Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Lucas Rezende Valeriano

A GEOMETRIA DA GRASSMANNIANA LAGRANGEANA E O ÍNDICE DE MASLOV

Recife

2010

Lucas Rezende Valeriano

A GEOMETRIA DA GRASSMANNIANA LAGRANGEANA E O ÍNDICE DE MASLOV

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da UFPE, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. PhD. Hildeberto Eulalio Cabral

Recife

2010

Valeriano, Lucas Rezende
A geometria da grassmanniana lagrangeana e o índice de Maslov / Lucas Rezende Valeriano. - Recife: O Autor, 2010.
54 folhas : il., fig.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2010.

Inclui bibliografia.

1. Geometria. 2. Variedades diferenciáveis. 3. Geometria simplética. 4. Índice de Maslov. I. Título.

516 CDD (22. ed.) MEI2010 – 092

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: Hildeberto Eulálio Cabral
Hildeberto Eulálio Cabral, UFPE
Orientador

César Augusto Rodrigues Castilho, UFPE

Fábio dos Santos.
Fábio dos Santos, UFS

A ESTRUTURA DIFERENCIÁVEL DA GRASSMANNIANA LAGRANGEANA E O ÍNDICE DE MASLOV

Por
Lucas Rezende Valeriano

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Junho – 2010

À minha mãe.

RESUMO

Este trabalho visa a abordar alguns tópicos sobre geometria simplética com o intuito de estudar técnicas que serão úteis para trabalhos futuros. Apresentamos uma estrutura diferenciável para a Grassmanniana Lagrangeana de um espaço vetorial simplético, com tal estrutura definimos o índice de Maslov via grupóide fundamental para caminhos na Grassmanniana Lagrangeana e provamos algumas de suas propriedades. Antes, fazemos uso da topologia algébrica para definir e estudar algumas das propriedades do grupóide fundamental de um conjunto, neste momento apresentamos o teorema de Seifert-van Kampem. Para efeito de completude do trabalho, começamos esta dissertação exibindo os conceitos básicos da álgebra linear simplética, e em seguida dedicamos um capítulo para o estudo de algumas propriedades do índice de uma forma bilinear em um espaço vetorial, e de alguns resultados a respeito de curvas no espaço das formas bilineares simétricas de uma espaço vetorial de dimensão finita.

Palavras-chave: Índice de Maslov, Grassmanniana Lagrangeana, espaço vetorial simplético, variedade diferenciável, grupóide fundamental.

ABSTRACT

The goal of this dissertation is to consider some topics in symplectic geometry aiming at studying techniques that will be useful in future work. We present the differentiable structure of the Lagrangean Grassmannian of a symplectic vector space and with this structure at hand we define the Maslov index for paths in the Lagrangean Grassmannian via the fundamental grupoid and study some of its properties. We first make use of algebraic topology in order to define and study some properties of the fundamental grupoid of a set; at this point we state the theorem of Seifert-van Kampen. To make the work self-contained we begin the dissertation giving the basic concepts of symplectic linear algebra that will be used and we devote a chapter to the study of the index of a bilinear form on a vector space and some results regarding paths in the space of symmetric bilinear forms on a finite dimensional vector space.

Keywords: Maslov Index, Lagrangiann Grassmannian, symplectic vector space, differentiable manifold, fundamental groupoid.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus não apenas pelo dom da vida mas também pela saúde e disposição que me foram dispensadas.

Agradeço a meus pais por todo apoio fornecido e por terem me ensinado a perseverar sempre.

Agradeço aos professores Alan, Gastão e Fábio por terem acreditado e apoiado a minha decisão de fazer uma pós-graduação.

Agradeço ao professor Hildeberto pelo apoio incondicional e pela orientação fornecida.

Agradeço a Cris por ter sido como um pilar, suportando estar ao meu lado nos momentos difíceis e monstrando ser uma companheira inestimável.

Agradeço a Bruno, André e Wagner por terem me proporcionado a primeira moradia em Recife e terem me dado uma força significativa em meu primeiro semestre.

Agradeço aos colegas Adecarlos, Joedson, Joilson, Paulo e Marcelo Pedro pela paciência em me ajudar a aumentar a cota superior de meus conhecimentos matemáticos.

Agradeço aos colegas do DMAT Filipe Doido, Alejandro, Ricardo, Thiago (Galega), Renata, Tarciana, Anete, Renato (Bad Boy), Renato (Gabarito), Alan, Eder, Zaqueu, Allyson, Abiel, Zé, Giovanna, André Ventura, Luís, Maité e Bárbara pelo companherismo nas horas de tensão e pelos momentos divertidos.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

Introdução

Esta dissertação versa sobre alguns tópicos de Geometria Simplética que são importantes para o Índice de Maslov, objeto de futuros estudos. Nesta direção, a grassmaniana lagrangeana desempenha um papel importante e é um tópico central nesta dissertação. Dentre as referências citadas na bibliografia, o texto [9] foi um dos mais utilizados na preparação deste trabalho.

A seguir descrevemos o conteúdo de cada capítulo.

No capítulo 1 fazemos um apanhado geral sobre álgebra linear simplética e inserimos a notação que será seguida no restante do texto.

No capítulo 2 falamos um pouco sobre formas bilineares, definimos o índice de uma forma bilinear simétrica e apresntamos alguns resultados interessantes que nos serão úteis no capítulo final.

No capítulo 3 definimos o grupóide fundamental de um espaço topológico e exibimos algumas de suas propriedades. Este capítulo será improtante para definirmos e estudarmos o índice de Maslov no capítulo final, uma vez que tal índice será um invariante homotópico.

No capítulo 4 exibimos algumas propriedades da ação de grupos de Lie sobre variedades diferenciáveis, exibimos uma estrutura diferenciável para Grassmanniana de um espaço, e finalizamos construindo uma estrutura diferenciável para a Grassmanniana Lagrangeana de um espaço vetorial simplético. Este é o passo fundamental que nos permitirá, no capitulo final, definir o índice de Maslov para caminhos na Grassmanniana Lagrangeana.

No capítulo 5 definimos o índice de Maslov para caminhos na Grassmanniana Lagrangeana de um espaço vetorial simplético, via grupóide fundamental, e estudamos algumas de suas propriedades.

A interdependência dos capítulos se dá da seguinte forma: Os capítulos de 1 a 4 são necessários para compreensão do capítulo 5, o capítulo 4 necessita apenas do capítulo 1, os capítulos 2 e 3 são independentes podendo aliás serem lidos apenas como pré-requisito para o capítulo final.

Para um melhor aproveitamento deste trabalho, espera-se do leitor um pouco de familiaridade com as noções básicas de Variedades Diferenciáveis bem como a definição de Grupo de Lie e algumas das propriedades das ações destes sobre variedades.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem como principal objetivo inserir a linguagem e os conceitos básicos, bem como um pouco da notação que utilizaremos no restante do trabalho. Iniciaremos com algumas definições e propriedades das formas simpléticas, em seguida falaremos do importante conceito de simplectomorfismo e encerraremos com uma breve exposição sobre formas hermitianas.

1.1 Álgebra Linear Simplética

1.1.1 Formas Simpléticas

Definição 1.1.1 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$, o qual a menos que seja dito o contrário será tomado como sendo $\mathbb{R}$. Uma forma simplética sobre V é uma forma bilinear anti-simétrica e não-degenerada ω sobre V.*

Definição 1.1.2 *Um espaço vetorial simplético é um par (V, ω), no qual V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e ω é uma forma simplética sobre V.*

Note que pelo fato de $\omega : V \times V \to \mathbb{K}$ ser bilinear, cada $u \in V$ induz um funcional linear $\omega_u : \ v \longmapsto \omega(u, v)$ e a forma bilinear não degenerada ω induz um isomofismo canônico

$$\Psi_\omega : V \to V^*, \quad \text{definido por} \quad \Psi_\omega(u) = \omega_u. \tag{1.1}$$

Exemplo 1.1.3 *Em $\mathbb{K}^{2n} = \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ a forma bilinear ω definida por*

$$\omega((p,q),(p',q')) = \sum_{j=1}^{n} p_j q'_j - p'_j q_j$$

é simplética.

Observe que ω é uma forma bilinear antissimétrica e não-degenerada sobre $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$. Tal forma é chamada a forma simplética canônica sobre $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$.

Uma versão livre de coordenadas é a forma simplética sobre $V = U \times U^*$ definida por

$$\omega((x,\xi),(y,\eta)) = \xi(y) - \eta(x), \quad x, y \in U, \ \xi, \eta \in U^*,$$

definida para qualquer espaço vetorial de dimensão finita U sobre $\mathbb{K}$.

1.1.2 Subespaço Isotrópico

Lembremos da Álgebra Linear que se V é um espaço vetorial e $L \subset V$ é um subespaço de V, então definimos o anulador de L em V como sendo o conjunto

$$L^0 := \{\alpha \in V^* / \alpha(v) = 0, \forall v \in L\}.$$

Definição 1.1.4 *Seja ω uma forma bilinear não-degenerada sobre V, não necessariamente antissimétrica. Se L é um subespaço linear de V, então o complemento ω-ortogonal L^ω de L em V é definido como*

$$L^\omega := \{u \in V / \omega(u,v) = 0, \forall v \in L\}.$$

Note que L^ω é um subespaço linear de V e

$$L^\omega = \Psi_\omega^{-1}(L^0) = (\Psi_\omega^*(L))^0, \tag{1.2}$$

onde Ψ_ω^* é a aplicação dual de $\Psi_\omega : V^{**} \to V^*$ ($V^{**} \simeq V$).

Lema 1.1.5 *Se (V,ω) é um espaço vetorial simplético e $L, M \subset V$ são subespaços vetoriais de V, então:*

(1) $\dim\{L^\omega\} = \dim\{V\} - \dim\{L\}$

(2) $L \subset M \Longrightarrow M^\omega \subset L^\omega$

(3) $(L+M)^\omega = L^\omega \cap M^\omega$

Dem.: Completemos uma base de L, $v_1, \ldots, v_k$, para uma base de V, $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$, e seja $v^1, \ldots, v^k, v^{k+1}, \ldots, v^n$ a base dual desta. Então, $v^{k+1}, \ldots, v^n$ forma uma base de L^0, logo, $\dim V = \dim L + \dim L^0$. Como Ψ_ω é um isomorfismo, resulta desta igualdade o item (1). O segundo item segue-se da definição de complemento ω-ortogonal. Vejamos o item (3). Como $L, M \subset L+M$ segue-se da segunda afirmação que $(L+M)^\omega \subset L^\omega \cap M^\omega$. Por outro lado, para todo $v \in L^\omega \cap M^\omega$, temos

$$\omega(v, x+y) = \omega(v,x) + \omega(v,y) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in L \text{ e } y \in M,$$

portanto, $L^\omega \cap M^\omega \subset (L+M)^\omega$. O item (3) segue desta dupla inclusão. ■

Definição 1.1.6 *Um subespaço L é dito ser isotrópico com respeito à ω se $L \subset L^\omega$.*

Definição 1.1.7 *Um subespaço de V, isotrópico e maximal, é chamado plano Lagrangeano, ou simplesmente Lagrangeano de V.*

Proposição 1.1.8 *Qualquer subespaço isotrópico está contido em um plano Lagrangeano.*

Dem.: Segue da finitude da dimensão de V e da definição acima. ■

A antissimetria de ω implica que $\omega(v,v) = -\omega(v,v)$ então $2\omega(v,v) = 0$. Portanto, se $\mathrm{car}\mathbb{K} \neq 2$ (característica de $\mathbb{K}$), e ω for antisimétrica

$$\omega(v,v) = 0, \quad \forall v \in V \tag{1.3}$$

Reciprocamente, se (1.3) é verificado, então

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(u+v, u+v) \\ &= \omega(u,u) + \omega(u,v) + \omega(v,u) + \omega(v,v) \\ &= \omega(u,v) + \omega(v,u) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \omega(u,v) = -\omega(v,u), \quad \forall u, v \in V.$$

Se $\mathrm{car}\mathbb{K} = 2$, então tudo que segue será válido se trocarmos a condição de antisimetria pela condição (1.3).

Proposição 1.1.9 *Todo subespaço linear de V de dimensão um é isotrópico.*

Dem.: Direto de (1.3). ■

Proposição 1.1.10 *Um subespaço $L \subset V$ é um plano Lagrangeano se, e somente se, $L = L^\omega$.*

Dem.: Se $L \subset L^\omega$ e $L \neq L^\omega$, então pelo terceiro item do Lema 1.3 temos que se $v \in L^\omega \setminus L$, então

$$(L + \mathbb{K}v)^\omega = L^\omega \cap (\mathbb{K}v)^\omega.$$

Como $\mathbb{K}v \subset L^\omega$, temos $(\mathbb{K}v)^\omega \supset L$, logo $L^\omega \cap (\mathbb{K}v)^\omega \supset L$.

Além disso, $v \in L^\omega \cap (\mathbb{K}v)^\omega$, logo o subespaço linear $(L + \mathbb{K}v)^\omega$ contem $L + \mathbb{K}v$, o que significa que

$$L' := L + \mathbb{K}v$$

é isotrópico, $L \subset L'$ e $\dim(L') = \dim(L) + 1$. Portanto, L não é maximal, e isto conclui a prova. ■

Corolário 1.1.11 *Se $L \subset V$ é um plano Lagrangeano, então* $\dim(V) = 2\dim(L)$. *Em particular, a dimensão de um espaço vetorial simplético é par.*

Dem.: Pela proposição anterior temos que se $L \subset V$ é Lagrangeano, então

$$\dim(L) = \dim(L^\omega) = \dim(V) - \dim(L)$$

$$\Longrightarrow \dim(V) = 2\dim(L).$$

■

1.1.3 Forma Canônica de uma Forma Simplética

O objetivo desta seção é mostrar que se (V, ω) é um espaço vetorial simplético de dimensão $2n$ então existe uma base $\{e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n\}$ de V na qual

$$\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0,$$

onde δ_{ij} é igual a 1 ou 0, conforme seja $i = j$ ou $i \neq j$.

Para isso, comecemos com a seguinte

Proposição 1.1.12 *Seja $\Lambda = \Lambda(V,\omega)$ o conjunto de todos os planos Lagrangeanos no espaço vetorial simplético (V,ω). Se $L_0 \in \Lambda$, então é possível tomar $L_1 \in \Lambda$ tal que $L_0 \cap L_1 = \{0\}$ e, consequentemente, $V = L_0 \oplus L_1$.*

Dem.: Sejam $L_0 \in \Lambda$ e $L_1 \subset V$ isotrópico com $L_1 \neq L_1^\omega$ e $L_0 \cap L_1 = \{0\}$ (basta por exemplo considerar $u \neq L_0$ e $L_1 = \mathbb{K}u$). Tome $v \in L_1^\omega \setminus L_1$ e defina $L_1' := L_1 + \mathbb{K}v$.

Note que se $L_0 \cap L_1' \neq \{0\}$ para todo $v \in L_1^\omega \setminus L_1$, então existiria $x_v \in L_1$ e $c_v \in \mathbb{K}$ tal que

$$y_v = x_v + c_v v \in L_0, \quad y_v \neq 0$$

$$\Rightarrow v \in L_0 + L_1, \quad \forall v \in L_1^\omega \setminus L_1$$

$$\Rightarrow L_1^\omega \subset L_0 + L_1.$$

Segue portanto que

$$L_0 \cap L_1^\omega = L_0^\omega \cap L_1^\omega = (L_0 + L_1)^\omega \subset L_1,$$

logo,

$$L_0 \cap L_1^\omega = \{0\},$$

pois $L_0 \cap L_1 = \{0\}$.

Por outro lado, $\dim(L_0) = n$ e $\dim(L_1^\omega) = \dim(V) - \dim(L_1) > \dim(V) - n$, donde

$$\dim(L_0) + \dim(L_0^\omega) > \dim(V),$$

logo

$$\dim(L_0 \cap L_1^\omega) \geq \dim(L_0) + \dim(L_1^\omega) - \dim(V) > 0,$$

uma contradição.

Logo, podemos tomar $v \in L_1^\omega \setminus L_1$ tal que $L_0 \cap L_1' = \{0\}$, onde $L_1' := L_1 + \mathbb{K}v$, e prosseguir desta forma até encontrar um plano Lagrangeano com a propriedade desejada. ∎

Teorema 1.1.13 *Seja (L_0, L_1) uma decomposição Lagrangeana de (V,ω)*[1]*. Então a aplicação linear*

$$\rho_{L_0,L_1} : L_1 \to L_0^* \quad \textit{definida por} \quad \rho_{L_0,L_1}(v) = \omega(v,\cdot)|_{L_0} \tag{1.4}$$

é um isomorfismo.

[1] $V = L_0 \oplus L_1$ e tanto L_0 como L_1 são Lagrangeanos.

Dem.: Esta aplicação é injetiva, pois se $\rho_{L_0,L_1}(v) = 0$, com $v \in L_1$, temos $\omega(v,u) = 0$ para todo $u \in L_0$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \; v \in (L_0)^{\omega} = L_0 \\ &\Longrightarrow \; v \in L_0 \cap L_1 \\ &\Longrightarrow \; v = 0. \end{aligned}$$

Portanto, ρ_{L_0,L_1} é injetiva, logo um isomorfismo, pois L_1 e L_0^* têm a mesma dimensão. ■

Agora seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base de L_0 e $\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$ a base dual correspondente em L_0^*. Seja $\{f_1, \cdots, f_n\}$ a base de L_1 tal que $\rho_{L_0,L_1}(f_j) = -\epsilon_j$.

Então

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0 \quad \forall i, j$$

$$-\omega(e_i, f_j) = \omega(f_j, e_i) = -\epsilon_j(e_i) = -\delta_{i,j} \quad \forall i, j.$$

Definição 1.1.14 *Uma base na qual ω tenha a forma canônica acima é dita uma base simplética de (V, ω).*

Note que se $\{e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n\}$ é uma base simplética de (V, ω) e escrevemos

$$u = \sum_{i=1}^{n} p_i e_i + q_i f_i \quad \text{e} \quad v = \sum_{i=1}^{n} p_i' e_i + q_i' f_i,$$

então $\omega(u,v)$ é igual ao lado direito da igualdade no exemplo (1.1.3). Isto significa que o pull-back de ω pelo isomorfismo linear

$$(p,q) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} p_i e_i + q_i f_i,$$

de $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ sobre V é igual a forma simplética canônica sobre $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$.

1.1.4 O Grupo Linear Simplético

Definição 1.1.15 *Sejam (V, ω) e (U, τ) espaços vetoriais simpléticos sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação linear $T : V \to U$ é dita* simplética *se satisfaz*

$$\tau(Tu, Tv) = \omega(u, v) \quad \forall u, v \in V. \tag{1.5}$$

Note que T é necessariamente injetiva, pois $\Psi_\omega : V \to V^*$ é injetiva. Logo $\dim(V) \leqslant \dim(U)$, e no caso em que $\dim(V) = \dim(U)$ temos a seguinte

Definição 1.1.16 *Um simplectomorfismo de V em U é uma aplicação linear simplética T de V em U bijetiva.*

Definição 1.1.17 *O conjunto das aplicações lineares simpléticas de (V, ω) em (V, ω) é chamado o grupo linear simplético, e será denotado por* $\mathrm{Sp}(V, \omega)$.

Observação 1.1.18 *De fato,* $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ *é um subgrupo do grupo* $\mathrm{Gl}(V)$.

Agora sejam (V, ω) um espaço vetorial simplético e $\eta = \{e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n\}$ uma base simplética de V. Então a matriz de ω nesta base é dada por

$$[\omega]_\eta = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}.$$

Logo, uma matriz $T \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ se, e somente se,

$$[Tu]^t[\omega]_\eta Tv = u^t[\omega]_\eta v, \quad \forall u, v \in V.$$

Ou seja, se fizermos $J = [\omega]_\eta$, temos que $T \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ se, e somente se,

$$T^* J T = J. \tag{1.6}$$

Portanto, se escrevemos

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

na base η, onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são matrizes $n \times n$ temos por (1.6) que $T \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ se, e somente se

$$\begin{cases} \alpha^*\gamma - \gamma^*\alpha &= 0 \\ \beta^*\delta - \delta^*\beta &= 0 \\ \alpha^*\delta - \gamma^*\beta &= I \end{cases}$$

Proposição 1.1.19 *Seja $T \in \mathrm{Sp}(2n)$, onde $\mathrm{Sp}(2n) = \mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ e ω é a forma simplética canônica do $\mathbb{R}^{2n}$. Então λ é autovalor de T se, e somente se, λ^{-1} também o é. Se 1 é autovalor de T então sua multiplicidade é par, o mesmo ocorre para -1. Além disso, se*

$$Tz = \lambda z, \quad Tz' = \lambda' z', \quad \lambda\lambda' \neq 1$$

então

$$\omega(z, z') = 0.$$

Dem.: Se λ é autovalor de $T \in \mathrm{Sp}(2n)$ então λ^{-1} é autovalor de T^{-1}, e como T^* é conjugada de T^{-1}, pois vale a equação

$$T^* = JT^{-1}J^{-1},$$

temos que λ^{-1} é autovalor de T^*. Uma vez que T^* e T possuem os mesmos autovalores (aqui é essencial que consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), segue que λ^{-1} é autovalor de T. A recíproca agora é imediata.

A segunda afirmação segue do fato do determinante de T ser igual a 1 e o mesmo ser igual ao produto dos autovalores. Finalmente, a última afirmação segue da identidade

$$\begin{aligned}
\lambda\lambda'\langle J_0 z, z'\rangle &= \langle J_0 T z, T z'\rangle \\
&= \omega(Tz, Tz') \\
&= T^*\omega(z, z') \\
&= \omega(z, z') \\
&= \langle J_0 z, z'\rangle,
\end{aligned}$$

donde a terceira igualdade segue do fato $T^*\omega = \omega$. Portanto $\omega(z, z') = \langle J_0 z, z'\rangle = 0$, pois $\lambda\lambda' \neq 1$. ■

Proposição 1.1.20 *A álgebra de Lie* $\mathfrak{sp}(V, \omega)$ *de* $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ *consiste das aplicações lineares* $T : V \to V$ *tais que*

$$\omega(Tu, v) + \omega(u, Tv) = 0, \quad \forall u, v \in V \tag{1.7}$$

equivalentemente, lembrando que $[\omega]_\eta = J$*,*

$$JT + T^*J = 0,$$

Dem.: O grupo simplético $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ é a imagem inversa de J pela função

$$f : \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{K}) \quad \text{definida por} \quad f(X) = X^*JX,$$

onde $\mathcal{A}_{2n}(\mathbb{K})$ é o espaço das matrizes anti-simétricas. Esta função é bilinear, portanto é de classe C^∞ e sua derivada é dada por

$$Df(X) \cdot H = H^*JX + X^*JH.$$

Observemos que $J \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{K})$ é valor regular de f. De fato, seja $X \in f^{-1}(J)$. Então $X^*JX = J$, donde dado $B \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{K})$, tomando $H = -\dfrac{XJB}{2}$ temos que $Df(X) \cdot H = B$, provando que J é valor regular.

Como $I \in f^{-1}(J)$, segue-se que a álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(V, \omega)$ de $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ é

$$T_I \mathrm{Sp}(V, \omega) = \ker Df(I) = \{C \in M_{2n}(K);\ C^*J + JC = 0\}.$$

■

Corolário 1.1.21 $\dim(\mathrm{Sp}(V, \omega)) = 2n^2 + n$

Dem.: Basta contar dimensões,

$$(2n)^2 - \frac{2n(2n-1)}{2} = 2n^2 + n.$$

■

1.1.5 Formas Hermitianas

Sejam V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{C}$ e $h : V \times V \to \mathbb{C}$ uma forma hermitiana em V. Olhando V como um espaço vetorial de dimensão $2n$ sobre $\mathbb{R}$ definimos a forma bilinear simétrica não-degenerada g por

$$g := \mathfrak{Re}(h),$$

e a forma simplética ω por

$$\omega := \mathfrak{Im}(h).$$

Note que a antisimetria de ω é consequência de

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Im}(h(u,v)) &= -\mathfrak{Re}(ih(u,v)) \\
&= -\mathfrak{Re}(h(iu,v)) \\
&= -\mathfrak{Re}(h(v,iu)) \\
&= \mathfrak{Re}(ih(v,u)) \\
&= -\mathfrak{Im}(h(v,u)).
\end{aligned}$$

Se definimos $J(u) = iu$, segue da primeira igualdade acima, que

$$\omega = -g \circ J,$$

logo, $\Psi_\omega : V \to V^*$ é injetivo pois g e J o são, donde segue a não degenerabilidade de ω.

Além disso, como $J^2 = -\mathrm{Id}$ podemos escrever

$$h = \omega \circ J + i\omega.$$

Definição 1.1.22 *Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, então uma estrutura complexa em V é uma aplicação linear (real) $J : V \to V$ tal que $J^2 = -\mathrm{Id}$.*

Com tal estrutura podemos tornar V um espaço vetorial complexo. Com efeito, basta definir

$$(a + ib)v = av + J(bv), \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ e } \forall v \in V.$$

É imediato verificar que a dimensão de V como espaço vetorial real é $2n$ se n denota a dimensão de V como $\mathbb{C}$-espaço vetorial.

Proposição 1.1.23 *Qualquer forma simplética é igual a parte imaginária de uma forma hermitiana com respeito a uma estrutura complexa conveniente.*

Dem.: Basta tomar a forma canônica de (1.1.3) e escrevendo

$$z_j = q_j + ip_j$$

considerar a forma hermitiana canônica

$$h(z, z') = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{z'_j}$$

em $\mathbb{C}$. ■

Capítulo 2

Índices de Caminhos de Matrizes Simétricas

Neste capítulo faremos um estudo sobre algumas propriedades das formas bilineares. Estamos interessados em usar, a posteriori, alguns resultados acerca do índice e do co-índice de uma forma bilinear, bem como a respeito de curvas no espaço das formas bilineares simétricas.

Sejam V e W espaços vetoriais. Vamos denotar por $\mathrm{Lin}(V, W)$ e $\mathrm{B}(V, W)$ respectivamente o espaço vetorial das aplicações lineares $T : V \to W$ e o das aplicações bilineares, $B : V \times W \to \mathbb{K}$, também chamadas formas bilineares.

O espaço dual de V, $\mathrm{Lin}(V, \mathbb{K})$, será denotado por V^*, e faremos as abreviações $\mathrm{Lin}(V) = \mathrm{Lin}(V, V)$ e $\mathrm{B}(V) = \mathrm{B}(V, V)$. Existe um isomorfismo natural

$$\Phi : \mathrm{Lin}(V, W^*) \longrightarrow \mathrm{B}(V, W) \quad \text{definido por} \quad \Phi(T)(v, w) = (T(v))(w).$$

Definição 2.0.24 *Dada $T \in \mathrm{Lin}(V, W)$, o* ***pull-back*** *de T é a aplicação*

$$T^* : \mathrm{B}(W) \longrightarrow \mathrm{B}(V) \quad \textit{definida por} \quad T^*(B) = B(T(\cdot), T(\cdot)).$$

Se T é um isomorfismo, o ***push-forward*** *de T é a aplicação*

$$T_* : \mathrm{B}(V) \longrightarrow \mathrm{B}(W) \quad \textit{definida por} \quad T_*(B) = B(T^{-1}(\cdot), T^{-1}(\cdot)).$$

2.1 Índice de uma Forma Bilinear Simétrica

Nesta seção, V sempre denotará um espaço vetorial real (não necessariamente de dimensão finita). Denotaremos por $\mathrm{B}_{sym}(V)$ o espaço das formas bilineares simétricas $B : V \times V \to \mathbb{R}$.

Definição 2.1.1 *Se $B \in \mathrm{B}_{sym}(V)$, dizemos que B é:*

1. ***definida positiva*** *se $B(v,v) > 0$ para todo $v \in V$, $v \neq 0$;*

2. ***semi-definida positiva*** *se $B(v,v) \geqslant 0$ para todo $v \in V$;*

3. ***definida negativa*** *se $B(v,v) < 0$ para todo $v \in V$, $v \neq 0$;*

4. ***semi-definida negativa*** *se $B(v,v) \leqslant 0$ para todo $v \in V$.*

Dizemos que um subespaço vetorial W de V é positivo com respeito a B, ou B-positivo, se $B|_{W\times W}$ é definida positiva. Da mesma forma dizemos que W é negativo com respeito a B, ou B-negativo, se $B|_{W\times W}$ for definida negativa.

Definição 2.1.2 *O **índice** de $B \in \mathrm{B}_{sym}(V)$, denotado por $n_-(B)$, é definido por*

$$n_-(B) = \sup\{\dim(W)/W \text{ é um subespaço } B\text{-negativo de } V\}.$$

Note que o índice de $B \in \mathrm{B}_{sym}$ pode ser um inteiro não negativo, ou $+\infty$.

Definição 2.1.3 *Definimos o **co-índice** de $B \in \mathrm{B}_{sym}(V)$, e denotamo-lo por $n_+(B)$, como sendo o índice de $-B$, i.e.*

$$n_+(B) = n_-(-B).$$

Observe que o co-índice pode ser definido como sendo o supremo das dimensões dos subespaços B-positivos de V.

Definição 2.1.4 *Quando ao menos um dos números $n_-(B)$ e $n_+(B)$ é finito, definimos a **assinatura** de B, denotada por $\operatorname{sgn}(B)$, por*

$$\operatorname{sgn}(B) = n_+(B) - n_-(B).$$

Definição 2.1.5 *Dada* $B \in \mathrm{B}_{sym}(V)$ *definimos a degenerabilidade de* B*, denotada por* $\mathrm{dgn}(B)$*, como sendo a dimensão de* $\mathrm{Ker}(B)$*.*

A seguir enunciamos o **Teorema da Inércia de Sylvester** o qual relaciona os inteiros $\mathrm{dgn}(B)$, $n_+(B)$ e $n_-(B)$, associados a uma forma $B \in \mathrm{B}_{sym}(V)$ com $\dim(V) < +\infty$.

Teorema 2.1.6 *Suponha* $\dim(V) = n < +\infty$ *e seja* $B \in \mathrm{B}_{sym}(V)$*. Então existe uma base de* V *para qual a matriz de* B *é dada por*

$$B \sim \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0_{p\times q} & 0_{p\times r} \\ 0_{q\times p} & -\mathrm{I}_q & 0_{q\times r} \\ 0_{r\times p} & 0_{r\times q} & 0_r \end{pmatrix},$$

onde $n_+(B) = p$*,* $n_-(B) = q$ *e* $\mathrm{dgn}(B) = r$*. Por conseguinte,*

$$n_+(B) + n_-(B) + \mathrm{dgn}(B) = n.$$

A demostração deste teorema será omitida e pode ser encontrada em vários textos de Álgebra Linear, por exemplo, em [3].

De agora em diante, consideramos V um espaço vetorial de dimensão finita. Escolhamos uma norma arbitrária em V denotada por $||\cdot||$, e consideremos a norma de uma forma bilinear $B \in \mathrm{B}(V)$ definida por

$$||B|| = \sup_{||v||,||w||\leqslant 1} |B(v,w)|.$$

Observe que como V e $\mathrm{B}(V)$ têm dimensão finita, então todas as normas nestes espaços induzem uma mesma topologia.

Lema 2.1.7 *Para cada* $k \geqslant 0$ *fixado, os conjuntos*

$$\mathcal{B}_k^+(V) = \{B \in \mathrm{B}_{sym}(V)/n_+(B) \geqslant k\} \quad e \quad \mathcal{B}_k^-(V) = \{B \in \mathrm{B}_{sym}(V)/n_-(B) \geqslant k\}$$

são abertos em $\mathrm{B}_{sym}(V)$*.*

Dem.: Se $B \in \mathcal{B}_k^+(V)$, existe um subespaço W de V, de dimensão k, tal que W é B-positivo. Como a esfera unitária de W é compacta, a função contínua em W, $v \mapsto B(v,v)$, assume um mínimo $c > 0$ nela.

Se $A \in \mathrm{B}_{sym}(V)$ é tal que $||A - B|| < \frac{c}{2}$, segue-se que A é definida positiva em W.

Com efeito, se $v \in W$ com $||v|| = 1$ então

$$A(v,v) \geq B(v,v) - |A(v,v) - B(v,v)| > c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} > 0,$$

donde, para todo $v \neq 0$, temos $A(v,v) = ||v||^2 A\left(\frac{v}{||v||}, \frac{v}{||v||}\right) > 0$.

Portanto $n_+(A) \geqslant k$, logo, $A \in \mathcal{B}_k^+(V)$. Isto mostra que $\mathcal{B}_k^+(V)$ é aberto em $B_{sym}(V)$. A segunda afirmação segue do fato de que para qualquer $B \in \mathrm{B}_{sym}(V)$, temos que $-B \in \mathrm{B}_{sym}(V)$ e $n_-(B) = n_+(-B)$. ■

Corolário 2.1.8 *Sejam $k \geqslant 0$ e $r \geqslant 0$ fixados. O conjunto das formas bilineares simetricas $B \in \mathrm{B}_{sym}(V)$ tais que $n_+(B) = k$ e $\mathrm{dgn}(B) = r$ é um aberto do conjunto*

$$\{B \in \mathrm{B}_{sym}(V)/dgn(B) \geqslant r\}. \tag{2.1}$$

Dem.: Pelo Teorema de Sylvester, temos $n_-(B) = n - dgn(B) - n_+(B)$, donde vemos que o conjunto

$$\mathcal{B}_{r,k}(V) = \{B \in \mathrm{B}_{sym}(V)/n_+(B) = k \text{ e } \mathrm{dgn}(B) = r\} \tag{2.2}$$

é igual a

$$\{B \in \mathrm{B}_{sym}(V)/dgn(B) = r\} \cap \{B \in \mathrm{B}_{sym}(V)/n_+(B) \geqslant k\} \cap \{B \in \mathrm{B}_{sym}(V)/n_-(B) \geqslant n-r-k\},$$

logo,

$$\mathcal{B}_{r,k}(V) \subset \{B \in \mathrm{B}_{sym}(V)/dgn(B) \geq r\} \cap \mathcal{B}_k^+(V) \cap \mathcal{B}_{n-l-k}^-(V). \tag{2.3}$$

Esta inclusão é uma igualdade, pois se B pertence ao lado direito, pelo Teorema de Sylvester, temos

$$dgn(B) = n - n_+(B) - n_-(B) \leq n - k - (n - r - k) = r,$$

logo, $dgn(B) = r$, pois também, $dgn(B) \geq r$. Isto mostra que $B \in \mathcal{B}_{r,k}(V)$.

Como pelo Lema (2.1.7), $\mathcal{B}_k^+(V)$ e $\mathcal{B}_{n-l-k}^-(V)$ são abertos em $B_{sym}(V)$, a igualdade (2.3) mostra que $\mathcal{B}_{r,k}(V)$ é aberto em $\{B \in \mathrm{B}_{sym}(V)/dgn(B) \geqslant r\}$. ■

Para demonstrar o próximo resultado desta seção façamos primeiro a seguinte

Observação 2.1.9 *: Seja $B \in \mathrm{B}_{sym}(V)$, com $\dim(V) = n < +\infty$, $n_+(B) = p$, $n_-(B) = q$ e $\mathrm{dgn}(B) = r$. Em geral, não é verdade que se tomarmos uma outra forma $\widetilde{B} \in \mathrm{B}_{sym}(V)$ suficientemente próxima de B teremos $n_+(\widetilde{B}) = n_+(B)$ ou $n_-(\widetilde{B}) = n_-(B)$. Tal fato pode ser facilmente verificado tomando-se a ϵ-perturbação de B,*

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0_{p\times q} & 0_{p\times r} \\ 0_{q\times p} & -\mathrm{I}_q & 0_{q\times r} \\ 0_{r\times p} & 0_{r\times q} & \pm\epsilon I_r \end{pmatrix}.$$

Contudo, o argumento usado no corolário acima nos mostra que no conjunto das matrizes com $dgn(B) = r$ fixo, é possível tomarmos uma vizinhança $U_\epsilon(B)$, tal que se $\widetilde{B} \in \mathrm{B}_{sym}(V)$ pertence a $U_\epsilon(B)$, então $n_+(\widetilde{B}) = n_+(B)$ e $n_-(\widetilde{B}) = n_-(B)$.

Lema 2.1.10 *Seja $B : I \to \mathrm{B}_{sym}(V)$ uma curva contínua definida em algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se a degenerabilidade de $B(t)$ independe de $t \in I$ então $n_-(B(t))$ e $n_+(B(t))$ também independem de t.*

Dem.: Como $\mathrm{dgn}(B(t)) = r$ para todo $t \in I$, temos $B : I \to \{B \in \mathrm{B}_{sym}(V)/dgn(B) \geqslant r\}$. Agora, dado $k \geq 0$, temos

$$J_k = \{t \in I/n_+(B(t)) = k\} = B^{-1}(\mathcal{B}_{r,k}(V)),$$

onde $\mathcal{B}_{r,k}(V)$ é o conjunto definido em (2.2), o qual é aberto em $\{B \in \mathrm{B}_{sym}(V)/dgn(B) \geqslant r\}$, pelo Corolário (2.1.8). Como B é contínua, segue-se que J_k é aberto em I. Pela observação acima, o conjunto

$$I - J_k = \{t \in I/n_+(B(t)) \neq k\}$$

também é aberto em I.

Com efeito, se $\bar{t} \in I - J_k$ é tal que $n_+\big(B(\bar{t})\big) = k' \neq k$, temos que existe uma vizinhança $\widetilde{U}_\epsilon$ de $B(\bar{t})$ em $\{B \in \mathrm{B}_{sym}(V)/dgn(B) \geqslant r\}$ tal que $U_\epsilon = \widetilde{U}_\epsilon \cap \mathcal{B}_{r,k'}(V)$ é uma vizinhança de $B(\bar{t})$ em $\mathcal{B}_{r,k'}(V)$. E pela continuidade de B, $B^{-1}\big(U_\epsilon \cap B(t)\big)$ é um aberto de $I - J_k$ contendo $\bar{t}$. Donde cada ponto $t \in I - J_k$ é ponto interior.

Como I é conexo, temos que $J_k = \emptyset$ ou $J_k = I$. Se $k = \mathrm{dgn}\big(B(\bar{t})\big)$ para algum $\bar{t} \in I$, então $J_k \neq \emptyset$, logo, $J_k = I$ donde segue o resultado. ∎

Proposição 2.1.11 *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e $B, B' \in \mathrm{B}_{sym}(V)$. Então*

$$\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(B) - \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(B') = n_+(B) - n_+(B') + \frac{1}{2}\mathrm{dgn}(B) - \frac{1}{2}\mathrm{dgn}(B').$$

Dem.: Seja $\dim(V) = n$. Se $p = n_+(B)$, $q = n_-(B)$, $r = \mathrm{dgn}(B)$, $p' = n_+(B')$, $q' = n_-(B')$ e $r' = \mathrm{dgn}(B')$, então pelo teorema da Inércia de Silvester

$$n = p + q + r = p' + q' + r'.$$

E por definição, $\mathrm{sgn}(B) = p - q$ e $\mathrm{sgn}(B') = p' - q'$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\mathrm{sgn}(B) - \tfrac{1}{2}\mathrm{sgn}(B') &= \tfrac{p-q}{2} - \tfrac{p'-q'}{2} \\
&= \tfrac{p-p'+q'-q}{2} \\
&= \tfrac{p-p'+n-p'-r'-(n-p-r)}{2} \\
&= p - p' + \tfrac{r-r'}{2} \\
&= n_+(B) - n_+(B') + \tfrac{1}{2}\mathrm{dgn}(B) - \tfrac{1}{2}\mathrm{dgn}(B').
\end{aligned}$$

■

Capítulo 3

O Teorema de Seifert-van Kampem para o grupóide fundamental

Neste capítulo denotaremos por I o intervalo fechado $[0,1] \subset \mathbb{R}$ e por $C^0(Y,Z)$ o conjunto das funções contínuas $f : Y \to Z$ entre dois espaços topológicos Y e Z.

Definição 3.0.12 *Sejam $\gamma, \mu : I \to X$ curvas contínuas em um espaço topológico X. Dizemos que γ e μ são **homotópicas** se existe uma função contínua*

$$H : I \times I \longrightarrow X$$

tal que $H(0,t) = \gamma(t)$ e $H(1,t) = \mu(t)$ para todo $t \in I$. Se além disso tivermos $H(s,0) = \gamma(0) = \mu(0)$ e $H(s,1) = \gamma(1) = \mu(1)$ para todo $s \in I$, dizemos que γ é homotópica a μ com extremidades fixadas.

É fácil ver que homotopia e homotopia com extremidades fixas são relações de equivalência em $C^0(I,X)$.

Dado X um espaço topológico denotaremos por $\Omega(X)$ o conjunto das curvas contínuas $\gamma : I \to X$, ou seja

$$\Omega(X) = C^0(I,X).$$

Para $\gamma \in \Omega(X)$, denotaremos por $[\gamma]$ a classe de equivalência das curvas que são homotópicas a γ com extremidades fixas, e por $\bar{\Omega}(X)$ o conjunto de tais classes, i.e.,

$$\bar{\Omega}(X) = \big\{[\gamma]/\gamma \in \Omega(X)\big\}.$$

Se $\gamma, \mu \in \Omega(X)$ são tais que $\gamma(1) = \mu(0)$, definimos a **concatenação** de γ e μ como sendo a curva $\gamma \cdot \mu$ em $\Omega(X)$ definida por

$$(\gamma \cdot \mu)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \mu(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Além disso, se $\gamma \in \Omega(X)$, definimos $\gamma^{-1} \in \Omega(X)$ por

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t), \quad t \in I.$$

Para cada ponto $x \in X$ denotaremos por $\mathfrak{o}_x \in \Omega(X)$ a curva constante

$$\mathfrak{o}_x(t) = x, \quad t \in I.$$

Prova-se sem dificuldade que , se $\gamma(1) = \mu(0)$, $[\gamma] = [\gamma_1]$ e $[\mu] = [\mu_1]$, então

$$[\gamma \cdot \mu] = [\gamma_1 \cdot \mu_1], \quad [\gamma^{-1}] = [\gamma_1^{-1}].$$

De modo que ficam bem definidas

$$[\gamma] \cdot [\mu] = [\gamma \cdot \mu], \quad [\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$$

em $\bar{\Omega}(X)$, desde que $\gamma(1) = \mu(0)$.

Deste modo temos que dadas $\gamma, \mu, \kappa \in \Omega(X)$ com $\gamma(1) = \mu(0)$ e $\mu(1) = \kappa(0)$, então

$$([\gamma] \cdot [\mu]) \cdot [\kappa] = [\gamma] \cdot ([\mu] \cdot [\kappa]).$$

Além disso, para $\gamma \in \Omega(X)$ temos

$$[\gamma] \cdot [\mathfrak{o}_{\gamma(1)}] = [\gamma], \quad [\mathfrak{o}_{\gamma(0)}] \cdot [\gamma] = [\gamma]$$

e

$$[\gamma] \cdot [\gamma]^{-1} = [\mathfrak{o}_{\gamma(0)}], \quad [\gamma]^{-1} \cdot [\gamma] = [\mathfrak{o}_{\gamma(1)}].$$

Lema 3.0.13 *Seja $\gamma \in \Omega(X)$ uma curva contínua e considere uma reparametrização $\gamma \circ \sigma$ de γ, onde $\sigma : I \to I$ é uma função contínua. Se $\sigma(0) = 0$ e $\sigma(1) = 1$então $[\gamma] = [\gamma \circ \sigma]$.*

Dem.: Basta definir $H(s,t) = \gamma((1-s)t + s\sigma(t))$ e notar que H é contínua, pois é composição de contínuas, $H(0,t) = \gamma(t)$ e $H(1,t) = \gamma \circ \sigma(t)$ para todo $t \in I$. Logo γ e $\gamma \circ \sigma$ são homotópicas. ■

Em alguns casos precisaremos considerar classes de homotopia de curvas $\gamma : [a,b] \to X$ definidas em um intervalo fechado arbitrário $[a,b]$. Neste caso, denotaremos por $[\gamma]$ a classe de homotopia com extremidades fixadas da reparametrização de γ em I dada por

$$I \ni t \longmapsto \gamma\big((b-a)t + a\big) \in X. \tag{3.1}$$

Pelo Lema anterior, temos que (3.1) é homotópica com extremidades fixadas a qualquer reparametrização $\gamma \circ \sigma$ de γ, onde $\sigma : I \to [a,b]$ é contínua, $\sigma(0) = a$ e $\sigma(1) = b$. Em geral, identificaremos uma curva contínua $\gamma : [a,b] \to X$ com sua reparametrização (3.1). Em particular, a concatenação de curvas definidas em intervalos fechados arbitrários deve ser compreendida como a concatenação de suas reparametrizações em I.

Definição 3.0.14 *O conjunto $\bar{\Omega}(X)$ munido da operação de concatenação é chamado o* ***grupóide fundamental*** *do espaço topológico X.*

Definição 3.0.15 *Se G é um conjunto, dizemos que uma aplicação $\psi : \Omega(X) \to G$ é invariante por homotopia se $\psi(\gamma) = \psi(\mu)$ sempre que $\gamma, \mu \in \Omega(X)$ são homotópicas com extremidades fixas.*

Claramente, $\psi : \Omega(X) \to G$ é invariante por hotopia se, e somente se, existe uma aplicação $\phi : \bar{\Omega}(X) \to G$ tal que $\psi(\gamma) = \phi([\gamma])$, para toda $\gamma \in \Omega(X)$.

Definição 3.0.16 *Se G é um grupo, dizemos que uma aplicação $\psi : \Omega(X) \to G$ é* ***compatível com concatenações*** *se:*

$$\psi(\gamma \cdot \mu) = \psi(\gamma)\psi(\mu),$$

para todas $\gamma, \mu \in \Omega(X)$ com $\gamma(1) = \mu(0)$. Se ψ é compatível com concatenações e invariante por homotopias, dizemos que ψ é um ***homomorfismo de grupóide****.*

Lema 3.0.17 *Se ψ é compatível com concatenações então*

$$\psi(\mathfrak{o}_x) = e \ \ \textit{(elemento neutro de } G\textit{)},$$

para todo $x \in X$. Se ψ é um homomorfismo de grupóide então

$$\psi(\gamma^{-1}) = \psi(\gamma)^{-1},$$

para toda $\gamma \in \Omega(X)$.

Dem:. A primeira afirmação segue da aplicação de ψ em ambos os lados da expressão $\mathfrak{o}_x = \mathfrak{o}_x \cdot \mathfrak{o}_x$. A segunda segue da aplicação de ψ em ambos os lados da expressão $\gamma \cdot \gamma^{-1} = \mathfrak{o}_x$. ■

Teorema 3.0.18 *Sejam G um grupo, X um espaço topológico e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ uma cobertura aberta de X. Se para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ existe um homomorfismo de grupóide $\psi_\alpha : U_\alpha \to G$ tal que para todos $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ e toda $\gamma \in \Omega(U_\alpha \cap U_\beta)$ tenhamos*

$$\psi_\alpha(\gamma) = \psi_\beta(\gamma),$$

então existe um único homomorfismo de grupóide $\psi : \Omega(X) \to G$ tal que $\psi(\gamma) = \psi_\alpha(\gamma)$, para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ e toda $\gamma \in \Omega(X)$.

O teorema acima é conhecido como o Teorema de Seifert-van Kampem e sua demonstração pode ser encontrada em [6]. Contudo há um corolário deste que será muito importante na demonstração da existência e unicidade do Índice de Maslov, o qual será visto no último capítulo. Vejamos tal resultado.

Corolário 3.0.19 *Sejam G um grupo, X um espaço topológico e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ uma cobertura aberta de X. Suponha que para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ existe uma aplicação $g_\alpha : U_\alpha \to G$ e que para todos $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, a aplicação*

$$U_\alpha \cap U_\beta \ni x \longmapsto g_\alpha(x) g_\beta(x)^{-1} \in G$$

é constante em cada componente arco-conexa de $U_\alpha \cap U_\beta$, então existe um único homomorfismo de grupóide $\psi : \Omega(X) \to G$ tal que $\psi(\gamma) = \psi_{g_\alpha}(\gamma)$[1], para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ e para toda $\gamma \in \Omega(U_\alpha)$.

Dem.: Dados $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ e $\gamma \in \Omega(U_\alpha \cap U_\beta)$ temos que $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ estão na mesma componente arco-conexa de $(U_\alpha \cap U_\beta)$. Logo,

$$\begin{aligned} g_\alpha(\gamma(0)) g_\beta(\gamma(0))^{-1} &= g_\alpha(\gamma(1)) g_\beta(\gamma(1))^{-1} \\ \Longrightarrow g_\alpha(\gamma(0))^{-1} g_\alpha(\gamma(1)) &= g_\beta(\gamma(0))^{-1} g_\beta(\gamma(1)). \end{aligned}$$

[1]Dado um grupo G e uma aplicação $g : X \to G$ definimos a aplicação $\psi_g : \Omega(X) \to G$ por

$$\psi_g(\gamma) = g(\gamma(0))^{-1} g(\gamma(1)),$$

para toda $\gamma \in \Omega(X)$. Note que ψ_g é claramente um homomorfismo de grupóide.

Como

$$\psi_{g_\alpha}(\gamma) = g_\alpha(\gamma(0))^{-1} g_\alpha(\gamma(1))$$

e

$$\psi_{g_\beta} = g_\beta(\gamma(0))^{-1} g_\beta(\gamma(1)),$$

segue que $\psi_{g_\alpha}(\gamma) = \psi_{g_\beta}(\gamma)$. E uma vez que cada $\psi_{g_\alpha} : \Omega(U_\alpha) \to G$ é um homomorfismo de grupóide, segue do Teorema (3.0.18) que existe um único homomorfismo de grupóide

$$\psi : \Omega(X) \longrightarrow G$$

tal que $\psi(\gamma) = \psi_{g_\alpha}(\gamma)$, para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ e toda $\gamma \in \Omega(U_\alpha)$. ■

Capítulo 4

A Geometria da Grassmanniana

4.1 Variedades Diferenciáveis

Nesta seção faremos algumas definições básicas e fixaremos notações com o intuito de inserir a linguagem necessária para as seções posteriores. Neste texto, o termo "variedade" sempre designará uma variedade diferenciável real de dimensão finita cuja topologia satifaz a propriedade de Hausdorff e o segundo axioma da enumerabilidade, i.e., admite uma base enumerável de abertos. O termo "diferenciável" sempre significará "de classe C^∞".

Definição 4.1.1 *Seja M um conjunto não vazio. Uma* **carta** *em M é uma bijeção*

$$\phi : U \longrightarrow \widetilde{U},$$

onde $U \subset M$ é um subconjunto qualquer e $\widetilde{U}$ é um aberto de algum espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$.

Em algumas situações, com um leve abuso de notação, tomaremos $\widetilde{U}$ como sendo um subconjunto aberto de um espaço vetorial real de dimensão finita.

Definição 4.1.2 *Dizemos que duas cartas $\phi_1 : U \to \widetilde{U}$ e $\phi_2 : V \to \widetilde{V}$ em um conjunto M são* **compatíveis** *se $U \cap V = \emptyset$ ou se $\phi_1(U \cap V)$ e $\phi_2(U \cap V)$ são abertos e a função de transição*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U \cap V) \longrightarrow \phi_2(U \cap V)$$

é um difeomorfismo. Um **atlas** *diferenciável $\mathcal{A}$ em M é um conjunto de cartas em M que são duas a duas compatíveis e cujos domínios cobrem M. Dizemos que uma carta é compatível com um atlas diferenciável se é compatível com todas as cartas de tal atlas.*

É fácil ver que duas cartas que são compatíveis com um atlas são compatíveis entre si. Logo, todo atlas diferenciável $\mathcal{A}$ está contido em um único atlas difereciável maximal, o qual é obtido a partir da coleção de todas as cartas em M que são compatíveis com $\mathcal{A}$.

Um atlas diferenciável $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ induz em M uma única topologia τ tal que cada carta de $\mathcal{A}$ é um homeomorfismo definido em um subconjunto aberto de (M, τ). A topologia τ de M é definida por:

$$A \in \tau \Longleftrightarrow \phi_\alpha(A \cap U_\alpha) \text{ é aberto em } \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in I.$$

Lema 4.1.3 *Sejam M um conjunto e $\mathcal{A}$ um atlas enumerável em M. Então, a topologia induzida em M por um atlas maximal contendo $\mathcal{A}$ possui base enumerável.*

Dem. Basta notar que se V é um aberto da topologia induzida pelo atlas maximal podemos escrever

$$V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V \cap U_i,$$

onde os U_i's são os domínios das cartas de $\mathcal{A}$. ■

Lema 4.1.4 *Seja $\mathcal{A}$ um atlas em M tal que quaisquer dois pontos de M pertencem a um mesmo domínio de alguma carta de $\mathcal{A}$. Então a topologia de M induzida por $\mathcal{A}$ é Hausdorf.*

Dem. Observe que $\phi : U \to \widetilde{U}$ é um homeomorfismo, logo a separabilidade em U é garantida pela separabilidade de $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$. ■

Definição 4.1.5 *Uma* **variedade diferenciável** *é definida como sendo um par $(M, \mathcal{A})$, onde M é um conjunto e $\mathcal{A}$ é um atlas diferenciável maximal em M, cuja topologia correspondente τ é Hausdorff e com base enumerável. Uma* **carta** *ou um* **sistema de coordenadas***, em uma variedade diferenciável $(M, \mathcal{A})$ é uma carta que pertence a $\mathcal{A}$.*

Sejam $(M, \mathcal{A})$ uma variedade e $N \subset M$ um subconjunto. Dizemos que uma carta $\phi : U \to \widetilde{U}$ é uma **carta adaptada** para N se $\phi(U \cap N)$ é igual a interseção de $\widetilde{U}$ com um subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^n$.

Neste caso, dizemos que

$$\phi|_{U \cap N} : U \cap N \longrightarrow \widetilde{U} \cap S$$

é a carta em N induzida por ϕ.

O subconjunto N é dito uma subvariedade mergulhada de M se para todo $x \in N$ existe uma carta adaptada para N cujo domínio contenha x. A inclusão $i : N \to M$ será portanto um mergulho de N em M, i.e., uma imersão[1] que é um homeomorfismo sobre sua imagem equipada com a topologia relativa.

4.1.1 Ação de grupos de Lie

Se G é um grupo e M é um conjunto, uma **ação** (à esquerda) de G em M é uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} f: & G \times M & \longrightarrow & M \\ & (g,m) & \longmapsto & f(g,m) = gm \end{array}$$

satisfazendo

1. $em = m$, onde $e \in G$ é o elemento neutro de G,

2. $(gh)m = g(hm)$.

para todos $g, h \in G$ e para todo $m \in M$.

Dado $m \in M$, definimos a aplicação $\beta_m : G \to M$ por $\beta_m(g) = gm$, se fizermos $G_m = \{g \in G / gm = m\}$, temos que G_m é um subgrupo de G o qual será chamado de **estabilizador** de m. Também definimos o conjunto $G(m) = \{g \cdot m / g \in G\}$ o qual será dito a **órbita** de m relativa a ação de G. Se H é um subgrupo de G definimos $G/H = \{gH / g \in G\}$, onde $gH = \{gh / h \in H\}$. De modo que fica estabelecida, para cada $m \in M$, uma bijeção $\bar{\beta}_m : G/G_m \to G(m)$ dada por $\bar{\beta}_m(gG_m) = gm$.

Diremos que dois pontos de M são equivalentes sempre que estiverem em uma mesma órbita, determinando deste modo uma relação de equivalência em M. Denotaremos por M/G o espaço quociente de tal relação de equivalência.

Embora tenhamos descrito ação à esquerda, a ação à direita $M \times G \to M$ é essencialmente a mesma coisa.

Se M for uma variedade diferenciável consideraremos que a ação $G \times M \to M$ é diferenciável. Um caso particularmente importante de ação diferenciável é quando o grupo G é

[1] Em geral definimos uma imersão $f : M_1 \to M_2$ entre duas variedades como sendo uma aplicação de classe C^∞ cuja derivada é injetiva em cada ponto.

um grupo de Lie, neste a aplicação $f : G \times M \to M$ é C^∞. Neste caso, damos ao espaço quociente M/G a topologia quociente.

Seja G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Se H é um subgrupo fechado de G, então existe uma única estrutura diferenciável em G/H tal que a aplicação quociente $q : G \to G/H$ é uma submersão[2]. O núcleo de $dq(e)$ é precisamente a álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de H, donde o espaço tangente a G/H no ponto e pode ser identificado com o espaço quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Observe que, como q é aberto e sobrejetivo, segue que G/H tem a topologia quociente induzida pela topologia de G via q.

Por continuidade, para todo $m \in M$, o grupo G_m é um subgrupo fechado de G, donde podemos inserir uma estrutura diferenciável em G/G_m com a qual a aplicação $gG_m \mapsto gm$ é uma imersão. Obtemos assim a seguinte

Proposição 4.1.6 *Se G é um grupo de Lie que age diferenciavelmente sobre uma variedade M, então para todo $m \in M$ a órbita $G(m)$ tem uma única estrutura diferenciável que torna*

$$\bar{\beta}_m : G/G_m \longrightarrow G(m)$$

um difeomorfismo. Com tal estrutura $G(m)$ é uma subvariedade imersa em M, e o espaço tangente $T_mG(m)$ coincide com a imagem da aplicação

$$d\beta_m(e) : \mathfrak{g} \longrightarrow T_mM.$$

Definição 4.1.7 *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $S \subset X$ é dito localmente fechado se S for a interseção de um subconjunto fechado e um subconjunto aberto de X.*

A demonstração do teorema a seguir será omitida. Contudo, esta pode ser encontrada em [10].

Teorema 4.1.8 *Seja G um grupo de Lie agindo diferenciavelmente sobre uma variedade M. Dado $m \in M$, a órbita $G(m)$ é uma subvariedade mergulhada de M se, e somente se, $G(m)$ é localmente fechado em M.*

[2] dq é sobrejetiva

4.2 A Estrutura Diferenciável da Grassmanniana

Sejam n, k inteiros fixados, com $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$. Denotaremos por $G_k(n)$ o conjunto de todos os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k. Diremos que tal conjunto é a Grassmanniana dos subespaços k-dimensionais de $\mathbb{R}^n$.

O objetivo deste capítulo é mostrar que $G_k(n)$ possui uma estrutura diferenciável. Para isto, comecemos com algumas considerações.

Definição 4.2.1 *Seja $W_1 \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial de dimensão $n-k$. Definiremos o conjunto dos subespaços de $\mathbb{R}^n$ transversais à W_1 como sendo o conjunto*

$$G_k^0(n, W_1) = \{W \in G_k(n)/W \cap W_1 = \{0\}\} \subset G_k(n).$$

Quando estiverem claras as dimensões escreveremos apenas $G_k^0(W_1)$.

Considere uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$, onde $\dim(W_0) = k$. Para toda aplicação linear $T : W_0 \to W_1$, o **gráfico** de T é dado por

$$Gr(T) = \{v + T(v)/v \in W_0\}.$$

A aplicação linear $v \mapsto v + T(v)$ é injetiva pois se $v + T(v) = 0$, então $v = 0$, já que $W_0 \cap W_1 = \{0\}$. Por conseguinte, o subespaço $W = Gr(T)$ tem dimensão k. Mas, nem todo $W \in G_k(n)$ é um gráfico. De fato, vale o seguinte resultado:

Teorema 4.2.2 *Um elemento $W \in G_k(n)$ é algum $Gr(T)$ se, e somente se, for transversal a W_1.*

Dem. Se $W = Gr(T)$ então

$$W + W_1 = \{v + (Tv + v_1);\ v \in W_0, v_1 \in W_1\} = W_0 + W_1 = \mathbb{R}^n.$$

Esta é uma soma direta, pois W e W_1 têm dimensões complementares, logo, $W \cap W_1 = \{0\}$, portanto $W \in G_k^0(n, W_1)$.

Reciprocamente, se $W \in G_k^0(n, W_1)$, então cada $v_0 \in W_0$ se escreve de maneira única na forma $v_0 = w - v_1$, onde $w \in W$ e $v_1 \in W_1$. Definindo

$$T(v_0) = v_1, \tag{4.1}$$

temos que $T : W_0 \to W_1$ é aplicação linear e que $W = Gr(T)$. ■

Note que esta aplicação linear T é univocamente determinada por $W \in G_k^0(W_1) = G_k^0(n, W_1)$. Isto permite definir uma aplicação bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \phi_{W_0,W_1}: & G_k^0(W_1) & \to & Lin(W_0, W_1) \\ & W & \mapsto & T \end{array}, \tag{4.2}$$

onde $W = Gr(T)$.

O espaço $Lin(W_0, W_1)$ é isomorfo a $\mathbb{R}^{k(n-k)}$ e veremos que a coleção das bijeções ϕ_{W_0,W_1}, quando o par (W_0, W_1) varia define uma estrutura diferenciável em $G_k(n)$. Para isto devemos mostrar que se $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1 = W_0' \oplus W_1'$ e $G_k^0(W_1) \cap G_k^0(W_1') \neq \emptyset$, as funções de transição

$$\phi_{W_0',W_1'} \circ \phi_{W_0,W_1}^{-1}$$

são diferenciáveis. Provaremos isto nos casos em que $W_0' = W_0$ e $W_1' = W_1$, o caso geral seguindo-se destes por transitividade, uma vez que

$$\phi_{W_0',W_1'} \circ \phi_{W_0,W_1}^{-1} = \Big(\phi_{W_0',W_1'} \circ \phi_{W_0',W_1}^{-1}\Big) \circ \Big(\phi_{W_0',W_1} \circ \phi_{W_0,W_1}^{-1}\Big).$$

Teorema 4.2.3 *Sejam π_0 e π_1 as projeções sobre W_0 e W_1, respectivamente, relativas à decomposição $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$. Se W é transversal a W_1, então $\pi_0|_W : W \to W_0$ é um isomorfismo. Além disso, se $W = Gr(T)$, temos*

$$T = (\pi_1|_W) \circ (\pi_0|_W)^{-1}.$$

Dem.: Todo $w \in W$ é da forma $w = w_0 + w_1 \in W_0 + W_1$. Assim, se $\pi_0(w) = 0$, temos que $w_0 = 0$, logo, $w = w_1 \in W \cap W_1$, donde $w = 0$, pois $W \cap W_1 = \{0\}$. Portanto, $\pi_0|_W$ é injetiva, logo um isomorfismo, já que W e W_0 têm a mesma dimensão. Agora, por (4.1), segue-se que

$$T(\pi_0(w)) = \pi_1(w), \quad \text{logo,} \quad T \circ \pi_0|_W = \pi_1|_W. \ ■$$

Sejam $W_0, W_0' \subset \mathbb{R}^n$ subespaços de dimensão k e W_1 um complementar comum destes, i.e. $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1 = W_0' \oplus W_1$. Como W_0 é transversal a W_1, a proposição anterior garante que

$$\eta_{W_0,W_0'}^{W_1} = \pi_0'|_{W_0} : W_0 \to W_0'$$

é um isomorfismo, ao qual nos referiremos como o *isomorfismo de W_0 em W_0' determinado pelo complementar comum W_1.*

Como todo $v_0 \in W_0$ é da forma $v_0 = v_0' + v_1 \in W_0' + W_1$, ou seja, $v_0' = v_0 - v_1$, vemos que $\pi_0(v_0') = v_0$ e $\pi_0'(v_0) = v_0'$, donde $\pi_0|_{W_0'} = \big(\pi_0'|_{W_0}\big)^{-1}$. Portanto,

$$\eta^{W_1}_{W_0',W_0} = \left(\eta^{W_1}_{W_0,W_0'}\right)^{-1}. \tag{4.3}$$

O teorema seguinte garante a diferenciabilidade da função de transição $\phi_{W_0',W_1} \circ (\phi_{W_0,W_1})^{-1}$.

Teorema 4.2.4 *Se $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1 = W_0' \oplus W_1$ então*

$$\phi_{W_0',W_1} \circ (\phi_{W_0,W_1})^{-1}(T) = (\pi_1'|_{W_0} + T) \circ \eta^{W_1}_{W_0',W_0}. \tag{4.4}$$

Dem.: Seja $T' = \phi_{W_0',W_1} \circ (\phi_{W_0,W_1})^{-1}(T)$ e seja $W = (\phi_{W_0,W_1})^{-1}(T) \in G^0_k(W_1)$. Então, $T = \phi_{W_0,W_1}(W)$ e $T' = \phi_{W_0',W_1}(W)$, logo, o Teorema 4.2.3 nos dá

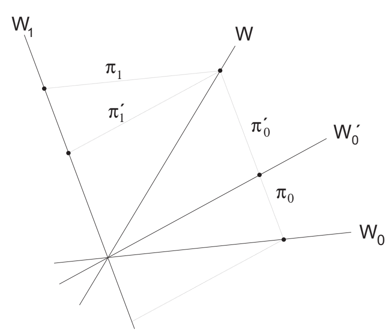
$$T = \big(\pi_1|_W\big) \circ \big(\pi_0|_W\big)^{-1} \quad \text{e} \quad T' = \big(\pi_1'|_W\big) \circ \big(\pi_0'|_W\big)^{-1}.$$

A figura ao lado mostra que

$$\big(\pi_0'|_W\big)^{-1} = \big(\pi_0|_W\big)^{-1} \circ \big(\pi_0|_{W_0'}\big)$$

e

$$\pi_1'|_W = \pi_1|_W + \big(\pi_1'|_{W_0}\big) \circ \big(\pi_0|_W\big).$$



Relações entre as projeções

A verificação analítica destas igualdades é simples e as deixamos como exercício. Segue-se então que

$$\begin{aligned} T' &= \Big(\pi_1|_W + \big(\pi_1'|_{W_0}\big) \circ \big(\pi_0|_W\big)\Big) \circ \big(\pi_0|_W\big)^{-1} \circ \big(\pi_0|_{W_0'}\big) \\ &= \Big(\big(\pi_1|_W\big)\big(\pi_0|_W\big)^{-1} + \pi_1'|_{W_0}\Big) \circ \big(\pi_0|_{W_0'}\big) \\ &= \Big(T + \pi_1'|_{W_0}\Big) \circ \eta^{W_1}_{W_0',W_0}. \end{aligned}$$

■

Provaremos agora a diferenciabilidade do outro tipo de função de transição.

Teorema 4.2.5 *Seja* $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1 = W_0 \oplus W_1'$ *com* $G_k^0(W_1) \cap G_k^0(W_1') \neq \emptyset$*. Então, a aplicação linear*

$$S = Id + (\pi_0'|_{W_1}) \circ T : W_0 \to W_0,$$

onde $Gr(T) \in G_k^0(W_1) \cap G_k^0(W_1')$*, é invertível, e*

$$\phi_{W_0,W_1'} \circ (\phi_{W_0,W_1})^{-1}(T) = \eta_{W_1,W_1'}^{W_0} \circ T \circ (Id + (\pi_0'|_{W_1}) \circ T)^{-1}. \tag{4.5}$$

Dem.: Seja $W \in G_k^0(W_1) \cap G_k^0(W_1')$ e sejam $T = \phi_{W_0,W_1}(W)$ e $T' = \phi_{W_0,W_1'}(W)$. Então, pelo Teorema 4.2.3, temos que

$$T = \big(\pi_1|_W\big) \circ \big(\pi_0|_W\big)^{-1} \quad \text{e} \quad T' = \big(\pi_1'|_W\big) \circ \big(\pi_0'|_W\big)^{-1}.$$

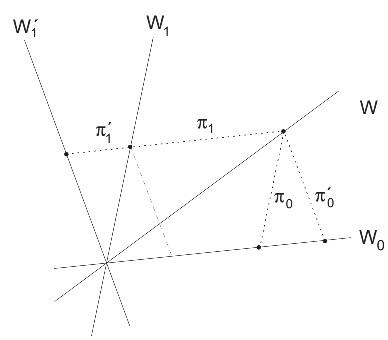
A figura ao lado mostra que

$$\pi_1'|_W = \big(\pi_1'|_{W_1}\big) \circ \big(\pi_1|_W\big)$$

e

$$\pi_0'|_W = \pi_0|_W + \big(\pi_0'|_{W_1}\big) \circ \big(\pi_1|_W\big)$$

igualdades de fácil verificação analítica.



Relações entre as projeções

Usando a segunda equação e a expressão de T, obtemos

$$\big(\pi_0'|_W\big) \circ \big(\pi_0|_W\big)^{-1} = I_W + \big(\pi_0'|_{W_1}\big) \circ T,$$

donde

$$\big(\pi_0'|_W\big)^{-1} = \big(\pi_0|_W\big)^{-1} - \big(\pi_0'|_W\big)^{-1} \circ \big(\pi_0'|_{W_1}\big) \circ T,$$

logo, pela expressão de T', temos

$$T' = \big(\pi_1'|_W\big) \circ \big(\pi_0|_W\big)^{-1} - T' \circ \big(\pi_0'|_{W_1}\big) \circ T,$$

donde, usando a expressão de $\pi_1'|_W$, obtemos

$$T' \circ \Big(I_{W_0} + \big(\pi_0'|_{W_1}\big) \circ T\Big) = \big(\pi_1'|_{W_1}\big) \circ T.$$

Provando-se a invertibilidade de S resulta daí a expressão (4.5), uma vez que $\pi_1'|_{W_1} = \eta^{W_0}_{W_1,W_1'}$. Agora, $S : W_0 \to W_0$ é invertível por ser injetiva, como veremos. Se $S(v_0) = 0$ com $v_0 \in W_0$, temos $v_0 + \left(\pi_0'|_{W_1}\right)\Big(T(v_0)\Big) = 0$, e decompondo $T(v_0) = w_0' + w_1' \in W_0 + W_1'$, obtemos $v_0 + w_0' = 0$, donde $w_1' = v_0 + T(v_0) \in Gr(T) \cap W_1'$, logo, $w_1' = 0$ pois $Gr(T) \in G_k^0(W_1')$. Portanto, $w_0' = T(v_0) \in W_0 \cap W_1$, logo, $w_0' = 0$. Assim $v_0 = 0$, o que prova ser S injetiva. ■

Teorema 4.2.6 *A coleção de bijeções* $\left\{\phi_{W_0,W_1}\right\}$ *dá a* $G_k(n)$ *uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão* $k(n-k)$.

Dem.: A diferenciabilidade da mudança de cartas segue-se dos Teoremas 4.2.4, 4.2.5 e da observação sobre a transitividade das cartas. Além disso a topologia induzida pelo atlas $\{\phi_{W_0,W_1}\}$ é Hausdorf. Com efeito, se $V_1, V_2 \in G_k(n)$ tome $v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus (V_1 \cup V_2)$ e faça $V_i' = V_i \oplus \mathbb{R}^n v_1$, obtendo assim V_1' e V_2' ambos de dimensão $k+1$. Repetindo o processo determinamos indutivamente os vetores $\{v_1, \cdots, v_{n-k}\}$ os quais geram um complementar comum, digamos W, de V_1 e V_2, ou seja, $V_1, V_2 \in G_k^0(W)$. A propriedade de Hausdorf segue do fato de quaisquer dois pontos pertecerem ao domínio de uma mesma carta (ver Lema 4.1.4).

Para ver que a topologia induzida pelo atlas $\{\phi_{W_0,W_1}\}$ possui base enumerável basta observar que se considerarmos o conjunto finito das cartas ϕ_{W_0,W_1}, tais que W_0 e W_1 são gerados pelos vetores canônicos de $\mathbb{R}^n$, temos que os domínios de tais cartas cobrem $G_k(n)$. Portanto a topologia tem base enumerável (ver Lema 4.1.3). ■

Por fim, faremos uma descrição concreta do espaço tangente $T_W G_k(n)$ para $W \in G_k(n)$, mostrando que este pode ser identificado com o espaço $\mathrm{Lin}(W, \mathbb{R}^n/W)$.

Proposição 4.2.7 *Sejam* $W \in G_k(n)$ *e* W_1 *um subespaço complementar de* W *em* $\mathbb{R}^n$. *Denote por* $q_1 : W_1 \to \mathbb{R}^n/W$ *a restrição da aplicação quociente sobre* $\mathbb{R}^n/W$. *Então a aplicação*

$$q_1 \circ d\phi_{W,W_1}(W) : T_W G_k(n) \longrightarrow \mathrm{Lin}(W, \mathbb{R}^n/W), \tag{4.6}$$

é um isomorfismo. Além disso, tal isomorfismo independe da escolha do subespaço complementar W_1.

Dem.: Como q_1 é um isomorfismo e ϕ_{W,W_1} é uma carta numa vizinhaça de W, segue que (4.6) é de fato um isomorfismo. Restando provar que o mesmo não depende da escolha de

W_1.

Considere W_1' um outro subespaço complementar de W em $\mathbb{R}^n$, e observe que $\phi_{W,W_1}(W) = \phi_{W,W_1'}(W) = 0$. Derivando a função de transição (4.5) em $T = 0$ obtemos que

$$d\phi_{W,W_1'}(W) = \eta^{W}_{W_1,W_1'} \circ d\phi_{W,W_1}(W).$$

O resultado segue do fato de termos $q_1 = q_1' \circ \eta^{W}_{W_1,W_1'}$, onde q_1' denota a restrição a W_1' da projeção sobre $\mathbb{R}^n/W$. ■

4.3 A Grassmanniana Lagrangeana

Nesta seção mostraremos que o conjunto Λ de todos os subespaços Lagrangeanos de um espaço vetorial simplético (V, ω), de dimensão $2n$, é uma subvariedade da Grassmanniana de todos os subespaços de V de dimensão n. Diremos que Λ é a Grassmanniana Lagrangeana de (V, ω).

A seguir faremos algumas definições que são apenas uma generalização do caso $V = \mathbb{R}^{2n}$.

Por $G_k(V)$ denotaremos o conjunto de todos os subespaços de V de dimensão k ($0 \leq k \leq dim(V)$), e se W_1 é um subespaço de V de codimensão k, definimos $G_k^0(W_1)$ como sendo o conjunto dos subespaços de V que são transversais a W_1, isto é,

$$G_k^0(W_1) = \{W \in G_k(V)/V = W \oplus W_1\}.$$

A Grassmanniana Lagrangeana é explicitamente o conjunto

$$\Lambda = \Lambda(V, \omega) = \{L \in G_n(V)/L \text{ é Lagrangeano}\}.$$

Lembremos que a forma bilinear não degenerada ω induz um isomofismo canônico

$$\Psi_\omega : V \to V^*, \quad \text{dado por} \quad \Psi_\omega(v) = \omega(v, \bullet). \tag{4.7}$$

Outro isomorfismo canônico que usaremos com frequência é o seguinte:

$$\Psi : Lin(V, V^*) \to B_2(V, \mathbb{R}), \quad \text{definido por} \quad \Psi(T) \cdot (u, v) = T(u) \cdot v. \tag{4.8}$$

Dada uma aplicação linear $T : L_0 \to L_1$, temos para $\rho_{L_0,L_1} \circ T : L_0 \to L_0^*$ (ver teorema 1.1.13) que

$$\big(\rho_{L_0,L_1} \circ T\big)(v) = \rho_{L_0,L_1}\big(T(v)\big) = \omega\big(T(v), \bullet\big),$$

donde, para a forma bilinear $\rho_{L_0,L_1} \circ T$, temos por (4.8)

$$\big(\rho_{L_0,L_1} \circ T\big)(v,w) = \omega(T(v),w). \tag{4.9}$$

Teorema 4.3.1 *Seja (L_0, L_1) uma decomposição Lagrangeana de V; então um subespaço $L \in G_n^0(L_1)$ é Lagrangeano se, e somente se, a forma bilinear*

$$\rho_{L_0,L_1} \circ \phi_{L_0,L_1}(L) \in Lin(L_0, L_0^*) \simeq B(L_0)$$

é simétrica.

Dem.: Como $L \in G_n^0(L_1)$, podemos considerar a aplicação linear $T = \phi_{L_0,L_1}(L)$. Seja $B = \rho_{L_0,L_1} \circ \phi_{L_0,L_1}(L)$. Então, por (4.9) temos que $B(v,w) = \omega(T(v),w)$. Agora, para quaisquer $v, w \in L_0$ temos

$$\begin{aligned}\omega(v + T(v), w + T(w)) &= \omega(v,w) + \omega(v, T(w)) + \omega(T(v), w) + \omega(T(v), T(w)) \\ &= \omega(T(v), w) - \omega(T(w), v),\end{aligned}$$

pois L_0 e L_1 são subespaços Lagrangeanos. Logo, L é Lagrangeano se, e somente se

$$\omega(T(v), w) = \omega(T(w), v), \quad \text{para quaisquer} \quad v, w \in L_0,$$

portanto, se e somente se, B é simétrica. ■

Se $L \subset V$ for um subespaço Lagrangeano, denotaremos por $\Lambda^0(L)$ o conjunto dos subespaço Lagrangeanos de V que são transversais a L, explicitamente

$$\Lambda^0(L) = \Lambda \cap G_n^0(L).$$

O teorema anterior permite considerar a função definida no seguinte teorema.

Teorema 4.3.2 *Seja (L_0, L_1) uma decomposição Lagrangeana de V. Então a aplicação*

$$\varphi_{L_0,L_1} : \Lambda^0(L_1) \longrightarrow B_{sym}(L_0) \quad \textit{definida por} \quad \varphi_{L_0,L_1}(L) = \rho_{L_0,L_1} \circ \phi_{L_0,L_1}(L) \tag{4.10}$$

é uma bijeção.

Dem.: Como ρ_{L_0,L_1} e ϕ_{L_0,L_1} são bijetivas, segue-se que φ_{L_0,L_1} é uma bijeção sobre a sua imagem. Provemos que esta é igual a $B_{sym}(L_0)$. Seja $\beta \in B_{sym}(L_0)$. Estendamos β a uma aplicação bilinear $\tilde{\beta} : V \times V \to \mathbb{R}$ definindo $\tilde{\beta}(v,w) = \beta\big(\pi_0(v), \pi_0(w)\big)$. O isomorfismo (4.7) permite-nos construir uma aplicação linear $\tilde{T} : V \to V$ tal que

$$\omega(\tilde{T}v, w) = \tilde{\beta}(v,w), \quad \text{para quaisquer} \quad v, w \in V.$$

Seja $T = \pi_1 \circ \tilde{T}|_{L_0} : L_0 \to L_1$. Como L_0 é Lagrangeano, $\omega|_{L_0} = 0$, logo se $w \in L_0$ temos $\omega(\tilde{T}v, w) = \omega(\pi_0(\tilde{T}v) + \pi_1(\tilde{T}v), w) = \omega(Tv, w)$. Portanto, para quaisquer $v, w \in L_0$, vale a igualdade

$$\omega(Tv, w) = \beta(v, w).$$

Seja $L = \phi^{-1}_{L_0,L_1}(T) \in G^0_n(L_1)$. Por (4.9), segue-se desta equação que

$$\big(\rho_{L_0,L_1} \circ (\phi_{L_0,L_1})(L)\big)(v,w) = \beta(v,w), \quad \text{para quaisquer} \quad v, w \in L_0, \tag{4.11}$$

portanto, $\varphi_{L_0,L_1}(L) = \beta$. ■

Teorema 4.3.3 *A Grassmanniana Lagrangeana Λ é uma subvariedade diferenciável de dimensão $\frac{1}{2}n(n+1)$ mergulhada na variedade $G_n(V)$. As cartas φ_{L_0,L_1} formam um atlas diferenciável para Λ conforme (L_0, L_1) percorre o conjunto de todas as decomposições Lagrangeanas de V.*

Dem.: A coleção de bijeções $\{\varphi_{L_0,L_1}\}$ define um atlas sobre Λ, pois como todo espaço Lagrangeano admite um complementar Lagrangeano, o domínio das cartas φ_{L_0,L_1} cobre Λ conforme (L_0, L_1) percorre o conjunto de todas as decomposições Lagrangeanas de V. Este atlas é diferenciável uma vez que as transições são feitas diferenciavelmete, por exemplo, se $L = \varphi^{-1}_{L_0,L_1}(B)$, então $B = \rho_{L_0,L_1} \circ \phi_{L_0,L_1}(L)$, donde, $\phi_{L_0,L_1}(L) = \rho^{-1}_{L_0,L_1} \circ B$, logo

$$\big(\varphi_{L'_0,L_1} \circ \varphi^{-1}_{L_0,L_1}\big)(B) = \rho_{L'_0,L_1} \circ \big(\phi_{L'_0,L_1} \circ (\phi_{L_0,L_1})^{-1}\big)\big(\rho^{-1}_{L_0,L_1} \circ B\big). \tag{4.12}$$

Como $B_{sym}(L_0)$ é isomorfo a $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$, este é o espaço que modela esta variedade a qual tem, portanto, dimensão $\frac{1}{2}n(n+1)$. Finalmente, esta é uma subvariedade de $G_n(V)$, pois pela própria construção das cartas φ_{L_0,L_1}, estas são cartas adaptadas. ■

Os dois teoremas seguintes dão as expressões explícitas das transições de cartas da Grassmanniana Lagrangena.

Teorema 4.3.4 *Se* (L_0, L_1) *e* (L'_0, L_1) *são duas decomposições Lagrangeanas de* V*, então*

$$\Big(\varphi_{L'_0,L_1} \circ (\varphi_{L_0,L_1})^{-1}\Big)(B) = \varphi_{L'_0,L_1}(L_0) + (\eta^{L_1}_{L'_0,L_0})^* \circ B \circ \eta^{L_1}_{L'_0,L_0} \tag{4.13}$$

para todo $B \in B_{sym}(L_0)$*, onde* $\eta^{L_1}_{L'_0,L_0} = \pi_0|_{L'_0}$ *denota o isomorfismo de* L'_0 *sobre* L_0 *determinado pelo complementar comum* L_1*.*

Dem.: De (4.4) e (4.12), temos

$$\Big(\varphi_{L'_0,L_1} \circ (\varphi_{L_0,L_1})^{-1}\Big)(B) = \rho_{L'_0,L_1} \circ (\pi'_1|_{L_0}) \circ \eta^{L_1}_{L'_0,L_0} + (\rho_{L'_0,L_1}) \circ \rho^{-1}_{L_0,L_1} \circ B \circ \eta^{L_1}_{L'_0,L_0}$$

onde π'_1 denota a projeção sobre L_1 relativa à decomposição $V = L'_0 \oplus L_1$.

Esta equação vale para todo $B \in B_{sym}(L_0)$ e como $\varphi_{L_0,L_1}(L_0) = 0$, tomando $B = 0$, vemos que a primeira parcela é igual a $\varphi_{L'_0,L_0}(L_0)$. A igualdade (4.13) segue-se então de que

$$\rho_{L'_0,L_1} \circ \rho^{-1}_{L_0,L_1} = (\eta^{L_1}_{L'_0,L_0})^* : L_0^* \longrightarrow (L'_0)^*, \tag{4.14}$$

fato que provaremos agora. Seja $f_0 \in L_0^*$. Pelo Teorema 4.10, existe um único $v \in L_1$ tal que $\rho_{L_0,L_1}(v) = f_0$, donde

$$\Big(\rho_{L'_0,L_1} \circ \rho^{-1}_{L_0,L_1}\Big)(f_0)(w) = \rho_{L'_0,L_1}(v)(w) = \omega(v,w), \quad \text{para todo} \quad w \in L'_0.$$

Por outro lado

$$(\eta^{L_1}_{L'_0,L_0})^*(f_0)(w) = \big(f_0 \circ \eta^{L_1}_{L'_0,L_0}\big)(w) = \big(f_0 \circ (\pi_0|_{L'_0})\big)(w) = \omega\big(v, \pi_0|_{L'_0}(w)\big).$$

Como L_1 é Lagrangeano e $v \in L_1$, temos

$$\omega\big(v, \pi_0|_{L'_0}(w)\big) = \omega\big(v, \pi_0|_{L'_0}(w) + \pi_1|_{L'_0}(w)\big) = \omega\big(v, w\big), \quad \text{para todo} \quad w \in L'_0,$$

logo,

$$(\eta^{L_1}_{L'_0,L_0})^*(f_0)(w) = \omega\big(v, w\big), \quad \text{para todo} \quad w \in L'_0,$$

e a comparação das duas igualdades mostra a validade de (4.14). ■

Teorema 4.3.5 *Se* (L_0, L_1) *e* (L_0, L'_1) *são decomposições Lagrangeanas de* V*, com* $\Lambda^0(L_1) \cap \Lambda^0(L'_1) \neq \emptyset$*, a seguinte identidade é verificada*

$$\varphi_{L_0,L'_1} \circ (\varphi_{L_0,L_1})^{-1}(B) = B \circ (Id + (\pi'_0|_{L_1}) \circ \rho^{-1}_{L_0,L_1} \circ B)^{-1} \tag{4.15}$$

para todo $B \in \varphi_{L_0,L_1}(\Lambda^0(L_1')) \subset B_{sym}(L_0)$*, onde* π_0' *denota a projeção sobre* L_0 *relativa à decomposição* $V = L_0 \oplus L_1'$.

Dem.: Segue da definição de φ e da equação (4.5) que

$$\begin{aligned}\varphi_{L_0,L_1'} \circ (\varphi_{L_0,L_1})^{-1}(B) &= \rho_{L_0,L_1'} \circ \phi_{L_0,L_1'} \circ (\phi_{L_0,L_1})^{-1} \circ \rho_{L_0,L_1}^{-1}(B) \\ &= \rho_{L_0,L_1'} \circ \eta_{L_1,L_1'}^{L_0} \circ \rho_{L_0,L_1}^{-1} \circ B \circ (Id + (\pi_0'|_{L_1}) \circ \rho_{L_0,L_1}^{-1} \circ B)^{-1}.\end{aligned}$$

Portanto resta mostrar que $\rho_{L_0,L_1'} \circ \eta_{L_1,L_1'}^{L_0} \circ \rho_{L_0,L_1}^{-1} = Id : L_0^* \to L_0^*$.

Para isto, considere $f_0 \in L_0^*$ e $v \in L_1$ tais que $\omega(v,\cdot)|_{L_0} = f_0$ e $v = v_0 + v_1$ com $v_0 \in L_0$ e $v_1 \in L_1'$, donde

$$\rho_{L_0,L_1'} \circ \eta_{L_1,L_1'}^{L_0}(v) = \rho_{L_0,L_1'}(v_1) = \omega(v_1,\cdot).$$

Se $u \in L_0$ então

$$\omega(v,u) - \omega(v_1,u) = \omega(v_0,u) = 0,$$

pois L_0 é Lagrangeano, o que implica em $f_0 = \omega(v_1,\cdot)$. ■

4.3.1 As subvariedades $\Lambda^k(L_0)$

Considere um espaço vetorial simplético (V,ω), com $\dim(V) = 2n$, e um subespaço Lagrangeano $L_0 \subset V$. Para $k = 0,\cdots,n$ definimos

$$\Lambda^k(L_0) = \{L \in \Lambda / \dim(L \cap L_0) = k\}.$$

Nosso intuito é mostrar que cada $\Lambda^k(L_0)$ é uma subvariedade de Λ e descrever seu espaço tangente.

Denote por $\mathrm{Sp}(V,\omega,L_0)$ o subgrupo fechado de $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ consistindo dos simplectomorfismos que preservam L_0, i.e.,

$$\mathrm{Sp}(V,\omega,L_0) = \{A \in \mathrm{Sp}(V,\omega)/A(L_0) = L_0\}.$$

É fácil ver que a álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(V,\omega,L_0)$ de $\mathrm{Sp}(V,\omega,L_0)$ é dada por

$$\mathfrak{sp}(V,\omega,L_0) = \{X \in \mathfrak{sp}(V,\omega)/X(L_0) \subset L_0\}.$$

O Lema a seguir exibe mais explicitamente tal álgebra.

Lema 4.3.6 *A álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(V, \omega, L_0)$ consiste dos endomorfismos $X \in \mathrm{Lin}(V)$ tais que $\omega(X\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear simétrica que se anula em L_0.*

Dem.: Segue da caracterização da álgebra $\mathfrak{sp}(V, \omega)$ feita em (1.7), observando que $\omega(X\cdot, \cdot)|_{L_0 \times L_0} = 0$ se, e somente se, $X(L_0) \subset L_0^\omega$. Mas $L_0^\omega = L_0$, pois L_0 é Lagrangeano. ■

É claro que a ação de $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ sobre Λ deixa cada subconjunto $\Lambda^k(L_0)$ invariante, além disso, $\Lambda^k(L_0)$ é uma órbita da ação de $\mathrm{Sp}(V, \omega, L_0)$. A estratégia, portanto, vai ser usar o Teorema (4.1.8) para concluir que $\Lambda^k(L_0)$ é uma suvariedade mergulhada de Λ, para isto devemos mostrar que $\Lambda^k(L_0)$ é localmente fechada em Λ.

Para cada $k = 0, \cdots, n$ definimos

$$\Lambda^{\geq k}(L_0) = \bigcup_{i=k}^{n} \Lambda^i(L_0), \quad \Lambda^{\leq k}(L_0) = \bigcup_{i=0}^{k} \Lambda^i(L_0).$$

Lema 4.3.7 *Para todo $k = 0, \cdots, n$ o subconjunto $\Lambda^{\geq k}(L_0)$ é aberto e o subconjunto $\Lambda^{\leq k}(L_0)$ é fechado em Λ.*

Dem.: Note que o conjunto dos espaços $W \in G_n(V)$ tais que $\dim(W \cap L_0) \leq k$ é aberto em $G_n(V)$. Como a topologia de Λ é induzida pela de $G_n(V)$, temos que $\Lambda^{\leq k}(L_0)$ é aberto em Λ. Uma vez que $\Lambda^{\geq k}(L_0)$ é o complementar de $\Lambda^{\leq k-1}(L_0)$, segue o resultado. ■

Corolário 4.3.8 *Para todo $k = 0, \cdots, n$, o subconjunto $\Lambda^k(L_0)$ é localmente fechado em Λ.*

Dem.: Segue de $\Lambda^k(L_0) = \Lambda^{\geq k}(L_0) \cap \Lambda^{\leq k}(L_0)$ e do Lema anterior. ■

Temos portanto que os subconjuntos $\Lambda^k(L_0)$, $k = 0, \cdots, n$, são subvariedades mergulhadas em Λ.

Capítulo 5

Índice de Maslov via Grupóide Fundamental

Neste capítulo estamos primeiramente interessados em dar uma definição mais geral do índice de Maslov para curvas na Grassmanniana Lagrangeana que a definição clássica para caminhos cujos pontos finais são transversais a L_0. Veremos que o grupóide fundamental da Grassmanniana Lagrangeana nos fornece um semi-inteiro associado a curvas com pontos finais arbitrários. Após definir tal semi-inteiro provamos algumas de suas principais propriedades. Para este fim, precisamos fazer uma série de resultados que são nada mais que consequências de vários resultados vistos durante os capítulos anteriores.

Lema 5.0.9 *Sejam Z espaço vetorial de dimensão finita, $B \in B_{sym}(Z) \simeq Lin(Z, Z^*)$ e $C \in B_{sym}(Z^*) \simeq Lin(Z^*, Z)$ formas bilineares simétricas. Se a aplicação $Id + C \circ B \in Lin(Z)$ é um isomorfismo, então:*

$$n_+(B) - n_+(B + B \circ C \circ B) = n_+(C + C \circ B \circ C) - n_+(C).$$

Dem.: Considere a forma bilinear R em $Z \oplus Z^*$ definida por

$$R((u, \alpha), (v, \beta)) = B(u, v) + C(\alpha, \beta), \quad \forall u, v \in Z, \ \forall \alpha, \beta \in Z^*.$$

Defina também as aplicações lineares injetivas:

$$\begin{aligned} T : Z \ni u &\longmapsto (u, B(u)) \in Z \oplus Z^*, \\ S : Z^* \ni \alpha &\longmapsto (-C(\alpha), \alpha) \in Z \oplus Z^*. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
R(T(u), S(\alpha) &= R((u, B(u), (-C(\alpha), \alpha)) \\
&= -B(u, C(\alpha)) + C(B(u), \alpha) \\
&= -(C \circ B)(u, \alpha) + (C \circ B)(u, \alpha) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo $u \in Z$ e para todo $\alpha \in Z^*$. Logo, $T(Z)$ e $S(Z^*)$ são ortogonais com respeito a R.

Afirmação: $Z \oplus Z^* = T(Z) \oplus S(Z^*)$.

Para validar a afirmação devemos mostrar que dado $(u, \alpha) \in Z \oplus Z^*$, existem únicos $v \in Z$ e $\beta \in Z^*$ tais que

$$(u, \alpha) = T(v) + S(\beta).$$

Note que a equação acima é equivalente a

$$\begin{cases} \beta = \alpha - B(v) \\ (Id + C \circ B)(v) = u + C(\alpha), \end{cases}$$

onde a segunda equação se deve a substituição da primeira na igualdade $u = v - C(\beta)$. Deste modo, temos que dado $(u, \alpha) \in Z \oplus Z^*$ existe único $v \in Z$ tal que

$$Id + C \circ B(v) = u + C(\alpha),$$

pois $Id + C \circ B$ é isomorfismo. Consequentemente, existe único β dado pela primeira equação do sistema acima, o que demonstra a afirmação.

Voltando ao Lema, temos por um lado que

$$n_+(R) = n_+(B) + n_+(C),$$

pois fazendo $Z \simeq Z \times \{0\}$ e $Z^* = \{0\} \simeq Z^*$, temos que Z e Z^* são ortogonais com respeito a R.

Por outro lado, uma vez que $Z \oplus Z^* = T(Z) \oplus S(Z^*)$ e $T(Z)$ e $S(Z^*)$ são ortogonais com respeito a R, temos

$$n_+(R) = n_+(R|_{T(Z)\times T(Z)}) + n_+(R|_{S(Z^*)\times S(Z^*)}).$$

Como T e S são isomorfismos sobre $T(Z)$ e $S(Z^*)$, respectivamente, temos que:

$$n_+(R|_{T(Z)\times T(Z)}) = n_+(T^*(R)) \quad \text{e} \quad n_+(R|_{S(Z^*)\times S(Z^*)}) = n_+(S^*(R)).$$

Mas

$$\begin{aligned} T^*R(u,v) &= R(T(u),T(v)) \\ &= R((u,B(u)),(v,B(v))) \\ &= B(u,v)+C(B(u),B(v)) \\ &= (B+B\circ C\circ B)(u,v), \quad \forall u,v\in Z. \end{aligned}$$

Similarmente, $S^*R = C + C\circ B\circ C$,

$$\Longrightarrow n_+(R) = n_+(B+B\circ C\circ B) + n+(C+C\circ B\circ C)$$

$\blacksquare$

Lema 5.0.10 *Dados subespaços Lagrangeanos $L_1, L_1' \in \Lambda^0(L_0)$, então a aplicação*

$$\Lambda^0(L_1)\cap\Lambda^0(L_1') \ni L \longmapsto n_+(\varphi_{L_0,L_1}(L)) - n_+(\varphi_{L_0,L_1'}(L)) \in \mathbb{Z} \tag{5.1}$$

é constante em cada componente arco-conexa de $\Lambda^0(L_1)\cap\Lambda^0(L_1')$.

Dem.: Considere $C \in \mathrm{B}_{sym}(L_0^*)$ definido por

$$C = (\pi_0'|_{L_1})\circ\rho_{L_0,L_1}^{-1}.$$

Dado $L \in \Lambda^0(L_1)\cap\Lambda^0(L_1')$, escreva $B = \varphi_{L_0,L_1}(L) \in \mathrm{B}_{sym}(L_0)$. Pela equação (4.15) temos que

$$\varphi_{L_0,L_1'}(L) = B\circ(Id + C\circ B)^{-1}.$$

Visto que $L \in \Lambda^0(L_1)\cap\Lambda^0(L_1')$ se, e somente se, $\big(\mathrm{Id} + (\pi_0'|_{L_1})\circ(\rho_{L_0,L_1})^{-1}(B)\big)$ for um isomorfismo de L_0, temos que para provar o Lema devemos mostrar que

$$B \longmapsto n_+(B) - n_+(B\circ(Id + C\circ B)^{-1}) \tag{5.2}$$

é constante em cada componente arco conexa do aberto de $\mathrm{B}_{sym}(L_0)$ consistindo das formas B tais que $(Id + C\circ B)$ é um isomorfismo de L_0. Como o pull-back de $\big(B\circ(Id+C\circ B)^{-1}\big)$ pelo isomorfismo $(Id + C\circ B)$ é dado por

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{Id}+C\circ B\big)^*\big(B\circ(\mathrm{Id}+C\circ B)^{-1}\big)(\cdot,\cdot) &= \big(B\circ(\mathrm{Id}+C\circ B)^{-1}\big)\big((\mathrm{Id}+C\circ B)(\cdot),(\mathrm{Id}+C\circ B)(\cdot)\big) \\ &= \big(B\circ(\mathrm{Id}+C\circ B)^{-1}\circ(\mathrm{Id}+C\circ B)\big)(\cdot)\big(\mathrm{Id}+C\circ B\big)(\cdot) \\ &= B\circ(\mathrm{Id}+C\circ B) \\ &= B + B\circ C\circ B \end{aligned}$$

temos que

$$n_+(B \circ (Id + C \circ B)^{-1}) = n_+(B + B \circ C \circ B).$$

Segue do Lema (5.0.9) que a aplicação (5.2) é dada por

$$B \longmapsto n_+(C + C \circ B \circ C) - n_+(C).$$

Para concluir, devemos mostrar que se $t \mapsto B(t) \in \mathrm{B}_{sym}(L_0)$ é uma curva contínua definida no intervalo I e se $(\mathrm{Id} + C \circ B(t))$ é um isomorfismo para todo $t \in \mathrm{I}$, então $n_+(C + C \circ B \circ C)$ independe de t.

Uma vez que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(C + C \circ B(t) \circ C) &= \mathrm{Ker}[(Id + C \circ B(t)) \circ C] \\ &= \mathrm{Ker}(C), \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathrm{I}$, temos que $\mathrm{dgn}(C + C \circ B \circ C)$ idepende de $t \in \mathrm{I}$, donde pelo Lema (2.1.10) temos o resultado. ■

Corolário 5.0.11 *Dados $L_1, L_1' \in \Lambda^0(L_0)$, a aplicação*

$$\Lambda^0(L_1) \cap \Lambda^0(L_1') \ni L \longmapsto \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\varphi_{L_0,L_1}(L)) - \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\varphi_{L_0,L_1'}(L)) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \tag{5.3}$$

é constante em cada componente arco-conexa de $\Lambda^0(L_1) \cap \Lambda^0(L_1')$.

Dem.: Uma vez que $\mathrm{dgn}(\varphi_{L_0,L_1}(L)) = \mathrm{dgn}(\varphi_{L_0,L_1'}(L)) = \dim(L_0 \cap L)$, segue da Proposição (2.1.11) que

$$\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\varphi_{L_0,L_1}(L)) - \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\varphi_{L_0,L_1'}(L)) = n_+(\varphi_{L_0,L_1}(L)) - n_+(\varphi_{L_0,L_1'}(L)).$$

Logo, a função (5.3) é igual a função (5.1). ■

Teorema 5.0.12 *Existe um único homomorfismo de grupóide $\mu_{L_0} : \Lambda \to \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ tal que*

$$\mu_{L_0}(\ell) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}\big[\varphi_{L_0,L_1}\big(\ell(1)\big)\big] - \frac{1}{2}\mathrm{sgn}\big[\varphi_{L_0,L_1}\big(\ell(0)\big)\big], \tag{5.4}$$

para toda $\ell \in \Omega\big(\Lambda^0(L_1)\big)$ *e todo* $L_1 \in \Lambda^0(L_0)$.

Dem.: Faça $G = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = \Lambda^0(L_0)$, $U_{L_1} = \Lambda^0(L_1)$ e $g_{L_1}(L) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\varphi_{L_0,L_1}(L))$, para todos $L_1 \in \mathcal{A}$, $L_0 \in U_{L_1}$. Temos pelo corolário anterior que a aplicação

$$U_{L_1} \cap U_{L_1'} \ni L \longmapsto g_{L_1}(L) g_{L_1'}(L)^{-1}$$

é constante em cada componente arco-conexa de $U_{L_1} \cap U_{L_1'}$. Portanto, o resultado segue do corolário (3.0.19). ■

Definição 5.0.13 *Dada uma curva contínua* $\ell : [a,b] \to \Lambda$ *e um Lagrangeano* $L_0 \in \Lambda$, *definimos o* ***índice de Maslov*** *de* ℓ *com respeito a* L_0 *como sendo o semi-inteiro* $\mu_{L_0}(\ell)$.

Seja $\ell : [a,b] \to \Lambda$ um curva contínua. Segue da definição do índice de Maslov e da definição de homomorfismo de grupóide que:

1. se $\sigma : [a',b'] \to [a,b]$ é uma aplicação contínua com $\sigma(a') = a$ e $\sigma(b') = b$ então $\mu_{L_0}(\ell \circ \sigma) = \mu_{L_0}(\ell)$;
2. se $\gamma : [a',b'] \to \Lambda$ é uma curva contínua tal que $\gamma(a') = \ell(b)$, então $\mu_{L_0}(\ell \cdot \gamma) = \mu_{L_0}(\ell) + \mu_{L_0}(\gamma)$;
3. $\mu_{L_0}(\ell^{-1}) = -\mu_{L_0}(\ell)$.

Proposição 5.0.14 *Sejam* (V,ω) *e* (V',ω') *espaço vetoriais simpléticos. Se* $A : (V,\omega) \to (V',\omega')$ *é um simplectomorfismo,* $L_0 \in \Lambda(V,\omega)$, $L_0' = A(L_0)$ *e* $\ell : [a,b] \to \Lambda(V,\omega)$ *é uma curva contínua então*

$$\mu_{L_0}(\ell) = \mu_{L_0'}(A \circ \ell).$$

Dem.: Se $L_1 \in \Lambda^0(L_0)$ e $L_1' = A(L_1)$, temos que $L_1' \in \Lambda^0(L_0')$.

Com efeito, $V' = A(L_0) \oplus A(L_1')$ e $A(L_0), A(L_1) \in \Lambda(V',\omega')$.

E por definição,

$$\mu_{L_0'}(A \circ \ell) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}\big[\varphi_{L_0',L_1'}\big(A \cdot \ell(1)\big)\big] - \frac{1}{2}\mathrm{sgn}\big[\varphi_{L_0',L_1'}\big(A \cdot \ell(0)\big)\big],$$

donde

$$\begin{aligned}
\mu_{L_0'}(A \circ \ell) &= \tfrac{1}{2}\mathrm{sgn}\big[A_*\big(\varphi_{L_0,L_1}\big(\ell(1)\big)\big)\big] - \tfrac{1}{2}\mathrm{sgn}\big[A_*\big(\varphi_{L_0,L_1}\big(\ell(0)\big)\big)\big] \\
&= \tfrac{1}{2}\mathrm{sgn}\big[\varphi_{L_0,L_1}\big(\ell(1)\big)\big] - \tfrac{1}{2}\mathrm{sgn}\big[\varphi_{L_0,L_1}\big(\ell(0)\big)\big] \\
&= \mu_{L_0}(\ell)
\end{aligned}$$

■

Proposição 5.0.15 *Se $\ell : [a, b] \to \Lambda$ é uma curva contínua cuja a imagem está contida em algum $\Lambda_k(L_0)$, então $\mu_{L_0}(\ell) = 0$.*

Dem.: Uma vez que μ_{L_0} é aditivo por concatenação, podemos assumir, s.p.g., que a imagem de ℓ está toda contida no domínio de φ_{L_0,L_1}. Neste caso o índice de Maslov é dado por (5.4).

Do fato de ℓ estar toda contida em $\Lambda^k(L_0)$ temos que $\mathrm{dgn}\big[\varphi_{L_0,L_1}\big(\ell(t)\big)\big] = k$ para todo $t \in [a, b]$.

Com efeito, fixando $t \in [a, b]$ temos que se $u \in L_0 \cap \ell(t)$ então

$$\begin{aligned}
\varphi_{L_0,L_1}\big(\ell(t)\big)(u, v) &= \omega\big(\phi_{L_0,L_1}\big(\ell(t)\big)u, v\big) \\
&= \omega\big(\pi_1 \circ (\pi_0^{-1})(u), v\big) \\
&= \omega\big(\pi_1(u), v\big) \\
&= \omega(0, v) \\
&= 0
\end{aligned}$$

qualquer que seja $v \in V$. Donde $\mathrm{dgn}\big[\varphi_{L_0,L_1}\big(\ell(t)\big)\big] \geq k$. Contudo, não podemos ter $\mathrm{dgn}\big[\varphi_{L_0,L_1}\big(\ell(t)\big)\big] > k$.

De fato, supondo o contrário teríamos um subespaço U de V tal que $\dim(U \cap L_0) = l > k$ e $\varphi_{L_0,L_1}\big(\ell(t)\big)(w, \cdot) = 0$ para todo $w \in U \cap L_0$. Tomando $\{w_1, \cdots, w_l\}$ uma base de $U \cap L_0$ e fazendo $v_i = \big(\pi_0|_{\ell(t)}\big)^{-1}(w_i)$, $i = 1, \cdots, l$, obteríamos que $\{v_1, \cdots, v_l\}$ seria um conjunto l.i. de $\ell(t)$. Além disso,

$$\omega\big(\pi_1(v_i), \cdot\big) = 0, \quad \forall i = 1, \cdot, l.$$

o que implicaria em $\pi_1(v_i) = 0$ para todo i, consequentemente cada v_i pertenceria a L_0 e portanto a $\ell(t) \cap L_0$. Mas isto resultaria em $\{v_1, \cdots, v_l\}$ ser um conjunto l.i. de $\ell(t) \cap L_0$, e $\dim\big(\ell(t)\big) = l$. Contradição. Logo, como $t \in [a, b]$ foi tomado arbitrariamente temos que $\mathrm{dgn}\big[\varphi_{L_0,L_1}\big(\ell(t)\big)\big] = k$ para todo $t \in [a, b]$.

Donde segue do Lema (2.1.10) que $\mathrm{sgn}\big[\varphi_{L_0,L_1}\big(\ell(t)\big)\big]$ independe de t. ■

Referências Bibliográficas

[1] A. Cannas, *Introduction to Symplectic and Hamiltonian Geometry,* Publicações Matemáticas - IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 2002.

[2] J. J. Duistermaat, *Symplectic Geometry*, Spring School, Utrecht - The Netherlands, 2004.

[3] H. Eves, *Elementary Matrix Theory*, Dover Publications, Inc, New York, 1966.

[4] E. L. Lima. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides - IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 2006.

[5] E. L. Lima. *Variedades Diferenciáveis*, Publicações Matemáticas - IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 2007.

[6] W. S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[7] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford Science Publications, New York, 1997.

[8] S. Morita, *Geometry of Differential Forms*, American Mathematical Society, USA, 1996.

[9] P. Piccione, D. V. Tausk, *A Student's Guide to Syplectic Spaces, Grassmannians and Maslov Index*, Publicações Matemáticas - IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 2006.

[10] V. S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, Springer-Verlag, New York, 1984.