

**Comportamento Assintótico das Funções de
Correlação para Modelos de Spins e Percolação
de Alcance Misto**

Leandro Martins Cioletti

Março de 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Comportamento Assintótico das Funções de Correlação para Modelos de Spins e Percolação de Alcance Misto

Leandro Martins Cioletti

Orientador: Prof. Gastão de Almeida Braga

Tese apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Sumário

1	Introdução	2
2	Modelos de Percolação de alcance misto em \mathbb{Z}^{k+d}	4
2.1	Preliminares	4
2.2	Resultados fundamentais e fase subcrítica	6
2.3	Comportamento assintótico da conectividade	7
2.3.1	Cotas inferiores	7
2.3.2	Cotas Superiores	9
3	Modelos de Spins com interações de alcance misto em \mathbb{Z}^{k+d}	17
3.1	Preliminares	17
3.2	Desigualdades de Correlação para sistemas de spins ferromagnéticos	18
3.3	Comportamento assintótico Intermediário da correlação spin-spin	22
3.3.1	Cotas inferiores	23
3.3.2	Cotas superiores em altas temperaturas	24
3.3.3	Cotas superiores no regime $\chi(\beta) < \infty$	33
4	Apêndice	40
	Referências	41

1 Introdução

Nesta tese de doutorado determinamos o comportamento assintótico, em termos de cotas superiores e inferiores no limite de grandes distâncias, de funções de conectividade e correlação, nos modelos de percolação e spins, respectivamente, em redes hipercúbicas \mathbb{Z}^{k+d} com interações de alcance misto (exponencial na direção \mathbb{Z}^k e polinomial de alcance R na direção \mathbb{Z}^d), na fase subcrítica. Os resultados mais importantes deste trabalho são os Teoremas 2.1, 3.3 e 3.4.

No Capítulo 2 introduzimos, detalhadamente, em \mathbb{Z}^{0+d} (sem interação exponencial e com interação polinomial de alcance infinito) os modelos de percolação de elos independentes em um caso particular de alcance misto. Por meio de cotas inferior e superior, determinamos o comportamento assintótico da conectividade de dois pontos em função da distância entre eles em toda fase subcrítica, sendo esse o conteúdo do Teorema 2.1. Este resultado é uma extensão para \mathbb{Z}^{0+d} ($d > 1$) dos resultados de Aizenman e Newman [1] para $d = 1$. Na prova do teorema nós usamos a desigualdade de Hammersley-Simon-Lieb, veja [2, 3, 4], e a expansão em escalas múltiplas desenvolvidas em [1]. Este capítulo está baseado na referência [5], onde a prova do Teorema 2.1 foi publicada.

No Capítulo 3 introduzimos os sistemas de spins ferromagnéticos com interações de alcance misto e estudamos o comportamento da correlação spin-spin. Neste capítulo são considerados modelos de alcance misto em \mathbb{Z}^{k+d} mais gerais do que os tratados no Capítulo 2. A generalização é feita em dois sentidos, tanto permitimos o alcance R tomar qualquer valor em $\mathbb{N} \cup +\infty$, quanto admitimos decaimento polinomial com correções logarítmicas na direção \mathbb{Z}^d sendo estes mais gerais que aqueles apresentados no Capítulo 2. Este capítulo é baseado no trabalho [6], submetido para publicação.

Sendo mais específico sobre o Capítulo 3, na Subseção 3.3.2, nós desenvolvemos uma teoria de perturbação rigorosa capaz de realizar o estudo mencionado no parágrafo anterior em casos que a interação entre os spins não é necessariamente invariante por translação. A expansão apresentada nesta teoria de perturbação é baseada em propriedades convolutivas das interações, que são vistas como núcleos de operadores integrais e nas desigualdades de correlação G-I, G-II e Simon-Lieb. Provamos a convergência desta expansão no regime de altas temperaturas (β pequeno). Como consequência, das cotas superiores obtidas por esta expansão, podemos concluir a posteriori que a susceptibilidade do modelo é finita ($\chi(\beta) < \infty$) para toda região do parâmetro β onde a expansão é convergente. Em seguida, na Subseção 3.3.3 nós nos restringimos às iterações com invariância translacional e com algumas outras hipóteses adicionais e estendemos os resultados obtidos no regime perturbativo para toda região de β para o qual a susceptibilidade é finita. Para modelos de spins escalares, isto é equivalente a dizer que os resultados são válidos até o inverso da temperatura crítica β_c , a ser definido posteriormente.

Os resultados obtidos no Capítulo 2 são baseados em desigualdades de correlação [2, 3, 4] e nas técnicas de análise em escalas múltiplas que foram introduzidas por Aizenman e Newman em [1] para modelos de percolação de elos de longo alcance uni-dimensionais. A escolha de introduzir inicialmente os modelos de percolação, e estes com um tipo especial de alcance misto, foi feita com intuito de deixar mais claro como fazer funcionar o método de escalas múltiplas tanto no caso em que as interações são mistas quanto quando a rede não é mais uni-dimensional. A teoria de perturbação construída no Capítulo 3 também pode ser aplicada aos modelos de percolação. A opção por apresentá-la no contexto de sistemas de spins esta relacionada a importância de tais sistemas onde as constantes de acoplamento ou interação são não-invariantes por translação. A introdução do parâmetro R no Capítulo 3 trás novidades ao comportamento assintótico das correlações, algo que denotamos por comportamento assintótico intermediário. Este fenômeno é observado quando a distância dos pontos correlacionados é comparado à escala R da interação. Nas preliminares dos capítulos 2 e 3 introduzimos de forma rigorosa os modelos de percolação e de spins, respectivamente. Nas seções que se seguem são discutidos, separadamente em cada um dos capítulos, os resultados relevantes da teoria e o contexto em que estão inseridos os problemas abordados neste trabalho.

Finalizamos esta introdução observando que os resultados obtidos no Capítulo 3 são também válidos para os modelos de percolação e as adaptações podem ser obtidas facilmente uma vez que em ambos os capítulos as técnicas são desenvolvidas via desigualdades de correlação, o que se aplica a ambos os modelos tratados aqui.

2 Modelos de Percolação de alcance misto em \mathbb{Z}^{k+d}

2.1 Preliminares

Nesta seção apresentamos os chamados, modelos de percolação de alcance misto em \mathbb{Z}^{k+d} . A definição geral, de um modelo de percolação de elos envolve basicamente, a definição de um grafo e uma medida sobre as possíveis configurações (no nosso caso de elos) que podemos obter a partir deste grafo. Neste capítulo estudamos modelos de percolação cujo o grafo é dado por $\mathbb{L} = (\mathbb{Z}^{k+d}, \mathbb{B})$, onde cada elemento $u \in \mathbb{Z}^{k+d}$ é da forma $u = (u_0, u_1)$, com $u_0 \in \mathbb{Z}^k$ e $u_1 \in \mathbb{Z}^d$ e o conjunto \mathbb{B} é formado por determinados pares não ordenados (u, v) tais que $u, v \in \mathbb{Z}^{k+d}$ e $u \neq v$. A especificação mais precisa de quem é o conjunto \mathbb{B} é dada mais abaixo.

Os elementos de \mathbb{Z}^{k+d} são chamados de *sítios* ou *vértices*, enquanto que os elementos de \mathbb{B} são chamados de *elos*. A especificação *alcance misto*, está ligada à medida de probabilidade que é definida no conjunto de configurações de elos do grafo citado acima. A medida de probabilidade usual para os modelos de percolação de elos independentes é construída a partir de uma lista de probabilidades, i.e., indicamos individualmente qual a probabilidade de cada elo em \mathbb{B} estar "aberto" ou "fechado" (será definido abaixo).

Neste capítulo estaremos interessados em modelos de alcance misto com decaimento polinomial. De maneira mais precisa, a cada elo $b = (u, v) \in \mathbb{Z}^{k+d} \times \mathbb{Z}^{k+d}$, associamos uma variável aleatória ω_b , independentemente, tomando valores em $\{0, 1\}$ e com distribuição de Bernoulli tal que a probabilidade de $\omega_b = 1$ é dada por

$$p_{uv} = p_{uv}(\beta) \equiv \beta J_{uv}, \quad (1)$$

onde $\beta \in [0, 1]$ e para $\varepsilon > 0$, J_{uv} é dado por

$$J_{uv} = \begin{cases} \frac{2}{1 + \|u_1 - v_1\|^{d+\varepsilon}} & \text{se } u_0 = v_0 \text{ e } u_1 \neq v_1; \\ 1 & \text{se } u_1 = v_1 \text{ e } \|u_0 - v_0\| = 1; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2)$$

Se $\omega_b = 1$ então dizemos que o elo b está *aberto*, caso contrário dizemos que o elo b está *fechado*.

Com a lista de probabilidades dada acima por (1) e (2), a construção da medida de probabilidade segue de forma usual, veja [7]. Tomamos $\Omega \equiv \{0, 1\}^{\mathbb{B}}$, como espaço de medida ou espaço de configurações e consideramos P a medida produto induzida por p_{uv} sobre os cilindros de Ω , onde um cilindro neste contexto é um subconjunto $C \subset \Omega$ que satisfaz a

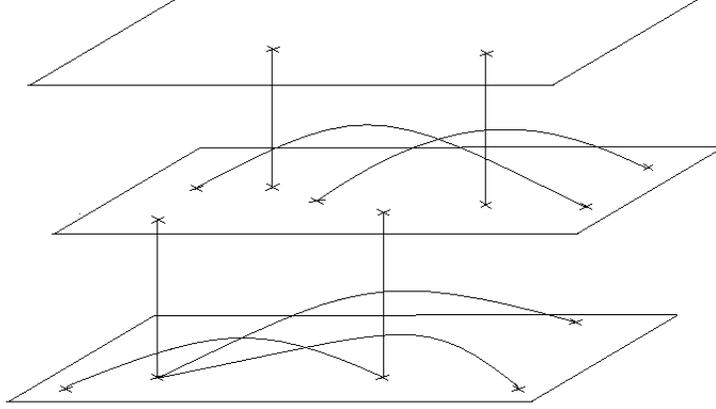


Figura 1: exemplo de configuração em \mathbb{Z}^{1+2} .

seguinte propriedade: existem $n_0 \in \mathbb{N}$, $b_1, \dots, b_{n_0} \in \mathbb{B}$ e $v_1, \dots, v_{n_0} \in \{0, 1\}$ tais que para todo elemento $\omega \in C$ temos $\omega_{b_i} = v_i$ para todo $i = 1, \dots, n_0$.

A seguir daremos algumas definições básicas que são necessárias para a compreensão deste texto. Diremos que γ é um caminho unindo dois *sítios* distintos x e y , se γ é um conjunto de elos formado por uma seqüência finita (b_1, \dots, b_n) , com $b_i = (x_i, x_{i+1}) \in \mathbb{B}$ e $x_1 = x$, $x_{n+1} = y$. Dada uma configuração $\omega \in \Omega$ e um caminho γ , diremos que γ está aberto (na configuração ω) se $\omega_e = 1$ para todo $b_i \in \gamma$. Dada uma configuração ω , diremos que dois pontos $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$, estão no mesmo *aglomerado*, se existe um caminho γ aberto (na configuração ω) unindo estes dois pontos. Diremos que um ponto está conectado ao infinito, se o aglomerado deste ponto for infinito. O *evento* $\{\omega \in \Omega : \text{existe um caminho aberto conectando } x \text{ a } y\}$ será denotado por $\{x \leftrightarrow y\}$ e definimos a função conectividade entre dois pontos $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$ por $\tau_{xy} \equiv P(\{x \leftrightarrow y\})$. Para cada subconjunto $S \subset \mathbb{Z}^{k+d}$, definimos $\tau_{xy}^S \equiv P(\{x \leftrightarrow y \text{ dentro de } S\})$, que é a probabilidade de x estar conectado a y por um caminho cujo os vértices dos elos deste caminho estão todos contido em S . Também necessitaremos da noção de distância nos grafos que estamos trabalhando. Usaremos a distância induzida pela norma L^1 em \mathbb{Z}^{k+d} , i.e., $\|x\| \equiv |x_1| + \dots + |x_{k+d}|$.

Uma grandeza de fundamental importância neste capítulo será a susceptibilidade que é definida por:

$$\chi(\beta) \equiv \sum_{u \in \mathbb{Z}^{k+d}} \tau_{0u}$$

e relacionado a ela, estaremos também interessados em

$$\pi_c \equiv \sup\{\beta \in [0, 1] : \chi(\beta) < \infty\}.$$

Algumas das propriedades deste parâmetro π_c bem como da susceptibilidade são mencionados na próxima seção.

2.2 Resultados fundamentais e fase subcrítica

Vamos recordar alguns fatos sobre percolação de longo alcance definidos por (1) e (2). Seja $\theta(\beta, \varepsilon) \equiv P_{\beta, \varepsilon}(\{0 \leftrightarrow \infty\})$, a probabilidade da origem estar num aglomerado infinito. Se $k + d \geq 2$ é a dimensão do espaço então, por comparação com o modelo de percolação de primeiros vizinhos e para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\beta_c = \beta_c(d, \varepsilon)$, tal que $\theta(\beta, \varepsilon) = 0$ se $\beta < \beta_c$ e $\theta(\beta, \varepsilon) > 0$ se $\beta > \beta_c$.

Para $k = 0$ e $d = 1$ é conhecido que a existência de β_c depende de ε . Se $\varepsilon > 1$, o sistema possui pelo menos um aglomerado infinito com probabilidade positiva independentemente da escolha do parâmetro β . E portanto dizemos que este sistema não exhibe transição de fase em termos da função $\theta(\beta, \varepsilon)$, veja [8]. Já no caso $0 \leq \varepsilon \leq 1$, existe um β_c como descrito no paragrafo anterior. Assim estes sistemas apresentam transição de fase com respeito a $\theta(\beta, \varepsilon)$, veja [9].

A transição de fase pode ser medida em termos da susceptibilidade $\chi(\beta)$. Usando a desigualdade de FKG (4), podemos verificar facilmente que $\pi_c(d, \varepsilon) \leq \beta_c(d, \varepsilon)$. Para a classe de modelos que estamos trabalhando podemos provar, na verdade que vale a igualdade. Este importante fato foi demonstrado independentemente por Aizenman e Barsky em [10] e por Menshikov [11].

Nos sistemas que exibem transição de fase, como os que são estudados aqui, é comum separarmos o espaço de parâmetros β em três subconjuntos, o primeiro dado por $\beta < \beta_c$, que chamamos de fase subcrítica. Em seguida $\beta = \beta_c$ que é chamado de ponto crítico e por último o que compreende os valores maiores que β_c , que é chamado de fase supercrítica.

Para os sistemas que abordamos neste trabalho, com $k + d \geq 2$, o estudo do comportamento assintótico da função de conectividade τ_{xy} é feito por técnicas completamente distintas em cada uma destas três fases:

1) Na fase supercrítica a função τ_{xy} não decai como função dos pontos x e y , veja [7]. Isto é basicamente justificado pela existência de um único aglomerado infinito quase certamente; 2) Na fase crítica, i.e., no ponto crítico, o comportamento assintótico da função τ_{xy} , pelo menos para dimensões altas, foi obtido via *expansão em laços*, maiores detalhes veja [12]. É importante mencionar também que neste trabalho, é feita a prova, em dimensões altas, da conjectura mais famosa para percolação de elos independentes; 3) Na fase subcrítica, o estudo do decaimento da função conectividade é bastante amplo envolve separadamente os sistemas de percolação de, curto alcance, longo alcance e alcance misto. A literatura sobre este assunto é bastante extensa. No contexto de percolação de longo alcance, podemos destacar o trabalho de Aizenman e Newman [1] que obtêm, através de técnicas de escalas múltiplas, o comportamento assintótico das conectividades, como função da distância, para modelos uni-dimensionais de longo alcance, até o ponto crítico. No caso de curto alcance os resultados podem ser encontrados em [7] e em suas referências. O

estudo em dimensões maiores ou iguais a um é feito em [5] para modelos com alcance misto e os resultados são objeto da seguinte seção.

2.3 Comportamento assintótico da conectividade

Nesta seção enunciamos o principal resultado deste capítulo, o Teorema 2.1. Este teorema nos dá informação sobre o comportamento assintótico da função conectividade em modelos de alcance misto em toda a fase subcrítica.

Teorema 2.1. *Suponha que $\beta < \beta_c$ e considere o modelo de percolação de longo alcance com p_{uv} dado por (1) e J_{uv} dado por (2). Então existem constantes positivas C_1, C_2, m_1 e m_2 que dependem de β tais que*

$$\frac{C_1 e^{-m_1 \|x_0 - y_0\|}}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}} \leq \tau_{xy} \leq \frac{C_2 e^{-m_2 \|x_0 - y_0\|}}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}} \quad (3)$$

para todo $x, y \in Z^{k+d}$.

O teorema acima nos diz, em certo sentido, que a probabilidade p_{uv} dita o comportamento assintótico da função conectividade em toda a fase subcrítica.

A prova deste resultado será dividida em duas partes: 1) primeiro mostramos como obter a cota inferior afirmada em (3). Na verdade este resultado é facilmente obtido pela desigualdade de FKG (4) em toda a fase subcrítica e sua prova será incluída porque as ideias envolvidas na sua demonstração serão usadas no Capítulo 3.

Em seguida apresentamos a prova da cota superior. Para a prova desta cota, precisamos lançar mão de outros tipos de desigualdades de correlação. A mais importante delas é a desigualdade de Hammersley-Simon-Lieb, veja [2, 3, 4]. Nesta parte da prova é mostrado como adaptar o argumento de escalas múltiplas introduzido por Aizenman e Newman, para modelos uni-dimensionais, aos modelos de alcance misto em quaisquer dimensões.

2.3.1 Cotas inferiores

Como mencionado anteriormente, a desigualdade de FKG é a principal ferramenta para obtenção da cota inferior do Teorema 2.1. No que segue apresentamos todos elementos para que possamos enunciar precisamente esta desigualdade. A prova desta desigualdade pode ser encontrada, por exemplo, em [7]. Em seguida passamos para a demonstração da cota inferior do Teorema 2.1.

Desigualdade de FKG

Considere o espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , onde $\Omega \equiv \{0, 1\}^{\mathbb{B}}$, \mathcal{F} é a σ -álgebra gerada pelos cilindros e P a medida produto obtida à partir das probabilidades p_{uv} sobre os cilindros. Usaremos a notação I_E , para indicar a função característica de um conjunto $E \in \mathcal{F}$. Para podermos enunciar de forma precisa o teorema da desigualdade de FKG, vamos precisar introduzir uma ordem parcial no conjunto Ω das configurações. Esta ordem parcial é definida da seguinte maneira: dados $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, diremos que $\omega_1 \leq \omega_2$, se $\omega_1(b) \leq \omega_2(b)$ para todo $b \in \mathbb{B}$. Diremos que um *evento* $E \in \mathcal{F}$ é crescente se $I_E(\omega) \leq I_E(\omega')$ sempre que $\omega \leq \omega'$. Por outro lado, diremos que E é um evento decrescente se seu complementar, E^c , é um evento crescente. De maneira mais geral, uma *variável aleatória* $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, num espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) é dita crescente se $f(\omega) \leq f(\omega')$ sempre que $\omega \leq \omega'$.

Teorema 2.2 (Desigualdade de FKG). *Se f, g são variáveis aleatórias crescentes tais que $\int f^2 dP < \infty$ e $\int g^2 dP < \infty$, então*

$$\int f dP \int g dP \leq \int fg dP. \quad (4)$$

Para a prova desta desigualdade veja [7].

Obs: Uma conseqüência imediata e importante deste resultado é que se A e B são eventos crescentes, então

$$P(A) P(B) \leq P(A \cap B). \quad (5)$$

Agora que estamos de posse da desigualdade de FKG, podemos apresentar a prova da cota inferior de (3).

Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$ pontos distintos. Considere $u \equiv (x_0, y_1) \in \mathbb{Z}^{k+d}$ e γ qualquer caminho de comprimento mínimo, de elos de primeiros vizinhos conectando u a y , veja Figura 2.

Considere os eventos $A = \{\text{O elo } (x, u) \text{ está aberto}\}$ e $B = \{\gamma \text{ está aberto}\}$.

É fato que $A \cap B \subset \{x \leftrightarrow y\}$ e, já que A e B são eventos crescentes, podemos, após tomar probabilidades destes eventos, usar a desigualdade de FKG para concluir que

$$P(A) P(B) \leq P(A \cap B) \leq P(\{x \leftrightarrow y\}) = \tau_{xy}.$$

Usando as definições (1) e (2), podemos calcular explicitamente $P(A)$ e $P(B)$. Donde concluímos que

$$\frac{C_1 e^{-m_1 \|x_0 - y_0\|}}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}} \leq \tau_{xy}, \quad (6)$$

onde $-m_1 = \log \beta$ e $C_1 = 2$. □

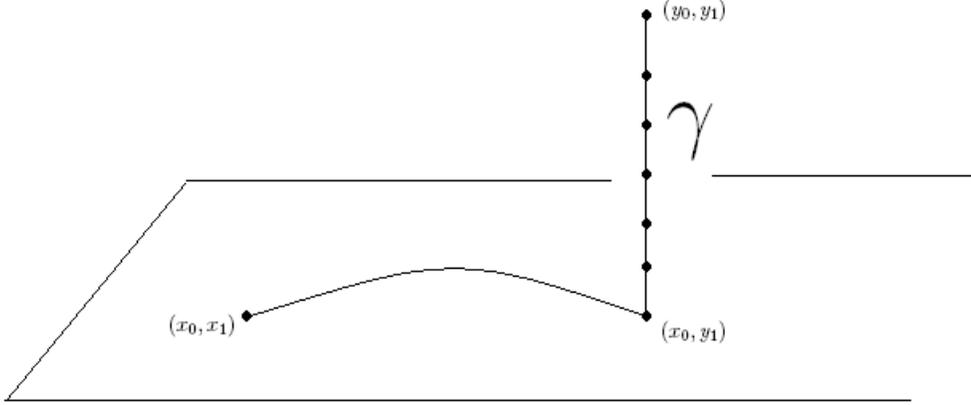


Figura 2: sistema uni-dimensional.

2.3.2 Cotas Superiores

Esta é a parte mais delicada da prova do Teorema 2.1. Desenvolveremos esta seção na seguinte sequência: 1) Iniciamos com a introdução dos elementos necessários para a compreensão do enunciado da desigualdade de Van den Berge e Kesten conhecida como desigualdade de BK; 2) e em seguida usamos esta desigualdade para apresentarmos uma prova, simples e curta, da desigualdade de Hammersley-Simon-Lieb. Optamos por provar H-S-L neste trabalho, pelo menos para o modelo de percolação, por que ela é na verdade o pilar para construção do método de escalas múltiplas, já mencionadas anteriormente, e também da teoria de perturbação que é construída no capítulo seguinte para modelos de spins em altas temperaturas.

Desigualdade de BK

Sejam n um inteiro positivo, $\Gamma = \{0, 1\}^n$, \mathcal{G} o conjunto de todos os subconjuntos de Γ e P a medida produto em (Γ, \mathcal{G}) determinada por densidades $p(i)$, i.e.,

$$P = \prod_{i=1}^n \mu_i$$

onde $\mu_i(\{0\}) = 1 - p(i)$ e $\mu_i(\{1\}) = p(i)$.

Dados $\omega \in \Gamma$ e $S \subset \{1, \dots, n\}$, usaremos a notação

$$[\omega]_S \equiv \{\tilde{\omega} \in \Gamma : \tilde{\omega}_i = \omega_i \forall i \in S\}$$

para designar o cilindro determinado por ω e S . Para $E_1, E_2 \in \mathcal{G}$, definimos o evento *ocorrência disjunta* de E_1 e E_2 , denotado por $E_1 \circ E_2$, como

$$E_1 \circ E_2 = \{\omega : \text{existe } S = S(\omega) \subset \{1, \dots, n\}, [\omega]_S \subset E_1 \text{ e } [\omega]_{S^c} \subset E_2\}$$

Para maiores detalhes e prova do teorema enunciado abaixo, veja [7] e referências contidas.

Teorema 2.3 (Desigualdade de BK). *Se E_1 e E_2 são eventos crescentes em \mathcal{G} , então*

$$P(E_1 \circ E_2) \leq P(E_1)P(E_2). \quad (7)$$

Observações: A desigualdade, como enunciada acima pede que o espaço amostral Γ seja composto de um número finito de cópias do conjunto $\{0, 1\}$. Portanto não poderia ser diretamente aplicada aos modelos de percolação de alcance misto que estamos tratando neste trabalho. Porém podemos mostrar que é possível obter a desigualdade de BK para a medida de probabilidade dos modelos de percolação de elos independentes de alcance misto, se restringirmos os *eventos* E_1 e E_2 à uma certa classe de eventos na σ -álgebra gerada pelos cilindros. Em particular esta desigualdade é verdadeira para os eventos que aparecem na prova da desigualdade de Hammersley-Simon-Lieb, para maiores detalhes veja [7]. Note que a operação de ocorrência disjunta é uma operação associativa e, portanto, procedendo uma indução formal sobre o número de conjuntos, podemos generalizar a desigualdade de BK para qualquer número finito de eventos crescentes. Este fato será usado na prova de H-S-L.

Teorema 2.4 (Desigualdade de Hammersley-Simon-Lieb). *Dados $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$ e $B \subset \mathbb{Z}^{k+d}$ tais que $x \in B$ e $y \in B^c$ então*

$$\tau_{xy} \leq \sum_{\substack{u \in B \\ v \in B^c}} \tau_{xu}^B p_{uv} \tau_{vy}. \quad (8)$$

Prova: Dados $x, y \in \mathbb{Z}^d$, considere uma configuração $\omega \in \{x \leftrightarrow y\}$. Então sabemos que existe um caminho aberto em ω conectando x a y . Vamos denotar este caminho por γ e nomear seus elos como segue abaixo:

$$\gamma = \{(x, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, y)\}.$$

Para a configuração ω tomada acima e para o caminho γ , definimos o número

$$k \equiv \min\{i ; (x_i, x_{i+1}) \in \gamma, x_i \in B \text{ e } x_{i+1} \in B^c\}$$

que é exatamente a primeira saída do caminho γ do conjunto separador B , veja Figura 3. Continuamos o argumento pondo $u = x_k$ e $v = x_{k+1}$. Pela definição de k temos

$$\omega \in \{x \leftrightarrow u \text{ dentro de } B\} \circ \{(u, v) \text{ está aberto}\} \circ \{v \leftrightarrow y\}.$$

Observe agora que para qualquer ω dado em $\{x \leftrightarrow y\}$ a construção acima nos permite sempre encontrar u e v , que claramente dependerão de ω de forma que a relação de pertinência mostrada acima seja verdadeira. Portanto temos

$$\{x \leftrightarrow y\} \subset \bigcup_{\substack{u \in B \\ v \in B^c}} \{x \leftrightarrow u \text{ dentro de } B\} \circ \{(u, v) \text{ está aberto}\} \circ \{v \leftrightarrow y\}. \quad (9)$$

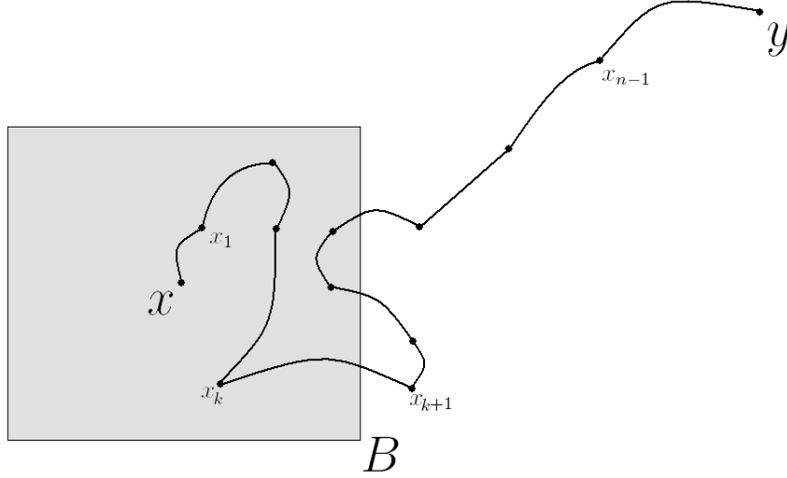


Figura 3: Os pontos x_k e x_{k+1} .

Tomando a probabilidade em (9) e usando a desigualdade de BK, concluímos a prova do teorema. \square

A seguir desenvolvemos o argumento que prova a cota superior em (3). Primeiro podemos verificar que a susceptibilidade, χ , pode ser escrita como

$$\chi = \sum_{n \geq 0} \sum_{\|x_0\|=n} \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \tau_{0x}.$$

Aqui usamos apenas a notação $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{Z}^{k+d}$ e que τ_{0x} é não negativo para podermos reordenar a soma.

Por hipótese, $\chi < \infty$. Assim, dado $\lambda \in (0, 1)$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, temos

$$\sum_{\|x_0\|=n} \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \tau_{0x} < \lambda.$$

Vamos fixar atenção na soma

$$\sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \tau_{0x},$$

para algum valor fixado de $\|x_0\| > n_0$. Neste caso, para cada um dos termos desta soma, podemos aplicar a desigualdade de Hammersley-Simon-Lieb, com $B = \{x \in \mathbb{Z}^{k+d} : \|x_0\| \leq n_0\}$ (veja Figura 4) e obtemos, pela definição (1) de p_{uv} , a seguinte desigualdade

$$\tau_{0x} \leq \sum_{\substack{\|u\|=n_0 \\ v \in B^c: \|v_0 - u_0\|=1, u_1=v_1}} \tau_{0u} p_{uv} \tau_{vx}.$$

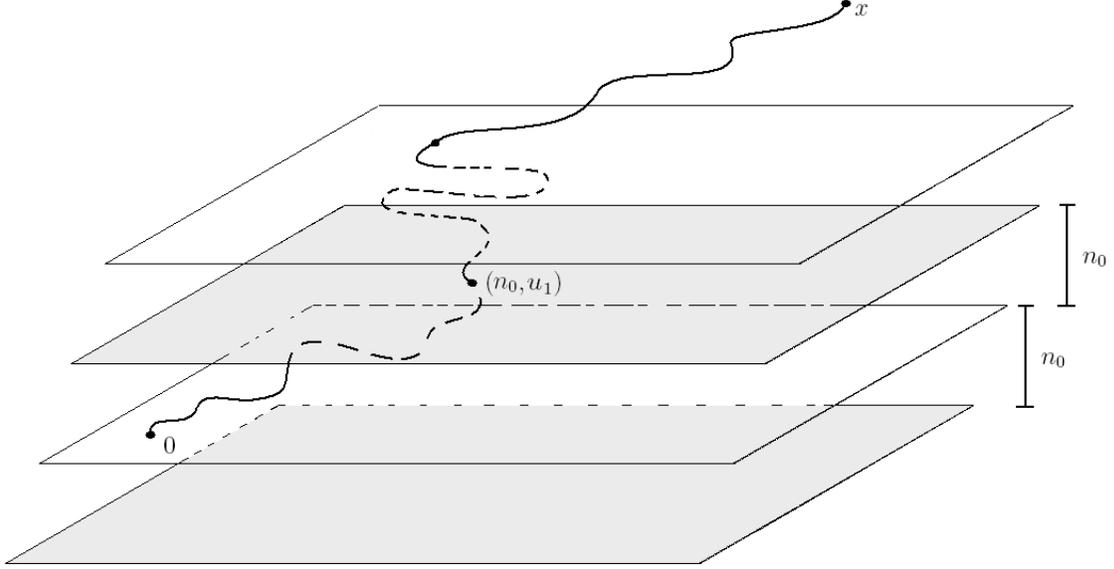


Figura 4: cilindro horizontal.

Já que $\|v_0 - u_0\| = 1$ e $u_1 = v_1$ temos $p_{uv} = \beta$ em todos os termos da soma acima. Usando a invariância translacional deste modelo e que $\chi < \infty$, podemos afirmar que $\tau_{0x} \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$ e portanto que existe um ponto $\bar{v} \in \mathbb{Z}^{k+d}$, com $\|v_0\| = n_0 + 1$ tal que a desigualdade $\tau_{vx} \leq \tau_{\bar{v}x}$ é válida em todas as parcelas da soma acima. Destas observações segue que

$$\begin{aligned} \tau_{0x} &\leq \beta \tau_{\bar{v}x} \sum_{\|u\|=n_0} \tau_{ou} \\ &\leq \beta \lambda \tau_{\bar{v}x}. \end{aligned}$$

Observe que a desigualdade acima pode ser iterada $\lfloor \|x_0\|/(n_0+1) \rfloor$ vezes, onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota o menor inteiro maior ou igual ao argumento. Feito isto, obtemos

$$\tau_{0x} \leq (\beta\lambda)^{\lfloor \|x_0\|/(n_0+1) \rfloor} \tau_{v^*x}$$

para algum $v^* \in \mathbb{Z}^{k+d}$. Agora, somando sobre $x_1 \in \mathbb{Z}^d$ em ambos membros da desigualdade acima obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \tau_{0x} &\leq \chi (\beta\lambda)^{\lfloor \|x_0\|/(n_0+1) \rfloor} \\ &= \chi e^{-m\|x_0\|}, \end{aligned}$$

com $e^{-m} = (\beta\lambda)^{1/(n_0+1)}$. Isto mostra que as parcelas da susceptibilidade decaem exponencialmente na “direção temporal”.

No que segue, mudamos o foco do estudo da conectividade τ_{xy} , para uma nova função

que denotaremos por $T_{m'}(x, y)$. O papel dos parâmetros bem como sua definição são estabelecidos logo abaixo. A introdução desta nova função, pode ser encarada como uma maneira de projetarmos um sistema misto em um sistema de longo alcance. Além disto, esta simples idéia irá nos permitir estender a análise em escalas múltiplas, conhecida anteriormente para sistemas de longo alcance com decaimento polinomial, para os sistemas de alcance misto.

Seja δ positivo tal que $\delta < m$ e defina $m' = m - \delta$. Mostraremos agora uma desigualdade do tipo Hammersley-Simon-Lieb para a função conectividade modificada $T_{m'}(x, y) \equiv e^{m'\|x_0-y_0\|}\tau_{xy}$, para B dado por $B = C_L(x) \equiv \{z \in \mathbb{Z}^{k+d} : \|x_1 - y_1\| \leq L\}$.

Para $L > 1$ e $y \in C_L^c(x)$, temos da desigualdade de Hammersley-Simon-Lieb que

$$\tau_{xy} \leq \sum_{\substack{u \in C_L(x) \\ v \in C_L^c(x)}} \tau_{xu} p_{uv} \tau_{vy}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} T_{m'}(x, y) &= e^{m'\|x_0-y_0\|}\tau_{xy} \\ &\leq e^{m'\|x_0-y_0\|} \sum_{\substack{u \in C_L(x) \\ v \in C_L^c(x)}} \tau_{xu} p_{uv} \tau_{vy} \\ &\leq \sum_{\substack{u \in C_L(x) \\ v \in C_L^c(x)}} e^{m'\|x_0-u_0\|}\tau_{xu} p_{uv} e^{m'\|y_0-v_0\|}\tau_{vy}, \end{aligned}$$

onde, na primeira desigualdade usamos Hammersley-Simon-Lieb e na segunda desigualdade usamos a definição de p_{uv} para concluir que para todas as parcelas não nulas que aparecem no lado direito da desigualdade, temos necessariamente $u_0 = v_0$. Da última desigualdade e da definição de $T_{m'}$, segue imediatamente que

$$T_{m'}(x, y) \leq \sum_{\substack{u \in C_L(x) \\ v \in C_L^c(x)}} T_{m'}(x, u) p_{uv} T_{m'}(v, y).$$

Em analogia com a conectividade modificada, introduzimos também a susceptibilidade modificada

$$\chi_{m'} \equiv \sum_{x \in \mathbb{Z}^{k+d}} T_{m'}(0, x).$$

Esta função, como mostramos abaixo, é finita para todo β tal que a susceptibilidade,

$\chi(\beta)$, é finita. De fato, para $\beta < \beta_c$

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathbb{Z}^{k+d}} T_{m'}(0, x) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^{k+d}} e^{m' \|x_0\|} \tau_{0x} \\
&\leq \sum_{k \geq 0} \sum_{\|x_0\|=k} e^{m' \|x_0\|} \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \tau_{0x} \\
&\leq \sum_{k \geq 0} 2d k^{d-1} e^{m' k} e^{-m k} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Esta propriedade da susceptibilidade modificada será usada, para provar que a função $T_{m'}(x, y)$ apresenta decaimento polinomial na direção \mathbb{Z}^d em função da distância de x_1 a y_1 até o ponto crítico. A partir de agora nosso argumento segue de perto as idéias introduzidas na seção 3 de [1]. Fixados $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$ e $L \equiv \|x_1 - y_1\|/4$, já mostramos que vale a seguinte desigualdade

$$T_{m'}(x, y) \leq \sum_{\substack{u \in C_L(x) \\ v \in C_L^c(x)}} T_{m'}(x, u) p_{uv} T_{m'}(v, y).$$

Agora, decompomos a soma em v , do lado direito da desigualdade acima, em dois somatórios e através das grandezas que definiremos logo abaixo, cotamos cada uma das destas somas separadamente:

$$\sum_{\substack{u \in C_L(x) \\ v \in C_L^c(x) \cap C_{3L}(x)}} T_{m'}(x, u) p_{uv} T_{m'}(v, y) + \sum_{\substack{u \in C_L(x) \\ v \in C_L^c(x) \cap C_{3L}^c(x)}} T_{m'}(x, u) p_{uv} T_{m'}(v, y). \quad (10)$$

A idéia que esta por trás desta decomposição é agrupar os termos em que u e v estão distantes, no máximo, um múltiplo fixo da escala L e usar a hipótese que $\chi_{m'} < \infty$ para obtermos cotas superiores que serão dependentes de $T_{m'}$ e que vão para zero quando L vai para infinito. Nos demais termos usamos a finitude de $\chi_{m'}$ e as propriedades de p_{uv} para as parcelas remanescentes. Nas figuras abaixo representamos graficamente os termos gerais da primeira e segunda parcela, respectivamente, de (10).

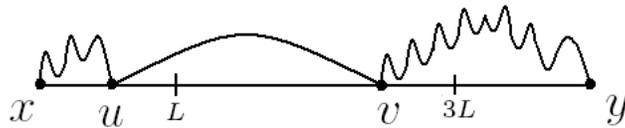


Figura 5: uma representação gráfica do primeiro somatório de (10).

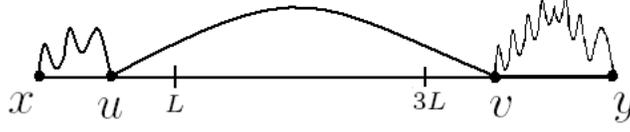


Figura 6: uma representação gráfica do segundo somatório de (10).

Definindo

$$\mathbb{T}_{m'}(L) \equiv \sup\{T_{m'}(0, u) : u \in C_L^c(0)\} \quad \text{e} \quad \gamma_L \equiv \sum_{\substack{u \in C_L^c(x) \\ v \in C_L^c(x)}} T_{m'}(x, u) p_{uv},$$

o primeiro termo do lado direito de (10) pode ser cotado por $\mathbb{T}_{m'}(L/2)\gamma_L$ enquanto o segundo é limitado por

$$\frac{2^{d+\varepsilon} 2\beta\chi_{m'}^2}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}},$$

o que nos fornece a cota

$$T_{m'}(x, y) \leq \frac{2^{d+\varepsilon} 2\beta\chi_{m'}^2}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}} + \gamma_L \mathbb{T}_{m'}(L/2).$$

Usando que $\chi_{m'} < \infty$, para $\beta < \beta_c$ e que $\sum_u p_{0u} < \infty$, podemos afirmar que

$$\sum_{u, v \in \mathbb{Z}^{k+d}} T_{m'}(x, u) p_{uv} < \infty.$$

Por outro lado, segue da definição de γ_L que

$$\gamma_L \leq \sum_{u, v \in \mathbb{Z}^{k+d}} T_{m'}(x, u) p_{uv} I_{C_L(x)}(u) I_{C_L^c(x)}(v),$$

donde concluimos, depois de usar o teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver apêndice), que $\gamma_L \rightarrow 0$ quando $L \rightarrow \infty$.

Para $\alpha \in (0, 2^{-(d+\varepsilon)})$, existe um $L_0 > 0$ tal que $\gamma_L < \alpha$ para todo $L \geq L_0$. Considerando então $L > L_0$ segue que

$$\mathbb{T}_{m'}(L) \leq \frac{2^{d+\varepsilon} 2\beta\chi_{m'}^2}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}} + \alpha \mathbb{T}_{m'}(L/2). \quad (11)$$

Iterando (11) n vezes, com n sendo o menor inteiro para o qual $L2^{-n} \leq L_0$, obtemos para todo $L > L_0$

$$\mathbb{T}_{m'}(L) \leq \frac{2\beta\chi_{m'}^2 \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha 2^{d+\varepsilon})^j}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}} + \alpha^n \mathbb{T}_{m'}(L/2^n).$$

Notando que $T_{m'}(x, y) \leq \mathbb{T}_{m'}(L)$, $\mathbb{T}_{m'}(L') \leq \chi_{m'}$, para qualquer $L' > 0$ e que

$$\alpha^n \leq 2^{-(d+\varepsilon)n} = \frac{1}{1+L^{d+\varepsilon}} \frac{(1+L^{d+\varepsilon})}{2^{(d+\varepsilon)n}} \leq \frac{2 \cdot 2^{d+\varepsilon}}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}} \left(\frac{L}{2^n} \right) \leq \frac{2(2L_0)^{d+\varepsilon}}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}},$$

podemos concluir que, para $\beta < \beta_c$ e $C_2 = 2\chi_{m'}(\beta\chi_{m'} \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha 2^{d+\varepsilon})^j + (2L_0)^{d+\varepsilon})$ que

$$\tau_{xy} \leq \frac{C_2 e^{-m'\|x_0 - y_0\|}}{1 + \|x_1 - y_1\|^{d+\varepsilon}}$$

vale para qualquer $m' = m - \delta$. Finalmente, já que δ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, está completa a prova do Teorema 2.1.

□

3 Modelos de Spins com interações de alcance misto em \mathbb{Z}^{k+d}

3.1 Preliminares

Nesta seção vamos considerar modelos de Mecânica Estatística do equilíbrio com Hamiltonianos dados por:

$$H_\Lambda(\{\vec{\sigma}\}) = - \sum_{u,v \in \Lambda} J_{uv}^R \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v, \quad (12)$$

onde $u = (u_0, u_1) \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^{k+d}$ e $\vec{\sigma}_u = (\sigma_u^{(1)}, \sigma_u^{(2)}, \dots, \sigma_u^{(N)}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ é uma variável aleatória, chamada de *spin*. Associamos também a esta variável uma distribuição de probabilidade, comumente chamada de distribuição *a priori*. Usaremos a notação $d\mu(\vec{\sigma}_u)$ para nos referir a distribuição *a priori* no sítio u . As constantes J_{uv}^R , são chamadas de *constantes de acoplamento* ou também *interação*. Neste trabalho estaremos interessados apenas no caso em que as *constantes de acoplamento* são não negativas. Neste caso, dizemos que a interação é *ferromagnética*. Os modelos que denominamos *ferromagnéticos de alcance misto* são definidos por interações da forma:

$$J_{uv}^R = \begin{cases} K_{u_1 v_1} & \text{se } u_0 = v_0 \text{ e } \|u_1 - v_1\| < R; \\ 1 & \text{se } u_1 = v_1 \text{ e } \|u_0 - v_0\| = 1; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (13)$$

Em (13), consideraremos sempre que as constantes $K_{u_1 v_1}$ estão bem definidas para todos $u_1, v_1 \in \mathbb{Z}^d$. O parâmetro R que aparece na definição acima é chamado *alcance* da interação. Permitiremos que $1 \leq R \leq \infty$, embora nosso principal interesse, neste capítulo, seja em valores finitos do parâmetro R , porém arbitrariamente grandes.

Observação: Agora as interações que definem os modelos de alcance misto são mais gerais do que as apresentadas no capítulo anterior. Além da introdução do alcance R , agora as interações, na direção *espacial*, i.e., as constantes de acoplamento $K_{u_1 v_1}$ não são necessariamente da forma $K_{u_1 v_1} = 2/(1 + \|u_1 - v_1\|^{d+\varepsilon})$.

Dados o Hamiltoniano (12) e o inverso da temperatura β , assumiremos que a medida *a priori*, em cada sítio $u \in \mathbb{Z}^{k+d}$, $d\mu(\vec{\sigma}_u)$ é tal que

$$\int_{\Omega^{|\Lambda|}} \left| \prod_{k=1}^N \prod_{i \in A} (\sigma_i^{(k)})^{a_i} \right| e^{-\beta H_\Lambda(\{\vec{\sigma}\})} \prod_{i \in \Lambda} d\mu(\vec{\sigma}_i) < \infty \quad (14)$$

para qualquer escolha dos expoentes $a_i \in \mathbb{N}$ e para qualquer $A \subset \Lambda$. A notação $|\Lambda|$ denota a cardinalidade do conjunto Λ . *Valores esperados* são definidos como de maneira usual

em mecânica estatística

$$\langle f(\{\vec{\sigma}\}) \rangle_\Lambda = \frac{\int_{\Omega^{|\Lambda|}} f(\{\vec{\sigma}\}) e^{-\beta H_\Lambda(\{\vec{\sigma}\})} \prod_{i \in \Lambda} d\mu(\vec{\sigma}_i)}{\int_{\Omega^{|\Lambda|}} e^{-\beta H_\Lambda(\{\vec{\sigma}\})} \prod_{i \in \Lambda} d\mu(\vec{\sigma}_i)}, \quad (15)$$

assumiremos a existência do *limite termodinâmico*

$$\langle f(\{\vec{\sigma}\}) \rangle \equiv \lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \langle f(\{\vec{\sigma}\}) \rangle_\Lambda \quad (16)$$

para funções contínuas f suportadas em subconjuntos finitos $A \subset \mathbb{Z}^d$. Diremos que $\langle \cdot \rangle$ é o estado de Gibbs associado ao Hamiltoniano (12) a temperatura $1/\beta$ com condições de fronteira livre.

3.2 Desigualdades de Correlação para sistemas de spins ferromagnéticos

Neste capítulo, temos dois objetivos: primeiro apresentamos, para uma grande classe de modelos de *spins* vetorial tomando valores em \mathbb{R}^N (os valores de N serão especificados mais tarde) com *interações ferromagnéticas*, uma teoria de perturbação convergente para valores pequenos de β , que nos fornece o comportamento assintótico intermediário da correlação *spin-spin* $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle$, como função de $\|x - y\|$; Em seguida estendemos os resultados perturbativos, os quais são válidos para pequenos valores de β , à todos os valores de β para os quais $\chi(\beta)$, a *susceptibilidade* do modelo, é finita. Ambos os resultados são baseados em desigualdades de correlação e para modelos escalares ($N=1$), a condição $\chi(\beta) < \infty$ significa que os resultados são válidos até o ponto crítico, veja [13].

O que estamos denotando, neste texto, por comportamento assintótico intermediário é o comportamento da função $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle$ quando o comprimento $\|x - y\|$ é comparável com R . Para um sistema em um volume finito Λ e J^R da forma (13), tudo resume-se a considerar $\|x_1 - y_1\|$, a distância entre x e y na direção \mathbb{Z}^d , quando $\|x_1 - y_1\| \ll R \ll |\Lambda|^{1/d}$ ou quando $R \ll \|x_1 - y_1\| < |\Lambda|^{1/d}$. Para as medidas a priori $d\mu(\vec{\sigma})$ para os quais são válidas as desigualdades de correlação, nosso objetivo é encontrar uma classe de interações ferromagnéticas J^R tal que, pelo menos para valores pequenos de β , a correlação spin-spin se comporte assintoticamente como a interação, i.e.

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Lambda \approx \begin{cases} CK_{x_1 y_1} e^{-m\|x_0 - y_0\|} & \text{se } \|x_1 - y_1\| \ll R \ll |\Lambda|^{1/d}, \\ \tilde{C} e^{-\tilde{m}\|x - y\|} & \text{se } R \ll \|x_1 - y_1\| < |\Lambda|^{1/d}, \end{cases} \quad (17)$$

para algumas constantes C, \tilde{C} e m , uniformemente em Λ . Em particular, nos esperamos que as cotas acima sejam válidas também quando $|\Lambda| \rightarrow \infty$ e, possivelmente, quando $R \rightarrow \infty$. É importante ressaltar, que $K_{x_1 y_1}$ pode ter um decaimento mais do que polinomial.

Se $R \gg |\Lambda|^{1/d}$ então não existe comportamento intermediário já que, neste caso, o sistema é essencialmente de longo alcance. Dentro do contexto de mecânica estatística de interações de longo alcance, a questão se as correlações se comportam como a interação ou não já é uma questão antiga. Para modelos de gases na rede, no regime de baixa atividade, foi provado em [14] que potenciais invariantes por translação que decaem exponencialmente (polinomialmente) levam ao decaimento das correlações exponencial (polinomial), o mesmo também sendo válido para sistemas de spins clássicos ($N=1$), em altas temperaturas. Veja [15, 16] para spins limitados e ilimitados, respectivamente. Os efeitos de condições de contorno e ou campo magnético externo na taxa de decaimento das correlações para modelos escalares $N = 1$ é estudado em [17] e os resultados sobre a taxa de decaimento das correlações são recuperados, no regime de altas temperaturas, para o caso polinomial. Interações mistas como as que consideramos neste trabalho, veja (13), foram levadas em conta em [18] no estudo de correlações em modelos de cristais quânticos, e a cota superior (17), com $R = \infty$ e

$$K_{u_1 v_1} = \frac{2}{1 + \|u_1 - v_1\|^{d+\varepsilon}}, \quad \text{com } \varepsilon > 0, \quad (19)$$

foram obtidas no regime perturbativo, entre outros resultados. Interações mistas foram também estudadas em [5], onde o método de análise em múltiplas escalas de Aizenman e Newman [1] foi adaptado para determinar o comportamento assintótico da conectividade até o ponto crítico, para a percolação de elos independentes d -dimensional. O caso de spins em redes unidimensionais, \mathbb{Z}^{0+1} , foi considerado em [19], com $N = 1, \dots, 4$ e com K dado por (19), e a cota superior (17) foi obtida na fase desordenada.

Para modelos de spins na rede a cotas superiores similares às obtidas no Teorema 2.1 eram conhecidas no regime de altas temperaturas, veja referência [15] para spins limitados e a referência [16] para modelos de spins ilimitados discretos. Um problema importante era determinar se a conectividade tinha decaimento dado pela mesma taxa das constantes de acoplamento no caso de interações de longo alcance. No caso ilimitado e contínuo, alguns dos resultados de [15, 16] foram estendidos em [17] com J_{uv} dado por (1) e $u, v \in \mathbb{Z}^{0+d}$, enquanto que em [18] são considerados modelos de decaimento misto mais gerais. Em ambos os casos a expansão em polímeros (veja [22] e referências contidas) é usada e os resultados são garantidos apenas no regime perturbativo. Em [19] é provado que para modelos de spins $O(N)$ em redes uni-dimensionais, com $1 \leq N \leq 4$, que o decaimento das correlações é ditado pela interação para todo β tal que $\chi(\beta) < \infty$. Embora fosse esperado que estes resultados também fossem válidos em redes d -dimensionais não era claro como prová-lo para toda a fase subcrítica ($\beta < \beta_c$).

Para $R \geq 1$, definimos

$$\|K^R\| \equiv \max\left\{ \sup_{u_1 \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\{v_1 \in \mathbb{Z}^d: \|v_1 - u_1\| < R\}} K_{u_1 v_1}, \sup_{v_1 \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\{u_1 \in \mathbb{Z}^d: \|u_1 - v_1\| < R\}} K_{u_1 v_1} \right\},$$

$\|J^R\| \equiv 2k + \|K^R\|$ e $\|J\| \equiv \sup_R \|J^R\|$. Quando $K_{u_1 v_1}$ é invariante por translação, as quantidades definidas acima se reduzem a norma L_1 usual. Vamos assumir por enquanto apenas que $\|J^R\| < \infty$ e mais tarde nos restringiremos adequadamente à classe de interações que lidaremos neste trabalho. Vamos assumir também que a medida a priori $d\mu(\vec{\sigma}_u)$ é uma medida par, i.e., μ é invariante pela aplicação $h(x) = -x$ e que ela é da forma

$$d\mu(\vec{\sigma}_u) \equiv e^{-f(\|\vec{\sigma}_u\|^2)} d\vec{\sigma}_u. \quad (20)$$

Dado o Hamiltoniano (12) e notando que $J_{uv} \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v \leq J_{uv} (\|\vec{\sigma}_u\|^2 + \|\vec{\sigma}_v\|^2)/2$, uma condição suficiente para (14) ser válido é que pelo menos uma, das duas condições abaixo, seja verificada:

F1) $f^{(k)}(0) > 0$ para algum $k \geq 2$;

F2) $f(x) = ax + b$, $a > 0$ e β satisfazendo $\beta \|J^R\| < a$.

Sob a hipótese de ferromagnetismo, positividade das correlações é assegurada pela primeira desigualdade de Griffiths. As desigualdades de Griffiths I (G-I) e II (G-II), veja [20, 21], são respectivamente dadas por

$$0 \leq \langle \sigma_A \rangle_\Lambda, \quad N \geq 1 \quad (21)$$

e

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Lambda \langle \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v \rangle_\Lambda \leq \langle (\vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y)(\vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v) \rangle_\Lambda, \quad (22)$$

para qualquer $\Lambda \subset \mathbb{Z}^{k+d}$ e qualquer conjunto finito $A \subset \Lambda$, com $\sigma_A = \prod_{k=1}^N \prod_{i \in A} (\sigma_i^{(k)})^{a_i}$. G-II como enunciada acima não se encontra na sua forma mais geral, mas está na forma que a utilizaremos neste trabalho. As condições na medida a priori e em N para que as desigualdades G-I e G-II sejam válidas são as seguintes:

G1) Se a medida a priori é par então G-I é válida para qualquer $N \geq 1$, veja [22] e referências lá citadas;

G2) se a medida a priori é par então G-II é válida para $N = 1$, veja [22]. A desigualdade também é verdadeira para $N = 2$ para medidas a priori uniformes, veja [23]. Dunlop e Newman [24] mostraram que G-II também é válida para $N = 2$ quando a medida a priori considerada é par e da forma

$$d\mu(\vec{\sigma}) = e^{-f(r)} dr d\theta \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{br^2} e^{-f(r)} dr < \infty \quad \text{para cada } b \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

onde $\vec{\sigma} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Note que se se G2 é satisfeita então G1 também é satisfeita. Para modelos com Hamiltonianos (12), a desigualdade de Simon-Lieb (S-L) [3, 4, 25] para modelos com $N = 1, 2$ afirma que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \beta \sum_{\substack{u \in B \\ v \in B^c}} \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_u \rangle_B J_{uv}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle, \quad (24)$$

onde $B \subset \mathbb{Z}^{k+d}$ e $x \in B, y \in B^c$. A desigualdade S-L, na forma acima, foi provada em [26] assumindo que a medida a priori satisfaz as hipóteses G2 e

SL1) para $N = 1$ com medida a priori (20), sendo tal que $f''(t) \geq 0$ para $t \geq 0$;

SL2) para $N = 2$ com medida a priori (20) e $f(t)$ sendo um polinômio cujos os coeficientes de grau maior ou igual a um sejam positivos.

Teorema 3.1. *As desigualdades de Griffiths I, II e Simon-Lieb são satisfeitas pelos estados de Gibbs (16) se: $N = 1$ e se a medida a priori satisfaz a condição SL1; $N = 2$ e a medida a priori satisfaz SL2.*

A segunda desigualdade de Griffiths implica que os valores esperados são funções não decrescentes do volume. Portanto, se um estado $\langle \cdot \rangle$ satisfaz as hipóteses do teorema acima então ele também satisfaz à desigualdade de Simon [3]

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \beta \sum_{\substack{u \in B \\ v \in B^c}} \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_u \rangle J_{uv}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \quad (25)$$

Além do mais, para Hamiltonianos dados por (12), Aizenman e Simon [27] provaram que

SL3) para $N = 2, 3, 4$ e medida a priori uniforme na esfera unitária, uma versão um pouco mais forte que (25) também é válida

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq (\beta/N) \sum_{\substack{u \in B \\ v \in B^c}} \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_u \rangle J_{uv}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle.$$

Note que, em particular, a desigualdade de Simon (25) também é satisfeita.

Teorema 3.2. *A primeira desigualdade de Griffiths e a desigualdade de Simon são satisfeitas pelos estados de Gibbs (16) se: as hipóteses do Teorema 3.1 são verificadas; $N = 3, 4$ com spins uniformemente distribuídos na esfera.*

Obs: Considere um sistema de spins cujo Hamiltoniano é dado por (12) e J_{uv} simétrica e não negativa ($J_{uv} = J_{vu} \geq 0$). Se a medida a priori $d\mu(\vec{\sigma})$ é dada por

$$d\mu(\vec{\sigma}) = e^{-\frac{\lambda}{4} \|\vec{\sigma}\|^4 + \frac{c}{2} \|\vec{\sigma}\|^2 + c} d\vec{\sigma},$$

com $\lambda > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, então as hipóteses do Teorema 3.1 são satisfeitas. Em particular, o teorema vale quando $d\mu(\vec{\sigma}) = e^{-\lambda(\|\vec{\sigma}\|^2-1)^2} d\vec{\sigma}$ e, tomando o limite $\lambda \rightarrow \infty$, este resultado também se estende ao modelo de Ising ($N = 1$) e XY ($N = 2$) com interação de longo alcance. Com $N = 1$ usando o "truque" de Griffiths [28] que consiste em escrever um modelo de spins S como uma superposição de modelos de Ising, pode se mostrar que o Teorema 3.1 é satisfeito para spins discretos uniformemente distribuídos $\sigma \in \{-2S, -2S + 2, \dots, 0, \dots, 2S - 2, 2S\}$. Além do mais, tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ sobre os estados $\langle \cdot \rangle_n$ com medida a priori dada por

$$d\mu_n(\vec{\sigma}) = e^{-\|\vec{\sigma}\|^{2n}} d\vec{\sigma},$$

concluimos que o Teorema 3.1 é também satisfeito se os spins são uniformemente distribuídos na bola unitária $\|\vec{\sigma}\| \leq 1$, com $N = 1, 2$.

3.3 Comportamento assintótico Intermediário da correlação spin-spin

Nesta seção vamos considerar modelos de spins N -dimensional na rede $(k+d)$ -dimensional e vamos inicialmente mostrar, para valores pequenos de β , (17) e (18) em termos de cotas inferior e superior, para $N = 1, 2$ e para uma determinada classe de medidas a priori que será especificada mais a frente. Por enquanto, vamos mencionar apenas que nosso resultado para $N = 1$ cobre o modelo de Ising, com spin discreto em $\{-2S, -2S + 2, \dots, 2S\}$ uniformemente distribuído e também com spin contínuo no intervalo $[-S, S]$; (17) e (18) em termos de cotas superiores, para $N = 3, 4$ e para spins uniformemente distribuídos na esfera unitária.

Na Subseção 3.3.2, para obter a cotas superiores desenvolvemos uma teoria de perturbação que não impõe a interação J^R a restrição de ser invariante por translação. Ela deverá satisfazer a algumas outras hipóteses, veja hipóteses H1-H3 na Seção 3.3.2. Para β não necessariamente pequeno mas tal que $\chi(\beta) < \infty$, obtemos (17) e (18) em termos de cotas superiores, até a temperatura crítica, sob as hipóteses H4-H7, veja Subseção 3.3.3, em particular, vamos exigir invariância translacional da interação J^R .

Esta seção é organizada da seguinte maneira: Na Subseção 3.3.1 colocamos as condições na medida a priori para que sejam satisfeitas a primeira e a segunda desigualdade de Griffiths [20, 21] e também a desigualdade de Simon-Lieb [3, 4, 25], apresentamos também alguns exemplos de medidas a priori que satisfazem esta exigência e então provamos (17) e (18) em termos de cotas inferiores. Na subseção 3.3.2 colocamos as condições sobre a interação J^R para podermos obter a cota superior quando β é pequeno, veja Teorema 3.3. Em seguida na Subseção 3.3.3, apresentamos outras condições que devem ser impostas à interação J^R para que a cota superior continue sendo válida sempre que $\chi(\beta) < \infty$, veja Teorema 3.4.

3.3.1 Cotas inferiores

Proposição 3.1. *Considere o estado de Gibbs (16) à temperatura inversa β e suponha que a medida a priori (20) satisfaça a condição G2. Então, existem constantes positivas m_0 , C e \tilde{C} , que podem depender de β e J^R tais que, para todo $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$*

$$\langle \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v \rangle \geq \begin{cases} CK_{x_1 y_1} e^{-m_0 \|x_0 - y_0\|} & \text{se } \|x_1 - y_1\| < R, \\ \tilde{C} e^{-m \|x - y\|} & \text{se } \|x_1 - y_1\| \geq R. \end{cases}$$

Prova: A condição G2 implica que as desigualdades G-I e G-II são satisfeitas. Vamos supor inicialmente que a variável de spin seja limitada, i.e., $|\vec{\sigma}| \leq S$. Fazendo uma expansão em série de Taylor do numerador, usando a hipótese de ferromagnetismo e que $d\mu(\vec{\sigma})$ é par, podemos afirmar que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y (S^2 - \|\sigma\|_z^2) \rangle_\Lambda \geq 0$$

para qualquer $x, y, z \in \Lambda$. Então segue de (22) e da desigualdade acima que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_z \rangle_\Lambda \langle \vec{\sigma}_z \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Lambda \leq S^2 \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Lambda.$$

Fixados $x, y \in \Lambda$, tomamos $z = (y_0, x_1)$ e consideramos primeiro $\|x_1 - y_1\| < R$. Seja Γ um conjunto de elos de primeiros vizinhos formando um caminho retilíneo que inicia em (x_0, x_1) e vai até (y_0, x_1) e seja b o elo com pontos terminais z e y . Então segue, novamente de (22) e da desigualdade acima, que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_z \rangle_\Gamma \langle \vec{\sigma}_y \cdot \vec{\sigma}_z \rangle_b \leq S^2 \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Lambda.$$

Já que $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_z \rangle_\Gamma$ é o valor esperado tomado sobre um sistema uni-dimensional de interação de primeiros vizinhos e $\langle \vec{\sigma}_y \cdot \vec{\sigma}_z \rangle_b$ envolve integração sobre as variáveis $\vec{\sigma}_z$ e $\vec{\sigma}_y$, é fácil concluir que, para pequenos valores de β , existem constantes positivas C e m_0 , que podem depender de β , R , J^R e S tais que

$$CK_{x_1 y_1} e^{-m_0 \|x_0 - y_0\|} \leq \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Lambda.$$

Consequentemente, também vem da monotonicidade que a cota inferior acima continua válida para todos os valores de β para os quais os estados de Gibbs estão bem definidos.

Para o caso $\|x_1 - y_1\| \geq R$, apenas substitua b no argumento acima por Γ_1 , conjunto dos elos de primeiros vizinhos formando um segmento retilíneo com pontos terminais z e y e assim podemos verificar que

$$C e^{-m_0 \|x_0 - y_0\|} e^{-m_1 \|x_1 - y_1\|} \leq \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Lambda.$$

Para o caso de spins ilimitados e $\|x_1 - y_1\| < R$, vamos estabelecer a cota inferior pelo seguinte argumento: considere o caminho Γ definido acima, fazendo uma expansão em

série de Taylor de $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Gamma$, em torno de $\beta = 0$, e em seguida usando que $d\mu(\vec{\sigma})$ é par obtemos a seguinte cota inferior

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle_\Gamma \geq \prod_{(u,v) \in \Gamma} \beta J_{uv}^R \left(\frac{\int_\Omega |\sigma_0^{(1)}|^2 d\mu(\vec{\sigma}_0)}{\int_\Omega e^{\beta \|J^R\| \|\vec{\sigma}_0\|^2} d\mu(\vec{\sigma}_0)} \right) = CK_{x_1 y_1} e^{-m_0 \|x_0 - y_0\|},$$

onde $C = e^{-m_0}$ é a razão entre as integrais acima. Observe que $m_0 > 0$ para qualquer $\beta > 0$ por que a razão entre as integrais é sempre menor do que um. \square

3.3.2 Cotas superiores em altas temperaturas

Vamos começar esta seção caracterizando as interações J^R que iremos considerar. Vamos assumir que J^R satisfazem às seguintes hipóteses:

H1) **positividade de K** : $\|J^R\| > 2k$, ou equivalentemente, $\|K^R\| > 0$;

H2) **limitação local**: dados $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}^d$, existe uma constante positiva C_3 , que não depende de x_1 e y_1 , tais que

$$K_{u_1 v_1} \leq C_3 K_{x_1 y_1} \text{ para todo } u_1, v_1 \in \mathbb{Z}^d \text{ com } \|u_1 - x_1\| \leq 1, \|v_1 - y_1\| \leq 1;$$

H3) **hipótese de convolução**: para todo $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}^d$, existe uma constante positiva C_2 , que não depende dos pontos x_1 e y_1 , tais que

$$\sum_{u_1 \in \mathbb{Z}^d} K_{x_1 u_1} K_{u_1 y_1} \leq C_2 K_{x_1 y_1}.$$

Os dois lemas que são apresentados na sequência nos permitem exibir explicitamente um exemplo de uma interação que satisfaz H1, H2 e H3. Como veremos abaixo, o Lema 1 é um resultado muito mais forte do que precisamos para justificar a hipótese H1. Olhando com cuidado, notamos que este lema prova H1 para os núcleos do tipo (19) em todas as escalas e não somente na escala $L = 1$ como é pedido em H1. A hipótese H3 para os núcleos da forma (19) é obtida pelo Lema 2. Depois da prova destes dois resultados, mostramos também outras famílias de interações para as quais são válidas H1 e H3 por simples modificação dos argumentos que mostraremos agora.

Lema 1. *Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, com $\|x - y\| > L/2$, onde $L \geq 2\sqrt{d}$ é dado. e K_{uv} dado por (19). Então, existem constantes $C_1 = C_1(L)$ e $C_2 = C_2(L)$ tais que*

$$\frac{C_1}{1 + \|u - v\|^{d+\varepsilon}} \leq K_{uv} \leq \frac{C_2}{1 + \|u - v\|^{d+\varepsilon}}, \quad (26)$$

para todo $u \in B_L(x)$ e $v \in B_L(y)$, com $u \neq v$.

Prova: Suponha inicialmente que $L/2 < \|x - y\| \leq L$. Então $B_L(x) \cap B_L(y) \neq \emptyset$ e portanto $\|u - v\|$ não pode ser maior que duas vezes o comprimento da diagonal do hipercubo para todo $u \in B_L(x)$ e $v \in B_L(y)$. Já que $u \neq v$ então $\|u - v\| \geq 1$ e junto com as observações acima temos portanto

$$\frac{\|x - y\|}{L} \leq 1 \leq \|u - v\| \leq 2\sqrt{d}L \leq 4\sqrt{d}\|x - y\|. \quad (27)$$

Então a desigualdade (26) é satisfeita com $C_1 = (4\sqrt{d})^{-d-\varepsilon}$ e $C_2 = 2L^{d+\varepsilon}$. Agora, se $\|x - y\| > L$ então $B_L(x) \cap B_L(y) = \emptyset$ e existe um inteiro $n = n(L)$ tal que $L^n < \|x - y\| \leq L^{n+1}$. Se $n = 1$ poderia acontecer de termos $\|u - v\| = 1$ para algum $u \in B_L(x)$ e algum $v \in B_L(y)$. De qualquer forma a cota inferior dada em (27) continua sendo válida se substituimos L por L^2 , nos dando agora a nova constante $C_2 = 2L^{2(d+\varepsilon)}$. Para a cota superior, ainda no caso $n = 1$, basta procedermos como é mostrado na desigualdade (28) abaixo:

$$\frac{1}{2L}\|x - y\| \leq \frac{L^n}{2} \leq L^n - \sqrt{d}L \leq \|u - v\| \leq L^{n+1} + \sqrt{d}L \leq 2L^{n+1} \leq 2L\|x - y\|, \quad (28)$$

onde, para a segunda e quinta desigualdades, usamos a hipótese $L \geq 2\sqrt{d}$ e $n \geq 2$. A desigualdade (26) segue então com $C_1 = (2L)^{-d-\varepsilon}$ e $C_2 = (2L)^{d+\varepsilon}$. Portanto segue que a desigualdade (26) é válida em geral com as constantes $C_1 = 2(2L)^{-d-\varepsilon}$ e $C_2 = 2L^{2(d+\varepsilon)}$. \square

Lema 2. *Seja K_{uv} dado por (19). Então*

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}^d} K_{xu} K_{uy} \leq \frac{C_3}{1 + \|x - y\|^{d+\varepsilon}} \quad (29)$$

para todo $x, y \in \mathbb{Z}^d$, com $C_3 = 2^{d+2+\varepsilon}\|K\|$.

Prova: Seja $D = \|x - y\|$. Observe que

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}^d} K_{xu} K_{uy} \leq \sum_{\|u-x\| \leq D/2} K_{xu} K_{uy} + \sum_{\|u-y\| > D/2} K_{xu} K_{uy}.$$

Note que se $\|y - u\| \leq D/2$ então

$$K_{xu} \leq \frac{2}{1 + (D/2)^{d+\varepsilon}} \leq \frac{2^{1+d+\varepsilon}}{1 + D^{d+\varepsilon}}$$

Pondo $C_3 = 2^{d+2+\varepsilon}$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} K_{xu} K_{uy} &\leq \frac{C_3(2\|K\|)^{-1}}{1 + \|x - y\|^{d+\varepsilon}} \left(\sum_{\|u-y\| \leq D/2} K_{xu} + \sum_{\|u-x\| > D/2} K_{uy} \right) \\ &\leq \frac{C_3}{1 + \|x - y\|^{d+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

□

Obs: As hipóteses H1 e H2 são, em geral, facilmente verificadas, enquanto H3 requer algumas estimativas. Por exemplo, para $K_{u_1v_1}$ dado por (19) verificamos a validade de H3, com $C_2 = 2^{d+2+\epsilon}\|K\|_1$, pelo Lema 2. Outro exemplo é

$$K_{u_1v_1} = \frac{2}{(2 + \|u_1 - v_1\|)^d \ln^p(2 + \|u_1 - v_1\|)}, \quad (30)$$

com $p > 1$. E neste caso, $C_2 = 2^{d+p}\|K\|_1$.

Agora estamos em condições de enunciar o principal teorema desta seção

Teorema 3.3. *Considere o estado de Gibbs (16) à temperatura inversa β e com constantes de acoplamento J^R satisfazendo as hipóteses colocadas acima H1 à H3. Seja $S^2 > 0$ tal que $\langle \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v \rangle \leq S^2$ para todo $u, v \in \mathbb{Z}^{k+d}$. Então, sob as hipóteses do Teorema 3.1, existem constantes positivas β_0 , m e C tais que, para todo $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$*

$$\langle \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v \rangle \leq \begin{cases} CK_{x_1y_1} e^{-m\|x_0-y_0\|} & \text{se } \|x_1 - y_1\| < R, \\ S^2 e^{-\frac{m}{2R}\|x-y\|} & \text{se } \|x_1 - y_1\| \geq R, \end{cases} \quad (31)$$

$$(32)$$

sempre que $\beta < \beta_0$.

Obs 1: As constantes β_0 , m e C dependem de β , R , S^2 e $\|J^R\|$ e elas serão explicitamente determinadas na prova do teorema.

Obs 2: Por hipótese J^R é simétrica e se $d\mu(\vec{\sigma})$ satisfaz às hipóteses do Teorema 3.1 então as desigualdades G-I, G-II e S-L são válidas. Portanto os modelos de spins mencionados nas observações que sucedem o Teorema 3.2, com interações dadas por (19) e (30) satisfazem às hipóteses do Teorema 3.3, em particular, $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2$. Portanto, segue do Teorema 3.3 que a correlação spin-spin destes modelos decai como (31) e (32), para β pequeno. Junto com as cotas inferiores fornecidas pela Proposição 3.1 obtemos informações sobre o comportamento da correlação spin-spin, em termos de cotas inferiores e superiores. Para sistemas de spins ilimitados satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.3, antes de podermos concluir que as cotas (31) e (32) são válidas devemos verificar a existência de uma constante S^2 tal que $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2$. Isto normalmente é uma tarefa difícil. Vamos mencionar apenas que cotas superiores na correlação spin-spin podem ser obtidas sob a hipótese de convexidade (ver apêndice) da função f (20) para sistemas ferromagnéticos de longo alcance com Hamiltoniano da forma $-\sum_{i,j} J_{ij}(\sigma_i - \sigma_j)^2$, usando estimativas do tipo "chessboard", veja [29].

Prova do Teorema 3.3: A prova é dividida em duas partes:

1. Primeiro mostramos que $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle$ decai exponencialmente na “direção temporal” \mathbb{Z}^k para β pequeno e $\|x_0 - y_0\| > 0$, i.e., se β é pequeno existe uma constante positiva $m_0 = m_0(\beta)$ tal que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-m_0 \|x_0 - y_0\|}.$$

Em seguida provamos o decaimento exponencial das correlações na “direção espacial” \mathbb{Z}^d , i.e., se β é pequeno e se $\|x_1 - y_1\| > R$, onde R é o alcance da interação J^R , então,

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-\frac{m_0}{R} \|x_1 - y_1\|}.$$

Ambos decaimentos são obtidos por sucessivas aplicações da desigualdade S-L. Multiplicando ambos os membros das duas desigualdades acima e tomando a raiz quadrada temos (32) para β pequeno e $\|x_1 - y_1\| > R$:

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-\frac{m_0}{2R} \|x - y\|}.$$

2. A prova de (31) é feita por indução no número de vezes que aplicamos a desigualdade S-L. Fixados x e y iremos mostrar, que para cada inteiro n que, existem funções não negativas $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$ e $R_{x,y}^{(n)}$ tais que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \sum_{k=1}^n \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(k)} + R_{x,y}^{(n)},$$

onde, para β pequeno,

$$R_{xy}^{(n)} \leq \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(n)} + R_{xy}^{(n+1)}, \quad R_{xy}^{(n)} \leq C\beta^n$$

e

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(n)} \leq C \beta^n K_{x_1 y_1} e^{-m_0 \|x_0 - y_0\|}.$$

É então claro como provar (31) a partir das desigualdades acima.

Sob as hipóteses do Teorema 3.1 as desigualdades G-I, G-II e S-L são válidas. Após usar a hipótese $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_u \rangle \leq S^2$ para todo $x, u \in \mathbb{Z}^{k+d}$ e a desigualdade de Simon-Lieb com $B = \{x\}$, obtemos

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \beta S^2 \sum_{u \in \mathbb{Z}^{k+d} \setminus \{x\}} J_{xu}^R \langle \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_y \rangle. \quad (33)$$

Para $z = (z_0, z_1) \in \mathbb{Z}^{k+d}$, defina o hiperplano $\mathbb{H}_{z_0} \equiv \{u \in \mathbb{Z}^{k+d} : u_0 = z_0\}$, que interpretaremos como “hiperplano horizontal na altura z_0 ”. Então, observe que, pela definição (13) de J^R , a soma em u de (33) é restrita aos pontos $u \in \mathbb{H}_{x_0}$ tais que $\|u_1 - x_1\| < R$ e também aos pontos da forma $u = (x_0 \pm e_i, x_1)$, onde $i \in \{1, \dots, k\}$ e e_i é o i -ésimo vetor

da base canônica de \mathbb{R}^k . Entre estes pontos, seja \bar{u} um ponto onde o máximo de $\langle \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_y \rangle$ é atingido. Então podemos concluir de (33) que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \beta S^2 \|J^R\| \langle \vec{\sigma}_{\bar{u}} \cdot \vec{\sigma}_y \rangle. \quad (34)$$

Pela definição do ponto \bar{u} , podemos aplicar sucessivamente a desigualdade acima, pelo menos $(\|x_0 - y_0\| - 1)$ vezes. Este procedimento nos leva à seguinte desigualdade

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq (\beta S^2 \|J^R\|)^{\|x_0 - y_0\|} \langle \vec{\sigma}_{\bar{u}} \cdot \vec{\sigma}_y \rangle. \quad (35)$$

Para $\beta < \beta_1 \equiv 1/(S^2 \|J^R\|)$ e $m > 0$ tal que $e^{-m} = \beta S^2 \|J^R\|$, segue de (35) que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-m\|x_0 - y_0\|}, \quad (36)$$

que é a cota superior exponencial (31).

Agora suponha que $\|x_1 - y_1\| \geq R$. Pelo mesmo argumento dado acima, podemos aplicar iterativamente a desigualdade (34), pelo menos $\lfloor \|x_1 - y_1\|/R \rfloor - 1$ vezes, onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota o menor inteiro maior ou igual ao argumento. E portanto obter para $\beta < \beta_1$

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-\frac{m\|x_1 - y_1\|}{R}}.$$

Multiplicando (36) pela desigualdade acima e tomando a raiz quadrada temos

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-\frac{m}{2R}(\|x_0 - y_0\| + \|x_1 - y_1\|)},$$

que é a cota (32).

Se $\bar{u} \neq y$ então (35) nos sugere que a cota superior (36) pode ser melhorada. Mesmo que tivéssemos $\bar{u} = y$ poderíamos ainda tentar melhorar esta cota porque não exploramos ainda o possível decaimento na direção \mathbb{Z}^d . Para terminar a prova do teorema vamos assumir, a partir de agora, que $\|x_1 - y_1\| < R$ e mostraremos que ainda temos uma correção $K_{x_1 y_1}$ ao decaimento exponencial (36), como afirmado em (31). A prova será feita usando sucessivas aplicações da desigualdade de Simon-Lieb, junto com uso da cota (36), a hipótese de limitação local H2 e a hipótese de convolução H3.

Defina o hiperplano $\mathbb{V}_{z_1} \equiv \{u \in \mathbb{Z}^{k+d} : u_1 = z_1\}$, que interpretamos como o “hiperplano vertical de largura z_1 ”, e tome $B = \mathbb{V}_{x_1}$ em (24). Da desigualdade de Simon-Lieb segue que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \beta \sum_{\substack{u \in \mathbb{V}_{x_1} \\ v \in \mathbb{V}_{x_1}^c}} \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_u \rangle_{\mathbb{V}_{x_1}} J_{uv}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle. \quad (37)$$

Segue da definição de J_{uv}^R que a soma em v acima é restrita aos $v \in \mathbb{V}_{x_1}^c \cap \mathbb{H}_{u_0}$.

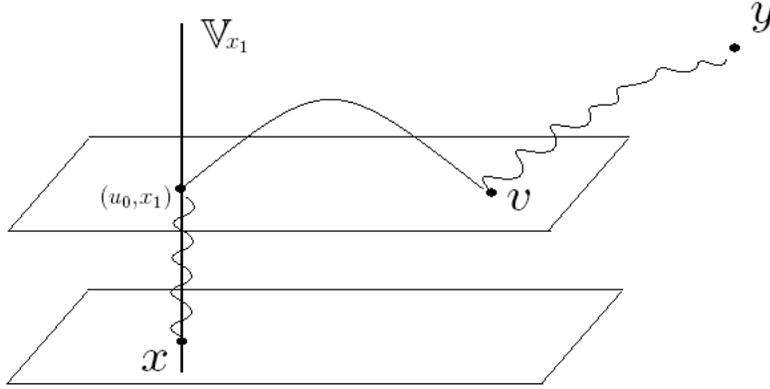


Figura 7: Representação em diagrama do lado direito de (37)

Observe que se $x_1 \neq y_1$ então (u_0, y_1) , a projeção de y sobre o hiperplano \mathbb{H}_{u_0} , é um ponto em $\mathbb{V}_{x_1}^c \cap \mathbb{H}_{u_0}$. Seja $b_1(u_0, y_1) \equiv \{v \in \mathbb{V}_{x_1}^c \cap \mathbb{H}_{u_0} : \|v_1 - y_1\| = 1\}$ e $b_1^*(u_0, y_1) \equiv \mathbb{V}_{x_1}^c \cap \mathbb{H}_{u_0} - b_1(u_0, y_1)$. Destas observações e de (36) com $\|J^R\| = 2k$ (observe que os valores esperados são tomados em redes \mathbb{Z}^{k+0}), temos

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_u \rangle_{\mathbb{V}_{x_1}} \leq S^2 e^{-m' \|x_0 - u_0\|}, \quad (38)$$

onde $e^{-m'} = 2kS^2\beta < 1$, que, quando substituído em (37), nos dá

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \beta S^2 \sum_{u \in \mathbb{V}_{x_1}} e^{-m' \|x_0 - u_0\|} \sum_{v \in \mathbb{V}_{x_1}^c \cap \mathbb{H}_{u_0}} J_{uv}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \equiv \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(1)} + R_{xy}^{(1)},$$

onde

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(1)} \equiv \beta S^2 \sum_{u \in \mathbb{V}_{x_1}} e^{-m' \|x_0 - u_0\|} \sum_{v \in b_1(u_0, y_1)} J_{u_1 v_1}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle$$

e

$$R_{xy}^{(1)} \equiv \beta S^2 \sum_{u \in \mathbb{V}_{x_1}} e^{-m' \|x_0 - u_0\|} \sum_{v \in b_1^*(u_0, y_1)} J_{u_1 v_1}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle. \quad (39)$$

Encontraremos agora uma cota superior para $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(1)}$ cuja a dependência em x, y é similar a que temos no lado direito de (31). Usando que

$$\|x_0 - y_0\| \leq \|x_0 - v_0\| + \|v_0 - y_0\|,$$

vem de (36) que, para $\beta < \beta_1$,

$$\langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-m \|y_0 - v_0\|} \leq S^2 e^{-m \|y_0 - x_0\| + m \|x_0 - u_0\|}. \quad (40)$$

Nas parcelas que definem $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(1)}$, temos $u \in \mathbb{V}_{x_1}$ e $v \in b_1(u_0, y_1)$, portanto $u_1 = x_1$, $\|v_1 - y_1\| \leq 1$ e segue então de H2 que

$$K_{u_1 v_1} \leq C_3 K_{x_1 y_1}$$

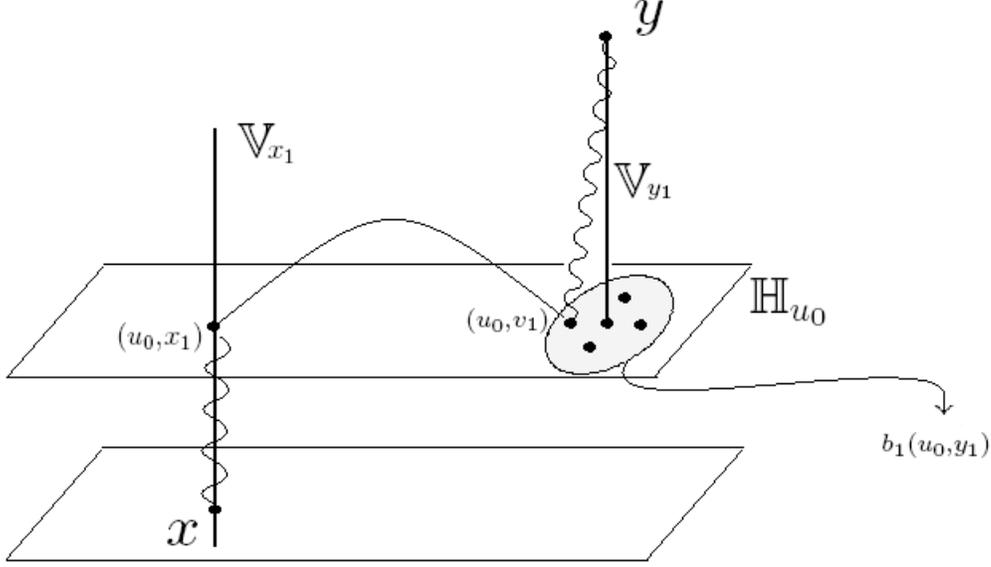


Figura 8: Representação em diagrama de $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(1)}$

que, quando substituído em $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(1)}$, junto com (40) e assumindo que $\beta < \beta_1$, nos dá

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(1)} \leq (2d\beta C_3 S^4) K_{x_1 y_1} e^{-m\|y_0 - x_0\|} \sum_{u \in \mathbb{V}_{x_1}} e^{-m'\|u\|} e^{m\|u\|}.$$

Recordando que $e^{-m} = \beta S^2 \|J^R\|$ e que de H1, $\|J^R\| > 2k$, a soma no lado direito da desigualdade acima é igual a

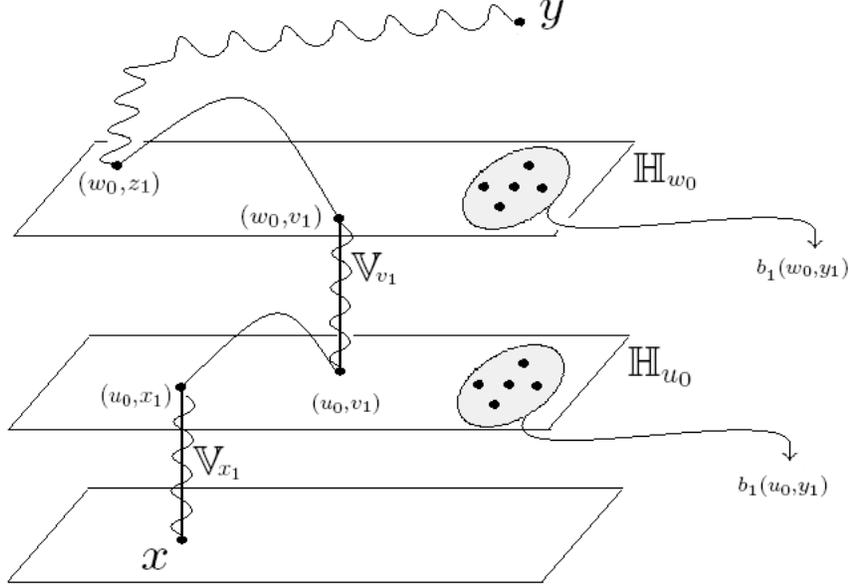
$$\sum_{u \in \mathbb{Z}^k} \left(\frac{2k}{\|J^R\|} \right)^{\|u\|} \equiv C_4 < \infty,$$

nos levando a seguinte cota superior

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(1)} \leq (2d\beta S^4 C_3 C_4) K_{x_1 y_1} e^{-m\|y_0 - x_0\|}.$$

Observe que o lado direito acima nos fornece o comportamento enunciado em (31). Agora vamos mostrar que $R_{xy}^{(1)}$ é uma perturbação de pequena ordem quando analisamos sua dependência com relação a x, y . Aplicando-se a desigualdade de Simon-Lieb a cada $\langle \sigma_v \sigma_y \rangle$, que aparece na definição de $R_{xy}^{(1)}$, juntamente com (38) obtemos a seguinte cota

$$R_{xy}^{(1)} \leq \beta^2 S^4 \sum_{u \in \mathbb{V}_{x_1}} e^{-m'\|u_0 - x_0\|} \sum_{v \in b_1^*(u_0, y_1)} J_{u_1 v_1}^R \left(\sum_{w \in \mathbb{V}_{v_1}} e^{-m'\|v_0 - w_0\|} \sum_{z \in \mathbb{V}_{v_1}^c \cap \mathbb{H}_{w_0}} J_{w_1 z_1}^R \langle \vec{\sigma}_z \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \right).$$



Fixamos $w \in \mathbb{V}_{v_1}$ e decompos a soma acima, em z , em dois termos, como foi feito na lado direito de (39), assim ficamos com

$$R_{xy}^{(1)} \leq \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(2)} + R_{xy}^{(2)},$$

onde

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(2)} \equiv \beta^2 S^4 \sum_{u \in \mathbb{V}_{x_1}} e^{-m' \|x_0 - u_0\|} \sum_{v \in b_1^*(u_0, y_1)} J_{u_1 v_1}^R \left(\sum_{w \in \mathbb{V}_{v_1}} e^{-m' \|v_0 - w_0\|} \sum_{z \in b_1(w_0, y_1)} J_{w_1 z_1}^R \langle \vec{\sigma}_z \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \right)$$

e

$$R_{xy}^{(2)} \equiv \beta^2 S^4 \sum_{u \in \mathbb{V}_{x_1}} e^{-m' \|x_0 - u_0\|} \sum_{v \in b_1^*(u_0, y_1)} J_{u_1 v_1}^R \left(\sum_{w \in \mathbb{V}_{v_1}} e^{-m' \|w_0 - v_0\|} \sum_{z \in b_1^*(w_0, y_1)} J_{w_1 z_1}^R \langle \vec{\sigma}_z \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \right).$$

Em seqüência, vamos mostrar que $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(2)}$ é da forma $O(\beta^2) K_{x_1 y_1} \exp(-m \|x_0 - y_0\|)$ e que $R_{xy}^{(2)}$ é uma pequena perturbação com respeito a esta cota.

Se $w \in \mathbb{V}_{v_1}$ então $w_1 = v_1$ enquanto se $z \in b_1(w_0, y_1)$ então $\|z_1 - y_1\| \leq 1$. Isto significa que, de H_2

$$J_{wz}^R = K_{w_1 z_1} \leq C_3 K_{v_1 y_1}.$$

Também, da desigualdade

$$\|x_0 - y_0\| \leq \|x_0 - u_0\| + \|u_0 - z_0\| + \|z_0 - y_0\|,$$

e de (36) temos, para $\beta < \beta_1$

$$\langle \vec{\sigma}_z \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-m \|z_0 - y_0\|} \leq S^2 e^{-m(\|x_0 - y_0\| - \|z_0 - u_0\| - \|u_0 - x_0\|)}$$

para todo $u_0, z_0 \in \mathbb{Z}^k$. Finalmente, observando que $v_1 = w_1$ se $w \in \mathbb{V}_{v_1}$, temos das observações acima e da definição de $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(2)}$ que

$$\begin{aligned} \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(2)} &\leq (2d\beta^2 S^6 C_3) e^{-m\|y_0 - x_0\|} \left(\sum_{u \in \mathbb{Z}^k} e^{-m'\|u\|} e^{m\|u\|} \right)^2 \sum_{v \in \mathbb{H}_{u_0}} K_{x_1 v_1} K_{v_1 y_1} \\ &\leq (2dC_2 C_3) (\beta C_4)^2 (S^2)^3 K_{x_1 y_1} e^{-m\|y_0 - x_0\|}, \end{aligned}$$

onde usamos a hipótese de convolução H3 na obtenção da última desigualdade. Na verdade é importante enfatizar que H3 é o ingrediente chave para estabelecer a cota superior $K_{x_1 y_1} \exp(-m\|x_0 - y_0\|)$ durante todo o processo de interação, que já deve estar claro neste ponto: para mostrar que $R_{xy}^{(n)}$ é uma perturbação de ordem pequena com respeito a esta cota superior, nós aplicamos a desigualdade S-L às correlações que aparecem na definição de $R_{xy}^{(n)}$ e separamos a soma que vem da aplicação desta desigualdade em duas partes, uma a qual mostraremos, usando a hipótese convolutiva H3, ser $O(\beta^{n+1}) K_{x_1 y_1} \exp(-m\|x_0 - y_0\|)$ e outra, o resto, que é apenas uma pequena perturbação com respeito à grandeza anterior. Portanto o processo iterativo nos dá a seguinte cota

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \sum_{i=1}^n \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(i)} + R_{xy}^{(n)}, \quad (41)$$

onde, para todo $n \geq 2$,

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle^{(n)} \leq (2dC_2 C_3)^{n-1} (\beta C_4)^n (S^2)^{n+1} K_{x_1 y_1} e^{-m\|y_0 - x_0\|}$$

e

$$R_{xy}^{(n)} \leq S^2 (\beta S^2 C_4 \|J^R\|)^n.$$

Agora, se $\beta < \beta_0 \equiv \min\left\{\frac{1}{S^2 C_4 \|J^R\|}, \frac{1}{2d S^2 C_2 C_3 C_4}\right\} < \beta_1$ então

$$\sum_{i=2}^{\infty} (2dC_2 C_3)^{i-1} (\beta C_4)^i (S^2)^{i+1} < \infty$$

e $\limsup_{n \rightarrow \infty} R_{xy}^{(n)} = 0$. Para estes valores de β definimos

$$C(\beta) \equiv 2d\beta S^4 C_3 C_4 + \sum_{i=2}^{\infty} (2dC_2 C_3)^{i-1} (\beta C_4)^i (S^2)^{i+1}$$

e tomando o \limsup de (41) temos a cota superior (31).

□

3.3.3 Cotas superiores no regime $\chi(\beta) < \infty$

Na seção anterior, mostramos sob certas hipóteses (H1-H3) que o decaimento da função conectividade é ditado pela taxa de decaimento das constantes de acoplamento se β é suficientemente pequeno. A partir das cotas (31) e (32) do Teorema 3.3 podemos concluir que $\chi(\beta)$, a susceptibilidade, destes modelos é finita no intervalo $(0, \beta_0)$. Naturalmente surge a questão sobre o comportamento assintótico das conectividades em toda a região para o qual $\chi(\beta) < \infty$. Para dar uma resposta a esta questão, lançamos mão dos métodos introduzidos no Capítulo 1, onde obtivemos o comportamento assintótico das conectividades em todo regime subcrítico.

É claro que existem diferenças que saltam aos olhos sobre os modelos de percolação e os modelos de Mecânica Estatística em que as medidas são definidas a partir por Hamiltonianos como em (12). Porém no caso ferromagnético, que é objeto de estudo neste trabalho várias analogias podem ser feitas. A que nos interessa, em particular, é a relação entre as funções conectividade e a correlação spin-spin. Esta será explorada de duas maneiras neste trabalho; tanto para adaptar a prova do Teorema 3.3 para os modelos de percolação quanto para adaptar a prova do Teorema 3 para os modelos de mecânica Estatística definidos por (12). Nesta seção, como ilustração aos comentários prévios, mostraremos passo a passo como proceder para adaptar as técnicas de escalas múltiplas, introduzidas nos modelos de percolação na prova do Teorema 3, a modelos ferromagnéticos bem gerais. Além disto, mostraremos generalizações deste método em dois sentidos. Permitiremos tanto que o alcance R da interação tome valores $1 \leq R \leq \infty$ e também que os núcleos sejam mais gerais do que (19). Estes por sua vez, deverão satisfazer as hipóteses H4 à H7, listadas logo abaixo. Mencionamos também alguns exemplos de interações que satisfazem estas hipóteses.

Outro fato importante a se notar é que, para uma grande classe de modelos de spins escalar ($N = 1$), a condição $\chi(\beta) < \infty$ é equivalente a dizer que $\beta < \beta_c$, onde β_c é o inverso da temperatura crítica, veja [13]. Isto é particularmente verdadeiro para modelos de spins escalar mencionados nas observações que sucedem o Teorema 3.2, com interações dadas por (19) ou (30).

A partir de agora assumiremos que nossas interações satisfazem as hipóteses:

H4) **Invariância translacional:** existe uma função $K : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $K_{x_1 y_1} = K(\|x_1 - y_1\|)$;

H5) **Monotonicidade:** $K(q) < K(p)$ se $p < q$;

H6) **Cota superior uniforme:** para todo $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}^d$, existe uma constante positiva \tilde{C}

tal que

$$K\left(\frac{\|x_1 - y_1\|}{2}\right) \leq \tilde{C}K(\|x_1 - y_1\|);$$

H7) **Cota inferior uniforme:** existe uma constante positiva ν tal que

$$\frac{1}{R^\nu} \leq K(R)$$

para todo $R \geq 1$.

Obs: Observe que as interações(19) e (30) satisfazem trivialmente H4, H5 e H7. Para H6, pegamos $\tilde{C} = 2^{d+\varepsilon}$ no caso (19) e para (30) $\tilde{C} = 2^{d+p}$.

Podemos agora enunciar o principal resultado desta seção

Teorema 3.4. *Considere o estado de Gibbs (16) à temperatura inversa β e com constantes de acoplamento J^R satisfazendo as hipóteses feitas acima, H4 à H7. Seja $S^2 > 0$ tal que $\langle \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v \rangle \leq S^2$ para todo $u, v \in \mathbb{Z}^{k+d}$. Então sob as hipóteses do teorema 3.2 e para β tal que $\chi(\beta) < \infty$, existem constantes positivas m, \tilde{m}, C e R_0 tais que, para todo $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$ e para todo $R > R_0$*

$$\langle \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v \rangle \leq \begin{cases} CK_{x_1 y_1} e^{-m\|x_0 - y_0\|} & \text{se } \|x_1 - y_1\| < R, \\ S^2 e^{-\tilde{m}\|x - y\|} & \text{se } \|x_1 - y_1\| \geq R. \end{cases} \quad (42)$$

$$\langle \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v \rangle \leq \begin{cases} CK_{x_1 y_1} e^{-m\|x_0 - y_0\|} & \text{se } \|x_1 - y_1\| < R, \\ S^2 e^{-\tilde{m}\|x - y\|} & \text{se } \|x_1 - y_1\| \geq R. \end{cases} \quad (43)$$

Sob as hipóteses do Teorema 3.2 as desigualdades G-I e Simon são válidas. A prova do teorema acima, será baseada na expansão em escalas múltiplas desenvolvida no capítulo anterior. A prova será dividida em três partes:

1. como fizemos na prova do Teorema 3.3, primeiro mostraremos que a correlação spin-spin decai exponencialmente na “direção temporal” $x_0 \in \mathbb{Z}^k$ sempre que β for tal que $\chi(\beta) < \infty$, i.e., se $\chi(\beta) < \infty$ então existem constantes positivas $R_2 = R_2(\beta)$ e $m_0 = m_0(\beta)$ tais que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-m_0\|x_0 - y_0\|} \quad (44)$$

sempre que $\|x_0 - y_0\| > R_2$.

Similarmente, também provamos o decaimento exponencial das correlações na “direção espacial” $x_1 \in \mathbb{Z}^d$ para pares de spins suficientemente distantes, i.e., se $\chi(\beta) < \infty$ então existem constantes positivas $R_3 = R_3(\beta, R)$ and $m_1 = m_1(\beta, R) > 0$ tais que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-m_1\|x_1 - y_1\|}. \quad (45)$$

As constantes acima serão determinadas no decorrer da prova. Claramente, se tomamos $R_1 \equiv \max\{R_2, R_3\}$ e $m \equiv (m_0 + m_1)/2$ então, depois de multiplicarmos (44) por (45) e tomarmos a raiz quadrada concluímos que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq S^2 e^{-m\|x-y\|}$$

sempre que $\chi(\beta) < \infty$ e $\|x - y\| > R_1$;

2. seja $m' > 0$ dado e defina

$$T_{m'}(x, y) \equiv e^{m'\|x_0 - y_0\|} \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle.$$

Dado $L \geq 1$, seja $\mathcal{C}_L(x) \equiv \{z \in \mathbb{Z}^{k+d}; \|x_1 - y_1\| \leq L\}$ o “cilindro vertical” de raio L centrado em x . Tomando $y \in \mathcal{C}_L^c(x)$, iremos mostrar que $T_{m'}(x, y)$ satisfaz uma desigualdade tipo Simon, i.e.,

$$T_{m'}(x, y) \leq \sum_{\substack{u \in \mathcal{C}_L(x) \\ v \in \mathcal{C}_L^c(x)}} T_{m'}(x, u) J_{uv}^R T_{m'}(v, y). \quad (46)$$

Queremos chamar atenção que a desigualdade acima será útil quando $\chi(\beta) < \infty$ por que ela nos permitirá tomar $m' = m_0 - \delta$, onde $m_0 > 0$ é a taxa de decaimento exponencial na “direção temporal” e δ um número real positivo mas arbitrariamente pequeno;

3. a desigualdade (46) será usada para desenvolver uma teoria de perturbação convergente que captura o decaimento misto das correlações sob a condição $\chi(\beta) < \infty$, reproduzindo o resultado do teorema 3.1 que era antes, para β pequeno. Seja $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$ tais que $\|x_1 - y_1\| < R$ e escolha o comprimento de escala $L \equiv \|x_1 - y_1\|$. Se $\chi(\beta) < \infty$ então mostraremos que existe uma constante positiva \tilde{C} tal que

$$T_{m'}(x, y) \leq \tilde{C} \chi_{m'}^2 K_{x_1 y_1} + \mathbb{T}_{m'}(L/2) \gamma_{L/4}, \quad (47)$$

onde

$$\mathbb{T}_{m'}(L) \equiv \sup_{u \in \mathcal{C}_L^c(0)} T_{m'}(0, u), \quad \chi_{m'}(\beta) \equiv \sum_{u \in \mathbb{Z}^{k+d}} T_{m'}(0, u) \quad \text{e} \quad \gamma_L \equiv \sum_{\substack{u \in \mathcal{C}_L(x) \\ v \in \mathcal{C}_L^c(x)}} T_{m'}(x, u) J_{uv}^R.$$

No decorrer da prova mostraremos que se $\chi(\beta) < \infty$ então também temos $\chi_{m'}(\beta) < \infty$ e que $\gamma_L \rightarrow 0$ quando $L \rightarrow \infty$. Seguirá então que o segundo termo no lado direito da desigualdade (47) será pequeno comparado com o primeiro termo, o que vai nos levar a concluir que iterando (47) teremos o resultado.

Vamos começar provando (44). Devido a invariância translacional, iremos tomar $y = 0$. Uma vez que

$$\chi = \sum_{n \geq 0} \sum_{\|x_0\|=n} \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle,$$

da hipótese $\chi(\beta) < \infty$ segue que, dado $\lambda \in (0, 1)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{\|x_0\|=n} \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle < \lambda$$

para todo $n \geq n_0$. Tomamos $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{Z}^{k+d}$, com $\|x_0\| > n_0$ e aplicando a desigualdade de Simon (25) com B sendo o "cilindro horizontal" $\{x \in \mathbb{Z}^{k+d} : \|x_0\| \leq n_0\}$, obtemos

$$\langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq \beta \sum_{\substack{u \in B \\ v \in B^c}} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_u \rangle J_{uv}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_x \rangle.$$

Segue da definição (13) de J^R que as únicas contribuições não-nulas possíveis no lado direito da soma acima ocorrem quando os pares $u \in B, v \in B^c$ são pares de primeiros vizinhos satisfazendo a condição $\|u_0\| = n_0$ e $u_1 = v_1$. Além do mais, já que $\chi(\beta) < \infty$ então podemos concluir que $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \rightarrow 0$ quando $\|x - y\| \rightarrow \infty$ e também que, para qualquer $n_0 \in \mathbb{N}$ fixado, existe $v = v(n_0) \in \mathbb{Z}^{k+d}$ tal que $\langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \equiv \sup_{z \in F} \langle \vec{\sigma}_z \cdot \vec{\sigma}_x \rangle$, onde o supremo é tomado sobre F , a fronteira externa do "cilindro horizontal" B . Portanto

$$\langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq 2k\beta \left(\sum_{\substack{u \in B \\ \|u_0\|=n_0}} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_u \rangle \right) \langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq 2k\beta\lambda \langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle.$$

Aplicando sucessivamente a desigualdade acima, (note que isto pode ser feito pelo menos $\lfloor \|x_0\|/(n_0 + 1) \rfloor$, desde que $\|x_0\| \geq R_2 \equiv n_0 + 1$), obtemos

$$\langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq (2k\beta\lambda)^{\lfloor \|x_0\|/(n_0+1) \rfloor} \langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq S^2 e^{-m_0 \|x_0\|},$$

que, para λ suficientemente pequeno, é (44) com $e^{-m_0} = (2k\beta\lambda)^{1/(n_0+1)}$ e $\langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq S^2$. Segue também da primeira das desigualdades acima que

$$\sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq \chi e^{-m_0 \|x_0\|}. \quad (48)$$

Analogamente, provamos (45). Tome $y = 0$ e considere o "cilindro vertical" $B = \{x \in \mathbb{Z}^{k+d} : \|x_1\| \leq n_0\}$, onde $n_0 > R$ é escolhido tal que

$$\sum_{\{x_1 \in \mathbb{Z}^d : n-R \leq \|x_1\| \leq n\}} \sum_{x_0 \in \mathbb{Z}^k} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle < \lambda < 1$$

para todo $n \geq n_0$, onde R é o alcance da interação e $\lambda < 1$ é um número positivo dado. Tomamos agora $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{Z}^{k+d}$, com $\|x_1\| > n_0$ e aplicamos a desigualdade de Simon e a definição de J^R para obter que

$$\langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq \beta \sum_{\substack{u \in B, n_0-R \leq \|u_1\| \leq n_0 \\ v \in B^c, \|u_1 - v_1\| < R, v_0 = u_0}} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_u \rangle K_{u_1 v_1} \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_x \rangle.$$

Então concluímos que o lado direito da última desigualdade é limitado superiormente por

$$\beta \|K\| \langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \sum_{u \in B, n_0 - R \leq \|u_1\| \leq n_0} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_u \rangle,$$

onde $\langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle$ é o supremo de $\langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_x \rangle$ tomado sobre a fronteira do cilindro vertical de raio $n_0 + R$. Daí também concluímos que

$$\langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq (\beta \|K\| \lambda) \langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle.$$

Seja $R_3 \equiv n_0 + R$. Então, se $\|x_1\| > R_3$, podemos iterar a última desigualdade pelo menos $\lfloor \|x_1\|/R_3 \rfloor$ vezes e ver que

$$\langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq (\beta \|K\| \lambda)^{\lfloor \|x_1\|/L_1 \rfloor} \langle \vec{\sigma}_{v(n_0)} \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq S^2 e^{-m_1 \|x_1\|},$$

onde, para λ suficientemente pequeno, $e^{-m_1} = (\beta \|K\| \lambda)^{1/R_3}$ e $m_1 > 0$, o que prova (45). Também segue da primeira das desigualdades acima que

$$\sum_{x_0 \in \mathbb{Z}^k} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \leq \chi e^{-m_1 \|x_1\|}.$$

O próximo passo é provar (46). Suponha que $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$ são tais que $y \in \mathcal{C}_L^c(x)$ para algum $L \geq 1$, onde $\mathcal{C}_L(x)$ é o cilindro vertical centrado em x com raio L . Então, aplicando a desigualdade de Simon a $\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle$, com $B = \mathcal{C}_L(x)$, e multiplicando esta por $\exp(m' \|x_0 - y_0\|)$, usando a definição de $T_{m'}(x, y)$ e a desigualdade triangular chegamos a (46) pois

$$T_{m'}(x, y) \leq e^{m' \|x_0 - y_0\|} \sum_{\substack{u \in \mathcal{C}_L(x) \\ v \in \mathcal{C}_L^c(x)}} \langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_u \rangle J_{uv}^R \langle \vec{\sigma}_v \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq \sum_{\substack{u \in \mathcal{C}_L(x) \\ v \in \mathcal{C}_L^c(x)}} T_{m'}(x, u) J_{uv}^R T_{m'}(v, y).$$

Como próximo passo, dado (46), provaremos (47). Vamos precisar primeiro provar que $\chi_{m'}(\beta) < \infty$ se $\chi(\beta) < \infty$, onde $m' = m_0 - \delta$, m_0 sendo a taxa de decaimento exponencial na direção temporal, que é positiva se λ é pequeno, e δ é suficientemente pequeno e positivo. Mas isto vem de (48) e

$$\begin{aligned} \chi_{m'}(\beta) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^{k+d}} T_{m'}(0, x) \leq \sum_{j \geq 0} \sum_{\{x_0 \in \mathbb{Z}^k : \|x_0\| = j\}} e^{m' \|x_0\|} \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}^d} \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_x \rangle \\ &\leq \chi \sum_{j \geq 0} 2d j^{d-1} e^{m' j} e^{-m_0 j} < \infty. \end{aligned}$$

Considere $x, y \in \mathbb{Z}^{k+d}$ tais que $R_4 < \|x_1 - y_1\| < R$. A constante R_4 será escolhida mais a frente. Tomamos $L \equiv \|x_1 - y_1\|$ e usando (46) temos

$$\begin{aligned} T_{m'}(x, y) &\leq \sum_{\substack{u \in \mathcal{C}_{L/4}(x) \\ v \in \mathcal{C}_{L/4}^c(x)}} T_{m'}(x, u) J_{uv}^R T_{m'}(v, y) \\ &\leq \sum_{\substack{u \in \mathcal{C}_{L/4}(x) \\ v \in \mathcal{C}_{L/4}^c(x) \cap \mathcal{C}_{L/2}(x)}} T_{m'}(x, u) J_{uv}^R T_{m'}(v, y) + \sum_{\substack{u \in \mathcal{C}_{L/4}(x) \\ v \in \mathcal{C}_{L/4}^c(x) \cap \mathcal{C}_{L/2}(x)}} T_{m'}(x, u) J_{uv}^R T_{m'}(v, y). \end{aligned}$$

Note que, em cada $T_{m'}(v, y)$ que aparece no primeiro termo do lado direito da última desigualdade, os pontos v e y são tais que $\|v - y\| \geq L/2$. Recordando que

$$\mathbb{T}_{m'}(L) = \sup_{u \in \mathcal{C}_L^c(0)} T_{m'}(0, u)$$

e que $T_{m'}(v, y)$ é invariante por translação temos $T_{m'}(v, y) \leq \mathbb{T}_{m'}(L/2)$. Usando esta cota superior para $T_{m'}(v, y)$, $T_{m'}(x, u)J_{uv}^R \geq 0$ e a definição de

$$\gamma_L = \sum_{\substack{u \in \mathcal{C}_L(x) \\ v \in \mathcal{C}_L^c(x)}} T_{m'}(x, u) J_{uv}^R$$

segue que o primeiro termo é limitado por $\mathbb{T}_{m'}(L/2)\gamma_{L/4}$. Para o segundo termo, observe inicialmente que todas constantes de acoplamento J_{uv}^R que aparecem nestes termos satisfazem $u_0 = v_0$ e $\|u_1 - v_1\| \geq \|x_1 - y_1\|/2$. Assim, temos para estas constantes de acoplamento

$$J_{uv}^R = K(\|u_1 - v_1\|) \leq K(\|x_1 - y_1\|/2) \leq \tilde{C}K_{x_1y_1},$$

onde, para justificar estas informações usamos as hipóteses H4, H5 and H6. Assim podemos concluir que o segundo termo é limitado por $\tilde{C}\chi_{m'}^2K_{x_1y_1}$, que leva a

$$T_{m'}(x, y) \leq \tilde{C}\chi_{m'}^2K_{x_1y_1} + \mathbb{T}_{m'}(L/2)\gamma_{L/4}.$$

Finalmente, partindo de (47), obtemos o decaimento misto exponencial- $K_{x_1y_1}$ (42). Como $\|J^R\| < \infty$ e $\chi_{m'}(\beta) < \infty$ se $\chi(\beta) < \infty$, concluímos que

$$\sum_{u, v \in \mathbb{Z}^{k+d}} T_{m'}(x, u) J_{uv}^R < \infty.$$

Por outro lado, segue da definição de γ_L que

$$\gamma_L \leq \sum_{u, v \in \mathbb{Z}^{k+d}} T_{m'}(x, u) J_{uv} \mathbf{1}_{\mathcal{C}_L(x)}(u) \mathbf{1}_{\mathcal{C}_L^c(x)}(v),$$

donde concluímos, pelo mesmo argumento dado no capítulo anterior, que $\gamma_L \rightarrow 0$ quando $L \rightarrow \infty$. Agora usamos este fato para pegar a cota superior (31) a partir da desigualdade (47).

Seja $\nu > 0$ dado por H7 e tome $\alpha \in (0, 1/(2^\nu \tilde{C}))$. Então, existe $R_4 > 0$ tal que $\gamma_{L/4} < \alpha$ para todo $L \geq R_4$. Tomando $L > R_4$, segue de (47) que,

$$T_{m'}(x, y) \leq \tilde{C}\chi_{m'}^2K_{x_1y_1} + \alpha\mathbb{T}_{m'}(L/2).$$

Note que para qualquer $z \in \mathbb{Z}^{k+d}$ com $L < \|x_1 - z_1\| \equiv \bar{L}$ temos

$$T_{m'}(x, z) \leq \tilde{C}\chi_{m'}^2K_{x_1z_1} + \alpha\mathbb{T}_{m'}(\bar{L}/2),$$

já que, para todo $L < \bar{L}$, temos $\gamma_{\bar{L}/4} < \alpha$. Após usarmos H5 e a definição de $\mathbb{T}_{m'}(\cdot)$ obtemos

$$\tilde{C}^2 \chi_{m'}^2 K_{x_1 z_1} + \alpha \mathbb{T}_{m'}(\bar{L}/2) \leq \tilde{C}^2 \chi_{m'}^2 K_{x_1 y_1} + \alpha \mathbb{T}_{m'}(L/2),$$

de onde concluimos que

$$\mathbb{T}_{m'}(L) \leq \tilde{C}^2 \chi_{m'}^2 K_{x_1 y_1} + \alpha \mathbb{T}_{m'}(L/2).$$

Iterando a última desigualdade n vezes, com n sendo o menor inteiro para o qual $L2^{-n} \leq R_4$, temos para todo $L \geq R_4$

$$\mathbb{T}_{m'}(L) \leq \chi_{m'}^2 K_{x_1 y_1} \sum_{j=0}^{n-1} (\tilde{C}^2 \alpha)^j + \alpha^n \mathbb{T}_{m'}(L/2^n). \quad (49)$$

Desta escolha de n , segue que

$$\alpha^n < \frac{1}{2^{\nu n}} = \frac{1}{K_{x_1 y_1}} \frac{K_{x_1 y_1}}{2^{\nu n}} \leq K_{x_1 y_1} \frac{(4L)^\nu}{2^{\nu n}} \leq K_{x_1 y_1} 4^\nu L_0^\nu,$$

onde foi usado na segunda desigualdade a hipótese H7. Levando esta cota superior em (49), e usando junto que $T_{m'}(x, y) \leq \mathbb{T}_{m'}(L)$ se $y \in \mathcal{C}_L^c(x)$ e $\mathbb{T}_{m'}(L') \leq \chi_{m'}$ para qualquer $L' > 0$, concluimos que

$$\langle \vec{\sigma}_x \cdot \vec{\sigma}_y \rangle \leq C K_{x_1 y_1} e^{-(m_0 - \delta) \|x_0 - y_0\|}$$

sempre que $\chi(\beta) < \infty$, o que prova a cota superior (42).

□

4 Apêndice

Teorema 4.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Sejam (E, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida e $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável sobre E . Suponha que f_n seja uma sequência de funções mensuráveis definidas em E tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

e que $f_n \rightarrow g$ μ -q.t.p., então

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

Definição 4.2 (Conjunto convexo). *Um subconjunto C de um espaço vetorial é dito convexo se para quaisquer $x, y \in C$, $tx + (1 - t)y \in C$ para todo $t \in [0, 1]$.*

Definição 4.1 (Função Convexa). *Seja C um subconjunto convexo de um espaço vetorial. Uma função $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa, se para quaisquer $x, y \in C$ e $t \in [0, 1]$, temos*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Referências

- [1] M. Aizenman and C. M. Newman, *Discontinuity of the percolation density in one-dimensional $1/|x - y|^2$ percolation models*, Comm. Math. Phys. **107**, 611–647, (1986).
- [2] J.M. Hammersley, *Percolation Processes. Lower bounds for the critical probability*, Annals of Mathematical Statistics. **28**, 790-795 , (1957)
- [3] B. Simon, *Correlation Inequalities and the Decay of Correlations in Ferromagnets*, Commun. Math. Phys., **77**,111-126, (1980).
- [4] E. H. Lieb, *A Refinement of Simon's Correlation Inequality*, Commun. Math. Phys., **77**,127-135, (1980).
- [5] Gastão A. Braga, Leandro Cioletti and Remy Sanchis, *Decay Properties of the Connectivity for Mixed Long Range Percolation Models on \mathbb{Z}^d* , J. Stat. Phys., 587–591, (2007).
- [6] Gastão A. Braga, Leandro Cioletti and Remy Sanchis, *Intermediate Asymptotics of Correlations for Ferromagnetic N-vector Spin Models 2008* (Submitted for publication).
- [7] G. Grimmett, *Percolation*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, (1999).
- [8] L.S. Schulman, *Long range percolation in one dimension*, J. Phys. Lett. **A16** L639 (1983).
- [9] C.M. Newman, L.S. Schulman, *One-dimensional $1/|j - i|^s$ percolation models: The existence of a transition for $s \leq 2$.* , Comm. Math. Phys. **104** (1986), 547-571.
- [10] M. Aizenman and D.J. Barsky, *Sharpness of the phase transition in percolation models*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), no. 3, 489–526.
- [11] M. V. Menshikov, *Coincidence of Critical Points in Percolation Problems*, Soviet Mathematics Doklady **33** (1986), 856-859.
- [12] T. Hara and G. Slade, *Mean-field critical behaviour for percolation in high dimensions*, Communications in Mathematical Physics **128** 856–859, (1990).
- [13] M. Aizenman, D. J. Barsky and R. Fernández, *The phase transition in a general class of Ising-type models is sharp*, J. Statist. Phys. **47** (1987), no. 3-4, 343–374.
- [14] M. Duneau, B. Souillard and D. Iagolnitzer, *Decay of Correlations for Infinite Range Interactions*, J. Math. Phys. **16**, 1662-1666, (1975).

- [15] L. Gross, *Decay of Correlations in Classical Lattice Models at High Temperature*, Commun. Math. Phys. **68**, 9-27 , (1979).
- [16] R. Israel and C. Nappi, *Exponential Clustering for Long-Range Integer-Spin Systems*, Commun. Math. Phys. **68**, 29-37 , (1979).
- [17] A. Procacci and B. Scoppola, *On Decay of Correlations for Unbounded Spin Systems with Arbitrary Boundary Conditions*, J. Stat. Phys. **105**, 453-482 , (2001).
- [18] R. S. Thebaldi, E. Pereira and A. Procacci, *A cluster expansion for the decay of correlations of light-mass quantum crystals and some stochastic models under intense noise*, J. Math. Phys. **46**, 053303 , (2005).
- [19] H. Spohn and W. Zwerger, *Decay of the two-point function in one-dimensional $O(N)$ spin models with long-range interactions*, J. Stat. Phys. **94**, 1037 - 1043 (1999).
- [20] R. B. Griffiths, *Correlations in Ising Ferromagnets I*, J. Math. Phys., **8**, 478-483, (1967).
- [21] R. B. Griffiths, *Correlations in Ising Ferromagnets. II. External Magnetic Fields*, J. Math. Phys., **8**, 484-489, (1967).
- [22] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, (1987).
- [23] J. Ginibre, *General Formulation of Griffiths' Inequalities*, Commun. Math. Phys., **16**, 310-328, (1970).
- [24] C. M. Newman and F. Dunlop, *Multicomponent Field Theories and Classical Rotators*, Commun. Math. Phys. **44**, 223-235 , (1975).
- [25] V. Rivasseau, *Lieb's Correlation Inequality for Plane Rotors*, Commun. Math. Phys. **77**, 145–147 (1980).
- [26] D. Brydges, J. Fröhlich and T. Spencer, *The Random Walk Representation of Classical Spin Systems and Correlation Inequalities*, Commun. Math. Phys. **83**, 123-150 , (1982).
- [27] M. Aizenman and B. Simon, *Local Ward Identities and the Decay of Correlations in Ferromagnets*, Commun. Math. Phys. **77**, 137-143 , (1980).
- [28] R. Griffiths, *Rigorous results for Ising ferromagnets of arbitrary spins*, J. Math. Phys., **10**, 1559–1565, (1969).
- [29] J. Fröhlich, R. Israel, E.H. Lieb and B. Simon, *Phase transitions and reflection positivity. I. General theory and long-range lattice models*, Commun. Math. Phys. **62** 1–34, (1978).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)