

**UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**Sistema de Comunicação Utilizando Sinais Caóticos de Tempo  
Discreto em Canais de Banda Limitada**

**Renato Dalto Fanganiello**

**Orientador: Prof. Dr. Luiz Henrique Alves Monteiro**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

São Paulo  
2010

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

F211s Fanganiello, Renato Dalto.

Sistema de comunicação utilizando sinais caóticos de tempo discreto em canais de banda limitada / Renato Dalto Fanganiello – 2010 .

64 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2010.

Bibliografia: f. 37-39.

1. Sincronismo. 2. Sistema de comunicação. 3. Sinais caóticos de tempo discreto. I. Título.

CDD 621.3

# Agradecimentos

Ao professor Marcio Eisencraft, por me apresentar a área de caos aplicado a comunicações e por me orientar durante os primeiros três semestres do curso de mestrado.

Ao professor Luiz Henrique Alves Monteiro, por aceitar ser meu orientador durante a etapa final do curso de mestrado e pelas discussões que permitiram uma melhor análise dos resultados experimentais obtidos durante a realização deste trabalho.

À Universidade Presbiteriana Mackenzie por proporcionar o conhecimento e recursos para a concretização deste trabalho.

À CAPES, pelo auxílio financeiro que permitiu a realização deste curso de mestrado.

Aos amigos e familiares que direta ou indiretamente me apoiaram e incentivaram a superar as dificuldades para concluir este trabalho.

... it may happen that small differences  
in the initial conditions produce  
very great ones in the final phenomena.

(Henri Poincaré, 1854 - 1912)

# Resumo

No decorrer das últimas décadas, muitos métodos de sincronismo para sistemas caóticos têm sido propostos visando aplicações em comunicações. No entanto, suas performances não têm se mostrado satisfatórias quando submetidos a condições não ideais de canais de transmissão. Neste trabalho considera-se um sistema mestre-escravo de tempo discreto baseado no modelo de sincronismo de Wu e Chua. Mostra-se que é possível atingir o sincronismo, mesmo quando há limitação de largura de banda imposta pelo canal de comunicação, por meio da introdução de um filtro digital que limita o espectro de potência na malha de realimentação responsável pela geração do sinal que será transmitido. Ademais, demonstra-se analiticamente que a presença do filtro digital introduzido no sistema de comunicação não interfere no seu sincronismo. Também são mostrados resultados de simulações computacionais que relacionam os parâmetros do filtro digital introduzido no sistema de comunicação, como ordem e frequência de corte, com o maior expoente de Lyapunov do sistema transmissor, que determina se o sinal transmitido será caótico ou periódico.

# Abstract

Many synchronization methods for chaotic systems have been proposed over the past decades seeking for applications in communications. However, they have not satisfactorily performed when submitted to non-ideal communication channels. In this work, a discrete-time master-slave system based on Wu and Chua's synchronization model is considered. It is shown that it is possible to achieve synchronization under bandwidth limitations imposed by the communication channel by applying a digital filter in the feedback loop responsible for the generation of the chaotic signal that will be transmitted. Furthermore, an analytical demonstration is presented showing that synchronization is not affected by the presence of the digital filter introduced in the communication system. Results of computational simulations relating the filter's parameters, such as its order and cut-off frequency, to the maximum Lyapunov exponent of the transmitter system, which determines if the transmitted signal is chaotic or periodic, are also shown.

# Lista de Figuras

2.1	Exemplo de sincronismo entre dois sistemas com o Mapa de Hénon . . . . .	9
3.1	Diagrama de blocos do sistema de comunicação proposto. . . . .	11
3.2	Simulação do sistema ilustrado na Figura 3.1 para canal ideal . . . . .	14
3.3	Representação dos sinais da Figura 3.2 no domínio da frequência . . . . .	15
3.4	Simulação do sistema ilustrado na Figura 3.1 para canal passa-baixas . . . . .	16
3.5	Representação dos sinais da Figura 3.4 no domínio da frequência . . . . .	17
4.1	Diagrama de blocos do sistema proposto para canais limitados em banda . . . . .	19
4.2	$h \times N \times \omega_c$ para parâmetros usuais do mapa de Hénon . . . . .	23
4.3	$h \times \alpha$ para $N$ e $\omega_c$ fixos . . . . .	25
4.4	$h \times N \times \omega_C$ para novo valor do parâmetro $\alpha$ do mapa de Hénon . . . . .	26
4.5	Gráficos apresentados na Figura 4.4 com faixa de erro . . . . .	27
4.6	Representação da Figura 4.5 em duas cores . . . . .	29
4.7	Simulação do sistema ilustrado na Figura 4.1 para canal limitado em banda . . . . .	31
4.8	Representação dos sinais da Figura 4.7 no domínio da frequência . . . . .	32
4.9	Simulação do sistema ilustrado na Figura 4.1 para canal limitado em banda . . . . .	33
4.10	Representação dos sinais da Figura 4.9 no domínio da frequência . . . . .	34

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Sinais Caóticos de Tempo Discreto e Sincronismo</b>	<b>3</b>
2.1	Definições Básicas . . . . .	3
2.2	Mapa Utilizado . . . . .	6
2.3	Sincronismo de Wu e Chua . . . . .	7
2.4	Exemplo de Sincronismo com o Mapa de Hénon . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Sistema de Comunicação baseado em Sincronismo de Sinais Caóticos</b>	<b>10</b>
3.1	Descrição do Sistema . . . . .	10
3.2	Exemplo de aplicação . . . . .	12
3.3	Problemas que surgem com a limitação de banda . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Resolvendo o problema de banda limitada</b>	<b>18</b>
4.1	Solução Proposta . . . . .	19
4.2	Análise Teórica . . . . .	20
4.3	Simulações Computacionais . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>35</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>36</b>
	<b>Apêndice I - Artigo publicado no periódico MPE</b>	<b>40</b>
	<b>Apêndice II - Abstract publicado no ECC11</b>	<b>53</b>
	<b>Apêndice III - Extended Abstract aceito para publicação no DD10</b>	<b>55</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Muito se têm escrito sobre as potenciais aplicações de sincronização caótica em sistemas de comunicação [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] desde o importante trabalho de Pecora e Carroll [8]. Grande parte da motivação pelo uso de comunicações caóticas vem da intenção pela qual tanto modulações digitais quanto analógicas teriam as mesmas propriedades que técnicas como espalhamento espectral [9].

Embora sinais caóticos apresentem características inerentes a banda larga, isto se torna um problema quando o canal de comunicação impõe limitações em largura de banda. Devido à não linearidade do receptor, todas as componentes espectrais que chegam a ele serão afetadas caso alguma componente espectral seja perturbada durante a comunicação. Pequenas alterações em ganho e em fase podem comprometer o sincronismo [10, 5].

Muitos artigos abordaram este problema procurando eliminar as distorções do canal de comunicação por meio de técnicas de inversão de canal [11, 12, 13]. Obtiveram-se resultados razoáveis apenas quando os filtros dos canais são representados por filtros de baixa ordem.

De forma independente, Rulkov e Tsmiring [5] e Eisenkraft e Gerken [14] propuseram um método para sincronizar o transmissor e o receptor utilizando-se sinais caóticos limitados em banda, em que a idéia principal consiste em aplicar um mesmo filtro tanto no transmissor quanto no receptor a fim de contornar os prejuízos provocados pelos canais.

Neste trabalho estende-se este método para sistemas dinâmicos de tempo discreto [15, 16, 7, 17]. A motivação para esta abordagem envolve a facilidade de se utilizar processadores digitais de sinais (DSPs) ou microcontroladores com a finalidade de implementar este sistema.

---

O objetivo deste trabalho de mestrado é estudar sistema de comunicação que transmite sinais caóticos de tempo discreto por um canal de comunicação que apresenta limitação em banda. A este sistema, é possível associar mapas que gerem sinais caóticos, que serão combinados com a mensagem que se deseja transmitir, tornando sua presença no canal de comunicação difícil de ser percebida.

No capítulo 2 são apresentados conceitos que descrevem sistemas dinâmicos e sinais caóticos, necessários para facilitar o entendimento deste texto. É apresentado o mapa de Hénon, utilizado neste trabalho, aborda-se o modelo de sincronismo proposto por Wu e Chua [1] e mostra-se um exemplo de funcionamento deste modelo de sincronismo.

No capítulo 3 é descrito o sistema de comunicação estudado neste trabalho. Mostra-se que o modelo funciona adequadamente sob condições ideais e mostram-se os problemas que surgem quando o sistema é submetido a canais que apresentam limitação em banda.

No capítulo 4 apresenta-se uma solução para o problema de limitação de banda em canais de comunicação, que consiste basicamente na inserção de um filtro FIR tanto no transmissor quanto no receptor a fim de limitar o espectro do sinal transmitido, e é realizada análise teórica sobre a influência deste filtro nas condições de sincronismo do sistema de comunicação.

Por fim, no capítulo 5 são descritas as conclusões deste trabalho e apresentam-se linhas de pesquisa passíveis de serem seguidas como forma de continuidade ao trabalho apresentado neste texto.

Seguem-se, então, as referências bibliográficas e três apêndices: o primeiro contém o artigo publicado, em 2009, no periódico *Mathematical Problems in Engineering*, o segundo contém o *abstract* referente ao trabalho apresentado em formato de pôster no 11<sup>th</sup> *Experimental Chaos and Complexity Conference*, em Lille em junho de 2010, e o terceiro contém o *extended abstract* referente ao trabalho aceito para apresentação em formato de pôster no *Dynamics Days South America 2010*, que ocorrerá em julho de 2010 em São José dos Campos.

# Capítulo 2

## Sinais Caóticos de Tempo Discreto e Sincronismo

Este capítulo tem como objetivo apresentar definições, para tempo discreto, sobre os conceitos utilizados ao longo deste trabalho, reservando-se a Seção 2.1 para explorar este assunto.

Na Seção 2.2 apresenta-se o mapa de Hénon, que será bastante utilizado ao longo dos capítulos 3 e 4.

Na Seção 2.3 apresenta-se o modelo de sincronismo proposto por Wu e Chua [1] para sistemas de tempo contínuo. Neste trabalho será utilizada uma extensão deste modelo para aplicações em tempo discreto.

Por fim, na seção 2.4 mostra-se por meio de simulação computacional que o mapa de Hénon pode ser utilizado no modelo de sincronismo de Wu e Chua.

### 2.1 Definições Básicas

Nesta seção são apresentadas algumas definições e nomenclaturas básicas com o objetivo de formalizar os conceitos que serão utilizados ao longo deste trabalho. Estas definições baseiam-se nas referências [18] e [19].

Define-se formalmente um sinal como sendo uma função que contém informações sobre um fenômeno físico [20]. Diz-se que um sinal é unidimensional quando ele for representado por uma função de apenas uma variável. Sinais representados por funções de duas ou mais variáveis são chamados de sinais multidimensionais.

Um sistema dinâmico consiste de um conjunto de possíveis estados combinados com uma regra que define o estado atual em função dos estados passados [18]. Se a regra for aplicada em instantes discretos de tempo, diz-se que o sistema dinâmico é de tempo discreto, podendo-se chamá-lo também de mapa.

Seja  $\mathbf{f}(\cdot)$  uma função cujo domínio  $U \subset \mathbb{R}^m$  é igual ao contra-domínio. O sistema  $\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[n])$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{x}[0] \in U$  representa um *sistema dinâmico de tempo discreto* ou *mapa* [21]. Uma *órbita* ou *senal*  $\mathbf{x}[n]$  corresponde à iteração de  $\mathbf{f}(\cdot)$  a partir da condição inicial  $\mathbf{x}[0]$  por  $n$  passos de tempo. Uma solução  $\mathbf{a}$  do sistema  $\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[n])$  é dita *ponto fixo* do mapa se  $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$  e, portanto,  $\mathbf{x}_n(\mathbf{c}) = \mathbf{a}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Uma solução é dita *periódica* se ela é formada por uma sucessão de pontos que se repetem periodicamente, com o passar do tempo. O período da órbita é determinada pelo número de pontos distintos que a forma.

Este sistema apresenta *dependência sensível às condições iniciais* se há um número  $\epsilon > 0$ , tal que para qualquer condição inicial  $\mathbf{x}_0$  e para qualquer número  $\delta > 0$ , existe pelo menos um ponto  $\mathbf{x}'_0$  com  $\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\| < \delta$ , tal que  $\|\mathbf{f}^k(\mathbf{x}'_0) - \mathbf{f}^k(\mathbf{x}_0)\| \geq \epsilon$  [19].

Esta definição de sensibilidade às condições iniciais não exige que a órbita de  $\mathbf{x}'_0$  se afaste da órbita de  $\mathbf{x}_0$  em todas as iterações. Ela exige somente que o  $k$ -ésimo ponto da órbita de  $\mathbf{x}_0$  esteja afastado de do  $k$ -ésimo ponto da órbita de  $\mathbf{x}'_0$  por uma distância  $\epsilon$ .

É possível avaliar a sensibilidade às condições iniciais, tanto para sistemas de tempo discreto quanto para sistemas de tempo contínuo, por meio do cálculo dos expoentes de Lyapunov, descrito a seguir.

Em sistemas discretos  $m$ -dimensionais existem  $m$  expoentes de Lyapunov associados a cada órbita, definidos da seguinte forma [18]:

Seja  $\mathbf{f}(\cdot)$  um mapa em  $\mathbb{R}^m$ , diferenciável, e seja  $J_n = \mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0)$  o jacobiano de  $\mathbf{f}^n(\cdot)$  calculado em  $\mathbf{x}_0$ . Para  $k = 1, 2, \dots, m$ , seja  $r_k^n$  o comprimento do  $k$ -ésimo maior eixo do elipsóide  $J_n N$  para uma órbita com condição inicial  $\mathbf{x}_0$  em que  $N$  é uma esfera de raio unitário em torno de  $\mathbf{x}_0$ . Então  $r_k^n$  mede a contração ou expansão próxima à órbita de  $\mathbf{x}_0$  durante as primeiras  $n$  iterações. O  $k$ -ésimo número de Lyapunov de  $\mathbf{x}_0$  é dado por

$$L_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_k^n)^{\frac{1}{n}} \quad (2.1)$$

se o limite existir. Neste caso, o  $k$ -ésimo expoente de Lyapunov de  $\mathbf{x}_0$  é  $h_k = \ln(L_k)$ .

A notação  $J_n N$  representa o produto entre os vetores que descrevem a esfera  $N$  e o

jacobiano  $J_n$ . Esta definição assegura que, para uma certa órbita, os números e expoentes de Lyapunov obedecem  $L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_m$  e  $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_m$  respectivamente.

Um método para o cálculo numérico dos expoentes de Lyapunov de um mapa é mostrado a seguir [18].

Para a órbita  $\mathbf{x}_n(\mathbf{x}[0])$  do sistema  $\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[n])$  obtém-se pela regra da cadeia,

$$J_n N = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_{n-1}) \cdots \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) N, \quad (2.2)$$

podendo-se computar uma iteração de cada vez. Começa-se com uma base ortonormal  $\{\mathbf{w}_1^0, \mathbf{w}_2^0, \dots, \mathbf{w}_m^0\}$  para  $\mathbb{R}^m$ , e computam-se os vetores  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m$ :

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) \mathbf{w}_1^0, \dots, \mathbf{z}_m = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) \mathbf{w}_m^0. \quad (2.3)$$

Embora estes vetores estejam sobre o elipsóide  $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)N$ , eles não são necessariamente ortogonais. Pode-se contornar esta situação criando-se um novo conjunto de vetores ortogonais  $\{\mathbf{w}_1^1, \mathbf{w}_2^1, \dots, \mathbf{w}_m^1\}$  que gera um elipsóide com o mesmo volume de  $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)N$ . Consegue-se isto utilizando-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, que define

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 \\ y_2 &= z_2 - \frac{z_2 \cdot y_1}{\|y_1\|^2} y_1 \\ y_3 &= z_3 - \frac{z_3 \cdot y_1}{\|y_1\|^2} y_1 - \frac{z_3 \cdot y_2}{\|y_2\|^2} y_2 \\ &\vdots \\ y_m &= z_m - \frac{z_m \cdot y_1}{\|y_1\|^2} y_1 - \cdots - \frac{z_m \cdot y_{m-1}}{\|y_{m-1}\|^2} y_{m-1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Define-se, então,  $\{\mathbf{w}_1^1 = y_1, \dots, \mathbf{w}_m^1 = y_m\}$  como a nova base ortogonal e, em seguida, aplica-se o jacobiano  $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_1)$  ao próximo ponto da órbita e ortogonaliza-se novamente o conjunto

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_1) \mathbf{w}_1^1, \dots, \mathbf{z}_m = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_1) \mathbf{w}_m^1 \quad (2.5)$$

a fim de se conseguir um conjunto ortogonal  $\{\mathbf{w}_1^2, \dots, \mathbf{w}_m^2\}$ .

Repetindo-se estes passos por  $n$  vezes obtém-se o conjunto de vetores  $\{\mathbf{w}_1^n, \dots, \mathbf{w}_m^n\}$  que fornecem os semi-eixos maiores do elipsóide  $J_n N$ .

A expansão ou contração  $r_i^n$  na  $i$ -ésima direção após  $n$  iterações é aproximada pela norma do vetor  $\mathbf{w}_i^n$ . Assim  $\|\mathbf{w}_i^n\|^{\frac{1}{n}}$  é a aproximação do  $i$ -ésimo maior expoente de Lyapunov depois de  $n$  passos.

A fim de eliminar o problema de números muito grandes ou muito pequenos, deve-se alterar este algoritmo de forma a se normalizar a base ortogonal a cada passo [18]. Denotando-se os  $m$  vetores obtidos na aplicação de ortogonalização de Gram-Schmidt a

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_j)\mathbf{w}_1^j, \dots, \mathbf{z}_m = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_j)\mathbf{w}_m^j \quad (2.6)$$

por  $\{\mathbf{y}_1^{j+1}, \dots, \mathbf{y}_m^{j+1}\}$  e fazendo-se  $\mathbf{w}_i^{j+1} = \frac{\mathbf{y}_i^{j+1}}{\|\mathbf{y}_i^{j+1}\|}$ , tornam-se unitários os vetores  $\mathbf{w}_i^{j+1}$ .

Assim,  $\|\mathbf{y}_i^{j+1}\|$  mede a expansão ou contração durante um passo na direção do  $i$ -ésimo maior eixo do elipsóide. Portanto, a expansão nesta direção após  $n$  passos será dada por  $r_i^n \approx \|\mathbf{y}_i^n\| \dots \|\mathbf{y}_i^1\|$ , e a expressão

$$h_i = \frac{\ln(\|\mathbf{y}_i^n\|) + \dots + \ln(\|\mathbf{y}_i^1\|)}{n} \quad (2.7)$$

é conveniente para se estimar o  $i$ -ésimo maior expoente de Lyapunov após  $n$  iterações.

A seguir, apresenta-se uma definição para sinal caótico [18].

Diz-se que um sinal é *caótico* se este for determinístico, aperiódico, limitado em amplitude e apresentar dependência sensível às condições iniciais, que pode ser caracterizada pela verificação de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo ( $h > 0$ ).

## 2.2 Mapa Utilizado

Em 1975, Michel Hénon mostrou que muitos dos fenômenos presentes nos mapas de equações diferenciais de Poincaré também poderiam ser encontrados em um mapa quadrático bidimensional de tempo discreto, o que facilita a sua simulação computacional [18].

A versão do mapa de Hénon utilizada neste trabalho é definida pelo sistema de equações de diferenças

$$\begin{cases} x_1[n+1] = 1 - \alpha x_1^2[n] + x_2[n] \\ x_2[n+1] = \beta x_1[n] \end{cases}, \quad (2.8)$$

em que  $x_1[n]$  e  $x_2[n]$  correspondem ao estado atual do sistema, e  $x_1[n+1]$  e  $x_2[n+1]$  representam o novo estado deste sistema, atingido após uma iteração. Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são mantidos constantes durante as iterações do mapa.

## 2.3 Sincronismo de Wu e Chua

De forma diferente à abordagem de Pecora e Carroll [8], que utiliza expoentes de Lyapunov condicionados para verificar a estabilidade do receptor e, por conseguinte, a possibilidade de sincronismo, Wu e Chua [1] propõem que as equações do transmissor, em termos de  $\mathbf{x}$ , e as do receptor, em termos de  $\mathbf{y}$ , sejam escritas de forma que a dinâmica do erro de sincronismo seja simples o bastante a ponto de permitir a verificação direta de sua convergência para zero [22]. Essas equações são assim escritas

$$\mathbf{x}[n+1] = A\mathbf{x}[n] + \mathbf{b} + \mathbf{f}(\mathbf{x}[n]) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{y}[n+1] = A\mathbf{y}[n] + \mathbf{b} + \mathbf{f}(\mathbf{x}[n]) \quad (2.10)$$

em que  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{\mathbf{x}[n], \mathbf{y}[n]\} \subset \mathbb{R}^K$ ,  $\mathbf{x}[n] = [x_1[n], x_2[n], \dots, x_K[n]]^T$ ,  $\mathbf{y}[n] = [y_1[n], y_2[n], \dots, y_K[n]]^T$ . A matriz real  $A_{K \times K}$  e o vetor  $\mathbf{b}_{K \times 1}$  são constantes. A função  $\mathbf{f}(\cdot)$ ,  $\mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K$  é não-linear.  $K$  representa o número de equações que definem o sistema a ser estudado.

Em outras palavras, as Equações (2.9) e (2.10) mostram que deve-se separar a parte linear da parte não linear das equações do sistema cujo sincronismo se deseja estudar.

O sistema descrito pela Equação (2.9), referente ao transmissor, é autônomo e recebe o nome de *mestre*. Já o sistema descrito pela Equação (2.10), referente ao receptor, depende de  $\mathbf{x}[n]$ , e por isso recebe o nome de *escravo* [22].

A dinâmica do erro de sincronismo entre os dois sistemas  $\mathbf{e}[n] = \mathbf{y}[n] - \mathbf{x}[n]$  é dada por

$$\mathbf{e}[n+1] = A\mathbf{e}[n] \quad (2.11)$$

Adotando-se a condição inicial  $\mathbf{e}[0] = \mathbf{y}[0] - \mathbf{x}[0]$ , tem-se que

$$\mathbf{e}[n] = A^n \mathbf{e}[0] \quad (2.12)$$

Diz-se que os sistemas atingem o sincronismo quando  $\mathbf{e}[n] \rightarrow \mathbf{0}$  conforme  $n$  aumenta. Conseqüentemente, mestre e escravo sincronizarão se os autovalores  $\lambda_i$  de  $A$  satisfizerem a condição [23]

$$|\lambda_i| < 1 \quad ; \quad 1 \leq i \leq K \quad (2.13)$$

pois, como  $\mathbf{e}[n]$  é escrito como uma combinação linear de termos do tipo  $c_i \lambda_i^n$ , com  $c_i$  constante, então, se todo  $|\lambda_i| < 1$ , tem-se que  $\mathbf{e}[n] \rightarrow \mathbf{0}$  para  $n \rightarrow \infty$  [19]. Assim, se for

possível escrever um sistema no formato da Equação (2.9) e cujos autovalores da matriz  $A$  satisfaçam a condição (2.13), configurar um sistema escravo que se sincronize com ele torna-se uma tarefa simples.

## 2.4 Exemplo de Sincronismo com o Mapa de Hénon

É possível escrever o mapa bidimensional de Hénon na forma matricial apresentada na Equação (2.9), obtendo-se

$$\mathbf{x}[n+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}}_A \mathbf{x}[n] + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha x_1^2[n] \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x}[n])}. \quad (2.14)$$

Neste caso, os autovalores de  $A$  são

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\beta}, \quad (2.15)$$

e assim, para que a condição (2.13) seja satisfeita,  $\beta$  deve assumir, em módulo, valores inferiores a 1, ou seja,

$$0 \leq |\beta| < 1, \quad (2.16)$$

permitindo, desta forma, que o mapa de Hénon seja implementado conforme o modelo de sincronismo proposto por Wu e Chua [1].

A fim de realizar simulações computacionais para testar o sincronismo, implementou-se no Matlab dois sistemas,  $\mathbf{x}[n]$  e  $\mathbf{y}[n]$ , com os parâmetros  $\alpha = 1.4$  e  $\beta = 0.3$ , e atribuíram-se condições iniciais diferentes a cada sistema.

Para o sistema mestre,  $\mathbf{x}[n]$ , as condições iniciais foram

$$\begin{cases} x_1[0] = 0 \\ x_2[0] = 0 \end{cases}, \quad (2.17)$$

enquanto que para o sistema escravo,  $\mathbf{y}[n]$ , as condições iniciais foram

$$\begin{cases} y_1[0] = 0.5 \\ y_2[0] = 1.5 \end{cases}. \quad (2.18)$$

Após algumas iterações dos sistemas o sincronismo foi atingido. Na Figura 2.1 são mostradas as evoluções temporais de cada componente dos sistemas e um gráfico ilustrando

a dinâmica do erro de sincronismo. A linha cheia, nas Figuras 2.1 (a) e (b) identifica a componente do sistema  $\mathbf{x}[n]$  e a linha tracejada identifica a componente do sistema  $\mathbf{y}[n]$ .

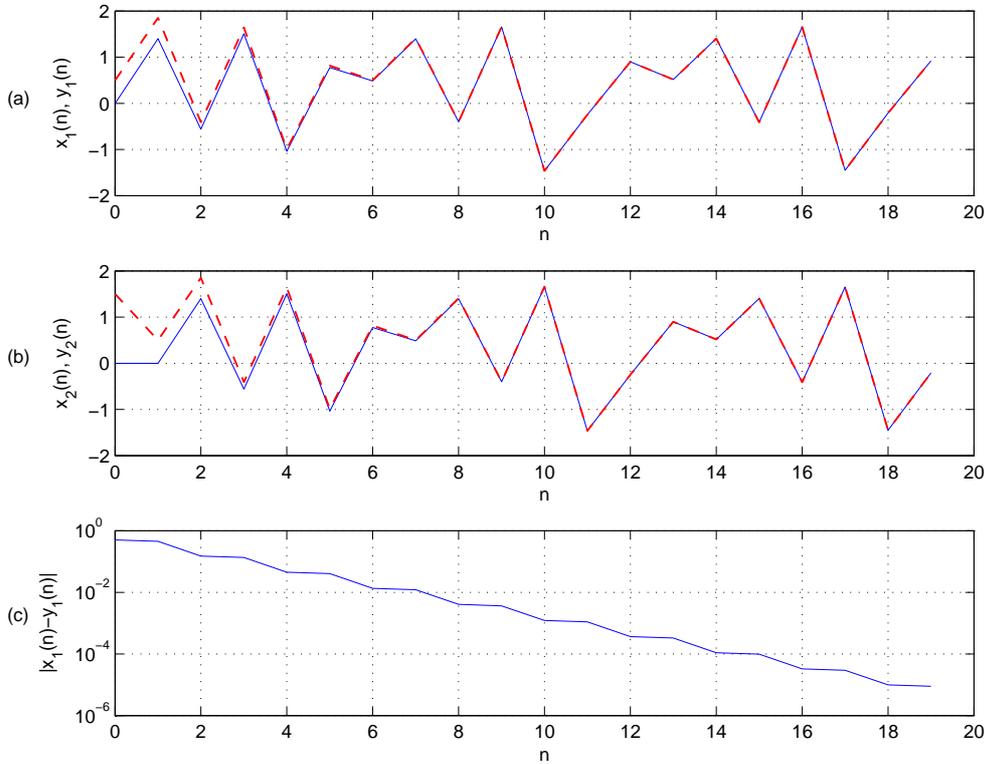


Figura 2.1: Constatação do sincronismo entre dois sistemas implementados com o mapa de Hénon bidimensional: (a) evolução temporal das componentes  $x_1[n]$  (linha cheia) e  $y_1[n]$  (linha tracejada); (b) evolução temporal das componentes  $x_2[n]$  (linha cheia) e  $y_2[n]$  (linha tracejada); (c) dinâmica do erro de sincronismo entre os dois sistemas

Deve-se ressaltar que embora se tenha atingido o sincronismo com sucesso para os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  usados na simulação apresentada neste capítulo, e que além de existirem outras combinações de valores de parâmetros para as quais a condição de existência do sincronismo seja satisfeita, nada se pode afirmar quanto às propriedades do sinal gerado pelos mapas de Hénon com  $\alpha$  e  $\beta$  quaisquer; ou seja, podem haver casos em que os sistemas sincronizam, mas o sinal gerado pelo mapa não é caótico. Isto é discutido com mais detalhes no próximo capítulo.

# Capítulo 3

## Sistema de Comunicação baseado em Sincronismo de Sinais Caóticos

Neste capítulo é apresentado o modelo de sistema de comunicação baseado no sincronismo de Wu e Chua [1], descrito na Seção 2.3.

A fim de tornar mais intuitivo o entendimento do sistema de comunicação proposto, apresenta-se um exemplo utilizando-se mensagem analógica do tipo senóide.

Na Seção 3.1 descreve-se o sistema de comunicação estudado neste trabalho e determina-se analiticamente a condição de existência de sincronismo entre transmissor e receptor.

Na Seção 3.2 é apresentado um exemplo de funcionamento deste sistema utilizando o mapa bidimensional de Hénon.

Por fim, na seção 3.3 são apresentados os problemas que surgem quando o canal de comunicação utilizado é limitado em banda, ou seja, quando atua sobre o sinal transmitido como um filtro passa-baixas, por exemplo.

### 3.1 Descrição do Sistema

Utilizando o método de sincronismo apresentado na Seção 2.3, Wu e Chua [1] propuseram um sistema de transmissão de informação utilizando sinais caóticos que oferece erro nulo sob condições ideais. Na Figura 3.1 é ilustrada a versão de tempo discreto deste sistema.

Neste modelo, representa-se o canal de comunicação por um sistema linear com resposta em frequência  $H_C(\omega)$ . O sinal  $m[n]$  contendo a informação que se deseja transmitir é com-

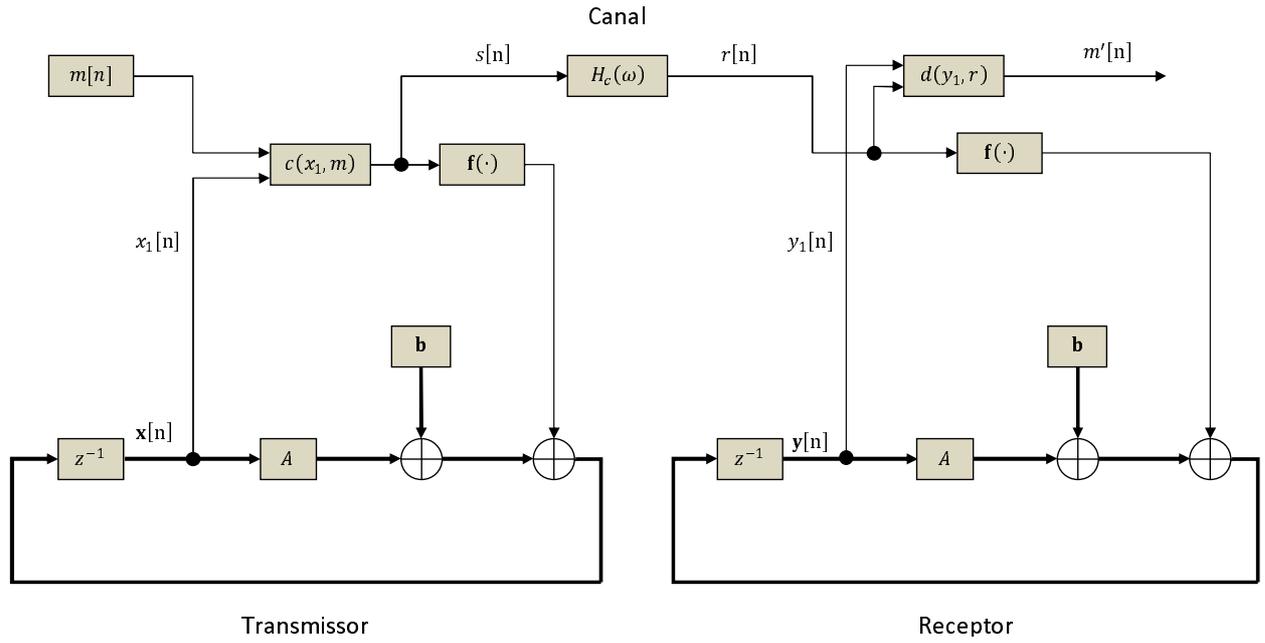


Figura 3.1: Diagrama de blocos do sistema de comunicação proposto.

binado com a componente  $x_1[n]$  do vetor  $\mathbf{x}[n]$  por meio da função de codificação

$$s[n] = c(x_1[n], m[n]), \quad (3.1)$$

de forma a possibilitar que a mensagem seja decodificada utilizando-se uma função inversa

$$m[n] = d(x_1[n], s[n]) = d(x_1[n], c(x_1, m[n])). \quad (3.2)$$

As equações que governam o sistema de comunicação como um todo assumem a mesma forma das Equações (2.9) e (2.10), sendo a única diferença os argumentos de  $\mathbf{f}(\cdot)$ :

$$\mathbf{x}[n+1] = A\mathbf{x}[n] + \mathbf{b} + \mathbf{f}(s[n]) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{y}[n+1] = A\mathbf{y}[n] + \mathbf{b} + \mathbf{f}(r[n]) \quad (3.4)$$

em que  $r[n]$  representa o sinal entregue pelo canal de comunicação ao receptor, isto é,

$$r[n] = s[n] * h_c[n], \quad (3.5)$$

sendo que  $h_c$  representa a resposta impulsiva do canal e “\*” representa a operação de convolução linear.

Em princípio, escolhendo-se  $c(\cdot, \cdot)$  e  $d(\cdot, \cdot)$ , deve-se buscar

$$s[n] \approx x_1[n] \quad (3.6)$$

para todos os  $m[n]$  admissíveis, uma vez que  $s[n]$  é realimentado no sistema do transmissor em vez de  $x_1[n]$ . Dessa forma, a condição (3.6) impõe que a dinâmica do sistema não seja alterada de forma significativa e, conseqüentemente, o sistema continue gerando sinais caóticos. Além disso, se comunicação segura for desejada, a condição (3.6) garante que a presença da mensagem  $m[n]$  não seja imediatamente percebida a partir da observação do sinal  $s[n]$ .

Para um canal ideal, isto é,  $H_C(\omega) = 1$  e  $s[n] = r[n]$ , pode-se escrever as Equações (3.3) e (3.4) como

$$\mathbf{x}[n+1] = A\mathbf{x}[n] + \mathbf{b} + \mathbf{f}(\mathbf{s}[n]) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{y}[n+1] = A\mathbf{y}[n] + \mathbf{b} + \mathbf{f}(\mathbf{s}[n]) \quad (3.8)$$

Mais uma vez, a dinâmica do erro é dada pela Equação (2.11) e, caso a condição (2.13) seja satisfeita, então  $\mathbf{y}[n] \rightarrow \mathbf{x}[n]$  e, particularmente,  $y_1[n] \rightarrow x_1[n]$ . Assim, utilizando a Equação (3.2), tem-se que

$$m'[n] = d(y_1[n], s[n]) \rightarrow d(x_1[n], s[n]) = m[n]. \quad (3.9)$$

Portanto quando os parâmetros do receptor e do transmissor são iguais e utiliza-se um canal de comunicação ideal, a recuperação da mensagem enviada torna-se possível no receptor sem que haja degradação da mesma, exceto por um curto transiente de sincronismo [22].

## 3.2 Exemplo de aplicação

Implementado-se neste sistema de comunicação o mapa bidimensional de Hénon com os parâmetros  $\alpha = 1.4$  e  $\beta = 0.3$ , usualmente encontrados na literatura [18], pode-se escrever suas equações na forma da Equação (2.9):

$$\mathbf{x}[n+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}}_A \mathbf{x}[n] + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1.4x_1^2[n] \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x}[n])}. \quad (3.10)$$

Neste caso, os autovalores de  $A$  são

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{0.3} \approx \pm 0.5477 \quad (3.11)$$

satisfazendo, assim, a condição (2.13) e permitindo, desta forma, a concepção do sistema de comunicação ilustrado na Figura 3.1.

Com o objetivo de se realizar simulações computacionais, este sistema de comunicação foi implementado no Matlab utilizando-se a mensagem analógica

$$m(n) = \sin(0.2\pi n), \quad (3.12)$$

adotando-se

$$s(n) = c(x_1(n), m(n)) = x_1(n) + 0.001m(n), \quad (3.13)$$

de forma que a mensagem recuperada seja definida por

$$m'(n) = d(y_1(n), r(n)) = 1000(r(n) - y_1m(n)). \quad (3.14)$$

Nas Figuras 3.2 e 3.3 são mostrados nos domínios do tempo e da frequência os sinais envolvidos na simulação realizada. As densidades espectrais de potência dos sinais estão normalizadas em relação aos seus respectivos máximos.

Observando-se o sinal da Figura 3.2(d) é possível perceber que, uma vez estabelecido o sincronismo entre transmissor e receptor, a mensagem é recuperada sem erro. Na Figura 3.3(b) é possível observar o espalhamento espectral provocado pelo sinal caótico gerado no transmissor.

É válido ressaltar que, ao se observar os sinais transmitidos, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência, não é possível se perceber a presença da mensagem  $m(n)$ .

### 3.3 Problemas que surgem com a limitação de banda

No entanto há algumas questões a serem consideradas ao se trabalhar com este modelo de sistema de comunicação. Embora tenha sido mostrado pela condição (2.16) que a possibilidade de sincronismo entre transmissor e receptor depende unicamente do parâmetro  $\beta$  do mapa bidimensional de Hénon, deve-se realizar a escolha do parâmetro  $\alpha$  de forma que o mapa gere um sinal caótico.

Outro problema que surge ao se trabalhar com este modelo de sistema de comunicação é a deterioração da mensagem transmitida quando o canal de comunicação não é ideal, isto

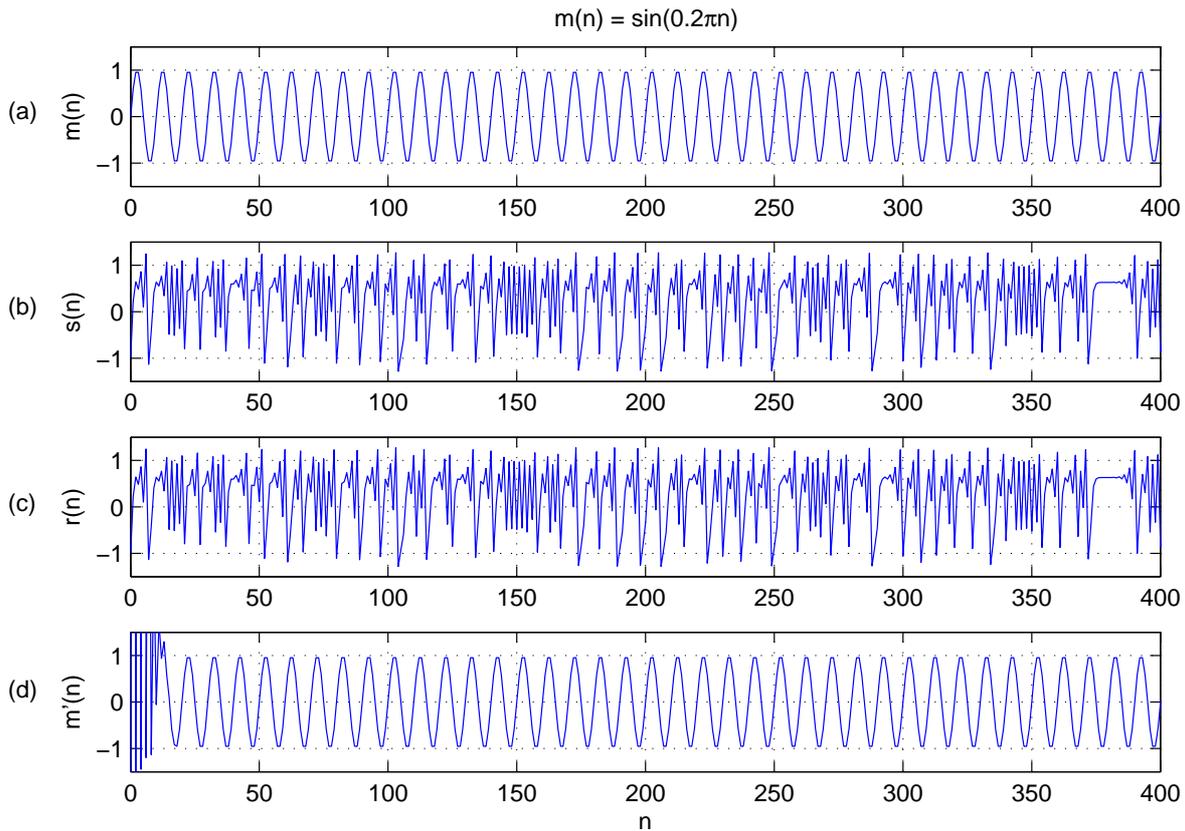


Figura 3.2: Simulação do sistema de comunicação ilustrado na Figura 3.1 para canal ideal: (a) mensagem  $m(m)$ ; (b) sinal caótico  $s(n)$  transmitido; (c) sinal caótico  $r(n)$  recebido; (d) mensagem  $m'(n)$  recuperada.

é,  $H_C(\omega) \neq 1, \forall \omega$ . Neste caso,  $r(n) \neq s(n)$  nas Equações (3.3) e (3.4), e o sincronismo é afetado de forma que  $m'(n) \nrightarrow m(n)$ .

A fim de exemplificar esta situação, considera-se o canal de comunicação  $H_C(\omega)$  como sendo um filtro passa-baixas com resposta impulsiva finita (filtro do tipo FIR) de ordem  $N_C = 200$ , com frequência de corte  $\omega_c = 0.8\pi$ .

Nas Figuras 3.4 e 3.5 são mostrados nos domínios do tempo e da frequência os sinais envolvidos na simulação realizada para este caso. A resposta em frequência do canal está representada pela linha tracejada nas Figuras 3.5(b) e (c).

Embora apenas cerca de 20% do espectro de frequência do sinal transmitido seja afetado, compromete-se toda a mensagem  $m(n)$ , como ilustrado na Figura 3.4(d), especialmente após observar-se a mudança na escala utilizada em comparação com as figuras anteriores.

No próximo capítulo é apresentada uma solução para a questão do uso de canais de

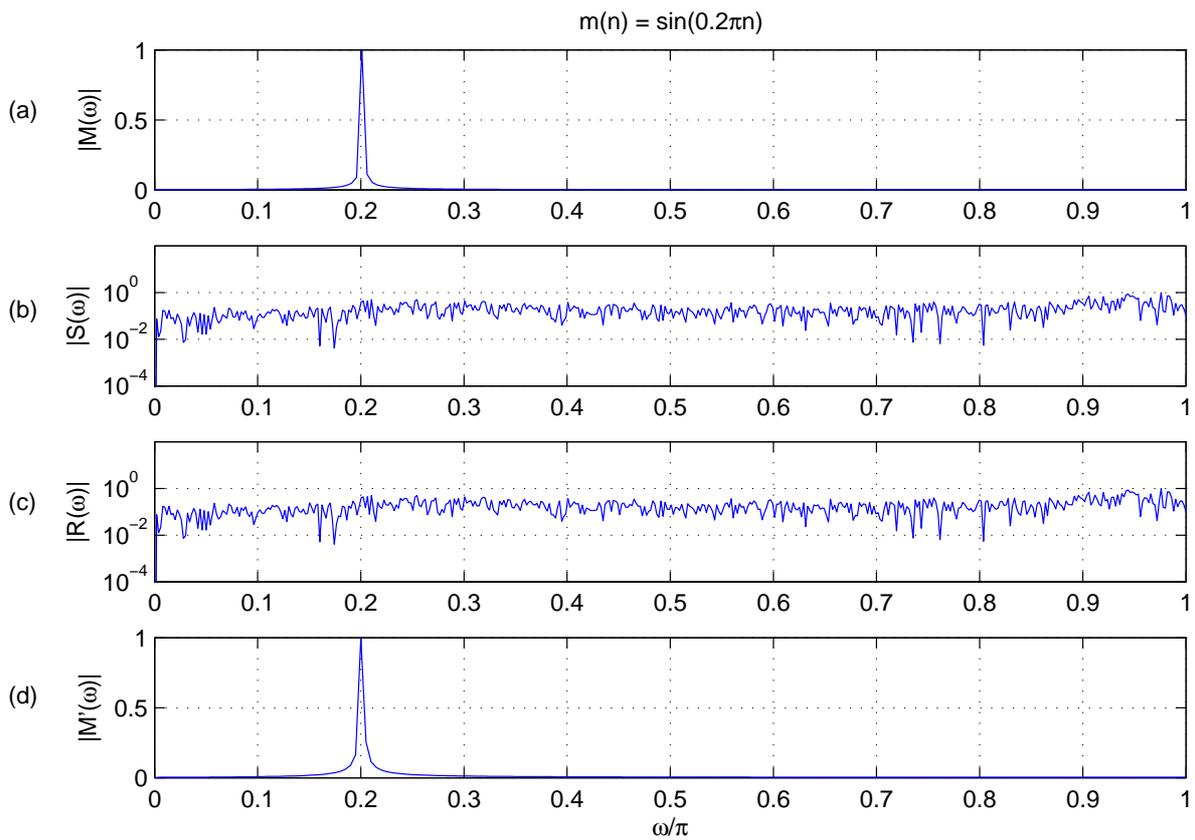


Figura 3.3: Representação normalizada da densidade espectral de potência dos sinais da Figura 3.2: (a) mensagem; (b) sinal transmitido; (c) sinal recebido; (d) mensagem recuperada.

comunicação limitados em banda, em que é proposta a inserção de um filtro FIR na malha de realimentação tanto do transmissor, quanto do receptor, com a finalidade de limitar a banda do sinal caótico gerado, e assim, obter menor interferência do canal sobre o sinal transmitido.

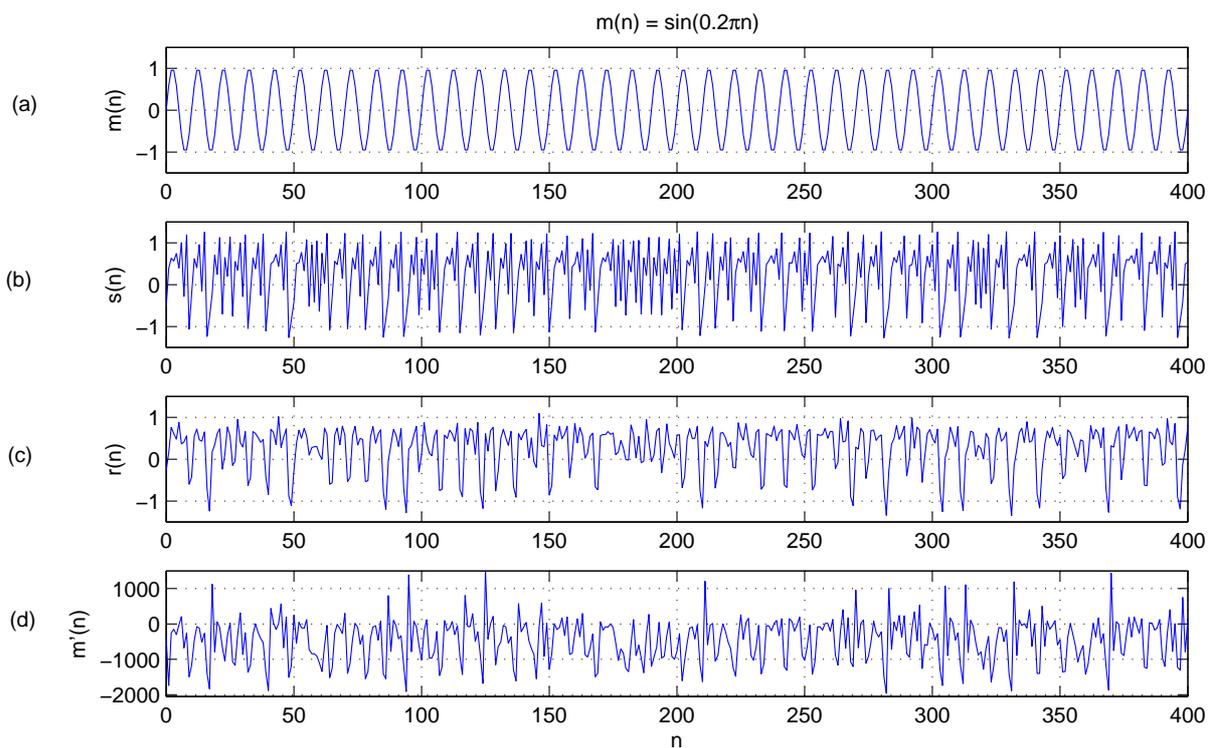


Figura 3.4: Simulação do sistema de comunicação ilustrado na Figura 3.1 para canal passa-baixas com frequência de corte  $\omega_c = 0.8\pi$ : (a) mensagem  $m(m)$ ; (b) sinal caótico  $s(n)$  transmitido; (c) sinal caótico  $r(n)$  recebido; (d) mensagem  $m'(n)$  recuperada. Deve-se prestar especial atenção à mudança de escala deste gráfico em relação aos anteriores.

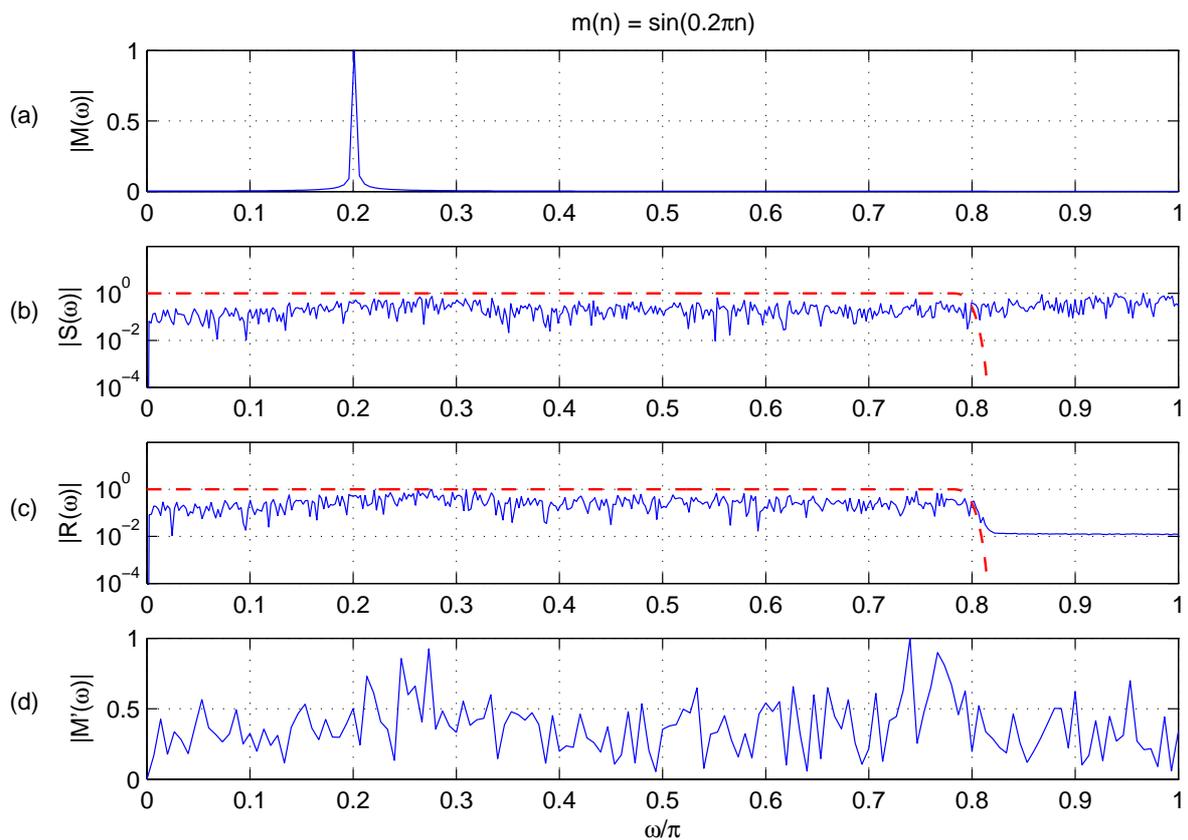


Figura 3.5: Representação normalizada da densidade espectral de potência dos sinais ilustrados na Figura 3.4: (a) mensagem; (b) sinal transmitido e resposta em frequência do canal (linha tracejada); (c) sinal recebido e resposta em frequência do canal (linha tracejada); (d) mensagem recuperada.

# Capítulo 4

## Resolvendo o problema de banda limitada

Conforme foi visto no capítulo 3, o sinal que efetivamente chega ao receptor quando o canal de comunicação possui limitação em banda costuma ser completamente diferente do sinal enviado pelo transmissor, fazendo com que a recuperação da mensagem original fique comprometida.

Na seção 4.1 é apresentada uma solução para o problema de limitação de banda, que consiste da inserção de um filtro FIR na malha de realimentação do transmissor e do receptor a fim de adequar a banda do sinal caótico gerado à banda de passagem do canal de comunicação [5, 14]. Pretende-se, com isso, reduzir ou anular a interferência do canal sobre o sinal transmitido.

Na seção 4.2 é apresentado estudo analítico sobre as condições que permitem a existência de sincronismo entre transmissor e receptor com filtro FIR inserido na malha de realimentação de cada um destes subsistemas, demonstrando-se que a presença do filtro não interfere no sincronismo.

Por fim, na seção 4.3 são apresentados resultados de simulações computacionais sobre a variação do maior expoente de Lyapunov do sistema transmissor em função da variação da ordem e da frequência de corte do filtro FIR inserido no transmissor e receptor.

## 4.1 Solução Proposta

Uma forma de combater a degradação em sinais provocada pela limitação de banda de um canal no sistema de comunicação representado na Figura 3.1 é inserir um filtro  $H_S(\omega)$  na malha de realimentação tanto do transmissor quanto do receptor, a fim de adequar a banda do sinal transmitido à banda de passagem do canal.

Na Figura 4.1 é mostrado o diagrama de blocos que representa o sistema de comunicação proposto [22].

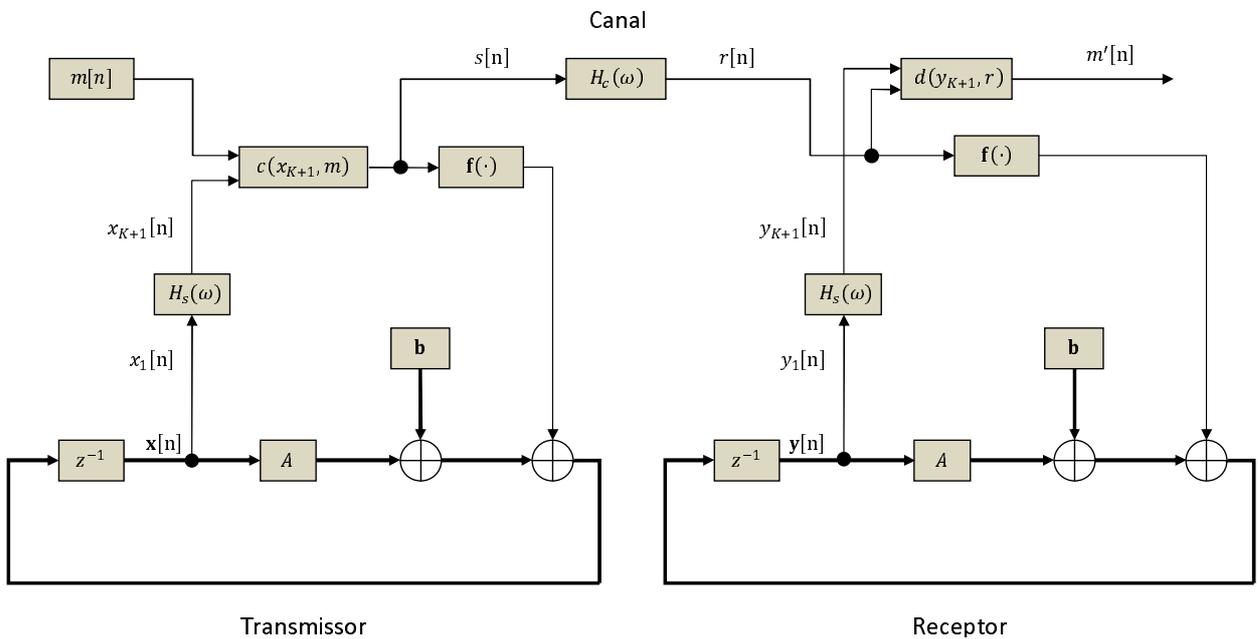


Figura 4.1: Diagrama de blocos do sistema de comunicação proposto para canais limitados em banda.

Considerando-se que o filtro  $H_S(\omega)$  é do tipo FIR de ordem  $N_S$ , pode-se expressar sua saída  $x_{K+1}[n]$  pela equação de diferenças

$$x_{K+1}[n] = b_0 x_1[n] + b_1 x_1[n-1] + \dots + b_{N_S} x_1[n-N_S], \quad (4.1)$$

em que  $b_0, b_1, \dots, b_{N_S}$  representam os coeficientes deste filtro.

Consequentemente, os sistemas de equações que descrevem o transmissor e o receptor passam a ser compostos por  $K+1$  equações de diferenças, sendo  $K$  o número de equações que definem o transmissor e o receptor do sistema de comunicação apresentado na Figura 3.1.

Analisando-se a Figura 4.1 é possível verificar que se  $H_S(\omega) = 1$ , para todo  $\omega$ , então o sistema sincronizará conforme demonstrado na seção 3.1, pois  $x_{K+1}[n] = x_1[n]$ . Porém, para  $H_S(\omega) \neq 1$ , tem-se que a componente do mapa que será combinada com a amostra da mensagem a ser transmitida, e que posteriormente será realimentada na etapa de geração de sinal caótico do transmissor passa a ser  $x_{K+1}[n]$ .

Torna-se, então, necessária a análise da influência que a inserção do filtro  $H_S(\omega)$  exercerá sobre as características do sinal transmitido e sobre o sincronismo do sistema de comunicação. Em outras palavras, é preciso avaliar se a presença do filtro  $H_S(\omega)$  pode comprometer o sincronismo do sistema de comunicação, e quais combinações de ordem e frequência de corte deste filtro permitem que o sinal  $x_{K+1}[n]$  seja caótico.

Estas análises são realizadas, respectivamente, nas seções 4.2 e 4.3.

## 4.2 Análise Teórica

O objetivo desta seção é estudar analiticamente o sincronismo de um sistema de comunicações baseado no mapa de Hénon descrito pelo sistema de equações (2.8) quando os filtros  $H_S(\omega)$  são inseridos nas malhas de realimentação do transmissor e do receptor.

Para isso, inicialmente foram estudados filtros FIR de ordens 1 a 4. Com posse dos resultados obtidos, pôde-se estender a análise para um filtro de ordem  $N_S$ .

Conforme visto na seção 4.1, o sinal de saída do filtro  $H_S(\omega)$  é dado pela equação de diferenças (4.1). Assim, pode-se reescrever o sistema de equações que descrevem o transmissor como

$$\begin{cases} x_1[n] = 1 - \alpha x_3^2[n-1] + x_2[n-1] \\ x_2[n] = \beta x_1[n-1] \\ x_3[n] = b_0 x_1[n] + b_1 x_1[n-1] + b_2 x_1[n-2] + \dots + b_{N_S} x_1[n-N_S] \end{cases} \quad (4.2)$$

A fim de se escrever  $x_3[n]$  de forma a representá-lo apenas em função de amostras refe-

rentes ao instante  $n - 1$ , definem-se as equações auxiliares

$$\begin{cases} x_4[n] = x_1[n - 1] \\ x_5[n] = x_4[n - 1] \\ \vdots \\ x_N[n] = x_{N-1}[n - 1] \end{cases}, \quad (4.3)$$

em que

$$N = N_S + 2 \quad (4.4)$$

representa o número de equações de diferenças que descrevem o novo mapa formado com a inserção dos filtros  $H_S(\omega)$  no transmissor e no receptor.

Reescrevendo  $x_3[n]$  em função de amostras referentes ao instante  $n - 1$ , e reescrevendo-se o sistema de equações (4.2) na forma matricial apresentada na Equação (2.9), tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \\ x_4[n] \\ x_5[n] \\ \vdots \\ x_N[n] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}[n]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & b_2 & \cdots & b_{N_S-1} & b_{N_S} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1[n - 1] \\ x_2[n - 1] \\ x_3[n - 1] \\ x_4[n - 1] \\ x_5[n - 1] \\ \vdots \\ x_N[n - 1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}[n-1]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha x_3^2[n - 1] \\ 0 \\ -b_0 \alpha x_3^2[n - 1] \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x}[n-1])} \quad (4.5)$$

Ao se calcular os autovalores da matriz  $A$ , obtém-se:

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} & = \pm\sqrt{\beta} \\ \lambda_{3,\dots,N} & = 0 \end{cases}. \quad (4.6)$$

Este resultado é de grande importância pois mostra que os autovalores não nulos são os mesmos encontrados no mapa bidimensional de Hénon, definidos pela Equação (2.15), e assim, o sincronismo do sistema de comunicação depende somente do parâmetro  $\beta$  deste mapa.

Logo, a ordem e o tipo dos filtros FIR,  $H_S(\omega)$ , inseridos no transmissor e no receptor do sistema de comunicação não interfere nas condições de sincronismo. Porém nada se pode

afirmar quanto às características do sinal  $x_{K+1}[n]$ , referente à saída do filtro presente no transmissor.

Em outras palavras, embora a presença dos filtros  $H_S(\omega)$  não interfira no sincronismo do sistema de comunicação, não há nenhuma garantia de que o sinal  $x_{K+1}[n]$  será caótico. A princípio, este sinal pode ser caótico, periódico ou pode divergir para o infinito.

Na seção 4.3 são apresentados resultados experimentais referentes à variação do maior expoente de Lyapunov do mapa definido pelo transmissor em função da variação da ordem e da frequência de corte do filtro  $H_S(\omega)$ , o que torna possível determinar quais combinações de parâmetros deste filtro permitem que o sinal  $x_{K+1}[n]$  seja caótico.

### 4.3 Simulações Computacionais

Conforme apontado na seção 4.2, o sincronismo do sistema de comunicação não é afetado pela presença dos filtros  $H_S(\omega)$ , inseridos no transmissor e no receptor, porém nada se pode afirmar a respeito das características do sinal  $x_{K+1}[n]$ , referente à saída do filtro inserido no transmissor.

A fim de analisar como os parâmetros de um filtro FIR, passa-baixas, linear e invariante no tempo influenciam as características do sinal  $x_{K+1}[n]$ , implementou-se, no transmissor, o mapa de Hénon com parâmetros  $\alpha = 1.4$  e  $\beta = 0.3$ , usualmente encontrados na literatura [18].

Realizaram-se, então, simulações computacionais a fim de avaliar a variação do maior expoente de Lyapunov  $h$  do mapa definido pelo transmissor em função da ordem  $N$  e da frequência de corte  $\omega_c$  de um filtro  $H(\omega)$  do tipo FIR, passa-baixas, linear e invariante no tempo, obtendo-se assim os gráficos apresentados na Figura 4.2.

Nesta figura, o eixo vertical apresenta os valores do maior expoente de Lyapunov do sistema transmissor, enquanto que o eixo horizontal apresenta os valores normalizados da frequência de corte dos filtros utilizados durante a simulação, em que o seu valor máximo,  $\omega_c/\pi = 1$ , representa a metade da frequência de amostragem que deve ser utilizada no sistema de comunicação.

É importante ressaltar que quando não há expoente de Lyapunov associado a uma frequência de corte, isto indica que o mapa divergiu para o infinito, e portanto, não será

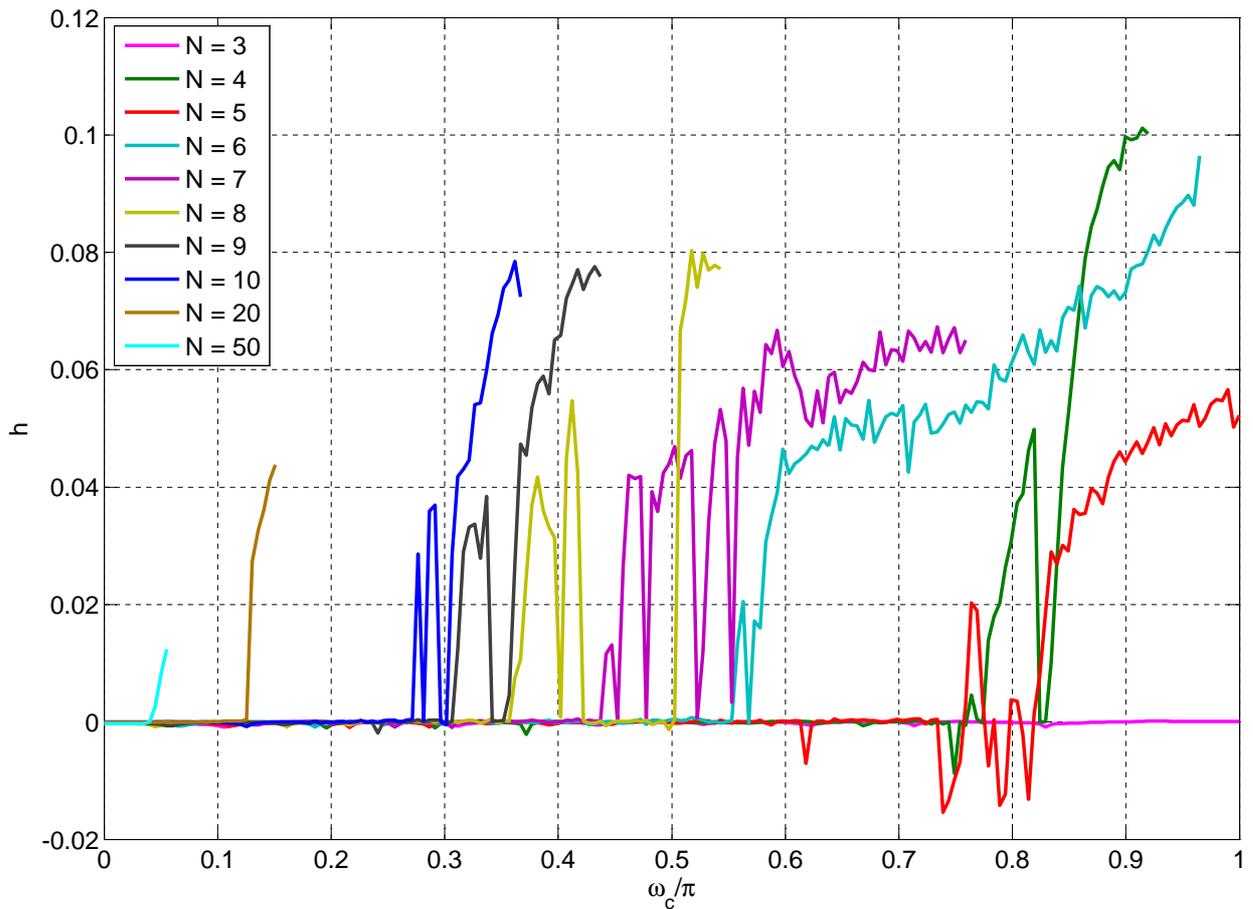


Figura 4.2: Variação do maior expoente de Lyapunov  $h$  do sistema transmissor, com parâmetros usuais do Mapa de Hénon, em função da ordem  $N$  e da frequência de corte  $\omega_c$  de um filtro FIR, passa-baixas.

possível estabelecer comunicação entre transmissor e receptor para estes casos.

Analisando-se a Figura 4.2, é possível perceber que torna-se cada vez mais difícil obter expoente de Lyapunov positivo conforme se aumenta a ordem do filtro utilizado. Em outras palavras, torna-se cada vez mais difícil obter um sinal caótico para se utilizar no sistema de comunicação.

Outra observação importante é que, embora filtros com frequência de corte  $\omega_c = \pi$ , ou  $\omega_c/\pi = 1$ , como mostrado no eixo horizontal da Figura 4.2, representem filtros que não cortam nenhuma componente espectral de sinais que passem por eles, sendo por este motivo chamados de filtros passa-tudo, a sua presença no sistema de comunicação não torna este sistema equivalente a um sistema sem filtro.

Embora este tipo de filtro não corte componentes espectrais de sinais, ele provoca atraso de fase nos sinais que passam por ele. Em outras palavras, o sinal de saída é igual ao sinal de entrada, porém atrasado em relação a este último. Pelo fato de o modelo de sistema de comunicação aqui estudado ser altamente não linear, sua dinâmica também pode ser drasticamente afetada por este tipo de filtro.

A partir destas observações, questionou-se a possibilidade de existir outro valor do parâmetro  $\alpha$ , referente ao mapa de Hénon, que permitisse a geração de sinais caóticos na presença de filtros de ordens mais altas.

Para responder a esta questão, fizeram-se novas simulações mantendo-se o parâmetro  $\beta = 0.3$ , fixando-se a ordem  $N$  do filtro e a frequência de corte  $\omega_c$ , e avaliando-se o maior expoente de Lyapunov do sistema transmissor apenas em função do parâmetro  $\alpha$  do mapa de Hénon.

Pelo fato de os expoentes de Lyapunov calculados encontrarem-se na ordem de grandeza de  $10^{-2}$ , a órbita utilizada para o cálculo de cada expoente foi segmentada em cinco partes iguais, e calculou-se então a média e o desvio padrão dos novos expoentes de Lyapunov obtidos para cada um destes segmentos.

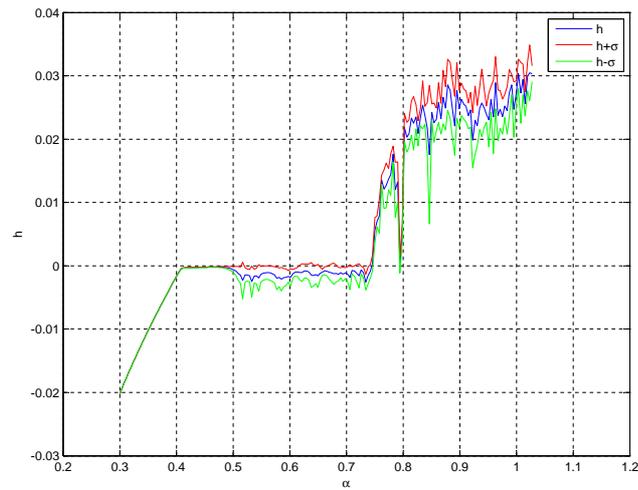
Com isso tornou-se possível a verificação de quais valores de  $\alpha$  permitem que o sinal gerado seja sempre caótico, mesmo com expoente de Lyapunov pequeno.

Na Figura 4.3 são mostrados os resultados obtidos para as simulações em que se fixou a ordem do filtro em  $N = 20$  e testaram-se três valores de frequência de corte:  $\omega_c = 0.3\pi$ ,  $\omega_c = 0.5\pi$  e  $\omega_c = 0.8\pi$ .

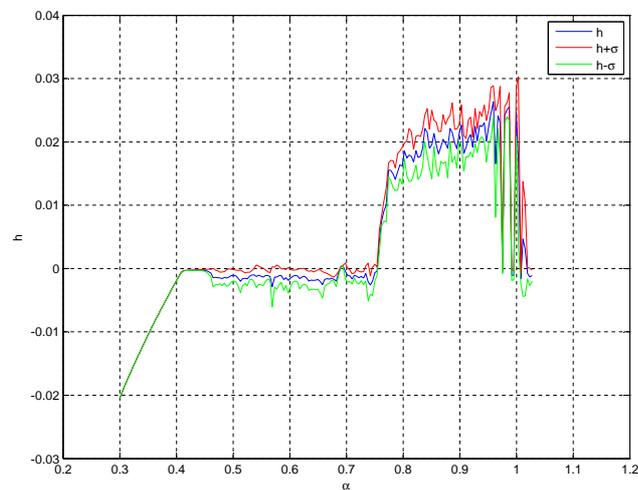
A linha central representa a média dos expoentes de Lyapunov  $h$  calculados para cada valor de  $\alpha$ , e as linhas superior e inferior delimitam a faixa de erro do cálculo de  $h$ , definida pelo desvio padrão.

Diante deste resultado, optou-se pelo valor de  $\alpha = 0.9$  para dar procedência às simulações. Portanto agora tem-se um par de parâmetros referentes ao mapa de Hénon que não necessariamente irá gerar sinais caóticos na ausência do filtro  $H_S(\omega)$ , mas que certamente irá gerar sinais caóticos para um filtro FIR, passa-baixas, de ordem  $N = 20$  e frequência de corte  $\omega_c = 0.3\pi$ , por exemplo.

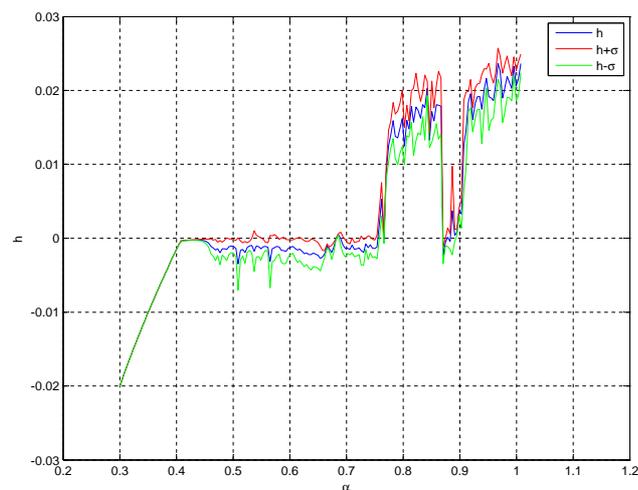
O passo seguinte foi refazer o experimento de avaliar o maior expoente de Lyapunov do



(a)



(b)



(c)

Figura 4.3: Variação do maior expoente de Lyapunov  $h$  do sistema transmissor em função do parâmetro  $\alpha$  do mapa de Hénon, mantendo-se o parâmetro  $\beta = 0.3$  e a ordem do filtro  $N = 20$  para valores de frequência de corte: (a)  $\omega_c = 0.3\pi$ ; (b)  $\omega_c = 0.5\pi$ ; (c)  $\omega_c = 0.8\pi$ .

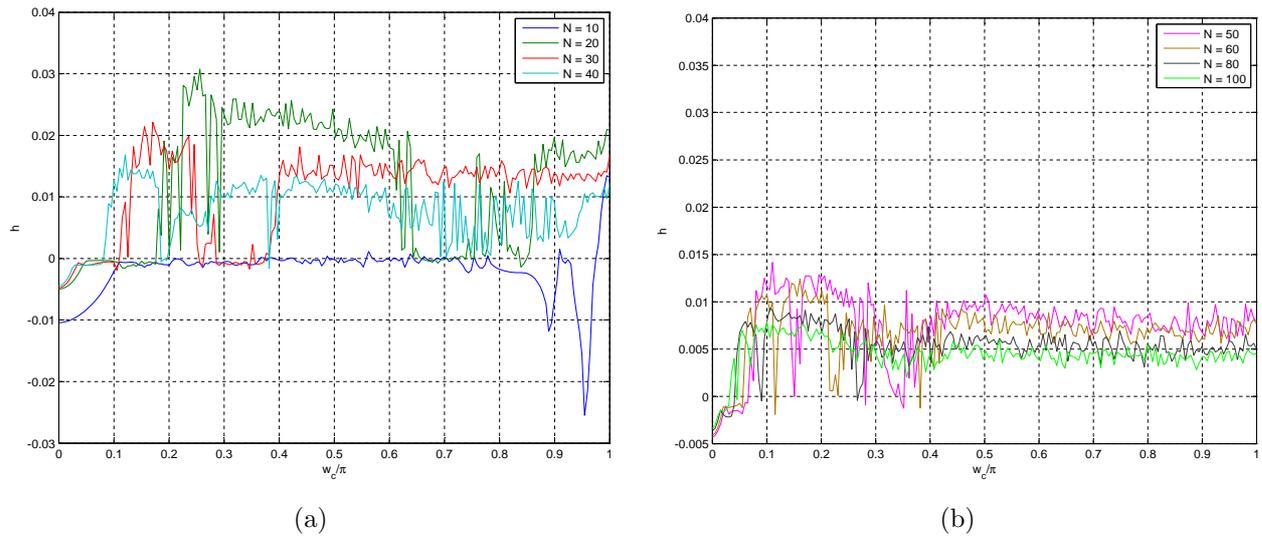


Figura 4.4: Variação do maior expoente de Lyapunov  $h$  do sistema transmissor, com o parâmetro  $\alpha = 0.9$ , em função da ordem  $N$  e da frequência de corte  $\omega_c$  de um filtro FIR, passa-baixas, com ordem (a)  $N = 10$  a  $N = 40$ ; (b)  $N = 50$  a  $N = 100$ .

sistema transmissor em função da variação da ordem e da frequência de corte do filtro inserido no sistema de comunicação, a fim de verificar para quais outros filtros FIR, passa-baixas é possível obter sinais caóticos.

Na Figura 4.4 são mostrados os resultados obtidos para filtros de ordens  $N = 10$  a  $N = 100$ . Novamente o eixo horizontal apresenta valores normalizados de frequência de corte. E novamente os valores de expoentes de Lyapunov calculados encontram-se na ordem de grandeza de  $10^{-2}$ .

Porém é importante observar que não há valor de frequência de corte que provocou a divergência do mapa implementado no transmissor, ou seja, sempre será possível estabelecer comunicação entre transmissor e receptor, embora nem sempre seja possível gerar sinais caóticos.

Na Figura 4.5 são mostrados separadamente os gráficos presentes na Figura 4.4, porém adicionando-se uma faixa de erro aos expoentes de Lyapunov calculados.

Embora já seja possível avaliar para quais valores de frequência de corte e ordem de filtros FIR, passa-baixas, sempre serão obtidos sinais caóticos, optou-se por gerar a Figura 4.6, em que as cores clara e escura são associadas, respectivamente a expoentes de Lyapunov positivos e negativos.

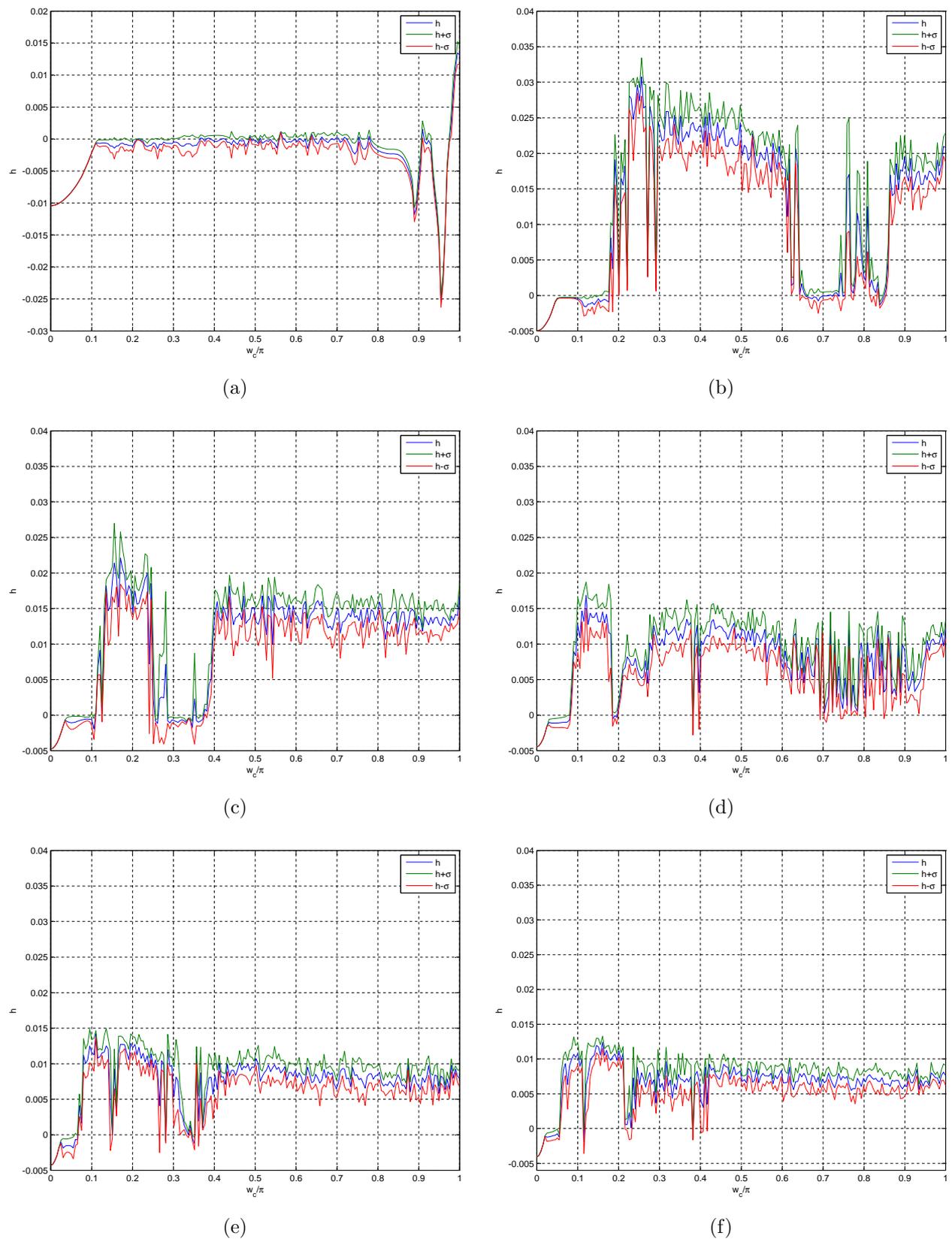


Figura 4.5: Gráficos da Figura 4.4 com faixa de erro definida pelo desvio padrão  $\sigma$  do maior expoente de Lyapunov para filtros FIR, passa-baixas, com ordens: (a)  $N = 10$ ; (b)  $N = 20$ ; (c)  $N = 30$ ; (d)  $N = 40$ ; (e)  $N = 50$ ; (f)  $N = 60$ .

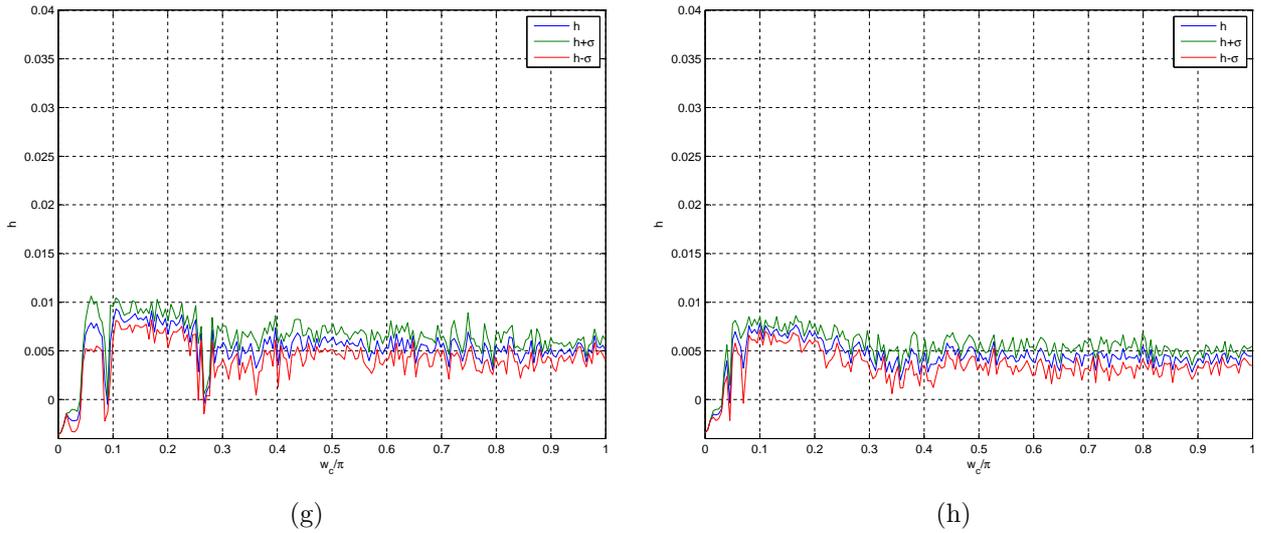


Figura 4.5: Gráficos da Figura 4.4 com faixa de erro definida pelo desvio padrão  $\sigma$  do maior expoente de Lyapunov para filtros FIR, passa-baixas, com ordens: (g) $N = 80$ ; (h) $N = 100$ .

Mais precisamente, as cores estão associadas ao resultado da diferença entre a média dos expoentes de Lyapunov calculados para uma determinada frequência de corte e seu desvio padrão para esta mesma frequência de corte.

Desta forma é possível mostrar, em uma mesma figura, todos os filtros utilizados nas simulações, tornando-se mais fácil a comparação entre os filtros.

Analisando-se a Figura 4.6, percebe-se que é possível obter sinais caóticos mesmo ao se utilizar filtros de ordens altas, como  $N = 80$  ou  $N = 100$ , e para largas faixas de frequência de corte.

A fim de verificar a validade dos resultados obtidos, implementou-se um sistema de comunicação com os parâmetros  $\alpha = 0.9$  e  $\beta = 0.3$ , referentes ao mapa de Hénon, e inseriram-se filtros de ordem  $N = 30$  e com frequência de corte  $\omega_c = 0.4\pi$  no transmissor e no receptor.

Para estes parâmetros de filtro espera-se observar a transmissão de um sinal caótico pois, conforme ilustrado na Figura 4.6, a frequência de corte escolhida está contida na região de cor mais clara, indicando que o maior expoente de Lyapunov do sistema transmissor é positivo.

Nesta simulação considerou-se o canal de comunicação como sendo um filtro FIR, passa-baixas de ordem  $N = 50$  e frequência de corte  $\omega_c = 0.8\pi$ .

Nas Figuras 4.7 e 4.8 são mostrados nos domínios do tempo e da frequência os sinais

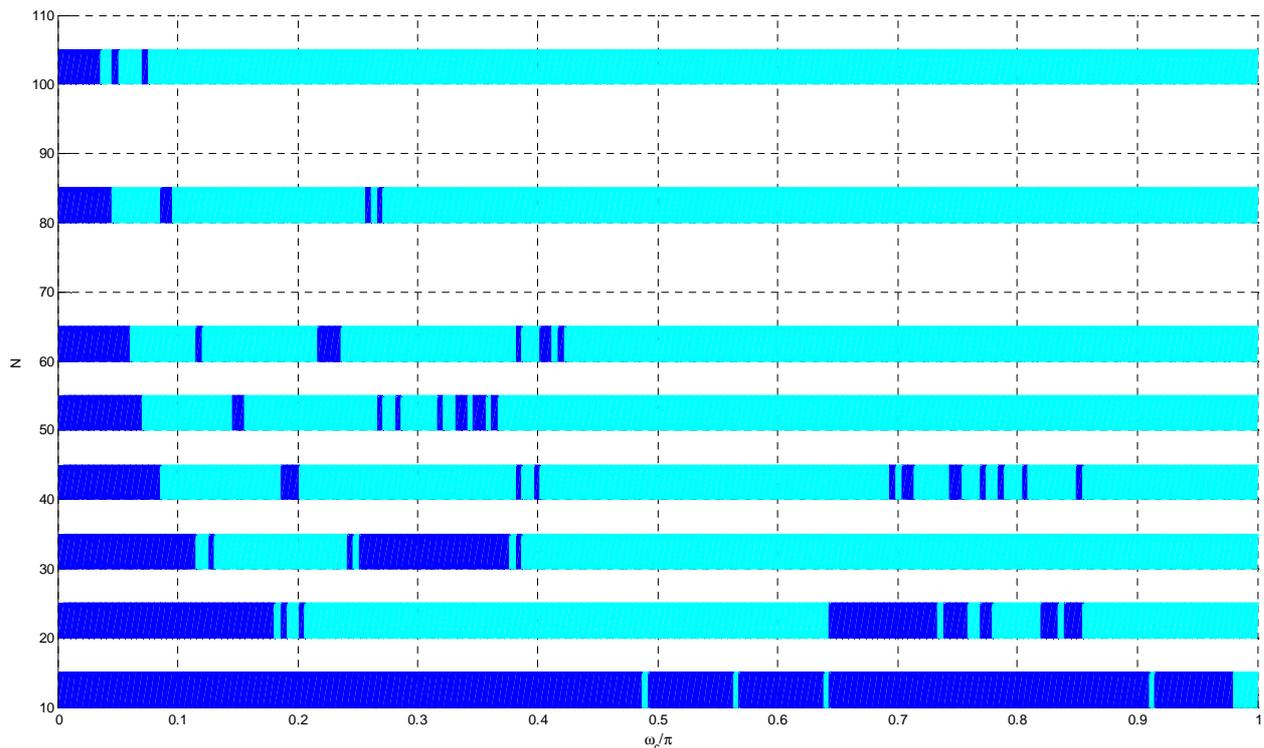


Figura 4.6: Representação em duas cores da Figura 4.5. Expoentes de Lyapunov positivos e negativos são representados pelas cores clara e escura, respectivamente.

envolvidos na simulação realizada para este primeiro caso.

As respostas em frequência do canal de comunicação e do filtro inserido no transmissor e receptor estão representadas nas Figuras 4.8 (b) e (c) pelas linhas tracejadas vermelha e rosa, respectivamente, em que é possível verificar que a frequência de corte do filtro é inferior à frequência de corte do canal de comunicação.

É possível verificar na Figura 4.7 (b) que o sinal transmitido é aperiódico e limitado, indicando que ele seja caótico. Uma vez que a frequência de corte escolhida para o filtro é inferior à frequência de corte do canal de comunicação, o sinal entregue ao receptor é idêntico ao sinal transmitido, como pode ser verificado na Figura 4.7 (c).

Após o sincronismo ter se estabelecido entre receptor e transmissor, pode-se verificar que a mensagem original é perfeitamente recuperada, conforme ilustrado na Figura 4.7 (d).

Observando-se a Figura 4.8 pode-se verificar que as densidades espectrais de potência dos sinais transmitido e recebido são iguais, assim como as densidades espectrais de potência das mensagens original e recuperada.

Também testaram-se ordens de filtros e frequências de corte para os quais os sinais gerados tornam-se periódicos. Para os sinais mostrados nas Figuras 4.9 e 4.10 utilizou-se um filtro FIR, passa-baixas, de ordem  $N = 30$  e frequência de corte  $\omega_c = 0.3\pi$  no sistema de comunicação, e manteve-se o canal com as características utilizadas na simulação anterior.

As respostas em frequência do canal de comunicação e do filtro inserido no transmissor e receptor estão representadas nas Figuras 4.10 (b) e (c) pelas linhas tracejadas vermelha e rosa, respectivamente, em que também é possível verificar que a frequência de corte do filtro é inferior à frequência de corte do canal de comunicação.

Pode-se verificar na Figura 4.9 (b) que o sinal transmitido torna-se periódico após decorrer algum tempo. Porém, uma vez que a frequência de corte escolhida para o filtro é inferior à frequência de corte do canal de comunicação, o sinal entregue ao receptor também é idêntico ao sinal transmitido, como pode ser verificado na Figura 4.9 (c).

Após o sincronismo ter se estabelecido entre receptor e transmissor, pode-se verificar que a mensagem original também é perfeitamente recuperada, conforme ilustrado na Figura 4.9 (d).

Ao se observar a Figura 4.10 é possível verificar que as densidades espectrais de potência dos sinais transmitido e recebido são iguais, assim como as densidades espectrais de potência das mensagens original e recuperada.

Portanto, após simulações com diferentes filtros e após análise das Figuras 4.7 a 4.10, pôde-se validar os resultados apresentados na Figura 4.6.

Logo, pode-se também concluir que é possível encontrar parâmetros do mapa de Hénon que possibilitem a geração de sinais caóticos na presença de filtros no sistema de comunicação. Ou de forma mais ousada, uma vez especificado o filtro FIR a ser utilizado no sistema de comunicação, é possível encontrar um parâmetro  $\alpha$  ótimo para a aplicação desejada.

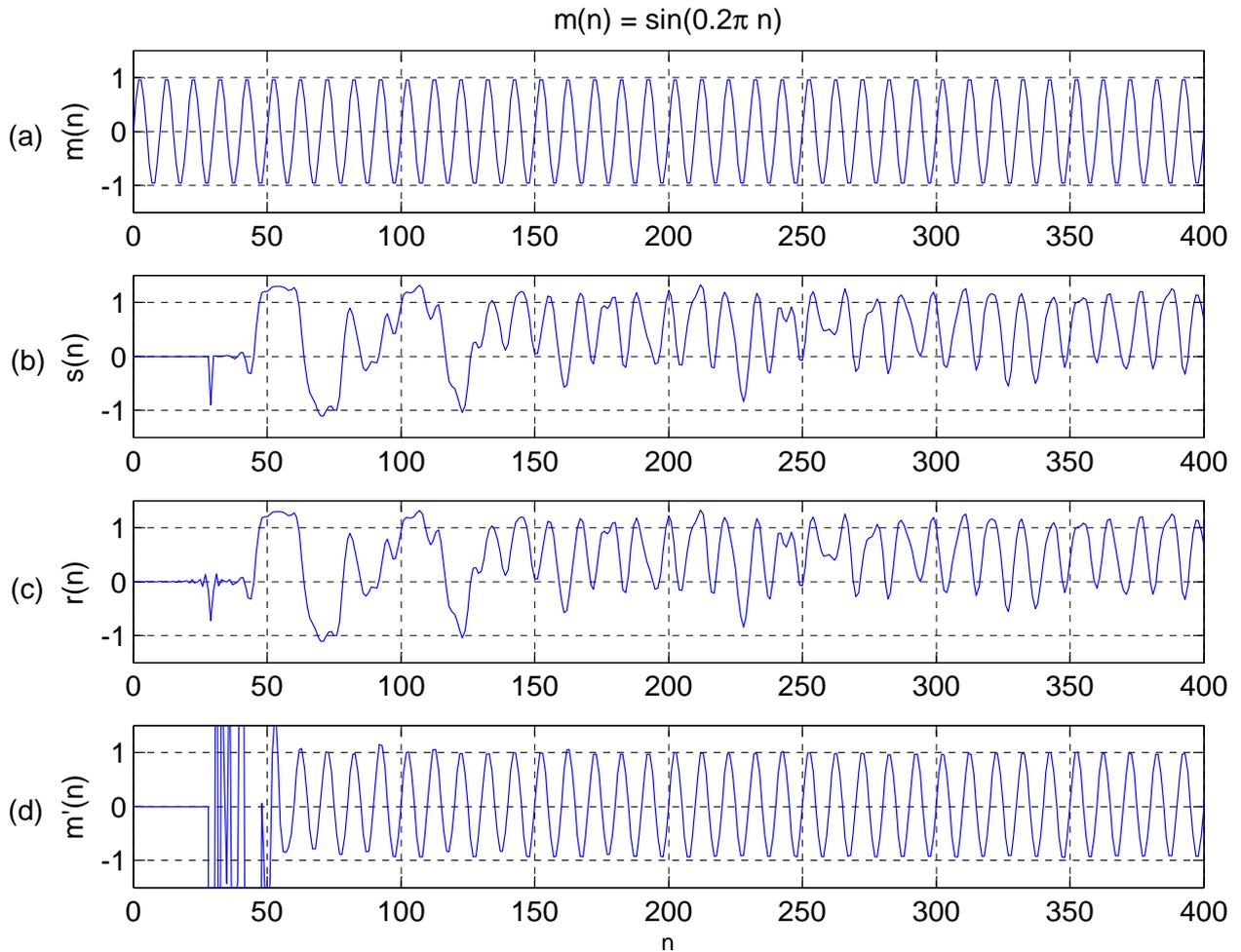


Figura 4.7: Simulação do sistema de comunicação ilustrado na Figura 4.1 para canal limitado em banda: (a) mensagem  $m(m)$ ; (b) sinal caótico  $s(n)$  transmitido; (c) sinal caótico  $r(n)$  recebido; (d) mensagem  $m'(n)$  recuperada. Nesta simulação o filtro FIR, passa-baixas utilizado no sistema de comunicação possui ordem  $N = 30$  e frequência de corte  $\omega_c = 0.4\pi$ , enquanto que o canal é considerado um filtro FIR, passa-baixas de ordem  $N = 50$  e frequência de corte  $\omega_c = 0.8\pi$ .

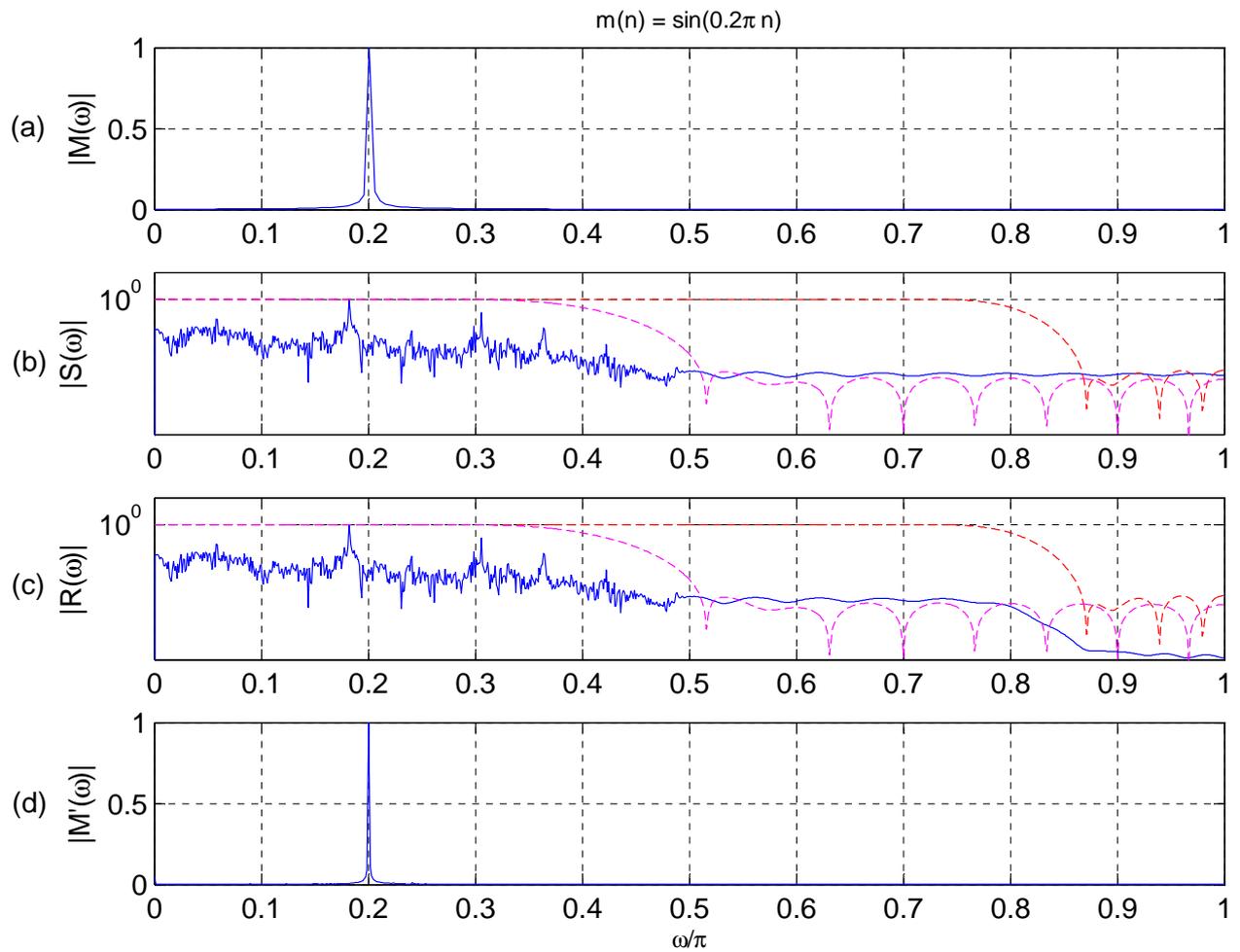


Figura 4.8: Representação normalizada da densidade espectral de potência dos sinais ilustrados na Figura 4.7: (a) mensagem; (b) sinal transmitido; (c) sinal recebido; (d) mensagem recuperada. As linhas tracejadas vermelha e rosa representam, respectivamente, as respostas em frequência do canal de comunicação e do filtro inserido no transmissor e receptor.

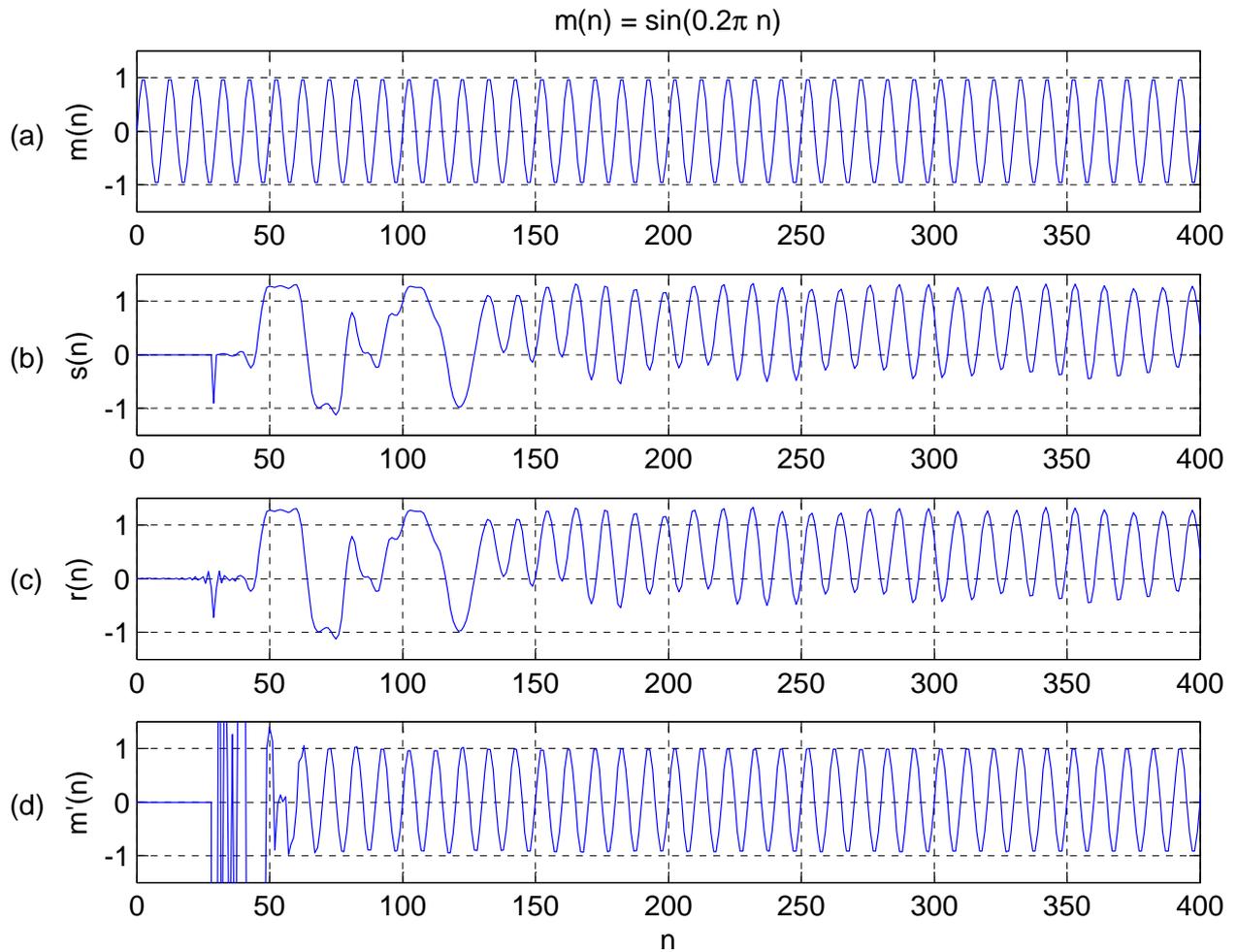


Figura 4.9: Simulação do sistema de comunicação ilustrado na Figura 4.1 para canal limitado em banda: (a) mensagem  $m(m)$ ; (b) sinal periódico  $s(n)$  transmitido; (c) sinal periódico  $r(n)$  recebido; (d) mensagem  $m'(n)$  recuperada. Nesta simulação o filtro FIR, passa-baixas utilizado no sistema de comunicação possui ordem  $N = 30$  e frequência de corte  $\omega_c = 0.3\pi$ , enquanto que o canal é considerado um filtro FIR, passa-baixas de ordem  $N = 50$  e frequência de corte  $\omega_c = 0.8\pi$ .

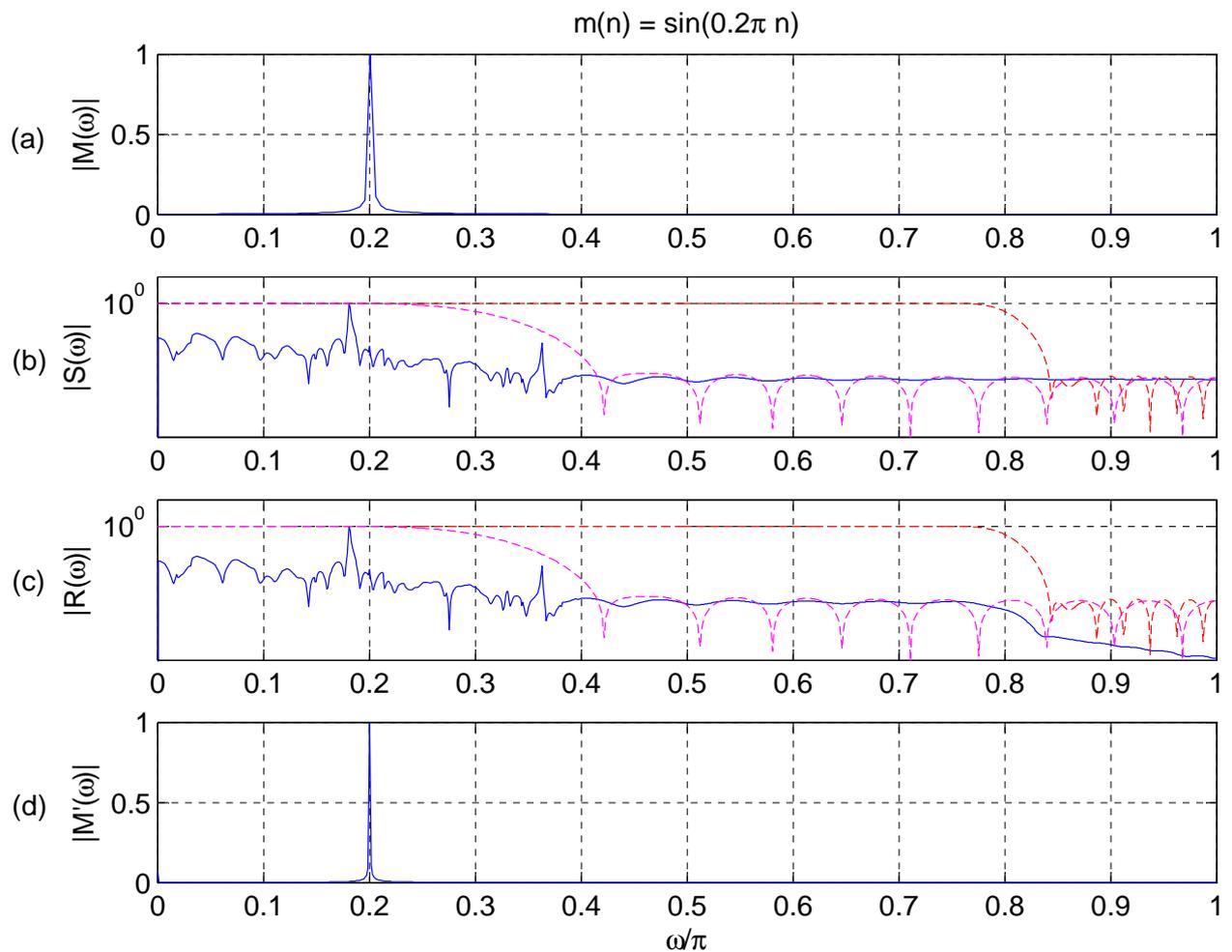


Figura 4.10: Representação normalizada da densidade espectral de potência dos sinais ilustrados na Figura 4.9: (a) mensagem; (b) sinal transmitido; (c) sinal recebido; (d) mensagem recuperada. As linhas tracejadas vermelha e rosa representam, respectivamente, as respostas em frequência do canal de comunicação e do filtro inserido no transmissor e receptor.

# Capítulo 5

## Conclusões

No capítulo 2, observou-se que satisfazer a condição de existência de sincronismo não garante que o sinal gerado pelo mapa implementado na malha de realimentação dos subsistemas transmissor e receptor será caótico. Este assunto foi explorado mais detalhadamente no capítulo 4.

No capítulo 3, verificou-se que o fato de sinais caóticos serem sinais de banda larga faz com que se tornem muito sensíveis às perdas e atenuações provocadas pelo canal de comunicação, que podem comprometer completamente a recuperação da mensagem original. Verificou-se também que uma solução potencial para este problema é a implementação de um filtro passa-baixas na malha de realimentação dos subsistemas transmissor e receptor, que limitam a banda do sinal caótico gerado, adequando-a à banda de passagem permitida pelo canal de comunicação.

No capítulo 4, concluiu-se, após estudo analítico da relação entre o filtro FIR inserido na malha de realimentação dos subsistemas transmissor e receptor e a condição (2.13), referente à possibilidade de sincronismo entre estes subsistemas, que a presença do filtro FIR não interfere no sincronismo, o que, em princípio, permite o uso de qualquer tipo de filtro FIR (embora este trabalho tenha explorado apenas filtros do tipo passa-baixas).

Uma interpretação cuidadosa da Equação (4.5) revela que o mapa iterado no transmissor tem suas dimensões modificadas de acordo com a ordem do filtro inserido na malha de realimentação deste subsistema. Portanto, o custo computacional referente a simulações envolvendo este subsistema cresce proporcionalmente à ordem do filtro escolhido para análise.

---

Realizaram-se simulações computacionais a fim de avaliar a variação do maior expoente de Lyapunov do sistema transmissor em função da ordem e da frequência de corte do filtro FIR utilizado, verificando-se que para os parâmetros usuais do mapa de Hénon, torna-se cada vez mais difícil gerar sinais caóticos na presença de filtros FIR conforme aumenta-se a ordem destes filtros.

Verificou-se, também, que é possível encontrar parâmetros do mapa de Hénon que permitam a geração de sinais caóticos na presença de filtros inseridos no transmissor e receptor do sistema de comunicação. Com isso, a partir da especificação do filtro FIR que se deseja utilizar no sistema de comunicação torna-se possível encontrar parâmetros do mapa de Hénon que melhor se adequem à aplicação desejada.

Após ter-se encontrado um parâmetro  $\alpha$  do mapa de Hénon que permitisse a obtenção de sinais caóticos na presença de um filtro FIR de ordem  $N = 20$ , filtros de ordens maiores foram testados e percebeu-se que também era possível obter sinais caóticos, e para faixas mais largas de frequência de corte do que as permitidas com a utilização de parâmetros usuais do mapa de Hénon.

Algumas pesquisas que podem ser feitas a partir dos resultados apresentados neste trabalho são: explorar outros tipos de filtros FIR a serem inseridos no sistema de comunicação; explorar se filtros de resposta impulsiva infinita (IIR) interferem no sincronismo do sistema de comunicação; explorar como estes filtros interferem nas características do sinal gerado no transmissor; comparar sistemas utilizando filtros FIR com sistemas utilizando filtros IIR quanto ao tempo necessário para atingir o sincronismo e facilidade de projeto de filtros IIR a serem utilizados no sistema de comunicação e investigar a robustez do sistema quanto à interferência de ruído branco.

# Referências Bibliográficas

- [1] C. W. Wu and L. O. Chua, “A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 3, no. 6, pp. 1619–1627, Dec. 1993.
- [2] T. Carroll and L. Pecora, “Synchronizing chaotic circuits,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 38, no. 4, pp. 453–456, Apr 1991.
- [3] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Driving systems with chaotic signals,” *Physical Review A*, vol. 44, no. 4, pp. 2374–2383, Aug 1991.
- [4] C. L. Koh and T. Ushio, “Digital communication method based on m-synchronized chaotic systems,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 44, no. 5, pp. 383–390, May 1997.
- [5] N. F. Rulkov and L. S. Tsimring, “Synchronization methods for communication with chaos over band-limited channels,” *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 27, pp. 555–567, Jul. 1999.
- [6] M. S. Baptista, E. E. Macau, C. Grebogi, Y.-C. Lai and E. Rosa, “Integrated chaotic communication scheme,” *Physical Review E*, vol. 62, no. 4, pp. 4835–4845, Oct 2000.
- [7] L. A. Tôrres, “Discrete-time dynamic systems synchronization: Information transmission and model matching,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 228, no. 1, pp. 31 – 39, 2007.
- [8] L. Pecora and T. Carroll, “Synchronization In Chaotic Systems,” *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 8, pp. 821–824, Feb 19 1990.

- [9] W. M. Tam, F. C. M. Lau and C. K. Tse, *Digital Communications with Chaos: Multiple Access Techniques and Performance*. New York, NY, USA: Elsevier Science Inc., 2006.
- [10] T. Carroll and L. Pecora, “The effect of filtering on communication using synchronized chaotic circuits,” *Circuits and Systems, 1996. ISCAS '96., 'Connecting the World'.*, 1996 *IEEE International Symposium on*, vol. 3, pp. 174–177 vol.3, May 1996.
- [11] T. L. Carroll, “Synchronizing chaotic systems using filtered signals,” *Physical Review E*, vol. 50, no. 4, pp. 2580–2587, Oct 1994.
- [12] T. Carroll, “Communicating with use of filtered, synchronized, chaotic signals,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 42, no. 2, pp. 105–110, Feb 1995.
- [13] E. E. N. Macau and C. M. P. Marinho, “Communication with chaos over band-limited channels,” *Acta Astronautica*, vol. 53, no. 4-10, pp. 465 – 475, 2003, the New Face of Space Selected Proceedings of the 53rd International Astronautical Federation Congress.
- [14] M. Eisenkraft and M. Gerken, “Comunicação utilizando sinais caóticos: influência de ruído e limitação em banda,” in *Anais do XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Gramado, Brasil, pp. 1 – 6, 2000.
- [15] Z. Yan, “Q-s synchronization in 3d hénon-like map and generalized hénon map via a scalar controller,” *Physics Letters A*, vol. 342, no. 4, pp. 309 – 317, 2005.
- [16] —, “A nonlinear control scheme to anticipated and complete synchronization in discrete-time chaotic (hyperchaotic) systems,” *Physics Letters A*, vol. 343, no. 6, pp. 423 – 431, 2005.
- [17] A. Aguilar-Bustos and C. Cruz-Hernández, “Synchronization of discrete-time hyperchaotic systems: An application in communications,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. In Press, Corrected Proof, pp. –, 2008.
- [18] K. T. Alligood, T. D. Sauer and J. A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, ser. Textbooks In Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag, 1997.

- 
- [19] L. H. A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos*, 2nd ed. São Paulo: Editora Livraria Da Física, 2006.
- [20] S. S. Haykin and B. V. Veen, *Sinais e Sistemas*. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- [21] M. Eisencraft, “Sistemas de comunicação utilizando sinais caóticos,” Dissertação de mestrado, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2001.
- [22] M. Eisencraft, R. D. Fanganiello and L. Baccalá, “Synchronization of discrete-time chaotic systems in bandlimited channels,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2009, pp. 1–12, 2009. [Online]. Available: <http://www.hindawi.com/journals/mpe/>
- [23] R. P. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities : Theory, Methods, and Applications*. New York: M. Dekker, 1992.

**Apêndice I** - Artigo publicado no periódico

*Mathematical Problems in Engineering*

*Research Article*

# **Synchronization of Discrete-Time Chaotic Systems in Bandlimited Channels**

**Marcio Eisencraft,<sup>1,2</sup> Renato D. Fanganiello,<sup>1</sup>  
and Luiz A. Baccala<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Escola de Engenharia da  
Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, Brazil

<sup>2</sup> Departamento de Telecomunicações Controle, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo,  
São Paulo, Brazil

Correspondence should be addressed to Marcio Eisencraft, [marcioft@mackenzie.br](mailto:marcioft@mackenzie.br)

Received 30 January 2009; Accepted 13 March 2009

Recommended by José Roberto Castilho Piqueira

Over the last couple of decades, many methods for synchronizing chaotic systems have been proposed with communications applications in view. Yet their performance has proved disappointing in face of the nonideal character of usual channels linking transmitter and receiver, that is, due to both noise and signal propagation distortion. Here we consider a discrete-time master-slave system that synchronizes despite channel bandwidth limitations and an allied communication system. Synchronization is achieved introducing a digital filter that limits the spectral content of the feedback loop responsible for producing the transmitted signal.

Copyright © 2009 Marcio Eisencraft et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

## **1. Introduction**

Since Pecora and Carroll's seminal work [1], much has been written about the potential usefulness of chaotic synchronization in communication systems (e.g., [2–8]). Much of the impetus for chaotic communications has been the rationale whereby both analog and digital chaotic modulations would have the same properties as conventional spread spectrum techniques [9].

The inherent wideband character of chaotic signals, however, becomes a problem when the communication channel imposes bandwidth limitations. Because of the receiver's nonlinear nature, if any spectral component is amiss, all spectral components at the receiver become affected. Even minute gain or phase changes are enough to fully hinder synchronism [6, 10].

Many papers have approached the problem by trying to eliminate channel distortion via channel inversion [11–13]. Reasonable results have only been attained when the

channel filters are represented by low-order filters. Furthermore, these methods usually unrealistically assume perfect channel frequency response knowledge at the receiver [6].

Rulkov and Tsimring [6] and Eisenkraft and Gerken [14] independently proposed a method for synchronizing transmitter and receiver using chaotic signals under bandwidth limitations. The basic idea is to employ an identical filter at both the transmitter and the receiver so as to circumvent channel impairments. An analog circuit implementation was proposed by [6].

Here we extend this method to discrete-time dynamical systems [8, 15–17]. Much of the interest in this approach lies in the ease of employing Digital Signal Processors (DSPs) or microcontrollers for their implementation. These solutions have become ubiquitous in present day technology.

This paper is organized as follows. In Section 2, the Wu and Chua [4] synchronization method is extended to discrete-time systems. This is followed by the description of an allied communication system whose performance under bandwidth limitation is simulated. Means for overcoming the former limitations are proposed in Section 3. Finally our main conclusions are summed up in Section 4.

## 2. Wu and Chua's Synchronization of Discrete-Time Chaotic Systems

Wu and Chua's paper [4] addresses chaotic system synchronization differently from Pecora and Carroll's [1] seminal paper. Instead of using conditional Lyapunov exponents to check the asymptotic stability of the slave system and hence the possibility of synchronism, Wu and Chua propose that the master and slave equations be written in such a way that the dynamics of the synchronization error is simple enough to permit the direct verification of its convergence to zero.

In this section we adapt their method for discrete-time master-slave systems.

Consider two discrete-time systems defined by

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(\mathbf{x}(n)), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}(n+1) = A\mathbf{y}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(\mathbf{x}(n)), \quad (2.2)$$

where  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{\mathbf{x}(n), \mathbf{y}(n)\} \subset \mathbb{R}^K$ ,  $\mathbf{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_K(n)]^T$ ,  $\mathbf{y}(n) = [y_1(n), y_2(n), \dots, y_K(n)]^T$ . The real  $A_{K \times K}$  matrix and vector  $\mathbf{b}_{K \times 1}$  are constants. The function  $\mathbf{f}(\cdot)$ ,  $\mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K$  is nonlinear.

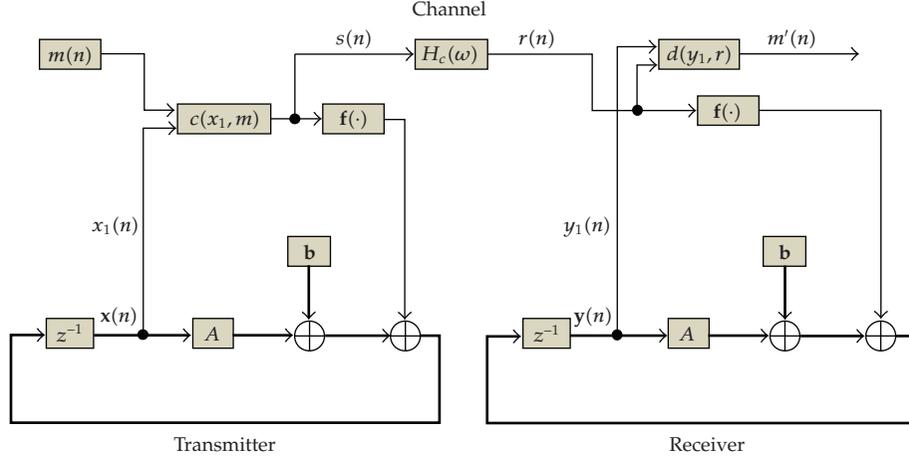
The system described by (2.1) is autonomous and is called *master*. The one described by (2.2) depends on  $\mathbf{x}(n)$  and is called *slave*.

The synchronization error dynamics between the two systems  $\mathbf{e}(n) = \mathbf{y}(n) - \mathbf{x}(n)$ , in this case, is given by

$$\mathbf{e}(n+1) = A\mathbf{e}(n). \quad (2.3)$$

They are said *completely synchronized* if  $\mathbf{e}(n) \rightarrow 0$  as  $n$  grows. Consequently, master and slave synchronize completely if the eigenvalues  $\lambda_i$  of  $A$  satisfy [18]

$$|\lambda_i| < 1, \quad 1 \leq i \leq K. \quad (2.4)$$



**Figure 1:** Block Diagram of Wu and Chua's [4] proposal adapted to discrete-time systems.

Hence, if a system can be written as in (2.1) with  $A$  satisfying condition (2.4), it is easy to set up a slave system that synchronizes with it.

Using this synchronization method, Wu and Chua [4] proposed an information transmission system using chaotic signals that lead to no errors when channel conditions are ideal. The discrete-time version of this system is shown in Figure 1.

Here we consider that  $\mathbf{f}(\cdot)$  depends solely on the component  $x_1(n)$  of  $\mathbf{x}(n)$ , and that it can be written as

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(n)) = [f(x_1(n)); 0; 0; \dots; 0]^T. \quad (2.5)$$

The communication channel is represented by a linear system with frequency response  $H_C(\omega)$ .

In this scheme, the information signal  $m(n)$  is coded using the  $x_1(n)$  component of the state vector  $\mathbf{x}$  via a coding function

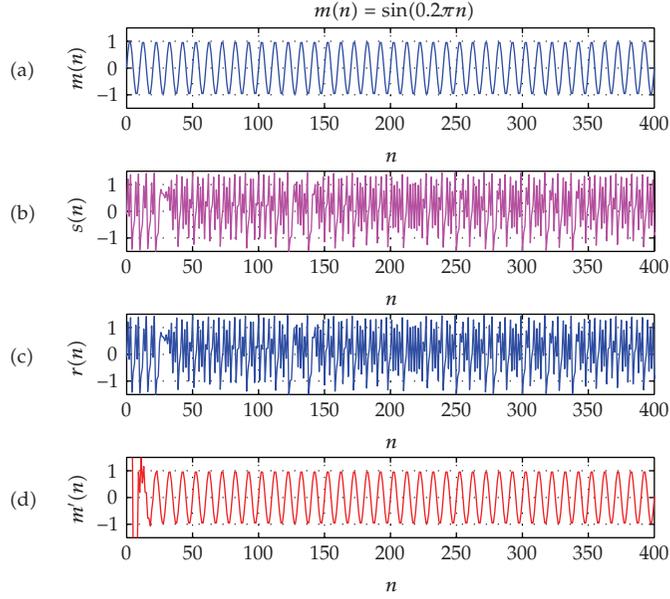
$$s(n) = c(x_1(n), m(n)), \quad (2.6)$$

so that the information signal can be decoded using the inverse function

$$m(n) = d(x_1(n), s(n)) = d(x_1(n), c(x_1(n), m(n))). \quad (2.7)$$

The equations governing the global system have the same form as (2.1) and (2.2). The only changes are the arguments of  $\mathbf{f}(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= A\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(s(n)), \\ \mathbf{y}(n+1) &= A\mathbf{y}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(r(n)), \end{aligned} \quad (2.8)$$



**Figure 2:** Simulations of the communication system shown in Figure 1 for an ideal channel: (a) message  $m(n)$ ; (b) transmitted signal  $s(n)$ ; (c) received signal  $r(n) = s(n)$ ; (d) recovered message  $m'(n)$ .

where  $r(n)$  is the signal that the channel delivers to the receiver, that is,

$$r(n) = s(n) * h_c(n), \quad (2.9)$$

$h_c(n)$  is the impulse response of the channel and “\*” represents linear convolution.

In principle, when choosing  $c(\cdot, \cdot)$  and  $d(\cdot, \cdot)$  one must seek to satisfy

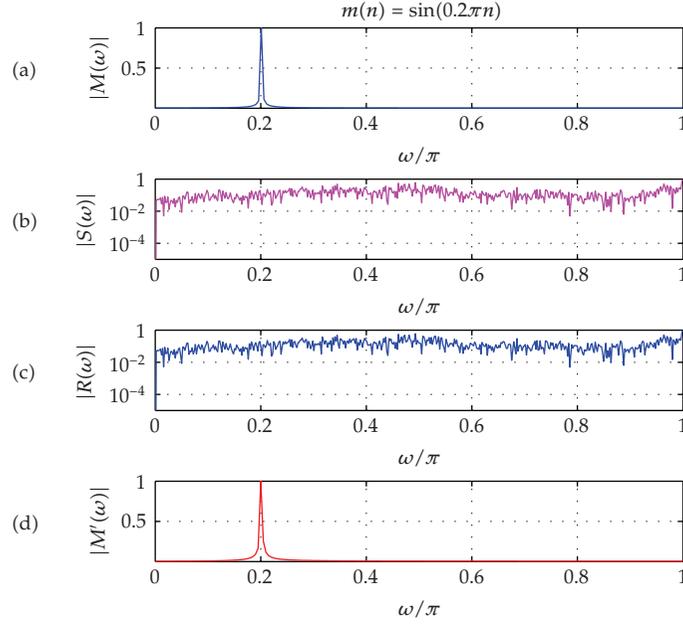
$$s(n) \approx x_1(n) \quad (2.10)$$

for all admissible  $m(n)$  because

- (i)  $s(n)$  is fed back in lieu of  $x_1(n)$  at the transmitter. Condition (2.10) imposes that the dynamics is not significantly changed and consequently the system continues to generate chaotic signals;
- (ii) also if secure communication is desired, condition (2.10) ensures that  $m(n)$  is not immediately apparent from  $s(n)$ .

For an ideal channel, that is,  $H_c(\omega) = 1$  and  $s(n) = r(n)$ , (2.8) become

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= A\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + f(s(n)), \\ \mathbf{y}(n+1) &= A\mathbf{y}(n) + \mathbf{b} + f(s(n)). \end{aligned} \quad (2.11)$$



**Figure 3:** Normalized representation of the signals from Figure 2 in the frequency domain: (a) message; (b) transmitted signal; (c) received signal; (d) recovered message.

Once more, the synchronization error dynamics is given by (2.3) and if condition (2.4) holds, then  $y(n) \rightarrow x(n)$  and, in particular,  $y_1(n) \rightarrow x_1(n)$ . Hence, using (2.7),

$$m'(n) = d(y_1(n), s(n)) \rightarrow d(x_1(n), s(n)) = m(n). \quad (2.12)$$

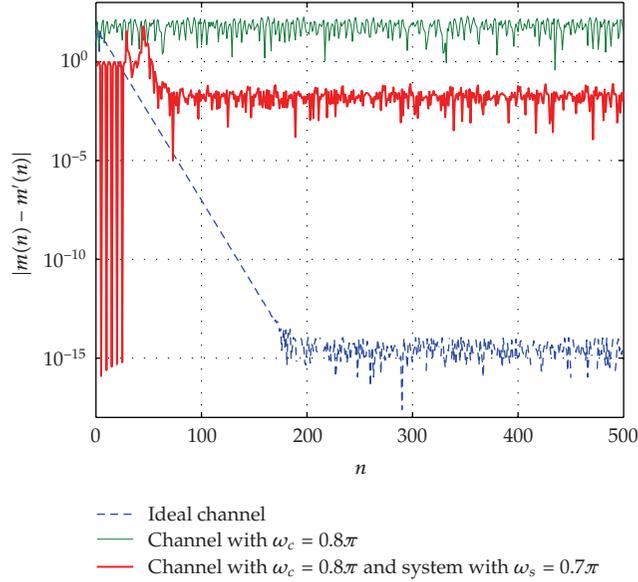
Therefore when transmitter and receiver parameters are perfectly matched over an ideal channel, the message is recovered at the receiver without degradation except for a synchronization transient.

To exemplify, consider the three-dimensional generalization of the Hénon map [19, 20]:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= -ax_1^2(n) + x_3(n) + 1, \\ x_2(n+1) &= -bx_1(n), \\ x_3(n+1) &= bx_1(n) + x_2(n). \end{aligned} \quad (2.13)$$

It can be immediately written in the form of (2.1)

$$\mathbf{x}(n+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -b & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \mathbf{x}(n) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_b + \underbrace{\begin{bmatrix} -ax_1^2(n) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{f(\mathbf{x}(n))}. \quad (2.14)$$



**Figure 4:** Demodulation error  $|m(t) - m'(t)|$  for the simulated systems.

Taking  $a = 1.07$  and  $b = 0.3$  [19], simulations show that, for almost all initial conditions in the unity sphere, (2.13) generates chaotic orbits whose largest Lyapunov exponent is  $h_1 \approx 0.23$ .

In this case, the eigenvalues of  $A$  are

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 0.4084 + 0.4477i, \\
 \lambda_2 &= 0.4084 - 0.4477i, \\
 \lambda_3 &= -0.8169,
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

ensuring the satisfaction of the stability condition in (2.4). This allows assembling the communications system depicted in Figure 1.

In the simulations we chose

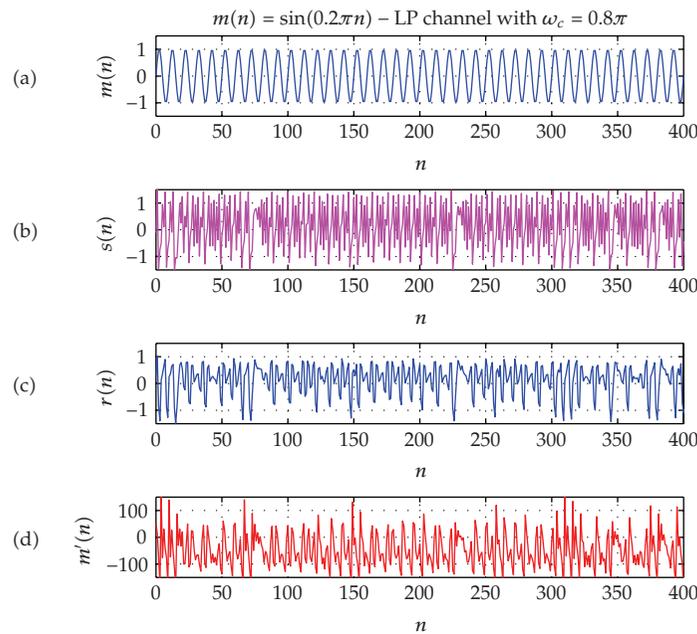
$$s(n) = c(x_1(n), m(n)) = x_1(n) + 0.01m(n), \tag{2.16}$$

so that

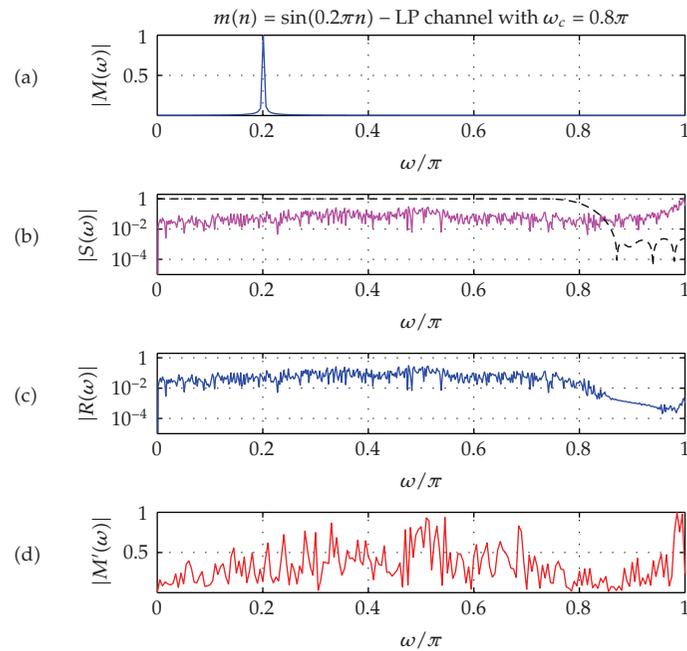
$$m'(n) = d(y_1(n), r(n)) = 100(r(n) - y_1(n)). \tag{2.17}$$

Furthermore, the transmitted message was taken as

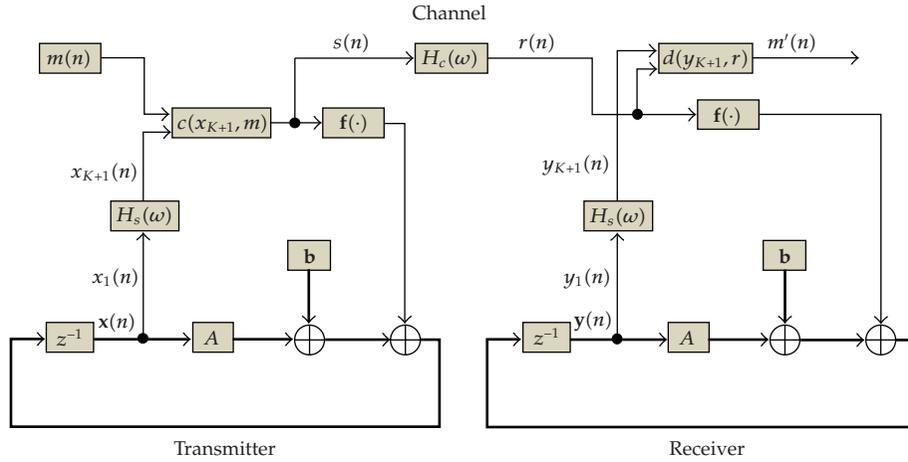
$$m(n) = \sin(0.2\pi n). \tag{2.18}$$



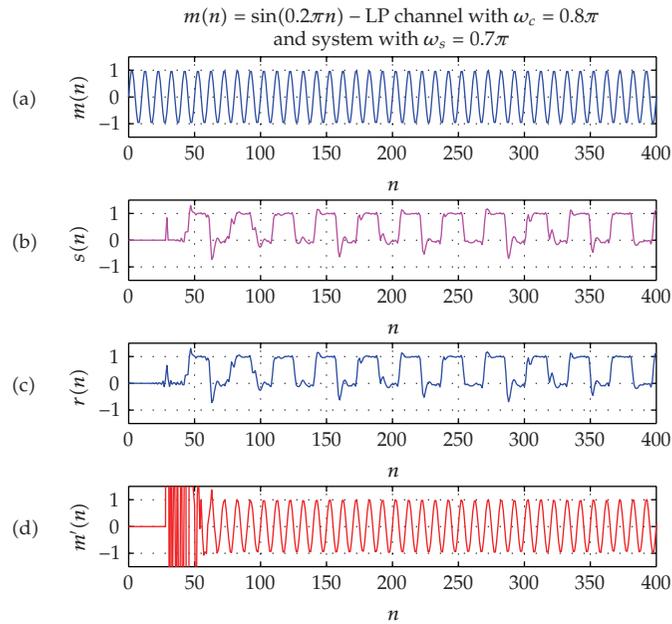
**Figure 5:** Simulations of the communication system shown in Figure 1 for an LP FIR channel with cutoff frequency at  $\omega_c = 0.8\pi$ : (a) message  $m(n)$ ; (b) transmitted signal  $s(n)$ ; (c) received signal  $r(n)$ ; (d) recovered message  $m'(n)$ . Note that the scale used in (d) is different from the previous ones.



**Figure 6:** Normalized representation of the spectral components absolute value of signals in Figure 5: (a) message; (b) transmitted signal and amplitude frequency response of the channel (dashed line); (c) received signal; (d) recovered message.



**Figure 7:** Proposed discrete-time communication system for bandlimited channels.



**Figure 8:** Simulations of the proposed communication system for an LP FIR channel with cutoff frequency at  $\omega_c = 0.8\pi$  and LP FIR feedback filter  $H_S(\omega)$  with cutoff frequency at  $\omega_s = 0.7\pi$ : (a) message  $m(n)$ ; (b) transmitted signal  $s(n)$ ; (c) received signal  $r(n)$ ; (d) recovered message  $m'(n)$ .

Figures 2 and 3 illustrate a realization of the involved signals both in the time and in the frequency domains for an ideal channel. The spectra are normalized relatively to their maximum value.

Perfect recovery of the message once the synchronization is reached can be clearly seen in Figure 2(d) and the spectral spreading due to the chaotic signal modulation is shown in Figure 3(b). Note that the presence of  $m(n)$  in the transmitted signal is not apparent neither in the time nor in the frequency domain.

The demodulation error  $|m(n) - m'(n)|$  for the ideal channel case is shown by the dashed line in Figure 4. It quickly falls and remains at the numerical precision level of the computer simulation.

This situation changes completely when the channel is not ideal, that is,  $H_c(\omega) \neq 1, \forall \omega$ . In this case,  $r(n) \neq s(n)$  in (2.8) and the synchronism is affected so that  $m'(n) \neq m(n)$ . As an illustrative example, consider that  $H_c(\omega)$  is a linear-phase Low Pass (LP) Finite Impulse Response (FIR) filter of order  $N_C = 50$  with cutoff frequency at  $\omega_c = 0.8\pi$  [21]. Figures 5 and 6 show a realization of the signals involved in this case. The amplitude frequency response  $|H_c(\omega)|$  is shown by the dashed line in Figure 6(b). Just about 20% of the spectrum of the transmitted signal is affected, yet the message is completely lost as seen in Figures 5(d) and 6(d). Note that the bandwidth associated with the original message  $m(n)$ , concentrated at  $0.2\pi$ , is practically unaffected.

The error in obtaining  $m'(n)$  in this case is shown by the solid thinner line in Figure 4.

This example shows that the system in Figure 1 fails when channel conditions are not ideal. This makes its use impractical, in the same way as it happens with its continuous counterpart, as pointed out by [6, 14].

A mean to circumvent these difficulties is to adjust the spectrum of the transmitted chaotic signal so that it becomes less vulnerable in the presence of a given channel. This idea, proposed for continuous time systems in [6, 14], is extended for the discrete-time case in the next section.

### 3. Synchronizing Discrete-Time Systems in Band-Limited Channels

A way to combat the harmful effects of a bandlimited channel on the communication system of Figure 1 is to insert a filter  $H_S(\omega)$  in the feedback loops of both the transmitter and the receiver so that the total transmitted signal power is contained within the channel bandwidth.

A block diagram of the proposed system is shown in Figure 7.

Considering that the filter  $H_S(\omega)$  is an FIR filter of order  $N_S$ , its output  $x_{K+1}(n)$  can be expressed as

$$x_{K+1}(n) = c_1 x_1(n) + c_2 x_1(n-1) + \dots + c_{N_S+1} x_1(n-N_S), \quad (3.1)$$

where  $c_1, c_2, \dots, c_{N_S+1}$  are the filter coefficients.

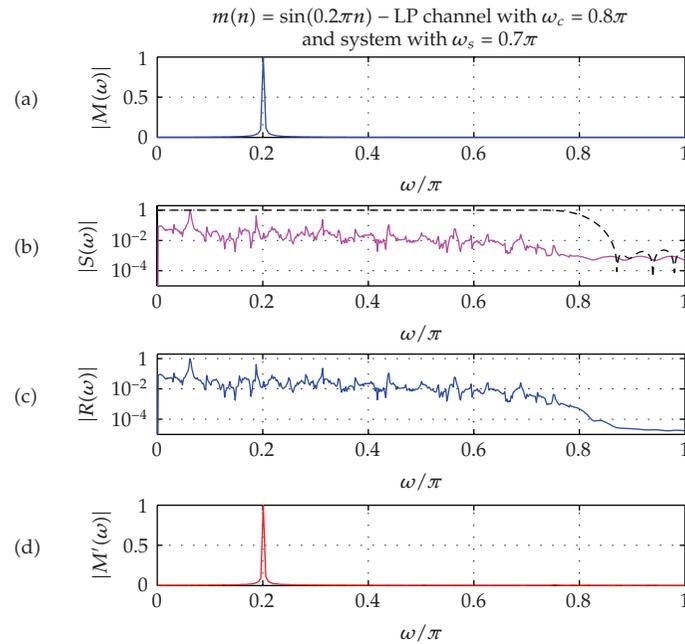
Consequently, the dimensions of the difference equation systems that describes the master and the slave subsystems now are of order  $K + N_S$  instead of  $K$ .

As an example, consider that the channel  $H_C(\omega)$  is an LP FIR filter of order  $N_C = 50$  and with cutoff frequency at  $\omega_c = 0.8\pi$ , as in the previous section. To combat the channel effects, we used linear-phase LP FIR filters  $H_S(\omega)$  with cutoff frequency at  $\omega_s = 0.7\pi$  of order  $N_S = 30$ . Figures 8 and 9 show a realization of the signals involved.

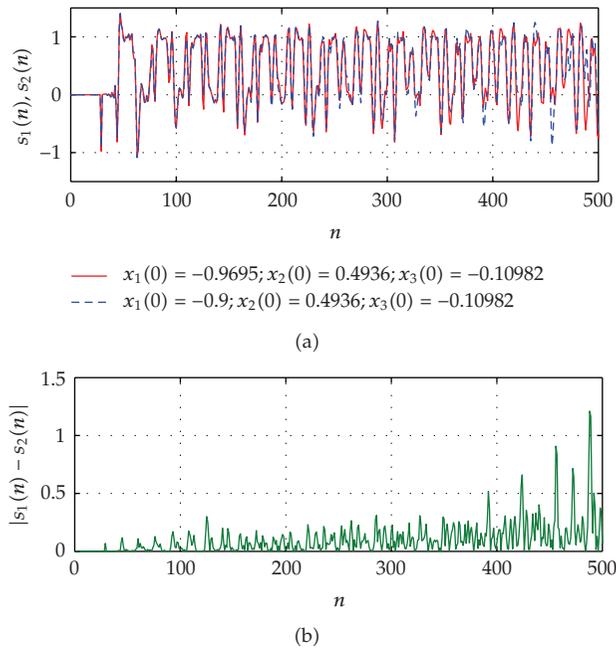
The information signal is unaffected by these filters and the message is fully recovered as can be seen from Figures 8(d) and 9(d). The transient time is larger than that of the previous examples due to the additional filtering effects.

The demodulation error in this case is shown by the thicker solid line in Figure 4. After the synchronization transient, the mean error is about 1%.

An important question that must be addressed is whether the generated signals remain chaotic with the introduction of the feedback filter.



**Figure 9:** Normalized representation of signals in Figure 8 in the frequency domain: (a) message; (b) transmitted signal and frequency response of the channel (dashed line); (c) received signal; (d) recovered message.



**Figure 10:** (a) Transmitted signals  $s(n)$  for two slightly different initial conditions; (b) absolute value of the difference between the signals in (a).

In the example, the transmitted signal  $s(n)$  shown in Figure 8(b) presents aperiodic behavior and sensitivity to initial conditions. This last property is illustrated in Figure 10 where signals generated using two slightly different initial conditions diverge from one another, which is evidence of chaotic signal behavior.

In a more general framework, analysis shows that when we write the system equations as in (2.8) including the feedback filter, the  $K+N_S$  eigenvalues of  $A$  do not depend on the filter coefficients so that synchronism remains unaffected. However, the conditions for the signals to remain chaotic require further investigation. For low-order filters, inadequate coefficient choices may transform an unstable fixed point of the original system into a stable one and thereby destroy the chaotic attractor. These results are the subject of current investigation and lie beyond our intended scope.

#### 4. Conclusions

In this paper, we proposed a discrete-time communication system using chaotic signals for bandlimited channels. Our system is based on the one proposed by [6, 14] who have developed their ideas within a continuous-time framework. Using discrete-time systems based on difference equations makes their implementation quite natural via today's ubiquitously available DSPs and microcontrollers.

We have shown numerical examples based on a three-dimensional generalization of the Hénon map and on linear-phase FIR filters.

It is important to note that introducing filters into feedback loops can change the dynamics of both the master and the slave systems in relevant ways. The conditions on filter coefficients for which the systems remain chaotic signal generators have the status of a nontrivial open problem. Work is in progress to simulate the use of this system to transmit digital messages and to assess its symbol error rate performance for different channels and feedback filter bandwidths.

#### Acknowledgments

This work was partially supported by The State of São Paulo Research Foundation (FAPESP). R. D. Fanganiello is partially supported by CAPES and Mackpesquisa. M. Eisenkraft would like to thank Prof. Luiz H. A. Monteiro for the stimulating discussions on the subject of this paper.

#### References

- [1] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems," *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 8, pp. 821–824, 1990.
- [2] T. L. Carroll and L. M. Pecora, "Synchronizing chaotic circuits," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 38, no. 4, pp. 453–456, 1991.
- [3] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Driving systems with chaotic signals," *Physical Review A*, vol. 44, no. 4, pp. 2374–2383, 1991.
- [4] C. W. Wu and L. O. Chua, "A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 3, no. 6, pp. 1619–1627, 1993.
- [5] C. L. Koh and T. Ushio, "Digital communication method based on  $M$ -synchronized chaotic systems," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, vol. 44, no. 5, pp. 383–390, 1997.

- [6] N. F. Rulkov and L. S. Tsimring, "Synchronization methods for communication with chaos over band-limited channels," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 27, no. 6, pp. 555–567, 1999.
- [7] M. S. Baptista, E. E. Macau, C. Grebogi, Y.-C. Lai, and E. Rosa Jr., "Integrated chaotic communication scheme," *Physical Review E*, vol. 62, no. 4, pp. 4835–4845, 2000.
- [8] L. A. B. Tórres, "Discrete-time dynamic systems synchronization: information transmission and model matching," *Physica D*, vol. 228, no. 1, pp. 31–39, 2007.
- [9] W. M. Tam, F. C. M. Lau, and C. K. Tse, *Digital Communications with Chaos: Multiple Access Techniques and Performance*, Elsevier Science, New York, NY, USA, 2006.
- [10] T. L. Carroll and L. M. Pecora, "Effect of filtering on communication using synchronized chaotic circuits," in *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS '96)*, vol. 3, pp. 174–177, Atlanta, Ga, USA, May 1996.
- [11] T. L. Carroll, "Synchronizing chaotic systems using filtered signals," *Physical Review E*, vol. 50, no. 4, pp. 2580–2587, 1994.
- [12] T. L. Carroll, "Communicating with use of filtered, synchronized, chaotic signals," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, vol. 42, no. 2, pp. 105–110, 1995.
- [13] E. E. N. Macau and C. M. P. Marinhe, "Communication with chaos over band-limited channels," *Acta Astronautica*, vol. 53, no. 4–10, pp. 465–475, 2003.
- [14] M. Eisencraft and M. Gerken, "Comunicação utilizando sinais caóticos: influência de ruído e de limitação em banda," in *Proceedings of the 18th Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBT '00)*, Gramado, Brazil, September 2000.
- [15] Z. Yan, "Q-S synchronization in 3D Hénon-like map and generalized Hénon map via a scalar controller," *Physics Letters A*, vol. 342, no. 4, pp. 309–317, 2005.
- [16] Z. Yan, "A nonlinear control scheme to anticipated and complete synchronization in discrete-time chaotic (hyperchaotic) systems," *Physics Letters A*, vol. 343, no. 6, pp. 423–431, 2005.
- [17] A. Y. Aguilar-Bustos and C. Cruz-Hernández, "Synchronization of discrete-time hyperchaotic systems: an application in communications," *Chaos, Solitons & Fractals*. In press.
- [18] R. P. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods, and Application*, vol. 155 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, Marcel Dekker, New York, NY, USA, 1992.
- [19] D. L. Hitzl and F. Zele, "An exploration of the Hénon quadratic map," *Physica D*, vol. 14, no. 3, pp. 305–326, 1985.
- [20] K. Stefański, "Modelling chaos and hyperchaos with 3-D maps," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 9, no. 1-2, pp. 83–93, 1998.
- [21] A. Oppenheim, R. Schaffer, and J. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2nd edition, 1997.

**Apêndice II** - Abstract publicado no 11<sup>th</sup>

*Experimental Chaos and Complexity*

*Conference*

# Conditions for the synchronization of bandlimited discrete-time chaotic systems

Renato Fanganiello<sup>1</sup>, Marcio Eisencraft<sup>2</sup>, & Luiz Monteiro<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Escola de Engenharia, Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, Brazil

<sup>2</sup> Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do ABC, Santo André, Brazil

<sup>3</sup> Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brazil

renatofanganiello@yahoo.com.br

Since Pecora and Carroll's seminal work [1], much has been written about the potential usefulness of chaotic synchronization in communication systems (e.g. [2, 5]). Much of the impetus for chaotic communications has been the rationale whereby both analog and digital chaotic modulations would have the same properties as conventional spread spectrum techniques [6]. However, the inherent wideband characteristic of chaotic signals becomes a problem when the communication channel imposes bandwidth limitations. Because of the receiver's nonlinear nature, all spectral components at the receiver become affected if any spectral component is amiss. Even minute gain or phase changes are enough to fully hinder synchronism [3]. A method for synchronizing both transmitter and receiver using chaotic signals under bandwidth limitations was independently proposed by [3] and [7]. The basic idea is to apply an identical filter on both transmitter and receiver in order to circumvent channel impairments. An analog circuit implementation was proposed by [3]. In [8] we have extended this method to discrete-time dynamical systems [7]. Much of the interest in this approach lies in the ease of employing Digital Signal Processors for their implementation. Although this approach has worked satisfactorily, numerical experiments have shown that depending on the filters employed, the generated signals could cease to be chaotic or diverge. In the current work we provide an analytical demonstration that synchronization is not affected when identical finite impulse response filters are included in both the transmitter and receiver. Furthermore, we numerically investigate for which filter's orders and cut-off frequencies it is possible to obtain chaotic signals. References [1] L. Pecora, T. Carroll, "Synchronization in chaotic systems," *Physical Review Letters*, v. 64, n. 8, p. 821-824, 1990 [2] T. Carroll, L. Pecora, "Synchronizing chaotic circuits," *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, v. 38, n. 4, p. 453-456, Apr 1991 [3] N. Rulkov and L. Tsimring, "Synchronization methods for communication with chaos over band-limited channels," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, v. 27, p. 555-567, 1999 [5] L. Torres, "Discrete-time dynamic systems synchronization: information transmission and model matching," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 228, n. 1, p. 31-39, 2007 [6] W. Tam, et al, *Digital Communications with Chaos: Multiple Access Techniques and Performance*. New York, NY, USA: Elsevier Science Inc., 2006 [7] M. Eisencraft, M. Gerken, "Comunicacao utilizando sinais caoticos: influencia de ruido e limitacao em banda," in *Anais do XVIII Simposio brasileiro de Telecomunicacoes*, Gramado, Brasil, 2001 [8] M. Eisencraft, R. Fanganiello, L. Baccala, "Synchronization of discrete-time chaotic systems in bandlimited channels," *Mathematical Problems in Engineering*, 12 pages, 2009. [Online]. Available: <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2009/207971.cta.html>

**Apêndice III** - Extended Abstract aceito  
para publicação no *Dynamics Days South*  
*America 2010*

## SYNCHRONIZATION CONDITIONS FOR A BANDLIMITED DISCRETE-TIME CHAOTIC SYSTEM

*Renato D. Fanganiello<sup>1</sup>, Marcio Eisencraft<sup>2</sup>, Luiz H. A. Monteiro<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Escola de Engenharia, Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, Brazil, renato.fanganiello@mackenzista.com.br

<sup>2</sup>Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do ABC, Santo André, Brazil, marcio.eisencraft@ufabc.edu.br

<sup>3</sup>Escola de Engenharia, Universidade Presbiteriana Mackenzie and Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brazil, luizm@mackenzie.br

**keywords:** Communication with Chaos, Discrete-time Dynamical Systems, Bandwidth Limitation.

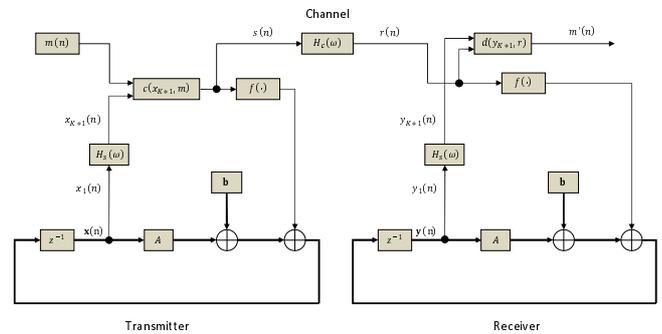
Since Pecora and Carroll's seminal work [1], much has been written about the potential usefulness of chaotic synchronization in communication systems (e.g., [2]). Much of the impetus for chaotic communications has been the rationale whereby both analog and digital chaotic modulations would have the same properties as conventional spread spectrum techniques [2].

The inherent wideband characteristic of chaotic signals, however, becomes a problem when the communication channel imposes bandwidth limitations. Because of the receiver's nonlinear nature, if any spectral component is amiss, all spectral components at the receiver become affected. Even minute gain or phase changes are enough to fully hinder synchronization [3].

Rulkov and Tsimiring [3] and Eisencraft and Gerken [4] independently proposed a method for synchronizing transmitter and receiver using chaotic signals under bandwidth limitations. The basic idea is to apply an identical filter on both the transmitter and the receiver subsystems in order to circumvent channel impairments. In [5] we have extended this method to discrete-time dynamical systems. Much of the interest in this approach lies in the ease of employing Digital Signal Processors (DSPs) or microcontrollers for their implementation. The proposed scheme is shown in Figure 1.

In this scheme, the information signal  $m(n)$  is coded using the  $x_{k+1}$  component of the transmitter state vector  $\mathbf{x}$  via a coding function  $s(n) = c(x_{k+1}, m(n))$ , so that the information signal can be decoded using the inverse function  $m(n) = d(x_{k+1}, s(n)) = d(x_{k+1}, c(x_{k+1}, m(n)))$ .

If the channel frequency response  $H_C(\omega)$  and the filters in the feedback loop  $H_S(\omega)$  are identity systems, i.e.,  $H_C(\omega) = H_S(\omega) = 1$ , for every  $\omega$ , we have shown in [5] that transmitter and receiver synchronize and  $m'(n) \rightarrow m(n)$  provided that all the eigenvalues of the matrix  $A$  are inside the unit circle. However, if  $H_C(\omega)$  is a lowpass or highpass filter



**Figure 1 – Discrete-time communication system for bandlimited channels proposed in [5].**

with cut-off frequency  $\omega_c$  we still can attain synchronization and recover  $m(n)$  in the receiver if the cut-off frequency  $\omega_s$  of  $H_S(\omega)$  is chosen adequately so that the frequency band affected by  $H_C(\omega)$  is previously attenuated. Figures 2 and 3 show examples of transmitted and received signals in the time and frequency domain, respectively when the Hénon map [5] is used.

Although this approach has worked satisfactorily, numerical experiments have shown that depending on the filters employed, the generated signals can cease to be chaotic or diverge. It has also remained to formally prove that transmitter and receiver synchronizes independently of the chosen  $H_S(\omega)$ .

In the present paper we provide an analytical demonstration that synchronization is not affected when identical, linear, time-invariant, Finite Impulse Response (FIR) filters [5] are included in both the transmitter and receiver subsystems. Furthermore, we numerically investigate for which filter's orders and cut-off frequencies it is possible to obtain chaotic signals. One of our preliminary results is shown in Figure 4. In this figure, we show how the maximum Lyapunov exponent  $h$  of the transmitter system varies with the cut-off frequency  $\omega_c$  when  $H_S(\omega)$  is a lowpass  $N$ th-order FIR filter.

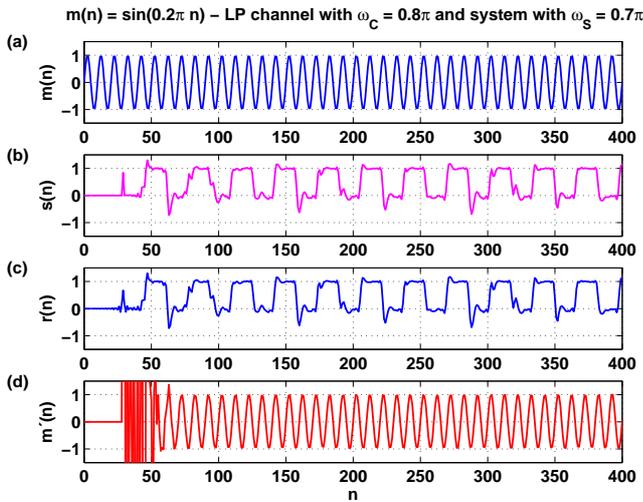


Figure 2 – Examples of transmitted and received signals in time domain for a lowpass channel with  $\omega_c = 0.8\pi$  and  $\omega_s = 0.7\pi$ : (a) message  $m(n)$ ; (b) transmitted signal  $s(n)$ ; (c) received signal  $r(n)$ ; (d) recovered message  $m'(n)$  [5].

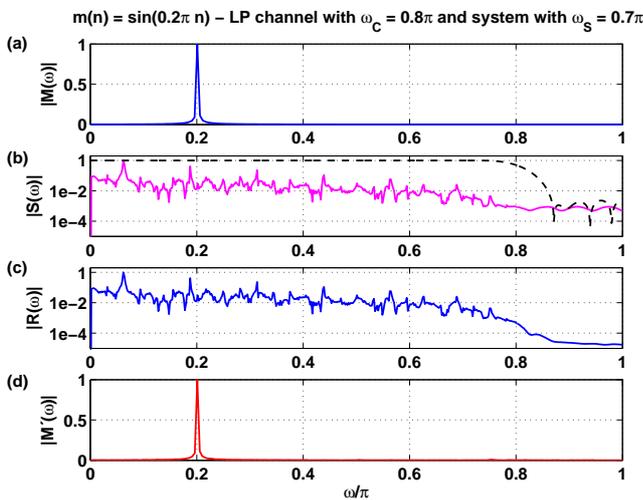


Figure 3 – Examples of transmitted and received signals in frequency domain for a lowpass channel with  $\omega_c = 0.8\pi$  and  $\omega_s = 0.7\pi$ : (a) message  $m(n)$ ; (b) transmitted signal  $s(n)$  and frequency response of the channel (dashed line); (c) received signal  $r(n)$ ; (d) recovered message  $m'(n)$  [5].

As chaos is characterized by  $h > 0$ , we can easily see for which values of these parameters we have chaotic signals.

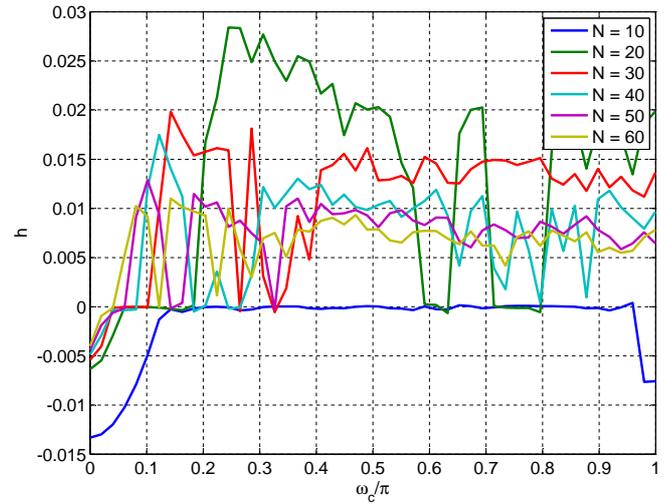


Figure 4 – Preliminary analysis on the variation of the maximum Lyapunov exponent  $h$  when  $H_S(\omega)$  is a lowpass  $N$ th-order FIR filter with cut-off frequency  $\omega_c$ .

## ACKNOWLEDGMENTS

R. D. Fanganiello is partially supported by CAPES and Luiz H. A. Monteiro is partially supported by CNPq.

## References

- [1] L. Pecora and T. Carroll, “Synchronization in chaotic systems,” *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 8, pp. 821–824, 1990.
- [2] W. M. Tam, F. C. M. Lau, and C. K. Tse, *Digital Communications with Chaos: Multiple Access Techniques and Performance*. New York, NY, USA: Elsevier Science Inc., 2006.
- [3] N. F. Rulkov and L. S. Tsimring, “Synchronization methods for communication with chaos over band-limited channels,” *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 27, pp. 555–567, 1999.
- [4] M. Eisenkraft and M. Gerken, “Comunicação utilizando sinais caóticos: influência de ruído e limitação em banda,” in *Anais do XVIII Simpósio brasileiro de Telecomunicações*, Gramado, Brasil, 2001.
- [5] M. Eisenkraft, R. D. Fanganiello, and L. Bacalá, “Synchronization of discrete-time chaotic systems in bandlimited channels,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2009, pp. 1–15, 2009, in press.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)