

Universidade Federal de Santa Catarina  
Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica

# Sobre coálgebras distributivas e de cadeia

Monique Müller Lopes Rocha  
Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Virgínia Silva Rodrigues

Florianópolis  
Fevereiro de 2010

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Universidade Federal de Santa Catarina  
Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica

## Sobre coálgebras distributivas e de cadeia

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra.

Monique Müller Lopes Rocha  
Florianópolis  
Fevereiro de 2010

# Sobre coálgebras distributivas e de cadeia

por

Monique Müller Lopes Rocha<sup>1</sup>

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre”,  
Área de Concentração em Álgebra, e aprovada em sua forma  
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica.

---

Prof. Dr. Clóvis Caesar Gonzaga  
Coordenador

Comissão Examinadora

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Virgínia Silva Rodrigues  
(Orientadora - UFSC)

---

Prof. Dr. Alveri Alves Sant’Ana  
(Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS)

---

Prof. Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero  
(Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS)

---

Prof. Dr. Nicolás Andruskiewitsch  
(Universidad Nacional de Córdoba - UNC)

**Florianópolis, Fevereiro de 2010.**

---

<sup>1</sup>Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

**Ao meu esposo.**

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao Marcos, o meu amor, por todo carinho, atenção e compreensão. Usando as palavras de Carl Sagan, “diante da vastidão do tempo e da imensidão do universo, é um imenso prazer para mim dividir um planeta e uma época com você.” Este último ano foi bem difícil para nós dois, já que desde março ele vive em Buenos Aires. Mas, conseguimos nos habituar à nova rotina de nos vermos a cada dois meses e conversarmos por skype. Foi ele quem despertou meu interesse pela Argentina e conseqüentemente, pela matemática da Argentina. Así que, me voy a Córdoba.

À minha mãe Telma e meus irmãos Mayk e Matheus, pelo carinho e pela compreensão. À minha querida avó, que sempre foi uma incentivadora para os estudos, além de ser um exemplo de mulher batalhadora e independente. Muito obrigada pelo apoio financeiro dado durante a graduação, pelo carinho, pela compreensão e por sempre me receber de braços abertos.

Quero agradecer à minha orientadora, Prof.<sup>a</sup> Virgínia Silva Rodrigues. Aprendi com ela como deve ser o trabalho árduo de um pesquisador e de um professor dedicado. Agradeço por todos os seminários, em que ficava horas me ouvindo com toda a atenção. Agradeço todas as críticas, sugestões e tempo despendido para ajudar a resolver os problemas que apareciam. Com minha orientadora, aprendi a amar ainda mais a Álgebra, pois quando ela fala de Álgebra seus olhos brilham e o entusiasmo é tão grande que contagia! Agradeço pela amizade, pelos conselhos, pela paciência e, é claro, por todas as pizzas, almoços e cafezinhos. Gostei muito do tema escolhido e de termos trabalhado juntas.

Agradeço ao professor Christian Lomp, que respondeu nossos emails com muito cuidado. Dois deles eram perguntas sobre definição e um deles foi sobre a coálgebra da potência dividida. A idéia dele foi perfeita, conseguimos resolver o problema.

Agradeço ao professor Alveri Alves Sant'Ana, que gentilmente respondeu uma pergunta por email e por aceitar contribuir como membro da banca desta dissertação, apresentando sugestões e correções.

Agradeço ao Prof. Nicolás Andruskiewitsch por ter aceito o convite para ser membro da banca, pelas sugestões e correções apresentadas e por ter tornado meus últimos meses do mestrado ainda mais felizes, por saber que vou continuar estudando Álgebra e sob sua orientação.

Agradeço ao Prof. Miguel Angel Alberto Ferrero, de quem tive a honra de ouvir que queria ler nosso trabalho. Seu pedido é uma ordem! Muito obrigada por aceitar ser membro da banca e contribuir com sugestões e correções.

Ao Prof. Ruy Exel Filho, que lecionou as disciplinas de Análise Funcional e que, como sempre, tornou-as incrivelmente interessantes. Ao todo, já são sete cursos que fiz com o Prof. Ruy e por todas as vezes fiquei simplesmente maravilhada com sua capacidade de ensinar matemática.

Também não poderia deixar de agradecer aos professores Luiz Augusto Saeger, Luciano Bedin, Flávia Tereza Giordani, Marcelo Ferreira Lima Carvalho e Ivan Pontual Costa e Silva, que estiveram na torcida no processo da bolsa de doutorado.

Agradeço à Alda pelo apoio dado durante o pedido da bolsa de doutorado e pela torcida. Ao meu colega Bernardo, que quando apresentou seminários sobre coálgebras e comódulos, gentilmente, repetiu várias das demonstrações que já havia apresentado para a Prof<sup>a</sup>. Virgínia. Também por ter cedido seu trabalho de conclusão de curso em tex para que eu aproveitasse a digitação de algumas coisas sobre coálgebras e comódulos. Ao Edson, meu inseparável colega, com quem fiz todas as disciplinas do mestrado e por ser uma companhia de inúmeros dias na sala da pós. Muito obrigada por todas as barras de chocolate, sucos e almoços que compartilhamos.

Agradeço aos amigos Marcos e Cinthia, que tornaram meus dias mais alegres e meus almoços mais divertidos. A Cinthia é sempre muito generosa e justa e o Marcos a quem, carinhosamente, chamo de Marquito, sempre muito fácil de lidar e companheiro de todas as horas. À Carol, pela amizade, pelas conversas, pelos cafés, pela companhia para ir às compras comigo e com o Marquito e pela leveza de encarar a vida. À minha amiga de infância Andreza, que mesmo distante, ouviu minhas novidades e meus lamentos por msn. A Andreza e eu já nos conhecemos a tanto tempo que não preciso dizer o quanto ela foi, é e sempre será importante pra mim.

Agradeço à Elisa, secretária da pós, que é muito competente e sem-

pre que precisei de algo ela quase que prontamente resolveu.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa de mestrado, sem a qual eu não teria feito esta dissertação.

Por fim, mas não menos importante, agradeço à minha cadela Babi, por ser minha companheira inseparável de todas as horas, que ficava aos meus pés enquanto eu estudava.



# Resumo

O conceito de distributividade em anéis e módulos vem sendo estudado desde a década de 70, veja por exemplo [11]. Em [8], Lomp e Sant'Ana obtiveram resultados a respeito da distributividade no reticulado dos subcomódulos de uma coálgebra, vista como um comódulo sobre si mesma, a partir de resultados sobre a distributividade em anéis e módulos. Com base nesse artigo, temos o que segue.

Seja  $C$  uma coálgebra sobre um corpo  $k$ . Dizemos que  $C$  é uma coálgebra distributiva à direita se o reticulado dos coideais à direita de  $C$  é distributivo. Neste trabalho mostraremos que isto é equivalente à dizer que  $C$  é uma coálgebra distributiva à esquerda, isto é, o reticulado dos coideais à esquerda de  $C$  é distributivo. Portanto, uma coálgebra é dita distributiva se é distributiva à direita ou à esquerda. Nosso principal objetivo é caracterizar coálgebras distributivas em termos de coálgebras de cadeia à direita, que são coálgebras em que o reticulado dos coideais à direita é totalmente ordenado por inclusão.

# Abstract

The concept of distributivity in rings and modules has been studied since 70's years, see for example [11]. In [8], Lomp and Sant'Ana obtained results about distributivity in the lattice of subcomodules of a coalgebra, the last seems as a comodule over itself, from results about distributivity in rings and modules. Using [8], we have the following.

Let  $C$  be a coalgebra over a field  $k$ . We say that  $C$  is a right distributive coalgebra if the lattice of right coideals of  $C$  is distributive. In this work we will show that it is equivalent to say that  $C$  is a left distributive coalgebra, that is, the lattice of left coideals of  $C$  is distributive. Hence, a coalgebra is distributive if is right or left distributive. Our main goal is characterize distributive coalgebras in terms of right chain coalgebras, these are coalgebras whose lattice of the right coideals is linearly ordered by inclusion.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Pré-requisitos</b>	<b>4</b>
1.1 A categoria $\sigma[M]$ . . . . .	5
1.2 Envoltórias injetivas . . . . .	6
1.3 O <i>socle</i> de um módulo . . . . .	11
<b>2 Coálgebras e comódulos</b>	<b>13</b>
2.1 Coálgebras . . . . .	13
2.1.1 Definições e exemplos . . . . .	13
2.1.2 Subcoálgebras e coálgebras quociente . . . . .	18
2.1.3 A álgebra dual . . . . .	22
2.2 Comódulos . . . . .	29
2.2.1 Definições e exemplos . . . . .	29
2.2.2 Subcomódulos e comódulos quociente . . . . .	33
2.2.3 Módulos racionais . . . . .	36
2.2.4 Comódulos simples e comódulos injetivos . . . . .	47
<b>3 Reticulados</b>	<b>56</b>
3.1 Reticulados distributivos e modulares . . . . .	56
3.2 Distributividade em anéis e módulos . . . . .	63
<b>4 Coálgebras distributivas e de cadeia</b>	<b>72</b>
<b>5 Um pouco sobre coálgebras de cadeia</b>	<b>84</b>
5.1 A coálgebra da potência dividida . . . . .	84
5.2 A filtração co-radical e as coálgebras de cadeia . . . . .	86
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>89</b>

# Introdução

A discussão de propriedades e da estrutura de coálgebras e comódulos a partir da teoria de módulos vem assumindo grande papel ultimamente. Neste espírito, em 2007, Lomp e Sant'Ana obtiveram uma caracterização de distributividade no reticulado dos subcomódulos de uma coálgebra, vista como comódulo sobre si própria, em termos de coálgebras de cadeia (veja [8]). Tal caracterização é uma versão coalgérica de um resultado de módulos provado neste mesmo artigo, para a prova deste teorema são usadas duas caracterizações de módulos distributivos, uma delas em termos de submódulos devida à Stephenson (1972), veja [11] e a outra caracterização a nível de elementos devida à Ferrero e Sant'Ana (2003), veja [4].

Fica também um sentimento de que algumas idéias para este artigo surgiram a partir do artigo [2]. Em tal artigo, os autores definem coálgebra serial à direita como sendo uma coálgebra em que os seus comódulos à direita injetivos e indecomponíveis são unisseriais. Mais ainda, uma coálgebra serial à direita e à esquerda é chamada unisserial se os fatores da série de composição de cada comódulo injetivo e indecomponível são isomorfos. Portanto, coálgebras de cadeia são coálgebras unisseriais.

O nosso principal objetivo neste trabalho é mostrarmos a caracterização para coálgebras distributivas em termos de coálgebras de cadeia, dada em [8] e isto é feito no Capítulo 4, que é o "coração" desta dissertação. No último capítulo, fazemos um importante exemplo de coálgebra de cadeia, a coálgebra da potência dividida. Mostramos ainda um resultado que nos dá algumas propriedades de uma coálgebra de cadeia. No entanto, não fazemos todos os pré-requisitos deste resultado com detalhes, uma vez que este não é nosso objetivo. Em [8], os autores caracterizam as coálgebras de cadeia.

Nos capítulos anteriores, percorremos o caminho para chegar ao objetivo principal. No Capítulo 1, fazemos alguns pré-requisitos para o

entendimento do trabalho, estudamos um pouco sobre a categoria  $\sigma[M]$ , a envoltória injetiva e o *socle* de um módulo  $M$ .

No Capítulo 2, desenvolvemos um pouco sobre a teoria de coálgebras e comódulos. Este capítulo não é considerado pré-requisito, pois a estudante necessitou estudar resultados sobre coálgebras bem como comódulos para desenvolver este trabalho. Neste capítulo, apresentamos a definição de coálgebras e alguns exemplos. Também estudamos subcoálgebras, coálgebras quociente e a álgebra dual. Na seção de comódulos, apresentamos a definição e alguns exemplos de comódulos e também vemos subcomódulos, comódulos quociente, módulos racionais e comódulos simples e injetivos. Destacamos a importância do isomorfismo entre as categorias dos comódulos à direita sobre uma coálgebra e dos módulos à esquerda racionais sobre a álgebra dual desta coálgebra. Tal isomorfismo é muito importante para o trabalho, uma vez que nos permite usarmos resultados da teoria de módulos para obtermos resultados em comódulos.

No Capítulo 3, introduzimos as noções de reticulados, reticulados distributivos e modulares e depois particularizamos a definição de distributividade para o reticulado dos submódulos de um módulo e para o reticulado dos ideais à direita (à esquerda) de um anel. Apresentamos aquelas duas importantes caracterizações de módulos distributivos citadas inicialmente: via submódulos, devida à Stephenson e a outra a nível de elementos, devida à Ferrero e Sant'Ana. Também apresentamos uma caracterização importante para o Capítulo 4 que relaciona a distributividade de um módulo com a distributividade no anel dos endomorfismos deste módulo.

O que faríamos, caso houvesse mais tempo, seria estudar a parte do artigo [8] em que os autores caracterizam coálgebras de cadeia infinito dimensionais como duais finitos de domínios de cadeia noetherianos, veja ([8], Proposition 5.3). Além disso, mostraram que duais finitos de anéis de séries formais (em uma variável) com coeficientes em uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo são exemplos de coálgebras de cadeia. O artigo também possui uma pergunta, em aberto, veja ([8], p.592). Uma outra pergunta que podemos fazer é "como caracterizar a distributividade em um comódulo qualquer sobre uma coálgebra?"

Neste trabalho, consideramos conhecidas as teorias de grupos, anéis, módulos e algumas noções básicas de categoria.

# Capítulo 1

## Pré-requisitos

Neste capítulo, desenvolvemos alguns resultados necessários para o entendimento do que segue e principalmente para provarmos o Teorema 4.16, um dos principais teoremas desta dissertação. Começamos estudando a categoria  $\sigma[M]$  e algumas de suas propriedades, retornaremos à mesma no Capítulo 2. Em seguida, vemos alguns resultados sobre a envoltória  $M$ -injetiva de um módulo e algumas propriedades de módulos  $M$ -injetivos. Finalmente, apresentamos a definição e algumas propriedades do *socle* de um módulo.

Primeiramente, fixamos algumas notações que serão utilizadas ao longo de todo o trabalho. Denotamos por  $k$  um corpo e por  $R$  um anel não necessariamente comutativo com unidade. Consideramos  $R$ -módulos à esquerda, quando nada for dito ao contrário e denotamos por  $R\text{-Mod}$ , a categoria dos  $R$ -módulos à esquerda. Escrevemos  $N \leq M$  para dizer que  $N$  é um submódulo de  $M$ . Além disso, para quaisquer  $R$ -módulos  $N$  e  $P$ , denotamos o grupo abeliano dos  $R$ -homomorfismos de  $N$  em  $P$  por  $\text{Hom}(N, P)$ .

Para um conjunto de índices  $I$  tal que  $N_i = N$  para todo  $i \in I$ , escrevemos  $N^{(I)}$  para denotar  $\bigoplus_{i \in I} N_i$  e  $N^I$  para  $\prod_{i \in I} N_i$ , respectivamente soma direta e produto direto do  $R$ -módulo  $N$ .

As definições e resultados deste capítulo são baseados principalmente na referência [14], entretanto utilizamos também [1] e [5].

## 1.1 A categoria $\sigma[M]$

Nesta seção, apresentamos a categoria  $\sigma[M]$  e suas principais propriedades. Primeiramente, recordamos as definições de geradores e subgeradores de um  $R$ -módulo.

**Definição 1.1** *Sejam  $M$  e  $P$  dois  $R$ -módulos. Dizemos que  $P$  é  $M$ -gerado se existem um conjunto de índices  $\Omega$  e um epimorfismo  $\varphi : M^{(\Omega)} \rightarrow P$ . Dizemos que  $M$  é gerador para  $P$ .*

**Definição 1.2** *Dados  $M$  e  $P$  dois  $R$ -módulos, dizemos que  $P$  é  $M$ -subgerado se existem um conjunto de índices  $\Omega$  e um epimorfismo  $\varphi : M^{(\Omega)} \rightarrow P'$ , para algum  $R$ -módulo  $P'$  que contenha  $P$ . Dizemos que  $M$  é subgerador para  $P$ .*

Dado um  $R$ -módulo  $M$ , a categoria de todos os  $R$ -módulos que são  $M$ -subgerados é denotada por  $\sigma[M]$ . Logo, dizer que um  $R$ -módulo  $P$  é  $M$ -subgerado é equivalente a dizer que  $P \in \sigma[M]$ . Aqui, chamamos a atenção, pois em todo o capítulo  $Obj(\sigma[M])$  – objetos de  $\sigma[M]$  – é denotado por  $\sigma[M]$ , por isso escrevemos  $N \in \sigma[M]$  ao invés de  $N \in Obj(\sigma[M])$ .

Além disso,  $\sigma[M]$  é uma subcategoria plena de  $R\text{-Mod}$ , isto é, para todo par  $(N, P)$  com  $N$  e  $P$  em  $\sigma[M]$ ,  $Hom_{\sigma[M]}(N, P) = Hom_{R\text{-Mod}}(N, P)$ , estes são os conjuntos de  $R$ -homomorfismos de  $N$  em  $P$  nas categorias  $\sigma[M]$  e  $R\text{-Mod}$ , respectivamente.

A seguir, algumas propriedades da categoria  $\sigma[M]$ .

**Proposição 1.3** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo. Então  $\sigma[M]$  é a menor subcategoria plena de  $R\text{-Mod}$  que contém  $M$  e que é fechada para submódulos, módulos quociente e somas diretas.*

**Demonstração:** É claro que  $M \in \sigma[M]$ .

Sejam  $N \in \sigma[M]$  e  $P$  um submódulo de  $N$ . Então existe  $X$  um  $R$ -módulo  $M$ -gerado tal que  $N$  é um submódulo de  $X$ . Sendo  $P$  um submódulo de  $N$  então  $P$  é um submódulo de  $X$ , e portanto,  $P$  é  $M$ -subgerado. Logo,  $\sigma[M]$  é fechada para submódulos.

Seja  $N \in \sigma[M]$ . Então  $N$  é  $M$ -subgerado, isto é, existem um conjunto de índices  $\Omega$  e um epimorfismo  $\varphi : M^{(\Omega)} \rightarrow K$  para algum  $R$ -módulo  $K$  que contém  $N$ . Assim, para qualquer submódulo  $P$  de  $N$ ,  $N/P \leq K/P$  e considerando a projeção canônica  $\pi : K \rightarrow K/P$ , segue que  $\pi \circ \varphi : M^{(\Omega)} \rightarrow K/P$  é um epimorfismo. Daí,  $K/P$  é  $M$ -gerado e isso nos diz que  $N/P$  é  $M$ -subgerado, isto é,  $N/P \in \sigma[M]$ . Onde,  $\sigma[M]$  é fechada para quocientes.

Seja  $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma família de  $R$ -módulos em  $\sigma[M]$ . Então, para cada  $\lambda$ , existe um módulo  $M_\lambda$  que é  $M$ -gerado e tal que  $N_\lambda \leq M_\lambda$ . Claramente,  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \leq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ .

Mostremos que  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$  é  $M$ -gerado. De fato, para todo  $\lambda \in \Lambda$ , existe um epimorfismo  $\varphi_\lambda : M^{(\Omega_\lambda)} \rightarrow M_\lambda$ , em que o conjunto de índices  $\Omega_\lambda$  depende obviamente de cada  $\lambda$ .

Consideremos  $\psi : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M^{(\Omega_\lambda)} \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$  dado por  $\psi(\sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(m_\lambda)$  com  $m_\lambda \in M^{(\Omega_\lambda)}$  para cada  $\lambda \in \Lambda$ . A sobrejetividade de  $\psi$  segue da sobrejetividade de cada  $\varphi_\lambda$  com  $\lambda \in \Lambda$ . Logo,  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$  é  $M$ -gerado e daí,  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$  é  $M$ -subgerado.

Seja  $\mathcal{C}$  uma subcategoria plena de  $R\text{-Mod}$  tal que  $M \in \mathcal{C}$  (aqui também escrevemos  $M \in \mathcal{C}$  ao invés de  $M \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ) e que  $\mathcal{C}$  seja fechada para submódulos, módulos quociente e somas diretas. Queremos mostrar que  $\sigma[M]$  é uma subcategoria de  $\mathcal{C}$ .

Seja  $N \in \sigma[M]$ . Então existem um conjunto de índices  $\Omega$  e um epimorfismo  $\varphi : M^{(\Omega)} \rightarrow N'$  em que  $N' \supseteq N$ . Como  $M \in \mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}$  é fechada para somas diretas, segue que  $M^{(\Omega)} \in \mathcal{C}$ . Novamente,  $M^{(\Omega)}/\text{Ker}\varphi \in \mathcal{C}$ , pois  $\mathcal{C}$  é fechada para módulos quociente. Assim, identificando  $M^{(\Omega)}/\text{Ker}\varphi$  com  $N'$ , segue que  $N' \in \mathcal{C}$ . Sendo  $\mathcal{C}$  fechada para submódulos, vem que  $N \in \mathcal{C}$ .

Como  $\mathcal{C}$  é uma subcategoria plena de  $R\text{-Mod}$  segue que, para todo par  $(X, Y)$  com  $X$  e  $Y$  em  $\sigma[M]$ ,  $\text{Hom}_{\sigma[M]}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  e isto completa a prova. ■

A categoria  $\sigma[M]$  é também chamada categoria de Wisbauer devido à recente sugestão de Patrick F. Smith.

## 1.2 Envoltórias injetivas

Nesta seção, definimos envoltórias  $M$ -injetivas e injetivas, sendo as primeiras de maior interesse para nosso trabalho. Para isto são necessários os conceitos de essencialidade e de  $M$ -injetividade, esclarecemos agora estas idéias ao leitor.

**Definição 1.4** *Um submódulo  $K$  de um módulo  $M$  é dito essencial em  $M$  se  $K \cap L \neq 0$ , para todo submódulo não-nulo  $L$  de  $M$ .*

Usamos a notação  $K \leq_e M$  para um submódulo  $K$  essencial em  $M$ . Vejamos algumas propriedades de essencialidade.

**Proposição 1.5** *As seguintes afirmações são verdadeiras.*



(i) *Sejam  $K$  e  $L$  submódulos de  $M$  tais que  $K \leq L$ . Então  $K \leq_e M$  se, e somente se,  $K \leq_e L \leq_e M$ .*

(ii) *Se  $f : N \rightarrow L$  é um monomorfismo de  $R$ -módulos e  $M \leq_e N$ , então  $f(M) \leq_e f(N)$ .*

(iii) *Seja  $N$  um submódulo de  $M$ . Consideremos  $K$  um submódulo de  $M$  maximal com respeito à propriedade que  $N \cap K = 0$ . Então  $N \oplus K \leq_e M$ .*

**Demonstração:** (i)  $(\Rightarrow)$  Seja  $X$  um submódulo não-nulo de  $L$ . Então  $K \cap X$  é não-nulo, pois  $K \leq_e M$ . Logo,  $K \leq_e L$ . Agora, seja  $Y$  um submódulo não-nulo de  $M$ . Como  $K \leq_e M$ , então  $0 \neq K \cap Y \subseteq L \cap Y$ . Logo,  $L \leq_e M$ .

$(\Leftarrow)$  Seja  $X$  um submódulo não-nulo de  $M$ . Então  $L \cap X$  é não-nulo, pois  $L \leq_e M$ . Como  $0 \neq L \cap X \leq L$  e  $K \leq_e L$ , então  $0 \neq K \cap (L \cap X) = (K \cap L) \cap X = K \cap X$ . Donde  $K \leq_e M$ .

(ii) Seja  $X$  um submódulo não-nulo de  $f(N)$ . Como  $f : N \rightarrow f(N)$  é um isomorfismo, segue que  $f^{-1}(X)$  é um submódulo não-nulo de  $N$  e  $f(f^{-1}(X)) = X$ . Assim,  $M \cap f^{-1}(X) \neq 0$ , pois  $M \leq_e N$ . Logo,  $0 \neq f(M \cap f^{-1}(X)) = f(M) \cap X$ . Portanto,  $f(M) \leq_e f(N)$ .

(iii) Primeiramente, observemos que a existência de tal módulo  $K$  com a propriedade  $N \cap K = 0$  é devida ao Lema de Zorn. Como  $N \cap K = 0$ , temos que  $N + K = N \oplus K \leq M$ . Suponhamos que exista  $X \leq M$  tal que  $X \cap (N \oplus K) = 0$ . Então a soma  $(N \oplus K) + X$  é direta, isto é,  $(N \oplus K) + X = N \oplus K \oplus X$  e portanto,  $N \cap (K \oplus X) = 0$ . Pela maximalidade de  $K$ , obtemos  $K \oplus X = K$ . Assim,  $X = 0$ . Logo,  $N \oplus K \leq_e M$ . ■

Notemos que a propriedade (iii) é útil para construirmos módulos essenciais a partir de um submódulo dado.

As Proposições 1.7, 1.8 e 1.11 que seguem, são utilizadas na demonstração do Teorema 4.16. No que segue, recordamos o conceito de  $M$ -injetividade e injetividade.

**Definição 1.6** *Sejam  $M$  e  $U$  dois  $R$ -módulos. O módulo  $M$  é dito  $U$ -injetivo se, para qualquer  $R$ -módulo  $K$  e quaisquer monomorfismo  $f : K \rightarrow U$  e homomorfismo  $g : K \rightarrow M$  de  $R$ -módulos, existe um homomorfismo de  $R$ -módulos  $h : U \rightarrow M$  tal que  $h \circ f = g$ . O diagrama abaixo ilustra tal definição*

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & U \\
& & \downarrow g & \nearrow h & \\
& & M & & 
\end{array}$$

Se  $M$  é  $U$ -injetivo para todo  $U \in R\text{-Mod}$ , então  $M$  é dito um *módulo injetivo* na categoria  $R\text{-Mod}$ . Se  $M$  é  $M$ -injetivo dizemos que  $M$  é *auto-injetivo* ou *quasi-injetivo*.

Alertamos o leitor para o fato de que ora usaremos a nomenclatura " $M$  é auto-injetivo" ora usaremos " $M$  é  $M$ -injetivo".

**Proposição 1.7** *Sejam  $M$  um  $R$ -módulo e  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma família de  $R$ -módulos. Se  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  é  $M$ -injetivo então, para cada  $\lambda \in \Lambda$ ,  $U_\lambda$  é  $M$ -injetivo.*

**Demonstração:** Seja  $K$  um  $R$ -módulo. Dados quaisquer monomorfismo  $f : K \rightarrow M$  e homomorfismo  $\gamma : K \rightarrow U_\mu, \mu \in \Lambda$  (fixado), consideremos a inclusão  $i_\mu : U_\mu \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ .

Como  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  é  $M$ -injetivo, existe um homomorfismo  $g : M \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  tal que  $g \circ f = i_\mu \circ \gamma$ . Consideremos  $\pi_\mu : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \rightarrow U_\mu$  a projeção de  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  sobre  $U_\mu$ . O contexto acima pode ser visualizado através do diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & M \\
& & \downarrow \gamma & & \nearrow g \\
& & U_\mu & & \\
& & \uparrow \pi_\mu & \nearrow i_\mu & \\
& & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda & & 
\end{array}$$

Notemos que  $\pi_\mu \circ g : M \rightarrow U_\mu$  e  $\pi_\mu \circ g \circ f = \pi_\mu \circ i_\mu \circ \gamma = I_{U_\mu} \circ \gamma = \gamma$ . Donde  $U_\mu$  é  $M$ -injetivo. ■

**Proposição 1.8** *Sejam  $U$  e  $M$  dois  $R$ -módulos. Então  $U$  é  $M$ -injetivo se, e somente se,  $U$  é  $N$ -injetivo para todo  $R$ -módulo  $N$  em  $\sigma[M]$ . Em particular, considerando  $U$  em  $\sigma[M]$ , segue que  $U$  é  $M$ -injetivo se, e somente se,  $U$  é injetivo em  $\sigma[M]$ .*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Seja  $N$  em  $\sigma[M]$ . Então  $N$  é subgerado por  $M$ , isto é, existem um  $R$ -módulo  $N'$  contendo  $N$  e um epimorfismo de  $R$ -módulos  $\varphi : M^{(\Omega)} \rightarrow N'$  para algum conjunto de índices  $\Omega$ . Como  $U$  é  $M$ -injetivo, por ([14], p.128 - 16.2 (ii)),  $U$  é  $M^{(\Omega)}$ -injetivo.

Considerando a sequência exata

$$0 \longrightarrow \text{Ker}\varphi \longrightarrow M^{(\Omega)} \xrightarrow{\varphi} N' \longrightarrow 0,$$

segue, por ([14], p.128 - 16.2 (i)), que  $U$  é  $N'$ -injetivo.

Seja  $K$  um  $R$ -módulo. Dados quaisquer monomorfismo  $f : K \rightarrow N$  e homomorfismo  $g : K \rightarrow U$ , consideremos a inclusão canônica  $i$  de  $N$  em  $N'$ . Como  $U$  é  $N'$ -injetivo, segue que existe um homomorfismo  $h : N' \rightarrow U$  tal que  $h \circ i \circ f = g$ .

Observemos o diagrama para visualizar a situação acima

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{i} & N' \\ & & \downarrow g & & & \nearrow h & \\ & & U & & & & \end{array}$$

Logo, existe um homomorfismo  $\alpha = h \circ i : N \rightarrow U$  tal que  $\alpha \circ f = g$ . Onde,  $U$  é  $N$ -injetivo.

( $\Leftarrow$ ) É trivial, pois  $M$  pertence à  $\sigma[M]$  e portanto,  $U$  é  $M$ -injetivo, por hipótese. ■

**Definição 1.9** *Sejam  $M$  um  $R$ -módulo e  $N$  um módulo em  $\sigma[M]$  (em  $R\text{-Mod}$ ). Um módulo injetivo  $E$  em  $\sigma[M]$  (em  $R\text{-Mod}$ ) juntamente com um monomorfismo essencial  $\varepsilon : N \rightarrow E$ , isto é, um monomorfismo tal que  $\varepsilon(N) \leq_e E$ , é chamado uma envoltória injetiva de  $N$  em  $\sigma[M]$  (em  $R\text{-Mod}$ ).*

A envoltória injetiva de  $N$  em  $\sigma[M]$  é também chamada *envoltória  $M$ -injetiva* de  $N$  e usualmente denotada por  $\widehat{N}$ . A envoltória injetiva de  $N$  na categoria  $R\text{-Mod}$  é denotada por  $E(N)$ .

Para maiores detalhes, como por exemplo, a existência e a unicidade (a menos de isomorfismo) da envoltória injetiva, veja ([14], p.141).

**Proposição 1.10** *Sejam  $M$  um  $R$ -módulo e  $L, N \in \sigma[M]$  com envoltórias  $M$ -injetivas  $\widehat{L}$  e  $\widehat{N}$ , respectivamente. Então são válidas as afirmações.*

(i) *Se  $L \leq_e N$  então  $\widehat{L} \simeq \widehat{N}$ .*

(ii) Se  $L \subseteq N$  e  $N$  é  $M$ -injetivo, então  $\widehat{L}$  é isomorfo a um somando direto de  $N$ .

(iii)  $M$  é  $M$ -injetivo se, e somente se,  $M = \widehat{M}$ .

**Demonstração:** (i) Consideremos  $\varepsilon : N \rightarrow \widehat{N}$  o monomorfismo essencial e sendo  $L \leq_e N$ , então, pela Proposição 1.5 - (ii),  $\varepsilon(L) \leq_e \varepsilon(N)$ . Como  $\varepsilon(N) \leq_e \widehat{N}$ , segue que  $\varepsilon(L) \leq_e \widehat{N}$ . Assim,  $\widehat{N}$  é uma envoltória  $M$ -injetiva de  $L$  e, pela unicidade (a menos de isomorfismo) da envoltória  $M$ -injetiva, temos que  $\widehat{N} \simeq \widehat{L}$ .

(ii) Sejam  $\varepsilon : L \rightarrow \widehat{L}$  o monomorfismo essencial e  $i : L \rightarrow N$  a inclusão canônica. Como  $N \in \sigma[M]$  é  $M$ -injetivo e  $\widehat{L} \in \sigma[M]$ , temos que  $N$  é  $\widehat{L}$ -injetivo, pela Proposição 1.8. Logo, existe um homomorfismo  $f : \widehat{L} \rightarrow N$  tal que  $f \circ \varepsilon = i$ .

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\varepsilon} & \widehat{L} \\ & & \downarrow i & \swarrow f & \\ & & N & & \end{array}$$

Afirmamos que  $f$  é injetora. De fato, seja  $x \in \text{Ker } f$ . Então  $f(x) = 0$ . Suponhamos por absurdo que  $x \neq 0$ . Assim,  $Rx$  é um submódulo não-nulo de  $\widehat{L}$  e sendo  $\varepsilon(L) \leq_e \widehat{L}$ , segue que  $Rx \cap \varepsilon(L) \neq 0$ .

Seja  $0 \neq y \in Rx \cap \varepsilon(L)$ . Então  $y = \alpha x = \varepsilon(l)$  para alguns  $\alpha \in R$  e  $l \in L$ . Logo,  $0 = \alpha f(x) = f(\alpha x) = f(\varepsilon(l)) = i(l) = l$ . Donde  $y = 0$ , o que é uma contradição. Portanto,  $f(\widehat{L}) \simeq \widehat{L}$ .

Temos que  $\widehat{L}$  é um módulo  $M$ -injetivo em  $\sigma[M]$  e considerando a sequência exata  $0 \rightarrow f(\widehat{L}) \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\pi} N/f(\widehat{L}) \rightarrow 0$  segue, por ([14], p.130),<sup>1</sup> que  $f(\widehat{L})$  é somando direto de  $N$ ,  $i$  e  $\pi$  são a inclusão e a projeção canônicas, respectivamente. Logo,  $\widehat{L}$  é isomorfo a um somando direto de  $N$ .

(iii) ( $\Rightarrow$ ) Pela Proposição 1.8,  $M$  é injetivo em  $\sigma[M]$  e sendo  $M$  essencial em si próprio segue, da definição de envoltória  $M$ -injetiva, que  $M = \widehat{M}$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $M = \widehat{M}$ , então  $M$  é injetivo em  $\sigma[M]$  e, em particular,  $M$  é  $M$ -injetivo. ■

**Proposição 1.11** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo auto-injetivo. Então as seguintes condições são equivalentes:*

<sup>1</sup>  $X \in \sigma[M]$  e  $X$  é  $M$ -injetivo  $\Leftrightarrow$  toda sequência exata  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  em  $\sigma[M]$  cinde  $\Leftrightarrow f(X)$  é somando direto de  $Y$ .

(i)  $M$  é indecomponível, isto é,  $M$  é não-nulo e não pode ser escrito como uma soma direta de submódulos não-nulos;

(ii)  $M$  é uniforme, isto é, todo submódulo não-nulo de  $M$  é essencial em  $M$ .

**Demonstração:** (i)  $\Rightarrow$  (ii) Seja  $U$  um submódulo não-nulo de  $M$ . Então, pela Proposição 1.10 (ii), a envoltória  $M$ -injetiva  $\widehat{U}$  de  $U$  é um somando direto de  $M$  (aqui identificamos  $\widehat{U}$  com um somando direto de  $M$ ). Como  $M$  é indecomponível e  $\widehat{U}$  é não-nulo segue que,  $M = \widehat{U}$  e portanto,  $U \leq_e M$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Suponhamos  $M = K \oplus L$  em que  $K$  é um submódulo não-nulo de  $M$ . Por hipótese,  $K \leq_e M$  e isto implica que  $L = 0$ , pois caso contrário,  $K \cap L \neq 0$  e isto é absurdo. ■

### 1.3 O socle de um módulo

Nesta seção, apresentamos a definição do *socle* e algumas de suas propriedades necessárias ao trabalho.

**Definição 1.12** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo. O socle de  $M$ , denotado por  $\text{soc}(M)$ , é a soma de todos os  $R$ -submódulos simples de  $M$ .*

Se  $M$  não possui submódulo simples, dizemos que  $\text{soc}(M) = 0$ . Por definição,  $\text{soc}(M)$  é o maior submódulo semi-simples de  $M$ . Para detalhes à respeito de módulos semi-simples, veja ([14], p.165).

A seguinte caracterização de *socle* é utilizada neste trabalho, mais especificamente no Teorema 4.16.

**Proposição 1.13** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo. Então*

$$\text{soc}(M) = \cap \{L \leq M : L \text{ é um submódulo essencial em } M\}.$$

**Demonstração:** Seja  $L$  um submódulo essencial em  $M$ . Então, para qualquer submódulo simples  $K$  de  $M$ , temos que  $0 \neq K \cap L = K$  e portanto,  $K \subseteq L$ . Assim,  $\text{soc}(M) = \sum \{K \leq M : K \text{ é um submódulo simples de } M\} \subseteq L$ , para qualquer  $L \leq_e M$ . Logo,  $\text{soc}(M) \subseteq \cap \{L \leq M : L \leq_e M\}$ .

Chamamos  $L_0 = \cap \{L \leq M : L \leq_e M\}$  e mostremos que  $L_0$  é um módulo semi-simples. Seja  $K$  um submódulo de  $L_0$ . Pela Proposição 1.5 - (iii), existe  $K'$  submódulo de  $M$  maximal com respeito à propriedade que  $K \cap K' = 0$  e daí,  $K \oplus K' \leq_e M$ .

Conseqüentemente,  $K \leq L_0 \leq K \oplus K'$ . Logo,  $L_0 = L_0 \cap (K \oplus K') = K \oplus (L_0 \cap K')$ , esta última igualdade deve-se à modularidade do reticulado dos submódulos de um módulo<sup>2</sup>. Portanto,  $K$  é somando direto de  $L_0$  para todo  $K$  submódulo de  $L_0$ . Logo,  $L_0$  é um submódulo semi-simples de  $M$  e portanto,  $L_0 \subseteq \text{soc}(M)$ . ■

**Proposição 1.14** *Sejam  $M$  e  $N$  dois  $R$ -módulos. Então são válidas as afirmações.*

(i) *Se  $f : M \rightarrow N$  é homomorfismo de  $R$ -módulos, então  $f(\text{soc}(M)) \subseteq \text{soc}(N)$ .*

(ii) *Se  $K$  é submódulo de  $M$ , então  $\text{soc}(K) = K \cap \text{soc}(M)$ .*

(iii) *Se  $M = \bigoplus_{\alpha \in \Omega} M_\alpha$ , em que  $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$  é uma família de  $R$ -submódulos de  $M$ , então  $\text{soc}(M) = \bigoplus_{\alpha \in \Omega} \text{soc}(M_\alpha)$ .*

**Demonstração:** (i) Seja  $x \in \text{soc}(M)$ . Então  $x = \sum_{i=1}^k x_{\lambda_i}$  com  $x_{\lambda_i} \in S_{\lambda_i}$  em que cada  $S_{\lambda_i}$  é um submódulo simples de  $M$ , para  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Logo,  $f(x) = \sum_{i=1}^k f(x_{\lambda_i})$  com  $f(x_{\lambda_i}) \in f(S_{\lambda_i})$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , definimos  $f_i : S_{\lambda_i} \rightarrow N$  por  $f_i = f|_{S_{\lambda_i}}$ . Como  $\text{Ker } f_i$  é um submódulo de  $S_{\lambda_i}$ , então  $\text{Ker } f_i = 0$  ou  $\text{Ker } f_i = S_{\lambda_i}$ . Daí,  $f_i$  é injetora ou nula. Assim,  $f_i(S_{\lambda_i})$  é um submódulo simples ou nulo de  $N$ . Logo,  $f(x) = \sum_{i=1}^k f(x_{\lambda_i}) \in \sum_{i=1}^k f_i(S_{\lambda_i}) \subseteq \text{soc}(N), \forall x \in \text{soc}(M)$ .

(ii) Consideremos a inclusão canônica  $i : K \rightarrow M$ . Por (i), segue que  $\text{soc}(K) = i(\text{soc}(K)) \subseteq \text{soc}(M)$ . Logo,  $\text{soc}(K) \subseteq K \cap \text{soc}(M)$ .

Temos que  $K \cap \text{soc}(M)$  é um submódulo semi-simples de  $\text{soc}(M)$ , pois todo submódulo de um módulo semi-simples é semi-simples. Ora, mas então  $K \cap \text{soc}(M)$  é um submódulo semi-simples de  $K$  e portanto,  $K \cap \text{soc}(M) \subseteq \text{soc}(K)$ , uma vez que  $\text{soc}(K)$  é o maior submódulo semi-simples de  $K$ .

(iii) Ver a referência ([1], p.121). ■

---

<sup>2</sup>Mostramos esta propriedade somente no Capítulo 3, mas a demonstração da mesma é simples e pode perfeitamente ser feita aqui.

# Capítulo 2

## Coálgebras e comódulos

Neste capítulo, álgebras e coálgebras são definidas sobre um corpo  $k$ . Isto é uma restrição, já que podemos substituir  $k$  por um anel comutativo  $R$  com unidade e ao invés de considerarmos a álgebra e a coálgebra como  $k$ -espaços vetoriais, teríamos  $R$ -módulos. Todos os produtos tensoriais são considerados sobre o corpo  $k$ . Excepcionalmente neste capítulo, expressamos a composição de funções de forma simplificada, escrevemos  $fg$  ao invés de  $f \circ g$ . Em todo o capítulo, usamos a palavra morfismo para denotar homomorfismo de  $k$ -espaços vetoriais,  $k$ -álgebras, etc, pois nos servimos de linguagem categórica.

Este capítulo é de grande importância para que possamos desenvolver os Capítulos 4 e 5. O mesmo está baseado nas referências [3] e [12]. Mas também utilizamos as referências [1] e [14].

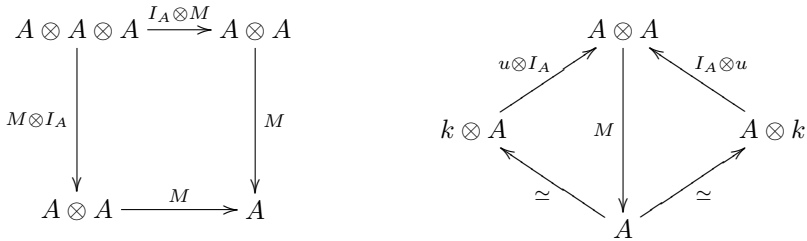
### 2.1 Coálgebras

Nesta seção, definimos coálgebras como “uma dualização” da definição de álgebra e apresentamos alguns exemplos de coálgebras, sendo um deles, a *coálgebra da potência dividida*, de principal interesse, pois esta é uma coálgebra de cadeia, como será visto no Capítulo 5. Também definimos morfismos de coálgebras e mostramos que o espaço dual de uma coálgebra é uma álgebra.

#### 2.1.1 Definições e exemplos

**Definição 2.1** *Uma  $k$ -álgebra é uma tripla  $(A, M, u)$ , em que  $A$  é um  $k$ -espaço vetorial,  $M : A \otimes A \rightarrow A$  e  $u : k \rightarrow A$  são morfismos de*

$k$ -espaços vetoriais tais que os diagramas abaixo comutam



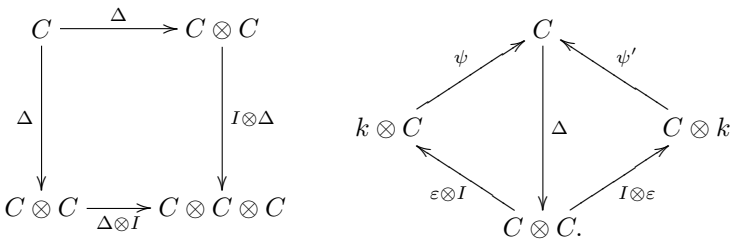
em que  $I_A$  é a identidade em  $A$ .

Daqui para frente, escrevemos apenas  $I$  para indicar a identidade quando é claro o conjunto sobre o qual  $I$  está definida.

Esta definição é equivalente àquela clássica em que uma  $k$ -álgebra  $A$  é um anel que tem uma estrutura de  $k$ -espaço vetorial tal que  $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$ , para quaisquer  $\alpha \in k, a, b \in A$ .

Mediante a definição de uma álgebra via diagramas, é possível obtermos a definição dual da mesma invertendo o sentido das flechas dos diagramas acima, isto é, dualizando tais diagramas.

**Definição 2.2** Uma  $k$ -coálgebra é uma tripla  $(C, \Delta, \varepsilon)$ , em que  $C$  é um  $k$ -espaço vetorial,  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$  e  $\varepsilon : C \rightarrow k$  são morfismos de  $k$ -espaços vetoriais tais que os diagramas abaixo são comutativos



As aplicações  $\Delta$  e  $\varepsilon$  são chamadas comultiplicação e counidade da coálgebra  $C$ , respectivamente. Os isomorfismos canônicos  $\psi$  e  $\psi'$  são dados por  $\psi(\alpha \otimes c) = \alpha c$  e  $\psi'(c \otimes \alpha) = c\alpha$ , cujos inversos são  $\psi^{-1}(c) = 1 \otimes c$  e  $\psi'^{-1}(c) = c \otimes 1$ , para quaisquer  $\alpha \in k$  e  $c \in C$ . A comutatividade do diagrama do lado esquerdo é chamada coassociatividade.

**Exemplo 2.3** Sejam  $S$  um conjunto não-vazio e  $kS$  o  $k$ -espaço vetorial com base  $S$ . Então  $kS$  é uma coálgebra com comultiplicação  $\Delta$  e



counidade  $\varepsilon$  definidas por  $\Delta(s) = s \otimes s$  e  $\varepsilon(s) = 1$ , para qualquer  $s \in S$  e estendidas por linearidade.

Para vermos que  $kS$  é de fato uma coálgebra, é necessário verificarmos a comutatividade dos diagramas. Por linearidade, basta verificarmos nos elementos básicos, isto é, em qualquer  $s \in S$ .

Temos que  $(I \otimes \Delta)\Delta(s) = (I \otimes \Delta)(s \otimes s) = s \otimes \Delta(s) = s \otimes s \otimes s$  e  $(\Delta \otimes I)\Delta(s) = (\Delta \otimes I)(s \otimes s) = \Delta(s) \otimes s = s \otimes s \otimes s$ . Portanto,  $(\Delta \otimes I)\Delta = (I \otimes \Delta)\Delta$ , o que prova a comutatividade do primeiro diagrama.

Verificamos a comutatividade de apenas um dos lados do diagrama da counidade, sendo a do outro análoga. Seja  $\psi : k \otimes kS \rightarrow kS$  o isomorfismo dado por  $\psi(\alpha \otimes s) = \alpha s$ . Queremos mostrar que  $\psi(\varepsilon \otimes I)\Delta = I_{kS}$ . Pela linearidade, mostremos apenas que  $\psi(\varepsilon \otimes I)\Delta(s) = s$ , para qualquer  $s \in S$ . De fato,

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon \otimes I)\Delta(s) &= \psi(\varepsilon \otimes I)(s \otimes s) = \psi(\varepsilon(s) \otimes s) \\ &= \varepsilon(s)s = s. \end{aligned}$$

Logo, tal como é definida,  $kS$  é uma coálgebra sobre  $k$ .

**Exemplo 2.4** Como caso particular do exemplo acima, temos que  $k$  é uma coálgebra com comultiplicação  $\Delta : k \rightarrow k \otimes k$  o isomorfismo dado por  $\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1$ , para todo  $\alpha \in k$  e a counidade  $\varepsilon : k \rightarrow k$  como sendo a identidade em  $k$ .

**Exemplo 2.5** Seja  $C$  um  $k$ -espaço vetorial com base  $\{c_m : m \in \mathbb{N}\}$ . Então  $C$  é uma coálgebra com comultiplicação  $\Delta$  e counidade  $\varepsilon$  definidas por  $\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^m c_i \otimes c_{m-i}$  e  $\varepsilon(c_m) = \delta_{0,m}$ , em que  $\delta_{i,j}$  é o delta de Kronecker. Novamente, basta verificarmos a comutatividade dos diagramas apenas nos elementos da base.

Primeiramente, observamos que

$$\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^m c_i \otimes c_{m-i} = \sum_{i=0}^m c_{m-i} \otimes c_i, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Agora, calculamos

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes I)\Delta(c_m) &= (\Delta \otimes I)\left(\sum_{i=0}^m c_i \otimes c_{m-i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^m \Delta(c_i) \otimes c_{m-i} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
(I \otimes \Delta)\Delta(c_m) &= (I \otimes \Delta)\left(\sum_{i=0}^m c_{m-i} \otimes c_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^m c_{m-i} \otimes \Delta(c_i). \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Desenvolvendo (2.1) e (2.2), chegamos à igualdade desejada  $(\Delta \otimes I)\Delta = (I \otimes \Delta)\Delta$ . Vejamos agora a comutatividade do segundo diagrama. Novamente, só mostramos a comutatividade para um lado, pois o outro é inteiramente análogo. Para  $m \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned}
\psi(\varepsilon \otimes I)\Delta(c_m) &= \psi(\varepsilon \otimes I)\left(\sum_{i=0}^m c_i \otimes c_{m-i}\right) = \psi\left(\sum_{i=0}^m \varepsilon(c_i) \otimes c_{m-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^m \varepsilon(c_i)c_{m-i} = \sum_{i=0}^m \delta_{0,i}c_{m-i} = c_m.
\end{aligned}$$

Logo,  $C$  é uma coálgebra. Esta coálgebra é chamada *coálgebra da potência dividida*. Tal coálgebra será retomada no Capítulo 5.

**Exemplo 2.6** Sejam  $n \geq 1$  inteiro e  $M^c(n, k)$  um  $k$ -espaço vetorial de dimensão  $n^2$ . Denotamos por  $\{e_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$  uma base de  $M^c(n, k)$  e definimos em  $M^c(n, k)$  uma comultiplicação  $\Delta(e_{ij}) = \sum_{p=1}^n e_{ip} \otimes e_{pj}$  e uma counidade  $\varepsilon(e_{ij}) = \delta_{i,j}$ . Desta maneira,  $M^c(n, k)$  é uma coálgebra, chamada *coálgebra de matrizes*. Verifiquemos que  $M^c(n, k)$  é de fato uma coálgebra. Temos que

$$\begin{aligned}
(I \otimes \Delta)\Delta(e_{ij}) &= (I \otimes \Delta)\left(\sum_{p=1}^n e_{ip} \otimes e_{pj}\right) = \sum_{p=1}^n e_{ip} \otimes \Delta(e_{pj}) \\
&= \sum_{p=1}^n e_{ip} \otimes \sum_{q=1}^n e_{pq} \otimes e_{qj} = \sum_{1 \leq p, q \leq n} e_{ip} \otimes e_{pq} \otimes e_{qj}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes I)\Delta(e_{ij}) &= (\Delta \otimes I)\left(\sum_{p=1}^n e_{ip} \otimes e_{pj}\right) = \sum_{p=1}^n \Delta(e_{ip}) \otimes e_{pj} \\
&= \sum_{1 \leq p, q \leq n} e_{iq} \otimes e_{qp} \otimes e_{pj} = \sum_{1 \leq p, q \leq n} e_{ip} \otimes e_{pq} \otimes e_{qj}.
\end{aligned}$$

Portanto, o primeiro diagrama comuta. Mostremos que  $\psi(\varepsilon \otimes I)\Delta = I_{M^c(n,k)}$ . De fato,

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon \otimes I)\Delta(e_{ij}) &= \psi(\varepsilon \otimes I)\left(\sum_{p=1}^n e_{ip} \otimes e_{pj}\right) = \psi\left(\sum_{p=1}^n \varepsilon(e_{ip}) \otimes e_{pj}\right) \\ &= \sum_{p=1}^n \varepsilon(e_{ip})e_{pj} = \sum_{p=1}^n \delta_{i,p} e_{pj} \\ &= e_{ij}. \end{aligned}$$

Logo,  $M^c(n, k)$  é uma coálgebra.

Agora, apresentamos a notação de Sweedler, a qual é muito eficaz para cálculo de longas composições envolvendo a comultiplicação  $\Delta$ .

A definição recursiva da sequência de aplicações  $(\Delta_n)_{n \geq 1}$  é definida como  $\Delta_1 = \Delta$  e, para  $n \geq 2$ ,  $\Delta_n : C \rightarrow C \otimes \cdots \otimes C$ ,  $n + 1$  vezes, temos que  $\Delta_n = (\Delta \otimes I^{n-1})\Delta_{n-1}$ .

A notação de Sweedler para  $\Delta$  se escreve como  $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$ , para qualquer  $c \in C$ , evitando assim a escrita  $\Delta(c) = \sum_{i,j} c_i \otimes c_j$ .

Indutivamente,  $\Delta_n(c) = \sum c_1 \otimes \cdots \otimes c_{n+1}$ ,  $\forall n \geq 2$ . Para mais detalhes, veja ([3], p.4).

Pela definição de  $\Delta_n$ , quando maior o  $n$ , mais "carregada" torna-se a escrita de  $\Delta_n(c)$ , qualquer que seja  $c \in C$ . Para  $n = 2$ , temos que

$$\begin{aligned} \Delta_2(c) &= \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3 \quad e \\ c &= \sum \varepsilon(c_1)c_2 = \sum c_1\varepsilon(c_2). \end{aligned}$$

As igualdades acima são exatamente a comutatividade do primeiro e segundo diagramas da definição de uma coálgebra.

**Definição 2.7** *Uma álgebra  $(A, M, u)$  é dita comutativa se o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{T} & A \otimes A \\ & \searrow M & \swarrow M \\ & A & \end{array}$$

é comutativo, em que  $T : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$  é função twist dada por  $T(a \otimes b) = b \otimes a$ .

Não é difícil ver que essa definição coincide com a noção clássica de uma álgebra comutativa. Por dualização, definimos coálgebras comutativas.

**Definição 2.8** Uma coálgebra  $(C, \Delta, \varepsilon)$  é dita cocomutativa se o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 \Delta \swarrow & & \searrow \Delta \\
 C \otimes C & \xrightarrow{T} & C \otimes C
 \end{array}$$

é comutativo. Isto significa que, para todo  $c \in C$ ,  $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2 = T\Delta(c) = \sum c_2 \otimes c_1$ .

### 2.1.2 Subcoálgebras e coálgebras quociente

Sejam  $A$  e  $B$  duas  $k$ -álgebras. Um morfismo de álgebras  $f : A \rightarrow B$  é um morfismo de anéis e de  $k$ -espaços vetoriais tal que  $f(1_A) = 1_B$ . Entretanto, ao definirmos morfismo de álgebras através de diagramas comutativos (obviamente equivalente à definição clássica) motivamos a definição de morfismo de coálgebras.

**Definição 2.9** Sejam  $(A, M_A, u_A)$  e  $(B, M_B, u_B)$  duas  $k$ -álgebras. Uma função  $k$ -linear  $f : A \rightarrow B$  é um morfismo de álgebras se os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xrightarrow{f \otimes f} & B \otimes B \\
 M_A \downarrow & & \downarrow M_B \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & A & \xrightarrow{f} & B \\
 & u_A \swarrow & & \nwarrow u_B \\
 & & k &
 \end{array}$$

**Definição 2.10** Sejam  $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$  e  $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$  duas  $k$ -coálgebras. Uma função  $k$ -linear  $f : C \rightarrow D$  é um morfismo de coálgebras se os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{f} & D \\
 \Delta_C \downarrow & & \downarrow \Delta_D \\
 C \otimes C & \xrightarrow{f \otimes f} & D \otimes D
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & C & \xrightarrow{f} & D \\
 & \varepsilon_C \swarrow & & \nwarrow \varepsilon_D \\
 & & k &
 \end{array}$$

A comutatividade do primeiro diagrama pode ser expressa como

$$\Delta_D(f(c)) = \sum f(c)_1 \otimes f(c)_2 = \sum f(c_1) \otimes f(c_2) = (f \otimes f)(\Delta(c)), \forall c \in C.$$

Um subconjunto não vazio  $B$  de uma álgebra  $A$  é dito uma subálgebra de  $A$  se  $B$  é um subanel e um submódulo de  $A$ . Portanto, se  $(A, M, u)$  é uma  $k$ -álgebra então  $M(B \otimes B) \subseteq B$ . “Dualizando”, obtemos a próxima definição.

**Definição 2.11** *Seja  $(C, \Delta, \varepsilon)$  uma coálgebra. Um  $k$ -subespaço  $D$  de  $C$  é dito uma subcoálgebra se  $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$ .*

Claramente,  $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$  é uma coálgebra, com  $\Delta_D = \Delta|_D$  e  $\varepsilon_D = \varepsilon|_D$ . Ainda nesta idéia de dualização, definimos um coideal à esquerda (à direita) e um coideal de uma coálgebra  $C$ .

**Definição 2.12** *Sejam  $(C, \Delta, \varepsilon)$  uma coálgebra e  $I$  um  $k$ -subespaço de  $C$ . Então  $I$  é dito*

- (i) *um coideal à esquerda (à direita) se  $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$  ( $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$ );*
- (ii) *um coideal se  $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$  e  $\varepsilon(I) = 0$ .*

Diferentemente do que ocorre com ideais em uma álgebra, um coideal não é necessariamente um coideal à direita e à esquerda. Considerando o anel de polinômios  $k[X]$  que é uma coálgebra com comultiplicação e counidade dadas por

$$\begin{aligned} \Delta(X^n) &= (X \otimes 1 + 1 \otimes X)^n, & \varepsilon(X^n) &= 0 \text{ para } n \geq 1 \\ \Delta(1) &= 1 \otimes 1 & \varepsilon(1) &= 1. \end{aligned}$$

Seja  $I = kX$  o  $k$ -subespaço de  $k[X]$  gerado por  $X$ . Temos que  $\Delta(I) = I \otimes 1 + 1 \otimes I$  e  $\varepsilon(I) = 0$  e isto nos diz que  $I$  é um coideal, mas  $I$  não é coideal à direita e nem à esquerda.

**Observação 2.13** *Seja  $C$  uma coálgebra. Então todo coideal à esquerda e à direita é uma subcoálgebra. De fato, seja  $I$  um coideal à esquerda e à direita de  $C$ . Então  $\Delta(I) \subseteq (C \otimes I) \cap (I \otimes C) = I \otimes I$ , em que a última igualdade segue de ([3], Lemma 1.4.5).*

O próximo lema, cuja demonstração pode ser encontrada em ([3], p.25), auxilia na prova da proposição abaixo.

**Lema 2.14** *Sejam  $f : V_1 \rightarrow V_2$  e  $g : W_1 \rightarrow W_2$  dois morfismos de  $k$ -espaços vetoriais. Então  $Ker(f \otimes g) = Ker f \otimes W_1 + V_1 \otimes Ker g$ .*

**Proposição 2.15** *Seja  $f : C \rightarrow D$  um morfismo de coálgebras. Então  $Im f$  é uma subcoálgebra de  $D$  e  $Ker f$  é um coideal de  $C$ .*

**Demonstração:** Como  $f$  é morfismo de coálgebras, então  $(f \otimes f)\Delta_C = \Delta_D f$ , ou seja, temos a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & D \\ \Delta_C \downarrow & & \downarrow \Delta_D \\ C \otimes C & \xrightarrow{f \otimes f} & D \otimes D. \end{array}$$

Logo,  $\Delta_D(Im f) = \Delta_D(f(C)) = (\Delta_D f)(C) = (f \otimes f)\Delta_C(C) \subseteq (f \otimes f)(C \otimes C) = f(C) \otimes f(C) = Im f \otimes Im f$ , ou seja,  $\Delta_D(Im f) \subseteq Im f \otimes Im f$ . Assim,  $Im f$  é uma subcoálgebra de  $D$ .

Mostremos agora que  $Ker f$  é um coideal de  $C$ . É claro que  $(\Delta_D f)(Ker f) = 0$ . Como  $f$  é morfismo de coálgebras,  $(f \otimes f)\Delta_C(Ker f) = 0$ . Logo,

$$\Delta_C(Ker f) \subseteq Ker(f \otimes f) = Ker f \otimes C + C \otimes Ker f.$$

A última igualdade segue do Lema 2.14. Como  $\varepsilon_C = \varepsilon_D f$ , segue que  $\varepsilon_C(Ker f) = \varepsilon_D f(Ker f) = 0$ . Portanto,  $Ker f$  é um coideal de  $C$ . ■

**Teorema 2.16** *Sejam  $C$  uma coálgebra,  $I$  um coideal e  $\pi : C \rightarrow C/I$  a projeção canônica de espaços vetoriais. Então as afirmações abaixo são válidas.*

(i) *Existe uma única estrutura de coálgebra sobre  $C/I$ , chamada coálgebra quociente, tal que  $\pi$  é um morfismo de coálgebras.*

(ii) *Se  $f : C \rightarrow D$  é um morfismo de coálgebras tal que  $I \subseteq Ker f$ , então existe um único morfismo de coálgebras  $\bar{f} : C/I \rightarrow D$  tal que  $\bar{f}\pi = f$ .*

**Demonstração:** (i) Como  $I$  é um coideal,  $(\pi \otimes \pi)\Delta(I) \subseteq (\pi \otimes \pi)(I \otimes C + C \otimes I) = 0$ . Logo, existe uma única função  $k$ -linear  $\bar{\Delta} : C/I \rightarrow C/I \otimes C/I$  tal que  $\bar{\Delta}\pi = (\pi \otimes \pi)\Delta$ , ou seja,

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{\pi} & C/I \\
\Delta \downarrow & & \downarrow \bar{\Delta} \\
C \otimes C & \xrightarrow{\pi \otimes \pi} & C/I \otimes C/I
\end{array}$$

é um diagrama comutativo. Temos que  $\bar{\Delta}(\bar{c}) = \sum \bar{c}_1 \otimes \bar{c}_2$ , em que  $\bar{c} = \pi(c)$ . Não é difícil ver que

$$(\bar{\Delta} \otimes I)\bar{\Delta}(\bar{c}) = (I \otimes \bar{\Delta})\bar{\Delta}(\bar{c}) = \sum \bar{c}_1 \otimes \bar{c}_2 \otimes \bar{c}_3.$$

Portanto,  $\bar{\Delta}$  é coassociativa. Além disso, como  $\varepsilon(I) = 0$ , existe uma única função  $k$ -linear  $\bar{\varepsilon} : C/I \rightarrow k$  tal que  $\bar{\varepsilon}\pi = \varepsilon$ , isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{\pi} & C/I \\
\varepsilon \searrow & & \swarrow \bar{\varepsilon} \\
& k &
\end{array}$$

comuta. Temos que  $\bar{\varepsilon}(\bar{c}) = \varepsilon(c)$ , para qualquer  $c \in C$ . Logo,

$$\sum \bar{\varepsilon}(\bar{c}_1)\bar{c}_2 = \sum \varepsilon(c_1)\bar{c}_2 = \sum \varepsilon(c_1)\pi(c_2) = \pi\left(\sum \varepsilon(c_1)c_2\right) = \pi(c) = \bar{c}.$$

Analogamente,  $\sum \bar{c}_1\bar{\varepsilon}(\bar{c}_2) = \bar{c}$ . Portanto,  $(C/I, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$  é uma coálgebra. A comutatividade dos diagramas acima mostram também que  $\pi : C \rightarrow C/I$  é um morfismo de coálgebras.

(ii) Se  $f : C \rightarrow D$  é um morfismo de coálgebras tal que  $I \subseteq \text{Ker} f$ , existe uma única função  $k$ -linear  $\bar{f} : C/I \rightarrow D$  tal que  $\bar{f}\pi = f$ , ou seja,  $\bar{f}(\bar{c}) = f(c)$ , para qualquer  $c \in C$ . Assim,

$$\begin{aligned}
(\Delta_D \bar{f})(\bar{c}) &= \Delta_D(\bar{f}(\bar{c})) = \Delta_D(f(c)) = (\Delta_D f)(c) \stackrel{(*)}{=} (f \otimes f)\Delta_C(c) \\
&= (f \otimes f)\left(\sum c_1 \otimes c_2\right) = \sum f(c_1) \otimes f(c_2) \\
&= \sum \bar{f}(\bar{c}_1) \otimes \bar{f}(\bar{c}_2) = (\bar{f} \otimes \bar{f})\left(\sum \bar{c}_1 \otimes \bar{c}_2\right) \\
&= (\bar{f} \otimes \bar{f})(\bar{\Delta}(\bar{c})) \text{ e}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_D \bar{f}(\bar{c}) = \varepsilon_D(f(c)) \stackrel{(**)}{=} \varepsilon_C(c) = \bar{\varepsilon}(\bar{c}),$$

as igualdades (\*) e (\*\*) seguem do fato de que  $f$  é morfismo de coálgebras. Logo,  $\bar{f}$  é morfismo de coálgebras. ■

**Corolário 2.17 (Teorema do isomorfismo para coálgebras)** *Seja  $f : C \rightarrow D$  um morfismo de coálgebras. Então  $\bar{f} : C/Ker f \rightarrow Im f$  é um isomorfismo de coálgebras.*

### 2.1.3 A álgebra dual

O principal objetivo desta seção é mostrar que a toda coálgebra  $C$  está associada uma álgebra dual. Uma das importâncias do lema seguinte é que, através dele, conseguimos introduzir uma “multiplicação” no espaço vetorial dual de  $C$ , o que nos possibilita dar a este espaço uma estrutura de álgebra.

No que segue, dados  $V$  e  $U$   $k$ -espaços vetoriais, denotamos por  $Hom(V, U) = \{f : V \rightarrow U : f \text{ é } k\text{-linear}\}$ . Para o caso particular em que  $U = k$ , denotamos por  $V^* = Hom(V, k)$ , o  $k$ -espaço vetorial dual de  $V$ . Ainda, se  $V = C$  e  $U = k$ , temos  $C^* = Hom(C, k)$ , o  $k$ -espaço vetorial dual da coálgebra  $C$ . É neste espaço que queremos introduzir uma multiplicação.

**Lema 2.18** ([3], Lemma 1.3.2) *Sejam  $k$  um corpo,  $V, W$  e  $U$   $k$ -espaços vetoriais. Definimos as seguintes funções  $k$ -lineares*

$$\begin{aligned} \phi : V^* \otimes U &\longrightarrow Hom(V, U) \\ f \otimes u &\longmapsto \phi(f \otimes u) : \begin{array}{ccc} V &\longrightarrow & U \\ v &\longmapsto & f(v)u \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi' : Hom(V, W^*) &\longrightarrow (V \otimes W)^* \\ g &\longmapsto \phi'(g) : \begin{array}{ccc} V \otimes W &\longrightarrow & k \\ v \otimes w &\longmapsto & g(v)(w) \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho : V^* \otimes W^* &\longrightarrow (V \otimes W)^* \\ f \otimes g &\longmapsto \rho(f \otimes g) : \begin{array}{ccc} V \otimes W &\longrightarrow & k \\ v \otimes w &\longmapsto & f(v)g(w). \end{array} \end{aligned}$$

Então são válidas as afirmações:

- (i)  $\phi$  é injetora. Além disso, se  $U$  (ou  $V$ ) tem dimensão finita, então  $\phi$  é um isomorfismo de  $k$ -espaços vetoriais;
- (ii)  $\phi'$  é um isomorfismo de  $k$ -espaços vetoriais;
- (iii)  $\rho$  é injetora. Além disso, se  $W$  (ou  $V$ ) tem dimensão finita, então  $\rho$  é um isomorfismo de  $k$ -espaços vetoriais.



Lembramos que, para quaisquer  $V$  e  $W$  dois  $k$ -espaços vetoriais e  $\lambda : V \rightarrow W$   $k$ -linear, podemos definir  $\lambda^* : W^* \rightarrow V^*$  por  $\lambda^*(f) = f\lambda$ , para todo  $f \in W^*$ .

Seja  $(C, \Delta, \varepsilon)$  uma coálgebra. Queremos introduzir em  $C^*$  uma estrutura de álgebra. Para isso, precisamos definir funções  $M : C^* \otimes C^* \rightarrow C^*$  e  $u : k \rightarrow C^*$   $k$ -lineares que satisfaçam os axiomas da definição de álgebra. Definimos

$$M = \Delta^* \rho : C^* \otimes C^* \xrightarrow{\rho} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^* \quad \text{e} \quad u = \varepsilon^* \psi : k \xrightarrow{\psi} k^* \xrightarrow{\varepsilon^*} C^*$$

em que  $\psi : k \rightarrow k^*$  é o isomorfismo dado por  $\psi(\alpha)(\beta) = \alpha\beta$ , para quaisquer  $\alpha, \beta \in k$ . Para todo  $\alpha \in k$  e  $c \in C$ , temos que  $u(\alpha)(c) = ((\varepsilon^* \psi)(\alpha))(c) = \varepsilon^*(\psi(\alpha))(c) = (\psi(\alpha)\varepsilon)(c) = \psi(\alpha)(\varepsilon(c)) = \alpha\varepsilon(c)$ . Em particular, se  $\alpha = 1$  então  $u(1) = \varepsilon$ . Observemos que  $M$  e  $u$  são  $k$ -lineares, pois  $\Delta^*$ ,  $\rho$ ,  $\varepsilon^*$  e  $\psi$  o são.

**Proposição 2.19**  $(C^*, M, u)$  é uma  $k$ -álgebra.

**Demonstração:** Mostremos que os diagramas abaixo comutam

$$1) \begin{array}{ccc} C^* \otimes C^* \otimes C^* & \xrightarrow{M \otimes I} & C^* \otimes C^* \\ \downarrow I \otimes M & & \downarrow M \\ C^* \otimes C^* & \xrightarrow{M} & C^* \end{array}$$

$$2) \begin{array}{ccccc} & & C^* \otimes C^* & & \\ & u \otimes I \nearrow & \downarrow M & \nwarrow I \otimes u & \\ k \otimes C^* & & C^* & & C^* \otimes k \\ & \varphi' \nwarrow & & \nearrow \varphi & \\ & & C^* & & \end{array}$$

Sejam  $f, g, h \in C^*$ . Denotando  $M(f \otimes g)$  por  $f * g$ , temos que

$$\begin{aligned} (f * g)(c) = M(f \otimes g)(c) &= (\Delta^* \rho)(f \otimes g)(c) = (\Delta^*(\rho(f \otimes g)))(c) \\ &= (\rho(f \otimes g)\Delta)(c) = \rho(f \otimes g)(\Delta(c)) \\ &= \rho(f \otimes g)(\sum c_1 \otimes c_2) = \sum f(c_1)g(c_2). \end{aligned}$$

Daí, para todo  $c \in C$ , segue que

$$\begin{aligned} M(M \otimes I)(f \otimes g \otimes h)(c) &= ((f * g) * h)(c) = \sum (f * g)(c_1)h(c_2) \\ &= \sum f(c_{1_1})g(c_{1_2})h(c_2) = \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} M(I \otimes M)(f \otimes g \otimes h)(c) &= (f * (g * h))(c) = \sum f(c_1)(g * h)(c_2) \\ &= \sum f(c_1)g(c_{2_1})h(c_{2_2}) = \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3). \end{aligned}$$

Logo,  $(f * g) * h = f * (g * h)$  e a operação  $*$  é associativa o que é equivalente a dizermos que o diagrama 1) é comutativo.

Resta provarmos a comutatividade do diagrama 2). Consideremos  $\varphi : C^* \rightarrow C^* \otimes k$  o  $k$ -isomorfismo dado por  $\varphi(f) = f \otimes 1$  e  $\varphi' : C^* \rightarrow k \otimes C^*$  o  $k$ -isomorfismo dado por  $\varphi'(f) = 1 \otimes f$ . Daí, para todo  $f \in C^*$ ,

$$\begin{aligned} (M(u \otimes I)\varphi'(f))(c) &= (M(u \otimes I)(1 \otimes f))(c) = (M(u(1) \otimes f))(c) \\ &= (u(1) * f)(c) = (\varepsilon * f)(c) = \sum \varepsilon(c_1)f(c_2) \\ &= \sum f(\varepsilon(c_1)c_2) = f(\sum \varepsilon(c_1)c_2) = f(c). \end{aligned}$$

Logo,  $u(1)*f = f$ . Analogamente,  $f*u(1) = f$ . Portanto, o diagrama 2) comuta, o que é equivalente a dizermos que  $u(1) = \varepsilon$  é a unidade de  $C^*$ . ■

A álgebra  $(C^*, M, u)$  construída acima é dita a *álgebra dual* da co-álgebra  $C$ . A multiplicação  $*$  de  $C^*$  é chamada *produto de convolução*.

**Exemplo 2.20** Consideremos  $C$  a coálgebra vista no Exemplo 2.5. A álgebra dual  $C^*$  tem multiplicação definida por  $(f*g)(c_n) = \sum_{i=0}^n f(c_i)g(c_{n-i})$  e a unidade  $u : k \rightarrow C^*$ ,  $u(\alpha)(c_n) = \alpha\delta_{0,n}$ , para quaisquer  $f, g \in C^*$ ,  $\alpha \in k$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

Mostremos que

$$\phi : C^* \rightarrow k[[X]], \quad \phi(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(c_n)X^n$$

é um isomorfismo de álgebras, em que  $k[[X]]$  é a álgebra das séries de potência formal.

Claramente,  $\phi$  é bijetora e  $k$ -linear. Além disso,

$$\begin{aligned}\phi(f * g) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (f * g)(c_n) X^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{i=0}^n f(c_i) g(c_{n-i}) \right) X^n \\ &= \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} f(c_n) X^n \right) \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} g(c_n) X^n \right) = \phi(f) \phi(g) \quad \text{e} \\ \phi(u(1)) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} u(1)(c_n) X^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{0,n} X^n = 1.\end{aligned}$$

Logo,  $\phi$  é um isomorfismo de  $k$ -álgebras.

Pelo que fizemos acima, à toda coálgebra  $C$ , o espaço vetorial dual  $C^*$  é uma álgebra. Surge, naturalmente, a pergunta: dada uma álgebra  $(A, M, u)$ , o seu espaço vetorial dual  $A^*$  é uma coálgebra? A resposta é sim se  $A$  é finito dimensional. Neste caso,  $\rho : A^* \otimes A^* \rightarrow (A \otimes A)^*$  é bijetora e daí, podemos definir  $\Delta : A^* \rightarrow A^* \otimes A^*$  e  $\varepsilon : A^* \rightarrow k$ , respectivamente, por

$$\Delta = \rho^{-1} M^* : A^* \xrightarrow{M^*} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\rho^{-1}} A^* \otimes A^* \quad \text{e} \quad \varepsilon = \varphi u^* : A^* \xrightarrow{u^*} k^* \xrightarrow{\varphi} k$$

em que  $\varphi : k^* \rightarrow k$  é o isomorfismo linear dado por  $\varphi(f) = f(1)$ , para todo  $f \in k^*$ . Mediante tais definições segue que  $(A^*, \Delta, \varepsilon)$  é uma coálgebra.

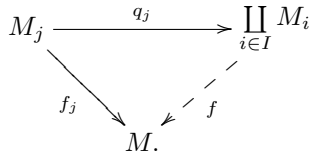
Caso  $A$  possua dimensão infinita, podemos dar uma estrutura de coálgebra a um subespaço vetorial de  $A^*$ , chamado dual finito de  $A$ , que é denotado por  $A^\circ$ . Porém, não abordamos tal caso aqui e o leitor interessado pode consultar ([3], p.33).

Denotamos por  $k\text{-Cog}$  a categoria das  $k$ -coálgebras. Queremos mostrar que esta categoria possui coproduto, mas antes apresentamos a definição de produto e coproduto em uma categoria.

Sejam  $\mathcal{C}$  uma categoria e  $\{M_i\}_{i \in I}$  uma família de objetos em  $\mathcal{C}$ . Um produto desta família é um objeto em  $\mathcal{C}$ , que denotamos por  $\prod_{i \in I} M_i$ , juntamente com uma família de morfismos  $\{\pi_i\}_{i \in I}$ ,  $\pi_j : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$  para todo  $j \in I$  de modo que, para qualquer objeto  $M$  em  $\mathcal{C}$  e qualquer família de morfismos  $\{f_i\}_{i \in I}$ ,  $f_j : M \rightarrow M_j$  para cada  $j \in I$ , existe um único morfismo  $f : M \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$  tal que  $\pi_j f = f_j$ ,  $\forall j \in I$ . O diagrama abaixo ilustra tal situação

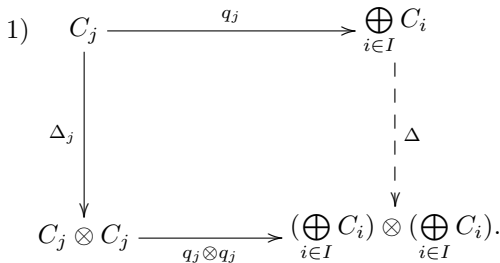
$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} M_i & \xrightarrow{\pi_j} & M_j \\ & \swarrow f & \nearrow f_j \\ & M. & \end{array}$$

Existindo tal produto, este é único a menos de isomorfismo. A dualização desta definição nos dá a definição de um coproduto de uma família de objetos  $\{M_i\}_{i \in I}$  em  $\mathcal{C}$ , denotado por  $\coprod_{i \in I} M_i$  (se existir). O coproduto  $\coprod_{i \in I} M_i$  é um objeto em  $\mathcal{C}$  juntamente com uma família de morfismos  $\{q_i\}_{i \in I}$ ,  $q_j : M_j \rightarrow \coprod_{i \in I} M_i$  para cada  $j \in I$  de maneira que, para qualquer objeto  $M$  em  $\mathcal{C}$  e qualquer família  $\{f_i\}_{i \in I}$  de morfismos,  $f_j : M_j \rightarrow M$  para cada  $j \in I$ , existe um único morfismo  $f : \coprod_{i \in I} M_i \rightarrow M$  tal que  $f q_j = f_j, \forall j \in I$ . Visualizamos no diagrama



**Proposição 2.21** *A categoria  $k\text{-Cog}$  tem coproduto.*

**Demonstração:** Seja  $\{C_i\}_{i \in I}$  uma família de  $k$ -coálgebras. Temos que  $\bigoplus_{i \in I} C_i$  é um  $k$ -espaço vetorial e um elemento qualquer  $c \in \bigoplus_{i \in I} C_i$  é da forma  $c = \{c_i\}_{i \in I}$  em que a família  $\{c_i\}_{i \in I}$  é quase-nula e cada  $c_i \in C_i$ . Para todo  $j \in I$ , consideremos  $q_j : C_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} C_i$  as inclusões naturais e  $\Delta_j$  a comultiplicação de  $C_j$ . Claramente, para cada  $j \in I$ , a aplicação  $(q_j \otimes q_j)\Delta_j$  é  $k$ -linear e portanto, existe uma única aplicação  $k$ -linear  $\Delta : \bigoplus_{i \in I} C_i \rightarrow (\bigoplus_{i \in I} C_i) \otimes (\bigoplus_{i \in I} C_i)$  tal que o diagrama abaixo comuta



Igualmente, existe uma única aplicação  $k$ -linear  $\varepsilon : \bigoplus_{i \in I} C_i \rightarrow k$  tal

que o diagrama comuta

$$2) \quad \begin{array}{ccc} C_j & \xrightarrow{q_j} & \bigoplus_{i \in I} C_i \\ & \searrow \varepsilon_j & \swarrow \varepsilon \\ & & k. \end{array}$$

Chamamos  $C = \bigoplus_{i \in I} C_i$ . Afirmamos que  $(C, \Delta, \varepsilon)$  é uma  $k$ -coálgebra. Notemos que dado  $c \in C$ , então  $c = \{c_i\}_{i \in I}$  é uma família quase-nula e podemos considerar  $F \subseteq I$  um conjunto finito tal que  $c_i \neq 0, \forall i \in F$ . Para cada  $j \in I$ ,  $c_j$  é naturalmente mergulhado em  $C$  da forma  $q_j(c_j) = \{x_i\}_{i \in I}$  em que  $x_i = 0, \forall i \neq j$  e  $x_j = c_j$  (isto é,  $q_j(c_j)$  é uma família quase-nula tal que todos os elementos da família são nulos, exceto possivelmente, o elemento  $c_j$ ). Logo,  $c = \{c_i\}_{i \in I} = \sum_{i \in F} q_i(c_i)$  e como  $\Delta$  é  $k$ -linear, basta mostrarmos a comutatividade dos diagramas para elementos de  $C$  da forma  $q_j(c_j)$ . Pela comutatividade do diagrama 1), temos que

$$\Delta(q_j(c_j)) = (q_j \otimes q_j)\Delta_j(c_j) = \sum q_j((c_j)_1) \otimes q_j((c_j)_2). \quad (2.3)$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes I)\Delta(q_j(c_j)) &\stackrel{(2.3)}{=} (\Delta \otimes I)(\sum q_j((c_j)_1) \otimes q_j((c_j)_2)) \\ &= \sum \Delta(q_j((c_j)_1)) \otimes q_j((c_j)_2) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} \sum q_j(((c_j)_1)_1) \otimes q_j(((c_j)_1)_2) \otimes q_j((c_j)_2) \\ &= (q_j \otimes q_j \otimes q_j)(\sum ((c_j)_1)_1 \otimes ((c_j)_1)_2 \otimes (c_j)_2) \\ &= (q_j \otimes q_j \otimes q_j)(\sum (c_j)_1 \otimes (c_j)_2 \otimes (c_j)_3) \\ &= \sum q_j((c_j)_1) \otimes q_j((c_j)_2) \otimes q_j((c_j)_3) \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I \otimes \Delta)\Delta(q_j(c_j)) &\stackrel{(2.3)}{=} (I \otimes \Delta)(\sum q_j((c_j)_1) \otimes q_j((c_j)_2)) \\ &= \sum q_j((c_j)_1) \otimes \Delta(q_j((c_j)_2)) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} \sum q_j((c_j)_1) \otimes q_j(((c_j)_2)_1) \otimes q_j(((c_j)_2)_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (q_j \otimes q_j \otimes q_j) \left( \sum (c_j)_1 \otimes ((c_j)_2)_1 \otimes ((c_j)_2)_2 \right) \\
&= (q_j \otimes q_j \otimes q_j) \left( \sum (c_j)_1 \otimes (c_j)_2 \otimes (c_j)_3 \right) \\
&= \sum q_j((c_j)_1) \otimes q_j((c_j)_2) \otimes q_j((c_j)_3).
\end{aligned}$$

Portanto,  $(\Delta \otimes I)\Delta = (I \otimes \Delta)\Delta$ . Agora, considerando o isomorfismo canônico  $\psi : k \otimes C \rightarrow C$  temos que

$$\begin{aligned}
\psi(\varepsilon \otimes I)\Delta(q_j(c_j)) &\stackrel{(2,3)}{=} \psi(\varepsilon \otimes I) \left( \sum q_j((c_j)_1) \otimes q_j((c_j)_2) \right) \\
&= \sum \varepsilon(q_j((c_j)_1)) q_j((c_j)_2) \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum \varepsilon_j((c_j)_1) q_j((c_j)_2) \\
&= \sum q_j(\varepsilon_j((c_j)_1)(c_j)_2) \\
&= q_j \left( \sum \varepsilon_j((c_j)_1)(c_j)_2 \right) \\
&= q_j(c_j),
\end{aligned}$$

a igualdade (\*) vem da comutatividade do diagrama 2). Analogamente,  $\psi'(I \otimes \varepsilon)\Delta = I$  em que  $\psi'$  é o isomorfismo canônico de  $C \otimes k$  em  $C$ . Logo,  $C = \bigoplus_{i \in I} C_i$  é uma  $k$ -coálgebra.

Notemos que, para cada  $j \in I$ , a inclusão natural  $q_j : C_j \rightarrow C$  é morfismo de  $k$ -coálgebras, isto segue da comutatividade dos diagramas 1) e 2). Resta verificarmos que  $C = \bigoplus_{i \in I} C_i$  é o coproduto da família  $\{C_i\}_{i \in I}$  na categoria  $k\text{-Cog}$ .

Sejam  $D$  uma  $k$ -coálgebra e  $\{f_i\}_{i \in I}$  uma família de morfismos de  $k$ -coálgebras,  $f_j : C_j \rightarrow D, \forall j \in I$ . Logo, existe uma única aplicação  $k$ -linear  $f : C \rightarrow D$  tal que  $f q_j = f_j$ , conforme o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
C_j & \xrightarrow{q_j} & C \\
& \searrow f_j & \swarrow f \\
& & D.
\end{array}$$

Vejamos que  $f$  é morfismo de  $k$ -coálgebras. De fato,

$$(\Delta_D f)(q_j(c_j)) = (\Delta_D f q_j)(c_j) = (\Delta_D f_j)(c).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 (f \otimes f)\Delta(q_j(c_j)) &= (f \otimes f)\Delta q_j(c_j) \\
 &= (f \otimes f)(q_j \otimes q_j)\Delta_j(c_j) \\
 &= (fq_j \otimes fq_j)\Delta_j(c_j) \\
 &= (f_j \otimes f_j)\Delta_j(c_j).
 \end{aligned}$$

Como  $f_j$  é morfismo de  $k$ -coálgebras para cada  $j \in I$ , então  $\Delta_D f_j = (f_j \otimes f_j)\Delta_j$  e assim,  $\Delta_D f = (f \otimes f)\Delta$ . Temos ainda que

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon_D f)(q_j(c_j)) &= (\varepsilon_D f q_j)(c_j) = (\varepsilon_D f_j)(c_j) \stackrel{(*)}{=} \varepsilon_j(c_j) \\
 &= (\varepsilon q_j)(c_j) = \varepsilon(q_j(c_j)),
 \end{aligned}$$

a igualdade  $(*)$  segue do fato de que  $f_j$  é morfismo de  $k$ -coálgebras. Logo,  $\varepsilon_D f = \varepsilon$  e daí,  $f$  é morfismo de  $k$ -coálgebras.  $\blacksquare$

## 2.2 Comódulos

Na seção anterior, apresentamos as coálgebras como objetos duais das álgebras. Agora, partimos para a dualização da estrutura módulo. Um comódulo sobre uma coálgebra é uma noção dual à de um módulo sobre uma álgebra. Depois de provarmos alguns resultados sobre comódulos, introduzimos a definição de  $C^*$ -módulos racionais. O principal resultado desta seção é o isomorfismo entre a categoria dos comódulos à direita sobre uma coálgebra  $C$  e a categoria dos  $C^*$ -módulos à esquerda racionais.

### 2.2.1 Definições e exemplos

**Definição 2.22** *Seja  $(A, M, u)$  uma  $k$ -álgebra. Um  $A$ -módulo à esquerda é um par  $(X, \mu)$ , em que  $X$  é um  $k$ -espaço vetorial e  $\mu : A \otimes X \rightarrow X$  é um morfismo de  $k$ -espaços vetoriais tal que os diagramas abaixo comutam*

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes A \otimes X & \xrightarrow{I \otimes \mu} & A \otimes X \\
\downarrow M \otimes I & & \downarrow \mu \\
A \otimes X & \xrightarrow{\mu} & X
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
& & A \otimes X \\
& \nearrow u \otimes I & \downarrow \mu \\
k \otimes X & & X \\
& \searrow \cong &
\end{array}$$

Nos diagramas acima, não indicamos precisamente quais são as identidades  $I$  em cada caso, exatamente como fizemos na seção anterior.

A definição de  $A$ -módulo à direita é análoga, diferindo apenas na definição da função  $\mu$  que seria agora  $\mu : X \otimes A \rightarrow X$ .

Na definição de  $A$ -módulo, partimos de um  $k$ -espaço vetorial e de uma  $k$ -álgebra dados e, essencialmente, definimos uma operação que relaciona as duas estruturas. Para a dualização, também partimos de um espaço vetorial, mas agora usando uma coálgebra no lugar de uma álgebra, o que está no espírito da idéia de dualização, já que coálgebra é uma noção dual de uma álgebra.

**Definição 2.23** *Seja  $(C, \Delta, \varepsilon)$  uma  $k$ -coálgebra. Um  $C$ -comódulo à direita (ou um comódulo à direita sobre  $C$ ) é um par  $(M, \rho)$ , em que  $M$  é um  $k$ -espaço vetorial e  $\rho : M \rightarrow M \otimes C$  é um morfismo de  $k$ -espaços vetoriais tal que os seguintes diagramas comutam*

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes C \\
\downarrow \rho & & \downarrow I \otimes \Delta \\
M \otimes C & \xrightarrow{\rho \otimes I} & M \otimes C \otimes C
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
M & & \\
\rho \downarrow & \searrow \cong & \\
M \otimes C & & M \otimes k \\
& \nearrow I \otimes \varepsilon &
\end{array}$$

A comutatividade dos diagramas acima nos diz que  $(I \otimes \Delta)\rho = (\rho \otimes I)\rho$  e que  $(I \otimes \varepsilon)\rho$  é o isomorfismo linear canônico.

Analogamente, definimos um  $C$ -comódulo à esquerda (ou um comódulo à esquerda sobre  $C$ ), considerando o morfismo de  $k$ -espaços vetoriais  $\rho' : M \rightarrow C \otimes M$  e a comutatividade de ambos os diagramas, observando mudanças devido à  $\rho'$ .

Assim como no caso das coálgebras, também temos uma notação de Sweedler para comódulos. Dado  $m \in M$ , escrevemos  $\rho(m) = \sum m_0 \otimes$



$m_1$ , em que  $m_0 \in M$  e  $m_1 \in C$ .

Explicitamente, o significado da comutatividade dos diagramas acima nos diz que  $\sum m_0 \otimes m_{1_1} \otimes m_{1_2} = \sum m_{0_0} \otimes m_{0_1} \otimes m_1 = \sum m_0 \otimes m_1 \otimes m_2$  e que  $\sum m_0 \varepsilon(m_1) = m$ .

**Exemplo 2.24** Toda coálgebra  $(C, \Delta, \varepsilon)$  é um  $C$ -comódulo à direita e à esquerda, com a aplicação de estrutura dada por  $\Delta$ . De fato, o primeiro diagrama é exatamente o diagrama da comultiplicação da coálgebra (substituindo  $\rho$  por  $\Delta$ ). O segundo diagrama é um dos lados do diagrama da counidade da coálgebra.

**Exemplo 2.25** Sejam  $(C, \Delta, \varepsilon)$  uma  $k$ -coálgebra e  $X$  um  $k$ -espaço vetorial. Então  $X \otimes C$  é um  $C$ -comódulo à direita, com a aplicação de estrutura  $\rho : X \otimes C \rightarrow X \otimes C \otimes C$  dada por  $\rho = I \otimes \Delta$ . Verifiquemos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
 X \otimes C & \xrightarrow{I \otimes \Delta} & X \otimes C \otimes C \\
 \downarrow I \otimes \Delta & & \downarrow I_{X \otimes C} \otimes \Delta \\
 X \otimes C \otimes C & \xrightarrow{I \otimes \Delta \otimes I} & X \otimes C \otimes C \otimes C.
 \end{array}$$

De fato, sejam  $x \in X$  e  $c \in C$ . Então

$$\begin{aligned}
 (I \otimes \Delta \otimes I)(I \otimes \Delta)(x \otimes c) &= (I \otimes \Delta \otimes I)(x \otimes \Delta(c)) \\
 &= (I \otimes \Delta \otimes I)(x \otimes (\sum c_1 \otimes c_2)) \\
 &= \sum x \otimes \Delta(c_1) \otimes c_2 \\
 &= \sum x \otimes c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 \\
 &= \sum x \otimes c_1 \otimes c_2 \otimes c_3.
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 (I_{X \otimes C} \otimes \Delta)(I \otimes \Delta)(x \otimes c) &= (I_{X \otimes C} \otimes \Delta)(x \otimes \Delta(c)) \\
 &= (I_{X \otimes C} \otimes \Delta)(x \otimes (\sum c_1 \otimes c_2))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum (I_{X \otimes C} \otimes \Delta)(x \otimes c_1 \otimes c_2) \\
&= \sum x \otimes c_1 \otimes \Delta(c_2) \\
&= \sum x \otimes c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} \\
&= \sum x \otimes c_1 \otimes c_2 \otimes c_3.
\end{aligned}$$

Logo, o primeiro diagrama é comutativo. Resta mostrarmos a comutatividade do segundo diagrama

$$\begin{array}{ccc}
X \otimes C & & \\
\downarrow I \otimes \Delta & \searrow \psi \cong & \\
X \otimes C \otimes C & & X \otimes C \otimes k
\end{array}$$

$I_{X \otimes C} \otimes \varepsilon$

Temos que

$$\begin{aligned}
(I_{X \otimes C} \otimes \varepsilon)(I \otimes \Delta)(x \otimes c) &= (I_{X \otimes C} \otimes \varepsilon)(x \otimes (\sum c_1 \otimes c_2)) \\
&= (I_{X \otimes C} \otimes \varepsilon)(\sum x \otimes c_1 \otimes c_2) \\
&= \sum (I_{X \otimes C} \otimes \varepsilon)(x \otimes c_1 \otimes c_2) \\
&= \sum x \otimes c_1 \otimes \varepsilon(c_2) \\
&= \sum x \otimes c_1 \varepsilon(c_2) \otimes 1 \\
&= x \otimes \sum c_1 \varepsilon(c_2) \otimes 1 \\
&= x \otimes c \otimes 1 \\
&= \psi(x \otimes c).
\end{aligned}$$

Lembramos a definição de morfismos entre dois  $A$ -módulos via diagramas e abaixo apresentamos a versão dual, ou seja, morfismos entre dois  $C$ -comódulos.

**Definição 2.26** *Sejam  $A$  uma  $k$ -álgebra,  $(X, \nu)$  e  $(Y, \mu)$  dois  $A$ -módulos à esquerda. Uma aplicação  $k$ -linear  $f : X \rightarrow Y$  é dita um morfismo de  $A$ -módulos se é comutativo o diagrama abaixo*

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes X & \xrightarrow{I \otimes f} & A \otimes Y \\
\downarrow \nu & & \downarrow \mu \\
X & \xrightarrow{f} & Y.
\end{array}$$

**Definição 2.27** *Sejam  $C$  uma  $k$ -coálgebra,  $(M, \rho)$  e  $(N, \phi)$  dois  $C$ -comódulos à direita. Uma função  $k$ -linear  $g : M \rightarrow N$  é dita um morfismo de  $C$ -comódulos se é comutativo o diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{g} & N \\
\downarrow \rho & & \downarrow \phi \\
M \otimes C & \xrightarrow{g \otimes I} & N \otimes C.
\end{array}$$

A comutatividade do diagrama pode ser escrita em notação de Sweedler como

$$\phi(g(m)) = \sum g(m_0) \otimes m_1, \text{ para todo } m \in M.$$

Os  $C$ -comódulos à direita com os morfismos definidos como acima determinam uma categoria, chamada categoria dos  $C$ -comódulos à direita, denotada por  $\mathcal{M}^C$ . Analogamente, temos a categoria dos  $C$ -comódulos à esquerda que é denotada por  ${}^C\mathcal{M}$ .

## 2.2.2 Subcomódulos e comódulos quociente

Nesta seção, definimos subcomódulos e comódulos quociente. Desenvolvemos algumas propriedades sobre os mesmos. Embora, consideramos  $C$ -comódulos à direita sobre  $C$ , todas as definições e resultados valem para  $C$ -comódulos à esquerda.

**Definição 2.28** *Seja  $(M, \rho)$  um  $C$ -comódulo à direita. Um  $k$ -subespaço vetorial  $N$  de  $M$  é dito um  $C$ -subcomódulo à direita se  $\rho(N) \subseteq N \otimes C$ .*

Seja  $(C, \Delta, \varepsilon)$  uma coálgebra. Notemos que  $I$  é um  $C$ -subcomódulo à direita de  $C$  se, e somente se,  $I$  é um coideal à direita da coálgebra

$C$ . De fato, como  $(C, \Delta)$  é a estrutura de  $C$ -comódulo da coálgebra  $C$  e sendo  $I$  um  $C$ -subcomódulo à direita de  $C$ , então  $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$ . Logo,  $I$  é coideal à direita da coálgebra  $C$ . Obviamente, se  $I$  é um coideal à direita de  $C$ , então  $(I, \Delta)$  é um  $C$ -subcomódulo à direita de  $C$ .

Sejam  $(M, \rho)$  um  $C$ -comódulo à direita e  $N$  um  $C$ -subcomódulo de  $M$ . Então  $M/N$  é o  $k$ -espaço vetorial quociente e  $\pi : M \rightarrow M/N$ , a projeção canônica,  $\pi(m) = \bar{m}$  para todo  $m \in M$ , é obviamente  $k$ -linear.

**Proposição 2.29** *Sejam  $(M, \rho)$  um  $C$ -comódulo à direita e  $N$  um  $C$ -subcomódulo. Então existe uma única estrutura de  $C$ -comódulo à direita em  $M/N$  tal que  $\pi : M \rightarrow M/N$  é um morfismo de comódulos.*

**Demonstração:** Temos que  $(\pi \otimes I)\rho(N) \subseteq (\pi \otimes I)(N \otimes C) \subseteq \pi(N) \otimes C = 0$ , pois  $\pi(N) = 0$ . Logo,  $N \subseteq \text{Ker}((\pi \otimes I)\rho)$ . Portanto, existe um único morfismo  $\bar{\rho}$  de  $k$ -espaços vetoriais tal que o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\pi} & M/N \\
 \rho \downarrow & & \downarrow \bar{\rho} \\
 M \otimes C & \xrightarrow{\pi \otimes I} & (M/N) \otimes C
 \end{array}$$

é comutativo, isto é,  $\bar{\rho}\pi = (\pi \otimes I)\rho$ . Daí, para qualquer  $m \in M$ , segue que

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}(\bar{m}) &= \bar{\rho}\pi(m) = (\pi \otimes I)\rho(m) = (\pi \otimes I)\left(\sum m_0 \otimes m_1\right) \\
 &= \sum \pi(m_0) \otimes m_1 = \sum \bar{m}_0 \otimes m_1.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\bar{\rho}(\bar{m}) = \sum \bar{m}_0 \otimes m_1$ . Afirmamos que  $(M/N, \bar{\rho})$  é um  $C$ -comódulo à direita. Precisamos mostrar que  $(I \otimes \Delta)\bar{\rho} = (\bar{\rho} \otimes I)\bar{\rho}$ . De fato, seja  $\bar{m} \in M/N$ . Então

$$\begin{aligned}
 (I \otimes \Delta)\bar{\rho}(\bar{m}) &= (I \otimes \Delta)\left(\sum \bar{m}_0 \otimes m_1\right) \\
 &= \sum \bar{m}_0 \otimes m_{1_1} \otimes m_{1_2} \\
 &= \sum \bar{m}_0 \otimes m_1 \otimes m_2 \quad e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\rho} \otimes I)\bar{\rho}(\bar{m}) &= (\bar{\rho} \otimes I)\left(\sum \bar{m}_0 \otimes m_1\right) \\
&= \sum \bar{\rho}(\bar{m}_0) \otimes m_1 \\
&= \sum (\bar{m}_0)_0 \otimes (m_0)_1 \otimes m_1 \\
&= \sum \bar{m}_0 \otimes m_1 \otimes m_2.
\end{aligned}$$

Logo,  $(I \otimes \Delta)\bar{\rho} = (\bar{\rho} \otimes I)\bar{\rho}$ , como queríamos. O fato de que o diagrama acima é comutativo nos diz que  $\pi : M \rightarrow M/N$  é um morfismo de comódulos. ■

O comódulo  $M/N$  com a estrutura dada acima é chamado *comódulo quociente* de  $M$  com respeito ao subcomódulo  $N$ .

**Proposição 2.30** *Sejam  $M$  e  $N$  dois  $C$ -comódulos à direita e  $f : M \rightarrow N$  um morfismo de comódulos. Então  $Imf$  é um  $C$ -subcomódulo de  $N$  e  $Kerf$  é um  $C$ -subcomódulo de  $M$ .*

**Demonstração:** Sejam  $\rho_M : M \rightarrow M \otimes C$  e  $\rho_N : N \rightarrow N \otimes C$  as respectivas aplicações de estrutura dos dois  $C$ -comódulos. Como  $f$  é um morfismo de comódulos, temos que  $(f \otimes I)\rho_M(Kerf) = \rho_N f(Kerf) = 0$ . Logo,  $\rho_M(Kerf) \subseteq Ker(f \otimes I) = Kerf \otimes C$ , esta última igualdade decorre do Lema 2.14. Assim,  $Kerf$  é um subcomódulo de  $M$ .

Por outro lado,  $\rho_N(Imf) = \rho_N(f(M)) = (\rho_N f)(M) = (f \otimes I)\rho_M(M) \subseteq Imf \otimes C$  e portanto,  $Imf$  é um subcomódulo de  $N$ . ■

**Teorema 2.31 (Teorema do isomorfismo para comódulos)** *Sejam  $f : M \rightarrow N$  um morfismo de  $C$ -comódulos à direita,  $\pi : M \rightarrow M/Kerf$  e  $i : Imf \rightarrow N$ , a projeção e a inclusão canônicas, respectivamente. Então existe um único isomorfismo de  $C$ -comódulos  $\bar{f} : M/Kerf \rightarrow Imf$  tal que o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{f} & N \\
\pi \downarrow & & \uparrow i \\
M/Kerf & \xrightarrow{\bar{f}} & Imf.
\end{array}$$

**Demonstração:** Pelo teorema do isomorfismo de espaços vetoriais, existe uma única função  $k$ -linear  $\bar{f} : M/Kerf \rightarrow Imf$  tal que  $\bar{f}(\bar{m}) =$

$f(m)$ , isto é,  $(i\bar{f}\pi)(m) = f(m), \forall m \in M$ . Claramente,  $\bar{f}$  é um isomorfismo de  $k$ -espaços vetoriais. Para provarmos o teorema, precisamos verificar que  $\bar{f}$  é um morfismo de comódulos.

Sejam  $\omega : M/Kerf \rightarrow (M/Kerf) \otimes C$  e  $\vartheta : Imf \rightarrow Imf \otimes C$  as aplicações de estrutura dos respectivos comódulos. Mostremos que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc}
 M/Kerf & \xrightarrow{\bar{f}} & Imf \\
 \downarrow \omega & & \downarrow \vartheta \\
 (M/Kerf) \otimes C & \xrightarrow{\bar{f} \otimes I} & Imf \otimes C.
 \end{array}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
 (\bar{f} \otimes I)\omega(\bar{m}) &= (\bar{f} \otimes I)(\sum \bar{m}_0 \otimes m_1) = \sum \bar{f}(\bar{m}_0) \otimes m_1 \\
 &= \sum f(m_0) \otimes m_1 \stackrel{(*)}{=} \sum f(m)_0 \otimes f(m)_1 \\
 &= \vartheta(f(m)) = (\vartheta\bar{f})(\bar{m}),
 \end{aligned}$$

a igualdade (\*) segue do fato de que  $f$  é um morfismo de comódulos. Logo,  $(\bar{f} \otimes I)\omega = \vartheta\bar{f}$ , ou seja,  $\bar{f}$  é um morfismo de comódulos à direita. ■

### 2.2.3 Módulos racionais

Sejam  $C$  uma coálgebra e  $C^*$  a sua álgebra dual. Consideremos  $M$  um  $k$ -espaço vetorial e  $\omega : M \rightarrow M \otimes C$  uma aplicação  $k$ -linear. Definimos  $\psi_\omega : C^* \otimes M \rightarrow M$  por

$$\psi_\omega : C^* \otimes M \xrightarrow{I_{C^*} \otimes \omega} C^* \otimes M \otimes C \xrightarrow{I_{C^*} \otimes T} C^* \otimes C \otimes M \xrightarrow{\gamma \otimes I_M} k \otimes M \xrightarrow{\phi} M,$$

isto é,  $\psi_\omega = \phi(\gamma \otimes I_M)(I_{C^*} \otimes T)(I_{C^*} \otimes \omega)$ , em que  $\phi : k \otimes M \rightarrow M$  é o isomorfismo canônico,  $T : M \otimes C \rightarrow C \otimes M$  é a função *twist*,  $T(m \otimes c) = c \otimes m$  e  $\gamma : C^* \otimes C \rightarrow k$  é dada por  $\gamma(f \otimes c) = f(c)$ . Claramente,  $\psi_\omega$  é  $k$ -linear e para quaisquer  $m \in M$  e  $f \in C^*$ , temos que

$$\begin{aligned}
\psi_\omega(f \otimes m) &= \phi(\gamma \otimes I_M)(I_{C^*} \otimes T)(I_{C^*} \otimes \omega)(f \otimes m) \\
&= \phi(\gamma \otimes I_M)(I_{C^*} \otimes T)(f \otimes (\sum_i m_i \otimes c_i)) \\
&= \phi(\gamma \otimes I_M)(f \otimes (\sum_i c_i \otimes m_i)) \\
&= \phi(\gamma \otimes I_M)(\sum_i (f \otimes c_i \otimes m_i)) \\
&= \phi(\sum_i f(c_i) \otimes m_i) = \sum_i f(c_i)m_i.
\end{aligned}$$

Portanto, para  $\omega(m) = \sum_i m_i \otimes c_i$ , temos que  $\psi_\omega(f \otimes m) = \sum_i f(c_i)m_i$ .

**Proposição 2.32** *Com as notações do parágrafo anterior,  $(M, \omega)$  é um  $C$ -comódulo à direita se, e somente se,  $(M, \psi_\omega)$  é um  $C^*$ -módulo à esquerda.*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $(M, \omega)$  seja um  $C$ -comódulo à direita. Sejam  $f \in C^*$  e  $m \in M$ . Denotamos a ação de  $C^*$  em  $M$  por  $f \cdot m = \psi_\omega(f \otimes m) = \sum f(m_1)m_0$ , em que  $\omega(m) = \sum m_0 \otimes m_1$ .

Temos que  $1_{C^*} \cdot m = \varepsilon \cdot m = \sum \varepsilon(m_1)m_0 = m$ , pela comutatividade do segundo diagrama da definição de comódulo.

Agora, sejam  $f, g \in C^*$  e  $m \in M$ . Então

$$\begin{aligned}
f \cdot (g \cdot m) &= f \cdot \sum g(m_1)m_0 \\
&= \sum g(m_1)(f \cdot m_0) \text{ (pela } k\text{-linearidade de } \psi_\omega) \\
&= \sum g(m_1)f((m_0)_1)(m_0)_0 = \sum g(m_2)f(m_1)m_0 \\
&= \sum f(m_1)g(m_2)m_0 = \sum (f * g)(m_1)m_0 = (f * g) \cdot m.
\end{aligned}$$

É claro, pela linearidade de  $\psi_\omega$ , que  $(f + g) \cdot m = f \cdot m + g \cdot m$  e que  $f \cdot (m_1 + m_2) = f \cdot m_1 + f \cdot m_2$ . Logo,  $(M, \psi_\omega)$  é um  $C^*$ -módulo à esquerda.

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $(M, \psi_\omega)$  seja um  $C^*$ -módulo à esquerda. Precisamos mostrar que  $(M, \omega)$  é um  $C$ -comódulo à direita. Escrevemos  $\omega(m) = \sum m_0 \otimes m_1$ , com  $m_0 \in M$  e  $m_1 \in C$ . Como  $\varepsilon \cdot m = m$ , segue que  $\sum \varepsilon(m_1)m_0 = m$  e daí,

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(I \otimes \varepsilon)\omega(m) &= \varphi^{-1}(I \otimes \varepsilon)(\sum m_0 \otimes m_1) = \varphi^{-1}(\sum m_0 \otimes \varepsilon(m_1)) \\
&= \sum m_0 \varepsilon(m_1) = \sum \varepsilon(m_1)m_0 = m,
\end{aligned}$$

$\varphi^{-1}$  é o isomorfismo (canônico) inverso de  $\varphi : M \rightarrow M \otimes k$ . Isto prova a comutatividade do segundo diagrama da definição de comódulo.

Resta provarmos que  $(\omega \otimes I)\omega = (I \otimes \Delta)\omega$ . Para isso, consideramos o isomorfismo canônico  $\phi : M \otimes k \otimes k \rightarrow M$  e usamos o fato de que  $(f * g) \cdot m = f \cdot (g \cdot m)$ , que ocorre devido à hipótese de  $(M, \psi_\omega)$  ser um  $C^*$ -módulo à esquerda. Temos que

$$\begin{aligned} (f * g) \cdot m &= \sum (f * g)(m_1)m_0 = \sum f((m_1)_1)g(m_1)_2)m_0 \\ &= \sum f(m_1)g(m_2)m_0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (I \otimes \Delta)\omega(m) &= (I \otimes \Delta)(\sum m_0 \otimes m_1) \\ &= \sum m_0 \otimes m_{1_1} \otimes m_{1_2} \\ &= \sum m_0 \otimes m_1 \otimes m_2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \phi(I \otimes f \otimes g)(I \otimes \Delta)\omega(m) &= \phi(I \otimes f \otimes g)(\sum m_0 \otimes m_1 \otimes m_2) \\ &= \sum m_0 f(m_1)g(m_2) \\ &= \sum f(m_1)g(m_2)m_0 \\ &= (f * g) \cdot m. \end{aligned}$$

Logo,  $(f * g) \cdot m = \phi(I \otimes f \otimes g)(I \otimes \Delta)\omega(m)$ . Agora,

$$\begin{aligned} f \cdot (g \cdot m) &= f \cdot (\sum g(m_1)m_0) = \sum g(m_1)f((m_0)_1)(m_0)_0 \\ &= \sum g(m_2)f(m_1)m_0 \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(I \otimes f \otimes g)(\omega \otimes I)\omega(m) &= \phi(I \otimes f \otimes g)(\omega \otimes I)(\sum m_0 \otimes m_1) \\ &= \phi(I \otimes f \otimes g)(\sum m_{0_0} \otimes m_{0_1} \otimes m_1) \\ &= \phi(I \otimes f \otimes g)(\sum m_0 \otimes m_1 \otimes m_2) \\ &= \sum m_0 f(m_1)g(m_2). \end{aligned}$$

Assim,  $f \cdot (g \cdot m) = \phi(I \otimes f \otimes g)(\omega \otimes I)\omega(m)$ . Mas, como  $f \cdot (g \cdot m) =$



$(f * g) \cdot m$ , segue que  $\phi(I \otimes f \otimes g)(\omega \otimes I)\omega(m) = \phi(I \otimes f \otimes g)(I \otimes \Delta)\omega(m)$ . Pela injetividade de  $\phi$ , temos que  $(I \otimes f \otimes g)(\omega \otimes I)\omega(m) = (I \otimes f \otimes g)(I \otimes \Delta)\omega(m)$ .

Seja  $y = (\omega \otimes I)\omega(m) - (I \otimes \Delta)\omega(m)$ . O resultado fica provado se mostrarmos que  $y = 0$ . Claramente,  $(I \otimes f \otimes g)(y) = 0$ , para quaisquer  $f, g \in C^*$ .

Seja  $\{e_i\}_{i \in I}$  uma base de  $C$ . Como  $y \in M \otimes C \otimes C$ , então  $y = \sum_{i,j} m_{ij} \otimes e_i \otimes e_j$ , com  $m'_{ij}$ s em  $M$ . Consideremos, para cada  $i \in I$ , a função  $f_i : C \rightarrow k$ , dada por  $f_i(e_j) = \delta_{i,j}$  (estendida por linearidade). Para cada  $i_0, j_0$  fixados, temos que

$$\begin{aligned} (I \otimes f_{i_0} \otimes f_{j_0})(y) &= (I \otimes f_{i_0} \otimes f_{j_0})\left(\sum_{i,j} m_{ij} \otimes e_i \otimes e_j\right) \\ &= \sum_{ij} m_{ij} \otimes f_{i_0}(e_i) \otimes f_{j_0}(e_j) \\ &= m_{i_0 j_0} \otimes 1_k \otimes 1_k. \end{aligned}$$

Aplicando  $\phi$  à  $(I \otimes f_{i_0} \otimes f_{j_0})(y)$ , segue que  $m_{i_0 j_0} = 0$ . Mas  $i_0$  e  $j_0$ , embora fixados, são arbitrários. Logo,  $m_{ij} = 0$  e assim,  $y = 0$ . ■

No que segue agora, são definidas algumas outras funções  $k$ -lineares que motivam a definição de  $C^*$ -módulos racionais. Seja  $(M, \psi_M)$  um  $C^*$ -módulo à esquerda. Definimos

$$\rho_M : M \rightarrow \text{Hom}(C^*, M), \rho_M(m)(f) = f \cdot m = \psi_M(f \otimes m), m \in M, f \in C^*.$$

Sejam  $j : C \rightarrow C^{**}$  a inclusão canônica, dada por  $j(c)(f) = f(c)$ ,  $c \in C$ ,  $f \in C^*$  e

$$h_M : M \otimes C^{**} \xrightarrow{T} C^{**} \otimes M \xrightarrow{\phi} \text{Hom}(C^*, M)$$

e pela definição,  $h_M(m \otimes g)(f) = g(f)m$ , para qualquer  $m \in M, g \in C^{**}$  e  $f \in C^*$ . Observemos que  $h_M$  é injetora, pois  $T$  é um isomorfismo de  $k$ -espaços vetoriais e  $\phi$  é injetora, pelo Lema 2.18. Seguindo portanto, que a função

$$\mu_M : M \otimes C \rightarrow \text{Hom}(C^*, M) \text{ dada por } \mu_M = h_M(I \otimes j)$$

é injetora e é claro, pela definição da mesma, que

$$\begin{aligned} \mu_M(m \otimes c)(f) &= h_M(I \otimes j)(m \otimes c)(f) = h_M(m \otimes j(c))(f) \\ &= j(c)(f)m = f(c)m, \end{aligned}$$

para quaisquer  $c \in C$ ,  $f \in C^*$  e  $m \in M$ .

**Definição 2.33** *Um  $C^*$ -módulo à esquerda  $M$  é dito um módulo racional se*

$$\rho_M(M) \subseteq \mu_M(M \otimes C).$$

Podemos definir similarmente um  $C^*$ -módulo à direita racional considerando  $(M, \psi_M)$  acima um  $C^*$ -módulo à direita e alterando convenientemente as funções  $k$ -lineares dadas anteriormente.

Podemos enunciar a definição acima equivalentemente como

**Proposição 2.34**  *$M$  é um  $C^*$ -módulo à esquerda racional se, e somente se, para todo  $m \in M$  existem duas famílias finitas  $\{m_i\}_i \subseteq M$  e  $\{c_i\}_i \subseteq C$  tais que  $f \cdot m = \sum_i f(c_i)m_i$ , para todo  $f \in C^*$ .*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Por hipótese,  $\rho_M(M) \subseteq \mu_M(M \otimes C)$ , isto é, dado  $m \in M$ , existem  $\{m_i\}_i \subseteq M$  e  $\{c_i\}_i \subseteq C$  tais que  $\rho_M(m) = \mu_M(\sum_i m_i \otimes c_i)$  e isto nos diz que  $f \cdot m = \sum_i f(c_i)m_i$ , para todo  $f \in C^*$ .

( $\Leftarrow$ ) Se, dado  $m \in M$ , existem famílias finitas  $\{m_i\}_i \subseteq M$  e  $\{c_i\}_i \subseteq C$  tais que  $f \cdot m = \sum_i f(c_i)m_i$ , para todo  $f \in C^*$ . Então  $\rho_M(m)(f) = (\mu_M(\sum_i m_i \otimes c_i))(f)$ ,  $\forall f \in C^*$ . Logo,  $\rho_M(M) \subseteq \mu_M(M \otimes C)$ , isto é,  $M$  é um  $C^*$ -módulo à esquerda racional. ■

**Exemplo 2.35** Seja  $C$  uma coálgebra de dimensão finita. Então  $C^*$  é um  $C^*$ -módulo à esquerda racional.

De fato, como  $C$  tem dimensão finita, a aplicação  $j : C \rightarrow C^{**}$  dada por  $j(c)(f) = f(c)$ , com  $c \in C$  e  $f \in C^*$ , é um isomorfismo de coálgebras veja ([3], p.22). A função

$$h_{C^*} : C^* \otimes C^{**} \xrightarrow{T} C^{**} \otimes C^* \xrightarrow{\phi} \text{Hom}(C^*, C^*)$$

é um isomorfismo, pois neste caso,  $\phi$  é um isomorfismo  $k$ -linear, veja Lema 2.18.

Logo,  $\mu_{C^*}(C^* \otimes C) = \text{Hom}(C^*, C^*)$  e portanto,  $\rho_{C^*}(C^*) \subseteq \text{Hom}(C^*, C^*) = \mu_{C^*}(C^* \otimes C)$  e segue o resultado.

Denotamos a categoria dos  $C^*$ -módulos à esquerda racionais por  $\text{Rat}_{(C^* \mathcal{M})}$ . Lembramos que a categoria dos  $C$ -comódulos à direita é denotada por  $\mathcal{M}^C$ .

O teorema abaixo é fundamental para nosso trabalho, pois nos permite tratar comódulos à direita sobre uma coálgebra  $C$  como  $C^*$ -módulos à esquerda racionais e isto é interessante, pois trabalhamos

naturalmente com a estrutura de  $C^*$ -módulos e via o isomorfismo, trazemos os resultados para comódulos. Muitas vezes no trabalho tal resultado será usado e isto ficará claro pelo contexto, sendo desnecessário ficarmos nos remetendo a este toda vez que o utilizarmos.

**Teorema 2.36** *As categorias  $\mathcal{M}^C$  e  $\text{Rat}(C^*\mathcal{M})$  são isomorfas.*

**Demonstração:** Seja  $(M, \omega)$  um  $C$ -comódulo à direita. Pela Proposição 2.32,  $(M, \psi_\omega)$  é um  $C^*$ -módulo à esquerda. Agora, seja  $m \in M$ . Então  $\omega(m) = \sum m_0 \otimes m_1$ . Assim, para todo  $f \in C^*$ ,  $\psi_\omega(f \otimes m) = f \cdot m = \sum f(m_1)m_0$  e, por definição,  $M$  é um  $C^*$ -módulo à esquerda racional.

Sejam  $M$  e  $N$  dois  $C$ -comódulos à direita e  $f : M \rightarrow N$  um morfismo de comódulos. Mostremos que, considerando  $M$  e  $N$  como  $C^*$ -módulos,  $f$  é morfismo de  $C^*$ -módulos. De fato, sejam  $m \in M$  e  $g \in C^*$ . Então

$$\begin{aligned} f(g \cdot m) &= f\left(\sum g(m_1)m_0\right) = \sum g(m_1)f(m_0) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum g(f(m)_1)f(m)_0 = g \cdot f(m), \end{aligned}$$

a igualdade  $(*)$  é devida ao fato de que  $f$  é morfismo de comódulos. Assim, definimos um funtor  $T : \mathcal{M}^C \rightarrow \text{Rat}(C^*\mathcal{M})$  por  $T(M, \omega) = (M, \psi_\omega)$  e  $T(f) = f$ .

Seja  $(M, \psi)$  um  $C^*$ -módulo à esquerda racional. Como  $\mu_M : M \otimes C \rightarrow \text{Hom}(C^*, M)$  é injetora, então  $\tilde{\mu}_M : M \otimes C \rightarrow \mu_M(M \otimes C)$  é um isomorfismo de espaços vetoriais. Definimos

$$\omega_\psi : M \rightarrow M \otimes C \quad \text{por} \quad \omega_\psi(m) = \tilde{\mu}_M^{-1}(\rho_M(m)).$$

A função  $\omega_\psi$  está bem definida, pois  $\rho_M(M) \subseteq \mu_M(M \otimes C) = \tilde{\mu}_M(M \otimes C)$ . Dado  $m \in M$ , se  $\omega_\psi(m) = \sum_i m_i \otimes c_i$ , então  $\sum_i f(c_i)m_i = f \cdot m, \forall f \in C^*$ . De fato,

$$(\mu_M \omega_\psi(m))(f) = (\mu_M \tilde{\mu}_M^{-1} \rho_M(m))(f) = \rho_M(m)(f) = f \cdot m.$$

Por outro lado,  $(\mu_M(\sum_i m_i \otimes c_i))(f) = \sum_i (\mu_M(m_i \otimes c_i))(f) = \sum_i f(c_i)m_i$ . Segue o que queríamos.

Para mostrarmos que  $(M, \omega_\psi)$  é um  $C$ -comódulo à direita, basta provarmos que  $\psi_{\omega_\psi} = \psi$ . Se ocorre esta última igualdade, isto é,  $(M, \psi_{\omega_\psi}) = (M, \psi)$  que é um  $C^*$ -módulo à esquerda segue, da Proposição 2.32, que  $(M, \omega_\psi)$  é um  $C$ -comódulo à direita.

Seja  $m \in M$ . Então  $\omega_\psi(m) = \sum m_i \otimes c_i$ . Daí, pelo que fizemos acima,  $\sum f(c_i)m_i = f \cdot m$ , mas  $\rho_M(m)(f) = f \cdot m = \psi(f \otimes m)$ . Logo,  $\psi(f \otimes$

$m) = \sum_i f(c_i)m_i$ . Por outro lado, sendo  $\omega_\psi(m) = \sum_i m_i \otimes c_i$ , temos (por construção, veja Proposição 2.32) que  $\psi_{\omega_\psi}(f \otimes m) = \sum_i f(c_i)m_i$ .

Portanto,  $\psi_{\omega_\psi} = \psi$  e assim,  $(M, \omega_\psi)$  é um  $C$ -comódulo à direita.

Sejam  $(M, \psi_M)$  e  $(N, \psi_N)$  dois  $C^*$ -módulos à esquerda racionais e  $f : M \rightarrow N$  um morfismo de  $C^*$ -módulos. Mostremos que  $f : (M, \omega_{\psi_M}) \rightarrow (N, \omega_{\psi_N})$  é um morfismo de  $C$ -comódulos à direita.

Seja  $m \in M$  e suponhamos que  $\omega_{\psi_M}(m) = \sum_i m_i \otimes c_i$ . Queremos mostrar que  $(f \otimes I)\omega_{\psi_M} = \omega_{\psi_N}f$ . Para isso, vejamos que  $\mu_N((f \otimes I)\omega_{\psi_M}) = \mu_N(\omega_{\psi_N}f)$  e o resultado segue devido à injetividade de  $\mu_N$ . Seja  $g \in C^*$ . Então

$$\begin{aligned} \mu_N((f \otimes I)\omega_{\psi_M}(m))(g) &= \mu_N((f \otimes I)(\sum_i m_i \otimes c_i))(g) \\ &= \mu_N(\sum_i f(m_i) \otimes c_i)(g) \\ &= \sum_i \mu_N(f(m_i) \otimes c_i)(g) \\ &= \sum_i g(c_i)f(m_i) \\ &= f(\sum_i g(c_i)m_i) \\ &= f(g \cdot m) \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_N(\omega_{\psi_N}f(m))(g) &= \mu_N(\tilde{\mu}_N^{-1}\rho_N f(m))(g) \\ &= (\rho_N(f(m)))(g) \\ &= g \cdot f(m) \end{aligned}$$

Como  $f$  é um morfismo de módulos, temos que  $f(g \cdot m) = g \cdot f(m)$ . Portanto, obtivemos o que queríamos, donde  $f$  é um morfismo de  $C$ -comódulos. Construímos assim, um funtor  $S : \text{Rat}(C^*\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}^C$  tal que  $S(M, \psi) = (M, \omega_\psi)$  e  $S(f) = f$ .

Finalmente, mostremos que  $S \circ T = I_{\mathcal{M}^C}$  e que  $T \circ S = I_{\text{Rat}(C^*\mathcal{M})}$ . Primeiramente, provemos que  $(S \circ T)(M, \omega) = (M, \omega)$  e que  $(S \circ T)(f) = f$ . A última igualdade é óbvia, pois  $(S \circ T)(f) = S(T(f)) = S(f) = f$ . Resta provarmos que  $(S \circ T)(M, \omega) = (M, \omega_{\psi_\omega}) = (M, \omega)$ , em que  $\omega_{\psi_\omega}(m) = \tilde{\mu}_M^{-1}(\rho_M(m))$ . Daí, para todo  $g \in C^*$ , temos que

$$\mu_M(\tilde{\mu}_M^{-1}(\rho_M(m)))(g) = \rho_M(m)(g) = g \cdot m \quad e,$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} (\mu_M \omega(m))(g) &= (\mu_M(\sum m_0 \otimes m_1))(g) = \sum (\mu_M(m_0 \otimes m_1))(g) \\ &= \sum g(m_1)m_0 = \psi_\omega(g \otimes m) = g \cdot m. \end{aligned}$$

Logo,  $\mu_M(\tilde{\mu}_M^{-1}(\rho_M(m))) = \mu_M(\omega(m))$  e como  $\mu_M$  é injetora, segue que  $\omega_{\psi_\omega}(m) = \tilde{\mu}_M^{-1}(\rho_M(m)) = \omega(m)$ , para todo  $m \in M$  e portanto,  $\omega = \omega_{\psi_\omega}$ . Logo,  $S \circ T = I_{\mathcal{M}^C}$ .

Analogamente, para mostrarmos que  $T \circ S = I_{\text{Rat}(C^* \mathcal{M})}$ , é suficiente provarmos que  $(T \circ S)(M, \psi) = (M, \psi_{\omega_\psi}) = (M, \psi)$ , mas isto já foi mostrado acima. ■

Provamos no próximo resultado que a categoria  $\text{Rat}(C^* \mathcal{M})$  é fechada para submódulos, módulos quociente e somas diretas. O teorema abaixo é, de fato, usado para mostrarmos que  $\text{Rat}(C^* \mathcal{M}) = \sigma[C^* C]$ , veja Corolário 2.53. Na prova do que segue, consideramos  $C^*$ -módulos à esquerda. No entanto, o mesmo é válido se considerássemos  $C^*$ -módulos à direita.

**Teorema 2.37** *Seja  $C$  uma coálgebra. Então são válidas as afirmações.*

- (i) *Um submódulo cíclico de um  $C^*$ -módulo racional é finito-dimensional.*
- (ii) *Se  $M$  é um  $C^*$ -módulo racional e  $N$  é um  $C^*$ -submódulo de  $M$ , então  $N$  e  $M/N$  são  $C^*$ -módulos racionais.*
- (iii) *Se  $(M_i)_{i \in I}$  é uma família de  $C^*$ -módulos racionais, então  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  é um  $C^*$ -módulo racional.*

**Demonstração:** Para esta demonstração, usamos a caracterização de módulo racional dada na Proposição 2.34.

(i) Sejam  $M$  um  $C^*$ -módulo racional e  $C^* \cdot m$  o submódulo cíclico gerado por  $m \in M$ . Como  $M$  é racional, existem famílias finitas  $\{c_i\}_{i \in F} \subseteq C$  e  $\{m_i\}_{i \in F} \subseteq M$  ( $F$  é um conjunto finito) tais que  $f \cdot m = \sum_{i \in F} f(c_i)m_i$ , para todo  $f \in C^*$ . Logo,  $C^* \cdot m$  está contido no  $k$ -espaço vetorial gerado pela família  $\{m_i\}_{i \in F}$ . Portanto,  $C^* \cdot m$  tem dimensão finita.

(ii) Seja  $n \in N$ . Então  $n \in M$  e como  $M$  é racional, temos que  $\rho_M(n) \in \mu_M(M \otimes C)$ , isto é, existem famílias finitas  $\{c_i\}_{i \in F}$  em  $C$  e  $\{m_i\}_{i \in F}$  em  $M$  ( $F$  é um conjunto finito) e podemos considerar os  $c'_i$ s linearmente independentes. Para cada  $j \in F$ , existe  $c_j^* \in C^*$  tal que  $c_j^*(c_i) = \delta_{j,i}$  (delta de Kronecker). Assim, para todo  $j \in F$ ,  $c_j^* \cdot n = \sum_{i \in F} c_j^*(c_i)m_i = m_j \in N$ , pois  $c_j^* \cdot n \in N$  ( $N$  é um  $C^*$ -submódulo de  $M$ ). Logo,  $\{m_i\}_{i \in F} \subseteq N$  e portanto,  $N$  é um  $C^*$ -módulo racional.

Seja  $\bar{m} \in M/N$ . Como  $M$  é racional, existem famílias finitas  $\{m_i\}_{i \in F} \subseteq M$  e  $\{c_i\}_{i \in F} \subseteq C$  ( $F$  é um conjunto finito) tais que  $f \cdot m = \sum f(c_i)m_i, \forall f \in C^*$ . Claramente,  $\{\bar{m}_i\}_{i \in F} \subseteq M/N$ . Logo, para todo  $f \in C^*, f \cdot \bar{m} = \overline{f \cdot m} = \overline{\sum_{i \in F} f(c_i)m_i} = \sum_{i \in F} \overline{f(c_i)m_i} = \sum_{i \in F} f(c_i)\bar{m}_i$  e portanto,  $M/N$  é um  $C^*$ -módulo racional.

(iii) Para cada  $j \in I$ , seja  $q_j : M_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$  a inclusão natural de  $M_j$  em  $\bigoplus_{i \in I} M_i$ . Seja  $m \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ . Então  $m = \{m_i\}_{i \in I} = \sum_{i \in F} q_i(m_i)$ , em que  $F$  é um conjunto finito e cada  $q_i(m_i)$  é uma família quase-nula tal que todos os elementos da família são nulos, exceto possivelmente, o elemento  $m_i$ .

Para cada  $m_i \in M_i$  com  $i \in F$ , existem famílias finitas  $\{c_{i\lambda}\}_{\lambda \in F_i} \subseteq C$  e  $\{m_{i\lambda}\}_{\lambda \in F_i} \subseteq M_i$  ( $F_i$  é um conjunto finito) tais que  $f \cdot m_i = \sum_{\lambda \in F_i} f(c_{i\lambda})m_{i\lambda}$ , para todo  $f \in C^*$ . Então

$$\begin{aligned} f \cdot m &= f \cdot \left( \sum_{i \in F} q_i(m_i) \right) = \sum_{i \in F} q_i(f \cdot m_i) \\ &= \sum_{i \in F} q_i \left( \sum_{\lambda \in F_i} f(c_{i\lambda})m_{i\lambda} \right) = \sum_{i \in F} \sum_{\lambda \in F_i} f(c_{i\lambda})q_i(m_{i\lambda}), \end{aligned}$$

e isto nos diz que  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  é um  $C^*$ -módulo racional. ■

Já vimos que uma coálgebra  $C$  é um  $C$ -comódulo à direita (à esquerda) com aplicação de estrutura sendo a comultiplicação  $\Delta$ . Então  $C$  é um  $C^*$ -módulo à esquerda (à direita) racional com a ação à esquerda (à direita) dada por  $f \cdot c = \sum f(c_2)c_1$  ( $c \cdot f = \sum f(c_1)c_2$ ), para quaisquer  $f \in C^*$  e  $c \in C$ . Seguindo a notação de ([3], p.79), sempre que nos referirmos à coálgebra  $C$  como  $C^*$ -módulo, vamos denotar a ação à esquerda por  $f \dashv c$  e a ação à direita por  $c \lhd f$ , respectivamente.

A próxima proposição será útil no Capítulo 4. Antes de enunciá-la, lembramos que dado um anel  $(R, +, \cdot)$ , o seu *anel oposto*  $R^{op} = (R, +, \cdot^{op})$  em que  $r \cdot^{op} s = s \cdot r$ , para quaisquer  $r, s \in R$ . Recordamos também que para um  $R$ -módulo à esquerda (à direita)  $M$ , denotamos por  $End(RM)$  ( $End(MR)$ ), o anel dos endomorfismos de  $M$  com as operações  $+$  (soma pontual) e  $\circ$  (composição de funções), mantemos esta notação nos próximos capítulos.

**Proposição 2.38** *Seja  $(C, \Delta, \varepsilon)$  uma coálgebra. Então  $End(C^*C) \simeq (C^*)^{op}$  e  $C^* \simeq End(C_{C^*})$  são isomorfismos de  $k$ -álgebras.*

**Demonstração:** Na prova deste teorema, como dissemos no início do capítulo, mantemos a notação simplificada para composição de funções. Para provarmos o primeiro isomorfismo, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : (C^*)^{op} &\longrightarrow \text{End}_{(C^*C)} \\ f &\longmapsto \psi(f) : \begin{array}{ccc} C &\longrightarrow & C \\ c &\longmapsto & c \leftarrow f = \sum f(c_1)c_2 \\ & & = (\phi(f \otimes I)\Delta)(c), \end{array} \end{aligned}$$

em que  $\phi$  é o isomorfismo canônico  $k \otimes C \simeq C$ . Vejamos que  $\psi(f) \in \text{End}_{(C^*C)}$ . De fato, sejam  $c, d \in C$  e  $\alpha \in k$ . É imediato que

$$\psi(f)(c + d) = \psi(f)(c) + \psi(f)(d) \text{ e que } \psi(f)(\alpha c) = \alpha(\psi(f)(c)),$$

pois  $\psi(f)$  é a composta de funções  $k$ -lineares. Seja  $g \in C^*$ . Então

$$\begin{aligned} \psi(f)(g \rightarrow c) &= \psi(f)(\sum c_1g(c_2)) = \sum c_1g(c_2) \leftarrow f \\ &= \sum f(c_{1_1})c_{1_2}g(c_2) = \sum g(c_3)f(c_1)c_2 \\ &= \sum f(c_1)g(c_{2_2})c_{2_1} = g \rightarrow \sum f(c_1)c_2 \\ &= g \rightarrow \psi(f)(c). \end{aligned}$$

Verifiquemos agora que  $\psi$  é um morfismo de  $k$ -álgebras. Sejam  $f, g \in (C^*)^{op}$  e  $\alpha \in k$ . Então

$$\begin{aligned} \psi(\alpha f + g)(c) &= c \leftarrow (\alpha f + g) = \sum ((\alpha f + g)(c_1))c_2 \\ &= \sum (\alpha f)(c_1)c_2 + \sum g(c_1)c_2 \\ &= \sum \alpha(f(c_1))c_2 + \sum g(c_1)c_2 \\ &= \alpha \sum f(c_1)c_2 + \sum g(c_1)c_2 \\ &= \alpha(\psi(f)(c)) + \psi(g)(c) \\ &= (\alpha\psi(f))(c) + \psi(g)(c) \\ &= (\alpha\psi(f) + \psi(g))(c), \forall c \in C. \end{aligned}$$

Logo,  $\psi(\alpha f + g) = \alpha\psi(f) + \psi(g)$ . A seguir, mostremos que  $\psi(f *^{op} g) = \psi(f) \circ \psi(g)$ . De fato,

$$\begin{aligned}
\psi(f *^{op} g)(c) &= \psi(g * f)(c) = \sum (g * f)(c_1)c_2 \\
&= \sum g(c_{1_1})f(c_{1_2})c_2 = \sum g(c_1)f(c_2)c_3 \\
&= \sum g(c_1)f(c_{2_1})c_{2_2} = \psi(f)(\sum g(c_1)c_2) \\
&= \psi(f)(\psi(g)(c)) = (\psi(f) \circ \psi(g))(c), \forall c \in C.
\end{aligned}$$

Agora, provemos que  $\psi(\varepsilon) = I$ . De fato, seja  $c \in C$ . Então

$$\psi(\varepsilon)(c) = c \leftarrow \varepsilon = \sum \varepsilon(c_1)c_2 = c.$$

Portanto,  $\psi(\varepsilon)$  é a identidade em  $End(C^*C)$ . Finalmente, mostremos que a função

$$\begin{array}{ccc}
\tau : End(C^*C) & \longrightarrow & (C^*)^{op} \\
g & \longmapsto & \varepsilon g
\end{array}$$

é a inversa de  $\psi$ . De fato, sejam  $f \in (C^*)^{op}$  e  $c \in C$ . Então

$$\begin{aligned}
((\tau\psi)(f))(c) &= \tau(\psi(f))(c) = (\varepsilon\psi(f))(c) = \varepsilon(\psi(f)(c)) \\
&= \varepsilon(\sum f(c_1)c_2) = \sum f(c_1)\varepsilon(c_2) = \sum f(c_1\varepsilon(c_2)) \\
&= f(\sum c_1\varepsilon(c_2)) = f(c).
\end{aligned}$$

Logo,  $(\tau\psi)(f) = f$ . Por outro lado, para quaisquer  $g \in End(C^*C)$  e  $c \in C$ , temos que

$$\begin{aligned}
((\psi\tau)(g))(c) &= \psi(\tau(g))(c) = \psi(\varepsilon g)(c) = \sum (\varepsilon g(c_1))c_2 \\
&= \sum \varepsilon(g(c_1))c_2 = \phi(\varepsilon \otimes I)(\sum g(c_1) \otimes c_2) \\
&= (\phi(\varepsilon \otimes I)(g \otimes I)\Delta)(c) \stackrel{(*)}{=} (\phi(\varepsilon \otimes I)\Delta g)(c) \\
&= (\phi(\varepsilon \otimes I)\Delta)(g(c)) \stackrel{(**)}{=} \psi(g)(c),
\end{aligned}$$

em que a igualdade (\*), segue do fato de que  $g$  é um morfismo de  $C$ -comódulos à direita, isto é,  $\Delta g = (g \otimes I)\Delta$  e (\*\*) ocorre, pois  $\psi(\varepsilon) = I$ . Portanto,  $(\psi\tau)(g) = g$ . Concluimos que  $\psi$  é um isomorfismo de  $k$ -álgebras.



Para o segundo isomorfismo consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi: C^* &\longrightarrow \text{End}(C_{C^*}) \\ f &\longmapsto \varphi(f): \quad C \longrightarrow C \\ &\quad c \longmapsto f \cdot c = \sum_{\beta \in I} c_1 f(c_2) \\ &\quad \quad \quad = (\phi(I \otimes f)\Delta)(c), \end{aligned}$$

em que  $\phi$  é o isomorfismo canônico  $C \otimes k \simeq C$ . A prova de que  $\varphi$  é um isomorfismo de  $k$ -álgebras é semelhante à verificação feita para  $\psi$ . ■

## 2.2.4 Comódulos simples e comódulos injetivos

Nesta seção, apresentamos diversas definições e resultados auxiliares para mostrar que dada uma coálgebra  $C$ , temos que  $C = \bigoplus_{\beta \in I} E(S_\beta)$ , em que  $S_\beta$  é um  $C$ -comódulo à direita simples e  $E(S_\beta)$  é a envoltória injetiva de  $S_\beta$  na categoria dos  $C$ -comódulos à direita, para cada  $\beta \in I$ . Mostramos também outros resultados importantes como, por exemplo,  $\text{Rat}(C^* \mathcal{M}) = \sigma[C^* C]$ . Definimos módulos cogeneradores e auto-cogeneradores, noções estas importantes para os próximos capítulos.

Alertamos o leitor para o fato de que  $(C, \Delta, \varepsilon)$ , ou simplesmente  $C$ , é sempre uma coálgebra. Respeitamos a notação do Capítulo 1, escrevendo  $C^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} C_i$  com  $C_i = C, \forall i \in I$ , que é a soma direta do  $C^*$ -módulo  $C$  (ou  $C$ -comódulo  $C$ ). Aqui, fazemos todas as definições e resultados para comódulos à direita, mas estes são inteiramente análogos para comódulos à esquerda. Começamos definindo um comódulo livre.

**Definição 2.39** *Um  $C$ -comódulo à direita  $M$  é dito livre se  $M$  é isomorfo a um comódulo da forma  $X \otimes C$  com a estrutura de  $C$ -comódulo à direita dada por  $I \otimes \Delta: X \otimes C \rightarrow X \otimes C \otimes C$ , em que  $X$  é um  $k$ -espaço vetorial.*

Vimos, no Exemplo 2.25, que  $(X \otimes C, I \otimes \Delta)$  é, de fato, um  $C$ -comódulo à direita.

A observação abaixo, dita agora, é bem utilizada para provarmos resultados mais adiante, ainda nesta subseção.

**Observação 2.40** *Sejam  $\{e_i\}_{i \in I}$  uma base do  $k$ -espaço vetorial  $X$  e  $C$  uma coálgebra. Então  $X \otimes C$  e  $C^{(I)}$  são isomorfos como  $C$ -comódulos.*

Fazendo  $X = k$  na observação acima, temos que  $k \otimes C$  e  $C$  são isomorfos como  $C$ -comódulos e portanto,  $C$  é um  $C$ -comódulo à direita livre.

**Proposição 2.41** *Todo  $C$ -comódulo à direita é isomorfo a um subcomódulo de um  $C$ -comódulo livre.*

**Demonstração:** Seja  $M$  um  $C$ -comódulo à direita. Então  $M \otimes C$  é um  $C$ -comódulo à direita com a aplicação  $I \otimes \Delta : M \otimes C \rightarrow M \otimes C \otimes C$  que, por definição, é um  $C$ -comódulo livre.

Consideremos  $\rho : M \rightarrow M \otimes C$  a aplicação de estrutura do comódulo  $M$ . Da definição de  $C$ -comódulo à direita temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes C \\ \rho \downarrow & & \downarrow I \otimes \Delta \\ M \otimes C & \xrightarrow{\rho \otimes I} & M \otimes C \otimes C. \end{array}$$

Logo,  $\rho$  é um morfismo entre os  $C$ -comódulos  $(M, \rho)$  e  $(M \otimes C, I \otimes \Delta)$ . Provemos que  $\rho$  é injetora. De fato, seja  $m \in \text{Ker} \rho$ . Então  $0 = \rho(m) = \sum m_0 \otimes m_1$ . Considerando  $\phi : M \otimes k \rightarrow k$  o isomorfismo canônico e aplicando  $\phi(I \otimes \varepsilon)$  à  $\rho(m)$  temos que  $0 = \phi((I \otimes \varepsilon)(\sum m_0 \otimes m_1)) = \sum m_0 \varepsilon(m_1) = m$ . Portanto,  $M$  é isomorfo à  $\text{Im} \rho$ .

Como  $\rho$  é morfismo de comódulos, segue que  $\text{Im} \rho$  é um  $C$ -subcomódulo de  $M \otimes C$ . Daí,  $M$  é isomorfo a um subcomódulo de um comódulo livre. ■

Agora, definimos um comódulo injetivo.

**Definição 2.42** *Seja  $M$  um  $C$ -comódulo à direita. Então  $M$  é dito injetivo se  $M$  é um objeto injetivo na categoria  $\mathcal{M}^C$ , isto é, para qualquer morfismo injetor  $\iota : X \rightarrow Y$  de  $C$ -comódulos à direita e qualquer morfismo  $f : X \rightarrow M$  de  $C$ -comódulos à direita, existe um morfismo de  $C$ -comódulos à direita  $\bar{f} : Y \rightarrow M$  tal que  $\bar{f} \iota = f$ . Visualizamos isto no diagrama*

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \xrightarrow{\iota} Y \\ & & \downarrow f \quad \swarrow \bar{f} \\ & & M. \end{array}$$

Não provamos o próximo resultado, apenas o enunciamos. Entretanto, sua prova pode ser encontrada em ([3], Corollary 2.4.5). A importância deste resultado é que este nos permite concluir que o  $C$ -comódulo  $C$  é auto-injetivo.

**Proposição 2.43** *Todo  $C$ -comódulo à direita livre é injetivo. Em particular,  $C$  é um  $C$ -comódulo à direita injetivo.*

Segue, obviamente, da proposição acima que  $C$  é um  $C$ -comódulo à direita auto-injetivo (equivalentemente,  $C$  é um  $C^*$ -módulo à esquerda auto-injetivo) e este fato é importante no Capítulo 4.

**Proposição 2.44** *Seja  $M$  um  $C$ -comódulo à direita. Então  $M$  é injetivo se, e somente se,  $M$  é um somando direto de um  $C$ -comódulo à direita livre.*

**Demonstração:** ( $\Leftarrow$ ) Seja  $F$  um  $C$ -comódulo à direita livre tal que  $F = M \oplus X$ , para algum  $C$ -subcomódulo  $X$  de  $F$ . Pela proposição anterior,  $F$  é um  $C$ -comódulo injetivo.

Vejamus que  $M$  é um  $C$ -comódulo injetivo. Sejam  $\iota : Y \rightarrow Z$  um morfismo injetor e  $f : Y \rightarrow M$  um morfismo, ambos de  $C$ -comódulos à direita. Consideremos  $i : M \rightarrow F$  a inclusão canônica. Como  $F$  é um  $C$ -comódulo injetivo, existe um morfismo  $g : Z \rightarrow F$  de  $C$ -comódulos à direita tal que  $g\iota = if$ . Visualizemos no diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{\iota} & Z \\
 & & \downarrow f & \nearrow \bar{f} & \nearrow g \\
 & & M & & \\
 & & \uparrow \pi & \nearrow i & \nearrow \\
 & & F & & 
 \end{array}$$

Definimos  $\bar{f} : Z \rightarrow M$  por  $\bar{f} = \pi g$ , em que  $\pi : F \rightarrow M$ ,  $\pi(m + x) = m$ , para quaisquer  $m \in M$  e  $x \in X$ . É claro que  $\bar{f}$  é morfismo de  $C$ -comódulos. Além disso, para todo  $y \in Y$ ,

$$\begin{aligned}
 (\bar{f}\iota)(y) &= \bar{f}(\iota(y)) = (\pi g)(\iota(y)) = \pi((g\iota)(y)) \\
 &= \pi((if)(y)) = \pi(i(f(y))) = \pi(f(y)) = f(y).
 \end{aligned}$$

Logo,  $\bar{f}\iota = f$  e portanto,  $M$  é um  $C$ -comódulo injetivo.

( $\Rightarrow$ ) Seja  $M$  um  $C$ -comódulo injetivo. Pela Proposição 2.41,  $M$  é isomorfo a um subcomódulo de algum comódulo livre, digamos  $N$ . Por definição, existe um isomorfismo de  $C$ -comódulos entre  $N$  e  $X \otimes C$ , para algum  $k$ -espaço vetorial  $X$ . Da Observação 2.40, segue que  $X \otimes C \simeq C^{(\Omega)}$  para algum conjunto  $\Omega$  que indexa a base de  $X$ . Logo, existe um morfismo injetor de  $C$ -comódulos  $\iota : M \rightarrow C^{(\Omega)}$ .

Sendo  $M$  injetivo, existe  $j : C^{(\Omega)} \rightarrow M$  morfismo de  $C$ -comódulos

tal que  $j\iota = I$ , conforme o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\iota} & C^{(\Omega)} \\
 & & \downarrow I & \swarrow j & \\
 & & M & & 
 \end{array}$$

Como a sequência  $0 \longrightarrow M \xrightleftharpoons[j]{\iota} C^{(\Omega)} \longrightarrow C^{(\Omega)}/\iota(M) \longrightarrow 0$

cinde, temos que  $C^{(\Omega)} = \iota(M) \oplus \text{Ker}j \simeq M \oplus \text{Ker}j$ . Portanto,  $M$  é somando direto de algum comódulo livre. ■

A demonstração da proposição que segue pode ser encontrada em ([3], Proposition 2.4.8).

**Proposição 2.45** *Seja  $\{M_i\}_{i \in I}$  uma família de  $C$ -comódulos à direita injetivos. Então a soma direta  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  é um  $C$ -comódulo à direita injetivo.*

Agora, definimos comódulo simples e mostramos alguns resultados relativos a estes, para depois, provarmos a decomposição de  $C$  mencionada inicialmente.

**Definição 2.46** *Um  $C$ -comódulo à direita  $M$  é dito simples se  $M$  é não-nulo e se os únicos subcomódulos de  $M$  são  $0$  e  $M$ .*

O seguinte resultado é bem interessante, pois garante que todo comódulo não-nulo possui um subcomódulo simples.

**Proposição 2.47** *Seja  $M$  um  $C$ -comódulo não-nulo. Então  $M$  possui um subcomódulo simples.*

**Demonstração:** Seja  $m \in M$  não-nulo. Pelo Teorema 2.37 - (i), o subcomódulo  $C^* \cdot m$  gerado por  $m$  é finito dimensional. Obviamente, existe um subcomódulo  $S$  de  $C^* \cdot m$  de menor dimensão possível dentre todos os subcomódulos não-nulos de  $C^* \cdot m$ , tal  $S$  é um subcomódulo simples. ■

Sejam  $M$  um  $C$ -comódulo à direita e  $S$  um  $C$ -subcomódulo de  $M$ . Do isomorfismo entre as categorias  $\mathcal{M}^C$  e  $\text{Rat}(C^* \mathcal{M})$ , temos que  $S$  é um  $C$ -comódulo à direita simples se, e somente se,  $S$  é um  $C^*$ -módulo à esquerda (racional) simples. Assim, faz sentido considerar o *socle* de

$M$ ,  $\text{soc}(M)$ , como definido no Capítulo 1, isto é,  $\text{soc}(M)$  é a soma de todos os  $C^*$ -submódulos à esquerda (racionais) simples de  $M$ .

Seja  $N$  um subcomódulo de  $M$ . Dizemos que  $N$  é um *subcomódulo essencial* em  $M$  se, como  $C^*$ -submódulo de  $M$ ,  $N$  é essencial em  $M$ , veja Definição 1.4.

**Corolário 2.48** *Seja  $M$  um  $C$ -comódulo à direita não-nulo. Então  $\text{soc}(M)$  é um subcomódulo essencial em  $M$ .*

**Demonstração:** Trivialmente,  $\text{soc}(M)$  é não-nulo, pois  $M$  possui subcomódulo simples. Seja  $N$  um subcomódulo não-nulo de  $M$ . Pela proposição anterior,  $N$  possui um subcomódulo simples, digamos  $X$ . Obviamente,  $X$  é um subcomódulo simples de  $M$ . Daí,  $0 \neq X = \text{soc}(M) \cap X \subseteq \text{soc}(M) \cap N$ . Logo,  $\text{soc}(M) \cap N \neq 0$  e isto nos diz que  $\text{soc}(M)$  é essencial em  $M$ . ■

**Proposição 2.49** *Todo  $C$ -comódulo simples possui dimensão finita.*

**Demonstração:** Seja  $S$  um  $C$ -comódulo simples. Como  $S$  é não-nulo, existe  $0 \neq x \in S$ . Temos que  $C^* \cdot x$  é um subcomódulo não-nulo de  $S$ . Portanto,  $S = C^* \cdot x$  e, pelo Teorema 2.37 - (i),  $S$  é finito dimensional. ■

**Proposição 2.50** *Todo  $C$ -comódulo à direita simples é isomorfo à um coideal à direita de  $C$ .*

**Demonstração:** Seja  $S$  um  $C$ -comódulo à direita simples. Pela proposição anterior,  $S$  possui dimensão finita, isto é,  $\dim S = n$ . Da Proposição 2.41, segue que  $S$  e  $\text{Imp} \rho$  são comódulos simples isomorfos, em que  $\rho : S \rightarrow S \otimes C$  é a estrutura de comódulo de  $S$ . A Observação 2.40 nos dá que  $C^n \simeq S \otimes C$  e portanto, existe um morfismo injetor de  $C$ -comódulos  $f : S \rightarrow C^n$ . No entanto, podemos considerar  $f$  um morfismo injetor de  $C^*$ -módulos à esquerda (racionais). Daí,  $S$  é isomorfo a um  $C^*$ -submódulo simples  $N$  de  $C^n$  que, claramente, está contido em  $\text{soc}(C^n)$ .

Como  $C^n = \bigoplus_{i=1}^n C_i$ ,  $C_i = C$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  segue, da Proposição 1.14 - (iii), que  $\text{soc}(C^n) = \text{soc}(C)^n$ . Assim,  $S \simeq N \subseteq \text{soc}(C^n) = \text{soc}(C)^n$  e isto nos diz que  $S$  é isomorfo a um submódulo (simples) de  $C$ . Portanto,  $S$  é isomorfo a um subcomódulo (simples) de  $C$ , ou seja,  $S$  é isomorfo a um coideal à direita de  $C$ . ■

Todo objeto em  $\mathcal{M}^C$  possui uma envoltória injetiva, ou seja, para todo  $M$  em  $\mathcal{M}^C$  existe um objeto injetivo  $E(M)$  em  $\mathcal{M}^C$  tal que  $M$  é

um subcomódulo essencial em  $E(M)$ . Caso necessário, para mais detalhes, veja ([3], p.92). Gostaríamos de esclarecer ao leitor que, mais à frente, será mostrado que  $Rat_{(C^* \mathcal{M})} = \sigma_{[C^* C]}$  e, segundo a notação do Capítulo 1, deveríamos escrever  $\widehat{M}$  ao invés de  $E(M)$ , uma vez que enxergando  $E(M)$  como  $C^*$ -módulo à esquerda racional (devido ao isomorfismo dado no Teorema 2.36) tal envoltória estaria em  $\sigma_{[C^* C]}$ . Entretanto, como não trabalhamos com envoltória injetiva em  $C^*$ -Mod neste trabalho, não haverá perigo de confusão quanto à notação e preferimos manter a notação  $E(M)$  dada em [3]. Tal notação será usada novamente no Capítulo 4 e lá não faremos mais nenhuma menção quanto a isso.

**Corolário 2.51** *Seja  $S$  um  $C$ -comódulo simples. Então existe uma envoltória injetiva  $E(S)$  de  $S$  tal que  $E(S) \subseteq C$ .*

**Demonstração:** Sejam  $E(S)$  uma envoltória injetiva de  $S$  e  $f : S \rightarrow E(S)$  um morfismo injetor de  $C$ -comódulos tal que  $f(S)$  é um subcomódulo essencial em  $E(S)$ , veja Definição 1.9. Pela proposição anterior, existe um morfismo injetor de  $C$ -comódulos  $i : S \rightarrow C$ . Como  $C$  é injetivo na categoria  $\mathcal{M}^C$ , existe um morfismo de  $C$ -comódulos  $g : E(S) \rightarrow C$  tal que  $gf = i$ . Mostremos que  $g$  é injetor.

De fato, seja  $a \in \text{Ker}g \cap f(S)$ . Então  $g(a) = 0$  e  $a = f(b)$ , para algum  $b \in S$  e daí,  $0 = g(f(b)) = i(b)$ . Logo,  $b = 0$ , pois  $i$  é injetora e assim,  $a = 0$ . Portanto,  $\text{Ker}g \cap f(S) = 0$ . Como  $f(S)$  é essencial em  $E(S)$ , segue que  $\text{Ker}g = 0$  e, desta maneira,  $E(S)$  pode ser mergulhado em  $C$ . ■

**Teorema 2.52** *Sejam  $C$  uma coálgebra e  $\text{soc}(C) = \bigoplus_{i \in I} M_i$ , o socle de  $C$ , com a estrutura de  $C$ -comódulo à direita, isto é, os  $M_i$ s são todos os  $C$ -subcomódulos à direita simples de  $C$ . Então  $C = \bigoplus_{i \in I} E(M_i)$ , em que  $E(M_i)$  é a envoltória injetiva de  $M_i$  contida em  $C$ .*

**Demonstração:** Pelo corolário anterior, para cada  $i \in I$ , existe uma envoltória injetiva  $E(M_i)$  de  $M_i$  tal que  $E(M_i) \subseteq C$ . Como os  $M_i$ s são  $C^*$ -submódulos (simples) de  $C$  cuja soma é direta e cada  $M_i$  é essencial em  $E(M_i)$ , segue que a soma dos  $C^*$ -submódulos à esquerda racionais  $E(M_i)$  de  $C$  (ou  $C$ -subcomódulos à direita  $E(M_i)$  de  $C$ ) é também direta e que  $\bigoplus_{i \in I} M_i \leq_e \bigoplus_{i \in I} E(M_i)$ , veja ([14], p.139 - 17.4). Portanto,

$$\text{soc}(C) = \bigoplus_{i \in I} M_i \leq_e \bigoplus_{i \in I} E(M_i) \subseteq C.$$

Pela Proposição 2.45,  $\bigoplus_{i \in I} E(M_i)$  é injetivo em  $\mathcal{M}^C$ , que é equivalente a dizermos que, como  $C^*$ -módulo à esquerda racional,  $\bigoplus_{i \in I} E(M_i)$

é injetivo. Assim,  $\bigoplus_{i \in I} E(M_i)$  é um somando direto de  $C$ , isto é,  $C = (\bigoplus_{i \in I} E(M_i)) \oplus X$ , em que  $X$  é um submódulo de  $C$  (ou  $X$  é um subcomódulo de  $C$ ), este fato decorre de ([6], p.197 - Proposition 3.13), que diz que um módulo é injetivo se, e somente se, é um somando direto de todo módulo do qual é um submódulo.

Pelo Corolário 2.48,  $\text{soc}(C)$  é um subcomódulo essencial em  $C$ . Como  $\text{soc}(C) \subseteq \bigoplus_{i \in I} E(M_i) \subseteq C$  e  $\text{soc}(C) \leq_e C$ , segue que  $\bigoplus_{i \in I} E(M_i)$  é essencial em  $C$ , pela Proposição 1.5. Mas  $(\bigoplus_{i \in I} E(M_i)) \cap X = 0$ , donde  $X = 0$  e portanto,  $C = \bigoplus_{i \in I} E(M_i)$ . ■

O seguinte resultado será útil para provarmos a Proposição 2.56, mas se nos recordarmos do Capítulo 1, vemos que a categoria  $\sigma[C^*C]$  é a menor subcategoria plena de  $C^*\text{-Mod}$  que contém  $C^*C$  e que é fechada para submódulos, módulos quociente e somas diretas.

**Proposição 2.53**  $\text{Rat}(C^*\mathcal{M}) = \sigma[C^*C]$ .

**Demonstração:** Pelo Teorema 2.37,  $\text{Rat}(C^*\mathcal{M})$  é fechada para submódulos, módulos quociente e somas diretas. Claramente,  $C$  é um  $C^*$ -módulo à esquerda racional, isto é,  $\text{Rat}(C^*\mathcal{M})$  contém  $C$ . Mas, da Proposição 1.3,  $\sigma[C^*C]$  é a menor subcategoria plena de  $C^*\text{-Mod}$  com estas propriedades, donde  $\sigma[C^*C] \subseteq \text{Rat}(C^*\mathcal{M})$ .

Seja  $M \in \text{Rat}(C^*\mathcal{M})$ . Então  $M$  é um  $C$ -comódulo à direita. Pela Proposição 2.41, segue que  $M$  e  $\text{Imp}$  são comódulos isomorfos, em que  $\rho : M \rightarrow M \otimes C$  é a estrutura de comódulo de  $M$ . Da Observação 2.40, temos que  $M \otimes C$  é isomorfo a  $C^{(I)}$  como comódulos, o conjunto  $I$  indexa a base de  $M$ . Assim, existe um epimorfismo (na verdade, um isomorfismo) de  $C^{(I)}$  em  $M \otimes C$  e como  $M \simeq \text{Imp} \subseteq M \otimes C$ , segue que  $M$  é  $C$ -subgerado. Logo,  $M \in \sigma[C^*C]$ . Portanto,  $\text{Rat}(C^*\mathcal{M}) = \sigma[C^*C]$ . ■

Para finalizarmos este capítulo, apresentamos o conceito de cogrador, necessário para mostrarmos a proposição que segue. Apresentamos tal definição numa categoria qualquer, mas depois, particularizamos tal conceito para as categorias  $R\text{-Mod}$  e  $\sigma[M]$ .

**Definição 2.54** *Seja  $\mathcal{U}$  um conjunto (classe) não-vazio de objetos de uma categoria  $\mathcal{C}$ . Um objeto  $B$  em  $\mathcal{C}$  é cogorado por  $\mathcal{U}$  se, para qualquer par de morfismos distintos  $f, g : A \rightarrow B$  em  $\mathcal{C}$ , existe um morfismo  $h : B \rightarrow U$  com  $U \in \mathcal{U}$  e  $hf \neq hg$ . Então  $\mathcal{U}$  é chamado um conjunto (classe) de cogradores para  $B$ .*

$\mathcal{U}$  é dito um conjunto (classe) de cogradores para uma subcategoria  $\mathcal{C}'$  de  $\mathcal{C}$  se todo objeto em  $\mathcal{C}'$  é cogorado por  $\mathcal{U}$ . No caso em que  $\mathcal{U}$

tem apenas um elemento,  $U \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ,  $U$  é chamado um cogrador para  $B$ , respectivamente para  $\mathcal{C}'$ , se  $\mathcal{U} = \{U\}$  tem a propriedade correspondente.

Nos próximos capítulos, usamos a seguinte caracterização de cogrador na categoria  $R\text{-Mod}$  (noção dual de gerador dada no Capítulo 1), o leitor pode consultar ([14], p.113 - 14.3).

*Seja  $\mathcal{U}$  um conjunto não-vazio de  $R$ -módulos. Um  $R$ -módulo  $N$  é  $\mathcal{U}$ -cogorado se, e somente se, existe um monomorfismo  $N \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  com  $U_\lambda \in \mathcal{U}$ , para todo  $\lambda \in \Lambda$ .*

Agora, estamos interessados em mostrar que uma coálgebra  $C$  é um cogrador em  $\mathcal{M}^C$ . No entanto, sabemos que  $\mathcal{M}^C \simeq \text{Rat}(C^*\mathcal{M}) = \sigma_{[C^*C]}$ , então basta mostrarmos que  $C$  é um cogrador em  $\sigma_{[C^*C]}$ . Assim, usamos a seguinte caracterização de cogrador dada em ([14], p.131 - 16.5).

*Seja  $M$  um  $R$ -módulo. Um módulo injetivo  $Q$  em  $\sigma[M]$  é um cogrador em  $\sigma[M]$  se, e somente se,  $Q$  cogera todo módulo simples em  $\sigma[M]$ .*

Ainda, antes de provarmos a próxima proposição, lembramos que dados  $R$ -módulos  $L$  e  $N$ , o submódulo

$$\text{Re}(L, N) = \cap \{ \text{Ker } f : f \in \text{Hom}(L, N) \} \subseteq L$$

é chamado *reject* do  $R$ -módulo  $N$  em  $L$ .

**Lema 2.55** ([14], 14.5) *Sejam  $L, N$  dois  $R$ -módulos. Então  $\text{Re}(L, N) = 0$  se, e somente se,  $L$  é  $N$ -cogorado (ou  $N$  cogera  $L$ ).*

**Proposição 2.56** *Seja  $C$  uma coálgebra. Então  $C$  como um  $C^*$ -módulo à esquerda é um cogrador em  $\sigma_{[C^*C]}$ .*

**Demonstração:** Sabemos que  $C$  é um  $C$ -comódulo injetivo em  $\mathcal{M}^C$  e portanto,  $C$  é um  $C^*$ -módulo injetivo em  $\text{Rat}(C^*\mathcal{M}) = \sigma_{[C^*C]}$ .

Seja  $S$  um  $C^*$ -módulo simples em  $\sigma_{[C^*C]}$ . Então  $S$  é um  $C$ -comódulo simples. Pela Proposição 2.50, segue que  $S$  é isomorfo à um subcomódulo simples  $S'$  de  $C$ . Sendo assim, existe  $\varphi : S \rightarrow S'$  um isomorfismo de  $C$ -comódulos à direita. Considerando a inclusão canônica  $i : S' \rightarrow C$ , temos que  $i\varphi : S \rightarrow C$  é um morfismo injetor de  $C^*$ -módulos (racionais).

Por definição,  $\text{Re}(S, C) \subseteq \text{Ker}(i\varphi) = 0$  e daí,  $\text{Re}(S, C) = 0$ . Pelo lema acima, temos que  $C$  cogera  $S$ , para todo  $C^*$ -módulo simples em  $\sigma_{[C^*C]}$ . Portanto,  $C$  é um cogrador em  $\sigma_{[C^*C]}$ . ■

Finalmente, definimos módulo auto-cogrador e mostremos com o



auxílio da proposição acima que  $C$  é um  $C^*$ -módulo à esquerda auto-cogerador.

**Definição 2.57** ([14], p.120) *Um  $R$ -módulo  $M$  é dito auto-cogerador se  $M$  cogera todo módulo da forma  $M/N$  para qualquer submódulo  $N$  de  $M$ , isto é,  $M$  cogera todos os seus módulos quociente.*

**Corolário 2.58** *Seja  $C$  uma coálgebra. Então  $C$  como um  $C^*$ -módulo à esquerda é auto-cogerador.*

**Demonstração:** Seja  $D$  um  $C^*$ -submódulo à esquerda de  $C$ . Pelo Teorema 2.37,  $C/D$  é um  $C^*$ -módulo à esquerda racional. Como  $\text{Rat}(C^*M) = \sigma[C^*C]$ , temos que  $C/D \in \sigma[C^*C]$ . Pela proposição anterior,  $C$  é um cogerador em  $\sigma[C^*C]$  e portanto,  $C$  cogera  $C/D$ . Logo,  $C$  é auto-cogerador. ■

# Capítulo 3

## Reticulados

Começamos este capítulo apresentando alguns resultados de distributividade para um reticulado qualquer a fim de darmos uma idéia geral sobre tal assunto. A seguir somos mais específicas, estudando a distributividade em anéis e módulos que, de fato, é o que interessa para o trabalho. Apresentamos duas importantes caracterizações de módulos distributivos: via submódulos, devida à Stephenson e a outra a nível de elementos, devida à Ferrero e Sant’Ana. Ambas são usadas em demonstrações de resultados fundamentais desta dissertação.

Este capítulo é baseado nas referências [4], [8], [10], [11], [13] e [14].

### 3.1 Reticulados distributivos e modulares

**Definição 3.1** *Um reticulado é um sistema  $(L, \leq, \wedge, \vee)$ , em que  $L$  é um conjunto qualquer,  $\leq$  é uma relação de ordem parcial em  $L$  e  $\vee, \wedge$  são duas operações binárias definidas em  $L$ , satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (i)  $x \leq (y \wedge z) \Leftrightarrow x \leq y$  e  $x \leq z$ , para quaisquer  $x, y, z \in L$ ;
- (ii)  $(y \vee z) \leq x \Leftrightarrow y \leq x$  e  $z \leq x$ , para quaisquer  $x, y, z \in L$ .

Esta definição é equivalente a dizermos que  $L$  é um conjunto parcialmente ordenado no qual, para quaisquer dois elementos  $x, y \in L$ , existem uma maior cota inferior, chamada *ínfimo* de  $x$  e  $y$  e notamos por  $\inf\{x, y\}$  e uma menor cota superior, chamada *supremo* de  $x$  e  $y$  que notamos por  $\sup\{x, y\}$ . Abaixo, fazemos a prova desta equivalência.

( $\Leftarrow$ ) De fato, suponhamos que para quaisquer  $x, y \in L$ , existam o ínfimo e o supremo de tais elementos, que chamamos  $x \wedge y = \inf\{x, y\}$

e  $x \vee y = \sup\{x, y\}$ . Verifiquemos que  $\wedge$  e  $\vee$  satisfazem (i) e (ii) da definição acima.

(i) Suponhamos que  $x \leq y \wedge z$ , para quaisquer  $x, y, z \in L$ . Como  $y \wedge z \leq y$  e  $y \wedge z \leq z$ , então  $x \leq y$  e  $x \leq z$ . Reciprocamente, se  $x \leq y$  e  $x \leq z$  então  $x \leq y \wedge z$ .

(ii) Suponhamos que  $y \vee z \leq x$ , para quaisquer  $x, y, z \in L$ . Então  $y \leq y \vee z \leq x$  e  $z \leq y \vee z \leq x$ . Logo,  $y \leq x$  e  $z \leq x$ . Reciprocamente, se  $y \leq x$  e  $z \leq x$  então  $y \vee z \leq x$ .

( $\Rightarrow$ ) Temos que  $x \wedge y \leq x \wedge y$  para quaisquer  $x, y \in L$ . Pelo item (i),  $x \wedge y \leq x$  e  $x \wedge y \leq y$ . Logo,  $x \wedge y$  é uma cota inferior para o conjunto  $\{x, y\}$ . Seja  $z \in L$  tal que  $z \leq x$  e  $z \leq y$ . Então  $z \leq x \wedge y$ , por (i). Logo,  $x \wedge y$  é a maior cota inferior do conjunto  $\{x, y\}$ , isto é,  $x \wedge y$  é o ínfimo de  $x$  e  $y$ . Analogamente,  $x \vee y$  é o supremo de  $x$  e  $y$ .

Lembramos que, num reticulado  $(L, \leq, \wedge, \vee)$ , as operações  $\wedge$  e  $\vee$  são idempotentes ( $\forall x \in L, x \wedge x = x$  e  $x \vee x = x$ ), associativas, comutativas e se, para  $x, y \in L$  tais que  $x \leq y$ , então  $x \wedge y = x$  e  $x \vee y = y$ . Em toda a seção, estes fatos serão usados naturalmente.

Os próximos exemplos são os reticulados que, de fato, são usados nesta dissertação.

**Exemplo 3.2** Sejam  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda e  $L = \{N : N \text{ é submódulo de } M\}$ . Então  $(L, \subseteq, \cap, +)$  é um reticulado. Denotamos este reticulado por  $\mathcal{L}({}_R M)$ .

**Exemplo 3.3** Sejam  $R$  um anel e  $L = \{I : I \text{ é ideal à esquerda de } R\}$ . Então  $(L, \subseteq, \cap, +)$  é um reticulado. Podemos considerar também  $L = \{I : I \text{ é ideal à direita de } R\}$ .

**Exemplo 3.4** Sejam  $C$  uma coálgebra,  $M$  um  $C$ -comódulo à direita e  $L = \{N : N \text{ é um } C\text{-subcomódulo de } M\}$ . Então  $(L, \subseteq, \cap, +)$  é um reticulado. Basta verificarmos que a interseção e a soma de dois subcomódulos é um subcomódulo de  $M$ .

De fato, sejam  $N$  e  $P$  dois  $C$ -subcomódulos de  $M$ . Como  $N \cap P$  e  $N + P$  são  $C^*$ -submódulos de  $M$  então, pelo Teorema 2.37,  $N + P$  e  $N \cap P$  são ambos  $C^*$ -submódulos racionais de  $M$  e portanto,  $C$ -subcomódulos de  $M$ .

Agora, estudamos a respeito de reticulados modulares e sua relação com reticulados distributivos.

**Definição 3.5** Um reticulado  $(L, \leq, \wedge, \vee)$  é dito modular se, para quaisquer  $x, y, z \in L$  com  $x \leq y$ , então  $(z \wedge y) \vee x = (z \vee x) \wedge y$ .

Notemos que se  $x \leq y$ , para  $x, y, z \in L$ , então  $(z \wedge y) \vee x \leq (z \vee x) \wedge y$ . De fato, temos que  $x \leq y$  e  $x \leq x \vee z$ , o que implica  $x \leq y \wedge (x \vee z)$ . Além disso,  $y \wedge z \leq y$  e  $y \wedge z \leq z \leq x \vee z$ , implicam que  $y \wedge z \leq y \wedge (x \vee z)$ . Portanto,  $x \vee (y \wedge z) \leq y \wedge (x \vee z)$ .

Logo, para verificarmos a modularidade de um reticulado, basta mostrarmos que  $(z \vee x) \wedge y \leq (z \wedge y) \vee x$ .

**Exemplo 3.6** Seja  $M$  um  $R$ -módulo. Então o reticulado  $\mathcal{L}({}_R M)$  é modular. De fato, sejam  $N, P$  e  $K$  submódulos de  $M$  tais que  $N \subseteq P$ . Pelo que vimos na observação acima, basta mostrarmos que  $(K + N) \cap P \subseteq (K \cap P) + N$ .

Seja  $x \in (K + N) \cap P$ . Então  $x = y + z \in P$  em que  $y \in K$  e  $z \in N$ . Como  $N \subseteq P$ , segue que  $z \in P$  e assim,  $y \in P$ . Logo,  $y \in K \cap P$  e portanto,  $x \in (K \cap P) + N$ .

**Lema 3.7** *Seja  $\mathcal{L} = (L, \leq, \wedge, \vee)$  um reticulado tal que  $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z)$ , para quaisquer  $x, y, z \in L$ . Então  $\mathcal{L}$  é modular.*

**Demonstração:** Sejam  $x, y, z \in L$  tais que  $z \leq x$ . Então

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee z = (x \wedge y) \vee z.$$

Por outro lado,

$$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge x = (y \vee z) \wedge x \wedge (x \vee y) = (y \vee z) \wedge x.$$

Logo,  $(x \wedge y) \vee z = (y \vee z) \wedge x$ . ■

**Definição 3.8** *Um reticulado  $(L, \leq, \wedge, \vee)$  é dito distributivo se*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \forall x, y, z \in L.$$

**Observação 3.9** Notemos que  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$  é sempre verdade. De fato, como  $x \wedge y \leq x$  e  $x \wedge y \leq y \leq y \vee z$ , então  $x \wedge y \leq x \wedge (y \vee z)$ . Analogamente,  $x \wedge z \leq x \wedge (y \vee z)$ . Logo,  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$ .

**Teorema 3.10** *Seja  $\mathcal{L} = (L, \leq, \wedge, \vee)$  um reticulado. Então as seguintes condições são equivalentes, para quaisquer  $x, y, z \in L$ :*

- (i)  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ ;
- (ii)  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ ;
- (iii)  $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z)$ .

**Demonstração:** (i)  $\Rightarrow$  (ii)

$$\begin{aligned}
 (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] = x \vee [z \wedge (x \vee y)] \\
 &= x \vee [(z \wedge x) \vee (z \wedge y)] = [x \vee (x \wedge z)] \vee (z \wedge y) \\
 &= x \vee (y \wedge z).
 \end{aligned}$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)

$$\begin{aligned}
 [(x \wedge y) \vee (y \wedge z)] \vee (x \wedge z) &= \{[(x \wedge y) \vee (y \wedge z)] \vee x\} \\
 &\quad \wedge \{[(x \wedge y) \vee (y \wedge z)] \vee z\} \\
 &= [x \vee (y \wedge z)] \wedge [(x \wedge y) \vee z] \\
 &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) \\
 &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z).
 \end{aligned}$$

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Chamando  $u = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z)$  e  $v = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z)$  temos, por hipótese, que  $u = v$  e portanto,  $x \wedge u = x \wedge v$ . Como  $x \leq x \vee y$  e  $x \leq x \vee z$ , segue que

$$\begin{aligned}
 x \wedge v &= x \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z) \\
 &= x \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z) \\
 &= x \wedge (y \vee z).
 \end{aligned}$$

A hipótese (iii) nos diz que  $\mathcal{L}$  é modular, tendo em mente o Lema 3.7. Como  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x$  vem da modularidade que

$$(c \wedge x) \vee [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)] = [c \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z)] \wedge x, \forall c \in L.$$

Assim, para  $c = y \wedge z$  vem que

$$\begin{aligned}
 x \wedge u &= x \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z)] \\
 &= (y \wedge z \wedge x) \vee [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)].
 \end{aligned}$$

Como  $x \wedge y \wedge z \leq x$  e  $x \wedge y \wedge z \leq y$ , então  $x \wedge y \wedge z \leq x \wedge y$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 x \wedge u &= [(y \wedge z \wedge x) \vee (x \wedge y)] \vee (x \wedge z) \\
 &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z).
 \end{aligned}$$

Portanto,  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge u = x \wedge v = x \wedge (y \vee z)$ . ■

**Observação 3.11** Por (i) e (ii) do teorema acima, o reticulado  $\mathcal{L} =$

$(L, \leq, \wedge, \vee)$  é distributivo se, e somente se,  $\mathcal{L}^0 = (L, \leq, \vee, \wedge)$  é distributivo. O reticulado  $\mathcal{L}^0$  é chamado *reticulado dual* do reticulado  $\mathcal{L}$ .

**Corolário 3.12** *Todo reticulado distributivo é modular.*

**Demonstração:** Seja  $\mathcal{L} = (L, \leq, \wedge, \vee)$  um reticulado distributivo. Pelo teorema acima, para quaisquer  $x, y, z \in L$ ,  $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z)$  e isto implica, pelo Lema 3.7, que o reticulado  $\mathcal{L}$  é modular. ■

**Definição 3.13** *Um reticulado  $\mathcal{L} = (L, \leq, \wedge, \vee)$ , em que  $\leq$  é uma relação de ordem total em  $L$ , é chamado reticulado de cadeia.*

Mediante tal definição temos o seguinte resultado.

**Proposição 3.14** *Todo reticulado de cadeia é distributivo.*

**Demonstração:** De fato, seja  $\mathcal{L} = (L, \leq, \wedge, \vee)$  um reticulado de cadeia. Queremos mostrar que, para quaisquer  $x, y, z \in L$ ,  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ . Podemos ter  $x \leq y \vee z$  ou  $y \vee z \leq x$ .

Considerando  $x \leq y \vee z$ , então  $x \leq y$  ou  $x \leq z$ . Assim, no caso em que  $x \leq z$ , temos

$$x \wedge (y \vee z) = x = (x \wedge y) \vee x = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

O caso  $x \leq y$  é análogo.

Por outro lado, se  $y \vee z \leq x$  então  $y \leq x$  e  $z \leq x$  e daí,

$$x \wedge (y \vee z) = y \vee z = (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \quad \blacksquare$$

Do que vimos até agora, para um reticulado  $\mathcal{L} = (L, \leq, \wedge, \vee)$  temos as implicações

$$\mathcal{L} \text{ é de cadeia} \Rightarrow \mathcal{L} \text{ é distributivo} \Rightarrow \mathcal{L} \text{ é modular.}$$

Os reticulados de cadeia são retomados no Capítulo 4, onde são definidos módulos unisseriais e anéis de cadeia à direita (à esquerda). Abaixo, um exemplo de um módulo cujo reticulado de submódulos é de cadeia.

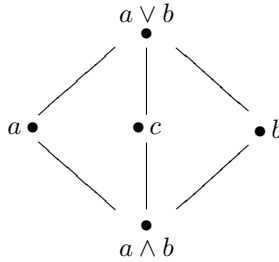
**Exemplo 3.15**  $M = R = \mathbb{Z}_8$ , isto é, consideramos  $\mathbb{Z}_8$  como um módulo sobre si próprio. Os ideais de  $\mathbb{Z}_8$  são  $\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$ ,  $\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{6} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ ,  $\langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}\}$  e  $\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \mathbb{Z}_8$ . Vemos claramente que o reticulado de seus submódulos é de cadeia.

Gostaríamos de mostrar que, mediante hipótese adicional, vale a recíproca da segunda implicação acima. Para isso, apresentamos a seguinte definição.

**Definição 3.16** *Sejam  $(L, \leq, \wedge, \vee)$  um reticulado e  $a, b \in L$ . Dizemos que um elemento  $c \in L$  tal que  $a \wedge b \leq c \leq a \vee b$  é um complemento de  $a$  relativo a  $b$  se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i)  $a \vee c = a \vee b$ ;
- (ii)  $a \wedge c = a \wedge b$ .

Podemos vizualizar um complemento  $c$  de  $a$  relativo a  $b$  através do diagrama abaixo:



**Teorema 3.17** *Seja  $\mathcal{L} = (L, \leq, \wedge, \vee)$  um reticulado modular. Então  $\mathcal{L}$  é distributivo se, e somente se, complementos relativos são únicos.*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Sejam  $a, b \in L$  e  $c$  um complemento de  $a$  relativo a  $b$ . Queremos mostrar que  $c = b$ , pois  $b$  é sempre um tal complemento. Temos, pela distributividade de  $\mathcal{L}$ , que

$$\begin{aligned} c &= c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b) \\ &= (b \wedge a) \vee (c \wedge b) = (a \wedge b) \vee (c \wedge b) \\ &= (a \vee c) \wedge b = (a \vee b) \wedge b = b. \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $\mathcal{L}$  não seja distributivo. Então pelo Teorema 3.10, existem elementos  $x, y, z \in \mathcal{L}$  tais que

$$u = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z) \neq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z) = v.$$

Mostremos primeiramente que  $u \leq v$ . Como  $x \wedge y \leq x \vee y$ ,  $x \wedge y \leq y \leq y \vee z$  e  $x \wedge y \leq x \leq x \vee z$ , então  $x \wedge y \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z)$ . Analogamente,  $y \wedge z \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z)$  e  $x \wedge z \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z)$ . Da Definição 3.1 - (ii), segue que  $u \leq v$ .

Consideremos  $a = (v \wedge x) \vee u$ ,  $b = (v \wedge y) \vee u$  e  $c = (v \wedge z) \vee u$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned} v \wedge x &= (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) \wedge x \\ &= (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge x = x \wedge (y \vee z). \end{aligned}$$

Analogamente,  $v \wedge y = (x \vee z) \wedge y$ . Logo,

$$\begin{aligned} a \vee b &= [x \wedge (y \vee z)] \vee u \vee [(x \vee z) \wedge y] \vee u = \\ &= [x \wedge (y \vee z)] \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee [(x \vee z) \wedge y] \\ &= [x \wedge (y \vee z)] \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee \{(y \wedge z) \vee [(x \vee z) \wedge y]\} \\ &= (*). \end{aligned}$$

Como  $x \wedge y \leq y \vee z$  e assim, pela modularidade, segue que

$$[l \wedge (y \vee z)] \vee (x \wedge y) = [l \vee (x \wedge y)] \wedge (y \vee z), \text{ para todo } l \in L.$$

Para  $l = x$ , vem que

$$[x \wedge (y \vee z)] \vee (x \wedge y) = [x \vee (x \wedge y)] \wedge (y \vee z) = x \wedge (y \vee z). \quad (3.1)$$

Aplicando a modularidade à  $y \wedge z \leq z \vee x$ , temos que

$$[l \wedge (z \vee x)] \vee (y \wedge z) = [l \vee (y \wedge z)] \wedge (z \vee x), \text{ para todo } l \in L.$$

Fazendo  $l = y$ , segue que

$$[y \wedge (z \vee x)] \vee (y \wedge z) = [y \vee (y \wedge z)] \wedge (z \vee x) = y \wedge (z \vee x). \quad (3.2)$$

Novamente, aplicando a modularidade à  $z \wedge x \leq y \vee z$ , temos que

$$[l \wedge (y \vee z)] \vee (z \wedge x) = [l \vee (z \wedge x)] \wedge (y \vee z), \text{ para todo } l \in L.$$

Fazendo  $l = x$ , segue que

$$[x \wedge (y \vee z)] \vee (z \wedge x) = [x \vee (z \wedge x)] \wedge (y \vee z) = x \wedge (y \vee z). \quad (3.3)$$

Então

$$\begin{aligned} (*) &\stackrel{(3.2)}{=} [x \wedge (y \vee z)] \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee [y \wedge (z \vee x)] \\ &\stackrel{(3.1)}{=} [x \wedge (y \vee z)] \vee (x \wedge z) \vee [y \wedge (z \vee x)] \\ &\stackrel{(3.3)}{=} [x \wedge (y \vee z)] \vee [y \wedge (z \vee x)]. \end{aligned}$$



Logo,  $a \vee b = [x \wedge (y \vee z)] \vee [y \wedge (z \vee x)]$ .

Como  $x \wedge (y \vee z) \leq x \leq z \vee x$ , temos que  $x \wedge (y \vee z) \leq z \vee x$ . Aplicando a modularidade à  $x \wedge (y \vee z) \leq z \vee x$ , segue que

$$[l \wedge (z \vee x)] \vee [x \wedge (y \vee z)] = [l \vee [x \wedge (y \vee z)]] \wedge (z \vee x), \text{ para todo } l \in L.$$

Para  $l = y$ , temos que

$$[y \wedge (z \vee x)] \vee [x \wedge (y \vee z)] = [y \vee [x \wedge (y \vee z)]] \wedge (z \vee x).$$

Donde,

$$a \vee b = [y \vee [x \wedge (y \vee z)]] \wedge (z \vee x).$$

Aplicando a modularidade à  $y \leq y \vee z$ , segue que

$$[l \wedge (y \vee z)] \vee y = (l \vee y) \wedge (y \vee z), \text{ para todo } l \in L.$$

Para  $l = x$ , temos que  $[x \wedge (y \vee z)] \vee y = (x \vee y) \wedge (y \vee z)$ . Assim,

$$a \vee b = [(x \vee y) \wedge (y \vee z)] \wedge (z \vee x) = v.$$

Analogamente, mostra-se que  $a \vee c = v = b \vee c$ . Logo,  $a \vee b = a \vee c$ . Aplicando a modularidade à  $u \leq v$ , segue que

$$(l \wedge v) \vee u = (l \vee u) \wedge v, \text{ para todo } l \in L.$$

Fazendo  $l = x$ , temos que  $a = (x \wedge v) \vee u = (x \vee u) \wedge v$ . Analogamente,  $b = v \wedge (y \vee u)$  e  $c = v \wedge (z \vee u)$ .

Repetindo os argumentos anteriores, prova-se que  $u = a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c$ . Aplicando a modularidade à  $u \leq v$ , temos que  $(l \wedge v) \vee u = (l \vee u) \wedge v$ , para todo  $l \in L$ . Para  $l = z$ , segue que  $u \leq (z \wedge v) \vee u = (z \vee u) \wedge v = c \leq v$  e portanto,  $a \wedge b = u \leq c \leq v = a \vee b$ . Logo,  $c$  é um complemento de  $a$  relativo a  $b$  e assim, complementos relativos não são únicos, o que é um absurdo. Portanto,  $\mathcal{L}$  é distributivo. ■

**Exemplo 3.18** O reticulado dos subespaços vetoriais de um  $k$ -espaço vetorial  $V$  (reticulado dos  $k$ -submódulos de  $V$ ) com  $\dim_k V \geq 2$  não é distributivo, pois complementos relativos não são únicos em  $\mathcal{L}(V)$ .

## 3.2 Distributividade em anéis e módulos

Nesta seção, introduzimos os principais conceitos e resultados sobre a distributividade em anéis e módulos para esta dissertação. Alguns

dos principais resultados que provamos no Capítulo 4 são fortemente baseados em resultados desta seção como, por exemplo, o Teorema 3.23, a Proposição 3.25 e o Corolário 3.30.

Na seção anterior, consideramos  $\mathcal{L} = (L, \leq, \wedge, \vee)$  com  $L$  um conjunto qualquer. Agora, estudamos a situação particular em que fixado um  $R$ -módulo  $M$ , consideramos  $L = \{N : N \text{ é um submódulo de } M\}$ , isto é, estudamos o reticulado dos  $R$ -submódulos de um módulo  $M$ .

**Definição 3.19** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda (à direita). Dizemos que  $M$  é um módulo distributivo se o reticulado dos  $R$ -submódulos à esquerda (à direita) de  $M$  é distributivo, isto é,  $I \cap (J + K) = (I \cap J) + (I \cap K)$ , para quaisquer  $I, J$  e  $K$  submódulos à esquerda (à direita) de  $M$ .*

Equivalentemente, como vimos no Teorema 3.10,  $M$  é distributivo se  $I + (J \cap K) = (I + J) \cap (I + K)$ , para quaisquer  $I, J$  e  $K$   $R$ -submódulos de  $M$ .

Seja  $R$  um anel e consideremos  $R$  como  $R$ -módulo à esquerda (à direita). Então os  $R$ -submódulos à esquerda (à direita) do módulo  $R$  são exatamente seus ideais à esquerda (à direita). Isto motiva a seguinte definição.

**Definição 3.20** *Dizemos que um anel  $R$  é distributivo à esquerda (à direita) se o seu reticulado dos ideais à esquerda (à direita) é distributivo.*

Se  $R$  é um anel distributivo à direita e à esquerda, então  $R$  é dito um *anel distributivo*.

Aproveitando que acabamos de definir distributividade em anéis, mostramos um resultado que, embora seja imediato, o mesmo será útil no Capítulo 4.

**Proposição 3.21** *Seja  $R$  um anel. Então  $R$  é distributivo à esquerda (à direita) se, e somente se,  $R^{op}$  é distributivo à direita (à esquerda).*

**Demonstração:** Basta mostrarmos que  $I$  é ideal à esquerda de  $R$  se, e somente se,  $I$  é ideal à direita de  $R^{op}$ .

( $\Rightarrow$ ) De fato, seja  $a \in R$ . Então  $I \cdot^{op} a = a \cdot I \subseteq I$  e portanto,  $I$  é um ideal à direita de  $R^{op}$ .

( $\Leftarrow$ ) Considerando  $I$  um ideal à direita de  $R^{op}$ , temos que  $a \cdot I = I \cdot^{op} a \subseteq I$  e daí,  $I$  é um ideal à esquerda de  $R$ . ■

Agora, apresentamos um lema necessário para obtermos uma caracterização de módulos distributivos devida à Stephenson.

**Lema 3.22** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda. Então existe uma bijeção entre  $\text{Hom}(N, P)$  e o conjunto dos complementos de  $P$  relativos a  $N$ , para quaisquer  $N$  e  $P$  em  $\mathcal{L}({}_R M)$ .*

**Demonstração:** Suponhamos, sem perda de generalidade<sup>(\*)</sup>, que  $N \cap P = 0$ . Então  $N + P = N \oplus P$ . Seja

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \text{Hom}(N, P) & \rightarrow & \{X \in \mathcal{L}({}_R M) : X \oplus P = N \oplus P\} \\ \alpha & \mapsto & \text{Ker}\alpha^* \end{array}$$

em que  $\alpha^* : N \oplus P \rightarrow P$  é tal que  $\alpha^*|_N = \alpha$  e  $\alpha^*|_P = I_P$ . Primeiramente, provemos que  $\varphi$  está bem definida, isto é,  $\text{Ker}\alpha^* \in \{X \in \mathcal{L}({}_R M) : X \oplus P = N \oplus P\}$ , para todo  $\alpha \in \text{Hom}(N, P)$ .

Seja  $y \in \text{Ker}\alpha^* \oplus P$ . Então  $y = x + z$  com  $x \in \text{Ker}\alpha^*$  e  $z \in P$ . Mas  $\text{Ker}\alpha^*$  e  $P$  estão ambos em  $N \oplus P$  e daí,  $y \in N \oplus P$ .

Seja  $y \in N \oplus P$ . Então  $y = x + z$  com  $x \in N$  e  $z \in P$ . Consideremos  $\alpha$  a função nula. Assim,  $\alpha^*(x) = \alpha(x) = 0$  e daí,  $x \in \text{Ker}\alpha^*$ . Portanto,  $y \in \text{Ker}\alpha^* \oplus P$ .

Vejam a injetividade de  $\varphi$ . Sejam  $\alpha, \beta \in \text{Hom}(N, P)$  tais que  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ . Então  $\text{Ker}\alpha^* = \text{Ker}\beta^*$ . Temos, para todo  $x \in N$ , que  $\alpha^*(\alpha(x)) = I_P(\alpha(x)) = \alpha(x) = \alpha^*(x)$  e portanto,  $\alpha^*(x - \alpha(x)) = 0$ . Logo,  $x - \alpha(x) \in \text{Ker}\alpha^* = \text{Ker}\beta^*$ . Assim,  $0 = \beta^*(x - \alpha(x)) = \beta^*(x) - \beta^*(\alpha(x)) = \beta(x) - \alpha(x)$  e isto implica que  $\alpha(x) = \beta(x)$ , para todo  $x \in N$ , isto é,  $\alpha = \beta$ .

Agora, mostremos que  $\varphi$  é sobrejetora. De fato, seja  $X \in \mathcal{L}({}_R M)$  tal que  $X \oplus P = N \oplus P$ . Consideremos  $p : X \oplus P \rightarrow P$  a projeção canônica de  $X \oplus P$  em  $P$ . Claramente,  $\text{Ker}p = X$ . Como  $X \oplus P = N \oplus P$ , podemos definir  $\alpha = p|_N = p \circ i_N$ , em que  $i_N : N \rightarrow N \oplus P$  é a inclusão natural de  $N$  em  $N \oplus P$ . Notemos que  $\alpha^* = p$ , pois  $p|_N = \alpha$  e  $p|_P = I_P$ . Portanto,  $\varphi(\alpha) = \text{Ker}\alpha^* = \text{Ker}p = X$  e  $\varphi$  é sobrejetora. Concluímos que  $\varphi$  é bijetora.

Fazemos uma observação quanto ao (\*) acima. Se  $N \cap P \neq 0$ , consideramos  $N' = N/(N \cap P)$  e  $P' = P/(N \cap P)$ . Como  $N' \cap P' = 0$  temos, pelo que fizemos acima, uma bijeção entre  $\text{Hom}(N', P')$  e complementos de  $P'$  relativos a  $N'$ . ■

**Teorema 3.23** ([11], Proposition 1.1) *Seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda. Então  $M$  é um módulo distributivo se, e somente se,  $\text{Hom}(N/(N \cap P), P/(N \cap P)) = 0$ , para quaisquer  $N$  e  $P$  em  $\mathcal{L}({}_R M)$ .*

**Demonstração:** O Teorema 3.17 nos diz que que um reticulado modular é distributivo se, e somente se, complementos relativos são únicos.

No entanto, sabemos pelo Exemplo 3.6 que o reticulado dos submódulos de um módulo é modular. Assim, para quaisquer  $N$  e  $P$  em  $\mathcal{L}({}_R M)$ , precisamos mostrar que complementos de  $P/(N \cap P)$  relativos a  $N/(N \cap P)$  são únicos se, e somente se,  $\text{Hom}(N/(N \cap P), P/(N \cap P)) = 0$ .

Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $N \cap P = 0$ . Pelo lema anterior existe uma bijeção entre  $\text{Hom}(N, P)$  e complementos de  $P$  relativos a  $N$ . Se  $\text{Hom}(N, P) = 0$  então o único complemento de  $P$  relativo a  $N$  é  $\text{Ker}0^* = N$ .

Por outro lado, se complementos de  $P$  relativos a  $N$  são únicos, então este conjunto é  $\{N\}$ , pois  $N$  é um complemento de  $P$  relativo a  $N$ . Pela bijeção, existe um único  $\alpha \in \text{Hom}(N, P)$  tal que  $\text{Ker}\alpha^* = N$  e assim,  $\alpha = 0$ . ■

A seguinte proposição é uma outra caracterização de módulos distributivos em termos de seus elementos. Esta é bem importante para a demonstração do Lema 4.10 e por isso incluímos sua prova aqui. Além de ([4], Proposition 3.1), tal prova pode ser encontrada em ([13], p.65), onde R. D. Vecchia estudou distributividade em anéis e módulos em sua dissertação. Enunciamos, sem provar, um lema auxiliar para a prova da mesma.

Seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda. No próximo lema vamos utilizar a notação  $(K : x) = \{r \in R : rx \in K\}$ , em que  $K$  é um  $R$ -submódulo de  $M$  e  $x \in M$ , e este é um ideal à esquerda de  $R$ .

**Lema 3.24**  *$M$  é um  $R$ -módulo à esquerda distributivo se, e somente se,  $(Rx : y) + (Ry : x) = R$  para quaisquer  $x, y \in M$ .*

**Demonstração:** ([11], Theorem 1.6) ou ([13], Teorema 3.18).

**Proposição 3.25** ([4], Proposition 3.1) *Seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda (à direita). Então  $M$  é distributivo se, e somente se, para quaisquer  $x, y \in M$  e  $P$  um ideal à esquerda (à direita) maximal de  $R$ , existe  $s \in R_P = R \setminus P$  tal que ou  $sx \in Ry$  ou  $sy \in Rx$  (ou  $xs \in yR$  ou  $ys \in xR$ ).*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $M$  seja distributivo. Sejam  $x, y \in M$  e  $P$  ideal à esquerda maximal de  $R$ . Pelo lema acima, existem  $s \in (Rx : y)$  e  $t \in (Ry : x)$  tais que  $s + t = 1$ . Segue que  $sy \in Rx$  e  $tx \in Ry$ . Além disso,  $s \in R_P$  ou  $t \in R_P$ , pois se  $s \notin R_P$  e  $t \notin R_P$  então  $s, t \in P$  e assim,  $s + t = 1 \in P$ , o que é um absurdo.

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $M$  não seja distributivo. Pelo lema acima, existem  $x$  e  $y$  em  $M$  tais que  $(Rx : y) + (Ry : x) = J \subsetneq R$ . Pelo Lema

de Zorn, existe  $P$  um ideal à esquerda maximal de  $R$  tal que  $J \subseteq P$ . Por hipótese, existe  $s \in R_P$  tal que ou  $sx \in Ry$  ou  $sy \in Rx$ .

Se  $sx \in Ry$ . Então  $s \in (Ry : x) \cap R_P \subseteq J \cap R_P = \emptyset$ , o que é um absurdo. O mesmo absurdo teríamos se  $sy \in Rx$ . Logo,  $M$  é distributivo. ■

Para os resultados seguintes, estabelecemos mais algumas notações e definições usadas até o final deste capítulo. Convencionamos escrever à direita os homomorfismos de  $R$ -módulos à esquerda, isto é, se  $f : M \rightarrow N$  é um homomorfismo de  $R$ -módulos à esquerda então, para todo  $m \in M$ , escrevemos  $(m)f$  ao invés de  $f(m)$ . Neste caso, se  $g : P \rightarrow M$  é um homomorfismo de  $R$ -módulos à esquerda então a composta  $g \circ f : P \rightarrow N$  é escrita como  $(x)(g \circ f) = ((x)g)f$ , para todo  $x \in P$ .

Segundo esta notação, dado um  $R$ -módulo à esquerda  $M$  e  $S = \text{End}(M)$ , o anel de endomorfismos de  $M$ , este torna-se um  $S$ -módulo à direita com a ação  $m \cdot f = (m)f, \forall f \in S$  e  $\forall m \in M$ .

Agora, introduzimos as funções  $\text{Ann}$  e  $\text{Ker}$ , que são definidas entre os reticulados  $\mathcal{L}({}_R M)$  e  $\mathcal{L}(S_S)$ . Nossa principal referência para este assunto é ([14], p.230).

Para cada  $X \in \mathcal{L}(S_S)$ , o reticulado dos  $S$ -submódulos à direita de  $S$  (ou ideais à direita de  $S$ ), definimos

$$\text{Ker}(X) = \bigcap \{ \text{Ker}g : g \in X \}.$$

Claramente,  $\text{Ker}(X) \in \mathcal{L}({}_R M)$ . Seja  $K \in \mathcal{L}({}_R M)$ , definimos

$$\text{Ann}(K) = \{ f \in S : K \subseteq \text{Ker}f \} = \{ f \in S : (K)f = 0 \}.$$

É óbvio que  $\text{Ann}(K) \in \mathcal{L}(S_S)$ . Desta maneira, ficam definidas as funções

$$\text{Ann} : \mathcal{L}({}_R M) \rightarrow \mathcal{L}(S_S) \quad \text{e} \quad \text{Ker} : \mathcal{L}(S_S) \rightarrow \mathcal{L}({}_R M).$$

No caso de considerarmos  $R$ -módulos à direita, os homomorfismos são escritos à esquerda. Temos as mesmas considerações feitas acima respeitando, é claro, tal notação. Neste caso, consideramos  $\mathcal{L}(M_R)$  e  $\mathcal{L}(S_S)$ , em que  $S$  é o anel dos endomorfismos de  $M$  como um  $R$ -módulo à direita.

Os resultados a seguir são mostrados para  $R$ -módulos à esquerda, entretanto, os mesmos podem ser provados para  $R$ -módulos à direita. Como alguns destes são usados posteriormente em ambas versões, escrevemos os enunciados considerando módulos tanto à esquerda quanto

à direita.

Com o objetivo de provarmos a Proposição 3.28, mostramos alguns lemas. Para isto, mantemos as notações acima.

**Lema 3.26** *Se  $M$  é um  $R$ -módulo à esquerda (à direita) auto-injetivo, então  $Ann$  é um anti-homomorfismo do reticulado  $\mathcal{L}(\mathcal{L}_R M)$  em  $\mathcal{L}(S_S)$  ( $\mathcal{L}(M_R)$  em  $\mathcal{L}(S_S)$ ), isto é, para quaisquer  $N$  e  $L$  em  $\mathcal{L}(\mathcal{L}_R M)$  ( $\mathcal{L}(M_R)$ ),  $Ann(N+L) = Ann(N) \cap Ann(L)$  e  $Ann(N \cap L) = Ann(N) + Ann(L)$ .*

**Demonstração:** Seja  $f \in Ann(N+L)$ . Então  $N+L \subseteq Kerf$ . Logo,  $N \subseteq Kerf$  e  $L \subseteq Kerf$  e isto implica que  $f \in Ann(N) \cap Ann(L)$ . Agora, seja  $f \in Ann(N) \cap Ann(L)$ . Então  $N \subseteq Kerf$  e  $L \subseteq Kerf$ . Claramente,  $N+L \subseteq Kerf$ . Portanto,  $f \in Ann(N+L)$ .

Seja  $h \in Ann(N) + Ann(L)$ . Então  $h = f + g$  com  $f \in Ann(N)$  e  $g \in Ann(L)$  e portanto,  $N \subseteq Kerf$  e  $L \subseteq Kerg$ . Logo,  $(N \cap L)(f+g) = 0$ , isto é,  $h \in Ann(N \cap L)$ .

Agora, provemos a última inclusão. Seja  $f \in Ann(N \cap L)$ . Então  $N \cap L \subseteq Kerf$ . Consideremos  $\bar{f} : M/(N \cap L) \rightarrow M$  dada por  $(m + (N \cap L))\bar{f} = (m)f$ . Temos que  $\bar{f}$  está bem definida, pois  $N \cap L \subseteq Kerf$ . Claramente,  $\bar{f}$  é um homomorfismo de  $R$ -módulos, pois  $f$  o é.

Seja  $\varphi : M/(N \cap L) \rightarrow M/N \oplus M/L$  dada por  $(x + (N \cap L))\varphi = (x + N) + (x + L)$ , para todo  $x \in M$ . É de fácil verificação que  $\varphi$  está bem definida e que  $\varphi$  é um monomorfismo de  $R$ -módulos. Sendo  $M$  auto-injetivo e considerando as sequências exatas curtas  $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$  e  $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow M/L \rightarrow 0$ , segue que  $M$  é  $M/N$ -injetivo e  $M/L$ -injetivo e portanto,  $M$  é  $(M/N \oplus M/L)$ -injetivo, estes fatos seguem de ([14], p.128 - 16.2 (1) e (2)).

Assim, existe um homomorfismo  $h : M/N \oplus M/L \rightarrow M$  tal que  $\varphi \circ h = \bar{f}$ . O diagrama abaixo mostra tal situação

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & M/(N \cap L) & \xrightarrow{\varphi} & M/N \oplus M/L \\
 & & \bar{f} \downarrow & \swarrow h & \\
 & & M & & 
 \end{array}$$

Sejam  $g' = h|_{M/N}$ ,  $k' = h|_{M/L}$ ,  $p_N : M \rightarrow M/N$  e  $p_L : M \rightarrow M/L$  ambas projeções canônicas. Definimos  $g = p_N \circ g'$  e  $k = p_L \circ k'$  ambas em  $S$  e observemos que  $N \subseteq Kerg$  e  $L \subseteq Kerk$ , donde  $g \in Ann(N)$  e  $k \in Ann(L)$ .

Para quaisquer  $m, m' \in M$ , temos que

$$\begin{aligned}
 ((m + N) + (m' + L))h &= (m + N)h + (m' + L)h \\
 &= (m + N)g' + (m' + L)k' \\
 &= ((m)p_N)g' + ((m')p_L)k' \\
 &= (m)g + (m')k.
 \end{aligned}$$

Logo, para todo  $m \in M$ ,

$$\begin{aligned}
 (m)(g + k) &= (m)g + (m)k = ((m + N) + (m + L))h = \\
 &= ((m + (N \cap L))\varphi)h = (m + (N \cap L))\bar{f} = (m)f.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $f = g + k$ , em que  $g \in \text{Ann}(N)$  e  $k \in \text{Ann}(L)$ . ■

**Lema 3.27** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda (à direita) auto-injetivo. Então*

$$\text{Ann}(\text{Ker}f) = fS \quad (\text{Ann}(\text{Ker}f) = Sf), \text{ para todo } f \in S.$$

**Demonstração:** Seja  $h \in \text{Ann}(\text{Ker}f)$ . Então  $h \in S$  e  $\text{Ker}f \subseteq \text{Ker}h$ . Claramente,  $\bar{f} : M/\text{Ker}f \rightarrow M$  dada por  $(m + \text{Ker}f)\bar{f} = (m)f$ , para todo  $m \in M$ , é um monomorfismo de  $R$ -módulos.

Definimos  $\bar{h} : M/\text{Ker}f \rightarrow M$  por  $(m + \text{Ker}f)\bar{h} = (m)h$ . De fato,  $\bar{h}$  está bem definida, pois  $\text{Ker}f \subseteq \text{Ker}h$ . Como  $M$  é auto-injetivo, existe um  $R$ -homomorfismo de módulos  $g : M \rightarrow M$  tal que  $\bar{f} \circ g = \bar{h}$ . Temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & M/\text{Ker}f & \xrightarrow{\bar{f}} & M \\
 & & \downarrow \bar{h} & \swarrow g & \\
 & & M & & 
 \end{array}$$

Logo, para todo  $m \in M$ ,  $((m)f)g = ((m + \text{Ker}f)\bar{f})g = (m + \text{Ker}f)\bar{h} = (m)h$  e portanto,  $h = f \circ g \in fS$ . Assim,  $\text{Ann}(\text{Ker}f) \subseteq fS$ .

Seja  $h \in fS$ . Então  $h = f \circ g$ , para algum  $g \in S$  e  $(\text{Ker}f)(f \circ g) = ((\text{Ker}f)f)g = 0$ . Logo,  $\text{Ker}f \subseteq \text{Ker}h$  e assim,  $h \in \text{Ann}(\text{Ker}f)$ . Concluimos que  $\text{Ann}(\text{Ker}f) = fS$ . ■

**Proposição 3.28** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda (à direita) auto-injetivo. Se  $M$  é distributivo, então  $\text{End}(M)$  é um anel distributivo à direita (à esquerda).*

**Demonstração:** Sejam  $I, J$  e  $K$  ideais à direita de  $End(M) = S$ . Seja  $f \in I \cap (J + K)$ . Então  $f \in I$  e  $f = g + h$ , com  $g \in J$  e  $h \in K$ . Logo,  $f \in fS \cap (gS + hS)$ .

Como  $M$  é distributivo, temos que

$$Ker f + (Kerg \cap Kerh) = (Ker f + Kerg) \cap (Ker f + Kerh).$$

Então  $Ann(Ker f + (Kerg \cap Kerh)) = Ann((Ker f + Kerg) \cap (Ker f + Kerh))$ . Pelo Lema 3.26, segue que  $Ann(Ker f) \cap (Ann(Kerg) + Ann(Kerh)) = (Ann(Ker f) \cap Ann(Kerg)) + (Ann(Ker f) \cap Ann(Kerh))$ .

O Lema 3.27 nos diz que

$$fS \cap (gS + hS) = (fS \cap gS) + (fS \cap hS).$$

Logo,  $f \in (fS \cap gS) + (fS \cap hS) \subseteq (I \cap J) + (I \cap K)$ . Portanto,  $I \cap (J + K) \subseteq (I \cap J) + (I \cap K)$ . Vimos na Observação 3.9 que a inclusão contrária é verdadeira em qualquer reticulado. ■

**Lema 3.29** *Se  $M$  é um  $R$ -módulo à esquerda (à direita) auto-cogerador, então  $Ann$  é injetora.*

**Demonstração:** Sejam  $N$  e  $L$  submódulos de  $M$  tais que  $Ann(N) = Ann(L)$ . Mostremos que  $N = L$ .

Como  $M$  é auto-cogerador, existe um monomorfismo  $\varphi : M/N \rightarrow M^\Lambda$ . Sejam  $\pi_\lambda : M^\Lambda \rightarrow M$  a projeção na componente  $\lambda$  e  $p_N : M \rightarrow M/N$  a projeção canônica. Lembrando que estamos considerando homomorfismos à direita, a composta das funções acima é escrita como  $p_N \circ \varphi \circ \pi_\lambda$ . Claramente,  $(p_N \circ \varphi \circ \pi_\lambda)|_N = 0$ .

Logo,  $N \subseteq Ker(p_N \circ \varphi \circ \pi_\lambda)$  e daí,  $p_N \circ \varphi \circ \pi_\lambda \in Ann(N) = Ann(L)$ . Assim, para cada  $l \in L$  e para cada  $\lambda \in \Lambda$ , temos que  $(l)(p_N \circ \varphi \circ \pi_\lambda) = 0$ . Portanto,  $(l)(p_N \circ \varphi) = 0$  e como  $\varphi$  é injetora  $(l)p_N = 0$ , segue que  $l \in N$ . Logo,  $L \subseteq N$ . A inclusão  $N \subseteq L$  é feita de maneira análoga. ■

Mostramos que se  $M$  é um  $R$ -módulo à esquerda auto-injetivo então  $Ann$  é um anti-homomorfismo de reticulados e que, se  $M$  é auto-cogerador, então  $Ann$  é injetora. Logo, se  $M$  é auto-injetivo e auto-cogerador, vemos que o reticulado dos submódulos de  $M$ ,  $\mathcal{L}(R M)$ , é isomorfo a um subreticulado do reticulado dual de  $\mathcal{L}(S_S)$ . Em outras palavras, se  $M$  é um  $R$ -módulo à esquerda auto-injetivo e auto-cogerador, dentro do reticulado  $\mathcal{L}(S_S)$  existe um reticulado que de "ponta-cabeça" é o reticulado  $\mathcal{L}(R M)$ . O mesmo vale para  $R$ -módulos à direita. Portanto, temos o próximo resultado.



**Corolário 3.30** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda (à direita) auto-injetivo e auto-cogerador. Então  $M$  é um  $R$ -módulo distributivo se, e somente se,  $End(M)$  é um anel distributivo à direita (à esquerda).*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Segue da Proposição 3.28.

( $\Leftarrow$ ) Como o reticulado dos ideais à direita de  $End(M) = S$  é distributivo, seu reticulado dual também o é, veja Observação 3.11. Claramente, se um reticulado é distributivo, qualquer subreticulado também o é. Pelos Lemas 3.26 e 3.29,  $\mathcal{L}({}_R M)$  é isomorfo a um subreticulado do reticulado dual de  $\mathcal{L}(S_S)$ , então  $\mathcal{L}({}_R M)$  é distributivo. ■

## Capítulo 4

# Coálgebras distributivas e de cadeia

Neste capítulo, mostramos que uma coálgebra é um comódulo à direita distributivo se, e somente se, é um comódulo à esquerda distributivo, isto pode ser visto na Proposição 4.2. O leitor pode observar que a maioria dos resultados deste capítulo é colocada como lema e isto é proposital uma vez que queremos provar o Teorema 4.16. Este teorema nos dá uma caracterização de módulo distributivo em termos de seu anel de endomorfismos ser um produto direto de anéis de cadeia.

O mais interessante é que os autores dão uma versão coalgérica do teorema acima, pois considerando uma coálgebra como um comódulo sobre si própria, a mesma possui propriedades intrínsecas que se encaixam nas hipóteses daquele teorema e a parte “agradável” disto é a caracterização de coálgebras distributivas em termos de coálgebras de cadeia.

Este capítulo é, de fato, o mais importante desta dissertação, pois demonstrar os resultados citados acima é o nosso principal objetivo.

A fim de evitarmos repetição, ao considerarmos uma coálgebra  $C$  como  $C^*$ -módulo à direita (à esquerda) omitimos a palavra racional.

Este capítulo tem como base o artigo [8], mas também usamos as referências [3], [1], [6], [7], [10], [11] e [14].

Para a seguinte definição,  $C$  é uma coálgebra.

**Definição 4.1** *Seja  $M$  um  $C$ -comódulo à direita (à esquerda). Dizemos que  $M$  é distributivo se o reticulado de  $C$ -subcomódulos à direita (à esquerda) é distributivo.*

No caso particular em que  $M$  é uma coálgebra  $C$ , podemos dizer, equivalentemente, que  $C$  é um  $C$ -comódulo à direita (à esquerda) distributivo se o reticulado de seus coideais à direita (à esquerda) é distributivo.

Lembramos que  $C$  como um  $C^*$ -módulo à esquerda (à direita) é auto-injetivo e auto-cogerador e tendo em mente a definição acima e os isomorfismos  $End_{(C^*C)} \simeq (C^*)^{op}$  e  $C^* \simeq End(C_{C^*})$ , segue o resultado abaixo.

**Proposição 4.2** *Seja  $C$  uma coálgebra. Então são equivalentes:*

- (i)  $C$  é um  $C$ -comódulo à direita distributivo;
- (ii)  $C^*$  é um anel distributivo à esquerda (à direita);
- (iii)  $C$  é um  $C$ -comódulo à esquerda distributivo.

**Demonstração:** (i)  $\Leftrightarrow$  (ii)  $C$  é um  $C$ -comódulo à direita distributivo  $\stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} C$  é  $C^*$ -módulo à esquerda distributivo  $\stackrel{(b)}{\Leftrightarrow} End_{(C^*C)}$  é um anel distributivo à direita  $\stackrel{(c)}{\Leftrightarrow} (C^*)^{op}$  é um anel distributivo à direita  $\stackrel{(d)}{\Leftrightarrow} C^*$  é um anel distributivo à esquerda.

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)  $C^*$  é um anel distributivo à esquerda  $\stackrel{(c)}{\Leftrightarrow} End(C_{C^*})$  é um anel distributivo à esquerda  $\stackrel{(b)}{\Leftrightarrow} C$  é um  $C^*$ -módulo à direita distributivo  $\stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} C$  é um  $C$ -comódulo à esquerda distributivo.

As equivalências (a), (b), (c) e (d) seguem do Teorema 2.36, Corolário 3.30, Proposição 2.38 e Proposição 3.21, respectivamente. ■

Da proposição acima, vemos que  $C$  é um  $C$ -comódulo à direita distributivo se, e somente se,  $C$  é um  $C$ -comódulo à esquerda distributivo. Em vista disso, temos a seguinte definição.

**Definição 4.3** *Uma coálgebra  $C$  é distributiva se  $C$  é um  $C$ -comódulo à direita ou à esquerda distributivo.*

A seguir, definimos e apresentamos resultados sobre anéis de cadeia e módulos unisseriais. Estes últimos desempenham papel importante na caracterização de módulos distributivos que possuam uma decomposição indecomponível como será visto adiante.

**Definição 4.4** *Um  $R$ -módulo à esquerda (à direita) é dito unisserial se o reticulado dos seus submódulos é totalmente ordenado por inclusão.*

O resultado seguinte é interessante no sentido que, para que tenhamos módulos unisseriais, é suficiente que o reticulado dos seus submódulos cíclicos seja totalmente ordenado por inclusão. A prova do mesmo pode ser encontrada em ([14], p.539), no entanto, vamos incluí-la aqui.

**Proposição 4.5** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda. Então  $M$  é uniserial se, e somente se, o reticulado de submódulos cíclicos de  $M$  é totalmente ordenado por inclusão.*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) É óbvio.

( $\Leftarrow$ ) Sejam  $K$  e  $L$  submódulos de  $M$ . Suponhamos que  $K \not\subseteq L$ . Então existe  $x \in K \setminus L$ . Seja  $y \in L$  qualquer. Como  $Rx \not\subseteq Ry$  então  $Ry \subseteq Rx$ . Logo,  $y \in K$  e portanto,  $L \subseteq K$ . ■

A demonstração é inteiramente análoga se  $M$  é um  $R$ -módulo à direita. Considerando agora o caso em que  $M = R$  temos a seguinte definição.

**Definição 4.6** *Um anel  $R$  é chamado de anel de cadeia à direita (à esquerda) se  $R$  como  $R$ -módulo à direita (à esquerda) é uniserial, isto é, para quaisquer ideais à direita (à esquerda)  $I$  e  $J$  de  $R$ ,  $I \subseteq J$  ou  $J \subseteq I$ .*

Devido à Proposição 4.5, segue que  $R$  é um anel de cadeia à direita (à esquerda) se, e somente se, para quaisquer  $a, b \in R$ ,  $aR \subseteq bR$  ou  $bR \subseteq aR$  ( $Ra \subseteq Rb$  ou  $Rb \subseteq Ra$ ).

Dizemos que  $R$  é anel de cadeia se  $R$  é anel de cadeia à direita e à esquerda.

O seguinte lema tem uma contribuição significativa tanto na prova do Teorema 4.16 quanto na prova do Teorema 4.21.

**Lema 4.7** *Se  $M$  é um  $R$ -módulo à esquerda (à direita) uniserial e auto-injetivo, então  $End(M)$  é um anel de cadeia à direita (à esquerda).*

**Demonstração:** Consideremos  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda e  $S = End(M)$ . Sejam  $f, g \in S$ . Como  $M$  é uniserial,  $Ker f \subseteq Kerg$  ou  $Kerg \subseteq Ker f$ . Suponhamos que  $Ker f \subseteq Kerg$ . Então  $Ann(Kerg) \subseteq Ann(Ker f)$ . Mas  $M$  é auto-injetivo então, pelo Lema 3.27,  $gS = Ann(Kerg) \subseteq Ann(Ker f) = fS$ . Logo,  $gS \subseteq fS$  e portanto,  $End(M)$  é um anel de cadeia à direita. ■

Antes do próximo lema, seguem duas observações que facilitam a prova do mesmo.

**Observação 4.8** *Todo anel de cadeia à direita não-nulo possui um único ideal à direita maximal.*

De fato, seja  $R$  um anel de cadeia à direita não-nulo. Então, pelo Lema de Zorn,  $R$  possui ideais à direita maximais. Agora, suponhamos que  $I$  e  $J$  sejam ideais à direita maximais de  $R$ . Por hipótese,  $I \subseteq J$  ou  $J \subseteq I$  e daí, segue imediatamente que  $I = J$ .

Lembramos o leitor de que nossos anéis possuem unidade (diferente de zero) o que os torna não-nulos.

Seja  $R$  um anel. O radical de Jacobson de  $R$ , que denotamos por  $J(R)$ , é a interseção de todos os ideais à direita maximais de  $R$ . Se  $R = 0$  (não é o nosso caso) então  $R$  não possui ideais à direita maximais e, neste caso,  $J(R) = 0$ .

Na definição de  $J(R)$  acima, usamos ideais à direita maximais de  $R$  e, desta forma,  $J(R)$  deveria ser chamado de radical à direita de  $R$ . Similarmente, podemos definir radical à esquerda de  $R$ , tomando a interseção de todos os ideais à esquerda maximais de  $R$ . Entretanto, é sabido que ambas as definições coincidem e que, de fato,  $J(R)$  é um **ideal** de  $R$ . Para maiores detalhes, veja ([7], p.54).

Lembramos ainda que um anel não-nulo que possui um único ideal à direita maximal é chamado *anel local*. Para outras definições equivalentes veja ([7], p.280). A observação seguinte nos diz que anéis de cadeia à direita são anéis locais.

**Observação 4.9** Se  $R$  é um anel de cadeia à direita então  $J(R)$  é o único ideal à direita maximal de  $R$ . Além disso, um elemento  $x \in R$  é invertível em  $R$  se, e somente se,  $x \in R \setminus J(R)$ .

De fato, como  $J(R) = \bigcap_{j \in \Omega} I_j$ , em que  $I_j$  é um ideal à direita maximal de  $R$  segue, pela observação acima, que  $R$  possui apenas um ideal à direita maximal. Logo,  $J(R)$  é o único ideal à direita maximal de  $R$ , isto é, para todo ideal à direita  $I$  de  $R$  tal que  $J(R) \subseteq I \subseteq R$  então  $I = R$  ou  $I = J(R)$ .

Finalmente, para completar a observação, notemos que se  $x \in R \setminus J(R)$  então  $x$  é invertível em  $R$ . Seja  $x \in R \setminus J(R)$ . Então o ideal à direita  $xR$  é tal que  $xR \subseteq J(R)$  ou  $J(R) \subseteq xR$ . Mas  $xR \not\subseteq J(R)$ , pois  $x \notin J(R)$ . Assim,  $J(R) \subsetneq xR \subseteq R$  e como  $J(R)$  é ideal à direita maximal, segue que  $xR = R$ . Logo, existe  $y \in R$  tal que  $xy = 1$ . Como  $J(R)$  é um ideal de  $R$ , então  $y \notin J(R)$ . Assim,  $J(R) \subsetneq yR \subseteq R$  e disto segue que  $yR = R$ . Logo, existe  $z \in R$  tal que  $yz = 1$ . Concluimos facilmente que  $x$  é invertível em  $R$ . Por outro lado, se  $x$  é invertível em  $R$  então obviamente  $x \notin J(R)$ . Logo,  $x \in R \setminus J(R)$ .

**Lema 4.10** *O produto direto de anéis de cadeia à direita (à esquerda) é um anel distributivo à direita (à esquerda).*

**Demonstração:** Seja  $R = \prod_{i \in I} R_i$ , em que cada  $R_i$  é um anel de cadeia à direita. Em vista das observações acima, não é difícil mostrar que o conjunto de todos os ideais à direita maximais de  $R$  é da forma

$Max(R) = \{P_j : j \in I\}$  em que para cada  $j \in I$

$$P_j = \{(x_i)_{i \in I} \in R : x_j \in J(R_j)\},$$

$J(R_j)$  é o radical de Jacobson do anel  $R_j$ . Para mostrar que  $R$  é um anel distributivo à direita, vamos usar a Proposição 3.25.

Consideremos  $R$  como um  $R$ -módulo à direita. Sejam  $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in R$  e, para qualquer  $j \in I, P_j \in Max(R)$ . Como  $R_j$  é anel de cadeia à direita suponhamos, sem perda de generalidade, que  $x_j R_j \subseteq y_j R_j$ .

Seja  $t = (\delta_{ji})_{i \in I}$ , isto é,  $t_i = 0$  para todo  $i \neq j$  e  $t_j = 1$ . Então  $t \notin P_j$ , pois  $1 \notin J(R_j)$ . Assim,  $t \in R \setminus P_j$  e além disso,  $(xt)_j = x_j \in y_j R_j$  e  $(xt)_i = 0, \forall i \neq j$ . Como  $x_j = y_j r_j$  para algum  $r_j \in R_j$ , podemos considerar  $k = (k_i)_{i \in I}$  tal que  $k_j = r_j$  e  $k_i = 0, \forall i \neq j$ . Portanto,  $xt = yk \in yR$  e pela Proposição 3.25,  $R$  é um  $R$ -módulo à direita distributivo e portanto, um anel distributivo à direita. A versão à esquerda deste lema é feita de maneira totalmente análoga. ■

O lema que acabamos de provar é o correspondente ([8], Lemma 4.2) e vemos que na prova dada pelos autores, o conjunto  $R \setminus P_j$  é um conjunto de Ore à direita. No entanto, isto é uma consequência do fato de que  $R$  é um anel distributivo à direita, veja ([4], p.77).

A fim de enunciarmos o principal teorema desta dissertação, completamos a lista de pré-requisitos definindo módulos semiartinianos bem como algumas de suas propriedades.

**Definição 4.11** *Um módulo  $M$  é dito ser semiartiniano se todo quociente não-nulo de  $M$  tem socle essencial, isto é, para todo submódulo próprio  $N$  de  $M$ ,  $soc(M/N)$  é essencial em  $M/N$ .*

**Lema 4.12** *Todo submódulo de um módulo semiartiniano é semiartiniano.*

**Demonstração:** Sejam  $M$  um módulo semiartiniano e  $N$  um submódulo de  $M$ . Seja  $P$  um submódulo próprio de  $N$ . Queremos provar que  $soc(N/P)$  é essencial em  $N/P$ .

Para isto, seja  $X$  um submódulo não-nulo de  $N/P$ . Então  $X$  é um submódulo não-nulo de  $M/P$ . Temos

$$X \cap soc(N/P) \stackrel{(*)}{=} X \cap N/P \cap soc(M/P) = X \cap soc(M/P),$$

em que a igualdade  $(*)$  segue da Proposição 1.14. Como  $M$  é semiartiniano, segue que  $X \cap soc(M/P) \neq 0$ . Logo,  $soc(N/P)$  é essencial em  $N/P$ . Portanto,  $N$  é semiartiniano. ■

**Observação 4.13** Se  $M$  é um módulo semiartiniano então, por definição, para qualquer submódulo próprio  $N$  de  $M$ ,  $\text{soc}(M/N)$  é essencial em  $M/N$ . Logo,  $\text{soc}(M/N)$  é não-nulo e portanto,  $M/N$  possui submódulo simples. Em particular, para  $N = 0$  segue que  $\text{soc}(M)$  é essencial em  $M$  e assim,  $M$  possui um submódulo simples.

**Definição 4.14** Uma família de  $R$ -módulos  $\{M_\beta\}_{\beta \in I}$  é dita ser não-relacionada se  $\text{Hom}(M_\beta/N, M_\gamma/L) = 0$ , para quaisquer  $N \leq M_\beta, L \leq M_\gamma$  e quaisquer  $\beta \neq \gamma$ .

**Definição 4.15** Uma decomposição em soma direta  $M = \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$  de um módulo  $M$ , em que  $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$  é uma família de submódulos indecomponíveis, é dita ser uma decomposição indecomponível.

**Teorema 4.16** Seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda semiartiniano, auto-injetivo, auto-cogerador e que possua uma decomposição indecomponível  $M = \bigoplus_{\beta \in I} M_\beta$ . Então as seguintes condições são equivalentes:

- (i)  $M$  é  $R$ -módulo à esquerda distributivo;
- (ii)  $\{M_\beta\}_{\beta \in I}$  é uma família não-relacionada de módulos unisseriais;
- (iii)  $\text{End}(M)$  é isomorfo ao produto direto de anéis de cadeia à direita (isomorfos como anéis);
- (iv)  $\text{End}(M)$  é um anel distributivo à direita.

**Demonstração:** Primeiramente, notemos que como para cada  $\beta \in I$ ,  $M_\beta$  é submódulo de  $M$  e sendo que  $M$  é  $M$ -injetivo segue, das Proposições 1.7 e 1.8, que  $M_\beta$  é injetivo em  $\sigma[M]$  (equivalentemente,  $M_\beta$  é  $M$ -injetivo).

Pelo Lema 4.12, para todo  $\beta \in I$ ,  $M_\beta$  é semiartiniano e pela Observação 4.13,  $M_\beta$  possui submódulo simples, digamos  $S_\beta$ . Sendo cada  $M_\beta$  indecomponível segue, da Proposição 1.11, que  $M_\beta$  é uniforme, assim  $S_\beta$  é essencial em  $M_\beta$ . Da definição de envoltória  $M$ -injetiva, segue que  $M_\beta$  é a envoltória injetiva de  $S_\beta$  em  $\sigma[M]$ .

Como  $0 \neq \text{soc}(M_\beta) = \cap \{L : L \leq_e M_\beta\}$  e todos os submódulos simples de  $M_\beta$  são essenciais em  $M_\beta$  ( $M_\beta$  é uniforme), segue que  $0 \neq \text{soc}(M_\beta) \leq S$ , para todo submódulo simples  $S$  de  $M_\beta$ . Portanto,  $M_\beta$  possui apenas um submódulo simples, a saber,  $\text{soc}(M_\beta)$ , e continuamos a denotá-lo por  $S_\beta$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Suponhamos que  $M$  seja distributivo. Como  $M_\beta \cap M_\gamma = 0$ , para quaisquer  $\beta, \gamma \in I$  com  $\beta \neq \gamma$ , segue que  $S_\beta \cap S_\gamma = 0$ . Pelo Teorema 3.23,  $\text{Hom}(S_\beta, S_\gamma) = 0, \forall \beta, \gamma \in I, \beta \neq \gamma$ . Portanto, para quaisquer  $\beta, \gamma \in I, \beta \neq \gamma$ , os submódulos simples  $S_\beta$  e  $S_\gamma$  de  $M_\beta$  e  $M_\gamma$ , respectivamente, não são isomorfos.

Sejam  $\beta \in I$  e  $N$  um submódulo próprio de  $M_\beta$ . Então  $\text{soc}(M_\beta/N) \leq_e M_\beta/N$ , pois  $M_\beta$  é semiartiniano.

Sendo  $M$  auto-cogerador, temos que  $\varphi : M_\beta/N \hookrightarrow M/N \rightarrow M^\Omega$  é um monomorfismo. Lembrando que  $M^\Omega = \prod_{i \in \Omega} M_i$  para  $M_i = M, \forall i \in \Omega$ . Seja  $T$  um submódulo simples de  $M_\beta/N$  (tal submódulo existe devido à Observação 4.13). Então  $T \simeq \varphi(T) \leq M^\Omega$ . Assim,  $T$  é isomorfo a um submódulo simples de  $M$ . Logo,  $T$  é isomorfo a  $S_\gamma$ , para algum  $\gamma \in I$ . Seja  $f : T \rightarrow S_\gamma$  tal isomorfismo e consideremos o digrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{i} & M_\beta/N \\
 & & \downarrow f & & \swarrow \text{---} g \\
 & & S_\gamma & & \\
 & & \downarrow j & & \\
 & & M_\gamma & & 
 \end{array}$$

em que  $i$  e  $j$  são as inclusões canônicas. A existência de  $g$  é garantida pela  $M$ -injetividade de  $M_\gamma$ .

Claramente  $g$  é não-nula, pois  $g|_T = f \neq 0$ . Seja  $\pi : M_\beta \rightarrow M_\beta/N$  a projeção canônica. Então  $g \circ \pi \in \text{Hom}(M_\beta, M_\gamma) = 0, \forall \beta \neq \gamma$ , pelo Teorema 3.23. Como  $g \circ \pi \neq 0$ , segue que  $\beta = \gamma$ . Isto mostra que todo submódulo simples de  $M_\beta/N$  é isomorfo à  $S_\beta$ .

Mostremos que  $\text{soc}(M_\beta/N)$  é simples. De fato, sejam  $T_1, T_2$  submódulos simples quaisquer de  $M_\beta/N$ . Sabemos que  $T_1 \simeq S_\beta \simeq T_2$ . Escrevemos  $T_1 = N_1/N$  e  $T_2 = N_2/N$  em que  $N$  é um submódulo próprio de  $N_1$  e de  $N_2$  e  $N_i \leq M_\beta$  para  $i = 1, 2$ . Claramente,  $N \leq N_1 \cap N_2$  e por serem  $T_1$  e  $T_2$  módulos simples, segue que  $N_1 \cap N_2 = N$  ou  $N_1 = N_1 \cap N_2 = N_2$ .

Se  $N_1 = N_1 \cap N_2 = N_2$  então  $T_1 = T_2$  e  $\text{soc}(M_\beta/N)$  é simples. Por outro lado, se  $N_1 \cap N_2 = N$  então  $\text{Hom}(T_1, T_2) = \text{Hom}(N_1/(N_1 \cap N_2), N_2/(N_1 \cap N_2)) = 0$  pelo Teorema 3.23. Mas  $T_1 \simeq T_2$  o que obriga  $T_1 = T_2$  e isto implica que  $\text{soc}(M_\beta/N)$  é simples.

Desta forma, provamos que todo quociente de  $M_\beta$  possui socle simples. Portanto, por ([14] p.539 - 55.1),  $M_\beta$  é unisserial.

Resta provarmos que  $\{M_\beta\}_{\beta \in I}$  é uma família não-relacionada<sup>1</sup>. Su-

---

<sup>1</sup>É possível provar esta afirmação usando ([11], Proposition 1.3), pois sendo os  $M_\beta$ 's unisseriais, os mesmos são distributivos. Como  $M = \bigoplus_{\beta \in I} M_\beta$  é distributivo, segue por [11], que  $\{M_\beta\}_{\beta \in I}$  é uma família não-relacionada.



ponhamos  $f : M_\beta/N \rightarrow M_\gamma/L$  um homomorfismo não-nulo para alguns submódulos próprios  $N$  e  $L$  de  $M_\beta$  e  $M_\gamma$ , respectivamente. Queremos mostrar que  $\beta = \gamma$ .

Como  $\text{Ker} f \leq M_\beta/N$ ,  $\text{Ker} f = N'/N$  para algum submódulo  $N'$  de  $M_\beta$  que contenha  $N$ . Então o homomorfismo  $(M_\beta/N)/\text{Ker} f \rightarrow M_\gamma/L$  é injetor. Mas,  $(M_\beta/N)/(N'/N)$  é isomorfo  $M_\beta/N'$ . Logo, o homomorfismo  $f' : M_\beta/N' \rightarrow M_\gamma/L$  é injetor. Assim, podemos supor sem perda de generalidade que  $f$  é injetora.

Como  $\text{soc}(M_\beta/N)$  é um submódulo simples de  $M_\beta/N$ , temos que  $S_\beta \simeq \text{soc}(M_\beta/N)$ . Da mesma forma,  $S_\gamma \simeq \text{soc}(M_\gamma/L)$ .

Sendo  $f$  injetora, então  $\text{soc}(M_\beta/N) \simeq f(\text{soc}(M_\beta/N))$  e portanto,  $f(\text{soc}(M_\beta/N))$  é não-nulo. Pela Proposição 1.14,  $f(\text{soc}(M_\beta/N)) \subseteq \text{soc}(M_\gamma/L)$  e como  $\text{soc}(M_\gamma/L)$  é simples, segue imediatamente que  $f(\text{soc}(M_\beta/N)) = \text{soc}(M_\gamma/L)$ . Portanto,

$$S_\beta \simeq \text{soc}(M_\beta/N) \simeq f(\text{soc}(M_\beta/N)) = \text{soc}(M_\gamma/L) \simeq S_\gamma.$$

Como  $\text{Hom}(S_\beta, S_\gamma) = 0$ , para quaisquer  $\beta \neq \gamma$ , então  $\beta = \gamma$ . Assim,  $\{M_\beta\}_{\beta \in I}$  é uma família não-relacionada.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Seja  $\beta \in I$  fixado. Então

$$\begin{aligned} \text{Hom}(M_\beta, M) &= \text{Hom}(M_\beta, \bigoplus_{\gamma \in I} M_\gamma) = \text{Hom}(M_\beta, \bigoplus_{\gamma \neq \beta} M_\gamma \oplus M_\beta) = \\ &= \text{Hom}(M_\beta, \bigoplus_{\gamma \neq \beta} M_\gamma) \oplus \text{End}(M_\beta). \end{aligned}$$

Como  $\{M_\gamma\}_{\gamma \in I}$  é uma família não-relacionada, então  $\text{Hom}(M_\beta, M_\gamma) = 0$ , para  $\gamma \neq \beta$ . Então  $\prod_{\gamma \neq \beta} \text{Hom}(M_\beta, M_\gamma) = 0$ .

Entretanto,  $\prod_{\gamma \neq \beta} \text{Hom}(M_\beta, M_\gamma)$  e  $\text{Hom}(M_\beta, \prod_{\gamma \neq \beta} M_\gamma)$  são grupos abelianos isomorfos. Logo,  $\text{Hom}(M_\beta, \prod_{\gamma \neq \beta} M_\gamma) = 0$  e isto implica que  $\text{Hom}(M_\beta, \bigoplus_{\gamma \neq \beta} M_\gamma) = 0$ , pois  $\bigoplus_{\gamma \neq \beta} M_\gamma$  é submódulo de  $\prod_{\gamma \neq \beta} M_\gamma$ . Assim,  $\text{Hom}(M_\beta, M) = \text{End}(M_\beta)$  para todo  $\beta \in I$ .

Logo,  $\text{End}(M) = \text{Hom}(\bigoplus_{\beta \in I} M_\beta, M) \stackrel{(*)}{\simeq} \prod_{\beta \in I} \text{Hom}(M_\beta, M) = \prod_{\beta \in I} \text{End}(M_\beta)$ . Para o leitor interessado, os isomorfismos (de grupos abelianos) acima seguem de ([6], p.202).

Sendo  $M_\beta$  um módulo auto-injetivo e unisserial segue, do Lema 4.7, que  $\text{End}(M_\beta)$  é anel de cadeia à direita.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Pelo Lema 4.10, o produto direto de anéis de cadeia à direita é distributivo à direita. Logo, o anel  $\text{End}(M)$  é distributivo à direita.

(iv)  $\Rightarrow$  (i) Como  $M$  é auto-injetivo e auto-cogerador e por hipótese  $End(M)$  é anel distributivo à direita segue, do Corolário 3.30, que  $M$  é  $R$ -módulo à esquerda distributivo. ■

**Lema 4.17** *Seja  $C = D \oplus E$  uma coálgebra, em que  $D$  e  $E$  são coideais à direita de  $C$ . Se  $Hom({}_{C^*}D, {}_{C^*}E) = 0$  então  $D$  é uma subcoálgebra de  $C$ .*

**Demonstração:** É claro que  $D$  é um  $k$ -subespaço vetorial de  $C$ , pois  $D$  é um coideal à direita de  $C$ . Temos que mostrar que  $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$ . Seja  $x \in D$ . Então  $\Delta(x) \in D \otimes C$ . Assim, podemos escrever  $\Delta(x) = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$  supondo o conjunto  $\{x_i\}_{i=1}^n$  linearmente independente.

Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , consideremos o subespaço unidimensional  $kx_i$  de  $D$  e escrevemos  $C = kx_i \oplus H_i \oplus E$  em que  $H_i$  é o complemento de  $kx_i$  em  $D$ . Sejam  $p_i : C \rightarrow kx_i$  dada por  $p_i(c) = \lambda x_i$  em que  $c = \lambda x_i + h + b$  para únicos  $\lambda \in k$ ,  $h \in H_i$  e  $b \in E$  e o isomorfismo linear  $\varphi_i : kx_i \rightarrow k$ .

Assim, a função  $\pi_i = \varphi_i \circ p_i : C \rightarrow k$  é claramente  $k$ -linear e portanto  $\pi_i \in C^*$  para qualquer  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Do Capítulo 2, sabemos que  $C$  é um  $(C^*, C^*)$ -bimódulo cujas ações à direita e à esquerda são dadas, respectivamente, por

$$c \leftarrow f = \phi(f \otimes I_C)\Delta(c) = \sum f(c_1)c_2 \quad e$$

$$f \rightarrow c = \phi(I_C \otimes f)\Delta(c) = \sum c_1 f(c_2).$$

Então, para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x \leftarrow \pi_j = \sum_{i=1}^n \pi_j(x_i)y_i = y_j$ , esta última igualdade segue do fato de que  $\{x_i\}_{i=1}^n$  é linearmente independente. Agora, definimos uma família de funções  $\{\psi_i : D \rightarrow C\}$  por  $\psi_i(z) = z \leftarrow \pi_i$ .

Afirmamos que  $\psi_i \in Hom({}_{C^*}D, {}_{C^*}C)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . O fato de que  $\psi_i$  é linear segue imediatamente da definição de ação à direita dada acima. Seja  $g \in C^*$ . Então

$$\psi_i(g \rightarrow z) = (g \rightarrow z) \leftarrow \pi_i \stackrel{(**)}{=} g \rightarrow (z \leftarrow \pi_i) = g \rightarrow \psi_i(z).$$

Em  $(**)$  é usado fortemente o fato de  $C$  ser um  $(C^*, C^*)$ -bimódulo. Portanto,

$$\begin{aligned} \psi_i \in Hom({}_{C^*}D, {}_{C^*}C) &= Hom({}_{C^*}D, {}_{C^*}D) \oplus Hom({}_{C^*}D, {}_{C^*}E) \\ &= End({}_{C^*}D). \end{aligned}$$

Logo,  $Im\psi_i \in D, \forall i \in \{1, \dots, n\}$  e  $y_j = x \leftarrow \pi_j = \psi_j(x) \in D, \forall j$ . Assim,  $\Delta(x) = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in D \otimes D$  e portanto,  $D$  é uma subcoálgebra de  $C$ . ■

Observamos que este lema ainda é válido se considerarmos  $D$  e  $E$  coideais à esquerda de  $C$ .

**Definição 4.18** Dizemos que uma coálgebra  $C$  é uma coálgebra de cadeia à direita (à esquerda) se  $C$  é unisserial como comódulo à direita (à esquerda).

Segundo ([2], Definition 1.1), um  $C$ -comódulo à direita (à esquerda)  $M$  é dito unisserial se  $M$  como um  $C^*$ -módulo à esquerda (à direita) é unisserial.

Assim,  $C$  é uma coálgebra de cadeia à direita (à esquerda) se, e somente se,  $C$  é unisserial como  $C^*$ -módulo à esquerda (à direita).

Dizemos que  $C$  é uma coálgebra de cadeia se  $C$  é de cadeia à direita e à esquerda.

Vimos no Teorema 2.52 que  $C = \bigoplus_{\beta \in I} E(S_\beta)$ , em que para cada  $\beta \in I$ ,  $S_\beta$  é subcomódulo simples de  $C$  e  $E(S_\beta)$  é a envoltória injetiva de  $S_\beta$  contida em  $C$ . Vamos mostrar que esta decomposição é indecomponível.

**Lema 4.19** A decomposição  $C = \bigoplus_{\beta \in I} E(S_\beta)$ , como acima, é indecomponível.

**Demonstração:** Basta mostrarmos que o  $C^*$ -módulo à esquerda racional  $E(S_\beta)$  é uniforme para cada  $\beta \in I$ , pois daí o resultado segue da Proposição 1.11. Seja  $X$  um  $C^*$ -submódulo à esquerda não-nulo de  $E(S_\beta)$ . Como  $S_\beta$  é um submódulo essencial em  $E(S_\beta)$ , segue que  $X \cap S_\beta \neq 0$ . Mas  $S_\beta$  é simples e portanto,  $X \cap S_\beta = S_\beta$ .

Assim, para qualquer  $C^*$ -submódulo não-nulo  $Y$  de  $E(S_\beta)$ , temos que  $0 \neq S_\beta = (X \cap S_\beta) \cap (Y \cap S_\beta) \subseteq X \cap Y$ . Donde,  $X \cap Y \neq 0$ . Logo,  $X$  é essencial em  $E(S_\beta)$ , ou seja,  $E(S_\beta)$  é uniforme. ■

**Lema 4.20** Seja  $C$  uma coálgebra. Então  $C$  é um  $C^*$ -módulo à esquerda (à direita) semiartiniano.

**Demonstração:** Seja  $D$  um  $C^*$ -submódulo à esquerda (à direita) próprio de  $C$ . Então  $C/D$  é um  $C^*$ -módulo à esquerda (à direita) não-nulo. Pelo Corolário 2.48,  $soc(C/D)$  é essencial em  $C/D$ . ■

Finalizamos o capítulo com um teorema que nos dá uma caracterização de coálgebras distributivas em termos de coálgebras de cadeia. Podemos encará-lo como uma versão "coalgérica" do Teorema 4.16.

**Teorema 4.21** *Seja  $C$  uma coálgebra. São equivalentes:*

- (i)  $C$  é uma coálgebra distributiva;
- (ii)  $C$  é um coproduto de coálgebras de cadeia à direita (e à esquerda);
- (iii)  $C^*$  é isomorfo ao produto direto de anéis de cadeia à esquerda;
- (iv)  $C^*$  é um anel distributivo à esquerda.

**Demonstração:** (i)  $\Rightarrow$  (ii) A hipótese (i) nos diz que  $C$  é um  $C^*$ -módulo à direita e à esquerda distributivo. Consideremos  $C$  um  $C^*$ -módulo à esquerda. Temos que  $C = \bigoplus_{\beta \in I} E(S_\beta)$  é uma decomposição indecomponível,  $C$  é auto-cogerador, auto-injetivo e semiartiniano e, pelo Teorema 4.16,  $\{E(S_\beta)\}_{\beta \in I}$  é uma família não-relacionada de  $C^*$ -módulos à esquerda (rationais) unisseriais.

Para cada  $\gamma \in I$ ,  $E(S_\gamma)$  e  $\bigoplus_{\beta \neq \gamma} E(S_\beta)$  são coideais à direita de  $C$ . Escrevemos  $C = E(S_\gamma) \oplus (\bigoplus_{\beta \neq \gamma} E(S_\beta))$  para qualquer  $\gamma \in I$ . Além disso,  $Hom(E(S_\gamma), \prod_{\beta \neq \gamma} E(S_\beta)) \simeq \prod_{\beta \neq \gamma} Hom(E(S_\gamma), E(S_\beta)) = 0$ , pois  $\{E(S_\beta)\}_{\beta \in I}$  é uma família não-relacionada. Logo,

$$Hom(E(S_\gamma), \bigoplus_{\beta \neq \gamma} E(S_\beta)) = 0.$$

Pelo Lema 4.17, para todo  $\gamma \in I$ ,  $E(S_\gamma)$  é uma subcoálgebra de  $C$ , unisserial como  $C$ -comódulo à direita. Portanto,  $C$  é um coproduto de coálgebras de cadeia à direita.

Finalmente, considerando  $C$  como um  $C^*$ -módulo à direita distributivo segue, de maneira análoga, que  $C$  é um coproduto de coálgebras de cadeia à esquerda.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Por hipótese,  $C = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$  em que  $C_\lambda$  é uma coálgebra de cadeia à esquerda para cada  $\lambda$ . Temos

$$C^* = Hom(C, k) = Hom(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda, k) \simeq \prod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda^*.$$

Para cada  $\lambda \in \Lambda$ ,  $C_\lambda^* \simeq End(C_\lambda C_\lambda^*)$ . Sabemos também que  $C_\lambda$  é auto-injetivo e, por hipótese,  $C_\lambda$  é um  $C_\lambda^*$ -módulo à direita unisserial, pois  $C_\lambda$  é  $C_\lambda$ -comódulo à esquerda unisserial. Logo, pelo Lema 4.7,  $End(C_\lambda C_\lambda^*)$  é um anel de cadeia à esquerda. Portanto,  $C_\lambda^*$  é anel de cadeia à esquerda, para cada  $\lambda \in \Lambda$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Pelo Lema 4.10, o produto direto de anéis de cadeia à esquerda é um anel distributivo à esquerda. Logo,  $C^*$  é um anel distributivo à esquerda.

(iv)  $\Rightarrow$  (i) Como  $C^*$  é um anel distributivo à esquerda segue, da Proposição 4.2, que  $C$  é um  $C$ -comódulo à direita distributivo. Por definição,  $C$  é uma coálgebra distributiva. ■

# Capítulo 5

## Um pouco sobre coálgebras de cadeia

Neste capítulo, apresentamos um exemplo importante de coálgebra de cadeia, a *coálgebra da potência dividida*, que pareceu ser uma inspiração para Lomp e Sant'Ana para os resultados obtidos sobre coálgebras de cadeia. No Capítulo 4, vimos que coálgebras distributivas são caracterizadas em termos de coálgebras de cadeia, isto é, são coprodutos de coálgebras de cadeia. Neste capítulo, embora não seja nosso objetivo estudarmos com profundidade as coálgebras de cadeia, fazemos uma pequena “degustação” do que é feito pelos autores sobre as mesmas e o leitor interessado pode consultar [8] para mais detalhes.

Este capítulo está baseado nas referências [2], [3], [8] e [9].

### 5.1 A coálgebra da potência dividida

Vimos, no Exemplo 2.5, que o  $k$ -espaço vetorial  $C$  com base  $\{c_0, c_1, \dots, c_n, \dots\}$  é uma coálgebra com comultiplicação  $\Delta(c_n) = \sum_{i=0}^n c_i \otimes c_{n-i}$  e counidade  $\varepsilon(c_n) = \delta_{0,n}$  e tal coálgebra é chamada *coálgebra da potência dividida*. No Exemplo 2.20, vimos que  $C^* \simeq k[[X]]$ .

Definimos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D_n$  como sendo o  $k$ -subespaço vetorial de  $C$  gerado por  $\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ . É claro que  $D_n$  é uma subcoálgebra de  $C$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Enxergando  $C$  como um  $C$ -comódulo à direita e à esquerda, temos que  $D_n$  é um  $C$ -subcomódulo à direita e à esquerda de  $C$ , pois toda subcoálgebra é um subcomódulo à direita e à esquerda. Notemos ainda que  $D_0 \subseteq D_1 \subseteq \dots \subseteq D_n \subseteq \dots$  e portanto, o conjunto

$\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$  é totalmente ordenado.

**Lema 5.1** *Seja  $C$  uma coálgebra cocomutativa. Então todo subcomódulo à direita (à esquerda) é uma subcoálgebra de  $C$ .*

**Demonstração:** Seja  $D$  um  $C$ -subcomódulo à direita de  $C$ . Então  $\Delta(D) \subseteq D \otimes C$ . Usando o fato de que  $C$  é cocomutativa, temos que

$$\Delta(D) = (T \circ \Delta)(D) \subseteq T(D \otimes C) \subseteq C \otimes D.$$

Portanto,  $\Delta(D) \subseteq (C \otimes D) \cap (D \otimes C) \stackrel{(*)}{=} D \otimes D$ , em que a igualdade  $(*)$  segue de ([3], Lemma 1.4.5). A demonstração é análoga se considerarmos  $D$  como um  $C$ -subcomódulo à esquerda de  $C$ . ■

Não é difícil ver que a coálgebra da potência dividida é cocomutativa, pois  $\Delta(c_n) = \sum_{i=0}^n c_i \otimes c_{n-i} = \sum_{i=0}^n c_{n-i} \otimes c_i = (T \circ \Delta)(c_n)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Ou ainda, como a álgebra dual de  $C$ ,  $C^*$  é isomorfa à  $k[[X]]$  que é comutativa, segue que  $C$  é cocomutativa ([3], p.63).

Pelo lema anterior, todo subcomódulo tanto à direita quanto à esquerda da coálgebra da potência dividida  $C$  é uma subcoálgebra. Assim, se provarmos que as subcoálgebras próprias de  $C$  são exatamente as  $D'_n$ s, teremos que a coálgebra da potência dividida é uma coálgebra de cadeia, pois tanto o reticulado dos  $C$ -subcomódulos à direita quanto o dos  $C$ -subcomódulos à esquerda de  $C$  são totalmente ordenados.

**Proposição 5.2** *Toda subcoálgebra da coálgebra da potência dividida  $C$  ou é da forma  $D_n = k\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$  ou é a própria  $C$ .*

**Demonstração:** Primeiramente, mostremos que dado  $w \in C$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $C^* \cdot w = D_m$ . De fato, por  $w \in C$ , temos que  $w = \sum_{i=0}^m \alpha_i c_i$ , em que  $\alpha_m \neq 0$ . Para cada  $s \in \mathbb{N}$ , suponhamos  $p_s \in C^*$  tal que  $p_s(c_s) = 1$  e  $p_s(c_i) = 0$  para  $i \neq s$ . Então

$$p_m \rightharpoonup w = \sum_{i=0}^m \alpha_i (p_m \rightharpoonup c_i) = \alpha_m p_m(c_m) c_0 = \alpha_m c_0$$

e sendo  $\alpha_m$  não-nulo, segue que  $\alpha_m$  é invertível em  $k$  e daí,  $c_0 = \alpha_m^{-1}(p_m \rightharpoonup w) \in C^* \cdot w$ .

Além disso,

$$p_{m-1} \rightharpoonup w = \sum_{i=0}^m \alpha_i (p_{m-1} \rightharpoonup c_i) = \alpha_{m-1} c_0 + \alpha_m c_1$$

e isto implica que  $c_1 = \alpha_m^{-1}(p_{m-1} \rightarrow w - \alpha_{m-1}c_0)$ , donde  $c_1 \in C^* \cdot w$ .

Não é difícil ver que  $p_{m-i} \rightarrow w = \alpha_{m-i}c_0 + \alpha_{m-i+1}c_1 + \dots + \alpha_{m-1}c_{i-1} + \alpha_m c_i$  e supondo que  $c_0, c_1, \dots, c_{i-1} \in C^* \cdot w$ , segue que  $c_i \in C^* \cdot w$ , para todo  $1 \leq i \leq m$ . Logo,  $\{c_0, c_1, \dots, c_m\} \subseteq C^* \cdot w$  e daí,  $D_m \subseteq C^* \cdot w$ .

Por outro lado, dado  $f \in C^*$ ,  $f \rightarrow w$  é combinação linear dos elementos  $c_0, c_1, \dots, c_m$  e portanto,  $C^* \cdot w \subseteq D_m$ . Donde,  $C^* \cdot w = D_m$ .

Seja  $V$  um  $C^*$ -submódulo à esquerda (racional) de  $C$  (equivalentemente,  $V$  é um  $C$ -subcomódulo à direita de  $C$ ). Então  $V = \sum_{w \in V} C^* \cdot w$  e, pelo que foi mostrado acima, para cada  $w \in V$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $C^* \cdot w = D_m$ . Como as subcoálgebras  $D_n$ 's são totalmente ordenadas, segue que  $V$  é a união de todos os seus  $C^*$ -submódulos cíclicos. Portanto, ou para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $w \in V$  tal que  $C^* \cdot w = D_n$  e, neste caso,  $V = C$  ou existe  $n$  minimal tal que  $D_n$  não está contido em  $V$  e, neste caso,  $V = D_{n-1} = k\{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\}$ . ■

## 5.2 A filtração co-radical e as coálgebras de cadeia

Agora, gostaríamos de mostrar algumas propriedades de uma coálgebra de cadeia, entretanto é necessário lembrarmos algumas definições e resultados.

Uma coálgebra  $D$  é dita *simples* se suas únicas subcoálgebras são  $0$  e  $D$ . Um fato conhecido é que toda coálgebra simples possui dimensão finita ([3], p.117) e vamos usar isto na prova do teorema abaixo.

Dada uma coálgebra  $C$ , denotamos por  $C_0$  a soma de todas as subcoálgebras simples de  $C$ . A subcoálgebra  $C_0$  de  $C$  é chamada o *co-radical* de  $C$ .

Seja  $C$  uma coálgebra. A série de Loewy de  $C$  visto como um  $C^*$ -módulo à esquerda  $C$  é uma cadeia ascendente

$$C_0 \subseteq C_1 \subseteq \dots \subseteq C_n \subseteq \dots$$

tal que, para todo  $n \geq 1$ ,  $C_n$  é definido como um  $C^*$ -submódulo de  $C$  que satisfaz  $C_n/C_{n-1} = \text{soc}(C/C_{n-1})$  e  $C_0 = \text{soc}(C^*C)$ . Tal cadeia é chamada filtração co-radical da coálgebra  $C$ . Para maiores detalhes, o leitor pode consultar [3] e [9].

**Observação 5.3** Notemos que a cadeia  $D_0 \subseteq D_1 \subseteq \dots \subseteq D_n \subseteq \dots$ , definida na seção anterior, é a filtração co-radical da coálgebra da potência dividida. De fato, devido à Proposição 5.2,  $D_0$  é o único  $C$ -



subcomódulo à direita simples da coálgebra da potência dividida  $C$ . Logo,  $\text{soc}(C^*C) = D_0$ . Temos ainda que, para todo  $n \geq 1$ ,  $D_n/D_{n-1} \subseteq D_{n+1}/D_{n-1} \subseteq \dots$  são os  $C$ -subcomódulos à direita próprios e não-nulos de  $C/D_{n-1}$  e  $\dim(D_n/D_{n-1}) = 1$ . Donde  $D_n/D_{n-1}$  é o único  $C$ -subcomódulo à direita simples de  $C/D_{n-1}$  e portanto,  $\text{soc}(C/D_{n-1}) = D_n/D_{n-1}$ .

Lembramos agora o Lema de Schur, o qual utilizamos na demonstração do próximo teorema.

**Lema 5.4 (Lema de Schur)** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo simples. Então  $\text{End}(M)$  é um anel de divisão.*

**Demonstração:** Seja  $f$  não-nula em  $\text{End}(M)$ . Como  $M$  é simples, segue que  $\text{Ker } f = 0$  e  $\text{Im } f = M$ . Portanto,  $f$  é invertível. ■

**Teorema 5.5** *Seja  $C$  uma  $k$ -coálgebra de cadeia à direita. Então  $C$  possui as seguintes propriedades.*

(i) *Existe uma  $k$ -álgebra de divisão  $D$  de dimensão finita com  $C_0^* \simeq D$  e, para todo  $n \geq 1$ , temos que  $C_n/C_{n-1} \simeq C_0$  como  $C$ -comódulos à direita e à esquerda.*

(ii) *Todo coideal à direita ou à esquerda próprio e não-nulo de  $C$  é uma subcoálgebra de dimensão finita de  $C$  e é igual a  $C_n$ , para algum  $n \geq 0$ . Em particular, o único coideal à direita (ou à esquerda) de  $C$  de dimensão infinita é o próprio  $C$ .*

**Demonstração:** (i) Sejam  $S$  e  $T$  dois  $C$ -subcomódulos à direita simples de  $C$ . Como  $C$  é uma coálgebra de cadeia à direita, segue que  $S \subseteq T$  ou  $T \subseteq S$  e claramente,  $S = T$ . Logo,  $C$  possui apenas um  $C$ -subcomódulo simples. Portanto,  $C_0 = \text{soc}(C^*C)$  é o único  $C$ -subcomódulo à direita simples de  $C$ . A partir deste fato, concluímos que  $C_0$  é simples como um  $C_0$ -comódulo à direita, o que é equivalente a dizermos que  $C_0$  é um  $C_0^*$ -módulo à esquerda simples. Pelo Lema de Schur,  $\text{End}(C_0^*C_0)$  é uma  $k$ -álgebra de divisão.

Sendo  $C_0$  uma subcoálgebra de  $C$ , segue também que  $C_0$  é simples como coálgebra e portanto, finito dimensional. Logo,  $C_0^*$  é finito dimensional. Sabemos que  $\text{End}(C_0^*C_0)$  e  $(C_0^*)^{op}$  são  $k$ -álgebras isomorfas e assim,  $D = (\text{End}(C_0^*C_0))^{op}$  e  $C_0^*$  também o são. Como  $\text{End}(C_0^*C_0)$  é uma  $k$ -álgebra de divisão, então  $D$  o é. Logo,  $D \simeq C_0^*$  é uma  $k$ -álgebra de divisão finito dimensional.

Provemos que  $C_n/C_{n-1} \simeq \text{soc}(C/C_{n-1})$  é um  $C$ -comódulo à direita simples para  $n \geq 1$ . Sejam  $X = E/C_{n-1}$  e  $Y = F/C_{n-1}$  dois  $C$ -subcomódulos simples de  $C/C_{n-1}$ , em que  $E$  e  $F$  são subcomódulos de

$C$ . Como  $C$  é uma coálgebra de cadeia à direita, segue que  $E \subseteq F$  ou  $F \subseteq E$ . Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $E \subseteq F$  e isto nos diz que  $X \subseteq Y$ . Como  $X$  é um comódulo não-nulo (pois  $X$  é simples) e  $Y$  é simples, segue que  $X = Y$ . Portanto,  $C_n/C_{n-1}$  é um  $C$ -comódulo simples.

Pela Proposição 2.50,  $C_n/C_{n-1}$  é isomorfo a um subcomódulo à direita de  $C$ . Pelo que vimos acima,  $C_0$  é o único  $C$ -subcomódulo à direita simples de  $C$  e portanto,  $C_n/C_{n-1} \simeq C_0$ , para todo  $n \geq 1$ .

(ii) Mostremos que  $\dim(C_n) = (n + 1) \dim(D)$ , para  $n \geq 0$ . Para  $n = 0$  é trivialmente verdade, já que  $C_0^* \simeq D$ . Verifiquemos a validade para  $n = 1$ .

Sabemos que  $\dim(C_0)$  é finita e  $\dim(C_1/C_0)$  é finita, pois  $C_1/C_0 \simeq C_0$ . Então  $\dim(C_1)$  é finita e  $\dim(C_1) = \dim(C_0) + \dim(C_1/C_0) = 2 \dim(C_0) = 2 \dim(D)$ .

Suponhamos por indução que  $\dim(C_{n-1}) = n \dim(D)$ . Como  $\dim(C_n/C_{n-1})$  é finita, pois  $C_n/C_{n-1} \simeq C_0$ , segue que  $\dim(C_n)$  é finita e também que

$$\begin{aligned} \dim(C_n) &= \dim(C_{n-1}) + \dim(C_n/C_{n-1}) \\ &= n \dim(D) + \dim(D) \\ &= (n + 1) \dim(D). \end{aligned}$$

Seja  $N$  um coideal à direita próprio e não-nulo de  $C$  tal que  $\dim(N)$  é finita. Como  $C$  é uma coálgebra de cadeia à direita, segue que  $N \subseteq C_0$  ou  $C_0 \subseteq N$ . Mas como  $C_0$  é um  $C$ -comódulo simples, então  $N = C_0$  ou  $C_0 \subseteq N$ . Se  $N = C_0$ , não temos nada a fazer.

Se  $C_0 \subseteq N$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  maximal tal que  $C_n \subseteq N$  e  $C_{n+1} \not\subseteq N$ . Como  $C_{n+1}/C_n$  é simples e  $C_{n+1} \not\subseteq N$ , temos que  $(N/C_n) \cap (C_{n+1}/C_n) = 0$ . Sendo  $C$  de cadeia à direita e como  $C_{n+1} \not\subseteq N$  segue, necessariamente, que  $N \subseteq C_{n+1}$ . Logo,  $(N/C_n) \cap (C_{n+1}/C_n) = N/C_n$ . Portanto,  $N/C_n = 0$  e daí,  $N = C_n$ . Lembramos que os membros da filtração co-radical, isto é, os  $C'_n$ s são subcoálgebras de  $C$ , veja ([3], Corollary 3.1.10) e isto termina uma parte do item (ii).

Agora, seja  $N$  um coideal à direita de  $C$  de dimensão infinita. Novamente, por ser  $C$  uma coálgebra de cadeia à direita e  $C_n$  finito dimensional, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , segue que  $C_n \subseteq N$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado, qualquer elemento  $c$  de  $C$  está contido em um subcomódulo finito dimensional de  $C$  ([3], Theorem 1.4.7), isto é,  $c \in C_m$  para algum  $m \in \mathbb{N}$ . Logo,  $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq N \subseteq C$  e portanto,  $N = C$ . ■

# Referências Bibliográficas

- [1] ANDERSON, Frank W.; FULLER, Kent R.. **Rings and Categories of Modules**, 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1992. 339 p..
- [2] CUADRA, J.; TORRECILLAS, J.G.. Serial coalgebras. **J. Pure Appl. Algebra**, v. 189, p. 89-107, 2004.
- [3] DĂSCĂLESCU, Sorin; NĂSTĂSESCU, Constantin; RAIANU, Șerban. **Hopf Algebras: An Introduction**, New York: Marcel Dekker, 2001. 401 p..
- [4] FERRERO, M. e SANT'ANA, A.. On distributive modules and rings. **Results Math.**, 44, p. 74-85, 2003.
- [5] GOODEARL, K.R.. **Ring Theory - Nonsingular Rings and Modules**, New York: Marcel Dekker, Inc., 1976. 206 p..
- [6] HUNGERFORD, T. W.. **Algebra**, New York: Springer-Verlag, 1996. 502 p..
- [7] LAM, T.Y.. **A first course in noncommutative rings**, New York: Springer-Verlag, 1991. 397 p..
- [8] LOMP, C. e SANT'ANA, A.. Chain and distributive coalgebras. **J. Pure Appl. Algebra**, v. 211, p. 581-595, 2007.
- [9] MONTGOMERY, Susan. **Hopf Algebras and Their Actions on Rings**, Chicago: CBMS, 1992, 238 p..
- [10] SANT'ANA, A.. **Distributividade em anéis e módulos**, Notas de um mini-curso realizado na Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

- [11] STEPHENSON, W.. Modules whose lattice of submodules is distributive. **Proc. London Math. Soc.**, v. 28, n. 3, p. 291-310, 1974.
- [12] SWEEDLER, Moss E.. **Hopf Algebras**, New York: W. A. Benjamin, Inc., 1969. 336 p..
- [13] VECCHIA, R.D.. **Sobre Anéis e Módulos Distributivos**. 79 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.
- [14] WISBAUER, Robert. **Foundations of Module and Ring Theory**, Philadelphia: Gordon and Breach Science Publishers, 1991. 606 p..

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)