

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

ATRADORES DE LORENZ

SONIA EDITH PAUCCAR SOLANO

Niterói, RJ

Abril, 2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Sonia Edith Paucar Solano

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Orientadora: Isabel Lugão Rios

Niterói, RJ

Abril, 2010

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Agradecimentos | 2 |
| Resumo | 3 |
| Abstract | 3 |
| Introdução | 4 |
| Capítulo 1 - Preliminares | 6 |
| 1. Elementos da dinâmica contínua | 6 |
| 2. Elementos da dinâmica discreta | 9 |
| Capítulo 2 - Modelo geométrico | 12 |
| 1. Modelo tridimensional | 13 |
| 2. Modelo bidimensional | 17 |
| 3. Modelo unidimensional | 22 |
| 4. Perturbação do modelo | 31 |
| 4. O atrator de Lorenz e o modelo geométrico | 33 |
| Conclusão | 34 |
| Referências Bibliográficas | 35 |

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus pois tudo devo a ele. A minha orientadora pelo apoio, incentivo, paciência e sempre palavras sábias. Aos meus pais e irmão, por serem a razão do meu esforço. Aos meus amigos Yuri, Shalon, Jacqueline, Verônica, Fernanda e Edward por todo o carinho e apoio que me brindaram quando as coisas não iam tão bem, enfim, por estarem presentes em minha vida: muito obrigada!!!. A Capes pelo apoio financeiro e aos professores do Instituto de Matemática da UFF.

Resumo

Neste trabalho descrevemos o Modelo Geométrico introduzido por J. Guckenheimer e R. Williams para procurar entender o comportamento qualitativo das órbitas do Atrator de Lorenz. Tal modelo é conhecido como o Atrator Geométrico de Lorenz. Também mostramos que perturbações do modelo dão origem a atratores com as mesmas propriedades.

Abstract

In this work, we describe the Geometric Model introduced by J. Guckenheimer and R. Williams aiming to describe the qualitative behavior of the orbits of the Lorenz Attractor. This model is called the Lorenz Geometric Attractor. We also prove that perturbations of the model yield attractors with similar properties.

Introdução

Uma importante noção no estudo de sistemas dinâmicos é a estabilidade ou persistência do sistema frente a pequenos cambios ou perturbações. Em outras palavras, se o sistema dinâmico é a solução de uma equação diferencial ou de um sistema físico real que não é estruturalmente estável, então os pequenos erros e aproximações feitos no modelo podem transformar dramaticamente a estrutura da solução real do sistema.

Na década 70 houve intensa atividade com o objetivo de compreender o comportamento das equações de Lorenz e, em particular, tentar provar que de fato essas equações exibem um atrator estranho, como sugerem experimentos numéricos. Uma estratégia bem sucedida foi construir modelos para o comportamento que as equações parecem exibir. Modelos geométricos para o atrator de Lorenz foram sugeridos por Afraimovich, Bykov, Shilnikov (URSS) Guckenheimer, Williams (USA) em meados dos anos 70.

Edward Lorenz estudou o seguinte sistema de equações diferenciais em conexão com os problemas em hidrodinâmica:

$$\begin{aligned}x' &= -\sigma(y - x), \\y' &= \rho x - y - xz, \\z' &= -\beta z + xy,\end{aligned}$$

onde $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$.

O comportamento dinâmico das soluções deste sistema de equações diferenciais é um tópico que atualmente tem despertado o interesse dos pesquisadores, devido a suas interessantes propriedades dinâmicas. Guckenheimer introduziu uma descrição geométrica de um fluxo que parece ter a dinâmica qualitativa das soluções das equações de Lorenz. Este fluxo definido geometricamente tem um complicado atrator que não é topologicamente estruturalmente estável. Aqui entendemos por um campo topologicamente estruturalmente estável um campo para o qual campos vetoriais suficientemente próximos (na C^1 -topologia sobre espaços vetoriais) possuam conjuntos não errantes homeomorfos ao seu conjunto não errante. Williams mostrou que existe um conjunto não enumerável desses atratores, cada um com um tipo topológico diferente.

Veremos que o atrator de Lorenz não é tão patológico como os resultados indicam. Mostraremos que a família contínua de atratores descrita em [8] é, de fato, uma família completa de atratores em uma vizinhança do fluxo geométrico de Lorenz. Em particular, há uma família a 2-paramêtros de

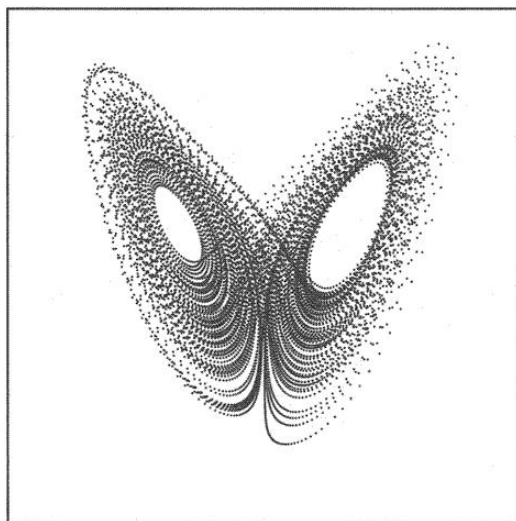


Figura 1: Atrator de Lorenz

fluxos contendo o fluxo geométrico de Lorenz, que tem a propriedade que qualquer perturbação do fluxo geométrico de Lorenz é topologicamente conjugado sobre uma vizinhança do atrator a um membro próximo da família. Neste sentido, o atrator geométrico de Lorenz é estruturalmente estável de codimensão 2. As equações de Lorenz dadas acima são invariantes por rotação do \mathbb{R}^3 em torno do eixo z por π . Dentro do espaços dos fluxos possuindo esta simetria o fluxo geométrico de Lorenz é estruturalmente estável de codimensão um em vez de dois.

A prova destes resultados é baseada em dois importantes itens:

- i) A construção de suspensões e limites inversos em sistemas dinâmicos.
- ii) Resultados recentes sobre as bifurcações do intervalo unitário .

Daqui em diante, trabalharemos apenas com o fluxo geométrico de Lorenz, sem considerar se ele representa ou não precisamente as soluções do sistema acima.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo estabeleceremos as ferramentas necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Muitos resultados serão enunciados e as suas provas poderão ser consultadas na bibliografia correspondente.

1.1 Elementos de dinâmica contínua

Sejam U um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$. Ao campo vetorial X associamos a equação diferencial

$$x' = X(x) \tag{1.1}$$

As aplicações diferenciáveis $\varphi : I \rightarrow U$ (I intervalo da reta) tais que $\varphi(t) \in U$ e $\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t))$, $\forall t \in I$ são soluções da equação (1.1) e são chamadas *trajetórias ou curvas integrais de X* .

Definição 1.1.1. Um ponto $x \in U$ é dito *crítico ou singular de X* se $X(x) = 0$.

Definição 1.1.2. Uma curva integral $\varphi : I \rightarrow U$ de X é dita *máxima* se, para toda curva integral $\psi : J \rightarrow U$ tal que $I \subset J$ e $\varphi = \psi|_I$, então $I = J$ e daí $\varphi = \psi$. O intervalo I é chamado *intervalo máximo*.

Seja $p \in U$. Denotemos por $\varphi_p : I_p \rightarrow U$ a solução máxima do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' &= X(x) \\ x(0) &= p \end{cases}$$

onde $I_p =]\tau_-(p), \tau_+(p)[$ denota o intervalo máximo .

Nas condições acima tem-se:

- a) Para cada ponto $x \in U$ existe um intervalo aberto I_x , onde está definida uma única curva integral máxima $\varphi_x \rightarrow U$, do campo X passando por x .
- b) Se $y = \varphi_x(t)$, $t \in I_x$, então $I_y = I_x - t$ e $\varphi_y(s) = \varphi_x(t + s)$, para todo $s \in I_y$.
- c) O conjunto $D = \{(t, x) : x \in U, t \in I_x\}$ é aberto em \mathbb{R}^{n+1} e a aplicação $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ é de classe C^r .

Quando $I_x = \mathbb{R}$, a aplicação φ chama-se *fluxo gerado por X* .

Definição 1.1.3. A órbita de X pelo ponto p é o conjunto $\{\varphi(t, p), t \in I_p\}$, denotado por $\mathcal{O}_X(p)$.

Se $I_p = \mathbb{R}$ e existe $\tau > 0$ tal que $\varphi(t + \tau) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}$ e $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$, se $|t_1 - t_2| < \tau$, $\mathcal{O}_X(p)$ é dita órbita periódica. O período desta órbita é τ .

Seja $p \in U$ e $\varphi_p : I_p \rightarrow U$ a solução maximal. Tem-se:

- se $\tau_+(p) = +\infty$, o conjunto ω -limite de p é

$$w_+(p) = \{q \in U : \exists(t_n) \subset I(p)/t_n \rightarrow \infty, \varphi(t_n, p) \rightarrow q\}$$

- se $\tau_-(p) = -\infty$, o conjunto α -limite de p é

$$w_-(p) = \{q \in U : \exists(t_n) \subset I(p)/t_n \rightarrow -\infty, \varphi(t_n, p) \rightarrow q\}$$

Definição 1.1.4. Um conjunto invariante fechado $A \subset \mathbb{R}^n$ é chamado um conjunto atrativo se existe V vizinhança de A tal que $\tau_+(p) = +\infty \forall p \in A$, e $\varphi(t, p) \in V, \forall t \geq 0$ e $\varphi(t, p) \rightarrow A, t \rightarrow \infty, \forall p \in V$.

O conjunto $\bigcup_{t \leq 0} \varphi_t(V)$ é o domínio de atração de A , também chamado de variedade estável de A . Um conjunto atrativo captura todas as órbitas começando em seu domínio de atração.

Definição 1.1.5. Um atrator é um conjunto atrativo que contém uma órbita densa. Um atrator é dito estranho se tem dependência sensível às condições iniciais. Ou seja, se existe um $\delta > 0$ tal que para qualquer $p \in U$ e V vizinhança de p , existem $q \in V$ e $t \geq 0$ tal que $|\varphi(t, p) - \varphi(t, q)| > \delta$.

Definição 1.1.6. Um ponto $p \in U$ é dito não errante se para cada $T > 0$ e para cada vizinhança V de p , existe $t > T$ tal que $\varphi_t(V) \cap V \neq \emptyset$.

Seja $\chi^r(U)$ o espaço dos campos vetoriais de classe C^r definidos em $U \subset \mathbb{R}^n$, munido da topologia C^r , $r \geq 1$.

Definição 1.1.7. Dados dois campos vetoriais X, Y de classe C^r , $r \geq 1$, com respectivos fluxos ϕ_1 e ϕ_2 , dizemos que X e Y são topologicamente conjugados se existe $h : U_1 \rightarrow U_2$ homeomorfismo tal que $h(\phi_1(t, x)) = \phi_2(t, h(x))$, para todo $x \in U_1$ e para todo $t \in \mathbb{R}$.

Dizemos que X, Y são topologicamente equivalentes se existe $h : U_1 \rightarrow U_2$ homeomorfismo tal que leva órbitas de X em órbitas de Y preservando a orientação das trajetórias.

Definição 1.1.8. Um campo vetorial $X \in \chi^r(U)$ é estruturalmente estável se existe uma vizinhança V de X em $\chi^r(U)$ tal que todo campo $Y \in V$ é topologicamente equivalente a X .

Teorema 1.1.1. (Teorema de Grobman-Hartman) Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 e p um ponto singular hiperbólico. Existem vizinhanças V de p em U e W de 0 em \mathbb{R}^n tais que $X|_V$ é topologicamente conjugado a $DX(p)|_W$.

Seja $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$. O tamanho de k é dado por: $|k| := \sum_{i=1}^n k_i$.

Seja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ e seja $\lambda^k := \prod_{i=1}^n \lambda_i^{k_i}$. A relação da forma $\lambda_i \neq \lambda^k$, $\forall i = 1, \dots, n$ e $\forall k \in \mathbb{N}_0^n$ é chamada de não ressonância.

Teorema 1.1.2. (Teorema de Sternberg) Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^∞ e p um ponto singular hiperbólico tal que os autovalores da parte linear de X em p satisfazem a relação de não ressonância. Existem vizinhanças V de p em U e W de 0 em \mathbb{R}^n tais que $X|_V$ é diferencivelmente conjugado a $DX(p)|_W$.

As provas dos teoremas 1.1.1 e 1.1.2 são tratados em [5].

1.2 Elementos de dinâmica discreta

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} e $f : I \rightarrow I$ uma aplicação.

A *órbita positiva* de x é o conjunto $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ e é denotado por $O^+(x)$. Se f for um homeomorfismo a órbita de x é o conjunto $O(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$.

Dizemos que f é *localmente eventualmente sobrejetor* se para todo intervalo $J \subset I$ não degenerado, existe um $n > 0$ tal que $f^n(J) = I$.

Definição 1.2.1. O espaço shift Σ é o conjunto de sequências de 0's e 1's. Isto é, $\Sigma = \{\bar{x} = (x_0, x_1, \dots) / x_i = 0 \text{ ou } 1\}$.

Agora definamos uma topologia em Σ induzida pela distância:

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i},$$

onde: $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots)$, $\bar{y} = (y_0, y_1, \dots)$

Note que d é uma métrica, (Σ, d) é um espaço métrico compacto.

Proposição 1.2.1. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in \Sigma$. Se $x_i = y_i$, para $i = 0, 1, \dots, n$, então $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq 1/2^n$. Reciprocamente, se $d(\bar{x}, \bar{y}) < 1/2^n$ então $x_i = y_i$, para $i \leq n$.

A relevância deste resultado se deve ao fato de podermos decidir se duas sequências estão próximas ou não, olhando para um número finito de termos. Agora definiremos o mais importante ingrediente em dinâmica simbólica: a aplicação shift em Σ .

A aplicação shift $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é definida por $\sigma(\bar{x}) = \bar{y}$ onde $y_i = x_{i+1}$.

Esta aplicação é contínua com a métrica d . Claramente, σ é uma aplicação dois a um de Σ , pois para $(1, x_1, \dots)$ e $(0, x_1, \dots)$ temos a mesma imagem pelo shift.

Um subshift é a restrição de σ a um subconjunto fechado $\Gamma \subset \Sigma$ que é invariante por σ .

Definamos uma ordem em Σ por $\bar{x} < \bar{y}$ se existe um n tal que $x_i = y_i$ para $i < n$ e $x_n = 0, y_n = 1$

Proposição 1.2.2. σ tem as seguintes propriedades:

- a) A cardinalidade do conjunto dos pontos periódicos de período n é 2^n .
- b) Os pontos periódicos são densos em Σ .

c) Existe uma órbita densa para σ em Σ .

Definição 1.2.2. $f : I \rightarrow I$ é dito topologicamente transitiva se para qualquer par de conjuntos abertos $U, V \subset I$ existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Note que se a aplicação possui uma órbita densa, então ela é topologicamente transitiva.

Definição 1.2.3. Dizemos que $f : I \rightarrow I$ tem dependência sensível sobre as condições iniciais se existe δ tal que, para qualquer $x \in I$ e para qualquer vizinhança U de x , existem $y \in U$ e $n > 0$ tais que $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Definição 1.2.4. Sejam U um conjunto e $f : U \rightarrow U$. Dizemos que f é caótica em U se satisfaz:

- a) f tem dependência sensível as condições iniciais.
- b) f é topologicamente transitiva.
- c) Os pontos periódicos são densos em U .

Exemplos:

1. A aplicação Shift σ é caótica sobre Σ .
2. A aplicação $F(x) = 4x(1 - x)$ é caótica sobre o intervalo $[0, 1]$.

Definição 1.2.5. Dizemos que $f : I \rightarrow I$ é expansiva se existe $\rho > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in I$, $x \neq y$, existe n tal que $|f^n(x) - f^n(y)| > \rho$.

Definição 1.2.6. Sejam A, B subconjuntos de \mathbb{R}^n e sejam $f : A \rightarrow A$, $g : B \rightarrow B$ duas aplicações. Dizemos que f e g são topologicamente conjugadas se existe um homeomorfismo $h : A \rightarrow B$ tal que, $h \circ f = g \circ h$. O homeomorfismo h é dito uma conjugação topológica.

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sejam $f, g : A \rightarrow A$ duas aplicações. A distância C^r entre f e g é dada por :

$$d_r(f, g) = \sup_{x \in A} \left\{ |f(x) - g(x)|, |f'(x) - g'(x)|, |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)| \right\}$$

Esta distância nos permite introduzir um importante conceito na teoria de sistemas dinâmicos: a estabilidade estrutural.

Definição 1.2.7. *Sejam A subconjunto compacto de \mathbb{R}^n e $f : A \rightarrow A$ uma aplicação de classe C^r . Dizemos que f é C^r -estruturalmente estável sobre A , se existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $g : A \rightarrow A$ de classe C^r que satisfaz $d_r(f, g) < \epsilon$, tem-se que f é topologicamente conjugada a g .*

Capítulo 2

Modelo Geométrico

O meteorologista Edwards Lorenz em 1963, publicou no *Journal of Atmospheric Sciences* um exemplo de sistema de equações diferenciais, como um modelo simplificado de convecção de fluido térmico, motivado por entender a fundamentação teórica dos métodos de previsão do tempo da época, baseados em regressão linear.

Trata-se de um sistema não-linear, tridimensional e determinístico que exhibe comportamento caótico e demonstra aquilo a que hoje se chama um atrator estranho (atrator de Lorenz).

As equações que governam o Atrator de Lorenz são:

$$\begin{aligned}x' &= -\sigma(y - x) \\y' &= \rho x - y - xz \\z' &= -\beta z + xy,\end{aligned}$$

onde σ é o número de Prandt, ρ o número de Rayleigh e β o raio espectral. Lorenz e outros investigadores usando simulações numéricas para uma vizinhança aberta dos parâmetros $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28$, se obteve que quase todos os pontos no espaço fase tendem ao atrator estranho.

O atrator de Lorenz é caótico, o que mostra como o estado do sistema dinâmico evolui no tempo num padrão complexo, não-repetitivo sua forma é conhecida por se assemelhar a uma bela borboleta (ver figura 2.1).

As propriedades analíticas do sistema de equações de Lorenz são obtidas diretamente das equações de Lorenz, ver [3].

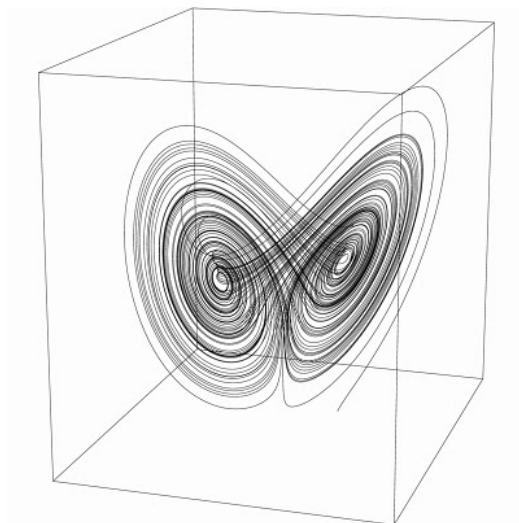


Figura 2.1: Atrator de Lorenz

2.1 Modelo Tridimensional

Ideia da construção do modelo geométrico. Os detalhes da construção do modelo geométrico de Lorenz são baseados em dois aspectos: análise da dinâmica em uma vizinhança da singularidade da origem e imitação dos efeitos dos pares das singularidades selas no fluxo original de Lorenz.

Perto da singularidade. Pela teorema de Sternberg, temos que em uma vizinhança da origem (sem perda de generalidade podemos assumir que contem o cubo $[-1, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$), as equações de Lorenz são equivalentes ao sistema linear

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_1 x \\ y' &= -\lambda_2 y \\ z' &= -\lambda_3 z, \end{aligned}$$

via *conjugação suave* onde $0 < \lambda_3 < \lambda_1 < \lambda_2$.

Consideremos $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -1/2 \leq x, y \leq 1/2, z = 1\}$, $S^- = \{(x, y, z) \in S : x < 0\}$, $S^+ = \{(x, y, z) \in S : x > 0\}$ e $S^\circ = S \setminus D$, onde $D = \{(x, y, 1) \in S : x = 0\}$.

Assumamos que S é uma seção transversal do fluxo tal que toda trajetória que não está na variedade estável local da singularidade atravessa eventualmente S na direção do eixo negativo z . Agora resolvendo o sistema com as

condições iniciais $(x_0, y_0, 1)$ em S° , temos a solução

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) &= y_0 e^{-\lambda_2 t} \\ z(t) &= e^{-\lambda_3 t} \end{aligned}$$

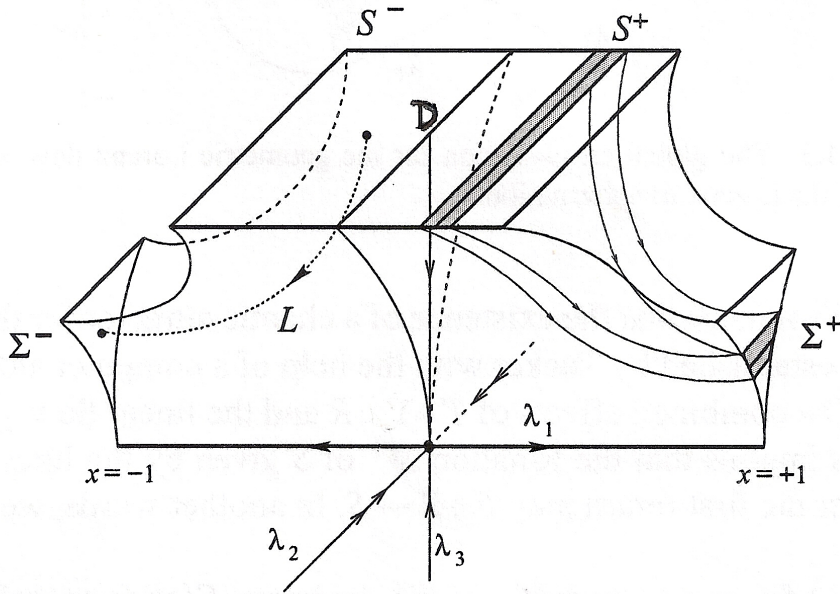


Figura 2.2: Comportamento perto do origem.

Esta trajetória atinge ao plano plano $x = 1$ quando

$$\begin{aligned} x &= 1, \\ y &= y_0 x_0^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \\ z &= x_0^{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}, \end{aligned}$$

onde $0 < x_0 \leq 1/2$, no tempo $\tau(x_0) = -\frac{1}{\lambda} \ln(x_0)$. Também temos equações similares para $-1/2 \leq x_0 < 0$, no tempo $\tau(x_0) = -\frac{1}{\lambda} \ln(|x_0|)$.

Note que quando $x_0 \rightarrow 0$, $\tau(x_0) \rightarrow +\infty$. Denotemos por $\alpha = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} < 1$ e $\beta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ e seja ψ o fluxo associado ao sistema linear dado acima. Os conjuntos $A = \{\psi_{\tau(x_0)}(x_0, y_0, 1) : (x_0, y_0, 1) \in S^\circ, x_0 > 0\}$ e $B = \{\psi_{\tau(x_0)}(x_0, y_0, 1) :$

$(x_0, y_0, 1) \in S^\circ, x_0 < 0\}$ tem a forma de triângulo topológico sem os vértices $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$ respectivamente.

Denotemos por Σ^+ o fecho do conjunto A e Σ^- o fecho do conjunto B e $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$.

Seja a aplicação $L : S^\circ \rightarrow \Sigma$ tal que $L(x, y) = (y|x|^\beta, |x|^\alpha)$. O fato de que $0 < \alpha < 1 < \beta$ nas equações lineares implica que $L(S^\pm)$ são uniformemente comprimidos na direção do eixo y . Claramente cada segmento de reta $S^\circ \cap \{x = x_0\}$ é levado ao outro segmento $\Sigma \cap \{z = z_0\}$ como esboçado na figura 2.2.

Os efeitos das selas. Agora para imitar o retorno de uma órbita regular e obter a figura da borboleta para nosso fluxo, como no fluxo original de Lorenz (ver figura 2.1), procedemos da seguinte maneira.

Os conjuntos Σ^\pm devem retornar à seção transversal S através de um fluxo descrito por uma adequada composição de uma rotação R_\pm , uma expansão $E_{\pm\theta}$ só ao longo da direção x e uma traslação T_\pm . A rotação é em torno das variedades estáveis dos outros dois pontos hiperbólicos do fluxo de Lorenz original. Assumamos que esta aplicação de retorno leva segmentos $\Sigma \cap \{z = z_0\}$ em segmentos $S^\circ \cap \{x = x_1\}$ como na figura 2.2.

A rotação R_\pm tem eixo paralelo à direção y que é ortogonal à direção x (a direção x é paralela às duas componentes conexas da variedades instável de 0). Ou seja, se $(x, y, z) \in \Sigma^\pm$, então

$$R_\pm(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A expansão ocorre só ao longo na direção x , logo $E_{\pm\theta}$ é dado por

$$E_{\pm\theta}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com $\theta 2^{-\alpha} < 1$ e $\theta \alpha 2^{1-\alpha} > 1$. A primeira condição assegura que a imagem da aplicação resultante está contida em S . A segunda condição faz que uma certa aplicação induzida unidimensional seja expansora por pedaços.

A traslação é escolhida tal que a direção instável començando da origem é enviada à fronteira de S e a imagem de Σ^\pm são disjuntos. A composição $T_\pm \circ E_{\pm\theta} \circ R_\pm$ das aplicações leva segmentos de reta $\Sigma \cap \{z = z_0\}$ em segmentos $S^\circ \cap \{x = x_1\}$.

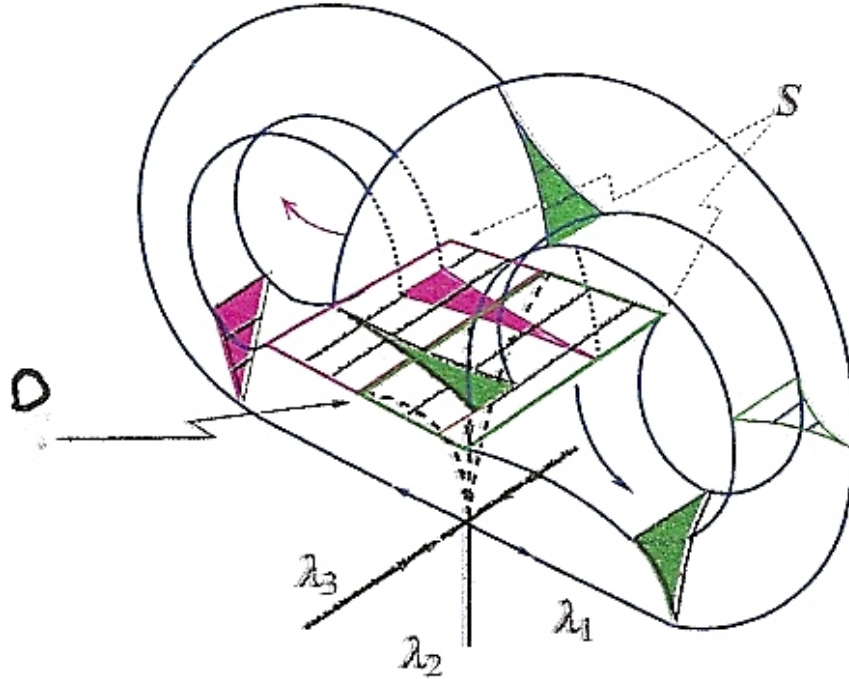


Figura 2.3: A seção transversal global para o fluxo geométrico de Lorenz (Folheações verticais).

Esta composição descreve um campo vetorial Y na região fora de $[-1, 1]^3$. O fluxo geométrico de Lorenz φ_t é definido como: para cada $t \in \mathbb{R}^+$ e cada ponto $x \in S$, a órbita $\varphi_t(x)$ começará seguindo o campo linear até Σ^\pm e logo seguirá Y , retornando a S . Escrevemos $\chi = \{\varphi_t(x) : x \in S, t \in \mathbb{R}^+\}$ o conjunto onde este fluxo atua. O fluxo geométrico de Lorenz é o par (χ, φ_t) definido desta maneira.

O conjunto $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(S)$ é o atrator de Lorenz. Os efeitos combinados de $T_\pm \circ E_{\pm\theta} \circ R_\pm$ e do fluxo linear implicam que a folheação de S dada pelos segmentos $S \cap \{x = x_0\}$ é invariante pela aplicação de Poincaré $F : S \rightarrow S$.

A principal característica do fluxo de Lorenz pode ser visualizada na figura 2.3.

É evidente que existe uma escolha aqui. Mas foi feita a seguinte escolha para que a aplicação de Poincaré resultante $F : S \rightarrow S$ tenha a forma

$$F(x, y) = (f(x), H(x, y)),$$

onde as aplicações f e H satisfazem as seguintes propriedades:

- a) $H(x, y) > 1/4$ se $x > 0$,
- b) $H(x, y) < -1/4$ se $x < 0$,
- c) A simetria das equações de Lorenz implica $f(x) = -f(-x)$,
- d) f é descontínua em 0, com limites laterais $f(0^+) = -1/2$, $f(0^-) = 1/2$,
- e) f é diferenciável em $I - \{0\}$ e $f'(x) > \sqrt{2}$,
- f) Os limites laterais da f' em 0^\mp são $\pm\infty$.

Como o comportamento destas trajetórias pode ser entendido olhando os pontos onde elas sucessivamente intersectam a S . Ou seja, pelo que assumimos na construção do modelo, a evolução do fluxo pode ser reduzida a estudar a aplicação de Poincaré F .

2.2 Modelo bidimensional

Nesta seção iremos expressar analiticamente todas as propriedades geométricas da aplicação de Poincaré e consideremos $S = I \times I$, $I = [0, 1]$ o quadrado unitário em \mathbb{R}^2 . A aplicação $F : S \rightarrow S$, satisfaz as seguintes propriedades:

- a) Existem aplicações $g : S \rightarrow I$ suave, $f : I \rightarrow I$ contínua exceto em um único ponto $c \in (0, 1)$ tal que F tem a forma $F(x, y) = (f(x), g(x, y))$;
- b) F é injetiva sobre o complementar de $D = \{c\} \times I$;
- c) f é localmente eventualmente sobrejetora e estritamente crescente em $[0, c)$ e $(c, 1]$, $f(c^-) = 1$, $f(c^+) = 0$, $f(0) < c < f(1)$;
- d) f é diferenciável em $I - \{c\}$, $f'(x) \rightarrow \infty$, se $x \rightarrow c$;
- e) $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) < \frac{1}{2}$, $\forall (x, y) \in S$.
- f) A aplicação $F|_{x \times I}$ tende uniformemente a uma aplicação constante, b^\pm , quando $x \rightarrow c^\pm$.

A notação $f(c^+)$ é o limite de $f(x)$, quando x tende a c pela direita. Analogamente, para $f(c^-)$. Denotemos por S^+ o conjunto $\{(x, y) \in S : x > c\}$ e por S^- o conjunto $\{(x, y) \in S : x < c\}$.

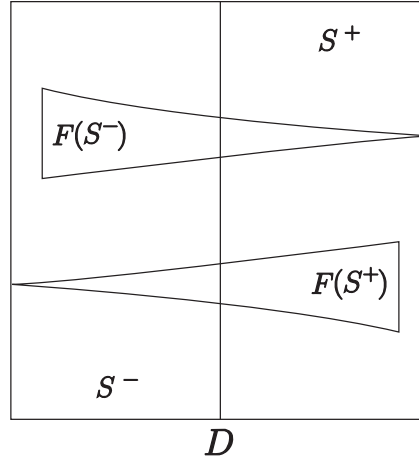


Figura 2.4: Imagem da F

Observação. As seguintes proposições são provados para certos valores $c \in (0, 1)$ e em particular é válido para o valor $c = 1/2$.

As interseções das imagens iteradas de S por F constituem um complicado conjunto Λ unidimensional que é o ω -limite de quase todos os pontos de S . Ou seja, este conjunto é o ω -limite dos pontos em S tais que iterados por F não pertençam ao conjunto de descontinuidades de F .

Estudaremos a topologia de Λ e a dinâmica de $F|_{\Lambda}$. Provaremos que $F|_{\Lambda}$ é quase o “limite inverso” da sequência de aplicações $I \xleftarrow{f} I \xleftarrow{f} I \xleftarrow{f} \dots$

Definição 2.2.1. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação bem definida sobre um espaço métrico X . Definamos o espaço limite inverso \widehat{X} que consiste das sequências $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots)$ tais que $f(x_{i+1}) = x_i$. A aplicação $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$ dada por $\widehat{f}(\bar{x}) = \bar{y}$, com $y_i = f(x_i)$ é chamada o limite inverso de f .*

Um ponto de \widehat{X} consiste de um ponto de X junto com a escolha de uma história do ponto. Note que nossa aplicação f não é invertível, então existem diversos pontos em \widehat{X} para cada ponto de X .

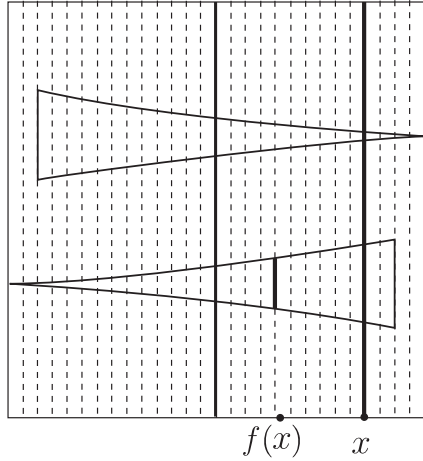


Figura 2.5: Folheação vertical da F .

Como construir o limite inverso de uma aplicação? Existe uma técnica geral para obter o limite inverso de uma aplicação $f : X \rightarrow X$ sobre um espaço bem definido X como um conjunto invariante por uma aplicação que é injetora. Em linhas gerais, a técnica consiste de encaixar X em um espaço maior tal que X tenha uma vizinhança tubular e que f pode ser aproximada por um mergulho que se estende a uma aplicação preservando fibras sobre a vizinhança tubular. Esta aplicação F preservando fibras sobre a vizinhança tubular tem que ser uma contração sobre cada fibra e projetar a f pela aplicação projeção da vizinhança tubular. Então a aplicação F tem um conjunto invariante tal que sua restrição é o limite inverso de f .

Em nosso caso, a função f não está bem definida. Para esse propósito podemos considerar F definido em $\{c\} \times I$ com dois valores: $F(c^+ \times I) = b^+$, $F(c^- \times I) = b^-$, apesar das descontinuidades, a aplicação F tem todas as propriedades necessárias para conter o limite inverso de f . Consideremos o quadrado unitário como a vizinhança tubular de um intervalo horizontal com fibras verticais e aplicação projeção π . Assim F é uma aplicação preservando fibras que contrai as fibras e as projeta sobre f . Como $\pi F = f \pi$, cada órbita de F está sobre uma órbita de f . A única novidade aqui está nas descontinuidades ou ambiguidades de f e F .

Considere o conjunto $\Lambda = \bigcap_{i=0}^{\infty} F^i(S)$. Como S é fechado, temos que $F(S)$ é fechado e contido em S . Assim Λ é fechado, não vazio e além disso

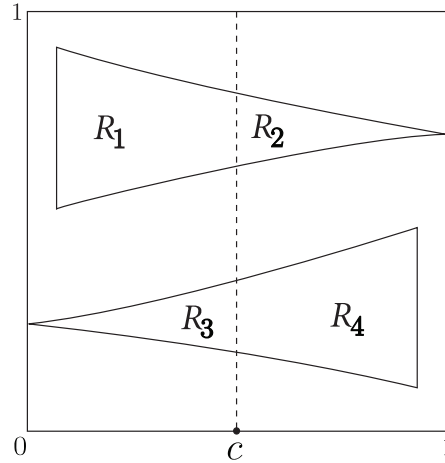


Figura 2.6: Primeira iteração da F

invariante por F .

Queremos mostrar que F restrita a Λ é topologicamente equivalente a um certo espaço quociente do limite inverso de f . Para resolver o problema da descontinuidade, introduzimos a relação de equivalência que identifica duas sequências \bar{x} e \bar{y} , se para algum i , $x_i = y_i = 0$ ou $x_i = y_i = 1$. O *Limite Pinched Inverso* P de f é o espaço quociente de \widehat{I} por esta relação de equivalência.

Proposição 2.2.1. *F restrita a Λ é topologicamente conjugada ao limite pinched inverso P de f .*

Demonstração. Seja a aplicação $\psi : \Lambda \rightarrow P$ definida por $\psi(z) = \bar{z}$, $z_i = \pi(F^{-i}(z))$, onde $z = (x, y)$.

Temos que ψ está bem definida para os pontos de Λ que não se projetam sobre pontos na f -órbita de $c \in I$, já que F é injetiva sobre o complemento $\pi^{-1}(c)$. Para pontos de Λ que se projetam sobre pontos na f -órbita de c , há ambiguidade, mas ela desaparece quando passamos de \widehat{I} a P . Assim temos que $\psi \circ F = \widehat{f} \circ \psi$.

Mostraremos que ψ é um homeomorfismo.

- ψ é injetora. Se $\psi(z) = \psi(w)$ então $\pi(z) = \pi(w)$. Assim z, w estão no mesmo segmento vertical em S . Mas, F^{-1} expande segmentos verticais

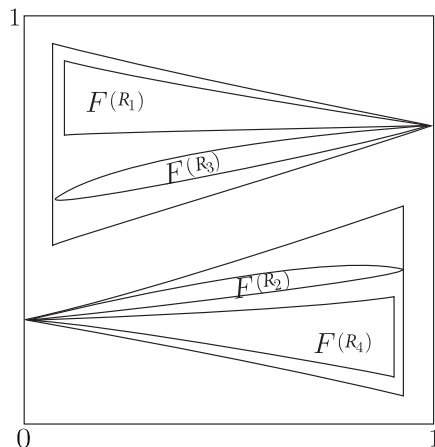


Figura 2.7: Segunda iteração da F

por um fator de pelo menos 2. Assim, pontos distintos z, w sobre um mesmo segmento vertical não podem ter a propriedade que $F^{-i}(z)$ e $F^{-i}(w)$ estejam no mesmo segmento vertical em S para i suficientemente grande. Assim temos que $z = w$.

- ψ é sobrejetora. seja $\bar{x} \in P$. Precisamos procurar um ponto z em $\pi^{-1}(x_0)$ tal que $\psi(z) = \bar{z}$. Seja \bar{y} uma sequência de 0's e 1's determinada por $y_i = j$ se $x_i \in I_j$. Assim x é identificado como $\bigcap_{i=0}^{\infty} F^i(S_{y_i}) \cap \pi^{-1}(x_0)$. Este conjunto é não vazio, a demonstração é similar a usada para definir φ .

□

Proposição 2.2.2. *O conjunto Λ possui uma órbita densa.*

Demonstração. Das propriedades da F temos que, para cada n , vale

$$d(F^n(x, y), F^n(x, w)) < \frac{1}{2^n} d(y, w).$$

Dado $\epsilon > 0$, existe um m tal que $d(F^m(x, y), F^m(x, w)) < \epsilon$, para todo $(x, y), (x, w)$ em S .

Agora sejam $s, r \in \Lambda$. Existe $(a, b) \in S$ tal que $F^m(a, b) = s$. Seja U uma vizinhança de r e J uma vizinhança da projeção de r . Como F

é localmente eventualmente sobrejetora, existe um n tal que $f^n(J) = I$. Logo, existem w e um ponto $(x, y) \in U$ tal que $F^n(x, y) = (a, w)$. Então $v = F^{n+m}(x, y) = F^m(a, w)$ e $d(F^n(x, y), s) < \epsilon$. Assim temos que o ponto v pertence à interseção de $F^{m+n}(U)$ e qualquer vizinhança de s . Isso prova que F é topologicamente transitiva em Λ .

Afirmamos que existe órbita densa. Na verdade, este é um resultado geral que segue do Teorema de Categoria de Baire. De fato, seja $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_k, \dots\}$ base enumerável de abertos de Λ (Λ com a topologia de induzida de \mathbb{R}^2). Para cada $k > 0$, seja

$$A_k = \bigcup_{j=0}^{+\infty} F^{-j}(V_k).$$

Vemos que A_k é aberto, pois F é contínua. Agora mostremos que A_k é denso. De fato, dado U aberto pela transitividade topológica existe $N > 0$ tal que

$$F^N(A_k) \cap U \neq \emptyset.$$

Como $F^N(A_k) = \bigcup_{j=N}^{+\infty} F^{-j}(V_k) \subset A_k$ temos $A_k \cap U \neq \emptyset$. Pelo Teorema de Baire a união enumerável de abertos denso é densa. Daí $W = \bigcap A_k$ é densa. Afirmamos que qualquer ponto de W tem órbita densa. Seja $x \in W$. Temos $x \in A_k, k > 0$. Daí existe $N > 0$ tal que $F^N(x) \in V_k$. Ou seja, para todo $k > 0$ existe um elemento da órbita de x em V_k . Isso termina a prova. \square

2.3 Modelo unidimensional

Nesta seção estudaremos as propriedades dinâmicas da aplicação $f : I \rightarrow I$.

Sabemos pela seção anterior que pontos na mesma folha da folheação tem essencialmente o mesmo comportamento no futuro, devido à contração das folhas verticais. Assim, para entender a dinâmica de F , basta observar a trajetória de um único ponto de cada folha.

O atrator de Lorenz é descrito como o limite inverso de um semi-fluxo sobre uma variedade ramificada bidimensional (ver [8]). A função de retorno deste semifluxo é uma função descontínua sobre um intervalo. Essa função $f : I \rightarrow I$, onde $I = [0, 1]$, satisfaz as seguintes propriedades:

- a) f é localmente eventualmente sobrejetora;

- b) f tem uma única descontinuidade em c , e é estritamente crescente em $[0, c)$ e $(c, 1]$, onde $c \in (0, 1)$;
- c) $f(c^-) = 1$, $f(c^+) = 0$, $f(0) < c < f(1)$;
- d) $f'(x) \rightarrow \infty$, se $x \rightarrow c$.

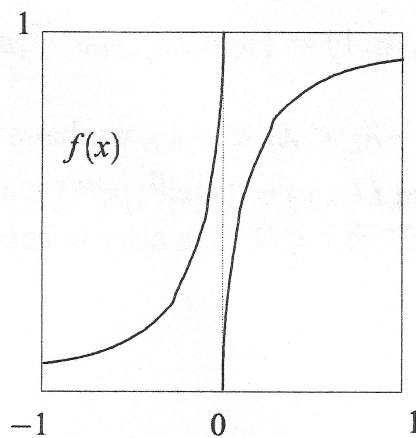


Figura 2.8: Aplicação de Lorenz f

Estabeleceremos algumas notações e terminologias. As *seqüências kneading* de f são as seqüências \bar{a}, \bar{b} de 0's e 1's definidas por:

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{se } f^i(0^+) < c; \\ 1 & \text{se } f^i(0^+) \geq c, \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{se } f^i(1^-) \leq c; \\ 1 & \text{se } f^i(1^-) > c, \end{cases}$$

onde $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Note que \bar{a} e \bar{b} são seqüências infinitas.

Seja Σ o *espaço shift* definido na secção 1.2. Usando as seqüências kneading de f podemos construir um subshift $\Gamma \subset \Sigma$ definido por

$$\Gamma = \{ \bar{x} \in \Sigma / \bar{a} \leq \sigma^i \bar{x} \leq \bar{b}, i = 0, 1, 2, \dots \}$$

Note que Γ é invariante pela aplicação shift.

Sejam $I_0 = [0, c]$, $I_1 = [c, 1]$. Pelas propriedades de f , existem dois números γ, δ em I tais que $\gamma < c < \delta$ e $f(\gamma) = f(\delta) = c$. Denotaremos por $f^{-1}(I_0) = [0, \gamma] \cup [c, \delta]$ e $f^{-1}(I_1) = [\gamma, c] \cup [\delta, 1]$. Usando isso podemos definamos

$$I(x_0, \dots, x_n) = \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(I_{x_i}),$$

para $\bar{x} \in \Gamma$ e $n \geq 0$.

Lema 2.3.1. *Se $\bar{x} \in \Gamma$, então $I(x_0, \dots, x_n)$ é um intervalo fechado J tal que f^i aplica J homeomorficamente em $I(x_i)$ para $0 \leq i \leq n$. O intervalo J é maximal com respeito a esta propriedade.*

Demonstração. Mostraremos por indução sobre n . Para $n = 0$ é trivial. Suponhamos que o lema é valido para n . Consideremos $J = I(x_0, \dots, x_{n+1})$ para algum $\bar{x} \in \Gamma$. Como o conjunto Γ é invariante por σ então $\sigma(\bar{x}) \in \Gamma$, assim o conjunto $K = I(x_1, \dots, x_{n+1})$ satisfaz o lema por hipótese indutiva. Note que $J = I(x_0) \cap f^{-1}(K)$. Denotemos por $\alpha = f(0)$ e $\beta = f(1)$ e consideremos os seguintes casos:

Caso 1: Se $K \subset [\alpha, \beta]$. Então $K \subset f(I_{x_0})$ para $x_0 = 0$ ou 1 . Por hipótese indutiva temos que K é um intervalo fechado então $f^{-1}(K)$ é um intervalo fechado em I_{x_0} , pois f é contínua e injetiva em I_{x_0} . Logo $J = I(x_0) \cap f^{-1}(K)$ é um intervalo fechado e $f(J) = K$. Além disso, como K satisfaz o lema temos $f^{i+1}(J) = f^i(K) \subset I(x_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Caso 2: Se α é um ponto interior de K . Então $K \subset f(I_1)$.

Se $x_0 = 1$ procedemos como no Caso 1.

Se $x_0 = 0$. Seja $K = [p, q]$, onde $0 \leq p < q \leq c$, logo $[\alpha, q] \subset f(I_0)$ e pela continuidade em I_0 , existe $r \in I_0$ tal que $f(r) = q$, ou seja, $f([0, r]) = [\alpha, q]$. Daí $J = [0, r]$ e $f^{i+1}(J) = f^i(K) \subset I(x_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Caso 3: Se β é um ponto interior de K . Procedemos analogamente ao caso 2.

Caso 4: $K \subset [0, \alpha]$. Então $K \subset f(I_1)$.

Se $x_0 = 1$, proceder como no caso 1.

Se $x_0 = 0$, chegaremos a um absurdo. De fato, suponha que $K = [d, e]$ com $0 \leq d \leq e \leq \alpha$. Como K satisfaz o lema, existem j_1, \dots, j_l índices tais que $f^k(K) \subset I_0$, $f^k(e) \leq c$ e s_1, \dots, s_t índices tais que $f^k(K) \subset I_1$ e $f^k(e) > c$. Note que $\{j_1, \dots, j_l\} \cup \{s_1, \dots, s_t\} = \{0, 1, \dots, n\}$.

Suponhamos que $f^k(e) < c$, $k = j_1, \dots, j_l$.

Consideremos $\rho = \min\{c - f^k(e)/k = j_1, \dots, j_l\}$. A continuidade de f^k implica que para cada $k \in \{j_1, \dots, j_l\}$, existe δ_k tal que se $e' \in I_0$ e $|e' - e| < \delta_k$, então $|f^k(e') - f^k(e)| < \rho$. Tomemos $\delta = \min\{\delta_{j_1}, \dots, \delta_{j_l}\}$. Portanto temos que se $e' \in I_0$, $|e' - e| < \delta$ então $f^k(e') < c$, $k = j_1, \dots, j_l$.

Agora tome e' muito próximo de e tal que $e' > e$, $|e' - e| < \delta$. Pelo anterior temos que $f^k([d, e']) \subset I_0$, $k \in \{j_1, \dots, j_l\}$. Por outro lado $f^k([d, e]) \subset I_1$, $\forall k = s_1, \dots, s_t$ e, como f^k preserva orientação, então $f^k([d, e']) \in I_1$, $k = s_1, \dots, s_t$. Portanto, temos $f^k([d, e']) \subset I_{x_{k+1}}$, $k = 0, \dots, n$. Isto contradiz a maximalidade do intervalo K .

Podemos afirmar agora, que existe um $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, tal que $f^k(K) \subset I_0$ e $f^k(e) = c$. Seja l o menor inteiro tal que $f^l(e) = c$ ou $f^l(\alpha) = c$. Então $f^i(e) \in \text{int}(I_{x_i})$, $i = 0, 1, \dots, l - 1$. Como $e \leq \alpha$ temos um dos dois casos:

- a. Para cada $i \in \{0, 1, \dots, l - 1\}$, $f^i(e)$ e $f^i(\alpha)$ estão no mesmo lado de c e $f^i(e) \leq f^i(\alpha)$.

Temos que $f^i(e)$ e $f^{i+1}(0)$ estão no mesmo lado de c , então $x_i = a_i$, $i = 0, 1, \dots, l$. Por outro lado, como K é um intervalo não trivial e f^k restrito a K preserva orientação para $0 \leq i \leq n$ implica $f^l(K) \subset I_0$, logo $x_{l+1} = 0$. Também temos que $f^l(\alpha) \geq c$ então $a_{l+1} = 1$. Portanto $\bar{x} < \bar{a}$. Isto implica que \bar{x} não é um elemento de Γ .

- b. Existe um menor inteiro $r \in \{0, \dots, l - 1\}$ tal que $f^r(e) < c < f^r(\alpha)$.

Isto nos diz que $x_i = a_i$, $i = 0, \dots, r$, $x_{r+1} = 0$ e $a_{r+1} = 1$. Portanto temos que $\bar{x} < \bar{a}$ e isto é um absurdo.

Caso 5: $K \subset [\beta, 1]$. A prova é análoga do Caso 4.

□

Observação: Se x, y são dois pontos diferentes em $[0, 1]$. Então existe $n \geq 0$ tal que $f^n(x)$ e $f^n(y)$ estão em lados opostos de c .

Suponhamos que existem $x < y$ em $[0, 1]$ tais que $f^n(x)$ e $f^n(y)$ estão no mesmo lado de c , para todo n . Sem perda de generalidade podemos supor que $f^n(x), f^n(y)$ estão em I_0 , para todo n . Como f é crescente, $f^n[x, y] = [f^n(x), f^n(y)] \subset I_0$ para todo n . Então f não é localmente eventualmente sobre.

Definamos a uma relação de equivalência em Γ dado pela identificação das sequências $(x_1, \dots, x_n, 1, \bar{a})$ e $(x_1, \dots, x_n, 0, \bar{b})$.

Proposição 2.3.1. $f : I \rightarrow I$ é topologicamente conjugada à aplicação induzida por $\sigma : \Gamma \rightarrow \Gamma$ sobre o espaço quociente de Γ .

Demonstração. Seja $\varphi : \Gamma \rightarrow I$ uma aplicação definida por

$$\varphi(\bar{x}) = \bigcap_{i=0}^{\infty} f^{-i}(I_{x_i})$$

- φ está bem definida pelo lema anterior e pela expansividade de f .

Seja $I_n = I(x_0, \dots, x_n)$. Claramente (I_n) forma uma sequência encaixados de intervalos fechados não vazios por lema anterior e o fato que

$$I(x_0, \dots, x_n) = I(x_0, \dots, x_{n-1}) \cap f^{-n}(I_{x_n}) \subset I(x_0, \dots, x_{n-1})$$

Então a interseção infinita de esses intervalos é não vazia.

Note que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(I_{x_i}) = \bigcap_{i=0}^{\infty} f^{-i}(I_{x_i}).$$

Agora só falta que essa interseção seja um ponto. Suponhamos que existem a, b dois pontos diferentes nessa interseção então $a, b \in I_n, \forall n$. Pelo lema 2.3.1 I_n é um intervalo fechado então o intervalo fechado com extremos a e b está em I_n e f^n aplica homeomorficamente o intervalo $[a, b]$ em $I(x_n), \forall n$. Isto contradiz o fato de ser f localmente eventualmente sobre.

- $\varphi(\bar{a}) = 0$ e $\varphi(\bar{b}) = 1$

Seja $r = \varphi(\bar{a})$. Suponhamos que $r > 0$. Como $r \in f^{-i}(I_{a_i}) \forall i$, então $f^i(r) \in I_{a_i}, \forall i$. Assim para cada i , $f^i(0)$ e $f^i(r)$ estão no mesmo lado de c . Por outro lado, pela observação existe n tal que $f^n(0)$ e $f^n(r)$ estão em lados opostos de c , mas isto não é possível. Analogamente se verifica que $\varphi(\bar{b}) = 1$.

- φ é sobre.

Temos que $\bar{a}, \bar{b} \in \Gamma$ e $\varphi(\bar{a}) = 0$, $\varphi(\bar{b}) = 1$. Seja $x \in (0, 1)$. Definamos $\bar{x} \in \Sigma$ por

$$x_i = j, \text{ se } f^i(x^+) \in I_j.$$

Isto significa que existe um intervalo (x, δ_i) tal que $f^i(x, \delta_i) \subset \text{int } I_j$. Pela mesma definição temos que $\varphi(\bar{x}) = x$, e basta verificar que $\bar{x} \in \Gamma$. Mostraremos que $\bar{a} \leq \bar{x}$. Se $c \leq x \leq 1$ então $\bar{a} < \bar{x}$. Se $0 < x < c$ então pela observação acima, podemos tomar l o menor inteiro tal que, $f^l(0)$ e $f^l(x)$ estão em lados opostos de c e $f^l(0) < f^l(x)$, pois f é estritamente crescente em I_0 e I_1 . Logo $a_i = x_i$, para $i = 0, 1, 2, \dots, l-1$ e $a_l = 0 < x_l = 1$.

Analogamente se mostra que $\bar{x} < \bar{b}$.

A aplicação está bem definida e é sobre. Também φ é injetora exceto sobre o conjunto de seqüências de $\{f^{-i}(c)\}_{i \geq 0}$. Ou seja, se $x \in I$ e existe $n > 0$ tal que n -ésima iterada por f é c , então $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1}, 1, \bar{a}) = \varphi(x_0, \dots, x_{n-1}, 0, \bar{b})$.

Assim $f : I \rightarrow I$ é topologicamente conjugada à aplicação induzida por $\sigma : \Gamma \rightarrow \Gamma$ sobre o espaço quociente de Γ definido pela identificação de seqüências $(x_1, \dots, x_n, 1, \bar{a})$ e $(x_1, \dots, x_n, 0, \bar{b})$. A aplicação induzida por σ não está bem definida nos pontos do quociente correspondentes a $(1, \bar{a})$ e $(0, \bar{b})$, isto é sua única descontinuidade. \square

Se \bar{x} é uma seqüência de 0's e 1's, denote por \bar{x}' a seqüência obtida a partir de \bar{x} alterando todos os termos da seqüência.

Teorema 2.3.1. *Sejam f_1 e f_2 duas aplicações definidas sobre o intervalo unitário satisfazendo às propriedades de a) a d) do início desta seção. Então f_1 e f_2 são topologicamente equivalentes se, e somente se as seqüências kneading de f_1 e f_2 satisfazem $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ e $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$ ou $\bar{a}_1 = \bar{b}_2'$ e $\bar{b}_1 = \bar{a}_2'$.*

Demonstração. Se as seqüências kneading de f_1 e f_2 coincidem então os subshifts construídos a partir de estas seqüências coincidem (Γ). Daí f_1 e f_2 são topologicamente equivalentes à aplicação induzida por σ sobre o espaço quociente de Γ .

Se as seqüências kneading de f_1 e f_2 satisfazem $\bar{a}_1 = \bar{b}_2'$, $\bar{b}_1 = \bar{a}_2'$, consideremos o homeomorfismo $g : I \rightarrow I$ definido por $g(x) = 1 - x$, logo as seqüências kneading de f_1 e $g \circ f_2 \circ g$ coincidem pelo anterior estas aplicações

são topologicamente equivalentes. Portanto f_1 e f_2 são topologicamente equivalentes.

Suponhamos que f_1 e f_2 como no teorema 2.3.1 são topologicamente equivalentes. Seja $h : I \rightarrow I$ a equivalência topológica entre estas aplicações. Então h leva descontinuidade de f_1 em descontinuidade de f_2 . Além disso, h aplica os pontos finais do intervalo unitario sobre eles mesmos. Se h preserva orientação então as sequências kneading de f_1 e f_2 coincidem, no caso contrario temos que $\bar{a}_1 = \bar{b}_2'$, $\bar{b}_1 = \bar{a}_2'$. Isto prova o teorema. \square

Note que se $f : I \rightarrow I$ satisfaz a equação $f(1-x) = 1-f(x)$ e $c = \frac{1}{2}$, então as sequências kneading satisfazem $\bar{a}' = \bar{b}$. Ou seja a classe de equivalência topológica de f é caracterizada por uma única sequência Kneading.

Para demonstrar esta proposição usaremos todo o aprendizado anteriormente.

Proposição 2.3.2. *Seja $F : S \rightarrow S$ uma aplicação satisfazendo as propriedades a) a f) do modelo bidimensional (ver seção 2.2). Suponhamos que f é suave por partes e $f' > \sqrt{2}$. Seja $G = I' \circ \bar{F}$ onde \bar{F} também satisfaz às referidas propriedades, e está próxima de F , e I' é uma C^1 -perturbação da identidade. Então existe uma aplicação contínua por partes g tal que:*

- 1) g satisfaz as propriedades de a) a d) do modelo unidimensional;
- 2) g está próxima de f .
- 3) G tem um conjunto invariante topologicamente equivalente ao Limite Pinched Inverso de g .

Para provar esta proposição, precisaremos do seguinte lema.

Lema 2.3.2. *Sejam F e G como na proposição. Então S tem uma partição contrativa por curvas G -invariantes que intersectam cada segmento horizontal em um único ponto.*

Demonstração. Consideremos $D = \{F^{-i}(c \times I)/i = 0, 1, \dots\}$, ou seja D é o conjunto das imagens inversas iteradas das descontinuidades de F . Afir-mamos que D é denso em S . De fato, D é o conjunto de segmentos verticais projetando sobre o conjunto das imagens inversas iteradas de f . Como f é lo-calmente eventualmente sobre, assim este conjunto é denso em I . Mostraremos que o conjunto D' das imagens inversas iteradas das descontinuidades de G

também consiste de uma família de segmentos quase verticais e denso em S . A derivada de F em $z = (x, y)$ é da forma:

$$\begin{bmatrix} a(z) & 0 \\ b(z) & d(z) \end{bmatrix},$$

onde $a(z) > 2^{1/2}$, $|d(z)| < 1/2$, $\forall z \in S$ e $b(z)$ é pequeno comparado a $d(z)$. Note que $DF(z)$ tem um autovetor vertical $(0, 1)$ associado ao autovalor $d(z)$. Por outro lado a derivada de G em $z = (x, y)$ é da forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{a}(z) & \bar{c}(z) \\ \bar{b}(z) & \bar{d}(z) \end{bmatrix},$$

com $\bar{a}(z) > 2^{1/2}$, $|\bar{d}(z)| < 1/2$, $\forall z \in S$ e $\bar{b}(z)$ pequeno e $\bar{c}(z)$ muito pequeno. Isto implica que DG (e logo DG^{-1}) tem também um autovetor quase vertical. Se A é um setor angular em \mathbb{R}^2 , em torno dos autovetores (cone instável para G^{-1}), então cada DG^{-1} leva A em si mesmo. Em particular, se o conjunto das descontinuidades de G tem vetores tangentes sempre contidos A , então as suas imagem inversas são curvas suaves, cujos vetores tangentes estão em A . Como G é uniformemente expansora numa direção quase horizontal, qualquer conjunto aberto eventualmente se estende por sobre S , através da iteração de G , até encontrar o conjunto de descontinuidades de G . Portanto D' é denso.

Aplicando o mesmo argumento a G^{-1} nos dá um setor angular contendo a direção horizontal, e que é levado em se mesmo. Todos os vetores desse setor são escolhidos por um fator de pelo menos $2^{1/2}$. Então que qualquer segmento horizontal em S intersecta D' . Portanto, as componentes de D' são segmentos quase verticais que se estendem por S . Além disso, as componentes do complemento de D' podem ser vistas como interseções de faixas vertical que cruzam S , cuja amplitude tende a zero. Concluímos que as componentes de D' e as componentes do complemento de D' formão uma família de segmentos invariantes quase verticais de S que são uniformemente contraídos por G . \square

Demonstração. (da proposição 2.3.2)

Consideremos a aplicação projeção $\pi_1 : S \rightarrow I$ onde as fibras são as folhas da folheação invariante construído acima. Definamos a aplicação $g : I \rightarrow I$ por $\pi_1 \circ G \circ \pi_1^{-1}$. Note que g satisfaz às propriedades a) a d) do modelo unidimensional. Como G é próximo de F e as folhas da folheação invariante

de G são quase verticais, g é próximo de f . Para provar que G restrita a seu conjunto invariante é topologicamente equivalente ao limite inverso pinched de g é só repetir o mesmo que se fez para F na seção anterior pois só usamos as propriedades da folheação invariante vertical que são válidas para a folheação invariante de G . \square

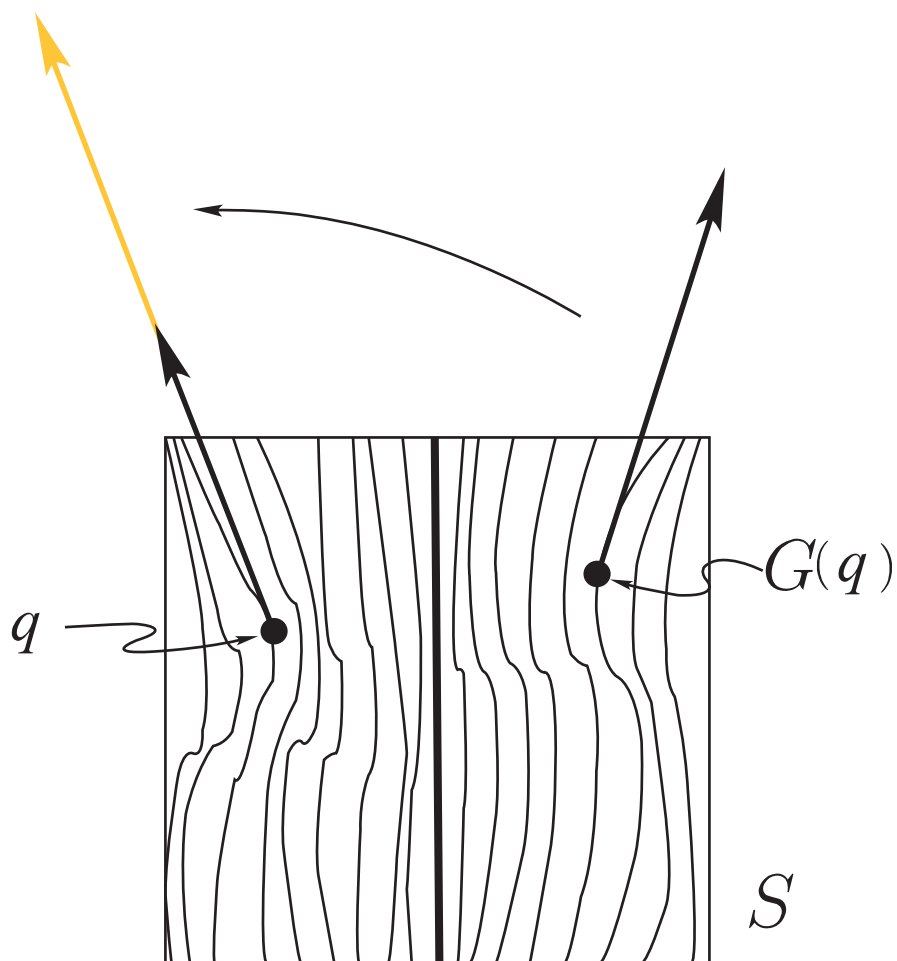


Figura 2.9: Folheação de G (segmento quase verticais).

2.4 Perturbações do modelo

Seja ϕ o fluxo de um campo vetorial X como no modelo, e ϕ' o fluxo de uma C^1 -perturbação X' de X . Então ϕ' tem um ponto fixo singular hiperbólico p' perto de p com autovalores da derivada de X' em p' próximos aos de DX em p . Então ϕ' é conjugada à sua parte linear por um difeomorfismo que é uma perturbação de classe C^1 da identidade, I' . Isto é válido se não existem ressonâncias entre os autovalores o que é uma condição aberta e densa. Lembre que esta conjugação só é válida perto de p' . Na redefinição do modelo para a parte linear, um tempo infinito está envolvido, mas a definição do fluxo fora de uma vizinhança da singularidade envolve um tempo de retorno finito. Assim o fluxo de ϕ' tem aplicação de Poincaré F' , que satisfaz às propriedades do modelo bidimensional, e está próxima de F .

Assim mostramos que qualquer perturbação de um fluxo modelo $\phi_{\bar{a}, \bar{b}}$ em nossa família temos os seguintes dados:

- 1) Uma aplicação de poincaré G sobre um quadrado sólido S .
- 2) Uma folheação quase vertical U de S invariante por G .
- 3) G induz uma aplicação $g : I \rightarrow I$ com sequências kneading \bar{a}' , \bar{b}' .

Note que \bar{a}' , \bar{b}' dependem continuamente de $\phi_{\bar{a}, \bar{b}}$.

Proposição 2.4.1. *Sejam ϕ_i , S_i , G_i , U_i , g_i , $i = 1, 2$, satisfazendo os dados de acima e com as mesmas sequências kneading \bar{a} , \bar{b} . Então, ϕ_1 , ϕ_2 são topologicamente conjugadas numa vizinhança de seus atratores.*

Demonstração. Pelo teorema 2.3.1 existe uma conjugação topologica h de g_1 a g_2 . Procederemos a demonstração alargando os quadrados S_i a S_i^+ , agregando retângulos em cada lado de S_i , de tal modo que $G_i(S_i^+) \subset S_i$ como na figura 2.10.

As folheações sobre os novos retângulos são induzidos das folheações internas, quando $G_i(S_i^+) \subset S_i$. Denote $D_i = S_i^+ - \text{Int}G_i(S_i^+)$ "dominio fundamental". Primeiro queremos definir uma conjugação $H : D_1 \rightarrow D_2$.

Seja I_i^+ a extensão do intervalo I_i , devido ao alargar os quadrados S_i e G_i induz uma extensão de g_i a I_i^+ na qual denotemos por g_i . Assim h é estendido a I_i^+ por $h(x) = g_2^{-1} \circ h \circ g_1(x)$ ($g_1(I_1^+) \subset I_1$), onde cada aplicação do lado direito da equação é restringido à metade de I_1 em um tempo. Assim H é definido em $Fr(S_1^+)$ por $\pi_2^{-1} \circ G \circ \pi_1^1$.

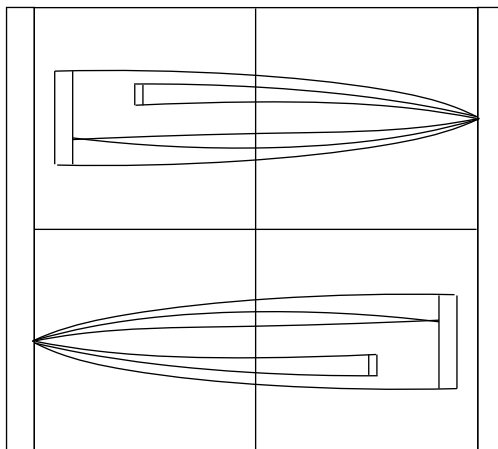


Figura 2.10:

A definição de H sobre a fronteira de S_1^+ induz uma definição sobre $G_1(\text{Fr}S_1^+)$ dada por: $H(z) = G_2 \circ H \circ G_1^{-1}(z)$, $z \in G_1(\text{Fr}S_1^+)$. Agora temos definido H sobre a fronteira de D_1 e coincide com h até como agora definido. Voltando aos fatos básicos há dois tipos de atratores: direito e esquerdo. Isto depende se G_i leva o lado direito em frente ou atrás de $G_i(S_i)$. Nós escolhemos atratores direitos (ver figura ??). Assim agora podemos estender H no interior de $G_1(S_1^+)$, note que usamos o fato que h é uma conjugação suave.

Definamos H indutivamente sobre o interior de $G_1(S_1^+)$, $H(z) = G_2^{-1} \circ H \circ G_1(z)$ para $z \in G_1^i(D_1)$ observe que isto está bem definido pois h é uma conjugação. Note que estamos usando o fato que g_1 e g_2 tem o mesmo i -ésimo termo na sequência kneading então procederemos ao i -ésimo passo desta definição. Este processo converge e estende a uma aplicação sobre todo S_1 , porque as componentes conexas C de $V \cap G(D_i)$, $V \in U_i$ tem largura que convergem exponencialmente para a zero, quando $i \rightarrow \infty$.

Neste ponto se mostrou que se dois atratores de Lorenz (ambos atratores direitos) produzem aplicações f e g com as mesmas sequências kneading, então existem seções cujas aplicações de Poincaré F e G são topologicamente conjugadas.

□

O atrator de Lorenz e o modelo geométrico

Basados nas observações numéricas no comportamento das soluções das equações de Lorenz, elas exibem uma lista de propriedades geométricas tal que qualquer fluxo satisfazendo a estas propriedades contém um atrator estranho, com órbitas convergindo a este, sendo sensitiva com respectu às condições iniciais. E, mais importante para a teoria geral, foi que tais fluxos existem em qualquer variedade de dimensão 3. Estes exemplos são conhecidos como **modelos geométricos de Lorenz**. Mais recentemente [6], foi provado que as equações originais propostas por Lorenz dão origem a um fluxo que tem as mesmas propriedades do modelo geométrico. Tucker demonstrou a existência de um atrator estranho nas equações de Lorenz, para isso foi necessário o uso de algoritmos numéricos rigorosos e a teoria da forma normal.

Conclusão

Fluxos próximos tem seções transversais próximas, e aplicações de Poincaré próximas. Essas aplicações de Poincaré induzem folheações quase verticais próximas e dinâmicas unidimensionais com sequências kneading que não são necessariamente iguais. Caso sejam iguais, temos a conjugação dos fluxos, mas em geral não temos, temos apenas que os dois fluxos apresentam atratores (transitivos) que se parecem (na simulação numérica).

Referências Bibliográficas

- [1] R. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Studies in Nonlinearity. Westview Press, Boulder, CO, 2003.
- [2] J. Guckenheimer, R. Williams, *Structural stability of Lorenz attractors*, Publ. Math. IHES. ,50:59-72, 1979.
- [3] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields* , Applied. Math. Sci, Vol 42, 1983.
- [4] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides Impa,1979.
- [5] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*,Cambridge university press, 1995.
- [6] W. Tucker, *The Lorenz attractor exists*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999), no. 12, 1197–1202.
- [7] M. Viana, *What's new on Lorenz strange attractors?*, Math. Intelligencer 22 (2000), no. 3, 6–19.
- [8] R. Williams, *The structure of Lorenz Attractors*, Publ. Math. IHES.,50:73-99, 1979.
- [9] R. Williams, *Expanding Attractors*, Publ. Math. IHES. ,50:169-203, 1974.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)