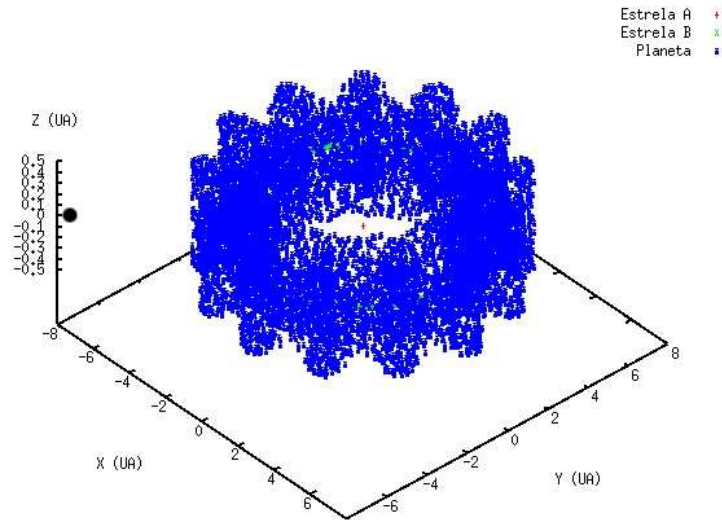


Figura 5.7: Simulação do sistema com parâmetros dados na tabela 5.4 para 100 mil anos de integração

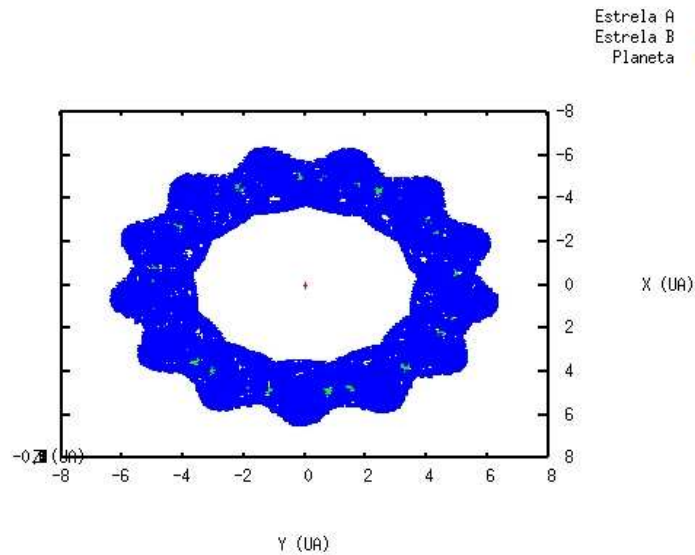


Figura 5.8: Simulação do sistema com parâmetros dados na tabela 5.4 por 100 mil anos de integração, perspectiva superior

que equivaleria ao poço próximo de  $m_2$  na figura 2.2.

## 5.2 Mudanças de Coordenadas

Para se verificar a importância e as diferenças dos elementos orbitais nos diversos tipos de sistemas de coordenadas, foram feitas simulações para a comparação dos sistemas de

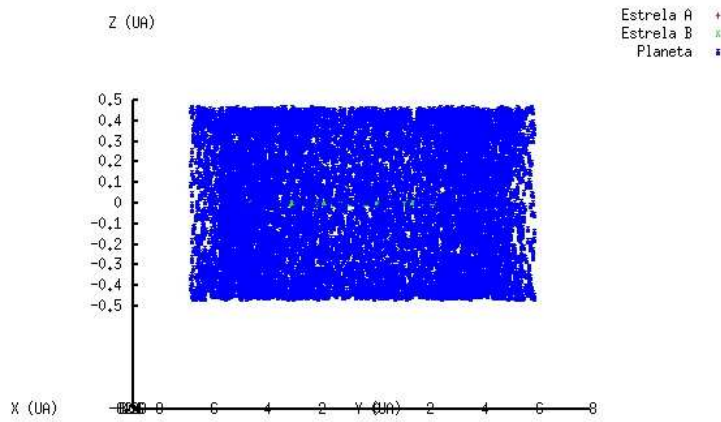


Figura 5.9: Simulação do sistema com parâmetros dados na tabela 5.4 por 100 mil anos de integração, perspectiva lateral

coordenadas. O sistema selecionado para a simulação foi o sistema de estrelas binárias *HIP 82817*. Para o estudo da estabilidade dinâmica são necessárias os parâmetros físicos e orbitais do sistema, dados no catálogo de Soederhjelm (1998). Utilizando os valores de semi-eixo maior e período, foi calculada a soma das massas das estrelas, e utilizando a razão de massas dadas, foi possível calcular as massas de cada estrela. Na tabela 5.5 são dispostos os valores dos parâmetros necessários para as simulações.

Parâmetro	Valor
$m_1 (M_{\odot})$	0.65846
$m_2 (M_{\odot})$	0.41154
$a(\text{UA})$	1.4786
$e$	0.06
$i$	$161^{\circ}$
$\Omega$	$147^{\circ}$
$\omega$	$104^{\circ}$

Tabela 5.5 - Elementos orbitais e massas do sistema *HIP 82817*

Para as simulações, foi adotado um planeta fictício, com massa  $m_p = 10^{-5}M_{\odot}$ , e com condições iniciais  $a = 0.4AU$  e  $e = 0.06$  (e todos os outros ângulos iguais a zero), que, como será verificado no capítulo 6, estão localizadas na região estável do mapa dinâmico. Assim,

foi integrada a órbita e calculados, em cada instante, os elementos orbitais do planeta e da estrela secundária. Os gráficos 5.10 e 5.11 mostram evolução temporal dos semi-eixos e excentricidades, respectivamente, do planeta enquanto os gráficos 5.12 e 5.13 mostram a evolução temporal dos semi-eixos e excentricidades, respectivamente, da estrela secundária.

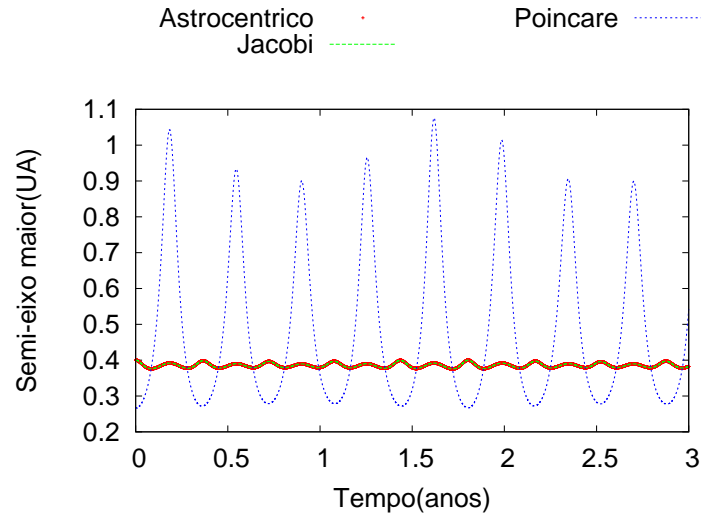


Figura 5.10: Evolução temporal dos semi-eixos maiores astrocêntrico, de Jacobi e de Poincaré para o planeta

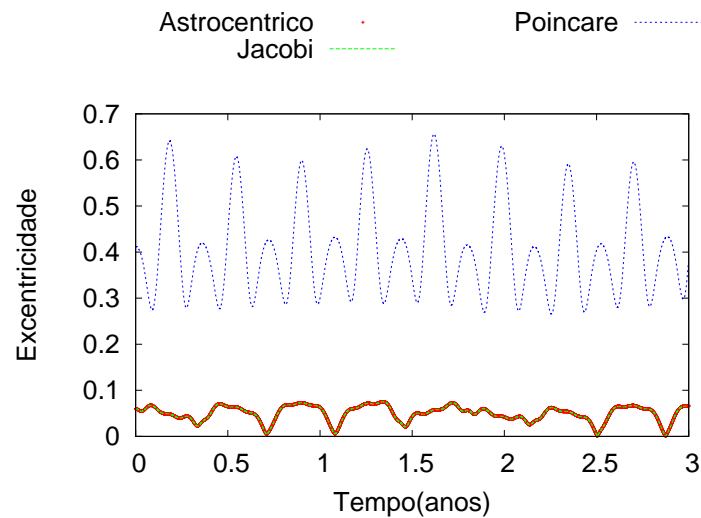


Figura 5.11: Evolução temporal das excentricidades astrocêntrica, de Jacobi e de Poincaré para o planeta

Pode-se notar, a partir das figuras 5.10 e 5.11 que os elementos orbitais de Jacobi e Astrocêntricos coincidem para o planeta. Analisando as equações das mudanças de sistemas de coordenadas no capítulo 2, pode-se notar que para o caso do corpo mais próximo, de

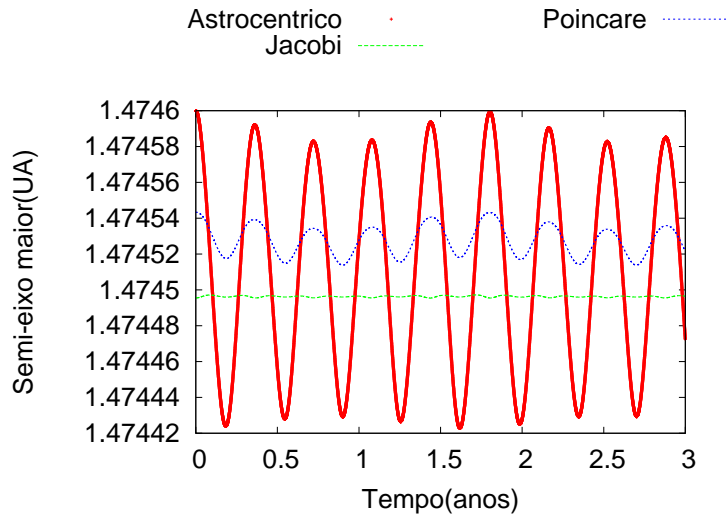


Figura 5.12: Evolução temporal dos semi-eixos maiores astrocêntrico, de Jacobi e de Poincaré para a estrela

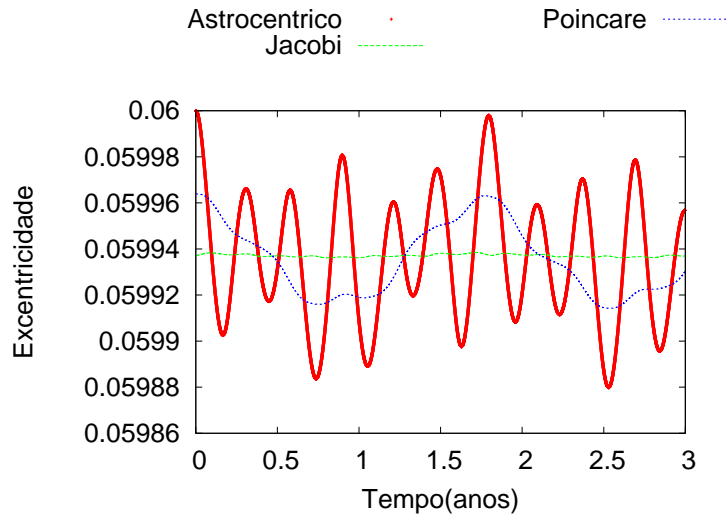


Figura 5.13: Evolução temporal das excentricidades astrocêntrica, de Jacobi e de Poincaré para a estrela

fato, as coordenadas Astrocêntricas e de Jacobi coincidem, portanto os elementos orbitais nessas coordenadas também devem coincidir.

Pode-se notar também, a partir do gráfico 5.10 que o semi-eixo maior nas coordenadas de Poincaré sofre variações bruscas, atingindo valores próximos à distância mútua entre as duas estrelas. Entretanto, nesse caso os elementos de Poincaré não possuem uma interpretação geométrica simples, já que o centro de massas se encontra num ponto externo à órbita do planeta, o que faz com que a variação da velocidade não seja uma elipse no plano  $v_x \times v_y$ .

Analisando os quatro gráficos, pode-se notar que sempre os elementos de Jacobi, tanto para o planeta como para a estrela secundária, são os elementos com a menor variação. Esse resultado é importante no caso atual de se calcular os parâmetros orbitais por análises estatísticas, ajustando uma curva que consta a velocidade radial de um planeta ou um sistema. Caso a variação seja muito grande, a incerteza e a dispersão dos dados podem ser confundidas com a própria variação da velocidade radial, implicando numa má determinação dos parâmetros orbitais. Caso a variação dos elementos seja menor, a determinação dos parâmetros orbitais a partir do ajuste de velocidade radial será mais precisa (Lee e Peale, 2003).

Outro fato que pode se tirar, a partir dos gráficos 5.12 e 5.13, é que, apesar das mesmas condições iniciais, que são convertidas para posição inicial e velocidade inicial, os parâmetros orbitais iniciais não são os mesmos. Isso implica que, caso se queira realizar a comparação com um modelo que foi desenvolvido em coordenadas de Poincaré, por exemplo, os parâmetros iniciais da simulação devem ser os elementos orbitais de Poincaré, já que os mesmos elementos orbitais não significam as mesmas posições e velocidades iniciais.

### 5.3 Análise Espectral dos Dados de Saída

Para se verificar as componentes periódicas dos diferentes sistemas de referência, foram feitas transformadas de Fourier pelo método da *FFT*. O sistema utilizado para essa análise foi o mesmo usado na seção anterior, da estrela *HIP 82817* (tabela 5.5), novamente com o planeta de massa  $m_p = 10^{-5}M_{\odot}$  e condições iniciais  $a = 0.4AU$  e  $e = 0.06$ , com todos os outros ângulos iguais a zero.

Para determinação do tempo total de integração para a análise espectral, é necessário um conhecimento prévio do sistema, de quais as componentes periódicas envolvidas, de modo a se manter uma boa resolução na região de interesse. A limitação na região de interesse é determinada pelo intervalo entre os passos de integração  $\Delta$ , por meio da frequência crítica de Nyquist (eq.(4.4)), enquanto a largura dos picos do espectro é determinada pelo tempo total de integração. Dessa maneira, para um número fixo de pontos, a frequência de Nyquist irá definir tanto o intervalo entre os pontos quanto o tempo total de integração.

Uma boa estimativa da frequência crítica para um sistema composto por duas estrelas



e um planeta, em uma órbita do tipo *satélite*, é a própria frequência orbital do planeta, já que é a mais alta frequência do movimento. Dessa maneira, dado um semi-eixo maior inicial, que pode ser aproximado como o valor médio do semi-eixo do planeta, pode-se calcular a frequência orbital por meio da Terceira Lei de Kepler.

Foram então calculadas as novas órbitas para o sistema e os espectros de Fourier para os parâmetros orbitais da estrela secundária e para o planeta, nos sistemas Astrocêntrico, de Jacobi e de Poincaré, cujos resultados encontram-se nas figuras de 5.14 a 5.17.

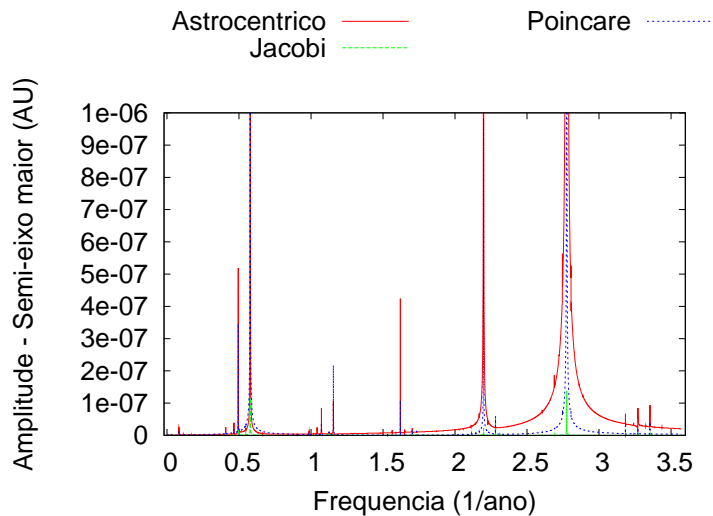


Figura 5.14: Espectro de Fourier para a evolução temporal do semi-eixo maior nas coordenadas Astrocêntrica, de Jacobi e de Poincaré da estrela

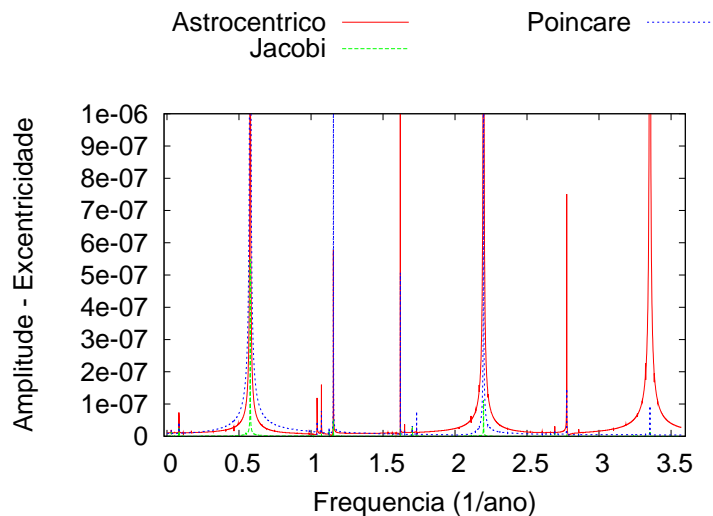


Figura 5.15: Espectro de Fourier para a evolução temporal da excentricidade nas coordenadas Astrocêntrica, de Jacobi e de Poincaré da estrela

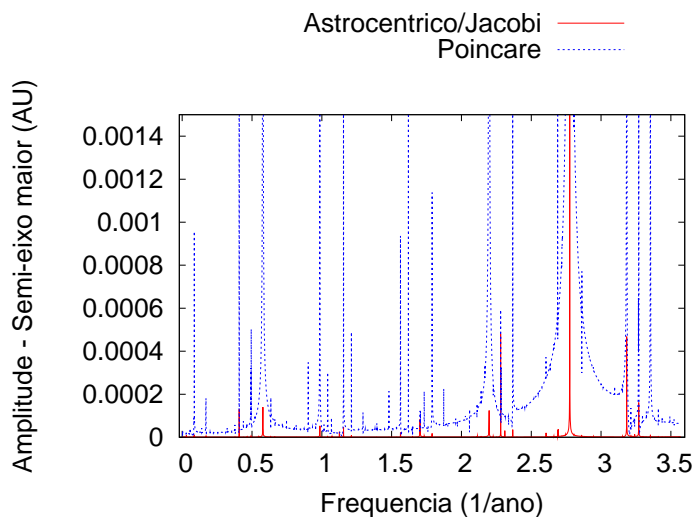


Figura 5.16: Espectro de Fourier para a evolução temporal do semi-eixo maior nas coordenadas Astrocêntrica, de Jacobi e de Poincaré do planeta

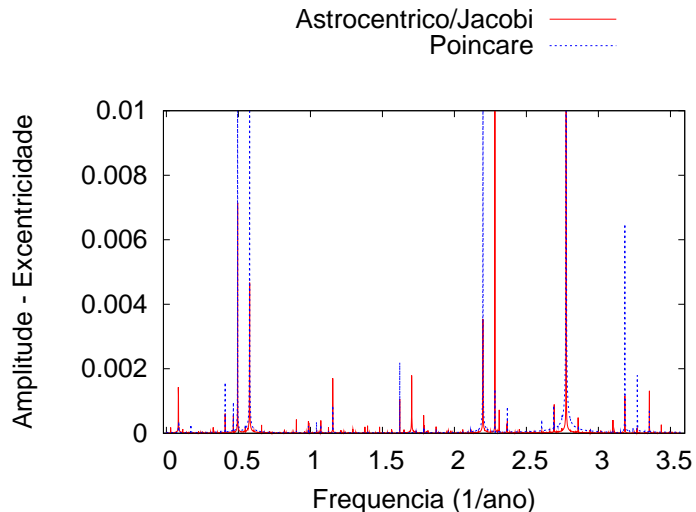


Figura 5.17: Espectro de Fourier para a evolução temporal do semi-eixo maior nas coordenadas Astrocêntrica, de Jacobi e de Poincaré do planeta

Como as coordenadas de Jacobi e Astrocêntricas coincidem para o primeiro corpo, no caso o planeta, naturalmente o espectro de Fourier para essas coordenadas também deve coincidir, o que é verificado nas figuras 5.16 e 5.17.

É possível notar também, em todos os espectros, que as frequências fundamentais do movimento coincidem para todas as coordenadas, mas a amplitude de cada frequência depende do sistema de coordenadas. Portanto, independentemente do sistema coordenado que esteja sendo trabalhado, as características intrínsecas do sistema devem ser verificadas em todos. As frequências fundamentais do movimento são verificadas tanto no planeta

quanto na estrela, mas as amplitudes dos espectros da estrela são muitas ordens de grandeza menores que as amplitudes dos espectros do planeta, como era esperado.

Outro fato que pode ser tirado dos gráficos dos espectros é que, tanto para o planeta quanto para a estrela, o sistema coordenado de Jacobi é o que apresenta menores variações (menores amplitudes nos espectros), reafirmando o que foi constatado na seção 5.2, analisando os gráficos das evoluções temporais das coordenadas.

Com fins de comparação, foi selecionado um sistema que possui uma órbita com maiores perturbações, próxima a uma região de instabilidade no plano  $a_p \times e_p$  do sistema *HIP 82817*, com parâmetros orbitais  $a_p = 0.5075$  e  $e_p = 0.1125$ . O método utilizado para encontrar essa órbita será apresentado adiante, no capítulo 6. Os espectros para os elementos orbitais em coordenadas de Jacobi do planeta se encontram nas figuras 5.18 e 5.19.

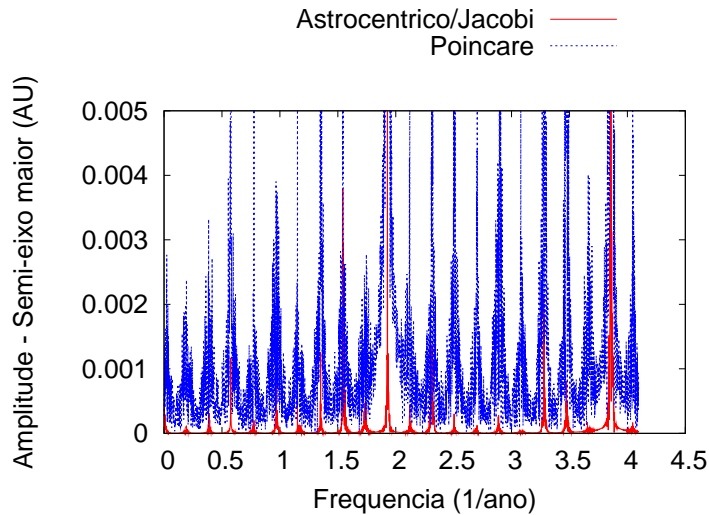


Figura 5.18: Espectro de Fourier para a evolução temporal do semi-eixo maior nas coordenadas Astrocentrica, de Jacobi e de Poincaré do planeta num sistema de movimento não-harmônico

Comparando as figuras 5.18 e 5.19 com as figuras de 5.14 a 5.17, é possível notar que os picos secundários (correspondentes a harmônicos e combinações lineares das frequências naturais do sistema) possuem amplitudes maiores nos espectros no sistema instável que no sistema estável. Nesse caso, pode-se dizer que o movimento do sistema é *altamente não-harmônico*. Além disso, a grande intensidade do ruído, principalmente no espectro da figura 5.18, é um indício que as frequências fundamentais do movimento do planeta estão variando, o que é um indicativo de um sistema caótico.

Por apresentar variações de menor amplitude, o sistema de Jacobi mostra-se ideal,

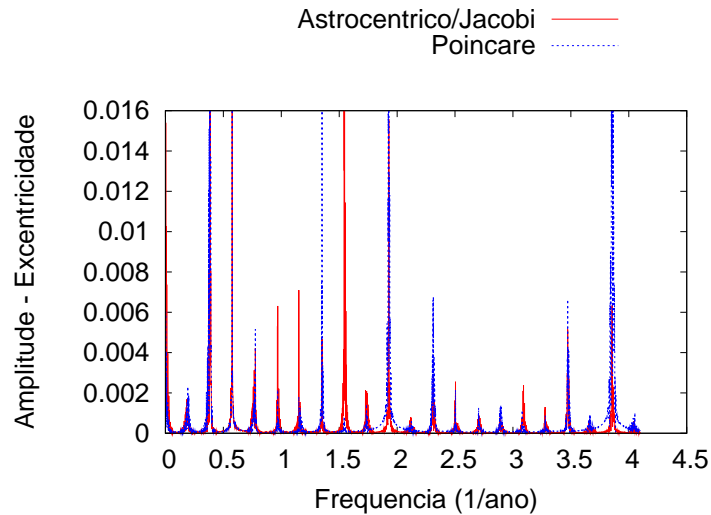


Figura 5.19: Espectro de Fourier para a evolução temporal da excentricidade nas coordenadas Astrocêntrica, de Jacobi e de Poincaré do planeta num sistema de movimento não-harmônico

comparado com os sistemas astrocêntrico e de Poincaré, para o estudo dinâmico de planetas em órbitas do tipo satélite, pois isso facilitará a identificação de frequências diferentes no caso de problemas mais complexos, como o caso ressonante.

Caso se deseje uma resolução maior na região de mais longo período, como em uma análise das componentes periódicas seculares, basta aumentar o intervalo de tempo entre os pontos  $\Delta$ , de modo a diminuir a frequência de Nyquist. Entretanto, esse processo não contém filtragem alguma, e portanto as frequências mais altas que a frequência de Nyquist podem aparecer como frequências espúrias no espectro. Uma maneira de identifica-las é, para um mesmo sistema, mudar a frequência de Nyquist, em duas integrações distintas. As frequências fundamentais do sistema devem permanecer as mesmas, mas as frequências espúrias devem mudar, já que seu aparecimento depende do valor da frequência crítica.

## 5.4 Espectros Dinâmicos

Para estudar a variação das componentes periódicas do movimento em função de parâmetros do sistema, foram construídos espectros dinâmicos. A descrição desse critério pode ser encontrada em detalhes em Ferraz-Mello et al. (2005). Os espectros dinâmicos são construídos com os valores das frequências dos picos dos espectros de Fourier calculados para uma série de sistemas. A série de sistemas é feita fixando todos os parâmetros orbitais do planeta a menos de um, como, por exemplo, o semi-eixo maior ou a excentricidade, e

nesse elemento orbital escolhido, são feitas variações pequenas e contínuas, de modo a obtermos curvas com a evolução das componentes periódicas de um determinado parâmetro do sistema com relação ao parâmetro inicial escolhido.

Os espectros dinâmicos foram calculados nos elementos orbitais  $a_p$ ,  $e_p$ ,  $\lambda_p$ ,  $\lambda_e$  e  $\varpi_p$  do planeta e da estrela secundária. Note que para o caso restrito do problema de três corpos, a perturbação na órbita das estrelas devido ao planeta é mínima, e portanto é feita a aproximação que ambas as estrelas movem-se pelo resultado clássico do movimento de dois corpos, e seus parâmetros orbitais são constantes, e assim,  $\Delta\varpi = \varpi_p - \varpi_e \approx \varpi_p$ . O parâmetro variável escolhido para essa análise foi o semi-eixo maior inicial do planeta, que variou no intervalo  $0,1AU < a < 0,6AU$ . Caso exista um encontro muito próximo (colisão) ou o planeta seja expulso do sistema, o programa terá como saída nenhum pico para aquele conjunto de condições iniciais. Nas figuras de 5.20 a 5.24 são apresentados os resultados dos espectros dinâmicos calculados para esses elementos orbitais, e no eixo  $z$ , de forma de classificação de cores, é apresentada a amplitude de cada pico. Também são apresentados os mesmos dados em gráficos com a escala logarítmica na base 10 para as frequências, para um detalhe maior na região de longo período.

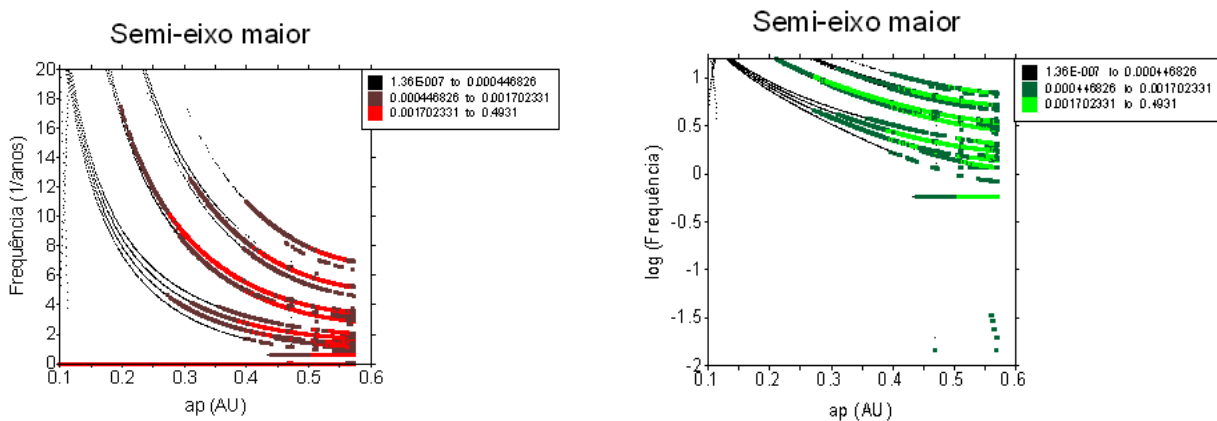


Figura 5.20: Evolução dos termos periódicos do elemento  $a_p$  com relação ao valor inicial de  $a_p$

A partir da série para  $\lambda_e$  da figura 5.22, é possível identificar uma das frequências fundamentais desse sistema, que é a frequência de rotação de uma estrela em relação a outra. Essa frequência se mostra também em todas as outras séries, dos parâmetros orbitais do planeta. A série de  $\lambda_p$  na figura 5.23, mostra principalmente uma curva com uma forma hiperbólica, de maior amplitude, que é a evolução da frequência orbital do

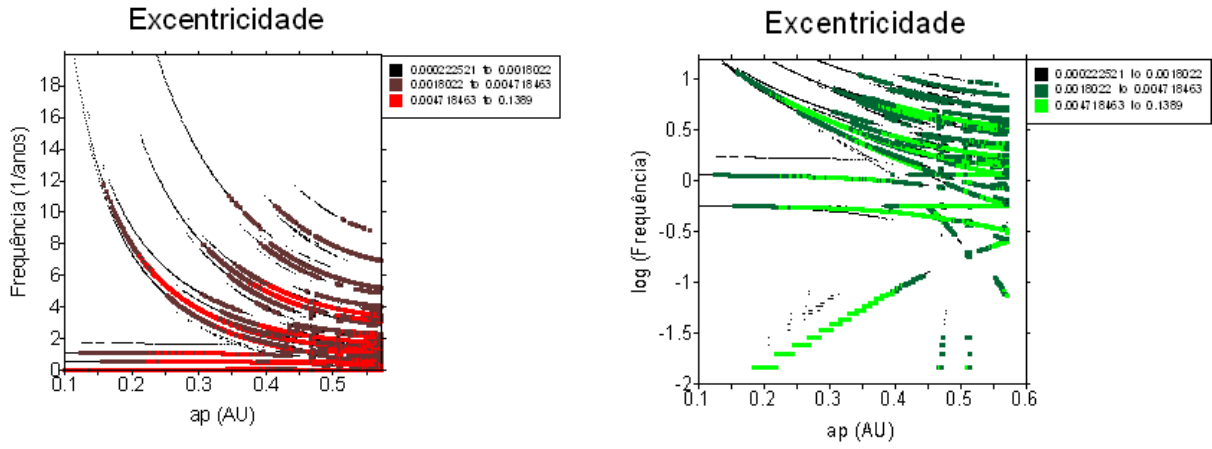


Figura 5.21: Evolução dos termos periódicos do elementos  $e_p$  com relação ao valor inicial de  $a_p$

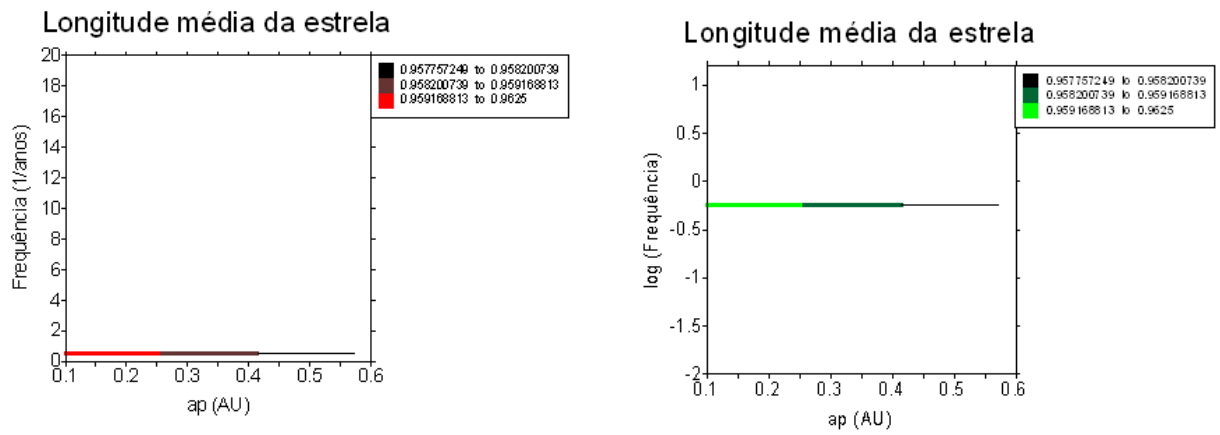


Figura 5.22: Evolução dos termos periódicos de  $\lambda_e$  com relação ao valor inicial de  $a_p$

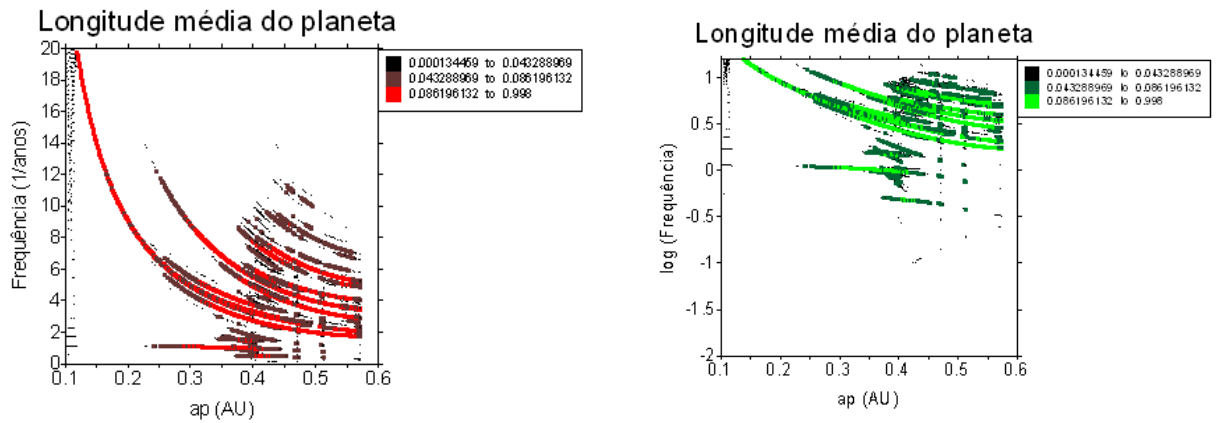
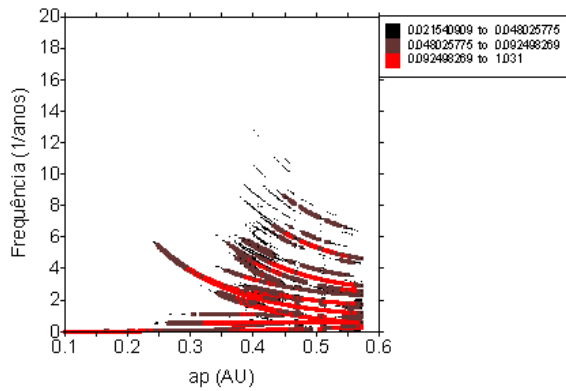


Figura 5.23: Evolução dos termos periódicos de  $\lambda_p$  com relação ao valor inicial de  $a_p$

## Longitude do pericentro do planeta



## Longitude do pericentro do planeta

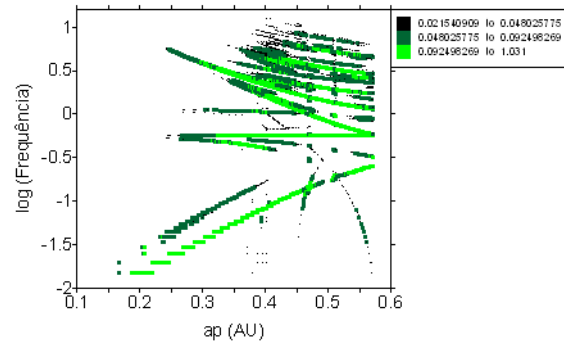


Figura 5.24: Evolução dos termos periódicos de  $\varpi_p$  com relação ao valor inicial de  $a_p$

planeta com o seu próprio semi-eixo maior, o que é razoável, já que pela terceira lei de Kepler temos  $f \propto a^{-3/2}$ . Essa mesma curva é identificada nas figura 5.20 e 5.21, assim como um grande número de harmônicos e combinações lineares entre as frequências. No gráfico 5.24 é possível identificar ambas as frequências orbitais, do planeta e das estrelas, mas além dessas, para valores da frequência bem próximos de zero (termos de longo período), uma terceira frequência que não é calculada como combinação de ambas as frequências orbitais, sendo identificada então como sendo a frequência secular de precessão da linha de periastro. De fato, sua componente pode ser observada na série de  $e_p$  no gráfico 5.21, o que concorda com o resultado válido para o caso secular de dois planetas e uma estrela, onde, como foi visto no capítulo 2, após um processo de média para eliminação dos termos de curto período, verifica-se que apenas a excentricidade e  $\Delta\varpi$  variam, e suas variações estão ligadas.

É possível também perceber, em todas as séries, que a partir de  $a_p \approx 0.35AU$ , as linhas das diferentes componentes começam a se cruzar, indicando portanto o aparecimento de *ressonâncias de movimentos médios*. Pode-se perceber também em  $a_p \approx 0.42AU$ ,  $a_p \approx 0.47AU$  e  $a_p \approx 0.51AU$  um número maior de picos, o que indica que próximo a esses valores existem ressonâncias de ordem maior. De fato, calculando os períodos com a terceira lei de Kepler, chegamos que em  $a_p \approx 0.429AU$  temos a ressonância de movimentos médios 5 : 1, em  $a_p \approx 0.460AU$  temos a ressonância de movimentos médios 9 : 2 e em  $a_p \approx 0.498AU$  temos a ressonância de movimentos médios 4 : 1.

Para o caso particular desse sistema, é possível notar também, a partir dos gráficos

5.21 e 5.24 que a frequência secular, conforme o planeta se aproxima da estrela secundária, vai aumentando, e no limite de estabilidade para esse caso, próximo de  $a_p = 0.57AU$ , a frequência secular se aproxima da frequência orbital das estrelas, o que acarretaria em uma espécie de *ressonância de movimentos médios tripla*, das frequências orbitais dos corpos e da frequência secular, e esse é um fenômeno que dificilmente aconteceria para o caso planetário.

Com análises feitas na forma de espectros dinâmicos, é possível determinar os limites de validade de modelos que possam tentar descrever os regimes de movimento do problema de três corpos restrito, como no caso de uma aproximação do problema de secular planetário.





## Critérios de Estabilidade

### 6.1 *Esfera de Hill*

Em um dado instante de tempo, ter-se-ão as posições das estrelas e do planeta no referencial da estrela principal. Dadas as posições e as massas dos corpos, é possível calcular a posição do centro de massas do sistema, e dessa maneira realizar uma mudança de referencial, para o referencial do centro de massas. Essa mudança foi feita com uma translação dos eixos ordenados, subtraindo os valores das coordenadas do centro de massas de todas as componentes vetoriais do sistema. Foi feita, em seguida, uma rotação no sistema, de modo que as estrelas se encontrassem sobre o eixo  $x$ . Neste referencial, utilizando a relação (2.17), calculando numericamente a raiz da equação, é possível calcular a posição do ponto de Lagrange  $L_1$ , e aplicando as transformações inversas, chega-se na posição do ponto de Lagrange ao longo da órbita da estrela binária.

O critério desenvolvido consistia realizar em cada instante uma comparação entre a distância do planeta à estrela principal  $R$  e a distância da curva de velocidade zero que contém o ponto  $L_1$  à estrela principal. O critério é baseado nas formas das curvas de velocidade zero, e sua motivação vem basicamente de, caso o planeta atinja, em um dado instante, uma posição externa à curva de velocidade zero do ponto de Lagrange, é possível dele ser expulso do sistema ou migrar para a estrela secundária. Caso o planeta nunca atinja essa curva, será um indício que o mesmo não possui energia suficiente para atravessar o poço de potencial, mantendo assim seu movimento confinado.

Entretanto, como foi visto no capítulo 2, a forma superfície de velocidade zero que define o ponto  $L_1$  não é uma circunferência perfeita, sendo mais alongada na direção do próprio ponto  $L_1$ . Portanto, mesmo que o planeta permaneça a uma distância menor que

a distância da estrela central ao ponto  $L_1$ , ele pode estar localizado fora da superfície de velocidade zero. Para o critério, devemos então tomar a distância máxima da estrela central que defina uma circunferência que se aproxime da forma da superfície de velocidade zero que contém o ponto  $L_1$ . O ponto escolhido para essa aproximação foi o ponto  $L_{min}$ , como foi definido no capítulo 2, e pode ser calculado utilizando (2.18).

A figura 6.1 representa a superfície de velocidade zero que contém o ponto  $L_1$  para um sistema de estrelas de massas  $m_1 = 1M_\odot$  e  $m_2 = 0,5M_\odot$  separados de uma distância  $d = 1AU$ , e duas circunferências, uma com raio igual a distância da estrela 1 ao ponto  $L_1$ , e a outra com raio igual a distância da estrela 1 ao ponto  $L_{min}$ .

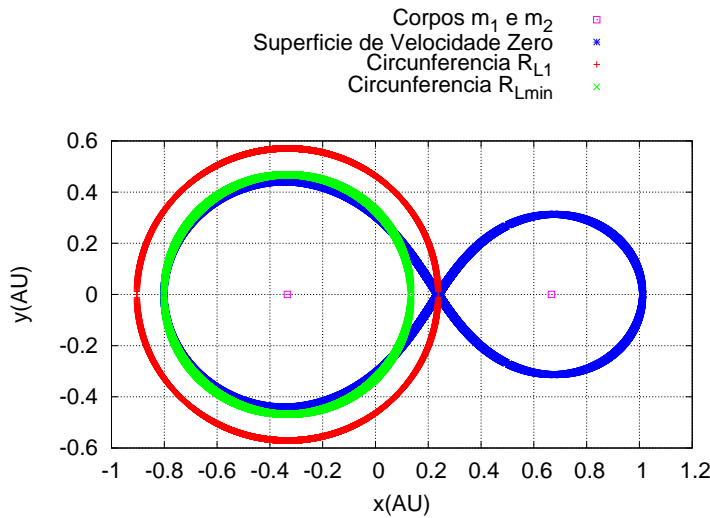


Figura 6.1: Superfície de velocidade zero e circunferências com as distâncias máxima ( $R_{L_1}$ ) e mínima ( $R_{L_{min}}$ ) da superfície até a estrela 1

Entretanto, como pode-se ver a partir das figuras de 3.1 a 3.3, as órbitas das estrelas binárias, num caso geral, não são circulares. O que é feito nesse caso é recalculá-las em cada instante para cada separação mútua entre as estrelas uma superfície de velocidade zero como 6.1. Como a distância relativa das estrelas varia com o tempo, a posição do ponto  $L_1$  e conseqüentemente do ponto  $L_{min}$  também variam, com o período da órbita das estrelas binárias.

Definido o critério, as comparações foram feitas instantaneamente no programa. Para cada instante da integração, era calculada a posição do ponto  $L_{min}$  e a posição do planeta. Em seguida, era feita a comparação entre a distância do planeta à estrela central  $R$  e a distância do ponto  $L_{min}$  até a estrela central  $R_{L_{min}}$ . Caso  $R < R_{L_{min}}$  durante todo o tempo

de integração, o critério diz que a órbita é estável, mas caso  $R > R_{L_{min}}$  em algum instante, o critério diz que a órbita é instável.

Esse algoritmo foi implementado dentro de uma varredura de condições iniciais, isto é, foi feito um programa que variava as condições iniciais, e para cada condição inicial ele determinava se a órbita era estável ou não.

## 6.2 Máxima Distância Apocêntrica

O critério da Máxima Distância Apocêntrica ( $AD_{max}$ ) tem a mesma origem do critério de Hill, baseado no mesmo fenômeno físico. Entretanto, ao invés de se basear na posição instantânea do planeta, é feito o cálculo do ponto mais distante de sua órbita à estrela central (ou seja, o apocentro da órbita) em cada instante, com os elementos orbitais instantâneos. Essa distância é comparada com a distância do ponto  $L_{min}$ , definido no capítulo 2, à estrela central, de maneira similar que foi feito no critério da Esfera de Hill.

A diferença prática desse critério comparando com o critério da Esfera de Hill é que mesmo que um planeta não esteja distante o suficiente da estrela central, sua órbita osculadora pode estar cruzando a superfície de velocidade zero limite. Como os elementos orbitais estão variando, e considerando o caso não ressonante, mesmo que por um número de períodos o planeta não cruze a superfície de velocidade zero, se sua órbita cruzar, o planeta eventualmente irá cruzar, sendo esse um critério que pode prever se a órbita ficará estável por tempos maiores que o tempo de integração.

Por outro lado, esse critério poderá acusar órbitas em regimes de ressonâncias de movimentos médios instáveis, quando podem ser casos estáveis. Em regimes ressonantes, a dinâmica do problema pode proteger o planeta de encontros próximos e colisões com a estrela secundária, já que mesmo que o apocentro de sua órbita cruze em algum instante a superfície de velocidade zero que contém o ponto  $L_1$ , a combinação de períodos pode ser tal que o planeta apenas passe pelo apocentro quando este estiver interno à superfície de Hill.

Outra informação que pode ser tirada desse critério é a relação geométrica simples que limita os elementos orbitais para valores de uma órbita estável. Dados os elementos orbitais  $a_p$  e  $e_p$  de um planeta,  $a_2$  e  $e_2$  da binária e as massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_p$ , das estrelas e do planeta, respectivamente, a órbita do planeta será estável se:

$$a_p < \frac{d_{\text{crit}}(a_e, e_e, m_1, m_2, m_p)}{1 + e_p}, \quad (6.1)$$

onde  $d_{\text{crit}}$  é a distância da estrela central até o ponto  $L_{\text{min}}$  calculado no instante de distância mútua mínima entre as estrelas, ou seja, no pericentro da órbita das estrelas. Essa relação envolve o mínimo cálculo numérico, apenas procurando os zeros de algumas funções, é possível obter um resultado rápido com alta precisão sem depender de integrações numéricas, sendo ideal portanto para análises preliminares de estabilidade de órbitas.

### 6.3 Máxima Excentricidade

O critério da Máxima Excentricidade ( $e_{\text{max}}$ ) foi introduzido por Érdi et al. (2004) e sua grande vantagem é que ele consiste num método de simples aplicação e de rápida convergência.

Durante a integração numérica, em um dado instante de tempo, onde se tem as coordenadas e velocidades espaciais do planeta e das estrelas, são calculados os parâmetros orbitais do planeta. Como o a segunda estrela introduz uma perturbação no planeta, seus elementos orbitais irão variar no tempo. Com um algoritmo de comparação, é possível se determinar qual o maior valor que a excentricidade atinge para cada conjunto de condições iniciais. O critério diz que, quanto maior esse valor da excentricidade, mais instável será a órbita, e nos casos que há a expulsão do planeta, é atribuído à excentricidade o valor limite  $e = 1$ .

### 6.4 Número Espectral

Um critério mais robusto para detecção de caos e instabilidade orbital é o baseado no número de componentes periódicas que compõe o movimento do corpo chamado de critério do Número Espectral, ou *SAM* (*Spectral Analysis Method*) (Michtchenko et al., 2002).

A evolução temporal de um elemento orbital qualquer de um corpo em um sistema deverá ter a forma genérica dada por (6.2).

$$ele = \sum_k A_k e^{2\pi \vec{f} \cdot \vec{k} t}, \quad (6.2)$$

onde  $\vec{f}$  é um vetor cujas componentes são as frequências fundamentais do movimento e  $\vec{k}$  é um vetor de componentes inteiras, com número de componentes igual ao número de frequências fundamentais do sistema, ou seja, igual ao número de graus de liberdade do sistema.

No caso em que o movimento é regular, as frequências fundamentais serão constantes no tempo e o valor de  $A_k$  decrescerá rapidamente com  $k$ , o que fará com que a transformada de Fourier do elemento apresente um número contável de frequências, onde é possível identificar as frequências fundamentais do sistema, seus harmônicos e combinações entre elas. Cada frequência é identificada no espectro como uma função  $\delta$  de Dirac, para o caso ideal, com um número infinito de pontos.

Já no caso em que o movimento é caótico, por outro lado, as frequências fundamentais variam no tempo, o que fará com que o espectro possua um número infinito de picos. Cada pico também já não poderá ser representado pela função  $\delta$  de Dirac, mesmo no caso ideal.

O critério do Número Espectral associa cada órbita ao número de picos de seu espectro de Fourier, sendo mais regular o movimento quanto menor for o número de picos do espectro. A definição de um pico é determinada como os pontos os quais a derivada do espectro muda do sinal positivo para o negativo.

Para um caso real, entretanto, o espectro de Fourier não mais será uma sequência de funções  $\delta$  de Dirac, mas possuirá ruídos devido a imprecisões numéricas e ao fato de não existirem infinitos pontos para a transformação. Esses tipo de ruído, que não está associado a caos no movimento, estará presente tanto em espectros de sistemas regulares quanto em caóticos, e deverá ser cortado. Define-se então um *pico válido* aquele que possuir uma amplitude maior que 5% da amplitude do maior pico do espectro. Como o número de picos de uma transformação de um sistema caótico é infinito, é definido um valor limite para o número máximo de picos de 200.

Devido ao fato das funções angulares possuírem uma descontinuidade (quando o ângulo passa de  $2\pi$  para 0), foi aplicada a função *seno* nessas funções antes de cada transformação, com o fim de simplificar o espectro, restando apenas as frequências fundamentais do sistema na transformação,

Para a aplicação do critério então são feitas integrações numéricas do movimento e armazenados os dados em um vetor. Após a integração de uma dada órbita, para um

intervalo de tempo suficientemente longo e para uma dada configuração de condições iniciais, são feitas as transformadas de Fourier dos elementos orbitais, e calculados os números espectrais. Após ser varrido um conjunto de condições iniciais, tem-se então um outro mapa dinâmico para um sistema, associando um número para cada condição inicial que diz respeito sobre a estabilidade e a caoticidade daquele sistema.

## 6.5 Resultados e Comparações entre os Critérios

Para o trabalho de estudo dos critérios de estabilidade, foi selecionado o mesmo sistema *HIP 82817* para ser analisado. Como desejava-se estudar o movimento de um planeta fictício em relação as estrelas, por simplicidade foi adotado que a órbita das estrelas estaria contida no plano de referência, e que o movimento delas estaria começando pelo pericentro, isto é, os ângulos  $i$ ,  $\Omega$  e  $\omega$  foram adotados como sendo nulos inicialmente.

Inicialmente, desejava-se determinar a estabilidade do planeta no espaço de semi-eixos maiores e excentricidades iniciais. Para um conjunto de semi-eixos maiores e excentricidades iniciais, foram testados parâmetros que implicariam numa órbita estável ou numa órbita instável.

Como desejava-se que a órbita do planeta fosse do tipo satélite (o movimento apenas em torno da estrela principal), o intervalo de variação do semi-eixo maior inicial do planeta foi de aproximadamente  $0.1AU \leq a_p \leq 0.6$ , ou seja, de uma posição próxima à estrela central até aproximadamente a posição do ponto  $L_1$  do sistema quando as estrelas estavam em sua maior separação. A excentricidade inicial foi variada no intervalo  $0 \leq e_p \leq 0.9$ .

O tempo total de integração para cada órbita dos mapas foi estimado baseado nos conceitos de *wavelets* (Michtchenko e Nesvorny, 1996; Press, 2002), nos quais se busca obter o número ideal de períodos do sinal que possa ser caracterizado pela melhor frequência. A transformada de *wavelet* é aplicada em funções periódicas, similar à transformada de Fourier, mas representam uma função no espaço de frequências e tempo, enquanto a transformada de Fourier representa funções no espaço de frequências e amplitudes. Sua vantagem sobre a transformação de Fourier se dá justamente no caso em que as frequências de uma dada função variam no tempo, e sua aplicação fornece uma frequência para cada instante da função. Para o seu cálculo, é realizada uma operação de correlação entre o sinal periódico que se quer analisado e uma função base de dois parâmetros. Essa função

base *wavelet* pode possuir diversas formas, mas possui algumas características que são necessárias para que a transformação possa acontecer.

Em Michtchenko e Nesvorny (1996) mostra-se a função Gaussiana é uma escolha conveniente para essa função base, e nessa mesma análise, de forma a transformação representar uma frequência dada com o maior intervalo de confiança possível, o tempo total para a transformação deveria conter ao menos seis vezes o período de um dado sinal, para cada sinal. Como a mais baixa frequência de um dado sistema será a frequência secular, o tempo necessário para caracterizar todas as frequências do sistema deverá ser, ao menos, o período necessário para caracterizar a frequência secular. Esse tempo foi apenas estimado com a intenção de cobrir os efeitos dinâmicos de encontros próximos e configurações possíveis relativas entre o planeta e as estrelas, já que nos casos de órbitas caóticas as instabilidades podem se manifestar em qualquer instante, pela própria natureza do caos.

Entretanto, como foi visto na seção 5.4, a frequência secular depende das condições iniciais, e é maior quanto maior for a perturbação da estrela secundária no planeta. Ao observar o gráfico 5.24, vemos que a frequência secular varia de aproximadamente  $f \approx 10^{-2.0} = 0.01\text{anos}^{-1}$  a  $f \approx 10^{-0.5} \approx 0.3\text{anos}^{-1}$ . Assim, o intervalo de tempo necessário para seis períodos seculares será de  $T = 600$  anos a  $T = 200$  anos.

Para realizar a comparação, foram feitas três séries de simulações, com os tempos de integração  $T = 200$  anos,  $T = 1000$  anos e  $T = 10000$  anos, e para cada série aplicados os critérios da *Esfera de Hill*, da *Excentricidade Máxima* e do *Número Espectral*. Para os mapas dos tempos de integração  $T = 200$  anos e  $T = 1000$  anos, a grade de variação dos parâmetros iniciais foi de  $200 \times 200$  pontos, mas para o mapa de  $T = 10000$  anos, devido ao longo tempo de trabalho numérico necessário, foi feito com uma grade de  $100 \times 100$  pontos.

No eixo  $z$  de escala de cores é apresentado o número utilizado para cada critério, como foi introduzido nas descrições de cada critério. Nos mapas para o critério da *Esfera de Hill*, o eixo  $z$  contém apenas dois números; 1, que consta órbitas *estáveis*, e  $-1$  que consta órbitas *instáveis*. Já nos mapas para o critério  $e_{max}$ , o eixo  $z$  consta a diferença entre excentricidade máxima que o planeta atingiu naquela órbita do valor inicial de sua excentricidade, e sendo atribuído o valor limite 1 para o caso que o planeta é expulso. Nos mapas para o critério do *Número Espectral* o eixo  $z$  consta o número de picos do espectro



de Fourier para cada órbita, e sendo atribuído o valor limite 200 para o caso que o planeta é expulso.

### 6.5.1 Esfera de Hill

Nas figuras de 6.2 a 6.10 são apresentados os mapas dinâmicos calculados com o critério de Hill para os três tempos de integração.

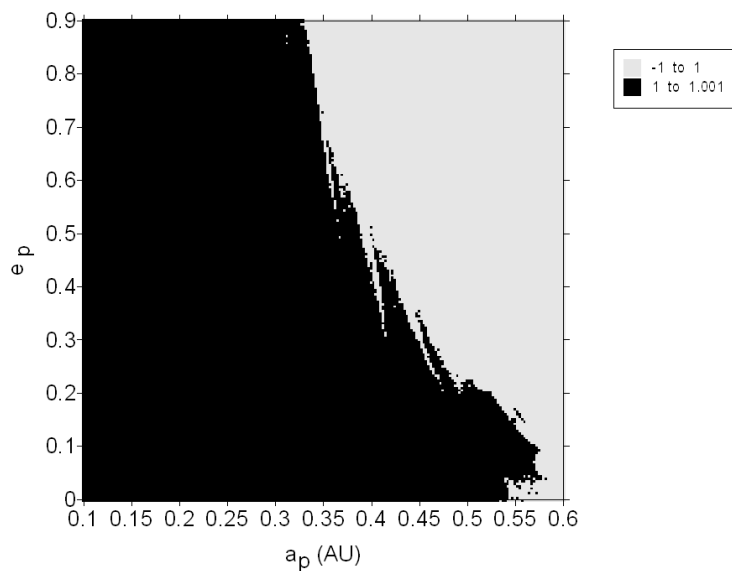


Figura 6.2: Mapa dinâmico para o sistema *HIP 82817* com o critério da *Esfera de Hill* para 200 anos de integração

Ao se comparar as figuras de 6.2 a 6.4, os mapas de Hill para os três tempos de integração, pode-se concluir que o critério apresentou os mesmos resultados. Isso pode ser explicado pelo fato que o critério de Hill apenas fornece se uma órbita é estável ou não, e isso caracteriza basicamente a região crítica do mapa dinâmico, onde se tem a separação entre regimes estáveis e instáveis de movimento. Como foi estimado anteriormente, nessa região um tempo de integração de 200 anos é suficiente para aproximadamente seis períodos seculares para o planeta, e integrações por tempos maiores que esse já não são necessárias para a caracterização da menor frequência conhecida dos sistemas, a frequência secular de precessão da linha de periastro. A menos que existam instabilidades derivadas de caos, de muito longo período, esse deve ser o tempo necessário para a caracterização global do espaço paramétrico para esse sistema.

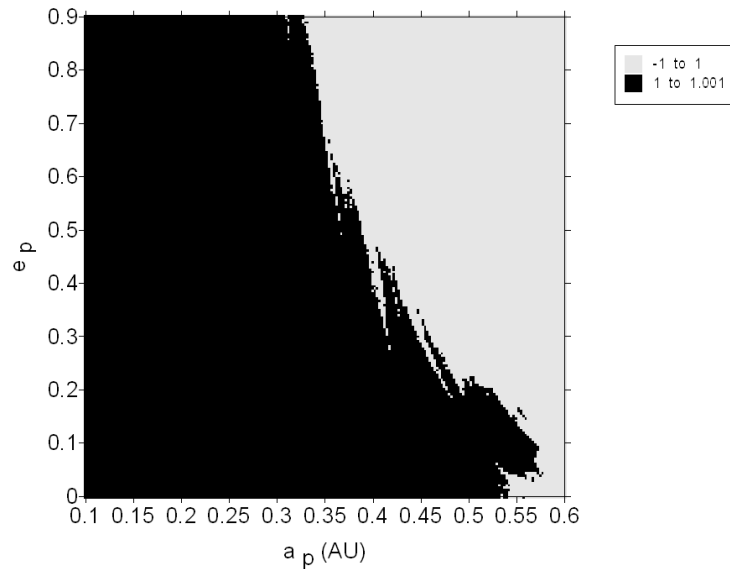


Figura 6.3: Mapa dinâmico para o sistema *HIP 82817* com o critério da *Esfera de Hill* para 1000 anos de integração

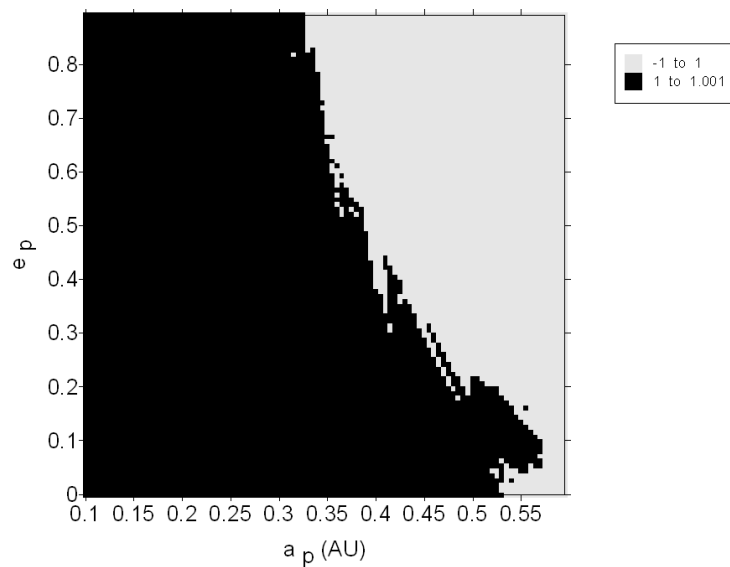


Figura 6.4: Mapa dinâmico para o sistema *HIP 82817* com o critério da *Esfera de Hill* para 10 mil anos de integração

### 6.5.2 $e_{max}$

Nas figuras de 6.5 a 6.7 são apresentados os mapas dinâmicos calculados com o critério  $e_{max}$  para os três tempos de integração.

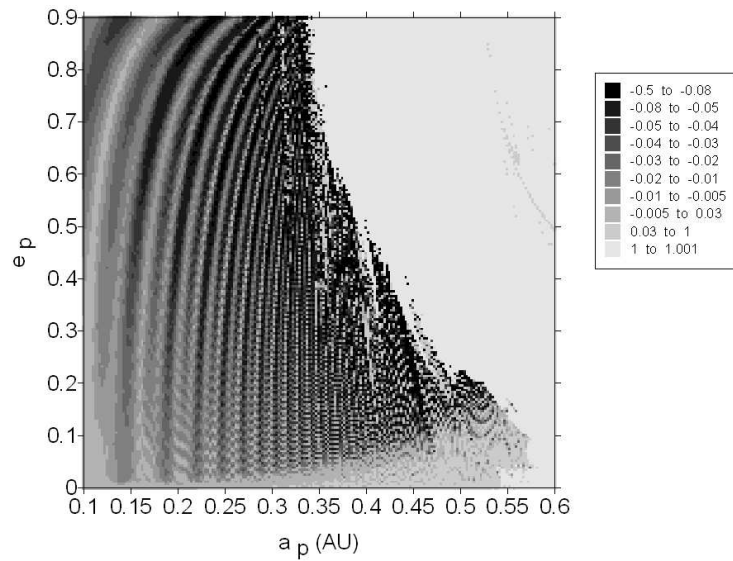


Figura 6.5: Mapa dinâmico para o sistema *HIP 82817* com o critério da *Excentricidade Máxima* para 200 anos de integração

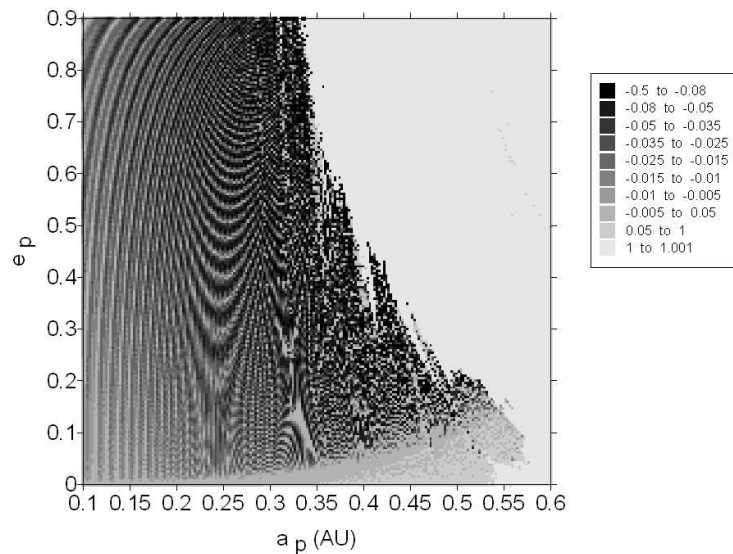


Figura 6.6: Mapa dinâmico para o sistema *HIP 82817* com o critério da *Excentricidade Máxima* para 1000 anos de integração

### 6.5.3 SAM

Nas figuras de 6.8 a 6.10 são apresentados os mapas dinâmicos calculados com o critério *SAM* para os três tempos de integração.

Ao comparar os mapas dos três critérios, é possível notar que, apesar das limitações e informações intrínsecas de cada mapa, os três critérios concordam sobre a região de estabilidade para os três tempos de integração, o que é um importante resultado de auto

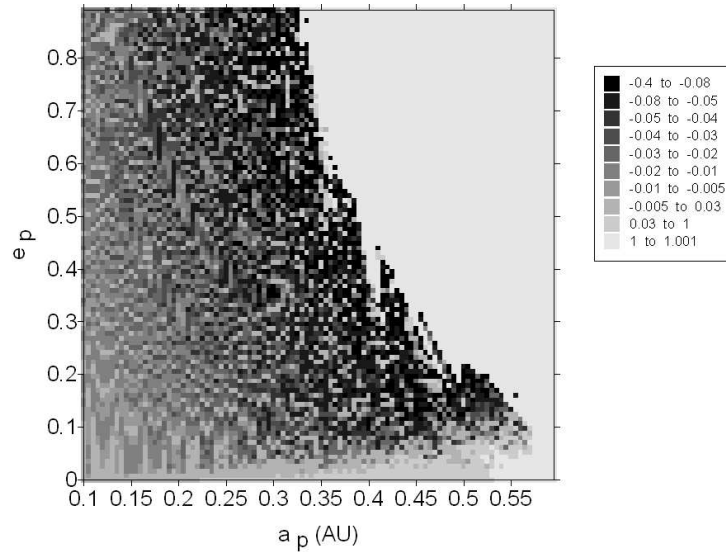


Figura 6.7: Mapa dinâmico para o sistema *HIP 82817* com o critério da *Excentricidade Máxima* para 10 mil anos de integração

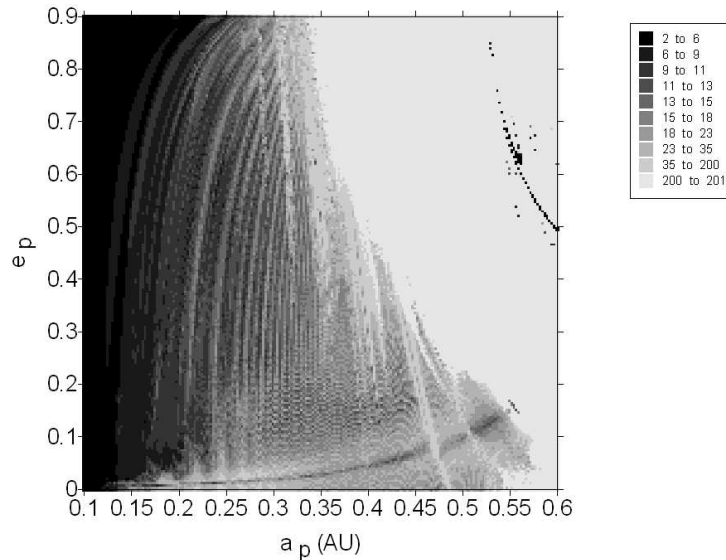


Figura 6.8: Mapa dinâmico para o sistema *HIP 82817* com o critério do *Número Espectral* para 200 anos de integração

consistência.

Comparando os mapas 6.5 e 6.8 do critérios *SAM* e  $e_{max}$  com as correspondentes aos mesmos critérios 6.6 e 6.9, de 1000 anos de integração, e 6.7 e 6.10, de 10 mil anos de integração, é possível perceber que as estruturas na região estável, enquanto compatíveis entre os critérios num mesmo tempo de integração, são diferentes quando comparados os mapas de 200 anos de integração com os outros dois. Isso pode ser explicado pelo mesmo

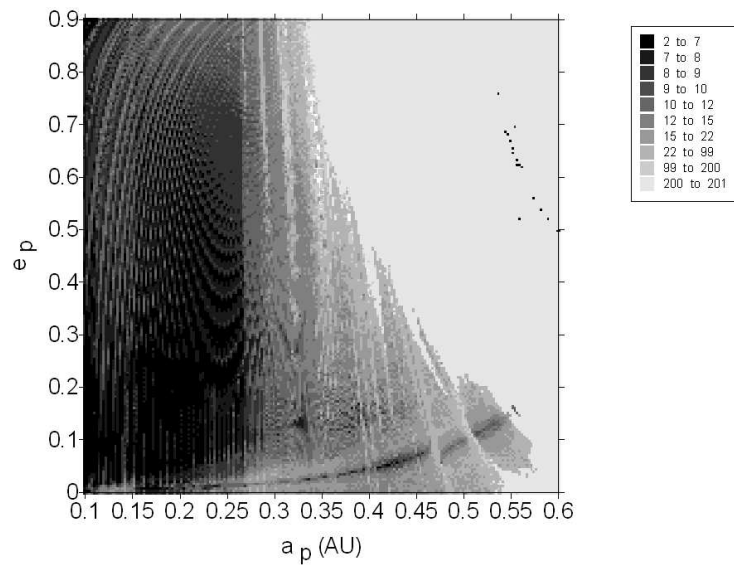


Figura 6.9: Mapa dinâmico para o sistema *HIP 82817* com o critério do *Número Espectral* para 1000 anos de integração

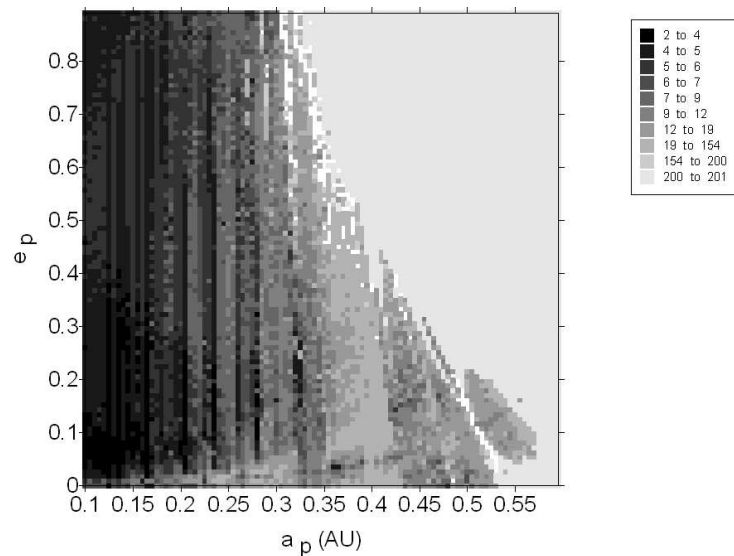


Figura 6.10: Mapa dinâmico para o sistema *HIP 82817* com o critério do *Número Espectral* para 10 mil anos de integração

motivo que justificou a coincidência do critério de Hill para os três tempos de integração: enquanto na região próxima ao limite o período de integração necessária para seis períodos seculares era de 200 anos, para as regiões mais afastadas esse tempo necessário passa a ser de 600 anos, quando a perturbação na órbita do planeta é menor. Dessa maneira, para essa região, os mapas com integração de 200 anos não caracterizam suficientemente bem o sistema, e portanto podem apresentar resultados diferentes.

É possível notar também que, apesar das limitações e informações intrínsecas de cada mapa, os três critérios concordam sobre a região de estabilidade dos mapas para os três tempos de integração, o que é um importante resultado de auto consistência.

Pode-se perceber também nos mapas do critério *SAM* uma faixa na região aproximadamente de  $0.0 < e_p < 0.2$ , de maior estabilidade. Essa e outras estruturas trazem informações sobre a dinâmica e os regimes de movimentos do planeta no sistema, e que não podem ser detectadas de maneira alguma pelo critério da esfera de Hill, que apenas pode determinar se uma órbita é estável ou não. No caso da estrutura mencionada, o critério de número espectral sugere que exista uma menor variação dos elementos orbitais, o que indica que se tratam de casos próximos a uma solução estacionária para o problema, e que os pontos na proximidade oscilem em torno dessa faixa.

Com o critério  $e_{max}$  é possível detectar algumas estruturas, mas não todas as estruturas que podem ser detectadas pelo critério *SAM*. Isso se deve ao fato do critério não dar informações sobre toda a evolução do planeta, mas apenas o valor *crítico* da órbita osculadora, e a diferença desse valor com relação ao valor inicial, que não necessariamente será o valor médio daquele elemento.

Assim como na seção 5.4, é possível identificar faixas de instabilidade em meio a uma região de estabilidade, que não são consequência simplesmente da esfera de Hill. As regiões identificadas, que são para algumas faixas com  $a_p = constante$  correspondem a regimes de ressonâncias de movimentos médios do planeta com as estrelas. É importante ressaltar que os mapas dinâmicos foram construídos em uma grade de elementos orbitais iniciais, e portanto, o valor médio dos elementos osculadores de cada uma das órbitas não necessariamente será igual ao valor do elemento inicial, justificando as faixas de instabilidade não serem exatamente verticais nos mapas apresentados, como a faixa na região  $0.40AU < a_p < 0.47AU$ .

Dos critérios apresentados, pode-se concluir então que a esfera de Hill é um critério pobre, do ponto de vista da análise dinâmica do movimento, mas para o seu propósito apresenta resultados em curto tempo de integração e é de fácil implementação numérica, pode ser aplicado para análises preliminares sem que seja perdido muito tempo de integração. O critério  $e_{max}$  é de implementação muito simples, mas apesar de fornecer alguma informação sobre a dinâmica do movimento no regime estável, não fornece tanta informação

quanto o critério *SAM*. Este último é o que fornece mais informações sobre os regimes de movimento, mas sua implementação requer um trabalho numérico muito maior que os critérios anteriores, o que torna desfavorável sua aplicação em um sistema que não se tenha nenhuma informação preliminar.

#### 6.5.4 $AD_{max}$

Uma análise diferente pode ser feita sobre o critério  $AD_{max}$ . Como foi apresentado na seção 6.2, uma relação teórica existe que limita os valores possíveis dos elementos orbitais do planeta dado um sistema binário (equação (6.1)). Com isso, é possível realizar uma comparação entre o valor teórico dessa grandeza com o valor calculado numericamente da mesma.

Para o mesmo sistema *HIP 82817* foi construído um novo mapa com o eixo  $z$  na escala de cores dessa vez apresentando o valor máximo que a distância apocêntrica do planeta  $m = a_p(1 + e_p)$  atingiu durante o tempo total de integração, de 1000 anos. Para os casos em que o planeta era expulso ou colidia com uma das estrelas, o valor da máxima distância apocêntrica atribuído foi  $m_{max} = -1$ . O mapa obtido encontra-se na figura 6.11.

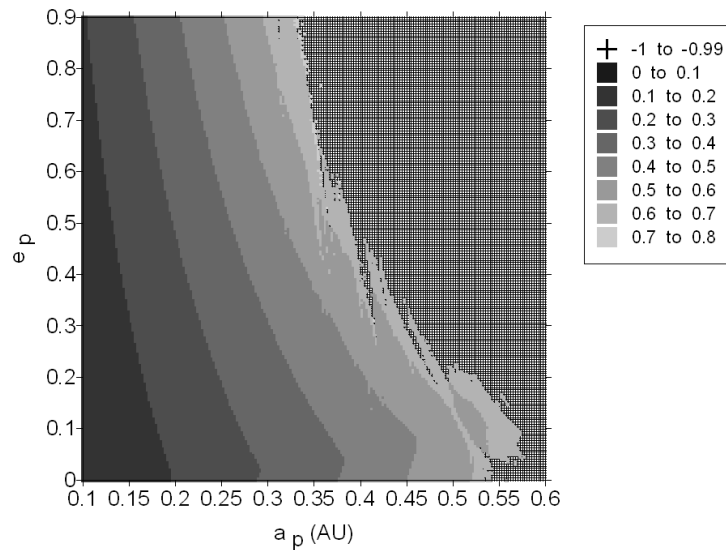


Figura 6.11: Mapa dinâmico para o sistema *HIP 82817* com o critério  $AD_{max}$  para 1000 anos de integração

Comparando a figura 6.11 com os mapas dos critérios da esfera de Hill, excentricidade máxima e número espectral, da seção anterior, pode-se perceber que a forma geral da região de estabilidade é similar para os três mapas. Entretanto, a informação obtida pelas

estruturas internas da região de estabilidade é diferente daquelas obtidas pelos outros critérios. É possível notar, no mapa da figura 6.11, que conforme se aproxima região de instabilidade, a distância apocêntrica máxima que o planeta atinge em cada órbita vai aumentando, de maneira uniforme, até atingir seu máximo na região de fronteira.

Para a comparação com o valor teórico do limite dado pela equação (6.1), foi construído o mapa 6.12, com o eixo  $z$  na escala de cores apresentando a diferença  $d_{crit} - m_{max}$  entre o valor máximo atingido pela distância máxima apocêntrica do planeta e a distância limite prevista pela relação (2.18), proveniente da esfera de Hill. Para o caso do sistema *HIP 82817* a distância crítica no momento de menor separação das estrelas é  $d_{crit} = 0.67555 AU$ . A diferença entre os valores numéricos e teóricos para a máxima distância apocêntrica obtidos pode estar em três intervalos diferentes, o que pode implicar três situações diferentes, que são apresentadas no mapa da figura 6.12:

- $d_{crit} - m_{max} < 0$ : Instável de acordo com o critério mas estável na simulação
- $0 \leq d_{crit} - m_{max} < d_{crit}$ : Estável de acordo com o critério e estável na simulação
- $d_{crit} - m_{max} = d_{crit} + 1$ : Instável de acordo com o critério e instável na simulação

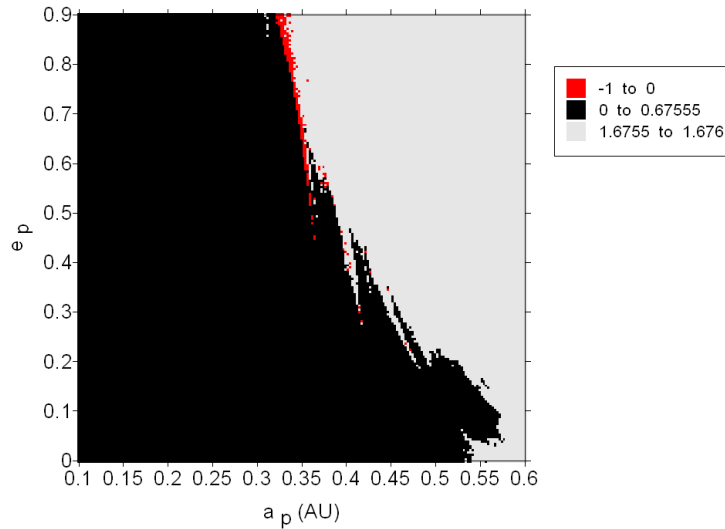


Figura 6.12: Mapa dinâmico para o sistema *HIP 82817* com a comparação entre o valor obtido numericamente para  $m_{max}$  e o valor teórico limite  $d_{crit}$  definido por (2.18)

Dessa maneira, é possível ver que a quantidade de pontos em que o critério acusa uma órbita instável, quando na verdade esta é estável corresponde a uma pequena fração dos



mapa, aproximadamente 0.5%. Além disso, o critério não acusou nenhuma órbita instável como sendo estável, o que é um parâmetro de confiança e segurança no critério.

Outra comparação que pode ser feita é entre o valor inicial da distância apocêntrica do planeta com o valor máximo que essa atinge. A figura 6.13 mostra no eixo  $z$  na escala de cores, para o mesmo conjunto de simulações, a diferença  $z = m_{\max} - a_p(1 + e_p)$  para a região de órbita estável, e a região hachurada correspondendo ao valor  $z = -1$ , para órbitas instáveis.

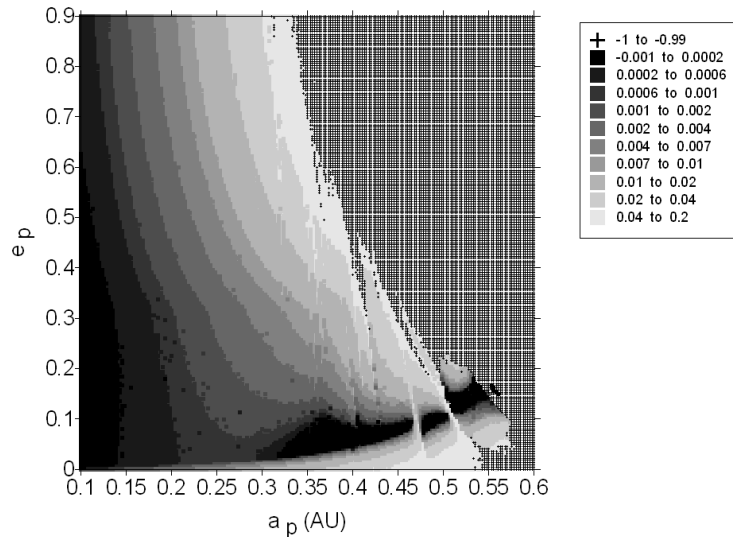


Figura 6.13: Mapa dinâmico para o sistema *HIP 82817* com a diferença entre o valor máximo que a distância apocêntrica atingiu e seu valor inicial

Ao analisar a figura 6.13 é possível perceber que, quanto mais próximo da região instável no mapa dinâmico encontra-se o planeta, maior será a amplitude do seu movimento, e portanto maior a diferença entre o valores máximo e inicial da distância apocêntrica. É possível notar também que existe uma faixa que começa em  $a_p \approx 0.30AU$  e  $e_p \approx 0.05$  que se estende até  $a_p \approx 0.55AU$  e  $e_p \approx 0.15$ , cuja diferença é aproximadamente nula. Essa faixa também pode ser identificada nos mapas dinâmicos de número espectral 6.8, 6.9 e 6.10 na seção anterior, que foi interpretada como sendo uma região do mapa de fases em que o movimento do planeta era estacionário e suas componentes harmônicas possuíam amplitude próxima de zero, o que entra em concordância com o resultado obtido a partir da análise da faixa no mapa da figura 6.13.

## Aplicação do Critério $AD_{max}$ na Caracterização Dinâmica do Problema de Três Corpos Restrito

Na caracterização dinâmica do problema, deseja-se obter informações gerais do sistema de três corpos, que possam ser aplicadas em outros sistemas sem a necessidade de um estudo específico de cada sistema. Para tanto, serão utilizados para esse estudo sistemas fictícios, com variações tanto nos parâmetros orbitais das estrelas e do planeta quanto na razão de massas entre as estrelas. Nessa primeira abordagem também será apenas considerado o caso de órbitas coplanares das estrelas e do planeta.

Como foi visto na seção 6.2, o critério da esfera de Hill sugere uma relação analítica para um limite dos elementos orbitais de um planeta em um dado sistema binário, para os quais o planeta permaneça em uma órbita confinada, o que define o critério  $AD_{max}$ . A relação é dada por 7.1.

$$a_{pH} < \frac{d_{crit}(a_e, e_e, m_1, m_2, m_p)}{1 + e_p}, \quad (7.1)$$

onde  $d_{crit}$  é calculado conforme 2.18, no capítulo 2.

Em Holman e Wiegert (1999) foi feito um estudo empírico da estabilidade de órbitas planetárias em estrelas binárias, com base num grande número de integrações numéricas sobre um amplo conjunto de condições iniciais. Com isso, por meio de um ajuste do tipo do *método dos mínimos quadrados*, os autores chegam em uma relação similar à relação 7.1, uma equação que fornece o maior semi-eixo maior possível para uma órbita estável inicialmente circular, dados os elementos orbitais e a razão de massas do sistema binário. Para enfatizar o interesse científico para esse estudo, vale citar o número de citações referente ao trabalho de Holman e Wiegert (1999), que é de 164. A relação

encontrada por Holman e Wiegert (1999) é reproduzida na equação 7.2.

$$a_{pC} < [(0.464 \pm 0.006) + (-0.380 \pm 0.10)\mu + (-0.631 \pm 0.034)e_e + (0.586 \pm 0.061)\mu e_e + (0.150 \pm 0.041)e_e^2 + (-0.198 \pm 0.074)\mu e_e^2]a_e, \quad (7.2)$$

onde  $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ , assumindo que o planeta está orbitando a estrela de massa  $m_1$ .

Entretanto, as distâncias definidas por (7.1) e (7.2) não correspondem a uma mesma grandeza física; enquanto (7.1) trata dos semi-eixos maiores e excentricidades *instantâneos* numa dada órbita, (7.2) trata apenas das condições iniciais para uma dada órbita, sendo a excentricidade inicial sempre nula. Como foi visto nas seções anteriores (5.2 e 5.3), o valor inicial dos elementos orbitais em geral é diferente do valor médio do mesmo elemento, ou do valor máximo que ele possa atingir. Portanto, para esse tipo de análise de estabilidade, onde é definida uma região espacial de movimento permitido, é necessário o conhecimento dos maiores elementos orbitais ou maiores distâncias que o planeta possa atingir.

Ainda assim, considerando as duas distâncias como grandezas de mesma natureza para fins de comparação, foram construídas as figuras 7.1 e 7.2, que na escala de cores mostram a diferença percentual entre os semi-eixos críticos  $(a_{pH} - a_{pC})/a_{pH}$  em dois espaços paramétricos diferentes: o primeiro para o plano  $a_e \times e_e$  ( $2.0AU \leq a_e < 15.0AU$ ,  $0.0 \leq e_e < 0.7$ ,  $\mu = 0.5$ ), considerando as estrelas de massas iguais, e o segundo para o plano  $a_e \times \mu_e$  ( $2.0AU \leq a_e < 15.0AU$ ,  $0.1 \leq \mu < 0.5$ ,  $e_e = 0$ ), considerando a órbita das estrelas como sendo circular. Em ambos os mapas foi considerada a órbita do planeta como sendo circular.

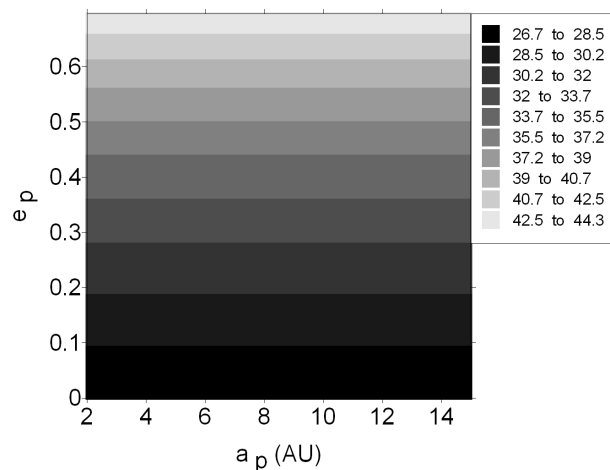


Figura 7.1: Diferença relativa percentual entre os semi-eixos maiores críticos calculados a partir das relações 7.1 e 7.2, para o espaço paramétrico  $a_e \times e_e$ , com  $\mu = 0.5$

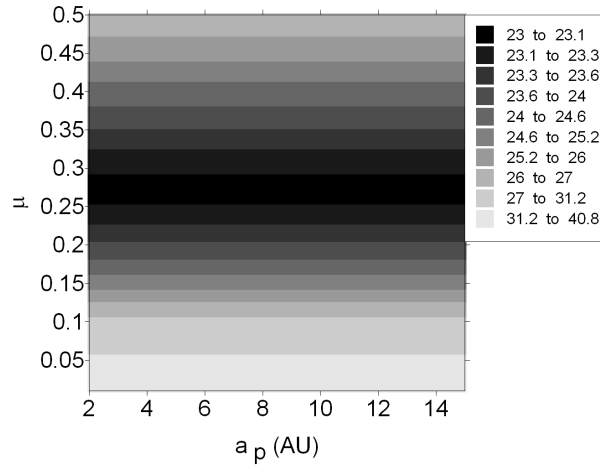


Figura 7.2: Diferença relativa percentual entre os semi-eixos maiores críticos calculados a partir das relações 7.1 e 7.2, para o espaço paramétrico  $a_e \times \mu$ , com  $e_e = 0$

A partir dos mapas construídos, é possível notar uma diferença relativa entre as distâncias definidas pelos dois critérios para todas as condições iniciais de 26.7% a 44.7% , na figura 7.1, e de 23.0% a 40.8% na figura 7.2. Como foi dito anteriormente, as grandezas são de naturezas diferentes, mas essa comparação já mostra a ordem da diferença que se encontraria entre comparar um elemento osculador (como o semi-eixo maior do planeta em um determinado instante) com o seu correspondente valor inicial.

Para verificar a validade das relações teóricas dadas por (7.1) e (7.2), foram construídos mapas dinâmicos dos planos paramétricos dados por  $a_e$ ,  $e_e$  e  $\mu$  para o cálculo das distâncias críticas  $AD_{max}$  e  $a_{crit}$ , apresentadas no eixo  $z$  na escala de cores dos mapas. Para cada condição inicial das estrelas, o planeta foi disposto em órbitas inicialmente circulares com diferentes semi-eixos maiores iniciais, variando entre  $10\%[a_e(1 - e_e)]$  e  $95\%[a_e(1 - e_e)]$ , com um intervalo de  $0.5\%[a_e(1 - e_e)]$ . Dessa maneira foi possível determinar qual foi o maior valor do semi-eixo maior inicial do planeta que o mesmo permaneceu numa órbita estável durante todo o tempo de integração (critério de Holman e Wiegert (1999)), e para essa órbita determinado qual a distância apocêntrica máxima que o planeta atingiu (critério  $AD_{max}$ ). As figuras 7.3 e 7.4 mostram os resultados das simulações para os critérios de Hill e de Holman e Wiegert (1999) para o espaço paramétrico  $a_e \times e_e$ , enquanto que as figuras 7.5 e 7.6 mostram os resultados das simulações para os critérios de Hill e de Holman e Wiegert (1999) para o espaço paramétrico  $a_e \times \mu$ .

Apesar da diferença intrínseca das definições (7.1) e (7.2), é possível definir uma nova

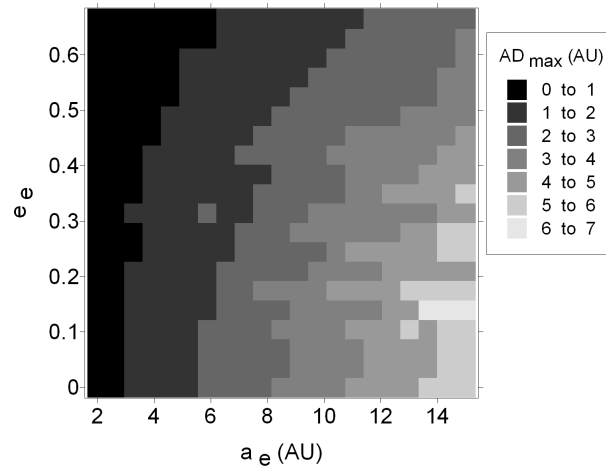


Figura 7.3:  $AD_{max}$  que um planeta atingiu em uma órbita estável para o espaço paramétrico  $a_e \times e_e$ , com  $\mu = 0.5$

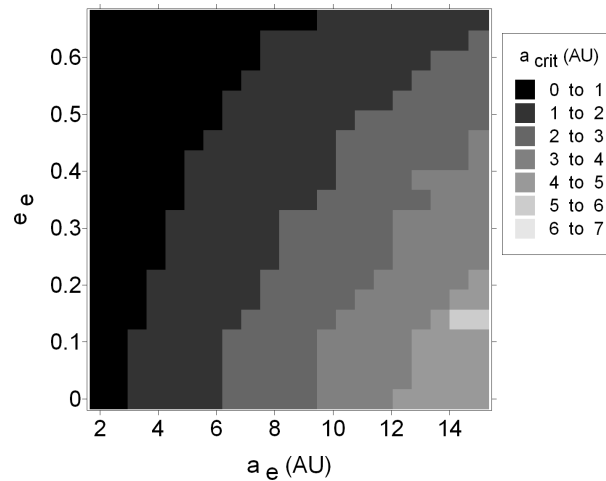


Figura 7.4: Maior valor do semi-eixo maior inicial que obteve uma órbita estável para o espaço paramétrico  $a_e \times e_e$ , com  $\mu = 0.5$

grandeza que represente a diferença relativa entre cada critério com seu correspondente valor calculado numericamente, para assim poder ser feita uma comparação entre os resultados dos critérios. A grandeza definida é a compatibilidade  $C$ , definida da forma geral (7.3), que deve fornecer uma diferença percentual entre o valor esperado previsto pelas relações teóricas (7.1) ou (7.2) e o valor obtido a partir de simulações numéricas.

$$C = 100\% - \frac{|x_{teórico} - x_{simulado}|}{x_{teórico}} \quad (7.3)$$

As figuras 7.7 e 7.8 mostram os resultados dessa comparação, com a grandeza definida por (7.3) no eixo  $z$ , na escala de cores para o espaço paramétrico  $a_e \times e_e$ . Para

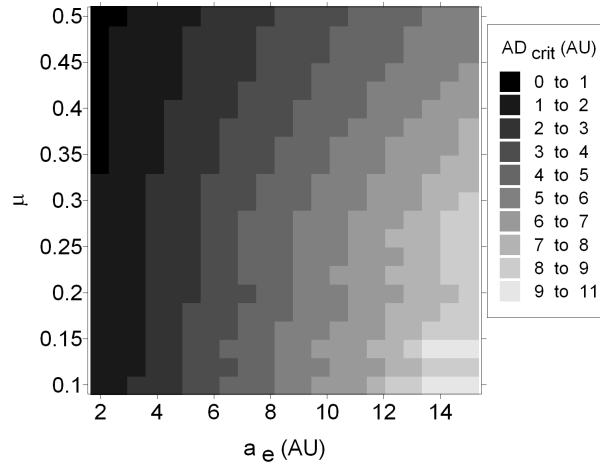


Figura 7.5:  $AD_{max}$  que um planeta atingiu em uma órbita estável para o espaço paramétrico  $a_e \times \mu$ , com  $e_e = 0$

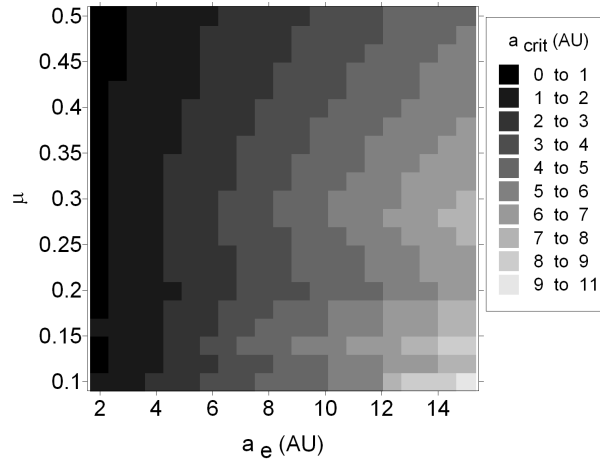


Figura 7.6: Maior valor do semi-eixo maior inicial que obteve uma órbita estável para o espaço paramétrico  $a_e \times \mu$ , com  $e_e = 0$

o caso do da relação sugerida pelo critério  $AD_{max}$ , em (7.1), a distância escolhida foi a distância apocêntrica instantânea do planeta, definida por  $a_p(1 + e_p)$ , e o valor simulado para comparação é o valor máximo que a distância apocêntrica atinge durante o tempo de integração, enquanto para o caso da relação (7.2) a distância escolhida foi o maior semi-eixo maior inicial que obteve órbita estável para cada configuração das binárias.

Na tabela 7.1 são apresentadas as frações do número de dados presente em cada mapa para cada valor de compatibilidade da escala de cores dos mapas.

A partir das figuras 7.7 e 7.8 é possível notar que a compatibilidade média do critério  $AD_{max}$  é menor que a proposta por Holman e Wiegert (1999), já que a população nos

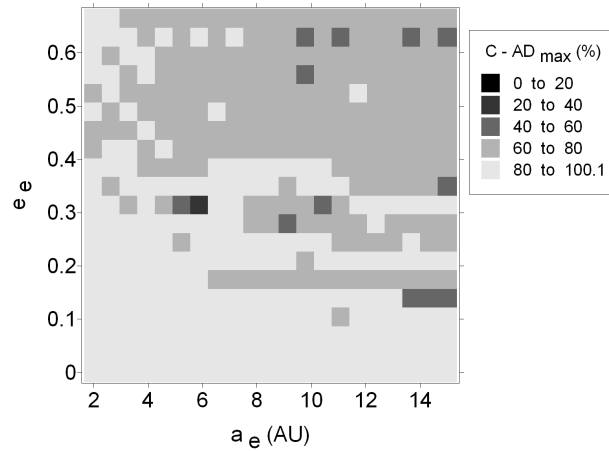


Figura 7.7: Compatibilidade entre o valor calculado teórico e o valor obtido por meio de simulações para a relação definida a partir do critério  $AD_{max}$ , para o espaço de fases  $a_e \times e_e$ , com  $\mu = 0.5$

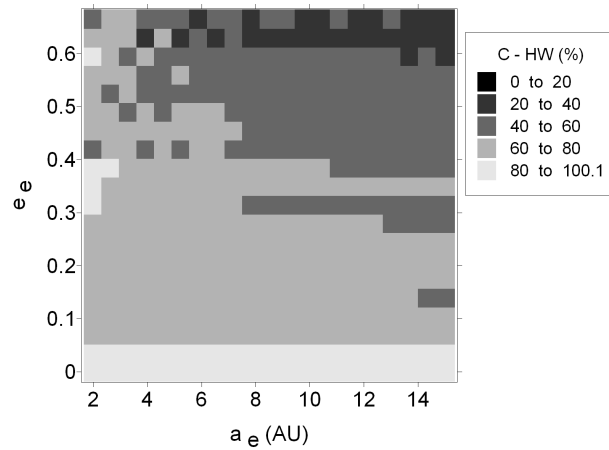


Figura 7.8: Compatibilidade entre o valor calculado teórico e o valor obtido por meio de simulações para a relação definida a partir da relação empírica de Holman e Wiegert (1999), para o espaço paramétrico  $a_e \times e_e$ , com  $\mu = 0.5$

intervalos de maior compatibilidade do mapa 7.7 é maior que a do mapa 7.8. Os dados tabela 7.1 levam à mesma conclusão sobre a qualidade dos resultados, como por exemplo, para o intervalo de maior compatibilidade ( $80\% < C \leq 100\%$ ) encontram-se aproximadamente metade dos dados do mapa 7.7, enquanto que apenas aproximadamente 10% dos dados do mapa 7.8 são encontrados. Também pode-se notar que aproximadamente 3% dos dados do mapa 7.7 possuem uma compatibilidade menor que 40%, enquanto que para o mapa 7.8 a quantidade de dados na mesma compatibilidade é de aproximadamente 40%.

O mesmo cálculo da compatibilidade foi feito para o espaço paramétrico  $a_e \times \mu$ , com  $e_e = 0$ , e os mapas encontram-se nas figuras 7.9 e 7.10.

Intervalo de Compatibilidade	$AD_{max}$ (%)	Holman e Wiegert (1999) (%)
0% - 20%	0.0	0.0
20% - 40%	0.2	6.2
40% - 60%	2.9	31.4
60% - 80%	47.1	51.2
80% - 100%	49.8	11.2

Tabela 7.1 - Percentual do número de dados presente em cada intervalo de compatibilidade para o critério  $AD_{max}$  e para a relação de Holman e Wiegert (1999), para o espaço paramétrico  $a_e \times e_e$ , com  $\mu = 0.5$ , das figuras 7.7 e 7.8

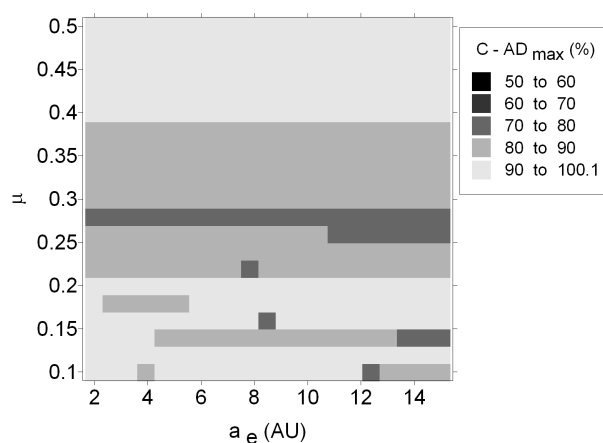


Figura 7.9: Compatibilidade entre o valor calculado teórico e o valor obtido por meio de simulações para a relação definida a partir do critério  $AD_{max}$ , para o espaço de fases  $a_e \times \mu$ , com  $e_e = 0$

Da mesma maneira que foi feita para o espaço paramétrico  $a_e \times e_e$ , foi feita uma tabela que mostra a fração dos dados que pertencem a cada intervalo de compatibilidade dos gráficos.

A partir dos gráficos 7.9 e 7.10 pode-se perceber que, assim como na análise feita para o espaço paramétrico  $a_e \times e_e$ , compatibilidade média baseada do critério  $AD_{max}$  é maior que a proposta por Holman e Wiegert (1999). Analisando a tabela 7.2, esse resultado se torna ainda mais evidente. É possível notar que, para o critério  $AD_{max}$ , aproximadamente 90% dos dados possuem uma compatibilidade maior que 80%, enquanto que para o critério proposto por Holman e Wiegert (1999) essa fração é de aproximadamente 25% apenas.

Comparando ambas as tabelas 7.1 e 7.2 para os mesmos critérios, é possível notar que, para o espaço paramétrico  $a \times \mu$ , com  $e_e = 0$  o critério  $AD_{max}$  se mostrou mais compatível



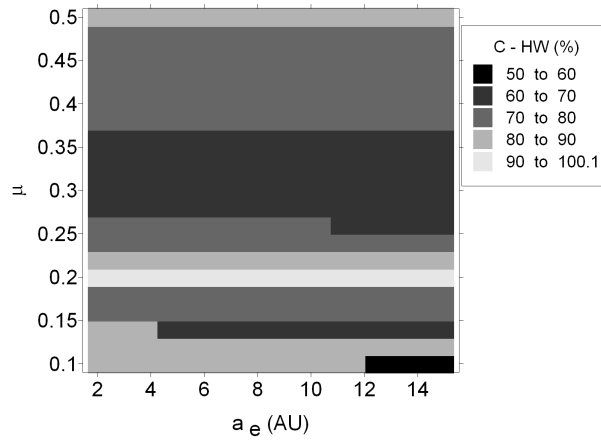


Figura 7.10: Compatibilidade entre o valor calculado teórico e o valor obtido por meio de simulações para a relação definida a partir da relação empírica de Holman e Wiegert (1999), para o espaço paramétrico  $a_e \times \mu$ , com  $e_e = 0$

Intervalo de Compatibilidade	$AD_{max}$ (%)	Holman e Wiegert (1999) (%)
50% - 60%	0.0	1.1
60% - 70%	0.0	29.3
70% - 80%	7.7	46.0
80% - 90%	41.7	18.8
90% - 100%	50.6	4.8

Tabela 7.2 - Percentual do número de dados presente em cada intervalo de compatibilidade para o critério  $AD_{max}$  e para a relação de Holman e Wiegert (1999), para o espaço paramétrico  $a_e \times \mu$ , com  $e_e = 0$ , das figuras 7.9 e 7.10

que para o espaço paramétrico  $a \times e_e$ , com  $\mu = 0.5$ . Isso já era esperado, já que o critério  $AD_{max}$  é baseado na solução do problema de três corpos restrito e circular, e ao aplica-lo num sistema com excentricidade não nula, aproximações são feitas, e essas naturalmente introduzem erros.

## Conclusões

Primeiramente pode-se concluir que as rotinas de integração numérica e mudanças entre as coordenadas retangulares e os elementos orbitais estão funcionando corretamente, assim como a rotina de *FFT*, o que é um pré-requisito essencial para o avanço do projeto. Como o programa foi todo construído na forma de blocos independentes, mesmo para implementar mudanças, como outro sistema de coordenadas ou a introdução de mais corpos, a maior parte do programa permanecerá inalterada, o que conferirá robustez ao código fonte.

Com o estudo dos diferentes sistemas de coordenadas pode-se concluir que, apesar de matematicamente equivalentes, o sistema de Jacobi se mostrou o ideal para o estudo do problema proposto. Isso se deve ao fato do sistema de Jacobi ser canônico, para aplicações da teoria de Hamilton, possuir apenas 6 equações diferenciais de segunda ordem para o problema de três corpos, para aumentar a velocidade de integração numérica, e possuir menor oscilação das variáveis do problema quando comparado ao sistema de Poincaré, além de possuir uma interpretação geométrica mais simples.

A técnica do espectro dinâmico se mostrou uma excelente ferramenta para determinar as frequências fundamentais de um sistema e a forma que as mesmas variam com relação a algum parâmetro. Com essa técnica também é possível encontrar ressonâncias de baixas e altas ordens, que serão os pontos de cruzamento das curvas do espectro dinâmico. Pode-se concluir também que a análise em amplitude dessa técnica pode ainda obter órbitas periódicas do problema, caracterizadas por oscilações com amplitude zero, e revelar quando os termos harmônicos e suas correspondentes amplitudes podem ser bem separáveis, que determinará, por exemplo, quando o problema poderá ser aproximado pela teoria secular planetária.

Quanto aos critérios de estabilidade, os quatro critérios estudados apresentaram resultados semelhantes quanto a determinação da região de estabilidade no espaço paramétrico  $a_p \times e_p$ . O critério da esfera de Hill se mostrou rápido e de simples aplicação, mas apenas fornece a informação a respeito da estabilidade da órbita, sem revelar detalhes dos regimes de movimento na região estável. O critério do número espectral é capaz de revelar alguns tipos de estruturas, como regiões de movimento estacionário e regiões que, apesar de estáveis, possuem movimento mais perturbado que outras, mas por outro lado, sua implementação requer muito trabalho numérico. Já o critério da excentricidade máxima mostrou-se de simples implementação, e apresentou na região estável estruturas que puderam ser identificadas também no mapa do número espectral, mas com uma resolução menor que a desse último. O critério da máxima distância apocêntrica apresentou estruturas internas diferentes das desses dois últimos, o que significa que o uso combinado do critério da máxima distância apocêntrica e do número espectral, por exemplo, teremos mais informações da dinâmica do sistema.

Para a caracterização dinâmica, a primeira coisa que se pode concluir é que, apesar de similares, as distâncias definidas pelo critério de Holman e Wiegert (1999) e o critério proposto são grandezas diferentes, e portanto, a definição de uma distância relativa ou outra grandeza similar é essencial para a comparação dos critérios.

Comparando as distâncias relativas de ambos os critérios com simulações numéricas, pode-se concluir que o critério  $AD_{max}$  se mostrou mais compatível com a simulação para ambos os espaços paramétricos analisados. Além disso, para a determinação da estabilidade de uma dada órbita de um planeta em um sistema binário, os elementos orbitais osculadores devem ser usados, por serem justamente os elementos orbitais instantâneos do planeta. O estudo da estabilidade a partir de um conjunto de parâmetros iniciais, como no caso do critério de Holman e Wiegert (1999), para o caso de órbitas tão perturbadas quanto órbitas planetárias em estrelas binárias, não é suficiente para associar, em um caso geral, e estabilidade do mesmo parâmetro inicial como elemento osculador.

As comparações do critério da máxima distância apocêntrica com a sua previsão teórica se mostraram compatíveis, o que é um indício que, de fato, a relação teórica desenvolvida pode ser uma estimativa de estabilidade sem a necessidade de cálculos numéricos demorados, o que tem vasta utilidade para outros ramos da pesquisa em planetas extra-solares,

como por exemplo o estudo de zonas habitáveis em estrelas binárias.

Apesar dos resultados obtidos do trabalho desenvolvido nesse projeto fornecerem diversas informações sobre a dinâmica do problema de três corpos restrito, o desenvolvimento de um modelo é necessário para consolidar o entendimento e explicar as origens e causas dos efeitos do problema. A sequência do estudo se dará no projeto de doutorado intitulado *Modelagem do Movimento Planetário nos Sistemas de Estrelas Múltiplas*, onde se pretende aplicar novas técnicas, analíticas e semi-analíticas, para a construção de modelos dinâmicos desses sistemas, baseado em aplicações bem sucedidas de tais técnicas para o estudo do problema planetário secular em Michtchenko e Malhotra (2004) e Michtchenko et al. (2006).

Com o conhecimento sobre qual a região do espaço paramétrico que um modelo aplicar-se-ia, é possível estudar a estabilidade e a dinâmica do movimento de uma maneira mais geral, e utilizar o ferramental numérico desenvolvido nesse projeto para testar essas teorias.



## Referências Bibliográficas

- Abt H. A., The frequencies of binaries on the main sequence, *AJ*, 1979, vol. 84, p. 1591
- Black D. C., A simple criterion for determining the dynamical stability of three-body systems, *AJ*, 1982, vol. 87, p. 1333
- Brouwer D., Clemence G. M., *Methods of celestial mechanics*, 1961
- Butkov E., *Fisica Matematica. Lct*, 1988, 1988
- Danby J. M. A., *Fundamentals of celestial mechanics*. Richmond, Va., U.S.A. : Willmann-Bell, 1988. 2nd ed., 1988
- Duquennoy A., Mayor M., How Many Single Stars Among Solar Type Stars?. In *Bioastronomy: The Search for Extraterrestrial Life - The Exploration Broadens* , vol. 390 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, 1991, p. 39
- Dvorak R., Critical orbits in the elliptic restricted three-body problem, *A&A*, 1986, vol. 167, p. 379
- Eggenberger A., Udry S., Chauvin G., Beuzit J.-L., Lagrange A.-M., Ségransan D., Mayor M., The impact of stellar duplicity on planet occurrence and properties. I. Observational results of a VLT/NACO search for stellar companions to 130 nearby stars with and without planets, *A&A*, 2007, vol. 474, p. 273
- Eggenberger A., Udry S., Mayor M., Statistical properties of exoplanets. III. Planet properties and stellar multiplicity, *A&A*, 2004a, vol. 417, p. 353

- Eggenberger A., Udry S., Mayor M., Statistical properties of exoplanets. III. Planet properties and stellar multiplicity, *A&A*, 2004b, vol. 417, p. 353
- Érdi B., Dvorak R., Sándor Z., Pilat-Lohinger E., Funk B., The dynamical structure of the habitable zone in the HD 38529, HD 168443 and HD 169830 systems, *MNRAS*, 2004, vol. 351, p. 1043
- ESA The Hipparcos and Tycho Catalogues (ESA 1997), *VizieR Online Data Catalog*, 1997, vol. 1239, p. 0
- Everhart E., An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. In *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution*, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11-15, 1984. Edited by Andrea Carusi and Giovanni B. Valsecchi. Dordrecht: Reidel, *Astrophysics and Space Science Library*. Volume 115, 1985,, p.185 , 1985, p. 185
- Ferraz-Mello S., ed., 2007 *Canonical Perturbation Theories - Degenerate Systems and Resonance* vol. 345 of *Astrophysics and Space Science Library*
- Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Beaugé C., , 2006 *Regular motions in extra-solar planetary systems*. Springer pp 255–+
- Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Beaugé C., Callegari N., *Extrasolar Planetary Systems*. In *Chaos and Stability in Planetary Systems* , vol. 683 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, 2005, p. 219
- Ford E. B., Kozinsky B., Rasio F. A., *Secular Evolution of Hierarchical Triple Star Systems*, *ApJ*, 2000, vol. 535, p. 385
- Funk B., Schwarz R., Pilat-Lohinger E., Süli Á., Dvorak R., *Stability of inclined orbits of terrestrial planets in habitable zones*, *Planet. Space Sci.*, 2009, vol. 57, p. 434
- Goździewski K., Maciejewski A. J., *The Taylor Series Method for the Problem of the Rotational Motion of a Rigid Satellite*, *Ap&SS*, 1995, vol. 232, p. 167
- Graziani F., Black D. C., *Orbital stability constraints on the nature of planetary systems*, *ApJ*, 1981, vol. 251, p. 337

- Holman M. J., Wiegert P. A., Long-Term Stability of Planets in Binary Systems, *AJ*, 1999, vol. 117, p. 621
- Klioner S. A., Numerical Fourier Expansions of the Planetary Disturbing Function, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2000, vol. 77, p. 215
- Lee M. H., Peale S. J., Secular Evolution of Hierarchical Planetary Systems, *ApJ*, 2003, vol. 592, p. 1201
- Marchal C., Bozis G., Hill Stability and Distance Curves for the General Three-Body Problem, *Celestial Mechanics*, 1982, vol. 26, p. 311
- Mason B. D., Hartkopf W. I., The US Naval Observatory Double Star CD, 2006.5, *Journal of Double Star Observations*, 2006, vol. 2, p. 171
- Mathieu R. D., Pre-Main-Sequence Binary Stars, *ARA&A*, 1994, vol. 32, p. 465
- Mathieu R. D., Ghez A. M., Jensen E. L. N., Simon M., Young Binary Stars and Associated Disks, *Protostars and Planets IV*, 2000, pp 703–+
- Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Modeling the 5 : 2 Mean-Motion Resonance in the Jupiter-Saturn Planetary System, *Icarus*, 2001, vol. 149, p. 357
- Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Beauge C., Modeling the 3–D Secular Planetary Three-Body Problem. Discussion on the outer  $\nu$  Andromedae Planetary System, *ArXiv Astrophysics e-prints*, 2005
- Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Beaugé C., Modeling the 3-D secular planetary three-body problem. Discussion on the outer  $\nu$  Andromedae planetary system, *Icarus*, 2006, vol. 181, p. 555
- Michtchenko T. A., Lazzaro D., Ferraz-Mello S., Roig F., Origin of the Basaltic Asteroid 1459 Magnya: A Dynamical and Mineralogical Study of the Outer Main Belt, *Icarus*, 2002, vol. 158, p. 343
- Michtchenko T. A., Malhotra R., Secular dynamics of the three-body problem: application to the  $\nu$  Andromedae planetary system, *Icarus*, 2004, vol. 168, p. 237



- Michtchenko T. A., Nesvorny D., Wavelet analysis of the asteroidal resonant motion., *A&A*, 1996, vol. 313, p. 674
- Mugrauer M., Neuhäuser R., Mazeh T., Guenther E., Fernández M., Broeg C., A search for wide visual companions of exoplanet host stars: The Calar Alto Survey, *Astronomische Nachrichten*, 2006, vol. 327, p. 321
- Murray C. D., Dermott S. F., *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 1999
- Pendleton Y. J., Black D. C., Further studies on criteria for the onset of dynamical instability in general three-body systems, *AJ*, 1983, vol. 88, p. 1415
- Pilat-Lohinger E., The ultimate cataclysm: the orbital (in)stability of terrestrial planets in exoplanet systems including planets in binaries, *International Journal of Astrobiology*, 2009, vol. 8, p. 175
- Porto de Mello G., del Peloso E. F., Ghezzi L., Astrobiologically Interesting Stars Within 10 Parsecs of the Sun, *Astrobiology*, 2006, vol. 6, p. 308
- Press W. H., *Numerical recipes in C++ : the art of scientific computing*. Numerical recipes in C++ : the art of scientific computing by William H. Press. xxviii, 1,002 p. : ill. ; 26 cm. Includes bibliographical references and index. ISBN : 0521750334, 2002
- Roy A. E., *Orbital motion*. Bristol: Hilger, 1978, 1978
- Saleh L. A., Rasio F. A., The Stability and Dynamics of Planets in Tight Binary Systems, *ApJ*, 2009, vol. 694, p. 1566
- Soederhjelm S., Visual binary orbits and masses (Soederhjelm 1999), *VizieR Online Data Catalog*, 1998, vol. 334, p. 10121
- Szebehely V., Review of concepts of stability, *Celestial Mechanics*, 1984, vol. 34, p. 49

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)