PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

RICARDO UCHOA FERNANDES

ESTRATÉGIAS PEDAGÓGICAS COM USO DE TECNOLOGIAS PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo
2010

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

RICARDO UCHOA FERNANDES

ESTRATÉGIAS PEDAGÓGICAS COM USO DE TECNOLOGIAS PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA****, sob a orientação do* ***Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira.***

São Paulo

2010

Banca Examinadora

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** ______________

DEDICATÓRIA

A minha querida esposa Gisele Karina Leal da Silva Fernandes e meu filho Mateus Leal Uchoa Fernandes, pelo apoio, paciência, incentivo e principalmente pelos momentos de ausência durante a dedicação ao Mestrado

AGRADECIMENTO

Ao Professor Dr. Gerson Pastre de Oliveira, pela sua orientação competente, sugestões, comentários, estímulos positivos.

À Professora Dra. Bárbara Lutaif Bianchini e a Professora Dra. Viviane Rezi Dobarro, por participarem da banca examinadora e por suas valiosas e enriquecedoras contribuições a este trabalho.

Aos Professores do Programa de Estudos de Pós-Graduados da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo por tudo que ensinaram.

A todos os colegas da turma de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, pela oportunidade de estudarmos juntos.

A Secretaria da Educação por oferecer a oportunidade da execução desta pesquisa.

A supervisora Eliana Pereira Maciel, responsável pelo Programa Bolsa Mestrado da Diretoria de Ensino de Guaratinguetá.

Aos Meus Pais José Rodrigues Fernandes e Aparecida Maria Uchoa Fernandes e os irmãos Cláudia, Ronaldo, Rivair e Cristiane, pela compreensão e incentivo.

A DEUS, por me iluminar em todos os momentos de minha vida e por permitir a realização de um sonho.

RESUMO

O aprendizado efetivo do educando é o principal objetivo de um professor reflexivo, para isso, não basta simplesmente ter todo o conhecimento técnico, é necessário algo a mais, saber mediar, ter uma linguagem clara e objetiva, mobilizar recursos materiais para o sucesso desse processo. Assim pensado, este trabalho teve por objetivo construir uma aprendizagem significativa dos conceitos básicos da trigonometria na circunferência.

Esta pesquisa utiliza a engenharia didática, uma metodologia de pesquisa que é considera como um esquema experimental com base em realizações didáticas em sala de aula. A pesquisa possui dois instrumentos de análise, dando grande importância para a análise didática do erro. O primeiro instrumento direciona para a construção da circunferência trigonométrica, utilizando régua, transferidor e lápis; no segundo instrumento, a construção é feita no *software* de geometria dinâmica Geogebra.

As atividades desse instrumento de pesquisa, forma aplicadas para doze alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola estadual de Guaratinguetá, interior de São Paulo, no vale do Paraíba. Foram dois encontros para a aplicação, sendo que os alunos trabalharam individualmente no primeiro instrumento de avaliação e em trio no segundo instrumento avaliativo. A experimentação evidencia que conhecimentos prévios foram mobilizados para a realização dessas atividades e a informática como recurso pedagógico, isto é, atividade com o Geogebra despertou o interesse dos alunos, pois ficaram mais concentrados e o desempenho foi melhor. Além disso, pode-se entender que tanto a mobilização dos conhecimentos prévios quanto a aquisição de novos pode ser incrementada a partir da adoção de uma estratégia pedagógica com uso de tecnologias e de uma abordagem que considera que a construção dos conhecimentos de forma significativa não prescinde do uso reconstrutivo do erro como ferramenta didática.

Palavras-Chave: Trigonometria, circunferência trigonométrica, engenharia didática, análise didática do erro, aprendizagem significativa, estratégias pedagógicas com uso de tecnologias.

ABSTRACT

The effective learning of the student is the main goal of a reflective teacher, so it is not enough simply to have all the technical knowledge, you need something more, namely mediation, have a clear and objective, to mobilize material resources for the success of this process . Just thought, this work was to build a meaningful learning the basics of trigonometry in circumference.

use this research to teaching engineering, a research methodology that is considered as an experimental scheme based on achievements in teaching classroom. The research has two analytical tools, giving great importance to the training analysis of the error. The first instrument directs for construction of the trigonometric circle, using ruler, protractor and pencil, the second instrument construction is done in dynamic geometry software GeoGebra.

The activities of this research tool, as applied to twelve students in the 2nd grade of high school to a state school in Guaratinguetá, interior of Sao Paulo, in the Paraiba Valley. Were two meetings for the application, the students worked individually in the first assessment tool and trio in the second evaluation instrument. The trial shows that prior knowledge have been mobilized to carry out these activities, and information technology as a pedagogical resource, ie, activity with GeoGebra aroused the interest of students because they were more focused and performance was better.

Keywords: Trigonometry. Trigonometric circle. Engineering teaching. Training analysis of the error. Significant Learning.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

INTRODUÇÃO

TRAJETÓRIA PESSOAL E MOTIVAÇÕES

Desde muito cedo, ainda no ensino fundamental sempre tive muita facilidade em estudar e compreender a Matemática. Gostava muito de como minhas professoras ministravam suas aulas, com muita competência e responsabilidade: faziam, assim, com que as aulas ficassem muito agradáveis. Até hoje me lembro da 5ª série, na escola estadual de primeiro grau “Conde de Moreira Lima”. Lá, a professora Marília, que futuramente veio a ser minha professora na Universidade, passava de carteira em carteira para verificar se havíamos feito a tarefa. Encarava aquilo como uma preocupação: ela tinha que verificar como estávamos nos saindo em relação aos estudos.

Quando ingressei no ensino médio na Escola Estadual de Primeiro e Segundo Graus “Prof. Pe. Carlos Leôncio da Silva”, tive muita sorte em estudar com a professora Marli, de grande competência, a qual também veio a ser minha professora na Universidade.

Estes foram apenas dois exemplos. Durante toda minha formação no ensino básico, sempre fui bem orientado com ótimas professoras e, por esta razão, no final do ensino médio, tomei a decisão em ser um professor de Matemática. Em 1994, ingressei no curso de Ciências da UNISAL (Universidades Salesianas, *campus* de Lorena), com habilitação plena em Matemática. Foram quatro anos de estudos. No quarto e último ano de formação, comecei a lecionar numa escola pública. Foi então que percebi que a minha escolha profissional não poderia ter sido outra, e, por isso, agradeço a Deus.

Precisamente em agosto de 1997, comecei minha vida profissional no magistério, sempre em escolas públicas. Durante todo esse tempo, sempre procurei ser um professor reflexivo, em relação ao currículo e à minha prática docente. Tenho observado, também, a maneira com que os alunos vêm se comportando nas aulas durante todo meu tempo no magistério. As atitudes vêm se modificando, isto é, ficaram mais exigentes no que diz respeito ao interesse pelas aulas de Matemática.

Percebi que era preciso buscar aperfeiçoamentos profissionais que pudessem subsidiar-me efetivamente nesse grande desafio. Em função disto, realizei cursos de capacitação e aperfeiçoamento oferecidos pela SEESP (Secretaria da Educação do Estado de São Paulo). Entretanto, no segundo semestre de 2007 ingressei no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP), o que representava um sonho transformado em realidade. Além disso, dadas as demandas da docência na atualidade, aquele passo representava autêntica necessidade pessoal e profissional, em um momento ímpar da minha vida. A partir dali, estaria em contato com o universo das pesquisas acadêmicas, diante de professores altamente qualificados para o ensino de Matemática nos tempos atuais. No primeiro semestre de 2008, a partir das aulas de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), com a Professora Dra Celina Aparecida Almeida Pereira Abar. Fiquei fascinado, pois percebi que o uso da informática na educação pode ser uma potente ferramenta para o aprendizado da Matemática, se tal uso for feito em conjunto com uma estratégia pedagógica, um planejamento. De forma brilhante, a professora Celina conseguiu demonstrar-nos como poderíamos usar esse recurso de forma inteligente e eficaz. Como um usuário do computador desde 1993, sempre tive muito prazer e curiosidade em conhecer o seu funcionamento – cheguei a realizar um curso de hardware pelo SENAC e sempre busquei a compressão do funcionamento dos softwares por meios exaustivos, ou seja, através de erros e acertos, compartilhando idéias com os amigos, sempre com muita determinação em aprender.

Diante “do útil e do agradável”, a ferramenta computador, com várias potencialidades para o ensino, e meu gosto pela a informática, decidi que a minha pesquisa seria na linha das Tecnologias de Informação e Comunicação aplicadas à Educação Matemática. O tema já estava bem claro em meu pensamento: seria a trigonometria, por tratar de um assunto que sempre tive muita dificuldade em fazer que os alunos apreendessem de forma significativa, ou seja, sempre tive problemas para levá-los a entender de onde vêm os valores seno e cosseno dos ângulos estudados. O Geogebra, *software* de geometria dinâmica, usado com frequência em várias pesquisas acadêmicas, em função da sua interface gráfica, mostrou-se ideal, até onde pude concluir, para o encaminhamento de uma proposta de aprendizagem significativa. Em princípio, o *software* pode permitir ao aluno construir figuras geométricas de modo que, ao variar os atributos da referida construção, constatar visualmente diversas propriedades matemáticas. A partir deste ponto, inúmeras discussões podem ocorrer, com o professor como orientador.

A trigonometria é um assunto muito extenso. Em função disto, houve a necessidade de delimitar a pesquisa, reduzindo-a a uma abordagem sobre o entendimento dos conceitos do seno e cosseno, especificamente no ciclo trigonométrico, e sua representação no sistema de coordenadas cartesianas. Optei por assim restringir esta investigação por observar que, durante todo esse tempo como docente, os alunos nada mais faziam além de decorar fórmulas e valores de uma tabela de seno e cosseno de ângulos, sem saber o real significado desses números.

SOBRE A PESQUISA

O objetivo desta pesquisa foi o de integrar o aprendizado da trigonometria, que, tradicionalmente, utiliza régua, transferidor e lápis, com o aprendizado por meio do computador, com o *software* Geogebra, o qual facilita a construção e a visualização dos conceitos trigonométricos. Com esta abordagem integrada, torna-se possível analisar os erros cometidos no processo, de forma a caminhar com os estudantes, por meio de uma estratégia pedagógica, através de uma aprendizagem significativa sobre o tema.

Entretanto, não foi a mera inserção de computadores e *softwares* que possibilitou a análise proposta por esta pesquisa. Assumiu-se, aqui, que seria necessário elaborar estratégias pedagógicas com uso de tecnologias para a abordagem do tema, na visão proposta por Oliveira (2009a), integrando os sistemas computacionais com as tecnologias tradicionais já utilizadas no processo de ensino-aprendizagem do tema.

Por outro lado, ao elaborar semelhante estratégia, não se pode prescindir de uma análise criteriosa e abalizada sobre o uso do erro na aprendizagem. No âmbito de um processo de aprendizagem, o valor da apuração dos erros e do tratamento dos mesmos pode surgir quando se pretende retomar os conteúdos do processo a partir desta visão reconstrutiva, e no contexto de uma aprendizagem significativa. Para tanto, esta investigação buscou apoio em Perrenoud (2000), Brousseau (2001) e Ausubel (2003).

Para dar conta dos questionamentos que surgiram, indicados mais adiante de forma explícita, o trabalho foi organizado da forma explicada nos próximos parágrafos.

No Capítulo 1 apresentam-se as justificativas da pesquisa através de uma descrição da história da Trigonometria, destacando a utilização e aplicação da mesma no desenvolvimento das civilizações antigas. Uma análise dos documentos oficiais como PCN, PCNEM e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo surge sob o enfoque do ensino da Trigonometria no Ensino Médio.

O Capitulo 2 traz uma abordagem das TICs e a Educação Matemática, verificando os resultados encontrados na revisão bibliográfica de pesquisas correlatas, com o objetivo de mostrar a relevância do estudo. Além disso, destacam-se o uso das TICs como estratégias pedagógicas inovadoras na a construção do conhecimento. Neste capítulo, procura-se, ainda, estabelecer o conceito de técnica e tecnologia, o uso histórico das tecnologias e as tecnologias na educação.

O Capítulo 3 trata sobre os referenciais teóricos desta pesquisa. São apresentadas a Teoria da Aprendizagem significativa e Engenharia Didática, proposta por Michèle Artigue, como uma metodologia de pesquisa, composta de quatro fases: análise preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação *e análise a posteriori* (validação). Uma descrição é feita, no sentido de esclarecer como a pesquisa está esboçada de acordo com as fases da engenharia didática.

No Capítulo 4 descreve-se a sequência didática utilizada com os sujeitos da pesquisa, com a descrição da análise *a priori* e a análise *a posteriori* dos dois instrumentos aplicados nesta investigação.

O Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos, devidamente discutidos com relação ao referencial teórico e da revisão bibliográfica.

CAPÍTULO I

PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

1.1 Justificativas

A concretização da pesquisa deve-se, em boa parte, à experiência do autor como docente. Observando as dificuldades que os alunos têm em assimilar com clareza os conceitos de trigonometria, especificamente o significado do seno e cosseno no Ensino Médio, sentiu-se a necessidade de pesquisar o processo de construção desse conhecimento de maneira significativa.

Durante mais de uma década como professor de Matemática no Ensino Médio do Estado de São Paulo, o autor pôde notar a insatisfação dos alunos com a maneira como a matemática era ensinada, ou melhor, “transmitida” pelos professores. Os estudantes declaravam não gostar da matéria, por ser muito difícil de entender.

Por mais óbvio que possa parecer, dado o quadro supra descrito, tem-se a expectativa de que a construção do significado é um caminho que pode conduzir o aluno a aprendizagem significativa.

O *objetivo* desta dissertação é a construção da aprendizagem significativa dos conceitos básicos da trigonometria, especificamente os conceitos seno e cosseno, e sua representação no plano cartesiano, abordando o erro e usando-o como recurso para tal aprendizagem, entre alunos de uma classe de 2º ano do Ensino Médio, utilizando para a construção do significado mídias como o lápis, régua, transferidor e, posteriormente, a informática com o *software* GeoGebra. Para tal abordagem, utiliza-se, prioritariamente, a teoria da Aprendizagem Significativa de David P. Ausubel.

Não se pretendeu, entretanto, nesta pesquisa, que a introdução de elementos relativos às Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) ocorresse de forma descolada de um planejamento pedagógico consistente, mediante a adoção de uma *estratégia didática* (Oliveira, 2009a). Pretendeu-se, destarte, trabalhar com uma diversidade de mídias que permita, à luz da teoria eleita como referência, mapear questões relevantes, como a ocorrência de erros, que receberam, após uma análise pormenorizada, um tratamento reconstrutivo, ou seja, uma abordagem que procura entender as questões teórico-práticas presentes no erro, de forma a não consolidá-lo, mas, de outra maneira, aproveitá-lo como elemento valioso no processo de aprendizagem (Perrenoud, 2000).

A questão da inserção das TICs merece atenção. Não se admite nesta investigação a idéia da substituição dos processos vistos como tradicionais, ainda que alguns de seus procedimentos sejam objetos de críticas fundamentadas ao longo deste relatório. Ao focar a estratégia, concebida e dada a conhecer pelo professor ao seu grupo de alunos, o que se pretende é dar conta do processo, ou seja, trabalhar com uma visão formativa da construção do conhecimento (Oliveira, 2007). De outra forma, quando se evidencia as estratégias, no contexto da Educação Matemática, a intenção é compreender e instituir a visão de que as TICs devem ser pensadas em seu caráter mediador, de modo a proporcionar, quanto possível ao estudante, a possibilidade de consolidar conhecimentos matemáticos de forma autônoma (Oliveira, 2009a).

Assim, quando, aqui, se menciona estratégias pedagógicas com uso de tecnologias, entendem-se, de maneira ampla, os mais diversos artefatos que podem estar presentes no processo de ensino-aprendizagem. Neste aspecto, a visão adotada nesta investigação concorda com Oliveira (2009a, p. 6), quando o autor argumenta:

> *A amplitude desta estratégia permite compreender as chamadas tecnologias “tradicionais” (uso de sólidos, giz e lousa, lápis e papel, régua e compasso, etc) como outras abordagens, igualmente válidas, e que podem, em dados momentos, apresentar maior pertinência, de acordo com o cenário, os sujeitos, as disponibilidades de infra-estrutura tecnológica, entre outros elementos.*

Esta visão parte da idéia de Borba, Malheiros e Zulatto (2008) e de Borba e Penteado (2003) de que a produção do conhecimento matemático na contemporaneidade se dá a partir de um coletivo de *seres-humanos-com-tecnologias*. E isto se dá, de certa forma, desde que lápis e papel, em Matemática, como outras tecnologias que são, tornaram-se fundamentais: “em matemática, por exemplo, as demonstrações são frutos da disponibilidade da escrita em diversas sociedades” (Borba e Penteado, 2003, p.13).

Deste modo, as questões que serão abordadas nesta pesquisa podem ser delineadas da seguinte maneira:

- O emprego de uma estratégia pedagógica com uso de variadas tecnologias mediadoras, desde as mais tradicionais até as TICs, pode promover um processo de ensino-aprendizagem significativa da trigonometria, especificamente quanto aos conceitos de seno e cosseno na circunferência?
- Uma estratégia pedagógica com uso de tecnologias mediadoras pode concorrer para o êxito de um processo de ensino-aprendizagem em Matemática, mais especificamente em Trigonometria, a partir de uma abordagem que considere o uso reconstrutivo do erro?

1.2 O uso reconstrutivo do erro

De acordo com Perrenoud (2000), o professor deve trabalhar a partir das representações dos alunos, o que não consiste em fazê-las expressarem-se para desvalorizá-las imediatamente, mas permitir que os mesmos possam ter direito à aula, em sua expressão comunicativa. Desta forma, fica possível entender as raízes das representações trazidas pelos estudantes, bem como sua forma de coerência.

Ainda segundo o mesmo autor, deixar os alunos livres para a discussão e a explicação de seus raciocínios espontâneos viabiliza a análise de como interpretam o objeto de estudo. Existe uma dificuldade por parte dos professores de se colocarem no lugar do aluno, e perceber que os mesmos muitas vezes não compreendem um assunto que o professor domina totalmente e, de certa forma, banaliza. De nada adianta explicar uma técnica de resolução para um problema de Matemática se o aluno não tem conhecimentos básicos para compreender esse processo, ou seja, não basta que os professores tenham a memória de suas próprias aprendizagens para imaginar que o conhecimento já construído na mente do aluno. A competência didática do professor é essencial, ajudando-o a fundamentar-se nas representações prévias dos alunos, sem se fechar nelas, e encontrar um ponto de entrada em seu sistema cognitivo, uma maneira de desestabilizá-los apenas o suficiente para levá-los a restabelecerem o equilíbrio, incorporando novos elementos às representações existentes, reorganizando-as, se necessário.

Ainda sobre este tópico, Perrenoud (*idem*) indica a pertinência em trabalhar a partir dos erros e dos obstáculos à aprendizagem, pois o aprendizado não é um processo de memorização, mas sim uma reestruturação do sistema de compreender o mundo estruturado pelo estudante, considerando importante o trabalho cognitivo nesse processo. Sob este aspecto, o erro é uma importante ferramenta para ensinar, um revelador dos mecanismos de pensamento do aprendiz. Entretanto, o professor, para trabalhar a partir do erro, deve ter conhecimentos em didática e em psicologia cognitiva. Os erros são etapas inestimáveis do esforço de compreender, logo o professor deve reconduzir esse processo do aprendizado proporcionando ao aprendiz os meios necessários para que possa tomar consciências deles, identificar sua origem e transpô-los.

Brousseau (1983 apud Almouloud, 2007) considera o papel do erro na aprendizagem, onde o conhecimento sai de um estado de equilíbrio, entra por fases transitórias, chega a um novo estágio de equilibração, significando que houve uma reorganização dos conhecimentos, o que permitiu integrar um novo conhecimento ao saber antigo.

Este autor, citando a linha da psicologia social, afirma que, diante das pesquisas em didática da matemática, há um embasamento na noção de "conflito sociocognitivo", isto é, resumidamente, uma crença de que o conflito pode facilitar a aquisição de conhecimento. O erro tem papel fundamental na aprendizagem, portanto, principalmente na concepção construtivista.

Feitas estas observações, pertinentes ao uso do erro como interface entre o conhecimento estabelecido e aquele que se encontra em elaboração, em uma perspectiva construtivista, considera-se, em seguida, um panorama histórico da Trigonometria, com intenção de compreendê-la em sua importância enquanto elemento de saber e conteúdo matemático escolar.

1.3 Panorama histórico da Trigonometria

A Matemática no ensino tradicional é ensinada através de regras e fórmulas que são aplicadas na resolução de exercícios de fixação, ou seja, exercícios repetitivos, com pouco sentido para aplicação no dia-a-dia do educando ou sem uma explicação plausível para a utilização como ferramenta de outras ciências. Entretanto, segundo Sousa (2007), estudar qualquer conteúdo matemático requer antes de tudo saber por que e quando foram desenvolvidos os pressupostos teóricos envolvidos, de forma a colaborar com a formação crítica e reflexiva do aprendiz.

O ensino da matemática deve ser associado ao seu fator histórico. É um meio de enriquecer as aulas, dando sentido para o processo de construção do conhecimento nesta área. É também uma forma de mostrar que a sua criação ocorreu em função da necessidade do desenvolvimento social (Sousa, 2007).

Alguns fatores históricos foram de grande importância para o estudo da trigonometria no avanço da sociedade. Sem a pretensão de esgotá-los, alguns deles, relevantes para esta pesquisa, são elencados a seguir.

Segundo Costa (1997), as primeiras referências encontradas sobre o início da Trigonometria parecem ter surgido no Egito e na Babilônia, com razões entre os números e os lados de triângulos semelhantes.

No Egito, em 1650 a.C., existem referências sobre os cálculos da razão entre o afastamento horizontal e a altura, usados para construções de pirâmides. Essa razão era chamada de *seqt*. O papiro *Ahmes,*ou *Rhind*, traz referência ao *seqt* de uma pirâmide regular, calculada para manter constantes as inclinações dos seus lados. Observando a figura seguinte, pode-se notar a representação do seqt. Considerando OM=80 e OU=40, ter-se-ia o seqt = 80 / 40 = 2.

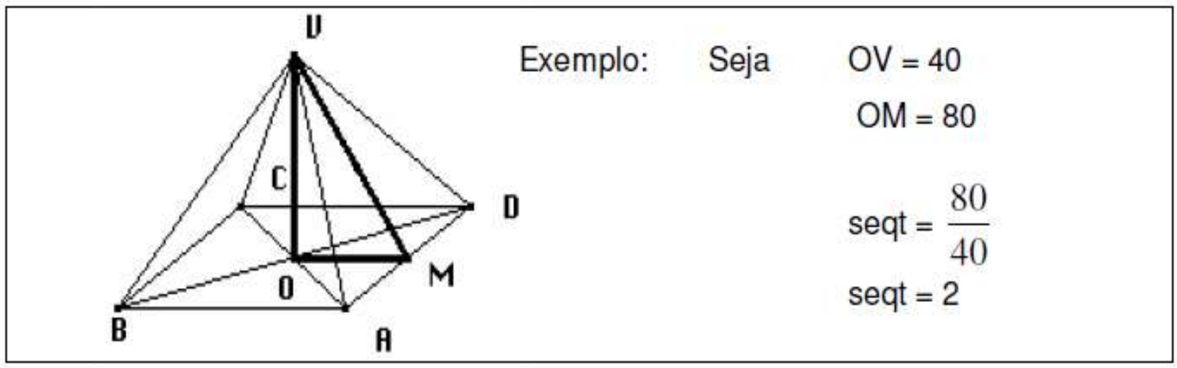


Figura 1 - Seqt de uma pirâmide (adaptado de Costa, 1997)

Ainda segundo Costa (1997), os egípcios (c. 1500 a. C) associavam as sombras projetadas de uma vara vertical com as horas do dia (relógio do sol). As funções tangente e cotangente foram constituídas a partir desses cálculos.

Encontra-se também nesses primeiros vestígios de trigonometria, a contribuição dos babilônicos, pois se interessavam pela Astronomia em função de suas crenças religiosas e também para relacionar fases da lua com os períodos de plantio. Excelentes astrônomos, os babilônios influenciaram os povos posteriores. No século 28 a.C., durante o reinado de Sargon, construíram um calendário astrológico e elaboraram, a partir do ano 747 a.C., uma tábua de eclipses lunares (Smith, 1958 apud Costa, 1997).

Segundo Eves (2004), Hiparco, que viveu em torno de 140 a.C., era um astrônomo muito cuidadoso em suas observações. Creditam-se a ele a determinação da duração do mês lunar médio (o afastamento entre seu valor e aquele presentemente aceito não vai além de 1”), um cálculo acurado da inclinação da eclíptica e a descoberta e uma estimativa da pressão anual dos equinócios. Além disso, catalogou 850 estrelas.

A divisão do círculo em 360º foi introduzida na Grécia por Hiparco, ou talvez Hipsicles (c. 180 a.C). Hiparco teve muita importância no desenvolvimento da trigonometria. Atribui-se a ele um tratado em doze livros que se ocupa da construção de uma *tábua de cordas*. Posteriormente, Cláudio Ptolomeu, possivelmente baseado na tabua de cordas de Hiparco, fornece os comprimentos das cordas dos ângulos centrais de um círculo dado, de 1/2º a 180º, com incrementos de 1/2º. Divide-se o raio do círculo em 60 partes e se expressam os comprimentos das cordas sexagesimalmente em termos dessas partes (Eves, 2004).

Para o autor supramencionado, o *Almagesto* foi uma obra de astronomia, de Ptolomeu, datada de c. 150 d. C., segundo período de Alexandria. A trigonometria encontrada nesta obra contém a fórmula para o seno e cosseno da soma e da diferença de dois ângulos, juntamente com um começo da trigonometria esférica. Encontra-se uma discussão sobre a projeção estereográfica; na sua Geografia, a posição dos lugares na Terra é determinada pela latitude e longitude, que são exemplos antigos de coordenadas sobre a esfera. A projeção estereográfica está na base da construção do astrolábio, um instrumento usado para a determinação da posição sobre a Terra, já conhecido na antiguidade e amplamente utilizado até a introdução do octante, mais tarde sextante, no século XVIII. O almagesto manteve-se um trabalho-modelo sobre a astronomia até os tempos de Copérnico e Kepler.

Meneleau (c. 100 d. C.) produziu a obra *Sphaerica*, a qual continha uma geometria da esfera. O teorema de Meneleau era um tratamento do triângulo generalizado à esfera, puramente geométrico. Nesse mesmo período, Herão descreveu com precisão um eclipse lunar. Sobre Herão de Alexandria, há controvérsia a respeito da época em que viveu, com estimativas que variam de 150 a.C. a 250 d.C. Mas recentemente, tem sido colocado na segunda metade do século I d.C.

Para Struik (1992), a trigonometria tornou-se uma ciência independente da astronomia a partir das traduções que Johannes Müller, também conhecido como Regiomontano, de Königsberg, fez em conjunto com o seu professor, o astrônomo vienense George Peurbach – autor de tabelas astronômicas e trigonométricas –a partir do grego, de obras de Ptolomeu, Apolônio, Herão e Arquimedes.

Sua obra *"De triangulis omnimodis libri quinque"*, uma introdução completa à trigonometria foi impressa em 1533, sessenta e nove anos após sua escrita. Contém a lei dos senos num triângulo esférico. Regiomontano se dedicou ao cálculo de tabelas trigonométricas. Suas tábuas de senos consideravam um raio de 60000 com intervalos de um minuto.

Eves (2004) descreve sobre o desenvolvimento da Matemática, especificamente a Trigonometria, a partir do século XVI, citando o matemático François Viète, mais conhecido como Viète. Nasceu em Fontenay, em 1540, estudou direito, mas dedicava a maior parte de seu tempo de lazer à matemática. Sua obra, vasta, compreende trabalhos de trigonometria, álgebra e geometria, sendo as principais *Canon mathematicus seu ad triangula* (1579), *In artem analyticam isagoge* (1591), *Supplementum geometriae* (1593), *De numerosa potestatum resolutione* (1600) e *De aequationum recognitione et emendatione* (publicado postumamente em 1615).

A obra *Canon mathematicus seu ad triangula* (1579) contribuiu notavelmente no estudo da trigonometria. Trata-se, talvez, do primeiro livro na Europa Ocidental a desenvolver sistematicamente métodos para resolver triângulos planos e esféricos com auxílio das seis funções trigonométricas. Viète obteve expressões de $\mathbf{cos\ n\theta}$ para n=1,2,...,9 e, posteriormente, sugeriu uma solução trigonométrica para o caso irredutível das cúbicas.

O astrônomo Johannes Kepler nasceu em 1571 perto da cidade de Stuttgart e estudou na Universidade de Tübingen. Persistente, Kepler, convencido da teoria copernicana de que os planetas descrevem órbitas em torno do Sol, procurou, de maneira infatigável, determinar a natureza e a posição dessas órbitas e como elas são percorridas pelos planetas. Kepler herdou uma enorme massa de observações sobre o movimento dos planetas, feitas por Tycho Brahe, após sua morte em 1601. Com perseverança e empenho, por meio de cálculos tediosos, fez centenas de tentativas infrutíferas durante vinte e um anos. Por fim em 1609, formulou suas duas primeiras leis do movimento planetário e, dez anos, depois em 1619, a terceira.

Essas leis são consideradas como um marco na história da astronomia e da matemática. Podem ser enunciadas da seguinte forma:

I. Os planetas movem-se em torno do Sol em trajetórias elípticas com o Sol num dos focos;

II. O raio vetor que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais;

III. O quadrado do tempo para que um planeta complete sua revolução orbital é diretamente proporcional ao cubo do semi-eixo maior da órbita (Eves, 2004, p. 357).

O século XVIII foi marcado pelas contribuições por membros da família Bernoulli. A importante fórmula $(cosx + isenx)^n = \cos\ nx + isen\, nx; \quad i = \sqrt{-1}$, que se tornou a chave da trigonometria analítica, foi dada por Abraham De Moivre em 1707 para n inteiro positivo (embora não explicitamente).

A forma atual da trigonometria é dada quando Euler (1707-1783) atribui a ele a introdução da medida do raio de um círculo como unidade e definiu funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo. Euler (1748 apud Eves, 2004) publicou Introductio in anlysin infinitorum,uma sistematização da geometria analítica que faz a discussão de questões analíticas e geométricas, apresenta as expansões em série e as transformações de produtos infinitos em séries.

Fourier nasceu em Auxerre em 1768. Em um artigo, fez a surpreendente afirmação de que toda função num intervalo finito por um gráfico descrito arbitrariamente pode ser decomposta numa soma de funções seno e cosseno. Uma função qualquer, definida no intervalo $(-\pi, \pi)$, pode ser representada nesse intervalo por onde os coeficientes a e b são números reais convenientes. A série resultante é conhecida como série trigonométrica.

Este pequeno panorama histórico pretende indicar que a preocupação com a trigonometria está nas raízes do desenvolvimento do saber matemático. Atualmente, não poderia ser de outra forma: segundo as Orientações Curriculares Para o Ensino Médio (2006) o estudo da trigonometria é importante para fazer cálculos de distâncias inacessíveis, calcular a largura de um rio, utilizando régua e transferidor para obter medidas. Os alunos devem ter a oportunidade de traçar gráficos referentes às funções trigonométricas, associando as funções seno e cosseno aos fenômenos que apresentam comportamento periódico. Em função disto, em seguida, são apresentadas as asserções consideradas importantes nesta investigação e que estão contidas nos documentos oficiais de referência.

1.4 Trigonometria no Ensino Básico: A Proposta Curricular do Estado de São Paulo e os PCNs.

A Proposta Curricular do Estado de São Paulo (São Paulo, 2008), quanto aos conteúdos disciplinares de Matemática para o Ensino Fundamental e Ensino Médio, está abrangida em quatro grandes blocos temáticos. São eles: ***números***, ***geometria***, ***grandezas*** e ***medidas*** e o ***tratamento da informação***, cada um deles presente, direta ou indiretamente, na lista dos conteúdos a serem ensinados em todas as séries.

Encontra-se a trigonometria, como início de estudo, proposta no 3º bimestre da 8ª série, no tema de proporcionalidade na geometria, com os conceitos de semelhança de triângulos e razões trigonométricas; depois, no 4º bimestre da 1ª série do Ensino Médio, com as razões trigonométricas nos triângulos retângulos e Resolução de triângulos não retângulos: lei dos senos e lei dos cossenos; no 1º bimestre da 2ª série, no tema Trigonometria, com os conceitos de fenômenos periódicos, funções trigonométricas, equações e inequações e adição de arcos; e, finalizando o estudo no 3º bimestre da 3ª série do ensino médio, com o tema Estudo das Funções, com os conceitos de gráficos das funções trigonométricas.

A grade curricular proposta privilegia idéias fundamentais, de natureza transdisciplinar, que servirão de mediadores na mobilização dos temas para o desenvolvimento das competências pessoais dos alunos, bem como para a construção dos significados dos conteúdos estudados. Os temas escolhidos possibilitam metodologias alternativas ao tratamento dos conteúdos, numa apresentação criativa e favorecendo o uso da tecnologia, da modelagem matemática, de materiais concretos, entre outros.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) não propõem o ensino de trigonometria para a 8ª série, mas enfatizam o ensino de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro), além da verificação e aplicação do teorema de Tales e de Pitágoras, conteúdos esses necessários como base para se estudar a Trigonometria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 1999) estabelecem que a Matemática, a Biologia, a Física e a Química integram uma mesma área do conhecimento, a área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, pois compartilham linguagens para representação e sistematização do conhecimento de fenômenos ou processos naturais e tecnológicos. Esta área tem como três grandes competências a serem desenvolvidas: a representação e comunicação, a investigação e compreensão e a contextualização sócio-cultural.

A proposta de Matemática dos PCNEM (*idem*) aborda um conjunto de temas que possibilitam o desenvolvimento das competências relevantes, que foram sistematizados em três eixos ou temas estruturadores, desenvolvidos ao mesmo tempo nas três séries do ensino médio. São eles *Álgebra: números e funções*, *Geometria e medidas* e *Análise de dados*. A trigonometria está proposta no primeiro eixo, junto com variação de grandezas.

Os PCNEM (BRASIL, 1999), quanto ao estudo de trigonometria, enfatizam o estudo do triângulo retângulo; do triângulo qualquer; da primeira volta. Estabelecem que o aluno tenha a competência para utilizar e interpretar modelos de resolução de situações problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos, além de compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais.

Segundo o mesmo documento, deve-se evitar o excessivo cálculo algébrico de identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos, pois nem todos os alunos prosseguirão seus estudos em carreiras ditas exatas.

A Proposta Curricular do Estado de São Paulo (São Paulo, 2008), implantada em todo estado, visa apoiar o trabalho realizado nas escolas estaduais, contribuindo para a melhoria da qualidade das aprendizagens de seus alunos. Com essa nova proposta de ensino, o estudo da trigonometria tem um significado mais substancial, isto é, o aluno consegue enxergar o significado desse tema em sua vida cotidiana.

Esta asserção surge posteriormente neste trabalho, quando elementos do documento mencionado são utilizados nas sequências didáticas propostas.

Além dos documentos mencionados, julgou-se pertinente obter um panorama curricular mais amplo relativo ao ensino de trigonometria. Em função disto, optou-se pela análise de três livros didáticos, amplamente utilizados nas escolas atualmente.

1.5 Análise de Livros Didáticos

Diante de uma metodologia de pesquisa, proposta neste trabalho, foi necessário fazer uma análise de alguns livros didáticos, aqui escolhidos por fazerem parte do PNLEM[1].

Os livros escolhidos são obras que vem sendo utilizadas pelas escolas do Estado de São Paulo para o ensino médio. Somente foram analisados aqui os segundos volumes de cada obra, por fazerem parte do currículo da 2ª série do Ensino Médio.

Os livros escolhidos são os seguintes:

- **Matemática Completa**, publicado em 2005 pela Editora FTD (Giovanni e Bonjorno, 2005);
- **Matemática: Aula por Aula**, publicado em 2003 pela Editora FTD (Barreto Filho e Silva, 2003);
- **Matemática: ciência e aplicações**, publicado em 2004 pela Editora Atual (Iezzi et al, 2004).

A análise dos livros didáticos tem por objetivo verificar se o objeto em questão contempla a nova proposta de ensino do estado de São Paulo (São Paulo, 2008).

Para essa análise, foram considerados os seguintes critérios:

- A introdução do conteúdo;
- A preocupação em dar significado ao seno e ao cosseno.

[1] PNLEM – Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio. O Ministério da Educação (MEC) distribui os livros didáticos às unidades de ensino médio de todo o país por intermédio do FNDE – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação

1.5.1 Análise da obra "Matemática Completa"

Neste livro (Giovanni e Bonjorno, 2005), a introdução do assunto é feita sem uma descrição histórica da trigonometria. O assunto é introduzido com as razões trigonométricas no triângulo retângulo, por meio de fórmulas e, em seguida, é apresentada a tabela trigonométrica do seno, cosseno e tangente de 1º a 90º. Os autores propõem uma "*tabela de valores importantes"*, isto é, uma tabela que descreve o seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º.

Quando a abordagem refere-se à circunferência trigonométrica, continua a mesma regra sistemática, definindo arco de circunferência, comprimento de circunferência, unidades de medidas de arcos: grau e radiano e conversões. Os autores fazem a introdução da circunferência trigonométrica, mencionando os arcos côngruos, com a seguinte descrição:

> *Os arcos que têm a mesma extremidade e diferem apenas pelo número de voltas inteiras são chamados de arcos côngruos. De maneira Geral:*
> *Se um arco mede ∝ graus, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é:* $\propto +k \cdot 360°,\ com\ k \in Z.$
> *Se um radiano mede ∝ radianos, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é:* $\propto +2\mathrm{k}\pi,\ \mathrm{com\ k} \in \mathrm{Z}$ *(Giovanni e Bonjorno, 2005)*

O seno e cosseno de um arco são apresentados de maneira a associar o triângulo com a circunferência, isto é, mostrar que o seno e o cosseno no triângulo retângulo são os mesmos na circunferência, demonstrando isso nos quatro quadrantes. Em seguida, o livro traz a construção de uma tabela com base nas reduções ao 1º quadrante, citando as fórmulas de reduções dos 2º, 3º e 4º quadrantes ao 1º quadrante, utilizando o grau e o radiano.

Algumas atividades propostas são contextualizadas. Apenas um dos exercícios propostos menciona uma parte histórica da matemática e os demais exercícios são clássicos da trigonometria, como aplicações de fórmulas para calcular o valor de uma expressão, determinar a distância de travessia de um rio e calcular a altura de um prédio.

1.5.2 Análise da obra "Matemática: aula por aula"

Esse livro (Barreto Filho e Silva, 2003) tem a preocupação de introduzir o estudo da trigonometria abordando inicialmente a sua origem, ou seja, a história da trigonometria como sendo uma condição da evolução na Agrimensura, Navegação e Astronomia.

Inicia-se a trigonometria abordando as razões trigonométricas no triângulo retângulo, enunciando as fórmulas para o seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo α. Menciona os "ângulos notáveis: 30º, 45º e 60º", demonstrando-os no triângulo eqüilátero para 30º e 60º e no triângulo isósceles para 45º. A trigonometria na circunferência é abordada sistematicamente, começando pela definição de medida de um arco e, depois, por unidades de medida de um arco (em graus e radianos) e conversões, passando ao comprimento de arco. Em seguida, os autores definem arco côngruo como arcos que possuem a mesma extremidade, concluindo com as fórmulas em graus ($\propto +k \cdot 360°$) e radianos ($\propto +k.2\pi$), onde $\propto$ é a medida do arco côngruo da 1ª volta positiva e $k \in Z$.

A construção da tabela de valores para seno e cosseno é demonstrada, mas não há maiores detalhes sobre esta construção.

As atividades propostas são estritamente técnicas, contemplando aplicações de fórmulas para resolução de exercícios clássicos da trigonometria.

1.5.3 Análise da obra "Matemática: Ciência e Aplicações"

Nesta obra, Iezzi et al (2004) introduzem o assunto sem destacar a histórica da trigonometria. É o único dos três livros que não introduz o conteúdo de trigonometria pelas razões trigonométricas no triângulo retângulo, considerando que a análise é referente ao volume 2 de cada coleção: vai direto para as funções circulares, faz a definição de arcos e ângulos, estes em suas variações em graus e radianos. Demonstra a conversão entre essas medidas, e, em seguida, faz a introdução do ciclo trigonométrico, dando importância para a demonstração de ângulos congruentes, questionando a simetria em relação aos eixos horizontal e vertical e a simetria em relação ao centro do ciclo.

As funções circulares seno e cosseno são definidas logo inicialmente como tendo o domínio e o contradomínio iguais a R, isto é, pertencentes ao conjunto dos números reais. Em seguida, a obra mostra a tabela do seno e cosseno somente no primeiro quadrante e dos arcos cujas extremidades se encontram nos eixos, pois os autores consideram que os valores do seno e cosseno dos 2º, 3º e 4º quadrantes são determinados por meio da simetria em relação ao centro do ciclo e aos eixos da ordenada e abscissa.

Os exercícios são dados em função de aplicação de fórmulas e não há nenhuma contextualização.

1.5.4 Observações sobre a análise dos livros didáticos

Os livros analisados são bem parecidos em questões estratégicas, não proporcionam atividades que levam os alunos a serem autônomos em relação ao conhecimento proposto, por meio de tarefas onde os mesmos possam construir o conceito de seno e cosseno de um arco. Os autores se prendem a um sistema que privilegia a aprendizagem por transmissão, ou seja, decorativa, sem uma preocupação de que a construção do conhecimento se dê e agregue significado para o estudante. Ao afirmar-se aqui que a abordagem dos livros analisados pouco contribui para a aprendizagem significativa dos estudantes, toma-se por base as afirmações de Brousseau (1987) e de Oliveira (2009a), que afirmam ser essencial que o processo de aprendizagem de Matemática dos estudantes se dê através de problematizações que permitam reflexão e autonomia. Em Oliveira (2009), as problematizações surgem com base na atuação docente e no material didático disponível (estratégias didáticas com uso de tecnologias). Para Brousseau (1987), estas abordagens implicam na elaboração de situações adidáticas[2], que os livros analisados não favorecem.

[2] De acordo com Oliveira (2009a), por situação adidática, deve-se entender "um episódio no qual o professor pensa, planeja e constrói uma ambientação propícia à construção do conhecimento por parte do aluno, sem que este saiba desta intencionalidade. Este é um processo no qual o aluno aprende em função de suas próprias demandas, e não porque assim o exige o sistema formal de ensino". Mais especificamente, no que diz respeito a uma proposta de aprendizagem, "a questão matemática envolvida deve ser tal que a figura do aluno assuma maior centralidade no processo, à medida que, autonomamente, materialize suas reflexões em declarações e ações voltadas à própria aprendizagem".

CAPÍTULO II

TICS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

2.1 Revisão Bibliográfica

Fundamentando esta pesquisa, buscou-se analisar outras investigações correlatas, tomando como critério de escolha as pesquisas que se utilizaram dos mesmos instrumentos deste trabalho, ou seja, engenharia didática, a aprendizagem da trigonometria e o uso das tecnologias com interfaces desse processo. São quatro dissertações da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), uma dissertação e uma tese da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e uma dissertação da Universidade Estadual Paulista (UNESP) de Bauru.

Costa (1997), em sua pesquisa de mestrado em Educação Matemática, realizada na PUC-SP, teve como objetivo investigar a influência de dois contextos diferentes na aprendizagem da trigonometria: o computador e o mundo experimental. Fundamentando teoricamente sua pesquisa na Psicologia Cognitiva e na Didática da Matemática, a autora buscou idéias de Piaget, Vigotsky, Vergnaud, Nunes, Brousseau, Douady, Duval e Balacheff. Houve uma sequência didática para dois grupos de alunos, sendo que, em relação a um deles, foi iniciada a abordagem do assunto por atividades no computador para, depois, prosseguir por manipulações no mundo experimental. Em relação ao outro grupo, a ordem da abordagem foi invertida. A questão de pesquisa consistia em identificar qual a ordem de introdução, por contextos, que se apresenta mais eficaz para aprendizagem. Foram aplicados três testes escritos: um antes de iniciar a sequência didática, um ao término das atividades de um dos contextos e um ao final do estudo. A análise dos dados foi feita segundo os seguintes pontos de vista: desempenho dos grupos e dos sujeitos nos testes, taxa de variação de acertos por grupo, análise dos testes por objetivo, desempenho dos grupos nos itens (subdivisões das questões), sua taxa de variação e análise dos erros e procedimentos. A pesquisadora concluiu que, apesar da ordem de introdução do assunto a partir das abordagens ter interferido na aprendizagem (para melhor no caso da abordagem com computador em segundo lugar), os dois contextos eram necessários e complementares.

Martins (2003), em seu trabalho, elaborou uma sequência didática composta de atividades, com o intuito de investigar alunos do 2º ano do ensino médio, que já estudaram a trigonometria no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico. A autora optou pelo uso do software Cabri-Géomètre II, por se tratar, em sua visão, de um programa interativo e dinâmico que possibilita um envolvimento maior do aluno com a construção de seu saber, considerando o computador como uma ferramenta de ensino-aprendizagem.

A pesquisadora faz sua revisão bibliográfica e observa que alguns trabalhos também apontam algumas dificuldades encontradas pelos alunos no estudo da trigonometria. Em sua pesquisa, faz um questionamento relacionado à apresentação de forma coordenada dos conceitos de seno e de cosseno partindo do triângulo retângulo, passando pelo ciclo trigonométrico e finalizando com o gráfico da função correspondente – semelhante organização, pergunta, poderia propiciar ao aluno condições para atribuir significado aos conceitos trigonométricos? Ainda questiona sobre a utilização do *software* Cabri-Géomètre II e sua eficiência no auxilio ao aluno para que o mesmo possa atribuir significado ao seno e ao cosseno. Com o *software* Cabri-Géomètre II, utilizou esse conhecimento prévio na construção de gráficos das funções seno e cosseno. Nessa construção, apoiou-se teoricamente em elementos da dialética ferramenta-objeto e na noção de interação entre domínios, de Régine Douady.

A sequência didática escolhida pela pesquisadora, por sua vez, baseia-se nos pressupostos teóricos da engenharia didática. A escolha da escola e dos alunos, sujeitos da pesquisa, de seu pelo fato de a escola ter o curso de ensino médio e apresentar condições de disponibilizar computadores e o *software* Cabri-Géomètre II; além disso, os alunos deveriam já apresentar algum conhecimento em trigonometria. Os alunos trabalharam em duplas, que foram organizadas pela professora da classe, sem privilegiar seus conhecimentos matemáticos, apenas as afinidades interativas. O trabalho consistia em três atividades: o estudo do seno e cosseno no ciclo trigonométrico, a existência de uma correspondência entre os pontos do ciclo e a reta real e, por fim, a construção dos gráficos das funções seno e cosseno. Antes dessas atividades, a pesquisadora acrescentou três outras, estabelecendo radiano como unidade para medir arcos e institucionalizar o ciclo trigonométrico, com o intuito de fazer uma revisão dos conceitos e sanar possíveis dúvidas existentes.

A sequência didática foi composta de sete atividades, utilizando o software Cabri-Géomètre II como recurso de ensino-aprendizagem, sendo comentada sua correspondência com as fases da dialética ferramenta-objeto e interação entre domínios. As atividades foram aplicadas em oito sessões no decorrer dos meses de maio a julho de 2002, em uma escola estadual, localizada no bairro Cambuci, região central de São Paulo. As sessões tiveram aproximadamente 50 minutos, foram gravadas e filmadas. Nas cinco primeiras sessões participaram 16 alunos e, nas demais, 14 alunos. O envolvimento dos alunos deu-se pelo fato d eles estarem participando de atividades extraclasses, por vontade própria, além de terem a oportunidade de utilizar os computadores da escola. Segundo a autora, mostraram-se sempre disponíveis ao aprendizado, realizando com entusiasmo as atividades. Os alunos estavam cursando a 2ª série do Ensino Médio e não conheciam o *software* Cabri-Géomètre II. Em alguns momentos, houve discussões com todos os alunos, o que representou uma oportunidade de explicitar e validar ou não suas produções.

A autora concluiu que o *software* Cabri-Géomètre II se mostrou bastante eficaz, auxiliando em grande parte nas observações e conclusões dos alunos. Isso se deveu, segundo ela, à mobilidade das figuras, característica do *software,* característica esta que facilitou aos alunos a associação dos conceitos já estudados no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico com as funções seno e cosseno.

Borges (2009) fundamentou sua pesquisa na Teoria das Situações Didáticas e em alguns pressupostos da engenharia didática. O objetivo era verificar se as atividades manipulativas e o uso do computador contribuem para a aprendizagem da transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico.

O autor faz o seguinte questionamento em sua pesquisa: “atividades com material manipulativo e com o computador podem favorecer a aprendizagem de alunos na transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico?”. Para buscar respostas, levanta três hipóteses. De acordo com a primeira, cogita que atividades manipulativas bem orientadas podem auxiliar na aprendizagem da transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico; a segunda hipótese suscita a possibilidade de que a interação entre o aluno e um *software* de geometria dinâmica faz com que ele aprenda as razões trigonométricas no triângulo retângulo e o círculo trigonométrico e; a terceira hipótese aponta que a construção do círculo trigonométrico feita pelos alunos possa vir a dar significado aos valores numéricos do seno, cosseno e tangente para ângulos maiores que 90º.

O autor elaborou uma sequência de ensino com 12 atividades, sendo 10 dessas com o objetivo de levar o aluno a compreender a transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico. Para isso, foi utilizado o *software* de geometria dinâmica Geogebra. Ainda, o autor observa sobre a importância do *software* Geogebra, o qual, graças à movimentação e a visualização de que dispõe, tanto na figura como na janela algébrica, facilitou aos alunos a compreensão das razões trigonométricas.

Essa pesquisa foi fundamentada na Teoria das Situações Didática de Guy Brousseau para a elaboração, aplicação e análise da sequência didática. O procedimento metodológico para a aplicação e elaboração da sequência didática foi a engenharia didática. A sequência de ensino era composta por arquivos prontos e os alunos tinham que movimentar as construções e observar seus comportamentos.

A pesquisa foi realizada numa escola Estadual da periferia do município de Francisco Morato. Os sujeitos da pesquisa eram alunos da 2ª série do Ensino Médio do período noturno, que estão na faixa de 14 a 16 anos. A pesquisa foi realizada na 1ª semana do mês de junho de 2009, com oito alunos que trabalharam em duplas na execução das atividades, fora de seu horário de aula.

A sequência foi composta de 12 atividades, sendo aplicado antes um piloto, onde a dupla que participou executou as atividades em um *laptop*, manipulando os arquivos do *software* de geometria dinâmica Geogebra. Depois dos ajustes, foi aplicada a sequência de ensino para oito sujeitos que não eram alunos do pesquisador. Foram necessários quatro encontros, cada um deles composto por duas aulas de 50 minutos. Segundo o autor, o *software* Geogebra foi muito importante, pois graças à movimentação e a visualização (da variação das medidas dos segmentos, dos ângulos, das coordenadas dos pontos), tanto na figura como na janela algébrica, facilitou aos alunos a compreensão das razões trigonométricas. O autor ainda aponta que os alunos tiveram dificuldades na realização das atividades, como a falta de conhecimento ou até mesmo o esquecimento de alguns conceitos, como semelhança de triângulos, coordenadas cartesianas e retas perpendiculares. A utilização de algumas ferramentas de construção geométrica (compasso, régua e transferidor) foi um problema também, pois não sabiam como manipular as mesmas.

Respondendo sobre a questão central da pesquisa, Borges (2009) faz indicações de que as atividades com o material manipulativo e com o *software* concorreram positivamente para a aprendizagem dos sujeitos. Segundo ele, foi perceptível que os alunos demonstraram interesse e mostraram-se concentrados na resolução das tarefas. A ordem das atividades favoreceu a aprendizagem das razões trigonométricas, pois primeiro, os alunos precisaram investigar as razões trigonométricas em um triângulo retângulo, depois no primeiro quadrante do círculo trigonométrico e, posteriormente, nos demais. Além disso, tiveram uma atividade para aprenderem e visualizarem a tangente no círculo trigonométrico, outra para investigarem os sinais das razões trigonométricas, uma atividade para aprenderem a converter unidades de arcos (radianos) em unidades de ângulo (graus) e vice-versa e por fim uma atividade em que teriam que construir um círculo trigonométrico utilizando régua, transferidor e compasso. A diferenciação da figura estática e a figura com o dinamismo no *software* Geogebra favoreceu a aprendizagem dos alunos na hora em que foi colocado um triângulo no interior de um círculo e também quando foi mostrada a representação da tangente no círculo trigonométrico: os alunos perceberam que o cosseno e o seno deste triângulo eram respectivamente, as coordenadas do ponto que era um dos vértices desse triângulo.

Em outra pesquisa, Silva (2005) relata sua investigação, realizada na PUC-SP, intitulada *“Trigonometria no triângulo retângulo: construindo uma aprendizagem significativa”,* a qual objetivou investigar o ensino de trigonometria no triângulo retângulo com alunos do 1º ano do Ensino Médio, especificamente no que se refere às razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Observou que em todas as pesquisas analisadas, correlatas a sua, os autores destacaram a falta de sentido que as abordagens tradicionais traziam para o processo de ensino-aprendizagem na trigonometria. Através de construções geométricas e pelo tratamento figural, o autor propôs situações problemas para construir uma aprendizagem significativa, por achar que a semelhança e a congruência de triângulos evidenciam a importância das construções geométricas na trigonometria, tornando explícito o aspecto algébrico e geométrico deste domínio da Matemática. A metodologia de análise utilizada na sequência didática, aplicada em sala de aula, foi a engenharia didática. O objetivo foi o de produzir uma aprendizagem que resgatasse conhecimentos anteriores ao tema, como semelhança, congruência e as construções geométricas (reflexão, rotação e translação), para fazer que as relações trigonométricas no triângulo retângulo sejam abstraídas a partir da observação dessas manipulações figurais. O autor conclui que houve evolução conceitual dos alunos no que diz respeitos às relações trigonométricas. O autor critica os livros didáticos, após análise dos mesmos, concluindo que a abordagem da trigonometria no triângulo retângulo que os livros fazem não favorece a produção de sentido para o aluno.

Diogo (2007), em dissertação realizada na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, teve como objetivo demonstrar que a Matemática pode ser abordada de maneira diferente, sem privar o aluno do conhecimento ao qual ele tem direito. Na sua pesquisa, o autor propôs o uso de problemas geradores antes da introdução de um novo conteúdo. Esta abordagem visaria possibilitar uma aprendizagem por descoberta. O autor concluiu que o resultado foi positivo, pois permitiu que aspectos importantes relacionados aos conteúdos fossem descobertos pelos alunos antes de serem significativamente incorporados à sua estrutura cognitiva. O público alvo da sua pesquisa foram alunos da 2ª e 3ª séries do Ensino Médio de uma escola privada. A metodologia de pesquisa utilizada foi o estudo de caso, e o referencial teórico foi baseado na resolução de problemas, apresentando um quadro que aponta as diferenças entre exercícios e problemas, e nos conceitos de situações didáticas e adidáticas de Brousseau, bem como na aprendizagem significativa de Ausubel. Dentre as atividades propostas, diversos temas matemáticos foram contemplados, como Trigonometria, Matemática Financeira, progressões, probabilidade e Geometria Analítica. O autor atribui um papel importante para a introdução de algum assunto novo via problema, afirmando que o aluno terá uma atitude desacomodada, de modo a buscar seus conhecimentos prévios, relacionando os mesmos de algum modo com a situação proposta. Ainda, conclui que o procedimento é eficiente na abordagem de um conteúdo novo em Matemática.

Togni (2007), em sua tese, realizada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, utilizou basicamente a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel e a construção da aprendizagem com conhecimentos prévios através do pensamento de Porlán, também se referindo ao uso de tecnologias por intermédio das pesquisas de Jonassen (1996). O objetivo desta tese foi a de verificar como ocorrem as aprendizagens e a compreensão de funções em Matemática com a utilização da metodologia de resolução de problemas e da utilização de objetos de aprendizagem pelos alunos do Ensino Médio Noturno de uma escola pública de Lajeado/RS, com o uso de tecnologias, *softwares* livres e apoio da Internet. O estudo centrou-se no desenvolvimento das atividades pedagógicas de três turmas do Ensino Médio Noturno, em espaços físicos distintos, quais sejam a sala de aula e o laboratório de informática, com utilização de objetos de aprendizagem e metodologia de resoluções de problemas.

A autora acredita que a metodologia de trabalho com funções em Matemática através de resolução de problemas e com o uso de objetos de aprendizagem proposta nesta tese possibilita a conquista, pelos alunos, de aprendizagem significativa, uma vez que propicia a eles a realização de simulações, experimentos, formas diversificadas de resolver problemas e promove a relação da escola com seu cotidiano, o que difere muito da prática pedagógica em sala de aula regularmente trabalhada, quando o aluno apenas resolve exercícios e problemas da forma como o professor os apresenta. As contribuições deste estudo mostram que a metodologia alternativa no laboratório de informática proporcionou maior integração entre os alunos, permitiu aos alunos serem os condutores do seu conhecimento, privilegiando a colaboração e cooperação entre os mesmos para dar sentido à aprendizagem. Mostrou que a Matemática não é algo abstrato e pode trazer a vida cotidiana para a aula e ajudou os professores a perceberem que a utilização de objetos de aprendizagem combinada com o uso da internet e com a metodologia de resolução de problemas potencializa a aprendizagem de funções em Matemática. Segundo a autora, o relacionamento entre professor e aluno teve perceptível avanço na turma que foi submetida a esta experiência, enquanto que na turma que permaneceu na aula tradicional houve atritos entre a professora e alunos, pois a insatisfação por parte dos discentes era demonstrada através das conversas em voz alta. A autora objetivou com esta tese chamar a atenção para a reformulação curricular, para que os alunos tenham bons olhos para a Matemática, na manutenção e ampliação da infra-estrutura das escolas e também na formação continuada dos professores.

Sormani Junior (2006) em sua dissertação desenvolvida na UNESP de Bauru fez uma abordagem qualitativa e um delineamento exploratório com quatro sujeitos, alunos da segunda série do ensino médio de uma escola pública do interior do Estado de São Paulo. Foi proposta a resolução de problemas de Trigonometria, usando o *software* Cabri Géomètre II. A pesquisa consistia em obter informações sobre como o uso de recursos tecnológicos poderia influenciar este processo e fornecer subsídios para a elaboração de estratégias educacionais que contemplassem o uso de tecnologia. Teoricamente, fundamentou sua pesquisa na teoria da formação de conceitos de Klausmeir e Goodwin, na teoria de Sternberg sobre a resolução de problemas e na teoria de Ausubel sobre a aprendizagem significativa. O autor verifica que o uso do Cabri Géomètre II, dentro de estratégias educacionais elaboradas pelo professor, pode conduzir à aprendizagem significativa, devido aos recursos de geometria dinâmica e dos recursos de registro.

2.2 TICs e Educação Matemática: Estratégias Pedagógicas

As TICs têm sido cogitadas como elementos didáticos importantes no processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos. Vários autores (Oliveira, 2009a; Borba e Penteado, 1999; Borba, Malheiros e Zulatto, 2008; Frota e Borges, 2004, entre outros) mencionam o uso das TICs integradas à pratica dos professores e ao movimento de construção do conhecimento dos alunos, cogitando a elaboração de novas formas de pensar e fazer matemática, com as tecnologias digitais como extensões pessoais e/ou como elementos integradores de estratégias pedagógicas inovadoras.

Oliveira (2008) discutiu com seus alunos de pós-graduação em Educação Matemática, no segundo semestre de 2008, na Pontifícia Universidade Católica

(PUC/SP) o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação como instrumento para o desenvolvimento de atividades, contemplando o ensino-aprendizagem em Matemática nos níveis fundamental e médio, envolvendo softwares e tecnologias computacionais. Seus alunos, mestrandos em Educação Matemática, eram professores nesses níveis de educação. Segundo o autor, as TICs por si só são insuficientes como elementos que proporcionam ambiência à construção do conhecimento. Os processos de interação e comunicação entre os sujeitos do ensino/aprendizagem são mais importantes que as tecnologias em questão, bem como as estratégias pedagógicas dos professores. O autor ressalta que a expressão *software didático* é relativa apenas a uma intenção possível, oriunda do professor, que só se materializa efetivamente no processo de construção do conhecimento matemático quando as interfaces tecnológicas são utilizadas no âmbito de um planejamento que considere outras fontes e abordagens, de forma ampla.

De acordo com os PCNEM (BRASIL,1999), é preciso ainda uma profunda reflexão sobre a relação entre Matemática e tecnologia. Embora seja comum, quando se refere às tecnologias ligadas à Matemática, tomar-se por base a informática e o uso de calculadoras, estes instrumentos, sem desconsiderar sua importância, não constituem o centro da questão. O cerne das propostas de integração das tecnologias devem ser as estratégias que permeiam o trabalho docente em sala de aula. Nem mesmo os *softwares,* elementos considerados essenciais para o funcionamento de quaisquer tecnologias digitais, são os elementos mais relevantes. Isto porque os programas, em si, não são elementos didáticos:

> *o termo software didático é meramente relativo, no máximo, a uma intenção, mas que sua efetividade didática depende de estratégia, planejamento, crítica, debate e significação. Não há software didático, por si, assim como não há tecnologias que educam (OLIVEIRA, 2009a, p. 6).*

De fato, a melhor tecnologia informática pode ser subutilizada ou vir até mesmo em prejuízo do bom processo de aprender e ensinar. É preciso criar ambiências para que, no contexto de um trabalho que tenha por alvo construir conhecimentos e promover a autonomia dos estudantes, as tecnologias sejam mediadoras, auxiliando o professor em seu papel de orientação e promoção de interações. Para Oliveira (2009a, p. 4):

> *os artefatos tecnológicos presentes nas situações didáticas podem ter um caráter mediador, permanecendo a serviço de uma estratégia didática que têm o aprendiz como foco, que busca entender e planejar de acordo com as mais diversas propostas que lhe permitam ampliar a autonomia diante do desafio de aprender.*

Por outro lado, no Brasil, por causa da sua dimensão, é impossível pensarmos num programa nacional de informática que seja adequado a todas as escolas. O sucesso das ações de larga escala depende muito da articulação entre as diversas ações isoladas. Através dessa articulação, se poderá ter o uso de informática na educação de forma adequada em relação a cada região brasileira, o que permitiria melhorar o uso da tecnologia e informática nas escolas (Borba e Penteado, 2007, p. 27). De outra maneira, os mesmos autores (*ibidem*) enfatizam como eram os discursos sobre o perigo que a utilização da informática poderia trazer para a aprendizagem dos alunos. Estes discursos alegavam que aluno só iria apertar teclas e obedecer às orientações do computador, contribuindo assim para tornar-se um mero repetidor de tarefas. Então, o raciocínio matemático passaria a ser realizado pelo computador, o que faria com que o aluno não raciocinasse, e, por conseqüência, não desenvolvesse sua inteligência. Este discurso não pode ser levado a sério no âmbito de processos significativos de ensino-aprendizagem em Matemática. Tecnologias só causam dependência se os artefatos e demais dimensões maquínicas não cumprem o papel de interface entre o conhecimento (Matemático, no caso) e o binômio aluno-aprendiz + professor-orientador (Oliveira, 2007). Frota e Borges (2004) relacionam a dependência de artefatos como um processo de mero consumo de tecnologias e não de seu uso didático, que depende de planejamento, crítica e reflexão do professor.

O uso de informática não é um agente garantidor do sucesso de uma aula no ambiente informatizado. Deve-se pensar cuidadosamente na estratégia utilizada e o objetivo a ser alcançado. Gravina e Santarosa (1998) destacam os recursos visuais e atrativos, não como garantidores da mudança de paradigma na educação, mas como reforços nos modelos de aulas, que privilegiavam a transmissão de conhecimento. Ainda as autoras enfatizam que existem softwares que instigam os alunos a analisar simulações, fazer experimentos e conjecturar. São programas que propiciam ao aluno autonomia, de modo a poderem expressar suas idéias e refiná-las. Entende-se, todavia, no âmbito desta pesquisa, que tais características não são dos softwares em si, mas do uso feito deles por professores e alunos.

Os computadores não substituem os seres humanos ou simplesmente os complementam, mas auxiliam na reorganização do pensamento, com outras formas de proceder à formulação e à resolução de problemas. A informática não irá extinguir a escrita e a oralidade, e nem as demonstrações matemáticas, haverá apenas transformações ou reorganizações (Borba e Penteado, 2003). De fato, de acordo com os mesmos autores, a própria dimensão das demonstrações matemáticas foi alterada a partir da vulgarização do uso de tecnologias muito mais simples, como o lápis e o papel. Isto porque a inserção de novos elementos tecnológicos em um processo de ensino tem apenas o efeito de redefinir as práticas, e não de extingui-las (Oliveira, 2007). Sobre este aspecto, Lévy (1993) considerava o pólo informático-midiático como evolução-extensão dos pólos anteriores, chamados por ele de pólo da oralidade primária e pólo da escrita. O acréscimo de novas condições de comunicação, uso e memória, portanto, redefiniram os usos anteriores e as tecnologias mais tradicionais, por assim dizer.

As estratégias didáticas com uso de softwares ditos educacionais podem colaborar muito com a aprendizagem, como por exemplo, na geometria quando tratada no Cabri Geometry ou no Geogebra. Pode ocorrer, em função do planejamento e do uso, a facilitação do processo de formação dos conceitos e da dedução de propriedades, pelo fato de grande parte das dificuldades para os alunos se encontrarem no aspecto estático das construções. Os softwares mencionados dão um tratamento de “desenhos em movimentos” (Gravina, 1996). Neste caso, o que a estratégia pode agregar ao processo é justamente o caráter dinâmico da representação do conceito matemático: de diversas maneiras, o aluno pode ser convidado a alterar medidas e formas, observando a manutenção e/ou a mudança de valores e coeficientes, de acordo com a orientação e a proposta de trabalho.

2.3 Técnica e Tecnologia: Relações etimológicas e contextuais

No jargão comum as palavras “técnica” e “tecnologia” estão sempre presentes, devido aos avanços da humanidade e a dependência direta delas para a sobrevivência das pessoas. Parece claro que a humanidade, de forma geral, sempre evoluiu e avançou condicionada por suas conquistas técnicas e tecnológicas (Lévy, 1993).

Segundo Lion (1997 apud Oliveira, 2007, p. 71), etimologicamente falando, técnica e tecnologia têm uma mesma raiz, o verbo grego *tictein*, cujo significando é criar, produzir, conceber, dar à luz.

Para Kenski (2007) tecnologia é muito mais que um aparelho ou uma máquina. Tecnologia é tudo aquilo que a engenhosidade do cérebro humano conseguiu criar, como óculos, medicamentos, ou seja, tudo aquilo que ajuda o homem a viver melhor. A autora ainda traduz a tecnologia como os conhecimentos científicos que são utilizados para a construção de um equipamento que traz avanços no fazer de uma coletividade. À maneira de lidar com essas tecnologias, úteis de certa forma às pessoas, é o que ela chama de técnica, que são transmitidas de geração em geração.

Citando o dicionário de filosofia de Nicola Abbagnano (1982, p. 906), Kenski (2007) define a tecnologia como o “estudo de processos técnicos de um determinado ramo de produção industrial ou de mais ramos”. Já a técnica, no mesmo dicionário, “compreende todo conjunto de regas aptas de dirigir eficazmente uma atividade qualquer”. Para Oliveira (2007, p. 73):

> *...os termos não são sinônimos, como ressalta Martin (apud Oliveira, 1999, p.2), ao mencionar que, apesar da proximidade dos termos, a técnica refere-se “à noção do fazer, isto é, habilidade ou arte inata ao homem”; já a tecnologia “une essa habilidade natural aos conhecimentos”. A função primeira da tecnologia foi a de explicar, dar sentido teórico à técnica. (...) O conceito de tecnologia abarca, então, as idéias relativas à técnica, em um contexto de aprofundamento teórico-prático que afeta o modo de vida das pessoas e a própria estrutura da sociedade em uma época.*

Outros autores, como Borba e Penteado (2003, p. 47) enfatizam a separação entre os humanos e técnicas, de acordo com dicionários de filosofia, como

Lalande (1999). Os seres humanos são tidos como quentes, criativos e bons, enquanto que as técnicas como repetitivas, frias e capazes de dominar o homem. Essa dicotomia entre humanos e técnicas, na década de 70, foi motivo de um forte movimento contra os computadores e as calculadoras, conforme já mencionado, por parte de pessoas que julgavam que a utilização desses objetos tecnológicos poderia “emburrecer” as crianças.

As tecnologias não são apenas produtos e equipamentos, existem as chamadas “tecnologias da inteligência”, de acordo com Kenski (2007 apud Lévy, 1993). A linguagem oral, a escrita e a linguagem digital são consideradas tecnologias paradigmáticas, pois foram internalizadas na memória das pessoas com o intuito de que as mesmas avançassem e aprendessem mais (Kenski, 2007).

2.4 Uso histórico das tecnologias

D’Ambrosio (2003), em sua produção sobre a influência da Tecnologia no fazer matemático ao longo da História, descreve:

> *A matemática e a tecnologia, entendida como a convergência do saber [ciência] e do fazer [técnica], são intrínsecas à busca solidária de sobreviver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode, portanto, ser dissociada da tecnologia disponível. Os primeiros passos para a elaboração desse conhecimento remontam aos australopitecos e às primeiras manifestações de conhecimento socialmente organizado dos hominídeos*

Segundo D’Ambrosio (2003), a reflexão em Educação Matemática está diretamente relacionada com o progresso das tecnologias de informação e de comunicação ao longo da evolução da espécie humana, desde a pedra lascada, o uso de instrumentos rudimentares e a capacidade de fazer fogo, até o princípio da modernidade tecnológica. Para o autor, se considerada como base de referência inicial o livro que marca o início da ciência moderna, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* de Isaac Newton, por exemplo, houve uma grande evolução nas tecnologias de informação e comunicação desde então. São destacados os registros de imagens, através de fotografia e o cinema, a telefonia, o rádio, a televisão, o computador, telefone celular e a internet, onde esses novos meios denominados mídia, tiveram enorme repercussão na Educação.

Kenski (2007) associa tecnologia a poder, pois desde a idade da pedra, os homens, diante da sua fragilidade física, garantiam a sua sobrevivência por serem astutos, dominando o uso de elementos da natureza, como a água, o fogo, um pedaço de pau ou o osso de um animal, que serviam de arma para matar, dominar ou afugentar animais e outros homens que não tinham os mesmos conhecimentos e habilidades.

Diante das ambições de nossos ancestrais, começou-se a criar novas tecnologias para o ataque e a dominação, objetivando ampliar domínios e acumular riquezas. Ainda que hoje pareçam rudimentares, as tecnologias de cada época acompanharam a evolução humana.

Já no século XX, durante os 50 anos de duração da Guerra Fria, houve uma impulsão da ciência e da tecnologia impressionante na humanidade, sendo descobertos equipamentos, serviços e processos que resultaram em avanços científicos, proporcionando inovações como o isopor, o forno de microondas, o relógio digital e o computador, entre inúmeros outros.

Ainda segundo Kenski (2007), com a necessidade de expressar sentimentos e opiniões aos seus semelhantes, o homem criou um tipo especial de tecnologia, que não é algo material, como uma máquina, mas sim uma linguagem, considerada para alguns autores, como Lévy (1993), como "tecnologias de inteligência".

A linguagem oral é a mais antiga forma de expressão. Grupos de pessoas, por meio de signos comuns, deram origem aos idiomas, os quais são, ainda, a principal forma de comunicação. A escrita surgiu após a oralidade, quando os homens deixaram de ser nômades, e concorreu para objetivar a memória, que deixou de permanecer apenas nos contos e nas tradições ancestrais. As tecnologias digitais da informação concorreram para que o processo de comunicação fosse ampliado e o poder da memória também.

A linguagem digital engloba as duas principais tecnologias, a escrita e a oralidade, além de agregar múltiplas possibilidades de mediação, e é baseada em códigos binários. Esta linguagem se expressa por meio de hipertextos e hipermídias.

Hipertextos representam uma seqüência em camadas de documentos interligados, páginas sem numeração que trazem informações sobre vários assuntos, constituindo-se em uma evolução do texto linear na forma como o conhecemos. Hipermídia é uma extensão do hipertexto, ou seja, é o hipertexto articulado com outras mídias, como fotos, vídeos, sons etc.

Através das redes computacionais, as pessoas ampliam estas possibilidades de comunicação, articulação e memória. Bancos de dados remotos passam a ser acessíveis, principalmente através da Internet, e há uma imensa disponibilidade de dados, dos quais as pessoas podem se aproveitar em atividades diversas, profissionais e educacionais, por exemplo. Entretanto, sem crítica e capacidade de discernimento não é possível julgar a qualidade e a pertinência, ou mesmo a correção de tais dados. Daí a necessidade, em via de mão dupla, de incorporar a tecnologia em estratégias educacionais e de usar recursos da educação para compreender e dominar as possibilidades abertas pelas tecnologias (Oliveira, 2007).

2.5 Tecnologias na Educação

Atualmente existem correntes de pensamento na educação que advogam o uso intensivo de tecnologias digitais. Com isso, há a exigência do entendimento e interpretação das mesmas. Dada a complexidade destas tarefas, as mesmas demandam das pessoas novos elementos constitutivos de formação, reflexão e compreensão do ambiente social em que vivem. Há uma relação estreita entre educação e tecnologia, sendo a educação inspiradora da tecnologia para a criação e a invenção, remetendo a construção do mundo real sem visões maravilhosas de um futuro utópico. O mundo tecnológico não é uniforme, pronto e acabado: são a ação e o método que abrem as portas para ele, não se tratando, portanto, da busca de uma receita, repetições e regularidades, mas sim, de reinventar o repetido e alterar o regularmente estabelecido (Bastos, 1997).

Por muito tempo e até hoje, de certa forma, não se valorizou o uso de tecnologias nas aulas, para tornar a aprendizagem mais eficiente e prazerosa. As escolas estaduais pelas quais o autor deste trabalho passeou não usavam os recursos tecnológicos para ensinar, sempre tiveram a preocupação de educar seus alunos no sentido de transmitir um conjunto organizado e sistematizado de conhecimentos das diversas áreas do currículo, exigindo a memorização das informações passadas e sua avaliação mediante provas mais ou menos subjetivas. Os professores do ensino básico das escolas públicas mencionadas – por certo,uma amostra do contexto geral – têm uma formação que valoriza as aulas expositivas,o que ficou evidenciado, nesta investigação, através do levantamento de pesquisas correlatas[3]. Essa realidade vem mudando, a sociedade e o sistema educativo vêm cobrando muito essa mudança. O ensino superior brasileiro, ainda que com limitações e dificuldades típicas de toda mudança (Oliveira, 2007), tem procurado lançar esse novo olhar para o ensino. Pesquisas vem demonstrando que o uso do computador como interface pedagógica mediadora pode ser uma arma poderosa para a educação no sentido de motivar o processo de aprendizagem (Kenski, 2007; Oliveira 2009a).

Neste aspecto, Borba e Penteado (2003) discutem sobre o uso de TICs para professores da escola básica e a implementação do uso de computadores na escola, em especial na Rede Estadual de Ensino, e a relação desta atividade com o trabalho dos professores. Comentam os autores que a inserção das TIC nas escolas encontra diversos problemas técnicos, os quais atrapalham o andamento das atividades propostas. Ainda existem, nesta lógica, questões atinentes ao relacionamento professor/aluno, que surgem a partir de perguntas imprevisíveis que os estudantes podem elaborar sobre o conteúdo matemático, para as quais o professor pode estar despreparado. Os autores denominam esta situação como *zona de risco*, pois há uma perda de controle do professor, a partir do momento em que o mesmo não é mais a única fonte de saber e ciência. Entretanto, esta situação pode contribuir muito no processo de constituição do professor enquanto pessoa e profissional, já que o docente depara com uma grande necessidade de buscar novos conhecimentos.

Muitos professores, sabendo das dificuldades que eventualmente irão encontrar não se arriscam em aulas mediadas por TICs. Com isso, perdem a oportunidade de enriquecer os ambientes de ensino e aprendizagem no qual atuam.

---

[3] Ver a seção 2.1

Claro que não se pretende atribuir aqui culpa a ninguém. O professor encontra muitas dificuldades em lidar sozinho com as inovações pedagógicas e também com as máquinas. Existe a necessidade de prover formação adequada para lidar com a realidade tecnológica, faltam pessoas envolvidas no processo e com mais fluência para compartilhar sobre o que acontece na prática. Sem o envolvimento de professores, fica impossível pensar na inserção das TICs na escola: a sua formação é peça chave nesse entrosamento, considerando conhecimento e prática (Borba e Penteado, 2003; Oliveira, 2007).

Da mesma forma, Borba e Penteado (2003) descrevem sobre o lugar do computador na educação, com a produção de significados por parte dos alunos, professores e pesquisadores envolvidos na prática pedagógica, intermediada pelas TICs. A utilização de uma mídia depende de sua harmonia com a prática pedagógica, portanto estes autores deixam bem claro que uma determinada mídia não determina a prática pedagógica. A utilização de certa mídia pode ser uma tentativa de superar problemas de prática de ensino tradicionais. Pela intermediação da informática, há possibilidades de um rápido *feedback*, como a geração de inúmeros gráficos, tabelas e expressões algébricas, por exemplo. A construção do conhecimento, desta forma, privilegiará o processo e não o produto-resultado em sala de aula. Nesta lógica, então, para os autores, calculadoras gráficas e computadores munidos de softwares passam a ser atores e o conhecimento passa a ser produzido por um coletivo de seres humanos com mídias – ou seres humanos com tecnologias – e não por seres humanos isoladamente. Portanto, há uma relação do ser humano com mídias ou tecnologias na construção do conhecimento que vai além da mera utilização.

Para Tikhomirov (1981, apud Borba e Penteado, 2003), o computador não é um complemento ou substituto dos seres humanos, mas serve para reorganizar o pensamento, ou seja, formular e resolver problemas. Oliveira (2009a) ressalta que a integração de pessoas com tecnologias, no âmbito da Educação Matemática, mediante o uso de estratégias pedagógicas, é capaz de enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, tornando-o mais significativo.

2.6 Apontamentos advindos da revisão bibliográfica

Da revisão bibliográfica organizada neste capítulo – e dos demais itens que o compuseram – pôde-se fazer uma série de inferências que foram importantes nesta pesquisa:

- As tecnologias podem compor uma abordagem eficiente para introdução dos conceitos de trigonometria. Entretanto, observou-se, nas pesquisas analisadas, que toda intervenção de caráter tecnológico compunha uma estratégia pedagógica planejada pelo professor e compartilhada com os estudantes;
- A aprendizagem significativa, enquanto paradigma educacional, foi amplamente utilizada nas pesquisas realizadas previamente e analisadas nesta investigação;
- Como metodologia de coleta e análise de dados, a engenharia didática foi eleita como ferramenta preferencial pela maioria dos pesquisadores cujos trabalhos serviram de referência a esta pesquisa .

O discurso sobre uso de tecnologias na educação matemática, enfim, é o que privilegia a estratégia pedagógica do professor, com uso amplos de recursos diversos, estáticos e dinâmicos, analógicos e digitais, tradicionais ou novos, com a figura docente como orientadora, na busca de desenvolvimento de aprendizagem autônoma e significativa dos estudantes. Neste cenário, todo e qualquer aparato tecnológico está a serviço das pessoas, como mediador.

Em função, então, destas asserções, prossegue-se nesta pesquisa, em seguida, anunciado os referenciais teóricos mais destacados.

CAPITULO III

REFERENCIAIS TEÓRICOS

3.1 Aprendizagem significativa e educação matemática

Nesta investigação, o conceito de *aprendizagem significativa* tem um papel fundamental. Para Ausubel (1968 apud Moreira e Masini, 1982), este tipo de construção cognitiva ocorre quando uma nova informação associa-se em conceitos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva de quem aprende. O autor define o armazenamento de informações no cérebro humano como altamente organizado, de maneira hierárquica, representando abstrações de experiências do indivíduo. De acordo com esta proposição, elementos mais específicos de conhecimentos são ligados (e assimilados) a conceitos mais gerais, mais inclusivos.

Quando um conteúdo novo a ser aprendido não estabelece nenhuma ligação com um conhecimento relevante já existente na estrutura cognitiva do aluno, ocorre o que Ausubel denomina de *aprendizagem mecânica*.

A *aprendizagem mecânica*, ao contrário da *aprendizagem significativa*, não estabelece nenhuma relação ou faz uma insignificante relação entre os conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva e a nova informação. Logo, a informação é armazenada de forma arbitrária, ou seja, não faz ligação com os conceitos *subsunçores* específicos. Desta forma:

> *Um subsunçor é um conceito, uma idéia, uma proposição já existente na estrutura cognitiva do aprendiz que serve de 'ancoradouro' a uma nova informação, permitindo ao indivíduo atribuir-lhe significado. "A aprendizagem significativa caracteriza-se por uma interação (não uma simples associação), entre aspectos específicos e relevantes da estrutura cognitiva e as novas informações, através da qual estas adquirem significado e são integradas à estrutura cognitiva de maneira não arbitrária e não literal, contribuindo para a diferenciação, elaboração e estabilidade dos subsunçores pré-existentes e, conseqüentemente, da própria estrutura cognitiva." (AUSUBEL apud MOREIRA, 2006, p.13)*

Ausubel define a relação entre a aprendizagem mecânica e a aprendizagem significativa como um continuum. A aprendizagem mecânica ocorre até que alguns elementos de conhecimento, relevantes para novas informações na mesma área, existam na estrutura cognitiva e possam servir de subsunçores, ainda que pouco elaborados. O conteúdo que foi aprendido de forma mecânica futuramente será um subsunçor e auxiliará a aprendizagem significativamente.

A aprendizagem mecânica é necessária quando não há presença de conceitos subsunçores. Desta forma, conceitos subsunçores podem ser vistos como conteúdos ou informações que assumem um papel relevante na ancoragem de novas informações, tornando a aprendizagem significativa.

Segundo Ausubel (1968 apud Moreira e Masini, 1982), a aprendizagem significativa pode ocorrer por *recepção* e por *descoberta*. Na aprendizagem significativa por recepção, o conteúdo a ser aprendido é apresentado na sua forma final, enquanto que na aprendizagem significativa por descoberta o aluno não recebe um conteúdo na forma final, necessitando analisar e descobrir o seu sentido. Tanto a aprendizagem por recepção como por descoberta serão consideradas significativas se a nova informação se estruturar de forma não-arbitrária na estrutura cognitiva. É importante observar que a aprendizagem receptiva não é apenas um processo passivo de abstração, mas sim um processo ativo de interação com os conceitos já adquiridos.

Em crianças que ainda não frequentam a escola, os conceitos são adquiridos pelo processo que Ausubel (1968 apud Moreira e Masini, 1982) denomina de *formação de conceitos*, que é a aquisição espontânea de idéias genéricas por meio da experiência empírico-concreta, sendo um tipo de aprendizagem por descoberta. Após esta fase, a maioria dos novos conceitos é adquirida através da *assimilação*, *diferenciação progressiva* e *reconciliação integrativa.* Na primeira, considera-se que o assunto deve ser programado de forma que os conceitos mais gerais e inclusivos da disciplina sejam apresentados antes para que, progressivamente, haja um detalhamento da sua especificidade, diferenciando, a cada passo, os itens componentes. A segunda é uma exploração de relações entre idéias, que permite indicar similaridades e diferenças significativas. A assimilação de conceitos é a forma pela qual as crianças mais velhas e os adultos adquirem novos conceitos, relacionando esses novos conceitos com idéias relevantes contidas em suas estruturas cognitivas.

Ausubel (*idem*) recomenda o uso de *organizadores prévios*, que são conteúdos introdutórios apresentados antes do assunto a ser aprendido, servindo de ponte entre o que o aluno (aprendiz) já sabe e o que ele deve saber, com o objetivo de que o novo assunto (material) possa ser aprendido de forma significativa. Caso o novo assunto seja totalmente não-familiar, um *organizador "expositório"* é usado para prover subsunçores relevantes aproximados, subsunçores estes que tentam uma relação superordenada com o novo material, fornecendo uma ancoragem ideacional em termos do que já é familiar para o aprendiz. Em situação aonde o material seja relativamente familiar, um *organizador "comparativo"* é usado para integrar novas idéias com conceitos basicamente similares existentes na estrutura cognitiva.

Segundo Ausubel (1968 apud Moreira e Masini, 1982) os organizadores são eficientes quando apresentados antes do assunto a ser aprendido, pois dessa forma suas propriedades integrativas ficam salientadas. Os organizadores são facilitadores para a aprendizagem de informações potencialmente significativas. Uma maneira de observar se o aprendiz aprendeu de forma significativa é propor uma tarefa de aprendizagem, sequencialmente dependente de outra, que não possa ser executada sem um perfeito domínio da precedente.

O processo de assimilação é um processo que ocorre quando um conceito ou proposição *a*, potencialmente significativo, é assimilado sob uma idéia ou conceito mais inclusivo, já existente na estrutura cognitiva, como um exemplo de extensão, elaboração ou qualificação do mesmo.

Ausubel (1968 apud Moreira e Masini, 1982) descreve o processo de subsunção por meio do que ele chama de "princípio da assimilação", ou seja, uma nova informação, potencialmente significativa ***a*** relacionada a um conceito subsunçor existente na estrutura cognitiva ***A***, resulta num produto interacional ***A'a'*** (subsunçor modificado).

Por exemplo, o conceito de "razões trigonométricas no triângulo retângulo" será potencialmente significativo para o aprendiz que já tiver o conceito de triângulos semelhantes em sua estrutura cognitiva. O novo conceito específico "razões trigonométricas no triângulo retângulo" será assimilado pelo conceito mais inclusivo de "triângulos semelhantes", já adquirido. Logo, o conceito de razões trigonométricas no triângulo retângulo adquirirá significado para o aluno, e também o conceito geral de triângulos semelhantes, que ele já tinha será modificado e tornar-se-á mais inclusivo.

As pesquisas em educação buscam referências para explicar de modo conciso e autêntico o processo cognitivo dos aprendizes. Especificamente nesta pesquisa em Educação Matemática, propõe-se que a aprendizagem tenha um significado para a formação daquele que participa de maneira efetiva do processo de aquisição de conhecimentos, pois muitas vezes o conteúdo ou objeto de estudo é aprendido de maneira mecânica e sem significado. Ausubel (1968 apud Moreira e Masini, 1982) afirma:

> *Assim, independentemente da quantidade de potenciais significados que pode ser inerente a uma determinada proposição, se a intenção do prendiz for memorizá-los de forma arbitrária e literal (como uma série de palavras relacionadas de modo arbitrário), quer o processo, quer o resultado da aprendizagem devem ser, necessariamente, memorizados ou sem sentido. Pelo contrário, independentemente da significação que o mecanismo do aprendiz pode ter, nem o processo nem o resultado da aprendizagem podem ser significativos, se a própria tarefa de aprendizagem não for potencialmente significativa – se não for relacional, de forma não arbitrária e não literal, com qualquer estrutura cognitiva hipotética na mesma área de matérias, bem como com a estrutura cognitiva idiossincrática particular do aprendiz.*

3.2 Engenharia Didática como abordagem metodológica

Alguns autores, como Artigue (1988 apud Almouloud, 2007), defendem que a pesquisa experimental é a mais apropriada em Didática da Matemática. O problema é analisado e as hipóteses são levantadas para que o investigador possa trabalhar com variáveis que se referem ao fenômeno observado, de modo a que se busquem validações em relação às arguições preliminares.

Neste trabalho, optou-se pela engenharia didática como metodologia de pesquisa, por se tratar de um esquema experimental com base em realizações didáticas em sala de aula.

Artigue (1988 apud Almouloud, 2007) compara o trabalho do professor ao do engenheiro, no sentido que ambos necessitam de conhecimentos científicos da área para realizarem um projeto.

Com sessões de ensino, o pesquisador observará e analisará o objeto de estudo, fazendo a validação pela confrontação entre a análise a priori e a análise a posteriori. Destarte, a engenharia didática é constituída por diferentes fases metodológicas: a primeira delas são as ***análises prévias***, depois, a ***construção das situações e análise a priori***, e, em seguida, vem as fases de ***experimentação, análise a posteriori*** *e* ***validação.***

3.2.1 Análises preliminares

O pesquisador nesta fase identifica os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo, delineando de modo a fundamentar as questões, as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa. A realização das análises prévias pode ser composta do estudo histórico e epistemológico do objeto a ser tratado, analisando a estrutura matemática do conceito investigado, o ensino usual e seus efeitos, as condições e fatores de que depende a construção didática efetiva das situações de ensino. Ainda pode ser feita a análise da organização didática do objeto matemático: examinar diferentes instituições de ensino, propostas curriculares, crítica de livros didáticos, concepções de alunos e/ou professores a propósito dos saberes em jogo e um levantamento bibliográfico sobre os fatores que interferem no processo de ensino aprendizagem do objeto em questão

Segundo Artigue (1988 apud Almouloud, 2007) as análises prévias são retomadas e aprofundadas durante o trabalho de pesquisa, pois permitem ao pesquisador a identificação das variáveis didáticas potenciais que serão explicitadas e manipuladas nas fases seguintes.

3.2.2 Construção das situações e análise a priori

Objetivando responder à(s) questão(ões) e validar hipóteses, feitas previamente, o pesquisador elabora e analisa uma sequência de situações-problemas, para que o aluno possa desenvolver certas competências e habilidades, como ler interpretar e utilizar diferentes representações matemáticas e construir conhecimento e saberes de maneira construtiva e significativa.

As situações-problemas devem conduzir o aluno a agir, se expressar, refletir e evoluir de maneira autônoma.

O pesquisador, objetivando o sucesso da situação-problema, deve escolher as variáveis didáticas Artigue (1988 apud Almouloud, 2007) distingue dois tipos de variáveis potenciais manipuladas pelo pesquisador: *macrodidática* ou *globais*, relativas à organização global da engenharia; e *microdidática* ou *locais*, relativas à organização local da engenharia, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase.

Por análise a priori das situações-problemas, entende-se por uma análise matemática e uma análise didática do objeto em estudo. Além disso, este é o momento de verificar as variáveis didáticas referentes ao assunto abordado, analisando, assim, a forma pela qual essas escolhas permitem controlar os comportamentos dos alunos, analisando de maneira prévia as possíveis respostas para as atividades de construção nos diversos instrumentos disponíveis – nesta pesquisa, isto ocorre tanto em relação ao instrumento proposto para ser realizado usando instrumentos como lápis, régua e compasso – como para o segundo instrumento, que é trabalhado com a utilização do *software*. A análise a priori deve indicar, destarte, uma previsão das estratégias e raciocínios expressados pelos alunos na resolução das atividades propostas.

3.2.3 Experimentação, análise a posteriori e validação

A experimentação é um momento do funcionamento de todo contexto construído, corrigindo-o quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, implicando na necessidade de um retorno à análise *a priori*, num processo de complementação. Após a experimentação, segue-se a fase da análise *a posteriori,* que se apóia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são, às vezes, complementados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas em diversos momentos do ensino.

A análise *a posteriori* tem função de contribuir para a melhoria dos conhecimentos didáticos, por meio da exploração dos resultados obtidos da experimentação. Feita com auxílio de ferramentas técnicas (material didático, vídeo, computador, etc.) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático, etc.), finaliza-se, por conseguinte, uma confrontação com a análise a priori realizada.

Especificamente nesta pesquisa, verificam-se na análise *a* posteriori como os alunos responderam as atividades do primeiro instrumento com régua, transferidor e lápis e do segundo instrumento, com auxílio de outras tecnologias, apresentando os mesmos problemas para serem resolvidos com o *software* Geogebra. Uma reflexão é feita sobre o aprendizado dos mesmos diante dos erros e ainda se a aprendizagem foi significativa. Para essa reflexão, utilizaram-se, como aportes teóricos, Brosseau (2001) e Perrenoud (2000) na questão do erro e a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (2003).

A fase de validação da seqüência didática é feita em todo o processo de desenvolvimento da proposta, no qual se faz o confronto constante dos dados obtidos na análise a priori e na análise a posteriori, de modo a verificar se as hipóteses feitas no inicio da pesquisa foram confirmadas.

CAPÍTULO IV

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os sujeitos desta pesquisa são estudantes do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Guaratinguetá, interior de São Paulo, na região do Vale do Paraíba. A escolha deste grupo se deu em função de os alunos em questão já possuírem, em tese, a noção de trigonometria no triângulo retângulo e também o conceito de funções no conjunto dos números reais.

As atividades da pesquisa foram realizadas com os alunos da escola estadual em que atua o pesquisador. Os alunos são de uma 2ª série do ensino médio do período noturno. Alunos desta série foram considerados como sujeitos também por terem em seu conteúdo programático, definido pelas Orientações Curriculares Nacionais (Brasil, 2006), a trigonometria no ciclo trigonométrico e o gráfico da função trigonométrica, especificamente os gráficos da função *y=senx* e *y=cosx*.

A 2ª série D foi escolhida porque os alunos são assíduos e comprometidos com a aprendizagem, segundo as informações de seus professores, não significando que são alunos nota “A”, ou seja, aqueles que têm o melhor rendimento. O experimento foi feito no período de aula, com alguns alunos desta classe – doze, ao todo. Foi necessário pedir a autorização aos responsáveis desses estudantes para que pudessem participar desta pesquisa.

A trigonometria na circunferência foi eleita como interesse de pesquisa pelo pesquisador, por se tratar de um assunto que geralmente é concebido pelos alunos de forma mecânica e sem significado, o que, nesta pesquisa, pode ser corroborado pelo tratamento dado ao tema nos livros didáticos.

Dois instrumentos foram utilizados na pesquisa. O primeiro, com quatro atividades, descritas mais adiante, deveria ser trabalhado pelos alunos com tecnologias chamadas de “tradicionais”: lápis, régua, papel e transferidor. Esta atividade foi planejada para ser aplicada em duas aulas, cerca de 1 hora e 40 minutos. A idéia era que as quatro questões conduzissem os alunos para a construção, reflexão e transcrição. O tempo, entretanto, não foi suficiente. Houve a necessidade de uma reformulação na duração da sessão: o restante das atividades foi aplicado num segundo dia, também em duas aulas, com a mesma duração. Entre as dificuldades que surgiram, e que causaram a necessidade de mais sessões, a primeira questão proposta exigia a manipulação do transferidor para obter as projeções dos ângulos nos eixos cartesianos, mas a dificuldade em trabalhar com o instrumento atrasou a aplicação no tempo previsto.

Com base na proposta curricular do ensino do Estado de São Paulo, especificamente no caderno do aluno da 2ª série do ensino médio, 1º bimestre, objetivou-se, na proposição, que a sequência de ensino privilegiasse a construção do conhecimento de forma significativa, ao invés de focar a mecanização de processos decorativos. Com atividades semelhantes às do caderno do aluno, busca-se a análise e a reflexão dos dados obtidos na realização da atividade, fazendo um confronto entre as construções no papel e no computador.

Através dos princípios da engenharia didática, foram feitas as análises a priori de todas as sessões realizadas, destacando as variáveis didáticas e as estratégias previamente pensadas. Posteriormente, procedeu-se à experimentação, ao processo de análise à posteriori e à validação.

A resolução das atividades foi prevista individualmente para aquelas realizadas no papel, por tratar-se de tarefas que exigiam concentração e manipulação através de ferramentas de difícil compartilhamento (régua, transferidor); e em grupo de três pessoas no caso das tarefas computacionais, por existir apenas quatro computadores em condições de uso e pelo fato de o computador permitir visualização e interferência de maneira mais ampla do que os instrumentos vistos como tradicionais (Oliveira, 2007).

4.1 A Proposta Curricular do Estado de São Paulo como referência

Na proposição das atividades atinentes a esta investigação, tomou-se por base, em seu aspecto documental, a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008). Por tratar-se de documento oficial, que subsidia as práticas docentes cotidianas – e, por conseqüência, representar o material como o qual os alunos estão em contato nas aulas de Matemática, no caso – os cadernos docentes e discentes, portadores de enunciados e exemplos, foram adotados como referencial na elaboração das atividades. Isto implica na adoção de eventuais noções paramatemáticas (Chevallard, 1991; Oliveira, 2009b) utilizadas como elementos auxiliares para a construção do conhecimento quando da elaboração de tarefas, tanto na Proposta quanto nesta pesquisa. Sobre tais noções, argumenta Oliveira (2009b, p.215):

> *As noções paramatemáticas são aquelas que representam um caráter utilitário em relação às noções matemáticas, ou seja, permeiam a atividade matemática nos contextos de ensino-aprendizagem sem serem, por si mesmas, objetos de estudo. Usualmente, não são saberes avaliados formalmente, em função de o caráter auxiliar que detêm em relação à construção do conhecimento matemático, tendo, em relação a este, um status de ferramenta ou de interface.*

Isto porque, de acordo com Chevallard (1991), o saber acadêmico original não é adequado, em sua forma original, para as relações de ensino-aprendizagem na escola, necessitando de transformações adaptativas que o tornem adequado ao trabalho didático – esta forma de apresentação do saber original é chamada, na teoria da Transposição Didática, de *saber a ensinar* (Chevallard, 1991). Quanto às características deste saber, do ponto de vista que interessa a esta investigação, aponta Oliveira (2009, p. 211), quanto a este estatuto do saber, que o mesmo é

> *ligado a uma abordagem didática, e que tem por finalidade organizar pedagogicamente e apresentar aos estudantes determinado saber através de livros didáticos e materiais semelhantes, nos quais a apresentação é feita de maneira diversa daquela encontrada nos escritos originais, veículos do saber científico. O saber a ensinar é aquele que surge, também, nas matrizes curriculares e nos conteúdos programáticos das disciplinas no âmbito escolar. Este tipo de saber é menos consensual, por assim dizer, que o saber*

> *sábio, uma vez que responde aos interesses de gestores educacionais, autores de livros e materiais, diretrizes governamentais, entre outras instâncias.*

O que se aponta aqui é que, apesar da inexistência de consenso, é o saber a ensinar, com suas noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas que se encontra exposto nos cadernos advindos da Proposta Curricular usada nesta pesquisa (São Paulo, 2008), com suas transformações adaptativas e recursos ao entendimento, os quais, evidentemente, permanecem em concordância com o saber matemático original (*saber sábio*), tomado sempre como referência (Chevallard, 1991; Oliveira, 2009b).

4.2 Análise a priori do primeiro instrumento

As atividades propostas nesta sessão tiveram por objetivo detectar conceitos subsunçores, ou seja, conhecimentos necessários para que novos conteúdos sejam ancorados e assim assimilados (Ausubel, 2003). Foi realizada individualmente, para um total de 12 (doze) alunos participantes.

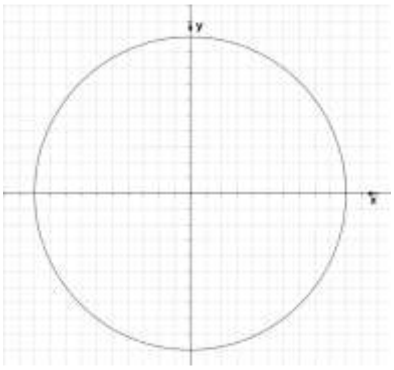
Considerando que os sujeitos desta pesquisa são alunos da 2ª série do ensino médio, pertencentes a uma classe com 33 (trinta e três) alunos, e pesquisando a vida escolar destes alunos, bem como a proposta curricular em vigor (São Paulo, 2008), averiguou-se que os conteúdos introdutórios à trigonometria, especificamente as semelhanças de triângulos e a razões trigonométricas no triângulo retângulo, já haviam sido estudados, o que poderia indicar que tais conhecimentos possivelmente faziam parte da estrutura cognitiva destes alunos (Ausubel, 2003).

As variáveis didáticas aqui previstas são a utilização de transferidor e lápis na construção do ciclo trigonométrico, a conversão da linguagem matemática para a linguagem natural, por meio das reflexões propostas depois de cada atividade e a construção de gráficos da função *y=senx* e y=cos*x* intermediada pela tabela dos valores das projeções dos ângulos nos eixos. Os gráficos das funções seno e cosseno serão construídos com o objetivo que os alunos possam transpor os valores do ciclo para o sistema de coordenadas cartesianas. Não será objeto de estudo dessa pesquisa o aprofundamento das funções seno e cosseno, conforme esclarecido anteriormente quando do anúncio da questão e dos objetivos desta investigação.

4.2.1 Atividade 1

O objetivo desta primeira atividade era levar o aluno a associar aos ângulos um número real escrito nos eixos das abscissas e das ordenadas. Para isso, os estudantes deveriam determinar os ângulos utilizando o transferidor. Os valores identificados poderiam ser aceitos por aproximação decimal.

Atividade 1 – Utilizando o transferidor e uma régua, marque, na circunferência, os ângulos indicados na tabela. Em seguida, complete a tabela com as projeções destes ângulos sobre os eixos das abscissas e das ordenadas. Considere para cada unidade o valor 0,1.



ÂNGULO		0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
PROJEÇÃO	X									
	Y									

ÂNGULO		210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
PROJEÇÃO	x								
	y								

a. Existem ângulos diferentes que têm, em sua projeção no eixo, a mesma medida. Identifique-os.

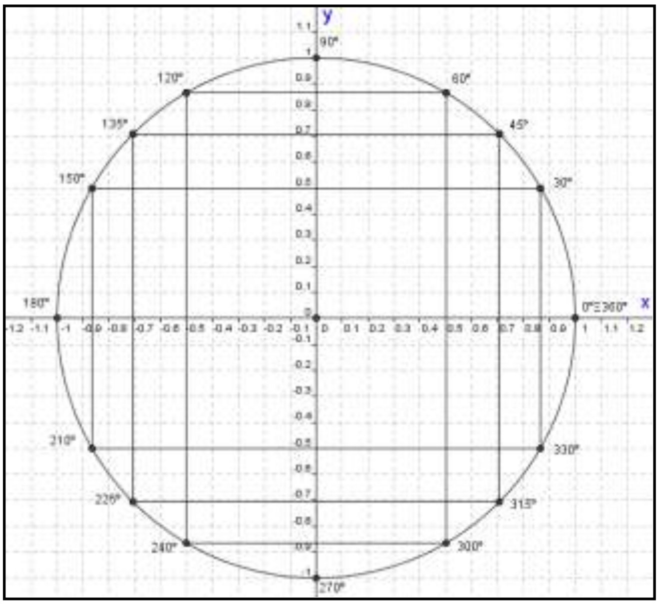
b. A medida da projeção de um mesmo ângulo, em relação aos eixos x e y, pode ter a mesma medida. Identifique estes ângulos.

c. Observando as medidas dos ângulos que você relacionou aos eixos e refletindo com as afirmações dos itens a e b, escreva o que você conseguiu assimilar.

Quadro 1 – Atividade Um do primeiro instrumento

O objetivo desta questão era de que o aluno utilizasse o lápis, a régua e o transferidor para marcar os ângulos e suas projeções nos eixos cartesianos. Os ângulos são da primeira volta, e foi considerado somente o sentido positivo, que é o sentido anti-horário. Para isso, o estudante deveria utilizar corretamente o transferidor e projetar linhas paralelas aos eixos, determinando as correspondências entre o ângulo e o número real associado aos eixos cartesianos. Após a construção do ciclo trigonométrico com o transferidor, lápis e a régua, o aluno deveria preencher a tabela com as medidas das projeções, fazendo a relação entre o ângulo e a respectiva projeção, determinadas nos eixos das abscissas e das ordenadas.

As soluções previstas para as atividades estão no próximo quadro.



ÂNGULO		0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
PROJEÇÃO	x	1	0,9	0,7	0,5	0	-0,5	-0,7	-0,9	-1
	y	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0

ÂNGULO		210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
PROJEÇÃO	x	-0,9	-0,7	-0,5	0	0,5	0,7	0,9	1
	y	-0,5	-0,7	-0,9	-1	-0,9	-0,7	-0,5	0

Quadro 2 – Resultado de resolução da Atividade Um

As projeções cujos valores estão representados por 0,9 e –0,9 são aproximações de 0,87 e -0,87, uma vez que o problema foi proposto com aproximação para as casas decimais, de acordo com a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008).

Após a atividade de construção, os alunos deveriam concluir, de acordo com as afirmações dos itens a, b e c, explicadas em seguida.

a. *Existem ângulos diferentes que têm, em sua projeção no eixo, a mesma medida. Identifique-os.*

Com esta afirmação, objetivou-se que os alunos conseguissem detectar que a medida da projeção de um ângulo em *x*, pode ter o mesmo valor da medida da projeção de outro ângulo em *y*, ou seja, medidas de projeções de “eixos diferentes”. Através da figura seguinte, pode-se observar que os ângulos dos 1º (primeiro) e 3º (terceiro) quadrantes, que foram contornados, dois a dois, pelas formas geométricas, têm o mesmo valor de medida da projeção. Porém, os ângulos contornados dos 2º (segundo) e 4º (quarto) quadrantes têm medidas de projeções com sinais opostos.

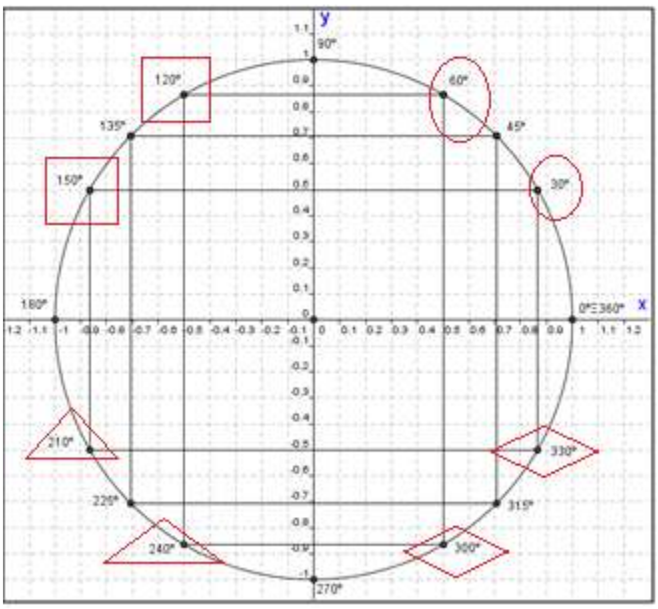


Figura 2 – Medidas de projeção

Também é notável que todos os ângulos possuam um ângulo simétrico a ele, em relação a um mesmo eixo do sistema cartesiano, e cuja medida da projeção é a mesma. Na figura seguinte, por exemplo, observando 60º e 300º, circulados, a medida da projeção destes ângulos em *x* é a mesma e igual a 0,5.

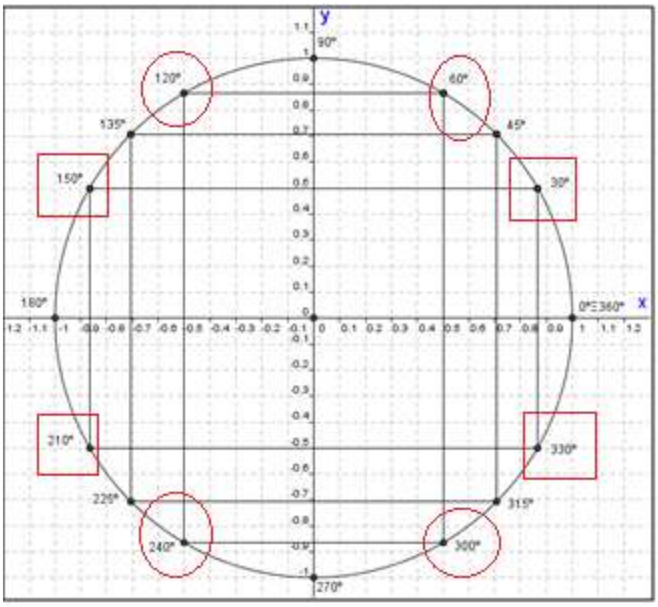


Figura 3 – Ângulos simétricos, mesmo eixo

a. *A projeção de um mesmo ângulo, em relação aos eixos x e y, pode ter a mesma medida. Identifique estes ângulos.*

O objetivo é levar o aluno a observar sua construção de maneira mais aguçada, isto é, a construção do ciclo é importante, mas a sua interpretação tem uma relevância maior. Ao observar a Figura 4, pode-se notar que os ângulos de 45º e 225º tem o mesmo valor de projeção para os eixos x e y. Entretanto, para os ângulos de 135º e 315º, as medidas projeções são valores opostos.

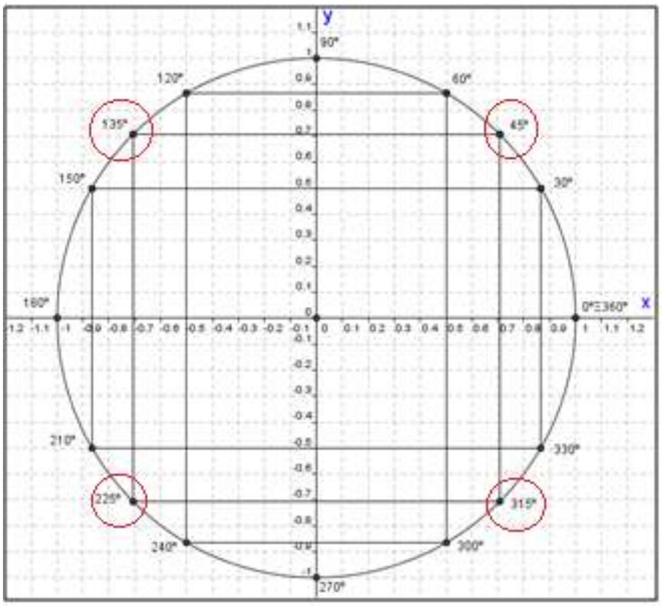


Figura 4 – Medidas de projeções de alguns ângulos

Quanto à estratégia de resolução para esse item, fez-se a seguinte previsão: as medidas das projeções de 45º e 225º em x e em y têm valores iguais. Os ângulos de 135º e 315º têm, quanto às medidas das projeções em x e em y, valores opostos.

a. *Observando as medidas dos ângulos que você relacionou aos eixos e refletindo com as afirmações dos itens a e b, escreva o que você conseguiu assimilar.*

Em que pese este tipo de questão não ser habitual para os alunos, os mesmos deveriam escrever sobre o que podem aprender com a construção como um todo. Apesar de, em um primeiro momento, a tabela com os valores do seno e cosseno parecer tratar-se de meros valores a serem decorados, pode-se observar que existe uma lógica na construção do ciclo e nos valores relacionados aos ângulos.

Como estratégia de resolução para esse item, pensou-se no seguinte: todo ângulo está associado aos eixos *x* e *y* por uma projeção, linha paralela ao eixo, que faz uma correspondência direta do ângulo e sua medida de projeção. Pode-se observar que o primeiro quadrante tem as medidas de seno e cosseno semelhante aos demais quadrantes, variando apenas o sinal, por se tratar das orientações dos eixos, como positiva e negativa.

4.2.2 Atividade 2

Realizada em dia diferente da atividade um, esta atividade dá sequência à anterior: o aluno, após relacionar os ângulos às suas projeções, deverá relacionar estes valores aos supostos conhecimentos que já possui na estrutura cognitiva, os quais foram abordados na 8ª série do ensino fundamental e também na 1ª série do ensino médio, que são as razões trigonométricas no triângulo retângulo, conforme afirmaram ter visto. Especificamente, aos valores dos senos e cossenos dos ângulos notáveis.

A tabela de representações fracionárias foi obtida pela dedução a partir de um triângulo retângulo isósceles, para o ângulo de 45º, e de um triângulo equilátero, para os ângulos de 30º e 60º. Foi necessário fazer revisão deste assunto, portanto o pesquisador fez a demonstração, para que os alunos relembrassem.

Atividade 2 – Sabendo que

	30º	**45º**	**60º**
Seno	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}7$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 087$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}87$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}7$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$

Complete a mesma tabela anterior, só que agora usando os números racionais na forma fracionára.

ÂNGULO		0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
PROJEÇÃO	x									
	y									

ÂNGULO		210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
PROJEÇÃO	x								
	y								

Quadro 3 – Atividade Dois do primeiro instrumento

Reflexão: *observando a tabela dos valores de seno e cosseno, que você já conhece, fazendo uma associação com os valores da tabela da primeira atividade, o que você consegue concluir?*

Esta atividade é complementar à primeira. A tabela anterior, com os "valores notáveis", não faz o arredondamento para a casa decimal do seno de 60º ou do cosseno de 30º, por se tratar de uma tabela comumente usada em todos os livros didáticos. Em função disto, optou-se em deixar o valor 0,87 e não 0,9. Quanto à resolução da atividade, foi permitido adotar o valor 1 (um).

O objetivo é relacionar os ângulos notáveis 30º, 45º e 60º, que os alunos já estudaram na 8ª série do ensino fundamental, e associá-los às medidas achadas da circunferência, previstas no Quadro1. Ou seja, o objetivo desta atividade é que o aluno associe as medidas das projeções de y, como seno de ângulo e as medidas das projeções de x, como cosseno de um ângulo. Desta forma, somente os valores de seno e cosseno de 30º, 45º e 60º são suficientes para completar toda a tabela, pois os valores são comuns para os demais ângulos.

Em sequência à atividade, o aluno deveria escrever suas conclusões a partir da seguinte proposta:

Reflexão: Observando a tabela dos valores de seno e cosseno, que você já conhece, fazendo uma associação com os valores da tabela da primeira atividade, o que você consegue concluir?

O objetivo aqui é que o aluno reflita e conclua o significado das projeções dos ângulos nos eixos, com a tabela dos ângulos notáveis, mostrando que aqueles valores que eles acharam como projeção, em forma decimal, são valores que podem ser representados na forma fracionária e que esses valores são o seno e cosseno dos ângulos.

Para resolução desta atividade, a estratégia que consta no próximo quadro estava prevista:

ÂNGULO		0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
PROJEÇÃO	x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
	y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

ÂNGULO		210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
PROJEÇÃO	x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
	y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Quadro 4 – Resultados da Atividade Dois

É importante ressaltar que a primeira tabela de seno e cosseno (Quadro 3) apresenta apenas três ângulos, o que é suficiente para completar a tabela em questão, contida no Quadro 4, pois os valores do seno e cosseno destes ângulos notáveis são iguais ou opostos aos demais ângulos pedidos na tabela, observando a simetria de um ângulo em relação a outro pelos eixos e pelo centro do sistema de coordenadas.

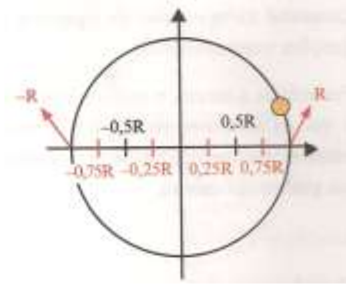
4.2.3 Atividade 3

O objetivo desta atividade é mostrar que a relação entre grandezas vista na circunferência, a relação entre ângulos e suas projeções nos eixos, podem ser representadas por meio do gráfico de uma função (sistema de coordenadas cartesianas). A proposta curricular do estado de São Paulo, por meio do caderno de matemática da 2ª série do Ensino Médio, propõe uma atividade semelhante, exposta na próxima figura[4].

4 Não é habitual, como surge na Figura 5, existente na Proposta do Estado (São Paulo, 2008), trazer o eixo das abscissas em graus. Entretanto, conforme exposto na seção 4.1, esta proposição foi tomada como noção paramatemática, útil no processo de transposição didática desde o saber sábio até o saber a ensinar (Chevallard, 1991; Oliveira, 2009b).

Atividade 3

Completem a tabela a seguir associando a medida do ângulo de elevação do Sol com a medida da **projeção sobre o eixo horizontal**. Depois, desenhem um gráfico cartesiano para representar os dados tabelados.



Ângulo (°)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Projeção (kR)	*1*	*0,9*	*0,7*	*0,5*	*0*	*–0,5*	*–0,7*	*–0,9*	*–1*	*–0,9*	*–0,7*	*–0,5*	*0*	*0,5*	*0,7*	*0,9*	*1*

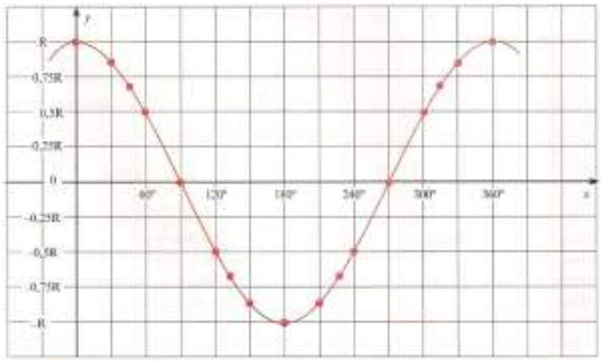


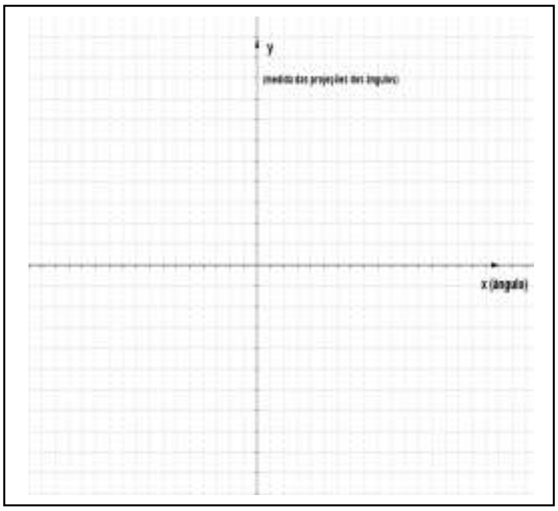
Figura 5 – Atividade proposta no caderno do aluno da 2ª série do ensino médio

Fonte: Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008)

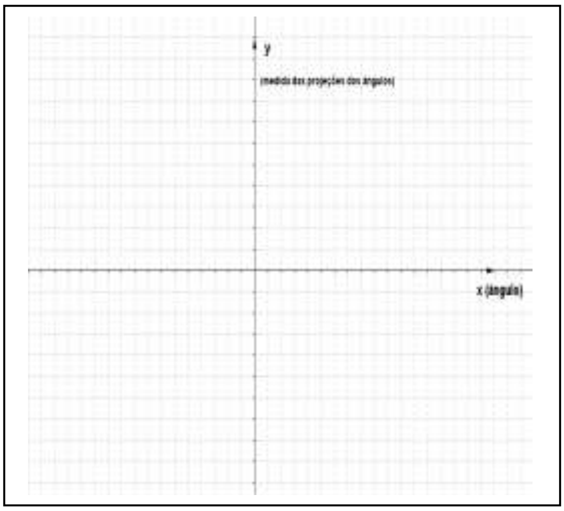
Nesta atividade, o aluno vai consultar a tabela por ele construída e marcar os pontos no sistema cartesiano. Os gráficos dependem diretamente da tabela, construída na atividade anterior, portanto, se a tabela foi construída incorretamente, o gráfico perderá suas características constituintes, e estará grafado, também, de forma errônea.

***Atividade 3** – Vamos construir gráficos! A partir da tabela da atividade 3, construa um gráfico para os valores de seno e um gráfico para os valores de cosseno, considerando o eixo x (abscissa) para as notações em graus e o eixo y (ordenadas) para os valores das projeções dos ângulos.*

1º Gráfico, referente às projeções em x (abscissa)



2º Gráfico, referente às projeções em y (ordenada)



***Reflexão:** Observando os gráficos, você pode concluir alguma particularidade?*

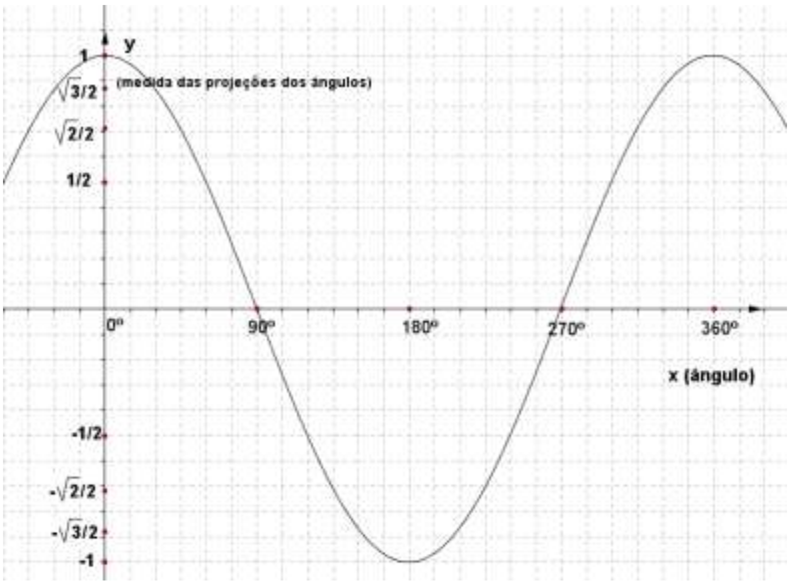
Quadro 5 – Atividade Três do primeiro instrumento

O gráfico a ser construído tinha previamente os eixos desenhados numa folha quadriculada, o que facilitava a identificação dos pontos no plano. Para marcar os pontos nos eixos, o pesquisador fez a intervenção, orientando os alunos considerar no eixo x (abscissa) a marcar 15º para cada quadradinho, e no eixo y (ordenada) a marcar 0,1 (um décimo) para cada quadradinho, mas representando na forma fracionária esses pontos.

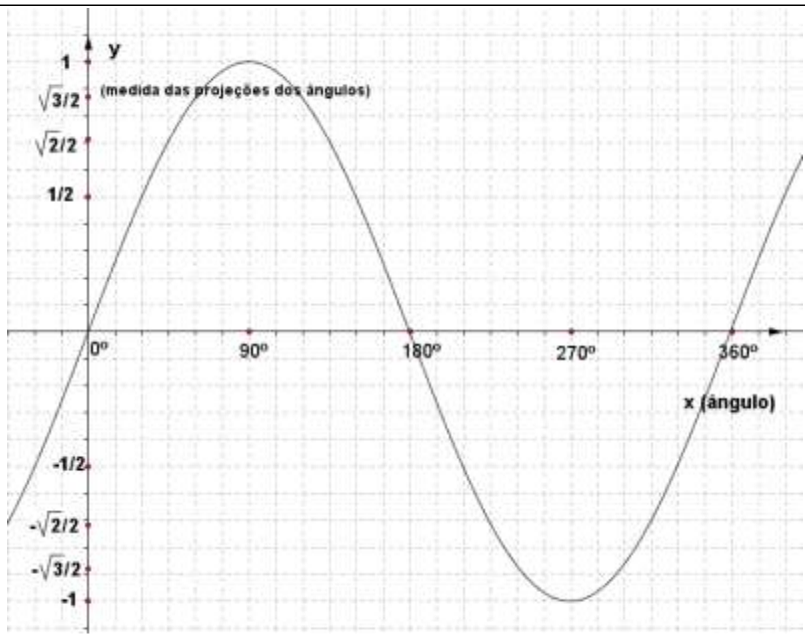
A estratégia de resolução para esse item está no próximo quadro[5].

[5] O Quadro 6 traz os gráficos traçados de forma contínua, em consonância com o documento oficial (São Paulo, 2008). Entretanto, reconhece-se que, uma vez que o eixo das abscissas está em graus, os gráficos podem ser tomados como corretos também se traçados em pontos discretos.

1º Gráfico, referente às projeções em x (abscissa) - cosseno



2º Gráfico, referente às projeções em y (ordenada) - seno



Quadro 6 – Resolução de parte da Atividade Três

Em continuidade, com relação à reflexão solicitada na Atividade três, a estratégia pensada era a seguinte: os dois gráficos, cujos ângulos foram projetados em eixos diferentes, possuem o mesmo formato de onda, e ambos os gráficos repetem continuamente o formato. Se for considerado o início do gráfico da origem do sistema cartesiano, podemos observar que o gráfico da função *y=senx* inicia-se na coordenada (0,0) e o gráfico da função *y=cosx*, inicia-se na coordenada (0,1).

4.2.4 Atividade 4

O objetivo desta atividade era mostrar que, além do grau, existe outra medida para ângulos, o radiano. Portanto, essa premissa será importante para a atividade da sequência didática, pois se abordou variáveis dos gráficos de *y=senx* e *y=cosx*. Para essa construção, foram utilizados os valores dos ângulos em radianos.

***Atividade 4** – O ângulo pode ser medido em graus (º) e também em radianos (rad). Um radiano é a medida de um arco de comprimento igual ao do raio da circunferência. Em uma circunferência de centro O e raio R, tem-se, aproximadamente, 3,14 radianos em sua meia volta, isto é, um arco de meia volta mede $1\pi\ rad$, três medidas do raio mais 0,141592... de um raio.*
Com base nesse conceito, faça a conversão de graus para radianos. Sabendo que $1\pi\ rad$ equivale a 180º, então quanto vale:
a) 30º   b) 45º   c) 60º   d) 90º   e) 270º   f) 360º

Quadro 7 – Atividade Quatro do primeiro instrumento

Esta atividade exige o conhecimento prévio de razão e proporção. Os alunos estariam lidando com grandezas diretamente proporcionais. A relação de equivalência parte da relação entre o valor de 180º e $1\pi\ rad$.

Uma estratégia possível de resolução desta atividade inclui, sabendo que 180º equivale a $1\pi\ rad$:

- 30º é a sexta parte de 180º, então, proporcionalmente, a sexta parte de $1\pi\ rad$ é $\frac{1}{6}\pi\ rad$;
- 45º é a quarta parte de 180º, então, proporcionalmente, a quarta parte de $1\pi\ rad$ é $\frac{1}{4}\pi\ rad$;

- 60º é a terça parte de 180º, então, proporcionalmente, a terça parte de $1\pi\,rad$ é $\frac{1}{3}\pi\,rad$;
- 90º é a metade de 180º, então, proporcionalmente, a metade de $1\pi\,rad$ é $\frac{1}{2}\pi\,rad$;
- 270º é a igual a 180º mais 90º, então, proporcionalmente, temos $1\pi\,rad$ mais $\frac{1}{2}\pi\,rad$ que é igual a $\frac{3}{2}\pi\,rad$;
- 360º é o dobro de 180º, logo o dobro de $1\pi\,rad$ é igual a $2\pi\,rad$.

Outra estratégia possível: alguns alunos poderiam utilizar também o processo da "regra de três".

4.3 Experimentação

A primeira sessão de aplicação do primeiro instrumento aconteceu no dia 24 de setembro de 2009, teve início às 19h00min e terminou às 20h30min, isto é, consumiu o período de duas aulas, 45 minutos cada aula. Presentes na sala estavam o pesquisador e os 12 (doze) alunos, sujeitos da pesquisa. As atividades contendo 4 (quatro) questões foram resolvidas individualmente.

A previsão era que os alunos resolvessem as 4 (quatro) questões no mesmo dia, mas não foi o que aconteceu, como já explicado anteriormente. Houve necessidade de mais uma sessão. Os alunos começaram efetivamente as atividades da experimentação 20 minutos após as 19 horas, por se tratar de um horário de início de turno. Como a entrada atrasou, houve um total de 1 hora e 10 minutos de atividades.

Cada aluno recebeu um transferidor de 180º e uma régua de 20 centímetros. O lápis e a borracha não foram cedidos, por se tratar de um material que o aluno utiliza no cotidiano. Toda a experimentação foi gravada através de dispositivos de áudio. O pesquisador sempre se deslocava à carteira dos alunos para tirar dúvidas, para que a gravação ficasse clara para futura análise.

As atividades propostas dependiam uma da outra, portanto, a primeira atividade não podia deixar de receber uma atenção especial. Nessa primeira sessão do primeiro instrumento, os alunos resolveram somente a primeira questão. A segunda sessão de experimentação do primeiro instrumento foi realizada no dia 05 de outubro de 2009. Nesta ocasião, foi possível o término das três questões do primeiro instrumento que faltavam. O mesmo procedimento foi aplicado durante a realização da segunda sessão, ou seja, 1 hora e 30 minutos (começou às 20h45min e terminou às 22h15min, também duas aulas). Ainda que fosse esperada a existência de conceitos já assimilados em sua estrutura cognitiva estabelecidos previamente sobre o tema, diversas foram as dificuldades apresentadas durante a experimentação.

Durante a Atividade Um, por exemplo, foi necessário esclarecer sobre a maneira certa de utilizar o transferidor, bem como o fato de que ali estava em jogo a relação entre duas grandezas. Em nenhum momento qualquer resposta foi indicada para os alunos, o pesquisador apenas mediou, dando a instrução para a correta utilização do transferidor.

A maior dificuldade encontrada e que atrasou toda a aplicação desta sequência foi mesmo a falta de habilidade em manipular o transferidor. Os alunos tiveram dificuldades em determinar o centro do instrumento, fator importante para determinar corretamente os ângulos na circunferência. Além disso, os estudantes não sabiam que o transferidor de madeira do professor e o pequeno que eles usaram na atividade têm medidas iguais, isto é, por exemplo, 30º no transferidor de madeira são os mesmos 30º no transferidor menor, de plástico. Alguns alunos disseram que havia aprendido a medir os ângulos na 6ª série do ensino fundamental, mas esqueceram o correto manuseio da ferramenta.

Alguns alunos posicionaram o transferidor conforme mostra a figura seguinte.

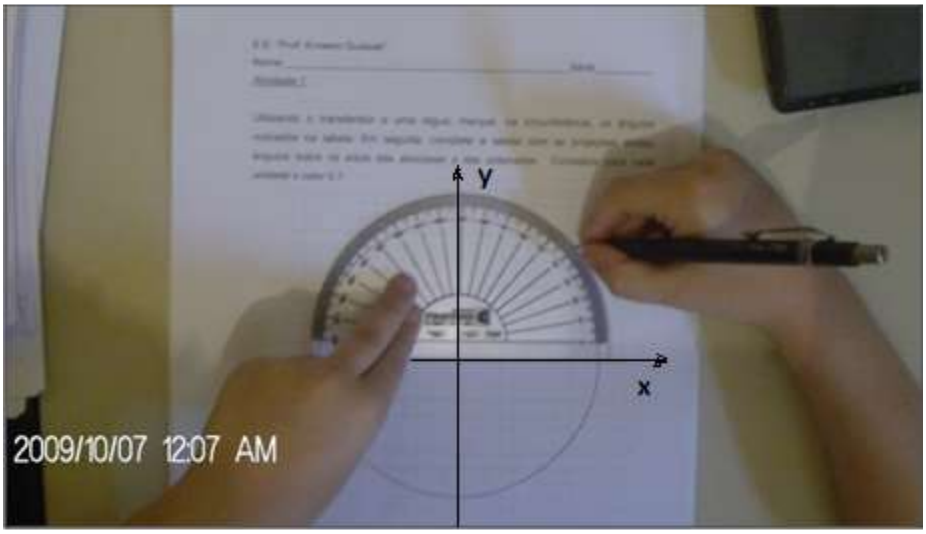


Figura 6 – Erro no uso do transferidor

Ao observar que muitos alunos estavam cometendo esse erro, foi necessário interromper a atividade e indicar o correto posicionamento da ferramenta. Tal medida foi tomada porque toda sequência dependia da correta construção do ciclo trigonométrico.

Esse primeiro instrumento de pesquisa visa analisar se os alunos têm conhecimentos prévios para resolver tais atividades, levando-os para uma aprendizagem significativa e ainda, na ocorrência do erro, realizar novas atividades com diferenciação estratégica para o aprendizado.

4.4 Análise à posteriori do primeiro instrumento

Tendo como objeto de análise os protocolos recolhidos, as gravações de áudio e as observações feitas durante a aplicação seguem a descrição das resoluções feitas pelos alunos durante a experimentação, representando a análise a posteriori da sequência didática.

Como já mencionado, a primeira atividade foi realizada individualmente por 12 (doze) alunos. Resolveu-se identificá-los por letras maiúsculas do alfabeto. Logo, a identificação dos estudantes ficou assim: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K e L.

4.4.1 Atividade 1

O aluno deveria obter as medidas das projeções dos ângulos nos eixos x e y, completar a tabela com os valores das projeções e concluir, refletindo sobre sua resposta. Os alunos apresentaram problemas na realização integral desta atividade, pois tiveram dificuldades na obtenção das projeções no ciclo trigonométrico, que era de extrema importância para a realização dos itens seguintes. Após a mediação do pesquisador, em relação à utilização do transferidor para a obtenção das projeções, a atividade teve um grau satisfatório de aproveitamento, considerando o desempenho geral. Para a realização do ciclo trigonométrico, foi necessária certa precisão com o transferidor, régua e lápis para traçar as projeções e determinar suas medidas, portanto os alunos entenderam como deveriam proceder para realizar o ciclo. Ainda assim, nem todos os estudantes foram precisos quando traçaram as projeções e suas medidas nos respectivos eixos.

Oito alunos conseguiram ter uma boa precisão (traçar as projeções paralelas aos eixos e determinar a medida da projeção) ao realizar esta atividade. Isso não significa que os demais alunos não conseguissem realizar a tarefa: sabiam como deviam proceder na realização, porém não foram precisos (não conseguiram traçar as projeções paralelamente aos eixos). Com isso, as medidas das projeções foram alteradas na construção do ciclo.

Esses alunos nunca construíram um ciclo trigonométrico, porém tinham subsídios para receber essa nova informação, tais como o conhecimento das unidades do ângulo, como marcar pontos no sistema de coordenadas cartesianas, como manipular o transferidor. Com relação a este último, embora não lembrassem muito bem como usar, a mediação foi relativamente simples, por ser um conhecimento já adquirido.

De maneira geral esses conhecimentos anteriormente adquiridos serviram de “âncora” para os oito alunos que conseguiram ter uma boa precisão na consecução da atividade. A partir de então, o conhecimento novo passou a ter significado (Ausubel, 2003).

O Gráfico 1 mostra o desempenho que os alunos tiveram ao realizarem o ciclo trigonométrico.

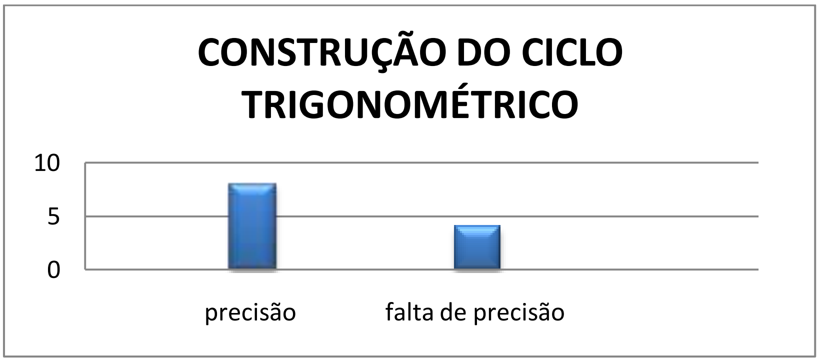


Gráfico 1 – Desempenho na primeira questão do primeiro instrumento (construção do ciclo trigonométrico)

Após a construção do ciclo, haveria a necessidade de completar a tabela com as respectivas medidas das projeções dos ângulos. O Gráfico 2 mostra como foi o desempenho na construção da tabela.

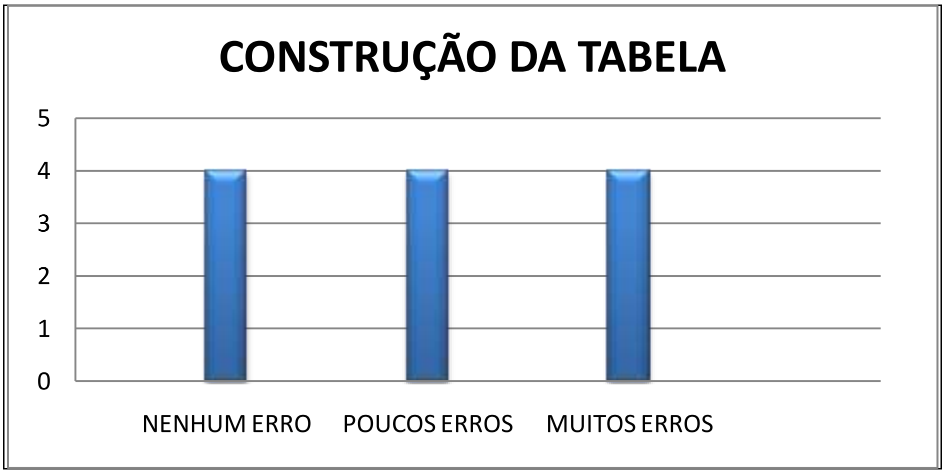


Gráfico 2 – Desempenho na primeira questão do primeiro instrumento (preenchimento da tabela trigonométrica.

Julgou-se importante nesta análise, em seguida, trazer algumas representações significativas desde os protocolos produzidos pelos sujeitos, inclusive como forma de esclarecer a categoria “poucos erros”, utilizada no gráfico acima.

4.4.1.1 Aluno G

O aluno G, bem como os Alunos B, D, E, F, I, K e L, conseguiram ter uma boa precisão em determinar os elementos solicitados no ciclo trigonométrico, ou seja, estes estudantes determinaram de maneira satisfatória as projeções e as medidas das projeções dos ângulos na circunferência. Porém, é importante destacar que os Alunos D, E, G e I, tiveram alguns erros na construção da tabela, como mostra a figura 2, circunferência trigonométrica construída pelo Aluno G.

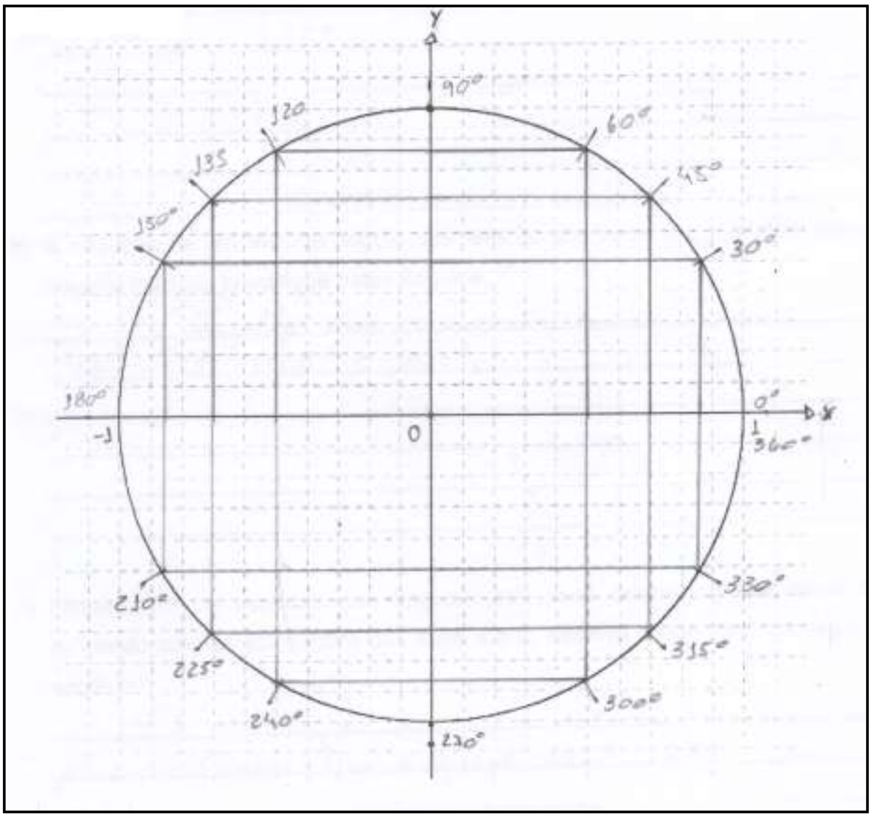


Figura 7 – Construção do Aluno G (precisão ao construir o ciclo)

A tabela que o Aluno G completou, relativa à atividade, também traz elementos dignos de menção, conforme mostra a figura seguinte.

ÂNGULO		0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
PROJEÇÃO	x	1	0,9	0,7	0,5	0	0,9	-0,7	-0,9	-1
	y	0	0,5	0,7	0,9	1	-0,5	-0,7	-0,5	0

ÂNGULO		210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
PROJEÇÃO	x	-0,9	-0,7	-0,5	0	0,5	0,7	0,9	1
	y	-0,5	-0,7	-0,9	-1	-0,9	-0,7	-0,5	0

Figura 8 – Tabela relativa à atividade

Quanto ao protocolo produzido por este aluno:

- Primeira observação: o aluno trocou as medidas das projeções de 120º. O correto seria a projeção de 120º em x igual a -0,5 e a projeção de 120º em y igual a 0,9;
- Segunda observação: a projeção de 135º em y é 0,7 e não –0,7.
- Terceira observação: a projeção de 150º em y é 0,5 e não –0,5.

O Aluno G teve uma boa precisão ao construir o ciclo trigonométrico, porém ao transpor os valores determinados pelas projeções para a tabela, cometeu pequenos erros, como é analisado acima. Tais erros foram relativos às trocas de sinais e inversão dos valores do seno e cosseno de 120º. Analisando de maneira geral, os demais alunos B, D, E, F, I, K e L também tiveram um bom aproveitamento nesta atividade, com erros semelhantes.

4.4.1.2 Aluno A

O aluno A, bem como os alunos C, H e J, não conseguiram ter uma boa precisão na realização da tarefa relativa ao ciclo trigonométrico. Sendo assim, as projeções não ficaram paralelas e a determinação das medidas das projeções dos ângulos na circunferência ficou impossibilitada, como mostra a próxima figura.

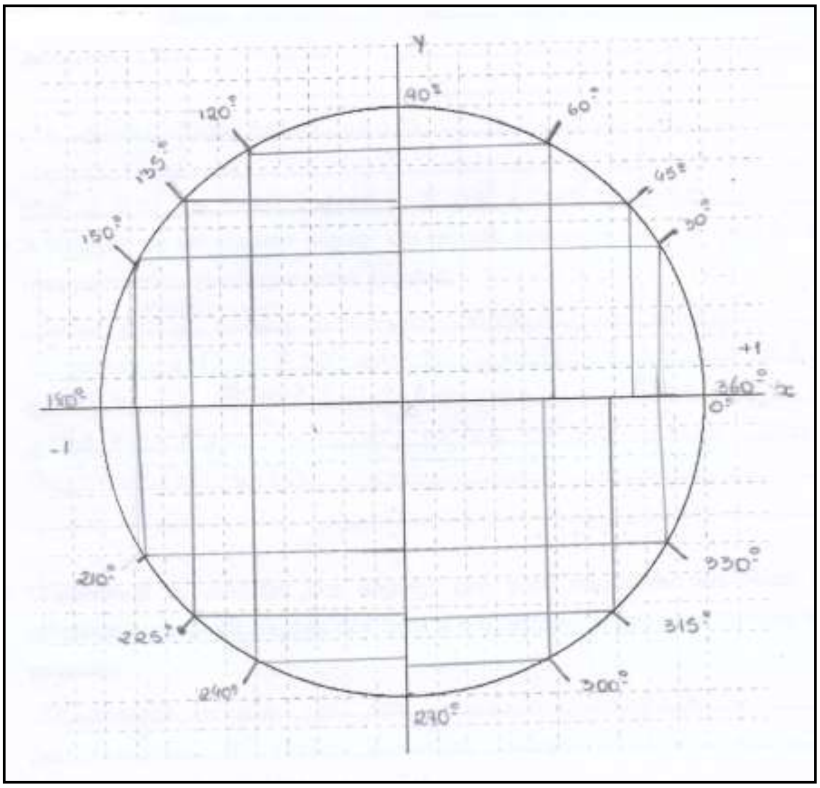


Figura 9 – Registro de Aluno A

A tabela que o Aluno A completou, relativa à atividade, também traz elementos dignos de menção, conforme mostra a figura seguinte.

ÂNGULO		0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
PROJEÇÃO	x	0	0,85	0,7	0,5	1,0	-0,5	-0,7	-0,9	-1,0
	y	0	0,5	0,68	0,9	1,0	-0,9	-0,7	-0.5	-1,0

ÂNGULO		210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
PROJEÇÃO	x	-0.9	-0,7	-0,5	-1,0	0,5	0,7	0,85	1,0
	y	-0,5	-0,7	-0,85	-1,0	0.9	0,7	0,5	1,0

Figura 10 – Tabela preenchida por Aluno A

O protocolo produzido por este aluno merece as seguintes observações:

- Primeira observação: para os ângulos de 0º, 90º, 180º, 270º e 360º, o aluno marcou valores repetidos, isto é, para o mesmo ângulo as medidas das projeções em x e em y têm o mesmo valor, mostrando que não percebeu como é a projeção desses ângulos;
- Segunda observação: as medidas das projeções de 30º em x e 60º em y foram preenchidas na tabela com valores 0,85 e 0,9, respectivamente, sendo que tais projeções deveriam ter o mesmo valor. O mesmo ocorreu com a medida das projeções de 45º em x e 45º em y, preenchidas com os valores 0,7 e 0,68, ou seja, erro igual ao anterior, o que pode indicar a imprecisão na utilização do transferidor no momento de marcar o ângulo na circunferência ou na projeção sobre os eixos;
- Terceira observação: os ângulos 120º, 135º e 150º têm projeções positivas em y. O aluno registrou todas negativas. E as projeções de 300º, 315º e 330º em y são todas negativas e não positivas conforme mostra o registro da figura anterior.

O Aluno A não teve uma boa precisão ao construir o ciclo trigonométrico. Além disso, ao transpor os valores determinados pelas projeções para a tabela, cometeu muitos erros, como é analisado acima. Os demais alunos C, H e J também não tiveram um bom aproveitamento nesta atividade.

4.4.1.3 Outras observações

Os registros dos alunos G e A são exemplos, escolhidos para a demonstração geral, objetivando caracterizar como os alunos realizaram as atividades e pelo fato de exibirem erros típicos.

Após a realização desta atividade, os alunos tinham outros três itens para responder. Foi solicitado que identificassem ângulos diferentes que tivessem o mesmo valor de projeção e o ângulo que tivesse o mesmo valor de projeção em *x* e em *y*. Em seguida, o aluno deveria descrever suas conclusões em relação aos questionamentos.

Algumas respostas foram escolhidas para representar como foi o desempenho dos alunos nesta atividade, de forma a contemplar as respostas mais recorrentes.

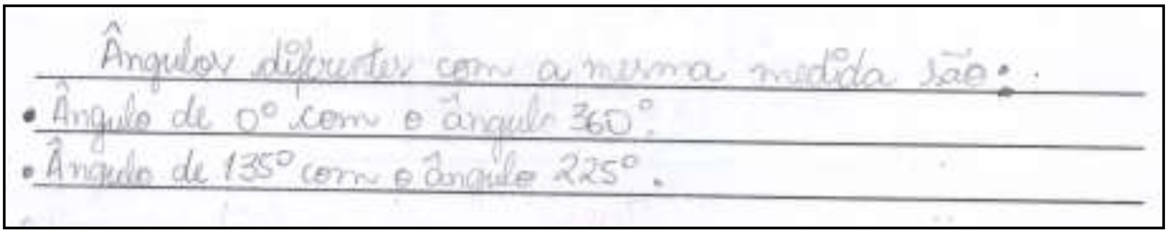


Figura 11 – Registro de Aluno D para a questão:
“Existem ângulos diferentes que têm, em sua projeção no eixo, a mesma medida. Identifique-os”

Todos os alunos foram limitados em suas respostas para o item indicado na figura acima, dando apenas alguns exemplos, sem, portanto, identificar todas as ocorrências existentes.

Em relação ao item seguinte, cinco alunos responderam de forma correta, registrando respostas semelhantes à do Aluno E, indicada na Figura 7.

Figura 12 – Registro de Aluno E
“A projeção de um mesmo ângulo, em relação aos eixos *x* e *y*,
podem ter a mesma medida. Identifique estes ângulos”

Entretanto, alguns alunos responderam 45º, 135º, 225º e 315º. Esses alunos não perceberam que os ângulos de 135º e 315º têm projeções com medidas representadas por números opostos, significando que não são iguais.

Com relação ao item seguinte, apenas um aluno (Aluno B) enxergou a simetria no ciclo, conforme pode ser constado pelo seu registro, expresso na próxima figura.

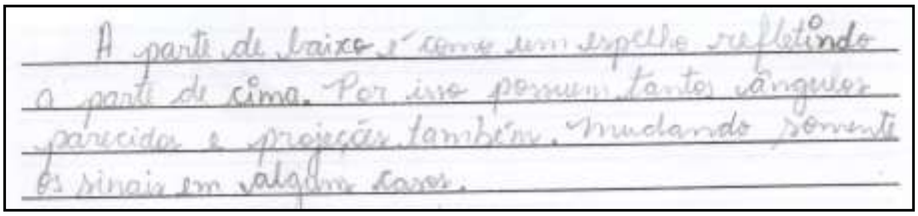

A parte de baixo é como um espelho refletindo a parte de cima. Por isso possuem tantos ângulos parecidos e projeções também, mudando somente os sinais em alguns casos.

Figura 13 – Registro de Aluno B

"Observando as medidas dos ângulos que você relacionou aos eixos e refletindo com as afirmações dos itens a e b, escreva o que você conseguiu assimilar"

Aluno B explicou com clareza o significado das construções anteriores, que era o objetivo da atividade. Os demais alunos tentaram descrever o que assimilaram, utilizando as afirmações dos itens a e b, mas não conseguiram produzir respostas que pudessem ser consideradas corretas.

4.4.2 Atividade 2

O aluno deveria completar a tabela, trocando os números racionais escritos na forma de número decimal para o número racional em forma fracionária, conforme a tabela enunciada nesta atividade. Os sujeitos entenderam, segundo foi possível concluir a partir de suas informações, como era para realizar a atividade. Entretanto, apesar disto, a maioria dos alunos cometeu algum erro, que foram considerados pelo pesquisador, na continuidade da estratégia, como ferramentas futuras para o aprendizado. Segundo Perrenoud (1999) o erro revela os mecanismos do pensamento do aprendiz, o que fornece um elemento importante para o trabalho didático.

O objetivo dessa atividade era demonstrar que o número racional decimal pode ser representado na forma de número racional fracionário, que é a forma usual para os gráficos das funções trigonométricas. Quatro alunos não conseguiram assimilar e tiveram muitos erros.

O gráfico seguinte mostra o desempenho que os alunos tiveram ao realizarem essa transposição de valores.

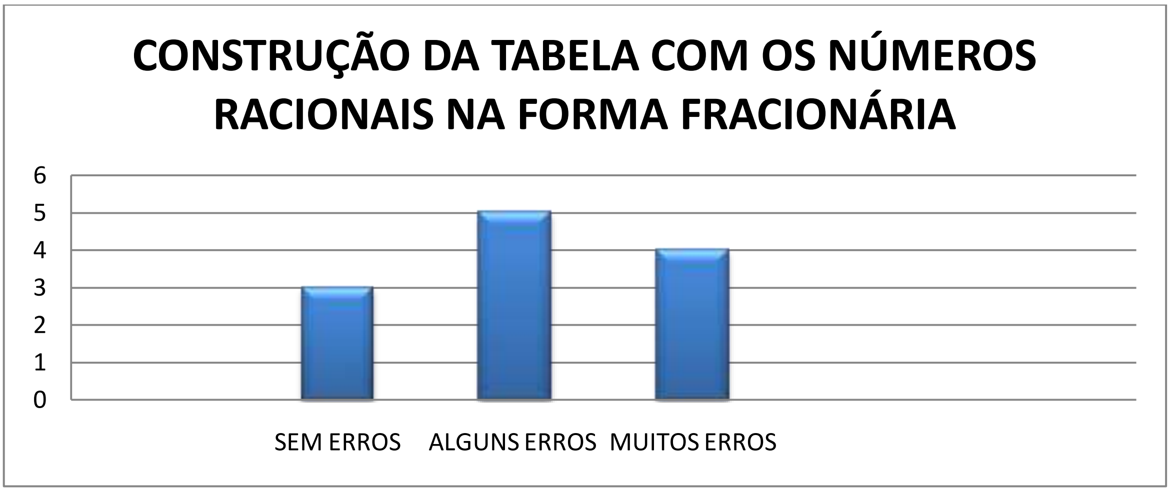
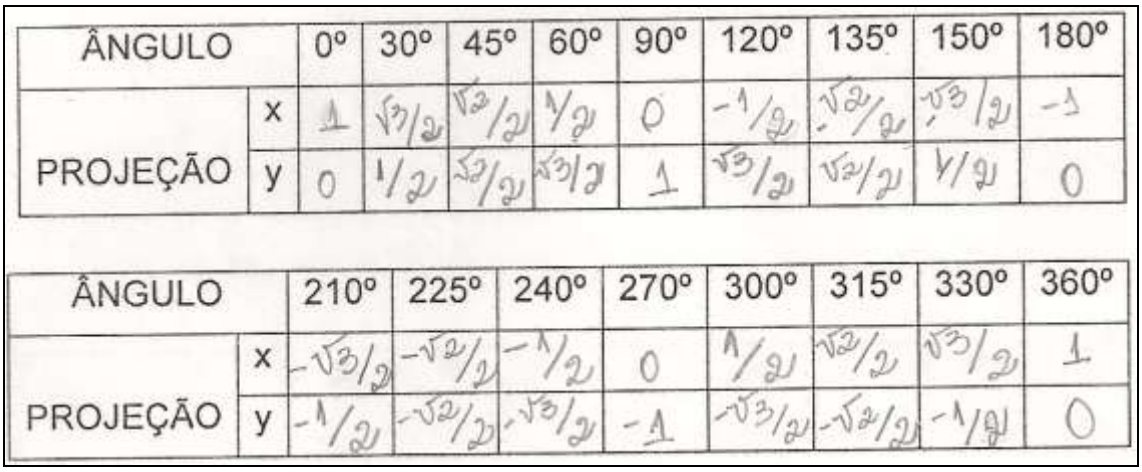


Gráfico 3 – Desempenho na segunda questão do primeiro instrumento – Transposição dos números racionais decimais para os racionais em forma fracionária

Julgou-se importante nesta análise, em seguida, trazer algumas representações significativas desde os protocolos produzidos pelos sujeitos.

4.4.2.1 Aluno K



ÂNGULO		0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
PROJEÇÃO	x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
	y	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

ÂNGULO		210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
PROJEÇÃO	x	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
	y	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0

Figura 14 – Registro produzido por Aluno K

O Aluno K, bem como os alunos B, E, conseguiram transpor esses valores sem cometer erros, conforme mostra a próxima figura.

4.4.2.2 Aluno F

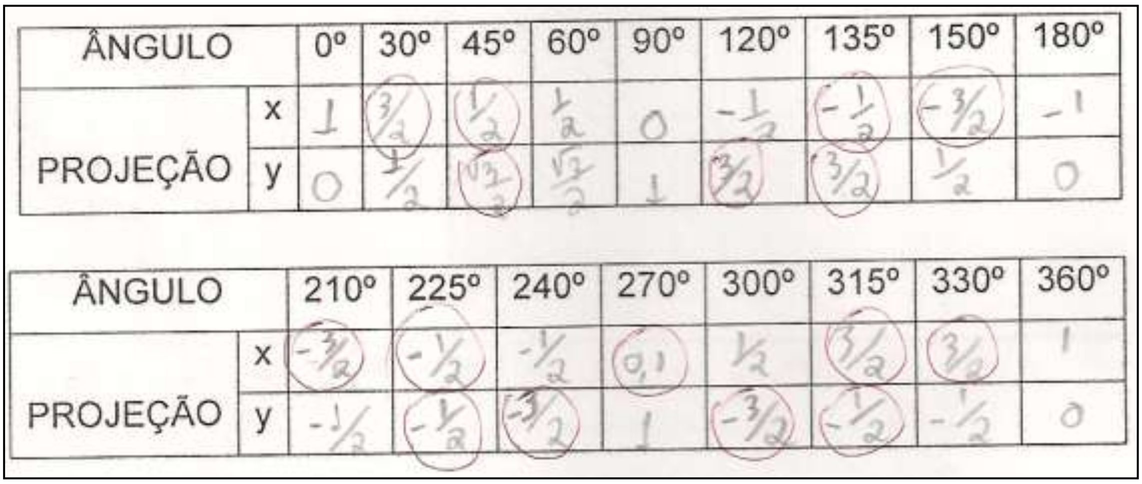
ÂNGULO		0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
PROJEÇÃO	x	1	√3/2	√2/2	1/2	0	-1/2	-√2/2	-√3/2	-1
	y	0	1/2	√2/2	√3/2	1	√3/2	√2/2	1/2	0

ÂNGULO		210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
PROJEÇÃO	x	-√3/2	-√2/2	-√3/2	0	1/2	√2/2	√3/2	1
	y	-1/2	-√2/2	-1/2	-1	-√3/2	-√3/2	-1/2	0

Figura 15 – Registro produzido por Aluno F

O Aluno F, bem como os alunos D, G, I, L conseguiram transpor os valores cometendo alguns erros, o que denota alguma assimilação do conteúdo. Os demais alunos tiveram erros da mesma natureza, como o Aluno F que, ao escrever a medida da projeção de 240º em *x* e em *y*, inverteu os valores, para 315º (o correto seria $-\frac{\sqrt{2}}{2}$). Foi, também, muito comum o uso errado do sinal negativo para algumas medidas.

4.4.2.3 Aluno C



ÂNGULO		0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
PROJEÇÃO	x	1	3/2	1/2	1/2	0	-1/2	-1/2	-3/2	-1
	y	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	3/2	3/2	1/2	0

ÂNGULO		210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
PROJEÇÃO	x	-3/2	-1/2	-1/2	0,1	1/2	3/2	3/2	1
	y	-1/2	-1/2	-3/2	1	-3/2	-1/2	-1/2	0

Figura 16 – Registro produzido por Aluno C

O aluno C, bem como os alunos A, H, J, não conseguiram transpor os valores, cometeram muitos erros. Mesmo assim, pode-se observar que existem alguns acertos, o que denota a assimilação de algum conteúdo.

4.4.2.4 Outras considerações

A maioria dos livros didáticos, ao abordar as razões trigonométricas no triângulo retângulo, insere uma tabela com os valores de seno e cosseno para os ângulos 30º, 45º e 60º, denominando os mesmos de “ângulos notáveis”, isto é, mais usados. A primeira atividade não institucionaliza que as projeções de um ângulo em x e em y determinam respectivamente o cosseno e o seno desse ângulo. Portanto, o aluno, ao observar a tabela, que é um dado dessa segunda atividade, poderá concluir que as marcações obtidas na primeira atividade são as marcações, seno e cosseno.

Partindo de um conhecimento de base, que era a tabela construída por eles que não mencionava os valores do seno e cosseno e comparando com a tabela dos “ângulos notáveis”, o objetivo era que os alunos concluíssem que seno de um ângulo é a medida da projeção de y e cosseno é a medida da projeção de x. Essa atividade seria significativa para aqueles que construíram a tabela corretamente ou com poucos erros. Portanto, pode-se afirmar que a aprendizagem foi significativa apenas para o aluno A e o aluno C.

Os dois alunos conseguiram concluir desta forma, aluno A e aluno C. Os demais não conseguiram compreender desta forma. A titulo de ilustração, segue registro do Aluno A.

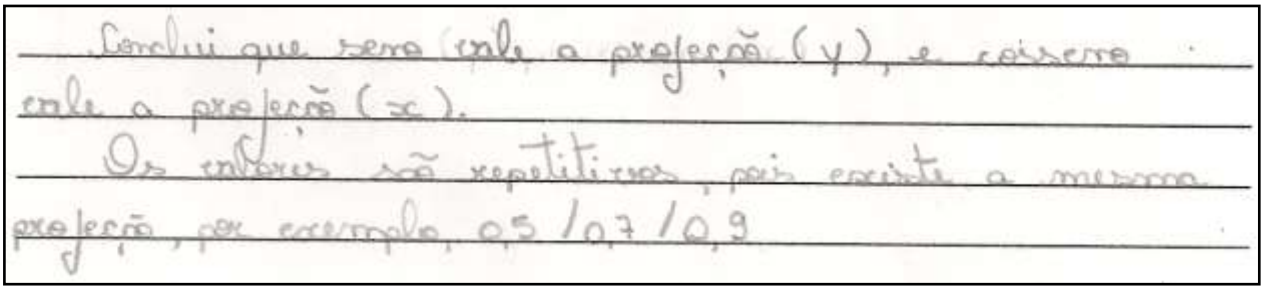

Conclui que seno (vale a projeção (y), e cosseno
vale a projeção (x).
Os valores são repetitivos, pois existe a mesma
projeção, por exemplo, 0,5 / 0,7 / 0,9

Figura 17 – Registro de Aluno A

4.4.3 Atividade 3

Essa atividade solicitava transpor os valores da tabela para o plano cartesiano, sem fazer a definição de funções trigonométricas, apenas marcando os pontos no sistema de coordenadas cartesianas. O primeiro gráfico era para as projeções *em y* e o segundo gráfico para as projeções *em x*. Esta atividade tinha como objetivo ser um *organizador prévio* para o segundo instrumento. Segundo Ausubel (*apud* Moreira e Masini, 1982) os organizadores prévios são usados como uma estratégia para manipular a estrutura cognitiva do aprendiz com o intuito de facilitar a aprendizagem significativa.

Os alunos não conseguiram realizar essa transposição da tabela para o gráfico. Pode-se observar que até sabiam marcar os pontos no plano cartesiano, porém alguns erros de construção da tabela e a falta de atenção dos alunos contribuíram para que os gráficos ficassem desfigurados, como mostram as Figuras 18, registro do Aluno A, e a Figura 19, registro do Aluno G. Esses exemplos foram característicos dos dados coletados.

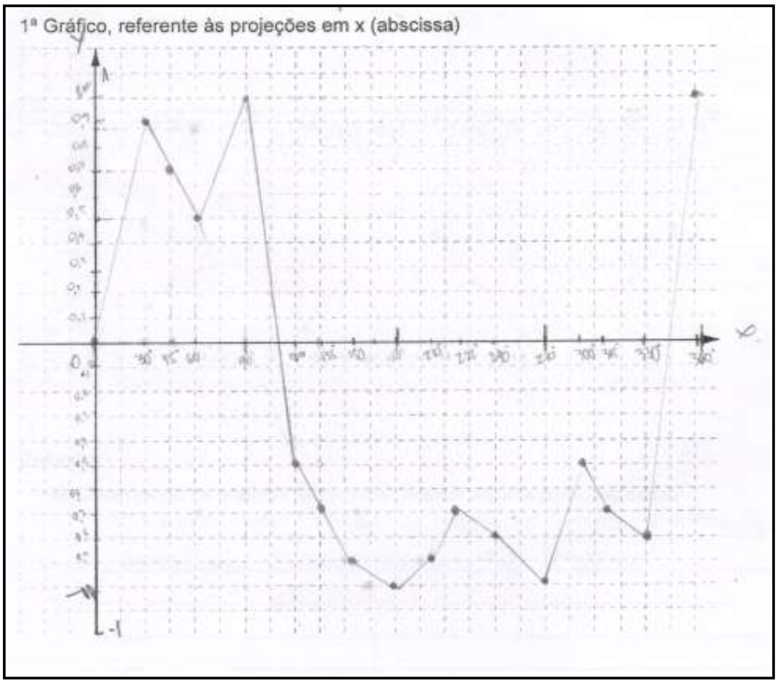


Figura 18 – Registro do Aluno A

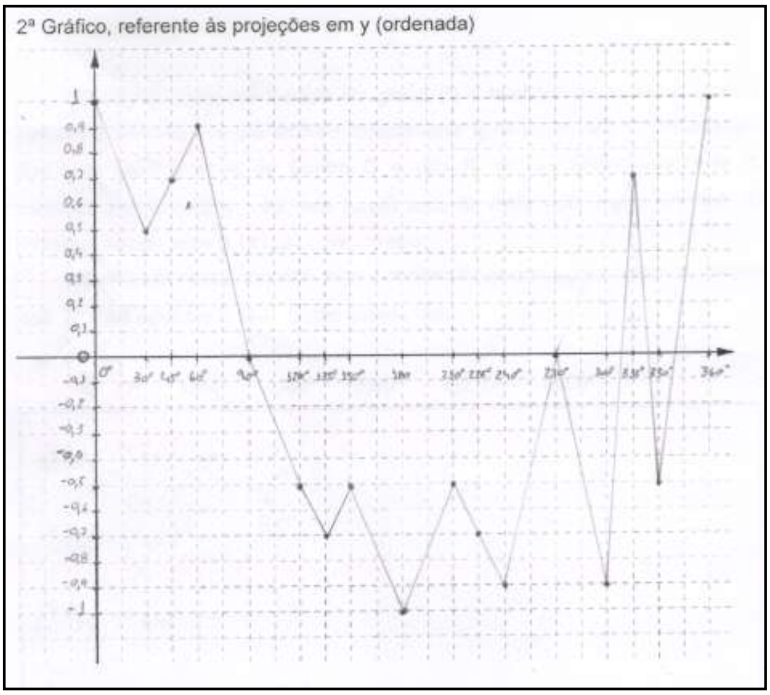


Figura 19 – Registro do Aluno G

O erro de construção dos gráficos está evidente. No âmbito desta análise, é importante considerar as asserções de Perrenoud (1999), que enfatiza ser o erro uma tentativa de compreender determinado conteúdo, cabendo ao professor ter conhecimento em didática e em psicologia cognitiva para fazer a recondução dessa atividade, proporcionando meios para que o aluno possa identificar e transpor essa dificuldade.

4.4.4 Atividade 4

Com relação a esta atividade, a metade dos alunos, 6 (seis), perceberam que as grandezas de medidas do ângulo, grau e radiano são diretamente proporcionais.

Pode-se observar como o Aluno B resolveu esta atividade pelo seu registro, contido na Figura 20.

O objetivo dessa atividade era demonstrar que o número racional decimal pode ser representado na forma fracionária, que é a forma usual para os gráficos das funções trigonométricas nos livros didáticos e materiais correlatos.

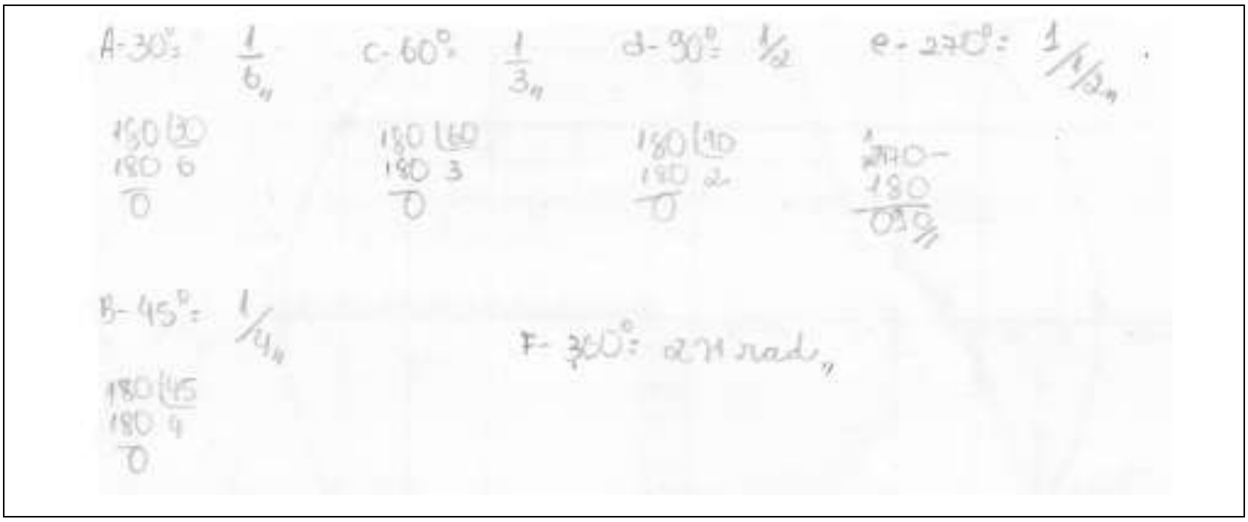


Figura 20 – Registro de Aluno B

O Gráfico 4 mostra o desempenho que os alunos tiveram ao realizarem a conversão da unidade grau para radiano.

Gráfico 4 – Desempenho na quarta questão do primeiro instrumento

Podemos observar que a metade dos alunos conseguiu fazer a conversão. Tal processo, segundo declaração dos estudantes, já era de seu conhecimento. Os sujeitos da pesquisa que não conseguiram realizar essa atividade fizeram registros desconexos ou até mesmo deixaram de responder.

4.4.5 Considerações sobre a análise a posteriori do primeiro instrumento

De maneira geral, foi possível observar que parte dos alunos conseguiu realizar quase todas as atividades deste primeiro instrumento, com exceção àquelas relativas aos gráficos. Pode-se observar também que não conseguiam manipular o transferidor a princípio, mas com a mediação do pesquisador, alguns sujeitos começaram a ter um bom desempenho para marcar os ângulos na circunferência. Considerando que alguns conceitos de base seriam necessários para a realização destas atividades, pode-se constatar que boa parte deles estava consolidada na estrutura cognitiva dos alunos, como já citado na primeira atividade.

Em um primeiro momento, pensou-se que as atividades do primeiro instrumento não criariam tantas dificuldades para os sujeitos. Entretanto, percebeu-se que em todas elas existiram estudantes com dificuldades, o que culminou em problemas de naturaza muito mais geral, quanto aos sujeitos, quando os mesmos realizam a atividade três, na qual gráfico saiu sem a configuração prevista – e sem a menor possibilidade de ser considerado correto em relação a todos os sujeitos. A manipulação do transferidor e a determinação de pontos em um plano cartesiano são assuntos que teoricamente fazem parte da estrutura cognitiva dos sujeitos desta pesquisa e, supostamente, o novo conhecimento iria ancorar nesse aspecto relevante. Entretanto, o experimento demonstrou a necessidade de reformulação das estratégias didáticas relativas ao processo de ensino-aprendizagem, como recomenda Oliveira (2009a).

Observando todo o contexto, e de posse das análises, percebeu-se que o objeto proposto no primeiro instrumento era, na realidade, um organizador prévio em relação ao segundo instrumento. Segundo Ausubel (1968 apud Moreira e Masini, 1982) como já mencionado, os organizadores prévios são materiais introdutórios apresentados antes do material a ser aprendido. Tais elementos servem de âncora para a nova aprendizagem, desenvolvendo no aprendiz subsunçores que facilitarão a aprendizagem subsequente.

Entretanto, o que se verificou foi à insuficiência de rendimento dos sujeitos, revelando a necessidade de reformulação da abordagem sobre o assunto. Os erros cometidos nas atividades um e dois e, principalmente, os erros cometidos na atividade quatro conduziram a elaboração do segundo instrumento, diferente daquele previsto no esboço da pesquisa. Este fato, no entanto, já era previsto, dada a abordagem reconstrutiva dos erros, baseada em Perrenoud (2000) e Brousseau (2001). Em conformidade com as afirmações de Oliveira (2009a), Borba e Penteado (2003) e Kenski (2007), a estratégia adotada passou a prever a aplicação de atividades semelhantes com a mediação de TICs, mais especificamente do software Geogebra, pois ali estava em jogo um objeto matemático que deveria ser assimilado de forma significativa. Conforme já exposto, a questão não é a de usar um programa computacional como solucionador definitivo de problemas, mas de usar uma estratégia didática na qual tais elementos estejam presentes como mediadores. Além disso, entra em jogo a questão da aprendizagem colaborativa, que pede uma atuação do professor de modo que ocorra

> *a realização de atividades de forma coletiva, ou seja, a tarefa de um complementa o trabalho de outros. Todos dependem de todos para a*

> *realização das atividades, e essa interdependência exige aprendizados complexos de interação permanente, respeito ao pensamento alheio, superação das diferenças e busca de resultados que possam beneficiar a todos (Kenski, 2003, p.112).*

Outro fator importante a considerar é a presença do erro no processo de ensino-aprendizagem e seu significado. A questão que se coloca é o da mera certificação do erro – ou seja, confirmá-lo como elemento de incompetência do estudante – ou o seu uso reconstrutivo, como prevê Oliveira (2007). A este respeito, manifesta-se Perrenoud (2000, p.30)

> *Aprender não é primeiramente memorizar, estocar informações, mas reestruturar seu sistema de compreensão de mundo. Tal reestruturação não acontece sem um importante trabalho cognitivo. Engajando-se nela, restabelece-se um equilíbrio rompido, dominando melhor a realidade de maneira simbólica e prática.*

Na visão de Astolfi (1997 apud Perrenoud 2000) o erro não deve ser visto como um elemento isolado, mas como um recurso didático, revelador do pensamento do estudante. É importante não desprezar o erro, mas vê-lo como uma fase da estruturação cognitiva, em busca de compreensão. Não basta apenas corrigi-lo, mas é importante fazer com que o aluno possa perceber sua ocorrência, identificar sua origem e superar o obstáculo que lhe deu causa.

Em um primeiro momento, um obstáculo pode dar a impressão de que jamais se conseguirá alcançar soluções, mas se houver a devolução do problema, ou seja, se os alunos se apropriarem dele, a estrutura cognitiva de cada um põe-se em movimento, constrói hipóteses, procede a explorações, propõe tentativas.

Neste aspecto, o trabalho coletivo favorece a discussão, havendo assim o encontro das representações que propõe a cada um rever seu pensamento e considerar o dos outros colegas (Oliveira, 2009a).

Além disso, deve-se considerar a estratégia global. Os autores que suportam teoricamente este trabalho indicam que não se devem desprezar as iniciativas baseadas em iniciativas vistas como usuárias de tecnologias tradicionais, mas integrá-las ao uso de TICs em um processo, e sob a égide do planejamento do professor e da estratégia prevista por ele.

Assim, o segundo instrumento foi pensado a partir dos erros cometidos pelos alunos na consecução do primeiro. Enquanto na primeira experiência a realização das atividades ocorreu individualmente, utilizando lápis e transferidor, anotando os dados na folha de respostas, na segunda foi proposta a construção da circunferência trigonométrica usando o software Geogebra e a atividade foi realizada em grupos formados por três alunos, também por razões técnicas, como já mencionado, ainda que este fato tenha também provocado o favorecimento das discussões e conclusões das respostas. Quanto aos registros, foram realizados em outra folha de respostas.

4.5 Análise a priori do segundo instrumento

Conforme já mencionado, decidiu-se usar o software Geogebra como parte da estratégia didática, aonde os alunos iriam reconstruir o ciclo trigonométrico de maneira diferente, de modo a compreender os objetivos desta atividade, que eram a determinação do ângulo na circunferência e suas projeções nos eixos, o significado dessas projeções como sendo o seno e o cosseno do ângulo e a transposição desses valores para o sistema cartesiano.

Resolveu-se organizar os alunos em grupos de três pessoas, pois, somente quatro computadores funcionavam, potencializando as possibilidades do trabalho colaborativo nas reflexões sobre as conclusões durante e após a construção da circunferência trigonométrica. Os grupos foram denominados de G1, G2, G3 e G4. O G1 era composto pelos alunos A, G e I, o G2 pelos alunos C,E e J, o G3 pelos alunos F, K e L e o G4 pelos alunos B, D e H.

Como o objetivo dessa sessão era a reconstrução do primeiro exercício do instrumento anterior, dando ênfase à construção da circunferência trigonométrica, ao preenchimento da tabela com os dados das projeções e à conclusão, marcando os pontos no sistema cartesiano, reelaborou-se o escopo das atividades, excluindo-se a Atividade 2, que consistia em construir a mesma tabela da Atividade 1, mas trocando os decimais por números com representação fracionária, e também a Atividade 4, que tinha como objetivo a conversão de unidades, de graus para radianos. Essas atividades eram específicas para a introdução das funções trigonométricas, pois os gráficos *f(x)=sen(x)* e *f(x)=cos(x)*, segundo as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2006), devem ser tratados pelos alunos de modo que os mesmos entendam que a variável x corresponde a medida de arco de círculo, tomada em radianos. Como não se estenderia este estudo às funções trigonométricas, essas duas atividades deixaram de fazer parte do segundo instrumento.

O segundo instrumento mediado pela tecnologia, especificamente o *software* Geogebra, contemplaria uma didática com um recurso pedagógico que iria facilitar teoricamente o entendimento na construção da circunferência trigonométrica. Ainda com base na aprendizagem significativa, a atividade desse segundo instrumento iria fazer um paralelo com a construção do primeiro instrumento, ou seja, esse primeiro instrumento seria utilizado como um conhecimento prévio, necessário para entender por completo a construção da circunferência trigonométrica, o significado dos valores do seno e cosseno de um ângulo.

4.5.1 Atividade 1

Esta atividade trazia o seguinte enunciado: “Vamos construir o ciclo trigonométrico no Software GeoGebra! Em seguida, complete a tabela com as projeções destes ângulos sobre os eixos das abscissas e das ordenadas”.

Quando o software Geogebra é aberto, aparecem a janela algébrica e a janela geométrica com os eixos x e y do sistema de coordenadas cartesianas. Na construção do ciclo trigonométrico, os alunos seguiriam os seguintes passos, que eram ditados, com eventual mediação do pesquisador, para dúvidas que surgiram:

1. Em “exibir”, clique em “malha”;
2. Construir um “circulo definido pelo centro e um de seus pontos”. O centro da circunferência deve ficar na origem do sistema de coordenadas cartesianas e o outro ponto nas coordenadas (1,0). Chame-as, respectivamente, pontos A e B;
3. “Ampliar” o ciclo quatro vezes;
4. Em “propriedades”, deixar a malha, x: 0,1 e y: 0,1;

5. Ainda em “propriedades”, deixar a distância nos eixos x e y em 0,1;
6. Construir um segmento de extremidades na origem do sistema (ponto A) e em um ponto C qualquer na circunferência, que será o segmento a;
7. Construir uma “reta perpendicular” passando por C e perpendicular a x; denominada reta b;
8. Construir uma “reta perpendicular” passando por C e perpendicular a y; denominada reta d;
9. Em “interseção de dois objetos”, marcar a interseção da reta perpendicular a x e o eixo x. Marcar como ponto D;
10. Em “interseção de dois objetos”, marcar a interseção da reta perpendicular a y e o eixo y. Marcar como ponto E;
11. Construir um segmento de C até E, denominado de segmento e;
12. Construir um segmento de C até D, denominado de segmento f;
13. Construir um segmento g, de extremidades A e D. Em “propriedades”, aumentar sua espessura e pintá-lo de vermelho;
14. Construir um segmento h, de extremidades A e E; em “propriedades”, aumentar sua espessura e pintá-lo de azul;
15. Determinar o ângulo definido pelos ponto B, A e C;
16. “Esconder” as retas perpendiculares aos eixos
17. Em “distância ou comprimento”, determinar a distância de A e E, valor do seno do ângulo;
18. Em “distância ou comprimento”, determinar a distância de A e D, valor do cosseno do ângulo.

A circunferência trigonométrica deveria ficar conforme a figura seguinte.

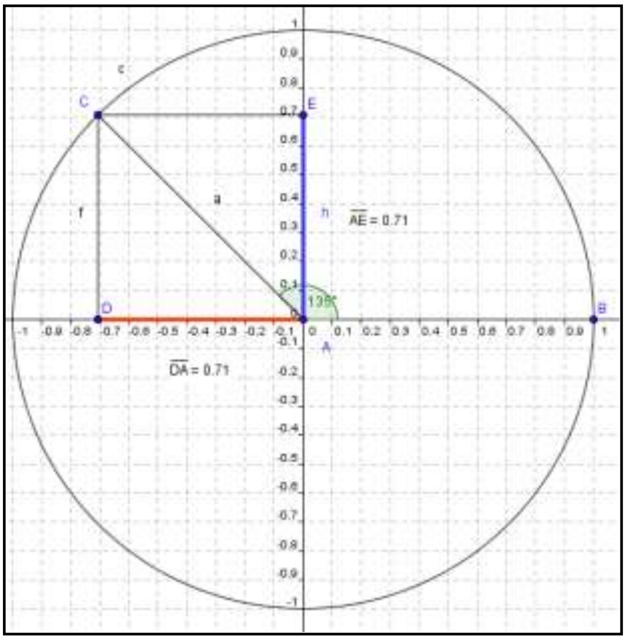


Figura 21 – Ciclo trigonométrico traçado no Geogebra

Antes da construção da circunferência trigonométrica no Geogebra, foi feita uma apresentação do software. Os alunos tiveram 15 minutos para a ambientação com o programa. Manipularam quase todas as ferramentas do Geogebra, com intervenções do pesquisador por meio de imagem projetada na parede.

Após esses quinze minutos, fez-se a apresentação da atividade que iriam realizar. Os passos para a construção estavam ordenados do 1º até o 18º, conforme já descritos.

Depois da realização da circunferência, os alunos deveriam preencher a mesma tabela que foi realizada na primeira sessão do primeiro instrumento, com as medidas das projeções nos eixos, responder se o *software* facilitou o entendimento e de que forma isto ocorreu.

A expectativa era a de que a tabela fosse preenchida conforme as indicações da Tabela 2.

ÂNGULO		0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
PROJEÇÃO	x	1	0,9	0,7	0,5	0	-0,5	-0,7	-0,9	-1
	y	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0

ÂNGULO		210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
PROJEÇÃO	x	-0,9	-0,7	-0,5	0	0,5	0,7	0,9	1
	y	-0,5	-0,7	-0,9	-1	-0,9	-0,7	-0,5	0

Quadro 8 – Projeções dos ângulos (respostas esperadas)

O grupo, de comum acordo, fazendo um debate e refletindo sobre os argumentos de cada membro, deveria responder a seguinte pergunta: “a construção com o Geogebra facilitou o entendimento? Explique seu ponto de vista”.

Havia indicações que levavam a crer que os alunos diriam “sim”. O software facilitaria o entendimento da construção da circunferência trigonométrica. Quando da aplicação do primeiro instrumento, os alunos tiveram como obstáculo o posicionamento do transferidor para marcar os ângulos e também a determinação das projeções nos eixos. Tiveram dificuldades para projetar 0º, 90º, 180º, 270º e 360º nos eixos cartesianos. Com o software, pensou-se que não haveria tal dificuldade, pois bastaria mover o ângulo e as projeções eram dadas automaticamente.

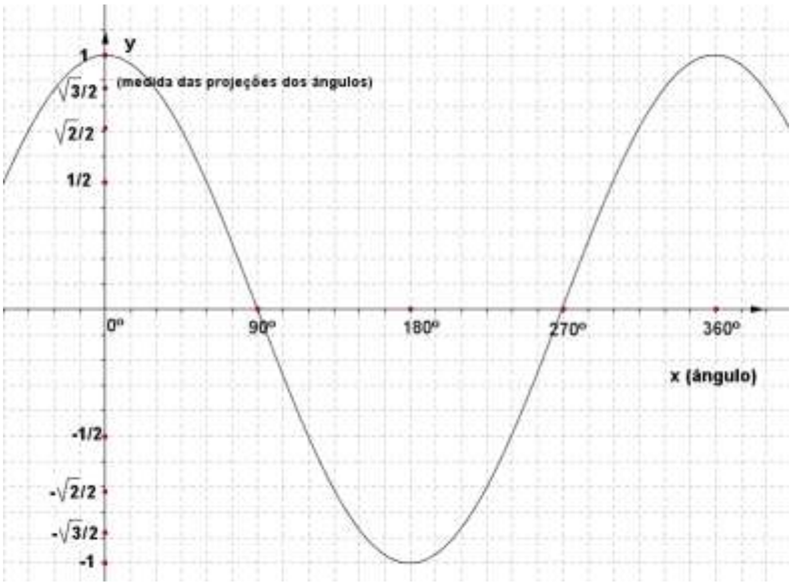
4.5.2 Atividade 2

A Atividade dois do segundo instrumento tinha o seguinte enunciado: “Vamos construir gráficos, a partir da tabela que você construiu com o auxílio do software Geogebra”.

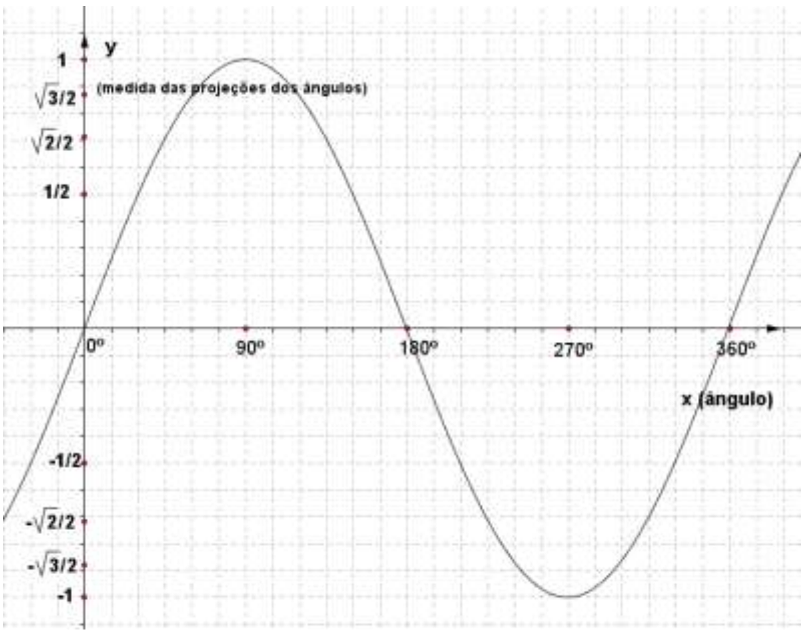
Para essa atividade, cada grupo, composto de três alunos, deveria observar a tabela construída na Atividade 1 e, de posse da circunferência trigonométrica na tela do computador, construir com o lápis, marcando os pontos no papel quadriculado, pontos estes cujas coordenadas são as projeções nos eixos e os ângulos. O objetivo desta atividade era a reconstrução da atividade da primeira sessão, pois os alunos tiveram como obstáculo a construção da circunferência trigonométrica utilizando o transferidor

Foi previsto para essa atividade a seguinte construção, conforme exibido no próximo quadro.

1º Gráfico, referente às projeções em x (abscissa) - cosseno



2ª Gráfico, referente às projeções em y (ordenada) - seno



Quadro 9 – resolução de parte da Atividade 1 – em grupo com o auxílio do Geogebra

4.6 Análise a posteriori do segundo instrumento

4.6.1 Atividade 1

Após a ambientação com o *software* Geogebra, os alunos em seus grupos começaram a familiarizar-se com o software. A construção da circunferência trigonométrica foi realizada sem muitas dificuldades, pois os alunos auxiliavam uns aos outros nos seus grupos e tinham o auxilio do pesquisador na mediação.

O próximo gráfico exibe o total de acertos e erros desta atividade, considerando quatro grupos, cada um composto de três pessoas.

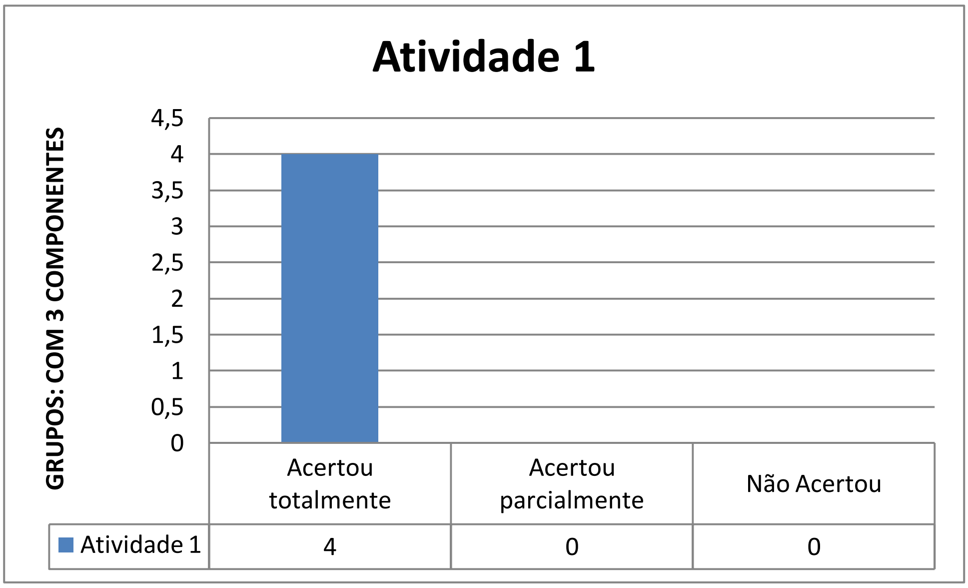


Gráfico 5 – Desempenho na primeira questão do segundo instrumento

Assim como na atividade equivalente do instrumento anterior, o termo "acertou parcialmente" significa que o estudante conseguiu construir a circunferência trigonométrica, mas não conseguir identificar a devidas projeções dos ângulos. Entretanto, não ocorreu qualquer erro na execução desta atividade. Pode-se observar uma considerável melhora na construção da tabela trigonométrica, já que as projeções eram determinadas com um simples movimento do ângulo, o que facilitou o processo. Todos os quatro grupos construíram a tabela trigonométrica corretamente. A atividade do presente instrumento foi utilizada como uma tentativa de trabalhar com o erro que alguns alunos tiveram no primeiro instrumento avaliativo, propondo uma estratégia pedagógica diferente, onde os alunos trabalhariam em grupos, fazendo assim um debate sobre o conhecimento já visto anteriormente de forma a concluir com maior propriedade o significado dessa construção.

Como exemplo, pode-se observar o registro do grupo G3, composto pelos alunos F, K e L.

ÂNGULO		0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
PROJEÇÃO	x	1	0,9	0,7	0,5	0	-0,5	-0,7	-0,9	-1
	y	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0

ÂNGULO		210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
PROJEÇÃO	x	-0,9	-0,7	-0,5	0	0,5	0,7	0,9	1
	y	-0,5	-0,7	-0,9	-1	-0,9	-0,7	-0,5	0

Figura 22 – Registro do grupo G3

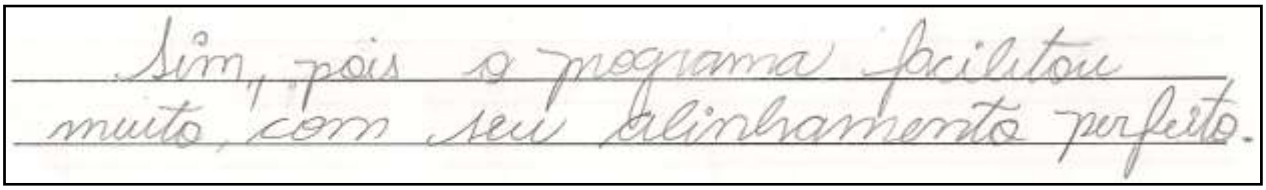
Após a construção, por parte dos quatro grupos, os mesmos foram questionados sobre a facilidade no entendimento com o auxilio do software Geogebra através da seguinte pergunta: "A construção com o GeoGebra facilitou seu entendimento? Explique o seu ponto de vista". Em seguida, estão os registros feitos pelos grupos.

Facilitou sim, pois mostra os pontos exatos das projeções e os ângulos.

Figura 23 – Registro escrito do Grupo13

O grupo G1, formado pelos alunos A, G e I, comenta sobre a facilidade que o software Geogebra proporcionou, ao mostrar os pontos exatos das projeções dos ângulos nos eixo, conforme pode ser conferido no registro da Figura 23.

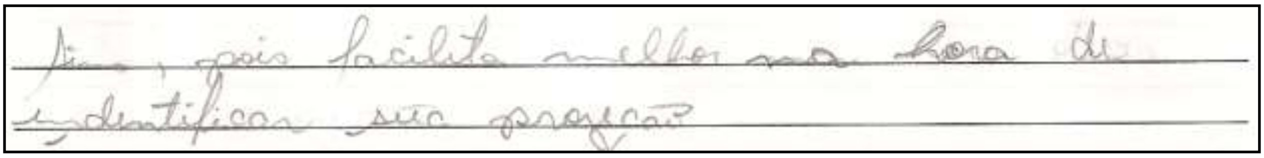
O grupo G2, formado pelos alunos C, E e J observa o alinhamento que o software faz entre o ângulo e a projeção, concluindo que foi um fator que facilitou a conclusão correta da atividade .



Sim, pois o programa facilitou muito, com seu alinhamento perfeito.

Figura 24 – Registro escrito do Grupo 2

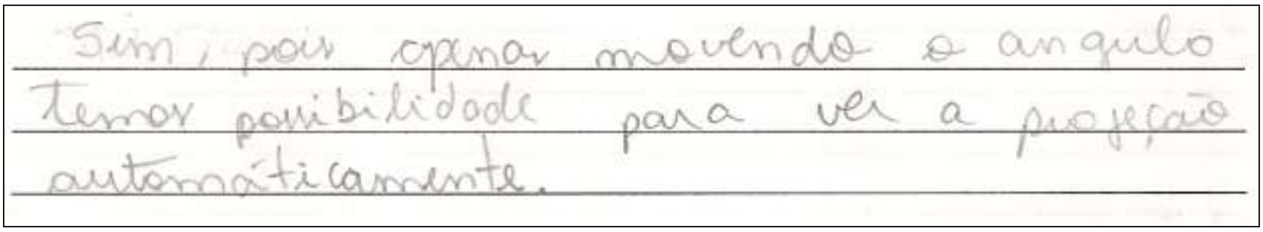
O grupo G3, formado pelos alunos F, K e L, destaca que o programa facilitou a identificação das projeções.



Sim, pois facilita melhor na hora de identificar sua projeção

Figura 25 – Registro escrito do Grupo 3

O grupo G4, formado pelos alunos B, D e H, comenta sobre o recurso que o software tem em relação ao dinamismo, isto é, ao mover o ponto C, o ângulo formado pelos pontos BÂC é alterado, dando as projeções respectivas aos ângulos a serem identificados.



Sim, pois apenas movendo o angulo temos possibilidade para ver a projeção automáticamente.

Figura 26 – Registro do Grupo 4

4.6.2 Atividade 2

Nesta atividade, também, todos construíram os gráficos corretamente. A construção da circunferência trigonométrica e as determinações exatas das projeções favoreceram para que os estudantes concluíssem essa atividade. Bastava mover o ponto C do ângulo formado pelos pontos BÂC na circunferência trigonométrica, realizado na primeira atividade e a projeção aparecia corretamente, identificando a projeção relativa a esse ângulo.

Em depoimento, registrado na gravação de áudio, todos concordaram com a facilidade de construir a circunferência trigonométrica utilizando o *software.* Neste aspecto, percebeu-se que as características da interface, em conjunto com a estratégia pedagógica utilizada, fomentaram de forma bastante positiva o trabalho dos grupos no que se refere à construção dos gráficos. Isto permitiu recuperar questões relativas aos erros cometidos nas construções anteriores. Não ocorreram, desta forma, novos erros. Alguns fatores foram importantes para esta ocorrência:

- O trabalho colaborativo dentro dos grupos, como já recomendava Oliveira (2009a);
- A abordagem que permitiu, nas atividades e discursos – enfim, na estratégia pedagógica – a recuperação das dificuldades apresentadas e sua análise a partir do ambiente dinâmico (Perrenoud, 2000; Brousseau, 2001);
- O encadeamento das atividades, típica do planejamento, que permitiu criar uma ambiência para a construção do conhecimento. Uma vez que a tabela anterior havia sido grafada corretamente, os gráficos também ficaram corretos (Oliveira, 2009a) – ver gráficos seguintes.

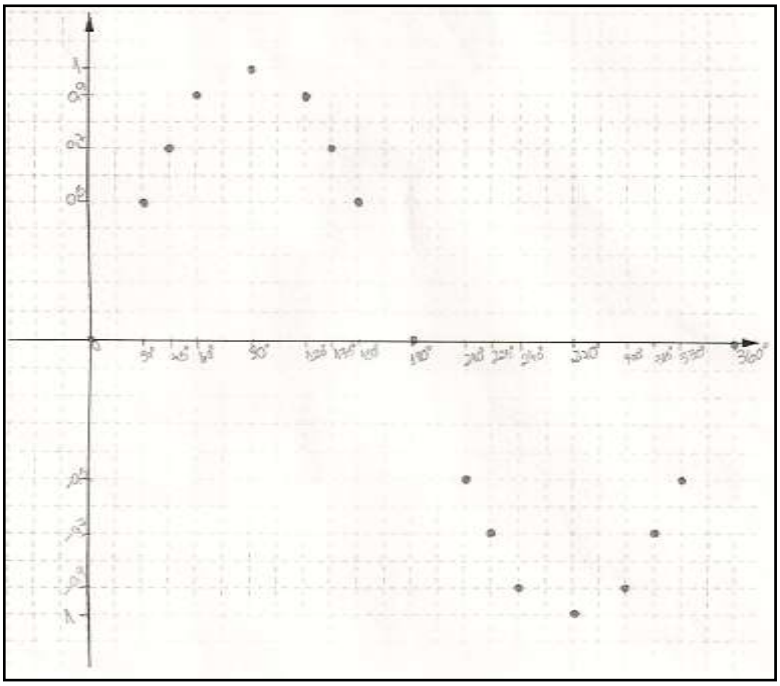


Figura 27 – Registro gráfico do grupo G1

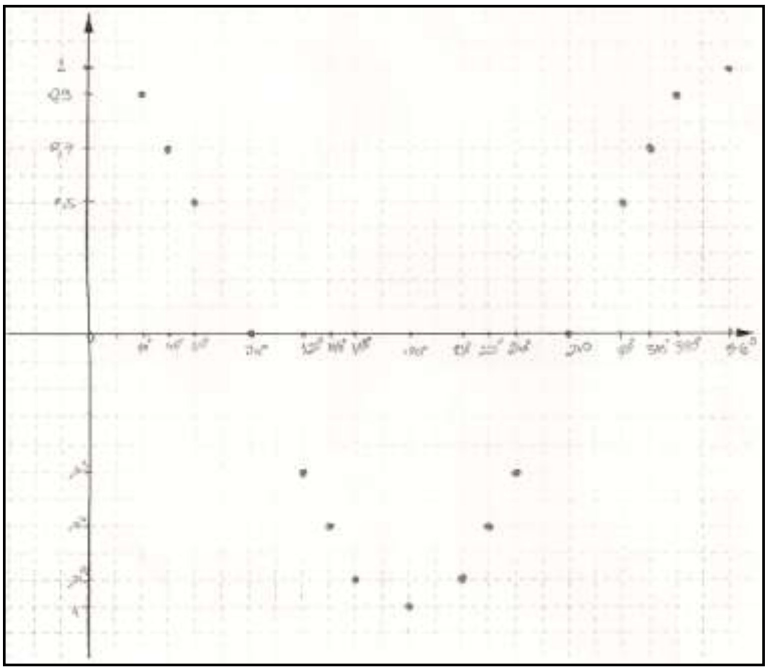


Figura 28 – Registro gráfico do grupo G2

Essa atividade foi realizada com muita facilidade pelos alunos, que comentaram de maneira bastante ampla com relação ao progresso que tiveram desde a primeira atividade, no ambiente lápis e papel. Não obstante, relataram que a fase relativa ao trabalho com a primeira atividade foi fundamental para que a segunda, usando o Geogebra, complementasse a compreensão. Percebe-se pelos gráficos construídos pelo G1 (grupo 1) e G2 (grupo 2) a evolução em relação a atividade 3 do primeiro instrumento. Os alunos utilizaram pontos discretos para criarem os gráficos, o que foi considerado correto, conforme já mencionado na seção 4.2.3.

Nas gravações de áudio, foi possível coletar, nos depoimentos dos alunos, que os mesmos acharam bastante fácil a marcação dos pontos e que haviam entendido que o gráfico das projeções em *x* era a curva da função cosseno e o gráfico das projeções em *y* era a curva da função seno.

CAPITULO V

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As pesquisas em Educação Matemática sobre o uso da tecnologia como um recurso mediador das relações de aprendizagem nas escolas públicas de ensino básico, sob o ponto de vista de integrarem uma estratégia pedagógica mais ampla, permanecem, ao mesmo tempo, como um recurso importante e como um grande desafio para professores, pesquisadores e gestores do sistema de ensino. Podem ser recursos à medida que passem a ser utilizadas pelos docentes como fontes de estudo e de criação de estratégias pedagógicas, para as quais diversas tecnologias podem ser empregadas. Não cabe aqui discutir a fundo a questão da formação dos professores para a criação de semelhantes estratégias, mas é importante assinalar que as tecnologias não podem ser inseridas no processo sem esta característica mediadora, sem o planejamento devido, sem o conhecimento de causa por parte dos professores, que excedem a visão de meros consumidores de recursos tecnológicos para se tornarem agentes de orientação, de criação e de refinamento de estratégias de aprendizagem significativas. Permanecem como desafios quando se depara com a necessidade de divulgá-las amplamente, e de produzir pesquisas que realmente conduzam material relevante para o trabalho docente, sem procurar repetir fórmulas ou aderir a discursos dogmáticos (Oliveira, 2009a).

O presente trabalho consistiu em analisar o quanto é relevante o uso do *software* de Geometria Dinâmica Geogebra na aprendizagem significativa, em continuidade de atividades realizadas inicialmente com lápis, papel, régua e transferidor. Todo este instrumental é composto por diferentes tecnologias, estáticas e dinâmicas, que compõem uma estratégia pedagógica destinada a incentivar, por parte dos estudantes, a formação de uma aprendizagem significativa sobre os tópicos de trigonometria na circunferência (Ausubel, 2003; Oliveira, 2009a).

As conclusões aqui apresentadas resultaram das análises dos protocolos dos alunos, bem como de suas reflexões durante a resolução das atividades.

Na atividade sobre a construção da circunferência trigonométrica utilizando lápis, transferidor e papel, ficou evidente que os alunos tinham dificuldades para trabalhar com o transferidor, ou não lembravam mais como utilizar essa ferramenta. Não foi possível posicionar com precisão, nesta pesquisa, se as dificuldades de aprendizagem eram mais relativas aos conteúdos de trigonometria ou relativos à manipulação dos instrumentos tecnológicos tradicionais, o transferidor em especial. Entretanto, esta ocorrência parece indicar que deve haver uma preocupação com a contemporaneidade da tecnologia usada, ou seja, com sua atualidade, com o uso cotidiano que os sujeitos dela fazem (ou não fazem), sem que isso leve a descartar qualquer uma que seja, mas a pensar no seu uso, na instrução sobre sua manipulação, enfim, na competência para usá-la bem, sem o que ela mesma pode representar um obstáculo na aprendizagem. Neste particular, estas considerações vêm apoiar, no campo empírico, as asserções teóricas de Oliveira (2009a), Kenski (2007), Borba e Penteado (2001) e Borba, Malheiros e Zulatto (2008), entre outros, sobre a pertinência do preparo para usar tecnologias. É preciso compreensão e fluência para as tecnologias computacionais, digitais e eletrônicas. Contudo é preciso não esquecer aquelas outras tecnologias ditas tradicionais, sobre as quais se pode achar, erroneamente, que todos já dominam.

De toda maneira, com relação ao conteúdo, a pretensão de produzir aprendizagem significativa (Ausubel, 2003) pareceu surgir consolidada com o emprego da estratégia pedagógica que aproveitou, nas atividades do segundo instrumento, os erros cometidos no primeiro, ressignificando-os a partir de nova abordagem, com outras interfaces (Perrenoud, 2000; Oliveira, 2009a). Cada etapa revelou-se importante – na recuperação das falas dos estudantes, todos os elementos somaram ao longo da estratégia e, ao acertar, os alunos não só compreenderam onde erraram, como consolidaram o conhecimento pretendido.

Na primeira atividade, mostrou-se que apenas uma parte dos sujeitos conseguiu construir a circunferência trigonométrica e transpor os dados das projeções dos ângulos para a tabela de forma correta. A atividade requeria concentração e paciência, pois era muito demorada e minuciosa. Na consolidação dos gráficos, porém, nenhum aluno acertou. O objetivo desta atividade era o de verificar os conhecimentos subsunçores que iriam ancorar novos conhecimentos potencialmente significativos na estrutura cognitiva dos alunos (Ausubel, 2003). Apesar de já terem estudado a trigonometria no triângulo retângulo e na circunferência trigonométrica, os alunos demonstraram, em sua grande maioria, que não lembravam exatamente do que se tratava e não tinham habilidades em manipular o transferidor. Então, a pretensão de uso dos conhecimentos prévios para ancorar futuros aprendizados foi apenas parcialmente atingida.

Não era de fato esperado o que acabou acontecendo – foi o conjunto dos instrumentos, com base na estratégia pedagógica que usou várias tecnologias e o erro de forma reconstrutiva, que permitiu fazer ligação entre um conhecimento já presente na estrutura cognitiva e novos conhecimentos a serem assimilados, quais sejam, neste caso, as funções trigonométricas. Assim, uma importante consideração desta pesquisa é a de que a estratégia aqui apresentada, como um todo, pode representar importante recurso para mobilizar conhecimentos matemáticos prévios (subsunçores). Em seguida, seria necessário elaborar outra estratégia, em continuidade a esta e ligada a ela, para o estudo das funções trigonométricas. Semelhante indicação fica aqui como recomendação para futuras perquirições.

De fato, o segundo instrumento foi uma reaplicação do primeiro, especificamente no que respeita à primeira e à terceira atividades dessa sessão, que abordavam a construção da circunferência trigonométrica, a transposição das projeções na tabela trigonométrica e a construção dos gráficos. Os resultados do primeiro instrumento não permitiram perceber os conhecimentos como consolidados na estrutura cognitiva dos sujeitos – e eram atividades de extrema relevância para a construção dos significados das funções trigonométricas. Pode-se observar, entretanto, que houve um avanço significativo nos resultados depois da realização do segundo instrumento. Esse instrumento, realizado em grupos de três alunos teve resultados bastante importantes, do ponto de vista da investigação, uma vez que todos os grupos construíram perfeitamente a circunferência trigonométrica no *software* Geogebra e conseguiram visualizar as projeções com maior facilidade. Em complemento, um fato de não menor importância: os estudantes compreenderam que as projeções em x são os valores do cosseno e as projeções em y são os valores do seno de um ângulo, quando compararam a tabela de ângulos notáveis com a tabela construídas por eles.

A utilização do *software* Geogebra foi imprescindível para a aprendizagem significativa, facilitando a construção da circunferência e complementando a estratégia iniciada nos instrumentos estáticos. A precisão das medidas das projeções, feitas no Geogebra, proporcionou que os alunos fizessem uma ligação do conhecimento antigo, isto é, a construção da circunferência trigonométrica, atividade três do primeiro instrumento, com a mesma atividade do segundo instrumento. Ao realizar a segunda atividade do segundo instrumento, o aluno já tinha na sua estrutura cognitiva algumas idéias sobre o assunto: assim, as atividades nas quais tiveram dificuldades e em que cometeram erros, foram recuperadas de forma significativa com a continuidade do processo pedagógico (Ausubel, 2003; Perrenoud, 2000). Diante do resultado positivo desse segundo instrumento avaliativo, pode-se dizer que a aprendizagem foi significativa, não apenas porque os alunos acertaram as questões propostas, mas porque conseguiram construir um conhecimento a partir da estratégia pedagógica da qual participaram, o qual, por sua vez, servirá de base para novas conquistas cognitivas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática,** n. 121. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva.** Tradução de Teopisto. L, Revisão científica Teodoro, V.D. Editora Plátano. 1ª edição PT – 467 – Janeiro de 2003.

BORBA, Marcelo C; MALHEIROS, Ana P.S; ZULLATO, Rúbia B.A. **Educação a distância online**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

BORBA, Marcelo C; PENTEADO, Miriam G. **Informática e educação matemática**. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** Brasília, v. 2, 2006

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto (MEC). Parâmetro Curriculares Nacionais, terceiro e quatro ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnologia. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Ensino Médio. Brasília 1999.

BROUSSEAU, Guy. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Orgs). **Didática da Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

BORGES, Carlos Francisco. **Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico: uma sequência para ensino.** Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 2009.

CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions, 1991.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo. **Funções Seno e Cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do mundo experimental e do computador.** Dissertação de mestrado, PUC/SP, São Paulo, 1997.

D' AMBRÓSIO, U. **Tecnologias de informação e comunicação: reflexos na matemática e no seu ensino.** Palestra de encerramento na Conferência de 10 anos do GPIMEM. Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática, UNESP, Rio Claro, SP, 05-06 de dezembro de 2003.

DIOGO, Marcelio Adriano. **Problemas Geradores no ensino-aprendizagem de matemática no ensino médio.** Dissertação de Mestrado, UFRGS, Porto Alegre, 2007

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FILHO, Benigno Barreto; SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática: Aula por aula.** São Paulo, Editora FTD, 2003.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática Completa.** São Paulo, Editora FTD, 2005.

GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica: Uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. VII simpósio Brasileiro de informática na Educação, Belo Horizonte, MG, 1996.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA; Nilze de. **Matemática: Ciências e Aplicações**. São Paulo, Editora Atual, 2004.

JONASSEN, D. H. **Handbook for educational communications technology**. New York: Simon & Schuster Macmillan, 1996.

KENSKI, Vani M. **Educação e Tecnologias: O novo ritmo da informática.** Campinas, SP: Papirus, 2007.

KENSKI, Vani M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. Campinas: Papirus, 2003.

LÉVY, P. **As Tecnologias da Inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. Tradução de: Carlos Irineu da Costa. São Paulo: Editora 34, 1993.

MARTINS, V. L. O. F. **Atribuindo significado ao Seno e Cosseno utilizando o software Cabri Gèométre.** Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 2005.

MOREIRA, Marco A. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora UnB, 2006.

MOREIRA, Marco A; MASINI, Elcie. F.S. **Aprendizagem Significativa: A teoria de David Ausubel.** São Paulo: Moraes, 1992.

OLIVEIRA, Gerson P. Estratégias didáticas em educação matemática: as tecnologias de informação e comunicação como mediadoras. **Anais do IV Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – IV Sipem**. Brasilia: SBEM, 2009. 1 CD-ROM.

______________. Transposição didática: aportes teóricos e novas propostas. In: Geraldina Porto Witter; Ricardo Fujiwara. (Org.). **Ensino de ciências e matemática**: análise de problemas. São Paulo: Ateliê Editorial, 2009, v. 1.

______________. **Avaliação em cursos on-line colaborativos: uma abordagem multidimensional,** tese de doutorado, USP, São Paulo, Abril de 2007.

______________.**Estratégias didáticas com uso de Tecnologias de Informação e Comunicação: crítica e reflexão em Educação Matemática.** Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2008.

______________.**Generalização de padrões, pensamento algébrico e notações: o papel das estratégias didáticas com interfaces computacionais.** Educação Matemática Pesquisa, PUC/SP, São Paulo, v. 10, n.2, PP. 295-312, 2008.

PERRENOUD, Phillippe. **Dez novas competências para ensinar**. Porto Alegre: Editora Artmed, 2000.

SÃO PAULO. SECRETARIA DO ESTADO DA EDUCAÇÃO. **Proposta curricular do estado de São Paulo**: Matemática. Coord. Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2008.

SILVA, Sílvio Alves. **Trigonometria no triângulo retângulo: construindo uma aprendizagem significativa.** Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 2005.

SMITH, D.E. History of mathematics. New York: Dover Publications, iNC, v.1, 1958.

SORMANI, J. C. **Um estudo exploratório sobre o uso da informática na resolução de problemas trigonométricos.** Dissertação de Mestrado, Bauru, UNESP, 2006.

SOUSA, M.C. Quando a História da Matemática passa a ser Metodologia de Ensino. *Anais do 16º Congresso de Leitura do Brasil*. Campinas: ALB/UNICAMP, 2007.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas.** Trad. De J. C. Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva 1992.

TOGNI, Ana Cecília. **Construção de funções em matemática com o uso de objetos de aprendizagem no ensino médio noturno.** Tese de doutorado, UFRGS, Porto Alegre 2007.

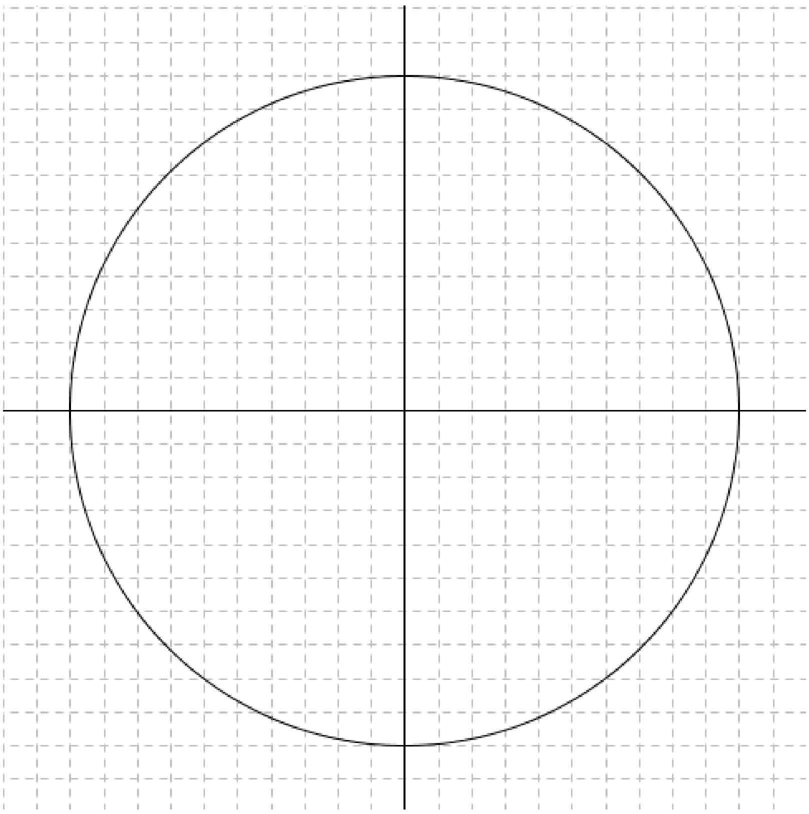
Atividades do primeiro instrumento

E.E. “Prof. Ernesto Quissak”

Nome:____Série_________

Atividade 1

Utilizando o transferidor e uma régua, marque, na circunferência, os ângulos indicados na tabela abaixo. Em seguida, complete a tabela com as projeções destes ângulos sobre os eixos das abscissas e das ordenadas. Considere para cada unidade o valor 0,1.



ÂNGULO		0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
PROJEÇÃO	x									
	y									

ÂNGULO		210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
PROJEÇÃO	x								
	y								

a) Existem ângulos diferentes que têm, em sua projeção no eixo, a mesma medida. Identifique-os.

____
____
____
____
____

b) A projeção de um mesmo ângulo, em relação aos eixos x e y, podem ter a mesma medida. Identifique estes ângulos.

____
____
____
____
____

c) Observando as medidas dos ângulos que você relacionou aos eixos e refletindo com as afirmações dos itens a e b, escreva o que você conseguiu assimilar.

____
____
____
____
____

Atividade 2

Sabendo que

	30º	45º	60º
seno	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,7$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,87$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,87$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,7$	$\frac{1}{2} = 0,5$

Complete a mesma tabela anterior, só que agora usando os números fracionários.

ÂNGULO		0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
PROJEÇÃO	x									
	y									

ÂNGULO		210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
PROJEÇÃO	x								
	y								

Reflexão:

a) Observando a tabela dos valores de seno e cosseno, que você já conhece, fazendo uma associação com os valores da tabela da primeira atividade, o que você consegue concluir?

____

____

____

____

____

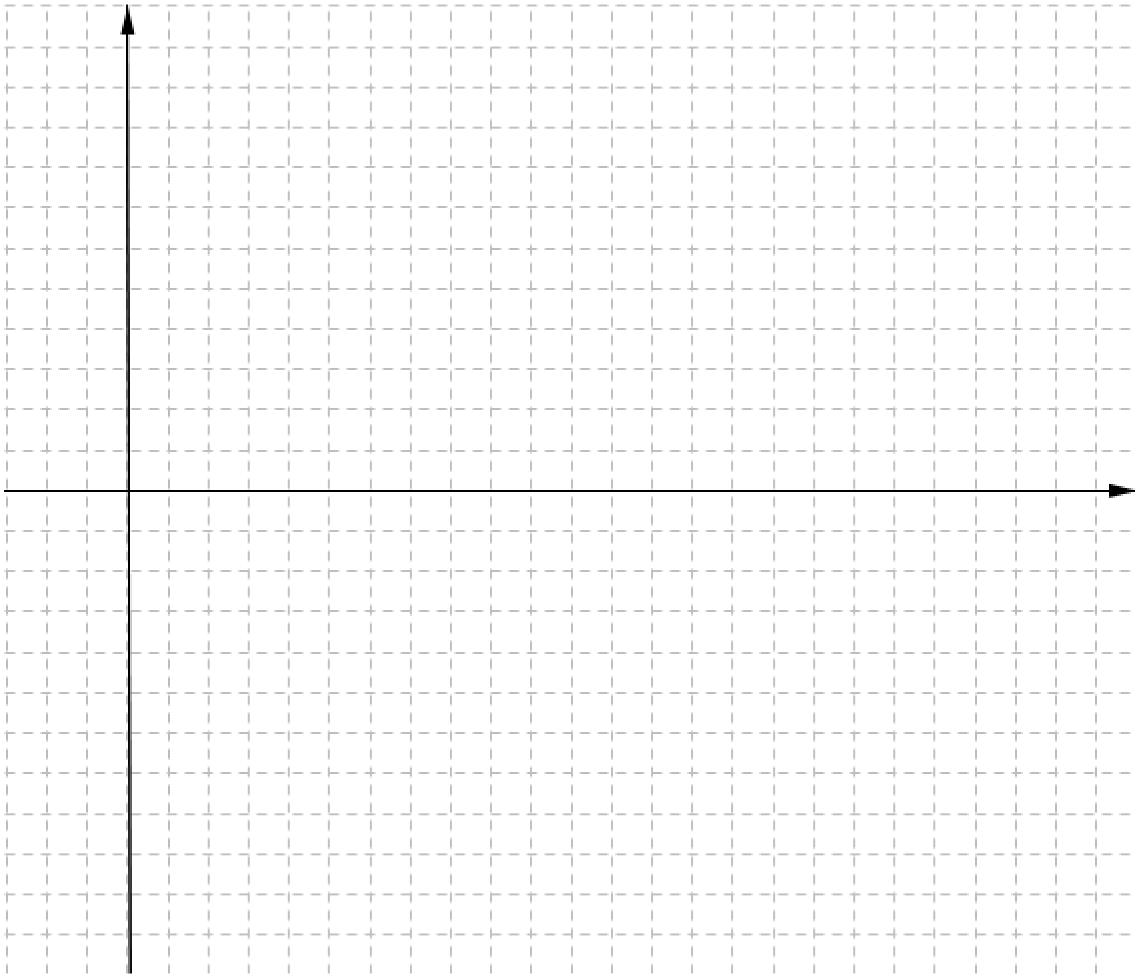
____

____

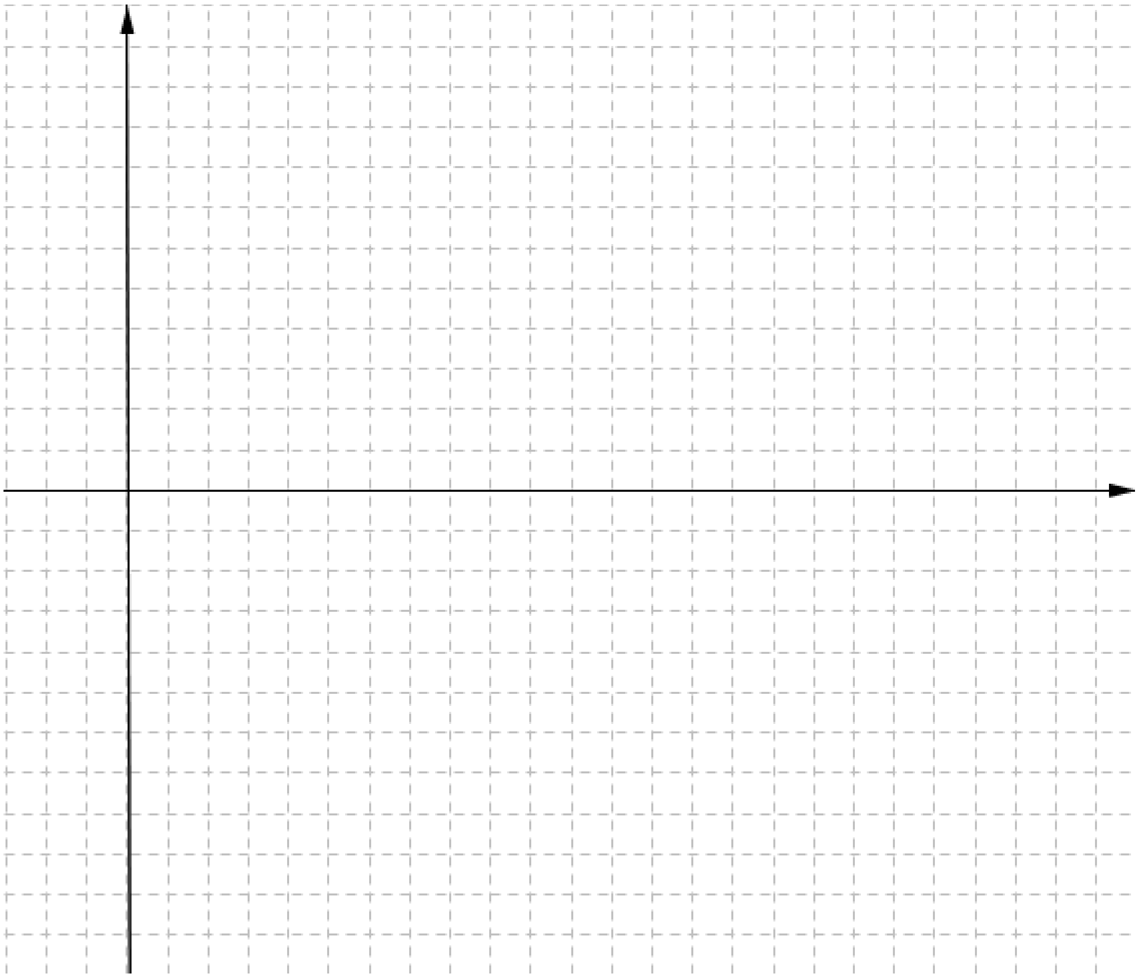
Atividade 3

Vamos construir gráficos! A partir da tabela da atividade 2, construa um gráfico para os valores de seno e um gráfico para os valores de cosseno, considerando o eixo x (abscissa) para as notações em graus e o eixo y (ordenadas) para os valores das projeções dos ângulos.

1ª Gráfico, referente às projeções em x (abscissa)



2ª Gráfico, referente às projeções em y (ordenada)



Reflexão:

a) Observando os gráficos, você pode concluir alguma particularidade?

Atividade 4

O ângulo pode ser medido em graus (º) e também em radianos (rad). Um radiano é a medida de um arco de comprimento igual ao do raio da circunferência. Em uma circunferência de Centro O e raio R, tem-se aproximadamente 3,14 radianos em sua meia volta, isto é, um arco de meia volta mede $1\pi\ rad.$ Três medidas do raio mais 0,141592... de um raio.

Com base nesse conceito, faça a conversão de graus para radianos. Sabendo que $1\pi\ rad$ equivale a 180º. Então quanto vale:

a) 30º b)45º c)60º d)90º e)270º f)360º

Atividades do segundo instrumento

Nome:____

Atividade com o Software GeoGebra

Atividade 1

Vamos construir o ciclo no Software GeoGebra! Em seguida, complete a tabela com as projeções destes ângulos sobre os eixos das abscissas e das ordenadas.

ÂNGULO		0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
PROJEÇÃO	x									
	y									

ÂNGULO		210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
PROJEÇÃO	x								
	y								

a) A construção com o GeoGebra facilitou o entendimento? Explique seu ponto de vista.

____

____

____

____

____

____

____

____

Atividade 2

Sabendo que

	30º	45º	60º
seno	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}7$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}87$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}87$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}7$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$

Complete a mesma tabela anterior, só que agora usando os números fracionários.

ÂNGULO		0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
PROJEÇÃO	x									
	y									

ÂNGULO		210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
PROJEÇÃO	x								
	y								

Reflexão:

b) Observando a tabela dos valores de seno e cosseno, que você já conhece, fazendo uma associação com os valores da tabela da primeira atividade, o que você consegue concluir?

____

____

____

____

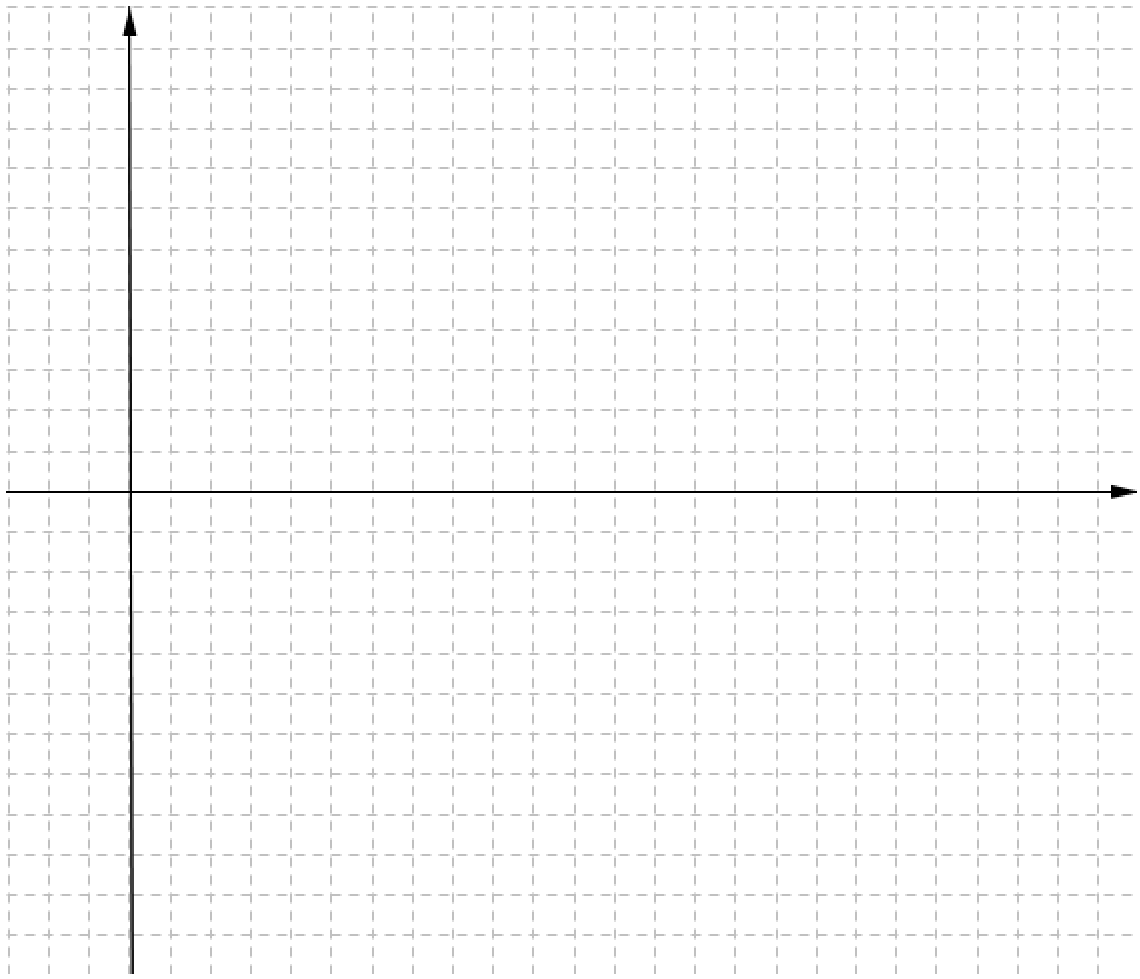
____

____

____

Atividade 3

Vamos construir gráficos! A partir da tabela que você construiu com auxilio do software GeoGebra.



2ª Gráfico, referente às projeções em y (ordenada)