PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Mariucha Baptista de Paula

PROPORCIONALIDADE: UMA ANÁLISE DO CADERNO DO PROFESSOR – 7º ANO (ANTIGA 6ª SÉRIE) - DA PROPOSTA IMPLEMENTADA PELA SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO NO ANO DE 2008

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2009

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Mariucha Baptista de Paula

PROPORCIONALIDADE: UMA ANÁLISE DO CADERNO DO PROFESSOR – 7º ANO (ANTIGA 6ª SÉRIE) - DA PROPOSTA IMPLEMENTADA PELA SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO NO ANO DE 2008

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini.**

São Paulo

2009

Banca Examinadora

_____

_____

_____

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

Dedico à Minha Família

Especialmente ao meu marido, Isaias e meu filho Caio, aos meus pais Mario e Marli, aos meus avós e padrinhos José (em memória), Lázara (em memória) e aos meus avós Daniel (em memória) e Lúcia (em memória).

Agradecimentos

À minha orientadora Profa. Dra. Bárbara Lutaif Bianchini pela dedicação, orientação, compreensão, companheirismo e dedicação ao longo da elaboração desse trabalho.

À Profa. Dra. Célia Maria Carolino Pires e à Profa. Dra. Auriluci de Carvalho Figueiredo por aceitarem fazer parte da banca examinadora e pelas valiosas contribuições no exame de qualificação.

A todos os professores, coordenadores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP, pelo convívio, discussões e incentivo.

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo pela concessão da bolsa de estudos para realização desse curso.

Aos meus irmãos (Milena, Mario e Mireia), cunhados (Clederson, Renata, Davi, Daniel, Angélica e Tiago), sogros (Alaba e Dirce) e aos mais que amigos (Erica, Marco, Márcia, Luiz, Mariana e Rodolpho) que toleraram minha falta em momentos importantes, em razão da produção deste trabalho.

Aos amigos do curso Adriana, Ana Paula, Ariovaldo, Carlos, Denílson, Ligia, Patrick, Rogério, Rubens e em especial a minha amiga Claudia Vicente de Souza, pelos momentos compartilhados para a realização deste mestrado.

À direção, professores e funcionário da E. E. Ataulpho Alves e E. E. José Righetto Sobrinho pelo companheirismo e em especial a Maria Luiza dos Santos.

Ao professor José Marcelo Pavanelli pela ajuda na confecção do abstract.

A todos que contribuíram para a realização deste trabalho, especialmente ao meu marido Isaias e meus pais Marli e Mario.

"É preciso amar as pessoas
Como se não houvesse amanhã
Porque se você parar
Prá pensar
Na verdade não há".

(Renato Russo)

PAULA, Mariucha Baptista de. **Proporcionalidade: uma análise do caderno do professor – 7º ano (antiga 6ª série) – da proposta implementada pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo no ano de 2008.** Dissertação (mestrado profissional em Ensino de Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil, 2009, 122f.

RESUMO

O objetivo dessa pesquisa é realizar uma análise do caderno do professor do 3º bimestre do 7º ano (antiga 6ª série) do Ensino Fundamental do Ciclo II fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo no ano de 2008, enfocando o tema proporcionalidade, pesquisa essa realizada nas Situações de Aprendizagem 1 e 2 do referido material visando quais tipos de problemas multiplicativos e quais abordagens de ensino as mesmas possuem. Metodologicamente nosso trabalho é de cunho documental e bibliográfico, no qual foi realizado um levantamento nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ciclo II e nas Propostas Curriculares do Estado de São Paulo dos anos de 1986 e 2008. Também foi realizado um levantamento de outras pesquisas sobre proporcionalidade; porém, quase não verificamos a existência de análise de material didático. Para embasar nossa análise, utilizamos como referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais das Estruturas Multiplicativas, propostas por Gérard Vergnaud (1991). Como resultado de nossa pesquisa, observamos que na Situação de Aprendizagem 1 existe uma diversidade de problemas multiplicativos, sendo também verificada a existência de uma atividade desconectada de seu objetivo, porém esse fato não prejudicou no desenvolvimento das atividades. Na Situação de Aprendizagem 2 não observamos a mesma diversidade de problemas multiplicativos, ressaltamos que o ensino de razão foi privilegiado em relação ao de proporção. Notamos a existência de dois tipos diferentes de abordagem quanto ao ensino de proporcionalidade, a primeira no qual se enfoca o estudo do tema por meio de situações que envolvam as grandezas diretamente e inversamente proporcionais e, a segunda, visando o estudo do objeto matemático razão e proporção.

Palavra-chave: Proporcionalidade, Educação Matemática, Material Didático, Educação Algébrica.

PAULA, Mariucha Baptist. **Proportionality: an analysis of the teacher's book – 7th year (6th grade) – from the proposal implemented by the Education Department of the State of Sao Paulo in 2008.** Dissertation (Master's courses in Teaching Mathematics). PUC / SP, São Paulo, Brazil, 2009, 122f

ABSTRACT

The objective of this research is to conduct an analysis of the teacher's book 3 of the third bimester of the 7th year (former 6th grade) of the Elementary School Cycle II provided by the Education Department of the State of Sao Paulo in 2008, focusing on the theme of proportionality, search held in the Learning Situations 1 and 2 of that material aimed at what types of problems multiplicative and what teaching approaches they have. Methodologically our work is of a documentary and literature, in which a survey was conducted in the National Curriculum Parameters Cycle II and Curriculum Proposals in the State of São Paulo in 1986 and 2008. Was also made a survey of other research on proportionality, however we almost did not notice the existence of analysis of material. To base our analysis, we used as a theoretical framework Conceptual Fields Theory of Multiplicative Structures proposed by Gérard Vergnaud (1991). As a result of our research, we found that in Learning Situation 1 there is a multiplicative range of problems, and also verified the existence of an activity disconnected from its purpose, but this fact did not hamper the development of activities. In the Learning Situation 2, we did not observe the same diversity of multiplicative problems, we emphasize that the teaching of proportion was preferred over the ratio. We noticed the existence of two different types of approach to the teaching of proportionality, the first of which focuses on the study of the subject throughout the situations involving the quantities directly and inversely proportional and, second, in order to study the mathematical object and ratio proportion.

Keyword: Proportionality, Mathematics Education, Teaching Materials, Education Algebraic.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **11**

Objetivo, Justificativa e Problemática **13**

CAPÍTULO 1

1 PROPORCIONALIDADE E OS DOCUMENTOS OFICIAIS **25**

1.1 O Conteúdo Proporcionalidade e os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental do Ciclo II **25**

1.2 Estrutura da Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 1986 ..... **27**

1.3 Estrutura da Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 2008 ..... **31**

1.4 Estrutura da Proposta Curricular de Matemática **33**

1.5 Estrutura do Caderno do Professor – Matemática – 3º Bimestre - 7º ano do Ensino Fundamental do Ciclo II **36**

1.6 Comparando as Propostas Curriculares de 1986 e 2008 ..... **38**

1.7 Proporcionalidade em outras pesquisas **39**

CAPÍTULO 2

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA **49**

2.1 Os Problemas de Estrutura Multiplicativa **49**

2.1.1 Isomorfismo de Medidas **50**

2.1.2 Produto de Medidas **53**

2.1.3 A Noção de Dimensão **55**

CAPÍTULO 3

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 57

3.1 Metodologia da Pesquisa 57

CAPÍTULO 4

4 ANÁLISE DOS DADOS 61

4.1 Descrição da Situação de Aprendizagem 1 e 2 62

4.2 Análise da Situação de Aprendizagem 1: A Noção de Proporcionalidade 63

4.2.1 Análise da Categoria 1 - Problemas Envolvendo o Reconhecimento da Proporcionalidade e Seus Limites 64

4.2.2 Análise da Categoria 2 - Problemas Envolvendo Jogo 67

4.2.3 Análise da Categoria 3 - Problemas Envolvendo Variação de Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais 68

4.3 Análise da Situação de Aprendizagem 2: Razão e Proporção 73

4.3.1 Análise da Categoria 4 – Problemas Envolvendo o Cálculo de Razão 73

4.3.2 Análise da Categoria 5 – Problemas Envolvendo o Cálculo de Razão em Situações Contextualizadas 77

4.3.3 Análise da Categoria 6 – Problemas Envolvendo o Cálculo de Probabilidade 79

4.4 Resumo das Análises 80

Considerações Finais 83

Referências 87

Anexos 89

INTRODUÇÃO

O tema proporcionalidade, atualmente, está presente no ensino de várias disciplinas. Por exemplo, no caso da Geografia, temos a densidade demográfica e escalas de mapas; em Ciências, temos a velocidade, pulsação, densidade. O mesmo continua presente no ensino de matemática desde as séries iniciais do Ensino Fundamental como nas séries finais do Ensino Médio, ou seja, torna-se, assim, um conteúdo de extrema importância na disciplina de Matemática.

Como professora da rede de ensino estadual de São Paulo desde o ano 2000, sempre estive preocupada com as mudanças metodológicas do ensino. Em 2008, assumi a atividade de professora coordenadora, cargo esse que ocupo atualmente, no qual me deparei com uma nova proposta curricular e um novo material didático disponível para os professores em 2008 e apresentado para os alunos em 2009.

Foi então que surgiu o meu questionamento para realizar essa pesquisa e, assim, destacar as seguintes questões: Será que realmente essa proposta é nova? Será que o material disponível realmente auxilia o ensino dos conteúdos? Com embasamento nesses questionamentos, o meu projeto de pesquisa de mestrado foi sendo construído.

Destacando assim o meu objetivo pessoal e acadêmico em poder concretizar minha participação no Programa de Mestrado, teve início em um grupo, do qual fiz parte no ano de 2006, conhecido na rede de ensino da prefeitura de São Paulo como grupo de referência, grupo esse que tinha como objetivo a elaboração de um caderno de orientações didáticas e, para poder realizar o nosso objetivo, tínhamos que elaborar uma seqüência didática, aplicá-la e relatá-la, destacando as suas facilidades e dificuldades no aprendizado.

Em relação à presente pesquisa, iniciamos a partir dos baixos índices apresentados pelos alunos do 7º ano (antiga 6ª série) no SARESP/2008. Para isso, fizemos um levantamento das questões que foram apresentadas na resolução do tema proporcionalidade e que descrevemos.

No capítulo 1, apresentamos um levantamento do tema proporcionalidade e os de documentos oficiais, que são eles: os Paramentos Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental do Ciclo II e as Propostas Curriculares do Estado de São Paulo dos anos de 1986 e 2008. Também é nesse capítulo que apresentamos outros estudos já realizados sobre o tema.

No capítulo 2, apresentaremos nosso referencial teórico, cujo embasamento dá-se na Teoria dos Campos Conceituais das Estruturas Multiplicativas proposta por Gérard Vergnaud (1991).

No capítulo 3, descrevemos nossa metodologia de pesquisa no qual detalharemos passo a passo como foi realizada a mesma. Ressaltamos que é nesse capítulo que apresentaremos as nossas questões de pesquisa.

No capítulo 4, descrevemos nossa análise do material fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo e que, para a realização do nosso estudo, foram criadas categorias a fim de subsidiar as análises.

Por fim, apontaremos as considerações finais da nossa pesquisa.

Objetivo, Justificativa e Problemática

A presente pesquisa está inserida no projeto “A Teoria Elementar dos Números no Ensino Básico e na Licenciatura”, que tem como uma de suas metas fornecer respostas à Educação Matemática sobre as possibilidades de restabelecer vínculo entre a aritmética e a álgebra ensinada no ensino básico e a teoria elementar dos números e a álgebra ensinada nos cursos superiores.

Esse projeto está inserido em outro projeto que tem como titulo “O que se entende por álgebra?”, do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA), projeto esse que tem como foco realizar estudos sobre a influência da álgebra no aprendizado da Matemática investigando suas dimensões, visões, tendências no ensino e seu impacto na aprendizagem, bem como as articulações das noções e concepções matemáticas de professores, alunos e também em documentos curriculares nos variados segmentos de ensino que contempla os conteúdos de números, equações e inequações.

A pesquisa tem como objetivo realizar uma análise do caderno do professor do 3º bimestre do 7º ano (antiga 6ª série) do Ensino Fundamental do Ciclo II fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo no ano de 2008, enfocando o tema proporcionalidade. Para tanto, será utilizado como referencial teórico os campos conceituais de Gérard Vergnaud (1991). Realizaremos um levantamento em documentos oficiais, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental do Ciclo II (1998) e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 1980 e 2008.

Atualmente, o conteúdo de proporcionalidade está previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental do Ciclo II (1998) e na Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008) para ser sistematizado a partir do 7º ano (antiga 6ª série).

Destacamos que o ensino desse conteúdo está relacionado com outros temas da Matemática, Física, Química e Biologia.

A palavra proporção vem do latim *pro portione*, que significa uma relação entre as partes de uma grandeza e consiste em relacionar duas razões dentro de uma igualdade criando, assim, um elo entre elas. (MACÊDO et al, 2007, p.18).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental do Ciclo II (1998), o professor necessita:

> Organizar seu trabalho de modo que os alunos desenvolvam a própria capacidade para construir conhecimentos matemáticos e interagir de forma cooperativa com seus pares, na busca de soluções para problemas, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 1998, p.63).

Proporcionalidade não é apenas um conteúdo matemático, mas sim pode auxiliar na formação de estruturas cognitivas para a compreensão de outros importantes conceitos matemáticos, tanto nas questões numéricas, como naquelas envolvendo medidas e geometria assumindo, assim o tema, inclusive, o papel de integralizador dessas atividades da matemática.

Assim, podemos destacar que a proporcionalidade é um tema integrador das diversas atuações da matemática. Ele aparece sob os mais distintos aspectos: ora em problemas aritméticos, como as de regra de três; ora em geometria, como no Teorema de Tales, em alguns momentos o aluno pode não perceber essa relação.

Um dos objetivos da matemática no Ensino Fundamental é a formação global do aluno. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental do Ciclo II (1998), os mesmos devem ser capazes de:

> - Compreender a cidadania como participação social e política assim como exercício de direitos e deveres políticos, civis e sociais, adotando, no dia-a-dia, atitudes de solidariedade cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro e exigindo para si o mesmo respeito.
> - Perceber-se integrante, dependente e agente transformador do ambiente, identificando seus elementos e as interações entre eles, contribuindo ativamente para a melhoria do meio ambiente.
> (BRASIL, 1998, p. 7).

O que implica assim, na necessidade do desenvolvimento intelectual dos alunos e uma preparação para uma atuação transformadora na realidade em que vive, em ambos os aspectos o papel do trabalho com proporcionalidade é relevante. Esse conceito está presente no dia-a-dia de qualquer pessoa, nas mais

diversas situações, seja ao interpretar um dado estatístico ou um gráfico, ou ao analisar uma planta de imóveis ou um mapa, como também calcular uma probabilidade, ampliar ou reduzir uma foto, etc.

Notamos que, desde o início o aluno começa a desenvolver a noção de proporcionalidade em diversas situações, principalmente nas ligadas aos preços, tornando, assim, o tema proporcionalidade um conceito amplo nas mais diversas áreas do conhecimento, entre elas a Geografia, a Economia, a Química, a Física, as Ciências da Natureza, a Estatística entre outras.

Na rede estadual de ensino de São Paulo, é aplicada desde 1997 uma avaliação conhecida como SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) nas áreas de Língua Portuguesa e Matemática. Segundo a Secretaria de Educação:

> Além de subsidiar a definição e as ações políticas para a melhoria da qualidade da educação, essas avaliações oferecem aos alunos, professores, dirigentes escolares, pais de alunos e à sociedade em geral, um balanço do desempenho escolar dos alunos, apontando para as competências bem desenvolvidas e detectando aquelas que devem tornar-se objetos de ações pedagógicas específicas. (SÃO PAULO, 2008d, p.8).

Em 2008, ocorreu a 11ª edição do SARESP quando realizaram a prova alunos de 2ª, 4ª, 6ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e o 3º ano do Ensino Médio. As avaliações ocorreram nos dias 27 e 28 de novembro sendo que, no primeiro dia, os alunos fizeram a prova de Língua Portuguesa e Matemática; no segundo, a de Ciências e Ciências da Natureza e Redação. A prova de Matemática contou com 3 blocos de questões e cada bloco foi composto por 8 itens totalizando, assim, 24 questões objetivas de múltipla escolha com quatro alternativas de resposta em cada questão.

Sendo o tema dessa pesquisa o ensino de proporcionalidade, descreveremos a seguir alguns resultados apontados pelos alunos do 7º ano (antiga 6ª série) do Ensino Fundamental do Ciclo II nessa prova.

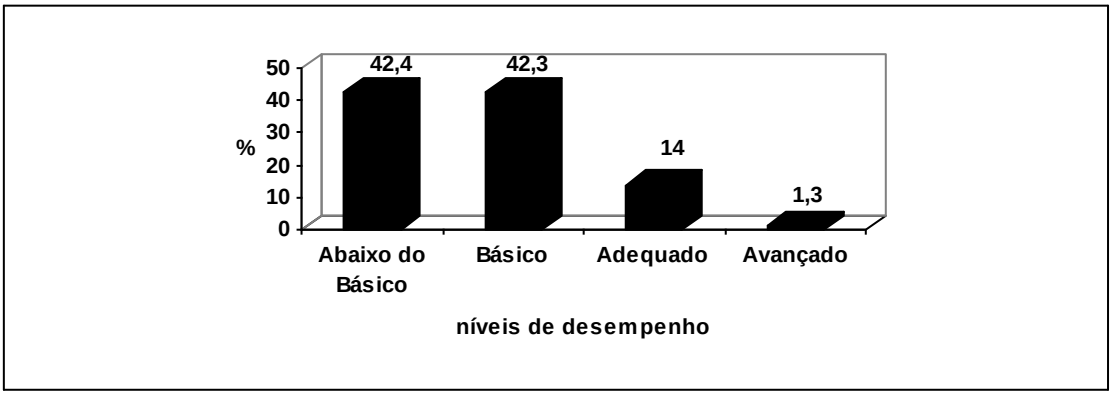


Gráfico 1: Distribuição dos alunos nos níveis de desempenho – Matemática - Saresp 2008 – 7º ano (antiga 6ª série).

Fonte: SÃO PAULO, 2009b, p.37

Destacamos que, ao observar o Gráfico 1, podemos notar que mais de 80% dos alunos do 7º ano (antiga 6ª série) do Ensino Fundamental do Ciclo II estão entre os níveis considerados abaixo do básico e básico mostrando assim uma defasagem no aprendizado em Matemática.

A fim de apresentar esses dados, descreveremos a seguir questões retiradas do SARESP/2008 e os percentuais de escolha por opção de resposta em cada questão no qual o conteúdo de proporcionalidade estava presente. As categorias elencadas abaixo foram estabelecidas nas matrizes de referência do SARESP/2008. Assim, seguem as habilidades necessárias para resolução das questões que serão descritas. São elas:

> H.28 Reconhecer situações que envolvem proporcionalidade.
> H.29 Reconhecer situação problema envolvendo grandezas diretamente e inversamente proporcionais.
> H.30 Reconhecer o conceito de razão em diversos contextos: proporcionalidade escala velocidade, porcentagem etc.
> H.32 Usar desenhos de escalas para resolver problemas do cotidiano incluindo distâncias (como leitura em mapas).
> (SÃO PAULO, 2009b, p. 30).

Apesar das matrizes de referência do SARESP/2008 evidenciarem apenas uma habilidade para sua resolução, notamos que existem questões que admitem mais de uma habilidade.

Segue a análise das questões que envolvem as habilidades descritas anteriormente:

> **65)** Marcos e Fábio erguem juntos um muro em 2h5min. Se o mesmo trabalho fosse realizado, nas mesmas condições, por 5 pessoas que trabalham como Marcos e Fábio, o muro ficaria pronto em:
> A) 1h30min
> B) 1h10min
> C) 80 min
> D) 50 min
> (SÃO PAULO, 2009a, p. 53).

Na questão **65**, segundo a análise das matrizes de referência do SARESP/2008 a habilidade para responder a pergunta é H. 29, já descrita anteriormente. Para solucioná-la matematicamente, é necessário perceber que as grandezas envolvidas são inversamente proporcionais considerando que 2 pessoas constroem um muro em 2h05min; logo, 1 pessoa, trabalhando no mesmo ritmo, construirá um muro em 4h10min; ou ainda, 1 pessoa constrói um muro em 250min; logo, 5 pessoas, trabalhando no mesmo ritmo, construirão juntas um muro em 50 min. Sendo considerado correto o item D).

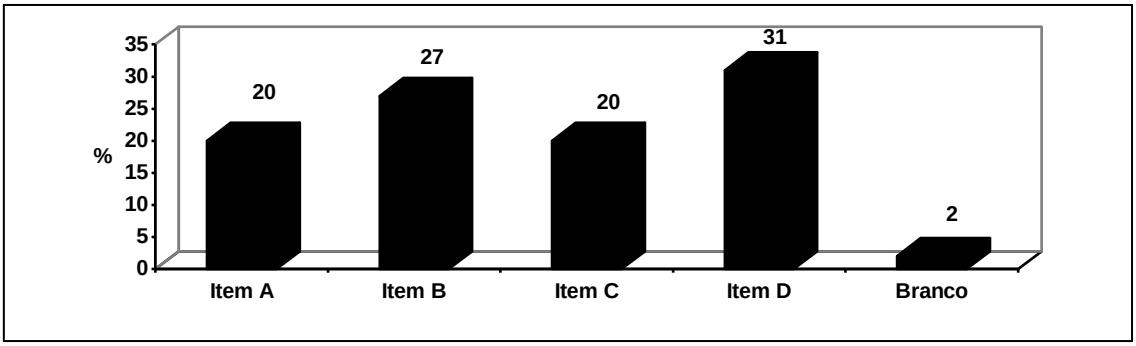


Gráfico 2: Percentuais de escolha por opção de resposta da questão **65**.

Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 53

> **69)** Uma pilha comum dura cerca de 90 dias, enquanto que uma pilha recarregável chega a durar 5 anos. Se considerarmos que 1 ano tem aproximadamente 360 dias, poderemos dizer que uma pilha recarregável dura, em relação a uma pilha comum:
> A) 10 vezes mais
> B) 15 vezes mais
> C) 20 vezes mais
> D) 25 vezes mais
> (SÃO PAULO, 2009a, p. 37).

Na questão **69**, segundo a análise das matrizes de referência do SARESP/2008 a habilidade para responder a pergunta é H. 28, já descrita anteriormente. Para encontrar a solução matemática, é necessário observarmos que 1 ano tem aproximadamente 360 dias; logo, 2 anos totalizarão aproximadamente 720 dias; assim, 5 anos totalizarão aproximadamente 1.800

dias, que é 20 vezes mais que 90 dias, ou seja, 1.800:90 = 20. Sendo considerado correto o item C).

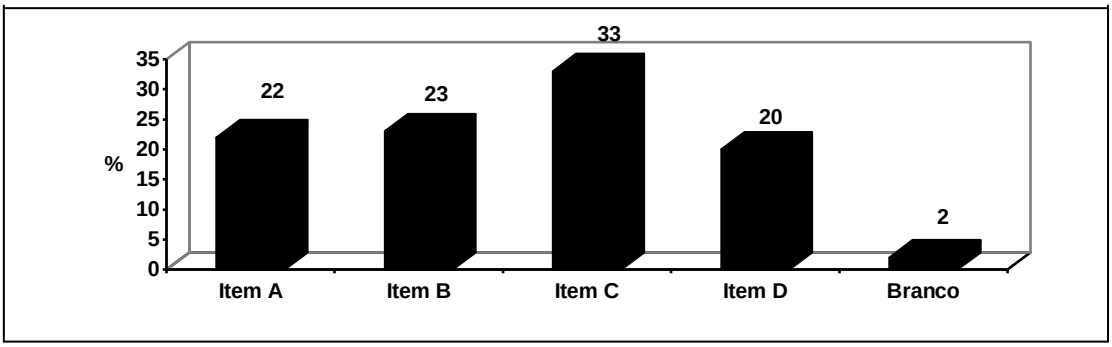


Gráfico 3: Percentuais de escolha por opção de resposta da questão **69**.

Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 37

> **73)** Jonas, com sua bicicleta, pedala na pista circular de ciclismo do clube. Ao dar 4 voltas, ele percorre 1600m. Se quiser percorrer 8 km, mantendo ritmo, ele dará um número de voltas igual a:
> A) 2
> B) 5
> C) 10
> D) 20
> (SÃO PAULO, 2009a, p. 54)

Na questão **73**, segundo a análise das matrizes de referência do SARESP/2008 a habilidade para responder a pergunta é H. 29, já descrita anteriormente. Para solucionar matematicamente essa questão, é necessário perceber que as grandezas envolvidas na situação problema são diretamente proporcionais; logo, deverá perceber que 1 km corresponde a 1.000 metros e que 8 km corresponde a 8.000 metros; assim, em 4 voltas, Jonas percorre 1.600 metros; então, em 20 voltas, Jonas percorre 8.000 metros, permanecendo no mesmo ritmo. Sendo considerado correto o item D).

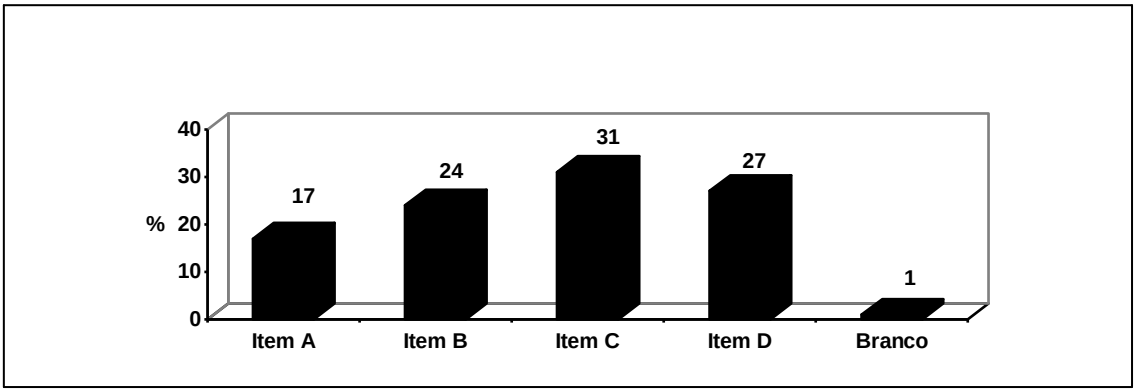
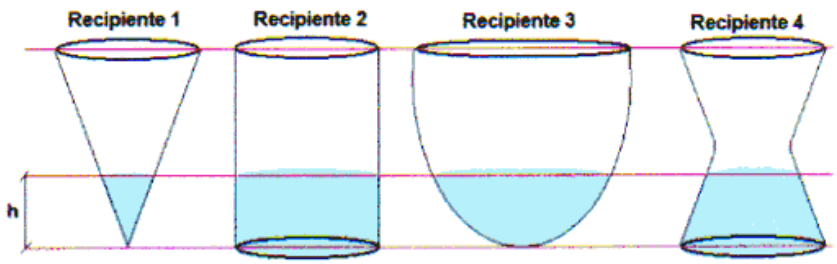


Gráfico 4: Percentuais de escolha por opção de resposta da questão **73**.

Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 54

78) Se dobrarmos o volume de água contida em cada um dos recipientes indicados na figura, a altura h da água dobrará apenas no(s) recipientes(s):



A) 4
B) 3
C) 2
D) 1
(SÃO PAULO, 2009a, p. 55).

Na questão **78**, segundo a análise das matrizes de referência do SARESP/2008 a habilidade para responder a pergunta é H. 28, já descrita anteriormente. Para que a questão seja solucionada matematicamente, é necessário perceber que apenas no recipiente 2 a altura h da água dobrará se dobrarmos o volume da água contida. Sendo considerado correto o item C).

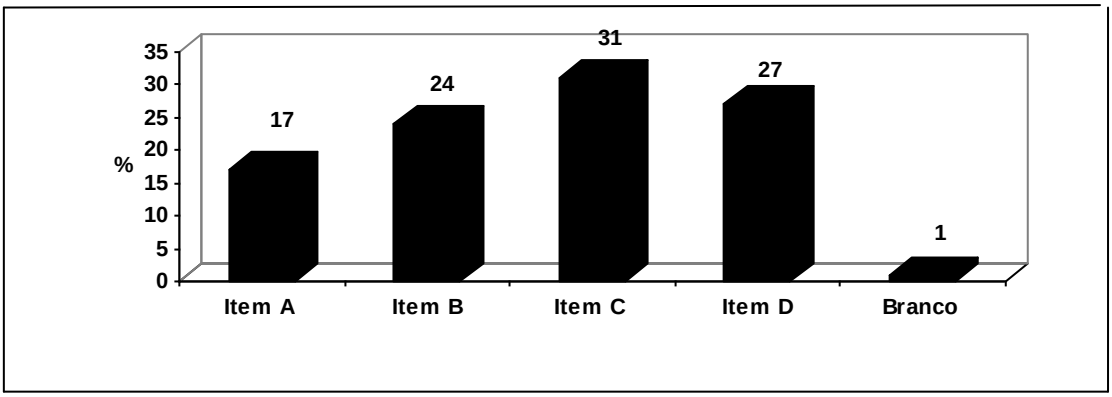


Gráfico 5: Percentuais de escolha por opção de resposta da questão **78**.

Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 55

> **86)** Marcos é muito veloz com sua bicicleta e consegue pedalar a 4km/h. A distância de sua casa até a casa de sua avó é de 16km. Assinale a alternativa que mostra o tempo que Marcos demora a ir de sua casa até a casa da sua avó se ele mantém, aproximadamente, a mesma velocidade durante todo o trajeto.
> A) 3 horas
> B) 4 horas
> C) 5 horas
> D) 6 horas
> (SÃO PAULO, 2009a, p. 10).

Na questão **86**, segundo a análise das matrizes de referência do SARESP/2008 a habilidade para responder a pergunta é H. 30, já descrita anteriormente. Para encontrar a solução matemática, é necessário notarmos que a cada 1 hora Marcos terá percorrido 4 km, pois sua velocidade é de 4 km/h; assim, se a distância entre sua casa até a de sua avó é de 16 km, após 2 horas terá percorrido 8 km; após 3 horas, 12 km; após 4 horas, 16 km. Sendo considerado correto o item B).

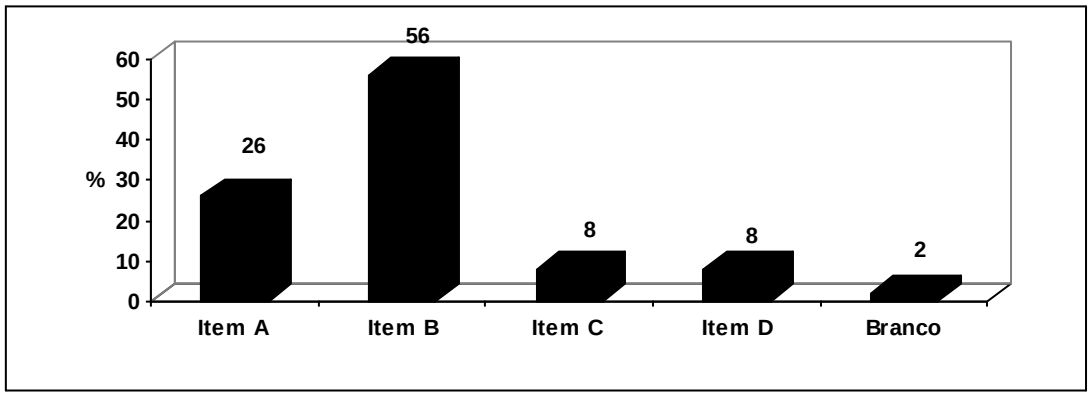
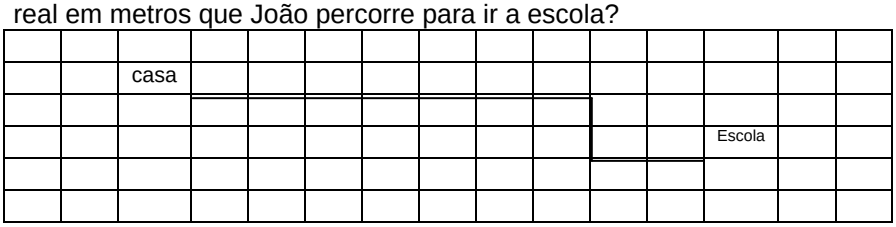


Gráfico 6: Percentuais de escolha por opção de resposta da questão **86**.

Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 10

94) O esquema abaixo, na malha quadriculada de 1cm x 1cm, representa o percurso da casa de João até a sua escola. Sabendo-se que, cada 1 cm na malha corresponde a 12 metros, qual é a distância real em metros que João percorre para ir a escola?



Assinale a alternativa que mostra a distância real, em metros, percorrida por João:

A) 100
B) 120
C) 122
D) 132

(SÃO PAULO, 2009a, p. 39).

Nessa questão **94**, segundo a análise das matrizes de referência do SARESP/2008 a habilidade para responder a pergunta é H. 32, já descrita anteriormente. Para solucionar matematicamente a questão, é necessário saber que escala é a razão entre a medida de um objeto representado em um desenho e a medida correspondente ao objeto real; logo, no desenho, a distância entre a casa e a escola é de 11 cm; assim, 1 cm corresponde a 12 metros. Portanto, temos que 11cm corresponde a 132 metros. Sendo considerado correto o item D).

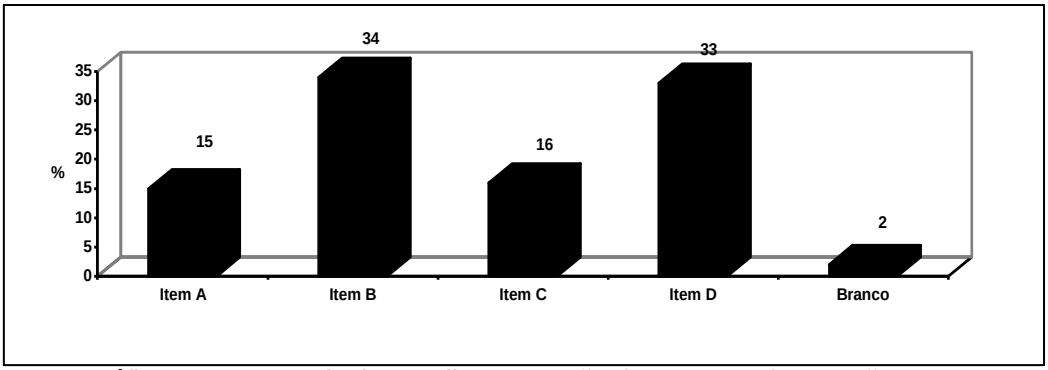


Gráfico 7: Percentuais de escolha por opção de resposta da questão **94**.

Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 39

96) Em uma cidade com 320 praças públicas, foi feita uma avaliação da situação destes locais e o resultado foi muito alarmante, conforme dados da tabela seguinte:

PROBLEMAS	PERCENTUAL DAS PRAÇAS
Falhas no calçamento	48%
Falta de iluminação	25%
Áreas verdes mal cuidadas	60%
Lixeiras destruídas ou sem lixeiras	75%

Isso significa que, nessa cidade, há 128 praças:
A) sem falhas no calçamento
B) com falta de iluminação
C) com áreas verdes bem cuidadas
D) com lixeiras em bom estado
(SÃO PAULO, 2009a, p. 85).

Na questão **96**, segundo a análise das matrizes de referência do SARESP/2008 a habilidade para responder a pergunta é H. 30, já descrita anteriormente. Para solucionar matematicamente a questão, é necessário encontrar a porcentagem de 128 praças, ou seja, das 320, quanto equivale 128 em porcentagem. Assim, temos que 128 praças equivalem a 40% do total. Ao observar a tabela, o aluno nota que não existe essa informação, porém temos que 100%-40%= 60%. Assim, se 60% das praças estão com as áreas verdes mal cuidadas, temos 40% possuem áreas verdes bem cuidadas. Sendo considerado correto o item C).

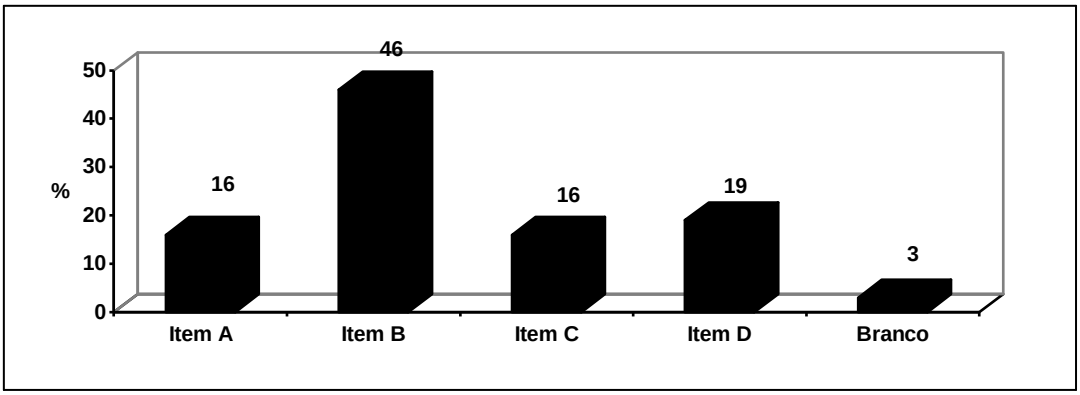


Gráfico 8: Percentuais de escolha por opção de resposta da questão **96**.

Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 85

97) No quadro está representada a produção de pimentões da horta do Sr. Armando, em três dias.

Dia da semana	Produção (em caixas)
Quarta-feira	50
Quinta-feira	150
Sexta-feira	100

A razão entre as quantidades de caixas colhidas na quarta-feira e na sexta-feira é:
A) 1:3
B) 1:2
C) 3:1
D) 2:1
(SÃO PAULO, 2009a, p. 58).

Na questão **97**, segundo a análise das matrizes de referência do SARESP/2008 a habilidade para responder a pergunta é H. 30, já descrita

anteriormente. Para encontrar a solução matemática, é necessário encontrarmos a razão entre a quantidade de caixas colhidas na quarta-feira e na sexta-feira, ou seja, se é de 50:100, ou 5:10, ou 1:2. Sendo considerado correto o item B).

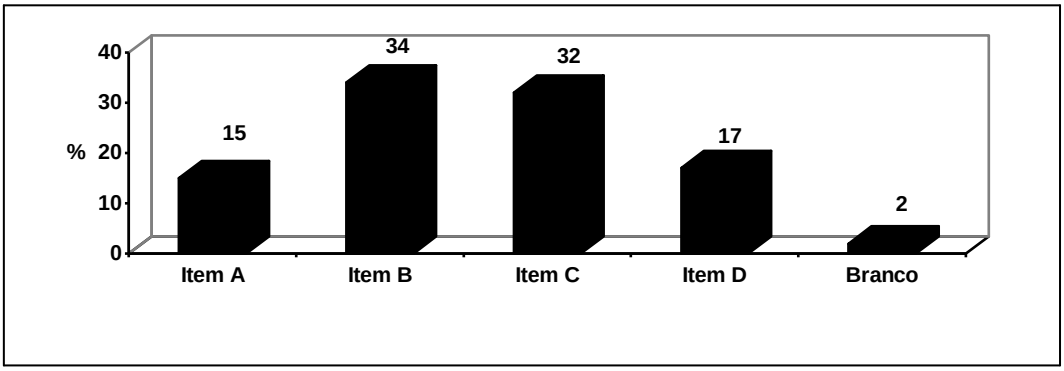


Gráfico 9: Percentuais de escolha por opção de resposta da questão **97**.

Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 58

102) A tabela que mostra o preço do quilo da batata numa barraca de feira está incompleta.

kg	Preço R$
1	1,50
1,5	2,25
2	3,00
2,5	3,75
3	
	9,00

O preço de 3 kg de batatas e a quantidade de batatas que se compra com 9 reais são, respectivamente,

A) R$ 4,50 e 6kg
B) R$ 4,00 e 5kg
C) R$ 3,75 e 4,5kg
D) R$ 5,00 e 4kg

(SÃO PAULO, 2009a, p. 22).

Na questão **102**, segundo a análise das matrizes de referência do SARESP/2008 a habilidade para responder a pergunta é H. 29, já descrita anteriormente. Para encontrar a solução matemática, é necessário notarmos que as grandezas envolvidas na questão são diretamente proporcionais. Assim, 3 quilos custam R$ 4,50 e 6 quilos custam R$ 9,00. Sendo considerado correto o item A).

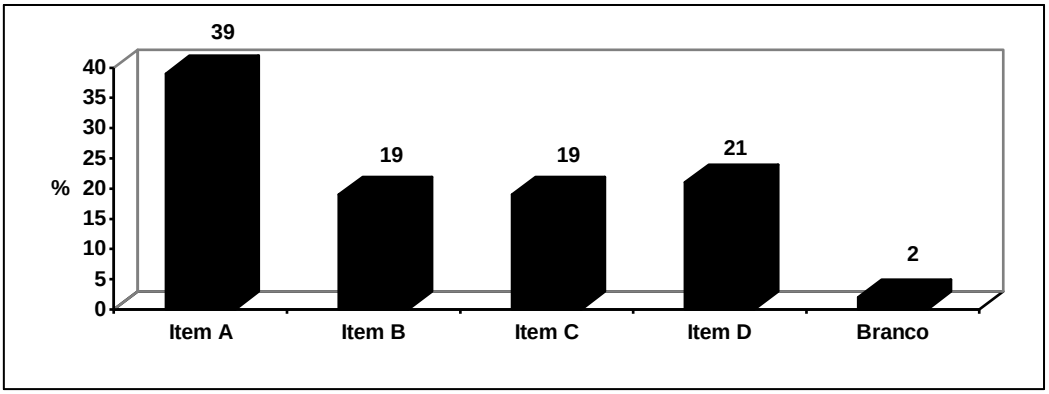


Gráfico 10: Percentuais de escolha por opção de resposta da questão **102**.

Fonte: SÃO PAULO, 2009a, p. 22

Notamos que diante da defasagem que o SARESP/2008 apresentou em relação aos conhecimentos dos alunos sobre proporcionalidade, ressaltamos a importância de se investigar sobre o tema. Com a disponibilidade do material fornecido pela Secretaria de Educação resolvemos realizar uma análise sobre esse tema.

CAPÍTULO 1: Proporcionalidade e os Documentos Oficiais

Neste capítulo, descrevemos de que forma é sugerido aos professores o conteúdo de proporcionalidade para alunos do 3º ciclo do Ensino Fundamental (6º e 7º ano) pelos PCNEF (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental do Ciclo II - 1998) e pela Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 1986 e 2008.

1.1 O Conteúdo Proporcionalidade e os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental do Ciclo II

Dentre os objetivos que o ensino de Matemática deve visar, apresentado pelo PCNEF (1998) aos professores, destacamos o ensino de proporcionalidade com o seguinte recorte:

> Do raciocínio que envolva proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade. (BRASIL, 1998, p. 65).

Em relação aos conteúdos propostos pelo PCNEF (1998) para o ensino de matemática no 3º ciclo (5ª e 6ª série), temos:

> O fato de que muitas situações da vida cotidiana funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o desenvolvimento do raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real. Assim, é desejável explorar no terceiro ciclo problemas que levem os alunos a fazer predições por meio de questões que envolvam aspectos qualitativos e quantitativos (O número encontrado deveria ser maior ou menor? Quanto maior? Essa resposta faz sentido?). Para resolver esses problemas os alunos poderão construir procedimentos não-convencionais, deixando para o quarto ciclo o estudo dos procedimentos convencionais. (BRASIL, 1998, p. 67).

Os conteúdos estão separados por blocos. São eles: números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas e tratamento da informação. O conteúdo de proporcionalidade está compreendido no bloco de números e operações.

Segundo o PCNEF (1998), no bloco de números e operações devem ser seguidas as especificações abaixo:

> O aluno perceberá existência de diversos tipos de números (números naturais, negativos, racionais e irracionais) bem como de seus diferentes significados, à medida que deparar com situações-problema envolvendo operações ou medidas de grandezas, como também ao estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento matemático. (BRASIL, 1998, p. 50).

Dentre os conteúdos apresentados nesse bloco de números e operações, temos algumas habilidades que abordam o tema proporcionalidade. São elas:

> - Reconhecimento de números racionais em diferentes contextos – cotidiano e históricos – e exploração de situação-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador.
> - Resolução de situações-problema que envolve a idéia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não convencionais.
> - Compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas. (BRASIL, 1998, p. 72).

Sendo assim, evidenciamos que, conforme foi descrito, o ensino de proporcionalidade, segundo o PCNEF, tem por objetivo evidenciar os seguintes aspectos: explorar situações de aprendizagem que contemplem a variação entre grandezas, estabelecer relações entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam proporcionalidade; solucionar situações-problema que abordem a idéia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagem, pelo uso de estratégia não-convencionais.

Segundo o PCNEF (1998), os critérios de avaliação não expressam todos os conteúdos que foram trabalhados nesse ciclo, apenas aqueles que são fundamentais e proporcionam ao aluno continuar aprendendo no ciclo seguinte sem que seu aproveitamento seja comprometido. Caberá ao professor fazer as adaptações necessárias em cada escola de modo que possam constituir-se em critérios reais para a avaliação. Assim, o critério de avaliação destacado é aquele

que envolve de forma indireta os conteúdos de razão e proporção em que o aluno deve seguir:

> - Decidir sobre os procedimentos matemáticos adequados para construir soluções num contexto de resolução de problemas numéricos, geométricos ou métricos.
> - Utilizar os diferentes significados e representações dos números naturais, inteiros, racionais e das operações envolvendo esses números, para resolver problemas, em contextos sociais, matemáticos ou de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 76).

1.2 Estrutura da Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 1986

A primeira edição da Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo foi editada em 1986. A 2ª e 3ª edições foram publicadas em 1988 e a 4ª edição, que será objeto dessa análise, em 1991. A mesma está disponível na forma de um caderno com 181 páginas.

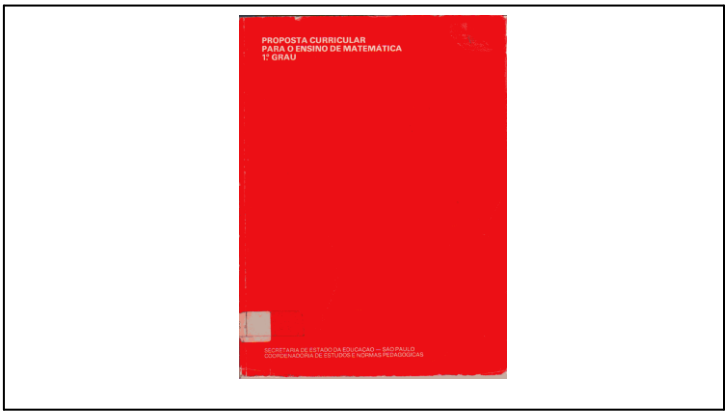


Figura 1: Capa da Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – 1º Grau.

Fonte: SÃO PAULO, 1991

Os textos que antecedem os conteúdos para cada série possuem os seguintes títulos: **O lugar da Matemática no currículo**, **Os conteúdos e a abordagem**, **A Matemática e a linguagem**, **A extensão dos programas**, **O papel da avaliação** e **A estruturação desta proposta**. Desses, destacamos que a Matemática está presente nos currículos escolares por 2 motivos, são eles:

> - ela é necessária em atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade, como são as que lidam com grandezas, contagens, medidas, técnicas de cálculo, etc.;
> - ela desenvolve o raciocínio lógico, a capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível. (SÃO PAULO, 1991, p.9).

Segundo a Proposta, o aprendizado de matemática tem:

> [...] essencialmente o significado de uma alfabetização nos aspectos quantitativos da realidade, na classificação das formas, nos rudimentos da razão, na lógica da articulação dos significados, no desenvolvimento da capacidade de projetar, de arquitetar soluções para os problemas envolvendo grandezas. (SÃO PAULO, 1991, p.13).

De acordo com a proposta, são três os grandes temas geradores: números, geometria e medidas.

No ensino dos números, deve-se enfatizar:

> [...] a evolução da noção de número a partir tanto de contagens como de medidas, sem ter ainda as propriedades estruturais claramente divisadas, deixando-se guiar pelo fio condutor que a História propicia e trocando assim uma sistematização prematura por uma abordagem mais rica em significados. (SÃO PAULO, 1991, p. 11).

No ensino da geometria,

> [...] pode-se partir da manipulação dos objetos, do reconhecimento das formas mais freqüentes, de sua caracterização através das propriedades, da passagem dos relacionamentos entre objetos para o encadeamento de propriedades, para somente ao final do percurso aproximar-se de uma sistematização. (SÃO PAULO, 1991, p.11).

Destacamos o seguinte aspecto quanto ao ensino das medidas:

> [...] pode-se descortinar o fato decisivo de que tanto o estudo dos NÚMEROS como o da GEOMETRIA resultam mutilados sem um tratamento adequado da noção de MEDIDAS, desde o Ciclo Básico. Tal noção é o fio que tece a junção dos dois grandes temas geradores, é o cimento na construção da noção de número e na arquitetura das relações geométricas mais básicas. (SÃO PAULO, 1991, p.11).

Quanto ao conteúdo de proporcionalidade, enfatizamos que:

> Tais idéias fundamentais, como são, por exemplo, as de proporcionalidade, equivalência, semelhança, tem como suporte, muitas vezes, mais de um assunto da lista de conteúdos. Elas, no entanto, é que são fundamentais e não o assunto em si. (SÃO PAULO, 1991, p.11-12).

Outro fator que gostaríamos de destacar é a questão da terminologia: “Desvia-se, então, a ênfase dada à terminologia usual (antecedentes, conseqüentemente, razão, proporções) para a compreensão das idéias envolvidas neste tema” (SÃO PAULO, 1991, p.141). Notamos, assim, a preocupação com a diversidade de assuntos envolvidos no ensino de proporcionalidade.

Destacamos que a Proposta pontua que o ensino do conteúdo de proporcionalidade muitas vezes não é vinculado a outros, de acordo com o seguinte trecho: “Muitos tópicos, que deveriam ser tratados de forma vinculada à Proporcionalidade, têm sido trabalhados de forma isolada uns dos outros, dificultando sua aprendizagem e síntese por parte dos alunos” (SÃO PAULO, 1991, p. 141).

Também observamos a preocupação de relacionar o conteúdo de proporcionalidade com as outras áreas do conhecimento, como segue:

> Após todo o trabalho feito com a variação de grandezas, esse é um momento propício para explicar o conceito de razão, já explorado anteriormente, sem a nomenclatura pertinente em:
> - Matemática: conceito de número racional, medidas, variação de duas grandezas, porcentagem;
> - Geografia: escalas, densidade demográfica;
> - Ciências: densidade volumétrica, velocidade média.
> (SÃO PAULO, 1991, p.143-144).

No que se refere às habilidades previstas para um aluno do 8º ano (antiga 7ª série), destacamos o conteúdo de proporcionalidade nos seguintes itens:

> - Identifique a natureza da variação das medidas de duas grandezas (direta ou inversamente proporcionais);
> - Represente graficamente a variação de duas grandezas e analise o comportamento desta variação;
> - Aplique a regra de três simples e composta na resolução de situação-problema;
> - Identifique a porcentagem como uma fração de denominador 100;
> - Resolva problemas que envolvam porcentagem;
> - Resolva problemas que envolvam juros utilizando regra de três composta. (SÃO PAULO, 1991, p.127).

A proposta descreve os conteúdos para cada série do Ensino para o 1º Grau. Assim, encontramos o conteúdo de proporcionalidade previsto de forma

explícita para alunos do 8º ano (antiga 7ª série), conforme descrito no quadro a seguir:

Quadro 1: O conteúdo de proporcionalidade previsto para alunos do 8º ano (antiga 7ª série) do Ensino do 1º Grau.

8º ano (antiga 7ª série) – Números
Proporcionalidade: Noção de interdependência entre duas ou mais grandezas e a noção de variável. Grandezas diretamente proporcionais. Representação gráfica e analítica desse tipo de intercedência. Grandezas inversamente proporcionais. Representação gráfica e analítica desse tipo de inter-dependência. Grandezas não proporcionais. Grandezas que variam proporcionalmente ao quadrado da outra. Razões e proporções – aplicações em problemas. Juros simples.

Fonte: SÃO PAULO, 1991, p.129

Conforme quadro acima, observamos na Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 1986, o ensino de proporcionalidade enfatizando a integração com outras áreas do conhecimento, tais como Matemática, Geografia e Ciências e através do estudo de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, representação gráfica, regra de três simples e composta, problemas envolvendo porcentagem e juros.

1.3 Estrutura da Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 2008

A Proposta Curricular do Estado de São Paulo implantada em abril de 2008, segundo a Secretaria de Educação, faz parte de um plano político para a melhoria da qualidade do ensino oferecido pelas escolas públicas do Estado de São Paulo.

Ela é formada por 12 cadernos com as Propostas Curriculares de Ensino Fundamental do Ciclo II e Ensino Médio organizados por disciplinas. São específicas para o Ensino Fundamental do Ciclo II as disciplinas de Língua Portuguesa, Matemática, História, Geografia, Ciências, Língua Estrangeira Moderna – Inglês, Educação Física e Arte. Já as disciplina específicas para o Ensino Médio são Língua Portuguesa, Matemática, História, Geografia, Biologia, Física, Química, Filosofia, Língua Estrangeira Moderna – Inglês, Educação Física e Arte.

Figura 2: Capa dos Cadernos da Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

Fonte: SÃO PAULO, 2008c, p.31.

Cada caderno aborda textos em comum, a fim de se apresentar tal proposta, que são: Apresentação, Uma educação à altura dos desafios contemporâneos, Princípios para um currículo comprometido com seu tempo, A área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, A área de Ciências Humanas e

suas Tecnologias, A área de Linguagem e Códigos e suas Tecnologias e A Matemática e as áreas do conhecimento.

Segundo a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, a proposta curricular apresenta 6 princípios para um currículo comprometido com o seu tempo, visando assim uma qualidade de ensino a todos os alunos, são eles: 1º) Uma escola que também aprende; 2º) O currículo como espaço de cultura; 3º) As competências como referência; 4º) Prioridade para a competência da leitura e da escrita; 5º) Articulação das competências para aprender e 6º) Articulação com o mundo do trabalho.

Na atual proposta, a Matemática aparece como uma área específica do conhecimento que, segundo a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, se deve a três razões específicas:

A primeira é apresentada da seguinte razão:

> [...] o fato de que uma parte da especificidade da Matemática resulta esmaecida quando ela é agregada seja ao grupo das linguagens em sentido amplo, ou seja, ao grupo das ciências. A Matemática compõem com a Língua Materna um par fundamental, mas de caráter complementar: é impossível reduzir um dos sistemas simbólicos ao outro. Se uma língua se aproximar demasiadamente do modo de operar da Matemática, resultará empobrecida, e o mesmo poderia ocorrer com um texto matemático que assumisse a ambivalência, apropriada apenas à expressão lingüística. (SÃO PAULO, 2008a, p.38).

Na segunda, a razão é condicionada ao fato da:

> [...] a incorporação da Matemática à área de Ciências pode distorcer o fato de que a Matemática, mesmo oferecendo uma linguagem especialmente importante e adequada para a expressão científica, constitui um conhecimento específico da educação básica. [...] A inclusão da Matemática na área de Ciências teve o efeito salutar, no caso dos PCN, de minimizar o risco de que o conteúdo matemático fosse concebido como um fim em si mesmo, enfatizando sua condição instrumental. Entretanto, a partir da consolidação da idéia de competências, apresentada pelo Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), tal risco deixou de existir e explicita-se com nitidez o que já era apresentado tacitamente em propostas anteriores: todos os conteúdos disciplinares, nas diversas áreas, são meios para a formação dos alunos como cidadãos e como pessoas. (SÃO PAULO, 2008a, p.38-39).

Como justificativa, a terceira deve-se ao fato de que:

> [...] o tratamento da Matemática como área específica pode facilitar a incorporação crítica dos inúmeros recursos tecnológicos de que

> dispomos para a representação de dados e o tratamento das informações, na busca da transformação de informação em conhecimento. (SÃO PAULO, 2008a, p. 39).

Assim, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo tem a seguinte visão:

> [...] a apresentação da Matemática como uma área específica não pretende amplificar suas supostas peculiaridades nem caracterizá-la como um tema excessivamente especializado ou relevante. Visa apenas a uma exploração mais adequada de suas possibilidades de servir às outras áreas, na ingente tarefa de transformar a informação em conhecimento em sentido amplo, em todas as suas formas de manifestação. (SÃO PAULO, 2008a, p.39).

1.4 Estrutura da Proposta Curricular de Matemática

A Proposta Curricular de Matemática está disponível na forma de um caderno que possui 59 páginas, sendo comum os cadernos de todas as áreas as 39 páginas iniciais com os textos já descritos e comentados anteriormente. Somente observamos que na página 41 é apresentada a Proposta Curricular do Estado de São Paulo para a disciplina de Matemática.

Figura 3: Capa da Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo.

Fonte: SÃO PAULO, 2008a.

O primeiro texto da Proposta Curricular do Estado de São Paulo voltada para a disciplina de Matemática tem o seguinte título: “Ensinar Matemática”, destacaremos o mesmo no seguinte recorde:

> Os currículos escolares, em todas as épocas e culturas, têm no par Matemática-língua materna seu eixo fundamental. Gostando ou não da

> Matemática, as crianças a estudam e os adultos a utilizam em suas ações como cidadãos, pessoas conscientes e autônomas, consumidores ou não. Todos lidam com números, medidas, formas, operações; todos lêem e interpretam textos e gráficos, vivenciam relações de ordem e de equivalência, argumentam e tiram conclusões válidas a partir de proposições verdadeiras, fazem inferências plausíveis a partir de informações parciais ou incertas. Em outras palavras, a ninguém é permitido dispensar o conhecimento da Matemática sem abdicar de seu bem mais precioso: a consciência nas ações. (SÃO PAULO, 2008a, p. 41).

De acordo com o descrito, a Matemática tem um papel fundamental na formação dos alunos, tanto na escola quanto fora dela. Lembramos que um dos objetivos do Ensino Fundamental do Ciclo II, de acordo com o PCNEF, é proporcionar e desenvolver no aluno um cidadão consciente de seus atos e capaz de viver em sociedade intervindo de maneira a ser um agente transformador do ambiente.

Segundo a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, o objetivo principal da proposta curricular “é mapear as informações relevantes e organiza-las em narrativas significativas em cada território disciplinar”. (SÃO PAULO, 2008a, p.41)

Outro ponto que destacamos da proposta curricular de Matemática, são os conteúdos denominados como fundamentais que, segundo a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, são geometria, grandezas e medidas e o tratamento da informação.

No ensino da geometria,

> “[...] o Ensino Fundamental deve ocupar-se inicialmente do reconhecimento e da representação e classificação das formas planas e espaciais, preferencialmente trabalhando em contextos concretos com as crianças da 5ª e 6ª série”. (SÃO PAULO, 2008a, p.45-46).

No ensino de grandezas e medidas:

> [...] sua ligação com números, especialmente os decimais e as frações, pode ser feita por meio da contextualização da necessidade dos múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida na resolução de problemas concretos. (SÃO PAULO, 2008a, p.46).

Com relação ao ensino do tratamento de informação:

> Retomando uma vez mais nossa perspectiva de que os conteúdos disciplinares são meios para a formação dos alunos como cidadãos e como pessoas, o desenvolvimento de competências relacionadas ao eixo argumentação/decisão é o espaço privilegiado para o tratamento da informação. (SÃO PAULO, 2008a, p. 47).

No final do caderno, encontramos quadros com os conteúdos de Matemática por série e bimestre. O conteúdo de proporcionalidade é contemplado no 3º bimestre do 7º ano (antiga 6ª série) do Ensino Fundamental do Ciclo II. Segue o Quadro 2:

Quadro 2: Conteúdo de Matemática previsto para o 3º Bimestre – 7º ano (antiga 6ª série) do Ensino Fundamental do Ciclo II.

7º ano (antiga 6ª série) – 3º Bimestre
Proporcionalidade • Variação de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. • Conceito de razão. • Porcentagem. • Razões constantes na geometria: Pi. • Construção de gráfico de setores. • Problemas envolvendo probabilidade.

Fonte: SÃO PAULO, 2008a, p.54

Além dos doze documentos iniciais, um para cada disciplina, no decorrer do ano de 2008 foram produzidos pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo outros cadernos direcionados da seguinte forma: 252 cadernos do professor para as séries do Ensino Fundamental do Ciclo II e do Ensino Médio; 63 cadernos do professor por bimestre, um para cada disciplina e série do Ensino Fundamental do Ciclo II e Ensino Médio a fim de subsidiar os professores da rede. Nosso material de pesquisa será um desses cadernos, cuja descrição faremos a seguir.

No anexo está disponível o material que foi objeto de análise dessa pesquisa. Ressaltamos que ele é do ano de 2009 que é idêntico ao de 2008.

1.5 Estrutura do Caderno do Professor – Matemática – 3º Bimestre – 7º ano do Ensino Fundamental do Ciclo II

Com o objetivo de fornecer aos professores da rede material para o trabalho em sala de aula e atender aos conteúdos propostos acima, o caderno do professor do 3º bimestre para alunos do 7º ano (antiga 6ª série) do Ensino Fundamental do Ciclo II foi organizado com quatro Situações de Aprendizagem. São elas: “A noção de proporcionalidade”; “Razão e proporção”; “Razões na geometria” e; “Gráfico de setores e proporcionalidade”. Dentre essas, selecionamos duas para análise. A primeira intitulada “A noção de proporcionalidade” e a segunda, “Razão e proporção”, foram escolhidas em decorrência do nosso tema que é o ensino de proporcionalidade.

O caderno apresenta a ficha “Proporção na medida certa”. Dentre elas, são propostas 5 aulas semanais em 8 semanas, totalizando 40 aulas bimestrais. No final de cada situação de aprendizagem o caderno apresenta considerações sobre a avaliação e evidencia os conhecimentos mínimos que se espera do aluno que serão apresentados no capítulo da análise do caderno do professor.

Figura 4: Capa do Caderno do Professor do 3º Bimestre do 7º ano (antiga 6ª série) do Ensino Fundamental do Ciclo II.
Fonte: SÃO PAULO, 2008b

O caderno apresenta, nas páginas 52 e 53, orientações para recuperação e recursos para ampliar a perspectiva do professor e do aluno para a compreensão

do tema, essas orientações visam o trabalho do professor com a recuperação continuada, desenvolvida pelo mesmo durante o ano letivo em sala de aula com os alunos que apresentam dificuldade. Na página 54, encontramos um quadro com os conteúdos de matemática por série/bimestre do Ensino Fundamental do Ciclo II. Na Figura 5, existem partes sombreadas em destaque que, segundo os autores do caderno, assinala os conteúdos de outras séries relacionados ao conteúdo do 3º bimestre do 7º ano (antiga 6ª série).

	5ª série	6ª série	7ª série	8ª série
1º bimestre	NÚMEROS NATURAIS - Múltiplos e divisores. - Números primos. - Operações. - Introdução às potências. FRAÇÕES - Representação. - Comparação e ordenação. - Operações.	NÚMEROS NATURAIS - Sistemas de numeração na Antigüidade. - O sistema posicional decimal. NÚMEROS INTEIROS - Representação. - Operações. NÚMEROS RACIONAIS - Representação fracionária e decimal. - Operações com decimais e frações.	NÚMEROS RACIONAIS - Transformação de decimais finitos em fração. - Dízimas periódicas e fração geratriz. POTENCIAÇÃO - Propriedades para expoentes inteiros. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - A linguagem das potências.	NÚMEROS REAIS - Conjuntos numéricos. - Números irracionais. - Potenciação e radiciação em IR. - Notação Científica.
2º bimestre	NÚMEROS DECIMAIS - Representação. - Transformação em fração decimal. - Operações. SISTEMAS DE MEDIDAS - Comprimento , massa e capacidade. - Sistema métrico decimal.	GEOMETRIA/MEDIDAS - Ângulos. - Polígonos. - Circunferência. - Simetrias. - Construções geométricas. - Poliedros.	ÁLGEBRA - Equivalências e transformações de expressões algébricas. - Produtos notáveis. - Fatoração algébrica.	ÁLGEBRA - Equações do 2º grau: resolução e problemas. - Noções básicas sobre funções; a idéia de interdependência. - Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus.
3º bimestre	GEOMETRIA/MEDIDAS - Formas planas e espaciais. - Noção de perímetro e área de figuras planas. - Cálculo de área por composição e decomposição.	NÚMEROS/ PROPORCIONALIDADE - Proporcionalidade direta e inversa. - Razões, proporções, porcentagem. - Razões constantes na geometria: π. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Gráficos de setores. - Noções de probabilidade.	ÁLGEBRA/EQUAÇÕES - Equações do 1º grau. - Sistemas de equações e resolução de problemas. - Inequações do 1º grau. - Sistemas de Coordenadas (plano cartesiano).	GEOMETRIA/MEDIDAS - Proporcionalidade, noção de semelhança. - Relações métricas em triângulos retângulos. - Razões trigonométricas.
4º bimestre	TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Leitura e construção de gráficos e tabelas. - Média aritmética. - Problemas de contagem.	ÁLGEBRA - Uso de letras para representar um valor desconhecido. - Conceito de equação. - Resolução de equações. - Equações e problemas.	GEOMETRIA/MEDIDAS - Teoremas de Tales e Pitágoras: apresentação e aplicações. - Área de polígonos. - Volume do prisma.	GEOMETRIA/MEDIDAS - O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo. - Volume e área do cilindro. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Contagem indireta e probabilidade.

O sombreado assinala os conteúdos relacionados aos trabalhados neste bimestre.

Figura 5: Conteúdos de Matemática por Série/Bimestre do Ensino Fundamental do Ciclo II.

Fonte: SÃO PAULO, 2008b, p. 54.

Nesse quadro apresentado na página 54, observamos a importância do conteúdo proporcionalidade, pois o mesmo se relaciona com diversos outros conteúdos de Matemática cabendo, assim, ao professor relacioná-lo com os demais e mostrar aos alunos que um tema pode ser explorado em mais de um conteúdo.

1.6 Comparando as Propostas Curriculares de 1986 e 2008

Após, descrevermos as propostas curriculares do Estado de São Paulo nos anos de 1986 e 2008, podemos observar pontos em comuns e distintos entres eles.

Em ambas as propostas, a Matemática é apresentada como área específica do conhecimento. Destacamos, assim, a importância de aprender a mesma, já que, para o pleno desenvolvimento dos cidadãos, é necessário o crescimento da capacidade de projetar e de arquitetar soluções para os problemas envolvendo as grandezas, sendo essa uma das principais habilidades desenvolvidas no ensino de Matemática.

Em relação aos conteúdos, ambas as propostas destacam o aprendizado com ênfase em temas geradores. Porém, enquanto na proposta do ano de 1986 são apresentados temas que têm como geradores a geometria, os números e a medida, na proposta de 2008, foram abordados os seguintes temas: a geometria, grandezas e medidas e o tratamento de informação. Conforme descrito, o tratamento da informação é algo novo, proposto inicialmente nos PCNEF (1998) e incorporados na proposta de 2008.

Quanto ao estudo dos temas geradores, verificamos que a geometria é abordada com o mesmo enfoque tanto em 1986, quanto em 2008, sendo que, ambos visam o aprendizado utilizando-se de materiais concretos, e é através destes materiais que os alunos constroem suas propriedades. Em relação ao estudo das medidas, ambas as propostas descrevem a necessidade de realizar a

ligação com os números, no qual ressalta-se que é a partir de situações concretas como estas que surge o ensino das medidas.

Outro ponto que merece um destaque nessa pesquisa é o próprio conteúdo de proporcionalidade. Enquanto em 1986 ele está previsto para alunos de 8º ano (antiga 7ª série), em 2008 esse mesmo conteúdo está previsto para alunos de 7º ano (antiga 6ª série).

Gostaríamos de destacar a questão da nomenclatura. A Proposta de 1986 já previa uma mudança no termo, ou seja, razão e proporção devem ser substituídos por proporcionalidade. Porém, na Proposta de 2008, observamos a existência da Situação de Aprendizagem 2 intitulada de razão e proporção.

1.7 Proporcionalidade em outras pesquisas

Proporcionalidade não é um assunto novo. O mesmo já foi abordado em outros estudos realizados e muitas discussões já foram feitas sobre o tema. Desta forma, descrevemos as mesmas e suas vantagens na análise dessa pesquisa.

Dentre os estudos encontrados sobre proporcionalidade, foram selecionados os que apresentam algo em comum com essa pesquisa. No caso de Costa (2005) e Bernal (2004), a escolha se justifica no fato que ambas as pesquisas realizaram análise de livros didáticos do mesmo tema. No caso de Barreto (2001), Floriani (2004) e Rasi (2009), a semelhança está no referencial teórico e no tema. Nesses autores foram estudadas as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de atividades que envolviam proporcionalidade.

A grande maioria das dissertações descritas são da própria instituição, ou seja, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Temos presente também pesquisa da Universidade Federal de Santa Catarina e Universidade do Vale do Itajaí, ambas de Santa Catarina, devido a facilidade de acesso aos *sites* das universidades.

No estudo realizado por Costa (2005), tendo como seu principal objetivo realizar um levantamento das características de 3 livros didáticos de diferentes décadas, inicialmente o autor apresentou uma comparação do conteúdo de razão e proporção com documentos oficiais contemporâneos. São eles: Projeto de um Guia Curricular (1972); Proposta Curricular (1986) e Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), sendo que o autor justificou sua análise no fato de que o livro didático é “fonte de referência com que conta o professor para firmar seus conhecimentos e dosar a apresentação que fará em classe” (COSTA *apud* LIMA, 2001, p.3).

O autor utiliza como referencial teórico os três níveis de conhecimento esperados pelos alunos propostos por Aline Robert, sendo eles: técnico, mobilizável e disponível. Costa (2005) descreve as principais características dos 3 livros didáticos escolhidos e realiza também a análise dos exercícios correspondentes aos conteúdos de razão e proporção nos níveis de conhecimentos esperados no enunciado do exercício e nos níveis de conhecimentos esperados para solucionar o exercício em relação às noções utilizadas.

Costa (2005) conclui sua pesquisa ao afirmar que os 3 livros oferecem subsídios parciais para os professores, pois não estão plenamente elaborados em concordância com os documentos oficiais dos órgãos governamentais. O autor salienta que houve modificações quanto à disponibilidade dos conteúdos de razão e proporção, além de destacar que há uma convergência entre os três livros, ou seja, nas listas dos exercícios propostos, os três níveis de conhecimento aparecem, mas na opinião do autor, não foi de modo necessário e suficiente.

Apresentamos também um estudo realizado por Bernal (2004) cujo referencial foi de identificar o objeto matemático proporção a ser ensinado e como se ensina o mesmo em classes do 7º ano (antiga 6ª série) do Ensino Fundamental. Para isso, realizou um breve estudo histórico e analisou 4 livros didáticos e uma observação em classe desenvolvida por um professor. Para esse estudo, a mesma utilizou do plano de ensino e o plano de aula, bem como uma entrevista antes da realização das aulas sobre proporções, no qual permitiu identificar elementos da organização matemática do objeto proporção.

Como referencial teórico, a autora utilizou-se da Teoria Antropológica do Saber e da Teoria da Transposição Didática de Chevallard. Para suas análises, a autora se baseou em 3 definições e autores diferentes sobre proporção. São eles: Trajano (1927), Ávila (1986) e Lima (1991). Apresentamos as definições:

> [...] Trajano aborda o saber proporção por meio de sua definição: "proporção é uma igualdade entre duas razões", de sua representação: "12 : 6 = 8 : 4", de suas propriedades, das quais salientamos duas: "1ª - Em toda a proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos e 2ª - Se o produto dos dois extremos for dividido por um dos meios, o quociente será o outro meio: e se o produto dos dois meios for dividido por um dos extremos, o quociente será o outro extremo". (BERNAL, 2004, p. 54).
> Ávila propõe, nestes artigos, que o ensino das questões relativas à razão, proporção e regra de três, os conceitos e suas aplicações, sejam ensinados no contexto dos números reais, das igualdades e equações, com ênfase no conceito de grandezas ou variações proporcionais. Assim, Ávila refere-se a grandezas ou variações proporcionais, ou seja, grandezas que possuem entre si uma relação de proporcionalidade e, portanto, aborda a igualdade de razões neste novo contexto. (BERNAL, 2004, p.61).
> Lima apresenta uma abordagem formal da noção de proporcionalidade, definindo-a como função. [...] A definição representada por f(n.x) = nf(x). (BERNAL, 2004, p.75).

Para análise dos livros didáticos, Bernal (2004) relevou os seguintes pontos:

> Nos propomos a examinar nestes livros didáticos, sistematicamente, o objeto proporção, bem como as tarefas e técnicas relativas à proporção. Examinamos também as definições, tarefas e técnicas relativas a grandezas proporcionais, tendo em vista que sua abordagem é proposta nas publicações noosferianas de Ávila e Lima. (BERNAL, 2004, p. 80).

Os livros analisados foram dos seguintes autores: Quintella (1958), Giovanni e Giovanni Jr. (2000), Bigode (2000) e Imenes & Lellis (2002). A escolha do primeiro se justifica no fato do grande número de edições, o que indica a grande utilização deste livro. Os demais se deve em função de melhor indicação no Guia do Livro Didático e por serem os livros mais solicitados ao MEC pelas escolas de Santa Catarina em 2002. Segue o Quadro 3, com o resumo da análise dos livros realizada pela autora.

Quadro 3: Resumo da análise dos livros didáticos.

Tarefas	Técnicas			
	Quintella	Giovanni	Bigode	Imenes e Lellis
Achar qualquer termo de uma proporção	Resolução da proporção- PF (propriedade fundamental)	Resolução da proporção-PF	_____	_____
Achar 2 números desconhecidos, a partir de sua soma/ subtração/produto e da razão entre eles ou de 2 termos da proporção que formam. (resolver sistemas)	Propriedades 1 de proporções e Resolução da proporção- PF	Propriedades: 1ª , 2ª e Resolução da proporção-PF	_____	_____
Achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três ou mais quantidades conhecidas e proporcionais. Problemas de regra de três: Simples – direta ou inversa Composta Problemas de porcentagem (somente em Quintella)	Formulação da proporção e Resolução da proporção- PF a partir de: 1) Coeficiente de proporcionalidade (*k*) 2) razões entre valores da mesma grandeza.	Direta: igualdade das razões e resolução da proporção-PF. Inversa: produto constante (*k*) e equação Produto das variações- resolução da proporção-PF.	1)operador escalar 2)equação da constante *k* 3)resolução da proporção -PF	1)Operador escalar, e 2) Operador funcional para grandezas diretamente proporcionais. 3) Uso do operador , para grandezas inversamente proporcionais. 4) Equação Regra de Três.
Dividir em partes proporcionais (direta ou inversa)	P1 de proporções, coeficiente de proporcionalidade e Resolução da proporção- PF	Coeficiente de proporcionalidade (D)Determinação de razões iguais (proporção), e Resolução da proporção-PF (I) Determinação do produto igual, equação.	_____	_____
Verificar a proporcionalidade	_____	1)Condições de *f(x)* 2) Comparação das razões entre valores da mesma grandeza	_____	Condições de *f(x)*

Fonte: BERNAL, 2004, p.146

Quanto à observação em classe, Bernal (2004) destaca:

> [...] identificamos um tratamento de proporções semelhante aquele dado por Quintella e Giovanni, pois é feita a partir da definição de proporção como "igualdade de razões", de sua representação: 3/4 = 6/8, e da propriedade fundamental: "em toda a proporção, o produto dos extremos é sempre igual ao produto dos meios". (BERNAL, 2004, p. 141).

Destacamos que a autora conclui, em relação ao objeto matemático proporção, como saber a ser ensinado:

> Nestes estudos encontramos duas abordagens das questões relativas à proporção: em uma ela é tratada como objeto matemático, e em outra, há o estudo da noção de proporcionalidade e de grandezas ou variações proporcionais, e o objeto matemático proporção não é presente. (BERNAL, 2004, p. 148).

Para o objeto matemático proporção como saber ensinado, a autora apresenta a seguinte conclusão:

> Em uma primeira abordagem, a proporção existe como objeto matemático, objeto de estudo, e foi esta que identificamos em nossa observação em classe, embora tenham sido observadas as práticas de apenas um professor. Uma outra abordagem, mais recente, trata as questões de proporção no âmbito de grandezas proporcionais e da noção de proporcionalidade, na qual o objeto matemático proporção não está presente, ou seja, o objeto proporção não tem lugar como objeto matemático no saber ensinado. Uma outra abordagem, ainda, encontrada em um livro didático, é uma mescla das duas anteriores. (BERNAL, 2004, p.152).

De acordo com a pesquisa realizada por Barreto (2001), cujo objetivo é verificar os procedimentos utilizados pelos alunos da população selecionada na resolução de problemas multiplicativos e, em particular, a ocorrência de procedimentos não canônicos[1]. Como referencial teórico, a autora utiliza o campo conceitual das estruturas multiplicativas propostas por Vergnaud.

A autora aplica um instrumento diagnóstico com 16 problemas que envolvem a quarta-proporcional com 119 alunos do 6º ano (antiga 5ª série) de uma escola estadual da região central do Estado de São Paulo e, com o intuito de efetuar a análise a ser realizada de acordo com as respostas dadas pelos alunos, os categoriza em dois grupos.

Os do primeiro grupo são razoavelmente simples, tendo em vista os valores numéricos que os constitui, a presença do valor unitário e limitam-se a apresentar somente quantidades discretas, totalizando 6 problemas. No segundo grupo, os enunciados estão sempre em “duplas”, ou seja, um mesmo anúncio aparece em duas versões, diferindo somente quanto ao valor de uma variável numérica, assim, foi denominado “versão 1” o problema cujo enunciado apresenta a imagem de um múltiplo do termo dado no anúncio e “versão 2” aquele que demanda a imagem de um divisor do termo dado, totalizando 10 problemas. Vale ressaltar que apenas o 5º problema de cada contexto apresenta-se “independente”, pois o termo, para o qual é pedida a respectiva imagem, não é nem múltiplo, nem divisor em N do termo do anúncio dado.

---

[1] Procedimentos não canônicos são procedimentos não-convencionais. Exemplo: Temos que 6 carrinhos custam 78 reais. Carlos comprou 18 carrinhos, quanto ele pagou? Uma forma de procedimento não canônico seria somar 78 + 78 + 78 obtendo assim 234 reais.

Segundo Barreto (2001), para descrever os tipos de respostas dadas pelos alunos, foi necessário classificá-las em categorias: coeficiente de proporcionalidade (valor unitário) e propriedade de linearidade (escalar), subdividindo as categorias com canônicos e não-canônicos, realizando com as respostas uma análise quantitativa e qualitativa.

Na análise quantitativa, a autora apresenta uma tabela com a quantidade de acertos e erros. Os acertos também são categorizados em valor unitário e escalar e os erros em mais freqüentes, sem classificação e em branco. Quanto aos acertos, a mesma também os categoriza em procedimentos não canônicos e canônicos. A autora relata que, na grande maioria dos problemas, a quantidade de erros foi superior a de acertos. Outro ponto destacado pela mesma é que a utilização de procedimentos não canônicos foram mais utilizados. Tal fato ressalta que o domínio do raciocínio multiplicativo não é imediato na sua totalidade, mas se desenvolve em longo tempo.

Na análise qualitativa, a autora busca elementos para compreender os processos cognitivos mobilizados na operação de multiplicação realizando com alguns alunos uma entrevista. Na leitura da mesma, Barreto (2001) nota que os alunos reconhecem o escalar, porém não como integrante da operação. Assim, muitos utilizam adições repetidas nas duas variáveis deixando claro a correspondência coordenada por essa operação entre o número de unidades a serem somadas na primeira e na segunda variável. Porém esse procedimento foi bastante privilegiado nos casos em que as relações se estabelecem de um número menor para um maior, o que não ocorre no outro caso. Assim, os alunos não conseguem explicitar o fator correspondente ao número de grupos – o escalar, o significado atribuído pelos mesmos à expressão a x b, ainda é: a+a+a+...+a (b vezes) no conjunto dos números naturais.

Barreto (2001) conclui que o uso de procedimentos não canônicos, de modo geral, foi mais empregado na determinação do escalar, talvez pelo fato de que o uso desse fator preserva as relações numéricas do problema até o final do cálculo. Logo, esse procedimento parece mais intuitivo, embora a redução ao valor unitário seja o método mais ensinado. Considera também que muitas vezes o professor institucionaliza apressadamente o procedimento do valor unitário,

ressalta que o mesmo deve valorizar as produções individuais possíveis de serem estabelecidas pelos alunos em uma situação multiplicativa.

Em outro estudo realizado por Floriani (2004), cujo objetivo foi identificar e descrever as estratégias que os alunos estão utilizando para resolver diferentes problemas que envolvem o conceito de proporcionalidade nas estratégias de solução utilizadas por eles próprios, que procedimentos revelam relações por eles estabelecidas entre as classes[2] e as quantidades expressas no enunciado e quais aspectos nas estratégias utilizadas pelos alunos, seria indícios da compreensão do conceito de proporcionalidade. Sendo sujeitos dessa pesquisa 82 alunos de uma escola privada situada na cidade de Itajaí (SC), na faixa etária de 12 a 17 anos, estudantes do 7º e 9º ano (antiga 6ª e 8ª série) do Ensino Fundamental do Ciclo II e 2º ano do Ensino Médio. O autor utiliza como referencial teórico o isomorfismo de medidas que foi adaptado de Vergnaud.

Floriani (2004) aplica uma lista de problemas que tratam de relação diretamente e inversamente proporcionais e visa analisar as estratégias utilizadas pelos sujeitos de diferentes faixas etárias que, por meio de seus registros, é possível identificar elementos que demonstram a compreensão do conceito de proporcionalidade (a lista conta com 9 problemas) sendo que estes apresentam as seguintes características: proporção direta e inversa / unitária, múltipla e não múltipla. O autor categoriza as respostas como: operação aritmética, adição sucessiva, fator proporção, valor unitário, regra de três, totalidade e diferença. Um aspecto destacado pelo autor é o fato de que na categoria dos problemas de proporção direta, os alunos do Ensino Fundamental do Ciclo II transitaram nas várias estratégias previstas para solucionar os problemas. Porém, no Ensino Médio, os alunos sustentaram a solução dos problemas prioritariamente pela estratégia da regra de três.

Os resultados apresentados por Floriani (2004) em problemas que envolviam a proporção direta são:

> Observamos que na 8ª série, os alunos que passaram pela instrução formal do estudo das proporções, não evidenciaram um melhor

[2] Classes: categorias objetos sejam elas medidas por unidades discretas ou contínuas. Exemplo: operários e dias.

> rendimento nos resultados com o uso das estratégias em relação à 6ª série, na qual os alunos ainda não passaram por essa instrução formal. No 2º ano do ensino médio foi significativo o uso da estratégia regra de três, simultaneamente no momento que esses alunos estavam utilizando esse algoritmo na aula de Química. (FLORIANI, 2004, p.75).

Os resultados apresentados por Floriani (2004) em problemas que envolviam a proporção inversa são:

> Observamos que nas três séries as estratégias mais utilizadas são apenas três: operação aritmética, fator de proporção e regra de três e também que os alunos de ensino médio demonstraram por meio de estratégias previstas, que foram utilizadas, não compreendendo que no problema em questão está implícita a proporcionalidade inversa que é uma dos conteúdos trabalhados no ensino fundamental. (FLORIANI, 2004, p.94 e 95).

Floriani (2004) tinha como objeto de estudo identificar quais aspectos seriam indícios na compreensão do conceito de proporcionalidade em estratégias utilizadas por adolescentes que frequentam o ensino regular na resolução de problemas que envolvem esse conceito. Ressalta, então, que da análise dos dados obtidos dos alunos do 7º ano (antiga 6ª série), embora os alunos não tenham passado pela instrução formal da proporcionalidade e não conhecem o algoritmo da regra de três, são capazes de usar seus conhecimentos anteriores para construir novas ferramentas que possibilitem a resolução do problema. Como já descrito, os mesmos obtiveram resultados superiores em relação a alunos do 9º ano (antiga 8ª série).

Com relação aos alunos do 9º ano (antiga 8ª série), que passaram pela instrução formal da proporcionalidade e que conhecem o algoritmo da regra de três, na contramão do que se poderia pressupor, utilizaram-se de estratégias diferenciadas para chegar às respostas. Sendo assim, eles praticamente abandonaram o algoritmo da regra de três como estratégias para a sua resolução.

No caso dos alunos do 2º ano do Ensino Médio, as estratégias mais utilizadas nos dois tipos de problemas que envolviam grandezas diretamente e inversamente proporcionais foi à regra de três. Porém a mesma foi utilizada de maneira mecânica, pois nos problemas que envolviam grandezas inversamente proporcionais, vários alunos utilizaram o algoritmo de maneira incorreta sem percepção das relações de proporcionalidade envolvidas nos problemas.

No estudo realizado por Rasi (2009) sobre as estruturas multiplicativas, através das concepções de alunos de Ensino Fundamental, utilizou-se como referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais propostas por Vergnaud (1996) que tinha como objetivo investigar as concepções que os alunos do sétimo ano mobilizam ao estabelecerem relações ternárias e o cálculo relacional.

Para isso foi aplicada uma Atividade composta por duas partes com 10 alunos na faixa etária entre 11 e 13 anos, sendo 6 de escola pública e 4 de escola particular. Destacamos que para 2 alunos foi aplicado um estudo piloto afim de ajustar o estudo definitivo. Para análise do mesmo, foram criados dois grupos, sendo o primeiro composto por 4 alunos de escola particular e o segundo por 4 alunos de escola pública.

A atividade foi divida em duas partes, sendo que a primeira envolveu problemas multiplicativos do tipo produto de medidas com noções de transformação e de composição binária e a segunda envolveu a composição binária, a multiplicação e suas propriedades. Para análise, foram considerados os registros escritos dos alunos participantes da resolução dessas atividades.

A autora concluiu que:

> Na análise dos dados constatamos que os alunos apresentam alguma dificuldade ao compor duas transformações e uma concentração no estabelecimento das relações ternárias que envolvem a noção de transformação. Estas constatações demonstraram a importância da ampliação do trabalho com as estruturas multiplicativas, de modo a promover grande variedade de situações e relações que dizem respeito ao Campo Conceitual Multiplicativo, em especial, às relações ternárias, como uma lei de composição binária com suas propriedades. (RASI, 2009, p.7).

No caso dos estudos realizados por Barreto (2001) e Floriani (2004), observamos que os alunos já obtiveram alguns conceitos em relação ao conteúdo de proporcionalidade, ou seja, os alunos já operaram com problemas multiplicativos, porém muitos professores, ao iniciar a formalização deste conteúdo, desprezam essa informação.

As contribuições das pesquisas de Costa (2005) e Bernal (2004) por meio de análises de livros didáticos foram de sua importância para nossas observações no caderno do professor, em particular Bernal (2004), pois foi a que subsidiou e

possibilitou o nosso terceiro questionamento, que se refere às abordagens quanto ao ensino de proporcionalidade encontradas nas Situações de Aprendizagem, que são: proporção e razão como objeto de estudo e o estudo de proporcionalidade enfatizando as grandezas envolvidas.

Em Barreto (2001), Floriani (2004) e Rasi (2009), a contribuição foi do referencial teórico, pois ambos utilizaram os Campos Conceituais das Estruturas Multiplicativas de Gérard Vergnaud (1991).

Assim, para fundamentarmos essa pesquisa e subsidiar a análise das Situações de Aprendizagem do caderno do professor, apresentaremos o referencial teórico escolhido que será os Campos Conceituais das Estruturas Multiplicativas propostas por Gérard Vergnaud (1991).

CAPÍTULO 2: Fundamentação Teórica

Com o objetivo de subsidiar essa pesquisa, descreveremos nesse capítulo a fundamentação teórica que se baseia nos Campos Conceituais das Estruturas Multiplicativas de Gérard Vergnaud (1991).

Gérard Vergnaud, discípulo de Piaget, amplia e redireciona em sua teoria o foco piagetiano das operações lógicas gerais, das estruturas gerais do pensamento para o estudo do funcionamento cognitivo do “sujeito-em-ação”. O mesmo argumenta que, embora Piaget tenha feito um trabalho relevante para a educação, ele não trabalhou dentro da sala de aula ensinando matemática e ciências.

2. 1 Os Problemas de Estrutura Multiplicativa

Segundo Vergnaud (1991), as estruturas multiplicativas são relações que comportam uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação dessas operações, que se dividem em 2 tipos diferentes. São elas: isomorfismo de medidas e produto de medidas.

“O isomorfismo de medidas é uma relação quaternária entre quatro quantidades. As quantidades são medidas de certo tipo e o resto são medidas de outro tipo”. (VERGNAUD, 1991, p.197, tradução nossa).

“O produto de medida é uma relação ternária entre três quantidades, das quais, uma é o produto das outras duas, tanto no plano numérico como no plano de grandezas e medidas”. (VERGNAUD, 1991, p. 211, tradução nossa).

2.1.1 Isomorfismo de Medidas

Segundo Vergnaud (1991), o isomorfismo de medidas põe em discussão quatro quantidades, em que três termos são conhecidos e um termo é desconhecido. O mesmo destaca que existem três grandes classes de problemas: *Multiplicação, Divisão* com o intuito de encontrar o valor unitário e a quantidade de unidades. Ilustraremos estas três classes por meio de esquemas em que x representa a incógnita:

Multiplicação Simples		Divisão Valor unitário		Divisão Quantidade de unidades	
1	a	1	x	1	a
b	x	b	c	x	c
x = a.b		$x = \frac{c}{b}$		$x = \frac{a}{c}$	

Destacamos que cada uma dessas classes se subdivide em seis subclasses. Vamos explicitar o caso da multiplicação simples através de diversos exemplos que podem evidenciar dificuldades diferentes:

Números pequenos[3]		Números grandes[4]		Valor unitário decimal	
1	3	1	42	1	2,75
2	x	183	x	7	x

[3] Denominação utilizada por Vergnaud (1991). Porém, o que Vergnaud chamou de números pequenos, chamaremos de números cujo o expoente da base decimal na forma de notação científica seja igual ou menor que 1. Exemplo: $0,05 = 5.10^{-2}$.

[4] Denominação utilizada por Vergnaud (1991). Porém, o que Vergnaud chamou de números grandes, chamaremos de números cujo o expoente da base decimal na forma de notação científica seja igual ou maior que 2. Exemplo: $300 = 3.10^{2}$.

Números decimais		Valor unitário (<1)		Número de unidades (<1)	
1	6,08	1	0,25	1	6,08
5,74	x	7	x	0,42	x

Em cada subclasse temos, todavia, diversas dificuldades para a maioria dos alunos ao final da escola primária, sobretudo nos últimos três exemplos, destaca Vergnaud (1991).

Essas subclasses também servem para cada tipo de Divisão, tanto no valor unitário quanto na quantidade de unidades.

Para um melhor entendimento das dificuldades que podem ser apresentadas pelos alunos, disponibilizaremos um exemplo e realizaremos uma análise vertical chamada aqui de escalar e uma análise horizontal, que denominaremos função.

Exemplo 1: Sabemos que 3 carrinhos da marca “Truck” custam R$ 160,00. Quanto custarão 8 carrinhos?

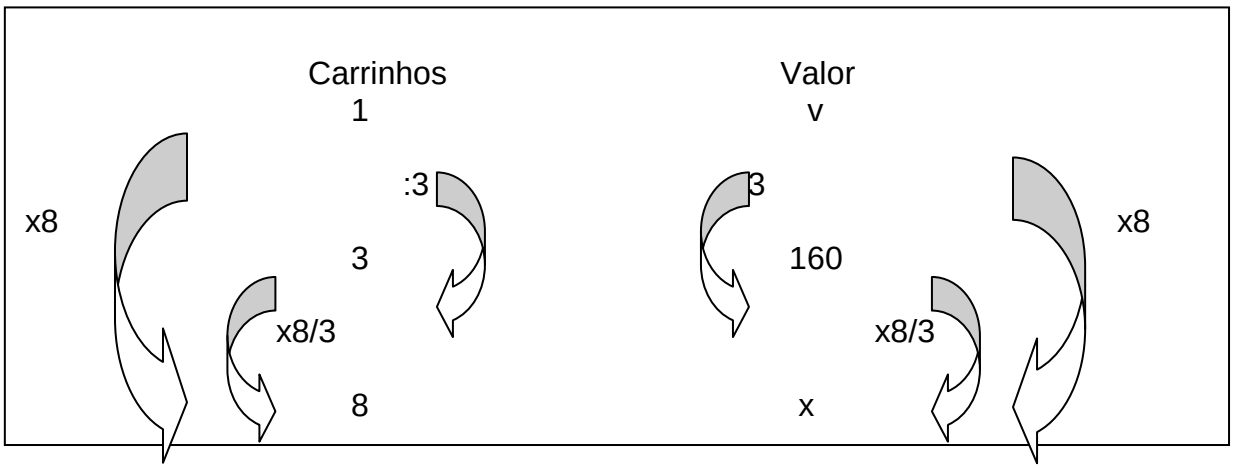


Figura 6: Exemplo adaptado de Vergnaud.

Fonte: VERGNAUD, 1991, p.198

A análise vertical se centra na noção do escalar que passa de uma linha para outra em uma mesma categoria. Seguem os passos:

- Primeira etapa: Passa-se de 3 carrinhos para 1 carrinho (ao dividir por 3), também passa-se de 160 reais para o valor unitário (ao dividir por 3), representado no esquema por v.
- Segunda etapa: Passa-se de 1 carrinho para 8 carrinhos (ao multiplicar por 8), também passa-se do valor unitário para o valor de 8 carrinhos (ao multiplicar por 8), representado no esquema por x.
- Síntese: Pode-se passar de 3 carrinhos para 8 carrinhos diretamente ao multiplicar por 8/3 que é, na verdade, uma aplicação sucessiva dos operadores (:3 e x8). Assim podemos passar de 160 reais para o valor direto ao multiplicar por 8/3.

Segundo Vergnaud (1991), “a noção de fração é introduzida aqui a partir da noção de operador e corresponde à composição dos operadores multiplicativos simples, uma divisão e uma multiplicação”. (Vergnaud, 1991, p. 206, tradução nossa).

Para Vergnaud (1991), pode se considerar também que um operador fracionário representa uma multiplicação por razão. (Vergnaud, 1991, p. 207, tradução nossa).

Destacamos que nesse exemplo o operador fracionário resultante é completo. Existem casos que a composição é um operador simples, como sugere o exemplo:

Exemplo 2: Comprei 12 novelos de lã. Cada 3 novelos custa R$ 15,00. Quanto devo pagar?

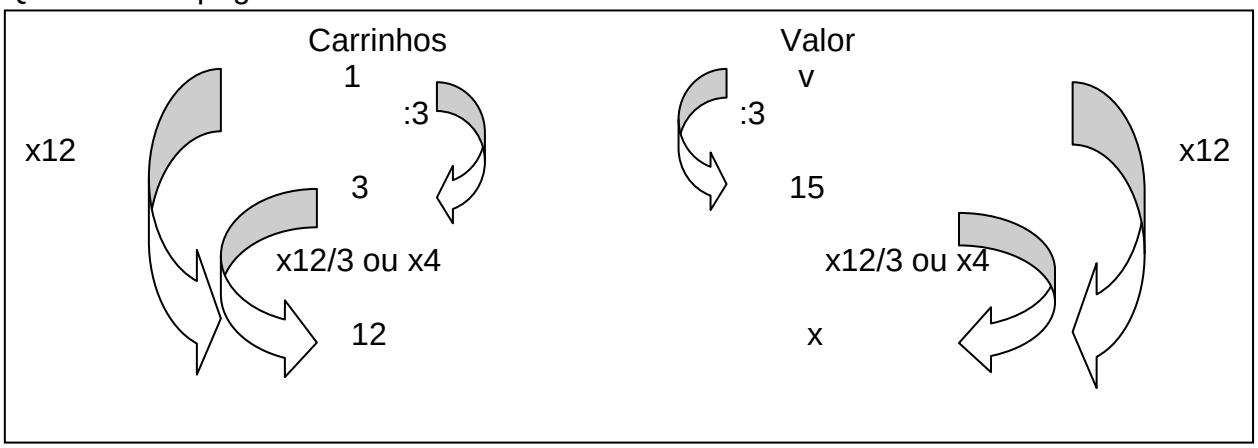


Figura 7: Exemplo adaptado de Vergnaud.

Fonte: VERGNAUD, 1991, p.198

Conforme apresentado nesse Exemplo 2, a composição do operador (:3 e x12) é o operador simples x4.

2.1.2 Produto de Medida

Segundo Vergnaud (1991), o produto de medida “consiste em uma relação ternária entre três quantidades, das quais, uma é o produto das outras, tanto no plano numérico como no plano de grandezas e medidas”. (VERGNAUD, 1991, p.211, tradução nossa).

O produto de medida permite distinguir duas classes de problemas: multiplicação e divisão. Novamente destacamos que essas classes se dividem em inúmeras subclasses segundo as propriedades dos números utilizados (inteiros, decimais, números grandes, números menores que 1). (VERGNAUD, 1991, p.222, tradução nossa).

Para exemplificar e diferenciar essas classes, serão apresentados alguns exemplos:

Exemplo 1: Em um baile temos 3 meninos e 4 meninas querendo dançar, cada menino quer dançar com cada menina e cada menina quer dançar com cada menino. Quantas duplas diferentes eles podem formar?

Designaremos por A={a,b,c} o conjunto de meninos e por B={d,e,f,g} o conjunto de meninas, e o conjunto C das possíveis duplas, logo, C = A x B, como mostra a seguinte tábua:

	a	b	c
d	(d,a)	(d,b)	(d,c)
e	(e,a)	(e,b)	(e,c)
f	(f,a)	(f,b)	(f,c)
g	(g,a)	(g,b)	(g,c)

Figura 8: Exemplo adaptado de Vergnaud.

Fonte: VERGNAUD, 1991, p.212

Para encontrar a resposta, o aluno precisa realizar uma associação dos elementos do primeiro conjunto com o segundo. Assim, o número de duplas é igual ao produto do número de meninas pelo número de meninos. Veja a relação:

x duplas = 4 meninas x 3 meninos.

Exemplo 2: Combinando somente camiseta com calça jeans, Fernando pretende formar 15 trajes diferentes. Sabendo que ele possui 3 calças jeans, quantas camisetas ele deve possuir?

Para Vergnaud (1991), este exemplo ilustra que existe uma forma de divisão própria desta forma de relação multiplicativa que não podemos confundir pura e simplesmente com as divisões que derivam do isomorfismo de medidas. (VERGNAUD, 1991, p.213, tradução nossa).

Para encontrar a resolução desse problema, é necessário dividir o número de trajes que Fernando deseja formar pelo número de calças jeans que ele possui. Observe a relação:

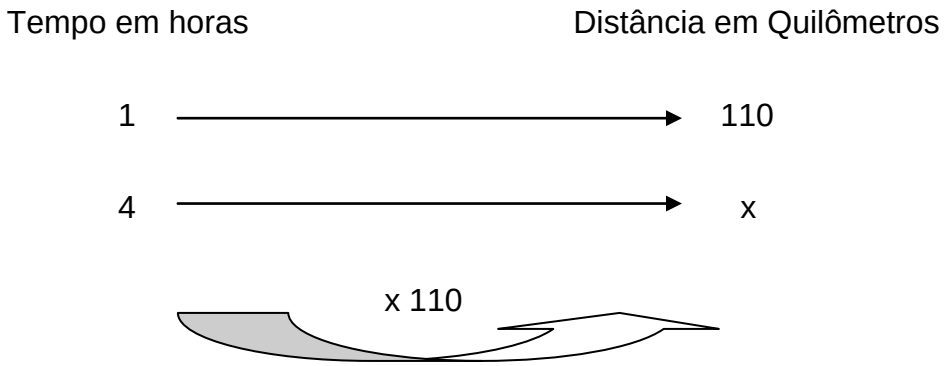
15 trajes = x camisetas x 3 calças jeans.

2.1.3 A Noção de Dimensão

Depois de descritas todas as formas de relação multiplicativas, deve-se destacar uma análise que permite estabelecer de maneira simples uma relação entre as mesmas. Nesse aspecto, será utilizado um operador-função para as soluções dos problemas da primeira forma, isomorfismo de medidas, que permita encontrar a segunda forma, produto de medida.

Exemplo 1: Um carro percorre uma estrada por 4 horas e a sua velocidade é de 110 quilômetros por hora. Que distância ele percorreu?

Esse exemplo apresenta claramente uma relação de isomorfismo de medidas, como segue:



Notamos que um dos procedimentos utilizados consiste em multiplicar a medida de 4 horas pelo operador-função 110 km/h, que pode ser considerado também como uma medida de velocidade, como segue:

x quilômetro = 4 horas x 110 km/h

d = v x t, onde:

d = distância;

v = velocidade;

t = tempo.

Ao ligar esta última operação com o produto de medida, inversamente pode-se analisar o produto de medida como um duplo isomorfismo de medidas ou, ainda, duplo proporcional.

Destacamos que o referencial teórico aqui descrito tem como objetivo exemplificar tipos de problemas multiplicativos, pois o objetivo dessa pesquisa é a análise de Situações de Aprendizagem propostas no caderno do professor que envolvem proporcionalidade, e este conteúdo está intimamente ligado aos problemas que envolvem multiplicação e divisão. Assim, faz-se necessário um levantamento dos diferentes tipos de problemas que poderão aparecer.

CAPÍTULO 3: Procedimentos Metodológicos

Nesse capítulo, apresentamos quais foram os procedimentos no desenvolvimento desta pesquisa, nas quais foram enfocadas a descrição da Proposta Curricular do Estado de São Paulo dos anos de 1986 e 2008 e a análise das Situações de Aprendizagem do caderno do professor produzido para o 3º bimestre do 7º ano (antiga 6ª série) do Ensino Fundamental do Ciclo II.

3.1 Metodologia da Pesquisa

A referida pesquisa é de cunho documental - bibliográfico. Analisamos documentos oficiais, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental do Ciclo II (1998) e as Propostas Curriculares do Estado de São Paulo de 1986 e 2008. Realizamos a análise do caderno do professor do 3º bimestre, pois, nesse caderno, está presente o estudo do conteúdo de proporcionalidade, ambos propostos para alunos do 7º ano (antiga 6ª série) do Ensino Fundamental do Ciclo II, a fim de verificar a variedade de problemas multiplicativos, propostos por Gérard Vergnaud (1991).

Segundo Lakatos e Marconi,

> A característica da pesquisa documental é que a fonte de coleta de dados está restrita a documentos, escritos ou não, constituindo o que se denomina de fontes primárias. Estas podem ser feitas no momento em que o fato ou fenômeno ocorre, ou depois". (LAKATOS e MARCONI, 1991, p.174).

Vale ressaltar que:

> Além de a pesquisa documental ser realizada em bibliotecas, pode ser feita em institutos e centros de pesquisas, museus, acervos particulares, bem como em locais que sirvam como fonte de informações para o levantamento do documento, no sentido de possibilitar o encontro de uma série de informações para comprovar a existência ou não de uma determinada hipótese que é ou foi objeto de estudo de outros pesquisadores e que, a partir dali, o pesquisador passa a somar uma série de informações, com a finalidade de elaborar o seu projeto de pesquisa. (OLIVEIRA, 2001, p.119).

Destacamos também que:

> [...] Na pesquisa bibliográfica o investigador irá levantar o conhecimento disponível na área, identificando as teorias produzidas, analisando-as e avaliando sua contribuição para auxiliar a compreender ou explicar o problema objetivo da investigação. O objetivo da pesquisa bibliográfica, portanto, é o de conhecer e analisar as principais contribuições teóricas existentes sobre um determinado tema ou problema, tornando-se um instrumento indispensável para qualquer tipo de pesquisa. (KÖCHE, 1997, p. 122).

Assim, segundo Lakatos e Marconi: "[...] a pesquisa bibliográfica não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras. (LAKATOS e MARCONI, 1991, p.183).

Ao escolher um documento, o pesquisador deve-se atentar a vários fatos, sendo necessária a caracterização do mesmo, que varia de acordo com o objetivo da análise. Segundo Lüdke e André (1986): "a escolha dos documentos não é aleatória, mas devemos considerar alguns propósitos, idéias ou hipóteses guiando a sua seleção". (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p.40).

Depois de selecionado o documento a ser analisado, o pesquisador procederá a análise propriamente dita dos dados. Assim, faz-se necessário uma análise de conteúdo, que é definida por Krippendorff (1980), de acordo com Lüdke e André (1986), como "uma técnica de pesquisa para fazer inferências válidas replicáveis dos dados para o contexto" (p.41), ou seja, seria uma técnica de se utilizar dados presentes em documentos com a finalidade de explicar o contexto.

Krippendorf (1980) destaca que "a análise de conteúdo pode caracterizar-se como um método de investigação do conteúdo simbólico das mensagens", o que leva o receptor a fazer inferências dos dados para o seu contexto. (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p. 41).

Segundo Bardin (2009) "As diferentes fases da análise de conteúdo organizam-se em torno de três pólos cronológicos: 1) pré-análise; 2) exploração do material; 3) tratamento dos resultados, inferência e interpretação". (BARDIN, 2009, p.121).

A pré-análise, segundo Bardin:

> É a fase de organização propriamente dita. Corresponde a um período de intuições, mas, tem por objetivo tornar operacionais e sistematizar as idéias iniciais, de maneira conduzir a um esquema preciso do desenvolvimento das operações sucessivas, num plano de análise. (BARDIN, 2009, p. 121).

Ainda, segundo Bardin (2009), sobre a exploração do material: “Esta fase, longa e fastidiosa, consiste essencialmente em operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função de regras previamente formuladas”. (BARDIN, 2009, p.127).

O tratamento dos resultados, inferência e interpretação, são as etapas que transformam os dados brutos de maneira a serem significativos e válidos, segundo Bardin (2009):

> “Operações estatísticas simples (percentagens), ou mais complexas (análise factorial), permitem estabelecer quadros de resultados, diagramas, figuras e modelos, os quais condensam e põem em relevo as informações fornecidas pela análise”. (BARDIN, 2009, p.127).

Para Bardin (2009): “O analista, tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis, pode então propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos - ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas”. (BARDIN, 2009, p.127).

Para realizarmos essa pesquisa, inicialmente estudamos os dados do SARESP/2008, o qual apontou índices baixíssimos em questões que evolveram o conteúdo de proporcionalidade.

Após o levantamento desses dados, realizamos a leitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ciclo II, a fim de buscar indícios de como o ensino do conteúdo de proporcionalidade está previsto. Também fizemos a leitura das Propostas Curriculares do Estado de São Paulo de 1986 e 2008 com o objetivo de efetuar uma comparação entre as mesmas.

Também realizamos um levantamento bibliográfico com o propósito de verificar as contribuições de outras pesquisas sobre o tema. Foi neste momento que escolhemos Gérard Vergnaud (1991) como referencial teórico.

Após esse levantamento, realizamos a leitura do caderno do professor do 3º bimestre do 7º ano (antiga 6ª série) com o objetivo de selecionar as atividades que propiciem aos alunos um primeiro contato com o conteúdo de proporcionalidade. Nesse momento, realizamos a seleção das atividades que seriam analisadas criando categorias com o intuito de identificar os tipos de problemas. São elas:

- Categoria 1: problemas envolvendo o reconhecimento da proporcionalidade e seus limites;

- Categoria 2: problemas envolvendo jogo;

- Categoria 3: problemas envolvendo variação de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

- Categoria 4: problemas envolvendo o cálculo de razão;

- Categoria 5: problemas envolvendo o cálculo de razão em situações contextualizadas[5].

- Categoria 6: problemas envolvendo o cálculo de probabilidade.

Depois de realizada a seleção, efetuamos a resolução das atividades e verificamos as sugestões de resolução e encaminhamento didático no caderno do professor. Esses processos, até aqui percorridos, foram realizados a fim de responder as questões descritas a seguir:

- O caderno do professor do 7º ano (antiga 6ª série) do 3º bimestre privilegia todos os tipos de problemas multiplicativos?

- O objetivo proposto pelos autores em cada Situação de Aprendizagem foi atingido com o desenvolvimento das atividades propostas?

- Os tipos de problemas propostos aos alunos possuem qual tipo de abordagem?

---

[5] Contextualizadas: a palavra foi utilizada para designar situações que estão presentes no cotidiano.

CAPÍTULO 4: Análise dos Dados

Serão descritos no presente capítulo as análises dos dados. Vale ressaltar que não iremos realizar uma análise de todas as atividades das Situações de Aprendizagem 1 e 2, pois as atividades são semelhantes. Logo, realizaremos uma análise baseada nas categorias descritas na metodologia.

Para realizar a análise das Situações de Aprendizagem, foi necessária a criação de categorias, a fundamentação teórica e também as dissertações de Barreto (2001), Floriani (2004) e Rasi (2009) e a leitura do caderno do professor. Chegando assim às seguintes categorias:

- Categoria 1: problemas envolvendo o reconhecimento da proporcionalidade e seus limites;

- Categoria 2: problemas envolvendo jogo;

- Categoria 3: problemas envolvendo variação de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

- Categoria 4: problemas envolvendo o cálculo de razão;

- Categoria 5: problemas envolvendo o cálculo de razão em situações contextualizadas.

- Categoria 6: problemas envolvendo o cálculo de probabilidade.

Vale ressaltar que para análise de cada categoria foram escolhidos 2 problemas. Entretanto, para análise das categorias 2 e 6, encontramos apenas uma atividade com essas características.

Faremos uma breve descrição das duas Situações de Aprendizagem envolvidas nessa análise, pois em ambas o enfoque é o ensino de proporcionalidade, sendo esse o tema da presente pesquisa.

4.1 Descrição da Situação de Aprendizagem 1 e 2

Segundo o caderno do professor, o objetivo da Situação de Aprendizagem 1 é:

> Na Situação de Aprendizagem 1, propomos uma seqüência de situações-problema envolvendo o reconhecimento da existência de proporcionalidade. A construção da noção de proporcionalidade envolve também a capacidade de identificar situações em que ela não está presente. Propomos uma metodologia alternativa para a resolução dos clássicos problemas envolvendo a variação **diretamente** ou **inversamente proporcional** entre duas ou mais grandezas. Em vez de usar a fórmula da regra de três composta, o aluno é convidado a desenvolver uma seqüência de transformações proporcionais inspirado por um jogo de palavras chamado *dúplex*, criado por Lewis Carroll, autor de *Alice no país das maravilhas.* (SÃO PAULO, 2008b, p.10).

Essa situação é composta por 10 atividades, sendo:

> O objetivo principal a ampliação das noções de variação diretamente e inversamente proporcionais de uma grandeza, que proporcionam ao aluno a capacidade de resolver problemas e fazer previsões em situações que envolvam proporcionalidade. (SÃO PAULO, 2008b, p.12).

Os autores do caderno do professor destacam que os alunos já possuem um conhecimento intuitivo sobre proporcionalidade derivado de sua experiência em situações concretas da vida cotidiana. (SÃO PAULO, 2008b, p.12).

Segundo o caderno do professor, o objetivo da Situação de Aprendizagem 2 é:

> [...] passamos a tratar diretamente do conceito de razão, construído a partir das situações-probema envolvendo proporcionalidade direta. Apresentamos também situações-problema envolvendo diferentes tipos de razão, como a **porcentagem**, a escala em mapas e desenhos, a velocidade ou rapidez, a densidade etc. Incluímos também a **probabilidade** como uma razão que expressa a chance de ocorrência de um evento em um determinado espaço amostral, como no lançamento de moedas, dados etc. Para finalizar a seqüência, propomos uma atividade prática envolvendo as razões presentes no corpo humano, a partir do desenho de Leonardo Da Vinci chamado *O Homem vitruviano*. A partir desse desenho, os alunos poderão observar e explorar o conceito de razão por meio de medidas e comparações. (SÃO PAULO, 2008b, p.10).

Essa situação é composta de 8 atividades, sendo o principal objetivo o desenvolvimento do conceito fundamental na matemática: “a razão”. Os autores destacam que esse conceito: “[...] está presente nos mais diversos contextos, desde o trabalho com medidas até o estudo de funções e progressões numéricas, passando pela semelhança geométrica, trigonometria etc. Optamos por formalizar o conceito de razão depois do estudo das variações proporcionais entre grandezas, pois, dessa forma, os alunos já estariam inseridos no contexto da comparação entre grandezas”. (SÃO PAULO, 2008b, p.22).

Outro fato destacado pelos autores do caderno do professor está nos diversos usos da razão que são apresentados por meio de: “[...] algumas situações problema envolvendo os tipos mais comuns de razão, como a **escala** usada em mapas, a **velocidade** de um objeto, a **densidade**, o PIB *per capita*, a probabilidade etc. A **probabilidade** é apresentada como uma razão específica que expressa à relação entre o número de possibilidades de ocorrência de um evento particular e o número total de possibilidades de um espaço amostral determinado”. (SÃO PAULO, 2008b, p.22).

4.2 Análise da Situação de Aprendizagem 1: A Noção de Proporcionalidade

Ao realizar a análise da Situação de Aprendizagem 1, levamos em consideração o título da mesma, que é a noção de proporcionalidade, pois ela apresenta aos alunos que a noção de proporcionalidade já está presente em sua vida desde a infância.

4.2.1 Análise da Categoria 1 - Problemas Envolvendo o Reconhecimento da Proporcionalidade e Seus Limites

Para realizar a análise dessa primeira categoria, escolhemos as atividades 1 e 3 da Situação de Aprendizagem 1.

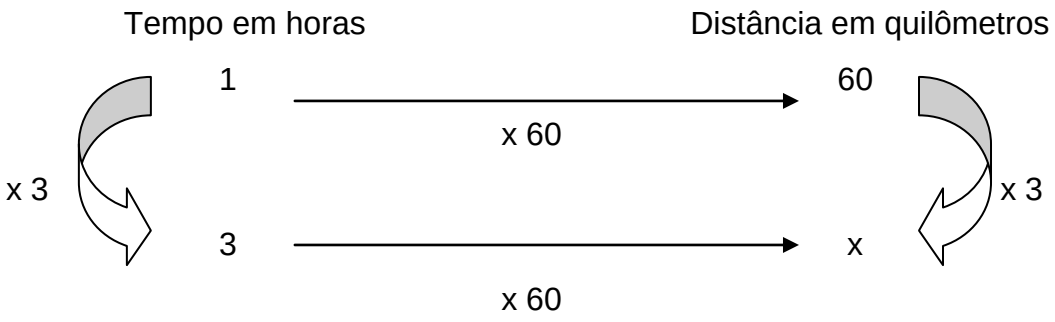
Segue a descrição da **Atividade 1**, que "têm como objetivo avaliar a capacidade de reconhecimento das situações que envolvem proporcionalidade". (SÃO PAULO, 2008, p.13).

> **Atividade 1**
> Analise as seguintes situações e verifique se as previsões feitas são confiáveis e se há proporcionalidade entre as grandezas envolvidas. Justifique sua resposta.
> **a)** Um pintor gastou 1 hora para pintar uma parede. Para pintar duas paredes iguais, ele levará 2 horas.
> **b)** Um time marcou dois gols nos primeiros 15 minutos de jogo. Portanto, no final do primeiro tempo (45 minutos), ele terá marcado seis gols.
> **c)** Uma banheira contendo 100 litros de água demorou aproximadamente 5 minutos para ser esvaziada. Para esvaziar uma banheira com 200 litros de água serão necessários aproximadamente 10 minutos.
> **d)** Em 1 hora de viagem, um trem com velocidade constante percorreu 60 quilômetros. Mantendo a mesma velocidade, após 3 horas ele terá percorrido 150 quilômetros.
> **e)** Em 20 minutos, uma pessoa gastou R$ 30 no supermercado. Se ela ficar 40 minutos, gastará R$ 60.
> **f)** Um estacionamento cobra R$ 3 por hora. Para um automóvel que ficou estacionado 2 horas foi cobrado o valor de R$ 6. Se ele ficasse estacionado 6 horas, o valor cobrado seria de R$ 18.
> **g)** Ao tomar um táxi da minha casa até a escola, o motorista passou por 4 avenidas diferentes. O valor cobrado pela corrida foi de R$ 10. Na volta, ele passará somente por 2 avenidas, portanto o valor cobrado será de R$ 5. (SÃO PAULO, 2008b, p.13-14).

Na resolução dos itens **a)**, **c)** e **f)**, temos que nas situações descritas existe proporcionalidade, no item **a)** existe proporcionalidade entre o número de paredes e o tempo gasto para pintá-las. No item **c)** existe proporcionalidade entre o tempo de vazão e o volume de água escoado. No item **f)** existe proporcionalidade entre o valor a ser cobrado e o número de horas que o carro fica estacionado.

A resolução do item **d)**, difere das anteriores, sendo que nesse caso existe proporcionalidade, todavia a relação descrita está errada, pois se o trem mantiver

a mesma velocidade deveria percorrer 180 quilômetros. Veja o esquema que soluciona tal questão:



Logo, a distância percorrida pelo trem é de 180 quilômetros. Segundo o esquema, esse tipo de problema, conforme descrito na fundamentação teórica, é do tipo duplo de isomorfismo de medidas, ou ainda, duplo proporcional, pois podemos descrever a resolução da seguinte forma:

x km = 3 horas x 60 km/h

Na resolução dos itens **b)**, **e)** e **g)**, temos que nas situações descritas não existe proporcionalidade, no item **b)** o rendimento de um time não é constante ao longo de um jogo, existindo uma série de outros fatores que influenciam o número de gols. No item **e)** o valor gasto em um supermercado não é diretamente proporcional ao tempo de permanência nele. No item **g)** não existe relação direta entre o número de avenidas pelas quais o táxi passa e o valor cobrado.

Segundo os autores, cabe ao professor ressaltar:

> Primeiramente, deve haver algum grau de dependência entre as grandezas envolvidas. Nos itens **e** e **g**, por exemplo, não há dependência direta entre as grandezas envolvidas. Em segundo lugar, a variação entre as grandezas tem que ser a mesma. No item **d**, embora haja uma relação de dependência entre a distância percorrida e o tempo, a variação de uma não é diretamente proporcional à da outra. (SÃO PAULO, 2008b, p.14).

Segue a descrição da **Atividade 3**, na qual o principal objetivo é: “explorar os limites da proporcionalidade em diferentes contextos”. (SÃO PAULO, 2008b, p.15).

> **Atividade 3**
> Analise as situações abaixo e avalie se elas são plausíveis.
> **a)** Um professor corrige 20 provas em 1 hora de trabalho. Após 30 horas, ele terá corrigido 600 provas.
> **b)** Um corredor percorre 10 quilômetros em 1 hora. Portanto, após 20 horas, ele terá percorrido 200 quilômetros.
> **c)** Uma pessoa leu três livros na semana passada. Em um ano, ele lerá 156 livros. (SÃO PAULO, 2008b, p. 15).

Nessa atividade, todas as situações propostas mantêm a proporcionalidade, porém não são situações reais, ou seja, não são plausíveis. No item **a)** dificilmente o professor conseguirá manter o mesmo ritmo de trabalho durante 30 horas. No item **b)** mesmo para um atleta seria impossível manter esse ritmo de corrida por tanto tempo. No item **c)** o fato de uma pessoa ter lido três livros em uma semana não garante que essa pessoa irá manter o mesmo ritmo de leitura ao longo de um ano.

Os autores destacam algo a ser discutido com os alunos: “[...] que a proporcionalidade direta ocorre quando a variação resulta de um processo multiplicativo e não aditivo, ou seja, ambas as grandezas são multiplicadas pelo mesmo fator”. (SÃO PAULO, 2008b, p.16).

Assim, acreditamos que essa característica é fundamental para que exista proporcionalidade. Isso muitas vezes confunde os alunos, já que alguns acreditam que o fato das grandezas aumentarem compreende uma adição.

Um fato que pode dificultar o entendimento do aluno pode ser a palavra plausível. Talvez seja necessário o professor discutir com seus alunos o seu significado, pois uma situação plausível seria um fato que podemos admitir, ou seja, na **Atividade 3**, apesar de todas as situações manterem a proporcionalidade, não são reais.

Quanto ao tipo de problema descrito nas Atividades 1 e 3, temos que ambos visam buscar conhecimentos já existentes nos alunos, algo que foi destacado nas pesquisas de Barreto (2001) e Floriani (2004), pois muitos professores iniciam o conteúdo de proporcionalidade sem considerar os conhecimentos que os alunos já dispõem sobre o tema.

4.2.2 Análise da Categoria 2 – Problema Envolvendo Jogo

A **Atividade 6**: “[...] tem como objetivo principal desenvolver a noção de proporcionalidade direta e inversa de uma forma lúdica e significativa”. (SÃO PAULO, 2008b, p.17)

Para isso é proposto aos alunos um jogo, conhecido como dúplex, que, segundo os autores do caderno do professor, é um quebra-cabeça:

> “[...] que consiste em ligar duas palavras de mesmo comprimento, propostas como o início e o fim de um encadeamento, por meio de palavras intermediárias que constituem elos e que diferem entre si apenas por uma letra. Essas palavras-elo devem ter sentido na língua materna”. (SÃO PAULO, 2008b, p.17).

Segue um exemplo:

OURO
MURO
MUDO
MEDO
LEDO
LIDO
LIXO

Fonte: SÃO PAULO, 2008b, p.18

Segue a **Atividade 6**:

Atividade 6
Resolva os dúplex abaixo:

TIA	**POR**	**LISO**	**POETA**
TUA	PAR	PISO	PONTA
	MAR	PESO	PONTO
		PESA	TONTO
			TANTO
LUA	**MAL**	**PENA**	**TANGO**

(SÃO PAULO, 2008b, p.18)

Na **Atividade 6**, espera-se que o aluno consiga resolver o quebra-cabeça, tendo como solução possível a tabela que segue:

TIA	POR	LISO	POETA
TUA	PAR	PISO	PONTA
SUA	MAR	PESO	PONTO
NUA	MAS	PESA	TONTO
RUA	MAU	PERÂ	TANTO
LUA	MAL	PENA	TANGO

Assim o material propõe: “[...] a seguir um problema matemático que pode ser resolvido por meio de uma estratégia semelhante à utilizada no dúplex. Em vez de letras, o início e o fim do encadeamento são números encadeados segundo uma determinada proporcionalidade”. (SÃO PAULO, 2008b, p.18).

Em uma análise superficial não encontramos uma relação da atividade com a regra de três, porém se analisarmos com olhos mais atentos podemos observar que neste jogo está implícito a noção do invariante, ou seja, em cada linha trocamos apenas uma letra e a demais permanecem inalteradas.

4.2.3 Análise da Categoria 3 - Problemas Envolvendo Variação de Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais

Para análise dessa categoria, foram selecionadas as atividades 7 e 8 da Situação de Aprendizagem 1.

Sendo objetivo da **Atividade 7** preencher a tabela, no qual ressalta que a relação que envolve as grandezas são diretamente proporcionais. Segue a descrição da mesma.

> **Atividade 7**
> Na tabela a seguir, registrou-se a quantidade vendida e o valor recebido pela venda de um mesmo produto. Contudo, alguns valores não foram preenchidos. Preencha-a mantendo a proporcionalidade direta entre a quantidade vendida e o valor recebido.

Quantidade vendida	Valor recebido
10	R$ 30
5	
	R$ 3
	R$ 21
14	
	R$ 420

(SÃO PAULO, 2008b, p.18)

Para completar a tabela, é necessário considerar que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, o que implica em concluir que se 10 produtos custam 30 reais, na 3ª linha da tabela, temos que 5 produtos irão custar 15 reais, pois se 5 é a metade de 10, então a metade de 30 é 15. Para completar a 4ª linha da tabela, deve-se perceber que 3 reais é o valor de 1 produto, pois 5 produtos custam 15 reais. Para completar a 5ª linha da tabela, deve-se perceber que com 21 reais podemos comprar 7 produtos, pois 1 produto custa 3 reais. Na 6ª linha da tabela, deve-se notar que 14 é o dobro de 7, então se 7 produtos custam 21 reais, logo 14 produtos custarão o dobro, ou seja, 42 reais. Para completar a 7ª linha, nota-se que 420 é 10 vezes maior que 42, logo 420 reais compram 140 produtos.

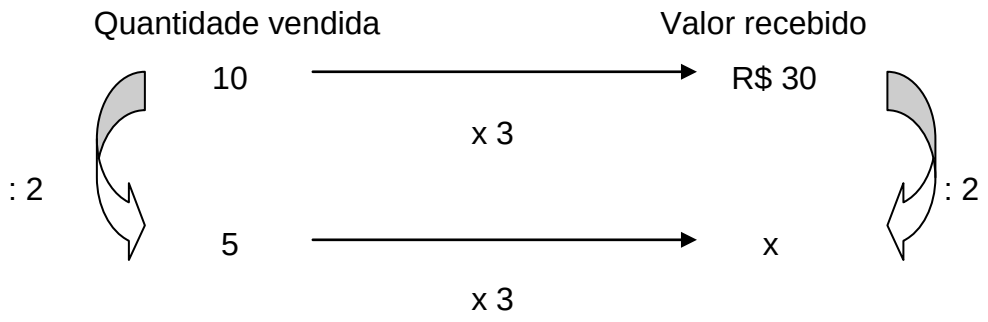
Os autores do referido material destacam que:

> Havendo proporcionalidade direta, a variação de uma grandeza deve ser a mesma da outra. Portanto, se a quantidade vendida se reduz pela metade (10 para 5), o valor recebido também cairá pela metade (30 para 15). Da mesma forma, se o valor recebido aumenta em sete vezes, a quantidade vendida também será multiplicada por sete. (SÃO PAULO, 2008b, p.18).

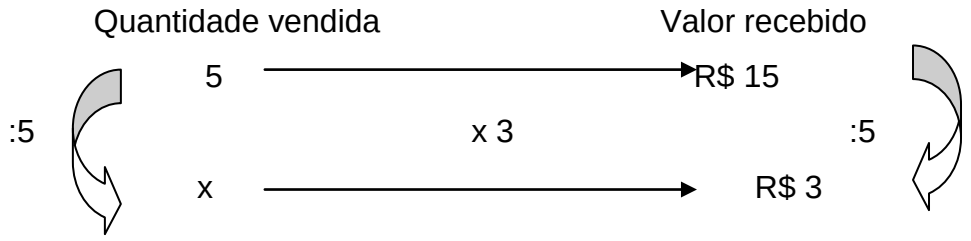
Outra questão apresentada aos professores é a atenção para o fato de algo permanecer constante na comparação entre as colunas ao dividir o valor da segunda coluna pelo da primeira e este em todas as linhas é 3 (30:10 = 15:5 = 3:1 = 21:7 = 42:14 = 420:140 = 3).

Segundo os autores: “Esse é o preço unitário do produto, cujo valor aparece na tabela quando a quantidade vendida é unitária. Trata-se, na verdade, da razão de proporcionalidade entre duas grandezas”. (SÃO PAULO, 2008b, p.18).

Essa atividade é mais um exemplo de problema multiplicativo do tipo isomorfismo de medidas, segundo a classificação proposta por Vergnaud (1991), para completar a tabela, é necessário realizar uma relação entre as grandezas envolvidas. Para completar a 3ª linha, é necessário relacioná-la com as grandezas da 2ª linha. A seguir apresentaremos o esquema dessa relação:



Assim, a relação entre a 2ª e a 3ª linha é do tipo isomorfismo de medidas da subclasse de multiplicação. Todavia, a relação entre a 3ª e a 4ª linha é do tipo isomorfismo de medidas da subclasse divisão. O esquema exemplifica tal situação:



Conforme apresentado, temos que o valor desconhecido troca de lado na relação, ou seja, no 1º caso o valor a ser encontrado está posicionado logo abaixo do valor recebido, algo que não acontece com o 2º exemplo, pois o valor a ser encontrado está posicionado abaixo da quantidade vendida. Esse fato pode prejudicar o entendimento do aluno na busca pela resolução de completar a tabela.

A definição apresentada pelos autores para grandezas diretamente proporcionais entre si é: “[...] quando os quocientes entre os valores de uma em relação aos correspondentes da outra serão constantes”. (SÃO PAULO, 2008b, p. 18).

Segue a descrição da **Atividade 8**, cujo o objetivo é apresentar aos alunos uma situação que envolve grandezas inversamente proporcionais. (SÃO PAULO, 2008b, p.18).

Atividade 8

Um clube dispõe de uma quantia fixa de dinheiro para comprar bolas de futebol para os treinamentos. Com o dinheiro disponível é possível comprar, de um fornecedor, 24 bolas a 6 reais cada uma. O gerente pesquisou outros fabricantes e anotou as informações na tabela a seguir. Complete-a obedecendo ao princípio de proporcionalidade e descubra qual foi o menor preço pesquisado pelo gerente.

Preço de uma bola	Número de bolas
R$ 6	24
R$ 12	
R$ 4	
	72
R$ 24	
	144
R$ 72	

(SÃO PAULO, 2008b, p.18-19)

Para completar a tabela, é necessário saber que esse clube dispõe de uma quantidade fixa de dinheiro, ou seja, 144 reais (24.6 = 144). Logo, para completar a 3ª linha da tabela, temos que uma bola custa 12 reais. Assim, com 144 reais, é possível comprar 12 bolas. Na 4ª linha da tabela, temos que uma bola custa 4 reais, assim, com 144 reais é possível comprar 36 bolas. Na 5ª linha da tabela, compramos 72 bolas, assim, cada bola custou 2 reais. Na 6ª linha da tabela, temos que uma bola custa 24 reais, assim, com 144 reais é possível comprar 6 bolas. Na 7ª linha da tabela, sabemos que compramos 144 bolas, assim, cada bola custou 1 real. Na 8ª linha da tabela, sabemos que uma bola custa 72 reais, assim, com 144 reais é possível comprar 2 bolas.

Ao terminar de completar a tabela, o aluno deve dizer qual foi o menor preço pesquisado pelo gerente. Logo, o mesmo deve perceber que o menor valor da bola foi de 1 real.

Os autores destacam que, neste caso, o aluno deve perceber que quanto maior o preço da bola, menor a quantidade de bolas que se pode comprar e o que se mantém constante não é a razão, mas o produto entre elas (6.24 = 12.12 = 4.36 = 2.72 = 24.6 = 1.144 = 72.2 = 144) e que esse produto nada mais é do que a quantia de dinheiro disponível para comprar as bolas.

Nesse caso, temos um problema do tipo produto de medidas, segundo a classificação proposta por Vegnaud (1991). Veja o esquema que exemplifica essa situação:

Dinheiro disponível: quantidade de bolas x preço de cada bola

$$x = 6 \times 24$$

$$144 = a \times 12$$

$$144 = b \times 4$$

$$144 = 72 \times c$$

$$144 = d \times 24$$

$$144 = 144 \times e$$

$$144 = f \times 72$$

Algo que pode dificultar a resolução pelos alunos é encontrar o valor disponível para comprar as bolas, o que pode ser feito multiplicando os valores da 2ª linha da tabela.

Temos nessa categoria a presença de dois tipos de problemas multiplicativos, segundo Vergnaud (1991): isomorfismo e produto de medida.

A definição apresentada pelos autores para grandezas inversamente proporcionais entre si é: “[...] quando o produto do valor de uma delas pelo correspondente de outra for constante”. (SÃO PAULO, 2008b, p.19).

4.3 Análise da Situação de Aprendizagem 2: Razão e Proporção

Ao realizar a análise da Situação de Aprendizagem 2, observamos que na mesma são trabalhados, na maioria dos problemas, o cálculo da razão, em alguns momentos apenas o cálculo da razão e em outros, o cálculo de razões conhecidas.

4.3.1 Análise da Categoria 4 – Problemas Envolvendo o Cálculo de Razão

Para realizarmos a análise dessa categoria, foram selecionados as atividades 1 e 6 (parte 2) da Situação de Aprendizagem 2.

Sendo o principal da **Atividade 1** “introduzir formalmente o conceito de razão em matemática”. (SÃO PAULO, 2008b, p.23). Segue a descrição da mesma:

> **Atividade 1**
> Calcule o resultado das razões e expresse-o em termos de porcentagem:
> **a)** razão 3 : 150
> **b)** razão 24 : 40
> **c)** razão 4 : 50
> **d)** razão 9 : 125
> **e)** razão 165 : 300
> (SÃO PAULO, 2008b, p. 25-26)

No item **a)**, temos como solução: $\frac{3}{150} = 0{,}02 = 2\%$.

No item **b)**, temos como solução: $\frac{24}{40} = 0{,}6 = 60\%$.

No item **c)**, temos como solução: $\frac{4}{50} = 0{,}08 = 8\%$.

No item **d)**, temos como solução: $\frac{9}{125} = 0{,}072 = 7{,}2\%$.

No item **e)**, temos como solução: $\frac{165}{300} = 0{,}55 = 55\%$.

Vale ressaltar que os autores do caderno do professor apresentam como sugestão que, antes de introduzir o conceito de razão aos alunos, discuta-se com os mesmos a interpretação que eles têm dessa palavra, "[...] uma vez que este conceito está extremamente disseminado em nossa língua e assume inúmeros significados de acordo com o contexto em que aparece". Os autores sugerem que: "[...] os alunos consultem o dicionário para encontrar as definições da palavra "razão", a fim de que tenham uma idéia da diversidade de acepções dessa palavra". (SÃO PAULO, 2008b, p.23).

Vale destacar que, no caderno do professor, os autores apresentam uma definição para a palavra razão, segundo o dicionário Aurélio. Segue a mesma:

> **Razão.** [Do Lat. *ratione.*] S. f. 1.Faculdade que tem o ser humano de avaliar, julgar, ponderar idéias universais; raciocínio, juízo. 2.Faculdade que tem o homem de estabelecer relações lógicas, de conhecer, de compreender, de raciocinar; raciocínio, inteligência. 3.Bom senso; juízo; prudência. 4.A lei moral; o direito natural; justiça; direito. 5.Causa, motivo. (SÃO PAULO, 2008b, p.23).

Somente então é proposto pelos autores que:

> Devemos enfatizar o fato de que a palavra "razão" adquire um significado específico no âmbito da matemática. **Razão é o resultado do quociente (ou divisão) entre dois números**. É importante diferenciar o conceito de razão do de fração. A fração é uma forma de se expressar o quociente entre dois números inteiros. Assim, toda fração é também uma razão, mas nem toda razão pode ser expressa como uma fração. (SÃO PAULO, 2008b, p.24).

Segue a descrição da **Atividade 6 – Parte 2**:

> **Atividade 6 – Parte 2**
> Analise as situações descritas a seguir. Construa uma tabela com os valores fornecidos, calcule a razão de proporcionalidade e verifique se houve variação proporcional.
> **a)** Se 5 bolas de futebol custam 100 reais, então 7 bolas custarão 140 reais.
> **b)** Um automóvel percorreu 120 km em 1 hora e meia. Meia hora depois ele terá percorrido 160 km.

> **c)** Um supermercado vende 4 rolos de papel higiênico por 3 reais, e 12 rolos por R$ 8.
> **d)** Em uma receita de *milk-shake*, recomenda-se colocar 3 bolas de sorvete de chocolate gelado para 2 xícaras e meia de leite (1 xícara equivale a 250 ml). Para 1 litro de leite, deveremos colocar 7 bolas de sorvete.
> **e)** Em um determinado dia, 20 dólares eram vendidos por 36 reais, e 50 dólares por 90 reais. (SÃO PAULO, 2008b, p.30).

Para resolver o item **a)**, é necessário construir uma tabela que apresente a seguinte situação:

Número de bolas	**Valor pago em reais**	**Razão (preço por bola)**
5	100	100:5 = 20
7	140	140:7 = 20

Podemos concluir que houve proporcionalidade direta, pois a razão de proporcionalidade permaneceu constante, já que cada bola custa 20.

Para resolver o item **b)**, é necessário construir uma tabela que represente a seguinte situação:

Distância percorrida (km)	**Tempo em horas**	**Razão (velocidade)**
120	1,5	120:1,5 = 80
160	2	160:2 = 80

Podemos, assim, concluir que houve proporcionalidade direta, pois a razão de proporcionalidade permaneceu constante, ou seja, a velocidade em ambos os casos foi de 80 km/h. Nesse item, algo que pode apresentar dificuldade está em converter 1 hora e meia (língua natural) para 1,5 hora (escrita numérica).

Para resolver o item **c)**, é necessário construir uma tabela que apresente a seguinte situação:

Número de rolos	**Valor pago em reais**	**Razão (preço por rolo)**
4	3	4:3 = 1,33...
12	8	12:8 = 1,5

Com isso, conclui-se que não houve proporcionalidade, pois a razão de proporcionalidade obtida em cada situação foi diferente.

Para resolver o item **d)**, é necessário construir uma tabela que apresente a seguinte situação:

Bolas de sorvete	**Número de xícaras de leite**	**Razão (bolas por xícara)**
3	2,5	3:2,5 = 1,2
7	4	7:4 = 1,75

Assim como no item anterior, pode-se concluir que não houve proporcionalidade no aumento da receita, pois a razão de proporcionalidade obtida em cada situação foi diferente. Nesse item algo que pode apresentar dificuldade é o fato de que 1 litro de leite equivale a 4 xícaras.

Para resolver o item **e)**, é necessário construir uma tabela que represente a seguinte situação:

Quantidade de dólares	**Valor em reais**	**Razão (reais por dólar)**
20	36	36:20 = 1,80
50	90	90:50 = 1,80

Neste caso, nota-se que houve proporcionalidade direta, pois o preço do dólar foi o mesmo nas duas situações, que é de R$ 1,80 por dólar.

A **Atividade 6 – parte 2** pode apresentar aos alunos uma possível dificuldade quanto ao conceito de razão de proporcionalidade. Além disso, as informações apresentadas aos professores, quanto ao conceito de proporcionalidade, são resumidas e estão presentes apenas na página 24 do caderno do professor, conforme segue:

> Duas grandezas são diretamente proporcionais entre si quando os quocientes entre os valores de uma em relação aos valores correspondentes da outra são constantes. A esse quociente dá-se o nome de **razão de proporcionalidade**. (SÃO PAULO, 2008b, p.24).

Segundo a classificação proposta por Vergnaud (1991), esses dois tipos de problemas são do tipo produto de medidas da subclasse divisão.

4.3.2 Análise da Categoria 5 – Problemas Envolvendo o Cálculo de Razão em Situações Contextualizadas

Para realizar a análise dessa categoria, foram selecionadas as atividades 3 e 4 da Situação de Aprendizagem 2.

Segue a descrição da **atividade 3** que tem como objetivo apresentar aos alunos uma razão conhecida como velocidade média. Segundo os autores: "[...] "velocidade" geralmente significa **velocidade média**, que é a razão entre um deslocamento e o intervalo de tempo gasto para efetuá-lo". (SÃO PAULO, 2008b, p.27).

Os autores destacam ainda que: "O conceito de velocidade pode ser estendido para outras situações análogas. Por exemplo, a **pulsação** ou frequência de batimentos cardíacos exprime a rapidez com que o coração bate, ou seja, o número de batimentos por minuto". (SÃO PAULO, 2008b, p.27).

> **Atividade 3**
> Determine:
> **a)** A velocidade média de um automóvel que percorreu 530 quilômetros em 6 horas.
> **b)** A pulsação (batimentos por minuto) de uma pessoa cujo coração bate 12 vezes a cada 10 segundos. (SÃO PAULO, 2008b, p.27).

No item **a)**, temos que um automóvel percorreu 530 km em 6h, portanto sua velocidade média é igual a 530km/6horas que é aproximadamente 88 km/h.

No item **b)**, temos que a pulsação de uma pessoa bate 12 vezes a cada 10 segundos, portanto ele, em 1 segundo, bate 1,2 vezes. Como 1 minuto tem 60 segundos, temos que a pulsação dessa pessoa é igual a 72 batimentos por minuto.

A **Atividade 4** tem como objetivo principal apresentar aos alunos a razão denominada como densidade demográfica. Segundo os autores: “É a razão entre o número de habitantes que vivem em uma região e sua área”. (SÃO PAULO, 2008b, p.28).

Os autores também descrevem aos professores a razão denominada como densidade absoluta. Segundo os mesmos: “É a razão entre a massa e o volume de um corpo”. A unidade mais usada para se expressar a densidade de um corpo é grama por centímetro cúbico (g/cm^3)”. (SÃO PAULO, 2008b, p.27).

> **Atividade 4**
> Com base nas definições de densidade e densidade demográfica, resolva as questões a seguir:
> **a)** 300 gramas de uma substância ocupam um volume de 450 cm^3. Determine a densidade desta substância.
> **b)** A população estimada do estado de São Paulo, em 2007, era de, aproximadamente, 39 827 570 habitantes. Sabendo que a área do estado é de aproximadamente 248 209 km^2, calcule sua densidade demográfica. (SÃO PAULO, 2008b, p.28).

No item **a)**, temos que uma determinada substância de massa de 300 gramas ocupa o volume de 450 cm^3, sua densidade absoluta é igual a 300gramas/450 cm^3 que é aproximadamente 0,67 g/cm^3.

No item **b)**, temos que a população estimada do estado de São Paulo é aproximadamente 39.827.570 habitantes, sua área é de aproximadamente 248.209 km^2, portanto a densidade demográfica, em 2007, do estado de São Paulo é de 39.827.570habitantes/248.209km^2. Logo, é de aproximadamente 160 habitantes por quilômetro quadrado.

Nesses problemas, os autores apresentaram aos professores e alunos razões conhecidas, no entanto as mesmas nem sempre fazem parte do dia-a-dia dos mesmos.

Outro fator que podemos destacar é o fato de que esses problemas, apesar de apresentarem contexto, já que ambos estão presentes nas disciplinas de Geografia e Química, têm o mesmo objetivo dos descritos na categoria 5, ou seja, o cálculo de razão.

Novamente segundo a classificação proposta por Vergnaud (1991), esses problemas são do tipo produto de medidas da subclasse divisão.

4.3.3 Análise da Categoria 6 - Problemas Envolvendo o Cálculo de Probabilidade2

Segundo os autores: “A probabilidade pode ser vista como um tipo especial de razão na qual se compara o número de possibilidades de ocorrência de um evento particular com o número total de possibilidades relacionadas a esse evento”. (SÃO PAULO, 2008b, p.28).

Como exemplo, os autores apresentam a seguinte situação:

> [...] no lançamento de uma moeda, a probabilidade de se obter cara é de uma em duas, ou seja, uma chance em duas, ou ½, ou, ainda, 50%. É a razão entre o número de possibilidades de se obter “cara” (1) e o número total de possibilidades, cara ou coroa (2). (SÃO PAULO, 2008b, p.28-29).

Assim, a **Atividade 6** tem como principal objetivo propor aos alunos situações problemas que envolvam a probabilidade, ou seja, “Para determinarmos a probabilidade de ocorrência de um determinado evento, devemos quantificar o número de casos em que este evento ocorre e o número total de casos possíveis, chamado de espaço amostral”. (SÃO PAULO, 2008b, p.29).

Segue a descrição da **Atividade 6 - Parte 1**:

> **Atividade 6 – Parte 1**
> Resolva as questões a seguir:
> **a)** No lançamento de um dado numerado de 1 a 6, qual a probabilidade de se obter um número par? E um número maior que 4?
> **b)** Jogando-se ao acaso duas moedas, qual a probabilidade de se obter duas coroas?
> **c)** Uma urna contém 7 bolas, sendo 3 vermelhas e 4 pretas. Retirando-se uma bola ao acaso, qual a probabilidade de que ela seja vermelha? E preta?
> **d)** Um baralho contém 52 cartas, sendo 13 cartas de cada naipe (Copas, Ouros, Espadas e Paus). Retirando-se uma carta ao acaso, qual a probabilidade de se obter uma carta de copas? E de se obter um valete? (SÃO PAULO, 2008b, p.29).

No item **a)**, observa-se que no lançamento de um dado depara-se com 6 situações possíveis. São elas: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Desta forma, a probabilidade de se obter um número par é 3 em 6, ou 0,5, ou ainda, 50%. No caso da probabilidade de se obter um número maior que 4 é 2 em 6, ou 0,333..., ou aproximadamente 33%.

No item **b)**, observa-se que no lançamento de duas moedas temos como situações possíveis: cara-cara, cara-coroa, coroa-cara e coroa-coroa. Desta forma a probabilidade de se obter duas coroas é 1 em 4, ou 0,25, ou 25%.

No item **c)**, observa-se que, ao retirar uma bola ao acaso, a probabilidade de a bola ser vermelha é 3 em 7, ou 0,429, ou aproximadamente 42,9%.

No item **d)**, observa-se que, ao retirar uma carta ao acaso, a probabilidade da carta retirada ser de copas é 13 em 52, ou 0,25, ou 25%. E a probabilidade de se retirar uma carta ao acaso, e esta ser um valete é 4 em 52, 0,077, ou aproximadamente 7,7%.

Destacamos que novamente na classificação proposta por Vergnaud (1991), esses problemas são do tipo produto de medidas da subclasse divisão.

4.4 Resumo das análises

Com o objetivo de resumir nossas análises, elaboramos o seguinte quadro:

Quadro 8: Resumo das análises das Situações de Aprendizagem.

Habilidade necessária para resolução das atividades	Categoria 1	Categoria 2	Categoria 3	Categoria 4	Categoria 5	Categoria 6
Presença de problemas multiplicativos do tipo isomorfismo de medidas	X		X			
Presença de problemas multiplicativos do tipo produto de medidas			X	X	X	X
Cálculo de razão				X	X	X
Cálculo de proporção				X		
Presença de atividade lúdica (Jogo)		X				

Conforme podemos observar no Quadro 8, temos presente na Situação de Aprendizagem 1, os tipos de problemas multiplicativos, ou seja, isomorfismo e produto de medidas. Todavia, eles não estão presentes de todas as formas de suas subclasses, conforme apresentado por Vergnaud (1991).

Quando nos referimos aos problemas multiplicativos do tipo isomorfismo de medidas, observamos a existência de 3 subclasses. São elas: multiplicação simples, divisão (valor unitário) e divisão (quantidade). Ao analisarmos Atividade 1 na Categoria 1, notamos que somente o problema multiplicativo isomorfismo de medidas do tipo multiplicação simples é evidenciado.

Ao observarmos as Atividades 7 e 8, analisadas na Categoria 3, nos deparamos com os 2 tipos de problemas multiplicativos: na atividade 7 o isomorfismo de medidas do tipo divisão (quantidade) e na Atividade 8 o produto de medidas do tipo divisão.

Na Situação de Aprendizagem 2, verificamos que o tipo isomorfismo de medidas não aparece em nenhuma Atividade analisada, somente é evidenciado os problemas de produtos de medidas da subclasse divisão.

Outro fato destacado na Situação de Aprendizagem 2 é que encontramos apenas uma atividade (atividade 6 – parte 2) com o cálculo de proporção, ao contrário do que era proposto na atividade, ou seja, ela era intitulada razão e proporção, fato esse que não foi evidênciado.

Destacamos também que a Situação de Aprendizagem 1 possui uma abordagem diferente da Situação de Aprendizagem 2, já que, a primeira enfatiza a proporcionalidade desenvolvida através de atividades que envolvem grandezas diretamente e inversamente proporcionais, e a segunda privilegia o cálculo da razão, tornando esse o objeto de estudo nas atividades.

Considerações Finais

Ressaltamos novamente que o objetivo dessa pesquisa é realizar uma análise do caderno do professor do 3º bimestre do 7º ano (antiga 6ª série) do Ensino Fundamental do Ciclo II fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo no ano de 2008, enfocando o tema proporcionalidade.

Esse conteúdo, assim como outros, apresentam baixos índices de rendimento em avaliações, tais como: SARESP, Prova Brasil, SAEB e Prova São Paulo. No caso específico de proporcionalidade, foram selecionadas questões do SARESP/2008, cuja resolução necessitava do mesmo, no qual observamos as principais dificuldades apresentadas pelos alunos.

Diante desses dados, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, tanto em 2008 quanto em 2009, preparou um material para ser trabalhado em sala de aula, material esse que foi analisado nesta pesquisa. Informamos que, além do professor receber o material, este também foi disponibilizado para os alunos no ano de 2009 em formato de apostilas. Por conseqüência, deflagra-se a relevância em realizar a análise do caderno do professor, pois atualmente a rede de ensino do Estado de São Paulo conta com cerca de 5 milhões de alunos.

Na presente pesquisa, realizou-se uma análise das Situações de Aprendizagem 1 e 2 presentes no caderno do professor denominadas: A Noção de Proporcionalidade e Razão e Proporção respectivamente, fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais das Estruturas Multiplicativas propostas por Gérard Vergnaud (1991). Para essa análise, foram criadas 6 categorias. São elas:

- Categoria 1: problemas envolvendo o reconhecimento da proporcionalidade e seus limites;

- Categoria 2: problemas envolvendo jogo;

- Categoria 3: problemas envolvendo variação de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

- Categoria 4: problemas envolvendo o cálculo de razão;

- Categoria 5: problemas envolvendo o cálculo de razão em situações contextualizadas.

- Categoria 6: problemas envolvendo o cálculo de probabilidade.

Assim, buscando resposta para nossa primeira questão de pesquisa: “O caderno do professor do 7º ano (antiga 6ª série) do 3º bimestre privilegia todos os tipos de problemas multiplicativos?”, observamos que os problemas multiplicativos envolvendo produto de medidas foi privilegiado na Situação de Aprendizagem 2.

Porém, quando analisamos a Situação de Aprendizagem 1, notamos que existe uma diversidade nos problemas multiplicativos, ou seja, observou-se a presença do tipo isomorfismo e produto de medidas. Entretanto, não temos presentes as diversas subclasses apresentadas por Vergnaud (1991). Também destacamos a presença da **Atividade 6**, pois a mesma está descontextualizada com a noção de proporcionalidade. Sua função foi fornecer aos alunos um uma idéia sobre a noção de invariante, contudo isso pouco contribuiu para o desenvolvimento de um algoritmo para a regra de três, conforme objetivo exposto pelos autores do caderno do professor.

Para nossa segunda questão de pesquisa: “O objetivo proposto pelos autores em cada Situação de Aprendizagem foi atingido através do desenvolvimento das atividades propostas?”, notamos que na Situação de Aprendizagem 1, o objetivo era o trabalho com a noção de proporcionalidade e a sequência de atividades propiciou isso, pois as 5 primeiras atividades consideram os conhecimentos que os alunos já possuem sobre o tema. Nas demais atividades o trabalho foi evidenciado com situações envolvendo grandezas diretamente e inversamente proporcionais. A crítica fica para **Atividade 6**, pois a mesma ficou desarticulada com as demais atividades.

Quanto à Situação de Aprendizagem 2, observamos que o objetivo não foi atingido no desenvolvimento das atividades, pois o mesmo era o cálculo de razão e proporção. Entretanto, apenas uma atividade evidencia o cálculo de proporção enquanto as demais evidenciaram o cálculo de razão.

Ao buscar resposta para nossa terceira questão de pesquisa: “Os tipos de problemas propostos aos alunos possuem qual tipo de abordagem?”, notamos a existência dos dois tipos de abordagens nas Situações de Aprendizagem, ou seja, na Situação de Aprendizagem 1 é trabalhada proporcionalidade e são evidenciadas as grandezas diretamente e inversamente proporcionais, porém na Situação de Aprendizagem 2 notamos a abordagem de razão e proporção como objeto de estudo, segundo a análise realizada por Bernal (2004).

A principal vantagem de se realizar uma análise do caderno do professor é que esse material foi fornecido para toda a rede de ensino do Estado de São Paulo, que é a Unidade da Federação com a maior rede de ensino público do Brasil.

Para trabalhos futuros, sugerimos a análise das Situações de Aprendizagem 3 e 4 propostas no caderno do professor do 3º bimestre para alunos do 7º ano. Também sugerimos a aplicação dessas atividades aos alunos, a fim de aferir os pontos que facilitam e as dificuldades no desenvolvimento das mesmas.

Enquanto pesquisadora, o meu maior aprendizado foi o olhar para o aluno, pois antes do curso de mestrado, em determinadas situações na qual os alunos não apresentavam os resultados esperados por mim, me deparava, muitas vezes, atribuindo culpa aos mesmos. Hoje diferencio que, se durante a aplicação de uma determinada atividade os alunos não apresentem o resultado esperado por mim, algo está errado, ou a atividade apresenta problemas em sua elaboração, ou no desenvolvimento desse conteúdo os alunos apresentam dificuldades e cabe a mim buscar subsídios em referenciais teóricos e em outras pesquisas que possam facilitar o aprendizado dos alunos.

Referências

BARDIN, L. Análise de conteúdo. Lisboa: Edições 70 Ltda, 2009, 281p.

BARRETO, I. M. A. Problemas verbais multiplicativos de quarta-proporcional: a diversidade de procedimentos de resolução. 2001. 123f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

BEHR, Merlyn J.; LESH, Richard; POST, Thomas R., A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, Arthur F., SHULTE, Albert P. (Org.) *As idéias da álgebra*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 89-103.

BERNAL, M. M. Estudo do objeto proporção: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado. 2004. 169f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1998. 148p.

COSTA, C. R. Panorama de um estudo sobre razão e proporção em três livros didáticos. 2005. 146 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

FLORIANI, E. F. Resolução de problemas de proporcionalidade: um estudo com alunos do ensino fundamental e médio. 2004. 104f. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade do Vale do Itajaí, Santa Catarina.

KÖCHE, J. C. Fundamentos de Metodologia Científica: teoria da ciência e prática da pesquisa. Rio de Janeiro: Vozes, 1997.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. Fundamentos de Metodologia Científica. São Paulo: Atlas, 1991.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACEDO, L. N. de et al. Desenvolvendo o pensamento proporcional com o uso de um objeto de aprendizagem. In: BRASIL, Ministério da Educação Secretaria de Educação a Distância. Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico/Organização: Carmem Lúcia Prata, Anna Christina Aun de Azevedo Nascimento – Brasília: MEC, SEED, 2007. p.17-26.

OLIVEIRA, S. L. de Tratado de Metodologia Científica: projetos de pesquisas, TGI, TCC, monografias, dissertações e teses. São Paulo: Pioneira, 1998.

RASI, G. C. Estruturas Multiplicativas: concepções de alunos de ensino fundamental. 2009. 98f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SÃO PAULO. Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: 1º grau. 4ª ed. São Paulo: SE/CENP, 1992.

_____. Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática / Coord. Maria Inês Fini. – São Paulo: SEE, 2008 a.

_____. Secretaria da Educação. Caderno do professor: matemática, ensino fundamental – 6ª série, 3º bimestre. Coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe, Nilson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Roberto Perides Moisés, Walter Spinelli. – São Paulo: SEE, 2008b.

_____. Secretaria da Educação. Caderno do Gestor. Gestão do currículo na escola. Volume 1, Zuleika de Felice Murrie. São Paulo: SEE, 2008c.

_____. Secretaria da Educação. Relatório pedagógico SARESP 2007. Coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe, Maria Conceição, Maria Helena Guimarães de Castro, Maria Eliza Fini, Zuleika de Felice Murrie – São Paulo: SEE, 2008 d.

_____. Secretária da Educação. SARESP 2008. Disponível em: <http://saresp.edunet.sp.gov.br/2008/pdf/ItensProvas/MAT/Itens_Parametros_6EF_MAT.pdf>. Acesso em: abril, 2009 a.

_____. Secretaria da Educação. Saresp 2008: matrizes de referências para a avaliação: matemática. Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini – São Paulo: SEE, 2009b.

SPINILLO, A. G. O conceito de proporção em crianças: implicações da Psicologia Cognitiva para a educação Matemática. Caderno de Educação Matemática. V. 2, 1995.

VERGNAUD, G. El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. – México: Trilhas, 1991.

ANEXOS

ensino fundamental
6ª SÉRIE
volume 3 – 2009
caderno do
PROFESSOR
MATEMÁTICA

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO

Governador
José Serra

Vice-Governador
Alberto Goldman

Secretário da Educação
Paulo Renato Souza

Secretário-Adjunto
Guilherme Bueno de Camargo

Chefe de Gabinete
Fernando Padula

Coordenadora de Estudos e Normas Pedagógicas
Valéria de Souza

Coordenador de Ensino da Região Metropolitana da Grande São Paulo
José Benedito de Oliveira

Coordenador de Ensino do Interior
Rubens Antonio Mandetta

Presidente da Fundação para o Desenvolvimento da Educação – FDE
Fábio Bonini Simões de Lima

EXECUÇÃO

Coordenação Geral
Maria Inês Fini

Concepção
Guiomar Namo de Mello
Lino de Macedo
Luis Carlos de Menezes
Maria Inês Fini
Ruy Berger

GESTÃO

Fundação Carlos Alberto Vanzolini

Presidente do Conselho Curador:
Antonio Rafael Namur Muscat

Presidente da Diretoria Executiva:
Mauro Zilbovicius

Diretor de Gestão de Tecnologias aplicadas à Educação:
Guilherme Ary Plonski

Coordenadoras Executivas de Projetos:
Beatriz Scavazza e Angela Sprenger

COORDENAÇÃO TÉCNICA

CENP – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas

Coordenação do Desenvolvimento dos Conteúdos Programáticos e dos Cadernos dos Professores
Ghiseine Trigo Silveira

AUTORES

Ciências Humanas e suas Tecnologias

Filosofia: Paulo Micell, Luiza Christov, Adilton Luís Martins e Renê José Trentin Silveira

Geografia: Angela Corrêa da Silva, Jaime Tadeu Oliva, Raul Borges Guimarães, Regina Araujo, Regina Célia Bega dos Santos e Sérgio Adas

História: Paulo Micell, Diego López Silva, Glaydson José da Silva, Mônica Lungov Bugelli e Raquel dos Santos Funari

Sociologia: Heloisa Helena Teixeira de Souza Martins, Marcelo Santos Masset Lacombe, Melissa de Mattos Pimenta e Stella Christina Schrijnemaekers

Ciências da Natureza e suas Tecnologias

Biologia: Ghiseine Trigo Silveira, Fabíola Bovo Mendonça, Felipe Bandoni de Oliveira, Lucilene Aparecida Esperante Limp, Maria Augusta Querubim Rodrigues Pereira, Olga Aguilar Santana, Paulo Roberto da Cunha, Rodrigo Venturoso Mendes da Silveira e Solange Soares de Camargo

Ciências: Ghiseine Trigo Silveira, Cristina Leite, João Carlos Miguel Tomaz Micheletti Neto, Júlio Cézar Foschini Lisbôa, Lucilene Aparecida Esperante Limp, Maíra Batistoni e Silva, Maria Augusta Querubim Rodrigues Pereira, Paulo Rogério Miranda Correia, Renata Alves Ribeiro, Ricardo Rechi Aguiar, Rosana dos Santos Jordão, Simone Jaconetti Ydi e Yassuko Hosoume

Física: Luis Carlos de Menezes, Estevam Rouxinol, Guilherme Brockington, Ivã Gurgel, Luís Paulo de Carvalho Piassi, Marcelo de Carvalho Bonetti, Maurício Pietrocola Pinto de Oliveira, Maxwell Roger da Purificação Siqueira, Sonia Salem e Yassuko Hosoume

Química: Maria Eunice Ribeiro Marcondes, Denise Morais Zambom, Fabio Luiz de Souza, Hebe Ribeiro da Cruz Peixoto, Isis Valença de Sousa Santos, Luciane Hiromi Akahoshi, Maria Fernanda Penteado Lamas e Yvone Mussa Esperidião

Linguagens, Códigos e suas Tecnologias

Arte: Gisa Picosque, Mirian Celeste Martins, Geraldo de Oliveira Suzigan, Jéssica Mami Makino e Sayonara Pereira

Educação Física: Adalberto dos Santos Souza, Jocimar Daolio, Luciana Venâncio, Luiz Sanches Neto, Mauro Betti e Sérgio Roberto Silveira

LEM – Inglês: Adriana Ranelli Weigel Borges, Alzira da Silva Shimoura, Lívia de Araújo Donnini Rodrigues, Priscila Mayumi Hayama e Sueli Salles Fidalgo

Língua Portuguesa: Alice Vieira, Débora Mallet Pezarim de Angelo, Eliane Aparecida de Aguiar, José Luís Marques López Landeira e João Henrique Nogueira Mateos

Matemática

Matemática: Nilson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Roberto Perides Moisés, Rogério Ferreira da Fonseca, Ruy César Pietropaolo e Walter Spinelli

Caderno do Gestor
Lino de Macedo, Maria Eliza Fini e Zuleika de Felice Murrie

Equipe de Produção

Coordenação Executiva: Beatriz Scavazza

Assessores: Alex Barros, Beatriz Blay, Carla de Meira Leite, Eliane Yambanis, Heloisa Amaral Dias de Oliveira, José Carlos Augusto, Luiza Christov, Maria Eloisa Pires Tavares, Paulo Eduardo Mendes, Paulo Roberto da Cunha, Pepita Prata, Renata Elsa Stark, Solange Wagner Locatelli e Vanessa Dias Moretti

Equipe Editorial

Coordenação Executiva: Angela Sprenger

Assessores: Denise Blanes e Luis Márcio Barbosa

Projeto Editorial: Zuleika de Felice Murrie

Edição e Produção Editorial: Edições Jogo de Amarelinha, Conexão Editorial e Occy Design (projeto gráfico)

APOIO

FDE – Fundação para o Desenvolvimento da Educação

CTP, Impressão e Acabamento

Esdeva Indústria Gráfica

A Secretaria da Educação do Estado de São Paulo autoriza a reprodução do conteúdo do material de sua titularidade pelas demais secretarias de educação do país, desde que mantida a integridade da obra e dos créditos, ressaltando que direitos autorais protegidos* deverão ser diretamente negociados com seus próprios titulares, sob pena de infração aos artigos da Lei nº 9.610/98.

* Constituem "direitos autorais protegidos" todas e quaisquer obras de terceiros reproduzidas no material da SEE-SP que não estejam em domínio público nos termos do artigo 41 da Lei de Direitos Autorais.

Catalogação na Fonte: Centro de Referência em Educação Mario Covas

S239c São Paulo (Estado) Secretaria da Educação.

Caderno do professor: matemática, ensino fundamental - 6ª série, volume 3 / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Nilson José Machado, Roberto Perides Moisés, Walter Spinelli.– São Paulo : SEE, 2009.

ISBN 978-85-7849-364-6

1. Matemática 2. Ensino Fundamental 3. Estudo e ensino I. Fini, Maria Inês. II. Granja, Carlos Eduardo de Souza Campos. III. Mello, José Luiz Pastore. IV. Machado, Nilson José. V. Moisés, Roberto Perides. VI. Spinelli, Walter. VII. Título.

CDU: 373.3:51

Caras professoras e caros professores,

Tenho a grata satisfação de entregar-lhes o volume 3 dos Cadernos do Professor.

Vocês constatarão que as excelentes críticas e sugestões recebidas dos profissionais da rede estão incorporadas ao novo texto do currículo. A partir dessas mesmas sugestões, também organizamos e produzimos os Cadernos do Aluno.

Recebemos informações constantes acerca do grande esforço que tem caracterizado as ações de professoras, professores e especialistas de nossa rede para promover mais aprendizagem aos alunos.

A equipe da Secretaria segue muito motivada para apoiá-los, mobilizando todos os recursos possíveis para garantir-lhes melhores condições de trabalho.

Contamos mais uma vez com a colaboração de vocês.

Paulo Renato Souza
Secretário da Educação do Estado de São Paulo

SUMÁRIO

São Paulo faz escola – Uma Proposta Curricular para o Estado 5

Ficha do Caderno 7

Orientação geral sobre os Cadernos 8

Situações de Aprendizagem 12

Situação de Aprendizagem 1 – A noção de proporcionalidade 12

Situação de Aprendizagem 2 – Razão e proporção 22

Situação de Aprendizagem 3 – Razões na Geometria 35

Situação de Aprendizagem 4 – Gráfico de setores e proporcionalidade 45

Orientações para Recuperação 52

Recursos para ampliar a perspectiva do professor e do aluno para a compreensão do tema 53

Conteúdos de Matemática por série/bimestre do Ensino Fundamental 54

SÃO PAULO FAZ ESCOLA – UMA PROPOSTA CURRICULAR PARA O ESTADO

Prezado(a) professor(a),

É com muita satisfação que lhe entregamos mais um volume dos Cadernos do Professor, parte integrante da Proposta Curricular de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental – Ciclo II e do Ensino Médio do Estado de São Paulo. É sempre oportuno relembrar que esta é a nova versão, que traz também a sua autoria, uma vez que inclui as sugestões e críticas recebidas após a implantação da Proposta.

É também necessário relembrar que os Cadernos do Professor espelharam-se, de forma objetiva, na Base Curricular, referência comum a todas as escolas da rede estadual, e deram origem à produção dos Cadernos dos Alunos, justa reivindicação de professores, pais e famílias para que nossas crianças e jovens possuíssem registros acadêmicos pessoais mais organizados e para que o tempo de trabalho em sala de aula pudesse ser melhor aproveitado.

Já temos as primeiras notícias sobre o sucesso do uso dos dois Cadernos em sala de aula. Este mérito é, sem dúvida, de todos os profissionais da nossa rede, especialmente seu, professor!

O objetivo dos Cadernos sempre será o de apoiar os professores em suas práticas de sala de aula. Podemos dizer que este objetivo está sendo alcançado, porque os professores da rede pública do Estado de São Paulo fizeram dos Cadernos um instrumento pedagógico com bons resultados.

Ao entregar a você estes novos volumes, reiteramos nossa confiança no seu trabalho e contamos mais uma vez com seu entusiasmo e dedicação para que todas as crianças e jovens da nossa rede possam ter acesso a uma educação básica de qualidade cada vez maior.

Maria Inês Fini
Coordenadora Geral
Projeto São Paulo Faz Escola

FICHA DO CADERNO

Proporção na medida certa

Nome da disciplina:	Matemática
Área:	Matemática
Etapa da educação básica:	Ensino Fundamental
Série:	6ª
Volume:	3
Temas e conteúdos:	Proporcionalidade: variações diretamente e inversamente proporcionais
	Razão e porcentagem
	Razões na geometria
	Gráficos de setores

ORIENTAÇÃO GERAL SOBRE OS CADERNOS

Os temas escolhidos para compor o conteúdo disciplinar de cada bimestre não se afastam, de maneira geral, do que é usualmente ensinado nas escolas, ou do que é apresentado nos livros didáticos. As inovações pretendidas referem-se à forma de abordagem, sugerida ao longo dos Cadernos de cada um dos bimestres. Em tal abordagem, busca-se evidenciar os princípios norteadores do presente currículo, destacando-se a contextualização dos conteúdos, as competências pessoais envolvidas, especialmente as relacionadas com a leitura e a escrita matemática, bem como os elementos culturais internos e externos à Matemática.

Em todos os Cadernos, os conteúdos estão organizados em oito unidades de extensão aproximadamente igual, que podem corresponder a oito semanas de trabalho letivo. De acordo com o número de aulas disponíveis por semana, o professor explorará cada assunto com mais ou menos aprofundamento, ou seja, escolherá uma escala adequada para sua abordagem. A critério do professor, em cada situação específica, o tema correspondente a uma unidade pode ser estendido para mais de uma semana, enquanto o de outra unidade pode ser tratado de modo mais simplificado.

É desejável que o professor tente contemplar todas as oito unidades, uma vez que, juntas, elas compõem um panorama do conteúdo do bimestre, e, muitas vezes, uma unidade contribui para a compreensão das outras. Insistimos, no entanto, no fato de que somente o professor, em sua circunstância particular, e levando em consideração seu interesse e o dos alunos pelos temas apresentados, pode determinar adequadamente quanto tempo dedicar a cada uma das unidades.

Ao longo dos Cadernos são apresentadas, além de uma visão panorâmica do conteúdo do bimestre, quatro Situações de Aprendizagem (1, 2, 3 e 4), que pretendem ilustrar a forma de abordagem sugerida, instrumentando o professor para sua ação em sala de aula. As situações são independentes e podem ser exploradas pelo professor com mais ou menos intensidade, segundo seu interesse e de sua classe. Naturalmente, em razão das limitações no espaço dos Cadernos, nem todas as unidades foram contempladas com Situações de Aprendizagem, mas a expectativa é de que a forma de abordagem dos temas seja explicitada nas atividades oferecidas.

São apresentados também, em cada Caderno, sempre que possível, materiais disponíveis (textos, *softwares*, *sites*, vídeos, entre outros) em sintonia com a forma de abordagem proposta, que podem ser utilizados pelo professor para o enriquecimento de suas aulas.

Compõem o Caderno ainda algumas considerações sobre a avaliação a ser realizada, bem como o conteúdo considerado indispensável ao desenvolvimento das competências esperadas no bimestre, em cada Situação de Aprendizagem apresentada.

Conteúdos básicos do bimestre

O tema principal deste Caderno, a proporcionalidade, é um dos conceitos matemáticos mais importantes do ensino básico. Ele está presente em muitos dos conteúdos estudados ao longo das séries, tanto no Ensino Fundamental como no Médio. A ideia de proporcionalidade permeia direta ou indiretamente o estudo dos múltiplos e das frações, da semelhança em figuras geométricas, da análise da variação de grandezas, das sequências e progressões numéricas, das funções, da trigonometria, entre outros assuntos.

A variação das grandezas do mundo físico geralmente envolve algum tipo de proporcionalidade. Dessa forma, a noção de proporcionalidade é de extrema importância para fundamentar o estudo de outras disciplinas, como a Geografia, a Física, a Biologia, entre outras.

Muitas situações cotidianas requerem a capacidade de resolver e identificar problemas de proporcionalidade. A interpretação da escala de um mapa ou da planta de uma casa, a adaptação de uma receita culinária para mais pessoas ou a comparação de preços de produto em quantidades diferentes são alguns exemplos que ilustram o uso da noção de proporcionalidade no dia a dia.

A proporcionalidade constitui um dos temas centrais estudados na 6ª série. Não se trata de um assunto novo para o aluno, pois essa noção já vem sendo construída desde as séries iniciais. Nesta etapa da escolaridade, o aluno já possui os conhecimentos básicos que permitem a ele resolver muitos problemas de proporcionalidade. Ele certamente já lidou com proporcionalidade de maneira informal, em problemas de ampliação e redução de figuras, em problemas de escalas de mapas ou no estudo de frações equivalentes. No entanto, este é o momento em que a noção de variação diretamente proporcional ou inversamente proporcional é apresentada e aprofundada, permitindo que o aluno identifique e diferencie as situações em que a proporcionalidade aparece.

Tradicionalmente, o ensino da proporcionalidade era feito de forma pragmática e descontextualizada, privilegiando o uso da regra de três e a formalização algébrica das relações de proporcionalidade. Partia-se da definição de razão e chegava-se ao conceito de proporção como uma igualdade entre duas razões. O caráter algébrico e formalista desse tipo de abordagem acabava por afastar o aluno do real entendimento da ideia de proporcionalidade e cristalizava o uso indiscriminado da regra de três na resolução de qualquer problema. Esse fato é comumente apontado pelos professores do Ensino Médio ao proporem problemas envolvendo variações exponenciais ou quadráticas, nos quais não é possível usar a regra de três.

No presente Caderno, propomos uma abordagem que prioriza a construção da noção de proporcionalidade pelo aluno, incentivando sua capacidade de interpretar problemas e de

identificar o tipo de proporcionalidade envolvida. No caso da 6ª série, esse tema pode aparecer sem uma preocupação formal com o uso da representação simbólica ou da regra de três. Esses procedimentos podem ser introduzidos mais adiante, no contexto das frações algébricas e da resolução de equações.

Os principais conteúdos abordados neste Caderno são, além da proporcionalidade, o conceito de razão, a porcentagem como razão, a probabilidade como razão, as razões constantes na Geometria, a representação de porcentagens em gráficos de setores, entre outros. A fim de organizar melhor o trabalho no bimestre, dividimos esses conteúdos em oito unidades principais. É importante ressaltar, contudo, que o professor deve ter autonomia para escolher a escala adequada para tratar cada tema, podendo dedicar mais tempo em um tema e menos em outro, dependendo das características de cada turma.

As quatro Situações de Aprendizagem desenvolvidas neste Caderno percorrem as oito unidades apresentadas de uma forma direta ou indireta. Na **Situação de Aprendizagem 1 – A noção de proporcionalidade**, propomos uma sequência de situações-problema envolvendo o reconhecimento da existência de proporcionalidade. A construção da noção de proporcionalidade envolve também a capacidade de identificar situações em que ela não está presente. Propomos uma metodologia alternativa para a resolução dos clássicos problemas envolvendo a variação **diretamente** ou **inversamente proporcional** entre duas ou mais grandezas. Em vez de usar a fórmula da regra de três composta, o aluno é convidado a desenvolver uma sequência de transformações proporcionais inspirado por um jogo de palavras chamado duplex, criado por Lewis Carroll, autor de *Alice no país das maravilhas*.

Na **Situação de Aprendizagem 2 – Razão e proporção**, passamos a tratar diretamente do conceito de razão, construído a partir das situações-problema envolvendo proporcionalidade direta. Apresentamos também situações-problema envolvendo diferentes tipos de razão, como a **porcentagem**, a escala em mapas e desenhos, a velocidade ou rapidez, a densidade, etc. Incluímos também a **probabilidade** como uma razão que expressa a chance de ocorrência de um evento em um determinado espaço amostral, como no lançamento de moedas, dados, etc. Para finalizar a sequência, propomos uma atividade prática envolvendo as razões presentes no corpo humano, a partir do desenho de Leonardo Da Vinci chamado *Homem vitruviano*. Com base nesse desenho, os alunos poderão observar e explorar o conceito de razão por meio de medidas e comparações.

Na **Situação de Aprendizagem 3 – Razões na Geometria**, procuramos explorar a ideia de proporcionalidade nas formas planas geométricas. Inicialmente, apresentamos uma situação envolvendo a ampliação de uma figura, com o objetivo de construir a noção de proporcionalidade geométrica. Em seguida, analisamos os principais casos envolvendo a determinação da razão de proporcionalidade entre as partes de uma figura geométrica, tais

como a razão entre a diagonal e o lado do quadrado ($\sqrt{2}$) ou a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, chamada de **pi (π)**. A opção por incluir essas duas razões, que usualmente aparecem somente na 8ª série ou no Ensino Médio, deve-se ao fato de que ambas constituem um exemplo bastante ilustrativo da existência de proporcionalidade em figuras geométricas simples. Apresentá-las agora aos alunos, sem a preocupação de formalizar o conjunto dos números irracionais, contribui em muito para a compreensão da proporcionalidade na Geometria.

Por fim, a **Situação de Aprendizagem 4 – Gráficos de setores e proporcionalidade** articula, de maneira bastante pertinente, dois blocos temáticos do currículo de Matemática: o eixo denominado **grandezas e medidas** e o eixo **tratamento da informação**. A elaboração e a interpretação de gráficos de setores envolvem tanto a noção de proporcionalidade e a compreensão da razão parte/todo como a capacidade de representar informações por meio de tabelas e gráficos. Propomos, inicialmente, algumas atividades que exploram a proporcionalidade na circunferência (entre ângulos e arcos). Em seguida, passamos às situações-problema envolvendo desde a interpretação e a leitura de gráficos de setores até a construção desses gráficos a partir de tabelas com dados estatísticos.

Gostaríamos de ressaltar, por fim, que as atividades propostas a seguir constituem um referencial para que o professor possa direcionar as atividades em sala de aula. Nesse sentido, elas são atividades exemplares que tratam de alguma dimensão importante do tema estudado. Com base em cada uma delas, o professor poderá criar atividades similares para os alunos, de acordo com as características de cada grupo/classe.

As oito unidades temáticas que compõem este Caderno estão relacionadas a seguir.

Quadro geral de conteúdos do 3º bimestre da 6ª série do Ensino Fundamental

Unidade 1 – Explorando a noção de proporcionalidade.

Unidade 2 – Proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa.

Unidade 3 – Problemas envolvendo variação diretamente ou inversamente proporcional.

Unidade 4 – A razão de proporcionalidade.

Unidade 5 – Principais tipos de razão.

Unidade 6 – A porcentagem como razão.

Unidade 7 – Razões na geometria.

Unidade 8 – Gráfico de setores e porcentagem.

SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 1
A NOÇÃO DE PROPORCIONALIDADE

O objetivo principal desta Situação de Aprendizagem é ampliar as noções de variação diretamente e inversamente proporcionais de uma grandeza, aprimorando no aluno a capacidade de resolver problemas e fazer previsões em situações que envolvam proporcionalidade. É bom lembrar que os alunos, provavelmente, já possuem um conhecimento intuitivo sobre proporcionalidade, derivado da sua experiência em situações concretas da vida cotidiana. A partir da 6ª série, devemos capacitar o aluno a reconhecer o tipo de proporcionalidade envolvida em diferentes situações e a operar e relacionar os valores envolvidos.

Inicialmente, são propostas atividades envolvendo o **reconhecimento da proporcionalidade**. Elas têm por objetivo sondar o conhecimento prévio dos alunos sobre proporcionalidade, cuja noção já vem sendo trabalhada desde as séries anteriores, como no estudo das frações equivalentes ou dos múltiplos de um número natural. Entendemos que a noção de proporcionalidade envolve também a capacidade de identificar as situações em que ela não está presente. Sugerimos que os alunos analisem determinadas situações a fim de verificar se há ou não proporcionalidade.

Outro aspecto a ser destacado é que não basta duas grandezas variarem no mesmo sentido, ou seja, aumentarem simultaneamente, por exemplo, para que elas sejam diretamente proporcionais. É preciso que, se uma delas dobrar de valor, a outra também dobre; se uma delas triplicar, a outra também triplique, e assim por diante. As situações propostas na atividade 5 têm por objetivo caracterizar a diferença entre as variações diretamente proporcionais e as inversamente proporcionais.

É importante, também, que os alunos saibam que a proporcionalidade direta entre duas grandezas envolve sempre uma multiplicação por um fator constante, chamado de **razão de proporcionalidade**.

No final, propomos uma atividade lúdica que favorecerá ao aluno compreender, na prática, as noções de proporcionalidade apresentadas nas atividades anteriores. Baseada num jogo denominado duplex, a atividade sugere uma estratégia bastante simples para a resolução de problemas envolvendo a variação de duas ou mais grandezas proporcionais (diretamente ou inversamente), sem o uso da regra de três composta.

Tempo previsto: 2 semanas.

Conteúdos e temas: proporcionalidade; variação diretamente proporcional; variação inversamente proporcional; razão de proporcionalidade.

Competências e habilidades: identificar situações em que existe proporcionalidade entre grandezas; usar a competência leitora para interpretar problemas de proporcionalidade; resolver problemas envolvendo a variação diretamente e inversamente proporcional entre grandezas.

Estratégias: análise e resolução de situações-problema; discussão coletiva sobre as soluções obtidas pelos alunos em cada situação-problema; uso de jogo para facilitar a compreensão da variação proporcional.

Roteiro para aplicação da Situação de Aprendizagem 1

Reconhecendo a proporcionalidade

As atividades 1 e 2 têm como objetivo avaliar a capacidade de reconhecimento das situações que envolvem proporcionalidade. Na atividade 1, o aluno deve analisar se as previsões feitas obedecem a algum tipo de proporcionalidade ou não.

Atividade 1

Analise as seguintes situações e verifique se as previsões feitas são confiáveis e se há proporcionalidade entre as grandezas envolvidas. Justifique sua resposta.

a) Um pintor gastou 1 hora para pintar uma parede. Para pintar duas paredes iguais àquela, ele levará 2 horas.

A previsão é consistente, pois há proporcionalidade entre o número de paredes e o tempo gasto para pintá-las.

b) Um time marcou 2 gols nos primeiros 15 minutos de jogo. Portanto, no final do primeiro tempo (45 minutos), ele terá marcado 6 gols.

Apesar de os números do problema apresentarem proporcionalidade, a situação não permite uma previsão confiável, pois o rendimento de um time não é constante ao longo de um jogo, existindo uma série de outros fatores que influenciam o número de gols, como uma melhor marcação dos jogadores da defesa do time adversário.

c) Uma banheira contendo 100 litros de água demorou, aproximadamente, 5 minutos para ser esvaziada. Para esvaziar uma banheira com 200 litros de água serão necessários aproximadamente 10 minutos.

A previsão é consistente, pois o tempo de vazão depende do volume de água a ser escoado. (Supõe-se, nesse caso, que a velocidade de vazão não varie significativamente, podendo ser considerada constante.)

d) Em 1 hora de viagem, um trem com velocidade constante percorreu 60 km. Mantendo a mesma velocidade, após 3 horas ele terá percorrido 150 km.

A previsão está errada, pois mantida a velocidade, o trem deveria percorrer 180 km. Nesse caso, a distância percorrida é diretamente proporcional ao tempo de viagem.

e) Um estacionamento cobra R$ 3,00 por hora. Para um automóvel que ficou estacionado 2 horas, foi cobrado o valor de R$ 6,00. Se ele ficasse estacionado 6 horas, o valor cobrado seria de R$ 18,00.

Nesse caso, a previsão está correta, pois o valor a ser cobrado é proporcional ao número de horas que o carro ficaria estacionado.

f) Em 20 minutos, uma pessoa gastou R$ 30,00 no supermercado. Se ela ficar 40 minutos, gastará R$ 60,00.

A previsão não é consistente, pois o valor gasto em um supermercado não é diretamente proporcional ao tempo de permanência nele.

g) Ao tomar um táxi da minha casa até a escola, o motorista passou por 4 avenidas diferentes. O valor cobrado pela corrida foi de R$ 10,00. Na volta, ele passará somente por 2 avenidas, portanto o valor cobrado será de R$ 5,00.

A previsão está errada, uma vez que não existe relação direta entre o número de avenidas pelas quais o táxi passa e o valor cobrado.

As situações anteriores ilustram algumas características da proporcionalidade. Primeiramente, deve haver algum grau de dependência entre as grandezas envolvidas. Nos itens **f** e **g**, por exemplo, não há dependência direta entre as grandezas envolvidas. Em segundo lugar, a variação entre as grandezas tem de ser a mesma. No item **d**, o cálculo correto seria 180 km para o percurso após 3 horas.

Atividade 2

Em cada um dos casos a seguir, verifique se há ou não proporcionalidade direta entre as medidas das grandezas correspondentes.

a) A altura de uma pessoa é diretamente proporcional à sua idade?

Não. Quando a idade de uma pessoa dobra – digamos, passa de 2 a 4 anos –, não é verdade que sua altura também dobra. Se houvesse proporcionalidade direta, imagine a altura de uma pessoa aos 40 anos.

b) O valor pago para abastecer o tanque de gasolina de um carro é diretamente proporcional à quantidade de litros usada?

Sim. O valor pago para abastecer o tanque de gasolina de um carro depende da quantidade de litros abastecida. Se para abastecer com 10 litros gasta-se R$ 25,00, o valor para abastecer com o triplo de litros (30 litros) será três vezes maior (R$ 75,00).

c) A massa de uma pessoa é diretamente proporcional à sua idade?

A massa de uma pessoa não é diretamente proporcional à sua idade.

d) O perímetro de um quadrado é diretamente proporcional ao seu lado?

Sim. O perímetro de um quadrado é igual a quatro vezes o seu lado. Se o lado aumenta, o perímetro aumenta proporcionalmente. O perímetro de um quadrado é diretamente proporcional ao seu lado, sendo a constante de proporcionalidade igual a 4.

e) A distância percorrida por um automóvel em 1 hora de viagem é diretamente proporcional à velocidade média desenvolvida?

Sim. Um automóvel que desenvolve uma velocidade média de 60 km/h irá percorrer 60 km em 1 hora. Se dobrarmos a velocidade, a distância percorrida dobrará, na mesma proporção.

É importante orientar o aluno a fazer determinadas perguntas para decidir se uma situação envolve ou não proporcionalidade direta: avaliar se uma grandeza depende da outra; verificar se elas variam no mesmo sentido; calcular de quanto é essa variação. Deve-se chamar a atenção para o fato de que, para haver proporcionalidade direta, não basta que as duas grandezas variem no mesmo sentido, isto é, quando uma crescer a outra também cresce, e vice-versa. É preciso que o aumento de uma delas seja proporcional ao aumento da outra.

Os limites da proporcionalidade

Na atividade 3, exploramos os limites da proporcionalidade em diferentes contextos. Existem situações em que a variação numérica envolve proporcionalidade, mas que, na realidade, não são viáveis ou possíveis. Já na atividade 4, os alunos devem perceber que a proporcionalidade ocorre em situações que envolvem a multiplicação por um fator constante.

Atividade 3

Analise as situações a seguir e avalie se elas são possíveis.

a) Um professor corrige 20 provas em 1 hora de trabalho. Após 30 horas, ele terá corrigido 600 provas.

Não. Dificilmente o professor conseguirá manter o mesmo ritmo de trabalho durante 30 horas.

b) Um corredor percorre 10 km em 1 hora. Portanto, após 20 horas, ele terá percorrido 200 km.

Não. Mesmo para um atleta, seria impossível manter esse ritmo de corrida por tanto tempo.

c) Uma pessoa leu três livros na semana passada. Em um ano, ela lerá 156 livros.

Não. O fato de ela ter lido três livros na semana anterior não garante que ela vá manter o mesmo ritmo de leitura ao longo do ano. Isso depende de outras variáveis, como tamanho do livro, disponibilidade de tempo e dinheiro, disposição, etc.

É importante discutir com os alunos que a proporcionalidade direta ocorre quando a variação resulta de um processo multiplicativo, e não aditivo. Ou seja, ambas as grandezas são multiplicadas pelo mesmo fator. Deve-se observar que a multiplicação por um fator entre 0 e 1 é equivalente à divisão por um número. Por exemplo, multiplicar por 0,5 é o mesmo que dividir por 2. Multiplicar por 0,25 é o mesmo que dividir por 4.

Atividade 4

Verifique se houve variação proporcional nos seguintes casos.

a) Uma empresa resolveu dar um aumento de R$ 200,00 para os funcionários. O salário de João passou de R$ 400,00 para R$ 600,00, enquanto o salário de Antônio passou de R$ 1 000,00 para R$ 1 200,00. Houve proporcionalidade no aumento salarial dado aos dois funcionários? Justifique sua resposta.

O aumento não foi proporcional, pois embora ele tenha sido o mesmo em termos absolutos (R$ 200,00), em termos relativos eles foram diferentes. Os R$ 200,00 de aumento representam metade do salário de João, enquanto para Antônio esse acréscimo representa apenas um quinto de seu salário. A variação para João foi de 600 ÷ 400 = 1,5 e para Antônio, 1 200 ÷ 1 000 = 1,2.

b) Uma empresa de informática resolveu dar um desconto de 25% no preço de toda a sua linha de produtos. O preço de um computador passou de R$ 1 000,00 para R$ 750,00, e o de uma impressora passou de R$ 400,00 para R$ 300,00. Houve proporcionalidade no desconto dado nos dois produtos? Justifique sua resposta.

A redução no preço dos dois produtos foi diretamente proporcional aos preços originais. A variação no preço do computador foi de 750 ÷ 1 000 = 0,75, e da impressora, de 300 ÷ 400 = 0,75. Ou seja, ambos foram multiplicados pelo mesmo fator.

Grandezas diretamente ou inversamente proporcionais

A atividade 5 tem como objetivo a caracterização da diferença entre a proporcionalidade direta e a proporcionalidade inversa. Na proporcionalidade direta, as grandezas variam no mesmo sentido, isto é, se uma delas aumenta, a outra também aumentará na mesma proporção. Já na proporcionalidade inversa, as variações ocorrem em sentidos opostos, isto é, se uma grandeza aumenta, a outra diminui, e vice-versa, de modo que se uma dobrar a outra se reduz à metade, se uma triplicar a outra reduz de $\frac{1}{3}$ e assim por diante.

Atividade 5

Analise as situações a seguir e verifique se as grandezas envolvidas são diretamente ou inversamente proporcionais.

a) Um pintor demora, em média, 2 horas para pintar uma parede de 10 m².

Número de pintores	1	1	2	2
Número de paredes de 10 m²	1	2	1	2
Tempo gasto (horas)	2	4	1	2

- O tempo gasto é *inversamente* proporcional ao número de pintores.

- O tempo gasto é *diretamente* proporcional ao número de paredes.

Se o número de pintores dobrar, o tempo gasto para se pintar uma parede será a metade, etc. O tempo gasto é inversamente proporcional ao número de pintores. Contudo, se o número de paredes dobrar o tempo necessário para concluir o serviço também vai dobrar. Portanto, o tempo gasto é diretamente proporcional ao número de paredes.

b) Um automóvel gasta 2 horas para percorrer 200 km, viajando com uma velocidade média de 100 km/h.

Velocidade média (km/h)	100	100	50	50
Distância percorrida	200	400	400	100
Tempo gasto (horas)	2	4	8	2

- A distância percorrida é *diretamente* proporcional à velocidade.

- O tempo gasto é *inversamente* proporcional à velocidade.

Dobrando a velocidade, o automóvel percorrerá o dobro da distância no mesmo tempo. Portanto, a distância percorrida é diretamente proporcional à velocidade. Por outro lado, se a velocidade média for reduzida à metade, o tempo gasto para percorrer a mesma distância dobrará. O tempo gasto é inversamente proporcional à velocidade.

Duplex e os problemas de proporcionalidade

As atividades a seguir têm como objetivo principal desenvolver a noção de proporcionalidade direta e inversa de uma forma lúdica e significativa. Ela permite resolver os famosos problemas de regra de três composta de uma forma diferente, sem o uso de uma fórmula algébrica.

Lewis Carroll, autor de *Alice no país das maravilhas*, era um matemático que adorava desenvolver quebra-cabeças. Em 1879, ele criou o duplex, um quebra-cabeça que consiste em ligar duas palavras de mesmo comprimento, propostas como o início e o fim de um encadeamento, por meio de palavras intermediárias que constituem elos e que diferem entre si apenas por uma letra. Essas palavras-elo devem ter sentido na língua materna. Por exemplo:

OURO

MURO

MUDO

MEDO

LEDO

LIDO

LIXO

Proponha aos alunos que resolvam alguns duplex para perceber o mecanismo do jogo. Eles devem notar que em cada etapa apenas uma letra muda, as outras permanecem inalteradas.

Atividade 6

Resolva os duplex a seguir:

TIA	POR	LISO	POETA
TUA	*PAR*	*PISO*	*PONTA*
	MAR	*PESO*	*PONTO*
		PESA	*TONTO*
			TANTO
LUA	**MAL**	**PENA**	**TANGO**

Observação: podem haver outras soluções para os duplex.

Vamos propor a seguir um problema matemático que pode ser resolvido por meio de uma estratégia semelhante à utilizada no duplex. Em vez de letras, o início e o fim do encadeamento são números, encadeados segundo uma determinada proporcionalidade.

Atividade 7

Na tabela a seguir, registraram-se a quantidade vendida e o valor recebido pela venda de um mesmo produto. Contudo, alguns valores não foram preenchidos. Preencha-a mantendo a proporcionalidade direta entre a quantidade vendida e o valor recebido.

Quantidade vendida	Valor recebido
$\cdot\frac{1}{2}$ 10	R$ 30,00 $\cdot\frac{1}{2}$
5 $\cdot\frac{1}{5}$	$\cdot\frac{1}{5}$ *R$ 15,00*
.7 *1*	R$ 3,00 .7
7 .2	.2 R$ 21,00
.10 14	*R$ 42,00* .10
140	R$ 420,00

Havendo proporcionalidade direta, a razão entre os valores correspondentes das duas grandezas deve ser constante. Portanto, se a quantidade vendida cai pela metade (10 para 5), o valor recebido também cairá pela metade (30 para 15). Da mesma forma, se o valor recebido aumenta em 7 vezes, a quantidade vendida também será multiplicada por 7.

A partir da tabela anterior, pode-se chamar a atenção para o fato de que algo permanece constante na comparação entre as colunas. Peça aos alunos que dividam o valor da segunda coluna pelo da primeira, em todas as linhas. Eles vão perceber que a relação entre o valor recebido e a quantidade vendida é sempre 3.(30÷10=15÷5=3÷1=21÷7=42÷14=420÷140=3) Esse é o preço unitário do produto, cujo valor aparece na tabela quando a quantidade vendida é unitária. Trata-se, na verdade, da **razão de proporcionalidade** entre as duas grandezas.

Dessa forma, podemos afirmar que, se duas grandezas são diretamente proporcionais, a razão entre os valores correspondentes permanece constante, sendo chamada de razão de proporcionalidade.

Vejamos agora uma situação que envolve grandezas inversamente proporcionais.

Atividade 8

Um clube dispõe de uma quantia fixa de dinheiro para comprar bolas de futebol para os treinamentos. Com o dinheiro disponível, é possível comprar, de um fornecedor, 24 bolas a R$ 6,00 cada uma. O gerente pesquisou outros fabricantes e anotou as informações

na tabela a seguir. Complete-a obedecendo ao princípio de proporcionalidade e descubra qual foi o menor preço pesquisado pelo gerente.

Preço de uma bola	Número de bolas
R$ 6,00	24
R$ 12,00	*12*
R$ 4,00	*36*
R$ 2,00	72
R$ 24,00	*6*
R$ 1,00	144
R$ 72,00	*2*

O menor preço pesquisado foi de R$ 1,00, como mostra a tabela.

O próximo exemplo envolve a variação de três grandezas distintas que possuem uma relação de interdependência. É importante que os alunos questionem-se sobre o tipo de proporcionalidade (direta ou inversa) envolvida entre cada par de grandezas.

Nesse caso, os alunos deverão perceber que quanto maior o preço, menor a quantidade de bolas que se pode comprar. Portanto, as grandezas são inversamente proporcionais, e o que se mantém constante não é a razão, mas o produto entre elas: $6.24=12.12=4.36=2.72=24.6=1.144=72.2=144$

Ou seja, **duas grandezas são inversamente proporcionais quando o produto do valor de uma delas pelo correspondente da outra for constante**. No problema em questão, esse produto nada mais é do que a quantia de dinheiro disponível para comprar as bolas.

Atividade 9

Para produzir 1 000 m de um cabo telefônico, 24 operários trabalham regularmente durante 6 dias. Quantos dias serão necessários para produzir 1 250 m de cabo com 10 operários trabalhando?

a) Indique se as grandezas, duas a duas, são diretamente ou inversamente proporcionais entre si.

- Fixando-se o tempo de trabalho, a produção de cabos é *diretamente* proporcional ao número de operários.
- Fixando-se a quantidade de cabos, o tempo de produção é *inversamente* proporcional ao número de operários.
- Fixando-se o número de operários, a quantidade de cabos é *diretamente* proporcional ao tempo de produção.

b) Preencha a tabela a seguir mantendo a proporcionalidade entre as linhas.

Produção de cabos (m)	Número de operários	Tempo de produção (dias)
1 000	24	6
2 000	24	*12*
2 000	*48*	6
500	*12*	6
500	24	*3*
500	*6*	12
250	3	12
125	3	6
1 250	*30*	6
1 250	10	*18*

Professor, comente com os alunos que, em cada linha, há uma grandeza que permanece constante, enquanto as demais variam, de forma direta ou inversamente proporcional. Na segunda linha, considerando o mesmo número de operários, para se produzir o dobro da metragem de cabos será necessário o dobro do tempo, uma vez que se trata de grandezas diretamente proporcionais.

Na atividade anterior, os passos para chegar à resposta do problema já estavam preenchidos na tabela. Ou seja, havia um caminho que levava da situação inicial (produção de 1 000 metros de cabos, com 24 operários, em 6 dias) para a situação final desejada (saber quantos dias seriam necessários para produzir 1 250 metros de cabo com 10 operários trabalhando). Na próxima atividade, o aluno deverá construir o seu próprio caminho, partindo de uma situação inicial e chegando à resposta do problema. Da mesma forma que no duplex, cada aluno poderá construir um caminho diferente, desde que mantidas as relações de proporcionalidade entre as grandezas.

Atividade 10

Para produzir 180 pias de granito, 15 pessoas trabalham durante 12 dias, em uma jornada de 10 horas de trabalho por dia. Procurando adequar sua empresa à nova legislação trabalhista, o diretor reduziu a jornada de trabalho de 10 para 8 horas ao dia e contratou mais funcionários. Ao mesmo tempo, a demanda por pias aumentou, e será necessário aumentar a produção. Nesse novo contexto, quantos dias serão necessários para produzir 540 pias de granito, contando com 25 pessoas trabalhando 8 horas por dia?

a) Relacione duas a duas as grandezas, mantendo as demais constantes, e indique o tipo de proporcionalidade envolvida (direta ou inversa).

A produção de pias é diretamente proporcional ao número de funcionários.

O tempo de produção é inversamente proporcional ao número de funcionários.

O tempo de produção é diretamente proporcional ao número de pias a serem produzidas.

A produção de pias é diretamente proporcional ao número de horas trabalhadas por dia.

O número de funcionários é inversamente proporcional ao número de horas trabalhadas.

O tempo de produção é inversamente proporcional ao número de horas trabalhadas.

b) Preencha a tabela apresentada a seguir e ache a solução do problema.

Um possível caminho é o seguinte:

Produção de pias	Número de funcionários	Tempo de produção (dias)	Número de horas trabalhadas por dia
180	15	12	10
180	*15*	*60*	*2*
180	*15*	*15*	*8*
180	*5*	*45*	*8*
180	*25*	*9*	*8*
540	25	*27*	8

Considerações sobre a avaliação

Ao final dessas atividades, espera-se que os alunos sejam capazes de reconhecer situações que envolvam algum tipo de proporcionalidade direta e inversa. Eles devem ser capazes de quantificar a variação das grandezas e verificar se existe ou não proporcionalidade direta entre elas. Do mesmo modo, espera-se que eles consigam distinguir as situações em que as grandezas variam de modo diretamente proporcional daquelas em que variam entre si de maneira inversamente proporcional. Além disso, que saibam resolver problemas envolvendo duas ou mais grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

A **avaliação da aprendizagem** dos alunos em relação a esses tópicos poderá ser feita a partir da aplicação de atividades similares às propostas ao longo da Situação de Aprendizagem. A organização da resolução e a capacidade de **identificar** as informações pertinentes, **organizá-las** em tabelas, **calcular** as variações ocorridas, **classificá-las** quanto à sua natureza e realizar os cálculos obedecendo ao princípio de proporcionalidade são aspectos que devem ser trabalhados pelo professor e, consequentemente, avaliados por meio de um ou mais instrumentos: provas, tarefas de casa, trabalhos em dupla, discussões coletivas, etc. Cabe ao professor a escolha do instrumento de avaliação mais adequado a ser utilizado em função das características de seus alunos e do seu planejamento efetivo de aulas.

É importante, também, que o professor considere não apenas a aquisição do conceito matemático estudado – no caso, a proporcionalidade –, mas todas as dimensões envolvidas na resolução dessas atividades, como a **competência leitora**, que é fundamental para a interpretação dos enunciados das situações-problema. Ou ainda, a **capacidade de expressão**, seja na língua materna, seja na matemática usada para dar as respostas dos problemas. Além disso, deve-se valorizar também a **capacidade de argumentação**, envolvida na escolha de determinado caminho na resolução de um problema.

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 2
RAZÃO E PROPORÇÃO

A Situação de Aprendizagem 2 trata de um conceito fundamental na Matemática: a razão. Ele está presente nos mais diversos contextos, desde o trabalho com medidas até o estudo de funções e progressões numéricas, passando pela semelhança geométrica, trigonometria, etc. Optamos por formalizar o conceito de razão depois do estudo das variações proporcionais entre grandezas, pois, dessa forma, os alunos já estariam inseridos no contexto da comparação entre grandezas. A ideia da existência de um fator constante que relaciona duas grandezas, chamado de **razão de proporcionalidade**, foi problematizada na Situação de Aprendizagem 1. Agora, vamos ampliar o conceito de razão para outros contextos.

Inicialmente, consideramos importante partir do significado que a palavra "razão" assume no senso comum, ou seja, do entendimento que os alunos têm dessa palavra, para depois introduzir o conceito específico que ela assume na Matemática. Em seguida, propomos uma discussão sobre as formas de representação de uma razão, desde a forma fracionária até a **porcentagem**. São apresentadas também algumas situações-problema envolvendo os tipos mais comuns de razão, como a **escala** usada em mapas, a **velocidade** de um objeto, a **densidade**, o PIB *per capita*, etc. A **probabilidade** é apresentada como uma razão específica que expressa a relação entre o número de possibilidades de ocorrência de um evento particular e o número total de possibilidades de um espaço amostral determinado.

Por fim, propomos a realização de uma atividade prática envolvendo as razões presentes no corpo humano. Partindo de um texto e de uma obra de Leonardo Da Vinci, conhecida como *Homem vitruviano*, os alunos devem empregar o conceito de razão para averiguar se as proporções do desenho correspondem às razões citadas no texto. Os alunos devem realizar medidas do desenho de Da Vinci e calcular as razões entre as partes do corpo humano. Essa atividade mobiliza uma série de competências dos alunos: a competência leitora e escritora para interpretar um texto e traduzi-lo em linguagem matemática, a competência de realizar medidas com precisão, a capacidade de comparar medidas, razões e médias, entre outras.

É importante lembrar que as atividades propostas a seguir constituem apenas um referencial para que o professor possa direcionar as atividades em sala de aula. Dessa forma, elas são apenas ilustrativas, podendo ser reduzidas, ampliadas e modificadas pelo professor de acordo com as características de cada grupo/classe.

Tempo previsto: 2 semanas.

Conteúdos e temas: razão; proporcionalidade; escala; porcentagem; probabilidade.

Competências e habilidades: compreender o conceito de razão na Matemática; saber calcular a razão entre duas grandezas de mesma natureza ou de natureza distinta; conhecer os principais tipos de razão: escala, porcentagem, velocidade, probabilidade, etc.; realizar medidas com precisão.

Estratégias: exploração, resolução e discussão de situações-problema envolvendo os diferentes tipos de razão; atividade prática de investigação das razões e proporções no corpo humano.

Roteiro para aplicação da Situação de Aprendizagem 2

O conceito de razão

Antes de introduzir formalmente o conceito de razão em Matemática, pode-se perguntar aos alunos o que eles entendem pela palavra "razão". Muitas interpretações deverão surgir, uma vez que esse conceito está extremamente disseminado em nossa língua e assume diversos significados, de acordo com os contextos em que aparece. Em seguida, pode-se solicitar aos alunos que consultem um dicionário para encontrar as definições da palavra "razão", para que tenham uma ideia da diversidade de acepções dessa palavra. Algumas delas, segundo o dicionário Aurélio, são:

> **Razão.** [Do lat. *ratione*.] S.f. 1.Faculdade que tem o ser humano de avaliar, julgar, ponderar ideias universais; raciocínio, juízo. 2.Faculdade que tem o homem de estabelecer relações lógicas, de conhecer, de compreender, de raciocinar; raciocínio, inteligência. 3.Bom senso; juízo; prudência. 4.A lei moral; o direito natural; justiça; direito. 5.Causa, motivo.
>
> FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Novo Dicionário Aurélio da língua portuguesa*. Curitiba: Positivo, 2004. CD-ROM. Adaptado para fins didáticos.

Em Matemática, a palavra "razão" tem um significado específico. Ela representa a relação existente entre dois números **a** e **b**, e se escreve na forma $\frac{a}{b}$. Assim, se a razão $\frac{a}{b}$ é igual a **c**, isto significa que **a = b . c**. É importante diferenciar o conceito de razão do de fração. A fração é uma forma de expressar a razão entre dois números inteiros. Assim, toda fração é também uma razão, mas nem toda razão pode ser expressa como uma fração. É bom lembrar que os números irracionais não podem ser escritos na forma de fração, e o número π, que é irracional, representa a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro.

O conceito de razão está intimamente ligado ao de proporção. Na atividade 7, chamamos a atenção para o fato de que havia um valor constante que relacionava as duas grandezas envolvidas. Em qualquer uma das linhas da tabela, ao dividirmos o valor recebido pela quantidade vendida, obtinha-se sempre o mesmo resultado, o número 3. Naquele contexto, esse valor significava o preço unitário do produto vendido. Em termos matemáticos, tal valor corresponde à razão de proporcionalidade entre as grandezas envolvidas.

Esse conceito poderia ter sido introduzido antes do estudo das variações proporcionais. Contudo, achamos que seria mais significativo para o aluno compreender o conceito de razão a partir das situações de proporcionalidade estudadas, ou seja, como o número que expressa a relação de proporcionalidade entre duas grandezas. Duas grandezas são diretamente proporcionais quando a razão entre os valores de uma e os valores correspondentes da outra é constante. Esse valor constante é a **razão de proporcionalidade**.

A razão pode não estar diretamente ligada a uma situação de proporcionalidade. Ela pode simplesmente representar a relação entre duas grandezas em determinado momento ou circunstância. Por exemplo, o número de gols por partida de um jogador em um determinado campeonato, ou a relação entre o número de meninos e meninas em uma classe. A razão é uma forma de comparação entre os valores de duas grandezas de mesma natureza, ou de naturezas diferentes.

Representação de uma razão

Um aspecto que pode ser explorado com os alunos são as diferentes formas de representação de uma razão. Sendo a razão a divisão indicada entre dois números, ela pode ser escrita de diversas maneiras.

Quando o resultado da divisão for exato, a razão poderá ser escrita como um **número inteiro**. Por exemplo: Uma impressora imprime 300 páginas em 10 minutos. Portanto, a razão páginas por minuto é igual a 30.

Quando o resultado da divisão não for exato, a razão poderá ser escrita na **forma decimal** ou fracionária. Por exemplo: um terreno de 35 m² custa R$ 12 000,00. Portanto, a razão reais por m² é de, aproximadamente, 342,85; para fazer determinado refresco, deve-se utilizar 1 parte de suco concentrado para 5 partes de água. Tal razão pode ser escrita na forma de **fração**: $\frac{1}{5}$.

Além da notação fracionária, é muito comum o uso da **língua materna** para expressar a razão entre duas grandezas. Por exemplo: "1 em cada 10 brasileiros gosta de jogar vôlei", em vez de usar a fração $\frac{1}{10}$.

Outra forma muito usual de expressar uma razão é por meio da **porcentagem**. A porcentagem é uma razão particular, em que se compara certo número a 100. Ela é útil para expressar razões que, de outra forma, seriam de difícil compreensão na forma decimal ou fracionária.

Consideremos, por exemplo, uma pesquisa feita sobre os hábitos de prática esportiva em uma cidade. Consultando-se 17 425 pessoas, constatou-se que 3 721 faziam exercícios físicos regularmente. A partir dos números apresentados, é difícil fazer uma ideia exata da proporção de pessoas que praticam exercícios físicos regularmente, seja na forma fracionária $\frac{3721}{17425}$,

seja na decimal (0,214). Contudo, se tal razão fosse apresentada como 21,4%, teríamos uma noção mais clara dessa proporção: em cada 100 habitantes, aproximadamente 21 fazem exercícios físicos regularmente.

A porcentagem facilita não só a **leitura**, mas também a **comparação** entre razões. Suponha que um aluno tenha acertado 12 questões de 20 em uma prova, e 17 questões de 26 em outra. O uso da porcentagem permite comparar a razão de acertos em cada prova, facilmente: 1ª prova, a razão de acertos foi de 60%, e na 2ª, de 65,4%. Trata-se de uma comparação entre frações de mesmo denominador (100), ou seja, uma comparação entre equivalentes.

Essa facilidade para leitura e comparação faz da porcentagem uma forma bastante utilizada para representar razões que expressem uma relação entre **a parte e o todo**. Assim, costumamos ouvir expressões do tipo: a porcentagem de analfabetos em uma população; a porcentagem de acertos em um teste; a porcentagem de meninos em uma escola, etc.

Para poder expressar uma razão como porcentagem, precisamos capacitar o aluno a transformar números escritos na forma decimal em porcentagens. A porcentagem é uma forma de representar frações cujo denominador é 100. Escrevemos 5% para representar a fração $\frac{5}{100}$, e 40% para representar $\frac{40}{100}$. Em notação decimal, a centésima parte da unidade é representada na casa dos centésimos. A leitura do número 0,02 (dois centésimos) remete à sua representação fracionária, $\frac{2}{100}$, e, consequentemente, à sua forma percentual: 2%. Na atividade 1 são apresentadas algumas razões expressas em notação decimal, as quais devem ser transformadas para a forma percentual.

Atividade 1

Calcule o resultado das razões e expresse-o em termos de porcentagem:

a) razão 3 : 150

A razão 3 : 150 tem como resultado 0,02 (2 centésimos). Em porcentagem, a razão é de 2%.

b) razão 24 : 40

A razão 24 : 40 tem como resultado 0,6 (6 décimos), que equivale a 0,60 (60 centésimos), ou seja, 60%.

c) razão 4 : 50

A razão 4 : 50 tem como resultado 0,08 (8 centésimos), ou seja, 8 %.

d) razão 9 : 125

A razão 9 : 125 tem como resultado 0,072 (7 centésimos e 2 milésimos), ou seja, 7,2 %.

e) razão 165 : 300

A razão 165 : 300 tem como resultado 0,55 (55 centésimos), ou seja, 55 %.

Razões conhecidas

Algumas razões recebem um nome especial, devido à sua ampla utilização em algumas áreas do conhecimento, como: escalas, renda *per capita*, velocidade média, densidade, entre outras. As atividades a seguir exploram o cálculo de algumas dessas razões.

Escala

É a razão entre a medida de um objeto representado em um desenho e a medida correspondente ao objeto real. Geralmente, um mapa traz essa informação para facilitar a transposição da medida do desenho para a medida real.

Atividade 2

O mapa a seguir foi feito na escala 1 : 30 000 000 (lê-se "um para trinta milhões"). Esta notação representa a razão de proporcionalidade entre o desenho e o real, ou seja, cada unidade no desenho é, na realidade, 30 milhões de vezes maior. Utilizando uma régua e a escala fornecida, determine:

a) a distância real entre Brasília e Rio de Janeiro.

A distância entre Brasília e Rio de Janeiro no mapa é de aproximadamente 4 cm. Como cada centímetro no desenho corresponde a 30 milhões de centímetros na realidade, então 4 cm corresponderão a 120 milhões de centímetros. Convertendo para quilômetros, obtemos o resultado de 1 200 km, que é muito próximo ao valor real (1 148 km).

Mapa ilustrativo. Elaborado especialmente para o *São Paulo faz escola.*

b) a distância real entre Florianópolis e Brasília.

A distância entre Florianópolis e Brasília no mapa é de aproximadamente 5,5 cm. Como cada centímetro no desenho corresponde a 30 milhões de centímetros na realidade, então 5,5 cm corresponderão a 165 milhões de centímetros. Convertendo para quilômetros, obtemos o resultado de 1 650 km, que é muito próximo ao valor real (1 673 km).

Professor, você pode discutir com os alunos o fato de que as diferenças observadas se devem, provavelmente, a aproximações e erros de medida, ou à imprecisão do desenho. Outro aspecto a ser considerado na leitura de mapas de regiões da Terra é que eles retratam a transposição de uma superfície esférica para uma superfície plana. Assim, algum tipo de imprecisão é inerente a qualquer mapa da superfície terrestre, dependendo do tipo de projeção usada para transpor as informações da esfera para o plano. Duas são as possibilidades: se quisermos preservar os ângulos, as distâncias são alteradas; se quisermos preservar as distâncias, os ângulos é que são alterados.

Assim, para os pilotos de aviões e navios, o importante é preservar o ângulo, perdendo-se a precisão nas medidas de distância. Em alguns tipos de projeção, a forma é preservada localmente, facilitando a interpretação das distâncias em escala.

Velocidade

Em Física, a velocidade é a medida da rapidez com que um objeto altera a sua posição. Em nosso cotidiano, a palavra "velocidade" geralmente significa **velocidade média**, que é a razão entre um deslocamento e o intervalo de tempo gasto para efetuá-lo. Dessa forma, quando nos referimos à velocidade de um carro (80 km/h) ou de um corredor (4 m/s), estamos nos referindo à sua velocidade média.

O conceito de velocidade pode ser estendido para outras situações análogas. Por exemplo: a **pulsação** ou frequência de batimentos cardíacos exprime a rapidez com que o coração bate, ou seja, o número de batimentos por minuto. O normal em uma pessoa é ter pulsação entre 60 e 100 batimentos por minuto. Outra medida de rapidez é frequentemente usada na informática: a taxa de transmissão de dados, cuja unidade é o *quilobytes* por segundo (**kbps**); ela significa que em 1 segundo é possível fazer uma transferência eletrônica de dados de 1 *quilobyte*, ou 1000 *bytes*. O *byte* é a unidade básica de informação em computadores.

Atividade 3

Determine:

a) a velocidade média de um automóvel que percorreu 530 km em 6 horas.

A velocidade média é a razão entre o deslocamento – de 530 km – e o intervalo de tempo para efetuá-lo, ou seja, 6 horas. Portanto, a velocidade média nesse caso é de aproximadamente 88 km/h.

b) a pulsação (batimentos por minuto) de uma pessoa cujo coração bate 12 vezes a cada 10 segundos.

Se o coração dessa pessoa bate 12 vezes a cada 10 segundos, em 1 segundo ele baterá 1,2 vez e, em 60 segundos, 72 vezes. Portanto, a pulsação é de 72 batimentos por minuto.

Densidade ou densidade absoluta

É definida como a razão entre a massa e o volume de um corpo. A unidade mais usada para se expressar a densidade de um corpo é grama por centímetro cúbico (g/cm³). Por exemplo, a densidade da água é de 1 grama por centímetro cúbico (g/cm³).

Densidade demográfica

É a razão entre o número de habitantes que vivem em uma região e sua área.

Atividade 4

Com base nas definições de densidade e densidade demográfica, resolva as questões a seguir.

a) 300 g de uma substância ocupam um volume de 450 cm^3. Determine a densidade dessa substância.

A densidade dessa substância é de aproximadamente 0,67 g/cm³.

b) A população estimada do Estado de São Paulo, em 1º de julho do ano de 2007, era de, aproximadamente[1], 40 653 736 habitantes. Sabendo que a área do Estado é de aproximadamente 248 209 km^2, calcule sua densidade demográfica.

A densidade demográfica do Estado de São Paulo em 2007 era de, aproximadamente, 164 habitantes por quilômetro quadrado.

PIB *per capita*

É a razão entre o valor de todos os bens e serviços produzidos em um país em 1 ano e o total da população.

Atividade 5

Resolva as questões a seguir:

a) O PIB brasileiro em 2006, medido em dólares, foi de aproximadamente US$ 1,071 trilhão para uma população estimada em 187 milhões de pessoas. Determine o PIB *per capita* brasileiro nesse ano.

O PIB per capita *brasileiro era de aproximadamente US$ 5 727 por habitante.*

b) O PIB da Índia em 2006 foi de US$ 903 bilhões, para uma população estimada em 1 bilhão e 150 milhões de habitantes. Determine o PIB *per capita* da Índia em 2006.

O PIB per capita *indiano em 2006 era de aproximadamente US$ 785 por habitante.*

Nesse último exemplo, vale a pena fazer alguns comentários. O primeiro é que a medida do PIB *per capita* representa uma média, não retratando de fato a condição econômica da maioria da população de um país. Certamente não é real o fato de que cada brasileiro participe da produção nacional anual com o equivalente a US$ 5 727, ou, expresso em reais de 2006, o equivalente a R$ 12 490. Isso se deve ao fato de que existe uma desigualdade de renda no país, segundo a qual uma minoria da população concentra a maior parte da renda, e essa minoria responde por uma parcela proporcionalmente bem menor. Existem outros parâmetros para avaliar a condição socioeconômica de uma população, como o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH), a taxa de analfabetismo, a expectativa de vida, etc.

Probabilidade

A probabilidade é um tipo especial de razão, na qual compara-se o número de possibilidades de ocorrência de um evento particular com o número total de possibilidades relacionadas a esse evento. Por exemplo, no lançamento de uma moeda, a probabilidade de obter a face "cara" é de uma em duas, ou seja, uma chance em duas, ou $\frac{1}{2}$, ou, ainda, 50%.

1 Fundação SEADE. Disponível em: <http://www.seade.gov.br/produtos/projpop/index.php>. Acesso em: 26 maio 2009.

É a razão entre o número de possibilidades de obter cara (1) e o número total de possibilidades, cara ou coroa (2). No lançamento de um dado numerado de 1 a 6, a probabilidade de obter o número 5 é de uma em seis, ou $\frac{1}{6}$, ou 16,7%.

Para determinar a probabilidade de ocorrência de um determinado evento, devemos quantificar o número de casos em que este evento ocorre e o número total de casos possíveis, chamado de espaço amostral. A razão entre esses valores é o que chamamos de probabilidade. O resultado dessa razão pode ser expresso como número decimal ou como porcentagem.

Atividade 6

Resolva as questões a seguir.

a) No lançamento de um dado numerado de 1 a 6, qual é a probabilidade de se obter um número par? E um número maior que 4?

O número total de possibilidades no lançamento de um dado é 6. O número de ocorrências de número par são 3 (2, 4 ou 6). Portanto, a probabilidade de obter um número par é de 3 em 6, ou 0,5, ou 50%.

Já o número de ocorrências de números maiores que 4 são 2 (5 ou 6). Portanto, a probabilidade desse evento é de 2 em 6, ou 0,333..., ou aproximadamente 33%.

b) Jogando-se ao acaso duas moedas, qual é a probabilidade de se obter duas coroas?

O espaço amostral do lançamento de duas moedas é: cara-cara; cara-coroa; coroa-cara; coroa-coroa (4 possibilidades).

A probabilidade de obter duas coroas é de uma em quatro, ou 0,25, ou 25%.

c) Uma urna contém 7 bolas, sendo 3 vermelhas e 4 pretas. Retirando-se uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de que ela seja vermelha? E preta?

A probabilidade de retirar uma bola vermelha é de 3 em 7, ou 0,429, ou 42,9%.

A probabilidade de retirar uma bola preta é de 4 em 7, ou 0,571 ou 57,1%.

d) Um baralho contém 52 cartas, sendo 13 cartas de cada naipe (copas, ouros, espadas e paus). Retirando-se uma carta ao acaso, qual é a probabilidade de se obter uma carta de copas? E de se obter um valete?

A probabilidade de retirar uma carta de copas é de 13 em 52, ou 0,25, ou 25%.

Existem 4 valetes no baralho, um de cada naipe. Portanto, a probabilidade de obter um valete é de 4 em 52, ou 0,077, ou 7,7%.

Muitas outras razões são utilizadas e frequentam os jornais e as revistas semanais, embora não recebam nenhum nome especial. A relação candidato/vaga nos concursos vestibulares, a proporção de médicos por habitantes, a taxa de natalidade, etc.

Na atividade 7 são apresentadas algumas situações para que o aluno identifique a existência de proporcionalidade e calcule o valor da razão. Para isso, é necessário que ele saiba verificar se as grandezas variaram proporcionalmente e, em seguida, calcular o quociente entre uma grandeza e a outra.

Atividade 7

Analise as situações descritas a seguir. Construa uma tabela com os valores fornecidos, calcule a razão de proporcionalidade e verifique se houve variação proporcional.

a) Se 5 bolas de futebol custam R$ 100,00, então 7 bolas custarão R$ 140,00.

A razão obtida foi de R$ 20,00 por bola. Há proporcionalidade direta, pois a razão de proporcionalidade permaneceu constante.

Número de bolas	Valor pago em reais	Razão (preço por bola)
5	100	100 ÷ 5 = 20
7	140	140 ÷ 7 = 20

b) Um automóvel percorreu 120 km em 1 hora e meia. Em 2 horas, ele terá percorrido 160 km.

A velocidade média nos 2 períodos foi de 80 km/h. Há proporcionalidade direta, pois a razão de proporcionalidade permaneceu constante.

Distância percorrida em km	Tempo em horas	Razão (velocidade)
120	1,5	120 ÷ 1,5 = 80
160	2	160 ÷ 2 = 80

c) Um supermercado vende 4 rolos de papel higiênico por R$ 3,00, e 12 rolos por R$ 8,00.

Nesse caso, não há proporcionalidade, pois a razão obtida em cada situação foi diferente: R$ 0,75 por rolo para 4 rolos, e R$ 0,67 por rolo para 12 rolos.

Número de rolos	Valor pago em reais	Razão (preço por rolo)
4	3	3 ÷ 4 = 0,75
12	8	8 ÷ 12 = 0,67

d) Em uma receita de *milk-shake*, recomenda-se colocar 3 bolas de sorvete de chocolate para 2 xícaras e meia de leite (1 xícara equivale a 250 ml). Para 1 litro de leite, devemos colocar 7 bolas de sorvete.

Nesse item, precisamos fazer a conversão para uma unidade de volume comum. Como 1 xícara equivale a 250 ml, então: 1 litro = =1000 ml = 4 . 250 ml = 4 xícaras. Não há proporcionalidade no aumento da receita, pois a razão aumentou de 1,2 bola por xícara para 1,75 bola por xícara.

Bolas de sorvete	Número de xícaras de leite	Razão (bolas por xícara)
3	2,5	3 ÷ 2,5 = 1,2
7	4	7 ÷ 4 = 1,75

e) Em determinado dia, US$ 20,00 eram vendidos por R$ 36,00, e US$ 50,00 por R$ 90,00.

Sim, há proporcionalidade, pois o preço do dólar foi o mesmo nas duas situações, ou seja, R$ 1,80 por dólar.

Quantidade de dólares	Valor em reais	Razão (reais por dólar)
20	36	36 ÷ 20 = 1,80
50	90	90 ÷ 50 = 1,80

Na atividade 8, os alunos realizarão medidas e cálculos de razões no corpo humano, a partir das razões indicadas por Leonardo Da Vinci, no *Homem vitruviano*. Proponha inicialmente a leitura do texto a seguir e, na sequência, peça aos alunos que completem a tabela que indica as diferentes razões apresentadas no texto.

Homem vitruviano e as razões no corpo humano

Leonardo Da Vinci foi uma das figuras mais criativas de seu tempo. Ele viveu na Itália no século XV e criou algumas das obras mais famosas de todos os tempos, como a *Mona Lisa*, *A última ceia* e *a virgem das rochas*. Leonardo realizou estudos nas mais diversas áreas: pintura, arquitetura, engenharia, anatomia, entre outras. Ele conseguiu, como ninguém, aproximar a ciência da arte. Leonardo também produziu um estudo sobre as proporções do corpo humano, baseado num tratado feito pelo arquiteto romano Marcus Vitruvius, que viveu no século I a.C. Vitruvius havia descrito as proporções ideais do corpo humano, segundo um padrão de harmonia matemática. Assim como muitos outros artistas, Leonardo interessou-se pelo trabalho de Vitruvius e registrou-o em um de seus cadernos de anotação. No meio de suas anotações, desenhou a figura de um homem dentro de um círculo e de um quadrado. Essa figura, chamada de *Homem vitruviano*, acabou se tornando um de seus trabalhos mais conhecidos, simbolizando o espírito renascentista. O desenho de Da Vinci evidenciou a retomada e valorização de princípios da tradição greco-latina, tais como beleza, harmonia, equilíbrio e proporção. A obra *Homem vitruviano* atualmente faz parte da coleção da *Gallerie dell'Accademia* (Galeria da Academia), em Veneza, na Itália.

© Bettmann/Corbis-Latinstock

▶ Reproduzimos, a seguir, alguns trechos do texto de Leonardo Da Vinci que acompanham a gravura do *Homem vitruviano*.

"(...) O comprimento dos braços abertos de um homem é igual à sua altura (...); desde o fundo do queixo até ao topo da cabeça é um oitavo da altura do homem (...); a maior largura dos ombros contém em si própria a quarta parte do homem. (...) Desde o cotovelo até o ângulo da axila é um oitavo da altura do homem. A mão inteira será um décimo da altura do homem. (...) O pé é um sétimo do homem (...); a distância entre o fundo do queixo e o nariz e entre as raízes dos cabelos e as sobrancelhas é a mesma e é, como a orelha, um terço da cara."

Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/davinci/matematico.htm>. Acesso em: 29 maio 2009.

Cálculo das razões

Atividade 8

Construa uma tabela e escreva as razões entre as partes do corpo humano descritas no texto de Da Vinci. Represente-as na forma fracionária, decimal e percentual, conforme o exemplo a seguir:

- Razão entre a largura dos ombros e a altura: $\frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

Nesta atividade, o aluno deverá usar a competência leitora para interpretar corretamente as frases do texto original. Por exemplo, a frase "a maior largura dos ombros contém em si própria a quarta parte do homem", significa que a razão entre a largura dos ombros e a altura do homem é de 1 para 4, ou seja, $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$.

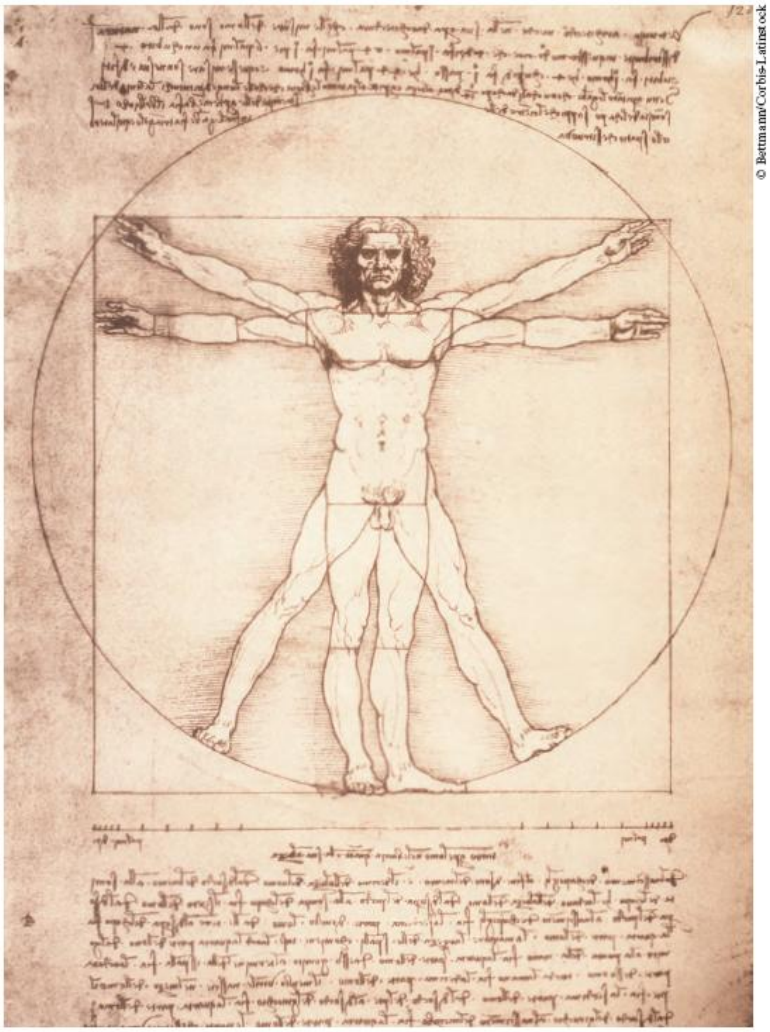
Razão entre	Fração	Decimal	%
Longitude dos braços e altura	$\frac{1}{1}$	1,0	100
Altura da cabeça e altura	$\frac{1}{8}$	0,125	12,5
Largura dos ombros e altura	$\frac{1}{4}$	0,25	25
Distância do cotovelo às axilas e altura	$\frac{1}{8}$	0,125	12,5
Comprimento da mão e altura	$\frac{1}{10}$	0,1	10
Comprimento do pé e altura	$\frac{1}{7}$	0,143	14,3
Distância do queixo ao nariz e face	$\frac{1}{3}$	0,333...	33,3
Distância da sobrancelha à raiz dos cabelos e face	$\frac{1}{3}$	0,333...	33,3

Na atividade 9, os alunos deverão realizar as medidas das partes do corpo humano descritas no texto a partir do desenho do *Homem vitruviano* reproduzido a seguir. O professor deve orientar os alunos a usarem corretamente a régua para fazer medidas precisas.

As razões no desenho de Leonardo Da Vinci

Atividade 9

Será que as razões descritas por Leonardo Da Vinci realmente estão presentes no corpo humano retratado em seu desenho? Para averiguar isso, você deve realizar medidas (com uma régua milimetrada) a partir do desenho do *Homem vitruviano* reproduzido a seguir. Anote os resultados em uma tabela e calcule as razões, colocando-as na forma decimal e percentual. Em seguida, compare os resultados percentuais com as razões obtidas na atividade anterior.



© Bettmann/Corbis-Latinstock

A seguir apresentamos uma tabela preenchida com as medidas aproximadas e o cálculo da razão das partes do corpo em relação à altura do homem e à altura da face:

Partes do corpo	Medidas em cm	Em relação à altura	Em relação à face
Altura	*10,7*	–	–
Longitude dos braços	*10,8*	*1,001 ou 100,1%*	–
Altura da cabeça	*1,3*	*0,121 ou 12,1%*	–
Largura dos ombros	*2,7*	*0,252 ou 25,2%*	
Do cotovelo às axilas	*1,3*	*0,121 ou 12,1%*	
Comprimento da mão	*1,1*	*0,102 ou 10,2%*	
Comprimento do pé	*1,5*	*0,139 ou 13,9%*	
Altura da face (do queixo à raiz dos cabelos)	*1,0*	–	–
Do queixo ao nariz	*0,3*	–	*0,30 ou 30%*
Da sobrancelha à raiz dos cabelos	*0,3*	–	*0,30 ou 30%*

Obs.: valores aproximados.

As medidas sempre estão sujeitas a imprecisões, assim como a reprodução da imagem não está na proporção do desenho original. Mesmo assim, as razões obtidas devem se aproximar muito das razões descritas no texto de Da Vinci. Talvez seja necessário orientar os alunos na identificação de determinadas distâncias entre partes do corpo, como entre o cotovelo e as axilas. O desenho traz marcas que ajudam a perceber o início e o fim de cada membro. É importante diferenciar o tamanho da cabeça do tamanho da face.

Considerações sobre a avaliação

No final deste percurso de aprendizagem, a expectativa é de que os alunos compreendam o conceito de razão na Matemática e saibam reconhecê-lo, calculá-lo e problematizá-lo em diversas situações e problemas. Acreditamos que os exemplos e as situações-problema apresentados possam contribuir para um aprendizado significativo e contextualizado do conceito de razão. A atividade 9, além de despertar a curiosidade dos alunos em relação ao próprio corpo, envolve uma série de competências e habilidades específicas, tais como: leitura e interpretação de texto; observação de imagem; cálculo de razões e médias; realização de medidas.

Do mesmo modo que na Situação de Aprendizagem anterior, o professor poderá escolher os **instrumentos de avaliação** mais apropriados de acordo com as características do grupo e

de seus objetivos em relação aos alunos: prova, trabalho em grupo, tarefas de casa, etc. As atividades propostas nesta Situação de Aprendizagem podem servir de referência para a elaboração de questões sobre esse conteúdo.

Espera-se que, ao final desta Situação de Aprendizagem, o aluno seja capaz de compreender o conceito de razão na Matemática, sabendo aplicá-lo e reconhecê-lo em diferentes situações.

Sendo assim, as expectativas de aprendizagem para essa etapa são:

- saber calcular a razão entre duas grandezas de mesma natureza ou de natureza distinta;
- conhecer, interpretar e operar os principais tipos de razão: a escala em mapas e plantas, a porcentagem como relação parte/todo, a velocidade, a probabilidade, etc.

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 3
RAZÕES NA GEOMETRIA

A Geometria pode ser considerada uma das áreas da Matemática em que a noção de proporcionalidade mais se destaca. Observando a ampliação e a redução de algumas figuras geométricas, é possível notar que algumas proporções se mantêm. Em um quadrado, por exemplo, é imediato que o aumento de um lado implica um aumento proporcional dos demais lados. O mesmo ocorre com o triângulo equilátero. O objetivo principal desta Situação de Aprendizagem é explorar as razões constantes presentes nas figuras geométricas.

Atividades que envolvem ampliação ou redução de figuras constituem interessantes estratégias didáticas para o desenvolvimento da noção de proporcionalidade. Se ampliarmos o comprimento de uma figura em duas vezes, e sua altura em três vezes, o aluno facilmente verificará que houve uma "distorção", isto é, que as partes não aumentaram proporcionalmente. Esse é o tema da atividade 1.

Em seguida, passamos a investigar as figuras geométricas mais tradicionais, como o quadrado, o triângulo e a circunferência. Nessas atividades, o aluno deverá verificar a existência ou não de uma razão de proporcionalidade constante. A constatação de que a diagonal do quadrado é diretamente proporcional ao seu lado levará o aluno a descobrir uma razão constante cujo valor é, aproximadamente, 1,4. Ou que o comprimento da circunferência é proporcional ao seu diâmetro na razão aproximada de 3,1, razão esta representada pela letra grega π (pi).

Por outro lado, em outra atividade, ele poderá perceber que a medida do cateto oposto de um triângulo não é diretamente proporcional à medida do ângulo oposto a ele. Por meio desses exemplos, pretende-se que o aluno seja capaz de avaliar em que situações existe proporcionalidade direta ou não, calculando as razões e comparando-as.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo