

SAMYR ARIEL ABDULACK

**O SOMBREAMENTO DE TRAJETÓRIAS NO
MAPA PADRÃO**

PONTA GROSSA

2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

SAMYR ARIEL ABDULACK

O SOMBREAMENTO DE TRAJETÓRIAS NO
MAPA PADRÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Sandro Ely de Souza Pinto

PONTA GROSSA

2010

Ficha Catalográfica Elaborada pelo Setor de Processos Técnicos BICEN/UEPG

A136s Abdulack, Samyr Ariel
 O sombreamento de trajetórias no mapa padrão. / Samyr Ariel
Abdulack. Ponta Grossa, 2010.
 126f.
 Dissertação (Mestrado em Ciências , área de concentração
Física), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
 Orientador: Prof. Dr. Sandro Ely de Souza Pinto

1.Sombreamento. 2. Sistemas Hamiltonianos. 3. Tangências.
I. Pinto, Sandro Ely de Souza. II. T.

CDD: 515.39

TERMO DE APROVAÇÃO

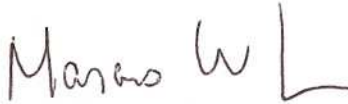
SAMYR ARIEL ABDULACK

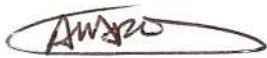
“O SOMBREAMENTO DE TRAJEÓRIAS NO MAPA PADRÃO”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:


Prof. Dr. Sandro Ely de Souza Pinto
Departamento Física, UEPG/ PR


Prof. Dr. Marcus Werner Beims
Universidade Federal do Paraná- UFPR/ PR


Prof. Dr. Antonio Marcos Batista
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/ PR

Ponta Grossa, 26 de março de 2010

Resumo

Os cálculos numéricos envolvendo as soluções de um sistema matemático apresentam ruído em razão dos erros de truncamento e arredondamento efetuados a cada passo. Se o sistema dinâmico apresentar caos, então estes erros são amplificados. Os sistemas dinâmicos hamiltonianos podem apresentar regiões disjuntas onde há ocorrência de caos e periodicidade no mesmo espaço de fases para uma dada faixa de valores do parâmetro de controle. Em particular, o mapa padrão é um sistema hamiltoniano amplamente investigado por ser proveniente de vários sistemas físicos de interesse. Uma resposta à questão da validade das soluções numéricas é o sombreado que garante a existência de órbitas reais próximas de órbitas ruidosas por longo tempo. Se o sistema apresentar estrutura hiperbólica, então o sombreado é garantido inteiramente para o conjunto onde o sistema está definido. Por outro lado, a maioria dos sistemas não apresenta estrutura hiperbólica, a exemplo do que ocorre com o mapa padrão. Esta quebra de hiperbolicidade pode ocorrer de duas maneiras: pela variabilidade da dimensão instável ou por tangências entre as variedades. Este trabalho tem como objetivo estudar o problema do sombreado e compreender as técnicas de contenção e refinamento bem como investigar as regiões onde ocorrem possíveis tangências buscando caracterizar a estrutura das órbitas periódicas instáveis no espaço de fases. De posse das órbitas periódicas instáveis é possível obter as variedades associadas e verificar regiões onde há quebra de sombreado por tangências. Para tanto, emprega-se o método de Schmelcher-Diakonos para encontrar as órbitas periódicas. As variedades são encontradas tomando uma bola de condições iniciais na vizinhança linear dos pontos de algum período e iterando o mapa para representar aproximadamente a variedade instável e iterando a inversa do mapa para encontrar a variedade estável. Como resultado verificam-se regiões onde possivelmente ocorrem tangências e o sombreado não pode ser efetuado.

Palavras-chave: Sombreado, Sistemas Hamiltonianos, Tangências

Abstract

Numerical solutions of a mathematical system presents noise due to the truncation and roundoff errors. If chaos cannot ruled out then these errors are amplified. The Hamiltonian dynamical systems may present chaos and periodicity in the same phase space for a given range of values of the control parameter. In particular the standard map is a Hamiltonian system widely investigated to be derived for many physical systems of interest. An answer for question of validity of numerical solutions is the shadowing of physical trajectories that ensures the existence of real orbits that stays near of noisy trajectories for long time. If the system present hyperbolic structure, then all conditions are fulfilled and shadowing can be done for every point of the set where the system is defined. On the other hand, most of systems are nonhyperbolic like standard map. This loss of hyperbolicity can occur in two ways: unstable dimension variability and tangencies between manifolds. This study aims the shadowing problem and investigate regions where tangencies can occur characterizing periodic orbits structure in phase space. With the knowledge of unstable periodic orbits is possible to obtain manifolds and verify regions where shadowing is broken by tangencies. For this the Schmelcher-Diakonos method is employed for found periodic orbits. The manifolds are found by taking a ball of initial conditions in linear neighborhood of points of any period and by iteration forward in time of map to represent an approximation of unstable manifold and by reverse iteration in time to represent stable manifold. As a result we found regions were possible tangencies occur and shadowing cannot be done.

Keywords: Shadowing, Hamiltonian systems, Tangencies

Dedico este trabalho à minha família e, em especial, aos meus pais Daniel e Célia pelo incentivo aos estudos.

À minha irmã pela admiração.

Aos meus tios e avós

À minha namorada Vanessa.

Agradecimentos

À Deus, por me iluminar nos momentos de escuridão e dúvidas e, além de sabedoria e coragem para enfrentar tais momentos, concedeu-me o dom da humildade quando o caminho foi iluminado.

À minha namorada Vanessa, pela compreensão, auxílio e incentivo desde a graduação e por sempre estar presente também nos momentos complicados.

Ao professor Dr. Sandro E. de S. Pinto, pela incrível compreensão, ajuda com um aluno tão complicado e por seus conhecimentos compartilhados.

Aos professores Dr. Fábio A. M. Cássaro, Dr. André M. Brinatti e Dr. Jeremias B. da Silva pelo incentivo e formação acadêmica.

Aos membros da banca de qualificação e defesa, professores Dra. Rosângela M. Costa e Dr. Sérgio L. Gómez, Dr. Antônio M. Batista e Dr. Marcus W. Beims pelas correções e sugestões.

Aos amigos e colegas de grupo, em especial os amigos MSc. Rodrigo F. Pereira e MSc. Romeu M. Szmoski, pelo grande auxílio durante todo o trabalho, inclusive em questões pessoais, além das cervejadas e discussões filosóficas.

Aos amigos Vinícius pelas discussões e os jogos trocados para computador e Lincoln pelas discussões filosóficas e aos amigos Fabiano e Ronaldo!

À Jose, pelo grande auxílio e sua atuação junto à secretaria do programa de pós-graduação em Ciências/Física.

Ao professor Dr. Celso Grebogi pela colaboração com o grupo de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos da UEPG.

À CAPES pelo auxílio financeiro e à UEPG.

Finalmente, à J. J. Abrams e colaboradores pela série LOST.

A todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

“4 8 15 16 23 42”

Lista de Figuras

- 1.1 A sensibilidade às condições iniciais. p. 16
- 2.1 Representação pictórica do toro \mathbb{T}^2 . É ilustrado nesta figura um sistema com dois graus de liberdade. Também são mostrados os raios R e r p. 29
- 2.2 Gráfico da primeira iterada para o mapa (2.24). A reta representa a função real $f(x) = \beta x$ e os pontos representam o mapa, onde $\beta = 3$ p. 30
- 2.3 Representação da intersecção das soluções de um sistema tridimensional com uma superfície arbitrária. p. 30
- 2.4 Gráfico de uma sela, representando um espaço de curvatura negativa. Neste espaço, obviamente podem existir trajetórias instáveis. p. 36
- 2.5 Gráfico de um espaço com curvatura positiva, como a de uma esfera. Evidentemente, todas as trajetórias convergem para um ponto “crítico”. . . p. 37
- 2.6 Representação esquemática do rotor pulsado. p. 39
- 2.7 Três órbitas para o mapa padrão, eq. (2.59). A linha cheia é formada de pontos da órbita de $(L_0, \theta_0) = (\sqrt{2}/2; 0, 01)$. Os círculos correspondem à órbita de $(L_0, \theta_0) = (0, 1; 0, 01)$. Os quadrados são os pontos da órbita de $(L_0, \theta_0) = (0, 6; 0, 01)$ p. 44
- 2.8 Espaço de fases contendo 20 órbitas para (a) $K = 0,45$ e (b) $K = 0,68$ p. 45
- 2.9 Espaço de fases do mapa padrão contendo 20 órbitas para (a) $K = 1,5$ e (b) $K = 3,0$ p. 45
- 2.10 Espaço de fases do mapa padrão apenas uma órbita para $K = 10,0$ p. 46
- 3.1 Representação pictórica do esticamento e dobra do intervalo $[0, 1]$ p. 51
- 3.2 Resultado da primeira iterada do mapa de Smale no quadrado unitário. As duas tiras verticais foram nomeadas V_1 e V_2 p. 51
- 3.3 Resultado da segunda iterada do mapa de Smale no quadrado. Agora o quadrado contém quatro tiras: V_{11} , V_{12} , V_{21} e V_{22} p. 52

3.4	A primeira iterada do mapa inverso fornece agora duas tiras horizontais, denotadas por H_1 e H_2	p. 52
3.5	Analogamente à segunda iterada do mapa, resultam de $\mathcal{M}_S^{-1}\mathcal{M}_S^{-1}$ quatro tiras horizontais, denotadas por H_{11}, H_{12}, H_{21} e H_{22}	p. 52
3.6	Representação dos pontos que permanecem dentro do quadrado após a primeira e segunda iteradas do mapa \mathcal{M}_S e de sua inversa \mathcal{M}_S^{-1} . Os quadrados em preto contém pontos que formarão o conjunto de Cantor quando $k \rightarrow \infty$	p. 53
3.7	Ilustração do particionamento do espaço de fases para o mapa de Ikeda.	p. 56
3.8	(a) Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson para encontrar raízes. (b) Aproximação do retângulo $[2,4] \times [-2,2]$ de (a) para ilustrar a aproximação de uma das raízes na segunda iterada.	p. 59
3.9	Bacias de atração para o método de Newton-Raphson aplicado para encontrar as raízes de $f(x) = \cos(x^2)$	p. 60
3.10	Bacias de atração para o método de Schmelcher-Diakonos aplicado para encontrar as raízes de $f(x) = \cos(x^2)$ utilizando o primeiro sistema transformado S_1	p. 62
3.11	Pontos de período 2 (em vermelho), 3 (em azul) e 4 (em laranja), para o mapa padrão (mod 1) com $K = 1,5$ e uma trajetória típica (pontos em preto). Os pontos fixos estão mostrados em verde para fins didáticos.	p. 64
3.12	(a) As três primeiras iteradas do mapa logístico com parâmetro $r_L = 2,5$. Em preto, a primeira iterada. A segunda iterada corresponde à curva em azul e em verde se encontra a terceira iterada ao passo que em vermelho é apresentada a reta $x_{n+1} = x_n$ (b) O mesmo para $r_L = 4$	p. 68
3.13	(a) Diagrama de bifurcação do mapa logístico para uma condição inicial iterada 1000 vezes desprezando 600 iteradas de tempo transiente. (b) Expoente de Lyapunov em função de r_L	p. 69
3.14	Representação esquemática da ação do mapa em uma região de condições iniciais de raio inicial ϵ_0 . Após a aplicação de um mapa \mathcal{M} há contração em uma direção, <i>vide</i> eixo menor da elipse de tamanho $\epsilon_1 \sim \epsilon_0 \exp(nh_1)$, e expansão na outra direção, <i>vide</i> eixo maior da elipse de tamanho $\epsilon_2 \sim \epsilon_0 \exp(nh_2)$	p. 71

3.15	Distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito ($n = 100$) para o mapa padrão (mod 1) com $K = 1,5$. A distribuição dos ELTF-100 indica que existem regiões de maior permanência da trajetória, em razão do aspecto bimodal.	p. 73
3.16	Distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito ($n = 100$) para o mapa padrão (mod 1) com $K = 10$. Como a distribuição é unimodal, existe apenas um valor médio para o maior expoente de Lyapunov. . . .	p. 74
3.17	Os gráficos (a) e (b) mostram a série temporal para a variável ângulo θ_n e o momentum L_n , respectivamente, no mapa de Poincaré do rotor pulsado para $K = 1,5$	p. 74
3.18	Os gráficos (a) e (b) mostram a série temporal para a variável ângulo θ_n e o momentum L_n , respectivamente, no mapa de Poincaré do rotor pulsado para $K = 10$	p. 75
3.19	Em (a) e (b) são mostrados os histogramas das respectivas variáveis. $P(\theta_n, L_n)$ denota a distribuição das variáveis θ_n e L_n em razão de serem dependentes. Neste gráfico, $K = 1,5$	p. 76
3.20	Em (a) e (b) são mostrados os histogramas das respectivas variáveis. A distribuição das variáveis θ_n e L_n é denotada por $P(\theta_n, L_n)$ em razão de serem dependentes. Neste gráfico, $K = 10$	p. 76
3.21	Algumas órbitas no espaço de fases para o mapa padrão com (a) $K = 1,5$ e (b) $K = 10$	p. 77
3.22	As três primeiras iteradas do mapa da tenda e o mapa $x_{n+1} = x_n$. Analogamente ao mapa logístico, a cor preta representa a primeira iterada do mapa da tenda. A cor azul corresponde à segunda iterada e a terceira iterada está representada em verde. A reta em vermelho consiste do mapeamento $x_{n+1} = x_n$	p. 78
3.23	Ilustração das variedades estável e instável de um ponto fixo qualquer \mathbf{r} em um sistema bidimensional.	p. 80
3.24	Ilustração do campo vetorial obtido da expressão (3.26) para o caso em que $a > b$. Nesta ilustração, $a = 2b$ e $b = 1/2$	p. 81
3.25	Representação do método empregado para encontrar as variedades estável (azul) e instável (vermelho).	p. 85

3.26	A distância média entre a primeira iterada no mapa original e a primeira iterada no mapa linearizado em função do raio de condições iniciais para $K = 1,5$ e $K = 3$ com 50×10^3 condições iniciais.	p. 86
3.27	Variedades instável (vermelho) e estável (azul) para o mapa padrão (mod 1) com $K = 1,5$. Neste gráfico, empregamos $\varepsilon = 0,0081$ e \mathcal{N} supracitado.	p. 87
3.28	Comparação da escolha da bola ε . Em (a) $\varepsilon = 0,1$ e em (b) $\varepsilon = 0,01$. A variação por uma ordem de grandeza do raio de condições iniciais pode fornecer variedades de outros pontos ou regiões com pontos redundantes “presos” entre as variedades.	p. 87
3.29	Variedades do ponto fixo $(0,0)$ para $K = 3$ no mapa padrão.	p. 88
4.1	Ilustração de um sistema com estrutura hiperbólica: cada ponto apresenta direções estável e instável bem definidas.	p. 91
4.2	Ilustração do Sombreamento: a trajetória ruidosa é $\mathbf{p}(t)$ (em vermelho) e a trajetória real (idealmente sem efeitos de arredondamento) é $\mathbf{x}_1(t)$ (em azul). Uma outra trajetória real $\mathbf{x}_2(t)$ (também em azul) sombreia a pseudotrajetória.	p. 93
4.3	A construção de um paralelogramo em torno de um ponto da órbita ruidosa seguindo a orientação de seus autovetores.	p. 96
4.4	Com o cálculo de $\mathbf{f}(\mathbf{M}_0)$, o tamanho do paralelogramo \mathbf{M}_1 fica limitado e o ponto $\mathbf{f}(\mathbf{p}_0)$ se distancia da ordem de δ_f do ponto \mathbf{p}_1	p. 96
4.5	O processo de contenção de uma trajetória real. Adaptada de [9].	p. 97
4.6	Ilustração do teorema do ponto fixo bidimensional.	p. 99
4.7	Uma tangência implica um “glitch” e, conseqüentemente, em quebra de sombreamento.	p. 101
4.8	(a) Uma direção instável e duas estáveis na vizinhança de q_1 . (b) Vizinhança de q_2 , com duas direções instáveis e uma estável. Adaptada de [10].	p. 105
A.1	Cavidade óptica para estudar a resposta das ondas eletromagnéticas em relação a um meio não-linear. Os espelhos M_i ($i = 1,2$) são parcialmente refletores e M_j ($j = 3,4$) são totalmente refletores.	p. 118

A.2	Uma órbita do mapa de Ikeda no espaço de fases para (a) $b = 0,7$ e (b) $b = 0,9$. As componentes do campo eletromagnético apresentam uma resposta não trivial proeminente para $b = 0,9$	p. 119
A.3	Ilustração da aplicação do método SD para encontrar pontos de período 2 (em vermelho) e 3 (em azul) no mapa de Ikeda com os parâmetros da figura A.2b.	p. 120
A.4	Campo vetorial associado ao sistema original V_U	p. 121
A.5	Efeito da primeira matriz C_1 sobre o sistema original.	p. 121
B.1	Ilustração das iteradas que formam o conjunto de Cantor.	p. 124

Lista de Tabelas

- 3.1 Valores encontrados iterando a expressão (3.9) onde $\varepsilon = 10^{-15}$. Os valores mostrados aproximam-se de $\sqrt{10}$ dentro de ε p. 59
- 4.1 Distância de sombreamento para vários valores do parâmetro K no mapa padrão. Extraída de [9]. p. 103

Sumário

1	Introdução	p. 15
2	O Mapa Padrão	p. 21
2.1	Os Sistemas Hamiltonianos	p. 21
2.1.1	A Formulação Hamiltoniana	p. 21
2.1.2	Integrabilidade e as Transformações Canônicas	p. 24
2.1.3	As Secções de Poincaré	p. 28
2.2	Geometria dos Sistemas Hamiltonianos	p. 31
2.2.1	A Estrutura Simplética	p. 31
2.2.2	A Estabilidade dos Pontos Fixos em Fluxos e Mapas	p. 32
2.2.3	O Teorema de Liouville	p. 37
2.3	O Mapa Padrão	p. 39
2.4	O Teorema KAM	p. 46
3	Caos em Sistemas de Baixa Dimensionalidade	p. 49
3.1	As Órbitas Periódicas	p. 54
3.1.1	O Cálculo das Órbitas Periódicas	p. 57
3.2	Os Expoentes de Lyapunov	p. 65
3.2.1	Os Expoentes de Lyapunov a Tempo Finito	p. 72
3.3	Transitividade e Conjugacidade	p. 77
3.4	As Variedades	p. 79
4	O Sombreamento	p. 89

4.1	O Lema do Sombreamento	p. 90
4.1.1	Conjuntos Invariantes Hiperbólicos	p. 91
4.1.2	O Sombreamento em Sistemas Hiperbólicos	p. 91
4.2	O Sombreamento em Sistemas Não-Hiperbólicos	p. 94
4.2.1	A Contenção da Trajetória Real	p. 95
4.2.2	O Refinamento da Trajetória Ruidosa	p. 99
4.2.3	A Quebra de Sombreamento	p. 104
4.2.4	O Tempo de Sombreamento	p. 105
4.3	O Teorema do Sombreamento	p. 106
5	Conclusões	p. 108
	Referências Bibliográficas	p. 111
	Apêndice A – O Método da Transformação de Estabilidade	p. 114
A.1	Digressão sobre o Efeito das Matrizes de Estabilização	p. 118
A.1.1	A Interpretação Geométrica das Matrizes de Estabilização	p. 120
A.2	A Formulação Contínua da Transformação de Estabilidade	p. 120
A.3	Os Expoentes de Lyapunov	p. 122
	Apêndice B – Fractais e o Conjunto de Cantor	p. 123

1 *Introdução*

A investigação de sistemas dinâmicos tem um longo histórico. Desde os primórdios da física, com o estudo dos movimentos dos corpos e, posteriormente, com o advento dos modelos para o Sistema Solar, buscou-se compreender como o movimento ocorre, quais suas leis e o que dizer da evolução do estado destes sistemas [1].

A teoria de sistemas dinâmicos trata dos sistemas matemáticos cujas variáveis de estado dependem do tempo. Deste modo, uma expressão do tipo

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x), \quad (1.1)$$

corresponde a um sistema dinâmico, onde $f(x)$ é uma função e t é o tempo, que varia de maneira contínua. Sistemas como este são ditos determinísticos, pois uma vez conhecida sua lei de evolução, dada por $f(x)$ na expressão (1.1), e a condição inicial $x(t_0)$ em algum instante inicial t_0 , seu estado posterior, *i.e.* para $t > t_0$, pode ser exatamente determinado [1–3].

Com algumas restrições em tais sistemas, é possível observar um tipo de comportamento bastante peculiar, conhecido como caótico [2,3]. Este comportamento é caracterizado essencialmente pela sensibilidade às condições iniciais: a aplicação da lei de evolução em duas condições iniciais muito próximas fornece resultados completamente distintos. Na prática, diz-se que há divergência das trajetórias. Este tipo de comportamento foi observado pela primeira vez por J. H. Poincaré no problema conhecido como problema dos três corpos sob influência puramente gravitacional [1,4,5].

Em 1886, o rei Oscar II da Suécia lançou um desafio, valendo algum prêmio, sobre a estabilidade do Sistema Solar [1,6]. Este desafio consistia na busca pela resposta rigorosa acerca deste problema. Uma resposta parcial a esta questão foi dada em 1887 por Poincaré que recebeu o prêmio proposto. Cabe notar que o Sistema Solar é descrito por um sistema dinâmico: é possível conhecer a posição e momentum de cada componente em um instante t e suas variáveis dinâmicas variam com o tempo t . Além disto, as leis que governam

os movimentos planetários são conhecidas. Contudo, há uma impossibilidade em obter estados futuros nestes sistemas, pois ocorrem influências não-triviais de cada um dos componentes.

Uma das exigências para que o comportamento caótico possa surgir neste contexto é que as soluções $x(t)$ estejam limitadas em uma região do espaço. Entretanto, o sistema (1.1) é um sistema dinâmico a tempo contínuo unidimensional, o que não permite a ocorrência deste tipo particular de comportamento.

Muitas vezes o estudo de sistemas dinâmicos torna-se viável pela discretização de suas variáveis de estado. Neste caso, em lugar das variáveis serem dependentes do tempo t que varia de forma contínua, estudam-se as variáveis discretizadas, de modo que o tempo varie de forma discreta. Usualmente este tempo é chamado de número de iteradas e representado por n . Este tipo de procedimento leva ao mapeamento entre variáveis de um espaço a outro.

A figura 1.1 mostra um gráfico da variável ângulo do mapa padrão em função do número de iteradas. Esta representação gráfica é chamada de série temporal da variável ângulo e o mapa padrão corresponde a um mapeamento obtido da discretização de um sistema físico conhecido como rotor pulsado [3, 7], embora existam outros sistemas físicos que possam originar o mapa.

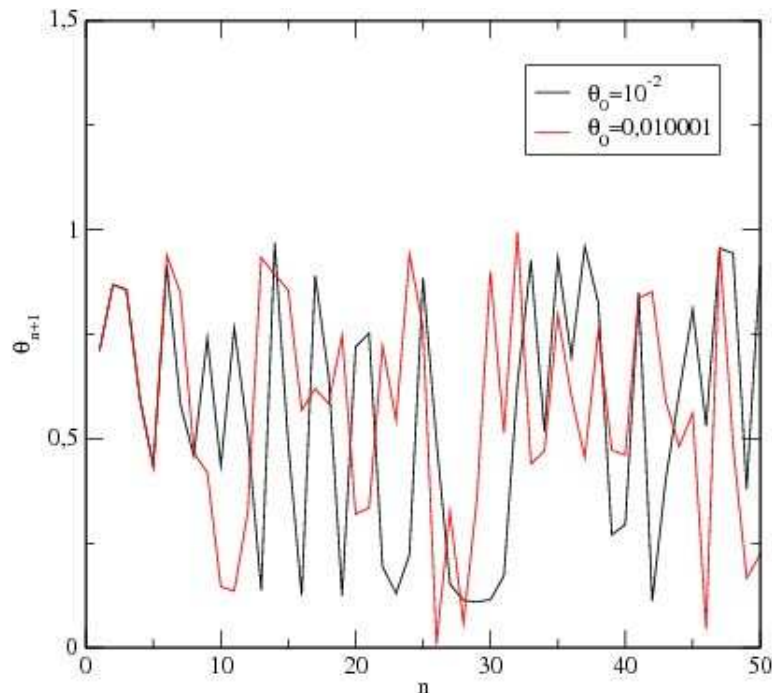


Figura 1.1: A sensibilidade às condições iniciais.

É possível perceber na figura 1.1 que após um dado tempo $n \approx 5$, as soluções divergem e

não há qualquer correlação entre as duas. No entanto, esta figura poderia ser interpretada do seguinte modo: as condições iniciais são as mesmas e uma destas curvas é obtida em um computador com uma dada precisão e a outra em outro computador com uma precisão maior. Neste caso, as soluções numéricas obtidas perdem completamente a validade, pois o sistema é determinístico. Além disto, sugere que o comportamento caótico observado quando as duas condições iniciais são ligeiramente distintas é devido ao erro numérico. Estas observações são de extrema complexidade e a resposta a este problema não é trivial.

Em 1975, R. Bowen, que foi aluno de doutorado de S. Smale - outro expoente na matemática do caos - demonstrou um resultado de grande importância neste contexto. O resultado de Bowen é conhecido atualmente como *lema do sombreamento*. Neste lema, garante-se que existem soluções do sistema que se encontram próximas às soluções com algum ruído, desde que o sistema apresente estrutura hiperbólica [8]. Desta maneira, há um indício para afirmar que as soluções obtidas são válidas a menos de uma distância consideravelmente pequena. O ruído citado pode ser proveniente da ação do truncamento e arredondamento dos computadores empregados para o cálculo.

Diz-se que um sistema apresenta estrutura hiperbólica quando todos os pontos da trajetória apresentam uma direção estável e outra instável bem definidas. O problema é que a maioria dos sistemas matemáticos que modelam as situações físicas de interesse não apresentam estrutura hiperbólica [9, 10]. Esta quebra da estrutura hiperbólica pode ocorrer em sistemas que apresentam a chamada *variabilidade da dimensão instável* ou por meio de *tangências* entre as variedades, que são curvas que localmente se assemelham ao espaço euclidiano \mathbb{R}^d , para algum $d \in \mathbb{N}$.

As variedades são localmente expandidas pelos autovetores da matriz jacobiana calculada em um ponto de algum período pertencente ao espaço de fases do sistema. Dizer que o sistema não é hiperbólico por tangências equivale a dizer que o ângulo entre os autovetores tende a zero.

Os primórdios do estudo do caos como fenômeno possível em sistemas dinâmicos ganhou destaque quando E. Lorenz, um matemático e meteorologista americano, observou sensibilidade às condições iniciais em um sistema aparentemente simples. O modelo de Lorenz para a previsão do tempo continha doze equações diferenciais. Uma simplificação, contendo três equações diferenciais não-lineares de primeira ordem, consiste do sistema:

$$\mathbf{F} : \begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} = -XZ + \rho X - Y \\ \dot{Z} = XY - bZ, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $\dot{R} \equiv \frac{dR}{dt}$ e σ , ρ e b são constantes adimensionais [2, 4, 11].

Ainda com o intuito de estudar tais sistemas, é possível verificar a simplicidade do estudo de mapas em contrapartida ao estudo de sistemas a tempo contínuo em razão da dimensionalidade. A discretização das variáveis do sistema reduz uma dimensão do sistema, simplificando em muitas situações o estudo do mesmo, pois as propriedades dinâmicas do sistema permanecem válidas. A ferramenta que permite a discretização de um sistema a tempo contínuo foi idealizada por Poincaré e é conhecida como *secção de Poincaré*.

Existem várias abordagens para um sistema físico. As leis de Newton podem ser aplicadas para obter as equações que regem um determinado movimento. Para tanto, basta conhecer as forças atuantes no sistema. O problema é que as forças são grandezas vetoriais e muitas vezes torna-se impossível conhecer como as forças atuam durante todo o tempo analisado. As abordagens equivalentes consistem da mecânica lagrangiana e hamiltoniana. Nestas duas abordagens a quantidade de interesse é expressa de maneira dependente da energia associada à situação em estudo. Analogamente à mecânica newtoniana, obtêm-se as equações de movimento. Neste sentido, surge uma classe de problemas de grande importância, com uma riqueza de fenômenos físicos. Esta classe bastante especial é constituída pelos sistemas hamiltonianos. Assim, o estudo de espaços matemáticos como o *espaço de fases* e as bases inclusive para a mecânica estatística e mecânica quântica provém da mecânica hamiltoniana [3, 6, 12]. O espaço de fases, ou espaço de estados, consiste do espaço matemático formado pelas variáveis de estado do sistema. Desta maneira, especificar um estado do sistema equivale a localizar um ponto neste espaço. Uma das principais características de sistemas hamiltonianos é a conservação do volume no espaço de fases, resultado conhecido como teorema de Liouville [3, 13, 14].

Os sistemas hamiltonianos podem também apresentar comportamento caótico. Em tais sistemas, a estrutura do espaço de fases é particularmente complexa, pois tratam-se de regiões disjuntas: há regiões de regularidade e regiões caóticas. Por regiões caóticas, entendem-se regiões onde uma órbita não tem comportamento assintótico de uma órbita periódica e tampouco de um ponto fixo. Foi no contexto do estudo de sistemas hamiltonianos que, no século XX, A. N. Kolmogorov, V. I. Arnold e J. Moser provaram um teorema, que ficou conhecido como teorema KAM. Este teorema fornece as bases para mostrar que em um sistema com três ou mais corpos o movimento pode ser regular ou caótico. Em essência, o teorema garante a existência de certas curvas invariantes para perturbações pequenas em hamiltonianas ditas integráveis.

Um sistema a tempo discreto tipicamente investigado para a compreensão da transição regularidade-caos consiste no mapa padrão [7]. Este mapa pode ser proveniente de várias situações físicas como, por exemplo, plasmas confinados em tokamaks e pêndulo forçado sem atrito [1]. Por estes motivos, torna-se fundamental a compreensão deste sistema e como se dá esta transição. Como este sistema também apresenta comportamento caótico, então é natural questionar sobre a validade das soluções numéricas obtidas, especialmente se o sistema apresenta alguma motivação física. O problema é que estes sistemas usualmente não apresentam estrutura hiperbólica. Em princípio não há garantia, portanto, da validade das soluções obtidas nesta classe de sistemas. Conforme comentado acima, o lema do sombreamento de Bowen é inteiramente válido para sistemas hiperbólicos.

O termo sombreamento foi introduzido posteriormente na literatura especializada. Um dos principais trabalhos neste sentido é o de C. Grebogi, J. A. Yorke, e T. Sauer [9]. Bowen empregou algo como “traçar” a órbita com ruído por meio da órbita real. Em 1990, C. Grebogi e colaboradores mostraram rigorosamente a existência de uma órbita real que sombreia a órbita ruidosa em sistemas não-hiperbólicos por um tempo suficientemente longo, em pontos onde a órbita permanece hiperbólica, garantindo assim que as soluções possam ser consideradas a menos de uma distância cuja ordem de grandeza é muito menor do que a das variáveis envolvidas.

Para verificar as regiões onde ocorrem tangências, é necessário o conhecimento das variedades de cada ponto no espaço de fases do mapa. Contudo, cada intersecção entre as variedades corresponde a um ponto de algum período do mapa, o que torna essencial o conhecimento da estrutura de pontos periódicos no espaço de fases. Como estes pontos de interesse são instáveis e formam um conjunto de Cantor no espaço de fases, então a probabilidade de ocorrência destes pontos pela geração de condições iniciais aleatórias é nula. Mais ainda: em sistemas caóticos o número de pontos deste tipo cresce rapidamente com o período. Portanto, é necessário o emprego de algum método numérico capaz de detectar estes pontos.

O objetivo principal deste trabalho consiste na compreensão dos métodos de contenção e refinamento para provar sombreamento em sistemas não-hiperbólicos, um problema bastante complexo. Além disto, deseja-se caracterizar a estrutura do espaço de fases do mapa padrão por meio das órbitas periódicas instáveis e, à partir destes pontos, obter representações para as variedades identificando possíveis regiões onde ocorre quebra da estrutura hiperbólica e, como consequência, perda da validade das soluções numéricas obtidas. Para isto o trabalho está esquematizado como segue, ressaltando que neste trabalho

os resultados encontram-se diluídos no próprio texto e não há um capítulo específico para os resultados.

No capítulo 2 são fornecidas as bases dos sistemas hamiltonianos e um dos paradigmas de caos nestes sistemas é apresentado e estudado: o mapa padrão, proveniente do mapa de Poincaré do rotor pulsado, um dos sistemas físicos que podem dar origem a este mapeamento. A razão disto, conforme tornar-se-á clara, é o fato do espaço de fases do sistema não apresentar estrutura hiperbólica para $K > 0$, sendo K o parâmetro de controle do mapa.

O capítulo 3 contém as bases para o estudo do caos. Em particular, são discutidos os sistemas de baixa dimensionalidade tais que $0 < N \leq 3$, onde N é a dimensão do sistema. Para o mapa padrão são obtidas as distribuições dos expoentes de Lyapunov a tempo finito para valores característicos do parâmetro de controle, inclusive em uma faixa de valores onde ocorre aprisionamento das trajetórias em algumas regiões do espaço de fases. Também são obtidas as órbitas para alguns períodos onde o método de Schmelcher-Diakonos [15,16] foi testado para este tipo de sistema. A representação para as variedades também foi possível após uma estimativa da vizinhança linear de um ponto fixo do mapa estudado.

No capítulo 4 são apresentados os resultados do sombreamento tanto para sistemas hiperbólicos quanto para sistemas não-hiperbólicos por meio da contenção e do refinamento. Um estudo aprofundado é feito e são apresentados os cálculos para a prova rigorosa da existência de sombreamento mesmo em sistemas que não apresentam estrutura hiperbólica. Busca-se tornar compreensível como a contenção permite afirmar sobre a existência de trajetórias reais que permanecem próximas de trajetórias ruidosas e, de que maneira por meio do refinamento, sua implementação computacional pode ser efetuada. Apresenta-se, à partir do artigo base do trabalho [9], o resultado da implementação do método proposto naquele artigo para o mapa padrão.

2 *O Mapa Padrão*

2.1 Os Sistemas Hamiltonianos

Neste capítulo serão discutidos os sistemas ditos hamiltonianos que representam uma classe de sistemas físicos de indiscutível importância. Conforme será apresentado, o espaço de fases destes sistemas apresentam propriedades importantes como a preservação do volume de pontos representativos, que constitui o teorema de Liouville. Além disto, é possível observar ocorrência de caos no espaço de fases de alguns destes sistemas. O interesse é estudar o mapa padrão, que consiste de um sistema dinâmico a tempo discreto que pode ser obtido de várias situações físicas distintas.

2.1.1 A Formulação Hamiltoniana

Os sistemas hamiltonianos são caracterizados por uma variedade de dimensão par (o espaço de fase), uma estrutura simplética sobre esta variedade, a qual será definida posteriormente, e uma função sobre esta variedade, denominada *hamiltoniana* [17]. Esta função fornece toda a informação do sistema estudado. Em particular, as equações de movimento são obtidas por meio das equações *canônicas*, ou equações de Hamilton. Logo, um ponto no espaço de fases¹ (\mathbf{p}, \mathbf{q}) representa o estado do sistema, com \mathbf{q} e \mathbf{p} representando as coordenadas de posição e momentum generalizados, respectivamente. Neste trabalho, emprega-se a notação \mathbf{q}_i para denotar a coordenada generalizada de posição referente ao i -ésimo grau de liberdade. Da mesma forma, \mathbf{p}_i representará o momentum generalizado. As equações de Hamilton se escrevem:

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i, t)}{\partial \mathbf{q}_i}, \quad (2.1)$$

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i, t)}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad (2.2)$$

¹Espaço matemático formado pelas variáveis de estado do sistema.

onde \mathcal{H} denota a função hamiltoniana.

Para um sistema *autônomo*, *i.e.*, onde \mathcal{H} não apresenta dependência temporal explícita:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{dt} &= \frac{d\mathbf{q}}{dt} \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{p}} \\ &= -\frac{d\mathbf{q}}{dt} \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{d\mathbf{q}}{dt} \\ \frac{d\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{dt} &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Na maioria das situações físicas de interesse, a hamiltoniana é igual a energia total do sistema. No entanto, é necessário ressaltar que nem sempre isto ocorre. Em geral, quando a hamiltoniana pode ser escrita na forma $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{p}^2/2m) + V(\mathbf{q})$, seu valor é igual ao da energia total. Para estes casos a expressão (2.3) equivale ao Princípio da Conservação da Energia. Assim, diz-se que a hamiltoniana é uma *constante de movimento*. No entanto, para sistemas não-autônomos, tem-se um termo adicional $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$. Conforme a demonstração posterior, outra característica importante de sistemas hamiltonianos é o fato de preservar o volume² no espaço de fases.

Uma vez escrita a hamiltoniana, as equações de movimento são obtidas por derivação. Isto conduz ao importante teorema da existência e unicidade das soluções de um sistema, seja ele linear ou não-linear [18, 19]. Em resumo, dado um problema de valor inicial, se a solução existe então é única. A implicação disto é imediata: a especificação em um tempo inicial t_0 de um estado do sistema determina uma única solução $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ para as equações de movimento. Isto significa que cada ponto no espaço de fase correspondendo a uma condição inicial $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ pertence a uma única trajetória do sistema de tal modo que duas trajetórias distintas não se cruzam. Este resultado é intuitivamente óbvio, caracterizando o fato do sistema ser determinístico [3, 20].

Uma maneira particularmente útil de resolver os sistemas hamiltonianos é buscar por constantes de movimento. Conforme será apresentado mais adiante, o fato da hamiltoniana ser uma constante de movimento implica restrição nas curvas obtidas para o par (\mathbf{p}, \mathbf{q}) .

A função hamiltoniana é proveniente do Princípio da Mínima Ação (ou o Princípio de Hamilton). Durante muito tempo, vários princípios análogos foram sugeridos com o

²Um volume de condições iniciais é dado em um sistema tridimensional. Para um sistema unidimensional, tem-se um comprimento de condições iniciais. Para um sistema bidimensional, tem-se uma área e para um sistema N-dimensional ($N > 3$), tem-se um hipervolume.

objetivo de explicar alguns fenômenos com base na minimização de alguma quantidade importante [6]. Em princípio sugeriu-se que a luz percorre o menor caminho de todos. Em contrapartida, foi sugerido que a luz percorre o caminho que oferece menor tempo possível. Dentre todos estes princípios de minimização, existe uma quantidade que é extremizada.

O problema de identificar qual é a trajetória de uma partícula com algumas restrições não é simples e requer o uso de uma ferramenta matemática diferente. Extremizar uma quantidade como a *ação*, a qual será definida adiante, em função de uma outra quantidade chamada lagrangiana não é simples e não se parece com encontrar extremos de uma função, a respeito do que se faz no cálculo diferencial. Esta outra ferramenta consiste do cálculo variacional e a lagrangiana, assim como a ação, são funcionais, que são os elementos tratados no cálculo variacional [6]. Uma formulação equivalente para o princípio da mínima ação é: de todos os caminhos possíveis, a evolução do sistema se dá por meio daquela trajetória que extremiza a *ação*. Em geral, este extremo corresponde a um mínimo.

Do cálculo variacional, é possível mostrar que:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

e corresponde à equação de Euler-Lagrange. Ou seja, a função que satisfaz a equação (2.4) é a que extremiza a integral de ação. A função $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \equiv T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) - V(\mathbf{q}, t)$ corresponde à função lagrangeana do sistema e a integral $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$ corresponde à ação. Esta expressão é obtida do cálculo variacional, conforme comentado anteriormente, que corresponde ao “cálculo diferencial” para funcionais.

Princípios como o da mínima ação não são ideias recentes [21]. Os gregos buscavam maneiras de quantificar algumas propriedades observadas que conduziam à resultados análogos ao do princípio da mínima ação como se conhece atualmente. Heron de Alexandria obteve resultados para a lei da reflexão, da Óptica. Pierre de Fermat propôs que ao invés de a luz obedecer a um princípio de distância mínima, obedece um princípio de tempo mínimo [1, 6, 22].

Com efeito, pode-se demonstrar que o tempo $t_{A \rightarrow B}$ gasto pela luz para ir de um ponto A até um ponto B em meios com índices de refração diferentes é dado por:

$$t_{A \rightarrow B} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2},$$

em que v_j ($j = 1, 2$) é a velocidade da luz no meio j , a (b) é a distância entre o ponto A (B) e a interface entre os meios e x é uma distância horizontal na interface. Assumindo então que o tempo é mínimo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dt_{A \rightarrow B}}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\text{sen } \theta_1}{v_1} &= \frac{\text{sen } \theta_2}{v_2}, \end{aligned}$$

e corresponde à Lei de Snell, onde θ_j ($j = 1, 2$) correspondem aos ângulos de incidência e refração, respectivamente.

Em alguns casos (*e.g.* pêndulo simples, sistema massa-mola dentre outros) a hamiltoniana pode ser escrita diretamente. Caso isso não seja possível, é necessário obtê-la por meio da expressão

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i, t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (2.5)$$

que na verdade corresponde à transformada de Legendre da lagrangeana.

2.1.2 Integrabilidade e as Transformações Canônicas

Costuma-se afirmar que um sistema é integrável se for possível encontrar expressões fechadas para as soluções das equações que regem o movimento do sistema. No entanto, não é adequado assumir esta definição, uma vez que alguns sistemas integráveis possam nem mesmo apresentar soluções analíticas.

Com efeito, não há uma definição única para integrabilidade. Uma definição correta da integrabilidade está ligada à possibilidade de conhecer o sistema de maneira assintótica. No sentido de Liouville, um sistema integrável com N graus de liberdade possui N *constantas de movimento* independentes. As constantes de movimento correspondem às funções de \mathbf{p} e \mathbf{q} que não variam com o passar do tempo, embora o sistema esteja evoluindo. Nesta seção, f_i ($i = 1, 2, \dots, N$) são as N constantes de movimento. Para sistemas autônomos a própria hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ é uma constante de movimento.

Dado um sistema com N constantes de movimento, as f_i são independentes se nenhuma delas puder ser expressa em função das outras $(N - 1)$ constantes. Tomando uma função $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ independente do tempo tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \frac{d\mathbf{q}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \\
&= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \\
\therefore \frac{df}{dt} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

A expressão

$$[f, \mathcal{H}] \equiv \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \tag{2.7}$$

é chamada de *parênteses de Poisson*³. Assim, a condição necessária e suficiente para que uma dada função seja constante de movimento é que

$$[f, \mathcal{H}] = 0. \tag{2.8}$$

Dizer que um sistema integrável possui N constantes de movimento implica a restrição da trajetória em uma superfície N -dimensional determinada por

$$f_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = k_i, \tag{2.9}$$

em que $i = 1, 2, \dots, M$ e k_i são constantes.

Considerando um sistema integrável, é possível introduzir uma mudança de variável $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})$ de modo que a hamiltoniana escrita em termos das novas coordenadas dependa apenas do momentum e não na posição [3, 12, 23]. O objetivo é encontrar formas convenientes de reescrever a hamiltoniana de maneira a resolver o sistema. Uma maneira possível de efetuar esta transformação é escolhendo as constantes de movimento como N componentes do novo momentum $\bar{\mathbf{p}}_i = f_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Outra escolha particularmente conveniente é a das variáveis *ângulo-ação* (I, ϕ) , onde

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}. \tag{2.10}$$

Uma transformação de coordenadas que não altera a forma das equações de evolução (as equações de Hamilton apresentadas na seção 2.1.1) é chamada de *transformação canônica*.

A integral (2.10) é conhecida como *integral de Poincaré-Cartan*. As curvas γ são

³Também chamado de colchetes de Poisson, do termo em inglês “Poisson brackets”.

curvas sobre o *toro*, elemento que será discutido mais adiante. As quantidades dadas por

$$\omega_j(I) = \frac{\partial \mathcal{H}(I)}{\partial I_j} \quad (2.11)$$

são as frequências associadas às curvas γ . Em um sistema com dois graus de liberdade, por exemplo, existem duas frequências associadas: ω_1 e ω_2 que, conforme será explicitado adiante, caracterizam de maneira fundamental o sistema e estão relacionadas à noção (ainda intuitiva) de periodicidade.

Define-se o *número de rotação* como sendo a razão $R \equiv \omega_1/\omega_2$. Se esta razão corresponder a um número racional então tem-se uma curva fechada no espaço de fases, ao passo que para R irracional, as curvas constituem curvas que não se fecham. De maneira análoga, para uma combinação de movimentos harmônicos, são conhecidas as *curvas de Lissajous*, onde denominam-se curvas de frequências incomensuráveis àquelas para as quais as trajetórias não se fecham.

Considere uma transformação de coordenadas $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})$. Se esta transformação for canônica, então as equações de evolução do sistema são dadas por

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = -\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, t)}{\partial \bar{\mathbf{q}}}, \quad (2.12)$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{q}}}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, t)}{\partial \bar{\mathbf{p}}}, \quad (2.13)$$

onde $\bar{\mathcal{H}}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, t)$ é a nova hamiltoniana para o sistema. Uma maneira de especificar uma transformação canônica é por meio da função geradora $\mathcal{S}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q}, t)$. Deste modo a mudança de variável é especificada por:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{S}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}}, \quad (2.14)$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{S}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{p}}. \quad (2.15)$$

A nova hamiltoniana é então obtida:

$$\bar{\mathcal{H}}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{H}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i, t) + \frac{\partial \mathcal{S}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q}, t)}{\partial t}. \quad (2.16)$$

Anteriormente comentou-se a respeito das curvas γ sobre o toro. Para compreender

este elemento topológico, deve-se recorrer à definição de produto cartesiano. Na prática, dados dois elementos pertencentes à dois conjuntos (distintos ou não) $a \in A$ e $b \in B$, então o produto cartesiano entre A e B é definido de tal modo que:

$$A \otimes B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Um toro é definido em termos do produto cartesiano de dois círculos. Para entender a definição de um círculo, é necessário definir o conjunto S por meio do qual é possível especificar um círculo, uma esfera ou uma hipersfera. Se a hipersfera de raio unitário for centrada na origem, então o conjunto S fica definido por:

$$S^N = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}. \quad (2.17)$$

Por exemplo, se $A = S^1$ e $B = [0, 1]$, então o produto $A \otimes B$ corresponde ao par sobre um cilindro de altura igual a unidade. Analogamente, se $A = S^1$ e $B = S^1$, então $A \otimes B$ forma o toro, denotado usualmente por \mathbb{T}^2 . Portanto, um círculo - por exemplo - é especificado em um espaço bidimensional \mathbb{R}^2 , pois $N = 1$.

Com o intuito de elucidar este ponto, seja E um espaço vetorial euclidiano. Este espaço consiste de um conjunto cujos elementos são chamados de *vetores*, no qual estão definidas duas operações básicas: a adição e a multiplicação por um número real (valem os chamados axiomas de espaço vetorial).

$$E^m = \bigotimes_i E_i,$$

em que $E_i = E$ ($i = 1, 2, \dots, m$), corresponde ao espaço vetorial m -dimensional, onde os pontos correspondem às m -uplas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Assim, associa-se $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ como sendo a soma $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m)$ e, sendo μ um número real, então o produto pelo escalar resulta: $\mu \mathbf{x} = (\mu x_1, \mu x_2, \dots, \mu x_n)$. Este espaço é dotado de uma métrica, definida por

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} \quad (2.18)$$

e denotada por $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, como sendo a medida da distância entre \mathbf{x} e \mathbf{y} e dita norma euclidiana.

Para uma discussão elementar a respeito de espaços topológicos onde a dinâmica é construída *vide* [11]. Por ora, cabe comentar que as definições dadas acima correspondem a efetuar as seguintes operações: tomar um segmento de reta e então unir suas extremidades. Assim, as soluções são construídas sobre o círculo. O campo vetorial sobre o círculo é do tipo:

$$\dot{\theta} = F(\theta), \quad (2.19)$$

onde F é uma função definida em um dado espaço \mathbb{A} e θ uma variável que pode corresponder ao ângulo. De maneira semelhante, é possível construir um cilindro: basta unir duas das extremidades opostas de um plano finito. O interesse é em sistemas cuja dinâmica é construída sobre o toro: a união das extremidades de um cilindro.

O toro corresponde essencialmente ao espaço de fases natural para sistemas do tipo

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= F_1(\theta_1, \theta_2), \\ \dot{\theta}_2 &= F_2(\theta_1, \theta_2), \end{aligned}$$

com as F_i ($i = 1, 2$) sendo funções periódicas, fato que será apresentado em um momento conveniente.

As equações paramétricas do toro são dadas por

$$x(u, v) = (R + r \cos v) \cos u, \quad (2.20)$$

$$y(u, v) = (R + r \cos v) \sin u, \quad (2.21)$$

$$z(u, v) = r \sin v, \quad (2.22)$$

em que $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 2\pi)$, R é a distância do centro do tubo ao centro do toro e r é o raio do tubo.

A figura 2.1 representa um toro \mathbb{T}^2 . Na figura, ilustra-se um sistema com dois graus de liberdade, fornecendo duas curvas sobre o toro com frequências ω_1 e ω_2 , respectivamente.

2.1.3 As Secções de Poincaré

A representação das trajetórias de um dado sistema dinâmico em um espaço torna-se complicada no caso do toro. Esta representação pode ser simplificada se for tomado um plano com condições de contorno periódicas em ambas as variáveis [11], o que equivale ao

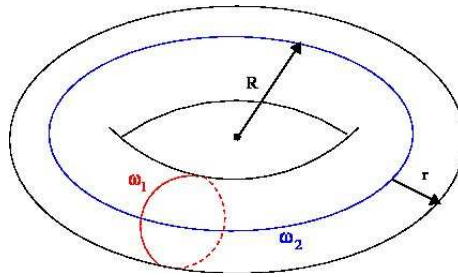


Figura 2.1: Representação pictórica do toro \mathbb{T}^2 . É ilustrado nesta figura um sistema com dois graus de liberdade. Também são mostrados os raios R e r .

toro. Esta ideia de tomar um plano é proveniente das secções de Poincaré. Basicamente, dado um espaço N -dimensional, é possível seccionar o espaço de maneira a observar as intersecções da trajetória no espaço de fases N -dimensional agora no espaço $(N - 1)$ -dimensional. Como consequência, naturalmente um ponto no espaço $(N - 1)$ -dimensional é proveniente de uma órbita periódica no espaço N -dimensional, embora ainda não tenha sido definida tal órbita, o que será feito formalmente no capítulo 3.

As condições de contorno periódicas supracitadas correspondem à operação de módulo, definida da seguinte maneira

$$y \pmod{k} \equiv y + w \cdot k \quad (2.23)$$

onde w é o único inteiro que faz com que y esteja no intervalo $[0, k)$. Isto equivale a representar o número extraíndo a parte inteira. Como ilustração, considere um número x_0 representado em uma base b qualquer $x_0 = \sum_i b^{-i} a_i$, onde a_0 corresponde à parte inteira. Neste caso, $x \pmod{1}$ deve retornar $\sum_{i+1} b^{-i} a_i$, o que corresponde a um deslocamento na representação de um número.

A figura 2.2 ilustra a aplicação do módulo 1 no mapa de Bernoulli [2–4], definido pela aplicação $x \mapsto f(x)$ tal que $f(x) = \beta x$, de maneira que o mapa fica definido por

$$x_{n+1} = \beta x_n \pmod{1}. \quad (2.24)$$

A ação do módulo é evidente: enquanto a função tende a infinito, o mapa permanece restrito ao intervalo $[0, 1)$.

Dado um fluxo N -dimensional, é possível obter um sistema dinâmico a tempo discreto por meio da construção conveniente de uma superfície pertencente ao espaço de dimensão N . A técnica consiste em obter os pontos que interceptam a superfície.

A figura 2.3 representa esquematicamente a intersecção de duas trajetórias em um espaço tridimensional com uma superfície adequadamente escolhida. O conjunto de tais

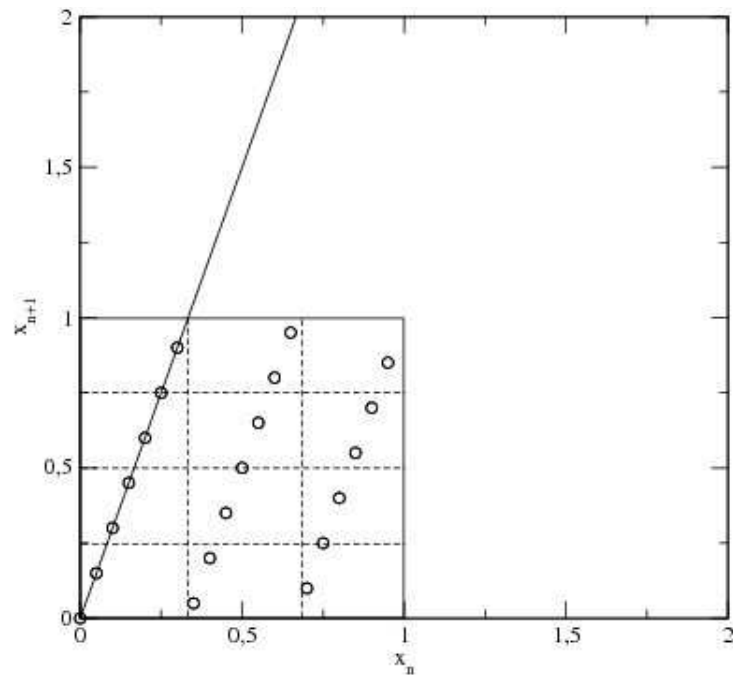


Figura 2.2: Gráfico da primeira iterada para o mapa (2.24). A reta representa a função real $f(x) = \beta x$ e os pontos representam o mapa, onde $\beta = 3$.

pontos obtidos desta maneira constituem a órbita do mapa definido neste subespaço. Esta figura ilustra ainda o fato de que uma trajetória periódica do fluxo origina uma órbita periódica para o mapa, dada por r^* especificamente nessa figura.

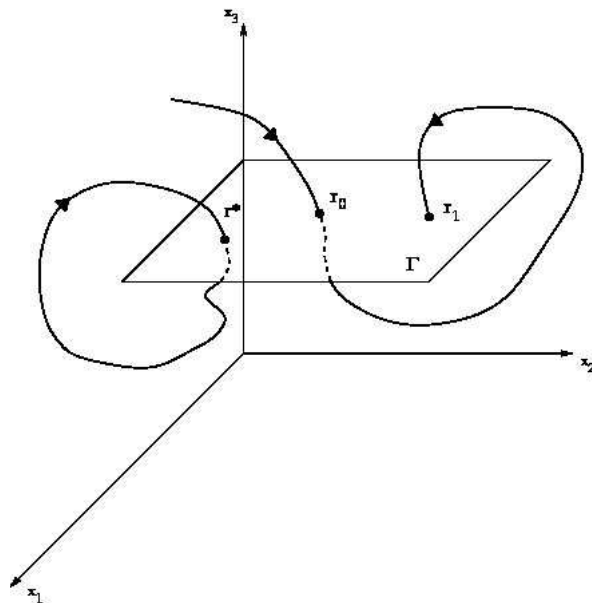


Figura 2.3: Representação da intersecção das soluções de um sistema tridimensional com uma superfície arbitrária.

2.2 Geometria dos Sistemas Hamiltonianos

2.2.1 A Estrutura Simplética

Os sistemas hamiltonianos são uma classe restrita de sistemas físicos [6, 12, 17]. Isto pode ser evidenciado pelas equações de evolução reescritas como seguem:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}, t), \quad (2.25)$$

onde $\tilde{\mathbf{r}} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Deste modo:

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}) = S_N \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}}, \quad (2.26)$$

e

$$S_N = \begin{pmatrix} O_N & -I_N \\ I_N & O_N \end{pmatrix},$$

além disto

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}} = \begin{pmatrix} \partial \mathcal{H} / \partial p \\ \partial \mathcal{H} / \partial q \end{pmatrix}.$$

Nas equações acima, O_N corresponde à matriz nula (quadrada) de tamanho N e I_N à matriz (quadrada) identidade de ordem N . Portanto, S_N é uma matriz por blocos e seu determinante vale sempre 1, independentemente do ponto em que é calculado. Todo sistema que pode ser colocado na forma (2.25) é dito simplético [3]. A geometria para trabalhar com sistemas hamiltonianos é dita geometria simplética, que corresponde ao cálculo em variedades simpléticas. Como assinala Arnold [17] “a formulação hamiltoniana é a geometria no espaço de fases”.

As equações obtidas de uma transformação canônica preservam também a estrutura simplética, de maneira que, como consequência, o volume de condições iniciais no espaço de fases é preservado. Estes resultados podem ser demonstrados com base na seguinte definição de uma transformação simplética [14].

Definição 1 *Seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ um difeomorfismo de classe C^r , com $r \geq 1$. Então \mathbf{F} é dita uma transformação canônica ou simplética se*

$$\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Omega(D\mathbf{F}(\mathbf{r})\mathbf{u}, D\mathbf{F}(\mathbf{r})\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}. \quad (2.27)$$

Na definição acima $\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{u} \cdot S_N \mathbf{v}$, com $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}$ define uma estrutura simplética [17]. Como consequência,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot S_N \mathbf{v} &= (D\mathbf{F})\mathbf{u} \cdot S_N(D\mathbf{F})\mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \cdot (D\mathbf{F})^T S_N(D\mathbf{F})\mathbf{v}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Esta expressão deve valer para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}$, de maneira que

$$(D\mathbf{F})^T S_N D\mathbf{F} = S_N.\tag{2.29}$$

O determinante de um produto de matrizes é o produto dos determinantes de cada uma das matrizes envolvidas no produto, o que conduz à:

$$\det(D\mathbf{F}) = 1,\tag{2.30}$$

q.e.d.

Este resultado é proveniente do fato de que $\det(S_N) = 1$ e $\det(D\mathbf{F}) = \det(D\mathbf{F})^T$.

2.2.2 A Estabilidade dos Pontos Fixos em Fluxos e Mapas

Na discussão acima, N corresponde ao número de graus de liberdade do sistema. Como ilustração, considere um sistema com $N = 1$ grau de liberdade. Neste caso as expressões canônicas (2.1) e (2.2) são recuperadas por meio da expressão (2.25).

Um sistema de equações diferenciais representando a evolução das variáveis de estado com o tempo (um escalar com variação contínua dentro de um intervalo pré-determinado) é chamado de fluxo. O estudo de um dado sistema envolve encontrar seus pontos fixos⁴ que são pontos para os quais as variáveis de estado se tornam estacionárias. Para isto, basta que o fluxo se anule em tal ponto, ou seja, se \mathbf{F} denotar um sistema, então

$$\mathbf{F} : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y), \end{cases}\tag{2.31}$$

e os pontos fixos correspondem ao conjunto formado pelo par (x^*, y^*) tal que $f(x^*, y^*) = 0$ e $g(x^*, y^*) = 0$.

Na linguagem introduzida nesta seção, um mapa é um sistema dinâmico a tempo discreto, em contrapartida à variável t que flui continuamente no sistema (2.31). Assim,

⁴Em fluxos denominam-se corretamente de pontos estáveis. Usualmente são ditos estados estáveis.

um mapa é definido por meio de alguma aplicação matemática que leva as variáveis de estado de um espaço a outro espaço. Dependendo do sistema, um mapa é usualmente expresso em termos de uma função real:

$$\mathcal{M} : \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n), \end{cases} \quad (2.32)$$

que pode ser obtido da discretização de um sistema contínuo. Neste caso os pontos fixos são aqueles para os quais a iterada n é igual a iterada $n+1$. Portanto, o par (x_n^*, y_n^*) é um ponto fixo do mapa se $f(x_n^*, y_n^*) = (x_n^*, y_n^*)$ e $g(x_n^*, y_n^*) = (x_n^*, y_n^*)$.

Definição 2 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e x_0 um ponto pertencente ao domínio desta função. A primeira iterada deste ponto é dada por $f(x_0)$ e, de maneira geral, a n -ésima iterada é determinada por: $f^{[n]}(x_0) = f(f(\dots f(x_0)\dots))$.*

Diz-se, desta forma, que a n -ésima iterada de uma função, e mais geralmente de um mapa, é determinada pela composição desta aplicação com ela mesma n vezes.

Definição 3 *Seja $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{r}_n)$ um mapa definido pela aplicação $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{r})$. Um ponto fixo \mathbf{r}^* , ou ponto de período 1, é um ponto para o qual $\mathbf{f}(\mathbf{r}^*) = \mathbf{r}^*$.*

Ao encontrar os pontos fixos, o interesse para o estudo dos sistemas dinâmicos é na estabilidade destes pontos. Para avaliar a estabilidade dos pontos, estudam-se o comportamento das soluções em torno do ponto fixo. Seja um sistema definido por

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (2.33)$$

onde \mathbf{r}^* é um estado estável do sistema. A estabilidade em sistemas dinâmicos é um conceito local. Com a finalidade de estudar a estabilidade local de \mathbf{r}^* , uma perturbação $\boldsymbol{\eta}$ é inserida, em geral dependente do tempo:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}^* + \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}^*) + D\mathbf{F}(\mathbf{r}^*) \cdot \boldsymbol{\eta} + \mathcal{O}(\boldsymbol{\eta}^2) \quad (2.34)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}^* + \boldsymbol{\eta}) \approx D\mathbf{F}(\mathbf{r}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}, \quad (2.35)$$

onde $\mathbf{F}(\mathbf{r}^*) = \mathbf{0}$ e $D\mathbf{F}(\mathbf{r})$ denota a matriz jacobiana calculada no ponto \mathbf{r} e definida por

$$D\mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \left[\frac{\partial F_i(\mathbf{r})}{\partial r_j} \right], \quad (2.36)$$

com os colchetes indicando o fato de serem elementos matriciais. Em um sistema N -dimensional, a matriz jacobiana será (quadrada) de ordem N . Ao longo do trabalho, $D\mathcal{M}(\mathbf{r})$ denotará a matriz jacobiana associada a um mapa, calculada no ponto \mathbf{r} .

Considerando o problema da estabilidade, a equação (2.35) corresponde à linearização do sistema em torno do ponto de equilíbrio, o que é equivalente ao sistema $d\mathbf{r}/dt = D\mathbf{F}\mathbf{r}$ com soluções

$$\mathbf{r}(t) = \sum_i c_i e^{(h_i t)} \mathbf{v}_i, \quad (2.37)$$

no caso geral, isto é, a solução geral corresponde a uma combinação linear da solução em cada direção, onde c_i são constantes complexas e \mathbf{v}_i são os autovetores associados ao logaritmo dos autovalores $h_i = \ln \lambda_i$ ($i = 1, 2, \dots$). Assim, o problema da estabilidade pode ser expresso como um problema de autovalores e autovetores do tipo $D\mathbf{F}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$, onde λ_i são os autovalores. Logo, a estabilidade fica inteiramente determinada pelos autovalores da matriz jacobiana.

Pode-se dizer que a análise linear fornece informações sobre as variedades⁵. Particularmente, os autovetores expandem as variedades localmente, de onde é evidente que pode existir uma direção associada à estabilidade e outra à instabilidade.

Para mapas, autovalores com módulo menor do que a unidade correspondem à estabilidade, ao passo que autovalores com módulo maior do que a unidade correspondem à instabilidade na direção associada. Um ponto de equilíbrio que apresenta pelo menos um autovalor $|\lambda| < 1$ e pelo menos um autovalor $|\lambda| > 1$ é chamado de *sela*. Um ponto de equilíbrio com autovalores complexos corresponde a um *centro*. Para o caso de fluxos, a estabilidade é também determinada pelos autovalores da matriz jacobiana calculada no ponto. De maneira análoga, se $\lambda < 0$ o ponto fixo é estável e se $\lambda > 0$ o ponto fixo é instável na respectiva autodireção.

Os fluxos hamiltonianos só podem apresentar selas e centros no espaço de fases. Um sistema não-linear apresentará a versão não-linear dos respectivos pontos de equilíbrio. Este desenvolvimento discutido até aqui corresponde à análise da estabilidade linear de um sistema. Para demonstrar esta afirmação, a matriz jacobiana pode ser escrita em termos da função hamiltoniana. Considere, por exemplo, um sistema bidimensional:

$$D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q \partial p} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial^2 p} \\ -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q^2} & -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial q} \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

⁵Espaços matemáticos que localmente se assemelham ao espaço vetorial \mathbb{R} .

onde o traço da matriz, definido por $\text{tr}(\mathbf{DF}) \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial r_i} = 0$. O determinante da matriz é definido por $\det(\mathbf{DF}) \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial r_j} C_{ij}$, onde $C_{ij} \equiv (-1)^{i+j} M_{ij}$ é o cofator de $\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial r_j}$ e M_{ij} é o menor da matriz. O polinômio característico (matriz 2×2) é dado por

$$\det(\mathbf{DF} - \lambda I_1) = 0 \quad (2.39)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda \text{tr}(\mathbf{DF}) + \det(\mathbf{DF}) = 0, \quad (2.40)$$

de onde

$$\lambda^2 = -\det(\mathbf{DF}). \quad (2.41)$$

Os pontos onde os autovalores são reais correspondem aos pontos de sela e os pontos que apresentam autovalores complexos são centros.

Considere agora um mapa hamiltoniano, definido por meio da aplicação (2.32). A matriz jacobiana é definida, analogamente à (2.36), por

$$D.\mathcal{M} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Os autovalores são obtidos por meio do polinômio característico, cujas soluções são:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{\text{tr}(D.\mathcal{M}) \pm \sqrt{\text{tr}(D.\mathcal{M})^2 - 4 \det(D.\mathcal{M})}}{2} \\ &= \frac{\text{tr}(D.\mathcal{M})}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} [\text{tr}(D.\mathcal{M}) - 4]} \\ &= \frac{\text{tr}(D.\mathcal{M})}{2} \pm \left[\frac{\text{tr}(D.\mathcal{M})^2}{4} - 1 \right]^{1/2} \\ \lambda_{1,2} &= \frac{\text{tr}(D.\mathcal{M})}{2} \pm i \left\{ 1 - \left[\frac{\text{tr}(D.\mathcal{M})}{2} \right]^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

A parte imaginária consiste de uma função limitada de modo que a estabilidade fica inteiramente determinada pela parte real dos autovalores [3, 11]. Assim, tudo o que foi dito anteriormente acerca do uso do espectro de autovalores para avaliar a estabilidade de um ponto permanece válido.

O determinante pode ser expresso como o produto dos autovalores:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot \lambda_2 &= \left[\frac{\text{tr}(D.\mathcal{M})}{2} \right]^2 + 1 - \left[\frac{\text{tr}(D.\mathcal{M})}{2} \right]^2 \\ \therefore \det(D.\mathcal{M}) &= 1, \end{aligned} \quad (2.44)$$

para sistemas hamiltonianos. Conforme será explicitado, este resultado tem um importante significado. De maneira geral, este resultado é naturalmente proveniente de sistemas que apresentam a estrutura (2.25), o que é particularmente reconhecível da matriz S_N , pois seu determinante é igual a unidade. A matriz S_N também apresenta como característica $S_N^2 = -I_N$ e o fato de ser ortogonal $S_N^T = S_N^{-1} = -S_N$.

É possível ainda escrever a função hamiltoniana com dependência explícita à métrica. Seja, por exemplo, um sistema onde a energia total é dada somente pela energia cinética:

$$H = \frac{1}{2M} g_{ij} p^i p^j, \quad (2.45)$$

onde $g_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$. Se a curvatura associada for negativa, então o sistema apresenta órbitas instáveis. Demonstra-se que esta aproximação geométrica para descrever sistemas hamiltonianos também é válida para funções do tipo [24]:

$$H = \frac{p^2}{2M} + V(x), \quad (2.46)$$

onde M naturalmente corresponde à massa inercial. Nestas expressões é utilizada a convenção de soma de Einstein.

De maneira a ilustrar esta dependência, são apresentadas as figuras seguintes.

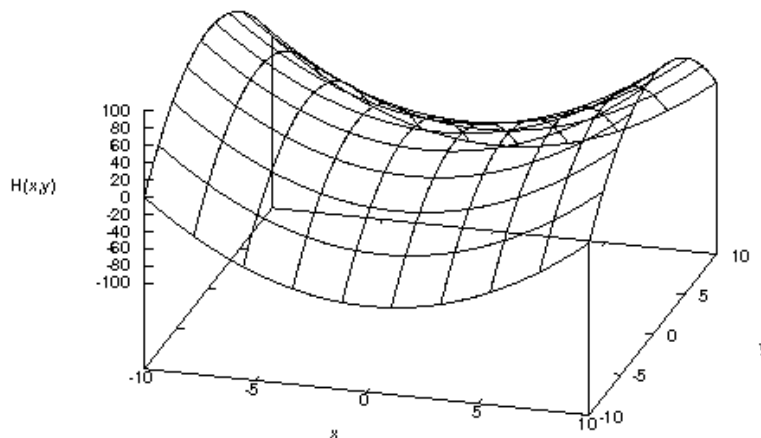


Figura 2.4: Gráfico de uma sela, representando um espaço de curvatura negativa. Neste espaço, obviamente podem existir trajetórias instáveis.

O gráfico apresentado na figura 2.4 ilustra uma sela, que representa um espaço de curvatura negativa. Uma trajetória pertencente a este espaço apresenta uma direção

estável, que tende para o ponto de sela, e outra direção instável, que faz com que a trajetória se afaste do ponto de sela.

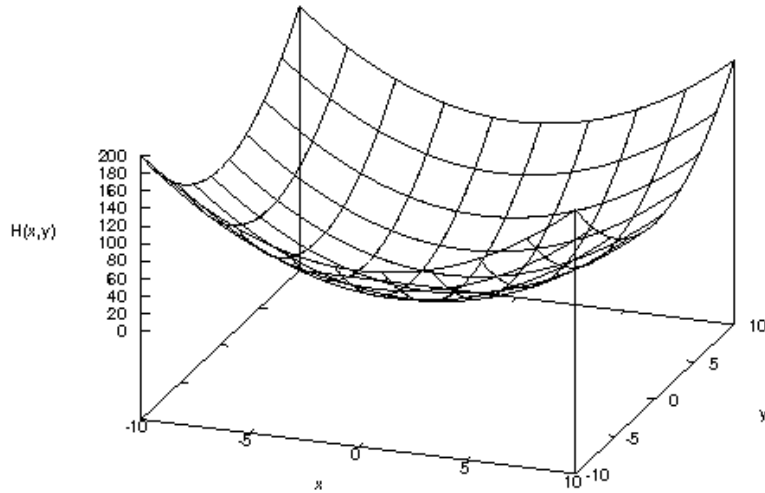


Figura 2.5: Gráfico de um espaço com curvatura positiva, como a de uma esfera. Evidentemente, todas as trajetórias convergem para um ponto “crítico”.

Na figura 2.5 é apresentado um espaço de curvatura positiva. As trajetórias pertencentes a este espaço tendem para o ponto de mínimo.

Um ponto para o qual as trajetórias são atraídas é denominado *atrator*. Sistemas hamiltonianos não possuem atratores, de maneira que o espaço de fases é constituído por regiões com movimento regular e caótico de acordo com algum parâmetro de controle. Isto significa que o estudo de sistemas hamiltonianos corresponde ao estudo do espaço de fases como um todo. Mais ainda: os sistemas hamiltonianos não apresentam “perda de informação” no sentido matemático⁶ em razão da conservação do volume no espaço de fases [3].

2.2.3 O Teorema de Liouville

Uma das propriedades mais importantes associadas aos sistemas hamiltonianos é o fato do sistema preservar o volume no espaço de fases, resultado proveniente do teorema de Liouville. Este fato pode ser demonstrado de maneira heurística sabendo ser o determinante de uma matriz 2×2 a área cujos lados são expandidos pelos vetores de coordenadas (\mathbf{p}, \mathbf{q}) . É imediato que o resultado (2.44) informa que a área não varia com a evolução do sistema.

⁶Existem maneiras de conectar a entropia à uma quantidade definida como sendo a informação.

É possível afirmar que tratar o problema do ponto de vista da estrutura simplética é a maneira geral tanto para fluxos quanto para mapas, pois a garantia de preservação do volume é uma característica estrutural destes sistemas. Além disto, uma das provas do teorema de Liouville pode ser feita considerando a estrutura simplética dos sistemas hamiltonianos [14].

Seja um fluxo gerado por um sistema do tipo (2.33). Considere D_0 como sendo um domínio “inicial” em \mathbb{R}^n e $D_t \equiv \mathbf{F}(D_0)$ a evolução de D_0 sob o fluxo. Sendo $V(t)$ o volume de D_t , então o lema seguinte serve como base para o teorema de Liouville [14].

Lema 1 *Seja $V(t)$ o volume de um domínio D_t correspondente à evolução de um domínio inicial D_0 sob o fluxo \mathbf{F} . A taxa de variação de volume é dada pela expressão:*

$$\frac{dV(t)}{dt}\Big|_t = \int_{D_t} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{r} \quad (2.47)$$

Teorema 1 *(Teorema de Liouville) Suponha $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Então, para qualquer região D_0 :*

$$V(t) = V(0), \quad (2.48)$$

onde $V(0)$ é o volume da região D_0 .

Se o divergente do fluxo for constante, a qual denota-se aqui por c , então tem-se para a taxa de variação do volume:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= c \cdot V \\ \therefore V(t) &= V(t_0)e^{ct}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

pois t_0 é arbitrário. A expressão acima corresponde à equação de evolução para o volume de uma região D_t . Para ilustrar o teorema de Liouville, considere $c = 0$, o que resulta em:

$$V(t) = V(t_0), \quad (2.50)$$

para todo t e o volume é conservado. Em essência, o teorema de Liouville afirma que a nuvem de pontos representativos (formada pelas condições iniciais) se move como um fluido incompressível onde o volume permanece constante.

2.3 O Mapa Padrão

Neste trabalho é analisado essencialmente o rotor pulsado (“kicked rotor”) [3, 7]. Este sistema é constituído de uma barra presa por uma de suas extremidades e capaz de girar livremente em um plano. Seja \mathcal{I} o momento de inércia da barra com comprimento ℓ . Na outra extremidade da barra, uma força é aplicada em tempos $t = 0, \tau, 2\tau, \dots$ de intensidade K/ℓ , conforme ilustra a figura 2.6.

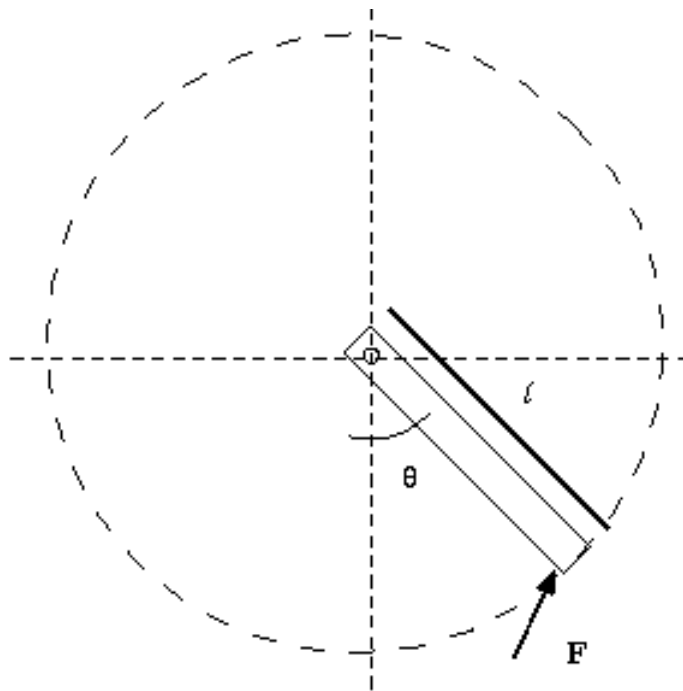


Figura 2.6: Representação esquemática do rotor pulsado.

Não há influência gravitacional. Consequentemente, a intensidade do torque aplicado é dada por:

$$\|\mathbf{N}\| = \ell\|\mathbf{F}\| \sin \theta = K \sin \theta. \quad (2.51)$$

A força é aplicada periodicamente na extremidade da barra. Assim, entre as aplicações da força, o torque será nulo, ao passo que durante as aplicações o torque será máximo. Deste modo, a equação (2.51) é reescrita empregando uma função delta:

$$\|\mathbf{N}\| = K \sin \theta \sum_n \delta(t - n\tau). \quad (2.52)$$

Para este sistema a hamiltoniana pode ser escrita diretamente em termos da posição angular (θ) e do momento angular do rotor, o qual denotaremos por L . Assim:

$$\mathcal{H}(L, \theta, t) = \frac{L^2}{2\mathcal{I}} + K \cos \theta \sum_n \delta(t - n\tau). \quad (2.53)$$

Resulta das equações (2.1) e (2.2)

$$\frac{dL}{dt} = K \sin \theta \sum_n \delta(t - n\tau), \quad (2.54)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mathcal{I}}. \quad (2.55)$$

É possível discretizar este conjunto de equações, conduzindo a relações de recorrência. Com isto, obtém-se o estado em um instante n determinado exclusivamente pelo estado no instante $(n-1)$. A derivação do mapa é feita como segue.

Entre as aplicações, $\dot{L} = 0 \Rightarrow L(t) = L(t_0) = L$ (constante) e $\theta(t) = \theta(t_0) + (L/\mathcal{I})t$, em que $\theta(t_0)$ e L/\mathcal{I} são constantes. Em cada aplicação, θ varia continuamente e L varia com $K \sin \theta_n$ de maneira que:

$$L_{n+1} - L_n = K \sin \theta_n \quad (2.56)$$

$$\theta_{n+1} - \theta_n = \frac{L_{n+1}}{\mathcal{I}}, \quad (2.57)$$

onde \mathcal{I} pode ser tomado como sendo a unidade sem restrições de generalidade⁷, o que resulta no mapa padrão [2,3,7], ou mapa de Taylor-Chirikov⁸, escrito nas variáveis ângulo-ação [9,12,23]:

$$\mathcal{M} : \begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + L_{n+1} & (\text{mod } 2\pi) \\ L_{n+1} = L_n + K \sin(\theta_n) & (\text{mod } 2\pi), \end{cases} \quad (2.58)$$

de maneira que o mapa fica restrito à região $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ do espaço de fases. A razão para isto é que a variável θ corresponde a um ângulo e é ideal restringi-lo no intervalo $[0, 2\pi]$. Além disto, a situação configurada neste caso é a de um mapa definido no toro \mathbb{T}^2 , conforme já discutido.

Existem outros sistemas físicos que são descritos em maior ou menor aproximação pelo mapa padrão. Este fato constitui uma das razões principais para o estudo deste sistema. Além disto, esta aplicação bidimensional apresenta muitas propriedades importantes de outros sistemas dinâmicos conservativos. Em particular o estudo da transição

⁷Uma vez que as equações de movimento de um sistema podem ser escritas na forma adimensional.

⁸Este mapa foi estudado de maneira ampla pelo físico russo Boris Valerianovich Chirikov. Pelo fato de ser um modelo utilizado frequentemente para o estudo de caos em sistemas hamiltonianos, convencionou-se a chamá-lo de mapa padrão.

de movimento regular para caótico é evidente com relativa simplicidade, embora não seja trivial. Alguns exemplos de sistemas físicos que também podem dar origem ao mapa padrão são: o pêndulo forçado sem atrito⁹, partículas em campos eletromagnéticos, bem como confinamento de plasmas em tokamaks.

Em algumas situações é útil definir o mapa no intervalo $[0, 1)$. As equações (2.58) tornam-se:

$$\mathcal{M}' : \begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + L_{n+1} & (\text{mod } 1) \\ L_{n+1} = L_n + \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n) & (\text{mod } 1), \end{cases} \quad (2.59)$$

O caso de perturbação nula ($K = 0$), dito integrável, conduz à L constante e $\theta = L \cdot t + \theta_0$, onde θ_0 é constante. No caso integrável, independentemente das condições iniciais (L_0, θ_0) , L será constante para todo θ , que deverá variar com cada iterada. É evidente do mapa que: $L_{n+1} = L_n$ e $\theta_{n+1} = \theta_n + L_{n+1} \pmod{2\pi}$.

No caso integrável, L é uma constante de movimento. As intersecções no mapa de Poincaré são as linhas de L constante e em cada linha a órbita é determinada analiticamente. Para isso é necessário observar que, dada uma condição inicial (L_0, θ_0) , então tem-se sempre $L_{n+1} = L_n = L_0$. Deste modo,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_0 + L_0 \\ \theta_2 &= \theta_1 + L_1 \\ &\dots \\ \theta_n &= \theta_{n-1} + L_n \\ \therefore \theta_n &= \sum_i (\theta_{i-1} + L_i) \end{aligned}$$

e, como $\theta_{n-1} = \theta_{n-2} + L_0$ (e a soma se estende desde $n = 2$), conclui-se que

$$\theta_n = \theta_0 + n \cdot L_0. \quad (2.60)$$

Se a razão $L_0/(2\pi)$ for racional, então o movimento é periódico e os toros são ditos *ressonantes*. Seja $L_0 = m/(2\pi)$, onde m é inteiro. Então: $\theta_n = \theta_0 + n \cdot m/(2\pi)$. Para ser $m/(2\pi)$ racional, é necessário que $m/(2\pi) \pmod{2\pi} = 0$, isto é, $m = 2\pi l$ de modo que $\theta_n = \theta_0 + n \cdot l$, onde l é inteiro, positivo e fixo, *q.e.d.*

⁹É possível obter as equações que definem o mapa por considerações em torno de um pêndulo sem amortecimento. Para aquele caso, a expressão que governa o movimento é: $\ddot{\phi} + \Omega^2 \text{sen } \phi = 0$, sendo Ω a frequência natural e $K = -\Omega^2$ [1]. Também é possível obter o mapa padrão como um caso específico do mapa circular bidimensional [25]

Seja $L_0 \sim 2\pi$, então $\theta_n \sim \theta_0 + n$, onde n é inteiro. Se, por outro lado, $L_0/(2\pi)$ for irracional, tem-se a situação de toros não ressonantes e uma órbita preenche uma linha de maneira densa.

Costuma-se generalizar a expressão para um mapa universal [7, 26], empregando $f(\theta)$ ao invés de $\text{sen}(\theta)$ como foi feito aqui. Isto para definir e estudar uma classe geral de sistemas hamiltonianos, onde a função f assume alguma forma periódica. Um mapa escrito com dependência direta do número de rotação apenas (mantendo a periodicidade) é dito “mapa de torção”, ou “twist-map”.

$$\mathcal{M}_{\text{twist}} : \begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \omega(L) & (\text{mod } 1) \\ L_{n+1} = L_n \end{cases} \quad (2.61)$$

O mapa padrão apresentado não é um mapa de torção.

Os pontos fixos do mapa (2.58) são:

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n \\ L_{n+1} &= 0 \\ \Rightarrow (L_1^*, \theta_1^*) &= (0, 0). \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= L_n \\ K \text{sen}(\theta_n) &= 0 \\ \theta_n &= m\pi \\ \Rightarrow (L_2^*, \theta_2^*) &= (0, m\pi), \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde m é inteiro e positivo.

A matriz jacobiana é

$$D\mathcal{M}(L_n, \theta_n) = \begin{bmatrix} 1 + K \cos(\theta_n) & 1 \\ K \cos(\theta_n) & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

É importante notar que $\det(D\mathcal{M}) = 1$.

Para o segundo ponto fixo encontrado, o único m capaz de fazer com que o ponto se encontre entre $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ é $m = 1$. Neste caso este ponto fixo corresponde à: $(L_2^*, \theta_2^*) = (0, \pi)$. A análise da estabilidade dos pontos se faz pelos autovalores da matriz

jacobiana em cada ponto, dados pela expressão (2.43):

$$D\mathcal{M}(0,0) = \begin{pmatrix} 1+K & 1 \\ K & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

cujo traço vale $2+K$ e o determinante $\det(D\mathcal{M}) = 1$. Os autovalores são:

$$\lambda_{1,2}^{(0,0)} = \frac{2+K}{2} \pm i \left[1 - \left(\frac{2+K}{2} \right)^2 \right]$$

com parte real

$$\operatorname{Re}[\lambda_{1,2}^{(0,0)}] = \frac{2+K}{2}.$$

O ponto será estável se $|\frac{2+K}{2}| < 1$. Neste caso:

$$\left| \frac{2+K}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow -2 < 2+K < 2 \\ \therefore -4 < K < 0.$$

Como K corresponde ao parâmetro de controle, que estamos tomando no intervalo $[0, +\infty)$, resulta em uma contradição. Portanto o ponto de período 1 $(0,0)$ só pode ser instável. Para o segundo ponto, a parte real dos autovalores corresponde à $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = (2-K)/2$. Logo

$$\left| \frac{2-K}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow -2 < 2-K < 2 \\ -4 < -K < 0 \\ \therefore 0 < K < 4,$$

e o ponto $(0, \pi)$ é estável para $K \in [0, 4)$.

Note que os pontos fixos do mapa definido no quadrado unitário $(0,1] \times (0,1]$ são $(L_1^*, \theta_1^*) = (0,0)$ e $(L_2^*, \theta_2^*) = (0, 1/2)$. A análise da estabilidade linear conduz às mesmas conclusões apresentadas acima, em razão da matriz jacobiana ser:

$$D\mathcal{M}(L_n, \theta_n) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{K}{2\pi} \cos(2\pi\theta_n) & 1 \\ \frac{K}{2\pi} \cos(2\pi\theta_n) & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

A figura 2.7 apresenta três órbitas para o mapa de Poincaré do rotor pulsado com $K = 0$. A órbita formada por círculos tem como condições iniciais $(L_0, \theta_0) = (0, 1; 0, 01)$. Foram efetuadas $n = 2000$ iteradas.

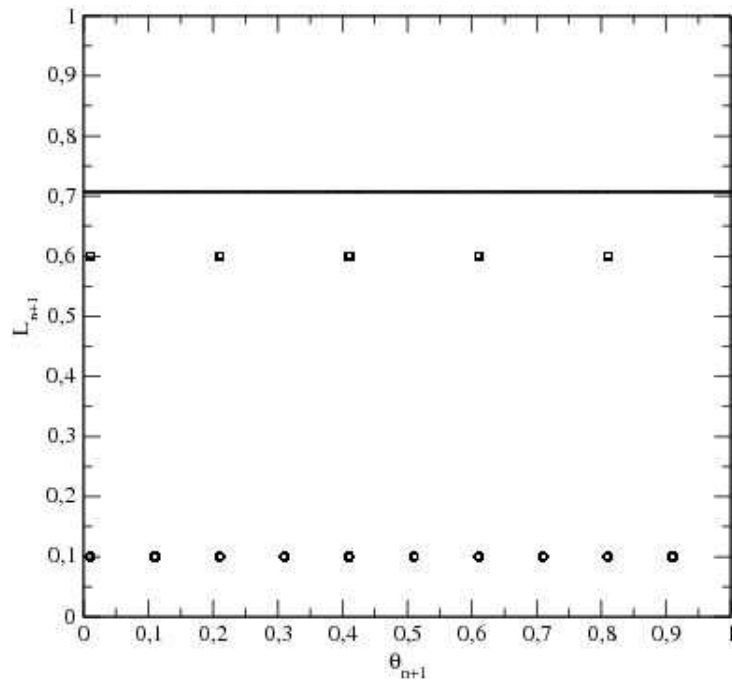


Figura 2.7: Três órbitas para o mapa padrão, eq. (2.59). A linha cheia é formada de pontos da órbita de $(L_0, \theta_0) = (\sqrt{2}/2; 0,01)$. Os círculos correspondem à órbita de $(L_0, \theta_0) = (0,1; 0,01)$. Os quadrados são os pontos da órbita de $(L_0, \theta_0) = (0,6; 0,01)$.

Pelo fato do sistema ser integrável, a órbita associada aos círculos inicia com a condição inicial citada e segue exatamente a expressão (2.60). Como L_0 é racional, então a órbita se repete após algum tempo. O mesmo ocorre para a órbita apresentada com quadrados, cuja condição inicial é: $(L_0, \theta_0) = (0,6; 0,01)$. Por outro lado, a linha cheia representa a órbita para a condição inicial $(L_0, \theta_0) = (\sqrt{2}/2; 0,01)$ e, como é irracional o valor do momento angular, então a órbita não se repete e preenche uma linha inteira.

Com efeito, neste gráfico são utilizados pontos para representar a órbita com condição inicial irracional. Contudo, os pontos preenchem uma linha densamente. À medida que a perturbação aumenta, as curvas se modificam. Antes de um determinado valor crítico $K_c \approx 0,97$ as órbitas estão “presas” por barreiras que impedem a formação do mar caótico, conforme mostra a figura 2.8 para dois valores do parâmetro de controle: (a) $K = 0,45$ e (b) $K = 0,68$. O valor crítico para K será discutido na seção seguinte e constitui um dos pontos fundamentais dos sistemas dinâmicos hamiltonianos.

Quando K ultrapassa o valor crítico K_c , então há a quebra da barreira supracitada. Conseqüentemente, há o aparecimento do mar caótico em algumas regiões. Porém, de acordo com o que foi comentado anteriormente, sistemas hamiltonianos não apresentam atratores e o espaço de fases é constituído de regiões disjuntas: as regiões associadas à estabilidade, ditas ilhas de estabilidade e as regiões associadas ao caos, chamado mar

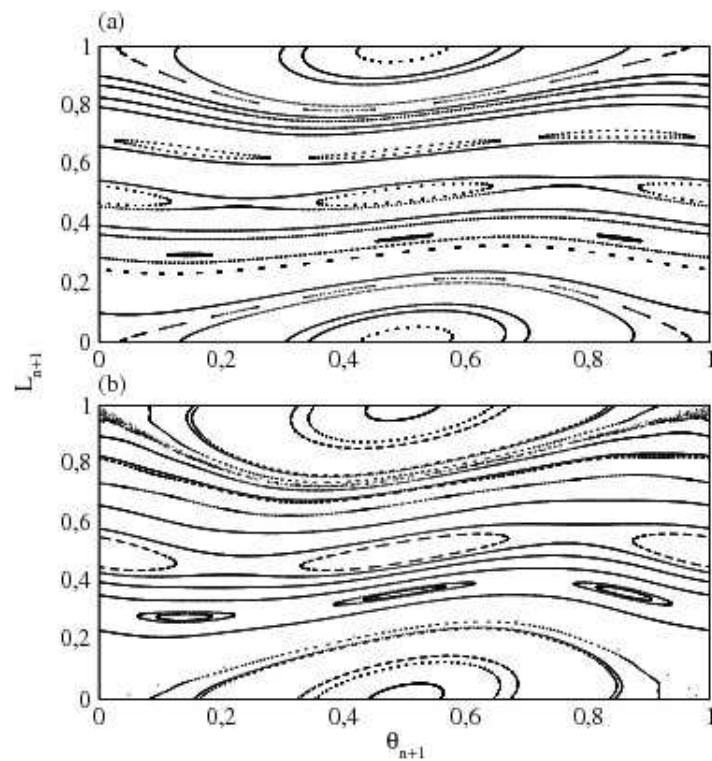


Figura 2.8: Espaço de fases contendo 20 órbitas para (a) $K = 0,45$ e (b) $K = 0,68$.

caótico, conforme apresentado na figura 2.9.

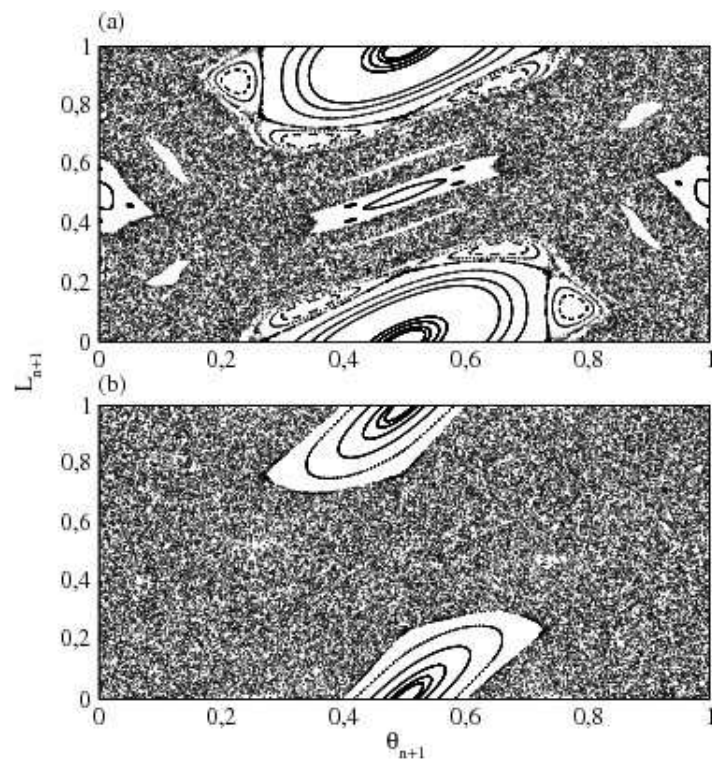


Figura 2.9: Espaço de fases do mapa padrão contendo 20 órbitas para (a) $K = 1,5$ e (b) $K = 3,0$.

Com o aumento do parâmetro, mais ilhas são quebradas, dando lugar ao mar caótico.

Finalmente, quando K atinge um valor consideravelmente grande, há o desaparecimento, em princípio, das ilhas de estabilidade. Deste modo, uma órbita preenche inteiramente o mar caótico.

Na figura 2.10 é mostrada apenas uma órbita para $K = 10,0$ no mapa padrão com 10^4 iteradas.

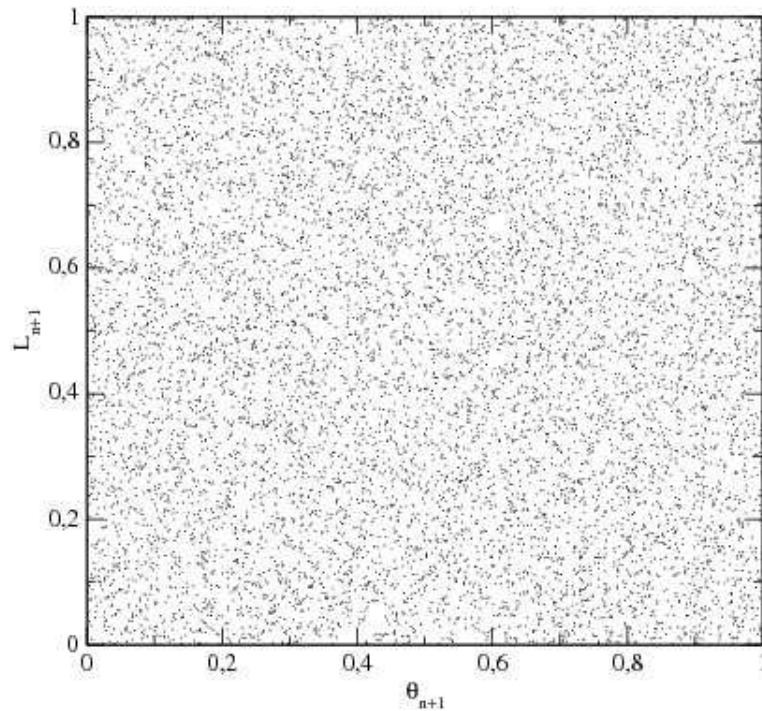


Figura 2.10: Espaço de fases do mapa padrão apenas uma órbita para $K = 10,0$.

Outro aspecto importante associado aos sistemas hamiltonianos consistem das armadilhas dinâmicas. Existem regiões nas fronteiras das ilhas onde as órbitas permanecem um tempo suficientemente longo. Estas regiões de aprisionamento das trajetórias não são identificadas para K suficientemente grande, como na figura 2.10. Na seção seguinte será discutido um resultado de grande importância para sistemas hamiltonianos, conhecido como teorema KAM, nome dado em homenagem aos seus autores. O teorema fornece o entendimento das curvas invariantes sob a aplicação do mapa. Contudo, é válido para valores pequenos do parâmetro K .

2.4 O Teorema KAM

Conforme apresentado na seção anterior, o rotor pulsado é um exemplo de sistema hamiltoniano integrável para $K = 0$. É natural questionar até que ponto é válida a integrabilidade de sistemas hamiltonianos [3].

Para o estudo deste problema, escreve-se a hamiltoniana total $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ como sendo a parte integrável $\mathcal{H}_0(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ mais a parte associada à perturbação:

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \alpha \mathcal{H}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (2.67)$$

resulta disto que todas as constantes de movimento são destruídas para $\alpha \neq 0$, exceção feita à própria hamiltoniana [3].

O teorema KAM afirma que sob algumas condições, para α pequeno, a maioria dos toros irracionais da hamiltoniana não-perturbada sobrevivem. Um dos conceitos-chave neste sentido é o número de rotação, o qual foi definido na expressão (2.11), isto é, dependente da variável de ação I . A hamiltoniana total em variáveis de ângulo-ação neste contexto pode ser escrita como sendo:

$$H = \mathcal{H}_0(\mathbf{I}) + \alpha \mathcal{H}_1(\mathbf{I}, \phi). \quad (2.68)$$

Se a perturbação for nula, $\alpha = 0$ e as curvas são toroidais, fechadas ou não. A questão é a existência destas trajetórias para $\alpha \neq 0$. Neste sentido, o teorema KAM fornece o tratamento correto. Em princípio, pode-se imaginar que para $\alpha \neq 0$ todas as constantes de movimento são destruídas e não há limitação para a trajetória, sendo H a única constante de movimento. De acordo com o teorema KAM, no entanto, a maioria dos toros formados por algumas trajetórias são apenas distorcidos se a perturbação não for grande o suficiente. Toros cuja topologia é preservada são ditas superfícies KAM.

Este teorema leva o nome dos principais envolvidos no problema, pois o teorema surgiu de esforços conjuntos de Kolmogorov (em 1954), Arnold (em 1963) e Moser (em 1962). O teorema KAM, em resumo, é responsável por garantir a existência de curvas invariantes em sistemas de dois ou mais graus de liberdade.

No mapa padrão, a hamiltoniana integrável corresponde à parte dependente somente do momento angular

$$\mathcal{H}_0(L) = \frac{L^2}{2\mathcal{I}}$$

e a parte associada à perturbação é dada por:

$$\mathcal{H}_1(\theta, t) = K \cos \theta \sum_n \delta(t - n\tau).$$

Quando a perturbação K atinge um valor crítico, dado por $K_c \approx 0,97$, então a última barreira KAM é destruída. Embora algumas ilhas ainda existam para $K > K_c$, as curvas

invariantes dão lugar às órbitas caóticas. O valor crítico K_c é proveniente de um número de rotação irracional. Neste sentido, o “número mais irracional” que existe corresponde ao *número áureo*, o qual apresentaremos adiante. A afirmação da maior irracionalidade de um número em relação a outro provém do fato de que todo número irracional pode ser escrito como uma sequência de frações:

$$R = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}, \quad (2.69)$$

onde a_i são inteiros para todo i pertencente aos naturais. Uma aproximação racional de um número irracional é obtida truncando a expressão (2.69) para algum i .

Se $a_i = 1 \forall i \in \mathbb{N}$, então a expressão (2.69) torna-se

$$R_{\text{áureo}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}, \quad (2.70)$$

a qual converge para $R_{\text{áureo}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,6180$, ou seja, o número áureo.

O enunciado do teorema é mais complexo e sua prova bastante trabalhosa. Aqui serão enunciadas as condições essenciais do teorema e será apresentado em uma forma didática, adaptada de [6].

Teorema 2 (Kolmogorov-Arnold-Moser). *Se as frequências associadas a um sistema hamiltoniano integrável \mathcal{H}_0 são racionalmente independentes e suficientemente irracionais, então para α pequeno, as soluções do sistema perturbado H são, em sua maioria, quase-periódicas e só diferem ligeiramente das do sistema não-perturbado. Em sua maioria, os toros não-ressonantes de \mathcal{H}_0 são apenas levemente deformados e o sistema perturbado também possui toros não-ressonantes sobre os quais as órbitas são densas.*

Na seção anterior, foram apresentados alguns gráficos obtidos da simulação numérica para o mapa padrão com alguns valores específicos do parâmetro de controle. Em particular, para $K = 0,68$ (figura 2.8b), é possível identificar curvas KAM que limitam as órbitas caóticas. Estas curvas se encontram entre $L_{n+1} = 0,9$ e $L_{n+1} < 1$ para $\theta_{n+1} \in [0, 1)$. Com o aumento de K depois da quebra da última barreira KAM, as órbitas caóticas começam a ocupar o espaço de fases, com exceção à algumas ilhas de estabilidade que ainda sobrevivem. Finalmente, com o aumento de K para um valor consideravelmente grande, nenhuma ilha de estabilidade é encontrada e o mar caótico ocupa todo o espaço de fases. Deste modo, em resumo, o teorema KAM permite a análise da quebra dos toros.

3 *Caos em Sistemas de Baixa Dimensionalidade*

Um sistema dinâmico, seja a tempo discreto (mapa) ou a tempo contínuo (fluxo), pode apresentar comportamento caótico. Mesmo um sistema não-linear e de baixa dimensionalidade pode exibir este tipo de comportamento [2, 3, 20]. Aqui, entende-se baixa dimensionalidade no sentido $0 < N \leq 3$.

Por exemplo, um sistema dinâmico a tempo contínuo pode exibir caos, desde que seja autônomo, não-linear e que suas trajetórias estejam limitadas em uma região finita [2–4]. Um sistema dinâmico a tempo discreto também pode apresentar caos. Contudo, como foi discutido no capítulo 2, mapas são provenientes de secções de Poincaré de algum fluxo. Logo, mapas bidimensionais podem apresentar caos e mapas unidimensionais também, desde que estes não sejam invertíveis [2, 3].

De fato, caos corresponde a um tipo de comportamento em sistemas dinâmicos. É caracterizado pela aparente imprevisibilidade, embora seja determinístico. Tal propriedade é expressa pela divergência exponencial de trajetórias cujas condições iniciais são muito próximas [3, 4].

Com efeito, esta é uma das condições necessárias para a ocorrência de caos em sistemas dinâmicos, conforme a definição 11 que será apresentada posteriormente.

Se não houvesse a condição de limitação das regiões acessíveis para as trajetórias de um sistema, seria possível assumir o seguinte sistema linear como caótico

$$\dot{x} = ax, \tag{3.1}$$

onde $x = x(t)$, $a > 0$ real e \dot{x} denotando a taxa de variação de $x(t)$ no tempo. Qualquer condição inicial arbitrariamente próxima diverge com o passar do tempo t . É fácil perceber que, sendo $\delta x(0) \equiv x^{(1)}(0) - x^{(2)}(0)$ a diferença entre as condições iniciais, então esta

variação cresce exponencialmente ($t > t_0$)

$$\begin{aligned}\frac{d[\delta x(t)]}{dt} &= a\delta x(t) \\ \delta x(t) &= \delta x(0)e^{a(t-t_0)},\end{aligned}$$

pois foi assumido ser $a > 0$. Além disto, é necessário levar em consideração o teorema de Poincaré-Bendixson, conforme formulado a seguir com base nas definições dos conjuntos α -limite e ω -limite [1]. Para as definições, considere $\mathbf{F}_t(\mathbf{r})$ um fluxo.

Definição 4 *Um ponto \mathbf{R} pertencente ao domínio de \mathbf{F}_t é dito um ponto ω -limite de um ponto \mathbf{P} se existe uma sequência $\mathbf{F}_1(\mathbf{P}), \mathbf{F}_2(\mathbf{P}), \dots, \mathbf{F}_t(\mathbf{P})$ de modo que $\mathbf{F}_t(\mathbf{P}) \rightarrow \mathbf{R}$, quando $t \rightarrow \infty$. O conjunto de todos os pontos ω -limite é chamado de conjunto ω -limite e é representado por $\omega(\mathbf{P})$.*

Definição 5 *Um ponto \mathbf{P} pertencente ao domínio de $\mathbf{F}_t(\mathbf{r})$ é dito um ponto α -limite de um ponto \mathbf{R} se existe uma sequência $\mathbf{F}_1(\mathbf{R}), \mathbf{F}_2(\mathbf{R}), \dots, \mathbf{F}_t(\mathbf{R})$ tal que $\mathbf{F}_t(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{P}$, quando $t \rightarrow -\infty$. O conjunto de todos os pontos α -limite de \mathbf{R} é chamado de conjunto α -limite e é denotado por $\alpha(\mathbf{R})$.*

Portanto, os conjuntos assinalados nas definições acima fornecem o estado assintótico do sistema, tanto para $t \rightarrow \infty$ quanto para $t \rightarrow -\infty$. No capítulo 2, empregou-se a terminação ω_i para especificar a frequência da curva i em um sistema com $i \in \mathbb{N}$ graus de liberdade. Contudo, aqui $\omega(r)$ significa o conjunto ω -limite de um ponto r . No capítulo 4, será empregado α para denotar um coeficiente associado à instabilidade.

Teorema 3 (*Poincaré-Bendixson*) *Todo conjunto ω -limite não vazio de um fluxo planar de classe C^1 que não contém um ponto estável é uma órbita periódica não degenerada.*

Em resumo, o teorema 3 afirma que em fluxos bidimensionais só podem existir pontos fixos e/ou ciclos-limite, sendo esses os únicos tipos de atratores. Para sistemas com $N \geq 3$ outros tipos de atratores passam a surgir, como os *atratores estranhos*, cuja dimensão é fractal [1].

O mecanismo básico da geração de caos em sistemas unidimensionais é o esticamento e dobra (em inglês “stretch and fold”) de um intervalo, conforme ilustrado pela figura 3.1, onde é tomado o intervalo inicial $[0, 1]$ e a aplicação faz com que o intervalo seja esticado e, posteriormente, dobrado sobre o intervalo inicial.

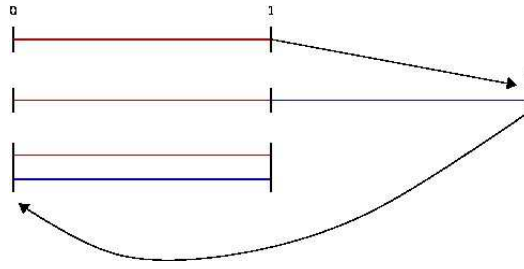


Figura 3.1: Representação pictórica do esticamento e dobra do intervalo $[0, 1]$.

O processo de dobra não só garante a limitação da órbita como também a não-invertibilidade do mapa unidimensional, uma vez que dois valores diferentes de x_n (na figura $x_n^{(1)} = 0$ e $x_n^{(2)} = 1$) são mapeados para um único valor de x_{n+1} . Conforme comentado anteriormente, a operação de módulo atua exatamente deste modo.

A compreensão da geração de caos mesmo em sistemas de baixa dimensionalidade se dá com a análise da ferradura de Smale [1–3, 20]. Este nome é proveniente do aspecto da figura sob algumas transformações, obtida pelo mapa de Smale, que corresponde a um mapeamento bidimensional atuando sobre um quadrado unitário.

A figura 3.2 ilustra um quadrado de lado unitário e o resultado da primeira iteração do mapa de Smale.

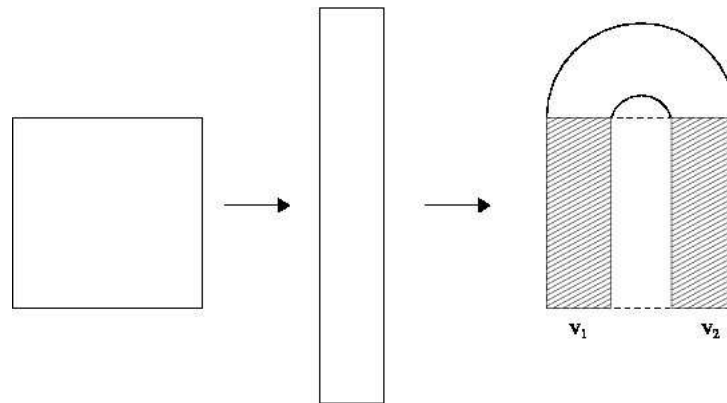


Figura 3.2: Resultado da primeira iteração do mapa de Smale no quadrado unitário. As duas tiras verticais foram nomeadas V_1 e V_2 .

Como ilustrado na figura, a ação do mapa consiste em contrair uma direção do quadrado por um fator menor do que $1/2$ e expandir a outra direção por um fator maior do que 2. A tira resultante é dobrada e inserida sobre o quadrado original, onde as duas tiras resultantes desta intersecção são nomeadas V_1 e V_2 . A segunda iteração do mapa de Smale resulta em quatro tiras e assim por diante.

Embora não tenha sido definido o mapa da ferradura de Smale \mathcal{M}_S por uma expressão,

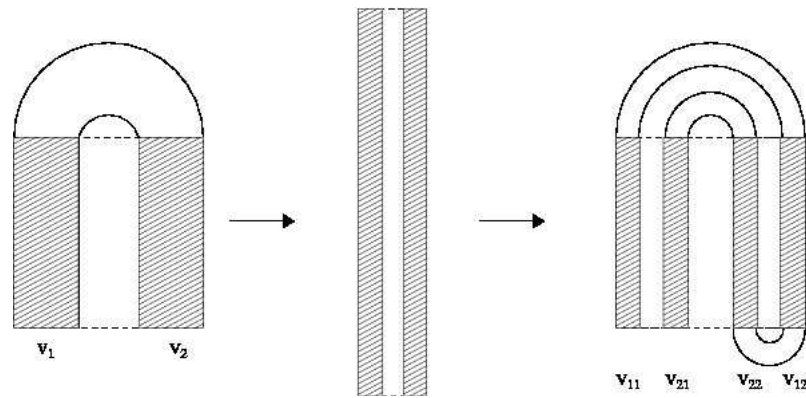


Figura 3.3: Resultado da segunda iterada do mapa de Smale no quadrado. Agora o quadrado contém quatro tiras: V_{11} , V_{12} , V_{21} e V_{22} .

os interesses são nas propriedades topológicas deste mapa, que fornece o mecanismo básico da geração de caos em sistemas bidimensionais. É possível demonstrar ainda que, se \mathcal{M}_S denotar o mapa da ferradura de Smale, então \mathcal{M}_S é um homeomorfismo.

A primeira iterada da inversa do mapa, \mathcal{M}_S^{-1} está apresentada na figura 3.4.

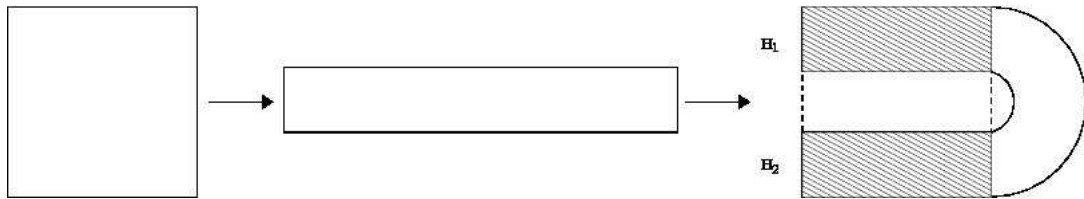


Figura 3.4: A primeira iterada do mapa inverso fornece agora duas tiras horizontais, denotadas por H_1 e H_2 .

E a segunda iterada da inversa fornece a figura 3.5.

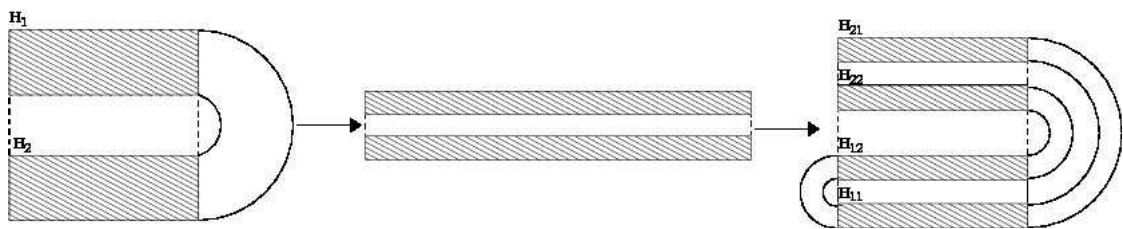


Figura 3.5: Analogamente à segunda iterada do mapa, resultam de $\mathcal{M}_S^{-1} \mathcal{M}_S^{-1}$ quatro tiras horizontais, denotadas por H_{11} , H_{12} , H_{21} e H_{22} .

Alguns pontos pertencentes ao quadrado original nestas aplicações, deixam o quadrado após cada iterada. Entretanto, alguns pontos permanecem dentro do quadrado unitário original. É possível demonstrar que os pontos que permanecem no quadrado após a aplicação de $\mathcal{M}_S^{[k]}$ e $(\mathcal{M}_S^{-1})^{[k]}$ para $k \rightarrow \infty$ formam um conjunto de Cantor (cf. Apêndice B).

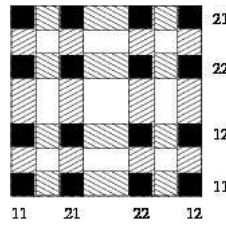


Figura 3.6: Representação dos pontos que permanecem dentro do quadrado após a primeira e segunda iteradas do mapa \mathcal{M}_S e de sua inversa \mathcal{M}_S^{-1} . Os quadrados em preto contém pontos que formarão o conjunto de Cantor quando $k \rightarrow \infty$.

Qualquer ponto pertencente ao quadrado pode ser identificado por uma sequência formada pelos símbolos 1 e 2. A ação do mapa \mathcal{M}_S é equivalente ao deslocamento de Bernoulli (capítulo 2).

Basicamente o mecanismo gerador de caos consiste do esticamento e dobra de um dado conjunto inicial. Este conjunto pode ser um intervalo, um plano, um volume e assim por diante. Tanto o mapa de Bernoulli (unidimensional) quanto o mapa de Smale (bidimensional) apresentam este mecanismo, que consiste de tomar um conjunto e aplicar o processo de esticamento e dobra. Note que este procedimento faz com que pontos próximos se afastem - pelo menos em uma direção em sistemas N -dimensionais - em razão do esticamento e a dobra permite que este conjunto esteja limitado em uma região. Dado um sistema com todos os ingredientes necessários para a ocorrência de caos, existem maneiras pelas quais o sistema é levado a apresentar o comportamento caótico. Uma destas *rotas para o caos* será discutida posteriormente, a chamada *bifurcação* do tipo *duplicação de período* [2, 4, 11].

Com o entendimento do mecanismo gerador de caos em sistemas de baixa dimensionalidade, o interesse agora é em verificar a estabilidade em mapas unidimensionais e bidimensionais. Um dos conceitos-chave para compreender a dinâmica caótica é o das órbitas periódicas instáveis (OPIs). Sistemas caóticos devem apresentar pontos de todos os períodos. Consequentemente, afirma-se que as órbitas periódicas cobrem densamente a região caótica de um sistema. Além disto, o conhecimento da estrutura de pontos periódicos permite conhecer as *variedades*, que serão apresentadas posteriormente.

Na seção seguinte, discutem-se os fundamentos das órbitas periódicas, sua estabilidade e como encontrá-las numericamente.

3.1 As Órbitas Periódicas

Os pontos periódicos constituem peças fundamentais na teoria de sistemas dinâmicos. Quantidades importantes na caracterização de uma aplicação podem ser obtidas por meio das órbitas periódicas. Evidentemente, assim como no caso de pontos fixos, também é possível analisar a estabilidade de uma dada órbita periódica.

Dado um mapa unidimensional $f(x)$, a estabilidade de seus pontos fixos é dada pela derivada. Isto é proveniente do fato de que o módulo da derivada fornecerá o quanto um ponto deverá se afastar ou se aproximar de um ponto inicial x_0 pela aplicação do mapa. Deste modo, considerando x^* um ponto fixo para f , então se $|f'(x^*)| < 1$, o ponto é dito atrativo e caso $|f'(x^*)| > 1$ o ponto é dito repulsivo. Este fato já foi comentado no capítulo 2 e serve de base para a análise quantitativa da divergência exponencial de órbitas vizinhas pertencentes ao espaço de fases dos mapas estudados.

Os sistemas dinâmicos podem apresentar pontos que se repetem depois de algum tempo, ou depois de alguma iterada no caso de mapas. O exemplo mais trivial de um ponto deste tipo é um ponto fixo, pois é um ponto de período 1: basta uma iterada para que se repita. Os pontos tratados nesta seção são pontos que se repetem para algum $n > 1$, conforme a definição seguinte para pontos periódicos em mapas, onde n é usualmente o número de iteradas.

Definição 6 *Seja $x \mapsto f(x)$ um difeomorfismo de classe C^n , $n \geq 1$, tal que $f^{[n]}(x)$ exista e seja diferenciável. Um ponto para o qual $f^{[n]}(x^*) = x^*$ é dito periódico com período n inteiro. Esta órbita periódica é também chamada de ciclo- n .*

Da mesma maneira, para um mapa bidimensional, um ponto de período n é aquele que se repete após n iteradas: $f^{[n]}(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$. A estabilidade do ciclo é naturalmente avaliada por meio da derivada.

Com efeito, seja $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ um ciclo- n . A derivada fornece:

$$\begin{aligned} \frac{df^{[n]}(x)}{dx} &= \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_{n-1}} \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_{n-2}} \cdots \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_0} \\ \frac{df^{[n]}(x)}{dx} &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_i}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Esta expressão é obtida por meio da regra da cadeia, pois trata-se da composição de

funções. Deste modo, se o produto (3.2) for menor do que a unidade em módulo, o ciclo- n é atrativo; caso seja maior, é repulsivo.

Para sistemas de maior dimensionalidade, é necessário avaliar os autovalores da matriz jacobiana aplicada n vezes. Em outras palavras, com um tom apelativo para a falta de rigor, a matriz jacobiana corresponde à “versão N-dimensional da derivada”.

Se \mathbf{x}_0 for um ponto de período n para um dado sistema bidimensional, então a estabilidade fica determinada pelos autovalores do produto $\prod_{i=0}^{n-1} D\mathcal{M}(\mathbf{x}_i)$, os quais serão denotados aqui por $L_{1,2}$. Quando for tratado dos autovalores da matriz jacobiana no caso geral, empregar-se-á λ_i para denotar o i -ésimo autovalor.

Na seção seguinte, a busca pelos autovalores (e autovetores) da matriz jacobiana será justificada. Conforme comentado informalmente, se a matriz jacobiana apresentar algum de seus autovalores com parte real maior do que a unidade em módulo, então a autodireção associada será instável. Do contrário (com exceção ao caso em que $\lambda_j = 0$ para algum j), a autodireção associada apresenta estabilidade.

No início desta seção comentou-se a respeito da importância das órbitas periódicas instáveis, que formam o esqueleto sobre o qual a dinâmica é construída. Além disto, de posse da localização destas órbitas, é possível derivar quantidades importantes como a *medida natural*. Deste modo, é possível conhecer topologicamente o espaço de fases do sistema. A partir da medida obtém-se qualquer quantidade de interesse na caracterização topológica de um sistema inteiramente caótico. Isto é proveniente da ergodicidade. Esta propriedade corresponde à equivalência entre a média temporal de uma quantidade e a média espacial desta quantidade em relação à medida.

Para compreender a medida, será apresentado um exemplo. O retrato de fases¹ de uma dada aplicação pode ser particionado e então verificada a porção da órbita que se encontra em cada partição. A medida corresponde ao procedimento de associação de um número para cada partição desde que algumas condições sejam satisfeitas:

1. A medida de qualquer conjunto é um número positivo;
2. A medida de uma união de um número finito (ou infinito contável) de conjuntos seja igual à soma das medidas dos conjuntos individuais.

Para verificar então a porção da órbita toda que se encontra em cada partição, é necessário efetuar o cálculo da razão entre o número de pontos que permanecem em cada

¹Representação de todas as órbitas de uma aplicação no espaço de fases.

região (iniciando de condições iniciais distribuídas aleatoriamente sobre o espaço de fases) e o número total de pontos. Esta fração - existirá uma fração para cada caixa - pode ser interpretada como sendo uma probabilidade de encontrar um ponto obtido do mapeamento na i -ésima caixa. Naturalmente, esta fração será um número entre 0 e 1. Se uma caixa estiver fora da região acessível às órbitas geradas pelo mapa, então a medida será nula. Neste exemplo as partições podem ser tomadas todas contendo alguma porção da órbita. Neste caso a soma de todas as frações encontradas, ou seja, todas as medidas, será igual a unidade. Particularmente, uma medida que satisfaz a esta condição é chamada medida de probabilidade.

A figura 3.7 ilustra o mapa de Ikeda [2, 3] (Apêndice A) bem como uma ilustração do particionamento do espaço de fases para avaliar a fração de pontos que permanece em cada partição [2].

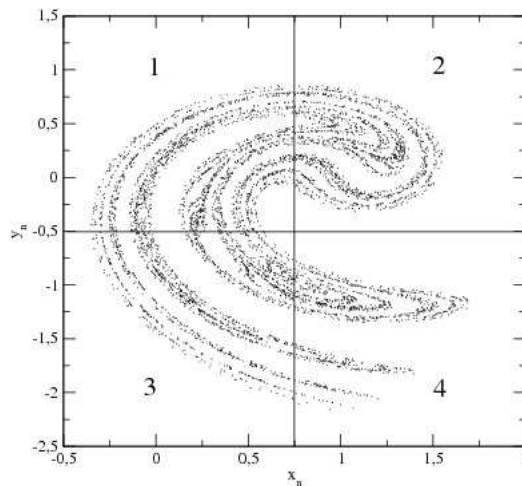


Figura 3.7: Ilustração do particionamento do espaço de fases para o mapa de Ikeda.

Finalmente, seja μ uma medida. Se a medida satisfizer a condição: $\mu(f^{-1}(S)) = \mu(S)$ para cada conjunto fechado S , então a medida é chamada f -invariante. As medidas usuais tais como o comprimento em \mathbb{R} , a área em \mathbb{R}^2 e o volume em \mathbb{R}^3 são chamadas medidas de Lebesgue.

O aspecto fundamental na caracterização de um sistema por meio da medida é justamente sua invariância: para alguns sistemas, não importa de que maneira foram geradas as condições iniciais, pois as mesmas frações devem ser obtidas para uma dada partição.

A fração de iteradas da órbita que se encontram em um conjunto R_i é calculada por meio da expressão:

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}_0, R_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{\mathbf{f}^{[m]}(\mathbf{r}_0) \in R_i : 1 \leq m \leq n\}}{n} \quad (3.3)$$

onde $\#\{.\}$ denota o número de elementos do conjunto $\{.\}$.

A medida natural da i -ésima partição fica determinada pela expressão:

$$\mu_i = \lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{F}[\mathbf{r}_0, \mathcal{N}(\xi, R_i)], \quad (3.4)$$

onde $\mathcal{N}(\xi, R_i) = \{\mathbf{r} : \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| \leq \xi\}$ denota o número de pontos a uma distância máxima de ξ da partição R_i , assumindo ser R_i centrado em \mathbf{r}_0 .

A medida natural em função das órbitas periódicas em uma região R_i é escrita em termos da expressão:

$$\mu_i(p) = \sum_{\mathbf{r}_{ip} \in R_i} \frac{1}{|L_1|}, \quad (3.5)$$

onde \mathbf{r}_{ip} é o i -ésimo ponto fixo do mapa p vezes iterado e $|L_1|$ corresponde à magnitude do autovalor associado à expansão, obtido da matriz jacobiana $D\mathcal{M}^p(\mathbf{r}_{ip})$. Assim, a medida natural fica determinada por:

$$\mu_i = \lim_{p \rightarrow \infty} \mu_i(p). \quad (3.6)$$

O conjunto de Cantor (apêndice B) possui medida (de Lebesgue) nula do mesmo modo que os pontos que formam tal conjunto no mapa da ferradura. Analogamente as órbitas periódicas instáveis possuem medida nula, de sorte que uma órbita típica² jamais cairá em uma órbita periódica instável.

3.1.1 O Cálculo das Órbitas Periódicas

Considerando a importância das órbitas periódicas instáveis (OPI) então é necessário algum método para a detecção numérica de tais órbitas, pois estas constituem um conjunto de medida nula. Isto quer dizer que a probabilidade de obter uma órbita periódica instável por meio da geração aleatória de pontos, é nula.

Numericamente, procede-se como segue. Dada uma aplicação $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, define-se uma outra aplicação $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, trivialmente uma função real, de maneira que $g(x) \equiv f(x) - x$

²Neste contexto, $\{\mathbf{r}_n\}_{n=a}^b$ é dita uma órbita típica se não estiver numa região de regularidade, a exemplo do que ocorre no mapa padrão; esta órbita não deve sair do mar caótico.

e encontram-se os zeros desta função. Um dos mais importantes métodos para encontrar zeros de funções corresponde ao método de Newton-Raphson (NR). A ideia de todo método iterativo com este objetivo consiste em iterar as soluções na forma:

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \delta \mathbf{r}, \quad (3.7)$$

onde $\delta \mathbf{r}$ são correções a cada passo. Essencialmente, se $\|\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n\| < \varepsilon_r$ para algum $\varepsilon_r > 0$, então o valor encontrado corresponde a uma aproximação da raiz da função. Isto equivale a dizer que o método convergiu e que o critério de parada³ é ε_r . Neste trabalho utiliza-se $\varepsilon_r \sim 10^{-15}$ e precisão dupla nos cálculos. Emprega-se também a notação ε_r para o critério de parada de maneira a diferenciar de ε quando se tratar do raio de uma região no espaço de fases, como uma bola de condições iniciais.

Em geral, o que diferencia os métodos para encontrar raízes de funções são as correções a serem acrescentadas na expressão (3.7). Para o método de Newton-Raphson, as correções são dadas por

$$\delta \mathbf{r} = -g(\mathbf{r}_n)[D\mathcal{M}(\mathbf{r}_n)]^{-1}, \quad (3.8)$$

onde $[D\mathcal{M}(\mathbf{r}_n)]^{-1}$ denota a inversa da matriz jacobiana no ponto \mathbf{r}_n . Assim, assume-se naturalmente o fato da matriz jacobiana não ser singular. No caso unidimensional⁴, $\delta x = -g(x_n)/g'(x_n)$, o que fornece

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \quad (3.9)$$

com $g'(x_n) = \frac{dg(x_n)}{dx_n}$ e $g'(x_n) \neq 0$.

Para verificar a razão pela qual as correções são determinadas deste modo, ilustrar-se-á com o caso de uma função a uma variável $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a(x) = x^2 - 10$, conforme mostra a figura 3.8.

Existem duas raízes: $x^* = \pm\sqrt{10}$, mostradas no gráfico 3.8a. O método de Newton-Raphson consiste em escolher uma condição inicial, encontrar a reta tangente ao gráfico no ponto $(x_0, f(x_0))$ e então observar a intersecção desta reta com o eixo das abcissas. A este ponto, denomina-se x_1 e o processo é repetido até que convirja para a raiz dentro da precisão pré-estabelecida. Por indução, encontra-se a expressão (3.9).

Na figura, são mostradas apenas duas iteradas, que logo convergem para a raiz dentro

³O critério empregado corresponde a um critério computacional para avaliar a convergência do método iterativo. Em razão das flutuações possíveis, a condição de igualdade em um programa não pode ser observada para precisão simples ou dupla. Neste caso, verifica-se se a distância é limitada por ε_r .

⁴A não existência de singularidade é requerida, pois $g'(x_n) \neq 0$

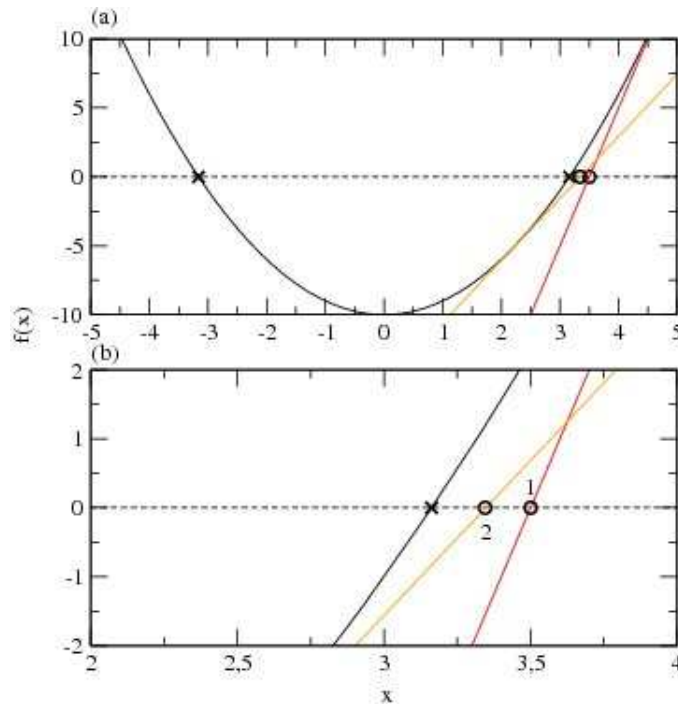


Figura 3.8: (a) Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson para encontrar raízes. (b) Aproximação do retângulo $[2, 4] \times [-2, 2]$ de (a) para ilustrar a aproximação de uma das raízes na segunda iterada.

da precisão dada, com condição inicial $x_0 = 5$ para fins ilustrativos.

Tabela 3.1: Valores encontrados iterando a expressão (3.9) onde $\varepsilon = 10^{-15}$. Os valores mostrados aproximam-se de $\sqrt{10}$ dentro de ε .

Iterada (j)	x_j
1	3,500000000000000
2	3,178571428571428
3	3,162319422150883
4	3,162277660444136
5	3,162277660168380
6	3,162277660168380

É possível demonstrar que a convergência do método de Newton-Raphson é quadrática. Em outras palavras, a convergência é rápida para sementes⁵ judiciosamente escolhidas. A escolha de sementes adequadas é necessário, pois para algum x_0 o método pode facilmente não convergir para uma raiz da função g . A razão disto é que as *bacias de atração* associadas ao método são geralmente pequenas em comparação com o gráfico da função g , ou seja, a vizinhança de uma raiz é linear e qualquer ponto inicial que não esteja nessa vizinhança não será atraída para a raiz. Isto naturalmente prejudica a contagem das OPIs.

⁵Condições iniciais.

A bacia de atração corresponde ao maior conjunto de condições iniciais que são atraídas para um dado ponto. De imediato, há um método computacional para avaliar a bacia de atração de um método. Uma condição inicial x_0 é tomada e a expressão (3.9) é iterada e, se convergir para a solução dentro do critério de parada, então aquela condição inicial é marcada.

Com efeito, considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x^2$. O gráfico desta função está ilustrado na figura 3.9 com a respectiva bacia de atração para cada condição inicial que converge para uma raiz desta função.

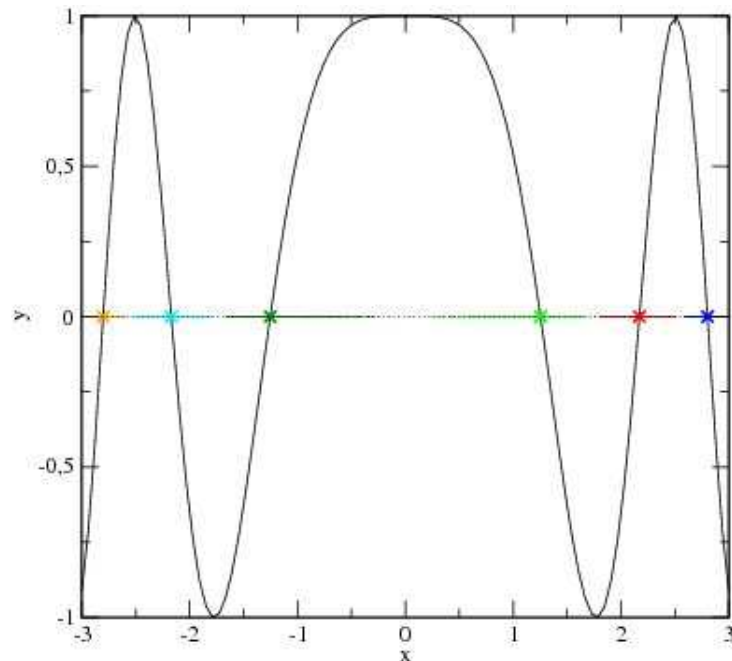


Figura 3.9: Bacias de atração para o método de Newton-Raphson aplicado para encontrar as raízes de $f(x) = \cos(x^2)$.

Neste caso as bacias de atração são de tamanhos razoáveis em comparação com os limites mostrados na figura. Na figura 3.9 as bacias de atração estão representadas pelos segmentos de reta horizontais para $f(x) = 0$. Note que a bacia apresenta descontinuidades, porém identifica todos os zeros da função no intervalo mostrado.

Em 1997, Schmelcher e Diakonov propuseram um método capaz de detectar, em princípio, todos os pontos de qualquer período [15, 16]. O método proposto consiste em tomar o sistema original

$$\mathcal{M} : \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{r}_n) \quad (3.10)$$

e efetuar transformações lineares com base no sistema original que alteram somente a es-

tabilidade dos pontos fixos em relação ao sistema original, mas não alteram suas posições. Com isso, garante-se a convergência para os pontos fixos instáveis do mapa. Aqui será utilizada a sigla SD para posterior referência ao método de Schmelcher-Diakonos.

A garantia da convergência supracitada se deve à alteração feita nos autovalores da matriz jacobiana. Para tanto, exige-se que esta transformação tenha um caráter biunívoco: se o método convergir para um dado valor, raiz dos sistemas transformados, então este valor deve ser ponto fixo do mapa original. Equivalentemente, se o mapa apresentar um ponto fixo, então este ponto deve ser um ponto fixo para os sistemas transformados. Assim, justifica-se o fato deste conjunto de transformações, o qual é denotado por $\{S_k\}$, ser constituído de transformações lineares. Com este simples argumento, os sistemas podem ser construídos como seguem:

$$S_k : \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Lambda_k[\mathbf{f}(\mathbf{r}_n) - \mathbf{r}_n]. \quad (3.11)$$

Nesta equação, Λ_k são matrizes responsáveis pela estabilização dos pontos, conforme discutido no apêndice e \mathbf{f} é algum mapa. Neste método, as correções na expressão (3.7) são obviamente dadas por:

$$\delta \mathbf{r} = \Lambda_k[\mathbf{f}(\mathbf{r}_n) - \mathbf{r}_n]. \quad (3.12)$$

É simples notar que, se \mathbf{r}_n^* for um ponto fixo do mapa, então $\mathbf{f}(\mathbf{r}_n^*) = \mathbf{r}_n^*$ e as expressões obtidas de (3.11) tornam-se:

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n,$$

isto é, \mathbf{r}_n^* é também um ponto fixo dos sistemas transformados S_k . Por outro lado, se $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n$, então, novamente da expressão (3.11)

$$\begin{aligned} \Lambda_k[\mathbf{f}(\mathbf{r}_n) - \mathbf{r}_n] &= \vec{0} \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}_n) - \mathbf{r}_n &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Portanto, sendo \mathbf{r}_n^* um ponto fixo dos sistemas S_k , então será ponto fixo de \mathcal{M} . Note que, para validar isso, é necessário que a matriz (o conjunto de todas as matrizes) Λ_k não seja singular, isto é, $\det(\Lambda_k) \neq 0$, ($k = 1, 2, \dots$).

No caso unidimensional,

$$x_{n+1} = x_n \pm [f(x_n) - x_n]. \quad (3.13)$$

Para o caso apresentado anteriormente, $f(x_n) = \cos x_n^2$, existem dois sistemas transfor-

mados,

$$\begin{aligned} S_1 : x_{n+1} &= x_n + (\cos x_n^2) \\ S_2 : y_{n+1} &= y_n - (\cos y_n^2), \end{aligned}$$

cujas bacias de atração estão apresentadas na figura 3.10. Note que, como desejam-se as raízes da função $f(x) = \cos x^2$, então define-se uma função $g(x) = \cos x^2 + x$ para o método SD. No exemplo da figura 3.10 é utilizado apenas o primeiro sistema transformado S_1 apenas para ilustrar.

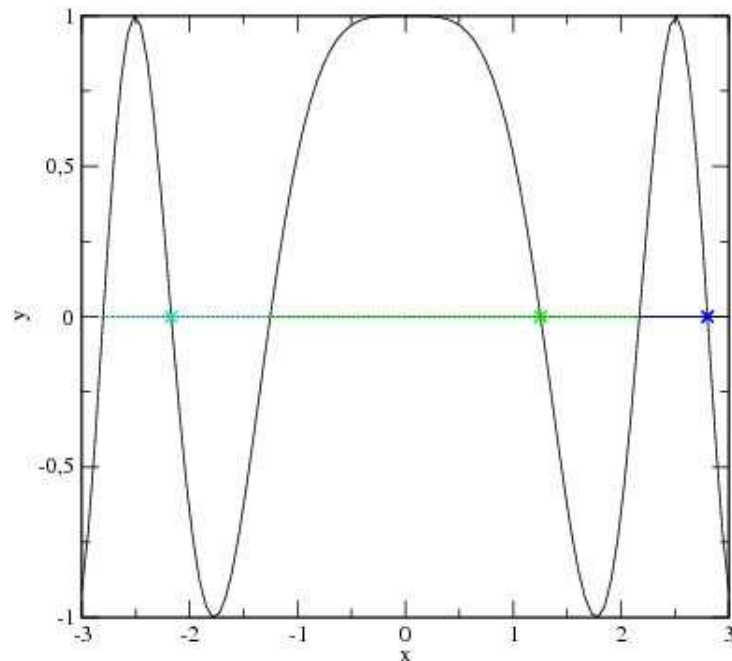


Figura 3.10: Bacias de atração para o método de Schmelcher-Diakonos aplicado para encontrar as raízes de $f(x) = \cos(x^2)$ utilizando o primeiro sistema transformado S_1 .

Na figura, verifica-se que as bacias de atração são de tamanhos maiores em comparação aos obtidos no método NR. Particularmente, esta é uma das vantagens do método SD: a convergência é global. Contudo, o método na formulação discreta é extremamente dependente do *parâmetro de estabilização* [15,16] (apêndice A). Tanto maior será o número de iterações necessárias para a convergência quanto menor for o parâmetro. Daí verifica-se que o método SD apresenta convergência lenta em comparação ao método NR. Na figura 3.10 são mostradas as bacias de atração para o método SD de três raízes. A razão disto é que foi empregado a primeira matriz de estabilização, constituída pela matriz identidade. No caso unidimensional, corresponde à expressão 3.13 com o uso do sinal de adição. Para o caso da outra matriz, faz-se uso do sinal negativo e as bacias de atração das outras três raízes podem ser obtidas. Em particular, para a obtenção destes gráficos procede-se

da seguinte maneira: a variável $-3 \leq x \leq 3$ é percorrida com acréscimos de 0,001 e cada valor de x é iterado pelo método. Se convergir para uma raiz após um número de iteradas, então a condição inicial é marcada.

Há uma maneira direta de obter as raízes da função $g(x) = f(x) - x$, que correspondem aos pontos fixos do mapa. Para obter os pontos fixos da n -ésima iterada, basta substituir $\mathbf{f}(\mathbf{r}_n)$ por $\mathbf{f}^{[n]}(\mathbf{r}_0)$ na expressão (3.11).

Em princípio, é possível utilizar o método SD, para encontrar as OPIs de mapas hamiltonianos. No capítulo 2, foram apresentados os pontos fixos do mapa. Posteriormente, no tratamento das variedades, verifica-se que a intersecção das variedades estável e instável resultam em um ponto de algum período do mapa.

Como em sistemas bidimensionais em geral são necessárias somente cinco das oito matrizes de estabilização (apêndice A), então os sistemas transformados para o mapa padrão são dados a seguir:

$$S_k : \begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \vartheta [f_{1,2}(\theta_n, L_n) - \theta_n] \\ L_{n+1} = L_n + \vartheta [f_{1,2}(\theta_n, L_n) - L_n] \end{cases} \quad (3.14)$$

Emprega-se a notação $\mathcal{M} : f_{1,2}(\theta_n, L_n) = (\theta_n + L_{n+1}, L_n + \frac{K}{2\pi} \text{sen } 2\pi\theta_n) \pmod{1}$, com os índices de f na expressão (3.14) denotando a possibilidade de troca dos sistemas com a aplicação da matriz de estabilização⁶. O parâmetro ϑ corresponde ao parâmetro de estabilização.

Na figura 3.11 as órbitas de período 2, 3 e 4, encontradas com o método SD para $K = 1,5$ no mapa padrão são apresentadas. No mapa padrão, inicialmente para os pontos de período 2 são utilizados $n \sim 10^4$ iteradas e $\vartheta \sim 10^{-2}$.

As ilhas de estabilidade estão imersas no mar caótico (trajetória típica) e as ilhas correspondem à pontos hiperbólicos de algum período. A hierarquia das ilhas pode ser verificada com o aumento das regiões ao redor das ilhas. No mapa padrão, serão ilhas menores de algum período que circundam uma ilha “principal” que também corresponde a um ponto de algum período, maior do que o das ilhas menores.

Os pontos periódicos se repetem sob aplicação do mapa. Como um ponto de período n , por exemplo, é ponto fixo da n -ésima iterada do mapa, então deve se repetir em n iterações. Portanto, um ponto periódico mapeia para outro ponto periódico, de mesmo

⁶Conforme explicitado no apêndice, existem oito possibilidades para a matriz de estabilização quando se trata de sistemas bidimensionais. Uma delas é uma matriz de permutação e outra delas é a matriz identidade.

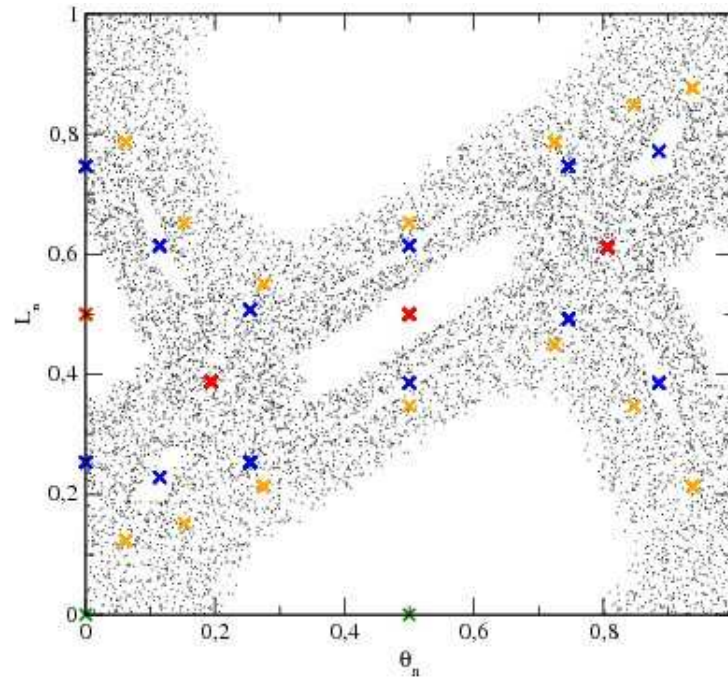


Figura 3.11: Pontos de período 2 (em vermelho), 3 (em azul) e 4 (em laranja), para o mapa padrão (mod 1) com $K = 1,5$ e uma trajetória típica (pontos em preto). Os pontos fixos estão mostrados em verde para fins didáticos.

período, até que se repita novamente. Isto ocorre independentemente da estabilidade da órbita. De fato, a influência da estabilidade na periodicidade de uma órbita está relacionada a algum erro numérico ou à vizinhança de algum ponto periódico da órbita. Se a órbita for estável, então uma condição inicial vizinha deve convergir para esta órbita periódica. Por outro lado, se a órbita periódica for instável, haverá divergência da órbita vizinha a cada passo. Contudo, pontos da órbita instável também mapeiam para pontos da mesma órbita periódica.

Com efeito, os pontos apresentados na figura 3.11 mapeiam para os outros pontos da mesma órbita. Um cálculo simples para os pontos em vermelho, que são pontos de período 2, ilustram este aspecto.

Seja, por exemplo, $(x_0, y_0) = (0, 1/2)$. Conseqüentemente:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{K}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi x_0 \\
y_1 &= \frac{1}{2} \\
x_1 &= x_0 + y_1 \\
x_1 &= \frac{1}{2} \\
y_2 &= \frac{1}{2} \\
x_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

onde, pela aplicação do módulo 1 retorna para $x_2 = 0$. Portanto, $(x_0, y_0) = (x_2, y_2)$. Note que o ponto $(1/2, 1/2)$ também se encontra no gráfico da figura 3.11, afinal, é um ponto de período 2. Tomando este ponto como condição inicial, deve-se retornar a ele após a segunda iterada. O mesmo ocorre com os outros pontos marcados de mesma cor.

Na figura 3.11, os pontos fixos $(0,0)$ estão marcados em verde, que são pontos de período 1. É natural obter estes pontos na contagem de órbitas com o método SD, pois um ponto fixo será ponto fixo para qualquer iterada.

3.2 Os Expoentes de Lyapunov

Sistemas dinâmicos a tempo discreto, não-invertíveis e unidimensionais, podem apresentar caos. Uma das evidências disto pode ser obtida pelo cálculo dos expoentes de Lyapunov. Para uma maior compreensão sobre esta importante questão da estabilidade, será introduzida a seguir a definição de estabilidade no sentido de Lyapunov. Para tanto, considere um campo vetorial $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{r})$.

Definição 7 *Uma solução $\bar{\mathbf{r}}(t)$ é dita estável no sentido de Lyapunov se, dado $\beta > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que, para qualquer outra solução do campo vetorial, $\mathbf{r}(t)$ satisfazendo $\|\bar{\mathbf{r}}(t_0) - \mathbf{r}(t_0)\| < \alpha$, então $\|\bar{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{r}(t)\| < \beta$ para $t > t_0$, onde $t_0 \in \mathbb{R}$.*

Definição 8 *Uma solução $\bar{\mathbf{r}}(t)$ é dita assintoticamente estável se for estável no sentido de Lyapunov e para qualquer outra solução $\mathbf{r}(t)$, existe uma constante $a > 0$ tal que, se $\|\bar{\mathbf{r}}(t_0) - \mathbf{r}(t_0)\| < a$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{r}(t)\| = 0$.*

Considerando a definição 7, uma solução será instável se divergir de uma outra solução, suficientemente próxima, do sistema. Esta divergência se dá exponencialmente. Como

foi verificado da linearização do sistema, a estabilidade dependerá fundamentalmente da derivada. No caso N -dimensional, dependerá da matriz jacobiana calculada no ponto.

A estabilidade das órbitas periódicas neste contexto é determinada pelo produtório das derivadas ponto a ponto, resultado proveniente da regra da cadeia aplicada ao ciclo- n . Em sistemas N -dimensionais, depende do produtório de n matrizes jacobianas em cada ponto do ciclo. Nesta seção discute-se o caso geral no qual os pontos da órbita não estão necessariamente sobre uma órbita periódica. Embora uma aplicação caótica resulte em órbitas periódicas que cobrem densamente a região (de acordo com a definição 11) acessível às trajetórias caóticas, conforme será apresentado posteriormente na definição 11, o interesse é definir os expoentes característicos de Lyapunov em relação a uma órbita que não seja necessariamente periódica.

No contexto das órbitas periódicas, obtém-se alguma luz acerca dos expoentes de Lyapunov retornando à expressão (3.2). Suponha de início um difeomorfismo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se, de acordo com a definição 6, um conjunto $P = \{x_i\}_{i=0}^{n-1}$ corresponder a uma órbita periódica para f , isto é $x_n = x_0$, então a derivada da n -ésima aplicação é:

$$\frac{df^{[n]}(x)}{dx}\Big|_{x_0} = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i),$$

onde $f'(x_i) = \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x_i}$. Como ilustração, considere o caso em que $\prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) = 2^n$. Isto significa que a cada iterada para a órbita de x_0 , a distância entre o ciclo- n e a órbita vizinha dobra em média. Corresponde então a uma avaliação média das distâncias a cada iterada. Podemos definir o *número de Lyapunov* como sendo esta distância média em cada iterada, ou seja, 2.

É de interesse, no entanto, obter uma expressão para quaisquer órbitas, mesmo não sendo uma órbita periódica. Para tanto, define-se a seguir o número de Lyapunov.

Definição 9 *Seja f um difeomorfismo de classe C^n . O número de Lyapunov da órbita $\{x_0, x_1, \dots\}$ é definido como:*

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\prod_{i=0}^{n-1} \left| \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_i} \right| \right]^{1/n}, \quad (3.15)$$

se o limite existir.

Definição 10 *Seja f nas condições da definição anterior. O expoente de Lyapunov h é*

dado por:

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_i \ln |f'(x_i)|, \quad (3.16)$$

onde $f'(x_i)$ denota a derivada de f no ponto x_i .

De acordo com as definições acima, o expoente de Lyapunov corresponde ao logaritmo natural do número de Lyapunov, ou seja:

$$\ln M = \ln \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{n-1} \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_i} \right]^{1/n} \quad (3.17)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_i} \right| \quad (3.18)$$

$$\ln M = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_i}. \quad (3.19)$$

Também é importante notar que a definição de número de Lyapunov toma a forma de uma média geométrica das distâncias.

Os expoentes de Lyapunov fornecem um indício de um sistema caótico. Isto porque a rigor não se pode dizer que um sistema é caótico somente pelo fato de um dos expoentes de Lyapunov ser positivo. Esta é uma condição necessária para afirmar sobre a presença de caos em um dado sistema dinâmico não-linear, nas condições já discutidas. A seguir é apresentada a definição de R. Devaney [5] para um sistema caótico.

Definição 11 *Seja \mathbb{A} um conjunto e $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ um difeomorfismo. Então f é caótico em \mathbb{A} se*

1. *f apresenta dependência sensível às condições iniciais;*
2. *f é topologicamente transitiva;*
3. *os pontos periódicos de f são densos em \mathbb{A} .*

A dependência sensível às condições iniciais é quantificada por meio dos expoentes de Lyapunov. Em particular, as duas últimas condições são extremamente trabalhosas de serem demonstradas para a maioria dos sistemas de interesse e a segunda condição ocorre se, e somente se, ocorrer a terceira.

Um exemplo bastante conhecido, paradigma de caos unidimensional, é o do mapa logístico [1–3]. Uma das formulações possíveis para este sistema é dada a seguir

$$\mathcal{M}_L : x_{n+1} = r_L x_n (1 - x_n), \quad (3.20)$$

onde r_L é o parâmetro de controle. Na figura 3.12 são apresentadas as três primeiras iteradas para o mapa logístico \mathcal{M}_L . A primeira iterada é apresentada em preto, a segunda em azul e a terceira em verde. A reta $x_{n+1} = x_n$ é apresentada em vermelho. A intersecção de alguma iterada com a reta correspondente ao mapeamento definido pela função identidade consiste em um ponto fixo do mapa.

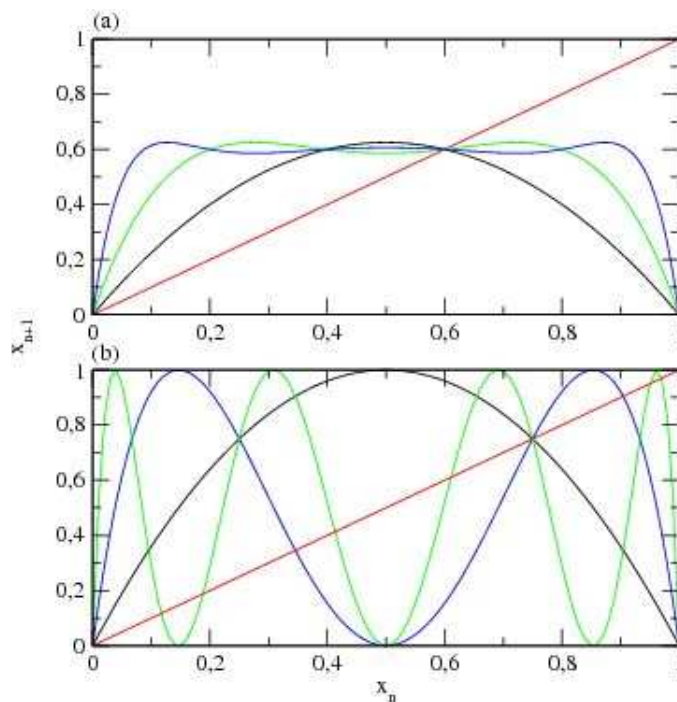


Figura 3.12: (a) As três primeiras iteradas do mapa logístico com parâmetro $r_L = 2,5$. Em preto, a primeira iterada. A segunda iterada corresponde à curva em azul e em verde se encontra a terceira iterada ao passo que em vermelho é apresentada a reta $x_{n+1} = x_n$ (b) O mesmo para $r_L = 4$.

Os pontos fixos do mapa (3.20) são $x^* = 0$ e $x^* = 1 - 1/r_L$, com $r_L \in (0, 4]$. Para $r_L = 4$ ambos os pontos são instáveis. Note no gráfico 3.12 que para $r_L = 2,5$ as três primeiras iteradas interceptam a reta $x_{n+1} = x_n$ apenas duas vezes, ao passo que para $r_L = 4$, ocorrem duas, quatro e oito intersecções, respectivamente. Significa então que o número de pontos fixos varia com o número de iteradas: 2^n .

A transição para o caos pode ser verificada no chamado *diagrama de bifurcação*, obtido tomando uma condição inicial x_0 e iterando um grande número de vezes para um dado valor de r_L [2–4, 11, 20]. Após adicionar um incremento em r_L , itera-se novamente o mapa e marcam-se os pontos para os quais a variável x_n converge. Este procedimento é efetuado

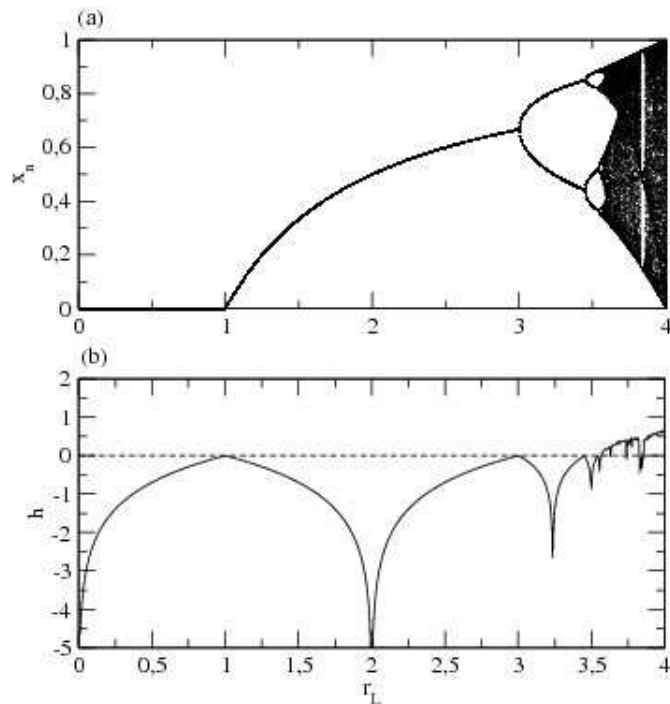


Figura 3.13: (a) Diagrama de bifurcação do mapa logístico para uma condição inicial iterada 1000 vezes desprezando 600 iteradas de tempo transiente. (b) Expoente de Lyapunov em função de r_L .

até que $r_L = 4$.

No gráfico 3.13a verifica-se a transição para o caos em uma das chamadas rotas para o caos⁷. No início, $r_L \in [1, 3]$, a solução converge para um ponto fixo, que muda de posição à medida que r_L aumenta. Quando $r_L \in [3, 1 + \sqrt{6}]$, é observada a primeira bifurcação: x_n converge para uma órbita de período 2. Posteriormente, este comportamento se repete para valores maiores de r_L , *i.e.*, seu período duplica. Embora ocorra duplicação de período, a solução que antes era estável não deixa de existir. Por outro lado, ela torna-se instável, mas ainda é uma solução do sistema.

Com efeito, nisto consiste a definição de uma bifurcação: é a mudança de estabilidade (natureza) ou do número de pontos fixos com a variação de algum parâmetro de controle do sistema. Por serem instáveis (após a bifurcação) não se observam estas soluções em um diagrama de bifurcações usual.

Na figura 3.13b, é apresentado o expoente de Lyapunov h para cada valor de $r_L \in (0, 4]$. A comparação com o diagrama de bifurcações é estabelecida deste modo: quando $h = 0$, ocorre uma bifurcação. Note que para $r_L > 3,5$ o expoente de Lyapunov é positivo,

⁷Escolhe-se um número de iteradas não muito grande comparado a outros sistemas e um tempo transiente grande, pois é sabido que estes valores são adequados e não produzem muitos pontos redundantes, tornando a figura computacionalmente mais leve. Um teste poderia ser feito neste sentido, tomando iteradas maiores e menores e o mesmo para os transientes tomando muitas condições iniciais.

passando por alguns valores negativos e nulos⁸. Onde $h > 0$, há a relação direta com a região caótica, mostrada no diagrama de bifurcações. A região caótica de acordo com a duplicação de período, ocorre em razão das infinitas órbitas instáveis imersas no atrator para $r_L \approx 4$. A descrição bidimensional não é diferente. Agora, contudo, a estabilidade depende dos autovalores da matriz jacobiana. Assim, a cada iterada duas órbitas se afastam a uma taxa dada pelo maior autovalor em módulo.

Retomando o problema de autovetores e autovalores, após evoluir o sistema, o que corresponde ao produtório de matrizes jacobianas em cada ponto da trajetória⁹, então tem-se:

$$h_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|D\mathcal{M}^{[n]} \cdot \mathbf{v}_k\|, \quad (3.21)$$

onde \mathbf{v}_k corresponde ao k -ésimo autovetor, associado ao autovalor λ_k . Esta quantidade fornece desta maneira a informação local da taxa de divergência de trajetórias vizinhas, ou seja, é um conceito local de estabilidade. Estas k quantidades correspondem aos k expoentes de Lyapunov em um sistema N dimensional. Usualmente $k = N$, *i.e.*, não há degenerescência, essencialmente para sistemas conservativos, onde os autovalores ocorrem aos pares.

Aqui a notação $D\mathcal{M}^{[n]}$ indica a matriz jacobiana da n -ésima iterada calculada para uma condição inicial qualquer. De fato, a quantidade (3.21) não depende da condição inicial (para qualquer k), uma vez que no limite $n \rightarrow \infty$ percorrem-se todas as regiões acessíveis do espaço de fases do sistema analisado.

Considere um mapa bidimensional denotado por \mathcal{M} . Seja \mathbf{r}_0 um ponto inicial cuja vizinhança tem tamanho ϵ_0 . A figura 3.14 ilustra esquematicamente o que ocorre com os pontos \mathbf{r} tais que $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| < \epsilon_0$ com a aplicação do mapa.

Na figura 3.14, uma bola de condições iniciais torna-se um elipsóide sob ação do mapa. O raio inicialmente é de ϵ_0 . A aplicação do mapa contrai uma direção da bola por um fator h_1 e expande a outra direção do bola por um fator h_2 , ou seja, os expoentes de Lyapunov. Neste caso, tem-se dois expoentes associados $k = N = 2$. As autodireções são localmente (isto é, para ϵ_0 pequeno, na vizinhança linear do ponto \mathbf{r}_0) expandidas por \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , ou seja, os autovetores, um resultado de particular importância.

Generalizando, em sistemas N -dimensionais, existem no máximo N expoentes de Lyapunov. Estes expoentes correspondem à taxa de divergência exponencial de um volume

⁸As janelas periódicas: existem regiões onde as soluções estáveis tomam lugar em meio a região caótica e isto pode ser verificado no diagrama de bifurcações.

⁹Resultado proveniente da regra da cadeia.

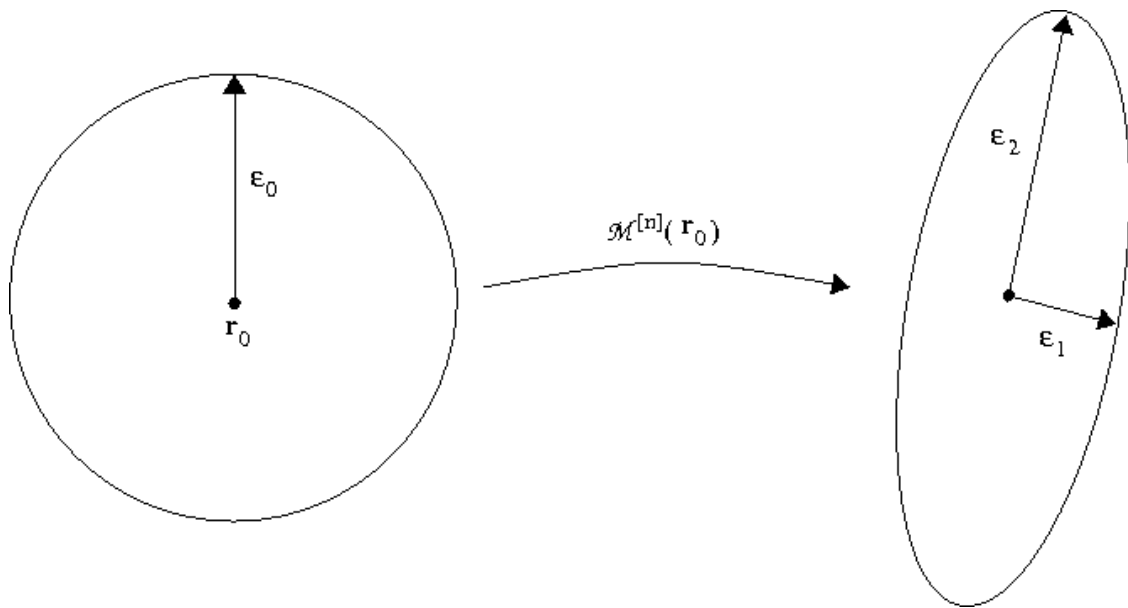


Figura 3.14: Representação esquemática da ação do mapa em uma região de condições iniciais de raio inicial ε_0 . Após a aplicação de um mapa \mathcal{M} há contração em uma direção, *vide* eixo menor da elipse de tamanho $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_0 \exp(nh_1)$, e expansão na outra direção, *vide* eixo maior da elipse de tamanho $\varepsilon_2 \sim \varepsilon_0 \exp(nh_2)$.

de condições iniciais no espaço de fases, conforme ilustrado na figura 3.14.

O teorema do divergente diz que o volume de condições iniciais evolui de acordo com $V(t) = V(t_0)e^{ct}$. Na discussão acima, tratou-se de um mapa, cujo número de iterações é n . Se for efetuada a substituição de n por t , para denotar o tempo que flui continuamente, obtém-se definições análogas de um mapa para o número de Lyapunov e os expoentes de Lyapunov de um fluxo. Portanto, será discutido a seguir sobre a taxa de variação de volume em um fluxo que pode apresentar caos. Isto será feito com o objetivo de atribuir um significado à constante c que aparece no teorema de Liouville (capítulo 2).

Seja $L = L(t)$ um comprimento de condições iniciais em um instante $t > 0$ qualquer. A evolução deste comprimento de condições iniciais se dá por: $L(t) = L_0 e^{h_1 t}$, sendo $L_0 = L(t_0)$ o comprimento inicial. Se $h_1 = 0$, então o comprimento é preservado. Se $h_1 < 0$ há uma contração e se $h_1 > 0$ uma expansão deste comprimento L_0 . Considere agora um volume, dado por: $V(t) = L_1(t)L_2(t)L_3(t) = L_0^3 e^{(h_1+h_2+h_3)t}$. Naturalmente, o volume de condições iniciais permanecerá o mesmo se $\sum_i h_i = 0$, isto é, um sistema conservativo. Se $\sum_i h_i < 0$ haverá contração de volume e o sistema é dito dissipativo. Da estrutura simplética dos sistemas hamiltonianos, sabe-se que $\sum_i^{2N} h_i = 0$, para todo $N > 0$. Em sistemas como o mapa padrão, o interesse é usualmente na distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, quantidade introduzida na próxima seção. Isto porque as propriedades desta distribuição permitem caracterizar regiões importantes do espaço de fases de sistemas

hamiltonianos. Neste contexto, a constante c é equivalente à soma dos expoentes de Lyapunov.

3.2.1 Os Expoentes de Lyapunov a Tempo Finito

Enquanto os expoentes de Lyapunov são definidos para $n \rightarrow \infty$, os expoentes de Lyapunov a tempo finito (ELTF) são definidos para um intervalo de tempo pré-determinado. Os expoentes de Lyapunov praticamente não se alteram com as condições iniciais. Ocorre justamente o contrário com os ELTF. Neste caso, dependem da condição inicial e é esta propriedade que permite uma caracterização de regiões conhecidas como regiões de armadilhas dinâmicas (*vide* capítulo 2). O cálculo dos ELTF é análogo ao cálculo dos expoentes de Lyapunov, com a diferença de que n é finito:

$$h_k^{(n)}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{n} \ln \|D\mathcal{M}^{[n]}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{v}_k\|. \quad (3.22)$$

Para tanto, são tomadas condições iniciais escolhidas aleatoriamente, com respeito à medida de Lebesgue da órbita caótica. Isso significa que estas condições iniciais são típicas em \mathcal{M} . Seja $\mathcal{P}(h_k^{(n)}, \mathbf{r}_0)$ a densidade de probabilidade de ocorrência do k -ésimo ELTF- n . Considere uma função qualquer dos ELTF $\varphi(h_k^{(n)})$. Sua média sob a medida é obtida por:

$$\langle \varphi(h_k^{(n)}) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(h_k^{(n)}) \mathcal{P}(h_k^{(n)}, \mathbf{r}_0) dh_k}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(h_k^{(n)}, \mathbf{r}_0) dh_k}. \quad (3.23)$$

O objetivo é obter as distribuições dos ELTF para alguns valores do parâmetro de controle K do mapa padrão. Conforme já comentado, estas distribuições permitem afirmar sobre a existência de regiões de aprisionamento das trajetórias.

Como o interesse é nos expoentes de Lyapunov a tempo finito, então a importância reside no estudo da distribuição desses expoentes no mapa padrão para valores determinados de K .

Existem certas regiões para o mapa padrão onde as órbitas passam mais tempo para valores específicos de K . Estes valores específicos correspondem justamente a valores onde as ilhas de estabilidade ainda estão presentes no espaço de fases do mapa [26, 27].

Com efeito, o aprisionamento das órbitas ocorre em regiões próximas às ilhas, porém “fora” das mesmas. Assim, espera-se obter dois picos na distribuição dos ELTF, correspondendo a um “segundo mar caótico”. Há um primeiro pico com valor positivo em razão de ser associado ao mar caótico. Devido a estrutura simplética do mapa, ocorrem valores

simétricos dos expoentes de Lyapunov.

Na figura 3.15 é apresentada a distribuição dos ELTF-100 para o caso em que $K = 1,5$ no mapa padrão (mod 1). A distribuição é bimodal. Neste gráfico apresentam-se apenas os valores positivos dos ELTF.

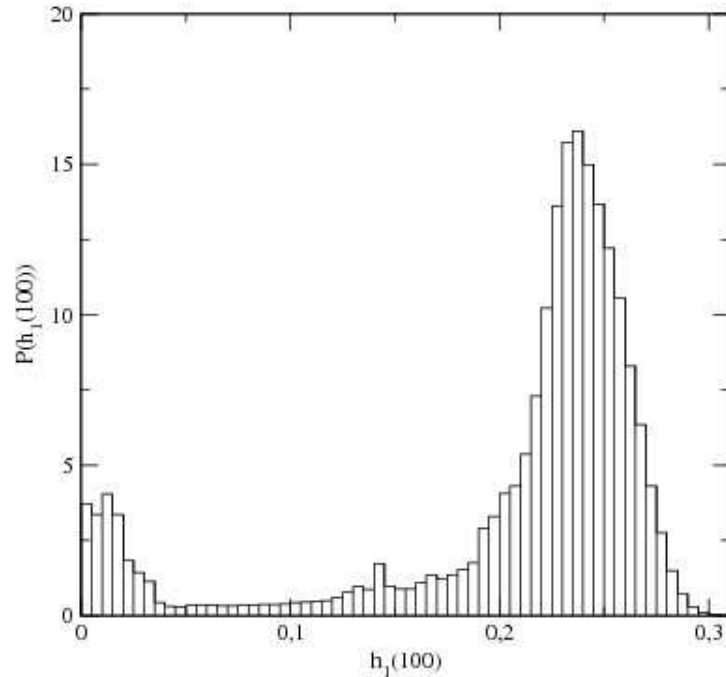


Figura 3.15: Distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito ($n = 100$) para o mapa padrão (mod 1) com $K = 1,5$. A distribuição dos ELTF-100 indica que existem regiões de maior permanência da trajetória, em razão do aspecto bimodal.

À medida em que aumentamos K , mais ilhas de estabilidade são destruídas, dando lugar às órbitas caóticas (mar caótico). Até que, para $K \gg 1$, acredita-se, em princípio, não existirem mais ilhas de estabilidade. A distribuição dos ELTF torna-se então unimodal, de acordo com a figura 3.16. A distribuição para $K = 1,5$ é bimodal uma vez que ocorre aprisionamento das trajetórias e, portanto, os expoentes de Lyapunov associados àquela região são pequenos, em módulo, em comparação aos ELTF da região do mar caótico. Como para $K \gg 1$ o mar caótico praticamente predomina em todo o espaço de fases, a distribuição apresenta-se unimodal.

Graficamente, é possível identificar regiões de aprisionamento da trajetória no espaço de fases. Ao mostrar algumas órbitas da secção de Poincaré do rotor pulsado para alguns valores de K , geralmente após a quebra do toro mais irracional, verifica-se visualmente regiões onde, aparentemente, as órbitas passam a maior parte do tempo. Numericamente, é possível afirmar algo sobre o aprisionamento de trajetórias por meio dos histogramas das variáveis ângulo-ação no mapa padrão. A figura 3.17 apresenta o histograma citado. Note

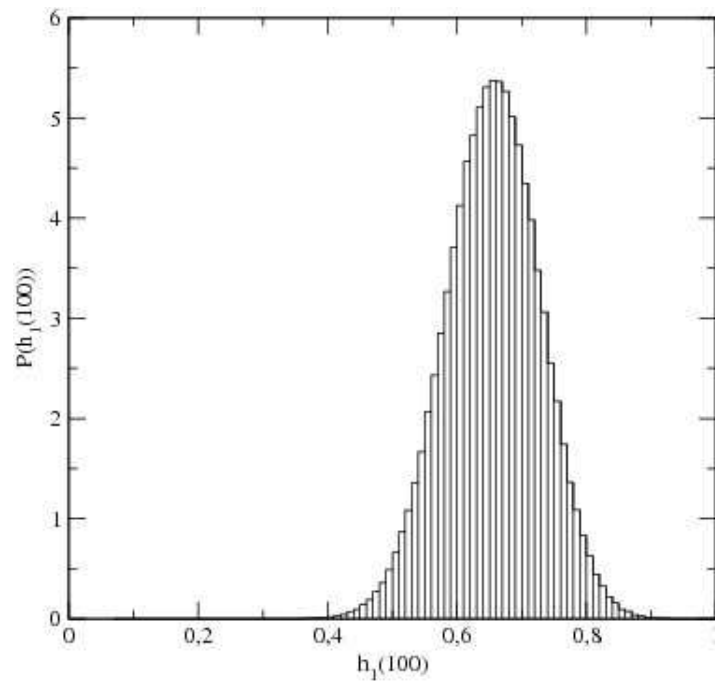


Figura 3.16: Distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito ($n = 100$) para o mapa padrão (mod 1) com $K = 10$. Como a distribuição é unimodal, existe apenas um valor médio para o maior expoente de Lyapunov.

que as órbitas do mapa não apresentam uma uniformidade para este valor do parâmetro, no sentido de variarem entre 0 e 1 de modo a permanecer mais tempo em certas regiões.

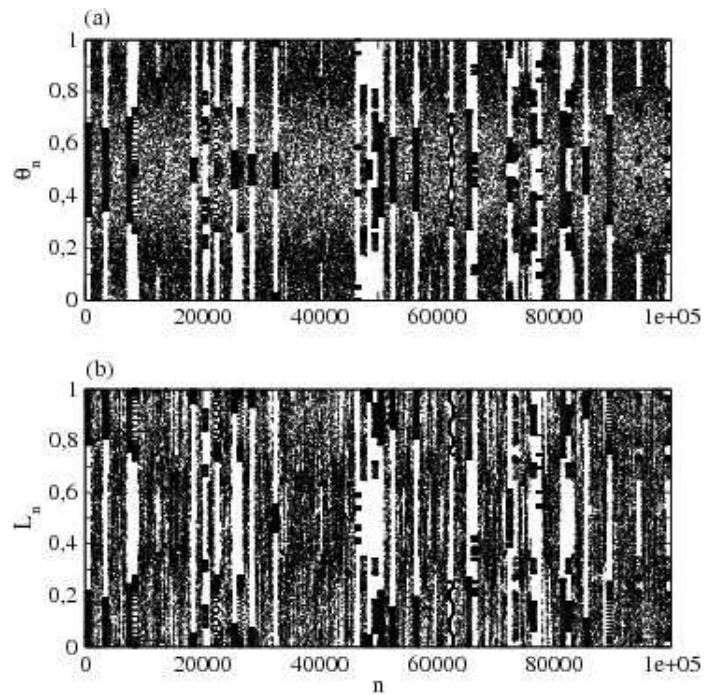


Figura 3.17: Os gráficos (a) e (b) mostram a série temporal para a variável ângulo θ_n e o momentum L_n , respectivamente, no mapa de Poincaré do rotor pulsado para $K = 1, 5$.

O aumento de K para um valor consideravelmente grande conduz às séries temporais

mostradas na figura 3.18. Note que a série é aparentemente uniforme. Isto significa que à medida que n cresce, quaisquer valores são possíveis dentro de $[0, 1)$.

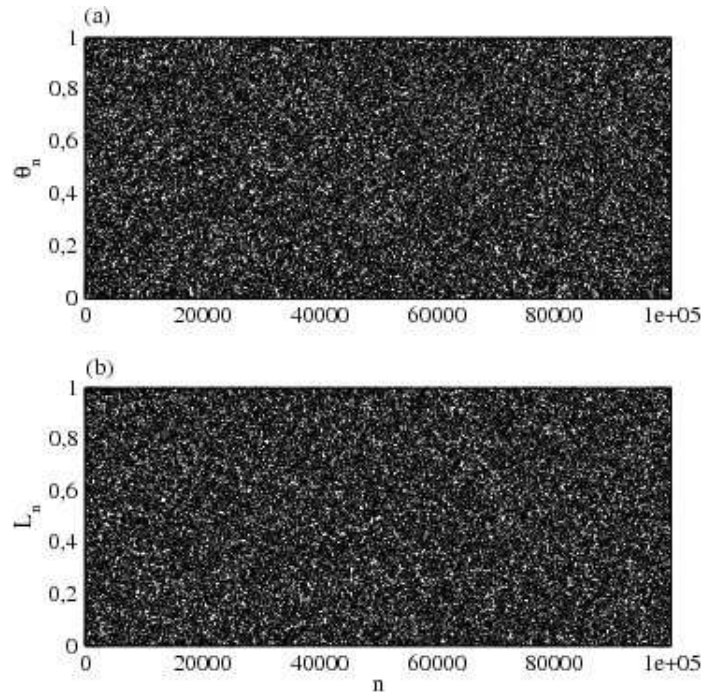


Figura 3.18: Os gráficos (a) e (b) mostram a série temporal para a variável ângulo θ_n e o momentum L_n , respectivamente, no mapa de Poincaré do rotor pulsado para $K = 10$.

Para verificar a frequência de ocorrência de faixas de valores entre $[0, 1)$ para cada uma das séries temporais mostradas, foram feitos histogramas das variáveis θ_n e L_n . Conforme mostra a figura 3.19, existem faixas de valores que ocorrem com mais frequência. Em comparação com o gráfico 3.21, pode-se verificar que estes valores para as variáveis fornecem localizações próximas às ilhas de estabilidade.

Com o aumento do parâmetro de controle, maior será a região do mar caótico. Neste caso, os histogramas das variáveis tendem a se aproximar de uma distribuição constante, o que sugere a inexistência de regiões de aprisionamento das órbitas, conforme ilustram os gráficos da figura 3.20. Na figura 3.20, é possível observar que a distribuição aproxima-se de uma distribuição constante.

Para fins comparativos, são mostradas 50 órbitas com aproximadamente 1000 iteradas. Para os histogramas empregam-se basicamente o mesmo número de condições iniciais e de iteradas.

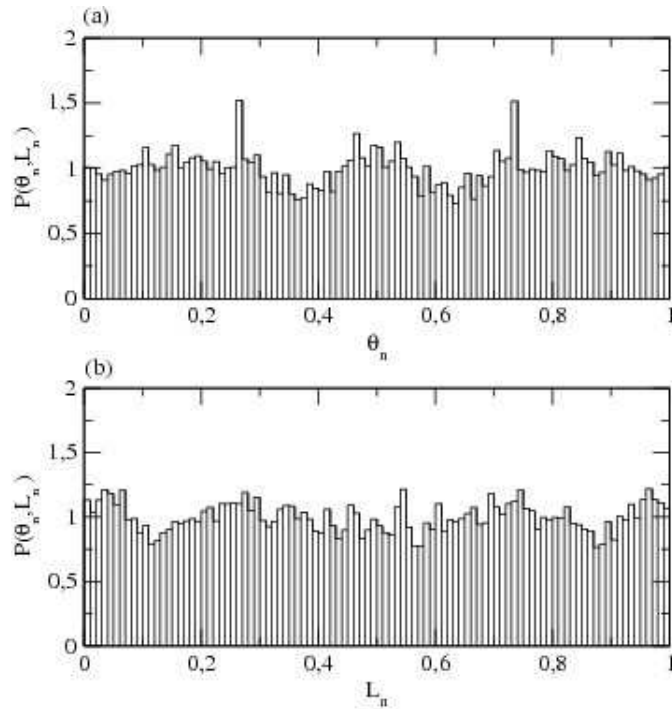


Figura 3.19: Em (a) e (b) são mostrados os histogramas das respectivas variáveis. $P(\theta_n, L_n)$ denota a distribuição das variáveis θ_n e L_n em razão de serem dependentes. Neste gráfico, $K = 1,5$.

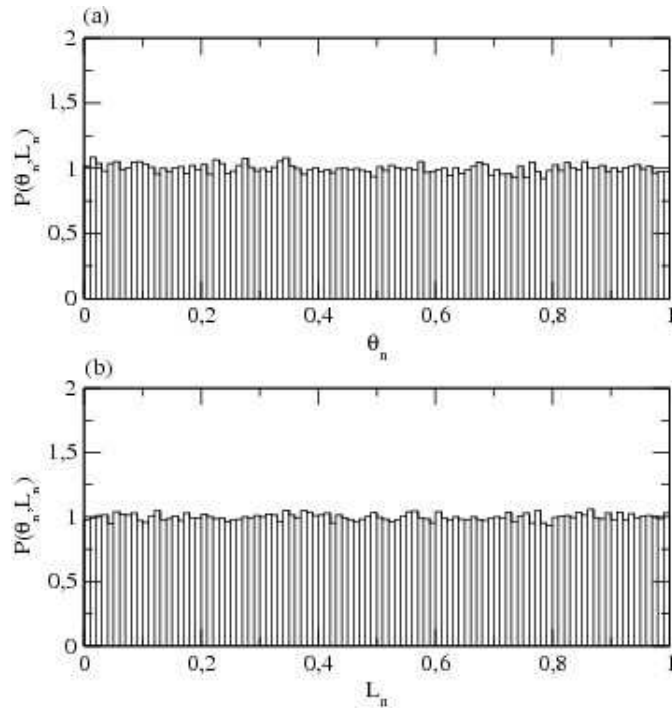


Figura 3.20: Em (a) e (b) são mostrados os histogramas das respectivas variáveis. A distribuição das variáveis θ_n e L_n é denotada por $P(\theta_n, L_n)$ em razão de serem dependentes. Neste gráfico, $K = 10$.

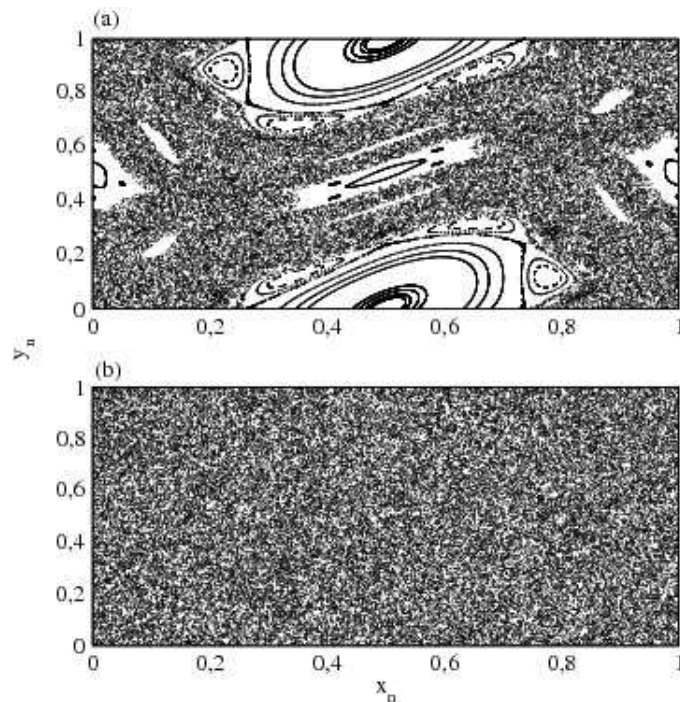


Figura 3.21: Algumas órbitas no espaço de fases para o mapa padrão com (a) $K = 1,5$ e (b) $K = 10$.

3.3 Transitividade e Conjugacidade

Uma das condições essenciais para a ocorrência de caos é a transitividade topológica.

Definição 12 *Suponha que J seja um intervalo e $f : J \rightarrow J$. Então f é transitiva se para qualquer par de intervalos abertos $U \neq \emptyset$ e $V \neq \emptyset$ que estejam em J , existe um m , inteiro e positivo, tal que $f^{[m]}(U)$ e V possuem um elemento em comum.*

A definição acima equivale a dizer que, se o mapeamento f apresenta transitividade, então é possível observar a existência de uma órbita que passa arbitrariamente próxima à qualquer órbita de referência, basta esperar um tempo suficiente. Isto sugere um critério para determinar transitividade, pois, provar transitividade pela definição não é tarefa simples.

Um critério rigoroso para provar transitividade consiste em verificar se um conjunto é denso.

Definição 13 *Um subconjunto A do intervalo J é denso em J se A intercepta todo subconjunto não-vazio de J .*

Como ilustração considere o intervalo $[0, 1]$. A coleção de todos os números racionais na forma p/q ($p, q \in \mathbb{Z}$) no intervalo $[0, 1]$ é denso neste intervalo.

Teorema 4 *Suponha que J seja um intervalo fechado e $f : J \rightarrow J$. Então f é transitiva se, e somente se, existe x em J cuja órbita é densa em J .*

Outro conceito importante da teoria de sistemas dinâmicos é o de conjugacidade. Em resumo, se dois mapas são conjugados, então apresentam as mesmas propriedades, tais como a transitividade e, conseqüentemente, a existência de um conjunto denso de pontos periódicos.

Definição 14 *Sejam J e G intervalos, e suponha $f : J \rightarrow J$ e $g : G \rightarrow G$. Então f e g são conjugadas se existe um homeomorfismo $H : J \rightarrow G$ tal que $H \circ f = g \circ H$. Neste caso, escreve-se $f \stackrel{H}{\sim} g$.*

De maneira a ilustrar com um dos exemplos mais conhecidos de conjugacidade, considere o mapa da tenda [2–4], que pode ser dado por [3]:

$$\mathcal{M}_T : x_{n+1} = 1 - 2 \left| x_n - \frac{1}{2} \right|, \quad (3.24)$$

com $x_n \in [0, 1]$. Na figura 3.22 as três primeiras iteradas do mapa da tenda podem ser conferidas.

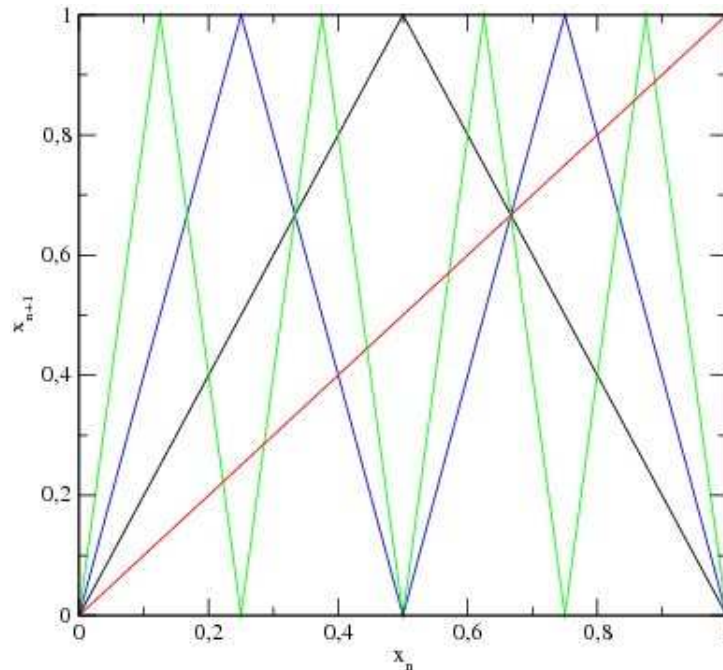


Figura 3.22: As três primeiras iteradas do mapa da tenda e o mapa $x_{n+1} = x_n$. Analogamente ao mapa logístico, a cor preta representa a primeira iterada do mapa da tenda. A cor azul corresponde à segunda iterada e a terceira iterada está representada em verde. A reta em vermelho consiste do mapeamento $x_{n+1} = x_n$.

Note a semelhança com o mapa logístico: o mapa $x_{n+1} = x_n$ intercepta a primeira iterada duas vezes: os dois pontos fixos. Na segunda iterada (em azul), ocorrem quatro intersecções: quatro pontos fixos da segunda iterada. São quatro pontos de período 2. A terceira iterada (verde) possui oito pontos fixos. Assim o número de pontos fixos cresce com o número de iteradas do mesmo modo que no mapa logístico: 2^n .

Com efeito, há um homeomorfismo como requerido na definição 14 tal que $H \circ \mathcal{M}_L = \mathcal{M}_T \circ H$, dado por [2-4]:

$$H(x) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad (3.25)$$

que equivale à transformação de coordenadas $x = \text{sen}^2(\pi/2)y = \frac{1}{2}[1 - \cos \pi y]$. Esta conjugacidade se dá para $r_L = 4$. É possível demonstrar que as órbitas periódicas são densas no mapa da tenda [3, 4]. Em razão de serem os mapas topologicamente conjugados, as órbitas periódicas são densas para o mapa logístico com $r_L = 4$.

A questão da transitividade é uma das bases para se provar com rigorosidade um resultado importante que diz respeito à validade das soluções numéricas em sistemas caóticos, aplicação de um procedimento chamado *sombreamento*. Outra base fundamental é constituída pelas variedades, pois, principalmente em mapas hamiltonianos ocorrem fenômenos que serão discutidos no capítulo 4 associados à estrutura destes sistemas. Em particular, a conjugacidade está relacionada à possibilidade de derivar o mapa padrão de outros sistemas físicos.

3.4 As Variedades

No capítulo 2, comentou-se sobre a existência de espaços que localmente assemelham-se ao espaço euclidiano \mathbb{R}^d , para algum $d \in \mathbb{N}$. Em alguns problemas tradicionais são empregadas as noções básicas de métrica e espaço. Por outro lado, alguns problemas apresentam outro tipo de métrica e espaços que são mais complicados do que o espaço euclidiano. Para tratar de problemas cuja topologia não é trivial - no sentido euclidiano - emprega-se a noção das variedades [28, 29].

As variedades são definidas de acordo com o estado assintótico de um conjunto de pontos. Define-se a variedade estável como sendo o conjunto de pontos tais que o conjunto ω -limite desses pontos se aproximam de um estado estável do sistema (ou de uma órbita periódica). De maneira similar, a variedade instável é definida como sendo o conjunto de pontos tais que o conjunto α -limite desses pontos se aproxima de um estado estável (ou de uma órbita periódica) do sistema. Correspondentemente, esta definição aplicada a um

mapa assume a existência da inversa do mapa por razões que se tornarão claras adiante.

Se $\dim(W)$ denotar a dimensão de uma variedade, então: $\dim(W^s) = N_s$ denota a dimensão da variedade estável e $\dim(W^u) = N_u$ a dimensão da variedade instável. A figura 3.23 mostra uma representação para o caso $N_s = 1$ e $N_u = 1$. Note que neste caso não há *variedade central*, associada a um autovalor nulo. Portanto, chamando W^c a variedade central e $\dim(W^c) = N_c$ sua dimensão, então neste exemplo $N_c = 0$. Conseqüentemente, $N_s + N_u + N_c = 1 + 1 + 0 = 2$, e corresponde à dimensão do sistema. Em geral, $N_c + N_s + N_u = N$.

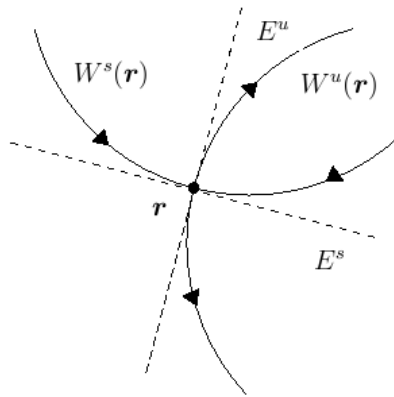


Figura 3.23: Ilustração das variedades estável e instável de um ponto fixo qualquer \mathbf{r} em um sistema bidimensional.

Os autovalores da matriz jacobiana calculada em um ponto estável do sistema¹⁰ (ou em uma órbita periódica) podem ser separados em três grupos. Denota-se E^s , E^u e E^c os subespaços expandidos pelos autovetores com parte real negativa, positiva e nula, respectivamente. No caso de sistemas lineares, as variedades coincidem com estes subespaços.

Considere inicialmente um sistema bidimensional a tempo contínuo

$$\mathbf{F} : \begin{cases} \dot{x} = ay \\ \dot{y} = bx \end{cases} \quad (3.26)$$

onde $\dot{r} \equiv dr/dt$.

A matriz jacobiana é:

$$D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

¹⁰No caso de mapas trata-se da matriz jacobiana calculada em um ponto fixo de alguma iterada do mapa.

cujos autovetores são

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

A figura 3.24 mostra o campo vetorial para o caso de uma sela ($|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| > 1$). Note que as as trajetórias acompanham as variedades.

Para mapas a definição das variedades é bastante similar. Seja $W^s(x)$ a variedade estável e $W^u(x)$ a variedade instável de um ponto fixo x :

$$W^s(x) = \{x_0 \in \mathbb{R}^m : f^{[n]}(x_0) \rightarrow f^{[n]}(x), n \rightarrow \infty\} \quad (3.28)$$

$$W^u(x) = \{x_0 \in \mathbb{R}^m : f^{[-n]}(x_0) \rightarrow f^{[-n]}(x), n \rightarrow \infty\}. \quad (3.29)$$

As variedades apresentam a mesma dimensão dos subespaços lineares E^s e E^u e são tangentes a estes subespaços em sistemas não-lineares.

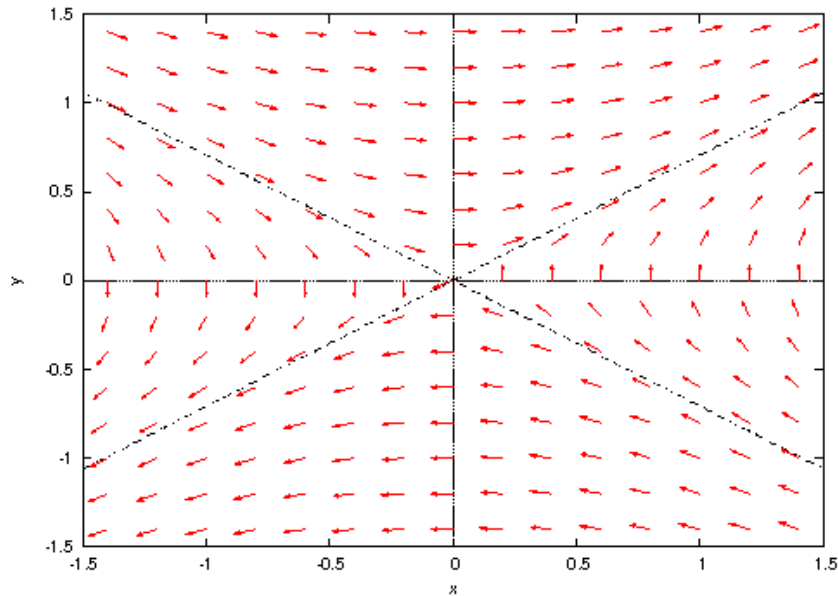


Figura 3.24: Ilustração do campo vetorial obtido da expressão (3.26) para o caso em que $a > b$. Nesta ilustração, $a = 2b$ e $b = 1/2$.

A construção da figura 3.24 é feita da seguinte maneira: o quadrado $[-1,5;1,5] \times [-1,5;1,5]$ é percorrido e a cada ponto é associado um vetor com origem em \mathbf{r} e com direção e sentido determinados por $D\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Neste caso linear, a matriz jacobiana coincide com a matriz dos coeficientes. Logo, as variedades são obtidas por meio dos autovetores da matriz jacobiana, os quais independem do ponto calculado.

Neste caso simples, há a intersecção de duas variedades. O ponto de intersecção das variedades corresponde ao ponto fixo. Para o sistema (3.26), no caso da sela, há um único

ponto fixo, a saber, $(x^*, y^*) = (0, 0)$.

A intersecção das variedades estável e instável de um ponto fixo é chamada *homoclínica*. Quando as variedades de um ponto se interceptam com as variedades de outro ponto fixo, então a intersecção é dita *heteroclínica*. A ocorrência de uma intersecção implica infinitas intersecções de sorte que o caos consiste de um emaranhado de intersecções, em razão da densidade de pontos periódicos exigida pela definição de caos.

As variedades são conjuntos invariantes por construção. Isto significa que pontos nos cruzamentos mapeiam para pontos também em cruzamentos. Em particular, S. Smale mostrou que intersecções homoclínicas implicam dinâmica do tipo obtido pelo mapa da ferradura para altas iteradas do mapa. Um resultado análogo também se aplica ao caso de intersecções heteroclínicas.

Um mapeamento que apresenta caos apresentará um emaranhado de intersecções. Contudo, não são somente as intersecções os fenômenos de interesse. Também podem ocorrer em certos sistemas as tangências homoclínicas e heteroclínicas. Se houver tangência entre as variedades, não há como determinar uma direção estável e outra instável no ponto onde ocorre intersecção. Consequentemente, muitas das propriedades que dependem desta estrutura bem definida não podem ser determinadas.

Em sistemas não-lineares, as variedades são expandidas localmente pelos autovetores da matriz jacobiana calculada em um ponto (fixo), conforme a discussão acima. É possível obter então as variedades como no exemplo linear, embora seja apenas a representação de partes das variedades. Nesta discussão, considerou-se até aqui somente as variedades estável e instável. A questão para tais sistemas, torna-se: como obter uma representação adequada para as variedades estável e instável? De início poderia ser definida uma grade cujas células têm tamanho de um pixel e então a cada ponto pertencente a uma célula, a região seria preenchida densamente.

Considerando o tamanho dos pixels da tela de um monitor (de tubo de raios catódicos, TRC), sabe-se que as variedades estão em algum lugar sob os pontos. Contudo, é óbvio que esta representação é simplificada demais. Não há qualquer informação dinâmica neste tipo de representação.

Por outro lado, pode ser tomada uma bola de condições iniciais com raio ε e muitas condições iniciais interiores à esta bola. Na sequência, a lei de evolução é aplicada a cada condição inicial para algum número de iteradas. Este método, também chamado de

“método do regador”, permite obter uma representação próxima¹¹ das variedades instáveis de um ponto de algum período do mapa para um dado valor do parâmetro de controle.

Este método funciona porque as variedades instáveis devem deixar a bola de condições iniciais. Na verdade, a órbita de cada condição inicial deixa a vizinhança ε após um certo número de iteradas e tende a seguir a variedade instável com a aplicação do mapa.

Para encontrar as variedades estáveis um argumento semelhante é empregado: a variedade do ponto fixo onde a bola está centrada, assintoticamente entra¹² na vizinhança ε . Encontrar esta variedade pelo método do regador é extremamente válido dentro das condições supracitadas (tais como a resolução da tela e a precisão). Para tanto é necessário encontrar a inversa do mapa e evoluir um conjunto de condições iniciais tomados na vizinhança ε de um ponto fixo, pois os pontos na vizinhança ε iterados com a inversa do mapa tendem a deixar a bola de condições iniciais e seguir a variedade estável.

Embora o método descrito acima seja extremamente funcional, não se sabe de imediato, qual deve ser o raio da bola de condições iniciais para que possa ser dito que as condições tomadas dentro desta bola encontram-se de fato na vizinhança linear de um ponto fixo (para alguma iterada do mapa), pois uma vizinhança maior do que a vizinhança linear do ponto fixo pode resultar em variedades de outros pontos, uma vez que a intersecção das variedades se dão em pontos de algum período.

Um teste simples pode ser efetuado para justificar o valor de ε escolhido para apresentar as variedades de alguns pontos periódicos no mapa padrão, o qual será descrito à seguir.

Seja \mathbf{r}^* um ponto fixo (de período 1) para um mapa bidimensional¹³. Deseja-se estimar ε de maneira que toda condição inicial \mathbf{r}_0 que satisfizer $\|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}_0\| < \varepsilon$ encontre-se na vizinhança linear de \mathbf{r}^* .

Tomando uma condição inicial qualquer \mathbf{r}_0 este ponto é mapeado para \mathbf{r}_1 . A distância entre a condição inicial e o ponto fixo será denotada por $d_0 = \|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}_0\|$. A distância entre a primeira iterada de \mathbf{r}_0 e o ponto \mathbf{r}_0 será denotada por $d_1 = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\|$. O ponto obtido na primeira iterada se distancia da condição inicial por um fator $\max_{i=1,2}(\lambda_i)$, isto é: $d_1 = |\lambda|d_0$, onde os λ_i correspondem aos autovalores da matriz jacobiana calculada

¹¹É uma representação próxima porque são obtidas órbitas que acompanham estas variedades. Dentro de uma dada precisão e novamente considerando o tamanho dos pixels da tela de um monitor, então diz-se que são as variedades.

¹²Na realidade, a variedade estável intercepta a variedade instável exatamente no ponto que é o centro da bola ε .

¹³Aqui o mapa não é restrito no toro \mathbb{T}^2 , pois o cálculo efetuado pode ser aplicado a outros mapas.

no ponto \mathbf{r}_0 . Especificamente, o afastamento se dá com relação ao maior autovalor em módulo.

Procede-se como segue:

1. Escolher uma bola de condições iniciais com raio ε de uma ordem de grandeza menor que a das variáveis dinâmicas;
2. Tomar um número de condições iniciais grandes (tipicamente $\mathcal{N} = 50 \times 10^3$) tais que $d_0 < \varepsilon$;
3. Calcular a matriz jacobiana no ponto \mathbf{r}_0 e a matriz jacobiana do sistema linearizado no mesmo ponto;
4. Calcular a primeira iterada e verificar a distância, denotada por D , entre a primeira iterada e a primeira iterada calculada no sistema linearizado, d_{1L} , por: $D \equiv |d_1 - d_{1L}|$, onde $d_{1L} = \|\mathbf{r}_{1L} - \mathbf{r}_0\|$ sendo \mathbf{r}_{1L} a primeira iterada no sistema linearizado;
5. Avaliar a média ao final do cálculo para todas as condições iniciais e marcar a distância média $\langle D \rangle$ e o raio da bola ε ;
6. Escolher uma bola de raio menor e retornar ao passo 2 até que $\varepsilon \sim 10^{-10}$.

Com o auxílio do procedimento acima estima-se um raio adequado de modo que a iteração de pontos interiores à bola resultem em uma representação razoável das variedades estável e instável dentro de um distanciamento máximo D da vizinhança linear do ponto fixo. Para tanto, no procedimento 1, é possível tomar um raio inicial $\varepsilon = 0,1$ e variar de $\Delta\varepsilon = 10^{-4}$ até que $\varepsilon = 10^{-10}$. Em razão do número muito grande de pontos gerados, toma-se um número de condições iniciais da ordem de 10^3 . Note que a resolução para a visualização de um ponto é dada pelos pixels do monitor. Assim, justifica-se encontrar uma distância D razoável, pois garante que dentro daquela diferença, então os pontos visualizados representam de fato as variedades.

O mapa padrão (mod 1) empregado corresponde à expressão (2.59) e sua matriz jacobiana é dada pela equação (2.66). O sistema linearizado é obtido à partir da expansão em série de Taylor do sistema original. Conseqüentemente, a matriz jacobiana do sistema linearizado é obtida pela linearização da matriz jacobiana do sistema original. Como o teste acima descrito foi efetuado para o ponto fixo instável $(0,0)$, então a linearização é feita em torno do ponto $(L_0, \theta_0) = (0,0)$. Deste modo, $\text{sen } 2\pi\theta_n \approx 2\pi\theta_n$ em torno do ponto

$(0,0)$ e $\cos 2\pi\theta_n \approx 1$. Portanto,

$$D\mathcal{M}_{\text{linear}}(L_n, \theta_n) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{K}{2\pi} & 1 \\ \frac{K}{2\pi} & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

corresponde à matriz jacobiana do sistema linearizado.

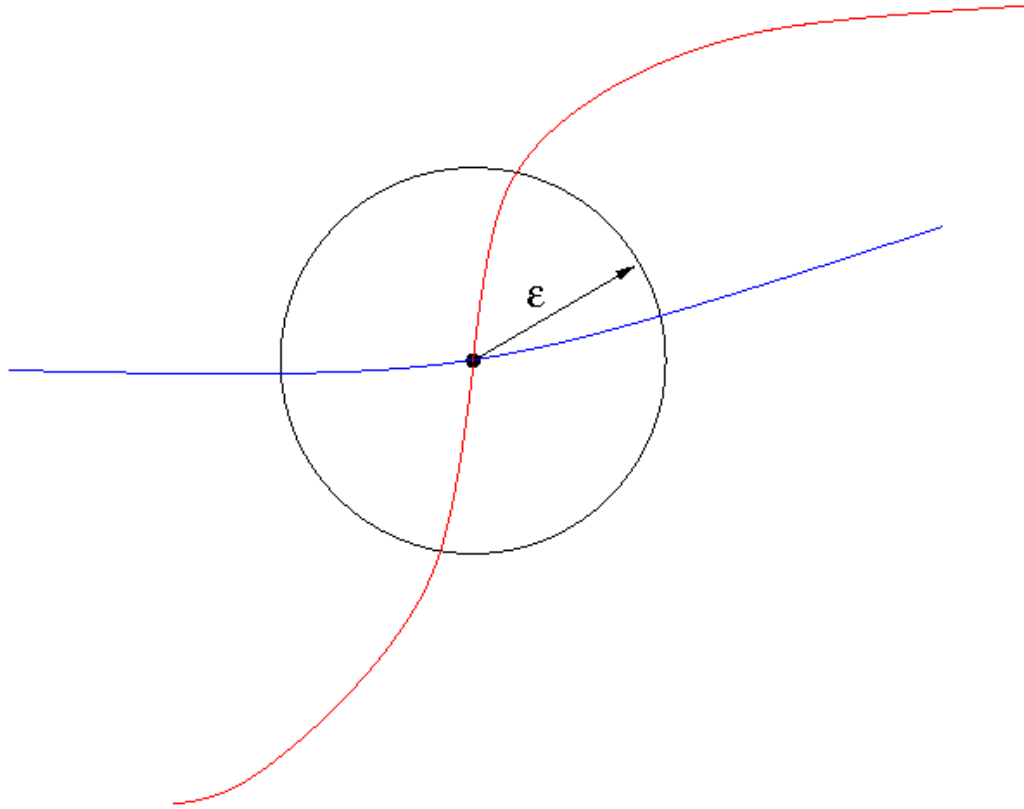


Figura 3.25: Representação do método empregado para encontrar as variedades estável (azul) e instável (vermelho).

Estes resultados se encontram nas figuras seguintes para o mapa padrão com $K = 1,5$ e $K = 3,0$.

Na figura 3.26 verifica-se que um raio da ordem de 10^{-2} fornece um distanciamento máximo de 10^{-5} da vizinhança linear. Isto significa que dentro deste distanciamento máximo trabalha-se com a vizinhança linear e o que verifica-se é uma aproximação razoável das variedades. Efetuando o teste variando o número de condições iniciais obtém-se os mesmos resultados. Por se mostrar computacionalmente eficiente, aqui é optado por $\mathcal{N} \sim 10^4$, onde \mathcal{N} denota o número de condições iniciais.

O valor médio da distância $\langle D \rangle$ é obtido de acordo com o algoritmo já apresentado. Em escala logaritmica é possível estimar uma ordem de grandeza para ε . A rigor, é evidente que $\varepsilon \rightarrow 0$ significa vizinhança linear do ponto. Para o mapa padrão, $\varepsilon \sim 10^{-2}$.

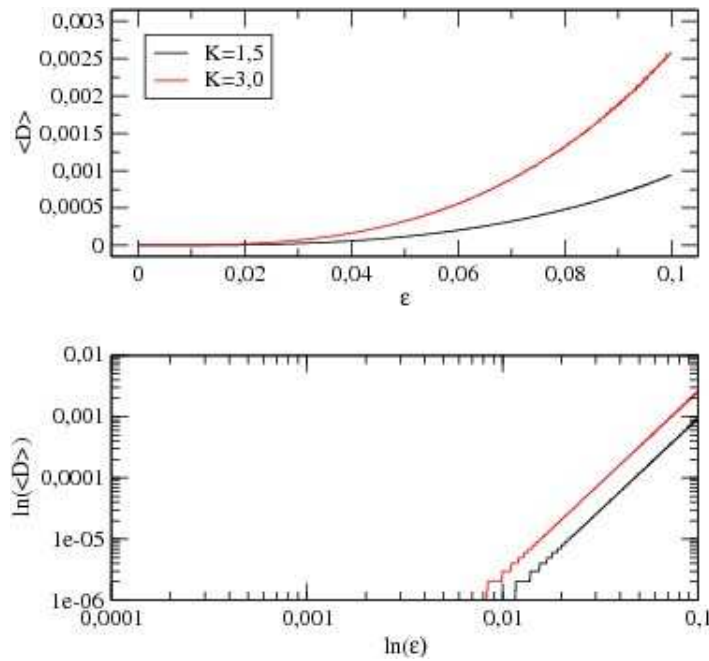


Figura 3.26: A distância média entre a primeira iterada no mapa original e a primeira iterada no mapa linearizado em função do raio de condições iniciais para $K = 1,5$ e $K = 3$ com 50×10^3 condições iniciais.

Como consequência deste teste para a escolha de ϵ , obtém-se uma lei de escala para a distância média em função do raio de condições iniciais:

$$\langle D \rangle \sim \epsilon^\gamma, \quad (3.31)$$

onde γ é o fator de escala. Note que $\ln \langle D \rangle - \ln \epsilon \sim \gamma$, o que sugere um processo rápido para obtenção da inclinação da reta no gráfico 3.26. Obviamente, as duas retas apresentam a mesma inclinação e, portanto, o mesmo valor de γ . Note, contudo, que as retas interceptam o eixo ϵ em pontos diferentes para um dado valor da distância média. Seja α este ponto de intersecção. Da equação da reta,

$$\langle D \rangle = \alpha \epsilon^\gamma. \quad (3.32)$$

Naturalmente, é esperada a mesma ordem de grandeza para as variedades estáveis, uma vez que trabalha-se com a inversa do mapa original, o que não deve alterar o tamanho da vizinhança linear. Para os valores de K empregados neste teste, $\gamma \approx 2,998$.

As variedades estável (azul) e instável (vermelho) estão mostradas no gráfico 3.27, juntamente com pontos de várias órbitas para o mapa padrão (mod 1) e $K = 1,5$.

Para fins comparativos, apresenta-se a ampliação da região $[0,75;0,85] \times [0,25;0,55]$ do gráfico das variedades estável e instável do ponto fixo $(0,0)$ no mapa padrão.

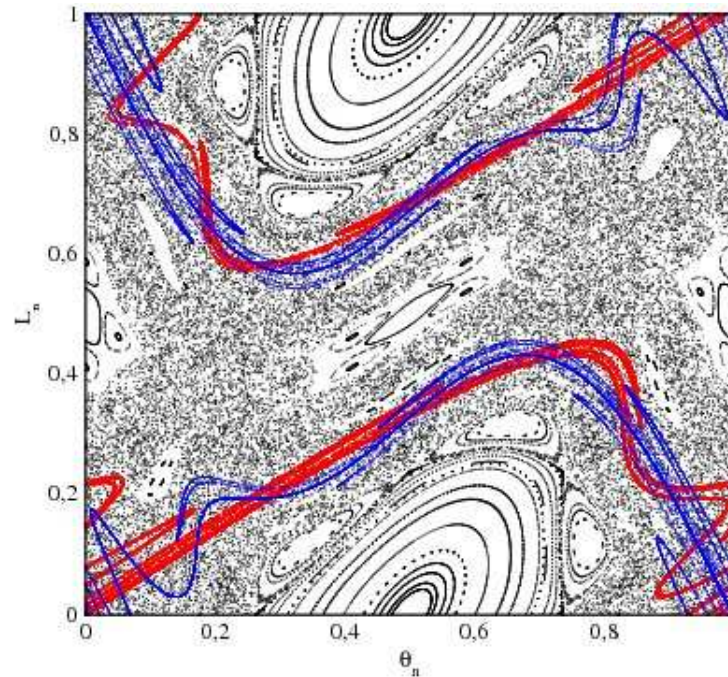


Figura 3.27: Variedades instável (vermelho) e estável (azul) para o mapa padrão (mod 1) com $K = 1,5$. Neste gráfico, empregamos $\varepsilon = 0,0081$ e \mathcal{N} supracitado.

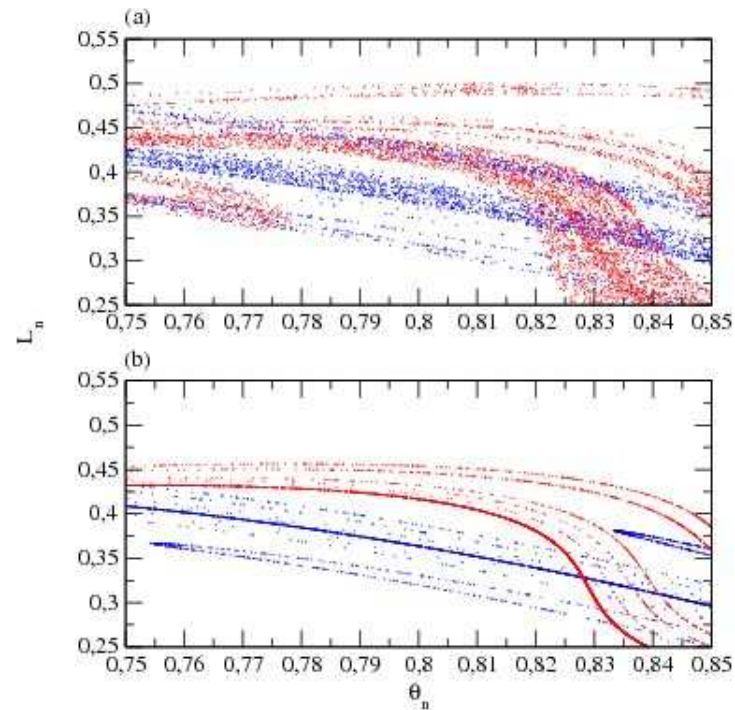


Figura 3.28: Comparação da escolha da bola ε . Em (a) $\varepsilon = 0,1$ e em (b) $\varepsilon = 0,01$. A variação por uma ordem de grandeza do raio de condições iniciais pode fornecer variedades de outros pontos ou regiões com pontos redundantes “presos” entre as variedades.

De modo a efetuar comparações com as variedades para outros valores de K , apresentam-se as variedades estável e instável para o mapa padrão com $K = 3$. As variedades se interceptam mais vezes do que no caso anterior, onde $K = 1,5$. A razão disto é que a

perturbação é maior e, conseqüentemente, a área do mar caótico também é maior. Sendo maior o mar caótico, é razoável esperar que os pontos periódicos sejam densos nesta região. Conseqüentemente, espera-se maior número de intersecções entre as variedades estável e instável. A razão disto é que cada intersecção entre as variedades estável e instável se dá justamente em um ponto de algum período do mapa.

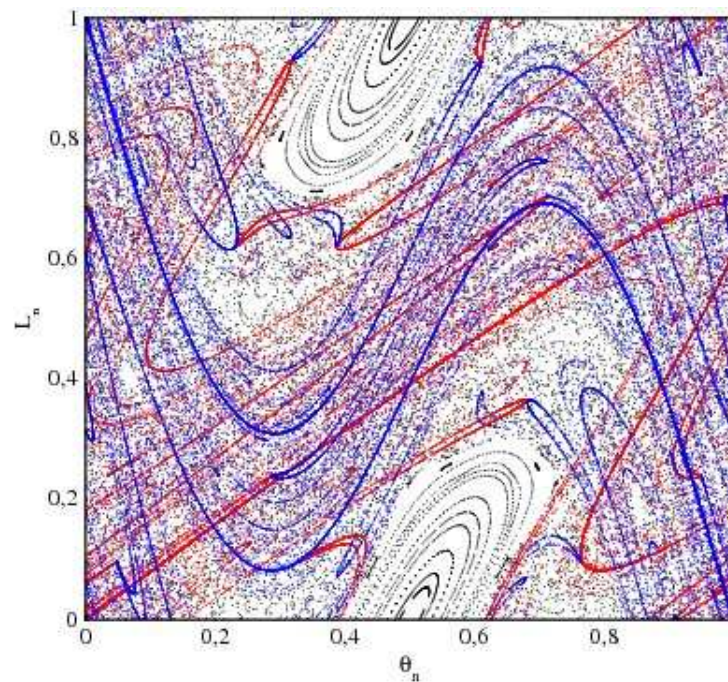


Figura 3.29: Variedades do ponto fixo $(0,0)$ para $K = 3$ no mapa padrão.

É possível observar também regiões onde possivelmente ocorrem tangências homoclínicas e heteroclínicas nas figuras 3.27 e 3.29. O quadro selecionado na figura 3.28b também apresenta possivelmente uma tangência homoclínica aproximadamente no ponto $(0,835;0,400)$. Diz-se possivelmente pois obtém-se aqui, com os procedimentos apresentados, aproximações para as variedades.

4 *O Sombreamento*

De acordo com o que foi apresentado no capítulo anterior, uma das principais características de sistemas que podem apresentar comportamento caótico é a dependência sensível às condições iniciais. Considerando o amplo uso dos computadores na análise dos problemas, uma questão naturalmente surge: a da validade dos cálculos efetuados. Todo computador apresenta precisão finita. Muitas aplicações e técnicas desenvolvidas recentemente, exigem o uso de computadores, seja pela quantidade de cálculos a serem efetuados, seja pela complexidade dos cálculos. Ilustrar-se-á inicialmente o problema associado à questão da precisão e dos erros introduzidos computacionalmente e posteriormente serão apresentadas sob quais condições é possível garantir a validade das soluções numéricas obtidas.

Seja, por exemplo, um sistema dinâmico a tempo discreto dado por [2]:

$$f(x_n, y_n) = (x_n + d, y_n + d), \quad (4.1)$$

onde $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $d \in \mathbb{R}$ é constante.

No ponto $(x_n, y_n) = (0, 0)$, $f(0, 0) = (d, d)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Supondo que uma máquina introduza erros de $-d$ em cada coordenada, então $\tilde{f}(0, 0) = (0, 0)$. Isto significa que o cálculo da máquina resulta em um ponto fixo, embora $(0, 0)$ não seja um ponto fixo para $d \neq 0$.

Este exemplo simples ilustra a desconfiança que pode surgir de cálculos efetuados por meio dos computadores, que apresentam precisão finita. Neste sentido, qual é validade dos cálculos efetuados? Conforme apresentado no capítulo 1, na região caótica do espaço de fases de um sistema duas condições iniciais ligeiramente distintas apresentam estados assintóticos completamente distintos e não há correlação entre as soluções. Logo, em um processo caótico a mesma condição inicial pode resultar em soluções distintas para precisões diferentes empregadas no cálculo. Deste modo, não se tem nenhum motivo, em princípio, para confiar nos cálculos obtidos, o que invalidaria as seções anteriores

deste trabalho. Em especial, os gráficos obtidos para o espaço de fases do mapa padrão, bem como das órbitas periódicas e das variedades seriam completamente desprovidos de confiança.

Entretanto, existe um resultado demonstrado matematicamente em 1975 por R. Bowen [8] capaz de atribuir um significado às soluções com ruídos, o qual será apresentado na próxima seção. Por ruído entende-se a inserção de algum tipo de erro (de truncamento, arredondamento) a cada passo de algum método iterativo.

Em 1990, Grebogi *et. al.* [9] forneceram a prova rigorosa da existência de sobreamento em sistemas não-hiperbólicos por certos intervalos de tempo, em regiões onde o sistema apresenta estrutura hiperbólica. Neste capítulo discutem-se as condições para afirmar que a solução numérica obtida para algum sistema dinâmico é válida pelo tempo em que é sombreada, mesmo em sistemas que não apresentam *estrutura hiperbólica*. É importante notar que esta é uma implicação direta da garantia rigorosa da existência de trajetórias próprias sombreado trajetórias ruidosas: a confiança nas soluções numéricas obtidas.

4.1 O Lema do Sombreamento

O lema de Bowen atualmente é conhecido como *lema do sombreamento*. A ideia do sombreamento (“shadowing”) é essencialmente simples: dado um sistema dinâmico caótico, garante-se a existência de trajetórias próprias do sistema que permanecem arbitrariamente próximas das trajetórias geradas computacionalmente, enquanto o sistema for hiperbólico, ou o espaço de fases apresentar estrutura hiperbólica, o que corresponde a uma aplicação do lema do sombreamento. Neste trabalho, especialmente neste capítulo, não é feita distinção entre trajetórias e órbitas. Assim, uma órbita obtida de um mapeamento será denotada por um conjunto de pontos o qual pode ser chamado de trajetória¹.

Por trajetórias próprias do sistema, entendem-se conjuntos de pontos que satisfazem as equações que determinam o sistema matemático². O resultado demonstrado por R. Bowen em 1975 é inteiramente válido para sistemas hiperbólicos. Contudo, a maioria dos sistemas matemáticos que modelam situações físicas de interesse não são hiperbólicos. O mapa padrão é um exemplo de sistema que apresenta estrutura não hiperbólica para

¹T. Sauer e J. Yorke [30] diferenciam os fluxos de mapas através justamente desta denominação, onde os pontos de um mapa são chamados de *órbitas*. No entanto, as definições apresentadas seguem a denominação dada em [9].

²Obtidos numericamente com uma precisão maior. Uma trajetória própria do sistema neste contexto corresponde à trajetória com precisão infinita.

$K > 0$ [9].

4.1.1 Conjuntos Invariantes Hiperbólicos

Definição 15 *Seja Λ um conjunto invariante para o sistema dinâmico discreto $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Uma estrutura hiperbólica para Λ é uma decomposição contínua invariante de soma direta $T_\Lambda \mathbb{R}^n = E_\Lambda^u \oplus E_\Lambda^s$ com a propriedade de que existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que:*

1. Se $\mathbf{v} \in E_\Lambda^u$ então $\|D\mathcal{M}^{-n}(\mathbf{x})\mathbf{v}\| \leq C\lambda^n \|\mathbf{v}\|$;
2. Se $\mathbf{v} \in E_\Lambda^s$, então $\|D\mathcal{M}^n(\mathbf{x})\mathbf{v}\| \leq C\lambda^n \|\mathbf{v}\|$.

O conjunto é invariante no sentido de que $D\mathcal{M}(\mathbf{x})E_{\mathbf{x}}^s = E_{\mathbf{f}(\mathbf{x})}^s$ e $D\mathcal{M}(\mathbf{x})E_{\mathbf{x}}^u = E_{\mathbf{f}(\mathbf{x})}^u$, onde $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ denota a aplicação do mapa \mathcal{M} no ponto \mathbf{x} e E^u (E^s) é o subespaço instável (estável). Esta propriedade (de invariância) é frequentemente chamada de “invariância da decomposição”. As propriedades 1 e 2 são ditas usualmente “expansão e contração”, respectivamente, pois asseguram uma direção instável (expansão) e uma direção estável (contração) para todo o conjunto Λ . De fato, um sistema hiperbólico é aquele que apresenta autovalores $|\lambda_i| \neq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Como já verificado no mapa padrão, autovalores complexos podem naturalmente ocorrer.

Em outras palavras, em um sistema bidimensional com estrutura hiperbólica, cada ponto da órbita apresenta uma direção estável e instável bem definidas. O conjunto de pontos fixos hiperbólicos de um mapa constitui um exemplo de conjunto invariante hiperbólico. A figura 4.1 ilustra um mapa cujo espaço de fases apresenta estrutura hiperbólica.

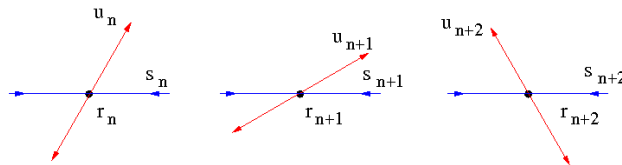


Figura 4.1: Ilustração de um sistema com estrutura hiperbólica: cada ponto apresenta direções estável e instável bem definidas.

4.1.2 O Sombreamento em Sistemas Hiperbólicos

Em sistemas com estrutura hiperbólica, é possível formular uma proposição para garantir a existência de uma trajetória real que é sombra da trajetória ruidosa, ou pseudo-

trajetória. Esta formulação corresponde ao lema do sombreamento, que será apresentado nesta seção. Sua prova não é simples e exige uma grande quantidade de proposições auxiliares.

Com o objetivo de compreender o sombreamento e sua principal aplicação atual em simulações computacionais, seguem algumas definições utilizadas no trabalho [9]. Estas definições estão apresentadas aqui da mesma maneira como formuladas em [9].

Definição 16 *A órbita $\{\mathbf{p}_n\}_{n=a}^b$ é uma δ_f -pseudotrajetória para \mathbf{f} se $\|\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{f}(\mathbf{p}_n)\| < \delta_f$ para $a \leq n \leq b$. A quantidade δ_f é a amplitude do ruído.*

A definição acima estabelece que a órbita gerada computacionalmente consiste da órbita ruidosa em razão dos erros a cada passo. Com o cálculo de cada ponto da órbita pela aplicação do mapa computacionalmente, um ruído é acrescentado, proveniente do truncamento. O cálculo da órbita ruidosa é feito pela aplicação de um operador de truncamento, definido de tal maneira que $\hat{T}[\mathbf{f}(\mathbf{p}_n)]$. Este operador trunca até um dado número de casas decimais. Deste modo, as órbitas obtidas deste modo apresentam um ruído $\delta_f \sim 10^{-14}$, para o mapa padrão.

Definição 17 *A órbita real $\{\mathbf{x}_n\}_{n=a}^b$ satisfaz $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$.*

O conjunto de pontos que constituem a solução para o mapeamento sem qualquer influência de ruídos corresponde à órbita real do sistema. Numericamente, é realizado um procedimento para refinar a órbita gerada computacionalmente, reduzindo o erro.

Definição 18 *Uma trajetória real $\{\mathbf{x}_n\}_{n=a}^b$ δ_x -sombreia a pseudotrajetória em $a \leq n \leq b$ se $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{p}_n\| < \delta_x$, para $a \leq n \leq b$.*

A formulação 18 define o sombreamento, que é particularmente simples. Na definição acima, uma órbita real sombreia uma órbita ruidosa. Isto significa que, embora seja obtida uma trajetória ruidosa no computador, esta trajetória está distante não mais do que uma quantidade δ_x de uma órbita real do sistema.

A figura 4.2 ilustra a ideia do sombreamento. Dada uma condição inicial $\mathbf{x}_1(0)$, sua trajetória é dada por $\mathbf{x}_1(t)$. Assim, em um instante t qualquer, um ponto desta trajetória é $\mathbf{x}_1(t)$. Tomando exatamente a mesma condição inicial e resolvendo o sistema inserindo alguma perturbação - isto é, um erro devido ao truncamento - então esta trajetória irá divergir exponencialmente, em média, da trajetória $\mathbf{x}_1(t)$. Existe uma trajetória real do

sistema com condição inicial $\mathbf{x}_2(0)$ que sombreia a trajetória ruidosa, isto é, permanece próxima da trajetória $\mathbf{x}_1(t)$ por um tempo t . Para um sistema cujo espaço de fases apresenta estrutura hiperbólica, então o sombreado é válido durante todo $t > t_0 \geq 0$.

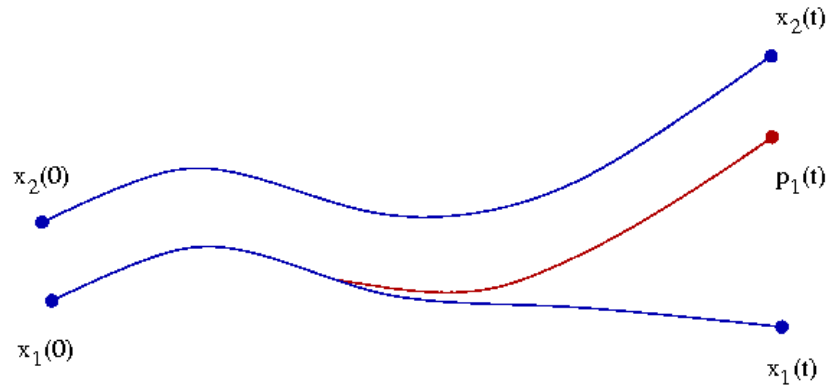


Figura 4.2: Ilustração do Sombreado: a trajetória ruidosa é $\mathbf{p}(t)$ (em vermelho) e a trajetória real (idealmente sem efeitos de arredondamento) é $\mathbf{x}_1(t)$ (em azul). Uma outra trajetória real $\mathbf{x}_2(t)$ (também em azul) sombreia a pseudotrajetória.

De fato, em um sistema caótico duas trajetórias inicialmente vizinhas divergem exponencialmente com o tempo t , de modo que dadas duas condições iniciais \mathbf{x}_0 e $\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}$, após um tempo t , as duas trajetórias estarão a uma distância $d \sim e^{h_i t}$, onde h_i ($i = 1, 2, \dots, n$) são os expoentes de Lyapunov (capítulo 3).

No capítulo 3 alguns métodos numéricos para encontrar raízes de funções foram apresentados e podem ser empregados para cálculos de pontos fixos em mapas. Todo método iterativo consiste de uma expressão exata para obter uma aproximação da solução real de um sistema. Os erros associados aos métodos numéricos são devidos, basicamente, ao truncamento.

Estas afirmações podem ser ilustradas tomando como exemplo a fórmula de Taylor para aproximação de funções. As máquinas efetuam as operações básicas e é possível questionar, neste contexto, acerca do cálculo computacional envolvendo funções transcendentais. As aproximações de funções em torno de pontos são feitas por meio da fórmula de Taylor, a qual oferece uma maneira indireta do cálculo do erro associado ao truncamento. De fato, obtém-se uma cota superior para o erro de truncamento.

Inicialmente, o chamado lema do sombreado foi provado para sistemas hiperbólicos, por Anosov e Bowen. Na época em que o lema foi enunciado e provado, não foi falado em máquinas para solução dos sistemas, embora fosse possível³. No artigo de Bowen (1975) comenta-se da possibilidade de verificar a validade das soluções obtidas de uma

³E. Lorenz usava computadores para solucionar o sistema de equações diferenciais que leva seu nome.

aplicação definida por uma função bem comportada com perturbações. Deste modo, a verificação da validade das soluções numéricas obtidas surge como aplicação deste procedimento.

Lema 2 (*Lema do Sombreamento*) *Seja Λ um conjunto invariante hiperbólico. Então para todo $\delta_f > 0$, existe $\delta_x > 0$ tal que toda δ_f -pseudotrajetória $\{\mathbf{p}_n\}_{n=a}^b$ em Λ seja δ_x -sombreada por um ponto $\mathbf{x} \in \Lambda$.*

4.2 O Sombreamento em Sistemas Não-Hiperbólicos

Nas seções anteriores, verificou-se que o sombreamento é inteiramente válido para sistemas hiperbólicos. Entretanto, a maioria dos sistemas matemáticos que modelam situações físicas não são hiperbólicos. É natural questionar a respeito da validade do procedimento de sombreamento para uma classe de sistemas mais gerais. De fato, o teorema do sombreamento inicialmente proposto por T. Sauer e J. Yorke [30] apresenta o sombreamento em sistemas hiperbólicos como um corolário daquele teorema. Para apresentar o teorema do sombreamento, faz-se necessário uma exposição do procedimento por meio do qual é possível demonstrar a existência de trajetórias reais sombreado pseudotrajetórias.

C. Grebogi, S. Hammel, J. Yorke e T. Sauer apresentaram pela primeira vez em 1990 [9] um procedimento rigoroso que permite demonstrar a existência de um número infinito incontável de trajetórias reais que sombreiam as trajetórias ruidosas. Entretanto, conforme a ilustração para o mapa padrão, não há a garantia de uma separação constante durante a trajetória ruidosa e a “menos ruidosa” durante um longo tempo⁴. O refinamento da trajetória ruidosa produz uma trajetória menos ruidosa. A ideia consiste basicamente em garantir a contenção de trajetórias reais e aplicar o refinamento em trajetórias ruidosas iterativamente, de maneira a garantir a sombreabilidade. Ao final do processo iterativo, avalia-se a distância de sombreamento, denotada por δ_x . O cálculo desta distância não é trivial. Para isso o procedimento de contenção desempenha um papel importante.

Embora existam técnicas gerais para efetuar o sombreamento em sistemas de equações diferenciais [31], o interesse é em processos caóticos não-hiperbólicos.

Para aplicar o sombreamento, gera-se uma trajetória ruidosa no computador. A garantia de que a aplicação do procedimento desenvolvido não dependa da máquina utilizada

⁴Em sistemas físicos é razoável estimar um “tempo longo”, ao passo que um mapa proveniente de algumas transformações ou então uma rede de mapas acoplados pode não oferecer um indicativo direto do que é um intervalo de tempo longo o suficiente.

é fornecida pela definição de um operador truncamento $\hat{T}(\mathbf{x})$. Este operador trunca cada coordenada de \mathbf{x} até um número de bits significativos.

De acordo com a definição 15, os sistemas não-hiperbólicos não são continuamente decomponíveis. Conforme a discussão no final deste capítulo e a seção 3.4, existem dois motivos principais para que ocorra a não-hiperbolicidade. Uma delas se dá por meio de tangências homoclínicas e heteroclínicas. O principal indício das regiões de não-hiperbolicidade são as flutuações dos expoentes de Lyapunov a tempo finito. Foi apresentado no capítulo 3 por meio da obtenção das variedades que o espaço de fases do mapa padrão apresenta regiões de não-hiperbolicidade por tangências. A razão pela qual uma tangência implica em quebra de sombreamento será tratada na seção 4.2.3.

4.2.1 A Contenção da Trajetória Real

Para provar a existência de uma trajetória real que sombreia uma trajetória ruidosa é necessário efetuar um procedimento chamado de contenção da trajetória real, que assegura a existência de tal trajetória. Este procedimento consiste da construção de uma sequência de paralelogramos $\{M_n\}_{n=a}^b$, tal que cada paralelogramo M_n seja construído em torno de um ponto p_n da trajetória ruidosa. Considerando que o ruído do computador seja δ_f , obtido da aplicação do operador de truncamento, então cada lado do paralelogramo deve ser desta mesma ordem de grandeza, a menos de um fator multiplicativo, ou seja, um dos lados de tamanho $\sim a\delta_f$ e o outro de tamanho $\sim b\delta_f$ para $a, b > 0$.

Cada paralelogramo M_n deve seguir a orientação dos autovetores da matriz jacobiana no ponto p_n . Deste modo, considerando o mapa padrão que é bidimensional, serão obtidos dois autovetores, um associado à estabilidade e outro à instabilidade. Os lados do paralelogramo devem ser paralelos a cada um destes autovetores.

A imagem $\mathbf{f}(M_n)$ deve atravessar M_{n+1} por construção. Na figura 4.3 é apresentada a construção do primeiro paralelogramo em torno de um ponto da órbita ruidosa, dito \mathbf{p}_0 , a condição inicial. Note que os lados do paralelogramo são paralelos aos autovetores da matriz jacobiana calculada no ponto.

A ação do mapa no paralelogramo contrai uma direção (estável) e expande a outra (instável) do paralelogramo. Assim, é possível associar um paralelogramo ao ponto \mathbf{p}_1 da órbita ruidosa com tamanhos que não devem diferir por mais de δ_f . Note que esta construção obedece justamente à definição de órbita ruidosa: de acordo com a figura 4.4 o distanciamento máximo entre $\mathbf{f}(\mathbf{p}_0)$ e \mathbf{p}_1 é de δ_f .

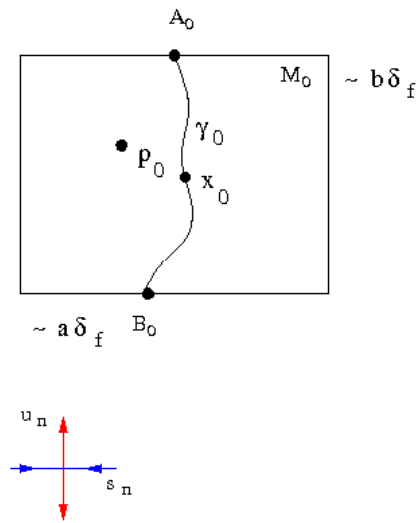


Figura 4.3: A construção de um paralelogramo em torno de um ponto da órbita ruidosa seguindo a orientação de seus autovetores.

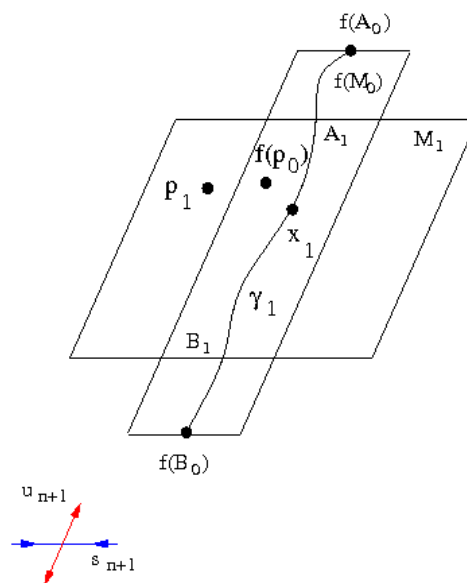


Figura 4.4: Com o cálculo de $\mathbf{f}(M_0)$, o tamanho do paralelogramo M_1 fica limitado e o ponto $\mathbf{f}(p_0)$ se distancia da ordem de δ_f do ponto p_1 .

Note que os lados que se expandem de $\mathbf{f}(M_n)$, $\mathbf{f}(A_n)$ e $\mathbf{f}(B_n)$ devem interceptar os lados que se contraem A_{n+1} e B_{n+1} , porém não deve ocorrer intersecção entre os lados que se contraem de $\mathbf{f}(M_n)$ e os lados que se expandem de M_{n+1} . A figura 4.5 ilustra o processo como um todo.

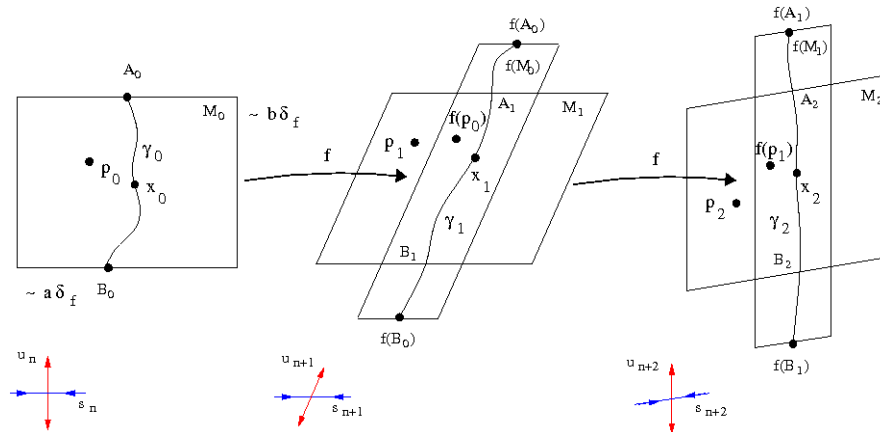


Figura 4.5: O processo de contenção de uma trajetória real. Adaptada de [9].

A argumentação da existência de uma trajetória real $\{\mathbf{x}_n\}_{n=a}^b$ contida em M_n é feita com a introdução de curvas γ_n que seguem de um lado contraente a outro do paralelogramo M_n . Considere γ_0 como sendo uma curva que se encontra inteiramente em M_0 (figura 4.3). A imagem desta curva é $\mathbf{f}(\gamma_0)$ e contém uma curva γ_1 que segue de um lado que se contrai até o outro do paralelogramo M_1 . Na figura 4.3, a curva $\mathbf{f}(\gamma_0)$ vai de $\mathbf{f}(A_0)$ até $\mathbf{f}(B_0)$, por exemplo. Logo, existe uma curva γ_n , contida inteiramente em $\mathbf{f}(\gamma_{n-1})$ que se encontra inteiramente em M_n . Por indução, existe uma curva γ_{n+1} , contida em $\mathbf{f}(\gamma_n)$ que se encontra inteiramente em M_{n+1} .

Seja \mathbf{x}_N um ponto na curva final γ_N . Então \mathbf{x}_{N-1} , definido como $f^{-1}(\mathbf{x}_N)$, se encontra em γ_{N-1} . Por indução, $\mathbf{x}_n = f^{-1}(\mathbf{x}_{n+1})$, para $0 \leq n \leq N$, fornece uma órbita real contida em toda a sequência de paralelogramos $\{M_n\}_{n=0}^N$. Note que nos paralelogramos apresentados, a pseudotrajetória é caracterizada justamente por $\|\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{f}(\mathbf{p}_n)\| < \delta_f$. Além disto, a órbita real δ_x -sombreira a órbita ruidosa pois sua distância máxima em relação à órbita ruidosa é δ_x . Há, portanto, uma maneira direta de determinar esta distância, que corresponde à máxima distância entre a órbita ruidosa e a órbita real. Também é necessário ressaltar que este distanciamento máximo é tomado dentro do intervalo temporal $n \in [0, N]$, supondo que em $n = N + 1$ não há órbita real sombreando a órbita ruidosa.

Note que o interesse é, em princípio, no sombreamento de sistemas caóticos conservativos bidimensionais⁵. Embora o procedimento seja desenvolvido para sistemas bidi-

⁵Tratam-se de mapas, pois não há caos para fluxos de dimensão 1 ou 2 autônomos, conforme o teorema

mensionais, a generalização para sistemas N -dimensionais é possível [31]. Para tanto, considera-se uma variedade diferenciável e o estudo das quantidades envolvidas é feita em um subespaço tangente à esta variedade.

O procedimento empregado em [9,31] consiste em refinar a pseudotrajetória, de modo a reduzir o ruído até que este seja da ordem da precisão da máquina. Com isto, o procedimento de contenção é efetuado para cada ponto da órbita com o intuito de provar a existência de uma trajetória real que sombreia a pseudotrajetória.

Para efetuar o procedimento de sombreamento é necessário rigorosamente garantir a existência de uma trajetória real arbitrariamente próxima da trajetória ruidosa. Isto só é possível por meio da construção da sequência $\{M_n\}_{n=a}^b$, para a e b finitos e $a < b$.

O teorema de Brouwer do ponto fixo bidimensional fornece um entendimento sobre a transitividade dos paralelogramos. Note que nesta construção dos paralelogramos, se a imagem $\mathbf{f}(M_n)$ não atravessar M_{n+1} , então o ponto \mathbf{x}_n da órbita ruidosa se distanciou de \mathbf{p}_n mais do que o próprio ruído δ_f . Na versão do teorema apresentado com paralelogramos, devido à [2], considere um paralelogramo de lados $2d$ e $3d$. Há um ponto x_0 centrado neste paralelogramo. A aplicação do mapa faz com que um lado seja contraído e o outro expandido. Se a pré-imagem atravessa $f(M_0)$, então é garantida a existência de um ponto fixo dentro de uma precisão d , conforme ilustra a figura 4.6.

O teorema de Brouwer pode ser formalmente descrito com base na definição de uma bola.

Definição 19 *A bola fechada $B_r(\mathbf{x}_0)$ de centro em um ponto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que:*

$$B_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}.$$

Teorema 5 *(Teorema de Brouwer). Seja B a bola fechada de centro $\mathbf{0}$ e raio 1 em \mathbb{R}^{n+1} . Toda aplicação contínua $f : B \rightarrow B$ possui pelo menos um ponto fixo tal que $f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$.*

Este teorema é semelhante ao teorema do ponto fixo unidimensional de uma aplicação definida em um intervalo [4]. A demonstração pode ser verificada em [32].

de Poincaré-Bendixson (capítulo 3).

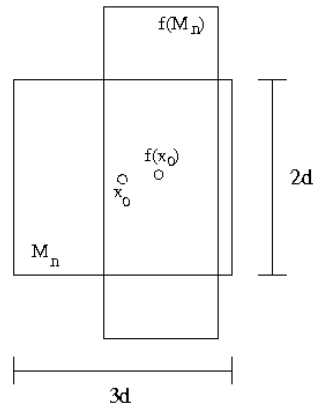


Figura 4.6: Ilustração do teorema do ponto fixo bidimensional.

4.2.2 O Refinamento da Trajetória Ruidosa

Este método consiste em refinar a trajetória, isto é, uma redução de ruído da pseudotrajetória. O objetivo é produzir uma trajetória menos ruidosa $\{\tilde{\mathbf{p}}_n\}_{n=0}^N$ à partir da pseudotrajetória $\{\mathbf{p}_n\}_{n=0}^N$ de maneira que estes pontos sirvam de centros dos paralelogramos $\{M_n\}$ no processo de contenção. A cada passo, um erro será introduzido pela aplicação do mapa e do operador de truncamento. Considere o erro a cada passo escrito explicitamente:

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{f}(\mathbf{p}_n), \quad (4.2)$$

sendo $\|\boldsymbol{\pi}_{n+1}\| < \delta_f$. É importante ressaltar que, embora os cálculos estejam apresentados com trajetórias do tipo $\mathbf{f}(\mathbf{p}_n)$, na verdade utilizam-se trajetórias do tipo $\hat{T}[\mathbf{f}(\mathbf{p}_n)]$, correspondentes à aplicação do operador truncamento definido anteriormente.

O que ocorre é que a imagem de um paralelogramo, do processo de contenção, corresponde a uma contração e uma expansão nas direções estável e instável, respectivamente. Pela aplicação do mapa, o ponto \mathbf{p}_n , que já apresenta ruído, é conduzido para uma posição que não é o centro do paralelogramo, prejudicando a transitividade do procedimento de contenção.

Como consequência, a órbita refinada corresponde ao acréscimo de correções, nas direções estável e instável, em relação à pseudotrajetória. Para refinar a órbita, faz-se:

$$\tilde{\mathbf{p}}_n = \mathbf{p}_n + \phi_n, \quad (4.3)$$

de maneira que $\phi_{n+1} = \tilde{\mathbf{p}}_{n+1} - \mathbf{p}_{n+1} \Rightarrow \mathbf{p}_{n+1} = \tilde{\mathbf{p}}_{n+1} - \phi_{n+1}$. Além disto, da expressão (4.2), $\mathbf{p}_{n+1} = \boldsymbol{\pi}_{n+1} + \mathbf{f}(\mathbf{p}_n)$. Portanto:

$$\phi_{n+1} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{p}}_n) - \boldsymbol{\pi}_{n+1} - \mathbf{f}(\mathbf{p}_n). \quad (4.4)$$

O procedimento de refinamento a cada passo deve somar um valor pequeno ϕ_{n+1} à pseudotrajetória. Como o ponto \mathbf{p}_n não corresponde ao centro do paralelogramo M_n , a correção é somada de modo a fazer com que $\tilde{\mathbf{p}}_n$ seja o centro do paralelogramo.

O interesse é no estudo local de cada ponto onde é possível empregar os autovetores obtidos da matriz jacobiana calculada no ponto. Assim sendo, é possível expandir $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{p}}_n)$ em torno de \mathbf{p}_n . A expansão em série de Taylor fica então:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{p}_n + \phi_n) &= \mathbf{f}(\mathbf{p}_n) + \mathbf{f}'(\mathbf{p}_n)\phi_n + \frac{\mathbf{f}''(\mathbf{p}_n)}{2!}\phi_n^2 + \dots \\ \mathbf{f}(\mathbf{p}_n + \phi_n) &\approx \mathbf{f}(\mathbf{p}_n) + \mathbf{f}'(\mathbf{p}_n)\phi_n,\end{aligned}\tag{4.5}$$

pois $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{p}}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{p}_n + \phi_n)$. Logo:

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{p}}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{p}_n) + D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\phi_n.\tag{4.6}$$

Consequentemente:

$$\phi_{n+1} = D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\phi_n - \pi_{n+1}.\tag{4.7}$$

É necessário encontrar agora $\{\phi_n\}_{n=0}^N$ nas coordenadas $\{\mathbf{s}_n\}_{n=0}^N$ e $\{\mathbf{u}_n\}_{n=0}^N$. Deve ser claro que isto permitirá encontrar diretamente as relações de recorrência envolvendo as direções estável e instável. Deste modo, será consideravelmente simples encontrar numericamente o valor que deve ser acrescentado a cada passo em cada ponto da pseudotrajetória. Este processo evita o erro do cálculo direto de (4.7). O erro comentado é proveniente de sistemas que apresentam “pseudo-hiperbolicidade” (figura 4.7). Na figura, p_{n-1} encontra-se em um lado da variedade estável, mais próximo da variedade instável, enquanto que p_n se encontra do outro lado da variedade estável. Com as iterações, o ponto p_{n-1} vai se afastar progressivamente de p_n e o erro irá aumentar a cada passo. Note que o erro é cometido no cálculo de $f(p_{n-1})$ e conduz p_n para longe.

Ocorre um “glitch” quando há a quebra de sombreamento. Desta maneira, regiões que apresentam “glitch” necessariamente são impossibilitadas de fornecer resultados confiáveis. Mais detalhes sobre a quebra de sombreamento serão discutidos no final do capítulo.

Uma tangência implica um “glitch” e, conseqüentemente, em quebra de sombreamento, pois $f(p_n)$ se distancia consideravelmente de p_n . Na ilustração apresenta-se uma tangência de uma variedade estável e instável. A variedade estável pertence ao ponto fixo q . O ponto p_{n-1} se encontra em um lado da variedade estável e p_n no outro lado da variedade estável, de modo que a variedade instável irá conduzir p_{n-1} para longe de p_n .

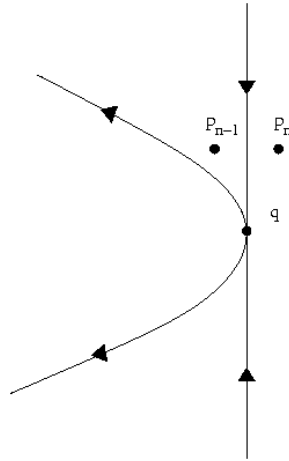


Figura 4.7: Uma tangência implica um “glitch” e, conseqüentemente, em quebra de sombreamento.

Os coeficientes multiplicativos das expressões anteriores são iterados em cada direção. Esta divisão permite calcular separadamente os coeficientes e então refinar a órbita passo a passo. Em razão do ruído e do fato do mapa ser inteiramente caótico, o ruído torna-se grande em poucas iterações da expressão (4.7). Esta decomposição torna a iteração computacionalmente estável, bastando, para isso, iterar a componente instável e iterar a componente estável em sentido contrário (iterar a inversa).

Grosseiramente falando, o refinamento deve levar em consideração as duas componentes do ponto pertencente à pseudotrajetória: $\{\mathbf{s}_n\}_{n=0}^N$ e $\{\mathbf{u}_n\}_{n=0}^N$. Para isto, representa-se ϕ_n como sendo uma combinação linear de $\{\mathbf{s}_n\}_{n=0}^N$ e $\{\mathbf{u}_n\}_{n=0}^N$:

$$\phi_n = \alpha_n \mathbf{u}_n + \beta_n \mathbf{s}_n \quad (4.8)$$

e o erro a cada passo também como combinação linear das direções estável e instável

$$\pi_n = \eta_n \mathbf{u}_n + \zeta_n \mathbf{s}_n. \quad (4.9)$$

Para encontrar $\{\alpha_n\}_{n=0}^N$ e $\{\beta_n\}_{n=0}^N$ em termos de $\{\eta_n\}_{n=0}^N$ e $\{\zeta_n\}_{n=0}^N$, a expressão (4.7) é rescrita

$$\phi_{n+1} = D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)(\alpha_n \mathbf{u}_{n+1} + \beta_n \mathbf{s}_{n+1}) - (\eta_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} + \zeta_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}).$$

Mas $\phi_{n+1} = \alpha_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} + \beta_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}$. Conseqüentemente:

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} + \beta_{n+1} \mathbf{s}_{n+1} &= D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)(\alpha_n \mathbf{u}_{n+1} + \beta_n \mathbf{s}_{n+1}) - (\eta_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} + \zeta_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}) \\ \alpha_{n+1} \frac{D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n) \mathbf{u}_n}{\|D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n) \mathbf{u}_n\|} &= D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n) \mathbf{u}_n \alpha_n - \eta_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\beta_{n+1} \frac{D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n) \mathbf{s}_n}{\|D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n) \mathbf{s}_n\|} = D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n) \mathbf{s}_n \beta_n - \zeta_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}, \quad (4.11)$$

pois os vetores unitários nas direções instável e estável são, respectivamente

$$\mathbf{u}_{n+1} = \frac{D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{u}_n}{\|D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{u}_n\|}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \frac{D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{s}_n}{\|D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{s}_n\|}. \quad (4.13)$$

A multiplicação das equações (4.10) e (4.11) por $\|D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{u}_n\|$ e $\|D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{s}_n\|$, respectivamente, conduz à:

$$\alpha_{n+1}D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{u}_n = D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{u}_n\|D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{u}_n\|\alpha_n - \eta_{n+1}D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{u}_n, \quad (4.14)$$

$$\beta_{n+1}D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{s}_n = D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{s}_n\|D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{s}_n\|\beta_n - \zeta_{n+1}D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{s}_n. \quad (4.15)$$

Como α_{n+1} tem componentes somente na direção \mathbf{u}_{n+1} e β_{n+1} na direção \mathbf{s}_{n+1} , resulta nas seguintes relações de recorrência para a determinação dos coeficientes

$$\alpha_{n+1} = \|D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{u}_n\|\alpha_n - \eta_{n+1}, \quad (4.16)$$

$$\beta_{n+1} = \|D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{s}_n\|\beta_n - \zeta_{n+1}. \quad (4.17)$$

A equação (4.16) é computacionalmente estável se os coeficientes α_n forem calculados a partir de α_{n+1} , o que é feito iniciando no ponto final $n = N$ de modo que:

$$\alpha_n = \frac{\alpha_{n+1} + \eta_{n+1}}{\|D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{u}_n\|}, \quad (4.18)$$

onde $\alpha_N = 0$.

Para o coeficiente associado à estabilidade, na expressão (4.17), basta iniciar em $n = 0$

$$\beta_{n+1} = \|D\mathcal{M}(\mathbf{p}_n)\mathbf{s}_n\|\beta_n - \eta_{n+1}, \quad (4.19)$$

com $\beta_0 = 0$.

Para o sombreamento em sistemas não-hiperbólicos então, é necessário aplicar uma combinação dos processos de contenção e refinamento. Refina-se a órbita e aplica-se a contenção de maneira a verificar o sombreamento rigorosamente. Em resumo dos procedimentos apresentados, dado um ponto pertencente à pseudotrajetória, então define-se a trajetória menos ruidosa pela soma da correção ponto a ponto ϕ_n . O ponto refinado $\tilde{\mathbf{p}}_n$ deve ser tomado como centro do paralelogramo M_n , de maneira a empregar a contenção para provar a existência de trajetórias reais dentro daquela distância pré-estabelecida, pela aplicação do operador truncamento, o que permite contruir os paralelogramos “longe” da influência computacional, ou seja, o ruído da máquina. Quando não houver paralelogramo

cuja imagem o atravesse, então há um “glitch” e a pseudotrajetória perde sua validade enquanto solução do sistema.

Para o mapa padrão, encontra-se tipicamente um tempo de sombreamento da ordem de $N \sim 10^7$ iteradas [9, 10]. Conforme já comentado, é um tempo longo relativamente ao sistema físico que origina o mapa. Considerando que uma iterada corresponde à uma aplicação da força na barra do rotor pulsado, interação que dura da ordem de milésimos de segundo, e supondo um passo para discretização da ordem de $0,1$ s, então é natural que a razão $t/\tau \sim N$ seja consideravelmente grande e, conseqüentemente, o tempo associado à este número de iteradas. A tabela seguinte fornece alguns valores da distância de sombreamento, obtida por meio dos processos descritos neste capítulo, em especial, o da contenção e refinamento para $K > 0$, quando o sistema deixa de ser hiperbólico.

Tabela 4.1: Distância de sombreamento para vários valores do parâmetro K no mapa padrão. Extraída de [9].

K	δ_x
1,0	$2,9 \times 10^{-7}$
1,05	$5,4 \times 10^{-8}$
2,25	$6,1 \times 10^{-8}$
2,5	$2,6 \times 10^{-10}$
3,0	$2,9 \times 10^{-10}$
4,0	$1,7 \times 10^{-10}$
5,0	$3,5 \times 10^{-10}$
7,5	$5,4 \times 10^{-11}$

Há ainda uma conjectura para sistemas não-hiperbólicos, formulada inicialmente em [9, 10], a qual apresenta-se da seguinte forma:

Para mapas hamiltonianos bidimensionais com $\delta_f > 0$, espera-se obter $\delta_x \leq \delta_f^{1/2}$ para uma trajetória de comprimento $N \approx \delta_f^{-1/2}$.

Para verificar isto, basta tomar um ruído $\delta_f \sim 10^{-14}$. Logo, $N = 1/\sqrt{10^{-14}} = 10^7$, conforme verificado. Além disto, $\delta_x \leq \sqrt{10^{-14}} = 10^{-7}$, que é o limite superior obtido para a distância de sombreamento.

Há ainda a possibilidade de efetuar testes com a pseudotrajetória para verificar a possibilidade de sombreamento. Grebogi e colaboradores mostraram que usualmente as pseudotrajetórias que não são sombreáveis são acompanhadas de flutuações nos expoentes de Lyapunov em torno de zero [33]. Há, portanto, um forte indício de quebra de

sombreamento em certos sistemas associado à flutuação dos ELTF, capazes de identificar não-hiperbolicidade [9, 33].

A ocorrência de não-hiperbolicidade pode se dar por meio de duas formas: a variabilidade da dimensão instável (VDI), que corresponde à uma mudança no número de direções instáveis ao longo das órbitas periódicas instáveis e as tangências homoclínicas e heteroclínicas. Já discutimos esta possibilidade no capítulo anterior. Vamos verificar como uma tangência homoclínica pode dar origem a impossibilidade de sombrear uma pseudotrajetória.

Que as tangências são causa da quebra de sombreamento deve ser claro. Afinal, o ângulo entre os vetores \mathbf{u}_n e \mathbf{s}_n não podem se aproximar de zero, o que implica impossibilidade de construção de um paralelograma seguinte M_{n+1} à partir de M_n , resultando em um “glitch”.

A ocorrência de um “glitch” invalida uma solução, obtida durante este passo, no sentido de não existir uma rigorosidade na trajetória obtida. A rigor, uma órbita é válida pelo tempo em que é sombreada em sistemas não-hiperbólicos. Ao apresentar o teorema do sombreamento, serão mostradas quantidades que não devem se anular com o intuito de garantir a existência de sombreamento.

4.2.3 A Quebra de Sombreamento

A ocorrência de tangências, homoclínicas ou heteroclínicas, podem facilmente invalidar as soluções obtidas, no sentido das órbitas não poderem ser sombreadas. A esta impossibilidade de ocorrência de sombreamento denomina-se “glitch”. De fato, o sombreamento falha em regiões de não-hiperbolicidade.

Matematicamente, um “glitch” em um ponto N consiste da impossibilidade de sombreamento para $\{\mathbf{p}_n\}_{n=0}^{N+1}$, embora a órbita $\{\mathbf{p}_n\}_{n=0}^N$ possa ser sombreada. Por isso o “glitch” é frequentemente associado à inexistência de um paralelogramo para “fazer um sinal de mais” com o paralelogramo anterior, conforme apresentado [9]. Como uma tangência é caracterizada pelo fato do ângulo entre as direções estável e instável ser nulo, então um paralelogramo perde uma dimensão e a transitividade dos paralelogramos não é garantida. Se, por exemplo, ocorre um “glitch”, então na representação esquemática da figura 4.5, não há possibilidade de construir um próximo paralelogramo e, como consequência, não há ponto da órbita real que pertença a alguma curva γ , de modo que não é possível determinar uma distância de sombreamento δ_x .

Um outro tipo de “glitch” ocorre quando o número de direções instáveis não é constante ao longo da órbita, impossibilitando a estrutura hiperbólica. O atrator, neste caso, apresenta números variáveis de autodireções estáveis.

Sejam q_1 e q_2 pontos fixos tais que q_1 apresente uma única direção instável e q_2 apresente duas direções instáveis. Órbitas típicas que passam através do conjunto invariante permanecem por um longo tempo próximas dos pontos fixos. Ordenando os expoentes de Lyapunov em ordem decrescente, o primeiro será positivo. O segundo expoente de Lyapunov será positivo para segmentos da órbita que está próxima de q_2 e negativo para segmentos da órbita próxima de q_1 . Deste modo, os expoentes de Lyapunov flutuam em torno de zero. Quando uma região em torno de uma pseudotrajetória desenvolve uma segunda direção que se expande pela visita à vizinhança de q_2 , a pseudotrajetória irá se distanciar exponencialmente das órbitas reais, resultando em uma quebra de sombreamento para a pseudotrajetória. A ilustração correspondente desta variação de direções estáveis encontra-se na figura 4.8.

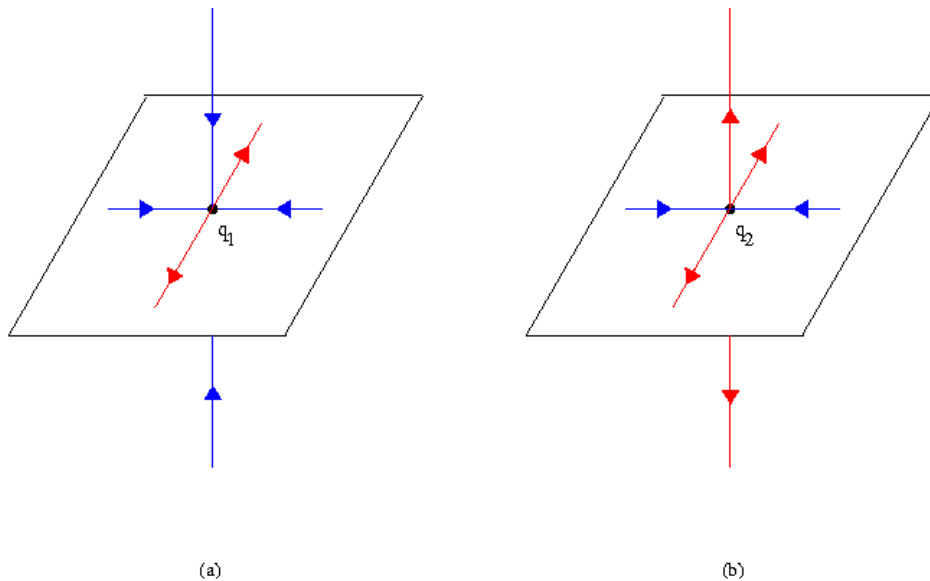


Figura 4.8: (a) Uma direção instável e duas estáveis na vizinhança de q_1 . (b) Vizinhança de q_2 , com duas direções instáveis e uma estável. Adaptada de [10].

4.2.4 O Tempo de Sombreamento

Uma quantidade importante na caracterização da dinâmica do sombreamento de trajetórias é o tempo de sombreamento, aqui denotado por τ_s , para diferenciar do passo τ do período da aplicação da força no rotor pulsado. Este tempo fornece o quanto uma trajetória numérica permanece válida, no sentido de permanecer próxima de uma trajetória real do sistema.

Existem duas quantidades fisicamente importantes quando se trata de sombreamento. Frequentemente neste contexto são apresentados dois questionamentos: um sobre a distância de sombreamento, no sentido de compreender qual é uma distância considerada boa e outro sobre o tempo de sombreamento, isto é, por quanto tempo uma trajetória permanece válida.

No trabalho [10] são estabelecidas leis de escala para algumas quantidades que podem ser obtidas computacionalmente, de maneira a responder aos questionamentos colocados. Nas seções anteriores comentou-se sobre a conjectura que estabelece uma regra para a distância de sombreamento em sistemas hamiltonianos. Para o tempo de sombreamento, é possível estabelecer também uma lei de escala.

Para uma dada trajetória, o tempo de sombreamento pode ser calculado por meio da evolução da distância de sombreamento ponto a ponto, que corresponde à distância local entre a trajetória numérica e a trajetória real.

Anteriormente, foi verificado que $N \sim 10^7$ para o mapa padrão. Este tempo é consideravelmente longo. O rotor pulsado, entretanto, dá origem a um mapa cujo espaço de fases não apresenta estrutura hiperbólica para $K > 0$, o parâmetro de controle. Mesmo em um sistema com estrutura não-hiperbólica, é possível obter soluções confiáveis dentro de uma distância δ_x por um tempo N .

4.3 O Teorema do Sombreamento

Este capítulo é finalizado com o teorema do sombreamento, cuja prova é bastante complexa [30]. Ressalta-se que não é o objetivo do trabalho discutir o teorema do sombreamento, mas sim o sombreamento por meio da contenção e refinamento das órbitas em processos caóticos.

Teorema 6 *Assuma que $\delta_f < 1/20\langle h \rangle^2$ e seja B um limite em relação à primeira e segunda derivadas parciais de f e f^{-1} . Se*

$$\max(C_n, D_n) \leq \frac{1}{\langle h \rangle^{5/2} B^2 \sqrt{\delta_f}},$$

para todo $n = 0, 1, \dots, N$, então existe uma órbita $\{\mathbf{p}_n\}_{n=0}^N$ de f tal que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{p}_n\| < \delta_f^{1/2}$ para $n = 0, 1, \dots, N$.

Este teorema garante a existência de uma trajetória real que δ_x -sombreia uma δ_f -pseudotrajetória desde que algumas quantidades permaneçam limitadas, independentemente se o sistema apresenta ou não estrutura hiperbólica. Este é o ponto importante deste teorema, pois se o sistema for hiperbólico, então é garantida a existência de sombreamento pois o ângulo entre as variedades estável e instável permanece limitado. Por outro lado, nada se afirma sobre a estrutura do sistema no teorema. A limitação da hiperbolicidade, embora não seja trivial demonstrar, é dada na forma de cossecantes e são as quantidades C_n e D_n que aparecem no teorema:

$$C_n = \csc \varphi_n + r_{n-1} C_{n-1} \quad (4.20)$$

$$D_n = \csc \varphi_n + r'_{n-1} D_{n+1}, \quad (4.21)$$

onde r_{n-1} é um limite superior para a taxa de expansão de \mathcal{M} e r'_{n-1} um limite superior para a taxa de expansão de $D\mathcal{M}^{-1}$. Note que a inicialização destas quantidades é feita da seguinte maneira: $C_0 = 0$ e $D_N = 0$, pois tratam-se de quantidades associadas à direção estável e instável, respectivamente.

É importante notar que o ângulo φ_n , correspondendo ao ângulo entre os supespaços estável e instável, deve ser maior do que zero, pois para $\varphi_n = 0$ as quantidades (4.20) (4.21) divergem.

Neste sentido, o teorema do sombreamento tem como corolário o próprio lema do sombreamento, já apresentado no início do capítulo.

5 *Conclusões*

Os sistemas hamiltonianos não-autônomos e não-lineares constituem uma rica fonte em fenômenos. Estes sistemas podem apresentar comportamento caótico, porém apresentam caos e regularidade no mesmo espaço de fases para determinados valores de algum parâmetro de controle.

Neste trabalho foi tratado do caos em sistemas bidimensionais e conservativos, em especial, o sistema conhecido como rotor pulsado e o mapa originado da discretização das equações canônicas do movimento por meio de secções de Poincaré: o mapa padrão. O principal interesse foi a investigação dos mecanismos geradores de caos em sistemas de baixa dimensionalidade bem como um procedimento chamado sombreamento.

Em especial, os sistemas hamiltonianos apresentam espaço de fases com regiões disjuntas para alguns valores de seus parâmetros de controle. No mapa padrão, verificou-se a existência destas regiões principalmente após $K_C \approx 0,971635406$ quando o último toro racional é quebrado e as órbitas começam a escapar para o mar caótico, fato que está de acordo com a literatura.

A presença praticamente completa de caos para $K \gg 1$ pôde ser verificada, quando visivelmente o mar caótico toma conta do espaço de fases, fato observado claramente por um histograma de frequências das variáveis.

Por outro lado, para K pequeno verificam-se a existência de ilhas de regularidade e a ocorrência de aprisionamento das órbitas, fato também verificado por um histograma de frequências das variáveis. A rigor, observa-se a existência de aprisionamento das órbitas por meio da distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, que apresenta um pico adicional, como se houvesse um segundo “mar caótico” entre uma ilha e o mar propriamente dito, observação que também está de acordo com a literatura.

O sombreamento corresponde ao fenômeno em que trajetórias reais do sistema sombreiam, isto é, permanecem arbitrariamente próximas das trajetórias ruidosas por algum tempo. Esta proximidade das trajetórias - real e ruidosa, respectivamente - permite infe-

rir que as soluções numéricas obtidas são válidas. Mais ainda: que a ocorrência de caos não é devido a erros numéricos introduzidos de cálculos computacionais em sistemas não-lineares. Assim, como no mapa padrão obtém-se uma distância média de $\delta_x \sim 10^{-10}$ por $N \sim 10^7$ iteradas, pode-se afirmar que as trajetórias obtidas são válidas dentro daquele tempo e com uma precisão δ_x , a chamada distância de sombreamento.

Sistemas como o do rotor pulsado são idealizações por dois motivos: o primeiro por não ser possível ter controle sobre a força impulsiva de tal modo que o sistema possa ser modelado por uma força dependente de uma função delta. O segundo é que são desprezadas quaisquer outras interações e qualquer atrito. Por outro lado, um sistema aparentemente simples dá origem a um comportamento complexo, onde para uma faixa considerável do parâmetro de controle há comportamento caótico. Além do comportamento caótico, o que exige que os pontos periódicos sejam densos no conjunto, ocorrem emaranhados homoclínicos e heteroclínicos das variedades estável e instável de pontos de algum período do mapa. Contudo, tangências entre as variedades estável e instável - sejam homoclínicas ou heteroclínicas - impossibilitam a estrutura continuamente hiperbólica do espaço de fases. Conseqüentemente, as propriedades que dependem desta estrutura hiperbólica são prejudicadas.

O fato do sistema não ser hiperbólico possibilita a ocorrência de “glitches”, ou seja, regiões onde há quebra de sombreamento, invalidando as soluções numéricas obtidas. De fato, o lema do sombreamento exige estrutura hiperbólica. Por outro lado, o teorema do sombreamento não exige a estrutura hiperbólica. No entanto, o sombreamento permanece válido em sistemas não-hiperbólicos enquanto a trajetória permanecer em regiões de hiperbolicidade. No caso do mapa padrão, um tempo mínimo de $N \sim 10^7$ é um tempo consideravelmente grande, em comparação com o sistema físico em si, onde é possível ter uma ideia de escala de tempo.

Rigorosamente, provar a existência de sombreamento mesmo em sistemas cujo espaço de fases não apresenta estrutura hiperbólica exige uma combinação dos processos de contenção e refinamento apresentados. A contenção garante a existência de trajetórias reais do sistema dentro de uma dada precisão e o refinamento permite obter órbitas menos ruidosas, o que torna possível a implementação numérica dos procedimentos apresentados. Esta combinação exige dois fatores importantes: a transitividade de paralelogramos adequadamente construídos em torno de cada ponto da órbita e a decomposição de quantidades, como o erro passo-a-passo e a correção numérica, em uma direção estável e outra instável, tornando o cálculo computacional e a implementação do processo de sombrea-

mento possíveis.

Destas verificações, é possível afirmar então que caos não é devido a erros numéricos cometidos em um cálculo computacional, afinal espera-se obter as mesmas figuras para o espaço de fases, por exemplo, do mapa padrão nas regiões onde o sombreamento é garantido apenas pelo “deslocamento” dos pontos por uma quantia δ_x .

Verificou-se também o emprego do método de Schmelcher-Diakonos (SD) para encontrar órbitas periódicas instáveis em mapas hamiltonianos. No mapa padrão o método é aplicável e os pontos periódicos encontrados estão de acordo com os testes numéricos realizados e com a simetria do mapa.

A utilização racional do método SD para encontrar as órbitas periódicas instáveis consiste em uma estimativa do tempo de detecção dos pontos bem como da estimativa do valor crítico para o parâmetro de estabilização, limitado pelo maior autovalor em módulo. Contudo, neste trabalho foi empregada a seguinte sistemática: o número de pontos detectados para um dado valor do parâmetro de estabilização e do tempo de detecção foi verificado. Se pontos adicionais não são detectados para valores maiores do tempo e menores do parâmetro, então obtêm-se os valores críticos.

Por outro lado, é possível obter um limite inferior para o tempo de detecção e um limite superior para o parâmetro de estabilização em sistemas hamiltonianos, e, em especial, no mapa padrão. Este ponto é deixado como uma sugestão para trabalhos futuros com estudos das órbitas periódicas bem como esta estimativa para as órbitas periódicas em redes de mapas hamiltonianos acoplados.

Outra sugestão de trabalhos futuros consiste no estudo mais aprofundado das variedades, iniciando pelas intersecções, um aparente “paradoxo determinista”, embora não constitua de fato um paradoxo. O questionamento das intersecções e importância das mesmas e das tangências em sistemas dinâmicos não-lineares de baixa dimensionalidade conduz a obtenção de propriedades importantes como a lei de escala para a vizinhança linear, apresentada no capítulo 3. Ainda nesta linha, pode-se verificar se há alguma relação - ou lei de escala - para a vizinhança linear com relação a algum parâmetro de controle, para algum valor de corte do raio ϵ .

Referências Bibliográficas

- 1 MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- 2 ALLIGOOD, K.; YORKE, J.; SAUER, T. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. New York: Springer, 1996.
- 3 OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. 2. ed. New York: Cambridge, 2002.
- 4 GULLICK, D. *Encounters with Chaos*. USA: McGraw-Hill, 1992.
- 5 DEVANEY, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2. ed. USA: Addison-Wesley, 1989.
- 6 LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- 7 CHIRIKOV, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Phys. Rep.*, v. 52, n. 263, 1979.
- 8 BOWEN, R. Omega-limit sets for axiom a diffeomorphism. *Jour. Diff. Eq.*, v. 18, 1975.
- 9 GREBOGI, C. et al. Shadowing of physical trajectories in chaotic dynamics: Containment and refinement. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 65, n. 13, p. 1527–1530, Set 1990.
- 10 HANDBOOK of Dynamical Systems. In: . [S.l.]: Elsevier, 2002. cap. Shadowability of Chaotic Dynamical Systems.
- 11 STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. USA: Perseus Books, 2001.
- 12 GOLDSTEIN, H.; POOLE, L.; SAFKO, J. L. *Classical Mechanics*. 3. ed. USA: Addison Wesley, 2002.
- 13 LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. *Regular and Chaotic Dynamics*. New York: Springer, 1992.
- 14 WIGGINS, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. 2. ed. New York: Cambridge, 2002.
- 15 SCHMELCHER, P.; DIAKONOS, F. K. Detecting unstable periodic orbits of chaotic dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 78, n. 25, p. 4733–4736, Jun 1997.

- 16 SCHMELCHER, P.; DIAKONOS, F. K. General approach to the localization of unstable periodic orbits in chaotic dynamical systems. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 57, n. 3, p. 2739–2746, Mar 1998.
- 17 ARNOLD, V. I.; WEINSTEIN, A.; VOGTMAN, K. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. 2. ed. USA: Springer, 1989.
- 18 APOSTOL, T. M. *Calculus*. 2. ed. USA: John Wiley & Sons, 1967.
- 19 APOSTOL, T. M. *Calculus*. 2. ed. USA: John Wiley & Sons, 1969.
- 20 BAKER, G. L.; GOLLUB, J. P. *Chaotic Dynamics: An Introduction*. New York: Cambridge, 1996.
- 21 ROCHA, J. F. M. O. *Origens e Evolução das Idéias da Física*. Salvador: EDUFBA, 2002.
- 22 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2003.
- 23 LEECH, J. W.; DE, O. C. C. *Mecânica Analítica*. Rio de Janeiro: Ao livro técnico S. A. e Editora da Universidade de São Paulo, 1971.
- 24 HORWITZ, L. et al. Geometry of hamiltonian chaos. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 98, n. 23, p. 234301, Jun 2007.
- 25 CHAOS on the Web. Acesso em: 20/05/2009. Disponível em: <http://crossgroup.caltech.edu/Chaos_Course>.
- 26 ZASLAVSKY, G. M. *The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*. 2. ed. USA: Imperial College Press, 2007.
- 27 SZEZECH, J. D.; LOPES, S.; VIANA, R. L. Finite-time lyapunov spectrum for chaotic orbits of non-integrable hamiltonian systems. *Phys. Lett. A*, Elsevier, v. 335, p. 394–401, 2005.
- 28 CARROLL, S. *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*. USA: Addison Wesley, 2004.
- 29 BOOTHBY, W. M. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. 2. ed. London: Academic Press, 1986.
- 30 SAUER, T.; YORKE, J. A. Rigorous verifications of trajectories for the computer simulation of dynamical systems. *Nonlinearity*, v. 4, 1991.
- 31 HAYES, W.; JACKSON, K. R. A survey of shadowing methods for numerical solutions of ordinary differential equations. *App. Num. Math.*, v. 53, 2005.
- 32 LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- 33 DAWSON, S. et al. Obstructions to shadowing when a lyapunov exponent fluctuates about zero. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 73, n. 14, p. 1927–1930, Oct 1994.

- 34 PINGEL, D.; SCHMELCHER, P.; DIAKONOS, F. K. Stability transformation: a tool to solve nonlinear problems. *Physics Reports*, v. 400, n. 2, p. 67 – 148, 2004.
- 35 HAMMEL, S. M.; JONES, C. K. R. T.; MOLONEY, J. V. Global dynamical behavior of the optical field in a ring cavity. *J. Opt. Soc. Am. B*, v. 2, n. 4, p. 552–564, 1985.

APÊNDICE A -- O Método da Transformação de Estabilidade

Conforme comentado no capítulo 3, este método constitui um dos resultados mais fortes associados ao cálculo computacional das órbitas periódicas instáveis. Este método foi proposto inicialmente por Schmelcher e Diakonov em 1997 [15, 16, 34]. Neste apêndice será apresentado o método contendo sua interpretação geométrica. Para tanto, exemplifica-se com o mapa de Ikeda [2, 3, 35].

Considere um sistema dinâmico inteiramente caótico, no sentido de apresentar somente pontos fixos instáveis, denotado por:

$$\mathcal{M}_U : \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{r}_n), \quad (\text{A.1})$$

onde o índice U representa “instável”, do inglês “unstable”.

Autovalores da matriz jacobiana associada a um ponto fixo ou a uma órbita periódica (que é ponto fixo para alguma iteração do mapa) no mapa (A.1) apresentam parte real maior do que a unidade, em módulo. O método consiste em efetuar uma transformação linear partindo do sistema original, de modo que os autovalores da matriz jacobiana associada aos sistemas transformados tenham parte real menor do que a unidade, em módulo. Além disto, se \mathbf{r}^* for um ponto fixo do mapa (A.1), então deverá ser ponto fixo também dos sistemas transformados. Isto significa que deseja-se alterar somente a estabilidade do ponto, mas não sua posição, que permanece sendo \mathbf{r}^* .

Mais ainda, um ponto fixo dos sistemas transformados também deve ser ponto fixo do sistema original. Exige-se, portanto, que estas transformações sejam lineares, para garantir que sejam biunívocas. Logo, é possível escrever os sistemas transformados como sendo:

$$\mathcal{M}_{Sk} : \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Lambda_k[\mathbf{f}(\mathbf{r}_n) - \mathbf{r}_n], \quad (\text{A.2})$$

onde $\{\mathcal{M}_{Sk}\}$ denota o conjunto de transformações possíveis e o índice S representa “estável”, do inglês “stable”. Deve ser óbvio, como foi afirmado no capítulo 3 que estas relações são biunívocas em relação ao sistema original. Basta que $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}^*$ para verificarmos que pontos fixos em um sistema serão pontos fixos em outros sistemas. É necessário, contudo, que o conjunto de matrizes de estabilização Λ_k sejam não-singulares.

Naturalmente é possível trocar $\mathbf{f}(\mathbf{r}_n)$ pela p -ésima iterada do mapa, aqui p denotando alguma iterada com $p > 1$. Em especial, tratando-se de um ciclo- p . Se isto for feito, então uma órbita periódica é estabilizada.

O número de matrizes Λ_k para a estabilização de um ponto fixo cresce com a dimensionalidade do sistema. Com o intuito de encontrar estas matrizes, inicialmente encontra-se uma relação entre as matrizes jacobianas dos sistemas transformados e a matriz jacobiana do sistema original. Para a ilustração, considere um sistema bidimensional

$$\mathcal{M}_U : x_{n+1} = f_1(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = f_2(x_n, y_n). \quad (\text{A.3})$$

A transformação do sistema se dá pela expressão (A.2), com $\mathbf{r}_n = (x_n, y_n)$. A matriz jacobiana do sistema original se escreve

$$D\mathcal{M}_U = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x^j} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

onde $x^1 = x$ e $x^2 = y$. Para os sistemas transformados:

$$D\mathcal{M}_{Sk} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_n^i}{\partial \mathbf{r}_n^j} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Com efeito, é imediato perceber a relação entre as matrizes jacobianas:

$$M_k : D\mathcal{M}_{Sk} = I_2 + \Lambda_k(D\mathcal{M}_U - I_2), \quad (\text{A.6})$$

sendo I_2 a matriz identidade de ordem 2. Por definição, a matriz $D\mathcal{M}_{Sk}$ é diagonalizável, real e invertível. Como o sistema original trata-se de um sistema caótico por hipótese, então $D\mathcal{M}_U$ deve apresentar no mínimo um autovalor com parte real maior do que a unidade, em módulo.

A seguinte parametrização pode ser efetuada

$$\Lambda_k = \vartheta C_k \quad (\text{A.7})$$

de modo a encontrar as formas possíveis para a matriz de estabilização. O parâmetro ϑ corresponde ao parâmetro de estabilização e $C_{ij} = O(1)$. Isto significa que estas matrizes pertencem ao grupo ortogonal e que seus elementos são $\{0, \pm 1\}$.

O objetivo é assegurar que o termo $C_k(D\mathcal{M}_U - I_2)$ apresente autovalores com partes reais negativas e, conseqüentemente, com uma escolha adequada do parâmetro de estabilização, os autovalores de (A.6) apresentem partes reais menores do que a unidade, em módulo. Esta é a essência do método. Sua incrível simplicidade torna o método extremamente elegante.

O parâmetro de estabilização deve ser tal que $0 < \vartheta \ll 1$ para garantir a estabilização de uma órbita.

Para verificar a razão pela qual se pode assumir $C_k = [C_{ij}]$ do grupo ortogonal $O(1)$, cabe observar que para uma dada $D\mathcal{M}_U$, é possível encontrar uma matriz involutória $C_k^2 = I_N$, tal que $C_k(D\mathcal{M}_U - I_N) \equiv A$ tenha autovalores com parte real negativa. Como assumiu-se que $D\mathcal{M}_U$ é diagonalizável, também será $D\mathcal{M}_U - I_N \equiv B$. Portanto existe uma transformação similaridade P tal que $P^{-1}BP \equiv B_D$ seja diagonal, ou seja,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}C_kBP \\ &= P^{-1}C_kPB_D. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Como consequência, é possível escolher uma matriz involutória C_k definida por $C_k = PC_{Dk}P^{-1}$, com C_{Dk} sendo diagonal, de modo que seus autovalores tenham parte real negativa.

A questão agora é do número de transformações necessárias para que a estabilização ocorra. Seja a_N o número de matrizes necessárias para estabilizar algum ciclo. Retornando ao exemplo bidimensional, a matriz jacobiana - e todas as matrizes empregadas nesta discussão - são de ordem 2. Como já foi demonstrado ser C_k ortogonal com elementos $\{0, \pm 1\}$ então existem oito possibilidades para as matrizes C_k . Para sistemas unidimensionais, existem apenas dois valores possíveis: ± 1 . Logo, o número de matrizes necessárias para a estabilização é

$$a_N = N!2^N, \quad (\text{A.9})$$

sendo N a dimensionalidade do sistema. O número de matrizes cresce rapidamente com

N . Até $N = 3$, há um valor aceitável de matrizes, embora sua implementação torne-se mais complexa. É possível demonstrar, por meio de considerações geométricas, que em geral um número menor de matrizes é necessário para efetuar a estabilização. Para sistemas bidimensionais, apenas cinco das oito matrizes são necessárias, pois as outras três estabilizam um mesmo conjunto de pontos.

O número de iteradas também influencia na obtenção dos pontos fixos do mapa. Isto significa que um tempo maior será consumido com ciclos em que $p \gg 1$. O parâmetro ϑ está diretamente relacionado ao tempo necessário para detectar um ponto fixo. Já foi comentado que ϑ deve ser suficientemente pequeno. No entanto, mais passos serão necessários no método iterativo para que ocorra a estabilização dentro de um critério de parada, isto é: $\|\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n\| < \xi$, onde usualmente $\xi \sim 10^{-15}$.

Um critério pode ser empregado para determinar o valor máximo do parâmetro de estabilização que corresponde ao caso em que um dos autovalores da matriz $D\mathcal{M}_{S_k}$ assume valor unitário. Neste caso, se ϑ_{\max} corresponde a este limite superior, então sabe-se que $0 < \vartheta < \vartheta_{\max}$. O algoritmo para detecção dos pontos fixos é relativamente simples. Descreve-se como foi empregado para o mapa padrão, mas que pode ser utilizado para outros mapas.

1. Percorre-se o espaço de fases do sistema e uma condição inicial é escolhida, que será semente para o método;
2. Uma matriz das a_N matrizes é escolhida;
3. Itera-se o sistema (A.2) partindo da condição inicial obtida anteriormente;
4. Se a solução convergir dentro do critério de parada, então o valor obtido é impresso;
5. Retorna ao passo 2;
6. Quando o número de matrizes testadas for igual a a_N , então vai para o passo 1 até que todo o espaço de fases tenha sido percorrido;
7. Os procedimentos anteriores são efetuados para um número de iteradas maior para o método e para ϑ menor. Se nenhum ponto adicional for obtido, então foram detectadas, em princípio, as órbitas desejadas. Caso contrário, continua o processo.

Como pode ocorrer de transformações diferentes estabilizarem pontos em comum, pode ser vantajoso do ponto de vista computacional, estabelecer um algoritmo para verificação da igualdade entre os pontos obtidos a cada convergência.

Para o mapa padrão, empregou-se $\vartheta = 0,01$ para pontos de período 2 com $n = 10^4$ iteradas, com n aumentando e ϑ diminuindo a cada período.

A.1 Digressão sobre o Efeito das Matrizes de Estabilização

O objetivo nesta seção é interpretar geometricamente o uso das matrizes C_k . Para tanto, considere o mapa de Ikeda, estudado inicialmente por K. Ikeda com o objetivo de analisar a propagação de ondas eletromagnéticas em um meio não-linear [35]. Considere uma cavidade óptica como a da figura A.1.

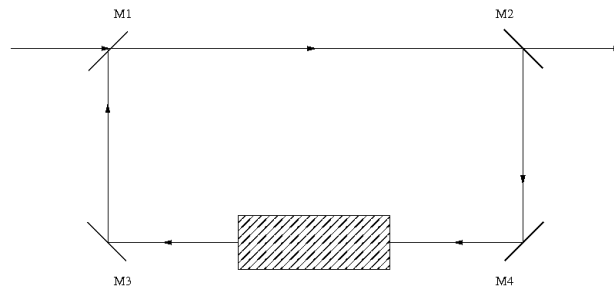


Figura A.1: Cavidade óptica para estudar a resposta das ondas eletromagnéticas em relação a um meio não-linear. Os espelhos M_i ($i = 1, 2$) são parcialmente refletores e M_j ($j = 3, 4$) são totalmente refletores.

A discretização do campo elétrico conduz ao mapa definido de maneira que $z_{n+1} \mapsto f(z_n)$, tal que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$z_{n+1} = a + bz_n \exp\left(i\kappa - \frac{i\nu}{1 + |z_n|^2}\right), \quad (\text{A.10})$$

sendo κ um parâmetro associado ao deslocamento de fase com a cavidade vazia e ν o parâmetro de não-linearidade, associado ao meio dielétrico. A refletividade dos espelhos M_1 e M_2 é controlada pelo parâmetro b e o campo elétrico do feixe de laser após o espelho M_1 é dado pelo parâmetro a .

As componentes são obtidas então tomando a parte real e imaginária, respectivamente, do mapeamento no plano complexo (A.10). Com o auxílio da identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sen \theta, \quad (\text{A.11})$$

o mapeamento complexo pode ser escrito como:

$$x_{n+1} + iy_{n+1} = a + bx_n \cos w_n - by_n \sen w_n + ib(\sen w_n + y_n \cos w_n), \quad (\text{A.12})$$

sendo

$$w_n = \kappa - \frac{\nu}{1 + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \quad (\text{A.13})$$

e i a unidade imaginária.

Naturalmente, $|z_n| = z_n^* z_n = x_n^2 + y_n^2$. Fisicamente, w_n corresponde à fase do sinal óptico. O mapa $\mathcal{M}_{\text{Ikeda}}$ fica definido por:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \text{Re}[z_{n+1}] = a + b(x_n \cos w_n - y_n \sin w_n) \\ y_{n+1} = \text{Im}[z_{n+1}] = b(x_n \sin w_n + y_n \cos w_n) \\ w_n = \kappa - \frac{\nu}{1 + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}}, \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

sendo x_n , y_n e w_n reais.

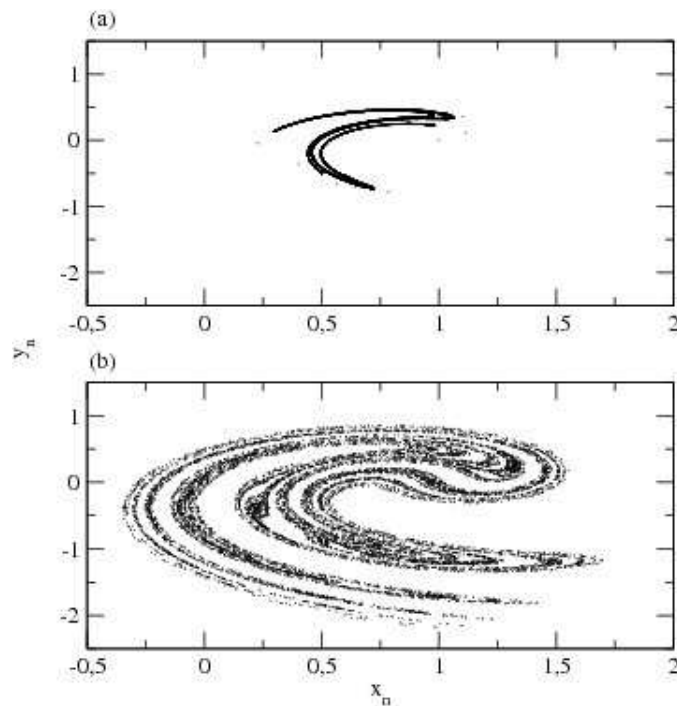


Figura A.2: Uma órbita do mapa de Ikeda no espaço de fases para (a) $b = 0,7$ e (b) $b = 0,9$. As componentes do campo eletromagnético apresentam uma resposta não trivial proeminente para $b = 0,9$.

Efetuada a transformação de coordenadas de (A.2), são obtidos cinco mapas, que iterados devem fornecer os pontos fixos do mapa p vezes iterado.

Na figura A.3 são apresentadas as órbitas instáveis de período dois (em vermelho) e três (em azul) para o mapa de Ikeda com os parâmetros da figura A.2b.

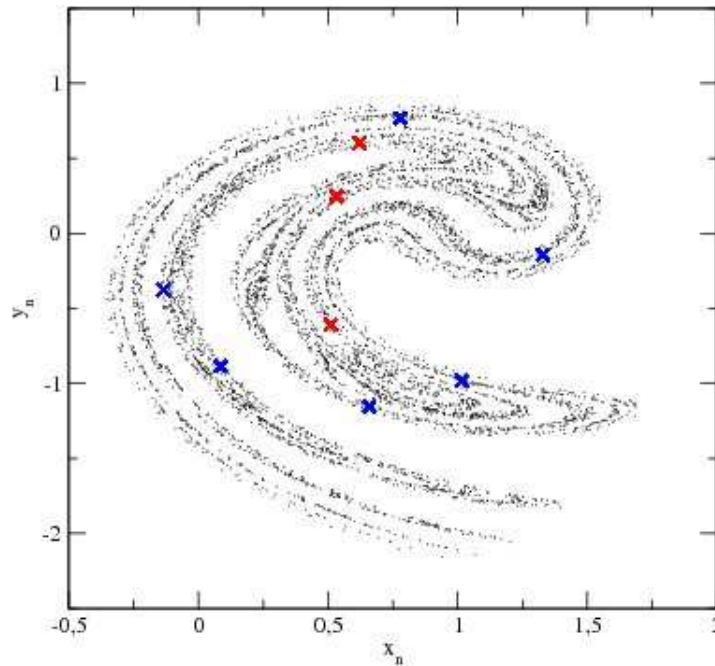


Figura A.3: Ilustração da aplicação do método SD para encontrar pontos de período 2 (em vermelho) e 3 (em azul) no mapa de Ikeda com os parâmetros da figura A.2b.

A.1.1 A Interpretação Geométrica das Matrizes de Estabilização

Considere novamente o mapa de Ikeda. O campo vetorial é definido por $V_U = \mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n$. As matrizes C_k são responsáveis por processos consideravelmente simples: correspondem a rotações e reflexões dos vetores no espaço. Note que, no caso bidimensional, por exemplo, são matrizes de permutação e rotação. Conseqüentemente, o produto ϑC_k corresponde a uma transformação de escala. As figuras seguintes ilustram o efeito da aplicação da matriz $C_1 = I_2$ sobre o campo vetorial do sistema original V_U . O campo vetorial de cada um dos sistemas transformados é dado por: $V_{S_k} = \vartheta C_k V_U$. Para a ilustração, $V_{S1} = \vartheta I_2 V_U$. Note a reflexão e rotação seguida da transformação de escala em torno do ponto fixo $(x_n^*, y_n^*) = (0,5328; 0,2469)$. Para os pontos de período 1, basta $\vartheta = 0,1$ no mapa de Ikeda.

A.2 A Formulação Contínua da Transformação de Estabilidade

Finalmente, existe uma formulação contínua para o método de Schmelcher-Diakonos. De acordo com o discutido, o método na forma apresentada é extremamente dependente do parâmetro de estabilização ϑ no caso de mapas. Isto acarreta um tempo grande para as simulações empregadas. Assim, mesmo no mapa de Ikeda, pontos de período $p \geq 10$,

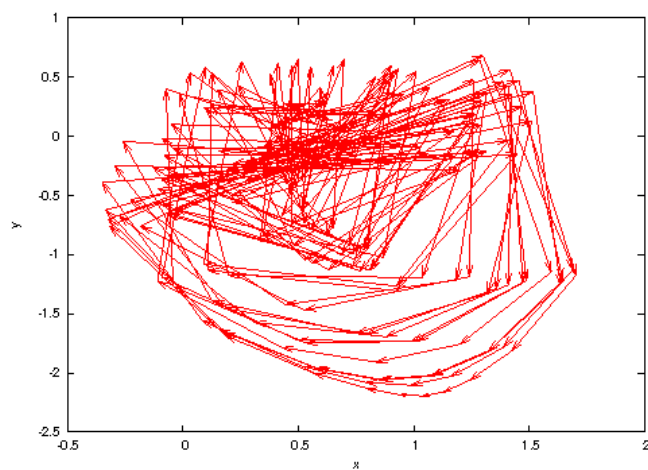


Figura A.4: Campo vetorial associado ao sistema original V_U .

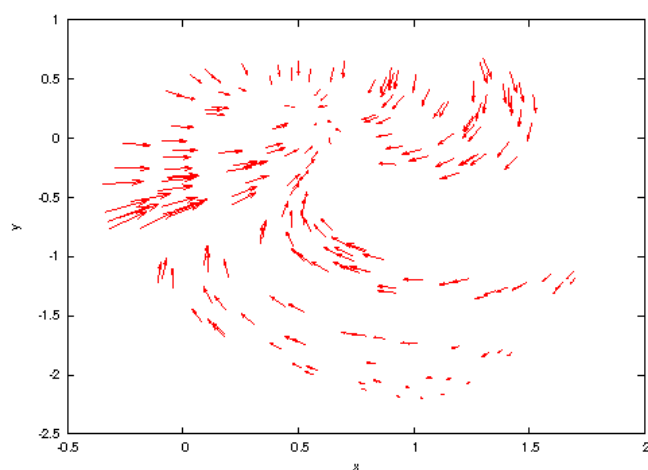


Figura A.5: Efeito da primeira matriz C_1 sobre o sistema original.

por exemplo, tomam muito tempo, pois exigem $\vartheta \ll 1$ e $n \gg 10^3$.

Para contornar este problema e retirar a dependência do parâmetro de estabilização no método apresentado, usualmente faz-se:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n}{\vartheta} = \dot{\mathbf{r}} = C_k[\mathbf{f}(\mathbf{r}) - \mathbf{r}]. \quad (\text{A.15})$$

A expressão (A.15) deve ser resolvida com algum integrador do tipo preditor-corretor e suas soluções fornecem os pontos estabilizados.

A.3 Os Expoentes de Lyapunov

Apresentou-se no capítulo 3 uma expressão que relaciona a medida com as órbitas periódicas instáveis.

Os expoentes de Lyapunov também podem ser obtidos por meio das órbitas periódicas instáveis. Sabe-se que para n grande, o mapeamento será formado unicamente de órbitas periódicas instáveis imersas no conjunto invariante. Assim, conforme comentado no capítulo 3, há a possibilidade de fazer uso das órbitas periódicas para $n \rightarrow \infty$ com a finalidade de obter os expoentes de Lyapunov. Analogamente, se o período $p \rightarrow \infty$ a expressão geral fica:

$$h_{1,2} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_i \frac{1}{\lambda_1(\mathbf{r}_{ip})} \ln |\lambda_{1,2}(\mathbf{r}_{ip})|, \quad (\text{A.16})$$

onde \mathbf{r}_{ip} denota o i -ésimo ponto fixo da p -ésima iterada do mapa e $\lambda_{1,2}$ corresponde aos autovalores ordenados de maneira decrescente da matriz $D\mathcal{M}_{Sk}$ calculada no ponto fixo \mathbf{r}_{ip} .

APÊNDICE B -- Fractais e o Conjunto de Cantor

Muitas estruturas geométricas geradas por mapas caóticos são extremamente complexas. Um mapa é dito caótico se apresenta todas as condições que possibilite o comportamento caótico de suas órbitas.

Espaços de fases de sistemas caóticos podem apresentar uma estrutura geométrica bastante complexa. Consiste de uma estrutura que se repete com a variação da escala, apresentando uma propriedade chamada autossimilaridade.

De maneira informal, conjuntos que apresentam uma certa complexidade e a propriedade de autossimilaridade são chamados de fractais.

Uma construção fractal muito utilizada para fins didáticos é a construção do conjunto de Cantor do terço médio. O nome é devido ao matemático russo George F. L. P. Cantor (1845-1918). Inicialmente será apresentada a construção do conjunto, que é bastante simples, e então discutir-se-ão algumas características deste tipo de conjunto.

A rigor, existem definições para um conjunto de Cantor, de tal modo que dado um conjunto fechado qualquer, é possível determinar se é um conjunto de Cantor ou não.

A construção deste conjunto é feita da maneira como decrita a seguir. Inicialmente, parte-se do intervalo $[0, 1]$, representado pela linha contínua na figura B.1. A cada passo, deve-se dividir este intervalo em três subintervalos de igual tamanho. Assim, se o comprimento inicial for ℓ , então no próximo passo cada subintervalo terá um comprimento $\ell/3$. No caso ilustrado - e na construção original de Cantor - $\ell = 1$. Deste modo, o comprimento de um subintervalo na segunda iterada é $1/3$.

O próximo passo na construção deste conjunto consiste em retirar a partição central do subintervalo. Na primeira iterada, será retirada uma parte, que é justamente a segunda das três partições.

No terceiro passo cada subintervalo será particionado em três, de maneira que o comprimento de cada intervalo resultante seja $1/3^2 = 1/9$. Aqui, serão retiradas duas partes médias. Assim, na i -ésima iterada, terão sido retiradas i partições e o comprimento de um subintervalo será $1/3^i$.

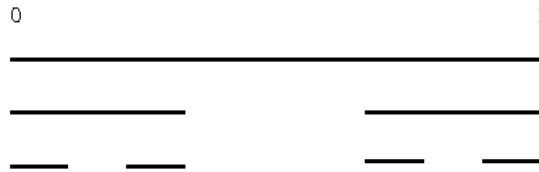


Figura B.1: Ilustração das iteradas que formam o conjunto de Cantor.

Quando $i \rightarrow \infty$, o comprimento de um subintervalo será nulo, embora o número de partições tenda ao infinito. Além disto, se a terceira iterada for ampliada, por exemplo, da ilustração B.1, não será possível distinguir a figura ampliada da “condição inicial” $[0, 1]$. Isto vale para a i -ésima iterada também. É esta invariância com a escala que é chamada de autossimilaridade.

Um conjunto de Cantor fica definido como um conjunto fechado que consiste inteiramente de pontos de fronteira, cada um sendo um ponto limite do conjunto. Naturalmente, tratamos aqui de intervalos abertos no sentido (a, b) e intervalos fechados no sentido $[a, b]$. Ou seja, se x é um ponto pertencente ao intervalo fechado $[a, b]$, então $a \leq x \leq b$.

Um ponto P é dito um ponto interior de um conjunto A se existe uma vizinhança $N_\varepsilon \equiv \{x : \|x - P\| < \varepsilon\}$ contida inteiramente em A . O ponto P é um ponto limite de um conjunto A se toda vizinhança N_ε de P contém pelo menos um ponto no conjunto A . Isto é equivalente a dizer que existe uma sequência de pontos distintos $x_1, x_2, \dots \in A$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = P$. Um ponto P é um ponto de fronteira de A se toda vizinhança N_ε de P possui pontos que estão em A e pontos que não estão em A .

Teorema 7 *Todo conjunto aberto não vazio e limitado A pode ser representado como a soma de um número finito de intervalos abertos ou um número infinito contável de intervalos abertos disjuntos. Isto é:*

$$A = \sum_k (a_k, b_k) \quad (\text{B.1})$$

A medida de Lebesgue do conjunto aberto A fica definido por:

$$\mu(A) = \sum_k (b_k - a_k). \quad (\text{B.2})$$

Teorema 8 *Um conjunto fechado B pode ser obtido à partir de um conjunto fechado pela remoção de uma família finita ou infinita contável de intervalos abertos disjuntos. Consequentemente o conjunto pode ser assim representado:*

$$B = [a, b] - \sum_k (a_k, b_k). \quad (\text{B.3})$$

A medida de Lebesgue do conjunto fechado B da definição acima fica definido por:

$$\mu(B) = (b - a) - \sum_k (b_k - a_k). \quad (\text{B.4})$$

Um conjunto de Cantor é fechado. De acordo com a definição acima, o conjunto de Cantor do terço médio tem medida de Lebesgue nula.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)