

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado

**Obtenção do Primeiro Autovalor para o
 p -Laplaciano via Método das Potências
Inverso**

Eder Marinho Martins

**Orientadores : Prof. Dr. Grey Ercole
Prof. Dr. Rodney J. Biezuner**

BELO HORIZONTE, 15 DE OUTUBRO DE 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

À Ceili.

Amiga, companheira, esposa e vida.

Agradecimentos

O *Seu* Marinho (na memória e com Deus desde 2005) diria orgulhoso que hoje possui um filho Doutor. Felizmente a Dona Efigênia (com seus 71 anos) pôde me dizer isto. Meu pai estudou pouco, minha mãe sequer sabe assinar o nome, mas foram fundamentais na minha formação e merecem um agradecimento todo especial.

A minha doce Ceili, sempre do meu lado, incentivando, escutando, consolando e acompanhando todo o processo do doutorado, desde os mais tensos e difíceis. Certamente minha esposa merece o mais especial (e carinhoso) dos agradecimentos.

Aos colegas do Departamento de Matemática da UFOP que, na medida do possível, adequaram meus horários para que eu pudesse assistir as aulas e marcar seminários com os orientadores durante todo o período do doutorado. Muitos destes colegas foram meus professores durante a graduação, outros colegas de graduação ou pós graduação e sei que compartilham deste momento. Também agradeço fortemente meus ex-professores que já não fazem parte do corpo docente da UFOP.

Aos professores Grey Ercole e Rodney Josué Biezuner, orientador e co-orientador deste trabalho, que sempre compreenderam minha situação de fazer praticamente todo o doutorado trabalhando na UFOP. Não tenho dúvida que toda a disposição em marcar o melhor horário possível para que pudéssemos discutir os problemas relativos a tese, para pensarmos juntos em possíveis caminhos para solucioná-los e a paciência de ambos permitiu que esse trabalho fosse concluído com certa velocidade.

Ao professor Hamilton Prado Bueno, que acompanhou praticamente todo o trabalho e sempre esteve disposto a colaborar.

Ao amigo Wenderson Marques Ferreira, companheiro de estudos desde a graduação.

Aos meus nove irmãos vivos. Pessoas simples, em grande parte, mas de coração grande. Sei que ser o irmão mais novo de uma família numerosa colaborou muito para que tivesse a oportunidade de estudar.

É claro que a Lúcia e a Luzia, que me ensinaram enquanto *brincávamos*, ainda crianças, a ler, escrever, decorar a tabuada e resolver as primeiras expressões numéricas, assim como o Oliveira (que aliás, torceu muito pelo término deste trabalho) merecem um obrigado especial.

Finalmente, o primeiro deles, que abençoou todo o processo, desde as escolas estaduais Padre Camargos e do bairro Tropical, as municipais Isabel Nascimento de Mattos e a Funec: meu querido e bom Deus, que me permitiu mais esta graça.

Resumo

O principal objetivo desta tese é apresentar um novo método para o cálculo do primeiro autovalor para o p -Laplaciano, com condições homogêneas de Dirichlet na fronteira, inspirado no método das potências inverso de álgebra linear finita. Mostramos que o método é válido para qualquer bola em \mathbb{R}^N , se $p > 1$, e para qualquer domínio limitado no caso especial $p = 2$. Para $p > 2$, o método é validado numericamente para o quadrado e conjecturamos que o método seja válido para uma certa classe de domínios. Também utilizamos o método para calcular a função seno generalizada introduzida por Lindqvist.

Palavras-chave: p -Laplaciano; Primeiro autovalor; Princípio da Comparação; Método das Potências, Função sen_p .

Abstract

The main aim of this thesis is to introduce a new method for computing the first Dirichlet eigenvalue of the p -Laplacian inspired by the inverse power method of finite dimensional linear algebra. We show the method is valid for any ball in \mathbb{R}^N , if $p > 1$, and for any bounded domain in the special case $p = 2$. For $p > 2$ the method is validated numerically for the square and we conjecture that the method is valid for a certain class of domains. We also use the method to compute the generalized sine function introduced by Lindqvist.

Keywords: p -Laplacian; First eigenvalue; Comparison principle; Power method; \sin_p function.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Agradecimentos | 3 |
| Resumo | 5 |
| Abstract | 6 |
| 1 Introdução | 9 |
| 1.1 O Método das Potências Inverso | 12 |
| 1.2 A sequência ϕ_n | 14 |
| 1.3 Resultados | 15 |
| 2 Construindo as sequências γ_n, Γ_n e ν_n | 19 |
| 2.1 A sequência γ_n | 20 |
| 2.2 A sequência Γ_n | 25 |
| 2.3 A sequência ν_n | 26 |
| 2.4 Conjectura sobre o primeiro autovalor e a primeira autofunção | 28 |
| 3 O caso $p = 2$ e $w \equiv 1$ | 32 |
| 3.1 Convergência uniforme | 36 |
| 4 Domínios Esféricos | 41 |
| 5 A função sen_p | 51 |
| 5.1 Uma sequência que converge uniformemente para sen_p | 56 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 6 | Resultados Numéricos | 65 |
| 6.1 | A bola unitária | 65 |
| 6.2 | O quadrado unitário | 69 |
| 6.3 | A função sen_p | 71 |
| 7 | Considerações Finais | 73 |
| 7.1 | Domínios simétricos | 73 |
| 7.2 | Uma generalização | 77 |
| | Apêndice | 79 |
| A. 1. | Identidade de Picone | 79 |
| A.2. | Alguns resultados sobre $-\Delta_p$ | 79 |
| A. 3. | Solução do problema de Dirichlet no caso radial | 80 |
| A. 4. | Princípios da comparação e do máximo | 81 |
| A. 5. | Existência de autovalores | 85 |
| A. 6. | Função Beta | 86 |
| A. 7. | Alguns resultados sobre sen_p | 86 |
| | A. 7. 1. Série de potências para sen_p | 90 |
| A. 8. | Algoritmo para o quadrado | 92 |
| | A. 9. Construção do esquema de volumes finitos | 93 |
| | A. 9. 1. Funcional discretizado | 94 |
| | A. 9. 2. Encontrando a solução aproximada no quadrado | 98 |
| | A. 9. 3. Estimativas para o erro | 100 |

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho, apresentamos um novo método para obter o primeiro autovalor para o p -Laplaciano com condições de Dirichlet homogêneas na fronteira. O operador p -Laplaciano, que generaliza o operador Laplaciano, é definido por

$$\Delta_p u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

Este operador tem papel relevante na modelagem matemática de vários problemas da física como, por exemplo, os relacionados a fluxos de fluidos não-newtonianos, filtragem de gases em meios porosos, reação-difusão e elasticidade não-linear.

O problema típico de autovalor para $-\Delta_p$ com condições de Dirichlet homogêneas na fronteira é:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

em que $1 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado. Entende-se este problema no sentido fraco, isto é, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)^1$ é solução fraca de (1.1) se e somente se,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v dx, \text{ para toda } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Neste caso, dizemos que $u \neq 0$ é uma autofunção correspondente a λ .

Note que se o par (λ, u) verifica (1.1), o mesmo ocorre com $(\lambda, \alpha u)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

¹ $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$ (veja [18]).

Azorero e Peral garantem em [17] a existência de um menor autovalor λ_1 que é positivo e o denominamos autovalor principal de $-\Delta_p$. Este autovalor possui a seguinte caracterização variacional (veja [17]):

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) - \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p}{\int_{\Omega} |u|^p} \quad (1.2)$$

ou

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) - \{0\}} \left(\frac{\|\nabla u\|_p}{\|u\|_p} \right)^p$$

em que $\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ é a norma de u em $L^p(\Omega)$.

As seguintes propriedades de λ_1 são bastante conhecidas (veja Apêndice):

1. λ_1 é simples, isto é, se u e v são soluções não nulas de (1.1) com $\lambda = \lambda_1$, então $v = \alpha u$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega) - \{0\}$ é uma solução de (1.1) então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \alpha < 1$ e u se anula somente em $\partial\Omega$. Desse modo, podemos tomar $u > 0$ ou $u < 0$ em Ω .

Como observado em [29], é possível obter os mesmos resultados citados acima para um problema de autovalor com peso w :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda w(x) |u|^{p-2} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

em que $0 \leq w \in L^\infty(\Omega)$. Neste caso, o primeiro autovalor é caracterizado variacionalmente como:

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) - \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} w(x) |u|^p dx}. \quad (1.4)$$

Por homogeneidade, temos

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) - \{0\}} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx : \int_{\Omega} w(x) |u|^p dx = 1 \right\}. \quad (1.5)$$

No caso especial $p = 2$, isto é, o do operador Laplaciano:

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

há uma teoria bastante desenvolvida na literatura sobre λ_1 , sendo seu valor conhecido para domínios Ω de geometria simples como bolas e retângulos N -dimensionais.

Da continuidade e da compacidade de $(\Delta)^{-1}$ no espaço de Hilbert $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ decorre que os autovalores de $-\Delta$ formam uma seqüência crescente

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

e que $\lambda_n \rightarrow \infty$. Além disso, suas auto-funções formam uma base ortogonal para $H_0^1(\Omega)$.

No caso $p \neq 2$ sabemos que existe (veja [17]) uma seqüência crescente de autovalores:

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

que possuem uma caracterização variacional e que tendem para infinito. Entretanto, um problema ainda em aberto é saber se esta seqüência fornece todos os autovalores de (1.1). O único resultado conhecido nesse sentido é que não existem outros autovalores entre λ_1 e λ_2 .

Além disso, diferentemente do caso $p = 2$, o autovalor λ_1 , com $p \neq 2$ e $N > 1$, não é explicitamente conhecido, mesmo para domínios de geometria simples como bolas e quadrados. No caso $N = 1$, λ_1 possui a expressão explícita

$$\lambda_1 = (p-1) \left(\frac{2}{b-a} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt[p]{1-s^p}} \right)^p = \left(\frac{\pi_p}{b-a} \right)^p, \text{ se } \Omega = (a, b)$$

em que

$$\pi_p := 2 \sqrt[p]{p-1} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt[p]{1-s^p}}.$$

Uma vez que, em geral, não se conhece λ_1 explicitamente, seu valor é obtido exclusivamente por aproximações originadas de métodos numéricos. Assim, estimativas para a localização de λ_1 são muito relevantes, especialmente cotas inferiores para λ_1 , pois cotas

superiores são facilmente obtidas a partir de qualquer função não nula em $W_0^{1,p}(\Omega)$ em vista da caracterização (1.2).

Uma das cotas inferiores de λ_1 mais importantes é:

$$\lambda_1^* \leq \lambda_1 \tag{1.6}$$

em que λ_1^* é o primeiro autovalor de:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{em } \Omega^*, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega^*, \end{cases} \tag{1.7}$$

em que Ω^* é a bola centrada na origem de \mathbb{R}^N e tal que $|\Omega^*| = |\Omega|$, ou seja Ω^* possui mesmo volume que Ω (veja [20]).

Nesse sentido, desenvolver algum método que permita obter λ_1 quando Ω é uma bola é uma tarefa relevante e, certamente, útil no sentido de localizar λ_1 para domínios mais gerais.

Apresentaremos aqui um método que desenvolvemos, inspirado no Método das Potências Inverso da Álgebra Linear em dimensão finita (veja [34]), para encontrar λ_1 (seu valor exato, pelo menos do ponto de vista teórico) quando Ω é uma bola de \mathbb{R}^N centrada na origem, válida também, quando $p = 2$, para domínios mais gerais. No caso $p \neq 2$, suspeitamos que o método que desenvolvemos vale para uma classe maior de domínios Ω e não apenas para bolas.

1.1 O Método das Potências Inverso

Descrevemos aqui, de forma sucinta, o Método das Potências Inverso. Dado um operador linear, diagonalizável e invertível $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, denotaremos sua matriz, numa certa base, por A e

$$e_1, e_2, \dots, e_N$$

seus autovetores dois a dois ortogonais que formam uma base para o \mathbb{R}^N . Dado um vetor não nulo qualquer $v \in \mathbb{R}^N$, construímos uma sequência v_n recursivamente por:

$$v_0 = v; v_n = Av_{n-1}.$$

Podemos escrever:

$$v = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_N e_N$$

Suponha que v seja escolhido de modo que $\alpha_1 > 0$. Como os e_i 's são autovetores, obtemos:

$$v_{n+1} = Av_n = A^{n+1}v = \alpha_1 \lambda_1^{n+1} e_1 + \alpha_2 \lambda_2^{n+1} e_2 + \cdots + \alpha_N \lambda_N^{n+1} e_N$$

Daí, se λ_1 for o maior autovalor de A , temos:

$$v_{n+1} = \lambda_1^{n+1} \left(\alpha_1 e_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{n+1} \alpha_2 e_2 + \cdots + \left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1} \right)^{n+1} \alpha_N e_N \right)$$

Denotando $w_{n+1} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{n+1} \alpha_2 e_2 + \cdots + \left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1} \right)^{n+1} \alpha_N e_N$, podemos escrever

$$v_{n+1} = \lambda_1^{n+1} (\alpha_1 e_1 + w_{n+1})$$

Como λ_1 é o maior autovalor de A e se $\lambda_1 \neq \lambda_j$, para todo $j \geq 2$, temos que

$$w_{n+1} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\|v_{n+1}\|}{\|v_n\|} &= \lambda_1 \frac{\|\alpha_1 e_1 + w_{n+1}\|}{\|\alpha_1 e_1 + w_n\|} \\ &= \lambda_1 \sqrt{\frac{\alpha_1^2 \|e_1\|^2 + \|w_{n+1}\|^2}{\alpha_1^2 \|e_1\|^2 + \|w_n\|^2}} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim \frac{\|v_{n+1}\|}{\|v_n\|} = \lambda_1.$$

O Método das Potências Inverso consiste em aplicar o raciocínio acima a A^{-1} para obter o maior autovalor de A^{-1} , que é exatamente o inverso do menor autovalor de A .

Neste trabalho, estenderemos o Método das Potências Inverso para o operador $-\Delta$ e, mais geralmente, para $-\Delta_p$.

1.2 A sequência ϕ_n

No Capítulo 2, definimos uma sequência $(\phi_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ de funções dadas recursivamente como soluções do problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_n = w(x) \phi_{n-1}^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ \phi_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.8)$$

em que $\phi_0 \equiv 1$. Definimos ainda as seguintes sequências numéricas:

$$\gamma_n := \inf_{\Omega} \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1}, \quad \Gamma_n := \sup_{\Omega} \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} = \left\| \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right\|_{L^\infty(\Omega)},$$

e

$$\nu_n = \left(\frac{\left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_n \right\|_{L^p(\Omega)}}{\left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1} \right\|_{L^p(\Omega)}} \right)^{p-1}.$$

Estas sequências possuem as seguintes propriedades, demonstradas no Capítulo 2:

1. γ_n é bem definida para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\gamma_1 < \lambda_1$;
2. Se $\Gamma_{n_0} < \infty$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ então $\Gamma_n < \infty$ para todo $n \geq n_0$;
3. $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \lambda_1 \leq \Gamma_n \leq \dots \leq \Gamma_2 \leq \Gamma_1$ para todo n ;
4. $\lambda_1 \leq \nu_n \leq \Gamma_n$ para todo n .

O principal resultado do Capítulo 2 é o

Teorema 1 *Sejam $\gamma := \lim \gamma_n$ e $u_n := \frac{\phi_n}{a_n} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, em que $a_1 = \|\phi_n\|_\infty$ e*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \gamma_n^{\frac{1}{p-1}}$$

Então (u_n) é decrescente e satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{n+1} = \gamma_n w(x) u_n^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, (u_n) converge uniformemente para uma função $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \gamma w(x) u^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que o teorema acima não prova que $\gamma = \lambda_1$, pois não podemos garantir que $u > 0$ em Ω (veja Teorema 51 (iii) do Apêndice). A princípio, poderia ocorrer

$$\lim u_n = u \equiv 0.$$

Neste ponto surge a seguinte questão:

Seja $1 < p < \infty$. Para quais domínios Ω e quais pesos w valem as seguintes igualdades:

$$\lim \gamma_n = \lambda_1 = \lim \Gamma_n? \quad (1.9)$$

Observe que, quando as igualdades acima ocorrem, temos automaticamente que

$$\lim \nu_n = \lambda_1. \quad (1.10)$$

Fornecemos respostas parciais a pergunta acima.

1.3 Resultados

No Capítulo 3, no caso $p = 2$ e $w \equiv 1$, mostramos, graças a estrutura linear do Laplaciano e suas propriedades, que (1.10) ocorre. Além disso, observamos que, nesse caso, podemos tomar $\phi_0 = \xi \in L^2(\Omega)$ arbitrária.

Quando Ω é uma bola em \mathbb{R}^N e o peso w é radial, isto é, $w = w(|x|)$ mostramos, no Capítulo 4, que (1.9) e (1.10) são verdadeiras. Para tanto, foi fundamental conhecermos a expressão explícita da solução para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.11)$$

no caso em que f é radial, isto é $f = f(|x|)$. Essa expressão é dada por

$$u(r) = \int_r^R \psi_{p'} \left(\left(\frac{s}{\theta} \right)^{N-1} f(s) ds \right) d\theta \quad (1.12)$$

em que p' é tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $\psi_{p'}(t) = |t|^{p'-2}t$ é a inversa de $\psi_p(t) = |t|^{p-2}t$ e $r = |x|$.

Assim, se $\phi_0 = 1$ e $w = w(|x|)$ temos a seguinte expressão recursiva para ϕ_n :

$$\phi_n(r) = \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta} \right)^{N-1} w(s) \phi_{n-1}^{p-1}(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} d\theta. \quad (1.13)$$

Através desta expressão radial para as ϕ_n demonstramos que

$$\inf \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} = \frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty} = \frac{\phi_n(0)}{\phi_{n+1}(0)} \quad (1.14)$$

e a partir das igualdades acima obtemos $a_n = \|\phi_n\|_\infty$, provando que $u > 0$ no Teorema 1.

No Capítulo 5 fizemos um estudo da função sen_p que é uma generalização da função seno (veja [26]). Utilizando as idéias contidas no Capítulo 4, obtivemos uma sequência que converge uniformemente para a função sen_p . Esta função é uma primeira autofunção positiva do problema de autovalor unidimensional:

$$\begin{cases} -\psi_p(u')' = \lambda \psi_p(u) & \text{em } (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

em um intervalo (a, b) específico.

A função sen_p é utilizada, por exemplo, na resolução de problemas de Sturm-Liouville unidimensionais envolvendo o p -Laplaciano (veja [11]). O desenvolvimento de métodos para o cálculo de sen_p é importante como mencionado em [11].

A função sen_p também aparece no estudo de problemas do tipo

$$\begin{cases} \psi_p(u')' + \lambda \psi_p(u) = h(t) & \text{em } (0, T) \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

em que λ é um autovalor do p -Laplaciano unidimensional.

Manasevich e Takác apresentam em [27] uma condição, envolvendo a função sen_p , que é suficiente para que o problema (1.16) possua solução, generalizando os resultados obtidos em [30].

Já em [14], Drábek, Girg e Manásevich apresentam uma condição necessária e suficiente (que também envolve a função sen_p) para que o problema

$$\begin{cases} \psi_p(u')' + \lambda \psi_p(u) = h(t) & \text{em } (0, \pi_p) \\ u(0) = u(\pi_p) = 0, \end{cases}$$

em que λ é o primeiro autovalor do p -Laplaciano unidimensional, possua solução.

Além disso, a função sen_p gera, quando $p \geq 12/11$, uma base de Riesz para $L^2([0, 1])$ e uma base de Schauder para $L^q([0, 1])$, quando $1 < q < \infty$ (veja [8]).

O Capítulo 6 é todo dedicado a experimentos numéricos. É importante observar que não nos propomos a fazer um trabalho voltado para Análise Numérica, isto é, não nos preocupamos em fazer um estudo de estimativas de erros ou de velocidade de convergência. No Capítulo 6 desta tese, objetivamos simplesmente exemplificar e ilustrar os resultados que obtivemos e como os testes numéricos realizados nos motivaram no sentido de demonstrar as conjecturas, (1.9) e (1.10), para uma certa classe de domínios.

Calculamos os valores de λ_1 para vários valores de p no caso em que Ω é a bola unitária de \mathbb{R}^N , com $N = 2, 3, 4$ e $w \equiv 1$.

Comparando os resultados que obtivemos com os encontrados na literatura, pudemos observar que estes são mais precisos que os de Lew Lefton e Dongming Wei [21] no caso em que $N = 2$ e $p = 2$. Por exemplo, enquanto em [21] um erro de 1,3% foi encontrado para o caso $p = 2$, encontramos um erro de 0,005% nesse caso.

No sentido de reforçar a conjectura de que (1.9) e (1.10) valem para uma certa classe de domínios e pesos, apresentamos os resultados que obtivemos para as sequências γ_n, Γ_n e ν_n quando Ω é o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ e $w \equiv 1$. Como no nosso método precisamos resolver um problema de Dirichlet em cada iteração e não possuímos uma expressão explícita para as ϕ_n , como ocorre no caso radial, utilizamos um método de volumes finitos desenvolvido por B. Andreianov, F. Boyer e F. Hubert em [4] para encontrar uma solução aproximada de (1.11) quando Ω é um retângulo. No Apêndice apresentamos, em linhas gerais, o método desenvolvido em [4], que consiste basicamente em discretizar o funcional energia $J : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u(z)|^p dz - \int_{\Omega} f(z)u(z) dz \quad (1.17)$$

cujos mínimos são as únicas soluções de (1.11).

Após a discretização, obtivemos um funcional J_{\top} definido em um espaço euclidiano e minimizamos esse funcional discretizado utilizando um método de gradiente conjugado não linear.

Observando a sequência ν_n , que nos parece ter uma convergência mais rápida, obtivemos valores muito similares aos apresentados em [21]. No caso $p = 2$ (que provamos ser verdadeira a conjectura) obtivemos um valor mais preciso para λ_1 (que neste caso é conhecido):

$$\lambda_1 = 2\pi^2 \approx 19,7392.$$

Encontramos um erro de 0,1%, enquanto em [21] um erro de 3% foi encontrado,

É importante observar que o erro que obtivemos tanto no caso em que Ω é a bola unitária de \mathbb{R}^N como no caso em que é o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ pode ser melhorado usando uma malha mais refinada no cálculo das soluções numéricas.

Finalmente, comparamos o gráfico da função sen_p , obtido pelo método que desenvolvemos, com os gráficos desta função obtidos de outras duas formas. Uma delas foi através da solução da equação diferencial:

$$|u'|^p + \frac{|u|^p}{p-1} = 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

que pode ser utilizada para definir sen_p . A outra foi através de uma série de potências de x^p , apresentada em [26].

Nas Considerações Finais apresentamos algumas propriedades de simetria e monotonicidade da sequência (ϕ_n) , que provamos para o caso em que Ω é um domínio simétrico em \mathbb{R}^N . Além disso, apontamos uma possível direção para futuras pesquisas no intuito de provar que (1.9) e (1.10) são válidas para esses domínios.

Capítulo 2

Construindo as sequências γ_n, Γ_n e ν_n

Vamos definir nesse capítulo três sequências que denotaremos por γ_n, Γ_n e ν_n . Para isso definiremos uma sequência de funções ϕ_n de forma recursiva.

Definimos uma sequência $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ colocando $\phi_0 = 1$ e, para $n = 1, 2, 3, \dots$, ϕ_n é definida como a única solução do problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_n = w(x) \phi_{n-1}^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ \phi_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

em que $0 \leq w \in L^\infty(\Omega) - \{0\}$.

Observe que segue do Princípio do Máximo (veja Apêndice) que $\phi_n(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$

A partir de $\{\phi_n\}$, definimos para $n \geq 0$ as sequências de números reais

$$\gamma_n := \inf_{\Omega} \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1} \quad (2.2)$$

$$\Gamma_n := \sup_{\Omega} \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} = \left\| \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (2.3)$$

e

$$\nu_n = \left(\frac{\left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_n \right\|_{L^p(\Omega)}}{\left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1} \right\|_{L^p(\Omega)}} \right)^{p-1} \quad (2.4)$$

Nas próximas seções faremos um estudo detalhado de cada uma dessas sequências.

2.1 A sequência γ_n

Como definimos anteriormente

$$\gamma_n = \inf_{\Omega} \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1}.$$

Uma vez que $\phi_n(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$ devemos verificar se γ_n está bem definida. Para garantir essa boa definição vamos utilizar o

Teorema 2 (*Princípio da Comparação*)

Suponha que $u_i \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ sejam tais que:

$$\begin{aligned} -\Delta_p u_1 &\leq -\Delta_p u_2, & \text{em } \Omega \\ u_1 &\leq u_2, & \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

no sentido fraco. Então

$$u_1 \leq u_2 \text{ em } \Omega.$$

No Apêndice, apresentamos uma demonstração do teorema acima.

O teorema a seguir irá nos garantir a boa definição de γ_n :

Teorema 3 *A sequência $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz*

$$0 < \phi_n \leq \|\phi_1\|_{\infty} \phi_{n-1} \quad \text{em } \Omega$$

para todo $n \geq 1$.

Observação: Como consequência desse resultado temos

$$\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \geq \frac{1}{\|\phi_1\|_{\infty}} > 0$$

e portanto a sequência

$$\gamma_n = \inf_{\Omega} \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1}$$

está bem definida.

Prova. Como $\phi_n > 0$ em Ω para todo n , resta-nos mostrar que $\phi_n \leq \|\phi_1\|_\infty \phi_{n-1}$. Faremos isso por indução em n . Trivialmente temos que

$$\phi_1 \leq \|\phi_1\|_\infty = \|\phi_1\|_\infty \phi_0.$$

Assuma que

$$\phi_n \leq \|\phi_1\|_\infty \phi_{n-1}.$$

Vamos mostrar que

$$\phi_{n+1} \leq \|\phi_1\|_\infty \phi_n.$$

Pela hipótese de indução temos:

$$-\Delta_p \phi_{n+1} = w(x) \phi_n^{p-1} \leq \|\phi_1\|_\infty^{p-1} w(x) \phi_{n-1}^{p-1} = -\Delta_p (\|\phi_1\|_\infty \phi_n) \quad \text{em } \Omega,$$

Assim

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_{n+1} \leq -\Delta_p (\|\phi_1\|_\infty \phi_n) & \text{em } \Omega, \\ \phi_{n+1} = 0 = \|\phi_1\|_\infty \phi_n & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

Segue do Princípio da Comparação que

$$\phi_{n+1} \leq \|\phi_1\|_\infty \phi_n.$$

como queríamos. ■

Mostraremos agora que (γ_n) é uma sequência crescente e limitada. Precisaremos do seguinte lema

Lema 4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e $h \geq 0$ uma função contínua e não negativa.*

Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ é uma solução positiva do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_1 w(x) u^{p-1} + h & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

Então $h \equiv 0$ em Ω e conseqüentemente u é uma autofunção positiva correspondente ao primeiro autovalor λ_1 .

Prova. A demonstração que apresentamos aqui é uma adaptação daquela apresentada em [1, Theorem 2.4] e é baseada na seguinte desigualdade, consequência da identidade de Picone (veja Apêndice):

$$|\nabla w|^p \geq |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \left(\frac{w^p}{u^{p-1}} \right), \quad (2.6)$$

válida para todas funções u, w definidas em Ω que satisfazem $u > 0$ e $w \geq 0$ em Ω .

Multiplicando a equação (2.5) por $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e integrando em Ω obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (\lambda_1 w(x) u^{p-1} + h) v \, dx \quad (2.7)$$

Seja $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma autofunção positiva correspondente a λ_1 . Temos que $\frac{u_1}{u^{p-1}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ (veja [1] ou [31]). Assim, tomando $v = \frac{u_1}{u^{p-1}}$ em (2.7) e aplicando em (2.6), obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1|^p \, dx \geq \int_{\Omega} (\lambda_1 w(x) u^{p-1} + h) \frac{u_1^p}{u^{p-1}} \, dx.$$

logo,

$$0 = \int_{\Omega} |\nabla u_1|^p \, dx - \int_{\Omega} \lambda_1 w(x) u_1^p \, dx \geq \int_{\Omega} h \frac{u_1^p}{u^{p-1}} \, dx \geq 0,$$

e assim

$$\int_{\Omega} h \frac{u_1^p}{u^{p-1}} \, dx = 0$$

Como $\frac{u_1^p}{u^{p-1}} > 0$ em Ω e h é contínua e não negativa segue-se daí que $h \equiv 0$. ■

Teorema 5 *Para todo $N \geq 2$ valem as seguintes propriedades:*

(i) $\gamma_0 < \lambda_1$.

(ii) $\gamma_0 \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} < \lambda_1$.

(iii) *Existe*

$$\gamma := \lim \gamma_n$$

e $\gamma_0 \leq \gamma \leq \lambda_1$.

Prova. A propriedade (iii) segue imediatamente de (i) e (ii). Para provar (i) utilizamos um argumento de contradição. Assuma $\gamma_0 \geq \lambda_1$ e defina

$$h = w(x) - \lambda_1 w(x) \phi_1^{p-1}$$

pela definição de γ_n segue que

$$h \geq w(x) - \gamma_0 w(x) \phi_1^{p-1} \geq 0.$$

Escreva

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_1 = w(x) = \lambda_1 w(x) \phi_1^{p-1} + h & \text{em } \Omega, \\ \phi_1 = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Lema 4 concluímos que $h \equiv 0$ e então $\lambda_1 w(x) \phi_1^{p-1} = w(x)$ para todo $x \in \Omega$ e assim $\lambda_1 \phi_1^{p-1} \equiv 1$ e portanto ϕ_1 é constante, o que contradiz

$$-\Delta_p \phi_1 = w(x).$$

Concluimos assim que $\gamma_0 < \lambda_1$.

Para demonstrar (ii), observe que $\gamma_0 \leq \gamma_n$, pois do Teorema 3

$$\gamma_0 = \frac{1}{\|\phi_1\|_\infty^{p-1}} \leq \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1}.$$

A prova da monotonicidade de γ_n é feita via Princípio da Comparação (Teorema 2). Por definição temos que

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_n = w(x) \phi_{n-1}^{p-1} \geq \gamma_{n-1} w(x) \phi_n^{p-1} = -\Delta_p \left(\gamma_{n-1}^{1/(p-1)} \phi_{n+1} \right) & \text{em } \Omega, \\ \phi_n = 0 = \phi_{n+1}, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

o que mostra

$$\phi_n \geq \gamma_{n-1}^{1/(p-1)} \phi_{n+1},$$

Essa desigualdade implica que

$$\gamma_n = \inf_{\Omega} \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1} \geq \gamma_{n-1},$$

donde (γ_n) é uma seqüência crescente. Para concluir a demonstração resta-nos verificar que $\gamma_n < \lambda_1$. Tal como fizemos acima, suponha por absurdo que $\gamma_n \geq \lambda_1$ para algum n .

Então:

$$\lambda_1 w(x) \phi_{n+1}^{p-1} \leq \gamma_n w(x) \phi_{n+1}^{p-1} \leq \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1} w(x) \phi_{n+1}^{p-1} = w(x) \phi_n^{p-1},$$

sendo que a segunda desigualdade é uma consequência da definição de γ_n . Defina

$$h := w(x)(\phi_n^{p-1} - \lambda_1 \phi_{n+1}^{p-1}) \geq 0$$

em Ω . Uma vez que

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_{n+1} = w(x) \phi_n^{p-1} = \lambda_1 w(x) \phi_{n+1}^{p-1} + h & \text{in } \Omega, \\ \phi_{n+1} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

segue-se do Lema 4 que $h \equiv 0$. Assim

$$w(x) \phi_n^{p-1} = \lambda_1 w(x) \phi_{n+1}^{p-1}, \text{ para todo } x \in \Omega \quad (2.8)$$

e assim temos que $\left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1}$ é constante igual a λ_1 . Desse modo, podemos escrever:

$$\lambda_1 \equiv \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1} = \inf_{\Omega} \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1} = \gamma_n.$$

Por outro lado também segue-se de (2.8) que

$$w(x) \phi_{n-1}^{p-1} = -\Delta_p \phi_n = -\Delta_p (\lambda_1^{1/(p-1)} \phi_{n+1}) = \lambda_1 (-\Delta_p \phi_{n+1}) = \lambda_1 w(x) \phi_n^{p-1}$$

Assim temos que

$$\lambda_1 \equiv \left(\frac{\phi_{n-1}}{\phi_n} \right)^{p-1} = \inf_{\Omega} \left(\frac{\phi_{n-1}}{\phi_n} \right)^{p-1} = \gamma_{n-1}.$$

Podemos repetir esse argumento até concluir que

$$\lambda_1 = \gamma_0,$$

que contradiz (i). ■

2.2 A sequência Γ_n

Definimos

$$\Gamma_n := \sup_{\Omega} \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1} = \left\| \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-1}. \quad (2.9)$$

Observamos que a sequência Γ_n pode não estar bem definida. Como $\phi_0 \equiv 1$ e $\phi_1 = 0$ sobre $\partial\Omega$ temos que

$$\Gamma_0 = \left\| \frac{\phi_0}{\phi_1} \right\|_{\infty}^{p-1} = \infty.$$

Entretanto, se pudermos garantir que $\Gamma_{n_0} < \infty$ para algum n_0 então $\Gamma_n < \infty$ para todo $n \geq n_0$.

Teorema 6 *Assuma que $\Gamma_{n_0} < \infty$ para algum $n_0 \geq 1$. Então*

$$\left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1} \leq \Gamma_{n_0} \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

e portanto (Γ_n) está bem definida e é limitada para $n \geq n_0$. Além disso, a sequência (Γ_n) é decrescente para $n \geq n_0$.

Prova. Faremos a prova por indução. Suponha que para algum k tenhamos

$$\Gamma_{n_0+k} \leq \dots \leq \Gamma_{n_0}$$

Então para $j = n_0 + k$ observamos que

$$-\Delta_p \phi_{j+1} = w(x) \phi_j^{p-1} = w(x) \left(\frac{\phi_j}{\phi_{j+1}} \right)^{p-1} \phi_{j+1}^{p-1} \leq \Gamma_j w(x) \phi_{j+1}^{p-1} = -\Delta_p \left(\Gamma_j^{\frac{1}{p-1}} \phi_{j+2} \right)$$

em Ω e

$$\phi_{j+1} = 0 = \Gamma_j^{\frac{1}{p-1}} \phi_{j+2} \quad \text{em } \partial\Omega$$

Segue do Princípio da Comparação (Teorema 2) que

$$\phi_{j+1} \leq \Gamma_j^{\frac{1}{p-1}} \phi_{j+2} \quad \text{in } \Omega.$$

E obtemos que

$$\Gamma_{j+1} = \left\| \frac{\phi_{j+1}}{\phi_{j+2}} \right\|_{\infty}^{p-1} \leq \Gamma_j.$$

Logo (Γ_n) é decrescente e se Γ_{n_0} é finito então Γ_n será finito para todo $n \geq n_0$ como queríamos. ■

Garantir a existência de tal n_0 pode ser tarefa difícil dependendo do domínio Ω . Entretanto, para casos especiais, somos capazes de garantir que Γ_{n_0} é finito para algum n_0 , como nos garante o próximo teorema.

Teorema 7 *Seja $\Omega = B_R$ a bola centrada na origem de raio R e considere $w(x) = w(|x|)$, isto é, o peso na equação (3.4) seja radial. Então Γ_1 é finito.*

Prova. Como w é radial e $\Omega = B_R$ temos que $\phi_n(x) = \phi_n(|x|) = \phi_n(r)$ e

$$\phi_n(r) = \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta} \right)^{N-1} w(s) \phi_{n-1}(s)^{p-1} ds \right)^{\frac{1}{p-1}} dr. \quad (2.10)$$

Desse modo, se $x \in \partial B_R$ então da regra de L'Hôpital temos

$$\frac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)} = \lim_{r \rightarrow R^-} \frac{\phi_1(r)}{\phi_2(r)} = \lim_{r \rightarrow R^-} \frac{\phi_1'(r)}{\phi_2'(r)} = \left(\frac{\int_0^R s^{N-1} w(s) ds}{\int_0^R s^{N-1} w(s) v_1(s)^{p-1} ds} \right)^{\frac{1}{p-1}} < \infty,$$

pois $\phi_1 > 0$ em Ω . Assim

$$\Gamma_1 = \Gamma_n = \sup_{\Omega} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2} \right)^{p-1} < \infty.$$

■

2.3 A sequência ν_n

Definimos ν_n da seguinte forma:

$$\nu_n = \left(\frac{\left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_n \right\|_{L^p(\Omega)}}{\left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1} \right\|_{L^p(\Omega)}} \right)^{p-1}.$$

A sequência ν_n está bem definida pois $\phi_n \in C_0^{1,\alpha}(\Omega)$ e $w \in L^\infty(\Omega)$ é contínua. Mostraremos no teorema a seguir que ν_n está limitada superiormente por Γ_n e inferiormente por λ_1 .

Teorema 8 *Para todo $n \geq 1$ temos que*

$$\lambda_1 \leq \nu_n \leq \Gamma_n$$

Prova. Por definição ϕ_{n+1} satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_{n+1} = w(x) \phi_n^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ \phi_n = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Multiplicando por ϕ_{n+1} e integrando obtemos

$$\|\nabla \phi_{n+1}\|_p^p = \int_{\Omega} |\nabla \phi_{n+1}|^p dx = \int_{\Omega} w(x) \phi_n^{p-1} \phi_{n+1} dx$$

De acordo com a Desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w(x) \phi_n^{p-1} \phi_{n+1} dx &= \int_{\Omega} w(x)^{\frac{p-1}{p}} \phi_n^{p-1} w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1} dx \\ &\leq \|w(x)^{\frac{p-1}{p}} \phi_n^{p-1}\|_{p'} \|w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1}\|_p \\ &= \|w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_n\|_p^{p-1} \|w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1}\|_p. \end{aligned}$$

Assim

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi_{n+1}|^p dx \leq \|w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_n\|_p^{p-1} \|w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1}\|_p. \quad (2.11)$$

Da caracterização variacional de λ_1 , dada por

$$\lambda_1 = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx}{\int_{\Omega} w(x) |v|^p dx},$$

e da equação (2.11) segue-se que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi_{n+1}|^p dx}{\int_{\Omega} w(x) |\phi_{n+1}|^p dx} \leq \frac{\left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_n \right\|_p^{p-1} \left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1} \right\|_p}{\left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1} \right\|_p^p} \\ &= \left(\frac{\left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_n \right\|_p}{\left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1} \right\|_p} \right)^{p-1} = \nu_n \\ &= \frac{1}{\left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1} \right\|_p} \left(\int_{\Omega} \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^p w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1}^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \frac{1}{\left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1} \right\|_p} \left\| \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right\|_{\infty}^{p-1} \left(\int_{\Omega} w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1}^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \frac{1}{\left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1} \right\|_p} \Gamma_n \left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1} \right\|_p \\ &= \Gamma_n, \end{aligned}$$

mostrando Teorema. ■

Do Teorema anterior, decorre imediatamente o seguinte corolário:

Corolário 9 *Se*

$$\lim \Gamma_n = \lambda_1$$

Então

$$\lim \nu_n = \lambda_1.$$

Além disso, do teorema 5(ii) e do teorema 8 decorre:

Corolário 10 *Se Γ_{n_0} for finito para algum $n_0 \geq 1$, então para cada $n \geq n_0$ existe pelo menos um $x_n \in \bar{\Omega}$ tal que*

$$\lambda_1 = \left(\frac{\phi_n(x_n)}{\phi_{n+1}(x_n)} \right)^{p-1}.$$

2.4 Conjectura sobre o primeiro autovalor e a primeira autofunção

Nas seções anteriores, mostramos que

- (i) γ_n é monótona crescente e limitada acima por λ_1 ;
- (ii) Se existir n_0 tal que $\Gamma_{n_0} < \infty$ então $\lambda_1 \leq \Gamma_n < \infty$ para $n \geq n_0$ e Γ_n é monótona decrescente;
- (iii) $\gamma_n \leq \lambda_1 \leq \nu_n \leq \Gamma_n$.

Tendo em vista que γ_n e Γ_n são monótonas e limitadas temos que existem seus limites quando $n \rightarrow \infty$. Assim, se denotarmos

$$\gamma := \lim \gamma_n \text{ e } \Gamma := \lim \Gamma_n$$

temos que

$$\gamma \leq \lambda_1 \leq \Gamma.$$

Conjectura 11 Para uma certa classe de domínios Ω temos

$$\lambda_1 = \gamma = \Gamma \quad (2.12)$$

em particular, pelo Teorema do Confronto,

$$\nu = \lambda_1,$$

em que $\nu = \lim \nu_n$.

No sentido de tentar encontrar uma sequência de funções que converge para a primeira autofunção de $-\Delta_p$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ a seguinte função

$$u_n := \frac{\phi_n}{a_n}, \quad (2.13)$$

em que a_n é escolhido de modo que

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \gamma_n^{\frac{1}{p-1}} = \inf_{\Omega} \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}.$$

Desse modo, se definimos

$$a_1 := \|\phi_1\|_{\infty},$$

então

$$a_2 = \frac{a_1}{\gamma_1^{1/(p-1)}} = \frac{a_1}{\inf_{\Omega} \frac{\phi_1}{\phi_2}} = \|\phi_1\|_{\infty} \left\| \frac{\phi_2}{\phi_1} \right\|_{\infty}$$

e de forma geral

$$a_n = \frac{\|\phi_1\|_{\infty}}{\inf_{\Omega} \frac{\phi_1}{\phi_2}} \frac{1}{\inf_{\Omega} \frac{\phi_2}{\phi_3}} \cdots \frac{1}{\inf_{\Omega} \frac{\phi_{n-1}}{\phi_n}} = \|\phi_1\|_{\infty} \left\| \frac{\phi_2}{\phi_1} \right\|_{\infty} \left\| \frac{\phi_3}{\phi_2} \right\|_{\infty} \cdots \left\| \frac{\phi_n}{\phi_{n-1}} \right\|_{\infty}.$$

Assim, podemos escrever

$$a_n = \|\phi_1\|_{\infty} \left\| \frac{\phi_2}{\phi_1} \right\|_{\infty} \left\| \frac{\phi_3}{\phi_2} \right\|_{\infty} \cdots \left\| \frac{\phi_n}{\phi_{n-1}} \right\|_{\infty}. \quad (2.14)$$

Observe que

$$\|\phi_k\|_{\infty} = \left\| \frac{\phi_k}{\phi_{k-1}} \phi_{k-1} \right\|_{\infty} \leq \left\| \frac{\phi_k}{\phi_{k-1}} \right\|_{\infty} \|\phi_{k-1}\|_{\infty}$$

Daí

$$\frac{\|\phi_k\|_\infty}{\|\phi_{k-1}\|_\infty} \leq \left\| \frac{\phi_k}{\phi_{k-1}} \right\|_\infty.$$

Assim, obtemos a seguinte desigualdade para a_n :

$$a_n \geq \|\phi_1\|_\infty \frac{\|\phi_2\|_\infty}{\|\phi_1\|_\infty} \frac{\|\phi_3\|_\infty}{\|\phi_2\|_\infty} \dots \frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n-1}\|_\infty} = \|\phi_n\|_\infty.$$

Segue-se da definição de u_n que

$$u_n \leq \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty} \leq 1.$$

Além disso, a sequência de funções u_n é convergente como mostra o teorema a seguir:

Teorema 12 *Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ a sequência de funções definida acima.*

Então (u_n) é decrescente e satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{n+1} = \gamma_n w(x) u_n^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, (u_n) converge uniformemente para uma função $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \gamma w(x) u^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Prova. Por definição

$$u_{n+1} = \frac{\phi_{n+1}}{a_{n+1}}.$$

Daí

$$-\Delta_p u_{n+1} = \frac{-\Delta_p \phi_{n+1}}{a_{n+1}^{p-1}} = w(x) \left(\frac{\phi_n}{a_{n+1}} \right)^{p-1} = w(x) \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^{p-1} u_n^{p-1} = \gamma_n w(x) u_n^{p-1}.$$

Por outro lado, pela definição de a_n temos

$$u_{n+1} = \frac{\phi_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{\phi_{n+1}}{a_n} \inf_{\Omega} \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \leq \frac{\phi_{n+1}}{a_n} \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} = \frac{\phi_n}{a_n} = u_n,$$

isso mostra que (u_n) é decrescente e portanto podemos definir u em $\overline{\Omega}$ por

$$u(x) := \lim u_n(x) \text{ para cada } x \in \overline{\Omega}.$$

Como $(u_n) \subset C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 \leq u_n \leq u_1$ e o operador $(-\Delta_p)^{-1} : C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow C^0(\bar{\Omega})$ é compacto, segue-se daí que a sequência (u_n) possui subsequência uniformemente convergente para u . Note que esse raciocínio pode ser aplicado a qualquer subsequência e, portanto, obtemos que toda a sequência (u_n) converge uniformemente para u .

Como $-\Delta_p$ é contínuo podemos passar o limite em

$$-\Delta_p u_{n+1} = \gamma_n w(x) u_n^{p-1}$$

para obter

$$-\Delta_p u = \gamma w(x) u^{p-1}.$$

■

Observação:

Em vista de nossa conjectura, o teorema anterior sugere que u é a primeira autofunção de $-\Delta_p$. Entretanto, ainda que nossa conjectura seja verdadeira, não podemos, a princípio, garantir que u é uma autofunção. Para garantir esse fato devemos mostrar que u não é identicamente nula em $\bar{\Omega}$. Observe ainda que, se mostrarmos que $u \not\equiv 0$ automaticamente garantimos que γ é o primeiro autovalor de $-\Delta_p$.

Capítulo 3

O caso $p = 2$ e $w \equiv 1$

Nesse capítulo apresentamos uma prova parcial da Conjectura 4 apresentada na Seção 2.4, no caso em que $p = 2$ e $w \equiv 1$, que é o problema clássico de autovalor do Laplaciano, mostraremos que $\nu_n \rightarrow \lambda_1$.

Também mostraremos que, no caso $p = 2$, a sequência $\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty}$ irá convergir para a primeira autofunção de $-\Delta$ uniformemente em compactos $K \subset\subset \Omega$.

Utilizamos fortemente a estrutura linear de $-\Delta$ e o fato de que seu conjunto de autofunções forma uma base de ortogonal para $L^2(\Omega)$.

Lembramos que o produto interno em $L^2(\Omega)$ é dado por:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv \, dx$$

e que o problema de autovalor para $-\Delta$:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

possui um sequência crescente de autovalores

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

de modo que λ_1 é isolado. Além disso, as autofunções associadas formam uma base de Hilbert ortogonal para $L^2(\Omega)$.

Sem perda de generalidade, denotaremos por $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ a sequência de autofunções normalizadas pela norma $L^2(\Omega)$, isto é, $\|e_n\|_2 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como (e_n) forma uma base ortonormal, temos que dado $\xi \in L^2(\Omega)$ podemos escrever

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k. \quad (3.2)$$

Denotando por k_0 o menor inteiro k tal que $\alpha_k \neq 0$, podemos escrever

$$\xi = \sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha_k e_k. \quad (3.3)$$

Lema 13 *Seja $\xi > 0$ com $\xi = \sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha_k e_k$, e seja $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ solução de*

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \xi & \text{em } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então

$$\varphi = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k} e_k.$$

Prova. A demonstração é uma consequência da linearidade de $-\Delta$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha_k e_k = \xi &= -\Delta\varphi = \sum_{k=k_0}^{\infty} \langle \varphi, e_k \rangle (-\Delta e_k) \\ &= \sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k \langle \varphi, e_k \rangle e_k, \end{aligned}$$

donde obtemos

$$\langle \varphi, e_k \rangle = \frac{\alpha_k}{\lambda_k}$$

e o lema está demonstrado. ■

Dado $\xi = \sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha_k e_k$ construímos uma sequência (ϕ_n) da seguinte forma: $\phi_0 = \xi$ e para $n \geq 1$, ϕ_n é a solução do seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta\phi_n = \phi_{n-1} & \text{em } \Omega, \\ \phi_n = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

Lema 14 A sequência ϕ_n definida em (3.4) é tal que

$$\phi_n = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k^n} e_k,$$

em que $\xi = \sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha_k e_k$.

Prova. A demonstração é uma consequência do lema anterior. Escrevendo

$$\xi = \sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha_k e_k,$$

e como

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1 &= \xi \text{ em } \Omega, \\ \phi_1 &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

segue-se do lema anterior que

$$\phi_1 = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k} e_k.$$

Suponha que o resultado seja verdadeiro para n , isto é:

$$\phi_n = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k^n} e_k,$$

provaremos que o resultado é verdadeiro para $n + 1$. De fato, uma vez que

$$\begin{cases} -\Delta\phi_{n+1} &= \phi_n \text{ em } \Omega, \\ \phi_{n+1} &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

segue-se do Lema 14 que

$$\phi_{n+1} = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\frac{\alpha_k}{\lambda_k^n}}{\lambda_k} e_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k^{n+1}} e_k.$$

e o lema está demonstrado ■.

Mostraremos que, se $\xi = \sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha_k e_k$ e ϕ_n for dada por (3.4), então a sequência

$$\nu_n = \frac{\|\phi_n\|_2}{\|\phi_{n+1}\|_2}$$

é tal que

$$\nu_n \rightarrow \lambda_{k_0}.$$

Teorema 15 $\lim \nu_n = \lim \frac{\|\phi_n\|_2}{\|\phi_{n+1}\|_2} = \lambda_{k_0}$.

Prova. Se $\xi = \sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha_k e_k$, decorre do Lema 14 que

$$\phi_n = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k^n} e_k.$$

Suponha que o autovalor λ_{k_0} possua multiplicidade $r \in \mathbb{N}$, assim, podemos escrever:

$$\phi_n = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k^n} e_k = \frac{1}{\lambda_{k_0}^n} \sum_{k=k_0}^{k_0+r-1} \alpha_k e_k + \sum_{k=k_0+r}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k^n} e_k = \frac{1}{\lambda_{k_0}^n} \left(e_{\xi} + \sum_{k=k_0+r}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_k} \right)^n \alpha_k e_k \right),$$

em que

$$e_{\xi} = \sum_{k=k_0}^{k_0+r-1} \alpha_k e_k \quad (3.5)$$

é a projeção de ξ no autoespaço gerado por λ_{k_0} .

Denotando

$$\psi_n = \sum_{k=k_0+r}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_k} \right)^n \alpha_k e_k \quad (3.6)$$

podemos escrever

$$\phi_n = \frac{1}{\lambda_{k_0}^n} (e_{\xi} + \psi_n). \quad (3.7)$$

Afirmamos que

$$\psi_n \rightarrow 0 \quad \text{em } L^2(\Omega). \quad (3.8)$$

De fato, utilizando a estrutura ortogonal de $(e_n) \in L^2(\Omega)$ e o fato que $\|e_n\|_2 = 1$ obtemos:

$$\|\psi_n\|_2^2 = \sum_{k=k_0+r}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_k} \right)^{2n} \alpha_k^2 \leq \left(\frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_{k_0+r}} \right)^{2n} \sum_{k=k_0+r}^{\infty} \alpha_k^2 \leq \|\xi\|_2^2 \left(\frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_{k_0+r}} \right)^{2n} \rightarrow 0,$$

pois $\lambda_{k_0} < \lambda_{k_0+r}$ e a afirmação está provada. Portanto, utilizando (3.8) e o fato de que $L^2(\Omega)$ é um espaço com produto interno temos:

$$\lim \frac{\|\phi_n\|_2}{\|\phi_{n+1}\|_2} = \lim \left(\lambda_{k_0} \frac{\|e_{\xi} + \psi_n\|_2}{\|e_{\xi} + \psi_{n+1}\|_2} \right) = \lambda_{k_0} \lim \left(\frac{\|e_{\xi}\|_2^2 + \|\psi_n\|_2^2}{\|e_{\xi}\|_2^2 + \|\psi_{n+1}\|_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \lambda_{k_0}.$$

e o teorema está demonstrado. ■

Observamos que, se $\xi \in L^2(\overline{\Omega})$ for uma função tal que $\xi > 0$ em quase todo ponto de Ω e se escrevermos ξ na base $\{e_n\}_1^\infty$, isto é

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, \quad (3.9)$$

então podemos tomar $\alpha_1 > 0$. De fato, uma vez que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, em que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

temos:

$$\alpha_k = \langle \xi, e_k \rangle, \quad k = 1, 2, \dots$$

Daí, tomando $e_1 > 0$ em Ω (lembre-se que a primeira autofunção pode ser tomada positiva em Ω), obtemos:

$$\alpha_1 = \langle \xi, e_1 \rangle = \int_{\Omega} \xi e_1 dx > 0,$$

e assim, tomando $\xi > 0$ obtemos que $\nu_n \rightarrow \lambda_1$.

3.1 Convergência uniforme

Nessa seção, mostraremos que se $\xi = \sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha_k e_k$ e e_ξ for definido por (3.5), então a sequência

$\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}$ converge uniformemente para λ_{k_0} em qualquer compacto $K \subset\subset \text{supp} e_\xi$.

Para demonstrar esse resultado, precisaremos de alguns lemas. O primeiro deles nos fornece uma estimativa para a norma $L^\infty(\Omega)$ das autofunções de $-\Delta$ e sua prova pode ser vista em [24].

Lema 16 *Se e for uma autofunção de $-\Delta$ associada a um autovalor λ então*

$$\|e\|_\infty \leq 4^N \sqrt{|\Omega|} \lambda^{\frac{N}{2}} \|e\|_2. \quad (3.10)$$

A prova do lema a seguir pode ser vista em [22]:

Lema 17 Se λ_k é o k -ésimo autovalor de $-\Delta$, então

$$\lambda_k \geq \frac{1}{C} k^{\frac{2}{N}},$$

em que $C = C(N, |\Omega|)$ é uma constante positiva que depende apenas de N e Ω .

Lema 18 Se j for um inteiro tal que $j > \frac{N}{2}$, então

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k} \right)^j \leq \frac{NC^j}{2j - N} < \infty, \quad (3.11)$$

em que C é uma constante positiva que depende apenas de N e Ω .

Prova. Do Lema 17 temos que

$$\lambda_k \geq \frac{1}{C} k^{\frac{2}{N}}.$$

Assim, para qualquer inteiro $j > \frac{N}{2}$ temos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k} \right)^j \leq C^j \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{2j}{N}} < C^j \int_1^{\infty} s^{-\frac{2j}{N}} ds = \frac{NC^j}{2j - N} < \infty,$$

pois $j > \frac{N}{2}$. ■

Lema 19 Se $\xi = \sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha_k e_k$, então

$$|\alpha_k e_k| \leq 4^N \sqrt{|\Omega|} \lambda_k^{\frac{N}{2}} \|\xi\|_2. \quad (3.12)$$

Prova. Segue-se imediatamente de (3.10) e do fato que $\alpha_k = \langle \xi, e_k \rangle$:

$$\begin{aligned} |\alpha_k e_k| &= |\langle \xi, e_k \rangle e_k| \leq \|\xi\|_2 \|e_k\|_2 \|e_k\|_{\infty} \\ &= \|\xi\|_2 \|e_k\|_{\infty} \leq 4^N \sqrt{|\Omega|} \lambda_k^{\frac{N}{2}} \|\xi\|_2 \end{aligned}$$

■

Teorema 20 Seja (ψ_n) a sequência definida em (3.6). Então

$$\psi_n \rightarrow 0 \text{ uniformemente em } \Omega.$$

Prova. Como $\psi_n = \sum_{k=k_0+r}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_k}\right)^n \alpha_k e_k$, de (3.12) temos

$$|\psi_n| \leq 4^N \sqrt{|\Omega|} \|\xi\|_2 \sum_{k_0+r}^{\infty} \lambda_k^{\frac{N}{2}} \left(\frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_k}\right)^n$$

Para $n > 2N$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0+r}^{\infty} \lambda_k^{\frac{N}{2}} \left(\frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_k}\right)^n &= \sum_{k=k_0+r}^{\infty} \lambda_k^{\frac{N}{2} + \frac{3N}{2}} \left(\frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_k}\right)^n \left(\frac{1}{\lambda_k}\right)^{\frac{3N}{2}} \\ &= \sum_{k=k_0+r}^{\infty} \lambda_k^{2N} \left(\frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_k}\right)^n \left(\frac{1}{\lambda_k}\right)^{\frac{3N}{2}} \\ &= \sum_{k=k_0+r}^{\infty} \lambda_{k_0}^{2N} \left(\frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_k}\right)^{n-2N} \left(\frac{1}{\lambda_k}\right)^{\frac{3N}{2}} \\ &\leq \lambda_{k_0}^{2N} \left(\frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_{k_0+r}}\right)^{n-2N} \sum_{k=k_0+r}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k}\right)^{\frac{3N}{2}}. \end{aligned}$$

Tomando $j = \frac{3N}{2} > \frac{N}{2}$ no Lema 18 tem-se:

$$|\psi_n| \leq 4^N \frac{C^{\frac{3N}{2}}}{2} \sqrt{|\Omega|} \lambda_{k_0+1}^{2N} \|\xi\|_2 \left(\frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_{k_0+r}}\right)^n.$$

Como $\frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_{k_0+r}} < 1$, segue-se que

$$\|\psi\|_{\infty} \rightarrow 0.$$

■

Corolário 21 A sequência de funções $\phi_n = \frac{1}{\lambda_{k_0}^n} (e_{\xi} + \psi_n)$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$(i) \quad \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_{\infty}} \rightarrow \frac{e_{\xi}}{\|e_{\xi}\|_{\infty}};$$

$$(ii) \quad \lim \frac{\|\phi_n\|_{\infty}}{\|\phi_{n+1}\|_{\infty}} = \lambda_{k_0};$$

(iii) Se $K \subset\subset \text{supp} e_{\xi}$, então

$$\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \rightarrow \lambda_{k_0}$$

uniformemente em K .

Prova.

(i) Desde que

$$\phi_n = \frac{1}{\lambda_{k_0}^n} (e_\xi + \psi_n)$$

e $\psi_n \rightarrow 0$ uniformemente, obtemos $\|e_\xi + \phi_n\|_\infty \rightarrow \|e_\xi\|_\infty$ donde segue que

$$\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty} = \frac{e_\xi + \psi_n}{\|e_\xi + \psi_n\|_\infty} \rightarrow \frac{e_\xi}{\|e_\xi\|_\infty}.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty} - \lambda_{k_0} \right) &= \lambda_{k_0} \lim \left(\frac{\|e_\xi + \psi_n\|_\infty}{\|e_\xi + \psi_{n+1}\|_\infty} - 1 \right) \\ &= \lambda_{k_0}. \end{aligned}$$

(iii) Seja K um conjunto compacto tal que $K \subset\subset \text{supp}e_\xi$. Como $\|\psi_n\| \rightarrow 0$, dado

$c = \frac{1}{2} \inf_K |e_\xi| > 0$ existe n_0 tal que

$$\|\psi_n\|_\infty < c \text{ para } n \geq n_0.$$

Assim, se $n \geq n_0$ então, em K , temos

$$|e_\xi + \psi_n| \geq |e_\xi| - |\psi_n| \geq \inf_K |e_\xi| - \|\psi_n\|_\infty \geq \inf_K |e_\xi| - \frac{1}{2} \inf_K |e_\xi| = c > 0$$

e então

$$\left| \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} - \lambda_{k_0} \right| = \left| \lambda_{k_0} \frac{e_\xi + \phi_n}{e_\xi + \phi_{n+1}} - \lambda_{k_0} \right| = \lambda_{k_0} \frac{|\psi_n - \psi_{n+1}|}{|e_\xi + \phi_{n+1}|} < 2 \frac{\lambda_{k_0}}{c} \|\psi_n\|_\infty.$$

Portanto, se $n \geq n_0$ obtemos

$$\left\| \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} - \lambda_{k_0} \right\|_\infty \leq 2 \frac{\lambda_{k_0}}{c} \|\psi_n\|_\infty \rightarrow 0,$$

o que prova a afirmação (iii). ■

Observação: Se tomarmos as autofunções e_k normalizadas pela norma do sup, podemos obter o primeiro autovalor e a primeira autofunção de $-\Delta$. Como mencionamos no final da seção anterior, se $\xi > 0$ em Ω obtemos que

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

é tal que $\alpha_1 > 0$ e obtemos que $\nu_n \rightarrow \lambda_1$. Neste caso $e_\xi = \alpha_1 e_1$ e como $e_1 > 0$ em Ω temos do corolário anterior que

$$\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty} \rightarrow \frac{e_\xi}{\|e_\xi\|_\infty} = \frac{\alpha_1 e_1}{\|\alpha_1 e_1\|_\infty} = e_1$$

uniformemente em todo compacto $K \subset\subset \text{supp}e_1 = \Omega$.

Capítulo 4

Domínios Esféricos

A prova que apresentamos no capítulo anterior para o caso em que $p = 2$ e $w \equiv 1$ não se aplica quando $p \neq 2$. Naquela prova utilizamos fortemente as características de $-\Delta$, como sua estrutura linear e o fato de suas autofunções formarem uma base ortogonal para $L^2(\Omega)$. Tais características não estão presentes em $-\Delta_p$, com $p \neq 2$.

Neste capítulo apresentaremos uma prova completa da Conjectura para o caso em que Ω é uma bola em \mathbb{R}^N e o peso w é radial. Sem perda de generalidade (veja Introdução), vamos assumir que $\Omega = B_1(0)$ é a bola unitária centrada na origem. De fato, se $u \in W_0^{1,p}(B_1(0))$ é autofunção de

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda w(|x|)|u|^{p-2}u & \text{em } B_1(0), \\ u = 0 & \text{em } \partial B_1(0), \end{cases} \quad (4.1)$$

definimos $v : B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}^N$ por

$$v(y) = u\left(\frac{y}{R}\right).$$

Afirmamos que $v \in W_0^{1,p}(B_R(0))$ é uma autofunção de

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \mu \bar{w}(|y|)|v(y)|^{p-2}v(y) & \text{em } B_R(0), \\ v = 0 & \text{em } \partial B_R(0). \end{cases} \quad (4.2)$$

em que $\mu = \frac{\lambda}{R^p}$ e $\bar{w}(|y|) = w\left(\frac{|y|}{R}\right)$. Vejamos:

$$\nabla_y v(y) = \frac{1}{R} \nabla_x u(x), \text{ em que } x = \frac{y}{R}$$

e daí

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(|\nabla_y v(y)|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial y_i}(y) \right) = \frac{1}{R^p} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla_x u(x)|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right)$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\Delta_p v(y) &= \frac{1}{R^p} (-\Delta_p u(x)) \\ &= \frac{1}{R^p} \lambda(B_1(0)) w(|x|) u^{p-1}(x) \\ &= \frac{1}{R^p} \lambda(B_1(0)) \bar{w}(|y|) v^{p-1}(y) \end{aligned}$$

Logo, v é autofunção de (4.2) relativa ao autovalor $\mu = \frac{\lambda}{R^p}$. Inversamente, podemos ver que se μ é autovalor de (4.2), então $\lambda = \mu R^p$ é autovalor de (4.1). Portanto, se denotarmos o primeiro autovalor em Ω por $\lambda_1(\Omega)$, temos:

$$\lambda_1(B_R(0)) = \frac{\lambda_1(B_1(0))}{R^p}.$$

Nossa estratégia para demonstrar a conjectura para o caso radial é mostrar que vale a igualdade

$$\inf \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right) = \frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty} \quad (4.3)$$

Em virtude desta igualdade, a sequência a_n que definimos na Seção 2.4 seria tal que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\|\phi_1\|_\infty}{\inf_\Omega \frac{\phi_1}{\phi_2}} \frac{1}{\inf_\Omega \frac{\phi_2}{\phi_3}} \cdots \frac{1}{\inf_\Omega \frac{\phi_{n-1}}{\phi_n}} \\ &= \frac{\|\phi_1\|_\infty}{\|\phi_2\|_\infty} \frac{1}{\|\phi_3\|_\infty} \cdots \frac{1}{\|\phi_n\|_\infty} = \|\phi_n\|_\infty. \end{aligned}$$

e a correspondente sequência de funções u_n seria dada por

$$u_n = \frac{\phi_n}{a_n} = \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty}.$$

Tal como fizemos na Seção 2.4, teríamos que u_n convergiria para a primeira autofunção u de $-\Delta_p$, pois

$$\|u\|_\infty = \lim \|u_n\|_\infty = 1 > 0.$$

No sentido de demonstrar (4.3), o lema a seguir (veja [3]) será fundamental.

Lema 22 *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas sobre $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b) . Suponha que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Se $\frac{f'}{g'}$ for crescente (decrescente), então também são crescentes (decrescentes) as seguintes funções*

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \text{ e } \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)}.$$

Prova. Apresentaremos a prova no caso em que $\frac{f'}{g'}$ é crescente. Nesse caso, segue do teorema do valor médio de Cauchy que para cada $x \in (a, b)$ existe $y \in (a, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(y)}{g'(y)} \leq \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Por outro lado, como $g' \neq 0$ sempre temos

$$\frac{g'(x)}{g(x) - g(a)} > 0.$$

Por exemplo, se $g'(x) > 0$, segue-se Teorema do valor médio de Cauchy que

$$\frac{g'(x)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{g'(x)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{g'(x)}{g'(y)} > 0.$$

Analogamente, mostramos que se $g'(x) < 0$ então

$$\frac{g'(x)}{g(x) - g(a)} > 0.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \right) &= \frac{f'(x)}{g(x) - g(a)} - \frac{g'(x)}{g(x) - g(a)} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \\ &\geq \frac{f'(x)}{g(x) - g(a)} - \frac{g'(x)}{g(x) - g(a)} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0, \end{aligned}$$

e, portanto, $\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$ é crescente.

Caso $\frac{f'}{g'}$ seja decrescente, então os mesmos argumentos mostram que $\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$ é decrescente. A demonstração para o caso $\frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)}$ é feita de forma similar. ■

Teorema 23 *Sejam $p > 1$, $\phi_0 \equiv 1$ e para $n \geq 1$:*

$$\phi_n(r) = \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{N-1} w(s) \phi_{n-1}^{p-1}(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} d\theta, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (4.4)$$

Então, para cada $n \geq 1$ a função ϕ_n é estritamente decrescente e para cada $n \geq 0$ o quociente $\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}$ é estritamente crescente em $[0, 1]$.

Prova. Do teorema fundamental do cálculo temos

$$\phi_n'(r) = - \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{N-1} w(s) \phi_{n-1}^{p-1}(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} < 0,$$

para $r > 0$ e, portanto, ϕ_n é estritamente decrescente para $n \geq 1$.

Desse modo, concluímos imediatamente que $\frac{\phi_0}{\phi_1}$ é crescente (pois $\phi_0 \equiv 1$). Logo, o resultado é verdadeiro para $n = 0$. Vamos mostrar, por indução, que o resultado é verdadeiro para todo n . Suponha que $\frac{\phi_{n-1}}{\phi_n}$ seja estritamente crescente para algum $n \geq 1$.

Observando que $\phi_n(1) = \phi_{n+1}(1) = 0$, podemos escrever

$$\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}(r) = \frac{\phi_n(r) - \phi_n(1)}{\phi_{n+1}(r) - \phi_{n+1}(1)}.$$

Pelo lema anterior, para demonstrarmos que o quociente acima é uma função estritamente crescente para todo n basta verificarmos que $\frac{\phi_n'(r)}{\phi_{n+1}'(r)}$ é uma função estritamente crescente.

De fato, como

$$\frac{\phi_n'(r)}{\phi_{n+1}'(r)} = \left(\frac{\int_0^r s^{N-1} w(s) \phi_{n-1}^{p-1}(s) ds}{\int_0^r s^{N-1} w(s) \phi_n^{p-1}(s) ds} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

e a função $\xi \mapsto \xi^{\frac{1}{p-1}}$ é crescente, basta mostrarmos que

$$\frac{\int_0^r s^{N-1} w(s) \phi_{n-1}^{p-1}(s) ds}{\int_0^r s^{N-1} w(s) \phi_n^{p-1}(s) ds}$$

é crescente. Observe que numerador e denominador se anulam em $r = 0$ e

$$\frac{\left(\int_0^r s^{N-1} w(s) \phi_{n-1}^{p-1}(s) ds\right)'}{\left(\int_0^r s^{N-1} w(s) \phi_n^{p-1}(s) ds\right)'} = \left(\frac{\phi_{n-1}(r)}{\phi_n(r)}\right)^{p-1}$$

é estritamente crescente pela hipótese de indução. Segue-se então do Lema 22 que

$$\frac{\int_0^r s^{N-1} \phi_{n-1}^{p-1}(s) ds}{\int_0^r s^{N-1} \phi_n^{p-1}(s) ds}$$

é estritamente crescente e o teorema está demonstrado. ■

Corolário 24

$$\gamma_n = \inf_{B_1} \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}\right)^{p-1} = \left(\frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty}\right)^{p-1}.$$

Prova. Como ϕ_n e ϕ_{n+1} são funções decrescentes, temos $\|\phi_n\|_\infty = \phi_n(0)$ e $\|\phi_{n+1}\|_\infty = \phi_{n+1}(0)$. Além disso, do teorema anterior temos que $\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}$ é decrescente. Portanto

$$\inf_B \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}\right)^{p-1} = \left(\frac{\phi_n(0)}{\phi_{n+1}(0)}\right)^{p-1} = \left(\frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty}\right)^{p-1}.$$

■

A seguir apresentamos o principal resultado desse capítulo. B_1 denota a bola unitária de \mathbb{R}^N e λ_1 denota o primeiro autovalor de 4.1.

Teorema 25 *Seja (u_n) a sequência definida por*

$$u_n := \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\gamma = \lim \gamma_n = \lambda_1(B_1)$$

e (u_n) converge uniformemente (e monotonamente) para uma função positiva $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B_1})$

tal que $\|u\|_\infty = 1$ e

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_1 w(|x|) u^{p-1} & \text{em } B_1, \\ u = 0 & \text{em } \partial B_1. \end{cases} \quad (4.5)$$

Prova. Observamos que a sequência (u_n) é a mesma que definida em (2.13), pois aqui, como comentamos no início desse capítulo, temos

$$a_n = \frac{\|\phi_1\|_\infty}{\inf_\Omega \frac{\phi_1}{\phi_2}} \frac{1}{\inf_\Omega \frac{\phi_2}{\phi_3}} \cdots \frac{1}{\inf_\Omega \frac{\phi_{n-1}}{\phi_n}} = \frac{\|\phi_1\|_\infty}{\|\phi_2\|_\infty} \frac{1}{\|\phi_3\|_\infty} \cdots \frac{1}{\|\phi_n\|_\infty} = \|\phi_n\|_\infty.$$

Assim, (u_n) satisfaz o seguinte problema não linear

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{n+1} = \gamma_n w(s) u_n^{p-1} & \text{em } B, \\ u_n = 0 & \text{em } \partial B, \end{cases} \quad (4.6)$$

e é decrescente. E do mesmo modo que fizemos na demonstração do teorema 12 podemos passar o limite na expressão acima e obter (4.5). Entretanto, diferentemente do que ocorria no teorema 12, obtemos aqui a seguinte informação adicional:

$$\|u_n\|_\infty = 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ o que nos permite concluir que $\|u\|_\infty = \lim \|u_n\|_\infty = 1$, desse modo, a função u não é identicamente nula e, portanto, $\gamma = \lambda_1$ e u (veja teorema 12) é a primeira autofunção. ■

A seguir, mostraremos que a sequência $\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}$ converge uniformemente para λ_1 sobre cada conjunto compacto contido em B_1 .

Lema 26 *Para cada $0 \leq \epsilon \leq 1$, defina*

$$K_\epsilon := \left(\int_{1-\epsilon}^1 \left(\frac{\epsilon}{\theta} \right)^{\frac{N-1}{p-1}} d\theta \right)^{-1}.$$

Então:

$$0 \leq \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)' \leq K_\epsilon \left\| \frac{\phi_1}{\phi_2} \right\|_\infty \quad \text{sobre o intervalo } [\epsilon, 1 - \epsilon]. \quad (4.7)$$

Prova. Como (Γ_n) é uma sequência decrescente e Γ_1 é finito (veja teoremas 6 e 7) temos

$$\left\| \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\phi_1}{\phi_2} \right\|_\infty, \quad \text{se } n \geq 2 \quad (4.8)$$

e daí

$$0 \leq \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)' = \frac{\phi_{n+1}\phi_n' - \phi_n\phi_{n+1}'}{\phi_{n+1}^2} = \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \frac{|\phi_{n+1}'|}{\phi_{n+1}} - \frac{|\phi_n'|}{\phi_n} \leq \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \frac{|\phi_{n+1}'|}{\phi_{n+1}}.$$

Logo, é suficiente mostrar que

$$\frac{|\phi_{n+1}'|}{\phi_{n+1}} \leq K_\varepsilon \quad \text{em } [\varepsilon, 1 - \varepsilon].$$

Como

$$\phi_{n+1}(r) = \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta} \right)^{N-1} w(s) \phi_n(s)^{p-1} ds \right)^{\frac{1}{p-1}} dr, \quad (4.9)$$

temos

$$\phi_{n+1}'(r) = - \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r} \right)^{N-1} w(s) \phi_n^{p-1}(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} < 0.$$

Assim, se $\varepsilon \leq r \leq 1 - \varepsilon < 1$ temos

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}(r) &= \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta} \right)^{N-1} w(s) \phi_n^{p-1}(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} d\theta \\ &\geq \left(\int_r^1 \theta^{-\frac{N-1}{p-1}} d\theta \right) \left(\int_0^r s^{N-1} w(s) \phi_n^{p-1}(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} \\ &\geq \left(\int_{1-\varepsilon}^1 \theta^{-\frac{N-1}{p-1}} d\theta \right) r^{\frac{N-1}{p-1}} |\phi_{n+1}'(r)| \\ &\geq \left(\int_{1-\varepsilon}^1 \left(\frac{\varepsilon}{\theta} \right)^{\frac{N-1}{p-1}} d\theta \right) |\phi_{n+1}'(r)| \\ &= \frac{1}{K_\varepsilon} |\phi_{n+1}'(r)|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{|\phi_{n+1}'|}{\phi_{n+1}} \leq K_\varepsilon \quad \text{em } [\varepsilon, 1 - \varepsilon].$$

e o lema está demonstrado. ■

Teorema 27 Para cada $0 < \varepsilon < 1$ fixado temos que

$$\left[\frac{\phi_n(|x|)}{\phi_{n+1}(|x|)} \right]^{\frac{1}{p-1}} \rightarrow \lambda_1$$

uniformemente no anel $\Omega_\varepsilon^{1-\varepsilon} := \{\varepsilon < |x| < 1 - \varepsilon\} \subset B_1$.

Prova. De (4.7), (4.8) e do Teorema de Arzelá Ascoli segue-se que $\left(\frac{\phi_n(r)}{\phi_{n+1}(r)}\right)$ possui uma subsequência, que também denotaremos por $\left(\frac{\phi_n(r)}{\phi_{n+1}(r)}\right)$, que converge uniformemente para uma função $v \in C([\varepsilon, 1 - \varepsilon])$.

Tomando $u_n(|x|) = \frac{\phi_n(|x|)}{\|\phi_n\|_\infty}$ como na prova do Teorema 25, podemos escrever

$$-\Delta_p u_{n+1} = w(|x|) \frac{\phi_n^{p-1}}{\|\phi_{n+1}\|_\infty^{p-1}} = \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}\right)^{p-1} w(|x|) u_{n+1}^{p-1} \quad \text{em } \Omega_\varepsilon^{1-\varepsilon}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos:

$$-\Delta_p u = w(|x|) v^{p-1} u^{p-1}.$$

Como u é uma autofunção (veja Teorema 25) temos que

$$\lambda_1 u^{p-1} = v^{p-1} u^{p-1} \quad \text{para todo } x \in \Omega_\varepsilon^{1-\varepsilon}$$

portanto

$$v^{p-1} \equiv \lambda_1$$

Com o argumento acima, temos que dada uma subsequência qualquer de $\left(\frac{\phi_n(r)}{\phi_{n+1}(r)}\right)$ esta subsequência possui uma sequência que converge uniformemente para λ_1 e, portanto, toda a sequência converge uniformemente para λ_1 . ■

A seguir apresentamos uma consequência do teorema acima, completando a prova da Conjectura 4 para o caso da bola, isto é, mostraremos que $\lim \Gamma_n = \lambda_1$.

Corolário 28 *Se $\Gamma = \lim \Gamma_n$ então*

$$\Gamma = \lambda_1.$$

Prova.

$$\Gamma_n = \sup_{0 \leq r \leq 1} \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}\right)^{p-1} = \lim_{r \rightarrow 1^+} \left(\frac{\phi_n(r)}{\phi_{n+1}(r)}\right)^{p-1} = \left(\frac{\phi'_n(1)}{\phi'_{n+1}(1)}\right)^{p-1}$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{\phi'_n(1)}{\phi'_{n+1}(1)} \right)^{p-1} &= \frac{\int_0^1 s^{N-1} w(s) \phi_{n-1}^{p-1}(s) ds}{\int_0^1 s^{N-1} w(s) \phi_n^{p-1}(s) ds} \\ &= \frac{\int_0^1 s^{N-1} w(s) \left(\frac{\phi_{n-1}(s)}{\phi_n(s)} \right)^{p-1} \left(\frac{\phi_n(s)}{\|\phi_n\|_\infty} \right)^{p-1} ds}{\int_0^1 s^{N-1} w(s) \left(\frac{\phi_n(s)}{\|\phi_n\|_\infty} \right)^{p-1} ds}. \end{aligned}$$

Para utilizar o teorema da convergência dominada vamos verificar que $\lambda_1 = \lim \left(\frac{\phi_{n-1}}{\phi_n} \right)^{p-1}$ para quase todo $r \in [0, 1]$.

Mostramos, no teorema anterior, que $\lambda_1 = \lim \left(\frac{\phi_{n-1}}{\phi_n} \right)^{p-1}$ uniformemente em $\Omega_\varepsilon^{1-\varepsilon}$.

Dessa forma, se M for o conjunto tal que

$$\left(\frac{\phi_{n-1}}{\phi_n} \right)^{p-1} \not\rightarrow \lambda_1$$

temos que

$$M \subset I_\varepsilon \cup J_{1-\varepsilon}$$

em que $I_\varepsilon = [0, \varepsilon]$ e $J_{1-\varepsilon} = [1 - \varepsilon, 1]$. Assim, temos que, para todo $0 < \varepsilon < 1$, a medida de M é tal que

$$|M| \leq 2\varepsilon.$$

Logo $|M| = 0$ e portanto $\left(\frac{\phi_{n-1}}{\phi_n} \right)^{p-1} \rightarrow \lambda_1$ para quase todo $r \in [0, 1]$.

Como $\frac{\phi_{n-1}}{\phi_n}$ e $\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty}$ são limitadas e $u(|x|) = \lim \left(\frac{\phi_n(|x|)}{\|\phi_n\|_\infty} \right)^{p-1}$ podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter

$$\Gamma = \lim \left(\frac{\phi'_n(1)}{\phi'_{n+1}(1)} \right)^{p-1} = \frac{\int_0^1 s^{N-1} w(s) \lambda_1 u^{p-1}(s) ds}{\int_0^1 s^{N-1} w(s) u^{p-1}(s) ds} = \lambda_1.$$

■

Como $\gamma_n \leq \nu_n \leq \Gamma_n$, vale o seguinte corolário

Corolário 29

$$\nu := \lim \left(\frac{\left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_n \right\|_p}{\left\| w(x)^{\frac{1}{p}} \phi_{n+1} \right\|_p} \right)^{p-1} = \lambda_1.$$

Na verdade, temos um resultado um pouco melhor que o apresentado acima:

Corolário 30 *Para qualquer $q > 1$ temos*

$$\lim \left(\frac{\left\| w(x)^{\frac{1}{q}} \phi_n \right\|_q}{\left\| w(x)^{\frac{1}{q}} \phi_{n+1} \right\|_q} \right)^{p-1} = \lambda_1.$$

Prova. Assim como fizemos anteriormente, se $u(|x|) = \lim \left(\frac{\phi_n(|x|)}{\|\phi_n\|_\infty} \right)^{p-1}$, então segue-se do Teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{\left\| w(x)^{\frac{1}{q}} \phi_n \right\|_q}{\left\| w(x)^{\frac{1}{q}} \phi_{n+1} \right\|_q} \right)^{p-1} &= \lim \left(\frac{\int_0^1 s^{N-1} w(s) \phi_n^q(s) ds}{\int_0^1 s^{N-1} w(s) \phi_{n+1}^q(s) ds} \right)^{\frac{p-1}{q}} \\ &= \lim \left(\frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty} \right)^{p-1} \left(\frac{\int_0^1 s^{N-1} w(s) \lim \left(\frac{\phi_n(s)}{\|\phi_n\|_\infty} \right)^q ds}{\int_0^1 s^{N-1} w(s) \lim \left(\frac{\phi_{n+1}(s)}{\|\phi_{n+1}\|_\infty} \right)^q ds} \right)^{\frac{p-1}{q}} \\ &= \lambda_1 \left(\frac{\int_0^1 s^{N-1} w(s) u^q(s) ds}{\int_0^1 s^{N-1} w(s) u^q(s) ds} \right)^{\frac{p-1}{q}} \\ &= \lambda_1. \end{aligned}$$

■

Capítulo 5

A função sen_p

Nesse capítulo, estamos interessados em estudar uma autofunção especial do caso unidimensional, a função sen_p . Sua definição surge a partir do estudo do problema de autovalor unidimensional para o p – Laplaciano.

O problema de autovalor unidimensional de Dirichlet para o p – Laplaciano é dado por:

$$\begin{cases} -\psi_p(u)' = \lambda \psi_p(u) & \text{if } a < x < b, \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

em que $\psi_p(t) = t|t|^{p-2}$ e $1 < p < \infty$.

A existência de uma sequência de autovalores e autofunções para o problema (5.1) é garantida em [28]. Assim como ocorre no caso $N \geq 2$, λ_1 , o primeiro autovalor, é isolado, simples e possui a seguinte caracterização variacional:

$$\lambda_1 = \left\{ \inf \frac{\int_a^b |u'(x)|^p dx}{\int_a^b |u(x)|^p dx}, \text{ em que } u \in W_0^{1,p}([a, b]), u \neq 0 \right\}.$$

Uma particularidade do caso unidimensional é que todo o espectro é conhecido. O espectro é discreto e todos os autovalores, λ_k , são simples e dados por

$$\lambda_k = k_p \lambda_1 \text{ (veja [19])}.$$

Observação: Se λ_1 for o primeiro autovalor de

$$\begin{cases} -\psi_p(v)' = \lambda \psi_p(v) & \text{se } a < x < m := \frac{a+b}{2}, \\ v(a) = v(m) = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

e v_1 é a correspondente autofunção positiva, então λ_1 também é o primeiro autovalor de (5.1) sendo

$$u_1(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{if } a \leq x \leq m, \\ v_1(a+b-x) & \text{if } m \leq x \leq b, \end{cases}$$

a correspondente autofunção positiva.

De fato, se $x \in [a, m]$, então decorre da definição de u_1 que $u_1(x) = v_1(x)$ e, portanto, $u_1(a) = 0$ e $-\psi_p(u_1')' = \lambda\psi_p(u_1)$. Por outro lado, se $x \in (m, b]$ temos que $u_1(x) = v_1(a+b-x)$. Daí

$$u_1'(x) = -v_1'(a+b-x) \Rightarrow \psi(u_1'(x)) = -\psi(v_1'(a+b-x)).$$

Assim

$$\psi(u_1'(x))' = \psi(v_1'(a+b-x))' = -\lambda_1\psi(v_1(a+b-x)) = -\lambda_1\psi(u_1(x))$$

como queríamos mostrar.

Diferentemente do caso $N \geq 2$, há uma expressão explícita para λ_1 como mostra o próximo resultado (veja [28]):

Teorema 31 *Seja λ_1 o primeiro autovalor de (5.1). Então*

$$\lambda_1 = (p-1) \left(\frac{2}{b-a} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt[p]{1-s^p}} \right)^p = \left(\frac{\pi_p}{b-a} \right)^p, \quad (5.3)$$

em que

$$\pi_p := 2 \sqrt[p]{p-1} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt[p]{1-s^p}}. \quad (5.4)$$

Prova. Seja u_1 uma autofunção associada a λ_1 . Multiplicamos (5.1) por u_1' e obtemos:

$$-\psi_p(u_1')' u_1' = \lambda\psi_p(u_1) u_1'.$$

Integrando por partes no intervalo $[a, x]$ temos

$$\psi_p(u_1') u_1'|_a^x - \int_a^x \psi_p(u_1') u_1'' dx = -\lambda_1 \int_a^x \psi_p(u_1) u_1' dx. \quad (5.5)$$

Como

$$\psi_p(u_1') u_1'|_a^x = |u_1'(x)|^p - |u_1'(a)|^p \quad (5.6)$$

$$\int_a^x \psi_p(u_1) u_1' dx = \int_{u_1(a)}^{u_1(x)} \psi_p(s) ds = \frac{|u(x)|^p}{p} - \frac{|u(a)|^p}{p}, \quad (5.7)$$

$$\int_a^x \psi_p(u_1') u_1'' dx = \int_{u_1'(a)}^{u_1'(x)} \psi_p(s) ds = \frac{|u'(x)|^p}{p} - \frac{|u'(a)|^p}{p}, \quad (5.8)$$

podemos substituir (5.6), (5.7) e (5.8) em (5.5) e obter

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) [|u_1'(x)|^p - |u_1'(a)|^p] = -\lambda_1 \left[\frac{|u_1(x)|^p}{p} - \frac{|u_1(a)|^p}{p} \right].$$

Daí

$$\frac{p-1}{p} |u_1'|^p + \frac{\lambda_1}{p} |u_1|^p = \left(1 - \frac{1}{p}\right) |u_1'(a)|^p + \frac{\lambda_1}{p} |u_1(a)|^p := C.$$

Isto significa que

$$\frac{p-1}{p} |u_1'|^p + \frac{\lambda_1}{p} |u_1|^p \equiv C.$$

Escolhendo a autofunção u_1 tal que $\|u_1\|_\infty = u_1(m) = 1$ podemos obter a constante C :

$$C = \frac{p-1}{p} |u_1'(m)|^p + \frac{\lambda_1}{p} |u_1(m)|^p = \frac{\lambda_1}{p}, \text{ pois } u_1'(m) = 0.$$

Portanto, u_1 satisfaz a seguinte equação:

$$(p-1) |u_1'(x)|^p + \lambda_1 |u_1(x)|^p = \lambda_1, \quad x \in [a, b]. \quad (5.9)$$

Para todo $x \in [a, m]$ temos $u' \geq 0$. Assim, podemos escrever

$$\frac{u_1'(x)}{\sqrt[p]{1 - |u_1(x)|^p}} = \sqrt[p]{\frac{\lambda_1}{p-1}} \quad (5.10)$$

para todo $x \in [a, m]$. Integrando essa equação no intervalo (a, m) obtemos

$$\frac{b-a}{2} \sqrt[p]{\frac{\lambda_1}{p-1}} = \int_{u_1(a)}^{u_1(m)} \frac{ds}{\sqrt[p]{1-s^p}} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt[p]{1-s^p}},$$

que nos fornece a seguinte expressão para λ_1 :

$$\lambda_1 = (p-1) \left(\frac{2}{b-a} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt[p]{1-s^p}} \right)^p = \left(\frac{\pi_p}{b-a} \right)^p,$$

em que definimos

$$\pi_p := 2\sqrt[p]{p-1} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt[p]{1-s^p}}.$$

Para encontrar uma expressão para π_p , fazemos a mudança de variáveis $s = \sqrt[p]{t}$ na integral acima. Assim

$$\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt[p]{1-s^p}} = \frac{1}{p} \int_0^1 t^{\frac{1}{p}-1} (1-t)^{-\frac{1}{p}} dt = \frac{1}{p} B\left(1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)$$

em que B é a função beta definida por

$$B(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt.$$

Utilizando a seguinte propriedade da função beta¹

$$B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}$$

para todo $x \in (0, 1)$, temos:

$$\frac{1}{p} \int_0^1 t^{\frac{1}{p}-1} (1-t)^{-\frac{1}{p}} dt = \frac{1}{p} B\left(\frac{1}{p}, 1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\pi/p}{\operatorname{sen}(\pi/p)}.$$

Portanto,

$$\pi_p = \frac{2\sqrt[p]{p-1} (\pi/p)}{\operatorname{sen}(\pi/p)} \quad (5.11)$$

e

$$\lambda_1 = \left(\frac{2\sqrt[p]{p-1} (\pi/p)}{(b-a)\operatorname{sen}(\pi/p)} \right)^p.$$

■

Quando estudamos o problema de autovalor no caso em que $a = 0$ e $b = \pi_p$ obtemos

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi_p}{\pi_p - 0} \right)^p = 1.$$

Definimos a função $\sqrt[p]{p-1}u_1$, em que $u_1 > 0$ é a primeira autofunção no intervalo $[0, \pi_p]$ tal que $\|u\|_\infty = 1$, por sen_p . Desse modo, sen_p é uma autofunção associada ao autovalor $\lambda_1 = 1$, tal que

$$\operatorname{sen}_p(0) = 0 = \operatorname{sen}'_p(\pi_p/2).$$

¹veja apêndice

De (5.9) temos que sen_p é tal que

$$|\text{sen}'_p|^p + \frac{|\text{sen}_p|^p}{p-1} = 1.$$

É provado em [28] que existe uma única função $u \in W_0^{1,p}([0, \pi_p]) \cap C^1([0, \pi_p])$ que é solução de

$$|u'|^p + \frac{|u|^p}{p-1} = 1, \quad u(0) = 0, u'(\pi_p) = 1.$$

Assim, $u = \text{sen}_p$ é a única solução do problema acima, propriedade esta que pode ser utilizada como sua definição.

Alternativamente, podemos definir (como em [26]) sen_p no o intervalo $[0, \pi_p/2]$ como a inversa de uma determinada função. Da equação anterior, no intervalo $[0, \pi_p/2]$ temos

$$\frac{u'(x)}{\sqrt[p]{1 - \frac{u(x)^p}{p-1}}} = 1$$

que nos fornece

$$\int_0^{u(x)} \frac{ds}{\sqrt[p]{1 - \frac{s^p}{p-1}}} = x, \quad \text{para } x \in [0, \pi_p/2].$$

Isto é,

$$\int_0^{\text{sen}_p(x)} \frac{ds}{\sqrt[p]{1 - \frac{s^p}{p-1}}} = x, \quad \text{para } x \in [0, \pi_p/2].$$

Desse modo, $\text{sen}_p = \zeta^{-1}$ em que

$$\zeta(z) := \int_0^z \frac{ds}{\sqrt[p]{1 - \frac{s^p}{p-1}}}, \quad \text{para } z \in [0, \sqrt[p]{p-1}].$$

Com a definição acima, estendemos sen_p para o intervalo $[\frac{\pi_p}{2}, \pi_p]$ simetricamente em relação a $\frac{\pi_p}{2}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$ como uma função ímpar $2\pi_p$ -periódica. Podemos assim enunciar o seguinte teorema:

Teorema 32 *A função sen_p satisfaz as seguintes propriedades:*

$$i) \text{sen}_p(0) = 0 = \text{sen}_p(\pi_p), \text{sen}_p(\pi_p/2) = \|\text{sen}_p\|_\infty = \sqrt[p]{p-1}.$$

ii) $\text{sen}_p(x)$ é estritamente crescente em $[0, \frac{\pi_p}{2}]$ e estritamente decrescente em $[\frac{\pi_p}{2}, \pi_p]$.

iii) $|\text{sen}'_p(x)| = \sqrt[p]{1 - \frac{|\text{sen}_p|^p}{p-1}}$.

5.1 Uma sequência que converge uniformemente para sen_p

Nessa seção mostraremos como obter uma sequência que converge uniformemente para a função sen_p . Para isso, definimos uma sequência de funções de forma similar ao que fizemos no Capítulo 2. Entretanto, trabalharemos no intervalo $[0, \frac{\pi_p}{2}]$ ao invés de todo o intervalo $[0, \pi_p]$.

Denotemos o intervalo $[0, \frac{\pi_p}{2}]$ por I_p . Definimos uma sequência de funções $\{\phi_n\} \subset C^1(I_p)$ recursivamente da seguinte maneira: $\phi_0 \equiv 1$ e

$$\begin{cases} -(\psi_p(\phi'_{n+1}))' = \psi_p(\phi_n) & \text{se } x \in I_p, \\ \phi_{n+1}(0) = \phi'_{n+1}(\pi_p/2) = 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

em que $\psi_p(t) = |t|^{p-2}t$.

Mostraremos que a sequência ϕ_n definida acima é tal que

$$\sqrt[p]{p-1} \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty} \rightarrow \text{sen}_p \text{ uniformemente em } I_p.$$

Para demonstrar tal fato utilizamos algumas propriedades básicas de ψ_p e o Teorema de Arzelá-Ascoli.

Teorema 33 (*Propriedades básicas de ψ_p*) *A função ψ_p satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) ψ_p é contínua, estritamente crescente e ímpar para cada $p > 1$;

(ii) $\psi_p(ab) = \psi_p(a)\psi_p(b)$;

(iii) $\psi_p\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\psi_p(a)}{\psi_p(b)}$;

(iv) $(\psi_p)^{-1} = \psi_{p'}$, em que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, isto é $p' = \frac{p}{p-1}$;

$$(v) \int_0^t \psi_p(s) ds = \frac{|t|^p}{p}.$$

Prova. A verificação de (i), (ii) e (iii) são imediatas. Para mostrar (iv), observamos que $(p' - 1)p = p'$ e daí

$$\begin{aligned} \psi_p(\psi_{p'}(t)) &= |\psi_{p'}(t)|^{p-2} \psi_{p'}(t) \\ &= \left| |t|^{p'-2} t \right|^{p-2} |t|^{p'-2} t \\ &= \left(|t|^{p'-1} \right)^{p-2} |t|^{p'-2} t \\ &= |t|^{p'p-2p'-p+2} |t|^{p'-2} t \\ &= |t|^{p'p-2p'-p+2+p'-2} t \\ &= |t|^{(p'-1)p-p'} t \\ &= t. \end{aligned}$$

Para provar (v) basta observar que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{|t|^p}{p} \right) = |t|^{p-2} t = \psi_p(t).$$

Lema 34 *Considere o seguinte problema unidimensional:*

$$\begin{cases} -(\psi_p(u'))' = f, & \text{em } (a, m) \\ u(a) = 0 = u'(m). \end{cases} \quad (5.13)$$

em que $m < b$ e f é uma função contínua não negativa.

O problema (5.13) possui uma única solução dada por:

$$v(x) = \int_a^x \psi_{p'} \left(\int_\theta^m f(s) ds \right) d\theta.$$

Além disso, se $f(x) > 0$ em (m, b) então v é positiva, crescente e atinge seu máximo em m .

Prova. Um cálculo direto mostra que $v(x)$ é solução de (5.13). Por outro lado, se v é solução de (5.13), após integrar f no intervalo (x, m) e usando (5.13) obtemos

$$-(\psi_p(v'(m)) - \psi_p(v'(x))) = \int_x^m f(s) ds.$$

Como $v'(m) = 0$ temos $\psi_p(v'(m)) = 0$ e

$$\psi_p(v'(x)) = \int_x^m f(s)ds \Rightarrow v'(x) = \psi_{p'}\left(\int_x^m f(s)ds\right)$$

(observe que se $f > 0$ em (a, m) temos $v'(x) > 0$ e assim v é crescente e portanto $\|v\|_\infty = v(m)$).

Integrando a última igualdade em (a, x) obtemos

$$v(x) = \int_a^x \psi_{p'}\left(\int_\theta^m f(s)ds\right) d\theta.$$

(Observe que se $f > 0$ em (a, m) temos $v(x) > 0$). ■

Do lema acima temos

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x \psi_{p'}\left(\int_\theta^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_n(s)) ds\right) d\theta \quad (5.14)$$

e ϕ_{n+1} é positiva, crescente em I_p e atinge seu máximo em $x = \frac{\pi_p}{2}$.

Como $\phi_0 = 1$ podemos obter uma expressão explícita para ϕ_1 :

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \int_0^x \psi_{p'}\left(\int_\theta^{\pi_p/2} \psi_p(1) ds\right) d\theta \\ &= \int_0^x \psi_{p'}\left(\frac{\pi_p}{2} - \theta\right) d\theta \\ &= \int_{\pi_p/2-x}^{\pi_p/2} \psi_{p'}(y) dy \\ &= \frac{1}{p} \left[\left(\frac{\pi_p}{2}\right)^p - \left(\frac{\pi_p}{2} - x\right)^p \right]. \end{aligned}$$

e

$$\|\phi_1\|_\infty = \phi_1\left(\frac{\pi_p}{2}\right) = \frac{1}{p} \left(\frac{\pi_p}{2}\right)^p = \frac{p-1}{p} \left(\frac{\pi/p}{\text{sen}(\pi/p)}\right)^p.$$

Entretanto, para o caso em que $n \geq 2$, obter uma expressão explícita para ϕ_n é difícil por causa das integrais envolvidas. Por outro lado essas integrais são facilmente calculadas numericamente.

O teorema a seguir é análogo ao Teorema 3

Teorema 35

$$\phi_{n+1} \leq \|\phi_1\|_\infty \phi_n \text{ em } I_p.$$

Prova. Para $n = 1$ o resultado é trivialmente válido pois $\phi_0 = 1$ e portanto $\phi_1 \leq \|\phi_1\|_\infty \phi_0$.

Suponha que

$$\phi_n \leq \|\phi_1\|_\infty \phi_{n-1}.$$

Daí

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}(x) &= \int_0^x \psi_{p'} \left(\int_\theta^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_n(s)) ds \right) d\theta \\ &\leq \int_0^x \psi_{p'} \left(\int_\theta^{\pi_p/2} \psi_p(\|\phi_1\|_\infty \phi_{n-1}(s)) ds \right) d\theta \\ &= \int_0^x \psi_{p'} \left(\psi_p(\|\phi_1\|_\infty) \int_\theta^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_{n-1}(s)) ds \right) d\theta \\ &= \|\phi_1\|_\infty \int_0^x \psi_{p'} \left(\int_\theta^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_{n-1}(s)) ds \right) d\theta \\ &= \|\phi_1\|_\infty \phi_n(x), \end{aligned}$$

e o teorema está demonstrado. ■

Assim como fizemos no caso da bola, vamos mostrar que $\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}$ é uma função monótona decrescente utilizando o Lema 22.

Teorema 36 Para cada $n \geq 1$ a função $\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}$ é estritamente decrescente em I_p e

$$(i) \quad \frac{1}{\|\phi_1\|_\infty} \leq \inf_{I_p} \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} = \frac{\phi_n(\pi_p/2)}{\phi_{n+1}(\pi_p/2)} = \frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty}.$$

$$(ii) \quad \left\| \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right\|_\infty = \psi_{p'} \left(\frac{\int_0^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_{n-1}(s)) ds}{\int_0^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_n(s)) ds} \right) < \infty \quad \text{for } n \geq 1.$$

$$(iii) \quad \left\| \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\phi_{n-1}}{\phi_n} \right\|_\infty \leq \dots \leq \left\| \frac{\phi_1}{\phi_2} \right\|_\infty < \infty.$$

Prova. Para provar que a função quociente $\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}$ é decrescente vamos, novamente, utilizar indução matemática.

Como ϕ_1 é estritamente crescente segue que $\frac{\phi_0}{\phi_1} = \frac{1}{\phi_1}$ é decrescente. Suponha que

$$\frac{\phi_{n-1}}{\phi_n}$$

seja decrescente. Note que

$$\frac{\phi_n(x) - \phi_n(0)}{\phi_{n+1} - \phi_{n+1}(0)} = \frac{\phi_n(x)}{\phi_{n+1}(x)}.$$

Assim, pelo Lema 22, basta verificar que $\frac{\phi'_n}{\phi'_{n+1}}$ é decrescente em I_p .

Temos

$$\frac{\phi'_n(x)}{\phi'_{n+1}(x)} = \frac{\psi_{p'} \left(\int_x^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_{n-1}(s)) ds \right)}{\psi_{p'} \left(\int_x^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_n(s)) ds \right)} = \psi_{p'} \left(\frac{\int_x^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_{n-1}(s)) ds}{\int_x^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_n(s)) ds} \right).$$

Como $\phi_{p'}$ é estritamente crescente e as funções

$$\int_x^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_{n-1}(s)) ds \text{ e } \int_x^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_n(s)) ds$$

se anulam em $x = \frac{\pi_p}{2}$, podemos aplicar o Lema 22 para verificar que o quociente dessas funções é uma função estritamente decrescente:

$$\frac{\left(\int_x^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_{n-1}(s)) ds \right)'}{\left(\int_x^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_n(s)) ds \right)'} = \frac{\psi_p(\phi_{n-1}(s))}{\psi_p(\phi_n(s))} = \psi_p \left(\frac{\phi_{n-1}}{\phi_n} \right),$$

Pela hipótese de indução e como ϕ_n é crescente segue que a função quociente

$$\frac{\int_x^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_{n-1}(s)) ds}{\int_x^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_n(s)) ds}$$

é estritamente decrescente e daí $\frac{\phi'_n}{\phi'_{n+1}}$ é estritamente decrescente, como queríamos verificar.

A propriedade (i) segue diretamente do Teorema 35 e do fato que $\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}$ é estritamente decrescente.

Para provar (ii) observamos que da monotonicidade de $\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}$ obtemos

$$\left\| \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right\|_{\infty} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\phi_n(x)}{\phi_{n+1}(x)}.$$

Assim, da regra de L'Hôpital tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\phi_n(x)}{\phi_{n+1}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\phi_n'(x)}{\phi_{n+1}'(x)} = \psi_{p'} \left(\frac{\int_0^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_{n-1}(s)) ds}{\int_0^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_n(s)) ds} \right) < \infty.$$

Finalmente, provamos (iii) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right\|_{\infty} &= \psi_{p'} \left(\frac{\int_0^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_{n-1}(s)) ds}{\int_0^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_n(s)) ds} \right) \\ &\leq \psi_{p'} \left(\frac{\int_0^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_n(s)) \psi_p\left(\frac{\phi_{n-1}}{\phi_n}(s)\right) ds}{\int_0^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_n(s)) ds} \right) \\ &\leq \psi_{p'} \left(\frac{\int_0^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_n(s)) \psi_p\left(\left\| \frac{\phi_{n-1}}{\phi_n} \right\|_{\infty}\right) ds}{\int_0^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_n(s)) ds} \right) \\ &= \left\| \frac{\phi_{n-1}}{\phi_n} \right\|_{\infty} \psi_{p'} \left(\frac{\int_0^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_n(s)) ds}{\int_0^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_n(s)) ds} \right) \\ &= \left\| \frac{\phi_{n-1}}{\phi_n} \right\|_{\infty}. \end{aligned}$$

■

O teorema a seguir nos fornece o principal resultado desse capítulo:

Teorema 37 *Seja $u_n := \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_{\infty}} \in C^1(I_p)$, para $n \geq 1$. Então a sequência $\{u_n(x)\}_{n \geq 1}$ é decrescente para cada $x \in I_p$ e*

$$\sqrt[p-1]{u_n} \rightarrow \text{sen}_p \quad \text{uniformemente em } I_p.$$

Prova. Em I_p temos

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \left(\frac{\|\phi_n\|_{\infty}}{\|\phi_{n+1}\|_{\infty}} \right)^{-1} \\ &\geq \left(\inf_{I_p} \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right) \left(\frac{\|\phi_n\|_{\infty}}{\|\phi_{n+1}\|_{\infty}} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\|\phi_n\|_{\infty}}{\|\phi_{n+1}\|_{\infty}} \right) \left(\frac{\|\phi_n\|_{\infty}}{\|\phi_{n+1}\|_{\infty}} \right)^{-1} \\ &= 1, \end{aligned}$$

donde concluimos que $(u_n(x))$ é uma sequência decrescente para cada $x \in I_p$ e portanto é limitada por u_1 . Desse modo existe o seguinte limite pontual:

$$u := \lim u_n.$$

Por outro lado, sendo

$$\frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty} = \inf_{I_p} \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \leq \left\| \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\phi_1}{\phi_2} \right\|_\infty =: C,$$

tem-se para todo $x \in I_p$ a estimativa:

$$\begin{aligned} |u'_n(x)| &= \frac{1}{\|\phi_n\|_\infty} \psi_{p'} \left(\int_x^{\pi_p/2} \psi_p(\phi_{n-1}(s)) ds \right) \\ &= \frac{\|\phi_{n-1}\|_\infty}{\|\phi_n\|_\infty} \psi_{p'} \left(\int_x^{\pi_p/2} \psi_p \left(\frac{\phi_{n-1}(s)}{\|\phi_{n-1}\|_\infty} \right) ds \right) \\ &\leq C \psi_{p'} \left(\int_0^{\pi_p/2} \psi_p(u_{n-1}) ds \right) \\ &\leq C \psi_{p'} \left(\int_0^{\pi_p/2} \psi_p(1) ds \right) \\ &= \frac{C\pi_p}{2}. \end{aligned}$$

Uma vez que $\|u_n\|_\infty = 1$ para todo n , tem-se que u_n e u'_n são uniformemente limitadas. Segue do Teorema de Arzelá-Ascoli que (u_n) possui uma subsequência que converge para u (definida acima) uniformemente. Como esse procedimento pode ser feito para qualquer subsequência de u_n tem-se

$$u_n \rightarrow u \in C(I_p) \text{ uniformemente.}$$

Para concluir a demonstração, devemos mostrar que

$$u = \frac{\text{sen}_p}{\sqrt[p]{p-1}}. \tag{5.15}$$

De (5.14) podemos escrever a seguinte expressão para u_{n+1} :

$$u_{n+1}(x) = \gamma_n \int_0^x \psi_{p'} \left(\int_\theta^{\pi_p/2} \psi_p(u_n(s)) ds \right) d\theta,$$

em que

$$\gamma_n := \frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty}.$$

Como

$$\gamma_n = \frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty} = \inf_{I_p} \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \leq \left\| \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\phi_1}{\phi_2} \right\|_\infty := C,$$

segue-se que γ_n é limitada e portanto possui uma subsequência γ_{n_k} convergente. Denotando

$$\gamma := \lim \gamma_{n_k}$$

e fazendo $k \rightarrow \infty$ em

$$u_{n_k+1}(x) = \gamma_{n_k} \int_0^x \psi_{p'} \left(\int_\theta^{\pi_p/2} \psi_p(u_{n_k}(s)) ds \right) d\theta,$$

obtemos

$$u(x) = \gamma \int_0^x \psi_{p'} \left(\int_\theta^{\pi_p/2} \psi_p(u(s)) ds \right) d\theta \in C^1(I_p). \quad (5.16)$$

Observe que (5.16) quer dizer que u é solução positiva do seguinte problema (veja Lema 34):

$$\begin{cases} -\psi_p(u')' = \gamma \psi_p(u) & \text{if } x \in I_p, \\ u(0) = u'(\pi_p/2) = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

Como (veja Teorema 36)

$$\frac{1}{\|\phi_1\|_\infty} \leq \inf_{I_p} \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}},$$

então $\gamma > 0$ e portanto u é uma autofunção positiva de (5.1) e γ é seu respectivo autovalor. Repetindo exatamente os mesmos cálculos que fizemos na seção anterior, podemos multiplicar a equação (5.17) por u' e obter

$$\lim \gamma_{n_k} = \gamma = 1.$$

Como este resultado independe da subsequência convergente (γ_{n_k}) obtemos $\lim \gamma_n = 1$.

Concluimos assim que o par u e sen_p são autofunções positivas de (5.1) relativo ao mesmo autovalor 1. Da simplicidade do primeiro autovalor, temos que existe $\alpha > 0$ tal

que

$$u = \alpha \operatorname{sen}_p.$$

Daí

$$1 = \|u\|_\infty = \alpha \|\operatorname{sen}_p\|_\infty = \alpha \sqrt[p]{p-1}$$

e, portanto,

$$u = \frac{\operatorname{sen}_p}{\sqrt[p]{p-1}},$$

como queríamos. ■

Observação:

O método que descrevemos acima nos permitiu obter a função sen_p . Podemos aplicar as mesmas idéias acima para encontrar o primeiro autovalor e a primeira autofunção para o problema:

$$\begin{cases} -\psi_p(u')' = \lambda w(x)\psi_p(u) & \text{if } a < x < b, \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (5.18)$$

em que w é uma função simétrica em relação a $m = \frac{a+b}{2}$.

Capítulo 6

Resultados Numéricos

Neste capítulo apresentamos os resultados que obtivemos para o primeiro autovalor do p -Laplaciano quando Ω é a bola unitária de \mathbb{R}^N ou o quadrado unitário $[0, 1] \times [0, 1]$ de \mathbb{R}^2 . Tais resultados podem ser vistos como a validação numérica das nossas conjecturas. Reiteramos que os valores de λ_1 não são conhecidos quando $p \neq 2$ e só podem ser obtidos através de métodos numéricos. A última seção deste capítulo apresenta os gráficos que obtivemos para a função sen_p por três métodos distintos.

6.1 A bola unitária

Nesta seção apresentaremos os resultados que obtivemos para λ_1 no caso em que Ω é a bola unitária de \mathbb{R}^N e o peso é $w \equiv 1$. Para calcular os valores do primeiro autovalor do p -Laplaciano nesse caso, resolvemos numericamente as integrais em (4.4). Para calcular estas integrais, combinamos a regra de Simpson Composta e a regra do Trapézio Composta. A seguir, apresentamos as fórmulas de cada regra que nos fornece a aproximação para a integral

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Divida o intervalo $[a, b]$ através da partição

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b.$$

Denotando por I a aproximação da integral

$$\int_a^b f(x)dx,$$

temos que se k é par, então a regra de Simpson Composta produz:

$$I = \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + f(x_k) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} f(x_{2i-1}) \right]. \quad (6.1)$$

Já a do Trapézio Composta produz:

$$I = \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_0) + f(x_k) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} f(x_i) \right],$$

em que $\Delta x = \frac{b-a}{k}$.

Calculamos os valores de ν_n para as bolas de dimensões $N = 2, 3, 4$ após 10 iterações do método. Os valores encontrados, com 101 pontos na malha e com um truncamento na quarta casa decimal, são apresentados na Tabela 1 com p variando entre 1,1 e 4,0, com um espaçamento de 0,1.

Tabela 1: Primeiro autovalor para o p - Laplaciano na bola unitária

| p | $N = 2$ | $N = 3$ | $N = 4$ | p | $N = 2$ | $N = 3$ | $N = 4$ |
|------|---------|----------|----------|------|----------|----------|----------|
| 1, 1 | 2, 5694 | 3, 8728 | 5, 1871 | 2, 6 | 8, 1192 | 15, 0590 | 24, 0121 |
| 1, 2 | 2, 9656 | 4, 5151 | 6, 1020 | 2, 7 | 8, 5355 | 16, 0412 | 25, 8617 |
| 1, 3 | 3, 3263 | 5, 1283 | 7, 0064 | 2, 8 | 8, 9598 | 17, 0586 | 27, 8027 |
| 1, 4 | 3, 6741 | 5, 7431 | 7, 9390 | 2, 9 | 9, 3921 | 18, 1117 | 29, 8374 |
| 1, 5 | 4, 0180 | 6, 3717 | 8, 9154 | 3, 0 | 9, 8324 | 19, 2013 | 31, 9687 |
| 1, 6 | 4, 3624 | 7, 0201 | 9, 9443 | 3, 1 | 10, 2809 | 20, 3278 | 34, 1991 |
| 1, 7 | 4, 7098 | 7, 6920 | 11, 0314 | 3, 2 | 10, 7375 | 21, 4917 | 36, 5314 |
| 1, 8 | 5, 0619 | 8, 3898 | 12, 1810 | 3, 3 | 11, 2022 | 22, 6937 | 38, 9681 |
| 1, 9 | 5, 4195 | 9, 1153 | 13, 3969 | 3, 4 | 11, 6751 | 23, 9341 | 41, 5120 |
| 2, 0 | 5, 7835 | 9, 8698 | 14, 6822 | 3, 5 | 12, 1561 | 25, 2136 | 44, 1659 |
| 2, 1 | 6, 1543 | 10, 6545 | 16, 0400 | 3, 6 | 12, 6453 | 26, 5327 | 46, 9325 |
| 2, 2 | 6, 5321 | 11, 4701 | 17, 4730 | 3, 7 | 13, 1427 | 27, 8919 | 49, 8144 |
| 2, 3 | 6, 9174 | 12, 3177 | 18, 9841 | 3, 8 | 13, 6482 | 29, 2916 | 52, 8146 |
| 2, 4 | 7, 3103 | 13, 1979 | 20, 5759 | 3, 9 | 14, 1619 | 30, 7325 | 55, 9359 |
| 2, 5 | 7, 7108 | 14, 1115 | 22, 2510 | 4, 0 | 14, 6838 | 32, 2150 | 59, 1810 |

O valor de λ_1 quando $p = 2$ na bola unitária de \mathbb{R}^2 , com quatro casas decimais, é $\lambda_1 = 5,7832$. Obtivemos, nesse caso, 5,7835 (veja Tabela 1). Assim temos o erro

$$\frac{5,7835 - 5,7832}{5,7832} = 0,005\%.$$

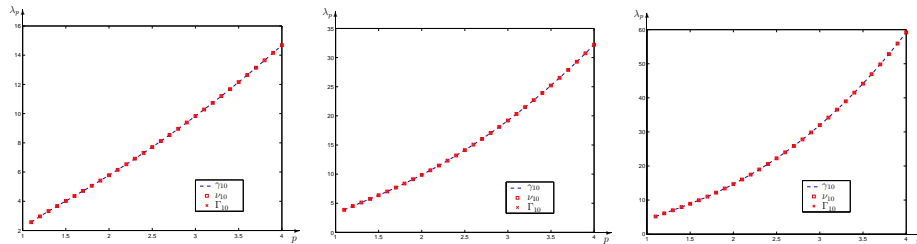
Observamos ainda que o valor que obtivemos para $p = 2$ é melhor que aquele apresentado por [21] em que um erro de 1,3% foi encontrado. Além disso, nossas aproximações para λ_1 podem ser melhoradas, desde que aumentemos o número de pontos na malha na resolução das integrais (4.4).

Na tabela a seguir comparamos os valores que obtivemos com as estimativas apresentadas por G. Bognàr em [9] para λ_1 , no caso $N = 2$.

| p | ν_{10} | $\sqrt[p]{\nu_{10}}$ | $\sqrt[p]{\lambda_1}$ ([9]- Tabela 2) |
|-----|------------|----------------------|---------------------------------------|
| 1,2 | 2,9656 | 2,4742 | 2,473687736 |
| 1,4 | 3,6741 | 2,5333 | 2,532812739 |
| 1,6 | 4,3624 | 2,5109 | 2,510551054 |
| 1,8 | 5,0619 | 2,4620 | 2,510551054* |
| 2,0 | 5,7835 | 2,4049 | 2,404825558 |
| 3,0 | 9,8324 | 2,1423 | 2,142264301 |
| 4,0 | 14,6838 | 1,9575 | 1,957474779 |

* Conforme original. Aparentemente, houve erro de digitação, pois o valor apresentado no artigo (Tabela 2) é o mesmo relativo a $p = 1,6$.

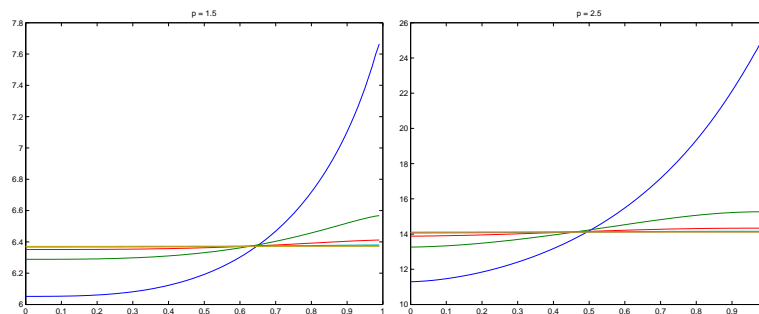
A seguir apresentamos os gráficos $p \times \lambda_1$ obtidos utilizando as três sequências γ_n, Γ_n e ν_n com $n = 10$ com diferentes valores de p .



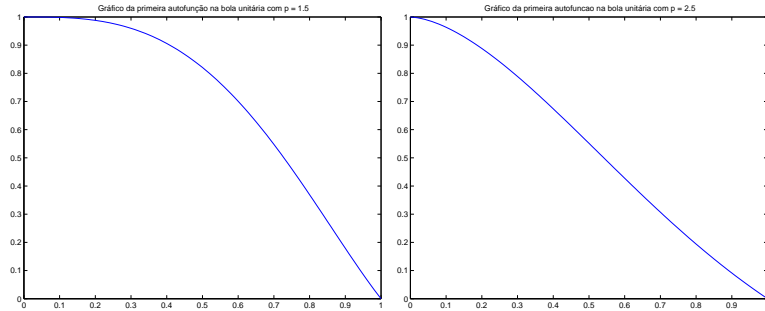
Como $\lim \gamma_n = \inf \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1} = \lim \gamma_n = \sup \left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1} = \lambda_1$ temos que a função

$$\left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \right)^{p-1}$$

converge para a função constante λ_1 . Ilustramos esse fato na figura abaixo para $p = 1,5$ e $p = 2,5$, $N = 3$ e n variando de 2 até 7:



Ilustramos na figura a seguir os gráficos das autofunções na bola unitária, com $r \in [0, 1]$ para $N = 3$ e $p = 1, 5; 2, 5$ (os gráficos foram obtidos após 10 iterações do método).



6.2 O quadrado unitário

No sentido de reforçar a conjectura que apresentamos, resolvemos numericamente os problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_n = \phi_{n-1}^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

quando Ω é o quadrado unitário $[0, 1] \times [0, 1]$ através de um esquema de volumes finitos proposto em [4].

Nessa seção apresentaremos os resultados que obtivemos para as sequências γ_n, Γ_n e ν_n no caso em que Ω é o quadrado unitário $[0, 1] \times [0, 1]$ de \mathbb{R}^2 e o peso é tal que $w \equiv 1$. Para calcular os valores das sequências γ_n, Γ_n e ν_n resolvemos numericamente, com 61×61 células no grid, as equações que nos fornecem ϕ_n utilizando o algoritmos citado no parágrafo anterior. A tabela 2 apresenta os valores de γ_5, Γ_5 e ν_5 para $2 \leq p \leq 3$ com um espaçamento de 0.1.

Tabela 2: Primeiro autovalor para o p -Laplaciano no quadrado unitário

| p | γ_5 | ν_5 | Γ_5 |
|-----|------------|---------|------------|
| 2,0 | 19,7145 | 19,7348 | 19,9270 |
| 2,1 | 22,3239 | 22,3460 | 22,4447 |
| 2,2 | 25,2168 | 25,2412 | 25,3343 |
| 2,3 | 28,2413 | 28,4495 | 28,6139 |
| 2,4 | 31,9750 | 32,0024 | 32,5685 |
| 2,5 | 35,5746 | 35,9344 | 37,6961 |
| 2,6 | 38,5547 | 40,2827 | 40,8167 |
| 2,7 | 41,4917 | 45,0890 | 52,8657 |
| 2,8 | 5,5593 | 50,3972 | 642,6432 |
| 2,9 | 7,8823 | 56,2567 | 670,7254 |
| 3,0 | 14,6719 | 62,7208 | 205,0535 |

Observamos que o valor de λ_1 quando $p = 2$ em $[0, 1] \times [0, 1]$ é dado por $2\pi^2 \approx 19,7392$.

Após cinco iterações do método obtemos, utilizando ν_5 , o erro:

$$\frac{19,7392 - 19,7145}{19,7392} = 0,1\%.$$

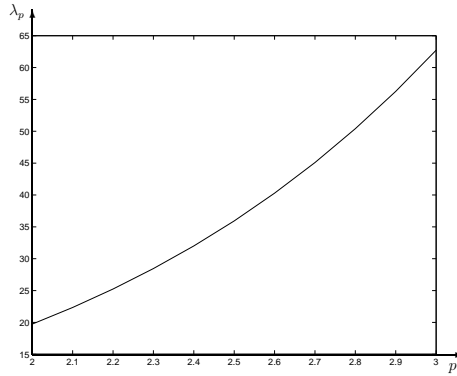
Assim como ocorreu para o caso da bola unitária, obtivemos aqui um erro menor que aquele apresentado por [21] em que um erro de 3% foi encontrado.

Comparando os valores que obtivemos para ν_5 com os apresentados por G. Bognár e T. Szabó em [10] observamos que nossos resultados são muito semelhantes como apresentamos na tabela abaixo:

| p | [10] | ν_5 | [21] |
|-----|---------|---------|---------|
| 2,0 | 19,7392 | 19,7348 | 20,3288 |
| 2,5 | 35,9493 | 35,9344 | 37,4406 |
| 3,0 | 62,7633 | 62,7208 | 66,3359 |

o que reforça a conjectura.

A seguir apresentamos o gráfico de $p \times \nu_5$



6.3 A função sen_p

Nessa seção, apresentamos os gráficos que obtivemos da função sen_p no intervalo $[0, \pi_p]$ de três formas diferentes. Um deles é o Método das Potências Inverso que desenvolvemos.

Os outros dois são obtidos resolvendo

$$|u'|^p + \frac{|u|^p}{p-1} = 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

no intervalo $\left[0, \frac{\pi_p}{2}\right]$, utilizando um método numérico padrão de resolução de equações diferenciais e pela série de potências, de x^p , apresentada em [26], da função sen_p ¹. A equação diferencial foi resolvida numericamente utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Dada uma equação diferencial

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0, \tag{6.2}$$

se particionarmos o intervalo $[a, b]$, onde está definida a solução y , como sendo

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$$

e $\Delta x = \frac{b-a}{k}$, o método de Runge Kutta de quarta ordem é dado por

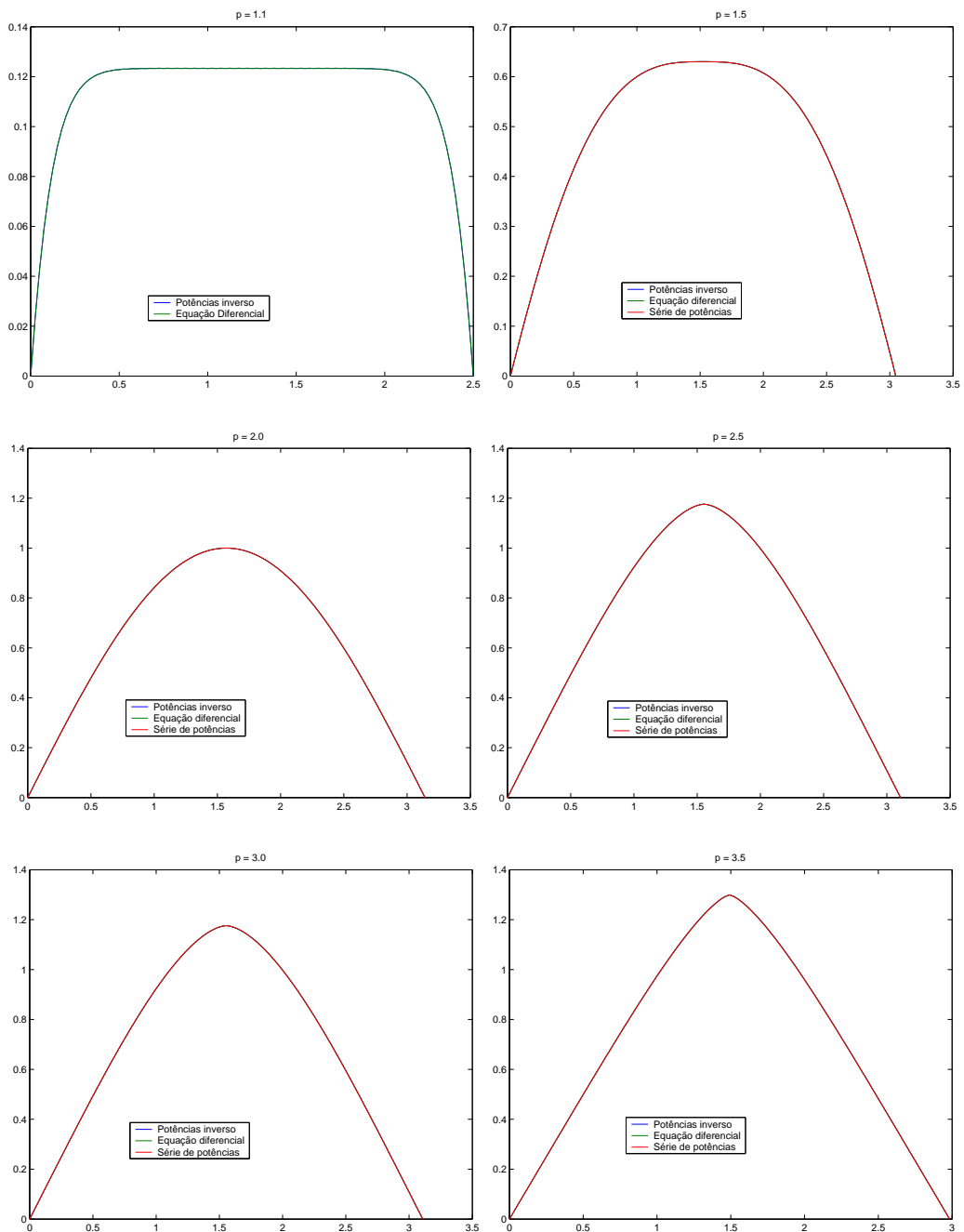
$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} (m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3) \tag{6.3}$$

¹veja apêndice

em que

$$\begin{aligned}
 m_0 &= \Delta x f(x_k, y_k) \\
 m_1 &= \Delta x f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{m_0}{2}\right) \\
 m_2 &= \Delta x f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{m_1}{2}\right) \\
 m_3 &= \Delta x f(x_{k+1}, y_k + m_2).
 \end{aligned}$$

A seguir estão os gráficos obtidos para a função sen_p para $p = 1, 1, 1, 5; 2, 0; 2, 5; 3, 0$ e $3, 5$:



Capítulo 7

Considerações Finais

Nesta seção apresentaremos alguns resultados que obtivemos para funções simétricas definidas em domínios simétricos e convexos. Acreditamos que os resultados que apresentamos aqui contribuirão no sentido de demonstrar a conjectura para domínios simétricos.

Na demonstração da conjectura para o caso em que Ω é uma bola de \mathbb{R}^N utilizamos fortemente o fato que

$$\inf \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} = \frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty} = \frac{\phi_n(0)}{\phi_{n+1}(0)}. \quad (7.1)$$

Na verdade, caso mostremos (7.1) para um certo domínio Ω , a demonstração da conjectura é feita da mesma forma, pois nesse caso teríamos

$$a_n = \|\phi_n\|_\infty$$

e não correríamos o risco de a sequência $\frac{\phi_n}{a_n}$ convergir para zero.

A estrutura radial das soluções numa bola de \mathbb{R}^N facilitaram a prova, pois nesse caso tínhamos à nossa disposição uma expressão para as ϕ_n em termos de integrais.

Para domínios mais gerais a conjectura fica em aberto.

7.1 Domínios simétricos

Supondo que $0 \in \Omega$, seguindo a notação de [13] definimos

$$T_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 = \lambda\}, \Omega_\lambda := \{x \in \Omega : x_1 < \lambda\}, \Omega^\lambda := \{x \in \Omega : x_1 > \lambda\}.$$

Se $x = (x_1, x')$ denotamos $x_\lambda = (2\lambda - x_1, x')$ o ponto correspondente a reflexão de x através de T_λ . Nesse caso, ainda definimos:

$$\Omega_\lambda^r := \{(2\lambda - x_1, x'), (x_1, x') \in \Omega_\lambda\}$$

o refletido de Ω_λ em relação a T_λ .

Se u for uma função real definida em Ω , definimos $u_\lambda(x) = u(x_\lambda)$. Se $y = x_\lambda$ temos

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_1} = -\frac{\partial u}{\partial y_1} \text{ e } \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial y_i} \text{ se } i \neq 1.$$

Assim, obtemos que $|\nabla u_\lambda(x)| = |\nabla u(y)|$ e, portanto,

$$\Delta_p u_\lambda(x) = \Delta_p u(y). \quad (7.2)$$

Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja tal que

$$\Omega_0^r = \Omega^0$$

isto é, que Ω seja simétrico em relação a T_0 .

Seja u a solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.3)$$

Suponha que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaça as seguintes propriedades:

(P1) $f(x) > 0$ em Ω ;

(P2) f é uma função simétrica em relação a T_0 , isto é $f(-x_1, \cdot) = f(x_1, \cdot)$;

(P3) $f(x_1, \cdot)$ é não decrescente em x_1 para $x_1 < 0$.

Lema 38 *Seja*

$$a = \text{dist}(0, \partial\Omega \cap \{(x_1, 0)\}).$$

Dada f com as propriedades acima e $-a < \lambda < 0$, então $f(x_1, x') \leq f(2\lambda - x_1, x')$ para todo $x_1 \in [-a, \lambda]$.

Prova. Se $\lambda \leq -\frac{a}{2}$ esse fato segue-se imediatamente da monotonicidade de f , pois nesse caso tem-se $2\lambda - x_1 < 0$:

$$-a \leq x_1 \Rightarrow 2\lambda + a \geq 2\lambda - x_1$$

Como $\lambda \leq -\frac{a}{2}$ temos que $2\lambda + a \leq 0$. Assim

$$x_1 < 2\lambda - x_1 < 0 \Rightarrow f(x_1, x') \leq f(2\lambda - x_1, x')$$

Caso $\lambda > -\frac{a}{2}$ não podemos utilizar o fato de $f(x_1, \cdot)$ ser crescente para $x_1 < 0$ pois pode ocorrer $2\lambda - x_1 > 0$ (bastaria tomar $x_1 < 2\lambda$). Caso este fato ocorra, isto é, $2\lambda - x_1 > 0$ teríamos

$$0 < 2\lambda - x_1 < -x_1 \text{ (lembre-se que } \lambda < 0 \text{)}.$$

Sendo $f(x_1, \cdot)$ crescente para $x_1 < 0$ e simétrica em relação a T_0 temos que $f(x_1, \cdot)$ decrescente para $x_1 > 0$. Daí

$$f(x_1, x') = f(-x_1, x') \leq f(x_1, 2\lambda - x_1)$$

■

Lema 39 Dado $-a < \lambda < 0$ temos que $u(x) \leq u_\lambda(x)$ para todo $x \in \Omega_\lambda$

Prova. De (7.2) e do lema (38) temos

$$-\Delta_p u_\lambda(x) = -\Delta_p u(y) = f(y) = f(2\lambda - x_1, x') \geq f(x_1, x') = f(x) = -\Delta_p u(x)$$

para todo $x \in \Omega_\lambda$.

Observe que se $x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_\lambda$ temos $u(x) = 0 \leq u(2\lambda - x_1, x')$. Por outro lado, se $x \in \partial\Omega_\lambda \cap T_\lambda$ então $u(x) = u(\lambda, x') = u_\lambda(x)$. Assim obtemos

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) \leq -\Delta_p u_\lambda(x), & \text{em } \Omega_\lambda \\ u(x) \leq u_\lambda(x), & \text{em } \partial\Omega_\lambda. \end{cases} \quad (7.4)$$

Segue-se do princípio da comparação que $u(x) \leq u_\lambda(x)$ para todo $x \in \Omega_\lambda$. ■

Teorema 40 *Suponha que f satisfaça (P1),(P2) e (P3). Se u for solução de (7.3) então u também satisfaz (P1),(P2) e (P3).*

Prova. A propriedade (P1) segue diretamente do princípio da comparação.

Mostraremos inicialmente que u é simétrica em relação a T_0 . Com a notação acima temos que se

$$u_0(x) = u_0(-x_1, x') := u(-x_1, x')$$

então, como u é solução de (7.3), seguem de (7.2) e da simetria de f as seguintes igualdades

$$-\Delta_p u_\lambda(x) = -\Delta_p u(y) = f(y) = f(-x_1, x') = f(x_1, x') \text{ para todo } x \in \Omega_0.$$

Observe que se $x \in \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega$ então $(-x, x') \in \Omega$ e temos que $u(x) = 0 = u(-x_1, x') = u_0(x)$. Por outro lado, se $x \in \partial\Omega_0 \cap T_0$ então $u(x) = u(0, x') = u_0(x)$. Assim temos que

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) = -\Delta_p u_0(x), & \text{em } \Omega_0 \\ u(x) = u_0(x), & \text{em } \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (7.5)$$

Segue do princípio da comparação que

$$u(x) = u_0(x) \Rightarrow u(x_1, x') = u(-x_1, x')$$

e portanto u é simétrica em relação a Ω_0 .

A verificação da propriedade (P3) segue do lema (39) da seguinte forma:

dados $x_1 < \tilde{x}_1 < 0$, tome $\lambda = \frac{x_1 + \tilde{x}_1}{2}$. daí $x_1 < \lambda < 0$ e obtemos

$$u(x_1, x') \leq u(2\lambda - x_1, x') = u(\tilde{x}_1, x')$$

e o teorema está demonstrado ■.

O teorema anterior pode ser facilmente demonstrado se supormos as mesmas hipóteses numa coordenada x_i qualquer de $x = (x_1, \dots, x_N)$. Desse modo, se estamos trabalhando com um domínio que é simétrico em relação a cada hiperplano coordenado temos que $u(x_i, \cdot)$ será crescente (para $x_i < 0$) e u será simétrica em relação a cada um dos hiperplanos coordenados. Nesse caso o máximo de u deve ocorrer em $x = 0$.

Desse modo, se definimos uma sequência, $\phi_n(x)$, de funções recursivamente por

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_{n+1} = w(x)\phi_n^{p-1}, & \text{em } \Omega \\ \phi_{n+1} = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

com $\phi_0 = 1$ e w satisfazendo (P1),(P2) e (P3), teremos, pelo que foi descrito acima, que cada ϕ_n assumirá seu máximo em 0 e que $\phi(x_i, x')$ é não decrescente para x' fixado e $-a \leq x_i \leq 0$.

Assim, na esperança de se mostrar que (7.1) ocorre, encontramos que cada ϕ_n assume seu máximo em $x = 0$, isto é, a segunda desigualdade de (7.1) é verdadeira. Observamos numericamente no caso em que $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ que a igualdade (7.1) ocorre. No entanto não conseguimos demonstrar tal fato.

Os cálculos acima nos indicam um caminho possível para demonstrar a conjectura para o caso em que Ω é simétrico, convexo e com um peso satisfazendo (P1),(P2) e (P3), o que nos norteia e motiva pesquisas futuras.

7.2 Uma generalização

Na construção das sequências γ_n, Γ_n e ν_n , realizada no Capítulo 2, tomamos $\phi_0 \equiv 1$. Entretanto, com algumas adaptações, podemos tomar $\phi_0 > 0$ mais geral. Poderíamos enunciar o teorema a seguir, cuja demonstração seria simplesmente uma adaptação daquela apresentada para o Teorema 3:

Teorema 41 *A sequência $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz*

$$0 < \phi_n \leq \left\| \frac{\phi_1}{\phi_0} \right\|_{\infty} \phi_{n-1} \quad \text{em } \Omega$$

para todo $n \geq 1$.

Se ϕ_0 é escolhida de modo que $\inf \phi_0 > 0$ temos que γ_n estará bem definida pois neste caso teremos:

$$\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \geq \frac{1}{\left\| \frac{\phi_1}{\phi_0} \right\|_{\infty}} \geq \frac{1}{\|\phi_1\|_{\infty} \left\| \frac{1}{\phi_0} \right\|_{\infty}} \frac{1}{\|\phi_1\|_{\infty}} = \frac{1}{\|\phi_1\|_{\infty}} \inf \phi_0 > 0.$$

Os demais teoremas deste capítulo seguiriam naturalmente.

A sequência (a_n) seria definida da mesma forma, entretanto tomaríamos

$$a_1 = \left\| \frac{\phi_1}{\phi_0} \right\|_{\infty}.$$

Neste caso a sequência $u_n := \frac{\phi_n}{a_n}$ seria tal que

$$u_n \leq \|\phi_0\|_{\infty} \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_{\infty}} \leq \|\phi_0\|_{\infty}.$$

Deste modo, a demonstração que apresentamos para o caso radial no Capítulo 3 poder ser generalizada para uma função ϕ_0 radial que seja crescente. Demonstramos que a função

$$\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}$$

é estritamente crescente quando $\phi_0 \equiv 1$ e com este fato garantimos que $\|u_n\|_{\infty} = 1$. Na demonstração deste resultado o fundamental foi que para $n = 0$ o resultado era verdadeiro, pois assim pudemos utilizar indução matemática. Caso tomemos ϕ_0 sendo radialmente crescente, o Teorema 23 continua sendo válido, pois neste caso teríamos:

$$\left(\frac{\phi_0}{\phi_1} \right)' = \frac{\phi_0' \phi_1 - \phi_0 \phi_1'}{\phi_1^2} > 0.$$

uma vez que $\phi_0', \phi_1 > 0$ e $\phi_1' < 0$.

Apêndice

A. 1. Identidade de Picone

Teorema 42 (*Identidade de Picone*) Sejam $v > 0$ e $u \geq 0$ funções diferenciáveis em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Denote

$$L(u, v) = |\nabla u|^p + (p-1) \frac{u^p}{v^p} |\nabla v|^p - p \frac{u^{p-1}}{v^{p-1}} - \nabla u |\nabla v|^{p-2} \nabla v$$

e

$$R(u, v) = |\nabla u|^p - \nabla \left(\frac{u^p}{v^{p-1}} \right) |\nabla v|^{p-2} \nabla v.$$

Então

$$L(u, v) = R(u, v)$$

Além disso, $L(u, v) \geq 0$ e $L(u, v) = 0$ em quase todo $x \in \Omega$ se e só se $\nabla \left(\frac{u}{v} \right) = 0$ em quase todo Ω , ou seja $u = kv$ para alguma constante k em Ω .

Prova. Veja [1].

A.2. Alguns resultados sobre $-\Delta_p$

Apresentaremos aqui vários resultados clássicos sobre $-\Delta_p$. As demonstrações desses fatos podem ser encontradas em [17], [25], [33], [23], [2] ou, de forma mais sintética, em [29].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $f \in L^{p'}(\Omega)$. Dizemos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (7.6)$$

se

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi - f \varphi) dx = 0, \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Teorema 43 (*Existência, unicidade e regularidade*) O problema (7.6) possui uma única solução fraca $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, se $f \in L^\infty(\Omega)$ então $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\Omega)$ para algum $0 < \alpha < 1$.

Teorema 44 Considere o operador $-\Delta_p : W^{-1,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ e o seu inverso $(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto limitado. Então:

(i) $-\Delta_p$ é uniformemente contínuo em conjunto limitados;

(ii) $(-\Delta_p)^{-1}$ é contínuo.

(iii) O operador

$$(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

é compacto.

A. 3. Solução do problema de Dirichlet no caso radial

Teorema 45 Suponha que em (7.6) tenhamos $\Omega = B_R(0)$, isto é, a bola centrada na origem de raio R e f radial, isto é, $f(x) = f(r)$, em que $r = |x|$. Então a única solução de (7.6) é dada por

$$u(r) = \int_r^R \psi_{p'} \left(\left(\frac{s}{\theta} \right)^{N-1} f(s) ds \right) d\theta \quad (7.7)$$

em que $\psi_{p'}$ é a inversa de $\psi_p(t) = |t|^{p-2}t$.

Prova. Para demonstrar o teorema acima, precisamos da expressão radial de $\Delta_p u$. Um cálculo direto mostra que se $u(x) = u(r)$ então:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (u(r)) = \frac{u'(r)}{r} x_i$$

o que implica que $|\nabla u|^{p-2} \nabla u = |u'(r)|^{p-2} u'(r) \frac{x}{r} = \psi_p(u'(r)) \frac{x}{r}$. Também um cálculo

direto nos mostra que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\psi_p(u'(r)) \frac{x_i}{r} \right) \\ &= \frac{d}{dr} \psi_p(u'(r)) + \frac{N-1}{r} \psi_p(u'(r)) \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a equação (7.6) na seguinte forma radial:

$$-\left(\psi_p(u'(r)) + \frac{N-1}{r}\psi_p(u'(r))\right) = f(r)$$

que pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$-(r^{N-1}\psi_p(u'(r)))' = r^{N-1}f(r)$$

Como a solução $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ é radial devemos ter $u'(0) = 0$. Integrando de 0 a r obtemos:

$$-\psi_p(u'(r)) = \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{N-1} f(s) ds$$

donde obtemos:

$$-u'(r) = \psi_{p'}\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{N-1} f(s) ds\right).$$

Finalmente, como $u(R) = 0$, obtemos integrando de r a R :

$$u(r) = \int_r^R \psi_{p'}\left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{N-1} f(s) ds\right) d\theta.$$

Logo a única solução de 7.6 é dada por (7.7) nesse caso.

A. 4. Princípios da comparação e do máximo

Teorema 46 (*Princípio do Máximo Forte*) *Suponha que Ω seja conexo e que $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ satisfaça a seguinte desigualdade:*

$$-\Delta_p v \geq 0, \quad v \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Então ocorrem exatamente uma das seguintes possibilidades:

$$v \equiv 0 \text{ em } \Omega \text{ ou } v > 0 \text{ em } \Omega.$$

Prova. Para demonstrar o teorema acima precisaremos de uma desigualdade do tipo Harnack, cuja demonstração pode ser vista em [13]:

Lema 47 (*Desigualdade do tipo Harnack*) Suponha que $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ satisfaça

$$-\Delta_p v \geq 0, \quad v \geq 0 \text{ em } \Omega. \quad (7.8)$$

Seja $x_0 \in \Omega$, $\delta > 0$ com

$$\overline{B(x_0, 5\delta)} \subseteq \Omega \text{ e } s > 0$$

em que

$$s < \frac{N(p-1)}{N-p} \text{ se } p \leq N \text{ e } s \leq \infty \text{ se } p > N.$$

Então existe uma constante $c > 0$ que depende de N, p, s, Λ e δ tal que

$$\|v\|_{L^s(B(x_0, 2\delta))} \leq c\delta^{\frac{N}{p}} \inf_{B(x_0, \delta)} v.$$

A demonstração que apresentamos aqui do teorema 46 pode ser vista em [13].

Caso $v > 0$ em Ω não há o que demonstrar. Suponha que exista $x_0 \in \Omega$ tal que $v(x_0) = 0$ e defina

$$O = \{x \in \Omega : v(x) = 0\}$$

temos que O é não vazio e fechado em Ω por sua definição.

Como Ω é aberto existe $\delta > 0$ tal que $\overline{B(x_0, 5\delta)} \subset \Omega$. Pela desigualdade de Harnack temos que existem $c > 0$ e $s > 0$ tais que

$$\|v\|_{L^s(B(x_0, 2\delta))} \leq c\delta^{\frac{N}{p}} \inf_{B(x_0, \delta)} v.$$

Como $v \geq 0$ em Ω e $v(x_0) = 0$ temos que $\inf_{B(x_0, \delta)} v = 0$ e portanto

$$\int_{B(x_0, 2\delta)} |v(x)|^s dx = 0.$$

Uma vez que $v \geq 0$ é contínua temos que

$$v \equiv 0 \text{ em } B(x_0, 2\delta).$$

logo, temos que O é aberto em Ω . Segue que $O = \Omega$ pois Ω é conexo. ■

Teorema 48 (*Princípio da Comparação*) Suponha que $u_i \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ são tais que (no sentido fraco):

$$\begin{aligned} -\Delta_p u_1 &\leq \Delta_p u_2, & \text{em } \Omega \\ u_1 &\leq u_2, & \text{em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Então

$$u_1 \leq u_2 \text{ em } \Omega.$$

Prova. A prova que apresentamos aqui pode ser vista em [12].

Para simplificar a exposição, denotemos $h_i \in C(\Omega)$, $i = 1, 2$ tais que

$$-\Delta_p u_i = h_i.$$

Por hipótese temos que

$$h_1 - h_2 \leq 0 \text{ em } \Omega.$$

Considere $(u_1 - u_2)^+ = \max\{u_1 - u_2, 0\} \geq 0$. Como $u_i \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $u_1 \leq u_2$ em $\partial\Omega$ temos que

$$(u_1 - u_2)^+ \in W^{1,p}(\overline{\Omega})$$

e

$$(u_1 - u_2)^+ = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Assim:

$$(u_1 - u_2)^+ \in W_0^{1,p}(\overline{\Omega}).$$

Como

$$\nabla(u_1 - u_2)^+ = \begin{cases} \nabla(u_1 - u_2), & \text{se } u_1 > u_2 \\ 0, & \text{se } u_1 \leq u_2 \end{cases}$$

e $h_1 - h_2 \leq 0$ em Ω temos:

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int_{\Omega} (h_1 - h_2)(u_1 - u_2)^+ dx \\
&\quad \int_{\Omega} (|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2) \nabla (u_1 - u_2)^+ dx \\
&= \int_{u_1 > u_2} (|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2) \nabla (u_1 - u_2) dx.
\end{aligned}$$

Para concluir a prova utilizaremos o seguinte lema:

Lema 49 *Seja $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$H(x, y) = \begin{cases} (|y|^{p-2}y - |x|^{p-2}x)(y - x), & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Então

$$H(x, y) \geq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \text{ e } H(x, y) > 0, \text{ se } x \neq y$$

Prova. Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos, pelo lema acima que

$$\begin{aligned}
H(x, y) &= (|y|^{p-2}y - |x|^{p-2}x)(y - x) \\
&= |y|^p - |y|^{p-2} \langle y, x \rangle + |x|^p - |x|^{p-2} \langle x, y \rangle \\
&\geq |y|^p - |y|^{p-1} \langle x, y \rangle + |x|^p - |x|^{p-1} \langle x, y \rangle \\
&\geq (|y|^{p-1} - |x|^{p-1})(|x| - |y|)
\end{aligned}$$

Uma vez que a função $t \rightarrow t^{p-1}$ é estritamente crescente, temos que se $|x| \neq |y|$ então $|y|^{p-1} - |x|^{p-1}$ e $|x| - |y|$ ambos não nulos e possuem o mesmo sinal. Portanto $H(x, y) > 0$ se $x \neq y$ e o lema está demonstrado.

Utilizando o lema acima

$$0 \leq \int_{u_1 > u_2} (|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2) \nabla (u_1 - u_2) dx \leq 0.$$

logo

$$\int_{u_1 > u_2} (|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2) \nabla (u_1 - u_2) dx = 0.$$

Se denotarmos $\Omega_0 := \{x \in \Omega : u_1(x) > u_2(x)\}$ temos duas possibilidades

(i) Ω_0 é vazio ou

(ii) $\nabla u_1 = \nabla u_2$.

Temos que (ii) não ocorre, pois nesse caso teríamos $u_2 = u_1 + c$, em que c é uma constante. Como em $\partial\Omega_0$ temos $u_1 = u_2$ por continuidade segue que $c = 0$ e portanto $u_1 = u_2$ em Ω_0 o que contradiz $u_1 > u_2$. Segue que $\Omega_0 = \emptyset$ e o teorema está demonstrado ■.

A. 5. Existência de autovalores

Apresentamos nessa seção os principais resultados sobre existência e propriedades dos autovalores de $-\Delta_p$:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (7.9)$$

Teorema 50 *Existe uma sequência (λ_n, u_n) que verifica (7.9) tal que $\lambda_n > 0$ e $\lambda_n \rightarrow \infty$.*

Além disso, o menor autovalor, λ_1 , possui a seguinte caracterização variacional

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} |u|^p dx} : 0 \neq u \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx : u \in W_0^{1,p}(\Omega), \int_{\Omega} |u|^p dx = 1 \right\}. \end{aligned}$$

A demonstração do teorema acima pode ser vista em [29].

Um problema em aberto é saber se a sequência (λ_n) acima, construída em [29], contém todos os autovalores de $-\Delta_p$. Uma resposta parcial para essa questão foi dada para o caso $N = 1$ e para o caso radial.

São conhecidos os seguintes resultados a respeito do primeiro autovalor (veja [25]):

Teorema 51 *(Propriedades de λ_1)*

(i) *Se λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta_p$. Então toda primeira autofunção u_1 correspondente a λ_1 não muda de sinal em Ω , isto é $u_1 > 0$ ou $u_1 < 0$ em Ω .*

(ii) *λ_1 é simples, isto é, se u, v são autofunções associadas a λ_1 então existe $k \in \mathbb{R}^N$ tal que*

$$u = kv.$$

(iii) Se w é uma autofunção correspondente a $\lambda > 0, \lambda \neq \lambda_1$ então w muda de sinal em Ω .

(iv) λ_1 é isolado, isto é λ_1 é o único autovalor em $[0, a]$ para alguma $a > \lambda_1$.

O caso $p = 2$ possui uma propriedade bastante útil a respeito das autofunções que é enunciado a seguir.

Teorema 52 Quando $p = 2$, existe uma base ortonormal $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $L^2(\Omega)$, em que $u_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é uma autofunção correspondente a λ_k .

A demonstração do teorema acima pode ser vista em [15].

A. 6. Função Beta

A função beta, $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é definida da seguinte forma:

$$B(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt.$$

O teorema a seguir apresenta as principais propriedades da função beta. A demonstração dessas propriedades podem ser vistas em [5].

Teorema 53 (Propriedades da Função beta) Seja $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função gama clássica, isto é

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Então

$$(i) B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$(ii) \text{ Se } 0 < x < 1 \text{ então } B(x, 1-x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi x)}$$

A. 7. Alguns resultados sobre sen_p

Considere as funções

$$f(s) = \int_0^s \frac{dt}{\left(1 - \frac{t^p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}}, g(s) = \int_s^{\sqrt[p-1]{}} \frac{dt}{\left(1 - \frac{t^p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}}, h(s) = \int_0^s \frac{dt}{1 - \frac{t^p}{p-1}}$$

em que $f(s), g(s), h(s) \in [0, \frac{\pi_p}{2}]$.

Definimos as funções $\text{sen}_p, \text{cos}_p$ e tan_p como sendo, respectivamente, as inversas das funções acima (veja [26]) e assim, podemos escrever:

$$x = \int_0^{\text{sen}_p x} \frac{dt}{\left(1 - \frac{t^p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}}, x = \int_{\text{cos}_p x}^{\sqrt[p-1]{}} \frac{dt}{\left(1 - \frac{t^p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}} \text{ e } x = \int_0^{\text{tan}_p x} \frac{dt}{1 - \frac{t^p}{p-1}}$$

para $x \in [0, \frac{\pi_p}{2}]$.

Teorema 54 *São válidas as seguintes relações:*

$$\frac{d}{dx} \text{tan}_p x = 1 + \frac{\text{tan}_p^p x}{p-1}, \quad (7.10)$$

$$\frac{d}{dx} \text{tan}_p(x) = 1 + \frac{\text{tan}_p^p x}{p-1}, \quad (7.11)$$

$$\frac{\text{sen}_p^p x}{p-1} + \frac{\text{cos}_p^{p'} x}{p'-1} = 1, \quad (7.12)$$

$$\text{tan}_p x = \frac{\text{sen}_p x}{\sqrt[p-1]{(\text{cos}_p x)^{p'-1}}} = \frac{\text{sen}_p x}{\text{sen}_p' x} \quad (7.13)$$

para todo $x \in [0, \frac{\pi_p}{2}]$.

Prova. Para demonstrarmos (7.10), basta observamos que da regra de Leibnitz

$$x = \int_0^{\text{tan}_p x} \frac{dt}{1 - \frac{t^p}{p-1}}$$

implica que

$$1 = x = \frac{1}{1 - \frac{\text{tan}_p^p x}{p-1}} \frac{d}{dx} \text{tan}_p x.$$

Para demonstrar 7.12 e 7.13, faremos mudanças de variáveis adequadas nas integrais que definem as funções sen_p e tan_p .

Denotando $s = \text{sen}_p x$, podemos escrever

$$x = \int_0^s \frac{dt}{\left(1 - \frac{t^p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}}$$

Fazendo a mudança de variável

$$\frac{t^p}{p-1} + \frac{\tau^{p'}}{p'-1} = 1, \text{ temos } p' t^{p-1} dt + p \tau^{p'-1} d\tau = 0.$$

Denotando $k = \left[(p'-1) \left(1 - \frac{s^p}{p-1}\right)\right]^{\frac{1}{p'}}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{dt}{\left(1 - \frac{t^p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}} &= \int_{\sqrt[p']{p'-1}}^k \frac{-\frac{p\tau^{p'-1}}{p' t^{p-1}} d\tau}{\left(\frac{\tau^{p'}}{p'-1}\right)^{\frac{1}{p}}} \\ &= \int_k^{\sqrt[p']{p'-1}} \frac{p\tau^{p'-1}}{p' t^{p-1} \frac{\tau^{\frac{p'}{p}}}{\sqrt[p']{p'-1}}} d\tau. \end{aligned}$$

Vamos verificar que

$$\frac{p\tau^{p'-1}}{p' t^{p-1} \frac{\tau^{\frac{p'}{p}}}{\sqrt[p']{p'-1}}} = \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{\tau^{p'}}{p'-1}\right)\right]^{\frac{1}{p'}}}. \quad (7.14)$$

Como $p = \frac{p'}{p'-1}$, $\frac{p}{p'} = \frac{1}{p'-1}$ e $p-1 = \frac{p'}{p'-1} - 1 = \frac{1}{p'-1}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{p\tau^{p'-1}}{p' t^{p-1} \frac{\tau^{\frac{p'}{p}}}{\sqrt[p']{p'-1}}} &= \frac{p}{p'} \sqrt[p']{p'-1} \frac{\tau^{p'-1-\frac{p'}{p}}}{t^{p-1}} = \frac{\sqrt[p']{p'-1}}{p'-1} \frac{1}{t^{p-1}} \\ &= (q-1)^{\frac{1}{p}-1} \frac{1}{t^{p-1}} = \frac{1}{(q-1)^{\frac{p-1}{p}} t^{\frac{1}{p'-1}}} \\ &= \frac{1}{(q-1)^{\frac{1}{p'} t^{\frac{1}{p'-1}}}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela mudança de variável que fizemos acima temos,

$$t = (p-1)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{\tau^{p'}}{p'-1}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(p'-1)^{\frac{p'-1}{p'}}} \left(1 - \frac{\tau^{p'}}{p'-1}\right)^{\frac{p'-1}{p'}}$$

e daí

$$t^{\frac{1}{p'-1}} = \frac{1}{(p'-1)^{\frac{1}{p'}}} \left(1 - \frac{\tau^{p'}}{p'-1}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

De modo que obtemos

$$\frac{p\tau^{p'-1}}{p't^{p-1} \frac{\tau^{\frac{p'}{p}}}{\sqrt[p'-1]{p'}}} = \left(1 - \frac{\tau^{p'}}{p'-1}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

e (7.14) está verificada. Assim, podemos escrever

$$\int_0^s \frac{dt}{\left(1 - \frac{t^p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}} = \int_k^{\sqrt[p'-1]{p'}} \frac{d\tau}{\left(1 - \frac{\tau^{p'}}{p'-1}\right)^{\frac{1}{p'}}}$$

Por definição temos

$$\cos_p x = k = \left[(p'-1) \left(1 - \frac{s^p}{p-1}\right)\right]^{\frac{1}{p'}} = \left[(p'-1) \left(1 - \frac{\text{sen}_p^p x}{p-1}\right)\right]^{\frac{1}{p'}}$$

para todo $x \in [0, \frac{\pi_p}{2}]$, donde segue (7.12).

Para mostrar (7.13) observe que podemos escrever

$$x = \int_0^{\text{sen}_p x} \frac{dt}{\left(1 - \frac{t^p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}} = \sqrt[p'-1]{p'} \int_0^{\frac{\text{sen}_p x}{\sqrt[p'-1]{p'}}} \frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}}$$

Efetuando a mudança de coordenadas

$$t^p = \frac{\tau^p}{1 + \tau^p}, \tau^p = \frac{t^p}{1 - t^p}$$

temos

$$dt = \left(\frac{t}{\tau}\right)^{p+1} d\tau.$$

Denotando $m = \frac{\frac{\text{sen}_p x}{\sqrt[p'-1]{p'}}}{\left(1 - \frac{\text{sen}_p^p x}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}} = \frac{\frac{\text{sen}_p x}{\sqrt[p'-1]{p'}}}{\left(\frac{\cos_{p'}^p x}{p'-1}\right)^{\frac{1}{p}}}$ temos:

$$\begin{aligned} \sqrt[p'-1]{p'} \int_0^{\frac{\text{sen}_p x}{\sqrt[p'-1]{p'}}} \frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}} &= \sqrt[p'-1]{p'} \int_0^m \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^{p+1}}{\left(\frac{t^p}{\tau^p}\right)^{\frac{1}{p}}} d\tau = \sqrt[p'-1]{p'} \int_0^m \left(\frac{t}{\tau}\right)^p d\tau \\ &= \sqrt[p'-1]{p'} \int_0^m \frac{1}{1 + \tau^p} d\tau. \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos escrever:

$$x = \int_0^{\tan_p x} \frac{dt}{1 - \frac{t^p}{p-1}} = \sqrt[p]{p-1} \int_0^{\frac{\tan_p x}{\sqrt[p]{p-1}}} \frac{dt}{1 - t^p}.$$

De modo que:

$$\frac{\frac{\text{sen}_p x}{\sqrt[p]{p-1}}}{\left(\frac{\cos_{p'} x}{p'-1}\right)^{\frac{1}{p}}} = m = \frac{\tan_p x}{\sqrt[p]{p-1}}$$

e assim

$$\tan_p x = \frac{\text{sen}_p x}{\frac{\left(\cos_{p'} x\right)^{\frac{p'}{p}}}{(p'-1)^{\frac{1}{p}}}} = \frac{\text{sen}_p x}{(p-1)^{\frac{1}{p}} (\cos_{p'} x)^{p'-1}}.$$

e portanto (7.13) está demonstrada.

A. 7. 1. Série de potências para sen_p

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ tal que $a_0 = \alpha_0 = 1$ e $g(x) = f(x)^p$ então

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (p(n-k) - k) \alpha_k a_{n-k} \quad (7.15)$$

Veja [26].

Utilizando (7.15) obtemos uma fórmula de recorrência que nos fornece a expressão dos coeficientes da série de potências de x^p para \tan_p .

Procedendo formalmente, suponha que

$$\tan_p x = x + a_1 x^{p+1} + a_2 x^{2p+1} + a_3 x^{3p+1} + \dots = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{np} \quad (7.16)$$

e

$$\tan_p^p x = \left(x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{np} \right)^p = x^p \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{np} \quad (7.17)$$

em que $a_0 = 1$.

Assim:

$$\frac{d}{dx} \tan_p x = 1 + (p+1)a_1 x^p + (2p+1)a_2 x^{2p} + (3p+1)a_3 x^{3p} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (np+1)a_n x^{np}.$$

Por (7.10) temos que

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (np + 1)a_n x^{np} &= \sum_{n=0}^{\infty} (np + 1)a_n x^{np} = \frac{d}{dx} \tan_p x \\ &= 1 + \frac{\tan_p^p x}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1} x^p \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{np}, \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} \frac{1}{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{(n+1)p} &= \frac{1}{p-1} x^p \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{np} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (np + 1)a_n x^{np} = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)p + 1)a_{n+1} x^{(n+1)p} \end{aligned}$$

e portanto temos a seguinte relação entre a_n e α_n :

$$a_{n+1} = \frac{\alpha_n}{[(n+1)p + 1](p-1)}, \quad (7.18)$$

em que $\alpha_0 = a_0 = 1$.

Suponha que

$$\operatorname{sen}_p x = x [1 + b_1 x^p + b_2 x^{2p} + \dots] = x \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{np} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{np+1},$$

em que $b_0 = 1$, daí

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}_p x = b_0 + (p+1)b_1 x^p + (2p+1)b_2 x^{2p} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (np+1)b_n x^{np}.$$

Por (7.10) temos $\operatorname{sen}_p x = \tan_p x \frac{d}{dx} \operatorname{sen}_p x$ e assim:

$$\begin{aligned} x \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{kp} &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{kp+1} \\ &= \left(x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{np} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} (mp+1)b_m x^{mp} \right) \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (mp+1)a_n b_m x^{(n+m)p}. \end{aligned}$$

Donde temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{kp} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (mp+1)a_n b_m x^{(n+m)p}.$$

Daí:

$$b_k = \sum_{i=0}^k (ip + 1)a_{k-i}b_i = \sum_{i=0}^{k-1} (ip + 1)a_{k-i}b_i + (kp + 1)b_k$$

e obtemos a seguinte relação de recorrência:

$$b_k = -\frac{1}{kp} \sum_{i=0}^{k-1} (ip + 1)a_{k-i}b_i. \quad (7.19)$$

Podemos, portanto, escrever o seguinte algoritmo que nos fornece todos os b_i 's com $1 \leq i \leq n$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0, \alpha_0, b_0 = 1; \\ \text{Enquanto } i \leq n \text{ faça} \\ a_i = \frac{\alpha_{i-1}}{[ip+1](p-1)}, \\ \alpha_i = \frac{1}{i} \sum_{k=0}^{i-1} (p(i-k) - k) \alpha_k a_{i-k}, \\ b_i = -\frac{1}{ip} \sum_{k=0}^{i-1} (kp + 1)a_{i-k}b_k. \end{array} \right.$$

A. 8. Algoritmo para o quadrado

Apresentaremos, de forma sintética, nessa seção um algoritmo que permite obter uma solução aproximada para o problema de Dirichlet (7.6):

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_p u = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (7.20)$$

quando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um quadrado, utilizando um esquema de volume finitos proposto em [4].

Dividimos o quadrado Ω em volumes de controle quadrangulares κ , cujo lado é Δx e x_κ é o centro do volume de controle κ . Seja \mathbb{T} o conjunto de volumes de controle. Além disso introduzimos a seguinte notação:

- κ^* , dito volume de controle dual, é o retângulo cujos vértices são os x_κ . Aqui é necessário introduzir pontos fantasmas próximos ao bordo, de modo que o conjunto dos κ^* cubra \mathbb{T} .

- $m(\kappa) = \Delta x^2$ é a medida de κ ;
- ν_κ é o vetor unitário normal apontando para fora de κ ;
- $V_\kappa := \{\kappa^* : m(\kappa \cap \kappa^*) \neq 0\}$ é o conjunto dos quatro volumes de controle dual em volta de κ .
- Dada uma função u , sua discretização em \mathbb{T} será denotada por u^\top , isto é $u^\top = (u_\kappa)_\kappa$
- Dado κ^* definimos a projeção T_{κ^*} , que associa cada $u^\top \in \mathbb{R}^\top$ a seus valores nos quatro volumes de controle em volta de κ^* , isto é

$$T_{\kappa^*}(u^\top) := (u_{1,\kappa^*}^\top, u_{2,\kappa^*}^\top, u_{3,\kappa^*}^\top, u_{4,\kappa^*}^\top)$$

em que u_{i,κ^*}^\top é contado no sentido anti-horário começando do canto inferior esquerdo de κ^* ;

A. 9. Construção do esquema de volumes finitos

Um esquema de nove pontos é proposto para fornecer uma solução aproximada de (7.6). Esse esquema é obtido integrando a equação (7.6) em cada volume de controle $\kappa \in \mathbb{T}$. Se u é a solução do problema (7.6) então, pelo teorema da divergência:

$$\int_\kappa f(z) dz = \int_\kappa -\Delta_p(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) dz = \int_{\partial\kappa} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nu_\kappa ds \\ \sum_{\kappa^* \in V_\kappa} \left(- \int_{\sigma_{\kappa,\kappa^*}^h} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nu_\kappa ds - \int_{\sigma_{\kappa,\kappa^*}^v} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nu_\kappa ds \right),$$

em que $\sigma_{\kappa,\kappa^*} = \partial\kappa \cap \kappa^*$, h e v indicam que tomamos a parte horizontal e vertical respectivamente.

No sentido de discretizar as integrais acima, supomos que

$$|\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \approx q_{\kappa^*}(T_{\kappa^*}(u^\top))$$

em que $q_{\kappa^*} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma quadrática que aproxima $|\nabla u|^2$.

Supõe-se ainda que existam duas formas lineares que aproximam as integrais em $\sigma_{\kappa, \kappa^*}^h$

e $\sigma_{\kappa, \kappa^*}^v$:

$$A_{\kappa, \kappa^*}^h(T_{\kappa^*}(u^\top)) \approx - \int_{\sigma_{\kappa, \kappa^*}^h} \nabla u \cdot \nu_\kappa ds$$

e

$$A_{\kappa, \kappa^*}^v(T_{\kappa^*}(u^\top)) \approx - \int_{\sigma_{\kappa, \kappa^*}^v} \nabla u \cdot \nu_\kappa ds.$$

Assim, se denotarmos

$$f_\kappa = \frac{1}{m(\kappa)} \int_\kappa f(z) dz$$

e

$$a_{\kappa, \kappa^*}(u^\top) = q_{\kappa^*}(T_{\kappa^*}(u^\top))^{\frac{p-2}{2}} (A_{\kappa, \kappa^*}^h(T_{\kappa^*}(u^\top)) + A_{\kappa, \kappa^*}^v(T_{\kappa^*}(u^\top))),$$

temos:

$$m(\kappa) f_\kappa = \sum_{\kappa^* \in V_\kappa} a_{\kappa, \kappa^*}(u^\top) := a_\kappa(u^\top).$$

Dessa forma, definindo $a : \mathbb{R}^\top \rightarrow \mathbb{R}^\top$ por $a(u^\top) = (a_\kappa(u^\top))_{\kappa \in \mathbb{T}}$, obtemos o seguinte sistema não linear:

$$a(u^\top) = (a_\kappa(u^\top))_{\kappa \in \mathbb{T}} = (m(\kappa) f_\kappa)_{\kappa \in \mathbb{T}} \quad (7.21)$$

No esquema de volumes finitos, é de se esperar que a solução do sistema (7.21) seja uma solução aproximada para o problema (7.6). Observe que o sistema (7.21) é não linear o que dificulta sua resolução.

A. 9. 1. Funcional discretizado

Sabemos que o mínimo do funcional $J : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u(z)|^p dz - \int_\Omega f(z) u(z) dz \quad (7.22)$$

é a única solução de (7.6). Efetuamos as seguintes aproximações

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u(z)|^p dz &= \sum_{\kappa \in \mathbb{T}} \int_\kappa |\nabla u(z)|^p dz = \sum_{\kappa \in \mathbb{T}} \int_{\partial\kappa} (-\operatorname{div} |\nabla u(z)|^{p-2} \nabla u(z)) u(z) dz \\ &\approx \sum_{\kappa \in \mathbb{T}} u_\kappa \int_{\partial\kappa} (-\operatorname{div} |\nabla u(z)|^{p-2} \nabla u(z)) \approx \sum_{\kappa \in \mathbb{T}} a_\kappa(u^\top) u_\kappa. \end{aligned}$$

Assim, aproximamos

$$\int_{\Omega} |\nabla u(z)|^p dz \approx \sum_{\kappa \in \mathbb{T}} a_{\kappa}(u^{\top}) u_{\kappa}.$$

Por outro lado, efetuando a seguinte aproximação

$$\int_{\Omega} f(z)u(z)dz = f_{\kappa}u_{\kappa}m(\kappa)$$

temos a seguinte discretização para J :

$$J(u) \approx \frac{1}{p} \sum_{\kappa \in \mathbb{T}} a_{\kappa}(u^{\top}) u_{\kappa} - \sum_{\kappa \in \mathbb{T}} \int_{\Omega} f(z)u(z)dz = f_{\kappa}u_{\kappa}m(\kappa)$$

e definimos

$$J_{\mathbb{T}}(u^{\top}) = \frac{1}{p} \sum_{\kappa \in \mathbb{T}} a_{\kappa}(u^{\top}) u_{\kappa} - \sum_{\kappa \in \mathbb{T}} f_{\kappa}u_{\kappa}m(\kappa). \quad (7.23)$$

No sentido de encontrar uma solução aproximada para (7.6) é de se esperar que os pontos críticos do funcional $J_{\mathbb{T}}$ sejam soluções de (7.21)¹. Afirmamos que (7.21) é uma equação de Euler-Lagrange para os pontos críticos de $J_{\mathbb{T}}$ se e só se

$$\begin{aligned} a : \mathbb{R}^{\mathbb{T}} &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{T}} \\ u^{\top} &\rightarrow (a_{\kappa}(u^{\top}))_{\kappa \in \mathbb{T}} \end{aligned}$$

é simétrica em cada ponto, isto é

$$da(u^{\top})^t u^{\top} = da(u^{\top}) u^{\top}.$$

De fato, como

$$J_{\mathbb{T}}(u^{\top}) = \frac{1}{p} \sum_{\kappa \in \mathbb{T}} a_{\kappa}(u^{\top}) u_{\kappa} - \sum_{\kappa \in \mathbb{T}} \int_{\Omega} f(z)u(z)dz = f_{\kappa}u_{\kappa}m(\kappa)$$

temos

$$\frac{\partial J}{\partial u_L} = \frac{1}{p} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{T}} \frac{\partial a_{\kappa}}{\partial u_L} u_{\kappa} + a_L(u^{\top}) \right) - m(L)f_L$$

e assim

$$\nabla J_{\mathbb{T}} = \frac{1}{p} (da(u^{\top}))^t u^{\top} + \frac{1}{p} a(u^{\top}) - (m(\kappa)f_{\kappa})_{\kappa \in \mathbb{T}} \quad (7.24)$$

¹Observe que as soluções de (7.6) surgem de um problema de minimização. É natural procurar por um esquema que preserva essa propriedade.

Por outro lado, por definição a é homogêneo de grau $p - 1$, isto é

$$a(\alpha u^\top) = \alpha^{p-1} a(u^\top),$$

Derivando em relação a α obtemos

$$da(\alpha u^\top) u^\top = (p - 1) \alpha^{p-2} a(u^\top)$$

e fazendo $\alpha = 1$ obtemos

$$da(u^\top) u^\top = (p - 1) a(u^\top).$$

Agora, assumamos que

$$da(u^\top)^t u^\top = da(u^\top) u^\top = (p - 1) a(u^\top). \quad (7.25)$$

Vamos mostrar que os pontos críticos de J_\top são soluções de (7.21). De (7.24) e (7.25) temos:

$$\begin{aligned} \nabla J_\top (u^\top) &= \frac{1}{p} (p - 1) a(u^\top) + \frac{1}{p} a(u^\top) - (m(\kappa) f_\kappa)_{\kappa \in \top} \\ &= a(u^\top) - \frac{1}{p} a(u^\top) + \frac{1}{p} a(u^\top) - (m(\kappa) f_\kappa)_{\kappa \in \top} \\ &= a(u^\top) - (m(\kappa) f_\kappa)_{\kappa \in \top}. \end{aligned}$$

Logo, os pontos críticos de J_\top são soluções de (7.21). Por outro lado, se u^\top é solução de (7.21) então temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla J_\top = \frac{1}{p} (da(u^\top))^t u^\top + \frac{1}{p} a(u^\top) - (m(\kappa) f_\kappa)_{\kappa \in \top} \\ &= \frac{1}{p} (da(u^\top))^t u^\top + \frac{1}{p} a(u^\top) - a(u^\top), \end{aligned}$$

o que implica que

$$(da(u^\top))^t u^\top = (p - 1) a(u^\top) = da(u^\top) u^\top$$

e a afirmação está demonstrada.

Como definimos anteriormente, temos que

$$a_k(u^\top) = \sum_{\kappa^* \in V_\kappa} a_{\kappa, \kappa^*}(u^\top) = q_{\kappa^*}(T_{\kappa^*}(u^\top))^{\frac{p-2}{2}} (A_{\kappa, \kappa^*}^h(T_{\kappa^*}(u^\top)) + A_{\kappa, \kappa^*}^v(T_{\kappa^*}(u^\top))),$$

em que q_{κ^*} é uma forma quadrática e A_{κ, κ^*}^h e A_{κ, κ^*}^v são formas lineares. Denote B_{κ^*} como sendo uma matriz simétrica 4×4 tal que

$$q_{\kappa^*}(V) = (B_{\kappa^*}V, V)$$

e A_{κ^*} como sendo uma matriz 4×4 tal que

$$A_{\kappa^*}(V) = \begin{pmatrix} (A_{\kappa_1, \kappa^*}^h + A_{\kappa_1, \kappa^*}^v) V \\ (A_{\kappa_2, \kappa^*}^h + A_{\kappa_2, \kappa^*}^v) V \\ (A_{\kappa_3, \kappa^*}^h + A_{\kappa_3, \kappa^*}^v) V \\ (A_{\kappa_4, \kappa^*}^h + A_{\kappa_4, \kappa^*}^v) V \end{pmatrix}$$

em que $\kappa_i, i = 1, 2, 3, 4$ são os volumes de controle que interceptam κ^* e a contagem é feita no sentido anti-horário começando no canto inferior esquerdo. Podemos portanto escrever

$$a_k(u^\top) = \sum_{\kappa^* \in V_\kappa} (B_{\kappa^*}(T_{\kappa^*}(u^\top)), T_{\kappa^*}(u^\top))^{\frac{p-2}{2}} \pi_{\kappa^*}(A_{\kappa^*}(T_{\kappa^*}(u^\top))), \quad (7.26)$$

em que π_{κ_i} é a projeção

$$\pi_{\kappa_i} \begin{pmatrix} (A_{\kappa_1, \kappa^*}^h + A_{\kappa_1, \kappa^*}^v) V \\ (A_{\kappa_2, \kappa^*}^h + A_{\kappa_2, \kappa^*}^v) V \\ (A_{\kappa_3, \kappa^*}^h + A_{\kappa_3, \kappa^*}^v) V \\ (A_{\kappa_4, \kappa^*}^h + A_{\kappa_4, \kappa^*}^v) V \end{pmatrix} = (A_{\kappa_i, \kappa^*}^h + A_{\kappa_i, \kappa^*}^v)(V)$$

O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser vista em [4, Proposição 2.5], relaciona as matrizes A_{κ^*} e B_{κ^*} para que (7.21) seja uma equação de Euler-Lagrange para os pontos críticos de J_\top .

Teorema 55 *Seja $a : \mathbb{R}^\top \rightarrow \mathbb{R}^\top$ definido em (7.21). Temos que $da(u^\top)$ é simétrica em cada ponto se e só se uma das duas condições são satisfeitas:*

- Se $p = 2$ e A_{κ^*} é simétrica para todo κ^* ;

- Se $p \neq 2$ e para qualquer κ^* tem-se

$$A_{\kappa^*} = m(\kappa^*)B_{\kappa^*}.$$

No nosso caso, utilizamos o esquema proposto quando Ω é um quadrado. Uma escolha adequada para a matriz A_{κ^*} (veja [4]), é

$$A_{\kappa^*} = A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

Trabalhamos com volumes de controle quadrangulares de lado Δx e pelo Teorema 55 temos que

$$B_{\kappa^*} = B = \frac{1}{\Delta x^2} A.$$

O próximo teorema relaciona as soluções de (7.21) e o ponto de mínimo de J_{\top} (veja [4, Teorema 2.12])

Teorema 56 *Sejam A e B as matrizes definidas acima. Então o funcional discretizado J_{\top} possui um único ponto de mínimo e o sistema (7.21) possui uma única solução u^{\top} , que é o ponto de mínimo de J_{\top} .*

A. 9. 2. Encontrando a solução aproximada no quadrado

Para encontrar a solução do sistema (7.21), pelo teorema (56) basta que encontremos o único ponto de mínimo do funcional J_{\top} . Para isso utilizamos, como sugerido em [4], o Método do Gradiente Conjugado Não Linear de Polak-Ribière (veja, por exemplo [32]).

Dada uma função $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ que possui um ponto de mínimo, esse método consiste basicamente em, após um chute inicial x^0 , construir uma sequência de iterações $x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$ que satisfazem

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k)$$

de tal modo que x^k convirja para o ponto de mínimo de f . Para gerar x^{k+1} a partir de x^k precisamos de duas coisas:

1. Uma direção (um vetor) de busca que vamos denotar por p_k
2. Um avanço de comprimento específico na direção de p_k , isto é, um escalar α_k e denotamos

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k.$$

Como estamos interessados em chegar no ponto de mínimo de f escolhemos α_k como sendo o ponto de mínimos de

$$f(x^k + \alpha p_k).$$

O Método do Gradiente Conjugado Não Linear de Polak-Ribière propõe uma escolha adequada para a direção de busca p_k . O erro é dado como sendo

$$e^k = |r^k|, \text{ em que, } r^k = -\nabla f(x^k).$$

Descrevemos o algoritmo deste método abaixo: Dada uma tolerância ϵ , dê um chute inicial x^0 e defina $p^0 = r^0 = -\nabla f(x^0)$

Feito isso, enquanto $e_k > \epsilon$:

1. Encontre α_k tal que $f(x^k + \alpha p^k) = \min_{\alpha} f(x^k + \alpha p^k)$;
2. $x^{k+1} = x^k + \alpha_k p_k$;
3. $r^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1})$
4. compute $\beta^{k+1} = \max \left\{ \frac{(r^{k+1}, r^{k+1} - r^k)}{(r^k, r^k)}, 0 \right\}$;
5. $p^k = r^{k+1} + \beta^{k+1} r^k$;
6. $e_k = |r^k|$;
7. volte no passo 1.

Utilizando o algoritmo acima encontramos o ponto de mínimo de J_{\top} que é a solução de (7.21).

Observação: No passo 1 precisamos encontrar α que minimiza a função

$$g(\alpha) = f(x + \alpha p) \quad (7.28)$$

para x e p fixados.

Após algumas tentativas utilizando métodos que encontram numericamente soluções de equações, como método da bisseção e o método das secantes, optamos por utilizar o Método de Pertubação da Homotopia proposto por Xilong Feng e Yinnian em [16] que possui uma convergência mais rápida. O algoritmo para encontrar uma raiz da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é o seguinte:

Dado um chute inicial x_0 e um Δx ,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2\Delta x f(x_n)}{f(x_n + \Delta x) - f(x_n - \Delta x)} - \frac{4\Delta x f(x_n)^2 (f(x_n + \Delta x) + f(x_n - \Delta x) - 2f(x_n))}{(f(x_n + \Delta x) - f(x_n - \Delta x))^3}$$

Utilizamos o algoritmo acima para encontrar a solução para a equação $g'(\alpha) = 0$.

A. 9. 3. Estimativas para o erro

Nessa seção apresentaremos as estimativas para o erro quando a solução u do problema (7.6) está no espaço $W^{2,p}(\Omega)$. Para isso, foi definido em [4] uma norma adequada em \mathbb{R}^{\top} .

Para qualquer $u^{\top} \in \mathbb{R}^{\top}$ e qualquer volume de controle dual κ^* , denotamos $\delta_i^{\kappa^*}(u^{\top})$ como sendo o seguinte quociente diferencial:

$$\delta_i^{\kappa^*}(u^{\top}) = \frac{u_{i+1, \kappa^*}^{\top} - u_{i, \kappa^*}^{\top}}{\Delta x}, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, 4\}.$$

Observe que o quociente definido acima é tal que $\delta_1^{\kappa^*}$ e $-\delta_3^{\kappa^*}$ são aproximações para $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\delta_2^{\kappa^*}$ e $-\delta_4^{\kappa^*}$ são aproximações para $\frac{\partial}{\partial y}$.

Definição 57 Para qualquer $u^{\top} \in \mathbb{R}^{\top}$ qualquer κ^* , introduzimos uma aproximação para $|\nabla u|$ em κ^* por

$$|u_{1, \kappa^*}^{\top}| = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \delta_i^{\kappa^*}(u^{\top}) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.29)$$

e definimos a norma discreta em $W_0^{1,p}$ de u^\top por

$$\|u^\top\|_{1,p,\top} = \left(\sum_{\kappa^* \in \top^*} m(\kappa^* \cap \Omega) |u_{1,\kappa^*}^\top|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

A verificação que $\|\cdot\|_{1,p,\top}$ é uma norma em \mathbb{R}^\top segue imediatamente da desigualdade de Minskovski discreta:

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observe que (7.29) justifica a escolha da matriz A em (7.27) da forma quadrática q_{κ^*} que nos fornece uma aproximação para

$$|\nabla u|^2 \approx |u_{1,\kappa^*}^\top|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \delta_i^{\kappa^*} (u^\top).$$

Se denotarmos u_{i,κ^*}^\top simplesmente por u_i , obtemos, efetuando-se os cálculos necessários, que

$$\begin{aligned} |u_{1,\kappa^*}^\top|^2 &= \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \\ &= q_{\kappa^*} (u^\top). \end{aligned}$$

Finalmente, o teorema a seguir (veja [4, Teorema 3.1]) fornece uma estimativa para o erro entre a solução de (7.6) e a solução do sistema (7.21)

Teorema 58 *Assuma que \bar{u} , solução do problema (7.6), seja tal que $\bar{u} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ e seja u^\top solução do sistema não linear (7.21), então*

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^\top - u^\top\|_{1,p,\top} &\leq Ch^{p-1} \|\bar{u}\|_{W^{2,p}}^{p-1} \|f\|_{L^{p'}}^{\frac{2-p}{p-1}}, \text{ se } 1 < p < 2. \\ \|\bar{u}^\top - u^\top\|_{1,p,\top} &\leq Ch \|\bar{u}\|_{W^{2,p}} + Ch^{\frac{1}{p-1}} \|\bar{u}\|_{W^{2,p}}^{\frac{3p-4}{p(p-1)}} \|f\|_{L^{p'}}^{\frac{(p-2)^2}{p(p-1)^2}}, \text{ se } p > 2. \end{aligned}$$

em que h é o máximo dos diâmetros de κ . No caso do quadrado, temos que h é igual a $\sqrt{2}\Delta x$.

Do teorema acima, observamos que se $h \rightarrow 0$ então $\bar{u}^\top \rightarrow u^\top$.

Referências Bibliográficas

- [1] ALLEGRETTO, W. ; HUANG Y. X. *A Picone's identity for the p -Laplacian and applications*. *Nonlinear Analysis*, **32** (1998), 819-830.
- [2] ANANE A. *Simplicité et isolation de la première valeur propre du p -laplacien avec poids*. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, **305** (1987), 725-728.
- [3] ANDERSON G. D. ; VAMANAMURTHY M. K. ; VUORINEN M. *Inequalities for quasiconformal mappings in space*. *Pacific J. Math.*, **160** (1993), 1-18.
- [4] ANDREIANOV B. ; BOYER, F. ; HUBERT F. *Finite volume schemes for the p -Laplacian on cartesian meshes*, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **38** (2004), n. 6, 931-959.
- [5] ARFKEN, G. *Mathematical methods for physicists*. Nova York: Academic Pr., 1985.
- [6] BIEZUNER, R. J. ; ERCOLE, G. ; MARTINS E. M. *Computing the first eigenvalue of the p -Laplacian via the inverse power method*. *Journal of Functional Analysis*, **160** (2009), 243-270.
- [7] BIEZUNER, R. J. ; ERCOLE, G. ; MARTINS E. M. *Computing the \sin_p function via the inverse power method*, submetido.

- [8] BINDING, P. et al. *Basis properties of eigenfunctions of the p -Laplacian*. Proc. Amer. Math. Soc. 134, **12** (2006), 3487-1430.
- [9] BOGNÀR, G. *Estimation on the first eigenvalue for some nonlinear Dirichlet eigenvalue problems*. Nonlinear Analysis (no prelo).
- [10] BOGNÁR, G. ; SZABÓ, T. *Solving nonlinear eigenvalue problems by using p -version of FEM*. Computers and Mathematics with Applications, **46** (2003), 57-68.
- [11] BROWN, B. M. ; REICHEL, W. *Sturm–Liouville type problems for the p -Laplacian under asymptotic non-resonance conditions*. J. Differential Equations **156** (1999), 50-70.
- [12] BUENO, H. ; ERCOLE, G. ; ZUMPANO A. *Positive solutions for the p -Laplacian and bounds for its first eigenvalue*. Advanced Nonlinear Studies **9** (2009), 313-338.
- [13] DAMASCELLI, L. *Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci, **26** (1998), n. 4, 689-707.
- [14] DRÁBEK, P. ; GIRG, P. ; F. MANÁSEVICH, R. *Generic Fredholm alternative-type results for the one dimensional p -Laplacian*. Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, **8** (2001), 285-298.
- [15] EVANS, L. *Partial differential equations*. Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1998.
- [16] FENG, X. ; HE, Y. *High order iterative methods without derivatives for solving nonlinear equations*. Applied Mathematics and Computation **186** (2007), 1617-1623.

- [17] GARCÍA AZORERO, J. P. ; PERAL ALONSO I. *Existence and nonuniqueness for the p -Laplacian: nonlinear eigenvalues*. Commun. in Partial Differential Equation, **12**, (1987), 1389-1430.
- [18] GILBARG, D. ; TRUNDINGER, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin: Springer-Verlag, 1983, 2^a edição.
- [19] GUEDDA, M. ; VERON, L. *Bifurcation phenomena associated to the p -Laplace operator*. Transactions of the American Mathematical Society, **1** (1998), 419–431.
- [20] KAWOHL, B ; FRIDMAN, V. *Isoperimetric estimates for the first eigenvalue of the p -Laplace operator and the Cheeger constant*. Comm. Math. Univ. Carol. **44** (2003), 659-667.
- [21] LEFTON, L. ; WEI, D. *Numerical approximation of the first eigenpair of the p -Laplacian using finite elements and the penalty method*. Numer. Funct. Anal. Optim. **18** (1997), no. 3-4, 389-399.
- [22] LI, P. ; YAU S. T. *On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem*. Comm. Math. Phys. **88** (1983), 309-318.
- [23] LIEBERMAN, G. M. *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*. Nonlinear Analistis. **12** (1988), no. 3-4, 1203-1219.
- [24] LINDQVIST, P. *On a nonlinear eigenvalue problem*. In: Fall School in Analysis, Univ. JyvÄaskylÄa, Jyväskylä Math. Inst. **68**, (1995), 33-54.
- [25] LINDQVIST, P. *On the equation $-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$* . Proceedings of the American Mathematical Society, **109**, no. 01, (1990), 157-164.

- [26] LINDQVIST, P. *Some remarkable sine and cosine functions*. Ricerche di Matematica, **2** (1995), 269-290.
- [27] MANÁSEVICH, R. F. ; TAKÁČ,P. *On the Fredholm alternative for the p -Laplacian in one dimension*. Proc. London Math Soc., **84** (2002), 324-342.
- [28] ÔTANI, M. *A remark on certain nonlinear elliptic equations*. Proceedings of the Faculty of Science, Tokay University, **19** (1984), 23-28.
- [29] PERAL ALONSO, I. *Multiplicity of Solutions for the p -Laplacian*. In: Second school of nonlinear functional analysis and applications to differential equation. Miramare-Trieste: International center for theoretical physics, 21 de abril - 9 de maio. 1997.
- [30] PINO, M. del ; DRÁBEK, P. ; MANÁSEVICH, R. *The Fredholm alternative at the first eigenvalue for the one dimensional p -Laplacian*. Journal of Differential Equations, **151** (1999), 386-419.
- [31] RUIZ, D. *A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems*. Journal of Differential Equation, **199** (2004), 96-114.
- [32] SHI, Z. ; SHEN, J. *Convergence of the Polak-Ribière-Polyak conjugate gradient method*. Nonlinear Analysis, **66** (2007), 1428-1441.
- [33] TOLKSDORF, P. *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*. Nonlinear Analystis, **51** (1984), 126-150.
- [34] WATKINS, D. S. *Fundamentals of matrix computations*. Nova York: John wiley, 2002, 2^a Edição.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)