

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



The image features a large, light gray watermark of the coat of arms of the University of Pernambuco. At the top, three flames are positioned above a banner that reads "LUÍS HENRIQUE DE SANTANA". The central shield contains a lion rampant on the right and a caduceus on the left. Below the shield is a ribbon with the motto "VIRTUS IMPAVIDA".

LUÍS HENRIQUE DE SANTANA

**APLICAÇÕES DO TIPO *twist* E CURVAS
INVARIANTES**

RECIFE, JULHO DE 2008.

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

LUÍS HENRIQUE DE SANTANA

**APLICAÇÕES DO TIPO *twist* E CURVAS
INVARIANTES**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**

ORIENTADOR: PROF. EDUARDO S. GOES LEANDRO, PH.D.

Recife, julho de 2008.

LUÍS HENRIQUE DE SANTANA
APLICAÇÕES DO TIPO TWIST E CURVAS
INVARIANTES

Santana, Luís Henrique de
Aplicações do tipo twist e curvas invariantes / Luís
Henrique de Santana. - Recife: O Autor, 2010.
42 folhas

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Matemática, 2010.

Inclui bibliografia.

1. Mecânica. I. Título.

004.25

CDD (22. ed.)

MEI2010 - 0128

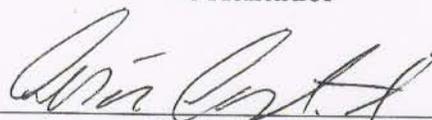
Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado:

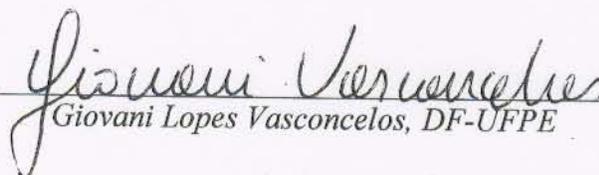


Eduardo Shirlippe Góes Leandro, DMAT-UFPE

Orientador



César Augusto Rodrigues Castilho, DMAT-UFPE



Giovani Lopes Vasconcelos, DF-UFPE

**APLICAÇÕES DO TIPO TWIST E
CURVAS INVARIANTES**

Por

Luis Henrique de Santana

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Julho - 2008

AGRADECIMENTOS

Ao Diogo de Carvalho Bezerra pela sugestão e incentivo para que eu fosse para a matemática.

Aos professores Ricardo Menezes Campello de Souza e Hildeberto Cabral pelas cartas de recomendação.

Ao Zaqueu Alves Ramos pela amizade e pelos ensinamentos matemáticos.

Aos integrantes da Terminus André Leite Wanderley, Bruno Luis de Andrade Santos, Diana Yomali Ospina López, Diego Jose Rativa Millan e Peron Pereira Santos Machado Rios pelo ótimo convívio e pela paciência.

À minha família pelo amor e apoio.

Ao Professor Fernando Menezes Campello de Souza, eterno exemplo.

Aos professores César Augusto Rodrigues Castilho e Giovani Lopes Vasconcelos por participarem da banca examinadora e pelas observações feitas sobre o texto.

À Tânia Maranhão por cada favor.

Aos professores Aron Simis, Hildeberto Cabral, Henrique Araújo, Sóstenes Lins, Ramón Mendoza e Francesco Russo pelos conhecimentos compartilhados.

Ao professor Eduardo Shirlippe Goes Leandro pela orientação e pela paciência com minha adaptação à matemática.

Finalmente, gostaria de agradecer a CAPES e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Universidade Federal de Pernambuco

31 de julho de 2008

L. H. S.

*Ah! Deus! Como a arte é longa
E tão breve é a vida
E de estudar na lida
Doem-me o peito e a cabeça. O meu sofrer prolonga!
Bem duros os caminhos que nos dão subida
Para as fecundas fontes do saber eterno,
Sem jamais atingir a meta apeteçada!*

— Fausto de Goethe

Resumo da Dissertação apresentada à UFPE como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática

APLICAÇÕES DO TIPO *twist* E CURVAS INVARIANTES

Luís Henrique de Santana

julho/2008

Orientador: Prof. Eduardo S. Goes Leandro, Ph.D.

Área de concentração: Mecânica

Palavras-chaves: aplicações do tipo *twist*, curvas invariantes, sistemas dinâmicos

Número de páginas: 42

Estuda-se aspectos relacionados às aplicações do tipo *twist*. Discute-se a existência e propriedades de uma função geratriz de uma aplicação do tipo *twist*. Depois, apresenta-se uma versão simplificada do último teorema geométrico de Poincaré. Por fim, encontra-se o resultado conhecido como teorema das curvas invariantes de Birkhoff.

Abstract of Dissertation presented to UFPE as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Mathematics

TWIST MAPS AND INVARIANT CURVES

Luís Henrique de Santana

july/2008

Supervisor: Prof. Eduardo S. Goes Leandro, Ph.D.

Area of concentration: Mechanics

Keywords: twist maps, invariant curves, dynamical systems

Number of pages: 42

Aspects related to twist maps are studied. The existence and properties of a generating function of twist maps are discussed. A simplified version of Poincaré's last geometric theorem is presented. Finally, a result known as theorem of invariant curves, due to Birkhoff, is presented.

SUMÁRIO

1	APLICAÇÃO DO TIPO <i>twist</i> E FUNÇÃO GERATRIZ	8
1.1	Aplicações do tipo <i>twist</i>	9
1.2	Função geratriz	11
2	ÚLTIMO TEOREMA GEOMÉTRICO DE POINCARÉ	20
2.1	Órbitas periódicas	21
2.2	Número de rotação	22
2.3	Último teorema geométrico de Poincaré	30
3	CURVAS INVARIANTES	34
3.1	Teorema de Birkhoff	35
3.2	Curvas invariantes	40
	REFERÊNCIAS	42

CAPÍTULO I

APLICAÇÃO DO TIPO *twist* E FUNÇÃO GERATRIZ

Come on, baby!
Let's do the twist!

— Hank Ballard

ESTUDA-SE aqui alguns aspectos da dinâmica de aplicações do tipo *twist*, cuja definição pode ser encontrada na seção seguinte. Embora a definição dada a este tipo de aplicação possa a princípio parecer bastante artificial, existem exemplos de sistemas dinâmicos onde estas aplicações do tipo *twist* surgem naturalmente [1].

Assumir-se-á que o leitor detém alguma familiaridade com respeito à topologia e à análise. Em todo caso, a leitura deve ser facilitada se acompanhada de referências sobre estes assuntos. Sugere-se por exemplo Munkres [2] e Spivak [3].

A dissertação se divide em três partes. Neste capítulo, apresenta-se além definição fundamental de aplicação *twist*, a existência daquela que se conhece como função geratriz de uma aplicação, bem como algumas proposições relacionadas a tal função. No segundo capítulo, estudar-se-á uma versão simplificada do último teorema geométrico de Poincaré. No capítulo final estuda-se o resultado conhecido como teorema das curvas invariantes de Birkhoff. O que se expõe aqui pode ser encontrado em Ragazzo *et al* [4] e Meyer and Hall [1].

1.1 Aplicações do tipo *twist*

Inicia-se de forma bastante comum em textos matemáticos, apresentando-se uma relação de equivalência. Defina-se a seguinte relação de equivalência: dados dois pontos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, x_1 é dito estar relacionado com x_2 (denota-se por $x_1 \sim x_2$) se, e somente se, $x_1 - x_2 = k \in \mathbb{Z}$. Denotar-se-á o conjunto das classes de equivalência dadas por esta relação por \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Então, define-se o seguinte mapa $\Pi_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ que associa um elemento $x \in \mathbb{R}$ com sua classe de equivalência determinada pela relação que acabamos de definir.

Seja $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, ou $\Pi : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$, dada por $\Pi = (\Pi_0, id)$, onde id é a identidade na segunda coordenada. Note-se que o conjunto \mathbb{R}/\mathbb{Z} é homeomorfo à esfera unidimensional unitária, S^1 . Portanto é natural se definir o conjunto $A = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$ como **anel** e o conjunto $C = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ como **cilindro**.

Estudar-se-á aspectos de um difeomorfismo de classe C^1 $f : A \rightarrow A$, ou $f : C \rightarrow C$, com propriedades especiais. Note-se que tais difeomorfismos são entre variedades. Além disto, aponta-se também que a topologia de tais variedades é aquela que faz com que Π seja contínua. Todavia, não será necessário conhecimento de teorias de variedades. O estudo será feito por meio de aplicações $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$, ou $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que guardam uma estreita relação com a aplicação f como descrito na proposição a seguir.

PROPOSIÇÃO 1.1 Seja $f : A \rightarrow A$, ou $f : C \rightarrow C$, um homeomorfismo. Então existe um homeomorfismo $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$, ou $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$\Pi \circ F = f \circ \Pi,$$

e à aplicação F dá-se o nome de **levantamento** de f .

Algumas observações devem ser feitas com respeito a um levantamento F . A primeira delas é que um levantamento não é único. Na verdade, para cada f existe uma quantidade enumerável de levantamentos, e pode-se provar que dois levantamentos de uma aplicação f diferem um do outro por um inteiro. Ademais, F é um levantamento se, e somente se, $F(x+1, y) = F(x, y) + (1, 0)$. Aqui não se fará as demonstrações desta proposição nem das observações mencionadas acima. Ao leitor interessado recomenda-se a leitura de Devaney [5].

Para facilitar a exposição, define-se a seguir aplicações conhecidas como projeções. Dados dois conjuntos C_1, C_2 , denotar-se-á por $\pi_i : C_1 \times C_2 \rightarrow C_i$, $i = 1, 2$, a projeção sobre a i -ésima coordenada. Isto é, dado $(c_1, c_2) \in C_1 \times C_2$, $\pi_i(c_1, c_2) = c_i$.

Apresenta-se agora a definição fundamental deste estudo.

DEFINIÇÃO 1.1 Uma aplicação $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (ou $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$) é dita **twist uniforme**, se e somente se, F é tal que:

1. $F(x + 1, y) = F(x, y) + (1, 0)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ou $(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$;
2. F é um difeomorfismo de classe C^1 ;
3. F preserva área;
4. existe $c > 0$ tal que

$$0 < c \leq \frac{\partial}{\partial y} \pi_1(F(x, y)) \leq \frac{1}{c}.$$

5. F preserva as componentes de fronteira, i.e., $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} F_2(x, y) = \pm\infty$ no caso de \mathbb{R}^2 , e $F(x, i) = i$ quando $i = 0, 1$ no caso de $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

Observe-se que a primeira condição caracteriza F como o levantamento de uma aplicação $f : A \rightarrow A$, ou $f : C \rightarrow C$, de acordo com o que foi dito anteriormente. A condição de preservação de área se traduz, por meio do teorema de mudança de variáveis, na condição do módulo do determinante jacobiano de F ser igual a 1. Isto em duas dimensões é equivalente à condição da aplicação F ser simplética. Se se troca a condição 4 por

$$0 < c \leq \frac{\partial}{\partial y} \pi_1(F(x, y)),$$

a aplicação é dita **twist monótona**, enquanto que se se troca por

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial y} \pi_1(F(x, y)),$$

a aplicação é dita simplesmente **twist**.

Como de costume, após uma definição apresenta-se um exemplo. Isto serve tanto para melhor compreensão da definição quanto para mostrar que a mesma faz sentido. Considere-se a família de aplicações $\{F_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2\}_{k \in \mathbb{N}}$ definidas por

$$F_k(x, y) = \left(x + y + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x), y + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x)\right).$$

Note-se que para qualquer F_k , vale a condição 1. Uma função F_k é injetiva e sobrejetiva, logo, existe uma inversa F_k^{-1} . Além disto, como o determinante jacobiano é igual a 1 para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pelo teorema da função inversa tem-se um difeomorfismo local. Portanto, dada a sua bijetividade, tem-se que uma aplicação F_k é um difeomorfismo global. Ora,

uma aplicação F_k também preserva área e preserva as componentes de fronteira. Por fim, observe-se que

$$\frac{\partial}{\partial y} \pi_1(F(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y} \left(x + y + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x) \right) = 1.$$

Isto mostra que uma aplicação F_k satisfaz também a condição 4. Logo, ela é um exemplo de aplicação do tipo *twist* uniforme e é conhecida como aplicação *standard*. A aplicação *standard* aparece por exemplo em modelos físicos associados a redes cristalinas [4].

Muito embora a definição seguida de um exemplo seja uma forma de apresentação comum nos textos matemáticos, vale ressaltar que na atividade de pesquisa a ordem natural dos acontecimentos geralmente não está. O caminho mais natural é que a partir de uma classe de exemplos busque-se uma definição que os generalize.

Uma pergunta natural a se fazer é: por que uma função com as características descritas há pouco é denominada aplicação *twist*? Bem, a palavra *twist* pode ser traduzida como torção. E esta aplicação de fato torce? Espera-se que a interpretação geométrica apresentada agora esclareça ao leitor a razão da nomenclatura empregada.

Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\gamma_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva definida por $\gamma_x(s) = (x, s)$. A imagem de γ_x , $\gamma_x(\mathbb{R})$, corresponde a um segmento vertical no plano \mathbb{R}^2 , a saber, $\{x\} \times (-\infty, \infty)$. Ora, a condição

$$0 < c < \frac{\partial}{\partial y} \pi_1(F(x, y))$$

implica que a imagem da curva γ_x , dada por $(F_1(x, s), F_2(x, s))$, é sobrejetiva na primeira coordenada. Assim, tal imagem pode ser vista como o gráfico de uma função da coordenada x . Como há também a preservação das componentes de fronteira, pode-se dizer que a aplicação F torce as linhas verticais.

1.2 Função geratriz

Considere-se agora a aplicação $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi(x, y) = (x, x' = F_1(x, y)),$$

onde $F_1 = \pi_1 \circ F$.

PROPOSIÇÃO 1.2 A aplicação ϕ é um difeomorfismo global.

DEMONSTRAÇÃO: Com efeito, seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ arbitrário. Tomando-se $x = a$ tem-se na imagem $(a, F_1(a, y))$, e pela sobrejetividade de $F_1(a, \cdot)$ existe y' tal que $F_1(a, y') = b$.

Portanto, ϕ é sobrejetiva. Além disto, se $(x_1, F_1(x_1, y_1)) = (x_2, F_1(x_2, y_2))$, então $x_1 = x_2$ e $F_1(x_1, y_1) = F_1(x_1, y_2)$. Mas como $F_1(x_1, \cdot)$ é estritamente crescente, é injetiva.

Sendo ϕ bijetiva, existe uma inversa ϕ^{-1} . Ademais, o determinante jacobiano da aplicação ϕ

$$\det J_\phi(x, y) = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \pi_1(F(x, y)) > c > 0, \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Desta maneira, pelo teorema da função inversa e pela bijetividade da ϕ , ϕ é de fato um difeomorfismo global, i.e., uma mudança de coordenadas.

Q.E.D.

Como conseqüência, a aplicação $\pi_2 \circ \phi^{-1}$ possui uma periodidade. Com efeito, como $\phi \circ \phi^{-1}(x, x') = (x, x')$, $\phi^{-1}(x, x') = (a, b)$ é tal que $\phi(a, b) = (a, F_1(a, b)) = (x, x')$. Portanto $a = x$ e b é tal que $F_1(x, b) = x'$.

Por sua vez, como $\phi \circ \phi^{-1}(x+1, x'+1) = (x+1, x'+1)$, $\phi^{-1}(x+1, x'+1) = (\hat{a}, \hat{b})$ é tal que $\phi(\hat{a}, \hat{b}) = (\hat{a}, F_1(\hat{a}, \hat{b})) = (x+1, x'+1)$. Logo, $\hat{a} = x+1$ e \hat{b} é tal que $F_1(x+1, \hat{b}) = F_1(x, \hat{b}) + 1 = x' + 1$. Já que $F_1(x, \hat{b}) = x'$, tem-se pela injetividade de $F_1(x, \cdot)$ que necessariamente $\hat{b} = b$.

Denotar-se-á $\pi_2 \circ \phi^{-1}$ por u e nela vale então

$$u(x+1, x'+1) = u(x, x')$$

para todo $(x, x') \in \mathbb{R}^2$. Em virtude desta periodicidade, a aplicação u pode ser projetada sobre um outro cilindro C' por meio de uma aplicação que identifique os pontos (x, x') e (\tilde{x}, \tilde{x}') tais que $x = \tilde{x} + k$ e $x' = \tilde{x}' + k$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Define-se agora um campo de vetores $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$w(x, x') = (-u(x, x'), F_2(x, u(x, x'))) = (-u(x, x'), v(x, x')),$$

onde $F_2 = \pi_2 \circ F$. Ora,

$$x' = \pi_2(\phi \circ \phi^{-1}(x, x')) = F_1(x, u(x, x')).$$

Tomando-se as derivadas parciais segue-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x'}(x, x') = \left(\frac{\partial F_1}{\partial u}(x, u(x, x')) \right)^{-1}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, x') = -\frac{\partial F_1}{\partial x}(x, u(x, x')) \left(\frac{\partial F_1}{\partial u}(x, u(x, x')) \right)^{-1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} u(x, x') + \frac{\partial}{\partial x} v(x, x') &= \left(\frac{\partial}{\partial u} F_1(x, u(x, x')) \right)^{-1} + \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, u(x, x')) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial u} F_2(x, u(x, x')) \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(x, x') \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial u} F_1(x, u(x, x')) \right)^{-1} + \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, u(x, x')) + \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial u} F_1(x, u(x, x')) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial u} F_2(x, u(x, x')) \cdot \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, u(x, x')). \end{aligned}$$

E, pela condição de preservação de área,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial u} F_1(x, u) \right)^{-1} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, u) \cdot \frac{\partial}{\partial u} F_2(x, u) + \frac{\partial}{\partial u} F_1(x, u) \cdot \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, u) \right) \\ = \left(\frac{\partial}{\partial u} F_1(x, u) \right)^{-1} (1 - \det J_F(x, u)) = 0. \end{aligned}$$

Provou-se assim que o campo w , definido há pouco, possui rotacional nulo no plano. Por conseguinte, pelo lema de Poincaré [3], w é o gradiente de uma função h no plano. Em suma, existe uma aplicação $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial x} h(x, x') = -u(x, x') \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x'} h(x, x') = v(x, x').$$

Como visto há pouco

$$\frac{\partial}{\partial x'} u(x, x') = \left(\frac{\partial}{\partial u} F_1(x, u(x, x')) \right)^{-1}.$$

Pela hipótese *twist* uniforme da aplicação F ,

$$0 < c \leq \frac{\partial}{\partial u} \pi_1(F(x, u(x, x'))) \leq \frac{1}{c}.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} 0 < c &\leq \left(\frac{\partial}{\partial u} \pi_1(F(x, u(x, x'))) \right)^{-1} \leq \frac{1}{c} \\ &\Leftrightarrow 0 < c \leq \frac{\partial}{\partial x'} u(x, x') \leq \frac{1}{c} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{c} \leq -\frac{\partial}{\partial x'} u(x, x') \leq -c < 0. \end{aligned}$$

Portanto, como

$$\frac{\partial}{\partial x'} u(x, x') = -\frac{\partial^2}{\partial x' \partial x} h(x, x'),$$

$$-\frac{1}{c} \leq \frac{\partial^2}{\partial x' \partial x} h(x, x') \leq -c < 0.$$

Observe-se que a aplicação h não necessariamente detém a propriedade de periodicidade da aplicação u , a saber, $h(x+1, x'+1) = h(x, x')$ não necessariamente é válida para todo $(x, x') \in \mathbb{R}^2$. Todavia, para que se tenha tal periodicidade é necessário e suficiente que a integral de linha do campo $w = (-u, v)$ ao longo de qualquer curva que se projete em C' fechada, de classe C^1 por partes e homotopicamente não-trivial seja nula.

Ora, seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(s) = (x(s), x'(s))$, uma curva com tais características. Assim,

$$0 = h(x+1, x'+1) - h(x, x') = \int_{\gamma} w = \int_{\gamma} -u dx + \int_{\gamma} v dx'.$$

Portanto,

$$\int_{\gamma} u dx = \int_{\gamma} v dx'$$

Por definição $u = \pi_2 \circ \phi^{-1}$, então pode-se escrever

$$\int_{\gamma} u dx = \int_{\tilde{\gamma}} \pi_2(\tilde{\gamma}(s)) \cdot \frac{d}{ds} \pi_1(\tilde{\gamma}(s)) ds,$$

onde $\tilde{\gamma} = \phi^{-1} \circ \gamma$. Por sua vez, como $v = \pi_2 \circ F \circ \phi^{-1}$ e $x'(s) = \pi_1 \circ F \circ \tilde{\gamma}(s)$,

$$\int_{\gamma} v dx' = \int_{\tilde{\gamma}} \pi_2(F \circ \tilde{\gamma}(s)) \cdot \frac{d}{ds} \pi_1(F \circ \tilde{\gamma}(s)) ds.$$

Assim,

$$\int_{\tilde{\gamma}} \pi_2(\tilde{\gamma}(s)) \cdot \frac{d}{ds} \pi_1(\tilde{\gamma}(s)) ds = \int_{\tilde{\gamma}} \pi_2(F \circ \tilde{\gamma}(s)) \cdot \frac{d}{ds} \pi_1(F \circ \tilde{\gamma}(s)) ds.$$

Esta equação possui uma interpretação geométrica que será apresentada mais adiante. Por fim, note-se que γ tem as características acima se, e somente se, $\tilde{\gamma}(s+1) = \tilde{\gamma}(s) + (1, 0)$.

Acrescenta-se à lista de hipóteses relativas à aplicação F a condição acima e chega-se à seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1.2 Uma aplicação F é dita **twist uniforme exata** se, e somente se, F é *twist* uniforme e para toda curva $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 por partes tal que $\tilde{\gamma}(s+1) = \tilde{\gamma}(s) + (1, 0)$ para todo $s \in \mathbb{R}$

$$\int_{\tilde{\gamma}} \pi_2(\tilde{\gamma}(s)) \cdot \frac{d}{ds} \pi_1(\tilde{\gamma}(s)) ds = \int_{\tilde{\gamma}} \pi_2(F \circ \tilde{\gamma}(s)) \cdot \frac{d}{ds} \pi_1(F \circ \tilde{\gamma}(s)) ds.$$

Observe-se que uma aplicação *standard* é um exemplo de aplicação do tipo *twist* uniforme exata. Com efeito, seja $\tilde{\gamma}(s) = (x(s), y(s))$ uma curva de classe C^1 por partes tal que

$\tilde{\gamma}(s+1) = \tilde{\gamma}(s) + (1, 0)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 y(s) \frac{d}{ds} x(s) ds &= \int_0^1 y(s) + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x(s)) \frac{d}{ds} (x(s) + y(s) + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x(s))) ds \\
&= \int_0^1 y(s) \frac{d}{ds} (x(s) + y(s) + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x(s))) ds \\
&\quad + \int_0^1 \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x(s)) \frac{d}{ds} (x(s) + y(s) + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x(s))) ds \\
&= \int_0^1 y(s) \frac{d}{ds} x(s) ds + \int_0^1 y(s) \frac{d}{ds} y(s) ds + \int_0^1 y(s) \frac{d}{ds} \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x(s)) ds \\
&\quad + \int_0^1 \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x(s)) \frac{d}{ds} x(s) ds + \int_0^1 \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x(s)) \frac{d}{ds} y(s) ds \\
&\quad + \int_0^1 \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x(s)) \frac{d}{ds} \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x(s)) ds.
\end{aligned}$$

Note-se que

$$\int_0^1 y(s) \frac{d}{ds} y(s) ds = \int_{y(0)}^{y(1)} y dy,$$

e como $y(0) = y(1)$, tal integral é nula. Além disto,

$$\int_0^1 \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x(s)) \frac{d}{ds} x(s) ds = \int_{x(0)}^{x(1)} \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x) dx,$$

e esta integral também é nula. Por fim, observe-se que

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 y(s) \frac{d}{ds} \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x(s)) ds + \int_0^1 \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x(s)) \frac{d}{ds} y(s) ds \\
&= \int_{y(0) \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x(0))}^{y(1) \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x(1))} d\left(y \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x)\right)
\end{aligned}$$

bem como a última integral, para a qual não se desenvolveu os cálculos, também são nulas.

A uma aplicação F *twist* uniforme exata está associada um aplicação h tal que $h(x+1, x'+1) = h(x, x')$. Logo, assim como a aplicação u , a aplicação h também induz uma aplicação no cilindro C' . Pode-se resumir o que foi feito há pouco por meio do seguinte lema:

LEMA 1.1 Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação *twist* uniforme exata. Então existe uma aplicação $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 , denominada **função geratriz** de F , tal que:

$$h(x+1, x'+1) = h(x, x'), \quad \text{e} \quad -\frac{1}{c} < \frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} h(x, x') \leq -c < 0$$

onde

$$\begin{aligned} -y &= \frac{\partial}{\partial x} h(x, x'), \\ y' &= \frac{\partial}{\partial x'} h(x, x'), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x' &= F_1(x, y), \\ y' &= F_2(x, y). \end{aligned}$$

Ainda com respeito a esta função geratriz h da aplicação F , apresenta-se aqui uma interpretação geométrica. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^1 por partes, $\gamma(s) = (x(s), x'(s))$, onde $\gamma(0) = (x_0, x'_0)$ e $\gamma(1) = (x_1, x'_1)$. Portanto, sabe-se que

$$h(x_1, x'_1) - h(x_0, x'_0) = \int_{\gamma} dh = \int_{\gamma} -u dx + \int_{\gamma} v dx'.$$

Aplicando-se o teorema da mudança de variáveis para o difeomorfismo ϕ^{-1} , pode-se reescrever a primeira integral do segundo membro acima como

$$\int_{\gamma} -u dx = \int_{\tilde{\gamma}} -y dx$$

onde $\tilde{\gamma} = \phi^{-1} \circ \gamma$ é uma curva agora no plano (x, y) . Assim, vê-se que este termo corresponde à área sob a curva $\tilde{\gamma}$.

Quanto à segunda integral, novamente pelo teorema da mudança de variáveis aplicado agora com relação ao difeomorfismo $F \circ \phi^{-1}$, segue-se que

$$\int_{\gamma} v dx' = \int_{F \circ \phi^{-1} \circ \gamma} y' dx' = \int_{F \circ \tilde{\gamma}} y' dx',$$

i.e., este termo corresponde à área sob a curva $F \circ \tilde{\gamma}$ que está no plano (x', y') .

Sintetiza-se a interpretação geométrica da função geratriz h de F na proposição seguinte.

PROPOSIÇÃO 1.3 Seja $\tilde{\gamma}$ uma curva de classe C^1 por partes no plano (x, y) , onde $\tilde{\gamma}(0) = (x_0, y_0)$ e $\tilde{\gamma}(1) = (x_1, y_1)$. Então

$$h(x_1, x'_1) - h(x_0, x'_0) = \int_{F \circ \tilde{\gamma}} y' dx' - \int_{\tilde{\gamma}} y dx.$$

Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x, y) = (x, y - u(x, x)) = (\tilde{x}, \tilde{y})$. Ora, o módulo do determinante jacobiano de φ é igual a 1 para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, i.e., $|\det J_{\varphi}(x, y)| = 1$. Portanto a aplicação φ preserva área. Pelo teorema da função inversa, como aplicação φ é

bijetiva, conclui-se que φ é um difeomorfismo global. Observe-se que $G = F \circ \varphi^{-1}$, é *twist* uniforme e exata tal qual a aplicação F . Além disto, a aplicação G satisfaz uma propriedade adicional:

$$G_1(x, 0) = F_1 \circ \varphi^{-1}(\tilde{x}, 0) = x.$$

Com efeito, se $\tilde{y} = 0$, então $y = u(x, x)$. Assim, tem-se

$$G_1(x, 0) = \pi_1(G(x, 0)) = \pi_1(F \circ \varphi^{-1}(\tilde{x}, 0)) = F_1 \circ (x, u(x, x)) = x$$

Desta forma a aplicação G move os pontos do eixo x apenas verticalmente. Sendo assim, os pontos de interseção da imagem por G do conjunto dos pontos $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ consigo mesmo são pontos fixos.

Como G é *twist* uniforme e exata, existe h função geratriz de G tal que

$$\frac{\partial}{\partial x'} h(x, x') = G_2(x, y),$$

onde $G_2 = \pi_2 \circ G$. Em particular,

$$\frac{\partial}{\partial x'} h(x, x) = G_2(x, 0) = 0.$$

nos pontos fixos. Portanto estes pontos fixos de G correspondem a pontos críticos de $h(x, x)$.

A aplicação contínua $h(x, x)$ restrita aos pontos x no compacto $[0, 1]$ necessariamente possui um ponto de mínimo $x^* \in [0, 1]$. Define-se então a aplicação composta $g = h \circ T$, onde T é a translação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + x^*, y + x^*)$. O mínimo desta aplicação g se encontra na origem. Ora, g possui as propriedades de h descritas no lema 1.1, e tomando-se $g(0, 0) = 0$, garante-se que $g(x, x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Na verdade, $g(x, x')$ é não negativa para todo $(x, x') \in \mathbb{R}^2$. Isto será provado a seguir.

Seja $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ arbitrário. Sejam $\tilde{\gamma}_0 : [0, x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva definida por $\tilde{\gamma}_0(s) = (s, 0)$ (i.e., um segmento horizontal que vai da origem para o ponto $(x, 0)$), e $\tilde{\gamma}_1 : [0, u(x, x')] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva definida por $\tilde{\gamma}_1(s) = (x, s)$ (i.e., o segmento vertical ligando os pontos $(x, 0)$ ao ponto $(x, y = u(x, x'))$). Por fim, seja $\tilde{\gamma}$ a curva dada pela união $\tilde{\gamma}_0 \cup \tilde{\gamma}_1$. Deste modo,

$$\begin{aligned} g(x, x') &= g(x, x') - g(0, 0) = \int_{F \circ \tilde{\gamma}} y' dx' \\ &= \int_{F \circ \tilde{\gamma}_0} y' dx' + \int_{F \circ \tilde{\gamma}_1} y' dx' \\ &= g(x, x) - g(0, 0) + \int_{F \circ \tilde{\gamma}_1} y' dx' = g(x, x) + \int_{F \circ \tilde{\gamma}_1} y' dx' \end{aligned}$$

Observe-se que pela propriedade *twist*, como $\tilde{\gamma}_1$ é uma vertical que sobe no plano (x, y) , sua imagem corresponderá a um gráfico que torce a vertical para a direita. Além disto, tal gráfico necessariamente segue por cima da imagem pela aplicação G do eixo x . Do contrário, ter-se-ia uma contradição com a bijetividade da aplicação G . Então pela monotonicidade das integrais, segue-se o resultado. O caso em que $\tilde{\gamma}_1$ desce no plano (x, y) é análogo. Basta notar que neste caso o gráfico irá para a esquerda e por baixo. O que foi dito acima resume-se na proposição abaixo.

PROPOSIÇÃO 1.4 Existe um difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $G = F \circ \varphi^{-1}$ é *twist* uniforme e exata e satisfaz

$$x = G_1(x, 0) \quad \text{e} \quad 0 = G_2(0, 0),$$

o que implica que a origem é um ponto fixo de G . Mais ainda, G está associada a uma função geratriz g tal que

$$g(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad g(x, x') \geq 0, \quad \text{para todo} \quad (x, x') \in \mathbb{R}^2.$$

Por fim, apresenta-se mais dois resultados relativos a função geratriz.

PROPOSIÇÃO 1.5 Seja G uma aplicação com as propriedades mencionadas. Então para qualquer função geratriz g de G , tem-se

$$g(x_b, x'_a) + g(x_a, x'_b) - g(x_b, x'_b) - g(x_a, x'_a) \geq c(x_b - x_a)(x'_b - x'_a),$$

onde c é a constante dada na condição 4.

DEMONSTRAÇÃO: Ora,

$$-\frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} g(x, x') \geq c.$$

Portanto, pela monotonicidade das integrais,

$$\int_{x'_a}^{x'_b} \int_{x_a}^{x_b} -\frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} g(x, x') \geq c \int_{x'_a}^{x'_b} \int_{x_a}^{x_b} dx dx'.$$

Integrando-se ambos os lados, tem-se o resultado.

Q.E.D.

PROPOSIÇÃO 1.6 Seja g a função geratriz de G mencionada anteriormente. Então

$$g(x, x') \geq \frac{c}{2}(x' - x)^2,$$

onde $c > 0$ é a constante dada na condição 4.

DEMONSTRAÇÃO: Ora,

$$g(x, x') - g(x, x) = \int_x^{x'} \int_s^{x'} -\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} g(s, t) dt ds,$$

logo,

$$g(x, x') \geq g(x, x) + c \int_x^{x'} \int_s^{x'} dt ds.$$

O resultado segue do fato de $g(x, x) \geq 0$.

Q.E.D.

Estes dois últimos resultados são particularmente úteis no estudo de bilhares. Este tópico não será apresentado aqui, porém pode ser encontrado na seção 1.4 da referência fundamental [4]. Apresentou-se até aqui basicamente o que se encontra na seção 1.3 da mesma referência acrescido de maiores detalhes e explicações. Assim, o autor espera que ao final desta leitura, o leitor se encontre preparado para eventualmente seguir no estudo de bilhares.

CAPÍTULO II

ÚLTIMO TEOREMA GEOMÉTRICO DE POINCARÉ

*Come on, let's twist again
like we did last summer!
Yeah, let's twist again
twistin' time is here!*

— Kal Mann and Dave Appell

ESTUDA-SE neste capítulo uma versão para aplicações do tipo *twist* monótona do resultado que ficou conhecido como o último teorema geométrico de Poincaré. Na verdade, no ano de 1912, Poincaré apenas conjecturou tal resultado que em sua versão original assumia uma hipótese mais fraca do que a *twist* monótona. O último teorema geométrico de Poincaré só veio a ser demonstrado mais tarde: primeiro por Birkhoff e anos depois por Brown and Neumann [1].

A versão apresentada adiante segue o que se encontra em [4] e [1], e tais referências por sua vez seguem as idéias de Le Calvez [6] e Casdagli [7].

Antes do enunciado e da demonstração deste resultado, se faz necessário o conhecimento dos conceitos de órbitas p/q -periódicas e de número de rotação. Estudar-se-á tais conceitos nas seções seguintes.

2.1 Órbitas periódicas

Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$). Denotar-se-á a composição de F consigo mesma um número $n - 1$ de vezes por F^n , bem como a composição de sua inversa consigo mesma um número $n - 1$ de vezes por F^{-n} , onde $n \geq 2$ e $n \in \mathbb{N}$. Além disto, $F^1 = F$ e F^0 é definido como a identidade.

Lembre-se que $A = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$ é o anel e $C = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ é o cilindro, conforme definidos no capítulo anterior.

DEFINIÇÃO 2.1 Seja $f : C \rightarrow C$ ($f : A \rightarrow A$) e $z \in C$ ($z \in A$) arbitrário. Ao conjunto de pontos

$$\{f^i(z) : i \in \mathbb{Z}\},$$

que será denotado por $o(z, f)$, dá-se o nome de **órbita** de z por f .

Na definição a seguir, F corresponde a um levantamento de uma aplicação f .

DEFINIÇÃO 2.2 Sejam $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$) e $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$, ($\tilde{z} \in \mathbb{R} \times [0, 1]$). Ao conjunto de pontos

$$\{F^i(\tilde{z}) + (j, 0) : i, j \in \mathbb{Z}\},$$

que será denotado por $oe(z, F)$, dá-se o nome de **órbita estendida** de \tilde{z} por F .

Como a $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um levantamento de uma aplicação $f : C \rightarrow C$, note-se que

$$eo(\tilde{z}, F) = \Pi^{-1}(o(z, f)),$$

onde $\Pi(\tilde{z}) = z$. Assim sendo, pode-se olhar para uma órbita estendida de um ponto em \mathbb{R}^2 como um levantamento de uma órbita de um ponto em C . Reciprocamente, uma órbita de um ponto em C pode ser vista como a projeção de uma órbita estendida em \mathbb{R}^2 .

DEFINIÇÃO 2.3 Sejam $f : C \rightarrow C$ ($f : A \rightarrow A$) e $z \in C$ ($z \in A$) arbitrário. O ponto z é dito **q -periódico** se, e somente se, existe $q \in \mathbb{N}$, $q > 0$ tal que

$$f^q(z) = z.$$

DEFINIÇÃO 2.4 Sejam $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$) e $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ ($\tilde{z} \in \mathbb{R} \times [0, 1]$). O ponto \tilde{z} é dito **p/q -periódico** se, e somente se, existem $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q > 0$ tais que

$$F^q(\tilde{z}) = \tilde{z} + (p, 0)$$

Ora, para um ponto q -periódico z

$$o(z, f) = \{f^i(z) : i = 0, 1, \dots, q - 1\},$$

e para \tilde{z}

$$eo(\tilde{z}, F) = \{F^i(\tilde{z}) + (j, 0) : i = 0, 1, \dots, q - 1; j \in \mathbb{Z}\}.$$

Observe-se que dado um ponto p/q -periódico \tilde{z} , sua projeção $\Pi(\tilde{z})$ é um ponto q -periódico de f . De fato,

$$f^q \circ \Pi(\tilde{z}) = \Pi \circ F^q(\tilde{z}) = \Pi(\tilde{z} + (p, 0)) = \Pi(\tilde{z}).$$

Além disto, o número p indica quantas voltas são feitas em torno do cilindro (anel) até que se tenha a periodicidade q no cilindro (anel). Por fim, note-se que se $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ ($\tilde{z} \in \mathbb{R} \times [0, 1]$) é ponto p/q -periódico de F , então é também kp/kq -periódico, $k \in \mathbb{N}$. A prova desta afirmação pode ser obtida por indução.

2.2 Número de rotação

DEFINIÇÃO 2.5 Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$) e $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ ($\tilde{z} \in \mathbb{R} \times [0, 1]$).

Considere-se o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi_1(F^n(\tilde{z}))}{n}.$$

Se este limite existe, então denote-o por $\rho(\tilde{z}, F)$ e denomine-o por **número de rotação** de \tilde{z} sob F .

Se \tilde{z} é um ponto p/q -periódico de F , então o número de rotação $\rho(\tilde{z}, F)$ existe e é igual a p/q . Com efeito, dado $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, pode-se escrever pela divisão euclidiana $n = mq + i$, onde $0 \leq i \leq q - 1$. Ora, $F^n(\tilde{z}) = F^i(\tilde{z}) + (mp, 0)$. Deste modo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi_1(F^n(\tilde{z}))}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi_1(F^i(\tilde{z}) + (mp, 0))}{mq + i}$$

Ora, observe-se que quando $n \rightarrow \infty$ necessariamente $m \rightarrow \infty$. Seja i fixado. Para cada subsequência

$$\left\{ \frac{\pi_1(F^i(\tilde{z}) + (mp, 0))}{mq + i} \right\}_{m \in \mathbb{N}},$$

tem-se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\pi_1(F^i(\tilde{z}) + (mp, 0))}{mq + i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi_1(F^i(\tilde{z}))}{mq + i} + \frac{mp}{mq + i} \right) = \frac{p}{q}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe um $M_i \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > M_i$

$$\left| \frac{\pi_i(F^{mq+i}(\tilde{z}))}{mq+i} - \frac{p}{q} \right| < \epsilon.$$

Seja $N = q(1 + \max_i \{M_i\})$. Deste modo,

$$\left| \frac{\pi_i(F^n(\tilde{z}))}{n} - \frac{p}{q} \right| < \epsilon$$

para todo $n > N$.

Seja $g_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g_0(x, y) = (x + y, y)$. Para todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existe o número de rotação e o mesmo é igual a y . De fato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi_1(g_0^n(\tilde{z}))}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi_1(x + ny, y)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + ny}{n} = y.$$

Por fim, seja $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$. Restringindo-se F às componentes de fronteira (i.e., o conjuntos dos pontos com $y = 0$ ou $y = 1$) tem-se duas aplicações, a saber,

$$F|_{y=0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\} \quad \text{e} \quad F|_{y=1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \{1\}.$$

Defina-se então $h_0 = \pi_1 \circ F|_{y=0}$ e $h_1 = \pi_1 \circ F|_{y=1}$. Observe-se que $h_i(x + 1) = h_i(x) + 1$, $i = 0, 1$. Com efeito,

$$h_i(x + 1) = \pi_1(F(x + 1, i))$$

Como F é levantamento, i.e., $F(x + 1, i) = F(x, i) + (1, 0)$,

$$\pi_1(F(x + 1, i)) = \pi_1(F(x, i) + (1, 0)) = \pi_1(F(x, i)) + 1 = h_i(x) + 1.$$

Ademais, pode-se provar por indução que

$$h_i^n(x + 1) = h_i^n(x) + 1.$$

Além disto, h_i é contínua e existe uma $h_i^{-1} = \pi_1 \circ F^{-1} \circ \iota$ também contínua, onde ι é uma inclusão

$$\iota : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \{i\}$$

dada por $\iota(x) = (x, i)$. Logo, h_i é um homeomorfismo.

Seja $x \in \mathbb{R}$ arbitrário. Considere-se o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_i^n(x)}{n}$$

e suponha que este existe. Se isto acontece, este limite independe do ponto $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, sejam $x, y \in \mathbb{R}$ onde este limite exista. Então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m \leq x - y < m + 1.$$

Portanto,

$$y + m \leq x < y + m + 1.$$

A aplicação h_i é estritamente crescente, portanto

$$h_i^n(y + m) \leq h_i^n(x) < h_i^n(y + m + 1).$$

Como $h_i^n(x + 1) = h_i^n(x) + 1$,

$$h_i^n(y) + m \leq h_i^n(x) < h_i^n(y) + m + 1$$

donde

$$m \leq h_i^n(x) - h_i^n(y) < m + 1.$$

Dividindo-se por n a desigualdade anterior, tem-se

$$\frac{m}{n} \leq \frac{h_i^n(x) - h_i^n(y)}{n} < \frac{m + 1}{n}$$

Tomando-se o limite quando $n \rightarrow \infty$, segue-se o resultado.

Vai-se mostrar agora que tal limite existe. Observe-se que se existem $x \in \mathbb{R}$, $m, r \in \mathbb{Z}$ tais que $h_i^m(x) = x + r$, este ponto é m/r -periódico por F . Portanto, este caso já foi provado anteriormente.

Supõe-se então que para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todos $m, r \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$h_i^m(x) \neq x + r.$$

Fixe um $x \in \mathbb{R}$ e um $m \in \mathbb{Z}$. Pelo princípio da boa ordenação, existe $r_m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x + r_m < h_i^m(x) < x + r_m + 1,$$

i.e.,

$$r_m < h_i^m(x) - x < r_m + 1.$$

Note-se que pelo teorema do valor intermediário esta desigualdade se mantém para todo $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, se existisse um $y \in \mathbb{R}$ tal que $r_m > h_i^m(y) - y$, a continuidade da aplicação $h_i^m(\cdot) - id(\cdot)$ implicaria na existência de um ponto z tal que $r_m = h_i^m(z) - z$.

Considere-se o caso particular em que $x = 0$. Note-se que

$$nr_m < h_i^{nm}(0) < n(r_m + 1).$$

Com efeito, para o caso inicial $n = 1$, como $r_m < h_i^m(x) - x < r_m + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$r_m < h_i^m(0) < r_m + 1.$$

Suponha que seja válida a desigualdade para um $n > 1$ arbitrário

$$nr_m < h_i^{nm}(0) < n(r_m + 1).$$

Como $r_m < h_i^{(n+1)m}(0) - h_i^{nm}(0) < r_m + 1$, segue-se que

$$(n + 1)r_m < r_m + h_i^{nm}(0) < h_i^{(n+1)m}(0) < r_m + 1 + h_i^{nm}(0) < (n + 1)(r_m + 1).$$

Assim, tem-se

$$\frac{r_m}{m} < \frac{h_i^{nm}(0)}{nm} < \frac{(r_m + 1)}{m}$$

e

$$\frac{r_m}{m} < \frac{h_i^m(0)}{m} < \frac{(r_m + 1)}{m}.$$

Portanto,

$$\left| \frac{h_i^{nm}(0)}{nm} - \frac{h_i^m(0)}{m} \right| < \frac{1}{m}.$$

Agora, Trocando-se os papéis de n e m , tem-se

$$\left| \frac{h_i^{nm}(0)}{nm} - \frac{h_i^n(0)}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

Assim, pela desigualdade triangular,

$$\left| \frac{h_i^m(0)}{m} - \frac{h_i^n(0)}{n} \right| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Logo, tem-se um seqüência de cauchy em \mathbb{R} . Portanto tal seqüência converge.

DEFINIÇÃO 2.6 Sejam $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$) e $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ ($\tilde{z} \in \mathbb{R} \times [0, 1]$). Então \tilde{z} é dito **ponto monótono** se, e somente se, para todos pontos $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in oe(\tilde{z}, F)$ tais que $\pi_1(\tilde{z}_1) < \pi_1(\tilde{z}_2)$ vale $\pi_1(F(\tilde{z}_1)) < \pi_1(F(\tilde{z}_2))$.

Dito de outra maneira, um ponto \tilde{z} é monótono quando a aplicação F preserva a ordem na primeira coordenada entre os elementos de sua órbita estendida.

PROPOSIÇÃO 2.1 Sejam $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$) e $\tilde{z} \in \mathbb{R}^2$ ($\tilde{z} \in \mathbb{R} \times [0, 1]$) um ponto monótono por F . Então $\rho(\tilde{z}, F)$ existe.

DEMONSTRAÇÃO: Primeiro, provar-se-á por indução que dado \tilde{z} ponto monótono e fixado $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\pi_1(\tilde{z}) + mr_n \leq \pi_1(F^{nm}(\tilde{z})) < \pi_1(\tilde{z}) + m(r_n + 1),$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo. Considere-se o caso em que $m = 1$. Pelo princípio da boa ordenação, existe $r_n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\pi_1(\tilde{z}) + r_n < \pi_1(F^n(\tilde{z})) < \pi_1(\tilde{z}) + r_n + 1.$$

Agora, suponha que a afirmação seja válida para $m > 1$ arbitrário, i.e.,

$$\pi_1(\tilde{z}) + mr_n \leq \pi_1(F^{nm}(\tilde{z})) < \pi_1(\tilde{z}) + m(r_n + 1),$$

Ora, se as desigualdades forem estritas, como \tilde{z} é ponto monótono,

$$\begin{aligned} \pi_1(\tilde{z}) + (m+1)r_n &< \pi_1(F^n(\tilde{z})) + mr_n < \pi_1(F^{n(m+1)}(\tilde{z})) \\ &< \pi_1(F^n(\tilde{z})) + (m+1)(r_n + 1) < \pi_1(\tilde{z}) + (m+1)(r_n + 1), \end{aligned}$$

provando-se então a afirmação. Por outro lado, se

$$\pi_1(\tilde{z}) + mr_n = \pi_1(F^{nm}(\tilde{z})),$$

então necessariamente $\tilde{z} + (mr_n, 0) = F^{nm}(\tilde{z})$. Do contrário, se $\pi_2(\tilde{z} + (mr_n, 0)) < \pi_2(F^{nm}(\tilde{z}))$, então pela aplicação inversa F^{-1} segue-se que

$$\pi_1(F^{-1}(\tilde{z} + (mr_n, 0))) < \pi_1(F^{-1}(F^{nm}(\tilde{z}))).$$

Isto é absurdo com a hipótese de \tilde{z} monótono. O caso em que $\pi_2(\tilde{z} + (mr_n, 0)) > \pi_2(F^{nm}(\tilde{z}))$ é provado de maneira similar. Logo,

$$\pi_1(\tilde{z}) + (m+1)r_n \leq \pi_1(F^n(\tilde{z} + (mr_n, 0))) = \pi_1(F^{n(m+1)}(\tilde{z})).$$

Assim, dividindo-se por nm tem-se

$$\frac{r_n}{n} \leq \frac{\pi_1(F^{nm}(\tilde{z}))}{nm} - \frac{\pi_1(\tilde{z})}{nm} < \frac{r_n + 1}{n}.$$

Em particular, para o caso em que $m = 1$,

$$\frac{r_n}{n} \leq \frac{\pi_1(F^n(\tilde{z}))}{n} - \frac{\pi_1(\tilde{z})}{n} < \frac{r_n + 1}{n}.$$

Trocando-se os papéis de m e n , obtém-se de maneira similar

$$\frac{r_m}{m} \leq \frac{\pi_1(F^{nm}(\tilde{z}))}{nm} - \frac{\pi_1(\tilde{z})}{nm} < \frac{r_m + 1}{m}.$$

e

$$\frac{r_m}{m} \leq \frac{\pi_1(F^m(\tilde{z}))}{m} - \frac{\pi_1(\tilde{z})}{m} < \frac{r_m + 1}{m}.$$

Portanto,

$$\left| \left(\frac{\pi_1(F^{nm}(\tilde{z}))}{nm} - \frac{\pi_1(\tilde{z})}{nm} \right) - \left(\frac{\pi_1(F^m(\tilde{z}))}{m} - \frac{\pi_1(\tilde{z})}{m} \right) \right| \leq \frac{1}{m}$$

e

$$\left| \left(\frac{\pi_1(F^{nm}(\tilde{z}))}{nm} - \frac{\pi_1(\tilde{z})}{nm} \right) - \left(\frac{\pi_1(F^n(\tilde{z}))}{n} - \frac{\pi_1(\tilde{z})}{n} \right) \right| \leq \frac{1}{n}$$

Assim, pela desigualdade triangular

$$\left| \left(\frac{\pi_1(F^n(\tilde{z}))}{n} - \frac{\pi_1(\tilde{z})}{n} \right) - \left(\frac{\pi_1(F^m(\tilde{z}))}{m} - \frac{\pi_1(\tilde{z})}{m} \right) \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Portanto, esta é uma seqüência de Cauchy em \mathbb{R} , logo converge. E como esta seqüência acima converge,

$$\left\{ \frac{\pi_1(F^n(\tilde{z}))}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

também converge.

Q.E.D.

PROPOSIÇÃO 2.2 Seja $\{F_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ ($\{F_n : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]\}_{n \in \mathbb{N}}$) uma seqüência de aplicações do tipo *twist* monótona tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$ na topologia C^0 , onde F é também *twist* monótona. Suponha que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe \tilde{z}_n ponto monótono por F_n , e tais que a seqüência $\{\tilde{z}_n\}$ converge. Então $\tilde{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{z}_n$ é um ponto monótono por F e $\rho(\tilde{z}, F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\tilde{z}_n, F_n)$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponha por absurdo que \tilde{z} não é ponto monótono por F . Então existem i, j, k e $l \in \mathbb{N}$ tais

$$\pi_1(F^i(\tilde{z})) + k < \pi_1(F^j(\tilde{z})) + l,$$

mas

$$\pi_1(F^{i+1}(\tilde{z})) + k \geq \pi_1(F^{j+1}(\tilde{z})) + l.$$

Como $F_n \rightarrow F$ na topologia C^0 e $\tilde{z}_n \rightarrow \tilde{z}$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$

$$\pi_1(F_n^i(\tilde{z}_n)) + k < \pi_1(F_n^j(\tilde{z}_n)) + l.$$

Portanto, pela monotonicidade de cada \tilde{z}_n ,

$$\pi_1(F_n^{i+1}(\tilde{z}_n)) + k < \pi_1(F_n^{j+1}(\tilde{z}_n)) + l.$$

Assim, tomando-se o limite quando $n \rightarrow \infty$ tem-se que

$$\pi_1(F^{i+1}(\tilde{z})) + k \leq \pi_1(F^{j+1}(\tilde{z})) + l.$$

Logo,

$$\pi_1(F^{i+1}(\tilde{z})) + k = \pi_1(F^{j+1}(\tilde{z})) + l.$$

Observe-se que a inversa F^{-1} é *twist* no sentido inverso. Conseqüentemente, como

$$\pi_1(F^i(\tilde{z})) + k < \pi_1(F^j(\tilde{z})) + l,$$

necessariamente

$$\pi_2(F^{i+1}(\tilde{z})) > \pi_2(F^{j+1}(\tilde{z})).$$

Agora pela propriedade *twist* da F , segue-se que

$$\pi_1(F^{i+2}(\tilde{z})) + k > \pi_1(F^{j+2}(\tilde{z})) + l.$$

Como $F_n \rightarrow F$ na topologia C^0 e $\tilde{z}_n \rightarrow \tilde{z}$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > M$

$$\pi_1(F_n^{i+2}(\tilde{z}_n)) + k > \pi_1(F_n^{j+2}(\tilde{z}_n)) + l,$$

o que contradiz a monotonicidade de \tilde{z}_n . Portanto \tilde{z} é de fato ponto monótono.

Dado n , sabe-se que para todo i existe $r_n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\pi_1(\tilde{z}_n) + r_i^n \leq \pi_1(F_n^i(\tilde{z}_n)) < \pi_1(\tilde{z}_n) + r_i^{n+1}.$$

Então,

$$\rho(\tilde{z}_n, F_n) \in \left[\frac{r_i^n}{i}, \frac{r_i^{n+1}}{i} \right].$$

Os números r_i^n podem ser escolhidos independentemente de n . Com efeito, já que \tilde{z} é um ponto monótono por F , escolhe-se r tal que

$$\pi_1(\tilde{z}) + r_i \leq \pi_1(F^i(\tilde{z})) < \pi_1(\tilde{z}) + r_i + 1.$$

Já que $F_n^i(\tilde{z}_n) \rightarrow F^i(\tilde{z})$, tem -se

$$\pi_1(\tilde{z}_n) + r_i - 1 < \pi_1(F_n^i(\tilde{z}_n)) < \pi_1(\tilde{z}_n) + r_i + 2.$$

Então

$$\rho(\tilde{z}_n, F_n) \in \left[\frac{r_i - 1}{i}, \frac{r_i + 2}{i} \right],$$

para n suficientemente grande.

Q.E.D.

PROPOSIÇÃO 2.3 Seja $\{F_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2\}$ (ou $\{F_n : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]\}$) uma seqüência de aplicações do tipo twist monótona tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$ na topologia C^0 . Sejam $p, q \in \mathbb{Z}$ relativamente primos. Suponha que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe \tilde{z}_n ponto p/q -periódico por F_n e $\{\tilde{z}_n\}$ converge. Então $\tilde{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{z}_n$ é um ponto p/q -periódico por F . Ademais,

1. para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, \tilde{z}_n é monótono por F_n e por conseguinte \tilde{z} é monótono por f ou
2. para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, \tilde{z}_n não é monótono por F_n e por conseguinte \tilde{z} não é monótono por F .

DEMONSTRAÇÃO: Seja $n \in \mathbb{N}$ arbitrário. Como por hipótese $\tilde{z} \in A$ é ponto p/q -periódico por F_n

$$F_n^q(\tilde{z}_n) = \tilde{z}_n + (p, 0)$$

Assim, tomando-se o limite quando $n \rightarrow \infty$, segue-se que

$$F^q(\tilde{z}) = \tilde{z} + (p, 0),$$

i.e., \tilde{z} é um ponto p/q -periódico.

Suponha que existe uma subseqüência $\{\tilde{z}_{n_k}\}$ de pontos monótonos por F_{n_k} . Ora, pela proposição anterior \tilde{z} é um ponto monótono.

Agora, suponha que existe um subseqüência $\{\tilde{z}_{n_k}\}$ de pontos não monótonos por F_{n_k} . Então para cada n_k existem i_{n_k}, j_{n_k} e l_{n_k} tais que

$$\pi_1(F_{n_k}^{i_{n_k}}(\tilde{z}_{n_k})) < \pi_1(F_{n_k}^{j_{n_k}}(\tilde{z}_{n_k})) + l_{n_k},$$

mas

$$\pi_1(F_{n_k}^{i_{n_k}+1}(\tilde{z}_{n_k})) \geq \pi_1(F_{n_k}^{j_{n_k}+1}(\tilde{z}_{n_k})) + l_{n_k}.$$

Como cada \tilde{z}_{n_k} é ponto p/q -periódico, pode-se assumir que $0 \leq i_{n_k}, j_{n_k} \leq q$ e $0 \leq l_{n_k} < p$. Ora, o conjunto das triplas $(i_{n_k}, j_{n_k}, l_{n_k})$ é finito, conseqüentemente pode-se escolher uma subseqüência $\{\tilde{z}_{n_{km}}\}$ onde a tripla é sempre a mesma, Portanto, tomando-se o limite tem-se

$$\pi_1(F^i(\tilde{z})) \leq \pi_1(F^j(\tilde{z})) + l,$$

$$\pi_1(F^{i+1}(\tilde{z})) \geq \pi_1(F^{j+1}(\tilde{z})) + l.$$

Se $\pi_1(F^i(\tilde{z})) < \pi_1(F^j(\tilde{z})) + l$, então \tilde{z} é não monótono. Se $\pi_1(F^i(\tilde{z})) = \pi_1(F^j(\tilde{z})) + l$, como \tilde{z} é ponto p/q -periódico $F^i(\tilde{z}) \neq F^j(\tilde{z}) + (l, 0)$. Assim, para que $\pi_1(F^{i+1}(\tilde{z})) \geq \pi_1(F^{j+1}(\tilde{z})) + l$, necessariamente $\pi_2(F^i(\tilde{z})) > \pi_2(F^j(\tilde{z})) + l$.

Observe-se que F^{-1} é *twist* no sentido contrário, portanto

$$\pi_1(F^{i-1}(\tilde{z})) > \pi_1(F^{j-1}(\tilde{z})) + l.$$

Isto mostra que \tilde{z} é ponto não monótono.

Mostrou-se assim que se existe uma subsequência de pontos monótonos que converge para \tilde{z} , então \tilde{z} é monótono e que se existe uma subsequência de pontos não monótonos que convergem para \tilde{z} , \tilde{z} é não monótono. Portanto, necessariamente existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$. Todos os pontos da seqüência $\{\tilde{z}_n\}$ são sempre monótonos ou são sempre não monótonos.

Q.E.D.

2.3 Último teorema geométrico de Poincaré

Assume-se que a para projeção $f : A \rightarrow A$ ($f : C \rightarrow C$) de uma aplicação *twist* monótona F é tal que para toda curva contínua Γ fechada, simples, contida no interior de A (ou no interior de C) e homotopicamente não-trivial vale

$$f(\Gamma) \cap \Gamma \neq \emptyset.$$

Observe-se que se uma projeção f de uma aplicação *twist* monótona é tal que preserva área num anel ou exata num cilindro, então esta satisfaz a propriedade enunciada acima. Com efeito, caso contrário, i.e., se $f(\Gamma) \cap \Gamma = \emptyset$, então $f(\Gamma)$ e Γ delimitariam uma região com área não-nula, o que entraria em contradição com as hipóteses de ser exata ou de preservar área.

Como visto anteriormente, numa aplicação *twist* monótona $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$ que fixe as componentes do bordo, a restrição ao bordo induz um homeomorfismo entre círculos. Ademais, a cada bordo está associado um número de rotação. Denota-se por ∂_0 , ∂_1 os bordos do anel A e assume-se que

$$\rho_0 = \rho(f|_{\partial_0}) < \rho(f|_{\partial_1}) = \rho_1$$

Define-se a seguinte notação

$$K(p, q) = \{(x, y) \in C : \pi_1(F^q(\tilde{x}, \tilde{y})) = \pi_1((\tilde{x}, \tilde{y})) + p, \text{ onde } \Pi(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)\},$$

onde Π é a projeção do plano sobre o cilindro definida no início deste texto. Simplifica-se assim o enunciado da proposição seguinte.

PROPOSIÇÃO 2.4 Seja $p/q \in \mathbb{Q}$ arbitrário no caso do cilindro, e $\rho_a < p/q < \rho_b$ no caso do anel. Então $K(p, q)$ contém um compacto conexo $C(p, q)$ cujo complemento possui pelo menos duas componentes conexas: a relativa ao fim superior e a relativa ao fim inferior.

DEMONSTRAÇÃO: Vejamos primeiro o caso do cilindro. Para tanto, considere-se uma aplicação no levantamento:

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definida como explicado a seguir.

Seja $\tilde{x} \in \mathbb{R}$. Tome o conjunto de pontos $\{\tilde{x}\} \times (-\infty, \infty)$. Em seguida a sua imagem pela F , $F(\{\tilde{x}\} \times (-\infty, \infty))$. Pela condição *twist* monótona,

$$F(\{x\} \times (-\infty, \infty)) \cap \{x + p\} \times (-\infty, \infty) \neq \emptyset.$$

Ademais, é um conjunto unitário. Assim, define-se $\phi(\tilde{x})$ como sendo este elemento desta interseção.

Como F é um homeomorfismo, tal função ϕ é contínua. Por conseguinte, $\phi([0, 1])$ é compacto e conexo. Logo, como $K(p, 1)$ é justamente a projeção de $\phi([0, 1])$, segue-se que $K(p, 1)$ é também conexo e compacto. Todavia, no caso em que $q > 1$, $K(p, q)$ pode não ser conexo. Encontrar-se-á um subconjunto de $K(p, q)$ com as propriedades mencionadas na proposição.

Define-se a notação

$$O_1 = \{(x, y) \in C : \pi_1(F^q(\tilde{x}, \tilde{y})) < \pi_1((\tilde{x}, \tilde{y})) + p, \text{ onde } \Pi(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)\}.$$

Note-se que O_1 é aberto de C .

No caso de um cilindro, observa-se que para qualquer $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ fixo, tem-se:

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \pi_2(F^q(\tilde{x}, s)) = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \pi_1(F^q(\tilde{x}, s)) = \pm\infty$$

onde o resultado acima é conseqüência da condição *twist* monótona e do fato de que

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} F_2(\tilde{x}, s) = \pm\infty.$$

Assim, existe uma constante B positiva suficientemente grande, tal que:

$$O_1 \supset (S^1 \times (-\infty, -B)) \quad \text{e} \quad O_1 \cap (S^1 \times (B, \infty)) = \emptyset.$$

No caso do anel, pode-se provar que O_1 contém uma vizinhança de ∂_0 e $\overline{O_1}$ não intersecta ∂_0 . Denote-se por O_2 a componente conexa de O_1 contendo o aberto $S^1 \times (-\infty, -B)$ no caso do cilindro ou a componente que contém ∂_0 no caso do anel, e por O_3 a componente conexa de $C \setminus \overline{O_2}$ contendo o aberto $S^1 \times (B, \infty)$ para o cilindro ou $A \setminus \overline{O_2}$ contendo ∂_1 no caso do anel. Ora, ∂O_3 é um conjunto fechado e limitado, logo é compacto. Além disso, da definição de O_1 , temos para todo z pertencente a fronteira de O_3

$$\pi(F^q(\tilde{z})) = \pi_1(\tilde{z}) + p \quad \Rightarrow \quad C(p, q) \subset K(p, q)$$

Q.E.D.

PROPOSIÇÃO 2.5 Se $z \in f(C(p, q)) \cap C(p, q)$, então \tilde{z} é um ponto (p, q) -periódico.

DEMONSTRAÇÃO: Sendo F do tipo *twist* monótona,

$$F(\{\pi_1(F^{-1}(\tilde{z}))\} \times (-\infty, \infty)) \cap \{\pi_1(\tilde{z})\} \times (-\infty, \infty) = \{\tilde{z}\}.$$

Seja $z \in f(C(p, q)) \cap C(p, q)$. Ora, como $f^{-1}(z), z \in C(p, q)$,

$$\pi_1(F^q(\tilde{z})) = \pi_1(\tilde{z}) + p \quad \text{e} \quad \pi_1(F^{q-1}(\tilde{z})) = \pi_1(F^{-1}(\tilde{z})) + p$$

Assim, pela primeira afirmação

$$\{F^q(\tilde{z})\} = F(\{\pi_1(F^{q-1}(\tilde{z}))\} \times (-\infty, \infty)) \cap \{\pi_1(F^q(\tilde{z}))\} \times (-\infty, \infty)$$

e por conseguinte,

$$\{F^q(\tilde{z})\} = F(\{\pi_1(F^{-1}(\tilde{z})) + p\} \times (-\infty, \infty)) \cap \{\pi_1(\tilde{z}) + p\} \times (-\infty, \infty)$$

$$\{F^q(\tilde{z})\} = F(\{\pi_1(F^{-1}(\tilde{z}) + (p, 0))\} \times (-\infty, \infty)) \cap \{\pi_1(\tilde{z} + (p, 0))\} \times (-\infty, \infty).$$

Mas como F^{-1} é um levantamento, $F^{-1}(\tilde{z}) + (p, 0) = F^{-1}(\tilde{z} + (p, 0))$. Portanto

$$\{F^q(\tilde{z})\} = F(\{\pi_1(F^{-1}(\tilde{z} + (p, 0)))\} \times (-\infty, \infty)) \cap \{\pi_1(\tilde{z} + (p, 0))\} \times (-\infty, \infty).$$

Por fim, novamente pela primeira afirmação

$$\{F^q(\tilde{z})\} = \{\tilde{z} + (p, 0)\}.$$

Q.E.D.

TEOREMA 2.1 Seja $p/q \in \mathbb{Q}$: arbitrário no caso do cilindro, e $\rho_a < p/q < \rho_b$ no caso do anel. Então F possui pelo menos uma órbita p/q -periódica.

DEMONSTRAÇÃO: pela proposição anterior é suficiente mostrar que

$$f(C(p, q)) \cap C(p, q) \neq \emptyset$$

Assim, por absurdo suponha que não. Neste caso $C(p, q)$ é o bordo de uma aberto homeomorfo a C (ou A) e existe uma curva fechada simples $\gamma \subset C$ que circunda C , tal que $C(p, q)$ pertence a uma componente conexa de γ^C e $f(C(p, q))$ pertence a outra. Mas isto implicaria que $f(\gamma) \cap \gamma \neq \emptyset$, o que é uma contradição.

Q.E.D.

CAPÍTULO III

CURVAS INVARIANTES

*Well, shake it up baby, now!
Twist and shout!*

— Phil Medley and Bert Berns

FINALIZANDO-SE este estudo, apresenta-se neste capítulo uma prova do resultado conhecido como teorema da curva invariante de Birkhoff. Este resultado foi provado pela primeira vez pelo próprio Birkhoff, porém provas com uma notação mais moderna podem ser encontradas [1]. A prova apresentada adiante, segue de perto as idéias de [4], muito embora algumas passagens sejam feitas de maneira distinta.

Na seção seguinte enuncia-se e prova-se o teorema de Birkhoff cujo corolário é que toda curva invariante contida num cilindro pode ser vista como o gráfico de uma função definida em \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

3.1 Teorema de Birkhoff

TEOREMA 3.1 (BIRKHOFF) Seja $f : C \rightarrow C$ a projeção de uma aplicação *twist* monótona. Seja $U \subset C$ aberto tal que

1. U é um subconjunto homeomorfo ao cilindro C ;
2. U é invariante por f ;
3. existem $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ tais que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times (-\infty, a] \subset U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times (-\infty, b]$.

Então a fronteira de U , ∂U , é o gráfico de uma função de Lipschitz $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO: Quer-se provar que ∂U é o gráfico de uma $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Para tanto é necessário que a cada ponto $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ se associe um ponto $\gamma(x) \in \mathbb{R}$ tal que o par $(x, \gamma(x)) \in \partial U$ e que não haja outro ponto em ∂U cuja primeira coordenada seja igual a x .

Ora, como consequência da terceira hipótese, partindo-se de um ponto (x, a) e subindo-se por uma vertical, em algum momento sair-se-á de U . Assim, seja $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\gamma(x) = \sup\{y \in \mathbb{R} : x \times (a, y] \subset U\}$. Note-se que o par $(x, \gamma(x))$ está na fronteira de U . Vai-se então provar que $\pi_1 : \partial U \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é injetiva, e por conseguinte concluir-se que ∂U é de fato o gráfico da aplicação γ .

Seja $U_1 = \pi^{-1}(U)$, i.e., o levantamento do aberto U ao plano \mathbb{R}^2 . Como a projeção é contínua, U_1 é também aberto. Além disto, já que U é o homeomorfo a C , é induzido um homeomorfismo no levantamento entre U_1 e $\mathbb{R}^2 = \pi^{-1}(C)$. Portanto, conclui-se que U_1 é conexo e simplesmente conexo. Ademais, U_1 é invariante por um levantamento F de f e por translações horizontais por valores inteiros, i.e.,

$$U_1 + (1, 0) = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) + (1, 0) : (\tilde{x}, \tilde{y}) \in U_1\} = U_1.$$

Seja $V = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : (\tilde{x}, \tilde{y}') \in U_1, \forall \tilde{y}' \in [a, \tilde{y}]\}$ o subconjunto dos pontos de U_1 que se conectam por verticais ao conjunto $\mathbb{R} \times \{a\}$. Pela maneira como foi definido, V é conexo por caminhos. Mais ainda, V é aberto (para se convencer deste fato, lembre-se que o segmento vertical que vai de um ponto qualquer em V a $\mathbb{R} \times \{a\}$ é um conjunto compacto).

Tendo em vista a tese de ∂U como gráfico de uma função, necessariamente todos os pontos de U_1 seriam ligados por verticais a $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{a\}$. Isto é, $U_1 = V$. No que se segue, serão apresentados lemas que culminam com a conclusão de que $U_1 = V$. Dar-se-á agora o primeiro passo neste caminho. A demonstração será feita a partir dos lemas a seguir.

LEMA 3.1 Sejam $I = [x_1, x_2]$ um intervalo e $y \in \mathbb{R}$ tais que $(x_1, y), (x_2, y) \in V$ e $I \times \{y\} \subset U_1$, então $I \times [a, y] \subset U_1$.

DEMONSTRAÇÃO: Considere-se o perímetro retangular formado pela união dos subconjuntos $I \times \{y\}, I \times \{a\}, \{x_1\} \times [a, y], \{x_2\} \times [a, y]$. Por hipótese, este perímetro retangular está contido em U_1 . E de fato, toda a região $I \times [a, y]$ está contida em U_1 . Do contrário, tal curva fechada não seria contráctil a um ponto e isto contradiria o fato de U_1 ser simplesmente conexo.

Q.E.D.

Considere-se o subconjunto dos pontos $p \in U_1$ tais que toda vizinhança aberta de p contém pontos em V e no complemento de V em $U_1, U_1 \setminus V$. Denomina-se tal conjunto como a fronteira de V em U_1 e denota-se por $\partial_{U_1} V$. O Lema a seguir apresenta uma caracterização para tal conjunto.

LEMA 3.2 A fronteira de V em $U_1, \partial_{U_1} V$, é a união disjunta de segmentos verticais S_α com extremidades em ∂U_1 .

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\tilde{z} \in \partial_{U_1} V$. Como V é aberto, $\tilde{z} \notin V$, i.e., \tilde{z} não se liga por uma vertical ao conjunto $\mathbb{R} \times \{a\}$. Observe-se que existe um subconjunto

$$\{\pi_1(\tilde{z})\} \times (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$$

onde $\pi_2(\tilde{z}) \in (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$, contido em U_1 , e tal que $(\pi_1(\tilde{z}), \tilde{y}_1), (\pi_1(\tilde{z}), \tilde{y}_2) \in \partial U_1$: $(\pi_1(\tilde{z}), \tilde{y}_1)$ é o primeiro ponto fora de U_1 descendo a vertical $(\pi_1(\tilde{z}), \pi_2(\tilde{z}) + s)$ e $(\pi_1(\tilde{z}), \tilde{y}_2)$ é o primeiro ponto fora de U_1 subindo a vertical $(\pi_1(\tilde{z}), \pi_2(\tilde{z}) + s), s \in (-\infty, \infty)$.

Ora, \tilde{y}_1 existe pelo fato de $\tilde{z} \notin V$, e \tilde{y}_2 pela hipótese que

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b \quad \text{tais que } \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times (-\infty, a] \subset U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times (-\infty, b].$$

Denota-se este subconjunto referente ao ponto $\tilde{z}, \{\pi_1(\tilde{z})\} \times (\tilde{y}_1(\tilde{z}), \tilde{y}_2(\tilde{z}))$, por $S_{\tilde{z}}$.

Deste modo, provou-se que

$$\partial_{U_1} V \subset \bigcup_{\tilde{z} \in \partial_{U_1} V} S_{\tilde{z}}.$$

Reciprocamente, seja

$$\tilde{w} \in \bigcup_{\tilde{z} \in \partial_{U_1} V} S_{\tilde{z}},$$

i.e., $\tilde{w} \in S_{\tilde{z}}$ para algum \tilde{z} . Então $\tilde{w} \in \partial_{U_1} V$. Parece-me simples para o leitor se convencer desta afirmação. Portanto,

$$\bigcup_{\tilde{z} \in \partial_{U_1} V} S_{\tilde{z}} \subset \partial_{U_1} V.$$

Além disto, pode-se afirmar que

$$\partial_{U_1} V = \bigcup_{\alpha} S_{\alpha}.$$

onde os subconjuntos S_{α} são disjuntos entre si, já que dois subconjuntos deste tipo com interseção não-vazia coincidem pela maneira que foram definidos.

Q.E.D.

Ademais, se $p \in S_{\alpha}$ então toda bola centrada em p é subdividida em dois abertos: um contido em V e outro contido em $U_1 \setminus V$.

LEMA 3.3 Para todo α , $U_1 \setminus S_{\alpha}$ é a união de duas componentes conexas, uma das quais é disjunta de V . Além disto,

$$[(U_1 \setminus S_{\alpha}) \cap (U_1 \setminus V)] \cap [(U_1 \setminus S_{\beta}) \cap (U_1 \setminus V)] = \emptyset,$$

para todo $\alpha \neq \beta$.

DEMONSTRAÇÃO: Tome um ponto $\tilde{z} \in S_{\alpha}$. Como U_1 é aberto, existe um subconjunto

$$[\pi_1(\tilde{z}) - \delta, \pi_1(\tilde{z}) + \delta] \times \{\pi_2(\tilde{z})\}$$

contido em U_1 . Note-se que $(\pi_1(\tilde{z}) - \delta, \pi_2(\tilde{z}))$ ou $(\pi_1(\tilde{z}) + \delta, \pi_2(\tilde{z}))$ está contido em $U_1 \setminus S_{\alpha}$ e não está em V . Sem perda de generalidade, pode-se dizer que seja $(\pi_1(\tilde{z}) - \delta, \pi_2(\tilde{z}))$.

Agora suponha por absurdo que a componente conexa dos pontos de $U_1 \setminus S_{\alpha}$ que não estão contidos em V não seja disjunta de V . Neste caso poder-se-ia construir uma curva fechada a partir de $(\pi_1(\tilde{z}) - \delta, \pi_2(\tilde{z}))$ que não é contráctil a um ponto. Ora, isto contradiria o fato de U_1 ser simplesmente conexo. Portanto, de fato $U_1 \setminus S_{\alpha}$ é a união de duas componentes conexas, uma das quais é disjunta de V .

Por fim, note-se que se $[(U_1 \setminus S_{\alpha}) \cap (U_1 \setminus V)] \cap [(U_1 \setminus S_{\beta}) \cap (U_1 \setminus V)] \neq \emptyset$, novamente obtém-se uma curva fechada não-contráctil a um ponto.

Q.E.D.

Denota-se por E_{α} as componentes conexas não contidas em V que se encontrem à esquerda de um dado S_{α} , e por R_{β} o análogo à direita. Ademais, denota-se o fecho de E_{α}

em U_1 (i.e., $E_\alpha \cup S_\alpha$) por $\overline{E_\alpha}^{U_1}$. Para os conjuntos do tipo R_β define-se o fecho, $\overline{R_\beta}^{U_1}$, de maneira análoga.

LEMA 3.4 Sob as hipóteses do teorema de Birkhoff,

$$F(V) \cap \overline{E_\alpha}^{U_1} = F^{-1}(V) \cap \overline{R_\beta}^{U_1} = \emptyset.$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\tilde{z} \in V$ arbitrário. Considere-se o segmento vertical $\{\pi_1(\tilde{z})\} \times (-\infty, \pi_2(\tilde{z})]$. Pela invariância do conjunto U_1 por F , $F(\{\pi_1(\tilde{z})\} \times (-\infty, \pi_2(\tilde{z})])$ está contida em U_1 . Além disto, conjunto $F(\{\pi_1(\tilde{z})\} \times (-\infty, \pi_2(\tilde{z})])$ é conexo, pois é a imagem pela aplicação contínua F do conexo $\{\pi_1(\tilde{z})\} \times (-\infty, \pi_2(\tilde{z})]$.

Afirmo que a imagem de \tilde{z} não está num conjunto $\overline{E_\alpha}^{U_1}$. Caso contrário, o conexo $F(\{\pi_1(\tilde{z})\} \times (-\infty, \pi_2(\tilde{z})])$ estaria todo contido em $\overline{E_\alpha}^{U_1}$. Como F preserva os fins do cilindro, em algum momento $F(\{\pi_1(\tilde{z})\} \times (-\infty, \pi_2(\tilde{z})])$ intersectaria $\mathbb{R} \times \{a\}$. Ora, e isto contradiria o lema anterior.

Q.E.D.

COROLARIO 3.1 Sob às hipóteses do teorema de Birkhoff,

$$F^{-1}(\overline{E_\alpha}^{U_1}) \cap V = F(\overline{R_\beta}^{U_1}) \cap V = \emptyset.$$

DEMONSTRAÇÃO: Se houvesse $\tilde{z} \in F^{-1}(\overline{E_\alpha}^{U_1}) \cap V$, então $F(\tilde{z}) \in F(V) \cap \overline{E_\alpha}^{U_1}$. Isto contradiria o lema que se acabou de provar.

Q.E.D.

Denota-se por E a união dos conjuntos do tipo E_α ,

$$E = \bigcup_{\alpha} E_\alpha,$$

e de maneira análoga define-se o conjunto R como a união dos conjuntos do tipo R_β . Além disto, denota-se por \overline{E}^{U_1} a união dos conjuntos do tipo $\overline{E_\alpha}^{U_1}$. De maneira similar define-se \overline{R}^{U_1} .

LEMA 3.5 Sob as hipóteses do teorema, $F^{-1}(\overline{E}^{U_1}) \cap \overline{R}^{U_1} = F(\overline{R}^{U_1}) \cap \overline{E}^{U_1} = \emptyset$

DEMONSTRAÇÃO: Suponha por absurdo que $F^{-1}(\overline{E}^{U_1}) \cap \overline{R}^{U_1} \neq \emptyset$. Então

$$F^{-1}(\overline{E_\alpha}^{U_1}) \cap \overline{R_\beta}^{U_1} \neq \emptyset$$

para algum par (α, β) . Como $\overline{E_\alpha}^{U_1}$ é conexo, pela continuidade da aplicação F^{-1} , a sua imagem $F^{-1}(\overline{E_\alpha}^{U_1})$ também o é. Assim, como $\overline{R_\beta}^{U_1}$ é também conexo, segue-se que necessariamente

$$F^{-1}(\overline{E_\alpha}^{U_1}) \subset \overline{R_\beta}^{U_1}.$$

Considere-se o subconjunto $S_\alpha \subset \overline{E_\alpha}^{U_1}$. Seja $a \in S_\alpha$. Note-se que se $f^{-1}(a) \in R_\beta$ tem-se um absurdo, pois neste caso haveria um elemento $b \in R_\beta$ tal que $b \in F^{-1}(V)$. E se $f^{-1}(a) \in S_\beta$ pela condição *twist* (no sentido contrário) da aplicação F^{-1} , também tem-se um absurdo. Portanto, $F^{-1}(\overline{E}^{U_1}) \cap \overline{R}^{U_1} = \emptyset$. A outra parte do lema é demonstrada de forma análoga.

Q.E.D.

LEMA 3.6 O conjunto U_1 é igual a V .

DEMONSTRAÇÃO: Vai-se provar que os conjuntos E e R são de fato vazios. Tem-se até então que $F^{-1}(\overline{E_\alpha}^{U_1})$ está contido em $\overline{E_\alpha}^{U_1}$ e que $F(\overline{R_\beta}^{U_1})$ está contido em $\overline{R_\beta}^{U_1}$.

Suponha por absurdo que $R \neq \emptyset$. Então existe um $R_{\beta'}$ não-vazio. Como $F(\overline{R}^{U_1})$ está contido em \overline{R}^{U_1} , então $F(\overline{R_{\beta'}}^{U_1})$ está contido em \overline{R}^{U_1} . Conseqüentemente, pela conexidade dos conjuntos do tipo $\overline{R_\beta}^{U_1}$, $F(\overline{R_{\beta'}}^{U_1})$ estaria contido em $\overline{R_{\beta''}}^{U_1}$ para algum β'' .

Seja $a \in S_{\beta'}$ arbitrário. Se $F(a)$ é interior a $R_{\beta''}$ há um aberto de $F(V)$ contido em R e isto contradiz a preservação de área. Se $F(a) \in S_\beta$ também tem-se uma contradição. Portanto, $R = \emptyset$. Para E , demonstra-se de forma análoga.

Q.E.D.

Resta apenas notar que não há segmentos verticais em U_1 . Afinal, isto implicaria na existência de conjuntos do tipo R_β ou E_α . Portanto, de fato tem-se que $\gamma(x) = \sup\{y \in \mathbb{R} : x \times (a, y] \subset U\}$ é o gráfico de uma função.

Por fim, vai-se provar que esta função é de Lipschitz.

LEMA 3.7 A função γ é de Lipschitz.

DEMONSTRAÇÃO: A imagem de uma vertical por uma aplicação *twist* monótona é um gráfico. A idéia é buscar uma reta levemente inclinada de forma que se tenha ainda como imagem um gráfico.

Tome uma curva $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times [a, b]$ dada por $\zeta(s) = (-sB^{-1} + k, s)$, onde $B, k \in \mathbb{R}$,

$B \neq 0$. Tem-se ao longo desta curva, pela regra da cadeia da derivação,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F_1(-sB^{-1} + k, s) &= \frac{\partial}{\partial x}F_1(-sB^{-1} + k, s) \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y}F_1(-sB^{-1} + k, s) \cdot \frac{dy}{ds} \\ &= -B^{-1} \frac{\partial}{\partial x}F_1(-sB^{-1} + k, s) + \frac{\partial}{\partial y}F_1(-sB^{-1} + k, s). \end{aligned}$$

Como a derivada parcial de F com relação a x é contínua, esta assume um máximo M no compacto $[0, 1] \times [a, b]$. Assim, tomando-se $B > 2M/c$, segue-se que

$$\frac{d}{ds}F_1(-sB^{-1} + k, s) > \frac{c}{2},$$

onde c é a constante da definição de aplicação *twist* monótona. Isto é, a imagem de uma curva ζ com $B > 2M/c$ pode ser vista como o gráfico de uma aplicação definida em \mathbb{R} .

Agora sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ arbitrários. Ora, afirmo que

$$\gamma(x_1) - \gamma(x_2) \leq B(x_2 - x_1)$$

Do contrário, ter-se-ia pelo que foi mostrado acima $\pi_1(f(x_1, \gamma(x_1))) > \pi_1(f(x_2, \gamma(x_2)))$. Mas isto é absurdo, pois isto implicaria na existência conjuntos do tipo R_β . De maneira análoga, repete-se o argumento para a F^{-1} e novamente pode-se afirmar que para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 > x_2$ arbitrários que

$$\gamma(x_1) - \gamma(x_2) \geq C(x_2 - x_1)$$

Só resta notar que o máximo entre B e C pode ser a constante de Lipschitz requerida.

Q.E.D. A demonstração deste último lema encerra portanto a prova do teorema de Birkhoff.

Q.E.D.

3.2 Curvas invariantes

DEFINIÇÃO 3.1 Seja $f : C \rightarrow C$ ($f : A \rightarrow A$) projeção de uma aplicação *twist* monótona e seja Γ a imagem de uma curva contínua, fechada, simples e homotopicamente não-trivial. O conjunto Γ é dito **curva rotacional invariante** por f se, e somente se, $f(\Gamma) = \Gamma$.

Se se considera o levantamento $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de f dado por $F(x, y) = (x + y, y)$, o conjunto dos pontos (x, y) tais que $x \in S^1$ e y fixado é um exemplo da definição dada acima.

COROLÁRIO 3.2 Se γ é uma curva rotacional invariante por uma $f : C \rightarrow C$ projeção de uma aplicação *twist* monótona, então Γ é gráfico de uma função de Lipschitz $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO: Ora, a componente conexa contendo o fim inferior é de fato simplesmente conexa. Do contrário, se houvesse uma curva fechada trivial simples não-contrátil a um ponto, então existiria um ponto da curva invariante dentro de tal curva fechada. Assim, pelo teorema da curva de Jordan, toda a curva invariante estaria contida dentro da curva fechada em questão. Mas isto é absurdo.

Assim, pelo teorema anterior, a fronteira desta componente conexa (i.e., a curva invariante) é o gráfico de uma função Lipschitz.

Q.E.D.

REFERÊNCIAS

- [1] K. R. MEYER & G. R. HALL, **Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem**. Springer, 1992.
- [2] J. R. MUNKRES, **Topology**. Prentice-Hall, 2000.
- [3] M. SPIVAK, **Calculus on Manifolds**. Perseus Books, 1965.
- [4] C. G. RAGAZZO, M. J. D. CARNEIRO, & S. A. ZANATA, **Introdução à Dinâmica de Aplicações do tipo Twist**. IMPA, 2006.
- [5] R. L. DEVANEY, **An introduction to Chaotic Dynamical Systems**. Addison-Wesley, 1987.
- [6] P. LECALVEZ, Existence d'orbites quasi-periodiques dans les attracteurs de birkhoff, *Communications in Mathematical Physics*, v. 106, p. 383–394, 1986.
- [7] M. CASDAGLI, Periodic orbits for dissipative twist maps, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, v. 7, p. 165–173, 1987.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)