



**COPPE/UFRJ**

RECONSTRUÇÃO DE FUNÇÕES CONSTANTES POR PARTES UTILIZANDO A  
TRANSFORMADA DO RAIO X

Alberto Ramon Ferreira Teixeira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Nuclear, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Nuclear.

Orientador: Nilson Costa Roberty

Rio de Janeiro  
Agosto de 2010

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

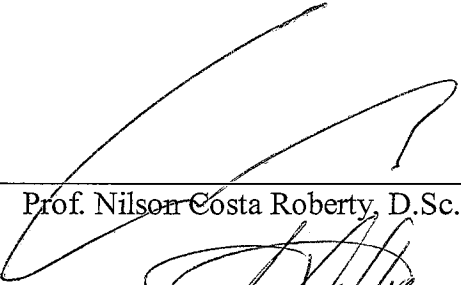
Milhares de livros grátis para download.

RECONSTRUÇÃO DE FUNÇÕES CONSTANTES POR PARTES UTILIZANDO A  
TRANSFORMADA DO RAIÓ-X

Alberto Ramon Ferreira Teixeira


DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO  
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA  
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR.

Examinada por:



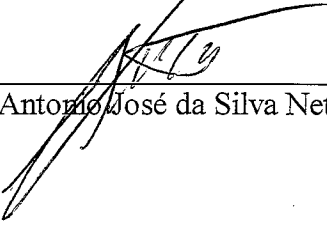
---

Prof. Nilson Costa Roberty, D.Sc.



---

Prof. Ademir Xavier da Silva, D. Sc.



---

Prof. Antonio José da Silva Neto, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 2010

Teixeira, Alberto Ramon Ferreira

Reconstrução de Funções Constantes por Partes Utilizando a Transformada do Raio X/ Alberto Ramon Ferreira Teixeira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

X, 84 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Nilson Costa Roberty

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Nuclear, 2010.

Referências Bibliográficas: p. 74-76.

1. Problemas Inversos. 2. Reconstrução de Imagens. 3. Escoamento Estratificado. I. Roberty, Nilson Costa. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Nuclear. III. Título.

A Deus,  
Aos meus pais, Romualdo e Edith,  
e à minha maravilhosa família, Joelma e Davi.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por estar sempre ao meu lado.

Agradeço à minha querida esposa, Joelma, por ser paciente e me apoiar nos momentos mais difíceis.

Agradeço ao meu filho, Davi, por me proporcionar tantas alegrias, principalmente nos momentos mais turbulentos da vida.

Agradeço aos meus pais, Romualdo e Edith, por tudo que fizeram e fazem por mim.

Agradeço à minha segunda mãe, Rita, sempre presente em todos os momentos da minha vida.

Agradeço ao professor, Nilson Costa Roberty, pela paciência, orientação e dedicação ao longo deste trabalho.

A todos os professores do PEN que contribuíram para minha formação.

A todos os funcionários do PEN, pela atenção que recebi, estando sempre prontos a ajudar.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## RECONSTRUÇÃO DE FUNÇÕES CONSTANTES POR PARTES UTILIZANDO A TRANSFORMADA DO RAIO X

Alberto Ramon Ferreira Teixeira

Agosto/2010

Orientador: Nilson Costa Roberty

Programa: Engenharia Nuclear

Uma metodologia para reconstrução de funções constantes por partes é apresentada para identificar as fases de um escoamento multifásico estratificado (óleo – água - gás) no interior de um duto. O princípio físico está baseado na detecção de um feixe transmitido pelo duto. A radiação interage com os materiais causando uma queda na intensidade dos raios X. Cada raio gera uma equação algébrica e o sistema pode ser resolvido pelo método dos mínimos quadrados ou por alguma técnica de reconstrução algébrica, tais como os algoritmos ART, MART ou q-ART. Os resultados mostram que ao utilizar uma vista, o escoamento não pode ser reconstruído, porém, quando se utiliza duas vistas, é possível reconstruir o mesmo.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

RECONSTRUCTION OF CONSTANTS BY PARTS FUNCTIONS IN X RAY  
TRANSFORM

Alberto Ramon Ferreira Teixeira

August/2010

Advisors: Nilson Costa Roberty

Department: Nuclear Engineering

A method for reconstruction of functions listed in sections is presented to identify the phases of a stratified multiphase flow (oil - water - gas) inside a duct. The physical principle is based on the detection of a beam transmitted through the duct. The radiation interacts with materials causing a drop in the intensity of X-ray. Each beam generates an algebraic equation and the system can be solved by the least squares or some algebraic reconstruction technique, such as the ART, MART or q-ART algorithms. The results show that when using a view, the flow can not be rebuilt, however, when using two views, you can rebuild it.



## SUMÁRIO

RESUMO.....	vi
ABSTRACT.....	vii
CAPÍTULO 1.....	1
INTRODUÇÃO E OBJETIVO.....	1
1.1 – INTRODUÇÃO.....	1
1.2 – OBJETIVO.....	2
CAPÍTULO 2.....	4
FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	4
2.1 - BREVE HISTÓRICO.....	4
2.2 - INTERAÇÃO DA RADIAÇÃO COM A MATÉRIA.....	6
2.2.1 – Efeito Fotoelétrico.....	9
2.2.2 – Espalhamento Compton.....	10
2.3 – PROBABILIDADE DE OCORRÊNCIA DAS INTERAÇÕES.....	11
2.4 - ALCANCE E ATENUAÇÃO DOS DIFERENTES TIPOS DE RADIAÇÃO NA MATÉRIA.....	13
2.5 – DETECTORES DE RADIAÇÃO.....	14
2.6 – EQUIPAMENTO DE RAIOS-X.....	15
2.6.1 – Carcaça de Vidro.....	16
2.6.2 – Catodo.....	17
2.6.3 – Anodo.....	18
2.6.4 – Produção de Raios-X.....	19
2.6.5 – Espectro Contínuo.....	20
2.6.6 – Espectro Característico.....	21
2.7 – ESCOAMENTO MULTIFÁSICO.....	22
2.7.1 – Interfaces.....	24
2.7.2 – Padrões de Escoamento.....	24
2.8 – TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA.....	29

2.8.1 – Introdução.....	29
2.8.2 – Desenvolvimento.....	32
2.8.2.1 – CT de 1 <sup>a</sup> e 2 <sup>a</sup> Geração.....	32
2.8.2.2 – CT de 3 <sup>a</sup> Geração.....	33
2.8.2.3 – CT de 4 <sup>a</sup> Geração.....	34
2.8.2.4 – CT de 5 <sup>a</sup> Geração.....	35
2.8.2.5 – Aplicações Científicas e Industriais.....	36
2.8.3 – Fundamentos Matemáticos.....	36
2.8.3.1 – Introdução.....	36
2.8.3.2 – Aspectos de Transmissão e Detecção.....	37
2.8.3.3 – A Transformada de Radon.....	39
CAPÍTULO 3.....	41
METODOLOGIA.....	41
3.1 - TRANSFORMADA DO RAIOS-X:	
FUNÇÃO CONSTANTE POR PARTES.....	41
3.2 – MODELO FÍSICO.....	45
3.3 – COLOCAÇÃO DO PROBLEMA.....	47
3.3.1 – Inversão do Sistema linear algébrico.....	50
3.3.1.1 – ART (Técnica de Reconstrução Algébrica).....	51
3.3.1.2 – MART (Técnica de Reconstrução Algébrica Multiplicativa) .....	54
3.3.2 – Esquema de Regularização.....	56
3.3.2.1 – Regularização de Tikhonov.....	58
CAPÍTULO 4.....	62
RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	62
4.1 – FEIXES DE RAIOS PARALELOS.....	65
4.2 – CASO TRIDIMENSIONAL COM DUAS VISTAS.....	68
CAPÍTULO 5.....	72
CONCLUSÕES.....	72
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	74
APÊNDICE.....	77

Apêndice 1. Fator de Multiplicação da Incerteza.....	77
Apêndice 2. Normas, Produtos Internos e Adjuntas.....	80
Apêndice 3. Teorema Espectral.....	82
Apêndice 4. Decomposição em Valores Singulares.....	83

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO E OBJETIVO

### 1.1 – INTRODUÇÃO

Muitas aplicações médicas e industriais envolvem a reconstrução de funções com um pequeno número de vistas (par fonte-detector) dado por uma quantidade suficiente de projeções relacionadas com a transformada de Radon, “*fan beam*” e “*cone beam*” associados com a propagação dos raios X. Estas funções no processo de reconstrução ao qual representa o coeficiente de atenuação da radiação são frequentemente associados com características do subdomínio dentro do domínio das funções.

As partes homogêneas devem resultar de processos manufaturados, ou de alguma estratificação natural, ou da segregação dos componentes dentro do corpo. Com a informação a respeito do suporte e o valor destas partes características, o número de parâmetros constantes necessários para resolver o problema de reconstrução é reduzido.

O procedimento consiste em inspecionar as discontinuidades e a retro projeção. O suporte das possíveis partes está localizado dentro do domínio poligonal convexo resultado da interseção das linhas.

O mesmo método deve ser aplicado para o feixe divergente em duas ou três dimensões. Neste caso, precisamos conhecer a posição da fonte em relação à retro projeção dos raios. O tipo de software apropriado para implementar a forma da sombra dos raios X, está baseado na geometria decomposta do sólido.

A segunda parte do método de reconstrução por partes está baseada no traçado do raio. Pela determinação do comprimento da interseção do raio começando na fonte e terminando no detector, devemos pesar a contribuição de cada parte característica da função para a medida da intensidade no detector.

Cada raio gera uma equação algébrica que irá compor um sistema com a intensidade desconhecida da fonte. O sistema deve ser resolvido, pelo método dos mínimos quadrados ou por alguma técnica de reconstrução algébrica tal como os algoritmos ART, MART ou q-ART.

A técnica de atenuação dos raios X é muito usada na indústria do petróleo porque é muito rica, apresenta uma natureza não invasiva e pode ser realizada sem mudanças nas condições operacionais.

As duas vistas estão posicionadas a noventa graus uma da outra, a intenção é medir a atenuação do feixe que é influenciado pelas mudanças na composição do escoamento. As informações a respeito do escoamento normalmente são obtidas por uma interpretação das observações visuais levando a uma compreensão do problema. Por isso, um sistema não invasivo que identifica um regime de escoamento é muito importante.

## **1.2 – OBJETIVO:**

Este trabalho apresenta uma metodologia para reconstrução de funções constantes por partes. O foco do trabalho é aplicar esta metodologia para identificar as fases de um escoamento multifásico estratificado (óleo – água - gás) no interior de um duto.

O princípio físico está baseado na atenuação dos raios X quando estes atravessam o duto. Os elementos que compõem o sistema apresentam uma seção de choque específica, contribuindo com a diminuição da intensidade dos raios X.

Neste trabalho, foi utilizado uma vista de feixe paralelo e duas vistas de feixes divergentes.

Para o caso tridimensional, o problema de determinar a descontinuidade das projeções é substituído pela determinação do contorno das imagens projetadas. Cada raio gera uma equação algébrica.

O experimento mostra que com uma única vista, ou seja, um par fonte-detector, é possível obter informação sobre o escoamento, contudo, não é possível reconstruí-lo. À medida que se utiliza duas vistas, obtemos informações suficientes para reconstruir o escoamento sob a hipótese do mesmo ser estratificado.

## CAPÍTULO 2

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

#### 2.1-BREVE HISTÓRICO

No início do século XX também foram desenvolvidas as bases matemáticas de construção de imagens que fundamentaram os cálculos matriciais da TC. O matemático austríaco Johann Radon (1887-1956), em 1917, desenvolveu as bases algébricas de projeções espaciais. Estas projeções espaciais constituem-se de uma série de integrais em duas dimensões, que ao serem projetadas ao longo de uma linha definida, considerando um número delimitado de linhas, fornecem uma fórmula de inversão que possibilitam a construção algébrica da imagem. As integrais conhecidas como integrais de Radon (Kirsch, 1996) transformam as informações bidimensionais em algoritmos para imagem plana.

Nos anos 30, com o uso de uma fonte de raios X e detectores de radiação, colocados no lado oposto ao objeto, já se obtinham imagens bidimensionais a partir de objetos tridimensionais, estes detectores se movimentavam durante a formação da imagem completando uma rotação completa. As imagens nesta época eram obtidas por meio de cálculos matriciais, que além de mais demorados, compunham imagens com muitos ruídos e em função da pouca nitidez, eram impraticáveis para o uso médico diagnóstico.

Nos anos 70, com a introdução dos sistemas computacionais associados às técnicas tomográficas que já vinham sendo desenvolvidas, foram introduzidos no mercado os aparelhos tomográficos então primeiramente denominados de *Computed Axial Tomograph (CAT)*.

As teorias matemáticas necessárias para formação de imagens tomográficas se fundamentaram inicialmente nas técnicas de projeções bidimensionais de Radon.

Comarck foi prêmio Nobel de Medicina e Fisiologia em 1979 junto com Hounsfield pelo desenvolvimento da Tomografia Computadorizada. Ele pressupôs (Comarck, 1963) que um feixe planar de radiação penetrante, ao ser projetado em diferentes ângulos sobre um determinado corpo, pode fornecer uma imagem muito melhor do que as então conhecidas imagens radiográficas convencionais. A técnica que ele então propôs, mostrou-se mais eficiente porque com múltiplas tomadas de dados, as imagens são mais confiáveis uma vez que são formadas com maiores quantidades de informações.

Hounsfield desenvolveu o primeiro tomógrafo comercial com as bases fundamentadas no trabalho de Comarck (1963).

As técnicas tomográficas propostas naquela época na obtenção de imagens consagraram-se no uso médico diagnóstico e em outras áreas de pesquisas, uma vez que elas permitem uma visão espacial do objeto estudado. Estas imagens foram se tornando cada vez mais nítidas e como já foi referida anteriormente, não invasiva.

Denominou-se tomografia por transmissão, a técnica em que a fonte de radiação é posicionada externamente ao corpo a ser estudado. A fonte também pode ser introduzida no corpo a ser estudado utilizando-se as mesmas técnicas; esta versão tomográfica foi denominada de tomografia por emissão. Conforme foi demonstrado por Edwards e Kuhl (Kuhl, 1963) pode-se obter imagens morfológicas e funcionais usando-se o SPECT (*Single Photon Emission Computed Tomography*). Depois, outro tomógrafo foi desenvolvido utilizando emissores de pósitrons, por exemplo, o Flúor 18 ( $^{18}\text{F}$ ), o sistema foi denominado de PET (*Positron Emission Tomography*). As imagens morfológicas e funcionais mostradas pelo SPECT e PET, são de ampla



aplicação nos campos da neurologia, oncologia, cardiologia, urologia, músculo esquelético, dentre outros.

John R. Mallard (2003) reforçou a importância de seu trabalho em pesquisas de TC e de seus colegas da seguinte forma: “A tomografia foi realizada inicialmente em 1964 por Dave Kuhl, um especialista em medicina nuclear na Filadélfia, por uma técnica análoga a que utilizamos em nossas pesquisas naquela época. Minha equipe em Aberdeen construiu o primeiro TC digital para distribuições de radioisótopos entre 1967 e 1969. Desde então, diversas pesquisas em tomografia computadorizada vêm se desenvolvendo rapidamente em todo o mundo”.

Por outro lado, nos últimos anos, as técnicas de obtenção de imagens por TC vêm sendo desenvolvidas para campos de pesquisa científica e seu uso entendido em diversos setores industriais.

Em 1997, o Departamento de Ciências Geológicas da Universidade de Austin, Texas, inaugurou o primeiro laboratório de TC com raios X de alta resolução, cujo equipamento é dedicado às pesquisas acadêmicas.

## **2.2 - A INTERAÇÃO DA RADIAÇÃO COM A MATÉRIA**

Ao atravessar a matéria, a radiação pode ser absorvida por vários processos conhecidos, dependendo da natureza e da energia do feixe e também das características do meio por onde se propaga.

A equação de atenuação do feixe de radiação incidente de intensidade **I** é:

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu x} \quad (2.1)$$

Sendo  $I_0$  a intensidade inicial do feixe que por sua vez, diminui a intensidade com a passagem deste pelo material dependendo do coeficiente de atenuação  $\mu$  e espessura  $x$ .

Considerando, no caso real, que os feixes de raios X interceptam  $n$  regiões de espessuras variando de  $x_1$  a  $x_n$  onde há variações do coeficiente de atenuação de  $\mu_1$  a  $\mu_n$ , a Equação 2.1 se torna:

$$I = I_0 \cdot e^{-(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n)} \quad (2.2)$$

ou

$$I = I_0 \cdot \exp(-\sum_{i=1}^n \mu_i x_i) \quad (2.3)$$

A redução de intensidade descrita pela Equação 2.3 ocorre por absorção e por espalhamento pelos átomos da matéria. Essas interações dependem dos níveis de energia aplicados, como visto na referida equação. No trabalho de COSHELL et. Al.

(1994) há o destaque para o uso de energia de 125 keV e, portanto, para a obtenção de imagens que refletem a variação de densidade do material. Foi usado no trabalho a técnica de tomografia para estudar e caracterizar materiais na área de engenharia de petróleo.

A Figura 2.1 mostra a atenuação dos fótons incidentes em função da espessura de um meio absorvedor de coeficiente de atenuação  $\mu = 0,1/\text{cm}$ .

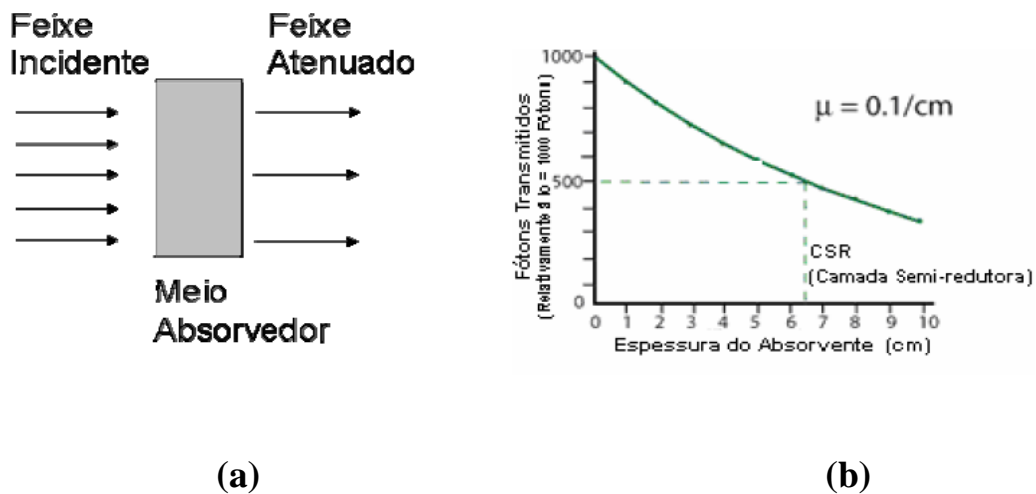


Figura 2.1: Representação da atenuação (a) fótons incidentes em função da espessura de um meio absorvedor de coeficiente de atenuação  $\mu = 0,1/\text{cm}$  e (b) gráfico que representa esta atenuação.

Fonte: <http://www.ndted.org/EducationResources/CommunityCollege/Radiography>

### 2.2.1 – Efeito Fotoelétrico

No processo de absorção fotoelétrica, o fóton interage com um átomo absorvedor, onde o fóton desaparece completamente. Em seu lugar, um fotoelétron é ejetado pelo átomo de uma de suas camadas eletrônicas, com energia cinética  $E_c$  bem definida, como mostra a Equação 2.4 (TAUHATA et al., 2003).

$$E_c = h\nu - B_e \quad (2.4)$$

onde

$h$  é a constante de Planck;

$\nu$  é a frequência da radiação;

$B_e$  é a energia de ligação do elétron orbital.

A Figura 2.2 mostra a representação do Efeito Fotoelétrico.

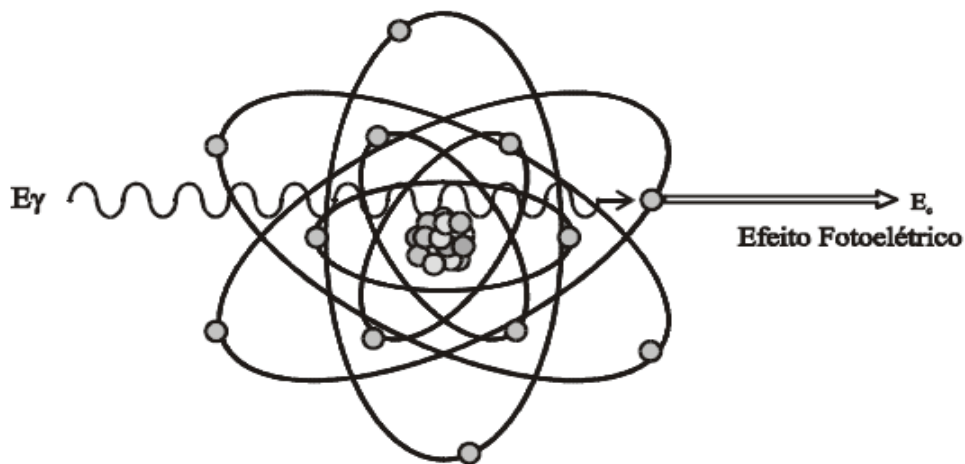


Figura 2.2: Efeito Fotoelétrico (TAUHATA et al., 2003).

A direção de saída do fotoelétron em relação à incidência do fóton varia com a energia. Para altas energias (acima de 3 MeV), a probabilidade do elétron sair na direção e sentido do fóton é alta. Para baixas energias (abaixo de 20 keV), a maior probabilidade é de sair com um ângulo de 70°. Isto é devido à ação dos campos elétricos e magnético que, variando na direção perpendicular à de propagação do fóton, exercem força sobre o elétron na direção de 90°, e se compõe com o momento angular do elétron.

### **2.2.2 – Espalhamento Compton**

No efeito Compton, o fóton é espalhado por um elétron de baixa energia de ligação, que recebe somente parte de sua energia, continuando sua trajetória dentro do material em outra direção. Como a transferência de energia depende da direção do elétron emergente e esta é aleatória, de um fóton de energia fixa podem resultar elétrons com energia variável, com valores de zero até um valor máximo. Assim, a informação associada ao elétron emergente é desinteressante sob o ponto de vista da detecção da energia do fóton incidente. Sua distribuição no espectro de contagem é aleatória, aproximadamente retangular. Na Figura 2.3 é mostrada a ilustração deste fenômeno (TAUHATA et al.;2003).

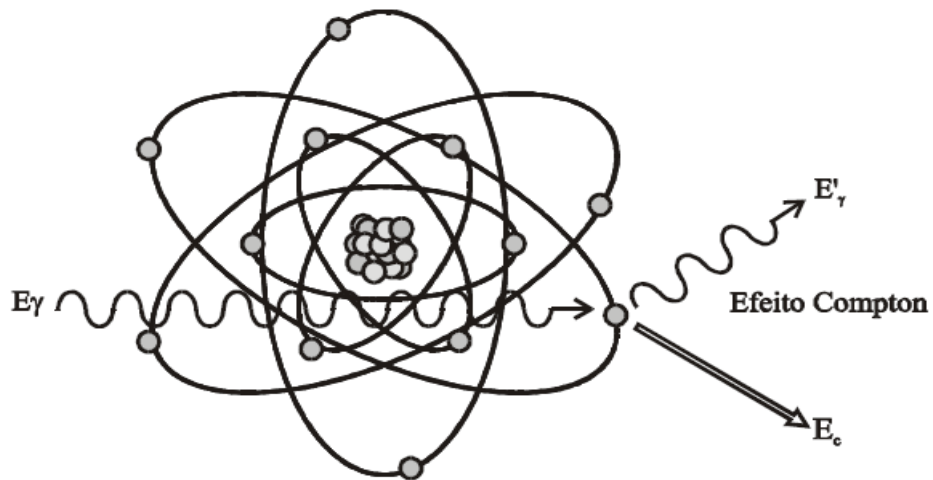


Figura 2.3: Efeito Compton (TAUHATA et al., 2003).

Quando a energia de ligação dos elétrons orbitais se torna desprezível face à energia do fóton incidente, a probabilidade de ocorrência de Espalhamento Compton aumenta consideravelmente.

### 2.3 - PROBABILIDADE DE OCORRÊNCIA DAS INTERAÇÕES

A probabilidade de ocorrer uma dessas interações varia com o número atômico da matéria e a energia do fóton. O efeito fotoelétrico e Rayleigh predominam em baixas energias. O efeito Compton ocorre mais intensamente em energias próximas de 1 MeV, especialmente para material de baixo número atômico. Em energias próximas de 5 MeV e para materiais de alto número atômico predomina o processo de produção de pares. (John, 1983; Knoll, 1989).

Quando um feixe de fótons incide em um meio absorvedor em geral, todos os processos de interação podem ocorrer simultaneamente, sendo que em cada interação ocorre um único processo (efeito fotoelétrico, espalhamento Compton e produção de pares).

O número de elétrons ejetados então deve ser calculado pela soma do número de efeitos fotoelétricos ( $\tau$ ), comptons ( $\sigma$ ) e produção de pares ( $\pi$ ):

$$\mu = \tau + \sigma + \pi \quad (2.5)$$

O coeficiente de absorção total de energia  $\mu_{en}$  deve ser:

$$\mu_{en} = \tau + \sigma_{en} + \pi_{en} \quad (2.6)$$

Este coeficiente  $\mu_{en}$  representa a fração de energia incidente por unidade de espessura do meio absorvedor por todos os processos, enquanto que o efeito tem sua própria fração de energia absorvida.

## **2.4 – ALCANCE E ATENUAÇÃO DOS DIFERENTES TIPOS DE RADIAÇÃO NA MATÉRIA**

Em virtude dos diferentes tipos de radiação interagirem de diferentes modos com a matéria, alguns tipos de radiação resultam mais penetrantes do que outros. Radiações eletromagnéticas são as mais penetrantes e quanto maior a sua energia, maior é o seu alcance na matéria. Partículas carregadas, devido à sua massa e carga, interagem muito intensamente com a matéria, tornando o seu alcance pequeno quando comparado ao da radiação eletromagnética. Entretanto, para partículas idênticas, quanto maior a energia maior o seu alcance.

Diferentemente do que o senso comum poderia levar a crer, a intensidade da interação com a matéria (e a interação/dano causado por ela) não cresce com a sua energia. Feixes de radiação com altíssima energia podem passar praticamente despercebidos pela matéria, enquanto radiações com energias mais baixas (da ordem das diferenças de energias dos níveis atômicos) são altamente absorvidas pela matéria. A Figura 2.4 mostra o coeficiente de atenuação de massa ( $\text{cm}^2/\text{g}$ ) em função da energia dos fótons incidentes para dois meios diferentes: ar e água.



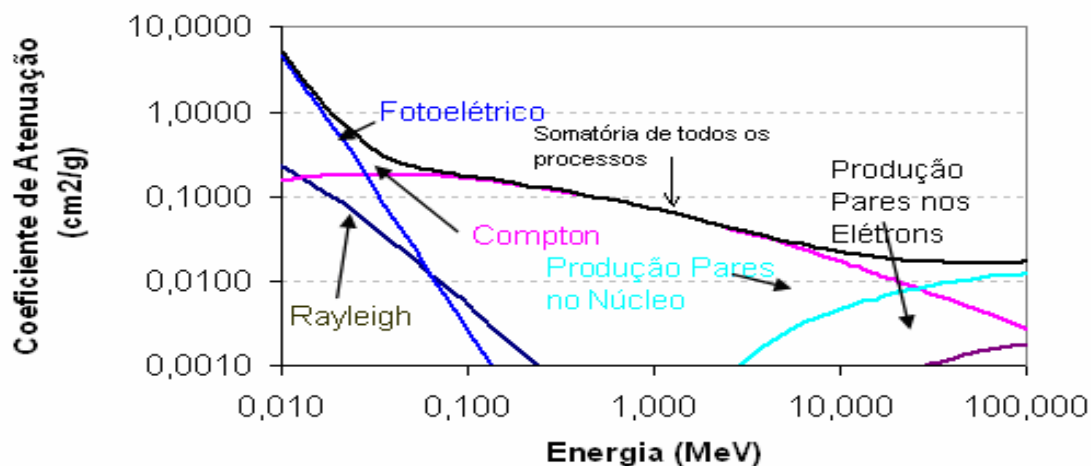


Figura 2.4: Coeficientes de atenuação parcial e total na água.  
 Fonte: <<http://physics.nist.gov/cgi-bin/Xcom/xcom>>.

## 2.5 – DETECTORES DE RADIAÇÃO

Uma unidade fundamental que influencia sobremaneira na qualidade dos dados obtidos são os detectores de radiação. Cada tipo de detector tem uma aplicação específica. No caso de aplicação em medicina, a importância dos detectores começa pela medição da dose de radiação que o paciente vai receber. É importante que se use somente a radiação necessária, evitando-se que o paciente receba uma dose excessiva. No caso de outras aplicações, como em engenharia, por exemplo, a importância dos detectores está, principalmente, na qualidade dos dados obtidos.

No caso de uma Tomografia, os detectores mal condicionados, podem causar problemas (ou anomalias) na imagem de um determinado objeto. Duas classes importantes de detectores são as câmaras de ionização e os detectores de estado sólido.

## 2.6 – EQUIPAMENTOS DE RAIOS X

Esses equipamentos são aparelhos que emitem radiação X quando energizados através de uma tensão e uma corrente estabelecida. Os aparelhos de raios X são classificados de acordo com sua potência e com as aplicações para as quais são projetados. Na área industrial, podem-se encontrar equipamentos que emitem raios x com energias variando entre 80 a 500 KV. A Figura 2.5 apresenta um esquema de um equipamento de raios X.

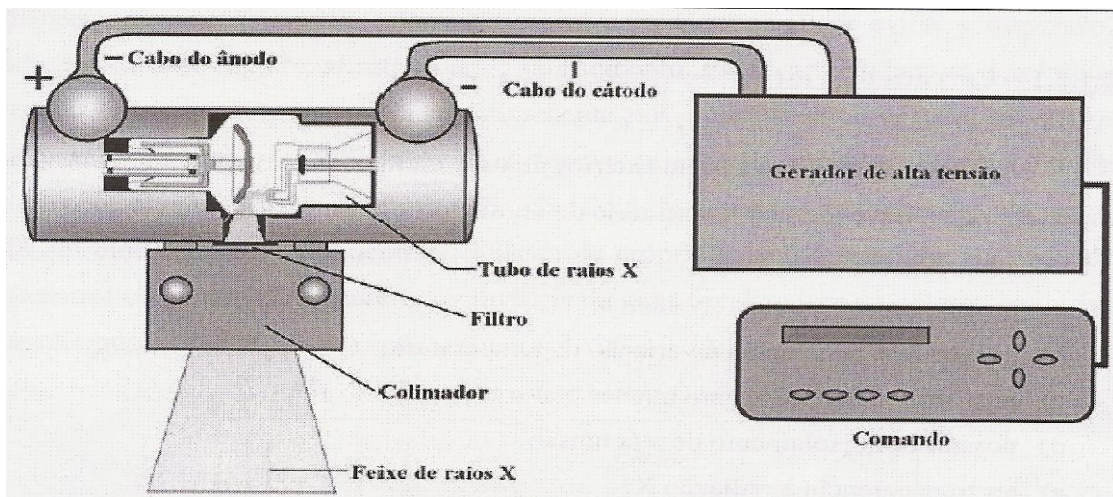


Figura 2.5: Representação esquemática de um equipamento de raios X

Os raios são gerados dentro de uma ampola especial de vidro. O tubo fica inserido dentro de um cabeçote, envolto num óleo especial. Este óleo serve como isolante eletrostático e como dissipador de calor da ampola. O cabeçote possui um revestimento de chumbo para blindar a radiação que não contribui diretamente na

formação da imagem. No cabeçote há uma janela que permite a passagem do feixe de raios X. O tubo de raios x é basicamente composto por uma carcaça de vidro, o anodo e catodo (filamento). A Figura 2.6 apresenta um tubo de raios X e seus principais componentes.

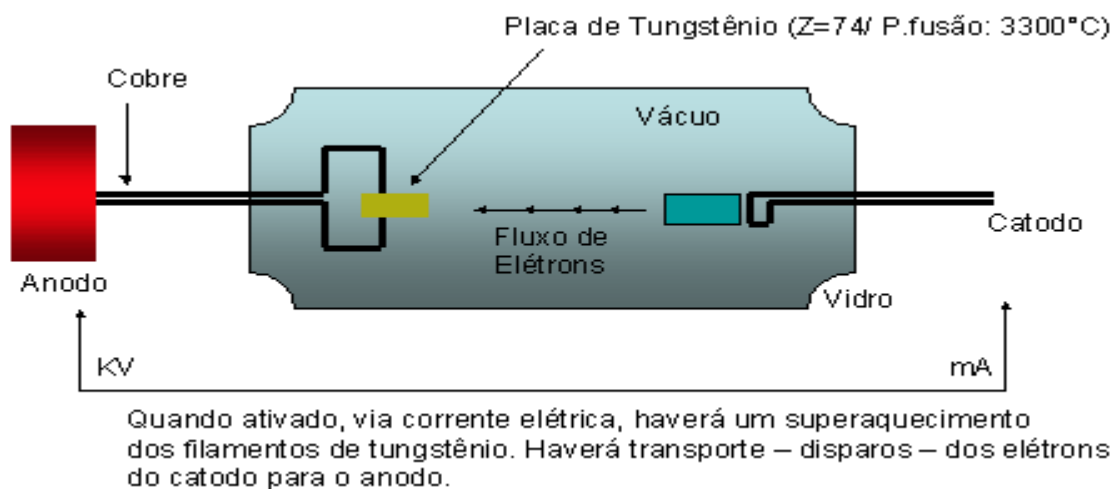


Figura 2.6 Ampola de vidro de raios X.  
Fonte: <http://www.sistemanervoso.com/junho de 2010>

### 2.6.1 – Carcaça de Vidro

Essa carcaça de vidro é a parte exterior do tubo de raios X, constituída de um vidro especial, o qual deve atender a uma série de requisitos, conforme a seguir:

- Possuir boa resistência mecânica;
- Possuir boa resistência a variação da temperatura;
- Possuir boa vedação, para manter o alto vácuo;
- Possuir bom isolamento de alta tensão;
- Ter transparência à radiação X;

- Ser quimicamente estável, de modo que a passagem da radiação X não modifique suas características;
- Possibilitar solda com metais das conexões (catodo e ânodo).

O vidro que atende estas características é do tipo PYREX. Sua composição é de 67% de SiO<sub>2</sub> e 23% de B<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

### **2.6.2 – Catodo**

O catodo é o pólo negativo do tubo de raios X, sendo composto pelo filamento e pela capa focalizadora.

O filamento possui uma forma de espiral, geralmente em tungstênio, com 2mm de diâmetro e com 1cm e 2cm de comprimento. Este é aquecido pela passagem de corrente elétrica de 3 à 6A e a temperatura pode atingir a 3400C. A alta temperatura do filamento proporciona o surgimento do efeito termiônico. O tungstênio é empregado, devido à sua alta eficiência termiônica e ao seu alto ponto de fusão. Após a emissão termiônica, os elétrons permanecem na proximidade do filamento, criando uma carga espacial nesta região. Aplicando-se uma diferença de potencial entre o catodo e o anodo, ocorre o deslocamento dos elétrons que se encontram na carga espacial, em direção ao ânodo, criando um feixe de elétrons (corrente anódica). Este feixe tende a se dispersar devido à repulsão eletrostática entre os elétrons. Para evitar a dispersão, é adicionada uma capa focalizadora junto ao filamento. Esta é projetada num determinado formato, que quando carregada negativamente possibilita colimar o feixe de elétrons, por meio da força de repulsão. A eficiência da capa focalizadora depende do seu tamanho, da sua forma e da carga aplicada, além de depender da dimensão, da

forma e do posicionamento do filamento no interior da própria capa focalizadora. Na Figura 2.7 podemos observar o filamento e a influencia da capa focalizadora na colimação do feixe de elétrons.

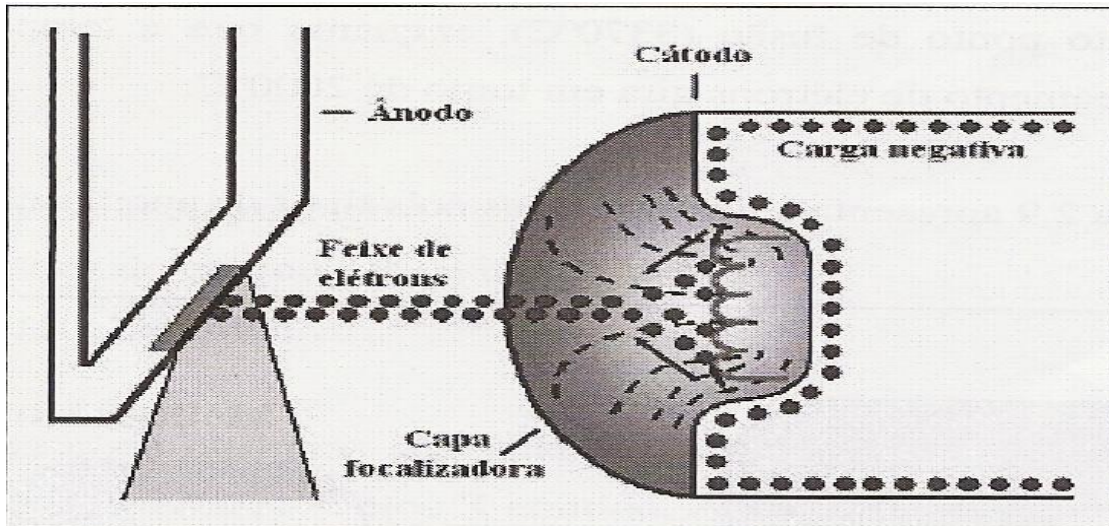


Figura 2.7: Filamento e Capa Focalizadora.

### 2.6.3 – Ânodo

O ânodo é o terminal positivo do tubo de raios x, podendo ser fixo ou rotatório. Este serve de suporte para o alvo. É feito de cobre para permitir a rápida dissipação de calor, pois quando os elétrons se chocam com o alvo, cerca de 99% de suas energias cinéticas são convertidas em calor.

O ânodo fixo é utilizado em equipamentos de baixa potência, como os odontológicos e alguns transportáveis. Para os equipamentos de raios X que trabalham com média e alta potência é utilizado o ânodo rotatório.

O anodo rotatório é formado por um disco que gira durante a exposição. O alvo se encontra na parte mais externa deste disco, formando uma trilha que possibilita dissipar o calor produzido numa maior área. Originalmente, o alvo era confeccionado de tungstênio. Atualmente, para aumentar a resistência da superfície contra a formação de pequenas fendas e buracos, é confeccionado com uma liga, geralmente composta de 90% de tungstênio e 10% de rênio. A Figura 2.8 mostra a ilustração dos dois tipos de anodos.

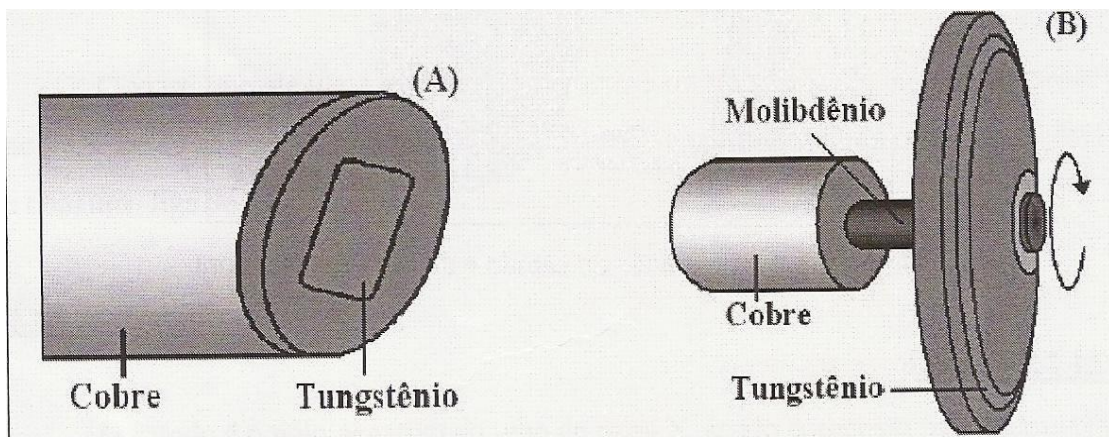


Figura 2.8: (a) anodo fixo e (b) anodo rotatório.

#### 2.6.4 – Produção de raios X

Quando a ampola é colocada em funcionamento, em torno do filamento cria-se uma nuvem eletrônica, que é acelerada em direção ao anodo quando aplicada uma diferença de potencial. Quando esses elétrons, são desacelerados repentinamente por

meio de interação com os átomos do alvo, ocorre uma transformação da energia cinética que foi ganha durante a aceleração em radiação eletromagnética (raios X). Dependendo do tipo de interação dos elétrons gerados com o alvo, os raios X podem ser produzidos de duas formas que é freamento e colisão.

### 2.6.5 – Espectro contínuo

Neste processo, os elétrons são defletidos pela carga elétrica positiva localizada no núcleo dos átomos do alvo, devido à interação coulombiana. Sabe-se que uma partícula carregada livre emite radiação eletromagnética quando tem sua trajetória alterada. Este fenômeno é conhecido como bremsstrahlung ou radiação de freamento. Aplicando o princípio de conservação de energia, temos:

$$h\nu = k - k' \quad (2.7)$$

onde

$k$  é a energia cinética do elétron antes da interação

$k'$  é a energia cinética do elétron após a interação

$h\nu$  é a energia do fóton emitido.

Logo, é possível observar que quanto maior a deflexão sofrida pelo elétron, maior será a energia do fóton de raios emitido. Assim, os comprimentos de onda dos

fótons emitidos podem variar de um máximo ( $k=k'$ ) e um mínimo ( $k'=0$ ), originando um espectro de radiação contínua, como pode ser observado na Figura 2.9.

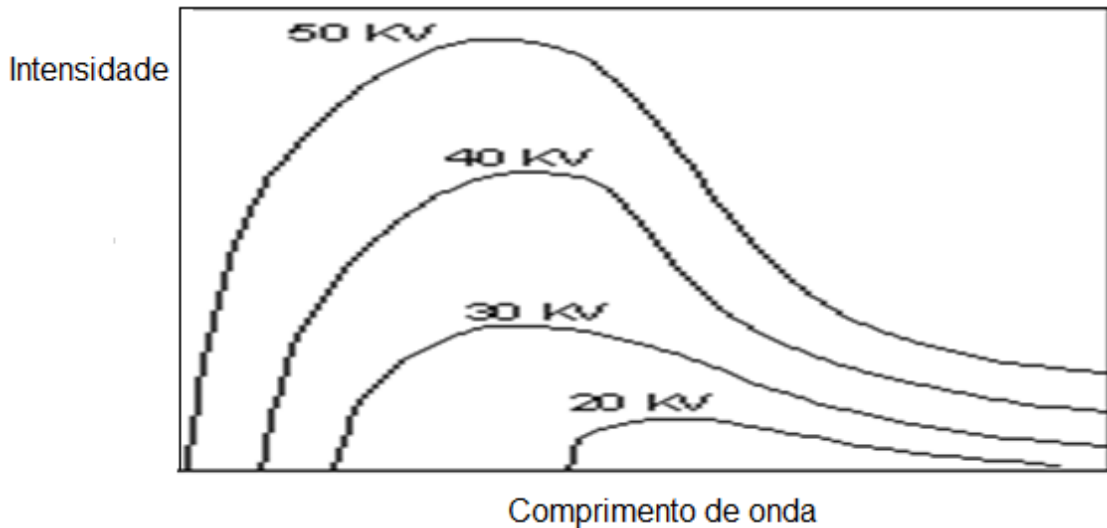


Figura 2.9: Espectro de radiação contínua.  
Fonte: [HTTP: www.if.ufrgs.br/.../mod05/images/continspect.gif](http://www.if.ufrgs.br/.../mod05/images/continspect.gif)

### 2.6.6 – Espectro característico

Este processo ocorre quando um elétron energético interage com o átomo do alvo e arranca um de seus elétrons mais internos (por exemplo: do nível k). Conseqüentemente este nível fica com uma vacância. Então, um dos elétrons mais externos se move para preencher esta vacância, emitindo nesta transição um fóton de raios X. Esse fóton é conhecido como raios X característicos e são geralmente devido às transições orbitais entre as camadas K, L e M. Quando o elétron que preenche o



buraco vem do nível energético L, temos a linha  $K_{\alpha}$ . Quando vem do nível M, temos a linha  $K_{\beta}$ .

O espectro final da radiação é o conjunto da radiação contínua (bremsstrahlung) e de raios X característicos, como pode ser visto na Figura 2.10.

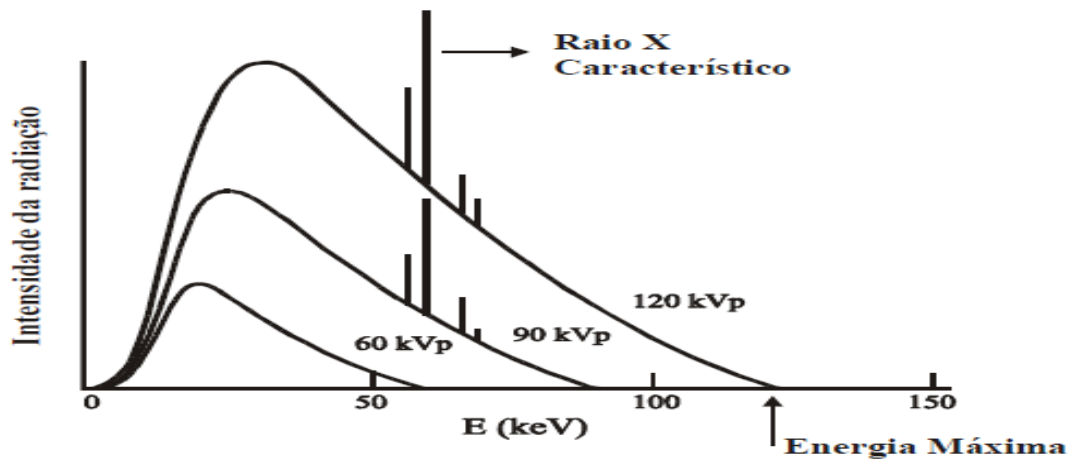


Figura 2.10: Espectro de radiação contínua com seus respectivos raios X característico.

## 2.7 – ESCOAMENTO MULTIFÁSICO

O estudo de escoamentos multifásicos tem sido objeto de relevante interesse para a mecânica dos fluidos, assim como para outros campos do conhecimento.

O escoamento multifásico é presença constante na maior parte dos equipamentos e processos industriais, sobretudo naqueles que lidam com geração de energia, de refrigeração e de destilação. Entre esses equipamentos e processos,

encontramos vários tipos de sistema multifásicos, tais como: gás e partículas sólidas, gás e gotas líquidas, líquido e bolhas de ar, líquido e gotas líquidas, líquido e partículas sólidas.

Entende-se por escoamento multifásico todo escoamento em que duas ou mais fases de uma mesma substância ou de substâncias diferentes ou ainda uma única fase de duas ou mais substâncias escoam em dutos ou canais, com ou sem transferência de calor e massa. Esses dutos ou canais podem ser horizontais, inclinados ou verticais, sendo que nos escoamentos verticais os fluxos podem ser ascendentes ou descendentes.

No escoamento multifásico, tanto os componentes ou fases que compõem a mistura podem se deslocar em sentidos contrários (chamados de contracorrentes), como também os deslocamentos dos componentes ou das fases podem se dar em um só sentido (co-correntes). Como exemplos de escoamentos multifásicos, tem-se escoamentos do tipo líquido-líquido, líquido-gás, líquido-vapor, líquido-sólido, gás-sólido.

O estudo dos escoamentos multifásicos depara-se, inicialmente, com uma de suas características principais: uma região móvel e deformável, comum às fases, denominada de interface. A interface é uma região de extrema importância no estudo dos escoamentos multifásicos, pois é nessa região onde se processam as transferências de quantidade de movimento, calor e massa.

### **2.7.1 – Interfaces**

Exceto no caso de escoamento de gases, onde há uma total difusão de fases, observa-se em todos os outros tipos de escoamentos multifásicos o deslocamento em um mesmo conduto ou canal de duas vias ou mais substâncias (componentes), geralmente em estados diferentes, separadas por interfaces (região comum às fases ou componentes). Essas interfaces podem ser contínuas, como no caso do escoamento anular e do deslocamento do tipo estratificado, ou seja, escoamento que ocorre em tubulações horizontais e inclinadas, como podem aparecer de forma descontínua em grandes quantidades e totalmente disseminadas por todo o fluxo, como no caso dos escoamentos dispersos.

### **2.7.2 – Padrões de Escoamento**

Dependendo da geometria das interfaces, ou seja, do agrupamento geométrico das fases, os escoamentos bifásicos são classificados em padrões. Conforme (Wallis-1969), na tentativa de se solucionar, tanto analítica como experimentalmente, os problemas referentes aos escoamentos multifásicos, dividiu-se esses escoamentos em regimes. Esses regimes, além de possuírem as características de serem laminares ou turbulentos, estão também associados a padrões, que são as disposições morfológico-estruturais dos componentes do escoamento.

Hewitt (1978) agrupou os escoamentos multifásicos do tipo horizontal nos seguintes padrões: bolhas, pistonado, anular, anular com gotas agrupadas e gotas conforme a quantidade crescente de ar, ou seja, considerando que o escoamento em bolhas é o padrão com menor quantidade de ar, como se segue:

- Bolhas – o escoamento em bolhas tem como característica principal a presença de bolhas dispersas por toda a fase líquida. Essas bolhas podem ser de diversos tamanhos. Existe uma grande variedade desse padrão, podendo ocorrer desde uma simples bolha até um grande número delas, chegando ao máximo de se ter escoamentos de espuma contendo apenas uma pequena porcentagem líquida.
- Pistonado (*slug*) – esse escoamento é fase seguinte do padrão em bolhas onde se aumentou a concentração do gás. Quando a concentração do gás aumenta, começa a ocorrer a coalescência das bolhas. As pequenas bolhas se unem formando uma grande bolha que toma a forma de um pistão. Esses pistões chegam a ocupar quase todo o diâmetro da tubulação e se encontram intercalados pela fase líquida.
- Agitante (*churn*) – é a fase seguinte em termos de concentração gasosa. Esse escoamento se caracteriza pela sua alta instabilidade provocando os chamados refluxos por toda a parede da tubulação. Seu aparecimento se dá através da quebra dos pistões gasosos que passam a escoar amorfamente envoltos em pequenas bolhas. Esse escoamento é difícil de se caracterizar visualmente por apresentar um aspecto leitoso ocasionado por numerosas refrações sofridas pela interface.
- Anular – o padrão de escoamento do tipo anular tem como característica a estratificação, ou seja, interfaces contínuas. No fluxo vertical bifásico gás-líquido esses componentes estão distribuídos espacialmente da seguinte forma: o líquido encontra-se escoando junto

à parede do conduto em filmes de variadas espessuras e o gás ocupando a porção central.

- Anular com gotas agrupadas (*wispy-annular*) – nesse tipo de padrão bifásico, o líquido escoava junto à parede do conduto sob a forma de uma lâmina de espessura delgada e no centro da tubulação encontra-se o gás contendo líquido disseminado em forma de gotas. Essas gotas se encontram muitas vezes unidas, formando uma espécie de corrente.
- Gotas (*Drops*) – no escoamento gás-líquido esse padrão caracteriza-se pelo fato do gás compor a fase contínua e o líquido a fase dispersa. O líquido assume formas de pequenas gotas de tamanhos diversos, distribuídas randomicamente no interior da massa gasosa e deslocando-se juntamente com ela.
- *Core-flow* – é um tipo de padrão anular onde o líquido de maior viscosidade efetiva (viscosidade turbulenta mais a viscosidade molecular) escoava formando um anulo no centro do tubo.

Nas Figuras de 2.11 a 2.18 podem ser vistas a distribuição dos dois componentes no interior de um tubo formando diversos padrões de escoamento horizontal.

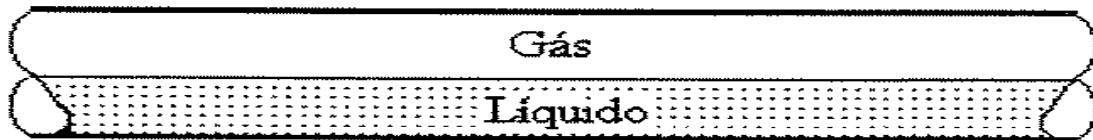


Figura 2.11- Escoamento multifásico horizontal gás-líquido do tipo estratificado liso.



Figura 2.12- Escoamento multifásico horizontal gás-líquido do tipo estratificado ondulado.

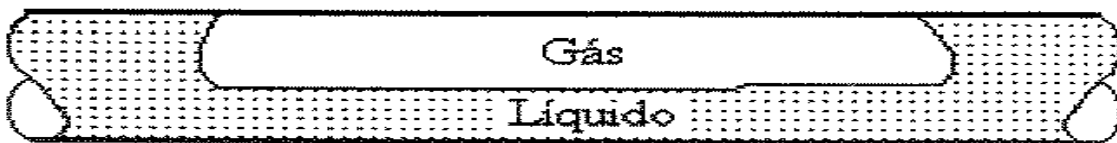


Figura 2.13- Escoamento multifásico horizontal gás-líquido do tipo bolhas alongadas.

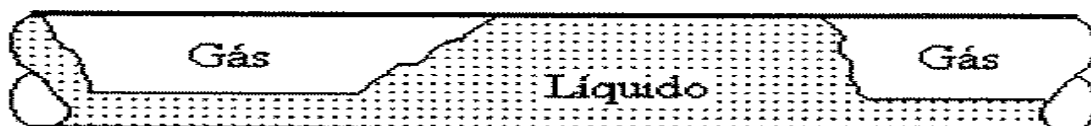


Figura 2.14- Escoamento multifásico horizontal gás-líquido do tipo pistonado (slug).

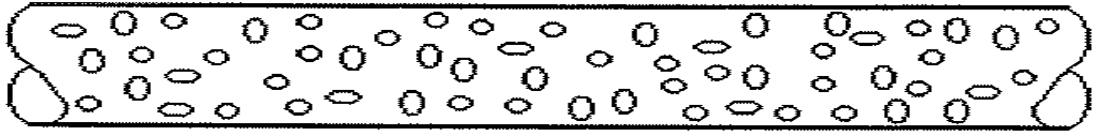


Figura 2.15- Escoamento multifásico horizontal gás-líquido do tipo bolhas dispersas.



Figura 2.16- Escoamento multifásico horizontal gás-líquido do tipo anular ondulado.

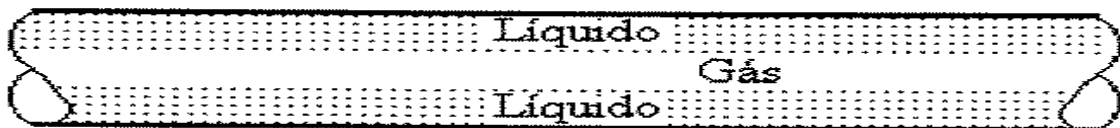


Figura 2.17- Escoamento multifásico horizontal gás-líquido do tipo anular.

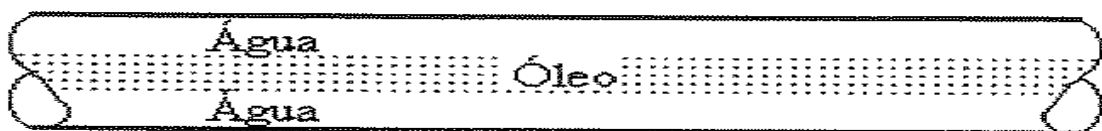


Figura 2.18- Escoamento multifásico horizontal água-óleo do tipo core-flow.

## 2.8 – TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA

### 2.8.1 – INTRODUÇÃO

O princípio da tomografia computadorizada consiste na análise da atenuação sofrida por um feixe de radiação conhecido, o qual atravessa um objeto. A partir desta atenuação têm-se as medidas da integral na linha de distribuição da densidade de massa, através do caminho percorrido pelo feixe. A resposta de vários feixes com orientações diferentes, em relação ao volume estudado é que permite a reconstrução da imagem de acordo com a distribuição espacial de densidade (Aird, 1988).

“Tomos” é a palavra grega para corte (*cut*) ou seção (*section*), e a tomografia pode ser compreendida como uma técnica digital onde o feixe de radiação “corta” um espécime para revelar seus detalhes interiores. Uma imagem de TC é chamada tipicamente “uma fatia”, uma vez que corresponde a uma fatia de um corte axial do objeto. Entende-se que uma fatia corresponde a uma pequena espessura. Uma fatia de TC também corresponde a alguma espessura do objeto em que está sendo feita uma varredura.

Esse termo se aplica aos diversos procedimentos cujo objetivo principal é construir uma imagem do interior de uma peça ou de uma seção do corpo humano. Em outras palavras, reconstrução de imagens consiste em obter uma função de duas variáveis  $f(x,y)$  a partir de um conjunto finito de funções de uma só variável  $h(s)$ , onde  $s = (x \cdot \cos \theta) + (y \cdot \sin \theta)$ .

Conseqüentemente, visto que uma imagem digital típica é composta de elementos de retrato (pixels), e o número associado a cada elemento da imagem é denominado número de Hounsfield (HU) ou número de CT. Os elementos de volume



(*voxels*) podem ser calculados pela multiplicação do pixel pela espessura do corte tomográfico. Na Figura 2.19, mostra-se a representação dos elementos de retrato e os elementos de volume.

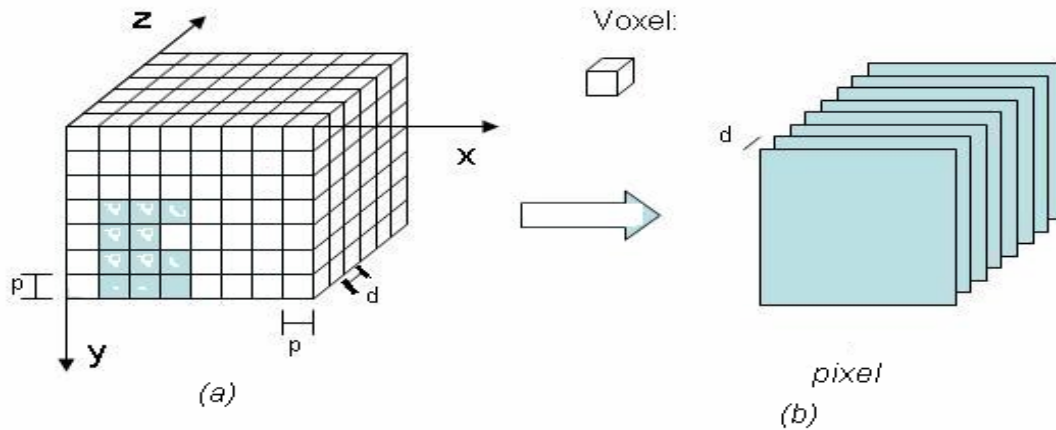


Figura 2.19: Representação dos elementos de volume e retrato: (a) *voxels* e (b) *pixels*.

Uma comparação inicial entre o conceito de imagem radiográfica e imagem tomográfica é que enquanto a primeira vem de confusas informações tridimensionais indicadas em uma superfície bidimensional, a imagem tomográfica consiste em métodos de se obter uma imagem de um plano original dentro do paciente ou do objeto a ser estudado e com cada vez mais qualidade e nitidez (Aird, 1988).

Seja  $f(x,y)$  o coeficiente de atenuação do meio material em um ponto  $x$ , isto é, fótons que atravessam uma pequena distância  $\Delta x$  a  $x$ , sofrendo a relativa perda de intensidade:

$$\frac{\Delta I}{I_0} = f(x) \cdot \Delta x \quad (2.8)$$

Na qual  $I_0$  é a intensidade do feixe inicial e  $I$  é a intensidade após o feixe passar pelo material. A direção por onde passa o feixe  $L$  é da seguinte forma:

$$\frac{I}{I_0} = \exp\left\{-\int_L f(x) dx\right\} \quad (2.9)$$

Com a integral de linha da função  $f$  ao longo de cada uma das linhas  $L$  pode-se reconstruir a função  $f(\mathbf{x})$ . A transformada que traça uma função em  $\mathbf{R}^2$  em uma linha integral é a chamada transformada de Radon bidimensional. Assim, o problema da reconstrução de Tomografia Computadorizada é a chamada inversão da transformada de Radon em  $\mathbf{R}^2$  (Radon, 1917).

A função  $f$  não depende apenas de  $x$ , mas também da energia  $E$  dos raios-x, assumindo  $T(E)$  a energia do feixe temos:

$$\frac{I}{I_0} = \int T(E) \exp\left\{-\int_L f(x, E) dx\right\} dE \quad (2.10)$$

## **2.8.2-Desenvolvimento**

Em função da importância social da medicina, os aprimoramentos da tecnologia dos tomógrafos advêm dos equipamentos projetados para o diagnóstico médico. Considerando que as dimensões do corpo humano são razoavelmente padronizadas, tornou-se possível a produção de aparelhos tomográficos em escala industrial e, em função dos aspectos de globalização da macroeconomia, esses equipamentos são produzidos atualmente por poucas empresas que dominam o mercado globalizado (Siemens, Phillips, GE, Toshiba e Hitachi).

Cinco gerações de tomógrafos foram desenvolvidas de acordo com as necessidades operacionais. Os tomógrafos, de acordo com a varredura são classificados em 1ª, 2ª, 3ª e 4ª geração. A 5ª geração de tomógrafos está agora se difundido e é fruto de muito investimento em pesquisas, decorrente da importância de sua utilização na medicina.

### **2.8.2.1 – A Tomografia Computadorizada de 1ª e 2ª geração**

Os primeiros aparelhos, chamados de 1ª geração mostrados na Figura 2.20 (a) surgiram no início dos anos 70 e se constituíam de um feixe em forma de lápis e um detector do lado oposto ao objeto a ser estudado.

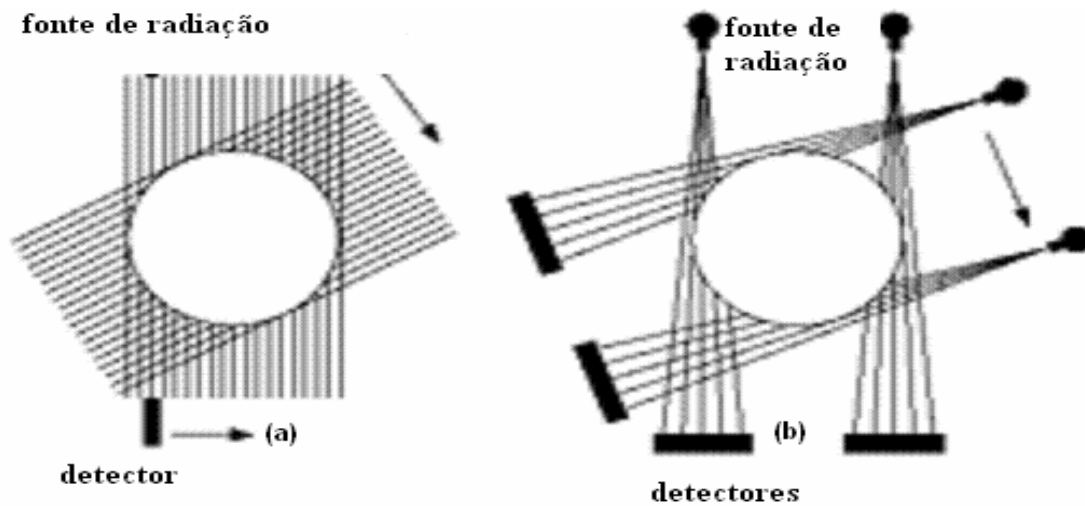


Figura 2.20: Representação dos tomógrafos: (a) 1ª geração e (b) 2ª geração.

O tubo de raios X e o detector de radiação possuem, nos tomógrafos de 1ª geração, movimento de rotação e translação, que demoram aproximadamente 5 minutos. Os aparelhos de 2ª geração introduziram mais detectores e as fontes em forma de leques também com movimentos de rotação e translação mostrados na Figura 2.20 (b). Entretanto, diminuiu o tempo de cada *scan* em aproximadamente 1 minuto e meio.

O termo *scan* significa uma rotação completa do sistema de tomada de dados em TC de forma a constituir uma varredura completa.

### 2.8.2.2 – A Tomografia Computadorizada de 3ª geração

A terceira geração de tomógrafos apareceu entre 1975 e 1977 e consta de um feixe de radiação também em forma de leque mais largo e com um sistema de múltiplos detectores mostrados na Figura 2.21. A fonte e os detectores giram

simultaneamente 360°. Consequentemente, a imagem é obtida mais rapidamente do que os aparelhos de 2ª geração.

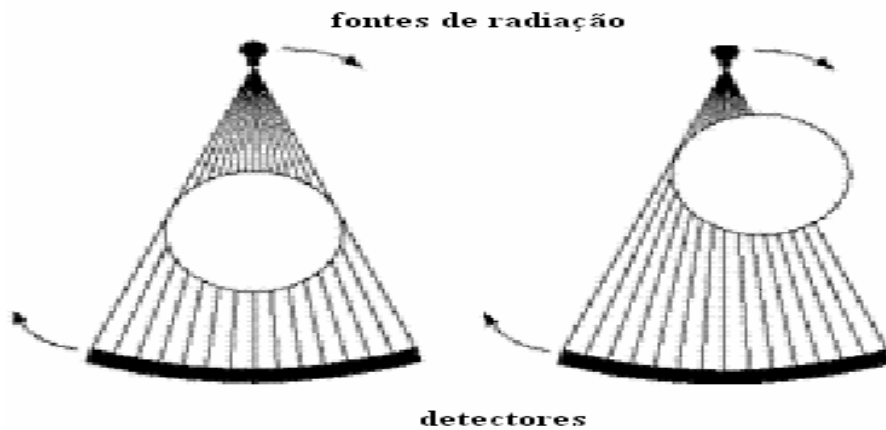


Figura 2.21: Representação do sistema de tomografia de 3ª geração, (a) objeto centralizado em relação ao sistema fonte/detectores e (b) objeto descentralizado. Nesta geração utiliza-se um sistema de múltiplos detectores.

### 2.8.2.3 – A Tomografia Computadorizada de 4ª geração

Os tomógrafos de 4ª geração mantêm o feixe em leque e possuem um anel de detectores, mostrados na Figura 2.22. O giro de 360° é ainda mais rápido do que nos de 3ª geração. Os pontos de cada projeção são obtidos simultaneamente, reduzindo-se ainda mais o tempo de varredura, graças ao simples movimento de rotação e ao feixe em leque cobrindo todo o objeto. Entretanto, o tamanho do corpo em estudo é limitado pelo feixe em leque produzido pela fonte de raios X.

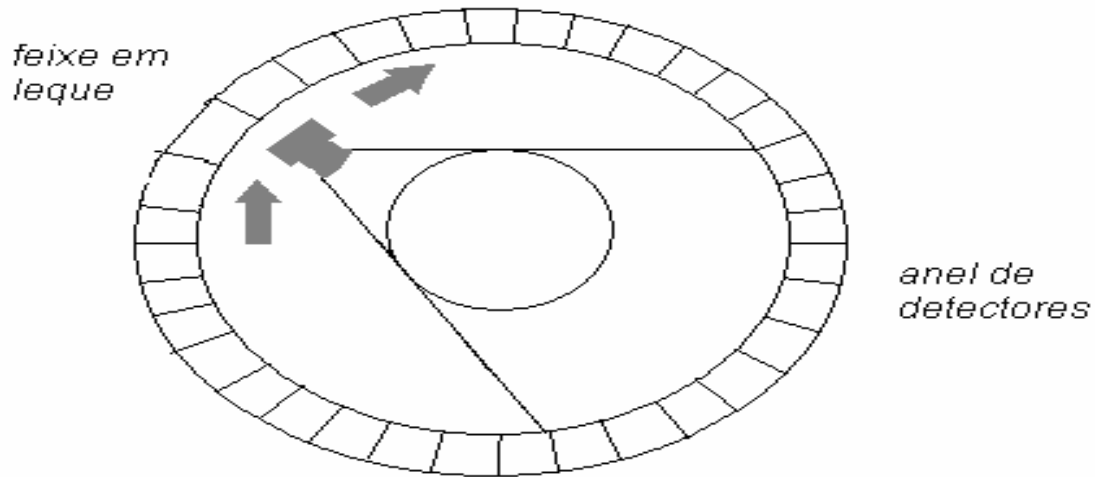


Figura 2.22: Representação da tomografia de 4ª geração mostrando a fonte de radiação, o objeto centralizado e o anel de detectores (Quoirin, 2004).

#### 2.8.2.4 – A Tomografia Computadorizada de 5ª geração

Este tomógrafo possui um tubo de raios X cuja emissão é feita em diversas direções sem que a mesa do paciente ou o sistema fonte-detector se mova. O paciente não precisa se movimentar, uma vez que um solenóide é colocado entre os elétrons acelerados e o alvo, de forma a conseguir diferentes ângulos de deflexão do feixe e consequentemente, diferentes direções de emissão, mostrados na Figura 2.23. O sistema de detectores é em forma de anel e o tempo de exposição bastante reduzido. Os tomógrafos de quinta geração são os únicos que possibilitam medidas em tempos bastante pequenos. No tomógrafo de quinta geração, o canhão de elétrons gera raios X em várias direções fazendo uma varredura sobre um alvo côncavo, o que possibilita tempos de aquisição da ordem de milissegundos.

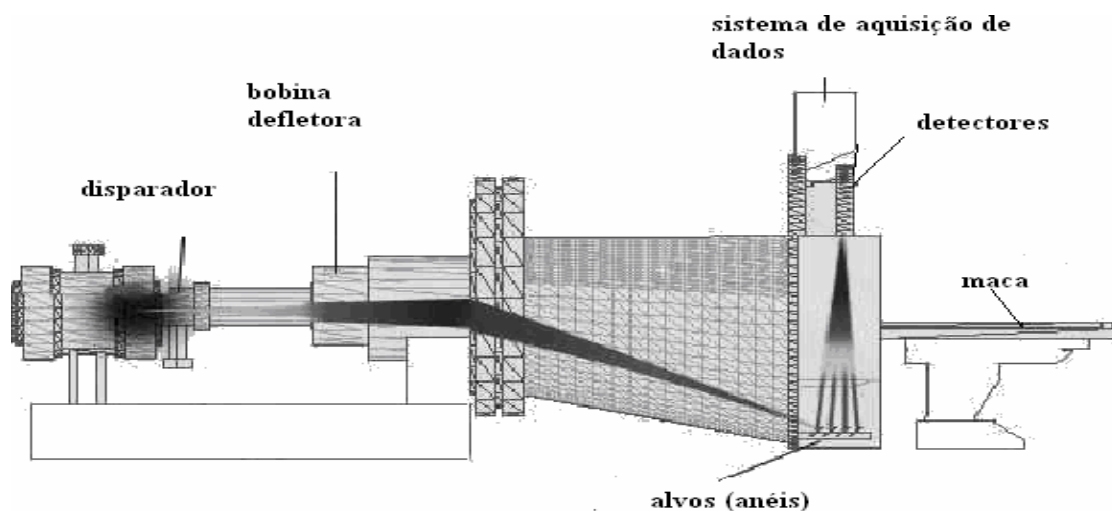


Figura 2.23: Representação esquemática de tomografia de 5ª geração. Fonte: <http://www.prorad.com.br/pro/Tomo.pdf>.

### 2.8.2.5 – Aplicações Científicas e Industriais

Para ensaios industriais, as técnicas de tomografia mais utilizadas são as de 1ª a 3ª geração. São tomografias por transmissão de raios X onde os detectores são posicionados diametralmente do lado oposto. A escolha do tipo e geometria da fonte radioativa (planar ou em forma de leque), assim como a dos detectores de radiação é fundamental para as medidas de atenuação.

## 2.8.3 - Fundamentos Matemáticos

### 2.8.3.1 - Introdução:

Como foi dito, a tomografia se propõe a encontrar a distribuição de determinada característica física de um objeto segundo um plano. Diferentes tipos de

emissão usados na aquisição de dados de projeção interagem com o material do objeto diferentemente de modo que a atenuação observada nos detectores reflete esse fato.

Para cada emissão utilizada, existe um parâmetro físico capaz de ser identificado, ainda que parcialmente, cujo valor varia com o material do objeto submetido à tomografia. Se a relação entre as projeções e a função característica do objeto for linear, como ocorre na maioria dos casos, a imagem reconstruída mantém a proporcionalidade com a função de origem dentro dos limites de resolução. Resultados anteriores podem ajudar a identificar os materiais observados sem que valores absolutos sejam empregados.

Em tomografia de transmissão, o tipo de emissão mais usado é o raios X. Ele possui características muito vantajosas já que não apresenta efeitos de difração devido ao fato de ter pequeno comprimento de onda. Outros tipos de radiação possuem características semelhantes tais como raios gama e nêutrons de alta energia.

### **2.8.3.2 – Aspectos de transmissão e detecção:**

Em tomografia computadorizada de radiação monoenergética, cada medida é resultado do fenômeno de atenuação da intensidade que tem a forma:

$$I = I_0 \cdot \exp\left[-\int_S \mu(x, y) dl\right] \quad (2.11)$$

ou ainda,



$$[\text{Ln}[\frac{I_0}{I}]] = \int_S \mu(x, y) dl \quad (2.12)$$

Onde  $I$  é a intensidade final da radiação,  $I_0$  é a intensidade inicial da radiação,  $s$  é a reta no interior do objeto por onde passa o raio e  $\mu(x, y)$  é o coeficiente de atenuação .

Essas expressões fornecem a relação entre a medida em cada ponto da curva de projeção e a distribuição espacial do parâmetro físico  $\mu(x, y)$  que caracteriza o material.

Com a integral de linha da função  $f$  ao longo de cada uma das linhas  $L$  pode-se reconstruir a função  $f(\vec{x})$ . A transformação que traça uma função em  $R^2$  em uma linha integral é a chamada transformada de Radon bidimensional. Em  $R^2$ , a transformada do raio-X coincide com a transformada de Radon . Assim, o problema da reconstrução de CT é a chamada inversão da transformada de Radon em  $R^2$  (Radon 1917).

A transformada de Radon estabelece um mapeamento função projeção enquanto a transformação inversa, chamada de retro-projeção estabelece o mapeamento oposto, projeção função.

Como em cada vista são feitas várias medidas ao longo da reta de projeção, o problema de reconstrução de imagem a partir de projeções (para um grande número de aplicações, usando emissão de origem nuclear ou não) pode ser visto como um problema inverso linear com dados discretos. Esse problema é tratado em (BERTERO, 1985).

### 2.8.3.3 – A transformada de Radon:

Se  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função Lebesgue integrável, definimos a Transformada de Radon de  $f$  no ponto  $(\theta, s) \in S^{N-1} \times \mathbb{R}$  (SOUSA,...) por:

$$R[f](\theta, s) = \int_{x \cdot \theta = s} f(x) dx \quad (2.13)$$

Em palavras,  $R(\theta, s)$  é a integral de  $f$  sobre o hiperplano perpendicular a  $\theta$  que passa no ponto  $s\theta$ , ou seja, é a integral de uma função sobre um conjunto de retas como mostra a Figura 2.24.

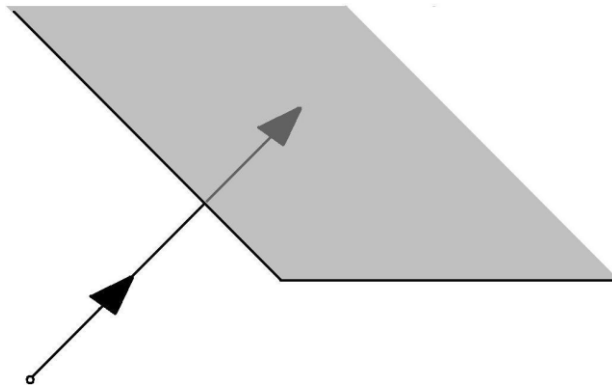


Figura 2.24: Hiperplano  $x \cdot \theta = s$

Se representarmos uma linha por  $x\cos\theta + y\sin\theta = s$ , onde  $S$  é a distância mínima entre a linha e a origem,  $\theta$  é o ângulo entre o eixo  $x$  com o vetor posição do ponto sobre a linha mais próxima da origem, então:

$$R[f](\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s) dx dy \quad (2.14)$$

## CAPÍTULO 3

### METODOLOGIA

A aplicação deste trabalho consiste na utilização de uma e duas vistas de feixe de raios X para identificar um escoamento multifásico gás – óleo - água dentro de um tubo metálico.

Devido às diferentes densidades apresentadas pelos componentes da mistura, o fato do escoamento ser estratificado, nos dá uma informação muito importante para o processo de reconstrução.

Esta informação é utilizada para modelar o peso da matriz **A** usada com o algoritmo de reconstrução.

#### 3.1 – TRANSFORMADA DO RAIOS X: FUNÇÃO CONSTANTE POR PARTES

Vamos considerar um domínio com suporte compacto  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ;  $d = 2, 3$  particionado dentro de  $\Omega_n$  elementos disjuntos abertos;  $n = 1, \dots, N$  tal que:

$$\begin{aligned} 1. \quad \Omega &= \bigcup_{n=1}^N \overline{\Omega}_n ; \\ 2. \quad \Omega_n \cap \Omega_m &= \phi; \quad n, m = 1, \dots, N; \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde o primeiro item é a união de todos os domínios compreendidos por todos os materiais que constituem o sistema. O segundo item refere-se ao fato de não existir intersecção entre os domínios.

Pela função simples característica associada com o elemento  $\Omega_n$ , determinamos a seguinte função:

$$\chi_x(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega_n, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega_n, \end{cases} \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

Através da função constante por partes associada a este domínio particionado  $\Omega$ , dizemos que:

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^N \sigma_n \chi_n(x) \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.3)$$

Seja  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  e  $\theta = (\cos \theta_1, \dots, x_d \cos \theta_d) \in S^{d-1}$ , isto é,  $\sum_1^d \cos(\theta_l)^2 = 1$  uma representação paramétrica da linha em  $\mathbb{R}^d$ . Pela transformada do raio X para a função  $\sigma$  temos:

$$P[\sigma](\xi, \theta) = \int_{R^1} \sigma(\xi + t\theta) dt \quad (3.4)$$

Desde que a interseção do raio com a fronteira interna da partição do domínio associado com a função constante por partes tenha um número finito de traços, ou seja, para todo  $\xi \in \pi_\theta$ , definimos:

$$\pi_{\xi, \theta} = \Omega \cap \{\xi + t\theta, -\infty < t < \infty\} \quad (3.5)$$

Este arranjo consiste em um número finito de intervalos abertos, isto é, existe  $\gamma_i, 0 \leq i \leq I$ , com  $\gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_I$  variando com  $(\xi, \theta)$  tal que:

$$\pi_{\xi, \theta} = \bigcup_{i=1}^I \{\xi + t\theta, \gamma_{i-1} < t < \gamma_i\} \quad (3.6)$$

Obviamente, a função também será constante por partes ao longo do raio como mostrado na Figura 3.1 e a integral da transformada do raios X será dada pela soma finita:

$$P[\sigma](\xi, \theta) = \sum_{n=1}^N \sigma_n \sum_{i=1}^{I(\xi, \theta)} \delta_{n,i(\xi, \theta)} (\gamma_{i(\xi, \theta)} - \gamma_{i(\xi, \theta)-1}) \quad (3.7)$$

Onde:

$$\delta_{n,i(\xi, \theta)} = \begin{cases} 1 & \text{se } \Omega_n \cap \{\xi + t\theta, -\infty < t < \infty\} \neq \phi \\ 0 & \text{se } \Omega_n \cap \{\xi + t\theta, -\infty < t < \infty\} = \phi \end{cases} \quad (3.8)$$

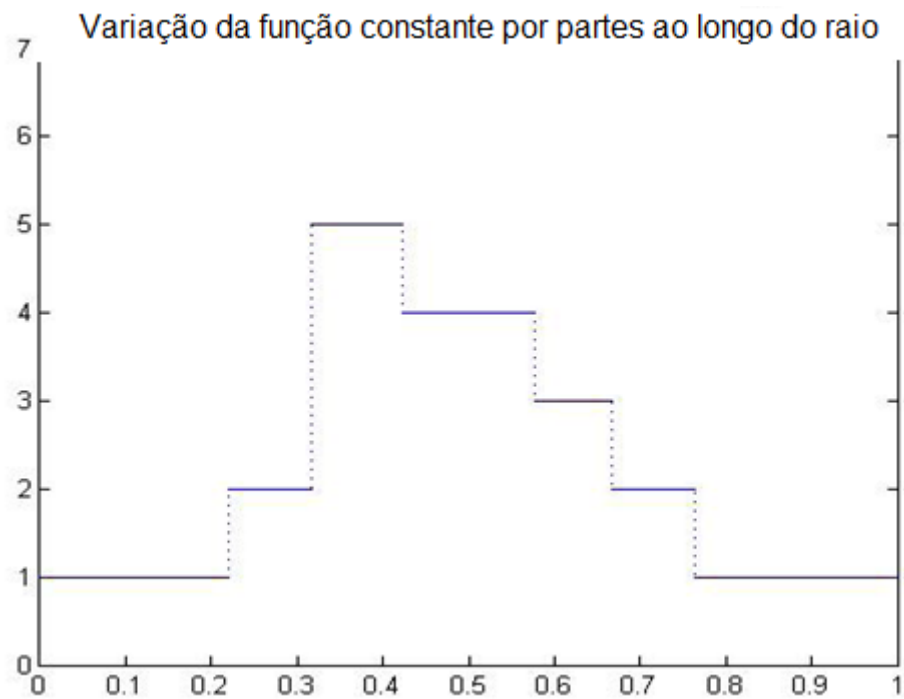


Figura 3.1: Traço típico da função constante por partes ao longo do raio

As regiões estão representadas com coeficientes de atenuação fictício, 1 para indicar vácuo, 2 para indicar aço, 3 para indicar gás, 4 para indicar óleo e 5 para indicar água.

### 3.2 – MODELO FÍSICO

Ao longo do raio, a radiação pode ser absorvida por vários processos conhecidos, dependendo da natureza, energia e também das características do meio ao qual é propagado. Existe uma situação na qual o processo de espalhamento dá uma importante contribuição nas medidas dos detectores.

Neste caso, a modelagem apropriada da propagação da radiação é feita através da equação de transporte da radiação. Neste caso especial, o problema é simplificado consideravelmente, e a atenuação do raio ao longo da trajetória é exponencial e podemos identificar a transformada do raios X com o logaritmo da atenuação do raio

$$P[\sigma](\xi, \theta) = -\ln \left( \frac{I(E, \xi, \theta)}{I_0(E, \xi, \theta)} \right) = b(\xi, \theta) \quad (3.9)$$

onde  $I_0(E, \xi, \theta)$  é a intensidade inicial do feixe de radiação para uma energia específica do fóton ao qual diminui ao longo da trajetória do raio para  $I(E, \xi, \theta)$ .

A Figura 3.2 na escala log-log, mostra o comportamento da seção de choque para cada valor de energia para os diferentes materiais utilizados na indústria de petróleo e gás (HUBBEL).



Quando  $d=2$ , a transformada do raios X é equivalente à transformada de Radon utilizada na tomografia. Em geral, podemos ter uma geometria de raios paralelos ou divergentes.

Neste trabalho, consideramos somente um pequeno número de vistas (duas vistas) e cada raio coletado representa uma equação algébrica formando um sistema que será resolvido permitindo então a reconstrução da função constante por partes que representa os materiais desconhecidos.

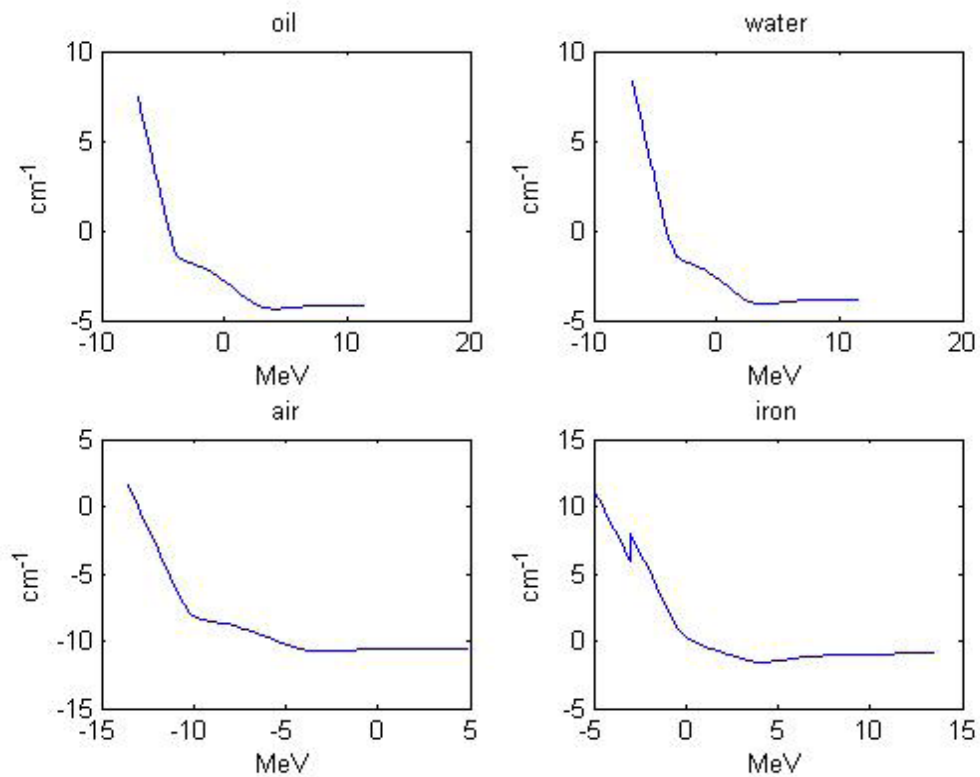


Figura 3.2: Dependência da seção de choque com a energia

### 3.3 – COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Para uma energia de radiação  $E$  fixada, vamos considerar o seguinte problema:  
dado um arranjo de dados

$$\{b(\xi, \theta), \xi \text{ e } \theta \text{ associados com o arranjo de raios}\}, \quad (3.10)$$

achar a função constante por partes  $\sigma$ .

Tendo em vista que foram utilizados uma e duas vistas, a pouca quantidade de projeções acarreta na necessidade de mais informações a respeito do suporte da função. A primeira possibilidade é analisar a derivada das projeções. As projeções são sombras de raios X oriundos da seção de choque com características específicas da função constante por partes determinando que os coeficientes dos materiais devem ser identificados pela análise dos contornos dentro das radiografias. As Figuras 3.3 e 3.4 exemplificam a situação bidimensional.

A atenuação (soma na direção do raio) está variando na direção perpendicular ao raio, como é observado na figura abaixo.

Objeto constante por partes em duas dimensões

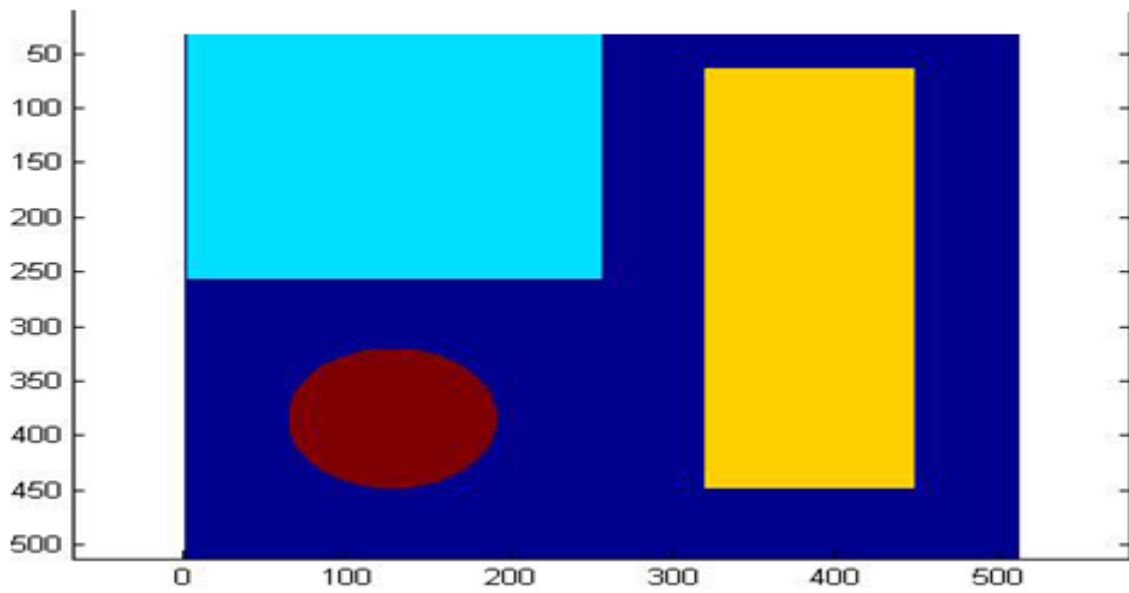
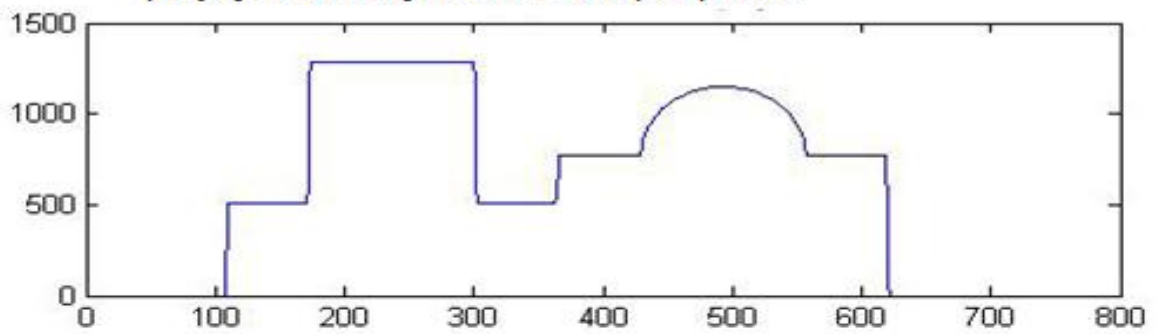


Figura 3.3: Objeto constante por partes a ser projetado.

projeção da função constante por partes



Derivada da projeção

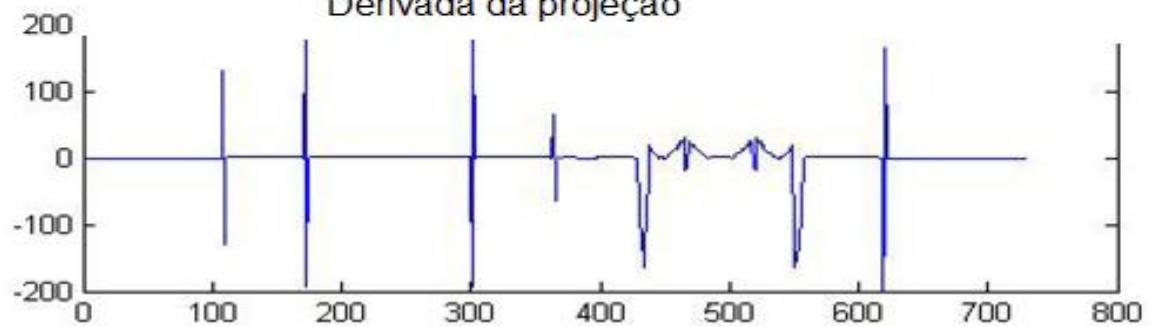


Figura 3.4: Projeção e derivada

A fonte de feixe de raios paralelos usada para formar as projeções deve ser considerada no infinito. Podemos notar que a retro-projeção da derivada local determinará o tamanho de faixas variáveis onde os valores das funções estão mudando. Duas ou mais vistas possibilitará a determinação do envelope convexo dos elementos constantes por partes das funções. Neste trabalho, temos uma informação independente das projeções que é o fato da função representar um escoamento estratificado, sendo assim, mais fácil a caracterização da função suporte. Com isso, temos apenas que resolver o seguinte sistema linear algébrico:

Para um arranjo de raios associados com  $(\xi, \theta)$ , dado:

$$\{b(\xi, \theta), \delta_{n,i(\xi,\theta)} \text{ e } \delta_{i(\xi,\theta)}, i = 1, \dots, I(\xi, \theta)\} \quad (3.11)$$

Achar  $\sigma_n$  tal que:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{I(\xi,\theta)} \sigma_n \delta_{n,i(\xi,\theta)} (\gamma_{i(\xi,\theta)} - \gamma_{i(\xi,\theta)-1}) = b(\xi, \theta) \quad (3.12)$$

### 3.3.1 – Inversão do Sistema Algébrico Linear

Seja a representação matricial para o problema da seguinte forma:

$$A_{(\xi, \theta)}^n = \sum_{i=1}^{I(\xi, \theta)} \delta_{n, i(\xi, \theta)} (\gamma_{i(\xi, \theta)} - \gamma_{i(\xi, \theta)-1}) \quad (3.13)$$

O problema é escrito da seguinte forma:

Dado 
$$b(\xi, \theta) = -\ln\left(\frac{I(E, \xi, \theta)}{I_0(E, \xi, \theta)}\right) \quad (3.14)$$

Achar  $\sigma_n$  tal que:

$$\sum_{n=1}^N A_{(\xi, \theta)}^n \sigma_n = b(\xi, \theta) \quad (3.15)$$

Métodos clássicos baseados nas técnicas de reconstrução tais como ART, MART e outras (KAK, 1987), devem ser implementadas para solucionar o problema.

Outras técnicas baseadas no truncamento de valores singulares devem ser adotadas quando o sistema não é tão grande.

### 3.3.1.1 – ART (Técnica de Reconstrução Algébrica)

ART foi primeiramente publicado como um algoritmo de reconstrução em um *paper* de GORDON, BENDER e HERMAN em 1970 e mais tarde foi reconhecido por ser idêntico ao algoritmo de Kaczmarz's para resolver sistemas de equações lineares [KACZMARZ, 1937].

[Gordon et al., 1970] sugeriu um processo iterativo o qual começa a partir de uma aproximação inicial  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$  para um vetor imagem. Em um passo iterativo,  $\mathbf{x}^k$  é refinada, ou seja, é corrigida para uma nova iteração  $\mathbf{x}^{k+1}$ .

A discrepância entre a medição  $\mathbf{y}_i$  e os dados da pseudo-projeção  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^k$  obtida da corrente da imagem  $\mathbf{x}^k$  é redistribuída entre os pixels ao longo do  $i$ -ésimo raio proporcionalmente ao seu peso  $\mathbf{a}_{ij}$ .

Neste caminho, os valores dos pixels ao longo do  $i$ -ésimo raio são corrigidos conforme a  $i$ -ésima medida sem mudar o restante da imagem.

Denotamos  $\mathbf{a}^i = (a_{ij})_{j=1}^n$  como um vetor em  $\mathbb{R}^n$ , este processo é descrito pelo seguinte algoritmo:

Inicialização:  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$  é arbitrário

Passo típico: 
$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \frac{y_i - \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{x}^k \rangle}{\|\mathbf{a}^i\|^2} \mathbf{a}^i \quad (3.16)$$

Aqui, é usada a notação de produto interno e norma Euclidiana, significando que para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{j=1}^n u_j v_j \quad (3.17)$$

e

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \quad (3.18)$$

Os raios são escolhidos ciclicamente, isto é,

$$i = i_k = k \pmod{m} + 1 \quad (3.19)$$

Acontece que, além do raciocínio intuitivo incorporado em ART, o algoritmo também tem uma interpretação geométrica significativa no espaço  $\mathbb{R}^n$  dos vetores imagens.

Ao considerar um processo iterativo, algumas perguntas matemáticas devem ser feitas sobre a sequência de iterações  $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ :

- i. A sequência converge?
- ii. Qual é a natureza do limite do vetor  $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$ ?

iii. Qual é a taxa de convergência para este limite?

Uma questão de suprema importância prática é a avaliação do comportamento inicial da seqüência infinita de iterações. Quão “boas” são as iterações entre si ao invés do limite  $x^*$  como aproximação a um vetor imagem desejado.

Ao dizer algoritmo de reconstrução, refere-se usar uma solução aproximada para o problema de reconstrução da imagem original ao qual pertence a uma seqüência de imagens que convergem para o limite da imagem onde supõem ter certas propriedades. O limite da imagem nunca é alcançado, contudo uma boa questão é saber o quanto estas propriedades desejadas refletem na solução aproximada.

Outra questão intrigante é como um algoritmo como ART se comporta quando aplicado em sistema inconsistente de equações.

Tanabe [TANABE, 1971] respondeu esta questão para ART sem relaxação. O comportamento para este algoritmo para um sistema inconsistente quando os parâmetros de relaxação são permitidos foram estudados por Eggermont et al. [EGGERMONT, 1981] e Censor et al. [CENSOR, EGGERMONT e GORDON, 1981].

Parâmetros de relaxação são seqüências  $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$  de números reais, normalmente confinados em um intervalo

$$\varepsilon_1 \leq \lambda_k \leq 2 - \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \quad (3.20)$$

aparecendo no típico passo de ART como:



$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda_k \frac{y_i - \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{x}^k \rangle}{\|\mathbf{a}^i\|^2} \mathbf{a}^i \quad (3.21)$$

Eles permitem aumentar ou diminuir a projeção ortogonal prescrita por ART e são extremamente importantes na implementação prática.

### 3.3.1.2 – MART (Técnica de Reconstrução Algébrica Multiplicativa)

$$\text{Inicialização: } \mathbf{x}^0 = e^{-1} \mathbf{1}$$

$$\text{Passo típico: } \mathbf{x}_j^{k+1} = \left( \frac{y_i}{\langle \mathbf{a}^i, \mathbf{x}^k \rangle} \right)^{\lambda_k a_j^i} \cdot \mathbf{x}_j^k, \quad j=1, 2, 3, \dots, n \quad (3.22)$$

Aqui,  $e$  é a base do logaritmo natural,  $\mathbf{1}$  é o vetor e  $\lambda_k$  são os parâmetros de relaxação ao qual  $0 < \varepsilon \leq \lambda_k \leq 1$ . As equações são retomadas ciclicamente, isto é,  $i = i_k \text{ k (mod m) } + 1$ .

Na reconstrução de imagem, os dados coletados e uma informação a priori compreendem as restrições sobre as quais a Entropia é maximizada. Um problema típico deve ser:

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & (- \sum_{j=1}^n x_j \ln x_j) \\
\text{sujeito a} & \langle a^i, x \rangle = y_i, \quad i=1,2,\dots,m \\
\text{e} & x \gg 0.
\end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Maximize} \\ \text{sujeito a} \\ \text{e} \end{array}} \right\} (3.23)$$

O algoritmo MART foi primeiramente sugerido como um algoritmo de reconstrução para o problema apresentado acima em [GORDON et al., 1970].

Uma condição necessária para a convergência de MART para a solução de (3.23) é que o arranjo possível seja não vazio, ou seja, que  $Ax=y$  tenha solução não negativa.

O comportamento do algoritmo na situação realística quando as equações são inconsistentes não é conhecido.

O esquema de otimização geral de Bregman [BREGMAN, 1967] foi estudado por Censor e Lent [CENSOR e LENT, 1981]. Este método utiliza, em particular, problema de otimização de entropia. Um novo algoritmo iterativo de otimização de entropia foi introduzido por Minerbo [MINERBO, 1979].

Neste trabalho, foi adotado o método de regularização por Tikhonov que é baseado no seguinte problema de otimização (SILVA NETO E MOURA NETO, 2005):

Fixada a energia  $E$  dos fótons, para um arranjo de raios associados com  $(\xi, \theta)$  achar o termo  $\|x\|$  ao qual é solução do seguinte problema de minimização:

$$\min\{ \|Ax-b\| + \epsilon \|x\| \} \quad (3.24)$$

onde:

$\|Ax-b\|$  controla o ruído, onde  $Ax$  é o que se esperava e  $b$  é o dado.

$\|X\|$  controla a imagem

O parâmetro  $\epsilon$  é o parâmetro de regularização de Tikhonov (razão sinal ruído) e é escolhido de tal maneira que o erro devido à modificação do problema original não comprometa a estabilidade dos benefícios introduzidos pela melhoria do número de condições numéricas do problema matricial algébrico.

### 3.3.2 – Esquema de Regularização

Incertezas no dado  $y$  na equação  $Kx = y$  são, no máximo, multiplicadas por  $|K^{-1}|$  (SILVA NETO E MOURA NETO, 2005). Este fator de multiplicação pode ser

bastante elevado, o que só depende do menor valor singular da matriz  $K$ , uma vez que  $|K^{-1}| = 1/\sigma_n(K)$ .

Se a incerteza nos dados for, principalmente, na direção associada aos menores valores singulares de  $K$ , isso pode significar uma ampliação muito grande na incerteza da solução  $\mathbf{x}$  da equação. Uma forma de encontrar esta situação é regularizar o problema considerado.

Sejam

$$K_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ e } \mathbf{b}_\alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0,$$

Respectivamente, uma família de matrizes inversíveis (operadores lineares) e uma de vetores, parametrizadas por  $\alpha > 0$ . Assuma, ainda, que  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Considere o problema dado por

$$K_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{b}_\alpha, \quad \alpha > 0 \tag{3.25}$$

e denote a solução deste problema por  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\alpha$  (indicando a dependência em  $\alpha$ ).

### 3.3.2.1 – Regularização de Tikhonov:

A análise será aplicada ao problema dado em  $K \mathbf{x} = \mathbf{y}$  e dependerá da teoria espectral (SILVA NETO E MOURA NETO, 2005). Podemos substituir a Equação acima pelo problema equivalente de minimização do funcional

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} |K \mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 \quad (3.26)$$

$K$  e  $\mathbf{y}$  são conhecidos. Calculemos a equação de ponto crítico da função  $f$ ,  $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ . A derivada direcional de  $f$  no ponto  $\mathbf{x}$ , na direção  $\mathbf{h}$ , é:

$$\begin{aligned} df_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} (\langle K(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h}) - \mathbf{y}, K(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{h}) - \mathbf{y} \rangle - \langle K\mathbf{x} - \mathbf{y}, K\mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\langle K\mathbf{x} - \mathbf{y}, K\mathbf{h} \rangle + \langle K\mathbf{h}, K\mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle + \epsilon \langle K\mathbf{h}, K\mathbf{h} \rangle) \\ &= \langle K\mathbf{x} - \mathbf{y}, K\mathbf{h} \rangle = \langle K^t(K\mathbf{x} - \mathbf{y}), \mathbf{h} \rangle, \end{aligned}$$

onde se usou a bilinearidade do produto interno. Da definição do gradiente de  $f$ ,  $\nabla f$ - o vetor que representa a derivada através do produto interno -, devemos ter

$$df_x(\mathbf{h}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle,$$

Para todo  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ . Concluimos, então, que

$$\nabla f(\mathbf{x}) = K^t(K\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.27)$$

e que a equação de ponto crítico é:

$$K^t K\mathbf{x} = K^t \mathbf{y}. \quad (3.28)$$

Se  $K$  for inversível,  $K^t$  também o será,  $(K^t)^{-1} = (K^{-1})^t$ , e, então,  $\mathbf{x}$  satisfaz à equação de ponto crítico se, e só se,  $\mathbf{x}$  satisfaz à  $K\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . A Eq.(A.8) é conhecida como equação normal.

Uma forma de evitar a ampliação do erro na solução de  $K\mathbf{x} = \mathbf{y}$  é penalizar a distância da solução a um valor de referência ou a norma do vetor solução (distância

em relação à origem). Denotaremos o valor de referência por  $\mathbf{x}_r$ . Esta idéia é implementada por meio do método de Tikhonov, que, para o problema  $\mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ , consiste em resolver a equação de ponto crítico do funcional

$$f_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} |\mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + \frac{\alpha}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_r|^2, \quad \alpha > 0. \quad (3.29)$$

Aqui,  $\alpha$  é o parâmetro de regularização. O ponto de mínimo  $\mathbf{x}^\alpha$  satisfará a equação de ponto crítico

$$\alpha(\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}_r) + \mathbf{K}^t \mathbf{K} \mathbf{x}^\alpha = \mathbf{K}^t \mathbf{y},$$

é reescrita como:

$$(\alpha \mathbf{I} + \mathbf{K}^t \mathbf{K}) \mathbf{x}^\alpha = \mathbf{K}^t \mathbf{y} + \alpha \mathbf{x}_r. \quad (3.30)$$

Verificaremos que (A.10) fornece, de fato, um esquema de regularização do problema (A.8). Observe que, estritamente falando, o problema regularizado foi o (A.8) e não  $\mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Sejam

$$A_\alpha = \alpha I + K^t K \text{ e } \mathbf{b}_\alpha = \alpha \mathbf{x}_r \quad \alpha > 0. \quad (3.31)$$

Conclui-se que  $A_\alpha$  e  $\mathbf{b}_\alpha$ , determinam um esquema linear de regularização para o problema linear,  $K^t K \mathbf{x} = K^t \mathbf{y}$ .

Comparando com o problema original,  $K^t K \mathbf{x} = K^t \mathbf{y}$ , vemos que este esquema tem os autovalores transladados por  $\alpha$  e, portanto, como são todos reais e não negativos, afastados da origem por, pelo menos,  $\alpha$  (inclusive o de menor módulo que determina a condição de  $(K^t K)^{-1}$ ).



## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os dados numéricos foram produzidos através da simulação do problema direto (3.11) e (3.12) em duas situações. Primeiramente, foi considerado somente uma vista e os dados foram coletados na direção paralela ao nível do escoamento estratificado. As espessuras ópticas (quantidade de raios X atenuados) são mostradas na Figura 4.1 para a energia de 9 keV e a Figura 4.2 para a energia de 180 keV.

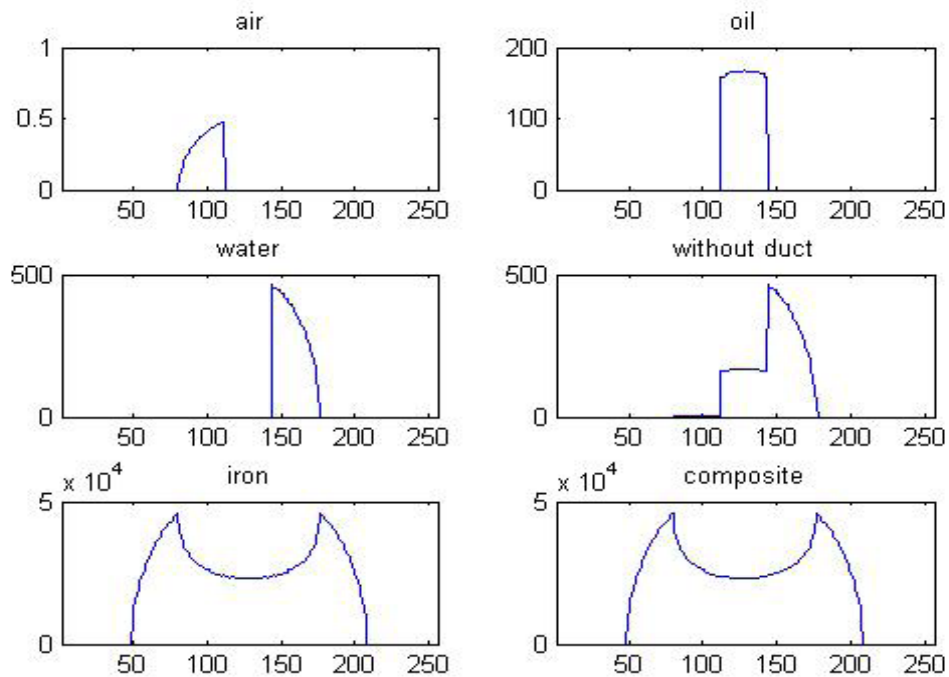


Figura 4.1: Espessura óptica para energia de 9 keV.

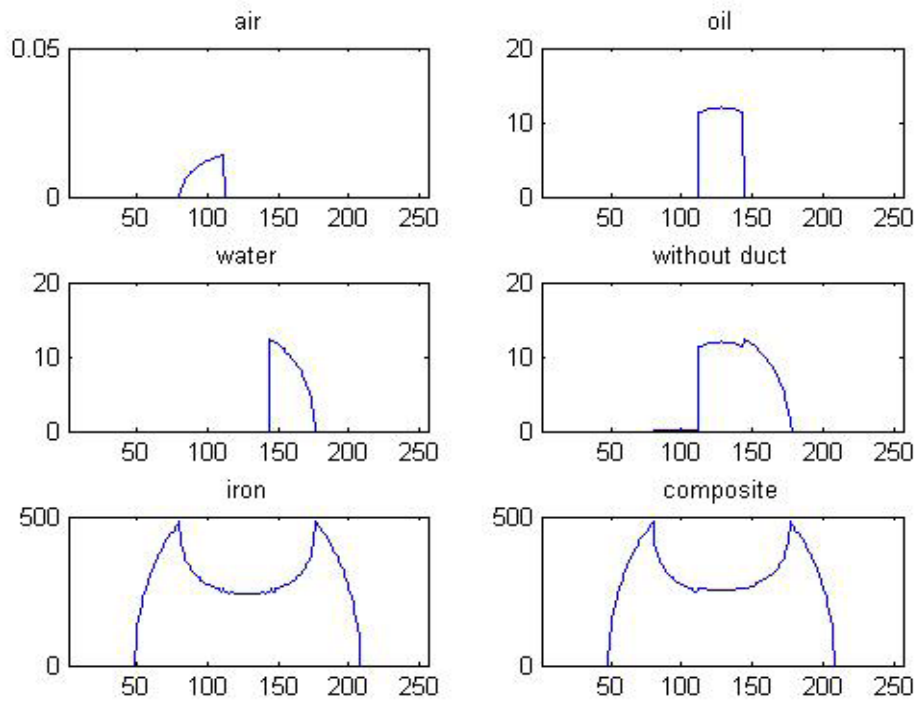


Figura 4.2: Espessura óptica para energia de 180 keV.

O eixo X representa a direção perpendicular aos raios X e o eixo Y representa a atenuação para as Figuras 4.1 e 4.2.

A Figura 4.3 mostra o caso tri-dimensional utilizando duas vistas de feixes divergentes.

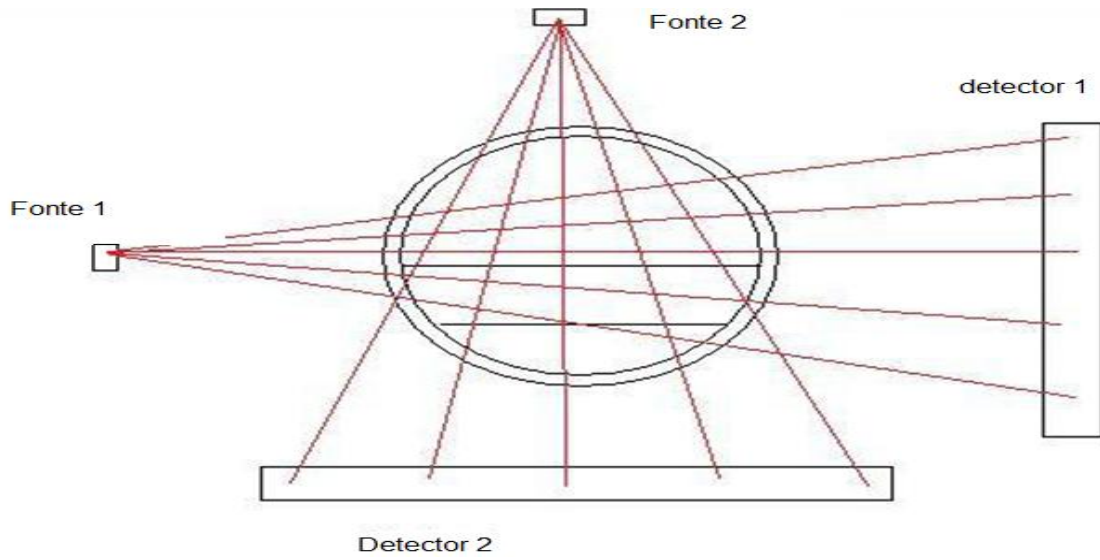


Figura 4.3: Arranjo experimental para feixes divergentes

Os dados foram realizados para fótons de energia de 180 keV. As Figuras 4.4 e 4.5 mostram respectivamente as espessuras ópticas para as fontes 1 e 2.

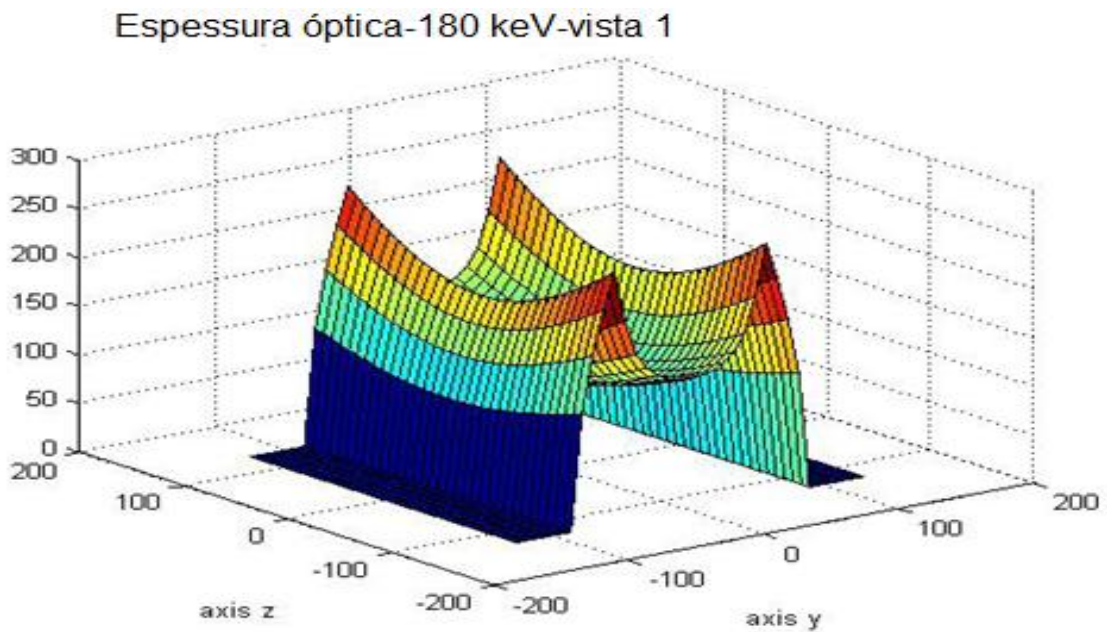


Figura 4.4: Espessura óptica para fonte 1

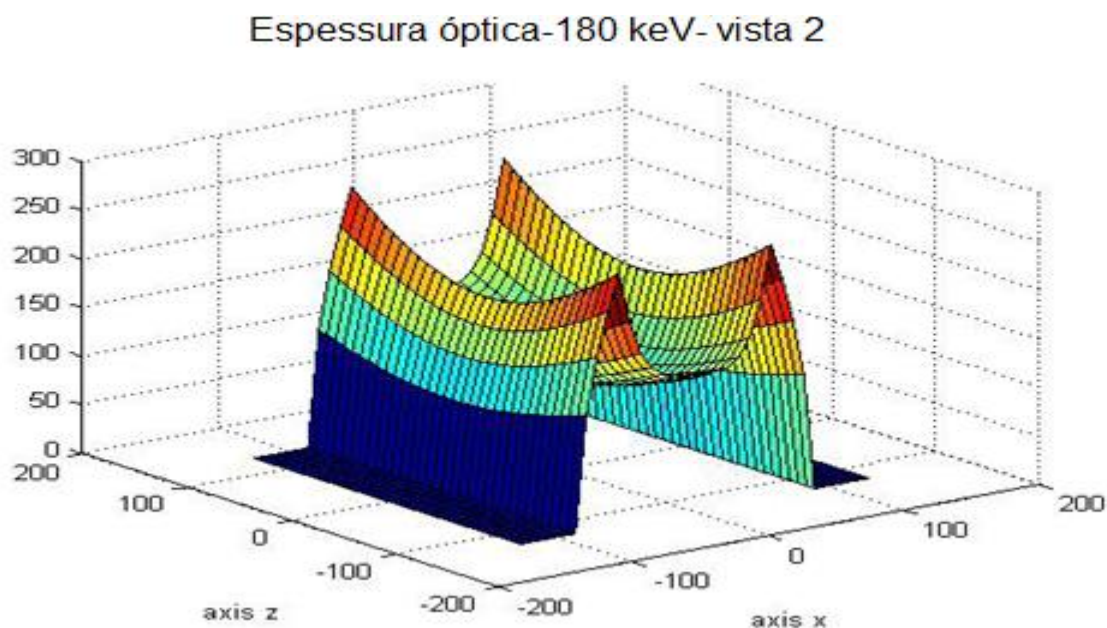


Figura 4.5: Espessura óptica para fonte 2.

Para a Figura 4.4, o eixo Z é o eixo do duto, o eixo Y é o eixo do campo gravitacional e o eixo X é o eixo do cone perpendicular ao campo gravitacional.

Na Figura 4.5, o eixo Z é o eixo do duto, o eixo X é o eixo perpendicular ao campo gravitacional e o eixo Y é o eixo do cone perpendicular ao campo gravitacional.

#### 4.1 – FEIXE DE RAIOS PARALELOS (UMA VISTA)

Quando trabalhamos com uma única vista, a imagem não pode ser reconstruída, mas algumas informações podem ser obtidas, tais como a verificação da existência de diferentes materiais, descontinuidades e derivadas.

A função utilizada distingue os componentes do experimento através da atenuação do feixe de raios X. Uma vez que os raios paralelos são posicionados em concordância com a estratificação do escoamento que é conhecido a - priori, a derivada da espessura óptica mostra a posição aproximada das fronteiras dentro do duto, distinguindo as três fases.

A Figura 4.6 mostra a derivada da espessura óptica da Figura 4.1 para uma vista de feixe de raios paralelos com energia de 9 keV.

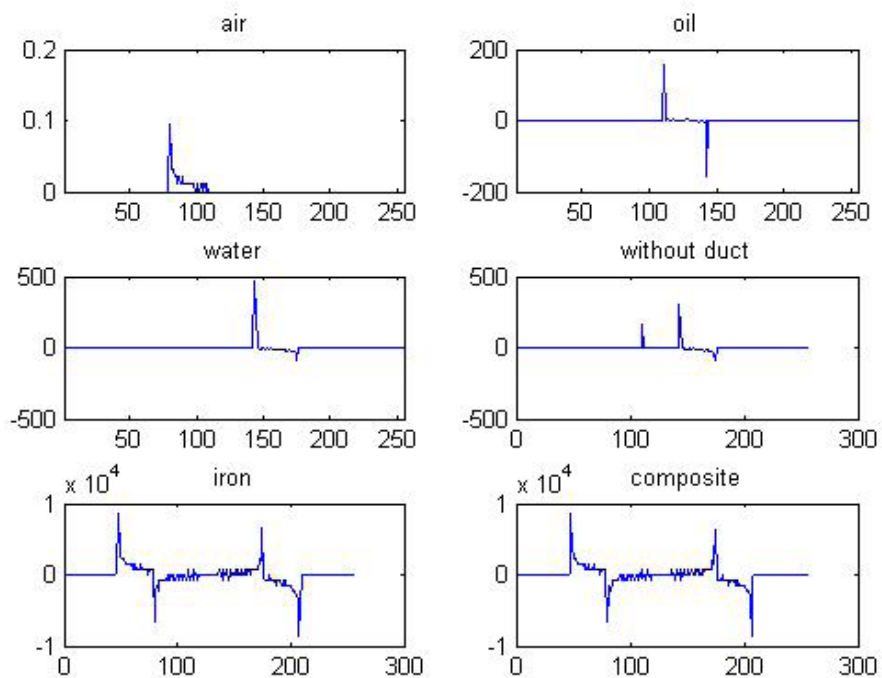


Figura 4.6: Derivada da espessura óptica para energia de 9 keV.

As Figuras 4.7 e 4.8 mostram a espessura óptica e a respectiva derivada para fótons com energia de 180 keV. Observa-se uma boa concordância nas interfaces.

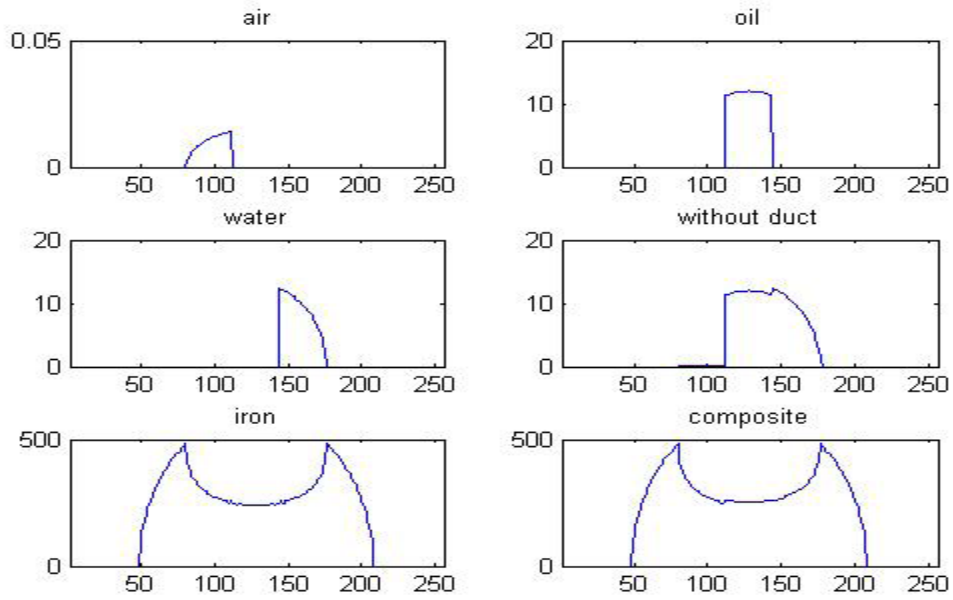


Figura 4.7: Espessura óptica para energia de 180 keV.

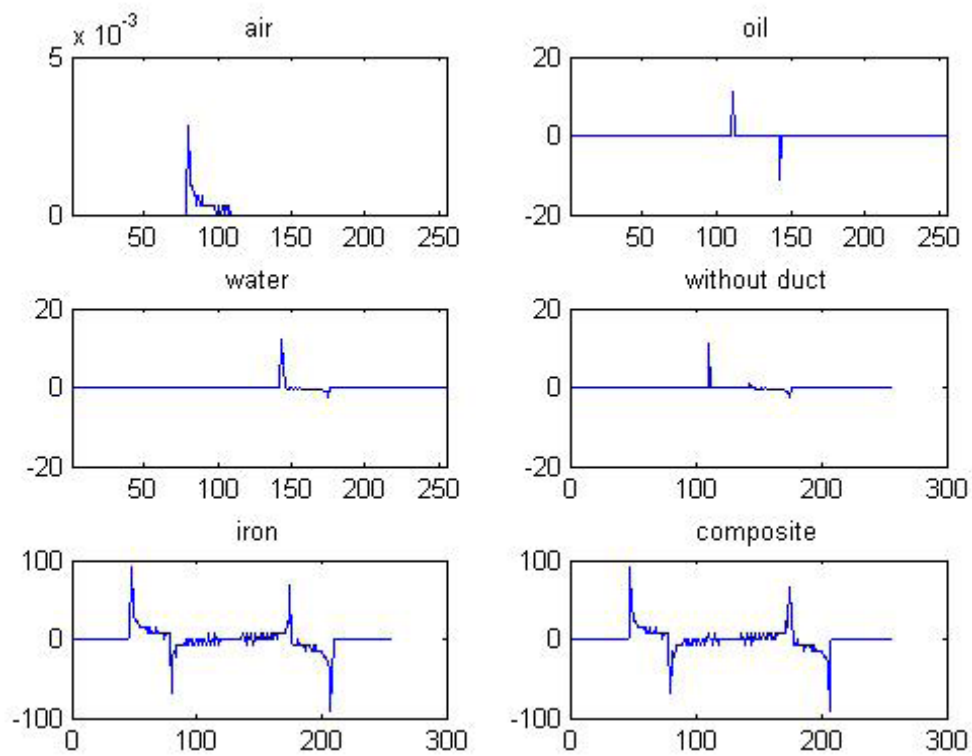


Figura 4.8: Derivada da espessura óptica para energia de 180 keV.

## 4.2 – CASO TRIDIMENSIONAL COM DUAS VISTAS

Neste caso, foi construído um sistema algébrico como foi postulado no problema:

Para um arranjo de raios associados com  $(\xi, \theta)$ , dado:

$$\{b(\xi, \theta), \delta_{n,i(\xi,\theta)} \text{ e } \delta_{i(\xi,\theta)}, i = 1, \dots, I(\xi, \theta)\} \quad (4.1)$$

Achar  $\sigma_n$  tal que:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{I(\xi,\theta)} \sigma_n \delta_{n,i(\xi,\theta)} (\gamma_{i(\xi,\theta)} - \gamma_{i(\xi,\theta)-1}) = b(\xi, \theta) \quad (4.2)$$

A fim de tornar possível o cálculo, foi associado um peso aos parâmetros da matriz A, isto é, calcular o  $\gamma_{i(\xi,\theta)}$ , como é mostrado na Figura 4.9. Este peso é o comprimento percorrido pelo raio dentro das regiões ao atravessar o duto.

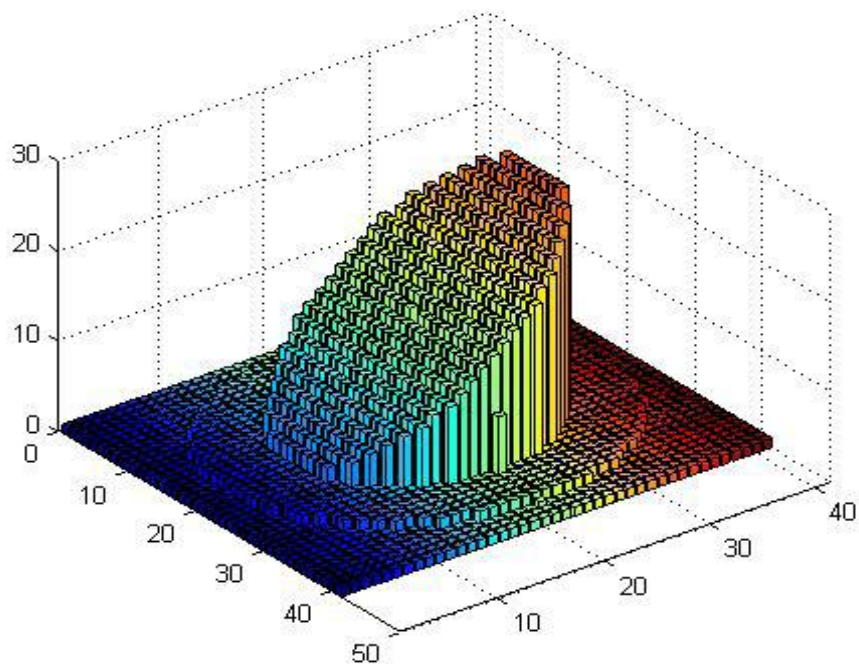


Figura 4.9: Determinação do peso.

Podemos refinar a distinção dos níveis considerando mais camadas. Obviamente, a direção da estratificação é respeitada na definição das camadas. Este trabalho considera apenas vinte e cinco camadas.

Pelo fato do sistema algébrico utilizado no processo de reconstrução ser mal condicionado, devemos utilizar a técnica de regularização Tikhonov obtendo assim uma solução estável para os coeficientes de absorção das três camadas estratificadas no escoamento de gás – óleo - água.

O parâmetro de regularização experimental encontrado é da ordem de  $10^{-10}$ .

A Figura 4.10 mostra o coeficiente de atenuação exato em azul e o coeficiente reconstruído com a regularização de Tikhonov em vermelho para fótons com 180 keV de energia.



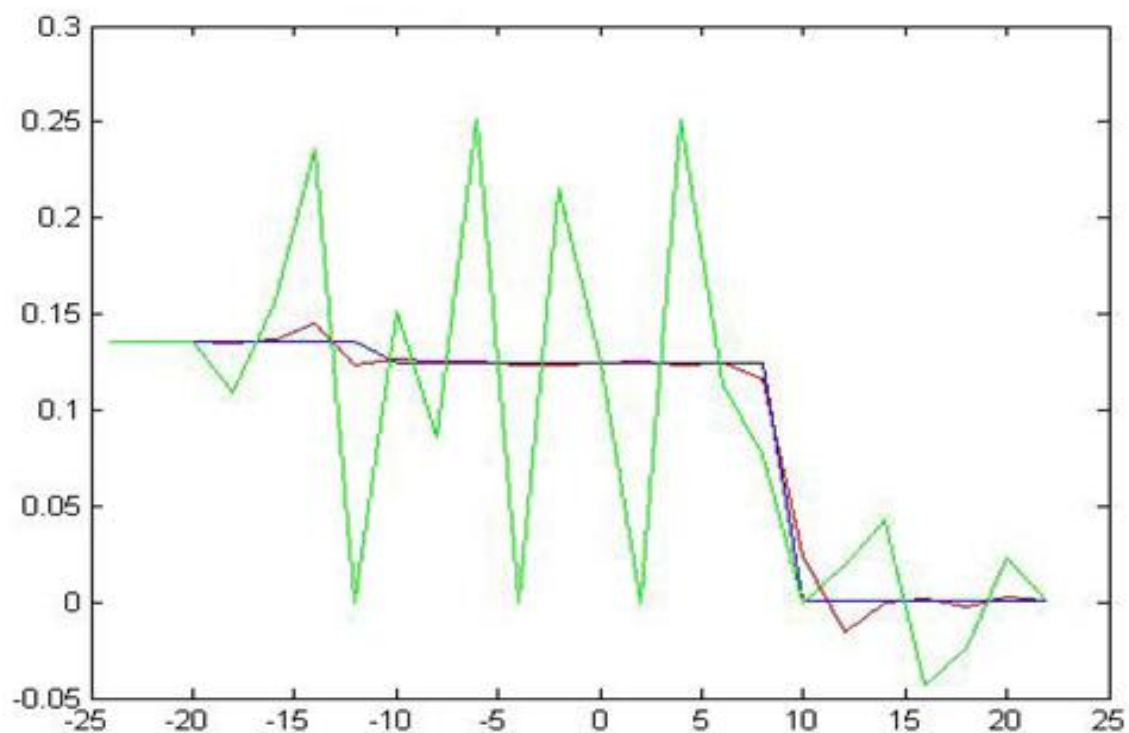


Figura 4.10: Reconstrução do escoamento para energia de 180 keV.

A curva verde mostra a instabilidade do problema se este fosse resolvido sem a regularização de Tikhonov.

O mesmo problema foi repetido com outro arranjo de dados, ou seja, fótons com energia de 9 keV. Neste caso, a diferença de valores entre os coeficientes de atenuação da água e do óleo é mais acentuada, porém, as fronteiras entre as fases, com a utilização do método mostrado neste trabalho, apresenta o mesmo resultado em ambos os casos.

A Figura 4.11 mostra a reconstrução para fótons com energia de 9 keV.

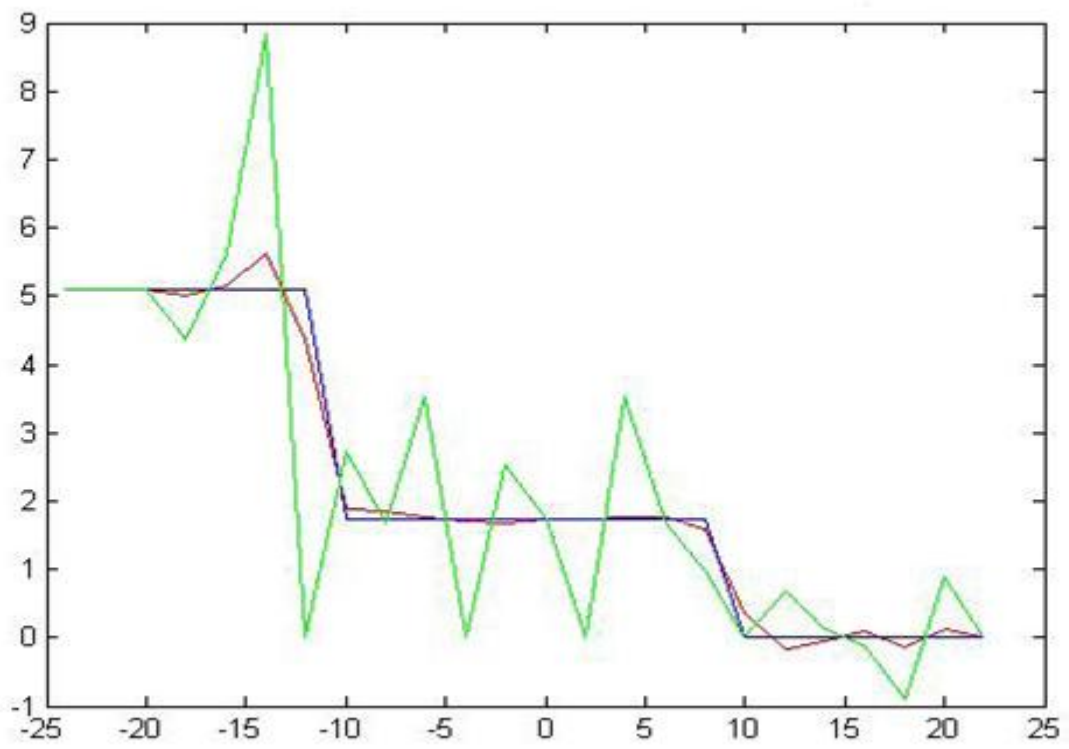


Figura 4.11: Reconstrução do escoamento para energia de 9 keV.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES

Os resultados mostram que esta metodologia aplicada ao processo de reconstrução de imagem de um escoamento estratificado é válida.

O procedimento empregado para o arranjo com uma única vista, mostra que não é possível a reconstrução da imagem, porém, podemos observar a existência de diferentes materiais através da atenuação dos feixes de raios X apresentando assim, as discontinuidades.

As derivadas das espessuras ópticas mostram a posição aproximada das fronteiras dentro do duto, permitindo assim distinguir as fases.

Uma boa concordância foi observada nas fronteiras.

Para o arranjo tridimensional com duas vistas, o sistema algébrico utilizado no processo de reconstrução é mal condicionado. Por causa deste problema, foi utilizada a técnica de regularização Tikhonov obtendo assim uma solução estável para os coeficientes de absorção das três camadas estratificadas no escoamento de gás – óleo - água.

Comparando fótons de 9 keV com fótons de 180 keV, observamos que para fótons de 9KeV, a diferença de valores entre a seção de choque da água e do óleo é mais acentuada, porém, as fronteiras entre as fases, apresentam a mesma qualidade em ambos os casos.

A medida que aumentarmos o número de vistas, a reconstrução da imagem poderá ser obtida de maneira mais fiel possível a imagem original.

A utilização deste método continuará a ser empregada em escoamentos multifásicos em dutos, em especial do sistema água – óleo – gás da indústria petrolífera.

Também será utilizado em escoamento multifásico em sistema água – vapor na indústria nuclear com vista a uma melhor determinação de parâmetros como porosidade e velocidade das fases.

Possível utilização deste método em projeto de implante assistido com tomografias tridimensionais reconstruída com poucas vistas radiográficas na indústria odontológica.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AIRD, G.A., “*Basic physics for medical imaging*,” Butterworth-Heinemann, 1998.
- ATTIX, F. H., & ROESCH, W. C., ed. - *Radiation Dosimetry*. 2a ed., New York, Academic Press, 1968, v.1.
- BERTERO, M., de Mol, C., PIKE, E.R. “*Linear Inverse Problems with Discrete Data*”, *Inverse Problems* 1, 301-330 (1985).
- BREGMAN, L.M., “*The Relaxation Method of Finding the Common Point of Convex Sets and its Application to the Solution of Problems in Convex Programming*,” *USSR Computat. Math. Math. Phys.*, vol.7, pp.200-217, 1967.
- BUSHONG, STEWART C., “*Radiologic Science for Technologists*,” 5<sup>a</sup> ed. St. Louis: Mosby-Year Book, 1993, 714p.
- COSHELL, L.; RALPH G.; CHANG, R., “*X-ray Computed Tomography of Australian Oil Shales: Non-Destructive Visualization and Density Determination*,” *Fuel*, v.73, n.8, p.1317-1321, Aug.1994.
- CENSOR, Y., LENT, A., “*An Iterative Row Action Method for Interval Convex Programming*,” *J. Optimization Theory appl.*, vol.34, pp.321-353, 1981.
- CENSOR, Y., “*Finite Series-Expansion Reconstruction Methods*,” *Proceedings of the IEEE*, vol.71, NO.3, March 1983.
- CENSOR, Y., EGGERMONT, P.P.B. and GORDON, D., “*Strong Under-relaxation in Kaczmarz’s Method for Inconsistent Systems*,” published in *Numerische Mathematik*, also available as Tech. Rep. MIPG 62, Medical Image Processing Group, Dep. Of radiology, Univ. Pennsylvania, Philadelphia, Dec. 1981.
- CORMACK, A. M., “*Representation of a Function by its Line Integrals, With Some Radiological Applications*”, *J. Appl. Phys.*, v. 34, p. 2722 – 2727, 1963.
- EGGERMONT, P.P.B., HERMAN, G.T., and LENT, A., “*Iterative Algorithms for Large Partitioned Linear Systems, With Application to Image Reconstruction*,” *Linear Alg. 1<sup>st</sup> Appl.*, vol.40, pp.37-67, 1981.

FROYSTEIN T., KVANDAL H., AAKRE H., 2005, “*Dual energy gamma tomography system for high pressure multiphase flow*”, Vol. 16, pp. 99-112.

WALLIS, G. B., “*One Dimensional Two-Phase Flow*,” New York, McGraw-Hill Book Company, 1969.

GORDON, R., BENDER, R. and HERMAN, G. T., “*Algebraic Reconstruction Technique (ART) for Three-dimensional Electron Microscopy and X-ray Photography*,” J. Theor. Biol., vol.29, pp.471-481, 1970.

HU, B. et al., 2005, “*Development of an X-ray computed tomography (CT) system with sparse sources: application to three-phase pipe flow visualization*”, Experiments in fluids, Vol. 39, pp.667-678.

HUBBEL, J. H. and S. M. SELTZER “*Tables of X-Ray Mass Attenuation Coefficients and Mass Energy-Absorption Coefficients from 1 keV to 20 MeV for Elements Z = 1 to 92 and 48 Additional Substances of Dosimetric Interest*”, <http://www.nist.gov/physlab/data/xraycoef/index.cfm>, 1996.

HUSSEIN, E. M. A. and HAN, P., 1995, “*Phase volume-fraction measurement in oil – water - gas flow using fast neutrons*”, Nuclear Geophysics, Vol.9, pp. 229-234, 149-167.

JASZCZAK, R.J., “*The Early Years of Single Photon Emission Computed Tomography (SPECT): An Anthology of Selected Reminiscences*,” *Phys.Med.Biol*, 51(2006), R99-R115

JOHN, H.E., “*The Physics of Radiology*,” Charles C. Thomas – Publisher, 1983.

KACZMARZ S., “*Angenaherherte Auflosung Von Systemen Linearer Gleichungen*,” Bull. Acad. Polon. Sci. Lett., A., vol.35, pp.355-357, 1937.

KAK, A. C. and M. SLANEY, “*Principles of Computerized Tomographic Imaging*”, IEEE Press, New York, 1987, Editorial Board.

KUHL, D.E., and EDWARDS, R.Q.; “*Image Separation Radioisotope Scanning*,” Radiology, 80-653-661, 1963.

MALLARD, J.R., “*The Evolution of Medical Imaging from Geiger Counters to MRI*,” – a personal saga *Perspect.Biol.Med*.46, 349-70, 2003.

MINERBO, G., “*MENT: A Maximum Entropy Algorithm for Reconstructing a Source from Projection Data*,” *Comput. Graph. Image Proces.*, vol.10, pp.48-68, 1979.

NATTERER, F., “*Algorithms in Tomography*,” Institut für Numerische und Instrumentelle Mathematik Universität Münster, Einsteinstraße 62, D-48149 Münster (Germany).

NATTERER, F., “*The Mathematics of Computerized Tomography*,” John Wiley e Sons, B.G.Teubner, Stuttgart (1986).

SILVA NETO, A. J., e MOURA NETO, F., “*Problemas Inversos – Conceitos Fundamentais e Aplicações*,” Ed. UERJ, 2005, 172p. ISBN 85-7511-066-7

REIS, M.L. AND ROBERTY, N.C., “*Maximum Entropy Algorithms for Image Reconstruction from Projections*”, *Inverse Problem* 8 (1982), 623-644. Printed in the UK.

SALGADO, C. M., SCHIRRU, R., BRANDO, L. E. B. and PEREIRA, M. N. A., 2009, “*Flow regime identification with MCNP-X Code and artificial neural network*”, *Proceedings of the 2009 International Nuclear Atlantic Conference-INAC 2009*, ABEN, Rio de Janeiro, Brazil, ISBN: 978-85-99141-03-8.

TANAKA, E., “*Instrumentation for PET and SPECT Studies*,” *Proceedings of a symposium Vienna, 21-25, August-1995 – Tomography in Nuclear Medicine*-Hamamatsu Photonics K.K. and National Institute of radiological sciences, Tokyo, Japan.

TANABE K., “*Projection Method for Solving a Singular System of Linear Equations and its Applications*,” *Numerische Mathematik*, vol.17, pp.203-214, 1971

\_\_\_, “*Maximum Entropy Reconstruction from Cone-beam Projection Data*,” *Comput. Biol.Med.*, vol9, pp.29-37, 1979.

## APÊNDICE 1

### FATOR DE MULTIPLICAÇÃO DA INCERTEZA

Considere o problema linear

$$K \mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $K$  e  $\mathbf{y}$  são dados e  $\mathbf{x}$  é a incógnita (SILVA NETO E MOURA NETO, 2005).

Considere, ainda, uma perturbação de  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y}^\epsilon$ , tal que  $|\mathbf{y} - \mathbf{y}^\epsilon| \ll \epsilon$  e definida  $\mathbf{x}^\epsilon$  a solução da equação perturbada:

$$K \mathbf{x}^\epsilon = \mathbf{y}^\epsilon. \quad (\text{A.2})$$

Então,

$$K(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\epsilon) = \mathbf{y} - \mathbf{y}^\epsilon \quad \text{e} \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}^\epsilon = K^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}^\epsilon)$$

donde

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\epsilon| = |K^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}^\epsilon)|$$

e, usando Eq.(A.15), obtemos:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\epsilon| \leq |K^{-1}| |(\mathbf{y} - \mathbf{y}^\epsilon)| \quad (\text{A.3})$$

Isto é, o erro, - por não se conhecer  $\mathbf{y}$ , apenas uma aproximação  $\mathbf{y}^\epsilon$  - é, no máximo, ampliado por  $|K^{-1}|$ , como se pode concluir da Eq. (A.3).



Consideremos o mesmo problema linear, porém, vamos assumir que  $K$  é inversível; então,  $\mathbf{x} = K^{-1} \mathbf{y}$ . O que se quer é analisar a condição da avaliação  $\mathbf{y} \mapsto K^{-1} \mathbf{y}$ . Este caso, quando considerado na relação do erro absoluto na avaliação com o erro absoluto no dado, tem número de condição  $|K^{-1} \mathbf{y}|/|\mathbf{y}|$  que é limitado por  $|K^{-1}|$ , como pode ser visto recorrendo-se novamente à Eq.(A.15).

Agora, essa ampliação máxima é atingida em determinadas circunstâncias, uma vez que, pela definição dada na Eq.(A.14),

$$|K^{-1}| = \sup_{|\mathbf{z}| = \epsilon} \frac{|K^{-1} \mathbf{z}|}{|\mathbf{z}|}$$

Donde existe  $\mathbf{z}_0$  com  $|\mathbf{z}_0| = \epsilon$ , tal que

$$|K^{-1}| = |K^{-1} \mathbf{z}_0|/|\mathbf{z}_0|.$$

Se escolhermos  $\mathbf{y}^\epsilon$ , de forma a que  $\mathbf{y} - \mathbf{y}^\epsilon = \mathbf{z}_0$ , teremos

$$|K^{-1}| |\mathbf{y} - \mathbf{y}^\epsilon| = |K^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}^\epsilon)|,$$

mas

$$K^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{x} \quad \text{e} \quad K^{-1} \mathbf{y}^\epsilon = \mathbf{x}^\epsilon,$$

Por definição de  $\mathbf{x}$  e de  $\mathbf{x}^\epsilon$  (A.1 e A.2), donde:

$$|K^{-1}| |\mathbf{y} - \mathbf{y}^\epsilon| = |(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\epsilon)| \tag{A.4}$$

Resumindo: para qualquer  $\mathbf{y}$  existe uma perturbação  $\mathbf{y}^\epsilon = \mathbf{y} + \mathbf{z}_0$  (ou seja, um ponto a uma distância  $\epsilon$  de  $\mathbf{y}$ ), para a qual o erro será ampliado por  $|K^{-1}|$ . Aqui, a solução

$$\mathbf{x}^\epsilon = K^{-1} \mathbf{y}^\epsilon = K^{-1}(\mathbf{y} + \mathbf{z}_0) = \mathbf{x} + K^{-1} \mathbf{z}_0$$

E o erro cometido tem tamanho

$$|K^{-1}\mathbf{z}_0| = |K^{-1}| \epsilon.$$

## APÊNDICE 2

### NORMAS, PRODUTOS INTERNOS E ADJUNTAS

Em  $\mathbb{R}^n$ , denotaremos por

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

a *norma euclidiana* do vetor  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$ . Se  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , o produto interno é denotado por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \mathbf{x}^t \mathbf{y} \quad (\text{A.5})$$

Dada uma matriz real  $A$ ,  $m$  por  $n$ , denotaremos  $A^*$  matriz ou operador adjunto de  $A$ , isto é, a matriz que muda de posição no produto interno de forma que

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^* \mathbf{y} \rangle, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m. \quad (\text{A.6})$$

Observamos que o produto interno indicado ao lado esquerdo da Eq.(A.13) é calculado em  $\mathbb{R}^m$ , e o no lado direito é calculado em  $\mathbb{R}^n$ . Como

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (A\mathbf{x})^t \mathbf{y} = \mathbf{x}^t A^t \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, A^t \mathbf{y} \rangle$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^m$ , pelas propriedades da transposição de matrizes, concluímos que o operador adjunto de A é simplesmente a transposta de A:  $A^* = A^t$ .

Relembramos que a norma induzida de A é dada por:

$$|A| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{\substack{|x|=r \\ r \neq 0}} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax| \quad (\text{A.7})$$

É possível mostrar que  $|A| = (\text{maior autovalor de } A^t A)^{1/2}$ , e se B é uma matriz e  $x$  um vetor de tamanhos apropriados,

$$|AB| \leq |A||B| \text{ e } |Ax| \leq |A||x| \quad (\text{A.8})$$

Dados dois vetores  $u$  e  $v$  em  $\mathbb{R}^n$  (que estamos sempre pensando como matrizes de  $n$  linhas e uma (1) coluna, isto é, “vetores na vertical”), define-se o produto tensorial  $u \otimes v$  como sendo a matriz, cuja entrada  $i j$  é dada por  $u_i v_j$ , isto é,  $u \otimes v = u v^t$ . Note a semelhança, mas também a diferença, em relação à definição do produto interno, Eq.(A.12).

Denotamos por  $L^2(\Omega)$  o conjunto das funções  $f$  de quadrado integrável, e por  $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$  o produto interno definido em  $L^2(\Omega)$ .

## APÊNDICE 3

### TEOREMA ESPECTRAL

Seja  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  uma base de  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que esta é uma base ortonormal se os vetores forem ortogonais dois a dois e tiverem norma igual a 1, isto é, se os vetores satisfizerem as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, i, j = 1, \dots, n \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Seja  $V$  a matriz, cuja coluna de número  $i$  é o vetor  $\mathbf{v}_i$ . Então, a base é ortonormal se e só se  $V^t V = I$ , onde  $I$  é a matriz identidade. Neste caso, a matriz  $V$  é chamada de ortogonal.

## APÊNDICE 4

### DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES

Seja  $K$  uma matriz real  $m \times n$  e  $p = \min\{m, n\}$ . Então, existem bases ortonormais  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  de  $\mathbb{R}^m$  e  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ , tais que, com  $\Lambda$ , uma matriz  $m \times n$  dada por

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_p \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{se } m \geq n$$

$$\text{Ou } \Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \sigma_p \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{se } m \leq n$$

e com  $V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ , uma matriz  $m \times m$ ,  $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$  uma matriz  $n \times n$ , tem-se

$$K = V \Lambda U^t \tag{A.9}$$

Os valores singulares de  $K$  são os números  $\sigma_i$ , que denotaremos por  $\sigma_i(K) \geq \dots \geq \sigma_p(K) \geq 0$ , fazendo menção explícita à matriz  $K$ . Quando o índice  $i$  cresce, o valor singular decresce.

A Eq.(A.16) pode ser escrita de diferentes formas.

**Observação:** Autovalores e valores singulares.

- i. Se  $K$  é uma matriz real, simétrica e  $\lambda_1(K) \geq \dots \geq \lambda_n(K)$  são os seus autovalores, então, o conjunto dos seus valores singulares é

$$\{|\lambda_1(K)|, \dots, |\lambda_n(K)|\}.$$

- ii. Tem-se que  $[K] = \sigma_1(K)$  e, se  $K$  for inversível,  $|K^{-1}| = [\sigma_n(K)]^{-1}$ .
- iii. Seja  $A$  uma matriz real e simétrica. Então,  $[A] = \max_i |\lambda_i(A)|$ .
- iv. Se  $A = K^t K$ , os autovalores de  $A$ ,  $\lambda_i(K^t K)$ , são relacionados aos valores singulares de  $K$ ,  $\sigma_i(K)$ , por  $\lambda_i(K^t K) = \sigma_i^2(K)$ .

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)



[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)