

Universidade Federal do Espírito Santo

Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Nível Mestrado

**Rodolfo Camargo de Freitas**

# **Perturbações Tensoriais de Origem Quântica na Teoria de Brans-Dicke**

Vitória

2010

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Rodolfo Camargo de Freitas

# Perturbações Tensoriais de Origem Quântica na Teoria de Brans-Dicke

Dissertação apresentada como requisito  
parcial para a obtenção do título de  
Mestre em Física, pelo Programa  
de Pós-Graduação em Física da  
Universidade Federal do Espírito Santo

Orientador: Prof. Dr. Sérgio V. B.  
Gonçalves

Vitória

2010

*“If we begin with certainties, we shall end in doubts; but if we begin with doubts,  
and are patient in them, we shall end in certainties.”*

(Sir Francis Bacon, *De Augmentis Scientiarum*)

## **Resumo**

A inflação cósmica, que é a hipótese de que o Universo primordial tenha passado por um período de expansão exponencial, é atualmente a mais aceita e estudada teoria para explicar as flutuações primordiais que evoluíram até as estruturas em grande escala que observamos hoje. As ondas gravitacionais, quando detectadas, podem nos dar informações importantes sobre a inflação. Neste trabalho estudamos a teoria de Brans-Dicke e as ondas gravitacionais produzidas pela inflação cosmológica nesta teoria e obtemos parâmetros observacionais como o espectro de potência, o índice espectral e a densidade relativa de energia.

## **Abstract**

The cosmic inflation, which is the hypotheses that the early Universe has passed by a period of exponential expansion, is currently the most accepted and studied theory to explain the early fluctuations which evolved to the large scales structures which we observe today. The gravitational waves, when detected, can give us important informations about inflation. In this work we study the Brans-Dicke theory and the gravitational waves produced by cosmological inflation in this theory and we obtain observational parameters as the spectral power, the spectral index and the relative density of energy.

# Lista de Figuras

2.1	Modo de polarização $\oplus$ . . . . .	16
2.2	Modo de polarização $\otimes$ . . . . .	17
5.1	Número de partículas em função do tempo . . . . .	65
5.2	Número de partículas em função do tempo . . . . .	65
5.3	Número de partículas em função de $k$ . . . . .	65
5.4	Número de partículas em função de $k$ . . . . .	66
5.5	Espectro de potência em função de $k$ . . . . .	68
5.6	Espectro de potência em função de $k$ . . . . .	68
5.7	Espectro de potência em função de $k$ . . . . .	69
5.8	Índice espectral . . . . .	71
5.9	Densidade de energia em função de $k$ . . . . .	75
5.10	Densidade de energia . . . . .	76

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Relatividade Geral</b>	<b>8</b>
2.1	Equações de Einstein . . . . .	10
2.2	Aproximação de campo fraco . . . . .	12
2.3	Soluções cosmológicas de base . . . . .	17
2.4	Perturbações tensoriais . . . . .	20
2.5	Ação e Hamiltoniana clássicas das ondas gravitacionais . . . . .	23
2.6	Quantização . . . . .	24
2.7	Observáveis . . . . .	30
2.7.1	Espectro de potência . . . . .	30
2.7.2	Densidade de energia . . . . .	31
<b>3</b>	<b>A teoria de Brans-Dicke</b>	<b>35</b>
3.1	Equações de campo . . . . .	37
3.2	Aproximação de campo fraco . . . . .	39
3.3	Transformação de unidades e invariância . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Perturbações tensoriais na teoria de Brans-Dicke</b>	<b>45</b>
4.1	Soluções cosmológicas de base . . . . .	45
4.2	Perturbações tensoriais . . . . .	49
4.3	Ação e Hamiltoniana clássicas das ondas gravitacionais . . . . .	53



<b>5</b>	<b>Perturbações tensoriais quânticas</b>	<b>58</b>
5.1	Quantização canônica . . . . .	58
5.2	Estados coerentes . . . . .	61
5.3	Coeficientes de Bogoliubov . . . . .	63
5.4	Observáveis . . . . .	66
5.4.1	Espectro de potência . . . . .	66
5.4.2	Índice espectral . . . . .	69
5.4.3	Densidade de energia . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>77</b>
<b>A</b>	<b>Transformações de Bogoliubov</b>	<b>81</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>84</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Uma das primeiras aplicações da teoria da Relatividade Geral foi tentar descrever o Universo em que vivemos. Estes estudos foram feitos por homens como Einstein, Alexander Friedmann e Georges Lemaître. As previsões de um Universo não estático, feitas por Friedmann e Lemaître na década de 1920, foram confirmadas logo em seguida, em 1929, por Edwin Hubble quando o mesmo verificou, através da medição do efeito Doppler na radiação emitida por galáxias distantes, que as mesmas se afastavam do Sistema Solar e que a taxa de afastamento é maior para galáxias mais distantes. Tendo em consideração o Princípio Cosmológico, que atesta que não existe posição privilegiada no Universo, ou seja, o mesmo deve ser homogêneo e isotrópico, chegou-se a conclusão de que o Universo, em grande escala, está em processo de expansão.

Nas décadas seguintes, com o surgimento de novas tecnologias e a consequente expressiva melhora nos dados observacionais e também no processamento dos mesmos provocou um desenvolvimento bastante acelerado do nosso conhecimento a respeito do Universo. Previsões como a radiação cósmica de fundo em microondas e a abundância primordial de elementos como hidrogênio, hélio-4, hélio-3, deutério e lítio-7 são os grandes triunfos do modelo cosmológico padrão.

Para melhor descrevermos o Universo que conhecemos o modelo cosmológico padrão tem de assumir algumas condições iniciais muito particulares no que diz respeito a homo-

geneidade e a velocidade inicial das partículas. Tais condições iniciais ficaram conhecidas como problema do horizonte e problema da planura [1], respectivamente. Como o modelo não prevê e nem explica tais condições iniciais uma teoria que o faça é de fundamental importância.

Em uma tentativa de resolver tais problemas, em 1980, Alan Guth propôs uma expansão exponencial do Universo nos seus instantes iniciais. Esta teoria ficou conhecida como Inflação Cósmica. Nos modelos mais simples a inflação é provocada por um fluido de pressão negativa ou por um campo escalar, também conhecido como *inflaton*.

Na década de 1930, Fritz Zwicky, estudando o aglomerado de galáxias Coma, constatou que existia cerca de 500 vezes mais matéria do que era possível observar nesse aglomerado. Durante as décadas seguintes outros fizeram a mesma constatação analisando curvas de rotação de galáxias espirais, por exemplo. Essa matéria, que não podia ser observada, ficou conhecida como matéria escura e é até hoje um dos grandes desafios da Cosmologia.

No final da década de 1990 constatou-se, através da observação de Supernovas tipo Ia, que, diferentemente do que era previsto pelo modelo cosmológico padrão, o Universo passa, neste momento, por um processo de expansão acelerada. Um possível (e desconhecido) responsável por tal aceleração da expansão cósmica foi chamada energia escura. A natureza tanto da matéria escura como da energia escura é ainda um mistério. O modelo de energia escura mais difundido é a constante cosmológica, mas existem modelos alternativos, como gás de Chapligyn, quintessência e teorias escalares-tensoriais.

As teorias escalares-tensoriais combinam dois tipos de campo, os tensoriais, como na Relatividade Geral, e o campo escalar, que é previsto por teorias como a teoria de Cordas e a teoria de Kaluza-Klein [2]. A mais simples e comum na literatura é a teoria de Brans-Dicke, onde a constante gravitacional da teoria Newtoniana ( $G$ ) é substituída pelo inverso de um campo escalar que é não-minimamente acoplado a geometria do espaço-tempo [2,3].

Segundo a teoria da Relatividade Geral o Universo é preenchido por um fundo de ondas gravitacionais, que são flutuações da estrutura geométrica do espaço-tempo, geradas durante o *Big-Bang*. Assim como a Radiação Cósmica de Fundo, as ondas gravitacionais podem fornecer informações importantes sobre a inflação e a formação de estruturas em grande escala do Universo [1,4]. Para detectar as ondas gravitacionais de origem astrofísica (como as produzidas por colisões de buracos negros, ou explosões de supernovas) e também as de origem cosmológica já estão em operação observatórios de ondas gravitacionais como o LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*), nos Estados Unidos da América, o VIRGO, localizado na Itália, que é um esforço conjunto entre França e Itália, MiniGrail, na Holanda, CLIO (*Cryogenic Laser Interferometer Observatory*), no Japão, o GEO 600, baseado na Alemanha mas que conta com colaboração britânica, o TAMA 300, também no Japão e a antena Mario Schenberg (Projeto Gráviton) no Brasil. E estão em projeto o AIGO (*Australian International Gravitational Observatory*), na Austrália, o LCGT (*Large Scale Cryogenic Gravitational Wave Telescope*) no Japão, o LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*), que é um detector espacial projetado pela NASA em colaboração com a ESA, e o BBO (*Big Bang Observer*), sucessor do LISA e que tem como principal objetivo observar ondas gravitacionais primordiais [5].

O objetivo do presente trabalho é desenvolver e analisar as perturbações tensoriais (ondas gravitacionais) primordiais de origem quântica, tendo como modelo gravitacional a teoria de Brans-Dicke. Obtemos também parâmetros observáveis que futuramente podem ser comparados com dados observacionais.

No segundo capítulo fazemos uma breve revisão da teoria da Relatividade Geral ao obtermos as equações de campo variando a ação de Hilbert-Einstein. Em seguida fazemos uma aproximação linear de campo fraco para os caso estacionário e não estacionário. Finalmente estudamos as soluções cosmológicas de base, desenvolvemos as perturbações tensoriais que mais tarde são quantizadas para obtermos os parâmetros observacionais. No terceiro capítulo introduzimos a teoria de Brans-Dicke ao obtermos as equações de campo a partir da ação de Brans-Dicke. Em seguida fazemos a aproximação de campo fraco para

o caso estacionário e então analisamos a mesma teoria no referencial de Einstein através de uma transformação conforme. No quarto capítulo tratamos das soluções cosmológicas de base na teoria de Brans-Dicke e obtemos as equações que regem o comportamento das perturbações tensoriais a partir das equações de campo. Partindo da ação de Brans-Dicke mostramos a ação das ondas gravitacionais, para em seguida quantizá-las e finalmente calculamos os parâmetros observáveis.

## Capítulo 2

# Relatividade Geral

Em 1887 Albert Michelson e Edward Morley testaram a lei de adição de velocidades da mecânica Newtoniana quando tentavam determinar o movimento da Terra em relação ao éter [6]. O resultado do experimento foi uma evidência da não existência do *luminiferous aether* e indicou que a mecânica Newtoniana deveria ser modificada. Em 1905 Albert Einstein publica a teoria da Relatividade Especial, onde ele, a partir de dois postulados, encontra as transformações de Lorentz, que até então eram apenas hipóteses lançadas anos antes por Lorentz, Fitzgerald e Poincaré para explicar o resultado do experimento de Michelson e Morley. O resultado do experimento, somado ao sucesso da teoria de Einstein, evidenciaram as limitações do pensamento Newtoniano.

Nos anos seguintes Einstein parte em busca de uma teoria de gravitação que seja consistente com o princípio relativístico. A principal idéia que guiou Einstein na formulação da Relatividade Geral foi a equivalência local entre forças inerciais e gravitacionais. Mas ele foi também influenciado pelas críticas de Ernst Mach ao conceito Newtoniano de espaço e tempo absolutos, idéias estas que já haviam sido exploradas anteriormente por outros pensadores [7]. Foi o próprio Einstein um dos primeiros a utilizar a expressão princípio de Mach para tais idéias.

Para Mach apenas o movimento relativo existe, ou seja, não existe espaço absoluto da maneira como existia para Newton. Tome como exemplo o famoso experimento do balde

com água. Enquanto o balde permanece em repouso, a superfície da água presente no balde permanece plana. Quando o balde começa a girar a força centrífuga faz com que a superfície da água se torne côncava, e quanto mais rápido o balde gira, mais côncava é a superfície. Se a velocidade angular do balde é diminuída até ele parar, a água continuará a rodar por algum tempo e, durante esse intervalo de tempo, a superfície permanecerá côncava. Finalmente, quando a água estiver novamente em repouso, a superfície voltará a ser plana.

Segundo a física Newtoniana, a concavidade da superfície da água é resultado da força centrífuga causada pela rotação da água, relativa ao espaço absoluto. Para Mach, a força centrífuga experimentada pela água no balde só existe porque o balde rotaciona em relação as estrelas fixas e distantes. Além disso, caso o balde permanecesse em repouso e as estrelas fixas girassem, então o efeito provocado sobre a superfície da água no balde seria o mesmo que é produzido pela rotação do balde.

Mach vê toda a matéria acoplada de maneira tal que as forças inerciais têm origem na matéria. Do exemplo anterior, segue que as forças inerciais observadas em um sistema local devem ser interpretadas, segundo as idéias de Mach, como efeito gravitacional devido as massas distantes aceleradas em relação ao sistema local.

Mesmo amparado pelo princípio de Mach, Einstein as incorporou de maneira incompleta à Relatividade Geral. Isto fica evidente através da solução das equações de campo para o espaço-tempo livre de matéria, também conhecido como espaço de De Sitter. Neste caso o espaço-tempo evolui temporalmente mesmo na ausência de componente material.

## 2.1 Equações de Einstein

O resultado da tentativa de Einstein de incorporar o princípio de Mach à gravitação é a teoria da Relatividade Geral, descrita pelas equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} \quad . \quad (2.1)$$

Nestas equações  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  são o tensor e o escalar de Ricci, respectivamente,  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento e índices gregos, como  $\mu$ , são iguais a 0, 1, 2 e 3, onde 0 é a componente temporal, e 1, 2 e 3 as três componentes espaciais.  $k$  é uma constante, que é definida como sendo  $k = \frac{8\pi G}{c^4}$  para que as equações descrevam corretamente o comportamento dos planetas no sistema solar. Na definição anterior,  $G$  é a constante de Newton e  $c$  é a velocidade da luz. Daqui em diante faremos  $c = 1$ .

O tensor de Ricci [8] é escrito como

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\beta - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \quad , \quad (2.2)$$

onde  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  é o símbolo de Christoffel, que é dado pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  através da relação

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{g^{\alpha\beta}}{2} (g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \quad , \quad (2.3)$$

e o escalar de Ricci é

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad . \quad (2.4)$$

O tensor energia-momento deve satisfazer a relação  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$ , onde  $\nabla_\mu$  e  $_{;\mu}$  denotam a derivada covariante que, para um tensor de ordem dois como o tensor energia-momento, é escrita como

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = T^{\mu\nu}_{,\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\mu}^\nu T^{\mu\alpha} \quad , \quad (2.5)$$



onde  $T^{\mu\nu}_{,\mu} = \partial_\mu T^{\mu\nu}$ .

Para um fluido perfeito, o tensor energia-momento é dado por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \quad , \quad (2.6)$$

onde  $\rho$  e  $p$  são a densidade e a pressão do fluido, respectivamente e  $u^\mu$  é a quadri-velocidade do fluido.

A equação (2.1) pode ser obtida a partir da ação de Hilbert-Einstein:

$$S = \int \left( \frac{R}{16\pi G} + \mathcal{L}_M \right) \sqrt{-g} \, d^4x \quad , \quad (2.7)$$

onde  $g$  é o determinante do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ <sup>1</sup>. Variando (2.7) em relação ao tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{16\pi G} \int \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \frac{1}{16\pi G} \int \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \\ + \int \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} d^4x \quad . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Mas o termo

$$\int \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = \int \nabla_\alpha \left[ g^{\mu\nu} \left( \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \right) - g^{\alpha\mu} \left( \delta \Gamma_{\beta\mu}^\beta \right) \right] \sqrt{-g} d^4x \quad ,$$

é uma contribuição de contorno que, no infinito, pode ser definida como nula, e o tensor energia-momento é

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M \quad . \quad (2.9)$$

Fazendo  $\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$  é possível obter as equações de campo (2.1).

---

<sup>1</sup>A menos que se escreva o contrário, vamos utilizar em todo este texto a métrica com assinatura  $(-+++)$ .

## 2.2 Aproximação de campo fraco

As equações de campo (2.1) da Relatividade Geral são não lineares e portanto difíceis de serem resolvidas exatamente, a menos que se imponha algumas condições de simetria, como no caso da métrica de Schwarzschild, ou que se faça algumas aproximações lineares [8]. Vamos tomar a métrica com componentes

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad , \quad (2.10)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é o tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski e  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  é a aproximação em primeira ordem. Toda vez que subirmos ou descermos um índice, usaremos o tensor  $\eta_{\mu\nu}$ . O tensor métrico deve satisfazer a relação  $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$ , de maneira que

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad . \quad (2.11)$$

Calculando o tensor de Einstein  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ , encontramos

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( h^{\alpha}_{\mu,\nu\alpha} + h^{\alpha}_{\nu,\mu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h^{\lambda\alpha}_{,\lambda\alpha} + \eta_{\mu\nu} \square h \right) \quad . \quad (2.12)$$

Façamos a transformação

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad , \quad (2.13)$$

que é conhecida como traço reverso, onde  $h = g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$  é o traço da perturbação métrica. A transformação inversa é dada por  $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$ , e o tensor de Einstein escrito nessa nova variável fica

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \bar{h}^{\alpha}_{\mu,\nu\alpha} + \bar{h}^{\alpha}_{\nu,\mu\alpha} - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} \right) \quad . \quad (2.14)$$

Uma pequena mudança no sistema de coordenadas, gerada por um vetor  $\xi^{\mu}$ , cujas componentes são funções da posição, deixa a métrica (2.10) inalterada, desde que  $\xi^{\mu}$  seja

pequeno. Escrevemos esta transformação

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha} \quad . \quad (2.15)$$

Sendo assim, usando a transformação

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} g^{\alpha\beta} \quad , \quad (2.16)$$

e tomando apenas termos até primeira ordem, temos:

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad , \quad (2.17)$$

o que significa que podemos redefinir  $h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$ . Tal transformação é chamada, em analogia com a teoria eletromagnética, de transformação de calibre.

É possível notar que se impormos a condição  $\bar{h}_{\alpha\mu,\alpha} = 0$  simplificamos a equação (2.14). Como as funções de calibre  $\xi_{\alpha}$  são livres devemos encontrar um calibre onde a condição  $\bar{h}_{\alpha\mu,\alpha} = 0$  seja verdadeira. Tal condição de calibre é chamada de calibre de Lorentz.

Aplicando a transformação de coordenadas ao tensor  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , temos

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu} \xi_{\alpha,\alpha} \quad , \quad (2.18)$$

onde  $\bar{h}_{\mu\nu,\mu} \neq 0$ .

Queremos um calibre onde a condição  $\bar{h}'_{\mu\nu,\mu} = 0$  seja satisfeita. Para tal,  $\xi_{\alpha}$  deve satisfazer

$$\square \xi_{\mu} = \bar{h}_{\mu\alpha,\alpha} \quad . \quad (2.19)$$

Ou seja, existe pelo menos um vetor  $\xi_\mu$  que satisfaz a equação (2.19), de maneira que neste novo sistema de coordenadas o tensor de Einstein é

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} \quad , \quad (2.20)$$

onde, para simplificarmos a notação, descartamos o símbolo “ ’ ” usado para denotar as transformação (2.15).

Assim sendo, as equações lineares de campo são:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi GT_{\mu\nu} \quad . \quad (2.21)$$

A teoria da Relatividade Geral deve fazer as mesmas previsões que a teoria Newtoniana de gravitação quando o campo gravitacional é pequeno o suficiente para criar velocidades inferiores a velocidade da luz [9]. O fato das velocidades serem pequenas implica que as componentes do tensor energia-momento devem obedecer a relação  $|T^{00}| > |T^{0i}| > |T^{ij}|$  (onde  $i$  e  $j$  denotam componentes espaciais), como pode ser verificado através de uma rápida olhada na equação (2.6). Por meio de (2.21) e da desigualdade escrita acima pode-se concluir que  $|\bar{h}^{00}| > |\bar{h}^{0i}| > |\bar{h}^{ij}|$ .

Tomando uma massa  $M$  pontual e estacionária, podemos resolver a equação diferencial (2.21) para  $\bar{h}_{00}$ , lembrando que em coordenadas esféricas

$$\nabla^2\bar{h}_{00} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\bar{h}_{00}}{dr} \right) \quad , \quad (2.22)$$

e encontramos

$$\bar{h}_{00} = 4G \frac{M}{|\vec{r}|} \quad . \quad (2.23)$$

Da transformação de calibre (2.13) sabemos que  $h = -\bar{h}$  e como as componentes espaciais de  $\bar{h}_{\mu\nu}$  são pequenas comparadas com a componente temporal, podemos aproximar  $h =$

$-\bar{h} \approx \bar{h}_{00}$ . Desta forma podemos escrever:

$$\begin{aligned} h_{00} &= 2G \frac{M}{|\vec{r}|} \\ h_{ij} &= 2G \frac{M}{|\vec{r}|} . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Com este resultado podemos calcular o desvio para o vermelho [8] causado por um campo gravitacional como das equações (2.24):

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\mathbf{v}} = GM \left( \frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_r} \right) , \quad (2.25)$$

onde  $\Delta \mathbf{v}$  é a diferença entre a frequência da radiação eletromagnética emitida e a recebida ( $\mathbf{v}$ ).  $r_f$  e  $r_r$  são as coordenadas da fonte emissora de radiação e do receptor, respectivamente, e  $M$  é a massa do corpo fonte do campo gravitacional.

É possível também calcular o desvio no caminho de um fóton provocado por um campo gravitacional. O ângulo de deflexão de um fóton [10] viajando a uma distância  $r$  de uma fonte de campo gravitacional de massa  $M$  é

$$\alpha = \frac{4MG}{r} . \quad (2.26)$$

Existe também a possibilidade do campo ser fraco e não estacionário. Para o caso de um corpo distante a solução de (2.21) no vácuo é do tipo ondas planas

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + A_{\mu\nu}^*(\vec{k})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} . \quad (2.27)$$

Da equação de onda para o caso do vácuo e da condição  $\bar{h}_{\mu\nu, \nu} = 0$ , que foi imposta anteriormente para simplificar as equações lineares de campo, obtemos, respectivamente

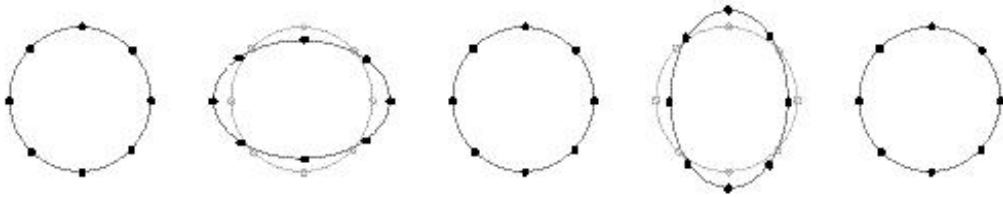
$$\begin{aligned} k^\alpha k_\alpha &= 0 \\ k^\nu A_{\mu\nu} &= 0 . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Como  $k^\alpha = (\omega, \vec{k})$ , a primeira das equações anteriores mostra que ondas gravitacionais se propagam com a velocidade da luz e a segunda que elas são transversas, ou seja, o plano de oscilação é perpendicular a direção de propagação.

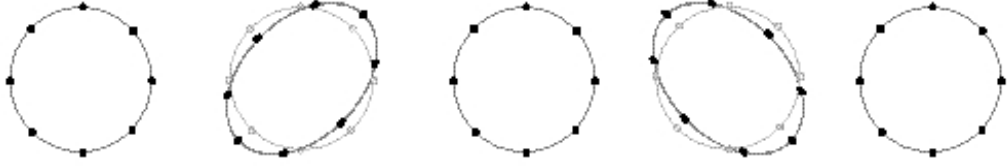
Usando estas propriedades e também as transformações (2.13) e (2.18) é possível mostrar que, para uma onda viajando na direção  $z$  positiva, temos:

$$(A_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Ou seja, temos apenas duas componentes independentes,  $h_{xx}$  e  $h_{xy}$ , que correspondem a dois estados de polarização das ondas gravitacionais, conhecidos como estados  $\otimes$  e  $\oplus$ . O efeito de tais ondas atravessando um anel de massas teste em repouso no plano  $xOy$ , para o caso  $h_{xx} \neq 0$  e  $h_{xy} = 0$  e para o caso  $h_{xx} = 0$  e  $h_{xy} \neq 0$  podem ser vistos nas figuras abaixo.



**Figura 2.1:** O efeito de ondas gravitacionais atravessando um anel de massas testes para o estado de polarização  $\oplus$ , que corresponde a  $h_{xx}(t,z) \neq 0$  e  $h_{xy} = 0$  [11].



**Figura 2.2:** O fecho de ondas gravitacionais atravessando um anel de massas testes para o estado de polarização  $\otimes$ , que corresponde a  $h_{xy}(t, z) \neq 0$  e  $h_{xx} = 0$  [11].

## 2.3 Soluções cosmológicas de base

O Princípio Cosmológico, em resumo, atesta que o Universo é homogêneo e isotrópico. Tais propriedades podem ser verificadas através da observação da distribuição das estruturas em grande escala do Universo e também da radiação cósmica de fundo. Sabemos desde 1929, através das observações de Edwin Hubble, que o Universo se expande. Um Universo que satisfaça o Princípio Cosmológico e que expanda pode ser descrito pela chamada métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (métrica FLRW), que, em coordenadas esféricas, é:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right] , \quad (2.30)$$

onde  $a(t)$  é o fator de escala, que como o nome diz define a escala da geometria do espaço<sup>2</sup> [8], e  $\kappa$  é o parâmetro de curvatura, que pode ser  $\kappa < 0$ ,  $\kappa = 0$  e  $\kappa > 0$ , para descrever o Universo com geometrias localmente hiperbólica, plana e esférica, respectivamente.

As observações da radiação cósmica de fundo sugerem um universo plano, ou seja, podemos fazer  $\kappa = 0$ , e em coordenadas cartesianas, temos

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) . \quad (2.31)$$

<sup>2</sup>Para o espaço fechado (geometria esférica) o fator de escala pode ser interpretado como o raio do Universo. Já para o espaço aberto ou plano a mesma interpretação não é válida.

Aplicando a métrica (2.31) no símbolo de Christoffel (2.3) encontramos

$$\Gamma_{ij}^0 = \dot{a}a\delta_{ij} \quad , \quad \Gamma_{0i}^j = \frac{\dot{a}}{a}\delta_i^j \quad , \quad (2.32)$$

e portanto o tensor e o escalar de Ricci ficam

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad , \quad R_{ij} = (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2)\delta_{ij} \quad , \quad R = -6\frac{\ddot{a}}{a} - 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad , \quad (2.33)$$

onde “ $\dot{\phantom{x}}$ ” significa derivação com relação ao tempo  $t$ . Substituindo a componente  $R_{00}$  do tensor de Ricci na equação de campo (2.1) encontramos

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi G \sum_i \rho_i \quad , \quad (2.34)$$

que é conhecida como equação de Friedmann, onde  $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$  é o parâmetro de Hubble.

Podemo escrever

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_i \Omega_i(t) \quad , \quad (2.35)$$

onde

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i}{\rho_c} \quad (2.36)$$

é a densidade relativa dos componentes que constituem o Universo,

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad , \quad (2.37)$$

é a densidade crítica e  $H_0 = H(t_0)$  é o valor do parâmetro de Hubble hoje.

Considere agora um fluido barotrópico, ou seja, um fluido em que a pressão depende linearmente da densidade. Então escrevemos a equação de estado

$$p = \alpha\rho \quad . \quad (2.38)$$



Sabemos que ao longo de sua história o Universo atravessou fases distintas, onde em cada uma destas fases um determinado fluido foi dominante na composição da densidade total. Acredita-se que primeira dessas fases foi a inflação, onde o Universo passa por uma expansão exponencial. Para que a inflação ocorra precisamos de um fluido de pressão suficientemente negativa, e portanto fazemos  $\alpha = -1$ . Em seguida a componente dominante na densidade do Universo foi um gás de fótons e neste caso sabemos, da termodinâmica, que  $\alpha = 1/3$ . Consequente entramos na era da matéria. Nela os átomos se agregam, formando as estruturas que vemos hoje, como galáxias e aglomerados de galáxias. Em grande escala podemos considerar o Universo como sendo constituído principalmente de poeira<sup>3</sup>, que tem pressão nula, ou seja,  $\alpha = 0$ . Resumindo, temos:

$$\alpha = \begin{cases} -1 & , \text{ inflação} \\ 1/3 & , \text{ radiação} \\ 0 & , \text{ matéria} \end{cases} . \quad (2.39)$$

Da equação para a conservação do tensor energia-momento,  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$  e da equação de estado do fluido, temos

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho(1 + \alpha) = 0 \quad (2.40)$$

$$\nabla\rho = 0 \quad , \quad (2.41)$$

onde para obtermos a equação (2.40), que expressa a conservação da energia, fizemos o índice  $\mu$  do tensor energia-momento igual a zero e somamos em  $\nu$  e para obtermos a equação (2.41), que é a conservação do momento, fizemos  $\mu = i$  e também somamos em  $\nu$ .

---

<sup>3</sup>Neste caso estamos, por enquanto, desconsiderando o fato observacional de que o Universo passa por uma expansão acelerada, o que pode sugerir a existência de uma componente de comportamento distinto daquele da matéria que conhecemos e que possui participação significativa na atual composição do Universo

Da equação da conservação de energia (2.40) calculamos

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\alpha)} \quad , \quad (2.42)$$

e, substituindo na equação de Friedmann, podemos encontramos

$$a \propto t^{\frac{2}{3(1+\alpha)}} \quad . \quad (2.43)$$

Mais adiante veremos que um reescalonamento da coordenada temporal irá facilitar razoavelmente alguns cálculos. Portanto, desde já, definimos este reescalonamento do tempo, mais conhecido como tempo conforme, como sendo:

$$d\eta = \frac{1}{a(t)} dt \quad , \quad (2.44)$$

tal que o fator de escala calculado em  $\eta$  fornece

$$a \propto \eta^{\frac{2}{1+3\alpha}} \quad . \quad (2.45)$$

## 2.4 Perturbações tensoriais

Quando perturbamos a equação de Einstein estamos relacionando perturbações na métrica com perturbações do tensor energia-momento. Como a métrica do espaço é descrita por um tensor (o tensor métrico) damos o nome de perturbações tensoriais às perturbações na métrica. O tensor energia-momento de um fluido perfeito é escrito em função da densidade de energia, da pressão e da velocidade das partículas que constituem o fluido. Quando perturbamos o tensor energia-momento perturbamos também a densidade de energia e a pressão, que são as perturbações escalares, e as perturbações na velocidade são conhecidas como perturbações vetoriais. Perturbações no traço de um tensor também são perturbações escalares e perturbações no divergente de um tensor são perturbações vetoriais.

Como visto anteriormente, um Universo homogêneo e isotrópico é descrito pela métrica FLRW, dada pela equação (2.31). Estamos interessados em perturbações na métrica e então a reescrevemos:

$$ds^2 = -dt^2 + (a^2(t)\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \quad , \quad (2.46)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $h_{ij} = h_{ij}(\vec{x}, t) \ll 1$  é a perturbação na métrica. Portanto o tensor métrico é dado por

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) \quad , \quad (2.47)$$

onde  $\bar{g}_{\mu\nu}$  é o tensor métrico da base, ou seja,

$$\bar{g}_{00} = -1 \quad , \quad \bar{g}_{ij} = a^2(t)\delta_{ij} \quad . \quad (2.48)$$

Como  $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$  encontramos que

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(\vec{x}, t) \quad . \quad (2.49)$$

Como as perturbações tensoriais, escalares e vetoriais evoluem independentemente [1], vamos nos preocupar apenas com as perturbações tensoriais. Aplicando a métrica (2.46) é possível calcular as conexões  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  e as conexões perturbadas  $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  como sendo

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= \dot{a}a\delta_{ij} \quad , \quad \Gamma_{i0}^j = \frac{\dot{a}}{a}\delta_i^j \quad , \\ \delta\Gamma_{0i}^j &= \frac{\dot{h}_i^j}{2} - \frac{\dot{a}}{a}h_i^j \quad , \quad \delta\Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{h}_{ij}}{2} \quad , \quad \delta\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left( h_i^k{}_{,j} + h_j^k{}_{,i} - h_{ij,}{}^k \right) \quad . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Com os resultados anteriores pode-se calcular a perturbação do tensor de Ricci, lembrando que perturbações tensoriais têm traço nulo. O resultado é:

$$\delta R_{ij} = \frac{\ddot{h}_{ij}}{2} + \frac{1}{2a^2} (h_{ik,jk} + h_{jk,ik} - h_{ij,kk}) + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{h}_{ij}}{2} - 2\dot{a}a \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{h_{ij}}{2a^2} \right) \quad . \quad (2.51)$$

Perturbando a equação (2.6) do tensor energia-momento de um fluido perfeito, tomando as componentes temporal, espaciais e também tomando o traço do tensor energia-momento

perturbado, temos

$$\delta T_{00} = \delta\rho \quad , \quad \delta T_{ij} = p h_{ij} \quad , \quad \delta T = 3\delta p - \delta\rho \quad . \quad (2.52)$$

onde  $\rho$  e  $p$  são a densidade e a pressão do fluido, respectivamente, e  $\delta\rho$  e  $\delta p$  as perturbações escalares. Como estamos interessados nos modos tensoriais vamos considerar as perturbações escalares nulas. Então perturbamos a equação de campo (2.1) e encontramos

$$\ddot{h}_{ij} - \frac{\dot{a}}{a} \dot{h}_{ij} + \left( -\frac{\nabla^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} \right) h_{ij} = 0 \quad . \quad (2.53)$$

Agora podemos usar o tempo conforme, através da equação (2.44) e também fazer

$$h_{ij} \rightarrow a^2 h_{ij} \quad . \quad (2.54)$$

Note que as transformações (2.54) é equivalente a fazer com que a métrica seja

$$g_{00} = -a^2(\eta) \quad , \quad g_{ij} = a^2(\eta)(\delta_{ij} + h_{ij}) \quad , \quad (2.55)$$

e portanto temos que

$$h''_{ij} + 2\frac{a'}{a} h'_{ij} - \nabla^2 h_{ij} = 0 \quad , \quad (2.56)$$

onde “ ’ ” é a derivada em relação ao tempo conforme  $\eta$ .

Decompondo as ondas gravitacionais nos dois estados de polarização e fazendo uma transformação de Fourier, escrevemos

$$h_{ij}(\vec{x}, \eta) = \sum_{s=\otimes, \oplus} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\mu^{(s)}(\eta)}{a(\eta)} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \boldsymbol{\epsilon}_{ij}^{(s)} \quad , \quad (2.57)$$

e encontramos

$$\mu'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) \mu = 0 \quad , \quad (2.58)$$

para cada estado de polarização ( $\oplus$  e  $\otimes$ ), onde  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(s)}$  é o tensor de polarização, que satisfaz a relação  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(s)} \boldsymbol{\varepsilon}^{ij(s')} = 2\delta^{ss'}$ . Vamos discutir as soluções deste tipo de equação diferencial mais a frente, quando estudarmos as perturbações tensoriais na teoria de Brans-Dicke.

## 2.5 Ação e Hamiltoniana clássicas das ondas gravitacionais

Para encontrarmos a ação das ondas gravitacionais precisamos perturbar a ação de Hilbert-Einstein até segunda ordem. Esta ação é dada por [4]<sup>4</sup>:

$$S_{og} = \frac{1}{8\pi l_p^2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu h_{ij} \partial_\nu h^{ij} \quad , \quad (2.59)$$

onde  $l_p = \sqrt{8\pi G}$  é o comprimento de Planck. Então encontramos a densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{og} = \frac{a^2}{8\pi l_p^2} (-h'_{ij} h'^{ij} + \nabla h_{ij} \cdot \nabla h^{ij}) \quad . \quad (2.60)$$

Podemos decompor a perturbação em termos dos estados de polarização

$$h_{ij} = h_{\oplus} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(\oplus)} + h_{\otimes} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(\otimes)} \quad ; \quad (2.61)$$

Fazendo

$$h_{\oplus} = h_{\otimes} = \sqrt{2} l_p \frac{\mu}{a} \quad , \quad (2.62)$$

encontramos

$$\mathcal{L}_{og} = \frac{1}{2} \left[ -(\mu' - \mathcal{H}\mu)^2 + (\nabla\mu)^2 \right] \quad , \quad (2.63)$$

onde  $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$ .

---

<sup>4</sup>Lembrando que neste texto usamos a assinatura  $(-+++)$ .

Portanto temos que

$$\mathcal{L}_{og}^{(1)} = -\frac{1}{2} \left( \mu'^2 + \mathcal{H}^2 \mu^2 - 2\mathcal{H} \mu \mu' - (\nabla \mu)^2 \right) . \quad (2.64)$$

Para  $(\mathcal{H} \mu^2)' = 0$  [4] encontramos a densidade Lagrangeana equivalente

$$\mathcal{L}_{og}^{(2)} = -\frac{1}{2} \left( \mu'^2 + (\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') \mu^2 - (\nabla \mu)^2 \right) . \quad (2.65)$$

Para encontramos as Hamiltonianas das ondas gravitacionais precisamos antes encontrar os momentos conjugados. Então temos

$$\tilde{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}_{og}^{(1)}}{\partial \mu'} = -\mu' + \mathcal{H} \mu \quad (2.66)$$

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}_{og}^{(2)}}{\partial \mu'} = -\mu' , \quad (2.67)$$

e finalmente as Hamiltonianas são

$$H^{(1)} = -\frac{1}{2} \int d^3x \left( \tilde{\pi}^2 - 2\mathcal{H} \mu \tilde{\pi} + (\nabla \mu)^2 \right) \quad (2.68)$$

e

$$H^{(2)} = -\frac{1}{2} \int d^3x \left( \pi^2 - \frac{a''}{a} \mu^2 + (\nabla \mu)^2 \right) . \quad (2.69)$$

## 2.6 Quantização

Para quantizarmos a Hamiltoniana de um campo devemos fazer com que o campo e seu momento conjugado se tornem operadores na descrição de Heisenberg da mecânica quântica, de forma que

$$H_{og}^{(2)} \rightarrow \hat{H}_{og}^{(2)} = -\frac{1}{2} \int d^3x \left[ \hat{\pi}^2 - \frac{a''}{a} \hat{\mu}^2 + (\nabla \hat{\mu})^2 \right] , \quad (2.70)$$

e devemos também impor a relação de comutação entre os operadores de campo e o momento, dada por

$$[\hat{\mu}(\vec{x}, \eta), \hat{\pi}(\vec{y}, \eta)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (2.71)$$

onde fizemos  $\hbar = 1$ .

Expandindo o operador de campo e o momento conjugado em Fourier, temos

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[ \hat{\mu}_{\vec{k}}(\eta) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{\mu}_{\vec{k}}^\dagger(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \\ \hat{\pi} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[ \hat{\pi}_{\vec{k}}(\eta) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{y}} + \hat{\pi}_{\vec{k}}^\dagger(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}} \right], \end{aligned} \quad (2.72)$$

e substituindo na relação de comutação (2.71) encontramos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} \int \int \frac{d^3k d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ [\hat{\mu}_{\vec{k}}, \hat{\pi}_{\vec{q}}] e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \vec{q}\cdot\vec{y})} + [\hat{\mu}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{\pi}_{\vec{q}}^\dagger] e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \vec{q}\cdot\vec{y})} \right\} + \\ &+ \frac{1}{4} \int \int \frac{d^3k d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ [\hat{\mu}_{\vec{k}}, \hat{\pi}_{\vec{q}}^\dagger] e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \vec{q}\cdot\vec{y})} + [\hat{\mu}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{\pi}_{\vec{q}}] e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \vec{q}\cdot\vec{y})} \right\} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \end{aligned} \quad (2.73)$$

mas podemos escrever a função delta de Dirac  $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$  como sendo [12]

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x} - \vec{y})} \quad . \quad (2.74)$$

Assim, para que a relação de comutação (2.73) seja válida, as componentes da expansão em Fourier devem obedecer a

$$\begin{aligned} [\hat{\mu}_{\vec{k}}(\eta), \hat{\pi}_{\vec{q}}^\dagger(\eta)] &= i\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}) \\ [\hat{\mu}_{\vec{k}}^\dagger(\eta), \hat{\pi}_{\vec{q}}(\eta)] &= i\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}) \\ [\hat{\mu}_{\vec{k}}(\eta), \hat{\pi}_{\vec{q}}(\eta)] &= i\delta^{(3)}(\vec{k} + \vec{q}) \\ [\hat{\mu}_{\vec{k}}^\dagger(\eta), \hat{\pi}_{\vec{q}}^\dagger(\eta)] &= i\delta^{(3)}(\vec{k} + \vec{q}) \quad , \end{aligned} \quad (2.75)$$

onde  $\hat{\mu}_{\vec{k}} = \hat{\mu}_{-\vec{k}}^\dagger$  e  $\hat{\pi}_{\vec{k}} = \hat{\pi}_{-\vec{k}}^\dagger$ .

Substituindo os operadores (2.72) no Hamiltoniano (2.70) e lembrando que podemos escrever

$$\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{k}-\vec{q})} = \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q}) \quad , \quad (2.76)$$

encontramos

$$\hat{H}_{og}^{(2)} = -\frac{1}{4} \int d^3k \left[ \left( \hat{\pi}_k \hat{\pi}_k^\dagger + \hat{\pi}_k^\dagger \hat{\pi}_k \right) + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) \left( \hat{\mu}_k \hat{\mu}_k^\dagger + \hat{\mu}_k^\dagger \hat{\mu}_k \right) \right] \quad . \quad (2.77)$$

Sabemos que na representação de Heisenberg da mecânica quântica a evolução temporal de um operador como  $\hat{\mu}$  ou  $\hat{\pi}$ , por exemplo, é dada pela equação de Heisenberg, que neste caso são

$$i\hat{\mu}' = \left[ \hat{\mu}, \hat{H}_{og}^{(2)} \right] \quad \text{e} \quad i\hat{\pi}' = \left[ \hat{\pi}, \hat{H}_{og}^{(2)} \right] \quad . \quad (2.78)$$

Calculamos o comutador entre o campo  $\hat{\mu}$  e o Hamiltoniano e encontramos

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\mu}, \hat{H}_{og}^{(2)} \right] &= -\frac{1}{8} \int \int \frac{d^3k d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ \left[ \hat{\mu}_k, \left( \hat{\pi}_q \hat{\pi}_q^\dagger + \hat{\pi}_q^\dagger \hat{\pi}_q \right) \right] + \left( q^2 - \frac{a''}{a} \right) \left[ \hat{\mu}_k, \left( \hat{\mu}_q \hat{\mu}_q^\dagger + \hat{\mu}_q^\dagger \hat{\mu}_q \right) \right] \right\} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ &\quad - \frac{1}{8} \int \int \frac{d^3k d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ \left[ \hat{\mu}_k^\dagger, \left( \hat{\pi}_q \hat{\pi}_q^\dagger + \hat{\pi}_q^\dagger \hat{\pi}_q \right) \right] + \left( q^2 - \frac{a''}{a} \right) \left[ \hat{\mu}_k^\dagger, \left( \hat{\mu}_q \hat{\mu}_q^\dagger + \hat{\mu}_q^\dagger \hat{\mu}_q \right) \right] \right\} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad . \quad (2.79) \end{aligned}$$

Fazendo uso das relações de comutação (2.75) encontramos

$$\hat{\mu}'_k = -\hat{\pi}'_k \quad , \quad (2.80)$$

que é a mesma relação existente entre o campo clássico e o seu momento conjugado. Da equação de Heisenberg para o operador momento, temos

$$\hat{\pi}'_k = \left[ k^2 - \frac{a''}{a} \right] \hat{\mu}_k \quad . \quad (2.81)$$

Combinando os dois resultados, vemos que o operador de campo obedece a mesma evolução temporal que o campo clássico, ou seja

$$\hat{\mu}''_k + \left[ k^2 - \frac{a''}{a} \right] \hat{\mu}_k = 0 \quad . \quad (2.82)$$



A solução geral é do tipo [4]

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{\vec{k}} &= \hat{a}_{\vec{k}}(\eta_0)f_k(\eta) + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger(\eta_0)f_k^*(\eta) \\ \hat{\pi}_{\vec{k}} &= \hat{a}_{\vec{k}}(\eta_0)g_k(\eta) + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger(\eta_0)g_k^*(\eta)\end{aligned}\tag{2.83}$$

onde

$$f'_k = -g_k \quad , \quad g'_k = \left[ k^2 - \frac{a''}{a} \right] f_k\tag{2.84}$$

e  $\eta_0$  é um tempo fixo qualquer.

Usando o resultado anterior, a relação de comutação (2.71) e a expansão de Fourier dos operadores de campo e momento conjugado, encontramos que

$$f_k g_k^* - g_k f_k^* = i \quad ,\tag{2.85}$$

desde que a relação

$$\left[ \hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \right] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}) \quad ,\tag{2.86}$$

seja satisfeita.

Devido a relação  $f'_k = -g_k$ , encontramos

$$f'_k f_k^* - f_k f_k'^* = i \quad ,\tag{2.87}$$

que nada mais é que o Wronskiano de  $f_k(\eta)$  e sua complexa conjugada  $f_k^*(\eta)$ .

Podemos também definir os operadores criação e destruição da mesma forma que se faz para quantizar o oscilador harmônico:

$$\hat{a}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{k}{2}} \left( \hat{\mu}_{\vec{k}} + \frac{i}{k} \hat{\pi}_{\vec{k}} \right) \quad , \quad \hat{a}_{-\vec{k}} = \sqrt{\frac{k}{2}} \left( \hat{\mu}_{\vec{k}} - \frac{i}{k} \hat{\pi}_{\vec{k}} \right) \quad .\tag{2.88}$$

Então concluímos que

$$\hat{\mu}_{\vec{k}} = \frac{\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger}{\sqrt{2k}} \quad , \quad \hat{\pi}_{\vec{k}} = -i\sqrt{\frac{k}{2}} \left( \hat{a}_{\vec{k}} - \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \right) \quad . \quad (2.89)$$

Da mesma maneira como foi feito anteriormente precisamos quantizar a hamiltoniana (2.68), de maneira que

$$\hat{H}_{og}^{(1)} = -\frac{1}{2} \int d^3x \left[ \hat{\pi}^2 - \mathcal{H}(\hat{\mu}\hat{\pi} + \hat{\pi}\hat{\mu}) + (\nabla\hat{\mu})^2 \right] \quad , \quad (2.90)$$

onde suprimimos o til do momento conjugado, lembrando que, para o caso deste Hamiltoniano,  $\pi = \mu' - \frac{\Phi'}{\Phi}\mu$ . Substituindo no Hamiltoniano a expansão (2.72) e os operadores (2.89), temos

$$\hat{H}_{og}^{(1)} = -\frac{1}{2} \int d^3k \left[ k \left( \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger\hat{a}_{-\vec{k}} \right) - i\mathcal{H} \left( \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger - \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{-\vec{k}} \right) \right] \quad . \quad (2.91)$$

Usando a equação de Heisenberg para os operadores  $\hat{a}_{\vec{k}}$  e  $\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger$ , encontramos

$$\frac{d\hat{a}_{\vec{k}}}{d\eta} = ik\hat{a}_{\vec{k}} + \mathcal{H}\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \quad , \quad \frac{d\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger}{d\eta} = ik\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger + \mathcal{H}\hat{a}_{\vec{k}} \quad . \quad (2.92)$$

Podemos escrever a solução geral deste sistema como sendo

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\vec{k}}(\eta) &= u_k(\eta)\hat{a}_{\vec{k}}(\eta_0) + v_k(\eta)\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger(\eta_0) \\ \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger(\eta) &= v_k^*(\eta)\hat{a}_{\vec{k}}(\eta_0) + u_k^*(\eta)\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger(\eta_0) \quad , \end{aligned} \quad (2.93)$$

onde  $\eta_0$  é um tempo fixo e as funções  $u_k(\eta)$  e  $v_k(\eta)$  obedecem

$$\frac{du_k}{d\eta} = iku_k + \mathcal{H}v_k^* \quad , \quad \frac{dv_k}{d\eta} = ikv_k + \mathcal{H}u_k^* \quad . \quad (2.94)$$

As equações (2.94) são as transformações de Bogoliubov e  $u_k(\eta)$  e  $v_k(\eta)$  são os coeficientes de Bogoliubov. Substituindo a solução geral (2.93) encontrada para os operadores

criação e destruição no comutador (2.86), encontramos

$$|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1 \quad , \quad (2.95)$$

como era esperado.

Substituímos a solução geral (2.93) dos operadores criação e destruição na equação (2.89) para encontrarmos

$$\hat{\mu}_{\vec{k}} = \frac{(u_k + v_k^*) \hat{a}_{\vec{k}}(\eta_0) + (u_k^* + v_k) \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger(\eta_0)}{\sqrt{2k}} \quad , \quad (2.96)$$

e comparando com a solução geral (2.83) concluímos que

$$f_k = \frac{u_k + v_k^*}{\sqrt{2k}} \quad . \quad (2.97)$$

Podemos também tomar a derivada em relação ao tempo comóvel  $\eta$  das equações (2.94) e então somando a primeira com a complexa conjugada da segunda, obtemos

$$\frac{d^2}{d\eta^2} (u_k + v_k^*) + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) (u_k + v_k^*) = 0 \quad . \quad (2.98)$$

Somando a primeira das equações (2.94) com a complexa conjugada da segunda obtemos

$$\begin{aligned} v_k^* &= \frac{i}{\sqrt{2k}} \frac{df_k}{d\eta} + \frac{f_k}{\sqrt{2k}} (k - i\mathcal{H}) \\ u_k &= \frac{-i}{\sqrt{2k}} \frac{df_k}{d\eta} + \frac{f_k}{\sqrt{2k}} (k + i\mathcal{H}) \quad , \end{aligned} \quad (2.99)$$

e podemos calcular o número de grávitons  $N = |v_k|^2$  (ver apêndice (A)) produzidos pela expansão do Universo, que é

$$N = |v_k|^2 = \frac{|f_k|^2}{2k} (k^2 + \mathcal{H}^2) + \frac{1}{2k} \left| \frac{df_k}{d\eta} \right|^2 - \frac{\mathcal{H}}{2k} \left( f_k \frac{df_k^*}{d\eta} + f_k^* \frac{df_k}{d\eta} \right) - \frac{1}{2} \quad (2.100)$$

Para o caso de  $k\eta \gg 1$  encontra-se, das equações (2.84), que  $g_k \approx \mp ikf_k$  e então temos que o número de partículas é

$$N \approx k|f_k|^2 \left( 1 + \frac{\mathcal{H}^2}{2k^2} \right) - \frac{1}{2} \quad , \quad (2.101)$$

e para  $k\eta \ll 1$  temos que  $g_k \approx -(a'/a)f_k$  e calculamos<sup>5</sup>

$$N \approx k|f_k|^2 - \frac{1}{2} \quad . \quad (2.102)$$

## 2.7 Observáveis

### 2.7.1 Espectro de potência

Sabemos que o espectro de potência é definido como sendo a transformada de Fourier de uma função de correlação de dois pontos [1], ou seja, para as ondas gravitacionais, temos

$$\langle 0 | \hat{h}_{ij}^\dagger(\vec{x}, \eta) \hat{h}^{ij}(\vec{y}, \eta) | 0 \rangle = \int P_T(k, \eta) \frac{\sin(kr)}{kr} d(\ln k) \quad , \quad (2.103)$$

onde  $P_T(k, \eta)$  é o espectro de potência, ou seja, a variância na distribuição de energia das ondas gravitacionais [13].

O processo de quantização das ondas clássicas (2.57), que transforma o campo escalar  $\mu$  em um operador, através da expressão (2.72), resulta em:

$$\hat{h}_{ij}(\vec{x}, \eta) = \frac{\sqrt{2}l_p}{a(\eta)} \sum_{s=\otimes, \oplus} \frac{1}{2} \int \frac{\epsilon_{ij}^{(s)}(\vec{k}) d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left( \hat{\mu}_{\vec{k},(s)} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{\mu}_{\vec{k},(s)}^\dagger e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \quad , \quad (2.104)$$

com o operador  $\hat{\mu}_{\vec{k}}$  escrito como

$$\hat{\mu}_{\vec{k}} = \hat{a}_{\vec{k}}(\eta_0) f_k(\eta) + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger(\eta_0) f_k^*(\eta) \quad , \quad (2.105)$$

---

<sup>5</sup>O significado das aproximações  $k\eta \ll 1$  e  $k\eta \gg 1$  será discutido mais adiante, quando falarmos das ondas gravitacionais na teoria de Brans-Dicke.

onde

$$f_k'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) f_k = 0 \quad , \quad (2.106)$$

que é a mesma equação diferencial que descreve o comportamento da função clássica  $\mu(\eta)$ .

Definimos então o estado de vácuo  $|0\rangle$ , que é aniquilado pelo operador  $\hat{a}_{\vec{k}}(\eta_0)$ , de maneira que

$$\hat{a}_{\vec{k}}|0\rangle = 0 \Rightarrow \langle 0|\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger = 0 \quad . \quad (2.107)$$

Agora é possível, usando (2.86), calcular a variância dos modos tensoriais, e encontra-se que

$$\langle 0|\hat{h}_{ij}^\dagger(\vec{x}, \eta)\hat{h}^{ij}(\vec{y}, \eta)|0\rangle = 8l_p^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|f_k(\eta)|^2}{a^2} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \quad . \quad (2.108)$$

Sabendo que o espaço é isotrópico e usando coordenadas esféricas é possível escrever

$$\langle 0|\hat{h}_{ij}^\dagger(\vec{x}, \eta)\hat{h}^{ij}(\vec{y}, \eta)|0\rangle = 8l_p^2 \int k^2 \frac{dk}{(2\pi)^3} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \frac{|f_k|^2}{a^2} e^{-ikr\cos\theta} \quad , \quad (2.109)$$

onde fizemos  $\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$  e  $\vec{k}\cdot\vec{r} = kr\cos\theta$ . Integrando, encontramos

$$\langle 0|\hat{h}_{ij}^\dagger(\vec{x}, \eta)\hat{h}^{ij}(\vec{y}, \eta)|0\rangle = 8l_p^2 \int \frac{k^2}{(2\pi)^2} \frac{|f_k|^2}{a^2} \frac{2\sin(kr)}{kr} dk \quad , \quad (2.110)$$

onde fazendo  $\vec{x} \rightarrow \vec{y}$  temos

$$P_T(k, \eta) = 4l_p^2 \frac{k^3}{\pi^2} \frac{|f_k|^2}{a^2} \quad . \quad (2.111)$$

## 2.7.2 Densidade de energia

Da equação (2.59) sabemos que a densidade Lagrangeana das ondas gravitacionais é

$$\mathcal{L}_{og} = \frac{1}{2l_p^2} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu h_{ij} \partial_\nu h^{ij} \quad , \quad (2.112)$$

e usando a equação (2.9) podemos calcular o tensor energia-momento das ondas gravitacionais:

$${}^{(og)}T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4l_p^2} \left( \partial_\mu h_{ij} \partial_\nu h^{ij} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha h_{ij} \partial_\beta h^{ij} \right) . \quad (2.113)$$

Fazendo

$$h_{ij} = \sqrt{2} l_p \sum_{s=\otimes, \oplus} \varepsilon_{ij}^{(s)} h^{(s)} , \quad h^{(s)} = \frac{\mu^{(s)}}{a} , \quad (2.114)$$

encontramos

$${}^{(og)}T_{\mu\nu} = -2 \left( \partial_\mu h \partial_\nu h - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha h \partial_\beta h \right) , \quad (2.115)$$

onde definimos

$$h = h^\otimes = h^\oplus . \quad (2.116)$$

Agora podemos calcular a densidade de energia, e encontramos

$$\rho_{(og)} = {}^{(og)}T_0^0 = \left( \frac{h'^2}{a^2} + \bar{g}^{ij} \partial_i h \partial_j h \right) . \quad (2.117)$$

Para calcularmos a densidade quântica de energia primeiro fazemos

$$h \rightarrow \hat{h} = \frac{\hat{\mu}}{a} , \quad (2.118)$$

e então temos que

$$\langle \rho_{(og)} \rangle = \langle 0 | \rho_{(og)} | 0 \rangle = \frac{1}{a^2} \left( \langle 0 | \hat{h}' \hat{h}'^* | 0 \rangle + \langle 0 | \nabla \hat{h} \cdot \nabla \hat{h}^* | 0 \rangle \right) . \quad (2.119)$$

Usando as expansões (2.72), as soluções (2.83) e a relação de comutação (2.86) encontramos

$$\langle 0 | \hat{h}' \hat{h}'^* | 0 \rangle = \frac{1}{a^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ |g_k|^2 + \mathcal{H}^2 |f_k|^2 - \mathcal{H} (g_k f_k^* + g_k^* f_k) \right\} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \quad (2.120)$$

$$\langle 0 | \nabla \hat{h} \cdot \nabla \hat{h}^* | 0 \rangle = \frac{1}{a^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k^2 |f_k|^2 e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} ,$$

portanto

$$\langle \rho_{(og)} \rangle = \frac{1}{a^4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [|g_k|^2 + (k^2 + \mathcal{H}^2) |f_k|^2 - \mathcal{H} (g_k f_k^* + g_k^* f_k)] e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} . \quad (2.121)$$

Assim como fizemos para o espectro de potência, devemos lembrar que o espaço é isotrópico. Reescrevemos a equação acima em coordenadas esféricas e integramos as coordenadas angulares  $\varphi$  e  $\theta$ , para obtermos

$$\langle \rho_{(og)} \rangle = \frac{1}{a^4} \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} [|g_k|^2 + (k^2 + \mathcal{H}^2) |f_k|^2 - \mathcal{H} (g_k f_k^* + g_k^* f_k)] \frac{2 \sin kr}{kr} , \quad (2.122)$$

onde  $r = |\vec{x} - \vec{y}|$ . Tomando o limite  $\vec{x} \rightarrow \vec{y}$  ficamos com

$$\langle \rho_{(og)} \rangle = \frac{1}{a^4} \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} [|g_k|^2 + (k^2 + \mathcal{H}^2) |f_k|^2 - \mathcal{H} (g_k f_k^* + g_k^* f_k)] . \quad (2.123)$$

Podemos calcular

$$\frac{d\langle \rho_{(og)} \rangle}{d \ln k} = \frac{k^3}{2\pi^2 a^4} [|g_k|^2 + (k^2 + \mathcal{H}^2) |f_k|^2 - \mathcal{H} (g_k f_k^* + f_k g_k^*)] , \quad (2.124)$$

e definindo a densidade relativa das ondas gravitacionais como

$$\Omega_{(og)}(k, \eta) = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\langle \rho_{(og)} \rangle}{d \ln k} , \quad (2.125)$$

temos que

$$\Omega_{(og)}(k, \eta) = \frac{l_p^2}{3H_0^2} \frac{k^3}{2\pi^2 a^4} [|g_k|^2 + (k^2 + \mathcal{H}^2) |f_k|^2 - \mathcal{H} (g_k f_k^* + f_k g_k^*)] . \quad (2.126)$$

Para  $k\eta \gg 1$  ( $g_k \approx \mp i k f_k$ ) encontramos

$$\Omega_{(og)}(k, \eta) \approx \frac{l_p^2 k^5}{3\pi^2 H_0^2 a^4} |f_k|^2 \left( 1 + \frac{\mathcal{H}^2}{2k^2} \right) , \quad (2.127)$$

que pode ser reescrito como

$$\Omega_{(og)}(k, \eta) \approx \frac{k^2}{12H_0^2 a^2} P_T(k, \eta) \left( 1 + \frac{\mathcal{H}^2}{2k^2} \right) . \quad (2.128)$$

Para o caso de  $k\eta \ll 1$  temos que  $g_k \approx -\mathcal{H} f_k$  e encontramos

$$\Omega_{(og)}(k, \eta) \approx \frac{l_p^2 k^5}{6\pi^2 H_0^2 a^4} |f_k|^2 , \quad (2.129)$$

que pode ser reescrito

$$\Omega_{(og)}(k, \eta) \approx \frac{k^2}{24H_0^2 a^2} P_T(k, \eta) . \quad (2.130)$$



## Capítulo 3

# A teoria de Brans-Dicke

Como mencionado anteriormente, a principal idéia que levou Einstein à teoria da Relatividade Geral foi a equivalência local entre forças gravitacionais e inerciais. Mas ele tentou, também, satisfazer o Princípio de Mach, apesar de não ter obtido sucesso [14].

Podemos ver como a Relatividade Geral se comporta no que diz respeito ao Princípio de Mach [14], através de um experimento mental proposto por Carl Brans e Robert H. Dicke [3].

Neste experimento devemos considerar o espaço constituído apenas de um laboratório de massa pequena para podermos considerar a aproximação de campo fraco, e o experimentador dentro dele munido de um rifle e um giroscópio. De acordo com a Relatividade Geral seria possível fazer o laboratório girar abrindo-se uma janela no laboratório e disparando o rifle tangencialmente. Em seguida, o giroscópio deve permanecer apontando fixamente para o projétil, ou seja, o giroscópio deve rodar em relação as paredes do laboratório. Portanto, pelo Princípio de Mach, o projétil, muito menor e menos massivo que as paredes do laboratório, é mais importante que as próprias paredes para determinar um referencial inercial.

A partir deste problema podemos assumir apenas uma das seguintes três conclusões: o espaço tem propriedades geométricas e inerciais específicas, além daquelas criadas pela

matéria, o exemplo anterior é não físico devido a alguma condição de contorno desconhecida, ou então o experimento não é corretamente descrito pelas equações de Einstein.

A terceira hipótese foi alvo de Brans e Dicke no começo da década de 1960 [3]. Na teoria de Brans e Dicke a constante gravitacional é basicamente substituída pelo inverso de um campo escalar que, descrevendo de maneira simples, faz variar a constante gravitacional efetiva no espaço e também no tempo.

Ainda na década de 1920 a teoria de Kaluza-Klein já sugeria a hipótese de uma constante gravitacional variável [15]. Na década de 1930 a hipótese de “constantes” fundamentais variáveis foi lançada por Dirac, motivado pelos chamados números de Dirac que, combinando constantes fundamentais de forma adimensional, obteve números parecidos para as escalas atômicas e cosmológicas [16].

Para o nosso estudo a relação de Dirac mais importante é

$$\frac{1}{G} \approx \frac{M_u}{R_u} \quad , \quad (3.1)$$

onde  $G$ ,  $M_u$  e  $R_u$  são a constante gravitacional de Newton, a massa total e o raio do Universo, respectivamente.

Uma relação parecida foi encontrada por Sciama [3, 15, 16] na década de 1950 quando o mesmo tentava incorporar o Princípio de Mach à gravitação de uma forma quantitativa usando apenas argumentos adimensionais.

Diante da hipótese dos números de Dirac (3.1) e do trabalho de Sciama, Dicke lança a hipótese de que a constante gravitacional obedeça a [15]:

$$\square \frac{1}{G} = \rho \quad . \quad (3.2)$$

O resultado é uma teoria escalar-tensorial para a gravitação, conhecida como teoria de Brans-Dicke, onde a interação gravitacional entre os corpos é mediada por um campo tensorial, como na Relatividade Geral, e também por um campo escalar que faz o papel do recíproco da constante gravitacional.

### 3.1 Equações de campo

Para incorporar o Princípio de Mach à gravitação através de um parâmetro gravitacional variável Brans e Dicke propõem a seguinte modificação da ação de Hilbert-Einstein [3]:

$$\delta S = \delta \int \left[ \phi R + 16\pi \mathcal{L}_M - \omega \frac{\phi_{,\mu} \phi^{,\mu}}{\phi} \right] \sqrt{-g} d^4x = 0 \quad , \quad (3.3)$$

onde  $\omega$  é uma constante adimensional.

A escolha padrão para a Lagrangeana de um campo escalar  $\phi$  deveria ser  $\mathcal{L}_\phi = -\omega \phi_{,\mu} \phi^{,\mu}$ , mas assim  $\omega$  deveria ter a mesma dimensão que  $G$ . Como um dos objetivos de Brans e Dicke [15] era eliminar  $G$ , eles escolhem  $\mathcal{L}_\phi = -\omega \frac{\phi_{,\mu} \phi^{,\mu}}{\phi}$ . Desta forma  $\omega$  permanece adimensional.

Prosseguindo com a variação da ação temos que:

$$\begin{aligned} \int \left[ \phi \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) - \frac{\omega}{\phi} \left( \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \\ + 16\pi \int \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} d^4x + \int \phi g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.4)$$

É fácil identificar as semelhanças e as diferenças entre esta equação e a variação da ação (2.8). Como visto anteriormente para o caso das equações de Einstein, o último termo da equação (2.8) é uma contribuição de contorno, que pode ser definida como zero. Mas agora a presença do campo  $\phi$  nos dá um resultado diferente.

Neste caso temos

$$\int \phi g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = \int \phi \nabla_\alpha \left[ g^{\mu\nu} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - g^{\alpha\mu} (\delta \Gamma_{\beta\mu}^\beta) \right] \sqrt{-g} d^4x \quad , \quad (3.5)$$

onde calculamos que

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = -\frac{1}{2} \left[ g_{\alpha\mu} \nabla_\nu (\delta g^{\sigma\alpha}) + g_{\alpha\nu} \nabla_\mu (\delta g^{\sigma\alpha}) - g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \nabla^\sigma (\delta g^{\alpha\beta}) \right] \quad , \quad (3.6)$$

sendo que  $\nabla_\mu (\delta g^{\sigma\alpha}) = (\delta g^{\sigma\alpha})_{;\mu}$ . Então escrevemos

$$\int \phi g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = \int \phi \nabla_\lambda \left[ g_{\alpha\beta} \nabla^\lambda (\delta g^{\alpha\beta}) - \nabla^\beta (\delta g^{\lambda\beta}) \right] \sqrt{-g} d^4x \quad , \quad (3.7)$$

que depois de integrarmos por partes encontramos que

$$\int \phi g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = \int [g_{\mu\nu} \square \phi - \phi_{;\mu\nu}] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad . \quad (3.8)$$

E substituindo na variação da ação de Brans-Dicke (3.4) obtemos as equações de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{;\alpha} \phi^{;\alpha} \right) + \frac{1}{\phi} (\phi_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square \phi) \quad , \quad (3.9)$$

onde o tensor energia-momento ainda obedece  $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$  [8].

Variando a ação de Brans-Dicke (3.3) em relação a  $\phi$ , temos

$$\frac{2\omega}{\phi} \square \phi - \frac{\omega}{\phi^2} \phi_{;\mu} \phi^{;\mu} + R = 0 \quad . \quad (3.10)$$

Tomando o traço das equações de campo (3.9), temos

$$-R = \frac{8\pi}{\phi} T - \frac{\omega}{\phi^2} \phi_{;\alpha} \phi^{;\alpha} - 3 \frac{\square \phi}{\phi} \quad . \quad (3.11)$$

E então, combinando as equações (3.10) e (3.11), chegamos finalmente em

$$\square\phi = \frac{8\pi}{(3+2\omega)}T \quad , \quad (3.12)$$

onde  $\square = \partial_\mu\partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$  é o operador de D'Alembert.

Podemos reescrever a equação de campo (3.9) da seguinte maneira:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1+\omega}{3+2\omega} g_{\mu\nu}T \right) + \frac{\omega}{\phi^2} \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{1}{\phi} \phi_{;\mu\nu} \quad . \quad (3.13)$$

Considerando a aproximação de campo fraco (veremos com mais detalhes na seção seguinte) e considerando uma casca esférica de massa  $M$  e raio  $r$ , o resultado é [15]

$$\phi \approx \phi_\infty + \frac{2}{(3+2\omega)} \frac{M}{r} \quad , \quad (3.14)$$

o que satisfaz a hipótese de Dirac (3.1).

## 3.2 Aproximação de campo fraco

Assim como na Relatividade Geral, fazemos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad , \quad (3.15)$$

e de maneira parecida, fazemos o mesmo com o campo escalar

$$\phi = \phi_0 + \xi \quad , \quad (3.16)$$

onde  $\xi$  é uma perturbação de primeira ordem no campo escalar e  $\phi_0$  uma constante.

Usando então (3.12), encontramos

$$\square\xi = \frac{8\pi}{2\omega+3}T \quad , \quad (3.17)$$

que tem a seguinte solução para o tempo retardado [3]:

$$\xi = \frac{-2}{2\omega+3} \int \frac{T}{r} d^3x \quad , \quad (3.18)$$

e então podemos encontrar (3.14).

A aproximação de campo fraco para as equações de campo (3.9) é encontrada de maneira muito similar a que foi feita para a Relatividade Geral. Primeiramente fazemos

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad , \quad (3.19)$$

como foi feito anteriormente.

Devemos fazer também

$$\sigma_\mu = \bar{h}_{\mu\nu,\alpha}\eta^{\nu\alpha} \quad . \quad (3.20)$$

E então escrevemos a equação (3.9) como

$$-\frac{1}{2} \left( \square\bar{h}_{\mu\nu} - \sigma_{\mu,\nu} - \sigma_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\sigma_{\alpha,\beta}\eta^{\alpha\beta} \right) = \frac{\xi_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\square\xi}{\phi_0} + \frac{8\pi}{\phi_0}T_{\mu\nu} \quad . \quad (3.21)$$

Desta vez devemos impor a condição de coordenada

$$\sigma_\mu = \frac{\xi_{,\mu}}{\phi_0} \quad , \quad (3.22)$$

e para simplificar os cálculos, definimos

$$\alpha_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\frac{\xi}{\phi_0} \quad . \quad (3.23)$$

Então a equação (3.21) assume a forma simples, e parecida com a equação (2.21):

$$\square \alpha_{\mu\nu} = -\frac{16\pi}{\phi_0} T_{\mu\nu} \quad , \quad (3.24)$$

que tem como solução no tempo retardado [3]

$$\alpha_{\mu\nu} = \frac{4}{\phi_0} \int \frac{T_{\mu\nu}}{r} d^3x \quad . \quad (3.25)$$

Em seguida, usando as equações (3.19), (3.20) e (3.24), temos:

$$h_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \alpha - \eta_{\mu\nu} \frac{\xi}{\phi_0} \quad , \quad (3.26)$$

onde  $\alpha$  é o traço de  $\alpha_{\mu\nu}$ .

Já possuímos a solução no tempo retardado para  $\xi$ , a perturbação no campo escalar. Podemos, facilmente, fazer o mesmo para  $\alpha_{\mu\nu}$ . E chegamos em

$$h_{\mu\nu} = \frac{4}{\phi_0} \int \frac{T_{\mu\nu}}{r} d^3x - \frac{4}{\phi_0} \frac{\omega+1}{2\omega+3} \eta_{\mu\nu} \int \frac{T}{r} d^3x \quad . \quad (3.27)$$

Para o caso de uma massa  $M$ , pontual e estacionária, temos:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{2M}{(2\omega+3)r} \\ h_{00} &= \frac{2\phi_0^{-1}M}{r} \left( 1 + \frac{1}{2\omega+3} \right) \\ h_{ij} &= \frac{2\phi_0^{-1}M\delta_{ij}}{r} \left( 1 - \frac{1}{2\omega+3} \right) \quad . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Assim como foi feito em (2.25) para a Relatividade Geral, podemos calcular o desvio para o vermelho na teoria de Brans-Dicke:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \phi_0^{-1}M \left( 1 + \frac{1}{2\omega+3} \right) \left( \frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_r} \right) \quad . \quad (3.29)$$

Comparando este resultado com o encontrado para a Relatividade Geral, podemos definir a constante gravitacional como sendo

$$G_0 \equiv \frac{1}{\phi_0} \left( \frac{2\omega + 4}{2\omega + 3} \right) , \quad (3.30)$$

e também, da mesma maneira que calculamos a equação (2.26) para a Relatividade Geral, pode-se calcular o desvio provocado na trajetória de um fóton devido ao campo gravitacional de uma massa  $M$ :

$$\alpha = \frac{4M\phi_0^{-1}}{r} , \quad (3.31)$$

onde  $r$  é a distância entre a massa  $M$  e uma linha reta que ligue a fonte ao observador.

### 3.3 Transformação de unidades e invariância

Nesta seção vamos eliminar o campo escalar da teoria de Brans-Dicke “transformando” ele em uma constante. Na literatura diz-se que estamos indo de um referencial conforme para outro, neste caso, do referencial de Jordan para o referencial de Einstein. Uma transformação conforme nos leva de uma métrica a outra de acordo com a seguinte regra:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\mu\nu} &= \lambda(x^\mu) g_{\mu\nu} \\ \bar{g}^{\mu\nu} &= \lambda(x^\mu)^{-1} g^{\mu\nu} \\ \sqrt{-\bar{g}} &= \lambda(x^\mu)^2 \sqrt{-g} \\ d\bar{s}^2 &= \lambda(x^\mu) ds^2 , \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde  $\lambda(x^\mu)$  é uma função arbitrária dependente do tempo e da posição. Esta função  $\lambda$  funciona como um fator de escala e não é, de maneira alguma, como uma transformação de coordenadas. Como pode ser visto pela última das equações anteriores,  $\lambda$  muda as distâncias (e também o tempo) por um fator que varia de ponto a ponto e de maneira isotrópica, ou seja, sem privilegiar nenhuma direção do espaço, portanto mantendo o ângulo entre dois vetores invariante. Esse é o significado da palavra conforme [2].



Segundo a interpretação de Dicke [17] esta transformação conforme do referencial de Jordan para o referencial de Einstein consiste de uma transformação no sistema de unidades que faz com que o tempo, o comprimento e o inverso da massa sejam reescalados da mesma maneira (neste caso por  $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ ) e tenham a mesma dimensão. A velocidade da luz, o quadri-potencial eletromagnético, carga elétrica do elétron e também a constante de Planck são invariantes sob tal transformação. Fazendo uma análise dimensional [17], temos ainda que o campo escalar da teoria de Brans-Dicke se transforma como

$$\bar{\phi} = \lambda^{-1} \phi \quad . \quad (3.33)$$

Desta maneira, a variação da ação de Brans-Dicke transformada é

$$\delta \int \left[ \bar{\phi} \bar{R} + 3\bar{\phi} \bar{\square} \ln \lambda - \frac{1}{2}(2\omega + 3)\bar{\phi} \frac{\lambda_{,\mu} \lambda^{,\mu}}{\lambda^2} - 2\omega \frac{\lambda_{,\mu} \bar{\phi}^{,\mu}}{\lambda} - \omega \frac{\bar{\phi}_{,\mu} \bar{\phi}^{,\mu}}{\bar{\phi}} + 16\pi \bar{\mathcal{L}} \right] \sqrt{-\bar{g}} d^3x = 0 \quad . \quad (3.34)$$

Para este estudo é interessante que  $\lambda$  seja dependente do campo escalar  $\phi$ , de maneira que  $\bar{\phi}$  seja constante, ou seja

$$\lambda = \frac{\phi}{\bar{\phi}} \quad , \quad (3.35)$$

onde a constante  $\bar{\phi}$  é o valor de  $\phi$  em um ponto qualquer.

Para a função  $\lambda$  com tal dependência, a variação da ação de Brans-Dicke é

$$\delta \int \left[ \bar{R} - \frac{1}{2}(2\omega + 3) \frac{\lambda_{,\mu} \lambda^{,\mu}}{\lambda^2} + \frac{16\pi}{\bar{\phi}} \bar{\mathcal{L}} \right] \sqrt{-\bar{g}} d^3x = 0 \quad . \quad (3.36)$$

Podemos considerar  $\lambda$  um campo de matéria e fazer as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_\lambda &= -\frac{(2\omega + 3)}{32\pi G_0} \frac{\lambda_{,\mu} \lambda^{,\mu}}{\lambda^2} \\ G_0 &= \frac{1}{\bar{\phi}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

e, mais uma vez, a variação da ação é

$$\delta \int [\bar{R} + 16\pi G_0(\bar{\mathcal{L}} + \bar{\mathcal{L}}_\lambda)] \sqrt{-\bar{g}} d^3x = 0 \quad . \quad (3.38)$$

Variando a ação acima em relação a  $\bar{g}^{\mu\nu}$ , encontramos

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} = 8\pi G_0\bar{\mathcal{T}}_{\mu\nu} \quad , \quad (3.39)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = \bar{T}^{\mu\nu} + \bar{\Lambda}^{\mu\nu} &= \frac{-2}{\sqrt{-\bar{g}}} \frac{\partial}{\partial \bar{g}_{\mu\nu}} [\sqrt{-\bar{g}}(\bar{\mathcal{L}} + \bar{\mathcal{L}}_\lambda)] \\ \bar{\mathcal{T}}^{\mu\nu}_{; \nu} &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (3.40)$$

Podemos também variar a mesma ação em relação ao campo de matéria  $\lambda$  e usando a transformação  $\bar{T} = \lambda^{-2}T$  obtemos

$$\square\lambda = \frac{8\pi}{\bar{\phi}(2\omega + 3)}T \quad , \quad (3.41)$$

que é equivalente a equação (3.12).

Portanto a modificação do sistema de unidades feita aqui faz com que o campo escalar se comporte como um campo de matéria, sendo também uma fonte de campo gravitacional. No referencial de Jordan a interação gravitacional é descrita pelo campo tensorial e pelo campo escalar. Com a transformação conforme que acabamos de fazer, a interação gravitacional no referencial de Einstein passa a ser descrita pelo campo tensorial, mas sempre com a presença do campo escalar  $\phi$ , que agora passar a ser um tipo de campo de matéria.

## Capítulo 4

# Perturbações tensoriais na teoria de Brans-Dicke

Teorias gravitacionais tensoriais, como a Relatividade Geral e a teoria de Brans-Dicke, que prevêem a existência de ondas gravitacionais, prevêem também a produção pelo Big Bang de um fundo de ondas gravitacionais. Detectar esta radiação de fundo é fundamental para melhorar o nosso conhecimento sobre o Universo. Além disso, ondas gravitacionais criadas em instantes próximos aos instantes iniciais do Universo, ou seja, durante a Inflação Cosmológica, podem servir como um importante teste para o modelo inflacionário e para as variadas teorias de gravitação, nos permitindo até distinguir os vários modelos existentes, além de nos fornecer informações sobre o Universo primordial que são impossíveis de se obter de outras maneiras, como por exemplo, através da observação da radiação cósmica de fundo em microondas.

### 4.1 Soluções cosmológicas de base

Substituindo a métrica (2.31) nas equações de campo (3.12) e (3.13) da teoria de Brans-Dicke e considerando um fluido perfeito barotrópico, descrito pelo tensor energia-momento

(2.6) e pela equação de estado (2.38), encontramos as equações de movimento

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi}{\phi}\rho \left( \frac{2 + \omega + 3\alpha + 3\alpha\omega}{3 + 2\omega} \right) + \omega \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \quad (4.1)$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} = \frac{8\pi}{3 + 2\omega}\rho(1 - 3\alpha) \quad . \quad (4.2)$$

Da equação para a conservação do tensor energia-momento,  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ , obtemos de modo semelhante a Relatividade Geral

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho(1 + \alpha) = 0 \quad (4.3)$$

$$\nabla\rho = 0 \quad . \quad (4.4)$$

Consideramos que as soluções para o fator de escala  $a(t)$  e o campo escalar  $\phi(t)$  têm a dependência em relação ao tempo mais simples possível, do tipo lei de potência, ou seja,

$$a(t) \propto t^r \quad (4.5)$$

$$\phi(t) \propto t^s \quad . \quad (4.6)$$

Sendo assim, substituindo as duas equações anteriores em (4.1 - 4.4), temos que [18]

$$-3r(r-1) = 8\pi\rho t^{2-s} \left[ \frac{2 + 3\alpha + (1 + 3\alpha)\omega}{3 + 2\omega} \right] + s^2(1 + \omega) - s \quad , \quad (4.7)$$

$$s^2 + s(3r-1) = \frac{8\pi}{3 + 2\omega}\rho t^{2-s}(1 - 3\alpha) \quad , \quad (4.8)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{r}{t}(1 + \alpha)\rho = 0 \quad , \quad (4.9)$$

$$\rho_{,i} = 0 \quad . \quad (4.10)$$

A equação (4.10) nos diz apenas que a densidade não varia com a posição. Já as equações (4.7 - 4.9) são três equações acopladas com quatro incógnitas,  $r$ ,  $s$ ,  $\rho$  e  $\alpha$ . Para podermos resolver este sistema acoplado impomos os valores de  $\alpha$  que correspondem as fases de evolução do Universo.

Para a inflação, onde  $\alpha = -1$ , encontramos

$$r = \omega + \frac{1}{2}, \quad s = 2, \quad \rho = \text{constante} \quad , \quad (4.11)$$

onde,  $\omega \geq \frac{1}{2}$ .

Para a radiação, onde  $\alpha = \frac{1}{3}$ , temos:

$$r = \frac{1}{2}, \quad s = 0, \quad \rho \propto a^{-4} \propto t^{-2} \quad , \quad (4.12)$$

que é o mesmo resultado encontrado na Relatividade Geral para a fase de predominância da radiação.

E para a matéria, onde  $\alpha = 0$ , temos:

$$r = \frac{2 + 2\omega}{4 + 3\omega}, \quad s = 2 - 3r, \quad \rho \propto a^{-3} \propto t^{-3\left(\frac{2+2\omega}{4+3\omega}\right)} \quad . \quad (4.13)$$

Lembrando que  $a(t) = a_0 t^r$ , onde  $a_0$  é uma constante, podemos calcular o tempo conforme:

$$d\eta = \frac{1}{a(t)} dt \Rightarrow \eta = \int \frac{dt}{a_0 t^r} + b_0 = \frac{t^{1-r}}{a_0(1-r)} + b_0 \quad , \quad (4.14)$$

onde  $b_0$  é uma constante de integração. Agora podemos escrever  $t$  em função de  $\eta$ , que fica

$$t = [a_0(1-r)(\eta - b_0)]^{\frac{1}{1-r}} \quad , \quad (4.15)$$

e substituindo na lei de potência para o fator de escala encontramos

$$a(t) = a_0 t^r = a_0 [a_0(1-r)(\eta - b_0)]^{\frac{r}{1-r}} \quad . \quad (4.16)$$

Como temos três valores para  $r$ , um para cada fase do Universo, escrevemos

$$a(\eta) = \begin{cases} a_0^{\text{infl}} [a_0^{\text{infl}}(1/2 - \omega)(\eta - b_0^{\text{infl}})]^{\frac{1+2\omega}{1-2\omega}} & -\infty < \eta \leq -\eta_1 \\ a_0^{\text{rad}} [a_0^{\text{rad}}(1/2)(\eta - b_0^{\text{rad}})] & -\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2 \\ a_0^{\text{mat}} [a_0^{\text{mat}}(\frac{2+\omega}{4+3\omega})(\eta - b_0^{\text{mat}})]^{\frac{2+2\omega}{2+\omega}} & \eta \geq \eta_2 \end{cases}, \quad (4.17)$$

onde “infl”, “rad” e “mat” significam inflação, radiação e matéria, respectivamente.

Como  $a(\eta) \rightarrow 0$  quando  $\eta \rightarrow -\infty$  podemos fazer  $b_0^{\text{infl}} = 0$ . Sabemos que o domínio de  $a(\eta)$  é negativo e que  $\omega \geq \frac{1}{2}$ , então podemos fazer

$$(1/2 - \omega)(\eta) = (\omega - 1/2)(-\eta) = (\omega - 1/2)|\eta|. \quad (4.18)$$

E, para facilitar os passos seguintes, redefinimos  $A = \frac{(a_0^{\text{rad}})^2}{2}$  e  $B = \frac{a_0^{\text{rad}} b_0^{\text{rad}}}{2}$  e reescrevemos

$$a(\eta) = \begin{cases} a_0^{\text{infl}} [a_0^{\text{infl}}(\omega - 1/2)|\eta|]^{\frac{1+2\omega}{1-2\omega}} & -\infty < \eta \leq -\eta_1 \\ A\eta - B & -\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2 \\ a_0^{\text{mat}} [a_0^{\text{mat}}(\frac{2+\omega}{4+3\omega})(\eta - b_0^{\text{mat}})]^{\frac{2+2\omega}{2+\omega}} & \eta \geq \eta_2 \end{cases}, \quad (4.19)$$

Impondo as condições de continuidade do tipo  $a_{\text{infl}}(-\eta_1) = a_{\text{rad}}(-\eta_1)$ ,  $a_{\text{rad}}(\eta_2) = a_{\text{mat}}(\eta_2)$ ,  $\frac{da_{\text{infl}}(\eta)}{d\eta}|_{\eta=-\eta_1} = \frac{da_{\text{rad}}(\eta)}{d\eta}|_{\eta=-\eta_1}$  e  $\frac{da_{\text{rad}}(\eta)}{d\eta}|_{\eta=\eta_2} = \frac{da_{\text{mat}}(\eta)}{d\eta}|_{\eta=\eta_2}$  e fazendo  $a_0^{\text{infl}} \equiv 1$ , obtemos:

$$a(\eta) = \begin{cases} [(\omega - 1/2)|\eta|]^{\frac{1+2\omega}{1-2\omega}} & -\infty < \eta \leq -\eta_1 \\ [(\omega - 1/2)\eta_1]^{-\frac{\omega+1/2}{\omega-1/2}} \left[ 1 + \left( \frac{\omega+1/2}{\omega-1/2} \right) \left( \frac{\eta}{\eta_1} + 1 \right) \right] & -\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2 \\ C \left[ \left( \frac{2+\omega}{4+3\omega} \right) (\eta - \tilde{\eta}_{\text{mat}}) \right]^{\frac{2+2\omega}{2+\omega}} & \eta \geq \eta_2 \end{cases}, \quad (4.20)$$

onde

$$C = (a_0^{\text{mat}})^{\frac{2+2\omega}{2+\omega}+1} = \left( \frac{\omega+1/2}{\omega-1/2} \right) [(\omega-1/2)\eta_1]^{-\frac{\omega+1/2}{\omega-1/2}} \left( \frac{4+3\omega}{2+2\omega} \right) \times \\ \times \left\{ \left( \frac{2+2\omega}{4+3\omega} \right) \left[ 1 + \left( \frac{\omega+1/2}{\omega-1/2} \right) \left( 1 + \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \right] \right\}^{\frac{-\omega}{2+\omega}} \quad (4.21)$$

e

$$\tilde{\eta}_{\text{mat}} = \eta_2 - \frac{2+2\omega}{2+\omega} \left[ 1 + \left( \frac{\omega+1/2}{\omega-1/2} \right) \left( 1 + \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \right], \quad (4.22)$$

sendo que  $\tilde{\eta}_{\text{mat}} < \eta_2$ .

Seguindo o mesmo procedimento para o campo escalar  $\phi(t)$  e impondo as condições de continuidade, encontramos:

$$\phi(\eta) = \begin{cases} [(\omega-1/2)|\eta|]^{-\frac{4}{1-2\omega}} & -\infty < \eta \leq -\eta_1 \\ [(\omega-1/2)\eta_1]^{-\frac{4}{1-2\omega}} & -\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2 \\ [(\omega-1/2)\eta_1]^{-\frac{4}{1-2\omega}} \left( \frac{\eta-\tilde{\eta}_{\text{mat}}}{\eta_2-\tilde{\eta}_{\text{mat}}} \right)^{\frac{2}{2+\omega}} & \eta \geq \eta_2 \end{cases} . \quad (4.23)$$

## 4.2 Perturbações tensoriais

Para calcularmos as perturbações métricas na teoria de Brans-Dicke reescrevemos:

$$ds^2 = -dt^2 + (a^2(t)\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j, \quad (4.24)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $h_{ij} = h_{ij}(\vec{x}, t) \ll 1$  é a perturbação na métrica.

Como já foi dito anteriormente, as perturbações tensoriais, escalares e vetoriais evoluem independentemente [1], então vamos nos preocupar apenas com as perturbações tensoriais. Usando a métrica (4.24) é possível calcular as conexões  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  e as conexões perturbadas

$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  como sendo

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= \dot{a}a\delta_{ij} \quad , \quad \Gamma_{i0}^j = \frac{\dot{a}}{a}\delta_i^j \quad , \\ \delta\Gamma_{0i}^j &= \frac{\dot{h}_i^j}{2} - \frac{\dot{a}}{a}h_i^j \quad , \quad \delta\Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{h}_{ij}}{2} \quad , \quad \delta\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left( h_i^k{}_{,j} + h_j^k{}_{,i} - h_{ij,}{}^k \right) . \end{aligned} \quad (4.25)$$

Pode-se calcular a perturbação do tensor de Ricci, lembrando que perturbações tensoriais têm traço nulo. O resultado é:

$$\delta R_{ij} = \frac{\ddot{h}_{ij}}{2} + \frac{1}{2a^2} (h_{ik,jk} + h_{jk,ik} - h_{ij,kk}) + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{h}_{ij}}{2} - 2\dot{a}a \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{h_{ij}}{2a^2} \right) . \quad (4.26)$$

Perturbando a equação (2.6) do tensor energia-momento de um fluido perfeito, temos

$$\delta T_{ij} = p h_{ij} \quad , \quad \delta T = 3\delta p - \delta\rho \quad . \quad (4.27)$$

onde  $\rho$  e  $p$  são a densidade e a pressão do fluido, respectivamente, e  $\delta\rho$  e  $\delta p$  as perturbações escalares. Como estamos interessados nos modos tensoriais vamos considerar as perturbações escalares nulas.

Perturbando a equação de campo (3.13) obtemos

$$\delta R_{ij} = \frac{8\pi}{\phi} \left( \delta T_{ij} - \frac{1+\omega}{3+2\omega} h_{ij} T \right) - \frac{\dot{\phi}}{\phi} \delta\Gamma_{ij}^0 \quad . \quad (4.28)$$

E finalmente, juntando todos esses resultado, temos:

$$\ddot{h}_{ij} + \left( \frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{\dot{a}}{a} \right) \dot{h}_{ij} + \left[ -\frac{\nabla^2}{a^2} + 4\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{8\pi}{\phi} \left( \frac{2(1+\omega)\rho - 2\omega p}{2\omega + 3} \right) \right] h_{ij} = 0 \quad , \quad (4.29)$$

onde  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  e  $\rho$  e  $p$  são a densidade e a pressão do fluido perfeito. A partir da equação de campo (3.9) não perturbada é possível encontrar que

$$\frac{8\pi}{\phi} \left( \frac{2(1+\omega)\rho - 2\omega p}{2\omega + 3} \right) = 2\frac{\ddot{a}}{a} + 4\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} \quad , \quad (4.30)$$



usando isso para simplificar a equação (4.29) encontramos que

$$\ddot{h}_{ij} + \left( \frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{\dot{a}}{a} \right) \dot{h}_{ij} + \left[ -\frac{\nabla^2}{a^2} - 2\frac{\ddot{a}}{a} - 2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} \right] h_{ij} = 0 \quad . \quad (4.31)$$

Passando para o tempo conforme, através da equação (2.44), obtemos

$$h''_{ij} + \left( \frac{\phi'}{\phi} - 2\frac{a'}{a} \right) h'_{ij} + \left[ -\nabla^2 - 2\frac{a''}{a} + 2\frac{a'^2}{a^2} - 2\frac{a'\phi'}{a\phi} \right] h_{ij} = 0 \quad , \quad (4.32)$$

onde “ ’ ” significa derivação em relação ao tempo  $\eta$ .

Para resolver esta equação diferencial será preciso fazer a seguinte transformação de Fourier:

$$h_{ij}(\vec{x}, \eta) = \sqrt{16\pi} \sum_{\lambda=\otimes, \oplus} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \epsilon_{ij}^{(\lambda)}(\hat{k}) \frac{a(\eta)\mu_{(\lambda)}(\eta)}{\sqrt{\phi(\eta)}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad , \quad (4.33)$$

onde  $\nabla^2 h_{ij} = -k^2 h_{ij}$  e o tensor polarização  $\epsilon_{ij}^{(\lambda)}(\hat{k})$  obedece a relação  $\epsilon_{ij}^{(\lambda)}(\hat{k})\epsilon^{ij(\lambda')}(\hat{p}) = 2\delta^{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{p})$  para os estados de polarização  $\otimes$  e  $\oplus$ . Então obtemos

$$\mu''_{(\lambda)}(\eta) + \mu_{(\lambda)}(\eta) \left[ k^2 + \frac{a''}{a} + \frac{1}{2}\frac{\phi''}{\phi} - \frac{1}{4}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 + \frac{a'\phi'}{a\phi} \right] = 0 \quad . \quad (4.34)$$

Podemos fazer  $\Phi(\eta) \equiv a(\eta)\sqrt{\phi(\eta)}$  e reescrever a equação diferencial (4.34) na forma

$$\mu''_{(\lambda)}(\eta) + \mu_{(\lambda)}(\eta) \left[ k^2 - \frac{\Phi''(\eta)}{\Phi(\eta)} \right] = 0 \quad . \quad (4.35)$$

Da solução para o fator de escala (4.20) e para o campo escalar (4.23) é possível encontrar que

$$\frac{\Phi''(\eta)}{\Phi(\eta)} = \begin{cases} \frac{F(\omega)}{|\eta|^2} & -\infty < \eta \leq -\eta_1 \\ 0 & -\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2 \\ \frac{G(\omega)}{(\eta - \tilde{\eta}_{\text{mat}})^2} & \eta \geq \eta_2 \end{cases} \quad , \quad (4.36)$$

onde

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{2(3+2\omega)(1+2\omega)}{(1-2\omega)^2} \\ G(\omega) &= \frac{(3+2\omega)(1+\omega)}{(2+\omega)^2} \end{aligned} \quad (4.37)$$

e mais uma vez recuperamos a Relatividade Geral quando fazemos  $\omega$  ir ao infinito.

Mas é possível também chegar a este resultado de outra maneira. Da equação (4.15) e da lei de potência (4.5) sabemos que

$$a(\eta) \propto \eta^{\frac{r}{1-r}} \quad , \quad \phi(\eta) \propto \eta^{\frac{s}{1-r}} \quad , \quad (4.38)$$

onde, para o caso da matéria, devemos fazer  $\eta \rightarrow \eta - \tilde{\eta}_{mat}$ . Então, substituindo este resultado na equação diferencial (4.34) encontramos

$$\mu''_{(\lambda)}(\eta) + \mu_{(\lambda)}(\eta) \left[ k^2 - \frac{2r(r + \frac{3}{2}s - 1) + \frac{s}{2}(\frac{s}{2} - 1)}{(1-r)^2} \frac{1}{\eta^2} \right] = 0 \quad , \quad (4.39)$$

e substituindo os resultados (4.11-4.13) obtemos os mesmos resultados que na equações (4.35-4.36).

Para encontrar uma solução para (4.35) é necessário fazer algumas transformações. São elas:

$$\begin{aligned} \mu(z) &= \sqrt{\eta} g(z) \\ z &= k\eta \end{aligned} \quad (4.40)$$

Para a inflação temos que

$$z^2 \frac{d^2 g}{dz^2} + z \frac{dg}{dz} + g \left( z^2 - \left( F(\omega) + \frac{1}{4} \right) \right) = 0 \quad . \quad (4.41)$$

Esta é a equação diferencial de Bessel. Uma das soluções possíveis é uma combinação linear das funções de Hankel [12],  $\mathcal{H}_\nu^{(1)}(z)$  e  $\mathcal{H}_\nu^{(2)}(z)$ , que podem ser escritas como as seguintes combinações lineares das conhecidas funções de Bessel de primeiro e segundo tipo:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + iN_\nu(z) \\ \mathcal{H}_\nu^{(2)}(z) &= J_\nu(z) - iN_\nu(z) \quad ,\end{aligned}\tag{4.42}$$

onde  $\nu = \sqrt{F(\omega) + 1/4}$ .

Portanto encontramos que para a inflação

$$\mu(k\eta) = \sqrt{\eta} \left( A_1 \mathcal{H}_\nu^{(1)}(k|\eta|) + A_2 \mathcal{H}_\nu^{(2)}(k|\eta|) \right) \quad ,\tag{4.43}$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são constantes de integração. Para o caso da radiação temos que  $\frac{\Phi''}{\Phi} = 0$ , e neste caso

$$\mu(k\eta) = B_1 e^{ik\eta} + B_2 e^{-ik\eta} \quad ,\tag{4.44}$$

onde  $B_1$  e  $B_2$  também são constantes de integração. E para o caso da poeira encontramos

$$\mu(k\eta) = \sqrt{\eta} \left[ C_1 \mathcal{H}_\alpha^{(1)}(k(\eta - \tilde{\eta}_{\text{mat}})) + C_2 \mathcal{H}_\alpha^{(2)}(k(\eta - \tilde{\eta}_{\text{mat}})) \right] \quad ,\tag{4.45}$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração e  $\alpha = \sqrt{G(\omega) + 1/4}$ .

### 4.3 Ação e Hamiltoniana clássicas das ondas gravitacionais

Para encontrarmos a ação das ondas gravitacionais é necessário perturbar a ação de Brans-Dicke (3.3) até segunda ordem no tensor métrico. Para isso vamos dividir a ação (3.3) em três partes:

$$S_{BD} = S + S_m + S_\phi \quad ,\tag{4.46}$$

onde

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \phi R \sqrt{-g} d^4x \quad , \quad (4.47)$$

$$S_m = \int \mathcal{L}^M \sqrt{-g} d^4x \quad \text{e} \quad (4.48)$$

$$S_\phi = -\frac{1}{16\pi} \int \left[ \omega \frac{\phi_{,\mu} \phi^{,\mu}}{\phi} \right] \sqrt{-g} d^4x \quad , \quad (4.49)$$

sendo que a primeira parte é a contribuição geométrica, que está acoplada ao campo escalar, a segunda parte é a contribuição material e por último a contribuição do campo escalar.

O tensor métrico covariante com perturbações de primeira ordem e o tensor métrico contravariante com perturbações de segunda ordem podem ser escritos como

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \bar{g}_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} \quad , \\ g^{\mu\nu} &= \bar{g}^{\mu\nu} - H^{\mu\nu} + H^{\mu\alpha} H^{\nu}_{\alpha} \quad . \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde  $\bar{g}_{00} = -1$  ,  $\bar{g}_{ij} = a^2(t) \delta_{ij}$  e

$$\begin{aligned} H_{ij} &= a^2(t) h_{ij} \quad , \\ H^{ik} H^j_k &= \frac{h^{ik} h^j_k}{a^2(t)} \quad . \end{aligned} \quad (4.51)$$

Note que a diferença entre a métrica utilizada aqui e a métrica (2.46) não está apenas no termo de segunda ordem, mas também se fez  $h_{ij} \rightarrow a^2 h_{ij}$ . Esta maneira de escrever a perturbação da métrica é a mais comum na literatura, além de ser conveniente daqui em diante. Para ficar claro, tomemos a métrica (2.46):

$$ds^2 = -dt^2 + (a^2(t) \delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \quad , \quad (4.52)$$

então fazemos  $h_{ij} \rightarrow a^2 h_{ij}$  para obtermos

$$ds^2 = -dt^2 + (a^2(t)\delta_{ij} + a^2 h_{ij}) dx^i dx^j = a^2 [-d\eta^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j] \quad , \quad (4.53)$$

onde  $\eta$  é o tempo conforme, que esta relacionado com o tempo cósmico  $t$  da maneira como é descrito pela equação (2.44).

Usando as definições anteriores, podemos calcular

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\bar{g}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \bar{g}^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{g}^{\lambda\sigma} H_{\alpha\lambda} H_{\beta\sigma} + \frac{1}{8} \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{g}^{\lambda\sigma} H_{\alpha\beta} H_{\lambda\sigma} \right] \quad , \quad (4.54)$$

onde  $g$  e  $\bar{g}$  são os traços de  $g_{\mu\nu}$  e  $\bar{g}_{\mu\nu}$ .

Como queremos estudar apenas as perturbações tensoriais é possível mostrar que os termos  $S_\phi$  e  $S_m$  da ação de Brans-Dicke são nulos em segunda ordem. O termo restante é idêntico a Relatividade Geral, exceto pela presença do campo escalar  $\phi(t)$  no lugar do inverso da constante de Newton. Portanto, temos que a ação das ondas gravitacionais é [4]:

$$S_{og} = \frac{1}{64\pi} \int \phi(\eta) \sqrt{-\bar{g}} (\bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu h_{ij} \partial_\nu h^{ij}) d^4x \quad , \quad (4.55)$$

que, usando o tempo conforme, pode ser escrita como

$$S_{og} = \frac{1}{64\pi} \int \phi(\eta) a^2(\eta) \left( -h'_{ij} h'^{ij} + \delta^{kl} h_{ij,k} h'^{ij}_{,l} \right) d^4x \quad , \quad (4.56)$$

onde “ ’ ” significa derivação em relação ao tempo conforme  $\eta$ .

Então escrevemos

$$h_{ij} = \sqrt{16\pi} \sum_{s=\oplus, \otimes} \varepsilon_{ij}^{(s)}(\vec{k}) \frac{\mu^{(s)}}{a\sqrt{\phi}} \quad , \quad (4.57)$$

que é diferente de (4.33) devido a diferença entre as métricas (4.24) e (2.46). Substituindo a equação (4.57) na ação das ondas gravitacionais resulta em

$$\mathcal{S}_{og}^{(s)} = -\frac{1}{2} \int d\eta d^3x \left( (\mu'^{(s)})^2 + \frac{\Phi'^2}{\Phi^2} (\mu^{(s)})^2 - 2 \frac{\Phi'}{\Phi} \mu^{(s)} \mu'^{(s)} - \delta^{ij} \mu_{,i}^{(s)} \mu_{,j}^{(s)} \right) , \quad (4.58)$$

para cada estado de polarização, onde  $\Phi = a\sqrt{\phi}$  e sendo que a ação total é a soma dos dois estados de polarização. Daqui em diante vamos escrever simplesmente  $\mu$ .

Das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{og}^{(1)}}{\partial \mu} - \partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{og}^{(1)}}{\partial (\mu, \alpha)} \right) = 0 \quad (4.59)$$

é possível encontrar

$$\mu'' + \left( -\nabla^2 - \frac{\Phi''}{\Phi} \right) \mu = 0 , \quad (4.60)$$

onde

$$\mathcal{L}_{og}^{(1)} = -\frac{1}{2} \left( (\mu')^2 + \frac{\Phi'^2}{\Phi^2} \mu^2 - 2 \frac{\Phi'}{\Phi} \mu \mu' - \delta^{ij} \mu_{,i} \mu_{,j} \right) . \quad (4.61)$$

Para o caso de  $\frac{d}{d\eta} \left( \frac{\Phi'}{\Phi} \mu^2 \right) = 0$  encontra-se a densidade Lagrangeana equivalente [4]

$$\mathcal{L}_{og}^{(2)} = -\frac{1}{2} \left( (\mu')^2 + \frac{\Phi''}{\Phi} \mu^2 - \delta^{ij} \mu_{,i} \mu_{,j} \right) . \quad (4.62)$$

Com isso podemos calcular as funções Hamiltonianas a partir das densidades Lagrangeanas  $\mathcal{L}_{og}^{(1)}$  e  $\mathcal{L}_{og}^{(2)}$ . Para isso devemos calcular os momentos conjugados, dados por

$$\tilde{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}_{og}^{(1)}}{\partial \mu'} = -\mu' + \frac{\Phi'}{\Phi} \mu \quad (4.63)$$

e

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}_{og}^{(2)}}{\partial \mu'} = -\mu' . \quad (4.64)$$

E lembrando que a densidade Hamiltoniana é dada por

$$H = \pi\mu' - \mathcal{L}_{og} \quad , \quad (4.65)$$

encontra-se que

$$H_{og}^{(1)} = -\frac{1}{2} \int d^3x \left[ \tilde{\pi}^2 - 2\frac{\Phi'}{\Phi} \mu \tilde{\pi} + \delta^{ij} \mu_{,i} \mu_{,j} \right] \quad (4.66)$$

$$H_{og}^{(2)} = -\frac{1}{2} \int d^3x \left[ \pi^2 - \frac{\Phi''}{\Phi} \mu^2 + \delta^{ij} \mu_{,i} \mu_{,j} \right] . \quad (4.67)$$

# Capítulo 5

## Perturbações tensoriais quânticas

### 5.1 Quantização canônica

Como já foi dito anteriormente, para quantizarmos a Hamiltoniana de um campo devemos fazer com que o campo e seu momento conjugado se tornem operadores na descrição de Heisenberg da mecânica quântica, de forma que para a teoria de Brans-Dicke

$$H_{og}^{(2)} \rightarrow \hat{H}_{og}^{(2)} = -\frac{1}{2} \int d^3x \left[ \hat{\pi}^2 - \frac{\Phi''}{\Phi} \hat{\mu}^2 + \delta^{ij} \hat{\mu}_{,i} \hat{\mu}_{,j} \right] \quad , \quad (5.1)$$

e devemos também impor novamente a relação de comutação entre os operadores de campo e o momento, dada por

$$[\hat{\mu}(\vec{x}, \eta), \hat{\pi}(\vec{y}, \eta)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (5.2)$$

onde fizemos  $\hbar = 1$ .

Expandindo o operador de campo e o momento conjugado em Fourier, temos

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[ \hat{\mu}_{\vec{k}}(\eta) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{\mu}_{\vec{k}}^\dagger(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \\ \hat{\pi} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[ \hat{\pi}_{\vec{k}}(\eta) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{y}} + \hat{\pi}_{\vec{k}}^\dagger(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}} \right] \quad , \end{aligned} \quad (5.3)$$



substituindo na relação de comutação (5.2) encontramos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int \int \frac{d^3k d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ [\hat{\mu}_{\vec{k}}, \hat{\pi}_{\vec{q}}] e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\vec{q}\cdot\vec{y})} + [\hat{\mu}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{\pi}_{\vec{q}}^\dagger] e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\vec{q}\cdot\vec{y})} \right\} + \\ & + \frac{1}{4} \int \int \frac{d^3k d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ [\hat{\mu}_{\vec{k}}, \hat{\pi}_{\vec{q}}^\dagger] e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\vec{q}\cdot\vec{y})} + [\hat{\mu}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{\pi}_{\vec{q}}] e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\vec{q}\cdot\vec{y})} \right\} = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \quad , \end{aligned} \quad (5.4)$$

lembrando que podemos escrever

$$\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \quad . \quad (5.5)$$

Assim, para que a relação de comutação (5.4) seja válida, as componentes da expansão em Fourier devem obedecer a

$$\begin{aligned} [\hat{\mu}_{\vec{k}}(\eta), \hat{\pi}_{\vec{q}}^\dagger(\eta)] &= i\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q}) \\ [\hat{\mu}_{\vec{k}}^\dagger(\eta), \hat{\pi}_{\vec{q}}(\eta)] &= i\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q}) \\ [\hat{\mu}_{\vec{k}}(\eta), \hat{\pi}_{\vec{q}}(\eta)] &= i\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{q}) \\ [\hat{\mu}_{\vec{k}}^\dagger(\eta), \hat{\pi}_{\vec{q}}^\dagger(\eta)] &= i\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{q}) \quad , \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde  $\hat{\mu}_{\vec{k}} = \hat{\mu}_{-\vec{k}}^\dagger$  e  $\hat{\pi}_{\vec{k}} = \hat{\pi}_{-\vec{k}}^\dagger$  .

Substituindo os operadores (5.3) no Hamiltoniano (5.1) e fazendo uso da relação (5.5), só que dessa vez no espaço dos vetores de onda, encontramos

$$\hat{H}_{og}^{(2)} = -\frac{1}{4} \int d^3k \left[ (\hat{\pi}_{\vec{k}} \hat{\pi}_{\vec{k}}^\dagger + \hat{\pi}_{\vec{k}}^\dagger \hat{\pi}_{\vec{k}}) + \left( k^2 - \frac{\Phi''}{\Phi} \right) (\hat{\mu}_{\vec{k}} \hat{\mu}_{\vec{k}}^\dagger + \hat{\mu}_{\vec{k}}^\dagger \hat{\mu}_{\vec{k}}) \right] \quad . \quad (5.7)$$

Sabemos que na representação de Heisenberg da mecânica quântica a evolução temporal de um operador como  $\hat{\mu}$  ou  $\hat{\pi}$ , por exemplo, é dada pela equação de Heisenberg, que neste caso são dadas por

$$i\hat{\mu}' = [\hat{\mu}, \hat{H}_{og}^{(2)}] \quad \text{e} \quad i\hat{\pi}' = [\hat{\pi}, \hat{H}_{og}^{(2)}] \quad . \quad (5.8)$$

A primeira destas equações resulta em

$$\hat{\mu}'_k = -\hat{\pi}'_k \quad , \quad (5.9)$$

que é a mesma relação existente entre o campo clássico e o seu momento conjugado. Da equação de Heisenberg para o operador momento, temos

$$\hat{\pi}'_k = \left[ k^2 - \frac{\Phi''}{\Phi} \right] \hat{\mu}_k \quad . \quad (5.10)$$

Combinando os dois resultados, vemos que o operador de campo obedece a mesma evolução temporal que o campo clássico, ou seja

$$\hat{\mu}''_k + \left[ k^2 - \frac{\Phi''}{\Phi} \right] \hat{\mu}_k = 0 \quad . \quad (5.11)$$

A solução geral é do tipo

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_k &= \hat{a}_k(\eta_0) f_k(\eta) + \hat{a}_{-k}^\dagger(\eta_0) f_k^*(\eta) \\ \hat{\pi}_k &= \hat{a}_k(\eta_0) g_k(\eta) + \hat{a}_{-k}^\dagger(\eta_0) g_k^*(\eta) \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde

$$f'_k = -g_k \quad , \quad g'_k = \left[ k^2 - \frac{\Phi''}{\Phi} \right] f_k \quad (5.13)$$

e  $\eta_0$  é um tempo fixo qualquer.

Usando o resultado anterior, a relação de comutação (5.2), e a expansão de Fourier dos operadores de campo e momento conjugado, encontramos que

$$f_k g_k^* - g_k f_k^* = i \quad , \quad (5.14)$$

desde que a relação

$$\left[ \hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \right] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}) \quad , \quad (5.15)$$

seja satisfeita.

Devido a relação  $f'_k = -g_k$ , encontramos

$$f'_k f_k^* - f_k f_k'^* = i \quad , \quad (5.16)$$

que nada mais é que o Wronskiano de  $f_k(\eta)$  e sua complexa conjugada  $f_k^*(\eta)$ .

## 5.2 Estados coerentes

Podemos também quantizar as ondas gravitacionais na teoria de Brans-Dicke definindo, assim como se faz para o oscilador harmônico e outros sistemas análogos, os operadores criação e destruição

$$\hat{a}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{k}{2}} \left( \hat{\mu}_{\vec{k}} + \frac{i}{k} \hat{\pi}_{\vec{k}} \right) \quad , \quad \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger = \sqrt{\frac{k}{2}} \left( \hat{\mu}_{\vec{k}} - \frac{i}{k} \hat{\pi}_{\vec{k}} \right) \quad . \quad (5.17)$$

É conveniente escrevermos

$$\hat{\mu}_{\vec{k}} = \frac{\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger}{\sqrt{2k}} \quad , \quad \hat{\pi}_{\vec{k}} = -i \sqrt{\frac{k}{2}} \left( \hat{a}_{\vec{k}} - \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \right) \quad . \quad (5.18)$$

Como na seção anterior, precisamos quantizar a hamiltoniana (4.66), de maneira que

$$\hat{H}_{og}^{(1)} = -\frac{1}{2} \int d^3x \left[ \hat{\pi}^2 - \frac{\Phi'}{\Phi} (\hat{\mu} \hat{\pi} + \hat{\pi} \hat{\mu}) + \delta^{ij} \hat{\mu}_{,i} \hat{\mu}_{,j} \right] \quad , \quad (5.19)$$

onde suprimimos o til do momento conjugado, lembrando que, para este caso,  $\pi = \mu' - \frac{\Phi'}{\Phi} \mu$ . Substituindo neste hamiltoniano a expansão (5.3) e os operadores (5.18), temos

$$\hat{H}_{og}^{(1)} = -\frac{1}{2} \int d^3k \left[ k \left( \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{-\vec{k}} \right) - i \frac{\Phi'}{\Phi} \left( \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger - \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{-\vec{k}} \right) \right] \quad . \quad (5.20)$$

Usando a equação de Heisenberg para os operadores  $\hat{a}_{\vec{k}}$  e  $\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger$ , encontramos

$$\frac{d\hat{a}_{\vec{k}}}{d\eta} = ik\hat{a}_{\vec{k}} + \frac{\Phi'}{\Phi}\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \quad , \quad \frac{d\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger}{d\eta} = -ik\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger + \frac{\Phi'}{\Phi}\hat{a}_{\vec{k}} \quad . \quad (5.21)$$

Podemos escrever a solução geral deste sistema como sendo

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\vec{k}}(\eta) &= u_k(\eta)\hat{a}_{\vec{k}}(\eta_0) + v_k(\eta)\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger(\eta_0) \\ \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger(\eta) &= v_k^*(\eta)\hat{a}_{\vec{k}}(\eta_0) + u_k^*(\eta)\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger(\eta_0) \quad , \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde  $\eta_0$  é um tempo fixo e as funções  $u_k(\eta)$  e  $v_k(\eta)$  obedecem

$$\frac{du_k}{d\eta} = iku_k + \frac{\Phi'}{\Phi}v_k^* \quad , \quad \frac{dv_k}{d\eta} = ikv_k + \frac{\Phi'}{\Phi}u_k^* \quad . \quad (5.23)$$

As equações (5.23) são as transformações de Bogoliubov das ondas gravitacionais na teoria de Brans-Dicke e  $u_k(\eta)$  e  $v_k(\eta)$  são os coeficientes de Bogoliubov. Substituindo a solução geral (5.22) encontrada para os operadores criação e destruição no comutador (5.15), encontramos

$$|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1 \quad , \quad (5.24)$$

como era esperado.

Substituímos a solução geral (5.22) dos operadores criação e destruição na equação (5.18) para encontrarmos

$$\hat{\mu}_{\vec{k}} = \frac{(u_k + v_k^*)\hat{a}_{\vec{k}}(\eta_0) + (u_k^* + v_k)\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger(\eta_0)}{\sqrt{2k}} \quad , \quad (5.25)$$

e comparando com a solução geral (5.12) concluímos que

$$f_k = \frac{u_k + v_k^*}{\sqrt{2k}} \quad . \quad (5.26)$$

Podemos também tomar a derivada em relação ao tempo comóvel  $\eta$  das equações (5.23) e então somando a primeira com a complexa conjugada da segunda obtemos

$$\frac{d^2}{d\eta^2} (u_k + v_k^*) + \left( k^2 - \frac{\Phi''}{\Phi} \right) (u_k + v_k^*) = 0 \quad . \quad (5.27)$$

### 5.3 Coeficientes de Bogoliubov

Para mais adiante podermos calcular o espectro de potência gerado pelas ondas gravitacionais produzidas durante a inflação, temos antes que definir o estado quântico das perturbações durante a inflação. Normalmente assume-se um estado muito particular como estado inicial, o vácuo de Bunch-Davies. Este vácuo é definido como sendo a ausência de partículas (de acordo com todos os observadores inerciais) no passado distante ( $\eta \rightarrow -\infty$ ), quando o espaço pode ser aproximado assintoticamente pelo espaço de Minkowski. Portanto, expandindo a solução (4.43) para valores grandes de  $k|\eta|$  [19] temos que

$$f_k^{(infl)}(k|\eta|) = \sqrt{\eta} \left( A_1 \sqrt{\frac{2}{\pi k |\eta|}} e^{i(k|\eta| - \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi)} + A_2 \sqrt{\frac{2}{\pi k |\eta|}} e^{-i(k|\eta| - \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi)} \right) \quad , \quad (5.28)$$

e para que  $f_k^{(infl)}(k|\eta|)$  seja nula no passado distante, ou seja, quando  $\eta \rightarrow -\infty$ , temos de fazer  $A_1 = 0$ . Então, nosso estado quântico é

$$f_k^{(infl)}(k|\eta|) = A_2 \sqrt{\eta} \mathcal{H}_v^{(2)}(k\eta) \quad , \quad (5.29)$$

onde  $\mathcal{H}_v^{(2)}(k\eta)$  é a função de Hankel. Fazendo uso da relação de normalização

$$\frac{df_k^*}{d\eta} f_k - \frac{df_k}{d\eta} f_k^* = -i \quad , \quad (5.30)$$

e lembrando que o Wronskiano das funções de Hankel é

$$\mathcal{H}_v^{(2)}(z) \frac{d\mathcal{H}_v^{(1)}(z)}{dz} - \mathcal{H}_v^{(1)}(z) \frac{d\mathcal{H}_v^{(2)}(z)}{dz} = \frac{4i}{\pi z} \quad , \quad (5.31)$$

encontramos que

$$A_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\theta_k} \quad , \quad (5.32)$$

onde  $\theta_k$  é um fator de fase.

Somando a primeira das equações (5.23) com a complexa conjugada da segunda obtemos

$$\begin{aligned} v_k^* &= \frac{i}{\sqrt{2k}} \frac{df_k}{d\eta} + \frac{f_k}{\sqrt{2k}} \left( k - i \frac{\Phi'}{\Phi} \right) \\ u_k &= \frac{-i}{\sqrt{2k}} \frac{df_k}{d\eta} + \frac{f_k}{\sqrt{2k}} \left( k + i \frac{\Phi'}{\Phi} \right) \quad , \end{aligned} \quad (5.33)$$

e de acordo com apêndice (A) podemos calcular o número de partículas (grávitons)  $N = |v_k|^2$  produzidas pela expansão do Universo, que é

$$N = |v_k|^2 = \frac{|f_k|^2}{2k} \left( k^2 + \left( \frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 \right) + \frac{1}{2k} \left| \frac{df_k}{d\eta} \right|^2 - \frac{1}{2k} \frac{\Phi'}{\Phi} \left( f_k \frac{df_k^*}{d\eta} + f_k^* \frac{df_k}{d\eta} \right) - \frac{1}{2} \quad . \quad (5.34)$$

Como estamos interessados em obter informações sobre os primórdios do Universo, calculamos o número de partículas para  $k|\eta| \ll 1$ .  $k\eta$  pode ser interpretado como a razão entre o horizonte comóvel e o comprimento de onda (comóvel) da perturbação [13]. Portanto, a condição  $k|\eta| \ll 1$  significa que o modo em questão é tão grande que ele não sofreu nenhuma interação causal provocada pelas propriedades físicas do início do Universo. Sendo assim, o limite  $k\eta \gg 1$  significa que o modo é menor que o horizonte.

Para o caso de  $k\eta \gg 1$  encontra-se, das equações (5.13), que  $g_k \approx \mp ikf_k$  e então temos que o número de partículas é

$$N \approx k|f_k|^2 \left( 1 + \frac{1}{2k^2} \left( \frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \quad . \quad (5.35)$$

Para  $k\eta \ll 1$  temos que  $g_k \approx -(\Phi'/\Phi)f_k$  e calculamos

$$N \approx k|f_k|^2 - \frac{1}{2} \quad . \quad (5.36)$$

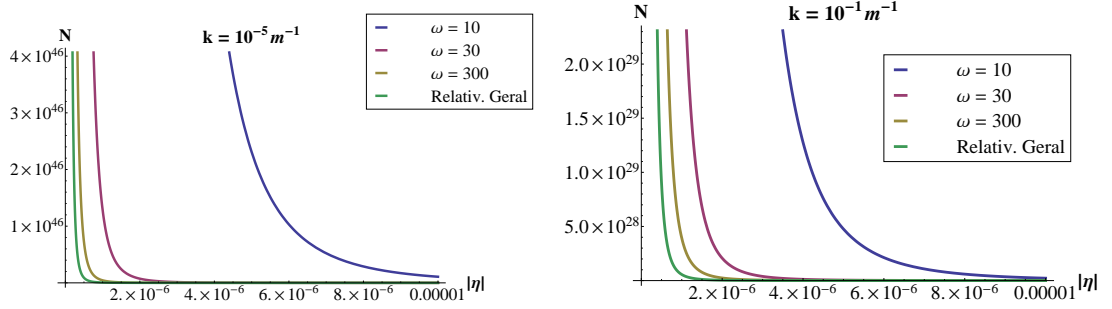


Figura 5.1: O número de partículas (grávitons) produzidas pela inflação na teoria de Brans-Dicke para diferentes valores de  $\omega$  e também na Relatividade Geral em função do tempo comovel  $\eta$  para os vetores de onda  $k = 10^{-5} m^{-1}$  e  $k = 10^{-1} m^{-1}$ .

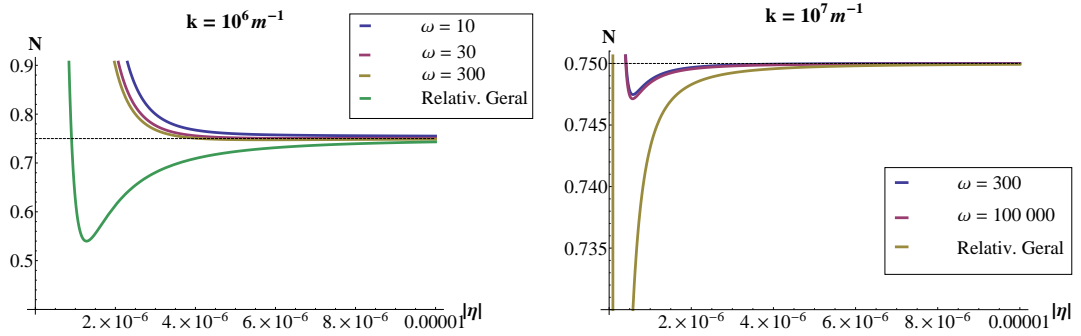


Figura 5.2: O mesmo que a figura anterior, mas para os vetores de onda  $k = 10^6 m^{-1}$  e  $k = 10^7 m^{-1}$ .

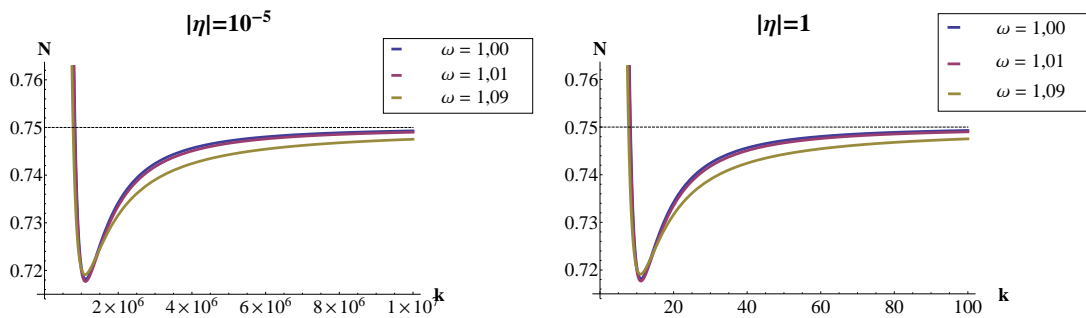


Figura 5.3: O número de grávitons para valores pequenos de  $\omega$  em dois momentos distintos.

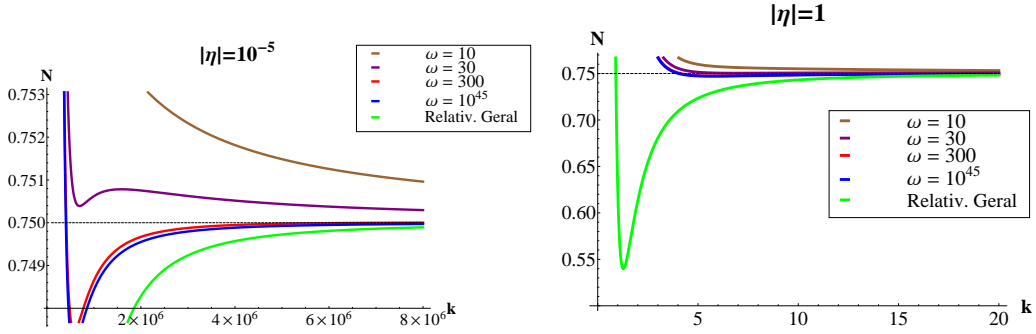


Figura 5.4: O mesmo que a figura anterior, mas para valores grandes de  $\omega$  e para a Relatividade Geral.

## 5.4 Observáveis

### 5.4.1 Espectro de potência

Nesta seção vamos calcular expressões que futuramente podem ser comparadas com dados observacionais. Para começar vamos calcular o espectro de potência quântico das ondas gravitacionais cosmológicas. Como vimos anteriormente o espectro de potência é definido como sendo a transformada de Fourier de uma função de correlação de dois pontos [1], ou seja, para as ondas gravitacionais, temos

$$\langle 0 | \hat{h}_{ij}^\dagger(\vec{x}, \eta) \hat{h}^{ij}(\vec{y}, \eta) | 0 \rangle = \int P_T(k, \eta) \frac{\sin(kr)}{kr} d(\ln k) \quad , \quad (5.37)$$

onde  $P_T(k, \eta)$  é o espectro de potência.

O processo de quantização das ondas clássicas (4.57), que transforma o campo escalar  $\mu$  em um operador, através da expressão (5.3), resulta em:

$$\hat{h}_{ij}(\vec{x}, \eta) = \frac{\sqrt{16\pi}}{a(\eta)\sqrt{\phi(\eta)}} \sum_{s=\otimes, \oplus} \frac{1}{2} \int \frac{\epsilon_{ij}^{(s)}(\vec{k}) d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left( \hat{\mu}_{\vec{k},(s)} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{\mu}_{\vec{k},(s)}^\dagger e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \quad , \quad (5.38)$$

com o operador  $\hat{\mu}_{\vec{k}}$  escrito como

$$\hat{\mu}_{\vec{k}} = \hat{a}_{\vec{k}}(\eta_0) f_k(\eta) + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger(\eta_0) f_k^*(\eta) \quad , \quad (5.39)$$



onde

$$f_k'' + \left( k^2 - \frac{\Phi''}{\Phi} \right) f_k = 0 \quad , \quad (5.40)$$

que é a mesma equação diferencial que descreve o comportamento da função clássica  $\mu(\eta)$ .

Definimos então o estado de vácuo  $|0\rangle$ , que é aniquilado pelo operador  $\hat{a}_{\vec{k}}(\eta_0)$ , de maneira que

$$\hat{a}_{\vec{k}}|0\rangle = 0 \Rightarrow \langle 0|\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger = 0 \quad . \quad (5.41)$$

Agora é possível, usando (5.15), calcular a variância dos modos tensoriais

$$\langle 0|\hat{h}_{ij}^\dagger(\vec{x}, \eta)\hat{h}^{ij}(\vec{y}, \eta)|0\rangle = 64\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|f_k(\eta)|^2}{a^2\phi} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \quad . \quad (5.42)$$

Sabendo que o espaço é isotrópico e usando coordenadas esféricas é possível escrever

$$\langle 0|\hat{h}_{ij}^\dagger(\vec{x}, \eta)\hat{h}^{ij}(\vec{y}, \eta)|0\rangle = 64\pi \int k^2 \frac{dk}{(2\pi)^3} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \frac{|f_k|^2}{a^2\phi} e^{-ikr\cos\theta} \quad , \quad (5.43)$$

onde fizemos  $\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$  e  $\vec{k}\cdot\vec{r} = kr\cos\theta$ . Integrando em  $\theta$  e  $\varphi$ , encontramos

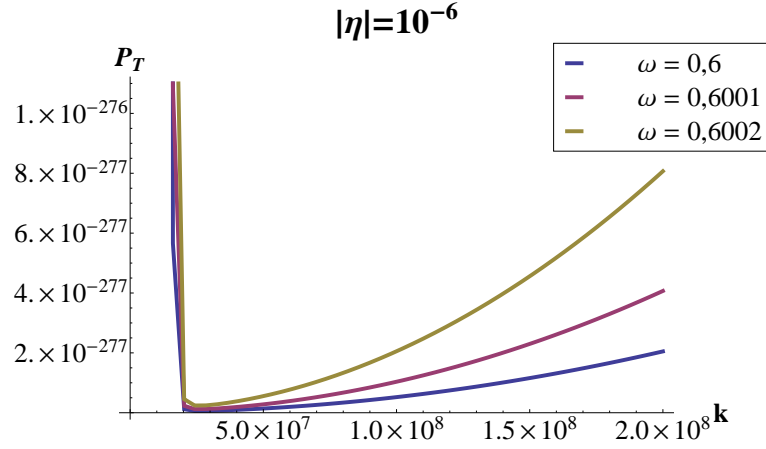
$$\langle 0|\hat{h}_{ij}^\dagger(\vec{x}, \eta)\hat{h}^{ij}(\vec{y}, \eta)|0\rangle = 64\pi \int \frac{k^2}{(2\pi)^2} \frac{|f_k|^2}{a^2\phi} \frac{2\sin(kr)}{kr} dk \quad , \quad (5.44)$$

Comparando com a equação (5.37) temos que

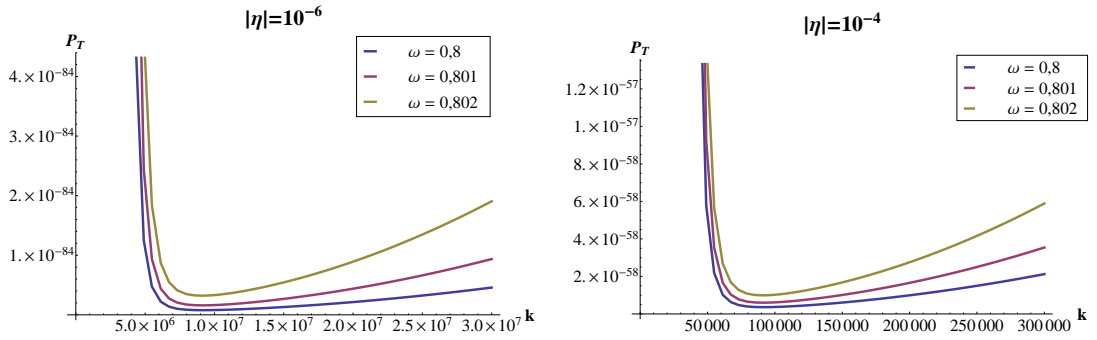
$$P_T(k, \eta) = 32\pi \frac{k^3}{\pi^2} \frac{|f_k|^2}{a^2\phi} \quad . \quad (5.45)$$

Da seção anterior sabemos que para a inflação

$$f_k(k|\eta|) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{|\eta|} \mathcal{H}_\nu^{(2)}(k|\eta|) \quad (5.46)$$



**Figura 5.5:** O espectro de potência das ondas gravitacionais na teoria de Brans-Dicke em função do vetor de onda para três valores pequeno de  $\omega$  em  $|\eta| = 10^{-6}$ .



**Figura 5.6:** O mesmo que a figura anterior, mas para valores um pouco maiores de  $\omega$  e para dois momentos diferentes.

e para argumentos pequenos da função de Hankel [19], temos que

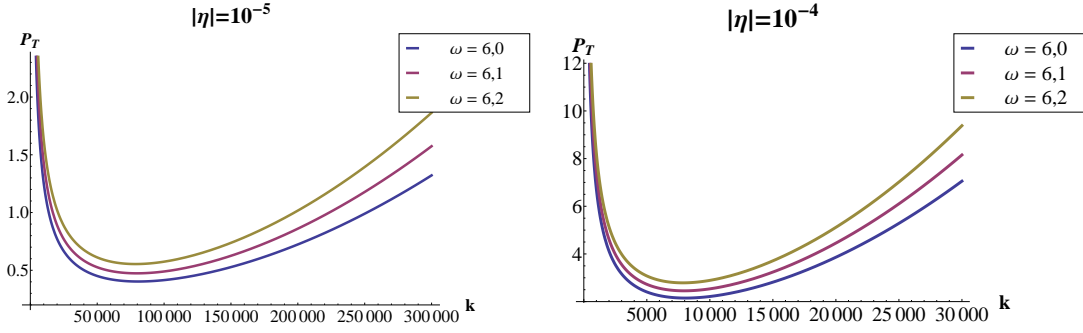
$$\mathcal{H}_\nu^{(1)}(z) \approx -i \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \quad \mathcal{H}_\nu^{(2)}(z) \approx i \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \quad (5.47)$$

portanto

$$\left| \mathcal{H}_\nu^{(2)}(z) \right|^2 = \frac{\Gamma^2(\nu)}{\pi^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-2\nu}, \quad (5.48)$$

onde  $\Gamma(\nu)$  é a função especial gama [12, 19]. O espectro de potência para  $k\eta \ll 1$  é dado por:

$$P_T(k, \eta) = \frac{8\pi 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu)}{\pi^3} \frac{k^2}{a^2 \phi} (k|\eta|)^{1-2\nu}. \quad (5.49)$$



**Figura 5.7:** O mesmo que as duas últimas figuras, mas para valores maiores de  $\omega$ .

Com o auxílio de  $H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a^2} \frac{da}{d\eta}$ , é possível encontrar que

$$|\eta| = \left( \frac{2\omega + 1}{2\omega - 1} \right) \frac{1}{aH}, \quad (5.50)$$

e então temos

$$P_T(k, \eta) = \frac{8\pi 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu)}{\pi^3} \left( \frac{2\omega + 1}{2\omega - 1} \right)^{1-2\nu} \frac{H^2}{\phi} \left( \frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu}. \quad (5.51)$$

### 5.4.2 Índice espectral

Agora podemos calcular o índice espectral, através da expressão

$$n_T = \left. \frac{d \ln P_T(k, \eta)}{d \ln k} \right|_{aH = \left( \frac{2\omega + 1}{2\omega - 1} \right) k}, \quad (5.52)$$

já que estamos interessados no momento em que os modos entram novamente no horizonte, ou seja, quando  $k = \left( \frac{2\omega - 1}{2\omega + 1} \right) aH$ . Para darmos andamento ao cálculo do índice espectral vamos introduzir o parâmetro  $\varepsilon$ , que está relacionado com a evolução do parâmetro de Hubble  $H$  da seguinte maneira

$$\varepsilon \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) = -\frac{1}{aH^2} \frac{dH}{d\eta}. \quad (5.53)$$

Para o caso da teoria de Brans-Dicke encontramos que

$$\varepsilon = \frac{2}{2\omega + 1} . \quad (5.54)$$

Desta maneira, temos que

$$n_T = \frac{d}{d \ln k} \left[ \ln \left( \frac{H^2}{\phi} \right) \right] \Bigg|_{aH = \left(\frac{2\omega+1}{2\omega-1}\right)k} = 2 \frac{k}{H} \frac{dH}{dk} \Bigg|_{aH = \left(\frac{2\omega+1}{2\omega-1}\right)k} - \frac{d \ln \phi}{d \ln k} \Bigg|_{aH = \left(\frac{2\omega+1}{2\omega-1}\right)k} . \quad (5.55)$$

Calculamos o primeiro termo do lado direito da equação anterior da seguinte maneira:

$$2 \frac{k}{H} \frac{dH}{dk} \Bigg|_{aH = \left(\frac{2\omega+1}{2\omega-1}\right)k} = 2 \frac{k}{H} \frac{dH}{d|\eta|} \frac{d|\eta|}{dk} \Bigg|_{aH = \left(\frac{2\omega+1}{2\omega-1}\right)k} = 2 \frac{k}{H} \frac{dH}{d\eta} \left( \frac{d|\eta|}{d\eta} \right)^{-1} \frac{d|\eta|}{dk} \Bigg|_{aH = \left(\frac{2\omega+1}{2\omega-1}\right)k} , \quad (5.56)$$

mas é possível, usando a equação (5.50), calcular [13]

$$\frac{d|\eta|}{dk} \Bigg|_{aH = \left(\frac{2\omega+1}{2\omega-1}\right)k} = \frac{d}{dk} \left( \left( \frac{2\omega+1}{2\omega-1} \right) \frac{1}{aH} \right) \Bigg|_{aH = \left(\frac{2\omega+1}{2\omega-1}\right)k} = \frac{d}{dk} \left( \frac{1}{k} \right) = -\frac{1}{k^2} , \quad (5.57)$$

e juntando as equações (5.56), (5.57) e (5.53) temos

$$n_T = -2\varepsilon \left( \frac{2\omega+1}{2\omega-1} \right) - \frac{d \ln \phi}{d \ln k} \Bigg|_{aH = \left(\frac{2\omega+1}{2\omega-1}\right)k} , \quad (5.58)$$

que para o caso de  $\omega \rightarrow \infty$  e  $\phi$  constante obtemos para o índice espectral o mesmo resultado [13] obtido para a Relatividade Geral.

De maneira semelhante podemos calcular o termo dependente do campo escalar  $\phi$  na equação (5.58), tal que

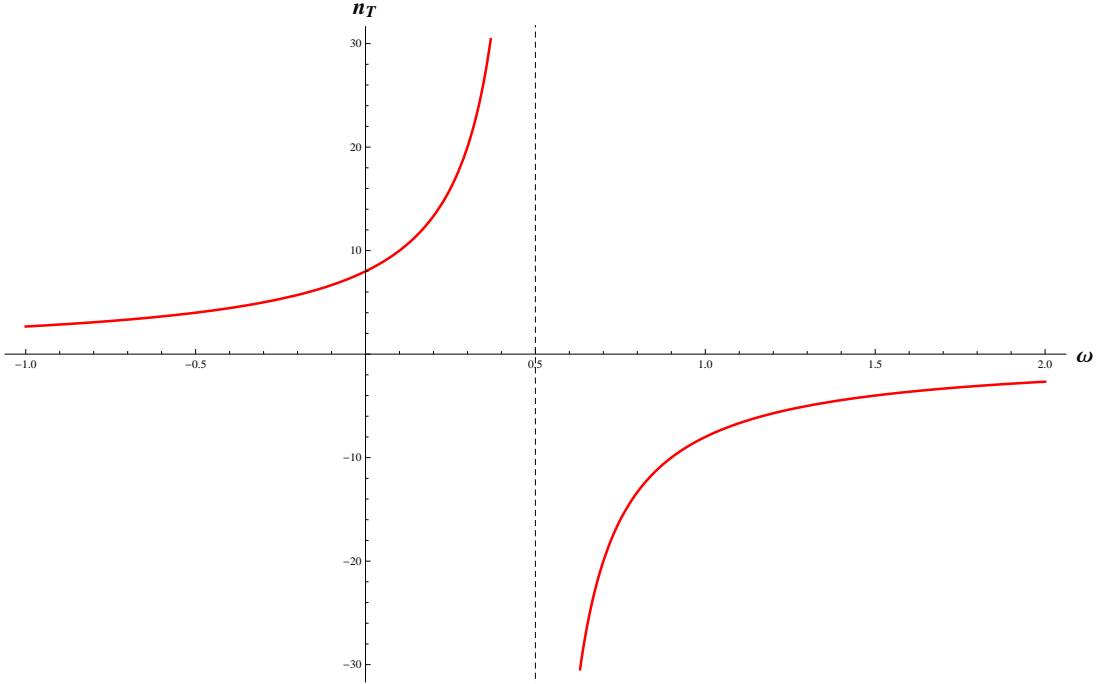
$$\frac{d \ln \phi}{d \ln k} \Bigg|_{aH = \left(\frac{2\omega+1}{2\omega-1}\right)k} = \frac{k}{\phi} \frac{d\phi}{dk} \Bigg|_{aH = \left(\frac{2\omega+1}{2\omega-1}\right)k} = \frac{k}{\phi} \frac{d\phi}{d\eta} \frac{d\eta}{dk} \Bigg|_{aH = \left(\frac{2\omega+1}{2\omega-1}\right)k} = \frac{k}{\phi} \frac{d\phi}{d\eta} \left( \frac{d|\eta|}{d\eta} \right)^{-1} \frac{d|\eta|}{dk} \Bigg|_{aH = \left(\frac{2\omega+1}{2\omega-1}\right)k} , \quad (5.59)$$

que, com a ajuda das equações (5.50) e (4.23), fica

$$n_T = -2\varepsilon \left( \frac{2\omega + 1}{2\omega - 1} \right) - \frac{4}{2\omega - 1} , \quad (5.60)$$

que novamente se reduz ao resultado esperado para a Relatividade Geral quando fazemos  $\omega \rightarrow \infty$ . Para finalizar, substituímos a relação (5.54) no resultado encontrado acima, e tem-se que

$$n_T = \frac{-8}{2\omega - 1} . \quad (5.61)$$



**Figura 5.8:** O índice espectral das perturbações tensoriais em função do parâmetro  $\omega$ .

Usando (5.53) podemos isolar  $\omega$  e obtemos

$$2\omega = \frac{2}{\varepsilon} - 1 , \quad (5.62)$$

que pode ser substituído no resultado final para o índice espectral, tal que

$$n_T = \frac{4\varepsilon}{\varepsilon - 1} = -4\varepsilon(1 - \varepsilon)^{-1} . \quad (5.63)$$

Para  $\varepsilon$  pequeno, podemos expandir o termo  $(1 - \varepsilon)^{-1}$ , para obtermos

$$n_T \approx -4\varepsilon(1 + \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \quad , \quad (5.64)$$

e retendo apenas os termos de primeira ordem, temos que

$$n_T \approx -4\varepsilon \quad . \quad (5.65)$$

### 5.4.3 Densidade de energia

Na seção 4.3 encontramos a ação clássica das ondas gravitacionais. Da equação (4.55) podemos escrever a densidade Lagrangeana das ondas gravitacionais

$$\mathcal{L}_{og} = \frac{\phi}{16\pi} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu h_{ij} \partial_\nu h^{ij} \quad , \quad (5.66)$$

e usando a equação (2.9) podemos calcular o tensor energia-momento das ondas gravitacionais:

$${}^{(og)}T_{\mu\nu} = -\frac{\phi}{8\pi} \frac{1}{4} \left( \partial_\mu h_{ij} \partial_\nu h^{ij} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha h_{ij} \partial_\beta h^{ij} \right) \quad . \quad (5.67)$$

Fazendo

$$h_{ij} = \sqrt{16\pi} \sum_{s=\otimes, \oplus} {}^{(s)}\varepsilon_{ij} h^{(s)} \quad , \quad h^{(s)} = \frac{\mu^{(s)}}{a\sqrt{\phi}} \quad , \quad (5.68)$$

encontramos

$${}^{(og)}T_{\mu\nu} = -2\phi \left( \partial_\mu h \partial_\nu h - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha h \partial_\beta h \right) \quad , \quad (5.69)$$

onde definimos

$$h = h^\otimes = h^\oplus \quad . \quad (5.70)$$

Agora podemos calcular a densidade de energia, encontrando

$$\rho_{(og)} = {}^{(og)}T_0^0 = \phi \left( \frac{h'^2}{a^2} + \bar{g}^{ij} \partial_i h \partial_j h \right) \quad . \quad (5.71)$$

Para calcularmos a densidade quântica de energia primeiro fazemos

$$h \rightarrow \hat{h} = \frac{\hat{\mu}}{a\sqrt{\Phi}} \quad , \quad (5.72)$$

e temos que

$$\langle \rho_{(og)} \rangle = \langle 0 | \rho_{(og)} | 0 \rangle = \frac{\phi}{a^2} (\langle 0 | \hat{h}' \hat{h}'^* | 0 \rangle + \langle 0 | \nabla \hat{h} \cdot \nabla \hat{h}^* | 0 \rangle) \quad . \quad (5.73)$$

Usando as expansões (5.3), as soluções (5.12) e a relação de comutação (5.15) obtemos

$$\langle 0 | \hat{h}' \hat{h}'^* | 0 \rangle = \frac{1}{a^2 \phi} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ |g_k|^2 + \left( \frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 |f_k|^2 - \left( \frac{\Phi'}{\Phi} \right) (g_k f_k^* + g_k^* f_k) \right\} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \quad (5.74)$$

$$\langle 0 | \nabla \hat{h} \cdot \nabla \hat{h}^* | 0 \rangle = \frac{1}{a^2 \phi} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} k^2 |f_k|^2 e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \quad .$$

Dessa maneira

$$\langle \rho_{(og)} \rangle = \frac{1}{a^4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ |g_k|^2 + \left( k^2 + \left( \frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 \right) |f_k|^2 - \frac{\Phi'}{\Phi} (g_k f_k^* + g_k^* f_k) \right] e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \quad . \quad (5.75)$$

Assim como fizemos para o espectro de potência, devemos lembrar que o espaço é isotrópico. Reescrevemos a equação acima em coordenadas esféricas e integramos as coordenadas angulares  $\varphi$  e  $\theta$ , para obtermos

$$\langle \rho_{(og)} \rangle = \frac{1}{a^4} \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \left[ |g_k|^2 + \left( k^2 + \left( \frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 \right) |f_k|^2 - \frac{\Phi'}{\Phi} (g_k f_k^* + g_k^* f_k) \right] \frac{2 \sin kr}{kr} \quad , \quad (5.76)$$

onde  $r = |\vec{x} - \vec{y}|$ . Tomando o limite  $\vec{x} \rightarrow \vec{y}$  calculamos

$$\langle \rho_{(og)} \rangle = \frac{1}{a^4} \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \left[ |g_k|^2 + \left( k^2 + \left( \frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 \right) |f_k|^2 - \frac{\Phi'}{\Phi} (g_k f_k^* + g_k^* f_k) \right] \quad . \quad (5.77)$$

Podemos calcular

$$\frac{d\langle\rho_{(og)}\rangle}{d\ln k} = \frac{k^3}{2\pi^2 a^4} \left[ |g_k|^2 + \left( k^2 + \left( \frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 \right) |f_k|^2 - \frac{\Phi'}{\Phi} (g_k f_k^* + f_k g_k^*) \right] , \quad (5.78)$$

e então definimos a densidade relativa de energia das ondas gravitacionais:

$$\Omega_{(og)}(k, \eta) = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\langle\rho_{(og)}\rangle}{d\ln k} , \quad (5.79)$$

ou seja

$$\Omega_{(og)}(k, \eta) = \frac{8\pi\phi^{-1}}{3H_0^2} \frac{k^3}{2\pi^2 a^4} \left[ |g_k|^2 + \left( k^2 + \left( \frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 \right) |f_k|^2 - \frac{\Phi'}{\Phi} (g_k f_k^* + f_k g_k^*) \right] . \quad (5.80)$$

Para os modos que estão completamente dentro do horizonte, ou seja, para  $k\eta \gg 1$  temos que  $g_k \approx \mp i k f_k$  e então calculamos que

$$\Omega_{(og)}(k, \eta) \approx \frac{8\pi k^5}{3\pi^2 H_0^2 \phi a^4} |f_k|^2 \left( 1 + \frac{1}{2k^2} \left( \frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 \right) , \quad (5.81)$$

que podemos reescrever em função do espectro de potência:

$$\Omega_{(og)}(k, \eta) \approx \frac{k^2}{12H_0^2 a^2} P_T \left( 1 + \frac{1}{2k^2} \left( \frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 \right) . \quad (5.82)$$

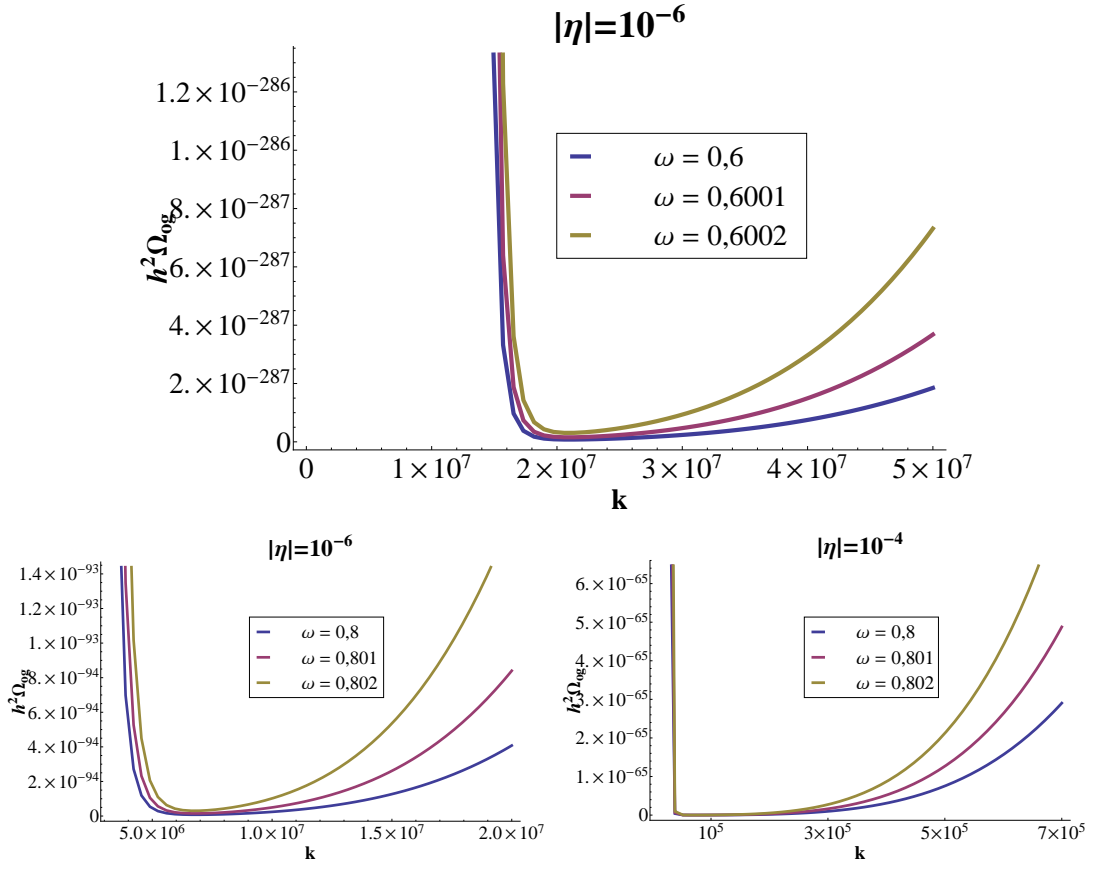
Para os modos que estão completamente fora do horizonte, ou seja, para  $k\eta \ll 1$  temos que  $g_k \approx -\frac{\Phi'}{\Phi} f_k$  e encontramos

$$\Omega_{(og)}(k, \eta) \approx \frac{8\pi k^5}{6\pi^2 H_0^2 \phi a^4} |f_k|^2 , \quad (5.83)$$

que também pode ser reescrito em função do espectro de potência, e portanto encontramos

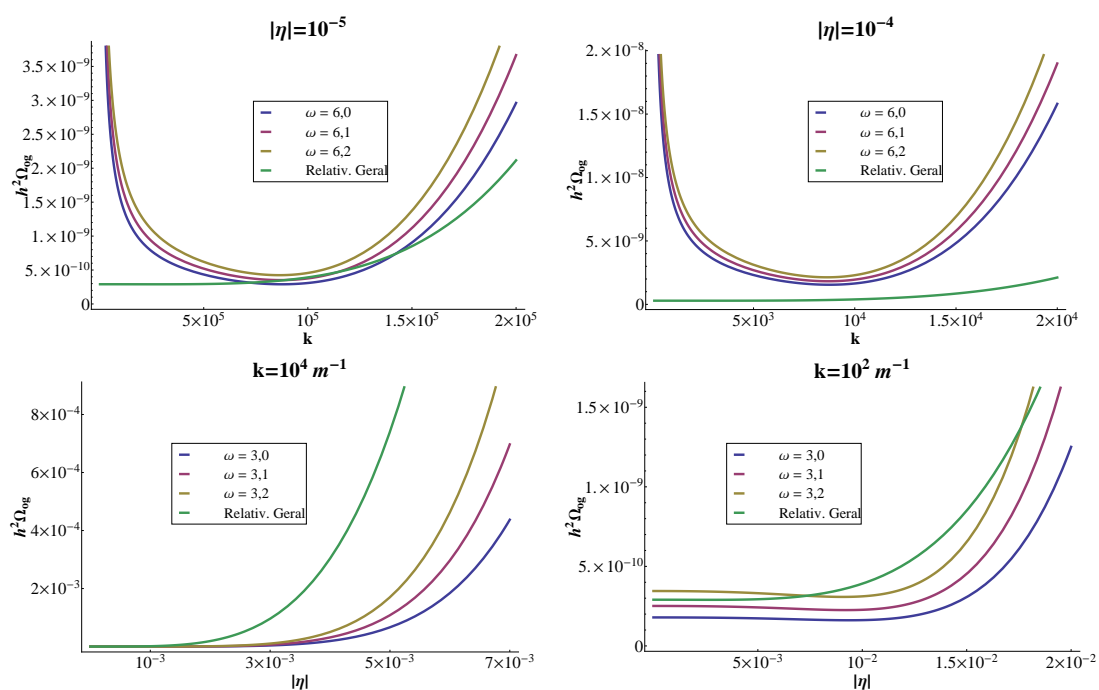
$$\Omega_{(og)}(k, \eta) \approx \frac{k^2}{24H_0^2 a^2} P_T(k, \eta) , \quad (5.84)$$





**Figura 5.9:** A densidade relativa de energia das ondas gravitacionais na teoria de Brans-Dicke em função do vetor de onda  $k$  para valores pequenos de  $\omega$  e com o tempo fixo.

notando que quando os modos entram novamente no horizonte, ou seja, quando  $k = aH$ , a densidade de energia é proporcional ao espectro de potência.



**Figura 5.10:** Na parte superior as duas imagens mostram a densidade relativa de energia das ondas gravitacionais na teoria de Brans-Dicke para três valores de  $\omega$  ligeiramente diferentes e também para a Relatividade Geral em função do vetor de onda  $k$  com o tempo fixo, e na parte inferior a densidade relativa de energia em função do tempo  $|\eta|$  para dois valores fixos de  $k$ .

# Capítulo 6

## Considerações finais

Iniciamos o presente trabalho fazendo uma revisão da teoria da Relatividade Geral. Encontramos as aproximações de campo fraco e as soluções cosmológicas de base. De posse destas soluções estudamos as perturbações tensoriais na sua forma clássica para depois as quantizarmos, e encontramos o número de partículas e parâmetros observacionais como o espectro de potência e a densidade relativa de energia das ondas gravitacionais.

Em seguida introduzimos uma das mais antigas e conhecidas modificações da Relatividade Geral, a teoria de Brans-Dicke [3]. Nela a constante gravitacional é substituída pelo inverso de um campo escalar que está acoplado à geometria do espaço-tempo. Encontramos as soluções lineares de campo fraco e vemos que neste caso a modificação da Relatividade Geral se dá através de uma redefinição da constante gravitacional local, que é escrita em termos do parâmetro  $\omega$ , que é, na ação de Brans-Dicke, uma constante de proporcionalidade adimensional na Lagrangeana do campo escalar. Através das soluções lineares de campo fraco é possível ver que os resultados encontrados na teoria de Brans-Dicke podem ser aproximados aos encontrados na Relatividade Geral fazendo  $\omega$  muito grande. De fato medidas feitas no sistema solar indicam que  $\omega > 4 \times 10^4$ . Isso mostra que a teoria é consistente em sistemas planetários como o sistema solar.

Estudamos também uma transformação conforme que deixa as equações de campo da teoria de Brans-Dicke com uma forma parecida àquela da Relatividade Geral, onde a

constante gravitacional permanece constante e o campo escalar é transformado em um campo de matéria. Esta passagem do referencial de Jordan para o referencial de Einstein é interpretada por Dicke como uma transformação no sistema de unidades [17].

No capítulo 4 encontramos as soluções cosmológicas de base na teoria de Brans-Dicke considerando um Universo plano com a escala variando no tempo e constituído de um fluido perfeito barotrópico, sendo que este Universo passa primeiro por uma fase inflacionária, depois uma fase radiativa e em seguida uma fase dominada por poeira. Mais uma vez podemos encontrar neste modelo os mesmos resultados que encontramos na Relatividade Geral fazendo o parâmetro  $\omega$  tender ao infinito para os casos inflacionários e da poeira. Para o caso radiativo as soluções não dependem do parâmetro  $\omega$  e portanto são idênticas aos da Relatividade Geral, o que mantém inalterado um dos melhores resultados da cosmologia, que é nucleossíntese primordial.

Ainda no quarto capítulo perturbamos as equações de campo para encontrarmos as perturbações tensoriais clássicas. Comparando a equação diferencial que descreve o comportamento das ondas gravitacionais cosmológicas na teoria de Brans-Dicke com a encontrada na Relatividade Geral é possível ver que o resultado da Relatividade Geral se reduz ao de Brans-Dicke fazendo  $a(t) \rightarrow a(t)\sqrt{\phi(t)}$ . Usando a ação de Brans-Dicke encontramos também a ação clássica das ondas gravitacionais, para em seguida encontrarmos as Lagrangeanas e as Hamiltonianas.

No quinto capítulo quantizamos as ondas gravitacionais através do procedimento canônico para campos e, em seguida, usando a descrição de estados coerentes e as transformações de Bogoliubov (ver apêndice A) foi possível calcular o número de partículas (grávitons) produzidas pela expansão do Universo. Na figura (5.1) podemos ver que durante a inflação o número de grávitons cai rapidamente com o tempo, que a produção de partículas é maior para comprimentos de onda grandes e que o resultado encontrado no nosso modelo se aproxima da Relatividade Geral para  $\omega \gg 1$ . Da figura (5.2) vemos que, além da produção de partículas ser muito baixa para comprimentos de onda pequenos,

o número de grávitons se aproxima assintoticamente com o tempo do valor  $3/4$  e que o nosso modelo se aproxima lentamente do modelo descrito pela Relatividade Geral quando tomamos valores grandes de  $\omega$ . Na mesma figura podemos ver que as curvas para  $\omega = 300$  e  $\omega = 100000$  não são muito diferentes e que o valor mínimo do número de partículas na Relatividade Geral é bem menor que o do nosso modelo. Já pelas figuras (5.3-5.4) vemos que para tempos fixos o número de partículas diminui mais rapidamente conforme diminui o comprimento de onda e que, apesar das curvas se aproximarem do comportamento das curvas na Relatividade Geral, o número mínimo de grávitons na teoria de Brans-Dicke é maior que o da Relatividade Geral mesmo para valores muito grande de  $\omega$ , como  $\omega = 10^{45}$ , por exemplo.

Ainda no capítulo 5 calculamos os parâmetros que futuramente podem ser comparados com os dados observacionais para melhor entendermos o nosso modelo e vermos o quão robusto ele é. Começamos calculando o espectro quântico de potência, que em sua forma geral é bem parecido com o da Relatividade Geral se substituirmos o inverso do campo escalar pela constante gravitacional. Das figuras (5.5-5.7) vemos que para tempos fixos o espectro de potência em função do número de onda cai rapidamente para depois voltar a crescer e que quanto maior o valor de  $\omega$  mais rápida é essa queda, além do valor mínimo do espectro de potência também aumentar com  $\omega$  e com o tempo.

Em seguida calculamos o parâmetro  $\epsilon$  da inflação. A condição necessária para que a inflação ocorra é  $\epsilon < 1$ . Na teoria da Relatividade Geral, usando a constante cosmológica como modelo de inflação encontra-se que  $\epsilon = 0$ . Já no nosso modelo encontramos o parâmetro  $\epsilon$  dependente do parâmetro  $\omega$  da teoria de Brans-Dicke. Em modelos em que um campo escalar auto interagente é a fonte da inflação,  $\epsilon$  varia com o tempo e o período inflacionário termina quando  $\epsilon \approx 1$  [1]. Em nosso modelo  $\epsilon = 1$  quando  $\omega = 1/2$ .

Calculamos o índice espectral e vemos que, mantendo o índice espectral escrito em função de  $\epsilon$  e  $\omega$ , o resultado encontrado em nosso modelo é o mesmo da Relatividade

Geral quando  $\omega$  se aproxima do infinito, ou seja

$$n_T \approx -2\varepsilon \quad . \quad (6.1)$$

Como calculamos  $\varepsilon$  em função de  $\omega$  podemos escrever o índice espectral em função apenas de  $\omega$  (equação (5.61)) e concluímos que quando  $\omega \rightarrow \infty$

$$n_T \approx 0 \quad . \quad (6.2)$$

Finalmente encontramos a densidade relativa de energia das ondas gravitacionais, e das figuras (5.9-5.10) vemos que a densidade em função do número de onda  $k$  (com o tempo fixo) decresce até atingir um mínimo e depois voltar a crescer, e que quanto maior o valor de  $\omega$ , mais rapidamente a densidade decresce, ao mesmo tempo que o valor mínimo cresce com  $\omega$ . Diferentemente de muitos casos anteriores (número de partículas e índice espectral, por exemplo) o comportamento do nosso modelo se aproxima do comportamento descrito pela Relatividade Geral apenas para  $\omega < 10$ .

Dando continuidade ao trabalho aqui apresentado pretendemos estudar as perturbações escalares de origem quântica na teoria de Brans-Dicke, sendo que para o caso das perturbações de densidade já existem dados observacionais com os quais podemos analisar o nosso modelo.

# Apêndice A

## Transformações de Bogoliubov

Considere um campo escalar  $\Phi(\vec{x})$ , descrito pela equação diferencial

$$\square\Phi(\vec{x}) = 0 \quad , \quad (\text{A.1})$$

que é parecida com a equação (4.60) obedecida por nosso campo  $\mu$ . Definimos, então, o produto interno [20]

$$(\Phi_1, \Phi_2) \equiv -i \int (\Phi_1 \partial_\nu \Phi_2^* - \partial_\nu \Phi_1 \Phi_2^*) \sqrt{-g_\Sigma} d\Sigma^\nu \quad , \quad (\text{A.2})$$

onde  $d\Sigma^\nu = n^\nu d\Sigma$ ,  $d\Sigma$  é o elemento de volume da hipersuperfície tipo espaço  $\Sigma$  e  $n^\nu$  é um vetor ortogonal a hipersuperfície  $\Sigma$ .

Existe um conjunto completo de funções  $u_l(\vec{x})$ , soluções de (A.1), que são ortonormais, ou seja

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij} \quad , \quad (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij} \quad , \quad (u_i, u_j^*) = 0 \quad . \quad (\text{A.3})$$

Portanto, podemos expandir  $\Phi(\vec{x})$  e também adotar uma relação de comutação tal que

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \sum_i \left( \hat{a}_i u_i + \hat{a}_i^\dagger u_i^* \right) \\ \left[ \hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger \right] &= \delta_{ij} \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde o estado de vácuo  $|0\rangle$  é aniquilado por  $\hat{a}_i$ , ou seja,  $\hat{a}_i|0\rangle = 0$ .

Considere também um segundo conjunto ortonormal de soluções  $\bar{u}_l(\vec{x})$ . Expandindo  $\Phi$  neste segundo conjunto temos

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \sum_j \left( \hat{a}_j \bar{u}_j + \hat{a}_j^\dagger \bar{u}_j^* \right) \\ \left[ \hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger \right] &= \delta_{ij} \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

e definimos um novo estado de vácuo  $|\bar{0}\rangle$ , de maneira que  $\hat{a}_i|\bar{0}\rangle = 0$ .

Como os conjuntos  $u_l(\vec{x})$  e  $\bar{u}_l(\vec{x})$  são completos, podemos expandir um em função do outro, ou seja

$$\bar{u}_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*) \quad , \quad u_i = \sum_j (\alpha_{ji}^* \bar{u}_j - \beta_{ji} \bar{u}_j^*) \quad . \quad (\text{A.6})$$

Esta expansão é conhecida como transformação de Bogoliubov e  $\alpha_{ij}$  e  $\beta_{ij}$  são os coeficientes de Bogoliubov. Através do produto interno, temos que

$$\alpha_{ji} = (\bar{u}_j, u_i) \quad , \quad \beta_{ij} = -(\bar{u}_i, u_j^*) \quad , \quad (\text{A.7})$$

e então podemos obter

$$\hat{a}_i = \sum_j \left( \hat{a}_j \alpha_{ji} + \hat{a}_j^\dagger \beta_{ji}^* \right) \quad , \quad \hat{a}_j = \sum_i \left( \hat{a}_i \alpha_{ji}^* - \hat{a}_i^\dagger \beta_{ji} \right) \quad . \quad (\text{A.8})$$

Através da condição de comutação entre  $\hat{a}_i$  e  $\hat{a}_i^\dagger$ , encontramos que os coeficientes de Bogoliubov devem obedecer a seguinte relação:

$$\sum_j \left( \alpha_{ji} \alpha_{jk}^* - \beta_{jk} \beta_{ji}^* \right) = \delta_{ik} \quad . \quad (\text{A.9})$$

Como consequência temos que, para o caso de  $\beta_{ij} \neq 0$ , o estado  $|\bar{0}\rangle$  não é eliminado pelo operador  $\hat{a}_i$ . Portanto podemos calcular o números de partículas no vácuo do modo



$u_i$  contidas no modo  $\bar{u}_j$ , que é

$$N = \langle \bar{0} | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i | \bar{0} \rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2 . \quad (\text{A.10})$$

# Referências Bibliográficas

- [1] D. Baumann, *TASI Lectures on Inflation*, Lectures da 2009 Theoretical Advanced Study Institute na Univ. of Colorado, Boulder. [arXiv:0907.5424v1];
- [2] Y. Fujii e K. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*, Cambridge University Press, (2003);
- [3] C. H. Brans e R. H. Dicke, *Physical Review* **124**, 3:925-935, (1961);
- [4] M. Giovannini, *Stochastic backgrounds of relic gravitons: a theoretical appraisal*, Department of Physics, Theory Division, CERN, CERN-PH-TH-2008-252; (2009), [arXiv:0901.3026];
- [5] LIGO: <http://www.ligo.caltech.edu>,  
VIRGO: <http://www.virgo.infn.it>,  
MiniGrail: <http://www.minigrail.nl>,  
CLIO: <http://www.icrr.u-tokyo.ac.jp>,  
GEO 600: <http://www.geo600.org>,  
TAMA 300: <http://tamago.mtk.nao.ac.jp>,  
Projeto Gráviton: <http://www.das.inpe.br/graviton/index.html>,  
AIGO: <http://www.gravity.uwa.edu.au>,  
LCGT: <http://gw.icrr.u-tokyo.ac.jp/lcgt>,  
LISA: <http://lisa.nasa.gov>;
- [6] P. G. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity*, Dover, (1976);

- [7] H. Lichtenegger e B. Mashhoon, *Mach's Principle*, segundo capítulo de *The Measurement of Gravitomagnetism: A Challenging Enterprise*, pp. 13-25, editado por L. Iorio, Nova Science, (2007), [arXiv:physics/0407078v2];
- [8] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, (1972);
- [9] B. F. Schutz, *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press, (1985);
- [10] A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, Princenton University Press, (1956);
- [11] <http://publication.lal.in2p3.fr/2001/web/node171.html>;
- [12] G. Arfken e H. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier Academic Press, 10a. edição, (2005);
- [13] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press, (2003);
- [14] C. H. Brans, *Physical Review* **125**, 1:388-396, (1962);
- [15] C. H. Brans, *The roots of scalar-tensor theory: an approximate history*, (2005), [arXiv:gr-qc/0506063];
- [16] A. Unzicker, *A Look at the Abandoned Contributions to Cosmology of Dirac, Sciama and Dicke*, (2008), [arXiv:0708.3518v5];
- [17] R. H. Dicke, *Physical Review* **125**, 6:2163-2167, (1962);
- [18] J.P. Baptista, J.C. Fabris e S.V.B. Gonçalves, *Astrophysics and Space Science* **246**, 2:315-331, (1996);
- [19] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, 10a. edição, (1964);
- [20] N. D. Birrel e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, (1982);

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)