



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

SOLUÇÕES EXATAS PARA ARRANJOS PERÍODICOS DE  
BOLHAS NA CÉLULA DE HELE-SHAW

por

**Antônio Márcio Pereira Silva**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

**Banca Examinadora:**

Prof. Giovani Lopes Vasconcelos (Orientador-UFPE)

Prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha (DF - UFPE)

Prof. André Nachbin (IMPA)

Recife - PE, Brasil

Agosto - 2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Silva, Antônio Márcio Pereira

Soluções exatas para arranjos periódicos de bolhas na célula de Hele-Shaw / Antônio Márcio Pereira Silva. - Recife : O Autor, 2008.

xi, 67 folhas : il. fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2008.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Mecânica dos fluidos. 2. Dinâmica de interfaces. 3. Célula de Hele-Shaw. I. Título.

532 CDD (22.ed.)

FQ2008-049



Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Física – CCEN  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil  
Fone (+ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (+ 55 81) 3271-0359  
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: [posgrad@df.ufpe.br](mailto:posgrad@df.ufpe.br)

---

## Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

---

Antônio Márcio Pereira Silva

### SOLUÇÕES EXATAS PARA ARRANJOS PERIÓDICOS DE BOLHAS NA CÉLULA DE HELE-SHAW

A Banca Examinadora composta pelos Professores Giovani Lopes Vasconcelos (Presidente e Orientador), Bruno Geraldo Carneiro da Cunha, ambos da Universidade Federal de Pernambuco e André Nachbin, do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, consideram o candidato:

Aprovado

Reprovado

Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em vinte e oito de agosto de 2008.

  
Prof. Giovani Lopes Vasconcelos  
Presidente e Orientador

  
Prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha

  
Prof. André Nachbin

*Dedico este trabalho à minha família e à todos aqueles que considero como sendo parte da mesma.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à Deus, à minha família pelo carinho e apoio, ao meu orientador pela paciência e pelo conhecimento transmitido a mim, e aos meus amigos. Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Nesta dissertação apresentamos o cálculo de soluções exatas para o problema do movimento de arranjos duplamente periódicos de bolhas em uma célula de Hele-Shaw, quando os efeitos de tensão superficial são desprezados. As soluções obtidas descrevem um conjunto de bolhas que se movem com velocidade constante na direção do eixo  $x$ . No referencial que se move com as bolhas, os centróides das mesmas estão localizados ao longo das arestas de um reticulado retangular com célula unitária de largura  $2a$  e comprimento  $2L$ , podendo haver um número arbitrário  $N$  de bolhas por célula unitária. As soluções descritas neste trabalho representam a família mais geral de soluções estacionárias para bolhas na célula de Hele-Shaw conhecida até o momento, sendo que todas as soluções exatas obtidas anteriormente, para uma ou mais bolhas, são casos particulares da solução geral apresentada aqui. Essa solução é obtida através do uso de transformações conformes, calculando-se a transformação apropriada que mapeia o semi-plano superior do plano complexo auxiliar  $\zeta$  no domínio ocupado pelo fluido no plano físico (plano  $z$ ), representando a célula unitária. Em sua versão mais geral, as soluções são válidas para uma célula de Hele-Shaw infinita, isto é, sem fronteiras, mas de particular interesse são os casos especiais em que temos um conjunto periódico de bolhas movendo-se ao longo de um canal. Nesse caso, obtém-se uma expressão analítica para a velocidade das bolhas em função da fração de volume ocupada pelas mesmas.

**Palavras-chave:** Mecânica dos fluidos; Dinâmica de interfaces; Célula de Hele-Shaw.

## ABSTRACT

In this thesis exact solutions for the problem of multiple bubbles in a Hele-Shaw cell are presented for the case when surface tension effects are neglected. The solutions reported here describe a doubly-periodic array of bubbles that move with constant velocity in the  $x$  direction. In a reference frame that moves with the bubbles, the bubble centroids are located in a rectangular grid whose unit cell has width  $2a$  and length  $2L$ , and there can be any number  $N$  of bubbles per unit cell. The solutions described in the present work represent the most general family of solutions for the steady motion of bubbles in a Hele-Shaw cell in the sense that all previously known solutions for steady bubbles are particular cases of our generic solution. The solution is obtained via conformal mapping techniques, where we compute the appropriate mapping function from the upper half-plane of the auxiliary  $\zeta$  plane onto the physical domain occupied by the fluid in the unit cell (the  $z$  plane). In its most general form, the solution is valid for an infinite Hele-Shaw cell, but of particular interest are the cases where we have a periodic array of bubbles in a Hele-Shaw channel. An analytical expression for the bubble velocity as a function of the volume fraction occupied by the bubbles is also obtained.

**Keywords:** Fluid mechanics; Interface dynamics; Hele-Shaw cell.



# SUMÁRIO

<b>Capítulo 1—Introdução</b>	1
1.1 Dinâmica de interfaces . . . . .	1
1.2 Dinâmica de interfaces em uma célula de Hele-Shaw . . . . .	3
<b>Capítulo 2—Dinâmica de uma bolha em uma célula de Hele-Shaw</b>	6
2.1 Escoamento de Hele-Shaw . . . . .	6
2.2 Problema de uma bolha em uma célula de Hele-Shaw . . . . .	9
2.2.1 Equações de movimento . . . . .	9
2.2.2 O problema rotacionado . . . . .	14
2.2.3 Formulação via transformações conformes . . . . .	19
2.2.4 Solução geral: Bolha de Taylor-Saffman . . . . .	22
2.2.5 Caso especial da solução ( $U = 2V$ ) . . . . .	26
<b>Capítulo 3—Múltiplas bolhas em uma célula de Hele-Shaw</b>	28
3.1 Soluções periódicas no canal . . . . .	28
3.2 Soluções periódicas: Formulação geral do problema . . . . .	31
3.2.1 Configuração geométrica das soluções . . . . .	31
3.2.2 Formulação matemática do problema . . . . .	33
3.2.3 O problema rotacionado . . . . .	36
3.2.4 Formulação via transformações conformes . . . . .	38
3.2.5 Caso especial ( $U=2V$ ) . . . . .	41
3.2.6 Fração de ocupação da célula como função da velocidade das bolhas	42
3.2.7 Soluções gerais . . . . .	45
3.3 Soluções periódicas em um canal de Hele-Shaw . . . . .	52

SUMÁRIO	ix
3.4 Soluções em uma célula infinita . . . . .	60
<b>Capítulo 4—Conclusões e perspectivas</b>	<b>62</b>
<b>Apêndice A—Transformação de Schwarz-Christoffel</b>	<b>63</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>65</b>

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Formação de um dedo viscoso em uma célula de Hele-Shaw . . . . .	2
1.2	Célula de Hele-Shaw . . . . .	3
2.1	Perfil parabólico do campo de velocidade do escoamento . . . . .	8
2.2	Bolha simétrica em uma célula de Hele-Shaw com a geometria do canal .	9
2.3	Escoamento no referencial que se move com a bolha. . . . .	13
2.4	(a) Domínio simplesmente conexo no plano $z$ ; (b) Domínio correspondente no plano $W$ . . . . .	15
2.5	Problema (a) no referencial do laboratório, e (b) no referencial que se move com a bolha. . . . .	16
2.6	Escoamento rotacionado: (a) Mudança na direção da velocidade e (b) escoamento resultante no referencial da bolha. . . . .	18
2.7	Problema rotacionado (a) no referencial do laboratório e (b) no referencial da bolha. . . . .	19
2.8	(a) Domínio simplesmente conexo no plano $z$ ; (b) Domínio simplesmente conexo no plano $\tilde{W}$ . . . . .	20
2.9	Geometria do escoamento: (a) no plano $z$ , (b) no plano $W$ , (c) no plano $\tilde{W}$ e (d) na metade superior do plano $\zeta$ . . . . .	21
2.10	Representações do (a) escoamento uniforme no plano $W$ e (b) escoamento devido à fonte e ao sumidouro no plano $\zeta$ . . . . .	23
3.1	Soluções periódicas no canal: (a) fileira de bolhas, (b) célula unitária e (c) célula unitária reduzida. . . . .	29
3.2	Soluções periódicas no canal: (a) colunas de bolhas, (b) célula unitária e (c) célula unitária reduzida. . . . .	30

3.3	Soluções periódicas de bolhas: (a) arranjos de bolhas, (b) célula unitária e (c) célula unitária reduzida. . . . .	32
3.4	Célula unitária reduzida do problema. . . . .	34
3.5	Problema no referencial das bolhas. . . . .	35
3.6	Domínio simplesmente conexo do escoamento no plano $W$ . . . . .	36
3.7	Problema rotacionado no referencial das bolhas. . . . .	37
3.8	Domínio do escoamento rotacionado no plano $\tilde{W}$ . . . . .	37
3.9	Domínio do escoamento (a) no plano $z$ , (b) no plano $W$ , (c) no plano $\tilde{W}$ e (d) no plano $\zeta$ . Na figura (d), por economia de espaço, identificamos apenas algumas bolhas de canto e bolhas de lado. . . . .	39
3.10	Gráfico $\Gamma_U$ x $U$ para $\Gamma_2 = 0.3$ . . . . .	44
3.11	Comportamento de $\Gamma_U$ para (a) $\Gamma_2 = 0.49$ e (b) $\Gamma_2 = 0.02$ . . . . .	45
3.12	Domínios do escoamento (a) no plano $z$ , (b) no plano $W$ , (c) no plano $\tilde{W}$ e (d) no plano $\zeta$ . Novamente, apenas alguns intervalos foram colocados na figura (d) por motivo de espaço. . . . .	53
3.13	Solução de Burgess e Tanveer, com $\nu_{-1}^2 = \nu_0^2 = -\nu_{-1}^3 = -\nu_0^3 = -\delta = -0.8$ e $\nu_1^2 = -\nu_2^2 = -\eta = -0.6$ . . . . .	54
3.14	Fileira com número par de bolhas por célula unitária, com $\nu_{-1}^2 = \nu_0^2 = -\nu_{-1}^3 = -\nu_0^3 = -\delta = -0.9$ , $\nu_1^2 = -0.87$ , $\nu_2^2 = -0.2$ , $\nu_3^2 = -0.17$ e $\nu_4^2 = 0.5$ . . . . .	55
3.15	Fileira com número ímpar de bolhas por célula unitária, com $\nu_{-1}^2 = -\nu_{-1}^3 = -\nu_0^3 = \delta - 0.9$ , $\nu_0^2 = -0.6$ , $\nu_1^2 = -0.56$ , $\nu_2^2 = -0.02$ , $\nu_3^2 = -0.17$ e $\nu_4^2 = 0.5$ . . . . .	56
3.16	Colunas com número par de bolhas por célula unitária . . . . .	57
3.17	Colunas com número ímpar de bolhas por célula unitária . . . . .	58
3.18	Bolhas em zig-zag, com $\nu_1^1 = -0.9$ , $\nu_2^1 = -0.4$ , $\nu_1^3 = 0.2$ , $\nu_2^3 = 0.6$ e $\nu_{-1}^2 = \nu_0^2 = -\nu_{-1}^3 = -\nu_0^3 = -\delta = -0.1$ . . . . .	58
3.19	Soluções mistas, com $\nu_1^2 = -\nu_{-1}^3 = -\nu_0^3 = \delta = -0.8$ , $\nu_2^1 = -0.5$ , $\nu_{-1}^2 = -0.48$ , $\nu_0^2 = -0.1$ , $\nu_1^2 = -0.08$ , $\nu_2^1 = 0.3$ , $\nu_3^2 = 0.32$ e $\nu_4^2 = 0.6$ . . . . .	59
3.20	Soluções mistas, com $\nu_1^1 = -0.97$ , $\nu_2^1 = -0.7$ , $\nu_3^1 = -0.68$ , $\nu_4^1 = -\nu_4^2 = -\eta = -0.3$ , $\nu_{-1}^2 = \nu_0^2 = \delta_1 = -0.25$ , $\nu_1^2 = -0.2$ , $\nu_2^2 = -0.1$ , $\nu_3^2 = -0.08$ , $\nu_{-1}^3 = \nu_0^3 = \delta_2 = 0.34$ , $\nu_1^3 = 0.37$ , $\nu_2^3 = 0.5$ , $\nu_3^3 = 0.53$ e $\nu_4^3 = 0.9$ . . . . .	60

3.21	Solução para célula de Hele-Shaw infinita, com $\nu_1^1 = -0.9$ , $\nu_2^1 = -0.6$ , $\nu_{-1}^2 = \nu_0^2 = \delta_1 = -0.5$ , $\nu_1^2 = -0.4$ , $\nu_2^2 = -0.2$ , $\nu_{-1}^3 = \nu_0^3 = \delta_2 = 0.15$ , $\nu_1^3 = 0$ , $\nu_2^3 = 0.3$ , $\nu_1^4 = 1.2$ e $\nu_2^4 = 1.8$ . . . . .	60
3.22	Solução para célula de Hele-Shaw infinita, com $\nu_{-1}^1 = -1.1$ , $\nu_1^1 = -0.9$ , $\nu_2^1 = -\nu_2^3 = -\eta_1 = -0.6$ , $\nu_{-1}^2 = -\nu_1^3 = -\eta_2 = -0.5$ , $\nu_0^2 = -0.3$ , $\nu_{-1}^3 = 0.1$ , $\nu_0^3 = 0.2$ e $\nu_{-1}^4 = 0.8$ . . . . .	61
A.1	(a) Região poligonal no plano $z$ ; (b) Domínio correspondente no plano $\zeta$ .	63

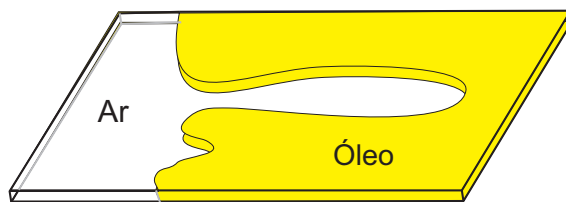
## INTRODUÇÃO

### 1.1 DINÂMICA DE INTERFACES

Nas últimas décadas, problemas relacionados à dinâmica de interfaces têm atraído considerável atenção uma vez que esse tipo de problema encontra aplicações em diversos campos da ciência e da engenharia, em particular, ciência dos materiais, crescimento de cristais, metalurgia, combustão e física dos fluidos. Como exemplos de problemas de dinâmica de interfaces podemos citar: formação de dedos viscosos em uma célula de Hele-Shaw quando empurramos um líquido mais viscoso com auxílio de um menos viscoso, formação e crescimento de cristais com formas dendríticas quando inserimos um núcleo sólido em um líquido super-resfriado, propagação de chamas em tubos, etc (ver [1]). Nestes exemplos, pode-se observar experimentalmente que certas características, tais como formas e velocidades bem definidas das interfaces ou velocidade de crescimento bem definida, podem ser manipuladas a partir da variação de certos parâmetros de controle.

Tomemos como exemplo a formação de dedos viscosos. Quando um fluido viscoso (digamos óleo) confinado em uma célula de Hele-Shaw (dispositivo que consiste de duas placas paralelas muito próximas uma da outra) é empurrado por ar injetado em uma das extremidades da célula [figura 1.1], observa-se que a interface planar ar-óleo que se forma é instável. Devido a isso, o ar empurra o óleo de modo a formar vários “dedos”, dos quais apenas um se desenvolverá mais que os outros e avançará com velocidade constante e forma bem definida ao longo da célula. Tanto esta quanto as outras observações experimentais citadas acima fazem parte de uma mesma classe de fenômenos, a qual denominamos propagação de interfaces, e cujas questões básicas são: o problema da morfologia das interfaces (interface planares ou curvadas, formas não estacionárias, etc) como funções de parâmetros de controle e o problema de velocidades de propagação ou crescimento em função dos mesmos parâmetros de controle.

Podemos considerar a propagação de interfaces como um sistema dinâmico uma vez



**Figura 1.1** Formação de um dedo viscoso em uma célula de Hele-Shaw

que a movimentação de uma interface corresponde a um problema de fronteira livre, onde devemos determinar a solução para uma função escalar (pressão, temperatura, etc) ou um campo vetorial (por exemplo, o campo de velocidade de um fluido), satisfazendo uma equação diferencial (equação de Navier-Stokes, de Euler, da difusão, etc) com condições de contorno na interface. Retornemos ao exemplo de formação de dedos viscosos: Nesse caso, temos como objetivo determinar a forma da interface do dedo. Uma vez que o dedo avança no fluido devido a um gradiente de pressão, o campo escalar a ser considerado poderá ser a pressão  $p$  do óleo, a qual satisfaz, como mostraremos adiante, à equação de Laplace

$$\nabla^2 p = 0. \quad (1.1)$$

As condições de contorno a serem satisfeitas na interface do dedo viscoso serão:

- a condição de contorno cinemática que diz que a componente normal da velocidade do fluido na interface é igual a velocidade de propagação da interface naquela direção;
- a condição de contorno dinâmica que dá a pressão do fluido na interface, a qual é dada por

$$p_{ar} - p = \tau\kappa, \quad (1.2)$$

onde  $p$ ,  $p_{ar}$  são, respectivamente, as pressões do fluido viscoso na interface e do ar dentro do dedo viscoso,  $\tau$  é a tensão superficial entre os fluidos e  $\kappa$  é a curvatura da interface em um dado ponto da mesma.

Além disso, devemos satisfazer às condições de contorno nas laterais da célula de Hele-Shaw.

Soluções para este problema foram primeiramente obtidas por Saffman e Taylor [2] e publicadas em 1958. Neste trabalho, os autores obtiveram soluções exatas quando a

tensão superficial foi desprezada, e estudaram os efeitos de tensão superficial não-nula na interface dos dedos.

Problemas de propagação de interfaces entre fluidos viscosos na célula de Hele-Shaw são de grande interesse uma vez que eles possuem analogias matemáticas com outros importantes problemas, tais como o crescimento de cristais dendríticos e solidificação direcionada. Na próxima seção faremos um breve histórico do que já foi produzido em relação a problemas em sistemas de Hele-Shaw.

## 1.2 DINÂMICA DE INTERFACES EM UMA CÉLULA DE HELE-SHAW

Um dos trabalhos mais influentes em Dinâmica de Fluidos foi escrito pelo inglês Henry Selby Hele-Shaw (1854-1941) [3] no final do século XIX. Nesse trabalho ele descreve sua famosa célula, a qual seria utilizada, 50 anos depois, em diversas investigações científicas. A célula de Hele-Shaw, como mencionado anteriormente, consiste de duas placas planas paralelas de vidro separadas por uma pequena distância  $b$  entre elas (figura 1.2). Esse



**Figura 1.2** Célula de Hele-Shaw

dispositivo é utilizado no estudo de escoamentos de fluidos viscosos confinados em geometrias quase bidimensionais. Uma situação muito importante ocorre quando o escoamento é quase-estacionário (baixos números de Reynolds), pois a equação de Navier-Stokes reduz-se a uma relação linear entre a velocidade e o gradiente de pressão, similar à Lei de Darcy para escoamento de fluidos viscosos em meios porosos. Nessa situação e em face da condição de incompressibilidade, o campo de pressão do escoamento obedece à equação de Laplace. Além disso, vários mecanismos de escoamento, tais como a tensão superficial e forças externas (sucção ou injeção), podem ser considerados no problema.

O estudo do movimento de interfaces em células de Hele-Shaw vem atraindo consideravelmente a atenção de pesquisadores nas últimas décadas. Além de proporcionar



analogias matemáticas com outros importantes problemas de propagação de interfaces discutidos na seção anterior, estes problemas são relativamente fáceis de serem investigados experimentalmente e matematicamente. Por isso, a célula de Hele-Shaw tornou-se o “laboratório” de vários estudos sobre dinâmica de interfaces entre fluidos viscosos.

Do ponto de vista teórico, o problema de propagação de interfaces em células de Hele-Shaw é particularmente tratável quando desprezamos a tensão superficial entre os fluidos. Nesse caso, muitas soluções exatas para escoamentos estacionários ou dependentes do tempo foram desenvolvidas. Como vimos, em 1958, Saffman e Taylor obtiveram a solução estacionária para um dedo viscoso. Em seguida, os mesmos autores obtiveram soluções para uma bolha simétrica e para um dedo assimétrico [4] em 1959. Soluções para uma bolha foram mais tarde extendidas por S. Tanveer [5] em 1987 para incluir bolhas não-simétricas. Soluções exatas para uma fileira periódica de bolhas foram desenvolvidas por Burgess e Tanveer [6] em 1991. Soluções exatas para dedos não-simétricos em uma célula inclinada em relação ao eixo longitudinal da mesma foram obtidas por Brener, Levine e Tu [7] em 1991. Uma propriedade de invariância por rotação para escoamentos estacionários foi descoberta por Tian e Vasconcelos [8] em 1993. Esta propriedade foi usada por Vasconcelos para obter muitas novas soluções, tais como soluções periódicas para múltiplas de bolhas por célula unitária [9] (as quais são o ponto de partida para esta dissertação), soluções para múltiplos dedos viscosos [10, 11], para dedos com um número arbitrário de bolhas em seus topos [12], além de soluções exatas em termos de integrais elípticas para duas bolhas e para um dedo com uma bolha em seu topo [13], e soluções mais gerais para um número arbitrário de bolhas na célula [14].

Soluções dependentes do tempo foram desenvolvidas por Saffman [4] em 1959 e desde então muitas soluções na forma dos então chamados “pólos dinâmicos” foram desenvolvidas. Muitas dessas soluções dependentes do tempo e com tensão superficial nula desenvolvem uma cúspide após um tempo finito. Recentemente, Dawson e Mineev-Weinstein [15] e Baker, Siegel e Tanveer [16] estudaram soluções que permanecem regulares para todo o tempo e aproximam-se, assintoticamente, das soluções para múltiplos dedos citadas acima. Soluções auto-similares para dedos viscosos em células com geometria de cantos foram obtidas por M. Ben Amar [17, 18] em 1991. Outras soluções exatas dependentes do tempo para escoamentos em uma célula de Hele-Shaw infinita na presença de obstáculos

foram obtidas recentemente por Cummings [19] em 1999, Richardson [20] em 2001 e Vasconcelos [21] em 2007, e foram também estudadas numericamente por Bogoyavlenskiy e Cotts [22].

Para problemas com tensão superficial não-nula, torna-se mais difícil obter soluções exatas para o problema. Há uma solução não-trivial devido a Vasconcelos e Kadanoff [23] publicada em 1991. Devido a esta dificuldade, os efeitos de pequenas quantidades de tensão superficial têm sido intensamente estudados em conexão com o chamado problema de seleção, o qual refere-se ao fato de que soluções exatas quando tomamos a tensão superficial nula são degeneradas no sentido de que parâmetros físicos da solução não determinam a velocidade da interface. Este problema foi primeiramente notado por Saffman e Taylor [2] em 1958, onde eles perceberam que dedos viscosos com largura relativa igual a 0.5 são obtidos para tensão superficial zero. No entanto, este problema passou a ser entendido teoricamente devido a Kessler, Koplik e Levine [24], Pelcé [1] e Tanveer [25].

Nesta dissertação estamos interessados em obter soluções exatas para arranjos periódicos estacionários de bolhas em uma célula de Hele-Shaw quando desprezamos a tensão superficial entre os fluidos. As soluções serão obtidas via técnicas de mapeamento conforme e com o auxílio do teorema de invariância por rotação para escoamentos de Hele-Shaw estacionários [8].

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no próximo capítulo, faremos uma introdução ao problema de bolhas em uma célula de Hele-Shaw, onde consideraremos o caso de uma única bolha na ausência de tensão superficial. No capítulo 3, que representa a parte central desta dissertação, desenvolveremos uma formulação bastante geral para o problema de arranjos periódicos de bolhas em uma célula de Hele-Shaw, tanto para células sem fronteiras como para células com geometria de canal. Essas soluções representam a família mais geral de soluções periódicas conhecidas até o momento. No capítulo 4 apresentaremos nossas conclusões e algumas perspectivas de possíveis extensões desse trabalho.

## DINÂMICA DE UMA BOLHA EM UMA CÉLULA DE HELE-SHAW

### 2.1 ESCOAMENTO DE HELE-SHAW

Nessa seção, obteremos a equação de movimento que descreve esse escoamento a partir da equação de Navier-Stokes para fluidos newtonianos incompressíveis. Considere o escoamento de um fluido viscoso em uma célula de Hele-Shaw. Colocando a célula de Hele-Shaw na horizontal (plano  $xy$ ) de modo que os efeitos da gravidade sejam desprezíveis, a equação de Navier-Stokes torna-se

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}\right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}, \quad \text{com} \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.1)$$

onde  $p$  é a pressão,  $\rho$  é a densidade,  $\vec{v}$  é a velocidade e  $\mu$  é a viscosidade do fluido.

Considerando que o escoamento é estacionário e paralelo às placas, ou seja,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0, \quad v_z = 0,$$

reduzimos a equação (2.1) a

$$\rho\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}\right)v_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x \quad (2.2)$$

$$\rho\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}\right)v_y = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_y \quad (2.3)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.4)$$

Se o fluido viscoso escoar muito lentamente (ou seja, escoamento a baixíssimo número de Reynolds), podemos desprezar os termos inerciais em comparação com os termos

viscosos nas equações (2.2) e (2.3), ou seja, podemos fazer

$$\begin{aligned}\rho\left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y}\right)v_x &\ll \mu\nabla^2v_x \\ \rho\left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y}\right)v_y &\ll \mu\nabla^2v_y.\end{aligned}$$

Com isso, obtemos as seguintes equações

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2v_x \quad (2.5)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\nabla^2v_y, \quad (2.6)$$

as quais representam um escoamento de Stokes em 2 dimensões.

Agora, se a distância  $b$  entre as placas for muito pequena, vide figura 1.2, as derivadas de  $v_x$  e  $v_y$  com respeito a  $x$  e  $y$  são desprezíveis em comparação com suas derivadas em relação a  $z$ . Logo,

$$\nabla^2 \approx \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.7)$$

e as equações (2.5) e (2.6) reduzem-se a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2v_x}{\partial z^2} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu\frac{\partial^2v_y}{\partial z^2}. \quad (2.9)$$

O escoamento deve satisfazer também a condição de não-deslizamento nas placas:

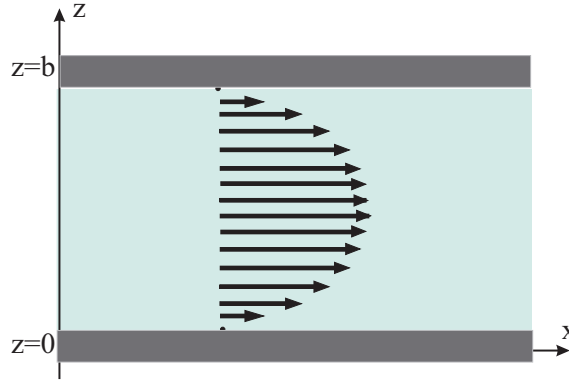
$$v_x|_{z=0,b} = v_y|_{z=0,b} = 0. \quad (2.10)$$

Da equação (2.4) observa-se que a pressão independe de  $z$ , e portanto (2.8) e (2.9) implicam que  $v_x$  e  $v_y$  devem ser polinômios de, no máximo, grau 2 em  $z$ . Resolvendo as equações (2.8) e (2.9), e aplicando as condições de contorno (2.10), obtemos

$$v_x = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(z^2 - bz) \quad v_y = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}(z^2 - bz). \quad (2.11)$$

Como vemos, a velocidade do fluido possui um perfil parabólico, o chamado perfil de Poiseuille, como mostra a figura 2.1.

Para tornar o problema bidimensional, devemos tomar o valor médio das componentes da velocidade ao longo da direção  $z$  transversal às placas. Sejam, então,  $\bar{v}_x$  e  $\bar{v}_y$  os valores



**Figura 2.1** Perfil parabólico do campo de velocidade do escoamento

médios de  $v_x$  e  $v_y$  ao longo da direção transversal da célula de Hele-Shaw. Como resultado, obtemos

$$\bar{v}_x = \frac{1}{b} \int_0^b v_x dz = -\frac{b^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \bar{v}_y = \frac{1}{b} \int_0^b v_y dz = -\frac{b^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.12)$$

onde usamos (2.11).

Somando vetorialmente as componentes da velocidade média, obtemos a seguinte expressão

$$\bar{\mathbf{v}} = -\frac{b^2}{12\mu} \vec{\nabla} p. \quad (2.13)$$

A equação (2.13) é conhecida como equação de Hele-Shaw e é similar à lei de Darcy, que descreve escoamentos através de meios porosos. Observemos que  $\bar{\mathbf{v}}$  e  $p$  dependem apenas de  $x$  e  $y$ , portanto devemos considerar (2.13) uma equação puramente bidimensional. Ela descreve um escoamento potencial em duas dimensões, onde o potencial de velocidade é proporcional à pressão, ou seja

$$\bar{\mathbf{v}} = \vec{\nabla} \phi, \quad (2.14)$$

onde o potencial de velocidade  $\phi$  é dado por

$$\phi = -\frac{b^2}{12\mu} p(x, y). \quad (2.15)$$

Da condição de incompressibilidade,  $\vec{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0$ , temos que potencial de velocidade é uma função harmônica, ou seja,

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (2.16)$$

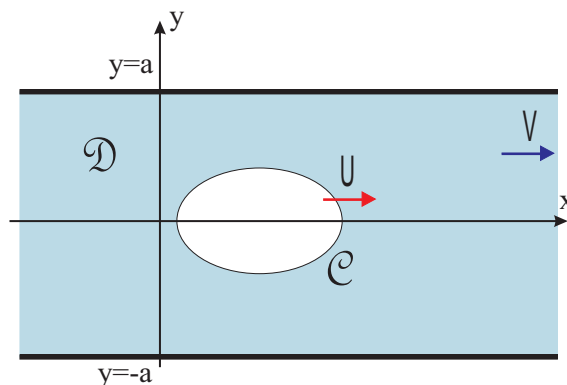
Além disso, o potencial  $\phi$  deve satisfazer as condições de contorno específicas do problema em questão.

Nesta dissertação, estamos interessados no problema do movimento de múltiplas bolhas em uma célula de Hele-Shaw, particularmente em uma célula com geometria de canal. Nesse caso temos condições de contorno a serem satisfeitas tanto nas paredes laterais do canal quanto na superfície livre da bolha. Para introduzir física e matematicamente o problema de bolhas na célula de Hele-Shaw, vamos considerar na próxima seção o caso mais simples de uma única bolha em um canal de Hele-Shaw, considerado inicialmente por Saffman e Taylor [4] em 1959. O caso de múltiplas bolhas, tema central dessa dissertação, será discutido no próximo capítulo.

## 2.2 PROBLEMA DE UMA BOLHA EM UMA CÉLULA DE HELE-SHAW

### 2.2.1 Equações de movimento

Consideremos o problema de uma bolha movendo-se com velocidade constante  $\mathbf{U} = U\hat{x}$  em uma célula de Hele-Shaw retangular de largura  $2a$ . A célula está colocada na horizontal (plano  $xy$ ) de modo que a gravidade não realiza trabalho sobre o fluido viscoso contido nela. As laterais do canal estão em  $y = \pm a$ . O fluido viscoso que envolve a bolha se move na direção  $x$  e, muito longe da bolha, escoava com velocidade constante  $\mathbf{V} = V\hat{x}$ , com  $V < U$ . A bolha se move ao longo da linha central do canal e é simétrica em relação à mesma (figura 2.2). Desprezaremos tanto os efeitos de tensão superficial quanto os efeitos tridimensionais devido às camadas de fluido entre a bolha e as placas, e o escoamento será quase-estacionário.



**Figura 2.2** Bolha simétrica em uma célula de Hele-Shaw com a geometria do canal

De acordo com a equação (2.14), a velocidade  $\vec{v}(x, y, t)$  do fluido na célula de Hele-

Shaw será dada por

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi \quad \text{em } \mathcal{D}, \quad (2.17)$$

onde o potencial de velocidade  $\phi(x, y, t)$  é dependente do tempo devido à perturbação causada no fluido pela movimentação da bolha no canal.

Denotemos a interface da bolha por  $\mathcal{C}$  e a região ocupada pelo fluido viscoso (exterior à bolha) por  $\mathcal{D}$ . Para definir completamente o problema, especificaremos a seguir as condições de contorno a serem satisfeitas por  $\phi$  em  $\mathcal{C}$ , em  $y = \pm a$  e em  $|x| \rightarrow \infty$ :

A pressão  $p$  na superfície da bolha é dada por

$$p_0(x, y, t) - p(x, y, t) = \tau\kappa(x, y, t) \quad \text{em } \mathcal{C},$$

onde  $p_0$  é a pressão dentro da bolha,  $\tau$  é a tensão superficial e  $\kappa$  é a curvatura da bolha. Desprezando os efeitos de tensão superficial ( $\tau = 0$ ), temos que

$$p = p_0.$$

Considerando a viscosidade do fluido (digamos ar) dentro da bolha como desprezível, temos que a pressão  $p_0$  dentro da bolha será constante. Logo, temos que a pressão do fluido viscoso  $p$  é constante ao longo da superfície da bolha e igual a  $p_0$ . Por simplicidade, façamos  $p_0 = 0$ . Logo, obtemos

$$p(x, y, t) = 0 \quad \text{em } \mathcal{C} \quad \implies \quad \phi(x, y, t) = 0 \quad \text{em } \mathcal{C}. \quad (2.18)$$

Por outro lado, a bolha é uma superfície material. Portanto, o campo de velocidade  $\vec{v}$  do fluido viscoso deve satisfazer à condição de contorno cinemática:

$$\vec{v} \cdot \hat{n} = \mathbf{U} \cdot \hat{n} \quad \text{em } \mathcal{C},$$

onde  $\hat{n}$  é o vetor normal exterior à superfície e  $\mathbf{U} = U\hat{x}$  é a velocidade da bolha. Essa condição pode ser escrita como

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \mathbf{U} \cdot \hat{n} \quad \text{em } \mathcal{C}. \quad (2.19)$$

Temos ainda que a componente normal da velocidade do fluido é nula nas laterais do

canal. Logo,

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = \pm a. \quad (2.20)$$

Por fim, consideramos que longe da bolha o escoamento é uniforme. Logo, o potencial será dado por

$$\phi(x, y, t) \approx Vx \quad \text{quando } |x| \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

As equações (2.16),(2.18)–(2.21) especificam completamente o problema de uma bolha movendo-se com velocidade constante em um canal de Hele-Shaw.

Uma vez definido o problema, passa a ser conveniente trabalharmos no referencial em que a bolha está em repouso. A vantagem de se fazer isso é que o escoamento no referencial da bolha é estacionário. As coordenadas do novo referencial são dadas por

$$x' = x - Ut \quad \text{e} \quad y' = y, \quad (2.22)$$

e o novo potencial de velocidade será

$$\phi' = \phi - Ux'. \quad (2.23)$$

Em particular, as velocidades transformam-se, é claro, segundo uma transformação de Galileu:

$$v_{x'} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} = v_x - U, \quad (2.24)$$

$$v_{y'} = \frac{\partial \phi'}{\partial y'} = v_y. \quad (2.25)$$

No referencial que se move com a bolha, o comportamento do potencial  $\phi'$  no infinito será

$$\phi' \approx (V - U)x' \quad \text{quando } |x'| \rightarrow \infty, \quad (2.26)$$

como podemos verificar facilmente de (2.21) e (2.23).

Como no referencial das bolhas o escoamento é estacionário, é conveniente introduzir a função de corrente  $\psi'(x', y')$  definida por

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x'} = -v_{y'} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi'}{\partial y'} = v_{x'}. \quad (2.27)$$

Comparando as equações (2.24) e (2.25) com (2.27) vê-se imediatamente que a função de



corrente  $\psi'$  e o potencial  $\phi'$  são funções harmonicamente conjugadas, isto é, satisfazem às condições de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x'} = \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi'}{\partial y'} = -\frac{\partial \psi'}{\partial x'}.$$

Vamos agora determinar as condições de contorno a serem satisfeitas pela função de corrente  $\psi'$ :

Como  $\frac{\partial \phi'}{\partial y'} = 0$  em  $y' = \pm a$ , vide (2.20), segue que

$$\frac{\partial \phi'}{\partial y'} = -\frac{\partial \psi'}{\partial x'} = 0 \quad \text{em} \quad y' = \pm a, \quad (2.28)$$

que implica que  $\psi'$  é constante em  $y' = \pm a$ . Logo, as laterais do canal são linhas de corrente. Por outro lado, sabemos da mecânica dos fluidos que a diferença de intensidade entre duas linhas de corrente é igual ao fluxo de fluido (vazão) entre elas, ou seja

$$\psi'(y' = a) - \psi'(y' = -a) = \int_{-a}^a v'_x dy'.$$

Uma vez que a vazão de fluido é constante ao longo do canal, usaremos o fato de que  $v'_x \approx V - U$  longe da bolha. Portanto, obtemos

$$\psi'(y' = a) - \psi'(y' = -a) = \int_{-a}^a (V - U) dy' = 2a(V - U).$$

Aproveitando a simetria do problema, fazemos então a seguinte escolha

$$\psi'(y' = \pm a) = \mp a(U - V), \quad (2.29)$$

donde segue ainda que

$$\psi'(y' = 0) = 0. \quad (2.30)$$

Alternativamente, as condições de contorno (2.29) e (2.30) poderiam ter sido obtidas mais facilmente se observarmos que no infinito a função de corrente deve satisfazer à condição

$$\psi' \approx (V - U)y', \quad |x'| \rightarrow \infty. \quad (2.31)$$

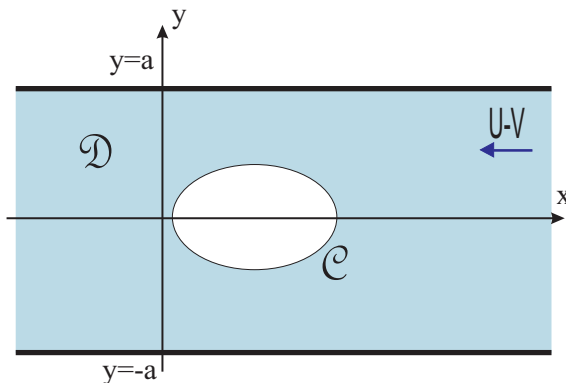
Assim, fazendo  $y' = \pm a$  seguem imediatamente as relações (2.29).

Como a bolha é obviamente fixa no seu referencial, segue que a sua interface também é

uma linha de corrente. Em particular, a bolha faz parte da linha de corrente que coincide com o eixo do canal  $y' = 0$ . Da condição (2.30) segue então que

$$\psi' = 0 \quad \text{em } \mathcal{C}. \quad (2.32)$$

Observe que no novo referencial, a bolha está parada e o fluido escoar no sentido contrário ao do escoamento original, isto é, da direita para a esquerda, com velocidade no infinito (ou seja, muito longe da bolha) igual a  $U - V$ , como mostrado na figura 2.3. De



**Figura 2.3** Escoamento no referencial que se move com a bolha.

acordo com as equações (2.18) e (2.23), segue ainda que na superfície da bolha o potencial  $\phi'$  deve satisfazer a seguinte condição de contorno:

$$\phi' = -Ux' \quad \text{em } \mathcal{C}. \quad (2.33)$$

Em resumo, temos que o problema formulado acima consiste em obter as funções harmônicas conjugadas  $\phi'$  e  $\psi'$  satisfazendo às seguintes condições de contorno:

$$\phi'(x', y') = -Ux' \quad \text{e} \quad \psi'(x', y') = 0 \quad \text{em } \mathcal{C} \quad (2.34)$$

$$\psi' = \mp a(U - V) \quad \text{em } y' = \pm a \quad (2.35)$$

$$\phi' \approx (V - U)x' \quad \text{e} \quad \psi' \approx (V - U)y' \quad \text{quando } |x'| \rightarrow \infty. \quad (2.36)$$

Daqui por diante trabalharemos apenas no referencial que se move com a bolha e vamos eliminar a notação linha.

O problema de escoamentos potenciais em duas dimensões pode ser também formulado em termos do potencial complexo  $W(z) = \phi + i\psi$ , onde  $z = x + iy$  e as funções  $\phi$  e

$\psi$ , como mencionado anteriormente, são harmônicas conjugadas. O potencial complexo  $W(z)$  deve ser uma função analítica em  $\mathcal{D}$  e satisfazer às condições de contorno apropriadas. Reescrevendo a seguir as condições de contorno (2.34)–(2.36) na forma do potencial complexo, obtemos

$$W = -Ux \quad \text{em} \quad \mathcal{C} \quad (2.37)$$

$$\text{Im } W = \mp a(U - V) \quad \text{em} \quad y = \pm a \quad (2.38)$$

$$W \approx (V - U)z \quad \text{quando} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (2.39)$$

onde  $\text{Im}$  ( $\text{Re}$ ) denota a parte imaginária (real) da função.

Em particular, notamos para uso posterior que as componentes de velocidade  $v_x$  e  $v_y$  do escoamento podem ser obtidas a partir da derivada de  $W(z)$ :

$$v_x - iv_y = \frac{dW(z)}{dz}, \quad (2.40)$$

como pode ser facilmente verificado. O lado esquerdo da expressão anterior é conhecido como velocidade complexa e será denotado por

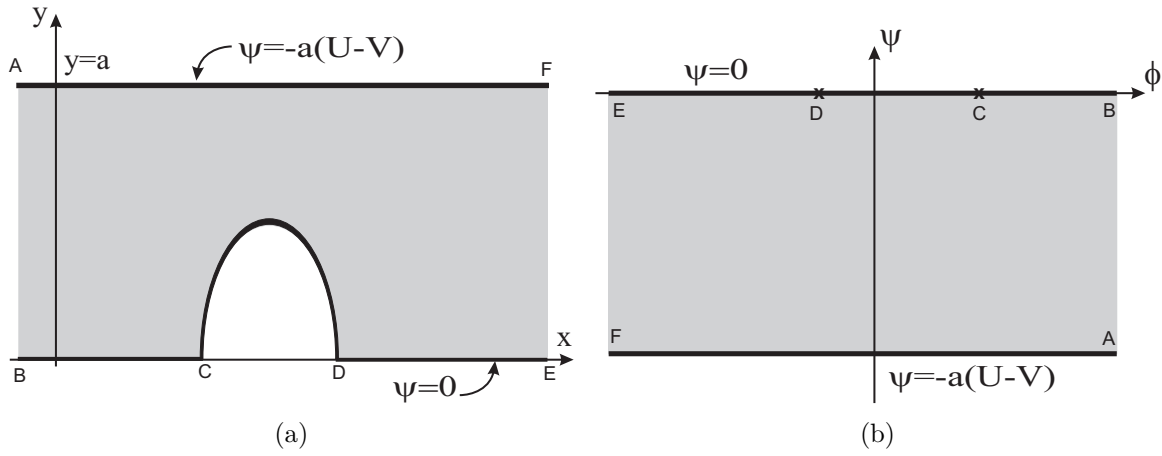
$$v(z) = v_x - iv_y. \quad (2.41)$$

Podemos interpretar  $W(z)$  como sendo uma transformação conforme da região ocupada pelo fluido viscoso no plano  $z$  para um domínio correspondente no plano  $W$ . A simetria da bolha ajuda a reduzir a região do fluido no plano  $z$  a um domínio simplesmente conexo, o qual corresponde à metade superior do canal ocupada pelo fluido. Como efeito, o domínio correspondente no plano  $W$  também é simplesmente conexo. Os respectivos domínios nos planos  $z$  e  $W$  são mostrados na figura 2.4.

Para encontrarmos uma expressão para curva  $\mathcal{C}$  representando a bolha, precisaremos de um importante resultado o qual discutiremos a seguir.

### 2.2.2 O problema rotacionado

Nesta seção, demonstraremos o princípio de invariância sob rotação para interfaces de bolhas em escoamentos estacionários de Hele-Shaw descoberto originalmente por Tian e Vasconcelos em [8]. Adotaremos, contudo, o ponto de vista utilizado por Vasconcelos



**Figura 2.4** (a) Domínio simplesmente conexo no plano  $z$ ; (b) Domínio correspondente no plano  $W$ .

em [14].

Consideremos o problema de uma bolha movendo-se com velocidade  $\mathbf{U} = U\hat{x}$  em uma célula de Hele-Shaw infinita (ou seja, sem fronteiras), sendo a velocidade do fluido no infinito dada por  $\mathbf{V} = V\hat{x}$ ; figura 2.5(a). Como anteriormente, denotemos por  $\mathcal{C}$  a interface da bolha e  $\mathcal{D}$  a região do fluido exterior a  $\mathcal{C}$ . Seja  $W(z) = \phi + i\psi$  o potencial complexo do escoamento no referencial que se move com a bolha; figura 2.5(b). Como não há fronteiras, as condições de contorno para  $W(z)$  dadas em (2.37)–(2.39) reduzem-se a

$$W = -Ux \quad \text{em } \mathcal{C} \quad (2.42)$$

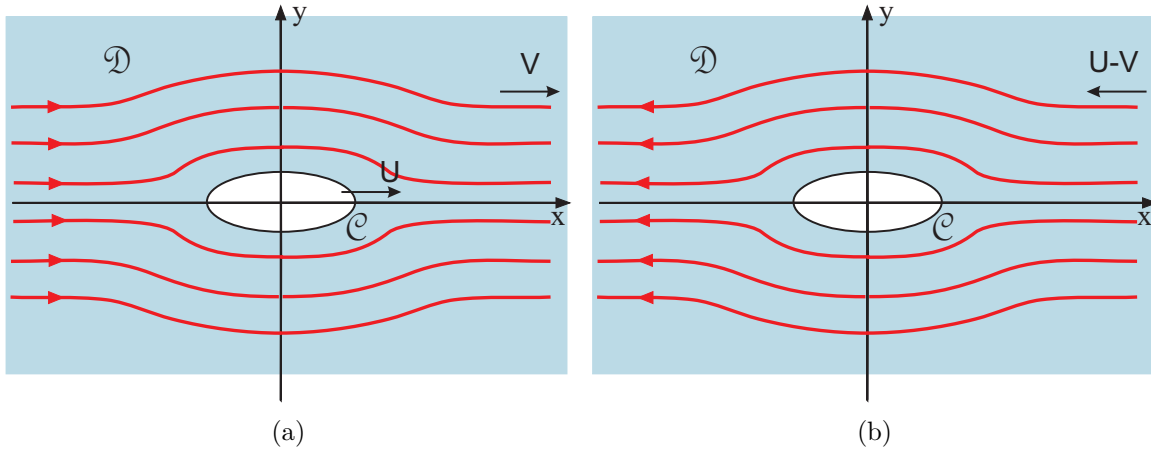
$$W \approx (V - U)z \quad \text{quando } |z| \rightarrow \infty. \quad (2.43)$$

Será conveniente reformular o problema acima em termos da função de Schwarz [26] de  $\mathcal{C}$ . Para tanto, vamos inicialmente definir a função de Schwarz de uma curva. Seja  $\mathcal{C}$  uma curva dada pela função  $F(x, y) = 0$ . A função de Schwarz de  $\mathcal{C}$ , denotada por  $S(z)$ , é obtida resolvendo a equação

$$F\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = 0,$$

para  $\bar{z}$  em função de  $z$ , ou seja,

$$\bar{z} = S(z).$$



**Figura 2.5** Problema (a) no referencial do laboratório, e (b) no referencial que se move com a bolha.

A equação (2.42) pode agora ser reescrita em termos da função de Schwarz. Fazendo

$$x = (z + \bar{z})/2 = [z + S(z)]/2$$

em (2.42), obtemos

$$W(z) = -\frac{U}{2}[z + S(z)] \quad \text{em } \mathcal{E}. \quad (2.44)$$

Mas, por continuação analítica, (2.44) também é válida em  $\mathcal{D}$ . Logo, temos que o potencial complexo  $W(z)$  é dado por

$$W(z) = -\frac{U}{2}[z + S(z)] \quad \text{em } \mathcal{D}. \quad (2.45)$$

Consideremos agora o problema em que a velocidade da bolha gira de um ângulo  $\alpha$  enquanto a bolha permanece inalterada, como mostra a figura 2.6(a). Seja  $\tilde{W}(z) = \tilde{\phi} + i\tilde{\psi}$  o potencial complexo para esse problema, o qual chamaremos de problema rotacionado. Como a velocidade da bolha nesse caso é dada por  $\mathbf{U} = U \cos \alpha \hat{x} + U \sin \alpha \hat{y}$ , segue que a condição de contorno para  $\tilde{W}(z)$  sobre  $\mathcal{E}$  (no referencial que se move com a bolha) passa a ser escrita como

$$\tilde{W} = -Ux \cos \alpha - Uy \sin \alpha \quad \text{em } \mathcal{E}. \quad (2.46)$$

Reescrevendo (2.46) em termos da função de Schwarz, temos que

$$\tilde{W}(z) = -U \left[ \frac{z + S(z)}{2} \cos \alpha + \frac{z - S(z)}{2i} \sin \alpha \right] \quad \text{em } \mathcal{E}, \quad (2.47)$$

a qual torna-se

$$\tilde{W}(z) = -\frac{U}{2} [ze^{-i\alpha} + S(z)e^{i\alpha}] \quad \text{em } \mathcal{C}. \quad (2.48)$$

Novamente, por continuação analítica, (2.48) é válida em  $\mathcal{D}$ . Logo,

$$\tilde{W}(z) = -\frac{U}{2} [ze^{-i\alpha} + S(z)e^{i\alpha}] \quad \text{em } \mathcal{D}. \quad (2.49)$$

Agora, usando (2.45) para eliminar  $S(z)$  em (2.49), temos que

$$\tilde{W}(z) = -\frac{U}{2} \left[ ze^{-i\alpha} + e^{i\alpha} \left( -\frac{2}{U}W(z) - z \right) \right] \quad (2.50)$$

e obtemos como expressão final

$$\tilde{W}(z) = e^{i\alpha}W(z) + iUz \sin \alpha, \quad \text{para } z \in \mathcal{D}, \quad (2.51)$$

onde  $\tilde{W}(z)$  é calculado no referencial da bolha. A equação (2.51) é claramente analítica em  $\mathcal{D}$ , uma vez que por hipótese  $W$  também o é. Logo, a interface  $\mathcal{C}$  é solução do problema rotacionado. No referencial da bolha, a velocidade complexa do fluido  $\tilde{v}(z) = \tilde{v}_x - i\tilde{v}_y$  será dada por

$$\tilde{v}(z) = \frac{d\tilde{W}(z)}{dz} = e^{i\alpha}v(z) + iU \sin \alpha \quad \text{para } z \in \mathcal{D}, \quad (2.52)$$

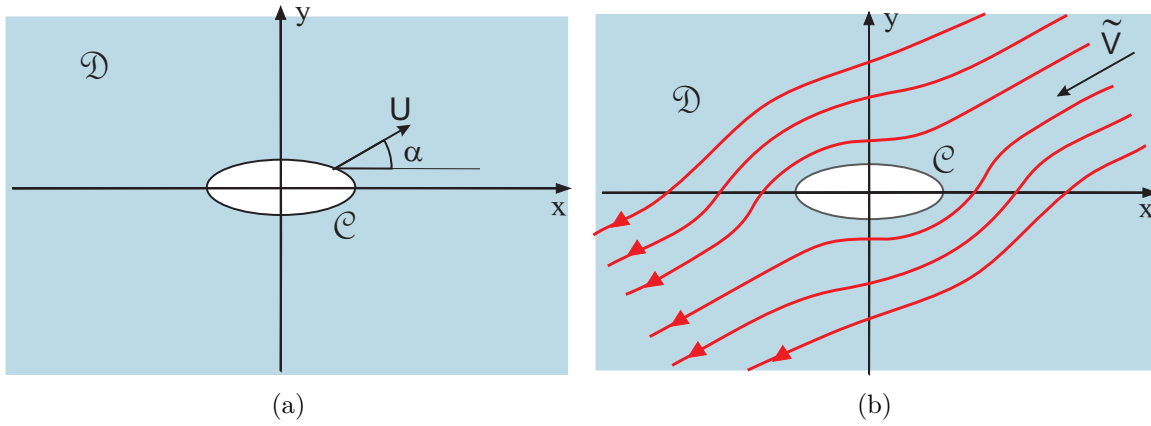
onde  $v(z) = v_x - iv_y$  é a velocidade complexa do fluido no problema não rotacionado. A velocidade do fluido no infinito para o problema rotacionado será portanto

$$\tilde{V}(z) \approx e^{i\alpha}(V - U) + iU \sin \alpha, \quad (2.53)$$

onde usamos a condição de contorno (2.43). Apesar de o problema ser formulado em uma célula de Hele-Shaw infinita, a equação (2.51) permanece válida para outros domínios, desde que as soluções nesses casos possam ser estendidas para a célula de Hele-Shaw infinita. Por exemplo, as soluções no canal retangular podem ser estendidas para a célula infinita através de sucessivas reflexões em torno das laterais do canal.

Neste trabalho, daremos ênfase ao caso especial em que  $\alpha = \pi/2$ . Nesse caso, a equação (2.51) torna-se

$$\tilde{W}(z) = i[W(z) + Uz], \quad (2.54)$$



**Figura 2.6** Escoamento rotacionado: (a) Mudança na direção da velocidade e (b) escoamento resultante no referencial da bolha.

e a velocidade complexa  $\tilde{V}(z)$  do fluido no infinito no referencial da bolha, será

$$\tilde{V}(z) \approx i(V - U) + iU = iV, \quad |z| \rightarrow \infty,$$

e suas componentes serão

$$\tilde{v}_x - i\tilde{v}_y = iV \implies \tilde{v}_x = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{v}_y = -V,$$

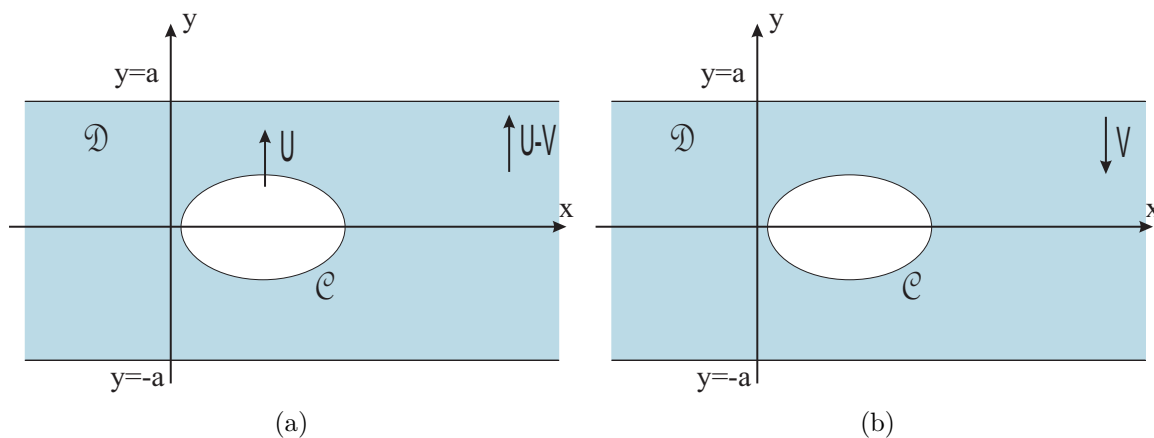
ou seja, no referencial da bolha, o fluido escoava de cima para baixo, na direção  $y$ , com velocidade  $V$ , longe da bolha. Por outro lado, no referencial do laboratório a bolha se move com velocidade  $U$  de baixo para cima na direção  $y$ , enquanto que, longe da mesma, o fluido se move com velocidade dada por  $\tilde{V} = U - V$  na direção  $y$ , também de baixo para cima.

Consideremos o caso de uma bolha no canal mostrado na figura 2.3. Ao rotacionar a velocidade da bolha de  $90^\circ$  (mantendo a bolha fixa), geramos o problema ilustrado na figura 2.7(a). De acordo com a equação (2.54) e as condições de contorno (2.37)–(2.39), o potencial  $\tilde{W}(z)$  do problema rotacionado nesse caso está sujeito às seguintes condições de contorno

$$\operatorname{Re} \tilde{W} = \mp aV \quad \text{em} \quad y = \pm a \tag{2.55}$$

$$\tilde{W} = -Uy \quad \text{em} \quad \mathcal{C} \tag{2.56}$$

$$\tilde{W} \rightarrow iVz \quad \text{quando} \quad |x| \rightarrow \infty. \tag{2.57}$$



**Figura 2.7** Problema rotacionado (a) no referencial do laboratório e (b) no referencial da bolha.

No referencial do laboratório [figura 2.7(a)], a bolha se move com velocidade  $U$ , de baixo para cima, na direção  $y$ , e a velocidade do fluido viscoso no infinito é igual a  $U - V$  na direção  $y$ , no mesmo sentido que o da bolha. Já no referencial da bolha [figura 2.7(b)], o fluido passa a escoar de cima para baixo, com velocidade  $V$  longe da bolha. A condição (2.55) mostra que as laterais do canal agora são equipotenciais do escoamento no referencial da bolha. Além disso, note que, por construção, a região ocupada pelo fluido viscoso no problema rotacionado permanece a mesma.

Usando as condições de contorno (2.55)–(2.57) e as simetrias do problema, obtemos os respectivos domínios do escoamento nos planos  $z$  e  $\tilde{W}$ , os quais são mostrados na figura 2.8.

Reescrevendo agora a equação (2.54) na forma

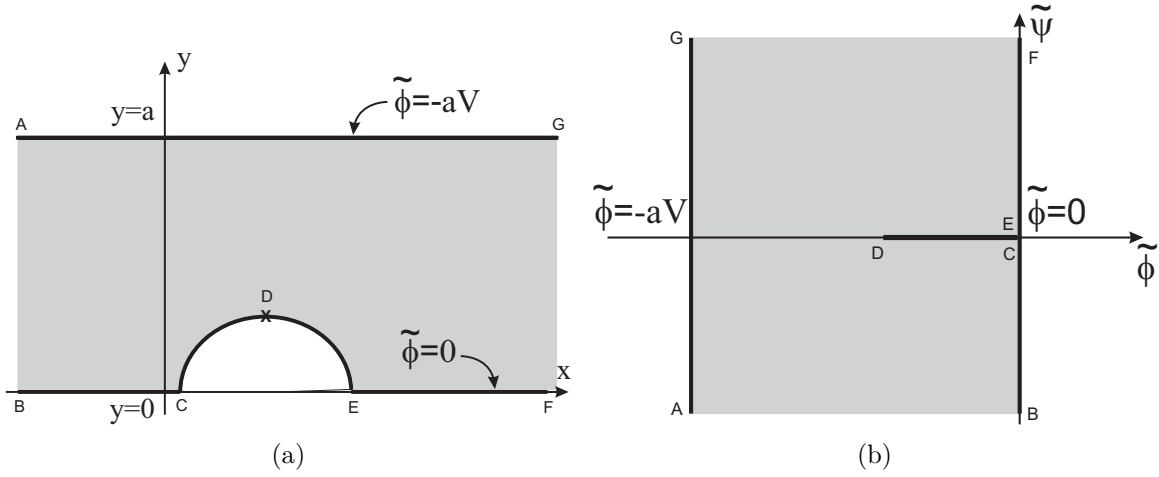
$$z = -\frac{1}{U}[W(z) + i\tilde{W}(z)], \quad (2.58)$$

notamos que basta encontrar  $W(z)$  e  $\tilde{W}(z)$  para resolver o problema no plano  $z$ . Soluções para  $W$  e  $\tilde{W}$  serão desenvolvidas na próxima subseção.

### 2.2.3 Formulação via transformações conformes

Apresentaremos agora uma formulação matemática baseada em técnicas de mapeamento conforme, a qual ajudará a construir soluções para o nosso problema. Faremos uso da transformação de Schwarz-Christoffel, onde o interior de uma região poligonal (podendo





**Figura 2.8** (a) Domínio simplesmente conexo no plano  $z$ ; (b) Domínio simplesmente conexo no plano  $\tilde{W}$ .

essa ser degenerada) será mapeado na metade superior de um plano complexo auxiliar  $\zeta$ .

Suponha que  $z = z(\zeta)$  seja o mapeamento conforme da metade superior (incluindo o eixo real) de um plano  $\zeta$  para o domínio do fluido no plano  $z$ . O eixo real de  $\zeta$  é mapeado sobre as fronteiras da região do fluido no plano  $z$ , como é mostrado nas figuras 2.9(a) e 2.9(d). A imagem de  $\mathcal{C}$  sobre o eixo real de  $\zeta$  é dada pelo intervalo  $\mathcal{I}$ , o qual é definido por

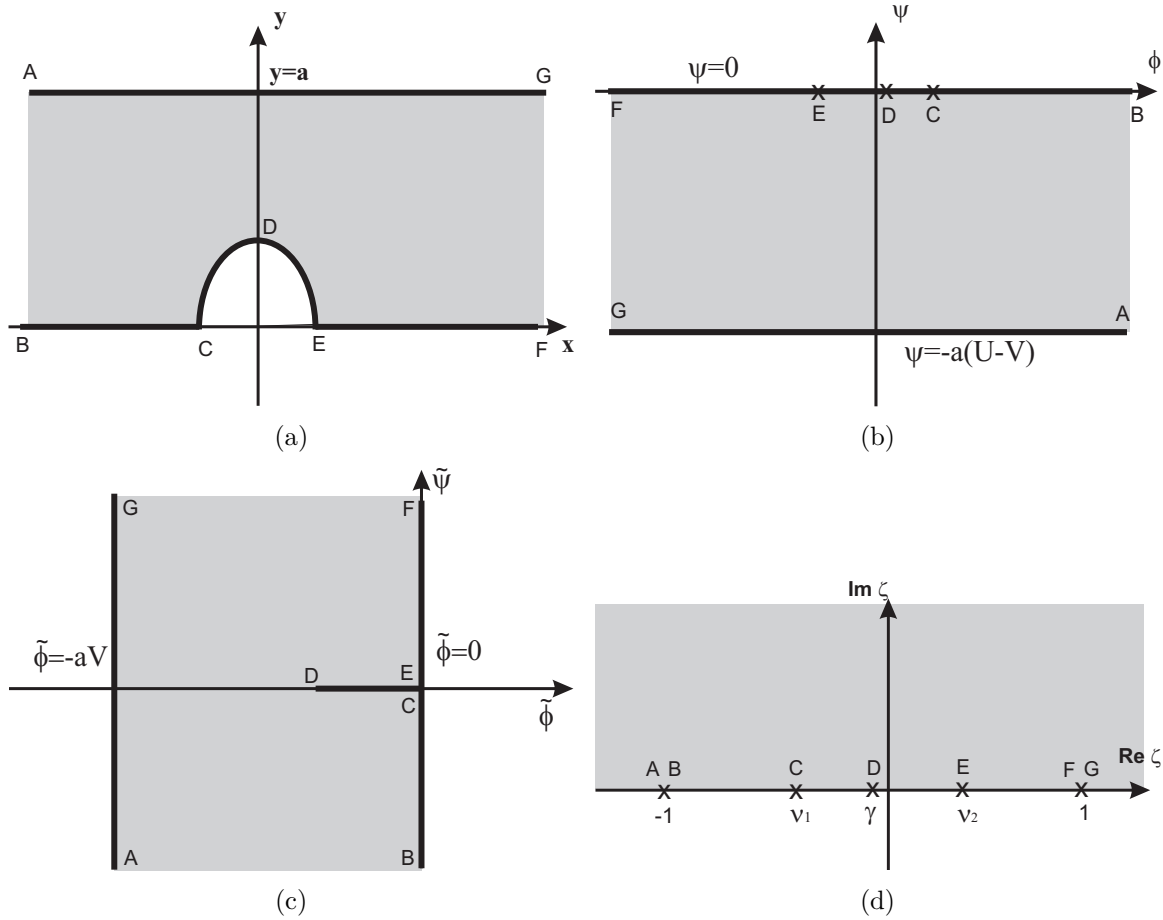
$$\mathcal{I} \equiv (\nu_1, \nu_2), \quad (2.59)$$

onde  $\nu_1$  e  $\nu_2$  são parâmetros livres. Também definimos o parâmetro  $\gamma$ , com  $\gamma \in \mathcal{I}$ , tal que  $\zeta = \gamma$  é a imagem do ponto mais extremo da bolha na direção transversal ao canal, indicado pelo ponto D na figura 2.9(a). Diferentemente dos parâmetros  $\nu_1$  e  $\nu_2$ ,  $\gamma$  não é um parâmetro livre, mas é determinado pelas condições de contorno, como veremos adiante. Faremos a escolha de parâmetros de maneira tal que:  $-1 < \nu_1 < \gamma < \nu_2 < 1$ .

Sejam agora  $\Phi(\zeta) = W(z(\zeta))$  e  $\Sigma(\zeta) = \tilde{W}(z(\zeta))$  os respectivos mapeamentos da metade superior (incluindo o eixo real) do plano  $\zeta$  sobre os domínios do fluido nos planos  $W$  e  $\tilde{W}$ . O eixo real de  $\zeta$  também é mapeado sobre as fronteiras das regiões do fluido nos planos  $W$  e  $\tilde{W}$ ; ver figuras 2.9(b), 2.9(c) e 2.9(d).

Segue da equação (2.58) que  $z(\zeta)$  pode ser escrita como

$$z(\zeta) = -\frac{1}{U}[\Phi(\zeta) + i\Sigma(\zeta)]. \quad (2.60)$$



**Figura 2.9** Geometria do escoamento: (a) no plano  $z$ , (b) no plano  $W$ , (c) no plano  $\tilde{W}$  e (d) na metade superior do plano  $\zeta$ .

Das condições de contorno (2.37) e (2.56), vemos que as partes imaginárias de  $\Sigma(\zeta)$  e  $\Phi(\zeta)$  são nulas na superfície da bolha, e a equação (2.60) dá origem às seguintes equações paramétricas para a interface da bolha:

$$x(s) = -\frac{1}{U} \operatorname{Re} \Phi(s) \quad (2.61)$$

$$y(s) = -\frac{1}{U} \operatorname{Re} \Sigma(s), \quad (2.62)$$

onde  $s \in \mathcal{I}$ .

Como já foi dito, nosso problema resume-se a encontrar as funções  $\Phi(\zeta)$  e  $\Sigma(\zeta)$ . A solução exata do problema será construída na próxima subseção.

#### 2.2.4 Solução geral: Bolha de Taylor-Saffman

Nesta subseção, apresentaremos as soluções para os mapeamentos  $\Phi(\zeta)$  e  $\Sigma(\zeta)$  usando o método de transformações conformes, mais especificamente a transformação de Schwarz-Christoffel. Depois, com auxílio das equações (2.61) e (2.62), determinaremos a expressão para a interface da bolha.

Para encontrar  $\Phi(\zeta)$ , vamos proceder de uma maneira mais simples e intuitiva: usemos o fato de que a figura 2.9(b) pode representar um canal com escoamento uniforme no plano  $W$  [figura 2.10(a)], cuja vazão é igual a  $a(U - V)$ , o qual, no plano  $\zeta$  [figura 2.9(d)], será transformado em um escoamento devido a uma fonte de intensidade  $a(U - V)$  localizada em  $\zeta = 1$  e a um sumidouro de intensidade  $-a(U - V)$  em  $\zeta = -1$  [figura 2.10(b)]; ver [27]. Logo,  $\Phi(\zeta)$  deverá ser a soma dos potenciais da fonte e do sumidouro. Por outro lado, sabemos que o potencial de uma fonte (sumidouro) de intensidade [ou seja, vazão]  $Q > 0$  ( $Q < 0$ ) que injeta (suga) fluido uniformemente para todos os lados (ou seja, por um ângulo de  $2\pi$ ) e está localizada em  $\zeta_0$ , é dado por

$$w(\zeta) = \frac{Q}{2\pi} \ln (\zeta - \zeta_0).$$

No entanto, a fonte no plano  $\zeta$  injeta fluido por um ângulo de  $\pi$  e o sumidouro suga fluido por ângulo de  $\pi$ , e portanto os potenciais desses sumidouro e fonte passam a ser dados por

$$w(\zeta) = \frac{Q}{\pi} \ln (\zeta - \zeta_0).$$

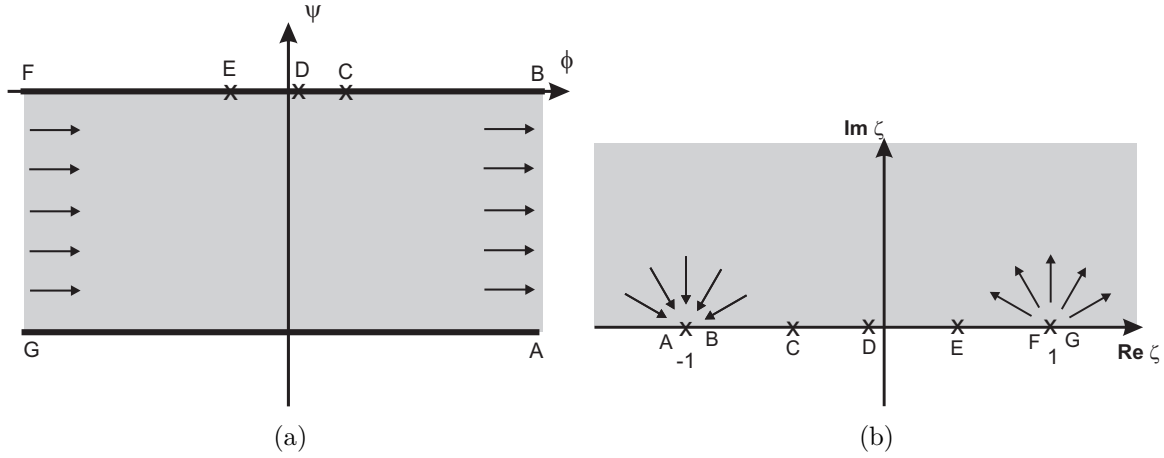
Logo, o potencial  $\Phi(\zeta)$  devido a fonte de vazão  $Q = a(U - V)$  em  $\zeta_0 = 1$  e ao sumidouro de vazão  $Q = -a(U - V)$  em  $\zeta_0 = -1$  será dado por

$$\Phi(\zeta) = \frac{a}{\pi}(U - V) \ln \left[ \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right], \quad (2.63)$$

o qual ainda pode ser escrito como

$$\Phi(\zeta) = -\frac{2a}{\pi}(U - V) \tanh^{-1} \zeta. \quad (2.64)$$

Na equação (2.64), supomos que  $\Phi(0) = 0$ ; caso contrário, deveremos acrescentar à solução uma constante aditiva real adequada. O mesmo resultado acima pode ser obtido usando a técnica mostrada a seguir.



**Figura 2.10** Representações do (a) escoamento uniforme no plano  $W$  e (b) escoamento devido à fonte e ao sumidouro no plano  $\zeta$ .

Usaremos agora a transformação de Schwarz-Christoffel [28] para encontrar  $\Sigma(\zeta)$ . A partir das figuras 2.9(c) e 2.9(d), e com o auxílio da equação A.2 (ver Apêndice A), identificamos:  $\zeta_1 = -1$  e  $\alpha_1 = 0$ ;  $\zeta_2 = \nu_1$  e  $\alpha_2 = \pi/2$ ;  $\zeta_3 = \gamma$  e  $\alpha_3 = 2\pi$ ;  $\zeta_4 = \nu_2$  e  $\alpha_4 = \pi/2$ ;  $\zeta_5 = 1$  e  $\alpha_5 = 0$ . Com isso, obtemos

$$\Sigma(\zeta) = K \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\zeta' - \gamma}{(\zeta'^2 - 1) \sqrt{(\zeta' - \nu_1)(\zeta' - \nu_2)}} d\zeta', \quad (2.65)$$

onde o ponto  $\zeta_0$  será escolhido de forma que  $\Sigma(\zeta_0) = 0$ . A constante  $K$  é determinada pelas condições de contorno para  $\Sigma(\zeta)$ . O teorema de mapeamento de Riemann garante que temos 3 graus de liberdade reais para serem usados no problema, dos quais já usamos

2, a saber  $\zeta = \pm 1$  são mapeados em  $\tilde{W} = \pm\infty$ . Com auxílio do terceiro grau de liberdade poderíamos fixar um dos  $\nu$ 's ou fazer  $-\nu_1 = \nu_2 = \nu$ . No momento, prosseguiremos por enquanto sem fazer uso desse último grau de liberdade. Desse modo, nosso problema passa a ter  $\nu_1$  e  $\nu_2$  como parâmetros livres, embora apenas um deles seja realmente independente (consideraremos  $U$ ,  $V$  e  $a$  fixos). Esse parâmetro independente está fisicamente relacionado com a área da bolha. Dados  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , poderemos determinar  $\gamma$  e  $K$  a partir de condições de contorno do problema. Para determinar  $\gamma$ , devemos satisfazer a seguinte condição:

$$\Sigma(\nu_1) = \Sigma(\nu_2), \quad (2.66)$$

como podemos ver na figura 2.9(c), uma vez que a bolha é simétrica em relação ao eixo central do canal. Em vista disso, e da equação (2.65), obtemos a seguinte expressão

$$I_1 + \gamma I_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma = -\frac{I_1}{I_0} \quad (2.67)$$

onde

$$I_k = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{\zeta^k}{(1 - \zeta^2)|(\zeta - \nu_1)(\zeta - \nu_2)|^{1/2}} d\zeta, \quad k = 0, 1. \quad (2.68)$$

Agora, calcularemos a constante  $K$  usando o fato de que a parte real de  $\Sigma(\zeta)$  salta de  $-aV$  quando passamos por  $\zeta = 1$  de F para G; ver figuras 2.9(c) e 2.9(d). Assim, da equação (2.65) podemos escrever que

$$-aV = \frac{K(1 - \gamma)}{2\sqrt{(1 - \nu_1)(1 - \nu_2)}} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{1-\delta}^{1+\delta} \frac{d\zeta}{(1 - \zeta)}. \quad (2.69)$$

Usando agora que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{1-\delta}^{1+\delta} \frac{d\zeta}{(1 - \zeta)} = -i\pi \quad (2.70)$$

obtemos

$$K = -\frac{i2aV\sqrt{(1 - \nu_1)(1 - \nu_2)}}{\pi(1 - \gamma)}. \quad (2.71)$$

Determinamos assim todas as constantes do problema, de modo que dado os parâmetros  $\nu_1$  e  $\nu_2$  podemos, em princípio, usar (2.61), (2.62), (2.64) e (2.65) para obter a forma da bolha. Esse procedimento será repetido para o caso de múltiplas bolhas no próximo capítulo.

No caso do problema de uma bolha acima, podemos usar o terceiro grau de liberdade

permitido pelo teorema de Riemann para conseguir uma solução fechada (analítica) para o problema. Usando o terceiro grau de liberdade fazemos  $-\nu_1 = \nu_2 = \nu$ , uma vez que, pela simetria do problema, a bolha também é simétrica em relação a um eixo perpendicular ao eixo central do canal. Com isso, temos que  $\gamma = 0$ . Logo, a equação (2.65) pode ser integrada exatamente e nos dá

$$\Sigma(\zeta) = -\frac{2aV}{\pi} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\nu^2 - \zeta^2}{1 - \nu^2}}, \quad (2.72)$$

onde fizemos  $\zeta_0 = -\nu$  em (2.65).

Das equações (2.61), (2.62), (2.64) e (2.72), obtemos as seguintes equações paramétricas para a interface  $\mathcal{C}$  da bolha

$$x(s) = \frac{2a(U-V)}{\pi U} \tanh^{-1} s \quad (2.73)$$

$$y(s) = \frac{2aV}{\pi U} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\nu^2 - s^2}{1 - \nu^2}}, \quad (2.74)$$

onde  $s \in \mathcal{I}$ .

Eliminando o parâmetro  $s$  em (2.73) e (2.74), obtemos a expressão

$$x = \frac{2a(U-V)}{\pi U} \tanh^{-1} \sqrt{\nu^2 - (1 - \nu^2) \tan^2\left[\frac{\pi U y}{2aV}\right]}. \quad (2.75)$$

De (2.74), temos por simetria que

$$y(0) = \lambda \quad \implies \quad \nu = \sin \frac{\pi U \lambda}{2aV} \quad (2.76)$$

onde  $\lambda$  é a meia-largura máxima da bolha. Substituindo a nova expressão para  $\nu$  em (2.75), obtemos

$$x = \frac{2a(U-V)}{\pi U} \tanh^{-1} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi U \lambda}{2aV}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi U \lambda}{2aV}\right) \tan^2\left(\frac{\pi U y}{2aV}\right)}. \quad (2.77)$$

A equação (2.77) é a conhecida fórmula obtida por Saffman e Taylor [4] em 1959 para uma bolha em uma célula de Hele-Shaw. Podemos ainda, após algumas manipulações, reduzi-la a uma forma mais compacta:

$$x = \frac{2a(U-V)}{\pi U} \cosh^{-1} \left[ \frac{\cos\left(\frac{\pi U y}{2aV}\right)}{\cos\left(\frac{\pi U \lambda}{2aV}\right)} \right]. \quad (2.78)$$

Apenas em casos simples, como de uma bolha ou um dedo viscoso, consegue-se uma solução fechada para o problema. Em casos mais gerais, como no caso de múltiplas bolhas no qual temos interesse, a solução fica dada em termos de integrais, como veremos no próximo capítulo.

### 2.2.5 Caso especial da solução ( $U = 2V$ )

As soluções (2.64) e (2.65) apresentam uma interessante propriedade de escala que será mostrada a seguir. Denotemos por  $\Phi_U$  e  $\Sigma_U$  os respectivos potenciais  $\Phi$  e  $\Sigma$  para um dado valor de  $U$ . Então, a partir das equações (2.64) e (2.72) obtemos as seguintes relações:

$$\Phi_U = \left( \frac{U}{V} - 1 \right) \Phi_2 \quad (2.79)$$

$$\Sigma_U = \Sigma_2, \quad (2.80)$$

onde  $\Phi_2$  e  $\Sigma_2$  representam as soluções para  $U = 2V$ . Vemos assim que as soluções com  $U = 2V$  podem ser reescaladas para gerar soluções com qualquer  $U > V$ . Usando estas propriedades, podemos reescrever a equação (2.60) da seguinte forma

$$z_U(\zeta) = -\frac{1}{U} \left[ \left( \frac{U}{V} - 1 \right) \Phi_2 + i \Sigma_2 \right]. \quad (2.81)$$

Segue das equações (2.61), (2.62), (2.79) e (2.80) que

$$x_U(s) = - \left( \frac{U - V}{UV} \right) \text{Re } \Phi_2(s) \quad (2.82)$$

$$y_U(s) = -\frac{1}{U} \text{Re } \Sigma_2(s). \quad (2.83)$$

Por outro lado, para  $U = 2V$ , segue de (2.82) e (2.83) que

$$x_2(s) = -\frac{1}{2V} \text{Re } \Phi_2(s) \quad (2.84)$$

$$y_2(s) = -\frac{1}{2V} \text{Re } \Sigma_2(s). \quad (2.85)$$

Combinando as equações (2.82),(2.83),(2.84) e (2.85), obtemos as seguintes relações:

$$x_U = 2 \left( 1 - \frac{V}{U} \right) x_2(s) \quad (2.86)$$

$$y_U = \frac{2V}{U} y_2(s), \quad (2.87)$$

as quais ainda podem ser escritas como

$$x_U(s) = (1 + \rho)x_2(s) \quad (2.88)$$

$$y_U(s) = (1 - \rho)y_2(s), \quad (2.89)$$

para  $s$  em  $\mathcal{I}$ , e  $\rho$  definido por

$$\rho = 1 - \frac{2V}{U}. \quad (2.90)$$

Portanto, para  $V < U < 2V$  ocorre uma redução no comprimento da bolha ao longo do eixo  $x$  e um aumento da largura da bolha ao longo de  $y$ . Para  $U > 2V$  ocorre o contrário. Esta propriedade foi notada primeiramente por Millar [29] em 1992 no contexto da solução de Taylor e Saffman [2] para uma bolha simétrica no canal. Mais tarde, em 1994, Vasconcelos [9] mostrou que esta propriedade continua valendo para o caso de várias bolhas no canal em uma célula de Hele-Shaw. Essa propriedade continua essencialmente válida ainda no caso de arranjos periódicos de bolhas, o qual será discutido no próximo capítulo.



## MÚLTIPLAS BOLHAS EM UMA CÉLULA DE HELE-SHAW

Neste capítulo, apresentaremos um problema mais geral que aquele mostrado no capítulo anterior, onde consideraremos arranjos periódicos de bolhas movendo-se com velocidade constante em uma célula de Hele-Shaw. O problema é formulado considerando a tensão superficial desprezível e as outras considerações simplificadoras utilizadas no capítulo anterior. Além disso, as soluções são válidas, em geral, para uma célula de Hele-Shaw infinita. Na próxima seção, a título de introdução, vamos discutir qualitativamente as soluções obtidas por Vasconcelos [9] para o caso de arranjos periódicos de bolhas em um canal. No restante do capítulo, apresentaremos a solução mais geral para o problema.

### 3.1 SOLUÇÕES PERIÓDICAS NO CANAL

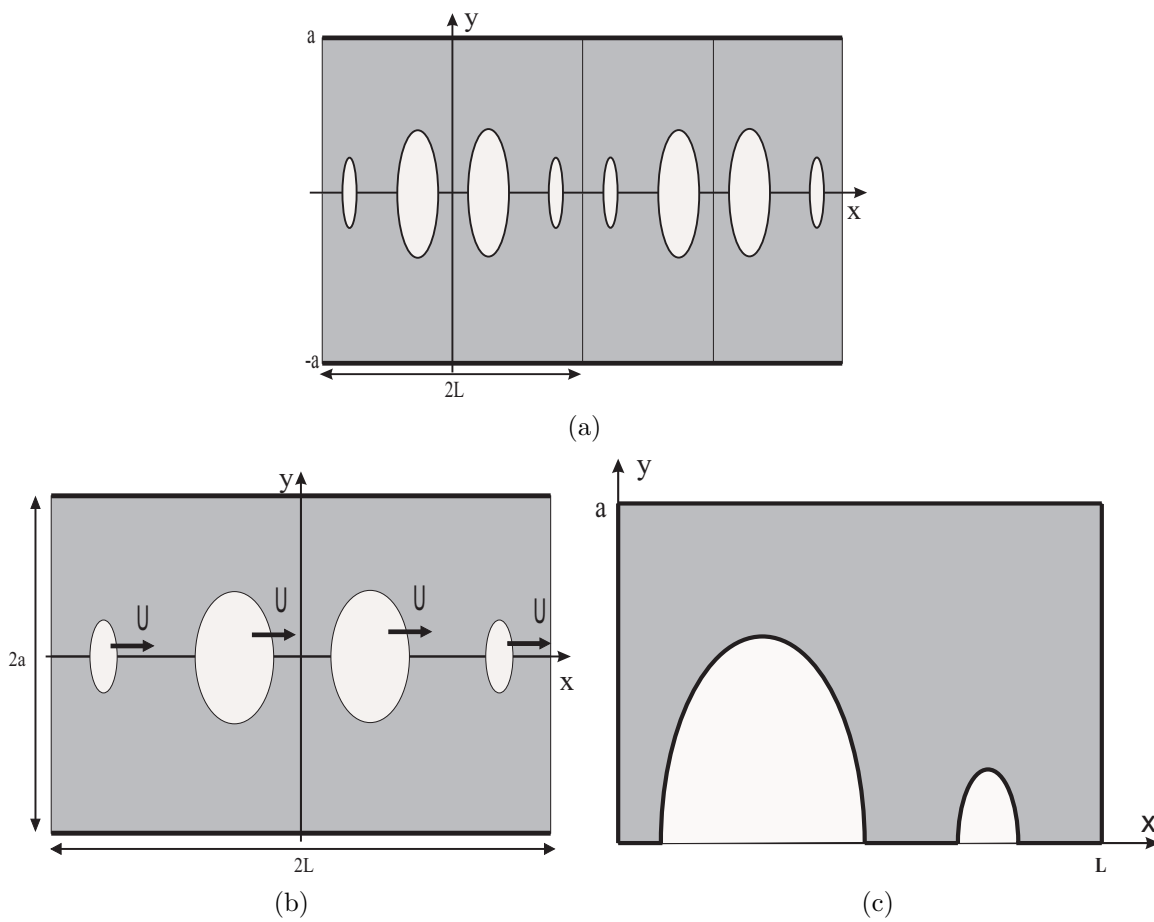
Primeiramente, considere o caso de uma fileira periódica de bolhas movendo-se com velocidade  $U$  constante ao longo de uma célula de Hele-Shaw com geometria retangular [6,9], como mostrado na figura 3.1(a). A fileira de bolhas é formada por um grupo de  $N$  bolhas simétricas em relação ao centro do canal (eixo  $x$ ) e contidas em uma célula unitária de largura  $2a$  que se repete a cada período  $2L$  ao longo do canal ; vide figura 3.1(b). Além disso, o arranjo é simétrico em relação ao eixo transversal (eixo  $y$ ) da célula unitária.

O escoamento do fluido viscoso no exterior das bolhas é caracterizado pela velocidade média  $V$  com que o fluido atravessa o canal na direção  $x$ . No referencial das bolhas, a velocidade média do fluido na direção  $x$  é, portanto,  $V - U$ . Logo, podemos escrever

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a v_x dy = V - U. \quad (3.1)$$

Note que na ausência de bolhas, teríamos um escoamento uniforme com velocidade  $V - U$  ao longo do canal. Nessa formulação, usaremos novamente o fato de que  $U < V$ .

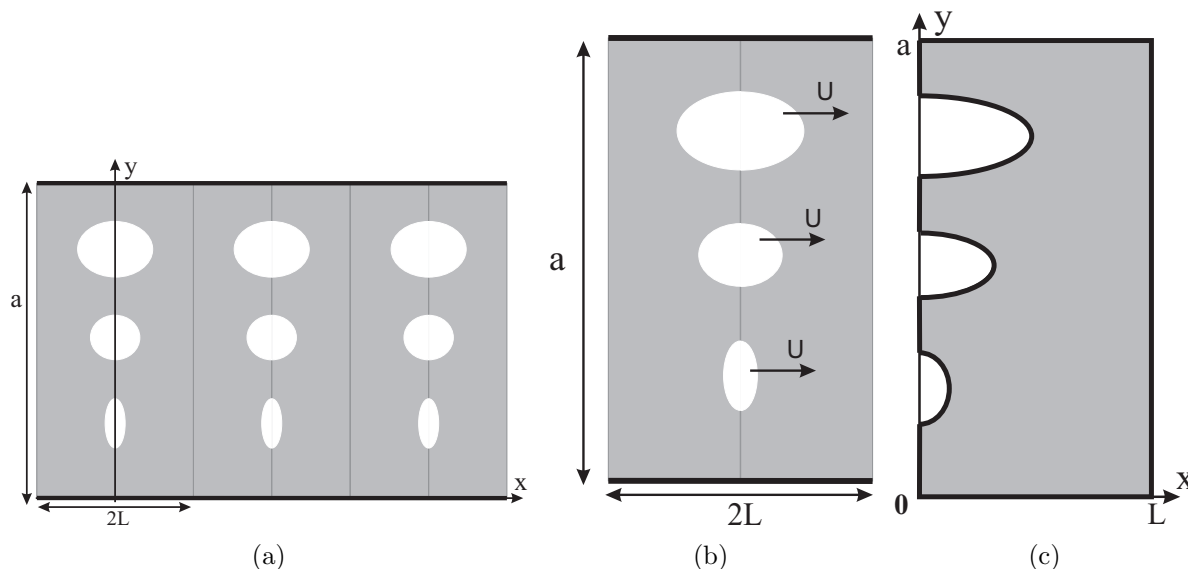
Na figura 3.1(b) vemos que, devido à simetria do problema, podemos reduzir a célula



**Figura 3.1** Soluções periódicas no canal: (a) fileira de bolhas, (b) célula unitária e (c) célula unitária reduzida.

unitária a apenas um quarto da mesma [por exemplo, o quarto superior direito, como mostrado na figura 3.1(c)], de modo que o novo domínio seja simplesmente conexo. Como vimos no capítulo anterior, isso será importante para o tratamento analítico do problema. Após encontrar a solução no domínio reduzido, a solução para a célula unitária poderá ser obtida refletindo-se a solução encontrada em relação aos eixos  $x$  e  $y$ . Da mesma forma, a solução para todo o canal poderá ser obtida através de sucessivas reflexões da célula unitária em relação às suas equipotenciais ( $x = \pm nL$ ,  $n = 1, 3, 5, \dots$ ). Além disso, podemos expandir essas soluções para uma célula infinita simplesmente fazendo sucessivas reflexões do canal em torno das linhas de corrente  $y = \pm na$ .

Um outro problema possível da mesma abordagem é o caso em que colunas de bolhas simétricas em relação a eixos paralelos ao eixo  $y$  movem-se ao longo de um canal de largura  $a$ , com velocidade constante  $U$ , como mostrado na figura 3.2(a). As colunas de bolhas se repetem a cada período  $2L$  na direção  $x$ . A célula unitária do problema é mostrada na figura 3.2(b). Da própria figura 3.2(b), vemos que, tal como no caso anterior, é possível reduzir o domínio do fluido a um domínio simplesmente conexo [figura 3.2(c)]. Soluções exatas para as duas situações mostradas nas figuras 3.1 e 3.2 foram obtidas por Vasconcelos [9].



**Figura 3.2** Soluções periódicas no canal: (a) colunas de bolhas, (b) célula unitária e (c) célula unitária reduzida.

Os dois casos discutidos acima nos levam a uma formulação mais geral do problema,

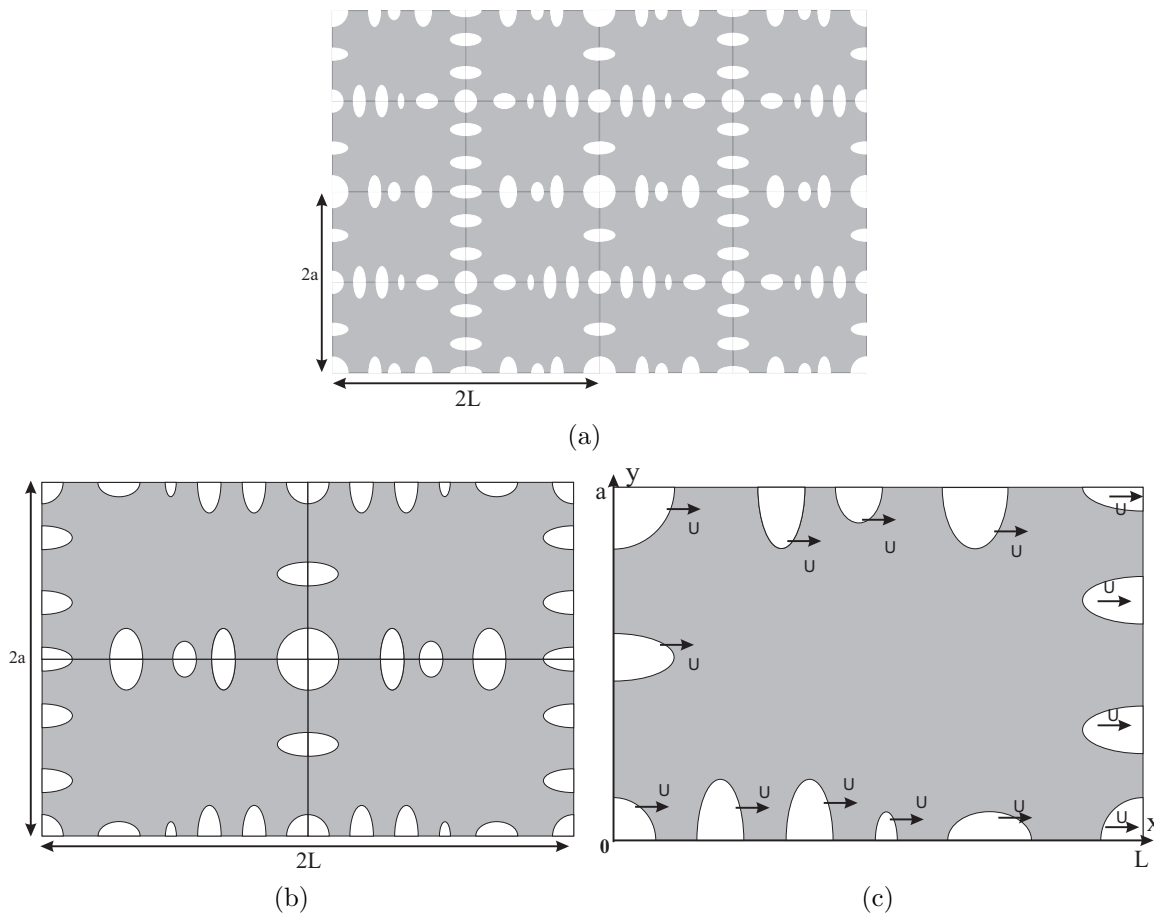
a qual será desenvolvida na próxima seção. Como veremos adiante, as duas situações discutidas qualitativamente nesta seção são apenas casos particulares da solução mais geral que apresentaremos a seguir.

## 3.2 SOLUÇÕES PERIÓDICAS: FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA

### 3.2.1 Configuração geométrica das soluções

Considere um arranjo duplamente periódico de bolhas em uma célula de Hele-Shaw infinita, como mostrado na figura 3.3(a). As bolhas movem-se com velocidade  $U$  constante na direção  $x$ , ao passo que consideramos que a velocidade média do fluido viscoso é  $\mathbf{V} = V\hat{x}$ . Como mencionado, as soluções são duplamente periódicas, com período  $2L$  na direção  $x$  e período  $2a$  na direção  $y$ . Além disso, consideremos que as bolhas possuem um dos dois tipos de simetria citados na seção anterior: simetria em relação a eixos longitudinais (eixos paralelos ao eixo  $x$ ) ou a eixos transversais (eixos paralelos ao eixo  $y$ ). A célula unitária do problema é mostrada na figura 3.3(b), e esta, em função da simetria do problema, pode ser reduzida a um quarto da mesma; vide figura 3.3(c). Vamos nos referir a esse domínio [figura 3.3(c)] como célula unitária reduzida.

Vamos supor que, não contando as bolhas de canto, ou seja, as bolhas cujos centróides estão posicionados nos vértices da célula unitária reduzida, haja  $n_1$  bolhas no lado esquerdo,  $n_2$  bolhas no lado de baixo,  $n_3$  bolhas no lado direito e  $n_4$  bolhas no lado de cima da célula unitária reduzida; vide figura 3.3(c). Note que, por hipótese, as bolhas dos lados de cima e de baixo são simétricas em relação a  $y = a$  e  $y = 0$ , respectivamente, enquanto que as bolhas dos lados esquerdo e direito possuem simetria de reflexão em relação aos respectivos eixos  $x = 0$  e  $x = L$ . Por sua vez, as bolhas de canto, em comparação às bolhas ao longo dos lados da célula unitária reduzida, são especiais pelo fato de possuírem os dois tipos de simetria. Em outras palavras, as bolhas de canto são simétricas por reflexão em torno dos seus centróides. Para ajudar na contagem das bolhas de canto, é conveniente introduzir variáveis indicadoras  $\chi_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ), onde  $\chi_j = 1$  se houver bolha no  $j$ -ésimo canto e  $\chi_j = 0$  caso contrário. Além disso, enumeraremos as bolhas de canto no sentido anti-horário partindo da bolha de canto superior esquerda. Logo, o número



**Figura 3.3** Soluções periódicas de bolhas: (a) arranjos de bolhas, (b) célula unitária e (c) célula unitária reduzida.

total  $N$  de bolhas na célula reduzida será dado por

$$N = N_e + N_c, \quad (3.2)$$

onde  $N_e$  é o número total de bolhas nos lados da célula unitária reduzida,

$$N_e = \sum_{i=1}^4 n_i, \quad (3.3)$$

ao passo que  $N_c$  é o número total de bolhas nos cantos,

$$N_c = \sum_{i=1}^4 \chi_i. \quad (3.4)$$

Agora partiremos para a formulação matemática do problema, onde definiremos as condições de contorno a serem satisfeitas pelo potencial complexo  $W(z)$  no referencial que se move com as bolhas, uma vez que as soluções encontradas nesse referencial são estacionárias.

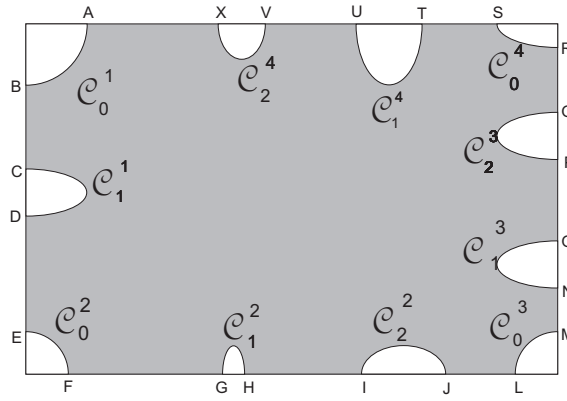
### 3.2.2 Formulação matemática do problema

Considere a célula unitária reduzida mostrada na figura 3.4. Denotemos por  $\mathcal{D}$  o domínio do fluido exterior às bolhas e por  $\mathcal{C}_j^i$ , com  $i = 1, \dots, 4$  e  $j = 0, \dots, n_i$ , a interface da  $j$ -ésima bolha que está localizada no  $i$ -ésimo lado da região, onde  $j = 0$  representa bolha de canto. Então, seguindo a regra de enumeração utilizada para bolhas de canto, enumeremos todas as bolhas no sentido anti-horário, partindo da bolha de canto superior esquerda, como mostra a figura abaixo. Ao longo deste capítulo, vamos seguir a convenção de que o superscrito  $i$  designa a aresta (ou canto) ao passo que o subscrito  $j$  enumera as bolhas em um dado lado.

No referencial que se move com as bolhas, onde o escoamento é estacionário, o potencial complexo  $W(z) = \phi + i\psi$  deve ser analítico em  $\mathcal{D}$  e satisfazer condições de contorno apropriadas, como discutido a seguir.

Como os lados superior  $y = a$  e inferior  $y = 0$  da célula reduzida são obviamente linhas de corrente do escoamento, tem-se que

$$\psi(y = a) - \psi(y = 0) = \int_0^a v_x dy = -a(U - V)$$



**Figura 3.4** Célula unitária reduzida do problema.

onde usamos a equação (3.1). Lembramos que a velocidade  $V$  foi definida como a velocidade média com que o fluido viscoso atravessa a célula unitária na direção  $x$ . Por motivos de conveniência, faremos as seguintes escolhas:

$$\text{Im } W = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (3.5)$$

$$\text{Im } W = -a(U - V) \quad \text{em } y = a. \quad (3.6)$$

Além disso, os lados esquerdo ( $y = 0$ ) e direito ( $y = L$ ) da célula reduzida são equipotenciais. Portanto, fazemos

$$\text{Re } W = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad (3.7)$$

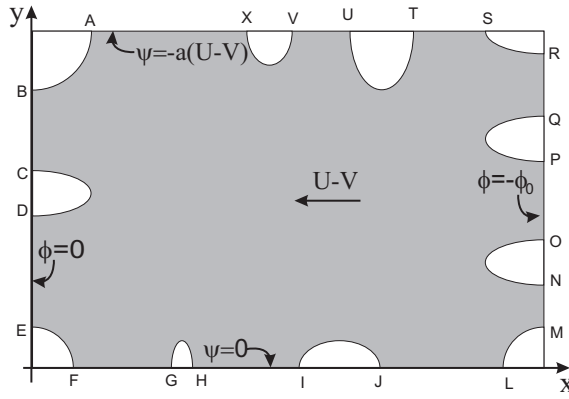
$$\text{Re } W = -\phi_0 \quad \text{em } x = L. \quad (3.8)$$

onde  $\phi_0$  é uma constante real positiva que pode ser obtida repetindo o procedimento de Burgess e Tanveer [6], de modo que podemos mostrar que

$$\phi_0 = L \left[ U - V + \frac{UJ}{aL} \right], \quad (3.9)$$

onde  $J$  é a área total ocupada pelas bolhas na célula unitária reduzida. As condições de contorno nos lados da célula reduzida são mostrados na figura 3.5.

Supondo que a viscosidade do fluido dentro das bolhas e a tensão superficial sejam desprezíveis, poderemos considerar a pressão do fluido ao longo das interfaces das bolhas como sendo constante. Assim, como discutido no capítulo 2, vide equação (2.37), a



**Figura 3.5** Problema no referencial das bolhas.

condição de contorno na superfície das bolhas será:

$$W = -Ux + \phi_j^i + i\psi_j^i \quad \text{em } \mathcal{C}_j^i, \quad (3.10)$$

onde  $\phi_j^i$  e  $\psi_j^i$  são constantes reais. Em particular, alguns valores dessas constantes são fixados pelas condições (3.5)–(3.8), como discutido a seguir.

Como vemos, todas as bolhas no lado de cima da célula reduzida, incluindo as bolhas de canto superiores, fazem parte da mesma linha de corrente, cujo valor é  $\psi = -a(U - V)$ , e as bolhas do lado de baixo da célula reduzida, incluindo as bolhas de canto inferiores, estão sobre a linha de corrente  $\psi = 0$ . Segue então que

$$\psi_j^2 = 0 \quad \text{e} \quad \psi_0^3 = 0 \quad (3.11)$$

$$\psi_j^4 = -a(U - V) \quad \text{e} \quad \psi_0^1 = -a(U - V), \quad (3.12)$$

para  $j = 0, 1, \dots, n_i$ . As constantes restantes, ou seja,  $\psi_j^1$  e  $\psi_j^3$  ( $j = 1, 2, \dots, n_i$ ) dependem, respectivamente, das posições das bolhas ao longo dos lados esquerdo e direito da célula reduzida.

Por outro lado, todas as bolhas da esquerda (direita), incluindo as dos respectivos cantos, são equipotenciais, com  $\phi = 0$  ( $\phi = -\phi_0$ ), logo

$$\phi_j^1 = 0 \quad \text{e} \quad \phi_0^2 = 0 \quad (3.13)$$

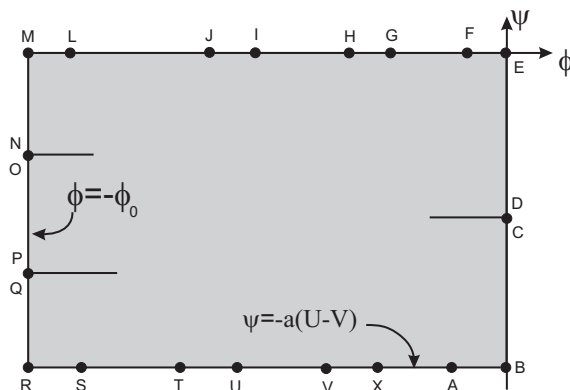
$$\phi_j^3 = UL - \phi_0 \quad \text{e} \quad \phi_0^4 = UL - \phi_0, \quad (3.14)$$

para  $j = 0, 1, \dots, n_i$ . As demais constantes, ou seja,  $\phi_j^2$  e  $\phi_j^4$  ( $j = 1, 2, \dots, n_i$ ) dependem,



respectivamente, das posições das bolhas ao longo dos lados de baixo e de cima da célula reduzida.

A partir das condições (3.5)–(3.14), vemos que o domínio do fluido no plano  $W$  corresponde a um retângulo de altura  $a(U - V)$  e largura  $\phi_0$  com  $n_1 + n_3$  cortes horizontais representando as bolhas nos lados esquerdo e direito da célula reduzida, como é mostrado na figura 3.6.



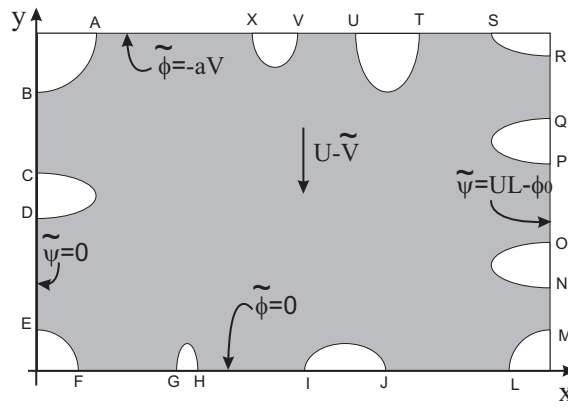
**Figura 3.6** Domínio simplesmente conexo do escoamento no plano  $W$ .

### 3.2.3 O problema rotacionado

Como vimos no capítulo 2, também estamos interessados em encontrar a solução para o problema rotacionado, pois ela nos auxiliará na resolução do problema original. No referencial do laboratório, giremos a velocidade das bolhas de um ângulo de  $90^\circ$  sem girar as bolhas. Desse modo, as bolhas passarão a se moverem de baixo para cima com velocidade constante  $U$  enquanto o fluido viscoso se move na mesma direção com uma velocidade média constante  $\tilde{V}$  a ser determinada. No referencial das bolhas, o fluido escoar de cima para baixo com velocidade  $U - \tilde{V}$  enquanto, obviamente, as bolhas permanecem fixas; vide figura 3.7. Do capítulo 2, temos que o potencial do problema rotacionado no referencial das bolhas é denotado por  $\tilde{W}(z)$  e definido como

$$\tilde{W}(z) = i[W(z) + Uz] \quad \text{onde } z \in \mathcal{D}. \quad (3.15)$$

Das condições de contorno (3.5)–(3.10) para  $W(z)$  e da equação (3.15), obtemos as



**Figura 3.7** Problema rotacionado no referencial das bolhas.

seguintes condições de contorno para o potencial rotacionado  $\tilde{W}(z)$ :

$$\operatorname{Re} \tilde{W}(z) = 0 \quad \text{em} \quad y = 0 \tag{3.16}$$

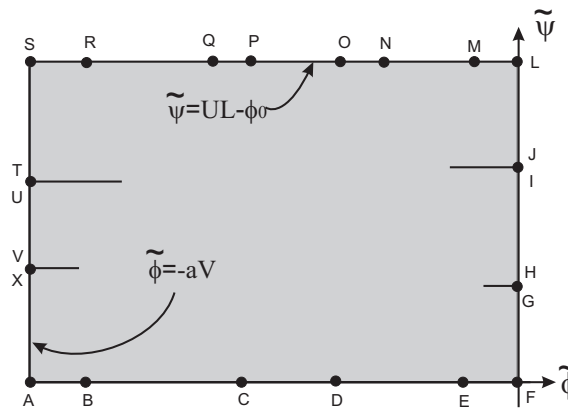
$$\operatorname{Re} \tilde{W}(z) = -aV \quad \text{em} \quad y = a \tag{3.17}$$

$$\operatorname{Im} \tilde{W}(z) = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \tag{3.18}$$

$$\operatorname{Im} \tilde{W}(z) = UL - \phi_0 \quad \text{em} \quad x = L \tag{3.19}$$

$$\tilde{W}(z) = -Uy - \psi_j^i + i\phi_j^i \quad \text{em} \quad \mathcal{C}_j^i. \tag{3.20}$$

A partir das condições acima, vemos que o domínio do escoamento no plano  $\tilde{W}$  corresponde a um retângulo de altura  $UL - \phi_0$  e largura  $aV$  com  $n_2 + n_4$  cortes horizontais representando as bolhas nos lados de cima e de baixo da célula unitária reduzida, como é mostrado na figura 3.8.



**Figura 3.8** Domínio do escoamento rotacionado no plano  $\tilde{W}$

Note que, assim como discutido no capítulo 2, a região do escoamento não é alterada após a rotação do escoamento. Podemos perceber também que as linhas de corrente em  $y = 0$  e  $y = a$  no problema não rotacionado, agora passam a ser equipotenciais, enquanto as equipotenciais  $x = 0$  e  $x = L$  no problema original agora são linhas de corrente.

Para determinar a velocidade média  $\tilde{V}$ , faremos uso do seguinte argumento: no referencial das bolhas, temos que o fluido escoar na direção contrária ao eixo  $y$  com velocidade média  $U - \tilde{V}$  e portanto, a vazão do fluido na região reduzida é  $(U - \tilde{V})L$ . No entanto, a vazão do fluido na célula reduzida também é dada pela diferença de intensidade das linhas de corrente em  $x = 0$  e  $x = a$ , ou seja, das equações (3.18) e (3.19) tiramos que a vazão do fluido também é dada por  $UL - \phi_0$ . Igualando as vazões,

$$(U - \tilde{V})L = UL - \phi_0 \quad (3.21)$$

obtemos que

$$\tilde{V} = \frac{\phi_0}{L}. \quad (3.22)$$

Na próxima subseção, discutiremos a obtenção das soluções para o problema formulado acima por meio de transformações conformes.

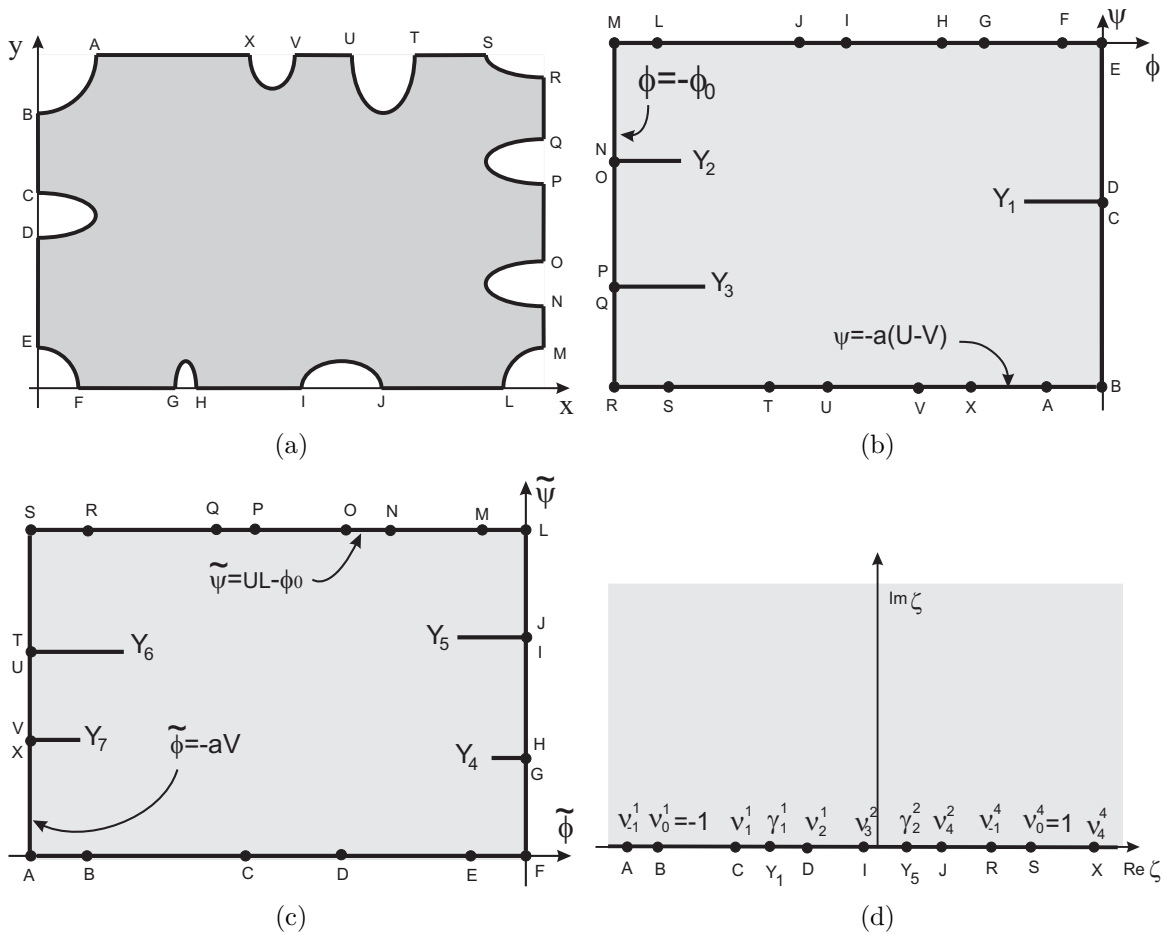
### 3.2.4 Formulação via transformações conformes

Seja  $z = z(\zeta)$  o mapeamento conforme da metade superior do plano  $\zeta$  [figura 3.9(d)] para o domínio reduzido do fluido no plano  $z$  [figura 3.9(a)]. A fronteira do domínio no plano  $z$  é mapeada sobre o eixo real no plano  $\zeta$  de modo que as imagens inversas das bolhas  $\mathcal{C}_j^i$  correspondem aos intervalos  $\mathcal{I}_j^i$  contidos sobre o eixo real de  $\zeta$  e definidos como

$$\mathcal{I}_j^i \equiv (\nu_{2j-1}^i, \nu_{2j}^i), \quad j = 0, 1, \dots, n_i, \quad (3.23)$$

onde  $\nu_j^i$  são parâmetros independentes. Alguns destes intervalos são mostrados na figura 3.9(d).

Designaremos por  $\gamma_j^i$ , com  $\gamma_j^i \in \mathcal{I}_j^i$ , as imagens no plano  $\zeta$  dos pontos mais extremos das bolhas de aresta em relação aos respectivos eixos de simetria, ou seja, os pontos  $Y_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  e  $7$ ) nas figuras 3.9(b) e 3.9(c). Como mencionado no capítulo 2, os parâmetros  $\gamma_j^i$  são determinados a partir de condições de contorno.



**Figura 3.9** Domínio do escoamento (a) no plano  $z$ , (b) no plano  $W$ , (c) no plano  $\tilde{W}$  e (d) no plano  $\zeta$ . Na figura (d), por economia de espaço, identificamos apenas algumas bolhas de canto e bolhas de lado.

Em particular, escolhemos mapear o ponto  $\zeta = \infty$  em um ponto arbitrário no lado superior da célula reduzida, colocado entre a primeira bolha de canto ( $\mathcal{C}_0^1$ ) e a sua vizinha ( $\mathcal{C}_{n_4}^4$ ). Ou seja, na figura 3.9(a) a imagem de  $\zeta = \infty$  está entre os pontos  $A$  e  $X$ . Sem perda de generalidade, podemos usar os graus de liberdade do teorema de Riemann para fazer

$$\nu_0^1 = -1 \quad \text{e} \quad \nu_0^4 = 1. \quad (3.24)$$

O terceiro grau de liberdade pode ser usado para fixar o valor de um outro  $\nu_j^i$  qualquer, porém não faremos uso dele e consideraremos os  $2N_e + N_c + 2$  valores de  $\nu_j^i$  restantes como parâmetros livres, mesmo embora apenas  $2N_e + N_c + 1$  deles sejam independentes. Fisicamente, estes parâmetros livres correspondem às  $N_e$  posições das bolhas dos lados (uma vez que as  $N_c$  bolhas de canto já possuem as posições dos seus centróides definidas), as áreas das  $N = N_e + N_c$  bolhas e ao semi-período  $L$  da célula unitária. Nesse caso, estamos considerando fixos a altura  $2a$  da célula unitária, a velocidade média  $V$  do fluido e a velocidade  $U$  das bolhas.

Sejam agora  $\Phi(\zeta) = W(z(\zeta))$  e  $\Sigma(\zeta) = \tilde{W}(z(\zeta))$  os mapeamentos conformes da metade superior do plano  $\zeta$  para as regiões ocupadas pelo fluido nos planos  $W$  e  $\tilde{W}$ , respectivamente [ver figuras 3.9(b), 3.9(c) e 3.9(d)]. Segue da equação (3.15) que  $z(\zeta)$  pode ser escrito como

$$z(\zeta) = -\frac{1}{U} [\Phi(\zeta) + i\Sigma(\zeta)]. \quad (3.25)$$

Das condições de contorno (3.10) e (3.20), vemos que as partes imaginárias das funções  $\Phi(\zeta)$  e  $\Sigma(\zeta)$  são constantes nas interfaces das bolhas e, respectivamente, iguais a  $\phi_j^i$  e  $\psi_j^i$ . Logo, segue da equação (3.25) que as equações paramétricas que descrevem as interfaces  $\mathcal{C}_j^i$  são dadas por

$$x_j^i(s) = -\frac{1}{U} \text{Re} \Phi(s) + \frac{1}{U} \phi_j^i \quad (3.26)$$

$$y_j^i(s) = -\frac{1}{U} \text{Re} \Sigma(s) - \frac{1}{U} \psi_j^i, \quad (3.27)$$

onde  $s \in \mathcal{S}_j^i$ .

Como vemos, agora nos basta encontrar as funções  $\Phi(\zeta)$  e  $\Sigma(\zeta)$  para solucionar o problema. Como já foi visto no capítulo 2, isso pode ser facilmente resolvido usando as transformações de Schwarz-Christoffel. A solução geral do problema será construída ao

longo das próximas subseções.

Antes construir essas soluções, apresentaremos na próxima subseção uma importante propriedade das funções  $\Phi(\zeta)$  e  $\Sigma(\zeta)$ , que será utilizada no desenvolvimento das mesmas.

### 3.2.5 Caso especial ( $U=2V$ )

Como já foi discutido no capítulo anterior, soluções com  $U = 2V$  são especiais pelo fato de poderem gerar outras soluções com qualquer  $U > V$ . Até o momento tratamos  $V$  como um parâmetro arbitrário, mas sem perda de generalidade, podemos fazer  $V = 1$ . Agora, da figura 3.9(b), podemos notar que o comprimento do retângulo representando o domínio  $W$  é proporcional a  $U - 1$  (pois fizemos  $V = 1$  e estamos considerando  $a$  fixo). Desta forma, podemos obter o “mapa”  $W = \Phi_U(\zeta)$ , para um dado valor de  $U$ , em função do mapa  $\Phi_2$  para  $U = 2$ , através da seguinte expressão

$$\Phi_U = (U - 1)\Phi_2. \quad (3.28)$$

Da mesma forma, pela figura 3.9(c), vemos que a largura do retângulo representando o domínio  $\tilde{W}$  independe de  $U$ , logo, podemos escrever

$$\Sigma_U = \Sigma_2. \quad (3.29)$$

Usando (3.28) e (3.29) em (3.25), obtemos a seguinte expressão

$$z_U(\zeta) = -\frac{1}{U} [(U - 1)\Phi_2(\zeta) + i\Sigma_2(\zeta)]. \quad (3.30)$$

Mas por outro lado, temos que (3.30) pode ser reescrita em termos da variável adimensional  $\rho$  como segue,

$$z_U(\zeta) = -\frac{1}{2} [(1 + \rho)\Phi_2(\zeta) + i(1 - \rho)\Sigma_2(\zeta)], \quad (3.31)$$

onde  $\rho$  é dado por

$$\rho = 1 - \frac{2}{U}. \quad (3.32)$$

Em particular, o meio-período  $L_U$  da célula unitária pode ser obtido a partir da

condição de contorno (3.19) para  $\Sigma(\zeta)$  usando a propriedade (3.29). Temos então que

$$UL_U - \phi_U^0 = 2L_2 - \phi_2^0,$$

onde  $\phi_U^0$  representa a constante  $\phi_0$  [vide (3.8)] para um dado valor de  $U > 1$ . Usando o fato de que  $\phi_U^0$  obedece a propriedade (3.28) [ver figura 3.9(b)], obtemos que

$$L_U = \rho\phi_2^0 + (1 - \rho)L_2. \quad (3.33)$$

As relações para  $x_j^i$  e  $y_j^i$  nas interfaces  $\mathcal{C}_j^i$  são obtidas como segue. Comparando as partes real e imaginária de (3.31) quando  $\zeta = s$  às equações (3.26) e (3.27), obtemos que

$$x_{jU}^i(s) = -\frac{1}{2} \left[ (1 + \rho) \operatorname{Re} \Phi_2(s) - (1 - \rho)\phi_{j_2}^i \right] \quad (3.34)$$

$$y_{jU}^i(s) = -\frac{1}{2} \left[ (1 + \rho)\operatorname{Re} \Sigma_2(s) + (1 - \rho)\psi_{j_2}^i \right], \quad (3.35)$$

as quais após algumas simples manipulações reduzem-se às seguintes equações:

$$x_{jU}^i(s) = (1 + \rho) x_{j_2}^i(s) - \rho\phi_{j_2}^i \quad (3.36)$$

$$y_{jU}^i(s) = (1 - \rho) y_{j_2}^i(s) - \rho\psi_{j_2}^i. \quad (3.37)$$

As equações (3.36) e (3.37) reescalam as coordenadas das bolhas, além de efetivar uma translação. Notemos que quando  $\rho > 0$  (ou seja,  $U > 2$ ), ocorre um aumento no comprimento  $x$  das bolhas e uma redução na largura  $y$  das mesmas. Para  $\rho < 0$  ( $1 < U < 2$ ), observamos o contrário.

Nas próximas seções e subseções, formularemos soluções com  $U = 2$  e  $V = 1$ , uma vez que podemos reescalá-las para obter soluções com qualquer valor de  $U > 1$ , como foi visto nessa subseção.

Na próxima subseção, discutiremos como a ocupação da célula de Hele-Shaw pelas bolhas influencia no movimento das mesmas.

### 3.2.6 Fração de ocupação da célula como função da velocidade das bolhas

Vimos na subseção anterior que tanto a área da célula unitária quanto as das bolhas variam em função da velocidade  $U$  das bolhas, como dado nas equações (3.33), (3.36) e (3.37). Em vista dessas equações, podemos analisar quantitativamente como a ocupação

de um canal de Hele-Shaw pelas bolhas influencia na velocidade do grupo de bolhas.

Primeiramente, denotemos por  $\Gamma_U$  a fração de ocupação da célula unitária reduzida, definida como

$$\Gamma_U = \frac{J_U}{aL_U}, \quad (3.38)$$

onde  $J_U$  e  $L_U$  denotam, respectivamente, a área total ocupada pelas bolhas na célula unitária reduzida e o semi-período da célula unitária, quando o grupo de bolhas se move com velocidade constante  $U$  ao longo da célula. Como na subseção anterior, faremos, sem perda de generalidade,  $V = 1$ . Além disso, a velocidade das bolhas é sempre maior que  $V$ , ou seja,  $U > 1$ . Analisando as equações (3.36) e (3.37), obtemos a seguinte expressão para a área das bolhas em função da variável  $\rho$

$$J_U = (1 - \rho^2)J_2, \quad (3.39)$$

onde  $J_2$  representa a área ocupada pelas bolhas quando  $U = 2$ . Inserindo esta expressão e (3.33) em (3.38), obtemos a fração de ocupação  $\Gamma_U$  de termos de  $\rho$

$$\Gamma_U = \frac{(1 - \rho^2)J_2}{a[\rho\phi_2^0 + (1 - \rho)L_2]}, \quad (3.40)$$

onde  $\rho$  é definido como em (3.32). Dividindo o numerador e o denominador por  $aL_2$ , temos que

$$\Gamma_U = \frac{(1 - \rho^2)J_2/aL_2}{\rho\left(\frac{\phi_2^0}{L_2}\right) + (1 - \rho)},$$

onde  $\phi_2^0$ , de acordo com a equação (3.9), é dado por

$$\phi_2^0 = L_2 \left(1 + \frac{2J_2}{aL_2}\right),$$

e, portanto,  $\Gamma_U$  será dado por

$$\Gamma_U = \frac{1 - \rho^2}{\Gamma_2^{-1} + 2\rho}, \quad (3.41)$$

onde  $\Gamma_2$  é dado por

$$\Gamma_2 = J_2/aL_2.$$

A equação (3.41) em termos de  $U$  pode ser reescrita como

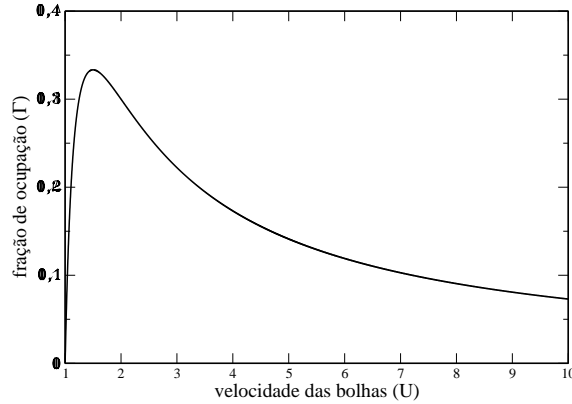
$$\Gamma_U = \frac{U - 1}{U(\varepsilon U - 1)}, \quad (3.42)$$



onde  $\varepsilon$  é uma constante dada por

$$\varepsilon = \frac{1}{4\Gamma_2} + \frac{1}{2}. \quad (3.43)$$

Portanto, se conhecemos a fração de ocupação da célula de Hele-Shaw para  $U = 2$ , saberemos a mesma para qualquer valor de  $U > 1$ . O gráfico de  $\Gamma_U$  em função de  $U$  é ilustrado na figura 3.10.



**Figura 3.10** Gráfico  $\Gamma_U$  x  $U$  para  $\Gamma_2 = 0.3$ .

Como vemos na figura 3.10, a fração de ocupação  $\Gamma_U$  possui um valor máximo para um dado valor de  $U$ . Tomando a derivada de  $\Gamma_U$  em relação a  $U$ , obtemos que a fração de ocupação máxima ocorre quando  $U$  é dado por

$$U_c = 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon}}. \quad (3.44)$$

Além disso, observamos que para  $\varepsilon = 1$ , ou seja,  $\Gamma_2 = 0.5$ , a equação (3.42) reduz-se a

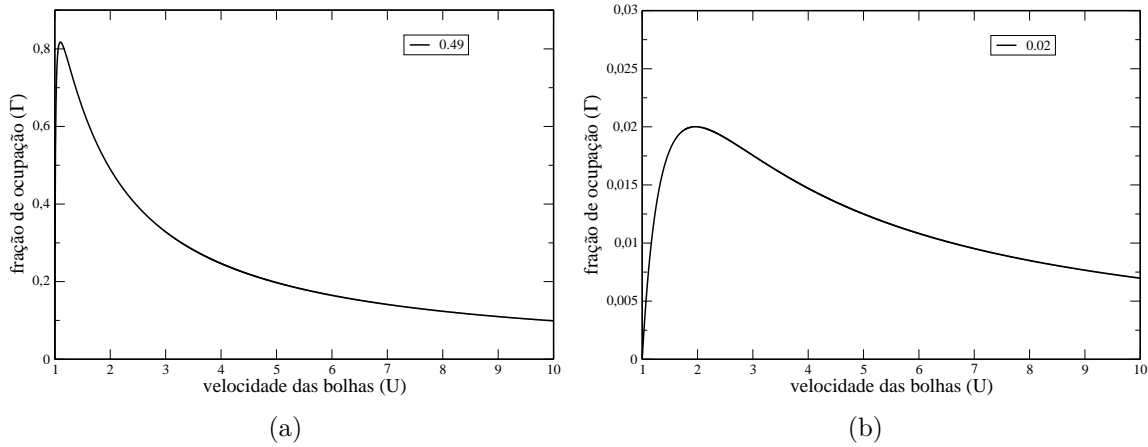
$$\Gamma_U = \frac{1}{U}. \quad (3.45)$$

Temos ainda que para  $\Gamma_2 > 0.5$  ( $\varepsilon < 1$ ) obtemos frações de ocupação máxima maiores que 1, o que não é fisicamente aceitável. De fato, a fração de ocupação diverge para  $U = \frac{1}{\varepsilon} > 1$ , se  $\varepsilon < 1$ . Por outro lado, uma vez que  $0 < \Gamma_2 < 0.5$ , podemos perceber que

$$U_c \longrightarrow 1 \quad \text{quando} \quad \Gamma_2 \longrightarrow 0.5 \quad (\varepsilon \rightarrow 1) \quad (3.46)$$

$$U_c \longrightarrow 2 \quad \text{quando} \quad \Gamma_2 \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow \infty). \quad (3.47)$$

Portanto, a máxima fração de ocupação da célula de Hele-Shaw ocorre, para um dado



**Figura 3.11** Comportamento de  $\Gamma_U$  para (a)  $\Gamma_2 = 0.49$  e (b)  $\Gamma_2 = 0.02$

Observa-se das figuras dadas acima que podemos encontrar configurações de bolhas que ocupam uma mesma fração de área na célula, no entanto, movem-se com velocidades diferentes. Este fato está diretamente relacionado com o formato das bolhas. Das equações (3.36) e (3.37), como discutido na subseção 3.2.6, vemos que para  $1 < U < 2$  as bolhas tendem a ser muito largas na direção transversal do canal, o que dificulta a mobilidade do grupo de bolhas. Por outro lado, quando  $U > 2$ , nota-se que as bolhas tendem a ser mais estreitas na direção transversal do canal, o que facilita a penetração das mesmas no fluido.

Na próxima subseção, desenvolveremos as soluções para as funções  $\Phi(\zeta)$  e  $\Sigma(\zeta)$  e, subsequentemente, as soluções que descrevem as interfaces das bolhas.

### 3.2.7 Soluções gerais

Aplicando a transformação de Schwarz-Christoffel (ver Apêndice A) no domínio de  $W$  [figura 3.9(b)], identificamos que se  $\zeta_k = \nu_j^i$ , temos que  $\alpha_k = \pi/2$ , enquanto que se  $\zeta_k = \gamma_j^i$ ,  $\alpha_k = 2\pi$ . Assim obtemos que  $\Phi(\zeta)$  será dado por

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = C \frac{\prod_{i=1}^{n_1} (\zeta - \gamma_i^1) \prod_{j=1}^{n_3} (\zeta - \gamma_j^3)}{\prod_{i=0}^{2n_1+1} (\zeta - \nu_i^1)^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_3+1} (\zeta - \nu_j^3)^{1/2}}, \quad (3.48)$$

onde  $C$  e  $\gamma_j^i$  são constantes a serem determinadas. Em (3.48), introduzimos, por conveniência, a seguinte notação

$$\nu_{2n_1+1}^1 = \nu_{-1}^2, \quad \nu_{2n_3+1}^3 = \nu_{-1}^4. \quad (3.49)$$

Pelas mesmas razões utilizadas acima, da figura 3.9(c) tiramos que  $\Sigma(\zeta)$  é dada por

$$\frac{d\Sigma}{d\zeta} = K \frac{\prod_{i=1}^{n_2} (\zeta - \gamma_i^2) \prod_{j=1}^{n_4} (\zeta - \gamma_j^4)}{\prod_{i=0}^{2n_2+1} (\zeta - \nu_i^2)^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_4+1} (\zeta - \nu_j^4)^{1/2}}, \quad (3.50)$$

onde  $K$  e  $\gamma_j^i$  são constantes a serem determinadas. Tal como em (3.49), é conveniente introduzirmos a seguinte notação

$$\nu_{2n_2+1}^2 = \nu_{-1}^3, \quad \nu_{2n_4+1}^4 = \nu_{-1}^1. \quad (3.51)$$

Tanto as constantes  $\gamma_j^i$  quanto as constantes  $C$  e  $K$  serão determinados a partir de condições de contorno impostas a  $\Phi(\zeta)$  e  $\Sigma(\zeta)$ . Antes de encontrar essas constantes, será conveniente expandir os numeradores nas equações (3.48) e (3.50) e reescrevê-las na forma

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = C \frac{\sum_{k=0}^{n_1+n_3} a_k \zeta^k}{\prod_{i=0}^{2n_1+1} (\zeta - \nu_i^1)^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_3+1} (\zeta - \nu_j^3)^{1/2}}, \quad (3.52)$$

$$\frac{d\Sigma}{d\zeta} = K \frac{\sum_{k=0}^{n_2+n_4} b_k \zeta^k}{\prod_{i=0}^{2n_2+1} (\zeta - \nu_i^2)^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_4+1} (\zeta - \nu_j^4)^{1/2}}, \quad (3.53)$$

onde os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  são constantes reais, com  $a_{n_1+n_3} = b_{n_2+n_4} = 1$ . Para um determinado conjunto de parâmetros  $\nu_j^i$ , poderemos determinar os coeficientes reais  $a_k$  e  $b_k$  como segue.

Para determinar os  $a_k$ , utilizaremos o fato de que as bolhas dos lados esquerdo e direito são simétricas em relação aos eixos  $x = 0$  e  $x = L$ , respectivamente, logo o valor do potencial  $\Phi(\zeta)$  deve ser o mesmo em cada um dos “extremos” das bolhas, ou seja

$$\Phi(\nu_{2j-1}^i) = \Phi(\nu_{2j}^i), \quad \text{para } i = 1, 3 \text{ e } j = 1, \dots, n_i, \quad (3.54)$$

o que implica que

$$\int_{\nu_{2j-1}^i}^{\nu_{2j}^i} \frac{d\Phi}{d\zeta} d\zeta = 0, \quad \text{para } i = 1, 3 \text{ e } j = 1, \dots, n_i. \quad (3.55)$$

Podemos reescrever a equação (3.55) da seguinte forma

$$\sum_{k=0}^{n_1+n_3} I_{jk}^i a_k = 0, \quad \text{para } i = 1, 3 \text{ e } j = 1, 2, \dots, n_i, \quad (3.56)$$

onde as quantidades  $I_{jk}^i$  são definidas como

$$I_{jk}^i = \int_{\nu_{2j-1}^i}^{\nu_{2j}^i} \frac{t^k}{\prod_{l=0}^{2n_1+1} |t - \nu_l^1|^{1/2} \prod_{m=0}^{2n_3+1} |t - \nu_m^3|^{1/2}} dt, \quad \text{para } i = 1, 3, \quad (3.57)$$

com  $j = 1, \dots, n_i$  e  $k = 0, 1, \dots, n_1 + n_3$ . Lembrando que  $a_{n_1+n_3} = 1$ , vemos que a equação (3.56) nos dá um sistema com  $n_1 + n_3$  equações lineares e  $n_1 + n_3$  incógnitas  $a_k$ .

De modo análogo, a função  $\Sigma(\zeta)$  deve satisfazer à seguinte condição de contorno

$$\Sigma(\nu_{2j-1}^i) = \Sigma(\nu_j^i), \quad \text{para } i = 2, 4 \text{ e } j = 1, \dots, n_i, \quad (3.58)$$

em função da simetria das bolhas dos lados superior e inferior. Integrando (3.53) e aplicando a condição (3.58), obtemos, assim como de (3.55), que

$$\sum_{k=0}^{n_2+n_4} J_{jk}^i b_k = 0, \quad \text{para } i = 2, 4 \text{ e } j = 1, 2, \dots, n_i, \quad (3.59)$$

onde, similarmente, as quantidades  $J_{jk}^i$  são definidas como

$$J_{jk}^i = \int_{\nu_{2j-1}^i}^{\nu_{2j}^i} \frac{t^k}{\prod_{l=0}^{2n_2+1} |t - \nu_l^2|^{1/2} \prod_{m=0}^{2n_4+1} |t - \nu_m^4|^{1/2}} dt, \quad \text{para } i = 2, 4, \quad (3.60)$$

com  $j = 1, \dots, n_i$  e  $k = 0, 1, \dots, n_2 + n_4$ . Como  $b_{n_2+n_4} = 1$ , a equação (3.59) representa um sistema com  $n_2 + n_4$  equações lineares e  $n_2 + n_4$  incógnitas  $b_k$ . Portanto, dados os  $2N_e + N_c + 2$  parâmetros  $\nu_j^i$ , poderemos resolver os sistemas de equações (3.56) e (3.59), e calcularmos as constantes  $a_k$  e  $b_k$ . Após tudo isso, ainda nos resta determinar as constantes  $C$  e  $K$ . Para obter  $C$ , usaremos o fato de que a parte imaginária de  $\Phi(\zeta)$  varia de  $a$  (lembramos que estamos fazendo  $U = 2$  e  $V = 1$ ) quando vamos de  $B$  para  $E$

[ver figura 3.9(b)], ou seja,

$$[\Phi]_B^E = \Phi|_E - \Phi|_B = ia,$$

a qual implica que

$$\Phi|_{\nu_0^1}^{\nu_{-1}^2} \equiv \Phi(\zeta = \nu_{-1}^2) - \Phi(\zeta = \nu_0^1) = ia.$$

Lembrando que denotamos  $\nu_{-1}^2$  por  $\nu_{2n_1+1}^1$ , temos que

$$\Phi|_{\nu_0^1}^{\nu_{-1}^2} = \Phi|_{\nu_0^1}^{\nu_{2n_1+1}^1},$$

e da figura 3.9(b) vemos que

$$\Phi|_{\nu_0^1}^{\nu_{2n_1+1}^1} = \sum_{l=1}^{n_1+1} \Phi|_{\nu_{2l-2}^1}^{\nu_{2l-1}^1},$$

pois as contribuições ao longo das bolhas são nulas. Logo, temos que

$$\sum_{l=1}^{n_1+1} \Phi|_{\nu_{2l-2}^1}^{\nu_{2l-1}^1} = C \sum_{l=1}^{n_1+1} \int_{\nu_{2l-2}^1}^{\nu_{2l-1}^1} \frac{\sum_{k=0}^{n_1+n_3} a_k t^k}{\prod_{i=0}^{2n_1+1} (t - \nu_i^1)^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_3+1} (t - \nu_j^3)^{1/2}} dt. \quad (3.61)$$

Com a intenção de tornar as integrais em (3.61) reais, obtemos a seguinte expressão

$$\sum_{l=1}^{n_1+1} \Phi|_{\nu_{2l-2}^1}^{\nu_{2l-1}^1} = C \sum_{l=1}^{n_1+1} \int_{\nu_{2l-2}^1}^{\nu_{2l-1}^1} \frac{\sum_{k=0}^{n_1+n_3} a_k t^k}{i(-1)^{n_1+l+1} \prod_{i=0}^{2n_1+1} |t - \nu_i^1|^{1/2} (-1)^{n_3+1} \prod_{j=0}^{2n_3+1} |t - \nu_j^3|^{1/2}} dt,$$

a qual podemos ainda reescrever como

$$ia = iC \sum_{l=1}^{n_1+1} \int_{\nu_{2l-2}^1}^{\nu_{2l-1}^1} \frac{\left| \sum_{k=0}^{n_1+n_3} a_k t^k \right|}{\prod_{i=0}^{2n_1+1} |t - \nu_i^1|^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_3+1} |t - \nu_j^3|^{1/2}} dt.$$

Da última expressão obtemos que

$$C^{-1} = a^{-1} \sum_{l=1}^{n_1+1} \int_{\nu_{2l-2}^1}^{\nu_{2l-1}^1} \frac{\left| \sum_{k=0}^{n_1+n_3} a_k t^k \right|}{\prod_{i=0}^{2n_1+1} |t - \nu_i^1|^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_3+1} |t - \nu_j^3|^{1/2}} dt, \quad (3.62)$$

mostrando que  $C$  é um número real positivo.

Para determinar a constante  $K$ , usaremos o fato de que a parte real de  $\Sigma(\zeta)$  varia de  $a$  (pois fizemos  $V = 1$ ) quando vamos de  $A$  para  $F$  [ver figura 3.9(c)]. Logo,

$$[\Sigma]_A^F = \Sigma|_F - \Sigma|_A = a,$$

a qual podemos reescrever como

$$\Sigma|_{\nu_{-1}^1}^{\nu_0^2} = a.$$

Usando  $\nu_{-1}^1 = \nu_{2n_4+1}^4$ , temos que

$$\Sigma|_{\nu_{-1}^1}^{\nu_0^2} = \Sigma|_{\nu_{2n_4+1}^4}^{\nu_0^2}.$$

Logo, temos que

$$a = K \int_{\nu_{2n_4+1}^4}^{\nu_0^2} \frac{\sum_{k=0}^{n_2+n_4} b_k t^k}{\prod_{i=0}^{2n_2+1} (t - \nu_i^2)^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_4+1} (t - \nu_j^4)^{1/2}} dt,$$

e, portanto, obtemos que

$$K^{-1} = (-ia)^{-1} \int_{\nu_{2n_4+1}^4}^{\nu_0^2} \frac{\left| \sum_{k=0}^{n_2+n_4} b_k t^k \right|}{\prod_{i=0}^{2n_2+1} |t - \nu_i^2|^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_4+1} |t - \nu_j^4|^{1/2}} dt, \quad (3.63)$$

donde vemos que  $K$  é um número imaginário puro negativo. Por motivo de praticidade, vamos retirar o fator de  $-i$  da expressão 3.63 e fazer a seguinte substituição:  $K \rightarrow -iK$ , onde agora  $K$  é um número real positivo dado por

$$K^{-1} = \int_{\nu_{2n_4+1}^4}^{\nu_0^2} \frac{\left| \sum_{k=0}^{n_2+n_4} b_k t^k \right|}{\prod_{i=0}^{2n_2+1} |t - \nu_i^2|^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_4+1} |t - \nu_j^4|^{1/2}} dt. \quad (3.64)$$

Isso completa a determinação das constante que entram nos mapas  $\Phi(\zeta)$  e  $\Sigma(\zeta)$ . Assim, dados os valores dos parâmetros  $\nu_j^i$ , temos como determinar completamente as funções  $\Phi(\zeta)$  e  $\Sigma(\zeta)$  e, conseqüentemente, obter a solução para as respectivas interfaces.

Uma vez determinados os mapeamentos  $\Phi(\zeta)$  e  $\Sigma(\zeta)$ , podemos agora encontrar fa-

cilmente as expressões para as coordenadas  $x(s)_j^i$  e  $y(s)_j^i$  das interfaces das bolhas, simplesmente fazendo uso das equações (3.26),(3.27) e das soluções para  $\Phi(\zeta)$  e  $\Sigma(\zeta)$ . Logo, temos que

$$x_j^i(s) = X_j^i + \frac{C}{2} \int_{\nu_{2j-1}^i}^s \frac{(-1)^{\alpha_1} \sum_{k=0}^{n_1+n_3} a_k t^k}{\prod_{l=0}^{2n_1+1} |t - \nu_l^1|^{1/2} \prod_{m=0}^{2n_3+1} |t - \nu_m^3|^{1/2}} dt, \quad (3.65)$$

$$y_j^i(s) = Y_j^i + \frac{K}{2} \int_{\nu_{2j-1}^i}^s \frac{(-1)^{\alpha_2} \sum_{k=0}^{n_2+n_4} b_k t^k}{\prod_{l=0}^{2n_2+1} |t - \nu_l^2|^{1/2} \prod_{m=0}^{2n_4+1} |t - \nu_m^4|^{1/2}} dt, \quad (3.66)$$

onde  $s \in \mathcal{S}_j^i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$  e  $j = 0, 1, \dots, n_i$ . As constantes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são dados por

$$\text{para } i = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = n_1 + n_3 + j + 1 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 1;$$

$$\text{para } i = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = n_2 + n_4 + j + 1;$$

$$\text{para } i = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = n_3 + j \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 0;$$

$$\text{para } i = 4 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = n_4 + j.$$

Aqui,  $X_j^i$  é uma constante dada por

$$\begin{aligned} X_j^i &= x_{j-1}^i(\nu_{2j-2}^i) + \left(\frac{C}{2}\right) \int_{\nu_{2j-2}^i}^{\nu_{2j-1}^i} \frac{(-1)^{\beta_1} \left| \sum_{k=0}^{n_1+n_3} a_k t^k \right|}{\prod_{i=0}^{2n_1+1} |t - \nu_i^1|^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_3+1} |t - \nu_j^3|^{1/2}} dt + \\ &\quad \left(\frac{K}{2}\right) \int_{\nu_{2j-2}^i}^{\nu_{2j-1}^i} \frac{(-1)^{\beta_1} \left| \sum_{k=0}^{n_2+n_4} b_k t^k \right|}{\prod_{i=0}^{2n_2+1} |t - \nu_i^2|^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_4+1} |t - \nu_j^4|^{1/2}} dt, \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde, para  $i = 2, 4$ , temos que

$$\beta_1 = 0 \quad \text{para } i = 2,$$

$$\beta_1 = 1 \quad \text{para } i = 4,$$

e para  $i = 1, 3$ , tem-se

$$X_j^1 = 0 \quad \text{e} \quad X_j^3 = L \quad (3.68)$$

e  $Y_j^i$  é uma contante dada por

$$\begin{aligned} Y_j^i &= y_{j-1}^i(\nu_{2j-2}^i) + \left(\frac{C}{2}\right) \int_{\nu_{2j-2}^i}^{\nu_{2j-1}^i} \frac{(-1)^{\beta_2} \left| \sum_{k=0}^{n_1+n_3} a_k t^k \right|}{\prod_{i=0}^{2n_1+1} |t - \nu_i^1|^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_3+1} |t - \nu_j^3|^{1/2}} dt + \\ &\quad \left(\frac{K}{2}\right) \int_{\nu_{2j-2}^i}^{\nu_{2j-1}^i} \frac{(-1)^{\beta_2} \left| \sum_{k=0}^{n_2+n_4} b_k t^k \right|}{\prod_{i=0}^{2n_2+1} |t - \nu_i^2|^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_4+1} |t - \nu_j^4|^{1/2}} dt, \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde, para  $i = 1, 3$ , temos que

$$\beta_2 = 1 \quad \text{para} \quad i = 1,$$

$$\beta_1 = 0 \quad \text{para} \quad i = 3,$$

e para  $i = 2, 4$ , temos

$$Y_j^2 = 0 \quad \text{e} \quad Y_j^4 = a. \quad (3.70)$$

Em particular, o semi-período  $L$  da célula unitária é dado por

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{C}{2}\right) \int_{\nu_{-1}^3}^{\nu_0^3} \frac{\left| \sum_{k=0}^{n_1+n_3} a_k t^k \right|}{\prod_{i=0}^{2n_1+1} |t - \nu_i^1|^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_3+1} |t - \nu_j^3|^{1/2}} dt + \\ &\quad \left(\frac{K}{2}\right) \sum_{l=0}^{n_2} \int_{\nu_{2j}^2}^{\nu_{2j+1}^2} \frac{\left| \sum_{k=0}^{n_2+n_4} b_k t^k \right|}{\prod_{i=0}^{2n_2+1} |t - \nu_i^2|^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_4+1} |t - \nu_j^4|^{1/2}} dt. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Os vários fatores de -1 que aparecem nas expressões (3.65), (3.66), (3.67) e (3.69) surgem quando passamos de um intervalo  $\mathcal{I}_j^i$  para o próximo, devido a mudança de sinal dos radicandos encontrados nessas expressões. As expressões de (3.65) a (3.70) formam a solução geral do problema.

Na próxima seção, reduziremos as expressões obtidas acima para o caso de bolhas em um canal de Hele-Shaw e apresentaremos alguns resultados para este caso.



### 3.3 SOLUÇÕES PERIÓDICAS EM UM CANAL DE HELE-SHAW

Nesta seção, discutiremos o caso particular de arranjos periódicos de bolhas movendo-se em um canal de largura  $2a$ , discutido qualitativamente no início do capítulo. As laterais do canal estão em  $y = \pm a$ . As soluções no canal são caracterizadas por não haver bolhas na lateral superior da célula unitária reduzida, ou seja,  $\chi_1 = \chi_4 = n_4 = 0$ . As soluções serão caracterizadas somente pelos números de bolhas  $(n_1, n_2, n_3)$  e pelos indicadores  $(\chi_2, \chi_3)$ . Em termos dos parâmetros  $\nu_j^i$ , a condição para que não haja bolhas nos cantos superiores implica que

$$\nu_{-1}^1 = \nu_0^1 = -1 \quad \text{e} \quad \nu_{-1}^4 = \nu_0^4 = 1. \quad (3.72)$$

Os domínios do fluido nos planos  $z$ ,  $W$  e  $\tilde{W}$  são ilustrados na figura 3.12. Fazendo  $n_4 = 0$  e usando a condição (3.72) nas equações (3.48) e (3.50), obtemos

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = C \frac{\sum_{k=0}^{n_1+n_3} a_k \zeta^k}{(\zeta^2 - 1)^{1/2} \prod_{i=1}^{2n_1+1} (\zeta - \nu_i^1)^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_3} (\zeta - \nu_j^3)^{1/2}} \quad (3.73)$$

$$\frac{d\Sigma}{d\zeta} = -iK \frac{\sum_{k=0}^{n_2} b_k \zeta^k}{(\zeta^2 - 1)^{1/2} \prod_{i=0}^{2n_2+1} (\zeta - \nu_i^2)^{1/2}}, \quad (3.74)$$

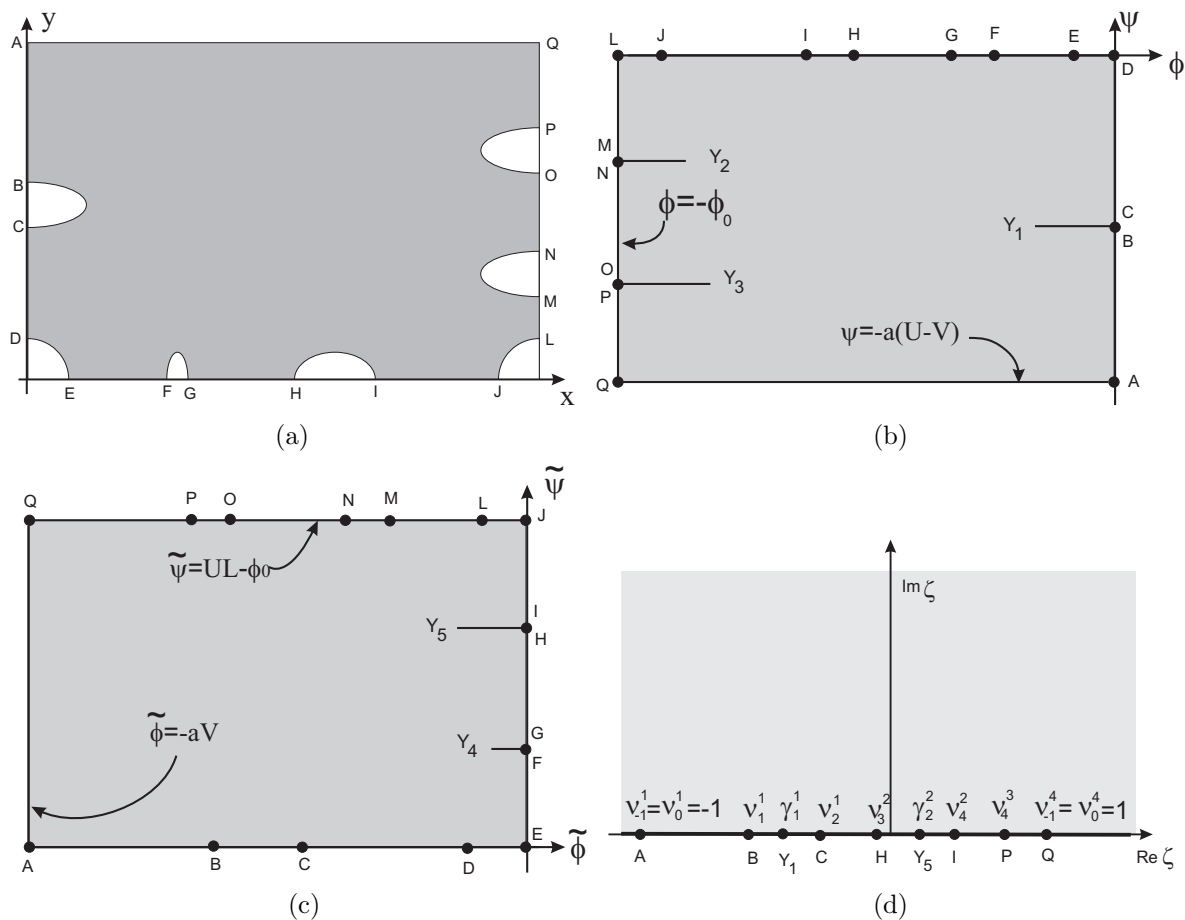
onde utilizamos  $\nu_{2n_1+1}^1 = \nu_{-1}^2$  e  $\nu_{2n_2+1}^2 = \nu_{-1}^3$ .

As constantes  $a_k$  e  $b_k$  são determinadas pelo procedimento discutido na seção anterior, vide equações (3.56) e (3.59). Por exemplo, para  $C$  e  $K$  temos

$$C^{-1} = a^{-1} \sum_{l=1}^{n_1+1} \int_{\nu_{2l-2}^1}^{\nu_{2l-1}^1} \frac{\left| \sum_{k=0}^{n_1+n_3} a_k t^k \right|}{(1-t^2)^{1/2} \prod_{i=1}^{2n_1+1} |t - \nu_i^1|^{1/2} \prod_{j=0}^{2n_3} |t - \nu_j^3|^{1/2}} dt \quad (3.75)$$

$$K^{-1} = a^{-1} \int_{\nu_{2n_4+1}^4}^{\nu_0^2} \frac{\left| \sum_{k=0}^{n_2} b_k t^k \right|}{(1-t^2)^{1/2} \prod_{i=0}^{2n_2+1} |t - \nu_i^2|^{1/2}} dt. \quad (3.76)$$

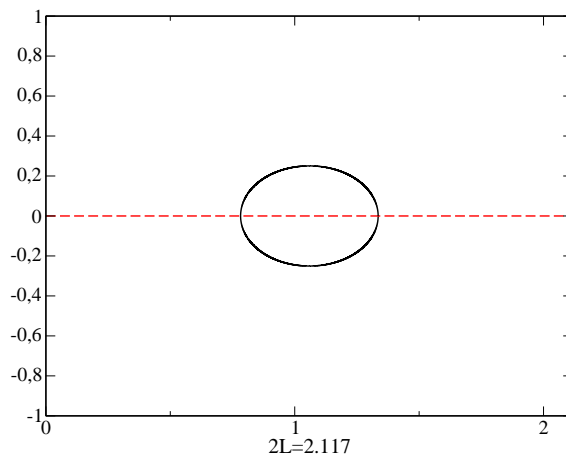
para  $U = 2$  e  $V = 1$ .



**Figura 3.12** Domínios do escoamento (a) no plano  $z$ , (b) no plano  $W$ , (c) no plano  $\tilde{W}$  e (d) no plano  $\zeta$ . Novamente, apenas alguns intervalos foram colocados na figura (d) por motivo de espaço.

Algumas soluções para este caso estão ilustradas nas figuras 3.13–3.20, as quais representam configurações de bolhas com velocidade  $U = 2$  em um escoamento cujo fluido se move com velocidade média  $V = 1$  na direção  $x$ , da esquerda para direita. As bolhas contidas em uma célula unitária possui uma meia-largura  $a = 1$  (a qual, em alguns casos, será considerada a largura da célula) e comprimento  $2L$ . O valor do semi-período  $L$  (ou do período  $2L$ ) e a fração de ocupação  $\Gamma_2$  das células são dados para cada figura. Em algumas figuras indicaremos os eixos de simetria das bolhas, os quais corresponderão às equipotenciais (linhas tracejadas verticais) e às linhas de corrente (linhas tracejadas horizontais) que limitam a célula reduzida.

Na figura 3.13 explicitamos a solução devido à Burgess e Tanveer [6] para uma única bolha simétrica por célula unitária. Essa bolha possui os dois tipos de simetria citados neste capítulo, ou seja, ela é simétrica em relação ao eixo central do canal e a um eixo perpendicular ao primeiro.



**Figura 3.13** Solução de Burgess e Tanveer, com  $\nu_{-1}^2 = \nu_0^2 = -\nu_{-1}^3 = -\nu_0^3 = -\delta = -0.8$  e  $\nu_1^2 = -\nu_2^2 = -\eta = -0.6$ .

Para obter a solução da figura 3.13 fizemos as seguintes escolhas:  $n_1 = n_3 = 0$  e  $n_2 = 1$  uma vez que queremos uma solução com apenas uma bolha no lado inferior da região reduzida; 3.12(a). Além disso, não haverá bolhas de canto nessa solução, o que implica que  $\nu_{-1}^2 = \nu_0^2$  e  $\nu_{-1}^3 = \nu_0^3$ . Como nos interessa uma solução totalmente simétrica, faremos as seguintes escolhas:

$$\nu_{-1}^2 = \nu_0^2 = -\nu_{-1}^3 = -\nu_0^3 = -\delta \quad (3.77)$$

$$\nu_1^2 = -\nu_2^2 = -\eta,$$

onde  $\delta$  e  $\eta$  representam os valores usados nessa solução. Com essa escolha de parâmetros, as equações 3.73 e 3.74 tornam-se

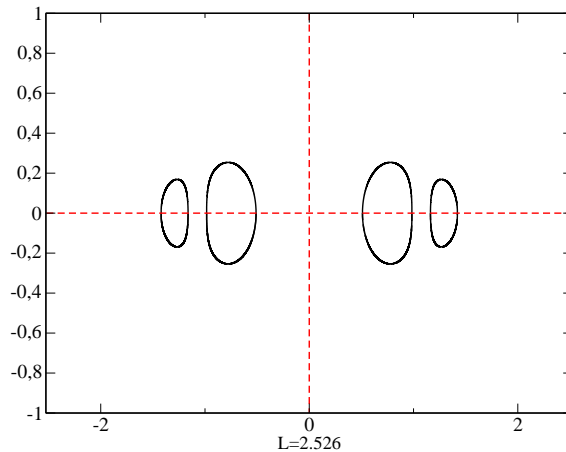
$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = C \frac{1}{(\zeta^2 - 1)^{1/2} (\zeta^2 - \delta^2)^{1/2}},$$

$$\frac{d\Sigma}{d\zeta} = -iK \frac{\zeta}{(\zeta^2 - 1)^{1/2} (\zeta^2 - \delta^2)^{1/2} (\zeta^2 - \eta^2)^{1/2}}.$$

onde  $C$  e  $K$  são obtidos pelas equações 3.75 e 3.76.

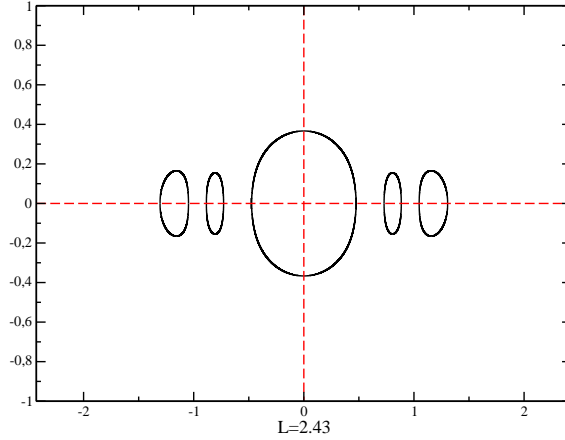
Para  $\delta = 0.8$  e  $\eta = 0.6$  obtemos a metade superior da figura 3.13 com  $2L = 2.12$  e  $\Gamma_2 = 5.14 \cdot 10^{-2}$ , de modo que a figura é gerada através de uma reflexão em relação à reta  $y = 0$ . Observe que, como discutido na subseção 3.2.4, os parâmetros independentes  $\delta$  e  $\eta$  estão relacionados com o comprimento da célula unitária  $2L$  e com a área da bolha. Como a bolha nesse caso está localizada no centro da célula unitária, não é necessário um terceiro parâmetro associado à sua posição.

As bolhas mostradas nas figuras 3.14–3.17 correspondem às duas situações discutidas qualitativamente no começo do capítulo, em que temos múltiplas bolha por célula unitária. Primeiramente apresentaremos as soluções em que as bolhas formam fileiras periódicas ao longo do canal e depois discutiremos uma forma de obter soluções para colunas de bolhas, a partir de fileiras de bolhas, com o auxílio do teorema de invariância por rotação.



**Figura 3.14** Fileira com número par de bolhas por célula unitária, com  $\nu_{-1}^2 = \nu_0^2 = -\nu_{-1}^3 = -\nu_0^3 = -\delta = -0.9$ ,  $\nu_1^2 = -0.87$ ,  $\nu_2^2 = -0.2$ ,  $\nu_3^2 = -0.17$  e  $\nu_4^2 = 0.5$ .

Para obter a figura 3.14, fizemos  $n_2 = 2$  e  $n_1 = n_3 = 0$ , pois queremos bolhas apenas no lado inferior da figura 3.12(a). Como não queremos bolhas de canto inferiores, faremos, por simplicidade, uso da condição 3.77. Portanto, além de  $\delta$ , usaremos mais 4 parâmetros, a saber  $\nu_j^2$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ). Os parâmetros dados na legenda da figura correspondem ao quarto superior direito da figura, com  $L = 2.53$  e  $\Gamma_2 = 5.26 \cdot 10^{-2}$ . Esta figura ilustra uma fileira de bolhas com um número par de bolhas que possuem simetria em relação ao eixo central do canal.



**Figura 3.15** Fileira com número ímpar de bolhas por célula unitária, com  $\nu_{-1}^2 = -\nu_{-1}^3 = -\nu_0^3 = \delta - 0.9$ ,  $\nu_0^2 = -0.6$ ,  $\nu_1^2 = -0.56$ ,  $\nu_2^2 = -0.02$ ,  $\nu_3^2 = -0.17$  e  $\nu_4^2 = 0.5$ .

Para obter a figura 3.15, fizemos  $n_1 = n_3 = 0$ ,  $n_2 = 2$  pelos mesmos motivos que na figura anterior. Desta vez usaremos a bolha de canto inferior esquerda. e com isso faremos a seguinte escolha:  $\nu_{-1}^2 = -\nu_{-1}^3 = -\nu_0^3 = -\delta \neq \nu_0^2$ . Além disso, faremos uso de mais 4 parâmetros, a saber  $\nu_j^2$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ). Temos então um total 6 parâmetros independentes correspondendo às 3 áreas das bolhas, às posições das 2 bolhas de lado e ao comprimento  $2L$  da célula. Os parâmetros dados na figura 3.15 correspondem ao quarto superior direito da figura, com  $L = 2.43$  e  $\Gamma_2 = 8.02 \cdot 10^{-2}$ . Esta figura ilustra uma fileira com número ímpar de bolhas, também simétricas ao eixo central do canal.

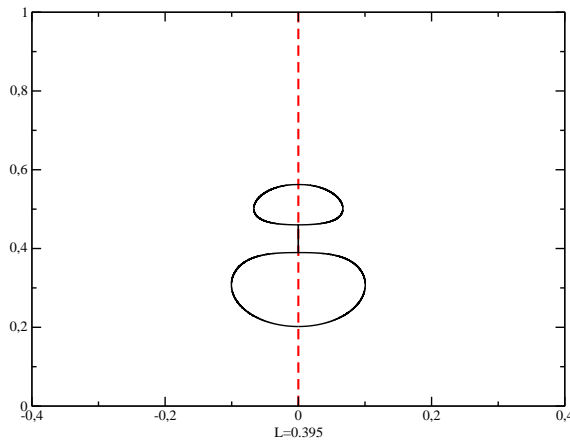
Agora que apresentamos as soluções do tipo fileiras de bolhas, vamos mostrar uma maneira de obter soluções do tipo colunas de bolhas a partir destas primeiras. Para isso, basta lembrarmos que ao aplicarmos o teorema de invarância por rotação, o escoamento (no referencial das bolhas) muda enquanto que o domínio do fluido permanece o mesmo. Portanto, soluções na forma de fileiras podem ser usadas para obter soluções na forma

de colunas, bastando apenas girarmos a célula unitária com fileiras para formarmos uma nova célula unitária com colunas. Além disso, para que a nova célula unitária tenha largura  $2a$  (ou apenas  $a$ ) deveremos reescalar as dimensões da nova figura, isto é,  $x^*$  e  $y^*$ , fazendo

$$x^* \rightarrow ax'/L \quad (3.78)$$

$$y^* \rightarrow ay'/L. \quad (3.79)$$

onde  $a$  e  $L$  são as dimensões da célula reduzida original (não rotacionada).



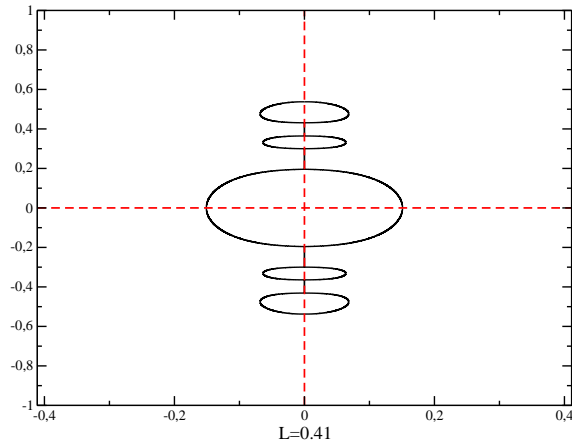
**Figura 3.16** Colunas com número par de bolhas por célula unitária

Para obter a figura 3.16, utilizamos apenas a metade superior da célula unitária 3.14, giramos a figura de um ângulo de  $90^\circ$  e fizemos a mudança de escala usando as equações 3.78 e 3.79, onde usamos  $L = 2.526$  (semi-período da figura 3.14) e estamos usando  $a = 1$ . Com isso, obtemos uma configuração com  $L = 0.395$  e  $\Gamma_2 = 5.26 \cdot 10^{-2}$ .

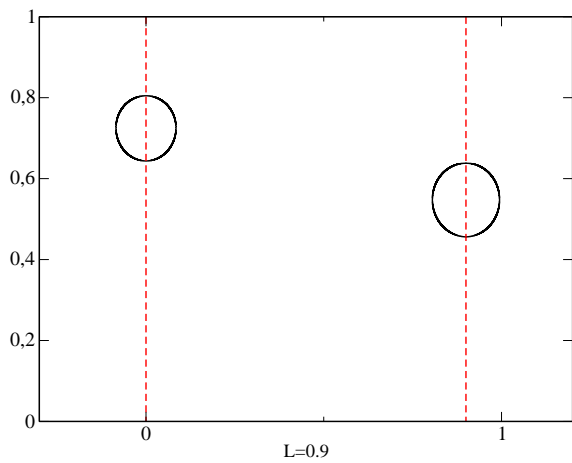
Para obter a figura 3.17, procedemos da mesma forma que na figura 3.16, girando de  $90^\circ$  a figura 3.15 e reescalando suas dimensões como mostrado na figura anterior, agora usando o fator de reescala  $L = 2.43$ . A nova figura tem  $L = 0.41$  e  $\Gamma_2 = 8.02 \cdot 10^{-2}$ .

Apesar de termos procedido desta maneira, poderíamos ter obtido estas figuras assim como 3.13–3.15. Para isso, deveríamos fazer  $n_2 = 0$  e  $n_2 \neq 0$  ou  $n_3 \neq 0$  (se fizermos  $n_2 \neq 0$  e  $n_3 \neq 0$ , poderemos obter uma configuração onde teremos 2 colunas de bolhas diferentes alternando-se ao longo do canal).

As soluções apresentadas nas figuras 3.18–3.20 fazem parte de um novo conjunto de soluções periódicas no canal que não eram conhecidas ainda.

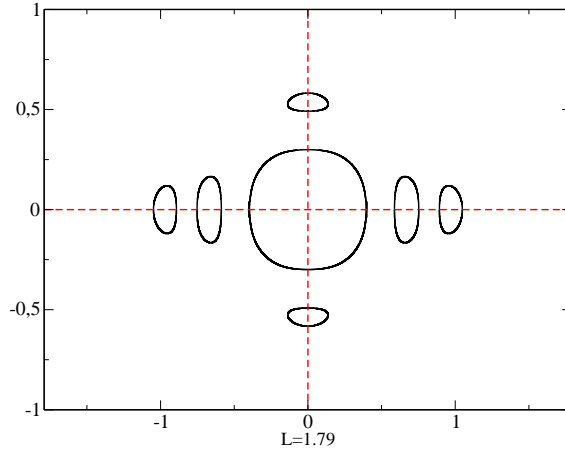


**Figura 3.17** Colunas com número ímpar de bolhas por célula unitária



**Figura 3.18** Bolhas em zig-zag, com  $\nu_1^1 = -0.9$ ,  $\nu_2^1 = -0.4$ ,  $\nu_1^3 = 0.2$ ,  $\nu_2^3 = 0.6$  e  $\nu_{-1}^2 = \nu_0^2 = -\nu_{-1}^3 = -\nu_0^3 = -\delta = -0.1$

Na figura 3.18 apresentamos uma configuração de bolhas em “zig-zag”, a qual foi configurada da seguinte forma:  $n_1 = n_3 = 1$ ,  $n_2 = 0$ , de modo que temos apenas uma bolha à esquerda e uma à direita. Como não há bolhas de canto, faremos uso de 3.77. Além de  $\delta$  usamos mais 4 parâmetros, a saber  $\nu_j^i$  ( $j = 1, 2$  e  $i = 1, 3$ ). Os parâmetros dados na figura correspondem a região entre as equipotenciais, com  $L = 0.90$  e  $\Gamma_2 = 0.17$ . Observe que, nesse caso, consideramos a largura do canal como sendo apenas  $a$  e não  $2a$ .



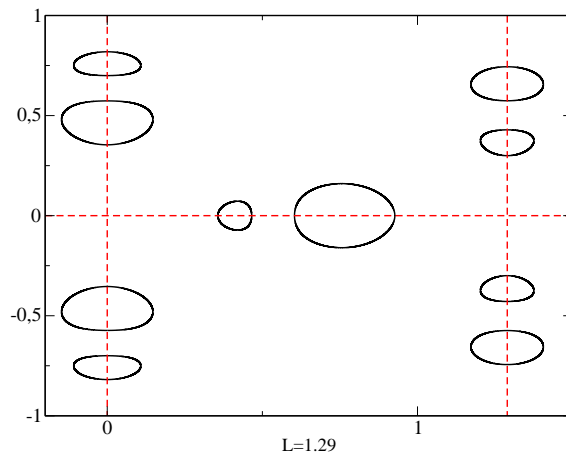
**Figura 3.19** Soluções mistas, com  $\nu_1^2 = -\nu_{-1}^3 = -\nu_0^3 = \delta = -0.8$ ,  $\nu_2^1 = -0.5$ ,  $\nu_{-1}^2 = -0.48$ ,  $\nu_0^2 = -0.1$ ,  $\nu_1^2 = -0.08$ ,  $\nu_2^1 = 0.3$ ,  $\nu_3^2 = 0.32$  e  $\nu_4^2 = 0.6$ .

Na figura 3.19 é ilustrada uma situação onde as bolhas formam uma configuração mista, ou seja, elas não formam simplesmente fileiras ou colunas. Para obter essa configuração, fizemos  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$ ,  $n_3 = 0$ , onde usamos 1 bolha no lado esquerdo, 2 no lado inferior e a bolha do canto inferior esquerdo. Usamos 8 parâmetros, a saber  $\nu_j^1$  ( $j = 1, 2$ ),  $\nu_j^2$  ( $j = 1, 0, 2, 3, 4$ ) e  $\delta = \nu_{-1}^3 = \nu_0^3$ . Os valores dados na figura correspondem ao quarto superior direito da figura, com  $L = 1.79$  e  $\Gamma_2 = 8.18 \cdot 10^{-2}$ .

Na figura 3.20 apresentamos outra configuração de bolhas, também do tipo mista. Aqui fizemos  $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ , ou seja, 2 bolhas à direita, 2 à esquerda e 2 no lado inferior, e nenhuma bolha de canto. Usando 13 parâmetros, a saber  $\nu_j^i$  ( $i = 1, 2, 3$  e  $j = 1, 2, 3$ ),  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  e  $\eta$  (ver a legenda da figura), de modo a obtermos a metade superior contida entre as equipotenciais (linhas tracejadas verticais), com  $L = 1.289$  e  $\Gamma_2 = 0.344$ .

Como vimos acima, obtemos soluções válidas em canais de Hele-Shaw. Na próxima seção, apresentaremos soluções válidas em células de Hele-Shaw infinitas.

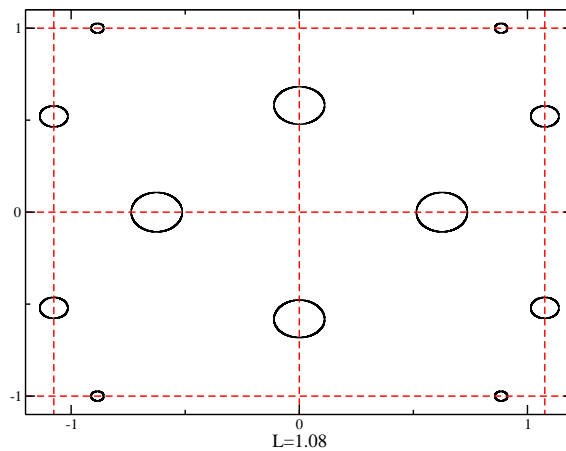




**Figura 3.20** Soluções mistas, com  $\nu_1^1 = -0.97$ ,  $\nu_2^1 = -0.7$ ,  $\nu_3^1 = -0.68$ ,  $\nu_4^1 = -\nu_4^2 = -\eta = -0.3$ ,  $\nu_{-1}^2 = \nu_0^2 = \delta_1 = -0.25$ ,  $\nu_1^2 = -0.2$ ,  $\nu_2^2 = -0.1$ ,  $\nu_3^2 = -0.08$ ,  $\nu_{-1}^3 = \nu_0^3 = \delta_2 = 0.34$ ,  $\nu_1^3 = 0.37$ ,  $\nu_2^3 = 0.5$ ,  $\nu_3^3 = 0.53$  e  $\nu_4^3 = 0.9$ .

### 3.4 SOLUÇÕES EM UMA CÉLULA INFINITA

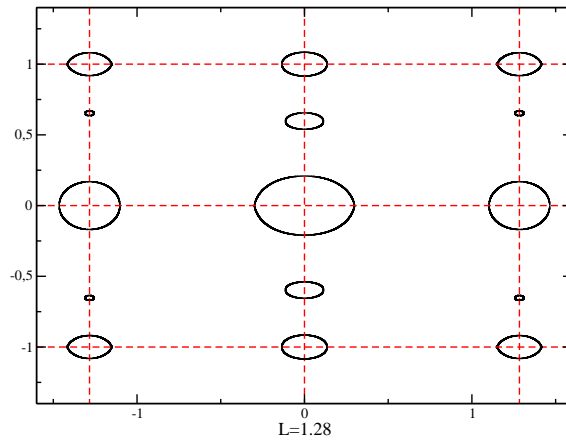
Nessa subseção, serão ilustradas algumas configurações de bolhas válidas apenas em células de Hele-Shaw infinitas, ou seja, estas configurações de bolhas não são redutíveis a um canal de Hele-Shaw, como mostram as figuras 3.21–3.22.



**Figura 3.21** Solução para célula de Hele-Shaw infinita, com  $\nu_1^1 = -0.9$ ,  $\nu_2^1 = -0.6$ ,  $\nu_{-1}^2 = \nu_0^2 = \delta_1 = -0.5$ ,  $\nu_1^2 = -0.4$ ,  $\nu_2^2 = -0.2$ ,  $\nu_{-1}^3 = \nu_0^3 = \delta_2 = 0.15$ ,  $\nu_1^3 = 0$ ,  $\nu_2^3 = 0.3$ ,  $\nu_1^4 = 1.2$  e  $\nu_2^4 = 1.8$ .

Na figura 3.21 fizemos  $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$ , onde usamos uma bolha em cada lado e nenhuma de canto. Esta solução depende de 10 parâmetros, a saber  $\nu_j^i$  ( $j = 1, 2$  e  $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $\delta_1$  e  $\delta_2$  (ver figura). Observe que temos 10 parâmetros dos quais apenas 9 são independentes, pois, como mencionado na subseção 3.2.4, não usamos o terceiro

grau de liberdade do teorema de Riemann. Estes parâmetros produzem o quarto superior direito da célula unitária, com  $L = 1.08$  e  $\Gamma_2 = 0.14$ .



**Figura 3.22** Solução para célula de Hele-Shaw infinita, com  $\nu_{-1}^1 = -1.1$ ,  $\nu_1^1 = -0.9$ ,  $\nu_2^1 = -\nu_2^3 = -\eta_1 = -0.6$ ,  $\nu_{-1}^2 = -\nu_1^3 = -\eta_2 = -0.5$ ,  $\nu_0^2 = -0.3$ ,  $\nu_{-1}^3 = 0.1$ ,  $\nu_0^3 = 0.2$  e  $\nu_{-1}^4 = 0.8$

A figura 3.22 possui os seguintes parâmetros:  $n_1 = n_3 = 1$ ,  $n_2 = n_4 = 0$ , onde a configuração é formada pelas 4 bolhas de canto, além de 1 bolha à esquerda e uma à direita. Além disso, esta solução depende de 8 parâmetros, a saber  $\nu_{-1}^1$ ,  $\nu_1^1$ ,  $\nu_0^2$ ,  $\nu_{-1}^3$ ,  $\nu_0^3$ ,  $\nu_{-1}^4$ ,  $\eta_1$  e  $\eta_2$ . Com isso, obtemos o quarto superior direito da célula unitária, a qual é limitada pelas linhas tracejadas mais exteriores da figura. Para esse caso, obtemos  $L = 1.28$  e  $\Gamma_2 = 0.24$ .

No próximo capítulo, apresentaremos nossas conclusões e perspectivas.

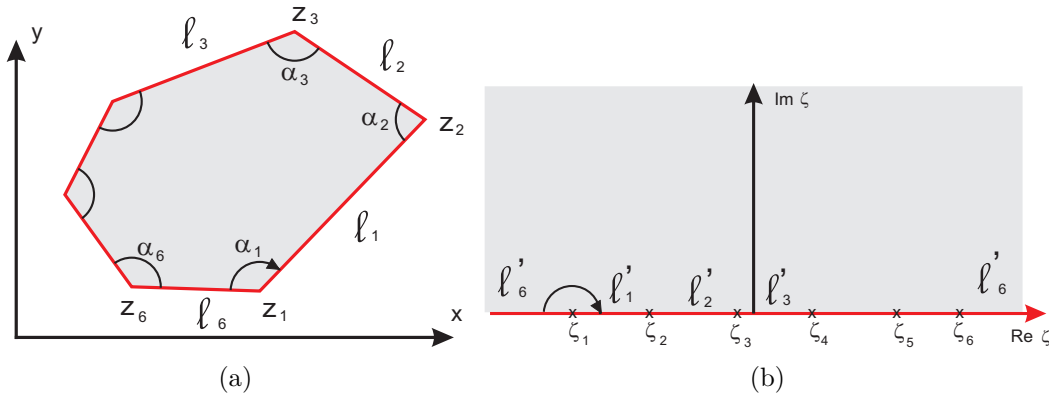
# CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta dissertação apresentamos soluções exatas para o problema do movimento de arranjos duplamente periódicos de bolhas em uma célula de Hele-Shaw (em geral sem fronteiras), quando a tensão superficial é desprezível. Estas soluções são uma generalização dos trabalhos de Vasconcelos [9] e de Burgess e Tanveer [6] e delas conseguimos gerar novas soluções tanto para uma célula infinita quanto para um canal de Hele-Shaw. Nossas soluções são construídas através de técnicas de transformações conformes e estão dadas na forma de integrais. Além disso, elas são a família mais geral de soluções periódicas estacionárias conhecidas até o momento. Neste trabalho também apresentamos e discutimos o comportamento da velocidade de um grupo de bolhas em uma célula de Hele-Shaw em função da fração de volume ocupado pelas bolhas na célula e encontramos uma expressão analítica que descreve esse comportamento.

No momento, estamos tentando fazer alguma conexão deste nosso trabalho com resultados relativos a experimentos com suspensões de bolhas em células de Hele-Shaw. Após este trabalho, temos também como perspectiva tentar desenvolver soluções dependentes do tempo para escoamentos de Hele-Shaw.

## TRANSFORMAÇÃO DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL

Considere um polígono de  $N$  lados no plano complexo  $z$  cujos vértices são os pontos  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_N$  [figura A.1(a)]. Denotemos por  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_N$ , onde  $\zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3 < \dots < \zeta_N$ , as respectivas imagens dos pontos  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_N$  no eixo real de um plano  $\zeta$  [figura A.1(b)]. Os ângulos internos do polígono serão denotados por  $\alpha_i$ , onde  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , como mostra a figura abaixo.



**Figura A.1** (a) Região poligonal no plano  $z$ ; (b) Domínio correspondente no plano  $\zeta$ .

Estamos interessados na função  $z = z(\zeta)$  que mapeia os pontos  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) nos vértices  $z_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) da região poligonal com os respectivos ângulos internos  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ), e o semiplano superior do plano  $\zeta$  no interior da região do polígono. A função  $z(\zeta)$  será definida pela expressão

$$\frac{dz(\zeta)}{d\zeta} = K(\zeta - \zeta_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(\zeta - \zeta_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}(\zeta - \zeta_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi}-1} \dots (\zeta - \zeta_N)^{\frac{\alpha_N}{\pi}-1}, \quad (\text{A.1})$$

da qual obtemos

$$z(\zeta) = K \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta' - \zeta_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} (\zeta' - \zeta_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} (\zeta' - \zeta_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi}-1} \dots (\zeta' - \zeta_N)^{\frac{\alpha_N}{\pi}-1} d\zeta' + C. \quad (\text{A.2})$$

A equação (A.2) é denominada transformação de Schwarz-Christoffel. O limite inferior

de integração  $\zeta_0$  pode ser escolhido arbitrariamente. As constantes  $K$  e  $C$  são determinadas apropriadamente pelas condições de contorno do problema. A constante  $C$  está relacionada com a posição do polígono no plano  $z$ , enquanto que a constante  $K$  fixa a escala e a orientação do polígono. Além disso, pelo teorema de Riemann nos é garantido a escolha arbitrária de 3 dos números reais  $\zeta_i$  em (A.2). Por exemplo, podemos mapear 3 vértices arbitrários  $z_m, z_n$  e  $z_p$  em  $\zeta_m = 1, \zeta_n = -1$  e  $\zeta_p = \infty$ . Frequentemente, a melhor escolha desses 3 “graus de liberdade” dependerá da geometria do problema.

A transformação de Schwarz-Christoffel permanece ainda válida no caso de polígonos “degenerados”, ou seja, polígonos tais que um dos vértices está em  $z = \infty$ . Por fim, se algum dos vértices do polígono (digamos o  $j$ -ésimo vértice) é mapeado no eixo real do plano  $\zeta$  em  $\zeta_j = \pm\infty$ , poderemos omitir o fator correspondente  $(\zeta - \zeta_j)^{\frac{\alpha_j}{\pi}-1}$  na expressão (A.2), de modo que esta expressão não dependerá do ângulo  $\alpha_j$ .

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] P. Pelcé. *Dynamics of curved fronts*. Academic, 1988.
- [2] P. G. Saffman e G. I. Taylor. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **245**: 312–320, 1958.
- [3] H. S. Hele-Shaw. The flow of water. *Nature*, **58**: 34–36, 1898.
- [4] G. I. Taylor e P. G. Saffman. A note on the motion of bubbles in a Hele-Shaw cell and porous medium. *Q. J. Mech. Appl. Maths*, **12**: 265–279, 1959.
- [5] S. Tanveer. New solutions for steady bubbles in a Hele-Shaw cell. *Phys. Fluids*, **30**: 651–658, 1987.
- [6] D. Burgess e S. Tanveer. Infinite stream of Hele-Shaw bubbles. *Phys. Fluids A*, **3**: 367–379, 1991.
- [7] E. Brener, H. Levine e Y. H. Tu. Nonsymmetric Saffman-Taylor fingers. *Phys. Fluids A*, **3**: 529–534, 1991.
- [8] F. R. Tian e G. L. Vasconcelos. Rotation invariance for steady Hele-Shaw flows. *Phys. Fluids A*, **5**: 1863–1865, 1993.
- [9] G. L. Vasconcelos. Multiple bubbles in a Hele-Shaw cell. *Phys. Rev. E*, **50**: R3306–R3309, 1994.
- [10] G. L. Vasconcelos. Exact solutions for N steady fingers in a Hele-Shaw cell. *Phys. Rev. E*, **58**: 6858–6860, 1998.
- [11] G. L. Vasconcelos. Comment on ‘Two-finger selection theory in the Saffman-Taylor problem.’. *Phys. Rev. E*, **63**: 043101, 2001.

- [12] G. L. Vasconcelos. Motion of a finger with bubbles in a Hele-Shaw cell. *Phys. Fluids*, **11**: 1281–1283, 1999.
- [13] G. L. Vasconcelos. Analytic solutions for two bubbles in a Hele-Shaw cell. *Phys. Rev. E*, **62**: R3047–R3049, 2000.
- [14] G. L. Vasconcelos. Exact solutions for steady bubbles in a Hele-Shaw cell with rectangular geometry. *J. Fluid Mech.*, **444**: 175–198, 2001.
- [15] S. P. Dawson e M. Mineev-Weinstein. Long-time behavior of the n-finger solution of the Laplacian growth equation. *Physica D*, **73**: 373–387, 1994.
- [16] G. Baker, M. Siegel e S. Tanveer. A well-posed numerical method to track isolated conformal-map singularities in Hele-Shaw flow. *J. Comput. Phys.*, **120**: 348–364, 1995.
- [17] M. Ben Amar. Exact self-similar shapes in viscous fingering. *Phys. Rev. A*, **44**: 5724–5727, 1991.
- [18] M. Ben Amar. Viscous fingering in a wedge. *Phys. Rev. A*, **44**: 3673–3685, 1991.
- [19] L. J. Cummings. Flows around a wedge of arbitrary angle in a Hele-Shaw cell. *Eur. J. Appl. Math.*, **10**: 547–560, 1999.
- [20] S. Richardson. Hele-Shaw flows with time-dependent free boundaries involving a multiply-connected fluid region. *Eur. J. Appl. Math.*, **12**: 665, 2001.
- [21] G. L. Vasconcelos. Comment on ‘Free surface Hele-Shaw flows around an obstacle: A random walk simulation’. *Phys. Rev. E*, **63**: 043101, 2007.
- [22] Bogoyavlenskiy e Cotts. Free surface Hele-Shaw flows around an obstacle: A random walk simulation. *Phys. Rev. E*, **69**: 016310, 2004.
- [23] G. L. Vasconcelos e L. P. Kadanoff. Stationary solutions for the Saffman-Taylor problem with surface tension. *Phys. Rev. A*, **44**: 6490–6495, 1991.
- [24] D. Kessler, J. Koplik e H. Levine. Pattern selection in fingering growth phenomena. *Adv. Phys.*, **37**: 255–339, 1988.

- [25] S.Tanveer. *Viscous displacement in a Hele-Shaw cell. In asymptotics beyond all orders.* Plenum, 1992.
- [26] P. J. Davis. *The Schwarz function and its applications.* Carus Mathematical Monograph No. 17, 1974.
- [27] L. M. Milne-Thomson. *Theoretical Hydrodynamics.* Dover Publications, Inc.(New York), 1996.
- [28] G. F. Carrier, M. Krook e C. Pearson. *Functions of a complex variable.* Hod Books, 1983.
- [29] R. F. Millar. Bubbles motion along a channel in a Hele-Shaw cell: A Schwarz function approach. *Complex Variables*, **18**: 13–25, 1992.



# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)