IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT–D.001/2010

Dinâmica de Sistemas Bipartites de Spins no Espaço de Fase Quântico Discreto

Tiago Debarba

Orientador

Prof. Dr. Diogenes Galetti

Fevereiro de 2010

Agradecimentos

- primeiramente, agradeço meu orientador pela paciência durante meu aprendizado e durante a escrita da dissertação;
- a meus amigos, minha namorada, minha família e ao Rock'n Roll pelo apoio nos momentos difíceis;
- por fim, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - **Capes** pelo apoio financeiro.

Resumo

Quando temos sistemas quânticos sem análogo clássico a descrição de Weyl-Wigner, para o espaço de fase quântico, não pode ser utilizada, pois a mesma não representa graus de liberdade associados a grandezas discretas. Um exemplo desses sistemas são os estados emaranhados bipartites de spin 1/2. Para tal, se faz necessária a descrição de um espaço de fase quântico discreto e de dimensão finita. Nessa descrição é possível se obter a caracterização do emaranhamento, bem como quantificar o grau dessas correlações entre os sub sistemas; além do que, há a possibilidade de calcular a evolução temporal nessa descrição, tanto para o sistema como um todo quanto para o emaranhamento.

Palavras Chaves: Mecânica Quântica; Espaço de Fase; Discreto; Emaranhamento.

Áreas do conhecimento: 10501002; 10501029
PACS: 03.65.-w, 03.65.Aa, 03.65.Ud, 03.67.Bg

Abstract

For quantum systems without classical analog the Weyl-Wigner description associated to quantum phase space can not be used, since it does not represent degrees of freedom associated with discrete quantities. An example of these systems are spin 1/2 bipartite entangled states. For them, it is needed a discrete quantum phase space description which have finite dimension. In this description, it is possible to obtain entanglement characterization, and to quantify the correlation degree between the subsystems; there is also the possibility of calculating the time evolution, in this description, both for the system as a whole as well as for the entanglement.

Sumário

Introdução

Em meados da década de 30 começou a ser discutida uma forma alternativa de representar a mecânica quântica, onde os operadores associados aos observáveis físicos seriam representados por funções do par das variáveis dinâmicas clássicas, $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$, momento e posição respectivamente, responsáveis então por rotular funções com características daquelas de um espaço de fase que, no caso, seria quântico. Essa descrição de graus de liberdade com espaço de estados contínuo recebeu o nome de formalismo de *Weyl-Wigner* [1; 2; 3]. Para obtermos a representação dos operadores nesse formalismo é necessária uma base no espaço de operadores, que nos permita mapear os observáveis nesse espaço de fase quântico, esta recebeu o nome de base de Weyl-Wigner. Como se trata de uma base formada por um conjunto de operadores unitários, ao obtermos a expressão mapeada do operador não introduzimos conteúdo físico à descrição do sistema, apenas o descrevemos de outra forma. Porém, a base de Weyl-Wigner não é única, pois existem outras bases capazes de realizar essa tarefa [4; 5; 6].

Como dito acima, existe um procedimento para mapear os operadores associados aos observáveis no espaço de fase quântico, sendo que a expressão mapeada recebe o nome de *transformada de Weyl* onde agora todas as características do operador são transcritas para a função das variáveis dinâmicas $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$. Porém, além dos operadores que representam os observáveis, devemos ser capazes de descrever os possíveis estados do sistema nesse formalismo. Para isso, devemos descrever o estado pelo *operador densidade de estados*, o que nos traz a vantagem de podermos descrever, além de sistemas representados por estados puros, também sistemas cujo estado não pode assim ser escrito (estados misturados*). A expressão mapeada do operador densidade de estados no espaço de fase é obtida, por se tratar de um operador, da mesma forma que os demais observáveis, porém ela recebe o nome particular de *função de Wigner* ou *quasi-distribuição de Wigner*.

Nessa abordagem, a evolução temporal dos estados dos sistemas pode ser obtida

*Porém, os sistemas tratados nessa dissertação serão apenas aqueles que podem ser representados por estados puros, a abordagem pode ser expandida para aquele outro caso haja interesse.

via equação de von Neumann-Liouville, de onde, uma vez resolvida, obtemos a evolução temporal do operador densidade de estados. Essa equação pode ter sua versão mapeada de Weyl obtida da mesma forma que os demais operadores, onde agora, ao invés de calcularmos relações de comutação entre operadores, devemos calcular os *parênteses de Moyal* dos mapeados de Weyl desses operadores. Em ordem mais baixa de potências de $\hbar$ da série correspondente, esses parênteses se reduzem aos parênteses de Poisson, do que obtemos uma clara indicação da utilidade do formalismo de Weyl-Wigner para a obtenção de aproximações semiclássicas e do limite clássico também.

Porém, o formalismo de Weyl-Wigner possui a limitação de ser aplicável apenas na descrição de sistemas quânticos com análogo clássico. Para sistemas quânticos sem análogo clássico, associados a graus de liberdade onde o espaço de estados possui dimensão finita, sistemas de spin $1/2$ por exemplo, se faz necessário a descrição de um espaço de fase quântico discreto com dimensão finita. Essa descrição foi fundamentada em alguns trabalhos de Schwinger [7], onde ele propôs a descrição desses sistemas por um conjunto de operadores unitários, geradores de uma base no espaço de operadores, formada pela combinação daqueles operadores, que são complementares entre si via transformada de Fourier discreta.

Com base nessas ideias de Schwinger, alguns trabalhos com o objetivo de se obter uma descrição análoga à de Weyl-Wigner, agora para graus de liberdade associados a grandezas discretas, começaram a surgir [8; 9; 10], onde é proposta uma descrição análoga ao caso contínuo, porém para sistemas discretos e com dimensão finita. Outros trabalhos contemporâneos são os artigos de Wooters [11] e Cohendet [12], onde não se fala em espaço de fase propriamente dito, mas usam-se procedimentos específicos para a obtenção de funções de Wigner discretas. Uma outra descrição nessa área, seguindo aquela mesma linha, porém mais recente, é a proposta de Klimov [13], na qual ele introduz uma base diferente para o espaço de operadores que faz uso de transformadas de Fourier fracionárias. Até a presente data aquele formalismo foi testado em vários dos seus aspectos fundamentais e as ideias centrais que dão sustentação a essa descrição já estão solidificadas, tendo sido feitas aplicações em dinâmica no espaço de fase discreto para sistemas simples [14; 15; 16], além de aplicações em óptica quântica [17; 18] e física molecular [19], por exemplo.

Por outro lado, no que diz respeito a características essencialmente quânticas de sistemas físicos, em particular o emaranhamento, as primeiras ideias surgiram também em meados da década de 30 com o famoso trabalho proposto por Einstein *et al* [20], denominado *paradoxo EPR*, onde os autores perceberam que havia certos estados de sistemas compostos que não podiam ser descritos como produto dos estados individuais dos subsistemas. No mesmo ano, Schrödinger publicou seu experimento mental [21], conhecido posteriormente como a experiência do *Gato de Schrödinger*, onde ele tentou fazer uma conexão com a teoria clássica usando esses estados específicos citados por Einstein. Fazendo isso ele obtém a situação não convencional em que o gato está em uma superposição de vivo e morto. Sendo assim, Schrödinger concluiu que esses estados (que hoje conhecemos por estados emaranhados) impõem não uma, mas sim a característica fundamental que diferencia a mecânica quântica da clássica. Então, foi apenas na década de 60 que Bell, usando um critério de desigualdade matemática, pôs essas ideias em teste e verificou que a mecânica quântica não admite, no caso desses estados, analogias com o mundo clássico [22]. Essas discussões continuam vivas até hoje, como por exemplo a questão da não localidade, também citada por Einstein em seu trabalho, que Bell confirma ser uma característica dos estados emaranhados.

Já no fim da década de 80 e início da década de 90 começou-se a questionar uma possível utilidade prática de alguns fenômenos puramente quânticos, emaranhamento por exemplo. Um dos percursores dessas ideias foi R. Feynman [23], que, por se interessar pelas ideias de melhorias no desempenho dos algoritmos da ciência da computação, certa vez questionou, "Como o universo em que vivemos é quântico, não deveríamos usar sistemas quânticos para simular computacionalmente os fenômenos desse universo?"[23] A partir daí começou-se a estudar e propor sistemas que simulavam uma forma puramente quântica de se fazer computação; alguns exemplos são os circuitos quânticos, simulação quântica e os algoritmos quânticos para resolver problemas clássicos, como por exemplo o algoritmo de Deutsh [24; 25]. Porém, foi apenas com o algoritmo de fatoração de Shor [26] que de fato se percebeu que se tinha em mãos uma forma mais eficiente de se processar informação. Shor mostrou que se estados quânticos fossem usados para descrever o código binário, chamados *bits quânticos*, havia uma forma de se criar um algoritmo quântico de fatoração cujo o custo de processamento de informação crescia polinomialmente com o aumento no número de casas decimais do número a ser fatorado [26]. Isto era algo até então não obtido, mesmo pelo melhor algoritmo de fatoração já criado pela ciência da computação [27]. Então, essas ideias deram origem às áreas que hoje se conhece por computação quântica e informação quântica, onde os estados emaranhados são responsáveis por grande parte do conteúdo das investigações dessas áreas de pesquisa [28].

Ainda hoje, tanto a caracterização quanto a quantificação do emaranhamento, em alguns casos, são questões em aberto. Existem diversas formas de se caracterizar e medir o grau de emaranhamento dos sistemas compostos (sistemas com mais de um subsistema, estados bipartites de spin por exemplo), porém cada forma de medida é válida para sistemas específicos, onde características bem definidas desses sistemas são usadas para a formulação da medida. Algumas dessas formas de caracterizar e medir emaranhamento podem ser encontradas nas referências [29; 30]. Recentemente começou-se a discutir uma forma de caracterização do emaranhamento não tratadas naquelas referências, sendo que nesses casos, em sistemas de spins, são gerados estados emaranhados ao se impor compressão a estados coerentes de spins 1/2, como discutido por M. Kitagawa *et al* e Ueda no início da década de 90 [31]; porém o autor, neste trabalho, não fala em emaranhamento em específico, ele trata de correlações quânticas de uma forma geral. Tal proposta foi logo testada experimentalmente [32]. Então, recentemente G. Tóth *et al* [33] fez um apanhado dessas ideias e relacionou, de fato, medida de emaranhamento com grau de compressão de estados coerentes de spin, que se confirmou muito útil na caracterização de emaranhamento para sistemas com muitos spins.

O objetivo dessa dissertação será descrever a dinâmica de sistemas bipartites de spin 1/2 no espaço de fase quântico discreto, usando a representação proposta nas referências [8; 9; 10]. Sendo assim, apresentaremos no primeiro capítulo as propostas de Schwinger para a descrição de sistemas onde o espaço de Hilbert de estados possui dimensão finita, cuja explanação se inicia com a escolha de um conjunto de estados que formam uma base nesse espaço de Hilbert e um operador de deslocamento cíclico que atua nesses estados. Partindo disso, obtemos um segundo conjunto de estados, autoestados desse operador cíclico, e uma segunda operação de deslocamento cíclico, que agora atua nesse segundo conjunto de estados. A partir das características de complementaridade desses operadores de deslocamento cíclico, obtemos duas bases no espaço de operadores, compostas pelo produto das potências desses operadores, e mostramos como podemos, com elas, representar qualquer operador de interesse físico que atue no espaço dos estados de partida.

Sendo assim, dessas bases, ainda no primeiro capítulo, derivamos outras duas, apresentadas em [9], sendo que uma delas será usada na sequência da dissertação para descrever sistemas de spin 1/2. Em seguida apresentamos as noções gerais de espaço de fase discreto: obtenção dos mapeados de Weyl de forma geral e, como consequência, as funções de Wigner e a demonstração de como obter as expressões relacionadas com a evolução temporal nessa descrição, partindo da equação de von Neumann-Liouville. Como usamos a representação de Schrödinger, trataremos da evolução temporal da função de Wigner. Portanto, tendo a equação de von Neumann-Liouville para a dinâmica da função de Wigner obtemos de imediato a solução formal dessa equação, que mostraremos ser possível escrever de duas formas diferentes: na forma de uma série das expressões mapeadas dos comutadores do operador de estado com o hamiltoniano, responsável pela dinâmica, e outra na forma de uma função analítica, que é a expressão fechada da soma da série anteriormente mencionada. Tendo então calculado essas expressões, de imediato as particularizamos para o caso de spin 1/2, onde escolhemos a base no espaço de operadores que mais convém à descrição desses sistemas, identificamos a base de estados de spin 1/2, autoestados do operador de spin na direção z, e então, tendo a base de estados, relacionamos as operações realizadas pelas matrizes de Pauli nesses estados com os operadores de Schwinger. Assim, de imediato, somos capazes de obter a expressão mapeada de qualquer operador que atue no espaço de estados de spin 1/2, bem como as funções de Wigner discretas desses estados. Então, finalmente demonstramos como descrever sistemas compostos, usando as ideias de fatoração do espaço de operadores propostas por Schwinger; isso será feito pois o tratamento que daremos aos sistemas bipartites será realizado no espaço produto.

Após apresentarmos a formulação do espaço de fase quântico discreto, no segundo capítulo veremos como se caracteriza o emaranhamento em sistemas bipartites de spin 1/2, o que define um estado produto e um estado emaranhado a partir das amplitudes de probabilidade dos estados; além de uma forma de medir o grau de emaranhamento do sistema partindo do operador densidade de estados do mesmo. Tendo as formas de caracterizar e medir o emaranhamento, via operador densidade, apresentamos uma medida de emaranhamento obtida extraindo a informação relevante diretamente do espaço de fase quântico discreto, e mostramos que existem duas formas diferentes de se obter essa medida, ambas partindo da função de Wigner do estado do sistema proposto.

Tendo então a descrição completa através do formalismo de espaço de fase, no terceiro capítulo fazemos duas aplicações a fim de obter a evolução temporal de sistemas bipartites de spin. Apresentamos primeiramente as expressões do mapeado da equação de von Neumann-Liouville para esses sistemas, além das duas maneiras de escrever a solução dessa equação, como feito na discussão da dinâmica no espaço de fase discreto para o caso geral, porém agora particularizando para o caso de interesse.

Na primeira aplicação calculamos a evolução temporal de um sistema bipartite em um estado arbitrário sob a ação de uma operação do tipo $cNOT$ (controlled-NOT), que é uma das portas lógicas universais da computação quântica [27], ou seja, com essa operação e operações unitárias locais somos capazes de realizar qualquer operação necessária para se fazer um computador quântico. O nome $cNOT$ vem do fato dela ser uma operação controlada, ou seja, ela só age sobre o estado de uma das partículas do sistema bipartite, tendo sua ação controlada pelo estado da outra partícula, e isso depende da convenção a ser usada; aqui usaremos a primeira partícula como controle (a definição de primeira e segunda é arbitrária e ficará clara quando tratarmos dela) e sobre a segunda agirá a operação NOT (soma módulo 2). A aplicação consiste em obter a função de Wigner do estado arbitrário de spins, além da expressão mapeada do hamiltoniano que representa a operação $cNOT$. Com essas expressões usaremos a solução da equação de von Neumann-Liouville, obtida anteriormente, para obter a evolução temporal da função de Wigner sob a ação dessa operação. Então, a partir da função de Wigner obteremos a dinâmica do emaranhamento, verificando em que casos há variação no grau de emaranhamento do estado, lembrando que por se propor um estado arbitrário como estado inicial teremos obtido a dinâmica de emaranhamento no caso mais geral.

A outra aplicação, além do estudo dos estados emaranhados, engloba a ideia de estados comprimidos de spins como proposto por Kitagawa *et al* [31]. Usaremos um estado coerente do $SU(2)$ como condição inicial, além de uma operação que impõem compressão a esse estado, a qual é a mesma proposta por Kitagawa *et al.* Novamente obtemos as expressões mapeadas no espaço de fase discreto do hamiltoniano dessa operação e da função de Wigner do estado de partida, para então obtermos a evolução temporal desse sistema no espaço de fase. Isso será feito obtendo explicitamente uma função responsável pela evolução temporal do sistema. Como a operação impõe compressão ao estado coerente, pode-se determinar em que instantes de tempo o estado do sistema se encontra na configuração de um estado coerente ou comprimido. Usando esses resultados para comparar com a dinâmica do emaranhamento, quando então obtemos o grau de emaranhamento em cada instante de tempo, obtemos então uma comparação direta entre o grau de compressão e de emaranhamento do sistema, em cada passo de tempo.

Por completeza, alguns cálculos, que não poderiam ficar de fora da dissertação por conter detalhes técnicos do formalismo, ao invés de serem apresentados no texto, foram colocados em três Apêndices separados.

Capítulo 1

Espaço de fase discreto

Nesse primeiro capítulo apresentaremos a descrição de Schwinger para sistemas físicos com espaço de Hilbert de dimensão finita [7], fazendo uma conexão com as ideias de espaço de fase quântico discreto com dimensão finita [8]. Usando esse contexto como ponto de partida, trataremos de uma abordagem para sistemas de spin 1/2 no espaço de fase quântico discreto.

1.1 As bases de Schwinger

Como já dito anteriormente os sistemas tratados nessa dissertação serão todos caracterizados pelo fato de seus espaços de Hilbert possuírem um número finito de estados ortogonais. Podemos portanto considerar genericamente um conjunto de estados ortonormalizados que forma uma base no espaço de Hilbert de dimensão N, $\{\langle \mathrm{u}_k|\}$, $k = 0, ..., N-1$, onde u representa a variável associada a um observável e k rotula as N possibilidades de valores que ele pode assumir, e sobre esse conjunto definimos uma operação que mapeia um estado em outro de forma cíclica [7]

$$\langle u_k|V^l = \langle u_{k+l}|, \tag{1.1}$$

onde

$$k + l = (k + l)modN$$

de forma que

$$\langle u_k|V^N = \langle u_k|,$$

ou seja

$$V^N = 1.$$

Desta definição podemos perceber que o conjunto dos V^l, $l = 0, ..., N-1$, representa um conjunto de operadores unitários linearmente independentes, que, do ponto de vista algébrico, forma um grupo cíclico. Tendo o operador V, podemos associar a ele um conjunto de N autoestados $\{\langle v_l|\}$, $l = 0, ..., N-1$ e, por consequência, temos um conjunto de N autovalores complexos $v^l = \exp\left(\frac{-2\pi il}{N}\right)$, raízes da unidade. Assim, a cada autoestado de V associa-se um autovalor diferente. Adicionalmente, este é também um conjunto completo e ortonormal de vetores. Tendo um dado autoestado $\{\langle v_l|\}$ de V e seu adjunto, seguindo Schwinger [7] podemos escrever o projetor

$$|v_l\rangle\langle v_l| = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{-2\pi iln}{N}\right)V^n,$$

e com essa expressão podemos obter uma relação entre as bases para os espaços vetoriais $\{\langle u_k|\}$ e $\{\langle v_l|\}$

$$\langle u_N|v_l\rangle\langle v_l| = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{-2\pi iln}{N}\right)\langle u_n|. \tag{1.2}$$

Desta expressão podemos obter

$$|\langle u_N|v_l\rangle|^2 = \frac{1}{N}$$

e assim, a menos de uma escolha de fase, temos

$$\langle u_N|v_l\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{1.3}$$

Substituindo (1.3) à esquerda de (1.2) teremos o autoestado $\langle v_l|$ escrito na base dos estados $\langle u_n|$

$$\langle v_l| = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{-2\pi iln}{N}\right)\langle u_n|, \tag{1.4}$$

ou seja,

$$\langle v_l|u_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{-2\pi iln}{N}\right) \tag{1.5}$$

e

$$\langle u_n|v_l\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{2\pi iln}{N}\right), \tag{1.6}$$

que é a conexão entre os duas bases do espaços de Hilbert; essa forma de conexão é conhecida como transformada de Fourier discreta.

Podemos agora definir um operador cíclico U tal que sua ação no conjunto dos autoestados de V seja

$$\langle v_l|U^k = \langle v_{(l-k)modN}|$$

onde

$$U^N = 1.$$

O que ocorre, como mostrado por Schwinger [7], é que os autoestados do operador U são os mesmos estados $\langle u_k|$ de partida, com autovalores complexos - também raízes da unidade

$$u_k = \exp\left(\frac{2\pi ik}{N}\right). \tag{1.7}$$

Percebemos, desta forma, que tendo estes dois conjuntos de estados $\langle u_k|$ e $\langle v_l|$, onde cada um forma uma base para o espaço de Hilbert de dimensão N, definimos dois conjuntos de operadores V^l e U^k que agem na forma de deslocamentos cíclicos dentro dos conjuntos de estados

$$\langle v_l|U^k = \langle v_{(l-k)modN}| \tag{1.8}$$

$$\langle u_k|V^l = \langle u_{(k+l)modN}|, \tag{1.9}$$

e o conjunto dos autoestados desses operadores são os próprios estados $\langle v_l|$ e $\langle u_k|$

$$\langle v_l|V = \exp\left(\frac{-2\pi il}{N}\right)\langle v_l| \tag{1.10}$$

$$\langle u_k|U = \exp\left(\frac{2\pi ik}{N}\right)\langle u_k|. \tag{1.11}$$

Em suma, os conjuntos dos operadores U e V satisfazem a propriedade cíclica, $U^N = 1$ e $V^N = 1$ e também a relação de comutação

$$V^lU^k = \exp\left(\frac{2\pi ikl}{N}\right)U^kV^l, \tag{1.12}$$

também conhecida como relação de comutação de Weyl-Schwinger [1; 7].

Os operadores U e V exibem um grau máximo de incompatibilidade, no sentido de que juntos formam um par de operadores complementares. Sendo assim, juntos U e V formam um conjunto completo de geradores de uma base ortogonal do espaço dos operadores que atuam no espaço de Hilbert de estados de dimensão finita de partida, que é formada por um conjunto de N^2 operadores [7],

$$\hat{S}_1(m,n) = \frac{1}{\sqrt{N}}U^mV^n, \tag{1.13}$$

com a qual é possível a descrição de qualquer operador associado a um sistema físico descrito por um espaço de estados de dimensão N. Como esse conjunto é uma base completa e ortogonal* no espaço dos operadores†, podemos construir ou representar

---

*Sendo o produto escalar entre dois operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$, pertencentes a um dado espaço de operadores, é obtido via $Tr[\hat{A}\hat{B}]$.

†A demostração detalhada é feita por Schwinger; demonstraremos essas propriedades quando se fizer necessário.

todo e qualquer operador que represente ou não um observável que age no espaço vetorial de partida. E essa representação é feita pela decomposição [34]

$$\hat{O} = \frac{1}{N} \sum_{m,n=0}^{N-1} O(m,n) \hat{S}_1(m,n), \tag{1.14}$$

onde $O(m,n)$ são os coeficientes da decomposição na base dos operadores, calculados por

$$O(m,n) = Tr[\hat{S}_1^\dagger(m,n)\hat{O}]. \tag{1.15}$$

Um bom exemplo, útil na sequência desta apresentação, são os operadores que representam as transições internas dentro dos conjuntos de estados $\langle u_k|$ e $\langle v_l|$ respectivamente, a saber:

$$|u_k\rangle\langle u_{k'}| = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} U^m V^{k'-k} \exp\left(\frac{-2\pi i m k}{N}\right) \tag{1.16}$$

e

$$|v_l\rangle\langle v_{l'}| = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^{l-l'} V^n \exp\left(\frac{-2\pi i n l'}{N}\right). \tag{1.17}$$

Uma outra base no espaço de operadores também proposta por Schwinger é conhecida como base simetrizada [7]

$$\hat{S}_2(m,n) = \frac{1}{\sqrt{N}} U^m V^n \exp\left(\frac{i\pi mn}{N}\right), \tag{1.18}$$

nome que vem do fato de que todas as propriedades da base $\hat{S}_2(m,n)$ são preservadas quando substituímos $U \longrightarrow V$ e $V \longrightarrow U^{-1}$ juntamente com $m \rightarrow n$ e $n \rightarrow -m$.

Como estamos tratando de sistemas com espaço de Hilbert de dimensão finita, é interessante observar uma propriedade que diz respeito a esse número finito de estados do sistema. Schwinger propõe que, sempre que a dimensão do espaço for um número composto, podemos fatorá-la em primos [7]. Supondo um espaço de Hilbert de dimensão N, podemos escrever

$$N = p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_t^{m_t}, \tag{1.19}$$

onde os $p_j's$ são primos distintos, nos permitindo escrever a base do espaço de operadores como um produto de sub-bases com dimensão $N_j = p_j^{m_j}$ [7; 35]

$$\hat{S}_i(m,n) = \hat{S}_i^{(1)}(m_1,n_1) \otimes \hat{S}_i^{(2)}(m_2,n_2) \otimes ... \otimes \hat{S}_i^{(t)}(m_t,n_t), \tag{1.20}$$

valendo a relação de comutação

$$[\hat{S}_i^{(k)}(m_k,n_k), \hat{S}_i^{(l)}(m_l,n_l)] = 0, \tag{1.21}$$

para $k \neq l$, onde $i = 1, 2$, vale para ambas as bases, e $m_j, n_j = 0, 1, ..., N_j$. O fato dos operadores comutarem, quando pertencem a sub-bases diferentes (dimensão com diferentes coprimos), nos permite relacioná-los a graus de liberdades diferentes. Schwinger propõe que essa fatoração, em sub-bases, também é possível no caso em que a dimensão N do espaço de estados é um número não primo com fatores iguais, por exemplo, se $N = 12$ este fatora em $N = 2^2 3$, ou seja, a base inicial pode ser fatorada em duas sub-bases de dimensão 2 e uma de dimensão 3. Essa característica será aproveitada por nós quando tratarmos sistemas compostos de spin 1/2.

1.2 Espaço de fase discreto

Nessa seção apresentaremos como as ideias de Schwinger nos possibilitam desenvolver a representação da mecânica quântica no espaço de fase discreto. Para isso, por conveniência operacional, escrevemos uma outra base ortonormal para o espaço de operadores com propriedades convenientes, que é [9]

$$\hat{G}(m, n) = \frac{1}{N} \sum_{j,l=0}^{N-1} \hat{S}_2(j, l) \exp\{i\pi\phi(m, n; N)\} \exp\left\{\frac{-2\pi i}{N}(mj + nl)\right\}, \tag{1.22}$$

onde $\exp\{\frac{-2\pi i}{N}(mj + nl)\}$ está associado com uma transformada de Fourier discreta em m e n,

$$\phi(m, n; N) = N I_m^N I_n^N - m I_n^N - n I_m^N \tag{1.23}$$

e I_x^N significa a parte inteira da divisão de x por N, que é a dimensão do espaço de estados. A fase $\exp\{i\pi\phi(m, n; N)\}$, colocada à mão na construção da base, possui um papel fundamental pois ela se encarrega da extração de *moduloN* nas operações que envolvem a equação (1.15) [9].

Com a base (1.22) também podemos expandir qualquer operador de nosso interesse e, assim, tendo um operador arbitrário $\hat{O}$ podemos da mesma forma escrever

$$\hat{O} = \frac{1}{N} \sum_{m,n=0}^{N-1} O(m, n) \hat{G}(m, n), \tag{1.24}$$

e com ela é possível agora estabelecer um vínculo com o conceito de espaço de fase quântico discreto [8]. Nessa descrição, os coeficientes $O(m, n)$ representam o operador $\hat{O}$ em um espaço rotulado por duas variáveis discretas complementares (1.5 e 1.6), vinculadas por uma transformada de Fourier discreta, ou seja, as variáveis m e n formam um par complementar via transformada de Fourier discreta, portanto juntas representam o análogo a um espaço de fase, porém discreto. Para encontrarmos

$O(m,n)$, que é a representação do operador $\hat{O}$ no espaço de fase quântico discreto, devemos então calcular

$$O(m,n) = Tr[\hat{G}^{\dagger}(m,n)\hat{O}] \tag{1.25}$$

sendo que, desta maneira, temos a *transformada de Weyl discreta*, ou *mapeado de Weyl discreto* do operador $\hat{O}$.

Como o formalismo nos permite mapear qualquer operador que atua no espaço dos estados de partida, um operador de interesse é o operador densidade de estado $\hat{\rho}$. Sua expressão mapeada é dada por

$$\rho_{\omega}(m,n) = \frac{1}{N} Tr[\hat{G}^{\dagger}(m,n)\hat{\rho}] \tag{1.26}$$

e, dessa forma, como a normalização já está incorporada na expressão mapeada, pois assim garantimos que a função de Wigner será normalizada a 1, o operador densidade de estado pode ser decomposto nessa base na forma

$$\hat{\rho} = \sum_{m,n=0}^{N-1} \hat{G}(m,n)\rho_{\omega}(m,n). \tag{1.27}$$

Devido à importância dessa expressão mapeada, $\rho_{\omega}(m,n)$, para a descrição do estado do sistema, como também na sua utilização quando estudarmos a evolução temporal de sistemas com espaço de estados de dimensão finita N nessa representação de espaço de fase, a mesma recebe também aqui o nome particular de *quasi-distribuição de Wigner*, ou na maioria da vezes *função de Wigner*. Analogamente ao caso contínuo [2],

$$\hat{\rho} \leftrightharpoons N\hat{\rho}_{\omega}(m,n), \tag{1.28}$$

onde o símbolo $\leftrightharpoons$ significa que o operador $\hat{\rho}$ tem como correspondente no espaço de fase a função de Wigner, obtida pela transformada de Weyl, e vice-versa. A discussão da existência de uma função de Wigner com variáveis discretas também foi levada a cabo por Wooters, porém ele apresenta uma prescrição específica para sua construção [11]; já da forma apresentada aqui ela é obtida naturalmente do formalismo de mapeamento num espaço de fase quântico discreto. Adicionalmente, deve-se mencionar o trabalho de O. Cohendet *et al* [12] como uma das primeiras propostas específicas nessa área.

1.3 Dinâmica

Como feito no caso da mecânica quântica no espaço de fase contínuo [36; 37; 38; 39], a evolução temporal dos sistemas de nosso interesse aqui é calculada resolvendo a equação de von Neumann-Liouville, que trata da evolução temporal do operador densidade de estado[‡]

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(t) = [H, \hat{\rho}(t)], \tag{1.29}$$

onde

$$\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|. \tag{1.30}$$

Como essa equação envolve apenas operadores, todas as grandezas presentes nela podem ser mapeadas no espaço de fase discreto; assim, a mesma equação será obedecida pelas expressões mapeadas dos operadores [14]

$$i\frac{\partial}{\partial t}\rho_\omega(m,n;t) = \sum_{r,s=0}^{N-1}\mathcal{L}(m,n,r,s,t,t_0)\rho_\omega(r,s,t_0), \tag{1.31}$$

onde $\rho_\omega(r,s,t_0)$ é a função de Wigner e $\mathcal{L}(m,n,r,s,t,t_0)$ é o liouviliano, que representa a expressão mapeada dos comutadores de operadores com o hamiltoniano, escrito como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(m,n,r,s;t,t_0) \;\; = \;\; & \sum_{m,n}\sum_{a,b,c,d}\frac{h(m,n;t,t_0)}{N^4}\exp\left\{i\pi\Phi(a,b,c,d;N)\right\} \\ & \exp\left\{2\pi\frac{i}{N}[a(u-m)+b(v-n)+c(u-r)+d(v-s)]\right\} \\ & \left[\exp\left\{i\frac{\pi}{N}(bc-ad)\right\} - \exp\left\{-i\frac{\pi}{N}(bc-ad)\right\}\right], \end{aligned} \tag{1.32}$$

onde a função $h(m,n;t,t_0)$ representa a expressão mapeada do operador hamiltoniano. Na sequência da apresentação escolhemos trabalhar apenas com hamiltonianos independentes do tempo.

Adicionalmente podemos descrever também a equação de Heisenberg no espaço de fase

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{O}(t) = -[\hat{H}, \hat{O}(t)], \tag{1.33}$$

o que resulta em

$$i\frac{\partial}{\partial t}O(m,n;t) = -\sum_{r,s}\mathcal{L}(m,n,r,s)O(r,s;t). \tag{1.34}$$

Nessa descrição, as quantidades conservadas, as constantes do movimento, podem ser obtidas, de imediato, pela busca das soluções da restrição, imposta às expressões mapeadas dos operadores,

$$\sum_{r,s}\mathcal{L}(m,n,r,s)O(r,s;t) = 0. \tag{1.35}$$

[‡]A partir daqui assumimos $\hbar = 1$

Para completar a descrição geral da dinâmica no espaço de fase discreto, devemos procurar a expressão mapeada da solução da equação de von Neumann-Liouville. Obteremos duas expressões mapeadas da solução, uma é analítica§ e a outra é na forma de uma série de comutadores.

1.3.1 Solução da equação de von Neumann-Liouville

Uma forma de escrever a solução da equação

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(t) = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] \tag{1.36}$$

no caso de hamiltonianos independentes do tempo, com o tempo sendo contado a partir de $t = 0$, é expressa como

$$\hat{\rho}(t) = \exp{(-i\hat{H}t)}\hat{\rho}(t=0)\exp{(i\hat{H}t)}. \tag{1.37}$$

Por outro lado se expandirmos as exponenciais em série, teremos uma segunda forma de escrever

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(t=0) + it[\hat{H}, \hat{\rho}(t=0)] + \frac{(it)^2}{2!}[\hat{H}, [\hat{H}, \hat{\rho}(t=0)]] + \dots. \tag{1.38}$$

Podemos agora escrever a expressão no espaço de fase de ambas as expressões acima. Porém, primeiramente vamos calcular a expressão mapeada da série de comutadores da solução (1.38). Como já mencionado anteriormente, comutadores envolvendo hamiltonianos são representados no espaço de fase pela função liouvilliano [15]

$$\begin{aligned} \rho_\omega(m,n,t) &= \frac{1}{N}\sum_{r,s}\rho_\omega(r,s,t=0)[\delta_{m,r}\delta_{n,s} + it\mathcal{L}(m,n,r,s) + \\ &+ \frac{(it)^2}{2!}\sum_{u_1,v_1}\mathcal{L}(m,n,u_1,v_1)\mathcal{L}(u_1,v_1,r,s) + \dots + \\ &+ \frac{(it)^n}{n!}\sum_{u_1,v_1}\dots\sum_{u_{n-1},v_{n-1}}\mathcal{L}(m,n,u_1,v_1)\dots\mathcal{L}(u_{n-1},v_{n-1},r,s) + \dots]. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Claramente o conteúdo da dinâmica está todo na série de produtos dos liouvilianos que atuam na função do estado de entrada que, por sua vez, é a função de Wigner e contém toda a informação a respeito do estado inicial. A expressão da solução mapeada pode ser encontrada com detalhes, bem como a resolução em alguns casos de hamiltonianos dependentes do tempo, em [15].

§Usaremos o termo função analítica no sentido de que somos capazes de ressomar uma série e expressar essa série na forma de uma função fechada. Portando não nos preocupamos com as definições formais da matemática de funções analíticas que vêm da análise de funções.

A outra expressão para a solução da equação de von Neumann-Louville é na forma de uma função analítica de um propagador no espaço de fase quântico discreto. Nesse caso partimos da solução (1.37)

$$\hat{\rho}(t) = \exp(-i\hat{H}t)\hat{\rho}(t=0)\exp(i\hat{H}t) \tag{1.40}$$

e, lembrando que

$$\hat{\rho}(t=0) = \sum_{r,s} \hat{G}(r,s)\rho_\omega(r,s,t=0), \tag{1.41}$$

temos

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{r,s} \rho_\omega(r,s,t=0)\exp(-i\hat{H}t)\hat{G}(r,s)\exp(i\hat{H}t). \tag{1.42}$$

Como a função de Wigner do operador $\hat{\rho}(t)$ é dada por

$$\rho_\omega(m,n;t) = \frac{1}{N}Tr[\hat{G}^\dagger(m,n)\hat{\rho}(t)] \tag{1.43}$$

teremos a partir de (1.42)

$$\begin{gathered}\rho_\omega(m,n;t) = \frac{1}{N}\sum_{r,s}\rho_\omega(r,s,t=0)\times \\ Tr[\hat{G}^\dagger(m,n)\exp(-i\hat{H}t)\hat{G}(r,s)\exp(i\hat{H}t)].\end{gathered} \tag{1.44}$$

Dessa expressão definimos a função analítica

$$\mathcal{P}(m,n,r,s|t) = Tr[\hat{G}^\dagger(m,n)U(t)\hat{G}(r,s)U^\dagger(t)], \tag{1.45}$$

com

$$U(t) = \exp(-i\hat{H}t), \tag{1.46}$$

onde a evolução temporal do estado pode ser descrita por uma expressão analítica, ou seja,

$$\rho_\omega(m,n;t) = \frac{1}{N}\sum_{r,s}\mathcal{P}(m,n,r,s|t)\rho_\omega(r,s,t=0). \tag{1.47}$$

Uma vez que a caracterização do propagador depende apenas do hamiltoniano do sistema e da base de operadores, percebemos que, mais uma vez, temos toda a informação sobre a dinâmica no propagador, separada da cinemática, estando toda informação sobre o estado de partida contida na função de Wigner.

Ambas as expressões para a solução da equação de von Neumann-Liouville serão usadas nesse trabalho, e assim pode ser percebido que em certas situações a obtenção da função de Wigner evoluída no tempo usando a série envolvendo a função liouvilliano é necessária. Isso ocorre pois hamiltonianos com combinações de operadores, de forma que uma relação como aquela do lema de Baker-Hausdorff não possa ser usada,

$$\exp(\hat{a}+\hat{b}) = \exp(\hat{a})\exp(\hat{b})\exp(-\frac{1}{2}[\hat{a},\hat{b}]), \tag{1.48}$$

tornam extremamente difícil, quando não impossível, a tarefa de ressomar as séries das exponenciais para resultar uma expressão analítica para o propagador.

1.4 Espaço de fase para N=2

A partir daqui começaremos a adaptar a abordagem apresentada para o caso de nosso interesse, ou seja, espaços de Hilbert de dimensão 2. Como já mencionado, quando tratarmos de sistemas de spins 1/2, a base de operadores proposta em [8] não será utilizada. Por isso, ao invés de usarmos a base simetrizada de Schwinger, usaremos a base

$$\hat{S}_1(m,n) = \frac{U^m V^n}{\sqrt{N}}. \tag{1.49}$$

Aplicando uma transformada de Fourier dupla nessa base, definimos uma nova base para o espaço de operadores, que também é útil para a descrição desses sistemas físicos num espaço de fase discreto

$$\hat{G}(m,n) = \frac{1}{2}\sum_{r,s=0}^{1} U^r V^s \exp\left[\frac{-2\pi i}{2}(mr+ns)\right]. \tag{1.50}$$

Como esperado, qualquer operador $\hat{O}$, que age no espaço de estados de dimensão $N=2$, pode ser decomposto nessa base na forma já apresentada

$$\hat{O} = \frac{1}{2}\sum_{m,n=0}^{1} O(m,n)\hat{G}(m,n), \tag{1.51}$$

onde $O(m,n)$ é o mapeado de Weyl do operador $\hat{O}$, ou seja,

$$O(m,n) = Tr[\hat{G}^\dagger(m,n)\hat{O}]. \tag{1.52}$$

Esta base para o espaço de operadores tem as seguintes propriedades de traço

$$Tr[\hat{G}(m,n)] = 1, \tag{1.53}$$

$$Tr[\hat{G}^\dagger(m,n)\hat{G}(r,s)] = 2\delta^{[2]}_{m,r}\delta^{[2]}_{n,s} \tag{1.54}$$

e

$$\begin{aligned} & Tr[\hat{G}^\dagger(m,n)\hat{G}(r,s)\hat{G}(p,q)] = \\ = \; & \frac{1}{2^2}\sum_{a,b,c,d=0}^{1} \exp(\pi i b c) \\ \times \; & \exp\{(\pi i)\left[a(m-r)+b(n-s)+c(m-p)+d(n-q)\right]\}, \end{aligned} \tag{1.55}$$

onde $\delta_{r,s}^{[N]}$ indica uma delta de Kronecker módulo N, ou seja,

$$\delta_{r,s}^{[N]} = \begin{cases} 0 & \text{para } r \neq s(modN) \\ 1 & \text{para } r = s(modN). \end{cases}$$

A demonstração das expressões (1.53, 1.54 e 1.55) pode ser encontrada com detalhes no Apêndice A. Das propriedades acima podemos obter, da mesma forma que indicado em seções anteriores, alguns resultados importantes, como a expressão mapeada do produto de dois operadores $\hat{O}_1$ e $\hat{O}_2$, sendo eles representados na base dos operadores respectivamente como

$$\begin{aligned} \hat{O}_1 &= \frac{1}{2}\sum_{r,s} O_1(r,s)\hat{G}(r,s) \\ \hat{O}_2 &= \frac{1}{2}\sum_{p,q} O_2(p,q)\hat{G}(p,q). \end{aligned} \tag{1.56}$$

Assim, como[¶]

$$(O_1O_2)(m,n) = Tr[\hat{G}^{\dagger}(m,n)\hat{O}_1\hat{O}_2], \tag{1.57}$$

substituindo (1.56)

$$(O_1O_2)(m,n) = \frac{1}{2^2}\sum_{r,s,p,q=0}^{1} O_1(r,s)O_2(p,q)Tr[\hat{G}^{\dagger}(m,n)\hat{G}(r,s)\hat{G}(p,q)] \tag{1.58}$$

e usando o traço de três operadores temos

$$\begin{aligned} (O_1O_2)(m,n) &= \frac{1}{2^4}\sum_{r,s,p,q=0}^{1}\sum_{a,b,c,d=0}^{1} O_1(r,s)O_2(p,q)\exp(\pi ibc) \\ &\times \exp\{(\pi i)\left[a(m-r)+b(n-s)+c(m-p)+d(n-q)\right]\}. \end{aligned} \tag{1.59}$$

A partir desse resultado é direto obter as expressões mapeadas dos comutadores e anticomutadores de dois operadores com a base $\hat{G}(m,n)$

$$\begin{aligned} [O_1,O_2](m,n) &= \frac{1}{2^4}\sum_{r,s,p,q}\sum_{a,b,c,d} O_1(r,s)O_2(p,q)\left\{\exp(\pi ibc)-\exp(\pi iad)\right\} \\ &\times \exp\{(\pi i)\left[a(m-r)+b(n-s)+c(m-p)+d(n-q)\right]\} \end{aligned} \tag{1.60}$$

e

$$\begin{aligned} \{O_1,O_2\}(m,n) &= \frac{1}{2^4}\sum_{r,s,p,q}\sum_{a,b,c,d} O_1(r,s)O_2(p,q)\left\{\exp(\pi ibc)+\exp(\pi iad)\right\} \\ &\times \exp\{(\pi i)\left[a(m-r)+b(n-s)+c(m-p)+d(n-q)\right]\}. \end{aligned} \tag{1.61}$$

[¶]A expressão $(O_1O_2)(m,n)$ denota a expressão mapeada do produto dos operadores $\hat{O}_1$ e $\hat{O}_2$.

Mais uma vez, um operador que merece destaque em nossas considerações é o operador densidade de estado $\hat{\rho}$; sua expressão mapeada, função de Wigner, é obtida calculando

$$\rho_\omega(m,n) = \frac{1}{2} Tr[\hat{G}^\dagger(m,n)\hat{\rho}]. \tag{1.62}$$

Tendo a função de Wigner podemos agora escrever a equação de von Neumann-Liouville no espaço de fase, ou seja,

$$i\frac{\partial \rho_\omega(m,n,t)}{\partial t} = [\hat{H},\hat{\rho}(t)](m,n) \tag{1.63}$$

e, substituindo a expressão mapeada do comutador, obtemos

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \rho_\omega(m,n,t)}{\partial t} &= \frac{1}{2^3}\sum_{r,s,p,q}\sum_{a,b,c,d} h(r,s)\rho_\omega(p,q,t)\left\{\exp\left(i\pi bc\right) - \exp\left(i\pi ad\right)\right\} \qquad (1.64) \\ &\times \quad \exp\left\{\left(\frac{2\pi i}{2}\right)[a(m-s)+b(n-r)+c(m-p)+d(n-q)]\right\}. \end{aligned}$$

Sendo o liouviliano para a nova base dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(m,n,p,q) &= \frac{1}{2^4}\sum_{a,b,c,d}\sum_{r,s} h(r,s)\left\{\exp\left(i\pi cb\right) - \exp\left(i\pi ad\right)\right\} \qquad (1.65) \\ & \exp\left\{\left(\frac{2\pi i}{2}\right)[a(m-r)+b(n-s)+c(m-p)+d(n-q)]\right\}, \end{aligned}$$

a expressão mapeada temporal, na sua forma geral, é independente da base, portanto ela é

$$i\frac{\partial}{\partial t}\rho_\omega(m,n;t) = \sum_{p,q}\mathcal{L}(m,n,p,q)\rho_\omega(p,q,t), \tag{1.66}$$

que tem a mesma forma da anterior, como já era de se esperar. Temos, basicamente, todas as ferramentas necessárias para descrever qualquer sistema físico sem dissipação, caracterizado por espaços de Hilbert com dimensão N=2.

1.4.1 Sistema de Spin 1/2

Tomaremos como modelo, para as aplicações futuras, os sistemas de spin 1/2 e descreveremos os operadores usando os operadores de Pauli ($\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ e $\hat{\sigma}_z$) quantizando os estados na direção z. O primeiro passo será escolher um dos operadores U ou V para representar o operador $\hat{\sigma}_z$ e então identificar seus autoestados. Iremos representar os estados de spin 1/2 como $|+\rangle$ (spin up) e $|-\rangle$ (spin down). Primeiramente identificamos $\hat{\sigma}_z$

$$\hat{\sigma}_z \longrightarrow V, \tag{1.67}$$

portanto representaremos os estados de spin 1/2 pelos autoestados do operador V

$$\begin{aligned} |+\rangle &\longrightarrow |v_0\rangle \\ |-\rangle &\longrightarrow |v_1\rangle \end{aligned}$$

e, por conveniência, escrevemos apenas

$$\begin{aligned} |+\rangle &\longrightarrow |0\rangle \\ |-\rangle &\longrightarrow |1\rangle. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Os demais operadores de Pauli, $\hat{\sigma}_x$ e $\hat{\sigma}_y$, podem ser obtidos usando os operadores degrau

$$\hat{\sigma}_{\pm} = \frac{\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y}{2} \tag{1.69}$$

ou então

$$\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_- \tag{1.70}$$

e

$$\hat{\sigma}_y = \frac{\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_-}{i}. \tag{1.71}$$

Podemos também representar os operadores degrau como transições internas dos estados

$$\hat{\sigma}_+ = |0\rangle\langle 1|$$

e

$$\hat{\sigma}_- = |1\rangle\langle 0|.$$

Usando (1.17) escrevemos os operadores degrau em função dos operadores U e V

$$\hat{\sigma}_+ = \frac{1}{2}U[1 - V] \tag{1.72}$$

e

$$\hat{\sigma}_- = \frac{1}{2}U[1 + V] \tag{1.73}$$

e, substituindo (1.72) e (1.73) em (1.70) e (1.71), teremos

$$\hat{\sigma}_x = U \tag{1.74}$$

$$\hat{\sigma}_y = iUV. \tag{1.75}$$

Dessa forma temos os três operadores de Pauli representados como combinações dos operadores U e V respectivamente por

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_x = U \\ \hat{\sigma}_y = iUV \\ \hat{\sigma}_z = V. \end{cases}$$

Quando a base simetrizada é usada, por conter uma fase complexa, os operadores de Pauli constituem os próprios elementos da base $\hat{S}_2(m,n)$ para $N = 2$ [8], porém aqui, como a base escolhida não possui fase de simetrização, os operadores devem ser obtidos na forma descrita acima.

Feito isso, podemos agora calcular a expressão mapeada dos operadores de Pauli

$$\sigma_i(m,n) = Tr[\hat{G}^\dagger(m,n)\hat{\sigma}_i], \tag{1.76}$$

onde $i = x, y, z$. Usando (1.76) obtemos de imediato

$$\sigma_x(m,n) = \exp\{i\pi m\}, \tag{1.77}$$

$$\sigma_y(m,n) = i\exp\{i\pi(m+n)\} \tag{1.78}$$

e

$$\sigma_z(m,n) = \exp\{i\pi n\}. \tag{1.79}$$

Como os operadores de Pauli são operadores unitários, suas expressões no espaço de fase discreto se manifestam apenas na forma de fases, raízes da unidade, onde o rótulo n representa o momento angular associado ao spin 1/2 e m está associado a rotações discretas em unidade angulares de π. Tendo os mapeados dos operadores, uma primeira aplicação que podemos fazer, como teste de consistência, é o cálculo das expressões mapeadas dos comutadores dos operadores do $SU(2)$. Assim, tendo

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\epsilon_{i,j,k}\hat{\sigma}_k, \tag{1.80}$$

no espaço de fase discreto devemos obter as expressões equivalentes a

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j](m,n) = 2i\epsilon_{i,j,k}\sigma_k(m,n), \tag{1.81}$$

onde $\epsilon_{i,j,k}$ é o tensor antisimétrico de Levi-Civita. Usando a expressão (1.60), e substituindo as expressões mapeadas obtidas acima, teremos individualmente as três relações

$$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y](m,n) = 2i\exp(i\pi n) = 2i\sigma_z(m,n), \tag{1.82}$$

$$[\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z](m,n) = 2i\exp(i\pi m) = 2i\sigma_x(m,n) \tag{1.83}$$

e

$$[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x](m,n) = -2\exp\{i\pi(m+n)\} = 2i\sigma_y(m,n), \tag{1.84}$$

que é exatamente o que deveríamos esperar se comparados com (1.80).

Agora podemos escrever um estado de spin 1/2 arbitrário, com $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^2$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \tag{1.85}$$

tal que o operador densidade de estado será

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

ou explicitamente

$$\hat{\rho} = |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1| + \alpha\beta^*|0\rangle\langle 1| + \alpha^*\beta|1\rangle\langle 0|. \tag{1.86}$$

Tendo o operador densidade de estado podemos calcular a função de Wigner desse estado a partir da expressão geral

$$\rho_\omega(m,n) = \frac{1}{2}Tr\left[\hat{G}^\dagger(m,n)\hat{\rho}\right] \tag{1.87}$$

e, substituindo (1.86), obtemos

$$\rho_\omega(m,n) = \frac{1}{2}Tr\left[\hat{G}^\dagger(m,n)\left(|\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1| + \alpha\beta^*|0\rangle\langle 1| + \alpha^*\beta|1\rangle\langle 0|\right)\right]. \tag{1.88}$$

Agora, por razões práticas, é interessante calcular de imediato um elemento de matriz na forma geral, ou seja, tendo $|k\rangle$ e $|l\rangle \in \{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$Tr\left[\hat{G}^\dagger(m,n)|k\rangle\langle l|\right] = \langle l|\hat{G}^\dagger(m,n)|k\rangle$$

que é

$$Tr\left[\hat{G}^\dagger(m,n)|k\rangle\langle l|\right] = \delta^{[2]}_{n,l}\exp\{i\pi m(l-k)\}, \tag{1.89}$$

do que, devido à linearidade do traço, temos a função de Wigner

$$\rho_\omega(m,n) = \frac{1}{2}\Big[|\alpha|^2\delta^{[2]}_{n,0} + \alpha^*\beta\delta^{[2]}_{n,0}\exp(i\pi m) + |\beta|^2\delta^{[2]}_{n,1} + \alpha\beta^*\delta^{[2]}_{n,1}\exp(i\pi m)\Big]. \tag{1.90}$$

Tendo a função de Wigner podemos calcular as distribuições marginais [8], de momento angular

$$J(n) = \sum_m \rho_\omega(m,n), \tag{1.91}$$

e ângulo

$$\Theta(m) = \sum_n \rho_\omega(m,n), \tag{1.92}$$

que se tratam de distribuições de probabilidade de fato. No caso do estado de spin 1/2

$$J(n) = |\alpha|^2\delta^{[2]}_{n,0} + |\beta|^2\delta^{[2]}_{n,1} \tag{1.93}$$

e

$$\Theta(m) = \frac{1}{2}\Big\{1 + \exp(i\pi m)(\alpha\beta^* + \alpha^*\beta)\Big\}. \tag{1.94}$$

Como nos capítulos que seguem serão utilizados sistemas compostos por mais de um spin 1/2, então devemos ser capazes de representar esses sistemas na nossa descrição de espaço de fase discreto. Para um sistema com n partículas de spin 1/2 o espaço de Hilbert terá dimensão 2^n, ou seja,

$$\mathcal{H}^{2^n} = \mathcal{H}_1^2 \otimes \mathcal{H}_2^2 \otimes ... \otimes \mathcal{H}_n^2. \tag{1.95}$$

Uma base para esse espaço de Hilbert de estados pode ser representada pelo espaço produto

$$|k_1\rangle \otimes |k_2\rangle \otimes ... \otimes |k_n\rangle = |k_1, k_2, ..., k_n\rangle, \tag{1.96}$$

onde o estado $|k_j\rangle \in \mathcal{H}_j^2$, e o índice j rotula a j-ésima partícula do sistema. A decomposição de um estado arbitrário nesta base terá a forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{k_1,k_2,...,k_n} C_{k_1,k_2,...,k_n} |k_1, k_2, ..., k_n\rangle, \tag{1.97}$$

do qual podemos obter o operador densidade de estado

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

ou, de forma explicita,

$$\hat{\rho} = \sum_{k_1,k_2,...,k_n} \sum_{k_1',k_2',...,k_n'} C_{k_1,k_2,...,k_n} C^*_{k_1',k_2',...,k_n'} |k_1, k_2, ..., k_n\rangle\langle k_1', k_2', ..., k_n'|. \tag{1.98}$$

Como proposto por Schwinger, podemos decompor a base do espaço de operadores de dimensão $2n$ no produto das n sub-bases de dimensão dois

$$\hat{G}(r_1, ..., r_n, s_1, ..., s_n) = \hat{G}_1(r_1, s_1) \otimes \hat{G}_2(r_2, s_2) \otimes ... \otimes \hat{G}_n(r_n, s_n). \tag{1.99}$$

Porém, caso haja interesse, a base referente ao momento angular total também poderá ser usada, ou seja, a fatoração da base não é obrigatória. Esta escolha pode ser feita dependendo da descrição que queremos usar para os sistemas de spins 1/2.

Um operador que age no espaço de Hilbert $\mathcal{H}^{2^n}$ possui sua expressão mapeada calculada, usando a base (1.99), via

$$O_\omega(r_1, ..., r_n, s_1, ..., s_n) = Tr\left[\hat{G}^\dagger(r_1, ...r_n, s_1, ..., s_n)\hat{O}\right] \tag{1.100}$$

e a função de Wigner do operador (1.98) pode ser obtida via

$$\rho_\omega(r_1, ..., r_n, s_1, ..., s_n) = \frac{1}{2^n} Tr\left[\hat{G}^\dagger(r_1, ...r_n, s_1, ..., s_n)\hat{\rho}\right]$$

$$\rho_\omega(r_1, ..., r_n, s_1, ..., s_n) = \frac{1}{2^n} Tr\Big[\hat{G}_1^\dagger(r_1, s_1) \otimes \hat{G}_2^\dagger(r_2, s_2) \otimes ... \otimes \hat{G}_n^\dagger(r_n, s_n)\hat{\rho}\Big].$$

Tendo $\hat{\rho}$, dado pela expressão (1.98), obtemos

$$\rho_\omega(r_1, ..., r_n, s_1, ..., s_n) = \frac{1}{2^n} \sum_{k_1, k_2, ..., k_n} \sum_{k'_1, k'_2, ..., k'_n} C_{k_1, k_2, ..., k_n} C^*_{k'_1, k'_2, ..., k'_n} \times \quad (1.101)$$

$$Tr\left[\hat{G}_1^\dagger(r_1, s_1) \otimes \hat{G}_2^\dagger(r_2, s_2) \otimes ... \otimes \hat{G}_n^\dagger(r_n, s_n)|k_1, k_2, ..., k_n\rangle\langle k'_1, k'_2, ..., k'_n|\right]$$

e, como cada operador age no espaço de estados de uma das partículas, podemos usar a Wigner calculada em (1.89) e obter a função de Wigner de qualquer estado de um sistema composto por n spins 1/2.

Capítulo 2

Estados emaranhados

A partir deste capítulo restringiremos nossos estudos ao espaço de Hilbert de quatro dimensões associado a um sistema composto por duas partículas de spin 1/2. Muitos resultados obtidos aqui serão utilizados no capítulo subsequente. O principal objetivo será apresentar uma descrição que permitirá quantificar emaranhamento entre as partículas que compõem o sistema. Após isso iremos propor a forma equivalente de medir o grau de emaranhamento na descrição de espaço de fase discreto.

2.1 Espaço produto e emaranhamento

Antes de falarmos em como quantificar o grau de emaranhamento do sistema, devemos ser capazes de diferenciar quando temos um estado emaranhado ou não. Dados os espaços de Hilbert de duas dimensões, $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, onde 1 e 2 rotulam arbitrariamente as partículas, introduzimos dois estados, $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_2$. Se $|n\rangle$ são os elementos de uma base de $\mathcal{H}_1$ e $|\alpha\rangle$ são os elementos de uma base de $\mathcal{H}_2$, podemos decompor os estados nas bases

$$|\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{1} c_n |n\rangle \quad \text{e} \quad |\chi\rangle = \sum_{\alpha=0}^{1} d_\alpha |\alpha\rangle. \tag{2.1}$$

O espaço produto $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ é um espaço de Hilbert de 4 dimensões, onde o produto tensorial das bases dos espaços individuais, $|n\rangle \otimes |\alpha\rangle = |n, \alpha\rangle$, forma uma base ortonormal

$$\langle n', \alpha' | n, \alpha\rangle = \delta_{n',n}\delta_{\alpha',\alpha}, \tag{2.2}$$

e o produto tensorial dos vetores $|\varphi\rangle$ e $|\chi\rangle$ pode ser decomposto nessa base

$$|\psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle = \sum_{n,\alpha} c_n d_\alpha |n, \alpha\rangle. \tag{2.3}$$

Mas, além daqueles estados, um estado mais geral, também pertencente ao espaço de Hilbert produto, pode ser escrito na forma

$$|\psi\rangle = \sum_{n,\alpha} C_{n,\alpha}|n,\alpha\rangle; \tag{2.4}$$

esse estado é mais geral pois, dependendo dos coeficientes $C_{n,\alpha}$, ele pode não ser escrito na forma de (2.3); se assim for dizemos que o estado é emaranhado. No caso de sistemas de dois spin 1/2 podemos escrever esse estado geral na forma

$$|\Psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle \tag{2.5}$$

que será um produto tensorial sempre que

$$\alpha\delta = \gamma\beta. \tag{2.6}$$

Um exemplo de estado emaranhado, que portanto não satisfaz o critério acima, é o estado singleto

$$|\Phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right). \tag{2.7}$$

Se calcularmos o grau de emaranhamento do estado (2.5), teremos o mesmo dependendo dos coeficientes α, δ, γ e β. Tal medida pode ser obtida calculando os coeficientes de Schmidt [40], que é a raiz quadrada dos autovalores da matriz de estado reduzida de uma partícula*. Para obter os coeficientes de Schmidt precisamos primeiramente calcular a matriz densidade de estado

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|,$$

que para o estado (2.5) será

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = {} & |\alpha|^2|00\rangle\langle 00| + |\beta|^2|01\rangle\langle 01| + |\gamma|^2|10\rangle\langle 10| + |\delta|^2|11\rangle\langle 11| + \\ & +\alpha\beta^*|00\rangle\langle 01| + \alpha\gamma^*|00\rangle\langle 10| + \alpha\delta^*|00\rangle\langle 11| + \beta\alpha^*|01\rangle\langle 00| + \\ & +\beta\gamma^*|01\rangle\langle 10| + \beta\delta^*|01\rangle\langle 11| + \gamma\alpha^*|10\rangle\langle 00| + \gamma\beta^*|10\rangle\langle 01| + \\ & +\gamma\delta^*|10\rangle\langle 11| + \delta\alpha^*|11\rangle\langle 00| + \delta\beta^*|11\rangle\langle 01| + \delta\gamma^*|11\rangle\langle 10|, \end{aligned} \tag{2.8}$$

e o operador reduzido da partícula 1, por exemplo, será

$$\hat{\rho}^{(1)} = Tr_2[\hat{\rho}]$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(1)} = {} & \Big(|\alpha|^2 + |\beta|^2\Big)|0\rangle\langle 0| + \Big(|\gamma|^2 + |\delta|^2\Big)|1\rangle\langle 1| + \\ & +\Big(\alpha\gamma^* + \beta\delta^*\Big)|0\rangle\langle 1| + \Big(\alpha^*\gamma + \beta^*\delta\Big)|1\rangle\langle 0|. \end{aligned} \tag{2.9}$$

*Não confundir coeficientes de Schmidt com número de Schmidt, que é o número de coeficientes de Schmidt.

Os autovalores $\lambda_\pm$ da matriz associada a $\hat{\rho}^{(1)}$ (denotada por $\underline{\rho}^{(1)}$) podem ser facilmente calculados e uma vez que

$$\lambda_\pm = \frac{Tr[\underline{\rho}^{(1)}]}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(Tr[\underline{\rho}^{(1)}]\right)^2 - 4\det[\underline{\rho}^{(1)}]}, \tag{2.10}$$

onde

$$Tr[\underline{\rho}^{(1)}] = 1$$

e

$$\det[\underline{\rho}^{(1)}] = |\alpha\delta - \beta\gamma|^2, \tag{2.11}$$

portanto

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4|\alpha\delta - \beta\gamma|^2}. \tag{2.12}$$

Como mencionado anteriormente, sempre que $\alpha\delta = \beta\gamma$ temos um estado produto, e nesse caso os autovalores serão $\lambda_+ = 1$ e $\lambda_- = 0$, ou seja, sempre que a matriz de estado reduzida possuir um autovalor igual a 1, o estado do sistema das duas partículas pode ser representado por um produto tensorial de dois estados independentes. No caso de um estado com grau máximo de emaranhamento, estado (2.7) por exemplo, os coeficientes de Schmidt são iguais, ou seja, $\lambda_\pm = 1/2$. Os demais valores representam graus intermediários de emaranhamento, e podemos dizer então que em um sorteio aleatório a probabilidade de obtermos um estado emaranhado é 1. Se agora fizermos o cálculo dos autovalores da matriz de estado reduzida da partícula 2, obteremos o mesmo resultado, pois ambas possuem os mesmos autovalores.

Podemos observar em (2.10) que, sendo o traço da matriz de estado normalizado a 1, toda a informação sobre o emaranhamento está contida no determinante dessa matriz, ou seja, uma forma de se obter o grau de emaranhamento do sistema é via determinante da matriz reduzida de um corpo. Como o determinante pode ser obtido pelo produto dos autovalores da matriz, ou seja,

$$\det \underline{\rho}^{(1)} = \lambda_+\lambda_-, \tag{2.13}$$

da condição $\lambda_+ + \lambda_- = 1$ obtemos que o determinante assume seu maior valor quando $\lambda_+ = \lambda_- = 1/2$, portanto

$$0 \leq \det \underline{\rho}^{(1)} \leq 1/4, \tag{2.14}$$

e é justamente quando o determinante assume seu maior valor que temos o grau máximo de emaranhamento. Os estados bipartites de spin 1/2 com grau máximo de emaranhamento formam um conjunto de 4 estados conhecidos como estados de Bell [40], sendo eles

$$|\Psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle \pm |10\rangle\right) \quad \text{e} \quad |\Phi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right). \tag{2.15}$$

Apresentamos na sequência três medidas de emaranhamento, comuns na literatura, a *one-tangle*, a *concurrence*[41; 42] e a entropia de von Neumann, que para o caso de interesse, sistemas bipartites de spin 1/2 descritos por estados puros, são obtidas diretamente do determinante da matriz reduzida de um corpo. Os dois primeiros quantificadores são apresentados apenas por conferência uma vez que Popescu *et al*[43] mostraram que para estados puros a entropia de von Neumann é a unica medida de emaranhamento, sendo as demais proveniente dela de alguma forma.

One-tangle

A medida $one - tangle$ é definida diretamente por:

$$\tau_i = 4 \det \underline{\rho}^{(i)}, \tag{2.16}$$

onde i indica o $one - tangle$ do estado reduzido da i-ésima partícula do sistema, descrito pela matriz reduzida de um corpo $\underline{\rho}^{(i)}$. $One - tangle$ assume valor máximo 1, para os estados de Bell e mínimo 0 para estados produtos.

Concurrence

A *concurrence* é muito usada para descrever sistemas de muitos corpos descritos por estados mistos, onde, para um sistema com N spins 1/2, por exemplo, a medida do grau de emaranhamento entre os spins é tomada aos pares. Para o caso de estados puros a mesma será [41]

$$C = \sqrt{2(1 - Tr[\underline{\rho}^{(1)2}])}, \tag{2.17}$$

onde $\underline{\rho}^{(1)}$ é a matriz de estado reduzida de um corpo. Para um sistema bipartite podemos escrever $\underline{\rho}^{(1)}$ como uma matriz diagonal

$$\underline{\rho}^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

sendo λ_+ e λ_- os autovalores de $\underline{\rho}^{(1)}$, como dito anteriormente. Dessa expressão resulta

$$C = \sqrt{4\lambda_+\lambda_-} = \sqrt{4 \det \underline{\rho}^{(1)}}. \tag{2.19}$$

Esta medida também é normalizada a 1 para os estados de Bell e é 0 para estados produtos. Sendo assim, podemos seguramente usar o determinante da matriz reduzida de um corpo para calcular o grau de emaranhamento no sistema bipartite.

Entropia de emaranhamento

Uma outra forma de se medir emaranhamento é via entropia de von Neumann do estado reduzido, que é

$$S = \sum_n \lambda_n \log_2 \lambda_n, \tag{2.20}$$

onde $\sqrt{\lambda_n}$ são os coeficiente de Schmidt. Esta entropia assume valores no intervalo

$$0 \leq S \leq 1, \tag{2.21}$$

tal que quando $S = 1$ o emaranhamento é máximo. Isso ocorre pois quando o estado do sistema é emaranhado o operador de estado reduzido de uma partícula se trata de um estado misturado, ou seja, individualmente o estado das partículas que compõem o sistemas não pode ser escrito na forma de estado puro.

2.2 Emaranhamento no espaço de fase discreto

Nessa seção apresentaremos duas diferentes formas de se calcular o grau de emaranhamento em sistemas bipartite usando a descrição de espaço de fase quântico discreto. Como vimos anteriormente, a informação sobre o emaranhamento está contida no determinante da matriz reduzida de um corpo, portanto devemos obter uma expressão para esse determinante nessa descrição. Primeiramente devemos obter a função de Wigner do estado (2.8) e então calcular a expressão mapeada referente ao operador reduzido de um corpo, seguindo os mesmos passos feitos anteriormente. A função de Wigner para sistemas bipartites será

$$\rho_\omega(m_1, n_1; m_2, n_2) = Tr[G^\dagger(m_1, n_1) \otimes G^\dagger(m_2, n_2)\hat{\rho}], \tag{2.22}$$

onde os índices 1 e 2 rotulam as partículas. Para facilitar a notação, rotularemos a partícula 1 com letras latinas e a 2 com letras gregas e reescrevemos (2.22)

$$\rho_\omega(m, n; \mu, \nu) = Tr\Big[G^\dagger(m, n) \otimes G^\dagger(\mu, \nu)\hat{\rho}\Big].$$

Para uma contribuição arbitrária da combinação (2.8) teremos a expressão mapeada

$$\begin{aligned} (|k, \sigma\rangle\langle l, \tau|)(m, n; \mu, \nu) &= Tr\Big[G^\dagger(m, n) \otimes G^\dagger(\mu, \nu)|k, \sigma\rangle\langle l, \tau|\Big] \\ &= Tr\Big[G^\dagger(m, n)|k\rangle\langle l|\Big] Tr\Big[G^\dagger(\mu, \nu)|\sigma\rangle\langle \tau|\Big] \end{aligned} \tag{2.23}$$

e, usando o resultado da função de Wigner obtida anteriormente,

$$Tr\left[\hat{G}^\dagger(m, n)|k\rangle\langle l|\right] = \delta_{n,l}^{[2]} \exp\{i\pi m(l - k)\}, \tag{2.24}$$

teremos

$$(|k,\sigma\rangle\langle l,\tau|)(m,n;\mu,\nu) = \delta^{[2]}_{n,l}\delta^{[2]}_{\nu,\tau}\exp\{i\pi m(l-k)\}\exp\{i\pi\mu(\tau-\sigma)\}. \qquad (2.25)$$

Com a expressão acima calculamos facilmente a função de Wigner do operador (2.8), sendo que esta será então

$$\begin{aligned}
&\rho_\omega(m,n;\mu,\nu) = \\
= \;& \frac{1}{2^2}\left\{\left[|\alpha|^2 + \beta\alpha^*\exp\{i\pi\mu\} + \gamma\alpha^*\exp\{i\pi m\} + \delta\alpha^*\exp\{i\pi(m+\mu)\}\right]\delta^{[2]}_{n,0}\delta^{[2]}_{\nu,0} + \right.\\
+ \;& \left[|\beta|^2 + \beta^*\alpha\exp\{i\pi\mu\} + \gamma\beta^*\exp\{i\pi(m+\mu)\} + \delta\beta^*\exp\{i\pi m\}\right]\delta^{[2]}_{n,0}\delta^{[2]}_{\nu,1} + \\
+ \;& \left[|\gamma|^2 + \gamma^*\alpha\exp\{i\pi m\} + \gamma^*\beta\exp\{i\pi(m+\mu)\} + \delta\gamma^*\exp\{i\pi\mu\}\right]\delta^{[2]}_{n,1}\delta^{[2]}_{\nu,0} + \\
+ \;& \left.\left[|\delta|^2 + \delta^*\alpha\exp\{i\pi(m+\mu)\} + \beta\delta^*\exp\{i\pi m\} + \gamma\delta^*\exp\{i\pi\mu\}\right]\delta^{[2]}_{n,1}\delta^{[2]}_{\nu,1}\right\}. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Como citado anteriormente, devemos calcular a expressão mapeada da matriz de estado reduzida de um corpo, que pode ser calculada tomando o traço em uma das partículas

$$\rho^{(1)}_\omega(m,n) = \sum_{\mu,\nu}\rho_\omega(m,n;\mu,\nu), \qquad (2.27)$$

também chamada de *função de Wigner reduzida*. Da expressão (2.26) teremos

$$\begin{aligned}
\rho^{(1)}_\omega(m,n) = \;& \tfrac{1}{2}\Big\{\delta^{[2]}_{n,0}\left[|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \gamma\alpha^*\exp\{i\pi m\} + \delta\beta^*\exp\{i\pi m\}\right] + \qquad (2.28)\\
& +\delta^{[2]}_{n,1}\left[|\gamma|^2 + |\delta|^2 + \gamma^*\alpha\exp\{i\pi m\} + \delta^*\beta\exp\{i\pi m\}\right]\Big\}.
\end{aligned}$$

Apresentaremos, a seguir, duas formas de medir o grau de emaranhamento do sistema a partir da função de Wigner reduzida de um corpo.

2.2.1 Permanente da função de Wigner reduzida

Se representarmos a função $\rho^{(1)}_\omega(m,n)$ como uma matriz 2×2 onde os índices m e n representam as linhas e colunas da matriz, respectivamente, teremos

$$\rho^{(1)}_\omega(m,n) = \begin{pmatrix}\rho^{(1)}_\omega(0,0) & \rho^{(1)}_\omega(0,1)\\ \rho^{(1)}_\omega(1,0) & \rho^{(1)}_\omega(1,1)\end{pmatrix}, \qquad (2.29)$$

onde

$$\begin{aligned}
\rho^{(1)}_\omega(0,0) &= \tfrac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \gamma\alpha^* + \delta\beta^*\right)\\
\rho^{(1)}_\omega(1,0) &= \tfrac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - \gamma\alpha^* - \delta\beta^*\right)\\
\rho^{(1)}_\omega(0,1) &= \tfrac{1}{2}\left(|\gamma|^2 + |\delta|^2 + \gamma^*\alpha + \delta^*\beta\right)\\
\rho^{(1)}_\omega(1,1) &= \tfrac{1}{2}\left(|\gamma|^2 + |\delta|^2 - \gamma^*\alpha - \delta^*\beta\right).
\end{aligned} \qquad (2.30)$$

Podemos perceber que o equivalente ao traço da matriz (2.9) é a soma de todos os elementos da matriz (2.29), que nada mais é que a soma sobre todo o espaço de fase discreto, ou seja,

$$\rho_\omega^{(1)}(0,0) + \rho_\omega^{(1)}(1,0) + \rho_\omega^{(1)}(0,1) + \rho_\omega^{(1)}(1,1) = 1. \tag{2.31}$$

O determinante da matriz associada ao operador (2.9) é proporcional ao permanente da matriz (2.29), pois sendo o determinante de (2.9)

$$det\left[\underline{\rho}^{(1)}\right] = |\alpha\delta - \beta\gamma|^2 \tag{2.32}$$

e o permanente de (2.29)

$$\begin{aligned} perm\left[\rho_\omega^{(1)}(m,n)\right] &= \rho_\omega^{(1)}(0,0)\rho_\omega^{(1)}(1,1) + \rho_\omega^{(1)}(0,1)\rho_\omega^{(1)}(1,0) \\ &= \frac{1}{2}|\alpha\delta - \beta\gamma|^2, \end{aligned}$$

a relação entre ambos é

$$det\left[\underline{\rho}^{(1)}\right] = 2\,perm\left[\rho_\omega^{(1)}(m,n)\right]. \tag{2.33}$$

Isso significa que, tendo a função de Wigner reduzida, podemos também medir o grau de emaranhamento do sistema, ou seja, a informação sobre o emaranhamento pode ser vista também no espaço de fase discreto.

Exemplo: estados de Bell

Tendo um dos estados de Bell escritos em (2.15), por exemplo

$$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right), \tag{2.34}$$

identificamos os coeficientes do estado (2.5), $\alpha = \delta = 0$ e $\beta = \gamma = 1/\sqrt{2}$; dessa forma os elementos da matriz (2.29) descritos em (2.30) serão

$$\rho_\omega^{(1)}(0,0) = \rho_\omega^{(1)}(0,1) = \rho_\omega^{(1)}(1,0) = \rho_\omega^{(1)}(1,1) = \frac{1}{4}. \tag{2.35}$$

Portanto a matriz será

$$\rho_\omega^{(1)}(m,n) = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \tag{2.36}$$

de onde obtemos que 2 vezes o permanente dessa matriz é

$$2\,perm\left[\rho_\omega^{(1)}(m,n)\right] = 1/4, \tag{2.37}$$

que é o valor máximo do determinante e que corresponde a um estado maximamente emaranhado.

Ainda há uma outra forma de se medir emaranhamento nessa descrição que é obtida via distribuições marginais da função de Wigner reduzida.

2.2.2 Emaranhamento e distribuições marginais

Tendo a função de Wigner reduzida (2.28), podemos calcular, de imediato, as distribuições marginais de momento angular

$$\begin{aligned} J(n) &= \sum_m \rho_\omega^{(1)}(m,n) \\ &= \delta_{n,0}^{[2]}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)+\delta_{n,1}^{[2]}\left(|\gamma|^2+|\delta|^2\right) \end{aligned} \tag{2.38}$$

e ângulo

$$\begin{aligned} \Theta(m) &= \sum_n \rho_\omega^{(1)}(m,n) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\exp\{i\pi m\}\left[\alpha\gamma^*+\gamma\alpha^*+\beta\delta^*+\delta\beta^*\right]. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Para o caso em que os coeficientes α, β, γ e δ são números reais podemos definir a função

$$E_\omega = 4J(n=0)J(n=1) - |\Theta(m=0)-\Theta(m=1)|^2 \tag{2.40}$$

tal que, substituindo as expressões das distribuições marginais acima, temos

$$E_\omega = 4\left(\alpha\delta-\beta\gamma\right)^2, \tag{2.41}$$

ou seja

$$E_\omega = 4\det\left[\underline{\rho}^{(1)}\right]. \tag{2.42}$$

Dessa forma, a função E_ω também representa uma medida de emaranhamento. Do ponto de vista operacional ela será muito útil, pois agora temos uma medida do grau de emaranhamento que depende apenas das distribuições marginais da função de Wigner reduzida de um corpo. No capítulo seguinte usaremos a função E_ω para medir o grau de emaranhamento na dinâmica de sistemas bipartites. Tal função está definida no intervalo $0 \le E_\omega \le 1$, onde 0 indica estado produto e 1 indica estado maximamente emaranhado.

Exemplo: Estados de Bell

Da mesma forma que feito na seção anterior aplicamos esta nova medida para um estado de Bell. Assim, tendo o estado

$$|\Phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle+|11\rangle\right), \tag{2.43}$$

identificamos os coeficientes do estado (2.5), $\alpha=\delta=1/\sqrt{2}$ e $\beta=\gamma=0$, e então as distribuições marginais serão

$$J(n) = \frac{1}{2}\left(\delta_{n,0}^{[2]}+\delta_{n,1}^{[2]}\right) \tag{2.44}$$

e

$$\Theta(m) = 1/2. \tag{2.45}$$

Portanto a medida de emaranhamento (2.40) assume o valor

$$E_\omega = 1. \tag{2.46}$$

Logo o estado é maximamente emaranhado, como já dito anteriormente.

Capítulo 3

Evolução temporal de sistemas bipartites no espaço de fase discreto

Seguindo as ideias apresentadas nos capítulos anteriores devemos obter uma forma de descrever a dinâmica de sistemas bipartites no espaço de fase quântico discreto. Nesse capítulo obteremos a expressão mapeada da equação de von Neumman-Liouville para sistemas bipartites, descrevendo sua solução tanto na forma de uma série de comutadores, quanto na forma de uma função analítica de um propagador no espaço de fase discreto e, na sequência, calcularemos duas aplicações. Na primeira aplicação obteremos a evolução temporal da porta lógica *controlled-NOT* da computação quântica a fim de verificarmos em que casos há a presença de emaranhamento. A segunda aplicação consistirá em impor compressão a um estado coerente de spin, como proposto por M. Kitagawa em [31], e usando a descrição de emaranhamento, proposta no capítulo 2, faremos uma comparação entre estados emaranhados e estados comprimidos.

3.1 Solução da equação de von Neumann-Liouville para sistemas bipartites

Tendo dois operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ que agem no espaço de Hilbert de quatro dimensões, podemos decompô-los na base de operadores como

$$\hat{A} = \frac{1}{2^2} \sum_{r,s,\gamma,\phi} A(r,s,\gamma,\phi)\hat{G}(r,s) \otimes \hat{G}(\gamma,\phi) \tag{3.1}$$

e

$$\hat{B} = \frac{1}{2^2} \sum_{p,q,\mu,\nu} B(p,q,\mu,\nu) \hat{G}(p,q) \otimes \hat{G}(\mu,\nu). \tag{3.2}$$

A expressão mapeada do produto dos operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ será

$$(\hat{A}\hat{B})(m,n,\alpha,\beta) = Tr\left[\hat{G}^{\dagger}(m,n) \otimes \hat{G}^{\dagger}(\alpha,\beta)\hat{A}\hat{B}\right], \tag{3.3}$$

e, usando as decomposições (3.1 e 3.2), teremos

$$\begin{aligned} (\hat{A}\hat{B})(m,n,\alpha,\beta) &= \frac{1}{2^4} \sum_{r,s,\gamma,\phi} \sum_{p,q,\mu,\nu} A(r,s,\gamma,\phi) B(p,q,\mu,\nu) \\ \times \quad & Tr\left[\hat{G}^{\dagger}(m,n)\hat{G}(r,s)\hat{G}(p,q) \otimes \hat{G}^{\dagger}(\alpha,\beta)\hat{G}(\gamma,\phi)\hat{G}(\mu,\nu)\right]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Agora, usando a expressão (1.55) obtemos

$$\begin{aligned} (\hat{A}\hat{B})(m,n,\alpha,\beta) &= \frac{1}{2^8} \sum_{a,b,c,d} \sum_{\Theta,\Delta,\Xi,\Lambda} \sum_{r,s,p,q} \sum_{\gamma,\phi,\mu,\nu} A(r,s,\gamma,\phi) B(p,q,\mu,\nu) \\ \times \quad & \left[\exp\left\{\frac{2\pi i}{2}[a(m-r) + b(n-s) + c(m-p) + d(n-q)]\right\} \exp(i\pi bc)\right] \\ \times \quad & \left[\exp\left\{\frac{2\pi i}{2}[\Theta(\alpha-\gamma) + \Delta(\beta-\phi) + \Xi(\alpha-\mu) + \Lambda(\beta-\nu)]\right\} \exp(i\pi\Delta\Xi)\right]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Tendo a expressão mapeada do produto dos operadores de imediato podemos obter a expressão mapeada do comutador (para sistemas bipartites)

$$\begin{aligned} ([\hat{A},\hat{B}])(m,n,\alpha,\beta) &= \frac{1}{2^8} \sum_{a,b,c,d} \sum_{\Theta,\Delta,\Xi,\Lambda} \sum_{r,s,p,q} \sum_{\gamma,\phi,\mu,\nu} A(r,s,\gamma,\phi) B(p,q,\mu,\nu) \\ \times \quad & \exp\left\{\frac{2\pi i}{2}[a(m-r) + b(n-s) + c(m-p) + d(n-q)]\right\} \\ \times \quad & \exp\left\{\frac{2\pi i}{2}[\Theta(\alpha-\gamma) + \Delta(\beta-\phi) + \Xi(\alpha-\mu) + \Lambda(\beta-\nu)]\right\} \\ \times \quad & \left[\exp(i\pi bc)\exp(i\pi\Delta\Xi) - \exp(i\pi ad)\exp(i\pi\Theta\Lambda)\right]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Com as expressões acima podemos obter novamente uma expressão mapeada da equação de von Neumann-Liouville

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(t) = [H, \hat{\rho}(t)], \tag{3.7}$$

onde tanto o operador de estado quanto o hamiltoniano são operadores que agem no espaço de Hilbert de 4 dimensões. Se substituirmos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ por $\hat{H}$ e $\hat{\rho}(t)$ na expressão

(3.6) obtemos

$$
\begin{aligned}
([\hat{H}, \hat{\rho}(t)])(m, n, \alpha, \beta) &= \frac{1}{2^8} \sum_{a,b,c,d} \sum_{\Theta,\Delta,\Xi,\Lambda} \sum_{r,s,p,q} \sum_{\gamma,\phi,\mu,\nu} h(r, s, \gamma, \phi) \rho_\omega(p, q, \mu, \nu; t) \\
\times \quad & \exp\left\{ \frac{2\pi i}{2} [a(m-r) + b(n-s) + c(m-p) + d(n-q)] \right\} \\
\times \quad & \exp\left\{ \frac{2\pi i}{2} [\Theta(\alpha-\gamma) + \Delta(\beta-\phi) + \Xi(\alpha-\mu) + \Lambda(\beta-\nu)] \right\} \\
\times \quad & \Big[\exp(i\pi bc) \exp(i\pi\Delta\Xi) - \exp(i\pi ad) \exp(i\pi\Theta\Lambda) \Big],
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

onde $h(r, s, \gamma, \phi)$ e $\rho_\omega(p, q, \mu, \nu; t)$ são os mapeados do hamiltoniano e da função de Wigner respectivamente, como já discutido anteriormente. Nesse caso, para sistemas bipartites, a função liouvilliano será

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(m, n, \alpha, \beta, p, q, \mu, \nu) &= \frac{1}{2^8} \sum_{a,b,c,d} \sum_{\Theta,\Delta,\Xi,\Lambda} \sum_{r,s} \sum_{\gamma,\phi} h(r, s, \gamma, \phi) \\
\times \quad & \exp\left\{ \frac{2\pi i}{2} [a(m-r) + b(n-s) + c(m-p) + d(n-q)] \right\} \\
\times \quad & \exp\left\{ \frac{2\pi i}{2} [\Theta(\alpha-\gamma) + \Delta(\beta-\phi) + \Xi(\alpha-\mu) + \Lambda(\beta-\nu)] \right\} \\
\times \quad & \Big[\exp(i\pi bc) \exp(i\pi\Delta\Xi) - \exp(i\pi ad) \exp(i\pi\Theta\Lambda) \Big]
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

e, assim, de imediato escrevemos a expressão mapeada da equação de von Neumann-Liouville para sistemas bipartites

$$
i \frac{\partial}{\partial t} \rho_\omega(m, n, \alpha, \beta; t) = \sum_{r,s,\gamma,\phi} \mathcal{L}(m, n, r, s, \alpha, \beta, \gamma, \phi) \rho_\omega(r, s, \gamma, \phi; t), \tag{3.10}
$$

que possui a forma já apresentada anteriormente, como era de se esperar.

Mais uma vez a solução da equação (3.10) pode ser escrita de duas formas diferentes. Uma na forma da série dos liouvillianos

$$
\begin{aligned}
\rho_\omega(m, n, \alpha, \beta; t) &= \frac{1}{2^2} \sum_{p,q,\mu,\nu} \Big\{ \delta^{[2]}_{m,p} \delta^{[2]}_{n,q} \delta^{[2]}_{\alpha,\mu} \delta^{[2]}_{\beta,\nu} + it\mathcal{L}(m, n, \alpha, \beta, p, q, \mu, \nu) + \\
\frac{(it)^2}{2!} & \sum_{k,l,\eta,\xi} \mathcal{L}(m, n, \alpha, \beta, k, l, \eta, \xi) \mathcal{L}(k, l, \eta, \xi, p, q, \mu, \nu) \ldots \Big\} \rho_\omega(p, q, \mu, \nu)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

e outra na forma de uma função analítica, que nada mais é que a soma da série dos liouvillianos, ou seja,

$$
\rho_\omega(m, n, \alpha, \beta; t) = \frac{1}{2^2} \sum_{p,q,\mu,\nu} \mathcal{P}(m, n, p, q, \alpha, \beta, \mu, \nu; t) \rho_\omega(p, q, \mu, \nu; t = 0). \tag{3.12}
$$

Tendo as soluções podemos agora estudar a evolução temporal da função de Wigner no espaço de fase.

3.2 Evolução temporal da função de Wigner sob a ação da operação *controlled-NOT*

Já fazem parte do vocabulário da física as expressões *computação quântica* e *informação quântica* [27], e não caberá a nós, aqui, explicar os fundamentos e motivações dessas áreas da mecânica mecântica moderna; apesar disso usaremos as ideias de portas lógicas da computação quântica [24; 25] como aplicação para nosso formalismo.

As chamadas *portas lógicas quânticas* são operações unitárias e agem nos estados chamados de qubits, bits quânticos (análogo quântico ao código binário). Os qubits são representados por combinações lineares de estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ (estados de spin 1/2 podem representar qubits, onde $|0\rangle = |+\rangle$ e $|1\rangle = |-\rangle$); dessa forma esses estados pertencem ao espaço de Hilbert de duas dimensões. A base no espaço produto gerado por n qubits recebe o nome de *Base Computacional*, $\{|k_1, ..., k_n\rangle\}$ para $k_j = 0, 1$, que é uma base no espaço de Hilbert de 2^n dimensões [27]. Para se construir uma *porta lógica quântica* são necessárias apenas operações que agem no espaço de Hilbert de um qubit e uma operação chamada controlled-NOT ($cNOT$) que age no espaço produto para $n = 2$ [27]. Sendo assim, nos restringiremos aqui somente a esta operação. Tendo um estado bipartite $|k, \lambda\rangle$, onde $k, \lambda = 0, 1$, a ação da operação $cNOT$ nesse estado será definida como

$$\begin{aligned} cNOT|0, \lambda\rangle &= |0, \lambda\rangle \\ cNOT|1, \lambda\rangle &= |1, (\lambda + 1)mod2\rangle. \end{aligned} \tag{3.13}$$

A operação $cNOT$ pode ser escrita como uma combinação dos operadores de Pauli, sendo ela [27]

$$cNOT = \frac{1}{2}\left(\hat{1}_{(1)} + \hat{\sigma}_{z(1)}\right) \otimes \hat{1}_{(2)} + \frac{1}{2}\left(\hat{1}_{(1)} - \hat{\sigma}_{z(1)}\right) \otimes \hat{\sigma}_{x(2)}, \tag{3.14}$$

onde $\hat{1}_{(i)}$ é o operador identidade que age no espaço da i-ésima partícula. Sua expressão mapeada portanto será

$$cNOT_{\omega}(r, s, \gamma, \phi) = \frac{1}{2}\left\{1 + \exp\left(i\pi s\right)\right\} + \frac{1}{2}\left\{1 - exp(i\pi s)\right\} exp(i\pi\gamma). \tag{3.15}$$

Tendo o operador (3.14) podemos introduzir um operador hamiltoniano, ou seja, um operador de deslocamentos temporais, a partir dessa operação, na forma

$$H_{cNot} = \frac{\omega}{2}\left[\left(1_{(1)} + \hat{\sigma}_{z(1)}\right) \otimes 1_{(2)} + \left(1_{(1)} - \hat{\sigma}_{z(1)}\right) \otimes \hat{\sigma}_{x(2)}\right], \tag{3.16}$$

sendo ω um parâmetro de intensidade. Sua expressão mapeada será,

$$h_\omega(r,s,\gamma,\phi) = \frac{\omega}{2}\left[1+\exp(i\pi s)+\{1-\exp(i\pi s)\}\exp(i\pi\gamma)\right]. \tag{3.17}$$

Podemos agora escrever um estado arbitrário decomposto na base computacional bipartite como

$$|\psi\rangle = \sum_{k,\epsilon} C_{\{k,\epsilon\}}|k,\epsilon\rangle. \tag{3.18}$$

Como já mencionado, a base do espaço de Hilbert de spin 1/2 representa a base computacional na forma

$$\begin{aligned} |+\rangle &= |0\rangle \\ |-\rangle &= |1\rangle; \end{aligned} \tag{3.19}$$

sendo assim, podemos manter a notação definida em (1.68). O operador densidade de estado para o estado acima será

$$\hat{\rho} = \sum_{k,l,\epsilon,\eta} C_{\{k,\epsilon\}}C^*_{\{l,\eta\}}|k,\epsilon\rangle\langle l,\eta| \tag{3.20}$$

e, portanto, sua função de Wigner, usando o resultado obtido em (2.25), é

$$\rho_\omega(p,q,\mu,\nu) = \sum_{k,l,\epsilon,\eta} C_{\{k,\epsilon\}}C^*_{\{l,\eta\}}\delta^{[2]}_{q,l}\delta^{[2]}_{\nu,\eta}\exp\{i\pi p(l-k)\}\exp\{i\pi\mu(\eta-\epsilon)\}. \tag{3.21}$$

Tendo o hamiltoniano e o estado podemos calcular a evolução temporal do estado no espaço de fase para com isso verificar se há, e como é, a mudança nas correlações entre as partículas. Como já vimos, o estado após um tempo t será

$$\rho_\omega(m,n,\alpha,\beta;t) = \frac{1}{2^2}\sum_{p,q,\mu,\nu}\Big\{\delta^{[2]}_{m,p}\delta^{[2]}_{n,q}\delta^{[2]}_{\alpha,\mu}\delta^{[2]}_{\beta,\nu} + it\mathcal{L}(m,n,\alpha,\beta,p,q,\mu,\nu) +$$
$$\frac{(it)^2}{2!}\sum_{k,l,\eta,\xi}\mathcal{L}(m,n,\alpha,\beta,k,l,\eta,\xi)\mathcal{L}(k,l,\eta,\xi,p,q,\mu,\nu)\ldots\Big\}\rho_\omega(p,q,\mu,\nu). \tag{3.22}$$

O liouvilliano referente à expressão mapeada do hamiltoniano (3.17) é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(m,n,\alpha,\beta,p,q,\mu,\nu) &= \frac{1}{2^8}\sum_{a,b,c,d}\sum_{\Theta,\Delta,\Xi,\Lambda}\sum_{r,s}\sum_{\gamma,\phi} \\ &\times \frac{\omega}{2}\left[1+\exp(i\pi s)+\{1-exp(i\pi s)\}\,exp(i\pi\gamma)\right] \\ &\times \exp\left\{\frac{2\pi i}{2}[a(m-r)+b(n-s)+c(m-p)+d(n-q)]\right\} \\ &\times \exp\left\{\frac{2\pi i}{2}[\Theta(\alpha-\gamma)+\Delta(\beta-\phi)+\Xi(\alpha-)+\Lambda(\gamma-\nu)]\right\} \\ &\times [\exp(i\pi bc)\exp(i\pi\Delta\Xi)-\exp(i\pi ad)\exp(i\pi\Theta\Lambda)] \end{aligned} \tag{3.23}$$

e, somando em r, s, γ e ϕ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(m,n,\alpha,\beta,p,q,\mu,\nu) &= \frac{\omega}{2^5}\sum_{a,b,c,d}\sum_{\Theta,\Delta,\Xi,\Lambda}\delta^{[2]}_{a,0}\delta^{[2]}_{\Delta,0}\left[\left(\delta^{[2]}_{b,0}+\delta^{[2]}_{b,1}\right)\delta^{[2]}_{\Theta,0}\left(\delta^{[2]}_{b,0}-\delta^{[2]}_{b,1}\right)\delta^{[2]}_{\Theta,1}\right]\\
&\times \exp\{i\pi(ma+\beta\Delta+nb+\alpha\Theta)\}\\
&\times \exp\{i\pi[c(m-p)+d(n-q)+\Xi(\alpha-\mu)+\Lambda(\beta-\nu)]\}\\
&\times [\exp(i\pi bc)\exp(i\pi\Delta\Xi)-\exp(i\pi ad)\exp(i\pi\Theta\Lambda)]\,.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Sendo assim, somando sobre os demais índices resulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(m,n,\alpha,\beta,p,q,\mu,\nu) &= \frac{\omega}{2}\delta^{[2]}_{n,q}\delta^{[2]}_{\alpha,\mu}\{\exp(i\pi n)(\delta^{[2]}_{m,p+1})-\delta^{[2]}_{m,p})\delta^{[2]}_{\beta,\nu}+\\
&+ \exp(i\pi\alpha)(\delta^{[2]}_{\beta,\nu}-\delta^{[2]}_{\beta,\nu+1})\delta^{[2]}_{m,p}+\\
&+ \exp[i\pi(\alpha+n)](\delta^{[2]}_{m,p}\delta^{[2]}_{\beta,\nu+1}-\delta^{[2]}_{m,p+1}\delta^{[2]}_{\beta,\nu})\}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Portanto, tendo a expressão para o liouvilliano e a função de Wigner no instante $t=0$, podemos obter a função de Wigner em qualquer instante de tempo.

Podemos adiantar que se calcularmos os primeiros dois termos da série (3.22) perceberemos uma relação de ciclicidade que nos permitirá ressomar toda a série. Nesse sentido, é um aspecto característico da operação $cNOT$ a dependência no estado da primeira partícula e, por isso, essa relação de ciclicidade dependerá desses estados. Os cálculos detalhados referentes à soma das subséries envolvidas encontram-se no Apêndice B, sendo elas*

- $$(|0,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t)=(|0,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t=0); \tag{3.26}$$

- $$\begin{aligned}
(|0,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t) &= \frac{1}{2}\delta^{[2]}_{n,1}\exp(i\pi m)\exp[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]\\
\times\ \left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}+\exp(i\pi\alpha)\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\} &+ \frac{1}{2}\delta^{[2]}_{n,1}\exp(i\pi m)\exp[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]\\
\times\ \left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\exp(i\pi\alpha)\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\} &\exp(2i\omega t);
\end{aligned} \tag{3.27}$$

*Denotamos a expressão mapeada $(|k,\epsilon\rangle\langle l,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t)$ como a expressão mapeada do operador $|k,\epsilon\rangle\langle l,\eta|(t)$, onde os índices que rotulam o estado da primeira partícula foram explicitados devido a dependência já mencionada.

-
$$
\begin{aligned}
(|1,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t) &= \frac{1}{2}\delta^{[2]}_{n,0}\exp\left(i\pi m\right)\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right] \\
\times \quad & \left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}+\exp\left(i\pi\alpha\right)\delta^{[2]}_{\beta,\eta}\right\}+\frac{1}{2}\delta^{[2]}_{n,0}\exp\left(i\pi m\right)\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right] \\
\times \quad & \left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\exp\left(i\pi\alpha\right)\delta^{[2]}_{\beta,\eta}\right\}\exp\left(-2i\omega t\right) \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

e

-
$$
\begin{aligned}
(|1,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t) &= \frac{1}{2}\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}+\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\}+ \\
+ \quad & \frac{i}{2}\sin\left(2\omega t\right)\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta+1)\right]\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\}+ \\
+ \quad & \frac{1}{2}\cos\left(2\omega t\right)\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\}. \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Dessa forma, tendo as subséries para todos os possíveis estados da primeira partícula, podemos agora escrever um estado arbitrário, como já escrito anteriormente, na forma

$$
\hat{\rho}=\sum_{k,\epsilon,l,\eta}\Gamma_{\{k,\epsilon,l,\eta\}}|k,\epsilon\rangle\langle l,\eta|, \qquad (3.30)
$$

onde, supondo os coeficientes reais, temos

$$
\Gamma_{\{k,\epsilon,l,\eta\}}=C_{\{k,\epsilon\}}C_{\{l,\eta\}}, \qquad (3.31)
$$

para manter a forma de (3.20). Assim, somando sobre os índices da primeira partícula podemos reescrever o estado acima como

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho} \quad = \quad & \sum_{\epsilon,\eta}\Big\{\Gamma_{\{0,\epsilon,0,\eta\}}|0,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|+\Gamma_{\{0,\epsilon,1,\eta\}}|0,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|+ \\
+ \quad & \Gamma_{\{1,\epsilon,0,\eta\}}|1,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|+\Gamma_{\{1,\epsilon,1,\eta\}}|1,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|\Big\}. \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

O estado no tempo t pode ser escrito primeiramente como

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}(t) \quad = \quad & \sum_{\epsilon,\eta}\Big\{\Gamma_{\{0,\epsilon,0,\eta\}}(|0,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|)(t)+\Gamma_{\{0,\epsilon,1,\eta\}}(|0,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|)(t)+ \\
+ \quad & \Gamma_{\{1,\epsilon,0,\eta\}}(|1,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|)(t)+\Gamma_{\{1,\epsilon,1,\eta\}}(|1,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|)(t)\Big\}. \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

Sendo assim, a função de Wigner da expressão acima pode ser escrita na forma

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}(m,n,\alpha,\beta;t) \quad = \quad & \frac{1}{2^2}\sum_{\epsilon,\eta}\Big\{\Gamma_{\{0,\epsilon,0,\eta\}}(|0,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t)+ \\
+ \quad & \Gamma_{\{0,\epsilon,1,\eta\}}(|0,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t)+ \\
+ \quad & \Gamma_{\{1,\epsilon,0,\eta\}}(|1,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t)+ \\
+ \quad & \Gamma_{\{1,\epsilon,1,\eta\}}(|1,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t)\Big\}. \qquad (3.34)
\end{aligned}
$$

Porém, a forma da evolução temporal dos estados que compõem a expressão acima foi obtida em (3.26, 3.27, 3.28 e 3.29); sendo assim, obtemos de imediato a evolução temporal da função de Wigner do estado

$$
\begin{aligned}
& \hat{\rho}(m,n,\alpha,\beta;t) = \frac{1}{4}\sum_{\epsilon,\eta}\Big\{\Gamma_{\{0,\epsilon,0,\eta\}}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\delta^{[2]}_{n,0}\delta^{[2]}_{\beta,\eta} + \\
+ \quad & \frac{1}{2}\Gamma_{\{0,\epsilon,1,\eta\}}\exp\left(i\pi m\right)\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\delta^{[2]}_{n,1}\left[\delta^{[2]}_{\beta,\eta}+\exp\left(i\pi\alpha\right)\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right] + \\
+ \quad & \frac{1}{2}\Gamma_{\{1,\epsilon,0,\eta\}}\exp\left(i\pi m\right)\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\delta^{[2]}_{n,0}\left[\delta^{[2]}_{\beta,\eta}+\exp\left(i\pi\alpha\right)\delta^{[2]}_{\beta,\eta}\right] + \\
+ \quad & \frac{1}{2}\Gamma_{\{1,\epsilon,1,\eta\}}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\delta^{[2]}_{n,1}\left[\delta^{[2]}_{\beta,\eta}+\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right] + \\
+ \quad & \frac{1}{2}\Gamma_{\{0,\epsilon,1,\eta\}}\exp\left(2i\pi\omega t\right)\exp\left(i\pi m\right)\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\delta^{[2]}_{n.1}\left[\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\exp\left(i\pi\alpha\right)\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right] + \\
+ \quad & \frac{1}{2}\Gamma_{\{1,\epsilon,0,\eta\}}\exp\left(-2i\pi\omega t\right)\exp\left(i\pi m\right)\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\delta^{[2]}_{n.0}\left[\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\exp\left(i\pi\alpha\right)\delta^{[2]}_{\beta,\eta}\right] + \\
+ \quad & \frac{1}{2}\Gamma_{\{1,\epsilon,1,\eta\}}\Big[\cos\left(2\omega t\right)\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\delta^{[2]}_{n.1}\left[\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right] + \\
+ \quad & i\sin\left(2\omega t\right)\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta+1)\right]\delta^{[2]}_{n.1}\left[\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right]\Big]\Big\}. \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

Tendo a expressão (3.35) podemos obter, por exemplo, a função de Wigner reduzida de um corpo, as distribuições marginais e com isso discutir em que casos há presença de emaranhamento. A Wigner reduzida é obtida calculando

$$
\rho^{(2)}_{\omega}(\alpha,\beta;t) = \sum_{m,n}\rho_{\omega}(m,n,\alpha,\beta;t), \qquad (3.36)
$$

que é, explicitamente,

$$
\begin{aligned}
\rho^{(2)}_{\omega}(\alpha,\beta;t) \quad = \quad & \frac{1}{2^2}\sum_{\epsilon,\eta}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\Big\{2\Gamma_{\{0,\epsilon,0,\eta\}}\delta^{[2]}_{\beta,\eta}+\Gamma_{\{1,\epsilon,1,\eta\}}\left(\delta^{[2]}_{\beta,\eta}+\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right) + \\
+ \quad & \Gamma_{\{1,\epsilon,1,\eta\}}\left[\cos\left(2\omega t\right)+i\exp\left(i\pi\alpha\right)\sin\left(2\omega t\right)\left(\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right)\right]\Big\}. \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

Somando em η, e após algumas relações trigonométricas, obtemos

$$
\begin{aligned}
\rho^{(2)}_{\omega}(\alpha,\beta;t) \quad = \quad & \frac{1}{2^2}\sum_{\epsilon}\Big\{2\Gamma_{\{0,\epsilon,0,\beta\}}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\beta)\right] + \qquad (3.38) \\
+ \quad & \Gamma_{\{1,\epsilon,1,\beta\}}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\beta)\right]\left[2\cos^2\left(\omega t\right)+i\exp\left(i\pi\alpha\right)\sin\left(2\omega t\right)\right] + \\
+ \quad & \Gamma_{\{1,\epsilon,1,\beta-1\}}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\beta-1)\right]\left[2\sin^2\left(\omega t\right)-i\exp\left(i\pi\alpha\right)\sin\left(2\omega t\right)\right]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a distribuição marginal de ângulo será

$$\begin{aligned}
\Theta_\omega^{(2)}(\alpha;t) &= \sum_\beta \rho_\omega(\alpha,\beta;t) \\
&= \frac{1}{2}\sum_\epsilon \Big\{\Gamma_{\{0,\epsilon,0,1\}}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-1)\right] + \Gamma_{\{0,\epsilon,0,0\}}\exp\left[i\pi\alpha\epsilon\right] + \\
&+ \Gamma_{\{1,\epsilon,1,1\}}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-1)\right] + \Gamma_{\{1,\epsilon,1,0\}}\exp\left[i\pi\alpha\epsilon\right]\Big\}, \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

ou, de forma mais compacta,

$$\Theta_\omega^{(2)}(\alpha;t) = \frac{1}{2}\sum_{\epsilon,\eta}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\Big\{\Gamma_{\{0,\epsilon,0,\eta\}} + \Gamma_{\{1,\epsilon,1,\eta\}}\Big\}, \qquad (3.40)$$

que, como podemos perceber, é independente do tempo. Por sua vez, podemos calcular a distribuição marginal de momento angular, sendo ela

$$\begin{aligned}
J_\omega^{(2)}(\beta;t) &= \sum_\alpha \rho_\omega(\alpha,\beta;t) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\Gamma_{\{0,\beta,0,\beta\}} + \Gamma_{\{1,\beta,1,\beta\}}\cos^2(\omega t) + \Gamma_{\{1,\beta-1,1,\beta-1\}}\sin^2(\omega t)\right\}. \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

Tendo as distribuições marginais podemos utilizar a medida de emaranhamento proposta no capítulo anterior, expressão (2.40), que é

$$E_\omega = 4J(\beta=0)J(\beta=1) - |\Theta(\alpha=0) - \Theta(\alpha=1)|^2 \qquad (3.42)$$

e, substituindo as distribuições marginais (3.41) e (3.42), obtemos

$$\begin{aligned}
E_\omega(t) &= 4\left\{\Gamma_{\{0,1,0,1\}} + \Gamma_{\{1,1,1,1\}}\cos^2(\omega t) + \Gamma_{\{1,0,1,0\}}\sin^2(\omega t)\right\} \\
&\times \left\{\Gamma_{\{0,0,0,0\}} + \Gamma_{\{1,0,1,0\}}\cos^2(\omega t) + \Gamma_{\{1,1,1,1\}}\sin^2(\omega t)\right\} - \\
&- \left\{\Gamma_{\{0,1,0,0\}} + \Gamma_{\{1,1,1,0\}} + \Gamma_{\{0,0,0,1\}} + \Gamma_{\{1,0,1,1\}}\right\}^2. \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

A expressão acima nos fornece a evolução temporal do emaranhamento para um estado arbitrário, de modo que podemos com ela obter o grau de emaranhamento em cada instante de tempo para qualquer estado. É interessante ressaltarmos a importância das distribuições marginais de momento angular e ângulo, pois nelas estão contidas as características da evolução temporal do emaranhamento onde, no caso apresentado, a contribuição que dá a variação no grau de emaranhamento ao longo do tempo é feito exclusivamente pela distribuição marginal de momento angular.

A notação usando os coeficientes $\Gamma_{\{k,\epsilon,l,\eta\}}$ na medida de emaranhamento (3.43), não é conveniente, no sentido de que, tendo um estado específico, ainda devemos encontrar quem são os coeficientes antes de obtermos a medida do emaranhamento de fato. Portanto, para facilitar a notação usamos novamente o estado arbitrário

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle, \tag{3.44}$$

sendo os coeficientes $\Gamma_{\{k,\epsilon,l,\eta\}}$

$$\Gamma_{\{k,\epsilon,l,\eta\}} = C_{\{k,\epsilon\}}C_{\{l,\eta\}}, \tag{3.45}$$

onde, nesse caso, temos

$$\begin{aligned} C_{\{0,0\}} &= \alpha \\ C_{\{0,1\}} &= \beta \\ C_{\{1,0\}} &= \gamma \\ C_{\{1,1\}} &= \delta, \end{aligned} \tag{3.46}$$

sendo que assim, reescrevendo (3.47), obtemos

$$\begin{aligned} E_\omega(t) &= 4\left\{\beta^2 + \delta^2\cos^2(\omega t) + \gamma^2\sin^2(\omega t)\right\} \\ &\times \left\{\alpha^2 + \gamma^2\cos^2(\omega t) + \delta^2\sin^2(\omega t)\right\} - \\ &- 4\left\{\beta\alpha + \gamma\delta\right\}^2. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Agora, basta identificarmos os valores dos coeficientes do estado (3.44), para obtermos o grau de emaranhamento do estado sob a ação do hamiltoniano que representa a operação *cNOT*, em qualquer instante de tempo. Uma característica da evolução temporal do emaranhamento fica evidente na expressão (3.47): se substituirmos $\sin^2(\omega t) = 1 - \cos^2(\omega t)$ nela, teremos

$$\begin{aligned} E_\omega(t) &= 4\left\{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2\cos^2(\omega t) - \gamma^2\cos^2(\omega t)\right\} \\ &\times \left\{\alpha^2 + \delta^2 + \gamma^2\cos^2(\omega t) - \delta^2\cos^2(\omega t)\right\} - \\ &- 4\left\{\beta\alpha + \gamma\delta\right\}^2. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Sendo assim, temos que, para todos os estados em que $\gamma = \delta$, a operação $cNOT$ mantém o grau de emaranhamento do sistema inalterado. A seguir apresentamos um exemplo de caso extremo, onde os estados são maximamente emaranhados e sob a ação da operação $cNOT$ passam a ser estados produto.

3.2.1 Exemplo: estados de Bell

Como já mencionado os estados de Bell são estados que possuem grau de emaranhamento máximo. E, sob a ação da operação *cNOT*, são transformados em estados produto. Sendo eles

$$|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle \pm |10\rangle\right) \quad \text{e} \quad |\Phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right), \tag{3.49}$$

podemos medir a variação no grau de emaranhamento ao longo do tempo. Calculamos separadamente cada caso.

- Caso:

  $$|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle \pm |10\rangle\right); \tag{3.50}$$

  após a ação da operação $cNOT$ obtemos

  $$cNOT|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \pm |1\rangle\right) \otimes |1\rangle. \tag{3.51}$$

  O grau de emaranhamento, passado um tempo t do início da ação do hamiltoniano que representa a $cNOT$, é

  $$E_{\omega}(t) = \left\{1 + \sin^2(\omega t)\right\}\cos^2(\omega t). \tag{3.52}$$

- Caso:

  $$|\Phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right); \tag{3.53}$$

  o estado transformado será

  $$cNOT|\Phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \pm |1\rangle\right) \otimes |0\rangle. \tag{3.54}$$

  Calculamos agora o grau de emaranhamento em um instante t, que é

  $$E_{\omega}(t) = \left\{1 + \sin^2(\omega t)\right\}\cos^2(\omega t). \tag{3.55}$$

Com isso percebemos que o emaranhamento como função do tempo é o mesmo para todos os estados de Bell, oscilando no tempo entre estado produto e maximamente emaranhado, cujo período é

$$t = \frac{\pi}{\omega}. \tag{3.56}$$

Podemos representar graficamente $E_{\omega}(t)$ como função do tempo, fixando arbitrariamente o valor de ω em 2π. Na figura 3.1 verificamos que o estado, sob a ação dessa

□

Figura 3.1: *Gráfico do emaranhamento em alguns instantes de tempo para o caso em que a constante de acoplamento* $\omega = 2\pi$

operação, segue oscilando entre sua configuração inicial, estado maximamente emaranhado, e estado produto. Isso segue ocorrendo enquanto durar a ação da operação sobre o estado.

3.3 Estados comprimidos e estados emaranhados

Seguindo com os sistemas bipartites de spin 1/2, faremos uma segunda aplicação da evolução temporal no espaço de fase quântico discreto. Nessa segunda aplicação, usaremos as ideias de criação de estados comprimidos de spins propostas por Kitagawa e Ueda [31], e usaremos os resultados de estados comprimidos para comparar com o emaranhamento. Já é frequente na literatura encontrarmos trabalhos onde a medida da compressão dos estados está associada com o grau de emaranhamento do sistema [32; 33; 44; 45; 47]; há situações onde são obtidas expressões onde emaranhamento e compressão dos estados são equivalentes, ligadas por uma relação linear entre elas [46; 48]. Em alguns casos, como sistemas de muitos corpos por exemplo, caracterizar compressão no estado é uma das poucas formas viáveis de se caracterizar emaranhamento [44]. Essa relação tão próxima entre estados emaranhados e estados comprimidos ocorre pois para se criar estados comprimidos são necessárias operações não locais, ou seja, operações que atuem em todas as partes que compoem o sistema [31] - pois assim garantimos operações que não irão somente alterar a orientação do estado dos spins na esfera de Bloch, mas também impor correlações ao sistema. Sendo assim, ao se criar estados comprimidos como consequência criamos correlações quânticas no sistema, podendo ela ser na forma de emaranhamento. Porém, devemos ressaltar que criar emaranhamento via compressão de estados é uma condição suficiente, porém não necessária, uma vez que pode existir emaranhamento sem compressão do estado, mas não podemos comprimir um sistema bipartite globalmente sem emaranhar o mesmo [44].

A ideia da aplicação é a seguinte: assumimos de partida um estado coerente bipartite de spin 1/2, aplicamos uma operação que introduz compressão ao estado, sendo que a operação usada será $\hat{J}_z^2 = \frac{1}{4}[\hat{\sigma}_z \otimes 1 + 1 \otimes \hat{\sigma}_z]^2$, onde $\hat{J}_z$ é o spin total na direção z, como proposto por Kitagawa e Ueda em [31]. Portanto, tendo o estado e a operação, calculamos a evolução temporal do sistema no espaço de fase quântico discreto, e comparamos a dinâmica do emaranhamento, calculada a partir das distribuições marginais, com a variação da compressão do estado ao longo tempo.

Tendo o estado coerente para o $SU(2)$

$$|s:\theta,\phi\rangle = \sum_{k=0}^{2s} \begin{pmatrix} 2s \\ k \end{pmatrix}^{1/2} \left\{\cos\left(\theta/2\right)^{2s-k} \exp\left(i\phi k\right) \sin\left(\theta/2\right)^{k}\right\} |s, s-k\rangle, \tag{3.57}$$

onde s é o spin total, k a sua projeção no eixo z e os ângulos θ e ϕ determinam sua orientação na esfera de Bloch. Escolhemos um estado com orientação $\theta = \pi/2$ e $\phi = 0$, de tal forma que teremos um estado com momento angular na direção do eixo x da esfera de Bloch. Particularizando para o caso de dois spins 1/2 e selecionando o tripleto, temos

$$|\pi/2,0\rangle = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2}\left(\begin{array}{c}2\\k\end{array}\right)^{1/2}|1,1-k\rangle \tag{3.58}$$

e assim, se explicitarmos os binômios de Newton, teremos

$$|\pi/2,0\rangle = \frac{1}{2}\left\{|1,1\rangle + \sqrt{2}|1,0\rangle + |1,-1\rangle\right\}. \tag{3.59}$$

Porém, o estado acima está escrito na representação do momento angular de spin total, onde $|1,1\rangle, |1,0\rangle$ e $|1,-1\rangle$ constituem o conjunto do estado tripleto do $SU(2)$. Dessa forma, para manter a concordância com o que viemos fazendo até o momento, devemos escrever esse estado no espaço produto dos estados individuais, onde

$$\begin{aligned} |1,1\rangle &= |00\rangle \\ |1,-1\rangle &= |11\rangle \\ |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{|01\rangle + |10\rangle\}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Sendo assim, teremos

$$|\pi/2,0\rangle = \frac{1}{2}\{|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\}, \tag{3.61}$$

ou melhor,

$$|\pi/2,0\rangle = \frac{1}{2}\sum_{k,\xi}|k,\xi\rangle. \tag{3.62}$$

Agora calculamos o operador densidade do estado coerente, que é

$$\hat{\rho} = |\pi/2,0\rangle\langle\pi/2,0| = \frac{1}{4}\sum_{k,l,\xi,\eta}|k,\xi\rangle\langle l,\eta| \tag{3.63}$$

e então, usando a expressão (2.25), teremos a função de Wigner do estado coerente

$$\rho_\omega(r,s,\mu,\nu) = \frac{1}{2^4}\sum_{k,l,\xi,\eta}\exp\left[i\pi r(k-l)\right]\exp\left[i\pi\mu(\xi-\eta)\right]\delta^{[2]}_{s,l}\delta^{[2]}_{\eta,\nu}. \tag{3.64}$$

Como já dito anteriormente, estudaremos a evolução temporal do estado coerente sob a ação de um hamiltoniano que o comprima. O operador responsável por essa ação será

$$\hat{H} = \frac{\chi}{4}\hat{J}_z^2 = \frac{\chi}{2}\left(\hat{1} + \hat{\sigma}_{1z}\otimes\hat{\sigma}_{2z}\right), \tag{3.65}$$

onde χ é um parâmetro de intensidade, e sua expressão mapeada é

$$h_\omega(m,n,\alpha,\beta) = \frac{\chi}{2}\{1 + \exp(i\pi n)\exp(i\pi\beta)\}. \tag{3.66}$$

Na seção anterior, quando obtivemos a evolução temporal do sistema sob a ação da operação $cNOT$ fizemos o cálculo da evolução temporal expandindo na série dos liouvillianos e somamos a ação deles em diversas ordens sobre a função de Wigner que representava o estado de partida. Porém, nessa seção calcularemos a função analítica responsável pela evolução temporal do sistema no espaço de fase discreto, e então, somente após obtermos essa expressão, calcularemos a ação dela sobre o estado coerente, obtendo assim a evolução temporal da função de Wigner desse estado. Para isso usaremos a expressão

$$\mathcal{P}(m,n,r,s,\alpha,\beta,\gamma,\delta;t) = Tr[G^{\dagger}(m,n,\alpha,\beta)U^{\dagger}(t)G(r,s,\gamma,\delta)U(t)], \tag{3.67}$$

onde, nesse caso,

$$U(t) = \exp[-it\frac{\chi}{2}(\hat{1} + \hat{\sigma}_{1z} \otimes \hat{\sigma}_{2z})]. \tag{3.68}$$

Os cálculos detalhados relativos a obtenção da expressão da função responsável pela evolução temporal da função de Wigner encontram-se no Apêndice C. O resultado final é simplesmente, sendo usado $\pi\tau = \frac{\chi t}{2}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(m,n,r,s,\alpha,\beta,\gamma,\delta|\tau) &= 2^2 \delta^{[2]}_{n,s}\delta^{[2]}_{\beta,\delta}\Big\{\delta^{[2]}_{m,r}\delta^{[2]}_{\alpha,\gamma} f_1(n,\beta,\tau) + \\ &+ \delta^{[2]}_{m,r+1}\delta^{[2]}_{\alpha,\gamma+1} f_2(n,\beta,\tau)\Big\}, \end{aligned} \tag{3.69}$$

onde, por simplicidade, foram introduzidas as funções

$$\begin{aligned} f_1(n,\beta,\tau) &= \cos^2(\pi\tau) + i\exp[i\pi(n+\beta)]\sin(\pi\tau)\cos(\pi\tau) \\ f_2(n,\beta,\tau) &= \sin^2(\pi\tau) - i\exp[i\pi(n+\beta)]\sin(\pi\tau)\cos(\pi\tau). \end{aligned} \tag{3.70}$$

Tendo então a expressão da função responsável pela evolução temporal no espaço de fase discreto, (3.69), podemos agora calcular a evolução temporal do estado coerente. Sendo assim, tendo a expressão (3.64), sua evolução temporal pode ser calculada fazendo

$$\rho_\omega(m,n,\alpha,\beta;\tau) = \frac{1}{2^2}\sum_{r,s,\mu,\nu}\mathcal{P}(m,n,r,s,\alpha,\beta,\mu,\nu|\tau)\rho_\omega(r,s,\mu,\nu). \tag{3.71}$$

Substituindo (3.64) e (3.69), teremos

$$\begin{aligned} \rho_\omega(m,n,\alpha,\beta;\tau) = \frac{1}{2^4}\sum_{r,s,\mu,\nu}\sum_{k,l,\xi,\eta}\delta^{[2]}_{n,s}\delta^{[2]}_{\beta,\nu}\Big\{\delta^{[2]}_{m,r}\delta^{[2]}_{\alpha,\mu} f_1(n,\beta,\tau) + \\ + \delta^{[2]}_{m,r+1}\delta^{[2]}_{\alpha,\mu+1} f_2(n,\beta,\tau)\Big\}\Big\{\exp[i\pi r(k-l)]\exp[i\pi\mu(\xi-\eta)]\delta^{[2]}_{s,l}\delta^{[2]}_{\eta,\nu}\Big\} \end{aligned} \tag{3.72}$$

e, somando sobre r, s, μ e ν, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_\omega(m,n,\alpha,\beta;\tau) &= \frac{1}{2^4}\sum_{k,l,\xi,\eta}\delta^{[2]}_{n,l}\delta^{[2]}_{\beta,\eta}\exp[i\pi m(k-l)]\exp[i\pi\alpha(\xi-\eta)] \\ &\times \Big\{f_1(n,\beta,\tau) + \exp[i\pi(k-l)]\exp[i\pi(\xi-\eta)]f_2(n,\beta,\tau)\Big\}. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Apenas por completeza podemos verificar a condição inicial do sistema, fazendo $\tau = 0$ em (3.73). Temos primeiramente

$$\begin{aligned} f_1(n,\beta,\tau) &= 1 \\ f_2(n,\beta,\tau) &= 0 \end{aligned}$$

e, sendo assim, por fim obtemos

$$\rho_\omega(m,n,\alpha,\beta;\tau=0) = \frac{1}{2^4}\sum_{k,l,\xi,\eta} \delta^{[2]}_{n,l}\delta^{[2]}_{\beta,\eta} \exp\left[i\pi m(k-l)\right]\exp\left[i\pi\alpha(\xi-\eta)\right],$$

que, como era de se esperar, é o estado inicial (3.64).

Voltando para a expressão (3.73), podemos agora obter a função de Wigner reduzida de um corpo, bem como as distribuições marginais, para com isso finalmente encontrarmos a dinâmica do emaranhamento do sistema. A função de Wigner reduzida é obtida calculando

$$\rho^{(1)}_\omega(m,n;\tau) = \sum_{\alpha,\beta}\rho_\omega(m,n,\alpha,\beta;\tau) \tag{3.74}$$

do que, substituindo (3.73),

$$\begin{aligned} \rho^{(1)}_\omega(m,n,\tau) = &\frac{1}{2^4}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{k,l,\xi,\eta} \delta^{[2]}_{n,l}\delta^{[2]}_{\beta,\eta}\exp\left[i\pi m(k-l)\right]\exp\left[i\pi\alpha(\xi-\eta)\right] \\ \times &\Big\{f_1(n,\beta,\tau)+\exp\left[i\pi(k-l)\right]\exp\left[i\pi(\xi-\eta)\right]f_2(n,\beta,\tau)\Big\}. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Somando sobre α, l, ξ e η obtemos

$$\begin{aligned} \rho^{(1)}_\omega(m,n,\tau) &= \frac{1}{2^3}\sum_{k,\beta}\exp\left[i\pi m(k-n)\right]\Big\{f_1(n,\beta,\tau)+ \\ &+ \exp\left[i\pi(k-n)\right]f_2(n,\beta,\tau)\Big\} \end{aligned} \tag{3.76}$$

e agora, somando sobre β

$$\begin{aligned} \rho^{(1)}_\omega(m,n,\tau) &= \frac{1}{2^3}\sum_{k}\exp\left[i\pi m(k-n)\right]\Big\{f_1(n,1,\tau)+f_1(n,2,\tau)+ \\ &+ \exp\left[i\pi(k-n)\right]\left[f_2(n,1,\tau)+f_2(n,2,\tau)\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Porém, facilmente verificamos que

$$\begin{aligned} f_1(n,1,\tau)+f_1(n,2,\tau) &= 2\cos^2(\pi\tau) \\ f_2(n,1,\tau)+f_2(n,2,\tau) &= 2\sin^2(\pi\tau), \end{aligned} \tag{3.78}$$

do que finalmente obtemos a função de Wigner reduzida de um corpo

$$\begin{aligned}
\rho_{\omega}^{(1)}(m,n,\tau) &= \frac{1}{2^2}\sum_k \exp\left[i\pi m(k-n)\right]\Big\{\cos^2(\pi\tau) + \\
&+ \exp\left[i\pi(k-n)\right]\sin^2(\pi\tau)\Big\}. \qquad (3.79)
\end{aligned}$$

Na sequência, podemos calcular as distribuições marginais de ângulo e momento angular. Calculamos a distribuição de ângulo

$$\begin{aligned}
\Theta(m;\tau) &= \sum_n \rho_{\omega}^{(1)}(m,n;\tau) \\
&= \frac{1}{2^2}\sum_n\sum_k \exp\left[i\pi m(k-n)\right]\Big\{\cos^2(\pi\tau) + \exp\left[i\pi(k-n)\right]\sin^2(\pi\tau)\Big\},
\end{aligned}$$

que, de imediato, resulta

$$\begin{aligned}
\Theta(m;\tau) &= \frac{1}{2}\Big\{\left[1+\exp\left(i\pi m\right)\right]\delta_{m,0}^{[2]}\cos^2(\pi\tau) + \\
&+ \left[1-\exp\left(i\pi m\right)\right]\delta_{m,1}^{[2]}\sin^2(\pi\tau)\Big\}. \qquad (3.80)
\end{aligned}$$

E a distribuição de momento angular

$$\begin{aligned}
J(n;\tau) &= \sum_m \rho_{\omega}^{(1)}(m,n;\tau) \\
&= \frac{1}{2^2}\sum_m\sum_k \exp\left[i\pi m(k-n)\right]\Big\{\cos^2(\pi\tau) + \exp\left[i\pi(k-n)\right]\sin^2(\pi\tau)\Big\},
\end{aligned}$$

que será

$$J(n;\tau) = \frac{1}{2}.$$

Tendo as distribuições marginais obtemos a medida do emaranhamento da função de Wigner, (3.73), que pode ser obtida tendo a função

$$E_{\omega}(\tau) = 4J(n=0;\tau)J(n=1;\tau) - |\Theta(m=0;\tau) - \Theta(m=1;\tau)|^2, \qquad (3.81)$$

onde para esse caso temos

$$\begin{aligned}
\Theta(0;\tau) &= \cos^2(\pi\tau) \\
\Theta(1;\tau) &= \sin^2(\pi\tau) \qquad (3.82)
\end{aligned}$$

e

$$J(0;\tau) = J(1;\tau) = \frac{1}{2}.$$

Então, substituindo os valores obtidos acima teremos

$$\begin{aligned} E_\omega(\tau) &= 1 - \Big\{ \cos^2(\pi\tau) - \sin^2(\pi\tau) \Big\}^2 \\ &= 1 - \Big\{ \cos(2\pi\tau) \Big\}^2, \end{aligned} \tag{3.83}$$

ou seja,

$$E_\omega(\tau) = \sin^2(2\pi\tau); \tag{3.84}$$

porém, como anteriormente escrevemos

$$\tau = \frac{\chi}{2\pi} t, \tag{3.85}$$

então

$$E_\omega(t) = \sin^2(\chi t). \tag{3.86}$$

Da mesma forma que ocorreu na aplicação feita anteriormente, percebemos que nesse caso o estado evolui no tempo oscilando entre estado maximamente emaranhado e estado produto. Analisando os períodos percebemos que para $t = n\pi/\chi$, onde n é um número inteiro, temos um estado produto; já a cada instante $t = (2n+1)\pi/2\chi$ o estado é maximamente emaranhado e em todos os tempos intermediários temos graus intermediários de emaranhamento.

Tendo a dinâmica do emaranhamento do sistema, nosso próximo passo deve ser calcular a compressão do estado. Uma forma de medir o grau de compressão do sistema é via dispersões do momento angular, para o que usaremos a desigualdade proposta por Kitagawa [31]

$$\langle(\Delta\hat{S}_y)^2\rangle\langle(\Delta\hat{S}_z)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle\hat{S}_x\rangle|^2; \tag{3.87}$$

sempre que a condição de igualdade for satisfeita teremos um estado coerente e no caso das desigualdades há compressão do estado. Sendo $\hat{S}_i$ o spin total na direção i, sua dispersão é

$$\langle(\Delta\hat{S}_i)^2\rangle = \langle\hat{S}_i^2\rangle - \langle\hat{S}_i\rangle^2 \tag{3.88}$$

e o valor médio deste observável é obtido no espaço de fase discreto calculando

$$\langle\hat{S}_i\rangle(t) = \sum_{m,n,\alpha,\beta} S_i(m,n,\alpha,\beta)\rho_\omega(m,n,\alpha,\beta;t). \tag{3.89}$$

No nosso caso escolhemos um estado coerente orientado na direção x da esfera de Bloch e, sendo assim, o compressão desse estado acontecerá no plano yz; portanto é necessário que as dispersões dependam de algum parâmetro de rotação em torno do eixo x, pois se assim for, poderemos acompanhar a variação das dispersões em todo o plano yz. Para isso, necessitamos obter o observável transformado, que pode ser escrito como

$$\bar{S}_i = \exp(-i\lambda S_x)\hat{S}_i \exp(i\lambda S_x), \tag{3.90}$$

do que, os três operadores de spin sob essa transformação serão explicitamente

$$\bar{S}_x = \hat{S}_x, \tag{3.91}$$

$$\bar{S}_y = \hat{S}_y \cos(2\lambda) - \hat{S}_z \sin(2\lambda) \tag{3.92}$$

e

$$\bar{S}_z = \hat{S}_z \cos(2\lambda) + \hat{S}_y \sin(2\lambda). \tag{3.93}$$

Assim, podemos escrever as expressões mapeadas desses operadores

$$\bar{S}_x(m,n,\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\left\{\exp(i\pi m) + \exp(i\pi\alpha)\right\}, \tag{3.94}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_y(m,n,\alpha,\beta) &= \frac{i}{2}\left\{\exp\left[i\pi(m+n)\right] + \exp\left[i\pi(\alpha+\beta)\right]\right\}\cos(2\lambda) - \\ &- \frac{1}{2}\left\{\exp(i\pi n) + \exp(i\pi\beta)\right\}\sin(2\lambda) \end{aligned} \tag{3.95}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{S}_z(m,n,\alpha,\beta) &= \frac{i}{2}\left\{\exp(i\pi n) + \exp(i\pi\beta)\right\}\cos(2\lambda) + \\ &+ \frac{1}{2}\left\{\exp\left[i\pi(m+n)\right] + \exp\left[i\pi(\alpha+\beta)\right]\right\}\sin(2\lambda). \end{aligned} \tag{3.96}$$

Tendo as expressões acima, agora devemos calcular os valores médios dos operadores e seus valores quadraticos, a fim de obtermos suas dispersões. Então, o valor médio do operador de spin na direção x é

$$\langle\bar{S}_x\rangle(\tau) = \sum_{m,n,\alpha,\beta} \rho_\omega(m,n,\alpha,\beta;\tau)\bar{S}_x(m,n,\alpha,\beta), \tag{3.97}$$

e, substituindo a expressão mapeada do operador e a função de Wigner, teremos

$$\langle\bar{S}_x\rangle(\tau) = \sum_{m,n,\alpha,\beta} \frac{1}{2}\left\{\exp(i\pi m) + \exp(i\pi\alpha)\right\} \tag{3.98}$$

$$\times \quad \frac{1}{2^4}\sum_{k,l,\mu,\nu} \delta^{[2]}_{n,l}\delta^{[2]}_{\beta,\nu} \exp\left[i\pi m(k-l)\right]\exp\left[i\pi\alpha(\mu-\nu)\right] \tag{3.99}$$

$$\times \quad \left\{f_1(n,\beta;\tau) + \exp\left[i\pi(k-l)\right]\exp\left[i\pi(\mu-\nu)\right]f_2(n,\beta;\tau)\right\}, \tag{3.100}$$

do que, somando, resulta

$$\langle\bar{S}_x\rangle(t) = \cos(2\pi\tau) = \cos(\chi t). \tag{3.101}$$

Os valores médios para o observável na direção y e z podem ser calculando simultaneamente, pois sendo eles

$$\begin{aligned}\bar{S}_y(m,n,\alpha,\beta) &= \frac{i}{2}\left\{\exp\left[i\pi(m+n)\right]+\exp\left[i\pi(\alpha+\beta)\right]\right\}\cos(2\lambda) - \\ &- \frac{1}{2}\left\{\exp(i\pi n)+\exp(i\pi\beta)\right\}\sin(2\lambda)\end{aligned} \tag{3.102}$$

e

$$\begin{aligned}\bar{S}_z(m,n,\alpha,\beta) &= \frac{i}{2}\left\{\exp(i\pi n)+\exp(i\pi\beta)\right\}\cos(2\lambda) + \\ &+ \frac{1}{2}\left\{\exp\left[i\pi(m+n)\right]+\exp\left[i\pi(\alpha+\beta)\right]\right\}\sin(2\lambda),\end{aligned} \tag{3.103}$$

identificando

$$\begin{aligned}A(m,n,\alpha,\beta) &= \exp\left[i\pi(m+n)\right]+\exp\left[i\pi(\alpha+\beta)\right] \\ B(m,n,\alpha,\beta) &= \exp(i\pi n)+\exp(i\pi\beta),\end{aligned}$$

teremos

$$\begin{aligned}\bar{S}_y(m,n,\alpha,\beta) &= \frac{i}{2}A(m,n,\alpha,\beta)\cos(2\lambda) - \\ &- \frac{1}{2}B(m,n,\alpha,\beta)\sin(2\lambda)\end{aligned} \tag{3.104}$$

e

$$\begin{aligned}\bar{S}_z(m,n,\alpha,\beta) &= \frac{i}{2}B(m,n,\alpha,\beta)\cos(2\lambda) + \\ &+ \frac{1}{2}A(m,n,\alpha,\beta)\sin(2\lambda).\end{aligned} \tag{3.105}$$

Se somarmos a função $A(m,n,\alpha,\beta)$ com a função de Wigner sobre todos os índices teremos

$$\begin{aligned}&\sum_{m,n,\alpha,\beta}\rho_\omega(m,n,\alpha,\beta;t)A(m,n,\alpha,\beta) = \\ = &\sum_{m,n,\alpha,\beta}\frac{1}{2^4}\sum_{k,l,\mu,\nu}\delta^{[2]}_{n,l}\delta^{[2]}_{\beta,\nu}\exp\left[i\pi m(k-l)\right]\exp\left[i\pi\alpha(\mu-\nu)\right] \\ \times &\left\{f_1(n,\beta;t)+\exp\left[i\pi(k-l)\right]\exp\left[i\pi(\mu-\nu)\right]f_2(n,\beta;t)\right\} \\ \times &\exp\left[i\pi(m+n)\right]+\exp\left[i\pi(\alpha+\beta)\right],\end{aligned} \tag{3.106}$$

e somando sobre os índices k, l, μ e ν

$$\sum_{m,n,\alpha,\beta} \rho_\omega(m,n,\alpha,\beta;t) A(m,n,\alpha,\beta) = 0. \tag{3.107}$$

Agora, fazemos o mesmo cálculo para a função $B(m,n,\alpha,\beta)$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m,n,\alpha,\beta} \rho_\omega(m,n,\alpha,\beta;t) B(m,n,\alpha,\beta) = \\
= & \sum_{m,n,\alpha,\beta} \frac{1}{2^4} \sum_{k,l,\mu,\nu} \delta^{[2]}_{n,l} \delta^{[2]}_{\beta,\nu} \exp\left[i\pi m(k-l)\right] \exp\left[i\pi\alpha(\mu-\nu)\right] \\
\times & \Big\{ f_1(n,\beta;t) + \exp\left[i\pi(k-l)\right] \exp\left[i\pi(\mu-\nu)\right] f_2(n,\beta;t) \Big\} \\
\times & \exp(i\pi n) + \exp(i\pi\beta),
\end{aligned} \tag{3.108}$$

e então,

$$\sum_{m,n,\alpha,\beta} \rho_\omega(m,n,\alpha,\beta;t) B(m,n,\alpha,\beta) = 0.$$

Portanto, os valores médios dos operadores $\bar{S}_y$ e $\bar{S}_z$ são

$$\langle \bar{S}_y \rangle(t) = 0 \tag{3.109}$$

e, da mesma forma,

$$\langle \bar{S}_z \rangle(t) = 0. \tag{3.110}$$

Finalmente, para obtermos as dispersões devemos calcular o valor médio do quadrado dos operadores, onde os operadores $\bar{S}_y$ e $\bar{S}_z$ ao quadrado são

$$\bar{S}_y^2 = \frac{\hat{1}}{2} - 2S_{1y} \otimes S_{2y} \cos^2(2\lambda) + 2S_{1z} \otimes S_{2z} \sin^2(2\lambda) - \tag{3.111}$$
$$- \; 2\left[S_{1y} \otimes S_{2z} + S_{1z} \otimes S_{2y}\right] \sin(2\lambda) \cos(2\lambda) \tag{3.112}$$

e

$$\bar{S}_z^2 = \frac{\hat{1}}{2} + 2S_{1z} \otimes S_{2z} \cos^2(2\lambda) + 2S_{1y} \otimes S_{2y} \sin^2(2\lambda) + \tag{3.113}$$
$$+ \; 2\left[S_{1y} \otimes S_{2z} + S_{1z} \otimes S_{2y}\right] \sin(2\lambda) \cos(2\lambda). \tag{3.114}$$

Por fim, calculando as expressões mapeadas desses operadores obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{S}_y^2(m,n,\alpha,\beta) = & \frac{1}{2} - \frac{i^2}{2} \exp\left[i\pi(\alpha+\beta)\right] \exp\left[i\pi(m+n)\right] \cos^2(2\lambda) + \\
+ & \frac{1}{2} \exp(i\pi\beta) \exp(i\pi n) \sin^2(2\lambda) - \frac{i}{2} \Big[\exp(i\pi\beta) \exp\left[i\pi(m+n)\right] + \\
+ & \exp\left[i\pi(\alpha+\beta)\right] \exp(i\pi n) \Big] \sin(2\lambda) \cos(2\lambda),
\end{aligned} \tag{3.115}$$

e da mesma forma

$$\begin{aligned}
\bar{S}_z^2(m,n,\alpha,\beta) &= \frac{1}{2}+\frac{i^2}{2}\exp\left[i\pi(\alpha+\beta)\right]\exp\left[i\pi(m+n)\right]\sin^2(2\lambda)+ \\
&+ \frac{1}{2}\exp(i\pi\beta)\exp(i\pi n)\cos^2(2\lambda)+\frac{i}{2}\Big[\exp(i\pi\beta)\exp\left[i\pi(m+n)\right]+ \\
&+ \exp\left[i\pi(\alpha+\beta)\right]\exp(i\pi n)\Big]\sin(2\lambda)\cos(2\lambda). \qquad (3.116)
\end{aligned}$$

Podemos identificar nas expressões anteriores, multiplicando os termos do cosseno e seno ao quadrado, funções análogas às funções $A(m,n,\alpha,\beta)$ e $B(m,n,\alpha,\beta)$, definidas anteriormente e, dessa forma, quando calcularmos o valor médio dos operadores esses termos serão nulos. Então, esses valores médios serão

$$\begin{aligned}
\langle\bar{S}_y^2\rangle(\tau) &= \sum_{m,n,\alpha,\beta}\bar{S}_y^2(m,n,\alpha,\beta)\rho_\omega(m,n,\alpha,\beta) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(2\pi\tau)\sin(4\lambda), \qquad (3.117)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle\bar{S}_z^2\rangle(\tau) &= \sum_{m,n,\alpha,\beta}\bar{S}_z^2(m,n,\alpha,\beta)\rho_\omega(m,n,\alpha,\beta) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin(2\pi\tau)\sin(4\lambda). \qquad (3.118)
\end{aligned}$$

Sendo assim, substituindo $2\pi\tau=\chi t$, temos as dispersões

$$\langle\left(\Delta\bar{S}_y\right)^2\rangle(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(\chi t)\sin(4\lambda) \qquad (3.119)$$

e

$$\langle\left(\Delta\bar{S}_z\right)^2\rangle(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin(\chi t)\sin(4\lambda). \qquad (3.120)$$

Agora, substituindo (3.101), (3.119) e (3.120) na desigualdade (3.87) teremos

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin^2(\chi t)\sin^2(4\lambda)\geq\frac{1}{4}\cos^2(\chi t), \qquad (3.121)$$

ou simplesmente

$$\sin^2(\chi t)\cos^2(4\lambda)\geq 0. \qquad (3.122)$$

Como dito anteriormente, há presença de compressão no estado quando a igualdade não é satisfeita. Fica evidente dessa expressão a importância da rotação no plano yz pois, se fizermos $\lambda=0$, obtemos de (3.121) simplesmente que $\cos^2(\chi t)\leq 1$, que é um resultado óbvio; portanto, para analisar a compressão não basta apenas fazermos a operação adequada, mas também devemos saber em qual direção devemos olhar as dispersões dos operadores nesse estado, para então verificarmos se, e em que direção, há o surgimento de compressão. Um conjunto de direções de orientação associadas a λ em que não somos capazes de identificar se esse fenômeno ocorre no caso de $\lambda = (2n + 1)\pi/8$, onde n é um número inteiro. Para todos os demais ângulos de rotação no entorno do eixo x somos capazes de afirmar se há ou não compressão do estado ao longo do tempo. Portanto, devido a essa arbitrariedade sobre o valor de λ, escolhemos, por exemplo, $\lambda = \pi$ (podemos perceber que a escolha da fase na verdade não importa, desde que $\cos(4\lambda)$ seja diferente de zero), e assim a condição para a compressão do estado é

$$\sin^2(\chi t) > 0, \tag{3.123}$$

a qual mostra que temos um estado coerente nos instantes em que $\sin^2(\chi t) = 0$. Porém, se resgatarmos a medida do emaranhamento, verificamos que

$$E_\omega(t) = \sin^2(\chi t), \tag{3.124}$$

e que, dessa forma, temos a presença de emaranhamento sempre que essa função assumir um valor diferente de zero, ou seja, há emaranhamento sempre que

$$E_\omega(t) = \sin^2(\chi t) > 0, \tag{3.125}$$

que é exatamente a condição de compressão do estado. Sendo assim, verificamos que no caso apresentado a presença de emaranhamento é na verdade uma consequência do aparecimento de compressão no estado. Podemos ir mais além e afirmar que, para sistemas bipartites de spin 1/2, a medida da compressão do estado é de fato a medida do emaranhamento desse sistema [46].

Conclusões e Perspectivas

Nessa dissertação apresentamos uma representação para sistemas com espaço de Hilbert de dimensão finita via espaço de fase quântico discreto, dando ênfase para o caso de sistemas bipartites de spin 1/2. Com essa descrição somos capazes de calcular as expressões mapeadas de Weyl de qualquer operador de interesse, sendo que devemos frisar o operador densidade de estados, cuja expressão mapeada no espaço de fase também recebe o nome de função de Wigner, como no caso do contínuo. Com ela pudemos descrever a dinâmica quântica desses sistemas na descrição de Schrödinger, via equação de von Neumann-Liouville. Além disso, também demonstramos uma forma de se calcular o grau de emaranhamento entre as componentes do sistema bipartite, obtendo essa informação exclusivamente da função de Wigner, e graças a ela pudemos calcular a evolução temporal do emaranhamento. Tendo essas ferramentas fizemos duas aplicações: na primeira calculamos a evolução temporal de um estado arbitrário sob a ação de uma operação chamada *cNot*, muito comum no contexto da computação quântica, e então obtivemos a evolução temporal do emaranhamento do sistema. Na segunda calculamos a dinâmica do emaranhamento de um estado coerente bipartite de spin, onde comparamos emaranhamento com a compressão do estado.

A relevância desse trabalho está na capacidade de descrevermos a mecânica quântica no espaço de fase discreto, onde, além do momento angular (descrição usual via estados e operadores), temos simultaneamente a informação sobre seu par complementar obtido via transformada de Fourier, que chamamos de ângulo discreto. Percebemos que essa informação complementar é de suma importância na caracterização do emaranhamento, pois na expressão responsável por ela está presente a dependência das distribuições marginais tanto de momento angular como de ângulo. Outra virtude dessa descrição é o cálculo aparentemente simples, do ponto de vista operacional, da dinâmica dos sistemas bipartites de spin, nos possibilitando observar também a evolução temporal do emaranhamento desses sistemas.

Começamos a apresentação tratando as ideias principais da representação do espaço de fase quântico discreto, apresentando um resumo das ideias de Schwinger, onde foram registradas todas as ferramentas necessárias para se criar tal representação, apesar de não ter sido Schwinger quem apresentou essa forma de representar a mecânica quântica; foi ele quem construiu todo o embasamento teórico que dá estrutura ao formalismo. Então, discutimos como compilar suas ideias e criar, de fato, uma forma de representar a mecânica quântica no espaço de fase discreto. Na sequência apresentamos o formalismo, onde primeiramente definimos uma base no espaço de operadores, que nos permite calcular a expressão mapeada de Weyl de qualquer operador de interesse, a partir disso vimos como obter a função de Wigner discreta associada a estados de sistemas físicos de interesse e com ela obter a dinâmica no espaço de fase discreto via equação de von Neumann-Liouville, como mencionado.

Em seguida, foi mostrada uma forma usual de se medir o grau de emaranhamento de sistemas bipartites de spin 1/2, onde deve-se obter o operador reduzido de um corpo $\hat{\rho}^{(1)}$ partindo do operador densidade de estado $\hat{\rho}$, e é da representação matricial desse operador, $\underline{\rho}^{(1)}$, que se obtêm os coeficientes de Schmidt, responsáveis por revelar as características do emaranhamento. Então, já no espaço de fase, obtivemos a função de Wigner $\rho_\omega(m, n, \alpha, \beta)$ de um estado arbitrário de dois spin 1/2, e com ela foi possível obter duas formas diferentes de calcular o grau de emaranhamento desses sistemas. Apresentamos primeiramente a medida de emaranhamento obtida a partir da função de Wigner reduzida de um corpo $\rho_\omega^{(1)}(m, n)$, onde os índices do espaço de fase permitiram representar uma matriz, e então do permanente dessa matriz foi possível obter uma expressão proporcional ao determinante da matriz reduzida de um corpo $\underline{\rho}^{(1)}$, que é onde se encontra a informação referente ao emaranhamento. A outra forma é mais rica em termos de espaço de fase, pois ela é obtida a partir das distribuições marginais da função de Wigner reduzida de um corpo. Sendo assim, a mesma nos permite perceber como o emaranhamento se manifesta no espaço de fase quântico discreto. Tendo sido ela usada então no capítulo seguinte para medir a dinâmica de emaranhamento. Porém, deve-se ressaltar que as medidas de emaranhamento propostas são válidas para sistemas que possam ser representados por estado puros ($\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$), não tendo sido demonstrado aqui como são essas caracterizações quando não se puder representar o sistema dessa forma.

Por fim, todas as ideias de dinâmica na representação de espaço de fase quântico discreto e medida de emaranhamento nessa mesma descrição foram compiladas. Foi primeiramente reapresentado, nessa mesma descrição, como pode ser feito o cálculo da evolução temporal dos sistemas quânticos, adaptado para o caso de um sistema bipartite de spins 1/2. Então, foram vistas, para esse caso, duas formas de resolver a equação de von Neumann-Liouville, onde ambas foram aplicadas na sequência.

Na primeira aplicação escrevemos um hamiltoniano que represente a operação $cNot$ da computação quântica e calculamos então a evolução temporal gerada por esse operador agindo em um estado arbitrário, de um sistema bipartite de spin 1/2, a partir da versão mapeada da equação de von Neumann- Liouville. Como a solução dessa equação é a expressão mapeada de uma série de comutadores do estado com o hamiltoniano foi necessário encontrar uma relação de recorrência na série, para que ela pudesse ser ressomada. De fato essa relação foi obtida, e nela foi visto que sua expressão depende do estado da primeira partícula, o que já era de se esperar, tendo em vista que a ação da operação $cNot$ ocorre na segunda partícula de acordo com o estado da primeira. Sendo assim, para o estado arbitrário escrito inicialmente, a ressoma da série foi possível para as quatro condições iniciais possíveis, uma para cada estado da base escolhida (lembrando que o operador densidade de estados para um sistema de spin 1/2 possui 4 projetores). Tendo então a expressão para a dinâmica da função de Wigner do estado arbitrário, foi possível estudar a dinâmica do emaranhamento a partir da expressão para a medida do grau de emaranhamento obtida anteriormente. Como esta é obtida a partir das distribuições marginais de momento angular e ângulo, foi possível perceber que, no espaço de fase discreto, para essa operação, a informação sobre a dependência temporal do emaranhamento do sistema depende exclusivamente da distribuição marginal de momento angular. Isso significa que se traçarmos sobre o espaço de fase nos índices que rotulam o momento angular do sistema não serão identificadas características referentes à dinâmica do emaranhamento.

Em seguida foi feita a segunda aplicação, onde foi usada a proposta de M. Kitagawa de como, partindo dos estados coerentes de spin, é possível impor compressão a esses estados. Sendo assim, foi possível transcrever essas ideias para o espaço de fase quântico discreto, sendo obtida a função de Wigner do estado coerente, além da expressão mapeada do operador hamiltoniano responsável pela criação do estado comprimido, e dessa expressão foi obtida a dinâmica da função de Wigner. Para isso, primeiramente foi calculada a função analítica associada ao liouvilliano, sendo então facilmente obtida a evolução temporal da função de Wigner do estado coerente de spin. Tendo essa expressão para a evolução temporal da função de Wigner, o próximo passo foi obter a medida no grau de emaranhamento do sistema dependente do tempo, pois Kitagawa considera que a operação que impõe compressão ao estado também impõe correlações, as quais podemos verificar se podem ser também entendidas por emaranhamento; esta constatação é importante pois, como comentado, são recentes na literatura relações que comparam emaranhamento e compressão do estado. Além disso, uma vez que a medida de emaranhamento depende unicamente das distribuições marginais, pode ser facilmente percebido que, nesse caso, a dependência temporal do emaranhamento é atribuída à distribuição marginal de ângulo, diferentemente do caso anterior onde essa dependência vinha da distribuição marginal de momento angular. Em seguida foram calculadas as dispersões dos operadores de spin no estado evoluído no tempo e com elas foi obtida a relação que determina a compressão do estado. Então, comparando as funções que determinam o emaranhamento e a compressão foi constatado que, para esse caso de estado coerente de dois spins 1/2, essas propriedades são na verdade a mesma propriedade física do sistema sob a ação do hamiltoniano proposto.

Uma possível continuação para esse trabalho consistiria em obter uma medida de emaranhamento via função de Wigner para sistemas onde o estado não possa ser representado como um estado puro $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, mas apenas como uma mistura estatística $\hat{\rho} = \sum_j \Gamma_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$. Isso pode ser feito escrevendo a versão mapeada no espaço de fase de uma medida de emaranhamento usual da literatura ou, da mesma forma que foi feita nessa dissertação, obter uma outra expressão com a mesma confiança que as medidas usuais. Isso seria interessante uma vez que poderíamos usar os recursos do espaço de fase para eventualmente obter medidas de emaranhamento operacionalmente menos complicadas que as medidas tradicionais.

Outro trabalho, talvez mais relevante que o proposto acima, seria obter uma forma de medir ou caracterizar o emaranhamento, via espaço de fase, para sistemas com muitos corpos; pois existem muitas técnicas isoladas para cada tipo desses sistema, não sendo portanto uniforme a abordagem de sistemas de um modo geral. Porém, para que seja possível obter uma caracterização do emaranhamento para sistemas de muitos corpos na descrição proposta se faz necessário um conhecimento maior sobre as manifestações físicas do emaranhamento em muitos corpos, além do que é necessário também um domínio fluente das técnicas de caracterização propostas até o momento.

Capítulo 4

Traços da base de operadores

Para que a base proposta (1.50) possa representar todas as caracteristicas dos sistemas quânticos, ela deve ser completa e ortogonal. Essas propriedades podem ser obtidas a partir do cálculo do traço da base.

4.1 Traço da base

$$Tr[\hat{G}(m,n)] = \sum_{k=0}^{1} \langle k|\hat{G}(m,n)|k\rangle.$$

Escrevendo $\hat{G}(m,n)$ explicitamente

$$Tr[\hat{G}(m,n)] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\sum_{r,s=0}^{1} \langle k|U^r V^s|k\rangle \exp\left\{\frac{-2\pi i}{2}(mr+ns)\right\}$$

e agindo os operadores nos estados teremos

$$Tr[\hat{G}(m,n)] = \frac{1}{2}\sum_{k,r,s=0}^{1} \langle k+r|k\rangle \exp\left\{\frac{-2\pi i}{2}ks\right\} \exp\left\{\frac{-2\pi i}{2}(mr+ns)\right\}.$$

Para espaços de Hilbert de dimensão finita, dimensão N por exemplo, o produto de dois estados ortonormais resulta em uma delta de Kronecker módulo N

$$\langle r|k\rangle = \begin{cases} 0 & \text{para}\, k \neq rmod(N) \\ 1 & \text{para}\, k \,=\, rmod(N) \end{cases} \tag{4.1}$$

ou simplesmente

$$\langle r|k\rangle = \delta_{r,k}^{[N]}, \tag{4.2}$$

do que resulta

$$Tr[\hat{G}(m,n)] = \frac{1}{2}\sum_{k,r,s=0}^{1} \delta_{r,0}^{[2]} \exp\left\{\frac{-2\pi i}{2}ks\right\}\exp\left\{\frac{-2\pi i}{2}(mr+ns)\right\}.$$

Como um comentário, vale lembrar que uma outra forma de representar a delta de Kronecker módulo N na forma de soma é

$$\delta_{k,l}^{[N]} = \frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1} \exp\left\{\frac{-2\pi i}{N}s(k-l)\right\}. \tag{4.3}$$

Agora, agindo a delta em r e somando em s teremos

$$Tr[\hat{G}(m,n)] = \sum_{k=0}^{1} \delta_{k,n}^{[2]}$$

e por fim obtemos

$$Tr[\hat{G}(m,n)] = 1. \tag{4.4}$$

Desta forma verificamos que base $\hat{G}(r,s)$ tem traço unitário.

4.2 Traço de 2 bases

Calculando o traço do produtos de dois operadores da base:

$$\begin{aligned}
Tr[\hat{G}^{\dagger}(m,n)\hat{G}(r,s)] &= \sum_{k=0}^{1}\langle k|\hat{G}^{\dagger}(m,n)\hat{G}(r,s)|k\rangle \\
= \quad & \frac{1}{2^2}\sum_{k}\sum_{a,b,c,d}\langle k|V^{-b}U^{-a}U^{c}V^{d}|k\rangle \exp\left[i\pi(ma+nb)\right]\exp\left[i\pi(rc+sd)\right] \\
= \quad & \frac{1}{2^2}\sum_{k}\sum_{a,b,c,d}\delta_{c,a}^{[2]}\exp\left[i\pi k(d-b)\right]\exp\left[i\pi(ma+nb)\right]\exp\left[i\pi(rc+sd)\right]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

e somando sobre k e agindo as deltas, teremos

$$Tr[\hat{G}^{\dagger}(m,n)\hat{G}(r,s)] = \frac{1}{2}\sum_{a,b}\exp\left[i\pi a(m-r)\right]\exp\left[i\pi b(n-s)\right]. \tag{4.6}$$

Somando sobre a e b, obtemos

$$Tr[\hat{G}^{\dagger}(m,n)\hat{G}(r,s)] = 2\delta_{m,r}^{[2]}\delta_{n,s}^{[2]}. \tag{4.7}$$

Temos portanto que as bases $\hat{G}(r,s)$ são ortonormais, onde o fator 2 é a dimensão do espaço de estados.

4.3 Traço de 3 operadores

O cálculo do traço de três operadores $\hat{G}(r,s)$ não explicita nenhuma caracteristica da base, porém será útil na dissertação quando calcularmos a expressão mapeada do produto de dois operadores arbitrários. O traço de três operadores da base é

$$
\begin{aligned}
& Tr[\hat{G}^{\dagger}(m,n)\hat{G}(r,s)\hat{G}(p,q)] = \sum_{k} \langle k|\hat{G}^{\dagger}(m,n)\hat{G}(r,s)\hat{G}(p,q)|k\rangle \\
= \quad & \frac{1}{2^3}\sum_{k}\sum_{j,l}\sum_{a,b,c,d} \langle k|V^{-l}U^{-j}U^{a}V^{b}U^{c}V^{d}|k\rangle \exp\left[i\pi(mj+nl)\right] \\
\times \quad & \exp\left[i\pi(ar+bs)\right]\exp\left[i\pi(cp+dq)\right], \\
= \quad & \frac{1}{2^3}\sum_{k}\sum_{j,l}\sum_{a,b,c,d} \delta^{[2]}_{a+c-j,0} \exp\left[i\pi b(c-k)\right]\exp\left[i\pi k(d+b-l)\right]\exp\left[i\pi(mj+nl)\right] \\
\times \quad & \exp\left[i\pi(ar+bs)\right]\exp\left[i\pi(cp+dq)\right].
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Somando em k, j e l

$$
\begin{aligned}
& Tr[\hat{G}^{\dagger}(m,n)\hat{G}(r,s)\hat{G}(p,q)] = \frac{1}{2^2}\sum_{a,b,c,d} \exp\left(i\pi bc\right)\exp\left[i\pi n(b+d)\right] \\
\times \quad & \exp\left[i\pi m(a+c)\right]\exp\left[i\pi(ar+bs)\right]\exp\left[i\pi(cp+dq)\right],
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
& Tr[\hat{G}^{\dagger}(m,n)\hat{G}(r,s)\hat{G}(p,q)] = \frac{1}{2^2}\sum_{a,b,c,d} \exp\left(i\pi bc\right) \\
\times \quad & \exp\Big\{i\pi[a(m-r)+b(n-s)+c(m-p)+d(n-q)]\Big\}.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Esse cálculo pode ser repetido para um número n de operadores $\hat{G}(r,s)$, porém apresentamos somente o produto de três pois será o resultado utilizado na dissertação.

Capítulo 5

Série dos liouvilianos

Tendo o liouvilliano

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(m,n,\alpha,\beta,p,q,\mu,\nu) &= \frac{\omega}{2}\delta^{[2]}_{n,q}\delta^{[2]}_{\alpha,\mu}\{\exp{(i\pi n)}(\delta^{[2]}_{m,p+1}-\delta^{[2]}_{m,p})\delta^{[2]}_{\beta,\nu} + \\ &+ \exp{(i\pi\alpha)}(\delta^{[2]}_{\beta,\nu}-\delta^{[2]}_{\beta,\nu+1})\delta^{[2]}_{m,p} + \\ &+ \exp{[i\pi(\alpha+n)]}(\delta^{[2]}_{m,p}\delta^{[2]}_{\beta,\nu+1}-\delta^{[2]}_{m,p+1}\delta^{[2]}_{\beta,\nu})\}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

e a função de Wigner do estado de partida

$$\rho_\omega(p,q,\mu,\nu) = \sum_{k,l,\epsilon,\eta} C_{\{k,\epsilon\}}C^*_{\{l,\eta\}}\delta^{[2]}_{q,l}\delta^{[2]}_{\nu,\eta}\exp{\{i\pi p(l-k)\}}\exp{\{i\pi\mu(\eta-\epsilon)\}}, \tag{5.2}$$

calcularemos o termo de primeira ordem da série. Isso é feito agindo com o liouvilliano (5.1) na função de Wigner do estado arbitrário

$$\hat{\rho}' = |k,\epsilon\rangle\langle l,\eta|, \tag{5.3}$$

onde sua expressão no espaço de fase é

$$(|k,\epsilon\rangle\langle l,\eta|)(p,q,\mu,\nu) = \delta^{[2]}_{q,l}\delta^{[2]}_{\nu,\eta}\exp{\{i\pi p(l-k)\}}\exp{\{i\pi\mu(\eta-\epsilon)\}}. \tag{5.4}$$

Sendo assim, teremos a ação do liouvilliano sobre esta função de Wigner

$$\begin{aligned} &\sum_{p,q,\mu,\nu}\mathcal{L}(m,n,\alpha,\beta,p,q,\mu,\nu)(|k,\epsilon\rangle\langle l,\eta|)(p,q,\mu,\nu) = \\ &= \sum_{p,q,\mu,\nu}\Big\{\exp{[i\pi p(k-l)]}\exp{[i\pi\mu(\eta-\epsilon)]}\delta^{[2]}_{b,q}\delta^{[2]}_{\eta,\nu}\Big\} \\ \times\ &\Big\{\frac{\omega}{2}\delta^{[2]}_{n,q}\delta^{[2]}_{\alpha,\mu}\Big[\exp{(i\pi n)}(\delta^{[2]}_{m,p+1}-\delta^{[2]}_{m,p})\delta^{[2]}_{\beta,\nu}+\exp{(i\pi\alpha)}(\delta^{[2]}_{\beta,\nu}-\delta^{[2]}_{\beta,\nu+1})\delta^{[2]}_{m,p} + \\ +\ &\exp{[i\pi(\alpha+n)]}(\delta^{[2]}_{m,p}\delta^{[2]}_{\beta,\nu+1}-\delta^{[2]}_{m,p+1}\delta^{[2]}_{\beta,\nu})\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Como a ação do liouvilliano sobre a função de Wigner representa o comutador do hamiltoniano com o operador associado ao estado no espaço de fase, representamos simplesmente

$$([\hat{H},\hat{\rho}'])(m,n,\alpha,\beta)=\sum_{p,q,\mu,\nu}\mathcal{L}(m,n,\alpha,\beta,p,q,\mu,\nu)\,(|k,\epsilon\rangle\langle l,\eta|)(p,q,\mu,\nu),$$

e assim simplificamos a notação. Agora, somando sobre p,q,μ e ν por fim teremos

$$\begin{aligned}([\hat{H},\hat{\rho}'])(m,n,\alpha,\beta)&=\frac{\omega}{2}\exp\left[i\pi m(k-l)\right]\exp\left[i\pi\alpha(\eta-\epsilon)\right]\delta^{[2]}_{n,l}\\ \times&\ \Big\{(-2)\delta^{[2]}_{k,l+1}\delta^{[2]}_{\beta,\eta}\exp\left(i\pi l\right)\exp\left(i\pi\alpha\right)\\ \times&\ \Big[(\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1})+\exp\left(i\pi l\right)(\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}-\exp\left[i\pi(k-l)\right]\delta^{[2]}_{\beta,\eta})\Big]\Big\}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Então, por conveniência definimos a função

$$2\Delta(\beta)_{k,l}=(\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1})+\exp\left(i\pi l\right)(\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}-\exp\left[i\pi(k-l)\right]\delta^{[2]}_{\beta,\eta}),$$

que depende do estado da primeira partícula, ou seja,

$$2\Delta(\beta)_{k,l}=\begin{cases}0 & \text{para } k=l=0\\ 2(\delta^{[2]}_{\beta\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}) & \text{para } k=l=1\\ -2\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1} & \text{para } k=0 \text{ e } l=1\\ 2\delta^{[2]}_{\beta,\eta} & \text{para } k=1 \text{ e } l=0.\end{cases}\tag{5.7}$$

Por fim, temos o primeiro termo da série

$$\begin{aligned}([\hat{H},\hat{\rho}'])(m,n,\alpha,\beta)&=\omega\exp\left[i\pi m(k-l)\right]\exp\left[i\pi\alpha(\eta-\epsilon)\right]\delta^{[2]}_{n,l}\\ \times&\ \Big\{\Delta(\beta)_{k,l}\exp\left(i\pi\alpha\right)-\delta^{[2]}_{k,l+1}\delta^{[2]}_{\beta,\eta}\exp\left(i\pi l\right)\Big\}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Podemos agora, a partir dos resultados obtidos para o termo de primeira ordem, obter o segundo termo da série, que pode ser facilmente calculado agindo com o liouvilliano na expressão (5.8), ou seja,

$$\begin{aligned}&\sum_{p,q,\mu,\nu}\mathcal{L}(m,n,\alpha,\beta;p,q,\mu,\nu)\Big\{\sum_{a,b,\eta,\lambda}\mathcal{L}(p,q,\mu,\nu,a,b,\eta,\lambda)(|k,\epsilon\rangle\langle l,\eta|)(a,b,\eta,\lambda)\Big\}\\ =&\sum_{p,q,\mu,\nu}\mathcal{L}(m,n,\alpha,\beta;p,q,\mu,\nu)\Big\{\omega\exp\left[i\pi p(k-l)\right]\exp\left[i\pi\mu(\eta-\epsilon)\right]\delta^{[2]}_{q,l}\\ \times&\ \Big[\Delta(\nu)_{k,l}\exp\left(i\pi\mu\right)-\delta^{[2]}_{k,l+1}\delta^{[2]}_{\nu,\eta}exp(i\pi l)\Big]\Big\}.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Novamente, para simplificar a notação escrevemos

$$\begin{aligned}&([\hat{H},[\hat{H},\hat{\rho}']])(m,n,\alpha,\beta)=\\ =&\sum_{p,q,\mu,\nu}\mathcal{L}(m,n,\alpha,\beta;p,q,\mu,\nu)\Big\{\omega\exp\left[i\pi p(k-l)\right]\exp\left[i\pi\mu(\eta-\epsilon)\right]\delta^{[2]}_{q,l}\\ \times&\ \Big[\Delta(\nu)_{k,l}\exp\left(i\pi\mu\right)-\delta^{[2]}_{k,l+1}\delta^{[2]}_{\nu,\eta}exp(i\pi l)\Big]\Big\}.\end{aligned}\tag{5.10}$$

Agora, substituindo o liouvilliano (5.1) na expressão acima, teremos

$$
\begin{aligned}
([\hat{H},[\hat{H},\hat{\rho}']])(m,n,\alpha,\beta) &= \sum_{p,q,\mu,\nu} \frac{\omega}{2}\delta^{[2]}_{n,q}\delta^{[2]}_{\alpha,\mu}\Big\{ \exp{(i\pi n)}(\delta^{[2]}_{m,p+1}-\delta^{[2]}_{m,p})\delta^{[2]}_{\beta,\nu} + \\
+ \quad & \exp{(i\pi\alpha)}(\delta^{[2]}_{\beta,\nu}-\delta^{[2]}_{\beta,\nu+1})\delta^{[2]}_{m,p} + \exp{[i\pi(\alpha+n)]}(\delta^{[2]}_{m,p}\delta^{[2]}_{\beta,\nu+1}-\delta^{[2]}_{m,p+1}\delta^{[2]}_{\beta,\nu})\Big\} \\
\times \quad & \Big\{\omega\exp{[i\pi p(k-l)]}\exp{[i\pi\mu(\eta-\epsilon)]}\delta^{[2]}_{q,l}\Big[\Delta(\nu)^{[2]}_{k,l}\exp{(i\pi\mu)}-\delta^{[2]}_{k,l+1}\delta^{[2]}_{\nu,\eta}exp(i\pi l)\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

e, sendo assim, somando em p,q,μ e ν, por fim obtemos

$$
\begin{aligned}
([\hat{H},[\hat{H},\hat{\rho}']])(m,n,\alpha,\beta) &= 2\omega^2\exp{[i\pi m(k-l)]}\exp{[i\pi\alpha(\eta-\epsilon)]}\delta^{[2]}_{n,l} \\
\times \quad & \Big\{\frac{\delta^{[2]}_{k,l+1}\delta^{[2]}_{\beta,\eta}}{2}-\exp{[i\pi(\alpha+k)]}\Delta_{k,l}(\beta)\delta^{[2]}_{k,l+1}+(2)^{k+l-2}\Delta^{(2)}_{k,l}(\beta)\Big\},
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

onde $\Delta(\beta)_{k,l}$ foi apresentado anteriormente e

$$
(2)^{k+l}\Delta^{(2)}(\beta)_{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{para } k=l=0 \\ 4(\delta^{[2]}_{\beta\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}) & \text{para } k=l=1 \\ 2\delta^{[2]}_{\beta,\eta} & \text{para } k=0 \text{ e } l=1 \\ 2\delta^{[2]}_{\beta,\eta} & \text{para } k=1 \text{ e } l=0. \end{cases}
\tag{5.12}
$$

Tendo as expressões mapeadas dos termos de primeira e segunda ordens no tempo da série (5.8), devemos agora explicitar esses valores substituindo os possíveis valores para k e l, pois, como já mencionado, as relações de recorrência dos termos da série dependem desses valores. A seguir apresentamos o cálculo das 4 formas que a série pode assumir*, separando por itens os valores de k e l.

- Para o estado onde $k=l=0$ teremos o operador $\hat{\rho}'=|0,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|$, e a ação do liouvilliano sobre esse estado resulta em termos nulos para a série, ou seja,

$$
([\hat{H},\hat{\rho}'])(m,n,\alpha,\beta)=0;
\tag{5.13}
$$

  portanto, todos os termos de ordem mais alta também serão nulos. Sendo assim a evolução temporal desse estado será simplesmente um estado estacionário

$$
(|0,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t)=(|0,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t=0).
\tag{5.14}
$$

- Agora, para o estado onde $k=0$ e $l=1$ teremos o operador $\hat{\rho}'=|0,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|$ e os valores para o mapeado dos comutadores desse operador com o hamiltoniano

*No cálculo que segue omitiremos temporariamente o fator 1/4 que normaliza a função de Wigner.

serão

$$
\begin{aligned}
([\hat{H},\hat{\rho}'])(m,n,\alpha,\beta) &= \omega\delta^{[2]}_{n,1}\exp{(i\pi m)} \\
&\times \exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]}\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\exp{(i\pi\alpha)}\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\} \quad (5.15)
\end{aligned}
$$

e o termo de segunda ordem é

$$
\begin{aligned}
([\hat{H},[\hat{H},\hat{\rho}']])(m,n,\alpha,\beta) &= 2\omega^2\delta^{[2]}_{n,1}\exp{(i\pi m)} \\
&\times \exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]}\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\exp{(i\pi\alpha)}\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\} \\
&= 2\omega([\hat{H},\hat{\rho}'])(m,n,\alpha,\beta); \quad (5.16)
\end{aligned}
$$

dessa forma, se agirmos r vezes com o liouvilliano no estado, teremos

$$
\begin{aligned}
([\hat{H},\ldots[\hat{H},\hat{\rho}']\ldots])(m,n,\alpha,\beta) &= 2^{r-1}\omega^r\delta^{[2]}_{n,1}\exp{(i\pi m)} \quad (5.17) \\
&\times \exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]}\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\exp{(i\pi\alpha)}\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\}.
\end{aligned}
$$

Agora, se calcularmos a evolução temporal do estado obteremos

$$
\begin{aligned}
&(|0,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t) = (|0,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t=0) + \\
+ \;& \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(it)^r}{r!}(2\omega)^r \\
\times \;& \delta^{[2]}_{n,1}\exp{(i\pi m)}\exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]}\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\exp{(i\pi\alpha)}\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\}, \quad (5.18)
\end{aligned}
$$

onde $(|0,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t=0) = \delta^{[2]}_{n,1}\exp{(i\pi m)}\exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]}\delta^{[2]}_{\beta,\eta}$. Sendo assim, após algumas manobras a fim de obtermos os termos de ordem zero nas séries, por fim obtemos

$$
\begin{aligned}
&(|0,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t) = \frac{1}{2}\delta^{[2]}_{n,1}\exp{(i\pi m)}\exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]} \\
\times \;& \left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}+\exp{(i\pi\alpha)}\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\} + \\
+ \;& \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(it)^r}{r!}(2\omega)^r \\
\times \;& \delta^{[2]}_{n,1}\exp{(i\pi m)}\exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]}\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\exp{(i\pi\alpha)}\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\}, \quad (5.19)
\end{aligned}
$$

e finalmente, somando a série,

$$
\begin{aligned}
&(|0,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t) = \frac{1}{2}\delta^{[2]}_{n,1}\exp{(i\pi m)}\exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]} \\
\times \;& \left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}+\exp{(i\pi\alpha)}\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\} + \frac{1}{2}\delta^{[2]}_{n,1}\exp{(i\pi m)}\exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]} \\
\times \;& \left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\exp{(i\pi\alpha)}\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\}\exp{(2i\omega t)}. \quad (5.20)
\end{aligned}
$$

- Para o caso onde $k=1$ e $l=0$ teremos o operador $\hat{\rho}'=|1,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|$ e os valores para o mapeado dos comutadores desse operador com o hamiltoniano serão

$$\begin{aligned}([\hat{H},\hat{\rho}'])(m,n,\alpha,\beta) &= \omega\delta_{n,0}^{[2]}\exp{(i\pi m)} \\ &\times \exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]}\left\{\delta_{\beta,\eta}^{[2]}-\exp{(i\pi\alpha)}\delta_{\beta,\eta}^{[2]}\right\}, \quad (5.21)\end{aligned}$$

e o termo de segunda ordem é

$$\begin{aligned}([\hat{H},[\hat{H},\hat{\rho}']])(m,n,\alpha,\beta) &= -2\omega^2\delta_{n,0}^{[2]}\exp{(i\pi m)}\times \\ &\times \exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]}\left\{\delta_{\beta,\eta}^{[2]}-\exp{(i\pi\alpha)}\delta_{\beta,\eta}^{[2]}\right\} \\ &= (-2)\omega([\hat{H},\hat{\rho}'])(m,n,\alpha,\beta); \quad (5.22)\end{aligned}$$

dessa forma, se agirmos r vezes com o liouvilliano no estado, teremos

$$\begin{aligned}([\hat{H},\ldots[\hat{H},\hat{\rho}']\ldots])(m,n,\alpha,\beta) &= (-2)^{r-1}\omega^r\delta_{n,0}^{[2]}\exp{(i\pi m)} \quad (5.23)\\ &\times \exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]}\left\{\delta_{\beta,\eta}^{[2]}-\exp{(i\pi\alpha)}\delta_{\beta,\eta}^{[2]}\right\}.\end{aligned}$$

Como feito anteriormente, calculando a evolução temporal desse estado obteremos

$$\begin{aligned}&(|1,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t) = (|1,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t=0)+ \\ +\ &\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(it)^r}{r!}(-2\omega)^r \\ \times\ &\delta_{n,0}^{[2]}\exp{(i\pi m)}\exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]}\left\{\delta_{\beta,\eta}^{[2]}-\exp{(i\pi\alpha)}\delta_{\beta,\eta}^{[2]}\right\}, \quad (5.24)\end{aligned}$$

onde $(|1,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t=0)=\delta_{n,0}^{[2]}\exp{(i\pi m)}\exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]}\delta_{\beta,\eta}^{[2]}$. Sendo assim, após algumas manobras a fim de separarmos os termos de ordem zero nas séries, por fim teremos

$$\begin{aligned}&(|1,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t) = \frac{1}{2}\delta_{n,0}^{[2]}\exp{(i\pi m)}\exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]} \\ \times\ &\left\{\delta_{\beta,\eta}^{[2]}+\exp{(i\pi\alpha)}\delta_{\beta,\eta}^{[2]}\right\}+ \\ +\ &\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(it)^r}{r!}(-2\omega)^r \\ \times\ &\delta_{n,0}^{[2]}\exp{(i\pi m)}\exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]}\left\{\delta_{\beta,\eta}^{[2]}-\exp{(i\pi\alpha)}\delta_{\beta,\eta}^{[2]}\right\}, \quad (5.25)\end{aligned}$$

e finalmente, somando a série,

$$\begin{aligned}&(|1,\epsilon\rangle\langle 0,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t) = \frac{1}{2}\delta_{n,0}^{[2]}\exp{(i\pi m)}\exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]} \\ \times\ &\left\{\delta_{\beta,\eta}^{[2]}+\exp{(i\pi\alpha)}\delta_{\beta,\eta}^{[2]}\right\}+\frac{1}{2}\delta_{n,0}^{[2]}\exp{(i\pi m)}\exp{[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)]} \\ \times\ &\left\{\delta_{\beta,\eta}^{[2]}-\exp{(i\pi\alpha)}\delta_{\beta,\eta}^{[2]}\right\}\exp{(-2i\omega t)}. \quad (5.26)\end{aligned}$$

- Por fim, quando $k = l = 1$ teremos o operador $\hat{\rho}' = |1,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|$ e os valores para o mapeado dos comutadores desse operador com o hamiltoniano serão

$$\begin{aligned}([\hat{H},\hat{\rho}'])(m,n,\alpha,\beta) &= \omega\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta+1)\right] \\ &\times \left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\},\end{aligned} \tag{5.27}$$

e o termo de segunda ordem será

$$\begin{aligned}([\hat{H},[\hat{H},\hat{\rho}']])(m,n,\alpha,\beta) &= 2\omega^2\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right] \\ &\times \left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\}.\end{aligned} \tag{5.28}$$

Diferente dos estados calculados anteriormente, aqui não verificamos a recorrência já no termo de segunda ordem, porém essa recorrência ocorre entre os termos de ordem par e os de ordem ímpar. Isso pode ser percebido calculando os termos de 3ª e 4ª ordens. De imediato temos o termo de 3ª ordem

$$\begin{aligned}([\hat{H},[\hat{H},[\hat{H},\hat{\rho}']]])(m,n,\alpha,\beta) &= 4\omega^3\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta+1)\right]\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\} \\ &= 4\omega^2([\hat{H},\hat{\rho}'])(m,n,\alpha,\beta)\end{aligned} \tag{5.29}$$

e o termo de 4ª ordem

$$\begin{aligned}([\hat{H},[\hat{H},[\hat{H},[\hat{H},\hat{\rho}']]]])(m,n,\alpha,\beta) &= 8\omega^4\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\} \\ &= 8\omega^3([\hat{H},[\hat{H},\hat{\rho}']])(m,n,\alpha,\beta).\end{aligned} \tag{5.30}$$

Então, se calcularmos um número r de ações do liouvilliano sobre a expressão mapeada do estado teremos dois casos distintos, quando r é par e quando r é ímpar. Dessa forma, se r for par podemos escrever $r = 2s$, onde s é um inteiro positivo, e assim teremos

$$\begin{aligned}([\hat{H},\ldots[\hat{H},\hat{\rho}']\ldots])(m,n,\alpha,\beta) &= 2^{2s-1}\omega^{2s}\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right] \\ &\times \left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\}.\end{aligned} \tag{5.31}$$

Já no caso em que r for ímpar podemos escrever $r = 2s+1$, onde s é um inteiro positivo, e então

$$\begin{aligned}([\hat{H},\ldots[\hat{H},\hat{\rho}']\ldots])(m,n,\alpha,\beta) &= 2^{2s}\omega^{2s+1}\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta+1)\right] \\ &\times \left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\}.\end{aligned} \tag{5.32}$$

Agora, calculando a evolução temporal do estado obtemos

$$\begin{aligned}&(|1,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t) = (|1,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t=0) + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(it)^{2r+1}}{(2r+1)!}(2\omega)^{2r+1}\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta+1)\right]\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\} + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(it)^{2r}}{(2r)!}(2\omega)^{2r}\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\},\end{aligned} \tag{5.33}$$

onde $(|1,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t=0) = \delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\delta^{[2]}_{\beta,\eta}$. Novamente, fazemos algumas manobras matemáticas a fim de separarmos o termo de ordem zero na série acima

$$\begin{aligned}
(|1,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t) &= \frac{1}{2}\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}+\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\}+\\
+&\quad \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(it)^{2r+1}}{(2r+1)!}(2\omega)^{2r+1}\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta+1)\right]\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\}+\\
+&\quad \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(it)^{2r}}{(2r)!}(2\omega)^{2r}\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\},
\end{aligned}\tag{5.34}$$

e ressomando as séries, obtemos

$$\begin{aligned}
(|1,\epsilon\rangle\langle 1,\eta|)(m,n,\alpha,\beta;t) &= \frac{1}{2}\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}+\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\}+\\
+&\quad \frac{i}{2}\sin(2\omega t)\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta+1)\right]\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\}+\\
+&\quad \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\delta^{[2]}_{n,1}\exp\left[i\pi\alpha(\epsilon-\eta)\right]\left\{\delta^{[2]}_{\beta,\eta}-\delta^{[2]}_{\beta,\eta+1}\right\}.
\end{aligned}\tag{5.35}$$

O que fizemos até o momento foi identificar os termos da série de evolução temporal, e com isso percebemos que essa série se divide em 4 subséries, uma para cada possível estado da primeira partícula como pode ser visto nas expressões acima.

Capítulo 6

Cálculo do propagador no espaço de fase discreto

Tendo a expressão para o propagador

$$\mathcal{P}(m,n,r,s,\alpha,\beta,\gamma,\delta|t) = Tr[G^{\dagger}(m,n,\alpha,\beta)U^{\dagger}(t)G(r,s,\gamma,\delta)U(t)] \tag{6.1}$$

e o operador de evolução temporal

$$U(t) = \exp[-it\frac{\chi}{2}(\hat{1} + \hat{\sigma}_{1z} \otimes \hat{\sigma}_{2z})], \tag{6.2}$$

podemos calcular a expressão da função analítica $\mathcal{P}(m,n,r,s,\alpha,\beta,\gamma,\delta|t)$. Então, como a identidade comuta com os demais operadores, teremos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(m,n,r,s,\alpha,\beta,\gamma,\delta|t) &= Tr\Big[G^{\dagger}(m,n,\alpha,\beta)\ \exp\,(it\frac{\chi}{2}\hat{\sigma}_{1z} \otimes \hat{\sigma}_{2z}) \\ &\times\ G(r,s,\gamma,\delta)\exp\,(-it\frac{\chi}{2}\hat{\sigma}_{1z} \otimes \hat{\sigma}_{2z})\Big]. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Se fizermos

$$\pi\tau = \frac{\chi}{2}t \tag{6.4}$$

teremos

$$\mathcal{P}(m,n,r,s,\alpha,\beta,\gamma,\delta|\tau) = Tr\Big[G^{\dagger}(m,n,\alpha,\beta)\exp\,(i\pi\tau\hat{\sigma}_{1z} \otimes \hat{\sigma}_{2z}) \tag{6.5}$$

$$\times\ G(r,s,\gamma,\delta)\exp\,(-i\pi\tau\hat{\sigma}_{1z} \otimes \hat{\sigma}_{2z})\Big]. \tag{6.6}$$

Escrevendo explicitamente os operadores da base e tomando o traço teremos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(m,n,r,s,\alpha,\beta,\gamma,\delta|\tau) &= \frac{1}{2^4}\sum_{k,\Lambda}\sum_{a,b,c,d}\sum_{\mu,\nu,\phi,\eta}\exp\,[i\pi(cm+dn)] \\ \times\ &\exp\,[i\pi(\alpha\phi+\beta\eta)]\exp\,[-i\pi(ar+bs)]\exp\,[-i\pi(\gamma\mu+\delta\nu)] \\ \times\ &\langle k,\Lambda|\Big\{V_1^{-d}U_1^{-c}V_2^{-\eta}U_2^{-\phi}\exp[i\pi\tau(\hat{\sigma}_{1z}\otimes\hat{\sigma}_{2z})]U_1^{a}V_1^{b}U_2^{\mu}V_2^{\nu} \\ \times\ &\exp[-i\pi\tau(\hat{\sigma}_{1z}\otimes\hat{\sigma}_{2z})]\Big\}|k,\Lambda\rangle,\end{aligned}$$

onde os índices 1 e 2 rotulam os operadores que agem no espaço de Hilbert da partícula 1 e 2 respectivamente. Porém, expandindo em séries as exponenciais, obtemos

$$\exp[\pm i\pi\tau\hat{\sigma}_{1z}\otimes\hat{\sigma}_{2z}] = \cos(\pi\tau)\hat{1}\otimes\hat{1}\pm i\sin(\pi\tau)\hat{\sigma}_{1z}\otimes\hat{\sigma}_{2z}, \tag{6.7}$$

e então, substituindo σ_z pelo operador V, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(m,n,r,s,\alpha,\beta,\gamma,\delta|\tau) &= \frac{1}{2^4}\sum_{k,\Lambda}\sum_{a,b,c,d}\sum_{\mu,\nu,\phi,\eta}\exp[i\pi(cm+dn)] \\ \times\ & \exp\left[i\pi(\alpha\phi+\beta\eta)\right]\exp[-i\pi(ar+bs)]\exp[-i\pi(\gamma\mu+\delta\nu)] \\ \times\ & \langle k,\Lambda|\Big\{V_1^{-d}U_1^{-c}V_2^{-\eta}U_2^{-\phi}\Big[\cos(\pi\tau)\hat{1}\otimes\hat{1}+i\sin(\pi\tau)V_1\otimes V_2\Big] \\ \times\ & U_1^aV_1^bU_2^\mu V_2^\nu\Big[\cos(\pi\tau)1\otimes 1-i\sin(\pi\tau)V_1\otimes V_2\Big]\Big\}|k,\Lambda\rangle. \end{aligned}$$

Agindo com os operadores no estado obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(m,n,r,s,\alpha,\beta,\gamma,\delta|\tau) &= \frac{1}{2^4}\sum_{k,\Lambda}\sum_{a,b,c,d}\sum_{\mu,\nu,\phi,\eta}\exp[i\pi(cm+dn)] \\ \times\ & \exp[i\pi(\alpha\phi+\beta\eta)]\exp[-i\pi(ar+bs)]\exp[-i\pi(\gamma\mu+\delta\nu)] \\ \times\ & \exp[i\pi k(d-b)]\exp[i\pi\Lambda(\mu-\nu)]\Big\{\cos^2(\pi\tau)+\exp[i\pi(a+\mu)]\sin^2(\pi\tau)+ \\ +\ & i\sin(\pi\tau)\cos(\pi\tau)\left\{\exp[i\pi(a+\mu)]-1\right\}\exp[i\pi(k+a)]\exp[i\pi(\Lambda+\mu)]\Big\}\delta^{[2]}_{c,a}\delta^{[2]}_{\phi,\mu} \end{aligned}$$

e, por fim, após somarmos sobre todos os índices, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(m,n,r,s,\alpha,\beta,\gamma,\delta|\tau) &= 2^2\delta^{[2]}_{n,s}\delta^{[2]}_{\beta,\delta} \\ \times\ & \Big\{\delta^{[2]}_{m,r}\delta^{[2]}_{\alpha,\gamma}\left[\cos^2(\pi\tau)+i\exp[i\pi(a+\mu)]\sin(\pi\tau)\cos(\pi\tau)\right]+ \\ +\ & \delta^{[2]}_{m,r+1}\delta^{[2]}_{\alpha,\gamma+1}\left[\sin^2(\pi\tau)-i\exp[i\pi(a+\mu)]\sin(\pi\tau)\cos(\pi\tau)\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Dessa forma, para simplificar a notação introduzimos

$$\begin{aligned} f_1(n,\beta,\tau) &= \cos^2(\pi\tau)+i\exp[i\pi(n+\beta)]\sin(\pi\tau)\cos(\pi\tau) \\ f_2(n,\beta,\tau) &= \sin^2(\pi\tau)-i\exp[i\pi(n+\beta)]\sin(\pi\tau)\cos(\pi\tau), \end{aligned} \tag{6.9}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(m,n,r,s,\alpha,\beta,\gamma,\delta|\tau) &= 2^2\delta^{[2]}_{n,s}\delta^{[2]}_{\beta,\delta}\Big\{\delta^{[2]}_{m,r}\delta^{[2]}_{\alpha,\gamma}f_1(n,\beta,\tau)+ \\ &+\ \delta^{[2]}_{m,r+1}\delta^{[2]}_{\alpha,\gamma+1}f_2(n,\beta,\tau)\Big\}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Referências Bibliográficas

[1] Weyl H. *Z. Phys. 1927* **46** 1 .

[2] Wigner E.P. *Phys. Rev. 1932* **40** 749.

[3] Moyal J.E. *Proc. Camb. Phil. Soc. 1949* **45** 99.

[4] Kirkwood J.G. *Phys. Rev. 1933* **44** 31.

[5] Mizrahi S.S. *Physica A 1984* **127** 241.

[6] Cahill K. E. e Glauber R. J. *Phys. Rev. 1969* **177** 1857;
Cahill K. E. e Glauber R. J. *Phys. Rev. 1969* **177** 1882

[7] Schwinger J. 1960 *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **47** 570;
Schwinger J. *Quantum Kinematics and Dynamics* (Benjamin New York 1970).

[8] Galetti D. e de Toledo Piza A.F.R. *Physica A 1988* **149** 267-282.

[9] Galetti D. e de Toledo Piza A.F.R. *Physica A 1992* **186** 513-523 .

[10] Galetti D. e Marchiolli M.A. *Annals of Physics 1996* **249** 454.

[11] Wooters W.K. *Annals of Physics 1987* **176** 1.

[12] Cohendet O., Combe Ph., Sirugue M. e Sirugue-Collin M. *J. Phys. A: Math. and Gen. 1988* **21** 2875.

[13] Klimov A.B. e Muñoz C. *Journal of Optics B 2005* **7** 588-600.

[14] Galetti D. e de Toledo Piza A.F.R. *Physica A 1995* **214** 207-228 .

[15] Galetti D. e Ruzzi M. *Physica A 1999* **264** 473-491.

[16] Galetti D. e Ruzzi M. *J. Phys. A: Math. and Gen. 2000* **33** 2799-2816.

[17] Ruzzi M., Marchiolli M.A. e Galetti D. *J. Phys. A: Math. and Gen. 2005* **38** 6239-6251.

[18] Marchiolli M.A., Ruzzi M. e Galetti D. *Phys. Rev. A 2005* **72** 042308.

[19] Marchiolli M.A., Silva E.C. e Galetti D. *J. Phys. A: Math. and Gen. 2009* **79** 022114.

[20] Einstein A., Podolsky B. e Rosen N., *Phys. Rev. 1935* **47**, 777.

[21] Schrödinger E. *Proc. Amer. Phil. Soc. 1935* **124**, 32338.

[22] Bell J.S. *Physics 1965* **1**, 195

[23] Feynman R. *Int. J. Theor. Physics 1982* **21** 467.

[24] Deutsh D. *Proc. R. Soc. London A 1985* **400** 97 .

[25] Deutsh D. *Proc. R. Soc. London A 1989* **425** 73 .

[26] Shor P.W. *Proc.* 35^{th} *An. Symp. on Found. of Comp. Sc. 1994* IEEE Press, Los Alamitos, CA.

[27] Nielsen M. A. e Chuang I. L. *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press 2000).

[28] Vedral V. *Introduction to Quantum Information Science* (Oxford University Press 2006).

[29] Horodecki R., Horodecki P., Horodecki M. e Horodecki K. *Rev. Mod. Phys. 2009* **81**, 865.

[30] Amico L., Fazio R., Osterloh A. e Vedral V. *Rev. Mod. Phys. 2009* **80**, 517.

[31] Kitagawa M. e Ueda M. *Phys. Rev. A 1993* **47** 5138.

[32] Sorensen A., Duan M., Cirac J.I. e Zoller P. *Nature (London) 2001* **409** 63.

[33] Toth G., Knapp C., Gühne O. e Briegel H.J. *Phys. Rev. A 2009* **79** 042334.

[34] Fano U. *Rev. of Mod. Phys. 1957* **29** number 1.

[35] Elinas D. e Floratos E.G. *J. Phys. A: Math. and Gen. 1999* **32** L63-L69.

[36] de Groot S.R. e Suttorp L.G. *Foundations of Electrodynamics* (Amsterdam: North-Holland 1972).

[37] Hillery M., O'Connell R.F., Scully M.O. e Wigner E.P. *Phys. Rep. C 1984* **106** 121.

[38] Balazs N.L. e Jennings B.K. *Phys. Rep. C 1984* **104** 347.

[39] Kim Y.S. e Noz M.E. *Phase Space Picture of Quantum Mechanics* (Singapore: World Scientific 1991).

[40] Le Bellac M. *Quantum Physics* (Cambridge University Press 2006).

[41] Hill S. e Wootters W.K. *Phys. Rev. Lett. 1997* **78** 5022.

[42] Wootters W.K. *Phys. Rev. Lett. 1998* **80** 2245.

[43] Popescu S. e Rohrlich D. *Phys. Rev. A 1997* **56** 3319.

[44] Toth G., Knapp C., Gühne O. e Briegel H.J. *Phys. Rev. Lett. 2007* **99** 250405.

[45] Korbicz J.K., Cirac J.I. e Lewenstein M. *Phys. Rev. Lett. 2005* **95** 120502 .

[46] Messikh A., Ficek Z. e M.R.B. Wahiddin M.R.B. *Phys. Rev. A 2003* **68** 64301.

[47] Wang X., Miranowicz A., Liu Y., Sun C.P. e Nori F. *arXiv:0909.4834v2 [quant-ph] 2009.*

[48] Wang X. e Sanders B.C. *Phys. Rev. A 2003* **68** 012101.