Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matématica

Tese de doutorado

O espaço de módulos de $k-$uplas de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo

Heleno da Silva Cunha

Orientador: Nikolai Alexandrovitch Goussevskii

Belo Horizonte

2009

À minha família

Agradecimentos

Minha imensa gratidão:

– Ao Nikolai;

– Aos professores do departamento. Em especial ao Mário, ao Israel e ao Chico;

– Aos funcionários do departamento. Em especial à Andréa e ao Valdney;

– Aos colegas da pós-graduação. Em especial à Viviana e ao Luis;

– À Lorena ♡

Resumo

O principal objetivo desta tese é construir o espaço de módulos para o espaço de configurações de $k-$uplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Várias situações geométricas são caracterizadas. Uma análise detalhada é feita sobre o espaço de módulos para o espaço de configurações de quádruplas e quíntuplas na fronteira do plano hiperbólico complexo. A principal técnica utilizada neste trabalho é o uso de matrizes de Gram. É provado que o espaço de módulos para o espaço de configurações de $k-$uplas de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo é um conjunto semi-analítico no espaço euclidiano.

Palavras-chave: Geometria hiperbólica complexa. Espaço de módulos. Matrizes de Gram. Invariante de Cartan. Razão cruzada.

Abstract

The main aim of this thesis is to construct the moduli space for the space of configurations of ordered k-tuples of disctinct points in the boundary of complex hyperbolic space. Various geometrical situations are characterized. A detailed analysis is made on the moduli space for the space of configurations of quadruples and quintuples in the boundary of the complex hyperbolic plane. The main technique in this work is the use of the Gram matrices. We prove that the moduli space for the space of configurations of ordered k-tuples in the boundary of complex hyperbolic space is a semianalytic subset of the Euclidean space.

Keywords: Complex hyperbolic space. Moduli space. Gram matrix. Cartan's invariant. Cross-ration.

Sumário

Introdução

Uma questão relevante em geometria hiperbólica complexa é classificar $k-$uplas ordenadas de pontos no espaço hiperbólico complexo, $\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$, ou em sua fronteira ideal, $\partial\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$, módulo a ação do seu grupo de isometrias holomorfas, $\mathrm{PU}(n,1)$. Esse problema foi considerado por vários autores. Um breve histórico de alguns resultados será dado no que segue.

Como o grupo $\mathrm{PU}(n,1)$ age transitivamente em $\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$ o problema é trivial para pontos. Também é trivial mostrar que pares ordenados de pontos distintos em $\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$ são classificados, módulo a ação do grupo $\mathrm{PU}(n,1)$, apenas por suas distâncias. Para triplas ordenadas de pontos distintos em $\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$ o problema se torna mais complexo, mas foi completamente resolvido em Brehm [3] e depois generalizado para $k-$uplas ordenadas de pontos distintos em Brehm-Taoui [4].

O problema de classificar pontos e pares ordenados de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo é simples, pois o grupo $\mathrm{PU}(n,1)$ age duplamente transitivamente em $\partial\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$. Para triplas ordenadas de pontos distintos em $\partial\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$ o problema foi resolvido em Cartan [5] – veja Goldman [10, seção 7.1] para mais detalhes.

Em Hakim-Sandler [13], foi abordado o problema de encontrar invariantes que classifiquem $(n+1)-$uplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do $n-$espaço hiperbólico complexo, módulo a ação de $\mathrm{PU}(n,1)$, que não possuem todos os seus pontos contidos na fronteira de um $(n-1)-$espaço hiperbólico complexo. Porém, a coleção de invariantes apresentados neste trabalho é de difícil obtenção.

Em Falbel [8] e em Parker-Platis [16] foi considerado o problema de classificar classes de congruência, módulo a ação de $\mathrm{PU}(2,1)$, de quádruplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do plano hiperbólico complexo. As abordagens em ambos trabalhos são semelhantes e as variedades construidas para parametrizar o espaço das classes de congruência são homeomorfas. Porém, estes trabalhos parametrizam somente quádruplas em "posição geral", veja a seção 3.2.4 para mais detalhes.

Em Grossi [12, classificação 2.2.28] é apresentada uma coleção de invariantes que classificam quádruplas ordenadas de pontos distintos em $\partial \mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$ pela a ação de $\mathrm{PU}(n,1)$. E em Cunha-Gusevskii [6] é construído um espaço, espaço de módulos, que parametriza o espaço de quádruplas ordenadas de pontos distintos módulo a ação de $\mathrm{PU}(n,1)$.

A proposta deste trabalho é construir um espaço, o espaço de módulos, que parametrize o espaço de $k-$uplas ordenadas de pontos distintos em $\partial \mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$ módulo a ação do grupo $\mathrm{PU}(n,1)$. O uso de matrizes de Gram é a principal técnica para alcançar o objetivo almejado.

Sobre a organização desta tese. O trabalho está dividido em quatro capítulos. O capítulo 1 é de preliminares, lista os principais conceitos e fatos de geometria hiperbólica complexa usados nos capítulos seguintes. No capítulo 2 é construído o espaço de módulos para o espaço de configurações de $k-$uplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo de dimensão n qualquer. O capítulo 3 é dedicado ao estudo detalhado do espaço de configurações de quádruplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo e seu espaço de módulos. O capítulo 4 é semelhante ao capítulo 3, mas com a diferença de ser um estudo focado em quíntuplas.

Capítulo 1

Elementos de geometria hiperbólica complexa

Neste capítulo será feita uma apresentação dos conceitos básicos de geometria hiperbólica complexa. A intenção é estabelecer boa parte da notação e linguagem, além de listar os principais resultados usados ao longo dos demais capítulos. A referência para encontrar mais detalhes é Goldman [10].

Serão descritos o modelo projetivo e o modelo do domínio de Siegel, nesta ordem.

1.1 O modelo projetivo

1.1.1 O espaço hiperbólico complexo e seu grupo de isometrias holomorfas

O espaço vetorial $\mathbb{C}^{n+1}$ munido de uma forma hermitiana $\langle\ ,\ \rangle$ de assinatura $(n,1)$ será denotado por $\mathbb{C}^{n,1}$. Sejam os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}^{n,1}$:

$$
\begin{aligned}
V_- &= \{V \in \mathbb{C}^{n,1} \mid \langle V, V\rangle < 0\},\\
V_0 &= \{V \in \mathbb{C}^{n,1} \mid \langle V, V\rangle = 0\},\\
V_+ &= \{V \in \mathbb{C}^{n,1} \mid \langle V, V\rangle > 0\}.
\end{aligned}
$$

Os vetores de V_-, V_0 e V_+ são denominados negativos, nulos ou isotrópicos e positivos, respectivamente. Vetores não-nulos também são denominados anisotrópicos.

Seja $\pi : \mathbb{C}^{n,1}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}P^n$ a projeção canônica de $\mathbb{C}^{n,1}\setminus\{0\}$ no espaço projetivo complexo. Define-se o espaço hiperbólico complexo como sendo $\pi(V_-) = \mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$. Define-se a fronteira ideal do espaço hiperbólico complexo como sendo $\pi(V_0) = \partial\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$. A projetivização dos vetores positivos será denotada por $\ell\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$. O espaço $\mathrm{H}^2_{\mathbb{C}}$ é denominado plano hiperbólico complexo.

Verifica-se sem grandes dificuldades que o espaço hiperbólico complexo pode ser identificado com a bola aberta $\mathbb{B}^n = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid |Z| < 1\}$ e que a fronteira ideal pode ser identificada com a esfera $\mathbb{S}^{2n-1} = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid |Z| = 1\}$.

Dados dois pontos $z, w \in \mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$, define-se a métrica de Bergman $d(z,w)$ por (ver Chen-Greenberg [7, prop. 2.4.4] ou Goldman [10, seção 3.1.7]):

$$\cosh^2\left(\frac{d(z,w)}{2}\right) = \frac{\langle Z,W\rangle\langle W,Z\rangle}{\langle Z,Z\rangle\langle W,W\rangle},$$

em que Z e W são dois levantamentos arbitrários de z e w, respectivamente.

Munido da métrica de Bergman o espaço hiperbólico complexo é uma variedade de Kaehler com curvatura seccional holomorfa constante e igual a -1 e curvatura seccional variando entre -1 e $-1/4$.

Seja $\mathrm{U}(n,1)$ o grupo unitário da forma hermitina $\langle\ ,\ \rangle$, isto é:

$$\mathrm{U}(n,1) = \{A \in GL(n+1,\mathbb{C}) \mid \langle AZ, AW\rangle = \langle Z,W\rangle,\ \forall\ Z,W \in \mathbb{C}^{n,1}\}.$$

A projetivização de $\mathrm{U}(n,1)$, $\mathrm{PU}(n,1)$, é o grupo de isometrias holomorfas do espaço hiperbólico complexo. Seja $\mathrm{SU}(n,1) = \{A \in \mathrm{U}(n,1) \mid \det A = 1\}$. A projetivização de $\mathrm{SU}(n,1)$ também é $\mathrm{PU}(n,1)$. Nesse caso, elementos de $\mathrm{PU}(n,1)$ possuem $n+1$ levantamentos em $\mathrm{SU}(n,1)$.

1.1.2 Subvariedades totalmente geodésicas

Em seguida será descrita a lista completa de subvariedades totalmente geodésicas do espaço hiperbólico complexo. São as subvariedades totalmente geodésicas holomorfas e as subvariedades totalmente geodésicas totalmente reais. Uma boa referência para justificar os fatos desta seção é Chen-Greenberg [7].

Subvariedades totalmente geodésicas holomorfas

Seja V um subespaço complexo de $\mathbb{C}^{n,1}$ de dimensão complexa $(m+1)$, $m \leq n$. A projetivização de V intersectada com $\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$ produz uma cópia de um espaço hiperbólico complexo mergulhado, nesse caso um $\mathrm{H}^m_{\mathbb{C}}$, em $\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$ e é uma subvariedade totalmente geodésica. Ou seja:

$$\pi(V\backslash\{0\}) \cap \mathrm{H}^n_{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{H}^m_{\mathbb{C}}$$

é uma subvariedade totalmente geodésica. Tais subvariedades são denominadas *subvariedades totalmente geodésicas holomorfas.* A fronteira ideal de uma subvariedade totalmente geodésica holomorfa é denominada $\mathbb{C}^m-$cadeia. As $\mathbb{C}^{n-1}-$ cadeias são denominadas hiperplanos complexos e as $\mathbb{C}^1-$cadeias são denominadas cadeias.

A inversão em V – única involução cujo conjunto de pontos fixos é V – é projetivizada no grupo $\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C})$ como uma isometria holomorfa do espaço hiperbólico complexo.

Subvariedades totalmente geodésicas totalmente reais

Seja V um subespaço real de $\mathbb{C}^{n,1}$ de dimensão real $(m+1)$, $m \leq n$. A projetivização de V intersectada com $\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$ produz uma cópia de um espaço hiperbólico real mergulhado, nesse caso um $\mathrm{H}^m_{\mathbb{R}}$ em $\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$ e é uma subvariedade totalmente geodésica. Ou seja:

$$\pi(V\backslash\{0\}) \cap \mathrm{H}^n_{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{H}^m_{\mathbb{R}}$$

é uma subvariedade totalmente geodésica. Tais subvariedades são denominadas *subvariedades totalmente geodésicas totalmente reais* ou $\mathbb{R}^m-$planos. A fronteira de um $\mathbb{R}^2-$plano, $\partial\mathrm{H}^2_{\mathbb{R}}$, é denominada $\mathbb{R}-$círculo.

Um fato importante. Os espaços $\mathrm{H}^1_{\mathbb{R}}$ são as geodésicas do espaço hiperbólico complexo, conforme Chen-Greenberg [7, prop. 2.4.3].

Seja i a inversão em V – única involução cujo conjunto de pontos fixos é V. O grupo de isometrias do espaço hiperbólico complexo é gerado pela projetização de i e pelo grupo $\mathrm{PU}(n,1)$.

1.2 O modelo do parabolóide

O modelo do parabolóide ou modelo do domínio de Siegel é a segunda forma de exibir o espaço hiperbólico complexo. É o análogo ao modelo do semi-espaço para geometria hiperbólica real.

Nesta seção $\mathbb{C}^{n,1}$ está munido da forma hermitiana

$$\langle z, w\rangle = z_1\overline{w}_{n+1} + z_2\overline{w}_2 + \cdots + z_n\overline{w}_n + z_{n+1}\overline{w}_1.$$

1.2.1 O domínio de Siegel

O domínio de Siegel é o conjunto

$$h^n = \{(z_1, z) \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{Re}(z_1) + |z|^2 < 0\}.$$

A fronteira do domínio de Siegel é

$$\{(z_1, z) \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{Re}(z_1) + |z|^2 = 0\}.$$

A fronteira do espaço hiperbólico complexo pode ser identificada com a compactificação a um ponto da fronteira do domínio de Siegel. A identificação é feita da seguinte forma. Dado um ponto $p \in \partial \mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$, considere o seguinte levantamento, o qual será denominado levantamento padrão, em $\mathbb{C}^{n,1}$:

$$p \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ \sqrt{2}\, z \\ 1 \end{bmatrix},$$

se $p = (z_1, z)$ e

$$p_\infty \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

se $p = p_\infty$.

1.2.2 Coordenadas horoesféricas e o grupo de Heisenberg

O conceito de coordenadas horoesféricas foi introduzido em Goldman-Parker [11]. A partir de tal conceito verifica-se que a fronteira do domínio de Siegel pode ser identificada com o grupo de Heisenberg.

O grupo de Heisenberg $\mathcal{H}$ é $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ com a seguinte operação de grupo:

$$(z, t) \cdot (z', t') = (z + z', t + t' + 2\omega(z, z')),$$

em que $\omega(z, z') = \mathrm{Im}(\langle\!\langle z, z' \rangle\!\rangle)$ e $\langle\!\langle z, z' \rangle\!\rangle$ é o produto hermitiano canônico de $\mathbb{C}^{n-1}$.

Seja $u \in \mathbb{R}_+$. A horoesfera de altura u é o conjunto

$$\mathcal{H}_u = \{(z_1, z) \in h^n \mid \mathrm{Re}(z_1) + |z|^2 = -u\}.$$

A aplicação $(z, t) \mapsto (-u - |z|^2 + ti, z)$, $u > 0$, identifica o grupo de Heisenberg com a horoesfera de altura u. E a aplicação $(z, t, u) \mapsto (-u - |z|^2 + ti, z)$ identifica $\mathcal{H} \times \mathbb{R}_+$ com o domínio de Siegel.

O levantamento de pontos de uma horoesfera de altura u a $\mathbb{C}^{n,1}$ é dado por

$$(z,t,u) \mapsto \begin{bmatrix} -u-|z|^2+ti \\ \sqrt{2}\, z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A aplicação $(z,t) \mapsto (-|z|^2+ti, z)$ identifica o grupo de Heisenberg com o conjunto $\{(z_1,z) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid \mathrm{Re}(z_1)+|z|^2=0\}$. Logo o grupo de Heisenberg compactificado pode ser indentificado com a fronteira do espaço hiperbólico complexo.

O grupo de Heisenberg age por isometrias em $\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$. Para cada $(z,t) \in \mathcal{H}$ associa-se a isometria $T(z,t) \in \mathrm{PU}(n,1)$ cuja ação em coordenadas horoesféricas é dada por

$$T(z,t)(z',t',u) = (z+z',\ t'+t'+2\omega(z,z'),\ u).$$

A isometria $T(z,t)$ é denominada translação de Heisenberg. As principais propriedades das translações de Heisenberg estão resumidas abaixo:

- $T(z,t)T(z',t') = T(z+z', t+t'+2\omega(z,z'))$;
- $T(z,t)(0,0,u) = (z,t,u)$;
- $T(z,t)(\infty) = \infty$

O grupo $\mathrm{U}(n-1)$ age em $\mathcal{H}$. Para cada matriz $A \in \mathrm{U}(n-1)$ seja $R_A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dada por

$$R_A(z,t) = (Az,t).$$

Tais aplicações são denominadas rotações de Heisenberg em torno do eixo vertical.

O grupo $\mathbb{C}^*$ age em $\mathcal{H}$. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}^*$ seja $D_\lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dada por

$$D_\lambda(z,t) = (\lambda z, |\lambda|^2 t).$$

Tais aplicações são denominadas dilatações (complexas) de Heisenberg..

As rotações e dilatações de Heisenberg são isometrias holomorfas que fixam a origem do grupo de Heisenberg e o ponto ideal.

Esta seção será encerrada com a descrição no grupo de Heisenberg das cadeias e $\mathbb{R}-$círculos na fronteira do plano hiperbólico complexo. Mais detalhes podem ser encontrados em Goldman [10, seções 4.3 e 4.4].

Cadeias que contem o ponto ideal são denominadas infinitas. As cadeias que não contém o ponto ideal são denominadas finitas. As cadeias infinitas são retas euclidianas em $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ ortogonais ao plano $\mathbb{C}$. As cadeias finitas são elipses cuja projeção em $\mathbb{C}$ é uma circunferência.

De forma análoga às cadeias, os $\mathbb{R}-$círculos são denominados infinitos ou finitos conforme contém ou não o ponto ideal. Os $\mathbb{R}-$círculos infinitos são retas euclidianas não ortogonais ao plano $\mathbb{C}$. Os $\mathbb{R}-$círculos finitos são determinados pela equação

$$\mathrm{Re}\left(\frac{2z}{1+|z|^2-iv}\right)=0.$$

A projeção de um $\mathbb{R}-$círculo finito no plano $\mathbb{C}$ é a leminiscata de Bernoulli dada pela equação $|z|^4+\mathrm{Re}(z^2)=0$.

1.3 Invariantes numéricos

1.3.1 Invariante de Cartan

Nesta seção será definido o invariante angular de Cartan (ver Cartan [5]) e ser?o apresentadas suas principais propriedades. Mais detalhes podem ser encontrados em Goldman [10, seção 7.1].

Seja $p=(p_1,p_2,p_3)$ uma tripla ordenada de pontos distintos em $\partial\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$. Sejam ainda $P=(P_1,P_2,P_3)$ respectivos levantamentos da tripla p. Define-se o produto triplo hermitiano como sendo o número complexo

$$\langle P_1,P_2,P_3\rangle=\langle P_1,P_2\rangle\langle P_2,P_3\rangle\langle P_3,P_1\rangle.$$

A matrix

$$G=(\langle P_i,P_j\rangle)=\begin{bmatrix} 0 & \langle P_1,P_2\rangle & \langle P_1,P_3\rangle \\ \overline{\langle P_1,P_2\rangle} & 0 & \langle P_2,P_3\rangle \\ \overline{\langle P_1,P_3\rangle} & \overline{\langle P_2,P_3\rangle} & 0 \end{bmatrix}$$

possui determinante igual a $2\mathrm{Re}(\langle P_1,P_2,P_3\rangle)$. Como a forma hermitiana $\langle\ ,\ \rangle$ possui assinatura $(n,1)$, segue que $\det G=2\mathrm{Re}(\langle P_1,P_2,P_3\rangle)\leq 0$.

Escolhendo outros representantes $P'=(\lambda_1P_1,\lambda_2P_2,\lambda_3P_3)$ para a tripla p, tem-se

$$\langle P_1',P_2',P_3'\rangle=|\lambda_1\lambda_2\lambda_3|^2\langle P_1,P_2,P_3\rangle.$$

Define-se o invariante de angular de Cartan de p como sendo

$$\mathbb{A}(p)=\arg(-\langle P_1,P_2,P_3\rangle).$$

De acordo com as observações acima, segue que $\mathbb{A}(p)$ é independente da escolha de representantes para a tripla p e $-\pi/2 \leq \mathbb{A}(p) \leq \pi/2$.

O invariante de Cartan possui as seguintes propriedades:

(1) dadas duas triplas $p = (p_1, p_2, p_3)$ e $q = (q_1, q_2, q_3)$ em $\partial \mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$, existe uma isometria holomorfa g tal que $g(p_i) = q_i$, $i = 1, 2, 3$, se e somente se, $\mathbb{A}(p) = \mathbb{A}(q)$;

(2) dadas duas triplas $p = (p_1, p_2, p_3)$ e $q = (q_1, q_2, q_3)$ em $\partial \mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$, existe uma isometria anti-holomorfa g tal que $g(p_i) = q_i$, $i = 1, 2, 3$, se e somente se, $\mathbb{A}(p) = -\mathbb{A}(q)$;

(3) dado $A \in [-\pi/2, \pi/2]$, exite uma tripla de pontos $p = (p_1, p_2, p_3)$ tal que $\mathbb{A}(p) = A$;

(4) seja σ uma permutação de $\{1, 2, 3\}$, então $\mathbb{A}(p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, p_{\sigma(3)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3)$, em que $\mathrm{sgn}(\sigma)$ é o sinal de σ;

(5) uma tripla $p = (p_1, p_2, p_3)$ está contida numa cadeia se, e somente se, $\mathbb{A}(p) = \pm\pi/2$;

(6) uma tripla $p = (p_1, p_2, p_3)$ está contida num $\mathbb{R}-$círculo se, e somente se, $\mathbb{A}(p) = 0$;

1.3.2 Razão cruzada complexa

Introduzida por Korányi-Reimann [15], a razão cruzada complexa é uma generalização da razão cruzada clássica. Nesta seção serão apresentadas algumas de suas principais propriedades. Mais detalhes podem ser encontrados em Goldman [10, seção 7.2].

Seja $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ uma quádrupla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Define-se a razão cruzada complexa, ou simplesmente razão cruzada de p, como sendo

$$\mathbb{X}(p) = \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{\langle P_3, P_1 \rangle \langle P_4, P_2 \rangle}{\langle P_4, P_1 \rangle \langle P_3, P_2 \rangle}$$

em que P_1, P_2, P_3, P_4 são respectivos levantamentos de p_1, p_2, p_3, p_4.

O primeiro fato que se pode observar na definição da razão cruzada é a independência da escolha de levantamentos. Outras propriedades são:

(1) se $g \in \mathrm{PU}(n, 1)$, então

$$\mathbb{X}(g(p_1), g(p_2), g(p_3), g(p_4)) = \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4);$$

(2) se g é uma isometria anti-holomorfa, então

$$\mathbb{X}(g(p_1), g(p_2), g(p_3), g(p_4)) = \overline{\mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4)};$$

(3) se $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ está em uma cadeia, então $\mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ é real;

(4) se $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ está em um $\mathbb{R}-$círculo, então $\mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ é positivo;

(5) o produto cíclico se relaciona com o invariante de Cartan:

$$\mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4)\mathbb{X}(p_1, p_4, p_2, p_3)\mathbb{X}(p_1, p_3, p_4, p_1) = e^{2i\mathbb{A}(p_2,p_3,p_4)}.$$

Capítulo 2

O espaço de módulos de $k-$uplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo

Neste capítulo será apresentada uma descrição do espaço de módulos para o espaço de configurações de $k-$uplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo de dimensão $n \geq 1$ ($k \geq 4$). Vale a pena lembrar que o espaço de triplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo, módulo a ação de $\mathrm{PU}(n,1)$, é parametrizado pelo invariante de Cartan. Portanto o espaço de módulos de triplas pode ser identificado com o intervalo fechado $[-\pi/2, \pi/2]$ que, obviamente, é um conjunto semi-analítico em $\mathbb{R}$.

Ao longo do capítulo a forma hermitiana adotada em $\mathbb{C}^{n,1}$ será

$$\langle Z, W\rangle = z_1\overline{w}_{n+1} + z_2\overline{w}_2 + \ldots + z_n\overline{w}_n + z_{n+1}\overline{w}_1.$$

2.1 Classes de congruência e matrizes de Gram

Duas $k-$uplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo, $p = (p_1, \ldots, p_k)$ e $q = (q_1, \ldots, q_k)$, são ditas congruentes quando existe uma isometria holomorfa $g \in \mathrm{PU}(n,1)$ tal que $g(p_i) = q_i,\ \forall i = 1, \ldots, k$. A congruência é claramente uma relação de equivalência. O espaço das classes de equivalência munido da topologia quociente será denominado *espaço de configurações* de $k-$uplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo e será denotado por $\mathcal{C}(k,n)$.

Definição 2.1.1. *Seja $P = (P_1, \ldots, P_k)$ uma $k-$upla ordenada de vetores em $\mathbb{C}^{n,1}$. A matriz hermitiana dada por $G = (g_{ij}) = (\langle P_i, P_j \rangle)$ é denominada matriz de Gram da $k-$upla P. O determinante de uma matriz de Gram é denominado determinante de Gram.*

Definição 2.1.2. *Duas matrizes hermitianas G e G' são ditas equivalentes, quando existe uma matriz diagonal $D = (\lambda_i)$, $\lambda_i \neq 0$, tal que $G' = DG\overline{D}$, sendo $\overline{D}$ a matriz conjugada de D.*

Determinantes de matrizes equivalentes possuem o mesmo sinal. De fato, se G e G' são equivalentes, então $\det G' = |\lambda_1 \ldots \lambda_k|^2 \det G$.

Dada uma $k-$upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo, pode-se a ela associar uma classe de matrizes equivalentes. Isto é, matrizes de Gram obtidas usando levantamentos arbitrários de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo são equivalentes. Dentro desta classe existe um "representante preferencial". Esse é o conteúdo da próxima proposição.

Proposição 2.1.3. *Seja $p = (p_1, \ldots, p_k)$ uma $k-$upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Então, pode-se escolher levantamentos $P_1, \ldots, P_k$, respectivamente, de tal forma que a matriz de Gram associada é*

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & g_{23} & g_{24} & \cdots & g_{2k} \\ 1 & \overline{g}_{23} & 0 & g_{34} & \cdots & g_{3k} \\ 1 & \overline{g}_{24} & \overline{g}_{34} & 0 & \cdots & g_{4k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \overline{g}_{2k} & \overline{g}_{3k} & \overline{g}_{4k} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

sendo $|g_{23}| = 1$. Tal matriz é única.

Demonstração. Primeiro observa-se que levantamentos de quaisquer dois pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo nunca são ortogonais.

Sem perda de generalidade, pode-se supor que p_1, p_2 e p_3 possuem levantamentos P_1', P_2' e P_3', respectivamente, tais que $\langle P_1', P_2' \rangle = \langle P_1', P_3' \rangle = 1$. Tomando $a = \langle P_2', P_3' \rangle$, os vetores

$P_1 = \sqrt{|a|}P'_1$, $P_2 = 1/\sqrt{|a|}P'_2$, $P_3 = 1/\sqrt{|a|}P'_3$ são tais que $\langle P_1, P_2\rangle = \langle P_1, P_3\rangle = 1$ e $|\langle P_2, P_3\rangle| = 1$. Seja P'_r um levantamento arbitrário de p_r, $r = 4, \ldots, k$, então $P_r = 1/\langle P'_r, P_1\rangle P'_r$ satisfaz $\langle P_1, P_r\rangle = 1$.

□

Definição 2.1.4. *Seja $p = (p_1, \ldots, p_k)$ uma $k-$upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo. A matriz da proposição 2.1.3 será denominada matriz de Gram normalizada da $k-$upla p.*

A normalização de matrizes de Gram em geometria hiperbólica complexa é um argumento recorrente. Há vários exemplos de autores que lançam mão deste recurso. Veja Brem [3], Brem-Taoui [4], Goldman [10], Grossi [12] e Cunha-Gusevskii [6].

Em Goldman [10, prop. 7.1.1] são tomados levantamentos para três pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo cuja matriz de Gram é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & g_{23} \\ 1 & \overline{g}_{23} & 1 \end{bmatrix},$$

em que $|g_{23}| = 1$.

Para quádruplas de pontos em na fronteira do espaço hiperbólico complexo, em Grossi [12, classificação 2.2.28] e Cunha-Gusevskii [6, prop. 2.1] foram escolhidos levantamentos cuja matriz de Gram obtida é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & g_{13} & g_{14} \\ 1 & 0 & 1 & g_{24} \\ \overline{g}_{13} & 1 & 0 & 1 \\ \overline{g}_{14} & \overline{g}_{24} & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$|g_{13}| = 1$.

O próximo passo a ser dado é caracterizar $k-$uplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo congruentes via suas matrizes de Gram normalizadas. Porém, serão necessários alguns resultados de álgebra linear.

Definição 2.1.5. *Um espaço vetorial hermitiano, $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, é dito regular, quando*

$$\{w \in V \mid \langle v, w\rangle = 0,\ \forall v \in V\} = \{0\}$$

Definição 2.1.6. *Uma isometria de um espaço vetorial hermitiano é uma aplicação que preserva o produto hermitiano e é injetiva.*

Lema 2.1.7 (Teorema de Witt)**.** *Seja* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *um espaço vetorial regular. Sejam* $W \subset V$ *um subespaço de* V *e* $\sigma : W \longrightarrow V$ *uma isometria. Então, existe uma extensão isométrica* $\Sigma : V \longrightarrow V$ *de* σ *a* V*.*

Demonstração. Veja Scharlau [20, teo. 9.1, p. 265]. $\square$

Lema 2.1.8. *Sejam* $P_1, \ldots, P_k$ *vetores isotrópicos de* $\mathbb{C}^{n,1}$ *tais que* $\langle P_i, P_j\rangle \neq 0,\ i \neq j$. *Então, o espaço gerado por tais vetores é regular.*

Demonstração. Seja W o espaço gerado por $P_1, \ldots, P_k$. É suficiente mostrar que o único vetor de W ortogonal aos vetores $P_1, \ldots, P_k$ é o vetor nulo.

Seja $T = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_k P_k$ tal que $\langle T, P_i\rangle = 0$, $\forall\ i = 1, \ldots, k$. O vetor T é isotrópico pois

$$\langle T, T\rangle = \langle T, \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_k P_k\rangle = 0.$$

Em particular, T é um vetor isotrópico tal que $\langle T, P_1\rangle = 0$. Logo, como a forma $\langle\ ,\ \rangle$ é não-degenerada, existe um $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $T = \alpha P_1$. Por outro lado, $\langle T, P_2\rangle = \langle \alpha P_1, P_2\rangle = \alpha\langle P_1, P_2\rangle = 0$. Logo $\alpha = 0$. $\square$

Observação 2.1.9. *Sejam* $P_1, \ldots, P_k$ *vetores nas condições do lema anterior e* W *o espaço gerado por tais vetores. Em particular, a forma restrita ao espaço* W *possui assinatura* $(m, 1)$*, em que* $m+1 = \dim W$*. Se os vetores* $P_1, \ldots, P_k$ *são dependentes, então o determinante de sua matriz de Gram é nulo. Se os vetores* $P_1, \ldots, P_k$ *são independentes, então o determinante da matriz de Gram dos vetores* $P_1, \ldots, P_k$ *é negativo, uma vez que tal matriz é conjugada à matriz*

$$\left[\begin{array}{c|c} I_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right]$$

em que I_{k-1} *é a matriz identidade de ordem* $(k-1) \times (k-1)$.

Corolário 2.1.10. *Nas condições do lema 2.1.8, a matriz de Gram de uma* $k-$*upla de vetores isotrópicos em* $\mathbb{C}^{n,1}$ *é inversível se, e somente se, os vetores são linearmente independentes.*

Agora estão reunidas as condições para mostrar que as matrizes de Gram normalizadas distinguem classes de congruência de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo.

Teorema 2.1.11. *Duas $k-$uplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo são congruentes se, e somente se, suas matrizes de Gram normalizadas são iguais.*

Demonstração. Sejam $p = (p_1, \ldots, p_k)$, $q = (q_1, \ldots, q_k)$ duas $k-$uplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo e $P = (P_1, \ldots, P_k)$, $Q = (Q_1, \ldots, Q_k)$ seus respectivos levantamentos que geram as matrizes de Gram normalizadas. Sejam ainda W e W' os espaços gerados pelos vetores $P_1, \ldots, P_k$ e $Q_1, \ldots, Q_k$, respectivamente.

Se p e q são congruentes é imediato que suas matrizes de Gram normalizadas são iguais.

Reciprocamente, se p e q possuem a mesma matriz de Gram nomalizada, considere a aplicação linear $g : W \to W'$ dada por $g(P_i) = Q_i$, $\forall\ i = 1, \ldots, k$. Pelo lema 2.1.8, g é injetiva e está bem definida. Como as $k-$uplas P e Q possuem a mesma matriz de Gram, g preserva a forma $\langle\ ,\ \rangle$. Pelo teorema de Witt, g se extende a uma isometria de $\mathbb{C}^{n,1}$.

$\square$

Observação 2.1.12. *O mesmo argumento dado na demonstração acima foi usado em Chen-Greenberg [7, prop. 2.1.2 e 2.2.3] para mostrar que a ação do grupo* $\mathrm{PU}(n,1)$ *é transitiva em* $\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$ *e duplamente transitiva em* $\partial\mathrm{H}^n_{\mathbb{C}}$. *Idéias semelhantes também são usadas em Brehm-Taoui [4] para distinguir classes de congruência de pontos no espaço hiperbólico complexo. Idem em Grossi [12, classificação 2.2.2].*

Corolário 2.1.13. *Duas $k-$uplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo são congruentes se, e somente se, matrizes de Gram associadas a levantamentos arbitrários são equivalentes.*

Uma $k-$upla ordenada, $P = (P_1, \ldots, P_k)$, vetores isotrópicos em $\mathbb{C}^{n,1}$ gera no máximo um espaço de dimensão complexa k, logo uma $k-$upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo sempre está contida em $\partial\mathrm{H}^{k-1}_{\mathbb{C}}$. Como consequência imediata do corolário 2.1.10, tem-se

Proposição 2.1.14. *Seja $p = (p_1, \ldots, p_k)$ uma $k-$upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Então, a $k-$upla p está contida na fronteira de um $(k-2)-$espaço hiperbólico complexo se, e somente se, o determinante de sua matriz de Gram normalizada é nulo.*

2.2 Caracterização das matrizes de Gram normalizadas de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo

Nesta seção serão caracterizadas as matrizes hermitianas que são matrizes de Gram normalizadas de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo. A preparação para tal caracterização depende de alguns resultados preliminares de álgebra linear.

Definição 2.2.1. *Sejam $G = (g_{ij})$ uma matriz hermitiana $k \times k$ e $I = \{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, k\}$. Denota-se por G_I ou $G_{i_1 \dots i_m}$ a matriz obtida de G cujas entradas são g_{uv}, $u, v \in \{i_1, \dots, i_m\}$. Os menores principais e os menores principais lideres serão denotados por $[G]_I$ ou $[G]_{i_1 \dots i_m}$ e $[G]_m$, respectivamente.*

Lema 2.2.2. *Seja $G = (g_{ij})$ uma matriz hermitiana $k \times k$ dada por:*

- $g_{ii} = 0$, $1 \leq i \leq k$;
- $g_{ij} \neq 0$, $i \neq j$;
- $g_{1j} = 1$, $2 \leq j \leq k$;

Então, G é equivalente via operações elementares em linhas e colunas à matriz

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \widetilde{G} \end{array}\right],$$

sendo

$$\widetilde{G} = \begin{bmatrix} -(g_{23} + \overline{g}_{23}) & -\overline{g}_{23} - g_{24} + g_{34} & \cdots & -\overline{g}_{23} - g_{2k} + g_{3k} \\ -g_{23} - \overline{g}_{24} + \overline{g}_{34} & -(g_{24} + \overline{g}_{24}) & \cdots & -\overline{g}_{24} - g_{2k} + g_{4k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -g_{23} - \overline{g}_{2k} + \overline{g}_{3k} & -g_{24} - \overline{g}_{2k} + \overline{g}_{4k} & \cdots & -(g_{2k} + \overline{g}_{2k}) \end{bmatrix}.$$

Em particular, $\det G = -\det \widetilde{G}$ e o posto de G é igual ao posto de $\widetilde{G}$ mais 2.

Demonstração. De fato, as sequências de operações elementares são:

1) $-1\times$(linha 2) + linha j;

2) $-1\times$(coluna 2) + coluna j;

3) $-\overline{g}_{2j}\times$(linha 1) + linha j;

4) $-g_{2j}\times$(linha 1) + coluna j;

$3 \leq j \leq k$.

$\square$

Definição 2.2.3. *A matriz $\widetilde{G}$ do lema 2.2.2 é denominada matriz associada da matriz G.*

Lema 2.2.4. *Sejam $\widetilde{G}$ uma matriz hermitiana de posto r e $m \geq r$. São equivalentes:*

1. *$\widetilde{G}$ é semi-positiva definida;*
2. *os menores principais de $\widetilde{G}$ são positivos ou nulos;*
3. *$\widetilde{G}$ é a matriz de Gram de uma coleção de vetores em $\mathbb{C}^m$, munido de sua forma hermitiana canônica.*

Demonstração. Veja Bhatia [1] ou Horn-Johnson [14]. $\square$

Observação 2.2.5. *Seja $\widetilde{G}$ uma matriz hermitiana $m \times m$. Se $[\widetilde{G}]_i > 0$, $1 \leq i \leq (m-1)$ e $\det \widetilde{G} \geq 0$, então $\widetilde{G}$ é semi-positiva definida.*

Veja Horn-Johnson [14, p. 404].

Lema 2.2.6. *Uma matriz hermitiana $\widetilde{G}$ é positiva definida se, e somente se, os menores principais líderes são positivos.*

Demonstração. Veja Bhatia [1] ou Horn-Johnson [14]. $\square$

Agora chegou-se ao ponto em que é possível dar a primeira caracterização das matrizes hermitinas que são matrizes de Gram normalizadas de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo.

Teorema 2.2.7. *Seja $G = (g_{ij})$ uma matriz hermitiana $k \times k$ dada por*

- $g_{ii} = 0$, $1 \leq i \leq k$;
- $g_{ij} \neq 0$, $i \neq j$;

- $g_{1j} = 1$, $2 \leq j \leq k$;

- $|g_{23}| = 1$.

Seja ainda r o posto de G. Então, G é a matriz de Gram normalizada de uma $k-$upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo de dimensão n, $n-1 \geq r-2$ se, e somente se, sua matriz associada, $\widetilde{G}$, é semi-positiva definida.

Demonstração. Primeiro, observa-se que se $I = \{i_1, \ldots, i_m\} \subset \{1, \ldots, k-2\}$ e $J = \{1, \ldots, k-2\} \backslash I$, pelo lema 2.2.2:

$$\det G_{12(i_1+2)\cdots(i_m+2)} = -\det \widetilde{G}_{\{i_1,\ldots,i_m\}} = -[\widetilde{G}]_J.$$

Se G é a matriz de Gram de k vetores isotrópicos em $\mathbb{C}^{n,1}$, então $G_{12(i_1+2)\cdots(i_m+2)}$ é a matriz de Gram dos vetores $P_1, P_2, P_{i_1+2}, \ldots, P_{i_m+2}$. Portanto, pelo critério de Sylvester, $\det G_{12(i_1+2)\cdots(i_m+2)} \leq 0$. Donde, $[\widetilde{G}]_J \geq 0$. Pelo lema 2.2.4, $\widetilde{G}$ é semi-positiva definida.

Se $\widetilde{G}$ é semi-positiva definida, para mostrar que G é a matriz de Gram normalizada de k pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo, será mostrado que existem k vetores isotrópicos em $\mathbb{C}^{n,1}$ cuja matriz de Gram é G. De fato, sejam

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ P_3 = \begin{bmatrix} z_3 \\ w_3 \\ 1 \end{bmatrix},\ P_4 = \begin{bmatrix} z_4 \\ w_4 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots,\ P_k = \begin{bmatrix} z_k \\ w_k \\ 1 \end{bmatrix},$$

$z_j \in \mathbb{C}$ e $w_j \in \mathbb{C}^{n-1}$, $3 \leq j \leq k$.

A matriz de Gram de $P_1, \ldots, P_k$ é

$$G' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \overline{z}_3 & \overline{z}_4 & \ldots & \overline{z}_k \\ 1 & z_3 & z_3 + w_{33} + \overline{z}_3 & z_3 + w_{34} + \overline{z}_4 & \ldots & z_3 + w_{3k} + \overline{z}_k \\ 1 & z_4 & \overline{z}_3 + \overline{w}_{34} + z_4 & z_4 + w_{44} + \overline{z}_4 & \ldots & z_4 + w_{4k} + \overline{z}_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_k & \overline{z}_3 + \overline{w}_{3k} + z_k & \overline{z}_4 + \overline{w}_{4k} + z_k & \ldots & z_k + w_{kk} + \overline{z}_k \end{bmatrix},$$

em que $w_{jl} = \langle\langle w_j, w_l \rangle\rangle$ e $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ é o produto hermitiano canônico de $\mathbb{C}^{n-1}$.

A fim de que $G = G'$, deve-se ter

$$\overline{z}_j = g_{2j}, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} z_j + w_{jj} + \overline{z}_j = 0 \\ z_j + w_{jl} + \overline{z}_l = g_{jl} \end{cases} \tag{2.2}$$

Combinando 2.1 e 2.2, tem-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} w_{jj} = -(g_{2j} + \overline{g}_{2j}) \\ w_{jl} = -\overline{g}_{2j} - g_{2l} + g_{jl} \end{cases}$$

Resta determinar os vetores $w_3, \ldots, w_k$. Observa-se que tais vetores procurados devem ser de tal forma que sua matriz de Gram em $(\mathbb{C}^{n-1}, \langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle)$ seja $\widetilde{G}$. Como $\widetilde{G}$ é semi-positiva definida, pelo lema 2.2.4, existem tais vetores.

□

Usando a caraterização via menores principais das matrizes semi-positivas definidas dada no lema 2.2.4, segue da demonstração do teorema 2.2.7 mais uma caracterização das matrizes hermitianas que são matrizes de Gram normalizadas de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo:

Teorema 2.2.8. *Uma matriz G nas condições do teorema 2.2.7 é a matriz de Gram normalizada de uma $k-$upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo se, e somente se,*

- $\det G_{12j_1} \leq 0$, $3 \leq j_1 \leq k$;
- $\det G_{12j_1j_2} \leq 0$, $3 \leq j_1 < j_2 \leq k$;
- $\det G_{12j_1j_2j_3} \leq 0$, $3 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq k$;

  $\vdots$
- $\det G_{123\cdots(k-1)} \leq 0$;
- $\det G \leq 0$.

Compare com Cunha-Gusevskii [6, prop. 3.1 e 3.11]

A seção será encerrada com a caracterização de algumas posições relativas de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo via sua matriz de Gram normalizada.

Definição 2.2.9. *Diz-se que uma $k-$upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo é:*

- *quase genérica quando os $k-1$ primeiros pontos não estão contidos na fronteira de um $(k-3)-$espaço hiperbólico complexo;*

- *genérica quando os k pontos não estão contidos na fronteira de um $(k-2)-$espaço hiperbólico complexo.*

Em termos de levantamentos, configurações quase genéricas são aquelas em que os $k-1$ primeiros pontos possuem levantamentos linearmente independentes e as genéricas são aquelas em que os k pontos possuem levantamentos linearmente independentes.

Como aplicação direta do corolário 2.1.10 e do critério de Sylvester:

Proposição 2.2.10. *Sejam $p = (p_1, \ldots, p_k)$ uma $k-$upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo e $G = (g_{ij})$ sua matriz de Gram normalizada. Então:*

1. *p é quase genérica se, e somente se, $\det G_{123}$, $\det G_{1234}, \ldots, \det G_{123\cdots(k-1)}$ são negativos;*

2. *p é genérica se, e somente se, $\det G_{123}$, $\det G_{1234}, \ldots, \det G_{123\cdots(k-1)}$ e $\det G$ são negativos.*

Corolário 2.2.11. *Seja $G = (g_{ij})$ uma matriz hermitiana $k \times k$ dada por*

- *$g_{ii} = 0$, $1 \leq i \leq k$;*

- *$g_{ij} \neq 0$, $i \neq j$;*

- *$g_{1j} = 1$, $2 \leq j \leq k$;*

- *$|g_{23}| = 1$.*

Se $\det G_{123}, \det G_{1234}, \ldots, \det G_{123\cdots(k-1)}$ são negativos e $\det G$ é negativo ou nulo. Então, $\det G_I$ é negativo ou nulo, para todo $I = \{i_1, \ldots, i_m\} \subset \{1, \ldots, k\}$.

Demonstração. De fato, pelo lema 2.2.2 e pela observação 2.2.5, a matriz associada de G é semi-positiva definida. Pelo teorema 2.2.8, G é a matriz de Gram normalizada de uma $k-$upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo, $p = (p_1, \ldots, p_k)$. Nesse caso, G_I é a matriz de Gram de $p_{i_1}, \ldots, p_{i_m}$. Pelo critério de Sylvester, $\det G_I \leq 0$. $\square$

Para finalizar a discussão sobre posições relativas, será dada uma caracterização via matriz de Gram normalizada de quando uma $k-$upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo está contida em uma $\mathbb{C}^m-$cadeia.

Proposição 2.2.12. *Sejam $p = (p_1, \ldots, p_k)$ uma $k-$upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo e $G = (g_{ij})$ sua matriz de Gram normalizada. Então, p está contida em uma $\mathbb{C}^m-$cadeia se, e somente se, os determinantes das submatrizes $G_{12j_1\cdots j_m}$, $3 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq k$, são nulos.*

Demonstração. Sejam $P_1, \ldots, P_k$ os respectivos levantamentos de p ao espaço $\mathbb{C}^{n,1}$ que geram matriz de Gram normalizada. Afirmar que p está contida em uma $\mathbb{C}^m-$cadeia é equivalente a afirmar que os vetores $P_1, \ldots, P_k$ geram no máximo um subespaço de dimensão $m + 1$. Pelo corolário 2.1.14, tal fato ocorre se, e somente se, os determinantes das matrizes $G_{12j_1\cdots j_m}$, $3 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq k$, são nulos. □

2.3 Matrizes de Gram e invariantes

Como foi observado nas seções anteriores deste capítulo, as matrizes de Gram normalizadas de $k-$uplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo determinam unicamente as classes de congruência. Porém, apresentam a desvantagem de não serem invariantes, no sentido de depender da escolha dos levantamentos para representantes. Nesta seção será apresentada uma coleção mínima de invariantes capazes de distinguir as classes de congruência de $k-$uplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo. A coleção de invariantes em questão será contituída por um invariante de Cartan e razões cruzadas.

Proposição 2.3.1. *Sejam $p = (p_1, \ldots, p_k)$ uma $k-$upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo e $G = (g_{ij})$ sua matriz de Gram normalizada. Então,*

i) $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \arg(-g_{23})$;

ii) $\mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_j) = \dfrac{\overline{g}_{2j}}{\overline{g}_{23}}$;

iii) $\mathbb{X}(p_1, p_3, p_2, p_j) = \dfrac{\overline{g}_{3j}}{g_{23}}$

iv) $\mathbb{X}(p_1, p_l, p_2, p_j) = \dfrac{\overline{g}_{lj}}{g_{2l}}$

e

I) $g_{23} = -e^{Ai}$;

II) $g_{2j} = -e^{Ai}\ \overline{\mathbb{X}}(p_1, p_2, p_3, p_j)$;

III) $g_{3j} = -e^{-Ai}\ \overline{\mathbb{X}}(p_1, p_3, p_2, p_j)$;

IV) $g_{lj} = -e^{-Ai}\ \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_j)\overline{\mathbb{X}}(p_1, p_l, p_2, p_j)$;

$4 \leq j \leq k$, $4 \leq l \leq k-1$, $l < j$. *Em que, A é o invariante de Cartan da tripla* (p_1, p_2, p_3) *e* $\overline{\mathbb{X}}(p_a, p_b, p_c, p_d)$ *é o conjugado da razão cruzada de* (p_a, p_b, p_c, p_d).

Demonstração. Aplicando diretamente as definições:

1. $A = \mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \arg(-g_{23})$, donde $g_{23} = -e^{Ai}$.
2. $X_{2j} = \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_j) = \dfrac{\overline{g}_{2j}}{\overline{g}_{23}}$, donde $g_{2j} = -e^{Ai}\ \overline{\mathbb{X}}(p_1, p_2, p_3, p_j)$.
3. $X_{3j} = \mathbb{X}(p_1, p_3, p_2, p_j) = \dfrac{\overline{g}_{3j}}{g_{23}}$, donde $g_{3j} = -e^{-Ai}\ \overline{\mathbb{X}}(p_1, p_3, p_2, p_j)$.
4. $X_{lj} = \mathbb{X}(p_1, p_l, p_2, p_j) = \dfrac{\overline{g}_{lj}}{g_{2l}}$, donde $g_{lj} = -e^{-Ai}\ \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_l)\overline{\mathbb{X}}(p_1, p_l, p_2, p_j)$.

□

A proposição anterior determina uma bijeção entre os elementos da matriz de Gram normalizada de uma $k-$upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo e os invariante ali apresentados. Como corolário, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 2.3.2. *Duas $k-$uplas ordenadas de pontos distintos,* $p = (p_1, \ldots, p_k)$ *e* $q = (q_1, \ldots, q_k)$, *na fronteiria do espaço hiperbólico complexo são congruentes se, e somente se, possuem os mesmos invariantes dados na proposição 2.3.1.*

Demonstração. De fato, as $k-$uplas p e q possuem as mesmas matrizes de Gram normalizadas se, e somente se, tais invariantes são iguais.

□

2.4 O espaço de módulos para $\mathcal{C}(k,n)$

O objetivo desta seção é construir o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{C}(k,n)$. Será mostrado que o espaço de módulos para $\mathcal{C}(k,n)$ é um conjunto semi-analítico em espaço euclidiano.

O trabalho está praticamente feito, basta apenas reunir alguns resultados das seções precedentes.

Observação 2.4.1. *No teorema 2.3.1, observa-se que a quantidade de razões cruzadas necessárias para resgatar a matriz de Gram normalizada de uma $k-$upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico é $d = k(k-3)/2$.*

O primeiro passo para construir o espaço de módulos de $\mathcal{C}(k,n)$ é definir o conjunto cadindato para tal fim. As sugestões de parâmetros e relações são dadas pelos teoremas 2.3.1 e 2.2.8, respectivamente.

Seja $\mathcal{M}(k,n)$ o conjunto de vetores $(A,X) = (A, X_{2j}, X_{3j}, X_{lj}) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{C}^*)^d$, $4 \leq j \leq k$, $4 \leq l \leq k-1$, $l < j$, que satisfazem as relações definidas da seguinte forma: considera-se a matriz hermitiana $G = (g_{ij})$ cujas entradas são dadas pela proposição 2.3.1:

- $g_{ii} = 0$;
- $g_{1j} = 1$;
- $g_{23} = -e^{Ai}$;
- $g_{2j} = -e^{Ai}\ \overline{X}_{2j}$;
- $g_{3j} = -e^{-Ai}\ \overline{X}_{3j}$;
- $g_{lj} = -e^{-Ai}\ \overline{X}_{2j}\ X_{lj}$.

E exige-se que G satisfaça as condições do teorema 2.2.8:

- $\det G_{12j_1} = \det G_{12j_1}(A,X) \leq 0$, $3 \leq j_1 \leq k$;
- $\det G_{12j_1j_2} = \det G_{12j_1j_2}(A,X) \leq 0$, $3 \leq j_1 < j_2 \leq k$;
- $\det G_{12j_1j_2j_3} = \det G_{12j_1j_2j_3}(A,X) \leq 0$, $3 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq k$;

  $\vdots$

- $\det G_{123\cdots(k-1)} = \det G_{123\cdots(k-1)}(A, X) \leq 0$;

- $\det G = \det G(A, X) \leq 0$.

Observação 2.4.2. *Como os determinantes acima são funções polinomiais nas entradas das matrizes, segue que $\mathcal{M}(k, n)$ é definido por funções analíticas reais nas variáveis A, $\mathrm{Re}(X_{ij})$ e $\mathrm{Im}(X_{ij})$. Portanto, $\mathcal{M}(k, n)$ é um conjunto semi-analítico em $\mathbb{R} \times (\mathbb{C}^*)^d = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^*)^{2d}$.*

Sejam $p = (p_1, \ldots, p_k)$ uma $k-$upla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo e $m(p) \in \mathcal{C}(k, n)$ o ponto do espaço de configurações o qual representa. Define-se a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \tau & : & \mathcal{C}(k,n) & \longrightarrow & \mathbb{R} \times (\mathbb{C}^*)^d \\ & & m(p) & \longmapsto & (A, X) \end{array}$$

sendo $(A, X) = (A, X_{2j}, X_{3j}, X_{lj})$ o vetor cujas entradas são dadas pelos invariantes do teorema 2.3.1:

- $A = \mathbb{A}(p_1, p_2, p_3)$;

- $X_{2j} = \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_j)$;

- $X_{3j} = \mathbb{X}(p_1, p_3, p_2, p_j)$;

- $X_{lj} = \mathbb{X}(p_1, p_l, p_2, p_j)$;

$4 \leq j \leq k$, $4 \leq l \leq k-1$, $l < j$. Observa-se que τ está bem definida, pois o invariante de Cartan e a razão cruzada são invariantes pela ação do grupo $\mathrm{PU}(n, 1)$.

Lema 2.4.3. *As aplicações $\mathbb{A} : \mathcal{C}(3, n) \to \mathbb{R}$ e $\mathbb{X} : \mathcal{C}(4, n) \to \mathbb{C}^*$ dadas por $m(p_1, p_2, p_3) \mapsto \mathbb{A}(p_1, p_2, p_3)$ e $m(p_1, p_2, p_3, p_4) \mapsto \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4)$, respectivamente, são abertas.*

Demonstração. De fato, é suficiente mostrar que a aplicação feita em termos de levantamentos é aberta. Sem perda de generalidade pode-se supor que os pontos em questão são

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; P_3 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, \; P_4 = \begin{bmatrix} w_1 \\ w \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Então, $\mathbb{A}(P_1, P_2, P_3) = \arg(-\overline{z}_1)$ e $\mathbb{X}(P_1, P_2, P_3, P_4) = \dfrac{z_1}{w_1}$ são claramente abertas.

□

Teorema 2.4.4. *A aplicação τ é um homeomorfismo entre $\mathcal{C}(k,n)$ e $\mathcal{M}(k,n)$*

Demonstração. Pelo teorema 2.2.8, τ é uma aplicação entre $\mathcal{C}(k,n)$ e $\mathcal{M}(k,n)$. Também pelo teorema 2.2.8, τ é sobrejetiva. Pelo teorema 2.3.2, τ é injetiva. Munindo $\mathcal{M}(k,n)$ da topologia induzida de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^d$, pelo lema 2.4.3, τ é um homeomorfismo. $\square$

Definição 2.4.5. *O conjunto $\mathcal{M}(k,n)$ é denominado espaço de módulos para o espaço $\mathcal{C}(k,n)$.*

Capítulo 3

O espaço $\mathcal{C}(4, n)$ e seu espaço de módulos

O objetivo principal deste capítulo é um estudo detalhado do espaço de configurações de quádruplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo, $\mathcal{C}(4, n)$, e de seu espaço de módulos, $\mathcal{M}(4, n)$. Ênfase maior será dada para quádruplas na fronteira do plano hiperbólico complexo. Os principais resultados deste capítulo estão apresentados em Cunha-Gusevskii [6].

3.1 O espaço $\mathcal{C}(4, n)$ e seu espaço de módulos

Por conveniência, será refeito o roteiro da seção 2.4 para construir o espaço de módulos para o espaço de configurações de quádruplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo.

Seja $\mathcal{M}(4, n)$ o conjunto formado pelos pontos $(A, X_1, X_2) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{C}^*)^2$ tais que a matriz hermitiana $G = (g_{ij})$ 4×4 dada por

- $g_{ii} = 0,\ 1 \leq i \leq 4;\ \ g_{ij} \neq 0,\ i \neq j;\ \ g_{1j} = 1,\ 2 \leq j \leq 4;$
- $g_{23} = -e^{Ai};$
- $g_{24} = -e^{Ai}\ \overline{X}_1;$
- $g_{34} = -e^{-Ai}\ \overline{X}_2;$

satisfaça as seguintes condições:

($*_1$) $\det G_{123} = -2\mathrm{Re}(e^{Ai}) \leq 0$;

($*_2$) $\det G_{124} = -2\mathrm{Re}(e^{Ai}\ \overline{X}_1) \leq 0$;

($*_3$) $\det G = 1 + |X_1|^2 + |X_2|^2 - 2\mathrm{Re}(X_1 + X_2) - 2\mathrm{Re}(X_1\overline{X}_2\ e^{-2Ai}) \leq 0$.

O conjunto $\mathcal{M}(4,n)$ pode ser definido, de forma equivalente, como o conjunto de pontos $(A, X_1, X_2) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{C}^*)^2$ tais que

($*_1$) $-\pi/2 \leq A \leq \pi/2$;

($*_2$) $\mathrm{Re}(e^{Ai}\ \overline{X}_1) \geq 0$;

($*_3$) $1 + |X_1|^2 + |X_2|^2 - 2\mathrm{Re}(X_1 + X_2) - 2\mathrm{Re}(X_1\overline{X}_2\ e^{-2Ai}) \leq 0$.

Seja a aplicação $\tau : \mathcal{C}(4,n) \to \mathbb{R} \times (\mathbb{C}^*)^2$, dada por $\tau(m(p)) = (A, X_1, X_2)$. Pelo teorema 2.4.4, a aplicação τ é um homeomorfismo entre $\mathcal{C}(4,n)$ e $\mathcal{M}(4,n)$.

Observação 3.1.1. *Segue do corolário 2.2.11 que se* $(A, X_1, X_2) \in \mathcal{M}(4,n)$ *e* $-\pi/2 < A < \pi/2$*, então* $\mathrm{Re}(e^{Ai}\ \overline{X}_1) \geq 0$*. Do ponto de vista geométrico esta condição significa que os três primeiros pontos estão fora de uma cadeia.*

3.2 Quádruplas de pontos na fronteira do plano hiperbólico complexo

Nesta seção será feito um estudo específico do espaço de módulos de quádruplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do plano hiperbólico complexo.

O primeiro fato que se observa no espaço $\mathcal{C}(4,2)$ é que, pela proposição 2.1.14, o determinante da matriz de Gram normalizada de uma quádrupla ordenada de pontos distintos na fronteira do plano hiperbólico complexo é nulo. Portanto, o espaço $\mathcal{M}(4,2)$ é o conjunto dos pontos $(A, X_1, X_2) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{C}^*)^2$ tais que:

($\star_1$) $-\pi/2 \leq A \leq \pi/2$;

($\star_2$) $\mathrm{Re}(e^{Ai}\ \overline{X}_1) \geq 0$;

($\star_3$) $1 + |X_1|^2 + |X_2|^2 - 2\mathrm{Re}(X_1 + X_2) - 2\mathrm{Re}(X_1\overline{X}_2\ e^{-2Ai}) = 0$.

3.2.1 A fatia real de $\mathcal{M}(4,2)$

A fatia real de $\mathcal{M}(4,2)$ é, por definição,

$$\mathcal{R} = \{(A, X_1, X_2) \in \mathcal{M}(4,2) \mid X_1, X_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Pondo $X_1 = a + bi$ e $X_2 = c + di$ e tomando $b = d = 0$, então a equação $(\star_3)$ se escreve como:

$$a^2 - 2\cos(2A)ac + c^2 - 2(a+c) + 1 = 0. \tag{3.1}$$

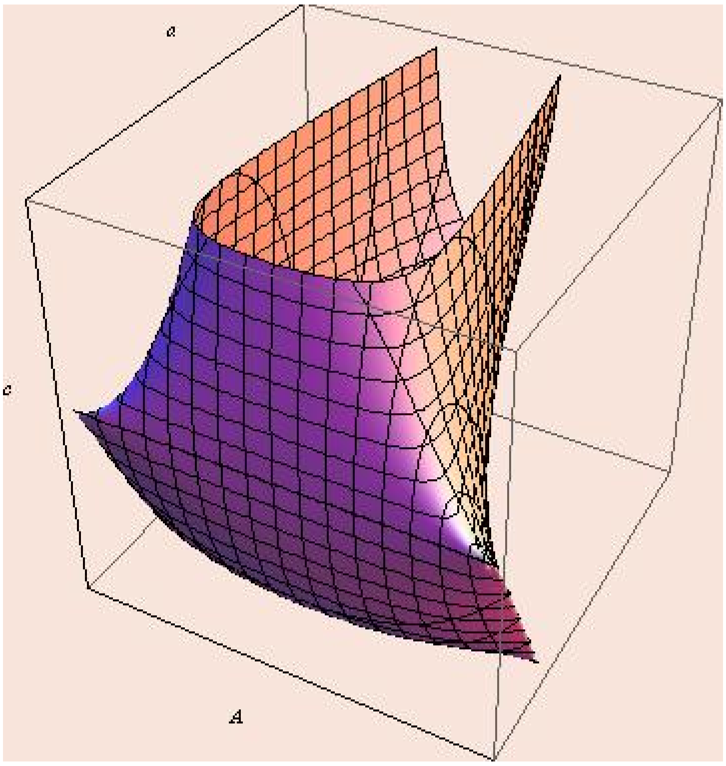

Figura 3.1: Fatia real de $\mathcal{M}(4,2)$

Proposição 3.2.1. *Para todo* $(A, X_1, X_2) \in \mathcal{R}$, *tem-se*

$$\mathrm{Re}(e^{Ai}\ X_1) \geq 0,$$
$$\mathrm{Re}(e^{-Ai}\ X_2) \geq 0.$$

.

Demonstração. Seja $G = (g_{ij})$ a matriz hermitiana 4×4 dada por $g_{ii} = 0$, $g_{12} = g_{13} = g_{14} = 1$, $g_{23} = -e^{Ai}$, $g_{24} = -e^{Ai}\ \overline{X}_1$ e $g_{34} = -e^{-Ai}\ \overline{X}_2$.

Se $-\pi/2 < A < \pi/2$, pelo corolário 2.2.11,

$$\det G_{124} = -2\mathrm{Re}(e^{Ai}\ X_1) = -2X_1 \cos A \leq 0;$$
$$\det G_{134} = -2\mathrm{Re}(e^{-Ai}\ X_2) = -2X_2 \cos A \leq 0.$$

.

Em particular, X_1 e X_2 são positivos.

Se $A = \pm\pi/2$, então $\mathrm{Re}(e^{Ai}\ X_1) = \mathrm{Re}(e^{-Ai}\ X_2) = 0$.

$\square$

Considerando a equação 3.1 como uma equação nas variáveis a e c, tem-se uma família de cônicas a parâmetro A. O discriminante desta família de cônicas é $\Delta = -4\,\mathrm{sen}^2(2A)$. A cônica em questão será:

- uma parábola, quando $A = 0$;

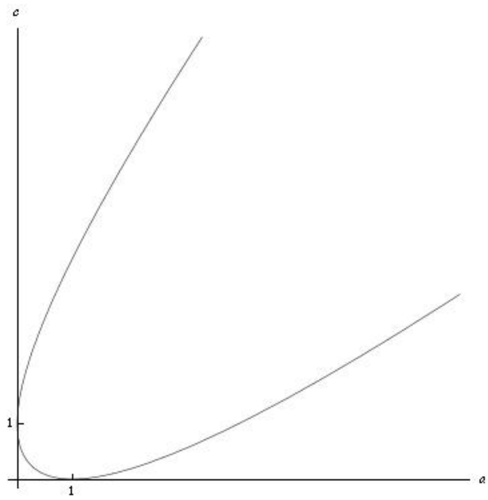

Figura 3.2: $(X_1 - X_2)^2 - 2(X_1 + X_2) = 0$

- uma reta dupla, quando $A = \pm\pi/2$;

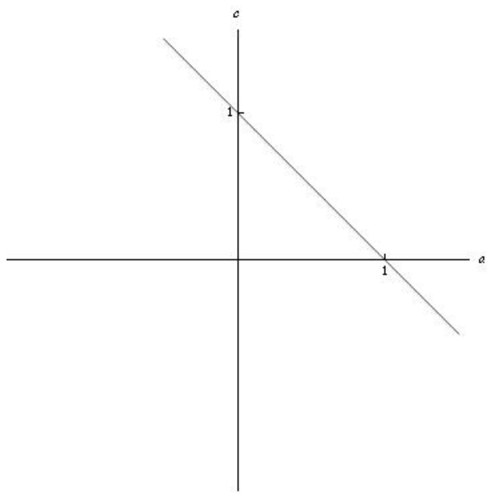

Figura 3.3: $(a + c - 1)^2 = 0$

- uma elípse, nos demais casos.

Nas duas seções que seguem, será visto que os pontos da fatia real em que $A = 0$ e $A = \pm\pi/2$ representam configurações de quádruplas contidas em sub-variedades totalmente geodésicas do plano hiperbólico complexo.

3.2.2 O conjunto singular de $\mathcal{M}(4,2)$ e configurações $\mathbb{C}-$planas

Nesta seção será determinado o conjunto singular do espaço $\mathcal{M}(4,2)$ e serão descritas as configurações que o qual representa.

Proposição 3.2.2. *O conjunto singular de* $\mathcal{M}(4,2)$ *é*

$$\mathcal{S} = \{(A, X_1, X_2) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^*)^2 \mid A = \pm\pi/2,\ X_1 + X_2 = 1\} = 0$$

Demonstração. Pondo $X_1 = a + bi$ e $X_2 = c + di$, tem-se que a equação $(\star_3)$ se escreve como

$$F = F(A,a,b,c,d) = a^2+b^2+c^2+d^2-2(ac+bd)\cos(2A)-2(-ad+bc)\operatorname{sen}(2A)-2(a+c)+1 = 0.$$

O gradiente de F, ∇F, é nulo se, e somente se,

$$\begin{cases} \partial F/\partial A = (ac+bd)\operatorname{sen}(2A) - (-ad+bc)\cos(2A) = 0 \\ \partial F/\partial a = a - c\cos(2A) + d\operatorname{sen}(2A) - 1 = 0 \\ \partial F/\partial b = b - c\operatorname{sen}(2A) - d\cos(2A) = 0 \\ \partial F/\partial c = -a\cos(2A) - b\operatorname{sen}(2A) + c - 1 = 0 \\ \partial F/\partial d = a\operatorname{sen}(2A) - b\cos(2A) + d = 0 \end{cases}$$

Se $-\pi/2 < A < \pi/2$, então o sub-sistema $(\partial F/\partial a, \partial F/\partial b, \partial F/\partial c, \partial F/\partial d) = 0$, visto como sistema linear nas variáveis a, b, c e d tem a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos(2A) & \operatorname{sen}(2A) \\ 0 & 1 & -\operatorname{sen}(2A) & -\cos(2A) \\ -\cos(2A) & -\operatorname{sen}(2A) & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}(2A) & -\cos(2A) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Usando álgebra linear elementar, verifica-se que este sistema não possui solução quando $-\pi/2 < A < \pi/2$.

Quando $A = \pm\pi/2$, então o sistema $\nabla F = 0$ toma o seguinte aspecto

$$\begin{cases} \partial F/\partial A = -ad + bc = 0 \\ \partial F/\partial a = a + c - 1 = 0 \\ \partial F/\partial b = b + d = 0 \\ \partial F/\partial c = a + c - 1 = 0 \\ \partial F/\partial d = b + d = 0 \end{cases}$$

Cujas soluções são $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $a + c = 1$ e $b = d = 0$. Sem dificuldades, verifica-se que as soluções deste sistema também pertencem ao espaço de módulos $\mathcal{M}(4, 2)$.

□

Definição 3.2.3. *Seja $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ uma quádrupla ordenada de pontos distintos na fronteira do plano hiperbólico complexo. Diz-se que p é:*

- *quase $\mathbb{C}-$plana, quando três de seus pontos pertencem a uma cadeia,*
- *$\mathbb{C}-$plana, quando os quatro pontos pertencem a uma cadeia.*

Lema 3.2.4. *Seja $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ uma quádrupla ordenada de pontos distintos na fronteira do plano hiperbólico complexo e $\tau(m(p)) = (A, X_1, X_2) \in \mathcal{M}(4, 2)$. Então,*

$$\mathbb{A}(p_1, p_2, p_4) = \arg(e^{Ai}\ \overline{X}_1)$$
$$\mathbb{A}(p_1, p_3, p_4) = \arg(e^{-Ai}\ \overline{X}_2)$$
$$\mathbb{A}(p_2, p_3, p_4) = \arg(e^{-Ai}\ X_1\overline{X}_2)$$

Demonstração. A matriz de Gram normalizada da quádrupla p é dada por $g_{ii} = 0$, $g_{1j} = 1$, $g_{23} = -e^{Ai}$, $g_{24} = -e^{Ai}\overline{X}_1$ e $g_{34} = -e^{-Ai}\ \overline{X}_2$. Segue o resultado da definição do invariante de Cartan. □

A fim de caracterizar as configurações quase $\mathbb{C}-$planas e $\mathbb{C}-$planas é conveniente considerar os seguintes conjuntos:

Definição 3.2.5. *Define-se as variedades de Cartan como sendo os seguintes conjuntos:*

- $\mathbb{S}_{123} = \{(A, X_1, X_2) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{C}^*)^2 \mid \mathrm{Re}(e^{Ai}) = 0\}$*;*
- $\mathbb{S}_{124} = \{(A, X_1, X_2) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{C}^*)^2 \mid \mathrm{Re}(e^{Ai}\ \overline{X}_1) = 0\}$*;*
- $\mathbb{S}_{134} = \{(A, X_1, X_2) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{C}^*)^2 \mid \mathrm{Re}(e^{-Ai}\ \overline{X}_2) = 0\}$*;*
- $\mathbb{S}_{234} = \{(A, X_1, X_2) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{C}^*)^2 \mid \mathrm{Re}(e^{-Ai}\ X_1\overline{X}_2) = 0\}$.

Proposição 3.2.6. *Seja $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ uma quádrupla ordenada de pontos distintos na fronteira do plano hiperbólico complexo. Então, p é quase $\mathbb{C}-$plana se, e somente se, $\tau(m(p))$ pertence a uma das variedade de Cartan. Mais ainda, p é $\mathbb{C}-$plana se, e somente se, $\tau(m(p))$ pertence a duas variedades de Cartan distintas.*

Demonstração. Se $\tau(m(p))$ pertence a variedade de Cartan $\mathbb{S}_{ijk}$, então o determinante da matriz de Gram da tripla (p_i, p_j, p_k) é nulo, logo, pelo corolário 2.1.14, a tripla em questão está contida numa cadeia. Se $\tau(m(p))$ pertence a duas variedades de Cartan, então a quádrupla está contida numa cadeia, pois cadeias com dois pontos em comum são iguais. □

As quatro proposições que vem a seguir visam caracterizar a interseção do espaço $\mathcal{M}(4,2)$ com as variedades de Cartan. Como as demonstrações são contas elementares e análogas, serão dadas apenas as duas primeiras.

Proposição 3.2.7. *Seja $(A, X_1, X_2) \in \mathbb{S}_{123}$. Pondo $X_1 = a + bi$ e $X_2 = c + di$, então $(A, X_1, X_2) \in \mathcal{M}(4,2)$ se, e somente se,*

$$\begin{cases} A = \pi/2 \\ a + c = 1 \\ b + d = 0, \ \ b \leq 0 \end{cases} \qquad ou \qquad \begin{cases} A = -\pi/2 \\ a + c = 1 \\ b + d = 0, \ \ b \geq 0 \end{cases}$$

Demonstração. Substituindo $A = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, em

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ac + bd)\cos(2A) - 2(-ad + bc)\,\mathrm{sen}(2A) - 2(a + c) + 1,$$

tem-se, $(a + c + 1)^2 + (b + d)^2 = 0$. A fim de cumprir a condição $\mathrm{Re}(\overline{X}_1\, e^{Ai}) \leq 0$, deve-se ter $b \leq 0$, se $A = \pi/2$ ou $b \geq 0$, se $A = -\pi/2$.

□

Proposição 3.2.8. *Seja $(A, X_1, X_2) \in \mathbb{S}_{124}$. Pondo $X_1 = a + bi$ e $X_2 = c + di$, então $(A, X_1, X_2) \in \mathcal{M}(4,2)$ se, e somente se,*

$$\begin{cases} a + b\,\mathrm{tg}(A) = 0, \ \ A \in (-\pi/2, \pi/2) \\ a + c = 1 \\ b - d = 0 \end{cases} \qquad ou \qquad \begin{cases} A = \pm\pi/2 \\ a + c = 1 \\ b = d = 0 \end{cases}$$

Demonstração. Primeiro, observa-se que se $A \neq \pm\pi/2$ e $\mathrm{Re}(\overline{X}_1\ e^{Ai}) = 0$, então $b \neq 0$. Pois no caso contrário, se $b = 0$, então $\mathrm{Re}(\overline{X}_1\ e^{Ai}) = a\cos A = 0$, donde $a = 0$. Logo a equação $\mathrm{Re}(\overline{X}_1\ e^{Ai}) = 0$ é equivalente a $\mathrm{tg}(A) = -a/b$. Substituindo as identidades trigonométricas

$$\begin{cases} \cos(2A) = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2 A}{1 + \mathrm{tg}^2 A} \\ \\ \mathrm{sen}(2A) = \dfrac{2\,\mathrm{tg} A}{1 + \mathrm{tg}^2 A} \end{cases}$$

em

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ac + bd)\cos(2A) - 2(-ad + bc)\,\mathrm{sen}(2A) - 2(a + c) + 1,$$

tem-se, após simplificação, $(a + c - 1)^2 + (b - d)^2 = 0$. Donde se conclui que $a + c - 1 = 0$ e $b - d = 0$.

Quando $A = \pm\pi/2$ a condição $\mathrm{Re}(\overline{X}_1\ e^{Ai}) = 0$ é equivalente a $b = 0$. Portanto a equação

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ac + bd)\cos(2A) - 2(-ad + bc)\,\mathrm{sen}(2A) - 2(a + c) + 1 = 0$$

se simplifica a $(a + c - 1)^2 + d^2 = 0$. Portanto, $a + c - 1 = 0$ e $b = d = 0$.

$\square$

Proposição 3.2.9. *Seja $(A, X_1, X_2) \in \mathbb{S}_{134}$. Pondo $X_1 = a + bi$ e $X_2 = c + di$, então $(A, X_1, X_2) \in \mathcal{M}(4, 2)$ se, e somente se,*

$$\begin{cases} c - d\,\mathrm{tg}(A) = 0, \ \ A \in (-\pi/2, \pi/2) \\ a + c = 1 \\ b - d = 0 \end{cases} \qquad \textit{ou} \qquad \begin{cases} A = \pm\pi/2 \\ a + c = 1 \\ b = d = 0 \end{cases}$$

Proposição 3.2.10. *Seja $(A, X_1, X_2) \in \mathbb{S}_{234}$. Pondo $X_1 = a + bi$ e $X_2 = c + di$, então $(A, X_1, X_2) \in \mathcal{M}(4, 2)$ se, e somente se,*

$$\begin{cases} (ac + bd) + (-ad + bc)\,\mathrm{tg}(A) = 0, \ \ A \in (-\pi/2, \pi/2) \\ a + c = 1 \\ b + d = 0 \end{cases} \qquad \textit{ou} \qquad \begin{cases} A = \pm\pi/2 \\ a + c = 1 \\ b = d = 0 \end{cases}$$

Corolário 3.2.11. *A interseção das variedades de Cartan com* $\mathcal{M}(4,2)$ *é o conjunto singular de* $\mathcal{M}(4,2)$.

Teorema 3.2.12. *Sejam* $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ *uma quádrupla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo e* $\tau(m(p)) = (A, X_1, X_2)$ *sua projeção em* $\mathcal{M}(4,2)$. *Então, p é* $\mathbb{C}-$*plana se, e somente se,* $A = \pm\pi/2$, $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^*$ *e* $X_1 + X_2 = 1$.

Veja a figura 3.3.

3.2.3 Configurações $\mathbb{R}-$planas

Definição 3.2.13. *Uma quádrupla ordenada de pontos distintos na fronteira do plano hiperbólico complexo é dita* $\mathbb{R}-$*plana, quando seus pontos estão contidos em um* $\mathbb{R}-$*círculo.*

Teorema 3.2.14. *Sejam* $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ *uma quádrupla ordenada de pontos distintos na fronteira do plano hiperbólico complexo e* $\tau(m(p)) = (A, X_1, X_2)$ *sua projeção em* $\mathcal{M}(4,2)$. *Então, p é* $\mathbb{R}-$*plana se, e somente se,* $A = 0$, $X_1, X_2 \in \mathbb{R}_+$ *e* $(X_1 - X_2)^2 - 2(X_1 + X_2) = 0$.

Demonstração. Se a quádrupla p possui seus pontos em um $\mathbb{R}-$círculo, então o invariante de Cartan de cada tripla que a compõe é zero. Então, pelo lema 3.2.4, $A = 0$ e $X_1, X_2 \in \mathbb{R}$. Pela proposição 3.2.1, X_1 e X_2 são positivos.

Reciprocamente, se $A = 0$ e $X_1, X_2 \in \mathbb{R}_+$, então cada tripla tem seu invariante de Cartan nulo. Logo, cada tripla está contida num $\mathbb{R}-$círculo. Mas o $\mathbb{R}-$círculo que contém cada tripla é único, assim os quatro pontos estão contidos no mesmo $\mathbb{R}-$círculo. □

Veja figura 3.2.

3.2.4 Comparando o espaço $\mathcal{M}(4,2)$ e a variedade razão-cruzada

Esta seção encerra o capítulo. Seu objetivo é comparar o espaço $\mathcal{M}(4,2)$ e as variedades construídas por Falbel [8] e Parker-Platis [16] com o intuito de parametrizar o espaço $\mathcal{C}(4,2)$. Depois de um breve resumo dos referidos trabalhos, será observado que a variedade razão-cruzada parametriza apenas a parte regular de $\mathcal{C}(4,2)$.

Em Falbel [8], foi definido o conjunto M_1 de triplas $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{C}^3$ tais que

- $|\omega_1\omega_2\omega_3| = 1$;

- $[(\omega_1 - 1)(\overline{\omega}_1 - 1) - 1] + |\omega_1|^2[(\omega_2 - 1)(\overline{\omega}_2 - 1) - 1] + |\omega_1\omega_2|^2[(\omega_3 - 1)(\overline{\omega}_3 - 1) - 1] = 0.$

A proposição 5.4 de Falbel [8] afirma que existe uma bijeção entre "a parte regular" de $\mathcal{C}(4,2)$ e M_1. Tal bijeção é dada por $\tau_1 : (p_1, p_2, p_3, p_4) \mapsto (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, sendo $\omega_1 = \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4)$, $\omega_2 = \mathbb{X}(p_1, p_4, p_2, p_3)$ e $\omega_3 = \mathbb{X}(p_1, p_3, p_4, p_2)$.

Usando idéias semelhantes às que estão em Falbel [8], em Parker-Platis [16], foi definido o conjunto M_2 de triplas $(X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{C}^3$ tais que

- $|X_2| = |X_1 X_2|$;
- $2|X_1|^2\mathrm{Re}(X_3) = |X_1|^2 + |X_2|^2 + 1 - 2\mathrm{Re}(X_1 + X_2)$.

E foi considerada a aplicação $\tau_2 : \mathcal{C}(4,2) \to \mathbb{C}^3$, dada por $(p_1, p_2, p_3, p_4) \mapsto (X_1, X_2, X_3)$, em que $X_1 = \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4)$, $X_2 = \mathbb{X}(p_1, p_3, p_2, p_4)$ e $X_3 = \mathbb{X}(p_2, p_3, p_1, p_4)$. As proposições 5.5 e 5.10 de Parker-Platis [16] afirmam que tal aplicação é sobrejetiva e injetiva, respectivamente, entre $\mathcal{C}(4,2)$ e M_2. O conjunto M_2, em Parker-Platis [16], foi denominado variedade razão-cruzada. Como se pode observar, a variedade razão cruzada é uma variedade algébrica real em $\mathbb{R}^6$.

Observa-se, sem grandes dificuldades, que a aplicação dada por $\omega_0 \mapsto X_1$, $\omega_1 \mapsto \overline{X}_3$ e $\omega_2 \mapsto 1/X_2$ é uma bijeção entre os conjuntos M_1 e M_2.

A variedade razão cruzada, M_2, se relaciona com o espaço de módulos $\mathcal{M}(4,2)$ da seguinte forma. Sejam $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ uma quádrupla ordenada de pontos distintos na fronteira do plano hiperbólico complexo e $\tau(m(p)) = (A, X_1, X_2) \in \mathcal{M}(4,2)$. Nesse caso a matriz de Gram normalizada da quádrupla p, pela proposição 2.3.1, é $g_{ii} = 0$, $g_{1j} = 1$, $g_{23} = -e^{Ai}$, $g_{24} = -e^{Ai}\,\overline{X}_1$, $g_{34} = -e^{-Ai}\overline{X}_2$. Logo,

$$X_3 = \mathbb{X}(p_2, p_3, p_1, p_4) = (X_2/X_1)e^{2Ai}.$$

Sem dificulades, verifica-se que a aplicação θ dada por

$$\theta(A, X_1, X_2) = (X_1, X_2, X_3 = (X_2/X_1)e^{2Ai}).$$

é uma aplicação entre $\mathcal{M}(4,2)$ e M_2.

Também pode-se obeservar facilmente que θ é injetiva para $-\pi/2 < A < \pi/2$, mas deixa de ser injetiva justamente no conjunto singular de $\mathcal{M}(4,2)$. Mais precisamente, $\theta(-\pi/2, X_1, X_2) = \theta(\pi/2, X_1, X_2)$, se, e somente se $X_1 + X_2 = 1$.

Conclui-se, portanto que a variedade razão-cruzada não pode ser usada como espaço de módulos para $\mathcal{C}(4,2)$, pois parametriza apenas sua parte regular. De todas as formas, o seguinte exemplo é outro fato que comprova que a variedade razão-cruzada não tem como ser espaço de módulos para $\mathcal{C}(4,2)$.

Exemplo 3.2.15. *As quádruplas* $p = (0, \infty, (0,1), (0,t))$ *e* $q = (0, \infty, (0,-1), (0,-t))$, $t \neq 1$, *no grupo de Heisenberg compactificado,* $\partial \mathrm{H}^2_{\mathbb{C}}$, *determinam o mesmo ponto em* M_2, *mas não existe aplicação holomorfa* $g \in \mathrm{PU}(2,1)$ *tal que* $g(p) = q$.

De fato, as duas quádruplas, p e q, possuem os seguintes levantamentos ao espaço $\mathbb{C}^{2,1}$, respectivamente, veja a seção 1.2:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} it \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q_4 = \begin{bmatrix} -it \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Os produtos hermitianos são:

$$\begin{cases} \langle P_1, P_2 \rangle = 1, & \langle P_1, P_3 \rangle = -i, \quad \langle P_1, P_4 \rangle = -it, \\ \langle P_2, P_3 \rangle = 1, & \langle P_2, P_4 \rangle = 1, \quad\;\; \langle P_3, P_4 \rangle = i(1-t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle Q_1, Q_2 \rangle = 1, & \langle Q_1, Q_3 \rangle = i, \quad \langle Q_1, Q_4 \rangle = it, \\ \langle Q_2, Q_3 \rangle = 1, & \langle Q_2, Q_4 \rangle = 1, \quad \langle Q_3, Q_4 \rangle = i(t-1). \end{cases}$$

E as razões cruzadas são:

$$\begin{aligned} \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \mathbb{X}(q_1, q_2, q_3, q_4) = 1/t, \\ \mathbb{X}(p_1, p_3, p_2, p_4) &= \mathbb{X}(q_1, q_3, q_2, q_4) = (t-1)/t, \\ \mathbb{X}(p_2, p_3, p_1, p_4) &= \mathbb{X}(q_2, q_3, q_1, q_4) = 1 - t. \end{aligned}$$

Mas, $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = -\pi/2$ e $\mathbb{A}(q_1, q_2, q_3) = \pi/2$. Logo, não existe isometria $g \in \mathrm{PU}(2,1)$ tal que $g(p_i) = q_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Por fim, observa-se que existe uma isometria anti-holomorfa, f, tal que $f(p) = q$. Por exemplo, a inversão no $\mathbb{R}-$plano cuja fronteira é o eixo real do grupo de Heisenberg.

Capítulo 4

O espaço de módulos de quíntuplas de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo

4.1 O espaço $\mathcal{C}(5,n)$ e seu espaço de módulos

Primeiro será construído o espaço de módulos de quíntuplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo como foi feito no capítulo precedente, repetindo o roteiro da seção 2.4.

Sejam $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ uma quíntupla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo e $G = (g_{ij})$ sua matriz de Gram normalizada. Pela proposição 2.3.1, as entradas de G estão em bijeção com os invariantes $A = \mathbb{A}(p_1, p_2, p_3)$, $X_1 = \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_4)$, $X_2 = \mathbb{X}(p_1, p_3, p_2, p_4)$, $X_3 = \mathbb{X}(p_1, p_2, p_3, p_5)$, $X_4 = \mathbb{X}(p_1, p_3, p_2, p_5)$ e $X_3 = \mathbb{X}(p_1, p_4, p_2, p_5)$ e G é dada por:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -e^{Ai} & -e^{Ai}\overline{X}_1 & -e^{Ai}\overline{X}_3 \\ 1 & -e^{-Ai} & 0 & -e^{-Ai}\overline{X}_2 & -e^{-Ai}\overline{X}_4 \\ 1 & -e^{-Ai}X_1 & -e^{Ai}X_2 & 0 & -e^{-Ai}X_1\overline{X}_5 \\ 1 & -e^{-Ai}X_3 & -e^{Ai}X_4 & -e^{Ai}\overline{X}_1X_5 & 0 \end{bmatrix}$$

O espaço de módulos de $\mathcal{C}(5,n)$ é o conjunto de pontos $(A, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{C}^*)^5$ tais que a matriz G acima satisfaz:

- $\det G_{123} = -(e^{Ai} + e^{-Ai}) \leq 0$;

- $\det G_{124} = -(e^{Ai}\ \overline{X}_1 + e^{-Ai}\ X_1) \leq 0$;

- $\det G_{125} = -(e^{Ai}\ \overline{X}_3 + e^{-Ai}\ X_3) \leq 0$;

- $\det G_{1234} = 1 + |X_1|^2 + |X_2|^2 - 2\mathrm{Re}(X_1 + X_2) - 2\mathrm{Re}(e^{2Ai}\ \overline{X}_1 X_2) \leq 0$;

- $\det G_{1235} = 1 + |X_3|^2 + |X_4|^2 - 2\mathrm{Re}(X_3 + X_4) - 2\mathrm{Re}(e^{2Ai}\ \overline{X}_3 X_4) \leq 0$;

- $\det G_{1245} = |X_1|^2 + |X_3|^2 + |X_1 X_5|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{X}_1 X_3 + |X_1|^2\ \overline{X}_5) - 2\mathrm{Re}(e^{2Ai}\ \overline{X}_1 \overline{X}_3 X_5) \leq 0$;

- $\det G \leq 0$.

A primeira afirmação que se pode fazer sobre quíntuplas ordenadas de pontos distintos é a seguinte proposição:

Proposição 4.1.1. *Sejam $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ uma quíntupla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo e $\tau(m(p)) \in \mathcal{M}(5, n)$ sua projeção no espaço de módulos. Então, p é $\mathbb{C}^3-$plana se, e somente se, o determinante de $G = G(A, X)$ é nulo.*

Demonstração. Consequência imediata da proposição 2.1.14. □

4.2 O espaço $\mathcal{M}(5, 2)$

Nesta seção será feita uma descrição mais detalhada do espaço de módulos para o espaço de configurações de quíntuplas ordenadas de pontos distintos na fronteira do plano hiperbólico complex, $\mathcal{C}(5, 2)$.

Proposição 4.2.1. *Sejam $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ uma quíntupla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo e $\tau(m(p)) = (A, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \in \mathcal{M}(5, n)$ sua projeção no espaço de módulos. Então, p está contida na fronteira de uma plano hiperbólico complexo se, e somente se,*

- $1 + |X_1|^2 + |X_2|^2 - 2\mathrm{Re}(X_1 + X_2) - 2\mathrm{Re}(e^{2Ai}\ \overline{X}_1 X_2) = 0$;

- $1 + |X_3|^2 + |X_4|^2 - 2\mathrm{Re}(X_3 + X_4) - 2\mathrm{Re}(e^{2Ai}\ \overline{X}_3 X_4) = 0$;

- $|X_1|^2 + |X_3|^2 + |X_1 X_5|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{X}_1 X_3 + |X_1|^2\ \overline{X}_5) - 2\mathrm{Re}(e^{2Ai}\ \overline{X}_1 \overline{X}_3 X_5) = 0$.

Demonstração. Seja $G = (g_{ij})$ a matriz de Gram normalizada de p. Pela proposição 2.2.12, p está contida na fronteira de um plano hiperbólico complexo se, e somente se, $\det G_{1234}$, $\det G_{1235}$ e $\det G_{1345}$ são nulos. Segue o resultado expressando G em função dos invariantes que a determinam. □

Para caracterizar quando uma quíntupla está contida em uma cadeia, será necessário o seguinte lema, cuja demonstração é simplesmente aplicação da definição do invariante de Cartan.

Lema 4.2.2. *Sejam $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ uma quíntupla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo e $\tau(m(p)) = (A, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \in \mathcal{M}(5, n)$ sua projeção no espaço de módulos. Então,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}(p_1, p_2, p_4) &= \arg(e^{Ai}\ \overline{X}_1) \\
\mathbb{A}(p_1, p_3, p_4) &= \arg(e^{-Ai}\ \overline{X}_2) \\
\mathbb{A}(p_1, p_2, p_5) &= \arg(e^{Ai}\ \overline{X}_3) \\
\mathbb{A}(p_1, p_3, p_5) &= \arg(e^{-Ai}\ \overline{X}_4) \\
\mathbb{A}(p_1, p_4, p_5) &= \arg(e^{Ai}\ \overline{X}_1 X_5)
\end{aligned}$$

Teorema 4.2.3. *Sejam $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ uma quíntupla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo e $\tau(m(p)) = (A, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \in \mathcal{M}(5, n)$ sua projeção no espaço de módulos. Então, p está contida em uma cadeia se, e somente se,*

- $\mathbb{A} = \pm\pi/2$, $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \in \mathbb{R}$;
- $X_1 + X_2 = 1$;
- $X_3 + X_4 = 1$;
- $X_1 - X_3 = X_1 X_5$.

Demonstração. Seja $G = (g_{ij})$ a matriz de Gram nomalizada de p. Pela proposição 2.2.12, p está contida em uma cadeia se, e somente se, $\det G_{123}$, $\det G_{124}$ e $\det G_{125}$ são nulos. Expressando estes determinates em função de pontos do espaço de módulos, tem-se que $A = \pm\pi/2$, X_1 e X_3 são reais. Para verificar que X_2, X_4 e X_5 são reais, basta aplicar o lema anterior. As relações entre os X's, são obtidas quando se faz $\det G_{1234} = 0$, $\det G_{1235} = 0$ e $\det G_{1245} = 0$. □

Teorema 4.2.4. *Sejam $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ uma quíntupla ordenada de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo e $\tau(m(p)) = (A, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \in \mathcal{M}(5, n)$ sua projeção no espaço de módulos. Então, p está contida em um $\mathbb{R}-$círculo, e somente se,*

- $\mathbb{A} = 0$, $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \in \mathbb{R}_+$;
- $(X_1 - X_2)^2 = 2(X_1 + X_2)$;
- $(X_3 - X_4)^2 = 2(X_3 + X_4)$;
- $(X_1 - X_3)^2 + (X_1X_5)^2 = 2X_1X_5(X_1 + X_3)$.

Demonstração. Sejam P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 os respectivos levantamentos que geram a matriz de Gram normalizada de p, G. Afirmar que os pontos de p estão contidos em um $\mathbb{R}-$círculo é equivalente a afirmar que os levantamentos que geram a matriz de Gram normalizada de p estão contidos em um $3-$sub-espaço real. Este fato ocorre se, e somente se, $\langle P_i, P_j \rangle \in \mathbb{R}$. Portanto, se, e somente se, $A = 0$ e $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \in \mathbb{R}$. As relações entre os X's são determinadas por $G_{1234} = 0$, $G_{1235} = 0$ e $G_{1245} = 0$. O fato de X_1, X_2, X_3, X_4 serem positivos é uma consequência da proposição 3.2.1. O fato de X_5 ser positivo é uma consequência da relação $(X_1 - X_3)^2 + (X_1X_5)^2 = 2X_1X_5(X_1 + X_3)$. $\square$

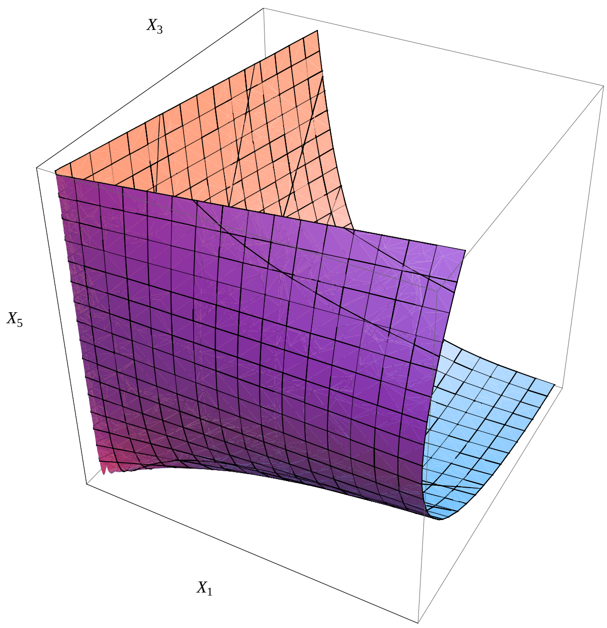

Figura 4.1: $(X_1 - X_3)^2 + (X_1X_5)^2 = 2X_1X_5(X_1 + X_3)$

Referências Bibliográficas

[1] R. Bhatia. Positive definite matrices. Graduete Texts in Mathematcs, 169. Spring-Verlag, New York (1997).

[2] A. F. Beardon. The geometry of discrete groups. Graduate Texts in Mathematics, 91. Springer-Verlag, New York (1983).

[3] U. Brehm. The shape invariant of triangles and trigonometry in two-point homogeneous spaces. Geom. Dedicata 33 (1990), 59-76.

[4] U. Brehm, B. Et - Taoui. Congruence criteria for finite subsets of complex projective and complex hyperbolic spaces. Manuscripta math. 96 (1998), 81 - 95.

[5] E. Cartan, Sur le groupe de la géométrie hypersphérique. Comm. Math. Helv. 4 (1932), 158–171.

[6] H. Cunha, N. Gusevskii. On the moduli space of quadruples of points in the boundary of complex hyperbloic. Preprint, disponível em http://arxiv.org/abs/0812.2159 (2008).

[7] S. S. Chen, L. Greenberg. Hyperbolic spaces. Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers). Academic Press, New York (1974), 49-87.

[8] E. Falbel. Geometric structures associated to triangulations as fixed sets of involutions. Topology and aplications. 154 (2007), no 6, 1041 – 1052.

[9] E. Falbel, I. D. Platis. The PU(2,1) configuration space of four points in S3 and the Cross-Ratio Variety. Math. Annalen. 340 (2008), no 4, 935 – 962.

[10] W.M. Goldman, Complex hyperbolic geometry. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999. xx+316 pp.

[11] W.M. Goldman, J.R. Parker, Dirichlet polyhedra for dihedral groups acting on complex hyperbolic space. J. Geom. Anal. 2 (1992), no. 6, 517–554.

[12] C. Grossi. Ferramentas elementares para geometrias clássicas e geometria hiperbólica complexa. Tese de doutorado (2006), Unicamp, Campinas.

[13] J. Hakim, H. Sandler, The moduli space of $n + 1$ Points in Complex Hyperbolic n-Space. Geom. Dedicata 97 (2003), 3-15.

[14] R. A. Horn, C. R. Johnson. Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge (1985).

[15] A. Korányi, H. M. Reimann. The complex cross-ration on the Heisenberg group. Enseign. Math. 33 (1987), 291-300.

[16] J. R. Parker, I. D. Platis. Complex hyperbolic Fenchel-Nielsen coordinates. Topology 47 (2008), 101-135.

[17] J. R. Parker, I. D. Platis. Global, geometrical coordinates on Falbel's cross-ratio variety. To appear in Canadian Mathematical Bulletin.

[18] H. Sandler. Distance formulas in complex hyperbolic space. Forum Math. 8 (1996), 93 - 106.

[19] J. G. Ratcliffe. Foundations of hyperbolic manifolds. Graduate Texts in Mathematics, 149. Springer-Verlag (1994), New York.

[20] W. Scharlau. Quadratic and Hermitian forms. Springer-Verlag (1985), New York.

[21] P. Will. Traces, Cross-ratios and 2-generator Subgroups of PU(2,1). To appear in Can. J. Math.

Índice Remissivo