

MARCOS BARROS DE PAULA

**INVARIANTES DE FRENTES DE ONDAS PLANAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiæ*.

**VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2010**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

MARCOS BARROS DE PAULA

**INVARIANTES DE FRENTES DE ONDAS PLANAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 30 de abril de 2010.

---

Maria del Carmen Romero Fuster

---

Laércio José dos Santos

---

Mercio Botelho Faria

---

Catarina Mendes de Jesus  
(Co-orientadora)

---

Simone Maria de Moraes  
(Orientadora)

*Para José de Paula Pereira, meu pai...*

# Agradecimentos

Agradecer a todos que me auxiliaram na construção destas muitas páginas não é uma tarefa muito fácil. Tentarei em algumas linhas deixar claro que esta dissertação, apesar de estar em meu nome, cabe também a estas pessoas especiais que se fizeram presentes direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

À Poliana, minha namorada, por me incentivar a fazer a inscrição na pós-graduação, por me auxiliar nos estudos durante todo o curso, por aceitar meu mau humor quando algo estava errado com meu trabalho, por deixar de fazer outras coisas para estar ao meu lado quando eu mais precisava, por também estar escrevendo uma dissertação e por algumas vezes abdicar dos seus e se preocupar com os meus problemas, por seu amor não só agradeço mas dedico estas páginas. Te amo.

À Profa. Dra. Simone Maria de Moraes, orientadora desta dissertação, que com sua sabedoria viu em mim algum potencial, me incentivando a não desanimar e não abandonar meus objetivos, pelas muitas discussões, correções e sugestões ao longo da criação desta, mas acima de tudo por ser compreensiva e paciente com este principiante no estudo de Matemática.

À Profa. Dra. Catarina Mendes de Jesus, co-orientadora desta dissertação, por sua ajuda com o tema e interesse nos resultados.

Aos colegas de curso, aos que ingressaram antes e depois de mim, todos vocês estão sendo lembrados e merecem meus agradecimentos pelos bons e maus momentos compartilhados ao longo do curso.

Aos servidores que mantinham nossa sala de estudos limpa e organizada para termos um local digno para estudar.

À Maria Gorete, minha mãe, por acreditar em mim de olhos fechados e por seu amor incondicional. Mãe, essa vitória é pra você.

A Fernanda e Itamar, minha irmã e cunhado, pelos muitos momentos de descontração e pelo apoio financeiro em alguns finais de semana e feriados em que pude me afastar de Viçosa.

A Bárbara e Pedro, meus sobrinhos, por serem muito inteligentes e dessa forma me incentivarem a não ficar para trás.

Ao Mateus e Lívia, meu irmão e cunhada, por saber que mesmo distantes estavam preocupados e torcendo por mim. (Agora eu “mestrei”).

Aos meus familiares em geral, pelas orações e por me proporcionarem muitos momentos de alegria ao longo de toda a vida.

À CPF, especialmente à Cleusa, por manter meu quarto intacto enquanto estive fora e por me aceitar novamente em sua casa completando agora quase uma década de con-

vivência, não esquecendo também de agradecer a Ju pela alegria proporcionada e pelas conversas jogadas fora nos fins de noite.

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. Estas letras representam as iniciais de cada um dos meus amigos que pelo simples fato de me aceitarem como amigo merecem meus agradecimentos.

MUITO OBRIGADO E BOA LEITURA!

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Resumo</b>	<b>x</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Algumas definições e notações . . . . .	5
1.2 Jatos . . . . .	6
1.3 A $C^\infty$ -topologia de Whitney . . . . .	8
1.4 Transversalidade . . . . .	9
1.5 Aplicações Estáveis . . . . .	10
1.6 Discriminante . . . . .	12
<b>2 O Espaço das Curvas Legendreanas</b>	<b>17</b>
2.1 O espaço dos elementos de contato . . . . .	18
2.2 O Espaço das Curvas Legendreanas . . . . .	21
2.3 Frentes de Ondas Planas . . . . .	23
<b>3 Os Invariantes de Aicardi de Frentes de Ondas Planas</b>	<b>35</b>
3.1 Invariantes Topológicos . . . . .	35
3.2 Invariantes tipo Vassiliev . . . . .	36
3.3 Equivalência de Frentes de Ondas Planas . . . . .	37
3.3.1 Classes de Frentes de Ondas e Classes de Simetria . . . . .	38
3.4 Os Invariantes $RO$ -independentes . . . . .	47
3.4.1 O discriminante . . . . .	47
3.4.2 Co-orientações dos estratos de codimensão 1 do discriminante . . . . .	48
3.4.3 Os 5 invariantes básicos $RO$ -independentes . . . . .	54
3.5 Os invariantes de frentes de ondas planas dependentes das orientações . . . . .	85
3.5.1 Os 6 invariantes básicos $RO$ -dependentes . . . . .	85

<b>4</b>	<b>Invariantes de Frentes de Ondas Planas</b>	<b>99</b>
4.1	Invariantes de conjuntos de frentes de ondas planas . . . . .	99
4.1.1	Os invariantes $T^+$ , $T^-$ , $T^h$ , $T^\lambda$ e $T^{Sp}$ . . . . .	99
4.1.2	Invariantes de Aicardi de Conjuntos de Frentes de Ondas . . . . .	104
4.2	Pontes e canais . . . . .	106
4.2.1	Os invariantes $J^+$ , $J^-$ , $h$ e $\lambda$ de $\gamma * \Gamma$ . . . . .	110
4.2.2	O invariante $Sp$ de $\gamma * \Gamma$ . . . . .	119
	<b>Conclusão</b>	<b>121</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>123</b>



# Lista de Figuras

1.1	Transversalidade . . . . .	9
1.2	Os nós são aplicações estáveis em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	11
1.3	Cone $b^2 = ac$ . . . . .	12
1.4	Nascimento de duas cúspides . . . . .	16
2.1	Propagação de onda . . . . .	17
2.2	Frente de onda no instante $t$ . . . . .	18
2.3	Espaço dos elementos de contato do plano . . . . .	19
2.4	Curvas legendreanas e suas projeções frontais. . . . .	24
2.5	Suavização de um ponto de cúspide. . . . .	27
2.6	Frentes de ondas planas orientadas . . . . .	27
2.7	Frentes de ondas planas orientadas e co-orientadas . . . . .	28
2.8	As cúspides e suas características . . . . .	29
2.9	Frente de onda plana com apenas um ponto de cúspide. . . . .	30
2.10	Frentes de ondas com dois pontos de cúspide. . . . .	30
2.11	Traços de duas frentes de ondas planas equivalentes . . . . .	31
2.12	Caminho entre as frentes de onda $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	31
2.13	As duas frentes de ondas planas são equivalentes? . . . . .	31
2.14	Uma tentativa de encontrar um caminho entre as frentes de ondas $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	32
2.15	Frentes de ondas planas básicas com índices $i$ e $\mu$ dados. . . . .	33
2.16	Família de curvas planas básicas de Arnold. . . . .	34
3.1	Frentes de ondas genéricas e não genéricas. . . . .	37
3.2	Eventos localmente não genéricos. . . . .	38
3.3	Eventos do tipo $K$ $RO$ -independentes, $RO$ -dependentes e suas simetrias . . . . .	40
3.4	Eventos do tipo $T$ $RO$ -independentes, $RO$ -dependentes e suas simetrias . . . . .	41
3.5	Eventos do tipo $\Pi$ $RO$ -independentes, $RO$ -dependentes e suas simetrias . . . . .	42
3.6	Eventos do tipo $\Lambda$ $RO$ -independentes, $RO$ -dependentes e suas simetrias . . . . .	42
3.7	Exemplo de um caminho genérico. . . . .	43
3.8	Os dois caminhos conectam as mesmas frentes de ondas. . . . .	44
3.9	Caminho genérico. . . . .	44
3.10	Duas frentes de ondas planas $J^+$ -equivalentes. . . . .	45
3.11	Duas frentes de ondas planas $J^-$ -equivalentes. . . . .	45
3.12	Duas frentes de ondas planas $Sp$ -equivalentes. . . . .	45
3.13	Duas frentes de ondas planas $\lambda$ -equivalentes. . . . .	46

3.14	Ilustração para o discriminante no espaço $\Omega_{1,0}$ .	48
3.15	Um caminho entre a frente de onda $\omega_{1,0}$ para ela mesma.	49
3.16	Cruzamento pelo estrato de pontos triplos.	50
3.17	Exemplo de frente de onda orientada passando por um ponto triplo.	51
3.18	Ordem cíclica dos lados dos triângulos desaparecidos.	51
3.19	Cada lado do triângulo desaparecendo tem sua própria orientação.	51
3.20	Triângulos que nascem e morrem e seus sinais.	52
3.21	As co-orientações locais do estrato de codimensão 1	53
3.22	Coerência local no estrato $KK$	56
3.23	Coerência local no estrato $TT$	57
3.24	Coerência local no estrato $\text{III}$	57
3.25	Coerência local no estrato $\Lambda\Lambda$	58
3.26	Coerência local no estrato $K\Pi$	59
3.27	Coerência local no estrato $KT$	60
3.28	Coerência local do estrato $\Pi$ no estrato $T\Pi$	61
3.29	Co-orientação do estrato $T$ perto do estrato $T\Pi$	61
3.30	Coerência local no estrato $T\Pi$	62
3.31	Coerência local no estrato $\Pi\Lambda$	63
3.32	Os ramos não são conectados por uma frente de onda sem cúspide.	64
3.33	Os ramos não são conectados por uma frente de onda sem cúspide.	64
3.34	Um caminho não contrátil em $\Omega_{1,2}$	66
3.35	Um caminho não contrátil em $\Omega_{1,0}$	67
3.36	Um caminho não contrátil em $\Omega_{n-1,0}$ .	68
3.37	A passagem de um laço por um par de cúspides	68
3.38	Qual o valor dos invariantes em $\alpha$ ?	69
3.39	Perestroika de $\beta$ para $\alpha$ .	69
3.40	Exemplo de soma conexa de duas frentes de ondas planas.	70
3.41	Círculos com co-orientações opostas.	70
3.42	Pontes em posições diferentes	71
3.43	Caminho entre $\theta$ e $\omega_{1,0}$ .	71
3.44	Frentes de ondas básicas $\omega_{i,0}$ .	72
3.45	Caminho entre $\theta$ e $\gamma$ .	73
3.46	Os valores dos invariantes das curvas $\omega_{1,\mu}$	73
3.47	A soma conexa durante as perestroikas	74
3.48	Perestroika elementar $P_1$	75
3.49	Perestroika elementar $P_2$	75
3.50	Perestroika elementar $P_3$	76
3.51	Perestroika elementar $P_4$	76
3.52	Perestroika elementar $P_5$	76
3.53	Os pontos marcados indicam a posição da possível colagem.	77
3.54	Soma conexa do tipo (1)-(1) de duas frentes de ondas básicas	78
3.55	Soma conexa do tipo (2)-(2) de duas frentes de ondas básicas	79
3.56	Soma conexa do tipo (1)-(2) de duas frentes básicas	80
3.57	Os valores dos invariantes básicos nas frentes de ondas básicas	81

3.58	Os quatro tipos de pontes conectando duas frentes . . . . .	82
3.59	Preparando o ramo para a colagem usando as quatro pontes . . . . .	82
3.60	Invariantes básicos para as frentes de ondas planas $\omega_{i,0}$ e $K_{i,0}$ . . . . .	84
3.61	Exemplo para as frentes de ondas básicas $\omega_{2,0}$ e $K_{2,0}$ . . . . .	85
3.62	O estrato $KK$ $RO$ -dependente . . . . .	88
3.63	Quatro exemplos de $K\Pi$ estrato $RO$ -dependente . . . . .	91
3.64	Invariantes $RO$ -dependentes para frentes de ondas básicas. . . . .	96
4.1	Separação de duas frentes de ondas planas . . . . .	101
4.2	Separação de frentes de ondas contando os cruzamentos por cúspide. . . . .	102
4.3	Separação de duas frentes de ondas planas com ponto base . . . . .	103
4.4	Índices de componentes conexas de uma frente de onda plana . . . . .	106
4.5	Cirurgia nos arcos de $\Gamma$ . . . . .	107
4.6	Possíveis pontes conectando arcos de uma frente de onda plana. . . . .	108
4.7	Possíveis pontes para frentes de ondas orientadas e co-orientadas. . . . .	109
4.8	Pontes e canais correspondentes . . . . .	109
4.9	Soma de duas frentes de ondas com diferentes pontes . . . . .	110
4.10	Conexão de arcos externos . . . . .	112
4.11	$\Gamma$ e $\gamma^c * \tilde{\Gamma}$ , $\tilde{\Omega}$ e $\gamma^p * \Omega$ . . . . .	113
4.12	Ponte na região limitada pelas frentes de onda plana de $\Gamma$ . . . . .	114
4.13	Possíveis arcos de conexão. . . . .	115

# Resumo

PAULA, Marcos Barros de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, abril de 2010. **Invariantes de frentes de ondas planas.** Orientadora: Simone Maria de Moraes. Co-orientadores: Catarina Mendes de Jesus e Francisco Dutenhefner.

Esta dissertação é dedicada ao estudo dos invariantes de frentes de ondas planas seguindo o trabalho desenvolvido por F. Aicardi em [Ai1]. Ela encontra estes invariantes fazendo uma generalização dos invariantes de curvas planas introduzidos por Arnold utilizando a Teoria de Vassiliev. Neste trabalho estudamos e descrevemos os invariantes de Aicardi, assim como suas propriedades. Além disso, utilizando as noções de pontes e canais de curvas dado em [MJ-RF] apresentamos um algoritmo alternativo para o cálculo de tais invariantes.

# Abstract

PAULA, Marcos Barros de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, April of 2010. **Invariants of wave fronts.** Advisor: Simone Maria de Moraes. Co-advisers: Catarina Mendes de Jesus and Francisco Dutenhefner.

This dissertation is devoted to the study of wave planar fronts following the work developed by Aicardi in [Ai1]. She finds these invariants as a generalization of those introduced by Arnold for plane curves by using the Vassiliev Theory. In this work, we study and describe Aicardi's invariants as well as their properties. Moreover, by using the notions of bridges and channels given in [MJ-RF] we obtain an alternative algorithm for the calculation of such invariants.

# Introdução

A *Teoria de Curvas Planas Fechadas*, que são imersões do círculo no plano, pode ser considerada como um paralelo à Teoria de Nós. Nas últimas duas décadas o estudo destas curvas atraiu a atenção de vários matemáticos, após Vladimir Igorevich Arnold, motivado por problemas de Topologia de Contato ([Ge1] e [Ge2]), introduzir, no início dos anos 90, três invariantes associados a elas.

É sabido que  $\mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ , o conjunto das curvas diferenciáveis fechadas orientadas imersas no plano, tem diferentes componentes conexas, representadas pelas distintas classes de isotopia das curvas planas fechadas imersas.

Em 1937 Whitney introduziu em [Whi] um invariante completo para estas classes de isotopia, a saber o índice de uma curva, dado pelo número de rotações da curva, mais precisamente o número de voltas completas que o vetor tangente faz ao percorrer a curva considerando sua orientação.

No início da década de 90 do século XX, Vassiliev desenvolveu uma teoria ([V1] e [V2]), denominada Teoria de Vassiliev, cuja técnica consiste em caracterizar o subespaço de interesse como o complemento de um certo subconjunto estratificado chamado discriminante do conjunto.

Com a introdução desta teoria houve um crescente interesse no estudo de invariantes topológicos de aplicações, tanto do ponto de vista local como global, tendo sido aplicada a aplicações estáveis de:

- (i) Mergulhos de  $S^1$  em  $\mathbb{R}^3$ , os conhecidos nós, pelo próprio Vassiliev [V1].
- (ii) Imersões de  $S^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , como já comentado, por Arnold [A1] e [A2].
- (iii) Superfícies imersas em  $\mathbb{R}^3$ , por Goryunov [Gor2].
- (iv) Superfícies no plano, por Ohmoto e Aicardi [O-A] e Mendes de Jesus e Romero-Fuster [HMR1].
- (v) 3-variedades no  $\mathbb{R}^3$ , por R. O. Sinha [S].

No caso de curvas planas fechadas Arnold estratificou o discriminante levando em conta os fenômenos locais que ocorrem nas curvas imersas. Ele introduziu três invariantes topológicos numéricos (inteiros) relacionados com o subconjunto  $\mathcal{E}^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$  de  $\mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ , conjunto das aplicações estáveis de  $S^1$  no plano, a imagem destas aplicações são curvas que tem como singularidades pontos duplos transversais.

As curvas legendreanas formam uma classe de curvas fechadas, neste caso são imersões do círculo  $S^1$  em  $M$ , a 3-variedade de contato construída a partir dos elementos de contato do plano  $\mathbb{R}^2$ , no caso de mergulhos são chamadas nós legendreanos.

Para curvas legendreanas podemos definir uma classe de homotopia, estabelecendo o tipo de curva. Assim  $\mathcal{C}^\infty(S^1, M)$ , espaço das imersões diferenciáveis orientadas e co-orientadas de  $S^1$  em  $M$ , tem diferentes componentes conexas que também são representadas pelas diferentes classes de homotopia.

No caso de curvas legendreanas teremos dois índices associados à curva, o primeiro é análogo ao índice de Whitney  $i$  e o segundo é o chamado índice de Maslov  $\mu$ .

Veremos com mais detalhes que uma  $(2n - 1)$ -variedade de contato é construída considerando em  $\mathbb{R}^n$  os elementos de contato que são hiperplanos satisfazendo uma determinada equação. (Veja Definição 2.1). Nesta variedade consideramos a orientação de  $\mathbb{R}^n$  e uma co-orientação. Além disso, introduzimos nela uma estrutura de contato  $\xi$ , que é o núcleo de uma 1-forma diferenciável, denotando  $M$  por  $(M, \xi)$ .

Considerando  $n = 2$ , temos  $(M, \xi)$  uma 3-variedade de contato e uma curva nesta 3-variedade é legendreana se é uma imersão do círculo  $S^1$  em  $M$  que é tangente aos planos da estrutura de contato.

Como toda curva legendreana tem associada uma frente de onda plana, obtida pela projeção da curva em um plano determinado. E reciprocamente, através de uma frente de onda plana, definida como sendo uma imersão exceto em pontos isolados onde ocorrem as cúspides, pode-se recuperar a curva legendreana, então faz sentido passar ao estudo de equivalências entre frentes de ondas planas.

Em frentes de ondas planas podemos também definir os índices  $i$  e  $\mu$  que coincidem com os índices das curvas legendreanas correspondentes. Assim, dadas frentes de ondas com índices  $i$  e  $\mu$  é natural perguntar se é possível estabelecer uma equivalência mais refinada no conjunto das frentes de ondas planas com estes índices.

No trabalho de Arnold [A1] encontramos um estudo preliminar na busca de uma resposta para esta questão. No entanto, foi Francesca Aicardi em [Ai1] quem deu uma resposta definitiva ao fazer uma descrição completa dos invariantes de frentes de ondas planas.

O trabalho de Aicardi é desenvolvido de maneira análoga ao de Arnold, ou seja, utilizando a Teoria de Vassiliev se estratifica o conjunto  $\mathcal{C}(S^1, M)$  através de seu discriminante.

Esta teoria resulta ser muito útil, pois além de determinar os invariantes, possibilita obter uma base do espaço dos invariantes associados a  $\mathcal{E}(S^1, M)$ , conjunto das frentes de ondas planas estáveis, que tem como singularidades os pontos duplos transversais e as cúspides semi-cúbicas.

Mais precisamente neste caso, ao aplicar a Teoria de Vassiliev em  $\mathcal{C}^\infty(S^1, M)$  para determinar a hipersuperfície discriminante, formada pelas frentes de ondas não genéricas, são obtidos quatro estratos independentes pela ação do grupo  $RO$  dos movimentos rígidos do plano que preservam orientação, a saber, o de frentes de ondas com auto-tangência, o de frentes de ondas com pontos triplos, o de frentes de ondas com tangência com cúspide e o de frente de ondas com nascimento de cúspide, a reunião destes quatro estratos formando o conjunto discriminante.

Nesta dissertação, partindo do artigo *Discriminants and local invariants of planar fronts* [Ai1] de Aicardi, explicamos os invariantes básicos de frentes de ondas estudando suas propriedades e apresentando algoritmos para calculá-los. Além disso, apresentamos um algoritmo alternativo para o cálculo destes invariantes utilizando os conceitos de pontes e canais, que foram introduzidos por Mendes de Jesus e Romero-Fuster em [MJ-RF]. Este algoritmo permitirá calcular os invariantes para um conjunto de frentes de ondas.

Assim dispomos o trabalho em quatro capítulos:

O objetivo do primeiro capítulo é introduzir um vocabulário mínimo necessário para o desenvolvimento e entendimento dos temas tratados nos capítulos subsequentes. Assim apresentamos neste capítulo alguns conceitos e resultados de Topologia Diferencial e Teoria de Singularidades.

Dedicamos o Capítulo 2 ao estudo das curvas legendreanas e também das frentes de ondas planas. Para isto introduzimos a teoria de variedade de contato, os conceitos e resultados importantes para então estabelecer uma relação entre curvas legendreanas e frentes de ondas planas.

O Capítulo 3 é o capítulo central da dissertação, nele estabelecemos as equivalências entre frentes de ondas planas ao determinar seus invariantes. Para isto consideramos frentes de ondas genéricas que são aquelas em que as únicas singularidades são os pontos duplos transversais e as cúspides semi-cúbicas.

Utilizando o Teorema de Whitney pode-se verificar que o espaço das curvas legendreanas com frentes de ondas genéricas é aberto e denso no espaço de todas as curvas legendreanas com a topologia de Whitney induzida de  $\mathcal{C}^\infty(S^1, M)$ .

Assim, Aicardi em [Ai1] considerou o discriminante  $\Delta$  de  $\mathcal{C}^\infty(S^1, M)$  como sendo exatamente o conjunto das curvas legendreanas com frentes de ondas não genéricas. Veremos que os invariantes associados às frentes de ondas estão relacionadas aos seguintes eventos: auto-tangências, pontos triplos, tangência com cúspide e nascimento de cúspide.

Neste capítulo, classificamos os diferentes estratos de codimensão 1 de  $\Delta$ , em seguida impomos uma condição de co-orientabilidade sobre os estratos de codimensão 2 obtendo um sistema de equações lineares, chamado *sistema coerente*. Finalmente escolhemos um conjunto simples de geradores linearmente independentes do conjunto solução do sistema coerente e através de combinações lineares destas soluções determinamos os invariantes das frentes de ondas planas. Também mostramos algumas propriedades destes invariantes, por exemplo que são aditivos pela soma conexa.

Finalmente no Capítulo 4, baseando-nos no trabalho [MJ-RF], descrevemos um método para calcular os invariantes de frentes de ondas de Aicardi. Este método consiste em decompor uma frente de onda em frentes de ondas básicas através de pontes e canais. A fórmula que estabelecemos aqui nos permite obter os invariantes da frente de onda inicial em termos dos invariantes das frentes de ondas básicas, reduzindo consideravelmente os cálculos. Além disso, este método também permite estender o cálculo dos invariantes para coleções de frentes de ondas planas.

Em resumo os principais resultados discutidos nesta dissertação são os seguintes tipos de equivalência:

- equivalência como nós legendreanos através dos índices de “Whitney” e de Maslov, no capítulo 2;



- equivalência como frentes de ondas planas através dos invariantes de Aicardi *RO*-independentes;
- equivalência como frentes de ondas planas através dos invariantes de Aicardi *RO*-dependentes;

sendo que os índices de Whitney e Maslov são invariantes completos e os demais invariantes não são.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo veremos alguns resultados e definições básicas de Topologia Diferencial e algumas técnicas da Teoria de Singularidades que podem ser encontrados em vários livros da bibliografia como [Gib], [Go-Gu] e [NB-RF]. Fundamentalmente os resultados de jatos, topologias de Whitney, transversalidade e estabilidade podem ser encontrados nos capítulos II e III de [Go-Gu].

### 1.1 Algumas definições e notações

Todas as variedades e aplicações que vamos considerar serão  $\mathcal{C}^\infty$  a menos que se diga o contrário.

Dadas duas variedades diferenciáveis  $X$  e  $Y$  denotamos por:

- i)  $\mathcal{C}^r(X, Y) :=$  espaço de todas as aplicações de  $X$  em  $Y$  de classe  $\mathcal{C}^r$ . Se  $X = Y$  escreveremos simplesmente  $\mathcal{C}^r(X)$ .
- ii)  $\mathcal{C}^\infty(X, Y) :=$  espaço de todas as aplicações de  $X$  em  $Y$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $X$  em  $Y$ . Se  $X = Y$  escreveremos simplesmente  $\mathcal{C}^\infty(X)$ .

**Observação 1.1** *Sejam  $X$  e  $Y$  variedades diferenciáveis e  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação diferenciável. Se  $f$  tem posto máximo, então:*

- i)  $f$  é uma **imersão** se, e somente se,  $\dim X \leq \dim Y$ .
- ii)  $f$  é uma **submersão** se, e somente se,  $\dim X \geq \dim Y$ .
- iii)  $f$  é um **mergulho** se, e somente se,  $f$  é uma imersão injetiva.

**Definição 1.2** *Sejam  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizações de curvas planas. Dizemos que  $\alpha$  e  $\beta$  são **homotópicas** se, e somente se, existe uma aplicação contínua*

$$\begin{aligned} \varphi : I \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, t) &\longmapsto \varphi(s, t) \end{aligned}$$

tal que  $\begin{cases} \varphi(s, 0) = \alpha(s) \\ \varphi(s, 1) = \beta(s) \end{cases}$  para todo  $s \in I$ .

A aplicação  $\varphi$  é chamada *homotopia* entre  $\alpha$  e  $\beta$ .

Dizemos que as curvas  $\alpha$  e  $\beta$  são **isotópicas** se, e somente se,  $\alpha$  e  $\beta$  são homotópicas e para cada  $t \in I$  a aplicação  $\varphi_t = \varphi|_{I \times \{t\}}$  é uma imersão, ou seja,  $\alpha$  e  $\beta$  são isotópicas se, e somente se, existe

$$\begin{aligned} \varphi : I \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, t) &\longmapsto \varphi(s, t) \end{aligned}$$

aplicação contínua tal que  $\begin{cases} \varphi(s, 0) = \alpha(s) \\ \varphi(s, 1) = \beta(s) \end{cases}$  para todo  $s \in I$  e  $\varphi_t : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$   $s \longmapsto \varphi_t(s) = \varphi(s, t)$  é imersão para todo  $t \in I$ .

## 1.2 Jatos

**Definição 1.3** *Sejam  $X$  e  $Y$  variedades diferenciáveis de dimensões  $m$  e  $n$ , respectivamente, e seja  $x \in X$ . Dadas duas aplicações  $f, g : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ , com  $f(x) = y = g(x)$ .*

- i) Diremos que  $f$  e  $g$  tem **contato de primeira ordem** em  $x$  se  $(df)_x = (dg)_x$  como aplicações de  $T_x X \rightarrow T_y Y$ , e denotamos por  $f \sim g$ .*
- ii) Diremos que  $f$  e  $g$  tem **contato de ordem  $k$**  em  $x$  se  $(df) : TX \rightarrow TY$  tem contato de ordem  $k - 1$  com  $(dg)$  em todo ponto em  $T_x X$ , e denotamos por  $f \sim_k g$ .*

**Observação 1.4** *Equivalentemente, seja  $U$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $p$  um ponto de  $U$ . Sejam  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplicações diferenciáveis, então  $f \sim_k g$  em  $x$  se, e somente se*

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial x^\alpha}(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} g_i}{\partial x^\alpha}(x),$$

$\forall \alpha$  multi-índice tal que  $|\alpha| \leq k$ , onde  $f_i$  e  $g_i$  são as funções coordenadas de  $f$  e  $g$  com  $1 \leq i \leq n$  e  $x_1, \dots, x_m$  as coordenadas de  $p$  em  $U$ . Isto quer dizer que  $f \sim_k g$  se, e somente se,  $f$  e  $g$  possuem o mesmo desenvolvimento de Taylor de ordem  $k$ .

A relação “contato de ordem  $k$ ” definida acima é uma relação de equivalência sobre o conjunto  $\mathcal{C}_{x,y}^r(X, Y)$  das aplicações  $r$  vezes diferenciáveis de  $X$  em  $Y$ , cuja imagem de  $x$  é  $y$ . Denotaremos por  $J_{x,y}^{k,r}(X, Y) = \mathcal{C}_{x,y}^r / \sim_k$ . Quando  $r = \infty$ , fazemos  $J_{x,y}^k(X, Y)$ . Sejam  $J^{k,r}(X, Y) = \bigcup_{(x,y) \in X \times Y} J_{x,y}^{k,r}(X, Y)$  e  $J^k(X, Y) = \bigcup_{(x,y) \in X \times Y} J_{x,y}^k(X, Y)$ .

**Definição 1.5** *Os elementos de  $J^k(X, Y)$  são chamados **k-jatos** de aplicações de  $X$  em  $Y$ .*

**Definição 1.6** Seja  $\sigma = j^k f(x) \in J^k(X, Y)$  um  $k$ -jato, onde  $f$  é um representante da classe de equivalência de  $\sigma$  em  $J_{x, f(x)}^k(X, Y)$ . Chamaremos  $x \in X$  de **fonte** de  $\sigma$  e  $y = f(x)$  a **meta** de  $\sigma$ . Consequentemente temos a **aplicação fonte**  $\alpha : J^k(X, Y) \rightarrow X$  e a **aplicação meta**  $\beta : J^k(X, Y) \rightarrow Y$ , dadas respectivamente por  $\alpha(\sigma) = x$  e  $\beta(\sigma) = f(x)$ .

Se denotamos por  $A_m^k$  o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a  $k$  em  $m$  variáveis, com coeficientes em  $\mathbb{R}$  e que se anulam na origem teremos o seguinte isomorfismo  $A_m^k \approx \mathbb{R}^N$ , onde  $N = d(m, k) + d(m, k - 1) + \dots + d(m, 1)$  e  $d(m, k) = \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!k!}$ . Consequentemente podemos considerar  $A_m^k$  uma variedade  $\mathcal{C}^\infty$ . De forma analoga,  $B_{m,n}^k = \bigoplus_{i=1}^n A_m^k$  é também uma  $\mathcal{C}^\infty$ -variedade, cuja dimensão é  $\dim B_{m,n}^k = n \cdot \dim A_m^k = n \cdot N$ .

**Teorema 1.7 ([Go-Gu] p.40.)** Sejam  $X$  e  $Y$   $\mathcal{C}^\infty$ -variedades tais que  $\dim X = m$  e  $\dim Y = n$ . Então  $J^k(X, Y)$  é uma  $\mathcal{C}^\infty$ -variedade de dimensão  $m + n + \dim B_{m,n}^k$  e as aplicações  $\alpha$  e  $\beta$  são submersões  $\mathcal{C}^\infty$ .

Sejam  $X$  e  $Y$  variedades  $\mathcal{C}^\infty$ . Denotamos por  $X^s = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{s \text{ vezes}}$  e definimos:

$$X^{(s)} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in X^s; x_i \neq x_j \text{ para } 1 \leq i < j \leq s \right\}$$

Seja  $\alpha : J^k(X, Y) \rightarrow X$  a aplicação fonte, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha^s : (J^k(X, Y))^s &\longrightarrow X^s \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_s) &\longmapsto \alpha^s(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \end{aligned}$$

da seguinte forma  $\alpha^s(\sigma_1, \dots, \sigma_s) = (\alpha(\sigma_1), \dots, \alpha(\sigma_s)) = (x_1, \dots, x_s)$ .

**Definição 1.8** Seja  $J^k(X, Y)$  a variedade dos  $k$ -jatos de  $X$  em  $Y$ , definimos o **espaço de multi-jatos de ordem  $k$  em  $s$  variáveis**, denotado por  ${}_s J^k(X, Y)$ , como sendo o seguinte subconjunto de  $J^k(X, Y)^s$ :

$${}_s J^k(X, Y) = (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)}), \text{ ou seja}$$

$${}_s J^k(X, Y) = \left\{ (\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in J^k(X, Y)^s; \alpha(\sigma_i) \neq \alpha(\sigma_j), \text{ para todo } i \neq j \right\}.$$

**Observação 1.9** Como  $X^{(s)}$  é aberto em  $X^s$  segue que  ${}_s J^k(X, Y) = (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)})$  é um aberto em  $(J^k(X, Y))^s$ , e portanto uma subvariedade diferenciável.

**Definição 1.10** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação  $\mathcal{C}^r$ , o  **$s$ -multi  $k$ -jato** de  $f$  é a aplicação  ${}_s j^k f : X^{(s)} \rightarrow {}_s J^k(X, Y)$  dada por:

$${}_s j^k f(x_1, \dots, x_s) = (j^k f(x_1), \dots, j^k f(x_s)).$$

### 1.3 A $C^\infty$ -topologia de Whitney

Sejam  $X$  e  $Y$  variedades diferenciáveis. Consideremos  $k$  um número inteiro não negativo e  $\mathcal{U}$  um subconjunto de  $J^k(X, Y)$ . Denotamos por  $M^k(\mathcal{U})$  o seguinte subconjunto de  $C^\infty(X, Y)$ :

$$M^k(\mathcal{U}) = \{f \in C^\infty(X, Y) : j^k f(X) \subseteq \mathcal{U}\}.$$

É fácil ver que  $M^k(\mathcal{U}) \cap M^k(\mathcal{V}) = M^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ .

**Lema 1.11** *A família de subconjuntos  $\{M^k(\mathcal{U})\}$ , onde  $\mathcal{U}$  é um aberto de  $J^k(X, Y)$ , forma uma base para uma topologia em  $C^\infty(X, Y)$ .*

**Definição 1.12** *A topologia introduzida no lema 1.11 é chamada  $C^k$ -topologia de Whitney em  $C^\infty(X, Y)$ , denotada por  $\mathcal{W}_k$ .*

**Definição 1.13** *A  $C^\infty$ -topologia de Whitney em  $C^\infty(X, Y)$  é aquela cuja base é dada por  $\mathcal{W} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{W}_k$*

**Observação 1.14** *A definição dada acima utiliza a noção de  $k$ -jatos e está contextualizada com a seção anterior e com o que veremos a seguir.*

*No entanto, para o nosso caso podemos também utilizar a definição de  $C^\infty$ -topologia de Whitney dada por Hirsch [H].*

Sejam  $M$  e  $N$  variedades de dimensões  $m$  e  $n$ , respectivamente. Dado  $f \in C^r(M, N)$ , consideremos o seguinte aberto

$$\mathcal{U}(f) = \{g \in C^r(M, N); \|D^k(\psi_i f \phi_i)(x) - D^k(\psi_i g \phi_i)(x)\| < \mathcal{E}_i(x)\},$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi &= \{\phi_i, U_i\}_{i \in \Lambda} \text{ é um atlas para a } m\text{-variedade } M, \\ \Psi &= \{\psi_i, V_i\}_{i \in \Lambda} \text{ é um atlas para a } n\text{-variedade } N, \\ K &= \{K_i\}_{i \in \Lambda} \text{ é uma família de compactos em } M, \end{aligned}$$

com  $K_i \subset U_i$ ,  $x \in \phi_i(K_i)$ ,  $g(K_i) \subset V_i$  e  $\mathcal{E}_i : M \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ , para todo  $i$ .

A topologia em  $C^r(M, N)$  que tem por base os abertos como os descritos acima é chamada  $C^r$ -topologia forte (strong) ou  $C^r$ -topologia de Whitney denotada por  $\mathcal{C}_s^r(M, N)$ .

A  $C^\infty$ -topologia de Whitney é a união das topologias induzidas por  $C^\infty(M, N) \rightarrow \mathcal{C}_s^r(M, N)$ .

Uma vez dada uma topologia sobre  $C^\infty(X, Y)$ , podemos falar de conjuntos densos e residuais em  $C^\infty(X, Y)$ .

**Definição 1.15** *Seja  $X$  um espaço topológico, dizemos que*

- i)  $\mathcal{U} \subset X$  é **residual** se, e somente se é possível escrevê-lo como uma interseção enumerável de conjuntos abertos densos, ou seja,  $\mathcal{U} \subset X$  é **residual**  $\Leftrightarrow \mathcal{U} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i$ , onde cada  $X_i$  é aberto em  $X$  e  $\overline{X_i} = X, \forall i$ .*
- ii)  $X$  é um **espaço de Baire** se todo subconjunto residual de  $X$  é denso em  $X$ .*

**Proposição 1.16** ([Go-Gu] p.44.) *Sejam  $X$  e  $Y$  variedades diferenciáveis. Então  $C^\infty(X, Y)$  é um espaço de Baire com a  $C^\infty$ -topologia de Whitney.*

## 1.4 Transversalidade

**Definição 1.17** *Sejam  $X$  e  $Y$  variedades diferenciáveis e  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação diferenciável. Seja  $W$  uma subvariedade de  $Y$  e  $x$  um ponto em  $X$ , dizemos que  $f$  **intersecta  $W$  transversalmente em  $x$**  e denotamos por  $f \bar{\cap} W$  em  $x$  se, e somente se,:*

- i) ou  $f(x) \notin W$ ;*
- ii) ou  $f(x) \in W$  e  $T_{f(x)}Y = T_{f(x)}W + d_x f(T_x X)$ .*

**Exemplo:** Sejam  $X = \mathbb{R} = W$ ,  $Y = \mathbb{R}^2$  e  $f(x) = (x, x^2)$ . Então  $f \bar{\cap} W$  em todo  $x \neq 0$ . A figura 1.1 ilustra este exemplo e ligeiras perturbações que  $f$  pode sofrer de modo que continue transversal a  $W$ .

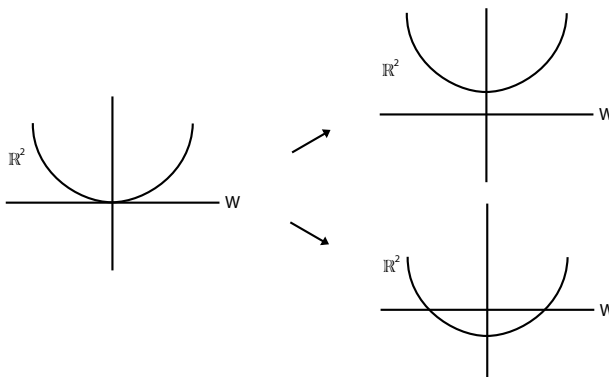


Figura 1.1: Transversalidade

**Definição 1.18** *Sejam  $X$  e  $Y$  variedades diferenciáveis,  $A$  um subconjunto de  $X$  e  $W$  um subconjunto de  $Y$ , dizemos que:*

- i)  $f$  **intersecta  $W$  transversalmente em  $A$** , e denotamos por  $f \bar{\cap} W$  em  $A$  se, e somente se,  $f \bar{\cap} W$  em  $x$ , para cada  $x \in A$ .*

ii)  $f$  *intersecta*  $W$  *transversalmente* se  $f \bar{\cap} X$  em  $X$ .

**Proposição 1.19** ([Go-Gu] p.51.) *Sejam  $X$  e  $Y$  variedades diferenciáveis e  $W$  uma subvariedade de  $Y$ . Suponha  $\dim W + \dim X < \dim Y$ , dada  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação diferenciável, se  $f \bar{\cap} W$  então  $f(X) \cap W = \emptyset$ .*

**Definição 1.20** *Sejam  $M$  uma  $m$ -variedade e  $K$  uma subvariedade de  $M$  de dimensão  $k$ , a *codimensão* de  $K$  em  $M$ , denotada por  $\text{codim}K$ , é o seguinte número:*

$$\text{codim}K = m - k.$$

No caso em que  $\text{codim}K = 1$  dizemos que  $K$  é uma **hipersuperfície** de  $M$ .

**Proposição 1.21** ([Go-Gu] p.52.) *Sejam  $X$  e  $Y$  variedades diferenciáveis,  $W$  uma subvariedade de  $Y$  e  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação diferenciável tal que  $f \bar{\cap} W$ , então  $f^{-1}(W)$  é uma subvariedade de  $X$  de mesma codimensão que  $W$ . Em particular, se  $\dim X = \text{codim}W$ ,  $f^{-1}(W)$  consiste somente de pontos isolados.*

**Teorema 1.22** (Teorema de Transversalidade de Thom, [Go-Gu] p.54.) *Sejam  $X$  e  $Y$  variedades diferenciáveis e  $W$  uma subvariedade de  $J^k(X, Y)$ . Seja  $T_W = \{f \in C^\infty(X, Y) / j^k f \bar{\cap} W\}$ , então  $T_W$  é um subconjunto residual em  $C^\infty(X, Y)$  com a  $C^\infty$ -topologia de Whitney. Além disso, se  $W$  é fechado, então  $T_W$  é aberto.*

**Teorema 1.23** (Teorema de Transversalidade para Multi-jatos, [Go-Gu] p.57.) *Sejam  $X$  e  $Y$  variedades diferenciáveis e  $W$  uma subvariedade de  ${}_s J^k(X, Y)$ . Seja  $T_W = \{f \in C^\infty(X, Y) / {}_s j^k f \bar{\cap} W\}$ , então  $T_W$  é um subconjunto residual em  $C^\infty(X, Y)$  com a  $C^\infty$ -topologia de Whitney. Além disso, se  $W$  é compacta, então  $T_W$  é aberto.*

## 1.5 Aplicações Estáveis

**Definição 1.24** *Sejam  $f, g \in C^\infty(X, Y)$ , com  $X$  e  $Y$  variedades diferenciáveis. Dizemos que  $f$  é  **$\mathcal{A}$ -equivalente a  $g$** ,  $f \sim_{\mathcal{A}} g$ , se existem  $\phi : X \rightarrow X$  e  $\psi : Y \rightarrow Y$  difeomorfismos tais que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

**Definição 1.25** *Dizemos que  $f \in C^\infty(X, Y)$  é  **$\mathcal{A}$ -estável** se existe  $W$  vizinhança de  $f$  em  $C^\infty(X, Y)$  com a  $C^\infty$ -topologia de Whitney tal que  $f \sim_{\mathcal{A}} f' \forall f' \in W$ .*

**Notação:** Vamos denotar por  $\mathcal{E}(X, Y)$  o subconjunto de  $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$  das aplicações estáveis de  $X$  em  $Y$ .

No livro de Topologia Diferencial de Golubitsky e Guillemin (veja [Go-Gu]) encontramos exemplos de aplicações estáveis dos quais destacamos os seguintes: **Exemplos:**

- 1) Todas as submersões são estáveis.
  - 2)  $f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$  e  $X$  compacto então os mergulhos são aplicações estáveis.
  - 3)  $f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$ ,  $X$  compacto, e  $\dim Y \geq 2 \dim X + 1$   
 $f$  é estável  $\Leftrightarrow f$  é um mergulho.
- 3') Nós são mergulhos de  $S^1$  em  $\mathbb{R}^3$ , portanto são exemplos de aplicações estáveis. De fato,  $S^1$  é compacto e  $\dim S^1 = 1$  além disso  $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = 2 \cdot 1 + 1$ . Na figura 1.2 estão representados alguns nós em  $\mathbb{R}^3$ .

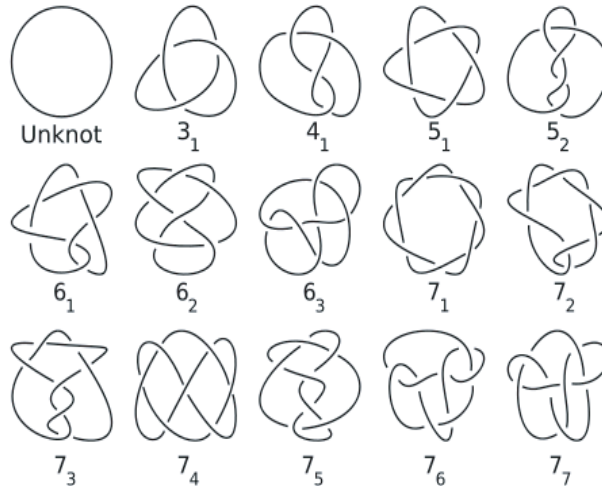


Figura 1.2: Os nós são aplicações estáveis em  $\mathbb{R}^3$

A figura 1.2 ilustra nós em  $\mathbb{R}^3$  com até 7 “cruzamentos”. A notação indicada na figura se deve a J. W. Alexander e G. Briggs em um artigo de 1927 onde o número indica o número de “cruzamentos” que o nó possui e o índice denota todos os nós com essa quantidade de cruzamentos.

**Observação 1.26** *O subconjunto das aplicações estáveis em um determinado conjunto de aplicações nem sempre é denso (no conjunto das aplicações). Em [Go-Gu] encontramos condições para assegurar quando o conjunto  $\mathcal{E}(X, Y)$  é denso em  $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$  das quais destacamos o seguinte caso:*

*Sejam  $X$  uma  $m$ -variedade e  $Y$  uma  $n$ -variedade, se  $q = n - m$  é tal que  $0 \leq q \leq 3$  e  $n < 7q + 9$ , então  $\mathcal{E}(X, Y)$  é denso em  $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ .*



As aplicações estáveis consideradas neste trabalho são aplicações estáveis, imersões, de  $S^1$  em uma 3-variedade  $M$ . Portanto, pela observação acima, o subconjunto formado por tais imersões é denso no conjunto das imersões de  $S^1$  em  $M$ .

## 1.6 Discriminante

Neste trabalho vamos utilizar a Teoria de Vassiliev para estudar as frentes de ondas planas, nesta teoria a ferramenta principal para o estudo de invariantes topológicos é a estrutura do discriminante, a grosso modo o discriminante de uma variedade  $M$  é uma subvariedade  $N$  de  $M$  que satisfaz uma determinada propriedade.

**Definição 1.27** *O discriminante da variedade  $C^\infty(X, Y)$ , denotado por  $\Delta$ , é o subconjunto das aplicações em  $C^\infty(X, Y)$  não estáveis.*

Para entendermos um pouco como pode ser definido um discriminante consideremos o seguinte caso:

O discriminante de  $H^2(2)$ , o espaço dos polinômios homogêneos de grau dois em duas variáveis, ou seja,

$$H^2(2) = \{f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2; a, b \in \mathbb{R}\},$$

é o conjunto:

$$\Delta = \{f(x, y) \in H^2(2); f \text{ admite raízes múltiplas}\}.$$

Note que  $f$  admite raízes múltiplas se, e somente se,  $b^2 = ac$ . Se identificamos cada polinômio com o ponto  $(a, b, c)$  dos seus coeficientes em  $\mathbb{R}^3$  teremos que o discriminante  $\Delta$  é o cone representado na figura 1.3.

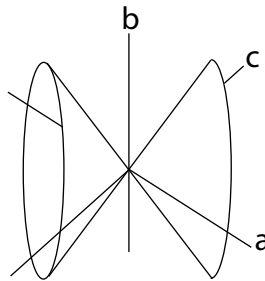


Figura 1.3: Cone  $b^2 = ac$

Na parte interna limitada pelo cone estão os polinômios que possuem duas raízes complexas conjugadas enquanto que na parte externa estão aqueles que possuem duas raízes reais distintas. Do ponto de vista de formas quadráticas com 2 variáveis, dentro do cone, do lado direito, se encontram as definidas positivas, do lado esquerdo, as definidas negativas e do lado de fora as semi-definidas. Os pontos regulares do cone são os da forma de posto 1 e o vértice a forma nula de posto zero.

**Observação 1.28** *Já comentamos que as curvas tratadas neste trabalho são aplicações estáveis de  $S^1$  em uma 3-variedade  $M$ , as aplicações não estáveis de  $S^1$  em  $M$  são aquelas que possuem apenas um dos eventos: auto-tangência, pontos triplos, tangência com cúspide ou nascimento de cúspides.*

**Exemplos:**

- 1) Em  $\mathcal{C}^\infty(S^1, M)$  o discriminante é dado por:

$$\Delta = \{f \in \mathcal{C}^\infty(S^1, M); f \text{ possui algum dos eventos citados na observação 1.28.}\}$$

- 2) Em  $\mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}^3)$ , a subvariedade  $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}^3); f \text{ é um nó em } \mathbb{R}^3\}$  é o complementar do discriminante, isto é,  $\mathcal{N} = \mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}^3) \setminus \Delta$ .

**Observações:**

- 1) O discriminante pode ser visto como o complementar das aplicações estáveis em cada caso.
- 2) Existem critérios para determinar as aplicações estáveis a priori.

**Observação 1.29** *Ao se estratificar um espaço obtemos estratos de diferentes codimensões.*

Como observamos nos exemplos anteriores o discriminante deve incluir todos aqueles elementos do espaço com um certo grau de degeneração, dessa forma faz sentido estratificar o discriminante segundo o grau de degeneração (no caso das formas quadráticas o grau de degeneração é o coposto da forma, enquanto no caso que estudamos será a codimensão e a classe da singularidade). Para obtermos informações topológicas a respeito do complementar do discriminante é importante saber como estão dispostos os estratos do discriminante entre si. Usaremos a linguagem de jatos introduzida na seção 1.2 para identificar quais elementos estarão no discriminante e em estratos de quais codimensões.

Como estamos estudando as aplicações estáveis  $f$  de  $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ , consideramos sua extensão em multijatos:

$$\begin{aligned} {}_s j^k f : X^{(s)} &\longrightarrow {}_s J^k(X, Y) \\ (x_1, \dots, x_s) &\longmapsto \left( x_1, f(x_1), \frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial x^\alpha}(x_1), \dots, x_s, f(x_s), \frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial x^\alpha}(x_s) \right). \end{aligned}$$

Precisamos saber se as singularidades são da forma genérica e para tanto devemos ter em mente:

O tipo de singularidade que estamos estudando é traduzido por equações sobre as componentes  $(a_1, b_1, \dots, a_s, b_s, \dots)$  de  ${}_s J^k(X, Y)$ . Notemos que dependendo do número

de equações, definimos uma subvariedade algébrica  $S$  em  ${}_s J^k(X, Y)$ , onde estamos trabalhando com uma singularidade multilocal, de codimensão igual ao número de equações linearmente independentes.

Uma aplicação  $f$  terá singularidades do tipo exigido se, e somente se,  ${}_s j^k f(X^{(s)}) \cap S \neq \emptyset$ . Por outro lado, é fácil verificar que  $\dim X^{(s)} < \text{cod}_{{}_s J^k(X, Y)}(S)$ . Assim aplicando a Proposição 1.19 a  ${}_s j^k f : X^{(s)} \rightarrow {}_s J^k(X, Y)$  e a subvariedade  $S$  temos que

$$j^k f \bar{\cap} S \text{ se, e somente se, } {}_s j^k f(X^{(s)}) \cap S = \emptyset.$$

Pelo Teorema de Transversalidade para multijatos,  $T_S = \{f \in C^\infty(X, Y); {}_s j^k f \bar{\cap} S\}$  é denso em  $C^\infty(X, Y)$  e além disso  $T_S = \{f \in C^\infty(X, Y); {}_s j^k f(X^{(s)}) \cap S = \emptyset\}$ . Sendo assim, tais aplicações não terão esse tipo de singularidade, ou em linguagem de jatos, uma  $f$  genérica satisfaz  ${}_s j^k f(X^{(s)}) \cap S = \emptyset$ . Isto quer dizer que as aplicações com esse tipo de singularidade estão no discriminante.

Para as aplicações que estão no discriminante cujas singularidades não são determinadas de forma genérica, podemos estratificá-las ou subdividi-las dependendo do grau de degeneração ou da codimensão. A seguir explicaremos como é feito este procedimento:

Primeiro, construímos uma família de aplicações com parâmetros suficientes tais que  $\dim X^{(s)} + \dim U = \text{cod}_{{}_s J^k(X, Y)}(S)$ , onde  $U$  é o espaço dos parâmetros, então obtemos que  ${}_s j^k F(X^{(s)} \times U) \cap S \neq \emptyset$  onde  $F$  define uma família genérica a  $\dim U$ -parâmetros:

$$\begin{aligned} j_s^k F : X^{(s)} \times U &\longrightarrow J_s^k(X, Y) \\ (x_1, \dots, x_s, u) &\longmapsto \left( x_1, F_u(x_1), \frac{\partial^{|\alpha|} F_{u_i}}{\partial x^\alpha}(x_1), \dots, x_s, F_u(x_s), \frac{\partial^{|\alpha|} F_{u_i}}{\partial x^\alpha}(x_s) \right) \end{aligned}$$

isto é,  $\exists u \in U$  tal que  $F_u$  possui a singularidade exigida. Deste modo determinamos o número mínimo de parâmetros necessários para que em uma família genérica com esse número de parâmetros contenha ao menos uma aplicação com esse tipo de singularidade. Este número é o que chamaremos **codimensão da singularidade** (quer dizer que essa singularidade só produz famílias a esse número de parâmetros) e o que nos dará o grau de degeneração do elemento do discriminante. A nomenclatura acima se deve ao fato de que este número também é a codimensão do subconjunto ou estrato de todas as aplicações que possuem essa singularidade no espaço  $C^\infty(X, Y)$ .

Vamos exemplificar a descrição acima analisando tipos de singularidades de curvas planas, antes porém vamos definir tais singularidades:

**Definição 1.30** *Uma curva plana  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  possui uma **auto-tangência** se, e somente se, existem  $t_0, t_1 \in I$ , com  $t_0 \neq t_1$  tais que  $\alpha(t_0) = \alpha(t_1)$  e  $\alpha'(t_0) = c\alpha'(t_1)$ , ou seja, se pontos distintos do domínio possuem a mesma imagem e além disso os vetores tangentes possuem a mesma direção neste ponto.*

**Definição 1.31** *Uma curva plana  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  possui um **ponto triplo** se, e somente se, existem  $t_1, t_2, t_3 \in I$ , dois a dois distintos tais que  $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = \alpha(t_3)$ .*

**Definição 1.32** *Uma curva plana  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  possui uma **tangência com cúspide** se, e somente se, existem  $t_0, t_1 \in I$ , com  $t_0 \neq t_1$  tais que  $\alpha(t_0) = \alpha(t_1)$  e não existe algum dos vetores tangentes neste ponto.*

**Exemplos:** Sejam  $\mathcal{C}^\infty(S^1, M)$  e  $\mathcal{M}$  como no exemplo 1.6. Vamos denotar o discriminante por

$$\Delta = \Delta_K \cup \Delta_{St} \cup \Delta_\Pi \cup \Delta_\lambda,$$

onde  $\Delta_X$  é o conjunto de imersões com somente um tipo de singularidade. Se  $X = K$  então a singularidade que a imersão possui é a auto-tangências,  $St$  denota as imersões cujas singularidades são os pontos triplos,  $\Pi$  as imersões com singularidades do tipo tangências com cúspides e  $\lambda$  denota as imersões cujas singularidades são os nascimentos de cúspides.

1) Consideremos  $\gamma \in \Delta_K$ , segue daí que a extensão 1-jato de sua projeção  $\gamma_F$ :

$$\begin{aligned} {}_2j^1\gamma_F : S^1 \times S^1 &\longrightarrow {}_2J^1(S^1, \mathbb{R}^2) \simeq S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ (s, t) &\longmapsto (s, t, \gamma_F(s), \gamma_F(t), \gamma'_F(s), \gamma'_F(t)) \end{aligned}$$

verifica: existe  $(s, t) \in S^1 \times S^1$  tal que

$$\begin{cases} \gamma_F(s) = \gamma_F(t) \\ \gamma'_{F_1}(s)\gamma'_{F_2}(t) = \gamma'_{F_1}(t)\gamma'_{F_2}(s), \end{cases}$$

onde  $(\gamma'_{F_1}, \gamma'_{F_2})$  são as funções coordenadas de  $\gamma'_F$ .

Se as coordenadas em  ${}_2J^1(S^1, \mathbb{R}^2)$  são  $(x, y, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2)$ , estas equações definem um subespaço  $W$  de codimensão 3 em  ${}_2J^1(S^1, \mathbb{R}^2)$ , formado por todos os pontos tais que  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$  e  $c_1d_2 = c_2d_1$ .

Se tomamos uma função genérica  $\delta \in \mathcal{C}^\infty(S^1, M)$ , pelo Teorema de Transversalidade de Thom e usando a Proposição 1.19, temos

$${}_2j^1\delta_F \bar{\cap} W \iff {}_2j^1\delta_F(S^1 \times S^1) \cap W = \emptyset.$$

Como  $g \in \Delta_K$  se, e somente se,  ${}_2j^1\delta_F(S^1 \times S^1) \cap W \neq \emptyset$ , segue que pertencer a  $\Delta_K$  não é uma propriedade genérica. Por isso, tomamos uma família genérica a 1-parâmetro

$$\begin{aligned} {}_2j^1G : S^1 \times S^1 \times S^1 &\longrightarrow {}_2J^1(S^1, \mathbb{R}^2) \\ (s, t, u) &\longmapsto (s, t, G_u(s), G_u(t), G'_u(s), G'_u(t)) \end{aligned} ,$$

de modo que  ${}_2j^1G$  cortará  $W$  em pontos isolados, isto é, existirá  $u \in \mathbb{R}$  tal que  $G_u \in \Delta_K$ . Portanto,  $\text{codim } \Delta_K = 1$ .

2) Consideremos  $\gamma \in \Delta_{St}$ , segue daí que a extensão 0-jato de sua projeção frontal  $\gamma_F$ :

$$\begin{aligned} {}_3j^1\gamma_F : S^1 \times S^1 \times S^1 &\longrightarrow {}_2J^1(S^1, \mathbb{R}^2) \simeq S^1 \times S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ (s, t, w) &\longmapsto (s, t, w, \gamma_F(s), \gamma_F(t), \gamma_F(w)) \end{aligned}$$

verifica: existe  $(s, t, w) \in S^1 \times S^1 \times S^1$  tal que

$$\gamma_F(s) = \gamma_F(t) = \gamma_F(w)$$

Se as coordenadas em  ${}_3J^1(S^1, \mathbb{R}^2)$  são  $(x, y, z, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$ , estas equações definem um subespaço  $W$  de codimensão 4 em  ${}_2J^1(S^1, \mathbb{R}^2)$ , formado por todos os pontos tais que  $a_1 = b_1 = c_1$  e  $a_2 = b_2 = c_2$ .

Se tomamos uma função genérica  $\delta \in C^\infty(S^1, M)$ , pelo Teorema de Transversalidade de Thom e usando a Proposição 1.19, temos

$${}_3j^1\delta_F \bar{\cap} W \iff {}_3j^1\delta_F(S^1 \times S^1) \cap W = \emptyset.$$

Como  $g \in \Delta_K$  se, e somente se,  ${}_3j^1\delta_F(S^1 \times S^1) \cap W \neq \emptyset$ , segue que pertencer a  $\Delta_{St}$  não é uma propriedade genérica. Por isso, tomamos uma família genérica a 1-parâmetro

$${}_3j^0H : \begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 & \longrightarrow & {}_3J^0(S^1, \mathbb{R}^2) \\ (s, t, w, u) & \longmapsto & (s, t, w, H_u(s), H_u(t), H_u(w)) \end{array},$$

de modo que  ${}_3j^0F$  cortará  $S$  em pontos isolados, isto é, existirá  $u \in \mathbb{R}$  tal que  $F_u \in \Delta_{St}$ . Portanto,  $\text{codim } \Delta_{St} = 1$ .

**Observação 1.33** *Nas definições 1.30 a 1.32 apresentamos singularidades de forma analítica, no entanto para o caso que vamos estudar aqui nem sempre será possível tal procedimento.*

*As curvas planas que vamos estudar são projeções de imersões de  $S^1$  em uma 3-variedade, aqui ocorre um tipo de singularidade que só podemos indicar geometricamente, a saber, o nascimento de duas cúspides como mostra a figura abaixo:*

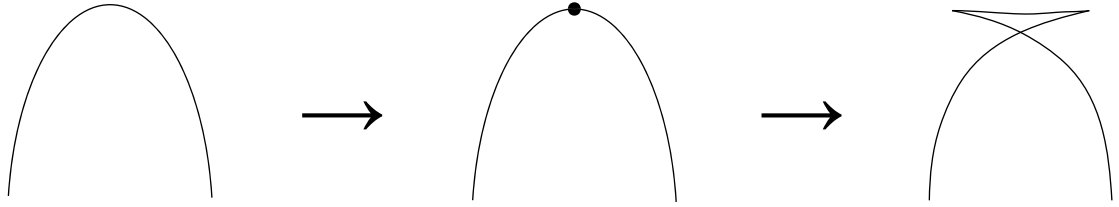


Figura 1.4: Nascimento de duas cúspides

## Capítulo 2

# O Espaço das Curvas Legendreanas

O presente capítulo tem como objetivo principal apresentar as curvas legendreanas que serão responsáveis pelo desenvolvimento do principal assunto desta dissertação que são os invariantes das frentes de ondas planas. Para tanto, necessitamos de noções de elementos de contato.

Os resultados aqui apresentados não serão demonstrados pois fogem do objetivo principal da dissertação. Para tais demonstrações veja [Ge1] e [Ge2].

Além disso veremos neste capítulo a definição de frentes de ondas planas, antes porém, vejamos uma noção geométrica de tais curvas planas:

As frentes de ondas planas formam uma classe de curvas fechadas no plano que possuem certos tipos de singularidades. Vamos pensar no seguinte exemplo: Suponhamos que a propagação de ondas em uma lagoa (ou ainda a propagação de luz ou do som) se dê com velocidade constante e que em um determinado instante, se pensarmos na lagoa como um plano, as ondas configurem elipses que se encaminham de fora para dentro, ou seja, na direção dos vetores normais internos da elipse inicial. (veja figura 2.1).

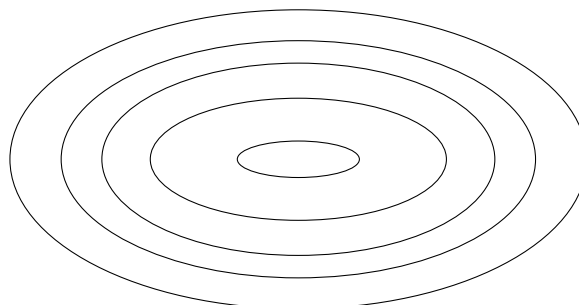


Figura 2.1: Propagação de onda

A partir de um determinado instante  $t$  o que veremos não serão mais as elipses e sim algumas curvas com pares de cúspides, como mostra a figura abaixo.

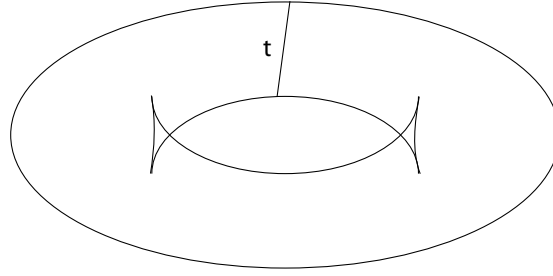


Figura 2.2: Frente de onda no instante  $t$

Estas cúspides serão estáveis: se nós mexemos suavemente a frente de onda original (a elipse), as singularidades não irão desaparecer mas vão apenas se deslocar ligeiramente.

A frente de onda genérica na vizinhança do ponto de cúspide deve, por uma mudança de coordenadas, ser reduzida a “forma canônica normal”  $x^2 = y^3$ . Esta frente não possuirá nenhuma singularidade no plano além das cúspides e dos pontos duplos transversais obtidos por dois ramos. Qualquer outra singularidade mais complicada se reduz nestes dois tipos de singularidade quando a frente de onda inicial é transformada por uma pequena perturbação global.

## 2.1 O espaço dos elementos de contato

**Definição 2.1** Um *elemento de contato* em  $\mathbb{R}^n$  é um hiperplano passando por um ponto  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z)$  definido pela equação:

$$dz - \sum_{i=1}^{n-1} p_i dx_i = 0$$

onde  $p_i$  são números reais. O **conjunto dos elementos de contato** pode ser identificado com  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^{2n-1}$  utilizando as coordenadas  $(x_1, \dots, x_{n-1}, z, p_1, \dots, p_{n-1})$ .

**Observação 2.2** O elemento de contato divide o espaço  $\mathbb{R}^n$  em dois semi-espacos. A escolha de um destes dois semi-espacos é o que chamamos **co-orientação** do elemento de contato. Ou seja, escolhendo um dos dois semi-espacos podemos dizer que os elementos de contato estão **co-orientados**.

**Exemplo:** Um elemento de contato do plano orientado  $\mathbb{R}^2$  em algum ponto  $p_0 \in \mathbb{R}^2$  é simplesmente uma reta orientada passando pelo ponto  $p_0$ . Esta reta é unicamente determinada por  $p_0$  e por um ângulo  $\theta_0$ . Podemos pensar neste ângulo  $\theta_0$  como um elemento do círculo  $S^1$ , e assim o espaço dos elementos de contato de  $\mathbb{R}^2$  pode ser identificado com o produto  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ .

Notemos que para este caso particular, a reta divide o plano  $\mathbb{R}^2$  em dois semi-planos. Um destes contem o ângulo que é a inclinação da reta e o outro contem o suplementar deste ângulo. Desta forma, a co-orientação do elemento de contato será definida pela escolha de um destes ângulos.

Sejam  $\partial_x$  e  $\partial_y$  vetores unitários nas direções coordenadas de  $\mathbb{R}^2$  em um dado ponto  $(x_0, y_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$ . Tais vetores podem ser vistos como vetores tangentes das curvas

$$x \mapsto (x_0 + x, y_0, \theta_0),$$

$$y \mapsto (x_0, y_0 + y, \theta_0).$$

De maneira análoga, podemos falar do vetor tangente  $\partial_\theta$  da curva

$$\theta \mapsto (x_0, y_0, \theta_0 + \theta).$$

Podemos ver na figura 2.3, onde  $\theta$  é medido ao longo de um eixo real, que isto é apenas o vetor unitário na direção da coordenada  $\theta$ .

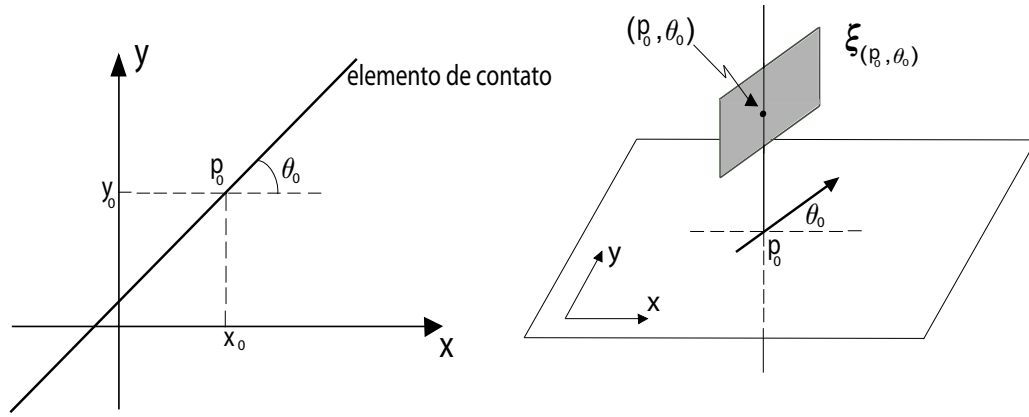


Figura 2.3: Espaço dos elementos de contato do plano

Um plano de contato, denotado por  $\xi_{(p_0, \theta_0)}$ , em um ponto  $(p_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$  será o plano gerado pelos vetores

$$(\partial_\theta, \cos \theta_0 \partial_x + \sin \theta_0 \partial_y).$$

Note que para cada ponto  $(p_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$  temos um “pedaço” de plano em  $\mathbb{R}^3$ , que pode ser um disco ou um retângulo.

**Definição 2.3** *Seja  $M$  uma variedade  $C^k$  de dimensão  $n$  e  $T_p M$  a notação para o plano tangente a um ponto  $p$  de  $M$ . Assim, o **fibrado tangente** da variedade  $M$  é a união de todos os espaços tangentes em cada ponto da variedade  $M$ , ou seja,*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

**Definição 2.4** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Um **campo de planos**  $\xi$  em  $M$  é um subconjunto do fibrado tangente  $TM$  tal que  $\xi_p = T_p M \cap \xi$  é um subespaço bidimensional de  $T_p M$  para cada  $p \in M$ .*

**Exemplos:**



- 1) Considere a 3-variedade  $M = \Sigma \times S^1$ , onde  $\Sigma$  é uma superfície. Então para cada  $p = (x, \theta) \in \Sigma \times S^1$  seja  $\xi_p = T_x \Sigma \subset T_p M$ . Segue que  $\xi_p$  é um campo de planos em  $M$ .
- 2) Seja  $\alpha$  uma 1-forma diferenciável em  $N$ , onde  $N$  é uma 3-variedade dada. Para cada ponto  $p \in N$  temos uma aplicação linear

$$\alpha_p : T_p N \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Assim,  $\ker \alpha$  é ou um plano ou todo  $T_p N$ . Se supomos que a aplicação nunca tem como núcleo todo  $T_p N$ , segue que  $\xi = \ker \alpha$  é um campo de planos.

Na verdade, localmente, sempre é possível representar um campo de planos como o núcleo de uma 1-forma diferenciável.

**Definição 2.5** *Seja  $\xi$  um campo de planos definido como o núcleo de uma 1-forma diferenciável  $\alpha$ ,  $\xi$  é chamado uma **estrutura de contato** se, e somente se,  $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ . Diremos que a estrutura de contato é **positiva** se, e somente se,  $\alpha \wedge d\alpha > 0$ . É **negativa**, caso contrário.*

Notemos que o exemplo 1 não se trata de uma estrutura de contato. De fato, o campo de planos é definido pela 1-forma  $\alpha = d\theta$  e assim  $d\alpha = d(d\theta) = 0$ .

**Exemplo:** Notemos do exemplo 2.1 que se tomamos todos os elementos de contato no plano teremos um campo de planos em  $\mathbb{R}^3$ , que denotaremos simplesmente por  $\xi$ , e definiremos como o núcleo da 1-forma diferenciável

$$\omega = \cos \theta dx + \sin \theta dy.$$

Além disso, este campo de planos é uma estrutura de contato. De fato,  $d\omega = -\sin \theta d\theta \wedge dx + \cos \theta d\theta \wedge dy$  e assim,

$$\begin{aligned} \omega \wedge d\omega &= -\sin^2 \theta d\theta \wedge dx \wedge dy + \cos^2 \theta d\theta \wedge dy \wedge dx \\ &= \sin^2 \theta d\theta \wedge dy \wedge dx + \cos^2 \theta d\theta \wedge dy \wedge dx \\ &= d\theta \wedge dy \wedge dx \neq 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, se fazemos  $M = \mathbb{R}^2 \times S^1$ , segue que  $(M, \xi)$  é uma variedade de contato do plano  $\mathbb{R}^2$ , onde os elementos de contato co-orientados  $(x, y, \theta(\text{mod } 2\pi)) \in M$  estão identificados com a reta de  $\mathbb{R}^2$  passando por  $(x, y)$  com vetor normal  $\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$ .

Existem diversas estruturas de contato que podem ser definidas em uma variedade de dimensão 3, estas estruturas são divididas nas chamadas *estruturas de contato super-torcidas* e as *estruturas de contato tensas*. Sabemos que as estruturas de contato tensas fornecem informações ininteressantes quando estudadas juntamente com os nós.

**Observação 2.6** 1) *Quando a estrutura de contato é positiva dizemos que os elementos de contato estão **co-orientados positivamente**.*

2) Uma variedade diferenciável  $M$  munida de uma estrutura de contato é chamada uma **variedade de contato**.

Como podemos definir diversas estruturas de contato em uma mesma variedade e podemos também definir a mesma estrutura de contato em variedades diferentes, vejamos a seguinte definição:

**Definição 2.7** Duas variedades de contato  $(M_1, \xi_1)$  e  $(M_2, \xi_2)$  são ditas **contactomorfas** se existe um difeomorfismo  $f : M_1 \rightarrow M_2$  com  $Tf(\xi_1) = \xi_2$  onde  $Tf : TM_1 \rightarrow TM_2$  denota a aplicação derivada de  $f$ . Neste caso  $f$  é chamado um **contactomorfismo**.

**Teorema 2.8 (Darboux)** Seja  $\alpha$  uma forma de contato em uma variedade  $M$  de dimensão  $(2n + 1)$  e  $p$  um ponto em  $M$ . Então existem coordenadas  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z$  em uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  tal que

$$\alpha|_U = dz + \sum_{j=1}^n x_j dy_j.$$

Este teorema nos diz que todo ponto em uma variedade tem uma vizinhança contactomorfa a estrutura de contato definida inicialmente nesta seção. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [Ge3].

## 2.2 O Espaço das Curvas Legendreanas

Uma estrutura de contato em uma variedade de dimensão 3, determina duas classes de curvas, *as legendreanas e as transversais*. Nesta dissertação estaremos interessados apenas nas curvas legendreanas.

Ao longo de toda esta seção, vamos usar a variedade de contato  $(M, \xi)$  com  $\xi = dz - ydx$ , pelo que observamos no final da seção anterior.

**Definição 2.9** Seja  $\gamma : S^1 \rightarrow M$  uma imersão. Dizemos que  $\gamma$  é uma **curva legendreana** se ela é tangente aos planos da estrutura de contato  $(M, \xi)$ , isto é,

$$T_{\gamma(s)}M \subset \xi_{\gamma(s)} \text{ para todo } s \in S^1.$$

Usaremos a letra grega  $\Omega$  para designar o espaço das curvas legendreanas, ou seja,  $\Omega = \{\gamma : S^1 \rightarrow M / T_{\gamma(s)}M \subset \xi_{\gamma(s)} \text{ para todo } s \in S^1\}$ . Diremos que  $\Omega$  é o espaço das **L-imersões**.

**Definição 2.10** Uma curva legendreana fechada é dita **orientada** se o círculo de sua pré-imagem é orientado.

**Definição 2.11** Uma curva legendreana é dita **co-orientada** se os elementos de contato ao longo da mesma são co-orientados.

Consideramos ao longo deste trabalho as curvas legendreanas orientadas e co-orientadas salvo menção contrária.

**Definição 2.12** *Sejam  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$  curvas legendreanas em  $\Omega$ . Dizemos que  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$  são **legendre-homotópicas** se existe uma família diferenciável a 1-parâmetro*

$$\begin{aligned} \Phi : [0, 1] \times S^1 &\longrightarrow (\mathbb{R}^3, \xi) \\ (t, s) &\longmapsto \Phi(t, s) = \gamma_t(s) \end{aligned}$$

onde  $\gamma_t \in \Omega$  e  $\gamma_0 = \gamma$  e  $\gamma_1 = \bar{\gamma}$ .

**Definição 2.13** *Se uma curva legendreana é um mergulho, então ela é chamada **nó legendreano**.*

**Definição 2.14** *Dados  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  nós legendreanos, dizemos que  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são **isotopicamente equivalentes** se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  podem ser conectados por um caminho diferenciável de nós legendreanos.*

*A classe de isotopia legendreana de um nó legendreano é chamada **tipo de nó legendreano**.*

Observemos que o espaço  $\Omega$  é um espaço demasiado abstrato, portanto verificar que um caminho existe parece um trabalho muito difícil. Dessa forma, buscaremos uma maneira alternativa de determinar estas equivalências. Dada uma curva legendreana podemos definir dois números inteiros que nos ajudarão na classificação de tais imersões (ou mergulhos).

**Definição 2.15** *Sejam  $\gamma : S^1 \longrightarrow M$  uma imersão legendreana e  $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \times S^1 \longrightarrow S^1$  a projeção da variedade  $M$  na segunda coordenada  $S^1$ . Consideremos a seguinte aplicação*

$$\begin{aligned} g_1 = \pi_2 \circ \gamma : S^1 &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto g_1(t) = \pi_2 \circ (\gamma * u)(t) \end{aligned}$$

onde  $u$  é o campo de vetores tangentes orientando o círculo de tal modo que  $\gamma * u$  é unitário, o **índice da curva legendreana**  $\gamma$ , denotado por  $i(\gamma)$ , é definido como sendo o grau da aplicação  $g_1$ , onde  $g_1$  é vista como uma aplicação de Gauss e o grau é visto como o número de voltas de  $g_1(S^1)$  em  $S^1$ .

**Definição 2.16** *Sejam  $\gamma : S^1 \longrightarrow M$  uma curva legendreana e  $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \times S^1 \longrightarrow S^1$  a projeção da variedade  $M$  na segunda coordenada  $S^1$ . Consideremos a seguinte aplicação*

$$\begin{aligned} g_2 = \pi_2 \circ \gamma : S^1 &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto g_2(t) = \pi_2 \circ (\gamma * v)(t) \end{aligned}$$

onde  $v$  é o campo de vetores normais co-orientando os elementos de contato de tal modo que  $\gamma * v$  é unitário, o **índice de Maslov da curva legendreana**  $\gamma$ , denotado por  $\mu(\gamma)$ , é definido como sendo **duas vezes** o grau da aplicação  $g_2$ , onde  $g_2$  é vista como uma aplicação de Gauss e o grau é visto como o número de voltas de  $g_2(S^1)$  em  $S^1$ .

**Teorema 2.17 (Gromov-[L])** *Duas curvas legendreanas são homotopicamente equivalentes se, e somente se, elas possuem o mesmo índice  $i$  e o mesmo índice de Maslov  $\mu$ . Ou seja, dadas  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$  em  $\Omega$ ,  $\gamma \stackrel{h.e.}{\sim} \bar{\gamma}$  se, e somente se,  $i(\gamma) = i(\bar{\gamma})$  e  $\mu(\gamma) = \mu(\bar{\gamma})$ .*

A próxima definição é imprescindível para que possamos posteriormente definir os invariantes de frentes de ondas planas.

**Definição 2.18** *Seja  $\gamma : S^1 \rightarrow M$  uma curva legendreana, dado um ponto  $t_0 \in S^1$ , tomaremos um elemento de contato  $(x_0, y_0, \theta_0) \in M$  tal que  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, \theta_0)$  estamos “marcando” a curva legendreana a partir deste ponto. Assim, chamaremos uma imersão do círculo  $S^1$  em  $M$  com a imagem de um ponto escolhido sendo um elemento de contato também escolhido de  $L$ -imersão **marcada**. Usaremos a notação  $\Omega_{i,\mu}^0$  para denotar o espaço das  $L$ -imersões marcadas com índices  $i$  e  $\mu$ .*

**Observação 2.19** *Consideremos*

$G_3 = \{\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \sigma \text{ é um movimento no plano Euclidiano}\}$ , ou seja,  $G_3$  é o conjunto das isometrias planas que são dadas por composições de até três reflexões.

O grupo  $G_3$  age sem pontos fixos no espaço das  $L$ -imersões de modo que dada uma  $L$ -imersão marcada no espaço  $\Omega_{i,\mu}^0$  e fazendo o grupo  $G_3$  agir sobre esta imersão teremos todas as imersões do espaço  $\Omega_{i,\mu}$ . Ou seja, o espaço  $\Omega_{i,\mu}$  é homeomorfo ao produto direto  $\Omega_{i,\mu}^0 \times G_3$ .

## 2.3 Frentes de Ondas Planas

Na seção anterior vimos que os nós legendreanos são uma classe de nós topológicos em  $\mathbb{R} \times S^1$  que são tangentes a uma estrutura de contato.

*Quais serão então as propriedades desta classe de nós?*

Faremos um estudo dos nós legendreanos assim como o que é feito tradicionalmente para o estudo de nós topológicos, ou seja, em termos de suas projeções em um plano, isto será feito em termos das projeções frontais. Veremos que com essa projeção seremos capazes de dizer se a mesma representa ou não um nó legendreano e além disso recuperar o nó a partir desta projeção.

**Definição 2.20** *Uma **frente de onda plana**, ou simplesmente uma **frente de onda**, é uma aplicação  $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de um círculo no plano, tal que a diferencial é injetiva exceto em pontos isolados onde estão definidas retas tangentes. A imagem de uma frente de onda é chamada **traço**.*

**Definição 2.21** *Sejam  $\gamma : S^1 \rightarrow M$  um nó legendreano e  $\pi_1 : M = \mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a projeção no fator  $\mathbb{R}^2$  de  $M$ . A aplicação composta  $\pi_1 \circ \gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , denotada por  $\gamma_F$ , é chamada **projeção frontal** do nó legendreano  $\gamma$ . (Veja figura 2.4)*

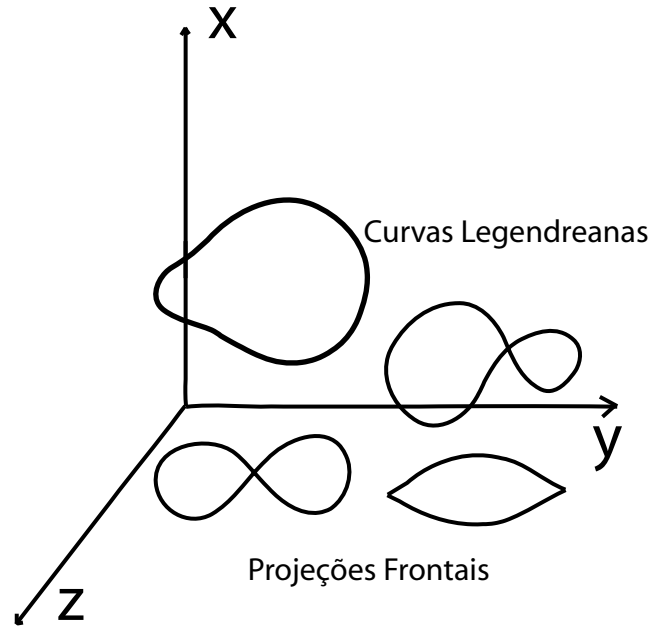


Figura 2.4: Curvas legendreanas e suas projeções frontais.

**Observação 2.22** *Uma frente de onda plana pode ser vista como a projeção frontal de um nó legendreano. Isto significa que dado um nó legendreano temos uma frente de onda associada a ele e vice versa, dada uma frente de onda existe um nó legendreano cuja projeção frontal é a frente de onda dada.*

**Observação 2.23** *Consideremos a estrutura de contato obtida como o núcleo da 1-forma diferenciável  $\omega = dz - xdy$ . Mostremos como é possível recuperar um nó legendreano a partir de uma frente de onda dada. Consideremos*

$$\begin{aligned} \alpha : S^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \alpha(s) = (x(s), y(s)) \end{aligned}$$

*uma frente de onda plana. Podemos encontrar uma curva legendreana  $\gamma$  a partir da frente de onda  $\alpha$ , basta seguirmos os seguintes passos:*

- 1) *Considere um ponto  $s_0 \in S^1$ ;*
- 2) *Encontre a reta tangente a  $\alpha(s_0)$ , isto é, a reta  $r_t(\lambda) = \alpha(s_0) + \lambda\alpha'(s_0)$ . Esta reta é o elemento de contato do ponto  $\alpha(s_0)$ , cuja inclinação é dada por  $\frac{dy}{dx}(s_0) = \frac{y'(s_0)}{x'(s_0)}$  e teremos um ponto no espaço dos elementos de contato com coordenadas  $(\frac{dy}{dx}(s_0), x(s_0), y(s_0))$ .*
- 3) *Fazendo o mesmo para todos os pontos  $s \in S^1$  obtemos a curva legendreana procurada definida por*

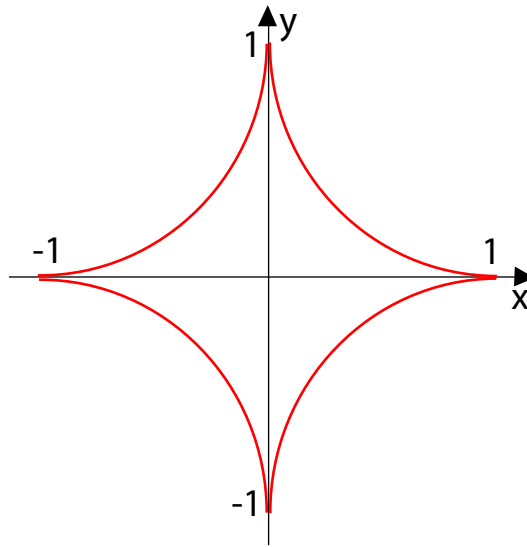
$$\begin{aligned} \gamma : S^1 &\longrightarrow (\mathbb{R}^3, \xi) \\ s &\longmapsto \gamma(s) = (\frac{dy}{dx}(s), x(s), y(s)) \end{aligned}$$

É claro que isto só faz sentido para  $x'(s) \neq 0$ . Genericamente, os zeros da função  $x'(s)$  são isolados, correspondendo a pontos de cúspide isolados onde  $\gamma_F$  ainda tem uma inclinação bem definida.

**Exemplo:** Considere a curva fechada plana

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \alpha(s) = (\cos^3(s), \sin^3(s)) \end{aligned} \text{ ,}$$

cujo traço é mostrado a seguir.



Traço da curva  $\alpha$

Tome  $s_0 \in [0, 2\pi]$ , a reta tangente a  $\alpha(s_0)$  é dada por:

$$r_t(\lambda) = (\cos^3(s_0), \sin^3(s_0)) + \lambda(-3 \sin(s_0) \cos^2(s_0), 3 \sin^2(s_0) \cos(s_0)),$$

onde  $\alpha'(s_0) = (-3 \sin(s_0) \cos^2(s_0), 3 \sin^2(s_0) \cos(s_0))$  e assim, a inclinação da reta em  $\alpha(s_0)$  é dada por  $\frac{dy}{dx}(s_0) = -\tan(s_0)$ .

Considere então o ponto  $(-\tan(s_0), \cos^3(s_0), \sin^3(s_0))$  no espaço dos elementos de contato. Fazendo esse procedimento para todo  $s \in [0, 2\pi]$ , a curva definida por

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow (\mathbb{R}^3, \xi) \\ s &\longmapsto \alpha(s) = (-\tan(s), \cos^3(s), \sin^3(s)) \end{aligned} \text{ ,}$$

é a curva legendriana cuja projeção no plano  $yz$  é a frente de onda plana  $\alpha$ .

Se escrevemos uma curva legendreana  $\gamma$  em termos de suas funções coordenadas como  $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ , da definição segue que:

$$\gamma'(s) \in \xi_{\gamma(s)},$$

ou como  $\xi = \ker(dz - xdy)$  então

$$z'(s) - x(s)y'(s) = 0. \quad (2.1)$$

Notemos que enquanto  $\gamma$  é um mergulho,  $\gamma_F$  pode nem sequer ser uma imersão. De fato, veja que a equação 2.1 implica que

$$z'(s) = x(s)y'(s)$$

onde  $y'(s) = 0$  implica  $z'(s) = 0$ . Daí se  $\gamma_F$ , que é a projeção no plano  $yz$ , é uma imersão segue que  $y'(s)$  nunca deve se anular. O que implica que  $\gamma_F$  não possui tangências verticais, mas é claro que as imersões de  $S^1$  em  $\mathbb{R}^2$  podem conter tangências verticais. Isto nos leva ao primeiro fato importante a respeito das projeções frontais.

### Propriedades de Projeções Frontais

**PPF 1.** Projeções frontais  $\gamma_F$  não possuem tangências verticais.

Se  $\gamma_F$  não for uma imersão? Pela discussão acima notamos que  $z'(s)$  se anula pelo menos quando  $y'(s)$  se anula. Assim podemos sempre encontrar a coordenada  $x$  de  $\gamma$  pela  $\gamma_F$  através da equação

$$x(s) = -\frac{z'(s)}{y'(s)}, \quad (2.2)$$

se  $y'(s)$  é não nulo. E se  $y'$  é zero para algum  $s_0$  temos

$$\tan z(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{x'(s_0)}{y'(s_0)}. \quad (2.3)$$

Existem nós legendreanos nos quais  $y'(s) = 0$  em intervalos abertos, veja a parte superior da figura 2.5, no entanto este não é um fenômeno estável. Podemos facilmente “suavizar” o ponto de cúspide na projeção, veja a parte inferior da figura 2.5. Isto nos leva a uma isotopia legendreana no arco onde  $y'(s) = 0$  somente em um ponto. Feito isto podemos dizer que para um nó legendreano em  $M$ ,  $y'(s)$  só se anula em pontos isolados. Além disso, nestes pontos isolados ainda está bem definida uma reta tangente.

**PPF 2.** Projeções frontais podem ser parametrizadas por aplicações que são imersões exceto para um número finito de pontos, nos quais ainda está bem definida uma reta tangente. Tais pontos são chamados **cúspides generalizadas**.

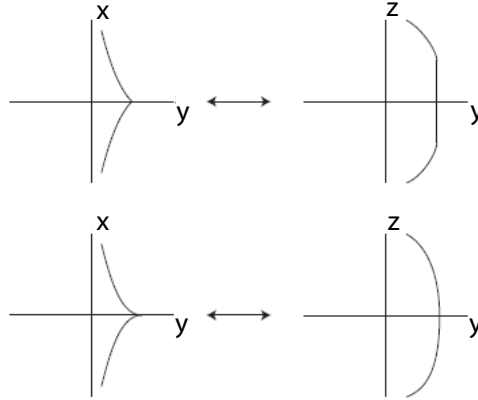


Figura 2.5: Suavização de um ponto de cúspide.

Na verdade, esta condição garante que a coordenada  $z$  definida pela equação 2.2 é uma função de classe  $C^0$ . Precisamos de mais condições sobre as segundas derivadas das funções  $x$  e  $y$  para obter uma coordenada  $z$  de classe  $C^1$ . Dessa forma, vamos sempre supor que as funções coordenadas são de classe  $C^\infty$  o que nos implica dizer que as cúspides são cúspides semi-cúbicas, ou seja, com uma mudança de coordenada, teremos

$$\begin{cases} x(s) = 3s^3 \\ y(s) = 2s^2 \end{cases}$$

**Observação 2.24** *A partir de agora falaremos de frentes de ondas planas no lugar de projeções frontais e diremos que a frente de onda plana é uma aplicação  $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que deixa de ser uma imersão para um número finito de pontos isolados onde ocorrem as cúspides e nestes pontos ainda estão definidas as retas tangentes.*

Estamos considerando curvas legendreanas orientadas e co-orientadas, assim vamos considerar também frentes de ondas planas orientadas e co-orientadas.

**Definição 2.25** *Dizemos que a frente de onda está **orientada** se o círculo  $S^1$  de sua pré-imagem está orientado. Veja figura 2.6.*

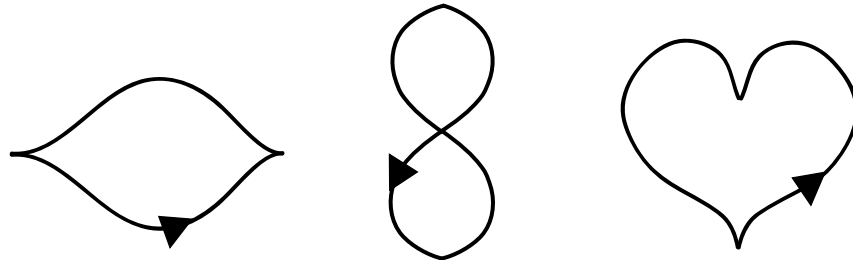


Figura 2.6: Frentes de ondas planas orientadas



Ao longo de uma frente de onda plana  $\gamma_F$  cujo nó legendreano é  $\gamma(s) = (x(s), y(s), \theta(s))$ , temos um campo normal diferenciável dado por  $\vec{n}(t) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ . A este campo de planos chamamos **co-orientação** da frente de onda plana.

**Observação 2.26** *Notemos que a orientação da frente de onda plana é definida pela direção do campo tangente ao longo de seu traço. Este campo tangente define dois campos normais ao longo desta frente de onda de modo que a co-orientação mencionada acima nada mais é do que a escolha de um destes campos normais.*

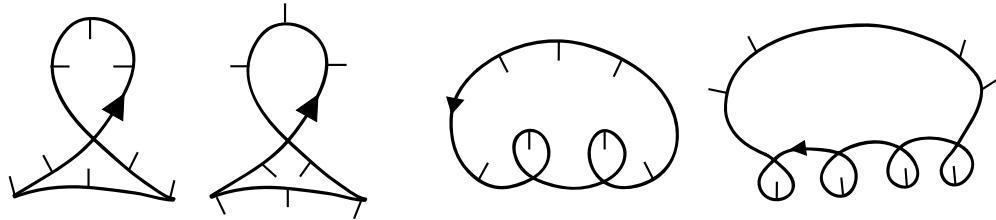


Figura 2.7: Frentes de ondas planas orientadas e co-orientadas

**Definição 2.27** *Um arco sem pontos de cúspide ou pontos duplos transversais do traço de uma frente de onda plana é chamado **ramo** da frente de onda plana.*

**Definição 2.28** *Sejam  $\gamma(s) = (x(s), y(s), \theta(s))$  um nó legendreano. O campo vetorial  $\vec{n}(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$  é um campo normal a frente de onda plana  $\gamma_F = (x(s), (y(s))$  associada ao nó  $\gamma$ . Dizemos que o ramo de uma frente de onda plana  $\gamma_F$  é **positivo (negativo)** se*

$$-x' \sin \theta + y' \cos \theta > 0 \quad (< 0)$$

*naquele ramo.*

**Observação 2.29** *Consideremos o par ordenado (vetor tangente, vetor normal) ao longo de um ramo da frente de onda plana, segue da definição 2.28 que se o par define uma orientação positiva (negativa) para o plano, então o ramo é **positivo (negativo)**.*

Seguindo a orientação de uma frente de onda plana ao longo de seus ramos percebemos que ao passarmos por um ponto de cúspide o ramo que era positivo se torna negativo e vice-versa. Além disso, o ângulo normal  $\theta(s)$ , considerado sobre  $S^1$ , gira no sentido horário ou anti-horário quando passamos pelo ponto de cúspide.

**Definição 2.30** *O sinal de um ponto de cúspide é definido da seguinte forma:*

<i>sinal do ramo</i>	<i>ângulo normal</i>	<i>sinal da cúspide</i>
$- \rightarrow +$	<i>anti-horário</i>	$+$
$- \rightarrow +$	<i>horário</i>	$-$
$+ \rightarrow -$	<i>anti-horário</i>	$-$
$+ \rightarrow -$	<i>horário</i>	$+$

**Observação 2.31** Uma cúspide de uma frente orientada e co-orientada é dita **positiva** se o vetor normal co-orientado no ponto de cúspide pertence ao semi-plano limitado pela reta tangente ao ponto de cúspide que contém o ramo saindo do ponto de cúspide. Caso contrário, dizemos que a cúspide é **negativa**. Veja figura 2.8.

**Definição 2.32** Um ponto de cúspide de uma frente de onda plana orientada e co-orientada é do tipo **ascendente** ou **descendente** se ao olharmos o segmento contendo tal ponto da esquerda para a direita, a cúspide aponta para cima ou para baixo. Aqui estamos supondo o plano orientado pelo referencial (para a direita, para cima). Veja figura 2.8.

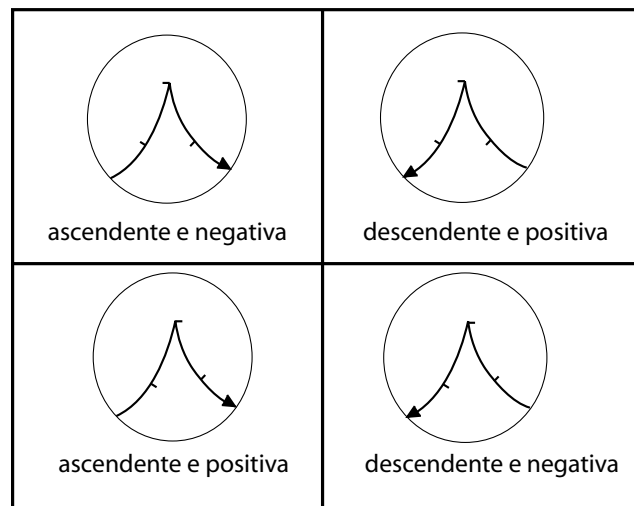


Figura 2.8: As cúspides e suas características

**Observação 2.33** Notemos que, podemos ainda caracterizar um ponto de cúspide positivo de uma frente de onda plana orientada e co-orientada da seguinte maneira:

- 1) ou o ponto de cúspide é do tipo ascendente e o ramo saindo do ponto é positivo;
- 2) ou o ponto de cúspide é do tipo descendente e o ramo saindo do ponto é negativo;

Dizemos que um ponto de cúspide é negativo caso contrário.

#### Ocorrência de cúspides em uma frente de onda

Notemos que o número de cúspides de uma frente de onda plana, por esta estar co-orientada, deve ser sempre par. De fato, podemos deixar isto claro fazendo o exemplo para uma única cúspide em uma frente de onda co-orientada.

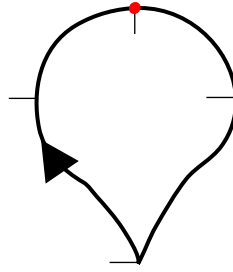


Figura 2.9: Frente de onda plana com apenas um ponto de cúspide.

Escolhemos um ponto marcado na frente de onda plana e escolhemos como vetor co-orientação o vetor interno, note que ao passarmos pelo ponto de cúspide, a co-orientação é invertida e assim, ao voltarmos ao ponto inicial temos uma incompatibilidade de co-orientações.

Este problema é facilmente resolvido desde que exista outra cúspide com o mesmo sinal da anterior, que vai manter a co-orientação inicial já que a segunda cúspide vai inverter a co-orientação novamente ou outra cúspide com sinal contrário que permitirá o cancelamento das duas e assim a co-orientação vai estar bem definida. Veja figura abaixo.

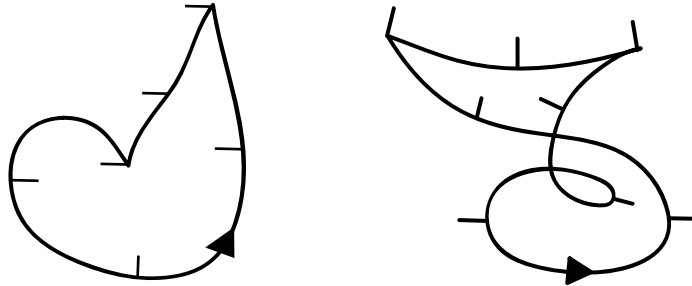


Figura 2.10: Frentes de ondas com dois pontos de cúspide.

Em busca da classificação dos nós com respeito aos seus diferentes tipos, e tendo em vista a relação existente entre um nó legendreano e sua frente de onda plana (veja observação 2.22) queremos saber se dois nós legendreanos são nós isotopicamente legendreanos se, e somente se, eles são isotópicos como nós ordinários nas projeções frontais e possuem os mesmos índices  $i$  e índices de Maslov  $\mu$ .

Pelo menos para nós triviais, como pode ser visto nos trabalhos de [E] e [F], sabemos que o objetivo acima foi alcançado.

Dadas duas frentes de ondas planas queremos poder responder se estas frentes de ondas são as “mesmas” em termos de nós legendreanos.

**Definição 2.34** *Duas frentes de ondas  $\alpha, \beta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  são **equivalentes como nós legendreanos** se, e somente se, existe uma aplicação contínua*

$$\begin{aligned} \psi : [0, 1] \times S^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, s) &\longmapsto \psi(t, s) \end{aligned}$$

tal que para todo  $t \in [0, 1]$  a aplicação  $\psi_t = \psi|_{\{t\} \times S^1} : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $s \longmapsto \psi_t(s) = \psi(t, s)$  é diferenciável,  $\psi_t$  é uma frente de onda plana e  $\psi_0 = \alpha$  e  $\psi_1 = \beta$ .

**Notação:**  $\alpha \sim \beta$

Usaremos a palavra **caminho** como sendo a família a 1-parâmetro de frentes de ondas planas.

As figuras 2.11 e 2.12 ilustram os traços de duas frentes de ondas planas e um caminho entre estas frentes de ondas, respectivamente.

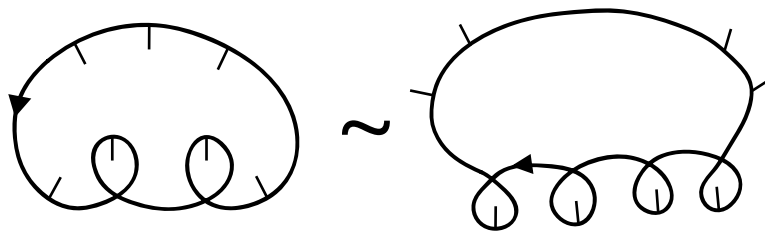


Figura 2.11: Traços de duas frentes de ondas planas equivalentes

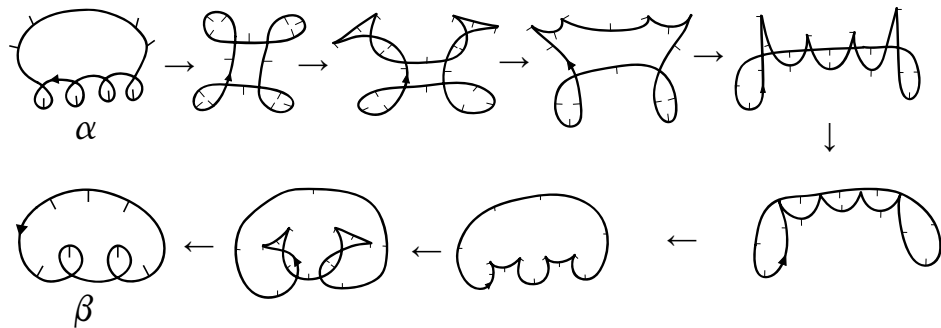


Figura 2.12: Caminho entre as frentes de onda  $\alpha$  e  $\beta$

Existe um caminho ligando as frentes de ondas planas da figura 2.13?

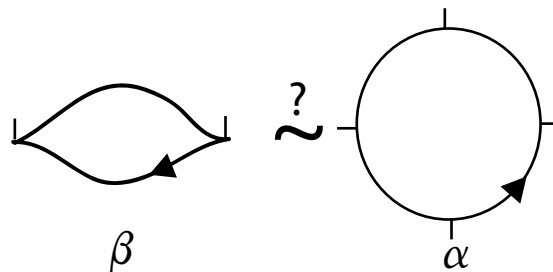


Figura 2.13: As duas frentes de ondas planas são equivalentes?

A figura 2.14 mostra um caminho entre as frente  $\alpha$  e  $\beta$ .

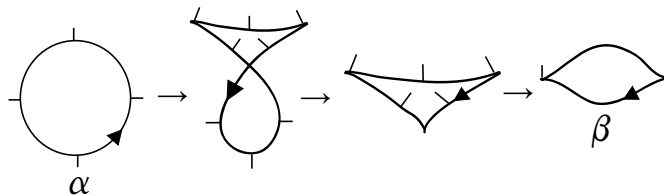


Figura 2.14: Uma tentativa de encontrar um caminho entre as frentes de ondas  $\alpha$  e  $\beta$ .

Notemos que a terceira imagem na figura 2.14 não se trata de uma frente de onda plana, pois como vimos na página 29, as cúspides aparecem em frentes de ondas planas co-orientadas aos pares. Dessa forma a figura 2.14 não representa um caminho válido entre as frentes  $\alpha$  e  $\beta$ . Este fato nos leva a acreditar que  $\alpha$  e  $\beta$  não são equivalentes. Isto nos leva a seguinte pergunta:

*Quando poderemos afirmar que não existe um caminho  $\psi_t$  entre duas frentes de ondas quaisquer?*

Os conceitos que nos auxiliarão a responder esta pergunta são os índices  $i$  e  $\mu$  de curvas legendreanas que podem ser calculados também para frentes de ondas planas:

**Teorema 2.35** *Sejam  $\gamma$  uma curva legendreana e  $\gamma_F$  sua frente de onda plana associada, o índice da curva  $\gamma$ , denotado por  $i(\gamma)$ , é o número de voltas do vetor normal  $\vec{n}(t)$  que co-orienta a frente de onda plana  $\gamma_F$ .*

**Teorema 2.36** *Sejam  $\gamma$  uma curva legendreana e  $\gamma_F$  sua frente de onda plana associada, denotamos por  $\mu^+$  o número de cúspides positivas e por  $\mu^-$  o número de cúspides negativas de uma frente de onda plana. O índice de Maslov da curva  $\gamma$ , denotado por  $\mu(\gamma)$ , é a diferença entre o número de cúspides positivas e negativas de  $\gamma_F$ , isto é,  $\mu(\gamma) = \mu^+(\gamma_F) - \mu^-(\gamma_F)$ .*

**Observação 2.37** *O sinal do índice  $i$  não depende da co-orientação da frente de onda plana e troca quando as orientações do plano ou da frente de onda são trocadas. O índice de Maslov  $\mu$  muda seu sinal quando a orientação ou a co-orientação da frente é trocada e é independente da orientação do plano.*

O espaço das frentes de ondas planas com um dado índice  $i$  e um dado índice de Maslov  $\mu$  será denotado por  $\Omega_{i,\mu}$ .

**Teorema 2.38 ([A4])** *O espaço das frentes de ondas planas com um dado índice e um dado índice de Maslov forma uma componente conexa no espaço de todas as frentes de ondas planas.*

$i \backslash \mu$	0	2	4	6	...
0					...
1					...
2					...
...	...	...	...	...	...

Figura 2.15: Frentes de ondas planas básicas com índices  $i$  e  $\mu$  dados.

### Consequências do Teorema 2.38:

- 1) As frentes de ondas  $\alpha$  e  $\beta$  da figura 2.13 não são equivalentes como nós legendreanos. De fato, embora  $\mu(\alpha) = \mu(\beta) = 0$ , o índice  $i$  das frentes de ondas planas são diferentes, enquanto  $i(\alpha) = 1$ ,  $i(\beta) = 0$ . Isto significa que as duas frentes de ondas planas estão em componentes conexas distintas e portanto não existe um caminho de frentes de ondas planas ligando as duas.
- 2) As frentes de ondas planas da figura 2.11 são equivalentes como nós legendreanos, mas não precisamos mais do caminho mostrado na figura 2.12 para garantir isto. Basta usar o teorema.
- 3) Podemos estabelecer classes de equivalência de frentes de ondas baseados nos índices  $i$  e  $\mu$ . Para cada classe é atribuída um traço standard, que denotaremos por  $\omega_{i,\mu}$ , onde  $i$  e  $\mu$  são respectivamente o índice e o índice de Maslov.

**Notação:**  $\omega_{i,\mu}$  denota a frente de onda de índice  $i$  e índice de Maslov  $\mu$ .

### Curvas Planas Básicas

**Definição 2.39** Uma *curva fechada plana* é uma aplicação diferenciável  $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de um círculo no plano cuja diferencial é injetiva, isto é, uma imersão do círculo no plano.

**Definição 2.40** Dada um curva plana fechada  $\alpha$ , o **índice de Whitney** de  $\alpha$  é o número de rotações do vetor tangente quando um ponto percorre a curva no sentido positivo.

**Teorema 2.41 ([Whi] Teorema de Whitney)** O espaço de imersões do círculo no plano com os mesmos índices formam uma componente conexa no espaço de imersões do círculo no plano.

**Definição 2.42** Uma curva plana fechada  $\alpha$  é chamada **genérica** se, e somente se,  $\alpha$  tem como singularidades pontos duplos transversais e não possui pontos de auto-tangência, nem pontos triplos.

Através do índice de Whitney podemos estratificar o conjunto das imersões do círculo no plano considerando as classes das curvas que têm o mesmo índice, a menos de sinal. Cada classe é chamada representação canônica da curva, denotada por  $K_i$ , com  $i \in \mathbb{N}$ .

Assim, uma representação canônica  $K_i$  é o conjunto de todas as curvas planas fechadas com índice de Whitney  $I_w = \pm i$ .

Arnold em [A1] estabeleceu representantes para cada representação canônica  $K_i$  denominando-as **curvas básicas**. Estas curvas formam o que chamamos de **família de curvas básicas** ilustrada na figura abaixo:

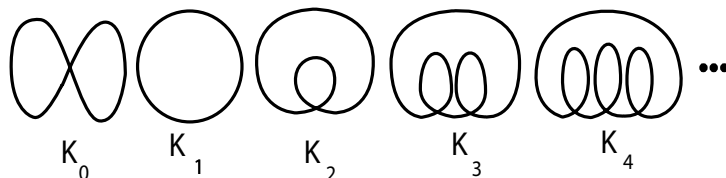


Figura 2.16: Família de curvas planas básicas de Arnold.

**Observação 2.43** As curvas básicas de Arnold estão incluídas nas frentes de ondas planas. Tais curvas que são representadas por  $K_i$  sempre possuem índice  $i$  igual ao índice de Whitney e índice de Maslov  $\mu = 0$ . Logo, na figura 2.15 estas curvas são equivalentes como nós legendreanos as curvas da primeira coluna.

Com estas considerações podemos dizer que duas curvas legendreanas são legendre-homotópicas ou que dois nós legendreanos são legendre-isotópicos conhecendo suas frentes de ondas planas e calculando nestas os índices  $i$  e  $\mu$ , através do Teorema 2.17

# Capítulo 3

## Os Invariantes de Aicardi de Frentes de Ondas Planas

O objetivo deste capítulo é apresentar os invariantes de frentes de ondas planas que foram introduzido por F. Aicardi em [Ail], os conceitos, resultados e propriedades apresentados aqui estão baseados neste texto. Para isto vamos introduzir a noção de invariante topológico e descrever como são obtidos os invariantes tipo Vassiliev de frentes de ondas planas que estão relacionados com diferentes estratos do conjunto discriminante formado pelas frentes de ondas planas não genéricas.

### 3.1 Invariantes Topológicos

Um dos problemas centrais da Topologia é determinar quando dois espaços topológicos são equivalentes (homeomorfos), ou seja, existe um homeomorfismo entre eles. De modo geral, não é trivial determinar se dois espaços são ou não são equivalentes, pois dados dois espaços quaisquer não é tarefa fácil exibir o homeomorfismo entre eles ou provar que não existe um tal homeomorfismo.

Na busca de ferramentas auxiliares para determinar a equivalência de espaços topológicos surgem os *invariantes topológicos* que a cada espaço topológico associa um elemento em um determinado conjunto e se dois espaços são homeomorfos, então os elementos associados devem ser os mesmos.

Logo, um invariante topológico é uma aplicação

$$\begin{aligned} \Upsilon : \mathcal{T} &\longrightarrow \mathcal{X} \\ X &\longmapsto \Upsilon(X), \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{T}$  é o conjunto dos espaços topológicos e  $\mathcal{X}$  é um conjunto tal que se  $X, Y \in \mathcal{T}$  e  $X$  e  $Y$  são homeomorfos, então  $\Upsilon(X) = \Upsilon(Y)$ . Um invariante topológico é dito um **invariante completo** se sempre que  $\Upsilon(X) = \Upsilon(Y)$  tivermos  $X$  e  $Y$  homeomorfos.



## 3.2 Invariantes tipo Vassiliev

Os invariantes utilizados neste trabalho são os invariantes tipo Vassiliev, desenvolvidos por volta do ano de 1989 pelo próprio Vassiliev para estudar complementos de discriminantes em espaços de aplicações. Estes invariantes proporcionaram uma nova perspectiva no estudo de invariantes de nós em  $\mathbb{R}^3$ .

Posteriormente, por volta de 1995 V. Arnold utilizou esta teoria de Vassiliev para introduzir invariantes ao conjunto das imersões de  $S^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , ou seja, das curvas planas fechadas. Baseando-se no estudo desenvolvido por Arnold para curvas planas F. Aicardi determinou os invariantes tipo Vassiliev das frentes de ondas planas seguindo os seguintes passos:

- 1º) Considerou o conjunto discriminante  $\Delta(S^1, M)$  de  $\mathcal{C}^\infty(S^1, M)$ .
- 2º) Classificou os estratos de codimensão 1, que neste caso são os subconjuntos do discriminante que possuem apenas um dos seguintes eventos: auto-tangência, pontos triplos, tangência com cúspide ou nascimento de cúspides.
- 3º) Muniu cada estrato de codimensão 1 com uma co-orientação.
- 4º) Definiu o valor do salto elementar de uma função local correspondente, que é não nula somente no cruzamento deste estrato.
- 5º) Impôs uma condição de co-orientabilidade em cada estrato de codimensão 2, observando que o incremento dos invariantes locais ao longo de um pequeno caminho fechado em torno deste estrato deve ser nulo.
- 6º) Obteve um sistema de equações lineares, *sistema coerente*, para os saltos definindo os 1-cociclos.
- 7º) Resolveu o sistema coerente e escolheu um conjunto simples de geradores linearmente independentes do espaço solução. As correspondentes combinações lineares de saltos elementares definiem os 1-cociclos básicos.
- 8º) Verificou que as classes de cohomologia dos 1-cociclos básicos definidos no passo 7 se anulam. Assim, o salto de cada 1-cociclo básico é portanto o salto de um invariante básico.
- 9º) Definiu os valores dos invariantes básicos nas curvas básicas  $\Omega_{i,\mu}$ , para cada  $i$  e cada  $\mu$ , tais que os invariantes sejam aditivos pela soma conexa de duas frentes.

Aicardi provou ainda que os invariantes obtidos no esquema acima são inequivocamente definidos pela condição de aditividade (aditivos pela soma conexa).

### 3.3 Equivalência de Frentes de Ondas Planas

**Definição 3.1** Uma frente de onda plana **genérica** é uma curva  $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cujas únicas singularidades são os pontos duplos transversais e as cúspides semi-cúbicas.

**Observação 3.2** Dizer que uma frente de onda plana é genérica significa que ao se fazer uma pequena perturbação na frente de onda os fenômenos que ocorrem sobre elas não se alteram. Notamos que se uma curva tem pontos de auto-tangência, pontos triplos, tangências com cúspide ou nascimento de um rabo de andorinha qualquer pequena perturbação os desfaz, como ilustra a figura 3.1.

A figura 3.1 mostra duas frentes genéricas, as duas primeiras à esquerda. As demais frentes de ondas da figura são não genéricas pois além de pontos duplos transversais e as cúspides semi-cúbicas a frente de onda  $\alpha$  possui pontos triplos, a frente de onda  $\beta$  possui auto-tangência e a frente de onda  $\gamma$  possui tangência com cúspide.

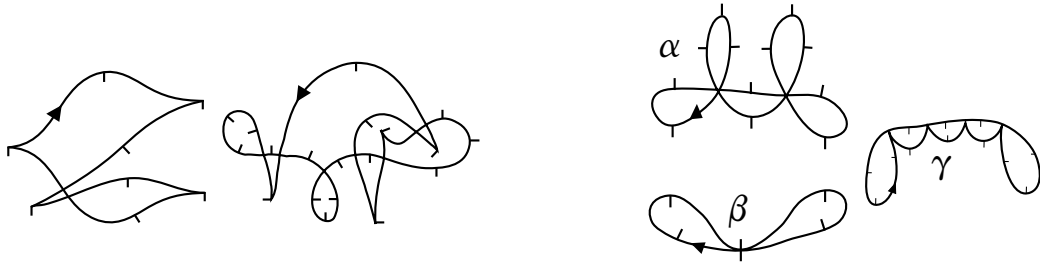


Figura 3.1: Frentes de ondas genéricas e não genéricas.

**Observação 3.3** Uma frente de onda plana  $\alpha$  é classificada como **genérica** se satisfaz as seguintes condições:

- 1) os únicos pontos singulares que podem ocorrer são os pontos duplos transversais e/ou os de forma de cúspide, ou seja, não existem auto-tangências ao longo do seu traço;
- 2) os ramos não fazem pontos triplos;
- 3) os pontos de cúspide não intersectam os ramos.
- 4) os pontos de cúspide são todos diferentes, ou seja, não surgem ramos de andorinha ao longo do seu traço.

**Definição 3.4** Um caminho  $\psi_t : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um **caminho genérico**, se para cada  $t$ , ou  $\psi_t$  é genérica ou contém no máximo um dos seguintes eventos:

1. Auto-tangência;
2. Pontos triplos;
3. Tangência com cúspide;

## 4. “Nascimento (morte)” de cúspide.

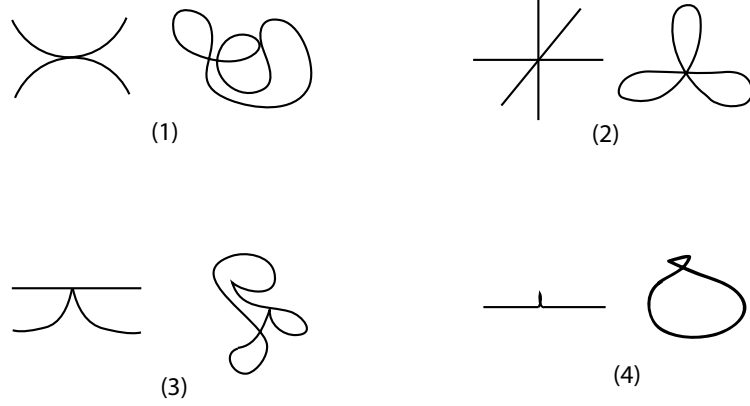


Figura 3.2: Eventos localmente não genéricos.

A figura 3.2 não mostra as orientações e co-orientações das frentes de ondas planas e nem mesmo a orientação do plano de modo que os eventos acima mencionados ainda podem ser subdivididos em eventos distintos, dependendo das orientações do plano e da frente de onda e da co-orientação da frente.

## 3.3.1 Classes de Frentes de Ondas e Classes de Simetria

**Definição 3.5** *Uma classe de frente de onda é uma classe de  $L$ -imersões contendo frentes genéricas a menos de difeomorfismos preservando as orientações do plano e do círculo de sua pré-imagem.*

**Definição 3.6** *Seja  $G$  um grupo agindo no espaço das  $L$ -imersões. Uma classe de frentes de ondas planas  $[\gamma]$  é chamada **G-invariante** se  $[G\gamma] = [\gamma]$ .*

Seja  $\Omega_{i,\mu}$  o espaço das imersões do círculo orientado no conjunto dos elementos de contato co-orientados do plano orientado com índices fixos  $i$  e  $\mu$ .

Vamos representar um elemento de  $\Omega_{i,\mu}$  como o gráfico da aplicação do círculo em  $M$ , isto é, como uma curva morando no espaço  $S^1 \times M$  com coordenadas

$$t(\text{mod}2\pi), x(t), y(t), \phi(t)(\text{mod}2\pi).$$

**Definição 3.7** *Uma involução no plano é uma aplicação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que satisfaz  $T \circ T = Id$*

Consideremos então as seguintes involuções agindo no espaço das curvas legendreanas e conseqüentemente no espaço das frentes de ondas planas:

- a) a involução  $a$  que inverte a orientação do plano  $(x, y)$ ;

- b) a involução  $b$  que inverte a orientação do círculo  $S^1$  e conseqüentemente inverte a orientação da frente de onda;
- c) a involução  $c$  que inverte a co-orientação dos elementos de contato e assim inverte a co-orientação da frente de onda.

As involuções acima agindo nas classes de frentes podem ser representadas pelas seguintes matrizes agindo nas imersões:

- a) involução  $a$ :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- b) involução  $b$ :

$$b = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) involução  $c$ :

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Definição 3.8** *O grupo gerado por estas involuções, chamado  $RO$  (do inglês *Reversing Orientations-invertendo orientações*), é um grupo comutativo de ordem 8. Assim,*

$$RO = \{I, a, b, c, ab, ac, bc, abc\}.$$

Dado um evento não genérico ocorrendo em uma frente de onda plana, a ação de  $RO$  sobre este evento o transforma em outros eventos. O número de eventos distintos gerados por esta ação dependerá do tipo de simetria do evento original. Vamos identificar e classificar estes eventos em duas classes: um evento estará na primeira classe se ele independe das orientações e co-orientação e chamaremos esta classe de **classe independente**. Aos elementos desta classe damos o nome de **eventos RO-independentes**.

Por outro lado, um evento estará na segunda classe se a orientação e a co-orientação são levadas em conta, chamaremos esta classe de **classe dependente** e os elementos que a compoem de **eventos RO-dependentes**.

**Observação 3.9** 1) *O subgrupo  $R_{(x)(y)}$  de  $RO$  indica o tipo de simetria de cada evento, isto é, é o subgrupo gerado pelas involuções  $x$  e  $y$  em relação as quais o evento é invariante.*

- 2) É fácil ver que não existe evento singular considerando as orientações e co-orientações que seja invariante para todo o grupo  $RO$ .

### Descrição dos Estratos de Codimensão 1

**Estrato  $K$ :** Representa as auto-tangências entre os ramos de uma frente de onda plana. Os símbolos de cima  $+$  e  $-$  significam respectivamente o paralelismo e o anti-paralelismo no ponto de tangência dos vetores normais co-orientados dos dois ramos. Os símbolos de baixo  $C$  ou  $D$  significam que os vetores tangentes orientados no ponto de tangência são paralelos (concordantes) ou anti-paralelos (discordantes). O sinal  $+$  ou  $-$  que acompanha as letras em baixo é o sinal de ambos os ramos tangentes, quando eles coincidem. Chamaremos as auto-tangências que possuem o sinal  $+$  ( $-$ ) na parte de cima de auto-tangências **arriscadas (seguras)**. Já as auto-tangências com a letra  $C$  ( $D$ ) serão as auto-tangências **diretas (inversas)**.

Para entender os outros símbolos presentes no evento  $K$  considere a área limitada formada pelos dois ramos após o evento de tangência. O símbolo de baixo  $i$  (interno) ou  $e$  (externo) significa que os vetores co-orientados em ambos os ramos estão dentro ou fora dessa área. Quando a letra  $i$  ( $e$ ) vem acompanhada de um sinal  $+$  ou  $-$  quer dizer que o único vetor normal dentro da área pertence ao ramo positivo (negativo) ou negativo (positivo).

As involuções  $a$  e  $b$  invertem os índices  $(+, -)$  do estrato  $K$ . A involução  $c$  inverte os mesmos sinais e troca  $i$  com  $e$ , deixando então inalterados  $i^+$  e  $i^-$ . Dessa forma os caracteres  $C$  e  $D$  e os sinais superiores são  $RO$ -independentes.

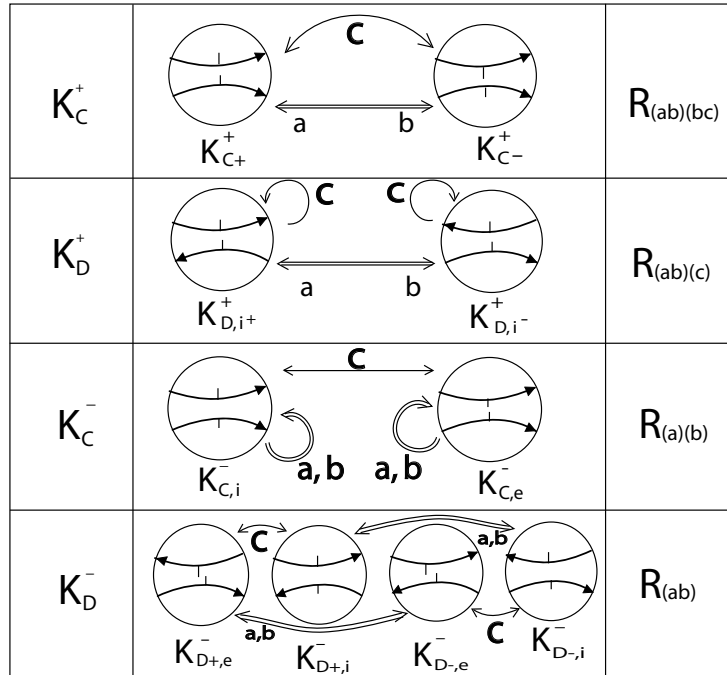


Figura 3.3: Eventos do tipo  $K$   $RO$ -independentes,  $RO$ -dependentes e suas simetrias

**Estrato  $T$ :** Representa os pontos triplos entre os ramos de uma frente de onda plana.

Considere os três ramos que se encontram no ponto triplo como as diagonais de um hexágono regular. Dizemos que o ponto triplo é do tipo *B* ou do tipo *A* se a união dos três ramos orientados tem ou não tem a simetria de ordem três do hexágono. Isto significa que aplicando uma rotação de  $120^\circ$  nestas diagonais, a disposição das setas não se altera. Deve ficar claro aqui que não fixamos os números que indicam a visita do ramo neste momento.

O símbolo superior *I* designa que os sinais dos três ramos coincidem, *II* e *III* significam que os sinais não coincidem, e no caso em que o ponto triplo é do tipo *A* os sinais podem se alternar (*III*) ou não (*II*).

As setas para a direita ou para a esquerda indicam o seguinte: considere as três direções saindo do ponto triplo como três pontos no círculo centrado no ponto triplo. A ordem cíclica das três visitas dos ramos correspondentes definem uma orientação do círculo. Usamos a seta para a direita se essa orientação é positiva e a seta para a esquerda se é negativa.

Os três sinais são os sinais dos três ramos, começando sempre com o ramo mais a esquerda e daí seguindo o sentido horário para os outros ramos. Aqui consideramos o plano sendo orientado pelo referencial (para a direita, para cima).

A involução *a* inverte as setas, troca os sinais dos ramos e as ordens dos mesmos; a involução *b* inverte as setas e os sinais dos ramos; a involução *c* inverte somente os sinais dos ramos. Os caracteres *A* e *B*, bem como a coincidência dos três sinais e suas alternâncias (no caso *A*), são *RO*-independentes.

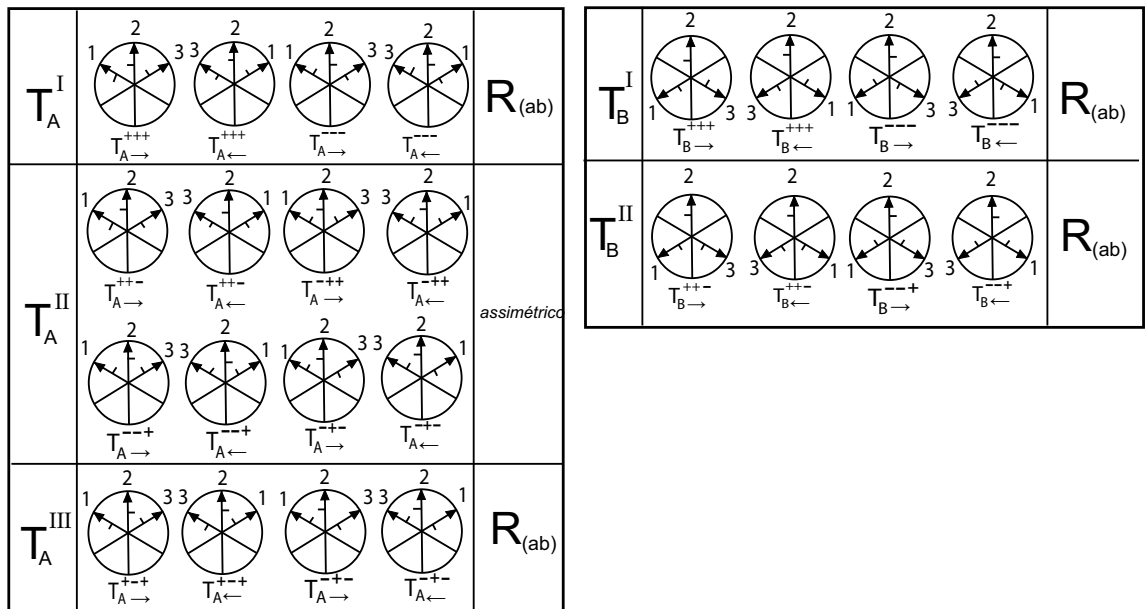


Figura 3.4: Eventos do tipo *T* *RO*-independentes, *RO*-dependentes e suas simetrias

**Estrato II:** Representa o evento de tangência com cúspide. O símbolo *C* ou *D* indicam que as orientações do ramo contendo o ponto de cúspide e do outro ramo sem singularidades são concordantes ou discordantes.

A seta para cima ou para baixo indica que a cúspide é do tipo ascendente ou descendente, o plano orientado pelo referencial (para direita e para cima).

O primeiro dos dois sinais é o sinal do ramo deixando o ponto de cúspide, e o segundo é o sinal do outro ramo sem singularidades que cruza a cúspide.

A involução  $a$  inverte a seta e todos os sinais; a involução  $b$  inverte a seta e o segundo sinal; a involução  $c$  inverte somente os sinais. Somente os caracteres  $C$  e  $D$  são  $RO$ -independentes.

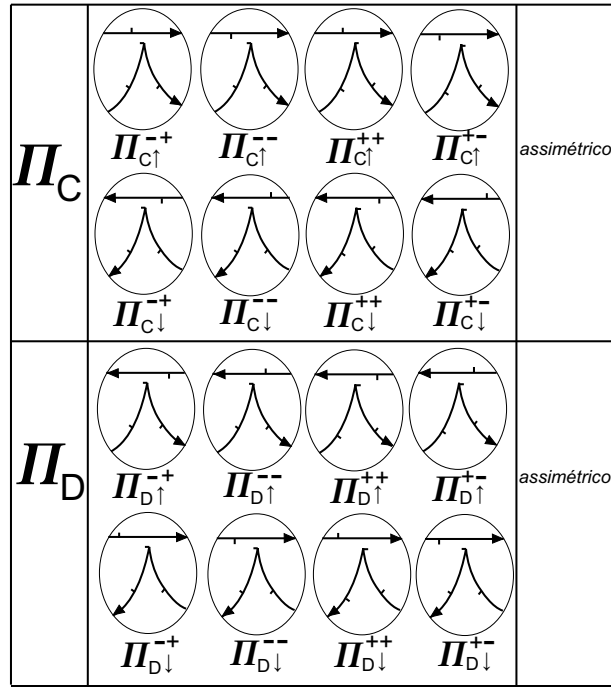


Figura 3.5: Eventos do tipo  $\Pi$   $RO$ -independentes,  $RO$ -dependentes e suas simetrias

**Estrato  $\Lambda$ :** Representa o evento de “nascimento” de cúspide. A seta para cima ou para baixo significa que as duas cúspides recém nascidas são ambas do tipo ascendente ou do tipo descendente. O sinal é aquele do ramo antes do nascimento das cúspides. As involuções  $a$  e  $b$  invertem a seta e o sinal; a involução  $c$  inverte somente o sinal.

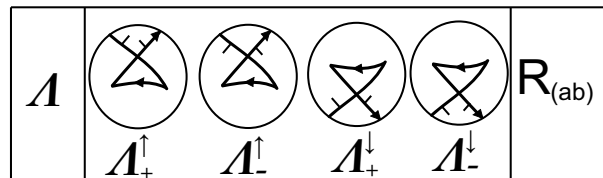


Figura 3.6: Eventos do tipo  $\Lambda$   $RO$ -independentes,  $RO$ -dependentes e suas simetrias

Conforme vimos na descrição acima, cada tipo de evento não genérico (auto-tangência, pontos triplos, cruzamento por cúspide e “nascimento” de cúspide) engloba diversos tipos

de eventos dependentes das orientações e co-orientação. Assim, temos o seguinte resultado.

- Proposição 3.10** 1) O conjunto formado pelas  $L$ -imersões com frentes não genéricas com uma auto-tangência, denotado por  $\Delta_K$ , contem 10 eventos diferentes  $(K_{C^+}^+, \dots, K_{D^-,i}^-)$  dependente das orientações, correspondendo a 4 eventos  $RO$ -independentes  $(K_C^+, \dots, K_D^-)$ , como mostra a tabela 3.3;
- 2) O conjunto formado pelas  $L$ -imersões com frentes não genéricas com um ponto triplo, denotado por  $\Delta_T$ , contem 24 eventos diferentes  $(T_{A^{\rightarrow}}^{+++}, \dots, T_{B^{\leftarrow}}^{---})$  dependentes das orientações, correspondendo a 5 eventos  $RO$ -independentes  $(T_A^I, \dots, T_B^{II})$ , mostrado na tabela 3.4;
- 3) O conjunto formado pelas  $L$ -imersões com frentes não genéricas com um cruzamento por cúspide, denotado por  $\Delta_{\Pi}$ , contem 16 eventos diferentes  $(\Pi_{C^{\uparrow}}^{+-}, \dots, \Pi_{D^{\downarrow}}^{+-})$  dependentes das orientações, correspondendo a 2 eventos  $RO$ -independentes  $(\Pi_C, \Pi_D)$ , como mostra a tabela 3.5;
- 4) O conjunto formado pelas  $L$ -imersões com frentes não genéricas com nascimento de cúspides, denotado por  $\Delta_{\Lambda}$ , contem 4 eventos diferentes  $(\Lambda_+^{\uparrow}, \dots, \Lambda_-^{\downarrow})$  dependente das orientações, correspondendo a 1 evento  $RO$ -independente  $(\Lambda)$ , como podemos ver na tabela 3.6.

A figura 3.7 mostra o mesmo caminho genérico da figura 2.12, mas agora indicando cada evento obtido das tabelas acima.

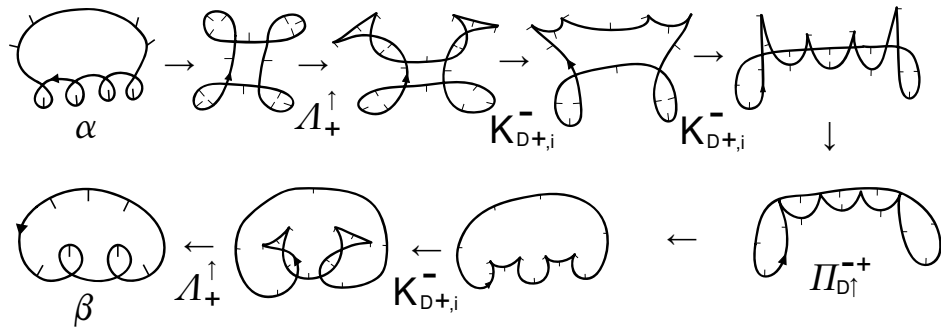


Figura 3.7: Exemplo de um caminho genérico.

Na figura acima os distintos eventos que ocorrem no caminho estão indicados com a notação usada na Proposição 3.10

Se duas frentes de ondas planas podem ser conectadas por um caminho então existe um caminho genérico ligando as duas frentes de ondas. Veja por exemplo a figura 3.8.



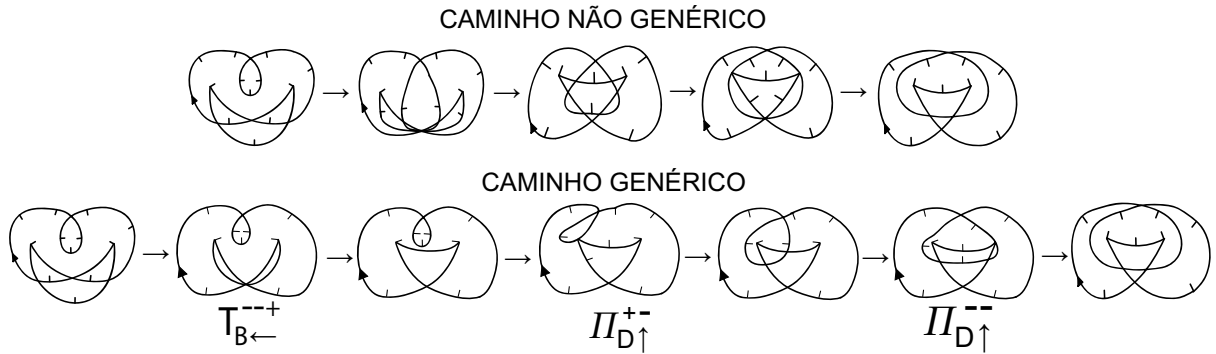


Figura 3.8: Os dois caminhos conectam as mesmas frentes de ondas.

A figura acima representa dois caminhos conectando as mesmas frentes de ondas porém o primeiro é não genérico e o segundo é genérico.

Estes caminhos conectam o mesmo par de frentes de ondas planas. O primeiro caminho é não genérico por causa das segunda e da quarta frente de onda que aparecem, vamos nos referir a elas como  $\psi_a$  e  $\psi_b$ , respectivamente. Note que  $\psi_a$  contém os eventos de auto-tangência e pontos triplos ao mesmo tempo (cada um obedecendo as suas orientações) e  $\psi_b$  contém cruzamento por cúspide e pontos triplos ao mesmo tempo. Podemos criar um caminho genérico a partir de um caminho não genérico fazendo uma “decomposição” de  $\psi_a$  e  $\psi_b$ . Note que em ambas as frentes o problema está na multiplicidade de eventos não genéricos ocorrendo simultaneamente. No entanto, podemos resolver o problema da frente de onda  $\psi_a$  passando primeiro pelo ponto triplo e quanto a frente  $\psi_b$  podemos passar pelos cruzamentos por cúspides um de cada vez.

Segue que se permitimos que ocorram quaisquer eventos apresentados na Proposição 3.10 ao longo de um caminho genérico ligando duas frentes de ondas planas, teremos a equivalência como nós legendreanos apresentada no Capítulo 2.

Por outro lado, se não permitimos nenhum dos eventos citados na Proposição 3.10 em um caminho genérico entre duas frentes de ondas, a noção de equivalência resultante não é nada interessante, como se pode ver na figura 3.9.

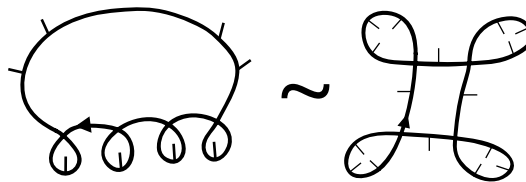


Figura 3.9: Caminho genérico.

Portanto, vamos ser mais seletivos ao restringir os eventos não genéricos que serão permitidos em tal caminho. Examinando as consequências de retirar algum evento não genérico do caminho genérico, chegaremos às novas equivalências que estamos procurando. Podemos refinar ainda mais a equivalência entre as frentes de ondas planas se passamos a considerar suas orientações e co-orientações.

A seguir definiremos as equivalências que levam em conta as orientações e co-orientações das frentes de ondas planas.

**Definição 3.11** (a) *Duas frentes de ondas planas  $\psi_0, \psi_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  são  $J^+$ -equivalentes se existe um caminho genérico  $\psi_t$  entre elas tal que, para todo  $t$ , o caminho não contém nenhuma frente de onda plana com auto-tangências ariscadas entre seus ramos.*

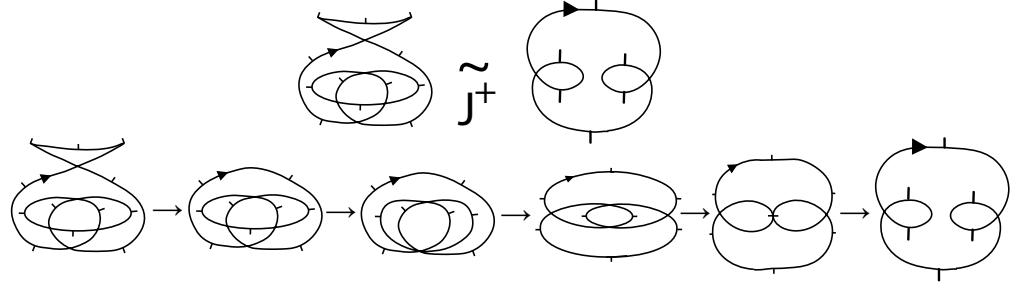


Figura 3.10: Duas frentes de ondas planas  $J^+$ -equivalentes.

(b) *Duas frentes de ondas planas  $\psi_0, \psi_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  são  $J^-$ -equivalentes se existe um caminho genérico  $\psi_t$  entre elas tal que, para todo  $t$ , o caminho não contém nenhuma frente de onda plana com auto-tangências seguras entre seus ramos.*

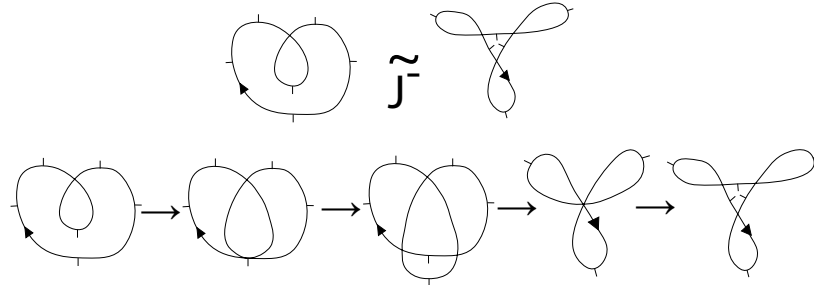


Figura 3.11: Duas frentes de ondas planas  $J^-$ -equivalentes.

(c) *Duas frentes de ondas planas  $\psi_0, \psi_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  são  $Sp$ -equivalentes se existe um caminho genérico  $\psi_t$  entre elas tal que, para todo  $t$ , o caminho não contém nenhuma frente de onda plana com pontos triplos nem tangências com cúspides.*

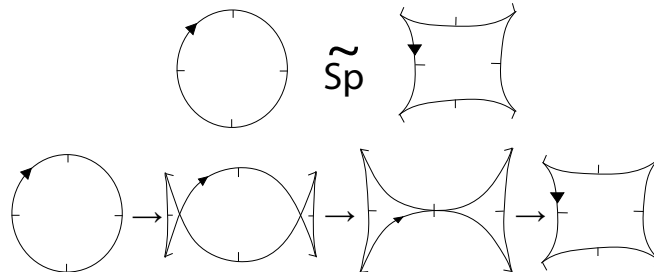


Figura 3.12: Duas frentes de ondas planas  $Sp$ -equivalentes.

- (d) Duas frentes de ondas planas  $\psi_0, \psi_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  são  **$h$ -equivalentes** se existe um caminho genérico  $\psi_t$  entre elas tal que, para todo  $t$ , o caminho não contém nenhuma frente de onda plana com auto-tangências de qualquer natureza e com cruzamento por cúspides.
- (e) Duas frentes de ondas planas  $\psi_0, \psi_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  são  **$\lambda$ -equivalentes** se existe um caminho genérico  $\psi_t$  entre elas tal que, para todo  $t$ , o caminho não contém nenhuma frente de onda plana com “nascimento (morte)” de cúspides.

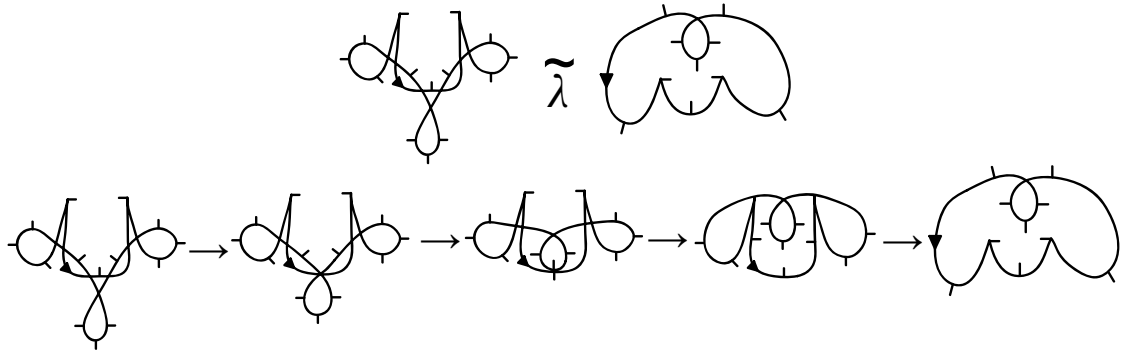


Figura 3.13: Duas frentes de ondas planas  $\lambda$ -equivalentes.

- Observação 3.12** (a) Dizer que duas frentes de ondas planas são  $J^+$ -equivalentes é o mesmo que dizer que não devem ocorrer os eventos  $K_C^+$  e  $K_D^+$  ao longo do caminho conectando estas frentes de ondas.
- (b) Dizer que duas frentes de ondas planas são  $J^-$ -equivalentes é o mesmo que dizer que não devem ocorrer os eventos  $K_C^-$  e  $K_D^-$  ao longo do caminho conectando estas frentes de ondas.
- (c) Dizer que duas frentes de ondas planas são  $h$ -equivalentes é o mesmo que dizer que não devem ocorrer os eventos do tipo  $T$  (pontos triplos) e  $\Pi$  (tangência com cúspide) mostrados nas figuras 3.4 e 3.5 ao longo do caminho conectando estas frentes de ondas.
- (d) Dizer que duas frentes de ondas planas são  $Sp$ -equivalentes é o mesmo que dizer que não devem ocorrer os eventos do tipo  $K$  (auto-tangência) e  $\Pi$  mostrados nas figuras 3.3 e 3.5 ao longo do caminho conectando estas frentes de ondas.
- (e) Dizer que duas frentes de ondas são  $\lambda$ -equivalentes é o mesmo que dizer que não devem ocorrer os eventos do tipo  $\Lambda$  (nascimento de cúspide) mostrados na figura 3.6 ao longo do caminho conectando estas frentes de ondas.

**Observação 3.13** Note que as 5 equivalências acima apresentadas implicam na equivalência como nós legendreanos, ou seja, se duas frentes de ondas são equivalentes relativamente a alguma das equivalências definidas em 3.11 então elas são equivalentes como nós legendreanos.

**Exemplo:** Suponhamos que  $\alpha$  e  $\beta$  são duas curvas legendreanas  $\lambda$ -equivalentes. Isto quer dizer que existe um caminho entre as frentes de ondas de  $\alpha$  e  $\beta$  que não contem uma curva legendreana  $\sigma$  cuja frente de onda plana possua um nascimento de cúspide, mas este mesmo caminho pode conter qualquer outro tipo de evento, como auto-tangências, pontos triplos e cruzamentos por cúspides. Sendo assim, as curvas legendreanas  $\alpha$  e  $\beta$  são equivalentes como nós legendreanos.

A partir de agora quando perguntamos se duas frentes de ondas são equivalentes não estaremos mais interessados em saber se as frentes são equivalentes como nós legendreanos e sim se elas são equivalentes relativamente as equivalências definidas na definição 3.11. Para tanto, devemos estar mais atentos aos eventos que ocorrem em caminhos ligando duas frentes de ondas planas.

## 3.4 Os Invariantes RO-independentes

Nesta seção apresentaremos os invariantes de frentes de ondas planas que são responsáveis pela classificação de frentes de ondas planas relativamente às equivalências definidas ao final da seção anterior. Veremos que se duas frentes de ondas planas possuem os mesmos valores para um dado invariante isto não quer dizer necessariamente que as mesmas são equivalentes em relação a este invariante específico, mas se os valores do invariante nestas duas frentes forem diferentes já podemos garantir a não equivalências das mesmas.

### 3.4.1 O discriminante

Consideremos o espaço formado pelas frentes de ondas planas das imersões legendreanas. Vimos na seção anterior que podemos classificar as frentes de ondas planas a partir de algumas relações de equivalência. O espaço  $\Omega_{i,\mu}^0$ , das curvas legendreanas marcadas, é homotopicamente equivalente a um círculo, a saber o círculo de todas as direções possíveis da curva legendreana marcada no plano de contato no ponto escolhido. Sendo o discriminante e suas co-orientações  $G_3$ -invariantes podemos construir os invariantes de frentes de ondas planas considerando somente as projeções frontais de  $L$ -imersões marcadas.

**Definição 3.14** *Uma frente de onda plana degenerada, de codimensão 1, é uma frente de onda que possui apenas um dos 54 eventos exibidos na Proposição 3.10.*

O conjunto formado pelas frentes de ondas degeneradas formam uma hipersuperfície discriminante de codimensão 1. Sendo assim, podemos definir o discriminante como segue.

**Definição 3.15** *As frentes de ondas degeneradas formam um subconjunto de  $\mathcal{C}^\infty(S^1, M)$ , chamada hipersuperfície discriminante de codimensão 1, denotada por  $\Delta$ .*

Vamos denotar também:

$$\Delta_K = \{f \in \mathcal{C}^\infty(S^1, M); \text{ sua projeção frontal possui auto-tangências}\}$$

$$\Delta_T = \{f \in \mathcal{C}^\infty(S^1, M); \text{ sua projeção frontal possui pontos triplos}\}$$

$\Delta_{\Pi} = \{f \in C^{\infty}(S^1, M); \text{ sua projeção frontal possui tangências entre ramos e cúspides}\}$

$\Delta_{\Lambda} = \{f \in C^{\infty}(S^1, M); \text{ sua projeção frontal possui "nascimento (morte)" de cúspides}\}$ .

segue daí que:

$$\Delta = \Delta_K \cup \Delta_T \cup \Delta_{\Pi} \cup \Delta_{\Lambda}$$

**Observação 3.16** *Dados um índice  $i$  e um índice de Maslov  $\mu$  temos que o discriminante divide o espaço  $\Omega_{i,\mu}$  em componentes conexas. Cada componente do complementar do discriminante consiste em frentes de ondas planas não degeneradas do mesmo tipo.*

**Exemplo:** A hipersuperfície discriminante para a equivalência  $\Pi$ , que chamaremos simplesmente de discriminante  $\Pi$ , é composto por todas as frentes de ondas planas contendo tangências com cúspides. Se duas frentes de ondas planas  $\psi_0, \psi_1$  estão em uma mesma componente conexa do complementar do discriminante  $\Pi$ , podemos criar um caminho genérico  $\psi_t$  de uma para outra que não contem nenhuma tangência com cúspide, isto é,  $\psi_t$  está inteiramente contida nesta componente e não contem nenhuma frente de onda degenerada. Assim,  $\psi_0 \sim_{\Pi} \psi_1$ .

Podemos fazer a mesma análise para os outros invariantes. A figura 3.14 ilustra o discriminante para o espaço  $\Omega_{1,0}$ .

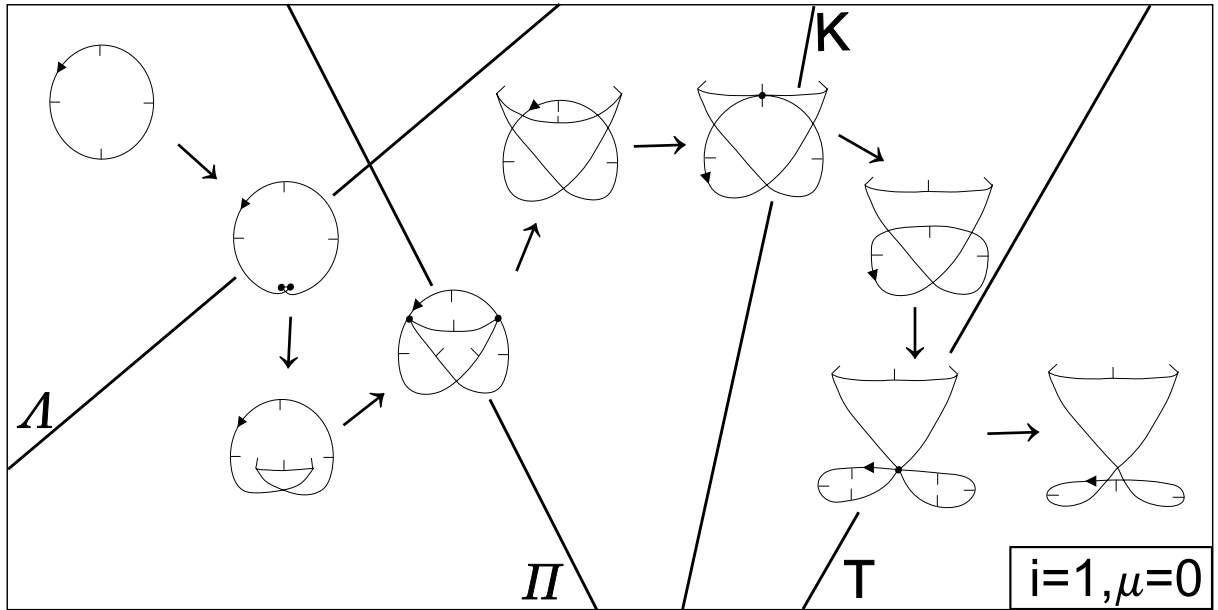


Figura 3.14: Ilustração para o discriminante no espaço  $\Omega_{1,0}$ .

### 3.4.2 Co-orientações dos estratos de codimensão 1 do discriminante

Aicardi definiu 5 invariantes de frentes de ondas planas que são independentes das orientações do plano e da frente de onda plana bem como da co-orientação da frente de onda

plana. Estes invariantes são responsáveis por dizer quando duas frentes de ondas planas não são  $J^+/-/ J^-/-/ Sp-/ h-/ \lambda$ -equivalentes.

No que segue apresentaremos invariantes independentes que estão relacionados com as equivalências da definição 3.11. Mais tarde daremos as definições axiomáticas:

- $J^+$  é o invariante básico associado aos cruzamentos do discriminante  $K$  (auto-tangências), mais especificamente aos eventos  $K_C^+$  e  $K_D^+$  (auto-tangências arriscadas).
- $J^-$  é o invariante básico associado aos cruzamentos do discriminante  $K$ , mais especificamente aos eventos  $K_C^-$  e  $K_D^-$  (auto-tangências seguras).
- $Sp$  é o invariante básico associado aos cruzamentos dos discriminantes  $\Pi$  (tangência com cúspide) e  $T$  (pontos triplos).
- $h$  é o invariante básico associado aos cruzamentos dos discriminantes  $K$  e  $\Pi$ .
- $\lambda$  é o invariante básico associado aos cruzamentos do discriminante  $\Lambda$  (nascimento de cúspide).

Os invariantes contam (com sinais) a quantidade de vezes que um caminho entre frentes de ondas planas cruzam um determinado estrato do discriminante. Mas contar somente o número de vezes não parece o bastante. Consideremos então a figura 3.15.

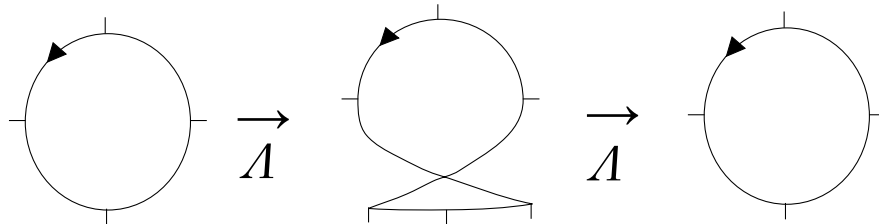


Figura 3.15: Um caminho entre a frente de onda  $\omega_{1,0}$  para ela mesma.

A figura 3.15 mostra um caminho da frente de onda  $\omega_{1,0}$  em si mesma no qual fazemos “nascer” um rabo de andorinha (duas cúspides) e depois estas cúspides “morrem”. Como começamos e terminamos com a mesma frente de onda esperamos ter os mesmos valores para os invariantes. Se simplesmente contamos o número de vezes que o caminho passou pelo discriminante  $\Lambda$ , o valor do mesmo na curva a direita deve ser diferente do da curva a esquerda. Precisamos calcular estes cruzamentos pelos discriminantes, de modo que o segundo cruzamento cancele o primeiro.

Para resolver este problema, vamos associar a cada cruzamento transversal por um ponto não genérico um sinal. Este sinal é chamado **co-orientação do estrato**. Observe-mos que embora receba a mesma nomenclatura as co-orientações de frentes de onda e do estrato são coisas diferentes.

A co-orientação do estrato existe para que possamos verificar se uma certa frente de onda no caminho entre duas outras cruza o discriminante no sentido positivo ou negativo, isto é, nos permite verificar se o evento em questão sofrerá um aumento ou uma diminuição no valor do seu salto.

Vamos atribuir um sinal a cada estrato do discriminante de acordo com orientação e co-orientação e vamos também estipular o valor deste salto.

**Definição 3.17** *Um salto elementar, em um estrato local, é o índice de Vassiliev pré-determinado para aquele estrato específico.*

### Sinal do cruzamento do estrato de Auto-tangências

- O cruzamento transversal por uma auto-tangência direta (segura ou arriscada) é: **positivo** se o número de pontos duplos aumenta e **negativo** se o número de pontos duplos diminui.
- O cruzamento transversal por uma auto-tangência inversa (segura ou arriscada) é: **positivo** se o número de pontos duplos diminui; **negativo** se o número de pontos duplos aumenta.

**Observação 3.18** *É importante ressaltar aqui que os eventos não genéricos associados as auto-tangências que são dependentes das orientações também terão a mesma co-orientação dada acima quando algum caminho cruzar o discriminante neste ponto.*

### Sinal do cruzamento do estrato de Pontos Triplos

- Este caso é um pouco mais complicado do que os anteriores e o método para determinar o sinal para este discriminante se deve a Arnold [A2].

No passo abaixo faremos a descrição de como é atribuído um sinal a um cruzamento deste tipo:

- Quando ocorre o cruzamento por um ponto triplo temos o que chamamos de triângulos desaparecendo. Exatamente antes deste cruzamento temos um triângulo, que chamaremos de triângulo “morto” e exatamente após o cruzamento temos um outro triângulo, que será chamado triângulo “recém-nascido”. A cada um deste triângulos será atribuído um sinal. (Veja figura 3.16).

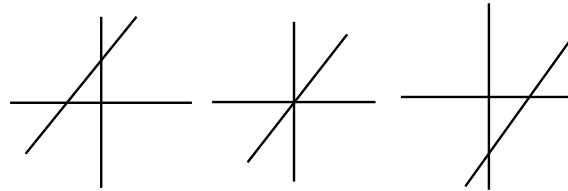


Figura 3.16: Cruzamento pelo estrato de pontos triplos.

- Para determinar o sinal destes triângulos devemos considerar a orientação do círculo da pré-imagem da frente de onda plana, ou seja, a própria orientação da frente de onda plana, como na figura abaixo:

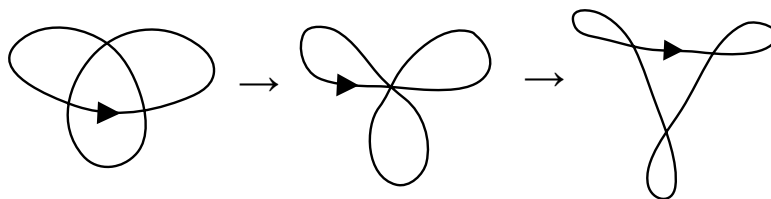


Figura 3.17: Exemplo de frente de onda orientada passando por um ponto triplo.

A orientação da frente de onda plana produz uma ordem cíclica nos lados do triângulo desaparecendo, a saber a ordem em que a frente de onda passa por esses lados. Isto define uma orientação para o triângulo (veja figura 3.18).

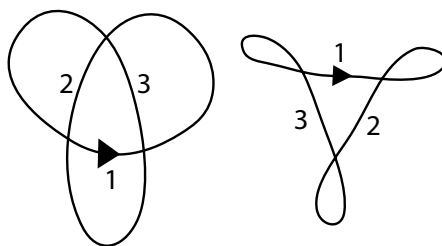


Figura 3.18: Ordem cíclica dos lados dos triângulos desaparecidos.

Além disso, cada lado do triângulo possui uma orientação dada pela orientação da própria frente de onda (veja figura 3.19).

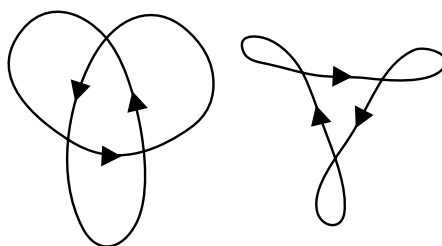


Figura 3.19: Cada lado do triângulo desaparecendo tem sua própria orientação.

A orientação de cada um dos lados do triângulo pode coincidir ou não com a orientação do triângulo. Para cada triângulo vamos considerar o número  $q$  como sendo o *número de lados cuja orientação coincide com a orientação do triângulo*. Note que  $q$  pode tomar os seguintes valores: 0, 1, 2 ou 3. Vamos definir o sinal do triângulo desaparecendo como sendo  $(-1)^q$ .



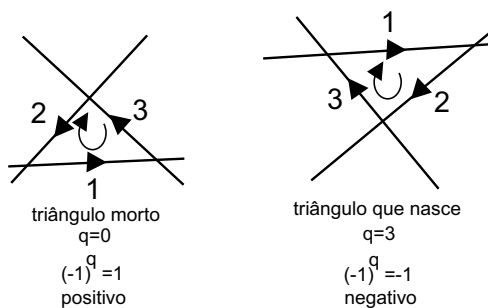


Figura 3.20: Triângulos que nascem e morrem e seus sinais.

- O **sinal do cruzamento pelo ponto triplo** é o sinal do triângulo recém-nascido.

**Observação 3.19** 1) *O sinal do triângulo morto é sempre oposto ao sinal do triângulo que nasce, dessa forma podemos definir o sinal do cruzamento como sendo o oposto do sinal do triângulo morto.*

- 2) *O sinal do triângulo que nasce na figura 3.20 é negativo, sendo assim o cruzamento descrito nas figuras 3.17-3.20 é um cruzamento negativo. Podemos concluir a mesma coisa olhando para o sinal do triângulo morto, que é positivo.*

### Sinal do cruzamento do estrato de tangência com cúspide

- O cruzamento transversal pelo estrato de tangência com cúspide **concordante** ( $\Pi_C$ ) é: **positivo** se o número de pontos duplos aumenta; **negativo** se o número de pontos duplos diminui.
- O cruzamento transversal pelo estrato de cruzamento por cúspide **discordante** ( $\Pi_D$ ) é: **positivo** se o número de pontos duplos diminui; **negativo** se o número de pontos duplos aumenta.

### Sinal do cruzamento pelo estrato de nascimento de cúspides

- O cruzamento é **positivo** se o número de cúspides aumenta após o cruzamento pelo estrato e é **negativo** se o número de cúspides diminui.

A tabela abaixo resume o que estabelecemos até aqui a respeito da co-orientação de cada estrato. Vamos também apresentar o valor para cada salto elementar pelo cruzamento específico denotado por  $\Delta\xi$ .

ESTRATO	COORIENTAÇÃO LOCAL		SALTO ELEMENTAR
$K_C^+$			$\Delta J_C^+ = \Delta n$
$K_D^+$			$\Delta J_D^+ = -\Delta n$
$K_C^-$			$\Delta J_C^- = \Delta n$
$K_D^-$			$\Delta J_D^- = -\Delta n$
$\Pi_C$			$\Delta \pi_C = \Delta n$
$\Pi_D$			$\Delta \pi_D = -\Delta n$
$\Lambda$			$\Delta \lambda = 2\Delta n$
$T$			$\Delta St = 2$

Figura 3.21: As co-orientações locais do estrato de codimensão 1

- Observação 3.20**
- 1) As co-orientações representadas na tabela 3.21 são independentes da orientação do plano, da orientação da frente e da co-orientação da frente de onda.
  - 2) Os saltos elementares para os estratos  $K$ ,  $St$  e  $\Lambda$  são sempre escolhidos em termos da variação  $\Delta n$  de número de pontos duplos.
  - 3) O salto elementar para o estrato  $T$  segue a regra dos triângulos que “nascem” e “morrem” adotada por Arnold, embora aqui ele tenha valor diferente do atribuído por Arnold.
  - 4) Estes valores são atribuídos aos estratos dessa forma pois assim os invariantes que são combinações destes estratos serão aditivos sob a soma conexa.
  - 5) Nas figuras a co-orientação local de um estrato é indicada pelos vetores normais ao estrato apontando na direção positiva.

### 3.4.3 Os 5 invariantes básicos *RO*-independentes

Agora mostraremos como são definidos os 5 invariantes locais básicos *RO*-independentes e mostraremos no último teorema desta seção que eles realmente existem e que são únicos a menos da escolha da constante no salto elementar dos estratos de codimensão 1 definidos acima.

Lembrando que até agora, seguindo os passos de Vassiliev para a determinação de invariantes fizemos a classificação dos estratos de codimensão 1 do discriminante. Vamos impor uma condição sobre os estratos de codimensão 2 com a finalidade de encontrar os invariantes.

Os **estratos de codimensão 2** podem ser vistos como:

- (a) dois eventos ocorrendo simultaneamente em pontos distintos da frente de onda plana;
- (b) dois eventos ocorrendo simultaneamente em um mesmo ponto da frente de onda plana.

**Notação:** Dado  $\xi$  um evento *RO*-independente em uma frente de onda plana, denotaremos por  $\nabla\xi$  o coeficiente do salto elementar associado a  $\xi$ .

Consideremos o conjunto  $\nabla$  de 12 números

$$(\nabla J_C^+, \nabla J_D^+, \nabla J_C^-, \nabla J_D^-, \nabla \pi_C, \nabla \pi_D, \nabla St_A^I, \nabla St_A^{II}, \nabla St_A^{III}, \nabla St_B^I, \nabla St_B^{II}, \nabla \lambda).$$

$\nabla$  é o vetor dos coeficientes do salto *RO*-independente

$$\zeta = \nabla J_C^+ \Delta J_C^+ + \dots + \nabla \lambda \Delta \lambda,$$

onde  $\Delta\xi$  representa o valor do salto (com seu respectivo sinal) e  $\nabla\xi$  representa o número de vezes que o caminho ligando duas frentes de ondas planas atravessou o estrato  $\xi$ .

**Definição 3.21** Dizemos que o salto  $\zeta$  define um **1-cociclo** se, e somente se, o vetor  $\nabla$  verifica um sistema de equações lineares

$$M\nabla = 0 \tag{3.1}$$

chamado o **sistema de coerência**.

**Observação 3.22** Impor a condição sobre os estratos de codimensão 2 é simplesmente pedir que o conjunto de números  $\nabla$  satisfaça o sistema de coerência.

**Lema 3.23** O operador linear  $M$  é definido pela seguinte matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Demonstração:** Sabemos que os estratos de codimensão 2 do tipo (a) não influenciam na obtenção das linhas da matriz  $M$ , passamos assim à análise de cada caso do tipo (b) com os estratos de codimensão 1 que possuímos.

Os eventos de codimensão 2 que nos interessam são os 8 seguintes:

- $KK$  : ponto de auto-tangência cúbica da frente de onda plana;
- $TT$  : ponto quádruplo;
- $III$  : superposição de dois pontos de cúspides;
- $\Lambda\Lambda$  : ponto singular de ordem  $5/4$ ;
- $KII$  : ponto de auto-tangência coincidindo com um ponto de cúspide;
- $KT$  : ponto de auto-tangência coincidindo com um ponto triplo;
- $TII$  : superposição de um ponto duplo e um ponto de cúspide;
- $II\Lambda$  : ponto duplo coincidindo com um ponto singular de ordem  $4/3$ .

Estes eventos de codimensão 2 foram obtidos fazendo as possíveis combinações com os eventos de codimensão 1 que possuíamos.

Notemos que os estratos de codimensão 2 que nos interessa nada mais são que reuniões de estratos de codimensão 1 e portanto em torno deste estrato de codimensão 2 surgem alguns eventos de codimensão 1.

Dado um caminho fechado, em torno do estrato de codimensão 2, passaremos por estratos de codimensão 1. Exigimos que a frente de onda inicial e final (que são as mesmas) não sofram qualquer alteração nos valores dos seus invariantes, já que o caminho contém eventos de codimensão 1. Ao passarmos por este caminho, vamos obter uma equação envolvendo os saltos elementares dos estratos de codimensão 1. Os coeficientes destes saltos elementares é que fornecerão as linhas da matriz  $M$ . Devemos analisar cada caso separadamente.

Mostremos, primeiramente, que os estratos  $KK$ ,  $TT$ ,  $III$  e  $\Lambda\Lambda$  são automaticamente satisfeitos e não influenciam em nada na obtenção da matriz  $M$ .

**Estrato  $KK$ .** Existem 4 tipos de estrato  $KK$  porque os dois ramos do estrato  $K$  que se encontram devem ser do mesmo tipo (ambos do tipo  $K_C^+$ ,  $K_D^+$ ,  $K_C^-$  ou  $K_D^-$ ). De

fato, escolhido a orientação e a co-orientação da frente de onda plana as situações em dois pontos genéricos  $a$  e  $b$  são as mesmas (veja figura 3.22). Dessa forma, as co-orientações do estrato também coincidem em  $KK$  e assim a condição de coerência no estrato  $KK$  é automaticamente satisfeita, uma vez que a equação obtida ao contornarmos o estrato de codimensão 2 dando uma volta completa obteremos a equação:

$$\nabla J_i^j - \nabla J_i^j = 0, \text{ onde } i \in \{C, D\} \text{ e } j \in \{-, +\}.$$

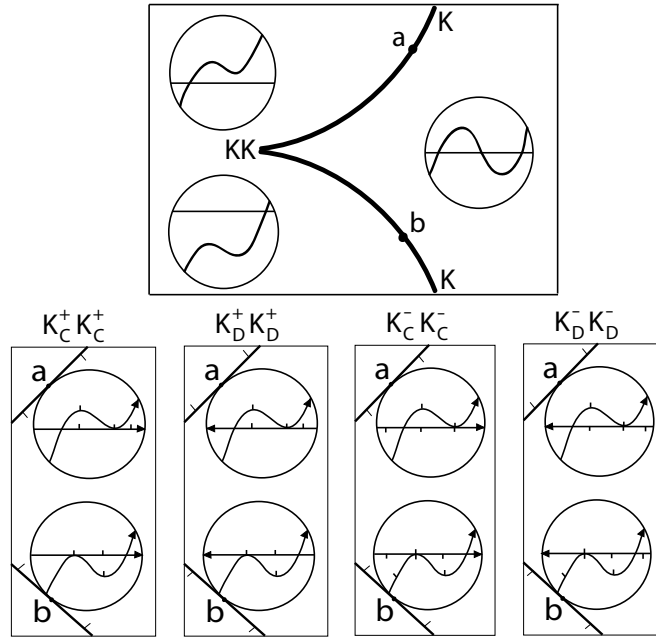


Figura 3.22: Coerência local no estrato  $KK$

**Estrato  $TT$ .** Não é necessário analisar todos os casos possíveis: a seguinte observação é suficiente para concluir que para este estrato a condição de co-orientabilidade é automaticamente satisfeita. Considere dois pontos genéricos  $(a)$  e  $(b)$  pertencendo ao estrato  $T$  simetricamente com respeito do estrato  $TT$  (veja figura 3.23). O que acontece no ponto triplo nos casos  $(a)$  e  $(b)$  é completamente independente da posição do quarto segmento, daí que as co-orientações de  $T$  em  $(a)$  e em  $(b)$  coincidem, isto é, os triângulos desaparecendo na parte de baixo do eixo representando o estrato  $T$  nos pontos  $(a)$  e  $(b)$  tem ambos sinais positivos ou negativos. Isto vale para qualquer estrato  $T$  e daí que o estrato  $TT$  satisfaz a condição de coerência.

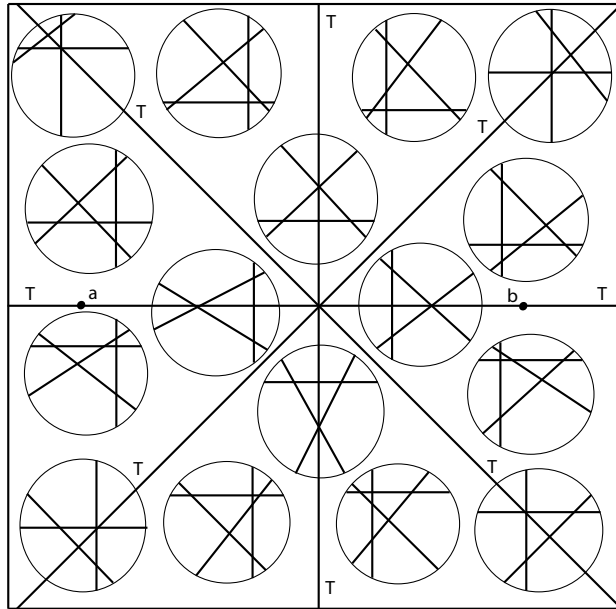


Figura 3.23: Coerência local no estrato  $TT$

**Estrato  $\text{III}$ .** Os distintos casos de estratos de cruzamentos por cúspides se devem as orientações do ramo sem singularidades e do ramo saindo do ponto de cúspide, isto é, deve-se olhar se eles são concordantes ou discordantes,  $\Pi_C$  ou  $\Pi_D$ . Logo existem 2 casos distintos (veja figura 3.24) para o cruzamento de duas cúspides dados pelas duas possibilidades: (a) ambas as cúspides são do mesmo tipo (ascendente ou descendente) e (b) as cúspides são de tipos diferentes. Ambos os casos fornecem a mesma equação trivial

$$\nabla\pi_C - \nabla\pi_D + \nabla\pi_D - \nabla\pi_C = 0.$$

Portanto, a condição de co-orientabilidade é automaticamente satisfeita.

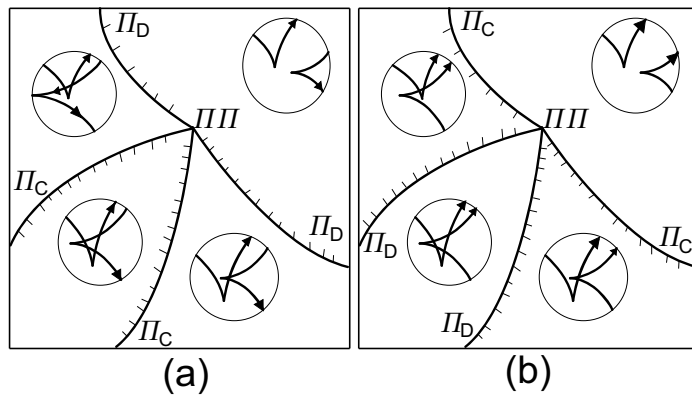


Figura 3.24: Coerência local no estrato  $\text{III}$

**Estrato  $\Lambda\Lambda$ .** A figura 3.25 mostra que os dois estratos  $\Lambda$  se encontrando no estrato  $\Lambda\Lambda$  estão coerentemente co-orientados. Os dois estratos  $\Pi$  são sempre do tipo  $\Pi_C$ , e

também estão coerentemente co-orientados. Novamente a equação de co-orientabilidade,

$$\nabla\lambda + \nabla\pi_C - \nabla\pi_C - \nabla\lambda = 0$$

é trivialmente satisfeita.

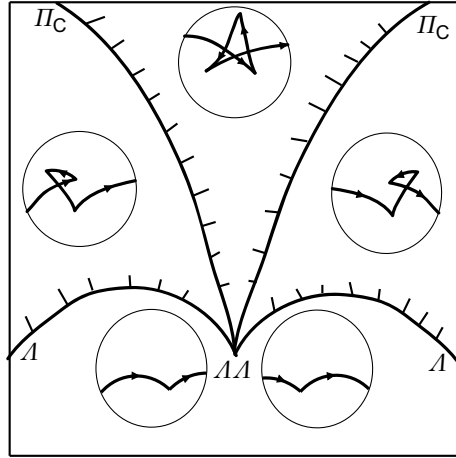


Figura 3.25: Coerência local no estrato  $AA$

Agora parece claro como devemos analisar os eventos de codimensão 2, façamos para os remanescentes.

**Estrato  $K\Pi$ .** Aqui ocorre o encontro de dois estratos locais do tipo  $K$  e dois estratos locais do tipo  $\Pi$ . Os  $K$ -estratos são ou ambos do tipo  $K^+$  ou ambos do tipo  $K^-$ . No entanto um deles é do tipo  $C$  e o outro é do tipo  $D$ . Na verdade (ver figura 3.26) o segmento cruzando o ponto de cúspide e sucessivamente tangente a um dos seus ramos inverte suas orientações se locomovendo da esquerda para a direita nas figuras (sendo vertical no centro, no estrato  $K\Pi$ ).

Portanto, as seções formadas pelos estratos  $K$  e  $\Pi$  no ponto  $K\Pi$  com ângulos agudos - o lado  $K$  e o lado  $\Pi$  - são ambos do tipo  $C$  ou ambos do tipo  $D$ . Já que o número de pontos duplos é maior nestas seções, os vetores do estrato de tipo  $C$  apontam em direção ao interior dessas seções enquanto aquele do tipo  $D$  apontam em direção ao exterior das mesmas. Os dois casos quando o estrato  $K$  são do tipo  $K^+$  (a) e do tipo  $K^-$  (b) são responsáveis pelas linhas (1) e (2) da matriz  $M$ , já que as equações obtidas nestes casos são as seguintes:

a)  $\nabla J_C^+ - \nabla\pi_C - \nabla J_D^+ + \nabla\pi_D = 0;$

b)  $\nabla J_C^- - \nabla\pi_C - \nabla J_D^- + \nabla\pi_D = 0.$

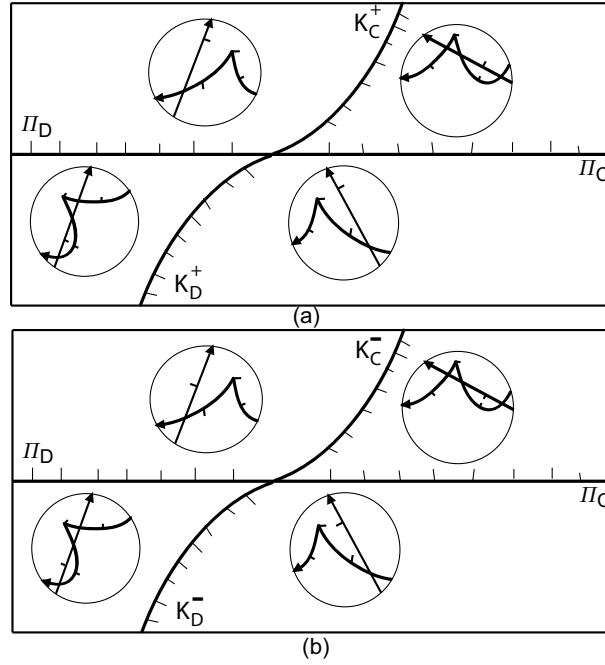


Figura 3.26: Coerência local no estrato  $K\Pi$

**Estrato  $KT$ .** Os dois estratos locais do tipo  $K$  são do mesmo tipo e suas co-orientações são claramente coerentes (o tipo de auto-tangência não depende da posição do terceiro segmento). Portanto as equações resultantes envolvem somente os dois estratos  $T$ . As co-orientações dos dois estratos do tipo  $T$  são compatíveis e podem ser arbitrárias já que a ordem cíclica das visitas do ponto triplo não é fixada. Os casos distintos são dados somente pelos diferentes tipos do estrato  $T$ . Tais casos são mostrados na figura 3.27. Em (a) e (b) os tipos são os mesmos, daí que a compatibilidade é automaticamente satisfeita. Nos outros casos (c), (d), (e), e (f) obtemos as linhas (3), (4), (5) e (6) da matriz  $M$ , através das seguintes equações:

$$a) \nabla St_A^I - \nabla St_A^I = 0;$$

$$b) \nabla St_A^{II} - \nabla St_A^{II} = 0;$$

$$c) \nabla St_A^{II} - \nabla St_A^{III} = 0;$$

$$d) \nabla St_A^I - \nabla St_B^I = 0;$$

$$e) \nabla St_A^{II} - \nabla St_B^{II} = 0;$$

$$f) \nabla St_A^{III} - \nabla St_B^{II} = 0.$$



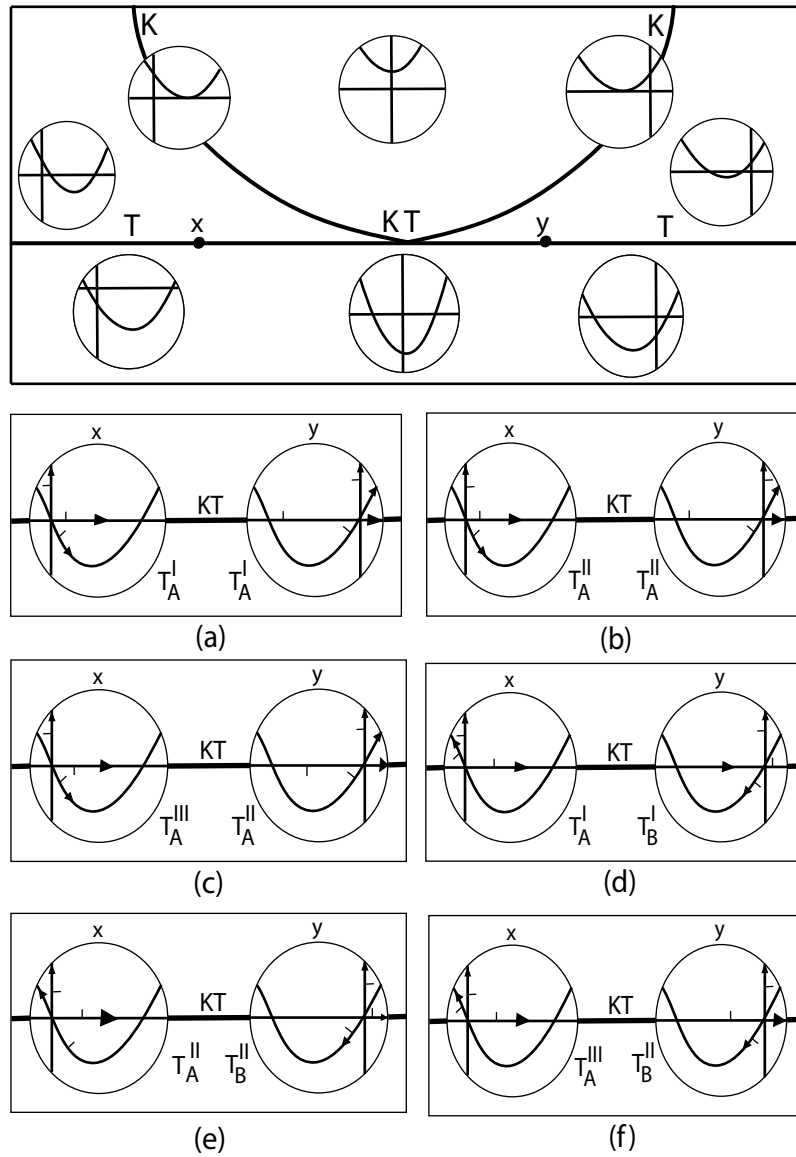


Figura 3.27: Coerência local no estrato  $KT$

**Estrato TII.** As duas retas do tipo II na figura 3.28 podem ser do tipo  $\Pi_C$  e  $\Pi_D$  e independentes uma da outra. Seus tipos, bem como suas orientações coincidem nos dois ramos opostos. Na verdade em dois pontos opostos (por exemplo nos pontos (a) e (b) na figura 3.28) os tipos de cruzamentos por cúspides são os mesmos. Portanto estes estratos nos dão novamente equações somente para os saltos do tipo  $\Delta St$ .

Os dois ramos do estrato  $T$  estão coerentemente co-orientados, como mostra a figura 3.29. Nos quatro pequenos triângulos desaparecendo nos dois pontos triplos em (c) e (d) da figura 3.28, as ordens cíclicas das visitas dos lados são as mesmas. As orientações dos dois lados são as mesmas. A orientação do terceiro lado, sendo um ramo da cúspide, é oposto em (c) e (d) (figura 3.29). Portanto à esquerda e à direita do estrato  $T$  perto de (c) e de (d) os triângulos desaparecendo tem sinais opostos. Similarmente os triângulos

desaparecendo à direita do estrato  $T$  em (c) e em (d) tem sinais opostos. Dessa forma as co-orientações em (c) e (d) são simétricas, isto é, elas são compatíveis no estrato  $T\Pi$ .

Os distintos casos para o estrato  $T\Pi$  são mostrados na figura 3.30. Nos casos (a) e (b) os estratos  $RO$ -independentes são os mesmos. Os casos (c), (d), (e) e (f) nos fornecem as linhas (5), (7), (8) e (9) de  $M$ . As distintas equações para este caso são mostradas abaixo:

- a)  $\nabla St_A^{III} - \nabla St_A^{III} = 0$ ;
- b)  $\nabla St_A^{II} - \nabla St_A^{II} = 0$ ;
- c)  $\nabla St_A^{II} - \nabla St_B^{II} = 0$ ;
- d)  $\nabla St_A^I - \nabla St_B^I = 0$ ;
- e)  $\nabla St_A^{III} - \nabla St_B^I = 0$ ;
- f)  $\nabla St_A^I - \nabla St_A^{II} = 0$ .

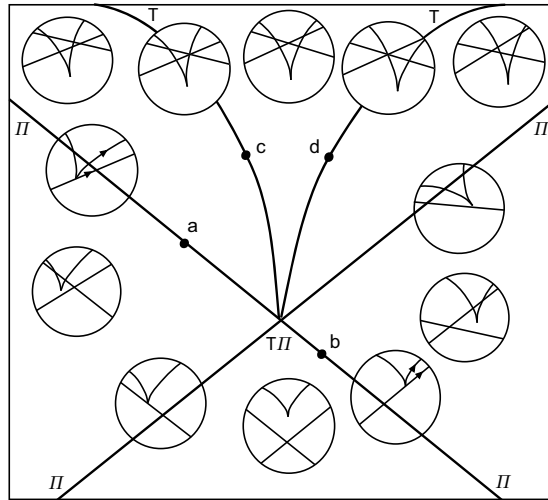


Figura 3.28: Coerência local do estrato  $\Pi$  no estrato  $T\Pi$

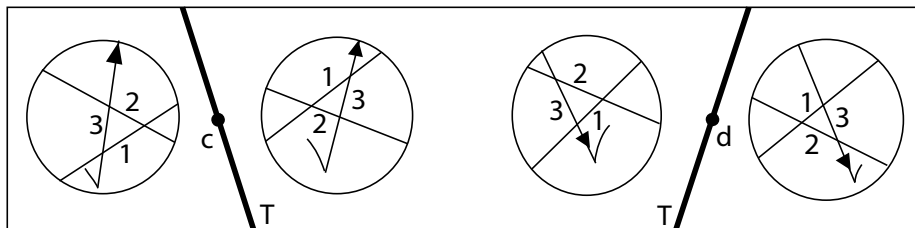


Figura 3.29: Co-orientação do estrato  $T$  perto do estrato  $T\Pi$

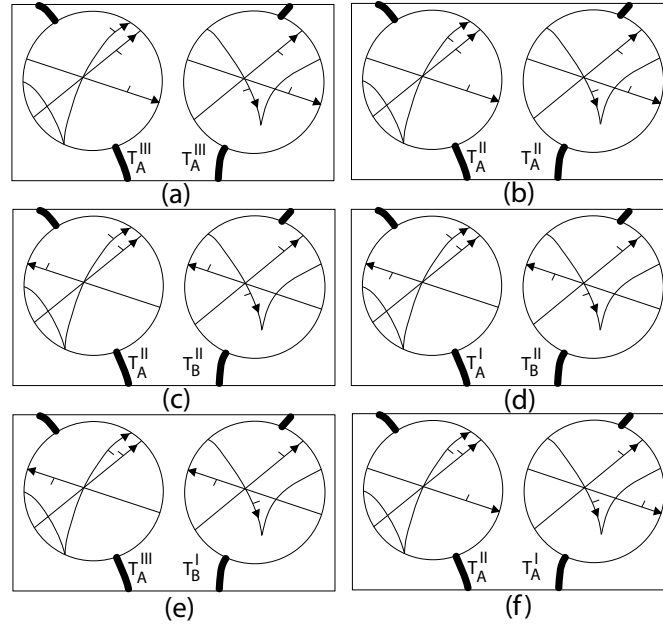


Figura 3.30: Coerência local no estrato  $TII$

**Estrato  $\Pi A$ .** A co-orientação do estrato  $\Lambda$  não se altera no estrato  $\Pi A$ . Os dois estratos do tipo  $\Pi$  são sempre um do tipo  $\Pi_C$  e um do tipo  $\Pi_D$ . Eles são co-orientados em direções opostas (já que o número de pontos duplos acima do estrato  $\Pi$  na figura 3.31 é maior que abaixo dele).

O estrato de pontos tripos, neste caso, não pode ser do tipo  $T_B$  e  $T_A^{III}$ , pois duas das visitas no ponto triplo são obtidas de um mesmo ramo. A ordem cíclica das visitas do ponto triplo é fixado pela orientação da frente de onda plana. Portanto a co-orientação do estrato  $T$  é sempre como mostrado na figura 3.31, isto é, compatível com as orientações de  $\Pi_C$  e  $\Pi_D$ . Os quatro casos distintos são mostrados na figura 3.31, onde (a) e (b) são responsáveis pelas linhas (10) e (11) de  $M$ , como mostram as equações:

$$a) \nabla\pi_C - \nabla St_A^I + \nabla\pi_D = 0;$$

$$b) \nabla\pi_C - \nabla St_A^I + \nabla\pi_D = 0;$$

$$c) \nabla\pi_C - \nabla St_A^{II} + \nabla\pi_D = 0;$$

$$d) \nabla\pi_C - \nabla St_A^{II} + \nabla\pi_D = 0.$$

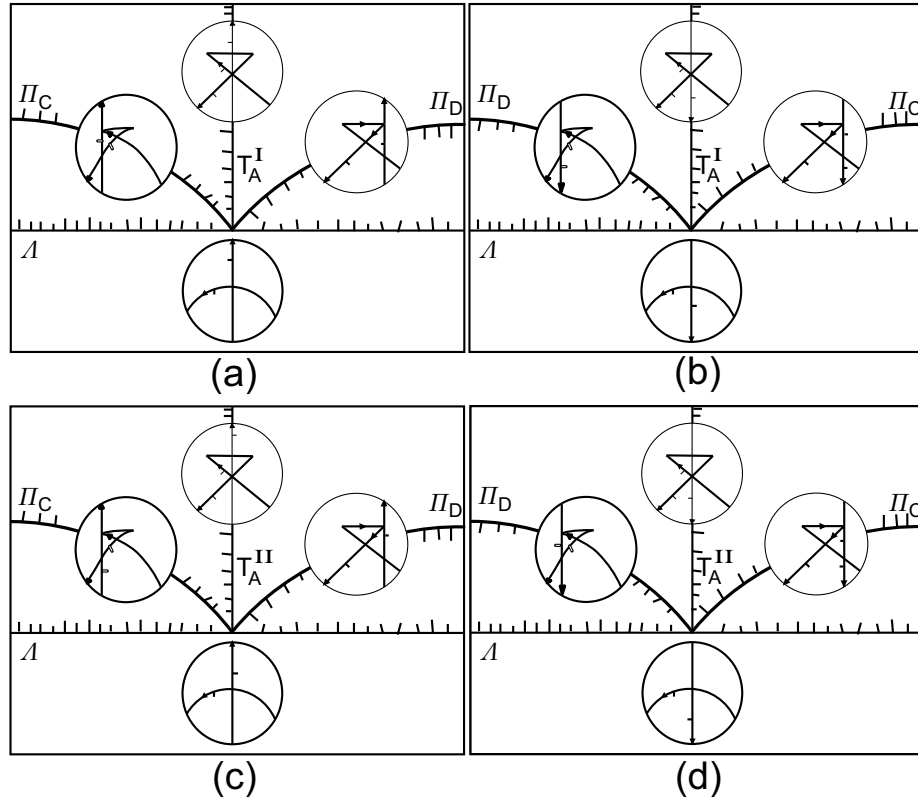


Figura 3.31: Coerência local no estrato  $\Pi A$

Assim o lema está provado. □

**Proposição 3.24** *O espaço de soluções do sistema de coerência tem dimensão 5. Além disso, as 5 R-soluções podem ser escolhidas, por exemplo, como os cinco seguintes vetores:*

$$\Delta J^+ = \Delta J_C^+ + \Delta J_D^+$$

$$\Delta J^- = \Delta J_C^- + \Delta J_D^-$$

$$\Delta Sp = \Delta \pi_C + \Delta \pi_D + 2\Delta(St_A^I + St_A^{II} + St_A^{III} + St_B^I + St_B^{II})$$

$$\Delta h = \Delta(J_C^+ + J_C^- + \pi_C) - \Delta(J_D^+ + J_D^- + \pi_D)$$

$$\Delta \lambda$$

**Demonstração:** A prova desta proposição consiste em resolver o sistema homogêneo que possui como matriz dos coeficientes a matriz  $M$ . Esta solução pode ser facilmente encontrada com o auxílio de softwares matemáticos, como o MAPLE.

O espaço solução do sistema tem dimensão 5. Escolhemos esta solução específica pois restrita ao caso de frentes de onda planas sem cúspides os estratos  $J^+$ ,  $J^-$  e  $Sp$  são na verdade os estratos  $J^+$ ,  $J^-$  e  $St$  para curvas planas introduzidos por Arnold.

Vamos fazer a verificação analisando os invariantes correspondentes.

- (i)  $J^+$  restrito a frentes de onda sem cúspide é o estrato  $J^+$  para curvas planas definido por Arnold.

De fato, para frentes de ondas planas sem cúspides uma auto-tangência direta é sempre arriscada. Na figura 3.32 estão dois ramos de uma frente de onda sem cúspide representando uma auto-tangência direta e segura. Perceba que ao tentarmos ligar estes dois ramos por uma frente de onda sem cúspides a co-orientação fica incompatível. E esta co-orientação só será compatível com a presença de uma cúspide, o que não ocorre.

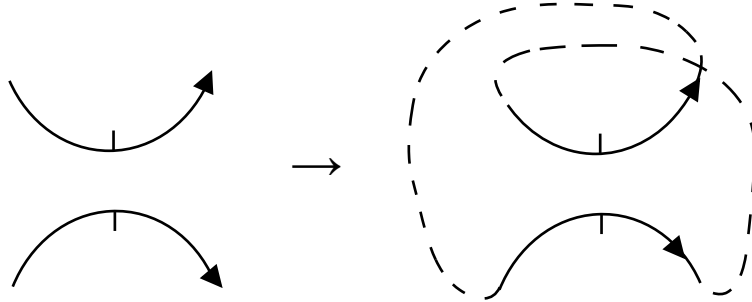


Figura 3.32: Os ramos não são conectados por uma frente de onda sem cúspide.

- (ii)  $J^-$  restrito a frentes de onda sem cúspide é o estrato  $J^-$  para curvas planas definido por Arnold.

Para frentes de ondas planas sem cúspides uma auto-tangência inversa é sempre segura. Na figura 3.33 estão dois ramos de uma frente de onda sem cúspide representando uma auto-tangência inversa e arriscada. Quando tentamos ligar estes dois ramos por uma frente de onda plana sem cúspide a co-orientação fica incompatível. Esta co-orientação será compatível com a presença de um ramo com cúspide ligando estes ramos, o que não acontece.

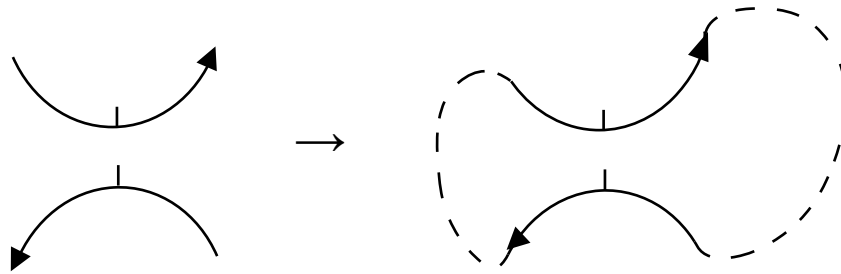


Figura 3.33: Os ramos não são conectados por uma frente de onda sem cúspide.

- (iii)  $Sp$  restrito a frentes de onda sem cúspide é o estrato  $St$  para curvas planas definido por Arnold.

Ora, frentes de ondas planas que não possuem cúspides não possuem cruzamento por cúspide e dessa forma todos os estratos do tipo II desaparecem do estrato  $Sp$  restando somente os cruzamentos por pontos triplos.

(iv) **h restrito a frentes de onda sem cúspide é o número de pontos duplos.**

Novamente os estratos do tipo  $\Pi$  são descartados e o estrato  $h$  fica

$$\Delta h = \Delta(J_C^+ + J_C^-) - \Delta(J_D^+ + J_D^-).$$

Mas, como vimos acima também não existem cruzamentos por auto-tangências diretas e seguras, nem por auto-tangências inversas e arriscadas. Sendo assim, o estrato  $h$  se restringe a

$$\Delta h = \Delta J_C^+ - \Delta J_D^-$$

que é o número de pontos duplos para frentes de ondas sem cúspides.

(v)  **$\lambda$  restrito a frentes de ondas planas sem cúspide é zero.**

De fato, se estamos considerando curvas planas sem cúspide e também não vamos admitir nascimento de cúspides teremos que  $\Delta\lambda = 0$ .

□

**Definição 3.25** *Os estratos básicos co-orientados RO-independentes:*

$$K^+ = K_C^+ + K_D^+$$

$$K^- = K_C^- + K_D^-$$

$$Sp = \Pi_C + \Pi_D + 2(T_A^I + T_A^{II} + T_A^{III} + T_B^I + T_B^{II})$$

$$H = K_C^+ + K_C^- + \Pi_C - K_D^+ - K_D^- - \Pi_D$$

$\Lambda$

são as hipersuperfícies co-orientadas, definidas pelos geradores das soluções do sistema de coerência como combinações lineares dos estratos locais RO-independentes.

**Observação 3.26** *Toda solução do sistema 3.1 define um salto de um 1-cociclo. Este salto pode ser escrito em termos dos saltos dados pelos geradores definidos na Proposição 3.24. Todo gerador representa um 1-cociclo (chamado **cociclo básico**), cujo valor em uma curva fechada genérica é a soma dos correspondentes saltos ao longo desta curva.*

Vamos verificar agora que estes 1-cociclos são triviais.

**Observação 3.27** *No Lema que segue vamos usar frentes de ondas planas marcadas que são projeções frontais de curvas legendreanas marcadas.*

**Definição 3.28** *Os eventos de auto-tangência direta, auto-tangência inversa, pontos triplos, tangência com cúspides e nascimento de cúspides experimentados por uma frente de onda plana quando a mesma cruza um caminho genérico são chamados de perestroikas.*

O nome perestroika foi dado primeiramente por Arnold quando este estudava as curvas planas fechadas.

**Lema 3.29** *Os 1-cociclos básicos RO-independentes, cujos saltos são definidos na Proposição 3.24, são cohomólogos a zero no espaço  $\Omega_{i,\mu}$ .*

**Demonstração:** Devemos provar que o valor de qualquer dos 5 cociclos básicos em um caminho fechado genérico no espaço das L-imersões marcadas se anula. Na verdade toda componente conexa  $\Omega_{i,\mu}$  é homotopicamente equivalente a um círculo, daí devemos fazer tal verificação para caminhos não contrácteis.

Esta prova é apenas uma generalização para os 5 1-cociclos básicos da prova de Arnold do mesmo lema provado em [A5] para o estrato  $K^+$ .

Devemos distinguir dois casos:

**Caso 1.** O índice de Maslov é diferente de zero.

Neste caso, dada uma frente de onda genérica em  $\Omega_{i,\mu}^0$  ( $\mu \neq 0$ ), considere a família de frentes de ondas marcadas obtidas desta marcando sucessivamente todos os seus pontos na ordem dada pela sua orientação. Isto significa que devemos simplesmente mover a frente de onda no plano tal que o ponto marcado e o vetor normal co-orientado a este ponto permanecem fixados (veja figura 3.34).

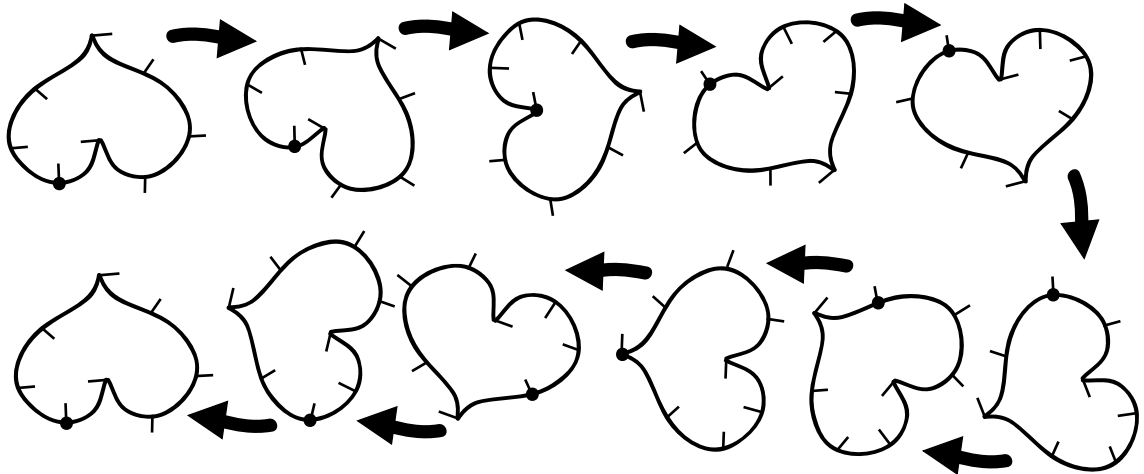


Figura 3.34: Um caminho não contrátil em  $\Omega_{1,2}$

Quando a volta da frente de onda está completa, isto é, quando a frente de onda está novamente na posição inicial, o vetor tangente às frentes de ondas no ponto marcado fez um número  $k = \mu/2$  de voltas completas no plano de contato, daí que esta família de L-imersões marcadas é um caminho não contráctil em  $\Omega_{i,\mu}^0$ . Este caminho não intersecta qualquer estrato do discriminante. Portanto os valores neste caminho dos 1-cociclos básicos RO-independentes são trivialmente nulos.

**Caso 2.** O índice de Maslov é igual a zero.

Neste caso, caminhos genéricos não contrácteis em  $\Omega_{i,0}^0$  não são tão triviais. Verificamos que a soma dos saltos dos geradores definidos pela Proposição 3.24 em termos dos saltos elementares ao longo de um caminho genérico não contráctil no espaço  $\Omega_{i,0}$  para cada valor  $i$  do índice é nula.

Um caminho genérico não contráctil em  $\Omega_{1,0}^0$  é mostrado na figura 3.35.

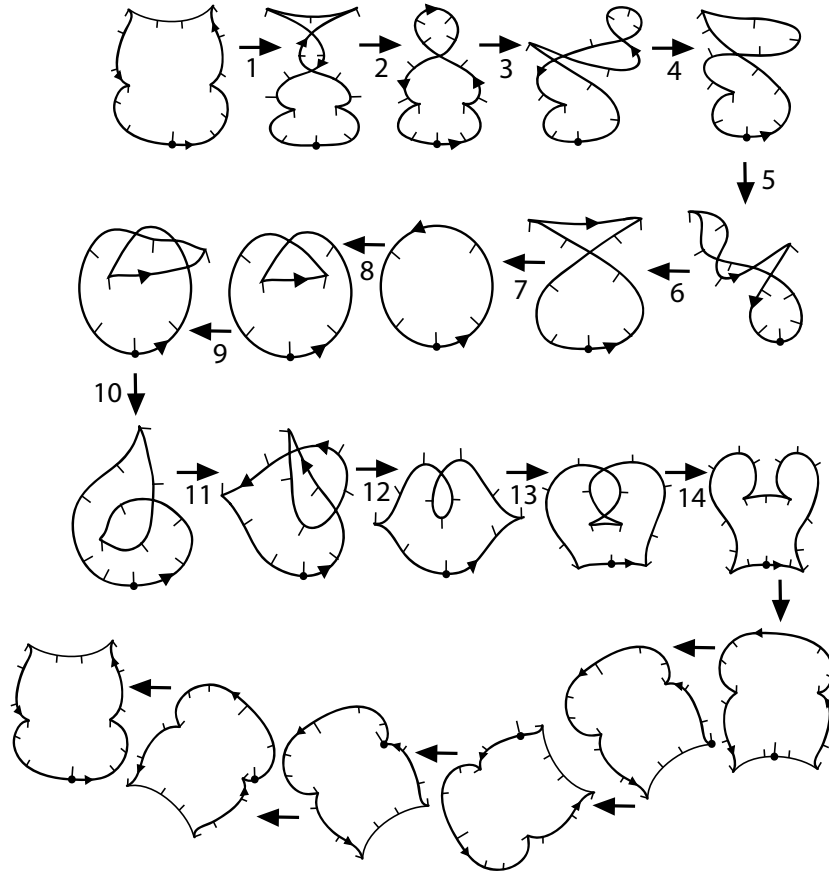


Figura 3.35: Um caminho não contráctil em  $\Omega_{1,0}$

Todos os cruzamentos genéricos do discriminante ao longo deste caminho estão enumerados (1-14), e os correspondentes saltos elementares com seus respectivos valores estão indicados na seguinte tabela:

1	2	3	4	5	6	7
$\Delta J_D^- = -2$	$\Delta \lambda = -2$	$\Delta \pi_D = -2$	$\Delta J_D^- = 2$	$\Delta \pi_D = -2$	$\Delta J_D^+ = 2$	$\Delta \lambda = -2$
8	9	10	11	12	13	14
$\Delta \lambda = 2$	$\Delta \pi_C = 2$	$\Delta J_C^+ = -2$	$\Delta \pi_C = 2$	$\Delta J_C^- = 2$	$\Delta \lambda = 2$	$\Delta J_D^- = 2$

A não contractilidade é visível na última parte do caminho, onde não ocorrem cruzamentos do discriminante mas os pontos marcados experimentam as mesmas perestroikas como no caso  $\mu \neq 0$ . Denotemos por  $(x)$  o valor do salto elementar no cruzamento enumerado por  $x$ . Os incrementos  $\delta$  dos geradores ao longo do caminho são dados pelas seguintes fórmulas:

$$\delta(J^+) = (6) + (10) = 0$$

$$\delta(J^-) = (1) + (4) + (12) + (14) = 0$$

$$\delta(Sp) = (3) + (5) + (9) + (11) = 0$$

$$\delta(h) = -(1) - (3) - (4) - (5) - (6) + (9) + (10) + (11) + (12) - (14) = 0$$

$$\delta(\lambda) = (2) + (7) + (8) + (13) = 0$$

Em um caso mais geral, como no espaço  $\Omega_{n-1,0}$ , considere o caminho mostrado na figura 3.36.



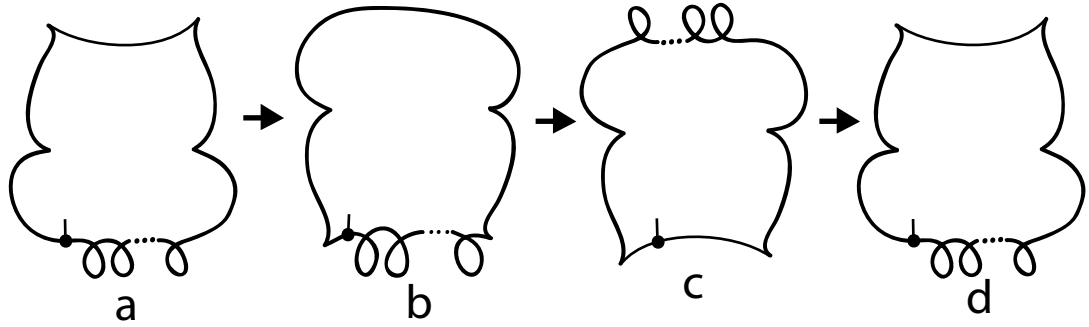


Figura 3.36: Um caminho não contráctil em  $\Omega_{n-1,0}$ .

De (a) para (b) as perestroikas são similares às perestroikas 1-14 mostradas na figura 3.35. A única diferença consiste na presença dos  $n$  laços perto do ponto marcado, que permanecem fixos e não estão envolvidos nessas perestroikas. Vamos de (b) para (c), transportando os  $n$  laços além dos dois pontos de cúspide. A figura 3.37 mostra que na operação de passar um laço por um par de cúspides de mesmo sinal, o índice de interseção com o discriminante não sofre nenhuma alteração.

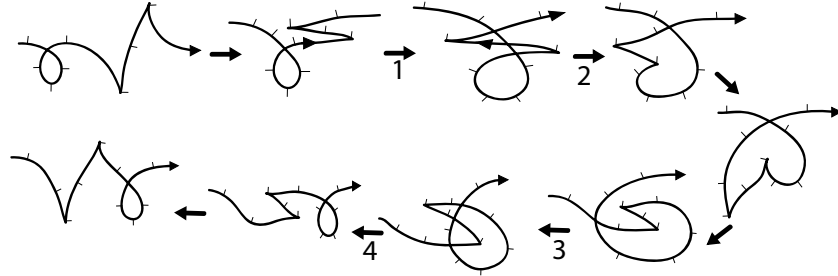


Figura 3.37: A passagem de um laço por um par de cúspides

Os cruzamentos dos discriminantes estão numerados e os valores dos saltos elementares indicados na tabela abaixo:

1	2	3	4
$\Delta\pi_D = -2$	$\Delta\pi_D = 2$	$\Delta\pi_C = 2$	$\Delta\pi_C = -2$

Usando a mesma notação de antes, calculamos somente os possíveis incrementos não nulos nos cruzamentos do estrato  $Sp$  e  $h$  respectivamente:

$$\delta(Sp) = (1) + (2) + (3) + (4) = 0$$

$$\delta(h) = -(1) - (2) + (3) + (4) = 0$$

Os outros estratos do discriminante não são cruzados no caminho de (b) para (c).

De (c) para (d) (veja novamente a figura 3.35) a frente é levada no plano a posição original, daí não existem outros cruzamentos do discriminante no caminho fechado não contráctil.

O lema está provado. □

O lema anterior garante que as funções  $J^+$ ,  $J^-$ ,  $Sp$ ,  $h$  e  $\lambda$  definem, a menos de constantes aditivas dependendo somente dos valores absolutos do índice e do índice de Maslov, os invariantes básicos locais das frentes de ondas planas independentes das orientações. Isto significa que suas variações ao longo de um caminho genérico conectando duas  $L$ -imersões não depende do caminho, mas sim das  $L$ -imersões inicial e final.

**Exemplo:** Desejamos descobrir o valor dos invariantes  $J^+$ ,  $J^-$ ,  $Sp$ ,  $h$  e  $\lambda$  da frente de onda  $\alpha$  da figura 3.38 a seguir.

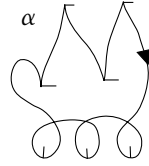


Figura 3.38: Qual o valor dos invariantes em  $\alpha$ ?

Sabendo que a frente de onda  $\alpha$  é obtida da frente de onda  $\beta$  por meio de algumas perestroikas (como mostra a figura 3.39) e sabendo ainda que os valores dos invariantes da frente de onda  $\beta$  são dados pela tabela abaixo,

	$J^+$	$J^-$	$Sp$	$h$	$\lambda$
$\beta$	-4	-3	8	-1	4

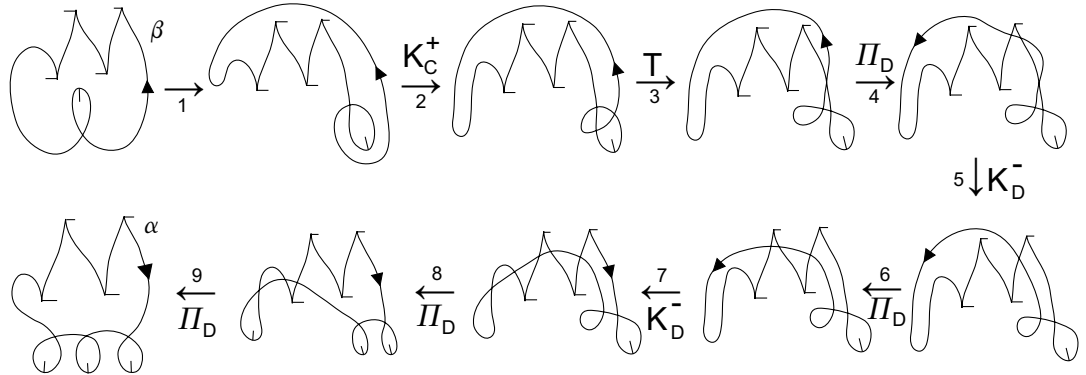


Figura 3.39: Perestroika de  $\beta$  para  $\alpha$ .

através da equação:

$$X(\text{Final}) - X(\text{Inicial}) = \Delta X, \text{ onde } X = J^+, J^-, Sp, h \text{ e } \lambda$$

e dos valores das variações dos invariantes no caminho exibido, que são:

$$\Delta J^+ = 2, \quad \Delta J^- = 0, \quad \Delta Sp = -4, \quad \Delta h = 2 \text{ e } \Delta \lambda = 0,$$

obtemos os valores dos invariantes da frente de onda  $\alpha$  que estão dispostos na seguinte tabela:

	$J^+$	$J^-$	$Sp$	$h$	$\lambda$
$\alpha$	-2	-3	4	1	4

### Propriedades dos invariantes básicos RO-independentes

**Definição 3.30** Dizemos que duas frentes de ondas planas estão **separadas em semi-planos disjuntos** se podemos traçar uma reta no plano e cada uma destas frentes de ondas está inteiramente contida em um dos dois semi-planos abertos determinados por esta reta.

#### Soma Conexa disjunta de Frentes de Ondas

**Definição 3.31** Dadas duas frentes de ondas planas orientadas e co-orientadas  $\alpha$  e  $\beta$  com seus respectivos índices  $i$  e  $\mu$  que podem ser iguais, a **soma conexa disjunta** de  $\alpha$  e  $\beta$  é uma nova frente de onda obtida ao se conectar as duas curvas originais através de dois arcos paralelos (chamados **pontes**), da seguinte maneira: retiramos um intervalo pequeno de cada frente de onda e unimos as curvas pela ponte de tal modo que a frente de onda resultante está conectada e terá orientação e co-orientação globais que concordam com as orientações e co-orientações das frentes de ondas iniciais.

**Notação:**  $\alpha \# \beta$ . Um exemplo pode ser visto na figura 3.40.

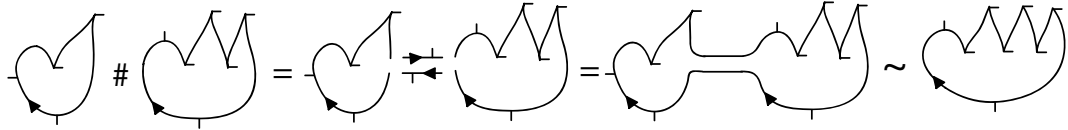


Figura 3.40: Exemplo de soma conexa de duas frentes de ondas planas.

Observamos que a soma conexa não é uma operação na classe de frentes de ondas planas. Alguns pares de frentes de ondas planas não podem ser somadas, como é o caso de dois círculos com co-orientações opostas (veja figura 3.41), neste caso não existe uma ponte capaz de conectá-los, nem pela orientação e nem pela co-orientação. Dessa forma, onde a soma conexa está definida, a classe resultante depende da escolha do local onde a ponte será conectada (veja figura 3.42).

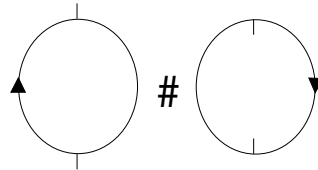


Figura 3.41: Círculos com co-orientações opostas.

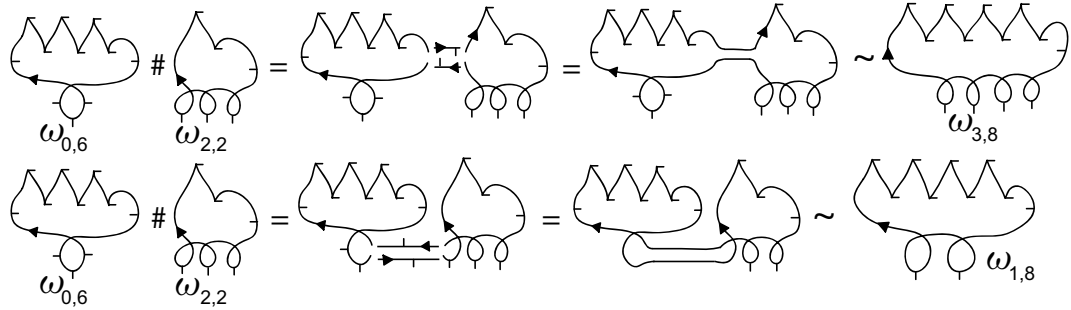


Figura 3.42: Pontes em posições diferentes .

**Definição 3.32** Dizemos que um invariante local RO-independente  $X$  é **aditivo sob a soma conexa de frentes de ondas** se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:

- i)  $X(\theta) = 0$ , onde  $\theta$  é a classe do círculo com todas as possíveis orientações e co-orientações.
- ii)  $X(\alpha\#\beta) = X(\alpha) + X(\beta)$  para toda escolha genérica de pontos nos traços das duas frentes  $\alpha$  e  $\beta$  onde a colagem da ponte é feita (quando a orientação e a co-orientação permitem esta colagem).

**Teorema 3.33** Todos os invariantes RO-independentes de frentes de ondas planas são aditivos sob a soma conexa.

**Demonstração:** Sabemos que todos os invariantes valem zero na classe do círculo com qualquer orientação e co-orientação. Da parte i) da definição de soma conexa temos que  $\omega_{0,0}$  tem todos os invariantes básicos iguais a zero, com exceção de  $J^- = -1$  e  $h = 1$ .

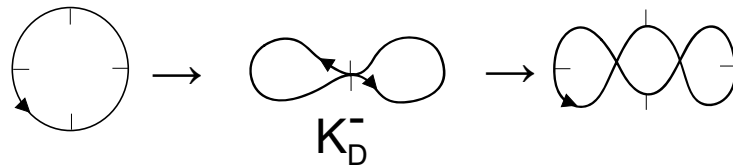


Figura 3.43: Caminho entre  $\theta$  e  $\omega_{1,0}$ .

Como para chegar na frente de onda plana  $\omega_{1,0}$  a partir da curva  $\theta$  passamos por uma auto-tangência inversa segura na direção negativa os únicos invariantes que vão sofrer por essa passagem são os invariantes  $J^-$  e  $h$  (veja definição dos respectivos estratos na Proposição 3.24).

Sabendo que

$$X(\text{Final}) - X(\text{Inicial}) = \Delta X, \quad (3.2)$$

onde  $X$  denota os invariantes  $J^+$ ,  $J^-$ ,  $Sp$ ,  $h$  e  $\lambda$ , podemos calcular o valor dos invariantes na frente de onda  $\omega_{1,0}$  pois ela foi obtida da frente de onda  $\theta$ , cujos valores dos invariantes já são conhecidos. Estes valores estão indicados na figura 3.44.

Por outro lado, podemos obter a frente de onda  $\omega_{1,0}$  como a soma conexa de duas frentes de ondas iguais do tipo  $\omega_{0,0}$ . Dessa forma, a partir da parte ii) da definição de soma conexa temos que os invariantes básicos para a frente de onda  $\omega_{0,0}$  são todos iguais a zero, exceto  $J^- = -1$  e  $h = 1$  (veja figura 3.44).

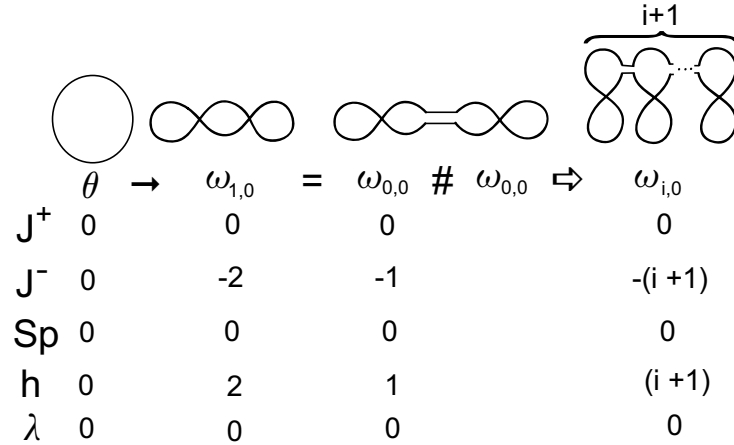


Figura 3.44: Frentes de ondas básicas  $\omega_{i,0}$ .

Obtemos as frentes de ondas  $\omega_{i,0}$  como a soma conexa de  $(i+1)$ -cópias de  $\omega_{0,0}$ .

Quando aplicamos as involuções  $a$  e  $b$  no círculo  $\theta$ , seu índice  $i(\theta) = -1$ . Neste caso, a frente de onda obtida dele por um caminho como o que foi feito na figura 3.43 é a frente de onda  $\omega_{-1,0}$ , repetindo o procedimento feito para a frente de onda  $\omega_{1,0}$  chegamos que a frente de onda  $\omega_{-i,0}$  é obtida como  $(-i+1)$ -cópias da frente de onda  $\omega_{0,0}$  daí segue que os invariantes neste caso são:

$$J^+(\omega_{-i,0}) = 0, \quad J^-(\omega_{-i,0}) = -(-i+1), \quad Sp(\omega_{-i,0}) = 0, \quad h(\omega_{-i,0}) = -i+1, \quad \lambda(\omega_{-i,0}) = 0.$$

Ou seja, basta substituir  $i$  por  $-i$  na tabela 3.44.

Para definir os valores dos invariantes básicos nas curvas  $\omega_{1,\mu}$  vamos proceder da seguinte maneira. Começamos novamente com a frente de onda  $\theta$ , transformando-a na curva  $\gamma$  e verificamos quais foram os estratos que foram cruzados e conseqüentemente quais invariantes sofrerão alguma alteração por estes cruzamentos (veja figura 3.45).

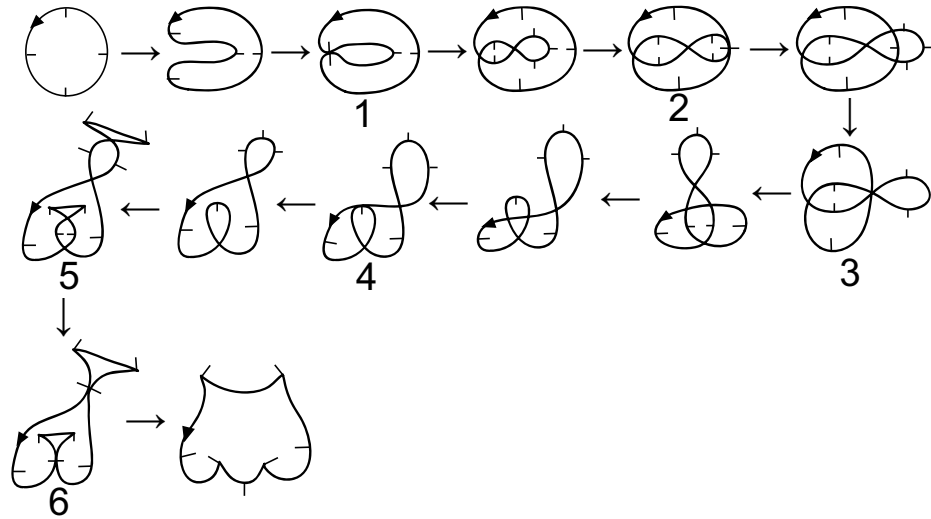


Figura 3.45: Caminho entre  $\theta$  e  $\gamma$ .

Os eventos estão enumerados e a tabela abaixo exhibe qual evento ocorreu no respectivo número e o valor do salto pelo cruzamento através deste estrato.

1	2	3	4	5	6
$K_D^- = -2$	$K_D^- = -2$	$T_A^I = 2$	$K_C^+ = -2$	$\Lambda = 4$	$K_D^- = 4$

Notemos que para os números 5 e 6 da tabela o valor do cruzamento pelo estrato está multiplicado por 2, isto se deve ao fato de ocorrerem dois eventos iguais.

Podemos afirmar que os valores de todos os invariantes, com exceção de  $J^-$ , na frente de onda  $\gamma$  vão sofrer alguma modificação em relação aos valores na frente  $\theta$  bastando para isso usar a equação 3.2. A figura 3.46 mostra quais são estes valores.

Por outro lado, a frente de onda  $\gamma$  pode ser obtida como uma soma conexa de duas frentes de ondas do tipo  $\omega_{1,2}$ .

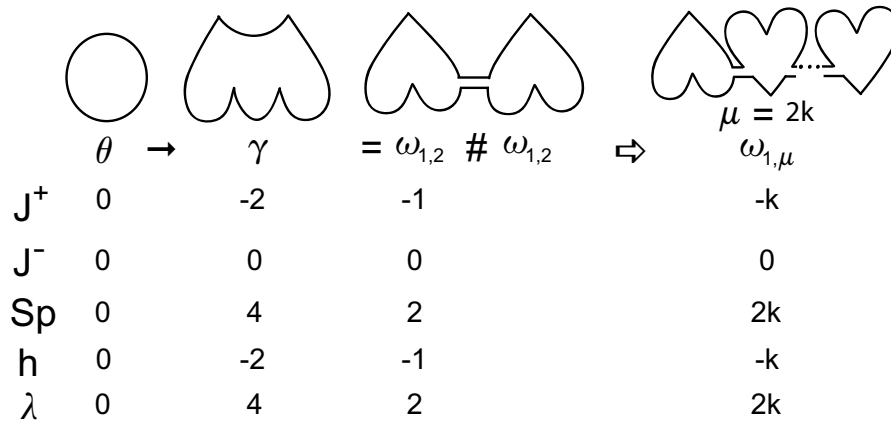


Figura 3.46: Os valores dos invariantes das curvas  $\omega_{1,\mu}$

Novamente pela parte (ii) da definição de soma conexa é possível encontrar os valores dos invariantes para a curva  $\omega_{1,2}$  e também para as frentes de ondas  $\omega_{1,\mu}$  obtidas como soma conexa de  $k = \mu/2$  cópias de  $\omega_{1,2}$ . Os valores dos invariantes para as frentes de ondas básicas  $\omega_{i,\mu}$  são finalmente obtidos como somas dos valores dos invariantes das frentes de onda  $\omega_{i,0}$  e de  $\omega_{1,\mu}$ , já que  $\omega_{i,\mu} = \omega_{i,0} \# \omega_{1,\mu}$ .

Para concluir a demonstração, devemos mostrar que a condição (ii) da definição de soma conexa se verifica para as frentes de ondas básicas. Isto implica que a condição (ii) é válida para toda soma conexa de todas as frentes de onda  $\alpha$  e  $\beta$ .

Suponhamos que  $p$  e  $q$  são pontos nos traços de  $\alpha$  e de  $\beta$ , respectivamente, onde ocorre a colagem da ponte. Podemos escolher um ponto  $p$  arbitrário que fique sobre o traço de  $\alpha$  e longe dos pontos envolvidos nas perestroikas.

Sempre é possível transformar a frente de onda  $\alpha$  em outra frente de onda com os mesmos índices (em particular nas frentes de ondas básicas), pois elas são equivalentes como nós legendreanos.

Portanto, podemos transformar duas frentes de onda  $\alpha$  e  $\beta$  em frentes de ondas básicas deixando  $p$  e  $q$  nos seus traços usando algumas perestroikas. Em seguida, efetuamos a soma conexa das frentes de ondas básicas obtidas de  $\alpha$  e  $\beta$  nestes pontos e daí obtemos uma frente de onda que pode ser recuperada de  $\alpha \# \beta$  exatamente pelas mesmas perestroikas (veja figura 3.47).

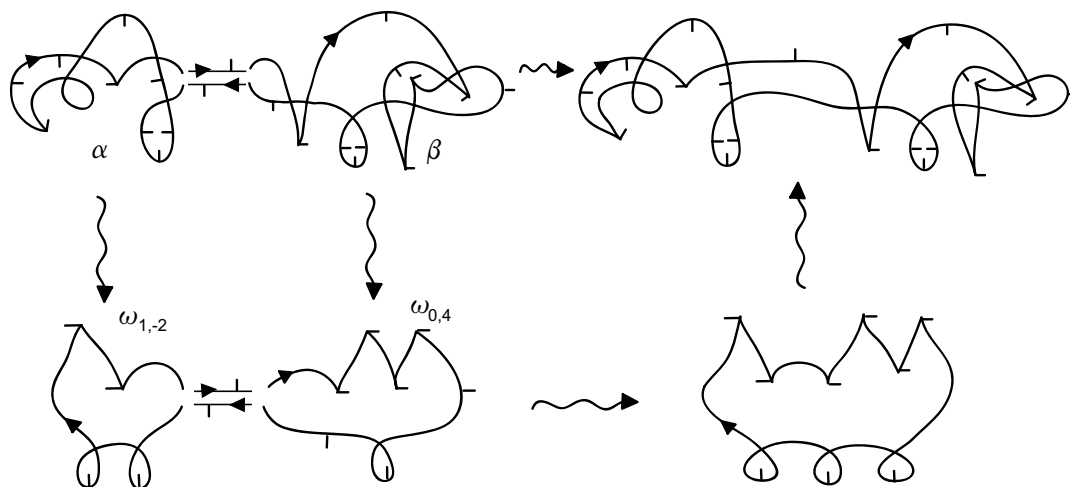


Figura 3.47: A soma conexa durante as perestroikas

Assim a validade da parte (ii) para frentes de ondas arbitrárias  $\alpha$  e  $\beta$  depende da validade de (ii) para frentes de ondas básicas.

Para transformar a soma conexa de duas frentes de ondas básicas do tipo  $\omega_{i,\mu}$  e  $\omega_{j,\nu}$  em uma frente de onda básica, do tipo  $\omega_{i+j+1,\mu+\nu}$ , devemos passar por uma série de perestroikas.

Vamos verificar que o incremento nos valores dos invariantes básicos, nessas perestroikas, estão de acordo com as regras da soma conexa.

O conjunto de todas as perestroikas é formado pelas seguintes perestroikas elementares e pelas perestroikas obtidas destas pela ação das involuções do grupo  $RO$ :

### Perestroikas Elementares

$P_1$ : Passagem de um laço por um ponto de cúspide (dois casos veja figura 3.48). Em ambos os casos obtem-se a perestroika inversa por uma  $RO$ -involução. Portanto, os valores antes e depois da perestroika de um invariante  $RO$ -independente não podem ser diferentes.

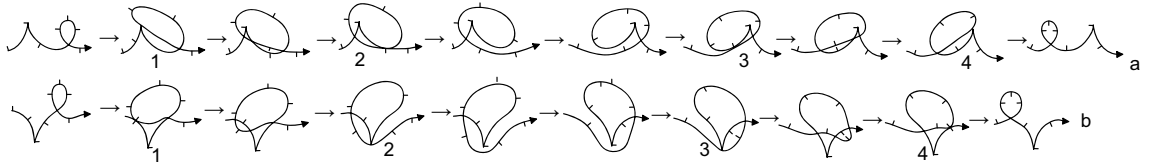


Figura 3.48: Perestroika elemental  $P_1$

As tabelas abaixo relacionam o evento que ocorreu durante a perestroika com o seu valor pela passagem por este evento. Notemos que nenhum invariante sofre qualquer alteração pois os eventos ocorrem na direção positiva e em seguida ocorrem na direção negativa dos seus estratos.

1a	2a	3a	4a
$\Pi_C = 2$	$K_C^+ = -2$	$K_C^+ = 2$	$\Pi_C = -2$

1b	2b	3b	4b
$K_C^- = -2$	$\Pi_C = -2$	$\Pi_C = 2$	$\Pi_C^- = 2$

$P_2$ : Passagem de um ponto duplo por um par de cúspides de mesmo sinal (veja figura 3.49).

Esta perestroika possui dois cruzamentos opostos pelo estrato  $\Pi_C$  (se o ramo sem a cúspide aponta para baixo) ou por  $\Pi_D$  (se o ramo sem a cúspide aponta para cima), daí os valores dos invariantes permanecem inalterados.



Figura 3.49: Perestroika elemental  $P_2$

$P_3$ : Passagem de um ponto duplo por um laço (figura 3.50).

Nesta perestroika, como podemos ver pela figura e pela tabela abaixo o valor dos saltos elementares em cada evento, temos o seguinte incremento dos invariantes:

$$|\delta(J^+)| = 2; \quad |\delta(J^-)| = 2; \quad |\delta(Sp)| = 4; \quad \delta(h) = 0; \quad \delta(\lambda) = 0.$$



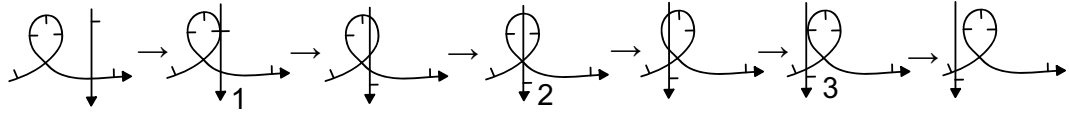


Figura 3.50: Perestroika elementar  $P_3$

1	2	3
$K_D^- = -2$	$T_A^I = 2$	$K_C^+ = -2$

$P_4$ : Eliminação de dois pontos de cúspide de sinais opostos pela criação de um laço (figura 3.51).

Os incrementos não nulos são:

$$\delta(J^-) = -2; \quad \delta(h) = 2; \quad \delta(\lambda) = -2$$

como podemos ver na figura e na tabela na sequência.

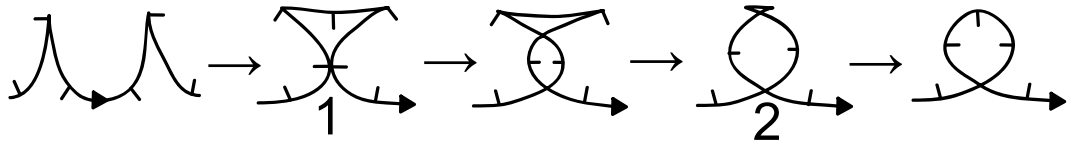


Figura 3.51: Perestroika elementar  $P_4$

1	2
$K_D^- = -2$	$\Lambda = -2$

$P_5$ : Aniquilação de um par de laços interno-externo (figura 3.52).

Analisando a figura e os valores na tabela, podemos ver que para esta perestroika temos:

$$\delta(J^+) = 2; \quad \delta(J^-) = 4; \quad \delta(Sp) = -4; \quad \delta(h) = -2; \quad \delta(\lambda) = 0.$$

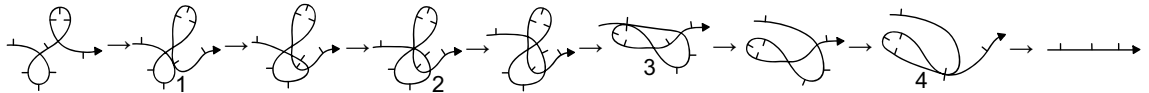


Figura 3.52: Perestroika elementar  $P_5$

1	2	3	4
$K_C^+ = 2$	$T_A^I = -2$	$K_D^- = 2$	$K_D^- = 2$

Feitas estas considerações, estamos prontos para utilizar estas perestroikas para efetivar qualquer soma conexa de frentes de ondas básicas.

Observemos que existem 4 possibilidades para as posições dos pontos  $p$  nos traços das frentes de ondas básicas (veja na figura 3.53):

- (1) entre um laço e uma cúspide;
- (2) em um laço;
- (3) entre dois pontos de cúspide;
- (4) entre dois laços.

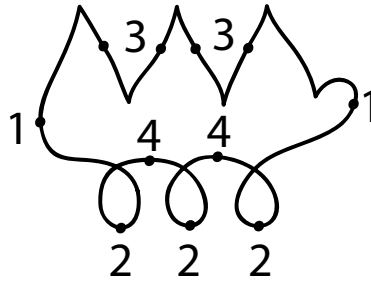


Figura 3.53: Os pontos marcados indicam a posição da possível colagem.

Notemos que nos casos (3) e (4) se deixamos o ponto  $p$  fixo, fazendo uso de perestroikas do tipo  $P_1$ , é possível transportar todas as cúspides para um lado e todos os laços para o outro lado com respeito ao ponto  $p$  e assim voltamos ao caso (1). Como os invariantes não se alteram para a perestroika  $P_1$  não precisamos nos preocupar com os casos (3) e (4) para o ponto de colagem.

Sendo assim, a escolha dos pontos  $p$  e  $q$  pertencendo, respectivamente, as frentes básicas  $\omega_{i,\mu}$  e  $\omega_{j,\nu}$ , pode ser feita entre as seguintes possibilidades:

- (i) Ambos os pontos estão na posição (1) e a colagem será do tipo (1)-(1);
- (ii) Ambos os pontos estão na posição (2) e a colagem será (2)-(2);
- (iii) Um dos pontos está na posição (1) e o outro na posição (2); e a colagem será do tipo (1)-(2).

Vamos agora analisar cada um dos casos separadamente.

**Caso (1)-(1).** Vamos supor os índices  $i$  e  $j$  das duas frentes de onda não negativos (note que eles devem possuir os mesmos sinais para a colagem estar bem definida). Após a colagem, existem duas possibilidades (veja figura 3.54).

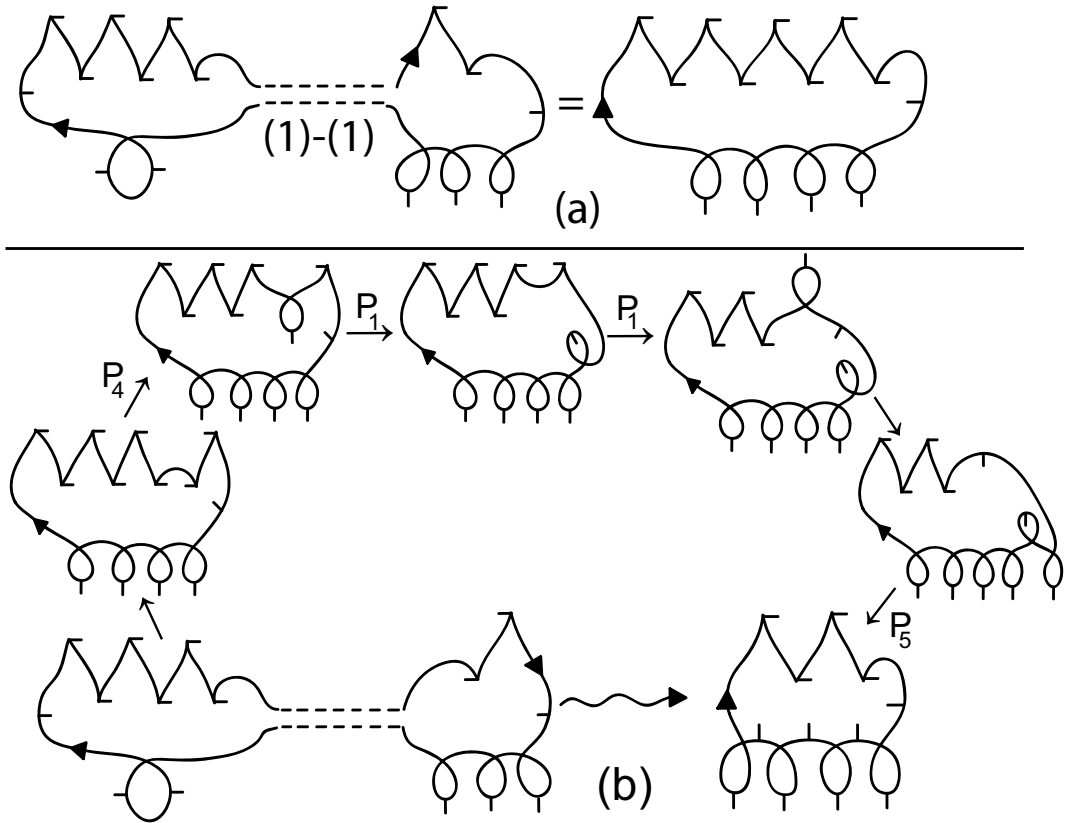


Figura 3.54: Soma conexa do tipo (1)-(1) de duas frentes de ondas básicas

No caso (a) os índices de Maslov das duas frentes de ondas possuem o mesmo sinal, e daí obtemos exatamente a curva básica  $\omega_{i+j+1, \mu+\nu}$  cujos invariantes são exatamente a soma dos invariantes das frentes de ondas coladas.

Já no caso (b) os índices de Maslov tem sinais opostos. Sejam  $\mu = 2m > 0$  e  $\nu = -2k < 0$  ( $k, m > 0$ ) os valores dos índices de Maslov e suponhamos sem perda de generalidade que  $k < m$ . Dessa forma, próximo aos pontos de colagem  $p$  e  $q$  após a mesma existem duas cúspides de sinais opostos. Fazendo uma perestroika elementar  $P_4$ , obtemos um laço, interno ou externo. Por meio de perestroikas elementares do tipo  $P_1$  podemos transportar este laço próximo aos outros laços (se houver), isto é, para longe do conjunto das cúspides. Novamente temos duas cúspides de sinais opostos. Fazendo uso da perestroika  $P_4$  mais uma vez obtemos um laço, sendo este de outro tipo relativamente ao primeiro laço que fizemos surgir (isto é, externo ou interno). Repetiremos este processo  $2k$  vezes obtendo  $k$  pares de laços interno-externo. Para obter a frente de onda básica  $\omega_{i+j+1, 2m-2k}$  fazemos uso da perestroika elementar  $P_5$   $k$  vezes. Ao final deste processo de passar por  $2k$  perestroikas  $P_4$  e  $k$  perestroikas  $P_5$  os incrementos dos valores dos invariantes são:

$$\delta(J^+) = 2k; \delta(J^-) = 0; \delta(Sp) = -4k; \delta(h) = 2k; \delta(\lambda) = -4k.$$

Para estas variações  $\delta(X)$  ( $X = J^+, J^-, Sp, h, \lambda$ ) verificamos que:

	$X(\omega_{i,2m})$	+	$X(\omega_{j,2k})$	+	$\delta(X)$	=	$X(\omega_{i+j+1,2m-2k})$
$J^+$	$-m$		$-k$		$2k$		$-(m-k)$
$J^-$	$-(i+1)$		$-(j+1)$		$0$		$-(i+j+2)$
$Sp$	$2m$		$2k$		$-4k$		$2(m-k)$
$h$	$i+1-m$		$j+1-k$		$2k$		$i+j+2-(m-k)$
$\lambda$	$2m$		$2k$		$-4k$		$2m-2k$

**Caso (2)-(2).** Aqui os sinais dos índices ainda devem ser iguais para que seja possível a soma conexa (veja figura 3.55). Este caso se reduz ao anterior por meio de uma perestroika cujos incrementos são:

$$\delta(J^-) = 2; \quad \delta(h) = -2.$$

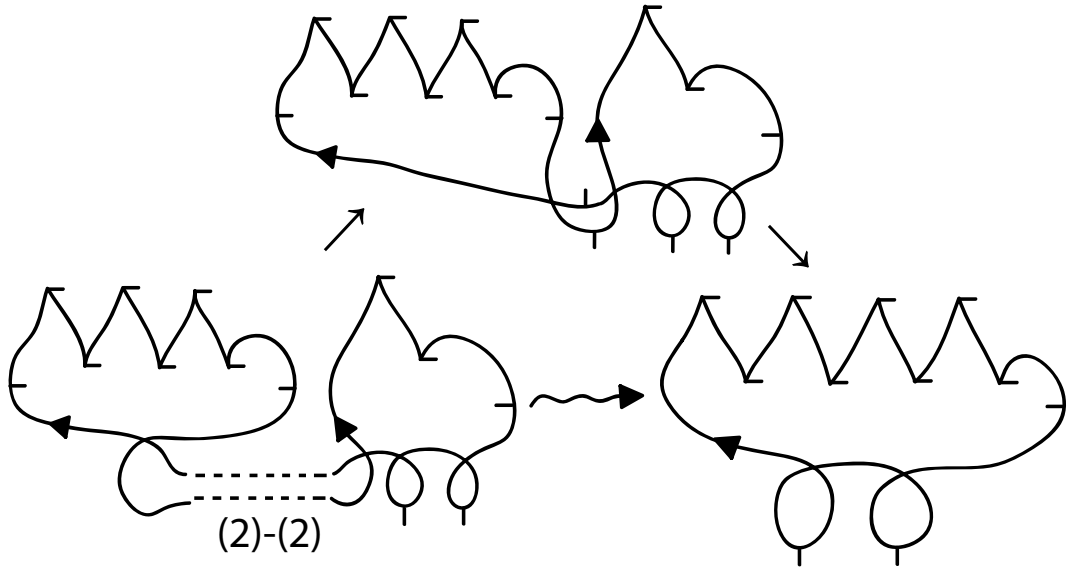


Figura 3.55: Soma conexa do tipo (2)-(2) de duas frentes de ondas básicas

As curvas básicas obtidas tem índice igual a  $i+j-1$ . Calculando agora com as novas variações chegamos na seguinte tabela:

	$X(\omega_{i,2m})$	+	$X(\omega_{j,2k})$	+	$\delta(X)$	=	$X(\omega_{i+j-1,2m-2k})$
$J^+$	$-m$		$-k$		$2k$		$-(m-k)$
$J^-$	$-(i+1)$		$-(j+1)$		$2$		$-(i+j)$
$Sp$	$2m$		$2k$		$-4k$		$2(m-k)$
$h$	$i+1-m$		$j+1-k$		$2(k-1)$		$i+j-(m-k)$
$\lambda$	$2m$		$2k$		$-4k$		$2m-2k$

**Caso (1)-(2).** Neste caso os sinais dos índices são opostos. Sejam os valores dos índices das frentes de onda básica iguais a  $i$  e  $-j$ , com  $-j$  sendo o índice da frente

de onda do ponto de tipo (2). Além disso, vamos considerar  $i \geq j$ . Suponhamos que o índice de Maslov das frentes de ondas sejam positivos (veja figura 3.56).

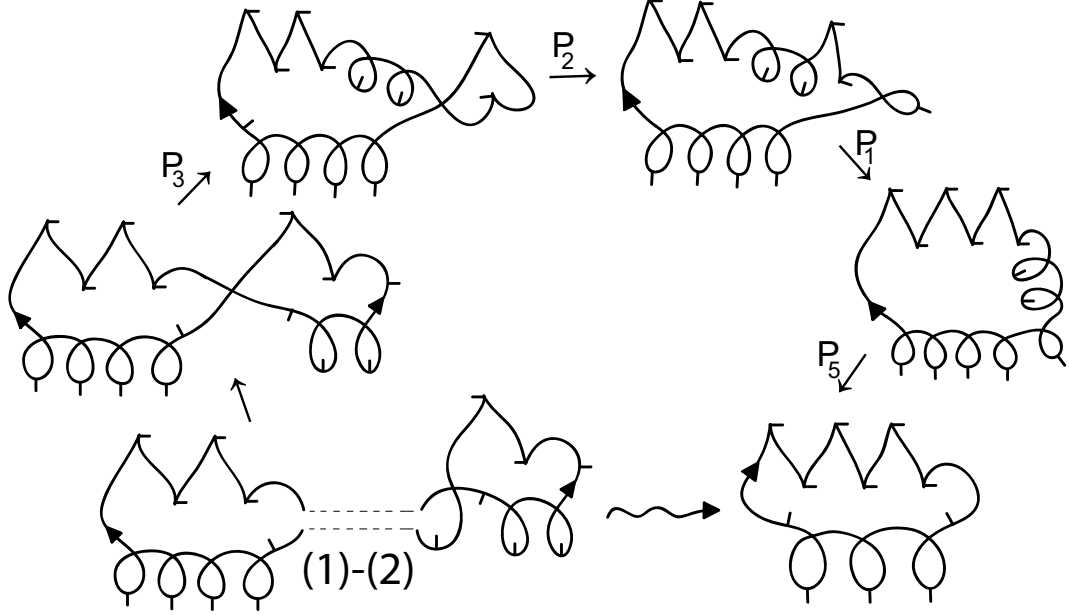


Figura 3.56: Soma conexa do tipo (1)-(2) de duas frentes básicas

Transportamos os  $j$  laços e as  $2k$  cúspides como mostra a figura 3.56 fazendo exatamente  $j$  vezes a perestroika  $P_3$  e  $k$  vezes a perestroika  $P_2$ . Obtemos uma frente de onda com  $\mu + \nu$  cúspides de mesmo sinal,  $i + 1$  laços externos e  $j$  laços internos. Por meio de perestroikas do tipo  $P_1$  reunimos as cúspides de um lado e os laços de outro. Daí eliminamos os  $j$  laços internos com  $j$  laços externos por meio de  $j$  perestroikas do tipo  $P_5$ . Como os índices de Maslov possuem o mesmo sinal, obtemos uma frente de onda básica com índice  $i - j + 1$ , que possui na verdade  $i - j + 2$  pontos duplos. As variações nos valores dos invariantes são

$$\delta(J^+) = 0; \delta(J^-) = 2j; \delta(Sp) = 0; \delta(h) = -2j; \delta(\lambda) = 0.$$

Estes incrementos coincidem com as diferenças entre os valores da soma dos invariantes das frentes de ondas somadas e os valores dos invariantes da curva básica  $\omega_{i-j+1, \mu+\nu}$ , como mostra a seguinte tabela:

	$X(\omega_{i,2m})$	+	$X(\omega_{-j,2k})$	+	$\delta(X)$	=	$X(\omega_{i-j+1,2m+2k})$
$J^+$	$-m$		$-k$		0		$-(m+k)$
$J^-$	$-(i+1)$		$-(j+1)$		$2j$		$-(i-j+2)$
$Sp$	$2m$		$2k$		0		$2(m+k)$
$h$	$i+1-m$		$j+1-k$		$-2j$		$i-j+2-(m+k)$
$\lambda$	$2m$		$2k$		0		$2m+2k$

O caso  $i < j$  é similar. Se os índices de Maslov não possuem os mesmos sinais, então voltamos a situação do caso (1)-(1).

Assim, o teorema está provado.  $\square$

Podemos resumir o que foi visto no teorema anterior na seguinte tabela que exhibe o valor dos invariantes básicos para as frentes de ondas básicas.

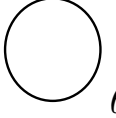



CURVAS BÁSICAS	$J^+$	$J^-$	Sp	h	$\lambda$
 $\theta$	0	0	0	0	0
 $n = i + 1$ $\omega_{i,0}$	0	$-(i+1)$	0	$i+1$	0
 $\mu = 2k$ $\omega_{1,\mu}$	$-k$	0	$2k$	$-k$	$2k$
 $n = i + 1$ $\mu = 2k$ $\omega_{i,\mu}$	$-k$	$-(i+1)$	$2k$	$i+1-k$	$2k$

Figura 3.57: Os valores dos invariantes básicos nas frentes de ondas básicas

Antes de enunciar o teorema principal desta seção precisamos de mais um lema.

**Lema 3.34** *Um invariante aditivo de frentes de ondas orientadas e co-orientadas em um plano orientado é evidentemente definido por seus saltos elementares, desde que seja invariante sob o processo de inversão da co-orientação da frente de onda. Se não for pedido que ele seja invariante sob o processo de inversão da co-orientação da frente de onda, ele é definido pelos saltos elementares a menos da adição de um múltiplo do índice de Maslov.*

**Demonstração:** A diferença entre dois invariantes com os mesmos valores dos saltos elementares é uma função localmente constante. Daí podemos considerar tal função como uma função no conjunto das componentes  $\Omega_{i,\mu}$  do espaço das imersões legendreanas.

A soma conexa define duas operações neste conjunto. Na verdade, existem quatro possíveis tipos de pontes conectando duas frentes de ondas orientadas e co-orientadas, uma no semi-plano à esquerda e a outra no semi-plano à direita (figura 3.58).

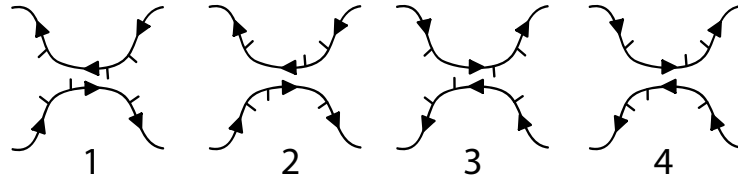


Figura 3.58: Os quatro tipos de pontes conectando duas frentes

Podemos preparar dois ramos envolvidos em uma soma conexa de modo a usar quaisquer das quatro pontes usando perestroikas elementares. Veja na figura 3.59 como isto funciona.

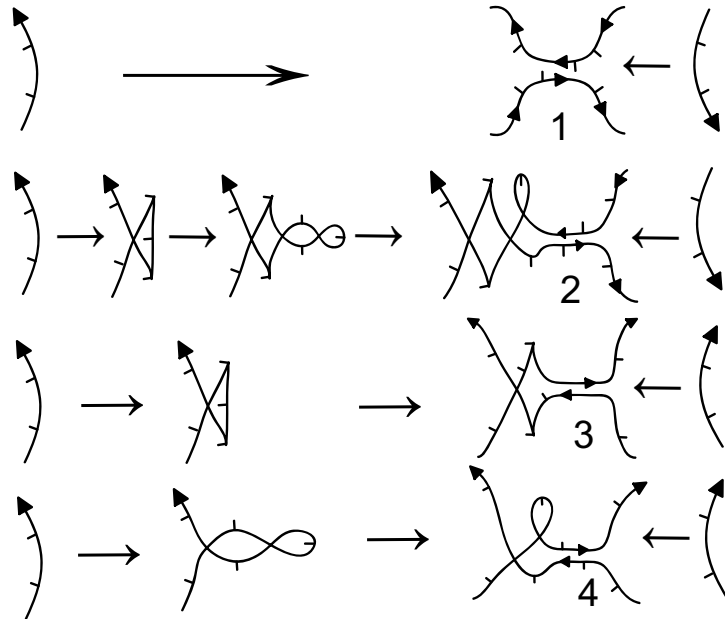


Figura 3.59: Preparando o ramo para a colagem usando as quatro pontes

Portanto podemos somar duas frentes de ondas planas de quaisquer duas classes  $\Omega_{i_1, \mu_1}$  e  $\Omega_{i_2, \mu_2}$  usando alguma das quatro pontes.

O índice de Maslov é aditivo sob qualquer dos quatro tipos de soma conexa. O índice da soma é  $i_1 + i_2 + 1$  para as duas primeiras pontes (diferindo somente pela co-orientação) e  $i_1 + i_2 - 1$  para o outro par de pontes (obtidas do primeiro par pela inversão da orientação).

Portanto, a soma conexa define duas operações no conjunto de componentes conexas  $\mathbf{Z}^2 = \{i, k = \mu/2\}$ :

$$A_+ : (i_1, k_1), (i_2, k_2) \mapsto (i_1 + i_2 + 1, k_1 + k_2)$$

$$A_- : (i_1, k_1), (i_2, k_2) \mapsto (i_1 + i_2 - 1, k_1 + k_2)$$

Ambas as operações são comutativas como operações em  $\mathbf{Z}^2$ .

A aditividade da diferença de dois invariantes aditivos com saltos elementares iguais para a soma conexa  $A_+$  significa que esta função é linear em  $\mathbf{Z}^2$  com respeito a estrutura

de grupo abeliano em  $\mathbf{Z}^2$ , cujo elemento nulo é  $(-1, 0)$ . Todas estas funções são da forma  $f(i, k) = a(i + 1) + bk$ . De maneira análoga, a aditividade com respeito ao segundo tipo de soma conexa implica que  $f(i, k) = c(i - 1) + dk$ .

Portanto,  $f(i, k) = ek$ , o que prova o lema.  $\square$

**Corolário 3.35** *Os únicos invariantes aditivos locais RO-independentes são combinações lineares de  $J^+$ ,  $J^-$ ,  $Sp$ ,  $h$ ,  $\lambda$ .*

**Demonstração:** Pela Proposição 3.24, as únicas possibilidades para os saltos RO-independentes são as combinações lineares de  $J^+$ ,  $J^-$ ,  $Sp$ ,  $h$  e  $\lambda$ . Assim, pelo lema anterior, os saltos definem de forma clara os invariantes.  $\square$

**Teorema 3.36** *Todo invariante local de frentes de ondas independentes das orientações e aditivo sob a soma conexa é uma combinação linear dos 5 seguintes invariantes básicos:*

$$J^+, J^-, Sp, h, \lambda.$$

*Além disso, os saltos estão definidos no Lema 3.24 e seus valores nas curvas básicas estão descritos na tabela 3.57.*

**Demonstração:** A existência dos invariantes está provada no Teorema 3.33 e a unicidade é garantida pelo Lema 3.34 e seu Corolário.  $\square$

**Exemplo:** O número  $n$  de pontos duplos é um invariante local independente das orientações, e mais é uma combinação linear dos invariantes básicos  $h$  e  $\lambda$ , como segue:

$$n = h + \frac{1}{2}\lambda$$

Um resultado interessante que segue do teorema acima é o seguinte corolário que garante a diminuição no número de diferentes eventos não genéricos, em um caminho conectando duas curvas do tipo  $\omega_{i,0}$  e  $K_{i,0}$ .

**Corolário 3.37** *Qualquer caminho genérico em  $\Omega_{i,0}$  conectando duas  $L$ -imersões, cujas frentes de ondas planas pertencem as classes  $\omega_{i,0}$  e  $K_{i,0}$ , contem pelo menos  $i - 1$  eventos do tipo “auto-tangência com co-orientações paralelas” e pelo menos  $i - 2$  eventos do tipo “auto-tangência com co-orientações anti-paralelas”. Se quisermos evitar a ocorrência de pontos triplos, então teremos pelo menos  $2i - 2$  cruzamentos por cúspide. Se queremos evitar a ocorrência de cruzamentos por cúspide, então teremos pelo menos  $i - 1$  pontos triplos.*

**Demonstração:** A primeira coisa a fazer é observar a seguinte tabela:



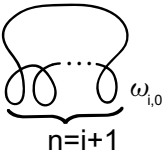
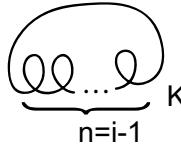
	$J^+$	$J^-$	Sp	h	$\lambda$
 $\omega_{i,0}$ $n=i+1$	0	$-(i+1)$	0	$i+1$	0
 $K_{i,0}$ $n=i-1$	$-2(i-1)$	$-3(i-1)$	$4(i-1)$	$i-1$	0

Figura 3.60: Invariantes básicos para as frentes de ondas planas  $\omega_{i,0}$  e  $K_{i,0}$

A primeira linha da tabela apresenta os valores dos invariantes básicos nas frentes de ondas planas do tipo  $\omega_{i,0}$  e a segunda apresenta os valores dos invariantes básicos nas frentes de ondas planas do tipo  $K_{i,0}$ . Mas como as frentes do segundo tipo são as curvas planas de Arnold e vimos que  $J^+$ ,  $J^-$ ,  $Sp$  e  $h$  restritos a estas curvas são os invariantes  $J^+$ ,  $J^-$ ,  $St$  e  $n$  (o número de pontos duplos), respectivamente. O invariante  $\lambda$  não tem um invariante relacionado a ele nas curvas planas pois nesta classe de curvas o nascimento de cuspide não é um evento não estável.

Agora, notemos que,

$$J^+(\omega_{i,0}) - J^+(K_{i,0}) = 2(i-1), \text{ e } J^-(\omega_{i,0}) - J^-(K_{i,0}) = 2i-4.$$

Além disso,  $Sp(\omega_{i,0}) - Sp(K_{i,0}) = 4i-4$ .

Mas,  $Sp(\omega_{i,0}) - Sp(K_{i,0}) = \sum_j (\Delta_j \pi + 2\Delta_j St)$  pela Proposição 3.24. Se vamos evitar os pontos triplos segue que  $\Delta_j St = 0$  o que implica  $\sum_j \Delta_j \pi = 4i-4$ . Sabemos que cada cruzamento por cuspide contribui com  $\pm 2$  para  $\sum_j \Delta_j \pi$ . Portanto o número de cruzamentos por cuspide é pelo menos  $2i-2$ .

De forma análoga, se evitamos os cruzamentos por cuspide, teremos  $\Delta_j \pi = 0$ . o que implica  $2 \sum_j \Delta_j St = 4i-4$ . Como cada cruzamento por ponto triplo também contribui com  $\pm 2$ , isto significa dizer que teremos pelo menos  $i-1$  pontos triplos, no caminho ligando as frentes de onda  $\omega_{i,0}$  e  $K_{i,0}$ .  $\square$

**Exemplo:** As frentes de onda plana na figura 3.61 são dos tipos  $\omega_{2,0}$  e  $K_{2,0}$ . O caminho entre elas evitando os cruzamentos por cuspide possui 1 ponto triplo, enquanto que o caminho evitando os pontos triplo existem 2 cruzamentos por cuspide.

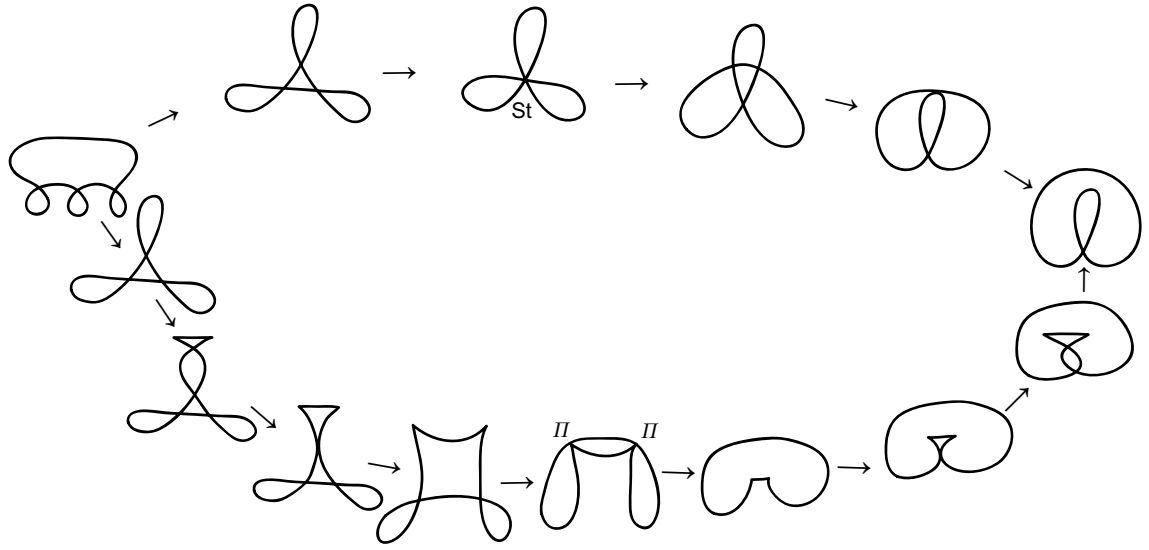


Figura 3.61: Exemplo para as frentes de ondas básicas  $\omega_{2,0}$  e  $K_{2,0}$ .

### 3.5 Os invariantes de frentes de ondas planas dependentes das orientações

Nesta seção repetiremos o procedimento seguido na procura dos invariantes básicos  $RO$ -independentes. O discriminante considerado aqui será o mesmo da parte anterior pois os eventos aqui considerados não genéricos são parte dos estratos considerados anteriormente.

#### 3.5.1 Os 6 invariantes básicos $RO$ -dependentes

Aicardi definiu 6 invariantes de frentes de ondas planas que são dependentes das orientações do plano e da frente de onda plana bem como da co-orientação da frente de onda plana.

Os invariantes  $RO$ -dependentes são os seguintes:

- 1)  $f^+$  e  $f^-$  são os invariantes básicos associados aos cruzamentos dos discriminantes de auto-tangência ( $K$ ), de cruzamento por cúspide ( $\Pi$ ) e nascimento de cúspide ( $\Lambda$ ). Mais especificamente:

$f^+$  está associado aos eventos  $K_{C+}^+$ ,  $K_{D+}^-$ ,  $\Pi_C$ ,  $\Pi_{D\uparrow}^{++}$ ,  $\Pi_{D\uparrow}^{-+}$ ,  $\Pi_{D\downarrow}^{++}$ ,  $\Pi_{D\downarrow}^{-+}$ ,  $\Lambda_+^\uparrow$  e  $\Lambda_+^\downarrow$ ;

$f^-$  está associado aos eventos  $K_{C-}^+$ ,  $K_{D-}^-$ ,  $\Pi_C$ ,  $\Pi_{D\uparrow}^{+-}$ ,  $\Pi_{D\uparrow}^{-}$ ,  $\Pi_{D\downarrow}^{+-}$ ,  $\Pi_{D\downarrow}^{-}$ ,  $\Lambda_-^\uparrow$  e  $\Lambda_-^\downarrow$ .

- 2)  $p^\uparrow$  e  $p^\downarrow$  são os invariantes básicos associados aos cruzamentos do discriminante de cruzamento por cúspide ( $\Pi$ ). Mais especificamente:

$p^\uparrow$  está associado aos eventos  $\Pi_{C\uparrow}^{++}$ ,  $\Pi_{D\uparrow}^{+-}$ ,  $\Pi_{C\uparrow}^{-}$ ,  $\Pi_{D\uparrow}^{++}$ ,  $\Pi_{C\uparrow}^{-}$ ,  $\Pi_{D\uparrow}^{-}$ ,  $\Pi_{C\uparrow}^{-}$  e  $\Pi_{D\uparrow}^{+-}$ ;

$p^\downarrow$  está associado aos eventos  $\Pi_{C\downarrow}^{++}$ ,  $\Pi_{D\downarrow}^{+-}$ ,  $\Pi_{C\downarrow}^{-}$ ,  $\Pi_{D\downarrow}^{++}$ ,  $\Pi_{C\downarrow}^{-}$ ,  $\Pi_{D\downarrow}^{-}$ ,  $\Pi_{C\downarrow}^{-}$  e  $\Pi_{D\downarrow}^{+-}$ .

3)  $\lambda^\uparrow$  e  $\lambda^\downarrow$  são os invariantes básicos associados ao cruzamento do discriminante de nascimento de cúspides ( $\Lambda$ ). Mais especificamente:

$\lambda^\uparrow$  está associado aos eventos  $\Lambda_{+}^\uparrow$ , e  $\Lambda_{-}^\uparrow$ ;

$\lambda^\downarrow$  está associado aos eventos  $\Lambda_{+}^\downarrow$ , e  $\Lambda_{-}^\downarrow$ .

Os saltos elementares vão obedecer as regras definidas na seção anterior bem como as co-orientações dos estratos. Os saltos elementares dependendo das orientações, definidos no Lema 3.10 somam 54. Notemos que a classificação dos estratos de codimensão 1 já está concluída. Agora vamos impor condições sobre os estratos de codimensão 2, assim como fizemos anteriormente.

Como temos vários estratos de codimensão 1 não é conveniente escrever todo sistema de equações de coerência. Vamos, então fazer uso de um outro sistema.

**Definição 3.38** *Um sistema parcial de coerência é um conjunto de equações obtidas a partir do sistema de coerência inteiro envolvendo somente os saltos nos estratos de um tipo ( $K$ ,  $T$ ,  $\Pi$  ou  $\Lambda$ ). As soluções desses sistemas são chamadas **saltos elementares reduzidos**.*

Primeiramente encontramos um conjunto de saltos elementares reduzidos, daí para essas novas variáveis escrevemos as outras equações de coerência local nos estratos de codimensão 2 envolvendo diferentes tipos de saltos.

**Lema 3.39** *Os seguintes saltos elementares reduzidos formam o sistema fundamental das soluções da união dos sistemas de coerência parcial para os estratos  $K$ ,  $T$  e  $\Pi$ .*

$$1) \Delta J_{C+}^+$$

$$2) \Delta J_{C-}^+$$

$$3) \Delta J_D^+ = \Delta J_{D,i+}^+ + \Delta J_{D,i-}^+$$

$$4) \Delta J_C^- = \Delta J_{C,i}^- + \Delta J_{C,e}^-$$

$$5) \Delta J_{D+}^- = \Delta J_{D+,e}^- + \Delta J_{D+,i}^-$$

$$6) \Delta J_{D-}^- = \Delta J_{D-,e}^- + \Delta J_{D-,i}^-$$

$$7) \Delta St = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\eta} \Delta St_{A\eta}^{\alpha\beta\gamma} + \sum_{\alpha,\beta,\eta} \Delta St_{B\eta}^{\alpha\alpha\beta}$$

$$8) \Delta \pi_{\uparrow}^{-+} = \Delta \pi_{C\uparrow}^{-+} + \Delta_{D\uparrow}^{-+}$$

$$9) \Delta \pi_{\uparrow}^{--} = \Delta \pi_{C\uparrow}^{--} + \Delta_{D\uparrow}^{--}$$

$$10) \Delta \pi_{\uparrow}^{++} = \Delta \pi_{C\uparrow}^{++} + \Delta_{D\uparrow}^{++}$$

$$11) \Delta \pi_{\uparrow}^{+-} = \Delta \pi_{C\uparrow}^{+-} + \Delta_{D\uparrow}^{+-}$$

$$12) \Delta\pi_{\downarrow}^{-+} = \Delta\pi_{C\downarrow}^{-+} + \Delta_{D\downarrow}^{-}$$

$$13) \Delta\pi_{\downarrow}^{--} = \Delta\pi_{C\downarrow}^{--} + \Delta_{D\downarrow}^{-+}$$

$$14) \Delta\pi_{\downarrow}^{++} = \Delta\pi_{C\downarrow}^{++} + \Delta_{D\downarrow}^{+-}$$

$$15) \Delta\pi_{\downarrow}^{+-} = \Delta\pi_{C\downarrow}^{+-} + \Delta_{D\downarrow}^{++}$$

$$16) \Delta\pi_C = \sum_{\alpha, \beta, \eta} \Delta\pi_C^{\alpha\beta\eta},$$

onde os índices  $\alpha, \beta, \gamma$  percorrem o conjunto de sinais  $(+, -)$  e  $\eta$  percorre o conjunto de setas.

**Demonstração:** Primeiro devemos escrever os sistemas de coerência parciais para os saltos reduzidos do tipo  $\Delta J, \Delta St, \Delta\pi$ . Para a obtenção destes sistemas, devemos seguir a mesma idéia da demonstração do Lema 3.23, analisando cada caso separadamente. A diferença é que aqui faremos a análise por tipos de saltos.

A seguir, analisaremos o caso do estrato  $KK$ . A demonstração no caso dos outros estratos segue de maneira análoga

**Estrato  $KK$ .** Para os saltos reduzidos neste estrato de auto-tangências, o sistema de coerência é

$$M_{(KK)} \nabla J = 0 \tag{3.3}$$

onde  $\Delta J$  é o vetor dos coeficientes dos saltos básicos  $RO$ -dependentes definindo o salto

$$\zeta = \nabla J_{C+}^+ \cdot \Delta J_{C+}^+ + \dots + \nabla J_{D-,i}^- \cdot \Delta J_{D-,i}^-,$$

a saber

$$\nabla J = (\nabla J_{C+}^+, \nabla J_{C-}^+, \nabla J_{D,i+}^+, \nabla J_{D,i-}^+, \nabla J_{C,i}^-, \nabla J_{C,e}^-, \nabla J_{D+,e}^-, \nabla J_{D+,i}^-, \nabla J_{D-,e}^-, \nabla J_{D-,i}^-)$$

e

$$M_{(KK)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Existem 6 casos diferentes envolvendo os 10 estratos locais  $RO$ -dependentes fornecendo as condições no estrato  $KK$  de codimensão 2. Eles estão mostrados na figura 3.62. Em (a) e (b) a condição de co-orientabilidade é automaticamente satisfeita, (c), (d), (e) e (f) fornecem respectivamente as linhas 1-4 de  $M_{(KK)}$ . Os geradores da solução do sistema 3.3 consistem nos saltos reduzidos denotados de 1)-6) no enunciado do lema.

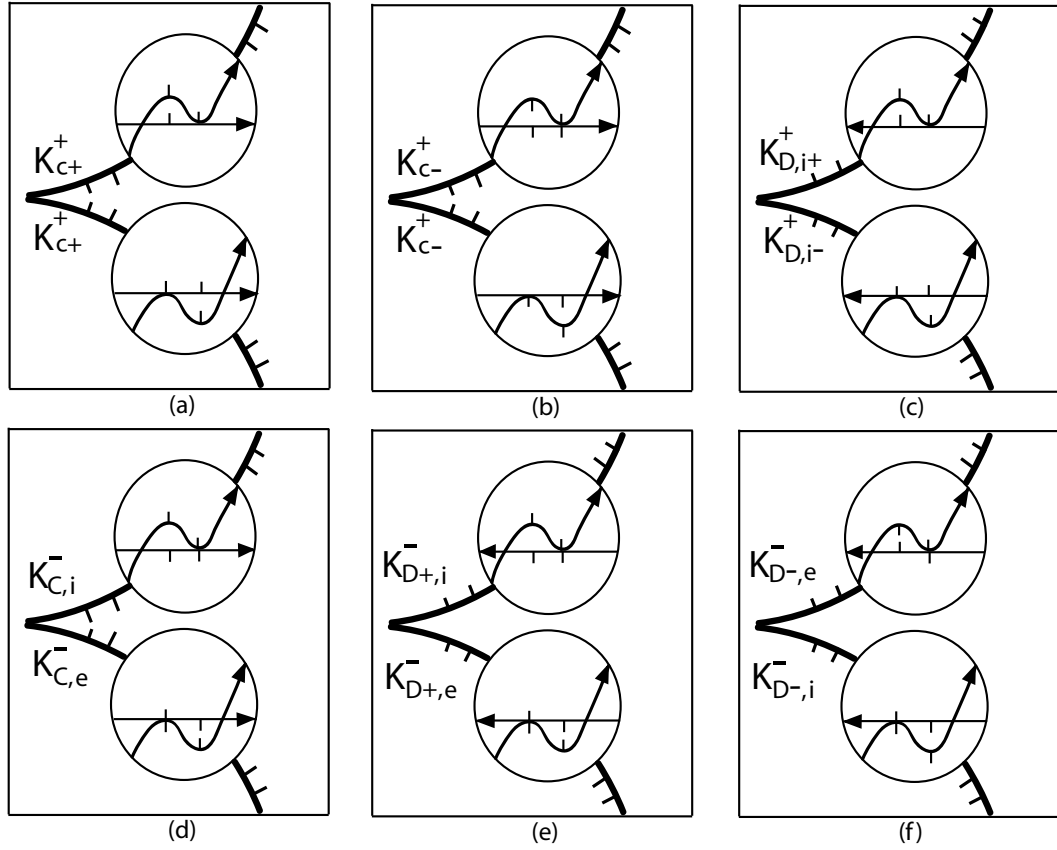


Figura 3.62: O estrato  $KK$   $RO$ -dependente

□

As seguintes notações serão úteis para facilitar as notações dos invariantes  $RO$ -dependentes. Considerando os saltos reduzidos obtidos no Lema 3.39 vamos considerar as seguintes combinações lineares:

$$\Delta\pi_D = \sum_{\alpha,\beta,\eta} \Delta\pi_{D,\eta}^{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta,\eta} \Delta\pi_{\eta}^{\alpha\beta} - \Delta\pi_C$$

$$\Delta\pi_{\uparrow}^{1+} = \sum_{\beta} \Delta\pi_{\uparrow}^{+\beta}$$

$$\Delta\pi_{\uparrow}^{1-} = \sum_{\beta} \Delta\pi_{\uparrow}^{-\beta}$$

$$\Delta\pi_{\downarrow}^{1+} = \sum_{\beta} \Delta\pi_{\downarrow}^{+\beta}$$

$$\Delta\pi_{\downarrow}^{1-} = \sum_{\beta} \Delta\pi_{\downarrow}^{-\beta}$$

$$\Delta\pi_{\uparrow}^{2+} = \Delta\pi_C - \sum_{\alpha\eta} \Delta\pi_{\eta}^{\alpha-}$$

$$\Delta\pi_{\uparrow}^{2-} = \Delta\pi_C - \sum_{\alpha\eta} \Delta\pi_{\eta}^{\alpha+},$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  percorrem o conjunto de sinais  $(+, -)$  e  $\eta$  percorre o conjunto das setas  $(\uparrow, \downarrow)$ .

**Observação 3.40** *Já sabemos da Proposição 3.10 que  $\Delta\pi_C$  e  $\Delta\pi_D$  são os saltos elementares RO-independentes definidos no estrato de cruzamento por cúspides.*

$\Delta\pi_{\uparrow}^{1+}$  é o salto no estrato de cruzamento por cúspide que é não nulo somente se a cúspide é do tipo para cima e o ramo saindo do ponto de cúspide é positivo. Analogamente para  $\Delta\pi_{\uparrow}^{1-}$ ,  $\Delta\pi_{\downarrow}^{1+}$  e  $\Delta\pi_{\downarrow}^{1-}$ , o salto é não nulo somente nos casos (para cima, negativo), (para baixo, positivo) e (para baixo, negativo), respectivamente.

$\Delta\pi^{2+}$  ( $\Delta\pi^{2-}$ ) é o salto no estrato de cruzamento por cúspide não nulo somente se o segmento sem cúspide cruzando o ponto de cúspide é positivo (negativo). O salto  $\Delta\pi^{2+}$  ( $\Delta\pi^{2-}$ ) tem o valor oposto nos cruzamentos positivos dos estratos  $\Pi_C$  e  $\Pi_D$ .

**Observação 3.41** *Não existem sistemas de coerência parciais para os saltos do tipo  $\Delta\lambda$ , com isto devemos adicionar ao conjunto de 16 saltos elementares reduzidos independentes todos os 4 saltos elementares do tipo  $\Delta\lambda$ . As 54 incógnitas no sistema de equações de coerência se reduzem a 20 novas incógnitas.*

**Definição 3.42** *Para todo salto reduzido (e para toda combinação linear descrita nas páginas 86 e 87) os **estratos locais reduzidos** são as combinações lineares dos estratos locais correspondendo aos saltos elementares que compõem este salto reduzido ou combinação linear.*

Para escrever a matriz do sistema de coerência denotamos o salto incógnita  $\zeta$  (definindo o 1-cociclo) por

$$\zeta = \nabla J_{C+}^+ \cdot \Delta J_{C+}^+ + \dots + \nabla \lambda_-^{\downarrow} \cdot \Delta \lambda_-^{\downarrow}$$

e denotamos por  $\nabla^{(r)}$  o vetor dos coeficientes:

$$\begin{aligned} \nabla^{(r)} = & (\nabla J_{C+}^+, \nabla J_{C-}^+, \nabla J_D^+, \nabla J_C^-, \nabla J_{D+}^-, \nabla J_{D-}^-, \nabla St, \\ & \nabla \pi_{\uparrow}^{-+}, \nabla \pi_{\uparrow}^{--}, \nabla \pi_{\uparrow}^{++}, \nabla \pi_{\uparrow}^{+-}, \nabla \pi_{\downarrow}^{-+}, \nabla \pi_{\downarrow}^{--}, \nabla \pi_{\downarrow}^{++}, \nabla \pi_{\downarrow}^{+-}, \nabla \pi_C, \\ & \nabla \lambda_+^{\uparrow}, \nabla \lambda_-^{\uparrow}, \nabla \lambda_+^{\downarrow}, \nabla \lambda_-^{\downarrow}) \end{aligned}$$

**Lema 3.43** *O vetor  $\Delta^{(r)}$  define um 1-cociclo se, e somente se, ele verifica o sistema de coerência*

$$M^{or} \nabla^{(r)} = 0 \tag{3.4}$$

sendo o operador linear  $M^{or}$  definido pela seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O sistema fundamental de 1-cociclos derivado das soluções da equação 3.4 é formado pelos seguintes saltos básicos:

$$\begin{aligned} \Delta J^+ &= \Delta J_{C^+}^+ + \Delta J_{C^-}^+ + \Delta J_D^+ \\ \Delta J^- &= \Delta J_C^- + \Delta J_{D^+}^- + \Delta J_{D^-}^- \\ \Delta Sp &= 2\Delta St + \Delta\pi_C + \Delta\pi_D \\ \Delta f^+ &= 2\Delta J_{C^+}^+ - 2\Delta J_{D^+}^- + \Delta\pi^{2^+} + \Delta\lambda_+^\uparrow + \Delta\lambda_+^\downarrow \\ \Delta f^- &= 2\Delta J_{C^-}^+ - 2\Delta J_{D^-}^- + \Delta\pi^{2^-} + \Delta\lambda_-^\uparrow + \Delta\lambda_-^\downarrow \\ \Delta p^\uparrow &= \Delta\pi_\uparrow^{1^+} - \Delta\pi_\uparrow^{1^-} \\ \Delta p^\downarrow &= \Delta\pi_\downarrow^{1^+} - \Delta\pi_\downarrow^{1^-} \\ \Delta\lambda^\uparrow &= \Delta\lambda_+^\uparrow + \Delta\lambda_-^\uparrow \\ \Delta\lambda^\downarrow &= \Delta\lambda_+^\downarrow + \Delta\lambda_-^\downarrow \end{aligned}$$

**Demonstração:** No Lema 3.39 consideramos apenas os estratos que envolviam somente um tipo de evento, neste vamos considerar os estratos de codimensão 2 que envolvem mais de um estrato como  $K\Pi$ ,  $\Lambda\Lambda$  e  $\Pi\Lambda$ .

**Estrato  $K\Pi$ .** As co-orientações dos estratos locais de auto-tangências e de cruzamento por cúspides se encontrando neste estrato e seus caracteres  $C$  e  $D$  foram discutidas no caso  $RO$ -independente. No caso  $RO$ -dependente, existem 16 situações

distintas. Consideremos os casos (a) e (b) da figura 3.63, eles são distinguíveis também no caso  $RO$ -independente. Notamos que nas duas ocorrências do cruzamento por cúspide ao longo do caminho fechado em torno de estrato  $K\Pi$  de codimensão 2, os tipos *para cima* ou *para baixo* das cúspides são os mesmos como os sinais de todos os segmentos. Portanto, os dois saltos elementares do tipo  $\Delta\pi$  coincidem nos sinais de cima e nas setas. Em termos dos coeficientes, os saltos elementares do tipo  $\Delta\pi$ , nos casos mostrados em (a) e (b), fornecem:

$$\begin{aligned} \nabla\pi_{C\uparrow}^{++} - \nabla J_{C+}^+ - \nabla\pi_{D\uparrow}^{++} + \nabla J_D^+ &= 0 \\ \nabla\pi_{C\uparrow}^{++} - \nabla J_C^- - \nabla\pi_{D\uparrow}^{++} + \nabla J_{D+}^- &= 0. \end{aligned}$$

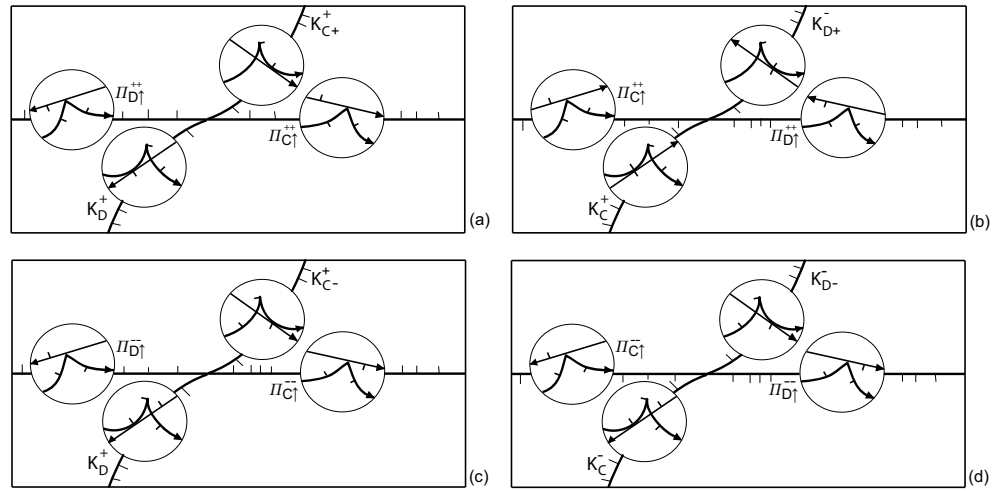


Figura 3.63: Quatro exemplos de  $K\Pi$  estrato  $RO$ -dependente

Daí obtemos as linhas 1 e 2 da matriz  $M^{or}$ , já que em termos dos saltos reduzidos, linearmente independentes temos:

$$\nabla\pi_{C\uparrow}^{\alpha\beta} - \nabla\pi_{D\uparrow}^{\alpha\beta} = \nabla\pi_{\uparrow}^{\alpha\beta} - \nabla\pi_{\uparrow}^{\alpha-\beta} + \nabla\pi_C.$$

Encontramos as outras equações aplicando as  $RO$ -involuções a esses dois casos. Notamos que tais involuções não mudam os sinais de cima dos saltos do tipo  $\Delta J$ , e os caracteres  $C$  e  $D$  do estrato não se alteram.

Por exemplo, os casos (c) e (d) na figura fornecem as linhas 3 e 4 da matriz  $M^{or}$ , são obtidos aplicando a involução  $c$  aos dois casos anteriores. O resultado dessa involução invertendo todos os sinais dos segmentos é o seguinte: para os saltos do tipo  $\Delta J$  os sinais de baixo são invertidos, enquanto para os saltos do tipo  $\Delta\pi$  os sinais de cima são invertidos.

Se aplicamos a involução  $b$ , novamente os sinais de baixo dos saltos do tipo  $\Delta J$  são invertidos, enquanto somente o segundo sinal de cima (o sinal do segmento sem



singularidades que cruza a cúspide) é invertido em  $\Delta\pi_{\eta}^{\alpha\beta}$ . Além disso o caracter *para cima* se torna *para baixo*:

$$\Delta\pi_{Z\uparrow}^{\alpha\beta} \longrightarrow \Delta\pi_{Z\downarrow}^{\alpha-\beta}. \quad (Z = C, D)$$

A involução  $a$  inverte os sinais de baixo dos saltos do tipo  $\Delta J$  e todos os sinais de cima e as setas de  $\Delta\pi$ . No entanto a involução  $ab$  não altera os saltos do tipo  $\Delta J$  e as setas dos saltos  $\Delta\pi$ , e inverte somente o primeiro dos sinais de cima de  $\Delta\pi$ :

$$\Delta\pi_{Z\uparrow}^{\alpha\beta} \longrightarrow \Delta\pi_{Z\uparrow}^{-\alpha\beta}, \quad (Z = C, D)$$

isto é, para os altos reduzidos

$$\Delta\pi_{\uparrow}^{\alpha\beta} \longrightarrow \Delta\pi_{\uparrow}^{-\alpha\beta}.$$

Dessa maneira obtemos as linhas 5-8 de  $M^{or}$  das primeiras 4 linhas.

Além disso, segue que a involução  $ac$  inverte somente as setas dos saltos reduzidos nos cruzamentos por cúspide. Obtemos as linhas 9-16 da matriz  $M^{or}$  aplicando esta involução as linhas 1-8.

Notemos que aqui escolhemos sempre o caminho fechado em torno do estrato  $K\Pi$  de codimensão 2 de modo que o cruzamento pelo estrato  $\Pi_C$  seja sempre positivo (veja figura 3.63). Dessa forma, o coeficiente de  $\nabla\pi_C$  é igual a 1 em toda equação.

□

**Observação 3.44** *Segue do Teorema 3.36 que  $\Delta J^+$ ,  $\Delta J^-$  e  $\Delta Sp$  são os saltos dos invariantes básicos  $RO$ -independentes, assim no que segue vamos analisar somente os outros seis novos possíveis invariantes.*

**Lema 3.45** *Os saltos  $RO$ -dependentes definidos no Lema 3.39 satisfazem as seguintes  $RO$ -simetrias:*

- (i)  $\Delta f^+$  e  $\Delta f^-$  são  $R_{(ab)(bc)}$ -invariante, as involuções  $a$ ,  $b$  e  $c$  trocam os valores destes saltos.
- (ii)  $\Delta p^{\uparrow}$  e  $\Delta p^{\downarrow}$  são invariantes com respeito a  $R_{(abc)}$ , a involução  $b$  troca os valores destes saltos, enquanto a involução  $c$  inverte os sinais dos valores destes saltos e a involução  $a$  age como a involução  $bc$ .
- (iii)  $\Delta\lambda^{\uparrow}$  e  $\Delta\lambda^{\downarrow}$  são  $R_{(ab)(c)}$ -invariante, as involuções  $a$  e  $b$  trocam os valores destes saltos.

**Demonstração:** Para demonstrar este lema devemos estudar a ação do grupo  $RO$  nos saltos reduzidos, dos quais os saltos básicos são combinações lineares.

Os saltos reduzidos  $\Delta J_{C+}^+$ ,  $\Delta J_{D+}^-$  e  $\Delta\pi^{2+}$  são transformados em  $\Delta J_{C-}^+$ ,  $\Delta J_{D-}^-$  e  $\Delta\pi^{2-}$  pela ação das involuções  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Na verdade estas involuções invertem os sinais de todos os segmentos da frente de onda.

O salto reduzido  $\Delta\pi_{\uparrow}^{1+}$  se torna  $\Delta\pi_{\downarrow}^{1+}$  sob a ação da involução  $b$ . Neste caso o caracter *para cima* é trocado por *para baixo* e vice-versa enquanto que o sinal do ramo deixando o ponto de cúspide não sofre alteração alguma sob a ação desta involução. A involução  $c$ , invertendo este sinal, transforma  $\Delta\pi^{1+}$  em  $\Delta\pi^{1-}$ . A involução  $a$  age em  $\Delta\pi$  como a involução  $bc$ .

O salto reduzido  $\Delta\lambda_{\uparrow}^{\uparrow}$  é transformado em  $\Delta\lambda_{\downarrow}^{\downarrow}$  pelas involuções  $a$  e  $b$ , cada uma dessas involuções inverte a orientação local. A involução  $c$ , invertendo somente a co-orientação, transforma  $\Delta\lambda_{\uparrow}^{\uparrow}$  em  $\Delta\lambda_{\downarrow}^{\uparrow}$ .

As simetrias dos saltos básicos seguem das simetrias dos saltos reduzidos que os constituem. □

**Definição 3.46** *As hipersuperfícies, definidas pelas soluções do sistema 3.4 do Lema 3.43 como combinações lineares dos estratos locais reduzidos, são chamadas **estratos básicos co-orientados RO-dependentes**:*

$$F^+ = 2K_{C^+}^+ - 2K_{D^+}^- + \Pi^{2+} + \Lambda_{\uparrow}^{\uparrow} + \Lambda_{\downarrow}^{\downarrow}$$

$$F^- = 2K_{C^-}^+ - 2K_{D^-}^- + \Pi^{2-} + \Lambda_{\downarrow}^{\uparrow} + \Lambda_{\uparrow}^{\downarrow}$$

$$P^{\uparrow} = \Pi_{\uparrow}^{1+} - \Pi_{\uparrow}^{1-}$$

$$P^{\downarrow} = \Pi_{\downarrow}^{1+} - \Pi_{\downarrow}^{1-}$$

$$\Lambda^{\uparrow} = \Lambda_{\uparrow}^{\uparrow} + \Lambda_{\downarrow}^{\uparrow}$$

$$\Lambda^{\downarrow} = \Lambda_{\uparrow}^{\downarrow} + \Lambda_{\downarrow}^{\downarrow}$$

**Lema 3.47** *Os 1-cociclos básicos definidos pelos saltos  $\Delta f^+$ ,  $\Delta f^-$ ,  $\Delta p^{\uparrow}$ ,  $\Delta p^{\downarrow}$ ,  $\Delta\lambda^{\uparrow}$  e  $\Delta\lambda^{\downarrow}$  são cohomologos a zero no espaço das  $L$ -imersões.*

**Demonstração:** Devemos verificar que os valores de todos os 1-cociclos básicos em todo caminho fechado em  $\Omega_{i,\mu}$  são zero. Procedemos exatamente como na demonstração do lema correspondente no caso *RO*-independente, fazendo esta verificação para um representante de uma única classe de homotopia de caminhos não contráteis no espaço das  $L$ -imersões marcadas para todos valores dos índices  $i$  e  $\mu$ .

No caso  $\mu \neq 0$ , existem caminhos fechados não contráteis em  $\Omega_{i,\mu}^0$  tais que não existem cruzamentos do discriminante (veja figura 3.34).

No caso ( $\mu = 0$ ,  $i = 1$ ) considere o caminho mostrado na figura 3.35, onde todos os 14 cruzamentos do discriminante são enumerados e os correspondentes saltos elementares *RO*-dependentes são apresentados. A soma  $\delta$  dos valores dos saltos básicos *RO*-dependentes ao longo deste caminho pode ser facilmente calculado (o valor do salto em um evento  $x$  sendo denotado por  $(x)$ ):

$$\delta(f^+) = -(5) + (7) + (8) + (9) + 2(10) = 0;$$

$$\delta(f^-) = -2(1) + (2) - (3) - 2(4) + (11) + (13) - 2(14) = 0;$$

$$\delta(p^\uparrow) = -(3) + (5) = 0;$$

$$\delta(p^\downarrow) = (9) - (11) = 0;$$

$$\delta(\lambda^\uparrow) = (7) + (13) = 0;$$

$$\delta(\lambda^\downarrow) = (2) + (8) = 0.$$

No caso  $\Omega_{i,0}$  com  $i \neq 0$ , considere novamente o caminho mostrado na figura 3.36. Os valores das 1-cocorrentes básicas nesses caminhos fechados são ainda nulos se o são na parte do caminho consistindo da passagem do laço por um par de cúspides de mesmo sinal. Os cruzamentos pelo discriminante e seus correspondentes saltos elementares  $RO$ -dependentes são mostrados e numerados na figura 3.36. Podemos assim calcular (com a mesma notação de antes) os valores dos 1-cociclos nos caminhos fechados

$$\delta(f^+) = -(1) - (2) + (3) + (4) = 0;$$

$$\delta(f^-) = 0;$$

$$\delta(p^\uparrow) = (1) + (3) = 0;$$

$$\delta(p^\downarrow) = -(2) - (4) = 0;$$

$$\delta(\lambda^\uparrow) = 0;$$

$$\delta(\lambda^\downarrow) = 0.$$

Para os caminhos em  $\Omega_{\pm i, \pm \mu}$  obtemos os mesmos resultados fazendo agir nos caminhos mostrados na figura 3.36 as involuções  $b$  e  $c$  e aplicando o lema 3.45.  $\square$

### Propriedades dos invariantes $RO$ -dependentes

**Definição 3.48** *Um invariante local  $RO$ -dependente  $X$  é **aditivo** sob a soma conexa de frentes de ondas se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:*

- i)  $X(\theta) = 0$  nas quatro classes de frentes de onda,  $\theta$ ,  $a\theta$ ,  $c\theta$ ,  $ac\theta$ , do círculo que são  $R_{(ab)}$ -invariantes;*
- ii)  $X(\alpha\#\beta) = X(\alpha) + X(\beta)$  para toda escolha genérica de pontos nos traços das duas frentes  $\alpha$  e  $\beta$  onde a colagem da ponte é feita (quando a orientação e a co-orientação permitem esta colagem).*
- iii) se  $X(\gamma) = (f^+, f^-, p^\uparrow, p^\downarrow, \lambda^\uparrow, \lambda^\downarrow)$  são os valores dos 6 invariantes em uma frente genérica  $\gamma$ , então as seguintes condições de simetria devem ser válidas (pelo lema 3.45):*

$X(\gamma)$	$X(a\gamma)$	$X(b\gamma)$	$X(c\gamma)$
$f^+$	$f^-$	$f^-$	$f^-$
$f^-$	$f^+$	$f^+$	$f^+$
$p^\uparrow$	$-p^\downarrow$	$p^\downarrow$	$-p^\uparrow$
$p^\downarrow$	$-p^\uparrow$	$p^\uparrow$	$-p^\downarrow$
$\lambda^\uparrow$	$\lambda^\downarrow$	$\lambda^\downarrow$	$\lambda^\uparrow$
$\lambda^\downarrow$	$\lambda^\uparrow$	$\lambda^\uparrow$	$\lambda^\downarrow$

**Teorema 3.49** *Todos os invariantes RO-dependentes de frentes de ondas planas são aditivos sob a soma conexa.*

Segue dos resultados anteriores o seguinte teorema:

**Teorema 3.50 (Teorema de Existência e Unicidade)** *Todo invariante local de frentes de ondas aditivos sob a soma conexa é uma combinação linear dos invariantes RO-independentes, do índice de Maslov e dos 6 seguintes invariantes básicos:*

$$f^+, f^-, p^\uparrow, p^\downarrow, \lambda^\uparrow, \lambda^\downarrow,$$

*cujos saltos estão definidos no Lema 3.43, e cujos valores nas frentes básicas estão apresentados na tabela 3.64.*

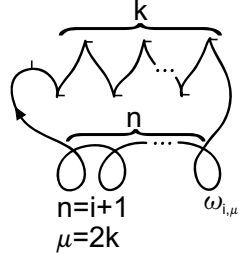
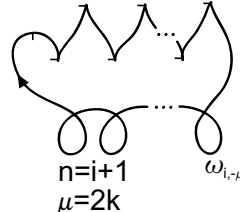
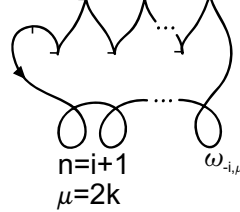
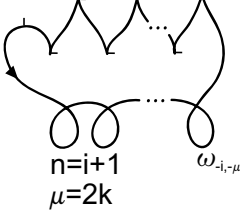
frentes de ondas básicas	$f^+$	$f^-$	$p^\uparrow$	$p^\downarrow$	$\lambda^\uparrow$	$\lambda^\downarrow$
	$2(i+1)$	0	-k	-k	k	k
	0	$2(i+1)$	k	k	k	k
	$2(i+1)$	0	k	k	k	k
	0	$2(i+1)$	-k	-k	k	k

Figura 3.64: Invariantes  $RO$ -dependentes para frentes de ondas básicas.

A demonstração deste teorema foi feita detalhadamente em [A1], trata-se de uma demonstração longa e que repete os procedimentos das demonstrações dos lemas acima, o ponto essencial tanto na existência quanto na unicidade destes invariantes, que são aditivos pela soma conexa, é a atribuição dos valores dos invariantes básicos  $RO$ -dependentes, conforme tabela 3.64.

**Corolário 3.51** *Existem exatamente 10 (incluindo o índice de Maslov) invariantes básicos locais de frentes de ondas planas aditivos pela soma conexa.*

**Demonstração:** Os 10 invariantes são os índices de Maslov, os 6 invariantes  $RO$ -dependentes do Teorema 3.50 e os invariantes  $J^+$ ,  $J^-$  e  $Sp$ , pelo Lema 3.43. Os outros invariantes básicos  $RO$ -independentes do Teorema 3.36 podem ser escritos como segue:

$$h = f^+ + f^- - J^+ + J^- - \lambda$$

$$\lambda = \lambda^\uparrow + \lambda^\downarrow.$$

□

**Corolário 3.52** *Para inverter a co-orientação de uma frente de onda plana básica com índice de Maslov igual a  $\mu$ , devemos passar por pelo menos  $|\mu|$  cruzamentos por cúspides.*

**Demonstração:** A diferença dos valores do invariante  $p = p^\uparrow + p^\downarrow$  em duas frentes de ondas planas com co-orientações opostas é  $2\mu$ . Em toda cúspide, o cruzamento pelo discriminante  $p$  muda por  $+2$  ou  $-2$ . □

### Fórmulas Explícitas para alguns Invariantes Básicos

Em [Ch-Du], [P-V] e [Sh] encontramos fórmulas explícitas para invariantes locais de imersões de um círculo no plano e para invariantes  $RO$ -independentes de frentes de ondas.

Existem duas fórmulas simples para os invariantes  $f^+$ ,  $f^-$ ,  $\lambda^\uparrow$  e  $\lambda^\downarrow$  de uma frente de onda plana genérica  $\gamma$ , como mostramos na continuação:

**Proposição 3.53** *Sejam  $n^\uparrow$  e  $n^\downarrow$ , respectivamente, os números de pontos de cúspide de  $\gamma$  do tipo para cima e do tipo para baixo, então:*

$$n^\uparrow = \lambda^\uparrow \text{ e } n^\downarrow = \lambda^\downarrow$$

**Demonstração:** Se  $\gamma$  é uma frente de onda básica  $\omega_{i,\mu}$  ( $\mu = 2k$ ) com  $k$  pontos de cúspide do tipo *para cima* e  $k$  pontos de cúspide do tipo *para baixo*, e onde  $\lambda^\uparrow = \lambda^\downarrow = k$ , o resultado é verdadeiro. Já em um nascimento de dois pontos de cúspide, eles são ambos do tipo *para cima* ou ambos do tipo *para baixo* e correspondem a um incremento por 2 de  $\lambda^\uparrow$  ou de  $\lambda^\downarrow$ . O caracter  $\uparrow$  ou  $\downarrow$  de uma cúspide é fixo ao longo de qualquer caminho em  $\Omega_{i,\mu}$ . □

**Proposição 3.54** *Sejam  $n^+$  e  $(n^-)$ , respectivamente, o número de pontos duplos de  $\gamma$  tal que ambos os ramos se intersectando são positivos e negativos, então:*

$$f^+ = 2n^+ \text{ e } f^- = 2n^-$$

**Demonstração:** Em uma frente de onda básica  $\gamma = \omega_{i,\mu}$  (veja tabela 3.64), o número de tais pontos duplos é  $n^+ = i + 1$  enquanto  $f^+ = 2(i + 1)$  e  $f^- = 0$ . O número de pontos duplos de  $a\gamma$ ,  $b\gamma$  e  $c\gamma$  são iguais a  $n^- = i + 1$  enquanto  $f^+ = 0$ ,  $f^- = 2(i + 1)$ .

O número  $n^+$  aumenta por 2 em um cruzamento positivo do estrato local  $K_{C^+}^+$  e em um cruzamento negativo do estrato local  $K_{D^+}^-$ , e não se altera em cruzamentos por outros estratos locais de auto-tangências. Em um estrato de cruzamento por cúspide,  $n^+$  aumenta por 1 quando  $\pi^{2^+} = 2$  e não se altera em outros casos. Na verdade, em um cruzamento por cúspide onde o ramo que cruza o ponto de cúspide é positivo,  $\Delta\pi^{2^+} = 2$  e  $\Delta n^+ = 1$  (já que um dos ramos nos quais o ponto de cúspide se divide é sempre positivo). Se o segmento que cruza o ponto de cúspide é negativo,  $\Delta\pi^{2^+} = \Delta n^+ = 0$ . Além disso,  $n^+$  aumenta por 1 enquanto  $f^+$  aumenta por 2 em um cruzamento positivo do estrato local  $\Lambda_+^\uparrow$  e  $\Lambda_+^\downarrow$ . Portanto  $f^+ = 2n^+$  para qualquer frente de onda plana. Argumentos similares valem para o invariante  $n^-$ . □

**Observação 3.55** *Das observações anteriores segue que os valores dos invariantes  $f^+$ ,  $f^-$ ,  $\lambda^\dagger$  e  $\lambda^\downarrow$  não podem ser negativos.*

**Observação 3.56** *Das igualdades*

$$h = f^+ + f^- - J^+ + J^- - \lambda$$

e

$$n = h + \frac{1}{2}\lambda$$

segue que:

$$f^+ + f^- + J^+ + J^- - \frac{\lambda}{2} = h,$$

e desta igualdade obtemos a fórmula de Polyak:

$$J^+ - J^- = n_+ - n_-$$

onde  $n_+ = \dots$ ,  $n_- = \dots$  e  $f^+ + f^- = \dots$

Vimos que os invariantes básicos locais aditivos são funções constantes pela ação do grupo de difeomorfismos preservando a orientação do círculo e do plano em classes de frentes de ondas.

Alguns destes invariantes também são invariantes pela ação de grupos maiores de difeomorfismos do plano e do círculo que não preservam necessariamente todas as orientações.

# Capítulo 4

## Invariantes de Frentes de Ondas Planas

Nesta seção vamos descrever um método para calcular os invariantes de Aicardi, baseado na decomposição de uma frente de onda plana dada em frentes de ondas planas básicas unidas por pontes (veja [MJ-RF]). Obtemos uma fórmula que nos permitirá calcular os invariantes da frente de onda inicial em termos dos invariantes de frentes de ondas básicas que aparecerem em sua decomposição. Em alguns exemplos veremos que este método reduz consideravelmente a quantidade de cálculo em relação ao método apresentado no Capítulo 3. Além disso, o método aqui apresentado pode ser estendido ao de coleções de frentes de ondas planas determinando em particular invariantes  $T^+(\Gamma_1, \Gamma_2)$ ,  $T^-(\Gamma_1, \Gamma_2)$ ,  $T^{Sp}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ ,  $T^h(\Gamma_1, \Gamma_2)$  e  $T^\lambda(\Gamma_1, \Gamma_2)$  para pares de frentes de ondas planas.

Os cálculos dos invariantes  $J^+$ ,  $J^-$ ,  $Sp$ ,  $h$  e  $\lambda$  neste capítulo serão sempre normalizados de acordo com os valores associados por Aicardi, dados no capítulo anterior para a família de frentes de ondas  $\omega_{i,\mu}$ . Quando nos referimos a uma frente de onda plana, esta será sempre uma projeção de um curva legendreana com auto-interseções transversas e cúspides semi-cúbicas, podendo ter uma ou mais componentes conexas.

### 4.1 Invariantes de conjuntos de frentes de ondas planas

#### 4.1.1 Os invariantes $T^+$ , $T^-$ , $T^h$ , $T^\lambda$ e $T^{Sp}$

Dado um par de frentes de ondas planas  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  que se interceptam no plano, podemos separar  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  em semi-planos disjuntos, como na definição 3.30, fazendo um movimento rígido, através de translações e rotações de  $\Gamma_2$  e deixando  $\Gamma_1$  fixa no plano. Ao longo deste processo de separação, está claro que não surge auto-tangência, pontos triplos, cruzamentos por cúspide ou nascimento de cúspides nem para  $\Gamma_1$  nem para  $\Gamma_2$  separadamente.

Em outras palavras, seja  $(\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2)$  um outro par de frentes de ondas no plano respectivamente congruentes a  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  tal que  $\tilde{\Gamma}_1$  e  $\tilde{\Gamma}_2$  estão em semi-planos disjuntos e seja  $\phi_t$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $\phi_t(\Gamma_1)$  e  $\phi_t(\Gamma_2)$  congruentes a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente.

Ao longo deste processo de separação das frentes de ondas planas podem ocorrer várias tangências de uma com a outra, podem aparecer pontos triplos formados por pontos duplos de uma das frentes de onda com algum ponto da outra e ainda cruzamento por



cúspide de um ramo de uma frente de onda com uma cúspide da outra. Observamos que este movimento pode sempre ser feito escolhendo um caminho que evita tangências degeneradas entre as frentes de ondas, no sentido de que as duas frentes de ondas têm um contato de primeira ordem num ponto comum.

As tangências que aparecem entre as frentes de ondas planas podem ser de um dos seguintes tipos relativamente aos ramos envolvidos na tangência:

- a) ambos possuem mesma orientação e co-orientação (tangência direta arriscada);
- b) possuem a mesma orientação porém co-orientações diferentes (tangência direta segura);
- c) possuem a mesma co-orientação mas orientações diferentes (tangência inversa arriscada);
- d) possuem orientações e co-orientações diferentes (tangência inversa segura).

Associamos um valor **positivo** para cada tangência direta arriscada ou segura, desde que o número de pontos duplos comuns de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  **auente** ao passar pela tangência. Caso contrário, atribuímos um valor **negativo** para esta transição. Por outro lado, atribuímos um valor **positivo** para as tangências inversas arriscadas ou seguras quando este número **diminui** e um **negativo** quando ele **auenta**.

**Notação:** O **número total de tangências diretas arriscadas**, contando seus sinais, será denotado por  $T_C^+(\Gamma_1, \Gamma_2)$ .

O **número total de tangências diretas seguras**, contando seus sinais, será denotado por  $T_C^-(\Gamma_1, \Gamma_2)$ .

O **número total de tangências inversas arriscadas**, contando seus sinais, será denotado por  $T_D^+(\Gamma_1, \Gamma_2)$ .

O **número total de tangências inversas seguras**, contando seus sinais, será denotado por  $T_D^-(\Gamma_1, \Gamma_2)$ .

Vamos considerar os seguintes números que são combinações lineares dos definidos acima:

$$T^+(\Gamma_1, \Gamma_2) = T_C^+(\Gamma_1, \Gamma_2) + T_D^+(\Gamma_1, \Gamma_2)$$

$$T^-(\Gamma_1, \Gamma_2) = T_C^-(\Gamma_1, \Gamma_2) + T_D^-(\Gamma_1, \Gamma_2)$$

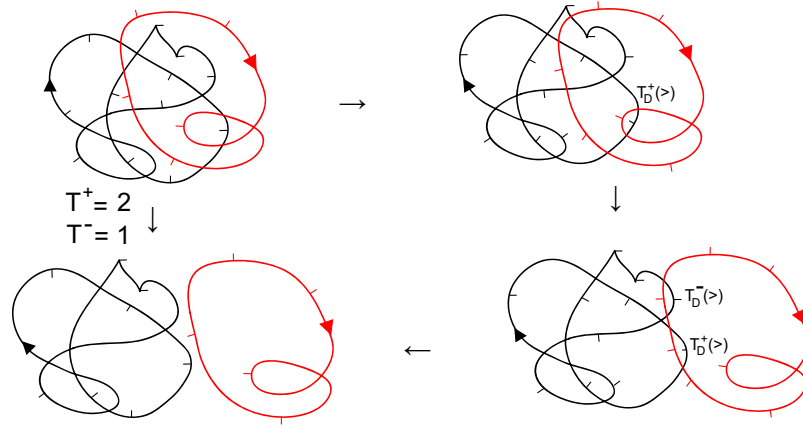


Figura 4.1: Separação de duas frentes de ondas planas

Os cruzamentos por cúspide que ocorrem no processo de separação de frentes de ondas planas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  podem se dar da seguinte maneira:

- o ramo saindo do ponto de cúspide e o ramo sem ponto de cúspide tem mesma orientação (cruzamento concordante);
- o ramo saindo do ponto de cúspide e o ramo sem ponto de cúspide tem orientações diferentes (cruzamento discordante).

Associamos um valor **positivo** para cada cruzamento por cúspide do tipo (a) desde que o número de pontos duplos comuns de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  **aumente** quando passamos por este evento. Caso contrário atribuímos um valor **negativo** para esta transição. Por outro lado, se o cruzamento é do tipo (b) então atribuímos um valor **positivo** quando este número **diminui** e **negativo** quando o número de pontos duplos **aumenta**.

**Notação:** O **número total de cruzamentos por cúspide concordantes**, contando seus sinais, será denotado por  $T_C^{\text{II}}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ .

O **número total de cruzamentos por cúspide discordantes**, contando seus sinais, será denotado por  $T_D^{\text{II}}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ .

Consideremos outro número que é combinação linear dos números denotados acima:

$$T^h(\Gamma_1, \Gamma_2) = (T_C^+ + T_C^- + T_C^{\text{II}})(\Gamma_1, \Gamma_2) - (T_D^+ + T_D^- + T_D^{\text{II}})(\Gamma_1, \Gamma_2)$$

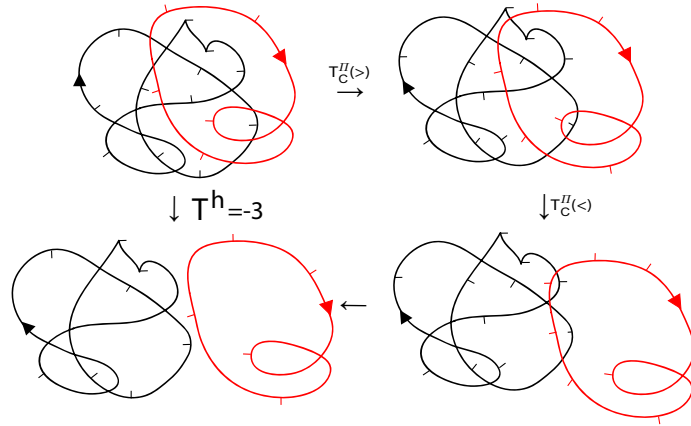


Figura 4.2: Separação de frentes de ondas contando os cruzamentos por cúspide.

**Definição 4.1** *Seja  $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_m)$  um conjunto de frentes de ondas planas. Um **ponto base** de uma frente de onda  $\Gamma_j$ , que compõe  $\Gamma$ , é um ponto fixado em  $\Gamma_j$  distinto de qualquer ponto múltiplo de  $\Gamma$ .*

Suponhamos que  $\Gamma$  tem apenas duas componentes conexas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  orientadas e co-orientadas com ponto base. Consideramos o processo de separação destas frentes de ondas em semi-planos disjuntos, como acima.

Seja  $P$  um ponto triplo formado ao longo da separação destas frentes de ondas. Denotamos por  $\xi_{p,q}(P)$  o valor correspondente ao ponto triplo  $P$  que pode tomar valores  $+1$  ou  $-1$  de acordo com o seguinte critério: percorrendo estas frentes de ondas a partir dos pontos base respeitando a ordem e orientação das mesmas, isto determina uma ordem cíclica nos três arcos que formam um dado ponto triplo, assim, o sinal desta transição é determinado pela regra do triângulo dada na seção 3.4.3.

**Notação:** Vamos indicar  $T^{St}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \sum_P \xi_{p,q}(P)$ , onde esta soma tem contribuições de todos os pontos triplos  $P$  que são formados pelo par de frentes de ondas planas, ao longo do processo de separar as frentes de ondas em semi-planos disjuntos.

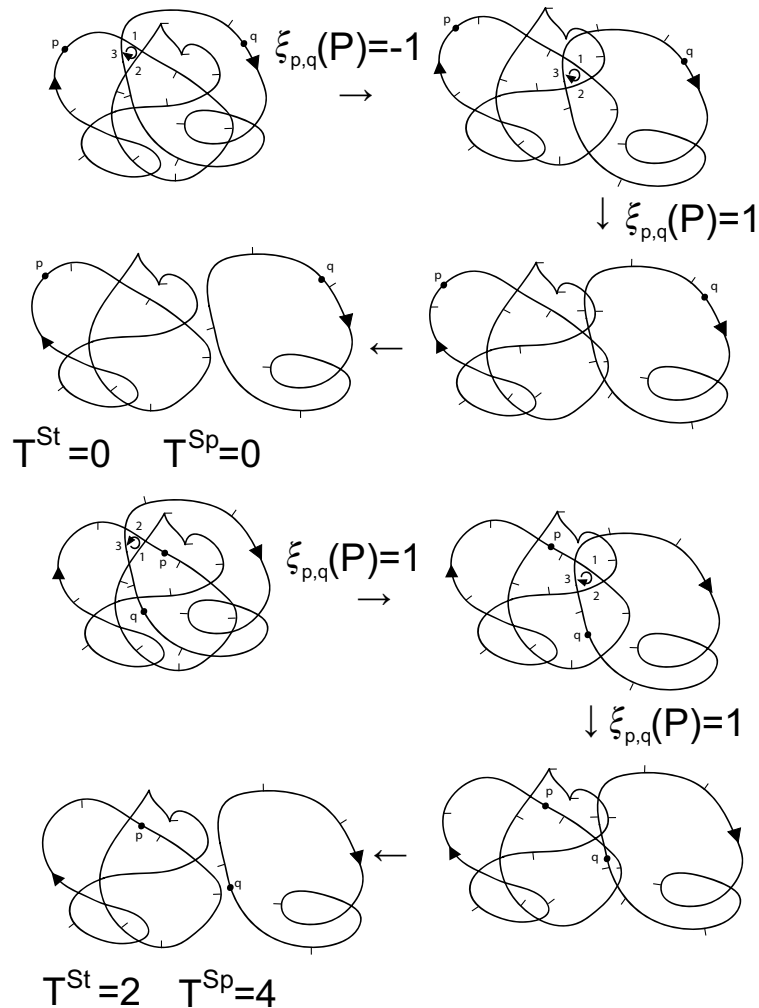


Figura 4.3: Separação de duas frentes de ondas planas com ponto base

**Proposição 4.2** *Os números  $T^+(\Gamma_1, \Gamma_2)$ ,  $T^-(\Gamma_1, \Gamma_2)$  e  $T^h(\Gamma_1, \Gamma_2)$  dependem somente do tipo de isotopia do par de frentes de ondas planas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  e não do caminho escolhido para separar estas frentes de ondas.*

*Além disso, o número  $T^{Sp}(\Gamma_1, \Gamma_2)$  não depende do caminho escolhido para separar as componentes no plano, mas depende dos pontos base de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .*

**Demonstração:** Se temos um par de frentes de ondas planas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  em semi-planos disjuntos, com  $\Gamma_1$  à esquerda de  $\Gamma_2$ , e em outro momento temos as mesmas frentes de ondas mas agora com  $\Gamma_2$  à esquerda de  $\Gamma_1$ , sabemos que os valores dos números do enunciado da proposição devem ser os mesmos, tanto no primeiro quadro quanto no segundo, pois temos um conjunto formado pelas mesmas frentes de ondas. Como sabemos que um caminho possível, para levar um quadro no outro, é o caminho onde as frentes de ondas não se cruzam, em nenhum momento, e neste caminho não existe nenhum incremento para os números do enunciado, segue que qualquer outro caminho também não pode influenciar nestes valores, pois os invariantes no primeiro quadro e no segundo são os mesmos.

A demonstração desta proposição segue de forma análoga ao comentário acima, basta então conhecer um caminho que não influencia nos valores dos números para mostrarmos esta proposição.

Sejam  $f, g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  duas frentes de ondas planas, onde o par  $(\Gamma, \Gamma')$  é a imagem de  $(f, g)$  no plano. Suponhamos que  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  se inteceptam. Consideremos também as frentes de ondas planas  $\hat{f}, \hat{g} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cujas imagens no plano por  $(\hat{f}, \hat{g})$  estão representadas pelo par  $(\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}')$ . Suponhamos ainda que as frentes  $\hat{\Gamma}$  e  $\hat{\Gamma}'$  estão em semi-planos diferentes e que  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  são respectivamente congruentes a  $\hat{\Gamma}$  e  $\hat{\Gamma}'$ .

Seja  $\phi : [0, 1] \rightarrow C^\infty(S^1 \times S^1, \mathbb{R}^2)$  um caminho genérico que leva o par  $(\Gamma, \Gamma')$  no par  $(\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}')$ , através de movimentos rígidos (translações e rotações) com  $\phi(0) = (f, g)$  e  $\phi(1) = (\hat{f}, \hat{g})$ . É claro que as frentes de ondas que são imagens por  $\phi(t)$  no plano são sempre congruentes as respectivas frentes de ondas  $\Gamma$  e  $\Gamma'$ , para todo  $t \in [0, 1]$ .

Observemos que em torno de qualquer estrato de codimensão 2, se consideramos para os dois arcos envolvidos nas transições de  $\Delta T^+$ ,  $\Delta T^-$  e  $\Delta T^h$  como se fossem de uma só frente de onda, temos exatamente as respectivas transições de  $J^+$ ,  $J^-$  e  $h$ . Sabemos que estas transições se anulam em torno de qualquer caminho fechado, numa pequena vizinhança, em torno dos estratos de codimensão 2 em  $\mathcal{D} = C^\infty(S^1 \times S^1, M) - \mathcal{E}(S^1 \times S^1, M)$ . Logo as transições de  $\Delta T^+$ ,  $\Delta T^-$  e  $\Delta T^h$  também se anulam neste caminho. Portanto  $T^+$ ,  $T^-$  e  $T^h$  não dependem do caminho escolhido entre  $\gamma_F$  e  $\hat{\gamma}_F$ .

Analogamente se verifica que  $T^{Sp}$  depende do ponto base e não do caminho que separa as duas frentes de ondas planas. Isto se deve ao fato de  $T^{St}$  depender do ponto base (veja figura 4.3) e não do caminho que separa as frentes de onda, se comparamos com  $St$  na vizinhança dos estratos de codimensão 2 para uma única componente.  $\square$

**Observação 4.3** *Notemos que não faz sentido falar de um número associado ao nascimento de cúspides neste processo de separação de duas frentes de ondas planas, já que o mesmo não ocorre.*

### 4.1.2 Invariantes de Aicardi de Conjuntos de Frentes de Ondas

Seja  $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_m)$  uma coleção de frentes de ondas planas com  $m$  componentes  $\Gamma_j$ , onde cada uma destas tem um ponto base. Denotemos por  $\Gamma^s = (\Gamma_1^s, \dots, \Gamma_m^s)$  o conjunto de  $m$  componentes de frentes de ondas no plano, onde cada  $\Gamma_j^s$  é uma frente de onda separada em semi-planos disjuntos das outras do conjunto  $\Gamma$  e cada componente  $\Gamma_j^s$  de  $\Gamma^s$  é isotópica à componente  $\Gamma_j$  de  $\Gamma$ .

**Notação:** Dado um conjunto de frentes de ondas planas com ponto base  $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_m)$ , denotemos os invariantes deste conjunto de frentes separadas,  $(\Gamma_1^s, \dots, \Gamma_m^s)$ , como  $X(\Gamma^s) = \sum_{j=1}^m X(\Gamma_j^s)$ , onde  $X = J^+, J^-, h, Sp, \lambda$ .

**Definição 4.4** *Seja  $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_m)$  um conjunto de frentes de ondas planas com ponto*

base. Os invariantes de  $\Gamma$  são dados por:

$$J^+(\Gamma) = J^+(\Gamma^s) - \sum_{\substack{l=1 \\ j < l}}^m T^+(\Gamma_j, \Gamma_l),$$

$$J^-(\Gamma) = J^-(\Gamma^s) - \sum_{\substack{l=1 \\ j < l}}^m T^-(\Gamma_j, \Gamma_l),$$

$$Sp(\Gamma) = Sp(\Gamma^s) - \sum_{\substack{l=1 \\ j < l}}^m T^{Sp}(\Gamma_j, \Gamma_l),$$

$$h(\Gamma) = h(\Gamma^s) - \sum_{\substack{l=1 \\ j < l}}^m T^h(\Gamma_j, \Gamma_l),$$

$$\lambda(\Gamma) = \lambda(\Gamma^s).$$

**Proposição 4.5** *Dados dois conjuntos de frentes de ondas  $\Gamma$  e  $\Omega$  contidas em semi-planos disjuntos, se verificam*

$$J^+(\Gamma \amalg \Omega) = J^+(\Gamma) + J^+(\Omega),$$

$$J^-(\Gamma \amalg \Omega) = J^-(\Gamma) + J^-(\Omega),$$

$$h(\Gamma \amalg \Omega) = h(\Gamma) + h(\Omega),$$

$$Sp(\Gamma \amalg \Omega) = Sp(\Gamma) + Sp(\Omega),$$

$$\Lambda(\Gamma \amalg \Omega) = \Lambda(\Gamma) + \Lambda(\Omega),$$

onde  $p$  e  $q$  determinam que os conjuntos têm fixado um ponto base em cada frente de onda e  $\amalg$  denota a união disjunta.

**Demonstração:** Consideremos  $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_m)$  e  $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ , por definição

$$\begin{aligned} J^+(\Gamma \amalg \Omega) &= J^+((\Gamma \amalg \Omega)^s) - \left[ \sum_{\substack{l=1 \\ j < l}}^m T^+(\Gamma_j, \Gamma_l) + \sum_{\substack{l=1 \\ j < l}}^m T^+(\Gamma_j, \Omega_l) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{l=1 \\ j < l}}^m T^+(\Omega_j, \Omega_l) \right] \\ &= J^+(\Gamma^s) + J^+(\Omega^s) - \left[ \sum_{\substack{l=1 \\ j < l}}^m T^+(\Gamma_j, \Gamma_l) + \sum_{\substack{l=1 \\ j < l}}^m T^+(\Omega_j, \Omega_l) \right] \\ &= J^+(\Gamma) + J^+(\Omega), \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue do fato que  $T^+(\Gamma_j, \Omega_l) = 0$ , para  $j = 1, \dots, n$  e  $l = 1, \dots, m$ . A igualdade para  $J^-$ ,  $h$ ,  $Sp$  e  $\Lambda$  se verifica analogamente.  $\square$

## 4.2 Pontes e canais

**Definição 4.6** *Sejam  $\Gamma \in \mathbb{R}^2$  uma frente de onda plana e  $C$  uma componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Considere  $x \in C$  um ponto qualquer nesta componente. O **índice** da componente conexa  $C$ , denotado por  $\text{ind}_\Gamma(C)$ , é o número de voltas completas (no sentido anti-horário) feitas pelo raio-vetor de  $x$  a um ponto qualquer ao longo da frente de onda  $\Gamma$  na direção definida pela sua orientação.*

**Observação 4.7** a) *Observe que o índice  $\text{ind}_\Gamma(C)$  não depende da escolha do ponto  $x$  em  $C$  mas depende da orientação da frente de onda plana.*

b) *O índice da componente conexa exterior é zero.*

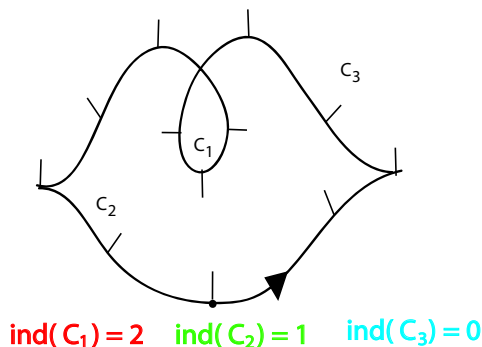


Figura 4.4: Índices de componentes conexas de uma frente de onda plana

Sejam  $\Gamma$  um conjunto de frentes de ondas planas e  $\gamma$  uma outra frente de onda plana contida no seu complemento, conectando dois arcos  $A$  e  $B$  em  $\Gamma$ , entre os respectivos pares de pontos de interseção  $(p_1, q_1)$  e  $(p_2, q_2)$ , da seguinte forma:

substituímos os arcos  $x_1y_1 \subset A$  e  $x_2y_2 \subset B$ , pelos arcos  $x_1y_2$  (ou  $x_1x_2$ ) e  $x_2y_1$  (ou  $y_2y_1$ ) da frente de onda  $\gamma$ , de tal forma que os arcos  $p_1x_1y_2q_2$  (ou  $p_1x_1x_2p_2$ ) e  $p_2x_2y_1q_1$  (ou  $p_2x_2x_1p_1$ ) respeitem as respectivas orientações e co-orientações das frentes de ondas em  $\Gamma$ .

A conexão de  $\gamma$  no conjunto de frentes de ondas  $\Gamma$ , denotado por  $\gamma * \Gamma$ , é compatível se os arcos  $A$  e  $B$  com orientação e co-orientação de  $\Gamma$  definem uma orientação e uma co-orientação em  $\gamma$ , como mostra a figura 4.5.

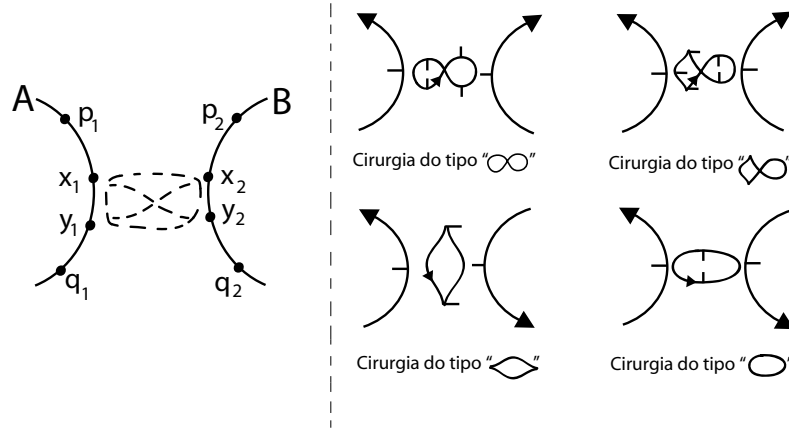


Figura 4.5: Cirurgia nos arcos de  $\Gamma$

Um frente de onda do tipo “0” é um círculo e uma frente de onda do tipo “ $\infty$ ” é assim chamada por causa de seu formato, esta frente de onda é também conhecida como curva “oito”. Já uma frente de onda do tipo “0” com cúspide é um círculo que possui apenas duas cúspides de mesmo sinal e uma frente de onda do tipo “ $\infty$ ” com cúspide é uma figura “oito” que possui apenas duas cúspides, também de mesmo sinal e estas cúspides devem ocorrer sempre do mesmo lado relativamente ao ponto duplo presente na curva “oito”.

**Definição 4.8** Dizemos que  $\gamma$  é uma **cirurgia** em  $\Gamma$  se  $\gamma$  é uma frente de onda do tipo “0”, “ $\infty$ ”, “0” com cúspide ou “ $\infty$ ” com cúspide que conecta componentes de  $\Gamma$ . (Veja figura 4.5).

**Definição 4.9** Sejam  $\Gamma$  um conjunto de frentes de ondas e  $\gamma$  uma cirurgia simples (de um dos tipos definidos acima) em  $\Gamma$ . Dizemos que  $\gamma$  é uma **ponte**, denotada por  $\gamma^p$ , se  $\gamma$  conecta arcos de duas frentes de ondas distintas de  $\Gamma$  e  $\gamma$  é um **canal**, denotado por  $\gamma^c$ , se conecta arcos de uma mesma frente de onda do conjunto  $\Gamma$ .

Sejam  $\Gamma$  um conjunto de frentes de ondas planas e  $\gamma$  uma cirurgia, ao introduzir uma ponte  $\gamma^p$  em  $\Gamma$  dizemos que fizemos uma **soma** de frentes de ondas  $\Gamma$  e quando efetuamos um canal  $\gamma^c$  em  $\Gamma$  dizemos que fizemos uma **decomposição** do conjunto  $\Gamma$ .

Dizemos também que  $\gamma^c$  e  $\gamma^p$  são **correspondentes** se, e somente se,  $\gamma^c * \Gamma = \tilde{\Gamma}$  e  $\gamma^p * \tilde{\Gamma} = \Gamma$ .

Sejam  $\Gamma$  um conjunto de frentes de ondas e  $\gamma$  uma cirurgia, associamos a  $\gamma$  um número inteiro  $\eta$  como segue:

$$\eta_\gamma = \begin{cases} 1, & \text{se } \gamma \text{ é um canal} \\ 0, & \text{se } \gamma \text{ é uma ponte} \end{cases}$$

**Definição 4.10** Sejam  $\Gamma$  um conjunto de frentes de ondas planas e  $\gamma$  uma cirurgia, definimos o **índice de uma cirurgia**  $\gamma$ , denotado por  $i_\gamma$ , em relação a uma frente de onda  $\Gamma$  como sendo o índice de  $C_\gamma$  (componente do complemento  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  que contém  $\gamma$ ) dado na definição 4.6, ou seja,  $i_\gamma = \text{ind}_\Gamma(C_\gamma)$ .



Dada uma frente de onda plana  $\Gamma$  orientada e co-orientada, seja  $A \subset \Gamma$  um arco conectado por  $\gamma$ , associamos a  $\gamma$  um número inteiro  $\vartheta_A(\gamma)$  que depende da orientação do arco  $A$  como segue:  $\vartheta_A(\gamma) = +1$  se a componente do complemento de  $\Gamma$  no plano contendo  $\gamma$  está do lado esquerdo quando caminhamos sobre o arco  $A$ , seguindo a orientação de  $\Gamma$ , caso contrário  $\vartheta_A(\gamma) = -1$ .

Se  $\gamma$  conecta arcos  $A$  e  $B$  de  $\Gamma$  então denotamos por

$$\vartheta_\gamma = \vartheta_A(\gamma) + \vartheta_B(\gamma).$$

A figura 4.6 ilustra um diagrama com todas as possibilidades de pontes possíveis para os arcos de uma frente de onda plana desde que não levemos em conta a co-orientação da frente de onda, nela também podemos ver os valores  $\vartheta_\gamma$  para cada caso.

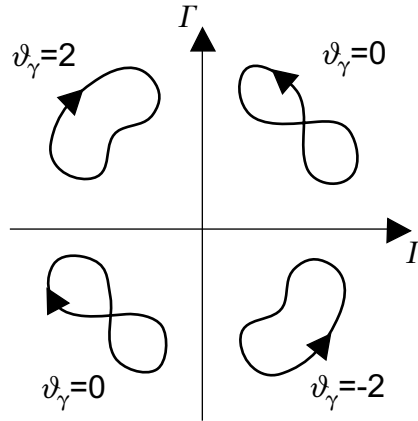


Figura 4.6: Possíveis pontes conectando arcos de uma frente de onda plana.

Além do número  $\vartheta_\gamma$  associado a orientação do arco conectado por  $\gamma$ , vamos associar também um número inteiro à co-orientação do arco conectado por  $\gamma$ . Assim teremos um par de números caracterizando os arcos conectados por  $\gamma$ .

Dada uma frente de onda plana  $\Gamma$  orientada e co-orientada, seja  $A \subset \Gamma$  um arco conectado por  $\gamma$ , associamos a  $\gamma$  um número inteiro  $\sigma_\gamma$  que depende da co-orientação de  $A$  da seguinte forma: sendo  $\rho_A$  o vetor co-orientação a  $\Gamma$  no arco  $A$ , vamos associar  $\sigma_A(\gamma) = +1$  se  $\rho_A$  aponta para a componente do complemento da frente de onda que contém a ponte  $\gamma$  e  $\sigma_A(\gamma) = -1$  caso contrário.

Se  $A$  e  $B$  são dois arcos conectados por  $\gamma$ , então denotamos

$$\sigma_\gamma = \sigma_A(\gamma) + \sigma_B(\gamma).$$

Agora temos o par de números  $(\vartheta_A(\gamma), \sigma_A(\gamma))$ , associado a orientação e co-orientação dos arcos conectados por  $\gamma$ .

Os quatro diagramas resumem quais tipos de cirurgias existem entre dois arcos de frentes de ondas orientadas e co-orientadas:

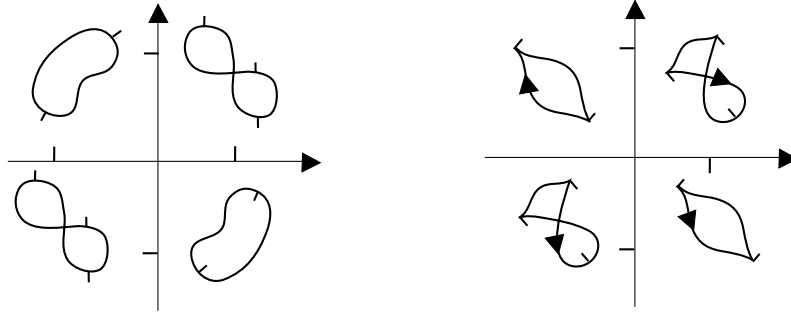


Figura 4.7: Possíveis pontes para frentes de ondas orientadas e co-orientadas.

**Observação 4.11** Se  $\gamma^c$  e  $\gamma^p$  são correspondentes então  $i_{\gamma^{\pm c}} = i_{\gamma^{\mp p}} \mp 1$ , pois  $\gamma^p$  conecta as componentes separadas por  $\gamma^c$  como mostra a figura 4.8.

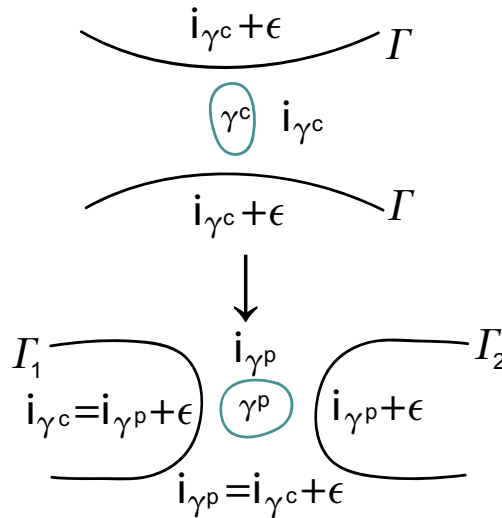


Figura 4.8: Pontes e canais correspondentes

**Exemplo:** A figura 4.9 ilustra um exemplo com  $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ , onde

$$i(\Gamma_1) = 0, \mu(\Gamma_1) = 2 \text{ e } i(\Gamma_2) = 1, \mu(\Gamma_2) = 0.$$

Os índices desta componentes de  $\Gamma$  conectadas pelas diferentes pontes são:

$$i(\gamma_1^0 * \Gamma) = i(\gamma_4^0 * \Gamma) = 1, \quad i(\gamma_2^- * \Gamma) = 2, \quad i(\gamma_3^+ * \Gamma) = i(\gamma_5^+ * \Gamma) = 0.$$

E os índices de Maslov de  $\Gamma$  conectadas pelas diferentes pontes são:

$$\mu(\gamma_1^0 * \Gamma) = \mu(\gamma_2^- * \Gamma) = \mu(\gamma_3^+ * \Gamma) = \mu(\gamma_4^0 * \Gamma) = \mu(\gamma_5^+ * \Gamma) = 2.$$

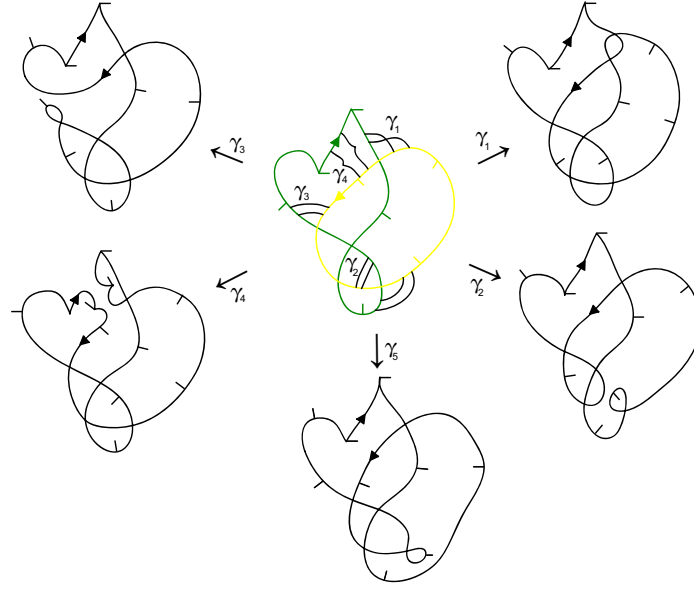


Figura 4.9: Soma de duas frentes de ondas com diferentes pontes

**Observação 4.12** Dada  $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ , os índices  $i$  e  $\mu$  da conexão em  $\Gamma$  são dados por

$$i(\gamma * \Gamma) = i(\Gamma_1) + i(\Gamma_2) - i(\gamma),$$

$$\mu(\gamma * \Gamma) = \mu(\Gamma_1) + \mu(\Gamma_2).$$

Este número independe de  $i_\gamma$  e do par  $(\vartheta_\gamma, \sigma_\gamma)$ . Portanto, se  $\gamma_1$  e  $\gamma_4$  têm os mesmos índices  $i$  e mesmo índice de Maslov  $\mu$  então  $(\gamma_1 * \Gamma)$  e  $(\gamma_2 * \Gamma)$  encontram-se na mesma componente de  $\Omega$  (veja exemplo 4.2).

Por outro lado, observamos que somas das mesmas frentes de ondas planas através de pontes de mesmo índice não precisam ser isotópicas como nós legendreanos, isto é, estar na mesma componente conexa de  $\epsilon$  como mostra o exemplo na figura 4.9, onde  $(\gamma_3 * \Gamma)$  e  $(\gamma_5 * \Gamma)$  são conectadas por pontes de mesmo tipo e índices e não são isotópicas. Porém, veremos que os invariantes  $J^+$ ,  $J^-$  e  $h$  dependem do índice de  $\gamma$  e não da escolha dos arcos que esta conecta.

#### 4.2.1 Os invariantes $J^+$ , $J^-$ , $h$ e $\lambda$ de $\gamma * \Gamma$

Nesta seção determinamos o efeito da cirurgia  $\gamma$  (cirurgias) sobre os invariantes de Aicardi.

Mostramos no capítulo 3 que os invariantes  $J^+$ ,  $J^-$ ,  $Sp$ ,  $h$ ,  $\lambda$  são aditivos sob a soma conexa disjunta de duas frentes de ondas planas (soma de frentes de ondas em semi-planos disjuntos), isto é, denotando  $X$  por  $J^+$ ,  $J^-$ ,  $Sp$ ,  $h$  ou  $\lambda$ , então:

$$X(\gamma * (\Gamma_1, \Gamma_2)) = X(\Gamma_1) + X(\Gamma_2) + X(\gamma).$$

O próximo lema é consequência imediata desta igualdade e da Proposição 4.5

**Lema 4.13** *Sejam  $\Gamma$  e  $\Omega$  dois conjuntos de frentes de ondas com pontos bases contidos em semi-planos disjuntos e seja  $\gamma$  uma ponte conectando um arco de  $\Gamma$  e outro de  $\Omega$  então*

$$\begin{aligned} J^+(\gamma * (\Gamma \amalg \Omega)) &= J^+(\Gamma) + J^+(\Omega) + J^+(\gamma), \\ J^-(\gamma * (\Gamma \amalg \Omega)) &= J^-(\Gamma) + J^-(\Omega) + J^-(\gamma), \\ h(\gamma * (\Gamma \amalg \Omega)) &= h(\Gamma) + h(\Omega) + h(\gamma), \\ Sp(\gamma * (\Gamma \amalg \Omega)) &= Sp(\Gamma) + Sp(\Omega), \\ \lambda(\gamma * (\Gamma \amalg \Omega)) &= \lambda(\Gamma) + \lambda(\Omega). \end{aligned}$$

**Observação 4.14** *Sejam  $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_m)$  e  $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_n)$  dois conjuntos de frentes de ondas planas contidos em semi-planos disjuntos e  $\gamma$  uma ponte conectando componentes destes dois conjuntos. Fixando  $\Gamma$  e fazendo movimentos rígidos (translações e rotações) sobre  $\Omega$  podemos obter um novo conjunto  $\Omega'$  congruente a  $\Omega$  que intercepta  $\Gamma$  de maneira que a ponte  $\gamma'$ , agora conectando  $\Gamma$  e  $\Omega'$ , seja isotópica à  $\gamma$  e esteja inteiramente contida na região ilimitada do complemento de  $\Gamma$  e  $\Omega'$  no plano.*

Denotemos por  $\tilde{\Gamma}$  o conjunto  $\Gamma \amalg \Omega$ . Do lema 4.13 segue que

$$\begin{aligned} J^\pm(\gamma' * \tilde{\Gamma}) &= J^\pm(\gamma' * (\Gamma \amalg \Omega)) \\ &= J^\pm(\Gamma) + J^\pm(\Omega) + J^\pm(\gamma') \\ &= J^\pm(\Gamma) + J^\pm(\Omega) + J^\pm(\gamma') - \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m T^\pm(\Gamma_j, \Omega_l) \\ &= J^\pm(\Gamma^s) - \sum_{j<l}^m \sum_{l=1}^m T^\pm(\Gamma_j, \Gamma_l) + J^\pm(\Omega^s) - \sum_{j<l}^n \sum_{l=1}^n T^\pm(\Omega_j, \Omega_l) + J^\pm(\gamma') \\ &\quad - \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m T^\pm(\Gamma_j, \Omega_l) \\ &= J^\pm((\Gamma \amalg \Omega)^s) - \left[ \sum_{j<l}^m \sum_{l=1}^m T^\pm(\Gamma_j, \Gamma_l) + \sum_{j<l}^n \sum_{l=1}^n T^\pm(\Omega_j, \Omega_l) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m T^\pm(\Gamma_j, \Omega_l) \right] \\ &= J^\pm(\tilde{\Gamma}^s) - \sum_{j<l}^{m+n} \sum_{l=1}^{m+n} T^\pm(\tilde{\Gamma}_j, \tilde{\Gamma}_l) \end{aligned}$$

De forma análoga podemos fazer o cálculo para o invariante  $h$ .

**Lema 4.15** *Dado uma cirurgia  $\gamma$  conectando dois arcos externos de  $\Gamma$  (bordo da região ilimitada do complemento de  $\Gamma$  no plano), se  $\gamma$  não intercepta em nenhum momento as regiões do plano limitada por  $\Gamma$ , então*

$$J^\pm(\gamma * \Gamma) = J^\pm(\Gamma) + J^\pm(\gamma) + 2\eta_\gamma.$$

**Demonstração:** Quando  $\gamma$  conecta duas componentes distintas de  $\Gamma$ , ou seja,  $\gamma$  é uma ponte, a igualdade acima segue direto da Observação 4.14, onde consideramos  $\eta_\gamma = 0$ .

Suponhamos que  $\gamma$  conecta arcos de uma mesma componente conexa de  $\Gamma$ . Pela observação ??,  $\gamma * \Gamma$  tem sempre uma componente a mais que  $\Gamma$ . Além disso, se  $\gamma$  é do tipo  $\gamma^\pm$  o complemento de  $\gamma * \Gamma$  no plano tem uma componente a mais e de índice zero (veja figura 4.10), com o bordo desta componente de orientação oposta ao arco externo, provocando assim um aumento de  $\Delta T^\pm = -1$ .

Logo,

$$J^\pm(\gamma * \Gamma) = J^\pm(\Gamma) + J^\pm(\gamma) + 2.$$

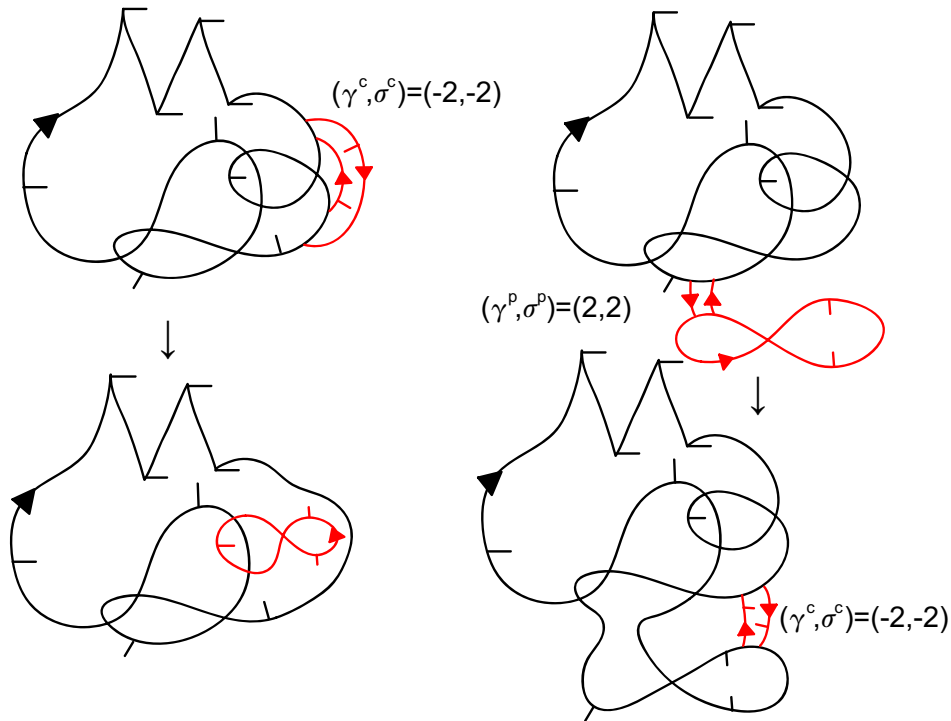


Figura 4.10: Conexão de arcos externos

Agora, se a ponte é do tipo  $(0, 0)$  então podemos considerar  $(0, 0)$  como uma componente de frente de onda que está num semi-plano disjunto de  $\Gamma$  e vamos conectar a  $\Gamma$  um dos arcos de  $(0, 0)$  por uma ponte do tipo  $(\pm 2, \pm 2)$  obtendo assim uma nova frente de onda  $\tilde{\Gamma}$ , então

$$J^\pm(\tilde{\Gamma}) = J^\pm(\Gamma) + J^\pm((0, 0)).$$

Conectando novamente à mesma componente de  $\Gamma$  o outro arco de  $(0, 0)$ , por outra ponte do tipo  $(\pm 2, \pm 2)$ , podemos aplicar o caso anterior (de conectar  $(\pm 2, \pm 2)$  numa mesma componente), assim

$$\begin{aligned} J^\pm(\gamma * \tilde{\Gamma}) &= J^\pm(\tilde{\Gamma}) + 2 \\ &= J^\pm(\Gamma) + J^\pm((0, 0)) + 2. \end{aligned}$$

Logo podemos escrever

$$J^\pm(\gamma * \Gamma) = J^\pm(\Gamma) + J^\pm(\gamma) + 2\eta_\gamma.$$

□

**Exemplo:** Em (a) da figura 4.11 ilustramos o canal  $\Gamma = \gamma^c * \tilde{\Gamma}$ , onde  $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ . Notemos que:  $J^+(\tilde{\Gamma}) = -1$  e  $J^+(\gamma^c) = 0$

Do Lema 4.15 segue que  $J^+(\Gamma) = J^+(\tilde{\Gamma}) + J^+(\gamma^c) + 2.1 = 1$

Para conferir este valor podemos calcular  $J^+(\Gamma)$  usando a relação  $J^+(\Gamma) = J^+(\Gamma_1) + J^+(\Gamma_2) - T^+(\Gamma_1, \Gamma_2)$ , sabendo que  $J^+(\Gamma_1) = 0$ ,  $J^+(\Gamma_2) = -1$  e  $T^+(\Gamma_1, \Gamma_2) = -2$

De modo análogo mostramos que  $J^-(\Gamma) = -1$ , pois  $J^-(\tilde{\Gamma}) = 0$  e  $J^-(\gamma^c) = -3$  ou usando o fato  $J^-(\Gamma_1) = 0$ ,  $J^-(\Gamma_2) = -3$  e  $T^-(\Gamma_1, \Gamma_2) = -2$ .

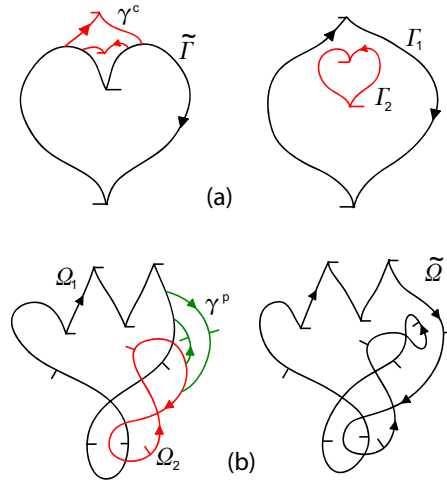


Figura 4.11:  $\Gamma$  e  $\gamma^c * \tilde{\Gamma}$ ,  $\tilde{\Omega}$  e  $\gamma^p * \Omega$

Já em (b) da figura 4.11 ilustramos a ponte  $\tilde{\Omega} = \gamma^p * \Omega$ , onde  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2)$ . Neste caso temos que  $\eta_\gamma = 0$ , logo  $J^+(\tilde{\Omega}) = J^+(\Omega) + J^+(\gamma^p)$ . Sabendo que  $J^+(\Omega_1) = -2$ ,  $J^+(\Omega_2) = 0$ ,  $T^+(\Omega_1, \Omega_2) = 0$  e  $J^+(\gamma^p) = 0$  segue que  $J^+(\tilde{\Omega}) = -2$ .

Sabendo ainda que  $J^-(\Omega_1) = -1$ ,  $J^-(\Omega_2) = -1$ ,  $T^-(\Omega_1, \Omega_2) = -4$  e  $J^-(\gamma^p) = 0$  segue que  $J^-(\tilde{\Omega}) = 2$ .

Uma maneira de verificar estas igualdades é tomando a frente de onda  $\tilde{\Omega}$  e encontrando um caminho até uma frente de onda básica que já sabemos o valor dos seus invariantes.

O lema anterior nos permite calcular os invariantes  $J^+$  e  $J^-$  para um conjunto de frentes de ondas  $\Gamma$  quando colocamos a ponte ou o canal na parte não limitada pelas componentes de  $\Gamma$ , mas e se essa ponte ou canal não estão nessa região?

No próximo exemplo vamos considerar um caso mais geral que nos dará uma prévia de como funcionará o próximo teorema.

**Exemplo:**

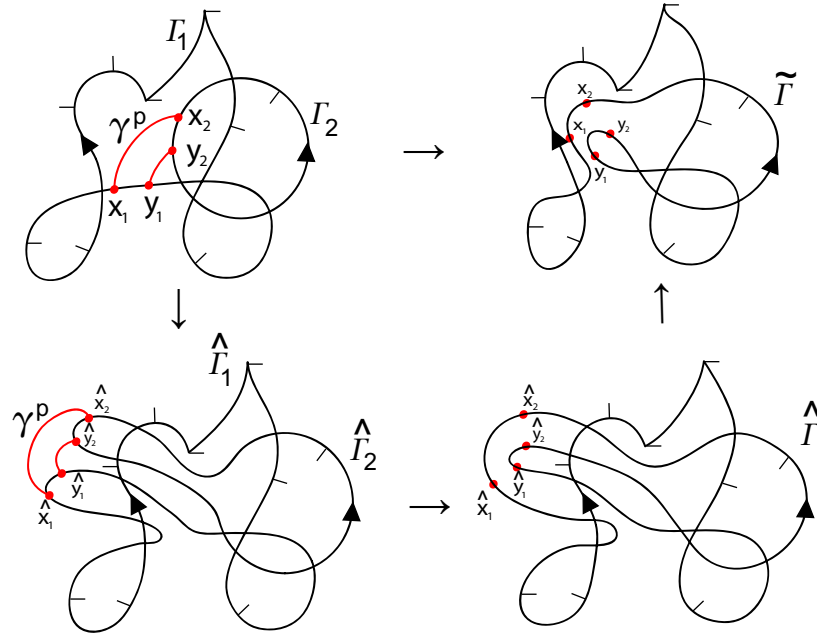


Figura 4.12: Ponte na região limitada pelas frentes de onda plana de  $\Gamma$

Queremos calcular o valor dos invariantes  $J^+$ ,  $J^-$ ,  $h$ ,  $Sp$  e  $\lambda$  da frente de onda  $\tilde{\Gamma} = \gamma^p * \Gamma$ , da figura 4.12, onde  $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ .

O lema anterior não se aplica a este caso pois a ponte  $\gamma^p$ , que conecta os arcos  $x_1y_1$  de  $\Gamma_1$  e  $x_2y_2$  de  $\Gamma_2$ , se encontra na região limitada pelas frentes de ondas planas do conjunto  $\Gamma$ . Na tentativa de solucionar este problema podemos fazer o que segue:

- Selecionamos os arcos conectados pela ponte  $\gamma^p$ ,  $x_1y_1$  e  $x_2y_2$  de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente.
- Deslocamos estes arcos selecionados no item (a) para a parte não limitada pelas frentes de ondas planas de modo que apareçam somente tangências entre os arcos. Temos então os arcos  $\overline{x_1y_1}$  e  $\overline{x_2y_2}$  de frentes de ondas planas  $\overline{\Gamma}_1$  e  $\overline{\Gamma}_2$  que são isotópicas as frentes de ondas iniciais.
- Conectamos os arcos  $\overline{x_1y_1}$  e  $\overline{x_2y_2}$  de  $\overline{\Gamma}_1$  e  $\overline{\Gamma}_2$ , respectivamente por um mesmo tipo de ponte  $\gamma^p$  inicial.
- Com as frentes de ondas conectadas, formando apenas uma que estamos chamando de  $\tilde{\Gamma}$  podemos retroceder o processo do item (b) sem desconectar os arcos, sofrendo novamente mais algumas tangências.
- Finalmente obtemos a frente de onda  $\tilde{\Gamma}$  e podemos calcular seus invariantes mas devemos descontar as tangências que ocorreram ao longo deste processo.

Para os próximos resultados vamos considerar pontes nas vizinhanças de pontos duplos dos de cruzamentos quando:

- a) dois arcos do cruzamento possuem mesma orientação,
- b) os arcos possuem orientações opostas e mesma co-orientação.
- c) os arcos possuem orientações e co-orientações opostas e o par (vetor tangente, vetor normal) formam um referencial positivo para o plano.

**Teorema 4.16** *Sejam  $\Gamma$  um conjunto de frentes de ondas planas e  $\gamma$  uma cirurgia conectando arcos de duas componentes de  $\Gamma$ , então*

$$\begin{aligned} J^+(\Gamma, \gamma) &= J^+(\Gamma) + J^+(\gamma) - (\sigma_\gamma - 2\vartheta_\gamma)i_\gamma, \\ J^-(\Gamma, \gamma) &= J^-(\Gamma) + J^-(\gamma) - (\sigma_\gamma - 2\vartheta_\gamma)i_\gamma, \\ h(\Gamma, \gamma) &= h(\Gamma) + h(\gamma), \\ \lambda(\Gamma, \gamma) &= \lambda(\Gamma) + \lambda(\gamma). \end{aligned}$$

**Demonstração:** Seguindo o mesmo raciocínio do exemplo 4.2.1, puxando os arcos pela ponte até a região ilimitada do complemento das frentes de onda no plano, obtendo uma nova frente de onda  $\widehat{\Gamma}$ , conectando a ponte  $\widehat{\gamma}$  isotópica a  $\gamma$ , depois levando a frente de onda  $\widehat{\gamma} * \widehat{\Gamma}$  sobre  $\gamma * \Gamma$  por um caminho genérico e obtendo assim os incrementos  $\Delta X(\Gamma)$  e  $\Delta X(\widehat{\gamma} * \widehat{\Gamma})$ , para  $X = J^+, J^-, h, \lambda$  temos

$$X(\gamma * \Gamma) = x(\Gamma) + X(\gamma) + [\Delta X(\Gamma) + \Delta X(\widehat{\gamma} * \widehat{\Gamma})]. \quad (4.1)$$

São verdadeiras as seguintes igualdades:

$$\Delta J^\pm(\Gamma) + \Delta J^\pm(\widehat{\gamma} * \widehat{\Gamma}) = -(\sigma_\gamma - 2\vartheta_\gamma)i_\gamma, \quad (4.2)$$

$$\Delta h(\Gamma) + \Delta h(\widehat{\gamma} * \widehat{\Gamma}) = 0, \quad (4.3)$$

$$\Delta \lambda(\Gamma) + \Delta \lambda(\widehat{\gamma} * \widehat{\Gamma}) = 0 \quad (4.4)$$

Substituindo as igualdades 4.2, 4.3 e 4.4 devidamente para cada  $X = J^+, J^-, h, \lambda$  em 4.1 o teorema está demonstrado, logo vamos verificar a veracidade de 4.2, 4.3 e 4.4. Observemos que quando puxamos os arcos  $A_s$ ,  $s = 1, 2$ , para a região ilimitada do complemento de  $\Gamma$  no plano, temos vários tipos de tangências. Vamos denotar por  $l^{ij}$  o número de arcos tangenciados por  $A_s$ , neste movimento, onde  $i$  corresponde a orientação do arco se positiva ( $i = +$ ) se negativa ( $i = -$ ) e  $j$  corresponde a co-orientação do arco se positiva ( $j = +$ ) se negativa ( $j = -$ ). Quando puxamos os arcos estes podem ser de quatro tipos diferentes dependendo da orientação e da co-orientação de cada um como podemos ver na figura 4.13.

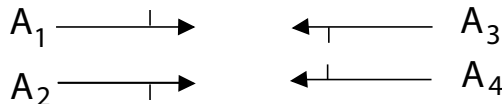


Figura 4.13: Possíveis arcos de conexão.



Arcos	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$J_C^+$	$2l^{++}$	$2l^{+-}$	$2l^{-+}$	$2l^{--}$
$J_D^+$	$-2l^{--}$	$-2l^{-+}$	$-2l^{+-}$	$-2l^{++}$
$J_C^-$	$2l^{+-}$	$2l^{++}$	$2l^{--}$	$2l^{-+}$
$J_D^-$	$-2l^{-+}$	$-2l^{--}$	$-2l^{++}$	$-2l^{+-}$
$J^+$	$2l^{++} - 2l^{--}$	$2l^{+-} - 2l^{-+}$	$2l^{-+} - 2l^{+-}$	$2l^{--} - 2l^{+-}$
$J^-$	$2l^{+-} - 2l^{-+}$	$2l^{++} - 2l^{--}$	$2l^{--} - 2l^{++}$	$2l^{-+} - 2l^{+-}$

Tabela 4.1: Os incrementos  $\Delta X$  no processo de puxar os arcos  $A_s$ 

Os incrementos  $\Delta X$  neste processo de “puxar” o arco (veja figura ??) são dados na tabela 4.3:

Notemos que algumas pontes possuem cúspide de modo que surgem incrementos do tipo  $\Delta\Pi_C$  e  $\Delta\Pi_D$  no processo de levar os arcos  $\widehat{A}_r\widehat{A}_s$  (denotados por  $\widehat{A}_{rs}$ ) conectados por  $\widehat{\gamma}$  sobre os arcos  $A_rA_s$  conectados por  $\gamma$ . Os valores dos incrementos  $\Delta J_x^y$  e  $\Delta\Pi_x$ , onde  $x \in \{C, D\}$  e  $y \in \{+, -\}$ , neste processo estão relacionados com os arcos  $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$  da seguinte forma, onde  $X = J_x^y$ :

$$\begin{aligned}
\Delta X(\widehat{A}_{11}) &= -[\Delta X(A_1) + \Delta X(A_3)], & \Delta X(\widehat{A}_{12}) &= -[\Delta X(A_3) + \Delta X(A_4)], \\
\Delta X(\widehat{A}_{13}) &= -[\Delta X(A_1) + \Delta X(A_3)], & \Delta X(\widehat{A}_{14}) &= -[\Delta X(A_1) + \Delta X(A_2)], \\
\Delta X(\widehat{A}_{22}) &= -[\Delta X(A_2) + \Delta X(A_4)], & \Delta X(\widehat{A}_{23}) &= -[\Delta X(A_1) + \Delta X(A_2)], \\
\Delta X(\widehat{A}_{24}) &= -[\Delta X(A_2) + \Delta X(A_4)], & \Delta X(\widehat{A}_{33}) &= -[\Delta X(A_1) + \Delta X(A_3)], \\
\Delta X(\widehat{A}_{34}) &= -[\Delta X(A_1) + \Delta X(A_2)], & \Delta X(\widehat{A}_{44}) &= -[\Delta X(A_2) + \Delta X(A_4)].
\end{aligned}$$

Somando os incrementos de  $A_r$  e  $A_s$  com os de  $\widehat{A}_{rs}$  para  $r, s = 1, 2, 3, 4$ , e denotando

$$\Delta X(A_{rs}) = \Delta X(A_r) + \Delta X(A_s) + \Delta X(\widehat{A}_{rs})$$

temos

$$\begin{aligned}
\Delta X(A_{11}) &= \Delta X(A_1) - \Delta X(A_3) = -\Delta X(A_{33}) = -\Delta(A_{23}), \\
\Delta X(A_{12}) &= \Delta X(A_1) + \Delta X(A_2) - \Delta X(A_3) - \Delta X(A_4) = -\Delta X(A_{34}), \\
\Delta X(A_{13}) &= 0 = \Delta X(A_{24}), \\
\Delta X(A_{14}) &= \Delta X(A_4) - \Delta X(A_2) = -\Delta X(A_{22}) = \Delta(A_{44}).
\end{aligned}$$

Além disso, podemos ver que  $\Delta\Pi_x$ , onde  $x \in \{C, D\}$  (veja tabela 4.2) de  $A_{11}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{24}$ ,  $A_{33}$  e  $A_{44}$  são nulos e

$$\Delta\Pi_x(A_{12}) = -\Delta\Pi_x(A_{14}) = -\Delta\Pi_x(A_{23}) = -\Delta\Pi_x(A_{34}).$$

Sendo assim podemos montar as seguintes tabelas:

Arco	Ponte
$A_{11}$	$(2, 2)$
$A_{12}$	$(2, 0)$
$A_{13}$	$(0, 0)$
$A_{14}$	$(0, 2)$
$A_{22}$	$(2, -2)$
$A_{23}$	$(0, 2)$
$A_{24}$	$(0, 0)$
$A_{33}$	$(-2, -2)$
$A_{34}$	$(-2, 0)$
$A_{44}$	$(-2, 2)$

Tabela 4.2: Os pares ordenado associados às pontes ligando os arcos  $A_{rs}$ 

Arcos	$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{13}$	$A_{14}$
$J_C^+$	$2(l^{++} - l^{-+})$	$2(l^{++} + l^{+-} - l^{-+} - l^{--})$	0	$2(l^{--} - l^{+-})$
$J_D^+$	$2(-l^{--} + l^{+-})$	$2(-l^{--} - l^{-+} + l^{+-} + l^{++})$	0	$2(-l^{++} + l_{-+})$
$J_C^-$	$2(l^{+-} - l^{--})$	$2(l^{+-} + l^{++} - l^{--} - l^{-+})$	0	$2(l^{-+} - l^{++})$
$J_D^-$	$2(-l^{-+} + l^{++})$	$2(-l^{-+} - l^{--} + l^{++} + l^{+-})$	0	$2(-l^{+-} + l^{--})$
$\Pi_C$	0	$2(-l^{++} - l^{+-} + l^{-+} + l^{--})$	0	$2(l^{++} + l^{+-} - l^{-+} - l^{--})$
$\Pi_D$	0	$2(-l^{++} - l^{+-} + l^{-+} + l^{--})$	0	$2(l^{++} + l^{+-} - l^{-+} - l^{--})$

Tabela 4.3: Valor dos estratos quando o primeiro arco da cirurgia é do tipo  $A_1$ 

Pela tabela 4.3 temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
(\Delta J_C^+ + \Delta J_D^+)(A_{11}) &= (\Delta J_C^- + \Delta J_D^-)(A_{11}) = 2i_\gamma, \\
(\Delta J_C^+ + \Delta J_D^+)(A_{12}) &= (\Delta J_C^- + \Delta J_D^-)(A_{12}) = 4i_\gamma, \\
(\Delta J_C^+ + \Delta J_D^+)(A_{13}) &= (\Delta J_C^- + \Delta J_D^-)(A_{13}) = 0, \\
(\Delta J_C^+ + \Delta J_D^+)(A_{14}) &= (\Delta J_C^- + \Delta J_D^-)(A_{14}) = -2i_\gamma.
\end{aligned}$$

Pela tabela 4.4 segue o seguinte:

$$\begin{aligned}
(\Delta J_C^+ + \Delta J_D^+)(A_{23}) &= (\Delta J_C^- + \Delta J_D^-)(A_{23}) = -2i_\gamma, \\
(\Delta J_C^+ + \Delta J_D^+)(A_{24}) &= (\Delta J_C^- + \Delta J_D^-)(A_{24}) = 0.
\end{aligned}$$

Da tabela 4.5 segue:

$$\begin{aligned}
(\Delta J_C^+ + \Delta J_D^+)(A_{33}) &= (\Delta J_C^- + \Delta J_D^-)(A_{33}) = -2i_\gamma, \\
(\Delta J_C^+ + \Delta J_D^+)(A_{34}) &= (\Delta J_C^- + \Delta J_D^-)(A_{34}) = -4i_\gamma,
\end{aligned}$$

Arcos	$A_{22}$	$A_{23}$	$A_{24}$
$J_C^+$	$2(l^{+-} - l^{--})$	$2(-l^{++} + l^{-+})$	0
$J_D^+$	$2(-l^{-+} + l^{++})$	$2(l^{--} - l^{+-})$	0
$J_C^-$	$2(l^{++} - l^{-+})$	$2(-l^{+-} + l^{--})$	0
$J_D^-$	$2(-l^{--} + l^{+-})$	$2(l^{-+} - l^{++})$	0
$\Pi_C$	0	$2(l^{++} + l^{+-} - l^{-+} - l^{--})$	0
$\Pi_D$	0	$2(l^{++} + l^{+-} - l^{-+} - l^{--})$	0

Tabela 4.4: Valor dos estratos quando o primeiro arco da cirurgia é do tipo  $A_2$ 

Arcos	$A_{33}$	$A_{34}$
$J_C^+$	$2(-l^{++} + l^{-+})$	$2(-l^{++} - l^{+-} + l^{-+} + l^{--})$
$J_D^+$	$2(l^{--} - l^{+-})$	$2(l^{--} + l^{-+} - l^{+-} - l^{++})$
$J_C^-$	$2(-l^{+-} + l^{--})$	$2(-l^{+-} - l^{++} + l^{--} + l^{-+})$
$J_D^-$	$2(l^{-+} - l^{++})$	$2(l^{-+} + l^{--} - l^{++} - l^{+-})$
$\Pi_C$	0	$2(l^{++} + l^{+-} - l^{-+} - l^{--})$
$\Pi_D$	0	$2(l^{++} + l^{+-} - l^{-+} - l^{--})$

Tabela 4.5: Valor dos estratos quando o primeiro arco da cirurgia é do tipo  $A_3$ 

Arcos	$A_{44}$
$J_C^+$	$2(-l^{+-} + l^{--})$
$J_D^+$	$2(l^{-+} - l^{++})$
$J_C^-$	$2(-l^{++} + l^{-+})$
$J_D^-$	$2(l^{--} - l^{+-})$
$\Pi_C$	0
$\Pi_D$	0

Tabela 4.6: Valor dos estratos quando o primeiro arco da cirurgia é do tipo  $A_4$ 

Notemos que todas as igualdades acima satisfazem

$$\Delta J^\pm(\Gamma) + \Delta J^\pm(\widehat{\gamma} * \widehat{\Gamma}) = -(\sigma_\gamma - 2\vartheta_\gamma)i_\gamma,$$

enquanto que para os casos  $A_{22}$  e  $A_{44}$  observemos que os arcos possuem orientações e co-orientações opostas e o par (vetor tangente, vetor normal) formam um referencial negativo para o plano. Então

$$\begin{aligned} (\Delta J_C^+ + \Delta J_D^+)(A_{22}) &= (\Delta J_C^- + \Delta J_D^-)(A_{22}) = 2i_\gamma = -(-\sigma_\gamma - 2\vartheta_\gamma)i_\gamma, \\ (\Delta J_C^+ + \Delta J_D^+)(A_{44}) &= (\Delta J_C^- + \Delta J_D^-)(A_{44}) = -2i_\gamma = -(-\sigma_\gamma - 2\vartheta_\gamma)i_\gamma, \end{aligned}$$

sendo esta última obtida da tabela 4.6.

Além disso,

$$\Delta h(\Gamma) + \Delta h(\widehat{\gamma} * \widehat{\Gamma}) = (\Delta J_C^+ + \Delta J_C^- + \Pi_C - \Delta J_D^+ - \Delta J_D^- - \Pi_D)(A_{rs}) = 0,$$

para  $r, s = 1, 2, 3, 4$ , de onde segue a igualdade desejada.

Temos ainda que como não nascem cúspides no processo de puxar os arcos e nem mesmo nascem cúspides nas pontes que são ligadas nos arcos segue também que

$$\Delta \lambda(\Gamma) + \Delta \lambda(\widehat{\gamma} * \widehat{\Gamma}) = 0$$

□

### 4.2.2 O invariante $Sp$ de $\gamma * \Gamma$

O cálculo do invariante  $Sp$  para  $\gamma * \Gamma$  não pode ser feito como fizemos para os demais invariantes já que o invariante  $Sp(\Gamma_p)$  depende do ponto base em cada componente de  $\Gamma$ , na verdade a parcela  $St$  do invariante  $Sp$  depende do ponto base de cada componente de  $\Gamma$ , e se conectamos, por exemplo, uma ponte  $\gamma$  entre duas componentes de  $\Gamma$  temos que escolher um novo ponto base para esta nova frente de onda, ou mesmo decidir qual dos dois pontos base das componentes conectadas será o ponto base para a nova frente de onda em  $\gamma * \Gamma$ . O que vamos fazer aqui é calcular  $St$  somente para pontes entre duas componentes. Em vez de considerar as componentes com o ponto base, vamos conectar a ponte  $\gamma$  obtendo assim uma única frente de onda e podemos dispensar o ponto base.

Dado  $(\gamma^p * (\Gamma_1, \Gamma_2))$ , denotemos

$$T_\gamma^{St}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \sum_P \xi(P),$$

onde esta soma tem contribuições de todos os pontos triplos  $P$  por  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  ao longo do processo de separá-las em semi-planos disjuntos, onde  $\xi(P)$  é o mesmo número definido em 4.1.1 para  $T^{St}$ , substituindo a ponte pelo ponto base. Assim como  $T^{St}$  depende dos pontos base, o número  $T_\gamma^{St}(\Gamma_1, \Gamma_2)$  depende de onde está conectado a ponte  $\gamma$ , que determina os sinais na regra do triângulo.

**Observação 4.17** *De maneira análoga à Proposição 4.2 podemos verificar que o número  $T_\gamma^{St}(\Gamma_1, \Gamma_2)$  não depende do movimento escolhido para separar  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  em semi-planos disjuntos.*

**Teorema 4.18** *Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  duas componentes de frentes de ondas conectadas por uma ponte  $\gamma$  então*

$$St(\gamma * (\Gamma_1, \Gamma_2)) = St(\Gamma_1) + St(\Gamma_2) - T_\gamma^{St}(\Gamma_1, \Gamma_2).$$

**Demonstração:** Sejam  $\widetilde{\Gamma}_1$  e  $\widetilde{\Gamma}_2$  duas frentes de ondas congruentes às respectivas frentes de ondas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , que estão em semi-planos disjuntos. Seja  $\phi$  um caminho genérico que leva o par de curvas  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$ , conectados pela ponte  $\gamma$ , no par  $(\widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{\Gamma}_2)$  de maneira que se

$\gamma$  conecta os arcos  $x_1y_1 \in \Gamma_1$  e  $x_2y_2 \in \Gamma_2$  então  $\phi(\gamma)$  deve conectar os arcos  $\phi(x_1y_1) \in \tilde{\Gamma}_1$  e  $\phi(x_2y_2) \in \tilde{\Gamma}_2$ . Assim

$$St(\tilde{\gamma} * (\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2)) = St(\gamma * (\Gamma_1, \Gamma_2) + \Delta St(\gamma * (\Gamma_1, \Gamma_2))), \quad (4.5)$$

onde

$$\Delta St(\gamma * (\Gamma_1, \Gamma_2)) = T_\gamma^{St}(\Gamma_1, \Gamma_2),$$

é o incremento de separação das frentes de ondas.

Arnold mostrou em [ ] que  $St$  é aditivo sob esta soma “estranha” (se  $\gamma$  tem pontos duplos estes devem estar fora da região do complemento do plano limitado pelas frentes de ondas), então

$$St(\tilde{\gamma} * (\Gamma_1, \Gamma_2)) = St(\tilde{\Gamma}_1) + St(\tilde{\Gamma}_2)$$

Como  $\tilde{\Gamma}_j$  é congruente a  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2$ , substituindo as últimas igualdades em 4.5, segue que

$$St(\gamma * (\Gamma_1, \Gamma_2)) = St(\Gamma_1) + St(\Gamma_2) - t_\gamma^{St}(\Gamma_1, \Gamma_2)$$

□

No Teorema 4.16 foi estabelecido os valores dos invariantes  $J^+$ ,  $J^-$ ,  $h$  e  $\lambda$  dos conjuntos de frentes de ondas planas  $\Gamma$  com uma cirurgia  $\gamma$ . assim nos falta determinar o invariante  $Sp$  de  $(\Gamma, \gamma)$  para termos todos os invariantes independentes. Isto será feito na próxima proposição, antes porém observemos que na demonstração do Teorema 4.16 obtivemos a seguinte igualdade

$$(\Delta\Pi_C + \Delta\Pi_D)(A_{rs}) = 2(\sigma_\gamma - \vartheta_\gamma)i_\gamma$$

então para cada par de frentes de ondas temos:

**Proposição 4.19** *Dadas duas frentes de ondas planas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  e uma ponte  $\gamma$  conectando as duas então*

$$Sp(\Gamma_1, \Gamma_2, \gamma) = Sp(\Gamma_1) + Sp(\Gamma_2) - 2T_\gamma^{St}(\Gamma_1, \Gamma_2) - 2(\sigma_\gamma - \vartheta_\gamma)i_\gamma.$$

# Conclusão

Neste trabalho, baseando-nos no artigo de F. Aicardi [Ai1] e nas técnicas da Teoria de Vassiliev, estudamos invariantes do tipo “Arnold” ([A1] e [A2]) de frentes de ondas planas, fornecendo equivalências entre curvas legendreanas.

O estudo aqui feito além de ser descrito e analisado detalhadamente, envolve temas de diversas áreas. De um lado, é dada uma introdução à noção de variedade de contato, definindo curvas legendreanas em  $M$  a 3-variedade de contato e explicando como se dá a associação de uma tal curva com uma frente de onda plana. Por outro lado, utilizando as técnicas da Teoria de Vassiliev, estudamos o conjunto discriminante de  $\mathcal{C}^\infty(S^1, M)$ , o espaço das imersões de  $S^1$  em  $M$ , a 3-variedade de contato, seguindo todos os passos desta teoria para a determinação de invariantes.

No desenvolvimento do trabalho nos deparamos com diversos conceitos e resultados relativos a Geometria Diferencial, Teoria de Singularidades e Topologia. Sendo assim, este trabalho além de fornecer um material para aqueles que queiram ter um primeiro contato com estudos de invariantes do tipo Vassiliev, também permite uma ampliação substancial no conhecimento matemático de temas avançados da Matemática.

Como já foi dito na introdução desta dissertação após os trabalhos de Arnold, de invariantes de curvas planas, houve um incremento significativo no número de matemáticos dedicados ao estudo de invariantes via Teoria de Vassiliev. O artigo de Aicardi também foi de grande importância, a partir dele surgiram outros trabalhos sobre invariantes de frentes de ondas em diferentes contextos.

Para se ter uma idéia da efervescência que se deu podemos citar algumas linhas de pesquisa que tiveram um impulso após os trabalhos de Arnold e Aicardi:

1. Técnicas para desenvolver algoritmos alternativos para o cálculo de invariantes de curvas planas (por exemplo: Polyak, Shmakovic, Viro e Mendes de Jesus e Romero-Fuster - veja [P], [Sh], [V], [MJ-RF], e [SR]) e de frentes de ondas (por exemplo: Goryunov e Polyak - veja [Gor1], e [P]).
2. Estudo de um invariante específico de curvas planas e/ou de frentes de ondas (por exemplo: Ferrand, Goryunov, Nowik, Polyak e Viro e Tabachnikov - veja [Fer], [Gor2], [N], [P-V] e [Ta]).
3. Extensão dos invariantes a curvas fechadas e frentes de ondas imersas em superfícies (por exemplo: Tchernov - veja [Tch1] e [Tch2]).

4. Estudo de invariantes de outras aplicações estáveis (por exemplo: Goryunov e Hacón, Mendes de Jesus e Romero-Fuster e Yamamoto- veja [Gor3], [HMR1] e [Ya])
5. Aplicação dos invariantes a nós Legendreanos (por exemplo: Lin, Hass e Nowik, Poliak e Viro - veja [L], [H-N] e [P-V]).

Pela descrição acima é possível ter uma idéia da importância da Teoria de Invariantes, via Vassiliev, na atuação de pesquisadores matemáticos.

# Referências Bibliográficas

- [Ai1] F. AICARDI, *Discriminants and local invariants of planar fronts*, The Arnold-Gelfand Mathematical Seminars: Geometry and Singularity Theory, AMS, Birkhäuser, Boston, 1-76, (1997).
- [Ai2] F. AICARDI, *Remarks on the Symmetries of Planar Fronts*, Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid, Vol. 8, No 2, (1995).
- [A1] V. I. ARNOLD, *Topological Invariants of Plane Curves and Caustics*. University Lecture Series, Vol. 5, AMS Providence (1994).
- [A2] V. I. ARNOLD, *Plane Curves, Their Invariants, Perestroikas and Classifications*, Singularities and Bifurcations, Advances in Soviet Mathematics, Vol. 21, AMS, 39-91, (1994).
- [A3] V. I. ARNOLD, *On the topological properties of the Legendrian projections in the contact topology of wave fronts*. Sanct Petersburg Math J., vol.6, n3, 1-16, (1994).
- [A4] V. I. ARNOLD, *Rutgers lectures on plane curves and wave fronts*. Preprint Cere-made 9143 (1994).
- [A5] V. I. ARNOLD, *Invarianty i perestroiki ploskikh frontov*. Trudy Math, Institute Seklova (1993).
- [Ch-Du] S. CHMUTOV AND S. DUZHIN, *Explicit Formulas for Arnold's Generic Curve Invariants*, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.41.1814>, 1-16, (1995).
- [E] Y. ELIASHBERG, *Legendrian and transversal knots in tight contact 3-manifolds*, Methods in Modern Mathematics (1993).
- [E1] J. B. ETNYRE, *Legendrian and transversal knots*, Mathematics Subject Classification (1991).
- [F] M. FRASER, *Thesis*, Stanford University (1994).
- [Fer] E. FERRAND *On the Bennequin invariant and the geometry of wave fronts*. Geom. Dedicata 65, no. 2, 219-245, (1997).



- [Lin] X.S. LIN, *Invariants of Legendrian Knots*, New York, Department of Mathematics, Columbia University, (2001).
- [Ge1] H. GEIGES, *A Contact Geometric Proof of the Whitney-Graustein Theorem*, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, (2007).
- [Ge2] H. GEIGES, *A Brief History of Contact Geometry and Topology*, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, (2001).
- [Ge3] H. GEIGES, *Contact Geometry*, Mathematisches Institut, Universität zu Köln, (2004).
- [Gib] C. G. GIBSON *Singular Points of Smooth Mappings* Reasearch Notes in Mathematics, Pitman, London, (1978).
- [Go-Gu] M. GOLUBITSKY AND V. GUILLEMIN *Stables Mappings and Their Singularities* . GTM 14, Springer-Verlag, New York, (1973).
- [Gor1] V. GORYUNOV *Plane Curves, wave fronts and Legendrian knots*. Phil. Trans. of Royal Soc. London A, 359, 1497-1510, (2001).
- [Gor2] V. GORYUNOV *Local invariants of mappings of surfaces into three space*. The Arnold-Gelfand Mathematical Seminars: Geometry and Singularity Theory, AMS, Birkhäuser, Boston, 223-225, (1997).
- [Gor3] V. GORYUNOV *Vassiliev type invariants in Arnold's  $J^\pm$ -theory of plane without direct self-tangencies*. Topology 37, 603-620, (1998).
- [HMR1] D. HACON, C. MENDES DE JESUS AND M. C. ROMERO FUSTER *Fold Maps from Sphere to the Plane*, Experimental Mathematics, 15, vol4, 491-497, (2006).
- [H] M. HIRSCH *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, 33. Springer-Verlag, New York, (1994).
- [H-N] J. HASS E T. NOWIK, *Invariants of Knot Diagrams*, Mathematische Annalen manuscript, preprint, (2008).
- [L] X-S LIN, *Invariants of legendrian knots*. Columbia University, New york, .
- [MJ] C. MENDES DE JESUS *Invariantes Topológicos de Aplicações Genéricas de Superfícies Compactas Orientáveis no Plano*. Tese de doutorado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, (2001).
- [MJ-RF] C. MENDES DE JESUS E M. C. ROMERO FUSTER, *Bridges, channels and Arnold's invariants for generic plane curves*, Topology and its Applications, 125, 505-524, (2002).
- [N] T. NOWIK, *Order one invariants of planar curves*, Advances in Mathematics, 220, 427-440, (2009).

- [NB-RF] J. J. NUÑO-BALLESTEROS E M. C. ROMERO-FUSTER, *Singularidades de Aplicaciones Diferenciables*, Texto Didático, Universidad de Valencia, Espanha, (2008).
- [P-V] M. POLYAK E O. VIRO, *Gauss Diagram Formulas for Vassiliev Invariants*, International Mathematics Research Notices, N. 11, 445-453, (1994).
- [P] M. POLYAK *Invariants of plane curves and Legendrian fronts via Gauss diagrams*, Topology 37, 989-1009, (1998).
- [O-A] T. OHMOTO E F. AICARDI, *First order local invariants of apparent contours*, Topology 45, 27-45, (2006).
- [S] R. O. SINHA *Topological invariants of stable maps from 3-manifolds to three space*, Universitat de València, (2000).
- [Sh] A. SHUMAKOVICH, *Formulas for strangeness of plane curves*. Preprint Uppsala University, (1994).
- [SR] L. N. SANTA ROSA, *Invariantes de Arnold de Curvas Planas*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Viçosa, (2010).
- [Ta] S. TABACHNIKOV, *Invariants of Smooth Triple Point Free Plane Curves*, Journal of Knot Theory and its Ramifications, V.5, N.4, 531-552, (1996).
- [Tch1] V. TCHERNOV, *Arnold-type invariants of curves and wave fronts on surfaces*, Thesis, Uppsala University, (1998).
- [Tch2] V. TCHERNOV, *Arnold-type invariants of wave fronts on surfaces*, Topology 41, 1-45, (2002).
- [V1] V. VASSILIEV, *Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications*. AMS, Providence, (1992).
- [V2] V. VASSILIEV, *Cohomology of knot spaces*. Advances in Soviet Math. 1 23-69, (1990).
- [V] OLEG VIRO, *First degree invariants of generic curves on surfaces*. Uppsala University, (1994).
- [Whi] H. WHITNEY, *On regular closed curves in the plane*. Compositio Math., 4 pags. 276-284 (1937).
- [Ya] M. YAMAMOTO *First order semi-local invariants of stable maps of 3-manifolds into the plane*, Proc. London Math. Soc. (3) 92, no. 2, 471-504, (1955).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)