

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Coordenação dos Cursos de Pós-Graduação em
Física

Dissertação de Mestrado

Estudo de Modelos de Campos Escalares

Altemar Lobão de Sousa Junior

João Pessoa
-2010-

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Coordenação dos Cursos de Pós-Graduação em
Física

Altemar Lobão de Sousa Junior

Estudo de Modelos de Campos Escalares

Defesa apresentada à Universidade
Federal da Paraíba como requisito
parcial para a obtenção do título de
Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Dionisio Ba-
zeia Filho

João Pessoa
-2010-

Altemar Lobão de Sousa Junior.

Estudo de Modelos de Campos Escalares

77 páginas

Dissertação (Mestrado) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza. Departamento de Física.

1. Método de Deformação
2. Defeitos topológicos
3. Q-ball

Universidade Federal da Paraíba. Departamento de Física.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Roberto Menezes da Silva
Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Pedro Pina Avelino
Universidade do Porto

Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho
Universidade Federal da Paraíba

*A meus pais
Aos meus irmãos e irmãs
A meus sobrinhos*

Epígrafe

Essa praça é um chamariz de desocupados...

Autor não identificado...

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador professor Dionísio Bazeia e ao professor Roberto Mezezes com quem tive ótimos conselhos. Agradeço a todos os demais professores que passaram por minha vida, em especial ao professor Marcio André pelo incentivo e valiosos ensinamentos da graduação.

Acima de tudo agradeço a minha família, especialmente meu pai Altemar, minha mãe Luiza (Biluca), às minhas irmãs Gabriella, Daniela e Emannelly e meu irmão Guilherme a minha querida “boa drasta” Nega além de minhas tias e meus avós. Também agradeço a meus sobrinhos Lucas, Bianca, Davi e Samuel que me dão força para continuar nos momentos difíceis.

À todo os meus amigos com quem discuto Física nos tempos de folga, em especial a meus colegas de sala Mirleide, Eduardo e Rodrigo e ao professor Victor Afonso que me ajudaram muito nessa jornada. Além de meus co-parceiros Anderson e Daniel pela vivência aprendida.

À CAPES que liberou verba para minhas pesquisas.

Resumo

Estuda-se neste trabalho duas classes de soluções de teorias de campos escalares. O primeiro capítulo aborda modelos de campos estáticos unidimensionais que dão origem a defeitos topológicos, tendo sua estabilidade assegurada por argumentos topológicos. Esse tipo de solução tem uma abordagem simples matematicamente, no entanto apresenta muito interesse físico. O segundo capítulo aborda uma teoria de campo com soluções estacionárias a qual está associada uma carga de Noether, provinda de uma simetria interna do campo. Chama-se de Q-balls os objetos descritos no segundo capítulo. O objetivo principal será utilizar o método de deformação para encontrar novas soluções tipo Q-ball.

Palavras chave: Defeitos topológicos; Método de deformação; Q-ball.

Abstract

Is studied in this work two classes of solutions of scalar field theories. The first chapter deals with one-dimensional static fields models that give rise to topological defects, having its stability assured by arguments topological. This type of solution has a simple mathematical approach, however have greatly interest physical. The second chapter discusses a field theory with stationary solutions which is associated the a Noether's charge, coming from an internal symmetry of the field. It is called Q-balls the objects described in the second chapter. The main objective will be to use the method of deformation to find new solutions type Q-ball.

Keywords: Topological defects; Deformation method; Q-ball.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	3
2	KINKS e LUMPS	6
2.1	Modelos de 1 campo	7
2.1.1	Tipos de soluções	9
2.1.2	Potenciais que suportam kink	15
2.1.3	Potenciais que suportam lump	16
2.2	Estados BPS	18
2.3	Estabilidade linear	20
2.3.1	Conexão com mecânica quântica supersimétrica	22
3	Q-BALLS	24
3.1	Um pouco de história - Q-balls em teorias de bariogênese.	24
3.2	Breve apresentação	27
3.2.1	Soluções solitônicas	27
3.2.2	O que são Q-balls?	28
3.3	Construção das soluções	31
3.3.1	Limites e condição de existência	35

3.4	Estabilidade	37
3.4.1	Estabilidade absoluta	38
3.4.2	Estabilidade clássica	39
3.4.3	Estabilidade contra fissão	40
3.4.4	Decaimento em férmions	40
4	DEFORMAÇÃO DE Q-BALLS	42
4.1	Potenciais polinomiais	43
4.2	Método de deformação	44
4.2.1	Deformação de solução kink	46
4.3	Deformação de Q-balls	49
4.3.1	Formalismo	50
4.3.2	Exemplo 1	52
4.3.3	Exemplo 2	58
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	62
A	EQUAÇÃO DE MOVIMENTO	64
B	TENSOR ENERGIA MOMENTO	68
	Referências Bibliográficas	73

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Sistemas físicos modelados por campos escalares têm sido utilizados em vários ramos da física. Tenha visto, por exemplo, o estudo de defeitos topológicos em teorias com quebra espontânea de simetria, que surgem em modelos em gravitação e em matéria condensadas.

Alem disso, é fato que, em algumas teorias de campos escalares complexos há o aparecimento de uma classe de soluções estendidas carregadas que por possuírem simetria esférica são chamadas Q-ball.

Soluções tipo Q-ball aparecem, por exemplo, na teoria de bariogênese de Affleck-Dine [1] ao se tentar compreender a aparente assimetria bariônica do universo [2].

Este trabalho tem como objetivo estudar modelos de campos escalares, tendo como foco principal soluções tipo Q-balls que surgem em uma teoria de campos escalares complexo que preserva uma simetria contínua global.

Apesar de Q-ball ser nosso principal objetivo, iniciaremos, por simplicidade de compreensão, revisando uma teoria de campos mais simples: a teoria de um campo escalar real. Teorias desse tipo são de fácil entendimento e como veremos,

possuem grande importância no estudo de defeitos topológicos. Para simplificar ainda mais, abordaremos apenas os aspectos unidimensionais nos casos estudados. Com as soluções unidimensionais sendo chamados de kinks e lumps.

O trabalho se estende da seguinte forma:

No capítulo inicial faremos uma revisão de como encontrar soluções tipo kink e lump a partir de uma teoria de campo. Veremos que as soluções tipo kink tem uma característica topológica, enquanto que as tipo lump são não-topológicas. Resolveremos as equações de movimento para soluções estáticas, e analisaremos a estabilidade linear das soluções. Além disso, utilizaremos o método de Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfeld para encontrar soluções de energia mínima que serão nomeados "*estados BPS*". Por fim apresenta-se uma conexão de teorias de campos escalares com mecânica quântica supersimétrica.

No segundo capítulo estuda-se essencialmente configurações de campos escalares carregados que dão origem a Q-balls. Dessas configurações de campos surgem uma classe de objetos não-topológicos que são esfericamente simétricos no espaço das posições e giram com velocidade angular constante no espaço interno. Será explicado o processo de formação e as condições de existência. Por fim, impõem-se as condições necessárias para estabilidade das soluções.

No terceiro capítulo serão abordadas nossas contribuições. Será estudado de início uma classe geral de potenciais polinomiais, no qual temos o aparecimento de soluções tipo Q-ball. Faremos uma revisão de métodos de deformação, no qual soluções de novas teorias são encontradas através das soluções de teorias já estabelecidas. Nossa contribuição se concentrará na deformação de Q-ball. Tentaremos encontrar novas teorias deformando soluções de Q-ball para potenciais polinomiais. É mostrado que uma nova faixa de soluções pode ser encontrada por esse método,

apenas pela deformação da parte dependente da posição das soluções antigas.

Por fim apresentaremos as conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

KINKS e LUMPS

Neste capítulo estuda-se a formação de defeitos topológicos no contexto de teorias de campos escalares. A formação de defeitos é explicada pelo mecanismo de quebra espontânea de simetria. Nos focaremos essencialmente em defeitos unidimensionais chamados de *kinks* e *lumps* conforme a existência ou não do que chamaremos de carga topológica. Esses dois tipos de defeitos, como o nome pressupõe, têm sua estabilidade justificada na topologia. O exposto neste capítulo é uma pequena parte de um assunto muito vasto, porém é suficiente para compreensão deste trabalho. O desenvolvimento se dá da forma que apresentamos a seguir.

2.1 Modelos de 1 campo

Dado um campo invariante sob transformação de Lorentz, ou seja, um campo escalar, pode-se construir a seguinte densidade Lagrangiana para campos reais,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (2.1)$$

onde para cada $V(\phi)$ específico, tem-se um problema em particular a ser estudado¹.

Devemos agora minimizar a ação na forma

$$S = \int \int \mathcal{L} dt d^D x$$

onde D é a dimensão no espaço.

Fazendo isso² encontra-se a equação do movimento como,

$$\square \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (2.2)$$

onde \square é o operador D'Alambertiano.

Se o campo está em (1+1) dimensões, utilizando a métrica com diagonal (1, -1), temos,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (2.3)$$

A energia para soluções localizadas $\phi(x)$ governadas pela lagrangiana (2.1) é dada pela integral, sobre todo o espaço, da componente T^{00} do tensor Energia-

¹Ao longo dessa dissertação adotaremos a seguinte notação: os índices gregos como μ ou ν assumem $\{0, 1, 2, 3\}$ e o símbolo ∂_μ denotam a derivada covariante com relação a uma coordenada espaço-temporal, ou seja, $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$...

²Ver apêndice A.

Momento.

O tensor *Energia-Momento* é³,

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

e com a densidade de Lagrangiana (2.1) a componente T^{00} fica,

$$T^{00} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) + V(\phi)$$

Assim, a energia das soluções é dada por,

$$E = \int d^D x T^{00} = \int d^D x \left[\overbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2}^I + \underbrace{\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2}_{II} + \overbrace{V(\phi)}^{III} \right] \quad (2.4)$$

onde D novamente é a dimensão no espaço. Os termos I , II e III representam a parte cinética, gradiente e potencial da energia total, respectivamente.

Resolver a equação (2.2) ou mesmo a (2.3) pode ser muito trabalhoso dependendo do potencial $V(\phi)$ escolhido. No entanto, é possível propor algumas condições que ajudam a entender qualitativamente o problema.

³Veja apêndice B.

2.1.1 Tipos de soluções

$\Rightarrow \phi$ é homogêneo e estático.

Os dois primeiros termos da equação (2.3) se anulam e temos,

$$\frac{dV}{d\phi} = 0 \Rightarrow V(\phi_i) = C$$

onde ϕ_i é uma solução e C é uma constante.

Para soluções homogêneas e estáticas em uma dimensão espacial ($D = 1$), tem-se

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} V(\phi_i) dx = V(\phi_i) \int_{-\infty}^{\infty} dx, \quad (2.5)$$

pois os dois primeiros termos da equação (2.4) se anulam.

As soluções devem ser fisicamente aceitáveis isso nos diz que devemos escolher ϕ tal que a energia seja finita. O que nos leva a assumir que devemos ter $V(\phi_i) = 0$ (para toda solução ϕ_i).

\Rightarrow **Campos Estáticos.**

Nesse caso a derivada temporal na equação (2.3) desaparece e temos

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.6)$$

Para resolver essa equação é possível utilizar o chamado *Método da Quadratura*, que consiste em reduzir a ordem de (2.6) para uma equação diferencial de primeira ordem. O método é descrito nos dois passos abaixo:

a) multiplique ambos os lados de (2.6) por $d\phi/dx$;

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} \frac{d\phi}{dx} = \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dx}$$

b) e reescreva como:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] = \frac{dV}{dx} \Rightarrow \int \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - V \right] dx = 0$$

E encontramos que,

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + C$$

onde C é uma constante.

A energia para soluções estáticas é dada por,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) + C \right]. \quad (2.7)$$

Outras Restrições.

Novamente buscaremos soluções com energia finita. Podemos analisar, a priori, algumas condições que nossa solução deve possuir.

O termo gradiente na energia, por definição, é sempre positivo logo, se assumirmos que o termo de potencial também seja positivo, para termos energia finita, uma condição necessária, porém não suficiente, é que,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \rightarrow 0$$

pois se assim não for, essa contribuição faria a integral (2.7) divergir. Não temos nenhuma garantia que a parcela gradiente não diverge em algum outro lugar entre os mínimos, por exemplo, na origem, para isso devemos impor que as soluções sejam funções suaves e diferenciáveis nessa região.

Além disso, pelo mesmo motivo, o termo de potencial também deve ir a zero

nos extremos. Supondo que existam soluções $\bar{\phi}_1$ e $\bar{\phi}_2$, que obedecem a equação $V(\bar{\phi}_1) = V(\bar{\phi}_2) = 0$, devemos impor o limite,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) \rightarrow \bar{\phi}_1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) \rightarrow \bar{\phi}_2$$

que nos diz que o segundo termo de (2.7) também se anula nos extremos. Podemos ter ainda $\bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_2$, nesse caso temos mínimos degenerados.

Isso nos faz assumir que, para termos energia finita, devemos ter $C = 0$, assim,

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2. \quad (2.8)$$

Fica claro nesse ponto que soluções estáticas tem potencial sempre positivo e isso será útil a seguir.

Com as observações acima podemos escrever o potencial na forma,

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V}$$

com $V(\phi) \geq 0$.

Estabilidade das Soluções.

A estabilidade do campo $\phi(x)$ nos extremos pode, em um sentido mais fundamental, ser entendida como consequência de uma lei de conservação topológica à qual esta relacionada uma *corrente topológica*.

O comportamento dos campos estudados aqui é de tal forma que o potencial possui múltiplos estados de vácuo (mínimos de energia). Já vimos que, para que

as soluções estáticas em uma dimensão tenham energia finita, os campos devem ir para um mínimo nos extremos.

De uma forma geral podemos dizer que, para qualquer solução localizada de teorias de campos unidimensional, tal como a solução estática $\phi(x)$, que vá para um mínimo nos extremos, ou seja, que obedece $\phi(x \rightarrow \infty) \rightarrow \bar{\phi}$, onde $\bar{\phi}$ obedece $V(\bar{\phi}) = 0$, pode ser associada a uma corrente topológica.

Para nossa solução estática a corrente topológica é definida como,

$$J_T^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi.$$

É importante notar que J_T^μ não é uma corrente de Noether, ou seja, não é uma corrente provinda de uma simetria da ação.

Podemos mostrar que a corrente é conservada, basta para isso calcular $\partial_\mu J_T^\mu$, fazendo

$$\partial_\mu J_T^\mu = \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right) = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi.$$

Temos que $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$, pois $\epsilon^{\mu\nu}$ é um tensor completamente anti-simétrico. Assim,

$$\partial_\mu J_T^\mu = -\frac{1}{2} \epsilon^{\nu\mu} \partial_\mu \partial_\nu \phi.$$

Fazendo uma mudança de variável $\mu \rightarrow \nu'$ e $\nu \rightarrow \mu'$ e trocando a ordem das derivadas temos,

$$\partial_\mu J_T^\mu = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu'\nu'} \partial_{\mu'} \partial_{\nu'} \phi$$

ou seja,

$$\partial_\mu J_T^\mu = -\partial_{\mu'} \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\mu'\nu'} \partial_{\nu'} \phi \right) = -\partial_{\mu'} J_T^{\mu'}$$

Como os índices μ e μ' são “índices mudos”, vemos que a relação só é verdadeira se tivermos $\partial_\mu J_T^\mu = \partial_{\mu'} J_T^{\mu'} = 0$. Logo a corrente J_T^μ é conservada.

Nesse caso a carga topológica relacionada a essa corrente é dada pela integral, em todo o espaço, da componente J_T^0 da corrente.

$$Q_T = \int_{-\infty}^{\infty} J_T^0 d^D x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon^{0\nu} \partial_\nu \phi d^D x$$

onde $\nu = \{0,1,2,3\}$.

No caso de ϕ ser unidimensional, temos,

$$Q_T = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{2} \phi(x = \infty) - \frac{1}{2} \phi(x = -\infty) \quad (2.9)$$

Quando $Q_T = 0$ temos soluções não-topológicas, ou seja, soluções que se comportem igualmente ao nos afastarmos, em direções opostas, do centro da solução. E apenas temos soluções topológicas quando $Q_T \neq 0$.

Um exemplo de soluções topológicas são os defeitos tipo *kink*, que são soluções de uma teoria de um campo escalar real. Esse tipo de objeto possui estabilidade garantida através de uma carga topológica. Eles se comportam de forma diferente ao nos afastarmos, em direções opostas, do centro da solução. Ou seja, como a figura 2.1.

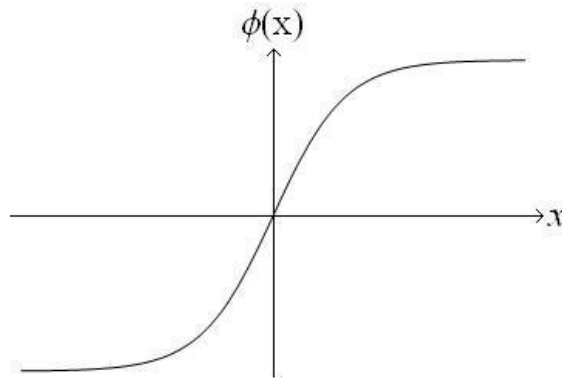


Figura 2.1: Gráfico do comportamento de uma solução tipo kink.

Um exemplo de soluções não-topológicas em uma dimensão são os defeitos tipo *lump*. Esses objetos não possuem uma carga topológica associada, sendo assim instáveis por argumentos topológicos. Veremos no segundo capítulo uma classe de objetos não-topológicos provinda de uma teoria de campo escalar complexo que possui estabilidade. Soluções tipo *lump* tem a forma da figura 2.2.

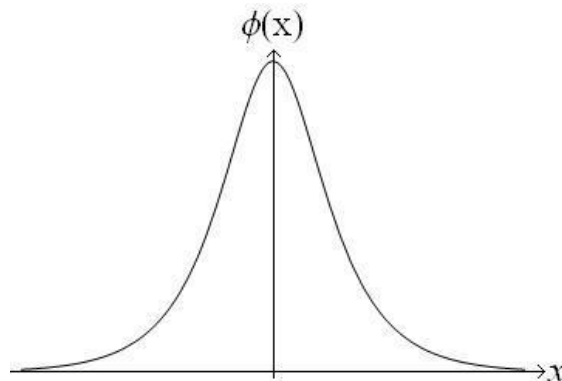


Figura 2.2: Gráfico do comportamento de uma solução tipo lump.

Vamos agora apresentar alguns potenciais que apresentam soluções do tipo kink e lump.

2.1.2 Potenciais que suportam kink

Soluções tipo kink podem ser encontradas em teorias de campo unidimensionais com um potencial na forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda(a^2 - \phi^2)^2. \quad (2.10)$$

O potencial (2.10) se comporta como o gráfico 2.3.

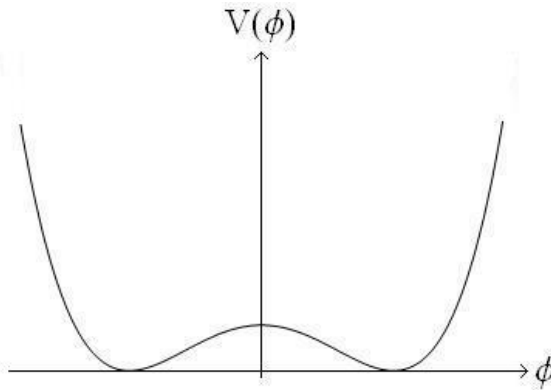


Figura 2.3: Gráfico potencial $\lambda\phi^4$, plotado para o caso adimensional $V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2$.

Vemos que o potencial (2.10) possui dois mínimos degenerados em $\phi = \pm a$. Se considerarmos que o potencial é adimensional, ao substituirmos (2.10) em (2.3) e considerando soluções estáticas, encontra-se

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2\phi(\phi^2 - 1). \quad (2.11)$$

Tendo soluções na forma

$$\phi(x) = \pm \tanh(x). \quad (2.12)$$

As soluções (2.12) possuem comportamento idêntico ao gráfico 2.1. As soluções

negativas são chamadas *anti-kink* e são a reflexão em relação ao eixo x das soluções positivas. O gráfico 2.4 mostra como se comporta um kink e o um anti-kink.

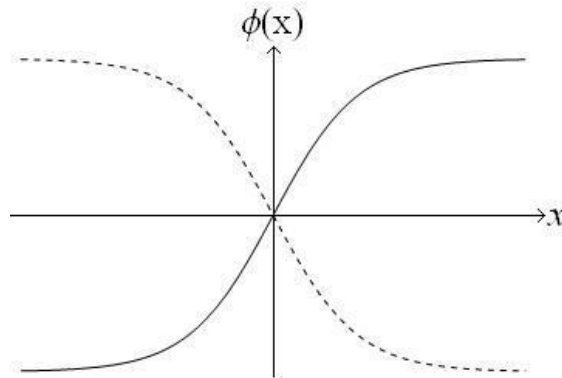


Figura 2.4: Gráfico kink (linha cheia) e anti-kink (linha pontilhada).

2.1.3 Potenciais que suportam lump

Um modelo que tem lumps como solução é o seguinte

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}\phi^4. \quad (2.13)$$

Esse potencial tem o plot dado pela figura 2.5. Vemos que possui apenas um mínimo.

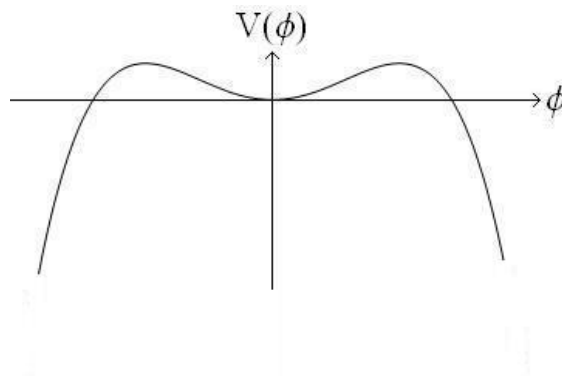


Figura 2.5: Gráfico potencial ϕ^4 invertido.

Se substituirmos (2.13) em (2.3) e novamente considerando soluções estáticas, encontra-se

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \phi - 2\phi^3, \quad (2.14)$$

que possui soluções na forma

$$\phi(x) = \pm \operatorname{sech}(x). \quad (2.15)$$

As soluções (2.15) se comportam como o gráfico 2.2. Essas soluções tem carga topológica nula pois $\phi(\infty) = \phi(-\infty)$ sendo assim instáveis do ponto de vista topológico.

Outro fato bastante interessante é notar como se comporta a densidade de energia dessas soluções. A densidade de energia para soluções estáticas é dada por

$$\rho(x) = \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2.$$

Que para as soluções (2.12) e (2.15) temos

$$\rho_{kink}(x) = \operatorname{sech}(x)^4, \quad (2.16)$$

e

$$\rho_{lump}(x) = \operatorname{sech}(x)^2 \tanh(x)^2. \quad (2.17)$$

As densidades (2.16) e (2.17) estão plotadas nos gráficos 2.6a e 2.6b respectivamente.

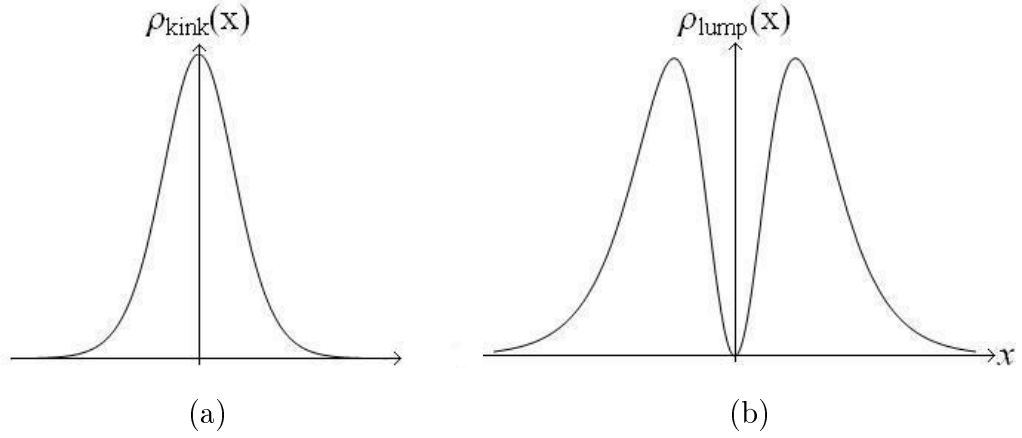


Figura 2.6: (a) Densidade de energia de kinks. (b) Densidade de energia de lumps.

Notamos que, enquanto a densidade de energia de kinks é centrada na origem temos que, para lumps a densidade de energia na origem é nula.

Na próxima seção iremos estudar potenciais positivo definido e as propriedades que surgem com esse fato.

2.2 Estados BPS

Para soluções estáticas onde $V(\phi) \geq 0$ podemos usar um método devido a *Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield* para encontrar as soluções de energia mínima [3]. As soluções do problema obtidas são chamados *Estados BPS*. Nesse caso o potencial pode ser escrito como

$$V = \frac{1}{2}W_\phi^2 \quad (2.18)$$

onde V , escrito em termos da função $W_\phi \equiv \frac{dW}{d\phi}$, é agora positivo definido. W é uma função suave do campo ϕ chamado *superpotencial*.

Assim soluções estáticas podem ser encontradas com,

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi. \quad (2.19)$$

A energia é agora dada por,

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + W_\phi^2 \right] \quad (2.20)$$

e pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi \right)^2 \pm \left(2 \frac{d\phi}{dx} W_\phi \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi \right)^2 \pm \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{dW}{d\phi} \frac{d\phi}{dx}. \end{aligned}$$

Se usarmos a equação (2.19) o primeiro termo se anula e encontramos a energia mínima como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{dW}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} dW = ||W[\phi(\infty)] - W[\phi(-\infty)]|| \quad (2.21)$$

que é a energia das soluções ou estados BPS.

Para toda teoria na forma de (2.1) onde o potencial pode ser escrito na forma de (2.18), existem soluções BPS com energia dada por (2.21). Esse formalismo nos permite encontrar as energias mínimas com facilidade, apenas analisando o comportamento do superpotencial nos extremos.

2.3 Estabilidade linear

Esta seção trata da estabilidade das soluções sob pequenas perturbações através da chamada estabilidade linear (ou clássica), em seguida mostra-se como nossa teoria de campo pode ser relacionada a uma mecânica quântica supersimétrica.

Vamos supor que a solução ϕ é da forma,

$$\phi(x,t) = \phi(x) + \eta(x,t) \quad (2.22)$$

onde $\eta(x,t)$ é uma pequena perturbação na solução estática $\phi(x)$.

Substituindo $\phi(x,t)$ na equação (2.3) encontra-se que,

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi(x,t)} = 0. \quad (2.23)$$

Fazendo uma expansão do termo de potencial,

$$\frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi(x,t)} = \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi(x)} + \eta \frac{d^2V}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi(x)} + \frac{\eta^2}{2} \frac{d^3V}{d\phi^3} \Big|_{\phi=\phi(x)} + \dots$$

Considerando até primeira ordem e substituindo na equação (2.23), temos,

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi(x)} + \eta \frac{d^2V}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi(x)} = 0$$

que, usando a equação (2.6), nos dá

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{d^2\eta}{dx^2} + u(x)\eta = 0 \quad (2.24)$$

onde $u(x) = (d^2V/d\phi^2)|_{\phi=\phi(x)}$ é uma função apenas da variável x .

Podemos considerar perturbações na forma,

$$\eta(x,t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(w_n t) \quad (2.25)$$

onde w_n deve ser real para garantir que estamos lidando com pequenas perturbações, e temos,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{dt^2} &= - \sum_n w_n^2 \eta_n(x) \cos(w_n t) \\ \frac{d^2\eta}{dx^2} &= \sum_n \frac{d^2\eta_n}{dx^2} \cos(w_n t) \end{aligned}$$

que substituindo em (2.24) resulta,

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + u(x) \right\} \eta_n(x) = w_n^2 \eta_n(x). \quad (2.26)$$

Essa é uma equação tipo Schrödinger tendo w_n^2 como auto-valor e $\eta_n(x)$ como auto-vetor. Definindo $\hat{H} \equiv u(x) - d^2/dx^2$ temos,

$$\hat{H}\eta_n(x) = E_n \eta_n(x) \quad (2.27)$$

onde $E_n = w_n^2$.

Como impomos que w_n é real, chegamos ao resultado de que $E_n > 0$ sempre, pois $w_n^2 > 0$. Portanto, para termos estabilidade clássica a condição necessária é de que nossa conexão com o problema mecânico-quântico feita pela equação (2.27) permita apenas soluções com autovalor positivo.

É possível mostrar [4], que para soluções tipo kink o menor valor de E_n é zero,

enquanto que para lumps o menor valor de E_n é menor que zero, isso nos diz que kinks são estáveis por estabilidade linear enquanto que lumps são instáveis.

2.3.1 Conexão com mecânica quântica supersimétrica

Vamos mostrar que para potenciais que podem ser escritos na forma da equação (2.18) podemos reescrever o Hamiltoniano que aparece em (2.27) como um produto de operadores e com isso encontrar uma conexão entre mecânica quântica supersimétrica e teorias de campos em uma dimensão espacial.

Primeiramente note que pela equação (2.18) tem-se,

$$\frac{dV}{d\phi} = W_\phi W_{\phi\phi} \Rightarrow \frac{d^2V}{d\phi^2} = W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi}.$$

Logo o Hamiltoniano pode ser escrito como,

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi} \quad (2.28)$$

onde \hat{H} possui apenas auto-valores positivos.

Vamos definir dois operadores S_+ e S_- como,

$$S_\pm \equiv -\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi}$$

e sendo

$$(S_\pm)^\dagger = \frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi}.$$

Vamos agora construir os operadores ($\hat{H}_\pm \equiv S_\pm^\dagger S_\pm$) aplicados em um auto-

estado ξ . Assim,

$$\hat{H}_+\xi = (S_+)^\dagger S_+\xi = \left(\frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} \right) \left(-\frac{d\xi}{dx} + W_{\phi\phi}\xi \right)$$

$$\hat{H}_-\xi = (S_-)^\dagger S_-\xi = \left(\frac{d}{dx} - W_{\phi\phi} \right) \left(-\frac{d\xi}{dx} - W_{\phi\phi}\xi \right)$$

Logo,

$$\hat{H}_+ = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi} \quad (2.29)$$

$$\hat{H}_- = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 - W_\phi W_{\phi\phi\phi} \quad (2.30)$$

Os dois operadores \hat{H}_+ e \hat{H}_- são parceiros supersimétricos, isso nos diz que dada uma teoria de campos, podemos encontrar uma “*teoria espelho*” em mecânica quântica supersimétrica. Essa afirmação também vale de forma inversa, ou seja, dada uma mecânica quântica supersimétrica, podemos encontrar uma teoria de campos compatível [5].

Note que apenas o \hat{H}_+ reproduz (2.28), sendo assim um operador com autovalor positivo.

No próximo capítulo iremos apresentar outro exemplo de teoria de campo com interesse físico. Apresentaremos soluções tipo Q-balls que surgem em teorias de campo escalar complexo e que como veremos são de natureza não-topológica, ou mais precisamente sólitons não topológicos.

Capítulo 3

Q-BALLS

Nesse capítulo aborda-se uma teoria de campo escalar que descreve uma classe de objetos não-topológicos, ou seja, que possuem carga topológica nula, mas que preservam uma simetria contínua global, tendo assim uma carga de Noether. Tais objetos se comportam como sólitons, soluções de uma teoria de campo não-linear que possui densidade de energia concentrada em uma dada região do espaço e que se propagam sem dissipação e que não alteram seu perfil em uma colisão com outro sólito.

3.1 Um pouco de história - Q-balls em teorias de bariogênese.

Um dos grandes problemas em Física de Partículas e em Cosmologia moderna é a aparente assimetria entre bárions e antibárions no universo. Resultados observacionais confirmam que em torno de 4,6% da densidade de energia do universo que conhecemos é composta de bárions, todavia, nenhuma concentração de antibárions

foi detectada [2].

Alguns modelos foram propostos para explicar a aparente abundância de bárions (com relação a antibárions) no universo. Os cientistas deram o nome de *bariogênese* ao estudo desse aparente distúrbio. Uma das primeiras evoluções nessa linha ocorreu em 1985, quando M. E. Shaposhnikov [6] desenvolveu um modelo baseado na teoria Eletrofraca que explicava a aparente abundância de bárions no universo e que estava em concordância com o Modelo Padrão de Física de Partículas. Esse modelo ficou conhecido como bariogênese eletrofraca e tinha como vantagem satisfazer as três condições de Sakharov para se ter uma bariogênese bem sucedida que explicavam a criação de matéria a antimatéria em taxas diferentes, as condições são: não conservação de número bariônico, violação de simetria C/CP e possuir processos fora do equilíbrio térmico. No entanto, os resultados teóricos apresentados para a razão entre densidade de matéria ordinária e densidade de radiação no universo, também chamada razão fóton-bário, era muito menor do que os resultados experimentais [7].

Alguns anos depois I. Affleck e M. Dine [1] através de uma extensão supersimétrica mínima do modelo padrão, propuseram uma teoria de bariogênese que dava resultados para a razão fóton-bário da ordem de grandeza dos resultados experimentais. Essa teoria, que também obedecia as três condições de Sakharov, ficou conhecida como bariogênese de Affleck-Dine. A bariogênese de Affleck-Dine além de resolver outros problemas cosmológicos como o gravitino, dava indícios de que matéria bariônica e matéria escura possuíam uma gênese em comum.

O extensão supersimétrica mínima do modelo padrão a qual se baseava a bariogênese de Affleck-Dine, apresentava aproximadamente 300 direções planas de orientação (ou dimensões espaciais). Boa parte dessas dimensões surgem devido

aos termos não renormalizáveis provindos da quebra de simetria no modelo. Com isso, é de se supor que algumas dessas dimensões podem ser compactificadas. Isso pode ser feito em termos de um campo escalar complexo conhecido como campo de Affleck-Dine. Esse campo pode ser interpretado como uma combinação de s-quarks e/ou s-leptons que são parceiros supersimétricos de quarks e leptons respectivamente. A introdução desse campo pode explicar a geração de bárions no Universo.

Segundo a bariogênese de Affleck-Dine, durante a época inflacionária do universo, as partículas s-quarks e s-leptons se uniram em um amplo estado homogêneo conhecido como condensado de Affleck-Dine.

Após a inflação a órbita do campo de Affleck-Dine foi impulsionada a se mover em torno de um mínimo global de um potencial escalar. Os campos precessionam em torno da origem do espaço de campo complexo e sua órbita é muito similar à órbita dos planetas trocando o potencial Newtoniano por um potencial do oscilador harmônico isotrópico [Def: possui as mesmas propriedades nas três direções espaciais]. Sabe-se da Relatividade Geral que a precessão dos planetas se dá por correções relativísticas no potencial Newtoniano. Isso também pode ser feito para o campo de Affleck-Dine através de efeitos quânticos.

Com a inclusão de correções quânticas no modelo de Affleck-Dine, as soluções tornam-se instáveis por perturbações espaciais e decaem em objetos tipo bolhas, dando origem ao que chamamos de *Q-ball*. Com a introdução de Q-balls na Bariogênese de Affleck-Dine a densidade de bárions é corrigida e assume um valor da ordem de grandeza dos resultados experimentais.

Neste trabalho apresentaremos o formalismo da obtenção de soluções tipo Q-balls no cenário de teoria de campos. Assim sendo, apesar desse breve relato

histórico, não analisaremos os detalhes do mecanismo de bariogênese de Affleck-Dine.

3.2 Breve apresentação

Segundo Sidney Coleman (1985, p.4):

The stability of ordinary matter depends on the conservation of particle number, and the radius of a ball of ordinary matter depends on the number of particles in it. Here, the roles of particles number is played by Q . For this reason I call these systems of "Q balls"; the homogeneous state that exists in their interiors I call "Q matter".

Essas soluções se propagam sem dissipação e são do tipo sólitons. Mas o que são sólitons?

3.2.1 Soluções solitônicas

Físicos e Matemáticos tem um gosto em comum, o estudo de soluções solitônicas. Apesar dessas soluções serem motivo de estudo em várias áreas de pesquisa¹, é na física e matemática que tem-se os maiores avanços.

É difícil haver um consenso sobre uma definição do que é um sólitom, por uma visão matemática, sólitons são soluções de equações diferenciais parciais parabólicas ou hiperbólicas (equações não-lineares), que viajam com velocidade constante e sem dissipação. Para o que iremos estudar neste trabalho, pode-se interpretar

¹Tenha visto as descobertas em Neurociência que explicam a condução do sinal dentro dos neurônios como sólitons pressão.

essas soluções como ondas viajantes que além de ter uma forma permanente, estão localizadas em alguma região do espaço. Uma condição adicional é que quando duas soluções solitônicas interagem o perfil das ondas após a interação permanece inalterado (a menos de uma alteração de fase)[9].

A primeira pessoa a notar esse tipo de fenômeno foi John Scott Russell (1808-1882) que observou uma onda solitária no canal da União, na Escócia. No entanto, a palavra “sóliton” só foi empregada por Zabusky e Kruskal em 1965.

Devido à natureza de sua estabilidade essas soluções são de duas formas: Topológicas e Não-Topológicas. De forma semelhante ao apresentado no primeiro capítulo, sólitons topológicos tem sua estabilidade justificada na presença de uma carga topológica, que como vimos, tem natureza distinta da carga provinda de uma simetria de Noether. Por outro lado, sólitons não-topológicos tem carga topológica nula.

Vamos agora retornar ao problema original que era o estudo de Q-balls. Começando com algumas definições.

3.2.2 O que são Q-balls?

Por uma visão um tanto simplificada Q-balls podem ser vista como uma região onde se concentra uma grande quantidade de partículas clássicas (Bósons), semelhante ao que ocorre em um condensado de Bose-Einstein. Se imaginarmos essa região na forma de uma gota, temos que ela é estável pelo desmembramento em gotas menores e ainda contra a evaporação em partículas individuais, pois devido à configuração atrativa, o estado inicial tem energia menor que a coleção de partículas individuais.

Como apresentado por Coleman, para que haja Q-ball a carga deve ser conservada. Além disso, o potencial de interação deve ter um termo negativo dominante sobre o termo devido às partículas livres. Matematicamente dizemos que não teremos Q-balls se nosso potencial for da forma $V(\phi) = m^2\phi^2$. No entanto, se incluímos um termo atrativo na forma $-\lambda\phi^n$ (com $n > 2$) no potencial, então surge valores de ϕ onde $V(\phi) < V_{livre}(\phi)$, ou seja, a energia desses valores de campo é menor do que a energia de um campo livre. Isso nos diz que podemos criar aglomerados de muitas partículas cuja energia é menor que a energia das partículas individuais distantes umas das outras².

Tais objetos podem de uma forma simplificada, ser definidos como: Q-ball são soluções de energia mínima que surgem em uma variedade de famílias de teorias de campo escalar complexo em duas ou mais dimensões espaço-temporal com auto-interação e que preserva uma simetria contínua global.

Apesar de ser possível encontrar soluções tipo Q-ball para uma quantidade de dimensões espaço-temporal arbitrária, por simplicidade iremos tratar apenas exemplos em dimensões menores ou iguais a quatro.

A lagrangiana mais simples que possui Q-ball como solução é

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - V(|\Phi|), \quad (3.1)$$

onde $V(|\Phi|)$ é o potencial que delimita o problema e que, como vemos, depende apenas do módulo do campo escalar complexo Φ que a partir de agora denotaremos apenas por ϕ .

²Adiante veremos que o potencial permitido para gerar Q-balls deve ser da forma $V(\phi) \geq 0$ por isso devemos impor que os termos de ordem superior a ϕ^n devam ser positivos para que o potencial seja essencialmente positivo.

A equação de movimento que surge de (3.1) é

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi + \frac{\partial V}{\partial \Phi^*} = 0. \quad (3.2)$$

Para se ter soluções tipo Q-ball devemos impor algumas restrições sobre $V(\phi)$. As interações aceitáveis devem obedecer as condições:

(1) : $V(\phi) \geq 0$ em toda região e deve ser duas vezes continuamente diferenciável em $\phi = 0$, ou seja, deve existir $V'(0)$ e $V''(0)$. Se impormos que o mínimo global da teoria esteja em $\phi = 0$, ou seja, que $V(0) = 0$ temos que nesse ponto há um estado ligado que preserva a simetria $U(1)$, nesse caso se definirmos $V''(0) \equiv \mu^2$, pela condição de mínimo tem-se $V''(0) > 0$.

(2) : Deve existir um mínimo de $(V(\phi)/\phi^2)$, em algum ponto $\phi_0 \neq 0$, tal que

$$\min[2V(\phi)/\phi^2]_{\phi=\phi_0} < \min[2V(\phi)/\phi^2]_{\phi=0}$$

essa condição será provada em breve, mas ela apenas nos diz que a energia de uma Q-ball deve ser menor do que a energia que uma coleção de quantas de partículas escalares podem possuir [8].

(3) : Existe três números positivos a, b e c , com $c > 2$, tal que

$$\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - U(\phi) \leq \min(a, b\phi^c)$$

essa é uma suave restrição imposta pela primeira condição do potencial. Nos diz que devemos ter um termo negativo no potencial dominante sobre o termo ϕ^2 , mas que não decresça muito, ou seja, deve ter termos superiores que levante o potencial novamente.

Se a Lagrangiana é simétrica pelo grupo $U(1)$, podemos fazer transformações globais nos campos da forma $\Phi \rightarrow e^{-i\alpha}\Phi$, e $\Phi^* \rightarrow e^{i\alpha}\Phi^*$. Isso leva a uma corrente de Noether conservada³,

$$j^\mu = i(\Phi^*\partial^\mu\Phi - \Phi\partial^\mu\Phi^*). \quad (3.3)$$

E com isso a uma carga de Noether,

$$Q = \frac{1}{2} \int d^3x j^0 = \frac{i}{2} \int d^3x (\Phi^*\partial^0\Phi - \Phi\partial^0\Phi^*). \quad (3.4)$$

A energia é dada pela integral de (B.13) em todo o espaço. Em três dimensões espaciais temos,

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|^2 + \frac{1}{2} |\nabla\Phi|^2 + V(\phi) \right] \quad (3.5)$$

3.3 Construção das soluções

Nesta seção iremos apresentar como encontrar as soluções tipo Q-ball. Pararemos dentro de instantes para analisar a estabilidade aproximada para uma configuração de campo próximo da origem do sistema de coordenadas.

Como assumido na definição, Q-ball são soluções de menor energia para uma dada carga fixa. Vamos agora fazer o processo de minimização de (3.5) com (3.4) fixo. Utilizando multiplicadores de Lagrange construímos o funcional na forma

$$A_\omega = E + \omega \left(Q - \frac{i}{2} \int d^3x (\Phi^*\partial^0\Phi - \Phi\partial^0\Phi^*) \right) \quad (3.6)$$

³Essa análise pode ser estendida para teorias mais complicadas do que (3.1) e com grupos de simetria maior.

onde E é dado por (3.5) e ω é o multiplicador de Lagrange. Com um pouco de álgebra, pode-se reescrever (3.6) como

$$\begin{aligned} A_\omega &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} |\partial^0 \Phi + i\omega \Phi|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 - \frac{\omega^2}{2} |\Phi|^2 + V \right] + \omega Q = \\ &= \int d^3x \frac{1}{2} |\partial^0 \Phi + i\omega \Phi|^2 + \int d^3x \left[\frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 - \frac{\omega^2}{2} |\Phi|^2 + V \right] + \omega Q \end{aligned} \quad (3.7)$$

o primeiro termo é agora positivo e também é o único que aparece a dependência explícita do tempo. Assim, com a minimização de (3.7) obtemos

$$\frac{d\Phi}{dt} + i\omega \Phi = 0$$

que dá a dependência temporal das soluções.

As soluções obtidas são esfericamente simétricas no espaço das posições e giram com velocidade angular constante no espaço interno⁴. Para escolhas apropriadas da origem do espaço-tempo, as soluções são da forma,

$$\Phi(|\vec{x}|, t) = f(|\vec{x}|) e^{-i\omega t} \quad (3.8)$$

onde ω é interpretado como a frequência de rotação no espaço interno e $f(|\vec{x}|)$ é uma função apenas da posição que, para ter energia finita, deve ser monotonicamente decrescente ao afastarmos da origem, ou seja, $f(|\vec{x}|) \rightarrow 0$ quando $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ e também deve obedecer à condição de contorno $f'(0) = 0$. Esse será o nosso “*ansatz*” de Q-balls, ou seja, será nosso ponto de partida para o estudo e para a busca das soluções completas.

⁴Espaço dos campos.

Note aqui que não impomos nenhuma condição adicional sobre $f(|\vec{x}|)$ na solução (3.8), quero dizer com isso que ela pode ser complexa ou real. No entanto, a solução como um todo tem de ser sempre complexa para termos Q-ball. Além disso, a equação (3.8) nos dá o perfil de Q-balls estacionárias, ou seja, como uma onda a Q-ball se acumula em um certo ponto e oscila com um padrão caracterizado por sítios (os nodos) onde não há movimento. Neste trabalho não abordaremos dinâmica de Q-balls.

Com (3.8) a carga da Q-ball fica simplismente,

$$Q = \omega \int_V dV f(|\vec{x}|)^2 \quad (3.9)$$

nota-se nesse ponto o porquê das condições das contorno sobre $f(|\vec{x}|)$. Se assim não fosse a carga e energia iriam divergir.

Temos que $f(|\vec{x}|)$ pode ser encontrado substituindo (3.8) na equação (3.2) em coordenadas esféricas, ou seja,

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} - \frac{D-1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{d^2}{dr^2} \right] \phi = -\frac{\partial V}{\partial \Phi^*}$$

que nos dá,

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = -\frac{D-1}{r} \frac{df}{dr} - \omega^2 f + V'(f) \quad (3.10)$$

tendo que agora $f(|\vec{x}|)$ é simplismente $f(r)$.

Se interpretarmos f como a posição de uma partícula e r como o tempo, a equação (3.10) pode ser vista como a equação de movimento de uma partícula de massa unitária, sujeita a um meio viscoso que se movimenta em um potencial

$U_\omega(f) = \omega^2 f^2/2 - V(f)$. E podemos escrever (3.10) como,

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = -\frac{D-1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{dU_\omega}{df} \quad (3.11)$$

onde a fração $(D-1)/r$ é o termo resistivo, que pode ser agrupado como

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 + U_\omega(f) \right] = -\frac{D-1}{r} \left(\frac{df}{dr} \right)^2. \quad (3.12)$$

Vemos que para $D = 1$ ou para um tempo muito grande a energia total (lado esquerdo) é conservada. No entanto, se o termo resistivo for mantido, devemos impor que a partícula, quando liberada de alguma região do potencial, irá em um tempo longo (mas finito) parar na origem. Essa é uma condição para nosso problema, ou seja, devemos escolher soluções que obedecem essa condição. Isso implica que a energia inicial da partícula irá decrescer devido ao termo de fricção⁵. Esse processo permite imaginar formas de potenciais permitidos. O potencial efetivo tem a forma geral da figura 3.1.

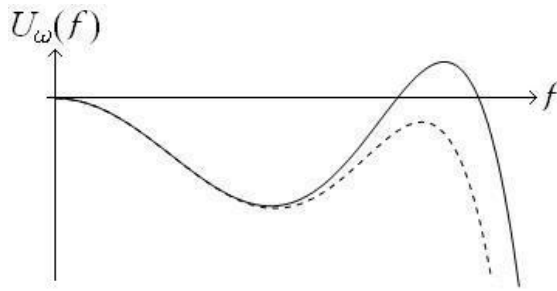


Figura 3.1: Potencial efetivo com máximo local maior que zero (linha cheia) e com máximo local menor que zero (linha tracejada)

⁵Se $\max(U_\omega(f)) = 0$ para $f \neq 0$ o termo de fricção deve ser nulo e devemos soltar a partícula do ponto de máximo.

Por exemplo, se o máximo local do potencial efetivo U_ω estiver em algum ponto menor que zero, como indica a linha tracejada da figura 3.1, a partícula não terá energia suficiente para chegar na origem. Esse tipo de potencial não é bom, pois provoca um processo conhecido como *undershooting*. Para que isso não ocorra devemos impor

$$\max(U_\omega) \geq 0 \Leftrightarrow \min\left(\frac{2V}{f^2}\right) \leq \omega^2. \quad (3.13)$$

Por outro lado, se U_ω é convexo em $f = 0$ a partícula não pára na origem, esse processo é conhecido como *overshooting*, e também não é desejável e devemos impor que

$$\left.\frac{d^2U_\omega}{df^2}\right|_{f=0} < 0 \Leftrightarrow \omega^2 < \left.\frac{d^2V}{df^2}\right|_{f=0} < 0 \quad (3.14)$$

Com isso, encontramos a condição sobre ω para existência de Q-ball.

$$\min\left(\frac{2V}{f^2}\right)\Big|_{f \neq 0} \leq \omega^2 < \left.\frac{d^2V}{df^2}\right|_{f=0}.$$

O limite superior nos dá o quadrado da massa da coleção de partículas elementares μ^2 que geram a Q-ball. E se definirmos o limite inferior como sendo ω_0^2 temos

$$\omega_0^2 \leq \omega^2 < \mu^2. \quad (3.15)$$

3.3.1 Limites e condição de existência

Quando Q é muito grande a função $f(r)$ se assemelha a uma função degrau e podemos impor aproximadamente que nossa solução esteja delimitada a uma região que tem um raio médio R , onde a configuração do campo é da forma: para a região $r < R$, a parte radial do campo $f(r)$ é constante e simplesmente ϕ_0 .

Fora dessa região $f(r) = 0$. Essas duas regiões são conectadas por uma zona de transição da ordem de μ^{-1} . No limite de Q grande, ω se aproxima do limite inferior ω_0 e os valores das quantidades locais dentro da Q-ball ficam independentes do seu tamanho⁶.

Conforme o valor de ω se aproxima dos valores limites temos duas formas de soluções.

- Q-ball de fina parede \rightarrow quando ω está próximo do limite inferior ω_0 ;
- Q-ball de grossa parede \rightarrow quando ω está próximo do limite superior μ .

As soluções desejadas são aquelas que iniciam no repouso em $t = 0$ na posição $f(0)$ (com $f'(0) = 0$) e vão para o repouso em um tempo grande em $f = 0$. Essas imposições funcionam como dados iniciais do problema, com elas, e com um potencial aceitável, podemos resolver a equação (3.10). Assim, Segundo Coleman a condição de existência de Q-ball é:

- (a) Para toda teoria definida pela lagrangiana (3.1), com $V(\phi) \geq 0$, dado um conjunto de valores iniciais para ϕ e $\partial^0\phi$, com algum Q e E , existe um conjunto de valores iniciais do tipo Q-ball com o mesmo Q , mas energia menor ou igual a E .

Com a afirmação anterior e com um potencial aceitável, a parte radial da solução é obtida resolvendo a equação (3.10) e a dependência temporal é da forma da equação (3.8).

⁶Essa condição também será usada na próxima seção ao estudarmos a estabilidade das soluções.

A imposição (a) não é suficiente para garantir a existência de Q-balls, pois as soluções ainda podem ser instáveis. No entanto, junto com as restrições sobre $V(\phi)$, a estabilidade e existência de Q-balls é garantida se:

(b) Se $V(\phi)$ é aceitável, existe um $Q_{min} \leq 0$, tal que para qualquer $Q > Q_{min}$, há valores iniciais de ϕ e $\partial^0\phi$ do tipo Q-ball que minimizam E para um dado valor fixo de Q . Além disso, os valores de ϕ e $\partial^0\phi$ obedecem a uma equação de movimento idêntica à obtida em uma teoria de decaimento de vácuo, isto é, à equação (3.10).

Essa alegação é mais poderosa e dá conta de uma classe mais restrita de interações.

3.4 Estabilidade

Vamos analisar mais a fundo as condições de estabilidade das soluções. Se as soluções existem, elas são estáveis se as propriedades de estabilidade abaixo são satisfeitas. As condições de estabilidade produzem três tipos diferentes de Q-balls: absolutamente estáveis, meta estáveis e instáveis. A primeira condição ocorre quando Q-balls tem estabilidade clássica e quântica. A segunda quando as soluções decaem em quantas de partículas livres, mas são estáveis por pequenas perturbações. E a terceira ocorre quando elas decaem em quantas de partículas livres, mas com energia total maior que a da Q-ball inicial.

3.4.1 Estabilidade absoluta

Novamente se assumirmos a configuração de campo para grandes valores da carga, encontramos que, para uma configuração de campo constante ϕ_0 dentro da região de raio R , a carga fica simplesmente

$$Q = \omega \phi_0^2 v \quad (3.16)$$

onde v é o volume delimitado pela região de raio R . E com isso a energia

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\phi_0^2 v} + V(\phi_0) \cdot v \quad (3.17)$$

minimizando (3.17) em relação a v , encontra-se que a energia mínima ocorre no volume

$$v = \frac{Q}{\sqrt{2\phi_0^2 V(\phi_0)}} \quad (3.18)$$

substituindo (3.18) em (3.17) encontra-se

$$\left(\frac{E}{Q}\right)^2 = \frac{2V_0}{\phi_0^2} \equiv \mu_0^2 \quad (3.19)$$

A forma mais óbvia de decaimento de Q-balls são pela emissão de mésons carregados. A equação (3.19) nos diz que Q-balls são estáveis pela emissão de mésons se μ_0^2 for menor que a massa dos mésons. Ou de forma semelhante, se assumirmos que a energia das partículas livres que formam a Q-ball é $E = Q\mu$, temos que as soluções encontradas são estáveis se existir algum valor de ϕ não nulo

para o qual a condição (2) sobre o potencial é satisfeita. Ou seja, se tivermos

$$\mu_0 < \mu \tag{3.20}$$

3.4.2 Estabilidade clássica

Já nos deparamos no primeiro capítulo com estabilidade linear. Isso foi feito ao estudarmos a estabilidade de soluções de defeitos topológicas unidimensionais. De forma semelhante ao que foi feito na seção 2.3, mas agora no contexto do presente capítulo, a estabilidade linear ou clássica assegura que Q-balls são estáveis por pequenas flutuações lineares.

Vamos olhar para a segunda variação do funcional da energia $\delta^2(A_\omega)$ com respeito a pequenas perturbações. Utilizando o ansatz $\phi(x,t) = \varphi(x)e^{-i\omega t}$, temos

$$\delta^2(A_\omega) = \int \delta\varphi \left[-\frac{d^2}{dx^2} + U''(\varphi(x)) + 3\omega^2 \right] \delta\varphi dx. \tag{3.21}$$

Se $\delta\varphi$ for expandido em termos de um conjunto de autovetores ortonormais, ou seja, $\delta\varphi = \sum c_i \psi_i$ de um operador correspondente aos termos entre colchetes na expressão (3.21), com auto valor λ_i , então $\delta^2(A_\omega) = \sum c_i \lambda_i$. Se assumirmos que o operador em (3.21) possui apenas autovalores positivos, então $\delta^2(A_\omega)$ é positivo definido e a solução é estável por pequenas perturbações. Para ver isso considere o seguinte problema de autovalor

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U''(\varphi(x)) + 3\omega^2 \right] \psi_i = \lambda_i \psi_i, \tag{3.22}$$

que é uma equação tipo Schrödinger com potencial $U''(\varphi(x)) + 3\omega^2$. Para ω su-

ficientemente grande é provado em [11] que o operador em (3.22) tem sempre autovalor positivo. A equação (3.22) descreve o estado ligado de um operador com autovalor sempre positivo.

3.4.3 Estabilidade contra fissão

Se Q-balls podem, em princípio, fraguimentar-se em menores Q-balls, mas com a mesma carga total, então a condição de estabilidade sob fissão assegura que as soluções são estáveis se a energia de uma simples Q-ball for menor que a energia total que as Q-balls menores puderem possuir. Como dissemos antes, podemos criar aglomerados de pequenas Q-balls com energia menor que a energia das pequenas Q-balls individuais, mas com a mesma carga total. A condição de estabilidade sob fissão é,

$$\frac{d^2 A_\omega}{dQ^2} \leq 0. \quad (3.23)$$

onde A_ω é o funcional (3.6).

3.4.4 Decaimento em férmions

Existe um quarto tipo de estabilidade de Q-balls que é pelo decaimento em férmions. Se acoplada com férmions leves uma Q-ball evaporar-se via área superficial. A taxa de decaimento em férmions é obtida em [10] é dada por,

$$\frac{dQ}{dt dA} \leq \frac{w_0^3}{192\pi^2}. \quad (3.24)$$

onde $w_0^3 = \sqrt{\min\left(\frac{2U}{f^2}\right)} \Big|_{f \neq 0}$.

Esta taxa de decaimento é reduzida pelo efeito “*Pauli blocking*”.

A taxa (3.24) pode ser usada para calcular o tempo de vida da Q-ball.

Capítulo 4

DEFORMAÇÃO DE Q-BALLS

Diante do interesse, já dito antes em soluções Q-balls, iremos apresentar neste capítulo algumas contribuições neste assunto. Iniciaremos fazendo uma revisão de um simples modelo de potenciais em $(1+1)$ dimensão que surge Q-ball. Encontraremos as soluções e seu comportamento. Esse modelo apesar de simples é um ponto de partida interessante para esse capítulo, pois permite observar o comportamento gráfico que em dimensão superior não seria possível. Em seguida, será feito uma revisão de Métodos de Deformação de soluções. Esse método permite encontrar soluções para um determinado potencial através das soluções de um potencial já conhecido. Como ilustração, faremos uma demonstração do método de deformação em um modelo com solução tipo kink estudado no primeiro capítulo. Por fim, iniciaremos a real contribuição do trabalho. Utilizaremos o método de deformação para buscar novas soluções tipo Q-ball, ou seja, deformaremos modelos conhecidos no intuito de encontrar novos modelos.

4.1 Potenciais polinomiais

Nesta seção iremos buscar soluções exatas do tipo Q-ball para uma classe de potenciais polinomiais na forma

$$V(|\Phi|) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{6}g^2\phi^{n+2} + \frac{1}{12}\lambda^2\phi^{2n+2} \quad (4.1)$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$ e $(\mu^2, g^2, \lambda^2) > 0$.

Esse tipo de potencial foi estudado por Nagaraja e Khare em 1987 [12]. Fazendo $\frac{dV}{d\phi} = 0$ encontramos um ponto extremo em $\phi = 0$ e outro em

$$\phi_{\pm}^n = \frac{n+2}{2(n+1)} \frac{g^2}{\lambda^2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(n+1)}{c^2(2+n)^2}} \right] \quad (4.2)$$

onde $c^2 = g^2/6\lambda^2\mu^2$.

Para n par o potencial (4.1) tem um mínimo absoluto em $\phi = 0$ e dois mínimos locais em

$$\phi_{ml} = \pm \sqrt[n]{\phi_{\pm}} = \pm \left\{ \frac{n+2}{2(n+1)} \frac{g^2}{\lambda^2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4(n+1)}{c^2(2+n)^2}} \right] \right\}^{1/n} \quad (4.3)$$

sendo $\pm \sqrt[n]{\phi_{-}}$ dois pontos de máximo e o índice ml indica "mínimo local".

Para que ϕ_{ml} seja real devemos ter

$$1 - \frac{4(n+1)}{c^2(2+n)^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{4(n+1)}{(2+n)^2} \leq c^2.$$

Por outro lado, para n ímpar o potencial tem apenas um mínimo local em $\phi_{ml} = \sqrt[n]{\phi_{+}}$.

Estamos buscando soluções da equação (3.2) em uma dimensões espacial ($D=1$) com o potencial (4.1), ou seja, buscamos soluções para a equação diferencial

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\omega^2\phi + \mu^2\phi - \frac{n+2}{6}g^2\phi^{n+1} + \frac{n+1}{6}\lambda^2\phi^{2n+1}. \quad (4.4)$$

É importante notar que nessa equação estamos considerando apenas o módulo do campo complexo Φ . Assim, essa equação nos dá apenas a parte que depende da posição na solução, com a forma geral sendo encontrada pela multiplicação do fator $e^{-i\omega t}$.

Na referência [12] foi mostrado que as soluções de (4.4) são na forma

$$\phi(x) = \left(\frac{\sqrt{6\mu c}}{\lambda b}\right)^{1/n} \left(\frac{1}{b + (b^2 - 1)^{1/2} \cosh[(n\mu c/b)x]}\right)^{1/n} \quad (4.5)$$

onde $b = c/\sqrt{1 - \omega^2/\mu^2}$ e $\mu^2(1 - c^2) \leq \omega^2 < \mu^2$

Dois casos especiais do potencial (4.1) foram estudados em [13] para $n = 2$ e [14] com $n = 1$, para um contexto muito semelhante.

4.2 Método de deformação

Iremos estudar nesta seção um método que permite encontrar soluções de uma determinada teoria, correspondente a um determinado potencial, através de outra teoria cujas soluções são previamente conhecidas. O chamado método de deformação consiste em modificar o potencial levando-o a outro potencial, cujas soluções sejam conhecidas, através de uma função deformadora. Fazendo isso podemos encontrar as soluções do novo potencial pelas soluções já conhecidas e pela função deformadora inversa. O método é descrito como segue.

Considere uma teoria descrita por um potencial $V(\phi)$ que possui soluções $\phi(x)$. Como vimos no primeiro capítulo, utilizando a densidade de Lagrangiana de um campo escalar real, equação (2.1), encontra-se a equação de movimento para campos estáticos pela (2.6). Esse modelo é solúvel pela equação (2.8) reescrita abaixo

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \quad (4.6)$$

Deixe-nos agora considerar que existe outro modelo correspondente a algum outro campo escalar real $\xi(x)$ governado pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - K(\xi) \quad (4.7)$$

onde $K(\xi)$ é o potencial que descreve esse modelo.

Podemos encontrar soluções estáticas para o modelo (4.7) na forma

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = \frac{dK}{d\xi} \quad (4.8)$$

que como antes é solúvel pela equação

$$K = \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 \quad (4.9)$$

Se considerarmos que a primeira solução ϕ é uma função da segunda, ou seja, se assumirmos que

$$\phi = F(\xi) \quad (4.10)$$

vemos que

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{dF}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \Rightarrow \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\phi}{dx} \frac{1}{\frac{dF}{d\xi}} \quad (4.11)$$

elevando ao quadrado ambos os lados da segunda equação de (4.11) encontramos,

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 \frac{1}{(dF/d\xi)^2} \quad (4.12)$$

Se substituirmos (4.6) e (4.9) em (4.12) encontramos

$$K(\xi) = \frac{V(\phi)}{(dF/d\xi)^2} \quad (4.13)$$

lembrando que ϕ obedece a condição (4.10).

A função $F(x)$ é chamada função deformadora. A expressão (4.13) nos diz como as duas teorias se conectam. Temos com isso uma relação entre o potencial de um modelo não-deformado, por exemplo $V(\phi)$, e o potencial do modelo deformado $K(\xi)$.

As soluções do potencial deformado são encontradas por

$$\xi(x) = F^{-1}(\phi(x)) \quad (4.14)$$

com F^{-1} sendo a inversa da função deformadora.

4.2.1 Deformação de solução kink

Um exemplo simples da utilização desse método é a deformação de modelo $\lambda\phi^4$ de um campo escalar real estudado no primeiro capítulo. O modelo deformado

possui características semelhantes ao modelo inicial. O potencial do modelo $\lambda\phi^4$ é

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2$$

Considere agora uma função deformadora $F(\xi) = \sinh(\xi)$. Obtemos o potencial deformado (caso adimensional) fazendo

$$K(\xi) = \frac{1}{2} \frac{(1 - \sinh^2(\xi))}{\cosh^2(\xi)} \quad (4.15)$$

que simplificando fica

$$K(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \sinh^2(\xi))^2 \operatorname{sech}^2(\xi). \quad (4.16)$$

Resolvendo a equação (4.8) temos que as soluções estáticas são da forma

$$\xi(x) = \pm \operatorname{arcsenh}(\tanh(x)). \quad (4.17)$$

que são soluções tipo kink, ou seja, se comportam como o gráfico 2.1.

A figura 4.1 mostra o comportamento das duas soluções (2.12) e (4.17).

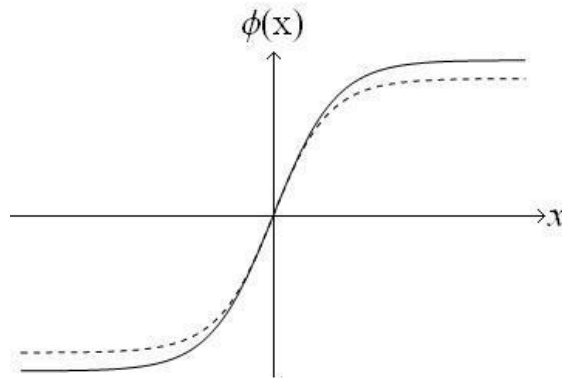


Figura 4.1: Comparação entre a solução Kink deformada (linha pontilhada) e a solução não-deformada (linha cheia).

Podemos proceder de forma análoga, para outras escolhas de função deformadora, e encontrar novas soluções tipo kink totalmente estáveis. Isso nos leva a conclusão de que podemos encontrar a rica faixa de soluções tipo kink que podem ser de interesse físico. Essas soluções continuam sendo estáveis. Antes de concluirmos essa seção vamos comparar o comportamento da densidade de energia das novas soluções com a densidade de energia das soluções antigas. A densidade de energia da solução (4.17) é

$$\rho(x) = \frac{\operatorname{sech}^4(x)}{1 + \tanh^2(x)}. \quad (4.18)$$

o gráfico 4.2 mostra a comparação de (4.18) com (2.16).

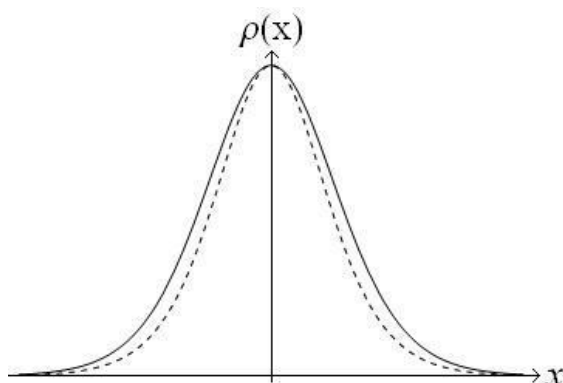


Figura 4.2: Densidade de energia de Kink deformado (linha tracejada) e não-deformado (linha cheia).

Esse procedimento também é válido para soluções não topológicas tipo lump. Na próxima seção iremos aplicar o método de deformação no estudo de Q-balls. Buscaremos novas soluções tipo Q-ball a partir das soluções polinomiais dadas na primeira seção deste capítulo.

4.3 Deformação de Q-balls

Nesta seção iremos usar o método de deformação para encontrar novas soluções Q-ball. Apresentaremos dois exemplos onde o método se torna possível. Um ponto forte do método é que o comportamento das soluções encontradas é muito semelhante às originais.

4.3.1 Formalismo

Podemos expressar de uma maneira ligeiramente diferente o método de deformação para soluções tipo Q-balls. Vamos partir do “ansatz”

$$\Phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x})e^{-i\omega t}. \quad (4.19)$$

Considerando que estamos em 1 dimensão espacial, temos a seguinte equação de movimento

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\omega^2\phi + \frac{1}{2}V'(\phi), \quad (4.20)$$

onde ϕ é uma função de x apenas. Tem-se que (4.20) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \omega^2\phi^2 - V(\phi) \right] = 0.$$

Com isso, chega-se a seguinte equação de primeira ordem

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = -\omega^2\phi^2 + V(\phi). \quad (4.21)$$

Vamos supor, como feito na seção 4.2, que exista outra teoria com Q-ball na forma

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi^* - \bar{V}(|\chi|). \quad (4.22)$$

Com “ansatz”

$$\chi(\vec{x}, t) = \xi(\vec{x})e^{-i\bar{\omega}t}, \quad (4.23)$$

e equação de movimento em uma dimensão

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = -\bar{\omega}^2\xi + \frac{1}{2}\bar{V}'(\xi). \quad (4.24)$$

A equação de primeira ordem é

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = -\bar{\omega}^2\xi^2 + \bar{V}(\xi). \quad (4.25)$$

Se supormos que ϕ é uma função de ξ . Ou seja

$$\phi = f(\xi),$$

temos que

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}$$

E a conexão entre as duas teorias é dada pelo método de deformação como

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = \frac{\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2}{(d\phi/d\xi)^2}, \quad (4.26)$$

que utilizando (4.25) e (4.21) temos

$$-\bar{\omega}^2\xi^2 + \bar{V}(\xi) = \frac{-\omega^2\phi^2 + V(\phi)}{(d\phi/d\xi)^2}. \quad (4.27)$$

Ou melhor

$$\bar{V}(\xi) = \frac{-\omega^2\phi^2 + V(\phi)}{(d\phi/d\xi)^2} \Bigg|_{\phi=f(\xi)} + \bar{\omega}^2\xi^2. \quad (4.28)$$

E as soluções são dadas por

$$\xi(x) = f^{-1}(\phi) \quad (4.29)$$

4.3.2 Exemplo 1

Considere um caso particular da teoria descrita pelo potencial (4.1) para $(n = 2, \mu = \sqrt{2}, g = \sqrt{6}, \lambda^2/12 = \beta)$ estudada em [15]. Ou seja,

$$V(|\Phi|) = \phi^2 - \phi^4 + \beta\phi^6, \quad (4.30)$$

onde ϕ é o módulo do campo escalar complexo Φ . E os pontos de mínimo local são em

$$\phi_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{1}{3\beta} + \frac{\sqrt{1-3\beta}}{3\beta}}$$

que para ser real devemos ter $\beta \leq 1/3$.

O potencial também pode ser escrito como

$$V(\phi) = \phi^2 \left(1 - \frac{1}{2}\phi^2\right)^2 + \left(\beta - \frac{1}{4}\right)\phi^6, \quad (4.31)$$

dizendo que as soluções tipo Q-ball são encontradas unicamente se $\beta > 1/4$. Se $\beta < 1/4$ o potencial é ilimitado inferiormente, então $\phi = 0$ é um falso vácuo e as soluções são instáveis¹. E temos assim que $1/4 < \beta \leq 1/3$.

¹Não trataremos neste trabalho teorias de vácuo degenerado ($\beta = 1/4$) contendo Q-ball.

Para esse potencial encontram-se soluções Q-ball unidimensional na forma

$$\Phi(x,t) = \frac{\sqrt{2(1-\omega^2)}}{\sqrt{1 + \sqrt{1-4\beta(1-\omega^2)} \cosh[(2\sqrt{1-\omega^2})x]}} e^{-i\omega t}. \quad (4.32)$$

Com $\sqrt{1-1/4\beta} < \omega < 1$

O gráfico 4.3a mostra o comportamento do módulo da solução, ou seja $\phi(x)$, para $\beta = 0.26$ e três valores diferentes de ω . Note que para $\beta = 0.26$ temos $0.196 < \omega < 1$. O gráfico 4.3b mostra como o potencial muda com β .

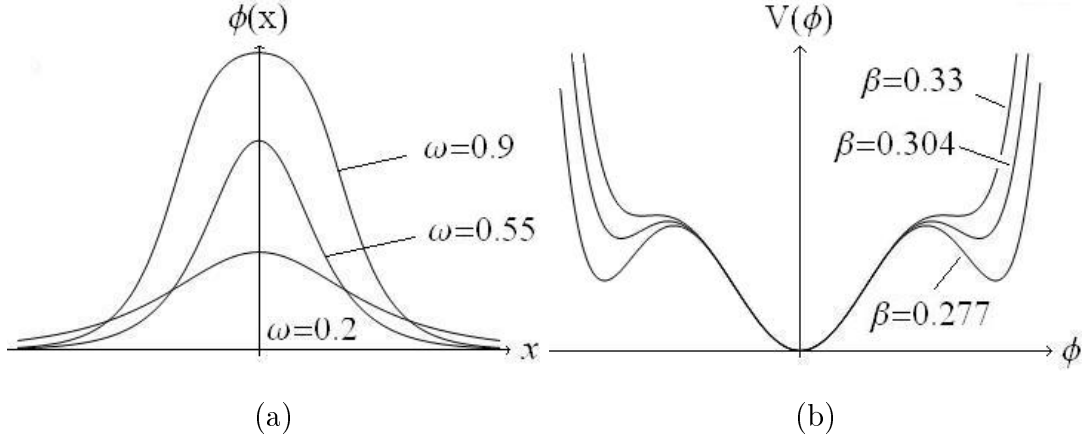


Figura 4.3: (a) Solução $\phi(x)$ plotada com $\beta = 0.26$ e $\omega = 0.2, 0.55, 0.9$. (b) Potencial para $\beta = 0.277, 0.304, 0.333$.

A densidades de carga é dada por

$$\rho_c(x) = \omega\phi^2, \quad (4.33)$$

e a densidade de energia é

$$\rho_e(x) = \frac{\omega^2\phi^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi). \quad (4.34)$$

Os gráficos 4.4a e 4.4b mostram as densidades de carga e de energia respectivamente, para diferentes valores dos parâmetros da solução.

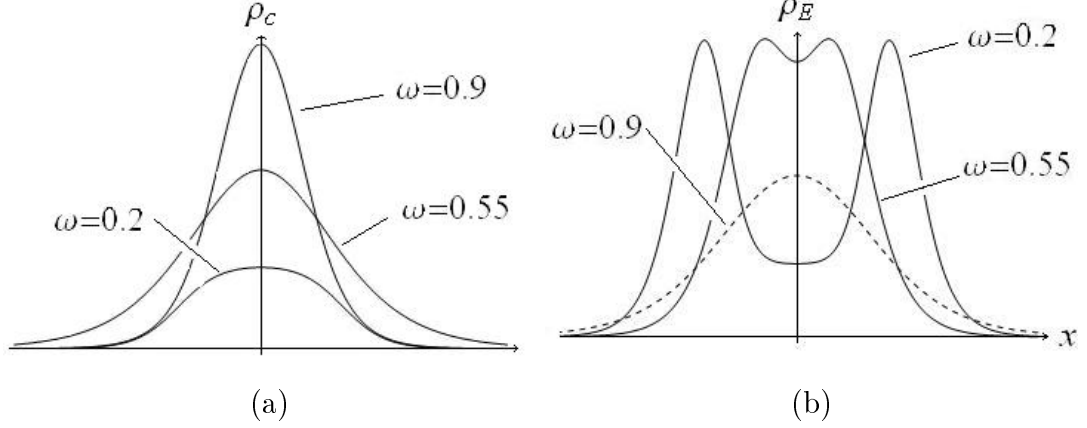


Figura 4.4: (a) Densidade de carga para $\beta = 0.26$ e $\omega = (0.2, 0.55 \text{ e } 0.9)$. (b) Densidade de energia com os mesmos valores de β e ω .

Quando $\omega = \sqrt{(6\beta - 1 + \sqrt{1 - 3\beta})/(9\beta)}$ a forma da densidade de energia muda completamente, o ponto de mínimo em $x = 0$ se transforma em um ponto de máximo. No caso mostrado na figura 4.4b essa inversão ocorre em $\omega = 0.663$.

Considere agora uma função deformadora na forma

$$\phi = f(\xi) = \left[\frac{\xi(\tanh^2(a) - 1)}{\tanh^2(a)(\xi - 1)} \right]^{1/2}, \quad (4.35)$$

onde a é um parâmetro real adimensional.

O quadrado da derivada de (4.35) fica

$$(f'(\xi))^2 = -\frac{\operatorname{cosech}^2(a)}{4\xi(\xi - 1)^3}.$$

Novamente vamos supor que exista uma outra teoria contendo Q-ball descrita por um potencial $M(\xi)$. A conexão com o potencial $V(\phi)$ da teoria inicial é dada

por (4.28), ou seja

$$M(\xi) = \frac{V(\phi) - w^2\phi^2}{(f'(\xi))^2} \Big|_{\phi=f(\xi)} + \bar{w}^2\xi^2, \quad (4.36)$$

e temos

$$V(\phi \rightarrow f(\xi)) = -\frac{\xi \operatorname{cosech}^2(a)[(\xi-1)^2 + \xi \operatorname{cosech}^2(a)(\xi-1 + \beta\xi \operatorname{cosech}^2(a))]}{(\xi-1)^3}. \quad (4.37)$$

Substituindo (4.37) na (4.36) e fazendo as devidas simplificações, obtemos

$$M(\xi) = c_1\xi^2 - c_2\xi^3 + c_3\xi^4 \quad (4.38)$$

onde os parâmetros c_1, c_2, c_3 são função dos parâmetros iniciais das soluções w e \bar{w} e da constante a e β . E são dados por

$$\begin{cases} c_1(w, \bar{w}) = 4 - 4w^2 + \bar{w}^2 \\ c_2(w, a) = 8 - 8w^2 + 4 \operatorname{cosech}^2(a) \\ c_3(w, a, \beta) = 4 - 4w^2 + 4\beta \operatorname{cosech}^4(a) + 4 \operatorname{cosech}^2(a) \end{cases} \quad (4.39)$$

O primeiro fato interessante a notar é que a expressão (4.38) tem a mesma forma do potencial geral (4.1) fazendo $n = 1$.

Pelo método de deformação a solução para esse problema é encontrada fazendo

$$\xi(x) = f^{-1}(\phi) = \frac{\phi^2 \tanh^2(a)}{1 - (1 - \phi^2) \tanh^2(a)}, \quad (4.40)$$

com ϕ dado pela equação (4.32). O potencial (4.38) é um tanto estranho, pois depende dos parâmetros da solução. Isso nos diz que para cada potencial iremos

ter uma faixa de soluções permitidas, dependendo do valor assumido por w e \bar{w} .

O potencial (4.38) tem um mínimo global em $\xi = 0$ e um mínimo local em

$$\xi = \frac{3c_2 + \sqrt{9c_2^2 - 32c_1c_3}}{8c_3},$$

onde c_1 , c_2 e c_3 são dados por (4.39). A teoria inicial nos dá os limites de validade sobre w e β e para que os pontos extremos de ξ sejam reais devemos ter $9c_2^2 \geq 32c_1c_3$, ou seja,

$$(2 - 2w^2 + \operatorname{cosech}^2(a))^2 \geq \frac{8}{9}(4 + \bar{w}^2 - 4w^2)(1 - w^2 + \operatorname{cosech}^2(a) + b \operatorname{cosech}^2(a)),$$

que resolvendo a igualdade pra \bar{w} encontra-se

$$\bar{w} = \sqrt{\frac{-4 + 4w^4 + 4(w^2 - 1) \operatorname{cosech}^2(a) + (32b - 9 - 32bw^2) \operatorname{cosech}^4(a)}{8(-1 + w^2 - \operatorname{cosech}^2(a) - b \operatorname{cosech}^4(a))}}, \quad (4.41)$$

que nos dá um limite inferior para \bar{w} que é o único novo parâmetro imposto por nossa nova teoria. Note que, a exceção do parâmetro de ajuste a , todas as constantes dentro da raiz quadrada em (4.41) são previamente estabelecidos em nossa teoria inicial.

O gráfico 4.5a mostra como o módulo quadrado da solução, ou seja $\xi(x)$, se comporta para valores fixos de w e β , mas valores diferentes de a . Notamos que quando a é grande o pico da solução ($x = 0$) atinge um máximo $\xi = 1$. Já a figura 4.5b mostra o novo potencial e como ele muda com o parâmetro a . Note que quando a aumenta o mínimo local do potencial se desloca para a direita e vai para o valor

$$\xi_{min} = \frac{3 - 3w^2 + \sqrt{(w^2 - 1)(w^2 + 2\bar{w} - 1)}}{4(1 - w^2)}$$

quando a é grande.

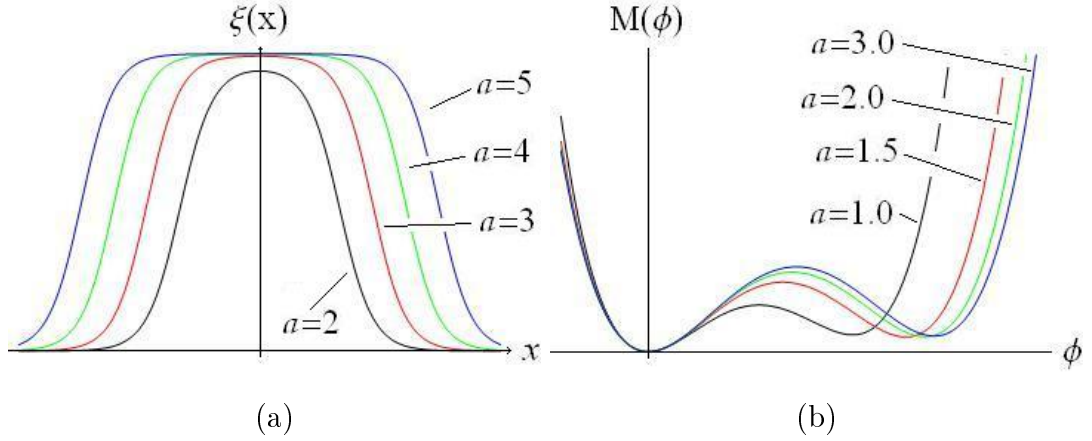


Figura 4.5: (a) Solução com valores diferentes do parâmetro a . Utilizamos $w = 0.4$, $\beta = 0.26$ e $a = \{2; 3; 4; 5\}$. (b) Potencial para valores diferentes do parâmetro a . Utilizamos $w = 0.11$, $\bar{w} = 0.22$, $\beta = 0.3$ e $a = \{1; 1.5; 2; 3\}$.

A segunda consequência de se escrever a função deformadora na forma de (4.35), como vemos na figura 4.5a, podemos ajustar a largura das soluções e consequentemente a forma da densidade de carga e energia, apenas ajustando o parâmetro a .

Vemos neste exemplo que encontramos um potencial que não é mais simétrico em torno da origem, no entanto ainda sim se obtém Q-balls para potenciais dessa forma.

O gráfico 4.6a mostra como a densidade da carga se altera quando mudamos o parâmetro a . E o 4.6b mostra como muda a densidade de energia.

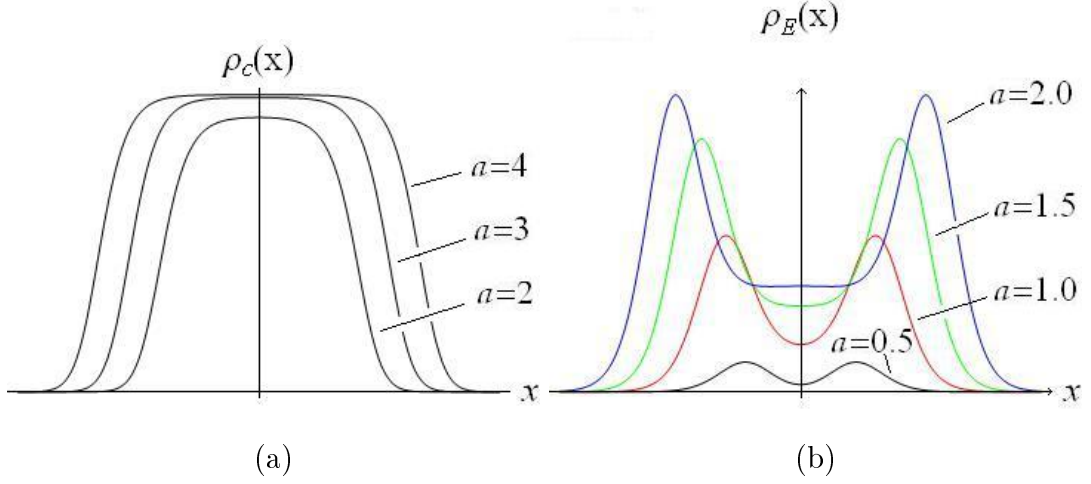


Figura 4.6: (a) Densidade de Carga com valores diferentes do parâmetro a . Utilizamos $w = 0.2$, $\beta = 0.26$ e $a = \{2; 3; 4\}$. (b) Densidade Energia para valores diferentes do parâmetro a . Utilizamos $w = 0.4$, $\bar{w} = 0.22$, $\beta = 0.26$ e $a = \{0.5; 1; 1.5; 2\}$.

Note que a densidade de carga e energia são significativamente alteradas com a variação de a .

4.3.3 Exemplo 2

Podemos reescrever (4.27) como

$$-\bar{\omega}^2 \xi^2 + \bar{V}(\xi) = -\omega^2 \left(\frac{\phi}{d\phi/d\xi} \right)^2 + \frac{V(\phi)}{(d\phi/d\xi)^2}. \quad (4.42)$$

Olhando para a expressão (4.42) vemos que se quisermos que nosso potencial deformado possui a mesma forma das teorias estáticas estudadas em [16], ou seja,

$$\bar{V}(\xi) = \frac{V(\phi)}{(d\phi/d\xi)^2} \Bigg|_{\phi=f(\xi)}, \quad (4.43)$$

devemos impor que

$$\omega^2 \left(\frac{\phi}{d\phi/d\xi} \right)^2 = \bar{\omega}^2 \xi^2, \quad (4.44)$$

ou melhor

$$\omega \frac{\phi}{d\phi/d\xi} = \pm \bar{\omega} \xi.$$

Que pode ser resolvido fazendo

$$\pm(\omega/\bar{\omega}) \int \frac{d\xi}{\xi} = \int \frac{d\phi}{\phi},$$

ou seja

$$\phi(\xi) = A \xi^{\pm(\omega/\bar{\omega})}. \quad (4.45)$$

onde A é uma constante de integração. A equação (4.45) nos dá a cara da função deformadora que devemos escolher para que $\bar{V}(\xi)$ tenha a forma de (4.43).

As soluções do novo modelo são dadas por

$$\xi(x) = f^{-1}(\phi) = \left(\frac{\phi}{A} \right)^{\pm(\bar{\omega}/\omega)} \quad (4.46)$$

Utilizando a função deformadora (4.46) temos

$$\frac{d\phi}{d\xi} = Ab\xi^{b-1} = b\frac{\phi}{\xi},$$

onde $b = \pm(\omega/\bar{\omega})$. E temos

$$\left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 = b^2 \frac{\phi^2}{\xi^2}. \quad (4.47)$$

Pegando o modelo descrito por (4.30) e a equação (4.47) e substituindo em

(4.43) encontramos

$$\bar{V}(\xi) = \frac{\xi^2}{b^2}(1 - A^2\xi^{2b} + \beta A^4\xi^{4b}). \quad (4.48)$$

E as soluções são na forma

$$\xi(x) = \left(\frac{(\sqrt{2k}/A)}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4\beta k} \cosh[(2\sqrt{k})x]}} \right)^{1/b}. \quad (4.49)$$

O gráfico 4.7 mostra como $\xi(x)$ muda quando variamos o parâmetro b .

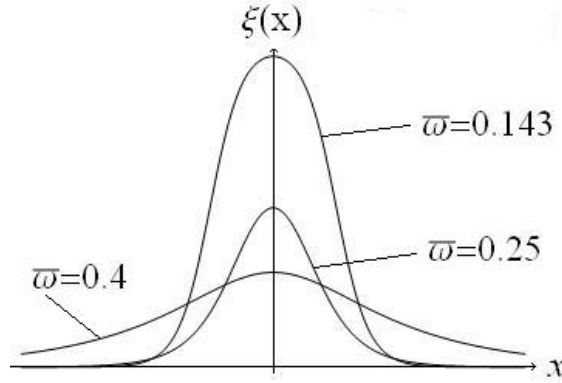


Figura 4.7: Gráfico para o comportamento da função $\xi(x)$ para um valores fixos de $\beta = 0.26$, $A = 1$ e $\omega = 0.2$, mas com diferentes valores do parâmetro $\bar{\omega}$. Temos $\bar{\omega} = 0.4$, $\bar{\omega} = 0.25$ and $\bar{\omega} = 0.143$.

Note que quando $b = 1/2$, ou seja, quando temos $\bar{\omega} = 2\omega$, encontramos exatamente a teoria descrita por (4.1) para $n = 1$. Esse fato pode ser estendido notando que quando b é um múltiplo inteiro de $1/2$ retomamos a teoria geral (4.1). Ou seja, para $b = 1/2$ encontramos a teoria ϕ^4 , para $b = 1$ temos o caso trivial ϕ^6 e quando $b = 3/2$ temos ϕ^8 e assim em diante.

A solução geral é

$$\chi(x,t) = \left(\frac{(\sqrt{2k}/A)}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4\beta k} \cosh[(2\sqrt{k})x]}} \right)^{1/b} e^{-i\bar{\omega}t}. \quad (4.50)$$

onde $k = (1 - \omega^2)$ e $b = \omega/\bar{\omega}$.

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como foi visto, soluções tipo Kink ou Lump formam uma classe muito peculiar de objetos físicos. Sistemas possuindo defeitos topológicos têm sido intensivamente estudados, não só em teoria de campo, como também em outras áreas de física. Esses objetos possuem uma descrição matemática simples e sua realização em fenômenos do mundo a nossa volta vem sendo cada vez mais entendido.

Vimos também uma nova classe de soluções de teorias de campo, que diferente de Kinks ou Lumps, são estáveis não por argumentos topológicos, mas sim por possuírem uma simetria interna intrínseca. Objetos não-topológicos tipo Q-ball, apesar de não possuírem uma descrição clara experimentalmente, são de grande importância teórica. Fica implícito que tais objetos se tornam uma extensão dos objetos tipo Lumps estudados no primeiro capítulo.

Por fim obtemos o fato mais importante que foi conseguir estender o método de deformação para soluções Q-ball. Notamos que o método continua sendo válido, no entanto vimos que as equações de primeira ordem são alteradas, ou se preferir, devemos redefinir o potencial de forma a englobar o termo que vem da derivada

temporal da solução.

É importante notar que este trabalho é uma pequena parte de um assunto muito vasto. Soluções tipo Q-ball tem sido utilizadas em vários outros contextos. Para pesquisas futuras talvez possamos entender melhor como essas soluções são utilizadas em teorias de suporte compacto. E ainda, como ficam as teorias contendo Q-ball em dimensões superiores.

Apêndice A

EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Dada a Lagrangiana de um campo escalar real.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (\text{A.1})$$

onde para cada $V(\phi)$ específico, tem-se um problema em particular a ser estudado.

Deve-se minimizar a ação

$$S = \int \int \mathcal{L} dt d^D x$$

No *sistema natural*¹ a dimensão de tempo e espaço são iguais. Podemos assim fazer $dx^D dt = d^{D+1}x$, logo,

$$S = \int \mathcal{L} d^{D+1}x$$

¹Onde as constantes fundamentais são normalizadas à unidade ($c = \hbar = 1$).

minimizando a ação ($\delta S = 0$) temos,

$$\delta S = \delta \left(\int \mathcal{L} d^{D+1}x \right) = \int d^{D+1}x \delta \mathcal{L} = 0$$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi)$$

Para campos que variam suavemente, é possível trocar a ordem de δ e ∂_μ no segundo termo. Assim o variacional de S fica,

$$\delta S = \int d^{D+1}x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) \right] = 0$$

Pela regra da cadeia tem-se,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] - \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \int d^{D+1}x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] - \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi \right\} = \\ & = \int d^{D+1}x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi + \int d^{D+1}x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] = 0 \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

O termo $\int d^{D+1}x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi|_{\text{extremos}} = 0$. Um motivo possível para isso é considerar que a variação do campo $\delta \phi$ nos extremos é nula. No entanto, mesmo não sendo, pode-se escolher configurações de campo de forma que esse termo se anule nos extremos. Para todos os efeitos esse é apenas um termo

de superfície que se anula nos extremos. Assim a equação (A.2) fica,

$$\int d^{D+1}x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi = 0$$

E encontra-se a equação de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Para calcular o primeiro termo de (A.3) é necessário, para evitar confusão, mudar o índice da densidade lagrangiana. Fazendo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi)$$

pela regra da cadeia temos,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} \left[\partial^\nu \phi \frac{\partial (\partial_\nu \phi)}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \partial_\nu \phi \frac{\partial (\partial^\nu \phi)}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right].$$

Temos que, $\frac{\partial (\partial_\nu \phi)}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \delta_\nu^\mu$, e que $\partial^\nu \phi = \eta^{\nu\lambda} \partial_\lambda \phi$. Assim,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} \left[\partial^\nu \phi \delta_\nu^\mu + \partial_\nu \phi \frac{\partial (\eta^{\nu\lambda} \partial_\lambda \phi)}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right].$$

No entanto, $\partial (\eta^{\nu\lambda} \partial_\lambda \phi) = \eta^{\nu\lambda} \partial (\partial_\lambda \phi)$. Logo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} \left[\partial^\nu \phi \delta_\nu^\mu + \partial_\nu \phi \eta^{\nu\lambda} \delta_\lambda^\mu \right].$$

Ainda temos que, $\partial_\nu \phi \eta^{\nu\lambda} \delta_\lambda^\mu = \partial^\lambda \phi \delta_\lambda^\mu$. Ou seja,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} [\partial^\nu \phi \delta_\nu^\mu + \partial^\lambda \phi \delta_\lambda^\mu].$$

Lembramos agora que temos uma soma de Einstein em ν no primeiro termo e uma soma em λ no segundo termo. Assim,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi + \partial^\mu \phi) = \partial^\mu \phi.$$

E finalmente,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = \partial_\mu \partial^\mu \phi.$$

O cálculo do segundo termo de (A.3) é direto,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = -\frac{dV}{d\phi}.$$

Dessa forma encontramos a equação do movimento como,

$$\square \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0 \tag{A.4}$$

onde \square é o operador D'Alambertiano que vale $\square = \partial_\mu \partial^\mu$.

Em dimensão (1,1) temos,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \tag{A.5}$$

Apêndice B

TENSOR ENERGIA MOMENTO

Vamos deduzir a expressão para a corrente conservada de Noether e com isso encontrar o tensor energia momento.

Vamos fazer pequenas variações nas coordenadas e nos campos como segue:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi$$

onde $\delta\phi$ e δx^μ são pequenas variações que representam a simetria a ser estudada.

A ação é:

$$S = \int \mathcal{L} d^4x \tag{B.1}$$

Devemos fazer a variação da ação δS , Logo

$$\delta S = \int [\delta(d^4x)\mathcal{L} + d^4x\delta\mathcal{L}]$$

Como estamos mudando as coordenadas, o elemento de volume d^4x também

vai mudar ao fazermos a variação em S . Devemos então calcular o Jacobiano da transformação.

A transformação de d^4x será da forma $\delta(d^4x) = d^4x'^\mu - d^4x^\mu = (J - 1)d^4x$, onde $d^4x'^\mu = Jd^4x^\mu$ e J é o Jacobiano da transformação. Definido como:

$$J = \text{Det}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) = \text{Det}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}[x^\mu + \delta x^\mu]\right) = \text{Det}(\delta_\nu^\mu + \partial_\nu \delta x^\mu) \quad (\text{B.2})$$

Como $\partial_\nu \delta x^\mu$ é pequeno podemos aproximar:

$$J \approx 1 + \text{Tr}(\partial_\nu \delta x^\mu)$$

onde $\text{Tr}(\partial_\nu \delta x^\mu)$ é o traço da matriz $\partial_\nu \delta x^\mu$.

Assim:

$$J \approx 1 + \partial_\mu \delta x^\mu \Rightarrow \delta(d^4x) = \partial_\mu \delta x^\mu d^4x^\mu \quad (\text{B.3})$$

Logo:

$$\delta S = \int [\mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu + \delta \mathcal{L}] d^4x \quad (\text{B.4})$$

E temos que: $\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}'(x'^\mu) - \mathcal{L}(x^\mu) = \mathcal{L}'(x^\mu - \delta x^\mu) - \mathcal{L}(x^\mu)$.

Expandindo $\mathcal{L}'(x^\mu - \delta x^\mu)$ em série, temos:

$$\mathcal{L}'(x^\mu - \delta x^\mu) \approx \mathcal{L}'(x^\mu) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}'(x^\mu)$$

Logo:

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}'(x^\mu) - \mathcal{L}(x^\mu) + \delta x^\mu \partial \mathcal{L}'(x^\mu) \quad (\text{B.5})$$

Chame $\mathcal{L}'(x^\mu) - \mathcal{L}(x^\mu) = \delta_0 \mathcal{L}(x^\mu)$, onde $\delta_0 \mathcal{L}(x^\mu)$ é a diferença funcional de \mathcal{L} no

mesmo ponto, ou seja, a diferença entre \mathcal{L}' (transformado) e \mathcal{L} (não transformado), em algum ponto.

Assim,

$$\delta\mathcal{L} = \delta_0\mathcal{L}(x^\mu) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}'(x^\mu) \quad (\text{B.6})$$

onde $\delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}'(x^\mu)$ é um termo de transporte.

Como δx^μ é pequeno podemos fazer $\mathcal{L}'(x^\mu) \cong \mathcal{L}(x^\mu) + \delta x^\mu$. Assim,

$$\delta\mathcal{L} = \delta_0\mathcal{L}(x^\mu) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x^\mu)$$

No entanto,

$$\delta_0\mathcal{L}(x^\mu) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0(\partial_\mu\phi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi \right] - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta_0\phi$$

Logo,

$$\delta\mathcal{L} = \left[\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right)}_{\text{Eq. de Movimento}} \right] \delta_0\phi + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi \right] + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x^\mu)$$

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi \right] + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x^\mu) \quad (\text{B.7})$$

Assim,

$$\delta S = \int d^4x \left[\mathcal{L}\partial_\mu\delta x^\mu + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi \right] + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \right] = \int d^4x \partial_\mu \left[\mathcal{L}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi \right]$$

Porém $\delta\phi = \delta_0\phi + \delta x^\nu \partial_\nu\phi$, logo:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \partial_\mu \left[\mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} (\delta\phi - \delta x^\nu \partial_\nu\phi) \right] \\ &= \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi + \left(\mathcal{L} \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu\phi \right) \delta x^\nu \right]\end{aligned}$$

Podemos generalizar essa equação fatorando o parâmetro infinitesimal que caracteriza a simetria, ou seja:

$$\begin{aligned}\delta x^\mu &= \frac{\delta x^\mu}{\delta w^a} \delta w^a \\ \delta\phi &= \frac{\delta\phi}{\delta w^a} \delta w^a\end{aligned}$$

Assim,

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \frac{\delta\phi}{\delta w^a} + \left(\mathcal{L} \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu\phi \right) \frac{\delta x^\nu}{\delta w^a} \right] \delta w^a \quad (\text{B.8})$$

Para que seja uma simetria devemos ter $\delta S = 0$

Fazendo $j_a^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \frac{\delta\phi}{\delta w^a} - \left(\mathcal{L} \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu\phi \right) \frac{\delta x^\nu}{\delta w^a}$, temos

$$\int d^4x \partial_\mu j_a^\mu \delta w^a = 0 \Rightarrow \partial_\mu j_a^\mu = 0 \quad (\text{B.9})$$

onde j_a^μ é a corrente de Noether conservada.

Dada a Lagrangiana de uma Campo Escalar Real

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi - V(\phi). \quad (\text{B.10})$$

Se analisarmos uma operação de translação infinitesimal temos $\frac{\delta\phi}{\delta w^a} = 0$, pois o

campo não muda sob translação e $\frac{\delta x^\nu}{\delta w^a} = \delta_a^\mu$, que quando somarmos em a obteremos $\delta_\mu^\mu = 1$. Assim a corrente de Noether fica,

$$j_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}.$$

Ou melhor

$$j^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (\text{B.11})$$

que é chamado *Tensor Energia-Momento* ($T^{\mu\nu}$).

Usando a equação para a densidade de Lagrangiana encontramos que,

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right] + \eta^{\mu\nu} V(\phi). \quad (\text{B.12})$$

A componente T^{00} é

$$T^{00} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) + V(\phi). \quad (\text{B.13})$$

Referências Bibliográficas

- [1] Affleck I and Dine M. “**A new mechanism for baryogenesis**”. Nuclear Physics B: Volume 249, Issue 2, 21 January 1985, Pages 361-380.
- [2] Mitsuo Tsumagari, “**The Physics of Q-balls**”, [arXiv:0910.3845v1 [hep-th] 20 Oct 2009].
- [3] E.B. Bogomol’nyi, Sov J. Nucl. Phys. 24, 449 (1976).
- [4] Dionisio Bazeia Filho, “**Campos Escalares em ação**”, Tese apresentada para o Concurso de Professor Titular - UFPB (2004).
- [5] Georg Junker, “**Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics**”, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [6] A. D. Sakharov. “**Violation of CP invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe**”. Journal of Experimental and Theoretical Physics 5: 24-27.
- [7] Wilfried Buchmüller, “**Baryogenesis-40 Years Later**”, [arXiv:0710.5857v2 [hep-ph] 1 Nov 2007].
- [8] Sidney Coleman, “**Q-Balls**”, [Nuclear Physics B (1985)]

- [9] P. G. Drazin, R. S. Johnson, “**Solitons-An Introduction**”, Cambridge Texts in Applied Mathematics, 1989.
- [10] A. Cohen, S. Coleman, H. Georgi and A. Manohar. “**The evaporation of Q-Balls**”, [Nuclear Physics B (1986)]
- [11] Alexander Kusenko, “**Small Q-balls**”, [arXiv:hep-th/9704073v1 9 Apr 1997].
- [12] C Nagaraja Kumar and Avinash Khare, “**Q-ball solutions in 1+1 dimensions for a class of $S_0(2)$ -invariant potentials**”, [J. Phys. A:Math. Gen. 20 (1987)].
- [13] T. D. Lee, R. Friedberg and A. Sirlin. “**Class of scalar-field soliton solutions in three space dimensions**”, Physical Review D, Vol 13 , n^o 10, 15 may 1976.
- [14] José M. Cerveró and P. G. Estévez. “**Exact two-dimensional Q-balls near the kink phase** ”, Physics Letters B, v176, p139-142, (1986).
- [15] Peter Bowcock, David Foster e Paul Sutcliffe, “**Q-Balls, Integrability and Duality**”, [arXiv:hep-th/0809.3895v2 08 Jan 2009].
- [16] D. Bazeia, L. Losano and J. M. C. Malbouisson, “**Deformed defects**”, Phys. Rev. D 66, 101701 (2002) [arXiv:hep-th/0209027].
- [17] D. Bazeia, “**Defect Structures in Field Theory**”, [arXiv: hep- th/0507188v2 23 Jul 2005].
- [18] D. Bazeia and E. P. Raposo, “**Travelling Wave Solutions in Nonlinear Diffusive and Dispersive Media**”, [arXiv:solv-int/9804017v1 25 Apr 1998]

- [19] D. Bazeia, L. Losano and R. Menezes, “**First-order framework and generalized global defect solutions**”, [arXiv:0807.0213v2 [hep-th] 21 Aug 2008]
- [20] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes and J.C.R.E Oliveira, “**Generalized global defect solutions**”, [arXiv:hep-th/0702052v2 [hep-th] 23 May 2007]
- [21] D. Bazeia, Ashok Das, L. Losano, and A. Silva, “**A simple and direct method for generating travelling wave solutions for nonlinear equations**”, [arXiv:nlin/0703035v2 [nlin.SI] 17 Oct 2007]
- [22] Roberto Menezes da Silva, “**Defeitos Globais em Teoria de Campos e Aplicações**”, [Tese de Doutorado (2007)]
- [23] Marcos Antonio Matos Souza, “**Defeitos Deformados e Aplicações em Modelos Multi seno-Gordon**”, [Dissertação de Mestrado (2009)]
- [24] Carlos Alberto Gomes de Almeida, “**Deformação de Defeitos em Modelos de Campos Escalares**”, [Tese de Doutorado (2004)]
- [25] E.B. Bogomol’nyi, “ **Stability of Classical Solutions**”, Soc. J. Nucl. Phys. 24, 449 (1976).
- [26] Vilenkin A. and Shellard E.P.S., “**Cosmic strings and other topological defects**”, (CUP, 1994)(T)(ISBN 0521391539)(534s).
- [27] V.I. Afonso, D. Bazeia, M.A. Gonzalez Leon, L. Losano, J. Mateos Guilarte, “**Construction of topological defect networks with complex scalar fields**”, Journal-ref: Nucl.Phys.B 810:427-459, 2009, [arXiv:0805.1086v3 [hep-th] 18 Sep 2008].

- [28] V.I. Afonso, D. Bazeia, M.A. Gonzalez Leon, L. Losano, J. Mateos Guilarte, “**Constructing networks of defects with scalar fields**”, Journal-ref: Phys.Lett.B662:75-79, 2008 , [arXiv:0710.5663v2 [hep-th] 18 Feb 2008].
- [29] D. Bazeia, M.A. González León, L. Losano, J. Mateos Guilarte, “**Deformed defects for scalar fields with polynomial interactions**”, Journal-ref: Phys.Rev.D73:105008, 2006, [arXiv:hep-th/0605127v1 12 May 2006].
- [30] D. Bazeia, L. Losano, “**Deformed defects with applications to braneworlds**”, Journal-ref: Phys.Rev. D73 (2006) 025016, [arXiv:hep-th/0511193v3 5 Jan 2006].
- [31] D. Bazeia, J. Menezes, R. Menezes, “**New Global Defect Structures**”, Journal-ref: Phys.Rev. D66 (2002) 101701, [arXiv:hep-th/0305234v3 21 Oct 2003].
- [32] Marlon Nunes Barreto da Silva, “**Violação das simetrias de Lorentz e CPT em sistemas de campos escalares**”, [Disertação de Mestrado (2006)].
- [33] Stephen S. Clark, “**Particle Creation from Q-balls**”, [arXiv: hep- ph/0510078v6 04 Jul 2006].
- [34] Edmund J. Copeland e Mitsuo I. Tsumagari, “**Q-Balls in flat potentials**”, [arXiv:hep-th/0905.0125v3 04 Aug 2009].
- [35] Mitsuo I. Tsumagari, “**Affleck-Dine dynamics, Q-ball formation, and thermalization**”, [Physical Review D 80, 085010 (2009)].
- [36] Stephen S. Clark, “**Q-Ball Condensation**”, [arXiv:0706.1429v2 [hep-th] 4 Jul 2007].

- [37] Minos Axenides, Stavros Komineas, Leandros Perivolaropoulos, Manolis Floratos, “**Dynamics of Nontopological Solitons -Q Balls**”, [arXiv:hep-ph/9910388v2 28 Feb 2000].
- [38] Richard A. Battye, Paul M. Sutcliffe, “**Q-ball dynamics**”, Nuclear Physics B 590 (2000) 329-363.
- [39] L. Campanelli and M. Ruggieri, “**Supersymmetric Q-balls: A numerical study**”, Physical Review D 77, 043504 (2008).
- [40] Alexander Kusenko, “**Solitons in the supersymmetric extensions of the standard model**”, Physics Letters B 405, 108-113, 17 July 1997.
- [41] Petja Salmi “**Oscillons**”, ISBN: 978-90-9023437-3
- [42] Nicholas Marton and Paul Sutcliffe “**Topological Solitons**”, ISBN: 0 521 83836 3
- [43] Michael Dine, “**The Origin of the Matter-Antimatter Asymmetry**”, [arXiv:hep-ph/0303065v3 17 Jun 2003]
- [44] Philip Rosenau and Eugene Kashdan, “**Emergence of Compact Structures in a Klein-Gordon Model**”, [DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.034101].
- [45] Fred Cooper, Avinash Khare and Uday Sukhatme, “**Supersymmetry in Quantum Mechanics**”, Ed world Scientific, (ISBN 981-02-4612-9)(210s).
- [46] Georg Junker, Pinaki Roy “**Conditionally exactly solvable potentials: A supersymmetric construction method**”, [arXiv:quant-ph/9803024v1 11 Mar 1998]

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)