



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

EFEITOS DE CAOS INDUZIDOS POR TEMPERATURA  
EM VIDROS DE SPINS DE POTTS

por

**Alejandra Isabel Guerrero Duymovic**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

**Banca Examinadora:**

Prof. Sérgio Galvão Coutinho (Orientador-UFPE)  
Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo (DF - UFPE)  
Fernando Dantas Nobre (CBPF)

Recife - PE, Brasil  
Agosto - 2010

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Duymovic, Alejandra Isabel Guerrero.

Efeitos de caos induzidos por temperatura em vidros de spins de Potts / Alejandra Isabel Guerrero Duymovic - Recife: O Autor, 2010.

ix, 56 p.: il. fig. tab.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2010.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Comportamento caótico nos sistemas. 2. Vidros de spin. 3. Grupo de renormalização. I. Título.

515.39

(22.ed.)

FQ 2010-047



Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Física – CCEN  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil  
Fone (+ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (+ 55 81) 3271-0359  
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: [posgrad@df.ufpe.br](mailto:posgrad@df.ufpe.br)

---

## Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

---

**Alejandra Isabel Guerrero Duymovic**

**EFEITOS DE CAOS INDUZIDOS POR TEMPERATURA  
EM VIDROS DE SPINS DE POTTS**

A Banca Examinadora composta pelos Professores Sérgio Galvão Coutinho (Presidente e Orientador), Ernesto Carneiro Pessoa Raposo, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e pelo Pesquisador Fernando Dantas Nobre, do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, consideram a candidata:

Aprovada                      ( ) Reprovada                      ( ) Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em doze de agosto de dois mil e dez.

*Sergio Galvão Coutinho*

Prof. Sérgio Galvão Coutinho  
Presidente e Orientador

*ER*

Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo

*Fernando Dantas Nobre*

Pesquisador Fernando Dantas Nobre

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais pelo apoio, amor e o incentivo para terminar este trabalho.

Ao meu orientador Sérgio Coutinho pela paciência e dedicação, por sempre estar disposto a me ajudar, por acreditar em mim para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos da Colômbia Fernanda, Alexander por suas palavras de conforto nos momentos mais turbulentos.

Aos meus amigos do mestrado: minha amiga Janeth pelo apoio, o bom humor, os bons momentos. A Edison, Juan Carlos Piña por sua amizade sincera.

Ao pessoal do LFTC, Vladimir, Fernando pela ajuda com o linux.

Ao meu amigo virtual Elber pelas dicas do português.

Ao CNPq pelo suporte financeiro, sem o qual seria impossível a realização deste trabalho.

## RESUMO

Nesta dissertação, investigaram-se os efeitos de caos causados por pequenas variações de temperatura sobre as propriedades físicas dos vidros de spins de Potts. Considerou-se o modelo de Potts com  $q$  estados, com interações de intercâmbio escolhidas ao acaso a partir de uma função de distribuição de probabilidades, e definido em uma rede hierárquica tipo diamante com dimensão fractal  $d_f$ , fator de escala  $b = 2$  e  $p$  conexões. O efeito de pequenas variações de temperatura sobre as propriedades físicas do sistema foi estudado analisando-se a sensibilidade da sobreposição de configurações da magnetização local  $\langle \sigma_T \rangle$  em estados de equilíbrio na temperatura  $T$  e na temperatura  $T + \delta T$ , mais precisamente a sobreposição da correlação local  $q(T, \delta T) = \langle \sigma_T \sigma_{T+\delta T} \rangle$  e seu desvio,  $\Delta q$ , com respeito ao parâmetro de ordem de Edwards-Anderson local,  $q_{EA} = \langle \sigma_T^2 \rangle$ . Utilizou-se o método do grupo de renormalização de Migdal-Kadanoff no espaço real, combinado com um procedimento recursivo *exato* para calcular os valores locais da magnetização em redes de dimensão fractal variável. O desvio  $\Delta q$  foi calculado em diferentes temperaturas como função do tamanho da rede e para interações escolhidas das distribuições de probabilidades bimodal e gaussiana. Para temperaturas bem abaixo da temperatura de transição encontrou-se que  $\Delta q$  aumenta significativamente com o tamanho da rede sinalizando um comportamento *caótico* com relação a pequenas variações de temperatura. Este comportamento caótico foi observado no intervalo de temperatura onde se localiza um *atrator estranho* no diagrama do fluxo de renormalização da distribuição de probabilidades das interações, o qual está associado à fase condensada do modelo. Os histogramas da magnetização e do parâmetro de ordem locais nas configurações perturbada (em  $T + \delta T$ ) e não perturbada (em  $T$ ) evidenciaram como essas configurações diferem consideravelmente no intervalo de temperatura do *atrator*, enquanto para temperaturas fora desse intervalo, sejam elas abaixo ou acima, tais diferenças se tornam quase imperceptíveis.

**Palavras-chave:** Caos, vidros de spins, modelo de Potts, grupo de renormalização, redes hierárquicas.

## ABSTRACT

This dissertation investigated the effects of chaos caused by small temperature variations on the physical properties of Potts spin glasses. We considered the  $q$ -state Potts model with exchange interactions chosen at random from a fixed probability distribution function, and defined on a diamond hierarchical lattice with fractal dimension  $d_f$  and the scale factor  $b = 2$ . The effect of small temperature variations on the physical properties of the system was studied by investigating the sensitivity of the overlap of configurations of local magnetization  $\langle \sigma_T \rangle$  in equilibrium states at temperature  $T$  and at temperature  $T + \delta T$ , more precisely the overlap of the local correlation  $q(T, \delta T) = \langle \sigma_T \sigma_{T+\delta T} \rangle$  and its deviation,  $\Delta q$ , with respect to the local order parameter of Edwards-Anderson,  $q_{EA} = \langle \sigma_T^2 \rangle$ . We used the Migdal-Kadanoff real-space renormalization group method combined with an *exact* recursive procedure to calculate the local values of magnetization in a lattice of varying fractal dimension. The deviation  $\Delta q$  has been calculated at different temperatures as a function of lattice size and interactions selected from the bimodal and the Gaussian probability distribution functions. For temperatures well below the transition temperature it was found that  $\Delta q$  increases significantly with the size of the lattice signaling a *chaotic* behavior with respect to minor variations in temperature. This chaotic behavior was observed in the temperature range where a *strange attractor* was located in the diagram of the renormalization flow of the interaction probability distribution functions, which is associated with the condensed phase of the model. Histograms of the local magnetization and order parameter configurations disturbed at  $T + \delta T$  and undisturbed (at  $T$ ) showed how these configurations differ considerably in the temperature range of the *attractor*, while for temperatures outside this range, either below or above, such differences become almost imperceptible.

**Keywords:** Chaos, spin glass, Potts model, real-space renormalization group, hierarchical lattices.

# SUMÁRIO

<b>Capítulo 1—Introdução</b>	1
1.1 Vidros de spins . . . . .	2
1.2 Redes hierárquicas e GRMK . . . . .	7
1.3 Caos em vidros de spins . . . . .	9
<b>Capítulo 2—Modelo de Potts</b>	13
2.1 Modelo de Potts . . . . .	13
2.2 Grupo de renormalização de Migdal-Kadanoff (GRMK) . . . . .	15
2.3 Diagramas do fluxo de renormalização . . . . .	19
2.4 Magnetização local . . . . .	22
<b>Capítulo 3—Propriedades de Caos</b>	32
3.1 Rede diamante com $q = 3$ estados e $d_f = 5$ . . . . .	33
3.2 Rede diamante com $q = 4$ estados e $d_f = 5.321935$ . . . . .	44
3.3 Comparação rede de diamante com $q = 3$ e $q = 4$ estados . . . . .	47
<b>Capítulo 4—Conclusões</b>	49
<b>Apêndice A—Grupo de renormalização no espaço real</b>	51
A.0.1 Teoria de blocos de Kadanoff . . . . .	52
<b>Referências Bibliográficas</b>	54



## LISTA DE FIGURAS

1.1	Plaqueta frustrada do modelo Ising numa rede quadrada. As setas em vermelho indicam os dois possíveis estados que não atendem simultaneamente ao estado de mínima energia das ligações que participa. . . . .	2
1.2	Rede hierárquica tipo diamante com duas conexões $p = 2$ e fator de escala $b = 2$ : (a) hierarquia de ordem zero; (b) hierarquia de ordem 1; (c) hierarquia de ordem 2. . . . .	7
1.3	Dois passos na iteração aproximada GRMK da rede hipercúbica (esquerda) e a iteração exata na correspondente rede hierárquica (direita). As linhas ponteadas desprezadas na aproximação fazem com que a configuração hipercúbica seja equivalente à configuração hierárquica. . . . .	9
2.1	Configuração de spins do modelo de Potts planar na rede quadrada com $q = 4$ , $\theta_n = \frac{\pi n}{2}$ . . . . .	14
2.2	Diagrama de renormalização de uma célula básica da rede diamante com $p$ conexões e fator de escala $b = 2$ : (a) célula básica original, (b) célula renormalizada. . . . .	16
2.3	Fluxo de renormalização do modelo com $q = 3$ e distribuição bimodal numa rede com $d_f = 5$ , $h = 5$ e 100 amostras. . . . .	21
2.4	Sistema equivalente para o cálculo da magnetização local. . . . .	22
3.1	Comportamento do parâmetro de ordem em função da temperatura na configuração não perturbada ( $q_{EA}$ ) e perturbada ( $q(T, \delta T)$ ) do modelo com $q = 3$ , $\delta T = 5 \times 10^{-2}$ para a distribuição bimodal numa rede com $d_f = 5$ , $h = 5$ e 100 amostras. Na inserção, a correspondente curva de magnetização nas configurações não perturbada $m(T)$ e perturbada $m(T + \delta T)$ . . . . .	33
3.2	Comportamento de $\Delta q$ médio em função da temperatura do modelo com $q = 3$ , $\delta T = 5 \times 10^{-2}$ e distribuição bimodal numa rede com $d_f = 5$ , para diferentes hierarquias, a média calculada sobre 100 amostras. . . . .	35
3.3	Comportamento de $\Delta q$ em função da hierarquia do modelo com $q = 3$ , $\delta T = 5 \times 10^{-2}$ e distribuição bimodal numa rede com $d_f = 5$ , $h = 5$ e 100 amostras para $T = 0.2, 0.5$ e $0.8$ onde $\Delta q$ é máximo. Na inserção, o mesmo gráfico com escala logarítmica. . . . .	36
3.4	Fluxo de renormalização do modelo com $q = 3$ e distribuição bimodal numa rede com $d_f = 5$ , $h = 5$ e 100 amostras e diferentes temperaturas iniciais. A direção do fluxo ocorre de direita para a esquerda a partir do ponto inicial. . . . .	37

3.5	Fluxos de renormalização do modelo com $q = 3$ e distribuição bimodal numa rede com $d_f = 5$ . Os pontos azuis correspondem aos dados obtidos no presente estudo para $h = 5$ e uma temperatura inicial de $T = 0.8$ e os pontos pretos, ao atrator observado por Lima, obtido através do método dos reservatórios com 100000 iterações. . . . .	38
3.6	Comportamento de $\Delta q$ em função da hierarquia do modelo com $q = 3$ , $\delta T = 5 \times 10^{-2}$ , com uma distribuição bimodal numa rede com $d_f = 5$ e calculados para 100 amostras nas temperaturas iniciais (a) $T = 0.01$ ; (b) $T = 0.2$ ; (c) $T = 2.0$ ; (d) $T = 5.0$ . $T = 0.2$ corresponde a uma temperatura na faixa do atrator estranho, enquanto que $T_c \approx 3.34 - 3.37$ . . . . .	39
3.7	Histogramas da magnetização local do modelo com $q = 3$ , $\delta T = 5 \times 10^{-2}$ e distribuição bimodal numa rede com $d_f = 5$ , $h = 5$ , uma amostra e diferentes temperaturas (a) $T = 0.01$ ; (b) $T = 0.2$ ; (c) $T = 2.0$ ; (d) $T = 5.0$ . $T = 0.2$ corresponde a uma temperatura na faixa do atrator estranho, enquanto que $T_c \approx 3.34 - 3.37$ . . . . .	40
3.8	Histogramas do parâmetro de ordem local do modelo com $q = 3$ , $\delta T = 5 \times 10^{-2}$ e distribuição bimodal numa rede com $d_f = 5$ , $h = 5$ , uma amostra e diferentes temperaturas (a) $T = 0.01$ ; (b) $T = 0.2$ ; (c) $T = 2.0$ ; (d) $T = 5.0$ . $T = 0.2$ corresponde a uma temperatura na faixa do atrator estranho, enquanto que $T_c \approx 3.34 - 3.37$ . . . . .	41
3.9	Perfil da magnetização local do modelo com $q = 3$ , $\delta T = 5 \times 10^{-2}$ e distribuição bimodal numa rede com $d_f = 5$ , $h = 5$ , uma amostra e diferentes temperaturas. O ponto $i = 0$ corresponde ao sítio raiz superior $\mu'$ e o ponto $i = 1$ ao sítio raiz inferior $\mu$ . ((a) $T = 0.01$ ; (b) $T = 0.2$ ; (c) $T = 2.0$ ; (d) $T = 5.0$ . $T = 0.2$ corresponde a uma temperatura na faixa do atrator estranho, enquanto que $T_c \approx 3.34 - 3.37$ . . . . .	42
3.10	Fluxos de renormalização do modelo com $q = 3$ estados e distribuição de interações gaussiana numa rede com $d_f = 5$ . Os pontos vermelhos correspondem aos dados obtidos no presente estudo para $h = 5$ e uma temperatura inicial de $T = 0.8$ e os pontos pretos ao atrator obtido por Lima, obtido através do método dos reservatórios com 100000 iterações. . . . .	43
3.11	Comportamento de $\Delta q$ em função da hierarquia do modelo com $q = 4$ , $\delta T = 5 \times 10^{-2}$ e distribuição bimodal numa rede com $d_f = 5.321935$ , $h = 4$ e 100 amostras para $T = 0.8$ , 0.4 e 0.3 onde $\Delta q$ é máximo. . . . .	45
3.12	Histogramas da magnetização local do modelo com $q = 4$ , $\delta T = 5 \times 10^{-2}$ e distribuição bimodal numa rede com $d_f = 5.321935$ , $h = 5$ , uma amostras e diferentes temperaturas (a) $T = 0.01$ ; (b) $T = 0.8$ ; (c) $T = 2.0$ ; (d) $T = 5.0$ . $T = 0.8$ corresponde a uma temperatura na faixa do atrator estranho, enquanto que ( $T_c \sim 4.01 - 4.03$ ). . . . .	46
A.1	Esquema de renormalização numa rede quadrada (a) rede inicial; (b) agrupamento; (c) renormalização. . . . .	52

## LISTA DE TABELAS

2.1	Valores de temperatura crítica para o modelo de Potts com $q = 3$ e $q = 4$ estados para distribuições dos acoplamentos bimodal e gaussiana. . . . .	21
3.1	Valores médios de $\Delta q$ obtidos para distribuições bimodal (B) e gaussiana (G) numa rede com $q = 3$ , $d_f = 5$ , 100 amostras, $\delta T = 5 \times 10^{-2}$ . . . . .	44
3.2	Valores médios de $\Delta q$ para distribuições bimodal (B) e gaussiana (G) numa rede com $q = 4$ , $d_f = 5.321935$ , $\delta T = 5 \times 10^{-2}$ e 100 amostras. . . . .	47
3.3	Valores de $\Delta q$ para distribuições bimodal (B) e gaussiana (G) numa rede com $q = 3$ e $q = 4$ . . . . .	47

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Nos anos sessenta, foram encontrados certos materiais metálicos ( $Cu, Au$ ) com impurezas magnéticas ( $Fe, Mn$ ), como compostos de  $CuMn$  e  $AuFe$  [1], [2] que apresentavam um comportamento magnético e térmico anômalo. Esse comportamento foi explicado pela presença de interações competitivas entre os momentos magnéticos dos dois materiais, resultantes da desordem na posição dos átomos magnéticos na liga. Mais adiante, tais materiais foram chamados vidros de spins. Na literatura podem encontrar-se uma ampla revisão a respeito [3, 4].

Os vidros de spins são sistemas muito interessantes, pois apresentam propriedades pouco comuns; por exemplo, são sensíveis a pequenas variações de parâmetros externos como temperatura e campo magnético, fenômeno que se conhece como caos estático.

Estas propriedades têm atraído muita atenção desde sua descoberta nos anos 80, principalmente o caos induzido por pequenas variações de temperatura, de grande interesse por sua potencial aplicação em fenômenos de rejuvenescimento e efeitos de memória [5, 6] observados em vidros de spins. O caos em vidros de spins é ainda hoje pouco compreendido e motivo de debates. Alguns autores têm observado esse comportamento enquanto [7] outros o desconhecem [8].

Em nosso trabalho, estudaremos as propriedades de caos induzido por temperatura na fase vidro de spins do modelo de Potts com  $q$  estados definido numa rede hierárquica do tipo diamante com fator de escala  $b = 2$ ,  $p$  conexões e dimensão fractal  $d_f$ , usando a metodologia do grupo de renormalização no espaço real. Neste primeiro capítulo, fazemos uma pequena revisão bibliográfica dos conceitos básicos utilizados dentro do presente estudo, começando pela definição de vidro de spins, e algumas das teorias mais relevantes neste campo, a teoria de campo médio e a teoria de *gotas*. Depois, fazemos uma descrição do método do grupo de renormalização (GR) no espaço real e nas redes hierárquicas tipo diamante. Em seguida, nomeamos o cenário de caos induzido por temperatura de acordo com os abordagens da teoria de campo médio e teoria de gotas.

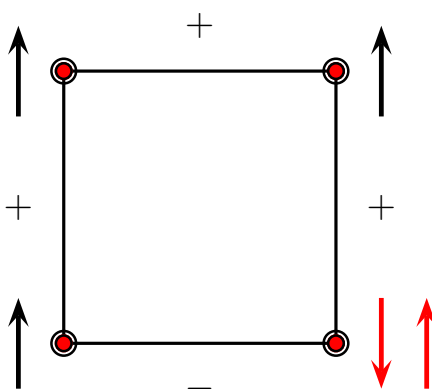
No capítulo 2, estudamos o modelo de Potts e o definimos numa rede hierárquica do tipo diamante. Além disso, aplicamos os conceitos do GR na rede de diamante para depois apresentar o método recursivo exato que permite obter a magnetização local em cada ponto da rede, com suas respectivas condições de contorno.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo das propriedades de caos induzido por temperatura. Estas propriedades são analisadas a partir da variação de quantidades como magnetização, parâmetro de ordem locais. Inicialmente estudamos o modelo de Potts para  $q = 3$  e depois para  $q = 4$  estados, usando funções de distribuição das interações entre spins na forma bimodal e Gaussiana, respectivamente. Na última seção desse capítulo, comparamos esses resultados.

No capítulo 4, apresentamos as conclusões desse estudo, assim como as perspectivas da sua continuidade.

## 1.1 VIDROS DE SPINS

Os vidros de spins são sistemas magnéticos nos quais as interações entre os momentos magnéticos estão em conflito umas com as outras devido a alguma desordem estrutural. Assim, esses sistemas não apresentam uma estrutura magnética ordenada com alguma simetria de longo alcance, como no caso de um ferromagneto ou antiferromagneto; um sistema vidro de spins combina dois fenômenos: a *frustração* e a *competição*. A figura 1.1 mostra um exemplo simples de uma plaqueta frustrada do modelo Ising em uma rede quadrada; os sinais + e - indicam acoplamentos de intercâmbio ferro e antiferromagnético, respectivamente; com um número ímpar de ligações antiferromagnéticas não é possível minimizar a energia de todas as ligações simultaneamente e, portanto, haverá uma competição ou frustração em alguma delas. Para um sistema com muitos graus de liberdade, encontrar o estado fundamental não é uma tarefa trivial.



**Figura 1.1** Plaqueta frustrada do modelo Ising numa rede quadrada. As setas em vermelho indicam os dois possíveis estados que não atendem simultaneamente ao estado de mínima energia das ligações que participa.

Este comportamento foi inicialmente observado em ligas magnéticas diluídas como  $AuMn$  ou  $AuFe$  onde uma pequena quantidade de impurezas magnéticas ( $Mn$ ,  $Fe$ ) está aleatoriamente distribuída na rede de material não magnético hospedeiro ( $Au$ ) [1, 2]. O nome *vidros de spins* se deve a Bryan Coles (1926-1997) e foi atribuído por duas razões: primeiro, os momentos magnéticos dos íons magnéticos parecem se *congelar* sem um ordenamento periódico e segundo, a baixas temperaturas o calor específico é linear com a temperatura, como em um vidro convencional.

Experimentos realizados na época não sugeriam a existência de uma transição de fase a partir do estado paramagnético, porém foi em meados dos anos 70 que medidas de susceptibilidade *ac* a campos magnéticos pequenos indicaram a presença de um pico dependente da frequência de medição, confirmando a transição de um estado paramagnético à fase vidro de spins [9].

Hoje em dia é um fato reconhecido que, no regime de altas temperaturas, um vidro de spins se comporta como um paramagnético típico; para  $T \sim T_c$ , o sistema sofre uma transição à fase vidro de spins e para  $T < T_c$ , os spins se *congelam* em uma orientação aleatória.

Por outro lado, a fase vidro de spins não é somente própria das ligas metálicas magnéticas diluídas, na atualidade uma grande variedade de materiais apresenta este comportamento - isolantes como  $Eu_xSr_{1-x}S$  [10], com  $x$  entre 0.1 e 0.5 e  $Fe_{0.5}Mn_{0.5}TiO_3$  [11], antiferromagnetos diluídos como  $Fe_xZn_{1-x}F_2$  para citar alguns exemplos [12] - o qual faz vigente seu estudo e investigação.

O modelo mais simples que reúne frustração e competição é o modelo de Edwards-Anderson [13]. Daqui em diante nos referiremos a este modelo como modelo EA. Neste modelo, a interação de intercâmbio entre os spins vetoriais clássicos ( $\vec{S}$ ) da rede é aleatoriamente ferromagnética ou antiferromagnética de acordo com uma função de distribuição de probabilidades simétrica, assim poderão ocorrer muitas plaquetas de spins frustradas. Além disso, outro fato importante que supõe este modelo é a idéia de desordem temperada para a distribuição das interações decorrente da posição fixa dos íons das impurezas magnéticas, por sua vez resultante do rápido processo de resfriamento na preparação da liga metálica.

Esse sistema pode ser estudado através do modelo de spins clássicos no qual as ligações entre pares de spins podem ser aleatoriamente positivas ou negativas, com a mesma probabilidade, assim o hamiltoniano  $H$  do sistema seria dado por:

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j, \quad (1.1)$$

com a soma em  $\langle i, j \rangle$  representando pares de sítios vizinhos mais próximos da rede cúbica em  $d$  dimensões e  $J_{ij}$  sendo o acoplamento entre spins, uma variável aleatória de uma distribuição de probabilidades Gaussiana com média nula e largura  $J = 1$ .

Dada a não periodicidade do congelamento magnético, foi necessário definir um novo parâmetro de ordem que desse conta da ordem presente neste tipo de material. Este parâmetro é conhecido como parâmetro de Edwards-Anderson; sua primeira versão está baseada no congelamento temporal

$$q(t, t + \tau) = \frac{1}{N} \sum_i \left\langle \vec{S}_i(t) \cdot \vec{S}_i(t + \tau) \right\rangle_t, \quad (1.2)$$

onde  $\vec{S}_i(t)$  e  $\vec{S}_i(t + \tau)$  representam os spins na posição  $i$  observados no tempo  $t$  e no tempo  $t + \tau$ , respectivamente.  $\langle \dots \rangle_t$  representa a média temporal e  $N$  o número de spins. Na fase ordenada haverá uma grande probabilidade de que o spin num instante de tempo  $t$  esteja no mesmo estado no instante de tempo  $t + \tau$ , então  $q \neq 0$ , enquanto na fase de altas temperaturas esta probabilidade se anula e o sistema é paramagnético com  $q = 0$ .

A segunda versão está baseada na média de ensemble associada com a média sobre a desordem,

$$q = \frac{1}{N} \sum_i \left[ \langle \vec{S}_i \rangle^2 \right]_J, \quad (1.3)$$

onde  $\langle \dots \rangle$  representa a média no *ensemble* canônico das configurações de spins, dita média térmica,  $[\dots]$  representa a média sobre a desordem na distribuição de interações e  $\vec{S}_i$  o valor do spin em cada sítio da rede. Esta quantidade é não nula para um sistema vidro de spins típico em baixas temperaturas.

Em seguida, Sherrington - Kirkpatrick (SK) [14] investigaram a solução em campo médio do modelo EA considerando variáveis de spins de Ising, neste modelo o hamiltoniano é dado por:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{(i,j)} J_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad (1.4)$$

onde  $\sigma_i = \pm 1$  é o spin de Ising do sítio  $i$ , ao contrário do modelo de EA. No modelo SK se levam em conta as interações entre todos os pares de spins, as quais são escolhidas aleatoriamente de uma distribuição de probabilidades  $P(J)$  com largura  $J/\sqrt{N}$  e valor médio  $J_0/N$ , portanto se obterá um diagrama de fases mais completo, podendo existir a fase ferromagnética.

No modelo SK o parâmetro de ordem corresponde a:

$$q(t, t + \tau) = \frac{1}{N} \sum_i \langle \sigma_i(t) \sigma_i(t + \tau) \rangle_t, \quad (1.5)$$

na sua versão temporal, e a:

$$q_{EA} = \frac{1}{N} \sum_i [\langle \sigma_i \rangle^2]_J, \quad (1.6)$$

na versão da média de ensemble e média sobre a desordem.

Sherrington-Kirkpatrick se deram conta que era necessário calcular o valor médio da energia livre  $F$  ao invés do valor médio da função de partição  $Z$  para garantir que os sistemas são temperados, pois são esses os que conduzem às propriedades esperadas para um vidro de spins. Este modelo foi resolvido usando o método das réplicas [14–16], onde, se introduzem  $n$  réplicas do sistema para calcular a média da energia livre sobre a desordem congelada tal que:

$$-\beta F = [\ln Z] = \lim_{n \rightarrow 0} ([Z^n] - 1) / n, \quad (1.7)$$

Esta relação (1.7) é conhecida como *truque das réplicas*, que se baseia no fato que

$$Z^n = \exp[n \ln Z] \simeq 1 + n \ln Z, \quad n \rightarrow 0.$$

Assim, o modelo concordava com os resultados experimentais obtidos para a susceptibilidade, porém a entropia tendia a um valor negativo na medida em que a temperatura aproximava-se a zero. de Almeida e Thouless [15] mostraram que a solução SK é instável para baixas temperaturas sugerindo que a simetria entre as réplicas, considerada na solução SK, deveria de alguma maneira ser *quebrada*.

Uma solução estável com quebra de simetria entre as réplicas foi proposta por Parisi [17], que é aceita como a solução correta do problema SK. Na solução de Parisi se supõe que a sobreposição entre duas réplicas depende somente da separação dos índices definidos num espaço de parâmetros apropriado. Como consequência o parâmetro de EA não é mais um número mas, sim, uma função  $q(x)$  com  $0 \leq x \leq 1$ , onde  $x$  é a parametrização da *distância* entre réplicas. Uma das predições desta solução é a existência de infinitos estados fundamentais de equilíbrio devido ao comportamento variável da função  $q(x)$ , pois se  $q$  varia continuamente deverão haver um número infinito de estados.

Outro ponto de partida no estudo de sistemas tipo vidros de spins é o chamado *modelo de gotas* (do inglês *droplet model*). O modelo de gotas está baseado nas hipóteses de escala



e produz diferentes conclusões em relação às do caso das teorias de campo médio. Fisher e Huse [18] supuseram que pequenos agregados de spins no modelo Ising com tamanho variável, representam excitações do sistema. De acordo com esta teoria, aqueles agregados conectados (*clusters* em inglês) com mais baixa energia, conhecidos como gotas, seriam as excitações que dominam a física do sistema e portanto as quantidades de interesse. De acordo com esta teoria uma gota de tamanho  $l$  tem uma dimensão fractal  $d_s > d - 1$  ( $d$ -dimensão da rede), energia livre  $\epsilon_l = \Upsilon l^\theta$  e possui uma distribuição de tamanho  $\rho(l)$  que se comporta como

$$\rho(l) \propto l^{-\theta}, \quad (1.8)$$

onde  $\theta$  é conhecido como o expoente de gotas e  $\Upsilon$  o coeficiente de rigidez do sistema (*stiffness coefficient* em inglês). A principal conclusão deste modelo é que abaixo da temperatura de transição (em campo magnético zero) haverão apenas dois estados de mínima energia, já que se uma configuração está no estado fundamental, então por inversão global de spins, a outra configuração também estará no estado fundamental, como o que acontece num ferromagneto homogêneo. Esta conclusão é contraditória com os resultados da teoria de campo médio, onde se esperam infinitos estados de energia mínima. Se o modelo de gotas ou a teoria de campo médio descrevem o comportamento de um sistema real de vidro de spins continua sendo motivo de discussão.

As simulações numéricas têm sido uma ferramenta útil para ajudar a esclarecer este panorama mas o cenário continua sendo controverso. Simulações Monte Carlo em sistemas vidros de spins em  $d = 2, 3, 4$  [19], mostraram que há uma transição de fase e que parece estar dentro da teoria de campo médio, porém outros estudos [20] indicaram que as predições do modelo de gotas são mais apropriadas para descrever vidros de spins no modelo Ising a baixas temperaturas no caso de redes cúbicas em  $3d$ .

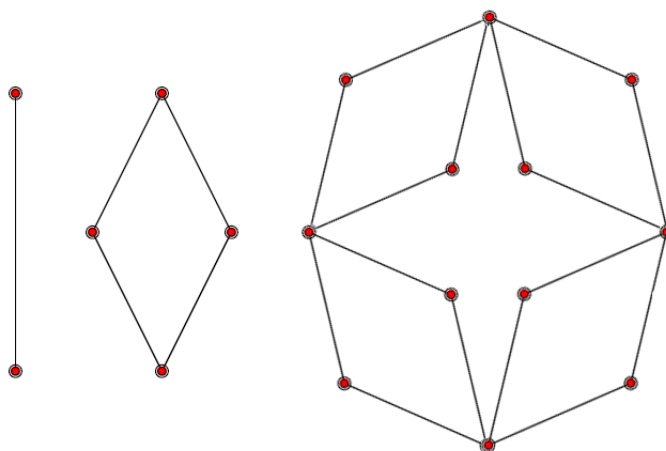
Por outro lado, dadas as limitações das simulações computacionais, nos últimos anos tem tomado importância o estudo de modelos exatos de vidros de spins com interações de alcance finito, pois apresentam uma série de aspectos não encontrados nas teorias de alcance infinito, como por exemplo, comprimento de correlação, efeito do tamanho e das condições de contorno etc. Alguns destes estudos foram feitos em redes de Bethe [21], sob o modelo SK.

Outra linha de aproximação no estudo de vidros de spins de curto alcance está formulada dentro do esquema do grupo de renormalização de Migdal-Kadanoff. Southern e Young [22] foram os primeiros a utilizar esta metodologia em vidros de spins no modelo de Ising e encontraram a existência de uma dimensão crítica inferior abaixo da qual não há transição; esta técnica tem despertado um recente interesse no estudo de expoentes

de caos em vidros de spins, como será visto mais adiante neste capítulo.

## 1.2 REDES HIERÁRQUICAS E O GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO DE MIGDAL-KADANOFF (GRMK)

Uma rede hierárquica se constrói de forma recursiva, podendo ser gerada a partir de uma célula básica de duas formas, por decoração ou dizimação. No caso de uma rede de diamante gerada por decoração, parte-se de dois pontos conectados entre si como na figura 1.2a, os quais correspondem à hierarquia de ordem zero; agora, na seguinte iteração quatro das ligações da hierarquia de ordem zero se agregam para formar a unidade na figura 1.2b que corresponde a hierarquia de ordem 1. Seguindo um procedimento similar, ou seja, substituindo cada ligação na figura 1.2b por quatro ligações, obtém-se a unidade da figura 1.2c conhecida como hierarquia de ordem 2, e assim sucessivamente. O nome da rede de diamante se deve à forma da figura 1.2b. O processo inverso à decoração é a dizimação, a qual se parte das redes de hierarquia maior e vão se reduzindo progressivamente até alcançar hierarquia de ordem zero [23].



**Figura 1.2** Rede hierárquica tipo diamante com duas conexões  $p = 2$  e fator de escala  $b = 2$ : (a) hierarquia de ordem zero; (b) hierarquia de ordem 1; (c) hierarquia de ordem 2.

Estas redes são redes fractais, possuem autosimilaridade ou invariância por escala, já que qualquer sub-rede entre dois terminais é por sua vez uma rede hierárquica idêntica à original, podendo ter dimensão não inteira.

Se  $L$  é o tamanho característico linear da rede e  $N_b$  está associada ao volume (número de ligações), então se observa que  $N_b \propto L^{d_f}$ , sendo  $d_f$  a dimensão fractal definida no

limite termodinâmico como:

$$d_f = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln(N_b)}{\ln(L)}. \quad (1.9)$$

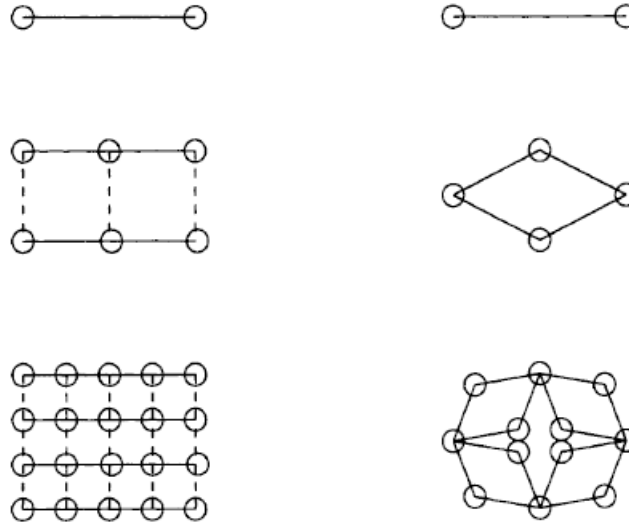
No caso de uma rede hierárquica diamante, cuja célula unitária tem  $p$  conexões e fator de escala  $b$ , na  $h^{\text{ésima}}$  hierarquia,  $L = b^h$ , o número de sítios no caminho mais curto que une os dois sítios raízes, e  $N_b = (bp)^h$  o número de ligações totais da rede. Desta forma a dimensão fractal pode se escrever em termos de  $p$  e  $b$  como:

$$d_f = \frac{\ln(bp)^n}{\ln b^n} = 1 + \frac{\ln(p)}{\ln(b)}. \quad (1.10)$$

A cada ponto na rede hierárquica se pode associar uma variável de spin, onde as conexões representam as interações entre eles.

A invariância de escala das redes hierárquicas as faz especiais para o grupo de renormalização. O fato de que cada bloco nas redes hierárquicas seja construído a partir de uma célula básica e cada um deles esteja conectado entre si por seus pontos raízes faz com que, no processo de dizimação dos sítios internos do bloco, as únicas interações possíveis sejam entre sítios primeiros vizinhos do bloco. Portanto, diferentemente de outras redes não hierárquicas, com o processo de dizimação a quantidade de interações no hamiltoniano não será maior que as consideradas na rede original e a solução será exata.

Isto pode ser visto da figura 1.3 [24], na qual se apresentam dois esquemas do processo de renormalização de Migdal-Kadanoff [25] em uma rede hipercúbica e em uma rede hierárquica. Para que o dito processo seja exato, na rede hipercúbica só devem ser consideradas as interações em uma direção desprezando-se as outras ortogonais a ela, enquanto nas redes hierárquicas se tem em conta todas as interações.



**Figura 1.3** Dois passos na iteração aproximada GRMK da rede hiper-cúbica (esquerda) e a iteração exata na correspondente rede hierárquica (direita). As linhas ponteadas desprezadas na aproximação fazem com que a configuração hiper-cúbica seja equivalente à configuração hierárquica.

### 1.3 CAOS EM VIDROS DE SPINS

Uma das propriedades que apresentam os vidros de spins de Ising é o chamado *caos estático* onde a orientação dos spins em uma dada configuração de equilíbrio em  $T < T_c$  é extremamente sensível a uma pequena perturbação de parâmetros externos como a temperatura [26–28], campo magnético [29], ou perturbações nos próprios acoplamentos [30].

O caos estático é estudado a partir da sobreposição das configurações de dois estados de equilíbrio. Assim, considerando uma pequena perturbação de temperatura  $\delta T$  no sistema, haverá um comportamento caótico se as configurações de equilíbrio a distintas temperaturas  $T$ , e  $T + \delta T$ , estão descorrelacionadas além de um comprimento de sobreposição  $l(T, \delta T)$  ou também conhecida como  $l^*$ . Aspelmeier et al [31] encontraram que este comprimento é tão grande que muitas vezes somente é observado para determinadas  $T$  e  $\delta T$  onde a simulação numérica é inacessível.

O caos estático tem sido estudado por diferentes modelos: teoria de campo médio, teoria de gotas e usando a aproximação do grupo de renormalização.

Segundo a hipótese de caos dependente da temperatura, a sobreposição entre qualquer par de estados de equilíbrio é zero, isto é,  $q^* = 0$ , portanto na teoria de campo médio a probabilidade de observar uma sobreposição  $P(q^*)$  entre configurações de equilíbrio a

diferentes temperaturas deveria ser uma função  $\delta$  de Dirac centrada em  $q^* = 0$ ,

$$P(q^*) = \delta(q^*), \quad (1.11)$$

assim, haverá caos quando  $q = 0$  e não haverá caos nos outros casos.

De acordo com Rizzo e Crisanti [32], uma forma de quantificar este efeito é considerar a convergência à função delta da probabilidade  $P_N(q^*)$  para um sistema de tamanho finito, tendo em conta que para  $N$  grande

$$P_N(q^*) \approx \exp[-N\Delta F(q^*)], \quad (1.12)$$

onde  $\Delta F = \Delta F(q^*, T_1, T_2) - [F(T_1) + F(T_2)]$  é a diferença de densidade da energia livre entre um sistema composto por duas réplicas a diferentes temperaturas  $(T_1, T_2)$  com um valor de sobreposição  $q^*$  e a soma das densidades de energia livre a temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ . Esta quantidade mede o custo de manter duas replicas com certo valor de  $q$  em equilíbrio, portanto é uma medida do caos. Quanto maior a quantidade  $\Delta F(q^*, T_1, T_2)$ , maior o efeito de caos, da mesma forma, se  $\Delta F(q^*, T_1, T_2)$  é pequena então a convergência de  $P_N(q^*)$  à função delta também é pequena e como consequência o efeito de caos somente será observável para sistemas muito grandes.

O problema de caos induzido por temperatura em vários modelos de campo médio tem sido investigado durante os últimos anos. Alguns modelos com RSB (do inglês *Replica Symmetry Breaking*) não apresentam caos e outros sim como, por exemplo, o modelo SK. Recentemente Rizzo e Crisanti [32], encontraram comportamento caótico no modelo SK mas de muito pouca intensidade, estes mesmos autores mostraram que seu efeito é muito menor ao encontrado em modelos de campo médio definidos em redes aleatórias com conectividade finita [33].

Por outro lado, a aproximação de Migdal-Kadanoff aplicada ao caos em vidros de spins tem a vantagem de que é acessível para grandes escalas de comprimento, e portanto é possível calcular diretamente o valor do comprimento de sobreposição. Dentro do modelo de gotas, Banavar e Bray [26] fizeram um completo estudo sobre as propriedades de caos da fase ordenada de vidros de spins Ising  $3d$  no esquema do grupo de renormalização de Migdal-Kadanoff; muitos autores, seguem esta abordagem com algumas pequenas variações. Na continuação, seguiremos a abordagem usada nas referencias [28, 34]. Neste sistema se parte de dois estados a baixas temperaturas com uma diferença de energia livre:

$$\Delta F(T) = \Delta E - T\Delta S \propto \Upsilon l^\theta, \quad (1.13)$$

onde  $l$  é o tamanho característico da gota quando vai do estado 1 ao estado 2 e  $\Upsilon$  é o coeficiente de rigidez dependente da temperatura. Introduzindo uma pequena variação de temperatura  $\delta T$  no sistema

$$\begin{aligned}\Delta F(T, \delta T) &= \Delta E - (T + \delta T)\Delta S \\ &\propto \Upsilon l^\theta - \delta T \Delta S.\end{aligned}\tag{1.14}$$

De acordo com os argumentos de Banavar e Bray, a diferença na entropia está associada com a superfície da gota então  $\Delta S \propto \pm l^{d_s/2}$  onde  $d_s$  é a dimensão fractal da superfície da gota. Se  $d_s/2 > \theta$  a diferença  $\Delta F(T, \delta T)$  se torna positiva

$$\Delta F(T, \delta T) = \Upsilon l^\theta + \delta T l^{d_s/2},$$

e, como conclusão, se segue que os estados de equilíbrio entre  $T$  e  $T + \delta T$  deveriam variar em uma escala de tamanho como

$$\begin{aligned}l(T, \delta T) &\propto \delta T^{-1/(d_s/2-\theta)} \\ &\propto \delta T^{-1/\xi},\end{aligned}\tag{1.15}$$

onde  $\xi$  é o expoente de caos, enquanto a quantidade  $q(T, \delta T)$  vai para zero com

$$q(T, \delta T) = \left[ \frac{l(T, \delta T)}{L} \right]^{d/2},\tag{1.16}$$

onde  $L$  é o tamanho da rede.

Assim, caos é a propriedade que ocorre quando  $\delta T \rightarrow 0$  e  $L \rightarrow \infty$ , ou seja, haverá caos quando, com pequenas variações de temperatura, o sistema fica descorrelacionado além de um comprimento de sobreposição  $l(T, \delta T)$ .

Dentro dos estudos realizados no grupo de renormalização se encontrou a presença de caos na fase paramagnética, mas com menor intensidade que na fase vidro de spins. Para esta última fase se obtiveram diferentes valores do expoente de caos para a temperatura crítica e para uma temperatura  $T < T_c$  numa rede cúbica para o modelo de Ising com  $d = 3$  [35]. Além disso, foi determinada a dimensão crítica acima da qual não há caos induzido por temperatura.

Perturbações com campo magnético têm sido menos estudadas, mas há indícios de que seu expoente é diferente daquele obtido por uma perturbação por temperatura [36]. Da mesma forma que na teoria de campo médio a perturbação por temperatura é menor

que por campo magnético, porém a principal diferença é que no grupo de renormalização qualquer campo magnético destrói a fase vidro de spins, então a perturbação é estudada na fase paramagnética com campos próximos a zero, ao contrário da teoria de campo médio onde o sistema é estudado abaixo de um campo crítico não nulo.

## CAPÍTULO 2

# MODELO DE POTTS

### 2.1 MODELO DE POTTS

O modelo de Potts foi inicialmente proposto por Domb como uma generalização do modelo de Ising ( $q = 2$ ); no modelo de Potts original os spins se orientam no plano apontando numa direção  $q$  (igualmente espaçadas) e formando um ângulo [37]:

$$\theta_n = \frac{2\pi n}{q}, \quad (2.1)$$

com  $n = 1, 2, 3, \dots, q - 1$ , como na figura 2.1.

No caso mais geral, quando as interações entre os spins mais próximos só dependem do ângulo entre eles (modelo  $Z(q)$ ), o hamiltoniano será dado por:

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J(\theta_{i,j}), \quad (2.2)$$

onde a função  $J$  é periódica com período  $2\pi$  e  $\theta_{i,j} = \theta_i - \theta_j$  representa o ângulo entre dois spins nos sítios  $i$  e  $j$ .

Em termos gerais, fala-se frequentemente do modelo de Potts planar e *standard*. No modelo planar as interações entre os spins da rede são da forma:

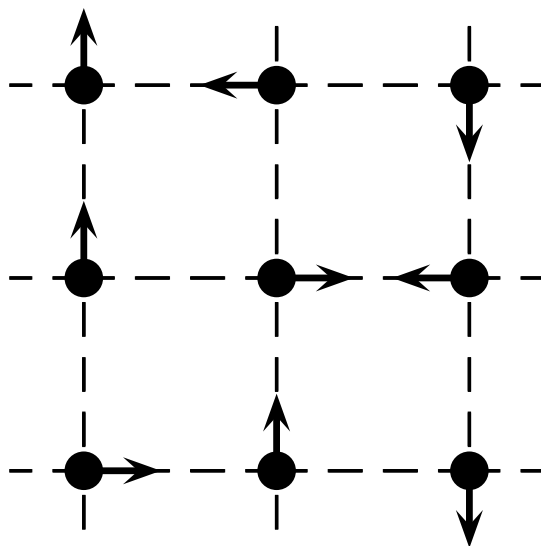
$$J(\theta_{i,j}) = -\epsilon_1 \cos(\theta_{i,j}), \quad (2.3)$$

enquanto no modelo de Potts standard ou simplesmente modelo de Potts as interações entre spins dependem de uma função mais geral em termos da função delta de Dirac:

$$J(\theta_{i,j}) = -\epsilon_2 \delta(q_i, q_j). \quad (2.4)$$

O modelo de Potts ferromagnético corresponde a  $\epsilon_2 > 0$  e o anti-ferromagnético a  $\epsilon_2 < 0$ . Se a interação é antiferromagnética isto quer dizer que a configuração de menor energia é aquela em que um spin do par está num estado diferente do outro, por exemplo, para um modelo de Potts de três estados e interações antiferromagnéticas, se em um par  $A$  está no estado 1, o spin em  $B$  pode ocupar os estados 2 ou 3.





**Figura 2.1** Configuração de spins do modelo de Potts planar na rede quadrada com  $q = 4$ ,  $\theta_n = \frac{\pi n}{2}$ .

O modelo de Potts ferromagnético tem sido amplamente estudado [37]. O sistema é paramagnético para altas temperaturas e exibe um comportamento ferromagnético para baixas temperaturas para  $q \geq 2$  com uma dimensão crítica inferior igual a 1. Por outro lado, o comportamento do modelo com acoplamentos antiferromagnéticos depende fortemente da estrutura microscópica da rede e há uma série de questões em aberto; frequentemente o modelo apresenta uma transição de fase para temperaturas diferentes de zero, com algumas exceções (o modelo Potts numa rede triangular  $q_c = 4$  e numa rede Kagomé  $q_c = 3$ ) [38, 39].

Nos últimos 20 anos, muitos esforços têm sido dedicados na compreensão do modelo de Potts desordenado, em especial os vidros de spins de Potts. Estes sistemas são interessantes pois apresentam um comportamento crítico muito amplo e têm características que podem ajudar a entender uma grande variedade de fenômenos. Certos cristais como o hidrogênio orto-para, vidros de dipolos elétricos e vidros orientados são alguns dos sistemas que não têm uma simetria tipo Ising, portanto um modelo de Potts aleatório é apropriado para descrever seu comportamento [40]. Por exemplo, o modelo de Potts com  $q=3$  estados é um modelo para vidros orientados, cristais moleculares aleatoriamente diluídos onde os momentos quadripolares se congelam em orientações aleatórias quando o sistema é resfriado, devido aos efeitos de aleatoriedade e frustração, tal como acontece nos vidros de spins. Na teoria do campo médio com alcance infinito para  $q = 3$  existe

uma temperatura finita de transição para a fase vidro de spins.

O modelo  $q > 4$  parece estar conectado com os vidros estruturais de acordo com as predições da teoria de campo médio. Este modelo tem um comportamento peculiar, exibindo uma transição dinâmica a uma temperatura  $T_D$  e uma transição estática a uma temperatura  $T_0 < T_D$  [41].

Os resultados apresentados até agora correspondem a interações de longo alcance, porém é interessante estudar o que acontece em modelos mais realistas de curto alcance. Na literatura, pode-se encontrar uma extensa revisão a respeito; aqui se discutiremos apenas os detalhes mais relevantes.

Várias metodologias são utilizadas para analisar sistemas de Potts de curto alcance: simulações de Monte Carlo, expansões em séries e grupo de renormalização, são as mais utilizadas.

Em redes hiper cúbicas a fase vidro de spins tem sido observada para o caso de  $q = 3$  estados em  $d = 2, 3, 4$  dimensões, a partir de simulações Monte Carlo, enquanto para valores grandes de  $q$  como  $q = 10$  não há evidência da transição [42].

Em redes hierárquicas, mais precisamente em redes hierárquicas tipo diamante, o modelo ferromagnético foi estudado sob o grupo de renormalização encontrando-se uma solução exata para a magnetização local da rede [43]. Por outro lado, a fase vidro de spins foi identificada para o modelo de Potts com interações aleatórias e  $q = 2, 3, 4$  estados, utilizando várias distribuições para os acoplamentos: gaussiana, bimodal, exponencial e uniforme [44]. Nesse trabalho, encontrou-se a dimensão crítica inferior para a qual acontece a transição e seus respectivos valores de  $T_c$ .

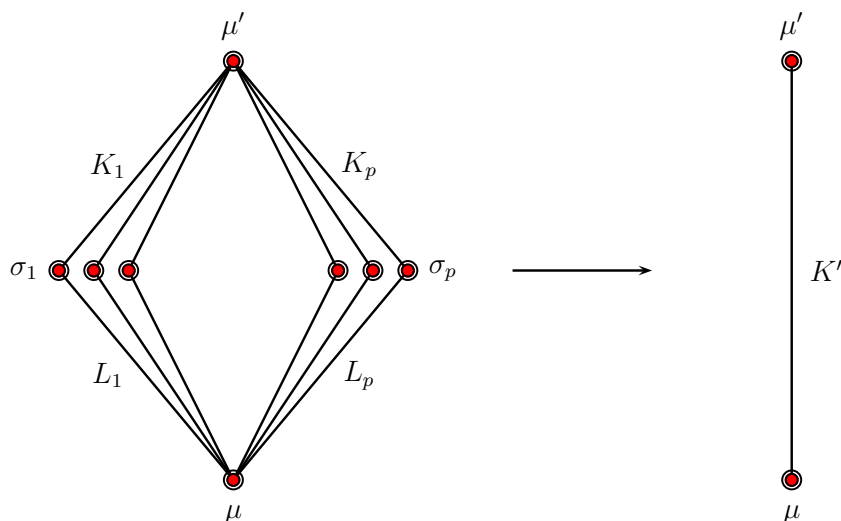
Recentemente, investigou-se o comportamento de vidros de Potts desordenados no limite quando  $q$  é muito grande. O modelo é definido numa rede hierárquica diamante com  $b = 2$ . O diagrama de fases indica a presença de fases ferromagnéticas, paramagnéticas e a fase vidro de spins para baixas temperaturas, este diagrama é similar ao encontrado no modelo de Potts com  $q = 3$  em  $2d$  [45].

No presente trabalho se estudará a solução do modelo de Potts através do grupo de renormalização em redes hierárquicas do tipo diamante.

## 2.2 GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO DE MIGDAL-KADANOFF (GRMK) EM REDES HIERÁRQUICAS DIAMANTE

A seguir, serão apresentados o desenvolvimento matemático seguido ao se aplicar as ideias do GRMK na rede de diamante tipo Potts. Como primeira medida, define-se o modelo de Potts nas redes hierárquicas fazendo corresponder a cada sítio desta rede uma

variável de spin  $\sigma$  que pode tomar os valores  $\sigma = 0, 1, 2, 3, \dots, q-1$ . Agora, dentro de uma célula básica da rede hierárquica cada spin  $\sigma$  interage com os spins nos sítios raízes  $\mu, \mu'$  através das interações  $K_i, L_i$ , segundo o mostrado na figura 2.2. A conexão entre células básicas será através dos sítios raízes.



**Figura 2.2** Diagrama de renormalização de uma célula básica da rede diamante com  $p$  conexões e fator de escala  $b = 2$ : (a) célula básica original, (b) célula renormalizada.

Por outro lado, como foi dito no capítulo anterior, em termos gerais, o processo de renormalização, consistirá em dizimar ou reduzir a rede por um fator de escala  $b = 2$  como mostrado na figura 2.2, e encontrar uma relação entre os acoplamentos originais  $K_i, L_i$  e os acoplamentos renormalizados  $K'$ , comparando as funções de partição de cada um destes sistemas. Esta equação é conhecida como equação de renormalização e será obtida a partir da renormalização de uma célula básica, pois cada célula básica é semelhante às demais células da rede.

Começaremos definindo o hamiltoniano de interação para uma célula básica com  $p$  conexões como na figura 2.2a:

$$H = -q \sum_{\langle i,j \rangle} J_{i,j} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}, \quad (2.5)$$

onde a soma em  $\langle i, j \rangle$  representa a soma sobre todos os pares de vizinhos mais próximos,  $J_{i,j}$  é a constante de acoplamento entre spins  $\langle i, j \rangle$  e a constante  $q$  normaliza a energia com respeito ao número de estados.

O hamiltoniano adimensional será:

$$\bar{H} = -\beta H = q \sum_{\langle i,j \rangle} K_{i,j} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}, \quad (2.6)$$

com  $K_{i,j} = J_{i,j}/k_b T$  representando o acoplamento reduzido entre os spins,  $k_b$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura absoluta.

A função de partição será:

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[ q \sum_{\langle i,j \rangle} K_{i,j} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \right], \quad (2.7)$$

onde  $\{\sigma_i\}$  representa a soma sobre todas as possíveis configurações dos estados dos spin  $\sigma_i$ . Distinguindo entre os spins dos sítios raízes e suas interações com os spins internos de acordo com a nomenclatura da figura 2.2, para uma célula básica se tem:

$$Z = \sum_{\mu'} \sum_{\mu} \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_{i=1}^p \exp \{q [K_i \delta_{\sigma_i, \mu'} + L_i \delta_{\sigma_i, \mu}]\}. \quad (2.8)$$

Fixando os valores dos spins dos sítios raízes, define-se a função de partição restrita  $Z_{\mu, \mu'}$ , restando o traço de  $\exp(\bar{H})$  sobre todas as variáveis internas de spin da rede:

$$\begin{aligned} Z_{\mu, \mu'} &= \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_{i=1}^p \exp \{q [K_i \delta_{\sigma_i, \mu'} + L_i \delta_{\sigma_i, \mu}]\} \\ &= \prod_{i=1}^p \sum_{\{\sigma_i\}} \exp \{q [K_i \delta_{\sigma_i, \mu'} + L_i \delta_{\sigma_i, \mu}]\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

A equação 2.9 pode ser analisada nos casos em que  $\mu = \mu'$  ou  $\mu \neq \mu'$ .

Caso 1:  $\mu = \mu'$

$$Z_{\mu, \mu} = \prod_{i=1}^p \{(q-1) + \exp [q(K_i + L_i)]\}. \quad (2.10)$$

Caso 2:  $\mu \neq \mu'$

$$Z_{\mu, \mu'} = \prod_{i=1}^p [(q-2) + \exp(qK_i) + \exp(qL_i)]. \quad (2.11)$$

Por outro lado, o processo de renormalização consistirá em dizimar a célula básica como na figura 2.2, neste caso só há dois sítios raízes  $\mu, \mu'$  com uma só interação  $K'$ , de tal

forma que o hamiltoniano efetivo será:

$$\bar{H}' = qK'\delta_{\mu,\mu'} + \text{constante}, \quad (2.12)$$

com a correspondente função de partição renormalizada:

$$Z' = \sum_{\mu,\mu'} \exp [qK'\delta_{\mu,\mu'} + \text{constante}], \quad (2.13)$$

e a função de partição restrita:

$$Z'_{\mu,\mu'} = A \exp [qK'\delta_{\mu,\mu'}], \quad (2.14)$$

onde  $A = \exp [\text{constante}]$ . Estimando os possíveis valores da função delta de Kronecker:

Caso 1:  $\mu = \mu'$

$$Z'_{\mu,\mu} = A \exp [qK']. \quad (2.15)$$

Caso 2:  $\mu \neq \mu'$

$$Z'_{\mu,\mu'} = A. \quad (2.16)$$

Como na renormalização a função de partição deve permanecer inalterada, comparando 2.15 e 2.16 com 2.10 e 2.11:

Caso 1:  $\mu = \mu'$

$$A \exp [qK'] = \prod_{i=1}^p \{(q-1) + \exp [q(K_i + L_i)]\}. \quad (2.17)$$

Caso 2:  $\mu \neq \mu'$

$$A = \prod_{i=1}^p [(q-2) + \exp (qK_i) + \exp (qL_i)]. \quad (2.18)$$

Substituindo 2.18 em 2.17 chega-se à equação de renormalização para as constantes de acoplamento:

$$K' = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^p \ln \left\{ \frac{q-1 + \exp [q(K_i + L_i)]}{q-2 + \exp (qK_i) + \exp (qL_i)} \right\}. \quad (2.19)$$

É de utilidade trabalhar com a quantidade conhecida como transmissividade térmica [46]:

$$t_i = \frac{1 - \exp \left( -q \frac{J_i}{k_B T} \right)}{1 + (q-1) \exp \left( -q \frac{J_i}{k_B T} \right)}, \quad (2.20)$$

sendo

$$t_{K_i} = \frac{1 - \exp(-qK_i)}{1 + (q-1)\exp(-qK_i)}, \quad (2.21)$$

e

$$t_{L_i} = \frac{1 - \exp(-qL_i)}{1 + (q-1)\exp(-qL_i)}, \quad (2.22)$$

Finalmente se obtém a equação para a transmissividade renormalizada substituindo 2.21, 2.22 em 2.19:

$$t' = \frac{\prod_{i=1}^p [1 + (q-1)t_{K_i}t_{L_i}] - \prod_{i=1}^p [1 - t_{K_i}t_{L_i}]}{\prod_{i=1}^p [1 + (q-1)t_{K_i}t_{L_i}] + (q-1)\prod_{i=1}^p [1 - t_{K_i}t_{L_i}]}, \quad (2.23)$$

e a expressão para os acoplamentos renormalizados em termos da transmissividade:

$$K' = \frac{1}{q} \ln \left[ \frac{1 + (q-1)t'}{1 - t'} \right], \quad (2.24)$$

com

$$t' = \frac{1 - \exp(-qK')}{1 + (q-1)\exp(-qK')}. \quad (2.25)$$

### 2.3 DIAGRAMAS DO FLUXO DE RENORMALIZAÇÃO

Como primeira instância, definimos o fluxo de renormalização dentro de um espaço de parâmetros apropriado dado por a *temperatura renormalizada* e a *variância da transmissividade*. Este espaço de parâmetros foi proposto inicialmente por Curado e Meunier [47] e fornece informação suficiente sobre a presença de transições de fase e sobre a temperatura crítica à qual ocorre aquela transição.

A temperatura renormalizada está dada pelo desvio padrão da distribuição de acoplamentos reduzidos ( $K_{i,j}$ ) em cada passo de renormalização,

$$T_r = K_B T = \frac{1}{\sqrt{[(K_{i,j} - [K_{i,j}]_J)^2]_J}}, \quad (2.26)$$

e a variância da transmissividade térmica definida no capítulo 2, como:

$$\Delta = [(t_{i,j} - [t_{i,j}]_J)^2]_J, \quad (2.27)$$

onde  $[\dots]_J$  representa a média sobre a desordem.

$K_i$ , e  $L_i$  são variáveis aleatórias que obedecem a uma função de distribuição de prob-

abilidades. Nesta dissertação utilizamos as funções de distribuições bimodal e gaussiana, dadas pelas seguintes equações:

- Distribuição Delta-bimodal:

$$P(i, j) = \frac{1}{2} [\delta(J_{i,j} - 1) + \delta(J_{i,j} + 1)]. \quad (2.28)$$

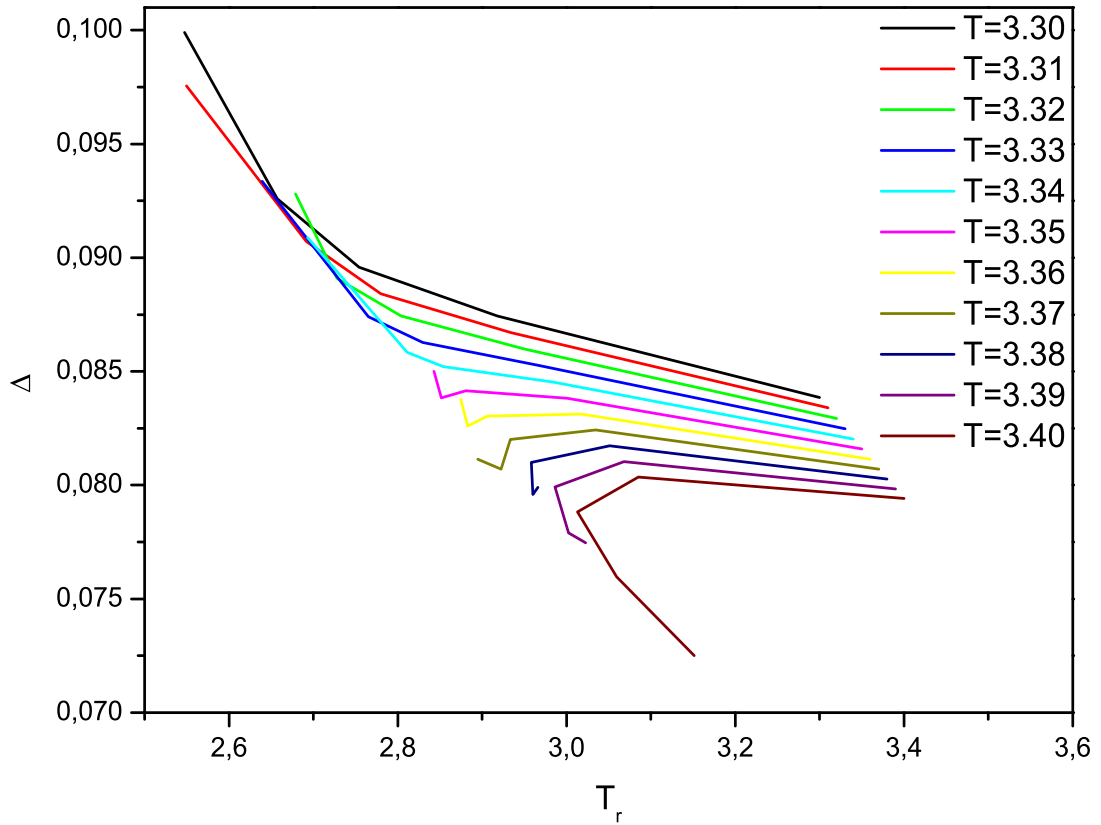
- Distribuição Gaussiana:

$$P(i, j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} J_{i,j}^2\right). \quad (2.29)$$

Assim, a cada passo da renormalização são calculadas as quantidades  $T_r$  e  $\Delta$  as quais indicam o fluxo da distribuição renormalizada. Para um certo valor de temperatura inicial o processo de renormalização faz com que a temperatura renormalizada *flua* para uma das bacias de atração dos pontos fixos estáveis das fases paramagnéticas e condensada.

Quando para certa temperatura inicial, se observa que o fluxo evolui para o ponto fixo da fase condensada e para outra temperatura maior, evolui para a fase paramagnética, se diz que há uma transição de fase, com temperatura crítica estimada numericamente quando se observa a mudança de comportamento do fluxo. Isto pode ser visto claramente na figura 2.3, onde há mudança na direção do fluxo para temperaturas no intervalo  $T = 3.34 - 3.37$ , que corresponde ao intervalo onde ocorre a transição de fase, fornecendo assim uma estimativa para  $T_f$ .

O fluxo de renormalização no modelo de Potts com  $q = 3$  e  $q = 4$  estados em redes tipo diamante tem sido investigado pelos autores [48–50]. Eles encontraram que os valores da dimensão fractal crítica inferior (mínima) para os quais se observa a transição de fase no modelo de Potts com  $q = 3$  e  $q = 4$  são  $d_f = 4.585$  e  $d_f = 5.08746$ , respectivamente. Também, determinaram as temperaturas de transição para várias dimensões da rede e distribuições bimodal, gaussiana e exponencial. Nossas simulações coincidem com aqueles valores de  $T_c$  obtidos por estes autores e são apresentados na tabela 2.3 para as dimensões da rede de interesse, a seguir:



**Figura 2.3** Fluxo de renormalização do modelo com  $q = 3$  e distribuição bimodal numa rede com  $d_f = 5$ ,  $h = 5$  e 100 amostras.

**Tabela 2.1** Valores de temperatura crítica para o modelo de Potts com  $q = 3$  e  $q = 4$  estados para distribuições dos acoplamentos bimodal e gaussiana.

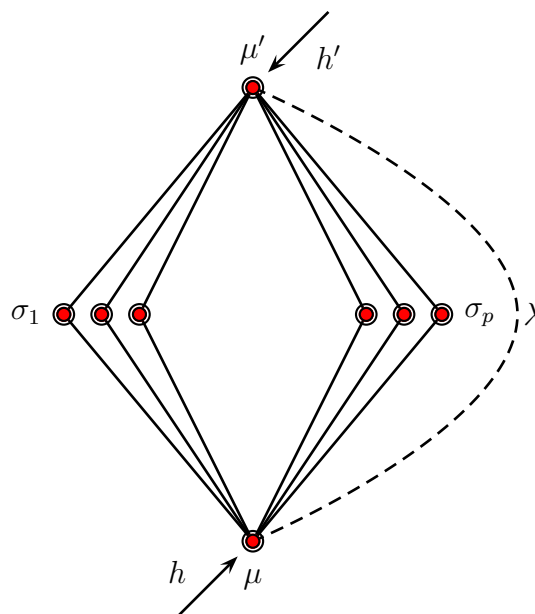
	$q$	$d_f$	$T_c$
Bimodal	3	5	3.34-3.37
Bimodal	4	5.32193	4.01-4.03
Gaussiana	3	5	3.10-3.13
Gaussiana	4	5.32193	3.75-3.77



## 2.4 MAGNETIZAÇÃO LOCAL

Uma das vantagens do estudo de redes hierárquicas é que elas permitem o cálculo exato de variáveis locais, mais precisamente, nas redes hierárquicas diamante. Morgado et al. [51] desenvolveram um método exato para o cálculo de relações de recorrência que relacionam o valor da magnetização local de sítios internos de uma célula básica com a magnetização local de seus sítios raízes. Assim, partindo de uma rede com certa hierarquia com constantes de acoplamento escolhidas a partir de uma distribuição inicial, renormalizando até a hierarquia 0, e estabelecendo as condições de contorno para os sítios raízes da primeira geração será possível determinar por recursão a magnetização local em todos os pontos da rede. Este procedimento foi inicialmente aplicado no modelo Ising ferromagnético [51] e depois estendido ao modelo de Potts com interações ferromagnéticas [43] e aleatórias [49]. Na continuação, apresentam-se brevemente detalhes desse método o qual foi utilizado neste estudo para o cálculo da magnetização em cada ponto da rede tendo em conta interações aleatórias.

Inicialmente se analisará uma célula com  $p$  conexões e parâmetro de rede  $b = 2$  como parte de uma rede de maior hierarquia, tal como esquematizado na figura 2.4. Neste sistema se suporá que o resto da rede interage com a célula através de dois campos  $h$ ,  $h'$  que atuam nos sítios raízes,  $\mu$  e  $\mu'$  respectivamente, e também se levará em conta a interação efetiva  $\lambda$  entre os sítios raízes.



**Figura 2.4** Sistema equivalente para o cálculo da magnetização local.

Assim, o hamiltoniano do sistema equivalente será dado por:

$$-\beta H(\mu, \sigma) = q \sum_{i=1}^p [K_i \delta_{\sigma_i, \mu'} + L_i \delta_{\sigma_i, \mu}] + \lambda \delta_{\mu, \mu'} + h' \delta_{\mu', 0} + h \delta_{\mu, 0}, \quad (2.30)$$

onde se tem considerado um estado privilegiado  $\mu = 0$ , correspondente à quebra de simetria devido à ação dos campos  $h, h'$  sobre a rede.

A função de partição para o sistema equivalente será:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{\mu, \sigma\}} \exp[-\beta H(\mu, \sigma)] \\ &= \sum_{\{\mu\}} \exp(\lambda \delta_{\mu, \mu'}) \exp(h' \delta_{\mu', 0}) \exp(h \delta_{\mu, 0}) \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[ q \sum_{i=1}^p (K_i \delta_{\sigma_i, \mu'} + L_i \delta_{\sigma_i, \mu}) \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

A função de partição restrita é dada por:

$$Z_{\mu, \mu'} = \exp(\lambda \delta_{\mu, \mu'}) \exp(h' \delta_{\mu', 0}) \exp(h \delta_{\mu, 0}) \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[ q \sum_{i=1}^p (K_i \delta_{\sigma_i, \mu'} + L_i \delta_{\sigma_i, \mu}) \right]. \quad (2.32)$$

Daí se tem dois casos,  $\mu = \mu'$  e  $\mu \neq \mu'$ ,

Caso 1:  $\mu = \mu'$

$$Z_{\mu, \mu} = \exp(\lambda + (h + h') \delta_{\mu, 0}) \prod_{i=1}^p \phi_1^i, \quad (2.33)$$

com

$$\phi_1^i = (q - 1) + \exp[q(K_i + L_i)]. \quad (2.34)$$

Caso 2:  $\mu \neq \mu'$

$$Z_{\mu, \mu'} = \exp(h' \delta_{\mu', 0} + h \delta_{\mu, 0}) \prod_{i=1}^p \phi_2^i, \quad (2.35)$$

com

$$\phi_2^i = (q - 2) + \exp(qK_i) + \exp(qL_i). \quad (2.36)$$

Substituindo estes valores na função de partição 2.31 e separando a soma nos termos em que  $\mu = \mu'$  e  $\mu \neq \mu'$ , fica:

$$Z = \sum_{\mu=0}^{q-1} \exp(\lambda + (h + h') \delta_{\mu, 0}) \prod_{i=1}^p \phi_1^i + \sum_{\mu'=0}^{q-1} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq \mu'}}^{q-1} \exp(h' \delta_{\mu', 0} + h \delta_{\mu, 0}) \prod_{i=1}^p \phi_2^i, \quad (2.37)$$

onde usamos que  $\delta_{\mu,\mu} = 1$  e  $\delta_{\mu,\mu'} \Big|_{\mu \neq \mu'} = 0$ .

Realizando a soma sobre os estados dos spins  $\mu$  e  $\mu'$ , resulta após algumas operações algébricas que:

$$Z = [(q-1) + \exp(h' + h)] \exp(\lambda) \Phi_1 + (q-1) [\exp(h') + \exp(h) + (q-2)] \Phi_2, \quad (2.38)$$

com

$$\Phi_1 = \prod_{i=1}^p \phi_1^i, \quad (2.39)$$

e

$$\Phi_2 = \prod_{i=1}^p \phi_2^i. \quad (2.40)$$

Até agora se encontrou a função de partição para o sistema descrito pelo hamiltoniano de interação 2.30, em seguida se calcularão as relações de recorrência da magnetização local entre hierarquias sucessivas. Assim, dada a magnetização num sítio da rede definida no modelo Potts [43] por:

$$m_i = \frac{q \langle \delta_{\sigma_i,0} \rangle - 1}{q-1}, \quad (2.41)$$

e a função de correlação:

$$\Delta_{\sigma_i, \sigma_j} = q \langle \delta_{\sigma_i,0}, \delta_{\sigma_j,0} \rangle - \langle \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \rangle, \quad (2.42)$$

é possível determinar as quantidades médias:

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\mu,0} \rangle &= f_1(h, h', \lambda), \\ \langle \delta_{\mu',0} \rangle &= f_2(h, h', \lambda), \\ \langle \delta_{\mu',\mu} \rangle &= f_3(h, h', \lambda), \\ \langle \delta_{\mu',0} \delta_{\mu,0} \rangle &= f_4(h, h', \lambda), \end{aligned} \quad (2.43)$$

como função das variáveis  $h$ ,  $h'$ ,  $\lambda$  e da mesma forma para as quantidades médias dos sítios internos:

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\sigma,0} \rangle &= g_1(h, h', \lambda), \\ \langle \delta_{\sigma,\mu} \rangle &= g_2(h, h', \lambda), \\ \langle \delta_{\sigma,\mu'} \rangle &= g_3(h, h', \lambda). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Então, invertendo as equações 2.43, isto é, encontrando os valores de  $h$ ,  $h'$ ,  $\lambda$  em termos das quantidades médias dadas por 2.43 e substituindo em 2.44 se obterão relações de recorrência para estas médias,  $\langle \delta_{\sigma,0} \rangle$ ,  $\langle \delta_{\sigma,\mu} \rangle$ ,  $\langle \delta_{\sigma,\mu'} \rangle$  que são funções apenas das médias das grandezas associada aos sítios raízes. Finalmente, as relações para a magnetização no sítio  $\sigma$  e a correlação entre sítios dependerão somente de variáveis associadas aos spins nos sítios raízes:

$$m_\sigma = C_1 m_{\mu'} + C_2 m_\mu + C_3 \Delta_{\mu,\mu'}, \quad (2.45)$$

$$\Delta_{\sigma,\mu} = C_4 m_{\mu'} + C_5 \Delta_{\mu,\mu'}, \quad (2.46)$$

$$\Delta_{\sigma,\mu'} = C_6 m_\mu + C_7 \Delta_{\mu,\mu'}, \quad (2.47)$$

com os coeficientes  $C_j$  a serem determinados. De acordo com o indicado acima, se calcularão inicialmente o conjunto de equações dadas por 2.43. Por definição os valores médios são:

$$\langle \delta_{\mu,0} \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial h}, \quad (2.48)$$

$$\langle \delta_{\mu',0} \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial h'}. \quad (2.49)$$

Substituindo a equação para a função de partição 2.38 em 2.48 e 2.49 e derivando resulta:

$$Z \langle \delta_{\mu,0} \rangle = \Phi_1 \exp(\lambda) \exp(h' + h) + (q - 1) \Phi_2 \exp(h), \quad (2.50)$$

$$Z \langle \delta_{\mu',0} \rangle = \Phi_1 \exp(\lambda) \exp(h' + h) + (q - 1) \Phi_2 \exp(h'). \quad (2.51)$$

Para o cálculo das médias  $\langle \delta_{\mu',0} \delta_{\mu,0} \rangle$  e  $\langle \delta_{\mu',\mu} \rangle$  se tem:

$$\langle \delta_{\mu',0} \delta_{\mu,0} \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial h' \partial h}, \quad (2.52)$$

com 2.38 se obtêm:

$$Z \langle \delta_{\mu',0} \delta_{\mu,0} \rangle = \Phi_1 \exp(\lambda) \exp(h' + h), \quad (2.53)$$

e para  $\langle \delta_{\mu',\mu} \rangle$  parte-se de:

$$\langle \delta_{\mu',\mu} \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \lambda}. \quad (2.54)$$

Substituindo 2.38:

$$Z \langle \delta_{\mu'} \delta_\mu \rangle = \Phi_1 \exp(\lambda) [(q - 1) + \exp(h + h')]. \quad (2.55)$$

Agora, invertemos estas equações para obter expressões de  $h$ ,  $h'$ ,  $\lambda$  em função das médias

dos sítios raízes. Substituindo 2.53 em 2.55

$$\exp(\lambda) = \frac{Z}{(q-1)\Phi_1} (\langle \delta_{\mu',\mu} \rangle - \langle \delta_{\mu',0} \delta_{\mu,0} \rangle), \quad (2.56)$$

e 2.53 em 2.50,

$$\exp(h) = \frac{Z}{(q-1)\Phi_2} (\langle \delta_{\mu,0} \rangle - \langle \delta_{\mu',0} \delta_{\mu,0} \rangle), \quad (2.57)$$

e 2.53 em 2.51,

$$\exp(h') = \frac{Z}{(q-1)\Phi_2} (\langle \delta_{\mu',0} \rangle - \langle \delta_{\mu',0} \delta_{\mu,0} \rangle), \quad (2.58)$$

Por outro lado, para obter as quantidades 2.44 nos sítios internos, tendo em conta o peso de Boltzmann:

$$P = \frac{\exp(-\beta H)}{Z}$$

e

$$\langle f(\mu, \sigma) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\mu, \sigma\}} f(\mu, \sigma) \exp[-\beta H(\mu, \sigma)], \quad (2.59)$$

tem-se:

$$\langle \delta_{\sigma_j,0} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\mu, \mu', \sigma\}} \delta_{\sigma_j,0} \exp \left[ h\delta_{\mu,0} + h'\delta_{\mu',0} + \lambda\delta_{\mu,\mu'} + q \sum_{i=1}^p (K_i\delta_{\sigma_i,\mu'} + L_i\delta_{\sigma_i,\mu}) \right], \quad (2.60)$$

fazendo

$$\psi_j(\mu', \mu) = \sum_{\{\sigma\}} \delta_{\sigma_j,0} \exp \left[ q \sum_{i=1}^p (K_i\delta_{\sigma_i,\mu'} + L_i\delta_{\sigma_i,\mu}) \right], \quad (2.61)$$

$\langle \delta_{\sigma_j,0} \rangle$  fica:

$$\langle \delta_{\sigma_j,0} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\mu, \mu'\}} \exp [h\delta_{\mu,0} + h'\delta_{\mu',0} + \lambda\delta_{\mu,\mu'}] \psi_j(\mu', \mu), \quad (2.62)$$

mas  $\psi_j(\mu', \mu)$  pode se escrever como:

$$\begin{aligned} \psi_j(\mu', \mu) &= \sum_{\sigma_1=0}^{q-1} \dots \sum_{\sigma_p=0}^{q-1} \delta_{\sigma_j,0} \prod_{i=1}^p \exp [q (K_i\delta_{\sigma_i,\mu'} + L_i\delta_{\sigma_i,\mu})] = \\ &= \sum_{\sigma_j=0}^{q-1} \delta_{\sigma_j,0} \exp [q (K_j\delta_{\sigma_j,\mu'} + L_j\delta_{\sigma_j,\mu})] \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p \sum_{\sigma_i=0}^{q-1} \exp [q (K_i\delta_{\sigma_i,\mu'} + L_i\delta_{\sigma_i,\mu})], \end{aligned} \quad (2.63)$$

como  $\delta_{\sigma_j,0} = 1$  para  $\sigma_j = 0$

$$\psi_j(\mu', \mu) = \exp [q (K_j \delta_{0,\mu'} + L_j \delta_{0,\mu})] \times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p \phi^i(\mu', \mu),$$

e substituindo em 2.62:

$$Z \langle \delta_{\sigma_j,0} \rangle = \sum_{\{\mu\}} \exp (h \delta_{\mu,0} + h' \delta_{\mu',0} + \lambda \delta_{\mu',\mu}) \times \exp [q (K_j \delta_{0,\mu'} + L_j \delta_{0,\mu})] \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p \phi^i(\mu', \mu),$$

simplificando

$$Z \langle \delta_{\sigma_j,0} \rangle = \sum_{\{\mu\}} \exp [(h' + qK_j) \delta_{\mu',0} + (h + qL_j) \delta_{\mu,0} + \lambda \delta_{\mu',\mu}] \times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p \phi^i(\mu', \mu),$$

fazendo

$$h_j = h + qL_j, \quad h'_j = h' + qK_j,$$

com

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p \phi^i(\mu', \mu) = \frac{\prod_{i=1}^p \phi^i(\mu', \mu)}{\phi^j(\mu', \mu)},$$

então

$$Z \langle \delta_{\sigma_j,0} \rangle = \sum_{\{\mu\}} \exp (h'_j \delta_{\mu',0} + h_j \delta_{\mu,0} + \lambda \delta_{\mu',\mu}) \times \frac{\prod_{i=1}^p \phi^i(\mu', \mu)}{\phi^j(\mu', \mu)}, \quad (2.64)$$

O lado direito desta equação é similar à função de partição inicial para o sistema 2.31 que finalmente foi expressa como 2.38, então 2.64 pode ser escrita como 2.38:

$$\begin{aligned} Z \langle \delta_{\sigma_j,0} \rangle &= [(q-1) + \exp(h'_j + h_j)] \exp(\lambda) \frac{\Phi_1}{\phi^j(\mu', \mu)} + \\ &+ (q-1) [\exp(h'_j) + \exp(h_j) + (q-2)] \frac{\Phi_2}{\phi^j(\mu', \mu)}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

Definindo:

$$\tilde{\Phi}_1 = \frac{\Phi_1}{\phi^j(\mu', \mu)},$$

e

$$\tilde{\Phi}_2 = \frac{\Phi_2}{\phi^j(\mu', \mu)},$$

e substituindo-as em 2.65, resulta:

$$Z \langle \delta_{\sigma_j, 0} \rangle = [(q-1) + \exp(h'_j + h_j)] \exp(\lambda) \tilde{\Phi}_1 + (q-1) [\exp(h'_j) + \exp(h_j) + (q-2)] \tilde{\Phi}_2, \quad (2.66)$$

que pode ser rescrita como:

$$\begin{aligned} Z \langle \delta_{\sigma_j, 0} \rangle &= (q-1) \exp(\lambda) \frac{\Phi_1}{\phi_1^j(\mu', \mu)} + \exp[q(K_j + L_j)] \exp(h' + h + \lambda) \frac{\Phi_1}{\phi_1^j(\mu', \mu)} + \\ &\quad (q-1) \exp(h') \exp(qK_j) \frac{\Phi_2}{\phi_2^j(\mu', \mu)} + (q-1) \exp(h) \exp(qL_j) \frac{\Phi_2}{\phi_2^j(\mu', \mu)} + \\ &\quad (q-1)(q-2) \frac{\Phi_2}{\phi_2^j(\mu', \mu)}. \end{aligned}$$

Aplicando 2.53 com:

$$A_j = \exp(qK_j),$$

$$B_j = \exp(qL_j),$$

obtem-se:

$$\begin{aligned} Z \langle \delta_{\sigma_j, 0} \rangle &= (q-1) \exp(\lambda) \frac{\Phi_1}{\phi_1^j} + A_j B_j \frac{Z}{\phi_1^j} \langle \delta_{\mu', 0} \delta_{\mu, 0} \rangle + \\ &\quad + (q-1) \frac{\Phi_2}{\phi_2^j} \exp(h') A_j + (q-1) \exp(h) B_j \frac{\Phi_2}{\phi_2^j} + \\ &\quad + (q-1)(q-2) \frac{\Phi_2}{\phi_2^j}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Substituindo 2.55, 2.57, 2.24 em 2.65 e lembrando a equivalência  $h \rightarrow h_j$  e  $h' \rightarrow h_{j'}$ :

$$\begin{aligned} Z &= Z \langle \delta_{\mu, \mu'} \rangle + Z \langle \delta_{\mu', 0} \rangle - Z \langle \delta_{\mu', 0} \delta_{\mu, 0} \rangle + \\ &\quad Z \langle \delta_{\mu, 0} \rangle - Z \langle \delta_{\mu', 0} \delta_{\mu, 0} \rangle + (q-1)(q-2) \Phi_2, \end{aligned} \quad (2.68)$$

e 2.68 em 2.67 e fazendo algumas simplificações:

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\sigma_j, 0} \rangle &= \left( \frac{\phi_1^j + \phi_2^j}{\phi_1^j \phi_2^j} \right) (q \langle \delta_{\mu', 0} \delta_{\mu, 0} \rangle - \langle \delta_{\mu, \mu'} \rangle) + \\ &\quad + \frac{1}{\phi_2^j} [(A_j - 1) \langle \delta_{\mu', 0} \rangle + (B_j - 1) \langle \delta_{\mu, 0} \rangle + 1], \end{aligned} \quad (2.69)$$

que em termos da função de correlação 2.42 fica:

$$\langle \delta_{\sigma_j, 0} \rangle = \left( \frac{\phi_1^j + \phi_2^j}{\phi_1^j \phi_2^j} \right) \Delta_{\mu', \mu} + \frac{1}{\phi_2^j} [(A_j - 1) \langle \delta_{\mu', 0} \rangle + B_j - 1] \langle \delta_{\mu, 0} \rangle + 1, \quad (2.70)$$

onde  $A_j = \exp(qK_j)$  e  $B_j = \exp(qL_j)$ . Assim pode-se redefinir  $\phi_1^j$  e  $\phi_2^j$  como:

$$\phi_1^j = (q - 1) + A_j B_j, \quad (2.71)$$

$$\phi_2^j = (q - 2) + A_j + B_j, \quad (2.72)$$

que conduzem a:

$$\phi_1^j - \phi_2^j = (A_j - 1)(B_j - 1). \quad (2.73)$$

Tendo em conta a equação da magnetização local dada por 2.41 e 2.70:

$$\begin{aligned} \left( \frac{q-1}{q} \right) \left( m_j + \frac{1}{q-1} \right) &= \left( \frac{\phi_1^j + \phi_2^j}{\phi_1^j \phi_2^j} \right) \Delta_{\mu', \mu} + \\ &+ \frac{1}{\phi_2^j} \left[ (A_j - 1) \left( \frac{q-1}{q} \right) \left( m_{\mu'} + \frac{1}{q-1} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{\phi_2^j} \left[ (B_j - 1) \left( \frac{q-1}{q} \right) \left( m_{\mu} + \frac{1}{q-1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Finalmente, se obtém a expressão para a magnetização local:

$$\begin{aligned} m_j &= \frac{1}{\phi_2^j} (A_j - 1) m_{\mu'} + \frac{1}{\phi_2^j} (B_j - 1) m_{\mu} + \\ &\left( \frac{q}{q-1} \right) \frac{(A_j - 1)(B_j - 1)}{\phi_1^j \phi_2^j} \Delta_{\mu', \mu}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

e a magnetização total estará dada por:

$$m = N^{-1} \sum_j m_j. \quad (2.76)$$

Para o cálculo das funções de correlação presentes na definição da magnetização local, parte-se da definição geral dada na equação 2.42:

$$\Delta_{\mu, \sigma_j} = q \langle \delta_{\mu, 0} \delta_{\sigma_j, 0} \rangle - \langle \delta_{\mu, \sigma_j} \rangle, \quad (2.77)$$



onde se define:

$$\langle \delta_{\mu,0} \delta_{\sigma_j,0} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \delta_{\mu,0} \delta_{\sigma_j,0} \exp(-\beta H), \quad (2.78)$$

que sendo expressa em termos de  $\langle \delta_{\mu,0} \delta_{\mu',0} \rangle$  e  $\langle \delta_{\mu,0} \rangle$  fica:

$$\langle \delta_{\mu,0} \delta_{\sigma_j,0} \rangle = B_j \left[ \left( \frac{A_j}{\phi_1^j} - \frac{1}{\phi_2^j} \right) \langle \delta_{\mu,0} \delta_{\mu',0} \rangle + \frac{1}{\phi_2^j} \langle \delta_{\mu,0} \rangle \right]. \quad (2.79)$$

Da mesma forma se define  $\langle \delta_{\mu,\sigma_j} \rangle$ , como:

$$\langle \delta_{\mu,\sigma_j} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \delta_{\mu,\sigma_j} \exp(-\beta H), \quad (2.80)$$

e

$$\langle \delta_{\mu,\sigma_j} \rangle = B_j \left[ \left( \frac{A_j}{\phi_1^j} - \frac{1}{\phi_2^j} \right) \langle \delta_{\mu',\mu} \rangle + \frac{1}{\phi_2^j} \right]. \quad (2.81)$$

Assim

$$\Delta_{\mu,\sigma_j} = B_j \left[ \left( \frac{A_j}{\phi_1^j} - \frac{1}{\phi_2^j} \right) \Delta_{\mu',\mu} + \frac{(q-1)}{\phi_2^j} m_\mu \right]. \quad (2.82)$$

Seguindo o mesmo procedimento para calcular  $\Delta_{\mu',\sigma_j}$ :

$$\Delta_{\mu',\sigma_j} = A_j \left[ \left( \frac{B_j}{\phi_1^j} - \frac{1}{\phi_2^j} \right) \Delta_{\mu',\mu} + \frac{(q-1)}{\phi_2^j} m'_\mu \right]. \quad (2.83)$$

Em suma, as equações 2.75, 2.83, 2.82, formam um sistema de equações de recorrência acopladas conectando grandezas de hierarquias sucessivas.

Para se utilizar essas equações de recorrência é necessário especificar as condições de contorno ou condições iniciais, as quais podem ser obtidas uma vez a rede é completamente renormalizada, ou seja, quando se tem somente uma ligação  $K'$  conectando os dois sítios raízes. O hamiltoniano adimensional para este sistema é:

$$\bar{H} = qK' \delta_{\mu,\mu'}. \quad (2.84)$$

Se se escolhe um estado arbitrariamente, por exemplo  $\mu' = 0$ :

$$Z = \sum_{\{\mu,\mu'\}} \exp(qK' \delta_{\mu,0}) = \exp(qK') + (q-1), \quad (2.85)$$

e

$$\langle \delta_{\mu,0} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\mu,\mu'\}} \delta_{\mu,0} \exp(qK'\delta_{\mu,0}) = \frac{1}{Z} (\exp(qK')) = \frac{\exp(qK')}{\exp(qK') + (q-1)}. \quad (2.86)$$

Da definição da magnetização local 2.41 e substituindo 2.86:

$$m_{\mu} = \frac{\exp(qK') - 1}{\exp(qK') + (q-1)}. \quad (2.87)$$

Então as condições de contorno do sistema ficam:

$$\begin{aligned} m_{\mu'} &= 1 \quad (\mu' = 0) \\ m_{\mu} &= \frac{\exp(qK') - 1}{\exp(qK') + (q-1)} \quad (\mu' \neq 0). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Para a função de correlação se segue um cálculo similar. Da definição 2.42:

$$\Delta_{\mu,\mu'} = q \langle \delta_{\mu,0} \delta_{\mu',0} \rangle - \langle \delta_{\mu,\mu'} \rangle.$$

Quando  $\mu' = 0$ :

$$\Delta_{\mu,\mu'} = q \langle \delta_{\mu,0} \rangle - \langle \delta_{\mu,0} \rangle = (q-1) \langle \delta_{\mu,0} \rangle \quad (2.89)$$

Substituindo 2.86:

$$\Delta_{\mu,\mu'} = (q-1) \frac{\exp(qK')}{\exp(qK') + (q-1)}. \quad (2.90)$$

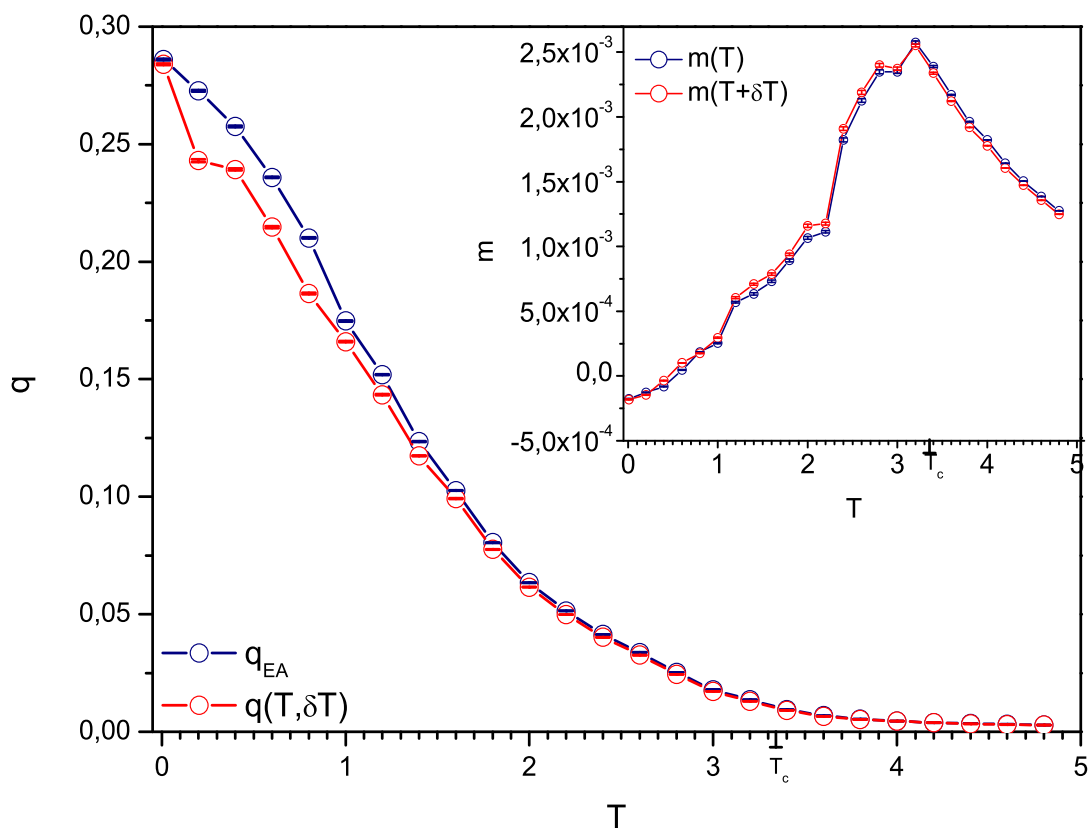
## CAPÍTULO 3

# PROPRIEDADES DE CAOS

Este capítulo está dedicado ao estudo dos efeitos causados por pequenas variações na temperatura,  $\delta T$ , sobre propriedades de vidros de spins de Potts com  $q$  estados. Considera-se o modelo definido em uma rede hierárquica com  $h$  hierarquias, à temperatura  $T$  com uma configuração das interações  $(K_i, L_i)$  entre spins escolhidas e fixadas a partir de uma função de distribuição de probabilidades (gaussiana ou bimodal), cada configuração correspondendo a uma realização da desordem, a qual denomina-se de uma *amostra* do sistema. As magnetizações locais  $m_j$  de uma dada amostra foram obtidas de forma *exata* a partir das equações de recorrência acopladas 2.75, 2.79 e 2.81 e da equação de renormalização das interações 2.19 (ou 2.23), juntamente com as condições de contorno estabelecidas na seção 2.3. De posse das magnetizações locais calcula-se o parâmetro de ordem  $q_{EA}$  de cada sítio. Para a mesma configuração de interações mas, desta vez, com uma temperatura  $T + \delta T$ , calcula-se também a magnetização local, o parâmetro de ordem EA e a sobreposição do parâmetro de ordem  $q(T, \delta T)$  entre as duas configurações nas temperaturas  $T$  e  $T + \delta T$ . Na primeira seção, apresentamos os resultados para uma rede hierárquica com dimensão fractal  $d_f = 5$ , para o modelo com  $q = 3$  e interações escolhidas de uma distribuição bimodal e gaussiana. Na seção 3.2, investigamos, também, o caso com  $q = 4$  estados,  $d_f = 5.32193\dots$  e finalmente, na seção 3.3, comparamos esses resultados. Os dados de interesse como magnetização,  $q_{EA}$  e  $q(T, \delta T)$  foram obtidos a partir da simulação numérica de 100 amostras utilizando uma distribuição inicial dos acoplamentos bimodal e gaussiana em vários intervalos de temperatura e com um  $\delta T = 5 \times 10^{-2}$ . Para este valor de  $\delta T = 5 \times 10^{-2}$  obtivemos valores razoáveis das grandezas medidas, para  $\delta T$  menores, as ditas quantidades eram muito pequenas. Devido às limitações computacionais analisaram-se redes no máximo com  $h = 4, 5$  hierarquias e dimensão fractal  $5.321935\dots$ , respectivamente. A escolha desses valores de  $q$  e  $d_f$  foi condicionada à existência de transição de fase paramagnética-vidros de spins no modelo de Potts, em temperaturas finitas, como mostrado no capítulo 2.3.

### 3.1 REDE DIAMANTE COM $q = 3$ ESTADOS E $d_f = 5$

Como primeira medida, comparou-se o comportamento da magnetização total  $m$  dada pela equação 2.76 do capítulo 2, e do parâmetro de ordem  $q_{EA}$ , com suas configurações de sobreposição  $m(T + \delta T)$  e  $q(T, \delta T)$  em função da temperatura para uma rede de diamante com  $h = 5$ ,  $d_f = 5$ . Para cada ponto, fixou-se uma dada configuração de interações nas temperaturas  $T$  e  $T + \delta T$ , com  $\delta T = 5 \times 10^{-2}$ , escolhida de uma distribuição dos acoplamentos bimodal, finalmente tomando-se a média sobre 100 amostras.



**Figura 3.1** Comportamento do parâmetro de ordem em função da temperatura na configuração não perturbada ( $q_{EA}$ ) e perturbada ( $q(T, \delta T)$ ) do modelo com  $q = 3$ ,  $\delta T = 5 \times 10^{-2}$  para a distribuição bimodal numa rede com  $d_f = 5$ ,  $h = 5$  e 100 amostras. Na inserção, a correspondente curva de magnetização nas configurações não perturbada  $m(T)$  e perturbada  $m(T + \delta T)$ .

O resultado para o parâmetro de ordem  $q_{EA}$  está mostrado na figura 3.1, enquanto a magnetização está mostrada na inserção. Como foi mencionado no capítulo 1, no presente estudo estamos mais interessados no parâmetro de ordem, pois é uma variável mais apropriada para analisar o comportamento dos vidros de spins.

Na figura 3.1 se vê que o parâmetro de ordem tende a zero na fase paramagnética de altas temperaturas e para temperaturas menores que a temperatura crítica ( $T_c = 3.34 - 3.37$  conforme obtida no capítulo 2.3) é diferente de zero em uma proporção muito maior que para a magnetização (da ordem de  $10^{-1}$ ) tal como esperado para os vidros de spins; estes valores do parâmetro de ordem não foram normalizados tal como a magnetização (equação 2.42) por isso, para baixas temperaturas  $q_{EA}$  e  $q(T, \delta T)$  são diferentes de zero. Além disso, para baixas temperaturas (menores que 1.0) há uma diferença apreciável entre as configurações a uma temperatura  $T$  e a uma temperatura  $T + \delta T$  e é esta diferença que vai sinalizar ou não a presença de caos. Por outro lado, a curva da magnetização apresenta um pequeno pico ao redor da temperatura de transição ainda os valores da magnetização sejam pequenos, da ordem de  $\pm 10^{-3}$ . Porém, na média não se observa diferença apreciável entre os valores calculados para a configuração não perturbada  $m(T)$  e perturbada  $m(T + \delta T)$ , não podendo se obter muita informação sobre o comportamento caótico do sistema.

Para analisar o comportamento caótico estudou-se o desvio  $\Delta q$  do parâmetro de ordem  $q_{EA}$ :

$$\Delta q = q_{EA} - q(T, \delta T), \quad (3.1)$$

onde  $q(T, \delta T)$  é a sobreposição dependente da temperatura definida como:

$$q^* = q(T, \delta T) = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle m_i(T) \rangle_J \langle m_i(T + \delta T) \rangle_J \right], \quad (3.2)$$

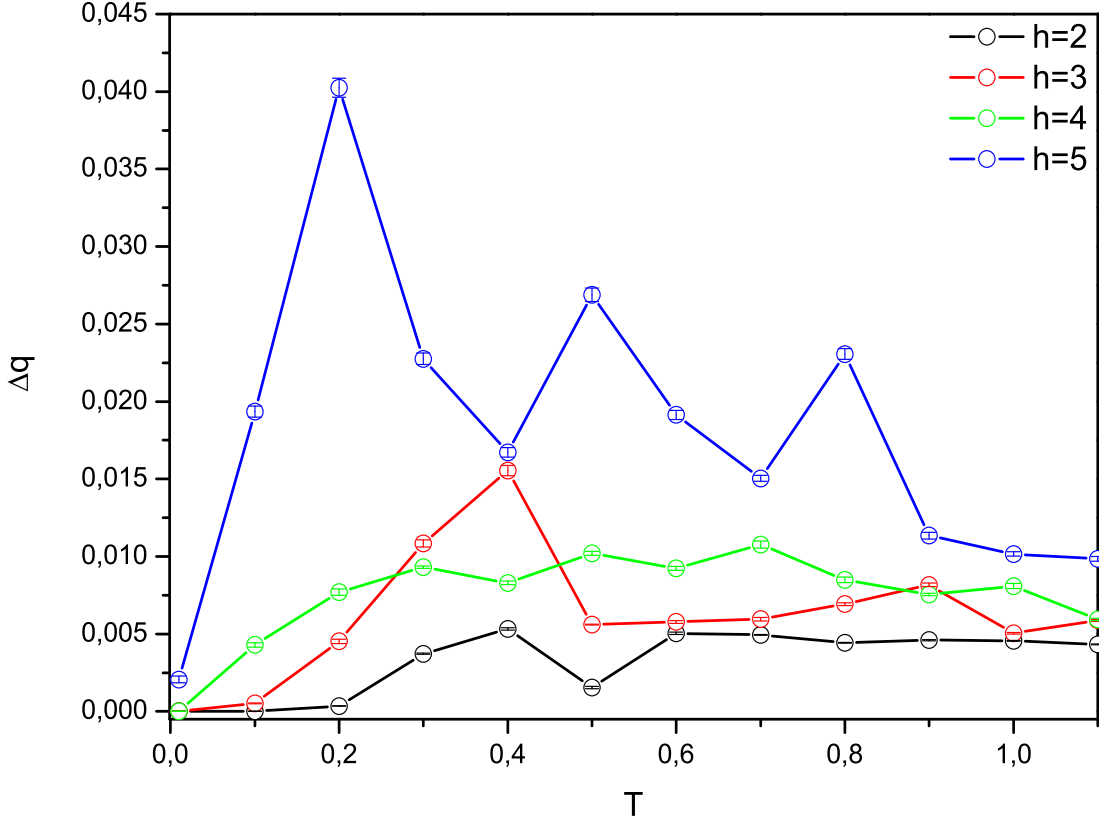
$[\dots]_J$  significa que a magnetização local,  $m_i$ , a uma temperatura  $T$  e  $T + \delta T$  foram calculadas com a mesma realização de acoplamentos  $J$ .

Quando  $\Delta q$  cresce significativamente com o aumento do tamanho da rede se espera um comportamento caótico induzido pela temperatura. No caso contrário quando  $\Delta q$  diminui ou permanece constante com aumentos do tamanho da rede se diz que o sistema não é sensível a pequenas variações de temperatura.

Na figura 3.2 mostram-se curvas da quantidade  $\Delta q$  em função da temperatura num intervalo entre  $T = 0.01$  e  $T = 1.0$  para diferentes hierarquias ( $h = 2, h = 3, h = 5$ )<sup>1</sup>; delas se vê que há um comportamento oscilante de  $\Delta q$  e predominantemente crescente com respeito a  $h$ , características comuns num sistema caótico. Os valores máximos de  $\Delta q$  ocorrem nas temperaturas  $T = 0.2, 0.5$  e  $0.8$  para  $h = 5$ , onde observa-se que as flutuações de  $\Delta q$  crescem com o aumento da rede, e além disso,  $\Delta q$  cresce em uma proporção maior

<sup>1</sup>O aumento de hierarquias na rede implica aumento de tamanho da rede portanto ao longo do texto falaremos indistinguívelmente de uma ou da outra expressão.

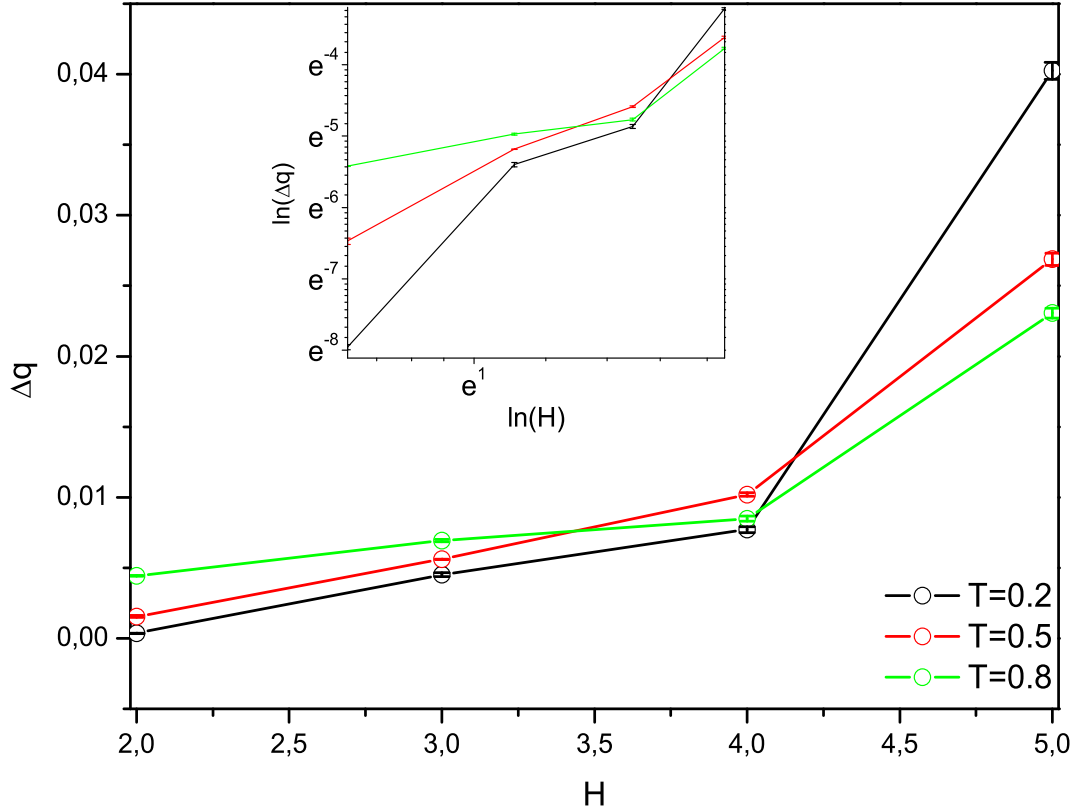
para baixas temperaturas; porém, em todos os casos, observa-se que  $\Delta q \rightarrow 0$  quando  $T \rightarrow 0$ .



**Figura 3.2** Comportamento de  $\Delta q$  médio em função da temperatura do modelo com  $q = 3$ ,  $\delta T = 5 \times 10^{-2}$  e distribuição bimodal numa rede com  $d_f = 5$ , para diferentes hierarquias, a média calculada sobre 100 amostras.

Na figura 3.3 a seguir, mostra-se  $\Delta q$  médio em função do tamanho da rede, para valores de temperatura  $T = 0.2, 0.5$  e  $0.8$  sinalizando, como anteriormente foi dito, um comportamento caótico. Na inserção as ditas curvas em escala logarítmica, claramente crescem com o aumento do tamanho da rede. Este comportamento caótico pode ser explicado pela presença de um *atrator estranho* no diagrama de fluxo de renormalização nesta região de baixas temperaturas. Este atrator foi inicialmente observado por Bannavar et al. [52] como oscilações do fluxo de renormalização em direção ao ponto fixo da fase condensada. Mais recentemente Lima [50] investigou as propriedades deste atrator, caracterizando-o como um atrator *estranho* estimando seu coeficiente de Lyapunov e

considerando distribuições de probabilidades gaussianas, bimodal, exponencial e uniforme, como distribuições iniciais no modelo de Potts com  $q = 3, 4$  estados.

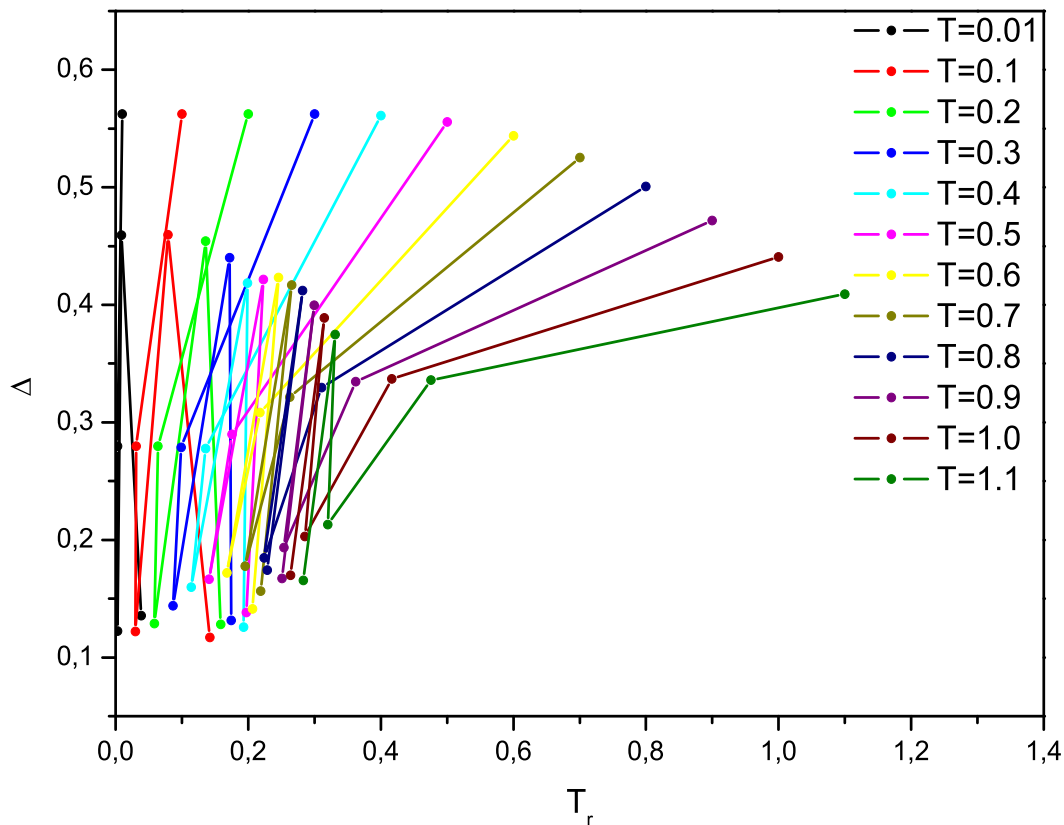


**Figura 3.3** Comportamento de  $\Delta q$  em função da hierarquia do modelo com  $q = 3$ ,  $\delta T = 5 \times 10^{-2}$  e distribuição bimodal numa rede com  $d_f = 5$ ,  $h = 5$  e 100 amostras para  $T = 0.2, 0.5$  e  $0.8$  onde  $\Delta q$  é máximo. Na inserção, o mesmo gráfico com escala logarítmica.

Para investigar o papel deste *atrator* sobre as propriedades caóticas verificou-se que os valores de temperatura onde ocorrem sinais de comportamento caótico estão situados na região do *atrator* obtido em [49]. Na figura 3.4 apresentamos os pontos iniciais desse fluxo no diagrama  $\Delta \times T_r$ , definido no capítulo 2.3. Como a presente abordagem exige uma quantidade apreciável de memória RAM para se poder calcular todos os valores exatos das interações renormalizadas, magnetizações e correlações locais<sup>2</sup>, ao contrário

<sup>2</sup>Por exemplo, para a rede com  $d_f = 5$  (que corresponde a um número de conexões  $p = 16$ ) e  $h = 5$ , foi utilizada uma memória para os sítios,  $M_s = 1Gb$ , e uma memória para as ligações,  $M_l = 1Gb$ . Além disso, se precisam também dos dados correspondentes ao sistema perturbado, isto dá um total de  $4G$  de

do método dos bancos de dados usado em [49], não foi possível reproduzir os resultados obtidos nessa referência.



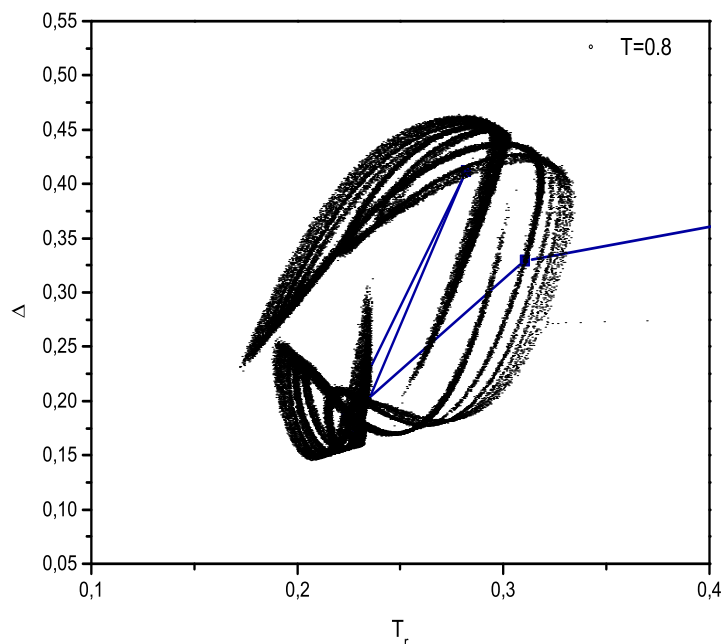
**Figura 3.4** Fluxo de renormalização do modelo com  $q = 3$  e distribuição bimodal numa rede com  $d_f = 5$ ,  $h = 5$  e 100 amostras e diferentes temperaturas iniciais. A direção do fluxo ocorre de direita para a esquerda a partir do ponto inicial.

Porém nossos dados são suficientes para concluir que efetivamente os valores locais calculados no intervalo de temperaturas ( $T = 0.1 - T = 1.0$ ) onde  $\Delta q$  aumenta com o tamanho da rede, correspondem à região onde o fluxo de renormalização cai dentro do atrator, tal como mostra a figura 3.4, onde se vê que as trajetórias do fluxo seguem um comportamento errático. Para temperaturas maiores que  $T = 1.0$  e menores que  $T = 0.1$  este comportamento errático desaparece.

---

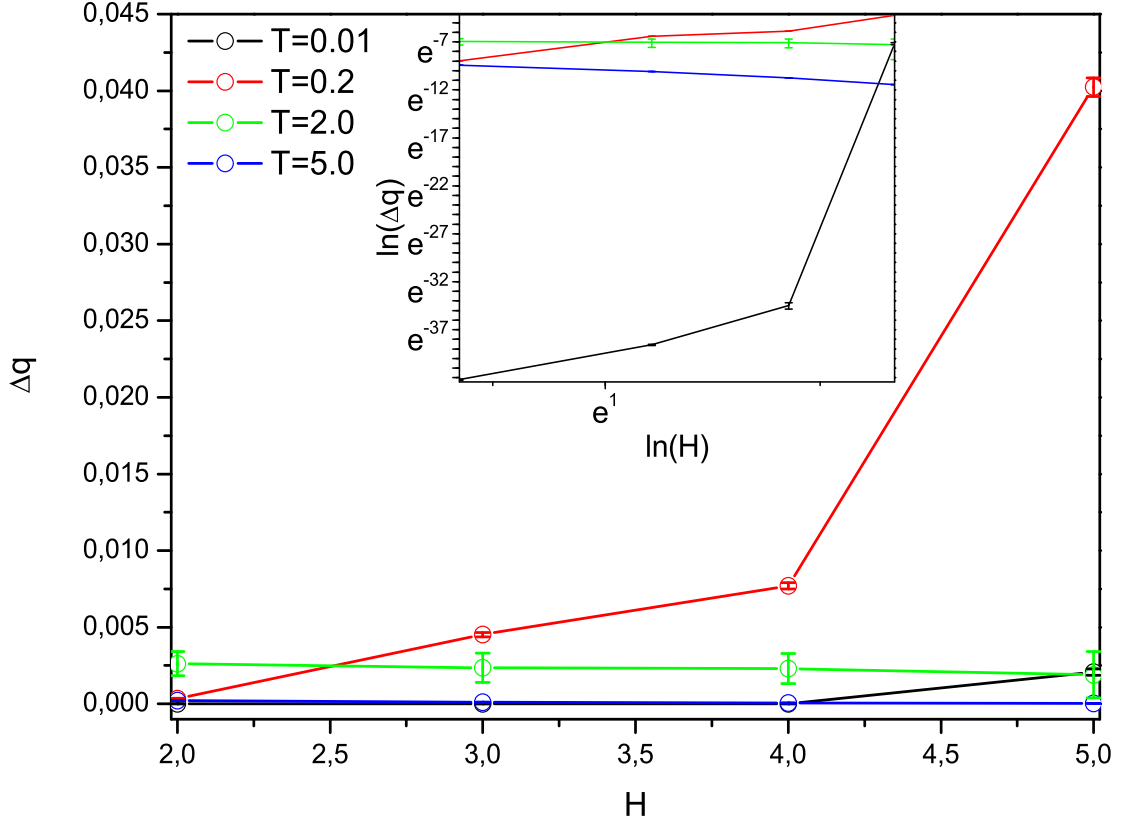
memória RAM para um sistema com  $d_f = 5$  e  $h = 5$  hierarquias, e 20Gb de memória RAM na hierarquia seguinte.





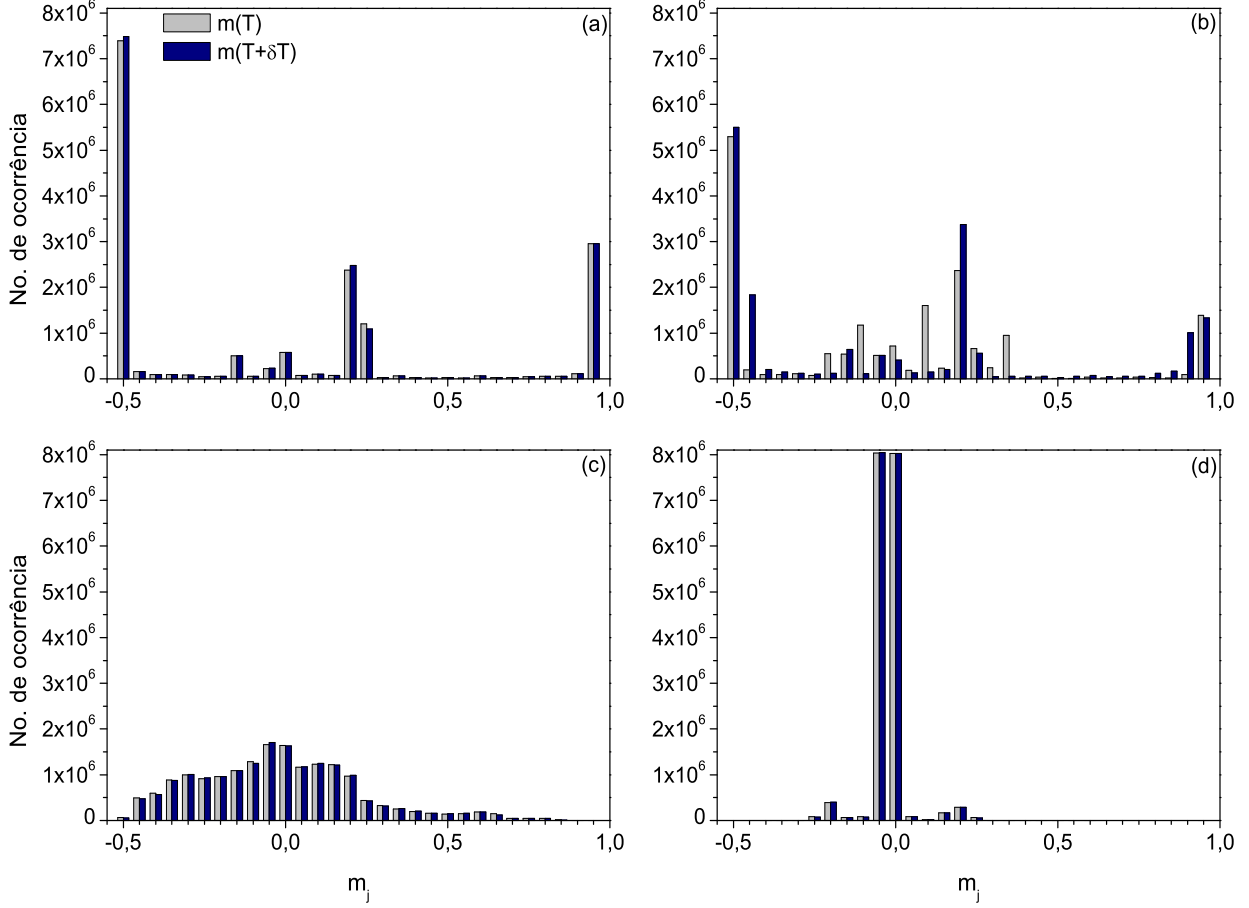
**Figura 3.5** Fluxos de renormalização do modelo com  $q = 3$  e distribuição bimodal numa rede com  $d_f = 5$ . Os pontos azuis correspondem aos dados obtidos no presente estudo para  $h = 5$  e uma temperatura inicial de  $T = 0.8$  e os pontos pretos, ao atrator observado por Lima, obtido através do método dos reservatórios com 100000 iterações.

Além disso, aqueles pontos do fluxo de renormalização obtidos coincidem com os dados na referência [49], como mostrado na figura 3.5 para uma temperatura inicial de  $T = 0.8$ . Em seguida, foi medida a grandeza  $\Delta q$  considerando temperaturas iniciais cujo fluxo de renormalização se inicia fora do intervalo do atrator (com temperaturas renormalizadas fora do intervalo  $T_r \sim 0.15$  e  $T_r \sim 0.33$ ), isto é, para uma temperatura muito menor,  $T = 0.01$ , e para temperaturas maiores, uma delas menor que  $T_c$ ,  $T = 2.0$ , e a outra maior que  $T_c$ ,  $T = 5.0$ . A figura 3.6 mostra a comparação entre estes valores com o  $\Delta q$  calculado numa temperatura *dentro* do atrator,  $T = 0.2$ . Observa-se que para temperaturas iniciais fora da região do atrator, tanto acima como abaixo, o  $\Delta q$  diminui ou aumenta mas em uma proporção muito pequena com aumentos do tamanho da rede e não há evidência de caos, portanto indicando que o comportamento caótico está diretamente relacionado com o atrator. Em escala logarítmica, como na inserção da figura 3.6, acompanhamos este comportamento,  $\Delta q$  aumenta somente para as curva com  $T = 0.2$ ,  $0.01$ , neste último caso o aumento é muito pequeno comparado com aquele observado em  $T = 0.2$ .



**Figura 3.6** Comportamento de  $\Delta q$  em função da hierarquia do modelo com  $q = 3$ ,  $\delta T = 5 \times 10^{-2}$ , com uma distribuição bimodal numa rede com  $d_f = 5$  e calculados para 100 amostras nas temperaturas iniciais (a)  $T = 0.01$ ; (b)  $T = 0.2$ ; (c)  $T = 2.0$ ; (d)  $T = 5.0$ .  $T = 0.2$  corresponde a uma temperatura na faixa do atrator estranho, enquanto que  $T_c \approx 3.34 - 3.37$ .

Por outro lado é interessante ver como variam as propriedades locais do sistema em temperaturas dentro e fora daquelas do atrator na configuração perturbada e não perturbada. Uma forma de estimar esta variação em toda a rede é através da construção de histogramas em diferentes temperaturas. Por exemplo, um histograma da magnetização nos dirá quantos sítios na rede terão certo valor de magnetização e assim será possível comparar diretamente estes valores para  $m(T)$  e  $m(T + \delta T)$ . Os histogramas apresentados aqui correspondem a uma só amostra, pois não se encontrou diferença apreciável nos histogramas da média, como esperado, já que a quantidade  $\Delta q$  mede a diferença entre as configurações amostra por amostra.

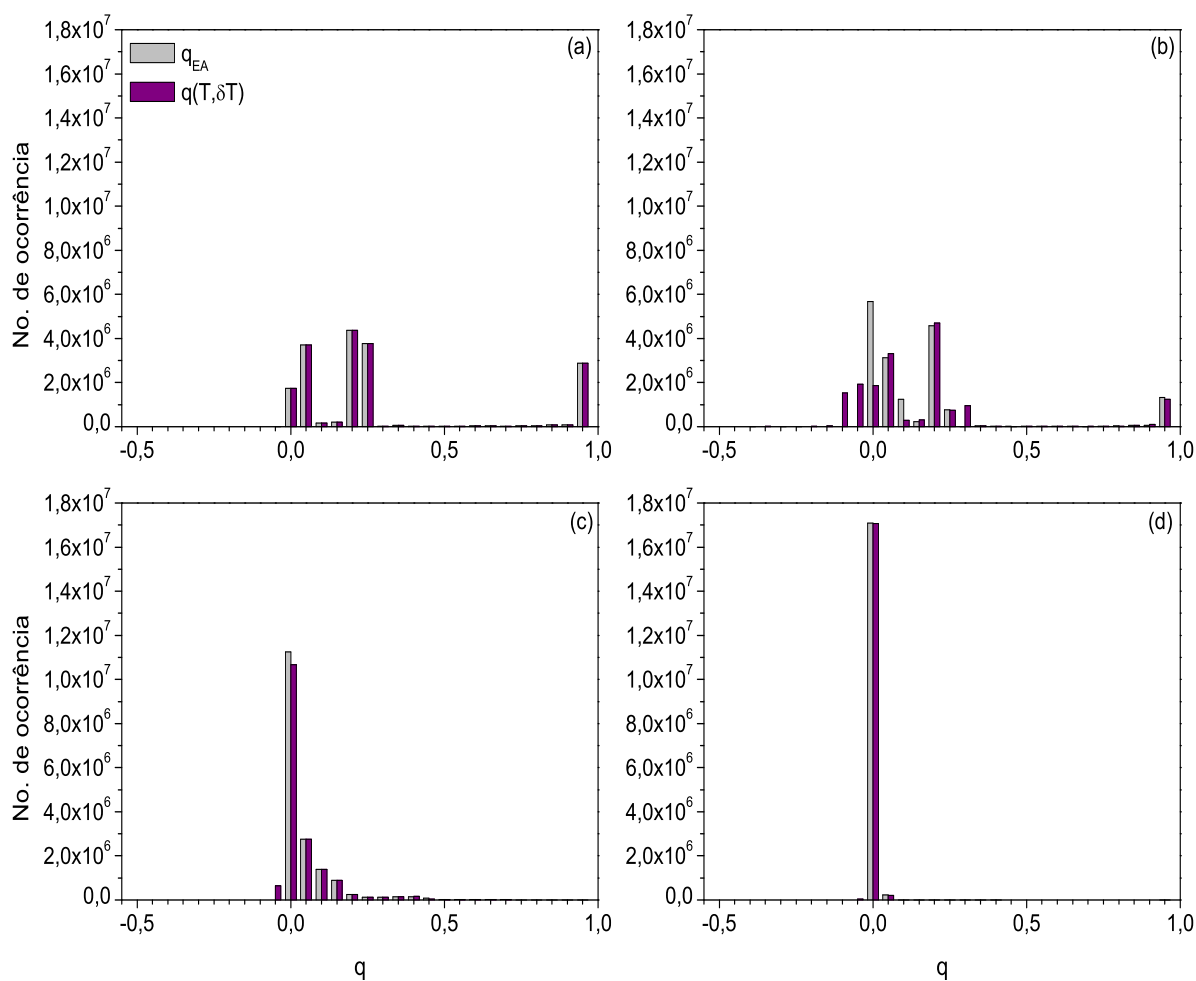


**Figura 3.7** Histogramas da magnetização local do modelo com  $q = 3$ ,  $\delta T = 5 \times 10^{-2}$  e distribuição bimodal numa rede com  $d_f = 5$ ,  $h = 5$ , uma amostra e diferentes temperaturas (a)  $T = 0.01$ ; (b)  $T = 0.2$ ; (c)  $T = 2.0$ ; (d)  $T = 5.0$ .  $T = 0.2$  corresponde a uma temperatura na faixa do atrator estranho, enquanto que  $T_c \approx 3.34 - 3.37$ .

A figura 3.7 contém os histogramas da magnetização para  $T = 0.01, 0.2, 2.0$  e  $5.0$ , como pode se ver os valores da magnetização local estão limitados entre  $-0.5$  e  $1.0$  tal como esperado para o modelo de Potts com  $q = 3$  estados. Para  $T = 0.01$ , conforme mostra a figura 3.7a, a distribuição da magnetização ao longo da rede é irregular porém a maior parte de sítios tomam os valores  $m_j = -0.5, 0.2, 1.0$  e não há muita diferença entre o histograma para uma amostra em  $T$  e  $T + \delta T$ . Dentro da região do atrator,  $T = 0.2$  a distribuição da magnetização é um pouco mais irregular que o caso anterior, mas a diferença entre os dois histogramas a  $T$  e  $\delta T$  é apreciável, como apresentado na figura 3.7b. Em  $T = 2.0 < T_c$  e fora do atrator na fase vidro de spins, como mostrado na figura

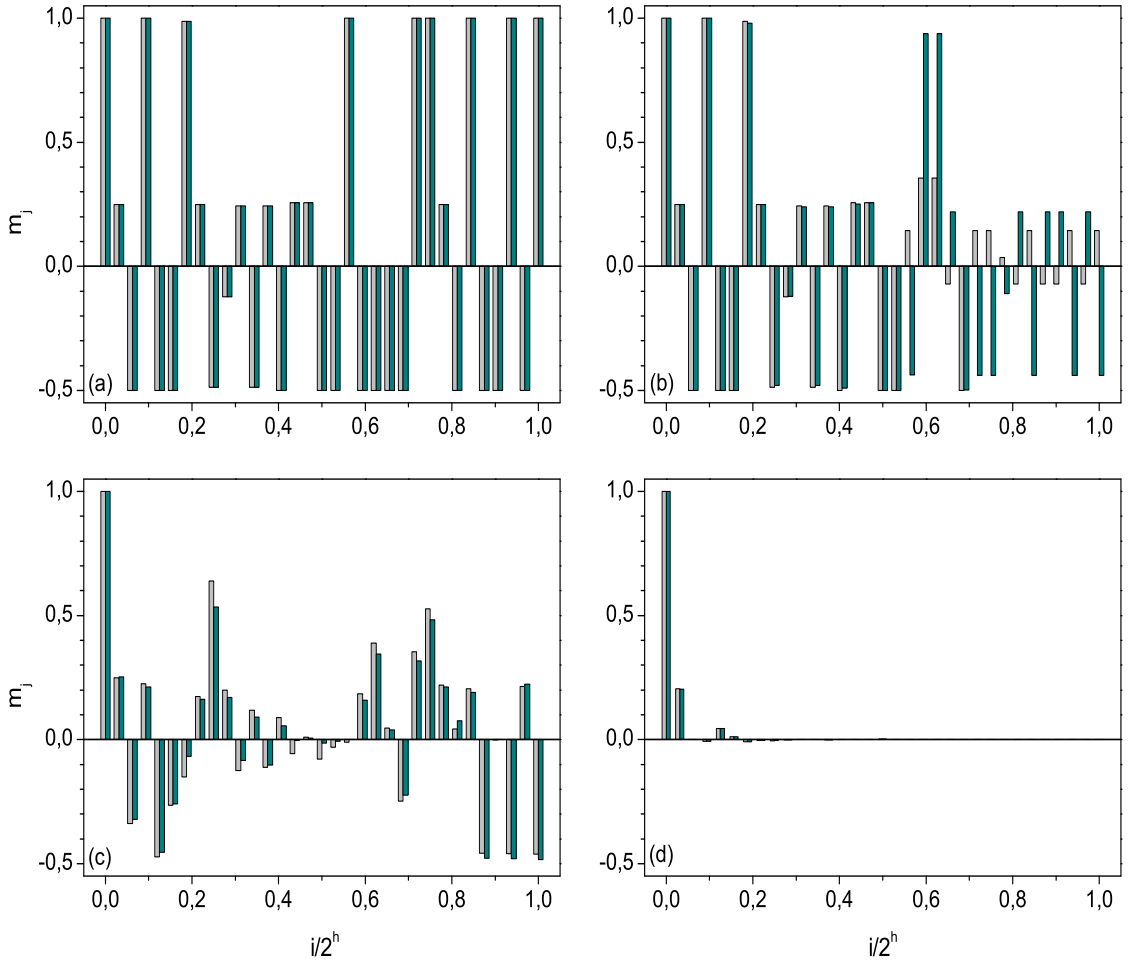
3.7c, as magnetizações estão organizadas de uma forma mais regular tomando qualquer valor entre  $m_j = -0.5$  e  $m_j = 1.0$ . Finalmente, para  $T = 5.0$ , figura 3.7d, os valores das magnetizações locais são próximos a zero caracterizando a fase paramagnética.

Além disso, para  $T = 0.2$ , o histograma da magnetização local do sistema perturbado difere consideravelmente daquele do sistema não perturbado, esta diferença é quase imperceptível para as outras temperaturas, tanto para temperaturas menores como temperaturas maiores que a temperatura crítica.



**Figura 3.8** Histogramas do parâmetro de ordem local do modelo com  $q = 3$ ,  $\delta T = 5 \times 10^{-2}$  e distribuição bimodal numa rede com  $d_f = 5$ ,  $h = 5$ , uma amostra e diferentes temperaturas (a)  $T = 0.01$ ; (b)  $T = 0.2$ ; (c)  $T = 2.0$ ; (d)  $T = 5.0$ .  $T = 0.2$  corresponde a uma temperatura na faixa do atrator estranho, enquanto que  $T_c \approx 3.34 - 3.37$ .

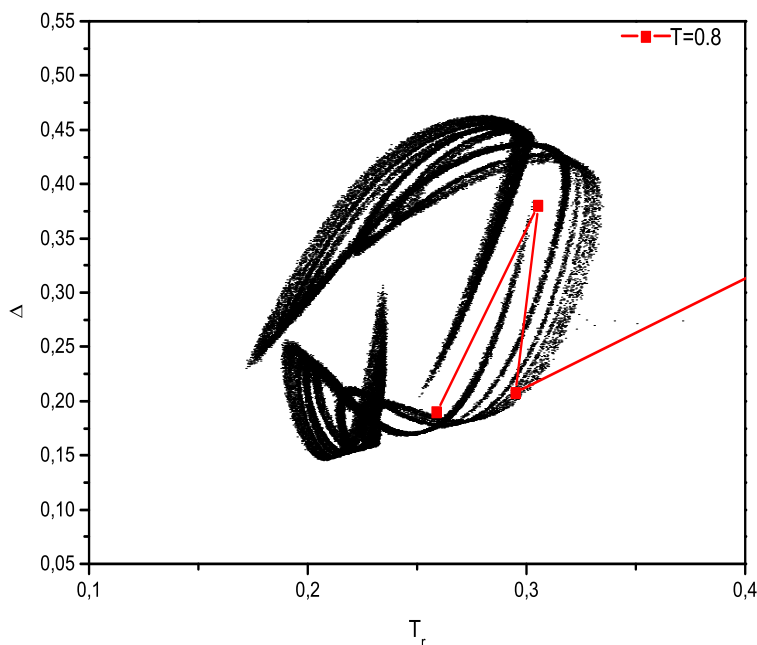
No caso dos histogramas para o parâmetro de ordem EA local e sua respectiva sobreposição  $q(T, \delta T)$ , mostrados na figura 3.8, o comportamento é similar ao observado para a magnetização. Em 3.8a vê-se que todos os valores de  $q$  são positivos e pouco diferem entre si para  $T$  e  $T + \delta T$ . Para a figura 3.8b, há uma evidente discrepância entre os valores obtidos para  $T$  e  $T + \delta T$ . Isso também se manifesta pela presença de valores negativos indicando reversão de sinal para a magnetização quando  $T$  varia com  $T + \delta T$ . Em 3.8c esse último comportamento não é observado. Para  $T > T_c$ , a figura 3.8d está de acordo com a previsão da fase paramagnética.



**Figura 3.9** Perfil da magnetização local do modelo com  $q = 3$ ,  $\delta T = 5 \times 10^{-2}$  e distribuição bimodal numa rede com  $d_f = 5$ ,  $h = 5$ , uma amostra e diferentes temperaturas. O ponto  $i = 0$  corresponde ao sítio raiz superior  $\mu'$  e o ponto  $i = 1$  ao sítio raiz inferior  $\mu$ . ((a)  $T = 0.01$ ; (b)  $T = 0.2$ ; (c)  $T = 2.0$ ; (d)  $T = 5.0$ .  $T = 0.2$  corresponde a uma temperatura na faixa do atrator estranho, enquanto que  $T_c \approx 3.34 - 3.37$ ).

Outra maneira de investigar as propriedades locais é escolher um dos caminhos mais curtos que une os dois sítios raízes tomando, por exemplo, a magnetização local nestes sítios. Esses diagramas representativos da magnetização são conhecidos como *perfis* e são mostrados na figura 3.9, onde o eixo vertical representa o valor da magnetização e o eixo horizontal a razão entre a posição dentro da rede  $i$  e o número de sítios do caminho,  $2^h$ , desta forma a posição 0 corresponde à magnetização no sítio superior da rede ( $\mu'$ ) e o ponto 1 ao sítio inferior ( $\mu$ ), segundo a nomenclatura da figura 2.2 do capítulo 2. Tais perfis apóiam os resultados obtidos anteriormente.

Quando a distribuição inicial dos acoplamentos é gaussiana, o comportamento é similar ao observado com a distribuição bimodal, ou seja, há uma região onde  $\Delta q$  cresce para certo intervalo de temperatura e fora desta região  $\Delta q$  diminui. A região onde o atrator é observado é a mesma que para uma distribuição bimodal, tal como apresentado na figura 3.10, onde os valores obtidos nesta dissertação concordam com os dados do atrator da referência [49] para uma temperatura inicial  $T = 0.8$ .



**Figura 3.10** Fluxos de renormalização do modelo com  $q = 3$  estados e distribuição de interações gaussiana numa rede com  $d_f = 5$ . Os pontos vermelhos correspondem aos dados obtidos no presente estudo para  $h = 5$  e uma temperatura inicial de  $T = 0.8$  e os pontos pretos ao atrator obtido por Lima, obtido através do método dos reservatórios com 100000 iterações.

Uma comparação dos valores médios de  $\Delta q$  para as distribuições bimodal e gaussiana na última hierarquia ( $h = 5$ ) naquelas temperaturas onde  $\Delta q$  aumenta com o tamanho da rede é apresentada na tabela 3.1, a seguir:

**Tabela 3.1** Valores médios de  $\Delta q$  obtidos para distribuições bimodal (B) e gaussiana (G) numa rede com  $q = 3$ ,  $d_f = 5$ , 100 amostras,  $\delta T = 5 \times 10^{-2}$ .

Temperatura	$\Delta q_B$	$\Delta q_G$
0.005	$0.0061 \pm 0.0003$	$0.0020 \pm 0.0002$
0.01	$0.0021 \pm 0.0002$	$0.1107 \pm 0.0009$
0.2	$0.0402 \pm 0.0006$	$0.0372 \pm 0.0004$
2.0	$0.002 \pm 0.001$	$0.001580 \pm 0.000006$
5.0	$(2.87295 \pm 0.00008)10^{-5}$	$(2.47416 \pm 0.00006)10^{-5}$

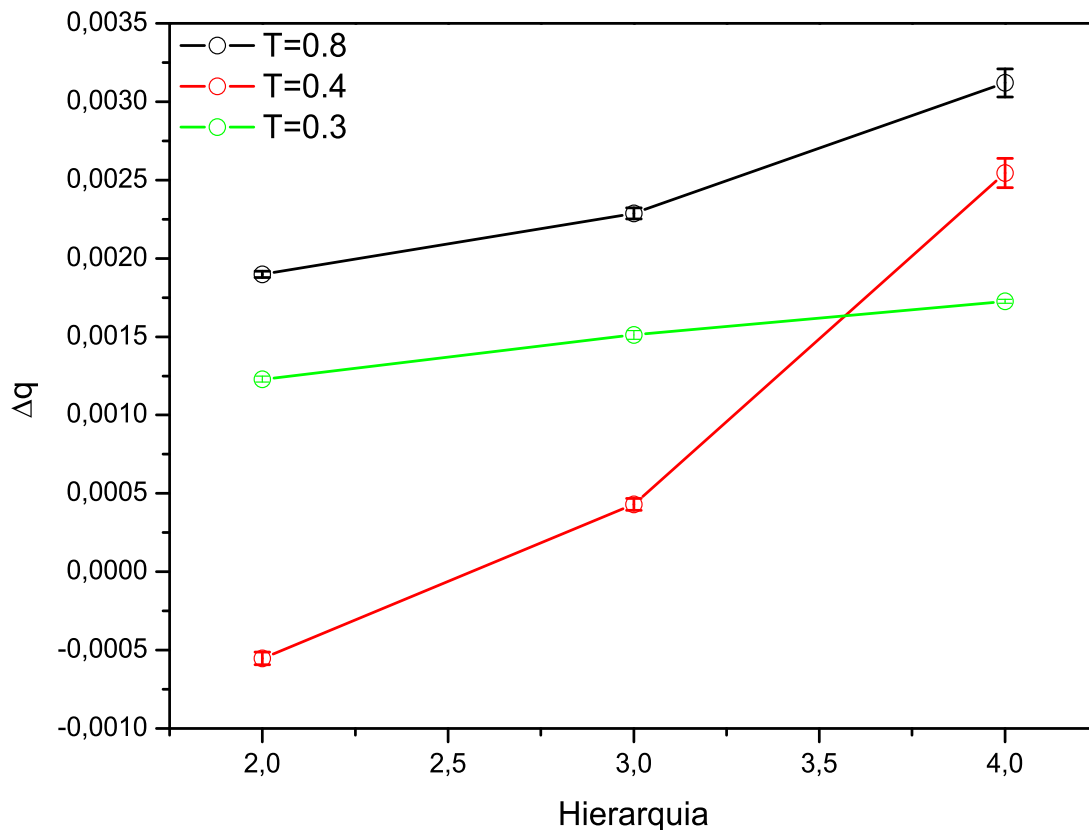
Como pode se ver o valor máximo de  $\Delta q$  ocorre para a distribuição gaussiana a  $T = 0.01$  ainda este valor esteja fora da região do atrator, porém esta pequena discrepância pode ser entendida devido às flutuações no fluxo de renormalização próximas à região do atrator cujo efeito é mais notório, dado o tamanho reduzido com o qual estamos trabalhando ( $h = 5$ ) em comparação com o caso das 100000 iterações usadas na referência [49]. Com exceção deste dado, em  $T = 0.01$ , vemos que para todas as outras temperaturas calculadas o valor médio de  $\Delta q_B$  é sempre maior que  $\Delta q_G$  e, portanto, o efeito de caos também é maior para a distribuição bimodal que para a distribuição gaussiana, de acordo com o reportado na literatura para o modelo Ising [53].

Além disso, segundo estudos realizados no modelo de vidro de spins de Ising [54], há uma maior frustração para aqueles sistemas com distribuição inicial dos acoplamentos bimodal do que para aqueles com distribuição gaussiana, então se nosso sistema se comporta desta maneira, poderia se dizer que o efeito de caos estaria também associado à presença de uma maior frustração. Porém, torna-se necessário realizar estudos acerca da degenerescência do estado fundamental do modelo de vidros de spins de Potts nas redes hierárquicas como realizado em [54] para se confirmar esse resultado.

### 3.2 REDE DIAMANTE COM $q = 4$ ESTADOS E $d_f = 5.321935$

O procedimento anterior também foi usado para o modelo de Potts com  $q = 4$  estados, porém com o máximo de  $h = 4$  hierarquias, por limitações computacionais. Nesse caso, a região de temperaturas onde se apresenta um comportamento caótico coincide com a região no caso de  $q = 3$ , porém os valores de temperatura para os quais  $\Delta q$  é maior

são diferentes, segundo a figura 3.11 os máximos se dão para as temperaturas  $T = 0.8, 0.4, 0.3$ .



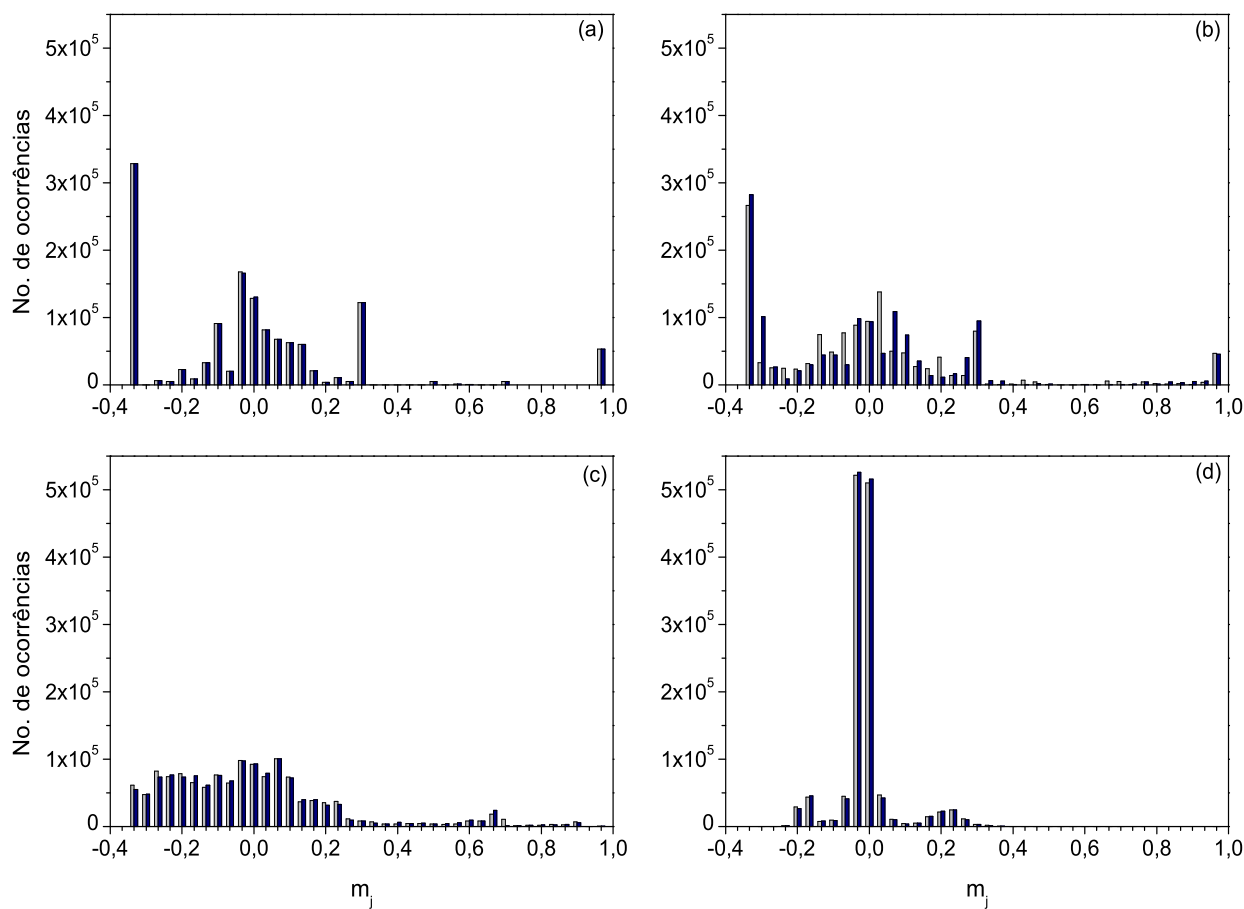
**Figura 3.11** Comportamento de  $\Delta q$  em função da hierarquia do modelo com  $q = 4$ ,  $\delta T = 5 \times 10^{-2}$  e distribuição bimodal numa rede com  $d_f = 5.321935$ ,  $h = 4$  e 100 amostras para  $T = 0.8, 0.4$  e  $0.3$  onde  $\Delta q$  é máximo.

De acordo com a referência [50] para o modelo de Potts com  $q = 4$  estados e  $d_f = 5.321935$ , também foi observado um atrator estranho num intervalo de temperaturas renormalizadas  $T_r \in (0.1 - 0.6)$  tal como para o modelo de Potts com  $q = 3$  estados, porém com sua forma um pouco diferente. Assim, podemos concluir que aquele aumento no  $\Delta q$  está relacionado diretamente com a presença deste atrator estranho.

Também foram construídos histogramas da magnetização local para uma amostra, como se apresenta na figura 3.12. Da mesma maneira que para o caso  $q = 3$  para  $T = 0.01$ , fora do atrator, a magnetização local está distribuída irregularmente e apresenta alguns picos em  $m = -0.33, 0, 0.33$ ; para  $T = 0.8$  esta distribuição é mais irregular



é as configurações com temperatura  $T$  e  $T + \delta T$  são diferentes como na figura 3.12b. Em temperaturas numa região fora do atrator,  $T = 2.0$  (figura 3.12c) por exemplo, a distribuição das magnetizações é mais uniforme e finalmente, em  $T = 5.0$  (figura 3.12d), estão centradas em zero. O comportamento para o parâmetro de ordem concorda também com estes resultados.



**Figura 3.12** Histogramas da magnetização local do modelo com  $q = 4$ ,  $\delta T = 5 \times 10^{-2}$  e distribuição bimodal numa rede com  $d_f = 5.321935$ ,  $h = 5$ , uma amostras e diferentes temperaturas (a)  $T = 0.01$ ; (b)  $T = 0.8$ ; (c)  $T = 2.0$  ; (d)  $T = 5.0$ .  $T = 0.8$  corresponde a uma temperatura na faixa do atrator estranho, enquanto que ( $T_c \sim 4.01 - 4.03$ ).

Na tabela 3.2 mostramos as diferenças entre um sistema com distribuição distribuição gaussiana e bimodal.

**Tabela 3.2** Valores médios de  $\Delta q$  para distribuições bimodal (B) e gaussiana (G) numa rede com  $q = 4$ ,  $d_f = 5.321935$ ,  $\delta T = 5 \times 10^{-2}$  e 100 amostras.

Temperatura	$\Delta q_B$	$\Delta q_G$
0.01	$(7.2 \pm 0.5)10^{-20}$	$0.0109 \pm 0.0002$
0.8	$0.00312 \pm 0.00009$	$0.00256 \pm 0.00002$
2.0	$0.00110 \pm 0.00001$	$0.000971 \pm 0.000008$
5.0	$(7.627 \pm 0.004)10^{-5}$	$(6.433 \pm 0.002)10^{-5}$

Da mesma forma que para o caso  $q = 3$ , observa-se que o valor máximo de  $\Delta q$  corresponde a uma rede com distribuição gaussiana, porém dado que nosso sistema é ainda muito pequeno, ( $h = 4$ ), descartaremos este valor pois é possível que corresponda a flutuações do fluxo de renormalização próximas ao atrator. Seguindo a mesma linha de análise que para o modelo com  $q = 3$  estados, vemos que nas demais temperaturas o  $\Delta q$  é maior para a distribuição bimodal.

### 3.3 COMPARAÇÃO REDE DE DIAMANTE COM $q = 3$ E $q = 4$ ESTADOS

Para se ter uma idéia geral da diferença entre os dois modelos com  $q = 3$  e  $q = 4$  estados, ainda que as dimensões das redes sejam diferentes (diferentes dimensões fractais), comparamos os valores de  $\Delta q$  na hierarquia de ordem 4, pois, dadas as limitações computacionais esta foi a máxima hierarquia alcançada no caso  $q = 4$ , tal como mostrado na tabela 3.3.

**Tabela 3.3** Valores de  $\Delta q$  para distribuições bimodal (B) e gaussiana (G) numa rede com  $q = 3$  e  $q = 4$ .

T	$\Delta q_B (q = 3)$	$\Delta q_G (q = 3)$	$\Delta q_B (q = 4)$	$\Delta q_G (q = 4)$
0.2	$0.0077 \pm 0.0002$	$0.0155 \pm 0.0001$	$0.00214 \pm 0.00005$	$0.0044 \pm 0.0001$
0.8	$0.0085 \pm 0.0002$	$0.00540 \pm 0.00005$	$0.00312 \pm 0.00009$	$0.00256 \pm 0.00002$
2	$0.002 \pm 0.001$	$0.001510 \pm 0.000006$	$0.00110 \pm 0.00001$	$0.000971 \pm 0.000008$
5	$(5.7586 \pm 0.0007)10^{-5}$	$(4.951 \pm 0.063)10^{-5}$	$(7.627 \pm 0.005)10^{-5}$	$(6.433 \pm 0.002)10^{-5}$

O sistema com  $q = 3$  estados e distribuição bimodal, apresenta máximos ao redor das temperaturas  $T = 0.2$  e  $T = 0.8$  que concordam com os resultados obtidos para  $h = 5$ , porém, da figura 3.2 se vê que a variação de  $\Delta q$  em  $h = 4$  é menos abrupta que para  $h = 5$ , contudo o comportamento caótico se mantém na mesma região, da mesma maneira ocorre para a distribuição gaussiana.

Em geral, vemos que os sistemas com  $q = 3$  estados tem um valor maior de  $\Delta q$  nas duas distribuições que para o modelo  $q = 4$ , exceto para  $T = 5.0$  onde há uma pequena diferença pois as quantidades são próximas de zero ( $10^{-5}$ ).

## CONCLUSÕES

Na presente dissertação, estudamos as propriedades de caos induzido por temperatura em vidros de spins de Potts com  $q$  estados, definido numa rede hierárquica do tipo diamante com fator de escala  $b = 2$  e dimensão fractal  $d_f$ . Consideramos duas distribuições iniciais para os acoplamentos: bimodal e gaussiana. Usamos a metodologia do grupo de renormalização para obter as temperaturas críticas às quais o sistema sofre uma transição de fase e comparamos nossos resultados com os obtidos em estudos prévios [44, 49, 50] mediante o método dos reservatórios.

As magnetizações locais em cada ponto da rede foram encontradas através de equações de recorrência que relacionam as magnetizações locais com as magnetizações dos sítios raízes, e assim se estimou o valor da magnetização total e do parâmetro de ordem para uma temperatura  $T$  e uma temperatura  $T + \delta T$ . Tal como o esperado, a magnetização na fase vidros de spins para o modelo de Potts com  $q = 3$  e  $q = 4$  é próxima de zero, e o parâmetro de ordem é não nulo com uma queda na respectiva temperatura crítica. Além disso,  $q_{EA}$  e  $q(T, \delta T)$ , a baixas temperaturas apresentam uma diferença considerável.

Por outro lado, observamos que para baixas temperaturas a quantidade  $\Delta q$  aumenta com o tamanho da rede para certo intervalo de temperaturas, indicando um comportamento caótico neste intervalo. Este comportamento caótico foi explicado pela presença de um atrator estranho nos diagramas do fluxo de renormalização tal como o estudado em redes tipo diamante nos modelos  $q = 3, d_f = 5$  e  $q = 4, d_f = 5.321935$  nas referências [44, 49, 50] mediante o método dos reservatórios e 100000 iterações e confirmado em nosso estudo para redes pequenas de tamanho da rede  $h = 4, 5$  muito menor que o citado nas referências anteriores. Porém, encontramos uma pequena discrepância nos valores de  $\Delta q$  para a distribuição gaussiana em  $T = 0.01$  tanto no modelo  $q = 3$  como  $q = 4$ , pois nesta temperatura, fora do atrator, se espera que  $\Delta q$  diminua caso contrário ao que ocorre, mas esta diferença se pode atribuir a pequenas flutuações no fluxo de renormalização próximas à região do atrator.

Descartando aqueles dados no modelo  $q = 3, 4$  para a distribuição gaussiana em  $T = 0.01$ , vemos que para as todas as outras temperaturas o valor médio de  $\Delta q$  é maior, e portanto o efeito de caos também é maior para a distribuição bimodal que para a distribuição gaussiana, de acordo com o reportado na literatura para o modelo Ising [53].

Além disso, segundo estudos realizados no modelo de vidro de spins de Ising [54] há uma maior frustração para aqueles sistemas com distribuição inicial dos acoplamentos bimodal do que para aqueles com distribuição gaussiana, o qual pareceria apontar a que no modelo de Potts, a intensidade do efeito de caos estaria também associado à presença de uma maior frustração, neste caso dada pela distribuição bimodal. Seguindo esta linha de análise, se esperaria maior efeito caótico na região do atrator no modelo com  $q = 3$  que no modelo com  $q = 4$ , pois o primeiro apresenta maior frustração que o segundo ( $q = 4$ ).

Finalmente, histogramas e perfis da magnetização local e do parâmetro de ordem apóiam estes resultados, isto é, se observou uma diferença considerável nos valores de magnetização e parâmetro de ordem locais entre o sistema não perturbado com temperatura ( $T$ ) e perturbado com  $(T + \delta T)$  para temperaturas na região do atrator; fora desta região os dos histogramas a  $(T)$  e  $(T + \delta T)$  são quase indistinguíveis.

Como perspectiva futura, se propõe implementar algoritmos computacionais mais eficientes que permitam trabalhar com um número maior de hierarquias para assim esclarecer o comportamento do sistema no modelo  $q = 3, 4$  nas proximidades de  $T = 0.01$  na distribuição gaussiana. Outro ponto interessante para se estudar em sistemas caóticos, é o comportamento da correlação, o qual será deixado como um próximo estudo.

## APÊNDICE A

# GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO NO ESPAÇO REAL

Neste apêndice, vamos revisar alguns conceitos básicos dentro da teoria do grupo de renormalização.

Não existe uma definição exata do que é um grupo de renormalização, mas a idéia em que está baseado é no fato de que, na criticalidade, as propriedades de um sistema permanecem invariantes sob uma transformação de escala [55].

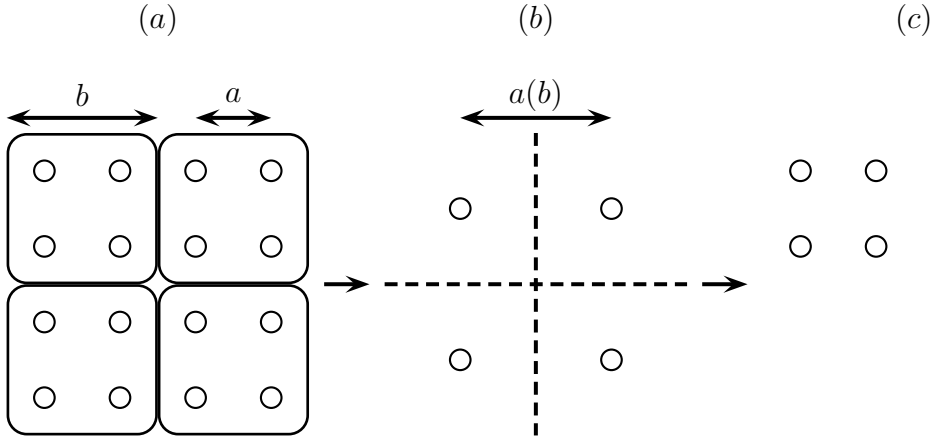
Um grupo de renormalização segue dois passos: agrupamento e renormalização [56]. O agrupamento consistirá em dividir a rede em blocos (figura A.1a) e designar um novo sítio com um único valor de spin que represente todo o conjunto de spins do bloco tal que a simetria das redes seja mantida.

Não há uma maneira única para escolher o valor dos spins transformados no agrupamento, por exemplo, pode-se usar a transformação da maioria onde se atribui o valor da maioria dos spins ao bloco, ou tomar o valor médio dos spins, ou a dizimação na qual escolhe-se qualquer um spin do bloco e se assume que este representa o comportamento de todos os demais spins (do bloco), pois se supõe que na criticalidade em média a orientação de um spin de um sítio do bloco é representativa da orientação do conjunto de spins do bloco. Se levarmos a cabo o processo de agrupamento numa rede quadrada em  $2d$  como aquela da figura A.1a, vemos que a nova rede será reduzida por um fator  $b = 2$  em cada uma das direções tal que conserve a simetria com a rede original, ou também, a rede final haverá sido reduzida por um fator total de  $b^d = 4$  com respeito à rede original. Em geral, ao fazer um agrupamento obtém-se uma rede de parâmetro  $ab$ :

$$a \rightarrow a(b) = ab,$$

onde  $a$  é a separação entre spins (parâmetro da rede) e  $b$  o tamanho do bloco (fator de agrupamento). Por outro lado, se as distâncias da rede se reescalam de tal forma que a separação entre os spins seja  $a$ , se consegue que o sistema depois do agrupamento seja isomorfo com o sistema original, desta forma se diz que o sistema foi renormalizado. Se  $R$  é uma distância no espaço real, a distância reduzida  $r = R/a$  se transforma como:

$$r \rightarrow r(b) = \frac{R}{a(b)} = b^{-1}r,$$



**Figura A.1** Esquema de renormalização numa rede quadrada (a) rede inicial; (b) agrupamento; (c) renormalização.

tal como se apresenta na figura A.1c.

### A.0.1 Teoria de blocos de Kadanoff

A teoria de blocos de Kadanoff está baseada na idéia que a regularidade de uma rede magnética pode se refletir nas estruturas de grande escala dos *domínios* ou ilhas correlacionadas [56]. Por exemplo, considerando o modelo Ising numa rede quadrada em  $2d$  de  $N$  spins, como a rede da figura A.1a, com um hamiltoniano da forma:

$$H = -\frac{K}{\beta} \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - \frac{h}{\beta} \sum_{i=1}^N S_i, \quad (\text{A.1})$$

onde  $K = \beta J$  e  $h = \beta B$ , sendo  $J$  as constantes de acoplamento,  $S_i$  os spins na posição  $i$  e  $B$  o campo magnético. Seguindo o procedimento de agrupamento descrito acima na figura A.1b, ou seja, partindo a rede em blocos de tamanho  $b$  com  $b \gg 1$  vemos que o número de blocos  $n$  resultante é dado por:

$$n = \frac{N}{b^d}, \quad (\text{A.2})$$

onde cada bloco tem  $b^d$  spins. Além disso, nomearemos a cada célula com o índice  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3, \dots, n$ ) à qual está associado um momento magnético  $\tilde{S}_\alpha$ .

Então, se o sistema está em uma temperatura perto da temperatura crítica, as seguintes suposições serão válidas:

- Cada momento no bloco  $\tilde{S}_\alpha$  se comportará como um momento de sítio  $S_j$ , isto é para acima ou para baixo. Daqui se segue que o hamiltoniano dos blocos é igual ao hamiltoniano dos sítios, mas com valores diferentes de acoplamentos ou campo magnético. Na verdade, isso é uma aproximação, pois para que os dois sistemas sejam equivalentes (células e sítios) devem incluir-se no hamiltoniano de blocos interações que não estão presentes no hamiltoniano de sítios. Assim, se partimos de um hamiltoniano só com interações entre primeiros vizinhos, depois do agrupamento surgirão interações entre spins de diferentes células, desta forma é melhor considerar o hamiltoniano inicial de spins o mais geral possível.

- Dado que o hamiltoniano de sítios e blocos são equivalentes, é de esperar que a função de partição também o seja, portanto, o potencial de Gibbs se transforma como

$$G(\tilde{\theta}_c, \tilde{h}) = b^d G(\theta_c, h), \quad (\text{A.3})$$

onde  $\theta_c = \frac{T-T_c}{T_c}$  é a temperatura reduzida que é uma variável mais apropriada pois depende somente de  $T$ .

- Finalmente, as relações entre  $\tilde{\theta}_c$ ,  $\theta_c$  e  $\tilde{h}_c$ ,  $h_c$  são

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_c &= b^y \theta_c \\ \tilde{h} &= b^x h, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde  $x$ ,  $y$  estão relacionados com os parâmetros de escalamento por

$$\begin{aligned} r &= \frac{y}{d} \\ p &= \frac{x}{d}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Lembremos que todos os expoentes críticos se podem expressar em termos de  $r$  e  $p$ .



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] L. E. Wenger and P. H. Keesom, *Phys. Rev. B* **13**, 4053 (1976).
- [2] L. E. Wenger and P. H. Keesom, *Phys. Rev. B* **11**, 3497 (1975).
- [3] A. P. Young, editor, *Spin glasses and random fields*, World Scientific Publishing, 1997.
- [4] K. Binder and A. P. Young, *Rev. Mod. Phys.* **58**, 801 (1986).
- [5] P. Granberg, L. Sandlund, P. Nordblad, P. Svedlindh, and L. Lundgren, *Phys. Rev. B* **38**, 7097 (1988).
- [6] E. Vincen, *Ageing and the Glass Transition*, chapter Ageing, Rejuvenation and Memory: The Example of Spin-Glasses, pages 7–60, Springer Berlin / Heidelberg, 2007.
- [7] H. G. Katzgraber and F. Krzakala, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 017201 (2007).
- [8] E. Marinari, G. Parisi, F. Ricci-Tersenghi, and J. J. Ruiz-Lorenzo, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **33**, 2373 (2000).
- [9] V. Cannella and J. A. Mydosh, *Phys. Rev. B* **6**, 4220 (1972).
- [10] S. Ohigashi, S. Niidera, and F. Matsubara, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* **310**, 1532 (2007), Proceedings of the 17th International Conference on Magnetism, The International Conference on Magnetism.
- [11] M. Östh, D. Hérisson, and P. Nordblad, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* **310**, e525 (2007), Proceedings of the 17th International Conference on Magnetism, The International Conference on Magnetism.
- [12] E. P. Raposo and M. D. Coutinho-Filho, *Phys. Rev. B* **57**, 3495 (1998).
- [13] S. F. Edwards and P. W. Anderson, *Journal of Physics F: Metal Physics* **5**, 965 (1975).
- [14] D. Sherrington and S. Kirkpatrick, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1792 (1975).
- [15] J. R. L. de Almeida and D. J. Thouless, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **11**, 983 (1978).
- [16] N. Kawashima and H. Rieger, ArXiv Condensed Matter e-prints (2003).

- [17] G. Parisi, Phys. Rev. Lett. **50**, 1946 (1983).
- [18] D. S. Fisher and D. A. Huse, Phys. Rev. B **38**, 386 (1988).
- [19] E. Marinari, G. Parisi, and J. J. Ruiz-Lorenzo, *Spin glasses and random fields*, chapter Numerical simulations of spin glass systems, pages 59–98, World Scientific Publishing, 1997.
- [20] M. A. Moore, H. Bokil, and B. Drossel, Phys. Rev. Lett. **81**, 4252 (1998).
- [21] D. J. Thouless, P. W. Anderson, and R. G. Palmer, Journal of Magnetism and Magnetic Materials **35**, 593 (1977).
- [22] B. W. Southern and A. P. Young, Journal of Physics C: Solid State Physics **10**, 2179 (1977).
- [23] R. B. Griffiths and M. Kaufman, Phys. Rev. B **26**, 5022 (1982).
- [24] S. Prakash and I. A. Campbell, Physica A: Statistical and Theoretical Physics **235**, 507 (1997).
- [25] L. P. Kadanoff, Annals of Physics **100**, 359 (1976).
- [26] J. R. Banavar and A. J. Bray, Phys. Rev. B **35**, 8888 (1987).
- [27] T. Aspelmeier, Phys. Rev. Lett. **100**, 117205 (2008).
- [28] F. Krzakala and O. C. Martin, Eur. Phys. J. B **28**, 199 (2002).
- [29] F. Ritort, Phys. Rev. B **50**, 6844 (1994).
- [30] T. Aspelmeier and A. Braun, Phys. Rev. B **81**, 094439 (2010).
- [31] T. Aspelmeier, A. J. Bray, and M. A. Moore, Phys. Rev. Lett. **89**, 197202 (2002).
- [32] T. Rizzo and A. Crisanti, Phys. Rev. Lett. **90**, 137201 (2003).
- [33] G. Parisi and T. Rizzo, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **43**, 235003 (2010).
- [34] F. Krzakala and J.-P. Bouchaud, EPL (Europhysics Letters) **72**, 472 (2005).
- [35] M. Nifle and H. J. Hilhorst, Phys. Rev. Lett. **68**, 2992 (1992).
- [36] M. Ney-Nifle, Phys. Rev. B **57**, 492 (1998).
- [37] F. Y. Wu, Rev. Mod. Phys. **54** (1982).
- [38] R. Kotecký, J. Salas, and A. D. Sokal, Phys. Rev. Lett. **101**, 030601 (2008).
- [39] F. D. Nobre and E. M. F. Curado, Phys. Rev. E **66**, 036107 (2002).

- [40] G. Cwilich and T. R. Kirpatrick, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **22**, 4971 (1989).
- [41] W. Gotze and L. Sjogren, *Reports on Progress in Physics* **55**, 241 (1992).
- [42] C. Brangian, W. Kob, and K. Binder, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **36**, 10847 (2003).
- [43] L. d. Silva, E. M. F. Curado, S. Coutinho, and W. Martinez, *Phys. Rev. B* **53**, 6345 (1996).
- [44] G. Camelo-Neto, W. de Lima, S. Coutinho, and W. A. M. Morgado, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **342**, 83 (2004), Proceedings of the VIII Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena.
- [45] F. Iglói and L. Turban, *Phys. Rev. B* **80**, 134201 (2009).
- [46] C. Tsallis and S. Levy, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 950 (1981).
- [47] E. M. F. Curado and J. L. Meunier, *Physica A: Statistical and Theoretical Physics* **149**, 164 (1988).
- [48] G. Camelo-Neto, *Sistemas Complexos Desordenados: aspectos dinâmicos e termodinâmicos*, PhD thesis, UFPE, 2003.
- [49] W. de Lima, *Modelo de potts com acoplamentos aleatórios em redes hierárquicas*, Master's thesis, UFPE, 2004.
- [50] W. de Lima, *Modelo de Potts com interações aleatórias competitivas*, PhD thesis, Universidade Federal de Paraíba, 2008.
- [51] W. A. M. Morgado, S. Coutinho, and E. M. F. Curado, *Journal of Statistical Physics* **61**, 913 (1990).
- [52] J. R. Banavar and A. J. Bray, *Phys. Rev. B* **38**, 2564 (1988).
- [53] M. C. de Moura and S. Coutinho, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* **272-276**, 1282 (2004), Proceedings of the International Conference on Magnetism (ICM 2003).
- [54] E. M. F. Curado, F. D. Nobre, and S. Coutinho, *Phys. Rev. E* **60**, 3761 (1999).
- [55] J. M. Yeomans, *Statistical Mechanics of Phase Transitions*, Oxford Science Publications, 1992.
- [56] W. D. McComb, *Renormalization methods, a guide for beginners*, Oxford University Press, 2004.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)