

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**João Carlos de Jesus Gomes da Silva**

**EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA O SISTEMA DE  
VON KÁRMÁN DAS PLACAS COM MEMÓRIA**

**BELÉM**

**2010**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**João Carlos de Jesus Gomes da Silva**

**Existência de soluções para o sistema de von Kármán  
das placas com memória**

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**

**BELÉM**

**2010**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

## João Carlos de Jesus Gomes da Silva

Existência de soluções para o sistema de von Kármán das placas com memória

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Data da defesa: 08 de julho de 2010.

Conceito: \_\_\_\_\_

Banca Examinadora

---

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (Orientador)

PPGME - UFPA

---

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha

PPGME - UFPA

---

Prof. Dr. Jorge Ferreira

UFRPE

# Dedicatória

Ao Senhor DEUS, por iluminar todos os dias de minha vida.

A minha esposa, Maricilda Câmara Corrêa (in memoriam), cuja existência foi marcada pela alegria, pelo entusiasmo e por acreditar na vida, sendo a minha maior incentivadora. Tenho absoluta certeza de que ela está orgulhosa por eu haver concluído este curso. Minha gratidão a ela é indelével, e sua ausência me faz sentir como se tivesse perdido uma parte da minha história.

Aos meus pais, João Cavalcante (in memoriam) e Maria José, que, com amor e dedicação, apoiaram-me intensamente em todos os momentos da minha vida.

Aos meus filhos, Lorena e Lucas, os melhores presentes que Deus me deu! Obrigado, por existirem e me permitirem a honra de ser vosso pai!

# Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Mauro de Lima Santos, que, com compreensão, atenção, dedicação e competência, aceitou orientar-me neste trabalho.

Aos amigos Luiz Corrêa e Graça Corrêa, padrinhos do meu filho, minha sincera gratidão, pela amizade, pelo incentivo e por haverem aceitado ser meus avalistas, para que eu pudesse ser liberado com meu salário da SEDUC, enquanto estivesse cursando esta Pós-Graduação.

As minhas cunhadas, Iracilda e Gracilda, minha gratidão, pela amizade, pelo incentivo e pela colaboração.

A minha irmã Socorro, minha gratidão, pela dedicação, pois sempre esteve comigo nos momentos difíceis por que passei no decorrer deste curso.

A minha grande amiga Lurdes, minha gratidão, pela amizade e pela colaboração ao cuidar do meu filho, na ausência física da mãe.

A todos os professores e funcionários do PPGME, que, direta ou indiretamente, deram suas contribuições.

Aos amigos e colegas do Mestrado, que, com horas de alegria e tristeza, superamos juntos as dificuldades que encontramos. Finalmente, a todos que, com uma palavra, com um gesto, com um pensamento, levavam-me sempre a acreditar que tudo na vida é possível. Basta acreditar em si mesmo, ter persistência e força para lutar e VENCER!

# *Resumo*

---

Nas últimas décadas, vários tipos de equações diferenciais parciais foram utilizadas como modelos matemáticos que descrevem propriedades físicas, químicas, biológicas e da engenharia, veja Lagnese [5] para detalhes. Entre eles, os estudos de modelos matemático de vibração associados as estruturas flexíveis, foram consideravelmente estimulados nos últimos anos por um número crescente de questões de preocupação prática, (veja [2,3,4,6,7,8]). Investigação sobre sistemas distribuídos concentrou-se principalmente sobre a existência, unicidade e estabilização de modelos dinâmicos tais como cordas, membranas, placas e vigas (veja [2,3,4,5,6,7,8]).

Neste trabalho estamos considerando a equação dinâmica de von Kármán para placas viscoelásticas na presença de um efeito memória na fronteira. Mostramos a existência e unicidade de soluções fraca e forte para este sistema.

# *Abstract*

---

For the last several decades, various types of equations have been employed as some mathematical model describing physical, chemical, biological and engineering systems (see [5]). Among them, the mathematical models of vibrating, flexible structures has been considerably stimulated in recent years by an increasing number of questions of practical concern (see [2,3,4,6,7,8]). Research on stabilization of distributed parameter systems has largely focused on the stabilization of dynamic models of individual structural members such as strings, membranes, plates and beams (see [2,3,4,5,6,7,8]).

In this work we consider the dynamic von Kármán system with boundary conditions of memory type. We show the existence and uniqueness of weak and global solutions of this system.



# *Conteúdo*

---

Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 Preliminares	2
2 Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções	19
Conclusão	36
Bibliografia	37

# Introdução

---

O sistema de von Kármán com damping friccional no domínio ou na fronteira (ou em parte da fronteira) foi estudado por M. Horn and I. Lasiecka em [2,3], M. Horn, A. Favini, I. Lasiecka and D. Tataru em [4] and J. Puel and M. Tucsnak [8]. Eles provaram que o sistema de von Kármán com damping friccional é exponencialmente estável.

O sistema (2.2)-(2.8) que veremos mais adiante, foi estudado por Rivera e Menzala [6]. Eles provaram a existência de solução global fraca e forte do sistema de von Kármán com memória e também a estabilidade exponencial e polinomial do referido sistema. Posteriormente, Rivera, Portillo and Santos [7] mostraram que o sistema (2.2)-(2.8) com memória na fronteira é exponencialmente e polinomialmente estável, com taxas de decaimento que depende do comportamento da função relaxamento.

Para um perfeito significado físico do problema estudado o leitor poderá consultar Lagnese [5]. Este trabalho foi dividido da seguinte forma. No primeiro capítulo apresentamos alguns resultados preliminares importantes para a solução do problema proposto. No segundo capítulo demonstraremos a existência e unicidade de soluções fraca e forte para o modelo de von Kármán. Para isto usamos o método de Faedo-Galerkin.

---

# Preliminares

---

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados básicos, os quais serão utilizados no próximo capítulo.

## 1.1 Teoria das Distribuições Escalares

### 1.1.1 Espaços das Funções Testes

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função contínua. Denominamos suporte de  $\varphi$ , ao fecho em  $\Omega$ , do conjunto dos pontos  $x$  pertencentes a  $\Omega$  onde  $\varphi$  não se anula. Denotamos o suporte de  $\varphi$  por  $\text{supp}(\varphi)$ . Simbolicamente, temos que

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}} \quad \text{em } \Omega.$$

Usando a definição concluímos que  $\text{supp}(\varphi)$  é o menor fechado do qual  $\varphi$  se anula e valem as seguintes relações

1.  $\text{supp}(\varphi + \psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\psi)$
2.  $\text{supp}(\varphi\psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\psi)$
3.  $\text{supp}(\lambda\varphi) = \lambda \text{supp}(\varphi)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Neste capítulo, daremos um destaque especial às funções  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , com suporte compacto contido em  $\Omega$  que, sejam definitivamente continuamente diferenciáveis. Com esse objetivo definimos o espaço  $C_0^\infty(\Omega)$ , como sendo o espaço vetorial das funções indefinidamente continuamente diferenciáveis com suporte compacto contido em  $\Omega$ . Os elementos de  $C_0^\infty(\Omega)$  são denominados funções testes em  $\Omega$ , desde que munidos com a noção de convergência dado a seguir.

**Observação 1.1.1.** Por um multi-índice, entendemos, uma  $n$ -upla  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  de números inteiros não negativos. Denotamos por  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  a ordem do multi-índice e por  $D^\alpha$  o operador derivação parcial de ordem  $|\alpha|$ ,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para  $\alpha = (0, \dots, 0)$ , temos por definição  $D^0\varphi = \varphi$ .

### 1.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dizemos que uma sucessão  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de funções em  $C_0^\infty(\Omega)$  converge para  $\varphi$  em  $C_0^\infty(\Omega)$  quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto  $K \subset \Omega$  tal que

$$\text{supp}(\varphi) \subset K \text{ e } \text{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii)  $D^\alpha\varphi_n \rightarrow D^\alpha\varphi$  uniformemente em  $K$  para todo multi-índice  $\alpha$ .

O espaço vetorial  $C_0^\infty(\Omega)$ , junto com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por  $\mathcal{D}(\Omega)$  e é denominado espaço das funções testes.

Denota-se por  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , o espaço das funções  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , mensuráveis e tais que  $|u|^p$  são Lebesgue integráveis em  $\Omega$ . O espaço  $L^p(\Omega)$ , é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

Quando  $p = \infty$ ,  $L^\infty(\Omega)$  denota o espaço de Banach de todas as funções reais essencialmente limitadas com norma

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|u(x)|.$$

Quando  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx,$$

e norma induzida

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

**Observação 1.1.2.** Sendo  $\Omega$  limitado, obtemos  $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ , para todo  $p$ , tal que  $1 < p < \infty$ , com imersão contínua e densa. De fato, dado  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , temos que

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^p dx \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|^p \mu(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, suponhamos que  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  em  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

Mostraremos que

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \rightarrow 0.$$

Notemos que,

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \quad (K \text{ compacto de } \Omega).$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \\ &= \int_K \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = 0. \end{aligned}$$

A imersão anterior é densa.

### 1.1.3 Distribuições Escalares

Com o intuito de generalizar o conceito de funções sobre  $\Omega$ , introduz-se o conceito de distribuições escalares.

Denominamos distribuição escalar sobre  $\Omega$  a toda forma linear e contínua sobre  $\mathcal{D}(\Omega)$ , isto é, uma função  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as seguintes condições

- (i)  $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$ ,  $\forall \alpha, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- (ii)  $T$  é contínua, isto é, se  $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  converge para  $\varphi$ , em  $\mathcal{D}(\Omega)$ , então

$$T(\varphi_\nu) \rightarrow T(\varphi) \text{ em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição  $T$  na função teste  $\varphi$ , é denotada por  $(T, \varphi)$ .

A sucessão  $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ , converge para  $T$ , quando a sucessão  $((T_\nu, \varphi))_{\nu \in \mathbb{N}}$  converge para  $(T, \varphi)$  em

$\mathbb{R}$  para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . O espaço das distribuições sobre  $\Omega$ , com esta notação de convergência será denotado por  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

As distribuições que aparecem com mais frequência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis ( $L^1_{loc}(\Omega)$ ), vale ressaltar que  $\mathcal{D}'(\Omega)$  é o dual topológico de  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

**Definição 1.1.1** *Temos que uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é localmente integrável em  $\Omega$  quando  $u$  é integrável à Lebesgue em todo compacto  $K \subset \Omega$ . O espaço das funções localmente integráveis é denotado por  $L^1_{loc}(\Omega)$ . Em símbolos temos*

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |u(x)| dx < \infty,$$

para todo compacto  $K \subset \Omega$ .

A distribuição  $T_u$  assim definida é dita “gerada pela função localmente integrável  $u$ ” e usando o *Lema Du Bois Raymond*, temos que  $T_u$  é univocamente determinada por  $u$ , no seguinte sentido:  $T_u = T_v$  se, e somente se,  $u = v$  quase sempre em  $\Omega$ . neste sentido identificamos  $u$  com a distribuição  $T_u$  e o espaço  $L^1_{loc}(\Omega)$  das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Lema 1.1.1** (*Du Bois Raymond*) *Seja  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Então  $T_u = 0$  se, e somente se,  $u = 0$  quase sempre em  $\Omega$ .*

Vale ressaltar que existem distribuições não definidas por funções de  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

Com a noção de convergência,  $\mathcal{D}'(\Omega)$  passa a ser um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty.$$

#### 1.1.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o objetivo de estudar os espaços de Sobolev, introduzimos o conceito de derivada distribucional.

A motivação do conceito de derivada fraca, posteriormente, o conceito de derivada distribucional, dado por Sobolev, se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para as distribuições quaisquer em  $\mathcal{D}(\Omega)$ , por L. Schwartz.

Seja  $T$  uma distribuição sobre  $\Omega$  e  $\alpha$  um multi-índice. A derivada no sentido das distribuições

de ordem  $\alpha$  de  $T$  é definida como sendo o funcional linear

$$\mathcal{D}^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$(\mathcal{D}^\alpha T, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (T, \mathcal{D}^\alpha \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima, que cada distribuição  $T$  sobre  $\Omega$  possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de  $L^1_{loc}(\Omega)$  possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

Observe que a aplicação

$$\mathcal{D}^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Isto significa que

$$\lim_{v \rightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \rightarrow \infty} \mathcal{D}^\alpha T_v = \mathcal{D}^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

**Observação 1.1.3** *Se  $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$ , para cada  $|\alpha| \leq k$ , então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção derivada no sentido das distribuições, isto é,*

$$\mathcal{D}^\alpha T_u = T_{\mathcal{D}^\alpha u}, \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

*É uma consequência simples da fórmula de integração de Gauss.*

## 1.2 Espaços de Sobolev

Apresentaremos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais. Esta classe é conhecida como espaços de Sobolev.

### 1.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$  com fronteira  $\Gamma$  regular. Foi observada na seção anterior que se  $u \in L^p(\Omega)$ ,  $u$  possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observamos que  $\mathcal{D}^\alpha u$ , em geral, não é uma distribuição definida por uma função  $L^p(\Omega)$ . Estamos interessados em espaços de distribuições  $u \in L^p(\Omega)$  cujas derivadas distribucionais permaneçam em  $L^p(\Omega)$ . Tais espaços são denominados Espaços de Sobolev.

Dados um inteiro  $m > 0$  e  $1 \leq p \leq \infty$  o espaço de Sobolev de ordem  $m$  sobre  $\Omega$ , é o espaço

vetorial denotado por  $W^{m,p}(\Omega)$ , constituído das funções  $u \in L^p(\Omega)$  para as quais  $\mathcal{D}^\alpha u \in L^p(\Omega)$ , para todo multi-índice  $\alpha$ , com  $|\alpha| \leq m$ . Em símbolos temos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \mathcal{D}^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{ com } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e se  $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em ambos os casos  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach . O espaço  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço reflexivo se  $1 < p < \infty$  e separável se  $1 \leq p < \infty$ .

Em caso particular em que  $p = 2$ , o espaço  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço de Hilbert, sendo denotado por  $H^m(\Omega)$ , isto é,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \mathcal{D}^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, \text{ com } |\alpha| \leq m\}.$$

### 1.2.2 O Traço em $H^1(\Omega)$

As funções de  $H^m(\Omega)$  podem ser aproximadas na norma de  $H^m(\Omega)$ , por função de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ , onde  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  é o conjunto  $\{\varphi|_{\bar{\Omega}}; \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$  que se pode definir a restrição à fronteira  $\Gamma$  de  $\Omega$ . Dado  $\varphi \in H^1(\Omega)$ , consideremos uma sequência  $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  em  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  com

$$\varphi_\nu \rightarrow \varphi \quad \text{em } H^1(\Omega).$$

Definimos o operador  $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$  por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k|_{\Gamma}.$$



sendo este limite considerado na norma de  $L^2(\Gamma)$ .

O operador  $\gamma_0$  denominado operador traço, que é contínuo e linear, cujo o núcleo é  $H_0^1(\Omega)$ . De forma mais simples, escrevemos  $\varphi|_\Gamma$  em vez de  $\gamma_0\varphi$ . Assim, podemos caracterizar, o espaço  $H_0^1(\Omega)$  por  $H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega); \varphi|_\Gamma = 0\}$ . A generalização do operador de traço para os espaços  $H^m(\Omega)$  ocorre de forma natural e, no caso  $m = 2$ , temos

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega); \varphi|_\Gamma = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} |_\Gamma \right\}.$$

O dual topológico do espaço  $W^{m,p}(\Omega)$  representamos por  $W^{-m,q}(\Omega)$  se  $1 \leq p < \infty$  com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Se  $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$ , então  $\varphi|_{\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

Quando  $m = 2$ ,  $W^{-m,2}(\Omega)$  será denotado por  $H_0^m(\Omega)$ , cujo dual é  $H^{-m}(\Omega)$ .

O teorema seguinte caracteriza o espaço  $W^{-m,q}(\Omega)$ .

**Teorema 1.2.1** *Seja  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Então,  $T \in W^{-m,q}(\Omega)$  se, e somente se, existirem  $g_\alpha \in l^p(\Omega)$  tais que  $T = \sum_{|\alpha| \leq m} \mathcal{D}^\alpha g_\alpha$ .*

**Proposição 1.2.1** (Caracterização de  $H^{-1}(\Omega)$ ). *Se  $T$  for uma forma linear contínua sobre  $H_0^1(\Omega)$ , então existem  $n + 1$  funções  $u_0, u_1, \dots, u_n$  de  $L^2(\Omega)$ , tais que*

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

De posse destes dois resultados concluímos que se  $u \in H^1(\Omega)$ , então  $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ , sendo o operador  $\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ , linear, contínuo e isométrico.

**Lema 1.2.1** (Desigualdade de Poincaré). *Seja  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  um aberto limitado em alguma direção. Se  $u \in H^1(\Omega)$ , então existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$|u|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C |\nabla u|_{L^2(\Omega)}^2.$$

### 1.3 Equações de Volterra

Nesta seção será feita uma introdução à teoria das equações integrais de Volterra.

**Definição 1.3.1** *Uma equação integral de Volterra linear de primeira ordem é toda equação da*

forma

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s)f(s)ds, \quad (1.1)$$

sendo  $g(t)$  e  $k(t, s)$  funções dadas.

**Teorema 1.3.1** *Seja  $k(t, s)$  uma função contínua em  $0 \leq s \leq t \leq T, T > 0$  e  $g(t)$  uma função contínua em  $0 \leq s \leq T$ . Então existe uma única solução contínua  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo,*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s)f(s)ds.$$

### Demonstração: Existência

A prova é baseada nas aproximações sucessivas de Picard. Para isto, seja a seguinte sequência de funções

$$\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}.$$

Sendo

$$\begin{aligned} f_0(t) &= g(t), \\ f_1(t) &= g(t) + \int_0^t k(t, s)f_0(s)ds, \\ &\vdots \\ f_n(t) &= g(t) + \int_0^t k(t, s)f_{n-1}(s)ds, \end{aligned}$$

com  $n = 1, 2, \dots$ . Desta forma

$$\begin{aligned} f_n(t) &= g(t) + \int_0^t k(t, s)f_{n-1}(s)ds, \\ f_{n-1}(t) &= g(t) + \int_0^t k(t, s)f_{n-2}(s)ds. \end{aligned}$$

Portanto

$$f_n(t) - f_{n-1}(t) = \int_0^t k(t, s)[f_{n-1}(s) - f_{n-2}(s)]ds.$$

Definindo a sequência  $\varphi_n(t) = f_n(t) - f_{n-1}(t)$  com  $\varphi_0(t) = g(t)$ , temos

$$\varphi_n(t) = \int_0^t k(t, s)\varphi_{n-1}(s)ds.$$

Logo

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t).$$

Sejam  $G, K$  constantes positivas, tais que

$$|g(t)| \leq G \quad \text{e} \quad 0 \leq t \leq T, \quad |k(s, t)| \leq K \quad \text{e} \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Mostraremos que

$$|\varphi_n(t)| \leq \frac{G(Kt)^n}{n!} \quad \text{com} \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{e} \quad n = 0, 1, \dots$$

A demonstração será feita por indução. Para  $n = 0$ , temos

$$|\varphi_0(t)| = |g(t)| \leq G = \frac{G(Kt)^0}{0!}.$$

Suponha que a propriedade seja válida para  $n = l$ . Resta mostrar que é válida para  $n = l + 1$ .

Por hipótese, temos,

$$|\varphi_l(t)| \leq \frac{G(Kt)^l}{l!}.$$

Para  $n = l + 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} |\varphi_{l+1}(t)| &= \left| \int_0^t k(t, s)\varphi_l(s)ds \right| \\ &\leq \int_0^t |k(t, s)||\varphi_l(s)|ds \\ &\leq \int_0^t K \frac{G(Ks)^l}{(l)!} \\ &\leq \frac{GK^{l+1}}{(l)!} \int_0^t s^l ds. \end{aligned}$$

Assim

$$|\varphi_{l+1}(t)| \leq \frac{G(Ks)^{l+1}}{(l+1)!},$$

o que conclui a demonstração. ■

Portanto, vale a seguinte desigualdade

$$\sum_{i=0}^n \frac{G(Kt)^i}{i!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G(KT)^n}{n!} = Ge^{KT}.$$

Desta forma pelo teste de M. de Weierstrass, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)$  é absoluta e uniformemente convergente. Denotando  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)$ , concluímos que  $f$  é contínua. De fato, seja  $t_0 \in [0, T]$ .

Então

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t \rightarrow t_0} (\varphi_n(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t_0) = f(t_0),$$

o que mostra a continuidade de  $f$ . A função  $f$  é solução da equação integral de Volterra dada em (1.1). Com efeito,

$$\sum_{n=1}^m \varphi_n(t) + \int_0^t k(t, s) \left( \sum_{n=1}^m \varphi_{n-1}(s) \right) ds.$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  e usando a convergência uniforme, obtemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \varphi_n(t) = \int_0^t k(t, s) \lim_{m \rightarrow \infty} (\varphi_{n-1}(s)) ds,$$

ou

$$f(t) - g(t) = \int_0^t k(t, s) f(s) ds,$$

isto é,

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s) f(s) ds.$$

## Unicidade

Suponha que existam funções  $f_1, f_2$  contínuas satisfazendo (1.1). Portanto

$$|f_1(t) - f_2(t)| = \left| \int_0^t k(t, s) (f_1(s) - f_2(s)) ds \right|. \quad (1.2)$$

Pela continuidade de  $f_1$  e  $f_2$ , existe  $C > 0$  tal que

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq C, \forall 0 \leq t \leq T.$$

Logo, substituindo em (1.2) vem

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq K Ct, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Repetindo este processo  $n$ -vezes em (1.2), obtemos

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq \frac{C(Kt)^n}{n!}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , vem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C(Kt)^n}{n!} = 0.$$

Assim, concluímos que

$$f_1(t) = f_2(t). \quad \blacksquare$$

#### 1.4 Equação Resolvente

Vimos pelo teorema anterior que dada  $g \in C[0, T]$  existe uma única  $f \in C[0, T]$ , tal que

$$f(t) - \int_0^t k(t, s)f(s)ds = g(t).$$

Desta forma, podemos considerar o seguinte operador

$$K : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$$

$$f \mapsto K[f] = f(t) - \int_0^t k(t, s)f(s)ds.$$

O operador  $K$  é linear e bijetivo. De fato,

$K$  é linear.

$$\begin{aligned}
 K[f_1(t) - \lambda f_2(t)] &= f_1(t) - \lambda f_2(t) + \int_0^t k(t, s)(f_1(s) + \lambda f_2(s))ds \\
 &= f_1(t) - \lambda f_2(t) + \int_0^t k(t, s)f_1(s)ds + \lambda \int_0^t k(t, s)f_2(s)ds \\
 &= f_1(t) + \int_0^t k(t, s)f_1(s)ds + \lambda \left( f_2(t) + \int_0^t k(t, s)f_2(s)ds \right) \\
 &= K[f_1] + \lambda K[f_2]
 \end{aligned}$$

$K$  é bijetivo.

A sobretividade segue do fato que, dada  $g \in C[0, T]$ , pelo teorema de existência e unicidade, existe uma única  $f \in C[0, T]$  tal que  $K[f] = g$ . Concluimos a injetividade de maneira análoga, pois  $K[f] = 0$  pode ser interpretada como a equação  $K[f] = g$  sendo  $g \equiv 0$  e pelo teorema de existência e unicidade, existe uma única  $f \in C[0, T]$  que satisfaz esta equação, a saber  $f(x) = 0$ . A função  $k(t, s)$  é chamada núcleo do operador de Volterra. Notemos que, como foi definido  $\varphi_1(t) = \int_0^t k(t, s)\varphi_0(s)ds$ , vem que

$$\begin{aligned}
 \varphi_2(t) &= \int_0^t k(t, s)\varphi_1(s)ds \\
 &= \int_0^t k(t, s) \int_0^s k(s, \tau)g(\tau)d\tau ds \\
 &= \int_0^t \int_\tau^t k(t, s)k(s, \tau)g(\tau)d\tau ds \\
 &= \int_0^t \int_\tau^t k(t, s)k(s, \tau)ds g(\tau)d\tau,
 \end{aligned}$$

pois o integrando é contínuo em  $0 \leq \tau \leq s \leq t$ . Assim

$$\varphi_2(t) = \int_0^t k_2(t, \tau)g(\tau)d\tau,$$

sendo

$$k_2(t, \tau) = \int_\tau^t k(t, s)k(s, \tau)ds g(\tau)ds.$$

Indubitavelmente

$$\varphi_n(t) = \int_0^t k_n(t, s)g(s)ds \text{ com } \forall n \geq 1,$$

daí

$$k_1(t, s) = k(t, s),$$

$$k_n(t, s) = \int_s^t k(t, \tau)k_{n-1}(\tau, s)d\tau, \quad n \geq 2.$$

Como

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i t,$$

temos

$$f_n(t) = \int_0^t \tau_n(t, s)g(s)ds,$$

sendo  $\tau_n(t, s) = \sum_{i=1}^n k_i(t, s)$ . Usando a continuidade da função  $k$  temos,  $|k(t, s)| \leq K$

analogamente podemos mostrar que  $|k_n(t, s)| \leq \frac{K^n(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$ .

Daí segue que a série  $\tau(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t, s)$  é absoluta e, portanto, uniformemente convergente. A função  $\tau(t, s)$  é chamada de núcleo resolvente de  $k(t, s)$ .

**Teorema 1.4.1** *Se  $k(t, s)$  e  $g(t)$  são contínuas, então a única solução contínua de (1.1) é dada por*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t \tau(t, s)g(s)ds.$$

**Demonstração:** Das relações anteriores

$$\int_0^t \tau(t, s)g(s)ds = \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} k_i(t, s)g(s)ds.$$

Como a série converge uniformemente pode-se permutar a ordem da soma com integração, obtendo

$$\int_0^t \tau(t, s)g(s)ds = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t k_i(t, s)g(s)ds = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) = f(t) - g(t),$$

ou seja,

$$f(t) = g(t) + \int_0^t \tau(t, s)g(s)ds. \quad \blacksquare$$

**Observação 1.4.1.** O teorema anterior mostra que o operador inverso  $K^{-1}$  tem a forma de uma equação integral de Volterra, ou seja

$$K^{-1} : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$$

$$g \mapsto K^{-1}[g] = g(t) + \int_0^t \tau(t, s)g(s)ds.$$

## 1.5 Outros Resultados Importantes

A seguir enunciaremos mais alguns resultados que serão utilizados posteriormente

**Definição 1.5.1** (Convergência Fraca) *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  uma sequência de  $E$ . Temos que  $u \rightharpoonup u$  fracamente se, e somente se,*

$$\langle u_\nu, \varphi \rangle \rightarrow \langle u, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in E'.$$

**Definição 1.5.2** (Convergência Fraca Estrela) *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $\varphi \in E'$  e  $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  uma sequência de  $E'$ . Temos que  $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$  fraco  $\star$  se, e somente se,*

$$\langle \varphi_\nu, u \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle, \quad \forall u \in E.$$

**Lema 1.5.1** *Seja  $f$  uma função real positiva de classe  $C^1$ . Se existirem constantes positivas  $c_0, c_1$  e  $\gamma$  tais que*

$$f'(t) \leq -c_0 f(t) + c_1 e^{-\gamma_0 t},$$

então

$$f(t) \leq c e^{-\gamma t}.$$

**Demonstração:**

Definindo

$$F(t) = f(t) + \frac{2c_1}{\gamma}$$

temos que

$$F'(t) = f'(t) - 2c_1 e^{-\gamma t} \leq -c_0 f(t) - c_1 e^{-\gamma t}.$$



Tomando  $\gamma_0 = \min\{c_0, \frac{\gamma}{2}\}$ , obtemos

$$\gamma_0 F(t) \leq c_1 f(t) + c_1 e^{-\gamma t}.$$

Segue que

$$F'(t) \leq -\gamma_0 F(t).$$

Logo

$$\frac{F'(t)}{F(t)} \leq -\gamma_0.$$

Integrando de 0 a  $t$ . obtemos

$$\frac{F(t)}{F(0)} \leq e^{-\gamma_0 t} \Rightarrow F(t) \leq F(0)e^{-\gamma_0 t}.$$

Como  $F(0) = f(0) + \frac{2c_1}{\gamma}$  e  $f(t) \leq F(t)$

$$f(t) \leq ce^{-\gamma_0 t},$$

com  $c = f(0) + \frac{2c_1}{\gamma}$ . ■

**Lema 1.5.2** *Seja  $f$  uma função real positiva de classe  $C^1$ , satisfazendo*

$$f'(t) \leq -k_0 [f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + \frac{k_1}{(1+t)^{p+1}},$$

com  $p > 1$  e  $k_0, k_1 > 0$ . Então, existe uma constante  $k_2 > 0$ , tal que

$$f(t) \leq k_2 \frac{pf(0) + 2k_1}{(1+t)^p}.$$

**Demonstração:**

Tomamos  $h(t) = \frac{2k_1}{p(1+t)^p}$  e  $g(t) = f(t) + h(t)$ . Nestas condições temos

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(t) - \frac{2k_1}{(1+t)^{p+1}} \leq -k_0 \left\{ [f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + \frac{k_1}{k_0(1+t)^{p+1}} \right\} \\ &\leq k_0 \left\{ [f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + \left(\frac{p}{2}\right)^{1+\frac{1}{p}} \frac{1}{k_0 k_1^{\frac{1}{p}}} [h(t)]^{1+\frac{1}{p}} \right\} \end{aligned}$$

Seja  $a_0 = \min \left\{ 1, \left(\frac{p}{2}\right)^{1+\frac{1}{p}} \frac{1}{k_0 k_1^{\frac{1}{p}}} \right\}$ . Assim,

$$g'(t) \leq -k_0 a_0 \left\{ [f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + [h(t)]^{1+\frac{1}{p}} \right\}.$$

Como existe uma constante positiva  $a_1$ , tal que

$$[f(t) + g(t)]^{1+\frac{1}{p}} \leq a_1 \left\{ [f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + [h(t)]^{1+\frac{1}{p}} \right\},$$

concluimos

$$g'(t) \leq -\frac{k_0 a_0}{a_1} [g(t)]^{1+\frac{1}{p}} \Rightarrow \frac{g'(t)}{[g(t)]^{1+\frac{1}{p}}} \leq -\frac{k_0 a_0}{a_1}.$$

Integrando de 0 a  $t$ , temos

$$g(t) \leq \frac{p^p g(0)}{\left\{ p + \frac{k_0 a_0}{a_1} [g(0)]^{\frac{1}{p}} \right\}^t} \leq \frac{p^{p-1} [p f(0) + 2k_1]}{a_2^p (1+t)^p},$$

em que  $a_2 = \min \left\{ p, \frac{k_0 a_0}{a_1} [g(0)]^{\frac{1}{p}} \right\}$ . Tomando  $k_2 = \frac{1}{a_2} \left(\frac{p}{a_2}\right)^{p-1}$ , segue o resultado.

**Lema 1.5.3** (Lema de Gronwall) *Sejam  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas e não-negativas,  $\alpha \geq 0$ . Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s) \psi(s) ds,$$

então,

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp \left[ \int_a^t \psi(s) ds \right], \quad \forall t \in [a, b].$$

*Em particular,  $\psi(t)$  é limitada e se  $\alpha = 0$ , então  $\varphi = 0$ .*

# *Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções*

Seja  $\Omega$  um aberto limitado conexo do  $\mathbb{R}^2$  com fronteira  $\Gamma$  regular, tal que

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \quad \text{com} \quad \bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset \quad \text{e} \quad \Gamma_0 \neq \emptyset. \quad (2.1)$$

Denotamos por  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  o vetor unitário normal exterior a  $\Gamma$  e por  $\eta = (-\nu_2, \nu_1)$  o vetor tangente unitário orientado positivamente em  $\Gamma$ . Finalmente, pelo  $[\cdot, \cdot]$  denotamos o operador dado por

$$[u, v] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

As equações que descrevem as pequenas vibrações de uma placa homogênea isotrópica de densidades uniformes  $h$  são dadas por:

$$u_{tt} - h\Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds = [u, v] \quad \text{sobre} \quad \Omega \times ]0, \infty[, \quad (2.2)$$

$$\Delta^2 v = -[u, u] \quad \text{sobre} \quad \Omega \times ]0, \infty[, \quad (2.3)$$

com condições iniciais

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y); \quad u_t(x, y, 0) = u_1(x, y) \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.4)$$

e condições de fronteiras:

$$v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em } \Gamma_0 \times ]0, \infty[, \quad (2.5)$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em } \Gamma_0 \times ]0, \infty[, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{B}_1 u - \mathcal{B}_1 \left\{ \int_0^t g(t-s)u(s)ds \right\} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \times ]0, \infty[, \quad (2.7)$$

$$\mathcal{B}_2 u - h \frac{\partial u_{tt}}{\partial \nu} - \mathcal{B}_2 \left\{ \int_0^t g(t-s)u(s)ds \right\} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \times ]0, \infty[, \quad (2.8)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 u &= \Delta u + (1 - \mu)B_1 u, \\ \mathcal{B}_2 u &= \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + (1 - \mu) \frac{\partial B_2 u}{\partial \eta} \end{aligned}$$

sendo  $B_1$  e  $B_2$  determinados por

$$\begin{aligned} B_1 u &= 2\nu_1\nu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ B_2 u &= (\nu_1^2 - \nu_2^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \nu_1\nu_2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}. \end{aligned}$$

Em (2.2),  $u = u(x, y, t)$  denota a posição da placa e  $v = v(x, y, t)$  é a função stresses de Airy's. Podemos interpretar a equação (2.2) dizendo que as tensões a qualquer momento depende do comportamento completo das tensões que o material sofreu.

Denotamos por  $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  uma função real positiva e por  $\mu$  uma constante tal que  $0 < \mu < 1/2$ .

Assumiremos que  $g$  satisfaz as seguintes condições:

$$g, g', g'' \in L^1(0, \infty), \quad \alpha = 1 - \int_0^\infty g(s)ds > 0, \quad (2.9)$$

$$g(t) \geq 0, \quad g'(t) \leq 0. \quad (2.10)$$

Para estudar a existência de solução da equação (2.2), introduziremos os seguintes espaços funcionais:

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$$

$$W = \{w \in H^2(\Omega); w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \Gamma_0\}.$$

Com  $0 < \mu < \frac{1}{2}$ , definimos a forma bilinear  $a(., .)$ , onde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + 2(1 - \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right\} dA$$

**LEMA 2.1** - *Sejam  $u$  e  $v$  funções em  $H^4(\Omega) \cap W$ . Então, temos:*

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 u) v dA = a(u, v) + \int_{\Gamma_1} \left\{ (\mathcal{B}_2 u) v - (\mathcal{B}_1 u) \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\} d\Gamma_1$$

**Demonstração:**

Da Fórmula de Green's, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u v dx - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx &= \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Delta(\Delta u) v dx - \int_{\Omega} \nabla \Delta u \cdot \nabla v dx &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} v d\Gamma \\ \int_{\Omega} \nabla \Delta u \cdot \nabla v dx &= \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v dx - \int_{\Gamma} \Delta u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma. \end{aligned}$$

Recordando a definição de  $B_1, B_2$  e usando,

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\} dA - 2 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dA = \int_{\Gamma_1} \left\{ \left( \frac{\partial B_2 u}{\partial \eta} \right) v - (B_1 u) \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\} d\Gamma_1$$

De onde os resultados seguem. ■

Neste capítulo, mostraremos a existência, unicidade e regularidade da solução do sistema (2.2)-(2.8). Faremos isto da seguinte maneira, primeiro usando o método de Galerkin, provamos a existência de solução fraca (Definição 2.1), usando regularidade elíptica e estimativa de segunda ordem, então mostramos que o problema de valor inicial e de fronteira (2.2)-(2.8) do tipo memória, possui uma solução de regularidade.

Para simplificar nossa análise, apresentamos os seguintes operadores binários

$$\begin{aligned}
g\Box\partial^2u &= \int_0^t g(t-s)a(u(t)-u(s), u(t)-u(s))ds \\
g\Box\nabla u &= \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} |\nabla u(x,t) - \nabla u(x,s)|^2 dA ds \\
g\Box u &= \int_0^t g(t-s)|u(x,t) - u(x,s)|^2 dA ds
\end{aligned}$$

**LEMA 2.2** - Para qualquer  $v \in C^1(0, T; H^2(\Omega))$ , temos:

$$\begin{aligned}
a\left(\int_0^t g(t-s)v(s)ds, v_t\right) &= -\frac{1}{2}g(t)a(v, v) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2v \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box\partial^2v - \left(\int_0^t gds\right)a(v, v)\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}\int_0^t g(t-s)\nabla v(s)ds \cdot \nabla v_t dA &= -\frac{1}{2}g(t)\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dA + \frac{1}{2}g'\Box\nabla v \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box\nabla v - \left(\int_0^t gds\right)\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dA\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}\int_0^t g(t-s)v(x,s)ds v_t(x,t)dA &= -\frac{1}{2}g(t)\int_{\Omega} |v|^2 dA + \frac{1}{2}g'\Box v \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box v - \left(\int_0^t gds\right)\int_{\Omega} |v|^2 dA\right\}.
\end{aligned}$$

**Demonstração:**

Da simetria  $a(u, v) = a(v, u)$ , temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(g \square \partial^2 v) &= \frac{d}{dt} \int_0^t g(t-s) a(v(t) - v(s), v(t) - v(s)) ds \\
&= \frac{d}{dt} \int_0^t g(t-s) \{a(v(t), v(t)) - 2a(v(t), v(s)) + a(v(s), v(s))\} ds \\
&= \int_0^t g'(t-s) a(v(t) - v(s), v(t) - v(s)) ds + 2 \int_0^t g(t-s) a(v, v_t) ds \\
&\quad - 2 \int_0^t g(t-s) a(v_t, v(s)) ds \\
&= g' \square \partial^2 v - 2 \int_0^t g(t-s) a(v_t, v(s)) ds + 2 \int_0^t g(t-s) a(v, v_t) ds \\
&= g' \square \partial^2 v - 2 \int_0^t g(t-s) a(v_t, v(s)) ds + \frac{d}{dt} \int_0^t g(s) a(v, v) ds - g(t) a(v, v)
\end{aligned}$$

logo

$$2 \int_0^t g(t-s) a(v_t, v(s)) ds = g' \square \partial^2 v - g(t) a(v, v) + \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t g(s) ds a(v, v) \right\} - \frac{d}{dt} (g \square \partial^2 v)$$

daí

$$2a \left( \int_0^t g(t-s) v(s) ds, v_t \right) = g' \square \partial^2 v - g(t) a(v, v) + \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t g(s) ds a(v, v) \right\} - \frac{d}{dt} (g \square \partial^2 v)$$

portanto

$$a \left( \int_0^t g(t-s) v(s) ds, v_t \right) = -\frac{1}{2} g(t) a(v, v) + \frac{1}{2} g' \square \partial^2 v - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ g \square \partial^2 v - \left( \int_0^t g ds \right) a(v, v) \right\}.$$

O que prova a primeira identidade. As provas das outras duas identidades são análogas a primeira. ■

**LEMA 2.3** - *Sejam  $u, v$  e  $w$  funções em  $H^2(\Omega)$  tal que  $v \in H_0^2(\Omega)$ , onde  $\Omega$  é um aberto limitado conexo de  $\mathbb{R}^2$ . Então, temos que*

$$\int_{\Omega} w[v, u] dA = \int_{\Omega} v[w, u] dA.$$



**Demonstração:**

Suponhamos que  $u, w \in C^4(\Omega)$  tal que  $v \in C_0^2(\Omega)$  e seja  $\Omega$  um aberto limitado conexo de  $\mathbb{R}^2$ , assim sendo podemos afirmar que:

$$w[u, v] = v[w, u]$$

onde

$$w \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

integrando por partes em  $\Omega$ , temos:

$$\int_{\Omega} w \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dA = \int_{\Omega} v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dA$$

daí, concluímos que

$$\int_{\Omega} w[v, u] dA = \int_{\Omega} v[w, u] dA. \blacksquare$$

A definição de solução fraca que usamos neste trabalho é determinado a seguir.

**DEFINIÇÃO 2.1** - Dizemos que o par  $(u, v)$  é uma solução fraca do sistema (2.2)-(2.8) se  $u \in C^1([0, T]; V) \cap C^0([0, T]; W)$ ,  $v \in C^0([0, T]; H_0^2(\Omega))$  e satisfaz as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} (-u_t \theta_t - h \nabla u_t \cdot \nabla \theta_t) dA + \int_0^T a(u, \theta) dt - \int_0^T a(g * u, \theta) dt = \\ & \int_0^T \int_{\Omega} [u, \theta] v dA dt + \int_{\Omega} u_1 \theta(\cdot, 0) dA + h \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla \theta(\cdot, 0) dA \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\int_{\Omega} \Delta v \Delta \psi dA = - \int_{\Omega} [u, \psi] u dA \quad (2.12)$$

para qualquer função  $\theta \in C^1([0, T], W)$  tal que  $\theta(\cdot, T) = 0$ ,  $\theta_t(\cdot, T) = 0$  e  $\psi \in C_0^2(\Omega)$ .

Para obter a energia do sistema (2.2)-(2.8) vamos multiplicar a equação (2.2) por  $u_t$  e integrar

em  $\Omega$ , obtendo:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_{tt}u_t dx - h \int_{\Omega} \Delta u_{tt}u_t dx + \int_{\Omega} \Delta^2 u u_t dx - \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s) ds u_t dx \\ &= \int_{\Omega} [u, v]u_t dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Estudando separadamente cada termo da equação (2.13), temos que

$$\int_{\Omega} u_{tt}u_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t^2 dx \quad (2.14)$$

aplicando a F3rmula de Green's, teremos

$$\begin{aligned} -h \int_{\Omega} \Delta u_{tt}u_t dx &= h \int_{\Omega} \nabla u_{tt} \cdot \nabla u_t dx - h \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_{tt}}{\partial \nu} u_t d\Gamma_1 \\ &= \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx - h \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_{tt}}{\partial \nu} u_t d\Gamma_1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

usando o LEMA 2.1, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta^2 u)u_t dx &= a(u, u_t) + \int_{\Gamma_1} \left\{ (\mathcal{B}_2 u)u_t - (\mathcal{B}_1 u) \frac{\partial u_t}{\partial \nu} \right\} d\Gamma_1 \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u, u) + \int_{\Gamma_1} \left\{ (\mathcal{B}_2 u)u_t - (\mathcal{B}_1 u) \frac{\partial u_t}{\partial \nu} \right\} d\Gamma_1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Novamente, usando a F3rmula de Green's, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s) ds u_t dx &= - \int_0^t g(t-s) a(u(s), u_t) ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} \mathcal{B}_2 \left\{ \int_0^t g(t-s)u(s) ds \right\} u_t d\Gamma_1 \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} \mathcal{B}_1 \left\{ \int_0^t g(t-s)u(s) ds \right\} \frac{\partial u_t}{\partial \nu} d\Gamma_1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

e finalmente, usando o LEMA 2.3, encontramos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [u, v] u_t dx &= \int_{\Omega} [u, u_t] v dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} ([u, u]) v dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\Delta^2 v) v dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta v_t \Delta v dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Delta v \Delta v dx \\
&= -\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx
\end{aligned} \tag{2.18}$$

substituindo (2.14) a (2.18) em (2.13), segue se que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u, u) - \int_0^t g(t-s) a(u(s), u_t) ds \\
&+ \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx + \int_{\Gamma_1} \left\{ \mathcal{B}_2 u - h \frac{\partial u_{tt}}{\partial \nu} - \mathcal{B}_2 \left( \int_0^t g(t-s) u(s) ds \right) \right\} u_t d\Gamma_1 \\
&\quad - \int_{\Gamma_1} \left\{ \mathcal{B}_1 u - \mathcal{B}_1 \left( \int_0^t g(t-s) u(s) ds \right) \right\} \frac{\partial u_t}{\partial \nu} d\Gamma_1 = 0
\end{aligned}$$

usando as condições de fronteira (2.7) e (2.8), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u, u) + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx \\
- \int_0^t g(t-s) a(u(s), u_t) ds = 0
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(t-s) a(u(s), u_t) ds &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u, u) + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx
\end{aligned} \tag{2.19}$$

usando o LEMA 2.2, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(t-s)a(u(s), u_t)ds &= a\left(\int_0^t g(t-s)u(s)ds, u_t\right) \\
&= -\frac{1}{2}g(t)a(u, u) + \frac{1}{2}g'\square\partial^2u \\
-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\square\partial^2u - \left(\int_0^t g(s)ds\right)a(u, u)\right\} & \tag{2.20}
\end{aligned}$$

substituindo (2.19) em (2.20), teremos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}u_t^2dx + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\nabla u_t|^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u, u) + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\Delta v|^2dx &= -\frac{1}{2}g(t)a(u, u) + \frac{1}{2}g'\square\partial^2u \\
-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\square\partial^2u - \left(\int_0^t g(s)ds\right)a(u, u)\right\} &
\end{aligned}$$

assim sendo segue-se que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}u_t^2dx + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\nabla u_t|^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u, u) + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\Delta v|^2dx \\
+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\square\partial^2u - \left(\int_0^t g(s)ds\right)a(u, u)\right\} &= -\frac{1}{2}g(t)a(u, u) + \frac{1}{2}g'\square\partial^2u
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\Omega}u_t^2dx + h\int_{\Omega}|\nabla u_t|^2dx + a(u, u) + \frac{1}{2}\int_{\Omega}|\Delta v|^2dx \right. \\
\left. +g\square\partial^2u - \left(\int_0^t g(s)ds\right)a(u, u)\right\} &= -\frac{1}{2}g(t)a(u, u) + \frac{1}{2}g'\square\partial^2u
\end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\Omega}\left(u_t^2 + h|\nabla u_t|^2 + \frac{1}{2}|\Delta v|^2\right)dx + g\square\partial^2u + \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)a(u, u)\right\} = -\frac{1}{2}g(t)a(u, u) + \frac{1}{2}g'\square\partial^2u$$

daí

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{1}{2}g(t)a(u, u) + \frac{1}{2}g'\square\partial^2u$$

de (2.10) temos que  $g(t) \geq 0$ ,  $g'(t) \leq 0$ , assim sendo

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0$$

portanto concluímos que o sistema é dissipativo.

Sendo

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} \left( u_t^2 + h|\nabla u_t|^2 + \frac{1}{2}|\Delta v|^2 \right) dx + g \square \partial^2 u + \left( 1 - \int_0^t g(s) ds \right) a(u, u) \right\}$$

a energia modificada do sistema.

**TEOREMA 2.1** - *Suponhamos que  $g$  satisfaz as condições (2.9) e (2.10). Então para quaisquer dados iniciais  $(u_0, u_1) \in W \times V$ ,  $h > 0$  e  $T > 0$ , existe uma única solução fraca para a equação (2.2).*

**Demonstração:**

A idéia principal aqui é usar o Método de Galerkin.

Consideremos  $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  uma base ortogonal de  $W$ . Seja  $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$  o subespaço denso de  $W$  gerado pelos primeiros autovetores de  $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ .

Problema aproximado

Determinar

$$u^m(., t) = \sum_{i=1}^m h_{i,m}(t) w_i(.)$$

$$v^m(., t) = (\Delta^2)^{-1} (-[u^m, u^m]).$$

Solução:

$$\int_{\Omega} u_{tt}^m w_j dA + h \int_{\Omega} \nabla u_{tt}^m \nabla w_j dA + a(u^m, w_j) - a(g * u^m, w_j) = \int_{\Omega} [u^m, w_j] v^m dA \quad (2.21)$$

$$u^m(., 0) = u_{0,m} \text{ e } u_t^m(., 0) = u_{1,m}$$

onde

$$u_{0,m} = \sum_{i=1}^m \left\{ \int_{\Omega} u_0 w_i dA \right\} w_i, \quad u_{1,m} = \sum_{i=1}^m \left\{ \int_{\Omega} u_1 w_i dA \right\} w_i$$

Denotando por  $A = (a_{ij})$  a matriz dada por

$$a_{ij} = \left( \int_{\Omega} w_i w_j dA + h \int_{\Omega} \nabla w_i \cdot \nabla w_j dA \right)$$

Como  $A$  é uma matriz definida positivamente, segue do Teorema de EDO's que (2.21) tem solução local  $u^m$ . O passo seguinte é estender a solução  $u^m$  a todo intervalo  $[0, T]$ , para todo  $T > 0$ . Isto será feito usando as estimativas a priori.

Estimativas a priori

Multiplicando a equação (2.21) por  $h'_j(t)$  e somando em  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ , obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_{tt}^m \sum_{j=1}^m h'_j(t) w_j dA + h \int_{\Omega} \nabla u_{tt}^m \cdot \nabla \left( \sum_{j=1}^m h'_j(t) w_j \right) dA + a \left( u^m, \sum_{j=1}^m h'_j(t) w_j \right) \\ & - a \left( g * u^m, \sum_{j=1}^m h'_j(t) w_j \right) = \int_{\Omega} \left[ u^m, \sum_{j=1}^m h'_j(t) w_j \right] v^m dA \end{aligned}$$

substituindo  $\sum_{j=1}^m h'_j(t) w_j = u_t^m$ , obtemos

$$\int_{\Omega} u_{tt}^m u_t^m dA + h \int_{\Omega} \nabla u_{tt}^m \cdot \nabla u_t^m dA + a(u^m, u_t^m) - a(g * u^m, u_t^m) = \int_{\Omega} [u^m, u_t^m] v^m dA. \quad (2.22)$$

Estudando separadamente cada termo da equação (2.22), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{tt}^m u_t^m dA &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t^m u_t^m dA \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t^m|^2 dA \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} h \int_{\Omega} \nabla u_{tt}^m \cdot \nabla u_t^m dA &= \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \nabla u_t^m \cdot \nabla u_t^m dA \\ &= \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u_t^m|^2 dA \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$a(u^m, u_t^m) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u^m, u^m) \quad (2.25)$$

usando o LEMA 2.2, temos

$$\begin{aligned}
-a(g * u^m, u_t^m) &= -a\left(\int_0^t g(t-s)u^m(s)ds, u_t^m\right) \\
&= \frac{1}{2}g(t)a(u^m, u^m) - \frac{1}{2}g'\square\partial^2u^m \\
+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\square\partial^2u^m - \left(\int_0^t gds\right)a(u^m, u^m)\right\} & \tag{2.26}
\end{aligned}$$

e finalmente, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}[u^m, u_t^m]v^m dA &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{d}{dt}([u^m, u^m])v^m dA \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{d}{dt}(\Delta^2v^m)v^m dA \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\Delta v_t^m \Delta v^m dA \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Delta v^m \Delta v^m dA \\
&= -\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\Delta v^m|^2 dA \tag{2.27}
\end{aligned}$$

substituindo (2.23) a (2.27) em (2.22), encontramos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|u_t^m|^2 dA + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\nabla u_t^m|^2 dA + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u^m, u^m) + \frac{1}{2}g(t)a(u^m, u^m) - \frac{1}{2}g'\square\partial^2u^m \\
+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\square\partial^2u^m - \left(\int_0^t gds\right)a(u^m, u^m)\right\} &= -\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\Delta v^m|^2 dA
\end{aligned}$$

assim sendo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|u_t^m|^2 dA + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\nabla u_t^m|^2 dA + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u^m, u^m) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\square\partial^2u^m - \left(\int_0^t gds\right)a(u^m, u^m)\right\} \\
+ \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\Delta v^m|^2 dA &= -\frac{1}{2}g(t)a(u^m, u^m) + \frac{1}{2}g'\square\partial^2u^m
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} |u_t^m|^2 dA + h \int_{\Omega} |\nabla u_t^m|^2 dA + a(u^m, u^m) + g \square \partial^2 u^m - \left( \int_0^t g ds \right) a(u^m, u^m) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta v^m|^2 dA \right\} \\ &= -\frac{1}{2} g(t) a(u^m, u^m) + \frac{1}{2} g' \square \partial^2 u^m \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} \left( |u_t^m|^2 + h |\nabla u_t^m|^2 + \frac{1}{2} |\Delta v^m|^2 \right) dA + g \square \partial^2 u^m + \left( 1 - \int_0^t g ds \right) a(u^m, u^m) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} g(t) a(u^m, u^m) + \frac{1}{2} g' \square \partial^2 u^m \end{aligned}$$

portanto

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t, u^m, v^m) = -\frac{1}{2} g(t) a(u^m, u^m) + \frac{1}{2} g' \square \partial^2 u^m \leq 0$$

pois de (2.10), temos  $g(t) \geq 0$ ,  $g'(t) \leq 0$ .

Integrando sobre  $]0, t[$ , obtemos:

$$E(t, u^m, v^m) \leq E(0, u^m, v^m)$$

como  $E(0, u^m, v^m)$  é limitada, segue-se que existe  $k > 0$  tal que

$$E(t) \leq k, \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ e } \forall t \in [0, T].$$

Daí, segue-se que

$$u^m \rightarrow u \quad \text{em } C^0([0, T]; W) \cap C^1([0, T]; V)$$

$$v^m \rightarrow v \quad \text{em } C^0([0, T]; H_0^2(\Omega)).$$



Multiplicando a equação (2.21) por  $\beta \in C^2([0, T])$  tal que  $\beta(T) = 0$  e integrando sobre  $[0, T]$ , temos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} (u^m w_j \beta_{tt} + h \nabla u^m \cdot \nabla w_j \beta_{tt}) dA dt + \int_0^T a(u^m, w_j) \beta dt - \int_0^T a(g * u^m, w_j) \beta dt = \\
& \int_0^T \int_{\Omega} [u^m, w_j] v^m \beta dA - \int_{\Omega} u_{0,m} \cdot w_j \beta_t(0) dA + \int_{\Omega} u_{1,m} \cdot w_j \beta_t(0) dA \\
& - h \int_{\Omega} \nabla u_{0,m} \cdot \nabla w_j \beta_t(0) dA + h \int_{\Omega} \nabla u_{1,m} \cdot \nabla w_j \beta_t(0) dA
\end{aligned} \tag{2.28}$$

como

$$[u^m, w_j] \rightharpoonup [u, w_j] \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

$$v^m \rightarrow v \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

logo,

$$[u^m, w_j] v^m \rightharpoonup [u, w_j] v \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

fazendo  $m \rightarrow \infty$  na equação (2.28) e usando o fato que o conjunto  $\{w_j \beta; j \in \mathbb{N}, \beta \in C^2([0, T])\}$  é denso em  $W$ , segue-se que o par  $(u, v)$  é solução fraca do sistema (2.2)-(2.8). ■

Para demonstrarmos a unicidade, supomos que  $(u_1, v_1)$  e  $(u_2, v_2)$  com  $u = u_1 - u_2$  e  $v = v_1 - v_2$  sejam soluções distintas do sistema (2.2)-(2.8) com as condições iniciais nula.

Então usando o mesmo argumento para obter a primeira estimativa, obtemos:

$$0 \leq E(t; u, v) \leq 0 \Rightarrow u = v = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \quad \text{e} \quad v_1 = v_2$$

com isto fica demonstrado a unicidade. ■

**LEMA 2.4** - *Suponhamos que  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$  e  $h \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$ , então qualquer solução do problema*

$$a(v, w) = \int_{\Omega} f w dA + \int_{\Gamma_1} g w d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1} h \frac{\partial w}{\partial \nu} d\Gamma_1$$

*satisfaz*

$$v \in H^4(\Omega)$$

e também

$$\begin{aligned}\Delta^2 v &= f \\ v &= \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0 \\ \mathcal{B}_1 v &= h, \quad \mathcal{B}_2 v = g \quad \text{sobre } \Gamma_1\end{aligned}$$

**Demonstração:**

Ver [9]. ■

**LEMA 2.5** - *Suponhamos que  $u, v \in H^2(\Omega)$  e  $w \in H_0^2(\Omega)$ . Então, temos a seguinte desigualdade*

$$\left| \int_{\Omega} [u, w] v dA \right| \leq c (\|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|w\|_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}} (\|u\|_{H^2(\Omega)} \cdot \|w\|_{H^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^2(\Omega)}$$

**Demonstração:**

Visto que  $[u, v]$  é um operador contínuo temos para  $\epsilon > 0$ :

$$\|[u, v]\|_{-2} \leq C \|u\|_{2-\epsilon} \|v\|_{1+\epsilon}.$$

Denotamos por  $\|\cdot\|_{-j}$  a norma do espaço dual  $H^{-j}(\Omega)$ .

Usando interpolação, para  $\epsilon = \frac{1}{2}$  temos

$$\begin{aligned}\left| \int_{\Omega} [u, w] v dA \right| &\leq c \|u, w\|_{-2} \|v\|_2 \\ &\leq c \|u\|_{2-\epsilon} \|w\|_{1+\epsilon} \|v\|_2 \\ &\leq c \|u\|_{\frac{3}{2}} \|w\|_{\frac{3}{2}} \|v\|_2 \\ &\leq c (\|u\|_1 \|w\|_1)^{\frac{1}{2}} (\|u\|_2 \|w\|_2)^{\frac{1}{2}} \|v\|_2. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**TEOREMA 2.2** - *Se os dados iniciais  $(u_0, u_1) \in (W \cap H^4(\Omega)) \times (W \cap H^3(\Omega))$  então a solução do sistema (2.2)-(2.8) tem a seguinte regularidade:*

$$u \in C^1([0, T]; V \cap H^3(\Omega)) \cap C^0([0, T]; W \cap H^4(\Omega)).$$

**Demonstração:**

Derivando a equação (2.21) em relação a  $t$ , obtemos,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{ttt}^m w_j dA + h \int_{\Omega} \nabla u_{ttt}^m \nabla w_j dA + a(u_t^m, w_j) - a(g * u_t^m, w_j) = \\ \int_{\Omega} [u_t^m, w_j] v_t^m dA + \int_{\Omega} [u^m, w_j] v_t^m dA + g(t) a(u_{0,m}, w_j) \end{aligned} \quad (2.29)$$

multiplicando a equação (2.29) por  $h_j''(t)$  e somando em  $j$  e usando o LEMA 2.2, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ E(t, u_t^m, v_t^m) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_t^m, u_t^m] v_t^m dA \right\} = \frac{1}{2} g' \square \partial^2 u^m - \frac{1}{2} g(t) a(u^m, u^m) \\ - \frac{3}{2} \int_{\Omega} [u_t^m, u_t^m] v_t^m dA + g(t) a(u_{0,m}, u_{tt}^m) \end{aligned} \quad (2.30)$$

usando integração, por partes, teremos

$$\int_0^t g(s) a(u_{0,m}, u_{tt}^m) ds = g(s) a(u_{0,m}, u_t^m) \Big|_{s=0}^{s=t} - \int_0^t g'(s) a(u_{0,m}, u_t^m) ds$$

de onde segue

$$\int_0^t g(s) a(u_{0,m}, u_{tt}^m) ds \leq C_\epsilon E(0, u_t^m, v_t^m) + \epsilon \|u_t^m\|_{H^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|u_t^m\|_{H^2(\Omega)}^2 ds$$

usando o LEMA 2.5, a primeira estimativa e a desigualdade

$$\int_{\Omega} [u_t^m, u_t^m] v_t^m dA \leq \|u_t^m\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|u_t^m\|_{H^2(\Omega)} \cdot \|v_t^m\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|u_t^m\|_{H^2(\Omega)} \cdot \|v_t^m\|_{H^2(\Omega)}$$

logo de (2.30)

$$E(t, u_t^m, v_t^m) \leq C \cdot E(0, u_t^m, v_t^m) + C \int_0^t E(s, u_t^m, v_t^m) ds$$

usando o Lema de Gronwall, obtemos:

$$E(t, u_t^m, v_t^m) \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ e } \forall t \in [0, T]$$

portanto

$$u_{tt}^m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$$

$$\begin{aligned} u_t^m & \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \\ v_t^m & \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \end{aligned}$$

de onde vem que

$$\begin{aligned} u_{tt}^m & \overset{*}{\rightharpoonup} u_{tt} \text{ em } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \\ u_t^m & \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \text{ em } L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \\ v_t^m & \overset{*}{\rightharpoonup} v_t^m \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \end{aligned}$$

integrando por partes a equação (2.11), ou seja

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega (-u_t \theta_t - h \nabla u_t \cdot \nabla \theta_t) dA dt + \int_0^T a(u, \theta) dt - \int_0^T a(u, \theta) dt \int_0^T a(g * u, \theta) dt = \\ & \int_0^T \int_\Omega [u, \theta] v dA dt + \int_\Omega u_1 \theta(\cdot, 0) dA + h \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla \theta(\cdot, 0) dA \end{aligned}$$

obtemos:

$$a(u - g * u, w) = - \int_\Omega \{ (u_{tt} - h \Delta u_{tt}) w - [u, v] w \} dA - h \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_{tt}}{\partial \nu} w d\Gamma_1, \quad \forall w \in W.$$

Do LEMA 2.4, temos:

$$u - g * u \in L^\infty(0, T; H^4(\Omega))$$

usando a Equação Resolvente de Volterra, obtemos:

$$u \in L^\infty(0, T; H^4(\Omega))$$

portanto  $(u, v)$  é solução forte para o sistema (2.2)-(2.8).

O que conclui a prova do nosso resultado. ■

# *Conclusão*

---

Nos últimos anos importantes progressos foram obtidos para a estabilização do sistema de von Kármán em especial para análise da estabilização de estruturas dinâmicas. Pesquisas nestas áreas foram dirigidas para problemas em estruturas modernas em engenharias que necessitam de ativos feedbacks para estabilizar estruturas que podem ser instável na ausência de controles (veja [5] para detalhes). Sendo assim a existência de solução do problema estudado aqui é de fundamental importância para análise de problemas de estabilização.

# Bibliografía

---

- [1] C. C. S. Tavares and M. L. Santos, *On the Kirchhoff plates equations with thermal effects and memory boundary conditions. Applied Mathematics and Computation* 213 (2009) 25–38.
- [2] M. Horn and I. Lasiecka, *Uniform decay of weak solutions to a von Kármán plate with nonlinear boundary dissipation. Differential and Integral Equations*, 7 (1994), 885-908.
- [3] M. Horn and I. Lasiecka, *Global stabilization of a dynamical von Kármán plate with Nonlinear Boundary Feedback. Appl. Math. Optimization*, 31 (1995), 57-84.
- [4] M. Horn, A. Favini, I. Lasiecka and D. Tataru, *Global existence, uniqueness and regularity to a von Kármán system with nonlinear boundary dissipation. Differential and Integral Equations*, 9 (1996), 267-294.
- [5] J. E. Lagnese, *Boundary Stabilization of Thin Plates. SIAM. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, (1989).*
- [6] J. E. Muñoz Rivera and G. P. Menzala, *Decay rates of solutions of a von Kármán system for viscoelastic plates with memory. Quarterly of Applied Mathematics*, v. LVII, n. 1, (1999), p. 181-200.
- [7] J. E. Muñoz Rivera, H. Portillo Oquendo and M. L. Santos, *Asymptotic behavior to a von Kármán plate with boundary memory conditions. Nonlinear Analysis* 62, (2005), 1183-1205.
- [8] J. Puel and M. Tucsnak, *Boundary stabilization for the von Kármán equations. SIAM J. Control Optim.* 33(1), (1996), 255-273.
- [9] J. L. Lions and E. Megenes, *Non-Homogeneous boundary value problems and applications. Springer-Verlag, New York 1972, Vol. I.*

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)