UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
APLICADA E ESTATÍSTICA

Não vício assintótico, consistência forte e uniformemente forte de estimadores do tipo núcleo para dados direcionais sobre uma esfera unitária k-dimensional

Marconio Silva dos Santos
Orientador: Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira

Natal/RN, julho de 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
APLICADA E ESTATÍSTICA

Não vício assintótico, consistência forte e uniformemente forte de estimadores do tipo núcleo para dados direcionais sobre uma esfera unitária k-dimensional

Marconio Silva dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (PPGMAE-UFRN) como parte dos requisitos ncessários para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Estatística.
Orientador: Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira

Natal/RN, julho de 2010

Dedicatória

"Este trabalho é dedicado aos meus avós, Severino e Celestina, por terem sempre me apoiado e me ensinado as coisas que considero realmente importante na vida. "

Agradecimentos

Ao professor André Gustavo (UFRN) pela orientação e pela confiança depositada em mim, acreditando na minha capacidade. Obrigado por ter feito eu conhecer a Probabilidade, por ter sido meu professor de Análise na graduação, por me aconselhar e me ajudar a trilhar meu caminho profissional.

A professora Viviane Simioli (UFRN) , por ter me ajudado a estudar Probabilidade, pela orientação nos primeiros meses do mestrado, pelos conselhos e por ter me proposto o artigo que motivou essa dissertação.

A minha mãe Maria Lúcia pelo apoio e dedicação.

A minha avó Celestina por ter sempre me apoiado e, com ajuda do meu falecido avó Severino, ter garantido a minha sobrevivência e me ensinado as coisas que considero realmente importantes na vida.

A todos os meus amigos, que torceram por mim, em especial: A minha prima e amiga Macileide por ter me incentivado e mostrado que eu era capaz de realizar meus sonhos, ao meu amigo Heitor por ter estado sempre presente em todos os momentos que precisei e a minha amiga Laís por todo o apoio que me deu e por ter sido sempre uma amiga prestativa.

Ao professor Marcelo Almeida de Souza (UFG) pela ajuda no entendimento do cálculo do elemento de área na esfera.

A professora Dione (UFRN) por ter me ensinado inferência, pelo seu incentivo e sua dedicação aos alunos do PPGMAE.

Ao professor Pledson (UFRN) pelos conselhos na disciplina de seminário e pela incentivo.

Ao professor Marcelo Gomes (UFRN) por ter me apoiado, aconselhado e sido compreensivo comigo desde o tempo em que eu fazia graduação.

Ao professor Cláudio Dias (UFRN) pela ajuda com algumas contas pertinentes à minha dissertação.

Ao professor Jaques por ter me ajudado a aprender probabilidade.

Ao professor Arimatéia (UFCG) pelo incentivo.

Aos meus colegas de mestrado do PPGMAE, em especial Cátia e Helenice, pois já se tornaram minhas amigas, e a Maria Aparecida pelas dicas sobre a dissertação.

A Rafael, secretário do PPGMAE, por ter sido sempre competente.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos o não vício assintótico, a consistência forte e a consistência uniformemente forte de uma classe de estimadores do tipo núcleo f_n para a densidade f definida sobre uma esfera unitária k-dimensional.

Palavras-chave: Estimação não paramétrica, Estimador do tipo núcleo, Consistência forte, Consistência uniformemente forte, Não vicio assintótico.

Abstract

In this work we studied the asymptotic unbiasedness, the strong and the uniform strong consistencies of a class of kernel estimators f_n as an estimator of the density function f taking values on a k-dimensional sphere.

Palavras-chave: Non-parametric estimation, Kernel estimators, Strong consistency, Uniform storng consistency, Asymptotic unbiasedness.

Sumário

Introdução

Quando estudamos inferência, observamos que existem dois tipos de estimação, a saber: estimação paramétrica e estimação não paramétrica.

Os métodos estatísticos clássicos de estimação eram paramétricos. Nesses métodos supõe-se que a amostra é de uma população cuja distribuição é de uma família paramétrica conhecida, bastando apenas estimar os parâmetros desconhecidos. Essa suposição pode causar problemas quando se tenta aplicar esse método a modelos levemente perturbados, pois as conclusões podem ser erradas. Esses problemas motivaram o desenvolvimento de métodos estatísticos não paramétricos. O problema fundamental dos métodos de estimação não paramétrica é estimação de densidades, quando existem, da população da qual se toma uma amostra. Existem várias técnicas para estudar estimação não paramétrica, uma delas é utilizando-se uma classe de estimadores chamados estimadores do tipo núcleo.

Em 1962, Parzen [1] estudou uma classe de estimadores chamados estimadores do tipo núcleo e definidos por

$$f_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right),$$

para estimar a densidade f de uma variável aleatória, com base em uma amostra i.i.d. $X_1, ..., X_n$, em que $h = h_n \downarrow 0$ quando $n \to \infty$ e K é uma função do tipo núcleo apropriadamente escolhida. Ele mostrou que esses estimadores têm boas propriedades estatísticas como não vício assintótico, consistência e normalidade assintótica.

Em 1983, Prakasa Rao [2] fez um vasto estudo sobre métodos de estimação não paramétrica em seu livro. Dentre os quais, destacamos os estimadores do tipo núcleo para estimar densidades, tanto no caso unidimensional quanto no caso multidimensional.

Em 2001, Campos [3] estudou os estimadores do tipo núcleo para densidades gerais f, com respeito a uma medida σ-finita sobre $(E, \mathcal{E})$, onde $E \subset \mathbb{R}^k$ e $\mathcal{E}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de E.

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} W(h, x, X_i), \quad h = h_n$$

onde, para cada h e para cada x, $W(h, x, \cdot)$ é uma função mensurável definida em E.

Em 2005, Campos e Dorea [4] estudaram a classe de estimadores apresentada em 2001 considerando uma cadeia de Markov com espaço de estados geral a fim de estimar sua densidade limite. Os detalhes desse trabalho podem ser vistos na dissertação de mestrado de Soares (2010) [5].

Em todos os trabalhos anteriores, a função f estimada é definida sobre $\mathbb{R}^k$. Considerando Ω_k a esfera unitária em $\mathbb{R}^k$ e f uma densidade sobre Ω_k, podemos estimar a densidade f em um ponto $x \in \Omega_k$ fazendo uso desses estimadores citados. Para tanto, escolhemos $y \in \Omega_k,\ y \neq x$ e tomamos uma bijeção $\phi:\ \Omega_k - \{y\} \to \mathbb{R}^{k-1}$. Usando estimadores do tipo núcleo, podemos estimar a densidade de $\phi(X)$, baseando-se na amostra $\phi(X_1), ..., \phi(X_n)$, e pela inversa da bijeção ϕ podemos estimar $f(X)$. Esse método porém esbarra em duas dificuldades práticas. Primeira, a bijeção e sua inversa podem ser difíceis de calcular, sobretudo para valores grandes de k. Segunda, qualquer que seja a bijeção utilizada, existe sempre algum ponto $y \in \Omega_k$ no qual a densidade não pode ser estimada. A classe de estimadores do tipo núcleo $f_n(x)$ que estudamos neste trabalho é definida diretamente sobre Ω_k de modo que não esbarramos nessas deficuldades.

Neste trabalho tratamos com estimação não paramétrica, onde estudamos a construção de uma classe de estimadores do tipo núcleo para uma função de densidade desconhecida f, baseado em uma amostra independente e identicamente distribuída (i.i.d.) de vetores aleatórios que assumem valores em uma esfera de $\mathbb{R}^k$, $k \geq 3$, com densidade comum f.

Nosso trabalho será baseado no artigo *Kernel estimators of density function of directional data* de Bai, Rao e Zhao (1988) [10] cujo objetivo é desenvolver uma teoria adequada de estimação do tipo núcleo para a densidade f de vetores aleatórios i.i.d. que tomam valores em uma esfera unitária k-dimensional Ω_k e que têm f como sua distribuição comum.

Estudamos o não vício assintótico, a consistência forte e a consistência uniformemente forte do seguinte estimador do tipo núcleo para $f(x)$ baseado em uma amostra i.i.d. $X_1, ..., X_n$

$$f_n(x) = \frac{1}{nh^{k-1}} C(h) \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{1 - x'X_i}{h^2}\right), \quad x \in \Omega_k, \tag{0.1}$$

em que Ω_k é a esfera unitária de $\mathbb{R}^k$, $k \geq 3$, e onde $h = h_n > 0$, $K(\cdot)$ e $C(h)$ satisfazem algumas condições apropriadas que vamos comentar posteriormente.

Nosso trabalho será dividido em quatro partes: no Capítulo 1, apresentamos com mais detalhes o nosso objeto de estudo, o estimador $f_n(x)$. Na Seção 1.1, enunciamos alguns resultados clássicos que serão usados ao longo de todo o nosso trabalho. Na Seção 1.2, enunciamos alguns resultados relacionados à estimação sobre a esfera, alguns deles apresentamos a demonstração.

A seguir estudamos as condições dadas sobre a função K e a sequência h sobre as quais obtemos: no Capítulo 2, o não vício assintótico de $f_n(x)$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} |Ef_n(x) - f(x)| = 0,$$

e quando f é contínua em Ω_k

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |Ef_n(x) - f(x)| = 0.$$

No Capítulo 3, mostramos a consistência forte de $f_n(x)$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{q.c. (quase certamente)}$$

para todo ponto x de continuidade da f.

No Capítulo 4, mostramos a consistência uniformemente forte de $f_n(x)$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |f_n(x) - f(x)| = 0 \qquad \text{q.c..}$$

Observamos apenas que para estudar a consistência uniformemente forte foi necessário a introdução do conceito de V-C classe, qual foi introduzida no Capítulo 1.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos os resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho. Na Seção 1.1 apresentamos os resultados clássicos cujas demonstrações podem ser encontradas em muitos livros-textos de medida e de probabilidade como, por exemplo, [6], [7], [8] e [9]. Na Seção 1.2 apresentamos alguns resultados que dizem respeito ao problema de estimação sobre a esfera, e a maioria deles foi demonstrada. Vemos em (4.12) que o termo $C(h)$ aparece na expressão do estimador $f_n(x)$. Nos próximos capítulos precisaremos ter a garantia de que $\lim_{h\to 0} C(h)$ existe, e isso será mostrado na Seção 1.3.

1.1 Resultados Clássicos

Iniciamos esta seção com a definição das funções Gama e Beta.

Definição 1.1 *A função Gama, denotada por $\Gamma(\cdot)$ é definida por*

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty z^{t-1} e^{-z} dz, \text{ para } t > 0. \tag{1.1}$$

Através de integração por partes temos que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. Se $n \in \mathbb{N}$, então $\Gamma(n+1) = n!$. Em particular, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Definição 1.2 *A função Beta, denotada por $\beta(a,b)$ é definida por*

$$\beta(a,b) = \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1} dz, \text{ para } a, b > 0 \tag{1.2}$$

Para as funções Gama e Beta, vale a seguinte relação

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{1.3}$$

Teorema 1.1 (Teorema da convergência dominada) *Se $\{f_n\}$ é uma sucessão de funções mensuráveis e g e h são funções integráveis, então:*

(a) $f_n \leq g$ *quase certamente, para todo* $n \Rightarrow \int \limsup f_n \geq \limsup \int f_n$;

(b) $f_n \geq h$ *quase certamente, para todo* $n \Rightarrow \int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$;

(c) *Se* $f_n \overset{q.c.}{\rightarrow} f$ *e* $|f_n| \leq g$ *quase certamente para todo* n, *então* $\int f = \lim_n \int f_n$.

Lema 1.1 *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *uma série absolutamente convergente, com* $b_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se a sequência* (a_n/b_n) *for limitada (em particular, se for convergente) então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *será absolutamente convergente.*

Lema 1.2 (Borel-Cantelli) *Para a sequência de eventos* $\{E_n\}$, *temos que se* $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) < \infty$, *então* $P\left(\limsup_n E_n\right) = 0$.

Lema 1.3 *A sequência* $\{Y_n\}$ *converge quase certamente para 0 se, e somente se, para todo* $\varepsilon > 0$, *tem-se*

$$P\left(\limsup_n \{|Y_n| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

Lema 1.4 (Teorema Central do Limite de Liapunov) *Seja* $\{X_n : n \geq 1\}$ *uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com esperança* μ_n *e variância* σ_n^2, *com* $\sigma_n^2 < \infty$ *e pelo menos um dos* σ_n^2*'s maior que zero. Sejam* $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ *e* $s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$. *Se a condição de Liapunov estiver satisfeita, isto é, se existir* $\delta > 0$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} E(|X_i - \mu_i|^{2+\delta}) = 0,$$

então

$$\frac{S_n - E(S_n)}{s_n} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Definição 1.3 *Sejam* A *um retângulo de* $\mathbb{R}^k$, $g : A \to \mathbb{R}$ *uma função limitada, e* $\mathcal{P}$ *uma partição de* A. *Para cada subretângulo* S *da partição, denotemos*

$$\begin{aligned} m_S(g) &= \inf\{g(x) : x \in S\}, \\ M_S(g) &= \sup\{g(x) : x \in S\}, \end{aligned}$$

e $\nu(S)$ *o volume de* S. *As somas inferior e superior de* g *com relação à partição* $\mathcal{P}$ *são definidas, respectivamente, por*

$$L(g,\mathcal{P}) = \sum_{S\in\mathcal{P}} m_S(g)\nu(S) \qquad e \qquad U(g,\mathcal{P}) = \sum_{S\in\mathcal{P}} M_S(g)\nu(S).$$

Teorema 1.2 *Uma função limitada* $g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *é integrável a Riemann se, e somente se, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe uma partição* $\mathcal{P}$ *de* A *tal que* $U(g,\mathcal{P}) - L(g,\mathcal{P}) < \varepsilon$.

1.2 Resultados Particulares

Iniciamos esta seção enunciando e demonstrando o Lema 1.5, que é uma versão mais fraca do Lema 1 encontrado em [10], pois inserimos a hipótese de que as variáveis $\xi_1, ..., \xi_n$ são identicamente distribuídas.

Lema 1.5 *Sejam $\xi_1, ..., \xi_n$ variáveis aleatórias i.i.d. tais que $E(\xi_1) = 0$ e $Var(\xi_1) = \sigma^2$. Suponha também que existe uma constante b tal que $P(|\xi_i| \leq b) = 1,\ i = 1, ..., n$. Então para todo $\varepsilon > 0$ e para todo n suficientemente grande temos*

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2 + b\varepsilon}\right).$$

Demonstração. Faremos a demonstração inicialmente para $\sigma = 0$ e depois para $\sigma > 0$.

Se $\sigma^2 = 0$, então para cada i temos $\xi_i = c_i \in \mathbb{R}$. Logo, $E(\xi_i) = c_i$. Por outro lado $E(\xi_i) = 0$ por hipótese. Assim, $c_i = 0$ e consequentemente $\xi_i = 0$. Desse modo, para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(0 \geq \varepsilon\right) = 0 \leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2 + b\varepsilon}\right),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $\sigma^2 > 0$, então $\lim_{n\to\infty} s_n^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} n\sigma^2 = \infty$. Vamos mostrar, agora, que para as variáveis aleatórias ξ_i a condição de Liapunov é satisfeita quando $\delta = 2$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^{2+\delta}}\sum_{i=1}^{n}E(|\xi_i - \mu_i|^{2+\delta}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^4}\sum_{i=1}^{n}E(|\xi_i|^4) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^4}\sum_{i=1}^{n}E(|\xi_i|^2|\xi_i|^2),
\end{aligned}$$

mas, por hipótese, $P(|\xi_i| \leq b) = 1$ e podemos escrever

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^{2+\delta}}\sum_{i=1}^{n}E(|\xi_i - \mu_i|^{2+\delta}) &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^4}\sum_{i=1}^{n}E(b^2|\xi_i|^2) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^4}b^2\sum_{i=1}^{n}E(|\xi_i|^2) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^4}b^2\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^2 s_n^2}b^2 s_n^2 \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^2}b^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$. Pelo Teorema 1.4, temos

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Seja $\varepsilon > 0$. Fazendo $y = \frac{n\varepsilon}{\sqrt{n}\sigma}$, temos

$$\begin{aligned} P\left(\frac{S_n}{s_n} \geq y\right) &= P\left(\frac{S_n}{s_n} \geq \frac{n\varepsilon}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma} \geq \frac{n\varepsilon}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\ &= P\left(S_n \geq n\varepsilon\right) \\ &= P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \\ &= P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \geq \varepsilon\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \geq \varepsilon\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_y^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \Phi(-y).$$

onde $\Phi(-y)$ é a função de distribuição de uma v.a. $W \sim N(0,1)$. Logo, $\sigma W \sim N(0,\sigma^2)$. Assim,

$$\begin{aligned} \Phi(-y) &= P(W \geq y) \\ &= P\left(W \geq \frac{n\varepsilon}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\ &= P\left(\sqrt{n}\sigma W \geq n\varepsilon\right). \end{aligned}$$

Podemos considerar $Y = I_{(Z \geq n\varepsilon)}$, em que Z é uma v.a.. Assim,

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se } Z \geq n\varepsilon; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

e

$$E(Y) = P(Z \geq n\varepsilon).$$

Dado $\alpha > 0$, podemos observar que se $Z < n\varepsilon$, então $Y = 0 < e^{\alpha(Z-n\varepsilon)}$; e também que se $Z \geq n\varepsilon$, então $0 \leq Z - n\varepsilon$ e $0 \leq \alpha(Z - n\varepsilon)$, ou seja, $Y = 1 = e^0 \leq e^{\alpha(Z-n\varepsilon)}$. Em todo caso, temos $Y \leq e^{\alpha(Z-n\varepsilon)}$ e, pela monotonicidade da esperança,

$$\begin{aligned} P(Z \geq n\varepsilon) &= E(Y) \\ &\leq E\left(e^{\alpha(Z-n\varepsilon)}\right) \\ &= e^{-n\alpha\varepsilon}E\left(e^{\alpha Z}\right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Usando a inequação (1.4) com $Z = \sqrt{n}\sigma W$ e denotando por M_W a função geradora de momentos de W, obtemos

$$\begin{aligned} P\left(\sqrt{n}\sigma W \geq n\varepsilon\right) &\leq e^{-n\alpha\varepsilon} E\left(e^{\alpha\sqrt{n}\sigma W}\right) \\ &= e^{-n\alpha\varepsilon} M_W(\alpha\sqrt{n}\sigma) \\ &= e^{-n\alpha\varepsilon} e^{\alpha^2 n\sigma^2/2} \\ &= e^{-n\alpha\varepsilon + \alpha^2 n\sigma^2/2}. \end{aligned}$$

Para minimizar a última expressão com relação a α, devemos ter $\alpha = \varepsilon/\sigma^2$. Logo,

$$\Phi(-y) = P\left(\sqrt{n}\sigma W \geq n\varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right).$$

Agora, notemos que $2\sigma^2 < 2\sigma^2 + b\varepsilon$ e, consequentemente, $-\dfrac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2} < -\dfrac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2 + b\varepsilon}$. Assim,

$$\Phi(-y) \leq \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right) < \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2 + b\varepsilon}\right).$$

Como $\lim_{n\to\infty} P\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \geq \varepsilon\right) = \Phi(-y)$, temos para n suficientemente grande:

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2 + b\varepsilon}\right).$$

O mesmo ocorre com $P\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-\xi_i) \geq \varepsilon\right)$, pois $E(-\xi_i) = -E(\xi_i) = 0$ e $Var(-\xi_i) = (-1)^2 Var(\xi_i) = \sigma^2$.

Portanto, para n suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right| \geq \varepsilon\right) &= P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \geq \varepsilon\right) + P\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \geq \varepsilon\right) \\ &= P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \geq \varepsilon\right) + P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-\xi_i) \geq \varepsilon\right) \\ &= 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2 + b\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

■

O lema a seguir, encontrado em [11], é um resultado que foi importante na demonstração da consistência uniformemente forte, apresentada no Capítulo 4.

Lema 1.6 *Suponha que K é uma função não-negativa, limitada e integrável a Riemann sobre $\mathbb{R}^k$. Para cada $\eta, \delta, \rho > 0$ podemos encontrar uma função*

$$K^*(x) = \sum_{i=1}^{N_0} \alpha_i I_{A_i}(x)$$

em que

(i) $\alpha_1, ..., \alpha_{N_0}$ *são números reais não-negativos,*

(ii) $A_1, ..., A_{N_0}$ *são retângulos disjuntos contidos em* $[-\rho, \rho]^k$,

(iii) $K^*(x) \leq \sup_x K(x), \ x \in \mathbb{R}^k$,

(iv) $|K^*(x) - K(x)| < \eta$ *em* $[-\rho, \rho]^k$, *exceto em um conjunto* D,

(v) $D \subseteq B = \bigcup_{i=1}^{N^*} B_i$, *em que* $B_1, ..., B_{N^*}$ *são retângulos de* $[-\rho, \rho]^k$ *cuja união tem medida de Lebesgue menor que* δ.

Demonstração. Sejam $\eta, \delta, \rho > 0$. Pelo Teorema 1.2, existe uma partição $\mathcal{P}$ de $[-\rho, \rho]^k$ tal que $U(K, \mathcal{P}) - L(K, \mathcal{P}) < \eta\delta$, pois K é integrável a Riemann sobre $\mathbb{R}^k$. Denotemos por S os retângulos da partição $\mathcal{P}$ de $[-\rho, \rho]^k$. Fazendo

$$K_1 = \sum_{S \in \mathcal{P}} M_S I_S \quad \text{e} \quad K_2 = \sum_{S \in \mathcal{P}} m_S I_S,$$

em que M_S e m_S são respectivamente o supremo e o ínfimo de K no retângulo S, temos

$$D = \{x \in [-\rho, \rho]^k; K(x) - K_2(x) \geq \eta\} \subseteq \{x \in [-\rho, \rho]^k; K_1(x) - K_2(x) \geq \eta\}.$$

e

$$B_S = S \cap \{x \in [-\rho, \rho]^k; K_1(x) - K_2(x) \geq \eta\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\eta\delta &> U(K, P) - L(K, P) \\
&= \sum_S M_S(f)\nu(S) - \sum_S m_S(f)\nu(S) \\
&= \sum_S (M_S(f) - m_S(f))\nu(S) \\
&\geq \sum_{B_S} (M_S(f) - m_S(f))\nu(B_S) \\
&\geq \sum_{B_S} \eta\nu(B_S) \\
&= \eta \sum_{B_S} \nu(B_S),
\end{aligned}$$

ou seja, $\eta \sum_{B_S} \nu(B_S) \leq \eta\delta$, que nos dá

$$\sum_{B_S} \nu(B_S) \leq \delta.$$

Logo, D está contido em uma união disjunta de retângulos e têm medida de Lebesgue menor que ou igual a δ. Para concluir a demonstração, basta tomar $K^* = K_2$. ∎

Também para mostrarmos a consistência uniformemente forte foi necessário a introdução de um conceito, a saber: classe de Vapnik-Chervonenkis (ou V-C classe) com índice s. Para que esse conceito fique claro apresentamos a seguir a definição dos elementos envolvidos bem como um exemplo.

Sejam $x_1, ..., x_r$ r elementos de $\mathbb{R}^k$, e $\mathscr{A}$ uma classe de borelianos de $\mathbb{R}^k$. Denotemos por $\Delta^{\mathscr{A}}(x_1, ..., x_r)$ o número de conjuntos distintos em $\{F \cap A; A \in \mathscr{A}\}$, onde $F = \{x_1, ..., x_r\}$. Defina

$$m^{\mathscr{A}}(r) = \max_F \Delta^{\mathscr{A}}(x_1, ..., x_r). \tag{1.5}$$

Vapnik e Chervonenkis mostraram que $m^{\mathscr{A}}(r) = 2^r$ para qualquer inteiro positivo r, ou $m^{\mathscr{A}}(r) \leq r^{s+1}$, onde s é o menor inteiro j tal que $m^{\mathscr{A}}(j) \neq 2^j$. Uma classe de conjuntos $\mathscr{A}$ para a qual vale este último caso será chamada uma classe de Vapnik-Chervonenkis (ou V-C classe) com índice s.

Exemplo 1.1 (Exemplo de uma V-C classe)

Seja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ ; } x, y > 0\}$. Consideremos a σ-álgebra $\mathscr{A} = \sigma(B) = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \mathrm{B}, \mathrm{B}^{\mathrm{c}}\}$. Notemos que essa é a σ-álgebra gerada pelo primeiro quadrante e é uma classe de borelianos de $\mathbb{R}^2$. Para $r = 1, 2, ...$, podemos calcular $m^{\mathscr{A}}(r) = \max_F \Delta^{\mathscr{A}}(x_1, ..., x_r)$, em que $F = \{x_1, ..., x_r\}$.

Para $r = 1$, o conjunto F é da forma $F = \{x_1\}$, e temos as seguintes possibilidades:

- Se $x_1 \in B$, então $F \cap \emptyset = F \cap B^c = \emptyset$ e $F \cap B = F \cap \mathbb{R}^2 = \mathrm{F}$. Disso, $\Delta^{\mathscr{A}}(x_1) = 2$.
- Se $x_1 \in B^c$, então $F \cap \emptyset = F \cap B = \emptyset$ e $F \cap B^c = F \cap \mathbb{R}^2 = \mathrm{F}$. Disso, $\Delta^{\mathscr{A}}(x_1) = 2$.

Logo, $m^{\mathscr{A}}(1) = \max_F \Delta^{\mathscr{A}}(x_1) = 2 = 2^1$.

Para $r = 2$, o conjunto F é da forma $F = \{x_1, x_2\}$, e temos as seguintes possibilidades:

- Se $x_1, x_2 \in B$, então $F \cap \emptyset = F \cap B^c = \emptyset$ e $F \cap B = F \cap \mathbb{R}^2 = \mathrm{F}$. Disso, $\Delta^{\mathscr{A}}(x_1, x_2) = 2$.
- Se $x_1, x_2 \in B^c$, então $F \cap \emptyset = F \cap B = \emptyset$ e $F \cap B^c = F \cap \mathbb{R}^2 = \mathrm{F}$. Disso, $\Delta^{\mathscr{A}}(x_1, x_2) = 2$.
- Se $x_1 \in B$ e $x_2 \in B^c$, então $F \cap \emptyset = \emptyset$, $F \cap \mathbb{R}^2 = \mathrm{F}$, $F \cap B = \{x_1\}$ e $F \cap B^c = \{x_2\}$. Disso, $\Delta^{\mathscr{A}}(x_1, x_2) = 4$.
- Se $x_1 \in B^c$ e $x_2 \in B$, também temos $\Delta^{\mathscr{A}}(x_1, x_2) = 4$.

Logo, $m^{\mathscr{A}}(2) = \max_F \Delta^{\mathscr{A}}(x_1, x_2) = 4 = 2^2$.

Para $r = 3$, o conjunto F é da forma $F = \{x_1, x_2, x_3\}$, e temos as seguintes possibilidades:

- Se $x_1, x_2, x_3 \in B$, então $F \cap \emptyset = F \cap B^c = \emptyset$ e $F \cap B = F \cap \mathbb{R}^2 = \mathrm{F}$. Disso, $\Delta^{\mathscr{A}}(x_1, x_2, x_3) = 2$.

- Se $x_1, x_2, x_3 \in B^c$, então $F \cap \emptyset = F \cap B = \emptyset$ e $F \cap B^c = F \cap \mathbb{R}^2 = \mathrm{F}$. Disso, $\Delta^{\mathscr{A}}(x_1, x_2, x_3) = 2$.
- Se $x_1, x_2 \in B$ e $x_3 \in B^c$, então $F \cap \emptyset = \emptyset$, $F \cap \mathbb{R}^2 = \mathrm{F}$, $F \cap B = \{x_1, x_2\}$ e $F \cap B^c = \{x_3\}$. Disso, $\Delta^{\mathscr{A}}(x_1, x_2, x_3) = 4$. Este resultado é o mesmo para qualquer caso em que um dos vetores de F está em B (ou B^c) e os demais em B^c (ou B).

Logo, $m^{\mathscr{A}}(3) = \max\limits_{F} \Delta^{\mathscr{A}}(x_1, x_2, x_3) = 4 \neq 2^3$.

Observemos que 3 é o primeiro inteiro positivo j para o qual $m^{\mathscr{A}}(j) \neq 2^j$. Daqui por diante, ou seja, para $r = 3, 4, 5, ...$ devemos ter $m^{\mathscr{A}}(r) \leq r^{3+1} = r^4$. O fato de não se ter $m^{\mathscr{A}}(r) = 2^r$ para todo $r = 1, 2, ...$ significa que $\mathscr{A}$ é uma V-C classe com índice 3.

Observemos também que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, os borelianos de $\mathbb{R}^2$, não é uma V-C classe, pois temos $m^{\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)}(r) = 2^r$ para todo $r = 1, 2, ...$

No próximo lema, precisaremos da definição de probabilidade induzida empírica (ou, simplesmente, probabilidade empírica) μ_n que será comparada com a probabilidade induzida (ou, simplesmente, probabilidade) μ. Lembre-se que a probabilidade induzida de uma variável aleatória X é dada por $\mu(A) = P(X \in A)$ para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{k}})$.

Sejam $X_1, X_2, ...$ uma sequência de vetores aleatórios i.i.d. de $\mathbb{R}^{\mathrm{k}}$ com probabilidade μ, e seja μ_n a probabilidade empírica de $X_1, ..., X_n$, isto é,

$$\mu_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_A(X_i), \tag{1.6}$$

em que I_A é a função indicadora. Denotemos a "medida de distância" entre μ_n e μ por

$$D_n(\mathscr{A}, \mu) = \sup_{A \in \mathscr{A}} |\mu_n(A) - \mu(A)|.$$

Além disso, assumamos que

$$D_n(\mathscr{A}, \mu), \qquad \sup_{A \in \mathscr{A}} |\mu_n(A) - \mu_{2n}(A)|, \qquad \sup_{A \in \mathscr{A}} \mu_n(A)$$

são variáveis aleatórias. Temos então o seguinte lema.

Lema 1.7 *Seja $\mathscr{A}$ uma V-C classe com índice s tal que $\sup\limits_{A \in \mathscr{A}} \mu(A) \leq \delta \leq \dfrac{1}{8}$. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$,*

$$\begin{aligned} P(D_n(\mathscr{A}, \mu) > \varepsilon) \quad \leq \quad & 5(2n)^s \exp(-n\varepsilon^2/(91\delta + 4\varepsilon)) \\ & +7(2n)^s \exp(-n\delta/68) + 2^{2+s} n^{1+2s} \exp(-n\delta/8) \end{aligned}$$

desde que

$$n \geq \max\{12\delta/\varepsilon^2, (68(1+s)\log 2)/\delta\}.$$

Denotemos por $\|\cdot\|$ a norma euclidiana em $\mathbb{R}^k$. Vamos escrever

$$B(x,\rho) = \{y; \|y-x\| < \rho\}, \quad x \in \mathbb{R}^k, \rho > 0,$$

$$\overline{B}(x,\rho) = \{y; \|y-x\| \leq \rho\}, \quad x \in \mathbb{R}^k, \rho > 0.$$

Temos agora o seguinte lema.

Lema 1.8 *Sejam $B(k)$ o conjunto de todas as bolas abertas $B(x,\rho)$ e $\overline{B}(k)$o conjunto de todas as bolas fechadas $\overline{B}(x,\rho)$. Então, $B(k)$ e $\overline{B}(k)$ pertencem à V-C classe com o mesmo índice $s = k+2$, para todo $k = 1, 2, ...$*

1.3 Existência de Limite de $C(h)$

Em tudo o que fizermos daqui em diante estaremos sempre supondo que $k \geq 3$.

Relembrando o exposto na introdução, estamos trabalhando com vetores unitários $X_1, ..., X_n$ i.i.d. com função de densidade f sobre Ω_k tal que

$$\int_{\Omega_k} f(x) d\omega_k(x) = 1, \tag{1.7}$$

onde ω_k é a medida de Lebesgue sobre Ω_k.

No objetivo é estimar $f(x)$, e para tanto consideramos a seguinte classe de estimadores do tipo núcleo baseado na amostra $X_1, ..., X_n$

$$f_n(x) = \frac{1}{nh^{k-1}} C(h) \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right), \quad x \in \Omega_k, \tag{1.8}$$

em que $x'X_i$ denota o produto interno canônico, $h = h_n > 0$, com $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, $K(\cdot)$ é uma função não-negativa definida sobre $[0,\infty)$ tal que

$$0 < \int_0^\infty K(v) v^{(k-3)/2} dv < \infty \tag{1.9}$$

e $C(h)$ é um número positivo tal que

$$\frac{h^{k-1}}{C(h)} = \int_{\Omega_k} K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) d\omega_k(y). \tag{1.10}$$

Para calcular a integral de K sobre Ω_k, tomamos discos sobre essa esfera em torno de um ponto x escolhido arbitrariamente percorrendo toda a esfera. A função K é aplicada no ponto

$$\frac{1-x'y}{h^2} = \frac{2-2x'y}{2h^2} = \frac{x'x + y'y - x'y - y'x}{2h^2} = \frac{(x-y)'(x-y)}{2h^2} = \frac{\|x-y\|^2}{2h^2},$$

isto é, aplicamos K em um número que depende de $\|x-y\|$, e esse valor não depende do vetor x escolhido. Assim, a integral em (1.10) não depende de x.

Vamos mostrar agora que existe $\lim\limits_{n\to\infty} C(h)$.

Sejam $d\omega_k$ o elemento de área em $\Omega_k = \{x; x \in \mathbb{R}^k, \|\mathrm{x}\| = 1\}$ e ω_k a área de Ω_k. Aqui, $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_k^2$. Se $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k$ são vetores ortonormais de $\mathbb{R}^k$ e $x \in \Omega_k$, então

$$x = z\varepsilon_k + \sqrt{1-z^2}\xi_{k-1}, \quad -1 \leq z \leq 1,$$

onde $z = x'\varepsilon_k$, ξ_{k-1} é um vetor unitário do subespaço formado por $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{k-1}$. Justificamos no Apêndice que vale

$$d\omega_k = (1-z^2)^{(k-3)/2} dz d\omega_{k-1}. \tag{1.11}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\omega_k &= \int_{\Omega_k} d\omega_k \\
&= \int_{\Omega_{k-1}} \int_{-1}^{1} (1-z^2)^{(k-3)/2} dz d\omega_{k-1} \\
&= \int_{\Omega_{k-1}} d\omega_{k-1} \int_{-1}^{1} (1-z^2)^{(k-3)/2} dz \\
&= \omega_{k-1} \int_{-1}^{1} (1-z^2)^{(k-3)/2} dz.
\end{aligned}$$

Como $(1-z^2)^{(k-3)/2}$ é uma função par com relação à variável z, temos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1-z^2)^{(k-3)/2} dz &= 2\int_{0}^{1} (1-z^2)^{(k-3)/2} dz \\
&= \int_{0}^{1} 2(1-z^2)^{(k-3)/2} dz \\
&= \int_{0}^{1} 2zz^{-1}(1-z^2)^{(k-3)/2} dz \\
&= \int_{0}^{1} z^{-1}(1-z^2)^{(k-3)/2} 2z dz \\
&= \int_{0}^{1} (z^2)^{\frac{1}{2}-1}(1-z^2)^{\frac{k-1}{2}-1} 2z dz.
\end{aligned}$$

Fazendo $u = z^2$, temos $du = 2zdz$. Assim,

$$\int_{-1}^{1} (1-z^2)^{(k-3)/2} dz = \int_{0}^{1} u^{\frac{1}{2}-1}(1-u)^{\frac{k-1}{2}-1} du.$$

Usando as funções Gama e Beta definidas, respectivamente, em (1.1) e (1.2), e a relação entre essas duas funções, apresentada em (1.3), escrevemos:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-z^2)^{(k-3)/2}dz &= \beta\left(\frac{1}{2},\frac{k-1}{2}\right)\\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{k-1}{2}\right)}\\ &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(k/2\right)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\omega_k = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(k/2\right)}\omega_{k-1}.$$

Como a área de $\omega_2 = 2\pi$, temos por recorrência

$$\begin{aligned}\omega_k &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{k-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{k-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-2}{2}\right)}\cdots\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\omega_2\\ &= \frac{(\pi^{\frac{1}{2}})^{k-2}\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\omega_2\\ &= \frac{(\pi^{\frac{1}{2}})^{k-2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}(2\pi)\\ &= \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Para usar o resultado (1.11), tomemos $\varepsilon_1,...,\varepsilon_k$ vetores ortonormais de $\mathbb{R}^k$ em que $\varepsilon_k = x$. Denotando $z = x'y$ e usando (1.12), reescrevemos (1.10) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}[C(h)]^{-1} &= \frac{1}{h^{k-1}}\int_{\Omega_{k-1}}\int_{-1}^{1}K\left(\frac{1-z}{h^2}\right)(1-z^2)^{(k-3)/2}dz d\omega_{k-1}\\ &= \frac{1}{h^{k-1}}\int_{\Omega_{k-1}}d\omega_{k-1}\int_{-1}^{1}K\left(\frac{1-z}{h^2}\right)(1-z^2)^{(k-3)/2}dz\\ &= \frac{1}{h^{k-1}}\omega_{k-1}\int_{-1}^{1}K\left(\frac{1-z}{h^2}\right)(1-z^2)^{(k-3)/2}dz\\ &= \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{h^{k-1}\Gamma[(k-1)/2]}\int_{-1}^{1}K\left(\frac{1-z}{h^2}\right)(1-z^2)^{(k-3)/2}dz.\end{aligned}$$

Fazendo $v = (1-z)/h^2$, temos $z = 1-vh^2$ e $dz = -h^2dv$. Também,

$$(1-z^2)^{(k-3)/2} = (1-(1-vh^2)^2)^{(k-3)/2} = [vh^2(2-vh^2)]^{(k-3)/2}.$$

Observemos que $v \geq 0$, pois $-1 \leq z \leq 1$. Quanto aos limites de integração, para $z = -1$ temos $v = 2/h^2$, e para $z = 1$ temos $v = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
[C(h)]^{-1} &= \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{h^{k-1}\Gamma[(k-1)/2]} \int_{2/h^2}^{0} K(v)[vh^2(2-vh^2)]^{(k-3)/2}(-h^2)dv \\
&= \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{h^{k-1}\Gamma[(k-1)/2]} \int_{0}^{2/h^2} K(v)v^{(k-3)/2}(2-vh^2)^{(k-3)/2}h^{k-3}h^2 dv \\
&= \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{h^{k-1}\Gamma[(k-1)/2]} \int_{0}^{2/h^2} K(v)v^{(k-3)/2}(2-vh^2)^{(k-3)/2}h^{k-1} dv \\
&= \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{h^{k-1}\Gamma[(k-1)/2]} h^{k-1} \int_{0}^{2/h^2} K(v)v^{(k-3)/2}(2-vh^2)^{(k-3)/2} dv \\
&= \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_{0}^{2/h^2} K(v)v^{(k-3)/2}(2-vh^2)^{(k-3)/2} dv \\
&= \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_{0}^{\infty} K(v)v^{(k-3)/2}(2-vh^2)^{(k-3)/2} I_{(0,2/h^2]}(v) dv.
\end{aligned}$$

Observemos que quando $n \to \infty$, $h \to 0$ e portanto $2 - vh^2 \to 2$. Fixado $v \in (0, \infty)$, existe $N = N(v) \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$, temos $0 \leq v \leq 2/h^2$ e $\lim_{n\to\infty} I_{(0,2/h^2]}(v) = 1$. Como $v \in (0,\infty)$ foi qualquer, temos que $\lim_{n\to\infty} I_{(0,2/h^2]}(v) = 1$ para todo $v \in (0,\infty)$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} I_{(0,2/h^2]}(v) = I_{(0,\infty)}(v).$$

Temos então uma sequência de funções mensuráveis que satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} K(v)v^{(k-3)/2}(2-vh^2)^{(k-3)/2} I_{(0,2/h^2]}(v) = K(v)v^{(k-3)/2}2^{(k-3)/2}.$$

Como $k \geq 3$, temos

$$\left| K(v)v^{(k-3)/2}(2-vh^2)^{(k-3)/2} I_{(0,2/h^2]}(v) \right| \leq K(v)v^{(k-3)/2}2^{(k-3)/2},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e, por (1.9), a função $K(v)v^{(k-3)/2}2^{(k-3)/2}$ é integrável.

Assim, pelo item (c) do Teorema 1.1, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}2^{(k-3)/2} I_{(0,2/h^2]}(v)dv = \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}2^{(k-3)/2}dv.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}[C(h)]^{-1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}(2-vh^2)^{(k-3)/2} I_{(0,2/h^2]}(v)dv \\
&= \frac{(2\pi)^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}dv = \lambda > 0. \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Não Vício Assintótico

Neste capítulo, mostramos o não vício assintótico da classe de estimadores $f_n(x)$, definida em (1.8).

2.1 Demonstração do Não Vício Assintótico

Nesta seção, vamos mostrar o não vício assintótico da classe de estimadores $f_n(x)$ definida pela expressão (1.8), ou seja, vamos mostrar que $\lim_{n\to\infty} |Ef_n(x) - f(x)| = 0$ quando x é um ponto de continuidade da f.

Lema 2.1 *Suponha que as funções $K(\cdot)$ e h satisfazem as seguintes condições:*

(a) *K é limitada em $\mathbb{R}^+$,*

(b) $0 < \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}dv < \infty$,

(c_1) $\lim_{v\to\infty} K(v)v^{(k-1)/2} = 0$ *ou*

(c_2) *f é limitada em Ω_k, e*

(d) $\lim_{n\to\infty} h = 0$.

Então, para todo ponto x de continuidade da f, temos

$$\lim_{n\to\infty} |Ef_n(x) - f(x)| = 0.$$

Além disso, se f é contínua em Ω_k, então

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |Ef_n(x) - f(x)| = 0.$$

Demonstração. Usando o fato dos vetores $X_1, ..., X_n$ serem i.i.d., temos

$$\begin{aligned}
|Ef_n(x) - f(x)| &= \left| E\left[\frac{1}{nh^{k-1}} C(h) \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{1 - x'X_i}{h^2}\right)\right] - f(x)\right| \\
&= \left| \frac{C(h)}{nh^{k-1}} \sum_{i=1}^{n} E\left[K\left(\frac{1 - x'X_i}{h^2}\right)\right] - f(x)\right| \\
&= \left| \frac{C(h)}{nh^{k-1}} nE\left[K\left(\frac{1 - x'X_1}{h^2}\right)\right] - f(x)\right| \\
&= \left| \frac{C(h)}{h^{k-1}} E\left[K\left(\frac{1 - x'X_1}{h^2}\right)\right] - f(x)\right| \\
&= \left| \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{\Omega_k} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) f(y) d\omega_k(y) - f(x)\right| \\
&= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left| \int_{\Omega_k} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) f(y) d\omega_k(y) - f(x) \frac{h^{k-1}}{C(h)}\right|.
\end{aligned}$$

Usando (1.10), obtemos:

$$\begin{aligned}
|Ef_n(x) - f(x)| &= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left| \int_{\Omega_k} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) f(y) d\omega_k(y) - f(x) \int_{\Omega_k} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) d\omega_k(y)\right| \\
&= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left| \int_{\Omega_k} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) (f(y) - f(x)) d\omega_k(y)\right| \\
&\leq \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{\Omega_k} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) |f(y) - f(x)| d\omega_k(y)
\end{aligned}$$

Para $\delta > 0$, fazendo uma partição conveniente do domínio, podemos decompor essa última integral em uma soma, e assim

$$\begin{aligned}
|Ef_n(x) - f(x)| &= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{1-x'y\leq\delta} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) |f(y) - f(x)| d\omega_k(y) \\
&\quad + \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{1-x'y>\delta} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) |f(y) - f(x)| d\omega_k(y) \\
&\leq \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{1-x'y\leq\delta} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) |f(y) - f(x)| d\omega_k(y) \\
&\quad + \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{1-x'y>\delta} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) f(y) d\omega_k(y) \\
&\quad + \frac{C(h)}{h^{k-1}} f(x) \int_{1-x'y>\delta} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) d\omega_k(y) \\
&= I_1 + I_2 + I_3. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Pela continuidade da f em x, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, sempre que $1 - x'y \leq \delta$. Assim,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{1-x'y\leq\delta} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) |f(y) - f(x)| d\omega_k(y) \\
&\leq \varepsilon \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{1-x'y\leq\delta} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) d\omega_k(y) \\
&\leq \varepsilon \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{\Omega_k} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) d\omega_k(y),
\end{aligned}$$

e usando (1.10) obtemos:

$$I_1 \leq \varepsilon. \tag{2.2}$$

Pela condição **(a)**, temos

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{1-x'y>\delta} K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) f(y) d\omega_k(y) \\
&\leq \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{1-x'y>\delta} \left(\sup_{1-x'y>\delta} K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right)\right) f(y) d\omega_k(y) \\
&= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left(\sup_{1-x'y>\delta} K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right)\right) \int_{1-x'y>\delta} f(y) d\omega_k(y) \\
&\leq \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left(\sup_{1-x'y>\delta} K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right)\right) \int_{\Omega_k} f(y) d\omega_k(y) \\
&= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left(\sup_{1-x'y>\delta} K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right)\right).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Fazendo $v = v(x) = \dfrac{1-x'y}{h^2}$, temos que $1 - x'y > \delta$ se, e somente se, $v > \frac{\delta}{h^2}$. Para $k \geq 3$,

$$v^{(1-k)/2} < \left(\frac{\delta}{h^2}\right)^{(1-k)/2} = \frac{\delta^{(1-k)/2}}{h^{1-k}} = \delta^{(1-k)/2} h^{k-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left(\sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v)\right) \\
&= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left(\sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v) v^{(k-1)/2} v^{(1-k)/2}\right) \\
&\leq \frac{C(h)}{h^{k-1}} \delta^{(1-k)/2} h^{k-1} \left(\sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v) v^{(k-1)/2}\right) \\
&= C(h) \delta^{(1-k)/2} \left(\sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v) v^{(k-1)/2}\right).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Para mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} I_2 = 0$, vamos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v) v^{(k-1)/2}\right) = 0$. Fixado $x \in \Omega_k$, para $h_1 < h_2$ temos $\dfrac{\delta}{h_1^2} > \dfrac{\delta}{h_2^2}$ e consequentemente

$$0 \leq \sup_{v>\frac{\delta}{h_1^2}} K(v) v^{(k-1)/2} \leq \sup_{v>\frac{\delta}{h_2^2}} K(v) v^{(k-1)/2}. \tag{2.5}$$

Isso significa dizer que quando o valor de h diminui, o valor de $\sup\limits_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v) v^{(k-1)/2}$ também diminui. Desse modo, a função definida por $\sup\limits_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v) v^{(k-1)/2}$ é monótona crescente e limitada inferiormente por zero com relação à variável h; logo, seu limite à direita existe quando $h \to 0^+$, ou seja, quando $n \to \infty$. Suponhamos por contradição que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v)v^{(k-1)/2}\right) = l > 0.$$

Pela condição $(\mathbf{c}_1)$ existe $\alpha > 0$ tal que

$$v > \alpha \Rightarrow 0 \leq K(v)v^{(k-1)/2} < \frac{l}{2}.$$

Da condição **(d)**, existe h_0 tal que $\alpha < \dfrac{\delta}{h_0^2}$. Disso,

$$h < h_0 \Rightarrow \frac{\delta}{h_0^2} < \frac{\delta}{h^2} \Rightarrow 0 \leq \sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v)v^{(k-1)/2} \leq \sup_{v>\frac{\delta}{h_0^2}} K(v)v^{(k-1)/2} \leq \frac{l}{2} < l.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v)v^{(k-1)/2}\right) \leq \frac{l}{2},$$

contradizendo a hipótese desse limite ser igual a l. Portanto, temos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v)v^{(k-1)/2}\right) = 0. \tag{2.6}$$

Notemos que esse mesmo raciocínio pode ser feito para qualquer $x \in \Omega_k$ fixado. Como consequência disso e de (1.13), temos

$$\lim_{n\to\infty} I_2 = 0. \tag{2.7}$$

Com relação a I_3, podemos escrever

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{C(h)}{h^{k-1}} f(x) \int_{1-x'y>\delta} K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) d\omega_k(y) \qquad (2.8)\\ &= \frac{C(h)}{h^{k-1}} f(x) \int_{\Omega_{k-1}} \int_{-1}^{1-\delta} K\left(\frac{1-z}{h^2}\right)(1-z^2)^{(k-3)/2} dz \\ &= \frac{C(h)}{h^{k-1}} f(x)\omega_{k-1} \int_{-1}^{1-\delta} K\left(\frac{1-z}{h^2}\right)(1-z^2)^{(k-3)/2} dz. \end{aligned}$$

Fazendo $v = (1-z)/h^2$, temos $z = 1 - vh^2$ e $dz = -h^2 dv$. Observemos que

$$(1-z^2)^{(k-3)/2} = (1-(1-vh^2)^2)^{(k-3)/2} = [vh^2(2-vh^2)]^{(k-3)/2}$$

e, para $k \geq 3$,

$$2 - vh^2 \leq 2 \Rightarrow (2-vh^2)^{(k-3)/2} \leq 2^{(k-3)/2}. \tag{2.9}$$

Quanto aos limites de integração, para $z = -1$ temos $v = 2/h^2$, e para $z = 1-\delta$ temos $v = \delta/h^2$.

Por (1.12), podemos escrever

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{C(h)}{h^{k-1}} f(x) \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_{2/h^2}^{\delta/h^2} K(v)[vh^2(2-vh^2)]^{(k-3)/2}(-h^2)dv \\
&= \frac{C(h)}{h^{k-1}} f(x) \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_{\delta/h^2}^{2/h^2} K(v)[vh^2(2-vh^2)]^{(k-3)/2} h^2 dv \\
&= \frac{C(h)}{h^{k-1}} f(x) \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} h^{k-1} \int_{\delta/h^2}^{2/h^2} K(v) v^{(k-3)/2}(2-vh^2)^{(k-3)/2} dv \\
&= C(h) f(x) \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_{\delta/h^2}^{2/h^2} K(v) v^{(k-3)/2}(2-vh^2)^{(k-3)/2} dv \\
&\leq C(h) f(x) \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_{\delta/h^2}^{2/h^2} K(v) v^{(k-3)/2} 2^{(k-3)/2} dv.
\end{aligned}$$

Usando (2.9), obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq C(h) f(x) \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_{\delta/h^2}^{2/h^2} K(v) v^{(k-3)/2} 2^{(k-3)/2} dv \\
&= C(h) f(x) \frac{(2\pi)^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_{\delta/h^2}^{2/h^2} K(v) v^{(k-3)/2} dv \\
&\leq C(h) f(x) \frac{(2\pi)^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_{\delta/h^2}^{\infty} K(v) v^{(k-3)/2} dv \\
&= C(h) f(x) \frac{(2\pi)^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_{0}^{\infty} K(v) v^{(k-3)/2} I_{(\delta/h^2,\infty)}(v) dv.
\end{aligned}$$

Dado $v > 0$, existe $N = N(v) \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$ temos $v \leq \delta/h^2$ e consequentemente $I_{(\delta/h^2,\infty)}(v) = 0$. Disso, $\lim_{n\to\infty} I_{(\delta/h^2,\infty)}(v) = 0$. Como $v > 0$ foi qualquer, temos que $\lim_{n\to\infty} I_{(\delta/h^2,\infty)}(v) = 0$ para todo $v > 0$.

Temos então uma sequência de funções mensuráveis que satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} K(v) v^{(k-3)/2} I_{(\delta/h^2,\infty)}(v) = 0.$$

Temos também

$$\left| K(v) v^{(k-3)/2} I_{(\delta/h^2,\infty)}(v) \right| \leq K(v) v^{(k-3)/2},$$

que é integrável, pela equação (1.9).

Assim, pelo item (c) do Teorema 1.1, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty K(v) v^{(k-3)/2} I_{(\delta/h^2,\infty)}(v) dv = 0. \tag{2.10}$$

Como consequência disso e de (1.13), temos

$$\lim_{n\to\infty} I_3 = 0. \tag{2.11}$$

Por (2.1), (2.2), (2.7) e (2.11), temos $\lim_{n\to\infty} |Ef_n(x)-f(x)| = 0$ para todo ponto x de continuidade da f.

É importante observarmos que a condição $(\mathbf{c}_1)$ foi usada para calcular o limite apenas de I_2, não interferindo no limite de I_1 ou de I_3. Mostremos agora que vale $\lim_{n\to\infty} I_2 = 0$ quando trocamos a condição $(\mathbf{c}_1)$ pela condição $(\mathbf{c}_2)$, isto é, quando supomos que f é limitada em Ω_k. Desse modo, existe $A > 0$ tal que $|f(y)| \leq A$, para todo $y \in \Omega_k$. Assim, por (2.3), temos

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{1-x'y>\delta} K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) f(y) d\omega_k(y) \\
&\leq A\frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{1-x'y>\delta} K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) d\omega_k(y),
\end{aligned}
$$

que difere de I_3 em (2.8) apenas pela troca da constante $f(x)$ por A. Logo,

$$
I_2 \leq C(h)A\frac{(2\pi)^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2} I_{(\delta/h^2,\infty)}(v)dv, \tag{2.12}
$$

que por (1.13) e (2.10) temos

$$
\lim_{n\to\infty} I_2 = 0.
$$

Agora, suponhamos que f é contínua em Ω_k. Segue da compacidade de Ω_k que f é uniformemente contínua e limitada. Como

$$
|Ef_n(x) - f(x)| \leq I_1 + I_2 + I_3,
$$

definidos em (2.1), temos

$$
\sup_x |Ef_n(x) - f(x)| \leq \sup_x (I_1 + I_2 + I_3) \leq \sup_x I_1 + \sup_x I_2 + \sup_x I_3. \tag{2.13}
$$

Pela continuidade uniforme da f em Ω_k, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ quaisquer que sejam $x, y \in \Omega_k$ satisfazendo $1 - x'y \leq \delta$. Disso, $I_1 \leq \varepsilon$ para todo $x \in \Omega_k$, como fizemos em (2.2), já que todos os pontos são de continuidade. Logo,

$$
\sup_x I_1 \leq \varepsilon. \tag{2.14}
$$

Como procedemos anteriormente em (2.4)

$$
I_2 \leq C(h)\delta^{(1-k)/2} \left(\sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v)v^{(k-1)/2} \right),
$$

em que $v = (1 - x'y)/h^2$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\sup_x I_2 &\leq \sup_x \left[C(h)\delta^{(1-k)/2} \left(\sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v)v^{(k-1)/2} \right) \right] \\
&= C(h)\delta^{(1-k)/2} \sup_x \left(\sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v)v^{(k-1)/2} \right).
\end{aligned}
$$

Para mostrar que $\lim_{n\to\infty} \sup_x I_2 = 0$, vamos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x \left(\sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v)v^{(k-1)/2} \right) = 0.$$

A desigualdade em (2.5) pode ser obtida para todo $x \in \Omega_k$, sendo o supremo da expressão do lado direito em relação a x uma cota superior para a expressão do lado esquerdo. Desse modo,

$$0 \leq \sup_x \left(\sup_{v>\frac{\delta}{h_1^2}} K(v)v^{(k-1)/2} \right) \leq \sup_x \left(\sup_{v>\frac{\delta}{h_2^2}} K(v)v^{(k-1)/2} \right),$$

em que $v = (1-x'y)/h^2$. Em outras palavras, a função definida por $\sup_x \left(\sup_{v>\frac{\delta}{h_2^2}} K(v)v^{(k-1)/2} \right)$ é monótona crescente e limitada inferiormente por zero com relação à variável h; logo, seu limite à direita existe quando $h \to 0^+$, ou seja, quando $n \to \infty$. Suponhamos por contradição que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x \left(\sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v)v^{(k-1)/2} \right) = L > 0.$$

Logo, existe h_0 tal que para $h < h_0$ temos

$$\frac{L}{2} < \sup_x \left(\sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v)v^{(k-1)/2} \right).$$

Disso, existe $x_0 \in \Omega_k$ tal que

$$\frac{L}{2} < \sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v)v^{(k-1)/2},$$

em que $v = (1 - x_0'y)/h^2$. Consequentemente:

$$\frac{L}{2} \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v)v^{(k-1)/2} \right),$$

o que contradiz o fato de que vale (2.6) para todo x fixo em Ω_k. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x \left(\sup_{v>\frac{\delta}{h^2}} K(v)v^{(k-1)/2} \right) = 0 \tag{2.15}$$

e por (1.13), temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x I_2 = 0. \tag{2.16}$$

Com respeito a I_3, por (2.10) temos

$$\begin{aligned} \sup_x I_3 &\leq \sup_x \left(C(h)f(x)\frac{(2\pi)^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2} I_{(\delta/h^2,\infty)}(v)dv \right) \\ &\leq C(h) \left(\sup_x f(x) \right) \frac{(2\pi)^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \sup_x \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2} I_{(\delta/h^2,\infty)}(v)dv. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Vamos verificar que $\lim_{n\to\infty}\sup_x \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}I_{(\delta/h^2,\infty)}(v)dv = 0$. Notemos que a igualdade em (2.10) pode ser obtida para todo $x \in \Omega_k$. Notemos também que para $h_1 < h_2$ temos $\frac{\delta}{h_1} > \frac{\delta}{h_2}$ e consequentemente $I_{(\delta/h_1^2,\infty)}(v) \leq I_{(\delta/h_2^2,\infty)}(v)$, sendo assim

$$\int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}I_{(\delta/h_1^2,\infty)}(v)dv \leq \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}I_{(\delta/h_2^2,\infty)}(v)dv,$$

e portanto

$$\sup_x \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}I_{(\delta/h_1^2,\infty)}(v)dv \leq \sup_x \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}I_{(\delta/h_2^2,\infty)}(v)dv,$$

isto é, a função definida por $\sup_x \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}I_{(\delta/h^2,\infty)}(v)dv$ é monótona crescente e limitada inferiormente por zero com relação à variável h; logo, seu limite à direita existe quando $h \to 0^+$, ou seja, limite quando $n \to \infty$, pela condição **(d)**. Suponhamos por contradição que

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}I_{(\delta/h^2,\infty)}(v)dv = T > 0.$$

Logo, existe h_0 tal que para $h < h_0$ temos

$$\frac{T}{2} < \sup_x \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}I_{(\delta/h^2,\infty)}(v)dv.$$

Sendo assim, existe $x_0 \in \Omega_k$ tal que

$$\frac{T}{2} < \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}I_{(\delta/h^2,\infty)}(v)dv,$$

em que $v = (1 - x_0'y)/h^2$. Consequentemente:

$$\frac{T}{2} \leq \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}I_{(\delta/h^2,\infty)}(v)dv.$$

Isso contradiz o fato de que vale (2.10) para todo x fixo em Ω_k, donde concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}I_{(\delta/h^2,\infty)}(v)dv = 0, \tag{2.18}$$

e por (1.13) temos

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x I_3 = 0. \tag{2.19}$$

Portanto, de (2.13), (2.14), (2.16) e (2.19), temos

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x |Ef_n(x) - f(x)| = 0.$$

Novamente observamos que a condição **(c$_1$)** poderia ser trocada pela condição **(c$_2$)**, em que f é limitada em Ω_k, não alterando o limite de $\sup_x I_2$. Por (2.12), temos

$$\sup_x I_2 \leq C(h)A\frac{(2\pi)^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]}\sup_x \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}I_{(\delta/h^2,\infty)}(v)dv,$$

e também por (1.13), (2.10) e (2.18) temos

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x I_2 = 0.$$

■

Capítulo 3

Consistência Forte

O objetivo principal deste capítulo é demonstrar a consistência forte da classe de estimadores do tipo núcleo $f_n(x)$ definida em (1.8), isto é, vamos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{q.c.},$$

e para isso vamos usar o Lema 2.1 e também o Lema 1.5.

3.1 Demonstração da Consistência Forte

Teorema 3.1 *Sejam $K(\cdot)$ e h satisfazendo as seguintes condições:*

(a) K *é limitada em* $\mathbb{R}^+$,

(b) $0 < \int_0^\infty K(v)v^{(k-3)/2}dv < \infty$,

($\mathbf{c}_1$) $\lim_{v\to\infty} K(v)v^{(k-1)/2} = 0$ *ou*

($\mathbf{c}_2$) f *é limitada em* Ω_k,

(d) $\lim_{n\to\infty} h = 0$, *e*

(e) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{nh^{k-1}}{\log(n)}\right) = \infty$.

Então, para todo ponto x de continuidade da f, temos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad q.c.$$

Demonstração. Inicialmente, observamos que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - Ef_n(x) + Ef_n(x) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x) - Ef_n(x)| + |Ef_n(x) - f(x)|. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Pelo Lema 2.1, temos

$$\lim_{n\to\infty} |Ef_n(x) - f(x)| = 0,$$

Então falta provar que

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - Ef_n(x)| = 0 \qquad \text{q.c.},$$

e assim $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ q.c., que é o resultado desejado.

Notemos que

$$\begin{aligned} Ef_n(x) &= E\left(\frac{1}{nh^{k-1}}C(h)\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{nh^{k-1}}C(h)E\left(\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right)\right) \\ &= \frac{C(h)}{nh^{k-1}}\sum_{i=1}^{n} EK\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right) \qquad (3.2) \\ &= \frac{C(h)}{nh^{k-1}} nEK\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right) \\ &= \frac{C(h)}{h^{k-1}} EK\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right). \qquad (3.3) \end{aligned}$$

Definindo

$$\xi_i = \frac{C(h)}{h^{k-1}}\left(K\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right) - EK\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right)\right), \tag{3.4}$$

temos que $\xi_1, ..., \xi_n$ são variáveis aleatórias i.i.d., com $E(\xi_1) = 0$, pois os vetores $X_1, ..., X_n$ são i.i.d..

Pela condição **(a)**, existe $M > 0$ tal que $K(v) \leq M, \ \forall v \in \mathbb{R}^+$. Assim,

$$\begin{aligned} |\xi_1| &= \left|\frac{C(h)}{h^{k-1}}\left(K\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right) - EK\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right)\right)\right| \\ &= \frac{C(h)}{h^{k-1}}\left|K\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right) - EK\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right)\right| \\ &\leq \frac{C(h)}{h^{k-1}}\left(K\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right) + EK\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right)\right) \\ &\leq \frac{C(h)}{h^{k-1}}(M+M) \\ &= 2M\frac{C(h)}{h^{k-1}}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

e por (3.3)

$$\begin{aligned}
E(\xi_1^2) &= E\left[\left(\frac{C(h)}{h^{k-1}}\right)^2\left(K\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right)-EK\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right)\right)^2\right] \\
&= \left(\frac{C(h)}{h^{k-1}}\right)^2 E\left[\left(K\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right)-EK\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right)\right)^2\right] \\
&= \left(\frac{C(h)}{h^{k-1}}\right)^2 Var\left[K\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right)\right] \\
&= \left(\frac{C(h)}{h^{k-1}}\right)^2 \left(EK^2\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right)-\left(EK\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right)\right)^2\right) \\
&\leq \left(\frac{C(h)}{h^{k-1}}\right)^2 EK^2\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right) \\
&\leq M\left(\frac{C(h)}{h^{k-1}}\right)^2 EK\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right) \\
&= M\frac{C(h)}{h^{k-1}}\frac{C(h)}{h^{k-1}}EK\left(\frac{1-x'X_1}{h^2}\right) \\
&= M\frac{C(h)}{h^{k-1}}Ef_n(x). \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que existem $a > 0$ e $a(x) > 0$ constantes em relação a n e tais que, para n suficientemente grande,

$$|\xi_1| \leq ah^{1-k} \qquad \text{e} \qquad E(\xi_1^2) \leq a(x)h^{1-k}.$$

De fato, dado $\varepsilon_1 < \lambda = \lim_{n\to\infty}[C(h)]^{-1}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_1$ temos $0 < \lambda - \varepsilon_1 < [C(h)]^{-1} < \lambda + \varepsilon_1$, o que implica em $\dfrac{1}{\lambda+\varepsilon_1} < C(h) < \dfrac{1}{\lambda-\varepsilon_1}$. Fazendo $a = 2M\dfrac{1}{\lambda-\varepsilon_1}$, temos por (3.5)

$$|\xi_1| \leq 2M\frac{C(h)}{h^{k-1}} \leq 2M\frac{1}{h^{k-1}}\frac{1}{\lambda-\varepsilon_1} = ah^{1-k},$$

para todo $n > n_1$.

Pelo lema 2.1, temos $\lim_{n\to\infty}(Ef_n(x) - f(x)) = 0$. Assim, dado $\varepsilon_2 > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) - \varepsilon_2 < Ef_n(x) < f(x) + \varepsilon_2$. Considerando $a(x) = M\dfrac{1}{\lambda-\varepsilon_1}(f(x)+\varepsilon_2)$, temos por (3.6)

$$E(\xi_1^2) \leq M\frac{C(h)}{h^{k-1}}Ef_n(x) \leq M\frac{1}{h^{k-1}}\frac{1}{\lambda-\varepsilon_1}(f(x)+\varepsilon_2) = a(x)h^{1-k},$$

para todo $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

A partir de (1.8), de (3.2) e (3.4) temos

$$\begin{aligned} f_n(x) - Ef_n(x) &= \frac{C(h)}{nh^{k-1}} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right) - \frac{C(h)}{nh^{k-1}} \sum_{i=1}^{n} EK\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right) \\ &= \frac{C(h)}{nh^{k-1}} \left(\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right) - \sum_{i=1}^{n} EK\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right)\right) \\ &= \frac{C(h)}{nh^{k-1}} \sum_{i=1}^{n} \left(K\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right) - EK\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left(K\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right) - EK\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i. \end{aligned}$$

Fazendo $\sigma_i^2 = Var(\xi_i)$, temos

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}(\sigma_1^2 + \cdots \sigma_n^2) = \frac{1}{n}(n\sigma_1^2) = \sigma_1^2 = E(\xi_1^2) \leq a(x)h^{1-k}$$

e

$$2\sigma^2 + ah^{1-k}\varepsilon \leq 2a(x)h^{1-k} + ah^{1-k}\varepsilon.$$

Logo,

$$\frac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2 + ah^{1-k}\varepsilon} \geq \frac{n\varepsilon^2}{2a(x)h^{1-k} + ah^{1-k}\varepsilon}$$

e consequentemente

$$\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2 + ah^{1-k}\varepsilon}\right) \leq \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2a(x)h^{1-k} + ah^{1-k}\varepsilon}\right).$$

Para todo $i = 1, ..., n$, podemos proceder do mesmo modo como fizemos em (3.5) para $|\xi_1|$, obtendo

$$|\xi_i| \leq 2M\frac{C(h)}{h^{k-1}}, \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Esta desigualdade não depende do n em questão, pois o índice i interfere apenas na v.a. X_i utilizada para definir ξ_i. Em particular, a desigualdade acima vale para n suficientemente grande. Assim, existe $b = 2M\frac{C(h)}{h^{k-1}}$ tal que

$$P\left(\xi_i \leq b\right) = 1,$$

para todo $i = 1, ..., n$. Logo, podemos aplicar o Lema 1.5 com as variáveis aleatórias ξ_i. Disso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$, temos

$$\begin{aligned} P\left(|f_n(x) - Ef_n(x)| \geq \varepsilon\right) &= P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right| \geq \varepsilon\right) \\ &\leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2 + ah^{1-k}\varepsilon}\right) \\ &\leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2a(x)h^{1-k} + ah^{1-k}\varepsilon}\right) \\ &= 2\exp\left(-\frac{nh^{k-1}\varepsilon^2}{2a(x) + a\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} P(|f_n(x) - Ef_n(x)| \geq \varepsilon) \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} 2\exp\left(-\frac{nh^{k-1}\varepsilon^2}{2a(x) + a\varepsilon}\right).$$

Denotando $A = \dfrac{\varepsilon^2}{2a(x) + a\varepsilon} > 0$, temos

$$\exp\left(-\frac{nh^{k-1}\varepsilon^2}{2a(x) + a\varepsilon}\right) = \exp\left(-nh^{k-1}A\right) = [\exp(-A)]^{nh^{k-1}}.$$

Como $\mathbb{R}$ não é limitado superiormente, existe $B \in \mathbb{R}$ tal que $BA > 1$. Disso, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{BA} < \infty$.

Podemos escrever

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{BA} = [\exp(-\log(n))]^{BA} = [\exp(-A)]^{B\log(n)} = b_n.$$

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é então absolutamente convergente. Assim, fazendo $a_n = [\exp(-A)]^{nh^{k-1}}$, temos pela condição **(e)**

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{[\exp(-A)]^{nh^{k-1}}}{[\exp(-A)]^{B\log(n)}} \\
&= \lim_{n\to\infty}[\exp(-A)]^{nh^{k-1} - B\log(n)} \\
&= \lim_{n\to\infty}[\exp(-A)]^{\log(n)\left(\frac{nh^{k-1}}{\log(n)} - B\right)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $\exp(-A) < 1$. Logo, pelo Lema 1.1, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{nh^{k-1}\varepsilon^2}{2a(x) + a\varepsilon}\right)$$

é absolutamente convergente e, portanto,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} P(|f_n(x) - Ef_n(x)| \geq \varepsilon) < \infty.$$

Assim, pelo Lema 1.2, temos $P\left(\limsup_n |f_n(x) - Ef_n(x)| \geq \varepsilon\right) = 0$, e pelo Lema 1.3 temos $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - Ef_n(x)| = 0$ quase certamente.

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{q.c.},$$

como queríamos demonstrar. ■

Capítulo 4

Consistência Uniformemente Forte

Neste capítulo, vamos mostrar a consistência uniformemente forte da classe de estimadores do tipo núcleo $f_n(x)$ definida em (1.8), isto é, vamos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \text{q.c.}$$

Para demonstrar esse fato, usaremos o conceito de V-C classe e alguns resultados dados no Capítulo 1, dentre os quais destacamos o Lema 2.1.

4.1 Demonstração da Consistência Uniformemente Forte

Nesta seção, mostraremos a consistência uniformemente forte da classe de estimadores $f_n(x)$. Daqui em diante, diremos que μ é a medida sobre Ω_k com função de densidade de probabilidade $f(x)$, e μ_n é a medida empírica baseada na amostra $X_1, ..., X_n$, como em (1.6).

Teorema 4.1 *Suponha que f é contínua em Ω_k e K é limitada em $\mathbb{R}^+$ e integrável a Riemann em todo intervalo finito de $\mathbb{R}^+$, com*

$$\int_0^\infty \sup\left\{K(u) : \left|\sqrt{u} - \sqrt{v}\right| < 1\right\} v^{(k-3)/2} dv < \infty.$$

Se $\lim_{n\to\infty} h = 0$ e

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{nh^{k-1}}{\log(n)}\right) = \infty, \tag{4.1}$$

então

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad q.c.$$

Demonstração. Pelo Lema 1.8, para cada $\eta,\ \delta$ pequenos e ρ grande podemos encontrar uma função

$$K^*(v) = \sum_{i=1}^{N_0} \alpha_i I_{A_i}(v),$$

em que I_{A_i} é a função indicadora:

(i) $\alpha_1, ..., \alpha_{N_0}$ são números não-negativos,

(ii) $A_1, ..., A_{N_0}$ são intervalos disjuntos contidos em $[0, \rho]$,

(iii) $\max\limits_{1 \le i \le N_0} \alpha_i \le \sup\limits_v K(v) = M$,

(iv) $|K^*(v) - K(v)| < \eta$ em $[0, \rho]$, exceto em um conjunto D,

(v) $D \subseteq B = \bigcup_{i=1}^{N^*} B_i$, em que $B_1, ..., B_{N^*}$ são intervalos em $[0, \rho]$, cuja união tem medida de Lebesgue menor que δ.

Observemos que

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x) - Ef_n(x)| + |Ef_n(x) - f(x)|,$$

e consequentemente

$$\sup_x |f_n(x) - f(x)| \le \sup_x |f_n(x) - Ef_n(x)| + \sup_x |Ef_n(x) - f(x)|. \tag{4.2}$$

Como f é contínua em Ω_k, temos pelo Lema 2.1

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |Ef_n(x) - f(x)| = 0.$$

Com isso, falta provar que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |f_n(x) - Ef_n(x)| = 0 \quad \text{q.c.},$$

e assim $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_x |f_n(x) - f(x)| = 0$ q.c., que é o resultado desejado.

Por (1.8), temos

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - Ef_n(x)| &= |Ef_n(x) - f_n(x)| \\
&= \left| \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{\Omega_k} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) f(y) d\omega_k(y) - \frac{C(h)}{nh^{k-1}} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{1 - x'X_i}{h^2}\right) \right| \\
&= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left| \int_{\Omega_k} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) f(y) d\omega_k(y) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{1 - x'X_i}{h^2}\right) \right| \\
&= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left| \int_{\Omega_k} K\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) f(y) d\omega_k(y) - \int_{\Omega_k} K^*\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) d\mu(y) \right. \\
&\quad + \int_{\Omega_k} K^*\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) d\mu(y) - \int_{\Omega_k} K^*\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) d\mu_n(y) \\
&\quad \left. + \int_{\Omega_k} K^*\left(\frac{1 - x'y}{h^2}\right) d\mu_n(y) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{1 - x'X_i}{h^2}\right) \right|.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - Ef_n(x)| \quad \leq \quad & \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left| \int_{\Omega_k} K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) f(y) d\omega_k(y) - \int_{\Omega_k} K^*\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) d\mu(y) \right| \\
& + \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left| \int_{\Omega_k} K^*\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) d\mu(y) - \int_{\Omega_k} K^*\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) d\mu_n(y) \right| \\
& + \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left| \int_{\Omega_k} K^*\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) d\mu_n(y) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right) \right| .
\end{aligned}$$

Seja $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples definidas sobre Ω_k, com $\phi_m \geq 0$ para todo m, tal que $\phi_m(y) \uparrow K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right)$ para todo $y \in \Omega_k$ quando $m \to \infty$. Essas funções são da forma

$$\phi_m = \sum_{j=1}^{N} \beta_j I_{A_j},$$

com $A_j \subset \Omega_k$ para todo $j = 1, ..., N$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_k} \phi_m(y) d\mu_n(y) &= \sum_{j=1}^{N} \beta_j \mu_n(A_j) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \beta_j \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{A_j}(X_i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \beta_j I_{A_j}(X_i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} \beta_j I_{A_j}(X_i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi_m(X_i).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_k} K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) d\mu_n(y) &= \lim_{m\to\infty} \int_{\Omega_k} \phi_m(y) d\mu_n(y) \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi_m(X_i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lim_{m\to\infty} \phi_m(X_i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right) \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned}
U_{1n}(x) &= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{\Omega_k} \left| K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) - K^*\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) \right| f(y) d\omega_k(y), \\
U_{2n}(x) &= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left| \int_{\Omega_k} K^*\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) d[\mu_n(y) - \mu(y)] \right|, \qquad (4.4) \\
U_{3n}(x) &= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{\Omega_k} \left| K^*\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) - K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) \right| d\mu_n(y),
\end{aligned}$$

e usando (4.3), podemos escrever:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - Ef_n(x)| &\leq \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left| \int_{\Omega_k} K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) f(y) d\omega_k(y) - \int_{\Omega_k} K^*\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) f(y) d\omega_k(y) \right| \\
&+ \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left| \int_{\Omega_k} K^*\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) d\mu_n(y) - \int_{\Omega_k} K^*\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) d\mu(y) \right| \\
&+ \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left| \int_{\Omega_k} K^*\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) d\mu_n(y) - \int_{\Omega_k} K\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right) d\mu_n(y) \right| \\
&\leq \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{\Omega_k} \left| K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) - K^*\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) \right| f(y) d\omega_k(y) \\
&+ \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left| \int_{\Omega_k} K^*\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) [d\mu_n(y) - d\mu(y)] \right| \\
&+ \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{\Omega_k} \left| K^*\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) - K\left(\frac{1-x'X_i}{h^2}\right) \right| d\mu_n(y) \\
&= U_{1n}(x) + U_{2n}(x) + U_{3n}(x)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_x |f_n(x) - Ef_n(x)| \leq \sum_{i=1}^{3} \sup_x U_{in}(x). \tag{4.5}$$

Podemos escolher η e δ suficientemente pequenos e ρ suficientemente grande, de modo que $|K^*(v) - K(v)| < \eta \dfrac{h^{k-1}}{C(h)}$ em $[0, \rho]$, exceto em um conjunto D que tem medida de Lebesgue menor que δ. Assim, temos

$$\begin{aligned}
U_{1n}(x) &= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{\Omega_k} \left| K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) - K^*\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) \right| f(y) d\omega_k(y) \\
&\leq \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{\Omega_k} \eta \frac{h^{k-1}}{C(h)} f(y) d\omega_k(y) \\
&= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \eta \frac{h^{k-1}}{C(h)} \int_{\Omega_k} f(y) d\omega_k(y) \\
&= \eta
\end{aligned} \tag{4.6}$$

e

$$\begin{aligned}
U_{3n}(x) &= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{\Omega_k} \left| K^*\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) - K\left(\frac{1-x'y}{h^2}\right) \right| d\mu_n(y) \\
&\leq \frac{C(h)}{h^{k-1}} \int_{\Omega_k} \eta \frac{h^{k-1}}{C(h)} d\mu_n(y) \\
&= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \eta \frac{h^{k-1}}{C(h)} \int_{\Omega_k} d\mu_n(y) \\
&= \frac{C(h)}{h^{k-1}} \eta \frac{h^{k-1}}{C(h)} \mu_n(\Omega_k) \\
&= \eta,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

desde que $\dfrac{1-x'y}{h^2} \in [0, \rho]$.

Sejam

$$A_i^*(x) = \left\{ y \in \Omega_k; \frac{1-x'y}{h^2} \in A_i \right\}$$

e

$$\Omega_k^*(x) = \left\{ y \in \Omega_k; \frac{1 - x'y}{h^2} \in [0, \rho] \right\}.$$

Notemos que $A_i \subset [0, \rho] \Rightarrow A_i^*(x) \subset \Omega_k^*(x)$.

Fazendo $z = x'y$ e $v = (1-z)/h^2$, temos $z = 1 - vh^2$ e $dz = -h^2 dv$. Desse modo,

$$1 - z^2 = 1 - (1 - vh^2)^2 = 2vh^2 + v^2h^4 = vh^2(2 - vh^2),$$

donde

$$(1 - z^2)^{(k-3)/2} = [vh^2(2 - vh^2)]^{(k-3)/2}.$$

Logo, temos $0 \leq \dfrac{1-z}{h^2} \leq \rho$ se, e somente se, $0 \leq 1 - z \leq \rho h^2$, que é equivalente a $1 - \rho h^2 \leq z \leq 1$.

Observemos que, para $k \geq 3$,

$$2 - vh^2 < 2 \Rightarrow (2 - vh^2)^{(k-3)/2} < 2^{(k-3)/2}.$$

A continuidade da f em Ω_k é uniforme, pois Ω_k é compacto. Disso, $f(\Omega_k)$ também é compacto e, em particular, limitado. Assim, existe $M_f \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) \leq M_f$, $\forall x \in \Omega_k$. Disso,

$$\begin{aligned} \mu(A_i^*(x)) &= \int_{A_i^*(x)} f(y) d\omega_k(y) \\ &\leq M_f \int_{A_i^*(x)} d\omega_k(y) \\ &\leq M_f \int_{\Omega^*(x)} d\omega_k(y). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Como $z = x'y$, o maior intervalo em que z pode variar é $[-1, 1]$, e o maior intervalo em que v varia é $[0, 2/h^2]$. Com base nisso e em (1.12) temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*(x)} d\omega_k(y) &= \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_{1-\rho h^2}^{1} (1 - z^2)^{(k-3)/2} I_{[-1,1]}(z) dz \\ &= \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_{\rho}^{0} [vh^2(2 - vh^2)]^{(k-3)/2} (-h^2) I_{[0,2/h^2]}(v) dv \\ &= \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_{0}^{\rho} [vh^2(2 - vh^2)]^{(k-3)/2} h^2 I_{[0,2/h^2]}(v) dv \\ &= \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \int_{0}^{\rho} v^{(k-3)/2} h^{k-3} (2 - vh^2)^{(k-3)/2} h^2 I_{[0,2/h^2]}(v) dv \\ &= \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} h^{k-1} \int_{0}^{\rho} v^{(k-3)/2} (2 - vh^2)^{(k-3)/2} I_{[0,2/h^2]}(v) dv \\ &\leq \frac{2\pi^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} h^{k-1} \int_{0}^{\rho} v^{(k-3)/2} 2^{(k-3)/2} I_{[0,2/h^2]}(v) dv \\ &= \frac{(2\pi)^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} h^{k-1} \int_{0}^{\rho} v^{(k-3)/2} dv. \end{aligned}$$

Assim, fazendo $\gamma = M_f \dfrac{(2\pi)^{(k-1)/2}}{\Gamma[(k-1)/2]} \displaystyle\int_0^\rho v^{(k-3)/2} dv$ e usando (4.8) temos

$$\mu(A_i^*(x)) \leq \gamma h^{k-1},$$

para n suficientemente grande tal que $\rho \leq \dfrac{2}{h^2}$.

Seja $0 < \delta \leq \dfrac{1}{8}$. De $\lim_{n\to\infty} h = 0$, podemos tomar h_0 tal que se $h < h_0$, então $\mu(A_i^*(x)) \leq \gamma h^{k-1} \leq \delta$ para todo $i = 1, ..., N_0$.

Notemos que para todo $x, y \in \Omega_k$

$$\begin{aligned} \|y - x\|^2 &= (y-x)'(y-x) = y'y - y'x - x'y + x'x \\ &= \|y\|^2 - x'y - x'y + \|x\|^2 = 2 - 2x'y = 2(1 - x'y). \end{aligned}$$

Escolhendo $A_i = [a_i, b_i),\ i = 1, ..., N_0$, temos

$$\begin{aligned} A_i^*(x) &= \left\{ y \in \Omega_k; a_i \leq \frac{1 - x'y}{h^2} < b_i \right\} \\ &= \left\{ y \in \Omega_k; a_i h^2 \leq 1 - x'y < b_i h^2 \right\} \\ &= \left\{ y \in \Omega_k; 2a_i h^2 \leq 2(1 - x'y) < 2b_i h^2 \right\} \\ &= \left\{ y \in \Omega_k; 2a_i h^2 \leq \|y - x\|^2 < 2b_i h^2 \right\} \\ &= \left\{ y \in \Omega_k; \sqrt{2a_i} h \leq \|y - x\| < \sqrt{2b_i} h \right\} \\ &\subset B(x, \sqrt{2b_i} h) \cap B(x, \sqrt{2a_i} h)^C. \end{aligned}$$

Fixemos $x \in \Omega_k$ e escrevamos

$$\mathscr{A} = \{A_i^*(x); x \in \Omega_k, i = 1, ..., N_0\}.$$

Sejam $x_1, ..., x_n$ n elementos de $\mathbb{R}^k$. Considerando $F = \{x_1, ..., x_n\}$, temos que o número de conjuntos distintos em $\{F \cap A_i^*(x); A_i^*(x) \in \mathscr{A}\}$ é menor que ou igual ao número de conjuntos distintos em

$$\{F \cap B(u, \rho); B(u, \rho) \in B(k),\ u \in \mathbb{R}^k,\ \rho > 0\}.$$

Pelo Lema 1.8, temos

$$m^{\mathscr{A}}(n) \leq m^{B(k)}(n) \leq n^{k+2+1} = n^{k+3}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^{k+3}}{2^n} = 0$, temos $n^{k+3} < 2^n$ para n suficientemete grande. Assim, $\mathscr{A}$ é uma V-C classe com algum índice s, como definido na equação (1.5).

De (4.4), temos

$$\begin{aligned}
\sup_x U_{2n}(x) &= \sup_x \left(\frac{C(h)}{h^{k-1}} \left| \int_{\Omega_k} K^* \left(\frac{1-x'y}{h^2} \right) d[\mu_n(y) - \mu(y)] \right| \right) \\
&= \sup_x \left(\frac{C(h)}{h^{k-1}} \left| \int_{\bigcup_i A_i^*(x)} K^* \left(\frac{1-x'y}{h^2} \right) d[\mu_n(y) - \mu(y)] \right| \right) \\
&\le \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left(\max_i \alpha_i \right) \sup_x \left| \int_{\bigcup_i A_i^*(x)} d[\mu_n(y) - \mu(y)] \right| \\
&\le \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left(\max_i \alpha_i \right) \sup_x \sum_{i=1}^{N_0} |\mu_n(A_i^*(x)) - \mu(A_i^*(x))| \\
&\le \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left(\max_i \alpha_i \right) \sup_x \sup_{A \in \mathscr{A}} |\mu_n(A) - \mu(A)| .
\end{aligned}$$

Assim, $\sup_x U_{2n}(x) \ge \varepsilon$ implica em $\frac{C(h)}{h^{k-1}} \left(\max_i \alpha_i \right) \sup_x \sup_{A \in \mathscr{A}} |\mu_n(A) - \mu(A)| \ge \varepsilon$ ou equivalentemente $\sup_x \sup_{A \in \mathscr{A}} |\mu_n(A) - \mu(A)| \ge \varepsilon \frac{C(h)}{h^{k-1}} \left(\max_i \alpha_i \right)^{-1} = \tilde{\varepsilon}$.

Seja (x_m) uma sequência de pontos de Ω_k tal que

$$g(x_m) = \sup_{A \in \mathscr{A}} |\mu_n(A) - \mu(A)| (x_m) \uparrow \sup_x \sup_{A \in \mathscr{A}} |\mu_n(A) - \mu(A)| .$$

Para $l \le m$, temos

$$[g(x_l) \ge \tilde{\varepsilon}] \subset [g(x_m) \ge \tilde{\varepsilon}] ,$$

isto é, a sequência de eventos $[g(x_m) \ge \tilde{\varepsilon}]$ é monótona não decrescente. Pela continuidade da probabilidade, temos

$$\lim_{m\to\infty} P(g(x_m) \ge \tilde{\varepsilon}) = P\left(\lim_{m\to\infty} g(x_m) \ge \tilde{\varepsilon} \right) = P\left(\sup_x \sup_{A \in \mathscr{A}} |\mu_n(A) - \mu(A)| \ge \tilde{\varepsilon} \right) \tag{4.9}$$

Seja c tal que $0 < c \le \min\left\{ \frac{n\varepsilon^2}{91\delta + 4\varepsilon}, \frac{n\delta}{68}, \frac{n\delta}{8} \right\}$. De $\lim_{n\to\infty} h = 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_1$, então $ch^{k-1} \le c$, que implica em $\exp(-cn) \le \exp(-cnh^{k-1})$. Assim, para $n \ge n_0 = \max\left\{ \frac{12\delta}{\varepsilon^2}, \frac{68(1+s)\log 2}{\delta}, n_1 \right\}$, temos pelo Lema 1.7

$$\begin{aligned}
P\left(\sup_{A \in \mathscr{A}} |\mu_n(A) - \mu(A)| \ge \tilde{\varepsilon} \right) &\le 5(2n)^s \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{91\delta + 4\varepsilon} \right) \\
&\quad +7(2n)^s \exp\left(-\frac{n\delta}{68} \right) + 2^{2+s} n^{1+2s} \exp\left(-\frac{n\delta}{8} \right) \\
&\le 5(2n)^s \exp(-cnh^{k-1}) \\
&\quad +7(2n)^s \exp(-cnh^{k-1}) + 2^{2+s} n^{1+2s} \exp(-cnh^{k-1}) \\
&\le 5.2^s n^{1+2s} \exp(-cnh^{k-1}) \\
&\quad +7.2^s n^{1+2s} \exp(-cnh^{k-1}) + 2^{2+s} n^{1+2s} \exp(-cnh^{k-1}) \\
&= (5 + 7 + 2^2) 2^s n^{1+2s} \exp(-cnh^{k-1}) \\
&= 2^{s+4} n^{1+2s} \exp(-cnh^{k-1}).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Notemos que a expressão em (4.10) não depende de m. Logo,

$$\begin{aligned} P\left(\sup_x U_{2n}(x) \geq \varepsilon\right) &\leq P\left(\sup_x \sup_{A\in\mathscr{A}} |\mu_n(A) - \mu(A)| \geq \tilde{\varepsilon}\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} P\left(\sup_{A\in\mathscr{A}} |\mu_n(A) - \mu(A)| \geq \tilde{\varepsilon}\right) \\ &\leq 2^{s+4} n^{1+2s} \exp(-cnh^{k-1}). \end{aligned}$$

Vamos agora mostrar a convergência de

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{s+4} n^{1+2s} \exp(-cnh^{k-1})$$

para assim concluir nossa demonstração.

De $c > 0$, temos

$$\exp\left(-cnh^{k-1}\right) = [\exp(-c)]^{nh^{k-1}}.$$

Como $\mathbb{R}$ não é limitado superiormente, existe $B \in \mathbb{R}$ tal que $Bc > 1$. Disso, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{Bc} < \infty$. Podemos escrever

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{Bc} = [\exp(-\log(n))]^{Bc} = [\exp(-c)]^{B\log(n)} = b_n.$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é então absolutamente convergente. Assim, fazendo

$$\begin{aligned} a_n &= 2^{s+4} n^{1+2s} \exp\left(-cnh^{k-1}\right) \\ &= 2^{s+4} \exp(\log(n^{1+2s})) \exp\left(-cnh^{k-1}\right) \\ &= 2^{s+4} \exp((1+2s)\log(n)) \exp\left(-cnh^{k-1}\right) \\ &= 2^{s+4} [\exp(-c)]^{-(1/c)(1+2s)\log(n)} [\exp(-c)]^{nh^{k-1}} \\ &= 2^{s+4} [\exp(-c)]^{nh^{k-1}-(1/c)(1+2s)\log(n)}, \end{aligned}$$

temos por (4.1)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{s+4} [\exp(-c)]^{nh^{k-1}-(1/c)(1+2s)\log(n)}}{[\exp(-c)]^{B\log(n)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2^{s+4} [\exp(-c)]^{nh^{k-1}-(1/c)(1+2s)\log(n)-B\log(n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2^{s+4} [\exp(-c)]^{\log(n)\left(\frac{nh^{k-1}}{\log(n)}-(1/c)(1+2s)-B\right)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $\exp(-c) < 1$. Logo, pelo Lema 1.1, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{s+4} n^{1+2s} \exp(-cnh^{k-1})$$

é absolutamente convergente e, portanto,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} P\left(\sup_x U_{2n}(x) \geq \varepsilon\right) < \infty$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Assim, pelo Lema 1.2, temos $P\left(\limsup_n \left[\sup_x U_{2n}(x) \geq \varepsilon\right]\right) = 0$ e pelo Lema 1.3

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x U_{2n}(x) = 0 \qquad \text{q.c..} \tag{4.11}$$

Pelas expressões (4.5), (4.6), (4.7) e (4.11), temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |f_n(x) - Ef_n(x)| = 0 \qquad \text{q.c..}$$

Como consequência disso e de (4.2), temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |f_n(x) - f(x)| \to 0 \qquad \text{q.c..}$$

■

Conclusão

Nosso trabalho foi baseado no artigo *Kernel estimators of density function of directional data* de Bai, Rao e Zhao (1988) [10] cujo objetivo é desenvolver uma teoria adequada de estimação para a densidade f de vetores aleatórios i.i.d. que tomam valores em uma esfera unitária k-dimensional Ω_k e que têm f como sua distribuição comum.

Estudamos o não vício assintótico, a consistência forte e a consistência uniformemente forte do seguinte estimador do tipo núcleo para $f(x)$

$$f_n(x) = \frac{1}{nh^{k-1}} C(h) \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{1 - x'X_i}{h^2}\right), \quad x \in \Omega_k, \tag{4.12}$$

onde $X_1, ..., X_n$ é uma amostra de vetores aleatórios i.i.d. com distribuição comum f tomando valores em Ω_k, Ω_k é a esfera unitária de $\mathbb{R}^k$, $k \geq 3$, onde $h = h_n > 0$, $K(\cdot)$ e $C(h)$ satisfazem algumas condições apropriadas, que foram apresentadas nos capítulos anteriores.

No Capítulo 1, apresentamos os resultados clássicos utilizados no decorrer do trabalho.

No Capítulo 2, mostramos o não vício assintótico de $f_n(x)$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} |Ef_n(x) - f(x)| = 0,$$

e quando f é contínua em Ω_k

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |Ef_n(x) - f(x)| = 0.$$

No Capítulo 3, usamos o não vício assintótico mostrado no Capítulo 1 para mostrar a consistência forte de $f_n(x)$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{q.c. (quase certamente)}$$

para todo ponto x de continuidade da f.

No Capítulo 4, usamos os resultados apresentados nos capítulos anteriores para mostrar a consistência uniformemente forte de $f_n(x)$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \text{q.c..}$$

Apêndice

A justificativa para o elemento de área que aparece na equação (1.11) foi retirada do livro Lima (2009) [13].

Seja E um espaço vetorial real de dimensão $m > 0$. Dadas duas bases ordenadas $\beta = \{\beta_1, ..., \beta_m\}$ e $\gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_m\}$ em E, existe uma única matriz real $m \times m$ invertível $A = (A_{ij})$ tal que

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i$$

para todo $j = 1, ..., m$. A chama-se a *matriz de passagem* da base β para a base γ. Quando a matriz de passagem A tem determinante positivo, dizemos que as bases β e γ são *igualmente orientadas*. Escrevemos então $\beta \equiv \gamma$. Esta é uma relação de equivalência no conjunto das bases de E. Cada classe de equivalência segundo esta relação chama-se uma *orientação* no espaço vetorial E.

Seja E um espaço vetorial de dimensão m, orientado e munido de um produto interno. Definiremos uma forma m-linear alternada $\omega : E \times \cdots \times E \to \mathbb{R}$, chamada o *elemento de volume de E*. Primeiramente tomamos uma base ortonormal positiva $\{\beta_1, ..., \beta_m\}$ em E. Dada a sequência de vetores $v_1, ..., v_m \in E$, temos

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i$$

para todo $j = 1, ..., m$. Seja $a = (a_{ij})$ a matriz $m \times m$ assim obtida. Por definição, pomos

$$\omega(v_1, ..., v_m) = \det a.$$

Verifiquemos agora que ω independe da escolha de base que fizemos. Para isto, introduzimos a *matriz de Gramm* $g = (\langle v_i, v_j \rangle)$, na qual o elemento situado na i-ésima linha e na j-ésima coluna é o produto interno $\langle v_i, v_j \rangle$. Como

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\beta_k, \sum_{s=1}^{m} a_{sj}\beta_s \rangle = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}a_{kj},$$

vemos que $g = a^t a$, em que a^t é a transposta da matriz a. Daí resulta que $\det g = (\det a)^2$. Em particular, $\det g \geq 0$, sendo $\det g = 0$ se, e somente se, os vetores $v_1, ..., v_m$ são linearmente dependentes. Concluímos que

$$\omega(v_1, ..., v_m) = \pm\sqrt{\det(\langle v_i, v_j\rangle)},$$

onde o sinal $+$ ou $-$ é o sinal de $\det a$. A igualdade acima, mostra que a definição de ω independe da escolha de uma base.

No caso em que $E = \mathbb{R}^m$, $|\det a|$ é o volume do paralelepípedo que tem como arestas os vetores $v_1, ..., v_m$.

Sejam $d\omega_k$ o elemento de área em $\Omega_k = \{x|x \in \mathbb{R}^k, \|x\| = 1\}$ e ω_k a área de Ω_k. Aqui, $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_k^2$. Se $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k$ são vetores ortonormais de $\mathbb{R}^k$ e $x \in \Omega_k$, então

$$x = z\varepsilon_k + \sqrt{1-z^2}\xi_{k-1}, \quad -1 \leq z \leq 1,$$

onde $z = x'\varepsilon_k$, ξ_{k-1} é um vetor unitário do subespaço formado por $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{k-1}$.

De um modo intuitivo, mostraremos que

$$d\omega_k = (1-z^2)^{(k-3)/2} dz d\omega_{k-1},$$

para $k \geq 3$.

Observemos inicialmente o que ocorre quando $k = 3$. Consideremos a parametrização φ de Ω_3 fazendo $x_1 = x_1(u)$, $x_2 = x_2(u)$ e u variando de modo que $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Assim, temos $x = \varphi(z, u)$ com $-1 \leq z \leq 1$. Disso,

$$\begin{aligned}
\varphi &= \left(\sqrt{1-z^2}x_1, \sqrt{1-z^2}x_2, z\right); \\
\varphi_z &= \left(-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_1 dz, -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_2 dz, dz\right) \quad \text{e} \\
\varphi_u &= \left(\sqrt{1-z^2}\frac{dx_1}{du}, \sqrt{1-z^2}\frac{dx_2}{du}, 0\right).
\end{aligned}$$

Escolhemos então $\{\varphi, \varphi_z, \varphi_u\}$ como base de $\mathbb{R}^3$. Assim,

$$\begin{aligned}
a &= \begin{vmatrix} \sqrt{1-z^2}x_1 & \sqrt{1-z^2}x_2 & z \\ -\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_1 dz & -\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_2 dz & dz \\ \sqrt{1-z^2}\frac{dx_1}{du} & \sqrt{1-z^2}\frac{dx_2}{du} & 0 \end{vmatrix} \\
&= z\begin{vmatrix} -\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_1 dz & -\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_2 dz \\ \sqrt{1-z^2}\frac{dx_1}{du} & \sqrt{1-z^2}\frac{dx_2}{du} \end{vmatrix} - dz\begin{vmatrix} \sqrt{1-z^2}x_1 & \sqrt{1-z^2}x_2 \\ \sqrt{1-z^2}\frac{dx_1}{du} & \sqrt{1-z^2}\frac{dx_2}{du} \end{vmatrix} \\
&= -z\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\sqrt{1-z^2}dz\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dx_2}{du} \end{vmatrix} - (1-z^2)dz\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dx_2}{du} \end{vmatrix} \\
&= -z^2 dz\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dx_2}{du} \end{vmatrix} + (z^2-1)dz\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dx_2}{du} \end{vmatrix} \\
&= -dz\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dx_2}{du} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
d\omega_3 &= |\det a| \\
&= \left| -dz\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dx_2}{du} \end{vmatrix} \right| \\
&= dz d\omega_2 \\
&= (1-z^2)^{(3-3)/2} dz d\omega_2.
\end{aligned}$$

Observemos agora o que ocorre quando $k = 4$. Consideremos a parametrização φ de Ω_4 fazendo $x_1 = x_1(u_1, u_2)$, $x_2 = x_2(u_1, u_2)$, $x_3 = x_3(u_1, u_2)$ e u_1, u_2 variando de modo que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Assim, temos $x = \varphi(z, u_1, u_2)$ com $-1 \leq z \leq 1$. Disso,

$$\begin{aligned}
\varphi &= \left(\sqrt{1-z^2}x_1, \sqrt{1-z^2}x_2, \sqrt{1-z^2}x_3, z\right); \\
\varphi_z &= \left(-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_1 dz, -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_2 dz, -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_3 dz, dz\right); \\
\varphi_{u_1} &= \left(\sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_1}{\partial u_1}, \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_2}{\partial u_1}, \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_3}{\partial u_1}, 0\right) \quad \text{e} \\
\varphi_{u_2} &= \left(\sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_1}{\partial u_2}, \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_2}{\partial u_2}, \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_3}{\partial u_2}, 0\right).
\end{aligned}$$

Escolhemos então $\{\varphi, \varphi_z, \varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}\}$ como base de $\mathbb{R}^4$. Assim,

$$a = \begin{vmatrix} \sqrt{1-z^2}x_1 & \sqrt{1-z^2}x_2 & \sqrt{1-z^2}x_3 & z \\ -\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_1 dz & -\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_2 dz & -\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_3 dz & dz \\ \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_3}{\partial u_1} & 0 \\ \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_3}{\partial u_2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
a &= -z \begin{vmatrix} -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_1dz & -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_2dz & -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_3dz \\ \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{vmatrix} \\
&+dz \begin{vmatrix} \sqrt{1-z^2}x_1 & \sqrt{1-z^2}x_2 & \sqrt{1-z^2}x_3 \\ \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{vmatrix} \\
&= z\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\left(\sqrt{1-z^2}\right)^2 dz \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{vmatrix} \\
&+\left(\sqrt{1-z^2}\right)^3 dz \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{vmatrix} \\
&= z^2\sqrt{1-z^2}dz \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{vmatrix} + (1-z^2)\sqrt{1-z^2}dz \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{vmatrix} \\
&= \sqrt{1-z^2}dz \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
d\omega_4 &= |\det a| \\
&= \left| \sqrt{1-z^2}dz \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{vmatrix} \right| \\
&= \sqrt{1-z^2}dzd\omega_3 \\
&= (1-z^2)^{(4-3)/2}dzd\omega_3.
\end{aligned}
$$

Consideremos então a parametrização φ de Ω_k fazendo $x_1 = x_1(u_1, ..., u_{k-2}), ..., x_{k-1} = x_{k-1}(u_1, ..., u_{k-2})$ e $u_1, ..., u_{k-2}$ variando de modo que $x_1^2 + \cdots + x_{k-1}^2 = 1$. Assim, temos $x = \varphi(z, u_1, ..., u_{k-2})$ com $-1 \leq z \leq 1$. Disso,

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \left(\sqrt{1-z^2}x_1, ..., \sqrt{1-z^2}x_{k-1}, z\right);\\
\varphi_z &= \left(-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_1dz, ..., -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_{k-1}dz, dz\right);\\
\varphi_{u_1} &= \left(\sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_1}{\partial u_1}, ..., \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_1}, 0\right)\\
\vdots &= \vdots\\
\varphi_{u_{k-2}} &= \left(\sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_1}{\partial u_{k-2}}, ..., \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_{k-2}}, 0\right).
\end{aligned}
$$

Escolhemos então $\{\varphi, \varphi_z, \varphi_{u_1}, ..., \varphi_{u_{k-2}}\}$ como base de $\mathbb{R}^k$. Assim,

$$
\begin{aligned}
a &= \begin{vmatrix}
\sqrt{1-z^2}x_1 & \cdots & \sqrt{1-z^2}x_{k-1} & z\\
-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_1dz & \cdots & -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_{k-1}dz & dz\\
\sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_1} & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_1}{\partial u_{k-2}} & \cdots & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_{k-2}} & 0
\end{vmatrix}\\
&= (-1)^{1+k}z\begin{vmatrix}
-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_1dz & \cdots & -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}x_{k-1}dz\\
\sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_1}\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
\sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_1}{\partial u_{k-2}} & \cdots & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_{k-2}}
\end{vmatrix}\\
&\quad +(-1)^{2+k}dz\begin{vmatrix}
\sqrt{1-z^2}x_1 & \cdots & \sqrt{1-z^2}x_{k-1}\\
\sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_1}\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
\sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_1}{\partial u_{k-2}} & \cdots & \sqrt{1-z^2}\frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_{k-2}}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a &= (-1)^{1+k} z(-1)\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\left(\sqrt{1-z^2}\right)^{k-2} dz \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_{k-1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{k-2}} & \cdots & \frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_{k-2}} \end{vmatrix} \\
&\quad + (-1)^{2+k}\left(\sqrt{1-z^2}\right)^{k-1} dz \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_{k-1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{k-2}} & \cdots & \frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_{k-2}} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{2+k} z^2 \left(\sqrt{1-z^2}\right)^{k-3} dz \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_{k-1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{k-2}} & \cdots & \frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_{k-2}} \end{vmatrix} \\
&\quad + (-1)^{2+k}(1-z^2)\left(\sqrt{1-z^2}\right)^{k-3} dz \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_{k-1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{k-2}} & \cdots & \frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_{k-2}} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{2+k}\left(\sqrt{1-z^2}\right)^{k-3} dz \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_{k-1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{k-2}} & \cdots & \frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_{k-2}} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
d\omega_k &= |\det a| \\
&= \left| (-1)^{2+k}\left(\sqrt{1-z^2}\right)^{k-3} dz \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_{k-1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{k-2}} & \cdots & \frac{\partial x_{k-1}}{\partial u_{k-2}} \end{vmatrix} \right| \\
&= \left(\sqrt{1-z^2}\right)^{k-3} dz\, d\omega_{k-1} \\
&= (1-z^2)^{(k-3)/2} dz\, d\omega_{k-1}.
\end{aligned}
$$

Referências Bibliográficas

[1] PARZEN, E. On estimation of a probability density function and its mode. *Annals of Mathematical Statistics*, v. 33, p. 1065-1076, 1962.

[2] PRAKASA RAO, B. L. S. *Nonparametric functional estimation.* New York: Academic Press, 1983.

[3] CAMPOS, V. S. M. *Análise assintótica de estimadores tipo núcleo para densidades associadas a cadeias de Markov gerais.* 2001. 64 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2001.

[4] CAMPOS, V. S. M.; DOREA, C. C. Y. Kernel estimation for stationary density of Markov chains with general state space. *Ann. Inst. Statist. Math*, v. 57, p. 443-453, 2005.

[5] SOARES, M. A. da S. *Estimador do tipo núcleo para densidades limites de cadeias de Markov com espaço de estados geral.* 2010. 58 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Estatística) - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

[6] CHUNG, Kai Lai. *A course in probability theory.* New York: Academic press limited, 1974.

[7] FERNANDEZ, Pedro Jesus. *Medida e Integração.* 2. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002. Projeto Euclides.

[8] LIMA, Elon Lages. *Análise Real volume 1.* 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA., 2008. v. 1. (Coleção Matemática Universitária).

[9] MAGALHÃES, Marcos Nascimento. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias.* 2. ed.. São Paulo: Edusp, 2006.

[10] BAI, Z. D.; RAO, C. R.; ZHAO, L. C. Kernel estimators of density function of directional data. *Journal of multivariate analysis*, v. 27, p. 24-39, 1988.

[11] DEVROYE, L. P.; WAGNER, T. J. The strong uniform consistency of kernel density estimates. *J. Multivariate Anal.* v 5, p. 59-77, 1980.

[12] HOEFFDING, Wassily. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *Journal of the American Statistical Association*, v. 58, n. 301, p. 13-30, 1963.

[13] LIMA, Elon Lages. *Curso de análise*. 11. ed.. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. v. 2. Projeto Euclides.

[14] SPIVAK, Michael. *Calculus on Manifolds*. W. A. New York: Benjamin Inc., 1965.

[15] VAPNIK, V. N.; CHERVONENKIS, A. YA. On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities. *Theory of Probability and Its Applications*, Philadelphia, v. 16, n. 2, p. 264-280, 1971.

[16] WATSON, Geoffrey S. *Statistcs on spheres.* New York: John Wiley & Sons, 1983. v. 6. The University of Arkansas lecture notes in the mathematical sciences.