



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

SUBTRAÇÃO MÍNIMA PARA SISTEMAS COMPETITIVOS  
DO TIPO LIFSHITZ

por

**Messias Vilbert de Souza Santos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

**Banca Examinadora:**

Prof. Marcelo de Moura Leite (Orientador-UFPE)  
Prof. Renê Rodrigues Montenegro Filho (DF - UFPE)  
Prof. Paulo Teotônio Sobrinho (IF - USP)

Recife - PE, Brasil  
Maio - 2010

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Santos, Messias Vilbert de Souza.

Subtração mínima para sistemas competitivos do tipo Lifshitz. / Messias Vilbert de Souza Santos. - Recife: O Autor, 2010.

xi, 92 folhas: il. fig.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Física, 2010.

Inclui bibliografia, apêndice e glossário.

1. Mecânica estatística. 2. Teoria de campos (Física). 3. Grupo de renormalização. 4. Fenômenos críticos. I. Título.

530.13

CDD (22.ed.)

FQ 2010-36



Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Física – CCEN  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil  
Fone (+ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (+ 55 81) 3271-0359  
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: [posgrad@df.ufpe.br](mailto:posgrad@df.ufpe.br)

---

## Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

---

**Messias Vilbert de Souza Santos**

### SUBTRAÇÃO MÍNIMA PARA SISTEMAS COMPETITIVOS DO TIPO LIFSHITZ


A Banca Examinadora composta pelos Professores Marcelo de Moura Leite (Presidente e Orientador), Renê Rodrigues Montenegro Filho, ambos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco e Paulo Teotônio Sobrinho, do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, consideram o candidato:

Aprovado

Reprovado

Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em sete de maio de dois mil e dez.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Marcelo de Moura Leite  
Presidente e Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Renê Rodrigues Montenegro Filho

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Paulo Teotônio Sobrinho

*A Deus, a minha mãe e a minha namorada.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, presente imerecido, e por Ele nunca me deixar só, mesmo nos momentos em que eu, limitado como sou, não consegui enxergá-lo. A Ele toda a glória.

Agradeço a minha mãe, pois sei que o esforço de sua mão e o suor de seu rosto permitiram que eu pudesse sonhar e realizar o que ela mesmo não pôde. Beta, você é a mulher mais forte e responsável que eu conheço.

Agradeço a Flávia, minha amada, com quem eu dividi todas as alegrias e tristezas desde o tempo da graduação. Obrigado por sonhar junto comigo, estaremos também juntos nas realizações. Agradeço também por sua ajuda na revisão gramatical e pelas dicas pertinentes a esse trabalho. Agradeço aos seus pais e seu irmão, por me tratarem como da família. Obrigado a todos vocês.

Agradeço também aos meus irmãos, pois sei que na hora da necessidade vocês estarão lá pra me apoiar.

Quero agradecer ao Prof. Marcelo de M. Leite, meu incansável orientador, por sua paciência, ética e seriedade em me mostrar o maravilhoso caminho da ciência, assim como pelos seus conselhos para a vida. Espero que um dia eu possa passar para alguém o que ele passou para mim.

Meus sinceros agradecimentos a Sidney Gregório, o “Salty”, por sua amizade ímpar e por ele ter me dado condições de realizar esse trabalho com mais facilidade, emprestando-me, por todos esses meses, o seu próprio computador. Ney, eu não tenho como retribuir o que você fez, posso apenas pedir que Deus o abençoe ricamente, esperando que você seja realmente feliz.

Ao meu amigo Marcone Jr., por sua dedicação em me ajudar. Sei que sem o seu auxílio durante todos esses anos, esclarecendo-me sobre as aparentes obscuridades matemáticas, eu não seria capaz de realizar esse trabalho. Marcone, você é genial.

Às minhas amigas, Danielle e Mylena, que sempre estiveram prontas a me ajudar. O carinho e a amizade de vocês por mim chega a ser emocionante, nossa convivência me tornou uma pessoa melhor e mais tolerante. Obrigado.

Agradeço aos meus queridos amigos: Thiago Sobral, Eduardo, Rafael, Tiago Nunes, Eliasibe, José Borba, Dibartolomei, Claudio e Fábio Novaes, vocês tornaram o meu tempo no Departamento de Física muito mais válido, engraçado e produtivo.

Agradeço também a Fábio por sua ajuda com a formatação do Latex. Muito obrigado.

Ao colega Arlan da Silva Ferreira, por ele ter, deliberadamente, se oferecido para construir os gráficos dos expoentes críticos. Arlan, você só veio somar nesse departamento.

Agradeço a todos os funcionários e professores do DF, que de alguma maneira contribuíram para a minha formação.

Agradeço também ao CNPQ pelo apoio financeiro, sem o qual esse trabalho não seria possível.

*Você não sabe o quanto eu caminhei pra chegar até aqui. Percorri milhas  
e milhas antes de dormir; eu nem cochilei. Os mais belos montes escalei;  
nas noites escuras de frio chorei.*

—MÚSICA: ESTRADA (CIDADE NEGRA)



## RESUMO

Sistemas competitivos arbitrários do tipo Lifshitz apresentam diversos eixos de competição e podem ser tratados pelo modelo *CECI*, que é o caso mais geral dentre os modelos que exibem o ponto de Lifshitz como característica. Para formular o problema das transições de fase nesses exemplos de sistemas complexos, introduzimos uma técnica de teoria de campo escalar de massa nula e aplicamos o método de subtração mínima, como meio de renormalização, para calcular, perturbativamente, os expoentes críticos do modelo *CECI*, tanto no caso anisotrópico, quanto no caso isotrópico. Para o caso isotrópico desse modelo, conseguimos também calcular os expoentes críticos exatamente até  $\mathcal{O}(\epsilon_n^2)$  (até  $\mathcal{O}(\epsilon_n^3)$  para a dimensão anômala  $\eta_n$ ), o que nos permitiu por a prova a aproximação realizada nos outros casos. É importante frisar que o cálculo dos expoentes críticos por subtração mínima para o caso isotrópico exato do modelo *CECI* é a novidade trazida por este trabalho.

**Palavras-chave:** *Subtração mínima, expoentes críticos, ponto de Lifshitz, modelo CECI.*

## ABSTRACT

Competitive systems of arbitrary Lifshitz type have different axes of competition and can be treated by the *CECI* model, which is the most general case among the models that exhibit a Lifshitz point critical behavior. In order to formulate the problem of phase transitions in these examples of complex systems, we introduce a technique for scalar field theory of zero mass and apply the method of minimal subtraction as a means of renormalization to calculate perturbatively the critical exponents of the *CECI* model for the anisotropic, as well as in the isotropic case. For the isotropic case of this model, we also calculate the critical exponents exactly up to  $\mathcal{O}(\epsilon_n^2)$  (up to  $\mathcal{O}(\epsilon_n^3)$  for the anomalous dimension  $\eta_n$ ), which allowed us to test the approach undertaken in other cases. It is important to note that the exact calculation of critical exponents by minimal subtraction for the *CECI* model is the novelty brought up by this work.

**Keywords:** *Minimal subtraction, critical exponents, Lifshitz point, CECI model.*

## LISTA DE FIGURAS

1.1	<i>Simulação computacional para o modelo de Ising em duas dimensões: acima da temperatura crítica, os estados (a) e (b) são desordenados. Em (c), <math>T = T_c</math>, domínios magnéticos, da ordem de quantidades microscópicas até o tamanho da amostra, são permitidos e temos ainda uma magnetização nula. Abaixo de <math>T_c</math>, domínios magnéticos maiores tomam forma tornando-se predominantes e o sistema exibe uma magnetização diferente de zero. .</i>	5
1.2	<i>Representação do modelo ANNNI em <math>d = 3</math>. As interações entre os primeiros vizinhos, que são identificadas por <math>J_1</math>, ocorrem em todos os eixos (interações tipo Ising ferromagnéticas). As interações até segundos vizinhos existem apenas em uma direção e são caracterizadas por <math>J_2</math>, que possui sinal contrário à <math>J_1</math>. . . . .</i>	7
1.3	<i>Diagrama de fases para um comportamento crítico de Lifshitz uniaxial de segundo caráter, onde o termo segundo caráter refere-se ao acoplamento até segundos vizinhos. A linha tracejada indica uma transição de fase de primeira ordem que termina no ponto de Lifshitz de segundo caráter. A linha contínua indica uma transição de fase de segunda ordem (transição ordem-desordem). O parâmetro <math>P</math> é definido por <math>P = J_2/J_1</math>. . . . .</i>	8
1.4	<i>Representação esquemática dos spins na fase modulada. Em (a) para o modelo ANNNXY e em (b) para o modelo ANNNH. . . . .</i>	8
1.5	<i>Exemplo simples do modelo CECI com interações competitivas entre segundos vizinhos como também acoplamento entre terceiros vizinhos. Este sistema tem três comprimentos de correlação independentes e apresenta o que chamamos de comportamento crítico de Lifshitz genérico do terceiro caráter. . . . .</i>	10
1.6	<i>Projeção do diagrama de fases para o comportamento crítico de Lifshitz genérico do terceiro caráter do modelo CECI. A linha contínua indica uma transição ordem-desordem e as linhas tracejadas indicam uma transição de primeira ordem entre as fases ordenadas (ferromagnética e moduladas). As fases ferromagnética e paramagnética continuam ocorrendo no ponto de Lifshitz genérico de terceiro caráter. Os parâmetros <math>p_i</math> e <math>p_j</math> estão associados a um conjunto de valores das razões <math>J_L/J_1, J_{L-1}/J_1, \dots, J_2/J_1</math>, e a uma temperatura crítica de Lifshitz (<math>T_L</math>). . . . .</i>	10
2.1	<i>Gráfico de um termo da função de 4-pontos em 1-loop na teoria <math>\phi^4</math>. . . .</i>	22
2.2	<i>Expansão diagramática normalizada da função de Green de 2-pontos até a ordem de <math>\lambda^2</math>. . . . .</i>	23
2.3	<i>Diagramas de termos das funções de 2 e 4-pontos numa teoria <math>\phi^4</math>. . . . .</i>	23

2.4	<i>Diagrama em 3-loops de um termo da função de Green de 4-pontos em ordem de <math>\lambda^8</math> de uma teoria <math>\phi^3</math>. . . . .</i>	26
2.5	<i>Representação gráfica da funções de vértice 1PI provenientes da Figura 2.4. As linhas tracejadas não fazem parte das funções de vértice, estão apenas indicando a entrada e saída de momento. . . . .</i>	26
3.1	<i>Gráfico <math>(\eta_L \times L)</math> para o modelo CECI anisotrópico uniaxial em <math>d = 3</math>, onde consideramos apenas um subespaço competitivo unidimensional (<math>m = 1</math>). O comportamento, para <math>N = 1, 2</math> e <math>3</math>, está representado pela cor da curva. As linhas tracejadas indicam o limite assintótico para <math>L \rightarrow \infty</math>. . . . .</i>	56
3.2	<i>Gráfico <math>(\nu_L \times L)</math> para o modelo CECI anisotrópico uniaxial em <math>d = 3</math>, considerando apenas um subespaço competitivo unidimensional (<math>m = 1</math>). As curvas exibem o comportamento para <math>N = 1, 2</math> e <math>3</math>. . . . .</i>	56
3.3	<i>Gráfico <math>(\eta_L \times L)</math> para o modelo CECI anisotrópico biaxial em <math>d = 3</math>, onde consideramos apenas um subespaço competitivo bidimensional (<math>m = 2</math>). As curvas exibem o comportamento para <math>N = 1, 2</math> e <math>3</math>. . . . .</i>	57
3.4	<i>Gráfico <math>(\nu_L \times L)</math> para o modelo CECI anisotrópico biaxial em <math>d = 3</math>, considerando apenas um subespaço competitivo bidimensional (<math>m = 2</math>). As curvas exibem o comportamento para <math>N = 1, 2</math> e <math>3</math>. . . . .</i>	57
4.1	<i>Gráfico <math>(\eta_n \times n)</math> para o modelo CECI isotrópico com <math>N = 1</math>, onde fizemos <math>\epsilon_n = 1</math>. A curva em preto exhibe o comportamento do expoente crítico <math>\eta_n</math> exato e a curva em vermelho nos dá o comportamento do mesmo expoente para o caso aproximado. . . . .</i>	76
4.2	<i>Gráfico <math>(\nu_n \times n)</math> para o modelo CECI isotrópico com <math>N = 1</math>, onde fizemos <math>\epsilon_n = 1</math>. A curva em preto exhibe o comportamento do expoente crítico <math>\nu_n</math> exato e a curva em vermelho nos dá o comportamento do mesmo expoente para o caso aproximado. . . . .</i>	76

# SUMÁRIO

<b>Capítulo 1—Introdução</b>	1
<b>Capítulo 2—Fenômenos críticos e teoria quântica de campos</b>	12
2.1 Representação do modelo de Ising em termos de integrais funcionais . . .	12
2.2 Funções de vértice e quebra de simetria . . . . .	25
2.3 Divergências nas funções 1PI e renormalização . . . . .	31
2.4 Grupo de renormalização e relações de escala . . . . .	35
2.5 Renormalização por subtração mínima e expoentes críticos . . . . .	39
<b>Capítulo 3—Expoentes críticos anisotrópicos do modelo <i>CECI</i></b>	44
3.1 Generalizações do modelo de Ising . . . . .	44
3.2 Relações de escala para o modelo <i>CECI</i> anisotrópico . . . . .	49
3.3 Subtração mínima e expoentes críticos anisotrópicos . . . . .	51
<b>Capítulo 4—Expoentes críticos isotrópicos do modelo <i>CECI</i></b>	59
4.1 Relações de escala para o modelo <i>CECI</i> isotrópico . . . . .	59
4.2 Subtração mínima para o caso isotrópico . . . . .	61
4.2.1 Solução da integral de Feynman $I_2$ com aproximação . . . . .	63
4.2.2 Solução exata da integral de Feynman $I_2$ . . . . .	66
4.3 Expoentes críticos isotrópicos aproximados do modelo <i>CECI</i> . . . . .	68
4.4 Expoentes críticos isotrópicos exatos do modelo <i>CECI</i> . . . . .	70
4.5 Comparação entre os casos aproximado e exato . . . . .	75
<b>Capítulo 5—Conclusão</b>	78
<b>Apêndice A—Integrais anisotrópicas</b>	80
A.1 Relações importantes . . . . .	80
A.2 Solução das integrais anisotrópicas . . . . .	81
<b>Apêndice B—Integrais isotrópicas</b>	86
B.1 Caso aproximado . . . . .	86
B.2 Caso exato . . . . .	88

## CAPÍTULO 1

# INTRODUÇÃO

Uma das características da matéria que mais chama a atenção, desde tempos remotos, tanto de leigos quanto de cientistas, é a sua capacidade de transicionar entre estados que possuem propriedades totalmente distintas. Toda essa atenção dedicada a esse fenômeno da natureza, não se deu apenas pelas intrigantes dúvidas advindas da simples observação de sua ocorrência, mas também da possibilidade de sua utilização prática. Desde que o homem compreendeu que uma transição de fase está ligada, principalmente, à temperatura do material observado, um notório salto evolutivo ocorreu, pois com isso ele pôde fabricar sua primeira ferramenta metálica, através do domínio da técnica de fundição de metais, o que, com toda a certeza, o ajudou em seus problemas domésticos e sociais. Esse salto evolutivo também o levou a conjecturar idéias e argumentos sobre tal fenômeno, tanto no sentido do aprimoramento e aprendizado de novas técnicas, quanto no natural e conseqüente surgimento de uma base teórica para a sua explicação.

Com o desenvolvimento dos princípios e conseqüências da teoria termodinâmica, as transições de fase puderam ser traduzidas matematicamente, trazendo à tona propriedades gerais comuns a diversos sistemas físicos que estão próximos à transição. Ao longo da evolução dos conceitos referentes às transições de fase, algumas definições foram impostas pela fenomenologia observada. Uma dessas definições é a que as classifica em transições de primeira e segunda ordem, onde o termo, primeira ordem, refere-se à descontinuidade, quando comparados os valores acima e abaixo da transição, de quantidades como a entropia, densidade da substância e a magnetização, as quais são derivadas de primeira ordem da energia livre. No caso de uma transição de primeira ordem, tem-se a coexistência de duas fases distintas, *ordenada e desordenada*, no ponto de transição. Um exemplo desse tipo de transição é o fenômeno de vaporização da água a 100°C e pressão de 1 atmosfera, onde líquido e gás ocorrem ao mesmo tempo em pontos diversos da amostra. Já o termo transição de segunda ordem aplica-se às transições nas quais as derivadas primeiras da energia livre variam de forma contínua quando o sistema muda de fase. Nesse caso, derivadas de ordens superiores não são necessariamente contínuas. Para esse tipo de transição temos que a fase ordenada se transforma continuamente na fase de alta temperatura e vice-versa; acontece aqui que a fase ordenada se torna indistinguível da fase desordenada em qualquer escala de observação. Entende-se por *fase ordenada* aquela de menor simetria, onde essa quebra de simetria é causada pela diminuição da temperatura, quando saímos de um valor de temperatura acima da temperatura de transição para uma temperatura abaixo da mesma. Por exemplo, no caso de um sistema magnético, as duas fases em que o sistema pode ocorrer (*ferromagnética/paramagnética* ou *antiferromagnética/paramagnética*) possuem diferentes simetrias espaciais, pois acima da temperatura de transição (*temperatura de Curie*), onde não existe magnetização, o sistema é rotacionalmente invariante. Abaixo da temperatura de transição ocorre a chamada mag-

netização espontânea, que define uma direção preferencial no espaço, destruindo assim a invariância rotacional. Vemos com esse simples exemplo que a magnetização é uma medida da simetria do sistema e por isso é chamada de *parâmetro de ordem*. Este parâmetro tem por propriedades gerais, ser uma função contínua na fase ordenada, diminuindo seu módulo continuamente, até ser nulo no ponto de transição de segunda ordem (*ponto crítico*), fixando-se com o valor nulo na *fase desordenada*. No caso do sistema líquido-gás, pode-se verificar que o parâmetro de ordem associado à transição é a diferença de densidade entre as fases, possuindo todas as propriedades referidas, e que o ponto crítico desse sistema, ponto no qual a diferença de densidade se anula, situa-se no final da linha de transição de primeira ordem no diagrama de fases.

Uma página importante no desenrolar do tratamento das transições de fase começou a ser escrita com a descoberta dos *fenômenos críticos* [1]. O termo *crítico* refere-se às propriedades termodinâmicas dos sistemas próximos à temperatura crítica  $T_c$  (*Temperatura de transição*) de uma transição de fase de segunda ordem. Diversos sistemas exibem o comportamento crítico, contudo, é fato que o sistema mais popular que exibe criticalidade é o líquido-gás, seguido dos sistemas magnéticos.

Uma transição de fase de segunda ordem é caracterizada por singularidades nas suas funções termodinâmicas: energia livre e derivadas correspondentes, como magnetização, calor específico e susceptibilidade [2, 3, 4], onde singularidade aqui não indica divergência a priori. Nos casos mais simples, estas singularidades ocorrem para valores críticos bem especificados dos parâmetros externos. É comum a utilização de leis de potência para expressar e caracterizar essas singularidades, cujos expoentes, denominados *expoentes críticos*, determinam a natureza do comportamento crítico para um dado sistema. Através da introdução do parâmetro, denominado *temperatura reduzida*  $t$ , onde

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (1.1)$$

que mede a distância em relação ao ponto crítico e nos dá a informação sobre em qual lado da transição estamos, podemos expressar o comportamento assintótico das funções termodinâmicas, definindo com isso os expoentes críticos da seguinte forma

$$C \sim |t|^{-\alpha}, \quad (1.2)$$

onde  $\alpha$  é o expoente crítico associado à singularidade do calor específico  $C$  quando  $t \rightarrow 0$ .

$$\mathcal{M} \sim |t|^\beta, \quad (1.3)$$

onde  $\beta$  é o expoente crítico que caracteriza o parâmetro de ordem  $\mathcal{M}$  (magnetização espontânea no caso de sistemas magnéticos, ou a diferença de densidade no caso líquido-gás), mostrando como  $\mathcal{M} \rightarrow 0$ , para  $T \rightarrow T_c$ . Ainda temos

$$\chi \sim |t|^{-\gamma}, \quad (1.4)$$

onde o expoente crítico  $\gamma$  está associado à divergência da susceptibilidade/compressibilidade isotérmica  $\chi$  quando  $t \rightarrow 0$ , e

$$\mathcal{M} \sim H^{\frac{1}{\delta}}. \quad (1.5)$$

Essa última expressão (*equação de estado*), que define o expoente crítico  $\delta$ , nos dá a relação entre o parâmetro de ordem na isoterma crítica ( $t = 0$ ) e o campo externo/pressão aplicada  $H$ .

Olhando agora para as correlações existentes nos sistemas que exibem o comportamento crítico, por exemplo, as correlações entre os spins no caso magnético, podemos considerar ainda mais dois expoentes críticos. As funções de correlação são de grande utilidade no estudo das flutuações que ocorrem em tais sistemas e definem os dois últimos expoentes. Consideremos a função de correlação  $\mathbf{g}(R)$  entre dois spins, indicados genericamente por  $s_i$  e  $s_j$ ; localizados nas posições  $\mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{r}_j$ , respectivamente, participantes de um sistema magnético que pode ser tratado pelo modelo de Ising, modelo que abordaremos mais tarde, situados a uma distância  $R$

$$\mathbf{g}(R = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = \langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle, \quad (1.6)$$

onde o símbolo  $\langle \rangle$  indica a média termodinâmica do argumento em questão. A equação (1.6) mensura a probabilidade condicional de que o spin em um dado sítio aponte em uma certa direção, dado que o spin numa origem definida também aponte na mesma direção. O segundo termo à direita na equação (1.6) garante que se está descontando a possibilidade de os spins serem paralelos não devido à correlação direta entre eles, mas por se estar numa fase de baixa temperatura, onde a magnetização espontânea tende a alinhar todos os spins na mesma direção [5]. Podemos escrever ainda a função de correlação da seguinte forma

$$\mathbf{g}(R = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = \langle (s_i - \langle s_i \rangle)(s_j - \langle s_j \rangle) \rangle = \langle (s_i - \mathcal{M})(s_j - \mathcal{M}) \rangle. \quad (1.7)$$

Essa função é denominada *função de correlação spin-spin*. De acordo com a definição, espera-se que  $\mathbf{g}(R)$  se comporte da seguinte maneira [5]

$$\mathbf{g}(R) \sim \frac{\exp(-R/\xi(t))}{R^{d-2+\eta}}, \quad (1.8)$$

onde  $d$  é o número de dimensões do sistema,  $\xi$  é o *comprimento de correlação*, o qual nos dá a escala do alcance das correlações entre as flutuações, neste caso específico, flutuações da magnetização. Em uma transição de primeira ordem, o comprimento de correlação é sempre finito, o que impede a ocorrência, do que chamaremos posteriormente de, *invariância por escala*, para esse tipo de transição. Porém, próximo a uma transição de segunda ordem, o comprimento de correlação, ou seja, o alcance das correlações entre as flutuações, diverge e sua forma assintótica para  $t \rightarrow 0$  é dada por

$$\xi(t) \sim |t|^{-\nu}, \quad (1.9)$$

onde  $\nu$  é o expoente crítico associado à divergência do comprimento de correlação numa transição de segunda ordem. Em  $T_c$  a equação (1.8) mostra que as correlações tomam a forma de uma lei de potência,  $\mathbf{g}(R) \sim R^{-(d-2+\eta)}$  onde  $\eta$  é um dos expoentes críticos, recebendo o nome de *dimensão anômala*.



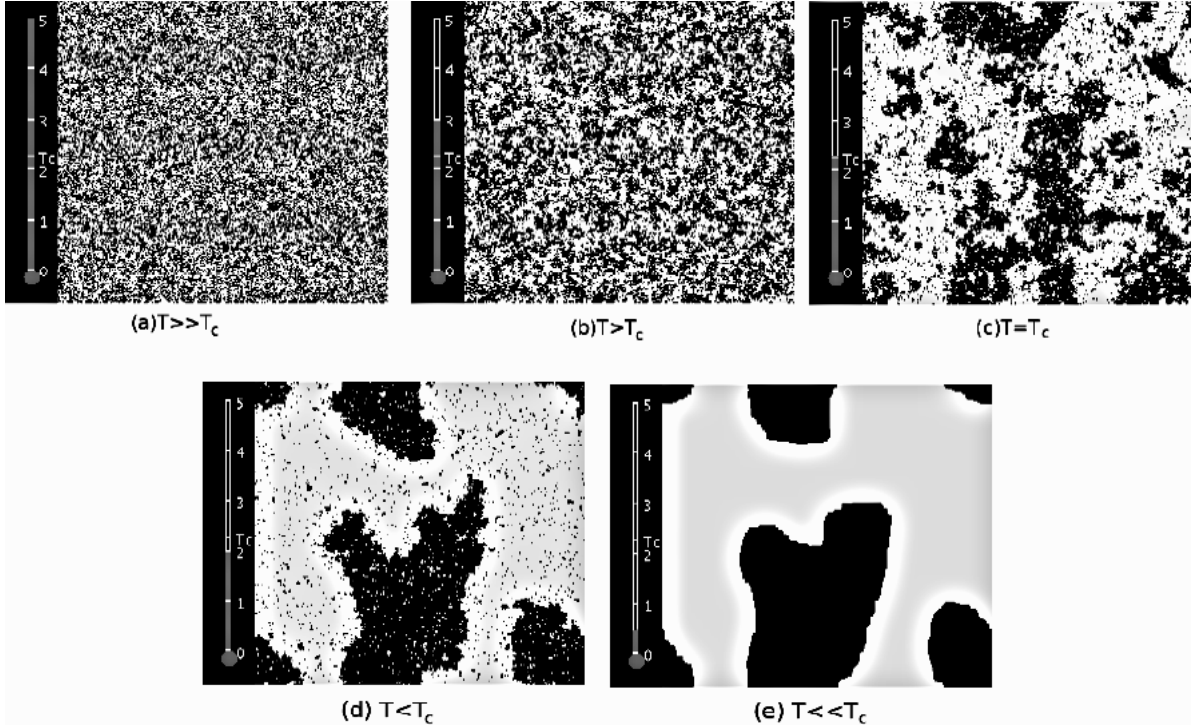
Um modelo simples que nos permite entender os sistemas magnéticos, no que diz respeito às suas propriedades críticas, como também calcular os expoentes críticos, é o modelo de Ising [6], o qual será de grande importância para a nossa fundamentação teórica, permitindo o paralelo entre os sistemas com e sem competição. O paradigma teórico desse modelo consiste em spins que interagem entre si através de interações quânticas de troca. Átomos com spin resultante diferente de zero são localizados em pontos de uma rede cristalina regular em  $d$  dimensões denominados *sítios*, portanto a estatística relevante no caso é a de *Maxwell-Boltzmann*. A cada sítio associamos uma variável de spin que pode assumir os valores  $\pm 1$ . Em consequência, realizações experimentais devem, em princípio, ser procuradas em magnetos isolantes, por apresentarem elétrons desemparelhados, o que resulta num momento magnético efetivo nos sítios. A distância entre os sítios mais próximos é chamada de *parâmetro de rede* e somente as interações entre os spins desses sítios, que são denominados de *primeiros vizinhos*, são consideradas.

No modelo de Ising, as variáveis de spin só podem assumir valores que representam sentidos diferentes ao longo de uma mesma direção, portanto, o parâmetro de ordem  $\mathcal{M}$  possui apenas uma componente. Porém, diversos sistemas físicos que exibem comportamento crítico têm o seu parâmetro de ordem com  $N$  componentes. Esses sistemas, com  $N > 1$ , podem ser descritos por alguns outros modelos que levam esse fato em consideração. Por exemplo, no modelo  $XY$  o parâmetro de ordem é caracterizado por possuir duas componentes, ou seja,  $N = 2$ . Já o modelo de Heisenberg descreve um sistema com um parâmetro de ordem com três componentes,  $N = 3$ . O modelo de Ising ( $N = 1$ ) em  $d = 2$  é um dos poucos modelos teóricos não-triviais que podem ser resolvidos exatamente (*temperatura crítica, todos os expoentes críticos, função de partição a campo zero, funções de correlação*)[7].

Uma das mais fundamentais características físicas dos sistemas que exibem o comportamento crítico é, sem dúvida, a *invariância por escala*, ou seja, quando o sistema está no ponto crítico ( $T = T_c$ ), ele apresenta as mesmas propriedades em qualquer escala de observação, isto porque, tanto as flutuações, por exemplo, no parâmetro de ordem, ocorrem em todas as escalas de distância quando o sistema se aproxima do ponto crítico, como também o comprimento de correlação torna-se infinito, isto é,  $\xi \rightarrow \infty$ . Nos sistemas magnéticos próximos ao ponto crítico, observam-se domínios magnéticos desde a ordem do tamanho da amostra, até os tamanhos microscópicos (Figura 1.1).

Também numa transição líquido-gás, ocorre o fenômeno da opalescência crítica, no qual um fluido transparente torna-se branco como leite. Sabe-se que o efeito é causado pelo espalhamento da luz que passa através do fluido. Tal espalhamento é devido às flutuações na densidade do mesmo. Essas flutuações chegam até a ordem do comprimento de onda da luz visível, causando então uma similar alteração no índice de refração, o que permite a ocorrência do fenômeno [3]. Já em uma transição de fase de primeira ordem não existe invariância por escala, pois as flutuações têm um alcance finito (tamanho típico das bolhas na transição líquido-gás).

Uma importante consequência do fenômeno de invariância por escala, é que como as correlações ocorrem em todas as escalas de distância, também as funções termodinâmicas de correlação do sistema devem ser invariantes por transformações de escala [5]. Este fato provê os fundamentos das idéias do *grupo de renormalização*, a partir dos quais podemos



**Figura 1.1** Simulação computacional para o modelo de Ising em duas dimensões: acima da temperatura crítica, os estados (a) e (b) são desordenados. Em (c),  $T = T_c$ , domínios magnéticos, da ordem de quantidades microscópicas até o tamanho da amostra, são permitidos e temos ainda uma magnetização nula. Abaixo de  $T_c$ , domínios magnéticos maiores tomam forma tornando-se predominantes e o sistema exibe uma magnetização diferente de zero.

construir procedimentos calculacionais para obter estimativas numéricas de parâmetros e expoentes críticos. Levando em consideração a propriedade de escala, vemos que as funções termodinâmicas que descreverão o fenômeno devem ser homogêneas, o que expressará matematicamente essa característica na determinação das quantidades críticas. Por exemplo, a equação de estado que descreve a relação entre a magnetização, a temperatura e o campo magnético pode ser dada por

$$h = \mathcal{M}^\delta f(\mathcal{M}, t), \quad (1.10)$$

o que, por argumentos de homogeneidade da função, reescala de parâmetros e a utilização do grupo de renormalização, pode ser escrita como

$$h = \mathcal{M}^\delta f(t/\mathcal{M}^{1/\beta}). \quad (1.11)$$

Esse tipo de relação tem sido coerente com as verificações experimentais e está de acordo com várias aproximações e modelos, tais como aproximações de campo médio e modelo esférico.

Com respeito à aproximação de campo médio proposta por Landau, cuja hipótese básica é assumir que as interações do sistema podem ser trocadas por um campo externo efetivo, temos que embora ela não seja muito boa do ponto de vista quantitativo,

pois despreza as importantes flutuações numa transição de fase de segunda ordem, normalmente é um interessante guia qualitativo e é sempre um bom meio de comparação para as teorias mais sofisticadas que consideram tais flutuações. Por exemplo, os expoentes críticos que são obtidos dessa teoria são considerados como um limite clássico para os expoentes críticos obtidos por teoria quântica de campos, e foram levados em consideração nesse trabalho como um dos argumentos de confiabilidade dos resultados obtidos. Os expoentes críticos calculados pela teoria de campo médio são:  $\alpha = \alpha' = 0$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = \gamma' = 1$ ,  $\nu = \nu' = \frac{1}{2}$ ,  $\delta = 3$  e  $\eta = 0$ , onde os expoentes com o símbolo (') indicam o resultado para as temperaturas abaixo da temperatura crítica. Embora, por argumentos apenas termodinâmicos, eles pudessem ser diferentes de seus pares, a partir dos argumentos da teoria de escala, pode-se conferir que os expoentes são iguais em torno da transição.

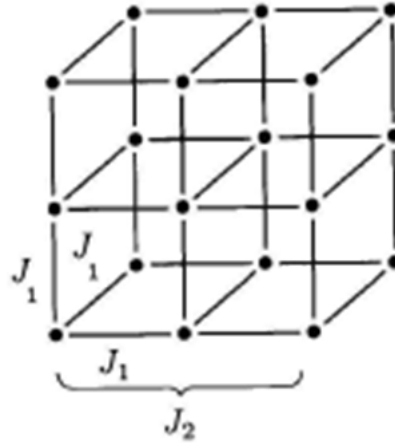
Um fato de grande significância sobre os expoentes críticos, tanto os calculados por campo médio como por outra teoria, é que eles não dependem dos detalhes microscópicos do sistema em questão, o que implica dizer que sistemas aparentemente distintos possuem os mesmos expoentes críticos. O que os coloca no mesmo patamar, com relação aos seus expoentes, é apenas o número  $d$  de dimensões espaciais e o número  $N$  de componentes do parâmetro de ordem. Esses dois parâmetros formam o que chamamos de *classe de universalidade* e quantidades como expoentes críticos e razões entre as amplitudes críticas são conhecidas como *grandezas universais*.

Como já mencionado, o modelo de Ising só leva em consideração interações de troca entre os primeiros vizinhos, existem, contudo, consequências e resultados interessantíssimos no desenvolvimento de um modelo que permita interações entre vizinhos mais distantes. Imagine, por exemplo, um tipo de modelo de Ising em que além de interações ferromagnéticas entre os primeiros vizinhos, interações antiferromagnéticas entre os segundos vizinhos também sejam permitidas. Sendo  $J_1$  a interação de troca entre os primeiros vizinhos e  $J_2$  a interação de troca entre os segundos vizinhos, se ambos os acoplamentos fossem maiores que zero, o sistema apresentaria novamente um comportamento ferromagnético. Novas propriedades físicas surgem quando temos  $J_1 > 0$  e  $J_2 < 0$ . Observe que nesse caso teremos uma competição entre o estado ferromagnético e o estado antiferromagnético.

Ao tratarmos de universalidade, não estávamos levando em consideração sistemas que exibem competição, porém, verifica-se que o termo, classe de universalidade, também se aplica nesse caso, sendo encontradas também, através da aplicação dos modelos, grandezas universais. Veremos, no entanto, como as competições alteram a classe de universalidade ( $N$ ,  $d$ ). Estamos interessados aqui em modelos que exibem competição do tipo *Lifshitz*. O comportamento crítico de Lifshitz foi inicialmente descrito por Hornreich, Luban e Shtrikman [8] no contexto de modelos de sistemas magnéticos e possui aplicações em vários sistemas físicos reais como: cristais líquidos ferroelétricos [9, 10, 11], supercondutores de alta temperatura [12, 13, 14], ferroelétricos uniaxiais [15], alguns tipos de polímeros [16, 17, 18, 19] e materiais magnéticos [20, 21, 22, 23, 24].

A forma mais simples de se introduzir e tratar interações competitivas, começando com um modelo  $d$ -dimensional, é permitindo que o acoplamento  $J_2 < 0$  exista apenas para uma única direção espacial dentre as  $d$  dimensões do modelo. O comportamento crítico

dos sistemas descritos por esse modelo, que recebe o nome de *ANNNI* (*axial next-nearest-neighbor Ising*) [25, 26, 27], é conhecido por *comportamento crítico de Lifshitz uniaxial* e ocorre quando a razão  $J_2/J_1$  possui um valor específico, que depende da temperatura de transição. Abordaremos o caso em que as interações entre os primeiros vizinhos são idênticas em qualquer direção espacial, existindo competição entre eles ou não. Ao eixo paralelo à direção espacial em que ocorre a competição entre os primeiros e os segundos vizinhos damos o nome de *eixo competitivo*. Observe a representação do modelo *ANNNI* em  $d = 3$  na Figura 1.2.



**Figura 1.2** Representação do modelo *ANNNI* em  $d = 3$ . As interações entre os primeiros vizinhos, que são identificadas por  $J_1$ , ocorrem em todos os eixos (interações tipo Ising ferromagnéticas). As interações até segundos vizinhos existem apenas em uma direção e são caracterizadas por  $J_2$ , que possui sinal contrário à  $J_1$ .

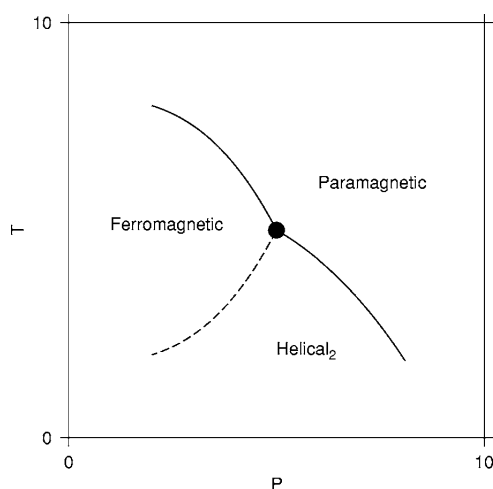
A energia de um sistema descrito pelo modelo *ANNNI* é dada pela hamiltoniana

$$\mathcal{H} = -J_1 \sum_{j=x_1, \dots, x_d} \sum_i s_{i_j} s_{(i+1)_j} - J_2 \sum_i s_{i_z} s_{(i+2)_z}, \quad (1.12)$$

onde o primeiro termo leva em conta apenas a contribuição das interações entre os primeiros vizinhos em todos os eixos, sendo que  $j = x_1, \dots, x_d$  é o indicador do eixo que está sendo considerado ao somarmos a contribuição dos vizinhos mais próximos ( $s_i$  e  $s_{i+1}$ ). O segundo termo trata-se da contribuição das interações entre os segundos vizinhos, que ocorrem em apenas um eixo, sendo indicado aqui por  $z$ .

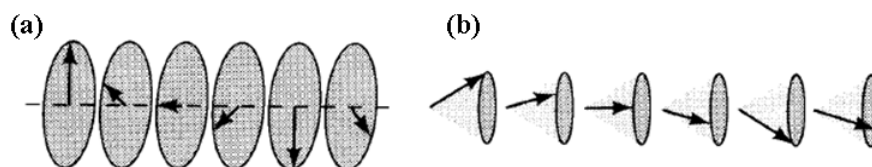
Para sistemas magnéticos que exibem o tipo de competição descrita pelo modelo *ANNNI*, o diagrama de fases apresenta, além das já conhecidas fases ferromagnética e paramagnética, uma fase chamada *modulada* (helical) (Figura 1.3) [28].

O diagrama de fases do modelo *ANNNI* (Figura 1.3) apresenta uma fase desordenada (*paramagnética*), uma fase uniformemente ordenada (*ferromagnética*), e uma região denominada de fase modulada. A fase modulada apresentada pelo modelo *ANNNI* exibe uma organização quase-periódica unidimensional desenvolvida ao longo da direção da magnetização. Nesta fase a magnetização varia senoidalmente. Extensões do modelo



**Figura 1.3** Diagrama de fases para um comportamento crítico de Lifshitz uniaxial de segundo caráter, onde o termo segundo caráter refere-se ao acoplamento até segundos vizinhos. A linha tracejada indica uma transição de fase de primeira ordem que termina no ponto de Lifshitz de segundo caráter. A linha contínua indica uma transição de fase de segunda ordem (transição ordem-desordem). O parâmetro  $P$  é definido por  $P = J_2/J_1$ .

$ANNNI$ , no que diz respeito ao número  $N$  de componentes do parâmetro de ordem, como é o caso dos modelos  $ANNNXY$  (*Axial-Next-Nearest-Neighbor XY*), que possui  $N = 2$ , e  $ANNNH$  (*Axial-Next-Nearest-Neighbor Heisenberg*), com  $N = 3$ , apresentam vetores de spin que precessionam em torno do eixo de modulação, o que pode ser visualizado na Figura 1.4.



**Figura 1.4** Representação esquemática dos spins na fase modulada. Em (a) para o modelo  $ANNNXY$  e em (b) para o modelo  $ANNNH$ .

Observe na Figura 1.3 que as linhas que delimitam as três fases encontram-se num determinado ponto, onde as fases coexistem, denominado *ponto de Lifshitz*. Nesse ponto de coexistência, o sistema apresenta uma temperatura de transição chamada *temperatura de Lifshitz* ( $T_L$ ). Com respeito às realizações e investigações experimentais do modelo  $ANNNI$ , o composto  $MnP$  tem confirmado as expectativas teóricas [20, 21, 22, 23].

Uma intuitiva generalização do modelo  $ANNNI$  pode ser implementada, ao permitirmos que  $J_2$  exista em  $m$  direções espaciais, isto é, teremos agora  $m$  direções competitivas. O sistema então apresentará um comportamento crítico do tipo *Lifshitz  $m$ -axial*, que possui dois tipos de comprimentos de correlação, um referente ao subespaço competitivo e o outro relacionado ao subespaço não competitivo. A classe de universalidade sofrerá

uma modificação, incluindo em sua especificação o número  $m$  de dimensões competitivas, sendo agora identificada por  $d$ ,  $N$  e  $m$ . Os sistemas com os mesmos valores para  $d$ ,  $N$  e  $m$ , ou seja, numa mesma classe de universalidade, terão os mesmos expoentes críticos e as mesmas razões entre amplitudes acima e abaixo da transição [24, 29, 30, 31, 32, 33].

Existe ainda uma sutileza importante com respeito ao modelo Lifshitz  $m$ -axial no que tange à diferença entre os casos com  $m = d$  e  $m < d$ , o primeiro caso é denominado *isotrópico* possuindo um único comprimento de correlação e não pode ser obtido do segundo caso, denominado *anisotrópico*, ao aplicarmos o limite  $d \rightarrow m$  [34].

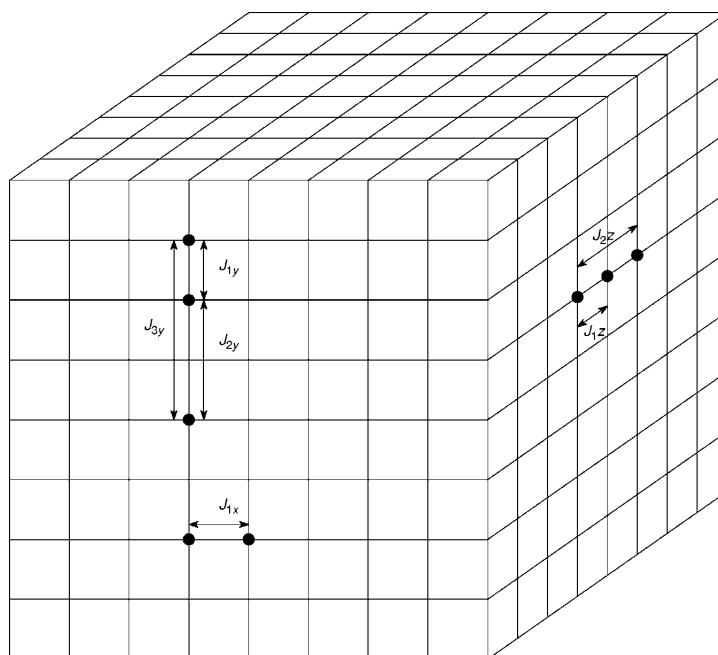
Passaremos agora a descrever o modelo que será o foco das nossas investigações no presente trabalho, do qual extrairemos os expoentes críticos por um método ainda não utilizado no caso isotrópico exato, onde o termo exato refere-se ao cálculo sem aproximações das integrais de Feynman que aparecem naturalmente no decorrer do processo.

A idéia aqui é incluímos no modelo de Ising original uma interação competitiva até segundos vizinhos em  $m_2$  direções espaciais, outra, até terceiros vizinhos, em  $m_3$  direções espaciais, perpendiculares ao subespaço com acoplamento apenas entre primeiros vizinhos e ortogonais ao subespaço de  $m_2$  componentes, e assim por diante, incluindo dessa forma uma interação competitiva que atue até o  $L$ -ésimo vizinho em  $m_L$  direções. Esse modelo de interações arbitrárias é chamado de modelo *CECI* (*competing exchange coupling Ising model*) e pode ser utilizado tanto no caso anisotrópico quanto no isotrópico [28]. Cada subespaço dará origem a um distinto comprimento de correlação, ou seja,  $\xi_1$  para as direções pertencentes ao subespaço não competitivo,  $\xi_2$  para as direções pertencentes ao subespaço competitivo  $m_2$ -dimensional, etc., e  $\xi_L$  caracterizando o subespaço  $m_L$ -dimensional. A Figura (1.5) [28] representa um caso simples do modelo *CECI* em três dimensões, com  $m_2 = m_3 = 1$  e  $m_4 = \dots = m_L = 0$ . Observe que existem dois subespaços competitivos e, portanto, três diferentes tipos de comprimento de correlação.

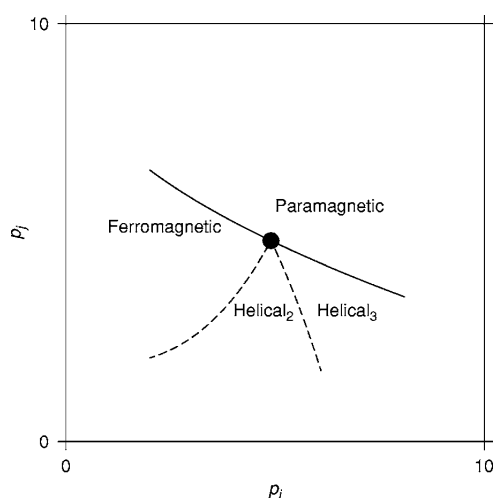
O diagrama de fases também acompanha essas notáveis mudanças, apresentando uma outra fase modulada (Figura 1.6) [28]. Note também que os modelos *ANNNI* e  $m$ -axial são casos particulares do modelo *CECI*.

A classe de universalidade do modelo *CECI* anisotrópico é identificada pelos parâmetros  $d$ ,  $N$ ,  $m_2, \dots, m_L$ . Para o caso isotrópico do modelo *CECI*, isto é, quando temos  $m_n = d$ , onde  $n$  representa qualquer valor de 1 a  $L$ , identificando o número de vizinhos acoplados, observamos apenas um único comprimento de correlação e a classe de universalidade é identificada agora por  $N$  e  $d = m_n$ .

Sistemas competitivos arbitrários do tipo Lifshitz, descritos pelo modelo *CECI*, são exemplos de sistemas, que por apresentarem diversos tipos de eixos competitivos, exibem também múltiplos parâmetros de escala independentes. Para formular o problema das transições de fase nesses exemplos de sistemas complexos, foi introduzida uma técnica de teoria de campo escalar de massa nula com autointeração quártica para o campo (*parâmetro de ordem*) e com derivadas de ordem superior caracterizando cada eixo de competição. O objetivo do presente trabalho é determinar os expoentes críticos perturbativamente, tanto no caso anisotrópico, quanto no caso isotrópico, sendo que este último dividir-se-á em dois, pois o analisaremos em sua forma aproximada e exata, pela aplicação do método de *subtração mínima de pólos dimensionais*. Vale ressaltar que o cálculo dos expoentes críticos por subtração mínima para o caso isotrópico exato do modelo *CECI*



**Figura 1.5** Exemplo simples do modelo CECI com interações competitivas entre segundos vizinhos como também acoplamento entre terceiros vizinhos. Este sistema tem três comprimentos de correlação independentes e apresenta o que chamamos de comportamento crítico de Lifshitz genérico do terceiro caráter.



**Figura 1.6** Projeção do diagrama de fases para o comportamento crítico de Lifshitz genérico do terceiro caráter do modelo CECI. A linha contínua indica uma transição ordem-desordem e as linhas tracejadas indicam uma transição de primeira ordem entre as fases ordenadas (ferromagnética e moduladas). As fases ferromagnética e paramagnética continuam ocorrendo no ponto de Lifshitz genérico de terceiro caráter. Os parâmetros  $p_i$  e  $p_j$  estão associados a um conjunto de valores das razões  $J_L/J_1$ ,  $J_{L-1}/J_1$ ,  $\dots$ ,  $J_2/J_1$ , e a uma temperatura crítica de Lifshitz ( $T_L$ ).

é a novidade trazida através deste trabalho.

Analogias entre teoria quântica de campos e mecânica estatística serão uma constante no desenrolar dos próximos capítulos, por isso, no capítulo 2, começaremos abordando o modelo de Ising para o magnetismo e mostraremos, sem muitos detalhes, como obter a descrição do modelo em termos de campos escalares e integrais funcionais a partir da transformação gaussiana. Embora este método de construção do paralelo entre as teorias seja heurístico, nos ajudará, tanto na compreensão da analogia entre as duas, quanto nas generalizações necessárias para a descrição do modelo *CECI*. Apresentaremos ainda no capítulo 2, tópicos importantes da descrição de teoria quântica de campos referentes ao problema. Por exemplo, veremos como as funções de Green e funções de vértice irreduzíveis a uma partícula (*1PI* do inglês “*one particle irreducible*”), que denotam as funções de correlação, desempenham um papel fundamental na descrição das propriedades do sistema, estando relacionadas a uma das mais importantes características do mesmo: as simetrias com relação à fase ordenada e desordenada. Também, através da análise da quebra de simetria, identificaremos o campo como o parâmetro de ordem do modelo. Introduziremos então as técnicas de renormalização, as quais, devidamente implementadas, nos permitirão extrair os infinitos que surgem no cálculo de diversas quantidades de fundamental importância. Por fim calcularemos os expoentes críticos relacionados ao modelo de Ising por subtração mínima, exemplificando e argumentando sobre o método que posteriormente será efetivamente aplicado ao modelo *CECI*.

No capítulo 3, apresentaremos inicialmente as devidas generalizações dos objetos matemáticos referidos no capítulo 2 para o modelo de Ising, o que nos permitirá tratar o modelo *CECI* adequadamente. Realizaremos então o cálculo dos expoentes críticos utilizando subtração mínima, como procedimento de renormalização, para o caso anisotrópico até a ordem  $\epsilon^2$ , utilizando regularização dimensional para resolver os diagramas de Feynman (apêndices), nos valendo de uma aproximação que é consistente com a homogeneidade dessas integrais. O cálculo será executado no espaço dos momentos.

Já no capítulo 4, obteremos os expoentes críticos para o caso isotrópico aproximado, onde nos utilizaremos da mesma aproximação feita no caso anisotrópico. Realizaremos ainda o cálculo explícito, também pelo método de subtração mínima, dos expoentes críticos do modelo *CECI* para o caso isotrópico exato e finalizaremos o capítulo fazendo uma comparação gráfica entre os casos isotrópico exato e aproximado.

Teceremos alguns comentários sobre os nossos resultados no capítulo 5, evidenciando as vantagens do método de subtração mínima, assim como a qualidade da aproximação feita para o caso anisotrópico, que ainda não foi resolvido exatamente. Concluiremos, apontando perspectivas do trabalho realizado.



# FENÔMENOS CRÍTICOS E TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

Já é bastante conhecido e bem estabelecido o tratamento dado pela termodinâmica e mecânica estatística às transições de fase tanto de primeira, quanto de segunda ordem. Dentro do tratamento das transições de segunda ordem, os fenômenos críticos conseguiram desencadear um grande interesse, demonstrando, a cada abordagem e exaustiva discussão, ser uma “árvore de ótimos frutos”, não frustrando os que se esforçaram para alcançá-los. É fácil entender então, o motivo pelo qual esse mesmo interesse esteja longe de se extinguir, quer seja no sentido das aplicações, quer seja para um maior entendimento teórico dos sistemas que exibem o comportamento crítico. Por isso, em paralelo com o crescimento das técnicas experimentais e computacionais no que diz respeito à obtenção de resultados significativos, resultados esses que comprovam ou não as idéias criativas para descrição fenomenológica, tivemos também um grande avanço quanto aos métodos matemáticos aplicados para modelar diversos sistemas físicos que têm por característica exibirem criticalidade. Dentre esses métodos, a utilização das técnicas de teoria quântica de campos para formular o problema das transições de fase em termos de integrais funcionais tem demonstrado ter alto poder de resolução, como também de generalização, apontando então um “Norte” para novas incursões e pesquisas nessa área.

## 2.1 REPRESENTAÇÃO DO MODELO DE ISING EM TERMOS DE INTEGRAIS FUNCIONAIS

Para a introdução do método de integrais funcionais como representação das transições de fase e fenômenos críticos, abordaremos de maneira sucinta, e, evidentemente, sem pretensões de descrever detalhes das deduções, o modelo de Ising para o magnetismo. Embora este seja um modelo simples, nos dá o arcabouço necessário à implementação do método e permite-nos conceber as futuras generalizações do mesmo, pois a técnica pode ser aplicada em casos bem mais gerais.

Através da descrição que se seguirá, estaremos aptos a desenvolver expansões perturbativas e utilizaremos o formalismo diagramático para as mesmas, seguindo assim o caminho indicado pela teoria quântica de campos. Ao leitor interessado em uma abordagem mais detalhada, recomendamos os livros de referência [35, 36, 37], sobre os quais se apoia esta explanação.

Para construirmos o modelo de Ising para o magnetismo, consideraremos inicialmente uma rede hipercúbica em  $d$  dimensões. Embora os resultados independam do tipo de rede estudada, visto que os expoentes críticos são grandezas universais, não dependendo de parâmetros geométricos específicos da rede, essa simplifica em muito a nossa abordagem. A cada ponto  $i = (1, 2, 3, \dots, N)$  dessa rede discreta, que denominamos de sítio, associa-

remos uma variável  $s_i$  que pode assumir os valores também discretos  $+1$  (para cima, Up) ou  $-1$  (para baixo, Down). Se considerarmos que a variável  $s_i$  é uma variável de spin, para uma determinada configuração dos spins na rede, das quais existem  $2^N$  configurações (onde  $N$  é o número de sítios), poderemos escrever a energia do sistema como

$$E\{s_i\} = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} s_i s_j - \sum_i h_i s_i, \quad (2.1)$$

onde  $\langle i, j \rangle$  indica que a soma é realizada sobre os pares de vizinhos mais próximos,  $J_{ij}$  representa a interação entre os spins e  $h_i$  é o campo magnético externo aplicado que se acopla com o spin do sítio  $i$  de forma linear. Vemos a partir da equação (2.1) que, para  $J_{ij}$  positivo, a configuração com spins no mesmo sentido é favorecida (*acoplamento ferromagnético*), pois teremos mais baixa energia nessa situação; pelo mesmo motivo, para  $J_{ij}$  negativo, a configuração com spins antiparalelos é favorecida (*acoplamento antiferromagnético*).

A probabilidade de um estado ou configuração ocorrer é dada pelo peso de Boltzmann definido como

$$P\{s_i\} = \exp[-\beta E\{s_i\}] = \exp\left(\sum_{\langle i,j \rangle} K_{ij} s_i s_j + \sum_i H_i s_i\right), \quad (2.2)$$

onde  $\beta = (k_B T)^{-1}$ ,  $K_{ij} \equiv \beta J_{ij}$  e  $H_i \equiv \beta h_i$ . O símbolo  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  é a temperatura absoluta.

A função de partição é dada pela soma das probabilidades das  $2^N$  configurações, ou seja,

$$Z\{H_i\} = \sum_{\{s_i\}} \exp[-\beta E\{s_i\}] = \sum_{\{s_i\}} \exp\left[\sum_{\langle i,j \rangle} K_{ij} s_i s_j + \sum_i H_i s_i\right]. \quad (2.3)$$

A função  $Z\{H_i\}$  acima tem a propriedade de gerar todas as funções de correlação. Por exemplo, a magnetização média no sítio  $i$  é dada por

$$\mathcal{M}_i = \langle s_i \rangle_{H_i=0} = Z^{-1} \left. \frac{\partial Z}{\partial H_i} \right|_{H_i=0}. \quad (2.4)$$

A simetria da energia na troca de  $s_i$  por  $-s_i$ , quando  $H_i = 0$ , implica  $\mathcal{M} = 0$ . Também, se  $J_{ij} = J_{i-j}$ , quando  $H_i = H$ , o sistema é invariante por translação. Consequentemente  $\langle s_i \rangle = \langle s \rangle$  e nós podemos escrever

$$\mathcal{M}(H) = \frac{1}{N} Z^{-1} \frac{\partial Z}{\partial H} = \frac{1}{N} \sum_i \langle s_i \rangle. \quad (2.5)$$

Existem outros potenciais termodinâmicos que podem ser obtidos da função de partição, entretanto não iremos discuti-los aqui e o leitor interessado é aconselhado a consultar [37].

Passaremos agora a discutir o procedimento que nos levará a uma descrição do modelo de Ising em termos de campos escalares contínuos. Através da transformação de Hubbard-Stratonovich (*transformação gaussiana*)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dx_i \exp\left(-\frac{1}{4}x_i V_{ij}^{-1} x_j + s_i x_i\right) = \text{Constante} \times \exp(s_i V_{ij} s_j). \quad (2.6)$$

onde os índices repetidos indicam uma soma e  $V_{ij}$  são os elementos de uma matriz simétrica positiva definida  $V$ , a equação (2.3) pode ser reescrita

$$Z\{H_i\} = \sum_{\{s_i\}} \exp(s_i K_{ij} s_j + H_i s_i) \propto \sum_{\{s_i\}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N d\phi_i \exp\left[-\frac{1}{4}\phi_i K_{ij}^{-1} \phi_j + (\phi_i + H_i) s_i\right], \quad (2.7)$$

onde os campos auxiliares  $\phi$ 's são as nossas variáveis contínuas. Usando a translação  $\phi_i \rightarrow \phi_i - H_i$  na expressão (2.7) e definindo,  $\mathcal{D}\phi \equiv \prod_{i=1}^N d\phi_i$  como a medida da integral, chegamos a

$$Z\{H_i\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\phi \exp\left[-\frac{1}{4}(\phi_i - H_i) K_{ij}^{-1} (\phi_j - H_j)\right] \sum_{\{s_i\}} \exp(\phi_i s_i). \quad (2.8)$$

Podemos desenvolver o somatório acima da seguinte forma

$$\sum_{\{s_i\}} \exp(\phi_i s_i) = \prod_i [\exp(\phi_i) + \exp(-\phi_i)] = \prod_i 2(\cosh \phi_i) = \text{Constante} \times \exp\left[\sum_i \ln(\cosh \phi_i)\right]. \quad (2.9)$$

Aplicando agora a transformação linear,  $\psi_i \equiv \frac{1}{2} K_{ij}^{-1} \phi_j$ , nos campos, podemos escrever

$$Z\{H_i\} \propto \exp\left(-\frac{1}{4} H_i K_{ij}^{-1} H_j\right) \int \mathcal{D}\psi \exp\left\{-\psi_i K_{ij} \psi_j + H_i \psi_i + \sum_i \ln[\cosh(2K_{ij} \psi_j)]\right\}. \quad (2.10)$$

Temos ainda que ( $\ln \cosh x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \dots$ ). Com isso podemos desenvolver o somatório em (2.10), ou seja,

$$\sum_i \ln[\cosh(2K_{ij} \psi_j)] = \sum_i \left[2(K_{ij})^2 - \frac{4}{3}(K_{ij} \psi_j)^4 + \dots\right]. \quad (2.11)$$

Conseguiremos simplificar ainda mais a nossa descrição se passarmos do espaço das coordenadas para o espaço dos momentos através da transformada de Fourier das quantidades envolvidas. Fazendo então

$$\psi_i \equiv \psi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) \psi(\mathbf{k}), \quad (2.12)$$

$$H_i \equiv H(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) H(\mathbf{k}), \quad (2.13)$$

$$K_{ij} \equiv K(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \exp[(-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j))] K(\mathbf{k}), \quad (2.14)$$

e substituindo as expressões acima em (2.10), sabendo que para  $K(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$  real,  $K(-k) = K^*(k)$ , podemos reescrever o argumento da exponencial como

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{N} \left\{ \sum_{\mathbf{k}} [K(\mathbf{k}) - 2|K(\mathbf{k})|^2] \psi(-\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}) + H(-\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}) \right\} + \\ & -\frac{4}{3N^2} \sum_{\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_4)} K(\mathbf{k}_1) \psi(\mathbf{k}_1) \cdots K(\mathbf{k}_4) \psi(\mathbf{k}_4). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Desenvolvendo agora a transformada de Fourier inversa para  $K(\mathbf{k})$ , temos

$$K(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R}} K(\mathbf{R}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) = \sum_{i,\alpha} K(\mathbf{R}_{i,\alpha}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{i,\alpha}), \quad (2.16)$$

onde o índice  $i$  indica a direção espacial e  $\alpha = 1$  ou  $2$ , rotula os dois vizinhos mais próximos para cada direção. A expansão da exponencial em (2.16) em potências de  $\mathbf{k}$  é

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{i,\alpha}) = 1 - \frac{k_i^2 a^2}{2} + \cdots, \quad (2.17)$$

onde o produto interno é dado por  $(-1)^\alpha k_i a$ , sendo  $a$  o parâmetro de rede e  $|\mathbf{k}| = k$ . Os termos ímpares não são levados em conta na expansão devido à simetria com respeito a  $\alpha$ , de modo que obtemos uma quantidade escalar. Substituindo (2.17) em (2.16) ficamos com

$$K(\mathbf{k}) = \mathbf{K}_0 (1 - \rho^2 k^2), \quad (2.18)$$

onde  $\mathbf{K}_0 = 2d\beta J$ , sendo que  $2d$  é o número de vizinhos mais próximos em  $d$  dimensões e

$$\rho = \frac{a}{(2d)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.19)$$

Substituindo agora (2.18) em (2.15) temos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{N} \left\{ \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{K}_0 [(1 - 2\mathbf{K}_0) + (4\mathbf{K}_0 - 1)\rho^2 k^2] \psi(-\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}) + H(-\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}) \right\} + \\ & -\frac{4\mathbf{K}_0^4}{3N^3} \sum_{\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}(\sum_{i=1}^4 \mathbf{k}_i)} \psi(\mathbf{k}_1) \cdots \psi(\mathbf{k}_4), \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde consideramos até ordem  $k^2$  para a parte quadrática nos campos e até ordem  $k^0$  para a parte quártica, isto devido ao fato de que os outros termos são irrelevantes para o comportamento crítico do sistema que estamos considerando. É interessante notar que para  $\mathbf{K}_0 = \frac{1}{2}$ , o termo independente de  $\mathbf{k}$  na parte quadrática dos campos se anula, isso nos permite mensurar a temperatura crítica em uma aproximação de campo médio. Por essa aproximação vemos que  $T_0 = 4dJ$ . Vale ressaltar que a aproximação de campo médio não leva em conta as flutuações do campo. Expandindo agora  $\mathbf{K}_0$  em torno de  $T_0$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2N} \left\{ \left( \frac{T - T_0}{T_0} + \rho^2 k^2 \right) \psi(-\mathbf{k})\psi(\mathbf{k}) + H(-\mathbf{k})\psi(\mathbf{k}) \right\} + \\
 & - \frac{4}{3N^3} \left[ 1 - 4 \left( \frac{T - T_0}{T_0} \right) \right] \sum_{\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}} \left( \sum_{i=1}^4 \mathbf{k}_i \right) \psi(\mathbf{k}_1) \cdots \psi(\mathbf{k}_4).
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

No limite de volume infinito podemos transformar as somas em  $\mathbf{k}$  em integrais, definindo as relações

$$\sum_{\mathbf{k}} f(k) = \frac{Na^d}{(2\pi)^d} \int d^d k, \tag{2.22}$$

$$\delta_{\mathbf{k}}(k) = \frac{(2\pi)^d}{Na^d} \delta(k), \tag{2.23}$$

onde em (2.23) temos as funções delta de Kronecker e de Dirac respectivamente. Re-definindo o campo  $\psi$  como  $\psi(\mathbf{k}) \equiv \rho^{-1} a^{-\frac{d}{2}} \phi(\mathbf{k})$ , teremos nesse limite que (2.21) se torna

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left( \frac{T - T_0}{\rho^2 T_0} + k^2 \right) \phi(-\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}) + \rho^{-1} a^{-\frac{d}{2}} H(-\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}) + \\
 & - \frac{d^2}{3a^{4-d}(2\pi)^{3d}} \left[ 1 - 4 \left( \frac{T - T_0}{T_0} \right) \right] \int d^d k_1 \cdots d^d k_4 \delta_{\mathbf{k}} \left( \sum_{i=1}^4 \mathbf{k}_i \right) \phi(\mathbf{k}_1) \cdots \phi(\mathbf{k}_4).
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Podemos, através da transformada de Fourier inversa dos campos em (2.24), escrever

$$- \int \left[ \frac{1}{2} \left( |\nabla \phi|^2 + \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - J\phi \right) \right] d^d x, \tag{2.25}$$

onde  $\mu^2 = \frac{T - T_0}{\rho^2 T_0}$ ,  $\lambda = \frac{8d^2}{a^{4-d}} \left[ 1 - 4 \left( \frac{T - T_0}{T_0} \right) \right]$  e  $J = \rho a^{\frac{d}{2}} H$ . Este resultado é de fundamental importância, pois a analogia entre o tratamento para os fenômenos críticos, em mecânica estatística e teoria quântica de campos, se dá através do reconhecimento de que o argumento da exponencial em (2.3) está escrito em (2.25) como o negativo da ação para uma teoria quântica de campo escalar com termos de interação e de fonte. Nesse caso específico, temos uma teoria de campos mapeada no espaço-tempo euclideo através

da rotação de Wick [37, 36]. Com essa identificação vemos que a função de partição é exatamente o funcional gerador de campos escalares, onde  $\phi$  é o campo, que como veremos na seção (2.2) é o análogo da magnetização,  $\mu$  é a massa, que como podemos ver, o seu quadrado é proporcional à diferença entre uma dada temperatura  $T$  e a temperatura de transição  $T_0$ , ou seja, na temperatura crítica teremos uma teoria quântica de campo escalar não massiva, e por fim,  $\lambda$  é a constante de acoplamento, estando junto ao termo de interação  $\phi^4$ .

Podemos escrever o argumento da integral em (2.25) como sendo  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_s$ , onde

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(|\nabla\phi|^2 + \mu^2\phi^2), \quad (2.26)$$

é a densidade lagrangeana para o campo livre, isto é, sem interação entre os campos e sem fonte;

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad (2.27)$$

é a densidade lagrangeana de interação e

$$\mathcal{L}_s = -J\phi, \quad (2.28)$$

é o termo de fonte.

É importante salientar, que o surgimento de um termo  $|\nabla\phi|^2 \equiv |\nabla\mathcal{M}(x)|^2$  na densidade lagrangeana  $\mathcal{L}'$ , é uma característica desejável e importante dessa descrição. Por quanto este termo mede as flutuações (variações) no parâmetro de ordem  $M(x)$ , flutuações essas que não podiam ser tratadas pelo modelo originalmente proposto por Landau. No modelo de Landau, a função de partição é escrita como a exponencial de um potencial termodinâmico, onde este, por sua vez, é função do parâmetro de ordem em torno do qual se faz uma expansão em série de potências. Esse tipo de expansão não pode, evidentemente, gerar um termo de derivada do parâmetro de ordem. Isto significa que o modelo despreza as flutuações do parâmetro de ordem na transição. Portanto, essa descrição torna-se ruim, do ponto de vista quantitativo, ao nos aproximarmos do ponto crítico, pois nessa região, que pode ser definida por  $|T - T_0| \ll 1$ , as flutuações tornam-se infinitamente grandes, e os termos de derivada do parâmetro de ordem tornam-se importantes.

Vale ressaltar que a transformação de Hubbard-Stratonovich é uma forma heurística de conseguirmos a descrição do modelo em termos de campos contínuos. Do ponto de vista da teoria de campos, tal transformação é desnecessária, embora seja conveniente para uma abordagem mais simples e didática. Poderíamos obter a mesma densidade lagrangeana em (2.25), determinando as simetrias do parâmetro de ordem para construir, a partir do campo e de suas derivadas, todos os possíveis invariantes com respeito à simetria do grupo, levando em consideração, obviamente, as simetrias do espaço-tempo. No caso específico do modelo de Ising, precisamos incluir apenas  $(\nabla\phi)^2$ ,  $\phi^2$  e  $\phi^4$ , com coeficientes arbitrários, pois a simetria, quando fazemos  $\phi \rightarrow -\phi$ , permite apenas potências pares aparecendo no polinômio. Outros monômios são *irrelevantes* para a descrição do comportamento crítico do sistema. O significado do termo *irrelevante* será visto na seção 2.3.

Voltando à função de partição ou, em nossa linguagem a partir de agora, *funcional gerador*, podemos escrevê-la como

$$Z\{J\} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp\{-\int (\mathcal{L} - J\phi)d^d x\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp\{-\int \mathcal{L}d^d x\}}, \quad (2.29)$$

onde  $\mathcal{L}$  é a densidade lagrangeana sem o termo de fonte e o denominador é escrito para normalizar  $Z(J)$ , pois queremos que ele seja 1 para  $J = 0$ .

Sendo o termo de fonte linear com o campo, podemos escrever  $Z\{J\}$  da seguinte maneira

$$Z\{J\} = \mathcal{N}^{-1} \exp\left\{-\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)d^d x\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}\int d^d x d^d y J(x)G_0(x-y)J(y)\right\}, \quad (2.30)$$

já que as derivadas com respeito à fonte reconstituirão o termo de interação a sua forma original. Em (2.30),  $\mathcal{N}^{-1}$  é o fator normalizador de  $Z$ ,  $G_0$  é o propagador da teoria livre, logo, a segunda exponencial é o funcional gerador da teoria livre, simbolizado aqui por  $Z_0\{J\}$ , ou seja,

$$Z\{J\} = \mathcal{N}^{-1} \exp\left\{-\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)d^d x\right\} Z_0\{J\}. \quad (2.31)$$

Em termos de derivada funcional com respeito a  $J$ , nossa densidade lagrangeana de interação é escrita como

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda}{4!} \left[\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]^4, \quad (2.32)$$

expandindo então a exponencial do termo acima, teremos

$$Z\{J\} = \mathcal{N}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^n \int d^d x_1 \cdots d^d x_n \left[\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right]^4 \cdots \left[\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\right]^4 Z_0\{J\}. \quad (2.33)$$

Uma simplificação interessante e apropriada no tratamento dos termos da expansão (2.33), são os diagramas de Feynman, os quais têm como regra básica associar a cada propagador  $G_0$ , que aparece na expansão, uma linha que conecta os pontos especificados em seu argumento com o ponto especificado pela fonte. A partir de  $Z\{J\}$  podemos definir

$$G^{(N)}(x_1, \cdots, x_N) = \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \exp\{-\int (\mathcal{L} - J\phi)d^d x\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp\{-\int \mathcal{L}d^d x\}}, \quad (2.34)$$

onde  $G^{(N)}$  é denominada função de Green de  $N$  pontos da teoria que estamos descrevendo, a qual é a média dos campos  $\phi(x_1)$  a  $\phi(x_N)$ . Em mecânica estatística temos como análogo das funções de Green de  $N$  pontos as funções de correlação, que são definidas a partir da

função de partição. Devido à linearidade da fonte  $J$  com o campo  $\phi$ , podemos escrever  $G^{(N)}$  como

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\delta^N Z\{J\}}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_N)} \Big|_{J=0}. \quad (2.35)$$

Um caso um pouco mais geral do que o descrito até agora, se dá ao considerarmos que ao invés de um único campo escalar tenhamos  $M$  campos bosônicos ou um spin  $M$ -dimensional em um sítio da rede, ou seja, temos um parâmetro de ordem com  $M$  componentes. A parte livre da densidade lagrangeana é dada então por

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i + \mu_i^2 \phi_i^2), \quad (2.36)$$

e a interação pode ter a forma, por exemplo

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{4!} \lambda F_{ijkl} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l, \quad (2.37)$$

onde estamos utilizando a convenção de soma para os índices repetidos. Podemos simplificar ainda mais essa descrição impondo a simetria  $O(M)$ . Neste caso, o elemento invariante é  $\Phi^2$ ; todas as massas são iguais e a interação é dada por

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda}{4!} \left( \sum_i \phi_i^2 \right)^2, \quad (2.38)$$

ou ainda

$$\left( \sum_i \phi_i^2 \right)^2 = \sum_{ik} \phi_i^2 \phi_k^2 = \sum_{ijkl} \delta_{ij} \delta_{kl} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l. \quad (2.39)$$

Podemos tornar a expressão (2.39) simétrica em todos os índices escrevendo

$$\left( \sum_i \phi_i^2 \right)^2 = \sum_{ijkl} S_{ijkl} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l, \quad (2.40)$$

vemos então que  $F_{ijkl} = S_{ijkl}$ , onde

$$F_{ijkl} = S_{ijkl} = \frac{1}{3} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (2.41)$$

Com a adição de um termo de fonte  $\mathcal{L}_s = -J_i \phi_i$ , o funcional gerador da teoria livre é escrito como

$$Z_0\{J\} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int \sum_i J_i(x) G_{0i}(x-y) J_i(y) \right\}, \quad (2.42)$$

onde  $G_{0i}$  é dado por



$$G_{0i}(x_1 - x_2) = G_{0i}^{(2)}(x_1, x_2) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\exp[ip(x_1 - x_2)]}{p^2 + \mu_i^2}. \quad (2.43)$$

A construção desse resultado torna-se simples ao notarmos que  $\mathcal{L}_0$  em (2.36) é uma soma de termos independentes para cada  $i$  e que  $Z_0$  é um produto. Da mesma forma temos que

$$Z\{J_i\} = \exp \left\{ - \int \mathcal{L}_{int} \left[ \frac{\delta}{\delta J_i(x)} \right] d^d x \right\} Z_0\{J_i\}, \quad (2.44)$$

e que as funções de Green da teoria são dadas por

$$G_{i_1 \dots i_N}^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = \langle \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_N}(x_N) \rangle = \frac{\delta^N Z\{J_i\}}{\delta J_{i_1}(x_1) \dots \delta J_{i_N}(x_N)} \Big|_{J_i=0}. \quad (2.45)$$

O problema então de calcular  $G$ , em qualquer ordem de teoria de perturbação, se reduz ao cálculo de muitas derivadas de  $Z_0$  com respeito a  $J_i(x)$ , em  $J_i = 0$ . Como exemplo, consideremos a expressão para o termo de primeira ordem em  $G_{i_1 i_2}^{(2)}$ . Ele será

$$\sum_{ijkl} F_{ijkl} \frac{\delta}{\delta J_{i_1}(x_1)} \frac{\delta}{\delta J_{i_2}(x_2)} \left( - \frac{\lambda}{4!} \right) \int d^d x' \frac{\delta}{\delta J_i(x')} \frac{\delta}{\delta J_j(x')} \frac{\delta}{\delta J_k(x')} \frac{\delta}{\delta J_l(x')} Z_0 \Big|_{J=0}, \quad (2.46)$$

o qual, após realizadas todas as derivadas e tendo-se normalizado a expressão, torna-se

$$- \frac{\lambda}{2} \sum_k F_{i_1 i_2 k k} \int d^d x' G_{0i_1}(x_1 - x'_1) G_{0i_2}(x_2 - x'_1) G_{0k}(x'_1 - x'_1), \quad (2.47)$$

onde foi assumido que  $F$  é simétrico em seus índices. De acordo com (2.41), para  $l = k$ , temos

$$\sum_k S_{ijkk} = \left( \frac{M+2}{3} \right) \delta_{ij}, \quad (2.48)$$

que nos dá a dependência em  $M$ , como também explicita o fato de que a função de 2-pontos é diagonal nos índices de campo.

Voltando às funções de Green de  $N$ -pontos, simplificaremos muito nossa formulação se passarmos a escrevê-las no espaço dos momentos, pois assim poderemos calcular explicitamente as grandezas posteriormente necessárias. Para isso, fazemos a transformada de Fourier dos campos e fontes e com isso obtemos

$$G^{(N)}(k_1, \dots, k_N) = \frac{\delta^{(N)} Z\{J\}}{\delta J(-k_1) \dots \delta J(-k_N)} \Big|_{J=0}. \quad (2.49)$$

A partir dessa definição temos que o propagador livre, ou seja, em ordem zero de perturbação, no espaço dos momentos é

$$G_0(k) = \frac{1}{k^2 + \mu^2}. \quad (2.50)$$

No espaço dos momentos, ao fazermos a representação diagramática, também associamos uma linha ao propagador, agora rotulada por  $k$ . No caso de um termo em  $n$ -ésima ordem de perturbação associaremos  $n$  pontos (vértices) de interação. Para administrarmos o fluxo de momento que entra e sai dos vértices associamos a cada um deles uma função delta de Dirac, o que pode ser comparado à “Lei dos Nós” em circuitos elétricos. Uma integral no momento se associa a cada linha que está entre dois vértices, ou seja, linhas internas no diagrama são integradas e, sendo a interação dada por  $(\frac{\lambda}{4!}\phi^4)$ , cada vértice de interação ganha um fator  $(\frac{\lambda}{4!})$ . Ainda tratando sobre a expansão diagramática, verifica-se que se um diagrama (gráfico) possui  $I$  linhas internas (propagadores internos) e  $n$  vértices de interação, terá então  $I$  integrais de momento e  $n$  deltas de Dirac dos quais, após manipulação matemática trivial, restará apenas um, o qual traduzirá a conservação do momento total no diagrama. Com isso, o número total de integrais de momento será

$$l = I - (n - 1), \quad (2.51)$$

onde  $l$  é o número de loops (laços) do diagrama. Ainda temos que, se  $E$  é o número de linhas externas (pernas) do diagrama, podemos obter

$$I = \frac{1}{2}(4n - E). \quad (2.52)$$

A expressão (2.52) traduz uma dependência natural, pois ao fixarmos o número de pernas externas, limitamos também o número de linhas internas, visto que cada vértice de interação aceita apenas um número fixo de propagadores conectados a ele. Substituindo agora (2.52) em (2.51), encontramos

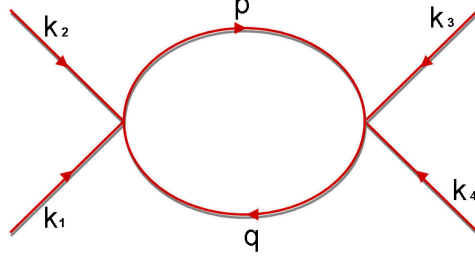
$$l = n + 1 - \frac{E}{2}. \quad (2.53)$$

A equação (2.53) nos dá a ligação entre a expansão no número de vértices  $n$ , isto é, na ordem da constante de acoplamento, e a expansão no número de loops. Observe que para  $E = 2$ , função de Green de 2-pontos,  $l = n$ , o que implica que, se quisermos uma expansão até a ordem  $l$  de loops, devemos ir até a ordem  $n$  na constante de acoplamento. Já para  $E = 4$ , função de Green de 4-pontos, uma expansão até a ordem  $l$  de loops, deve ser uma expansão até a ordem  $n = l + 1$  na constante de acoplamento.

Para as funções de Green mais simples, podemos redefinir a interação por um fator multiplicativo e associá-lo à tão conhecida constante de Planck. Essa constante multiplicativa acompanhará todos os vértices de uma expansão em loop. Logo, a ordem zero dessa expansão descreverá a teoria clássica, visto que não existem vértices nessa ordem (*teoria livre*).

Para exemplificar a utilidade da representação diagramática, vamos desenvolver o raciocínio para a construção da fórmula matemática de um determinado termo da função de Green de 4-pontos a partir de sua representação gráfica (Figura 2.1). Embora este seja o caminho inverso, pois os diagramas originalmente surgiram das equações, com

muita prática e conhecimento das regras para construção dos diagramas, pode-se fazer as expansões sem passar pelo estágio calculacional, o qual, dependendo da ordem de perturbação que se queira obter, torna-se bastante extenso.



**Figura 2.1** Gráfico de um termo da função de 4-pontos em 1-loop na teoria  $\phi^4$ .

A construção da expressão segue o seguinte roteiro:

1 - *Análise do número de vértices de interação.*

Como o diagrama (Figura 2.1) possui dois vértices, conclui-se que este termo é de segunda ordem na expansão, portanto atribui-se a ele um fator de  $(\frac{1}{2!})$  e cada vértice carrega um termo  $(-\frac{\lambda}{4!})$  advindo da interação na teoria  $\Phi^4$ .

2 - *Fator de Simetria.*

O fator de simetria, é o número de possibilidades para a construção do mesmo gráfico, ao permutarmos seus propagadores. No caso do gráfico na Figura 2.1 temos  $(4!)^2$  possibilidades.

3 - *Propagadores Externos (Pernas).*

A cada perna associamos um propagador livre  $G_0$  e estes não são integrados. O diagrama na Figura 2.1 é de um termo da função de Green de 4-pontos, teremos então 4 propagadores livres, ou seja,  $G_0(k_1)G_0(k_2)G_0(k_3)G_0(k_4)$ .

4 - *Fluxo de Momento.*

Inicialmente, colocamos as setas de momento entrando ou saindo de cada vértice arbitrariamente e definimos se o sentido positivo é saindo ou entrando no gráfico. Essa escolha também é arbitrária. Para cada vértice atribui-se um delta de Dirac cujo argumento é a soma dos momentos em cada vértice levando-se em conta o sentido escolhido para o sinal positivo e negativo. Essa é uma maneira de explicitar a conservação de momento em cada vértice.

5 - *Propagadores internos.*

Também atribui-se a cada linha interna um propagador livre  $G_0$ , sendo estes integrados, isto é, teremos uma integral para cada propagador interno, cuja integração é sobre o momento de cada propagador.

Assim, para a Figura 2.1, após a utilização das propriedades da função delta de Dirac, temos a seguinte expressão matemática:

$$\frac{\lambda^2}{2} G_0(k_1)G_0(k_2)G_0(k_3)G_0(k_4) \delta\left(\sum_{i=1}^4 k_i\right) \int d^d p G_0(p)G_0(p - (k_1 + k_2)), \quad (2.54)$$

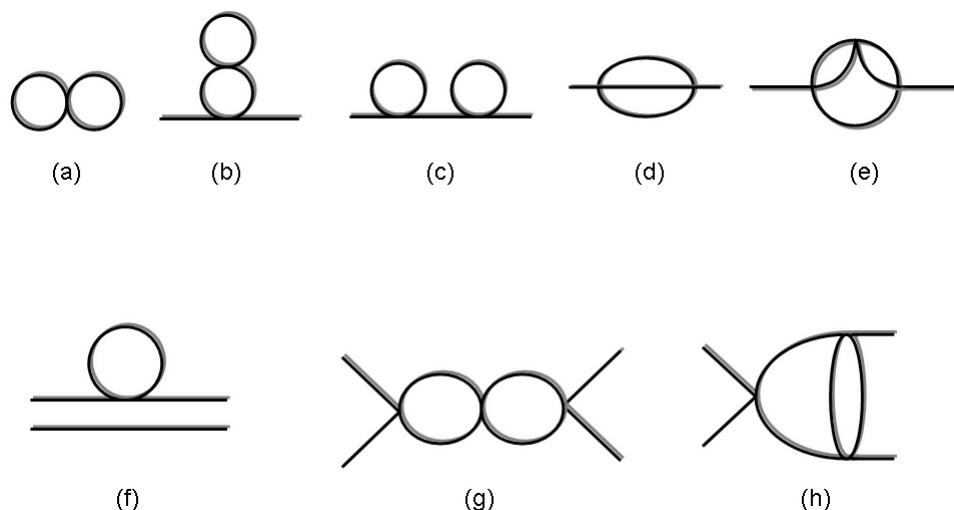
onde o fator  $\delta$  indica a conservação do momento. O gráfico 2.1, dado como exemplo para essa construção, constitui-se como a peça principal no que diz respeito ao tratamento das divergências na teoria crítica. Os outros gráficos, que também serão utilizados para a descrição do problema proposto, divergirão, por possuírem o diagrama de Feynman acima como sub-diagrama.

A partir de regras similares, só que no sentido inverso do que foi feito, temos que a expansão da função de Green de 2-pontos até a ordem de  $\lambda^2$  é:

$$\begin{aligned}
 G_2^{(2)}(x_1, x_2) = & \text{---} \text{---} \text{---} \quad (-\lambda/4!) \times 12 \times \text{---} \text{---} \text{---} + \\
 & + (1/2!) (-\lambda/4!)^2 \left[ 288 \times \text{---} \text{---} \text{---} + 192 \times \text{---} \text{---} \text{---} + 288 \times \text{---} \text{---} \text{---} \right]
 \end{aligned}$$

**Figura 2.2** Expansão diagramática normalizada da função de Green de 2-pontos até a ordem de  $\lambda^2$ .

Existem algumas definições e características importantes ao nosso estudo, no que diz respeito a representação gráfica (diagramática) dos termos da expansão das funções de Green. Tais definições e características podem ser exemplificadas pelos gráficos na Figura 2.3.



**Figura 2.3** Diagramas de termos das funções de 2 e 4-pontos numa teoria  $\phi^4$ .

O gráfico (a) é denominado de diagrama de vácuo; tais diagramas não possuem propagadores externos (pernas), e são eliminados da expansão diagramática pela condição de normalização do funcional gerador  $Z$ , dada por (2.29). O gráfico (b), associado à função de 2-pontos, pode ser eliminado da expansão diagramática após uma redefinição da massa. Observe que em (c) temos um gráfico da função de 2-pontos, o qual pode ser dividido em

dois, pelo corte de sua linha central. Já os gráficos (d) e (e), pertencentes a expansão da função de Green de 2-pontos, não podem ser divididos em dois diagramas pelo corte de uma única linha interna e são exemplos de diagramas em 2 e 3-loops, respectivamente. O gráfico (f) está relacionado à função de 4-pontos e é um exemplo de diagrama desconectado, podendo ser obtido do produto dos gráficos em ordem zero e primeira ordem na constante de acoplamento da função de Green de 2-pontos (Figura 2.2). Os gráficos (g) e (h) são exemplos de diagramas da função de 4-pontos em 2-loops. Observando esses dois últimos gráficos, vemos claramente a inserção do subdiagrama dado na Figura 2.1. Os diagramas (d), (e), (g) e (h) são exemplos dos chamados diagramas *1PI* (“one particle irreducible”). Concentraremos nosso interesse nesse tipo de diagrama, pois estão relacionados a propriedades fundamentais no tratamento de fenômenos críticos, permitindo-nos obter quantidades universais como expoentes críticos, razões de amplitudes para as funções termodinâmicas acima e abaixo da transição, etc.

Dentro ainda do tratamento com funções de Green com respeito às correlações existentes no sistema, podemos ainda introduzir médias do tipo

$$G_{i_1, \dots, i_N, j_1, \dots, j_L}^{(N, L)}(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_L) = \left(\frac{1}{2}\right)^L \langle \phi_{i_1}(x_1) \cdots \phi_{i_N}(x_N) \phi_{j_1}^2(y_1) \cdots \phi_{j_L}^2(y_L) \rangle. \quad (2.55)$$

Essa estrutura é importante, por exemplo, para o calor específico. Nesse caso, queremos encontrar as correlações entre a densidade de energia em vários pontos, levando em consideração a magnetização. De fato, usando o modelo de Ising original em conjunção com a transformação de Hubbard-Stratonovich, pode-se mostrar que o calor específico está relacionado com o funcional gerador através da expressão

$$C = -\frac{1}{N} \left( \frac{\partial}{\partial \mu^2} \right)^2 \ln Z_0 = -\frac{1}{N} \left[ \left\langle \frac{1}{2} \int \phi^2(r) \frac{1}{2} \int \phi^2(r) \right\rangle - \left\langle \frac{1}{2} \int \phi^2(r) \right\rangle^2 \right]. \quad (2.56)$$

Considerando então (2.55), o calor específico será dado por

$$C = - \int d(y_1 - y_2) [G^{(0,2)}(y_1, y_2) - G^{(0,1)}(y_1)G^{(0,1)}(y_2)]. \quad (2.57)$$

A equação (2.55) nos leva a concluir que este tipo de função de correlação pode também ser gerada por um termo de fonte. Isto pode ser feito se adicionarmos à densidade lagrangeana um termo do tipo

$$-\frac{1}{2} \sum_j t(y) \phi_j^2(y). \quad (2.58)$$

As funções de Green que incluem esses tipos de operadores, chamados de *operadores compostos*, podem ser dadas então por

$$G_{i_1, \dots, i_N, j_1, \dots, j_L}^{(N, L)}(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_L) = Z^{-1} \frac{\delta^{N+L} Z \{J, t\}}{\delta J_{i_1}(x_1) \cdots \delta J_{i_N}(x_N) \delta t_{j_1}(y_1) \cdots \delta t_{j_L}(y_L)} \Big|_{j=t=0}, \quad (2.59)$$

o que no espaço dos momentos fica

$$G_{i_1, \dots, i_N, j_1, \dots, j_L}^{(N,L)}(k_1, \dots, k_N, p_1, \dots, p_L) = Z^{-1} \frac{\delta^{N+L} Z\{J, t\}}{\delta J_{i_1}(-k_1) \dots \delta J_{i_N}(-k_N) \delta t_{j_1}(-p_1) \dots \delta t_{j_L}(-p_L)} \Big|_{j=t=0}. \quad (2.60)$$

A conexão entre as funções de Green que incluem operadores compostos, e as que possuem apenas operadores simples é dada pela expressão

$$G^{(N,L)}(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_L) = \left(\frac{1}{2}\right)^L G^{(N+2L)}(x_1, \dots, x_N, y_1, y_1, y_2, y_2, \dots, y_L, y_L), \quad (2.61)$$

o que é bastante prático, pois sabendo os termos de uma podemos construir a outra. Um fato que é de fundamental importância aqui é que no limite no qual  $t(y)$  torna-se independente de  $y$ , podemos considerá-lo como uma variação da massa, ou seja, da temperatura, visto que ele acompanha um operador  $\phi^2$  assim como  $\mu^2$ . Portanto as funções  $G^{(N,L)}$  podem ser usadas como coeficientes em uma expansão de  $G^{(N)}$  em torno de um certo valor de temperatura como se segue

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N; \mu^2 + \delta t) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{1}{L!} (\delta t)^L \int dy_1 \dots dy_L G^{(N,L)}(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_L; \mu^2), \quad (2.62)$$

onde  $G^{(N)}$  é a função de Green calculada com  $\mu^2 + \delta t$  como coeficiente do termo quadrático na densidade lagrangeana.

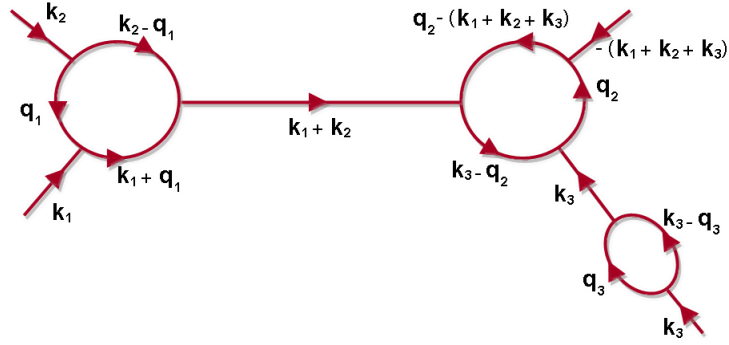
## 2.2 FUNÇÕES DE VÉRTICE E QUEBRA DE SIMETRIA

Como já vimos, diagramas do tipo (f) na Figura 2.3 são denominados diagramas desconectados, pois podem ser descritos como produtos disjuntos de dois ou mais diagramas. Temos também os diagramas denominados conectados, os quais não podem ser escritos por tal produto. Os diagramas, (d), (e), (g) e (h) na Figura 2.3, são exemplos desse tipo de gráfico.

Consideremos agora a Figura 2.4. De acordo com as regras já vistas, a expressão algébrica, a menos dos fatores numéricos, é:

$$\begin{aligned} & G_0(k_1)G_0(k_2) \left[ \int dq_1 G_0(q_1)G_0(k_1 + q_1)G_0(k_2 - q_1) \right] \times \\ & \times G_0(k_1 + k_2) \left[ \int dq_2 G_0(q_2)G_0(k_3 - q_2)G_0(q_2 - k_1 - k_2 - k_3) \right] \times \\ & \times G_0(k_1 + k_2 + k_3)G_0(k_3) \left[ \int dq_3 G_0(q_3)G_0(k_3 - q_3) \right] G_0(k_3). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Podemos perceber que as partes conectadas por linhas simples na Figura 2.4 estão apenas multiplicadas, sem qualquer intervenção dos fatores de  $G_0$  entre elas, pois estes não estão

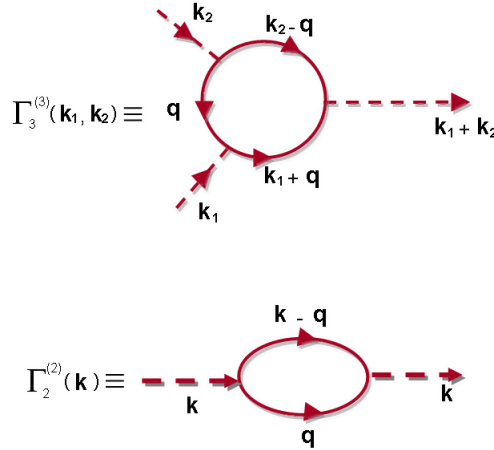


**Figura 2.4** Diagrama em 3-loops de um termo da função de Green de 4-pontos em ordem de  $\lambda^8$  de uma teoria  $\phi^3$ .

sendo integrados. Se o diagrama na Figura 2.4 for denotado por  $G_8^{(4)}(k_1, k_2, k_3)$ , podemos escrever

$$G_8^{(4)}(k_1, k_2, k_3) = G_0(k_1)G_0(k_2) \left[ \Gamma_3^{(3)}(k_1, k_2) \right] G_0(k_1 + k_2) \left[ \Gamma_3^{(3)}(k_1, k_2, k_3) \right] \times \quad (2.64)$$

$$\times G_0(k_1 + k_2 + k_3)G_0(k_3) \left[ \Gamma_2^{(2)}(k_3) \right] G_0(k_3).$$



**Figura 2.5** Representação gráfica das funções de vértice 1PI provenientes da Figura 2.4. As linhas tracejadas não fazem parte das funções de vértice, estão apenas indicando a entrada e saída de momento.

Os termos  $\Gamma_3^{(3)}$  e  $\Gamma_2^{(2)}$ , graficamente representados na Figura 2.5, são exemplos das chamadas funções de vértice ou gráficos 1PI (irredutíveis a uma partícula). Portanto, para encontrarmos a dependência em  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  do gráfico em 2.4, é suficiente conhecermos  $G_0$  e as duas funções da Figura 2.5, as quais são construídas pelas regras usuais, exceto pelo fato de que os  $G_0$ 's que correspondem as suas linhas externas são omitidos,

por isso as linhas tracejadas. Observe que toda vez que um gráfico pode ser separado em dois, pelo corte de uma única linha interna, o momento da linha cortada é completamente fixado pelo momento das linhas externas. Isto segue simplesmente de que o momento é conservado em todos os vértices. Assim, o momento fluindo para fora, ao longo de qualquer linha externa, é a soma do momento entrando ao longo das outras linhas do mesmo gráfico.

Podemos gerar apenas funções de Green conectadas de  $N$ -pontos ( $G_c^{(N)}$ ), se considerarmos o funcional

$$F = \ln Z\{J\}. \quad (2.65)$$

Com isso teremos

$$G_c^{(N)}(k_1, \dots, k_N) = \frac{\delta^N F\{J\}}{\delta J(-k_1) \dots \delta J(-k_N)}. \quad (2.66)$$

Observe que no contexto de mecânica estatística, identificamos  $F$  como a energia livre.

As igualdades seguintes são de fácil verificação

$$G^{(1)}(k_1) = \langle \phi(k_1) \rangle = G_c^{(1)}(k_1). \quad (2.67)$$

$$G^{(2)}(k_1, k_2) = G_c^{(2)}(k_1, k_2) + G_c^{(1)}(k_1)G_c^{(1)}(k_2). \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} G^{(3)}(k_1, k_2, k_3) = & G_c^{(3)}(k_1, k_2, k_3) + G_c^{(1)}(k_1)G_c^{(2)}(k_2, k_3) + G_c^{(1)}(k_2)G_c^{(2)}(k_1, k_3) + \\ & + G_c^{(1)}(k_3)G_c^{(2)}(k_1, k_2) + G_c^{(1)}(k_1)G_c^{(1)}(k_2)G_c^{(1)}(k_3). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Vemos, com os exemplos das equações (2.67), (2.68) e (2.69), que as funções de Green de  $N$ -pontos podem ser escritas em termos das funções conectadas e vice-versa, o que é uma fato geral para as funções de Green.

Tendo em mãos apenas as funções conectadas, podemos dar um passo além na descrição teórica ao considerarmos somente os gráficos  $1PI$ , visto que com estes poderemos reconstruir as funções conectadas e com elas as funções de Green de  $N$ -pontos, ou seja, poderemos reconstruir toda a teoria a partir de somas de partes de vértices  $1PI$ .

Para obtermos apenas as partes de vértice  $1PI$ , consideremos a transformação de Legendre

$$\Gamma\{\bar{\phi}\} + F\{J\} = \sum_i \bar{\phi}(i)J(i), \quad (2.70)$$

de onde podemos obter

$$\langle \phi(i) \rangle \equiv \langle \phi(k_i) \rangle \equiv \bar{\phi}_i = \frac{\delta F\{J\}}{\delta J(i)}, \quad (2.71)$$

e



$$\frac{\delta\Gamma\{\bar{\phi}\}}{\delta\bar{\phi}(i)} = J(i). \quad (2.72)$$

Note que, na ausência de campo externo,  $\Gamma(\bar{\phi})$  tem um extremo em  $v(i) = \lim_{J \rightarrow 0} \bar{\phi}(i)$ . Se  $\bar{\phi}$  é diferente de zero, há quebra espontânea de simetria, o que significa fisicamente, que mesmo na ausência de campo externo há um campo macroscópico, ou seja, magnetização diferente de zero. Este é exatamente o estado ordenado descrito na introdução. Se  $\bar{\phi} = 0$ , obtemos o estado desordenado (magnetização nula) no qual há simetria.

Da mesma forma que  $Z\{J\}$  foi expandido nos campos externos para defini-lo como funcional gerador das funções de Green, podemos expandir  $\Gamma\{\bar{\phi}\}$  em termos das médias dos campos  $\bar{\phi}$  e então identificarmos os coeficientes como sendo as partes de vértice  $1PI$  da maneira seguinte

$$\Gamma^{(N)}(1, \dots, N) = \frac{\delta^N \Gamma\{\bar{\phi}\}}{\delta\bar{\phi}(1) \cdots \delta\bar{\phi}(N)} \Big|_{J=0}. \quad (2.73)$$

Podemos associar um índice  $L$  ao valor médio dos campos compostos  $(\bar{\phi}^2)$ , de modo que

$$\Gamma^{(N,L)}(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N) = \frac{\delta^{N+L} \Gamma\{\bar{\phi}, t\}}{\delta\bar{\phi}(x_1) \cdots \delta\bar{\phi}(x_N) \delta t(y_1) \cdots \delta t(y_N)} \Big|_{J=0}, \quad (2.74)$$

são as partes  $1PI$  para campos compostos. Os  $t(y_i)$ 's são definidos como em (2.58). Partes  $1PI$  são identificadas como os coeficientes da expansão de  $\Gamma\{\bar{\phi}\}$  na média dos campos, sendo que

$$\Gamma\{\bar{\phi}\} = \sum_{N=1}^{\infty} \int d^d x_1 \cdots d^d x_N \frac{1}{N!} \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \bar{\phi}(x_1) \cdots \bar{\phi}(x_N). \quad (2.75)$$

Note que, de acordo com (2.75), os coeficientes da expansão ( $\Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N)$ ) são especificados em  $J = 0$ , embora a variável de expansão seja  $\bar{\phi}$ . Isso significa que a expansão é feita em torno de um  $\bar{\phi}$  que é obtido quando  $J = 0$ . A equação (2.75) representa, portanto, o caso simétrico. Quando existe a quebra de simetria, escrevemos

$$\Gamma\{\bar{\phi}\} = \sum_{N=1}^{\infty} \int d^d x_1 \cdots d^d x_N \frac{1}{N!} \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N) [\bar{\phi}(x_1) - v] \cdots [\bar{\phi}(x_N) - v]. \quad (2.76)$$

Podemos fazer uma análise simples no caso em que temos uma distribuição uniforme  $\bar{\phi}(x_i) = \Phi$ . Neste caso

$$\Gamma\{\bar{\phi}\} = \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N!} \left[ \int d^d x_1 \cdots d^d x_N \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \right] \Phi^N. \quad (2.77)$$

Através da transformada de Fourier de  $\Gamma^{(N)}$ , no limite de volume infinito

$$\Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \cdots \frac{d^d k_N}{(2\pi)^d} \Gamma^{(N)}(k_1, \dots, k_N) \exp\left(-i \sum_j k_j x_j\right), \quad (2.78)$$

e definindo

$$\Gamma^{(N)}(k_1, \dots, k_N) \equiv (2\pi)^d \delta\left(\sum_i k_i\right) \bar{\Gamma}^{(N)}(k_1, \dots, k_N), \quad (2.79)$$

podemos escrever

$$\Gamma\{\bar{\phi}\} = \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N!} \bar{\Gamma}^{(N)}(0, \dots, 0) \Phi^N (2\pi)^d \delta(0) = (2\pi)^d \delta(0) U(\Phi), \quad (2.80)$$

onde o termo  $\delta(0)$  indica que  $\Gamma\{\bar{\phi}\}$  é proporcional ao volume do sistema e  $U(\Phi)$  é denominado de *potencial efetivo*. Se considerarmos apenas os termos de  $\Gamma^{(N)}$  que não possuem integrais, isto é, a ordem zero da expansão em loops, o potencial efetivo será escrito como

$$U(\Phi) = \frac{1}{2} \mu^2 (\Phi)^2 + \frac{\lambda}{4!} (\Phi^2)^2, \quad (2.81)$$

resultado conhecido como a energia livre de Landau.

Para analisar a simetria do sistema, partimos de (2.72) para  $J(i) = 0$ , ou seja,

$$\frac{\partial U(\Phi)}{\partial \Phi} = 0, \quad (2.82)$$

e chegamos a conclusão de que a equação (2.82) terá  $\Phi = 0$  como solução trivial e

$$(\Phi)^2 = -\frac{6\mu^2}{\lambda}, \quad (2.83)$$

como solução para a fase de simetria quebrada. O valor do campo uniforme em (2.83) só tem sentido físico para  $\mu^2 < 0$ , ou seja, para temperaturas abaixo da temperatura crítica do sistema.

Prosseguindo com a nossa analogia entre mecânica estatística e teoria quântica de campos, vemos, ao observar a simetria do sistema como descrita acima, que o campo  $\Phi$  é um parâmetro de ordem, tendo por características: diminuir seu módulo continuamente até a temperatura de transição (*fase ordenada*  $\equiv$  *fase de simetria quebrada*) quando partimos de uma temperatura  $T < T_0$ ; anular-se exatamente na transição ( $T = T_0$ ); não existir para  $T > T_0$  (*fase desordenada*  $\equiv$  *fase simétrica*). Em sistemas magnéticos a entidade física que possui tais características, fechando então essa analogia, é a magnetização.

Podemos agora verificar que as flutuações que aparecem, já a partir da ordem de 1-loop na expansão, fazem com que o valor da temperatura de transição  $T_0$  mude para um valor  $T_c$ . Através disso teremos em mãos um critério, chamado de critério de Ginzburg, para a validade da teoria de Landau. Adicionando à (2.81) o termo referente a ordem de 1-loop, obtemos

$$U(\Phi) = \frac{1}{2} \left[ \mu^2 + \frac{\lambda}{2} \int d^d q \frac{1}{q^2 + \mu^2} \right] \Phi^2, \quad (2.84)$$

onde o termo entre colchetes é identificado como o inverso da susceptibilidade, ou seja,

$$\chi^{-1} = \mu^2 + \frac{\lambda}{2} \int d^d q \frac{1}{q^2 + \mu^2}. \quad (2.85)$$

A susceptibilidade possui a característica de ser divergente na temperatura de transição. Vemos então que sem o termo de 1-loop, teríamos essa divergência para  $\mu^2 = 0$ , isto é,  $T = T_0$ , mas por (2.85) a divergência, condição para a transição, se dá em

$$\mu_c^2 = T_c - T_0 = -\frac{\lambda}{2} \int d^d q \frac{1}{q^2 + \mu_c^2}, \quad (2.86)$$

onde  $T_c$  é a nova temperatura de transição. Se expandirmos  $\mu_c^2$  em (2.86) dentro da integral e formos até a ordem de 1-loop, obteremos para  $T_c$  a seguinte expressão

$$T_c = T_0 - \frac{\lambda}{2} \int d^d q \frac{1}{q^2}. \quad (2.87)$$

Temos ainda que

$$\mu^2 = T - T_0 = T + T_c - T_c - T_0 = \mu_c^2 + T - T_c. \quad (2.88)$$

Supondo que estamos próximos da região de transição ( $T \rightarrow T_c$ ), escrevemos

$$\mu^2 = \mu_c^2 + \delta T, \quad (2.89)$$

o que aplicado em (2.85) nos dará

$$\chi^{-1} = \delta T + \frac{\lambda}{2} \int d^d q \frac{1}{q^2 + \mu^2} + \mu_c^2. \quad (2.90)$$

Após expandirmos  $\mu^2$ , indo até a ordem de 1-loop, teremos

$$\chi^{-1} = \delta T \left[ 1 - \frac{\lambda}{2} \int d^d q \frac{1}{q^2(q^2 + \delta T)} \right]. \quad (2.91)$$

A teoria de Landau prevê que  $\chi^{-1}$  é linear com a diferença de temperatura  $\delta T$ , com isso podemos dizer que a teoria de Landau falha para

$$\frac{\lambda}{2} \int d^d q \frac{1}{q^2(q^2 + \delta T)} \approx 1, \quad (2.92)$$

ou seja, quando o termo de 1-loop torna-se relevante. Podemos agora identificar, a partir de (2.92), qual é o limite dimensional de validade da teoria de Landau. Fazendo uma simples mudança na escala de momento na integral acima, ou seja,  $q \equiv q'(\delta T)^{\frac{1}{2}}$ , obtemos

$$\frac{\lambda}{2} (\delta T)^{\frac{d-4}{2}} \int d^d q' \frac{1}{q'^2(q'^2 + 1)}. \quad (2.93)$$

Vemos então que acima de 4 dimensões a integral é finita para todos os valores de  $\delta T$ . Próximo à temperatura de transição ( $\delta T \rightarrow 0$ ), para  $\lambda$  pequeno, o valor da integral em (2.92) torna-se pequeno com relação à unidade e a teoria de campo médio é suficiente para a descrição do sistema. Por outro lado, abaixo de 4 dimensões, quando  $\delta T \rightarrow 0$ , a mesma integral tem uma *divergência infravermelha*, que é a divergência associada a valores grandes para o comprimento de onda. Consequentemente, para qualquer valor de  $\lambda$ , a teoria de Landau torna-se uma grosseira aproximação. Observe que a dimensão  $d = 4$  é a linha divisória, numa teoria  $\phi^4$ , com respeito às divergências, recebendo o nome de *dimensão crítica*. Estudaremos um pouco mais sobre as divergências e a forma de tratá-las na próxima seção.

### 2.3 DIVERGÊNCIAS NAS FUNÇÕES 1PI E RENORMALIZAÇÃO

Ao fazermos a expansão diagramática das funções 1PI, esbarramos no fato de que as integrais decorrentes da expansão são divergentes, isso levando em consideração a dimensão  $d$  do sistema. Podemos nos utilizar de um exemplo simples para explicitar a afirmação acima:

Considere a integral abaixo, referente ao diagrama da Figura 2.1:

$$\int d^d q \frac{1}{(q^2 + \mu^2)[(q - k)^2 + \mu^2]}. \quad (2.94)$$

A partir de uma simples análise da dimensionalidade dessa função de vértice, vemos que ela possui  $d - 4$  potências de momento. Então, se  $d = 4$ , teremos uma divergência logarítmica, que é a divergência mais fraca que pode ocorrer, pois para  $d < 4$  a integral será finita. Estamos considerando o limite superior da integração sendo  $\Lambda$ , onde as divergências aparecem para  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Para  $d = 6$  teríamos uma divergência quadrática e assim por diante. Observe que quanto mais propagadores internos a função de vértice possuir, menor será o grau de divergência para uma determinada dimensão, sendo que cada propagador é responsável por uma diminuição quadrática na divergência total da função. As divergências citadas acima são conhecidas como divergências do regime *ultra-violeta* ( $\Lambda \rightarrow \infty$ ), ou seja, de pequeno comprimento de onda. Elas não estão associadas à física do sistema e por isso devemos nos utilizar de algum método para extraí-las. Métodos de regularização são empregados com esse propósito. Podemos, por exemplo, permitir que  $d$  seja arbitrário na integral acima e a divergência se manifestará como pólos que ocorrem quando  $d = 4$ . Esse processo, chamado *regularização dimensional*, tornará o tratamento teórico consistente e capaz de prever com confiabilidade as entidades físicas que estamos procurando. Ao tratamento e remoção das divergências ultravioletas damos o nome de *renormalização*. A teoria decorrente desse tratamento denominaremos de *teoria renormalizada*, que é consequentemente finita no limite requerido.

Vamos agora tentar elucidar a conexão entre vários tipos de interação, dentre elas a interação  $\phi^4$ , e o número de dimensões espaciais nas quais as teorias interagentes são renormalizáveis. Algumas considerações sobre dimensionalidade se fazem necessárias para que possamos ter o domínio da técnica que será utilizada posteriormente para a renormalização das funções de vértice 1PI.

A dimensão do campo  $\phi$  pode ser determinada da parte livre da densidade lagrangeana, impondo que o termo cinético multiplicado pelo elemento de volume seja adimensional. No espaço dos momentos teremos

$$[\phi] = L^{\frac{d}{2}+1} = \Lambda^{-(1+\frac{d}{2})}, \quad (2.95)$$

onde  $L$  simboliza a dimensão de comprimento e  $\Lambda$  é o seu inverso ou ainda a dimensão de momento. Da mesma forma chegamos à conclusão que  $[\mu^2] = \Lambda^2$ , ou seja, a massa ao quadrado possui dimensão de momento ao quadrado. Continuando com a nossa análise, consideremos agora uma interação do tipo

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{r!} \lambda_r \phi^r. \quad (2.96)$$

Pelos argumentos já citados chegamos à

$$[\lambda_r] = \Lambda^{r+d-\frac{1}{2}rd} \equiv \Lambda^{\delta_r}, \quad (2.97)$$

onde  $\lambda_r$  é a constante de acoplamento para uma teoria  $\phi^r$ . Para a teoria  $\phi^4$ , a dimensão da constante de acoplamento é então

$$[\lambda_4] = \Lambda^{4-d}. \quad (2.98)$$

Vemos que numa teoria  $\phi^4$ ,  $\lambda_4$  é adimensional em  $d = 4$ . Ainda dentro dessas considerações verifica-se que a dimensão das funções 1PI no espaço dos momentos é

$$[\bar{\Gamma}^{(N)}(k_i)] = \Lambda^{N+d-\frac{1}{2}Nd}, \quad (2.99)$$

onde o expoente de  $\Lambda$  em (2.99) é comumente chamado de *dimensão canônica*. Se considerarmos então uma expansão até a  $n$ -ésima ordem de perturbação de uma função de vértice  $\Gamma^{(N)}$  em uma teoria interagente  $\phi^r$  em  $d$  dimensões, cada termo da expansão terá a dimensão dada por

$$\Lambda^{-n\delta_r+(N+d-\frac{1}{2}Nd)} \equiv \Lambda^\delta, \quad (2.100)$$

onde o segundo termo no expoente é a dimensão canônica, portanto o primeiro termo é a contribuição da constante de acoplamento, sendo  $n$  a ordem da perturbação e  $\delta_r$  é definido por (2.97).

Observando (2.100), chegamos à conclusão de que a condição necessária e suficiente para que as divergências sejam independentes da ordem da teoria de perturbação é tornar a constante de acoplamento adimensional. Temos então que encontrar a dimensão para a qual  $\delta_r = 0$ . Essa dimensão é a já mencionada *dimensão crítica* ( $d_c$ ). É fácil verificar que

$$d_c = \frac{2r}{r-2} = 2 + \frac{4}{r-2}, \quad (2.101)$$

de onde podemos concluir que quanto maior o valor de  $r$ , menor é a dimensão crítica  $d_c$ , aproximando-se de 2 para  $r \rightarrow \infty$ . Também concluímos que para a teoria  $\phi^4$ ,  $d_c = 4$ , o que pode ser obtido também por (2.98).

Para  $d = d_c$  a teoria é renormalizável, pois nesta dimensão podemos retirar as divergências ultravioletas das integrais por métodos de renormalização. Para  $d > d_c$  a teoria é dita não-renormalizável e para  $d < d_c$  é dita super-renormalizável.

Ao operador (*interação*) que possui a dimensão crítica que adimensionaliza a constante de acoplamento, chamamos de *operador mais relevante*. Esse operador carrega uma forte divergência infravermelha e qualquer interação com maior valor de  $r$  terá, como vimos em (2.101), menor  $d_c$  que ele. Portanto, próximo ao número crítico de dimensões espaciais do operador mais relevante, interações com maior  $r$  não terão singularidades no regime infravermelho, possuindo apenas singularidades no ultravioleta, sendo então *operadores irrelevantes* para o problema, pois são as divergências infravermelhas que estão associadas à física do sistema. Uma forma conveniente de identificarmos operadores irrelevantes é observar quais os operadores que possuem uma dimensão negativa para a constante de acoplamento, ao nos aproximarmos da dimensão crítica do operador mais relevante. Suponhamos, por exemplo, um termo cinético genérico do tipo

$$\mathcal{O} = k^s \phi^r. \quad (2.102)$$

A dimensão de  $\mathcal{O}$  é dada por

$$[\mathcal{O}] = [\phi]^r \Lambda^s \implies [\mathcal{O}] = \Lambda^{\frac{rd}{2} - r + s}. \quad (2.103)$$

Então, para a constante de acoplamento  $\mathcal{A}$  correspondente a esse termo, teremos

$$\mathcal{A} k^s \phi^r \implies [\mathcal{A}] = \Lambda^{d - s + r - \frac{rd}{2}}. \quad (2.104)$$

O termo em (2.102), será relevante se a dimensão de  $\mathcal{A}$  for nula ou positiva.

*Exemplo 1:* Teoria  $\phi^4$  em  $d = d_c = 4$

$$[\mathcal{A}] = \Lambda^{d_c - (s - r + \frac{rd_c}{2})} = \Lambda^4 \cdot \Lambda^{-(s - r + 2r)}, \quad (2.105)$$

o que nos leva a seguinte condição

$$s + r \leq 4. \quad (2.106)$$

Logo, podemos ter apenas os seguintes termos:  $\phi^2$ ,  $\phi^4$  e  $k^2 \phi^2$ . Esses são os operadores relevantes na teoria  $\phi^4$ . Os termos ímpares são eliminados pela simetria  $\phi \rightarrow -\phi$  e pela invariância translacional ( $k \rightarrow -k$ ).

*Exemplo 2:* Teoria  $\phi^6$  em  $d = d_c = 3$

Seguindo os mesmos passos do exemplo anterior, obtemos a condição

$$2s + r \leq 6. \quad (2.107)$$

Com isso, os operadores relevantes numa teoria  $\phi^6$  são:  $\phi^6$ ,  $\phi^4$ ,  $\phi^2$  e  $k^2 \phi^2$ , onde as outras possibilidades são eliminadas também pela simetria  $\phi \rightarrow -\phi$  e pela invariância translacional.

*Exemplo 3:* Teoria  $\phi^3$  em  $d = d_c = 6$

Da mesma forma, temos aqui uma condição para os operadores relevantes

$$s + 2r \leq 6. \quad (2.108)$$

De acordo com a condição acima, os operadores relevantes para uma teoria  $\phi^3$  são:  $\phi^3$ ,  $\phi^2$ ,  $\phi$ ,  $k^2\phi$ ,  $k^2\phi^2$  e  $k^4\phi$ , onde impusemos aqui apenas a invariância translacional, por se tratar de uma teoria  $\phi^3$ . Observe ainda que o termo  $\phi^2$  está presente em todos os exemplos citados. Isto ocorre porque  $\phi^2$  é sempre um operador relevante em qualquer teoria.

Uma outra questão importante a ser tratada antes de introduzirmos de fato os conceitos de renormalização é: Como reconhecer quais são os gráficos que possuem uma *divergência primitiva*? (Divergência primitiva é entendida nesse contexto, como aquelas que não surgem da inserção de uma outra função de vértice em um gráfico.) De (2.100) temos que

$$\delta = -n\delta_r + \left(N + d - \frac{1}{2}Nd\right). \quad (2.109)$$

Podemos responder a questão se fizermos  $d = d_c$  em (2.109), o que nos dá

$$\delta \equiv \delta_c(N) = d_c \left(1 - \frac{1}{2}N\right) + N, \quad (2.110)$$

e utilizarmos a condição para que  $\Gamma^{(N)}$  seja primitivamente divergente em  $d = d_c$ , que é

$$\delta_c(N) \geq 0, \quad (2.111)$$

o que nos leva a

$$N \leq \frac{2d_c}{d_c - 2} = r. \quad (2.112)$$

Então, para uma teoria  $\phi^4$  no nível de 1 e 2-loops, apenas  $\Gamma^{(2)}$  e  $\Gamma^{(4)}$  possuem divergências primitivas. Logo, uma vez que as tenhamos renormalizado, o cancelamento das divergências devido às inserções torna-se simples. Verifica-se que os argumentos levantados até agora são também estendidos para as funções de vértice com operadores compostos.

Nosso procedimento para renormalizar as funções  $\Gamma^{(N,L)}$  será feito através da inclusão de termos multiplicativos (*constantes de renormalização*) às funções não renormalizadas, ou seja,

$$\Gamma_R^{(N,L)}(k_i, p_i; g, \kappa) = Z_\phi^{N/2} Z_{\phi^2}^L \Gamma^{(N,L)}(k_i, p_i; \lambda, \Lambda), \quad (2.113)$$

onde  $\Gamma_R^{(N,L)}$  é a função de vértice renormalizada,  $Z_\phi^{N/2}$  e  $Z_{\phi^2}^L$  são as constantes de renormalização,  $g$  é a constante de acoplamento renormalizada e  $\kappa$  é a escala de momento fixada para a função renormalizada. É importante frisar aqui que esse procedimento não inclui o caso para  $(N, L) = (0, 2)$ . Para renormalizar funções desse tipo, necessitaríamos, além das constantes multiplicativas, de um fator aditivo, pois sua divergência já aparece em

ordem zero na constante de acoplamento. As constantes de renormalização serão também divergentes, mas após a multiplicação realizada, obteremos uma função de vértice finita em  $d = d_c$  na ordem da expansão em loop desejada.

## 2.4 GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO E RELAÇÕES DE ESCALA

Definimos inicialmente  $g \equiv u\kappa^\epsilon$  e  $\lambda \equiv u_0\kappa^\epsilon$ , onde  $u$  e  $u_0$  são as constantes de acoplamento adimensionais em suas versões renormalizada e não-renormalizada, respectivamente. A variável  $\kappa$  tem dimensão de momento, sendo a escala de momento do sistema, portanto

$$\epsilon = 4 - d, \quad (2.114)$$

determina a dimensão canônica da constante de acoplamento, medindo o desvio em relação à dimensão crítica  $d_c$ . Assim (2.113) pode ser reescrito como

$$\Gamma_R^{(N,L)}(k_i, p_i; u, \kappa) = Z_\phi^{N/2} Z_{\phi^2}^L \Gamma^{(N,L)}(k_i, p_i; u_0, \Lambda). \quad (2.115)$$

Uma teoria não-renormalizada (*bare theory*) não depende da escala de momento  $\kappa$ . Com isso, aplicando à equação (2.115) a derivada total

$$\kappa \left( \frac{d}{d\kappa} \right)_{\lambda, \Lambda}, \quad (2.116)$$

obtemos a equação do grupo de renormalização na temperatura crítica, isto é,

$$\left[ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2} N \gamma_\phi(u) + L \gamma_{\phi^2}(u) \right] \Gamma_R^{(N)}(k_i, p_i; u, \kappa) = 0, \quad (2.117)$$

onde

$$\beta(u) = \left( \kappa \frac{\partial u}{\partial \kappa} \right)_\lambda = -\epsilon \left( \frac{\partial \ln u_0}{\partial u} \right)^{-1}, \quad (2.118)$$

$$\gamma_\phi(u) = \kappa \left( \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \kappa} \right)_\lambda = \beta(u) \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial u}, \quad (2.119)$$

$$\gamma_{\phi^2}(u) = -\kappa \left( \frac{\partial \ln Z_{\phi^2}}{\partial \kappa} \right)_\lambda = -\beta(u) \frac{\partial \ln Z_{\phi^2}}{\partial u}, \quad (2.120)$$

são as funções de Wilson.

A equação (2.117) é uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem. A solução de tais equações é bastante conhecida e advinda da teoria de equações diferenciais, portanto não a reproduziremos aqui.

Faremos uma simplificação tomando  $L = 0$  em (2.117) para economizar nas equações, já que o que existe de essencial para a análise da solução não será afetado. A solução de (2.117) com  $L = 0$  pode ser escrita como



$$\Gamma_R^{(N)}(k_i; u, \kappa) = \exp \left[ -\frac{N}{2} \int_1^\rho \gamma_\phi(u(\rho)) \frac{dx}{x} \right] \Gamma_R^{(N)}(k_i; u(\rho), \kappa\rho), \quad (2.121)$$

onde a equação característica é

$$\rho \frac{du(\rho)}{d\rho} = \beta(u(\rho)), \quad (2.122)$$

com a condição inicial  $u(\rho = 1) = u$ . Vemos de (2.122) e de (2.118) que  $\beta(u)$  na verdade mede a variação da constante de acoplamento com respeito a uma variação da escala de momento. Utilizando análise dimensional, podemos extrair de  $\Gamma_R^{(N)}$  a dependência em  $\kappa\rho$  na solução. A equação (2.121) pode ser reescrita então como

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i; u, \kappa) = (\kappa\rho)^{(N+d-\frac{1}{2}Nd)} \exp \left[ -\frac{N}{2} \int_1^\rho \gamma_\phi(u(\rho)) \frac{dx}{x} \right] \Gamma_R^{(N)}\left(\frac{k_i}{\kappa\rho}; u(\rho), 1\right). \quad (2.123)$$

Substituindo agora  $k_i$  por  $\rho k_i$ , ou seja, fazendo uma mudança na escala de momento, obtemos

$$\Gamma_R^{(N)}(\rho k_i; u, \kappa) = \rho^{(N+d-\frac{1}{2}Nd)} \exp \left[ -\frac{N}{2} \int_1^\rho \gamma_\phi(u(\rho)) \frac{dx}{x} \right] \Gamma_R^{(N)}(k_i; u(\rho), \kappa). \quad (2.124)$$

Podemos observar de (2.124), que uma mudança na escala de momento, é equivalente a multiplicar a função pela escala elevada a dimensão canônica, como também uma mudança na constante de acoplamento, a qual flui com (2.122), tendo  $\beta$  como função velocidade. Além disso, temos um fator exponencial adicional complicado. Existe, no entanto, uma circunstância especial na qual um comportamento mais simples pode ser obtido. Esse comportamento ocorre se a constante de acoplamento chegar a um valor, tal que, qualquer mudança na escala de momento não a afete. Esses valores podem ser obtidos se fizermos

$$\beta(u) = 0. \quad (2.125)$$

Os valores de  $u$  que satisfazem (2.125) são chamados de pontos fixos, os quais podem ser estáveis ou instáveis. A estabilidade desses pontos pode ser verificada pela análise das derivadas de  $\beta$  com respeito a  $u$ . Evidentemente, utilizaremos em nossos cálculos o ponto fixo estável, pois variações em torno desse ponto tenderão a fluir para ele e, conseqüentemente, as soluções do grupo de renormalização tenderão às soluções nesse ponto.

Considere novamente (2.117) com  $L = 0$  em um ponto fixo  $u = u^*$ , temos então

$$\left[ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \frac{1}{2} N \gamma_\phi(u^*) \right] \Gamma_R^{(N)}(k_i; u^*, \kappa) = 0. \quad (2.126)$$

A solução de (2.126), após alterarmos a escala de momento, é

$$\Gamma_R^{(N)}(\rho k_i; u^*, \kappa) = \rho^{(N+d-\frac{1}{2}Nd)-\frac{1}{2}N\gamma_\phi(u^*)} \Gamma_R^{(N)}(k_i; u^*, \kappa). \quad (2.127)$$

Note que a solução (2.127), é uma simples propriedade de escala e homogeneidade das funções de vértice. Em particular  $\Gamma_R^{(2)}$  comporta-se como

$$\Gamma_R^{(2)}(\rho k) = \rho^{2-\gamma_\phi(u^*)} \Gamma_R^{(2)}(k), \quad (2.128)$$

de onde identificamos o expoente crítico  $\eta$  como

$$\eta = \gamma_\phi(u^*). \quad (2.129)$$

O expoente crítico  $\eta$  também é chamado de dimensão anômala do campo  $\phi$ , visto que não o obtemos por simples análise dimensional.

Fora do ponto crítico, mas ainda na teoria simétrica, isto é,  $T > T_c$ , podemos obter uma equação do grupo de renormalização para esse estado através da aplicação, sobre as funções de vértice, do operador diferencial

$$\mathcal{O} = \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2} N \gamma_\phi(u) + \gamma_{\phi^2}(u) t \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.130)$$

onde  $t$  é a temperatura reduzida, isto é,  $t = (T - T_c)/T_c$ . Efetuando a aplicação obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \Gamma^{(N)}(k_i, \dots, k_N; t, u, \kappa) &= \lim_{p_i \rightarrow 0} \mathcal{O} \sum_{L=0}^{\infty} \frac{1}{L!} t^L \Gamma^{(N,L)}(k_i, p_i; u, \kappa) \\ &= \lim_{p_i \rightarrow 0} \sum_{L=0}^{\infty} \frac{t^L}{L!} \left[ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2} N \gamma_\phi + L \gamma_{\phi^2} \right] \Gamma_R^{(N,L)}(k_i, p_i; u, \kappa). \end{aligned} \quad (2.131)$$

Cada termo da soma se anula, pois  $\Gamma_R^{(N,L)}$  satisfaz a equação do grupo de renormalização. Portanto nós temos

$$\left[ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2} N \gamma_\phi(u) + \gamma_{\phi^2}(u) t \frac{\partial}{\partial t} \right] \Gamma_R^{(N)}(k_i; t, u, \kappa) = 0. \quad (2.132)$$

No ponto fixo, a equação a ser resolvida é

$$\left[ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \frac{1}{2} N \eta + \gamma_{\phi^2}^* t \frac{\partial}{\partial t} \right] \Gamma_R^{(N)}(k_i; t, u^*, \kappa) = 0, \quad (2.133)$$

onde  $\gamma_{\phi^2}^*$  é o valor de  $\gamma_{\phi^2}(u)$  no ponto fixo  $u^*$ . A solução de (2.133) é

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i; t, \kappa) = \rho^{d+\frac{N}{2}(2-d-\eta)} \kappa^{\frac{1}{2}N\eta} F^{(N)}(\rho^{-1}k_i; (\rho^{-1}\kappa)(\rho^{-2}t)^{-\frac{1}{\gamma_{\phi^2}^*}}). \quad (2.134)$$

Sendo  $\rho$  arbitrário, nós podemos escolhê-lo de forma a satisfazer

$$(\rho^{-1}\kappa)(\rho^{-2}t)^{-\frac{1}{\gamma_{\phi^2}^*}} = 1, \quad (2.135)$$

ou seja,

$$\rho = \kappa \left( \frac{t}{\kappa^2} \right)^{-\frac{1}{\gamma_{\phi^2}^*}}. \quad (2.136)$$

Com isso a função de vértice torna-se

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i; t, \kappa) = \kappa^{d + \frac{N}{2}(2-d)} (\kappa^{-2}t)^{\frac{d + \frac{N}{2}(2-d-\eta)}{-\gamma_{\phi^2}^* + 2}} F^{(N)} \left( \kappa^{-1}k_i (\kappa^{-2}t)^{-\frac{1}{-\gamma_{\phi^2}^* + 2}} \right). \quad (2.137)$$

A função de vértice depende apenas da combinação de  $k_i \xi$ , ou seja,

$$\xi \propto t^{-\frac{1}{-\gamma_{\phi^2}^* + 2}}. \quad (2.138)$$

Mas temos que o comportamento assintótico do comprimento de correlação  $\xi$  com a diferença de temperatura em relação ao ponto crítico, é regido pelo expoente crítico  $\nu$  da seguinte forma

$$\xi \propto |t|^{-\nu}. \quad (2.139)$$

Por comparação, chegamos à

$$\nu^{-1} = 2 - \gamma_{\phi^2}^*. \quad (2.140)$$

Se definirmos agora

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}(u) \equiv -\beta(u) \frac{\partial \ln(Z_{\phi^2} Z_{\phi})}{\partial u} = -\beta(u) \frac{\partial \ln \bar{Z}_{\phi^2}}{\partial u}, \quad (2.141)$$

segue que

$$\nu^{-1} = 2 - \bar{\gamma}_{\phi^2}^* - \eta, \quad (2.142)$$

onde  $\bar{\gamma}_{\phi^2}^* \equiv \bar{\gamma}_{\phi^2}(u^*)$ .

As outras leis de escala podem ser obtidas utilizando argumentos semelhantes, os quais não serão reproduzidos aqui, faremos apenas a listagem de tais leis. Temos então

$$\gamma = \nu(2 - \eta), \quad (2.143)$$

onde  $\gamma$  é o expoente crítico relacionado a divergência da susceptibilidade na transição, ou seja, em  $T = T_c$ .

$$\delta = \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta}. \quad (2.144)$$

O expente crítico  $\delta$  caracteriza a relação existente entre o campo externo e a magnetização sobre a isoterma crítica, e

$$\beta = \frac{1}{2} \nu (d - 2 + \eta), \quad (2.145)$$

nos permite descrever como o parâmetro de ordem vai a zero na transição.

Usando (2.144) e (2.145) junto com a relação de escala (2.143), obtemos imediatamente as relações de escala seguintes

$$2\beta + \gamma = d\nu, \quad (2.146)$$

e

$$2\beta\delta - \gamma = d\nu. \quad (2.147)$$

Ainda temos uma última relação de escala

$$\alpha = 2 - d\nu, \quad (2.148)$$

onde o expoente crítico  $\alpha$  descreve o comportamento assintótico do calor específico em função de  $t$ .

Observando as relações de escala, vemos que se calcularmos apenas dois expoentes críticos, os outros estarão fixados por tais relações. Além disso, pode-se mostrar que os expoentes críticos existentes acima da temperatura crítica, possuem os mesmos valores que seus respectivos pares abaixo de  $T_c$ .

## 2.5 RENORMALIZAÇÃO POR SUBTRAÇÃO MÍNIMA E EXPOENTES CRÍTICOS

O método de renormalização por subtração mínima de pólos dimensionais, introduzido por 't Hooft e Veltman [38], é uma maneira elegante de extrairmos as divergências das funções  $1PI$ , após termos procedido com a regularização dimensional das integrais divergentes (apêndices). Desde que não fixamos o momento externo, o que não ocorre, por exemplo, na renormalização por *condições de normalização*, a identificação dos termos que devem ser cancelados para obtermos uma função de vértice renormalizada, é automática. Outra vantagem, é que os coeficientes que aparecem nas equações do grupo de renormalização apresentam uma forma particularmente simples.

Considerando a teoria interagente  $\phi^4$   $N$ -vetorial, vamos escrever as constantes de renormalização, as quais dependem de  $u$  e  $\epsilon$ , em termos de uma expansão em  $u$  da seguinte forma

$$u_0 \equiv \lambda\kappa^{-\epsilon} = u \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\epsilon)u^i \right], \quad (2.149)$$

$$Z_\phi = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i(\epsilon)u^i, \quad (2.150)$$

$$\bar{Z}_{\phi^2} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\epsilon)u^i. \quad (2.151)$$

Podemos agora utilizar (2.149), (2.150) e (2.151) para obter as funções de Wilson,  $\beta(u)$ ,  $\gamma_\phi$  e  $\bar{\gamma}_{\phi^2}$  em termos de uma expansão em  $u$ . Uma substituição direta nas respectivas definições das funções de Wilson, nos dá

$$\beta(u) = -\epsilon \left( \frac{\partial \ln u_0}{\partial u} \right)^{-1} = -\epsilon u [1 - a_1 u + 2(a_1^2 - a_2)u^2], \quad (2.152)$$

$$\gamma_\phi(u) = \beta(u) \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial u} = -\epsilon u [2b_2 u + (3b_3 - 2b_2 a_1)u^2], \quad (2.153)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}(u) = -\beta(u) \frac{\partial \ln \bar{Z}_{\phi^2}}{\partial u} = \epsilon u [c_1 + (2c_2 - c_1^2 - a_1 c_1)u]. \quad (2.154)$$

As funções de vértice que desenvolvem pólos primitivos, isto é, possuem divergências primitivas em quatro dimensões são  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Gamma^{(4)}$  e  $\Gamma^{(2,1)}$ . Essas são as funções que precisam ser renormalizadas. Temos que

$$Z_\phi \Gamma^{(2)}(k; u_0, \kappa) = \Gamma_R^{(2)}(k; u, \kappa), \quad (2.155)$$

$$Z_\phi^2 \Gamma^{(4)}(k; u_0, \kappa) = \Gamma_R^{(4)}(k; u, \kappa), \quad (2.156)$$

$$\bar{Z}_{\phi^2} \Gamma^{(2,1)}(k_1, k_2, p; u_0, \kappa) = \Gamma_R^{(2,1)}(k_1, k_2, p; u, \kappa). \quad (2.157)$$

Com isso poderemos determinar  $a_i(\epsilon)$ ,  $b_i(\epsilon)$  e  $c_i(\epsilon)$ , requerendo apenas que os pólos em  $\epsilon$  sejam minimamente subtraídos. Isto significa que em todas as ordens em  $u$ , os coeficientes devem ser escolhidos, tal que, os pólos dimensionais sejam cancelados, e nada mais que os pólos.

A fim de demonstrarmos o método de renormalização por subtração mínima até a ordem de 2-loops (em 3-loops para a função de 2-pontos), apresentamos a seguir as funções não-renormalizadas em (2.155), (2.156) e (2.157), expressas em sua forma simbólica

$$\Gamma^{(2)}(k; u, \kappa) = k^2 (1 - B_2 u_0^2 + B_3 u_0^3), \quad (2.158)$$

$$\Gamma^{(4)}(k_i; u_0, \kappa) = \kappa^\epsilon u_0 [1 - A_1 u_0 + (A_2^{(1)} + A_2^{(2)})u_0^2], \quad (2.159)$$

$$\Gamma^{(2,1)}(k_1, k_2, p; u_0, \kappa) = 1 - C_1 u_0 + (C_2^{(1)} + C_2^{(2)})u_0^2, \quad (2.160)$$

onde temos

$$A_1 = \frac{N+8}{18} \kappa^\epsilon \left[ I_2 \left( \frac{k_1 + k_2}{\kappa} \right) + I_2 \left( \frac{k_1 + k_3}{\kappa} \right) + I_2 \left( \frac{k_2 + k_3}{\kappa} \right) \right], \quad (2.161)$$

$$A_2^{(1)} = \frac{(N^2 + 6N + 20)}{108} \kappa^{2\epsilon} \left[ I_2^2 \left( \frac{k_1 + k_2}{\kappa} \right) + 2 \textit{permut.} \right], \quad (2.162)$$

$$A_2^{(2)} = \frac{(5N + 22)}{54} \kappa^{2\epsilon} \left[ I_4 \left( \frac{k_1}{\kappa}, \frac{k_2}{\kappa}, \frac{k_3}{\kappa}, \frac{k_4}{\kappa} \right) + 5 \textit{permut.} \right], \quad (2.163)$$

$$B_2 = \frac{(N+2)}{18} \kappa^{2\epsilon} I_3 \left( \frac{k}{\kappa} \right), \quad (2.164)$$

$$B_3 = \frac{(N+2)(N+8)}{108} \kappa^{3\epsilon} I_5 \left( \frac{k}{\kappa} \right), \quad (2.165)$$

$$C_1 = \frac{N+2}{18} \kappa^\epsilon \left[ I_2 \left( \frac{k_1+k_2}{\kappa} \right) + 2 \textit{permut.} \right], \quad (2.166)$$

$$C_2^{(1)} = \frac{(N+2)^2}{108} \kappa^{2\epsilon} \left[ I_2^2 \left( \frac{k_1+k_2}{\kappa} \right) + 2 \textit{permut.} \right], \quad (2.167)$$

$$C_2^{(2)} = \frac{N+2}{36} \kappa^{2\epsilon} \left[ I_4 \left( \frac{k_1}{\kappa}, \frac{k_2}{\kappa}, \frac{k_3}{\kappa}, \frac{k_4}{\kappa} \right) + 5 \textit{permut.} \right], \quad (2.168)$$

onde  $B_3$  é o termo em 3-loops da função de Green de 2-pontos (Figura 2.3(e)). Esse termo nos permitirá calcular o expoente crítico  $\eta$  até a ordem  $\epsilon^3$ . A dependência em  $N$ , assim como os fatores numéricos, são obtidos da simetria dos gráficos na construção diagramática. As integrais  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$  e  $I_5$  têm suas formas explícitas, assim como suas soluções dadas em [37]. Tais soluções podem ser obtidas facilmente das soluções para o caso anisotrópico (apêndice A) ao se fixar, em zero, os momentos externos dos eixos competitivos. Temos também que algumas dessas integrais admitem permutações em seus momentos externos, o que precisa ser levado em conta, por isso a indicação (*permut.*), acompanhado do número referente a quantidade de permutações para cada integral.

Consideremos inicialmente a função  $\Gamma^{(2)}$  para procedermos com o método de renormalização por subtração mínima. Temos que

$$\Gamma_R^{(2)} = Z_\phi \Gamma^{(2)} = k^2 (1 + b_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3) (1 - B_2 u_0^2 + B_3 u_0^3), \quad (2.169)$$

o que nos leva, após inserirmos a expansão de  $u_0$ , a

$$\Gamma_R^{(2)} = k^2 [1 + b_1 u + (b_2 - B_2) u^2 + (b_3 - 2a_1 B_2 + B_3 - b_1 B_2) u^3]. \quad (2.170)$$

Neste caso, não existem pólos cujo resíduo é linear em  $u$ . Logo, fazemos  $b_1 = 0$ . Por outro lado devemos ter

$$b_2 = [B_2]_S, \quad (2.171)$$

onde  $[B_2]_S$ , indica que tomaremos apenas a parte singular de  $B_2$ , a qual é devida à integral  $I_3$ . Dessa forma obtemos

$$b_2 = -\frac{N+2}{144} \cdot \frac{1}{\epsilon}. \quad (2.172)$$

Temos também

$$b_3 = [2a_1 B_2 - B_3]_S. \quad (2.173)$$

Para encontrarmos  $b_3$  precisamos calcular primeiro  $a_1$ . Recorremos então à função de 4-pontos.

$$\begin{aligned}
\kappa^{-\epsilon}\Gamma_R^{(4)} = \kappa^{-\epsilon}Z_\phi^2\Gamma^{(4)} = u + \left\{ a_1 - \frac{N+8}{18} \left[ I_2\left(\frac{k_1+k_2}{\kappa}\right) + 2\text{permut.} \right] \right\} u^2 + \\
+ \left\{ a_2 + 2b_2 - 2a_1 \left( \frac{N+8}{18} \right) \left[ I_2\left(\frac{k_1+k_2}{\kappa}\right) + 2\text{permut.} \right] \right\} + \\
+ \left( \frac{N^2+6N+20}{108} \right) \left[ I_2^2\left(\frac{k_1+k_2}{\kappa}\right) + 2\text{permut.} \right] + \\
+ \left( \frac{5N+22}{54} \right) \left[ I_4\left(\frac{k_1}{\kappa}, \frac{k_2}{\kappa}, \frac{k_3}{\kappa}, \frac{k_4}{\kappa}\right) + 5\text{permut.} \right] \left. \right\} u^3, \tag{2.174}
\end{aligned}$$

de onde encontramos

$$a_1 = \frac{N+8}{18} \left[ I_2\left(\frac{k_1+k_2}{\kappa}\right) + 2\text{permut.} \right]_S. \tag{2.175}$$

Utilizando o apêndice A, obtemos

$$a_1 = \frac{N+8}{6} \cdot \frac{1}{\epsilon}. \tag{2.176}$$

Pelo mesmo raciocínio encontramos

$$a_2 = \frac{(N+8)^2}{36} \cdot \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{3N+14}{24} \cdot \frac{1}{\epsilon}. \tag{2.177}$$

Substituindo  $a_1$  em (2.173), encontramos

$$b_3 = \frac{(N+2)(N+8)}{1296} \left( \frac{1}{4\epsilon} - \frac{1}{\epsilon^2} \right). \tag{2.178}$$

Para  $\Gamma^{(2,1)}$  temos

$$\Gamma_R^{(2,1)} = \bar{Z}_{\phi^2}\Gamma^{(2,1)} = 1 + (c_1 - C_1)u + (c_2 - a_1C_1 - c_1C_1 + C_2^{(1)} + C_2^{(2)})u^2, \tag{2.179}$$

o que nos leva a

$$c_1 = \frac{N+2}{6} \cdot \frac{1}{\epsilon}, \tag{2.180}$$

e

$$c_2 = \frac{(N+2)(N+5)}{36} \cdot \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{(N+2)}{24} \cdot \frac{1}{\epsilon}. \tag{2.181}$$

Com o conhecimento desses coeficientes, podemos escrever

$$u_0 = u \left[ 1 + \frac{(N+8)}{6\epsilon}u + \left( \frac{(N+8)^2}{36\epsilon^2} - \frac{(3N+14)}{24\epsilon} \right) u^2 \right], \tag{2.182}$$

$$Z_\phi = 1 - \frac{N+2}{144\epsilon} u^2 + \left[ -\frac{(N+2)(N+8)}{1296\epsilon^2} + \frac{(N+2)(N+8)}{5184\epsilon} \right] u^3, \quad (2.183)$$

$$\bar{Z}_{\phi^2} = 1 + \frac{N+2}{6\epsilon} u + \left[ \frac{(N+2)(N+5)}{36\epsilon^2} - \frac{(N+2)}{24\epsilon} \right] u^2. \quad (2.184)$$

A partir das constantes de renormalização acima, poderemos calcular explicitamente as funções de Wilson e, utilizando as relações de escala, obter todos os expoentes críticos que regem a física do nosso sistema. De (2.152), (2.153) e (2.154), obtemos

$$\beta(u, \epsilon) = -u \left( \epsilon - \frac{N+8}{6} u + \frac{3N+14}{12} u^2 \right), \quad (2.185)$$

$$\gamma_\phi(u, \epsilon) = \frac{N+2}{72} u^2 - \frac{(N+2)(N+8)}{1728} u^3, \quad (2.186)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2}(u, \epsilon) = \frac{N+2}{6} u \left( 1 - \frac{1}{2} u \right). \quad (2.187)$$

Note que as constantes de renormalização são divergentes quando  $\epsilon = 0$ , mas as funções de Wilson são finitas nesse mesmo limite.

Queremos encontrar agora os valores de  $u$  para os quais a equação (2.185) se anula, ou seja, os pontos fixos. Ao resolvermos a equação, encontramos que o único ponto fixo estável não trivial é

$$u^* = \frac{6}{N+8} \epsilon + \frac{18(3N+14)}{(N+8)^3} \epsilon^2. \quad (2.188)$$

Observe que, para  $d \rightarrow d_c = 4$ , isto é,  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $u^*$  em (2.188) tende a zero, o que é uma característica geral. De posse de  $u^*$ , podemos obter o expoente crítico  $\eta$  de acordo com (2.129). Temos então

$$\eta = \frac{(N+2)}{2(N+8)^2} \epsilon^2 \left\{ 1 + \epsilon \left[ \frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{4} \right] \right\}. \quad (2.189)$$

Aplicando agora (2.188) em (4.92) e utilizando (2.142), chegamos à expressão explícita para o expoente crítico  $\nu$ , isto é,

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{N+2}{4(N+8)} \epsilon + \frac{(N+2)(N^2+23N+60)}{8(N+8)^3} \epsilon^2. \quad (2.190)$$

Observe que pelas relações de escala podemos obter todos os outros expoentes críticos a partir desses dois. Note também que para  $\epsilon = 0$ , recaímos nos expoentes calculados pela teoria de campo médio.



## CAPÍTULO 3

# EXPOENTES CRÍTICOS ANISOTRÓPICOS DO MODELO *CECI*

No presente capítulo, estaremos interessados em calcular os expoentes críticos para o caso anisotrópico do modelo *CECI*. No entanto, para alcançarmos esse objetivo, algumas considerações ainda se fazem necessárias uma vez que estamos tratando com sistemas que exibem o comportamento crítico de Lifshitz mais geral. Vamos então, em princípio, generalizar os principais conceitos discutidos no capítulo 2 para o modelo de Ising, o que nos permitirá descrever e tratar adequadamente o modelo *CECI*.

### 3.1 GENERALIZAÇÕES DO MODELO DE ISING

Para iniciar o processo de descrição do modelo mais geral (*CECI*), consideremos, primeiramente, o caso mais simples de interações competitivas apresentado na introdução como modelo *ANNI*. Através da observação das características desse modelo, podemos escrever a hamiltoniana para o mesmo como

$$\mathcal{H} = - \sum_{j=x_1, \dots, x_d} \sum_i J_{1j} s_{ij} s_{(i+1)_j} - J_2 \sum_i s_{iz} s_{(i+2)_z}, \quad (3.1)$$

onde  $z$  indica a única direção na qual existe competição e  $j$  refere-se a todas as direções, inclusive à direção competitiva, pois esta também possui interações entre os primeiros vizinhos e  $J_{1j} = J_1 \forall j$ . Observe que o primeiro termo à direita na equação (3.1) está relacionado ao subespaço não competitivo e o segundo termo ao subespaço competitivo, que possui apenas uma dimensão. Esses subespaços são perpendiculares entre si.

A partir da equação (3.1), aplicando novamente a transformação gaussiana, também podemos derivar a densidade lagrangeana para o modelo *ANNI* ao seguirmos a mesma linha de raciocínio prescrita no capítulo 2 para um sistema sem competição [39, 40]. Detalhes desse procedimento matemático podem ser encontrados em [41, 33].

Considere então a parte livre da lagrangeana, dada por

$$-\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} [K(\mathbf{k}) - 2|K(\mathbf{k})|^2] \psi(-\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}). \quad (3.2)$$

Desenvolvendo novamente a transformada inversa de  $K(\mathbf{k}) = \sum_{i,\alpha} K(\mathbf{R}_{i,\alpha}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{i,\alpha})$ , obtemos

$$K(\mathbf{k}) = \sum_{\alpha} \left[ \beta J_1 \sum_{i=1}^{d-1} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{i,\alpha}) + \beta J_1 \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{\parallel\alpha}) + \beta J_2 \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{\parallel\alpha}) \right], \quad (3.3)$$

onde o símbolo  $\parallel$  indica as partes que são paralelas ao eixo competitivo. Vamos agora expandir as exponenciais em potências pares de  $\mathbf{k}$ , sendo que, na região crítica de Lifshitz, potências em  $|\mathbf{k}|^4 \equiv k^4$  associadas as interações entre os segundos vizinhos tornam-se relevantes [26]. Com isso, para o último termo da expressão (3.3), que traduz tais interações, devemos desenvolver a exponencial associada até a ordem referida para  $\mathbf{k}$ . Para os outros dois termos, continuaremos com a expansão até uma ordem par inferior. Aplicando tais expansões, obtemos

$$K(\mathbf{k}) = \mathbf{K}_0 \left[ 1 - \beta J_1 k_{\perp}^2 \rho^2 - \beta J_1 \left( 1 + 4 \frac{J_2}{J_1} \right) k_{\parallel}^2 \rho^2 + \frac{4}{3} \beta J_2 k_{\parallel}^4 \rho^2 a^2 + \dots \right], \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{K}_0 = 2\beta(dJ_1 + J_2)$ ,  $\rho = a \left[ \frac{J_1}{2(dJ_1 + J_2)} \right]^{\frac{1}{2}}$  e  $\perp$  indica as partes perpendiculares ao eixo competitivo. Substituindo (3.4) em (3.2) e prosseguindo com as devidas manipulações algébricas, chegamos a

$$-\frac{1}{N} \sum_k \mathbf{K}_0 \left\{ (1 - 2\mathbf{K}_0) + (4\mathbf{K}_0 - 1) \left[ k_{\perp}^2 \rho^2 + \left( 1 + 4 \frac{J_2}{J_1} \right) k_{\parallel}^2 \rho^2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} k_{\parallel}^4 \rho^2 a^2 \right] \right\} \psi(-\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}). \quad (3.5)$$

O valor de  $\mathbf{K}_0$ , para o qual o termo independente de  $k$  na expressão acima se anula, define a temperatura crítica para uma aproximação de campo médio, ou seja,  $T_0 = 4(dJ_1 + J_2)$ . Note que ao anularmos a interação entre os segundos vizinhos, fazendo  $J_2 = 0$  ao longo do único eixo competitivo, obteremos novamente a temperatura crítica de campo médio para o modelo de Ising. Expandindo agora  $\mathbf{K}_0$  em torno de  $T_0$ , a expressão (3.5) toma a forma

$$-\frac{1}{N} \sum_k \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{T - T_0}{T_0} \right) + k_{\perp}^2 \rho^2 + k_{\parallel}^2 \rho^2 \left( 1 + 4 \frac{J_2}{J_1} \right) - \frac{4}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} k_{\parallel}^4 \rho^2 a^2 \right] \psi(-\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}). \quad (3.6)$$

Passando ao limite contínuo através de (2.22) e (2.23), redefinindo também o campo  $\psi$  da mesma forma que no capítulo 2, podemos escrever

$$-\frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[ \left( \frac{T - T_0}{\rho^2 T_0} \right) + k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2 \left( 1 + 4 \frac{J_2}{J_1} \right) - \frac{4}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} a^2 k_{\parallel}^4 \right] \phi(-\mathbf{k}) \phi(\mathbf{k}). \quad (3.7)$$

Temos então a contribuição para a parte livre da densidade lagrangeana de um sistema descrito pelo modelo *ANNI*. No espaço das coordenadas, incluindo agora o termo de interação ( $\phi^4$ ), ficamos com

$$\mathcal{L} = \sigma \frac{1}{2} |\nabla_1^2 \phi|^2 + \frac{1}{2} |\nabla_{(d-1)} \phi|^2 + \delta_0 \frac{1}{2} |\nabla_1 \phi|^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4, \quad (3.8)$$

onde,  $\sigma = -\frac{3}{4} \cdot \frac{J_2}{J_1} a^2$ ,  $\delta_0 = \left( 1 + 4 \frac{J_2}{J_1} \right)$ ,  $\mu^2 = \left( \frac{T - T_0}{\rho^2 T_0} \right)$  e  $\lambda = \frac{8d}{a^{4-d}} \left( \frac{dJ_1 + J_2}{J_1} \right) \left[ 1 - 4 \left( \frac{T - T_0}{T_0} \right) \right]$ . O cálculo dos termos não incluídos na parte livre é idêntico àquele do caso não competitivo.

Prosseguindo com o nosso intuito de generalização, podemos também obter a densidade lagrangeana para o modelo  $m$ -axial, no qual o acoplamento  $J_2$  é permitido em  $m$  direções espaciais de um total de  $d$  dimensões. A representação desse modelo pode ser expressa em termos de uma teoria  $\lambda\phi^4$  modificada contendo termos com derivadas de ordem mais alta ao longo das  $m$  direções competitivas [34], de forma que a equação (3.8) é generalizada para

$$\mathcal{L} = \sigma \frac{1}{2} |\nabla_m^2 \phi|^2 + \frac{1}{2} |\nabla_{(d-m)} \phi|^2 + \delta_0 \frac{1}{2} |\nabla_m \phi|^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4. \quad (3.9)$$

Na expressão (3.9), temos que o coeficiente  $\delta_0$  depende da razão  $J_2/J_1$ . Para um determinado valor dessa razão,  $\delta_0$  se anula, o que especifica e define a região crítica para o comportamento de Lifshitz  $m$ -axial, isto é, quando  $T = T_L$  (*Temperatura de Lifshitz*). Observe ainda que, ao anularmos o coeficiente  $\delta_0$ , determinamos também a completa separação do subespaço competitivo do não competitivo, os quais ficam totalmente identificados por  $|\nabla_m^2 \phi|^2$  e  $|\nabla_{(d-m)} \phi|^2$  [34], respectivamente. Essa separação é traduzida matematicamente pelo desacoplamento dos momentos paralelos e perpendiculares aos eixos competitivos nas integrais de Feynman. Note ainda que a contribuição das derivadas de ordens diferentes, equação (3.9), para a dimensão da densidade lagrangeana, também deve ser diferente. Em relação a esse fato, percebemos a grande importância do coeficiente  $\sigma$ , fazendo com que o primeiro termo à direita na equação (3.9) tenha a mesma dimensão que os outros termos. Porém, podemos tornar a contribuição do coeficiente  $\sigma$  desnecessária, ao fazermos uma redefinição dimensional ao longo dos eixos competitivos. Se escolhermos  $\sigma$  adimensional,  $\sigma = 1$ , teremos que a dimensão dos momentos, ao longo das direções paralelas aos eixos competitivos, deverá ser a metade da dimensão dos momentos perpendiculares a esses eixos.

A redefinição dimensional dos momentos ao longo dos eixos onde há competição pode ser explicitada pela condição  $[k] = [q]^{1/2} = \Lambda^{1/2}$ , onde  $k$  simboliza a escala de momento ao longo das  $m$  direções competitivas e  $q$  representa a escala de momento ao longo das  $d - m$  direções restantes. Com essa definição, o elemento de volume no espaço dos momentos terá sua dimensão dada por  $[d^{d-m} q d^m k] = \Lambda^{d - \frac{m}{2}}$ . A dimensão do campo  $\phi$  no espaço dos momentos pode ser calculada de maneira semelhante àquela desenvolvida para os sistemas sem competição. Impomos, primeiramente, que a ação seja adimensional, o que acarreta em

$$[\phi] = \Lambda^{-[1+1/2(d-m/2)]}, \quad (3.10)$$

tanto para a parte quadrática, quanto para a parte quártica. A partir desse resultado, podemos obter a dimensão da constante de acoplamento

$$[\lambda] = \Lambda^{4-d+m/2}. \quad (3.11)$$

Observe que a dimensão crítica, ou seja, a dimensão que torna a constante de acoplamento adimensional é

$$d_c = 4 + m/2. \quad (3.12)$$

Podemos agora definir o parâmetro perturbativo  $\epsilon_2$  que medirá o desvio em relação à dimensão crítica. No caso do comportamento crítico de Lifshitz  $m$ -axial anisotrópico temos

$$\epsilon_2 = d_c - d = 4 + m/2 - d. \quad (3.13)$$

O propagador livre da teoria de campo que descreve os sistemas competitivos pode também ser obtido da densidade lagrangeana (3.9) e é dado por

$$G_0 = \frac{1}{(k^2)^2 + q^2 + \mu^2}. \quad (3.14)$$

A análise que foi feita para o caso anisotrópico também pode ser realizada para o caso isotrópico. Para esse caso temos  $d = m$ , então o segundo termo à direita em (3.9) não aparece. Consequentemente, nos propagadores relacionados, não teremos a escala de momento  $q$ , referente ao subespaço não competitivo, já que agora todo o espaço possui interações competitivas. Também verifica-se que o elemento de volume terá a dimensão  $[d^m k] = \Lambda^{m/2}$ . Com isso deduzimos que a dimensão de  $\phi$  no espaço dos momentos é

$$[\phi] = \Lambda^{-(1+m/4)}, \quad (3.15)$$

e que a dimensão da constante de acoplamento é dada por

$$[\lambda] = \Lambda^{\frac{8-m}{2}}. \quad (3.16)$$

Assim, a dimensão crítica para o caso isotrópico é  $d_c = 8$  e o parâmetro perturbativo será

$$\epsilon_2 = 8 - d = 8 - m. \quad (3.17)$$

Vale salientar que, para utilizarmos  $\epsilon_2$  dado por (3.17) como parâmetro para as expansões perturbativas, o número  $d$  de dimensões espaciais deve estar próximo de 8. Pode-se deduzir ainda que, no caso isotrópico, o propagador livre é dado por

$$G_0 = \frac{1}{(k^2)^2 + \mu^2}. \quad (3.18)$$

Note que no ponto crítico ( $T = T_L$ ) os propagadores em (3.14) e (3.18) têm massa nula, isto é,  $\mu^2 = 0$ .

Já vimos, de maneira sucinta, que as interações competitivas são caracterizadas por derivadas de ordens mais altas do campo (*parâmetro de ordem*). Estamos aptos então, estendendo o que foi feito até agora, a descrever o modelo *CECI*, que é o modelo do qual extrairemos os expoentes críticos.

Seja  $m_n$  o número de direções espaciais cujas interações competitivas vão até o  $n$ -ésimo vizinho. O subespaço competitivo  $m_n$ -dimensional será representado na densidade lagrangeana por potências (*ordem da derivada*) do gradiente indo até a ordem  $2n$ , agindo sobre o campo escalar  $\phi$ , o que generaliza o que fizemos para o modelo  $m$ -axial. Levando isso em consideração, assim como as simetrias referentes ao dado sistema, podemos generalizar (3.9). Temos, finalmente, que a densidade lagrangeana para o modelo *CECI* é

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2} |\nabla_{(d-\sum_{n=2}^L m_n)} \phi|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^L \sigma_n |\nabla_{m_n}^n \phi|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^L \delta_{0n} |\nabla_{m_n} \phi|^2 + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{L-1} \sum_{n'=2}^{n-1} \tau_{nn'} |\nabla_{m_n}^{n'} \phi|^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

É importante enfatizar que cada subespaço é ortogonal em relação a qualquer outro e que os diferentes subespaços possuem diferentes potências de momento no ponto de Lifshitz. Por exemplo, o subespaço  $m_n$ , na região crítica, será caracterizado pela potência de momento  $K_{(n)}^{2n}$ . O comportamento crítico de Lifshitz do modelo *CECI* é traduzido, então, quando aplicamos a condição  $\delta_{0n} = \tau_{nn'} = 0$ , que será utilizada daqui por diante. Essa condição está diretamente ligada ao conceito de operadores relevantes [37, 26]. Temos também que todas as potências pares de momento até  $2L$  são relevantes para a descrição do sistema, devido à redefinição dos momentos para cada subespaço quando fazemos  $\sigma_n$  adimensional [28].

Fazendo uma análise similar a do caso  $m$ -axial, encontramos que a dimensão crítica nesse modelo geral é dada por

$$d_c = 4 + \sum_{n=2}^L \left[ \frac{(n-1)}{n} \right] m_n. \tag{3.20}$$

Definimos portanto o parâmetro perturbativo como

$$\epsilon_L = d_c - d = 4 + \sum_{n=2}^L \left[ \frac{(n-1)}{n} \right] m_n - d. \tag{3.21}$$

Prosseguindo, agora para o caso isotrópico ( $d = m_n$ ), temos que a dimensão crítica é

$$d_c = 4n, \tag{3.22}$$

e por conseguinte, o parâmetro perturbativo é dado por

$$\epsilon_n = 4n - d = 4n - m_n. \tag{3.23}$$

Temos ainda que o propagador livre para o modelo *CECI* anisotrópico da teoria crítica (massa nula) é dado por

$$G_0 = \frac{1}{\sum_{n=2}^L [(k_{(n)})^2]^n + q^2}. \tag{3.24}$$

Observe que o propagador do caso isotrópico pode ser encontrado facilmente da equação (3.24) ao ajustarmos a escala de momento  $q$  em  $q = 0$  e fixarmos, na soma, um único valor  $n = n'$ , fazendo  $[(k_{(n)})^2]^n = \delta_{nn'} [(k_{(n')})^2]^{n'}$ , o que nos dá

$$G_0 = \frac{1}{(k_{(n')}^2)^{n'}}. \quad (3.25)$$

Todos os outros objetos matemáticos descritos no capítulo 2, tais como os diagramas de Feynman, funções de Green e funções de vértice *1PI*, são facilmente generalizados para descrever o modelo *CECI*. Também, toda a discussão acerca do grupo de renormalização e da renormalizabilidade das partes de vértice primitivamente divergentes, a partir das constantes de renormalização, é válida e pode ser aplicada nesse caso [28]. Com isso em mente, podemos dirigir a nossa atenção para as relações de escala que, como vimos anteriormente, são resultados que podem ser extraídos pela aplicação do grupo de renormalização.

### 3.2 RELAÇÕES DE ESCALA PARA O MODELO *CECI* ANISOTRÓPICO

As relações de escala também sofrerão modificações devido às competições generalizadas. Sabemos que o caso anisotrópico é caracterizado pelos comprimentos de correlação  $\xi_1, \dots, \xi_L$ , os quais, por serem considerados independentemente, definem independentes transformações do grupo de renormalização. Aplicando a idéia de renormalização multiplicativa, através das constantes de renormalização, obtemos para o modelo *CECI*

$$\Gamma_{R(n)}^{(N,M)}(p_{i(n)}, Q_{j(n)}, g_n, \kappa_n) = Z_{\phi(n)}^{N/2} Z_{\phi(n)}^M \Gamma_{(n)}^{(N,M)}(p_{i(n)}, Q_{j(n)}, \lambda_n, \Lambda_n), \quad (3.26)$$

onde, novamente, o caso  $\Gamma_{(n)}^{(0,2)}$  não está incluído, por se tratar de uma função de vértice que deve ser renormalizada aditivamente. Temos ainda que  $g_n$  e  $\lambda_n$  são as constantes de acoplamento renormalizada e não renormalizada, respectivamente;  $\kappa_n$  é a escala de momento fixada para cada eixo;  $p_{i(n)}$ , com  $i = 1, \dots, N$ , são os momentos externos associados às  $N$  pernas externas e  $Q_{j(n)}$ , com  $j = 1, \dots, M$ , são os momentos externos associados às  $M$  inserções de operadores  $\phi^2$ . Podemos agora definir  $g_n$  e  $\lambda_n$  em termos das constantes de acoplamento adimensionais  $u_n$  e  $u_{0n}$  como  $g_n = u_n (\kappa_n^{2n})^{\epsilon_L/2}$  e  $\lambda_n = u_{0n} (\kappa_n^{2n})^{\epsilon_L/2}$ , onde, como já sabemos,  $\epsilon_L = d_c - d = 4 + \sum_{n=2}^L [\frac{(n-1)}{n}] m_n - d$ . Então, em termos das constantes de acoplamento adimensionais, a equação do grupo de renormalização pode ser escrita na forma

$$\left( \kappa_n \frac{\partial}{\partial \kappa_n} + \beta_{(n)} \frac{\partial}{\partial u_n} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(n)}(u_n) + M \gamma_{\phi(n)}^2(u_n) \right) \Gamma_{R(n)}^{(N,M)} = 0, \quad (3.27)$$

onde

$$\beta_{(n)} = \left( \kappa_n \frac{\partial u_n}{\partial \kappa_n} \right), \quad (3.28)$$

$$\gamma_{\phi(n)}(u_n) = \beta_{(n)} \frac{\partial \ln Z_{\phi(n)}}{\partial u_n}, \quad (3.29)$$

$$\gamma_{\phi(n)}^2(u_n) = -\beta_{(n)} \frac{\partial \ln Z_{\phi(n)}^2}{\partial u_n}, \quad (3.30)$$

são as funções de Wilson generalizadas. A função  $\beta_{(n)}$  ainda pode ser reescrita por

$$\beta_{(n)} = -n\epsilon_L \left( \frac{\partial \ln u_{0n}}{\partial u_n} \right)^{-1}. \quad (3.31)$$

Note o aparecimento do fator multiplicativo  $n$ , que denota a generalidade da equação.

Com a equação do grupo de renormalização em mãos, podemos encontrar todas as relações de escala para o modelo *CECI* anisotrópico ao aplicarmos a condição para os pontos fixos da teoria, ou seja,  $(\beta_{(n)}(u_n^*) = 0)$ . Os detalhes desse procedimento podem ser encontrados em [28]. Portanto, nos restringiremos aqui a escrever tais relações e o leitor interessado deve se reportar à referência citada.

A primeira quantidade importante a ser destacada é  $\gamma_{\phi_{(n)}}(u_n^*) \equiv \gamma_{\phi_{(n)}}^*$ , identificada como a dimensão anômala. Temos então

$$\eta_n = \gamma_{\phi_{(n)}}^*. \quad (3.32)$$

Note que ao fazermos  $n = 1$  em (3.32), encontramos o expoente crítico  $\eta_1$ , referente ao subespaço não competitivo. Para qualquer outro valor de  $n$ , de 2 à  $L$ , teremos o expoente crítico associado ao subespaço competitivo sob consideração.

Da mesma forma que no modelo sem competição, os comprimentos de correlação  $\xi_n$  são proporcionais a  $t^{\nu_n}$ , onde  $t \equiv (T - T_L)/T_L$  é a temperatura reduzida do comportamento de Lifshitz. Isto implica que o expoente crítico  $\nu_n$  satisfaz a seguinte relação

$$\nu_n^{-1} = 2n - \gamma_{\phi_{(n)}}^*. \quad (3.33)$$

Por conveniência, podemos ainda definir a função

$$\bar{\gamma}_{\phi_{(n)}}^2(u_n) = -\beta_{(n)} \frac{\partial \ln(Z_{\phi_{(n)}}^2 Z_{\phi_{(n)}})}{\partial u_n} = -\beta_{(n)} \frac{\partial \ln \bar{Z}_{\phi_{(n)}}^2}{\partial u_n}. \quad (3.34)$$

Nesse caso, uma relação equivalente para  $\nu_n$  é dada por

$$\nu_n^{-1} = 2n - \eta_n - \bar{\gamma}_{\phi_{(n)}}^*, \quad (3.35)$$

onde  $\bar{\gamma}_{\phi_{(n)}}^* \equiv \bar{\gamma}_{\phi_{(n)}}^2(u_n^*)$ .

Como a susceptibilidade é proporcional a  $t^{-\gamma_n}$ , quando  $\kappa_{(n)} \rightarrow 0$ , e  $\Gamma_{R_{(n)}}^{(2)} = \chi_{(n)}^{-1}$ , o expoente crítico referente à susceptibilidade é dado por

$$\gamma_n = \nu_n(2n - \eta_n). \quad (3.36)$$

Identificamos ainda o expoente crítico para o calor específico como sendo

$$\alpha_n = 2 - n \left( d - \sum_{i=2}^L \frac{(i-1)}{i} m_i \right) \nu_n. \quad (3.37)$$

A equação de estado do modelo *CECI* pode ser escrita como

$$H_{(n)}(t, \mathcal{M}) = \mathcal{M}^{\delta_n} f(t/\mathcal{M}^{1/\beta_n}), \quad (3.38)$$

o que nos permite encontrar os dois últimos expoentes críticos em termos das leis de escala, isto é,

$$\beta_n = \frac{1}{2}\nu_n \left\{ n \left[ d - \sum_{i=2}^L \frac{(i-1)}{i} m_i \right] - 2n + \eta_n \right\} \quad (3.39)$$

e

$$\delta_n = \frac{n \left[ d - \sum_{i=2}^L \frac{(i-1)}{i} m_i \right] - 2n + \eta_n}{n \left[ d - \sum_{i=2}^L \frac{(i-1)}{i} m_i \right] + 2n - \eta_n}, \quad (3.40)$$

o que nos dá ainda as relações de escala:  $\gamma_n = \beta_n(\delta_n - 1)$  e  $\alpha_n + 2\beta_n + \gamma_n = 2$ . Essas relações de escala valem para todos os subespaços, desde que  $n = 1, \dots, L$ . Note que existe uma relação de escala para cada subespaço. Isto, aparentemente, sugere que os expoentes críticos apresentam valores diferentes para cada subespaço. Porém, isso não é necessariamente verdadeiro, pois a estrutura do ponto fixo restringe os valores da maioria dos expoentes críticos, tornando-os os mesmos para todos os subespaços. Essa é uma consequência direta da existência de um único ponto fixo independente das direções espaciais consideradas. Os únicos expoentes críticos que possuem diferentes valores para cada subespaço são  $\eta_n$  e  $\nu_n$ , como veremos na próxima seção.

### 3.3 SUBTRAÇÃO MÍNIMA E EXPOENTES CRÍTICOS ANISOTRÓPICOS

Queremos agora calcular os expoentes críticos anisotrópicos do modelo *CECI* pelo método de subtração mínima, onde levaremos em conta toda a discussão realizada no capítulo 2 sobre esse método de renormalização.

Consideremos novamente, portanto, a teoria de interação para campos escalares  $\phi^4$   $N$ -vetorial. Fazendo a expansão da constante de acoplamento adimensional não renormalizada  $u_{0n}$  e das constantes de renormalização multiplicativas  $Z_{\phi_{(n)}}$  e  $\bar{Z}_{\phi_{(n)}^2}$ , em termos da constante de acoplamento adimensional renormalizada  $u_n$ , obtemos

$$u_{0n} = \lambda_n (\kappa_n^{2n})^{-\epsilon_L/2} = u_n \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{in}(\epsilon_L) u_n^i \right], \quad (3.41)$$

$$Z_{\phi_{(n)}} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_{in}(\epsilon_L) u_n^i, \quad (3.42)$$

$$\bar{Z}_{\phi_{(n)}^2} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_{in}(\epsilon_L) u_n^i. \quad (3.43)$$

As partes de vértice *1PI* renormalizadas são então dadas por



$$\Gamma_{R(n)}^{(2)}(k_{(n)}; u_n, \kappa_n) = Z_{\phi(n)} \Gamma_{(n)}^{(2)}(k_{(n)}; u_{0n}, \kappa_n), \quad (3.44)$$

$$\Gamma_{R(n)}^{(4)}(k_{i(n)}; u_n, \kappa_n) = Z_{\phi(n)}^2 \Gamma_{(n)}^{(4)}(k_{i(n)}; u_{0n}, \kappa_n), \quad (3.45)$$

$$\Gamma_{R(n)}^{(2,1)}(k_{1(n)}, k_{2(n)}, p_{(n)}; u_n, \kappa_n) = \bar{Z}_{\phi(n)} \Gamma_{(n)}^{(2,1)}(k_{1(n)}, k_{2(n)}, p_{(n)}; u_{0n}, \kappa_n). \quad (3.46)$$

As funções não renormalizadas são dadas simbolicamente por

$$\Gamma_{(n)}^{(2)}(k_{(n)}; u_{0n}, \kappa_n) = k_{(n)}^{2n} (1 - B_{2n} u_{0n}^2 + B_{3n} u_{0n}^3), \quad (3.47)$$

$$\Gamma_{(n)}^{(4)}(k_{i(n)}; u_{0n}, \kappa_n) = \kappa_n^{n\epsilon_L} u_{0n} [1 - A_{1n} u_{0n} + (A_{2n}^{(1)} + A_{2n}^{(2)}) u_{0n}^2], \quad (3.48)$$

$$\Gamma_{(n)}^{(2,1)}(k_{1(n)}, k_{2(n)}, p_{(n)}; u_{0n}, \kappa_n) = 1 - C_{1n} u_{0n} + (C_{2n}^{(1)} + C_{2n}^{(2)}) u_{0n}^2, \quad (3.49)$$

onde

$$A_{1n} = \frac{N+8}{18} \kappa_n^{n\epsilon_L} \left[ I_2 \left( \frac{k_{1(n)} + k_{2(n)}}{\kappa_n} \right) + I_2 \left( \frac{k_{1(n)} + k_{3(n)}}{\kappa_n} \right) + I_2 \left( \frac{k_{2(n)} + k_{3(n)}}{\kappa_n} \right) \right], \quad (3.50)$$

$$A_{2n}^{(1)} = \frac{(N^2 + 6N + 20)}{108} \kappa_n^{2n\epsilon_L} \left[ I_2^2 \left( \frac{k_{1(n)} + k_{2(n)}}{\kappa_n} \right) + 2permut. \right], \quad (3.51)$$

$$A_{2n}^{(2)} = \frac{(5N + 22)}{54} \kappa_n^{2n\epsilon_L} \left[ I_4 \left( \frac{k_{1(n)}}{\kappa_n}, \frac{k_{2(n)}}{\kappa_n}, \frac{k_{3(n)}}{\kappa_n}, \frac{k_{4(n)}}{\kappa_n} \right) + 5permut. \right], \quad (3.52)$$

$$B_{2n} = \frac{(N+2)}{18} \kappa_n^{2n\epsilon_L} I_3 \left( \frac{k_{(n)}}{\kappa_n} \right), \quad (3.53)$$

$$B_{3n} = \frac{(N+2)(N+8)}{108} \kappa_n^{3n\epsilon_L} I_5 \left( \frac{k_{(n)}}{\kappa_n} \right), \quad (3.54)$$

$$C_{1n} = \frac{N+2}{18} \kappa_n^{n\epsilon_L} \left[ I_2 \left( \frac{k_{1(n)} + k_{2(n)}}{\kappa_n} \right) + 2permut. \right], \quad (3.55)$$

$$C_{2n}^{(1)} = \frac{(N+2)^2}{108} \kappa_n^{2n\epsilon_L} \left[ I_2^2 \left( \frac{k_{1(n)} + k_{2(n)}}{\kappa_n} \right) + 2permut. \right], \quad (3.56)$$

$$C_{2n}^{(2)} = \frac{N+2}{36} \kappa_n^{2n\epsilon_L} \left[ I_4 \left( \frac{k_{1(n)}}{\kappa_n}, \frac{k_{2(n)}}{\kappa_n}, \frac{k_{3(n)}}{\kappa_n}, \frac{k_{4(n)}}{\kappa_n} \right) + 5permut. \right]. \quad (3.57)$$

As integrais de Feynman  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$  e  $I_5$ , do caso anisotrópico, são explicitamente dadas por

$$I_2 = \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)}}{\left\{ \sum_{n=2}^L [(k_{(n)} + k'_{(n)})^2]^n + (q + P)^2 \right\} \left[ \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n + q^2 \right]}, \quad (3.58)$$

$$I_3 = \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_1 d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_2 \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{1(n)} \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{2(n)}}{\left[ q_1^2 + \sum_{n=2}^L (k_{1(n)}^2)^n \right] \left[ q_2^2 + \sum_{n=2}^L (k_{2(n)}^2)^n \right] \left\{ (q_1 + q_2 + P)^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{1(n)} + k_{2(n)} + k'_{(n)})^2]^n \right\}}, \quad (3.59)$$

$$I_4 = \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_1 d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_2 \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{1(n)} \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{2(n)}}{\left[ q_1^2 + \sum_{n=2}^L (k_{1(n)}^2)^n \right] \left\{ (P - q_1)^2 + \sum_{n=2}^L [(k'_{(n)} + k_{1(n)})^2]^n \right\}} \times \frac{1}{\left[ q_2^2 + \sum_{n=2}^L (k_{2(n)}^2)^n \right] \left\{ (q_1 - q_2 + p_3)^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{1(n)} - k_{2(n)} + k'_{3(n)})^2]^n \right\}}, \quad (3.60)$$

$$I_5 = \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_1 d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_2 d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_3 \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{1(n)} \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{2(n)} \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{3(n)}}{\left[ q_1^2 + \sum_{n=2}^L (k_{1(n)}^2)^n \right] \left[ q_2^2 + \sum_{n=2}^L (k_{2(n)}^2)^n \right] \left[ q_3^2 + \sum_{n=2}^L (k_{3(n)}^2)^n \right]} \times \frac{1}{\left\{ (q_1 + q_2 - p)^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{1(n)} + k_{2(n)} + k'_{(n)})^2]^n \right\}} \times \frac{1}{\left\{ (q_1 + q_3 - p)^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{1(n)} + k_{3(n)} + k'_{(n)})^2]^n \right\}}. \quad (3.61)$$

As soluções dessas integrais podem ser obtidas através da aproximação ortogonal [34, 28], como descrito no apêndice A. Temos então que suas soluções aproximadas são

$$I_2 \cong \frac{1}{\epsilon_L} \left[ 1 + (h_{m_L} - 1)\epsilon_L - \frac{\epsilon_L}{2} L(P, k') \right], \quad (3.62)$$

onde

$$h_{m_L} = 1 + \frac{1}{2} \left[ \psi(1) - \psi \left( 2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n} \right) \right], \quad (3.63)$$

de onde temos que  $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ , com o símbolo  $\Gamma(z)$ , representando aqui a função especial gama. Ainda temos que

$$L(P, k') = \int_0^1 dx \ln\{[x(1-x)][P^2 + \sum_{n=2}^L (k'_{(n)})^{2n}]\}; \quad (3.64)$$

$$I_3 \cong \left[ P^2 + \sum_{n=2}^L (k'_{(n)})^{2n} \right] \left( -\frac{1}{8\epsilon_L} \right) \left[ 1 + 2h_{m_L}\epsilon_L - \frac{3}{4}\epsilon_L - 2\epsilon_L L_3(P, k') \right], \quad (3.65)$$

onde

$$L_3(P, k') = \int_0^1 dy(1-y) \ln \left\{ [y(1-y)] \left[ P^2 + \sum_{n=2}^L (k'_{(n)})^{2n} \right] \right\}; \quad (3.66)$$

$$I_4 \cong \frac{1}{2\epsilon_L} \left[ 1 + 2h_{m_L}\epsilon_L - \frac{3}{2}\epsilon_L - \epsilon_L L(P, k') \right] \quad (3.67)$$

e por último

$$I_5 \cong \left[ P^2 + \sum_{n=2}^L (k'_{(n)})^{2n} \right] \left( \frac{-1}{6\epsilon_L^2} \right) [1 + 3h_{m_L}\epsilon_L - \epsilon_L - 3\epsilon_L L_3(P, k')]. \quad (3.68)$$

O leitor pode verificar que, se desligarmos todas as competições do sistema, fixando em zero todos os momentos relacionados às competições, reduziremos as integrais do caso anisotrópico àquelas para o modelo sem competição, onde suas soluções exatas serão dadas pelas expressões (3.62), (3.65), (3.67) e (3.68) para  $k'_{(n)} = 0$ , visto que a aproximação é introduzida apenas sobre os momentos dos eixos competitivos. Neste caso,  $h_{m_L} = \frac{1}{2}$  e  $\epsilon_L$  deve ser substituído por  $\epsilon$ , que é dado por (2.114).

Temos em mãos, portanto, tudo o que é necessário para o cálculo dos expoentes críticos anisotrópicos do modelo *CECI*. Deixaremos os detalhes algébricos do cálculo dos expoentes críticos para o caso isotrópico exato, uma vez que esse é o nosso principal objetivo. Aqui nos ateremos apenas aos resultados.

Após aplicarmos o procedimento de subtração mínima, encontramos

$$u_{0n} = u_n \left[ 1 + \frac{(N+8)}{6\epsilon_L} u_n + \left( \frac{(N+8)^2}{36\epsilon_L^2} - \frac{(3N+14)}{24\epsilon_L} \right) u_n^2 \right], \quad (3.69)$$

$$Z_{\phi_{(n)}} = 1 - \frac{N+2}{144\epsilon_L} u_n^2 + \left[ -\frac{(N+2)(N+8)}{1296\epsilon_L^2} + \frac{(N+2)(N+8)}{5184\epsilon_L} \right] u_n^3, \quad (3.70)$$

$$\bar{Z}_{\phi_{(n)}^2} = 1 + \frac{N+2}{6\epsilon_L} u_n + \left[ \frac{(N+2)(N+5)}{36\epsilon_L^2} - \frac{(N+2)}{24\epsilon_L} \right] u_n^2. \quad (3.71)$$

A partir de  $u_{0n}$ ,  $Z_{\phi_{(n)}}$  e  $\bar{Z}_{\phi_{(n)}^2}$  acima, podemos calcular as funções de Wilson generalizadas. Temos então

$$\beta_{(n)}(u_n, \epsilon_L) = -nu_n \left( \epsilon_L - \frac{N+8}{6}u_n + \frac{3N+14}{12}u_n^2 \right), \quad (3.72)$$

$$\gamma_{\phi_{(n)}}(u_n, \epsilon_L) = n \left[ \frac{N+2}{72}u_n^2 - \frac{(N+2)(N+8)}{1728}u_n^3 \right], \quad (3.73)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi_{(n)}^2}(u_n, \epsilon_L) = n \left[ \frac{N+2}{6}u_n \left( 1 - \frac{1}{2}u_n \right) \right]. \quad (3.74)$$

Os pontos fixos são definidos por  $\beta_{(n)}(u_n^*, \epsilon_L) = 0$ . Resolvendo essa equação, encontramos que o único ponto fixo estável, não trivial, no regime infravermelho é

$$u_n^* \equiv u_L^* = \frac{6}{N+8}\epsilon_L + \frac{18(3N+14)}{(N+8)^3}\epsilon_L^2. \quad (3.75)$$

Note que o ponto fixo em (3.75) independe do subespaço considerado. Substituindo o ponto fixo em  $\gamma_{\phi_{(n)}}(u_n)$ , chegamos ao primeiro expoente crítico ( $\eta_n$ ) do modelo *CECI* anisotrópico:

$$\eta_n = n\eta_L = n \left\{ \frac{(N+2)}{2(N+8)^2}\epsilon_L^2 \left[ 1 + \epsilon_L \left( \frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{4} \right) \right] \right\}. \quad (3.76)$$

Substituindo agora o ponto fixo em  $\bar{\gamma}_{\phi_{(n)}^2}(u_n)$  e utilizando a relação (3.35) obtemos

$$\nu_n = \frac{1}{n}\nu_L = \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{2} + \frac{N+2}{4(N+8)}\epsilon_L + \frac{(N+2)(N^2+23N+60)}{8(N+8)^3}\epsilon_L^2 \right], \quad (3.77)$$

onde  $\eta_L$  e  $\nu_L$  são os expoentes críticos do modelo *CECI* relacionados apenas ao subespaço com interações até o primeiro vizinho, ou seja, para  $n = 1$ . Observe a semelhança em relação aos expoentes críticos em (2.189) e (2.190).

Podemos agora explorar dois casos particulares do modelo *CECI* anisotrópico a partir dos expoentes críticos  $\eta_n$  e  $\nu_n$ . Primeiramente note que, para  $d = 3$ , o parâmetro perturbativo  $\epsilon_L$  pode ser escrito como

$$\epsilon_L = 1 + \sum_{i=2}^L \left[ \frac{(i-1)}{i} \right] m_i. \quad (3.78)$$

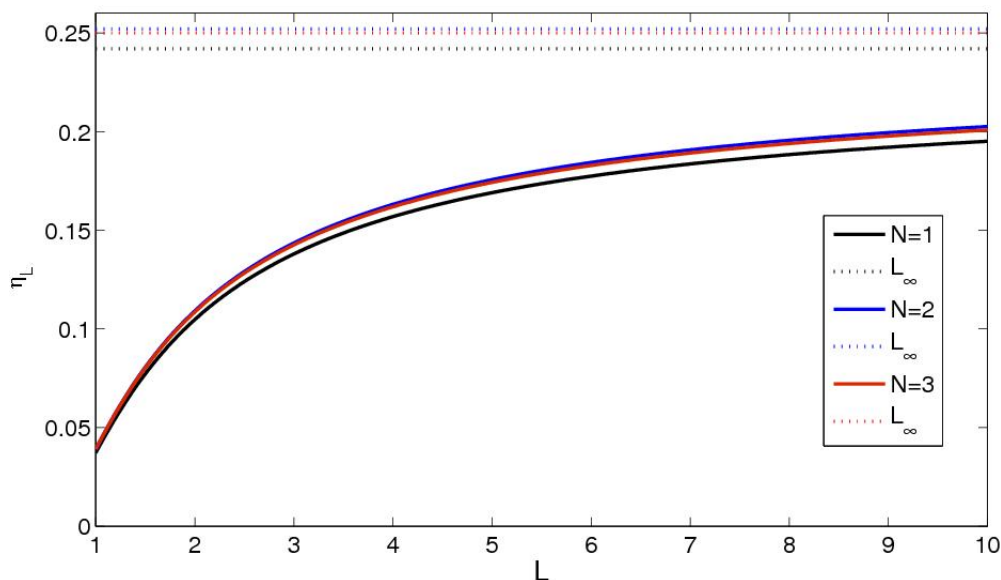
Fazendo agora  $m_i = m\delta_{i,L}$ , isto é, permitiremos a existência de apenas um subespaço competitivo, obtemos então

$$\epsilon_L = 1 + m - \frac{m}{L}. \quad (3.79)$$

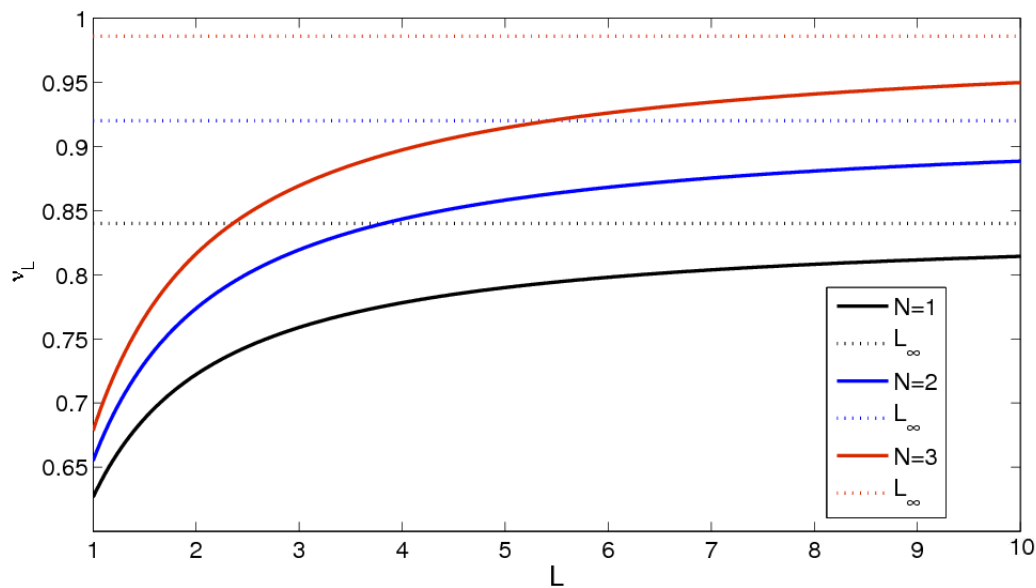
*Caso anisotrópico uniaxial:*  $m = 1$

$$\epsilon_L = 2 - \frac{1}{L}. \quad (3.80)$$

O comportamento dos expoentes críticos  $\eta_n/n = \eta_L$  e  $n\nu_n = \nu_L$ , com  $N = 1, 2$  e  $3$ , pode ser observado nos gráficos das figuras 3.1 e 3.2, respectivamente. O limite assintótico é obtido ao fazermos  $L \rightarrow \infty$  em (3.80), ou seja, quando  $\epsilon_L \rightarrow 2$ .



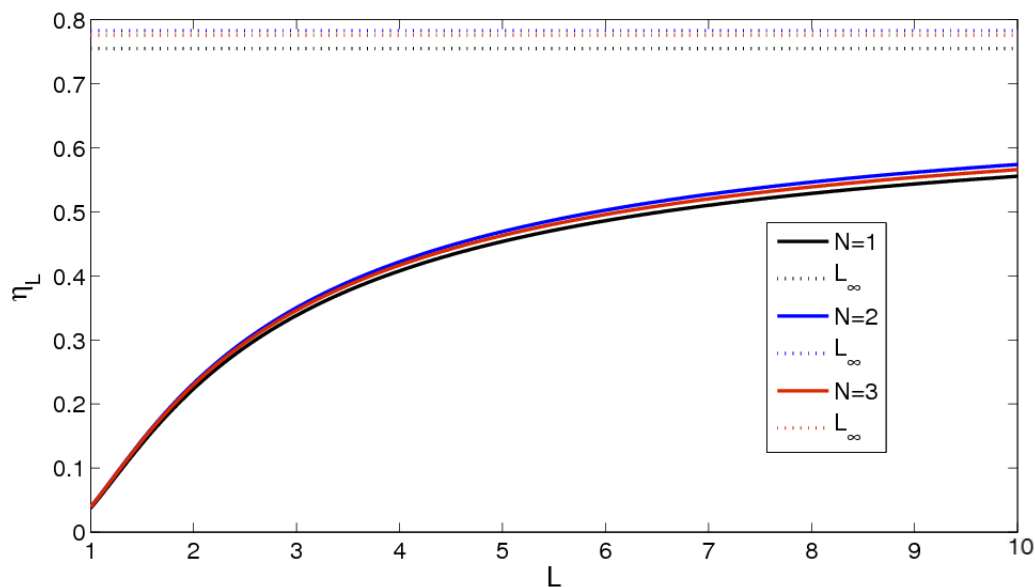
**Figura 3.1** Gráfico  $(\eta_L \times L)$  para o modelo CECI anisotrópico uniaxial em  $d = 3$ , onde consideramos apenas um subespaço competitivo unidimensional ( $m = 1$ ). O comportamento, para  $N = 1, 2$  e  $3$ , está representado pela cor da curva. As linhas tracejadas indicam o limite assintótico para  $L \rightarrow \infty$ .



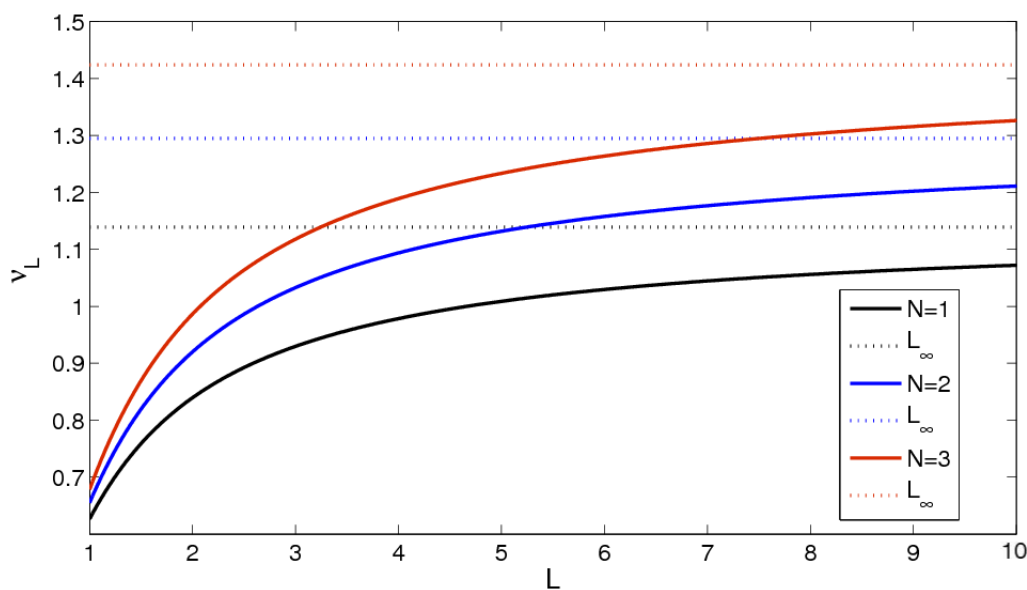
**Figura 3.2** Gráfico  $(\nu_L \times L)$  para o modelo CECI anisotrópico uniaxial em  $d = 3$ , considerando apenas um subespaço competitivo unidimensional ( $m = 1$ ). As curvas exibem o comportamento para  $N = 1, 2$  e  $3$ .

Caso anisotrópico biaxial:  $m = 2$

$$\epsilon_L = 3 - \frac{2}{L}. \quad (3.81)$$



**Figura 3.3** Gráfico  $(\eta_L \times L)$  para o modelo CECI anisotrópico biaxial em  $d = 3$ , onde consideramos apenas um subespaço competitivo bidimensional ( $m = 2$ ). As curvas exibem o comportamento para  $N = 1, 2$  e  $3$ .



**Figura 3.4** Gráfico  $(\nu_L \times L)$  para o modelo CECI anisotrópico biaxial em  $d = 3$ , considerando apenas um subespaço competitivo bidimensional ( $m = 2$ ). As curvas exibem o comportamento para  $N = 1, 2$  e  $3$ .

Neste caso o comportamento dos mesmos expoentes, também com  $N = 1, 2$  e  $3$ , é mostrado nas figuras 3.3 e 3.4. O limite assintótico é obtido, novamente, ao fazermos  $L \rightarrow \infty$ , ou seja, quando  $\epsilon_L \rightarrow 3$ .

Os outros expoentes críticos podem ser obtidos pela utilização das relações de escala para o modelo *CECI*. Temos então

$$\gamma_L = 1 + \frac{(N+2)}{2(N+8)}\epsilon_L + \frac{(N+2)(N^2+22N+52)}{4(N+8)^3}\epsilon_L^2, \quad (3.82)$$

$$\alpha_L = \frac{(4-N)}{2(N+8)}\epsilon_L - \frac{(N+2)(N^2+30N+56)}{4(N+8)^3}\epsilon_L^2, \quad (3.83)$$

$$\beta_L = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(N+8)}\epsilon_L + \frac{(N+2)(2N+1)}{2(N+8)^3}\epsilon_L^2 \quad (3.84)$$

e

$$\delta_L = 3 + \epsilon_L + \frac{(N^2+14N+60)}{2(N+8)^2}\epsilon_L^2. \quad (3.85)$$

Note que, diferentemente dos expoentes críticos  $\eta_n$  e  $\nu_n$ , os quais dependem explicitamente de  $n$  e consequentemente do subespaço considerado, os expoentes acima apresentam os mesmos valores em todo o espaço.

## CAPÍTULO 4

# EXPOENTES CRÍTICOS ISOTRÓPICOS DO MODELO *CECI*

Chegamos agora a um ponto crucial do nosso estudo, pois neste capítulo calcularemos os expoentes críticos para o caso isotrópico do modelo *CECI*, cujo comportamento se evidencia quando  $m_n = d$ . A obtenção dos expoentes críticos se dará tanto para o caso onde o cálculo das integrais de Feynman sofrerá aproximação (*caso isotrópico aproximado*), quanto para o caso onde as mesmas integrais serão calculadas exatamente (*caso isotrópico exato*).

No capítulo 3, vimos as generalizações necessárias ao tratamento do modelo *CECI*, anisotrópico e isotrópico, por isso, começaremos aqui apresentando as relações de escala modificadas do caso isotrópico, que serão utilizadas depois para obtermos os expoentes críticos.

### 4.1 RELAÇÕES DE ESCALA PARA O MODELO *CECI* ISOTRÓPICO

Recorrendo às constantes de renormalização multiplicativas, como feito no caso anisotrópico, temos, novamente, que as partes de vértice renormalizadas, com exceção de  $\Gamma_{R(n)}^{(0,2)}$ , são dadas por

$$\Gamma_{R(n)}^{(N,M)}(p_{i(n)}, Q_{j(n)}, g_n, \kappa_n) = Z_{\phi(n)}^{N/2} Z_{\phi(n)}^M \Gamma_{(n)}^{(N,M)}(p_{i(n)}, Q_{j(n)}, \lambda_n, \Lambda_n). \quad (4.1)$$

O leitor deve estar atento ao fato de que, embora a expressão acima seja idêntica à equação (3.26), devemos, nesse caso, fixar um único valor para  $n$  em (4.1). Assim, fixamos um único comprimento de correlação para o sistema, como também um valor único para a dimensão anômala, visto que todas as direções possuem agora o mesmo tipo de interação competitiva.

Podemos definir novamente  $g_n$  e  $\lambda_n$  em termos de  $u_n$  e  $u_{0n}$ . Assim temos:  $g_n = u_n(\kappa_n^{2n})^{\epsilon_n/2}$  e  $\lambda_n = u_{0n}(\kappa_n^{2n})^{\epsilon_n/2}$ , onde, como vimos no capítulo 3,  $\epsilon_n = 4n - m_n$ . Então, em termos de  $u_n$  e  $u_{0n}$ , a equação do grupo de renormalização fica

$$\left( \kappa_n \frac{\partial}{\partial \kappa_n} + \beta_{(n)} \frac{\partial}{\partial u_n} - \frac{1}{2} N \gamma_{\phi(n)}(u_n) + M \gamma_{\phi(n)}^2(u_n) \right) \Gamma_{R(n)}^{(N,M)} = 0, \quad (4.2)$$

onde temos ainda que

$$\beta_{(n)} = \left( \kappa_n \frac{\partial u_n}{\partial \kappa_n} \right), \quad (4.3)$$

$$\gamma_{\phi(n)}(u_n) = \beta_{(n)} \frac{\partial \ln Z_{\phi(n)}}{\partial u_n} \quad (4.4)$$



e

$$\gamma_{\phi_{(n)}^2}(u_n) = -\beta_{(n)} \frac{\partial \ln Z_{\phi_{(n)}^2}}{\partial u_n}, \quad (4.5)$$

são as funções de Wilson para o caso isotrópico do modelo *CECI*. A função  $\beta_{(n)}$  pode ser reescrita em termos das quantidades adimensionais na forma

$$\beta_{(n)} = -\epsilon_n \left( \frac{\partial \ln u_{0n}}{\partial u_n} \right)^{-1}. \quad (4.6)$$

Observe que a função  $\beta_{(n)}$ , em (4.6), não possui o fator  $n$  que está presente em (3.31) no caso anisotrópico. Essa peculiaridade, que visivelmente diferencia os dois casos, vem à tona através das transformações do grupo de renormalização.

Resolvendo a equação do grupo de renormalização no ponto fixo da teoria ( $\beta_{(n)}(u_n^*) = 0$ ), encontramos as relações de escala do modelo *CECI* isotrópico. Os meandros da obtenção dessas relações podem ser encontrados em [34, 28]. Temos, portanto, que o nosso primeiro expoente crítico do caso isotrópico é dado por

$$\eta_n = \gamma_{\phi_{(n)}^*}^*. \quad (4.7)$$

Também temos que

$$\nu_n^{-1} = 2n - \gamma_{\phi_{(n)}^2}^*, \quad (4.8)$$

ou ainda, por conveniência

$$\nu_n^{-1} = 2n - \eta_n - \bar{\gamma}_{\phi_{(n)}^2}^*, \quad (4.9)$$

onde temos definido  $\bar{\gamma}_{\phi_{(n)}^2}(u_n)$  por

$$\bar{\gamma}_{\phi_{(n)}^2}(u_n) = -\beta_{(n)} \frac{\partial \ln(Z_{\phi_{(n)}^2} Z_{\phi_{(n)}})}{\partial u_n} = -\beta_{(n)} \frac{\partial \ln \bar{Z}_{\phi_{(n)}^2}}{\partial u_n}. \quad (4.10)$$

Ainda temos que

$$\gamma_n = \nu_n(2n - \eta_n), \quad (4.11)$$

$$\alpha_n = 2 - m_n \nu_n, \quad (4.12)$$

$$\beta_n = \frac{1}{2} \nu_n (m_n - 2n + \eta_n) \quad (4.13)$$

e

$$\delta_n = \frac{m_n + 2n - \eta_n}{m_n - 2n + \eta_n}. \quad (4.14)$$

Manipulando as expressões acima, chegamos também às seguintes relações entre os expoentes críticos:  $\gamma_n = \beta_n(\delta_n - 1)$  e  $\alpha_n + 2\beta_n + \gamma_n = 2$ .

Observe que, exceto por pequenas modificações, o tratamento devido ao grupo de renormalização, para o caso isotrópico, é equivalente a analisarmos, separadamente, cada subespaço competitivo presente no comportamento anisotrópico. É fácil verificar que as leis de escala para o modelo *CECI* isotrópico se reduzem àquelas do comportamento crítico usual, ou seja, àquele descrito por uma teoria de campo escalar  $\phi^4$  com  $n = 1$ . Logo, podemos englobar o comportamento crítico usual dentro do universo dos sistemas que exibem o ponto de Lifshitz, denominando-o de *comportamento crítico de Lifshitz isotrópico do primeiro caráter*, sendo esse, por consequência, o caso particular mais simples.

## 4.2 SUBTRAÇÃO MÍNIMA PARA O CASO ISOTRÓPICO

As definições básicas, para o procedimento da técnica de renormalização por subtração mínima de pólos dimensionais, já foram estabelecidas anteriormente. Sabemos, portanto, que a constante de acoplamento adimensional não renormalizada  $u_{0n}$ , assim como as constantes de renormalização  $Z_{\phi_{(n)}}$  e  $\bar{Z}_{\phi_{(n)}^2}$ , são dadas em termos de uma expansão na constante de acoplamento adimensional renormalizada  $u_n$ , ou seja,

$$u_{0n} = u_n[1 + a_{1n}(\epsilon_n)u_n + a_{2n}(\epsilon_n)u_n^2], \quad (4.15)$$

$$Z_{\phi_{(n)}} = 1 + b_{1n}(\epsilon_n)u_n + b_{2n}(\epsilon_n)u_n^2 + b_{3n}(\epsilon_n)u_n^3 \quad (4.16)$$

e

$$\bar{Z}_{\phi_{(n)}^2} = 1 + c_{1n}(\epsilon_n)u_n + c_{2n}(\epsilon_n)u_n^2. \quad (4.17)$$

Podemos agora utilizar as expressões acima para obtermos as funções de Wilson ( $\beta_{(n)}$ ,  $\gamma_{\phi_{(n)}}$  e  $\gamma_{\phi_{(n)}^2}$ ), referentes ao caso isotrópico, em termos da expansão em  $u_n$ . Temos então

$$\beta_{(n)}(u_n) = -\epsilon_n u_n [1 - a_{1n}u_n + 2(a_{1n}^2 - a_{2n})u_n^2], \quad (4.18)$$

$$\gamma_{\phi_{(n)}}(u_n) = -\epsilon_n u_n [2b_{2n}u_n + (3b_{3n} - 2b_{2n}a_{1n})u_n^2], \quad (4.19)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi_{(n)}^2}(u_n) = \epsilon_n u_n [c_{1n} + (2c_{2n} - c_{1n}^2 - a_{1n}c_{1n})u_n]. \quad (4.20)$$

Já vimos que as funções de vértice *1PI* a serem renormalizadas são  $\Gamma_{(n)}^{(2)}$ ,  $\Gamma_{(n)}^{(4)}$  e  $\Gamma_{(n)}^{(2,1)}$ , o que nos leva a

$$Z_{\phi_{(n)}} \Gamma_{(n)}^{(2)}(k_{(n)}; u_{0n}, \kappa_n) = \Gamma_{R_{(n)}}^{(2)}(k_{(n)}; u_n, \kappa_n), \quad (4.21)$$

$$Z_{\phi_{(n)}}^2 \Gamma_{(n)}^{(4)}(k_{i_{(n)}}; u_{0n}, \kappa_n) = \Gamma_{R_{(n)}}^{(4)}(k_{i_{(n)}}; u_n, \kappa_n), \quad (4.22)$$

$$\bar{Z}_{\phi^2} \Gamma_{(n)}^{(2,1)}(k_{1(n)}, k_{2(n)}, p(n); u_{0n}, \kappa_n) = \Gamma_{R(n)}^{(2,1)}(k_{1(n)}, k_{2(n)}, p(n); u_n, \kappa_n), \quad (4.23)$$

onde, simbolicamente, temos

$$\Gamma_{(n)}^{(2)}(k(n); u_{0n}, \kappa_n) = k_{(n)}^{2n} (1 - B_{2n} u_{0n}^2 + B_{3n} u_{0n}^3), \quad (4.24)$$

$$\Gamma_{(n)}^{(4)}(k_{i(n)}; u_{0n}, \kappa_n) = \kappa_n^{n\epsilon_n} u_{0n} [1 - A_{1n} u_{0n} + (A_{2n}^{(1)} + A_{2n}^{(2)}) u_{0n}^2], \quad (4.25)$$

$$\Gamma_{(n)}^{(2,1)}(k_{1(n)}, k_{2(n)}, p(n); u_{0n}, \kappa_n) = 1 - C_{1n} u_{0n} + (C_{2n}^{(1)} + C_{2n}^{(2)}) u_{0n}^2, \quad (4.26)$$

onde temos, novamente, que

$$A_{1n} = \frac{N+8}{18} \kappa_n^{n\epsilon_n} \left[ I_2 \left( \frac{k_{1(n)} + k_{2(n)}}{\kappa_n} \right) + I_2 \left( \frac{k_{1(n)} + k_{3(n)}}{\kappa_n} \right) + I_2 \left( \frac{k_{2(n)} + k_{3(n)}}{\kappa_n} \right) \right], \quad (4.27)$$

$$A_{2n}^{(1)} = \frac{(N^2 + 6N + 20)}{108} \kappa_n^{2n\epsilon_n} \left[ I_2^2 \left( \frac{k_{1(n)} + k_{2(n)}}{\kappa_n} \right) + 2\text{permut.} \right], \quad (4.28)$$

$$A_{2n}^{(2)} = \frac{(5N + 22)}{54} \kappa_n^{2n\epsilon_n} \left[ I_4 \left( \frac{k_{1(n)}}{\kappa_n}, \frac{k_{2(n)}}{\kappa_n}, \frac{k_{3(n)}}{\kappa_n}, \frac{k_{4(n)}}{\kappa_n} \right) + 5\text{permut.} \right], \quad (4.29)$$

$$B_{2n} = \frac{(N+2)}{18} \kappa_n^{2n\epsilon_n} I_3 \left( \frac{k(n)}{\kappa_n} \right), \quad (4.30)$$

$$B_{3n} = \frac{(N+2)(N+8)}{108} \kappa_n^{3n\epsilon_n} I_5 \left( \frac{k(n)}{\kappa_n} \right), \quad (4.31)$$

$$C_{1n} = \frac{N+2}{18} \kappa_n^{n\epsilon_n} \left[ I_2 \left( \frac{k_{1(n)} + k_{2n}}{\kappa_n} \right) + 2\text{permut.} \right], \quad (4.32)$$

$$C_{2n}^{(1)} = \frac{(N+2)^2}{108} \kappa_n^{2n\epsilon_n} \left[ I_2^2 \left( \frac{k_{1(n)} + k_{2(n)}}{\kappa_n} \right) + 2\text{permut.} \right], \quad (4.33)$$

$$C_{2n}^{(2)} = \frac{N+2}{36} \kappa_n^{2n\epsilon_n} \left[ I_4 \left( \frac{k_{1(n)}}{\kappa_n}, \frac{k_{2(n)}}{\kappa_n}, \frac{k_{3(n)}}{\kappa_n}, \frac{k_{4(n)}}{\kappa_n} \right) + 5\text{permut.} \right]. \quad (4.34)$$

As integrais  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$  e  $I_5$  do caso isotrópico têm suas formas explícitas dadas por

$$I_2 = \int \frac{d^{m_n} k}{[(k+k')^2]^n (k^2)^n}, \quad (4.35)$$

$$I_3 = \int \frac{d^{m_n} k_1 d^{m_n} k_2}{[(k_1 + k_2 + k')^2]^n (k_1^2)^n (k_2^2)^n}, \quad (4.36)$$

$$I_4 = \int \frac{d^{m_n} k_1 d^{m_n} k_2}{(k_1^2)^n [(k' - k_1)^2]^n (k_2^2)^n [(k_1 + k_2 + k_3')^2]^n}, \quad (4.37)$$

e

$$I_5 = \int \frac{d^{m_n} k_1 d^{m_n} k_2 d^{m_n} k_3}{[(k_1 + k_2 + k')^2]^n [(k_1 + k_3 + k')^2]^n (k_1^2)^n (k_2^2)^n (k_3^2)^n}. \quad (4.38)$$

Observe que tudo o que foi feito até agora não discrimina o caso isotrópico aproximado do isotrópico exato, pois o algoritmo para o cálculo dos expoentes críticos não depende do resultado das integrais de Feynman, desde que as leis de escala obtidas através do grupo de renormalização também são independentes da utilização ou não de aproximação. Queremos, no entanto, apresentar aqui o cálculo da integral de Feynman  $I_2$  com e sem aproximação, visto que a diferença entre os dois casos (*isotrópico exato e aproximado*) reside exatamente no resultado das integrais. Também é importante frisar que o cálculo das integrais é uma parte fundamental do trabalho, sendo o divisor de águas na diferenciação e comparação das minúcias dos casos específicos (anisotrópico, isotrópico aproximado e isotrópico exato) do modelo *CECI*, merecendo, portanto, alguma atenção neste momento.

#### 4.2.1 Solução da integral de Feynman $I_2$ com aproximação

Temos que a integral  $I_2$ , para o caso isotrópico do modelo *CECI* é dada por (4.35). Para calcularmos essa integral, listaremos algumas fórmulas que serão necessárias no decorrer do desenvolvimento matemático. A fórmula mais utilizada para o cálculo das integrais de Feynman, a qual explicita o método dos parâmetros de Feynman para a obtenção da solução [37], é

$$\frac{1}{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \cdots \Gamma(\alpha_n)} \int dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} \frac{x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}-1} (1 - x_1 - x_2 \cdots - x_{n-1})^{\alpha_n-1}}{[x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_{n-1} a_{n-1} + (1 - x_1 - x_2 \cdots - x_{n-1}) a_n]^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}}, \quad (4.39)$$

onde a integração sobre os parâmetros de Feynman,  $x_i$ , estende-se sobre o domínio:  $0 \leq x_i \leq 1$ ;  $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \leq 1$ . O símbolo  $\Gamma$  representa aqui a função especial gama, cujas propriedades são de suma importância para a resolução da integral  $I_2$ , assim como das outras integrais. Admitiremos então que tais propriedades sejam conhecidas e simplesmente nos utilizaremos delas.

Será imprescindível também a utilização da relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^d x \frac{1}{[x^2 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + b^2]^\alpha} = \frac{1}{2} S_d \frac{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} (b^2 - \mathbf{k}^2)^{-\alpha + d/2}, \quad (4.40)$$

onde  $S_d$  é a área de uma superfície esférica  $d$ -dimensional, assim como de

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^d q \frac{1}{[(q^2)^n + 2a(q^2)^{n/2} + m^2]^\alpha} \cong \frac{1}{2n} S_d \frac{\Gamma(d/2n) \Gamma(\alpha - d/2n)}{\Gamma(\alpha)} (m^2 - a^2)^{-\alpha + d/2n}. \quad (4.41)$$

As duas expressões acima encontram-se deduzidas no apêndice A.

Vamos agora aplicar a *aproximação ortogonal* em  $I_2$ , que implica em uma condição de ortogonalidade generalizada entre o momento interno  $k$  e o momento externo  $k'$ , mantendo ainda as propriedades de escala e homogeneidade das integrais e, conseqüentemente, das funções de vértice [28]. Essa aproximação é dada explicitamente por  $(k + k')^n \cong k^n + k'^n$ , o que nos dá a seguinte expressão para  $I_2$

$$I_2 \cong \int \frac{d^{m_n} k}{(k^{2n} + 2k'^n k^n + k'^{2n})(k^2)^n}. \quad (4.42)$$

Aplicando o método dos parâmetros de Feynman a (4.42), obtemos

$$I_2 \cong \int_0^1 dx \int \frac{d^{m_n} k}{(k^{2n} + 2xk'^n k^n + xk'^{2n})^2}, \quad (4.43)$$

onde foi utilizado apenas um parâmetro de Feynman. Podemos fazer ainda  $k^n \equiv q$ , o que nos dá  $dk = \frac{1}{n} q^{\frac{1}{n}-1} dq$ . Sabendo que  $d^{m_n} k = S_{m_n} k^{m_n-1} dk$ , ficamos então com

$$d^{m_n} k = \frac{S_{m_n}}{n} q^{\frac{m_n}{n}-1} dq, \quad (4.44)$$

ou ainda

$$d^{m_n} k = \frac{1}{n} \frac{S_{m_n}}{S_{(m_n/n)}} d^{\frac{m_n}{n}} q, \quad (4.45)$$

onde fizemos  $d^{\frac{m_n}{n}} q \equiv S_{(m_n/n)} q^{\frac{m_n}{n}-1} dq$ . Substituindo essas redefinições em (4.43), chegamos a

$$I_2 \cong \frac{1}{n} \frac{S_{m_n}}{S_{(m_n/n)}} \int_0^1 dx \int \frac{d^{\frac{m_n}{n}} q}{(q^2 + 2xk'^n q + xk'^{2n})^2}, \quad (4.46)$$

o que, através da utilização da equação (4.41) para  $d = m_n/n$ , nos dá

$$I_2 \cong \frac{1}{2n} S_{m_n} \frac{\Gamma(\frac{m_n}{2n})\Gamma(2 - \frac{m_n}{2n})}{\Gamma(2)} \int_0^1 dx [xk'^{2n} - (xk'^n)^2]^{\frac{m_n}{2n}-2}. \quad (4.47)$$

Agora é o momento de começarmos a evidenciar o parâmetro perturbativo do caso isotrópico,  $\epsilon_n$ , para procedermos com as devidas expansões. Temos que  $m_n = 4n - \epsilon_n$ , o que implica em

$$I_2 \cong \frac{1}{2n} S_{m_n} \Gamma\left(2 - \frac{\epsilon_n}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon_n}{2n}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)(k'^{2n})]^{-\frac{\epsilon_n}{2n}}. \quad (4.48)$$

Para fazermos as expansões em  $\epsilon_n$ , temos que explicitar primeiro a expansão da função gama, que é dada por

$$\Gamma(a + bx) = \Gamma(a)[1 + bx\psi(a) + \mathcal{O}(x^2)], \quad (4.49)$$

onde  $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$  e  $\psi(2n) = \psi(1) + \sum_{p=1}^{2n-1} 1/p$ . Ainda podemos fazer

$$\int_0^1 [x(1-x)(k'^{2n})]^{-\frac{\epsilon_n}{2n}} = 1 - \frac{\epsilon_n}{2n} L(k') + \mathcal{O}(\epsilon_n^2) \quad (4.50)$$

onde

$$L(k') = \int_0^1 dx \ln[x(1-x)(k'^2)^n]. \quad (4.51)$$

Utilizando todas essas expansões em (4.48), obtemos

$$I_2 \cong S_{m_n} \frac{1}{\epsilon_n} \left\{ 1 - \frac{\epsilon_n}{2n} [1 + L(k')] \right\}. \quad (4.52)$$

Redefinindo agora a constante de acoplamento para absorver o fator  $S_{m_n}$ , chegamos, finalmente, a solução de  $I_2$  que procurávamos, isto é,

$$I_2 \cong \frac{1}{\epsilon_n} \left\{ 1 - \frac{\epsilon_n}{2n} [1 + L(k')] \right\}. \quad (4.53)$$

Observe que não realizamos a integral  $L(k')$ , que é dada por (4.51), embora ela não seja uma integral de difícil resolução. Esta é outra vantagem do método de renormalização por subtração mínima em relação ao método de condições de normalização [37], pois não precisamos calcular as integrais logarítmicas que surgem da expansão das integrais de Feynman. Isto se deve ao fato de que, pela própria construção do método, os coeficientes, que aparecem naturalmente no processo, conspiram para o cancelamento desses termos. Esse cancelamento pode ser verificado facilmente, e seu caráter geral constitui um ótimo ponto de verificação da presença ou não de erros algébricos.

As outras integrais têm suas soluções aproximadas, dadas por

$$I_3 \cong -\frac{(k'^2)^n}{8n\epsilon_n} \left\{ 1 + \epsilon_n \left[ \frac{1}{4n} - \frac{2}{n} L_3(k') \right] \right\}, \quad (4.54)$$

onde

$$L_3(k') = \int_0^1 dy (1-y) \ln[y(1-y)k'^{2n}]; \quad (4.55)$$

$$I_4 \cong \frac{1}{2\epsilon_n^2} \left\{ 1 - \frac{\epsilon_n}{2n} [1 + 2L(k')] \right\}, \quad (4.56)$$

onde a integral  $L(k')$  é dada pela expressão (4.51). Por último temos

$$I_5 \cong -\frac{(k'^2)^n}{6n\epsilon_n^2} \left\{ 1 + \epsilon_n \left[ \frac{1}{2n} - \frac{3}{n} L_3(k') \right] \right\}, \quad (4.57)$$

onde a integral  $L_3(k')$  é dada por (4.55). A resolução aproximada dessas integrais encontra-se no apêndice B.

### 4.2.2 Solução exata da integral de Feynman $I_2$

Vamos agora proceder com o cálculo de  $I_2$  *sem aproximação*. Começemos utilizando os parâmetros de Feynman, expressos por (4.39), em (4.35), o que nos leva a

$$I_2 = \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} \int \frac{d^{m_n} k}{(k^2 + 2xk'k + xk'^2)^{2n}}. \quad (4.58)$$

Note que no caso aproximado, efetuamos primeiro a aproximação ortogonal. A expressão, entre parênteses, no denominador da integral em  $k$  acima, pode ser reescrito por

$$k^2 + 2xk'k + (xk')^2 + xk'^2 - (xk')^2 = (k + xk')^2 + x(1-x)k'^2. \quad (4.59)$$

Fazendo agora a mudança de variável

$$q \equiv k + xk', \quad (4.60)$$

obtemos

$$I_2 = \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} \int \frac{d^{m_n} q}{[q^2 + x(1-x)k'^2]^{2n}}. \quad (4.61)$$

Utilizando a relação (4.40) em (4.61), podemos escrever ainda

$$I_2 = \frac{1}{2} S_{m_n} \frac{\Gamma(\frac{m_n}{2})\Gamma(2n - \frac{m_n}{2})}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} [x(1-x)k'^2]^{\frac{m_n}{2} - 2n}. \quad (4.62)$$

Sabemos porém que  $m_n = 4n - \epsilon_n$ , o que nos leva a

$$I_2 = \frac{1}{2} S_{m_n} \frac{\Gamma(2n - \frac{\epsilon_n}{2})\Gamma(\frac{\epsilon_n}{2})}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} [x(1-x)k'^2]^{-\frac{\epsilon_n}{2}}. \quad (4.63)$$

Podemos escrever a integral em  $x$  como uma expansão em  $\epsilon_n$ , da seguinte forma

$$\int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} [x(1-x)k'^2]^{-\frac{\epsilon_n}{2}} = \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} - \frac{\epsilon_n}{2} L_n(k') + \mathcal{O}(\epsilon_n^2), \quad (4.64)$$

onde

$$L_n(k') = \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} \ln[x(1-x)k'^2]. \quad (4.65)$$

Observe que a integral acima depende explicitamente do valor de  $n$ . O primeiro termo à direita em (4.64) é a forma integral da função especial beta, que possui solução em termos das funções gama, ou seja,

$$\mathcal{B}(n, n) = \int_0^1 dx x^{n-1} (1-x)^{n-1} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(n)}{\Gamma(2n)}. \quad (4.66)$$

Fazendo o uso de (4.49) e (4.64) em (4.63), chegamos ao nosso resultado final

$$I_2 = \frac{1}{\epsilon_n} \left\{ 1 - \frac{\epsilon_n}{2} \left[ \psi(2n) - \psi(1) + \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} L_n(k') \right] \right\}, \quad (4.67)$$

onde redefinimos a constante de acoplamento para absorver o fator  $S_{m_n}$ .

As outras integrais têm suas soluções exatas, dadas por

$$I_3 = k'^{2n} (-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{4\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n} \left\{ 1 + \epsilon_n \left[ B_n - \frac{L_{3n}(k')}{A_n} \right] \right\}, \quad (4.68)$$

onde

$$A_n = \frac{\Gamma(2n)\Gamma(n)}{\Gamma(3n)}, \quad (4.69)$$

$$B_n = D(n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{n+p} \quad (4.70)$$

e

$$D(n) = \frac{1}{2} \psi(2n) - \psi(n) + \frac{1}{2} \psi(1). \quad (4.71)$$

Ainda temos que

$$L_{3n}(k') = \int_0^1 dy y^{2n-1} (1-y)^{n-1} \ln[y(1-y)k'^2], \quad (4.72)$$

que também depende do valor de  $n$ .

$$I_4 = \frac{1}{2\epsilon_n^2} \left\{ 1 + \left[ D(n) - \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} L_n(k') \right] \epsilon_n - \epsilon_n \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} \right\}, \quad (4.73)$$

onde a integral  $L_n(k')$  está definida em (4.65). Temos ainda que

$$I_5 = k'^{2n} (-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{3\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n^2} \left\{ 1 + \epsilon_n \left[ C_n - \frac{3L_{3n}(k')}{2A_n} \right] \right\}, \quad (4.74)$$

onde

$$C_n = 2D(n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} + \frac{3}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{n+p} \quad (4.75)$$

e a integral  $L_{3n}(k')$  está definida em (4.72). A resolução exata dessas integrais também encontra-se no apêndice B.



### 4.3 EXPOENTES CRÍTICOS ISOTRÓPICOS APROXIMADOS DO MODELO *CECI*

Para calcularmos os expoentes críticos, precisamos conhecer os coeficientes das expansões (4.15), (4.16) e (4.17). A fim de encontrarmos tais coeficientes, utilizaremos as equações (4.21), (4.22) e (4.23). As funções de vértice *1PI* não renormalizadas são dadas por (4.24), (4.25) e (4.26), onde devemos substituir  $u_{0n}$  por sua expansão em termos de  $u_n$ . Por exemplo, para  $\Gamma_{R(n)}^{(2)}$ , após termos realizado essas substituições, ficamos com

$$\Gamma_{R(n)}^{(2)} = k_{(n)}^{2n} [1 + b_{1n}u_n + (b_{2n} - B_{2n})u_n^2 + (b_{3n} - 2a_{1n}B_{2n} + B_{3n} - b_{1n}B_{2n})u_n^3], \quad (4.76)$$

de onde concluímos que  $b_{1n} = 0$ , ou seja, não existem pólos cujo resíduo é linear em  $u_n$ ;  $b_{2n} = [B_{2n}]_S$ , onde o subscrito  $S$ , indica que tomaremos apenas a parte singular de  $B_{2n}$  e  $b_{3n} = [2a_{1n}B_{2n} - B_{3n}]_S$ , onde já utilizamos o fato de que  $b_{1n} = 0$ . Para os outros coeficientes, temos

$$a_{1n} = [A_{1n}]_S, \quad (4.77)$$

$$a_{2n} = [-2b_{2n} + 2a_{1n}A_{1n} - A_{2n}^{(1)} - A_{2n}^{(2)}]_S, \quad (4.78)$$

$$c_{1n} = [C_{1n}]_S, \quad (4.79)$$

$$c_{2n} = [a_{1n}C_{1n} + c_{1n}C_{1n} - C_{2n}^{(1)} - C_{2n}^{(2)}]_S. \quad (4.80)$$

Substituindo, nas expressões acima, as soluções aproximadas das integrais de Feynman para o caso isotrópico, obtemos

$$a_{1n} = \frac{N+8}{6} \cdot \frac{1}{\epsilon_n}, \quad (4.81)$$

$$a_{2n} = \frac{(N+8)^2}{36} \cdot \frac{1}{\epsilon_n^2}, \quad (4.82)$$

$$b_{2n} = -\frac{(N+2)}{144n} \cdot \frac{1}{\epsilon_n}, \quad (4.83)$$

$$b_{3n} = -\frac{(N+2)(N+8)}{1296n} \cdot \frac{1}{\epsilon_n^2}, \quad (4.84)$$

$$c_{1n} = \frac{N+2}{6} \cdot \frac{1}{\epsilon_n}, \quad (4.85)$$

$$c_{2n} = \frac{(N+2)(N+5)}{36} \cdot \frac{1}{\epsilon_n^2}. \quad (4.86)$$

Observe que todos os coeficientes divergem, para  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , o que é um requerimento desse método de renormalização. Note também que, realmente, houve o cancelamento das integrais logarítmicas. Esse passo algébrico será explicitado para o caso exato. De posse dos resultados acima, podemos escrever

$$u_{0n} = u_n \left[ 1 + \frac{(N+8)}{6\epsilon_n} u_n + \left( \frac{(N+8)^2}{36\epsilon_n^2} - \frac{(3N+14)}{24n\epsilon_n} \right) u_n^2 \right], \quad (4.87)$$

$$Z_{\phi(n)} = 1 - \frac{N+2}{144n\epsilon_n} u_n^2 + \left[ -\frac{(N+2)(N+8)}{1296n\epsilon_n^2} + \frac{(N+2)(N+8)}{5184n^2\epsilon_n} \right] u_n^3, \quad (4.88)$$

$$\bar{Z}_{\phi(n)} = 1 + \frac{N+2}{6\epsilon_n} u_n + \left[ \frac{(N+2)(N+5)}{36\epsilon_n^2} - \frac{(N+2)}{24n\epsilon_n} \right] u_n^2. \quad (4.89)$$

A partir de  $u_{0n}$ ,  $Z_{\phi(n)}$  e  $\bar{Z}_{\phi(n)}$ , podemos calcular as funções de Wilson para o caso isotrópico aproximado, utilizando as equações (4.18), (4.19) e (4.20). Temos então

$$\beta_{(n)}(u_n, \epsilon_n) = -u_n \left( \epsilon_n - \frac{N+8}{6} u_n + \frac{3N+14}{12n} u_n^2 \right), \quad (4.90)$$

$$\gamma_{\phi(n)}(u_n) = \frac{N+2}{72n} u_n^2 - \frac{(N+2)(N+8)}{1728n^2} u_n^3, \quad (4.91)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi(n)}(u_n) = \frac{N+2}{6} u_n \left( 1 - \frac{1}{2n} u_n \right). \quad (4.92)$$

Impondo agora a condição para o ponto fixo ( $\beta_{(n)}(u_n^*, \epsilon_n) = 0$ ), encontramos que o único ponto fixo estável, não trivial, no regime infravermelho é dado por

$$u_n^* = \frac{6}{N+8} \epsilon_n + \frac{18(3N+14)}{n(N+8)^3} \epsilon_n^2. \quad (4.93)$$

De acordo com (4.7), podemos encontrar o expoente crítico  $\eta_n$  ao aplicarmos o ponto fixo dado por (4.93) na expressão (4.91). Com isso obtemos

$$\eta_n = \frac{1}{2n} \frac{(N+2)}{(N+8)^2} \epsilon_n^2 \left\{ 1 + \frac{\epsilon_n}{n} \left[ \frac{6(3N+14)}{(N+8)^2} - \frac{1}{4} \right] \right\}. \quad (4.94)$$

Substituindo agora o ponto fixo em (4.92), ficamos com

$$\bar{\gamma}_{\phi(n)}^* = \frac{(N+2)}{(N+8)} \epsilon_n \left[ 1 + \frac{6(N+3)}{n(N+8)^2} \epsilon_n \right]. \quad (4.95)$$

Então, de acordo com (4.9) temos que o expoente crítico  $\nu_n$  é dado por

$$\nu_n = \frac{1}{2n} + \frac{(N+2)}{4n^2(N+8)} \epsilon_n + \frac{(N+2)(N^2+23N+60)}{8n^3(N+8)^3} \epsilon_n^2. \quad (4.96)$$

Sabemos que, pelas relações de escala, é necessário conhecermos apenas dois expoentes críticos para que os outros expoentes também sejam conhecidos. Levando em consideração as relações de escala dadas por (4.11) à (4.14), obtemos facilmente que

$$\gamma_n = 1 + \frac{(N+2)}{2n(N+8)}\epsilon_n + \frac{(N+2)(N^2+22N+52)}{4n^2(N+8)^3}\epsilon_n^2, \quad (4.97)$$

$$\alpha_n = \frac{(4-N)}{2n(N+8)}\epsilon_n - \frac{(N+2)(N^2+30N+56)}{4n^2(N+8)^3}\epsilon_n^2 \quad (4.98)$$

$$\beta_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{2n(N+8)}\epsilon_n + \frac{(N+2)(2N+1)}{2n^2(N+8)^3}\epsilon_n^2, \quad (4.99)$$

$$\delta_n = 3 + \frac{1}{n}\epsilon_n + \frac{(N^2+14N+60)}{2n^2(N+8)^2}\epsilon_n^2. \quad (4.100)$$

Observe que a dependência dos expoentes críticos isotrópicos em relação ao número de vizinhos acoplados através das interações competitivas está explícita, já que a classe de universalidade para o modelo *CECI* isotrópico é determinada por  $N$  e  $d = m_n$ . O fato interessante é que os resultados para o comportamento crítico do modelo de Ising são obtidos ao fazermos  $n = 1$ .

#### 4.4 EXPOENTES CRÍTICOS ISOTRÓPICOS EXATOS DO MODELO *CECI*

Como já foi mencionado, a diferença entre os expoentes críticos do caso isotrópico exato para o caso aproximado reside totalmente nas soluções das integrais de Feynman. Podemos então nos utilizar das expressões já obtidas para os coeficientes e passarmos diretamente ao cálculo deles.

Como já verificamos, não existem pólos lineares em  $u_n$ , assim temos  $b_{1n} = 0$ . De acordo com (4.76) temos que  $b_{2n} = [B_{2n}]_S$ . Utilizando então (4.68), chegamos a

$$b_{2n} = \frac{(N+2)}{18} \left\{ I_3 = (-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{4\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n} [1 + \mathcal{O}(\epsilon_n)] \right\}_S. \quad (4.101)$$

Admitindo apenas a parte singular, obtemos

$$b_{2n} = (-1)^n \frac{(N+2)}{72} \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n}. \quad (4.102)$$

Para  $a_{1n}$  temos

$$a_{1n} = [A_{1n}]_S = \frac{(N+8)}{18} \left\{ \left[ I_2 = \frac{1}{\epsilon_n} [1 + \mathcal{O}(\epsilon_n)] \right] + 2permut. \right\}_S, \quad (4.103)$$

onde utilizamos o resultado de  $I_2$  dado por (4.67). Note que as permutações possuem a mesma parte singular, o que nos dá um fator de 3 no total. Com isso temos

$$a_{1n} = \frac{N+8}{6} \cdot \frac{1}{\epsilon_n}. \quad (4.104)$$

O coeficiente  $b_{3n}$  pode ser encontrado, impondo que a parte singular referente à  $\mathcal{O}(u_n^3)$  em (4.76) se anule por subtração mínima, ou seja,  $b_{3n} = [2a_{1n}B_{2n} - B_{3n}]_S$ . Isto nos leva a

$$b_{3n} = \left\{ \frac{(N+8) \cdot (N+2)}{3\epsilon_n} \cdot \frac{(-1)^n}{72} \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n} \left[ 1 + \epsilon_n \left( B_n - \frac{1}{A_n} L_{3n} \left( \frac{k(n)}{\kappa_n} \right) \right) \right] \right\} + \\ - \frac{(N+2)(N+8)}{108} \left\{ (-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{3\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n^2} \left[ 1 + \epsilon_n \left( C_n - \frac{3}{2A_n} L_{3n} \left( \frac{k(n)}{\kappa_n} \right) \right) \right] \right\}_S. \quad (4.105)$$

Vale ressaltar que não podemos, nesse caso, simplesmente desprezar a parte em  $\mathcal{O}(\epsilon_n^0)$  da integral  $B_{2n}$ , pois o coeficiente  $a_{1n}$  carrega consigo o fator  $1/\epsilon_n$ , o que torna toda a expressão singular. Note ainda que a integral  $B_{3n}$  só possui termos singulares, dado o fator de  $1/\epsilon_n^2$  em sua expressão. Rearranjando a equação acima, ficamos com

$$b_{3n} = \frac{1}{\epsilon_n} \left[ L_{3n} \left( \frac{k(n)}{\kappa_n} \right) \right] \cdot \left[ \frac{(N+8)(N+2)}{216A_n} (-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} (1-1) \right] + \\ + \frac{1}{\epsilon_n^2} \left[ (N+8)(N+2)(-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \left( \frac{1}{216} - \frac{1}{324} \right) \right] + \\ + \frac{1}{\epsilon_n} \left[ (N+8)(N+2)(-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \left( \frac{B_n}{216} - \frac{C_n}{324} \right) \right]. \quad (4.106)$$

Observando (4.106), notamos que o primeiro termo, que carrega a integral logarítmica, é identicamente nulo, o que justifica o fato de não precisarmos calcular essa integral. Então, para  $b_{3n}$ , temos

$$b_{3n} = \frac{(-1)^n (N+8)(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{648\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n} \left[ \frac{1}{\epsilon_n} - \left( D(n) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{n+p} \right) \right]. \quad (4.107)$$

Utilizando agora a expressão (4.78) para o coeficiente  $a_{2n}$ , encontramos

$$a_{2n} = \frac{1}{\epsilon_n} \left[ L_n \left( \frac{k_{1(n)} + k_{2(n)}}{\kappa_n} \right) + 2\text{permut.} \right] \times \\ \times \left[ \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \left( \frac{(N^2 + 6N + 20)}{108} + \frac{(5N + 22)}{54} - \frac{(N+8)^2}{108} \right) \right] + \\ + \frac{1}{\epsilon_n^2} \left[ \frac{(N+8)^2}{18} - \frac{(N^2 + 6N + 20)}{36} - \frac{(5N + 22)}{18} \right] + \\ + \frac{1}{\epsilon_n} \left\{ (-1)^{n+1} \frac{(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} + \frac{(N^2 + 6N + 20)}{36} [\psi(2n) - \psi(1)] + \right. \\ \left. - \frac{(N+8)^2}{36} [\psi(2n) - \psi(1)] - \frac{(5N + 22)}{18} \left[ D(n) - \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} \right] \right\}. \quad (4.108)$$

Note que aqui também o primeiro termo é nulo, o que implica no cancelamento das integrais logarítmicas. Então, com mais algumas passagens algébricas, chegamos a

$$a_{2n} = \frac{(N+8)^2}{36} \cdot \frac{1}{\epsilon_n^2} + \frac{1}{18} \left[ (-1)^{n+1} \frac{(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} - (5N+22)D(n) \right] \frac{1}{\epsilon_n}. \quad (4.109)$$

Como o coeficiente  $c_{1n} = [C_{1n}]_S$  e  $C_{1n} = \frac{N+2}{18} \left[ \frac{3}{\epsilon_n} + \mathcal{O}(\epsilon_n^0) \right]$ , vemos facilmente que

$$c_{1n} = \frac{N+2}{6} \cdot \frac{1}{\epsilon_n}. \quad (4.110)$$

Por último, temos que  $c_{2n}$  é dado por

$$\begin{aligned} c_{2n} = & \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n} \left[ L_n \left( \frac{k_{1(n)} + k_{2(n)}}{\kappa_n} \right) + 2\text{permut.} \right] \times \\ & \times \left[ \frac{(N+2)^2}{108} + \frac{(N+2)}{36} - \frac{(N^2+10N+16)}{216} - \frac{(N+2)^2}{216} \right] + \\ & + \frac{1}{\epsilon_n^2} \left[ \frac{(N^2+10N+16)}{36} - \frac{(N+2)}{12} \right] + \frac{1}{\epsilon_n} \left\{ [\psi(2n) - \psi(1)] \left[ \frac{(N+2)^2}{36} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(N+2)}{12} - \frac{(N+2)(N+8)}{72} - \frac{(N+2)^2}{72} \right] - \frac{(N+2)}{12} D(n) \right\}, \end{aligned} \quad (4.111)$$

onde podemos verificar novamente o cancelamento do termo que carrega as integrais logarítmicas. Podemos então reescrever  $c_{2n}$  como

$$c_{2n} = \frac{(N+2)(N+5)}{36} \cdot \frac{1}{\epsilon_n^2} - \frac{(N+2)D(n)}{12} \cdot \frac{1}{\epsilon_n}. \quad (4.112)$$

Levando em conta todos esses coeficientes, podemos escrever

$$u_{0n} = u_n \left\{ 1 + \frac{(N+8)}{6\epsilon_n} u_n + \left[ \frac{(N+8)^2}{36\epsilon_n^2} + \frac{1}{18\epsilon_n} \left( (-1)^{n+1} \frac{(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} - (5N+22)D(n) \right) \right] u_n^2 \right\}, \quad (4.113)$$

$$\begin{aligned} Z_{\phi(n)} = & 1 + \left[ (-1)^n \frac{(N+2)}{72} \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n} \right] u_n^2 + \\ & + \left\{ \frac{(-1)^n (N+8)(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{648\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n} \left[ \frac{1}{\epsilon_n} - \left( D(n) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{n+p} \right) \right] \right\} u_n^3, \end{aligned} \quad (4.114)$$

$$\bar{Z}_{\phi(n)}^2 = 1 + \frac{N+2}{6\epsilon_n} u_n + \left\{ \frac{(N+2)}{12\epsilon_n} \left[ \frac{(N+5)}{3\epsilon_n} - D(n) \right] \right\} u_n^2. \quad (4.115)$$

Temos ainda que as funções de Wilson são agora dadas explicitamente por

$$\beta_{(n)}(u_n, \epsilon_n) = -u_n \left\{ \epsilon_n - \frac{(N+8)}{6} u_n + \frac{1}{9} \left[ (5N+22)D(n) + (-1)^n \frac{(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \right] u_n^2 \right\}, \quad (4.116)$$

$$\gamma_{\phi_{(n)}}(u_n) = \frac{(-1)^{n+1}(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{36\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \left[ u_n^2 - \frac{(N+8)}{6} \left( D(n) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{n+p} \right) u_n^3 \right], \quad (4.117)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi_{(n)}}^2(u_n) = \frac{(N+2)}{6} u_n [1 - D(n)u_n]. \quad (4.118)$$

Podemos obter agora, através da condição  $\beta_{(n)}(u_n^*, \epsilon_n) = 0$ , que o único ponto fixo estável no regime infravermelho é dado por

$$u_n^* = \frac{6}{N+8} \epsilon_n + 12 \left[ \frac{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)(5N+22)D(n) + (-1)^n(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{(N+8)^3\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \right] \epsilon_n^2. \quad (4.119)$$

Substituindo então o ponto fixo em (4.117), obtemos

$$\begin{aligned} \eta_n = \gamma_{\phi_{(n)}}^* &= \frac{(-1)^{n+1}(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{36\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \left\{ \left[ \frac{6}{N+8} \epsilon_n + \right. \right. \\ &+ 12 \left( \frac{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)(5N+22)D(n) + (-1)^n(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{(N+8)^3\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \right) \epsilon_n^2 \left. \right]^2 + \\ &- \frac{(N+8)}{6} \left( D(n) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{n+p} \right) \left[ \frac{6}{N+8} \epsilon_n + \right. \\ &\left. \left. + 12 \left[ \frac{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)(5N+22)D(n) + (-1)^n(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{(N+8)^3\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \right] \epsilon_n^2 \right]^3 \right\}, \end{aligned} \quad (4.120)$$

o que nos leva a forma final para o expoente crítico  $\eta_n$  até  $\mathcal{O}(\epsilon_n^3)$ , ou seja,

$$\eta_n = \frac{(-1)^{n+1}(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{(N+8)^2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \epsilon_n^2 [1 + \epsilon_n \mathcal{F}(N, n)], \quad (4.121)$$

onde  $\mathcal{F}(N, n)$  é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(N, n) &\equiv \frac{4}{(N+8)^2} \left[ \frac{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)(5N+22)D(n) + (-1)^n(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \right] + \\ &- \left( D(n) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{n+p} \right). \end{aligned} \quad (4.122)$$

Sabemos ainda que  $\nu_n^{-1} = 2n - \eta_n - \bar{\gamma}_{\phi_{(n)}^2}^*$ . Fazendo então a substituição do ponto fixo dado por (4.119) na expressão (4.118) e considerando apenas os termos até  $\mathcal{O}(\epsilon_n^2)$ , encontramos

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\phi_{(n)}^2}^* &= \frac{(N+2)}{N+8} \epsilon_n - \frac{6(N+2)}{(N+8)^2} D(n) \epsilon_n^2 + \\ &+ 2(N+2) \left[ \frac{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)(5N+22)D(n) + (-1)^n(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{(N+8)^3\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \right] \epsilon_n^2. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Substituindo então (4.123) e (4.121) na expressão para  $\nu_n^{-1}$  e considerando aqui também apenas os termos até  $\mathcal{O}(\epsilon_n^2)$ , obtemos

$$\nu_n = \frac{1}{2n} + \frac{(N+2)}{4n^2(N+8)} \epsilon_n + \frac{(N+2)}{2n^2(N+8)^2} \left[ (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} + \frac{(N+2)}{4n} - 3D(n) + \mathcal{J}(N, n) \right] \epsilon_n^2, \quad (4.124)$$

onde

$$\mathcal{J}(N, n) \equiv \left[ \frac{2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)(5N+22)D(n) + (-1)^n(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{(N+8)\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \right]. \quad (4.125)$$

Podemos obter agora o comportamento assintótico de  $\eta_n$  e  $\nu_n$  para  $n \gg 1$ , através da utilização das seguintes expressões

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}(z)^{z-\frac{1}{2}} \exp(-z) \left[ 1 + \frac{1}{12z} + \mathcal{O}(1/z^2) \right] \quad (4.126)$$

e

$$\psi(z) \sim \ln(z) - \frac{1}{2z} + \mathcal{O}(1/z^2), \quad (4.127)$$

onde estamos considerando  $z \gg 1$  nas expressões acima. Aplicando então (4.126) e (4.127) em (4.121) e (4.124), ficamos com

$$\eta_n \sim (-1)^{n+1} \frac{(N+2)}{(N+8)^2} \left[ \frac{3}{2n} \left( \frac{16}{27} \right)^n \right] \epsilon_n^2 \left[ 1 - \frac{(20N+88)}{(N+8)^2} \ln(n) \epsilon_n \right] \quad (4.128)$$

e

$$\nu_n \sim \frac{1}{2n}. \quad (4.129)$$

Observe que tanto  $\eta_n$ , quanto  $\nu_n$  vão à zero para  $n \rightarrow \infty$ .

Encontrados os expoentes críticos  $\eta_n$  e  $\nu_n$ , torna-se fácil obtermos os outros expoentes críticos através das relações de escala. Sabemos que  $\gamma_n = \nu_n(2n - \eta_n)$ , portanto

$$\gamma_n = 1 + \frac{(N+2)}{2n(N+8)} \epsilon_n + \frac{(N+2)}{n(N+8)^2} \left[ \frac{(N+2)}{4n} - 3D(n) + \mathcal{J}(N, n) \right] \epsilon_n^2. \quad (4.130)$$

Temos também que  $\alpha_n = 2 - m_n \nu_n$ . Mas,  $m_n = 4n - \epsilon_n$ , o que nos leva a

$$\alpha_n = 2 + \epsilon_n \nu_n - 4n \nu_n. \quad (4.131)$$

Utilizando então a relação (4.131), obtemos

$$\alpha_n = \frac{(4-N)}{2n(N+8)} \epsilon_n - \frac{(N+2)}{n(N+8)^2} \left[ (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} + \frac{(N-4)}{4n} - 6D(n) + 2\mathcal{J}(N, n) \right] \epsilon_n^2. \quad (4.132)$$

Temos agora que  $\beta_n = \frac{1}{2} \nu_n (m_n - 2n + \eta_n)$ , ou ainda

$$\beta_n = 1 - \frac{1}{2} (\alpha_n + \gamma_n). \quad (4.133)$$

Substituindo então (4.130) e (4.132) em (4.133), chegamos a conclusão que o expoente crítico  $\beta_n$  é dado por

$$\beta_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{2n(N+8)} \epsilon_n + \frac{(N+2)}{2n(N+8)^2} \left[ (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} - 3 \left( \frac{1}{2n} + D(n) \right) + \mathcal{J}(N, n) \right] \epsilon_n^2. \quad (4.134)$$

Para finalizarmos, temos ainda que o último expoente crítico ( $\delta_n$ ) é dado por (4.14), o que pode ser reescrito como

$$\delta_n = \frac{6n - \epsilon_n - \eta_n}{2n - \epsilon_n + \eta_n}. \quad (4.135)$$

Utilizando a expressão acima, indo até  $\mathcal{O}(\epsilon_n^2)$ , obtemos

$$\delta_n = 3 + \frac{1}{n} \epsilon_n - \frac{1}{n} \left[ 2(-1)^{n+1} \frac{(N+2)\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{(N+8)^2\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} - \frac{1}{2n} \right] \epsilon_n^2. \quad (4.136)$$

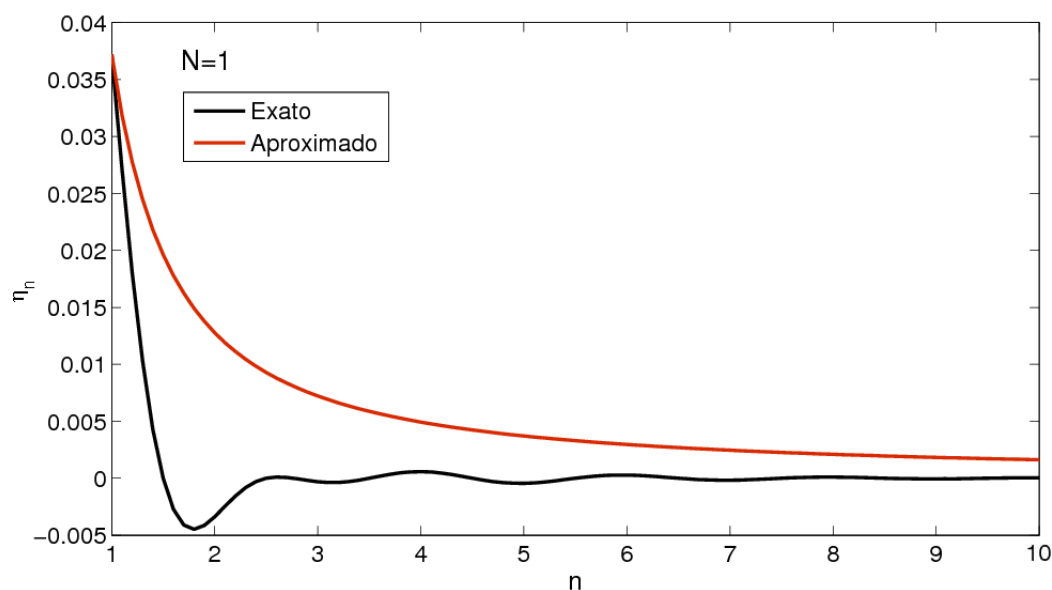
O nosso objetivo principal foi então alcançado, pois temos todos os expoentes críticos do modelo *CECI* isotrópico calculados exatamente até a ordem  $\epsilon_n^2$  (para o expoente crítico  $\eta_n$  fomos até  $\mathcal{O}(\epsilon_n^3)$ ) através do método de subtração mínima.

## 4.5 COMPARAÇÃO ENTRE OS CASOS APROXIMADO E EXATO

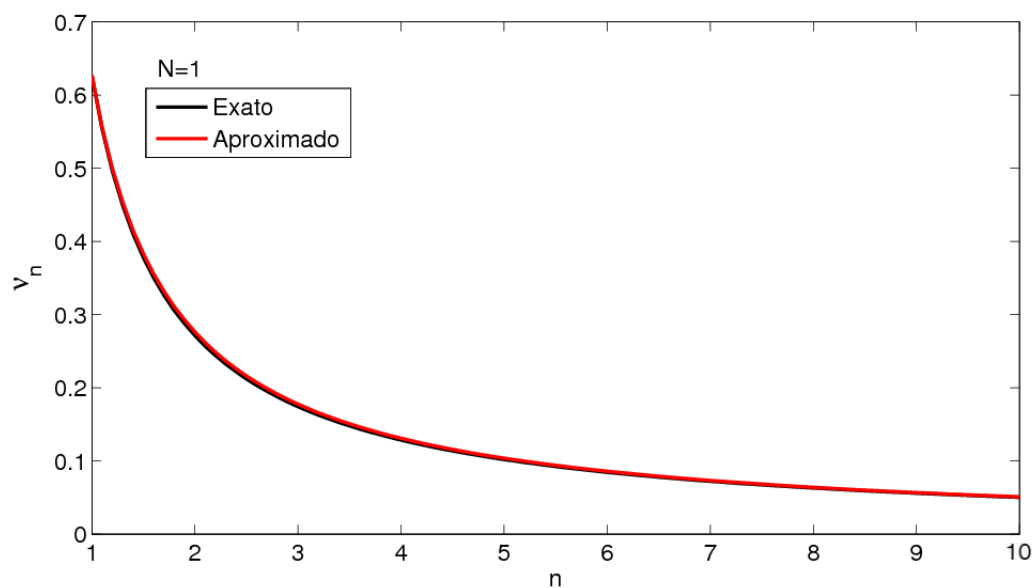
De posse das expressões para os expoentes críticos exatos e aproximados  $\eta_n$  e  $\nu_n$ , podemos construir os gráficos dessas funções e comparar esses dois casos para o modelo *CECI* isotrópico (Figuras 4.1 e 4.2).

Primeiramente, note que o gráfico ( $\eta_n \times n$ ), na Figura 4.1, vai a zero com o aumento de  $n$  para os dois casos, o que é facilmente verificado em (4.128) para o  $\eta_n$  exato, como também ao aplicarmos o limite  $n \rightarrow \infty$  na equação (4.94) para o  $\eta_n$  aproximado. Observamos também uma oscilação no gráfico para o expoente  $\eta_n$  exato. Isto ocorre devido ao fator  $(-1)^{n+1}$  em sua expressão, o que causa as maiores diferenças entre os dois. Para efeito de construção do gráfico, esse fator foi substituído por  $(-\cos(n\pi))$ . Vemos que a maior diferença ocorre para valores de  $n$  próximos à 2, onde o expoente crítico exato  $\eta_n$





**Figura 4.1** Gráfico  $(\eta_n \times n)$  para o modelo CECI isotrópico com  $N = 1$ , onde fizemos  $\epsilon_n = 1$ . A curva em preto exibe o comportamento do expoente crítico  $\eta_n$  exato e a curva em vermelho nos dá o comportamento do mesmo expoente para o caso aproximado.



**Figura 4.2** Gráfico  $(\nu_n \times n)$  para o modelo CECI isotrópico com  $N = 1$ , onde fizemos  $\epsilon_n = 1$ . A curva em preto exibe o comportamento do expoente crítico  $\nu_n$  exato e a curva em vermelho nos dá o comportamento do mesmo expoente para o caso aproximado.

apresenta valores negativos. Contudo, vemos que a aproximação que foi feita é capaz de descrever adequadamente o comportamento desse expoente crítico.

Ao observarmos a Figura 4.2, fica evidente que a diferença entre os dois casos, para o expoente crítico  $\nu_n$ , é realmente pequena. Também podemos observar que, nos dois casos,

o limite assintótico para  $\nu_n$  é o mesmo, visto que eles possuem o mesmo termo líder para  $n \rightarrow \infty$ , o que pode ser verificado em (4.124) e (4.96), explicando assim a superposição das curvas para valores ainda pequenos de  $n$ .

O comportamento desses dois expoentes críticos ( $\eta_n$  e  $\nu_n$ ) varia muito pouco, quando fazemos  $N = 2, 3$ , etc., e nenhuma novidade em relação aos gráficos já exibidos é trazida por essa alteração. Isto se deve ao fato de que, para um  $n$  fixo, o sinal dos coeficientes dos polinômios em  $N$  não se altera; logo, a concavidade das funções, tanto para o caso exato, quanto para o caso aproximado também não é alterada. Além disso, o grau dos polinômios em  $N$  não varia ao fazermos  $N > 1$ , o que implica num mesmo comportamento desses polinômios e, conseqüentemente, dos expoentes críticos ao variarmos  $N$ . Dessa forma, a exibição de tais gráficos, tendo em vista apenas a comparação dos casos aproximado e exato, torna-se desnecessária. É importante notar que, assim como os expoentes do caso aproximado, todos os expoentes do caso exato nos dão o resultado para o modelo sem competição quando fazemos  $n = 1$ , o que pode ser verificado a partir de suas expressões e, para os expoentes críticos  $\eta_n$  e  $\nu_n$ , através dos gráficos acima.

## CONCLUSÃO

Neste trabalho discutimos sobre a descrição mais geral de sistemas com interações competitivas, que é representada por um modelo simples de rede denominado modelo *CECI* [28]. Este modelo consiste numa modificação do modelo de Ising, incluindo os modelos *ANNNI* e *m*-axial como casos particulares. O comportamento crítico genérico de Lifshitz do *L*-ésimo caráter, evidentemente, estende a compreensão do comportamento crítico do segundo caráter *m*-axial [34], que por sua vez é uma extensão do modelo *ANNNI* [25, 26].

Os expoentes críticos calculados neste trabalho são exemplos de grandezas que exibem um caráter universal, ou seja, são independentes das características microscópicas dos sistemas considerados. Vimos que, na verdade, o fator determinante na diferenciação dos sistemas que podem ser descritos pelo modelo *CECI* é a classe de universalidade, que no caso anisotrópico é expressa por  $d, N, m_2, \dots, m_L$ , e para o caso isotrópico é dada por  $N$  e  $d = m_n$ . A propriedade de universalidade dos expoentes críticos é uma consequência natural da aplicação das técnicas do grupo de renormalização aos sistemas que exibem transições de fase, o que engloba também os sistemas com interações competitivas do tipo Lifshitz de *L*-ésimo caráter, objeto do nosso estudo.

Através das analogias existentes entre a teoria quântica de campos e a mecânica estatística, conseguimos calcular os expoentes críticos isotrópicos exatos do modelo *CECI* até  $\mathcal{O}(\epsilon_n^2)$  (até  $\mathcal{O}(\epsilon_n^3)$  para o expoente crítico  $\eta_n$ ), assim como os expoentes para os casos anisotrópico e isotrópico aproximado do mesmo modelo, aplicando, para isso, o método de subtração mínima como meio de tornar a teoria renormalizada. Também utilizamos regularização dimensional para expressar as integrais de Feynman em termos de pólos dimensionais. Tais integrais foram calculadas exatamente para o caso isotrópico exato. Também utilizamos, no caso anisotrópico e isotrópico, a aproximação ortogonal generalizada. É importante frisar que o método de subtração mínima não tinha ainda sido aplicado para encontrar os expoentes críticos exatos do modelo *CECI*, embora esses mesmos expoentes já tenham sido calculados pela técnica de condições de normalização [28, 42]. Um artigo científico contendo os novos resultados está em preparação [43]. Vale ressaltar também que os expoentes críticos do caso isotrópico exato, calculados aqui, são idênticos àqueles das referências citadas acima, assim como também os expoentes críticos anisotrópicos e isotrópicos aproximados. Essa equivalência, entre os expoentes críticos calculados por dois métodos de renormalização distintos, nos dá confiança sobre os resultados obtidos. Em contrapartida, nossos resultados confirmam a veracidade dos expoentes críticos encontrados em [28, 42].

Existem algumas vantagens na utilização do método de subtração mínima em relação ao método de condições de normalização [37]. A primeira e notável vantagem é o fato de não precisarmos calcular as integrais logarítmicas que aparecem no processo de re-

solução, pois estas são canceladas no decorrer do cálculo. Outra vantagem é que como, por construção, sabemos que tais integrais devem ser canceladas, torna-se fácil e imediato à verificação de erros algébricos, o que é muito importante, dado a quantidade de expressões que devem ser obtidas até o resultado final, o que traz ainda mais confiabilidade nos coeficientes obtidos para as expansões e conseqüentemente no resultado para os expoentes críticos. Uma outra vantagem está ligada a não especificação, em subtração mínima, da escala de momento  $\kappa$ , com isso não precisamos inserir o conceito de ponto simétrico [37] como é feito em condições de normalização. Ainda temos que o processo de renormalização é realizado pelo isolamento dos termos divergentes, o que deixa explícito quais são os únicos termos que devem ser subtraídos (*subtração mínima*), para que a teoria seja renormalizada.

Através dos gráficos nas Figuras 4.1 e 4.2, conseguimos perceber a qualidade da aproximação ortogonal generalizada ao compararmos os casos isotrópico aproximado e isotrópico exato. Dessa forma, verificamos a proximidade das curvas no que diz respeito ao comportamento das funções  $\eta_n(n)$  e  $\nu_n(n)$ , sendo que o expoente  $\eta_n$  demonstrou maior sensibilidade à aproximação feita, apresentando uma maior diferença entre os dois casos.

A aproximação ortogonal generalizada é consistente com a propriedade de homogeneidade das funções de vértice, descrevendo bem a propriedade de escala no ponto crítico de Lifshitz. Pela observação dos resultados, vemos que essa aproximação demonstra ser eficaz para o caso isotrópico, o que nos dá indícios de que os resultados dos expoentes críticos para o caso anisotrópico do modelo *CECI*, caso esse que não possui ainda solução exata, também estejam próximos dos não aproximados.

As possíveis extensões desse trabalho relacionam-se com a obtenção dos expoentes críticos para o modelo *CECI* em ordens de loops mais altas, assim como o cálculo de razões de amplitudes críticas, acima e abaixo da temperatura de transição, de alguns potenciais termodinâmicos, pois essas razões dependem explicitamente dos expoentes críticos.

## APÊNDICE A

# INTEGRAIS ANISOTRÓPICAS

### A.1 RELAÇÕES IMPORTANTES

Vamos inicialmente deduzir as expressões (4.40) e (4.41). Suponhamos a seguinte integral

$$I = \int \frac{d^d x}{[(x^2)^n + m^2]^\alpha}. \quad (\text{A.1})$$

Fazendo  $x_i \equiv (m^2)^{1/2n} k_i$ , o que implica em  $d^d x = (m^2)^{d/2n} d^d k$ , obtemos

$$I = (m^2)^{d/2n-\alpha} \int_0^\infty \frac{d^d k}{[(k^2)^n + 1]^\alpha} = (m^2)^{d/2n-\alpha} S_d \int_0^\infty dk \frac{k^{d-1}}{[(k^2)^n + 1]^\alpha}, \quad (\text{A.2})$$

onde fizemos  $d^d k = S_d k^{d-1} dk$ , sendo  $S_d$  a área de uma superfície esférica  $d$ -dimensional. Fazendo agora a mudança de variável  $k^n \equiv q$ , o que nos leva a  $dk k^{d-1} = \frac{1}{n} dq q^{d/n-1}$ , encontramos

$$I = (m^2)^{d/2n-\alpha} S_d \frac{1}{n} \int_0^\infty dq \frac{q^{d/n-1}}{(q^2 + 1)^\alpha}. \quad (\text{A.3})$$

Utilizando ainda uma outra mudança de variável, dada por  $1 + q^2 = 1/t$ , chegamos a

$$I = (m^2)^{d/2n-\alpha} S_d \frac{1}{2n} \int_0^1 dt t^{(\alpha-d/2n)-1} (1-t)^{d/2n-1}. \quad (\text{A.4})$$

A integral que resta na expressão acima é a forma integral da função especial beta, que possui solução em termos das funções especiais gama. Com isso temos

$$I = \frac{1}{2n} S_d \frac{\Gamma(\alpha - d/2n) \Gamma(d/2n)}{\Gamma(\alpha)} (m^2)^{d/2n-\alpha}. \quad (\text{A.5})$$

Então, para a integral em (4.40), onde temos  $n = 1$ , encontramos

$$\int_{-\infty}^\infty d^d x \frac{1}{[x^2 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + b^2]^\alpha} = \frac{1}{2} S_d \frac{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} (b^2 - \mathbf{k}^2)^{-\alpha+d/2}, \quad (\text{A.6})$$

onde fizemos

$$x^2 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + b^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{k})^2 + (b^2 - k^2), \quad (\text{A.7})$$

e definimos  $\mathbf{x} + \mathbf{k} \equiv \mathbf{q}$  e  $b^2 - k^2 \equiv m^2$ .

Agora temos

$$J = \int \frac{d^d x}{[(x^2)^n + 2a(x^2)^{n/2} + m^2]^\alpha}. \quad (\text{A.8})$$

Podemos reescrever o denominador da expressão acima como

$$(x^2)^n + 2a(x^2)^{n/2} + m^2 = [(x^2)^{n/2} + a]^2 + (m^2 - a^2). \quad (\text{A.9})$$

Ficamos então com

$$J = S_d \int_0^\infty dx \frac{x^{d-1}}{[(x^n + a)^2 + (m^2 - a^2)]^\alpha}, \quad (\text{A.10})$$

onde fizemos  $d^d x = S_d x^{d-1} dx$ . Utilizando agora a mudança de variável  $x^n \equiv k^n - a$ , obtemos

$$J = S_d \int_{a^{1/n}}^\infty dk k^{d-1} \left(1 - \frac{a}{k^n}\right)^{\frac{d}{n}-1} \frac{1}{[k^{2n} + (m^2 - a^2)]^\alpha}, \quad (\text{A.11})$$

o que pode ainda ser reescrito como

$$\begin{aligned} J = S_d \int_0^\infty dk \frac{k^{d-1}}{[k^{2n} + (m^2 - a^2)]^\alpha} + \\ + S_d \left\{ \int_0^\infty dk k^{d-1} \left[ \left(1 - \frac{a}{k^n}\right)^{\frac{d}{n}-1} - 1 \right] - \int_0^{a^{1/n}} dk k^{d-1} \left(1 - \frac{a}{k^n}\right) \right\} \frac{1}{[k^{2n} + (m^2 - a^2)]^\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

ou seja,

$$J = S_d \int_0^\infty dk \frac{k^{d-1}}{[k^{2n} + (m^2 - a^2)]^\alpha} + \text{correções}. \quad (\text{A.13})$$

Observe que o primeiro termo à direita em (A.13) tem a forma da integral  $I$  em (A.1). Logo, temos

$$J \cong \frac{1}{2n} S_d \frac{\Gamma(\alpha - d/2n) \Gamma(d/2n)}{\Gamma(\alpha)} (m^2 - a^2)^{\frac{d}{2n} - \alpha}. \quad (\text{A.14})$$

## A.2 SOLUÇÃO DAS INTEGRAIS ANISOTRÓPICAS

Vamos agora deduzir as soluções aproximadas para as integrais anisotrópicas do modelo *CECI*. Temos que a primeira integral a ser calculada é  $I_2$ , que tem sua forma explícita dada por

$$I_2 = \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)}}{\left\{ \sum_{n=2}^L [(k_{(n)} + k'_{(n)})^2]^n + (q + P)^2 \right\} \left[ \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n \right]}. \quad (\text{A.15})$$

Utilizando um parâmetro de Feynman, dado pela equação (4.39), na expressão acima ficamos com

$$I_2 = \int_0^1 dx \int \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)} \times \\ \times \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q}{\left( \left\{ \sum_{n=2}^L [(\mathbf{k}_{(n)} + \mathbf{k}'_{(n)})^2]^n + (\mathbf{q} + \mathbf{P})^2 \right\} x + (1-x) \left[ \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n + q^2 \right] \right)^2}. \quad (\text{A.16})$$

Utilizando agora a aproximação ortogonal generalizada, isto é,  $(k_{(n)} + k'_{(n)})^n \cong k_{(n)}^n + k'_{(n)}^n$ , chegamos a

$$I_2 \cong \int_0^1 dx \int \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)} \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q}{[q^2 + 2(x\mathbf{P}) \cdot \mathbf{q} + m^2]^2}, \quad (\text{A.17})$$

onde  $m^2$  é dado por

$$m^2 = x \sum_{n=2}^L (k'_{(n)}{}^2)^n + xP^2 + \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n + 2x \sum_{n=2}^L k_{(n)}^n k'_{(n)}{}^n. \quad (\text{A.18})$$

Com isso podemos resolver a integral mais interna em (A.17), utilizando a expressão (4.40), que foi deduzida na primeira parte desse apêndice. Ficamos então com

$$I_2 \cong \frac{1}{2} S_{(d-\sum_{n=2}^L m_n)} \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n} - \frac{\epsilon_L}{2}\right) \Gamma\left(\sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n} + \frac{\epsilon_L}{2}\right) \times \\ \times \int_0^1 dx \int \frac{\prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{(n)}}{\left\{ \sum_{n=2}^L (k_{(n)}^2)^n + 2 \sum_{n=2}^L (k'_{(n)}{}^n x) k_{(n)}^n + x \left[ \sum_{n=2}^L (k'_{(n)}{}^2)^n + P^2 - xP^2 \right] \right\}^{\frac{\epsilon_L}{2} + \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}}}, \quad (\text{A.19})$$

onde fizemos  $d = 4 + \sum_{n=2}^L \left[ \frac{(n-1)}{n} \right] m_n - \epsilon_L$ . A última integral em (A.19) está representando  $L - 1$  integrais independentes, que podem ser resolvidas pela utilização de (4.41). Com isso temos

$$I_2 \cong \frac{1}{2} S_{(d-\sum_{n=2}^L m_n)} \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n} - \frac{\epsilon_L}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2}\right) \prod_{n=2}^L \frac{S_{m_n}}{2n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \times \\ \times \int_0^1 dx \left\{ [x(1-x)] \left[ P^2 + \sum_{n=2}^L (k'_{(n)}{}^2)^n \right] \right\}^{-\frac{\epsilon_L}{2}}. \quad (\text{A.20})$$

Expandindo agora as funções gama em torno de  $\epsilon_L$  até  $\mathcal{O}(\epsilon_L)$ , através da expressão (4.49), assim como o integrando acima, obtemos

$$I_2 \cong \frac{1}{\epsilon_L} \left[ 1 + (h_{m_L} - 1)\epsilon_L - \frac{\epsilon_L}{2} L(P, k'_{(n)}) \right], \quad (\text{A.21})$$

onde  $h_{m_L}$  e  $L(P, k'_{(n)})$  estão expressos em (3.63) e (3.64), respectivamente. O fator  $\left[ S_{(d-\sum_{n=2}^L m_n)} \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n}\right) \left( \prod_{n=2}^L \frac{S_{m_n}}{2n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \right) \right]$  pode ser absorvido por uma redefinição da constante de acoplamento.

Temos agora a integral

$$I_3 = \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_1 d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_2 \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{1(n)} \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{2(n)}}{\left[ q_1^2 + \sum_{n=2}^L (k_{1(n)}^2)^n \right] \left[ q_2^2 + \sum_{n=2}^L (k_{2(n)}^2)^n \right] \left\{ (q_1 + q_2 + P)^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{1(n)} + k_{2(n)} + k'_{(n)})^2]^n \right\}}, \quad (\text{A.22})$$

o que pode ser reescrito como

$$I_3 = \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_1}{\left[ q_1^2 + \sum_{n=2}^L (k_{1(n)}^2)^n \right]} I_2(q_1 + P, k_{1(n)} + k'_{(n)}). \quad (\text{A.23})$$

Utilizando agora a expressão (A.20), ficamos com

$$I_3 \cong \frac{1}{2} \left[ S_{(d-\sum_{n=2}^L m_n)} \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n} - \frac{\epsilon_L}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2}\right) \prod_{n=2}^L \frac{S_{m_n}}{2n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \right] \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon_L}{2}} \times \\ \times \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_1 \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{1(n)}}{\left[ q_1^2 + \sum_{n=2}^L (k_{1(n)}^2)^n \right] \left\{ (q_1 + P)^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{1(n)} + k'_{(n)})^2]^n \right\}^{\frac{\epsilon_L}{2}}}. \quad (\text{A.24})$$

Aplicando agora os parâmetros de Feynman, seguido da aproximação ortogonal generalizada, podemos isolar a integral em  $q_1$  e solucioná-la através de (4.40). Obtemos então



$$\begin{aligned}
I_3 &\cong \frac{1}{4} \left[ S_{(d-\sum_{n=2}^L m_n)}^2 \Gamma\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n} - \frac{\epsilon_L}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d - \sum_{n=2}^L m_n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon_L}{2} + 1 - \frac{d - \sum_{n=2}^L m_n}{2}\right) \right] \times \\
&\times \prod_{n=2}^L \frac{S_{m_n}}{2n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon_L}{2}} \int_0^1 dy y^{\frac{\epsilon_L}{2}-1} \times \\
&\times \int \frac{\prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{1(n)}}{\left\{ \sum_{n=2}^L (k_{1(n)}^2)^n + 2 \sum_{n=2}^L (k'_{(n)} y) k_{1(n)}^n + y \left[ P^2 + \sum_{n=2}^L (k'_{(n)})^2 - P^2 y \right] \right\}^{\frac{\epsilon_L}{2} + 1 - \frac{d - \sum_{n=2}^L m_n}{2}}}.
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Observe que a última integral, em (A.25), representa  $L - 1$  integrais, que podem ser resolvidas pela utilização de (4.41), ficamos então com

$$\begin{aligned}
I_3 &\cong \frac{1}{4} S_{(d-\sum_{n=2}^L m_n)}^2 \Gamma^2\left(2 - \sum_{n=2}^L \frac{m_n}{2n} - \frac{\epsilon_L}{2}\right) \left[ \prod_{n=2}^L \frac{S_{m_n}}{2n} \Gamma\left(\frac{m_n}{2n}\right) \right]^2 \Gamma(-1 + \epsilon_L) \times \\
&\times \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\frac{\epsilon_L}{2}} \int_0^1 dy y^{\frac{\epsilon_L}{2}-1} \left\{ [y(1-y)] \left[ P^2 + \sum_{n=2}^L (k'_{(n)})^2 \right] \right\}^{1-\epsilon_L},
\end{aligned} \tag{A.26}$$

onde já substituímos  $d$  por sua expressão em termos de  $\epsilon_L$ . Utilizando agora a seguinte expansão

$$\Gamma(-z + c\varepsilon) = \frac{(-1)^z}{z! c\varepsilon} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{z} + \psi(1) \right) c\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right], \tag{A.27}$$

onde  $c$  é uma constante e  $\varepsilon$  é o parâmetro perturbativo. Aplicando (4.49) e expandindo também as integrais em termos de  $\epsilon_L$  em (A.26), chegamos a

$$I_3 \cong \left[ P^2 + \sum_{n=2}^L (k'_{(n)})^2 \right] \left( -\frac{1}{8\epsilon_L} \right) \left[ 1 + 2h_{m_L} \epsilon_L - \frac{3}{4} \epsilon_L - 2\epsilon_L L_3(P, k') \right], \tag{A.28}$$

onde  $h_{m_L}$  e  $L_3(P, k')$  são dados por (3.63) e (3.66), respectivamente. Observe que o termo independente do momento externo e de  $\epsilon_L$  que resta, após aplicarmos as expansões em (A.26), pode ser absorvido por uma redefinição da constante de acoplamento e, por isso, ele não está explicitado na solução final para  $I_3$  em (A.28).

Temos agora as seguintes integrais

$$I_4 = \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_1 d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_2 \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{1(n)} \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{2(n)}}{\left[ q_1^2 + \sum_{n=2}^L (k_{1(n)}^2)^n \right] \left\{ (P - q_1)^2 + \sum_{n=2}^L [(k'_{(n)} + k_{1(n)})^2]^n \right\}} \times \frac{1}{\left[ q_2^2 + \sum_{n=2}^L (k_{2(n)}^2)^n \right] \left\{ (q_1 - q_2 + p_3)^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{1(n)} - k_{2(n)} + k'_{3(n)})^2]^n \right\}} \quad (\text{A.29})$$

e

$$I_5 = \int \frac{d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_1 d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_2 d^{d-\sum_{n=2}^L m_n} q_3 \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{1(n)} \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{2(n)} \prod_{n=2}^L d^{m_n} k_{3(n)}}{\left[ q_1^2 + \sum_{n=2}^L (k_{1(n)}^2)^n \right] \left[ q_2^2 + \sum_{n=2}^L (k_{2(n)}^2)^n \right] \left[ q_3^2 + \sum_{n=2}^L (k_{3(n)}^2)^n \right]} \times \frac{1}{\left\{ (q_1 + q_2 - p)^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{1(n)} + k_{2(n)} + k'_{(n)})^2]^n \right\}} \times \frac{1}{\left\{ (q_1 + q_3 - p)^2 + \sum_{n=2}^L [(k_{1(n)} + k_{3(n)} + k'_{(n)})^2]^n \right\}}. \quad (\text{A.30})$$

As duas integrais acima podem ser solucionadas seguindo a mesma linha de resolução aplicada para  $I_2$  e  $I_3$ , ou seja, utilizando os parâmetros de Feynman, a aproximação ortogonal generalizada e, por fim, fazendo as devidas expansões, tomando  $\epsilon_L$  como parâmetro perturbativo [28]. Um grande simplificação pode ser feita ao notarmos que, da mesma forma que  $I_3$ , as integrais  $I_4$  e  $I_5$  também dependem explicitamente da integral  $I_2$ . Realizado todo o processo algébrico, chegamos a

$$I_4 \cong \frac{1}{2\epsilon_L} \left[ 1 + 2h_{m_L} \epsilon_L - \frac{3}{2} \epsilon_L - \epsilon_L L(P, k') \right] \quad (\text{A.31})$$

e

$$I_5 \cong \left[ P^2 + \sum_{n=2}^L (k'_{(n)})^{2n} \right] \left( \frac{-1}{6\epsilon_L^2} \right) [1 + 3h_{m_L} \epsilon_L - \epsilon_L - 3\epsilon_L L_3(P, k')]. \quad (\text{A.32})$$

## APÊNDICE B

# INTEGRAIS ISOTRÓPICAS

### B.1 CASO APROXIMADO

Como a integral  $I_2$  já foi solucionada no capítulo 4, iniciaremos aqui resolvendo a integral  $I_3$ , que é dada por

$$I_3 = \int \frac{d^{m_n} k_1 d^{m_n} k_2}{[(k_1 + k_2 + k')^2]^n (k_1^2)^n (k_2^2)^n}. \quad (\text{B.1})$$

A integral acima pode ser reescrita como

$$I_3 = \int \frac{d^{m_n} k_1}{(k_1^2)^n} I_2(k_1 + k'). \quad (\text{B.2})$$

Utilizando agora a expressão (4.48) para  $I_2$ , onde devemos expandir a integral em  $x$  até  $\mathcal{O}(\epsilon_n)$ ; calculando-a até essa ordem, chegamos a

$$I_3 \cong \frac{1}{\epsilon_n} \left(1 + \frac{\epsilon_n}{2n}\right) \int \frac{d^{m_n} k_1}{\{[(k_1 + k')^2]^n\}^{\epsilon_n/2n} (k_1^2)^n}. \quad (\text{B.3})$$

Aplicando agora um parâmetro de Feynman, seguido da aproximação ortogonal generalizada, obtemos

$$I_3 \cong \frac{1}{\epsilon_n} \left(1 + \frac{\epsilon_n}{2n}\right) \frac{\Gamma(1 + \epsilon_n/2n)}{\Gamma(\epsilon_n/2n)} \int_0^1 dy y^{\epsilon_n/2n-1} \int \frac{d^{m_n} k_1}{[k_1^{2n} + 2yk'^n k_1^n + yk'^{2n}]^{1+\epsilon_n/2n}}. \quad (\text{B.4})$$

Fazendo agora a mudança de variável  $k_1^n \equiv q$ , ficamos com

$$I_3 \cong \frac{1}{n} \frac{S_{m_n}}{S_{(m_n/n)}} \frac{1}{\epsilon_n} \left(1 + \frac{\epsilon_n}{2n}\right) \frac{\Gamma(1 + \epsilon_n/2n)}{\Gamma(\epsilon_n/2n)} \int_0^1 dy y^{\epsilon_n/2n-1} \int \frac{d^{m_n/n} q}{(q^2 + 2yk'^n q + yk'^{2n})^{1+\epsilon_n/2n}}. \quad (\text{B.5})$$

Utilizando agora (4.41) para resolver a integral em  $q$  e substituindo  $m_n$  por  $4n - \epsilon_n$ , encontramos

$$I_3 \cong \frac{k'^{2n}}{2n} S_{m_n} \frac{1}{\epsilon_n} \left(1 + \frac{\epsilon_n}{2n}\right) \frac{\Gamma(2 - \epsilon_n/2n) \Gamma(-1 + \epsilon_n/n)}{\Gamma(\epsilon_n/2n)} \int_0^1 dy y^{\epsilon_n/2n-1} [y(1-y)k'^{2n}]^{-\epsilon_n/n}. \quad (\text{B.6})$$

Realizando as expansões em termos de  $\epsilon_n$ , obtemos finalmente

$$I_3 \cong -\frac{(k'^2)^n}{8n\epsilon_n} \left\{ 1 + \epsilon_n \left[ \frac{1}{4n} - \frac{2}{n} L_3(k') \right] \right\}, \quad (\text{B.7})$$

onde  $L_3(k')$  é dado pela expressão (4.55).

Temos agora

$$I_4 = \int \frac{d^{m_n} k_1 d^{m_n} k_2}{(k_1^2)^n [(k' - k_1)^2]^n (k_2^2)^n [(k_1 + k_2 + k_3')^2]^n}. \quad (\text{B.8})$$

Notando que a integral acima pode ser reescrita em termos de  $I_2$ , ficamos com

$$I_4 = \int \frac{d^{m_n} k_1}{(k_1^2)^n [(k' - k_1)^2]^n} I_2(k_1 + k_3'). \quad (\text{B.9})$$

Substituindo a expressão para  $I_2$ , como feito na resolução de  $I_3$ ; aplicando os parâmetros de Feynman e a aproximação ortogonal generalizada, chegamos a

$$I_4 \cong f_n(\epsilon_n) \int_0^1 dz \int \frac{d^{m_n} k_1}{[(k_1^2)^n + 2zk^m k_1^n + zk'^{2n}]^2 \{[(k_1 + k_3')^2]^n\}^{\epsilon_n/2n}}, \quad (\text{B.10})$$

onde  $f_n(\epsilon_n) \equiv \frac{1}{\epsilon_n} \left(1 + \frac{\epsilon_n}{2n}\right)$ . Aplicando, novamente, os parâmetros de Feynman, a aproximação ortogonal generalizada, seguida da mudança de variável  $k_1^n \equiv q$ , substituindo ainda  $m_n$  por  $4n - \epsilon_n$ , ficamos, após a resolução da integral em  $q$ , com

$$I_4 \cong \frac{f_n(\epsilon_n) S_{m_n} \Gamma(2 - \epsilon_n/2n) \Gamma(\epsilon_n/n)}{2n \Gamma(\epsilon_n/2n)} \int_0^1 dy y (1 - y)^{\epsilon_n/2n - 1} \times \\ \times \int_0^1 dz \{zy(k'^2)^n + (1 - y)(k_3'^2)^n - (zyk'^n)^2 - 2zy(1 - y)k^m k_3'^m - (1 - y)^2 k_3'^{2n}\}^{-\epsilon_n/n}. \quad (\text{B.11})$$

A integral em  $y$  é singular para  $y = 1$  quando  $\epsilon_n = 0$ . Isto pode ser remediado adicionando e subtraindo o integrando da parte em  $z$  para  $y = 1$  [37]. Integrando então sobre  $y$  e realizando as devidas expansões, obtemos

$$I_4 \cong \frac{1}{2\epsilon_n^2} \left\{ 1 - \frac{\epsilon_n}{2n} [1 + 2L(k')] \right\}, \quad (\text{B.12})$$

onde o fator  $S_{m_n}$  é absorvido por uma redefinição da constante de acoplamento e  $L(k')$  é dado por (4.51).

Para a integral  $I_5$  temos a seguinte expressão

$$I_5 = \int \frac{d^{m_n} k_1 d^{m_n} k_2 d^{m_n} k_3}{[(k_1 + k_2 + k')^2]^n [(k_1 + k_3 + k')^2]^n (k_1^2)^n (k_2^2)^n (k_3^2)^n}, \quad (\text{B.13})$$

que pode ser reescrita como

$$I_5 = \int \frac{d^{m_n} k_1}{(k_1^2)^n} [I_2(k_1 + k')]^2. \quad (\text{B.14})$$

Seguindo os mesmos passos utilizados para a resolução de  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$ , chegamos facilmente a

$$I_5 \cong -\frac{(k'^2)^n}{6n\epsilon_n^2} \left\{ 1 + \epsilon_n \left[ \frac{1}{2n} - \frac{3}{n} L_3(k') \right] \right\}, \quad (\text{B.15})$$

onde um fator de  $S_{m_n}$  também é absorvido por uma redefinição da constante de acoplamento e  $L_3(k')$  é definido por (4.55).

## B.2 CASO EXATO

Como a integral  $I_2$  já foi solucionada no capítulo 4, passaremos direto para a integral  $I_3$ , que, como visto no caso aproximado, pode ser escrita como

$$I_3 = \int \frac{d^{m_n} k_1}{(k_1^2)^n} I_2(k_1 + k'). \quad (\text{B.16})$$

Utilizando na integral acima a expressão (4.63), tendo resolvido a integral em  $x$  da mesma através de sua identificação com a forma integral da função especial beta, ficamos com

$$I_3 = \frac{1}{\epsilon_n} [1 + D(n)\epsilon_n] \int \frac{d^{m_n} k_1}{[(k_1 + k')^2]^{\epsilon_n/2} (k_1^2)^n}, \quad (\text{B.17})$$

onde  $D(n)$  é dado por (4.71). Aplicando agora os parâmetros de Feynman; integrando sobre  $k_1$  e fazendo  $m_n = 4n - \epsilon_n$ , encontramos

$$I_3 = \frac{S_{m_n}}{2\epsilon_n} [1 + D(n)\epsilon_n] \frac{\Gamma(2n - \epsilon_n/2)\Gamma(-n + \epsilon_n)}{\Gamma(n)\Gamma(\epsilon_n/2)} \int_0^1 dy y^{\epsilon_n/2-1} (1-y)^{n-1} [y(1-y)k'^2]^{n-\epsilon_n}. \quad (\text{B.18})$$

Expandindo a integral em  $y$ , assim como as funções gama, até  $\mathcal{O}(\epsilon_n)$  e absorvendo o fator  $S_{m_n}$  através de uma redefinição da constante de acoplamento, obtemos

$$I_3 = k'^{2n} (-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{4\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n} \left\{ 1 + \epsilon_n \left[ B_n - \frac{L_{3n}(k')}{A_n} \right] \right\}, \quad (\text{B.19})$$

onde  $A_n$ ,  $B_n$  e  $L_{3n}(k')$  estão definidos pelas expressões (4.69), (4.70) e (4.72), respectivamente.

A integral  $I_4$ , que está explicitamente escrita em (4.37), pode ser expressa em termos da integral  $I_2$ , como pode ser observado em (B.9). Assim, obtemos

$$I_4 = \frac{1}{\epsilon_n} [1 + D(n)\epsilon_n] \int \frac{d^{m_n} k_1}{(k_1^2)^n [(k' - k_1)^2]^n [(k_1 + k_3')^2]^{\epsilon_n/2}}. \quad (\text{B.20})$$

Aplicando agora dois parâmetros de Feynman sucessivos; resolvendo a integral em  $k_1$ , pela utilização de (4.40) e fazendo ainda  $m_n = 4n - \epsilon_n$ , chegamos a

$$I_4 = \frac{S_{m_n}}{2} f_n(\epsilon_n) \frac{\Gamma(2n - \epsilon_n/2)\Gamma(\epsilon_n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)\Gamma(\epsilon_n/2)} \int_0^1 dy y^{2n-1} (1-y)^{\epsilon_n/2-1} \times \\ \times \int_0^1 dz z^{n-1} (1-z)^{n-1} \{zyk'^2 + (1-y)k_3'^2 - (zyk')^2 - 2zy(1-y)k'k_3' - (1-y)^2k_3'^2\}^{-\epsilon_n}. \quad (\text{B.21})$$

A integral em  $z$  pode ser reescrita por

$$\int_0^1 dz z^{n-1} (1-z)^{n-1} \left[ \{z(1-z)k'^2\}^{-\epsilon_n} - \epsilon_n \ln \left( \frac{\{\dots\}}{z(1-z)k'^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon_n^2) \right], \quad (\text{B.22})$$

onde

$$\{\dots\} \equiv \{zyk'^2 + (1-y)k_3'^2 - (zyk')^2 - 2zy(1-y)k'k_3' - (1-y)^2k_3'^2\}. \quad (\text{B.23})$$

Observe que somamos e subtraímos o valor do argumento da integral em  $z$  para  $y = 1$ , o que elimina o problema da singularidade da integral em  $y$  para  $y = 1$ , quando fazemos  $\epsilon_n = 0$ , assim como retira a dependência em  $k_3'$  da integral  $I_4$ . Com isso, redefinindo a constante de acoplamento para absorver o fator  $S_{m_n}$ , obtemos

$$I_4 = \frac{1}{2\epsilon_n^2} \left\{ 1 + \left[ D(n) - \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n)} L_n(k') \right] \epsilon_n - \epsilon_n \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{p} \right\}, \quad (\text{B.24})$$

onde  $L_n(k')$  está definido em (4.65).

Por último, temos a integral  $I_5$  dada por (B.13), que pode ser reescrita em termos de  $I_2$ , como feito em (B.14), o que nos leva a

$$I_5 = \frac{1}{\epsilon_n^2} [1 + 2D(n)\epsilon_n] \int \frac{d^{m_n} k_1}{(k_1^2)^n [(k_1 + k')^2]^{\epsilon_n}}. \quad (\text{B.25})$$

Utilizando então os parâmetros de Feynman, a expressão (4.40), para resolver a integral em  $k_1$ ; realizando as devidas expansões em termos de  $\epsilon_n$  e absorvendo o fator  $S_{m_n}$  através de uma redefinição da constante de acoplamento, finalmente obtemos

$$I_5 = k'^{2n} (-1)^n \frac{\Gamma(2n)\Gamma(2n)}{3\Gamma(3n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{1}{\epsilon_n^2} \left\{ 1 + \epsilon_n \left[ C_n - \frac{3L_{3n}(k')}{2A_n} \right] \right\}, \quad (\text{B.26})$$

onde  $C_n$  está definido em (4.75).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] B. Berche, M. Henkel, and R. Kenna, *Rev. Bras. de Ens. de Fís.* **31**, 2602 (2009).
- [2] K. Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons, 2nd edition, 1928.
- [3] C. Garrod, *Statistical Mechanics and Thermodynamics*, Oxford University Press, 1995.
- [4] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, Butterworth-Heinemann, 2nd edition, 1996.
- [5] S. L. A. de Queiroz, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **22**, 7 (2000).
- [6] E. Ising, *Zeit. Phys.* **31**, 253 (1925).
- [7] L. Onsager, *Phys. Rev.* **65**, 117 (1944).
- [8] R. M. Hornreich, M. Luban, and S. Shtrikman, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1678 (1975).
- [9] S. B. Rananavare, V. G. K. M. Pisipati, and E. W. Wong, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3558 (1994).
- [10] B. Zalar et al., *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4458 (1998).
- [11] M. Škarabot, R. Blinc, I. Mus̃ević̃, A. Rastegar, and T. Rasing, *Phys. Rev. E* **61**, 3961 (2000).
- [12] S. M. Hayden et al., *Phys. Rev. Lett.* **66**, 821 (1991).
- [13] B. Keimer et al., *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1930 (1991).
- [14] S. Sachdev and J. Ye, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2411 (1992).
- [15] Y. M. VysochanskiĀ and V. Y. Slivka, *Soviet Physics Uspekhi* **35**, 123 (1992).
- [16] G. H. Fredrickson and S. T. Milner, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 835 (1991).
- [17] F. S. Bates et al., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4429 (1995).
- [18] R. R. Netz and M. Schick, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 302 (1996).
- [19] F. S. Bates et al., *Phys. Rev. Lett.* **79**, 849 (1997).
- [20] C. C. Becerra, Y. Shapira, N. F. Oliveira, and T. S. Chang, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1692 (1980).

- [21] Y. Shapira, C. C. Becerra, N. F. Oliveira, and T. S. Chang, *Phys. Rev. B* **24**, 2780 (1981).
- [22] C. S. O. Yokoi, M. D. Coutinho-Filho, and S. R. Salinas, *Phys. Rev. B* **24**, 5430 (1981).
- [23] C. S. O. Yokoi, M. D. Coutinho-Filho, and S. R. Salinas, *Phys. Rev. B* **29**, 6341 (1984).
- [24] V. Bindilatti, C. C. Becerra, and N. F. Oliveira, *Phys. Rev. B* **40**, 9412 (1989).
- [25] W. Selke, *Physics Reports* **170**, 213 (1988).
- [26] W. Selke, Spatially modulated structures in systems with competing interactions, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz, volume 15, Academic Press, 1992.
- [27] W. Selke and L. N. Shchur, *Phys. Rev. E* **80**, 042104 (2009).
- [28] M. M. Leite, *Phys. Rev. B* **72**, 224432 (2005).
- [29] C. Bervillier, *Phys. Rev. B* **14**, 4964 (1976).
- [30] V. Privman, P. C. Hohenberg, and A. Aharony, Universal critical-point amplitude relations, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz, volume 14, Academic Press, 1991.
- [31] M. M. Leite, *Phys. Rev. B* **61**, 14691 (2000).
- [32] M. M. Leite, *Phys. Rev. B* **68**, 052408 (2003).
- [33] C. F. F. Farias, Amplitudes de susceptibilidade para o ponto de lifshitz  $m$ -axial, Master's thesis, Universidade Federal de Pernambuco, 2009.
- [34] M. M. Leite, *Phys. Rev. B* **67**, 104415 (2003).
- [35] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, Oxford University Press, 1996.
- [36] L. H. Ryder, *Quantum field theory*, Cambridge University Press, 1996.
- [37] D. J. Amit and V. Martin-Mayor, *Field Theory, The Renormalization Group, and Critical Phenomena*, World Scientific Publishing Company, third edition, 2005.
- [38] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Diagrammar*, CERN, Geneva, 1973.
- [39] C. Mergulhão and C. E. I. Carneiro, *Phys. Rev. B* **58**, 6047 (1998).
- [40] C. Mergulhão and C. E. I. Carneiro, *Phys. Rev. B* **59**, 13954 (1999).



- [41] C. Mergulhão, *Estudo do Comportamento Crítico de Modelos com Ponto de Lifshitz*, PhD thesis, USP-Instituto de Física, 1997.
- [42] P. R. S. de Carvalho, *Método de Callan-Symanzik-Lifshitz para Sistemas Competitivos*, PhD thesis, Universidade Federal de Pernambuco, 2008.
- [43] M. V. S. Santos and M. M. Leite, (em preparação).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)