UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Desigualdades homogêneas do tipo Sobolev ótimas sobre variedades Riemannianas compactas e aplicações

Jurandir Ceccon

02 de junho de 2005

Banca examinadora composta pelos Professores(a):

Emerson Alves Mendonça de ABREU	UFMG	Examinador
Paulo César CARRIÃO	UFMG	Examinador
Susana Cândida FORNARI	UFMG	Examinadora
Orlando Francisco LOPES	UNICAMP	Examinador
Marcos da Silva MONTENEGRO	UFMG	Orientador

Índice

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao Marcos Montenegro por ter me orientado. Sua dedicação ao longo destes anos, seu entusiasmo em todos os momentos e as discussões sempre muito instrutivas e esclarecedoras. Além de tudo um grande amigo.

À minha família, que sempre foi um ponto de referência importante. À Léia pelo "pontapé" inicial a quem devo muito. Ao Rúbens pelos carneiros deliciosos que ele cria. À Isolete e Ivanete pelos bons momentos. Em especial aos meus pais, Arlindo Ceccon (in memoriam) e Santina Ceccon, pessoas simples, porém dois exemplos de vida que sempre zelaram pela família. Muita saudade e admiração.

À Rosana, pelo seu apoio constante e compreensão. À sua família, pessoas encantadoras. Seus pais Ana e Mário. Seus irmãos, Marcinho pelas dicas em música clássica e ao Marcelo amigo de muitos anos e "buscador" de artigos no Impa.

À professora Suzana Fornari e aos professores Emerson de Abreu, Paulo Carrião e Orlando Lopes, por aceitarem fazer parte desta banca. Em especial ao Prof. Carrião que leu cuidadosamente os manuscritos e contribuiu com sugestões que ajudaram a tornar o texto mais claro.

Ao CNPq, pelo financiamento que tornou possível esta tese.

Ao departamento de Matemática da UFMG como um todo, pelo suporte constante.

Aos colegas da pós-graduação pelas discussões sempre esclarecedoras, tanto no quadro negro, quanto nas mesas dos "butecos" de BH (essas, muitas vezes mais acaloradas). Em especial ao Fabrício, Flávio e Spencer, grandes amigos. Ao Ivan, amigo e companheiro de muitas aventuras.

Notações

- $A(p)$ - (2)
- $A(p,q,r)$ - (5)
- $A(p,q,r,f)$ - (8)
- $A(p,f) = A(p, \frac{p(n-1)}{n-p}, \frac{p(q-1)}{p-1}, f)$
- $A_0(p,q,r,F)$ - (16)
- $A_0(p,F) = A_0(p, \frac{p(n-1)}{n-p}, \frac{p(q-1)}{p-1}, F)$
- $A(p,F)$ - (2.15)
- $A(p,q,F) = A(p,q, \frac{p(q-1)}{p-1}, F)$
- $A(p,q,r,x)$ - (3.1)
- $A(p,q,r,F)$ - (3.2)
- $\mathcal{A}(p,F)$ e $\mathcal{B}(p,F)$ - Teorema 4.2.1
- $B(p,q,F) = B(p,q, \frac{p(q-1)}{p-1}, F)$
- $B(p,q,r,F)$ - (4.5)
- $D^{1,p}(I\!R^n)$ - completamento de $C_0^\infty(I\!R^n)$ sob a norma $|| \nabla ||_p$
- $D^{p,q}(I\!R^n)$ - completamento de $C_0^\infty(I\!R^n)$ sob a norma $|| \ ||_q + ||\nabla||_p$
- $D^{p,q}(M)$ - completamento de $C_0^\infty(M)$ sob a norma $|| \ ||_q + ||\nabla_g||_p$
- $\mathcal{F}$ - Definição 2.2.1
- F_x - (2.13)
- Γ - função gama
- $H^{1,p}(M)$ - completamento de $C_0^\infty(M)$ sob a norma $|| \ ||_p + ||\nabla_g||_p$
- $I_{p,q,r}(A,B,F)$ - (4.4)
- $I_{p,q}(A,B,F) = I_{p,q,\frac{p(q-1)}{p-1}}(A,B,F)$
- $| \cdot |$ - (2.5)
- ∇_g - (2.6)
- $i(M)$ - (2.8)
- $\partial_v F$ - (2.7)
- sistema normal de coordenadas - (2.9)
- tensor de Ricci - Definição (2.2.2)

Introdução

Melhores constantes para desigualdades do tipo Sobolev têm sido objeto de extensa investigação nas últimas décadas. Particularmente, o estudo de desigualdades de Sobolev ótimas em variedades Riemannianas. Estas têm sua origem em importantes problemas da matemática como, por exemplo, o problema de Yamabe.

Desigualdades de Sobolev ótimas são casos particulares de desigualdades de Gagliardo-Nirenberg ótimas. Por outro lado, estas últimas nos levam à uma desigualdade de Sobolev logarítmica ótima, que possui interessantes aplicações em estimativas *a priori* de soluções de alguns problemas de evolução.

Para $1 \leq p < n$, Sobolev [29] em 1938 mostrou a existência de uma constante $A \in I\!R$ tal que

$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq A \left(\int_{I\!R^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

para toda função $u \in D^{1,p}(I\!R^n)$, onde $p^* = \frac{np}{n-p}$ é o expoente crítico de Sobolev. Diremos que (1) é válida se (1) ocorrer para toda função $u \in D^{1,p}(I\!R^n)$. O menor número real A tal que (1) é válida será chamado de *constante ótima*, tal número é dado por

$$A(p)^{-1} = \inf_{\substack{u \in D^{1,p}(I\!R^n) \\ ||u||_{p^*} = 1}} ||\nabla u||_p.$$

Duas questões relevantes associadas à desigualdade (1) são:

(i) Qual o valor exato da constante ótima $A(p)$?

(ii) Existe uma função $u \in D^{1,p}(I\!R^n)$ que verifica a igualdade $||u||_{p^*} = A(p)||\nabla u||_p$?

Chamaremos de *função extremal* qualquer função que verifique a igualdade em (ii).

Estas questões foram estudadas e respondidas de modo independente em 1976 por Aubin [3] e Talenti [30]. O valor da constante ótima é

$$A(p) = \begin{cases} \frac{p-1}{n-p} \left(\frac{n-p}{n(p-1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{p})\Gamma(n+1-\frac{n}{p})\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n}} & \text{para} \quad 1 < p < n \\ \frac{1}{n} \left(\frac{n}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n}} & \text{para} \quad p = 1, \end{cases} \tag{2}$$

onde ω_{n-1} é o volume da esfera unitária de $I\!R^n$.

As funções extremais, para $1 < p < n$, são precisamente dadas por $u(x) = \alpha \tilde{w}(\beta(x - x_0))$ para $\alpha \in I\!R$, $\beta \neq 0$ e $x_0 \in I\!R^n$, onde

$$\tilde{w}(x) = \left(\sigma + |x|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{-\frac{n}{p^*}} \tag{3}$$

sendo $\sigma > 0$ escolhido tal que $||\tilde{w}||_{p^*} = 1$.

A desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, obtida em 1958 por Gagliardo [18] e refinada em 1966 por Nirenberg [25], é dada por

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq A \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx\right)^{\frac{1-\theta}{q}} \tag{4}$$

para $u \in D^{p,q}(\mathbb{R}^n)$, onde $p \leq r \leq p^*$, $1 \leq q \leq r$ e $\theta = \frac{np(r-q)}{r(q(p-n)+np)}$. Como o caso $\theta = 0$ é trivial, vamos considerar $\theta > 0$. Denotaremos por $A(p,q,r)$ a constante ótima associada à desigualdade (4), que é dada por

$$A(p,q,r)^{-1} = \inf_{\substack{u \in D^{p,q}(\mathbb{R}^n) \\ ||u||_r = 1}} ||\nabla u||_p^{\theta} ||u||_q^{1-\theta}. \tag{5}$$

Em 2003, Del Pino e Dolbeault [12] estudaram a desigualdade (4). Eles encontraram as funções extremais e calcularam as constantes ótimas para uma classe destas desigualdades. De maneira precisa, considere $1 < p < n$ e $r = \frac{p(q-1)}{p-1}$. Para esta família de desigualdades a constante ótima é

$$A(p,q,\frac{p(q-1)}{p-1}) = \left(\frac{q-p}{p\sqrt{\pi}}\right)^{\theta} \left(\frac{pq}{n(q-p)}\right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\frac{np-q(n-p)}{pq}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{\Gamma(\frac{q(p-1)}{q-p})\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{p-1}{p}\frac{np-q(n-p)}{q-p})\Gamma(\frac{n(p-1)}{p}+1)}\right)^{\frac{\theta}{n}}, \tag{6}$$

onde $p < q \leq \frac{p(n-1)}{n-p}$ e $\theta = \frac{n(q-p)}{(q-1)(q(p-n)+np)}$.
As funções extremais são da forma $u(x) = \alpha\tilde{w}(\beta(x-x_0))$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e

$$\tilde{w}(x) = \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1}|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{-\frac{p-1}{q-p}},$$

sendo $\sigma > 0$ escolhido tal que $||\tilde{w}||_r = 1$.

Em particular, quando $q = \frac{p(n-1)}{n-p}$ temos $\theta = 1$ e $r = \frac{np}{n-p}$ que é o expoente crítico de Sobolev.
No trabalho do Del Pino e Dolbeault, foram utilizadas técnicas de cálculo variacional e resultados de unicidade para solução não-negativa e radialmente simétrica de um problema envolvendo o p-Laplaciano.

Em 2004, Cordero-Erausquin, Nazaret e Villani [11] reobtiveram as funções extremais e as constantes ótimas para a mesma família de desigualdades de Gagliardo-Nirenberg obtida em [12], utilizando uma nova técnica que envolve a teoria de transporte de massa.

Inspirados neste último trabalho, realizamos o estudo de melhores constantes para desigualdades homogêneas de Gagliardo-Nirenberg. Precisamente, consideramos a *melhor constante* A tal que a desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq A \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\nabla u) dx\right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx\right)^{\frac{1-\theta}{q}} \tag{7}$$

para toda $u \in D^{p,q}(\mathbb{R}^n)$, onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função p - homogênea, convexa, positiva e par.
Esta melhor constante é dada por

$$A(p,q,r,f)^{-1} = \inf_{\substack{u \in D^{p,q}(\mathbb{R}^n) \\ ||u||_r = 1}} ||f(\nabla u)||_1^{\frac{\theta}{p}} ||u||_q^{1-\theta}. \tag{8}$$

Designaremos por $A(p,q,r,f)$ a constante ótima associada à desigualdade (7).
Quando $f = |\cdot|^p$, a desigualdade (7) se reduz à (4).
Considerando $r = \frac{p(q-1)}{p-1}$, encontramos as funções extremais e calculamos as constantes ótimas da desigualdade (7). De maneira precisa, conside f^* a transformada de Legendre da função f, isto é,

$$f^*(x) = \sup_{y \in I\!R^n} \{x \cdot y - f(y)\}.$$

Então, as funções extremais de (8) são da forma $u(x) = \alpha w(\beta(x - x_0))$, onde $\alpha \in I\!R$, $\beta \neq 0$, $x_0 \in I\!R^n$ e

$$w(x) = \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} f^*(x)\right)^{-\frac{p-1}{q-p}} \tag{9}$$

sendo $\sigma > 0$ escolhido tal que $||w||_r = 1$, onde $1 < p < n$ e $p < q \leq \frac{p(n-1)}{n-p}$.
A constante ótima é

$$A(p, q, \frac{p(q-1)}{p-1}, f)^{-1} = ||f(\nabla w)||_1^{\frac{\theta}{p}} ||w||_q^{1-\theta}, \tag{10}$$

onde $\theta = \frac{n(q-p)}{(q-1)(q(p-n)+np)}$.

Em particular, quando $q = \frac{p(n-1)}{n-p}$ temos $\theta = 1$ e $r = p^*$. Neste caso, obtemos a *desigualdade homogênea de Sobolev ótima*

$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^p dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A(p,f)^p \int_{I\!R^n} f(\nabla u) dx, \tag{11}$$

onde

$$A(p,f) = A(p, \frac{p(n-1)}{n-p}, \frac{p(q-1)}{p-1}, f).$$

Outra desigualdade Euclidiana relevante é a desigualdade de Sobolev logarítmica ótima. Utilizando uma família de desigualdades de Gagliardo-Nirenberg ótimas, Del Pino e Dolbeault [12] obtiveram como caso limite, fazendo $q \to p^+$, a desigualdade logarítmica ótima

$$\int_{I\!R^n} |u|^p \log |u|^p dx \leq \frac{n}{p} \log \left(\mathcal{A}(p) \int_{I\!R^n} |\nabla u|^p dx\right)$$

para toda $u \in W^{1,p}(I\!R^n)$ tal que $||u||_p = 1$, onde $1 < p < n$. A constante ótima é

$$\mathcal{A}(p) = \frac{p}{n} \left(\frac{p-1}{e}\right)^{p-1} \pi^{-\frac{p}{2}} \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n(p-1)}{p}+1)}\right)^{\frac{p}{n}}. \tag{12}$$

As funções extremais são dadas por

$$u(x) = \pi^{\frac{n}{2}} \sigma^{-\frac{n(p-1)}{p}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n(p-1)}{p}+1)} e^{-\frac{1}{\sigma}|x-x_0|^{\frac{p}{p-1}}},$$

onde $x_0 \in I\!R^n$ e $\sigma > 0$.

Em 2003, Gentil [19] generalizou este resultado. Para $p > 1$ e f uma função p - homogênea, convexa e par, obteve a desigualdade ótima

$$\int_{I\!R^n} |u|^p \log |u|^p dx \leq \frac{n}{p} \log \left(\mathcal{A}(p,f) \int_{I\!R^n} f(\nabla u) dx\right) \tag{13}$$

para $u \in W^{1,p}(I\!R^n)$ com $||u||_p = 1$.
A constante ótima é dada por

$$\mathcal{A}(p,f) = \frac{p^{p+1}}{ne^{p-1}} \left(\int_{I\!R^n} e^{-f^*(x)} dx \right)^{-\frac{p}{n}},$$

onde f^* é a transformada de Legendre da função f. As funções extremais encontradas são da forma $u(x) = \alpha exp(-\beta f^*(x - x_0))$, sendo

$$\alpha^{-p} = \int_{I\!R^n} exp(-p\beta f^*(x - x_0)) dx,$$

com $\beta > 0$ e $x_0 \in I\!R^n$.

Nosso principal interesse nesta tese é estudar estas desigualdades ótimas em variedades Riemannianas. Significativos avanços têm sido obtidos neste sentido, para uma exposição geral e outras referências sobre este assunto citamos [16] e [20]. Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta n - dimensional. A desigualdade (7) nos motivou a considerar a *desigualdade homogênea de Gagliardo-Nirenberg Riemanniana*

$$\left(\int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq \left(A \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B \int_M |u|^p dv_g \right) \left(\int_M |u|^q dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} \tag{14}$$

para $u \in D^{p,q}(M)$, onde $q \leq r \leq p^*$, $\theta = \frac{np(r-q)}{r(q(p-n)+np)}$ e $F : TM \to I\!R$ uma função p - *homogênea* em um certo sentido a ser definido e satisfazendo algumas condições a serem explicitadas no Capítulo 2.
A nova constante B que aparece em (14) é natural, pois $D^{p,q}(M)$ contém as funções constantes. Diremos que a desigualdade (14) é válida, se (14) ocorrer para toda função $u \in D^{p,q}(M)$. Argumentando por partição da unidade e expansão da métrica, podemos facilmente encontrar constantes reais A e B tais que a desigualdade (14) é válida.
Como caso particular, fazendo $r = \frac{np}{n-p}$ e $q = \frac{p(n-1)}{n-p}$, obtemos a *desigualdade homogênea de Sobolev Riemanniana*

$$\left(\int_M |u|^{p^*} dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B \int_M |u|^p dv_g. \tag{15}$$

Para a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg Riemanniana também podemos considerar a noção de melhores constantes. A *primeira melhor constante* associada à desigualdade (14) é

$$A_0(p,q,r,F) = \inf\{A \in I\!R;\ \text{existe}\ B \in I\!R\ \text{tal que}\ (14)\ \text{é válida}\}. \tag{16}$$

A *segunda melhor constante* é definida por

$$B_0(p,q,r,F) = \inf\{B \in I\!R;\ \text{existe}\ A \in I\!R\ \text{tal que}\ (14)\ \text{é válida}\}.$$

Assim, podemos considerar as seguintes desigualdades ótimas:

$$\left(\int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq \left(A_0(p,q,r,F) \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B \int_M |u|^p dv_g \right) \left(\int_M |u|^q dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} \tag{17}$$

e

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{r\theta}} \le \left(A\int_M F(\nabla_g u)dv_g + B_0(p,q,r,F)\int_M |u|^p dv_g\right)\left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}. \tag{18}$$

Três questões naturais neste contexto são:

(i) Existe alguma dependência das melhores constantes em relação a geometria da variedade M?

(ii) As desigualdades ótimas (17) e (18) são válidas?

(iii) Qual o valor exato de $A_0(p,q,r,F)$? Em paralelo, qual o valor exato de $B_0(p,q,r,F)$?

Para um apanhado geral e várias outras referências sobre o estudo da desigualdade (18) citamos [16].
O caso clássico, isto é $F([x,i,v]) = |[x,i,v]|^p$, está inserido nas desigualdades acima. O estudo da primeira melhor constante (16) é mais delicado. No que segue e durante o desenvolvimento desta tese usaremos a expressão *constante ótima* para nos referir a primeira melhor constante. No caso clássico, uma das primeiras contribuições para investigar a desigualdade (17) foi dado em 1976 por Aubin [3]. Neste trabalho, foi provado que a desigualdade de Sobolev ótima Riemanniana sobre a esfera n - dimensional,

$$\left(\int_{S^n} |u|^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \le A(p)^p \int_{S^n} |\nabla_g u|^p dv_g + \omega_n^{-\frac{p}{n}} \int_{S^n} |u|^p dv_g,$$

é válida para toda função $u \in D^{1,p}(S^n)$, onde $1 < p \le 2$, $A(p)$ é a melhor constante Euclidiana dada em (2) e ω_n é o volume Euclidiano de S^n. Neste caso, devido a geometria simples da variedade, as funções extremais foram explicitadas por Aubin. É interessante observar que para uma variedade Riemanniana qualquer, as funções extremais são desconhecidas.

O caso $p = 2$ e M uma variedade Riemanniana compacta, foi tratado em 1996 por Hebey e Vaugon [21]. Eles mostraram que a desigualdade de Sobolev ótima

$$\left(\int_M |u|^2 dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \le A(2)^2 \int_M |\nabla_g u|^2 dv_g + B\int_M |u|^2 dv_g, \tag{19}$$

é válida para toda função $u \in D^{1,2}(M)$.

Em 1999, a desigualdade de Sobolev ótima

$$\left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \le A(p)^p \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + B\int_M |u|^p dv_g, \tag{20}$$

foi provada para $1 < p \le 2$ de forma independente por Aubin e Li [5] e Druet [14].
O caso $p = 1$ foi estudado por Druet [15] em 2002 e a técnica empregada é distinta da utilizada em [5] e [14]. Neste caso, a desigualdade de Sobolev ótima é equivalente à desigualdade isoperimétrica sobre M.

Como já citado, o estudo de melhores constantes tem motivação, por exemplo, no problema de Yamabe [35] nos anos 60. O objetivo era provar que, a menos de mudança conforme da métrica, sempre existe uma métrica de curvatura escalar constante. De forma precisa, considere (M,g) uma variedade Riemanniana suave, compacta de dimensão $n \ge 3$ e seja $[g]$ uma classe conforme de g, definida por

$$[g] = \{\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g; u \in C^\infty(M), u > 0\}.$$

Sendo g e $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ métricas conformes, a curvatura escalar S_g e $S_{\tilde{g}}$ satisfazem a relação

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + S_g u = S_{\tilde{g}} u^{2^*-1},$$

onde $\Delta_g u = \text{div}_g(\nabla_g u)$ é o Laplaciano de u com respeito a métrica g.
Uma reformulação equivalente do problema de Yamabe é provar que para qualquer variedade Riemanniana (M, g) de dimensão $n \geq 3$, existe $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ e $\lambda \in I\!R$ tais que

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \lambda u^{2^*-1}. \tag{21}$$

Então, a melhor constante $A(2)$ da desigualdade (19) está relacionada com a existência de solução da equação (21) e a constante $B(2)$ está relacionada com a multiplicidade de soluções da equação (21), onde $B(2)$ é a segunda melhor constante, dada a melhor constante $A(2)$, ou seja

$$B(2) = \inf\{B \in I\!R; (19) \text{ é válida}\}. \tag{22}$$

No estudo das desigualdades ótimas Riemannianas, novos fenômenos interessantes surgem. A validade da desigualdade de Sobolev ótima sobre variedades Riemannianas depende da geometria da variedade, este fato foi provado em 1998 por Druet [13]. Considere $2 < p < \frac{n+2}{3}$ e suponha que a variedade M possui pelo menos um ponto onde a curvatura escalar é positiva, então para qualquer $B \in I\!R$ existe $u_B \in D^{1,p}(M)$ tal que

$$\left(\int_M |u_B|^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} > A(p)^p \int_M |\nabla_g u_B|^p dv_g + B \int_M |u_B|^p dv_g.$$

A desigualdade de Gagliardo-Nirenberg ótima Riemanniana, foi estudada por Brouttelande [9] em 2003. Ele provou que

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{2}{r\theta}} \leq \left(A(q,r)^{\frac{2}{\theta}} \int_M |\nabla_g u|^2 dv_g + B \int_M |u|^2 dv_g\right) \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{2(1-\theta)}{\theta q}} \tag{23}$$

é válida para toda $u \in D^{2,q}(M)$, onde $1 \leq q \leq 2 \leq r < 2 + \frac{2q}{n}$ e $A(q,r)$ é a constante ótima. A constante $A(q,r)$ para esta classe de desigualdades não é conhecida.
A desigualdade logarítmica de Sobolev ótima Riemanniana

$$\int_M |u|^2 \log(|u|^2) dv_g \leq \frac{n}{2} \log\left(\mathcal{A}(2) \int_M |\nabla_g u|^2 dv_g + \mathcal{B}(2)\right) \tag{24}$$

foi provada em [9], onde a função $u \in H^{1,2}(M)$ é tal que $||u||_2 = 1$, $\mathcal{A}(2)$ foi definido em (12) e $\mathcal{B}(2) = \lim_{q\to 2^-} B(q,2)$, sendo

$$B(q,2) = \inf\{B \in I\!R; (23) \text{ é válida com } r = 2\}.$$

Nossa tese pode ser dividida em três etapas:

1ª Etapa

Compreende o Capítulo 1.

Seção 1.2

Nesta seção generalizamos a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg ótima Euclidiana, obtida em [11]. Provamos que para $1 < p < n$,

$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^r dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq A(p,q,\frac{p(q-1)}{p-1},f)^{\frac{p}{\theta}} \int_{I\!R^n} f(\nabla u) dx \left(\int_{I\!R^n} |u|^q dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

é válida para toda função $u \in D^{p,q}(\mathbb{R}^n)$, onde $p \leq q \leq \frac{p(n-1)}{n-p}$, $\theta = \frac{n(q-p)}{(q-1)(q(p-n)+np)}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função p - homogênea, convexa, positiva e par. Para este fim, usamos um resultado da teoria de transporte de massa provado por McCann [23] e resultados de análise convexa.

Seção 1.3

Aqui fornecemos uma aplicação dos resultados provados na seção 1.2, calculando as melhores constantes para uma família de normas. Essencialmente são longos cálculos combinados com a função gama.

2ª Etapa

Compreende os Capítulos 2 e 3. Poderíamos dizer que nesta etapa reside a alma desta tese. Aqui, fizemos algumas generalizações e obtivemos novas desigualdades ótimas. Também é desta etapa que decorre as aplicações do Capítulo 4.

Capítulo 2

Seção 2.2

Nesta seção reunimos alguns resultados de topologia diferencial geral e geometria Riemanniana. Provamos alguns lemas para fazer a ligação entre as desigualdades de Sobolev Euclidiana e Riemanniana. Também provamos a validade da desigualdade de Sobolev com uma perturbação de ϵ, esta desigualdade tem um papel central na prova da desigualdade de Sobolev ótima.

Seção 2.3

Aqui generalizamos a desigualdade clássica de Sobolev ótima provada em [14]. Ou seja, mostramos que

$$\left(\int_M |u|^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A(p,F)^p \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B \int_M |u|^p dv_g$$

é válida para toda $u \in D^{1,p}(M)$, onde $1 < p \leq 2$ e $A(p,F)$ é definida em (2.15). Nossa argumentação se baseia no trabalho do Druet [14]. O ponto mais relevante em nossa prova é uma simplificação feita no argumento original. Consiste em eliminar todo o estudo de concentração pontual desenvolvido em [14]. Olhando de modo isolado, esta simplificação não tem grande vantagem. Porém, ao tratarmos da desigualdade homogênea de Gagliardo-Nirenberg ótima, no Capítulo 3, veremos que este fato foi essencial em nossa prova.

Seção 2.4

É nesta seção que fica evidente a influência da geometria da variedade Riemanniana na validade da desigualdade ótima. Nossa argumentação também se baseia em um trabalho feito por Druet [13]. A prova desenvolvida por Druet leva em consideração uma função extremal $\tilde{w}$, definida em (3), associada à desigualdade de Sobolev ótima

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A(p)^p \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx.$$

Neste caso a função $\tilde{w}$ é radial. Então, Druet conseguiu transferir o problema de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$. Nossa prova, do Teorema 2.4.1, também leva em consideração uma função extremal

$$w(x) = \left(\sigma + F^*_{x_0}(x)\right)^{-\frac{n}{p^*}},$$

associada à desigualdade homogênea de Sobolev ótima

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A(p,F_{x_0})^p \int_{\mathbb{R}^n} F_{x_0}(\nabla u) dx,$$

onde F_{x_0} é definida em (2.13) e $x_0 \in M$ é tal que

$$\int_{I\!R^n} w_0^{p^*}(y) Ric_{x_0}(y,y)dy > 0.$$

Neste caso F_{x_0} não é radial, em geral. A falta de simetria da função F_{x_0} foi uma dificuldade importante, que foi superada ao fazermos uso do método variacional e elementos de análise convexa.
Devemos notar que o nosso método, dá uma prova alternativa para o caso clássico ($F([x,i,v]) = |[x,i,v]|^p$) tratado por Druet. Também observamos que a nossa prova é intrinseca, no sentido que todos os cálculos se passam no espaço $T_{x_0}M = I\!R^n$.

Capítulo 3

A desigualdade de Gagliardo-Nirenberg ótima sobre variedades Riemannianas foi estudada por Brouttelande [9]. Foi provado que

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{2}{r\theta}} \leq \left(A(q,r)^{\frac{2}{\theta}} \int_M |\nabla_g u|^2 dv_g + B\int_M |u|^2 dv_g\right)\left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{2(1-\theta)}{\theta q}} \tag{25}$$

é válida para toda função $u \in D^{2,q}(M)$, onde $1 \leq q \leq 2 \leq r \leq 2 + \frac{2q}{n}$, $\theta = \frac{2n(r-q)}{r(n(2-q)+2q)} < \frac{2}{r}$ e $A(q,r)$ é a constante ótima de (25). Para esta classe de desigualdades não foi calculado o valor da constante ótima $A(q,r)$.

Seção 3.2

Nesta seção provamos para $1 < p \leq 2$ que a desigualdade homogênea de Gagliardo-Nirenberg ótima

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq \left(A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B\int_M |u|^p dv_g\right)\left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} \tag{26}$$

é válida para toda $u \in D^{p,q}(M)$, onde $p \leq q < r < p^*$ e $\theta = \frac{np(r-q)}{r(q(p-n)+np)}$. Esta família é distinta daquela obtida em [9], pois quando $p = 2$ temos $q \geq 2$. Quando $r = \frac{p(q-1)}{p-1}$, calculamos a melhor constante de (26). A prova do Teorema 3.3.1 é inspirada em parte no trabalho [9] e em parte no Teorema 2.3.1 do Capítulo 2. Nossa argumentação passa pelo método variacional, para conseguirmos obter uma *seqüência especial* $(u_\alpha)_\alpha \subset D^{p,q}(M)$ e técnicas finas de análise que envolve o estudo de concentração da seqüência $(u_\alpha)_\alpha$ em um ponto. Usando iteração de Moser e um resultado, devido a Tolksdorf, sobre regularidade, provamos que a seqüência $(u_\alpha)_\alpha$ é de classe $C^{1,\lambda}$ para algum $\lambda \in (0,1)$. Esta regularidade é a melhor possível pois $1 < p \leq 2$. Este é um ponto em nossa prova que difere daquela apresentada em [9] pois naquele caso $p = 2$ e portanto a seqüência $(u_\alpha)_\alpha$ é de classe C^2. Isto nos obrigou a refinar algumas estimativas de [9] e obter outras novas. Outro ponto relevante é a hipótese $q \geq p$, que difere da hipótese usada em [9] $q \leq 2$. Novamente precisamos refinar algumas estimativas e fazer um novo estudo de concentração de massa para a seqüência $(u_\alpha)_\alpha$. A argumentação final é baseada no Teorema 2.3.1, que é essencialmente a junção entre a desigualdade homogênea de Gagliardo-Nirenberg ótima Euclidiana e a equação satisfeita por u_α na variedade Riemanniana M. Naturalmente, novas estimativas são necessárias, pois a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg é mais geral do que a desigualdade de Sobolev tratada no Teorema 2.3.1.

Seção 3.3

Aqui, provamos para $1 < p \leq 2$, a desigualdade ótima

$$\left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq \left(A(p,q,p,F)^{\frac{p}{\theta}} \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B \int_M |u|^p dv_g\right) \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} \tag{27}$$

para $u \in D^{p,q}(M)$, onde $1 < q < p$ e $\theta = \frac{n(p-q)}{q(p-n)+np}$. Esta classe de desigualdades é distinta da anterior pois $q < p$. Em particular (27) generaliza (25) quando $r = 2$. A idéia, da prova da validade de (27), segue em linhas gerais, a mesma argumentação usada na prova da validade de (26). Com exceção do arremate da prova, onde fizemos uso da desigualdade de interpolação.
Embora, para esta família de desigualdades não tenhamos calculado a constante ótima $A(p,q,p,F)$. Devemos ressaltar que a obtenção da desigualdade homogênea logarítmica ótima do Capítulo 4, só foi possível devido a esta última desigualdade.

3ª Etapa

É o fechamento da tese. Provamos a desigualdade ótima

$$\int_M |u|^p \log(|u|^p) dv_g \leq \frac{n}{p} \log\left(\mathcal{A}(p,F) \int_M F(\nabla_g u) dv_g + \mathcal{B}(p,F)\right) \tag{28}$$

para $u \in H^{1,p}(M)$ com $||u||_p = 1$, onde $1 < p \leq 2$. No caso clássico e $p = 2$, esta desigualdade foi provada por Brouttelande [9], isto é, foi provada a validade de (24).
Para a prova da validade de (28), nos baseamos no trabalho do Del Pino e Dolbeault [12] que trata o caso Euclidiano. A idéia é fazer $q \to p^+$ na desigualdade ótima

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq \left(A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B(p,q,r,F) \int_M |u|^p dv_g\right) \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}},$$

onde

$$B(p,q,r,F) = \inf\{B \in I\!R; (26) \text{ é válida}\}$$

e $r = \frac{p(q-1)}{p-1}$. Porém, em princípio, não sabemos qual o comportamento de $B(p,q,r,F)$ quando $q \to p^+$. Inspirados em [9] mostramos que $B(p,q,r,F)$ é monótona não-crescente em q. Quando $q < 2$, que é o caso tratado em [9], a convergência $B(q,2) \to B_0 \in I\!R$ quando $q \to 2^-$ é trivial, pois obter uma cota por baixo, neste caso, é simples. Em nosso caso poderia ocorrer que $B(p,q,r,F) \to \infty$ quando $q \to p^+$. Mas, devido ao Teorema 3.4.1, conseguimos mostrar que $B(p,q,r,F)$ possui uma cota superior uniforme em q. A prova de que

$$\mathcal{A}(p,F) = \frac{p^{p+1}}{ne^{p-1}} \left(\int_{I\!R^n} e^{-F^*_{x_0}(x)} dx\right)^{-\frac{p}{n}} \tag{29}$$

não foi possível através de cálculo direto como feito em [12], pois neste caso a fórmula de co-área não fornece uma expressão simples. Então, utilizamos um método indireto, ou seja, associamos ao espaço tangente $T_{x_0}M$ uma classe de desigualdades homogêneas de Gagliardo-Nirenberg ótimas

$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^r dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq A(p,q,r,F_{x_0})^{\frac{p}{\theta}} \int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla u) dx \left(\int_{I\!R^n} |u|^q dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

que é válida devido ao Teorema 1.2.2 do Capítulo 1. Desta família, derivamos a desigualdade logarítmica ótima Euclidiana

$$\int_{I\!R^n} |u|^p \log(|u|^p) dx \leq \frac{n}{p} \log \left(\mathcal{A}(p, F_{x_0}) \int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla u) dx \right)$$

para $u \in W^{1,p}(I\!R^n)$ com $||u||_p = 1$. Desta desigualdade juntamente com o Teorema 1.1 de [19], concluímos (29).

Da desigualdade (28), conseguimos obter estimativas *a priori* para problemas do tipo Hamilton-Jacobi e do calor em variedades Riemannianas. Para este propósito, seguimos a prova dada por Bakry [6]. Em particular, estas estimativas generalizam o Teorema 2.1 de [19].

Capítulo 1

Desigualdade homogênea de Gagliardo-Nirenberg ótima Euclidiana

1.1 Introdução

No espaço Euclidiano, a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg ótima

$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^r dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq A(p,q,\frac{p(q-1)}{p-1})^{\frac{p}{\theta}} \int_{I\!R^n} |\nabla u|^p dx \left(\int_{I\!R^n} |u|^q dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

foi estudada por Del Pino e Dolbeault [12] no caso em que

$$r = \frac{p(q-1)}{p-1},\ \ 1 < p \leq q \leq \frac{p(n-1)}{n-p} \ \text{ e } \theta = \frac{n(q-p)}{(np-(n-p)q)(q-1)}, \tag{1.1}$$

onde a constante ótima $A(p,q,\frac{p(q-1)}{p-1})$ é dada em (6).
As funções extremais foram obtidas em [12] através do método variacional, resultado de simetria para um problema envolvendo o p - Laplaciano e unicidade para este mesmo problema.

Nosso objetivo neste capítulo, será provar a validade da desigualdade homogênea de Gagliardo-Nirenberg ótima

$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^r dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq A(p,q,\frac{p(q-1)}{p-1},f)^{\frac{p}{\theta}} \int_{I\!R^n} f(\nabla u) dx \left(\int_{I\!R^n} |u|^q dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}, \tag{1.2}$$

onde a constante ótima $A(p,q,\frac{p(q-1)}{p-1},f)$ é dada em (10), p,q e r são coforme (1.1) e a função $f : I\!R^n \to I\!R$ é p - homogênea, convexa, par e positiva.

Para encontrarmos as funções extremais para esta família de desigualdades, não podemos usar o método empregado em [12], pois nossa função f, em geral, não é radial. Esta nova dificuldade foi superada através do uso de elementos da teoria de transporte de massa.
A técnica de transporte de massa, foi empregada pela primeira vez no estudo da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg ótima por Cordero-Erausquin, Nazaret e Villani [11]. Eles provaram a desigualdade ótima (1.2) considerando a norma dual $f(x) = ||x||_*^p = \sup_{||y|| \leq 1} x \cdot y$, onde $x \in (I\!R^n)^*$, $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $||\ \ ||$ é uma norma qualquer em $I\!R^n$ e p,q,r satisfazem (1.1). Este resultado generaliza a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg provada em [12].

Nossa argumentação, será baseada em um resultado de transporte de massa devido a Brenier [7] e posteriormente refinado por McCann [23], também usaremos resultados de análise convexa.
Encerraremos o capítulo, calculando as constantes ótimas para uma família de normas em $I\!R^n$.

1.2 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

Vamos iniciar esta seção, listando alguns elementos da teoria de transporte de massa.

Definição 1.2.1. *Sejam μ e ν duas medidas de Borel não-negativas em $I\!R^n$ com mesma massa total. Então uma aplicação $T : I\!R^n \to I\!R^n$ transporta μ em ν se para todo Boreliano $B \subset I\!R^n$ tivermos*

$$\nu[B] = \mu[T^{-1}(B)].$$

Ou de forma equivalente, para toda função de Borel não-negativa $b : I\!R^n \to I\!R$,

$$\int_{I\!R^n} b(y)d\nu(y) = \int_{I\!R^n} b(T(x))d\mu(x). \tag{1.3}$$

O principal ingrediente para provarmos a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg é o seguinte resultado obtido por McCann [23]

Teorema 1.2.1. *Sejam μ e ν duas medidas de probabilidade em $I\!R^n$ e μ absolutamente contínua com respeito a medidade de Lebesgue. Então existe uma função convexa $\varphi : I\!R^n \to I\!R$ tal que $\nabla\varphi$ transporta μ em ν. Além disso, $\nabla\varphi$ é unicamente determinada $\mu - q.t.p.$.*

O transporte $\nabla\varphi$ é conhecido como *aplicação de Brenier.* Para nosso propósito, estaremos usando as seguintes medidas: $d\mu(x) = F(x)dx$ e $d\nu(x) = G(x)dx$, sendo F, G funções tais que

$$\int_{I\!R^n} G(x)dx = \int_{I\!R^n} F(x)dx = 1.$$

Para toda função de Borel não-negativa $b : I\!R^n \to I\!R$, podemos reescrever a igualdade (1.3) e encontramos

$$\int_{I\!R^n} b(y)G(y)dy = \int_{I\!R^n} b(\nabla\varphi(x))F(x)dx. \tag{1.4}$$

A identidade (1.4) mostra que φ resolve a seguinte equação de Monge-Amperè

$$F(x) = G(\nabla\varphi(x))\text{det}D^2\varphi(x), \tag{1.5}$$

onde $D^2\varphi$ é a matriz Hessiana de φ e esta igualdade deve ser interpretado no sentido de Aleksandrov, isto é, como a parte absolutamente contínua da Hessiana distribucional da função convexa φ, os detalhes a respeito de (1.5) poderão ser encontrados em [24].

Definição 1.2.2. *O Laplaciano distribucional de φ é definido por*

$$\Delta_{\mathcal{D}}\varphi[\phi] = \int_{I\!R^n} \varphi(x)\Delta\phi(x)dx,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(I\!R^n)$.

O próximo lema foi provado em [11].

Lema 1.2.1. *Sejam $u, v \in C_0^\infty(I\!R^n)$, $u, v > 0$, $||u||_r = ||v||_r = 1$ e p, q, r satisfazendo* (1.1)*. Considere a aplicação de Brenier φ que transporta a medida $u^r dx$ na medida $v^r dx$. Então*

$$\frac{p(q-1)}{q-p}\int_{I\!R^n} v^q dx \leq -q\int_{I\!R^n} u^{q-1}\nabla u \nabla\varphi dx + \frac{p(q-1)-n(q-p)}{q-p}\int_{I\!R^n} u^q dx.$$

Prova:

Considere $F = u^r$ e $G = v^r$. Da equação de Monge-Ampère (1.5),

$$G(\nabla\varphi(x))^{\frac{p-q}{p(q-1)}} = F(x)^{\frac{p-q}{p(q-1)}}(\det(D^2\varphi(x)))^{-\frac{(p-q)}{p(q-1)}}, \tag{1.6}$$

esta igualdade deve ser entendida no sentido *q.t.p.*. No conjunto das matrizes simétricas $n \times n$ não-negativas, a aplicação $M \mapsto (\det M)^{-\frac{p-q}{p(q-1)}}$ é côncava, pois $0 \leq \frac{q-p}{p(q-1)} \leq \frac{1}{n}$ uma vez que $\theta \leq 1$. Daí,

$$\left(-\frac{p-q}{p(q-1)}\right)^{-1}(\det M)^{-\frac{p-q}{p(q-1)}} = \left(-\frac{p-q}{p(q-1)}\right)^{-1}(\det(I + (M-I)))^{-\frac{p-q}{p(q-1)}}$$

$$\leq \left(-\frac{p-q}{p(q-1)}\right)^{-1} + \mathrm{tr}(M-I) = \left(-\frac{p-q}{p(q-1)}\right)^{-1}\left(1 - n\left(-\frac{p-q}{p(q-1)}\right)\right) + \mathrm{tr}(M).$$

Substituindo esta desigualdade em (1.6), encontramos

$$\left(-\frac{p-q}{p(q-1)}\right)^{-1} G(\nabla\varphi)^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \leq \frac{p(q-1)-n(q-p)}{q-p}F^{\frac{p-q}{p(q-1)}} + F^{\frac{p-q}{p(q-1)}}\Delta\varphi.$$

Integrando em relação à medida $F(x)dx$ e usando o transporte de massa (1.4) com $b = G^{\frac{p-q}{p(q-1)}}$, temos

$$\frac{p(q-1)}{q-p}\int_{I\!R^n} G^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}}dx \leq \frac{p(q-1)-n(q-p)}{q-p}\int_{I\!R^n} F^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}}dx + \int_{I\!R^n} F^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}}\Delta\varphi dx. \tag{1.7}$$

Por [17], segue que $\Delta\varphi \leq \Delta_{\mathcal{D}}\varphi$ no sentido das distribuições. Por outro lado, como u, v têm suporte compacto, a aplicação $\nabla\varphi$ é limitada no conjunto $\mathrm{supp}(u)$, pois $\nabla\varphi(\mathrm{supp}(u)) \subset \mathrm{supp}(v)$ ver [34], onde "supp"denota o suporte. Integrando por partes, encontramos

$$\int_{I\!R^n} F^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}}\Delta\varphi dx \leq \int_{I\!R^n} F^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}}\Delta_{\mathcal{D}}\varphi dx = -\int_{I\!R^n}\nabla(F^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}})\nabla\varphi dx. \tag{1.8}$$

Substituindo as funções F e G pelas suas definições e lembrando que $r = \frac{p(q-1)}{p-1}$, temos, após substituir (1.8) em (1.7),

$$\frac{p(q-1)}{q-p}\int_{I\!R^n} v^q dx \leq -q\int_{I\!R^n} u^{q-1}\nabla u \nabla\varphi dx + \frac{p(q-1)-n(q-p)}{q-p}\int_{I\!R^n} u^q dx.$$

$\blacksquare$

Considere $f : I\!R^n \to I\!R$ uma função satisfazendo as seguintes propriedades:

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x) \quad (p-\text{homogeneidade}) \tag{P.1}$$

para todo $\lambda \geq 0$,

$$f((1+\mu)x + \mu y) \leq (1+\mu)f(x) + \mu f(y) \quad \text{(convexidade)} \tag{P.2}$$

para todo $x, y \in I\!R^n, \mu \in [0,1]$,

$$f(x) = f(-x) \quad \text{(simetria)} \tag{P.3}$$

para todo $x \in I\!R^n$,

$$f(x) > 0 \quad \text{(positividade)} \tag{P.4}$$

para todo $x \neq 0$.

Denotaremos por f^* a transformada de Legendre da função f, cuja definição é

$$f^*(x) = \sup_{y \in I\!R^n} \{x \cdot y - f(y)\}.$$

É fácil verificar que a transformada de Legendre satisfaz as propriedades (P.2), (P.3) e (P.4), além disso é p' - homogênea, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

O próximo lema, estabelece uma relação entre a função f e sua transformada de Legendre f^*. Esta relação, embora simples, será de grande utilidade neste e no próximo capítulo.

Lema 1.2.2. *Sejam f uma função satisfazendo* (P.1), (P.2) *e* (P.4) *e* $1 < p < \infty$. *Então*

$$(p-1)f(\nabla f^*(x)) = f^*(x),$$

no sentido q.t.p..

Prova:

Pela convexidade da função f, temos $f^{**} = f$, este é um resultado clássico de análise convexa que pode ser encontrado, por exemplo, em [8] Teorema 1.10. Logo,

$$f(x) = \sup_{y \in I\!R^n} \{x \cdot y - f^*(y)\}.$$

A convexidade da função f^* implica que $\nabla f^*(x)$ existe *q.t.p.* e que $\nabla f^*(x) \cdot x - f^*(x) \geq \nabla f^*(x) \cdot y - f^*(y)$ para todo $y \in I\!R^n$ e *q.t.p.* em x. Como esta desigualdade é válida para todo $y \in I\!R^n$, pela definição da transformada de Legendre, temos

$$f(\nabla f^*(x)) \leq \nabla f^*(x) \cdot x - f^*(x).$$

Pela definição da função f^*, verificamos que

$$f^*(x) \geq \nabla f^*(x) \cdot x - f(\nabla f^*(x)).$$

Portanto,

$$f(\nabla f^*(x)) = \nabla f^*(x) \cdot x - f^*(x),$$

no sentido $q.t.p.$. Por outro lado, a p'-homogeneidade de f^* implica que $\nabla f^*(x) \cdot x = p' f^*(x)$. Substituindo esta igualdade na anterior, obtemos

$$f(\nabla f^*(x)) = (p' - 1) f^*(x).$$

■

Agora vamos estabelecer a desigualdade homogênea de Gagliardo-Nirenberg ótima Euclidiana, este é o principal resultado desta seção.

Teorema 1.2.2. *Sejam* $1 < p < n$ *e* f *satisfazendo as propriedades de* (P.1), (P.2), (P.3) *e* (P.4). *Então para toda função* $u \in D^{p,q}(I\!R^n)$, *temos*

$$||u||_r \leq A(p, q, \frac{p(q-1)}{p-1}, f) ||f(\nabla u)||_1^{\frac{\theta}{p}} ||u||_q^{1-\theta} \tag{1.9}$$

onde p, q, r *e* θ *são como em* (1.1). *Além disso, todas as funções extremais de* (1.9) *são dadas por* $u(x) = \alpha w(\beta(x - x_0))$, *sendo* $\alpha \in I\!R$, $\beta \neq 0$, $x_0 \in I\!R^n$ *e* w *é dada em* (9).

Prova:

Seja $u \in D^{p,q}(I\!R^n)$. Podemos assumir que u tem suporte compacto (por densidade), é não-negativa (pois $\nabla |u| = \pm \nabla u$ $q.t.p.$) e $||u||_r = 1$ (por homogeneidade).

Defina $F = u^r$ e $G = w^r$ em $I\!R^n$, onde a função w é conforme o enunciado do teorema. Seja $\nabla \varphi$ a aplicação de Brenier que transporta $F(x)dx$ à $G(x)dx$. Utilizando a desigualdade de Fenchel $x \cdot y \leq f(x) + f^*(y)$, com $x = -\nabla u$ e $y = u^{q-1} \nabla \varphi$, e as hipóteses que f é par e $r = \frac{p(q-1)}{p-1}$ no Lema 1.2.1, obtemos

$$\frac{p(q-1)}{q(q-p)} \int_{I\!R^n} w^q dx \leq \int_{I\!R^n} f(\nabla u) dx + \int_{I\!R^n} u^r f^*(\nabla \varphi) dx + \frac{p(q-1) - n(q-p)}{q(q-p)} \int_{I\!R^n} u^q dx. \tag{1.10}$$

Agora, usando f^* no lugar de b em (1.4), substituindo $u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{n(p-1)}{p(q-1)}} u(\lambda x)$ no lugar de u e sendo $\lambda > 0$,

$$K_1 \leq \lambda^{\frac{n(p-q)+p(q-1)}{q-1}} ||f(\nabla u)||_1 + K_2 \lambda^{\frac{n(p-q)}{p(q-1)}} ||u||_q^q, \tag{1.11}$$

onde

$$K_1 = \frac{p(q-1)}{q(q-p)} \int_{I\!R^n} w^q dx - \int_{I\!R^n} f^*(x) w^r dx$$

e

$$K_2 = \frac{p(q-1) - n(q-p)}{q(q-p)} \geq 0.$$

Minimizando em λ, segue a desigualdade homogênea de Gagliardo-Nirenberg. Os cálculos a seguir são independentes de (1.11), em particular, eles nos mostram que $K_1 > 0$.

Agora, vamos mostrar que w é uma função extremal para esta desigualdade. Para isto é suficiente checarmos que a desigualdade (1.10) torna-se igualdade quando $u = w$. De fato, igualdade em (1.10) implica igualdade em (1.11) com $\lambda = 1$. Logo, o ínfimo em (1.11) é atingido. Isto mostra que w é uma função extremal para (1.9).

O crucial na prova da igualdade em (1.10) são as seguintes igualdades:

Utilizando integração por partes e a propriedade $\nabla f^*(x)\cdot x = \frac{p}{p-1}f^*(x)$, a qual segue da p' - homogeneidade de f^*, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} w^q dx = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}(\sigma + \frac{q-p}{p-1}f^*(x))^{-\frac{q(p-1)}{q-p}}\operatorname{div}(x)dx$$

$$= \frac{q}{n}\int_{\mathbb{R}^n}(\sigma + \frac{q-p}{p-1}f^*(x))^{-\frac{p(q-1)}{q-p}}\nabla f^*(x)\cdot x dx = \frac{pq}{n(p-1)}\int_{\mathbb{R}^n}(\sigma + \frac{q-p}{p-1}f^*(x))^{-\frac{p(q-1)}{q-p}}f^*(x)dx$$

$$= \frac{pq}{n(p-1)}\int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)w^{\frac{p(q-1)}{p-1}}dx.$$

Do Lema 1.2.2,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\nabla w)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f((\sigma + \frac{q-p}{p-1}f^*(x))^{-\frac{q-1}{q-p}}\nabla f^*(x))dx$$

$$= \frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n}(\sigma + \frac{q-p}{p-1}f^*(x))^{-\frac{p(q-1)}{q-p}}f^*(x)dx = \frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)w^{\frac{p(q-1)}{p-1}}dx.$$

Substituindo estas igualdades em (1.10) e usando f^* no lugar de b em (1.4), encontramos a igualdade procurada.

Para mostrar que todas as funções extremais são da forma $u(x) = \alpha w(\beta(x - x_0)$, basta seguir a prova do Teorema 5 de [11], fazendo pequenas modificações óbvias.
Com isto, concluímos o teorema.

■

No teorema anterior, tomando $q = \frac{p(n-1)}{n-p}$ temos $\theta = 1$ e $r = p^*$. Então, obtemos a seguinte desigualdade homogênea de Sobolev ótima Euclidiana

Teorema 1.2.3. *Sejam* $1 < p < n$ *e* f *satisfazendo as propriedades de* (P.1), (P.2), (P.3) *e* (P.4). *Então, para toda função* $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, *temos*

$$||u||_{p^*} \leq A(p,f)||f(\nabla u)||_1^{\frac{1}{p}} \tag{1.12}$$

onde $A(p,f) = A(p, \frac{p(n-1)}{n-p}, \frac{p(q-1)}{p-1}, f)$. *Além disto, todas as funções extremais para a desigualdade* (1.12) *são da forma* $u(x) = \alpha w(\beta(x - x_0))$ *para* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *e* w *é definida em* (9) *usando* $q = \frac{p(n-1)}{n-p}$.

1.3 Exemplo

Como uma aplicação dos resultados anteriores, vamos calcular as constantes ótimas das desigualdades de Gagliardo-Nirenberg e Sobolev para uma família de normas.
Denote por $f_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a norma μ, ou seja, $f_\mu(x) = \frac{1}{p}|x|_\mu^p$, onde $|x|_\mu = (\sum_{i=1}^n |x_i|^\mu)^{\frac{1}{\mu}}$ para $1 \leq \mu < \infty$ e $|x|_\infty = \max\{|x_i|; i = 1, \cdots, n\}$.

Para calcular as constantes ótimas, necessitaremos da transformada de Legendre da função f_μ. Vamos registrar esse fato no seguinte lema:

Lema 1.3.1. *Seja* f_μ *como acima. Então a transformada de Legendre de* f_μ *é dada por* $f_\mu^*(x) = \frac{1}{p'}|x|_\nu^{p'}$, *onde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *e* $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 1$. *Como caso limite temos* $f_1^*(x) = \frac{1}{p'}|x|_\infty^{p'}$ *e* $f_\infty^*(x) = \frac{1}{p'}|x|_1^{p'}$.

Prova:

Suponha $1 < \mu < \infty$. Note que, pela definição da transformada de Legendre, f_μ^* é p' - homogênea e satisfaz as condições (P.2), (P.3) e (P.4).
Pelo Lema 1.2.2, trocando f_μ^* por f_μ e como $f_\mu^{**} = f_\mu$, temos

$$(p'-1)f_\mu^*(\nabla f_\mu(x)) = f_\mu(x).$$

Substituindo $\nabla f_\mu(x) = |x|_\mu^{p-\mu}(|x_1|^{\mu-2}x_1, \cdots, |x_n|^{\mu-2}x_n)$ na igualdade acima, decorre que

$$\frac{p-1}{p}|x|_\mu^p = f_\mu^*(\nabla f_\mu(x)) = f_\mu^*(|x|_\mu^{p-\mu}(|x_1|^{\mu-2}x_1, \cdots, |x_n|^{\mu-2}x_n))$$

$$= |x|_\mu^{p'(p-\mu)} f_\mu^*((|x_1|^{\mu-2}x_1, \cdots, |x_n|^{\mu-2}x_n)),$$

pois $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Usando o fato que ν é o conjugado de μ, segue da igualdade anterior que

$$f_\mu^*((|x_1|^{\frac{\mu}{\nu}-1}x_1, \cdots, |x_n|^{\frac{\mu}{\nu}-1}x_n)) = \frac{1}{p'}|x|_\mu^{p'\frac{\mu}{\nu}}.$$

Fazendo a mudança de variável $y_i = |x_i|^{\frac{\mu}{\nu}-1}x_i$, vemos que a transformada de Legendre de f_μ é dada por

$$f_\mu^*(y) = \frac{1}{p'}|y|_\nu^{p'}.$$

Como caso limite desta desigualdade, deduzimos que $f_1^*(y) = \frac{1}{p'}|y|_\infty^{p'}$ e $f_\infty^*(y) = \frac{1}{p'}|y|_1^{p'}$.

■

Teorema 1.3.1. *Seja $1 \le \mu \le \infty$. Então as constantes ótimas das desigualdades de Sobolev e Gagliardo-Nirenberg são dadas, respectivamente, por*

$$A(p, f_1) = p^{\frac{1}{p}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{n}{2}+1)^{\frac{1}{n}}} A(p),$$

$$A(p, f_\mu) = p^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{\nu}+1)}\right) \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{\nu}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\right)^{\frac{1}{n}} A(p),$$

$$A(p, q, f_1) = p^{\frac{\theta}{p}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{n}{2}+1)^{\frac{1}{n}}}\right)^{\theta} A(p, q, \frac{p(q-1)}{p-1}),$$

e

$$A(p, q, f_\mu) = p^{\frac{\theta}{p}} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{\nu}+1)}\right)^{\theta} \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{\nu}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\right)^{\frac{\theta}{n}} A(p, q, \frac{p(q-1)}{p-1}),$$

onde $A(p, q, f_\mu) = A(p, q, \frac{p(q-1)}{p-1}, f_\mu)$ e $A(p, f_\mu) = A(p, \frac{p(n-1)}{n-p}, \frac{p(q-1)}{p-1}, f_\mu)$.

Prova:

Suponha $1 < \mu \leq \infty$. Durante a prova, necessitaremos da identidade

$$\int_{S^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dS(y) = \frac{2n\Gamma(\frac{1}{\nu})^n}{\nu\Gamma(\frac{n}{\nu}+1)}, \tag{1.13}$$

onde S^{n-1} denota a esfera em $I\!R^n$ de raio 1 e Γ é a função gama. Para provar esta igualdade, tome a carta $\psi : D^{n-1} \subset I\!R^{n-1} \to S^{n-1}$ definida por $\psi(y_1, \cdots, y_{n-1}) = (y_1, \cdots, y_{n-1}, (1-(y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2))^{\frac{1}{2}})$, onde D^{n-1} denota o disco unitário em $I\!R^{n-1}$. Denotando por g a métrica Riemanniana de S^{n-1} induzida de $I\!R^n$, temos que $\det g = \frac{1}{1-(y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2)}$ na carta ψ . Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dS(y) &= 2\int_{D^{n-1}} \frac{|y_1|^{\frac{2-\nu}{\nu}} \times \cdots \times |y_{n-1}|^{\frac{2-\nu}{\nu}} \times (1-(y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2))^{\frac{2-\nu}{2\nu}}}{(1-(y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2))^{\frac{1}{2}}} dy \\
&= 2\int_{D^{n-1}} |y_1|^{\frac{2-\nu}{2}} \times \cdots \times |y_{n-1}|^{\frac{2-\nu}{\nu}} \times (1-(y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2))^{\frac{1-\nu}{\nu}} dy \\
&= 2\int_0^1 \int_{S^{n-2}} |y_1|^{\frac{2-\nu}{\nu}} \times \cdots \times |y_{n-1}|^{\frac{2-\nu}{\nu}} \times (1-r^2)^{\frac{1-\nu}{\nu}} \times r^{\frac{(2-\nu)(n-1)}{\nu}+n-2} dS(y)dr \\
&= 2\int_0^1 (1-r^2)^{\frac{1-\nu}{\nu}} r^{\frac{2(n-1)}{\nu}-1} dr \int_{S^{n-2}} |y_1|^{\frac{2-\nu}{\nu}} \times \cdots \times |y_{n-1}|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dS(y).
\end{aligned}$$

Usando indução sobre n, obtemos

$$\int_{S^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dS(y) = 2^n \prod_{i=1}^{n-1} \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{1-\nu}{\nu}} r^{\frac{2(n-i)}{\nu}-1} dr. \tag{1.14}$$

Por mudança de variável, segue que

$$\int_0^1 (1-r^2)^{\frac{1}{\nu}-1} r^{\frac{2(n-i)}{\nu}-1} dr = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{\nu}-1} t^{\frac{n-i}{\nu}-1} dt.$$

Reescrevendo a integral acima, usando a função gama, ou seja, da propriedade

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

onde $x, y > 0$, este fato pode ser encontrado em [2],
temos

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{\nu}-1} t^{\frac{n-i}{\nu}-1} dt = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{n-i}{\nu})\Gamma(\frac{1}{\nu})}{\Gamma(\frac{n-i+1}{\nu})}.$$

Finalmente, substituindo esta igualdade em (1.14) e usando a propriedade $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, obtemos (1.13).

Para calcular a constante ótima $A(p, q, f_\mu)$, basta considerar qualquer função minimizadora do Teorema 1.2.2 com relação à função f_μ, pois (8) é invariante por homotetia, translação e dilatação.
Então, passaremos a calcular as integrais da seguinte igualdade:

$$A(p, q, f_\mu) = \frac{||w_\mu||_r ||w_\mu||_q^{1-\theta}}{||f_\mu(\nabla w_\mu)||_1^{\frac{\theta}{p}}}, \tag{1.15}$$

onde w_μ é uma função extremal de (1.9), que iremos tomar como sendo $w_\mu(x) = \big(1 + f_\mu^*(x)\big)^{-\frac{p-1}{q-p}}$. Aplicando o Lema 1.3.1 nessa igualdade, temos

$$w_\mu(x) = \left(1 + \frac{1}{p'}|x|_\nu^{p'}\right)^{\frac{p-1}{p-q}}.$$

A primeira integral de (1.15) a ser calculada é

$$||f_\mu(\nabla w_\mu)||_1.$$

Como $\nabla w_\mu = \frac{p-1}{p-q}(1 + \frac{1}{p'}|x|_\nu^{p'})^{\frac{q-1}{p-q}}|x|_\nu^{p'-\nu}x_i^{\nu-1}$ e sendo $\nu = (\nu-1)\mu$, temos

$$f_\mu(\nabla w_\mu) = \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{q-p}\right)^p (1 + \frac{1}{p'}|x|_\nu^{p'})^{\frac{p(q-1)}{p-q}}|x|_\nu^{p'}.$$

Fazendo a mudança de variável

$$x_i = p'^{\frac{1}{p'}}|y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}}y_i,$$

encontramos

$$\int_{I\!R^n} f_\mu(\nabla w_\mu)dx = \frac{p'}{p}p'^{\frac{n}{p'}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^n\left(\frac{p-1}{q-p}\right)^p\int_{I\!R^n}(1 + |y|^{\frac{2p'}{\nu}})^{\frac{p(q-1)}{p-q}}|y|^{\frac{2p'}{\nu}}\prod_{i=1}^n |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}}dy$$

$$= \frac{p'}{p}p'^{\frac{n}{p'}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^n\left(\frac{p-1}{q-p}\right)^p\int_0^\infty \frac{r^{\frac{2(p'+n)}{\nu}-1}}{(1 + r^{\frac{2p'}{\nu}})^{\frac{p(q-1)}{q-p}}}dr\int_{S^{n-1}}\prod_{i=1}^n |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}}dS(y).$$

Fazendo outra mudança de variável $t = r^{\frac{2p'}{\nu}}$, temos

$$\int_{I\!R^n} f_\mu(\nabla w_\mu)dx = \frac{1}{p}p'^{\frac{n}{p'}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^n\frac{\nu}{2}\left(\frac{p-1}{q-p}\right)^p\int_0^\infty \frac{t^{\frac{n}{p'}}}{(1+t)^{\frac{p(q-1)}{q-p}}}dt\int_{S^{n-1}}\prod_{i=1}^n |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}}dS(y).$$

Aplicando a propriedade da função gama

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{1.16}$$

juntamente com a identidade (1.13) na igualdade acima, obtemos

$$\int_{I\!R^n} f_\mu(\nabla w_\mu)dx = \frac{p'^{\frac{n}{p'}}}{p}n\left(\frac{2}{\nu}\right)^n\left(\frac{p-1}{q-p}\right)^p\frac{\Gamma(\frac{n}{p'}+1)\Gamma(\frac{p(q-1)}{q-p} - \frac{n}{p'} - 1)}{\Gamma(\frac{p(q-1)}{q-p})}\frac{\Gamma(\frac{1}{\nu})^n}{\Gamma(\frac{n}{\nu}+1)}.$$

Como

$$\frac{p(q-1)}{q-p} - \frac{n}{p'} - 1 = \frac{p-1}{p}\frac{pq - nq + np}{q-p}$$

e

$$\Gamma(\frac{p(q-1)}{q-p}) = \frac{q(p-1)}{q-p}\Gamma(\frac{q(p-1)}{q-p}),$$

então

$$\int_{I\!R^n} f_\mu(\nabla w_\mu)dx = \frac{p'^{\frac{n}{p'}}}{pq} n \left(\frac{2}{\nu}\right)^n \frac{q-p}{p-1}\left(\frac{p-1}{q-p}\right)^p \frac{\Gamma(\frac{n(p-1)}{p}+1)\Gamma(\frac{p-1}{p}\frac{pq-nq+np}{q-p})}{\Gamma(\frac{q(p-1)}{q-p})}\frac{\Gamma(\frac{1}{\nu})^n}{\Gamma(\frac{n}{\nu}+1)}, \tag{1.17}$$

onde também usamos o fato que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.
Assim, concluímos a primeira etapa.

A próxima integral a ser calculada é

$$||w_\mu||_q^q.$$

Usando a mudança de variável

$$x_i = p'^{\frac{1}{p'}}|y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}}y_i,$$

temos

$$\int_{I\!R^n} w_\mu^q dx = \int_{I\!R^n}(1+\frac{1}{p'}|x|_\nu^{p'})^{\frac{q(p-1)}{p-q}}dx = p'^{\frac{n}{p'}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^n\int_{I\!R^n}(1+|y|_2^{\frac{2p'}{\nu}})^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\prod_{i=1}^n |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}}dy$$

$$= p'^{\frac{n}{p'}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^n\int_0^\infty \frac{r^{\frac{2n-\nu}{\nu}}}{(1+r^{\frac{2p'}{\nu}})^{\frac{q(p-1)}{q-p}}}dr\int_{S^{n-1}}\prod_{i=1}^n|y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}}dS(y).$$

Com uma outra mudança de variável $t=r^{\frac{2p'}{\nu}}$, encontramos

$$\int_{I\!R^n} w_\mu^q dx = p'^{\frac{n}{p'}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^n\frac{\nu}{2p'}\int_0^\infty\frac{t^{\frac{n}{p'}-1}}{(1+t)^{\frac{q(p-1)}{q-p}}}dt\int_{S^{n-1}}\prod_{i=1}^n|y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}}dS(y).$$

Usando a propriedade (1.16) e a igualdade (1.13), deduzimos

$$\int_{I\!R^n} w_\mu^q dx = p'^{\frac{n}{p'}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^n\frac{n}{p'}\frac{\Gamma(\frac{n}{p'})\Gamma(\frac{q(p-1)}{q-p}-\frac{n}{p'})}{\Gamma(\frac{q(p-1)}{q-p})}\frac{\Gamma(\frac{1}{\nu})^n}{\Gamma(\frac{n}{\nu}+1)}.$$

Como

$$\frac{q(p-1)}{q-p}-\frac{n}{p'} = \frac{p(q-1)}{q-p}-\frac{n}{p'}-1 = \frac{p-1}{p}\frac{pq-nq+np}{q-p}$$

e também usando a propriedade $\Gamma(\frac{n}{p'})=\frac{p'}{n}\Gamma(\frac{n}{p'}+1)$, ficamos com a identidade

$$\int w_\mu^q dx = p'^{\frac{n}{p'}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^n\frac{\Gamma(\frac{n(p-1)}{p}+1)\Gamma(\frac{p-1}{p}\frac{pq-nq+np}{q-p})}{\Gamma(\frac{q(p-1)}{q-p})}\frac{\Gamma(\frac{1}{\nu})^n}{\Gamma(\frac{n}{\nu}+1)}. \tag{1.18}$$

E fica encerrado o cálculo da segunda integral.

A última integral a ser calculada é

$$||w_\mu||_r^r.$$

Novamente usando a mudança de variável

$$x_i = p'^{\frac{1}{p'}}|y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}}y_i$$

segue

$$\int_{I\!R^n} w_\mu^r dx = \int_{I\!R^n} (1+\frac{1}{p'}|x|_\nu^{p'})^{\frac{p(q-1)}{p-q}} dx = p'^{\frac{n}{p'}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^n \int_{I\!R^n} (1+|y|_2^{\frac{2p'}{\nu}})^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \prod_{i=1}^n |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dy$$

$$= p'^{\frac{n}{p'}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^n \int_0^\infty \frac{r^{\frac{2n-\nu}{\nu}}}{(1+r^{\frac{2p'}{\nu}})^{\frac{p(q-1)}{q-p}}} dr \int_{S^{n-1}} \prod_{i=1}^n |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dS(y).$$

Ainda, fazendo a mudança de variável $t = r^{\frac{2p'}{\nu}}$, obtemos

$$\int_{I\!R^n} w_\mu^r dx = p'^{\frac{n}{p'}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^n \frac{\nu}{2p'} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{n}{p'}-1}}{(1+t)^{\frac{p(q-1)}{q-p}}} dt \int_{S^{n-1}} \prod_{i=1}^n |y_i|^{\frac{2-\nu}{\nu}} dS(y).$$

Da propriedade da função gama (1.16) e da igualdade (1.13), temos

$$\int_{I\!R^n} w_\mu^r dx = p'^{\frac{n}{p'}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^n \frac{n}{p'} \frac{\Gamma(\frac{n}{p'})\Gamma(\frac{p(q-1)}{q-p} - \frac{n}{p'})}{\Gamma(\frac{p(q-1)}{q-p})} \frac{\Gamma(\frac{1}{\nu})^n}{\Gamma(\frac{n}{\nu}+1)}. \tag{1.19}$$

Como

$$\frac{p(q-1)}{q-p} - \frac{n}{p'} = \frac{q(p-1)}{q-p} - \frac{n}{p'} + 1 = \frac{p-1}{p}\frac{pq-nq+np}{q-p} + 1,$$

usando as propriedades $\Gamma(\frac{n}{p'}) = \frac{p'}{n}\Gamma(\frac{n}{p'}+1)$ e

$$\Gamma(\frac{p(q-1)}{q-p} - \frac{n}{p'}) = \frac{p-1}{p}\frac{pq-nq+np}{q-p}\Gamma(\frac{p-1}{p}\frac{pq-nq+np}{q-p})$$

e substituindo em (1.19), nos dá

$$\int_{I\!R^n} w_\mu^r dx = p'^{\frac{n}{p'}} \left(\frac{2}{\nu}\right)^n \frac{pq-nq+np}{pq} \frac{\Gamma(\frac{n(p-1)}{p}+1)\Gamma(\frac{p-1}{p}\frac{pq-nq+np}{q-p})}{\Gamma(\frac{q(p-1)}{q-p})} \frac{\Gamma(\frac{1}{\nu})^n}{\Gamma(\frac{n}{\nu}+1)}. \tag{1.20}$$

E assim, concluímos o cálculo da última integral.

Como $\theta = \frac{n(q-p)}{(np-(n-p)q)(q-1)}$ e $r = \frac{p(q-1)}{p-1}$, segue, por alguns cálculos simples,

$$\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} - \frac{1}{r} = \frac{\theta}{n}.$$

Desse fato, mais (1.17), (1.18) e (1.20) substituídos em (1.15), deduzimos

$$A(p,q,f_\mu) = \frac{\left(p'^{\frac{n}{p'}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^n \frac{pq-nq+np}{pq}\right)^{\frac{1}{r}}}{\left(p'^{\frac{n}{p'}}\left(\frac{2}{\nu}\right)^n\right)^{\frac{1-\theta}{q}} \left(\frac{p'^{\frac{n}{p'}}}{pq} n \left(\frac{2}{\nu}\right)^n \frac{q-p}{p-1}\left(\frac{p-1}{q-p}\right)^p\right)^{\frac{\theta}{p}}} (\Lambda)^{\frac{\theta}{n}} \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{\nu}+1)}{\Gamma(\frac{1}{\nu})^n}\right)^{\frac{\theta}{n}},$$

onde

$$\Lambda = \frac{\Gamma(\frac{q(p-1)}{q-p})}{\Gamma(\frac{n(p-1)}{p}+1)\Gamma(\frac{p-1}{p}\frac{pq-nq+np}{q-p})}.$$

Como $(\frac{1}{p'})^{\frac{\theta}{p'}} = (\frac{p-1}{p})^{\theta}(\frac{p-1}{p})^{-\frac{\theta}{p}}$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}$ e por 6, obtemos

$$A(p,q,f_\mu) = p^{\frac{\theta}{p}} A(p,q,\frac{p(q-1)}{p-1}) \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{\nu}+1)}\right)^{\theta} \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{\nu}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\right)^{\frac{\theta}{n}}.$$

Fazendo $\mu \to 1$, encontramos

$$A(p,q,f_1) = p^{\frac{\theta}{p}} A(p,q,\frac{p(q-1)}{p-1}) \left(\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma(\frac{n}{2}+1)^{\frac{1}{n}}}\right)^{\theta}.$$

As constantes ótimas da desigualdade de Sobolev é um caso particular das constantes ótimas da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg. De fato, fazendo $q = \frac{p(n-1)}{n-p}$ teremos $\theta = 1$ daí, substituindo estes fatos nas igualdades acima, obtemos $A(p, f_\mu)$ e $A(p, f_1)$.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Desigualdade homogênea de Sobolev ótima Riemanniana

2.1 Introdução

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Considere $F : TM \to I\!R$ com $F \in \mathcal{F}$. É fácil obter constantes $A, B \in I\!R$ tais que a desigualdade homogênea de Sobolev Riemanniana

$$\left(\int_M |u|^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B \int_M |u|^p dv_g \tag{2.1}$$

é válida para toda função $u \in H^{1,p}(M)$.
Diremos que

$$A_0(p, F) = \inf\{A \in I\!R; \;\text{ existe }\; B \in I\!R \;\text{ tal que }\; (2.1) \;\text{ é válida}\}. \tag{2.2}$$

é a *constante ótima*.
Neste capítulo, estudaremos a validade e não-validade da desigualdade homogênea de Sobolev ótima

$$\left(\int_M |u|^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A_0(p, F) \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B \int_M |u|^p dv_g. \tag{2.3}$$

Nossa primeira meta será estabelecer resultados que nos permitam transitar entre as desigualdades Euclidiana e Riemanniana. Isto permitirá encontrar uma relação entre as constantes ótimas Euclidiana e Riemanniana. No caso clássico ($F([x, i, v]) = |[x, i, v]|^p$), a desigualdade ótima foi provada para $1 < p \leq 2$ em 1999, de forma independe, por Aubin e Li [5] e por Druet [14].

A não-validade, para $2 < p < \frac{n+2}{3}$, da desigualdade ótima (2.3), foi provada em 1998 por Druet [13] no caso clássico.

Iremos generalizar os resultados obtidos por Druet em [13] e [14], ou seja, provaremos a validade da desigualdade (2.3) para $1 < p \leq 2$ e a não-validade quando $2 < p < \frac{n+2}{3}$.

2.2 Desigualdade de Sobolev com ϵ

Iniciaremos o capítulo listando definições e resultados de topologia diferencial, que servirá como referência ao longo do texto.

Seja (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. O *fibrado tangente* de M é definido por:

$$TM = \{[x,i,v]; x \in M, i \in \Lambda, v \in I\!R^n\},$$

onde Λ é um conjunto de índices. A classe de equivalência é definida da seguinte forma: sejam φ_i e φ_j dois sistemas de coordenadas, $x,y \in M$ e $v,w \in I\!R^n$, então $[x,i,v]=[y,j,w]$ se:
1) $x=y$
2) $D(\varphi_j\varphi_i^{-1})(\varphi_i(x))v = w$, onde D denota a derivada de uma aplicação de $I\!R^n$ em $I\!R^n$.

Seja $p : TM \to M$ uma aplicação definida por $[x,i,v] \mapsto x$. É fácil ver que esta aplicação está bem definida.
Para $U \subset M$ um aberto, denotaremos por $TU = p^{-1}(U)$; e o *espaço tangente* num ponto $x \in M$ por $T_xM = p^{-1}(x)$. Dada uma carta (φ_i, U_i) a aplicação

$$\begin{aligned} T_{\varphi_i} :\ & TU_i \to \varphi_i(U_i) \times I\!R^n \subset I\!R^n \times I\!R^n \\ & [x,i,v] \longmapsto (\varphi_i(x), v), \end{aligned} \tag{2.4}$$

está bem definida e é bijetora. Destas observações verificamos que a aplicação

$$\begin{aligned} (T_{\varphi_j})(T_{\varphi_i})^{-1} :\ & \varphi_i(U_i\cap U_j) \times I\!R^n \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \times I\!R^n \\ & (y,v) \longmapsto (\varphi_j\varphi_i^{-1}(y), D(\varphi_j\varphi_i^{-1})(y)v), \end{aligned}$$

é um homeomorfismo. Então, TM tem uma topologia que faz cada T_{φ_i} um homeomorfismo e esta topologia é única. Como $\varphi_j\varphi_i^{-1}$ é suave, segue que $T_{\varphi_j}(T_{\varphi_i})^{-1}$ também é suave. Logo, TM é uma variedade suave de dimensão $2n$, cujas cartas naturais são dadas por (T_{φ_i}, TU_i).
O espaço vetorial dual do espaço tangente T_xM, é chamado *espaço cotangente* de M em x, denotaremos tal espaço por T_x^*M.
O fibrado vetorial sobre M cuja fibra no ponto x é T_x^*M, será denotado por T^*M e chamaremos de *fibrado cotangente*.

Vamos escrever, de modo genérico, $< \cdot,\cdot >_g$ para denotar o produto interno dado pela métrica g em espaço tangente, ou seja, $< [x,i,v],[x,i,w] >_g = g(x)([x,i,v],[x,i,w])$ com $[x,i,v],[x,i,w] \in T_xM$.

Estaremos denotando por

$$|\cdot| = < \cdot,\cdot >_g^{\frac{1}{2}}, \tag{2.5}$$

a norma que provém da métrica g. Também estaremos denotando por $|\cdot|$ a norma Euclidiana, porém ficará claro no contexto à qual norma estaremos nos referindo.
Sejam $(\alpha_i)_{i=1,\cdots,n}$ uma base para T_xM e $(\beta_j)_{j=1,\cdots,n}$ uma base para T_x^*M, suponha $\alpha_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\beta_j = dx_j$ em coordenadas locais, então temos que a métrica no fibrado cotangente, nestas coordenadas locais, é dada por $<< \omega, \eta >>_g = g^{ij}(x)\omega_i\eta_j$, onde $\omega = \omega_i dx_i, \eta = \eta_i dx_i \in T_x^*M$ e (g^{ij}) é a matriz inversa da métrica (g_{ij}). Aqui, e no que segue, estaremos usando a *convenção de Einstein* para soma, isto é, $\eta_i dx_i$ é uma abreviação para $\sum_{i=1}^n \eta_i dx_i$ e $g^{ij}(x)w_i\eta_j$ para $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g^{ij}(x)\omega_i\eta_j$.

A métrica Riemanniana induz de maneira natural uma correspondência um a um entre T_xM e T_x^*M. De fato, dado $[x,i,v] \in T_xM$ defina $\alpha([x,i,w]) =< [x,i,v],[x,i,w] >_g$ para todo vetor $[x,i,w] \in T_xM$, então $\alpha \in T_x^*M$.

Por outro lado, dado $\beta \in T_x^*M$ segue do lema de Riesz a existência de um único vetor $[x,i,v] \in T_xM$ tal que $\beta([x,i,w]) =< [x,i,v],[x,i,w] >_g$ para todo vetor $[x,i,w] \in T_xM$.

Utilizando as bases acima, ou seja, numa carta local, podemos dispensar o índice i escrevendo simplesmente $[x,i,v] = (x,v)$, desse modo, dado $v_i\frac{\partial}{\partial x_i} \in T_xM$, vamos considerar $\sigma = \sigma_j dx_j$ o vetor dado pela correspondência acima em T_x^*M. Então, podemos reescrever v em função de σ e vice-versa, isto é, $v = g^{ij}\sigma_j\frac{\partial}{\partial x_i}$ ou então $\sigma = g_{ij}v_i dx_j$.

Sejam $u : M \to I\!R$ diferenciável e $x \in M$. Então, $u'(x) \in T_x^*M$. Do lema de Riesz, existe um único vetor, que iremos denotar por $\nabla_g u(x) \in T_xM$, tal que

$$< \nabla_g u(x), v >_g = u'(x)v \tag{2.6}$$

para todo vetor $v \in T_xM$. Em coordenadas locais, podemos escrever $\nabla_g u(x) = g^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$. Também convencionaremos que o gradiente sem índice "∇", denotará o gradiente Euclidiano.

Sejam $F : TM \to I\!R$ e (T_{φ_i}, TU_i) uma carta de TM. Então, a representação da função F nesta carta fica sendo

$$F : \varphi_i(U_i) \times I\!R^n \to I\!R$$

$$(x,v) \mapsto F(x,v).$$

Usaremos a notação

$$\partial_v F([x,i,v]) \tag{2.7}$$

para significar que na carta (T_{φ_i}, TU_i), temos $\partial_v F([x,i,v]) = \frac{\partial}{\partial v}F(x,v)$. Esta definição é independente da carta.

No que segue, estaremos denotando por 0 o vetor nulo de qualquer espaço tangente.

Seja $F : TM \to I\!R$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$F_{|T_xM} : T_xM \to I\!R \;\text{ convexa, positiva em }\; T_xM \setminus \{0\} \;\text{ e par,} \tag{P.5}$$

para todo $x \in M$,

$$F([x,i,\lambda v]) = \lambda^p F([x,i,v]), \;\text{ ou seja }\; F \;\text{ é }\; p-\text{homogênea em }\; T_xM, \tag{P.6}$$

para todo $x \in M$.

Como conseqüência de (P.5), (P.6) e da compacidade de M, temos a existência de constantes $k_1, k_2 \in I\!R$ tais que

$$0 < k_1 \le k_2 \;\text{ e }\; k_1|[x,i,v]|^p \le F([x,i,v]) \le k_2|[x,i,v]|^p, \tag{H.1}$$

para todo $[x,i,v] \in M$.

Definição 2.2.1. *Vamos denotar por $\mathcal{F}$, o conjunto das aplicações $F : TM \to I\!R$ que são contínuas, para todo $x \in M$, $F_{|T_xM}$ são de classe $C^1(T_xM)$ e de classe $C^2(T_xM \setminus \{0\})$ e além disso satisfazem* (P.5) e (P.6).

A seguir, mostraremos que o conjunto $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Proposição 2.2.1. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta. Então o conjunto $\mathcal{F}$ é não-vazio.*

Prova:

Sendo M é uma variedade Riemanniana, temos que M é um espaço paracompacto. Seja $\{\lambda_j\}$ uma partição da unidade suave e subordinada a uma cobertura $\{(\varphi_j, V_j)\}$ de vizinhanças coordenadas localmente finita, ou seja, dado um aberto U de M teremos $U \cap V_j \neq \emptyset$ somente para um número finito de índices. Dado $x \in V_j$ considere $F_x^j : T_xM \to I\!R$ uma aplicação convexa, par, positiva em $T_xM \setminus \{0\}$, p - homogênea, de classe $C^1(T_xM) \cap C^2(T_xM \setminus \{0\})$. Para $y \in V_j$ defina $F_y^j = F_x^j$. Então

$$F([x, i, v]) = \sum_j \lambda_j(x) F_x^j([x, j, D(\varphi_j \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x))v])$$

satisfaz a Definição (2.2.1).

■

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $x \in M$. O raio de injetividade em x é dado por

$$i(x) = \sup\{\rho > 0; exp_x : B(0, \rho) \to M \text{ é injetiva}\}.$$

Vamos denotar o raio de injetividade de M por

$$i(M) = \inf_{x \in M} \{i(x)\}. \tag{2.8}$$

Sejam $\delta < i(M)$ e $B(x, \delta) = exp_x(B(0, \delta))$. Então a aplicação exponencial $exp_x : B(0, \delta) \to B(x, \delta)$ é um difeomorfismo para todo $x \in M$. A carta

$$(exp_x^{-1}, B(x, \delta)) \tag{2.9}$$

será chamada de um *sistema normal de coordenadas centrado em x*. Teremos interesse especial por esta carta, devido ao fato de conseguirmos uma expansão simples para métrica.

Agora vamos destacar dois resultados de geometria Riemanniana que estaremos constantemente usando.

Definição 2.2.2. *Seja $\bigtriangledown$ a conexão de Levi-Civita na variedade M. Então, a curvatura é dada por*

$$R(X, Y)Z = \bigtriangledown_Y \bigtriangledown_X Z - \bigtriangledown_X \bigtriangledown_Y Z + \bigtriangledown_{[X,Y]} Z,$$

onde $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ sendo $\Gamma(TM)$ o conjunto dos campos de vetores suaves em M. Denotaremos por $[\cdot, \cdot]$ o colchete em $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM)$. O tensor de Ricci em um ponto $x \in M$ é a aplicação $Ric_x : T_xM \times T_xM \to I\!R$, definida como $Ric_x(\xi, \eta) = traço(\zeta \longmapsto R(\xi, \zeta)\eta)$. Esta aplicação em uma base ortonormal $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de T_xM fica representada por $Ric_x(\xi, \eta) = < R(\xi, e_i)\eta, e_i >_g$.
A curvatura de Ricci na direção de ξ é dada por $Ric_x(\xi, \xi)$, onde $|\xi| = 1$.

Considerando um sistema normal de coordenadas, temos, do Teorema 2.17 de [10], a seguinte expansão da métrica:

$$g_{ij}(exp_x v) = \delta_{ij} - \frac{1}{3} < R(v, e_i)v, e_j >_g + O(|v|^3), \tag{2.10}$$

quando $v \to 0$ e $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ uma base ortonormal de T_xM.
Como corolário, temos

$$\det(g_{ij}(exp_x v)) = 1 - \frac{1}{3}Ric_x(v,v) + O(|v|^3), \tag{2.11}$$

quando $v \to 0$.
O próximo resultado, irá nos permitir transitar da desigualdade Euclidiana para a desigualdade Riemanniana e vice-versa. É com esta transição entre os espaços, que conseguiremos estabelecer a relação existente entre as constantes ótimas Euclidiana e Riemanniana.

Lema 2.2.1. *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana compacta, $F \in \mathcal{F}$ e $x \in M$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$(1-\epsilon)F(x, v_i\frac{\partial}{\partial x_i}) \leq F(y, g^{ij}(y)v_i\frac{\partial}{\partial x_j}) \leq (1+\epsilon)F(x, v_i\frac{\partial}{\partial x_i})$$

para todo $y \in B(x,\delta)$ e $v \in T_xM$.

Prova:
Defina $S = \{v \in T_xM; |v| = 1\}$ e considere $H : B(0,\delta') \times S \to I\!R$ dada por

$$H(y,v) = \frac{F(y, g^{ij}(y)v_i\frac{\partial}{\partial x_j})}{F(x, v_i\frac{\partial}{\partial x_i})},$$

onde $v = v_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\delta' < i(M)$.
Como F é contínua e positiva g^{ij} continua, segue que H é contínua e positiva.
Seja $\delta < \delta'$. Como $\overline{B(0,\delta)} \times S$ é compacto, temos que H é uniformemente contínua em $\overline{B(0,\delta)} \times S$.
Assim, dado $\lambda > 0$ existe $\eta > 0$ tal que se $|(y,v) - (z,w)| < \eta$ então

$$|H(y,v) - H(z,w)| < \lambda \tag{2.12}$$

pela continuidade uniforme.
Escolhendo δ suficientemente pequeno segue, por (2.12) e a expansão (2.10), que $|H(y,v) - H(x,v)| < \epsilon$ ou ainda

$$1 - \epsilon < H(y,v) < 1 + \epsilon$$

para todo $(y,v) \in B(0,\delta) \times S$.
De (P.6), temos $H(y,v) = H(y, \frac{v}{|v|})$. Daí

$$1 - \epsilon < H(y,v) < 1 + \epsilon$$

para todo $(y,v) \in B(0,\delta) \times I\!R^n$.
Portanto

$$(1-\epsilon)F(x, v_i\frac{\partial}{\partial x_i}) \leq F(y, g^{ij}(y)v_i\frac{\partial}{\partial x_j}) \leq (1+\epsilon)F(x, v_i\frac{\partial}{\partial x_i}).$$

■

Agora, vamos nos concentrar no estabelecimento da relação existente entre a constantes ótimas da desigualdade homogênea de Sobolev Riemanniana e da desigualdade homogênea de Sobolev Euclidiana.

Para isto, primeiro vamos fazer algumas considerações sobre a função F restrita a cada espaço tangente. Conside em T_xM uma base ortonormal $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\}_{i=1,\cdots,n}$, dada pelo produto interno $g(x)$. Seja $\phi_x : I\!R^n \to T_xM$ um isomorfismo que leva a base ortonormal canônica de $I\!R^n$ na base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\}_{i=1,\cdots,n}$. Isto nos dá a identificação de T_xM com $I\!R^n$.
Seja $F \in \mathcal{F}$. Defina

$$\begin{aligned} &F_x : I\!R^n \to I\!R \\ &F_x(v) = F(\phi_x(v)) \end{aligned} \tag{2.13}$$

para cada $x \in M$. É claro que F_x é convexa, par, positiva em $I\!R^n \setminus \{0\}$ e p - homogênea, pois $F_{|_{T_xM}}$ possui estas propriedades. Pelo Teorema 1.2.3, temos a constante ótima da desigualdade de Sobolev Euclidiana relativa a F_x, isto é, a constante ótima da desigualdade

$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq A \left(\int_{I\!R^n} F_x(\nabla u) dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

onde $u \in D^{1,p}(I\!R^n)$. Denotemos tal constante ótima por

$$A(p, x). \tag{2.14}$$

Também defina

$$A(p, F) = \sup_{x \in M}\{A(p, x)\}. \tag{2.15}$$

Observação 2.2.1. *Devemos notar que ϕ_x depende da base ortonormal escolhida em T_xM, porém a melhor constante $A(p, x)$ não depende da base ortonormal. Isto segue diretamente por uma mudança de base.*

O próximo resultado é clássico no estudo de melhores constantes em variedades. Também é o primeiro passo para estabelecer que $A(p, F)^p = A_0(p, F)$.

Proposição 2.2.2. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n, $1 \leq p < n$ e $F \in \mathcal{F}$. Suponha que existam $A, B \in I\!R$ tais que para toda função $u \in C^1(M)$,*

$$||u||_{p^*}^p \leq A||F(\nabla_g u)||_1 + B||u||_p^p. \tag{2.16}$$

Então $A \geq A(p, F)^p$.

Prova:

A prova será por contradição, ou seja, suponha que $A < A(p, F)^p$. Então, existe $x \in M$ tal que $A < A(p, x)^p$.
Considere um sistema normal de coordenadas centrado em x. Dado $\epsilon > 0$, segue pela expansão (2.10) que, existe $\delta > 0$ tal que

$$(1 - \epsilon)\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq (1 + \epsilon)\delta_{ij}.$$

Como $dv_g = (\det(g_{ij}))^{\frac{1}{2}} dx$, e tomando δ menor se necessário, também temos pela expansão (2.11)

$$(1 - \epsilon)dv_g \leq dy \leq (1 + \epsilon)dv_g.$$

Do Lema 2.2.1, temos
$$(1-\epsilon)F_x(\nabla u(y)) \leq F(\nabla_g u(y)) \leq (1+\epsilon)F_x(\nabla u(y)),$$
para toda função $u \in C_0^1(B(x,\delta))$.
Destas observações, juntamente com a hipótese (2.16), temos
$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^{p^*} dy\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq C(\epsilon)\left(\int_M |u|^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}$$
$$\leq C(\epsilon)A\int_M F(\nabla_g u(y))dv_g + C(\epsilon)B\int_M |u|^p dv_g \leq A'\int_{I\!R^n} F_x(\nabla u(y))dy + B'\int_{I\!R^n} |u|^p dy,$$
onde $C(\epsilon) \to 1$ quando $\epsilon \to 0$, $A' < A(p,x)^p$ para ϵ pequeno e $u \in C_0^1(B(0,\delta))$. Note que esta desigualdade vale para todo δ suficientemente pequeno.
Pela desigualdade de Hölder,
$$\int_{B(0,\delta)} |u|^p dy \leq |B(0,\delta)|^{\frac{p}{n}}\left(\int_{B(0,\delta)} |u|^{p^*} dy\right)^{\frac{p}{p^*}},$$
onde $|\cdot|$ denota o volume Euclidiano. Então, para δ suficientemente pequeno,
$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^{p^*} dy\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A''\int_{I\!R^n} F_x(\nabla u)dy,$$
com $A'' < A(p,x)^p$.
Fazendo $u_\lambda = u(\lambda x)$, $\lambda > 0$ e $u \in C_0^1(I\!R^n)$, temos $u_\lambda \in C_0^1(B(0,\delta))$ para λ grande. Daí,
$$\left(\int_{I\!R^n} |u_\lambda|^{p^*} dy\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A''\int_{I\!R^n} F_x(\nabla u_\lambda)dy.$$
Por mudança de variável,
$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^{p^*} dy\right)^{\frac{p}{p^*}} = \lambda^{-\frac{np}{p^*}}\left(\int_{I\!R^n} |u|^{p^*} dy\right)^{\frac{p}{p^*}}$$
e
$$\int_{I\!R^n} F_x(\nabla u)dy = \lambda^{-\frac{np}{p^*}}\int_{I\!R^n} F_x(\nabla u)dy.$$
Portanto
$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^{p^*} dy\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A''\int_{I\!R^n} F_x(\nabla u)dy$$
para toda função $u \in C_0^1(I\!R^n)$. Mas isso contradiz o Teorema 1.2.3, pois $A'' < A(p,x)^p$.
Logo, $A \geq A(p,F)^p$.

■

Os próximos dois resultados são puramente técnicos. Eles darão uma estimativa da função F em relação a soma de vetores em cada espaço tangente.

Lema 2.2.2. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n, $p > 1$ e $F \in \mathcal{F}$. Então existe $\nu > 0$ tal que*

$$F([x, i, v + w]) = F([x, i, v] + [x, i, w]) \leq F([x, i, v]) + \nu|[x, i, v]|^{p-1}|[x, i, w]| + \nu|[x, i, w]|^p.$$

Prova:

Basta provarmos esta desigualdade localmente, ou seja, considere um sistema normal de coordenadas centrado em x. Como estaremos usando uma carta específica, isto é, $(\varphi_i, U_i) = (exp_x^{-1}, B(x, \delta))$, escreveremos simplesmente $F(x, v) = F([x, i, v])$. Sendo $F(x, \cdot)$ diferenciável, temos, pelo teorema do valor médio,

$$F(x, v + w) - F(x, v) = \partial_v F(x, v + \theta w)w \leq |\partial_v F(x, v + \theta w)||w| \leq c_1|v + \theta w|^{p-1}|w|,$$

onde usamos a propriedade da $(p - 1)$ - homogeneidade da função $\partial_v F(x, v)$, em particular, existe $k_4 > 0$ tal que $|\partial_v F(x, v)| \leq k_4|v|^{p-1}$.
Como $\theta \in [0, 1]$, encontramos

$$F(x, v + w) \leq F(x, v) + \nu|v|^{p-1}|w| + \nu|w|^p.$$

E isso conclui o lema. ■

Como uma conseqüência imediata, da p - homogeneidade e convexidade da F em cada espaço tangente, registramos o seguinte corolário:

Corolário 2.2.1. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta e $F \in \mathcal{F}$. Então dado $\epsilon > 0$ temos*

$$F([x, i, v + w]) \leq (1 + \epsilon)F([x, i, v]) + C(\epsilon)F([x, i, w]).$$

A próxima proposição, terá um papel relevante em nossa argumentação durante a prova do resultado principal deste capítulo. Além disso, juntamente com a proposição anterior, ficará estabelecida a relação existente entre as constantes ótimas Euclidiana e Riemanniana, ou seja, $A(p, F)^p = A_0(p, F)$.

Proposição 2.2.3. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Sejam $1 \leq< n$ e $F \in \mathcal{F}$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $B_\epsilon \in I\!R$ tal que*

$$||u||_{p^*}^p \leq (A(p, F)^p + \epsilon)||F(\nabla_g u)||_1 + B_\epsilon ||u||_p^p$$

para toda função $u \in H^{1,p}(M)$.

Prova:

Para quaisquer $x \in M$ e $\lambda > 0$, temos, da expansão (2.10), a existência de $\delta > 0$ tal que

$$(1 - \lambda)\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq (1 + \lambda)\delta_{ij}$$

em um sistema normal de coordenadas centrado em x.
Pelo Lema 2.2.1, com δ menor se necessário,

$$(1 - \lambda)F_x(\nabla u(y)) \leq F(\nabla_g u(y)) \leq (1 + \lambda)F_x(\nabla u(y)),$$

para todo $y \in B(x,\delta)$.
Seja u uma função com suporte em $B(x,\delta)$. Da expansão (2.11), temos $(1-\lambda)dv_g \leq dy \leq (1+\lambda)dv_g$. Destas observações, decorre

$$\left(\int_M |u|^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq C(\lambda)\left(\int_M |u|^{p^*} dy\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq C(\lambda)A(p,x)^p \int_{I\!R^n} F_x(\nabla u(y))dy$$
$$\leq \left(A(p,x)^p + \frac{\epsilon}{2}\right)\int_M F(\nabla_g u(y))dv_g, \qquad (2.17)$$

onde ϵ é dado no enunciado do teorema e $C(\lambda) \to 1$ quando $\lambda \to 0$. Sendo a variedade M compacta, podemos cobrí-la com um número finito de coordenadas normais da forma $(exp_{x_i}^{-1}, B(x_i,\delta))_{i=1,\cdots,k}$ tal que a desigualdade (2.17) seja válida para cada i.
Considere $(\alpha_i)_{i=1,\cdots,k}$ uma partição da unidade suave e subordinada à cobertura $\{B(x_i,\delta)\}_{i=1,\cdots,k}$.
Defina

$$\eta_i = \frac{\alpha_i^{[p]+1}}{\sum_{m=1}^k \alpha_m^{[p]+1}},$$

onde $[p]$ é o maior inteiro que não excede p. Temos que $\eta_i^{\frac{1}{p}} \in C^1(M)$ e η_i tem suporte compacto em $B(x_i,\delta)$ para todo i. Então, para toda função $u \in C^1(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} = \left(\int_M \left(\sum_{i=1}^k \eta_i |u|^p\right)^{\frac{p^*}{p}} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \sum_{i=1}^k \left(\int_M (\eta_i|u|^p)^{\frac{p^*}{p}} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} = \sum_{i=1}^k \left(\int_M |\eta_i^{\frac{1}{p}} u|^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}.$$

Da desigualdade (2.17),

$$\left(\int_M |u|^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \max_i\{A(p,x_i)^p + \frac{\epsilon}{2}\}\sum_{i=1}^k \int_M F(\nabla_g(\eta_i^{\frac{1}{p}})u + \eta_i^{\frac{1}{p}}\nabla_g u)dv_g.$$

Por outro lado, do Lema 2.2.2,

$$\left(\int_M |u|^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \max_i\{A(p,x_i)^p + \frac{\epsilon}{2}\}\int_M \sum_{i=1}^k \left(\eta_i F(\nabla_g u) + \nu|\nabla_g u|^{p-1}|\nabla_g(\eta_i^{\frac{1}{p}})|\eta_i^{\frac{p-1}{p}}|u| + \nu|\nabla_g(\eta_i^{\frac{1}{p}})|^p|u|^p\right)dv_g.$$

Como $|\nabla_g(\eta_i^{\frac{1}{p}})| \leq c$ que juntamente com a desigualdade de Hölder, temos

$$\left(\int_M |u|^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}$$
$$\leq \max_i\{A(p,x_i)^p + \frac{\epsilon}{2}\}\left(\int_M F(\nabla_g u)dv_g + \nu kc\left(\int_M |\nabla_g u|^p dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}} + \nu kc^p \int_M |u|^p dv_g\right).$$

Sendo $A(p,x_i) \leq A(p,F)$ para todo i, da propriedade (H.1) e mais a desigualdade de Young, isto é, $a^{p-1}b \leq \frac{p-1}{p}\mu a^p + C(\mu)b^p$ onde $\mu > 0$ e $C(\mu) = \frac{1}{\mu^{p-1}p}$, aplicados na desigualdade acima, deduzimos

$$\left(\int_M |u|^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}$$

$$\leq \left(A(p,F)^p + \frac{\epsilon}{2}\right)\left(\int_M F(\nabla_g u)dv_g + \frac{\nu kc}{k_1}\frac{p-1}{p}\mu\int_M F(\nabla_g u)dv_g + \nu kcC(\mu)\int_M |u|^p dv_g + \nu kc^p\int_M |u|^p dv_g\right).$$

Agora escolha $\epsilon_0 > 0$ tal que $\left(A(p,F)^p + \frac{\epsilon}{2}\right)(1+\epsilon_0) \leq A(p,F)^p + \epsilon$ e $\mu = \frac{p\epsilon_0 k_1}{\nu(p-1)kc}$, então

$$||u||_{p^*}^p \leq (A(p,F)^p + \epsilon)\,||F(\nabla_g u)||_1 + B_\epsilon ||u||_p^p,$$

onde $B_\epsilon = \nu k(cC(\mu) + c^p)$. Isto conclui a proposição.

■

Nesta proposição fazendo $\epsilon \to 0$ temos que $B_\epsilon \to \infty$. Portanto para provarmos a desigualdade ótima, iremos tomar outro caminho.

2.3 Validade da desigualdade de Sobolev

Agora vamos provar a validade da desigualdade de Sobolev Riemanniana ótima.

Teorema 2.3.1. *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ e $F \in \mathcal{F}$. Suponha que existe $x_0 \in M$ tal que para todo $y \in M$ e algum sistema normal de coordenadas centrado em y, tenhamos*

$$A(p,x_0)^p \int_{B(y,\delta)} F_{x_0}(\nabla u)dx \leq A(p,F)^p \int_{B(y,\delta)} F(\nabla_g u)(1 + cd_g(y,x)^2)dx \tag{2.18}$$

para toda função $u \in C_0^1(B(y,\delta))$, para algum c independente de y, onde $0 < \delta < i(M)$ e d_g a distância na métrica g. Então, se $1 < p \leq 2$, existe $B = B(p,g,M) \in I\!R$ tal que

$$||u||_{p^*}^p \leq A(p,F)^p ||F(\nabla_g u)||_1 + B||u||_p^p,$$

para toda função $u \in D^{1,p}(M)$.

Prova:

A prova será por contradição, ou seja, para todo $\alpha > 0$, suponha que

$$\inf_{u\in\mathcal{H}} J_\alpha(u) < A(p,F)^{-p},$$

onde $\mathcal{H} = \{u \in D^{1,p}(M); ||u||_{p^*} = 1\}$ e

$$J_\alpha(u) = \int_M F(\nabla_g u)dv_g + \alpha\int_M |u|^p dv_g.$$

Pela Proposição A.2, existe $u_\alpha \in \mathcal{H}$ tal que

$$J_\alpha(u_\alpha) = \nu_\alpha, \tag{2.19}$$

onde $\nu_\alpha = \inf_{u\in\mathcal{H}} J_\alpha(u)$. Como $\nabla_g|u_\alpha(x)| = \pm\nabla_g u_\alpha(x)$ *q.t.p.* e F é par, podemos assumir $u_\alpha \geq 0$. Então, a equação de Euler-Lagrange para a função u_α é

$$\frac{1}{p}\int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g h dv_g + \alpha\int_M u_\alpha^{p-1} h dv_g = \nu_\alpha \int_M u_\alpha^{p^*-1} h dv_g, \tag{2.20}$$

onde $h \in C^1(M)$.
Da Proposição A.4, temos que $u_\alpha \in C^{1,\lambda}(M)$, onde $0 < \lambda < 1$.

Estaremos denotando por $c > 0$, as várias constantes que aparecerem durante a prova deste teorema e são independentes de α.
A prova deste teorema é longa e técnica, por isto será conveniente dividí-la em passos para que a argumentação fique mais clara.

Passo 1

Como conseqüência de (2.19) temos:
(i) $\nu_\alpha \to A(p,F)^{-p}$

(ii) $\alpha||u_\alpha||_p^p \to 0$
quando $\alpha \to \infty$.

Prova:

Da igualdade (2.19), temos

$$\int_M F(\nabla_g u_\alpha)dv_g + \alpha \int_M u_\alpha^p dv_g = \nu_\alpha. \tag{2.21}$$

A hipótese de absurdo, isto é, $\nu_\alpha = \inf_{u \in \mathcal{H}} J_\alpha(u) < A(p,F)^{-p}$, implica

$$\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g < A(p,F)^{-p},$$

logo

$$\int_M u_\alpha^p dv_g \to 0. \tag{2.22}$$

A Proposição 2.2.3 mais a igualdade (2.21) implicam que

$$1 \leq (\epsilon + A(p,F)^p)\nu_\alpha + B_\epsilon \int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Logo,

$$\frac{1}{(\epsilon + A(p,F)^p)} \leq \nu_\alpha + c \int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Aplicando o limite (2.22), nesta desigualdade, obtemos

$$\liminf_{\alpha \to \infty} \nu_\alpha \geq \frac{1}{(\epsilon + A(p,F)^p)},$$

para todo ϵ. Fazendo $\epsilon \to 0$, temos

$$\liminf_{\alpha \to \infty} \nu_\alpha \geq A(p,F)^{-p}.$$

Por outro lado, a estimativa $\nu_\alpha \leq A(p,F)^{-p}$ implica que

$$\limsup_{\alpha \to \infty} \nu_\alpha \leq A(p,F)^{-p}.$$

Com isto concluímos a prova de (i).

Para mostrar (ii), usaremos a Proposição 2.2.3 juntamente com a igualdade (2.19). Daí,

$$\int_M F(\nabla_g u)dv_g + \alpha \int_M u_\alpha^p dv_g \le \nu_\alpha(A(p,F)^p + \epsilon) \int_M F(\nabla_g u_\alpha)dg + c\int_M u_\alpha^p dv_g.$$

De (2.21), obtemos

$$\int_M F(\nabla_g u_\alpha)dv_g \le \nu_\alpha.$$

Logo,

$$\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g \le (\nu_\alpha(A(p,F)^p + \epsilon) - 1)\nu_\alpha + c\int_M u_\alpha^p dv_g$$

para α suficientemente grande. Portanto,

$$\limsup_{\alpha\to\infty}\left(\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g\right) \le \epsilon A(p,F)^{-2p}.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, concluímos (ii).

$\blacksquare$

Seja $(x_\alpha)_\alpha \subset M$ uma seqüência tal que

$$u_\alpha(x_\alpha) = ||u_\alpha||_\infty. \tag{2.23}$$

Da compacidade da variedade M temos que $x_\alpha \to x_1$, a menos de sub-seqüência.

O próximo passo, estalece uma propriedade a respeito da *concentração de massa* da seqüência $(u_\alpha)_\alpha$ em torno do ponto x_0.

Passo 2

Dado $R > 0$ existe ϵ_R tal que

$$\limsup_{\alpha\to\infty}\left(1 - \int_{B(x_\alpha, R\mu_\alpha)} u_\alpha^{p^*} dv_g\right) \le \epsilon_R,$$

onde $\epsilon_R \to 0$ quando $R \to \infty$ e $\mu_\alpha = ||u_\alpha||_\infty^{\frac{p}{p-n}}$.

Prova:

De (2.19), temos

$$\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g \le \nu_\alpha \int_M u_\alpha^{p^*} dv_g.$$

Por outro lado,

$$\int_M u_\alpha^{p^*} dv_g \le ||u_\alpha||_\infty^{p^*-p} \int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Destas desigualdades, deduzimos que

$$\alpha\mu_\alpha^p \le c. \tag{2.24}$$

Em particular, temos que $\mu_\alpha \to 0$. Seja $\delta < i(M)$. Sem perda de generalidade podemor supor $\delta = 1$. Agora iremos reescalonar a função u_α. Para isto defina

$$g_\alpha(x) = g(exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x)),$$

$$\varphi_\alpha(x) = \mu_\alpha^{\frac{n-p}{p}} u_\alpha(exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x)).$$

De (2.20), é fácil verificar que φ_α satisfaz à equação

$$\frac{1}{p}\int_{B(0,\mu_\alpha^{-1})} \partial_v F(\nabla_{g_\alpha}\varphi_\alpha)\nabla_{g_\alpha} h dv_{g_\alpha} + \alpha\mu_\alpha^p \int_{B(0,\mu_\alpha^{-1})} \varphi_\alpha^{p-1} h dv_{g_\alpha} = \nu_\alpha \int_{B(0,\mu_\alpha^{-1})} \varphi_\alpha^{p^*-1} h dv_{g_\alpha}, \tag{2.25}$$

para toda função $h \in C_0^\infty(B(0,\mu_\alpha^{-1}))$.
Decorre de (2.24) que os coeficientes da equação (2.25) são limitados. Desta limitação e como $0 < \varphi_\alpha \leq 1$, procedendo de maneira análoga à Proposição A.4 e por Tolksdorf [31], temos a seguinte estimativa independente de α

$$||\varphi_\alpha||_{1,\alpha,K} \leq c,$$

onde $K \subset I\!R^n$ é compacto. Logo, $\varphi_\alpha \to \varphi$ em $C^1_{loc}(I\!R^n)$. Como $\mu_\alpha \to 0$ e $x_\alpha \to x_1$, também temos que $dg_\alpha \to dx$ em $C^1_{loc}(I\!R^n)$.
Como conseqüência imediata, destes fatos, temos $\varphi \in D^{1,p}(I\!R^n)$. De fato, por mudança de variável, encontramos

$$\int_{B(0,\mu_\alpha^{-1})} \varphi_\alpha^{p^*} dv_{g_\alpha} = \int_{B(x_\alpha,1)} u_\alpha^{p^*} dv_g \leq 1,$$

logo $\varphi \in L^{p^*}(I\!R^n)$. Usando o ítem (i) do passo 1 e de (H.1), temos

$$k_1 \int_{B(0,\mu_\alpha^{-1})} |\nabla_{g_\alpha}\varphi_\alpha|^p dv_{g_\alpha} \leq \int_{B(0,\mu_\alpha^{-1})} F(\nabla_{g_\alpha}\varphi_\alpha) dv_{g_\alpha} = \int_{B(x_\alpha,1)} F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \leq c,$$

então $|\nabla\varphi| \in L^p(I\!R^n)$.
Como $\varphi_\alpha(0) = 1$ para todo α, segue que $\varphi \not\equiv 0$. Disto e da convergência $\varphi_\alpha \to \varphi$ em $C^1_{loc}(I\!R^n)$, obtemos

$$0 < c \leq \int_{B(0,\mu_\alpha^{-1})} \varphi_\alpha^p dv_{g_\alpha} = \mu_\alpha^{-p} \int_{B(x_\alpha,1)} u_\alpha^p dv_g.$$

Então, usando o ítem (ii) do passo 1, estabelecemos que $\alpha\mu_\alpha^p \to 0$.
Tomando o limite, em α, na equação (2.25) e observando que $\partial_v F(\nabla_{g_\alpha}(\varphi_\alpha(x))) \to \partial_v F_{x_0}(\nabla(\varphi(x)))$ para todo $x \in I\!R^n$, temos

$$\frac{1}{p}\int_{I\!R^n} \partial_v F_{x_0}(\nabla\varphi)\nabla h dx = A(p,F)^{-p} \int_{I\!R^n} \varphi^{p^*-1} h dx$$

para toda $h \in C_0^1(I\!R^n)$.
Agora, usando φ como função teste na equação acima, temos

$$\int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla\varphi) dx = A(p,F)^{-p} \int_{I\!R^n} \varphi^{p^*} dx.$$

Por outro lado, da desigualdade homogênea de Sobolev ótima Euclidiana, segue

$$\int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla\varphi) dx \geq A(p,x_0)^{-p} \left(\int_{I\!R^n} \varphi^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}.$$

Como $A(p,x_0) \leq A(p,F)$ e $\frac{p}{p^*} < 1$,

$$\int_{I\!R^n} \varphi^{p^*} dx \geq 1.$$

Além disto,

$$1 \geq \int_{B(x_\alpha, R\mu_\alpha)} u_\alpha^{p^*} dv_g = \int_{B(0,R)} \varphi_\alpha^{p^*} dv_{g_\alpha}.$$

Daí,

$$\int_{I\!R^n} \varphi^{p^*} dx = 1.$$

Finalmente, por mudança de variável,

$$\int_{B(x_\alpha, R\mu_\alpha)} u_\alpha^{p^*} dv_g = \int_{B(0,R)} \varphi_\alpha^{p^*} dv_{g_\alpha} \to \int_{B(0,R)} \varphi^{p^*} dx.$$

Assim o passo 2 fica concluído.

■

Como último ingrediente para a demonstração deste teorema, vamos obter uma estimativa pontual para a explosão da seqüência $(u_\alpha)_\alpha$.

Passo 3

Seja x_α como definido em (2.23). Então existe $c > 0$ tal que

$$d_g(x, x_\alpha)^{\frac{n-p}{p}} u_\alpha(x) \leq c$$

para todo $x \in M$, onde d_g é a distância na métrica g.

Prova:

Defina $w_\alpha(x) = d_g(x, x_\alpha)^{\frac{n-p}{p}} u_\alpha(x)$ e suponha por contradição que exista uma subseqüência, que continuaremos indexando por α, tal que $||w_\alpha||_\infty \to \infty$. Podemos supor que $(y_\alpha)_\alpha \subset M$ é tal que $w_\alpha(y_\alpha) = ||w_\alpha||_\infty$. Como primeira conseqüência desta hipótese de contradição, temos

$$\frac{d_g(y_\alpha, x_\alpha)}{\mu_\alpha} \to \infty. \tag{2.26}$$

De fato, das definições de w_α e μ_α,

$$w_\alpha(y_\alpha) \leq d_g(y_\alpha, x_\alpha)^{\frac{n-p}{p}} ||u_\alpha||_\infty = \left(\frac{d_g(y_\alpha, x_\alpha)}{\mu_\alpha}\right)^{\frac{n-p}{p}}.$$

Do limite (2.26), vamos mostrar que

$$B(y_\alpha, u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{p-n}}) \cap B(x_\alpha, R\mu_\alpha) = \emptyset, \tag{2.27}$$

onde $R > 0$.

Suponha por contradição que existe z na interseção. Podemos escrever $z = exp_{y_\alpha}(x u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{p-n}})$ para algum $x \in B(0,1)$. Como

$$d_g(y_\alpha, z) = |x u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{p-n}}| \leq u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{p-n}}$$

juntamente com a definição de w_α, temos

$$d_g(x_\alpha, z) \geq d_g(x_\alpha, y_\alpha) - d_g(y_\alpha, z) \geq d_g(x_\alpha, y_\alpha) - u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{p-n}} = u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{p-n}} \left(w(y_\alpha)^{\frac{p}{n-p}} - 1\right).$$

Dado $c < 1$ e como $w_\alpha(y_\alpha) \to \infty$, segue

$$w_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{n-p}} - 1 \geq c w_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{n-p}}$$

para todo α suficientemente grande.
Novamente pela definição de w_α e das desigualdades acima, obtemos

$$d_g(x_\alpha, z) \geq c d_g(x_\alpha, y_\alpha).$$

Por outro lado, como z está na interseção de (2.27), temos $d_g(x_\alpha, z) \leq R\mu_\alpha$. Então

$$d_g(x_\alpha, y_\alpha) \leq \frac{R}{c}\mu_\alpha$$

contradizendo (2.26). Portanto, a igualdade (2.27) segue.

Faremos agora um reescalonamento na função u_α. Defina

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(x) &= u_\alpha(y_\alpha)^{-1} u_\alpha(exp_{y_\alpha}(x u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{p-n}})), \\ l_\alpha(x) &= g(exp_{y_\alpha}(x u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{p-n}})), \end{aligned}$$

onde $x \in B(0,1) \subset I\!R^n$.
De (2.20), temos que ψ_α satisfaz a equação

$$\frac{1}{p}\int_{B(0,1)} \partial_v F(\nabla_{l_\alpha}\psi_\alpha)\nabla_{l_\alpha} h dv_{l_\alpha} + \alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p^2}{p-n}} \int_{B(0,1)} \psi_\alpha^{p-1} h dv_{l_\alpha} = \int_{B(0,1)} \psi_\alpha^{p^*-1} h dv_{l_\alpha}, \tag{2.28}$$

para toda função $h \in C^1(B(0,1))$.
Afirmamos que $\psi_\alpha(x) \leq c$ para todo $x \in B(0,1)$. De fato, pela definição de w_α

$$u_\alpha(y_\alpha) d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{\frac{n-p}{p}} = w_\alpha(y_\alpha) = ||u_\alpha(y) d_g(x_\alpha, y)^{\frac{n-p}{p}}||_\infty \geq u_\alpha(y) d_g(x_\alpha, y)^{\frac{n-p}{p}},$$

para todo $y \in M$.
Como $x \in B(0,1)$, verificamos que $d_g(exp_{y_\alpha}(x u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{p-n}}, y_\alpha) \leq u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{p-n}} \leq c d_g(x_\alpha, y_\alpha)$, onde $c < 1$ e α suficientemente grande.
Daí,

$$\begin{aligned} d_g(x_\alpha, exp_{y_\alpha}(x u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{p-n}}) &\geq d_g(x_\alpha, y_\alpha) - d_g(exp_{y_\alpha}(x u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{p-n}}, y_\alpha) \\ &\geq d_g(x_\alpha, y_\alpha) - c d_g(x_\alpha, y_\alpha) = c d_g(x_\alpha, y_\alpha). \end{aligned}$$

Como conseqüência destas desigualdades,

$$\begin{aligned} u_\alpha(y_\alpha) d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{\frac{n-p}{p}} &\geq u_\alpha(exp_{y_\alpha}(x u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{p-n}})) d_g(x_\alpha, exp_{y_\alpha}(x u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{p-n}}))^{\frac{n-p}{p}} \\ &\geq c\psi_\alpha(x) u_\alpha(y_\alpha) d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{\frac{n-p}{p}}. \end{aligned}$$

Ou seja

$$||\psi_\alpha||_{L^\infty(B(0,1))} \leq c$$

para todo α. Isto prova a afirmação.

Com esta limitação uniforme e usando as mesmas idéias da Proposição A.3, podemos ver que, através da técnica de iteração de Moser,

$$1 = \sup_{B(0,\delta)} \psi_\alpha \leq c \int_{B(0,1)} \psi_\alpha^{p^*} dv_{l_\alpha},$$

para $\delta < 1$.
Da desigualdade acima, o passo 2 e (2.27), obtemos

$$1 = \sup_{B(0,\delta)} \psi_\alpha \leq c \int_{B(0,1)} \psi_\alpha^{p^*} dv_{l_\alpha} = \int_{B(y_\alpha, u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{p-n}})} u_\alpha^{p^*} dv_g \to 0.$$

Esta contradição prova o passo 3.

■

Argumento final

Considere um sistema normal de coodenadas centrado em x_α e $2\delta < i(M)$. Defina $\eta_\alpha = \eta(d_g(x, x_\alpha))$, onde $\eta \equiv 1$ em $[0, \delta)$, $\eta \equiv 0$ em $[2\delta, \infty)$, $0 \leq \eta \leq 1$ e $\eta \in C_0^1(I\!R)$.
Da desigualdade homogênea de Sobolev ótima Euclidiana, temos

$$\left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} (\eta_\alpha u_\alpha)^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A(p, x_0)^p \int_{B(x_\alpha,2\delta)} F_{x_0}(\nabla(u_\alpha \eta_\alpha)) dx,$$

onde $x_0 \in M$.
Da expansão (2.11), segue

$$(1 - c d_g(x, x_\alpha)^2) dv_g \leq dx \leq (1 + c d_g(x, x_\alpha)^2) dv_g. \tag{2.29}$$

Desta desigualdade juntamente com a hipótese (2.18), temos

$$\left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A(p, F)^p \int_{B(x_\alpha,2\delta)} F(\nabla_g(u_\alpha \eta_\alpha)) dv_g + c \int_{B(x_\alpha,2\delta)} F(\nabla_g(u_\alpha \eta_\alpha)) d(x, x_\alpha)^2 dv_g. \tag{2.30}$$

Agora, vamos estimar as duas parcelas do lado direito desta desigualdade.
Do Lema 2.2.2,

$$F(\nabla_g(u_\alpha \eta_\alpha)) = F(\nabla_g \eta_\alpha u_\alpha + \eta_\alpha \nabla_g u_\alpha) \leq F(\nabla_g u_\alpha) \eta_\alpha^p + \nu u_\alpha |\nabla_g \eta_\alpha| \eta_\alpha^{p-1} |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} + \nu u_\alpha^p |\nabla_g \eta_\alpha|^p.$$

Daí,

$$\int_{B(x_\alpha,2\delta)} F(\nabla_g(u_\alpha \eta_\alpha)) dv_g \leq \int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g + c \int_{M \setminus B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dv_g + \int_{M \setminus B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} dv_g.$$

Da igualdade (2.19), temos

$$\int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g = \nu_\alpha - \alpha \int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Substituindo esta igualdade na desigualdade anterior,

$$\int_{B(x_\alpha,2\delta)} F(\nabla_g(u_\alpha \eta_\alpha)) dv_g \leq \nu_\alpha - \alpha \int_M u_\alpha^p dv_g + c \int_M u_\alpha^p dv_g + \int_{M \setminus B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} dv_g. \tag{2.31}$$

Por outro lado, usando o Corolário 2.2.1,

$$F(\nabla_g(\eta_\alpha u_\alpha)) = F(\nabla_g u_\alpha \eta_\alpha + u_\alpha \nabla_g \eta_\alpha) \leq (1+\epsilon)\eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) + C(\epsilon) u_\alpha^p F(\nabla_g \eta_\alpha).$$

Como conseqüência desta desigualdade, verificamos que

$$\int_{B(x_\alpha,2\delta)} F(\nabla_g(u_\alpha \eta_\alpha)) d_g(x,x_\alpha)^2 dv_g \leq c \int_{B(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) d(x,x_\alpha)^2 dv_g + c\int_M u_\alpha^p dv_g. \tag{2.32}$$

Como $\nu_\alpha \leq A(p,F)^{-p}$ e das desigualdades (2.31) e (2.32) aplicadas em (2.30), obtemos

$$A(p,F)^p \alpha \int_M u_\alpha^p dv_g \leq 1 - \left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} + c\int_{M\backslash B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} dv_g$$

$$+c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) d_g(x,x_\alpha)^2 dv_g + c\int_M u_\alpha^p dv_g. \tag{2.33}$$

Agora, vamos majorar o lado direito desta desigualdade.

Primeiro, vamos mostrar que

$$\int_{M\backslash B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} dv_g \leq c\int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Seja $\zeta \in C^1(I\!R)$ tal que $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta \equiv 0$ sobre $[0,\frac{\delta}{2})$ e $\zeta \equiv 1$ sobre $[\delta,\infty)$. Defina a função $\zeta_\alpha(x) = \zeta(d_g(x_\alpha,x))$. Da equação (2.20), usando $\zeta_\alpha^p u_\alpha$ como função teste,

$$\int_M \zeta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \leq \nu_\alpha \int_M \zeta_\alpha^p u_\alpha^{p^*} dv_g - \int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha) \zeta_\alpha^{p-1} \nabla_g \zeta_\alpha u_\alpha dv_g.$$

Da $(p-1)$ - homogeneidade da função $\partial_v F$ vemos que $|\partial_v F(\nabla_g u_\alpha)| \leq c_2 |\nabla_g u_\alpha|^{p-1}$, como $\nu_\alpha \leq A(p,F)^{-p}$ e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_M \zeta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \leq c\int_M \zeta_\alpha^p u_\alpha^{p^*} dv_g + c\left(\int_M \zeta_\alpha^p |\nabla_g u_\alpha|_g^p dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_M u_\alpha^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Combinando (H.1) com a desigualdade de Young com ϵ e aplicando na desigualdade acima, implica que

$$\int_M \zeta^p F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \leq c\int_M \zeta^p u_\alpha^{p^*} dv_g + c\int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Do passo 3,

$$\int_M \zeta_\alpha^p u_\alpha^{p^*} dv_g \leq \int_{M\backslash B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^{p^*} dv_g = \int_{M\backslash B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} (u_\alpha^{\frac{p^*-p}{p}} d_g)^p u_\alpha^p d_g^{-p} dv_g \leq c\int_M u_\alpha^p dv_g. \tag{2.34}$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young, (H.1) e as desigualdades acima, temos

$$\int_{M\backslash B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} dv_g \leq \left(\int_{M\backslash B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{M\backslash B(x_\alpha,\delta)} |\nabla_g u_\alpha|^p dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq c\int_M u_\alpha^p dv_g + c\int_{M\setminus B(x_\alpha,\delta)} F(\nabla_g u_\alpha)dv_g$$

$$\leq c\int_M u_\alpha^p dv_g + c\int_M \zeta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha)dv_g \leq c\int_M u_\alpha^p dv_g. \tag{2.35}$$

E assim, obtemos a primeira estimativa.

Agora, vamos mostrar que

$$1 - \left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq c\int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Usando a hipótese $p \leq 2$, (2.29) e o passo 3, segue

$$\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{p^*} dx \geq \int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{p^*} dv_g - c\int_{B(x_\alpha,\delta)} (u_\alpha^{\frac{p}{n-p}} d(x,x_\alpha))^p u_\alpha^p dv_g \geq \int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{p^*} dv_g - c\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dv_g.$$

Como $\frac{p}{p^*} \leq 1$ e $||u_\alpha||_{p^*} = 1$, temos

$$\left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \geq \left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{p^*} dv_g - c\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \geq \int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{p^*} dv_g - c\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dv_g.$$

Do mesmo raciocínio empregado na obtenção da estimativa (2.34) e novamente usando que $||u_\alpha||_{p^*} = 1$, obtemos

$$1 - \left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq 1 - \int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{p^*} dv_g + c\int_M u_\alpha^p dv_g$$

$$\leq \int_{M\setminus B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{p^*} + c\int_M u_\alpha^p dv_g \leq c\int_M u_\alpha^p dv_g. \tag{2.36}$$

E isso estabelece a segunda estimativa.

Finalmente, vamos mostrar que

$$\int_{B(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) d_g(x,x_\alpha)^2 dv_g \leq c\int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Como d_g é limitada e Lipschitz podemos tomar $\eta_\alpha^p d_g(x,x_\alpha)^2 u_\alpha$ como função teste na equação (2.20). Daí,

$$\int_M \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) d_g(x,x_\alpha)^2 dv_g \leq \nu_\alpha \int_M \eta_\alpha^p d_g(x,x_\alpha)^2 u_\alpha^{p^*} dv_g$$

$$-\int_M u_\alpha \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g \eta_\alpha \eta_\alpha^{p-1} d_g(x,x_\alpha)^2 dv_g - \frac{2}{p}\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha \eta_\alpha^p \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g d_g d_g(x,x_\alpha) dv_g.$$

Tomando α suficientemente grande e pela $(p-1)$ - homogeneidade da função $\partial_v F$,

$$\int_{B(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) d_g(x,x_\alpha)^2 dv_g \leq c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} d_g(x,x_\alpha)^2 u_\alpha^{p^*} dv_g$$

$$+c\int_{M\setminus B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} dv_g + c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha \eta_\alpha^p |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} d_g(x,x_\alpha) dv_g. \tag{2.37}$$

A hipótese $p \leq 2$ e o passo 3, implicam que a primeira parcela do lado direito da desigualdade acima é majorada por:

$$\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^{p^*} d_g(x,x_\alpha)^2 dv_g = \int_{B(x_\alpha,2\delta)} (u_\alpha^{\frac{p}{n-p}} d_g(x,x_\alpha))^p u_\alpha^p dv_g \leq c \int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Agora, usando as desigualdades de Hölder e Young com ϵ e como $p \leq 2$, deduzimos que a terceira parcela do lado direito de (2.37) é majorada por:

$$\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha \eta_\alpha^p |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} d_g(x,x_\alpha) dv_g \leq \int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha \eta_\alpha d_g(x,x_\alpha)^{\frac{2-p}{p}} (\eta_\alpha |\nabla_g u_\alpha| d_g(x,x_\alpha)^{\frac{2}{p}})^{p-1} dv_g$$

$$\leq c \left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} (\eta_\alpha |\nabla_g u_\alpha| d_g(x,x_\alpha)^{\frac{2}{p}})^p dv_g \right)^{\frac{p}{p-1}} \left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq c\epsilon \int_{B(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p |\nabla_g u_\alpha|^p d(x,x_\alpha)^2 dv_g + c \int_M u_\alpha^p dv_g$$

$$\leq c\epsilon \int_{B(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) d_g(x,x_\alpha)^2 dv_g + c \int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Então, como a segunda parcela em (2.37) já calculamos em (2.35), encontramos

$$\int_{B(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) d_g(x,x_\alpha)^2 dv_g \leq c \int_M u_\alpha^p dv_g. \tag{2.38}$$

Substituindo (2.35), (2.36) e (2.38) em (2.33), obtemos

$$\alpha \leq c.$$

Porém, c é independente de α. Esta é a contradição procurada. Portanto, a prova do teorema está completa.

■

Vamos ilustrar o teorema precedente, através de dois exemplos.

Exemplo 2.3.1.

Seja $G : M \to I\!R$ contínua e positiva. Defina $F : TM \to I\!R$ por $F([x,i,v]) = G(x)|[x,i,v]|^p$.
É imediato que $F \in \mathcal{F}$. Além disso, no sistema normal de coordenadas centrado em x e pela expansão (2.11), verificamos que $F_x(v) = G(x)|v|^p$.
Afirmamos que, para todo $x \in M$,

$$A(p,x)^p = \frac{A(p)^p}{G(x)}, \tag{2.39}$$

onde $A(p)$ é definido em (2).
De fato, podemos facilmente verificar, diretamente da transformada de Legendre da função F_x, que

$$F_x^*(v) = \frac{1}{p'} \left(\frac{1}{pG(x)} \right)^{p'-1} |v|^{p'},$$

onde $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.
Do Teorema 1.2.3, temos

$$A(p,x)^{-1}=\frac{||F_x(\nabla w_{F_x}(v))||_1^{\frac{1}{p}}}{||w_{F_x}(v)||_{p^*}},$$

onde $w_{F_x}(v)=(\sigma+\beta F_x^*(v))^{-\frac{n}{p^*}}$. Daí,

$$A(p,x)^{-1}=G(x)^{\frac{1}{p}}\frac{||\nabla w(v)||_1^{\frac{1}{p}}}{||w(v)||_{p^*}}=G(x)^{\frac{1}{p}}A(p)^{-1},$$

onde $w(v)=\left(\sigma+\tilde{\beta}|v|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{-\frac{n}{p^*}}$ e $\tilde{\beta}=\beta\frac{1}{p'}\left(\frac{1}{pG(x)}\right)^{p'-1}$. Isto prova (2.39).
Pela compacidade de M, existe $x_0\in M$ tal que $G(x_0)=\min_{x\in M}G(x)$.
Seja $|[x_0,i,v]|=1$. Defina

$$k_1=F([x_0,i,v])=G(x_0). \tag{2.40}$$

Da expansão (2.10), segue que $|\nabla u(y)|^p\leq(1+cd_g(x,y)^2)|\nabla_g u(y)|^p$ para todo $y\in B(x,\delta)$ e $u\in C_0^1(B(x,\delta))$.
Daí,

$$A(p,x_0)^p\int_{B(x,\delta)}F_{x_0}(\nabla u)dy=A(p)^p\int_{B(x,\delta)}|\nabla u|^p dy\leq A(p)^p\int_{B(x,\delta)}|\nabla_g u|^p(1+cd_g(x,y)^2dy.$$

Como $F([x,i,v])\geq k_1|[x,i,v]|^p$ para todo $[x,i,v]\in TM$, temos

$$A(p,x_0)^p\int_{B(x,\delta)}F_{x_0}(\nabla u)dy\leq\frac{A(p)^p}{k_1}\int_{B(x,\delta)}F(\nabla_g u)(1+cd_g(x,y)^2)dy.$$

As igualdades (2.39) e (2.40) implicam que $\frac{A(p)^p}{k_1}=A(p,x_0)^p\leq A(p,F)^p$. Logo

$$A(p,x_0)^p\int_{B(x,\delta)}F_{x_0}(\nabla u)dy\leq A(p,F)^p\int_{B(x,\delta)}F(\nabla_g u)(1+d_g(x,y)^2)dy.$$

Portanto, a função $F([x,i,v])=G(x)|[x,i,v]|^p$ verifica as hipóteses do Teorema 2.3.1.

O caso clássico provado em [14] e [5], está incluído nesta família de funções, basta tomar $G\equiv 1$.

$\blacksquare$

Exemplo 2.3.2.

Suponha $F\in\mathcal{F}$. Por (H.1) existem constantes $k_1,k_2\in I\!R$, tais que $0<k_1\leq k_2$ e

$$k_1|[x,i,v]|^p\leq F([x,i,v])\leq k_2|[x,i,v]|^p$$

para todo $[x,i,v]\in TM$. Pela compacidade de M, existe $x_0\in M$ tal que $F([x_0,i,v])=k_1$, onde $|[x_0,i,v]|=1$.
Suponha que $F_{|T_{x_0}M}$ seja radial, isto é, $F([x_0,i,v])=k_1$ para todo $|[x_0,i,v]|=1$. Então, a função F satisfaz (2.18) do Teorema 2.3.1. De fato, primeiro note que de modo análogo como obtivemos (2.39), também temos

$$A(p,x_0)^p=\frac{A(p)^p}{k_1}.$$

Desta igualdade e a expansão (2.11), segue

$$A(p,x_0)^p \int_{B(x,\delta)} F_{x_0}(\nabla u)dy \le A(p)^p \int_{B(x,\delta)} |\nabla_g u|^p (1+cd_g(x,y)^2)dy$$

$$\le \frac{A(p)^p}{k_1} \int_{B(x,\delta)} F(\nabla_g u)(1+cd_g(x,y)^2)dy \le A(p,F)^p \int_{B(x,\delta)} F(\nabla_g u)(1+cd_g(x,y)^2)dy$$

para toda função $u \in C_0^1(B(x,\delta))$.
Logo, o Teorema 2.3.1 segue para esta função F.

■

2.4 Não-validade da desigualdade de Sobolev

Nesta seção, vamos mostrar que a hipótese $1 < p \le 2$ do Teorema 2.3.1, em geral, não pode ser removida.

Teorema 2.4.1. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana suave, compacta de dimensão $n \ge 3$. Suponha $p \in (2, \frac{n+2}{3})$, $F \in \mathcal{F}$ e para algum ponto $x_0 \in M$ e algum sistema normal de coordenadas centrado em x_0, tenhamos*

$$F(\nabla_g F_{x_0}^*(y)) = F_{x_0}(\nabla F_{x_0}^*(y)) \quad e \quad A(p,F) = A(p,x_0) \tag{2.41}$$

para todo $y \in B(0,\delta)$. Suponha ainda que

$$\int_{I\!R^n} w_0^{p^*}(y) Ric_{x_0}(y,y)dy > 0, \tag{2.42}$$

onde $w_0(y) = (\sigma + F_{x_0}^*(y))^{-\frac{n}{p^*}}$ sendo $\sigma > 0$ tal que $||w_0||_{p^*} = 1$ e que

$$\nabla F_{x_0}(\nabla F_{x_0}^*(y)) = y \tag{2.43}$$

para todo $y \in I\!R^n$.

Então, qualquer que seja $B \in I\!R$ existe uma função $u_B \in D^{1,p}(M)$ tal que

$$||u_B||_{p^*}^p > A(p,F)^p ||F(\nabla_g u_B)||_1 + B||u_B||_p^p.$$

Prova:

Sejam x_0 e $(exp_{x_0}^{-1}, B(x_0,\delta))$ conforme o enunciado do teorema. Tome $\lambda : I\!R^n \to I\!R$ tal que $\lambda \equiv 1$ em $B(0,\frac{\delta}{2})$, $\lambda \equiv 0$ em $I\!R^n \backslash B(0,\delta)$, λ suave e $0 \le \lambda \le 1$.
Defina $\tilde{u}_\epsilon(x) = \lambda(exp_{x_0}^{-1}(x))u_\epsilon(exp_{x_0}^{-1}(x))$ onde $u_\epsilon(y) = (\epsilon\sigma + F_{x_0}^*(y))^{-\frac{n}{p^*}}$. Então, $\tilde{u}_\epsilon \in D^{1,p}(M)$.
Também considere

$$\mathcal{A}_\epsilon = A(p,F)^p \int_M F(\nabla_g \tilde{u}_\epsilon)dv_g + B\int_M \tilde{u}_\epsilon^p dv_g - \left(\int_M \tilde{u}_\epsilon^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}.$$

Para concluir o teorema, basta mostrar que $\mathcal{A}_\epsilon < 0$ para algum $\epsilon > 0$.
Do Lema 2.2.2,

$$F(\nabla_g(\lambda u_\epsilon)) \le F(\nabla_g u_\epsilon) + c|\lambda \nabla_g u_\epsilon|^{p-1}|\nabla_g \lambda u_\epsilon| + c|u_\epsilon \nabla_g \lambda|^p.$$

Como $\lambda \leq 1$, $|\nabla_g \lambda| \leq c$, $|\nabla u_\epsilon|$ e u_ϵ são uniformemente limitadas em $B(0,\delta)\backslash B(0,\frac{\delta}{2})$, temos

$$\int_{B(0,\delta)} F(\nabla_g(\lambda u_\epsilon))(\det(g))^{\frac{1}{2}} dy \leq \int_{B(0,\frac{\delta}{2})} F(\nabla_g u_\epsilon)(\det(g))^{\frac{1}{2}} dy + c,$$

onde $g = (g^{ij})$.
Da hipótese (2.41), temos

$$\int_{B(0,\frac{\delta}{2})} F(\nabla_g u_\epsilon)(\det(g))^{\frac{1}{2}} dy = \int_{B(0,\frac{\delta}{2})} \left(\frac{n}{p^*}(\epsilon\sigma + F^*_{x_0}(y))^{-\frac{n}{p^*}-1}\right)^p F(\nabla_g F^*_{x_0})(\det(g))^{\frac{1}{2}} dy$$
$$= \int_{B(0,\frac{\delta}{2})} F_{x_0}(\nabla u_\epsilon)(\det(g))^{\frac{1}{2}} dy.$$

Logo,

$$\mathcal{A}_\epsilon \leq A(p,x_0)^p \int_{B(0,\frac{\delta}{2})} F_{x_0}(\nabla u_\epsilon)(\det(g))^{\frac{1}{2}} dy + c + c\int_{B(0,\delta)} (\lambda u_\epsilon)^p (\det(g))^{\frac{1}{2}} dy - \left(\int_{B(0,\delta)} (\lambda u_\epsilon)^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}$$

Da expansão (2.11), deduzimos que

$$(\det(g(y)))^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{6} Ric_{x_0}(y,y) + O(|y|^3)$$

quando $|y| \to 0$.
Portanto,

$$\mathcal{A}_\epsilon \leq A(p,x_0)^p \int_{B(0,\frac{\delta}{2})} F_{x_0}(\nabla u_\epsilon) dy - \frac{A(p,x_0)^p}{6} \int_{B(0,\frac{\delta}{2})} F_{x_0}(\nabla u_\epsilon) Ric_{x_0} dy + c + c\int_{B(0,\delta)} u_\epsilon^p dy$$

$$+c\int_{B(0,\frac{\delta}{2})} F_{x_0}(\nabla u_\epsilon) O(|y|^3) dy - \left[\int_{B(0,\delta)} (\lambda u_\epsilon)^{p^*} dy - \frac{1}{6}\int_{B(0,\delta)} (\lambda u_\epsilon)^{p^*} Ric_{x_0} dy + \int_{B(0,\delta)} (\lambda u_\epsilon)^{p^*} O(|y|^3) dy\right]^{\frac{p}{p^*}}.$$

Fazendo uma mudança de variável juntamente com o teorema do valor médio, temos

$$\mathcal{A}_\epsilon \leq A(p,x_0)^p \int_{B(0,\frac{\delta}{2})} F_{x_0}(\nabla u_\epsilon) dy - \frac{A(p,x_0)^p}{6} \int_{B(0,\frac{\delta}{2})} F_{x_0}(\nabla u_\epsilon) Ric_{x_0} dy$$
$$+c\int_{B(0,\frac{\delta}{2})} F_{x_0}(\nabla u_\epsilon) O(|y|^3) dy + c\int_{B(0,\delta)} u_\epsilon^p dy + c - \epsilon^{\frac{p-n}{p}} \left[\left(\int_{B_{\delta,\epsilon}} (\lambda w_0)^{p^*} dy\right)^{\frac{p}{p^*}}\right.$$
$$\left. +\theta_\epsilon \frac{p}{p^*}\left(-\frac{\epsilon^{\frac{2p-2}{p}}}{6}\int_{B_{\delta,\epsilon}} (\lambda w_0)^{p^*} Ric_{x_0} dy + \epsilon^{\frac{3p-3}{p}} \int_{B_{\delta,\epsilon}} (\lambda w_0)^{p^*} O(|y|^3) dy\right)\right], \tag{2.44}$$

onde $B_{\delta,\epsilon} = B(0, \delta\epsilon^{-\frac{p-1}{p}})$ e $\theta_\epsilon^{-\frac{n}{p}} \in (a_\epsilon, b_\epsilon)$, sendo

$$a_\epsilon = \int_{B_{\delta,\epsilon}} (\lambda w_0)^{p^*} dy - \frac{\epsilon^{\frac{2p-2}{p}}}{6}\int_{B_{\delta,\epsilon}} (\lambda w_0)^{p^*} Ric_{x_0} dy + \epsilon^{\frac{3p-3}{p}} \int_{B_{\delta,\epsilon}} (\lambda w_0)^{p^*} O(|y|^3) dy,$$

$$b_\epsilon = \int_{B_{\delta,\epsilon}} (\lambda w_0)^{p^*} dy.$$

Agora, vamos estimar cada integral na desigualdade acima. Por mudança de variável, obtemos

$$\int_{B(0,\frac{\delta}{2})} F_{x_0}(\nabla u_\epsilon) dy = \epsilon^{-\frac{n}{p^*}} \int_{B_{\frac{\delta}{2},\epsilon}} F_{x_0}(\nabla w_0) dy \leq \epsilon^{\frac{p-n}{p}} \int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla w_0) dy. \tag{2.45}$$

Do Lema 1.2.2,

$$F_{x_0}(\nabla w_0) = \left(\frac{n}{p^*}\right)^p \left[(\sigma + F^*_{x_0}(y))^{-\frac{n}{p^*}-1}\right]^p F_{x_0}(\nabla F^*_{x_0}) = \left(\frac{n}{p^*}\right)^p \left[(\sigma + F^*_{x_0}(y))^{-\frac{n}{p^*}-1}\right]^p \frac{1}{p-1} F^*_{x_0}.$$

Da p' - homogeneidade da função $F^*_{x_0}$, temos $k_3|y|^{p'} \leq F^*_{x_0}(y) \leq k_4|y|^{p'}$ para todo $y \in I\!R^n$ e k_3, k_4 independetes de ϵ. Disto, obtemos

$$c(\sigma + k_4|y|^{\frac{p}{p-1}})^{-n} k_3|y|^{\frac{p}{p-1}} \leq F_{x_0}(\nabla w_0) \leq c(\sigma + k_3|y|^{\frac{p}{p-1}})^{-n} k_4|y|^{\frac{p}{p-1}}. \tag{2.46}$$

Como Ric_{x_0} é uma função 2 - homogênea e de (2.46), temos

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,\frac{\delta}{2})} F_{x_0}(\nabla u_\epsilon) Ric_{x_0} dy &= \int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla u_\epsilon) Ric_{x_0} dy - \int_{I\!R^n \setminus B(0,\frac{\delta}{2})} F_{x_0}(\nabla u_\epsilon) Ric_{x_0} dy \\
&\geq \epsilon^{\frac{-n+3p-2}{p}} \int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla w_0) Ric_{x_0} dy - c. \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Note que

$$\int_{I\!R^n \setminus B(0,\frac{\delta}{2})} F_{x_0}(\nabla u_\epsilon) Ric_{x_0} dy \leq c < \infty$$

para $p < \frac{n+2}{3}$ e esta estimativa é independente de ϵ .
Por mudança de variável e (2.46), vemos que

$$\left| \int_{B(0,\frac{\delta}{2})} F_{x_0}(\nabla u_\epsilon) O(|y|^3) dy \right| \leq c\epsilon^{\frac{4p-n-3}{p}} + c. \tag{2.48}$$

Assim, concluímos as estimativas gradiente.

Agora, vamos estimar a norma L^p. Fazendo uma mudança de variável, encontramos

$$\int_{B(0,\delta)} u_\epsilon^p dy \leq c\epsilon^{\frac{p^2-n}{p}} \left(1 + \int_a^{\delta\epsilon^{\frac{1-p}{p}}} r^{\frac{p^2-n}{p-1}-1} dr\right),$$

onde $a > 0$. Então ficamos com dois casos:

$$\left.\begin{array}{l}
1) \text{ se } \frac{p^2-n}{p-1} \neq 0 \ \Rightarrow \int_{B(0,\delta)} u_\epsilon^p dy \leq c\epsilon^{\frac{p^2-n}{p}}(1 + \epsilon^{\frac{n-p^2}{p}}), \\[2ex]
2) \text{ se } \frac{p^2-n}{p-1} = 0 \ \Rightarrow \int_{B(0,\delta)} u_\epsilon^p dy \leq c\epsilon^{\frac{p^2-n}{p}}(1 - \log(\epsilon))
\end{array}\right\} = \mathcal{C}_{p,\epsilon} \tag{2.49}$$

Por último, vamos estimar a norma L^{p^*}. Da p' - homogeneidade da $F^*_{x_0}$ e como $p < \frac{n+2}{3}$, encontramos

$$\left| \int_{B_{\delta,\epsilon}} (\lambda w_0)^{p^*} O(|y|^3) dy \right| \leq c. \tag{2.50}$$

Analogamente, temos

$$\int_{B_{\delta,\epsilon}} (\lambda w_0)^{p^*} Ric_{x_0} dy \leq \int_{I\!R^n} w_0^{p^*} Ric_{x_0} dy. \tag{2.51}$$

Como

$$\int_{B_{\delta,\epsilon}} (\lambda w_0)^{p^*} dy \geq \int_{B_{\frac{\delta}{2},\epsilon}} w_0^{p^*} dy \geq \int_{I\!R^n} w_0^{p^*} dy - c\epsilon^{\frac{n}{p}},$$

obtemos

$$\left(\int_{B_{\delta,\epsilon}} (\lambda w_0)^{p^*} dy \right)^{\frac{p}{p^*}} \geq \left(\int_{I\!R^n} w_0^{p^*} dy \right)^{\frac{p}{p^*}} - c\epsilon^{\frac{n}{p}}. \tag{2.52}$$

Reunindo todas as estimativas de (2.45) até (2.52) em (2.44), temos

$$\mathcal{A}_\epsilon \leq A(p,x_0)^p \ \epsilon^{\frac{p-n}{p}} \int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla w_0) dy - \frac{A(p,x_0)^p}{6} \epsilon^{\frac{-n+3p-2}{p}} \int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla w_0) Ric_{x_0} dy + c$$

$$+ c\, \mathcal{C}_{p,\epsilon} - \epsilon^{\frac{p-n}{p}} \left[\left(\int_{I\!R^n} w_0^{p^*} dy \right)^{\frac{p}{p^*}} - c\epsilon^{\frac{n}{p}} - \frac{p}{p^*} \frac{\theta_\epsilon}{6} \epsilon^{\frac{2(p-1)}{p}} \int_{I\!R^n} w_0^{p^*} Ric_{x_0} dy - c\epsilon^{\frac{3p-3}{p}} \right].$$

Como w_0 é uma função extremal para F_{x_0}, segue que

$$A(p,x_0)^p \int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla w_0) dy = \left(\int_{I\!R^n} w_0^{p^*} dy \right)^{\frac{p}{p^*}}.$$

Usando esta igualdade na desigualdade acima, obtemos

$$\mathcal{A}_\epsilon \leq \epsilon^{\frac{3p-n-2}{p}} \Bigg(- \frac{A(p,x_0)^p}{6} \int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla w_0) Ric_{x_0} dy + \frac{\theta_\epsilon}{6} \frac{p}{p^*} \int_{I\!R^n} w_0^{p^*} Ric_{x_0} dy$$

$$+ c\epsilon^{\frac{n-3p+2}{p}} + c\epsilon^{\frac{p-1}{p}} + c\mathcal{C}_{p,\epsilon}\ \epsilon^{\frac{n-3p+2}{p}} \Bigg).$$

Como $p < \frac{n+2}{3}$ temos que $\epsilon^{\frac{n-3p+2}{p}} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Também temos $\mathcal{C}_{p,\epsilon}\epsilon^{\frac{n-3p+2}{p}} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$ pois $p > 2$ e $p < \frac{n+2}{3}$.

Portanto, para concluirmos o teorema, basta mostrar que

$$\mathcal{B} = -A(p,x_0)^p \int_{I\!R^n} F(\nabla w_0) Ric_{x_0} dy + \int_{I\!R^n} w_0^{p^*} Ric_{x_0} dy < 0,$$

pois $\theta_\epsilon \frac{p}{p^*} < 1$ uma vez que $\theta_\epsilon \to 1$.

Como F_{x_0} é de classe C^1 e w_0 uma função extremal, então, argumentando via método variacional, temos que w_0 satisfaz a equação

$$\frac{A(p,x_0)^p}{p} \int_{I\!R^n} F(\nabla w_0) \nabla h dy = \int_{I\!R^n} w_0^{p^*-1} h dy \tag{2.53}$$

para toda função $h \in C_0^1(I\!R^n)$. Seja φ_j uma função suave satisfazendo: $\varphi_j \equiv 1$ em $B(0,j)$, $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $\varphi_j \equiv 0$ em $B(0,2j)^c$, $j \in I\!N$ e $|\nabla \varphi_j| \leq \frac{c}{j}$. Tomando $h_j = w_0 Ric_{x_0} \varphi_j$ como função teste em (2.53), temos

$$A(p,x_0)^p \int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla w_0) Ric_{x_0} \varphi_j dy + \frac{A(p,x_0)^p}{p} \int_{I\!R^n} \nabla F_{x_0}(\nabla w_0) \nabla Ric_{x_0} w_0 \varphi_j dy$$

$$+\frac{A(p,x_0)^p}{p}\int_{I\!R^n}\nabla F_{x_0}(\nabla w_0)\nabla\varphi_j w_0 Ric_{x_0}dy=\int_{I\!R^n} w_0^{p^*}Ric_{x_0}\varphi_j dy. \tag{2.54}$$

Nosso próximo passo, será tomar o limite em j nesta igualdade. Para isto, vamos primeiro calcular separadamente alguns limites.

Como ∇Ric_{x_0} é 1 - homogênea e ∇F_{x_0} é $(p-1)$ - homogênea, obtemos

$$|\nabla F_{x_0}(\nabla w_0)\nabla Ric_{x_0}|\le c|\nabla w_0|^{p-1}|y|.$$

Por cálculo direto, encontramos

$$\nabla w_0=-\frac{n}{p^*}(\sigma+F^*_{x_0}(y))^{-\frac{n}{p^*}-1}\nabla F^*_{x_0}(y). \tag{2.55}$$

Esta igualdade juntamente com a $(p'-1)$ - homogeneidade da função $\nabla F^*_{x_0}(y)$ implicam que

$$|\nabla F_{x_0}(\nabla w_0)\nabla Ric_{x_0}w_0|\le c(\sigma+F^*_{x_0}(y))^{-(\frac{n}{p^*}+1)(p-1)}|y|^2 w_0.$$

Da hipótese $p<\frac{n+2}{3}$, obtemos que

$$(\sigma+F^*_{x_0}(y))^{-(\frac{n}{p^*}+1)(p-1)}|y|^2 w_0$$

é integrável em $I\!R^n$. Desta observação e do teorema da convergência dominada de Lebesgue, deduzimos

$$\int_{I\!R^n}\nabla F_{x_0}(\nabla w_0)\nabla Ric_{x_0}w_0\varphi_j dy\to\int_{I\!R^n}\nabla F_{x_0}(\nabla w_0)\nabla Ric_{x_0}w_0 dy \tag{2.56}$$

quando $j\to\infty$.

Por outro lado, como Ric_{x_0} é 2 - homogênea e usando a $(p-1)$ - homogeneidade da função ∇F_{x_0}, temos que

$$|\nabla F_{x_0}(\nabla w_0)\nabla\varphi_j Ric_{x_0}|\le\frac{c}{j}|\nabla w_0|^{p-1}|y|^2.$$

Usando a $(p'-1)$ - homogeneidade da função $\nabla F^*_{x_0}$ e (2.55), segue

$$|\nabla F_{x_0}(\nabla w_0)\nabla\varphi_j Ric_{x_0}|\le\frac{c}{j}((\sigma+F^*_{x_0}(y))^{-\frac{n}{p}}|y|^{\frac{1}{p-1}})^{p-1}|y|^2=\frac{c}{j}(\sigma+F^*_{x_0}(y))^{-\frac{n}{p}(p-1)}|y|^3.$$

Logo

$$\begin{aligned}\left|\int_{I\!R^n}\nabla F_{x_0}(\nabla w_0)\nabla\varphi_j w_0 Ric_{x_0}dy\right| &\le\frac{c}{j}\int_{B(0,2j)\setminus B(0,j)}(\sigma+F^*_{x_0}(y))^{-\frac{n}{p}(p-1)-\frac{n}{p^*}}|y|^3dy\\ &\le\frac{c}{j}\int_j^{2j}\int_{S_r}|y|^{\frac{p(-n+1)}{p-1}}|y|^3dS(y)dr\le cj^{\frac{3p-2-n}{p-1}}.\end{aligned}$$

Da hipótese $p<\frac{n+2}{3}$,

$$\lim_{j\to\infty}\int_{I\!R^n}\nabla F_{x_0}(\nabla w_0)\nabla\varphi_j w_0 Ric_{x_0}dy=0. \tag{2.57}$$

Portanto, tomando o limite na equação (2.54), usando (2.56) e (2.57), temos

$$A(p,x_0)^p\int_{I\!R^n}F_{x_0}(\nabla w_0)Ric_{x_0}dy+\frac{A(p,x_0)^p}{p}\int_{I\!R^n}\nabla F_{x_0}(\nabla w_0)\nabla Ric_{x_0}w_0dy=\int_{I\!R^n}w_0^{p^*}Ric_{x_0}dy. \tag{2.58}$$

Da igualdade (2.55), obtemos

$$\nabla F_{x_0}(\nabla w_0) = \left(\frac{n}{p^*}\right)^{p-1} (\sigma + F^*_{x_0}(y))^{-\frac{n}{p}(p-1)} \nabla F_{x_0}(-\nabla F^*_{x_0}(y)).$$

A hipótese (2.43) e a simetria de F_{x_0} implicam que $\nabla F_{x_0}(-\nabla F^*_{x_0}(y)) = -y$. Como Ric_{x_0} é 2 - homogênea segue que $\nabla Ric_{x_0}(y,y)y = 2Ric_{x_0}(y,y)$. Aplicando estas igualdades em (2.58), temos

$$\int_{I\!R^n} \nabla F_{x_0}(\nabla w_0)\nabla Ric_{x_0}(y,y) w_0 dy = -2\left(\frac{n}{p^*}\right)^{p-1} \int_{I\!R^n} (\sigma + F^*_{x_0}(y))^{-\frac{n}{p}(p-1)} Ric_{x_0} w_0 dy$$

$$= -2\left(\frac{n}{p^*}\right)^{p-1} \int_{I\!R^n} (\sigma + F^*_{x_0}(y)) Ric_{x_0} w_0^{p^*} dy.$$

Do Lema 1.2.2 e como F_{x_0} é par,

$$F_{x_0}(\nabla w_0) = \left(\frac{n}{p^*}\right)^{p} (\sigma + F^*_{x_0}(y))^{-n} F_{x_0}(\nabla F^*_{x_0}(y)) = \frac{1}{p-1}\left(\frac{n}{p^*}\right)^{p} w_0^{p^*} F^*_{x_0}(y),$$

ou seja

$$F^*_{x_0}(y) w_0^{p^*} = (p-1)\left(\frac{p^*}{n}\right)^{p} F_{x_0}(\nabla w_0).$$

Substituindo esta identidade na igualdade acima, encontramos

$$\int_{I\!R^n} \nabla F_{x_0}(\nabla w_0)\nabla Ric_{x_0}(y,y) w_0 dy$$

$$= -2\sigma\left(\frac{n}{p^*}\right)^{p-1} \int_{I\!R^n} w_0^{p^*} Ric_{x_0} dy - 2(p-1)\frac{p^*}{n}\int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla w_0) Ric_{x_0} dy. \tag{2.59}$$

Então, da igualdade (2.58),

$$A(p,x_0)^p\left[1 - \frac{2}{n-p}(p-1)\right]\int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla w_0) Ric_{x_0} dy = \left(1 + 2\sigma\frac{A(p,x_0)^p}{p}\left(\frac{n}{p^*}\right)^{p-1}\right)\int_{I\!R^n} w_0^{p^*} Ric_{x_0} dy,$$

ou ainda

$$A(p,x_0)^p\left(\frac{n-3p+2}{n-p}\right)\int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla w_0) Ric_{x_0} dy = c\int_{I\!R^n} w_0^{p^*} Ric_{x_0} dy,$$

onde $c > 0$. Como $p < \frac{n+2}{3} \Rightarrow \frac{n-3p+2}{n-p} > 0$ que juntamente com a hipótese (2.42) nos dá

$$\int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla w_0) Ric_{x_0} dy > 0. \tag{2.60}$$

Então, desta desigualdade, juntamente com (2.59) e (2.58), temos

$$\mathcal{B} = \frac{A(p,x_0)^p}{p}\left(-2\sigma\left(\frac{n}{p^*}\right)^{p-1}\int_{I\!R^n} w_0^{p^*} Ric_{x_0} dy - 2(p-1)\frac{p^*}{n}\int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla w_0) Ric_{x_0} dy\right) < 0.$$

Assim, concluímos o teorema.

■

Observação 2.4.1.

Seja $F \in \mathcal{F}$ uma função radial em cada espaço tangente. Então, a função w_x também é radial pois F_x^* é radial, onde w_x é a função extremal da desigualdade homogênea de Sobolev ótima relativa à função F_x, isto é,

$$||w_x||_{p^*}^p = A(p,x)^p ||F_x(\nabla w_x)||_1.$$

A curvatura escalar é uma média da curvatura de Ricci, ou seja

$$Scal(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} Ric_x(y,y)dS(y),$$

onde ω_{n-1} é a área da esfera unitária S^{n-1} de $I\!R^n$.
Portanto

$$\int_{I\!R^n} w_x^{p^*} Ric_x(y,y)dy = \int_0^\infty w_x^{p^*}(r) r^{n+1} dr \int_{S^{n-1}} Ric_x(y,y)dS(y) = \omega_{n-1} Scal(x) \int_0^\infty w_x^{p^*} r^{n+1} dr.$$

Neste caso supor

$$\int_{I\!R^n} w_x^{p^*}(y) Ric_x(y,y)dy > 0,$$

é equivalente a supor $Scal(x) > 0$.
Então, o caso clássico em que $F([x,i,v]) = |[x,i,v]|^p$ tratado por Druet em [13] está inserido em nosso teorema.

Observação 2.4.2. *Um comentário sobre a hipótese* (2.43) *do Teorema* 2.4.1.

Quando F é de classe C^2 em R^n e estritamente convexa temos, pela Proposição 3.8 de [1], que $\nabla F(\nabla F^*(y) = y$ para todo $y \in I\!R^n$. Logo, a hipótese (2.43) é satisfeita para esta classe de funções.

No entanto, a família de normas $F_\mu(y) = \frac{1}{p}|y|_\mu^p$ para $1 < \mu < \infty$ onde $|y|_\mu = (\sum_{i=1}^n y_i^\mu)^{\frac{1}{\mu}}$ não é de classe C^2 em todo $I\!R^n$. Mas ainda assim, podemos verificar que $\nabla F_\mu(\nabla F_\mu^*(y) = y$ para todo $y \in I\!R^n$. De fato, pelo Lema 1.3.1 temos que $F_\mu^*(y) = \frac{1}{p'} (\sum_{i=1}^n y_i^\nu)^{\frac{p'}{\nu}}$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Então,

$$\nabla F_\mu(y) = |y|_\mu^{p-\mu} \left(|y_1|^{\mu-2} y_1, \cdots, |y_n|^{\mu-2} y_n \right),$$

e também

$$\nabla F_\mu^*(y) = |y|_\nu^{p'-\nu} \left(|y_1|^{\nu-2} y_1, \cdots, |y_n|^{\nu-2} y_n \right).$$

Por cálculo direto, temos

$$\nabla F_\mu(\nabla F_\mu^*(y)) = y.$$

O caso limite falha. De fato, quando $\mu = 1$, temos $F_1(y) = |y|_1^p$, onde $|y|_1 = \frac{1}{p} (\sum_{i=1}^n |y_i|)^p$. Note que neste caso F_1 não é estritamente convexa. O Lema 1.3.1 implica que $F_1^*(y) = \frac{1}{p'}|y|_\infty^{p'}$, onde $|y|_\infty = \sup\{|y_i|, i = 1, \cdots, n\}$. Conside a região de $I\!R^n$ onde $y_i > 0$ para todo $i = 1, \cdots, n$ e $y_1 > y_i$ para todo $i = 2, \cdots, n$. Nesta região, verificamos que $\nabla F_1(y) = |y|_1^{p-1}(1, \cdots, 1)$ e $\nabla F_1^*(y) = |y|_\infty^{p'-1}(1, 0, \cdots, 0)$.
Portanto $\nabla F_1(\nabla F_1^*(y)) = y_1(1, \cdots, 1) \neq y$.

Exemplo 2.4.1.

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1, satisfazendo $\nabla f(\nabla f^*(y)) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$ e as propriedades (P.1), (P.2), (P.3) e (P.4). Defina $F : TM \to \mathbb{R}$ por $F([x,i,v]) = f((\phi_x^{-1}([x,i,v]))$, onde $\phi_x : \mathbb{R}^n \to T_xM$ é um isomorfismo que leva a base ortonormal canônica de $\mathbb{R}^n$ em uma base ortonormal $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\}_{i=1,\cdots,n}$, dada pelo produto interno $g(x)$ e (M,g) é uma variedade Riemanniana compacta.
Seja $w(y) = (\sigma + f^*(y))^{-\frac{n}{p^*}}$, onde $\sigma > 0$ é tomado de modo que $||w||_{p^*} = 1$ e f^* é a transformada de Legendre da f. Suponha que existe $x_0 \in M$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} w^{p^*} Ric_{x_0} dy > 0.$$

Então, a desigualdade homogênea de Sobolev ótima não é válida para esta função F, quando $2 < p < \frac{n+2}{3}$. De fato, na carta $(exp_x^{-1}, B(x,\delta))$, temos que $\phi_x = Id$, logo $A(p,x_1) = A(p,x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in M$, isto segue direto da definição de F_{x_i} com $i = 1,2$. Para aplicarmos o Teorema 2.4.1 só falta verificar a hipótese (2.41). Passemos a verificar (2.41). No que segue, representaremos por x o ponto $x \in B(x_0,\delta) \subset M$ o vetor $exp_{x_0}^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n$. Pela definição da função F temos, na carta $(exp_{x_0}^{-1}, B(x_0,\delta))$, que $F_{x_0} = f$ em $\mathbb{R}^n$, logo $F_{x_0}^* = f^*$. Pela regra da cadeia e pela definição da função F, temos

$$F(\nabla_g F_{x_0}^*(x)) = F(\nabla_g f^*(x)) = F(\nabla f^*(x) Dexp_{x_0}^{-1}(x)) = F(\nabla f^*(x) D(exp_{x_0}^{-1} \circ exp_x)(0)) = f(\nabla f^*(x)).$$

Portanto

$$F(\nabla_g F_{x_0}^*(x)) = F_{x_0}(\nabla F_{x_0}(x))$$

para todo $x \in B(x_0,\delta)$.
Daí, F verifica todas as hipóteses do Teorema 2.4.1. Quando $f(y) = |y|^p$, temos o caso clássico tratado por Druet [13].

Capítulo 3

Desigualdade homogênea de Gagliardo-Nirenberg ótima Riemanniana

3.1 Introdução

Suponha $F \in \mathcal{F}$. Para cada $x \in M$, a função $F_x : I\!R^n \to I\!R$ satisfaz (P.1), (P.2), (P.3) e (P.4), onde F_x foi definida em (2.13). Sejam $q < r < p^*$ e $1 < p < n$. Do Teorema 1.2.2, podemos considerar a desigualdade homogênea de Gagliardo-Nirenberg ótima

$$||u||_r \leq A(p,q,r,x)||F_x(\nabla u)||_1^{\frac{\theta}{p}}||u||_q^{1-\theta}$$

para toda função $u \in D^{p,q}(I\!R^n)$, onde $\theta = \frac{np(r-q)}{r(q(p-n)+np)}$ e a constante ótima é definida por

$$A(p,q,r,x)^{-1} = \inf_{\substack{u \in D^{p,q}(I\!R^n) \\ ||u||_r = 1}} ||F_x(\nabla u)||_1^{\frac{\theta}{p}}||u||_q^{1-\theta}. \tag{3.1}$$

Defina

$$A(p,q,r,F) = \sup_{x \in M}\{A(p,q,r,x)\}. \tag{3.2}$$

Considere a desigualdade homogênea de Gagliardo-Nirenberg ótima Riemanniana

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq \left(A_0(p,q,r,F)\int_M F(\nabla_g u)dv_g + B\int_M |u|^p dv_g\right)\left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}. \tag{3.3}$$

Neste capítulo, iremos estudar duas questões. A primeira será mostrar que a constante ótima $A_0(p,q,r,F)$ da desigualdade (3.3) está relacionada com a constante ótima Euclidiana, ou seja, argumentando por partição da unidade, veremos que $A_0(p,q,r,F) = A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}}$. A segunda, muito mais delicada, será estudar a desigualdade ótima (3.3).

Desigualdades do tipo (3.3) foram primeiramente estudadas por Brouttelande [9] no caso clássico ($F([x,i,v]) = ||[x,i,v]|^p$) quando $p = 2$ e $1 \leq q \leq 2 \leq r \leq 2 + \frac{2q}{n}$ e $\theta = \frac{2n(r-q)}{r(n(2-q)+2q)} < \frac{2}{r}$. Neste capítulo, provamos a validade de uma nova classe de desigualdades ótimas (Teorema 3.2.1) distinta de

[9]. No Teorema 3.3.1 obtivemos uma nova classe de desigualdades de Gagliardo-Nirenberg ótimas distinta daquela dada no Teorema 3.2.1. Em particular, generalizamos [9] quando $r = 2$.
Tomando $r = \frac{p(q-1)}{p-1}$, conseguimos explicitar a constante $A(p, q, \frac{p(q-1)}{p-1}, F)$ da desigualdade ótima (3.3), ou seja

$$A(p, q, \frac{p(q-1)}{p-1}, F) = ||F_{x_0}(\nabla w_{p,q})||_1^{\frac{\theta}{p}} ||w_{p,q}||_q^{1-\theta},$$

onde

$$w_{p,q} = \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1} F_{x_0}^*(x)\right)^{-\frac{p-1}{q-p}},$$

sendo $\sigma > 0$ tal que $||w_{p,q}||_r = 1$ e $x_0 \in M$ satisfazendo determinada propriedade a ser explicitada.

3.2 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg com ϵ

Nosso primeiro resultado é clássico no estudo de melhores constantes em variedades. Vamos estabelecer uma cota inferior para a melhor constante A.

Proposição 3.2.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Suponha $F \in \mathcal{F}$, $1 < p < n$ e para toda função $u \in C^1(M)$,*

$$||u||_r^{\frac{p}{\theta}} \leq \left(A||F(\nabla_g u)||_1 + B||u||_p^p\right) ||u||_q^{1-\theta}, \tag{3.4}$$

onde $1 \leq q < r < p^*$ e $\theta = \frac{np(r-q)}{r(q(p-n)+np)}$. Então $A \geq A(p, q, r, F)^{\frac{p}{\theta}}$.

Prova:
Suponha por contradição que $A < A(p, q, r, F)^{\frac{p}{\theta}}$. Então existe $x_0 \in M$ tal que $A < A(p, q, r, x_0)^{\frac{p}{\theta}}$. Dado $\epsilon > 0$, pela expansão (2.11), existe $\delta > 0$ tal que

$$(1-\epsilon)dx \leq dv_g \leq (1+\epsilon)dx \tag{3.5}$$

em um sistema normal de coordenadas. Pelo Lema 2.2.1, tomando δ menor se necessário,

$$(1-\epsilon)F_{x_0}(\nabla u(x)) \leq F(\nabla_g u(x)) \leq (1+\epsilon)F_{x_0}(\nabla u(x)) \tag{3.6}$$

para todo $x \in B(x_0, \delta)$.
Das observações acima e da hipótese (3.4), temos

$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^r dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq C(\epsilon) \left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{r\theta}}$$

$$\leq C(\epsilon) \left(A \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B \int_M |u|^p dv_g\right) \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

$$\leq C(\epsilon) A \int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla u) dx \left(\int_{I\!R^n} |u|^q dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} + c \int_M |u|^p dv_g \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}},$$

onde $C(\epsilon) \to 1$ quando $\epsilon \to 0$ e $u \in C_0^1(B(x_0, \delta))$.

Pela desigualdade de Hölder,

$$\int_M |u|^p dv_g \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} \leq \left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{r}} \left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta r}} \mathrm{Vol}(B(x_0,\delta))^{\frac{r-p}{r}+\frac{r-q}{r}\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

$$= \left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{\theta r}} \mathrm{Vol}(B(x_0,\delta))^{C(p,q,r)}.$$

Desta desigualdade e por (3.5), (3.6), com δ suficientemente pequeno, obtemos

$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^r dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq A' \int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla u) dx \left(\int_{I\!R^n} |u|^q dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} \tag{3.7}$$

para toda $u \in C_0^1(B(x_0,\delta))$ e $A' < A(p,q,r,x_0)^{\frac{p}{\theta}}$.
Conside uma função $u \in C_0^1(I\!R^n)$. Podemos escolher um número $\lambda > 0$, suficientemente grande, de tal modo que $u_\lambda(x) = u(\lambda x) \in C_0^1(B(x_0,\delta))$.
Usando esta função u_λ e promovendo uma mudança de variável em (3.7), temos que

$$\lambda^{-\frac{np}{r\theta}} \left(\int_{I\!R^n} |u|^r dy\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq A' \lambda^{\frac{q\theta(p-n)-np(1-\theta)}{\theta q}} \int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla u) dy \left(\int_{I\!R^n} |u|^q dy\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}.$$

Pela definição de θ é fácil ver que $\frac{q\theta(p-n)-np(1-\theta)}{\theta q} = -\frac{np}{r\theta}$, logo

$$\left(\int_{I\!R^n} |u|^r dy\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq A' \int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla u) dy \left(\int_{I\!R^n} |u|^q dy\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

para toda função $u \in C_0^1(I\!R^n)$. Como $A' < A(p,q,r,x_0)^{\frac{p}{\theta}}$, temos uma contradição com o Teorema 1.2.2. Daí, concluímos a prova da proposição.

■

Juntando esta proposição com a próxima, fica estabelecida a igualdade $A_0(p,q,r,F) = A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}}$.

Proposição 3.2.2. *Suponha (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Então dado $\epsilon > 0$ existe $B_\epsilon \in I\!R$ tal que para toda função $u \in C^1(M)$, temos*

$$||u||_r^{\frac{p}{\theta}} \leq \left((A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} + \epsilon)||F(\nabla_g u)||_1 + B_\epsilon ||u||_p^p\right) ||u||_q^{\frac{p(1-\theta)}{\theta}},$$

onde $F \in \mathcal{F}$ e p,q,r,θ são como na proposição anterior.

Prova:
Pela expansão (2.11), dados $\epsilon' > 0$ e $x_0 \in M$ existe $\delta > 0$ tal que

$$(1-\epsilon')dx \leq dv_g \leq (1+\epsilon')dx$$

no sistema normal de coordenadas $(exp_{x_0}^{-1}, B(x_0,\delta))$. Do Lema 2.2.1, supondo δ menor se necessário,

$$(1-\epsilon')F_{x_0}(\nabla u(x)) \leq F(\nabla_g u(x)) \leq (1+\epsilon')F_{x_0}(\nabla u(x)),$$

para todo $x \in B(x_0, \delta)$.

Destes fatos e da desigualdade homogênea de Gagliardo-Nirenberg ótima Euclidiana, deduzimos que

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq C(\epsilon')\left(\int_{I\!R^n} |u|^r dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq C(\epsilon')A(p,q,r,x_0)^{\frac{p}{\theta}} \int_{I\!R^n} F_{x_0}(\nabla u)dx \left(\int_{I\!R^n} |u|^q dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta p}}$$

$$\leq \left((A(p,q,r,x_0)^{\frac{p}{\theta}} + \lambda\right)\int_M F(\nabla_g u)dv_g \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta p}},$$

para algum $\lambda = \lambda(\epsilon') \to 0$ e $C(\epsilon') \to 1$ quando $\epsilon' \to 0$ e toda função $u \in C_0^1(B(x_0,\delta))$.

Da compacidade de M, existem $x_i \in M$ e $\delta > 0$ $i = 1, \cdots, k$, tais que $M \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \delta)$.

Tomando uma partição da unidade $(\alpha_i)_{i=1,\cdots,k}$ associada à cobertura $(B(x_i,\delta))$, defina

$$\eta_i = \frac{\alpha_i^{[p]+1}}{\sum_{m=1}^k \alpha_m^{[p]+1}}.$$

Repetindo a argumentação anterior, juntamente com estas novas informações, verificamos que

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{r}} = \left(\int_M \left(\sum_{i=1}^k \eta_i |u|^p\right)^{\frac{r}{p}} dv_g\right)^{\frac{p}{r}}$$

$$\leq \sum_{i=1}^k \left(\int_M (\eta_i |u|^p)^{\frac{r}{p}} dv_g\right)^{\frac{p}{r}} = \sum_{i=1}^k \left(\int_M (\eta_i^{\frac{1}{p}} |u|)^r dv_g\right)^{\frac{p}{r}}$$

$$\leq \sum_{i=1}^k \left[\left(A(p,q,r,x_i)^{\frac{p}{\theta}} + \lambda_i\right)\int_M F(\nabla_g(\eta_i^{\frac{1}{p}} u))dv_g \left(\int_M |\eta_i^{\frac{1}{p}} u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}\right]^{\theta}, \tag{3.8}$$

com $\lambda_i = \lambda_i(\epsilon') \to 0$ quando $\epsilon' \to 0$.

Por outro lado, do Lema 2.2.2,

$$\int_M F(\nabla_g(\eta_i^{\frac{1}{p}} u))dv_g = \int_M F(\nabla_g u \eta_i^{\frac{1}{p}} + \nabla_g(\eta_i^{\frac{1}{p}})u)dv_g$$

$$\leq \int_M \eta_i F(\nabla_g u)dv_g + c\int_M |\nabla_g u|^{p-1} |\nabla_g(\eta_i^{\frac{1}{p}})| \eta_i^{\frac{p-1}{p}} |u| dv_g + c\int_M |\nabla_g(\eta_i^{\frac{1}{p}})|^p |u|^p dv_g.$$

Pelas desigualdades de Hölder e Young com ϵ' e também usando a propriedade (H.1), temos

$$\int_M F(\nabla_g(\eta_i^{\frac{1}{p}} u))dv_g \leq \int_M \eta_i F(\nabla_g u)dv_g + c\epsilon' \int_M F(\nabla_g u)dv_g + c\int_M |u|^p dv_g.$$

Aplicando esta desigualdade em (3.8), encontramos

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{r}} \leq \sum_{i=1}^k \Bigg[\left(A(p,q,r,x_i)^{\frac{p}{\theta}} + \lambda_i\right)$$

$$\times \left(\int_M \eta_i F(\nabla_g u)dv_g + c\epsilon' \int_M F(\nabla_g u)dv_g + c\int_M |u|^p dv_g\right)\left(\int_M |\eta_i^{\frac{1}{p}} u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}\Bigg]^{\theta}. \tag{3.9}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $||u||_q \neq 0$.

Agora dividiremos a prova em dois casos.

Considere $\frac{q}{p} \geq 1$, então $\eta_i^{\frac{q}{p}} \leq \eta_i$. Daí,

$$\left(\int_M \eta_i^{\frac{q}{p}} |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{q}} \leq \left(\int_M \eta_i |u|^q dv_g\right)^{1-\theta} \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{(\frac{p}{q}-1)(1-\theta)}.$$

Pela desigualdade de Hölder, segue que $\sum_i a_i^\theta b_i^{1-\theta} \leq \left(\sum_i a_i\right)^\theta \left(\sum_i b_i\right)^{1-\theta}$.

Substituindo as duas desigualdades acima em (3.9), deduzimos que

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{r}} \leq \left(\max_i \{A(p,q,r,x_i)^{\frac{p}{\theta}} + \lambda_i\}\right)^\theta \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{(\frac{p}{q}-1)(1-\theta)}$$

$$\times \sum_{i=1}^k \left(\int_M \eta_i F(\nabla_g u) dv_g + c\epsilon' \int_M F(\nabla_g u) dv_g + c\int_M |u|^p dv_g\right)^\theta \left(\int_M \eta_i |u|^q dv_g\right)^{1-\theta}$$

$$\leq \left(\max_i \{A(p,q,r,x_i)^{\frac{p}{\theta}} + \lambda_i\}\right)^\theta \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{(\frac{p}{q}-1)(1-\theta)}$$

$$\times \left(\int_M F(\nabla_g u) dv_g + ck\epsilon' \int_M F(\nabla_g u) dv_g + kc\int_M |u|^p dv_g\right)^\theta \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{1-\theta}.$$

Ou seja

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{\theta r}}$$

$$\leq \left(\max_i \{A(p,q,r,x_i)^{\frac{p}{\theta}} + \lambda_i\}\right) \left((1+kc\epsilon')\int_M F(\nabla_g u) dv_g + c\int_M |u|^p dv_g\right) \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}.$$

Desta desigualdade, e como $A(p,q,r,x_i) \leq A(p,q,r,F)$ para todo i, obtemos

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{\theta r}} \leq \left(A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} + \lambda\right) \left[(1+c\epsilon')\int_M F(\nabla_g u) dv_g + c\int_M |u|^p dv_g\right] \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}},$$

onde $\lambda = \max_i\{\lambda_i\}$.

Seja $\epsilon > 0$ conforme o enunciado deste teorema, vamos escolher ϵ' suficientemente pequeno de modo que $\left(A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} + \lambda\right)(1+c\epsilon') = A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} + \epsilon$, lembre que $\lambda = \lambda(\epsilon') \to 0$ quando $\epsilon' \to 0$.

Portanto

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq \left[\left(A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} + \epsilon\right)\int_M F(\nabla_g u) dv_g + B_\epsilon \int_M |u|^p dv_g\right] \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}.$$

Considere o caso restante, ou seja, $\frac{q}{p} < 1$.

Da desigualdade de Hölder,

$$\int_M \eta_i^{\frac{q}{p}} |u|^q dv_g \leq \left(\int_M \eta_i |u|^q dv_g\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{1-\frac{q}{p}}.$$

Procedendo de maneira análoga ao primeiro caso, verificamos

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{r}} \leq \left(\max_i\{A(p,q,r,x_i)^{\frac{p}{\theta}} + \lambda_i\}\right)^{\theta} \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p-q}{q}(1-\theta)}$$

$$\times \sum_{i=1}^{k} \left(\int_M \eta_i F(\nabla_g u) dv_g + c\epsilon' \int_M F(\nabla_g u) dv_g + c\int_M |u|^p dv_g\right)^{\theta} \left(\int_M \eta_i |u|^q dv_g\right)^{1-\theta}.$$

Novamente usando a desigualdade de Hölder para a soma, e com a mesma argumentação usada no primeiro caso, concluímos a proposição.

■

3.3 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para $q \geq p$

De posse das proposições anteriores, estamos em condições de estabelecer a validade da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg ótima.

Teorema 3.3.1. *Sejam $1 < p \leq 2$, $p \leq q < r < p^*$ e $F \in \mathcal{F}$. Suponha que existe $x_0 \in M$ tal que para todo ponto $y \in M$, existe um sistema normal de coordenadas centrado em $y \in M$ e para qualquer função $u \in C_0^1(B(y,\delta))$,*

$$A(p,q,r,x_0)^{\frac{p}{\theta}} \int_{B(y,\delta)} F_{x_0}(\nabla u(x))dx \leq A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} \int_{B(y,\delta)} F(\nabla_g u(x))(1 + c d_g(x,y)^2)dx, \tag{3.10}$$

onde $\theta = \frac{np(r-q)}{r(q(p-n)+np)}$ e c é uma constante positiva independente de y.

Então existe $B = B(p,q,r,g,M) \in I\!R$ tal que para toda função $u \in D^{p,q}(M)$, temos

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq \left(A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B\int_M |u|^p dv_g\right) \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}. \tag{3.11}$$

Prova:

Para cada $\alpha > 0$, considere o seguinte funcional

$$J_\alpha(u) = \left(\int_M F(\nabla_g u) dv_g + \alpha \int_M |u|^p dv_g\right) \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}},$$

e o conjunto

$$\mathcal{H} = \{u \in D^{p,q}(M); ||u||_r = 1\}.$$

Suponha, por contradição, que não existe B tal que a desigualdade ótima (3.11) é válida. Então,

$$\nu_\alpha = \inf_{u \in \mathcal{H}} J_\alpha(u) < A(p,q,r,F)^{-\frac{p}{\theta}}. \tag{3.12}$$

Da Proposição A.5, existe $u_\alpha \in \mathcal{H}$ tal que

$$\inf_{u \in \mathcal{H}} J_\alpha(u) = J_\alpha(u_\alpha) = \nu_\alpha. \tag{3.13}$$

Como $\nabla_g|u_\alpha| = \pm\nabla_g u_\alpha$ no sentido $q.t.p.$ em relação a x e F é par, podemos assumir que $u_\alpha \geq 0$. Então, a equação de Euler-Lagrange para u_α é dada por

$$\frac{A_\alpha}{p}\int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g h dv_g + \alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^{p-1} h dv_g + \frac{1-\theta}{\theta} B_\alpha \int_M u_\alpha^{q-1} h dv_g = \mu_\alpha \int_M u_\alpha^{r-1} h dv_g, \tag{3.14}$$

onde

$$\begin{cases} \mu_\alpha = \frac{\nu_\alpha}{\theta}, \\ A_\alpha = \left(\int_M u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}, \\ B_\alpha = \left(\int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g + \alpha \int_M u_\alpha^p dv_g\right)\left(\int_M u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}-1}, \end{cases}$$

e para toda função $h \in C^1(M)$. Da Proposição A.4, segue que $u_\alpha \in C^{1,\lambda}(M)$ para algum $\lambda \in (0,1)$.

Convencionaremos que as várias constantes que aparecerem ao longo da prova e que não dependem de α serão denotadas simplesmente por c.

Passo 1

As primeiras conseqüências da equação (3.14) são:

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \to A(p,q,r,F)^{-\frac{p}{\theta}} \\ \text{(b)} \quad \mu_\alpha \to \frac{A(p,q,r,F)^{-\frac{p}{\theta}}}{\theta} \\ \text{(c)} \quad \alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g \to 0 \\ \text{(d)} \quad B_\alpha \int_M u_\alpha^q dv_g \to A(p,q,r,F)^{-\frac{p}{\theta}}, \end{cases} \tag{3.15}$$

quando $\alpha \to \infty$.

Para mostrarmos o ítem (a), usaremos a hipótese de absurdo (3.12), a igualdade (3.13) e da p - homogeneidade da função F temos $\partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g u_\alpha = pF(\nabla_g u_\alpha)$. Daí

$$\alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g \leq c \Rightarrow A_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g \to 0. \tag{3.16}$$

Por outro lado, da hipótese de contradição, temos

$$\nu_\alpha = A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g + \alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g < A(p,q,r,F)^{-\frac{p}{\theta}}.$$

Logo

$$\limsup_{\alpha\to\infty}\left(A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g\right) \leq A(p,q,r,F)^{-\frac{p}{\theta}}.$$

Da Proposição 3.2.2,

$$1 \leq \left((A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} + \epsilon)\int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g + B_\epsilon \int_M u_\alpha^p dv_g\right) A_\alpha.$$

Como $A_\alpha ||u_\alpha||_p^p \to 0$, por (3.16), obtemos

$$(A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} + \epsilon)\liminf_{\alpha\to\infty}\left(A_\alpha \int_M F(\nabla u_\alpha) dv_g\right) \geq 1.$$

Sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, o ítem (a) fica provado.

Novamente por (3.13) e (3.12), temos

$$A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \leq \nu_\alpha \leq A(p,q,r,F)^{-\frac{p}{\theta}}.$$

Tomando o limite em α na desigualdade acima e usando a definição de μ_α juntamente com o ítem (a), temos (b).

Por (3.13) e (3.12), temos

$$A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g + \alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g < A(p,q,r,F)^{-\frac{p}{\theta}}.$$

Aplicando o ítem (a) nesta desigualdade temos (c).

A definição de B_α implica que

$$B_\alpha \int_M u_\alpha^q dv_g = A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g + \alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Desta desigualdade, juntamente com os ítens (a) e (c), segue (d).

■

Seja $x_\alpha \in M$ um ponto de máximo da função u_α, ou seja

$$u_\alpha(x_\alpha) = ||u_\alpha||_\infty. \tag{3.17}$$

A prova deste teorema é longa e técnica. Com o intuito de torná-la mais clara é conveniente organizar a argumentação em lemas.

Passo 2

Lema 3.3.1. *Denotemos por* $D_\alpha = B(x_\alpha, (A_\alpha ||u_\alpha||_\infty^{p-r})^{1/p})$. *Então*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left(\frac{\int_{D_\alpha} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \right) > 0.$$

Prova:

Usando (3.13), temos

$$\alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g \leq c \int_M u_\alpha^r dv_g \leq c ||u_\alpha||_\infty^{r-p} \int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Esta desigualdade implica que

$$\alpha A_\alpha ||u_\alpha||_\infty^{p-r} \leq c. \tag{3.18}$$

Em particular temos que $A_\alpha ||u_\alpha||_\infty^{p-r} \to 0$. Agora iremos fazer um reescalonamento na função u_α. Defina

$$h_\alpha(x) = g(exp_{x_\alpha}(x(A_\alpha ||u_\alpha||_\infty^{p-r})^{1/p}),$$

$$\omega_\alpha(x) = ||u_\alpha||_\infty^{-1} u_\alpha(exp_{x_\alpha}(x(A_\alpha ||u_\alpha||_\infty^{p-r})^{1/p})),$$

onde $x \in B(0,1)$.

Por (3.14) segue que ω_α satisfaz a seguinte equação

$$\frac{1}{p}\int_{B(0,1)} \partial_v F(\nabla_{h_\alpha}\omega_\alpha)\nabla_{h_\alpha} h dv_{h_\alpha} + \alpha A_\alpha ||u_\alpha||_\infty^{p-r}\int_{B(0,1)} \omega_\alpha^{p-1} h dv_{h_\alpha} + \frac{1-\theta}{\theta} B_\alpha ||u_\alpha||_\infty^{q-r}\int_{B(0,1)} \omega_\alpha^{q-1} h dv_{h_\alpha}$$

$$= \mu_\alpha \int_{B(0,1)} \omega_\alpha^{r-1} h dv_{h_\alpha},$$

para toda função $h \in C_0^1(B(0,1))$.

Primeramente, vamos mostrar que os coeficientes desta equação são limitados. Procedendo de modo análogo à (3.18) obtemos que $B_\alpha ||u_\alpha||_\infty^{q-r} \le c$. Por definição, a seqüência ω_α é uniformemente limitada, ou seja, $||\omega_\alpha||_\infty \le 1$.

Destas limitações e por (3.18), segue por Tolksdorf [31] que $\omega_\alpha \to \omega$ em $C^1_{loc}(B(0,1)))$.

Afirmamos que

$$1 \le ||u_\alpha||_\infty^{r-q} A_\alpha^{\frac{\theta q}{p(1-\theta)}} \le c. \tag{3.19}$$

De fato. A expansão (2.10) implica que $dv_{h_\alpha} \ge c dx$. Então

$$\int_{B(0,1)} \omega_\alpha^r dv_{h_\alpha} \ge c\int_{B(0,\delta)} \omega_\alpha^r dx \to c\int_{B(0,\delta)} \omega^r dx > 0,$$

onde $\delta < 1$.

Por outro lado,

$$\int_{B(0,1)} \omega_\alpha^r dv_{h_\alpha} = ||u_\alpha||_\infty^{-r}(A_\alpha ||u_\alpha||_\infty^{p-r})^{-\frac{n}{p}} \int_{D_\alpha} u_\alpha^r dv_g.$$

Da definição de θ, temos que $\frac{\theta q}{p(1-\theta)} = \frac{n(r-q)}{np+rp-nr}$, combinada com as duas observações acima deduzimos que

$$c \ge ||u_\alpha||_\infty^{\frac{np+rp-nr}{p}} A_\alpha^{\frac{n}{p}} = \left(||u_\alpha||_\infty^{\frac{np+rp-nr}{p}\frac{\theta q}{p(1-\theta)}} A_\alpha^{\frac{n}{p}\frac{\theta q}{p(1-\theta)}}\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} = \left(||u_\alpha||_\infty^{r-q} A_\alpha^{\frac{\theta q}{p(1-\theta)}}\right)^{\frac{n(1-\theta)}{\theta q}}.$$

Como $||u_\alpha||_r = 1$ e pela definição de A_α, temos

$$1 = \int_M u_\alpha^r dv_g \le ||u_\alpha||_\infty^{r-q} A_\alpha^{\frac{\theta q}{p(1-\theta)}}.$$

Destas desigualdades, encontramos (3.19).

Agora vamos concluir o lema. Pela definição de A_α e por mudança de variável,

$$\int_{B(0,1)} \omega_\alpha^q dv_{h_\alpha} = ||u_\alpha||_\infty^{-q}(A_\alpha ||u_\alpha||_\infty^{p-r})^{-\frac{n}{p}} \int_{D_\alpha} u_\alpha^q dv_g = ||u_\alpha||_\infty^{\frac{nr-pq-np}{p}} A_\alpha^{-\frac{n}{p}+\frac{\theta q}{p(1-\theta)}} \frac{\int_{D_\alpha} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g}$$

$$= \left(||u_\alpha||_\infty^{r-q} A_\alpha^{(-\frac{n}{p}+\frac{\theta q}{p(1-\theta)})\frac{p(r-q)}{nr-pq-np}}\right)^{\frac{nr-pq-np}{p(r-q)}} \frac{\int_{D_\alpha} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g}.$$

Pela definição de θ, temos que $\left(-\frac{n}{p}+\frac{q\theta}{p(1-\theta)}\right)\frac{p(r-q)}{nr-pq-np} = \frac{q\theta}{p(1-\theta)}$ juntamente com a convergência $\omega_\alpha \to \omega$ em $C^1_{loc}(B(0,1))$ e a cota (3.19) aplicadas na igualdade acima, obtemos

$$0 < c < \frac{\int_{D_\alpha} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g}.$$

$\blacksquare$

Para simplificar a notação, podemos supor sem perda de generalidade que $i(M) > 1$.
O próximo lema nos garante que a "massa total" de u_α se concentra em torno de x_α quando $\alpha \to \infty$.

Lema 3.3.2. *Seja $(c_\alpha)_\alpha$ uma seqüência de números positivos tal que* $\frac{\left(A_\alpha \|u_\alpha\|_\infty^{p-r}\right)^{\frac{1}{p}}}{c_\alpha} \to 0$. *Então*

$$\frac{\int_{B(x_\alpha,c_\alpha)} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \to 1$$

quando $\alpha \to \infty$.

Prova:

Seja $\eta \in C_0^1(I\!R)$ tal que $\eta \equiv 1$ em $[0, \frac{1}{2}]$, $\eta \equiv 0$ em $[1, \infty)$ e $0 \le \eta \le 1$. Defina $\eta_{\alpha,k} = \eta(c_\alpha^{-1} d_g(x, x_\alpha))^{\tau^k}$, onde $\tau = \frac{p^*}{q}$. Tomando $u_\alpha \eta_{\alpha,k}^r$ como função teste na equação (3.14), temos

$$A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta_{\alpha,k}^r dv_g + \frac{A_\alpha}{p}\int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha) u_\alpha \nabla_g(\eta_{\alpha,k}^r) dv_g + \alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^p \eta_{\alpha,k}^r dv_g + \frac{1-\theta}{\theta} B_\alpha \int_M u_\alpha^q \eta_{\alpha,k}^r dv_g$$
$$= \mu_\alpha \int_M u_\alpha^r \eta_{\alpha,k}^r dv_g. \tag{3.20}$$

Pela desigualdade de Hölder, $(p-1)$ - homogeneidade da função $\partial_v F$ e (H.1),

$$\left| A_\alpha \int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha) u_\alpha \nabla_g(\eta_{\alpha,k}^r) dv_g \right| \le c A_\alpha \left(\int_M |\nabla_g u_\alpha|^p dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B(x_\alpha,c_\alpha)} u_\alpha^p |\nabla_g \eta_{\alpha,k}|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le c\left(A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(A_\alpha \int_{B(x_\alpha,c_\alpha)} u_\alpha^p |\nabla_g \eta_{\alpha,k}|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $|\nabla_g \eta_{\alpha,k}| \le \frac{c}{c_\alpha}$ e pelo ítem (a) de (3.15), segue

$$\left| A_\alpha \int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha) u_\alpha \nabla_g(\eta_{\alpha,k}^r) dv_g \right| \le \frac{c}{c_\alpha}\left(A_\alpha \int_{B(x_\alpha,c_\alpha)} u_\alpha^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.21}$$

Novamente, usando a desigualdade de Hölder, encontramos

$$\int_{B(x_\alpha,c_\alpha)} u_\alpha^p dv_g \le \left(\int_M u_\alpha^r dv_g\right)^{\frac{p}{r}} \left(\int_{B(x_\alpha,c_\alpha)} 1 dv_g\right)^{1-\frac{p}{r}}.$$

Como

$$\int_{B(x_\alpha,c_\alpha)} 1 dv_g \le c c_\alpha^n$$

e

$$\int_M u_\alpha^r dv_g = 1,$$

temos

$$\int_{B(x_\alpha,c_\alpha)} u_\alpha^p dv_g \le c c_\alpha^{n\left(\frac{r-p}{r}\right)}.$$

Logo, desta estimativa, (3.19) e a definição de θ,

$$\frac{1}{c_\alpha^p} A_\alpha \int_{B(x_\alpha, c_\alpha)} u_\alpha^p dv_g \leq c \left(\frac{||u_\alpha||_\infty^{(q-r)\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}}{c_\alpha^{\frac{rp-nr+np}{r}}} \right) = c \left(\frac{||u_\alpha||_\infty^{-\frac{r}{n}}}{c_\alpha} \right)^{\frac{rp-nr+np}{r}}. \tag{3.22}$$

Por (3.19), temos $||u_\alpha||_\infty^{-\frac{r}{n}} \leq \left(A_\alpha ||u_\alpha||_\infty^{p-r} \right)^{\frac{1}{p}}$. Daí, pela hipótese, $\frac{||u_\alpha||_\infty^{-\frac{r}{n}}}{c_\alpha} \to 0$. Como $r < \frac{np}{n-p}$ verificamos que $rp - nr + np > 0$. Destas observações e (3.22) aplicadas em (3.21), temos

$$\left| A_\alpha \int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha) u_\alpha \nabla_g (\eta_{\alpha,k}^r) dv_g \right| \to 0, \tag{3.23}$$

quando $\alpha \to \infty$.
Usando este fato, os ítens (b) e (d) de (3.15) e tomando o limite na igualdade (3.20), obtemos

$$\lim_{\alpha\to\infty} \left(A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) \eta_{\alpha,k}^r dv_g \right) + \frac{1-\theta}{\theta} A(p,q,r,F)^{-\frac{p}{\theta}} \lim_{\alpha\to\infty} \left(\frac{\int_M u_\alpha^q \eta_{\alpha,k}^r dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \right)$$

$$= \frac{A(p,q,r,F)^{-\frac{p}{\theta}}}{\theta} \lim_{\alpha\to\infty} \int_M u_\alpha^r \eta_{\alpha,k}^r dv_g. \tag{3.24}$$

Por outro lado, usando $\eta_{\alpha,k} u_\alpha$ na Proposição 3.2.2, temos

$$\left(\int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^r dv_g \right)^{\frac{p}{r\theta}}$$

$$\leq \left((A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} + \epsilon) \int_M F(\nabla_g(\eta_{\alpha,k} u_\alpha)) dv_g + B_\epsilon \int_M \eta_{\alpha,k}^p u_\alpha^p dv_g \right) \left(\int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^q dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}.$$

Aplicando o Lema 2.2.2 na desigualdade acima combinado com a definição de A_α, segue

$$\left(\int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^r dv_g \right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq (A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} + \epsilon) \int_M F(\nabla_g u_\alpha) \eta_{\alpha,k}^p dv_g \left(\int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^q dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

$$+ c A_\alpha \int_M (|\nabla_g u_\alpha| \eta_{\alpha,k})^{p-1} |u_\alpha \nabla_g \eta_{\alpha,k}| dv_g + c A_\alpha \int_M |\nabla_g \eta_{\alpha,k} u_\alpha|^p dv_g + c A_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g. \tag{3.25}$$

Por (3.23), temos

$$A_\alpha \int_M (|\nabla_g u_\alpha| \eta_{\alpha,k})^{p-1} |u_\alpha \nabla_g \eta_{\alpha,k}| dv_g \to 0.$$

Da igualdade (3.22) também temos

$$A_\alpha \int_M |\nabla_g \eta_{\alpha,k}|^p u_\alpha^p dv_g \to 0.$$

Tomando os limites em α na desigualdade (3.25) em seguida em ϵ, combinado com as convergências acima e o ítem (c) de (3.15), obtemos

$$\lim_{\alpha\to\infty} \left(\int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^r dv_g \right)^{\frac{p}{r\theta}}$$

$$\leq A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} \lim_{\alpha\to\infty}\left(A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta^p_{\alpha,k} dv_g\right) \lim_{\alpha\to\infty}\left(\frac{\left(\int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{q\theta}}}{A_\alpha}\right). \tag{3.26}$$

Considere as seguintes notações:

$$\begin{cases} \lambda_k = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_M u_\alpha^q \eta^r_{\alpha,k} dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g}, \\ \tilde\lambda_k = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_M (u_\alpha \eta_{\alpha,k})^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g}, \\ X_k = \lim_{\alpha\to\infty}\left(A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta^r_{\alpha,k} dv_g\right), \\ Y_k = \lim_{\alpha\to\infty}\left(A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta^p_{\alpha,k} dv_g\right), \\ Z_k = \lim_{\alpha\to\infty} \int_M u_\alpha^r \eta^r_{\alpha,k} dv_g. \end{cases}$$

Então (3.24) e (3.26) podem ser reescritos como:

$$\begin{cases} X_k + \frac{1-\theta}{\theta} A(p,q,r,F)^{-\frac{p}{\theta}}\lambda_k = \frac{A(p,q,r,F)^{-\frac{p}{\theta}}}{\theta} Z_k, \\ Z_k^{\frac{p}{r\theta}} \leq A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} Y_k \tilde\lambda_k^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}. \end{cases} \tag{3.27}$$

Para homogeneizar, defina $\tilde X_k = A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} X_k$ e $\tilde Y_k = A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} Y_k$. Com esta notação, temos

$$\lambda_k = \frac{1}{1-\theta}\tilde Y_k^{\frac{r\theta}{p(1-\theta)}}\left(Z_k \tilde Y_k^{-\frac{r\theta}{p(1-\theta)}}\tilde\lambda_k^{-\frac{r}{q}} - \theta \tilde X_k \tilde Y_k^{-\frac{r\theta}{p(1-\theta)}}\tilde\lambda_k^{-\frac{r}{q}}\right)\tilde\lambda_k^{\frac{r}{q}}.$$

Por outro lado,

$$\tilde Y_k^{-\frac{r\theta}{p(1-\theta)}}\tilde\lambda_k^{-\frac{r}{q}} = \left(\tilde Y_k^{\frac{r\theta}{p}}\tilde\lambda_k^{\frac{r(1-\theta)}{q}}\right)^{-\frac{1}{1-\theta}} \leq Z_k^{-\frac{1}{1-\theta}},$$

então

$$\lambda_k \leq \frac{1}{1-\theta}\tilde Y_k^{\frac{r\theta}{p(1-\theta)}}\left(Z_k^{1-\frac{1}{1-\theta}} - \theta\tilde X_k Z_k^{-\frac{1}{1-\theta}}\right)\tilde\lambda_k^{\frac{r}{q}}. \tag{3.28}$$

Considere $f(x,z) = z^{1-\frac{1}{1-\theta}} - \theta x z^{-\frac{1}{1-\theta}}$. Derivando em relação a z encontramos $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\theta}{1-\theta} z^{-\frac{1}{1-\theta}}\left(\frac{x}{z}-1\right)$. Note que, se $z \leq x$ então f é não-decrescente em relação a z, e se $x \leq z$ temos que f é não-crescente em relação a z.

De (3.27) temos $\theta\tilde X_k + (1-\theta)\lambda_k = Z_k$, então $\lambda_k \leq Z_k \leq \tilde X_k$ ou $\tilde X_k \leq Z_k \leq \lambda_k$. Daí, da observação acima, segue que $f(\tilde X_k, Z_k) \leq f(\tilde X_k, \tilde X_k)$. Portanto, de (3.28),

$$\lambda_k \leq \left(\tilde Y_k^{\frac{r}{p}}\tilde X_k^{-1}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}\tilde\lambda_k^{\frac{r}{q}}.$$

Conside a medida $F(\nabla_g u_\alpha)dv_g$. Da desigualdade de Hölder e o ítem (a) de (3.15),

$$\tilde Y_k^{\frac{r}{p}} \leq \left[A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} \lim_{\alpha\to\infty}\left(A_\alpha\int_M \eta^r_{\alpha,k}F(\nabla_g u_\alpha)dv_g\right)^{\frac{p}{r}} \lim_{\alpha\to\infty}\left(A_\alpha\int_M F(\nabla_g u_\alpha)dv_g\right)^{\frac{r-p}{r}}\right]^{\frac{r}{p}} = \tilde X_k.$$

Logo,

$$\lambda_k \leq \tilde{\lambda}_k^{\frac{r}{q}}. \tag{3.29}$$

Por outro lado, do Lema 3.3.1,

$$\lambda_k = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_M u_\alpha^q \eta_{\alpha,k}^r dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \geq \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_{B(x_\alpha,\frac{c_\alpha}{2})} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} > c > 0 \tag{3.30}$$

para todo k.

Da hipótese $q < r$, decorre

$$\lambda_k \leq \tilde{\lambda}_k. \tag{3.31}$$

A hipótese $\tau = \frac{p^*}{q}$, implica que

$$\tilde{\lambda}_{k+1} \leq \lambda_k. \tag{3.32}$$

Juntando as relações (3.30), (3.31) e (3.32) encontramos a seguinte seqüência de desigualdades:

$$0 < c < \cdots \leq \lambda_{k+1} \leq \tilde{\lambda}_{k+1} \leq \lambda_k \leq \cdots \leq \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_{B(x_\alpha,c_\alpha)} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g}.$$

Pela definição de $\eta_{\alpha,k}$

$$\lambda_0 = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_{B(x_\alpha,c_\alpha)} \eta_{\alpha,0}^r u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \leq \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_{B(x_\alpha,c_\alpha)} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \leq 1.$$

Logo, pela desigualdade (3.29), $c < (\lambda_0^{\frac{r}{q}})^k \leq 1$ para todo k, daí $\lambda_0 = 1$.

E isto conclui o lema.

■

Como corolário deste lema vamos obter uma nova versão da concentração de massa da seqüência u_α.

Corolário 3.3.1. *Considerando as hipóteses do lema anterior, temos*

$$\int_{B(x_\alpha,c_\alpha)} u_\alpha^r dv_g \to 1$$

quando $\alpha \to \infty$.

Prova: Como conseqüências da estimativa (3.19) e do lema anterior, deduzimos que

$$\int_{M\backslash B(x_\alpha,c_\alpha)} u_\alpha^r dv_g \leq A_\alpha^{\frac{q\theta}{p(1-\theta)}} ||u_\alpha||_\infty^{r-q} \frac{\int_{M\backslash B(x_\alpha,c_\alpha)} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \leq c \frac{\int_{M\backslash B(x_\alpha,c_\alpha)} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \to 0.$$

Como $||u_\alpha||_r = 1$,

$$\int_{B(x_\alpha,c_\alpha)} u_\alpha^r dv_g \to 1.$$

■

Passo 3

Agora, enunciaremos o último lema necessário para nossa argumentação. Este lema dará, essencialmente, uma estimativa sobre a velocidade de explosão da seqüência u_α. Este é o resultado chave para derivarmos a contradição esperada.

Lema 3.3.3. *Temos*
$$d_g(x,x_\alpha)u_\alpha(x)^{\frac{r-p}{p}}A_\alpha^{-\frac{1}{p}} \leq c$$
para todo $x \in M$.

Prova:

Defina $w_\alpha(x) = d_g(x,x_\alpha)^{\frac{p}{r-p}}u_\alpha(x)A_\alpha^{-\frac{1}{r-p}}$ e suponha por absurdo que existe uma subseqüência, que continuaremos indexando por α, tal que $||w_\alpha||_\infty \to \infty$. Então existe uma seqüência $(y_\alpha)_\alpha \subset M$ da forma $w_\alpha(y_\alpha) = ||w_\alpha||_\infty \to \infty$.
Afirmamos que
$$B(y_\alpha,(A_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{p-r})^{1/p}) \cap B(x_\alpha, w_\alpha(y_\alpha)^\nu(A_\alpha||u_\alpha||_\infty^{p-r})^{1/p}) = \emptyset \tag{3.33}$$
para algum $\nu > 0$.
Para mostrar (3.33) é suficiente verificar que
$$d_g(x_\alpha,y_\alpha) \geq A_\alpha^{\frac{1}{p}}u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p-r}{p}} + w_\alpha(y_\alpha)^\nu A_\alpha^{\frac{1}{p}}||u_\alpha||_\infty^{\frac{p-r}{p}},$$
ou, de forma equivalente,
$$w_\alpha(y_\alpha)^{\frac{r-p}{p}-\nu} \geq w_\alpha(y_\alpha)^{-\nu} + u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{r-p}{p}}||u_\alpha||_\infty^{\frac{p-r}{p}}.$$
Considere $\nu < \frac{r-p}{p}$. Como $w_\alpha(y_\alpha) \to \infty$ temos $w_\alpha(y_\alpha)^{-\nu} \to 0$ e $w_\alpha(y_\alpha)^{\frac{r-p}{p}-\nu} \to \infty$. Portanto, basta mostrar que $u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{r-p}{p}}||u_\alpha||_\infty^{\frac{p-r}{p}} \leq c$. Mas esta limitação é óbvia uma vez que $u_\alpha(y_\alpha) \leq ||u_\alpha||_\infty$. E isto conclui a nossa afirmação.
Como $(A_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{p-r})^{1/p} \to 0$, podemos fazer um reescalonamento na função u_α. Para $x \in B(0,1)$, defina

$$h_\alpha(x) = g(exp_{y_\alpha}((A_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{p-r})^{1/p}x)),$$
$$\psi_\alpha(x) = u_\alpha(y_\alpha)^{-1}u_\alpha(exp_{y_\alpha}((A_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{p-r})^{1/p}x))$$

Então, de (3.14), temos que ψ_α satisfaz a equação
$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\int_{B(0,1)} \partial_v F(\nabla_{h_\alpha}\psi_\alpha)\nabla_{h_\alpha} h dv_{h_\alpha} + \alpha A_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{p-r}\int_{B(0,1)} \psi_\alpha^{p-1} h dv_{h_\alpha} \\ + \frac{1-\theta}{\theta}B_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{q-r}\int_{B(0,1)} \psi_\alpha^{q-1} h dv_{h_\alpha} = \mu_\alpha \int_{B(0,1)} \psi_\alpha^{r-1} h dv_{h_\alpha}\end{aligned} \tag{3.34}$$
para toda função $h \in C_0^1(B(0,1))$.
A seguir, vamos mostrar que existe $1 > c > 0$ tal que $u_\alpha(y_\alpha) \geq cu_\alpha(x)$ para todo $x \in B(y_\alpha,(A_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{p-r})^{1/p})$.
De fato, seja $x \in B(y_\alpha,(A_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{p-r})^{1/p})$ então $d_g(x,y_\alpha) \leq (A_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{p-r})^{1/p}$. Para $0 < c < 1$, temos $u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p-r}{p}}A_\alpha^{\frac{1}{p}} \leq cd_g(x_\alpha,y_\alpha)$ para todo α suficientemente grande. Daí,
$$d_g(x_\alpha,x) \geq d_g(x_\alpha,y_\alpha) - d_g(x,y_\alpha) \geq d_g(x_\alpha,y_\alpha) - u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p-r}{p}}A_\alpha^{\frac{1}{p}} \geq d_g(x_\alpha,y_\alpha) - cd_g(x_\alpha,y_\alpha) = cd_g(x_\alpha,y_\alpha).$$
Por outro lado, como
$$w_\alpha(y_\alpha) = ||u_\alpha(x)d_g(x_\alpha,x)^{\frac{p}{r-p}}A_\alpha^{-\frac{1}{r-p}}||_\infty \geq u_\alpha(x)d_g(x_\alpha,x)^{\frac{p}{r-p}}A_\alpha^{-\frac{1}{r-p}},$$

segue que

$$u_\alpha(y_\alpha)d_g(x_\alpha,y_\alpha)^{\frac{p}{r-p}}A_\alpha^{-\frac{1}{r-p}} \geq u_\alpha(x)d_g(x_\alpha,x)^{\frac{p}{r-p}}A_\alpha^{-\frac{1}{r-p}} \geq cu_\alpha(x)d_g(x_\alpha,y_\alpha)^{\frac{p}{r-p}}A_\alpha^{-\frac{1}{r-p}}.$$

Portanto, $u_\alpha(y_\alpha) \geq cu_\alpha(x)$ para todo $x \in B((y_\alpha,(A_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{p-r})^{1/p})$, ou seja,

$$||u_\alpha||_{L^\infty(B(y_\alpha,(u_\alpha(y_\alpha)^{p-r}A_\alpha)^{1/p}))} \leq cu_\alpha(y_\alpha).$$

Em particular,

$$||\psi_\alpha||_{L^\infty(B(0,1))} \leq c \tag{3.35}$$

para todo α.
Seja $f_\alpha = \psi_\alpha^{r-p}$. Então

$$\int_{B(0,1)} f_\alpha^{\frac{n}{p}} dv_{h_\alpha} \leq c$$

para todo α. Além disto, por (3.34), temos

$$\frac{1}{p}\int_{B(0,1)} \partial_v F(\nabla_{h_\alpha}\psi_\alpha)\nabla_{h_\alpha} h dv_{h_\alpha} \leq c\int_{B(0,1)} f_\alpha \psi_\alpha^{p-1} h dv_{h_\alpha}$$

para toda função positiva $h \in C_0^1(B(0,1))$. Usando a definição de θ, verificamos que

$$\frac{-np+rn-pr}{p} = -\frac{n(1-\theta)}{q\theta}(r-q)$$

que juntamente com a técnica de iteração de Moser, (3.19) e $\delta < 1$, temos

$$1 = \sup_{B(0,\delta)} \psi_\alpha \leq c\int_{B(0,1)} \psi_\alpha^r dv_{h_\alpha} = c\left(A_\alpha^{\frac{\theta q}{p(1-\theta)}} u_\alpha(y_\alpha)^{r-q}\right)^{-\frac{n(1-\theta)}{\theta q}} \int_{D_\alpha} u_\alpha^r dv_g$$

$$\leq c\left(\left(\frac{u_\alpha(y_\alpha)}{||u_\alpha||_\infty}\right)^{r-q}\right)^{-\frac{n(1-\theta)}{\theta q}} \int_{D_\alpha} u_\alpha^r dv_g = c\left(\frac{||u_\alpha||_\infty}{u_\alpha(y_\alpha)}\right)^{\frac{np-rn+pr}{p}} \int_{D_\alpha} u_\alpha^r dv_g, \tag{3.36}$$

onde $D_\alpha = B(y_\alpha,(u_\alpha(y_\alpha)^{p-r}A_\alpha)^{\frac{1}{p}})$.
Fazendo

$$m_\alpha = \frac{||u_\alpha||_\infty}{u_\alpha(y_\alpha)}$$

e

$$\sigma = \frac{np-rn+pr}{p},$$

então

$$0 < c \leq m_\alpha^\sigma \int_{D_\alpha} u_\alpha^r dv_g \tag{3.37}$$

para todo α. Da interseção (3.33) e do Corolário 3.3.1, segue que

$$\int_{D_\alpha} u_\alpha^r dv_g \to 0$$

quando $\alpha \to \infty$.

Portanto $m_\alpha \to \infty$. Agora vamos derivar uma contradição usando (3.37) e o fato que $m_\alpha \to \infty$. Da limitação uniforme (3.35), (3.19) e $(q-r)n\frac{1-\theta)}{q\theta} = \frac{rn-rp-np}{p}$, deduzimos que

$$m_\alpha^\sigma \int_{D_\alpha} u_\alpha^r dv_g \leq m_\alpha^\sigma ||u_\alpha||^r_{L^\infty(D_\alpha)} |D_\alpha| \leq c m_\alpha^\sigma u_\alpha(y_\alpha)^r (u_\alpha(y_\alpha)^{p-r} A_\alpha)^{\frac{n}{p}} \leq c, \tag{3.38}$$

onde $|\cdot|$ denota o volume Euclidiano.
Considere $\eta_\alpha(x) = \eta(d_g(y_\alpha, x)(u_\alpha(y_\alpha)^{p-r}A_\alpha)^{-1/p})$, onde $\eta \in C_0^1(I\!R)$, $\eta \equiv 1$ em $[0, \frac{1}{2}]$, $\eta \equiv 0$ em $[1, \infty)$ e $0 \leq \eta \leq 1$.
Tomando $\eta_\alpha^p u_\alpha$ como função teste na equação (3.14), obtemos

$$A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta_\alpha^p dv_g + A_\alpha \int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\eta_\alpha^{p-1} \nabla_g \eta_\alpha u_\alpha dv_g + \alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^p \eta_\alpha^p dv_g$$
$$+ \frac{1-\theta}{\theta} B_\alpha \int_M u_\alpha^q \eta_\alpha^p dv_g = \mu_\alpha \int_M u_\alpha^r \eta_\alpha^p dv_g.$$

Fazendo uso das desigualdades de Hölder e Young com ϵ,

$$\left| \int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\eta_\alpha^{p-1} \nabla_g \eta_\alpha u_\alpha dv_g \right| \leq c \int_M |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} \eta_\alpha^{p-1} |\nabla_g \eta_\alpha| u_\alpha dv_g$$
$$\leq \epsilon \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta_\alpha^p dv_g + c \int_{D_\alpha} |\nabla_g \eta_\alpha|^p u_\alpha^p dv_g.$$

Por (3.35) e (3.19), temos

$$A_\alpha \int_M |\nabla_g \eta_\alpha|^p u_\alpha^p dv_g \leq A_\alpha (u_\alpha(y_\alpha)^{p-r} A_\alpha)^{-1} \int_{D_\alpha} u_\alpha^p dv_g \leq c u_\alpha(y_\alpha)^r |D_\alpha| \leq c m_\alpha^{-\sigma}. \tag{3.39}$$

Aplicando as duas desigualdades acima e (3.38) na igualdade acima, segue

$$A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta_\alpha^p dv_g + c\alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^p \eta_\alpha^p dv_g + c B_\alpha \int_M u_\alpha^q \eta_\alpha^p dv_g \leq c m_\alpha^{-\sigma}. \tag{3.40}$$

Por outro lado, usando a função $\eta_\alpha u_\alpha$ no Corolário 2.2.1, verificamos

$$\int_M F(\nabla(\eta_\alpha u_\alpha)) dv_g \leq (1+\epsilon) \int_M F(\nabla u_\alpha)\eta_\alpha^p dv_g + C(\epsilon) \int_M F(\nabla_g \eta_\alpha) u_\alpha^p dv_g.$$

Combinando esta desigualdade com a Proposição 3.2.2 e usando (H.1), temos

$$\left(\int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^r dv_g \right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq c \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta_\alpha^p dv_g \left(\int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^q dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$
$$+ c \int_M |\nabla_g \eta_\alpha|^p u_\alpha^p dv_g \left(\int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^q dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} + c \int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^p dv_g \left(\int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^q dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}. \tag{3.41}$$

Agora vamos estimar cada parcela do lado direito desta desigualdade. Primeiro, note que da hipótese $q \geq p$, temos

$$\int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^q dv_g \leq \int_M \eta_\alpha^p u_\alpha^q dv_g. \tag{3.42}$$

(i) Usando (3.42), o ítem (d) de (3.15) e (3.40), obtemos

$$\int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta_\alpha^p dv_g \left(\int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} = \frac{A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta_\alpha^p dv_g}{A_\alpha B_\alpha^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}} \left(B_\alpha \int_M \eta_\alpha^p u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

$$\leq c m_\alpha^{-\sigma(1+\frac{p(1-\theta)}{\theta q})}.$$

(ii) De (3.42), (3.39), o ítem (d) de (3.15) e (3.40), encontramos

$$\int_M |\nabla_g \eta_\alpha|^p u_\alpha^p dv_g \left(\int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} = \frac{A_\alpha \int_M |\nabla_g \eta_\alpha|^p u_\alpha^p dv_g}{A_\alpha B_\alpha^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}} \left(B_\alpha \int_M \eta_\alpha^p u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

$$\leq c m_\alpha^{-\sigma(1+\frac{p(1-\theta)}{\theta q})}.$$

(iii) Por (3.42), o ítem (d) de (3.15) e (3.40), temos

$$\int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^p dv_g \left(\int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} = \frac{A_\alpha \int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^p dv_g}{A_\alpha B_\alpha^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}} \left(B_\alpha \int_M \eta_\alpha^p u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

$$\leq c m_\alpha^{-\sigma(1+\frac{p(1-\theta)}{\theta q})}.$$

De (i), (ii) e (iii) aplicados em (3.41), encontramos

$$\left(\int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^r dv_g\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq c m_\alpha^{-\sigma(1+\frac{p(1-\theta)}{\theta q})}.$$

Finalmente, obtemos

$$m_\alpha^\sigma \int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^r dv_g \leq c m_\alpha^{\sigma(-\frac{r\theta}{p}(1+\frac{p(1-\theta)}{\theta q})+1)}.$$

Afirmamos que

$$-\frac{r\theta}{p}\left(1+\frac{p(1-\theta)}{\theta q}\right)+1<0.$$

De fato, esta desigualdade é equivalente à $-r(\theta(q-p)+p)+pq<0$, que por sua vez é equivalente à $\theta r(p-q)+p(q-r)<0$. Como $p \leq q < r$, segue a afirmação.
Note ainda que $\sigma > 0$, pois $r < p^*$. Daí

$$m_\alpha^\sigma \int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^r dv_g \to 0.$$

De (3.36),

$$1 \leq c \int_{B(0,\frac{1}{2})} \psi_\alpha^r dv_{h_\alpha} \leq c m_\alpha^\sigma \int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^r dv_g \to 0.$$

Esta contradição finaliza a demonstração do lema.

■

Argumento final

Considere $\eta_\alpha(x) = \eta(d(x,x_\alpha))$, onde $\eta \in C_0^1(I\!R)$, $\eta \equiv 1$ em $[0,\delta]$, $\eta \equiv 0$ em $[2\delta,\infty)$ e $0 \le \eta \le 1$. Da desigualdade geral de Gagliardo-Nirenberg ótima Euclidiana, obtemos

$$\left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \le \left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} (u_\alpha\eta_\alpha)^r dx\right)^{\frac{p}{r\theta}}$$

$$\le A(p,q,r,x_0)^{\frac{p}{\theta}} \int_{B(x_\alpha,2\delta)} F_{x_0}(\nabla(u_\alpha\eta_\alpha))dx \left(\int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^q dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}.$$

Da expansão (2.10), temos que $dx \le (1+cd_g^2(x,x_\alpha))dv_g$. Usando esta desigualdade, a condição (3.10) e o teorema do valor médio, temos

$$\left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \le$$

$$A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} \left[\int_{B(x_\alpha,2\delta)} (F(\nabla_g(u_\alpha\eta_\alpha)) + cF(\nabla_g(u_\alpha\eta_\alpha))d_g^2)dv_g\right] \left[\int_M ((u_\alpha\eta_\alpha)^q + (u_\alpha\eta_\alpha)^q d_g^2)dv_g\right]^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

$$= A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} \left[\int_{B(x_\alpha,2\delta)} (F(\nabla_g(u_\alpha\eta_\alpha)) + cF(\nabla_g(u_\alpha\eta_\alpha))d_g^2)dv_g\right]$$

$$\times \left[\left(\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} + \frac{p(1-\theta)}{\theta q}\lambda_\alpha^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}-1} \int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^q d_g^2 dv_g\right],$$

onde $\lambda_\alpha \in (a_\alpha, b_\alpha) \subset (a_\alpha, ca_\alpha)$ e

$$a_\alpha = \int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^q dv_g,$$

$$b_\alpha = \int_M \left((\eta_\alpha u_\alpha)^q + (\eta_\alpha u_\alpha)^q d_g^2\right) dv_g.$$

Portanto,

$$\left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \le A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} \left[\int_{B(x_\alpha,2\delta)} F(\nabla_g(u_\alpha\eta_\alpha)dv_g + c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} F(\nabla_g(u_\alpha\eta_\alpha))d_g^2 dv_g\right]$$

$$\times \left[A_\alpha + c\left(\int_M u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}-1} \int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^q d_g^2 dv_g\right].$$

Do Lema 2.2.2, aplicado à função $u_\alpha\eta_\alpha$, temos

$$\int_{B(x_\alpha,2\delta)} F(\nabla_g(u_\alpha\eta_\alpha))dv_g$$

$$\le \int_{B(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha)dv_g + c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} |\eta_\alpha\nabla_g u_\alpha|^{p-1}|u_\alpha\nabla_g\eta_\alpha|dv_g + c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} |u_\alpha\nabla_g\eta_\alpha|^p dv_g.$$

Aplicando a função $u_\alpha\eta_\alpha$ no Corolário 2.2.1, encontramos que

$$\int_{B(x_\alpha,2\delta)} F(\nabla_g(u_\alpha\eta_\alpha))d_g^2 dv_g \le c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha)d_g^2 dv_g + c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^p F(\nabla_g\eta_\alpha)d_g^2 dv_g.$$

Substituindo estas duas informações na desigualdade anterior, deduzimos que

$$\left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \le A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} A_\alpha \int_{B(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) dv_g$$

$$+c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \left(\int_M u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}-1} \int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^q d_g^2 dv_g$$

$$+cA_\alpha \int_{B(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} \eta_\alpha^{p-1} |\nabla_g \eta_\alpha| u_\alpha dv_g + cA_\alpha \int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^p dv_g + cA_\alpha \int_{B(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) d_g^2 dv_g.$$

Tomando u_α como função teste na equação (3.14), temos

$$A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g + \alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g = \nu_\alpha \le A(p,q,r,F)^{-\frac{p}{\theta}}.$$

Usando esta desigualdade na anterior, obtemos

$$A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} \alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g \le 1 - \left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r dx\right)^{\frac{p}{r\theta}}$$

$$+cA_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g + c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \left(\int_M u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta}q-1} \int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^q d_g^2 dv_g$$

$$+cA_\alpha \int_{B(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} \eta_\alpha^{p-1} |\nabla_g \eta_\alpha| u_\alpha dv_g + cA_\alpha \int_{B(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) d_g^2 dv_g. \tag{3.43}$$

Agora vamos estimar o lado direito da desigualdade acima.

(A) Primeiro vamos mostrar que

$$1 - \left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \le c\int_{M\setminus B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r dv_g + c\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r d_g^2 dv_g.$$

Temos, do Corolário 3.3.1,

$$\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r dv_g \to 1.$$

Então,

$$\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r dx \to d.$$

Se $d \ge 1$

$$1 - \left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \le 0,$$

para α grande. E a estimativa desejada segue.

Se $d < 1$, e como $\frac{p}{r\theta} > 0$, existe $c > 0$ tal que

$$1 - \left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r dx\right)^{\frac{p}{r\theta}} \le c\left(1 - \int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r dx\right).$$

Da expansão (2.11) segue que $dx \geq (1 - cd_g^2)dv_g$, e como $||u_\alpha||_r = 1$, daí

$$1 - \left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r dx \right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq c \int_{M \backslash B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r dv_g + c \int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r d_g^2 dv_g,$$

E disto segue a primeira estimativa.

(B) Agora, vamos mostrar que

$$A_\alpha \int_M \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) d_g^2 dv_g \leq c \int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^r d_g^2 dv_g + c \int_{M \backslash B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^r dv_g + cA_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Para este propósito, considere uma função $\zeta \in C^1(I\!R)$ tal que $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta \equiv 0$ em $[0, \frac{\delta}{2}]$, $\zeta \equiv 1$ em $[\delta, \infty)$. Considere $\zeta_\alpha = \zeta(d_g(x_\alpha, x))$. Tomando a função teste $\zeta_\alpha^p u_\alpha$ na equação (3.14), encontramos

$$A_\alpha \int_M \zeta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \leq c \int_M \zeta_\alpha^p u_\alpha^r dv_g + c \left| A_\alpha \int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha) \zeta_\alpha^{p-1} \nabla_g \zeta_\alpha u_\alpha dv_g \right|.$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young com ϵ, a propriedade (H.1) e a $(p-1)$ - homogeneidade de $\partial_v F$, encontramos

$$\left| \int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha) \zeta_\alpha^{p-1} \nabla_g \zeta_\alpha u_\alpha dv_g \right| \leq c \left(\int_M \zeta_\alpha^p |\nabla_g u_\alpha|^p dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_M u_\alpha^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \epsilon \int_M \zeta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) dv_g + c \int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Substituindo esta desigualdade na anterior

$$A_\alpha \int_M \zeta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \leq c \int_{M \backslash B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^r dv_g + cA_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g. \tag{3.44}$$

Novamente usando as desigualdades de Hölder e Young, e (H.1), temos

$$A_\alpha \int_M \zeta_\alpha^p |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} u_\alpha dv_g \leq cA_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g + cA_\alpha \int_M \zeta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) dv_g.$$

Aplicando (3.44) na desigualdade acima, temos

$$A_\alpha \int_M \zeta_\alpha^p |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} u_\alpha dv_g \leq cA_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g + c \int_{M \backslash B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^r dv_g \tag{3.45}$$

Por outro, lado da hipótese $p \leq 2$, das desigualdades de Hölder e Young com ϵ e (H.1), temos

$$\int_M u_\alpha \eta_\alpha^p |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} d_g dv_g \leq \left(\int_M u_\alpha^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_M \eta_\alpha^p |\nabla_g u_\alpha|^p d_g^2 dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

$$\leq c \int_M u_\alpha^p dv_g + \epsilon \int_M \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) d_g^2 dv_g. \tag{3.46}$$

Tomando $u_\alpha d_g^2 \eta_\alpha^p$ como função teste na equação (3.14) e da $(p-1)$ - homogeneidade da função $\partial_v F$, verificamos que

$$A_\alpha \int_M \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) d_g^2 dv_g$$

$$\leq c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^r d_g^2 dv_g + c\left|A_\alpha\int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g d_g u_\alpha \eta_\alpha^p d_g dv_g\right| + c\left|A_\alpha\int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g \eta_\alpha u_\alpha d_g^2 dv_g\right|$$

$$\leq c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^r d_g^2 dv_g + cA_\alpha\int_M u_\alpha \eta_\alpha^p |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} d_g dv_g + cA_\alpha\int_M \zeta_\alpha^p |\nabla_g u_\alpha|_g^{p-1} u_\alpha dv_g$$

Portanto, de (3.45) e (3.46),

$$A_\alpha\int_M \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) d_g^2 dv_g \leq c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^r d_g^2 dv_g + c\int_{M\setminus B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^r dv_g + cA_\alpha\int_M u_\alpha^p dv_g.$$

(C) Mostremos que

$$A_\alpha\int_{B(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_g u_\alpha|^{p-1}\eta_\alpha^{p-1}|\nabla_g \eta_\alpha| u_\alpha dv_g \leq c\int_{M\setminus B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^r dv_g + cA_\alpha\int_M u_\alpha^p dv_g.$$

De fato, das desigualdades de Hölder e Young,

$$A_\alpha\int_{B(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_g u_\alpha|^{p-1}\eta_\alpha^{p-1}|\nabla_g \eta_\alpha| u_\alpha dv_g \leq cA_\alpha\int_{M\setminus B(x_\alpha,\delta)} |\nabla_g u_\alpha|^p dv_g + cA_\alpha\int_M u_\alpha^p dv_g.$$

De (H.1) e de (3.44) encontramos a desigualdade acima.

(D) Por último, vamos mostrar que

$$\int_{B(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \left(\int_M u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}-1}\int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^q d_g^2 dv_g$$

$$\leq cA_\alpha\int_M u_\alpha^p dv_g + c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^r d_g^2 dv_g + c\int_{M\setminus B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^r dv_g.$$

Tomando $\eta_\alpha^p d_g^2 u_\alpha$ como função teste na equação (3.14), encontramos

$$B_\alpha\int_M u_\alpha^q \eta_\alpha^p d_g^2 dv_g \leq c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^r d_g^2 dv_g + \left|\frac{A_\alpha}{p}\int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g(\eta_\alpha^p d_g^2 u_\alpha) dv_g\right|. \tag{3.47}$$

De (H.1) e a $(p-1)$ - homogeneidade da função $\partial_v F$, temos

$$\left|\frac{A_\alpha}{p}\int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g(\eta_\alpha^p d_g^2 u_\alpha) dv_g\right|$$

$$\leq A_\alpha\int_M \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) d_g^2 dv_g + cA_\alpha\int_{B(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_g u_\alpha|^{p-1}\eta_\alpha^{p-1}|\nabla_g \eta_\alpha| u_\alpha dv_g + cA_\alpha\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha \eta_\alpha^p |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} d_g dv_g.$$

Usando (B) e (C) nas primeira e segunda parcelas do lado direito da desigualdade acima, respectivamente, e usando (3.46) na terceira parcela, obtemos

$$\left|\frac{A_\alpha}{p}\int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g(\eta_\alpha^p d_g^2 u_\alpha) dv_g\right|$$

$$\leq c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^r d_g^2 dv_g + c\int_{M\setminus B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^r dv_g + cA_\alpha\int_M u_\alpha^p dv_g + cA_\alpha\int_M \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) d_g^2 dv_g.$$

Usando novamente (B),

$$\left|\frac{A_\alpha}{p}\int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g(\eta_\alpha^p d_g^2 u_\alpha)dv_g\right| \le c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^r d_g^2 dv_g + c\int_{M\setminus B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^r dv_g + cA_\alpha\int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Aplicando esta desigualdade, (d) de (3.15) e a hipótese $q \ge p$ em (3.47), deduzimos que

$$\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^q d_g^2 dv_g \le \int_M u_\alpha^q \eta_\alpha^p d_g^2 dv_g$$

$$\le \left(c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^r d_g^2 dv_g + c\int_{M\setminus B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^r dv_g + cA_\alpha\int_M u_\alpha^p dv_g\right)\int_M u_\alpha^q dv_g.$$

Pelo ítem (a) de (3.15), obtemos a estimativa procurada.

Reunindo (A), (B), (C) e (D) em (3.43), chegamos à

$$\alpha A_\alpha\int_M u_\alpha^p dv_g \le c\int_{M\setminus B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^r dv_g + c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^r d_g^2 dv_g + cA_\alpha\int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Do Lema 3.3.3, temos $u_\alpha(x)d_g(x,x_\alpha)^{\frac{p}{r-p}} \le cA_\alpha^{\frac{1}{r-p}}$. Então

$$\int_{M\setminus B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^r dv_g = \int_{M\setminus B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^{r-p} d_g^p u_\alpha^p d_g^{-p} dv_g \le cA_\alpha\int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Por outro lado, como $p \le 2$,

$$\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^r d_g^2 dv_g = \int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^{r-p} d_g^p d_g^{2-p} u_\alpha^p dv_g \le cA_\alpha\int_M u_\alpha^p dv_g.$$

Com isto, concluímos que $\alpha \le c$. Esta é a contradição esperada. Isto finaliza a demonstração do teorema. ■

Exemplo 3.3.1.

Note que a condição (3.10) do Teorema 3.3.1 é a mesma condição (2.18) do Teorema 2.3.1. Logo, as funções dadas nos Exemplos 2.3.1 e 2.3.2 também satisfazem as hipóteses do Teorema 3.3.1. ■

Proposição 3.3.1. *Seja* $r = \frac{p(q-1)}{p-1}$. *Então, a constante ótima* $A(p,q,r,F) = \sup_{x\in M}\{A(p,q,r,x)\}$ *relativa a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg ótima* (3.11) *do Teorema* 3.3.1 *é atingida, ou seja, existe* $x_0 \in M$ *tal que* $A(p,q,r,F) = A(p,q,r,x_0)$.

Prova:

Primeiro vamos mostrar que existem constantes k_3 e k_4 independentes de $x \in M$ tais que

$$k_3|y|^{p'} \le F_x^*(y) \le k_4|y|^{p'} \tag{3.48}$$

para todo $x \in M$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. De fato, seja $f(y) = \frac{1}{p}|y|^p$, onde $|\cdot|$ denota a métrica Euclidiana. Do Lema 1.2.2 é fácil ver que $f^*(y) = \frac{1}{p'}|y|^{p'}$. Por (H.1) temos

$$k_1|y|^p \le F_x(y) \le k_2|y|^p$$

em um sistema normal de coordenadas. Daí

$$F_x^*(y) = \sup_{z\in I\!\!R^n}\{y\cdot z - F_x(z)\} \le \sup_{z\in I\!\!R^n}\{y\cdot z - k_1|y|^p\} = pk_1\frac{1}{p'}|\frac{1}{pk_1}y|^{p'} = \frac{1}{p'(pk_1)^{p'-1}}|y|^{p'}.$$

fazendo $k_4 = \frac{1}{p'(pk_1)^{p'-1}}$ temos $F_x^*(y) \le k_4|y|^{p'}$ para todo $x \in M$. De modo análogo encontramos uma constante k_3 independente de $x \in M$, com isto (3.48) fica estabelecida.
Para cada $x \in M$ considere a desigualdade homogênea de Gagliardo-Nirenberg ótima

$$\left(\int_{I\!\!R^n}|u|^r dy\right)^{\frac{1}{r}} \le A(p,q,r,x)\left(\int_{I\!\!R^n}F_x(\nabla u)dy\right)^{\frac{\theta}{p}}\left(\int_{I\!\!R^n}|u|^q dy\right)^{\frac{1-\theta}{q}}.$$

Agora vamos mostrar que as constantes ótimas $A(p,q,r,x)$ são uniformemente limitadas em x. Pelo Teorema 1.2.2, temos

$$A(p,q,r,x)^{-1} = ||F_x(\nabla w_{p,q})||_1^{\frac{\theta}{p}}||w_{p,q}||_q^{1-\theta},$$

onde

$$w_{p,q}(y) = \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1}F_x^*(y)\right)^{-\frac{p-1}{q-p}} \tag{3.49}$$

e $\sigma > 0$ é tal que $||w_{p,q}||_r = 1$.
Do Lema 1.2.2 e (3.49), temos

$$F_x(\nabla w_{p,q}) = F_x\left(-\left(\sigma + \frac{q-p}{p-1}F_x^*(y)\right)^{-\frac{p-1}{q-p}-1}\nabla F_x^*(y)\right) = \left(\sigma + \frac{q-p}{p-1}F_x^*(y)\right)^{-\frac{p(q-1)}{q-p}}\frac{1}{p-1}F_x^*(y).$$

Desta desigualdade e (3.48) é fácil ver que existe uma constante $c > 0$ independente de $x \in M$ tal que $A(p,q,r,x) \le c$ para todo $x \in M$.
Tome uma seqüência $(x_j)_{j\in I\!\!N} \subset M$ tal que $A(p,q,r,x_j) \to A(p,q,r,F)$. Pela compacidade de M, temos que $x_j \to x_0$ a menos de subseqüência.
Do Lema 1.2.2, temos que

$$k_5|y|^{p'-1} \le |\nabla F_{x_j}^*(y)| \le k_6|u|^{p'-1}$$

para constantes positivas k_5, k_6 independentes de j. De modo análogo

$$k_7|y|^{p'-1} \le |\nabla F_{x_j}^*(y)| \le k_8|u|^{p'-1}$$

para constantes positivas k_7, k_8 independentes de j. Estas estimativas juntamente com $p > 1$ implicam que $F_{x_j} \to F_{x_0}$ e $F_{x_j}^* \to \tilde{F}$ localmente uniformemente em $I\!\!R^n$. Afirmamos que

$$F_{x_0}^* = \tilde{F}.$$

De fato, fazendo $j \to \infty$ na desigualdade de Fenchel

$$F_{x_j}^*(y) \le y\cdot z - F_{x_j}(z)$$

temos $\tilde{F} \leq F^*_{x_0}$. Por outro lado, temos que $F_{x_j} \to F_{x_0}$ uniformemente em $K = \{y \in I\!R^n; |y| = 1\}$. Então, para cada $\epsilon > 0$ temos $F_{x_j}(z) \leq F_{x_0}(z) + \epsilon$ para todo $z \in K$ e j suficientemente grande. Pela p - homogeneidade, temos

$$F^*_{x_0}(y) = \sup_{z \in I\!R^n} \{y \cdot z - F_{x_0}(z)\} \leq \sup_{z \in I\!R^n} \{y \cdot z - F_{x_j}(z) + \epsilon |z|^p\}.$$

Desde que F_{x_j} converge localmente uniformemente para F_{x_0}, existe um raio $R > 0$, independente de j, tal que o supremo do lado direito é atingido em $\{z; |z| \leq R\}$. Em particular, temos

$$F^*_{x_0}(y) \leq \sup_{|z| \leq R} \{y \cdot z - F_{x_j}(z) + \epsilon |z|^p\} \leq F^*_{x_j}(y) + (2R)^p \epsilon.$$

Desde que $\epsilon > 0$ é qualquer, e tomando o limite em j, concluímos que $F^*_{x_0} = \tilde{F}$.
Portanto, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos

$$A(p, q, r, x_n) \to A(p, q, r, x_0) = A(p, q, r, F).$$

■

Observação 3.3.1.

A proposição anterior nos mostra que a constante ótima da desigualdade (3.11) do Teorema 3.3.1, quando $r = \frac{p(q-1)}{p-1)}$, é dada por

$$A(p, q, r, F)^{-1} = ||F_{x_0}(\nabla w_{p,q})||_1^{\frac{p}{\theta}} ||w_{p,q}||_q^{1-\theta},$$

onde $x_0 \in M$ é tal que $A(p, q, r, x_0) = A(p, q, r, F)$ e $w_{p,q}$ é conforme (3.49) com x_0 no lugar de x.

3.4 Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para $q < p$

Da seção 3.2, para $F \in \mathcal{F}$ e $1 < p < n$, sabemos que existem constantes $A, B \in I\!R$ tais que a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$\left(\int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq \left(A \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B \int_M |u|^p dv_g \right) \left(\int_M |u|^q dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

é válida, onde , $1 \leq q < p$ e $\theta = \frac{n(p-q)}{q(p-n)+np}$.
Note que esta família de desigualdades de Gagliardo-Nirenberg, é distinta daquela provada no Teorema 3.3.1.
Agora, vamos provar a validade desta desigualdade ótima.

Teorema 3.4.1. *Sejam $F \in \mathcal{F}$ e $1 < q < p \leq 2$. Suponha $x_0 \in M$ tal que, para todo ponto $y \in M$, exista um sistema normal de coordenadas centrado em y tal que, para toda função $u \in C^1_0(B(y, \delta))$,*

$$A(p, q, p, x_0)^{\frac{p}{\theta}} \int_{B(y,\delta)} F_{x_0}(\nabla u) dx \leq A(p, q, p, F)^{\frac{p}{\theta}} \int_{B(y,\delta)} F(\nabla_g u)(1 + c d_g(x, y)^2) dx, \tag{3.50}$$

onde c não depende de y e $\delta < i(M)$. Então, existe $B = B(p,q,g,M) \in I\!R$ tal que, para toda função $u \in D^{p,q}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq \left(A(p,q,p,F)^{\frac{p}{\theta}} \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B \int_M |u|^p dv_g\right) \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}},$$

onde $n > \frac{p^2}{p-q}$ e $\theta = \frac{n(p-q)}{q(p-n)+np}$.

Prova:

A prova será por contradição, como na demonstração do Teorema (3.3.1). Suponha que para todo $\alpha > 0$ exista $u \in D^{p,q}(M)$ tal que

$$\left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{\frac{1}{\theta}} A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}} > \left(\int_M F(\nabla_g u) dv_g + \alpha \int_M |u|^p dv_g\right) \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}.$$

Vamos usar o método variacional para obter uma seqüência especial de funções. Considere o conjunto

$$\mathcal{H} = \{u \in D^{p,q}(M); ||u||_p = 1\}.$$

E para cada α vamos definir o seguinte funcional:

$$J_\alpha(u) = \left(\int_M F(\nabla_g u) dv_g + \alpha \int_M |u|^p dv_g\right) \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}.$$

Pela Proposição A.5, existe $u_\alpha \in \mathcal{H}$ tal que

$$\inf_{u \in \mathcal{H}} J_\alpha(u) = \nu_\alpha = J_\alpha(u_\alpha) < A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}}. \tag{3.51}$$

Como $\nabla_g |u| = \pm \nabla_g u$ q.t.p., podemos supor $u_\alpha \geq 0$. Também devemos notar que $u_\alpha \not\equiv 0$ pois $u_\alpha \in \mathcal{H}$. Então, a equação de Euler-Lagrange para u_α é,

$$\frac{A_\alpha}{p} \int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha) \nabla_g h dv_g + \alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^{p-1} h dv_g + \frac{1-\theta}{\theta} B_\alpha \int_M u_\alpha^{q-1} h dv_g = \mu_\alpha \int_M u_\alpha^{p-1} h dv_g \tag{3.52}$$

para toda função $h \in C_0^1(M)$ e

$$\begin{cases} \mu_\alpha = \frac{\nu_\alpha}{\theta}, \\ A_\alpha = \left(\int_M u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}, \\ B_\alpha = \left(\int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g + \alpha \int_M u_\alpha^p dv_g\right) \left(\int_M u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q} - 1}. \end{cases}$$

Pela Proposição A.4, temos que $u_\alpha \in C^{1,\lambda}(M)$, onde $\lambda \in (0,1)$.

Durante a prova deste teorema, estaremos denotando por $c > 0$ as várias constantes que não dependem de α.

Como a prova do teorema é longa, será conveniente dividí-la em passos para que a argumentação fique mais clara.

Passo 1

As primeiras conseqüências da equação (3.52) são:

$$\begin{cases} \text{(a)} & A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \to A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}} \\ \text{(b)} & \mu_\alpha \to \frac{A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}}}{\theta} \\ \text{(c)} & \alpha A_\alpha \to 0 \\ \text{(d)} & B_\alpha \int_M u_\alpha^q dv_g \to A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}}. \end{cases} \tag{3.53}$$

Prova:

Da igualdade (3.51) deduzimos que $\alpha A_\alpha < c$. Esta desigualdade implica que

$$A_\alpha \to 0. \tag{3.54}$$

Por outro lado, desta observação e a Proposição 3.2.2,

$$(A(p,q,p,F)^{\frac{p}{\theta}} + \epsilon)^{-1} \leq \liminf \left(A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \right).$$

Como ϵ é arbitrário, temos

$$A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}} \leq \liminf \left(A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \right).$$

Da hipótese de contradição, ou seja, $J_\alpha(u_\alpha) = \nu_\alpha < A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}}$, encontramos que

$$\limsup \left(A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \right) \leq A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}},$$

Destas duas desigualdades obtemos o ítem (a).

Como $J_\alpha(u_\alpha) < A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}}$ e pelo ítem (a) temos (c).

Da hipótese de contradição

$$A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \leq \nu_\alpha \leq A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}}.$$

Por (a) de (3.53), segue que $\nu_\alpha \to A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}}$. Usando a definição de μ_α temos o ítem (b).

Aplicando os ítens (a) e (c) na definição de B_α obtemos (d).

■

Seja $x_\alpha \in M$ um ponto de máximo de u_α, ou seja,

$$u_\alpha(x_\alpha) = ||u_\alpha||_\infty. \tag{3.55}$$

Nosso próximo passo será mostrar que a função u_α se concentra em torno de x_α, no seguinte sentido:

Passo 2

Seja $a_\alpha = A_\alpha^{\frac{1}{p}}$ e considere uma seqüência $(c_\alpha)_\alpha$ de números positivos com $\frac{a_\alpha}{c_\alpha} \to 0$. Então

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\int_{B(x_\alpha, c_\alpha)} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} = 1.$$

Prova:

Seja $\delta > 0$. Primeiro vamos mostrar que

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_{B(x_\alpha,\delta a_\alpha)} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} > 0. \tag{3.56}$$

Vamos reescalonar a função u_α, para isto defina

$$g_\alpha(x) = g(exp_{x_\alpha}(a_\alpha x)),$$

$$\varphi_\alpha(x) = ||u_\alpha||_\infty^{-1} u_\alpha(exp_{x_\alpha}(a_\alpha x)),$$

Usando (3.52), verificamos que φ_α satisfaz à equação

$$\frac{1}{p}\int_{B(0,1)} \partial_v F(\nabla_{g_\alpha}\varphi_\alpha)\nabla_{g_\alpha} h dv_{g_\alpha} + \alpha A_\alpha \int_{B(0,1)} \varphi_\alpha^{p-1} h dv_{g_\alpha} + \frac{1-\theta}{\theta} B_\alpha ||u_\alpha||_\infty^{q-p} \int_{B(0,1)} \varphi_\alpha^{q-1} h dv_{g_\alpha}$$

$$= \mu_\alpha \int_{B(0,1)} \varphi_\alpha^{p-1} h dg_\alpha,$$

para toda função $h \in C_0^1(B(0,1))$.

Da equação (3.52), tomando u_α como função teste, temos

$$\frac{1-\theta}{\theta} B_\alpha \int_M u_\alpha^q dv_g \leq \mu_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g \leq \mu_\alpha ||u_\alpha||_\infty^{p-q} \int_M u_\alpha^q dv_g \Rightarrow B_\alpha ||u_\alpha||_\infty^{q-p} \leq c.$$

Esta desigualdade juntamente com os ítens (b) e (c) de (3.53) implicam que os coeficientes da equação acima são todos limitados. Como $0 \leq \varphi_\alpha \leq 1$ em $B(0,1)$, para todo α, segue por Tolksdorf [31] que $\varphi_\alpha \to \varphi$ em $C^1_{loc}(I\!R^n)$. Também temos, pela expansão (2.11), que $dv_{g_\alpha} \geq c dx$.

A definição de φ_α implica que $\varphi_\alpha(0) = 1$ para todo α, assim $\varphi \not\equiv 0$. Portanto

$$0 < c \leq \int_{B(0,1)} \varphi_\alpha^q dx \leq \int_{B(0,1)} \varphi_\alpha^q dv_{g_\alpha} = ||u_\alpha||_\infty^{-q} A_\alpha^{-\frac{n}{p}} \int_{B(x_\alpha,a_\alpha)} u_\alpha^q dv_g$$

$$= ||u_\alpha||_\infty^{-q} A_\alpha^{-\frac{n}{p}+\frac{q\theta}{p(1-\theta)}} \frac{\int_{B(x_\alpha,a_\alpha)} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g}. \tag{3.57}$$

Observando que

$$1 = \int_M u_\alpha^p dv_g \leq ||u_\alpha||_\infty^{p-q} \int_M u_\alpha^q dv_g = ||u_\alpha||_\infty^{p-q} A_\alpha^{\frac{q\theta}{p(1-\theta)}}$$

e como $\theta = \frac{n(p-q)}{q(p-n)+np}$, obtemos

$$1 \leq ||u_\alpha||_\infty A_\alpha^{\frac{n}{p^2}}. \tag{3.58}$$

Desta desigualdade, deduzimos que

$$||u_\alpha||_\infty^{-q} A_\alpha^{\frac{-n}{p}+\frac{q\theta}{p(1-\theta)}} = \left(||u_\alpha||_\infty A_\alpha^{\frac{n}{p^2}}\right)^{-q} \leq 1.$$

Substituindo esta estimativa em (3.57), obtemos (3.56).

Considere

$$\eta \in C_0^1(I\!R) \ \text{ com } \ \eta \equiv 1 \ \text{ em } \ [0, \frac{1}{2}], \ \ \eta \equiv 0 \ \text{ em } \ [1, \infty), \ \text{ e } \ 0 \leq \eta \leq 1. \tag{3.59}$$

Defina $\eta_{\alpha,k}(x) = \eta(c_\alpha^{-1} d_g(x, x_\alpha))^{\tau^k}$, onde $k \in I\!N$, $\tau > \frac{p}{q}$ e d_g é a distância na métrica g.
Tomando $u_\alpha \eta_{\alpha,k}^p$ como função teste na equação (3.52) e de (H.1), temos

$$A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta_{\alpha,k}^p dv_g + \alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^p \eta_{\alpha,k}^p dv_g + \frac{1-\theta}{\theta} B_\alpha \int_M u_\alpha^q \eta_{\alpha,k}^p dv_g$$

$$= \mu_\alpha \int_M u_\alpha^p \eta_{\alpha,k}^p dv_g - \frac{A_\alpha}{p} \int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha) u_\alpha \nabla_g(\eta_{\alpha,k}^p) dv_g.$$

Da $(p-1)$ - homogeneidade da função $\partial_v F$, desigualdade de Hölder, da hipótese sobre c_α e também usando o ítem (a) de (3.53) e $|\nabla_g \eta_{\alpha,k}| \leq \frac{c}{c_\alpha}$, temos

$$\left| \frac{A_\alpha}{p} \int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha) u_\alpha \nabla_g(\eta_{\alpha,k}^p) dv_g \right| \leq c A_\alpha \int_M |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} u_\alpha |\nabla_g \eta_{\alpha,k}| dv_g$$

$$\leq \frac{c}{c_\alpha} \left(A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(A_\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \frac{a_\alpha}{c_\alpha} \to 0.$$

Também segue, do ítem (c) de (3.53),

$$\alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^p \eta_{\alpha,k}^p dv_g \leq \alpha A_\alpha \to 0.$$

Tomando o limite na igualdade acima, usando os ítens (b) e (c) de (3.53) e as duas observações anteriores, temos

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left(A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta_{\alpha,k}^p dv_g \right) + \frac{1-\theta}{\theta} A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}} \lim_{\alpha \to \infty} \left(\frac{\int_M u_\alpha^q \eta_{\alpha,k}^p dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \right)$$

$$= \frac{A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}}}{\theta} \lim_{\alpha \to \infty} \int_M u_\alpha^p \eta_{\alpha,k}^p dv_g. \tag{3.60}$$

Por outro lado, usando $u_\alpha \eta_{\alpha,k}$ na Proposição 3.2.2, encontramos

$$\left(\int_M (u_\alpha \eta_{\alpha,k})^p dv_g \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\leq \left((A(p,q,p,F)^{\frac{p}{\theta}} + \epsilon) \int_M F(\nabla_g(u_\alpha \eta_{\alpha,k})) dv_g + B_\epsilon \int_M (u_\alpha \eta_{\alpha,k})^p dv_g \right) \left(\int_M (u_\alpha \eta_{\alpha,k})^q dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}.$$

Do Corolário 2.2.1,

$$\int_M F(\nabla_g(u_\alpha \eta_{\alpha,k})) dv_g \leq (1+\epsilon) \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta_{\alpha,k}^p dv_g + C(\epsilon) \int_M F(\nabla_g \eta_{\alpha,k}) u_\alpha^p dv_g.$$

De (H.1) que juntamente com a hipótese sobre c_α, implicam que

$$A_\alpha \int_M F(\nabla_g \eta_{\alpha,k}) u_\alpha^p dv_g \leq c A_\alpha \int_M |\nabla_g \eta_{\alpha,k}|^p u_\alpha^p dv_g \leq c \left(\frac{a_\alpha}{c_\alpha} \right)^p \to 0.$$

Pelo ítem (c) de (3.53),

$$\int_M u_\alpha^q dv_g \to 0.$$

Destas duas observações, e tomando o limite na desigualdade acima,

$$\left(\lim_{\alpha\to\infty} \int_M (u_\alpha \eta_{\alpha,k})^p dv_g \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\leq (1+\epsilon) \left(A(p,q,p,F)^{\frac{p}{\theta}} + \epsilon \right) \lim_{\alpha\to\infty} \left(A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) \eta_{\alpha,k}^p dv_g \right) \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\left(\int_M (u_\alpha \eta_{\alpha,k})^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}}{A_\alpha}.$$

Sendo ϵ qualquer, temos

$$\left(\lim_{\alpha\to\infty} \int_M (u_\alpha \eta_{\alpha,k})^p dv_g \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\leq A(p,q,p,F)^{\frac{p}{\theta}} \lim_{\alpha\to\infty} \left(A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) \eta_{\alpha,k}^p dv_g \right) \lim_{\alpha\to\alpha} \left(\frac{\int_M (u_\alpha \eta_{\alpha,k})^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}. \tag{3.61}$$

Denote por:

$$\begin{cases} \lambda_k = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_M u_\alpha^q \eta_{\alpha,k}^p dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \\ \tilde{\lambda}_k = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_M u_\alpha^q \eta_{\alpha,k}^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \\ X_k = \lim_{\alpha\to\infty} \left(A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) \eta_{\alpha,k}^p dv_g \right) \\ Y_k = \lim_{\alpha\to\infty} \int_M u_\alpha^p \eta_{\alpha,k}^p dv_g. \end{cases}$$

Então, reescrevendo (3.60) e (3.61), obtemos

$$\begin{cases} X_k + \frac{1-\theta}{\theta} A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}} \lambda_k = \frac{A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}}}{\theta} Y_k \\ Y_k^{\frac{1}{\theta}} \leq A(p,q,p,F)^{\frac{p}{\theta}} X_k \tilde{\lambda}_k^{\frac{p(1-\theta)}{q\theta}}. \end{cases}$$

Defina $\tilde{X}_k = A(p,q,p,F)^{\frac{p}{\theta}} X_k$, então

$$\lambda_k = \frac{1}{1-\theta} \tilde{X}_k^{\frac{\theta}{1-\theta}} \left(Y_k \tilde{X}_k^{-\frac{\theta}{1-\theta}} \tilde{\lambda}_k^{-\frac{p}{q}} - \theta \tilde{X}_k^{1-\frac{\theta}{1-\theta}} \tilde{\lambda}_k^{-\frac{p}{q}} \right) \tilde{\lambda}_k^{\frac{p}{q}}.$$

Por outro lado,

$$\tilde{X}_k^{-\frac{\theta}{1-\theta}} \tilde{\lambda}_k^{-\frac{p}{q}} = \left(\tilde{X}_k^{\theta} \tilde{\lambda}_k^{\frac{p(1-\theta)}{q}} \right)^{-\frac{1}{1-\theta}} \leq Y_k^{-\frac{1}{1-\theta}}.$$

Substituindo esta desigualdade na igualdade anterior, encontramos

$$\lambda_k \leq \frac{1}{1-\theta} \tilde{X}_k^{\frac{\theta}{1-\theta}} \left(Y_k^{1-\frac{1}{1-\theta}} - \theta \tilde{X}_k Y_k^{-\frac{1}{1-\theta}} \right) \tilde{\lambda}_k^{\frac{p}{q}}.$$

Considere a função

$$f(x,y) = y^{1-\frac{1}{1-\theta}} - \theta x y^{-\frac{1}{1-\theta}}.$$

Derivando em relação a y, segue

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\theta}{1-\theta}\left(-1 + \frac{x}{y}\right).$$

Seja $x \geq y$, então f é não-decrescente em relação a y. Se $x \leq y$, temos que f é não-crescente em relação a y.

Como $\theta \tilde{X}_k + (1-\theta)\lambda_k = Y_k$ ocorre que $\lambda_k \leq Y_k \leq \tilde{X}_k$ ou $\tilde{X}_k \leq Y_k \leq \lambda_k$. Daí $f(\tilde{X}_k, Y_k) \leq f(\tilde{X}_k, \tilde{X}_k)$.

Logo

$$\lambda_k \leq \tilde{X}_k^{\frac{\theta}{1-\theta}} \tilde{X}_k^{-\frac{\theta}{1-\theta}} \tilde{\lambda}_k^{\frac{p}{q}} \leq \tilde{\lambda}_k^{\frac{p}{q}}.$$

Ou seja

$$\lambda_k \leq \tilde{\lambda}_k^{\frac{p}{q}}. \tag{3.62}$$

Pela hipótese $q < p$, temos

$$\lambda_k \leq \tilde{\lambda}_k. \tag{3.63}$$

Como $\tau > \frac{p}{q}$, encontramos

$$\tilde{\lambda}_{k+1} \leq \lambda_k. \tag{3.64}$$

As estimativas (3.63) e (3.64), implicam que

$$\lambda_{k+1} \leq \tilde{\lambda}_{k+1} \leq \lambda_k \leq \cdots \leq \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_{B(x_\alpha, c_\alpha)} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g}.$$

Por (3.56) e pela hipótese sobre c_α, temos

$$\lambda_k = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_M u_\alpha^q \eta_{\alpha,k}^p dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \geq \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_{B(x_\alpha, \frac{c_\alpha}{2})} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \geq \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_{B(x_\alpha, \delta a_\alpha)} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} > 0.$$

Pela definição de $\eta_{\alpha,k}$,

$$\lambda_0 = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_M u_\alpha^q \eta_{\alpha,0}^p dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \leq \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\int_{B(x_\alpha, c_\alpha)} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \leq 1.$$

Portanto, das desigualdades acima e (3.62),

$$0 < c \leq \left(\lambda_0^{\frac{p}{q}}\right)^k \leq 1$$

para todo k. Logo $\lambda_0 = 1$. E com esta igualdade encerramos o passo 2.

■

Como último resultado para provarmos o teorema temos o

Passo 3

Existe $c > 0$ tal que para todo $x \in M$

$$u_\alpha(x) d_g(x, x_\alpha)^{\frac{n}{p}} \leq c.$$

Prova:

Defina $w_\alpha(x) = d_g(x,x_\alpha)^{\frac{n}{p}} u_\alpha(x)$ e suponha por absurdo que exista uma subseqüência, que continuaremos indexando por α, tal que $||w_\alpha|| \to \infty$. Então existe uma seqüência $(y_\alpha)_\alpha \subset M$ tal que $w_\alpha(y_\alpha) = ||w_\alpha||_\infty \to \infty$.

Primeiro, vamos mostrar que

$$B(y_\alpha, u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}}) \cap B(x_\alpha, a_\alpha w_\alpha(y_\alpha)^\nu) = \emptyset, \tag{3.65}$$

para algum $\nu > 0$, onde a_α é conforme o passo 2.

Para mostrar (3.65) é suficiente verificar que $d_g(x_\alpha, y_\alpha) \geq u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}} + a_\alpha w_\alpha(y_\alpha)^\nu$ ou de forma equivalente $w_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{n}-\nu} \geq w_\alpha(y_\alpha)^{-\nu} + a_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{n}}$.

Seja $0 < \nu < \frac{p}{n}$. Então como $w_\alpha(y_\alpha) \to \infty$ temos $w_\alpha(y_\alpha)^{-\nu} \to 0$ e $w_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{n}-\nu} \to \infty$. Portanto, basta mostrar que $a_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{n}} \leq c$.

Porém $a_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{n}} \leq a_\alpha ||u_\alpha||_\infty^{\frac{p}{n}} = \left(A_\alpha^{\frac{n}{p^2}} ||u_\alpha||_\infty \right)^{\frac{p}{n}}$.

De (3.57) e da definição de θ, temos

$$||u_\alpha||_\infty A_\alpha^{\frac{n}{p^2}} \leq c. \tag{3.66}$$

Esta desigualdade substituída na anterior nos dá a validade de (3.65).

Agora iremos reescalonar a função u_α. Para $x \in B(0,1)$ ponha

$$h_\alpha(x) = g(exp_{y_\alpha}(xl_\alpha)),$$

$$\psi_\alpha(x) = u_\alpha(y_\alpha)^{-1} u_\alpha(exp_{y_\alpha}(xl_\alpha)),$$

onde $l_\alpha = ||u_\alpha||_\infty^{-\frac{n+p^2}{pn}} u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{1}{p}}$. Usando (3.52), vemos que ψ_α satisfaz à equação

$$\frac{1}{p}\int_{B(0,1)} \partial_v F(\nabla_{h_\alpha}\psi_\alpha)\nabla_{h_\alpha} h dv_{h_\alpha} + \alpha l_\alpha^p \int_{B(0,1)} \psi_\alpha^{p-1} h dv_{h_\alpha}$$
$$+\frac{1-\theta}{\theta}\frac{l_\alpha^p B_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{q-p}}{A_\alpha}\int_{B(0,1)} \psi_\alpha^{q-1} h dv_{h_\alpha} = \mu_\alpha \frac{l_\alpha^p}{A_\alpha}\int_{B(0,1)} \psi_\alpha^{p-1} h dv_{h_\alpha}.$$

Agora vamos mostrar que os coeficientes desta equação são limitados.

Usando u_α como função teste em (3.52), obtemos

$$B_\alpha \int_M u_\alpha^q dv_g \leq c\int_M u_\alpha^p dv_g \leq c||u_\alpha||_\infty^{p-q}\int_M u_\alpha^q dv_g.$$

Logo, $B_\alpha ||u_\alpha||_\infty^{q-p} \leq c$. Desta estimativa, da definição de l_α, (3.58) e como $q-p+1 > 0$, temos

$$\frac{l_\alpha^p B_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{q-p}}{A_\alpha} \leq c\frac{||u_\alpha||_\infty^{-\frac{p^2+n}{n}+p-q} u_\alpha(y_\alpha)^{q-p+1}}{A_\alpha} \leq c\frac{||u_\alpha||_\infty^{-\frac{p^2}{n}}}{A_\alpha} \leq c.$$

Também segue, por (3.58),

$$\frac{l_\alpha^p}{A_\alpha} = \frac{||u_\alpha||_\infty^{-\frac{n+p^2}{n}} u_\alpha(y_\alpha)}{A_\alpha} \leq \left(A_\alpha^{\frac{n}{p^2}} ||u_\alpha||_\infty \right)^{-\frac{p^2}{n}} \leq c.$$

E por último, usando (3.58) e (c) de (3.53), encontramos

$$\alpha l_\alpha^p = \alpha ||u_\alpha||_\infty^{-\frac{n+p^2}{n}} u_\alpha(y_\alpha) \leq c\alpha A_\alpha \to 0.$$

Portanto, todos os coeficientes são limitados.

Nosso próximo objetivo será mostrar que ψ_α também é limitada, ou seja, $||\psi_\alpha||_{L^\infty(B(0,1))} \leq c$. De fato, tomando $x \in B(y_\alpha, u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})$, então $d_g(y_\alpha, x) \leq u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}}$. Pela definição de $w_\alpha(y_\alpha)$, temos

$$u_\alpha(y_\alpha) d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{\frac{n}{p}} = w_\alpha(y_\alpha) = ||w_\alpha||_\infty \geq u_\alpha(x) d_g(x_\alpha, x)^{\frac{n}{p}}.$$

Seja $c < 1$. Como $w_\alpha(y_\alpha) \to \infty$, temos $u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}} \leq c d_g(x_\alpha, y_\alpha)$. Disto segue

$$d_g(x, x_\alpha) \geq d_g(x_\alpha, y_\alpha) - d_g(x, y_\alpha) \geq d_g(x_\alpha, y_\alpha) - u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}} \geq (1-c) d_g(x_\alpha, y_\alpha).$$

Então,

$$u_\alpha(y_\alpha) d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{\frac{n}{p}} \geq c u_\alpha(x) d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{\frac{n}{p}} \Rightarrow u_\alpha(y_\alpha) \geq c u_\alpha(x)$$

para todo $x \in B(y_\alpha, u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})$.

Portanto

$$||\psi_\alpha||_{L^\infty(B(0,1))} \leq c. \tag{3.67}$$

Destas limitações e usando Tolksdorf [31], obtemos que $\psi_\alpha \to \psi$ em $C^1_{loc}(B(0,1))$.

Pela definição de ψ_α temos $\psi_\alpha(0) = 1$ para todo α, então $\psi \not\equiv 0$. Pela expansão (2.11) temos $dv_{h_\alpha} \geq c dx$. Destas observações, encontramos

$$\int_{B(0,1)} \psi_\alpha^q dv_{h_\alpha} \geq c \int_{B(0,1)} \psi_\alpha^q dx \to c \int_{B(0,1)} \psi^q dx > 0. \tag{3.68}$$

Por outro lado

$$\int_{B(0,1)} \psi_\alpha^q dv_{h_\alpha} = u_\alpha(y_\alpha)^{-q} l_\alpha^{-n} A_\alpha^{\frac{\theta q}{p(1-\theta)}} \frac{\int_{B(y_\alpha, l_\alpha)} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g}.$$

Pelas definições de θ e l_α, (3.66) e fazendo

$$\beta_\alpha = \frac{\int_{B(y_\alpha, l_\alpha)} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g},$$

obtemos

$$0 < \int_{B(0,1)} \psi_\alpha^q dv_{h_\alpha} \leq c \left(\frac{u_\alpha(y_\alpha)}{||u_\alpha||_\infty} \right)^{-\frac{n+pq}{p}} \beta_\alpha.$$

É fácil ver, pela definição de l_α, que $u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}} > l_\alpha$. Aplicando esta informação, (3.65) e o passo 2, temos

$$\beta_\alpha \to 0.$$

Fazendo $m_\alpha = \frac{u_\alpha(y_\alpha)}{||u_\alpha||_\infty}$, concluímos que $\lim_{\alpha \to \infty} m_\alpha = 0$.

Agora vamos mostrar a existência de uma seqüência positiva $(\gamma_k)_{k \geq 0}$ tal que $\gamma_k \to \infty$ e para cada k,

$$m_\alpha^{-\gamma_k} \int_{B(y_\alpha, 2^{-k} u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})} u_\alpha^p dv_g \to 0 \tag{3.69}$$

quando $\alpha \to \infty$.
Da definição de ψ_α e por (3.67), temos $||u_\alpha||_{L^\infty(B(y_\alpha, u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}}))} \leq cu_\alpha(y_\alpha)$. Então

$$\int_{B(y_\alpha, u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})} u_\alpha^p dv_g \leq cu_\alpha(y_\alpha)^{p-q} \int_{B(y_\alpha, u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})} u_\alpha^q dv_g \leq cu_\alpha(y_\alpha)^{p-q} A_\alpha^{\frac{\theta q}{p(1-\theta)}} \frac{\int_{B(y_\alpha, u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g}.$$

Pela definição de θ, por (3.66) e pela definição de m_α, encontramos

$$\int_{B(y_\alpha, u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})} u_\alpha^p dv_g \leq cm_\alpha^{p-q} \frac{\int_{B(y_\alpha, u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g}.$$

Aplicando (3.65) e o passo 2 nesta desigualdade, obtemos

$$m_\alpha^{q-p} \int_{B(y_\alpha, u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})} u_\alpha^p dv_g \leq c\frac{\int_{B(y_\alpha, u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})} u_\alpha^q dv_g}{\int_M u_\alpha^q dv_g} \to 0.$$

Com isto podemos tomar $\gamma_0 = p - q$. Procedendo por indução, vamos supor que (3.69) é válida para algum $k \geq 0$ e iremos mostrar que (3.69) permanece válida para $k+1$. Considere $\eta_{\alpha,k}(x) = \eta(2^k u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{n}} d_g(y_\alpha, x))$, onde η foi definida em (3.59). Tomando $u_\alpha \eta_{\alpha,k}^p$ como função teste na equação (3.52), obtemos

$$A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta_{\alpha,k}^p dv_g + A_\alpha \int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha) u_\alpha \eta_{\alpha,k}^{p-1} \nabla_g \eta_{\alpha,k} dv_g + \alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^p \eta_{\alpha,k}^p dv_g$$
$$+ \frac{1-\theta}{\theta} B_\alpha \int_M u_\alpha^q \eta_{\alpha,k}^p dv_g = \mu_\alpha \int_M u_\alpha^p \eta_{\alpha,k}^p dv_g.$$

Pelas desigualdades de Hölder, Young e também usando (H.1) a $(p-1)$ - homogeneidade da função $\partial_v F$, temos

$$\left| A_\alpha \int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha) u_\alpha \eta_{\alpha,k}^{p-1} \nabla_g \eta_{\alpha,k} dv_g \right| \leq cA_\alpha \int_M |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} \eta_{\alpha,k}^{p-1} u_\alpha |\nabla_g \eta_{\alpha,k}| dv_g$$
$$\leq \epsilon A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta_{\alpha,k}^p dv_g + cA_\alpha \int_{B(y_\alpha, 2^{-k} u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})} |\nabla_g \eta_{\alpha,k}|^p u_\alpha^p dv_g.$$

Substituindo esta desigualdade na igualdade anterior, encontramos

$$A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta_{\alpha,k}^p dv_g + c\alpha A_\alpha \int_M u_\alpha^p \eta_{\alpha,k}^p dv_g + cB_\alpha \int_M u_\alpha^q \eta_{\alpha,k}^p dv_g$$
$$\leq c\int_M u_\alpha^p \eta_{\alpha,k}^p dv_g + cA_\alpha \int_{B(y_\alpha, 2^{-k} u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}}} |\nabla_g \eta_{\alpha,k}|^p u_\alpha^p dv_g.$$

Usando a estimativa (3.66), a hipótese de indução, isto é, a validade de (3.69) para γ_k e a desigualdade $|\nabla_g \eta_{\alpha,k}| \leq cu_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p}{n}}$, obtemos

$$A_\alpha \int_{B(y_\alpha, 2^{-k} u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})} |\nabla_g \eta_{\alpha,k}|^p u_\alpha^p dv_g \leq cm_\alpha^{\frac{p^2}{n} + \gamma_k}. \tag{3.70}$$

Novamente por (3.69), temos

$$\int_M u_\alpha^p \eta_{\alpha,k}^p dv_g \leq cm_\alpha^{\gamma_k}.$$

Substituindo estas duas desigualdades na anterior ficamos com

$$A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta^p_{\alpha,k} dv_g + c\alpha A_\alpha \int_M u^p_\alpha \eta^p_{\alpha,k} dv_g + cB_\alpha \int_M u^q_\alpha \eta^p_{\alpha,k} dv_g \leq c m_\alpha^{\gamma_k}. \tag{3.71}$$

Por outro lado, da Proposição 3.2.2,

$$\int_{B(y_\alpha, 2^{-(k+1)} u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})} u^p_\alpha dv_g \leq \int_M \eta^{p^2}_{\alpha,k} u^p_\alpha dv_g = \int_M (u_\alpha \eta^p_{\alpha,k})^p dv_g$$

$$\leq \left(\left(c \int_M F(\nabla_g (u_\alpha \eta^p_{\alpha,k})) dv_g + c \int_M u^p_\alpha \eta^{p^2}_{\alpha,k} dv_g \right) \left(\int_M (u_\alpha \eta^p_{\alpha,k})^q dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} \right)^\theta .$$

Do Corolário 2.2.1,

$$\int_M F(\nabla_g (u_\alpha \eta^p_{\alpha,k})) dv_g \leq (1+\epsilon) \int_M F(\nabla_g u_\alpha) \eta^{p^2}_{\alpha,k} dv_g + C(\epsilon) \int_M F(\nabla_g \eta_{\alpha,k}) \eta^{p(p-1)}_{\alpha,k} u^p_\alpha dv_g .$$

Desta desigualdade e (H.1) aplicadas na desigualdade acima, nos dá

$$\int_{B(y_\alpha, 2^{-(k+1)} u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})} u^p_\alpha dv_g$$

$$\leq c \left(\left(\int_M F(\nabla_g u_\alpha) \eta^{p^2}_{\alpha,k} dv_g + \int_M |\nabla_g \eta_{\alpha,k}|^p_x \eta^{p(p-1)}_{\alpha,k} u^p_\alpha dv_g + \int_M u^p_\alpha \eta^{p^2}_{\alpha,k} dv_g \right) \left(\int_M (u_\alpha \eta^p_{\alpha,k})^q dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} \right)^\theta .$$

Agora vamos estimar as três parcelas do lado direito nesta desigualdade.
Por (d) de (3.52) temos $A_\alpha^{-1} \leq B_\alpha^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$, como $\eta^a_{\alpha,k} \leq \eta^b_{\alpha,k}$ se $a \geq b$ e usando (3.71), segue

$$\int_M F(\nabla_g u_\alpha) \eta^{p^2}_{\alpha,k} dv_g \left(\int_M u^q_\alpha \eta^{pq}_{\alpha,k} dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

$$\leq c A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha) \eta^p_{\alpha,k} dv_g \left(B_\alpha \int_M u^q_\alpha \eta^p_{\alpha,k} dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} \leq c m_\alpha^{\gamma_k (1 + \frac{p(1-\theta)}{\theta q})} .$$

E isto fornece a primeira estimativa.
A segunda estimativa será obtida do limite (3.69), da desigualdade (3.71) e do fato que $A_\alpha \to 0$, ou seja

$$\int_M u^p_\alpha \eta^{p^2}_{\alpha,k} dv_g \left(\int_M u^q_\alpha \eta^{pq}_{\alpha,k} dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

$$\leq c A_\alpha \int_{B(y_\alpha, 2^{-k} u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})} u^p_\alpha dv_g \left(B_\alpha \int_M u^q_\alpha \eta^p_{\alpha,k} dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} \leq c m_\alpha^{\gamma_k (1 + \frac{p(1-\theta)}{\theta q})} .$$

Finalmente, usando (3.70) e (3.71), temos

$$\int_M |\nabla_g \eta_{\alpha,k}|^p \eta^{p(p-1)}_{\alpha,k} u^p_\alpha dv_g \left(\int_M u_\alpha \eta^{pq}_{\alpha,k} dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

$$\leq cA_\alpha \int_{B(y_\alpha, 2^{-k}u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})} |\nabla_g \eta_{\alpha,k}|^p u_\alpha^p dv_g \left(B_\alpha \int_M u_\alpha^q \eta_{\alpha,k}^p dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} \leq cm_\alpha^{\gamma_k(1+\frac{p(1-\theta)}{\theta q})}.$$

Destas três estimativas, encontramos

$$\int_{B(y_\alpha, 2^{-(k+1)}u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})} u_\alpha^p dv_g \leq cm_\alpha^{\gamma_k(1+\frac{p(1-\theta)}{\theta q})\theta}.$$

Pela definição de θ temos $\left(1 + \frac{p(1-\theta)}{\theta q}\right)\theta = 1 + \frac{p(p-q)}{n(p-q)+pq}$. Fazendo

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k \left(1 + \frac{p-q}{n(p-q)+pq}\right),$$

concluímos a prova de indução.

Agora vamos terminar nossa argumentação. Seja k tal que $\gamma_k > \frac{n+p^2}{p}$.
Como $2^{-k}l_\alpha \leq 2^{-k}u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}}$, por (3.69) e com uma argumentação análoga à (3.68), temos

$$0 < c \leq \int_{B(0,2^{-k})} \psi_\alpha^p dv_{h_\alpha} \leq u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{(n+p^2)}{p}} ||u_\alpha||_\infty^{\frac{n+p^2}{p}} \int_{B(y_\alpha, 2^{-k}u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p}{n}})} u_\alpha^p dv_g \leq cm_\alpha^{\gamma_k - \frac{n+p^2}{p}} \to 0.$$

Com esta contradição concluímos o passo 3.

■

Argumento final

Considere $\eta_\alpha(x) = \eta(\frac{1}{2\delta}d(x,x_\alpha))$, onde η foi definida em (3.59) e $4\delta < i(M)$. Da desigualdade homogênea de Gagliardo-Nirenberg ótima Euclidiana, obtemos

$$\left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dx\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq \left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} (u_\alpha\eta_\alpha)^p dx\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\leq A(p,q,p,x_0)^{\frac{p}{\theta}} \int_{B(x_\alpha,2\delta)} F_{x_0}(\nabla(u_\alpha\eta_\alpha))dx \left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} (\eta_\alpha u_\alpha)^q dx\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}.$$

Da expansão (2.11) segue que $dx \leq (1 + cd_g^2(x,x_\alpha))dv_g$ e da hipótese (3.50), temos

$$\left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dx\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq$$

$$A(p,q,p,F)^{\frac{p}{\theta}} \left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} (F(\nabla_g u_\alpha\eta_\alpha) + cF(\nabla_g(u_\alpha\eta_\alpha)d_g^2)dv_g\right) \times \left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} (u_\alpha^q + u_\alpha^q d_g^2)dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}.$$

Segue, do teorema do valor médio,

$$\left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dx\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq A(p,q,p,F)^{\frac{p}{\theta}} \left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} (F(\nabla_g(u_\alpha\eta_\alpha) + cF(\nabla_g(u_\alpha\eta_\alpha)d_g^2)dv_g\right)$$

$$\times \left(\left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}} + \frac{p(1-\theta)}{\theta q}\lambda_\alpha^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}-1} \int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^q d_g^2 dv_g\right),$$

onde $\lambda_\alpha \in (a_\alpha, b_\alpha) \subset (a_\alpha, ca_\alpha)$, sendo

$$a_\alpha = \int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^q dv_g,$$

$$b_\alpha = \int_{B(x_\alpha,2\delta)} (u_\alpha^q + u_\alpha^q d_g^2) dv_g.$$

Como $\lambda \in (a_\alpha, ca_\alpha)$, segue

$$\left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dx\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq A(p,q,p,F)^{\frac{p}{\theta}} \left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} (F(\nabla_g(u_\alpha\eta_\alpha) + cF(\nabla(u_\alpha\eta_\alpha)d_g^2)dv_g\right)$$

$$\times \left(A_\alpha + c\left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}-1} \int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^q d_g^2 dv_g\right).$$

Aplicando o Lema 2.2.2 à função $u_\alpha\eta_\alpha$, temos

$$\int_M F(\nabla_g(u_\alpha\eta_\alpha))dv_g \leq \int_M \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha)dv_g + c\int_M |\eta_\alpha \nabla_g u_\alpha|^{p-1}|\nabla_g\eta_\alpha u_\alpha| dv_g + c\int_M |\nabla_g \eta_\alpha u_\alpha|^p dv_g$$

Usando $u_\alpha\eta_\alpha$ no Corolário 2.2.1, encontramos

$$\int_M F((\nabla_g(u_\alpha\eta_\alpha))d_g^2 dv_g \leq (1+\epsilon)\int_M \eta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha)d_g^2 dv_g + C(\epsilon)\int_M u_\alpha^p F(\nabla_g\eta_\alpha)d_g^2 dv_g.$$

Destas duas informações, deduzimos que

$$\left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dx\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq A(p,q,p,F)^{\frac{p}{\theta}} A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)dv_g$$

$$+c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} F(\nabla u_\alpha)\eta_\alpha^p dv_g \left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}-1} \int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^q d_g^2 dv_g$$

$$+cA_\alpha \int_{B(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_g u_\alpha|^{p-1}\eta_\alpha^{p-1}|\nabla_g\eta_\alpha| u_\alpha dv_g + cA_\alpha\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^p dv_g + cA_\alpha\int_{B(x_\alpha,2\delta)} F(\nabla_g u_\alpha)d_g^2 dv_g \eta_\alpha^p.$$

Pela hipótese de contradição temos $J_\alpha(u_\alpha) = \nu_\alpha \leq A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}}$, ou seja

$$A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)dv_g + \alpha A_\alpha = \nu_\alpha \leq A(p,q,p,F)^{-\frac{p}{\theta}}.$$

Substituindo este fato na desigualdade acima, encontramos

$$A(p,q,p,F)^{\frac{p}{\theta}}\alpha A_\alpha \leq 1 - \left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dx\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$+cA_\alpha + c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} F(\nabla_g u_\alpha)\eta_\alpha^p dv_g \left(\int_M u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}-1} \int_{B(x_\delta,2\delta)} u_\alpha^q d_g^2 dv_g$$

$$+cA_\alpha \int_{B(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_g u_\alpha|^{p-1}\eta_\alpha^{p-1}|\nabla_g\eta_\alpha| u_\alpha dv_g + cA_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta_\alpha^p d_g^2 dv_g. \tag{3.72}$$

Agora vamos obter uma cota para o lado direito nesta desigualdade.

(A) Da expansão (2.11) temos $dx \geq (1 - cd_g(x, x_\alpha)^2)dv_g$ também usando que $||u_\alpha||_p = 1$, obtemos

$$1 - \left(\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dx\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq c\left(1 - \int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dx\right) \leq c\int_{M\backslash B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dv_g + c\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p d_g^2 dv_g.$$

(B) Agora vamos mostrar que

$$A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta_\alpha^p d_g^2 dv_g \leq c\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^p d_g^2 dv_g + c\int_{M\backslash B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^p dv_g + cA_\alpha.$$

De fato, seja $\zeta \in C^1(I\!R)$ uma função tal que $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta \equiv 0$ em $[0, \frac{\delta}{2}]$ e $\zeta \equiv 1$ em $[\delta, \infty)$. Defina $\zeta_\alpha = \zeta(d_g(x_\alpha, x))$. Usando $\zeta_\alpha^p u_\alpha$ como função teste na equação (3.52), temos

$$A_\alpha \int_M \zeta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha)dv_g \leq c\int_M \zeta_\alpha^p u_\alpha^p dg - A_\alpha \int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\zeta_\alpha^{p-1}\nabla_g \zeta_\alpha u_\alpha dv_g.$$

Das desigualdades de Hölder e Young com ϵ, juntamente com (H.1), deduzimos que

$$\left|\int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\zeta_\alpha^{p-1}\nabla_g \zeta_\alpha u_\alpha dv_g\right| \leq c\left(\int_M \zeta_\alpha^p |\nabla_g u_\alpha|^p dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_M u_\alpha^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \epsilon \int_M \zeta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha)dv_g + c.$$

Quando substituímos esta estimativa na desigualdade anterior encontramos

$$A_\alpha \int_M \zeta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha)dv_g \leq c\int_{M\backslash B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^p dv_g + cA_\alpha. \tag{3.73}$$

Por outro lado, pela hipótese $p \leq 2$ e das desigualdades de Hölder e Young juntamente com (H.1), temos

$$\int_{B(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} u_\alpha \eta_\alpha^p d_g dv_g \leq \left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p |\nabla_g u_\alpha|^p d_g^2 dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}}$$
$$\leq c + \epsilon \int_{B(x_\alpha,2\delta)} F(\nabla_g u_\alpha)\eta_\alpha^p d_g^2 dv_g. \tag{3.74}$$

Tomando $u_\alpha d_g^2 \eta_\alpha^p$ como função teste na equação (3.52) e da $(p-1)$ - homogeneidade da função $\partial_v F$, encontramos

$$A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\eta_\alpha^p d_g^2 dv_g$$
$$\leq c\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p d_g^2 dv_g + c\left|A_\alpha \int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g d_g u_\alpha \eta_\alpha^p d_g dv_g\right| + \left|A_\alpha \int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g \eta_\alpha \eta_\alpha^{p-1} u_\alpha d_g^2 dv_g\right|$$
$$\leq c\int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p d_g^2 dv_g + cA_\alpha \int_M |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} u_\alpha \eta_\alpha^p d_g dv_g + A_\alpha \int_M |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} |\nabla_g \eta_\alpha| u_\alpha d_g^2 dv_g. \tag{3.75}$$

Da $(p-1)$ - homogeneidade da função $\partial_v F$ e (H.1) juntamente com as desigualdades de Hölder e Young, temos que a terceira parcela da desigualdade acima é majorada por:

$$A_\alpha \int_M |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} |\nabla_g \eta_\alpha| u_\alpha d_g^2 dv_g \leq cA_\alpha \left(\int_M |\nabla_g u_\alpha|_g^p \zeta_\alpha^p dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_M u_\alpha^p dv_g\right)^p$$

$$\leq cA_\alpha \int_M \zeta_\alpha^p F(\nabla_g u_\alpha) dv_g + cA_\alpha.$$

Usando (3.73) na desigualdade acima, obtemos

$$A_\alpha \int_M |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} |\nabla_g \eta_\alpha| u_\alpha d_g^2 dv_g \leq cA_\alpha + c\int_{M\backslash B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^p dv_g. \tag{3.76}$$

Agora de (3.74) e (3.76) substituídas em (3.75) nos dá a desigualdade desejada.

(C) Novamente usando as desigualdades de Hölder e Young e (H.1), temos

$$A_\alpha \int_M |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} \eta_\alpha^{p-1} |\nabla_g \eta_\alpha| u_\alpha dv_g \leq cA_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\zeta_\alpha^p dv_g + cA_\alpha.$$

Substituindo (3.73) na desigualdade acima, encontramos

$$A_\alpha \int_M |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} \eta_\alpha^{p-1} |\nabla_g \eta_\alpha| u_\alpha dv_g \leq cA_\alpha + c\int_{M\backslash B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^p dv_g.$$

(D) Como última estimativa a ser obtida, vamos mostrar que

$$\int_{B(x_\alpha,2\delta)} F(\nabla_g u_\alpha)\eta_\alpha^p dv_g \left(\int_M u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}-1} \int_{B(x_\delta,2\delta)} u_\alpha^q d_g^2 dv_g$$

$$\leq c\int_{B(x_\alpha,4\delta)} u_\alpha^p d_g^2 dv_g + cA_\alpha + c\int_{M\backslash B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dv_g.$$

De fato, defina $\tilde{\eta}_\alpha(x) = \eta\left(\frac{d_g(x,x_\alpha)}{4\delta}\right)$, onde η é conforme (3.59) e $\tilde{\zeta}_\alpha(x) = \zeta\left(\frac{d_g(x,x_\alpha)}{2\delta}\right)$, onde ζ é definida em (B).

Tomando $\tilde{\eta}_\alpha d_g^2 u_\alpha$ como função teste na equação (3.52), encontramos

$$B_\alpha \int_M u_\alpha^q \tilde{\eta}_\alpha^p d_g^2 dv_g \leq c\int_M u_\alpha^p \tilde{\eta}_\alpha^p d_g^2 dv_g + \left|\frac{A_\alpha}{p}\int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g(\tilde{\eta}_\alpha^p u_\alpha d_g^2) dv_g\right|. \tag{3.77}$$

Porém, da $(p-1)$ - homogeneidade da função $\partial_v F$, temos

$$\left|\frac{A_\alpha}{p}\int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g(\tilde{\eta}_\alpha^p u_\alpha d_g^2) dv_g\right| \leq A_\alpha \int_M F(\nabla_g u_\alpha)\tilde{\eta}_\alpha^p d_g^2 dv_g$$

$$+cA_\alpha \int_{B(x_\alpha,4\delta)} |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} \tilde{\eta}_\alpha^{p-1} |\nabla_g \tilde{\eta}_\alpha| u_\alpha dv_g + cA_\alpha \int_{B(x_\alpha,4\delta)} u_\alpha \tilde{\eta}_\alpha^p |\nabla_g u_\alpha|^{p-1} d_g dv_g.$$

Repetindo as contas de (B), (C) e (3.74), usando $\tilde{\eta}_\alpha$ no lugar de η_α e substituindo na desigualdade acima, encontramos

$$\left|\frac{A_\alpha}{p}\int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g(\tilde{\eta}_\alpha^p u_\alpha d_g^2) dv_g\right|$$

$$\leq cA_\alpha + c\int_{B(x_\alpha,4\delta)} u_\alpha^p d_g^2 dv_g + c\int_{M\backslash B(x_\alpha,\delta)} +c\int_{B(x_\alpha,4\delta)} F(\nabla_g u_\alpha)\tilde{\eta}_\alpha^p d_g^2 dv_g$$

Novamente considerando (B), com $\tilde{\eta}_\alpha$ no lugar de η_α, vemos que

$$\int_{B(x_\alpha,4\delta)} F(\nabla_g u_\alpha)\tilde{\eta}_\alpha^p d_g^2 dv_g \leq c\int_{B(x_\alpha,4\delta)} u_\alpha^p d_g^2 dv_g + c\int_{M\backslash B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dv_g + cA_\alpha.$$

Portanto

$$\left|\frac{A_\alpha}{p}\int_M \partial_v F(\nabla_g u_\alpha)\nabla_g(\tilde{\eta}_\alpha^p u_\alpha d_g^2)dv_g\right| \leq cA_\alpha + c\int_{M\backslash B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dv_g + c\int_{B(x_\alpha,4\delta)} u_\alpha^p d_g^2 dv_g.$$

Usando esta desigualdade e o ítem (d) de (3.53) em (3.77), obtemos

$$\int_{B(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^q d_g^2 dv_g \leq \int_M u_\alpha^q \tilde{\eta}_\alpha^p d_g^2 dv_g$$

$$\leq \left(c\int_{B(x_\alpha,4\delta)} u_\alpha^p d_g^2 dv_g + cA_\alpha + \int_{M\backslash B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p dv_g\right)\int_M u_\alpha^q dv_g.$$

Finalmente, desta desigualdade e o ítem (a) de (3.53), encontramos a última estimativa.

Substituindo as estimativas obtidas em (A), (B), (C) e (D) na desigualdade (3.72), ficamos com

$$\alpha A_\alpha \leq c\int_{M\backslash B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^p dv_g + c\int_{B(x_\alpha,4\delta)} u_\alpha^p d_g^2 dv_g + cA_\alpha. \tag{3.78}$$

Pelo passo 3 e como $p \leq 2$, temos

$$\int_{B(x_\alpha,4\delta)} u_\alpha^p d_g^2 dv_g = \int_{B(x_\alpha,4\delta)} (u_\alpha^{\frac{p}{n}} d_g)^p d_g^{2-p} u_\alpha^{\frac{np-p^2}{n}} dv_g \leq c\int_M u_\alpha^{\frac{np-p^2}{n}} dv_g.$$

Analogamente

$$\int_{M\backslash B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^p d_g^2 dv_g = \int_{M\backslash B(x_\alpha,\frac{\delta}{2})} (u_\alpha^{\frac{p}{n}} d_g)^p d_g^{2-p} u_\alpha^{\frac{np-p^2}{n}} dv_g \leq c\int_M u_\alpha^{\frac{np-p^2}{n}} dv_g.$$

Agora vamos estimar a integral do lado direito das desigualdades acima.

Pela desigualdade de interpolação, encontramos

$$\left(\int_M u_\alpha^{\frac{np-p^2}{n}} dv_g\right)^{\frac{n}{np-p^2}} \leq \left(\int_M u_\alpha^q dv_g\right)^{\frac{\lambda}{q}} \left(\int_M u_\alpha^p dv_g\right)^{\frac{1-\lambda}{p}},$$

onde $\lambda = \frac{pq}{(n-p)(p-q)}$ e $q < \frac{np-p^2}{n} < p$. Como

$$\int_M u_\alpha^p dv_g = 1$$

e pela definição de A_α, obtemos

$$\int_M u_\alpha^p d_g^2 dv_g \leq c\int_M u_\alpha^{\frac{np-p^2}{n}} dv_g \leq cA_\alpha.$$

Portanto, de (3.78), temos $\alpha \leq c$. Esta é a contradição procurada. Com isto encerramos a prova do teorema.

■

Capítulo 4

Desigualdade homogênea logarítmica de Sobolev ótima Riemanniana

4.1 Introdução

Neste capítulo, iremos estudar a desigualdade homogênea logarítmica de Sobolev

$$\int_M |u|^p \log |u|^p dv_g \leq \frac{n}{p} \log \left(A \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B \right). \tag{4.1}$$

Nosso interesse será estudar as constantes ótimas desta desigualdade. A primeira constante ótima é definida como

$$\mathcal{A}(p, F) = \inf\{A \in I\!R; \text{ existe } B \in I\!R \text{ tal que } (4.1) \text{ é válida}\} \tag{4.2}$$

e a segunda contante ótima é definida como

$$\mathcal{B}(p, F) = \inf\{B \in I\!R; \text{ tal que } (4.2) \text{ é válida}\}.$$

Portanto, temos a seguinte desigualdade

$$\int_M |u|^p \log |u|^p dv_g \leq \frac{n}{p} \log \left(\mathcal{A}(p, F) \int_M F(\nabla_g u) dv_g + \mathcal{B}(p, F) \right). \tag{4.3}$$

No caso clássico ($F([x, i, v]) = |[x, i, v]|^p$) Brouttelande [9] em 2003 provou a validade de (4.3) para $p = 2$. Neste capítulo iremos generalizar [9] em dois aspectos: calcularemos o valor exato da constante ótima $\mathcal{A}(p, F)$ de (4.3) e também provaremos que (4.5) permanece válida para $1 < p \leq 2$ e $F \in \mathcal{F}$. Nossa argumentação se baseia em [9] e [12]. Para explicitarmos a constante ótima $\mathcal{A}(p, F)$ de (4.3) usaremos a desigualdade homogênea logarítimica de Sobolev ótima Euclidiana tratada por Gentil [19].
Como uma conseqüência interessante da desigualdade logarítmica, iremos obter uma estimativa *a priori* para a equação de Hamilton-Jacobi e a equação do calor numa variedade Riemanniana compacta. Esta estimativa depende somente das constantes ótimas.

4.2 Desigualdade logarítmica de Sobolev

Seja $F \in \mathcal{F}$. Considere a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$\left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq \left(A \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B \int_M |u|^p dv_g\right) \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}.$$

Denotemos esta desigualdade por

$$I_{p,q,r}(A, B, F). \tag{4.4}$$

Então a *constante ótima B*, dada a constante ótima A, é definida por

$$B(p,q,r,F) = \inf\{B \in I\!R; I_{p,q,r}(A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}}, B, F) \text{ é válida}\}. \tag{4.5}$$

Nosso primeiro resultado estabelece uma relação de ordem para a validade da desigualdade ótima. Neste capítulo estaremos sempre supondo $q < r < p^*$, $1 < p < n$ e M uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n.

Lema 4.2.1. *Suponha $q_0 < q$, $q_0 < r_0 < r$ e*

$$I_{p,q,r}(A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}}, B(p,q,r,F), F)$$

seja válida. Então a desigualdade

$$I_{p,q_0,r_0}(A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}}, B(p,q,r,F), F)$$

também é válida.

Prova:

Pela desigualdade de interpolação, temos

$$\left(\int_M |u|^{r_0} dv_g\right)^{\frac{1}{r_0}} \leq \left(\int_M |u|^{q_0} dv_g\right)^{\frac{\lambda}{q_0}} \left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{1-\lambda}{r}},$$

onde $\frac{1}{r_0} = \frac{\lambda}{q_0} + \frac{1-\lambda}{r}$. E também

$$\left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_M |u|^{q_0} dv_g\right)^{\frac{\mu}{q_0}} \left(\int_M |u|^r dv_g\right)^{\frac{1-\mu}{r}},$$

onde $\frac{1}{q} = \frac{\mu}{q_0} + \frac{1-\mu}{r}$.

Aplicando estas desigualdades em $I_{p,q,r}(A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}}, B(p,q,r,F), F)$, obtemos

$$\left(\int_M |u|^{r_0} dv_g\right)^{\frac{p}{r_0(1-\lambda)}(1+\mu\frac{1-\theta}{\theta})}$$

$$\leq \left(A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B(p,q,r,F) \int_M |u|^p dv_g\right) \left(\int_M |u|^{q_0} dv_g\right)^{\frac{p}{q_0}(\frac{\mu}{1-\lambda}\frac{1-\theta}{\theta} + \frac{\lambda}{1-\lambda})},$$

onde $\theta = \frac{np(r-q)}{r(qp-qn+np)}$.
Substituindo os valores de λ, μ e θ, vemos que

$$\frac{p}{r_0(1-\lambda)}\left(1+\mu\frac{1-\theta}{\theta}\right) = \frac{p}{r_0\theta_0},$$

onde $\theta_0 = \frac{np(r_0-q_0)}{r_0(q_0p-q_0n+np)}$ e

$$\frac{p}{q_0}\left(\frac{\mu}{1-\lambda}\frac{1-\theta}{\theta}+\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) = \frac{p}{q_0}\frac{1-\theta_0}{\theta_0}.$$

Portanto, $I_{p,q_0,r_0}(A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}}, B(p,q,r,F), F)$ é válida.

■

Deste lema podemos estabelecer uma relação de ordem para a constante ótima A.

Corolário 4.2.1. *Suponha as hipóteses do lema anterior e que a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg ótima*

$$I_{p,q_0,r_0}(A(p,q_0,r_0,F)^{\frac{p}{\theta}}, B(p,q_0,r_0,F))$$

é válida. Então $A(p,q_0,r_0,F) \leq A(p,q,r,F)$.

Prova:
Pela definição da melhor constante $A(p_0,q_0,r_0,F)$ e do lema anterior segue o corolário.

■

Agora, vamos estabelecer uma relação análoga para a constante ótima B.

Lema 4.2.2. *Suponha $q_0 < q$, $q_0 < r_0 < r$ e que as desigualdades ótimas*

$$I_{p,q,r}(A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}}, B(p,q,r,F), F)$$

e

$$I_{p,q_0,r_0}(A(p,q_0,r_0,F)^{\frac{p}{\theta_0}}, B(p,q_0,r_0,F), F)$$

sejam válidas. Então $B(p,q_0,r_0,F) \geq B(p,q,r,F)$.

Prova:
Do Lema 4.2.1, segue que

$$I_{p,q_0,r_0}(A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}}, B(p,q,r,F), F)$$

é válida. Defina

$$A_0(p,q_0,r_0,F) = \inf\{A \in I\!R; I_{p,q_0,r_0}(A, B(p,q,r,F), F) \text{ é válida}\}.$$

Pela definição de A_0, dado $\epsilon > 0$ existe $u_\epsilon \in D^{p,q_0}(M)$ com $||u_\epsilon||_p = 1$ tal que

$$\left(A_0(p,q_0,r_0,F)\int_M F(\nabla_g u_\epsilon)dv_g + B(p,q,r,F)\right)\left(\int_M |u_\epsilon|^{q_0}dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta_0)}{\theta_0 q_0}}$$

$$\leq \left(\int_M |u_\epsilon|^{r_0}dv_g\right)^{\frac{p}{\theta_0 r_0}} + \epsilon,$$

onde $\theta_0 = \frac{np(r_0-q_0)}{r_0(q_0p-q_0n+np)}$.
Por outro lado, temos

$$\left(\int_M |u_\epsilon|^{r_0} dv_g\right)^{\frac{p}{r_0\theta_0}} \leq \left(A(p,q_0,r_0,F)^{\frac{p}{\theta_0}} \int_M F(\nabla_g u_\epsilon) dv_g + B(p,q_0,r_0,F)\right) \left(\int_M |u_\epsilon|^{q_0} dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta_0)}{\theta_0 q_0}}.$$

Pela definição de A_0, temos $A_0(p,q_0,r_0,F) \geq A(p,q_0,r_0,F)^{\frac{p}{\theta_0}}$. Desta estimativa juntamente com as duas desigualdades acima, obtemos

$$(B(p,q,r,F) - B(p,q_0,r_0,F)) \left(\int_M |u_\epsilon|^{q_0}\right)^{\frac{p(1-\theta_0)}{\theta_0 q_0}} \leq \epsilon.$$

Usando a desigualdade de Hölder ou interpolação, conforme $p < q_0$ ou $p > q_0$, obtemos

$$1 = \int_M |u_\epsilon|^p dv_g \leq \left(\int_M |u_\epsilon|^{q_0} dv_g\right)^{c_1(p,q_0,q)} |M|^{c_2(p,q_0,q)},$$

onde $|\cdot|$ é o volume Riemanniano. Usando esta desigualdade na anterior, encontramos

$$B(p,q,r,F) - B(q,q_0,r_0,F) \leq \epsilon |M|^{c(p,q,q_0,\theta_0)} \to 0$$

quando $\epsilon \to 0$.

E isso conclui o lema.

■

A partir de agora, estaremos considerando uma sub-família de desigualdades de Gagliardo-Nirenberg ótimas. Considere

$$\begin{cases} p < q < \frac{p(n-1)}{n-p}, \\ r = \frac{p(q-1)}{p-1}, \\ \theta = \frac{n(q-p)}{(q-1)(pq-qn+np)}. \end{cases}$$

Neste caso, para simplificar a notação, escreveremos

$$\begin{cases} A(p,q,F) = A(p,q,r,F), \\ B(p,q,F) = B(p,q,r,F), \\ I_{p,q}(A,B,F) = I_{p,q,r}(A,B,F). \end{cases}$$

Reunindo as informações anteriores, vamos registrar o seguinte resultado de monotonicidade com relação as melhores constantes.

Lema 4.2.3. *Sejam p, q, r como acima, $1 < p \leq 2$, $F \in \mathcal{F}$ satisfazendo a hipótese* (3.10) *do Teorema* 3.3.1 *e $p < q_1 < q_2 < \frac{p(n-1)}{n-p}$. Então:*

(i) *$A(p,q_1,F) \leq A(p,q_2,F)$,*

(ii) *$B(p,q_1,F) \geq B(p,q_2,F)$.*

Prova:

Como $q_1 < q_2$, temos $r_1 = \frac{p(q_1-1)}{p-1} < \frac{p(q_2-1)}{p-1} = r_2$ e $q_1 < r_1$.
Pelo Teorema 3.3.1, as desigualdades ótimas

$$I_{p,q_1}(A(p,q_1,F)^{\frac{p}{\theta}}, B(p,q_1,F), F)$$

e

$$I_{p,q_2}(A(p,q_2,F)^{\frac{p}{\theta}}, B(p,q_2,F), F)$$

são válidas. Daí, podemos aplicar o Lema 4.2.2. Logo, $B(p,q_1,F) \geq B(p,q_2,F)$ e isso mostra (ii).
Do Corolário (4.2.1), obtemos (i).

■

Usando o Teorema 3.3.1, vamos estabelecer a convergência das melhores contantes.

Lema 4.2.4. *Sejam p, q, r e F conforme o lema precedente. Suponha ainda que F satisfaz a hipótese* (3.50) *do Teorema* 3.3.1 *e que a dimensão da variedade M seja $n > \frac{2p^2}{p-1}$. Então, para cada p fixado,*

(i) $B(p,q,F) \to B_0(p,F)$,

(ii) $A(p,q,F) \to A_0(p,F)$

quando $q \to p^+$.

Prova:

Defina $q_0 = \frac{p+1}{2}$, então $1 < q_0 < p$.
Do Teorema 3.4.1 a desigualdade ótima

$$I_{p,q_0,p}(A(p,q_0,p,F)^{\frac{p}{\theta}}, B(p,q_0,p,F), F)$$

é válida.
Como $p < q < \frac{p(n-1)}{n-p}$ e $r = \frac{p(q-1)}{p-1}$ temos $q_0 < q$ e $q_0 < p < r$.
Assim, podemos usar o Lema 4.2.2 e encontramos

$$B(p,q_0,p,F) \geq B(p,q,F), \tag{4.6}$$

para todo $q \in (p, \frac{p(n-1)}{n-p})$.
Pelo Corolário 4.2.1, segue

$$A(p,q_0,p,F) \leq A(p,q,F), \tag{4.7}$$

para todo $q \in (p, \frac{p(n-1)}{n-p})$.
Do Lema 4.2.3, temos que $B(p,\cdot,F)$ é monótona não-crescente e $A(p,\cdot,F)$ é monótona não-decrescente. Portanto, destas monotonicidades e das limitações (4.6) e (4.7), segue a existência de números $A_0(p,F)$ e $B_0(p,F)$ tais que $B(p,q,F) \to B_0(p,F)$ e $A(p,q,F) \to A_0(p,F)$ quando $q \to p^+$.

■

Observação 4.2.1.

Da Proposição 3.3.1, existe $x_{p,q} \in M$ tal que $A(p, q, \frac{p(q-1)}{p-1}, x_{p,q}) = A(p, q, F)$. Pela compacidade de M podemos supor que $\lim_{q \to p^+} x_{p,q} = x_0$. Assim, estamos prontos para estabelecer a seguinte desigualdade logarítmica homogênea:

Teorema 4.2.1. *Suponha $F \in \mathcal{F}$ satisfazendo as hipóteses* (3.10) *do Teorema* 3.3.1 *e* (3.50) *do Teorema* 3.3.1, $1 < p \leq 2$ *e M uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n > \frac{2p^2}{p-1}$. Então para toda função $u \in H^{1,p}(M)$ com $||u||_p = 1$, temos*

$$\int_M |u|^p \log |u|^p dv_g \leq \frac{n}{p} \log \left(\mathcal{A}(p, F) \int_M F(\nabla_g u) dv_g + \mathcal{B}(p, F) \right),$$

onde as constantes ótimas são dadas por

$$\mathcal{A}(p, F) = \frac{p^{p+1}}{ne^{p-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-F^*_{x_0}(x)} dx \right)^{-\frac{p}{n}}$$

e

$$\mathcal{B}(p, F) = \mathcal{A}(p, F) \frac{B_0(p, F)}{A_0(p, F)^{\frac{p}{\theta}}},$$

onde x_0 é como na Observação 4.2.1, *$F^*_{x_0}$ é a transformada de Legendre de F_{x_0}, $B_0(p, F)$ e $A_0(p, F)$ são dadas no Lema* 4.2.4.

Prova:

Seja $u \in H^{1,p}(M) \setminus \{0\}$. Então $u \in D^{p,q}(M)$ para todo $q \in [p, \frac{p(n-1)}{n-p}]$. Pelo Teorema 3.3.1, temos

$$\left(\int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq \left(A(p, q, F)^{\frac{p}{\theta}} \int_M F(\nabla_g u) dv_g + B(p, q, F) \int_M |u|^p dv_g \right) \left(\int_M |u|^q dv_g \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}},$$

onde $r = \frac{p(q-1)}{p-1}$. Tomando o logaritmo, em ambos os lados desta desigualdade, obtemos

$$\frac{1}{\theta} \log \left(\frac{||u||_r}{||u||_q} \right) \leq \log \left(A(p, q, F)^{\frac{1}{\theta}} \right) + \log \left(\int_M F(\nabla_g u) dv_g + \frac{B(p, q, F)}{A(p, q, F)^{\frac{p}{\theta}}} \int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}} - \log \left(||u||_q \right).$$

Reescrevendo esta desigualdade, ficamos com

$$\frac{1}{\theta} \log \left(\frac{||u||_r}{||u||_q} \right) - \log \left(A(p, q, F)^{\frac{1}{\theta}} \right) \leq \log \left(\frac{||F(\nabla_g u)||_1}{||u||_q^p} + \frac{B(p, q, F)}{A(p, q, F)^{\frac{p}{\theta}}} \frac{||u||_p^p}{||u||_q^p} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por definição, $\theta = (q - p)\frac{n}{(q-1)(np-nq+pq)}$. Então podemos escrever $\theta = \left(\frac{n}{(p-1)p^2} + x(q) \right)(q - p)$, onde

$$x(q) = \frac{n}{(q-1)(np - nq + pq)} - \frac{n}{(p-1)p^2}.$$

Daí,

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{q-p} \left(\frac{p^2(p-1)}{n + x(q)(p^2(p-1)} \right).$$

Do Lema 4.2.4 e como $x(q) \to 0$ quando $q \to p^+$, obtemos, após tomarmos o limite na desigualdade acima,

$$\frac{p^2(p-1)}{n} \lim_{q\to p^+} \frac{1}{q-p} \log\left(\frac{||u||_r}{||u||_q}\right) - \lim_{q\to p^+} \log\left(A(p,q,F)^{\frac{1}{\theta}}\right) \leq \log\left(\frac{||F(\nabla_g u)||_1}{||u||_p^p} + \frac{B_0(p,F)}{A_0(p,F)^{\frac{p}{\theta}}}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.8}$$

Agora, vamos calcular os limites restantes.
Observe que

$$\log\left(\frac{||u||_r}{||u||_q}\right) = \frac{1}{r}\log(||u||_r^r) - \frac{1}{q}\log(||u||_q^q) = \frac{q-r}{r}\log(||u||_q) + \frac{1}{r}\left(\log(||u||_r^r) - \log(||u||_q^q)\right).$$

Decorre desta igualdade, mais a identidade $q - r = -\frac{q-p}{p-1}$ e do teorema do valor médio,

$$\begin{aligned}\lim_{q\to p^+} \frac{1}{q-p}\log\left(\frac{||u||_r}{||u||_q}\right) &= \lim_{q\to p^+} \frac{1}{q-p}\left(\frac{q-r}{r}\log(||u||_q) + \frac{1}{r}\left(\log(||u||_r^r) - \log(||u||_q^q)\right)\right)\\ &= \frac{1}{p}\left\{\frac{-1}{p-1}\log(||u||_p) + \lim_{q\to p^+}\left[\frac{1}{q-p}\left(\frac{1}{\lambda_q}\left(\int_M (|u|^r - |u|^q)\, dv_g\right)\right)\right]\right\},\end{aligned}$$

onde λ_q está entre $||u||_r^r$ e $||u||_q^q$.
Novamente pelo teorema do valor médio e observando que $q, r \to p$ quando $q \to p^+$, obtemos

$$\lim_{q\to p^+} \frac{1}{q-p}\log\left(\frac{||u||_r}{||u||_q}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{-1}{p-1}\log(||u||_p) + \frac{1}{||u||_p^p}\lim_{q\to p^+}\frac{1}{q-p}\int_M |u|^{\sigma_q}\log(|u|)(r-q)dv_g\right),$$

onde $\sigma_q \in (q, r)$. Pela definição de r, temos $r - q = \frac{q-p}{p-1}$. Portanto

$$\begin{aligned}\lim_{q\to p^+} \frac{1}{q-p}\log\left(\frac{||u||_r}{||u||_q}\right) &= \frac{-1}{p(p-1)}\log(||u||_p) + \frac{1}{||u||_p^p}\frac{1}{p(p-1)}\int_M |u|^p\log(|u|)dv_g\\ &= \frac{1}{p(p-1)}\int_M \frac{|u|^p}{||u||_p^p}\log\left(\frac{|u|}{||u||_p}\right)dv_g.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Por outro lado, usando que $A(p,q,F) = A(p,q,\frac{p(q-1)}{p-1}, x_{p,q})$ e o Teorema 1.2.2, temos

$$A(p,q,F) = A(p,q,\frac{p(q-1)}{p-1}, x_{p,q}) = \frac{||w_{p,q}||_r}{||F_{x_{p,q}}(\nabla w_{p,q})||_1^{\frac{\theta}{p}}||w_{p,q}||_q^{1-\theta}},$$

onde $w_{p,q}(x) = \left(1 + \frac{q-p}{p-1}F^*_{x_{p,q}}(x)\right)^{-\frac{p-1}{q-p}}$. Argumentando de modo análogo à Proposição 3.3.1 vemos que $F^*_{x_{p,q}} \to F^*_{x_0}$. Então, fazendo $q \to p^+$, temos $w_{p,q}(x) \to w_p(x) = exp(-F^*_{x_0}(x))$. Com isto

$$\lim_{q\to p^+}\log\left(A(p,q,F)^{\frac{1}{\theta}}\right) = \lim_{q\to p^+}\left(\frac{1}{\theta}\log\left(A(p,q,F)\right)\right)$$

$$= -\log\left(\frac{||F_{x_0}(\nabla w_p)||_1^{\frac{1}{p}}}{||w_p||_p}\right) + \frac{p^2(p-1)}{n}\lim_{q\to p^+}\frac{1}{q-p}\log\left(\frac{||w_{p,q}||_r}{||w_{p,q}||_q}\right).$$

Da mesma maneira como foi obtido (4.9), refazendo os mesmos cálculos, encontraremos

$$\lim_{q\to p^+}\frac{1}{q-p}\log\left(\frac{||w_{p,q}||_r}{||w_{p,q}||_q}\right) = \frac{1}{p(p-1)}\int_{I\!R^n}\frac{|w_p|^p}{||w_p||_p^p}\log\left(\frac{w_p}{||w_p||_p}\right)dx.$$

Então,

$$\lim_{q\to p^+} \log\left(A(p,q,F)^{\frac{1}{\theta}}\right) = -\log\left(\frac{||F_{x_0}(\nabla w_p)||_1^{\frac{1}{p}}}{||w_p||_p}\right) + \frac{1}{n}\int_M \frac{|w_p|^p}{||w_p||_p^p}\log\left(\frac{w_p}{||w_p||_p}\right)dv_g.$$

Desta igualdade juntamente com (4.9) aplicadas na desigualdade (4.8), obtemos

$$\int_M \frac{|u|^p}{||u||_p^p}\log\left(\frac{|u|^p}{||u||_p^p}\right)dv_g$$

$$\leq \frac{n}{p}\log\left(\frac{||F(\nabla_g u)||_1}{||u||_p^p} + \frac{B_0(p,F)}{A_0(p,F)^{\frac{p}{\theta}}}\right) - \frac{n}{p}\log\left(\frac{||F_{x_0}(\nabla w_p)||_1}{||w_p||_p^p}\right) + \int_{I\!R^n}\frac{w_p^p}{||w_p||_p^p}\log\left(\frac{w_p^p}{||w_p||_p^p}\right)dx. \tag{4.10}$$

Vamos escolher $\mathcal{A}(p,F)$, tal que

$$\frac{n}{p}\log(\mathcal{A}(p,F)) = -\frac{n}{p}\log\left(\frac{||F_{x_0}(\nabla w_p)||_1}{||w_p||_p^p}\right) + \int_{I\!R^n}\frac{w_p^p}{||w_p||_p^p}\log\left(\frac{w_p^p}{||w_p||_p^p}\right)dx.$$

Então, reescrevendo (4.10), temos

$$\int_M |u|^p\log(|u|^p)dv_g \leq \frac{n}{p}\log\left(\mathcal{A}(p,F)||F(\nabla_g u)||_1 + \mathcal{B}(p,F)\right),$$

onde

$$\mathcal{B}(p,F) = \mathcal{A}(p,F)\frac{B_0(p,F)}{A_0(p,F)^{\frac{p}{\theta}}}$$

e $||u||_p = 1$.

Para encerrar o teorema, falta mostrar que

$$\mathcal{A}(p,F) = \frac{p^{p+1}}{ne^{p-1}}\left(\int_{I\!R^n} e^{-F^*_{x_0}(x)}dx\right)^{-\frac{p}{n}}.$$

Para este propósito, vamos considerar a família de desigualdades ótimas dada pelo Teorema 1.2.2 com respeito à função F_{x_0}. Fazendo $B(p,q,F)=0$ e trocando M por $I\!R^n$, podemos repetir, passo a passo, os cáculos anteriores e obteremos a desigualdade homogênea logarítimica Euclidiana para a função F_{x_0}, ou seja

$$\int_{I\!R^n}|u|^p\log(|u|^p)dx \leq \frac{n}{p}\log\left(\mathcal{A}(p,F)\int_{I\!R^n}F_{x_0}(\nabla u)dx\right),$$

para toda função $u \in C^1(I\!R^n)$ com $||u||_p = 1$. Então, a constante ótima desta desigualdade deve coincidir com a constante ótima dada no Teorema 1.1 de [19]. Portanto

$$\mathcal{A}(p,F) = \frac{p^{p+1}}{ne^{p-1}}\left(\int_{I\!R^n} e^{-F^*_{x_0}(x)}dx\right)^{-\frac{p}{n}}.$$

■

4.3 Aplicações

Como uma aplicação do Teorema 4.2.1, iremos mostrar uma estimativa *a priori*.
Seja M uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq \frac{2p^2}{p-1}$. Vamos considerar o seguinte problema de Hamilton-Jacobi:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + F(\nabla_g u(x,t)) = 0 \quad \text{em} \quad M \times (0,\infty) \\ \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{em} \quad M, \end{cases} \tag{4.11}$$

onde $f : M \to I\!R$ é contínua e $F \in \mathcal{F}$ satisfaz as hipóteses (3.10) do Teorema 3.3.1 e (3.50) do Teorema 3.3.1.

Teorema 4.3.1. *Suponha que existe uma função* $u : M \times [0,\infty) \to I\!R$ *solução do problema* (4.11)*. Sejam* $\phi(t) = \frac{n}{p}\log(\mathcal{A}(p,F)t + \mathcal{B}(p,F))$ *e* q_c *solução da E.D.O.*

$$\begin{cases} \phi'(cq_c^p) = \frac{p^p q_c^{2-p}}{q_c'} \\ \\ q_c(0) \geq 1 \end{cases} \tag{4.12}$$

para $c > 0$ *e* $1 < p \leq 2$*. Então, para todo* $t \in [0, t_0]$*, temos*

$$||e^{u(x,t)}||_{q_c(t)} \leq ||e^{f(x)}||_{q_c(0)} e^{\mathcal{D}(t)},$$

onde

$$\mathcal{D}(t) = \int_{q_c(0)}^{q_c(t)} \frac{\psi(cs^p)}{s^2} ds,$$

o intervalo $[0, t_0]$ *é o intervalo de solução de* q_c *e* $\psi(t) = \phi(t) - t\phi'(t)$*.*

Prova: É bem conhecido da teoria de E.D.O., que existe uma solução q_c do problema (4.12) em um intervalo $[0, t_0]$, sendo q_c positiva e estritamente crescente no intervalo $[0, t_0]$.

Considere $H(t) = ||e^{u(x,t)}||_{q_c(t)}$, onde u é a solução do problema (4.11).
Calculando a derivada de H, obtemos

$$H'(t) = H(t)\left(-\frac{q_c'}{q_c^2}\right)\log\left(\int_M e^{uq_c} dv_g\right) + H(t)^{1-q_c}\frac{1}{q_c}\left(\int_M e^{uq_c}(q_c u_t + q_c' u) dv_g\right).$$

Como $u_t = -F(\nabla_g u)$, temos

$$\frac{H'}{H} = \frac{q_c'}{q_c^2}\left(\int_M \frac{\left(e^{\frac{uq_c}{p}}\right)^p}{||e^{\frac{uq_c}{p}}||_p^p}\log\left(\frac{\left(e^{\frac{uq_c}{p}}\right)^p}{||e^{\frac{uq_c}{p}}||_p^p}\right) dv_g - \frac{q_c^2}{q_c'}\frac{\int_M e^{uq_c}F(\nabla_g u)dv_g}{\int_M e^{uq_c}dv_g}\right).$$

Usando o Teorema 4.2.1, encontramos

$$\frac{H'}{H} \leq \frac{q_c'}{q_c^2}\left(\frac{n}{p}\log\left(\mathcal{A}(p,F)\frac{\int_M F(\nabla_g(e^{\frac{uq_c}{p}}))dv_g}{||e^{\frac{uq_c}{p}}||_p^p} + \mathcal{B}(p,F)\right) - \frac{q_c^2}{q_c'}\frac{\int_M e^{uq_c}F(\nabla_g u)dv_g}{\int_M e^{uq_c}dv_g}\right).$$

Substituindo a igualdade

$$F(\nabla_g(e^{\frac{uq_c}{p}})) = \left(\frac{q_c}{p}\right)^p e^{uq_c} F(\nabla_g u)$$

na desigualdade acima, segue

$$\frac{H'}{H} \leq \frac{q_c'}{q_c^2}\left(\frac{n}{p}\log\left(\left(\frac{q_c}{p}\right)^p \mathcal{A}(p,F)\frac{\int_M e^{uq_c}F(\nabla_g u)dv_g}{||e^{uq_c}||_{q_c}^{q_c}} + \mathcal{B}(p,F)\right) - \frac{q_c^2}{q_c'}\frac{\int_M e^{uq_c}F(\nabla_g u)dv_g}{||e^{uq_c}||_{q_c}^{q_c}}\right).$$

Dados $\alpha, \beta > 0$, temos $\phi(\beta) \leq \phi(\alpha) + \phi'(\alpha)(\beta - \alpha)$ pela concavidade da função ϕ. Seja

$$\beta(t) = \left(\frac{q_c}{p}\right)^p \frac{\int_M e^{uq_c}F(\nabla_g u)dv_g}{||e^{uq_c}||_{q_c}^{q_c}}$$

e considere a função $\alpha(t)$ tal que

$$\left(\frac{p}{q_c}\right)^p \frac{q_c^2}{q_c'} = \phi'(\alpha(t)).$$

Segue, destas observações,

$$\frac{H'}{H} \leq \frac{q_c'}{q_c^2}\psi(\alpha(t)),$$

onde $\psi(\alpha) = \phi(\alpha) - \alpha\phi'(\alpha)$.
Integrando em t, ficamos com

$$||e^u||_{q_c(t)} \leq ||e^{f(x)}||_{q_c(0)} e^{\mathcal{D}(t)},$$

onde

$$\mathcal{D}(t) = \int_0^t \frac{q_c'(s)}{q_c(s)^2}\psi((\phi')^{-1}\left(\frac{p^p q_c(s)^{2-p}}{q_c'(s)}\right))ds.$$

Por (4.12), temos

$$cq_c^p = (\phi')^{-1}\left(\frac{p^p q_c^{2-p}}{q_c'}\right).$$

Fazendo uma mudança de variável, obtemos

$$\mathcal{D}(t) = \int_{q_c(0)}^{q_c(t)} \frac{\psi(cy^p)}{y^2}dy.$$

■

Esta estimativa, no caso Euclidiano, é a melhor possível ver [19].

Como uma segunda aplicação, vamos obter uma estimativa *a priori* para o seguinte problema do calor. Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \mathrm{div}\partial_v F(\nabla_g u(x,t)) = 0 \quad \text{em} \quad M \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{em} \quad M, \end{cases} \tag{4.13}$$

onde $f : M \to I\!R$ é contínua e $F \in \mathcal{F}$ satisfaz as hipóteses (3.10) do Teorema 3.3.1 e (3.50) do Teorema 3.3.1.

Como $T_v(T_xM) \simeq T_pM$, para $v \in T_xM$, podemos considerar $\partial_v F(\nabla_g u(x)) \in T_xM$. Então, $\partial_v F(\nabla_g u)$ é um campo vetorial em TM, assim faz sentido considerarmos $\mathrm{div}\partial_v F(x)$.

Teorema 4.3.2. *Suponha* $1 < p \leq 2$ *e* $u : M \times [0, \infty) \to I\!R$ *solução do problema* (4.13). *Sejam* $\phi(t) = \frac{n}{p}\log(\mathcal{A}(p, F)t + \mathcal{B}(p, F))$ *e* q_c *uma solução da E.D.O.*

$$\begin{cases} \phi'(cq_c^p) = \frac{p^{p-1}q_c^{2-p}}{q_c'} \\ \\ q_c(0) \geq 1 \end{cases} \tag{4.14}$$

para $c > 0$. *Então, para todo* $t \in [0, t_0]$, *temos*

$$||e^{u(x,t)}||_{q_c(t)} \leq ||e^{f(x)}||_{q_c(0)} e^{\mathcal{D}(t)},$$

onde

$$\mathcal{D}(t) = \int_{q_c(0)}^{q_c(t)} \frac{\psi(cs^p)}{s^2} ds,$$

o intervalo $[0, t_0]$ *é o intervalo de definição de* q_c *e* $\psi(t) = \phi(t) - t\phi'(t)$.

Prova:

Pela teoria de E.D.O., existe uma função q_c solução do problema (4.14) tal que q_c é positiva e estritamente crescente em $[0, t_0]$

Seja $s \in I\!R$, por integração por partes, temos

$$\int_M e^{us} \text{div} \partial_v F(\nabla_g u) dv_g = -ps \int_M e^{us} F(\nabla_g u) dv_g.$$

Agora, procedendo de maneira análoga ao Teorema 4.3.1 e usando esta integração por partes, provamos o teorema.

■

Apêndice

Proposição A.1 {*Lema de concentração de compacidade*}

Sejam M uma variedade Riemanniana suave, compacta de dimensão $n \geq 3$ e $1 < p < n$. Seja $A(p, F)$ conforme a definição (2.14) e suponha que $u_m \rightharpoonup u_0$ em $H^{1,p}(M)$, $F(\nabla_g u_m)dv_g \rightharpoonup \mu$ e $|u_m|^{p^*}dv_g \rightharpoonup \nu$ fracamente no sentido de medida, onde μ e ν são medidas limitadas não-negativas em M. Então existe um conjunto J, no máximo enumerável, e uma seqüência de pontos distintos $\{x_j\}_{j\in J}$ em M satisfazendo:

1) Existe uma seqüência $\{\nu_j\}_{j\in J}$ de números positivos tal que $\nu = |u_0|^{p^*}dv_g + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}$, onde δ_x é a massa de Dirac com massa 1 concentrada em $x \in M$.

2) Existe uma seqüência $\{\mu_j\}_{j\in J}$ de números positivos tal que $\mu \geq F(\nabla_g u_0)dv_g + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}$ e $A(p, F)^{-1}(\nu_j)^{\frac{1}{p^*}} \leq (\mu_j)^{\frac{1}{p}}$ para todo $j \in J$.

Prova:

Seja $v_m = u_m - u_0$, então $v_m \rightharpoonup 0$ em $H^{1,p}(M)$. Defina $\omega = \nu - |u_0|^{p^*}dv_g$, por Brézis-Lieb temos

$$\lim_{m\to\infty}\left(\int_M h|u_m|^{p^*}dv_g - \int_M h|v_m|^{p^*}dv_g\right) = \int_M h|u_0|^{p^*}dv_g,$$

onde $h \in C^0(M)$ e $h \geq 0$. Então, $|v_m|^{p^*}dv_g \rightharpoonup \nu - |u_0|^{p^*}dv_g = \omega$ no sentido de medida. Tomando a função $v_m\xi$, $\xi \in C^\infty(M)$, na Proposição 2.2.3 e usando o Corolário 2.2.1, obtemos

$$\left(\int_M |\xi v_m|^{p^*}dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq (A(p,F)^p + \epsilon)\int_M F(\nabla_g(\xi v_m))dv_g + B_\epsilon \int_M (\xi v_m)^p dv_g$$

$$\leq (A(p,F)^p + \epsilon)\left((1+\epsilon)\int_M F(\nabla_g(v_m\xi)dv_g + C(\epsilon)\int_M F(\nabla_g \xi)v_m^p dv_g\right) + B_\epsilon \int_M |v_m\xi|^p dv_g$$

Então,

$$\left(\int_M |\xi v_m|^{p^*}dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq (A(p,F)^p + c\epsilon)\int_M F(\nabla_g v_m)|\xi|^{p^*}dv_g + C(\epsilon,,\xi)\int_M |v_m|^p dv_g.$$

Como

$$\int_M F(\nabla_g v_m)dv_g < c$$

temos que $||v_m||_p^p \to 0$ e $F(\nabla_g v_m)dv_g \rightharpoonup \lambda \geq 0$ em medida. Fazendo $m \to \infty$ depois $\epsilon \to 0$, obtemos

$$\left(\int_M \xi^{p^*}d\omega\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A(p,F)^p \int_M \xi^p d\lambda$$

para toda $\xi \in C^\infty(M)$. O restante da demonstração é padrão, ver por exemplo [22].

$\blacksquare$

Proposição A.2 *Suponha M uma variedade Riemanniana suave, compacta de dimensão n. Suponha ainda,*

$$\inf_{u \in \mathcal{H}} J_\alpha(u) < A(p,F)^{-p}.$$

Então existe $u_\alpha \in \mathcal{H}$ tal que o funcional

$$J_\alpha(u) = \int_M F(\nabla_g u) dv_g + \alpha \int_M |u|^p dv_g$$

atinge o mínimo em $\mathcal{H}$, ou seja, $J_\alpha(u_\alpha) = \inf_{u\in\mathcal{H}} J_\alpha(u)$, onde $\mathcal{H} = \{u \in H^{1,p}(M); ||u||_{p^*} = 1\}$.

Prova:

Seja $J_\alpha(u_m) \to \inf_{u\in\mathcal{H}} J_\alpha(u)$, onde $u_m \in \mathcal{H}$. Como

$$\int_M F(\nabla_g u_m) dg < c$$

e sendo $H^{1,p}(M)$ reflexivo, temos, a menos de subseqüência, $u_m \rightharpoonup u_0 \in H^{1,p}(M)$. Da Proposição A.1, temos

$$\begin{aligned} J_\alpha(u_0) &= \int_M F(\nabla_g u_0) dv_g + \alpha \int_M |u_0|^p dv_g \\ &\leq \int_M d\mu - \int_M \sum_{j\in J} \mu_j d\delta_{x_j} + \frac{\alpha}{p} \int_M |u_0|^p dv_g \\ &\leq \liminf \int_M F(\nabla_g u_m) dv_g + \liminf \alpha \int_M |u_m|^p dv_g - \sum_{j\in J} \mu_j \\ &\leq \inf_{u\in} J_\alpha(u) - A(p,F)^{-p} \sum_{j\in J} (\nu_j)^{\frac{p}{p^*}}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Novamente pela Proposição A.1, temos

$$1 = \int_M |u_0|^{p^*} dv_g + \sum_{j\in J} \nu_j. \tag{4.16}$$

Se mostrarmos que $J = \emptyset$ teremos $||u_0||_{p^*} = 1$, e isto concluirá a proposição.
Suponha por absurdo que $J \neq \emptyset$. Por hipótese, temos $\inf_{u\in\mathcal{H}} J_\alpha(u) < A(p,F)^{-p}$ que juntamente com (4.15), obtemos

$$J_\alpha(u_0) < \inf J_\alpha(u) - \inf J_\alpha(u) \sum_{j\in J} (\nu_j)^{\frac{p}{p^*}} = \inf J_\alpha(u)(1 - \sum_{j\in J} (\nu_j)^{\frac{p}{p^*}}). \tag{4.17}$$

Como $A(p,F)^p \mu_j < 1$, pois

$$\int_M F(\nabla_g u_m) dv_g < A(p,F)^{-p},$$

obtemos $\nu_j < 1$. Sendo $\frac{p}{p^*} < 1$, segue

$$1 - \sum_{j \in J} (\nu_j)^{\frac{p}{p^*}} < 1 - \sum_{j \in J} \nu_j. \tag{4.18}$$

Da igualdade (4.16) e como

$$\int_M |u_0|^{p^*} dv_g \leq \liminf \int_M |u_m|^{p^*} dv_g = 1,$$

obtemos

$$1 - \sum_{j \in J} \nu_j = \int_M |u_0|^{p^*} dv_g \leq \left(\int_M |u_0|^{p^*} dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}}.$$

Substituindo esta última igualdade e (4.18) em (4.17), temos $J_\alpha(u_0) < \inf J_\alpha(u) ||u_0||_{p^*}^{\frac{p}{p^*}}$. Mas isto é uma contradição. Portanto $J = \emptyset$.

■

Proposição A.3 *Suponha que a função $u \in H^{1,p}(M)$ satisfaça a seguinte equação:*

$$\int_M \partial_v F(\nabla_g u) \nabla_g h dv_g = \int_M H(x,u) h dv_g$$

para toda função $h \in C_0^1(M)$, onde $F \in \mathcal{F}$ e M é uma variedade Riemanniana compacta suave. Se $|H(x,u)| \leq c(1 + |u|^r)$ com $r + 1 \leq p^*$, então $u \in L^\infty(M)$.

Prova:

Seja $x \in M$ e considere um sistema de coordenadas normal centrado em x. Então, para toda função $h \in C_0^1(B(x,\delta))$, com $\delta < i(M)$, temos

$$\int_{B(x,\delta)} \partial_v F(\nabla_g u) \nabla_g h dv_g = \int_{B(x,\delta)} H(x,u) h dv_g.$$

Pela expansão (2.11), segue

$$\int_{B(0,\delta)} \partial_v F(\nabla_g u) \nabla_g h dx \leq c \int_{B(0,\delta)} H(x,u) h dx. \tag{4.19}$$

Da expansão (2.10) e da propriedade (H.1), encontramos

$$c_1 |\nabla u|^p \leq k_1 |\nabla_g u|^p \leq F(\nabla_g u) \leq k_2 |\nabla_g u|^p \leq c_2 |\nabla u|^p.$$

Analogamente, usando a $p-1$ - homogeneidade da função $\partial_v F$, temos

$$k_5 |\nabla u|^{p-1} \leq k_3 |\nabla_g u|^{p-1} \leq |\partial_v F(\nabla_g u)| \leq k_4 |\nabla_g u|^{p-1} \leq k_6 |\nabla u|^{p-1}.$$

Aplicando estas observações em (4.19), podemos reobter os Teoremas E.0.19 e E.0.20 de [26], ou seja, podemos utilizar o método de Moser. Logo $u \in L^\infty(B(0,\delta))$.

■

Proposição A.4 *Suponha $u \in H^{1,p}(M)$ e*

$$\int_M \partial_v F(\nabla_g u) \nabla_g h dv_g = \int_M H(x,u) h dv_g,$$

para toda função $h \in C_0^1(M)$, onde M é uma variedade Riemanniana suave e compacta e $F \in \mathcal{F}$. Se $|H(x,u)| \leq c(1+|u|^r)$ com $r+1 \leq p^*$, então $u \in C^{1,\lambda}(M)$, onde $\lambda \in (0,1)$.

Prova:

Seja $x \in M$ e considere um sistema de coordenadas normal centrado em x. Nesta carta, temos

$$\int_{B(0,\delta)} \partial_v F(g^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial_j})g^{ij}(x)\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}(\det(g(x))^{\frac{1}{2}}dx = \int_{B(0,\delta)} H(x,u)\det(g(x))^{\frac{1}{2}}hdx.$$

Fazendo

$$a_l(x,\nabla u) = \left(\sum_k \partial_{v_k} F(g^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j})g^{lk}(x)\right)\det(g(x))^{\frac{1}{2}}.$$

e substituindo este fato na igualdade anterior, obtemos

$$\int_{B(0,\delta)} a_l(x,\nabla u)\frac{\partial h}{\partial x_l}dx = \int_{B(0,\delta)} H(x,u)\det(g(x))^{\frac{1}{2}}hdx, \tag{4.20}$$

para toda função $h \in C_0^1(B(0,\delta))$.
Da Proposição A.3, vemos que (4.20) verifica as hipóteses do Teorema 1 de [31]. Portanto $u \in C^{1,\lambda}(B(0,\delta))$. ■

Proposição A.5 *Sejam M uma variedade Riemanniana suave, compacta de dimensão n e $1 < p < n$. Suponha ainda que $F \in \mathcal{F}$, $1 \leq q < r < p^*$ e*

$$J_\alpha(u) < A(p,q,r,F)^{-\frac{p}{\theta}},$$

onde

$$\mathcal{H} = \{u \in D^{p,q}(M); ||u||_r = 1\},$$

$$J_\alpha(u) = \left(\int_M F(\nabla_g u)dv_g + \alpha\int_M |u|^p dv_g\right)\left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

e $\theta = \frac{np(r-q)}{r(q(p-n)+np)}$.
Então existe uma função $u_\alpha \in \mathcal{H}$ tal que $J_\alpha(u_\alpha) = \inf_{u\in\mathcal{H}} J_\alpha(u) = \mu_\alpha$.

Prova:

Seja $(u_k)_k$ uma seqüência em $\mathcal{H}$ tal que $J_\alpha(u_k) \to \mu_\alpha$. Pela Proposição 3.2.2, existe $B_\epsilon \in I\!R$ tal que

$$1 \leq \left((A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} + \epsilon)\int_M F(\nabla_g u_k)dv_g + B_\epsilon\int_M |u_k|^p dv_g\right)\left(\int_M |u_k|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}.$$

Por outro lado, temos $\mu_\alpha < A(p,q,r,F)^{-\frac{p}{\theta}}$. Considere $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, então

$$(\mu_\alpha + \epsilon)(A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} + \epsilon) < 1.$$

Daí,

$$\left(\int_M F(\nabla_g u_k)dv_g + \alpha\int_M |u_k|^p dv_g\right)\left(\int_M |u_k|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}$$

$$\leq (\mu_\alpha + \epsilon)\left((A(p,q,r,F)^{\frac{p}{\theta}} + \epsilon)\int_M F(\nabla_g u_k)dv_g + B_\epsilon\int_M |u_k|^p dv_g\right)\left(\int_M |u_k|^q dv_g\right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}}.$$

Desta desigualdade, verificamos que

$$\int_M F(\nabla_g u_k) dv_g \leq c.$$

Da propriedade (H.1), temos

$$||\nabla_g u_k||_p \leq c.$$

Pela reflexividade do espaço $D^{p,q}(M)$, existe uma função u_0 tal que $u_k \rightharpoonup u_0$ em $D^{p,q}(M)$. Como $r < p^*$, temos que $D^{p,q}(M)$ imerge compactamente em $L^r(M)$, então $u_k \to u_0$ em $L^r(M)$.

Destas duas convergências, deduzimos que $u_k \to u_0$ em $D^{p,q}(M)$. Portanto $J_\alpha(u_0) = \mu_\alpha$.

■

Bibliografia

[1] H. Amann, *Ordinary differential equations: an introduction to nonlinear analysis*, de Gruyter, (1990).

[2] E. Artin, *The gamma function*, Holt, Rinehart and Winston (1964).

[3] T. Aubin, *Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures Appl. 55, 269-296, (1976).

[4] T. Aubin, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Differential Geom. 11 (4) 573-598 (1976).

[5] T. Aubin, Y. Y. Li, *On the best Sobolev Inequality*, J. Math. Pures Appl. 78, 353-387, (1999).

[6] D. Bakry, *L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes, in: lectures on probability theory. École D'été de probabilités de St-Flour 1992*, Lecture Notes in Math. vol. 1581, Springer, Berlin, 1-114 (1994).

[7] Y. Brenier, *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions*, Comm. Pure Appl. Math. (1991).

[8] H. Brezis, *Analisi funzionale: teoria e applicazioni*, Liguori Editore, (1986).

[9] C. Brouttelande, *The best-constant problem for a family of Gagliardo-Nirenberg inequalities on a compact Riemannian manifold*, Proc. Edinb. Math. Soc. 46, 117-146, (2003).

[10] I. Chavel, *Riemann geometry - a modern introduction*, Cambridge University Press (1996).

[11] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret and C. Villani, *A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities*, Advances in Mathematics.(2004).

[12] M. Del Pino, J. Dolbeault, *The optimal Euclidean L^p-Sobolev logarithmic inequality*, J. Funct. Anal. 197(2003) 151-161.

[13] O. Druet, *Optimal Sobolev inequalities of arbitrary order on compact Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal., 159, 1, 217-242, (1998).

[14] O. Druet, *The best constants problem in Sobolev inequalities*, Math. Ann. (1999).

[15] O. Druet, *Isoperimetric inequalities on compact manifolds*, Geom. Dedicata, 90, 217-236, (2002).

[16] O. Druet, E. Hebey, *The AB program in geometric analysis: sharp Sobolev inequalities and related problems*, Mem. Amer. Math. Soc. 160 (2002).

[17] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press. Boca Raton, FL, 1992.

[18] E. Gagliardo, *Proprietà di alcune classi di funzioni in piu variabili*, Ricerche Mat. 7, 102-137, (1958).

[19] I. Gentil, *The general optimal L^p-Euclidean logarithmic Sobolev inequality by Hamilton-Jacobi equations*, J. Funct. Anal. 202, 2, 591-599, (2003).

[20] E. Hebey, *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, AMS. (2000).

[21] E. Hebey, M. Vaugon, *Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev*, Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 13, n^o. 1, 57-93, (1996).

[22] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limite case I*, Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1), 145-201, (1985).

[23] R. J. McCann, *Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps*, Duke Math. J. (1995).

[24] R. J. McCann, *A convexity principle for interacting gases*, Adv. Math. (1997).

[25] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 3-13, 115-162 (1959).

[26] I. Peral, *Multiplicity of solutions for the p - Laplacian*, second school on nonlinear functional analysis and applications to differential equations, international centre for theoretical physics, (1997).

[27] J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasilinear equations*, Acta Mathematica, 111, 247-302, (1964).

[28] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Differential Geom., 20, 479-495, (1984).

[29] S. L. Sobolev, *On a Theorem of functional analysis*, Mat. Sb. 46, 471-496, (1938).

[30] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (iv) 110 (1976) 353-372.

[31] P. Tolksdorf, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Diff. Equations, 51, 126-150, (1984).

[32] N. S. Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 22, 265-274, (1968).

[33] N. S. Trudinger, *On Harnack type inequalities and their applications to quasilinear elliptic equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 20, 721-747, (1967).

[34] C. Villani, *Topics in mass transportation, in: Topics in optimal transportation*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 58, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[35] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J., 12, 21-37, (1960).