

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

Cláudia Vicente de Souza

**A FUNÇÃO EXPONENCIAL NO CADERNO DO PROFESSOR DE
2008 DA SECRETARIA DO ESTADO DE SÃO PAULO, ANÁLISE
DE ATIVIDADES REALIZADAS POR ALUNOS DA 2ª SÉRIE DO
ENSINO MÉDIO**

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**São Paulo
2010**

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

Cláudia Vicente de Souza

**A FUNÇÃO EXPONENCIAL NO CADERNO DO PROFESSOR DE
2008 DA SECRETARIA DO ESTADO DE SÃO PAULO, ANÁLISE
DE ATIVIDADES REALIZADAS POR ALUNOS DA 2ª SÉRIE DO
ENSINO MÉDIO**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia
Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial
para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM
ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação do(a) **Prof(a).
Dr(a). Barbara Lutaif Bianchini.***

São Paulo

2010

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus amados pais Benedito e Severina, sem eles nada aconteceria na minha vida, aos meus queridos irmãos Fábio e Carla, aos meus amados sobrinhos e sobrinhas.

À minha amada vovó Rosa (in memoriam), a flor mais linda do nosso jardim que Deus colheu para si, e a todos que oraram por mim para que essa vitória acontecesse.

AGRADECIMENTOS

A Deus, toda honra, glória e louvor para sempre, pois me deu a oportunidade de realizar este trabalho.

À professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini, pela orientação deste trabalho tornando-o realidade, pela paciência e dedicação nos momentos difíceis.

Aos professores Antonio Carlos Brolezzi e Marcos R. Celestino, participantes da banca examinadora desta dissertação, e pelas contribuições que foram feitas na qualificação.

Aos meus pais, pelo apoio, incentivo e compreensão durante o curso e por acreditarem na minha conquista.

Aos meus amados irmãos, Fábio e Carla pela ajuda com os seus computadores quando o meu não funcionava, essa vitória é nossa.

Aos meus sobrinhos, Matheus, Sarah, Geovanna e Pedro Guilherme pela compreensão dos momentos em que estive ausente.

Aos amigos do curso, Ariovaldo, Lucimeire, Patrick, em especial Edilson Paiva de Souza e Mariucha Baptista de Paula, por partilharmos momentos difíceis, mas também de alegrias.

À minha querida amiga Vilma A. Galhego que gentilmente realizou a revisão deste trabalho.

Aos alunos da E.E. Jacob Salvador Zveibil, participantes desta pesquisa.

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, pela concessão da bolsa de estudos e à Diretoria de Ensino Norte-1 pelo acompanhamento da mesma.

...tudo o que é verdadeiro, tudo o que é respeitável, tudo o que é justo, tudo o que é puro, tudo o que é amável, tudo o que é de boa fama, se alguma virtude há e se algum louvor existe, seja isso o que ocupe o vosso pensamento...

(Filipenses 4:8)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar se as atividades apresentadas no Caderno do Professor contribuem ou não para a compreensão do aluno a respeito do objeto Função Exponencial, e se os alunos conseguem realizar ou não as mudanças de registro de representação semiótica à luz da teoria de Duval (2003). Também analisamos se há neste Caderno uma abordagem das variáveis conforme o Modelo 3UV (Três Usos da Variável) de Ursini et al (2005). Nosso interesse em realizar essa pesquisa partiu da observação, em sala de aula, do baixo desempenho dos alunos referente ao estudo de funções e pela análise de avaliações realizadas pelo governo do Estado de São Paulo, tais como o SARESP/2007 que apresentou como resultados baixos índices de aproveitamento dos alunos em Matemática. O instrumento de pesquisa é composto de uma atividade de revisão de potências e quatro atividades referentes à introdução a Função Exponencial, encontradas no Caderno do Professor de Matemática da 1ª série do Ensino Médio do 3º bimestre de 2008, documento pertencente à Nova Proposta Curricular de 2008 do Estado de São Paulo. A pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa, utilizando como metodologia a Engenharia Didática de Artigue (1996). O estudo contou com 14 alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual, localizada na periferia da região noroeste de São Paulo. Diante dos resultados obtidos, constatamos que existem dificuldades quanto à realização das mudanças de registros de representação semiótica (registro da língua natural para o registro algébrico, registro de tabela para o registro gráfico) e limitações quanto à identificação das variáveis como uma relação funcional e termo desconhecido. Acreditamos que isso seja o reflexo das dificuldades iniciadas desde o início do estudo de funções. Como fator positivo, verificamos que algumas duplas em suas construções gráficas se aproximaram do gráfico da função exponencial, demonstrando, assim, que entendem a idéia do comportamento dessa função.

Palavras-chave: Função Exponencial, Registro de Representação Semiótica, Modelo 3UV, Nova Proposta Curricular de 2008 do Estado de São Paulo, Educação Algébrica.

ABSTRACT

This work aims to analyze whether the activities presented in the Teacher's Book contribute to the student's understanding about the exponential function, and whether or not the students can make changes in the register of semiotic representation, according to Duval's theory (2003). We also analyze if there is a variable approach in this book according to the Ursini's et al (2005) 3UV model (Three Uses for the Variable). Our interest in doing this research started with the observation in classroom of the students' low performance related to the studies of the functions and the analysis of the evaluations done by the São Paulo State Government, such as SARESP/2007, which presented as results Math students' low academic performance. The research instrument consists of a review activity of powers and four activities related to the exponential function introduction, which are found in the Math Teacher's Book of the High School first grade, third quarter of 2008. This document belongs to the São Paulo's New Curriculum Proposal, 2008. The research presents a qualitative approach, using the methodology of Artigue's Didactic Engineering (1996). The study counted on 14 high school students of the second grade from a state school located on the outskirts of the northwest region of São Paulo. Upon the results, we found out that there are difficulties in achieving changes in register of semiotic representation (register of the natural language for the algebraic register, register of table to register chart) and limitations regarding the identification of the variables as a functional relationship and unknown term. We believe that is the reflection of the difficulties which started from the beginning of the functions studies. As a positive aspect, we verified that some pairs in their graphic constructions approached the graph of the exponential function, thus demonstrating that they understand the idea of this function behavior.

Keywords: Exponential Function, Register of Semiotic Representation, 3UV Model, São Paulo State New Curriculum Proposal of 2008, Algebraic Education.

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1	– Decomposição do conceito de variável	68
QUADRO 2	– Habilidades necessárias à compreensão da variável em seus três usos	71
QUADRO 3	– Conteúdos de Matemática por série e bimestre do Ensino Médio.....	80
QUADRO 4	– Conteúdos do 3º bimestre da 1ª série do Ensino Médio.....	82
QUADRO 5	– Resultado da Atividade 1, item b)	124
QUADRO 6	– Resultado da Atividade 2, item a)	131
QUADRO 7	– Resultado da Atividade 2, item b)	132
QUADRO 8	– Resultado da Atividade 3, item a)	138
QUADRO 9	– Resultado da Atividade 3, item b)	140
QUADRO 10	– Resultado da A4, item a)	146
QUADRO 11	– Resultado da A4, item b)	147
QUADRO 12	– Resultado da A4, item c)	149
QUADRO 13	– Resultado da A4, item d)	151

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Questão do SARESP 2007.....	23
FIGURA 2	– Questão do SARESP 2007	24
FIGURA 3	– Comparação entre SARESP 200E e SAEB 2005	24
FIGURA 4	– Ilustração de uma função utilizando o diagrama de Venn	43
FIGURA 5	– O gráfico de uma função exponencial crescente	46
FIGURA 6	– Gráficos da função expoencial crescente e decrescente.....	47
FIGURA 7	– Tabela do comportamento da expressão $(1+1/n)^n$	49
FIGURA 8	– A catenária construída por Leibniz (1690)	52
FIGURA 9	– O arco do Portal em St. Louis, Missouri	53
FIGURA 10	– Exemplo gráfico da função exponencial $y= 2^x$	57
FIGURA 11	– Exemplo gráfico da função exponencial $y=(1/2)^x$	58
FIGURA 12	– Exemplo gráfico da função exponencial $y= 3^x$ e $y=(1/3)^x$	58
FIGURA 13	– Exemplo gráfico da função exponencial $y= e^x$	59
FIGURA 14	– Exercício sobre a Função Exponencial	60
FIGURA 15	– Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático	62
FIGURA 16	– Exemplo de variação de congruência ou não-congruência de uma conversão	64
FIGURA 16a	– Gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$	65
FIGURA 16b	– Gráfico da função exponencial $f(x) = (1/3)^x$	66
FIGURA 17	– Situação de Aprendizagem 1 - Exercício 1	83
FIGURA 18	– Situação de Aprendizagem 1 - Exercício 2	83
FIGURA 19	– Situação de Aprendizagem 1 - Exercício 3	84
FIGURA 20	– Situação de Aprendizagem 1 - Exercício 4	84
FIGURA 21	– Situação de Aprendizagem 1 - Exercício 1	93
FIGURA 22	– Gráfico da $f(t) = 5000 \cdot 3^t$ e $g(t) = 3^t$	95
FIGURA 23	– Gráfico de $N = f(t) = 5000 \cdot 3^t$	96
FIGURA 24	– Situação de Aprendizagem 1 - Exercício 2	97
FIGURA 25	– Situação de Aprendizagem 1 - Exercício 3	99
FIGURA 26	– Gráficos das funções $y = 2^x$ e $y = 2^{3x}$	100
FIGURA 27	– Gráficos das funções $y = 3^{-x}$ e $y = 3^{-0,5x}$	101

FIGURA 28 – Situação de Aprendizagem 1 – Exercício 4	101
FIGURA 29 – Calculadora Científica	116
FIGURA 30 – Protocolo da Atividade 1 item a) realizada pela dupla D6	120
FIGURA 31 – Protocolo da Atividade 1, item a) realizada pela dupla D7	121
FIGURA 32 – Protocolo da Atividade 1, item b) realizada pela dupla D1	126
FIGURA 33 – Protocolo da Atividade 1, item b) tabela realizada pela dupla D2	127
FIGURA 34 – Protocolo da Atividade 1, item b), gráfico realizado pela dupla D2	128
FIGURA 35 – Protocolo da Atividade 1, item b) realizado pela dupla D3	129
FIGURA 36 – Protocolo da Atividade 1, item b) tabela realizada pela dupla D5	129
FIGURA 37 – Protocolo da Atividade 1, item b) gráfico realizado pela dupla D6	130
FIGURA 38 – Protocolo da Atividade 2, item a) realizado pela dupla D6	133
FIGURA 39 – Protocolo da Atividade 2, item b) realizado pela dupla D6	133
FIGURA 40 – Protocolo da Atividade 2, itens a) e b) realizados pela dupla D7	134
FIGURA 41 – Protocolo da Atividade 2, item a) realizado pela dupla D3	135
FIGURA 42 – Protocolo da Atividade 2, item b) realizado pela dupla D3	135
FIGURA 43 – Protocolo da Atividade 2, item b), realizado pela dupla D5.....	136
FIGURA 44 – Protocolo da Atividade 3, item a), realizado pela dupla D1	142
FIGURA 45 – Protocolo da Atividade 3, item b), realizado pela dupla D1	142
FIGURA 46 – Protocolo da Atividade 3, item b), realizado pela dupla D2	143
FIGURA 47 – Protocolo da Atividade 3, item b), realizado pela dupla D6	144
FIGURA 48 – Protocolo da Atividade 4, item b), realizado pela dupla D4	148
FIGURA 49 – Protocolo da Atividade 4, item b), realizado pela dupla D5 ...	148
FIGURA 50 – Protocolo da Atividade 4, item b), realizado pela dupla D6	148
FIGURA 51 – Protocolo da Atividade 4, item c), realizado pela dupla D1	150
FIGURA 52 – Protocolo da Atividade 4, item c), realizado pela dupla D3	150
FIGURA 53 – Protocolo da Atividade 4, item c), realizado pela dupla D2.....	150
FIGURA 54 – Protocolo da Atividade 4, item c), realizado pela dupla D4	150
FIGURA 55 – Protocolo da Atividade 4, item c), realizado pela dupla D5	151
FIGURA 56 – Protocolo da reatuação da Atividade 1, item a), realizado pela dupla D2	154

FIGURA 57 – Protocolo da reaplicação da Atividade 1, item a), realizado pela dupla D2	155
FIGURA 58 – Protocolo da reaplicação da Atividade 1, item a), realizado pela dupla D6	156
FIGURA 59 – Protocolo da reaplicação da Atividade 1, item b), realizado pela pela dupla D6	157

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
------------------	----

CAPÍTULO 1

1.1 Problemática.....	18
1.2 Justificativa	20

CAPÍTULO 2

2.1 Levantamento bibliográfico.....	28
2.2 Conceito de função.....	40
2.2.1 Função Exponencial.....	44
2.2.2 O número e.....	48
2.3 Breve descrição do livro adotado pela escola	54
2.3.1 Análise do capítulo sobre a Função Exponencial	56
2.4 Fundamentação Teórica	60
2.4.1 Registros de representação semiótica	61
2.4.2 Tipos de transformação de representação semiótica	63
2.4.3 Modelo 3UV	67
2.4.4 Termo desconhecido	69
2.4.5 Número genérico	69
2.4.6 Relação funcional.....	70
2.5 O uso da calculadora	72

CAPÍTULO 3

3.1 Breve descrição da proposta curricular do Estado de São Paulo para a disciplina de matemática ensino fundamental – ciclo II e ensino médio .	76
3.1.1 Caderno do professor de matemática -Ensino médio – 1ª série – 3º bimestre – 2008	78
3.1.2 Conteúdos básicos do 3º bimestre da primeira série	81

CAPÍTULO 4

4.1 Procedimentos metodológicos	86
4.1.1 As fases da metodologia da Engenharia Didática	87
4.2 Sujeitos da pesquisa	89
4.3 O instrumento de pesquisa	90
4.4 Análise <i>a priori</i> das atividades.....	91
4.5 Aplicação da atividade inicial – revisão de potências	103
4.6 Análise <i>a posteriori</i> das atividades	104
4.7 Análise da revisão sobre potências	107
4.8 Análise das Atividades 1,2,3 e 4	115
4.8.1 Análise <i>a posteriori</i> da Atividade 1	116
4.8.2 Análise <i>a posteriori</i> da Atividade 2	130
4.8.3 Análise <i>a posteriori</i> da Atividade 3	137
4.8.4 Análise <i>a posteriori</i> da Atividade 4	145
4.8.5 Reaplicação e análise da Atividade 1	154
CONSIDERAÇÕES FINAIS	143
Referências	148
Anexos	153

INTRODUÇÃO

Os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio sobre o ensino da Matemática apontam que:

Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento. No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. (BRASIL, 2002, p.111).

Infelizmente, sempre ouvimos da maioria dos alunos que a disciplina de Matemática é complexa, “cheia de problemas”, e muito “chata”. Além disso, surgem comentários como: “professora para que serve esse conteúdo?”, “é necessário aprender isso?”, “quando é que eu vou utilizar isso na minha vida?”. Perguntas e comentários como esses são freqüentes em nossas aulas e cabe ao professor refletir a respeito da sua prática e metodologia de ensino e procurar entender o porquê dessas interrogações.

Esses questionamentos sempre nos inquietam e, insatisfeitos com essa situação, decidimos melhorar a nossa prática docente. Foi quando surgiu a oportunidade de ingressar no curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, do Programa de Estudos Pós-Graduado da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Em abril de 2008, participamos de uma das reuniões do Grupo de Pesquisa para Educação Algébrica (GPEA), em que um dos eixos de estudo do projeto cujo tema “O que se entende por álgebra?” vem sendo estudado desde 2006.

Levando em consideração os propósitos do grupo e as discussões que presenciamos, expressamos o nosso desejo em participar do grupo sob a orientação da Prof^a. Dr^a. Barbara Lutaif Bianchini que nos recebeu gentilmente no grupo de pesquisa e nos deu total apoio para desenvolvermos a nossa pesquisa.

Em conversa com o grupo e a orientadora mencionamos ser a Função Exponencial objeto do nosso estudo.

A partir daí iniciamos uma busca por trabalhos relacionados ao tema de funções.

Algumas das pesquisas consultadas como as de Lopes (2003) e Pelho (2003) constataram que, a maioria dos alunos do Ensino Médio e Ensino Superior encontram dificuldades relacionadas ao conceito de função.

Lopes (2003) enfatizou que esses obstáculos são encontrados antes mesmo da apresentação do assunto, ou seja, nos conteúdos denominados como pré-requisitos.

A pesquisa de Pelho (2003) indicou uma situação parecida com a pesquisa de Lopes (2003). A pesquisadora verificou que as dificuldades residem na apropriação do conceito de função, mesmo que os alunos tenham tido contato no dia a dia.

No segundo capítulo da dissertação detalharemos esses e outros trabalhos que subsidiaram o desdobramento da nossa investigação.

Queremos ainda destacar que a análise da nova Proposta Curricular de 2008 do Estado de São Paulo contribuiu para o direcionamento e escolha do instrumento de aplicação da nossa pesquisa.

O instrumento de pesquisa contou com uma atividade inicial denominada de revisão sobre potências e 4 atividades a respeito da Função Exponencial do Caderno do Professor¹.

Sendo assim, dividimos o nosso trabalho da seguinte forma:

No Capítulo I, apresentamos a problemática e a justificativa, assim como os resultados das análises do SARESP/2007 (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) juntamente com o SAEB/2005 (Sistema de Avaliação da Educação Básica) e o objetivo principal da pesquisa.

O Capítulo II compreende as análises prévias, o levantamento bibliográfico, um breve histórico do conceito de função e a Função Exponencial. Apresentamos também a descrição e análise do livro didático adotado pela escola, além do referencial teórico de Raymond Duval (2003) e Ursini et al (2005) e por fim a questão do uso da calculadora.

¹ Material pertencente à Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo. O Caderno do Professor é referente à disciplina de Matemática da 1ª série do Ensino Médio – 3º bimestre de 2008.

O Capítulo III destina-se a uma breve descrição da Nova Proposta Curricular de 2008 para a disciplina de Matemática e apresentação do material integrante, o Caderno do Professor de Matemática da 1ª série do Ensino Médio - 3º bimestre de 2008.

No Capítulo IV, incluímos os procedimentos metodológicos fundamentados na Engenharia Didática e a explicitação das suas fases. Descrevemos os sujeitos e instrumento da pesquisa, apresentação das análises *a priori*, as análises de aplicação e análises *a posteriori* das atividades.

Encontramos no Capítulo V as considerações finais acerca dos resultados obtidos e sugestões para futuros trabalhos.

CAPÍTULO 1

1. 1 Problemática

A respeito do ensino da Matemática para o Ensino Médio , Giovanni e Bonjorno (2002a) declaram que:

No ensino médio, a Matemática apresenta um valor formativo, além de desempenhar um papel instrumental. No aspecto formativo, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, contribuindo para o desenvolvimento de processos cognitivos e a aquisição de atitudes. Por este ângulo, leva o aluno a desenvolver sua criatividade e capacidade para resolver problemas, criar o hábito de investigação e confiança para enfrentar situações novas e formar uma visão ampla e científica da realidade. No que diz respeito ao caráter instrumental, a Matemática deve ser vista como um conjunto de ferramentas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. É preciso compreender a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de idéias, permitindo, ao indivíduo, interpretar e modificar a realidade que o cerca. (p.6).

Concordamos com essa afirmação e entendemos que o ensino de Matemática, assim como o de qualquer outra disciplina exige a participação do professor no desenvolvimento das competências e habilidades necessárias para a formação do aluno.

Nesse aspecto, a nossa preocupação é estendida no sentido de contribuirmos para que haja o desenvolvimento de um ensino voltado à boa formação escolar e social do indivíduo como cidadão.

A nossa experiência em sala de aula acompanhada das análises dos resultados do SARESP/2007 e SAEB/2005 indicam que o ensino e a aprendizagem dos conceitos matemáticos apresentam problemas e aprofundaremos essa discussão em nossa justificativa.

A partir das análises de documentos oficiais e de pesquisas envolvendo o conceito de função, decidimos realizar uma pesquisa cujo objeto matemático é a Função Exponencial.

A respeito do estudo de funções, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio descrevem o seguinte:

O estudo de funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (BRASIL, 2002, p.121).

Ainda nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1999), o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar por intermédio da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos do cotidiano, como de outras áreas de conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia.

Lopes (2003) destacou que o tema função é objeto de estudo de vários pesquisadores devido a sua importância em diversas aplicações. A noção de função é fundamental em diferentes áreas de conhecimento, tais como as da Física, Química, Biologia, Economia, entre outras, além de ser um tema essencial na própria Matemática.

Segundo Pelho (2003), as experiências que os alunos obtêm com o conceito de função no Ensino Fundamental são, muitas das vezes, adquiridas por meio de uma definição de caráter estático, direta e formal, se opondo à idéia de função como uma transformação, uma dependência, uma variação, podendo resultar em uma não compreensão deste conceito.

Esta pesquisa abordará o tema da Função Exponencial, por isso entendemos que seja importante destacar as dificuldades dos alunos relacionadas ao conceito de função.

Se voltarmos alguns séculos na história da Matemática, verificaremos também que o estudo da Função Exponencial dependeu do desenvolvimento do conceito de função. Dessa maneira, entendemos que o estudo de qualquer função depende da compreensão do mesmo.

No que diz respeito à importância do nosso tema, relacionamos alguns exemplos do cotidiano como: o cálculo de juros compostos; crescimento

populacional; cálculo da depreciação de um automóvel; desintegração radioativa; crescimento de uma colônia de bactérias; leis do resfriamento dos corpos e muitos outros.

A introdução ao estudo de funções é apresentada nos livros didáticos nas 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, no entanto, em consulta ao material pertencente à Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo, Ler e Escrever: Guia de Planejamento e Orientações Didáticas, utilizados na 1ª a 4ª séries do Ciclo I, procuramos pelo estudo das funções nos volumes da 3ª e 4ª séries e encontramos que o planejamento prevê, para a 4ª série, situações didáticas que contemplam a produção e interpretação de tabelas e gráficos sempre em uma situação-problema.

A nova Proposta propõe a apresentação do conteúdo na 8ª série abordando noções básicas sobre função, a idéia de variação e construções de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus, e somente na 1ª série do Ensino Médio que ocorre o estudo com a Função Exponencial.

É importante mencionar que utilizaremos como instrumento da nossa pesquisa, atividades relacionadas à Função Exponencial apresentadas no Caderno do Professor de Matemática da nova Proposta Curricular de 2008 do Estado de São Paulo.

Diante do que foi descrito, constatamos a importância do estudo desse tema.

1.2 Justificativa

Neste capítulo descrevemos as motivações que nos levaram a esta pesquisa.

Minha trajetória na educação como professora de matemática da rede estadual pública de São Paulo iniciou em agosto de 1993, sendo efetiva no cargo desde o ano de 2000. Atualmente, sou professora no Ensino Médio, nos períodos da manhã e noite, na Escola Estadual Jacob Salvador Zveibil, situada na periferia da zona oeste de São Paulo.

Uma das motivações encontradas para iniciar o curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São

Paulo – PUC/SP, foi dar continuidade aos meus estudos, após a conclusão do curso de Especialização em Educação Matemática para professores de matemática do Ensino Médio no ano de 2006, promovido pelo Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia – PUC/SP com convênio da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Vale ressaltar que o projeto Bolsa Mestrado oferecido pelo Governo do Estado de São Paulo foi de fundamental importância para a realização desta minha conquista.

Sou integrante do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica - GPEA, do programa de estudos pós-graduados em Educação Matemática da Pontifícia Católica de São Paulo – PUC/SP e o nosso trabalho faz parte da linha de pesquisa A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores.

Esta pesquisa sobre Função Exponencial está inserida no subprojeto de pesquisa deste mesmo grupo iniciado em 2006 sobre *Concepções acerca de Relações*.

O projeto investiga as concepções de professores e estudantes de matemática a respeito das relações algébricas. Constitui-se como um dos eixos de estudo do projeto “O que se entende por álgebra?”.

O projeto ainda propõe a discussão da questão de como são formadas as lacunas existentes entre o ensino básico e o ensino superior, proporcionando assim motivos para incluir estudos a respeito da Teoria dos Números e Álgebra, explorando suas extensões e tendências no ensino, bem como as consequências na aprendizagem, e ainda as articulações referentes às concepções matemáticas em documentos curriculares nos diversos segmentos do ensino, contemplando os conteúdos relacionados a Números, Equações e Inequações.

A relevância desse projeto no desenvolvimento da nossa pesquisa se verifica na proporção que nos dá condições de analisar e indagar quais motivos estão relacionados ao baixo desempenho em matemática entre os alunos do Ensino Fundamental e Médio da rede estadual de São Paulo constatado nas avaliações realizadas pelo governo, citadas logo abaixo. Além disso, nos faz pensar a respeito de como está a aprendizagem dos nossos alunos, bem como a necessidade de uma formação continuada para os professores.

Os dados a seguir são do Relatório Pedagógico do SARESP/2007 (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo). Esse documento contém dados, informações e análises acerca do desempenho dos alunos da rede pública do Estado de São Paulo em avaliações realizadas principalmente nas disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa.

Conforme a distribuição dos alunos do 3º ano do Ensino Médio nos níveis de desempenho em Matemática temos:

- 71% abaixo do nível básico – os alunos, neste nível, demonstram domínio insuficiente dos conteúdos, competências e habilidades desejáveis para a série escolar em que se encontram;
- 24,7% nível básico – os alunos, neste nível, demonstram desenvolvimento parcial dos conteúdos, competências e habilidades requeridos para a série em que se encontram;
- 3,7% nível adequado – os alunos, neste nível, demonstram domínio dos conteúdos, competências e habilidades desejáveis para a série escolar em que se encontram;
- 0,6% nível avançado – os alunos, neste nível, demonstram conhecimentos e domínio dos conteúdos, competências e habilidades acima dos requeridos na série escolar em que se encontram.

A seguir, os resultados apresentados em relação às habilidades avaliadas no SARESP/2007 - 3ª série do Ensino Médio referentes a Relações e Funções.

Para o nível adequado temos:

Entre 10% e 20%

- Identificam o gráfico que representa uma função quadrática

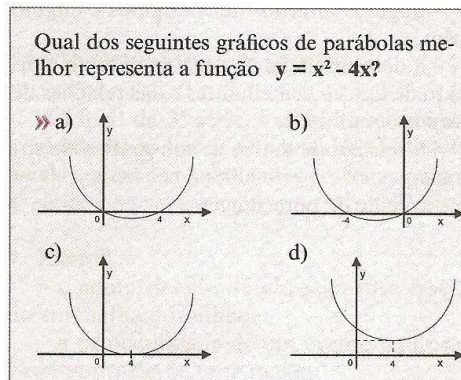


Figura 1: Questão do SARESP/2007.
Fonte: SÃO PAULO, 2008b, p.128.

Entre 30% e 40% dos alunos:

- Interpretam o gráfico de uma função para analisar as suas propriedades (crescimento, decrescimento, raízes etc.);
- Identificam o gráfico cartesiano que melhor representa um trajeto descrito em linguagem corrente;
- Identificam o gráfico que representa a evolução de montantes a serem pagos nas situações de juros simples e de juros compostos, ambos com a mesma taxa, conforme a questão seguinte.

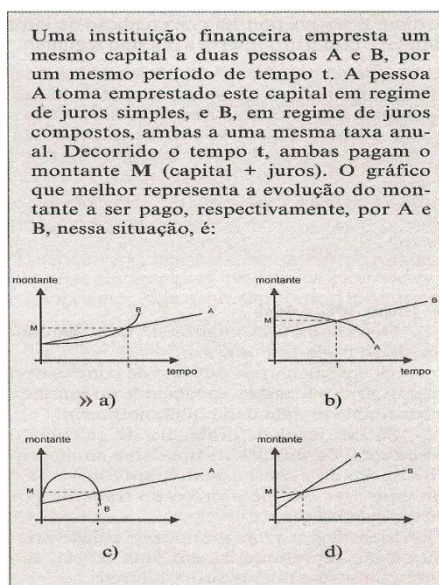


Figura 2: Questão do SARESP 2007
Fonte: SÃO PAULO, 2008b, p.130.

O gráfico a seguir, apresenta os desempenhos dos alunos da 4ª séries e da 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio comparando o SARESP/2007 com SAEB/2005.

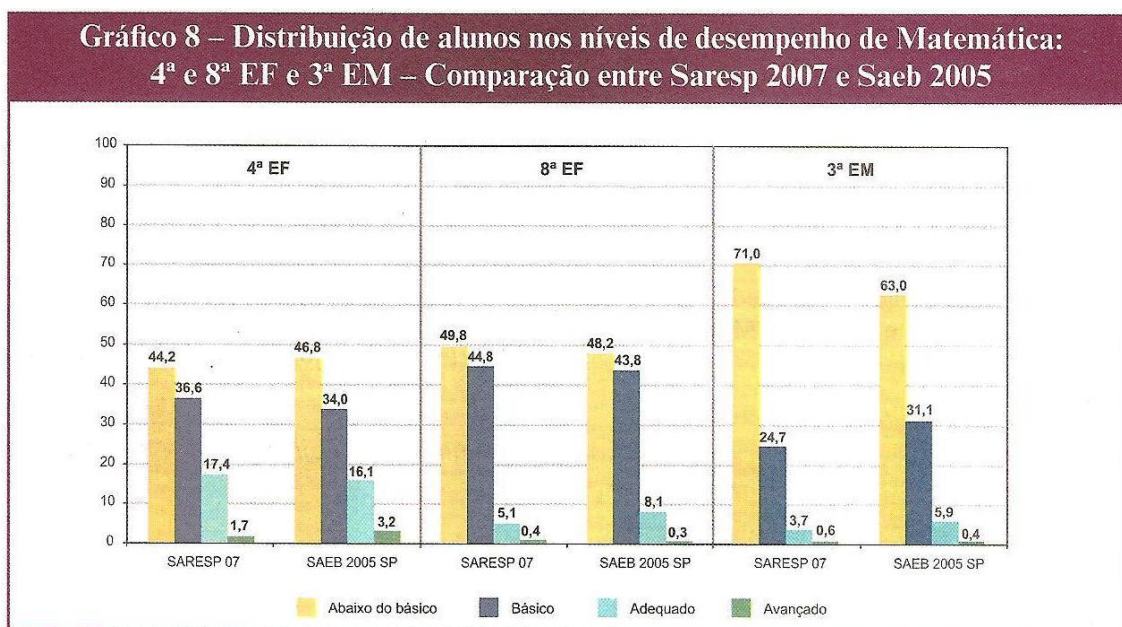


Figura 3: Comparação entre SARESP/2007 e SAEB/2005.
Fonte: SÃO PAULO, 2008b, p. 28.

Podemos verificar que o desempenho em Matemática dos alunos da 3ª série do Ensino Médio no nível adequado foi de 3,7% no SARESP/2007 e 5,9% no SAEB/2005, com uma diferença de 2,2%.

Analisando esses dados, podemos constatar que as avaliações apontam para baixo índice de rendimento em Matemática.

Considerando a nossa experiência como professora do Ensino Fundamental e Médio da rede estadual de São Paulo durante esses dezesseis anos, verificamos que são muitas as dificuldades enfrentadas pelos alunos na disciplina de Matemática, principalmente quando se trata do tema funções.

Observamos ainda que a maioria dos alunos finalizam o curso de Ensino Médio não compreendendo devidamente diversos conceitos matemáticos, entre eles o conceito de função.

Lopes (2003) também constatou que os alunos apresentam dificuldades quando o assunto está relacionado ao conceito de função, pois considera o mesmo essencial para o campo do conhecimento matemático, devido às relações estabelecidas com outros conceitos da área.

Pelho (2003) verificou que os alunos encontram dificuldades na apropriação do conceito de função, embora tenham contato com esse conceito no seu dia a dia. Descreve que a falta de compreensão do conceito de função acarreta em dificuldades que surgem quando se estuda os outros tipos de funções como a função exponencial, logarítmica e trigonométrica e ainda a aplicação desse conceito quando sua utilização é necessária em outras disciplinas.

Segundo Silva (2008), muitos estudos têm sido realizados envolvendo o conceito de função, com finalidades diferentes. Alguns voltados para o ensino superior e outros para educação básica. Há os que pesquisam o conceito e os que pesquisam a metodologia de ensino, porém não há trabalhos específicos sobre o objeto que norteia essa pesquisa.

Realizamos pesquisas com o propósito de encontrar publicações que estivessem de alguma forma relacionada com o nosso trabalho a respeito da Função Exponencial.

Procuramos por Dissertações e Teses nos seguintes sites: Capes, Biblioteca Digital da Unicamp, Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da USP e Biblioteca Digital da Universidade Federal de São Carlos.

As pesquisas encontradas e que fazem parte do levantamento bibliográfico serão descritas logo a seguir no Capítulo 2.

Decidimos buscar, no material da Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 2008, dados para a nossa pesquisa sobre Função Exponencial, sendo assim, a investigação partirá das análises de questões da Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo 2008 (Caderno do Professor 1ª série do Ensino Médio).

O objetivo é analisar se as atividades apresentadas no Caderno do Professor contribuem ou não para a compreensão do aluno a respeito do objeto Função Exponencial, se os alunos conseguem realizar ou não as mudanças de registro de representação semiótica à luz da teoria de Duval (2003). Também analisamos se está neste Caderno uma abordagem das variáveis conforme o Modelo 3UV (Três Usos da Variável) de Ursini et al (2005).

A respeito do primeiro referencial teórico, que é a teoria dos registros de representação semiótica, Duval (2003) descreve que são importantes para a atividade cognitiva do pensamento, bem como essenciais para fins de comunicação.

Segundo Damm (2008), essa teoria tem sido cada vez mais utilizada no campo da Educação Matemática quando as pesquisas concernem à aquisição de conhecimento, à organização de situações de aprendizagem.

Em Matemática, toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para seu ensino, precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. Um dos primeiros passos a ser dado é a compreensão do que seriam essas representações essenciais ao funcionamento do conhecimento e ao desenvolvimento dos conhecimentos. (DAMM, 2008, p.167).

O segundo referencial teórico adotado em nossa pesquisa é o Modelo 3UV de Ursini et al (2005).

Segundo os autores, uma boa parte das pesquisas a respeito da álgebra tem se voltado para um tema central que é o conceito de variável. As pesquisas procuram enfatizar que a variável se apresenta em diferentes formas na resolução

de problemas algébricos e que esse caráter multifacetário é a origem das dificuldades enfrentadas pelos alunos.

O Modelo 3UV destaca aspectos que caracterizam os três usos da variável utilizadas na álgebra, que são: o termo desconhecido, número genérico e relação funcional.

Faremos a apresentação desses referenciais teóricos no próximo capítulo.

CAPÍTULO 2

2.1 Levantamento bibliográfico

O conceito de função e as idéias de variável, domínio, imagem e contradomínio têm sido apontados por Lopes (2003) e Pelho (2003) como de difícil assimilação tanto para alunos do Ensino Médio como para alunos universitários.

A pesquisa de Ardenghi (2008) refere-se a uma investigação do tipo estado da arte em 46 trabalhos, em que procurou inventariar, sistematizar e avaliar produções científicas que cuja finalidade está na investigação das dificuldades apresentadas por alunos na aprendizagem do conceito função e ainda o estudo de possibilidades de superar e minimizar dificuldades por meio do ensino.

Segundo o autor, os dados coletados dos 46 trabalhos investigados contribuíram para o conhecimento de fatores que podem determinar dificuldades na aprendizagem do conceito de função. A maioria dessas pesquisas mostrou que as dificuldades dos alunos se encontram na leitura e interpretação das representações gráficas, levando vários pesquisadores sugerirem alternativas como o uso de sequências didáticas e *softwares* como uma possibilidade de superar as dificuldades apontadas.

O autor destaca que foram poucos os trabalhos que propõem verificar a explicitação dos significados para o conceito de função nas atividades produzidas.

Apesar de bem explorado o objeto matemático função, percebemos que as contribuições das pesquisas realizadas centralizam suas investigações no conceito de função, nas funções do 1º e 2º graus, sendo poucas a que se referem às funções logarítmicas ou exponenciais.

Sendo assim, sentimo-nos estimulados em contribuir com o nosso trabalho, no desejo de que possa ser um subsídio para os estudos da Função Exponencial.

Por meio de busca nos sites da Capes, Biblioteca Digital da Unicamp, Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da USP, Biblioteca Digital da Universidade Federal de São Carlos, além disso, fizemos pesquisa no banco de

dados da universidade que estudamos, a PUC-SP para realizarmos o levantamento de teses e dissertações referentes ao nosso tema de trabalho.

Destacamos a seguir aquelas que nos serviram de aporte para o desenvolvimento do nosso estudo.

Em sua pesquisa, Silva (2008) teve como objetivo principal investigar atividades introdutórias ao conceito de função, incluídas no material de Ensino Fundamental, utilizado no início do ano letivo de 2008, pertencente à Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 2008.

O autor investiga como são apresentadas as atividades introdutórias para o estudo do conceito de função no jornal² do aluno de 7^a e 8^a séries do ensino fundamental, tendo em vista as seguintes questões:

- O conceito de função está presente explícita ou implicitamente?
- Que tipo de registro de representação semiótica é apresentado no enunciado de questões envolvendo tais atividades?
- Nas questões há transformações de registro de representação semiótica do tipo tratamento? Há transformações do tipo conversão? Congruentes ou não-congruentes?³ Se há conversão, é nos dois sentidos?
- Que implicações há nas questões, quanto ao favorecimento na apreensão futura do conceito de função?

Ao longo de sua pesquisa, Silva (2008) constatou que:

² Material integrante da Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 2008.

³ Congruentes ou não-congruentes: Os congruentes, quando a transformação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência (DUVAL,2003, p.19). No capítulo 2.4 descreveremos a respeito do assunto.

- Não há a intenção da formalização do conceito de função;
- Que o conceito de função está presente de forma implícita, embora as atividades contribuam para a formação destes;
- Os conceitos envolvidos nas atividades selecionadas com o conceito de função são: variação qualitativa, interdependência entre quantidades de naturezas diferentes, regularidade na relação, noção de variável, razão e proporcionalidade direta e inversa, uma variável em função de outra e representação da relação entre variáveis na forma algébrica;
- Quanto aos registros de representação semiótica observados, podemos citar: escrita em língua natural, escrita numérica, tabela e figuras geométricas e há mais de uma possibilidade de estratégia de resolução para as atividades propostas em alguns itens das atividades;
- Também se observou que o material é livre de definições técnicas e foi elaborado numa linguagem acessível, apresentando os conceitos de forma contextualizada.

A sugestão do autor para pesquisas futuras é que se faça uma análise das avaliações oficiais realizadas com o jornal, aplicadas aos alunos das escolas do Estado de São Paulo, buscando os resultados quanto ao trabalho com o jornal ou a aplicação das atividades contidas em sua pesquisa com objetivo de verificar quais estratégias foram utilizadas pelos alunos e quais tipos de transformações de registros de representação semiótica utilizaram.

A leitura dessa dissertação foi essencial para esta pesquisa na medida em que adota como referencial teórico os Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003). Outro aspecto importante está relacionado aos conteúdos da Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008), os quais são abordados em nossa pesquisa.

Como citamos anteriormente, a pesquisa desenvolvida por Lopes (2003) permitiu verificar que os alunos chegam ao ensino médio e ao superior com muita

dificuldade em lidar com os conteúdos que têm como pré-requisito o conceito de função.

Desenvolveu e avaliou uma proposta de ensino constituída de atividades introdutórias à noção de função que envolvesse, implicitamente, conceitos e propriedades relativas a essa noção, aplicadas em uma classe de 8^a série do ensino fundamental da rede estadual de São Paulo. Utilizou a teoria de Raymond Duval sobre os diferentes registros de representação semiótica, destacando as representações gráficas e algébricas de função.

Uma das preocupações de Lopes era investigar se ao fazer uso de conversões, o tratamento do registro de representação propicia ao aluno o domínio e a aquisição dos conhecimentos necessários para o estudo de função. Constatou que suas contribuições consistiram em oferecer subsídios para orientar uma aprendizagem que considere a criatividade dos alunos, valorizando as produções individuais, contrapondo-se a uma institucionalização apressada e pronta.

Por construir uma proposta de ensino com foco em função, bem como por utilizar o mesmo referencial teórico, Lopes (2003) contribui para a reflexão e o desenvolvimento deste trabalho.

A pesquisa de Pelho (2003) teve como ponto de partida a reflexão de sua experiência em sala de aula e trabalhos que abordam o tema função. A pesquisadora verificou que os alunos encontram dificuldades na apropriação do conceito de função, mesmo que esses tenham contato no seu dia-a-dia.

Segundo a pesquisadora, a compreensão do conceito de função fica prejudicada por ser abordada de uma maneira tradicional, ou seja, sem a preocupação de evidenciar a dependência entre as variáveis.

Pelho (2003) com sua pesquisa pretendeu responder à seguinte questão: “os alunos do ensino médio conseguem compreender o conceito de função, rompendo com suas interpretações mecânicas, com a aplicação de uma sequência didática, que envolva atividades nas quais abordados aspectos funcionais entre as variáveis e que utilize um ambiente computacional como uma das ferramentas de ensino?”

O referencial adotado foi a teoria de registros de representação semiótica de Raymond Duval.

A sequência didática proposta nessa pesquisa é composta de 5 grupos de atividades, sendo 2 destes de atividades elaboradas para serem trabalhadas com o auxílio do *software* Cabri-Gèomètre II, e foi realizada numa escola particular para uma classe da 2ª série do ensino médio, para alunos que já tinham entrado em contato com o conteúdo função.

A autora constatou que a utilização do *software* Cabri-Gèomètre II foi uma ferramenta eficaz para introduzir o estudo de funções, pois possibilitou a compreensão do relacionamento das variáveis, além de viabilizar conversões entre os diversos registros de representação. De modo geral, apontou um ganho na compreensão do conceito de função, respondendo assim a questão de pesquisa.

Sugere como trabalhos futuros, estudos que envolvam a compreensão de domínio e imagem de função, noções que não foram elencadas como prioridade na pesquisa elaborada e concluída por ela.

Essa pesquisa contribuiu com o nosso trabalho por ter sido realizada com alunos do ensino médio, e por ter como objetivo verificar a compreensão dos mesmos quanto ao conceito de função, utilizando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, mesma utilizada em nossos estudos.

A pesquisa de Dominoni (2005) consistiu em investigar a utilização dos diferentes registros de representação para a aprendizagem da Função Exponencial. O objetivo da pesquisa, segundo a autora foi observar se o desenvolvimento de uma sequência didática envolvendo atividades que consideram o tratamento, a conversão e a coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica contribuem para a apreensão do objeto matemático Função Exponencial.

O estudo está fundamentado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e a metodologia empregada foi da Engenharia Didática, para isso foi elaborada uma sequência didática desenvolvida em 2 fases: a primeira com sete atividades e a segunda com seis atividades. Tinham como objetivo possibilitar o reconhecimento dos diferentes registros e as

conversões entre eles abordando o conceito de Função Exponencial e suas características. Essa sequência foi aplicada para dezesseis alunos da primeira série do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de Arapongas, Paraná.

Por meio de suas análises, verificou que os alunos apresentaram dificuldades na mudança do registro algébrico para o registro gráfico.

Segundo a autora, a pesquisa revelou que as atividades da sequência didática contribuíram para a apreensão do conceito de Função Exponencial.

Em suas considerações finais a autora descreve que os professores, de uma maneira geral, assim como os livros didáticos, apresentam para os alunos os diferentes registros de representação da Função Exponencial, destacando a identificação do registro da língua natural, registro algébrico, registro de tabela e o registro gráfico, porém sem enfatizar a conversão e a coordenação entre eles.

A autora ainda descreve que as dificuldades encontradas durante o desenvolvimento da pesquisa poderiam ser amenizadas, se tivesse incluído na 1ª fase, atividades referentes à conversão do registro da língua natural para o registro algébrico, pelo fato de os alunos apresentarem maiores dificuldades nessa conversão; e do registro gráfico para o registro algébrico, pois este tipo de conversão não fora muito enfatizado em sua pesquisa.

Essa dissertação contribui com a nossa pesquisa por utilizar os Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval como referencial teórico e o tema que é Função Exponencial.

Ressaltamos que as análises realizadas nessa pesquisa, serviram de exemplos no momento de refletirmos a respeito das análises encontradas em nosso trabalho.

A pesquisadora Catto (2000), inicialmente, tinha como tema de pesquisa investigar os problemas de ensino-aprendizagem relativos ao conteúdo de Função Exponencial, mas após um teste *a priori* aplicado a grupos de alunos do 3º ano do Ensino Médio, de uma turma do curso de Eletrônica e outra de Edificações de uma escola Técnica da cidade de São Paulo, decidiu redirecionar a investigação para a potenciação dos números racionais. Para isso analisou duas coleções de livros didáticos de matemática para o ensino fundamental, cujo

objetivo se limitou à análise do número racional, sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

A pesquisa considerou de que maneira os diversos registros do número racional foram apresentados: o registro simbólico (correspondente ao numérico e ao algébrico); o registro figural e o registro da língua natural. Também investigou como, e se eram explorados os tratamentos e as diferentes possibilidades de conversão. Constatou que esses registros foram mobilizados na introdução dos números racionais e distinguiu o modo como as coleções realizaram as conversões e tratamentos.

A autora denominou as coleções dos livros de matemática analisados como: CLD-1 referente à coleção “A conquista da Matemática” de Giovanni e Giovanni Jr.; CLD-2, esta possui dois títulos: coleção “Novo Caminho – Matemática” (1^a. a 4^a. séries) e “Matemática” (5^a. a 8^a. séries) de Imenes e Lellis.

A coleção CLD-1 para as séries iniciais (1^a. a 4^a. séries), articula o registro figural e simbólico, destacando o registro numérico na forma fracionária, ocorrendo com menos frequência as conversões entre o registro fracionário e o registro da língua natural. A partir da 5^a série percebe-se o uso do registro da língua natural e do registro algébrico. São raros os casos em que ocorre a articulação entre o registro fracionário e o registro decimal.

A coleção CLD-2 privilegia o registro figural por meio de figuras geométricas, figuras pictóricas e recortes de jornal que ilustram situações do dia-a-dia. Ocorrem as articulações entre o registro figural e o registro fracionário. Para as séries iniciais, são propostas atividades com o uso de material concreto, como exemplo o uso do material dourado na abordagem dos números decimais.

Conforme análise da pesquisadora, a CLD-1 privilegia a atividade de tratamento (cálculo) no registro numérico, priorizando os algoritmos, enquanto que a CLD-2 emprega mais frequentemente a conversão do registro figural para o registro numérico (fracionário ou decimal) e são menos frequentes os tratamentos no registro numérico, predominando a utilização do registro figural.

Conforme análises realizadas pela autora, o sentido da conversão do registro mais abordado foi do figural para o fracionário ou do fracionário para o decimal, esquematizado em sua dissertação da seguinte maneira:

$(F) \rightarrow (NF)$ ou $(F) \rightarrow (D)$ – sentido mais abordado.

Sendo (F) - registro figural, (NF) – registro fracionário e (D) – registro decimal.

O que ocorre com menor frequência é a conversão do registro fracionário para o figural ou do decimal para o registro figural.

$(NF) \rightarrow (F)$ ou $(D) \rightarrow (F)$ – menor frequência.

O que ocorre num único sentido é a conversão do registro figural para o fracionário para o da língua natural ou do figural para o de fração decimal e decimal.

$(F) \rightarrow (NF) \rightarrow (LN)$ ou $(F) \rightarrow (FD) \rightarrow (D)$ – único sentido

Sendo (LN) – registro da língua natural e (FD) – registro fração decimal.

E por último os poucos casos em que ocorre a conversão do registro fracionário para o da língua natural ou da língua natural para o fracionário.

$(NF) \rightarrow (LN)$ ou $(LN) \rightarrow (NF)$ – poucos casos.

A leitura desta pesquisa contribuiu para que pudéssemos ter conhecimento de como é realizada e enfatizada a abordagem dos diversos registros de representação de um número racional, apresentadas por meio de coleções de livros didáticos de matemática, pois em nossa pesquisa realizaremos uma atividade inicial cujo objetivo é diagnosticar os conhecimentos dos alunos a respeito do assunto de potências no qual são incluídos os números racionais, tanto na forma fracionária e decimal.

A pesquisa de Paías (2009) teve como objetivo realizar um estudo e diagnóstico a respeito da operação potenciação com alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio de uma escola pública da rede estadual de São Paulo.

Sua pesquisa está fundamentada na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999) na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003) e nos estudos sobre o erro de Cury (2007).

Seu trabalho consiste numa pesquisa descritiva, quanti-qualitativa.

Foi realizado um diagnóstico sobre os erros dos alunos referentes à operação potenciação e, por meio das análises, a autora constatou que grande parte dos alunos não domina a concepção de potenciação, em decorrência desse fato, muitos entendem a operação de potenciação como multiplicação.

Um dos fatores relevantes são os casos de potências que envolvem números inteiros negativos, em que o aluno erra por não considerar a definição e a regra de sinais, também foi percebido, em sua pesquisa, que o aluno não domina a técnica de conversão de registros, utiliza recursos nos quais apresentam a potência na representação de uma base e o expoente, com respostas variadas, por exemplo:

$$4^{-2} = - 4.4 = -16;$$

$$4^{-2} = (-4).(-4) = 16;$$

$$4^{-2} = 4.4 = 16;$$

$$4^{-2} = (-4).(-4) = 8.$$

Diante da questão do número zero como expoente, bem como o expoente 1, Paias (2009) ressalta:

O zero também é uma causa de um grande números de erros, mas entendemos antecipadamente, que a convenção matemática a que nos referimos nesta pesquisa, com potências de expoente 0 é uma das causas que levam ao erro, uma vez que o aluno na maioria das vezes, não observa de modo correto. Não podemos associar esse fato à sala de aula ou ao professor, pois para isso seria importante um esclarecimento maior. Para o expoente 1, temos a mesma problemática em relação a convenção matemática. O aluno por não conseguir justificar recorre na maior parte à operação multiplicação, efetuando base e expoente. (p.201).

Como exemplo da situação mencionada na citação, o aluno efetua a operação de multiplicação considerando a base e o expoente da potência como $(-1)^{15} = -15$.

Para as propriedades de potenciação, observou-se que a grande parte dos alunos confunde as operações que devem ser efetuadas em relação ao expoente das potências.

Para a autora, os aspectos considerados muito relevantes nos casos de erros são: os de expoentes inteiros negativos e fracionários, pois o total de erros, para ambos os casos, foi de 100%. Sugere, assim, como trabalho futuro o estudo relacionado ao assunto.

A pesquisa de Paias (2009) colabora para as análises dos resultados da atividade inicial do nosso trabalho que se reporta à potenciação.

Por esse motivo a utilizaremos em nossas análises, pois percebemos semelhanças quanto algumas questões.

O trabalho de Drabeski e Silva (2007) buscou investigar o papel metodológico do uso dos jogos na questão do ensino-aprendizagem da matemática, especificamente o uso do jogo da Torre de Hanói no ensino da Função Exponencial.

Foi realizada uma análise bibliografia do tema de funções e o papel metodológico do jogo no processo, destacando as opiniões de vários autores.

A pesquisa foi aplicada em duas escolas com realidades diferentes; uma da cidade e outra do interior do Paraná, observando o interesse e a participação dos alunos em cada uma delas.

Segundo os autores, o uso dos jogos em sala de aula, pode ser uma das alternativas para despertar o interesse dos alunos no ensino da Matemática.

Constataram que os alunos da escola do interior, sendo a maioria filhos de agricultores e residentes nas comunidades próximas à escolas, demonstraram maior interesse pelo jogo, de modo que o confeccionaram, ao contrário dos alunos da cidade que não o construíram, optando por realizá-lo no computador.

Foram percebidas algumas dificuldades por parte dos alunos em aplicar conceitos trabalhados anteriormente, como foi o caso das potências de base 2.

Quanto à utilização do jogo a Torre de Hanói, percebeu uma evolução, por parte dos alunos, de um conceito mais simples para um conceito mais trabalhado, em que houve uma compreensão das relações matemáticas, como exemplo, a descoberta da lei de associação que determina a relação entre o número de

discos utilizados no jogo e o número de seus movimentos, lei que caracteriza uma função exponencial e a comprovação por meio da indução finita, de que esta relação acontece com qualquer número de discos.

Como sugestão, indica o trabalho do conceito de Função a partir do jogo Torre de Hanói, e sugere que essa estratégia seja empregada no desenvolvimento de outros conceitos matemáticos como Progressão Aritmética e Progressão Geométrica.

O artigo de Bonotto et al (2009) apresenta algumas discussões, análises e reflexões realizadas a respeito do Objeto de Aprendizagem “Potencializando seu conhecimento” cuja abordagem é o estudo da Função Exponencial por meio de situações reais utilizando a Matemática Financeira.

Este trabalho é um recorte do projeto de pesquisa desenvolvido no Departamento de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e Missões (URI)-Campus Santiago/RS, que tem por objetivo analisar os Objetos de Aprendizagem do projeto desenvolvido pela Rede Internacional Virtual de Educação (RIVED-Brasil) considerando o Módulo Educacional de Funções, tendo como referência teórica a dialética Ferramenta-Objeto de Règine Douady.

As análises e reflexões realizadas do Objeto de Aprendizagem “Potencializando seu conhecimento” que aborda o estudo da função exponencial utiliza uma abordagem qualitativa na forma de estudo de caso, em que os sujeitos da pesquisa foram alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de Santiago/RS. As atividades foram desenvolvidas no laboratório de informática da escola e pertencem a uma sequência de ensino, desenvolvida por acadêmicos do Curso de Matemática da URI – Santiago, na disciplina de Estágio Curricular em Ensino de Matemática.

Segundo as autoras, as atividades propiciaram a utilização das diferentes formas de representação da função exponencial: registros na língua natural, tabela, gráfico e algébrico, possibilitando a compreensão do conceito matemático. Porém o desenvolvimento das atividades do Objeto de Aprendizagem por si só, não garante a aquisição dos conceitos referente ao objeto Função Exponencial. Ficou explícito que os alunos necessitam registrar observações, bem como

sentem a necessidade de intervenção do professor gerenciar o ambiente de discussão e análises das conclusões para que as mesmas sejam validadas ou reformuladas.

Dessa maneira, o Objeto Aprendizagem é considerado um recurso que compreende a criação de espaços de análise, formulação de hipóteses e generalização por meio da exploração de situações personalizadas de ensino, mas para isso deverá estar alinhado ao planejamento do professor e que desempenhe um papel incentivador/mediador no decorrer do processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

A pesquisa de Angiolin (2009) teve por objetivo investigar como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o plano de ensino, no caso particular de funções exponenciais e ainda a análise da atuação dos professores de Matemática, referente às atividades de planejamento e desenvolvimento de ensino, tendo como fundamentação teórica os trabalhos de Martin Simon (1995), pesquisador da *Pensylvania State University* sobre trajetórias hipotéticas de aprendizagem (THA).

Antes da construção da THA, a pesquisadora optou por verificar a abordagem da Função Exponencial em três livros didáticos do Ensino Médio e adotados pelos professores participantes do projeto de pesquisa da qual é participante. Além dos livros didáticos, foram consultadas outras fontes de pesquisas como a Internet. O estudo sobre a abordagem da Função Exponencial possibilitou a construção de uma THA com diferentes situações-problema do tema, visando favorecer a apreensão do conceito.

O desenvolvimento da pesquisa contou com 2 professores e 77 alunos da 1ª série do Ensino Médio.

Angiolin (2009) relata que durante as atividades foram observadas dificuldades, apresentadas pelos alunos participantes, referente às atividades de potências de expoente negativo, análise do comportamento de um gráfico (crescimento e decrescimento) e a translação de gráficos construídos com auxílio de um *software* matemático.

Constatou que o processo é complexo quando se trata de elaborar propostas que tenham a finalidade de fazer com que alunos construam seus próprios conhecimentos a respeito de um determinado assunto.

A pesquisadora ainda ressalta que:

Embora possa parecer muito óbvio que a **aprendizagem** dos alunos depende em grande parte do **ensino** que seu professor propõe e que, com as contribuições das teorias construtivistas, temos possibilidades de melhorar as aprendizagens dos alunos, ainda circulam ideias equivocadas como, por exemplo, a de que “os alunos constroem seus conhecimentos sozinhos desde que tenham interesse em aprender um dado assunto”. (ANGIOLIN,2009,p.126).

Considera ainda que a noção da THA formulada por Martin Simon é interessante para o campo da Matemática pelo fato de a criação de idéias para atividades de aprendizagem depender da hipótese do professor, a respeito do desenvolvimento do pensamento e aprendizagem dos alunos.

Dentre as considerações finais constatou que, embora atividades envolvendo resolução de problemas, investigação, contextos interdisciplinares, o uso de *softwares* e aplicação de conceitos e procedimentos matemáticos a situações do dia a dia e em outras áreas do conhecimento possam favorecer a compreensão do tema de estudo, existem dificuldades relacionadas ao trabalho dessa forma em sala de aula, pelo motivo que predomina a idéia de que os alunos só aprendem mediante exposições/explicações dos professores.

Entendemos que os resultados e análises obtidos das pesquisas relacionadas neste capítulo contribuem para o alicerce de nossas investigações sobre o objeto matemático Função Exponencial.

2.2 Conceito de função

Neste tópico é apresentada de forma sucinta o conceito de função, pois o mesmo está diretamente ligado ao nosso tema de pesquisa que é o objeto matemático Função Exponencial.

A seguir discorreremos algumas considerações e contribuições de famosos matemáticos a respeito da evolução desse conceito.

As grandes idéias matemáticas se desenvolveram a partir da necessidade do homem conhecer e compreender os movimentos do Universo, entender a vida, a matéria, a energia, as substâncias que geram outras substâncias, até mesmo a vida que gera outra vida.

Dessa maneira, acreditamos que o pensamento matemático contribui para o processo de análise de diversos fenômenos que ocorrem na natureza, sendo que em muitos deles são encontradas as funções que fazem parte do nosso cotidiano sem muitas vezes termos consciência deste fato.

Eves (2008) descreve que o conceito de função, como as noções de espaço e geometria, passou por evoluções relevantes, pois esse processo é percebido quando se faz um panorama desde os cursos mais elementares da escola secundária até os mais avançados e sofisticados em nível de pós-graduação.

A história do termo função apresenta um exemplo interessante da intenção dos matemáticos de generalizar e ampliar os conceitos.

Newton (1642-1727) se aproxima muito do conceito atual por meio da teoria de Cálculo Infinitesimal.

Newton denomina o fluente, que tem o papel de variável independente, de *quantidade correlata (quantias correlata)*; ele denomina de *ligada (relata)* a quantidade dependente. Dessa maneira, as noções básicas são introduzidas pela cinemática; na realidade, o método das *fluxões* é desenvolvido para os fluentes, expressos analiticamente, seja sob uma forma finita, seja por meio de somas de séries infinitas. Newton define os *fluentes* como as diversas magnitudes, funções de um “tempo”, que não é outra coisa que um parâmetro universal; e as *fluxões* como as derivadas em relação ao tempo. (ROSSINI, 2006, p.39).

Encontramos ainda em Eves (2008) que a palavra função, parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como, por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva. Leibniz empregava a palavra função com um significado puramente geométrico.

A palavra função surge em 1718 com um artigo publicado por Johann Bernoulli com uma definição de certa variável como uma quantidade que é composta de qualquer forma, ou seja, considera uma função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes.

Logo depois, Euler apresentou-a com alguns retoques considerando-a como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes.

Segundo Eves (2008), essa última idéia correspondente ao conceito de função é o que encontramos com mais intensidade nos cursos elementares de matemática, porém a evolução do conceito de função continua com Joseph Fourier (1768-1830) por meio de suas pesquisas sobre séries trigonométricas e Lejeune Dirichlet (1805-1859) numa tentativa de uma definição mais ampla, chegou à seguinte formulação:

Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x , corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y , então se diz que y é uma *função* (unívoca) de x . A variável x , à qual se atribuem valores à vontade, é chamada *variável independente* e a variável y , cujos valores dependem dos valores de x , é chamada *variável dependente*. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o *campo de definição* da função e os valores assumidos por y constituem o *campo de valores* da função. (EVES, 2008, p.661).

Eves (2008), ainda ressalta como o conceito de função foi ampliado com a teoria dos conjuntos de maneira a abranger relações entre dois conjuntos de elementos quaisquer.

Assim, na teoria dos conjuntos, uma função f é, por definição, um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, pares esse sujeitos à condição seguinte: se $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$ e $a_1 = a_2$, então $b_1 = b_2$. O conjunto A dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se *domínio* da função e o conjunto B de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz *imagem* da função. Assim, uma função é simplesmente um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Uma função f se diz *injetora* se, de $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$ e $b_1 = b_2$, decorre $a_1 = a_2$. Se f é uma função e $(a, b) \in f$, escreve-se $b = f(a)$. (EVES, 2008, p.661).

Essa definição para a função por meio da teoria dos conjuntos se aproxima das definições encontradas em alguns livros didáticos:

- Matemática: volume único - Facchini (1996);
- Matemática: uma nova abordagem, 1ª série – Ensino Médio - Giovanni e Bonjorno (2002);

- Matemática: ciência e aplicações, 1ª série - Ensino Médio - lezzi et al (2004) pertencente ao PNLEM/2006 (Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio).

Dos volumes que consultamos apenas um apresenta o conteúdo de função sem a abordagem da teoria dos conjuntos: Matemática – Ensino Médio, 1ª série, Smole e Diniz (2003) pertencente ao PNLEM/2006.

A seguir a definição de função encontrada no livro didático para o Ensino Médio de lezzi et al (2004) adotado pela escola em que trabalho e utilizado desde de 2007.

Em Matemática, se x e y são duas variáveis tais que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor para y , dizemos que y é uma **função** de x . O conjunto D de valores que podem ser atribuídos a x é chamado *domínio* da função. A variável x é chamada *variável independente*. O valor de y , correspondente a determinado valor atribuído a x , é chamado *imagem* de x pela função e é representado por $f(x)$. A variável y é chamada *variável dependente*, porque y assume valores que dependem dos correspondentes valores de x . O conjunto Im formado pelos valores que y assume, em correspondência aos valores de x , é chamado *conjunto imagem* da função. (IEZZI et al, 2004, p.33).

Esquemáticamente, temos:

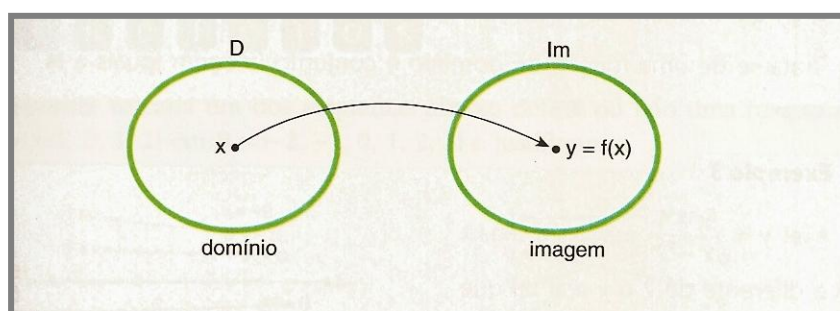


Figura 4: Ilustração de uma função utilizando o Diagrama de Venn.
Fonte: IEZZI et al, 2004, p.33

Observamos que a abordagem da definição de função encontrada no livro didático está utilizando a teoria dos conjuntos.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio – BRASIL (2002), para a análise dos diferentes tipos de funções, todo o estudo relativo a conjuntos e relações é desnecessário, podendo ser iniciado diretamente

pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente.

Encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio – BRASIL (1999), que o ensino de função deve permitir a exploração do caráter integrador que ele possui. O aluno deve perceber que as progressões aritméticas e geométricas são casos particulares das funções, as propriedades das retas e parábolas estudadas em geometria analítica são propriedades dos gráficos correspondentes e que o estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos nos estudos das funções polinomiais.

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 1999, pp.255-256).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio – BRASIL (2002), o ensino de função está situado no eixo temático Álgebra que aborda os números e funções. Esse eixo destaca a importância do estudo das funções, pois seu conteúdo permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como linguagem das ciências necessárias para uma articulação dentro e fora do contexto matemático com situações problemas vivenciadas no seu dia a dia.

2.2.1 Função Exponencial

Antes de descrevermos sobre a Função Exponencial, queremos apresentar o livro de Maor (2006). Trata-se de um livro de literatura matemática muito interessante, que faz parte do acervo de livros encontrados nas bibliotecas de escolas do Estado de São Paulo e muito utilizado, como paradidático, em várias instituições de ensino superior.

Um dos objetivos do autor é contar a história do número e de maneira acessível a leitores que tenham pouca familiaridade com a matemática.

Nesta história informal, retrata os curiosos personagens e matemáticos envolvidos com a criação do número e , desde Arquimedes até David Hilbert, com isso inclui alguns esboços biográficos de personagens que desempenharam papéis na história desse número, além de mostrar grande variedade de fenômenos da física à biologia, da arte à música, relacionados com a função exponencial, fazendo dela um objeto de interesse em campos muito além da matemática.

Maor (2006) relata que na época do desenvolvimento do cálculo, Newton e Leibniz aplicaram em seus estudos primeiramente as equações polinomiais chamadas de curvas algébricas. Essas equações aparecem em muitas aplicações, como é o caso da parábola $y = x^2$ e com isso facilitam os testes dos novos métodos do cálculo.

Mas existem as curvas que não fazem parte dessa categoria, as chamadas curvas transcendentais. Esse termo foi criado por Leibniz para caracterizar as equações não inseridas no estudo da álgebra elementar, a principal entre elas chamada de curva exponencial.

Podemos expressar uma função exponencial da seguinte maneira: Seja a base b , qualquer número positivo diferente de 1 e seu expoente x , sendo x qualquer número real, temos que $y = b^x$.

Se x é um número racional m/n , podemos escrever $\sqrt[n]{b^m}$ ou $(\sqrt[n]{b})^m$, por exemplo, $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{729} = 9$ ou $27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$.

Se x é um número irracional, aproxima-se o valor de x por meio de uma sequência de números racionais, em que o limite se aproxima de x .

Por exemplo, $5^{\sqrt{2}}$, com uma calculadora científica podemos encontrar os valores aproximados do desejado $5^{\sqrt{2}} \cong 9,739$.

Temos a seguir o gráfico dessa função:

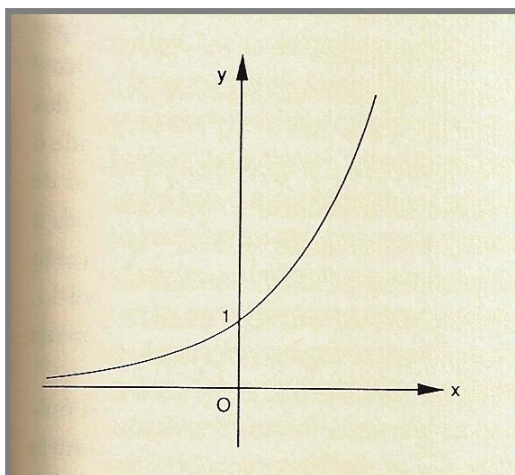


Figura 5: O gráfico de uma função exponencial crescente.
Fonte: MAOR, 2006, p.133

É possível verificar que, conforme x aumenta, y também aumenta, e vice versa, quando x diminuiu, y também diminuiu de forma lenta, se aproximando cada vez mais de zero, mais sem chegar nele, a função apresenta uma assíntota ao eixo dos x .

É admirável a taxa de crescimento de uma função exponencial. Certa lenda sobre a invenção do xadrez descreve essa característica.

A lenda⁴ conta que um rei solicitou aos seus súditos que lhe inventassem um novo jogo, e quem inventasse o melhor jogo teria direito a realizar um desejo.

Um dos seus súditos inventou então o jogo de xadrez.

O rei então chamou o inventor do jogo e chegando a presença do rei fora indagado que recompensa desejava por sua invenção, ele humildemente pediu que as sessenta e quatro casas do tabuleiro fossem preenchidas da seguinte maneira: na primeira casa um grão de trigo, na segunda dois grãos, na terceira quatro grãos no terceiro e assim sucessivamente, seriam colocados sempre o dobro de grãos que havia na casa anterior até completar as sessenta e quatro casas do tabuleiro. O rei considerou o pedido fácil de ser atendido e ordenou que providenciassem o pagamento. Tal foi sua surpresa, logo ficou claro que nem mesmo todos os grãos de trigo do reino seriam suficientes para atender ao pedido.

⁴ Adaptado do site: <http://www.coladaweb.com/matematica/funcao>. Acesso em: 19 outubro 2008.

O número de grãos calculados para comporem a última casa 2^{63} , foi de 9 223 372 036 854 775 808 aos quais seriam somados os grãos de todas as outras casas.

Segundo Maor (2006), se colocássemos tantos grãos em uma fileira contínua, a linha teria o comprimento de dois anos-luz, cerca de metade da distância até a estrela Alfa do Centauro, nossa vizinha mais próxima além do sistema solar.

Esta é apenas uma ilustração do crescimento da função exponencial.

Os gráficos da função exponencial da próxima figura são modelos de todos os gráficos exponenciais, independentemente de suas bases.

De modo geral, podemos representar graficamente uma função exponencial das seguintes maneiras:

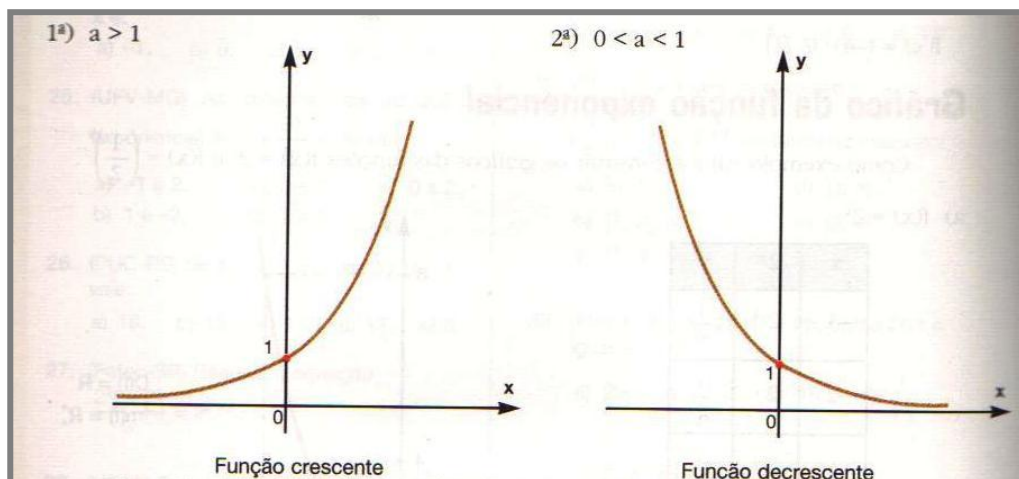


Figura 6: Gráficos da função exponencial crescente e decrescente.
Fonte: SANTOS et al, 1998, p.142.

A simplicidade deste gráfico é extraordinária, já que ele não apresenta características mais comuns dos gráficos de funções algébricas tais como *interceptações de x* (pontos onde o gráfico cruza o eixo dos x), pontos de máximo e de mínimo, e pontos de inflexão. Além disso, o gráfico não tem assíntotas *verticais* – valores de x perto dos quais a função aumenta ou diminui sem limites. De fato, tão simples é o gráfico exponencial que quase poderíamos desconsiderá-lo, como pouco interessante, se não fosse um detalhe que o torna único; sua taxa de variação. (MAOR, 2006, p.134).

Além dessas características peculiares, a Função Exponencial desempenha um papel importante na Matemática e nas ciências como: Física, Química, Biologia, Economia e outras.

2.2.2 O número e

Muitas são as preocupações humanas, uma delas é a questão financeira. A busca e o desejo de acumular riquezas é um dos fatores que impulsionam os homens de todas as épocas. O que queremos salientar é que o número e parece ter nascido num contexto financeiro e para esclarecermos, daremos um exemplo extraído de Maor (2006).

As origens de e não são tão claras, elas parecem recuar ao século XVI, quando se percebeu que a expressão $(1+1/n)^n$, que aparecia na fórmula dos juros compostos, tendia a um certo limite – cerca de 2,71828 – à medida que n aumenta. Assim e tornou-se o primeiro número a ser definido por um processo de limite, $e = \lim (1+1/n)^n$ conforme $n \rightarrow \infty$. Durante algum tempo o novo número foi considerado uma curiosidade; [...]. O passo crucial foi dado com a invenção do cálculo, quando se percebeu que o inverso da função logarítmica – que depois seria denotado como e^x – era igual à sua própria derivada. (MAOR, 2006, p.241).

Numa comunidade bancária podemos encontrar todos os tipos de composição de juros, o período de conversão pode ser: anual, semestral, trimestral, semanal e mesmo diário.

Suponha que a composição é feita n vezes ao ano, sendo (n) o período de conversão. Para cada período de conversão o banco usa uma taxa de juros anual (r) dividida por n , que é r/n . E como em (t) anos existem (nt) períodos de conversão, um valor aplicado (P) , após t anos renderá a soma $S = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

Sendo:

- n = período de conversão
- r = taxa de juros

Para cada período de conversão a taxa de juros anual é dividida por

n , que é $\frac{r}{n}$.

- t = anos

- nt = períodos de conversão multiplicado pelo tempo
- S = soma
- P = o valor aplicado

Temos que $S = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

Para simplificar suponha que $P = 1$, $t = 1$ e $r = 1$, a equação

$$S = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \text{ pode ser expressa como } S = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Observe o comportamento desta fórmula para valores crescentes de n na tabela da figura seguinte.

n	$(1 + 1/n)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
50	2,69159
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827
1.000.000	2,71828
10.000.000	2,71828

Figura 7: Tabela do comportamento da expressão $(1+1/n)^n$.
Fonte: MAOR, 2006, p.45.

Parece que qualquer aumento posterior em n quase não afetará o resultado e as mudanças acontecerão em dígitos cada vez menos significativos.

Surgem perguntas do tipo: será que esse padrão continua? É possível que os valores de $(1+1/n)^n$ estacionem em algum ponto em torno de 2,71828?

Essas perguntas são respondidas com cuidadosa análise matemática, que pode ser consultadas em Maor (2006) no Apêndice 2.

Entretanto, não se sabe quem primeiro notou o comportamento especial da expressão $(1+1/n)^n$ à medida que n tende ao infinito, portanto a data exata do nascimento do número que mais tarde seria denotado por e permanece obscura.

Sua origem parece ser no início do século XVII, na época em que Napier inventou os logaritmos, pois aquele período fora marcado por um enorme

crescimento do comércio internacional e as transações financeiras que se proliferaram rapidamente.

Ainda segundo Maor (2006), nessa época, foi dada uma atenção especial à lei dos juros compostos, e é possível que o número e tenha sido reconhecido pela primeira vez nesse contexto, mas ressalta que questões não relacionadas aos juros compostos também levaram ao mesmo número na mesma época.

Em continuação, daremos exemplos de alguns fenômenos que são descritos a partir de curvas exponenciais também apresentados por Maor (2006).

- Uma taxa de decaimento de uma substância radioativa pode ser descrita como $m = m_0 \cdot e^{-at}$, em que m_0 é a massa inicial da substância quando $t = 0$. A partir desta solução vemos que m gradualmente se aproximará de 0 (zero), mas nunca o alcançará, pois a substância nunca se desintegrará completamente, isso explica o motivo do perigo de um material nuclear ter sido descartado como lixo e ainda depois de muito tempo ser perigoso.
- Quando um objeto quente, com uma temperatura T_0 , é colocado em um ambiente de temperatura T_1 (que presume permanecer constante) o objeto esfria a uma taxa proporcional à diferença $T - T_1$, isto é conhecido como a lei do resfriamento de Newton. A solução é $T = T_1 + (T_0 - T_1) \cdot e^{-at}$, indicando que T gradualmente se aproxima de T_1 , mas nunca o alcança.
- Quando as ondas sonoras viajam através do ar (ou qualquer outro meio), a solução $I = I_0 \cdot e^{-ax}$, mostra que sua intensidade diminui exponencialmente com a distância. Uma lei semelhante, conhecida como lei de Lambert, é verdadeira para a absorção da luz num meio transparente.
- Se um capital for aplicado continuamente a uma taxa anual de juros r , o saldo, depois de t anos, será dado pela fórmula

$C = P.e^{rt}$, em que P será o principal. O saldo nesse caso crescerá exponencialmente com o tempo.

- O crescimento de uma população segue uma lei aproximadamente exponencial.

Esses são alguns exemplos de fenômenos que ocorrem a partir de curvas exponenciais.

O impulso para calcular um número cada vez maior de dígitos para o número π acabou se tornando uma corrida ao longo dos anos, mas o mesmo não ocorreu com o número e .

Maor (2006) no Apêndice 8, mostra o número e apenas com cem casas decimais.

Em pesquisa pela Internet⁵ encontramos os primeiros duzentos dígitos decimais do número e .

$e \approx 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093$
 $69995\ 95749\ 66967\ 62772\ 40766\ 30353\ 54759\ 45713\ 82178$
 $52516\ 64274\ 27466\ 39193\ 20030\ 59921\ 81741\ 35966\ 29043$
 $57290\ 03342\ 95260\ 59563\ 07381\ 32328\ 62794\ 34907\ 63233$
 $82988\ 07531\ 95251\ 01901\dots$

Outra curiosidade é o número e na fórmula da catenária – a corrente suspensa (do latim *catena* que significa corrente), cuja equação na notação moderna, é $y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$.

Na época do seu descobrimento foi anunciada com grande triunfo do Cálculo diferencial.

⁵ Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Número_de_Euler. Acesso em: 17 novembro 2009.

A catenária descreve uma família de curvas planas semelhantes às que seriam geradas por uma corda suspensa pelas suas extremidades e sujeitas à ação da gravidade.

A equação da forma da catenária é dada pela função hiperbólica e a sua equivalente exponencial.

Leibniz fez questão de que todos soubessem que fora o seu cálculo, que resolvera o mistério e sugeriu que a catenária poderia ser usada como um engenho para o cálculo dos logaritmos, como uma espécie de tabela de logaritmos analógica.

A construção da catenária por Leibniz em 1690.

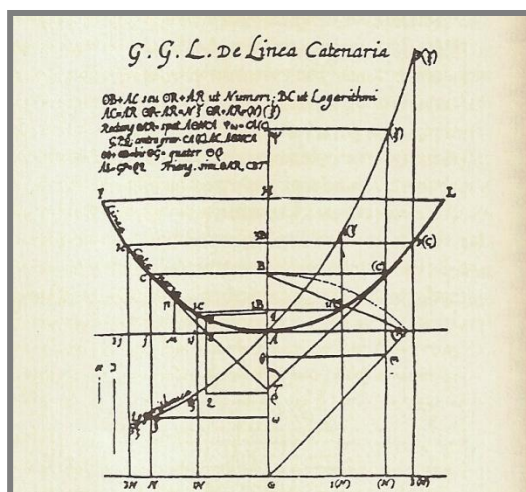


Figura 8: A catenária construída por Leibniz (1690).
Fonte: MAOR, 2006,p.186.

Segundo Maor (2006), naquela época o número e ainda não tinha um símbolo especial e a função exponencial não era considerada função independente e sim um inverso da função logarítmica.

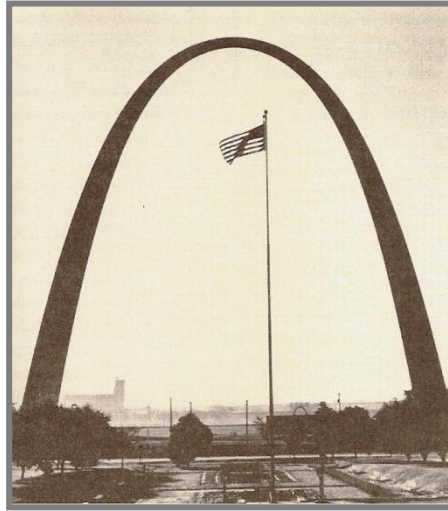


Figura 9: O Arco do Portal em St. Louis, Missouri.
Fonte: MAOR,2006, p.187.

Imortalizada em um dos monumentos arquitetônicos mais imponentes do mundo, o Arco do Portal em St. Louis, Missouri, projetado pelo arquiteto Eero Saarinen e terminado em 1965, tem a forma exata de uma catenária invertida, sua altura atinge 192 metros.

Segundo Maor (2006), esse tipo de ostentação parece ser excessivo hoje em dia, mas que nos anos finais do século XVII, problemas como esse representavam o maior desafio aos matemáticos e suas soluções eram justamente consideradas com grande orgulho.

Atualmente, esses problemas são exercícios de rotina nos cursos de cálculo avançado.

Os exemplos descritos neste capítulo servem para apontar o aparecimento do número e em diversos fenômenos encontrados na Física, Química e Matemática Financeira.

Consideramos pertinente inserir algumas curiosidades a respeito do número e , pois muitos somente o conhecem como o “número e de Euler” $e \approx 2,718$ usado numa variedade de fórmulas matemáticas.

Entre os exemplos da aparição do número e , citamos o problema da catenária que foi um dos problemas que a comunidade matemática se ocupou em resolver, anos seguintes à invenção do cálculo e por considerarmos um exemplo curioso.

Não aprofundaremos a respeito do assunto, pois trata apenas de uma ilustração.

A seguir, faremos uma breve descrição do livro adotado pela escola estadual Jacob Salvador Zveibil na qual lecionamos.

2.3 Breve descrição do livro adotado pela escola

O livro adotado pela escola que lecionamos, pertence à Coleção Matemática: Ciência e Aplicações, para o Ensino Médio, de Gelson Iezzi et al (2004) , faz parte do PNLEM/2006 e desde 2007, utilizado, atualmente, pelos professores de matemática da escola estadual Jacob Salvador Zveibil, situada na região noroeste da capital de São Paulo.

É uma obra dividida em três volumes, em que os conteúdos de Matemática são apresentados levando em consideração as propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio.

O volume destacado nessa apresentação será o volume 1, por incluir o estudo da função exponencial, objeto da nossa pesquisa. Contém treze capítulos que serão descritos a seguir de forma sintetizada, apresentado seus principais conteúdos e características.

No desenvolvimento da parte teórica, os autores optaram por realizar uma introdução intuitiva dos assuntos, com algumas situações apresentadas no dia-a-dia. Para a apresentação dos conceitos buscaram uma linguagem simples e precisa, com exercícios, problemas e testes, alguns deles retirados de exames vestibulares e das provas do Enem (Exame Nacional do Ensino Médio).

No primeiro capítulo são apresentados os conjuntos numéricos, desde os naturais até os reais, sem explorar a teoria dos conjuntos.

Encontramos as operações entre conjuntos principalmente a união e intersecção, usadas na resolução de problemas envolvendo intervalos reais.

O principal objeto de estudo do livro é o estudo das funções, no qual são trabalhadas do segundo ao oitavo capítulo.

No segundo capítulo, a princípio o conceito de função é inserido a partir da relação de dependência entre duas grandezas, em seguida aponta para a definição tradicional de função sustentada no produto cartesiano e na relação entre dois conjuntos.

Depois são abordados aspectos gerais das funções como: notação, domínio, imagem, leitura e construção de gráficos, e ainda a formalização de conceitos como: crescimento e decrescimento, valor e ponto de máximo/mínimo, simetrias, sinal, etc.

O terceiro capítulo inicia-se com introdução e definição da função afim e exemplos de gráficos. Na sequência são estudados os coeficientes da função afim, zero e equação do 1º grau, crescimento e decrescimento, inequações, todos esses assuntos com exemplos e exercícios. Ao final do capítulo são apresentados testes de vestibulares e desafios.

No quarto capítulo é estudada a função quadrática, apresentada por meio de uma introdução, definição e exemplos de gráficos. São estudados os zeros e equação do 2º grau, coordenadas do vértice da parábola, imagem, construção da parábola, sinal da parábola e inequações, todos esses com exemplos e exercícios. O capítulo é finalizado com testes de vestibulares e desafios.

No quinto capítulo é estudada a função modular, inicialmente apresentada como uma função definida por mais de uma sentença. Na sequência são apresentados: a introdução e definição do módulo de um número, gráfico da função modular, imagem, função composta, funções compostas com a modular, equações e inequações modulares, todos com exemplos e exercícios, e o capítulo é finalizado com testes de vestibulares e desafios.

O sexto capítulo será apresentado no item 2.3.1, pois se trata do assunto da nossa pesquisa, a Função Exponencial.

O sétimo capítulo apresenta os logaritmos por meio de uma introdução, definição e consequências, em seguida, aborda as propriedades operatórias, a utilização das propriedades e a mudança de base, todos os assuntos com exemplos e exercícios e ao final do capítulo testes de vestibulares e desafios.

O oitavo capítulo apresenta a função logarítmica. São estudadas as funções sobrejetoras, injetoras, bijetoras ou inversíveis, função inversa, equações exponenciais, equações logarítmicas, inequações exponenciais e inequações logarítmicas, da mesma forma que os capítulos anteriores, cada assunto traz exemplos e exercícios, e ao final do capítulo, testes de vestibulares e desafios.

De maneira geral, os autores procuraram utilizar na introdução de cada uma dessas funções, contextualizações e conexões com outras áreas do conhecimento e que guardam relação com temas do nosso dia-a-dia.

Podemos perceber que o desenvolvimento dos capítulos segue em geral uma estrutura tradicional com as definições, gráficos, propriedades, equações e inequações, porém há diversos exercícios em que as aplicações buscam conexões com outras disciplinas, tais como: Física, Geografia e Biologia.

No capítulo nove são estudadas as seqüências numéricas, em especial, as progressões aritméticas e geométricas, com suas leis de formação, propriedades, termo geral, soma dos termos, etc.

O capítulo dez aborda Matemática Financeira. Os autores justificam a inclusão desse capítulo pelas inúmeras possibilidades de relações com outros tópicos já estudados, como por exemplo, as progressões aritméticas com juros simples, as progressões geométricas com juros compostos, a função exponencial e cálculo de logaritmos em problemas de juros compostos, com uso da calculadora.

Os três últimos capítulos são destinados ao início da Trigonometria, com o estudo da semelhança de triângulos, razões trigonométricas no triângulo retângulo, e apresentação dos teoremas dos senos e cossenos em triângulos quaisquer.

A seguir faremos uma breve análise do capítulo referente à função exponencial.

2.3.1 Análise do capítulo sobre a Função Exponencial

O capítulo seis é reservado ao estudo da função exponencial e inicia-se com uma revisão de potências esclarecendo as definições e propriedades das potências de expoente natural, inteiro negativo e racional.

Para cada situação encontramos exemplos e um total de quarenta e um exercícios para serem aplicadas as propriedades, sendo a maioria com o enunciado - calcule ou efetue.

A partir daí, insere-se o assunto da função exponencial, dado um exemplo de uma genealogia de um casal, contando com seus ascendentes até a quinta

geração. Desse exemplo é possível estabelecer uma lei que expressa f em função de x , que é $f(x) = 2^x$, que é um caso particular de função exponencial, partindo para a definição literal da função.

Em seguida são dados quatro exemplos de construção de gráficos a partir de tabelas em que se pretende mostrar algumas propriedades.

Os gráficos construídos são da função $f(x) = 2^x$; $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $f(x) = e^x$.

Neste exemplo o gráfico da função $f(x) = 2^x$.

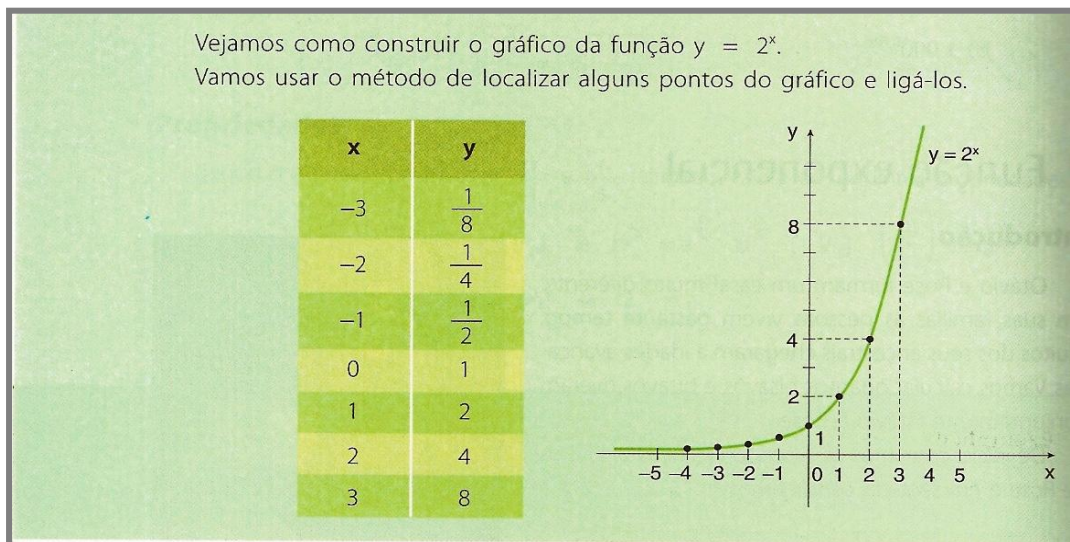


Figura 10: Exemplo: gráfico da função exponencial $y=2^x$.
Fonte: IEZZI et al, 2004, p.178.

Neste exemplo temos o gráfico da função exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

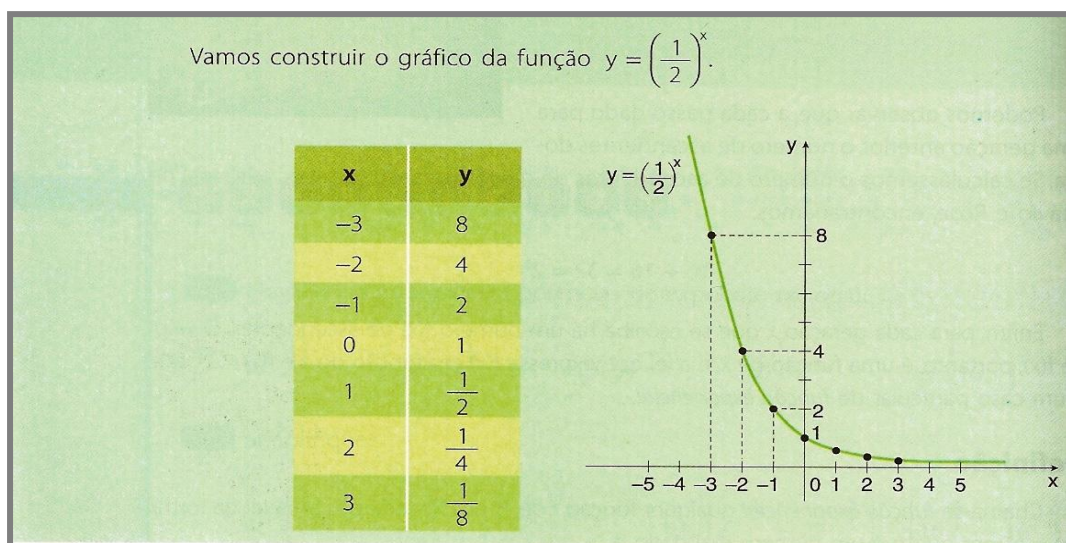


Figura 11: Exemplo: gráfico da função exponencial $y = (1/2)^x$.
Fonte: IEZZI et al, 2004, p.178.

No exemplo a seguir, temos no mesmo sistema cartesiano ortogonal as funções exponenciais $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e suas respectivas tabelas contendo alguns pontos.

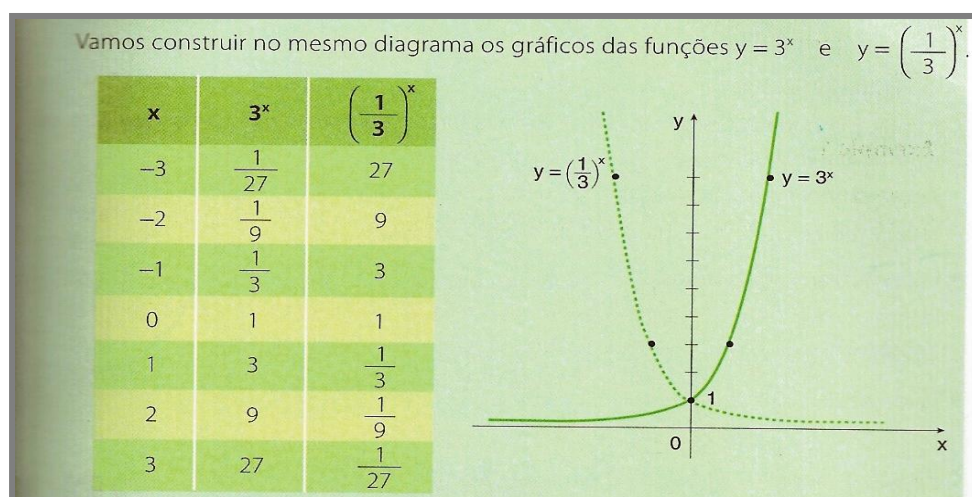


Figura 12: Exemplo gráfico da função exponencial $y = 3^x$ e $y = (1/3)^x$.
Fonte: IEZZI et al, 2004, p.179.

O quarto exemplo trata-se do gráfico da função $f(x) = e^x$, que tem como objetivo apresentar o número irracional $e \cong 2,7183$. Para isso considera a expressão $(1 + x)^{1/x}$ em que $x \in \mathfrak{R}^*$, quando x se aproxima de zero. Por meio de

um comentário e desenho ilustrativo, evidencia o uso uma calculadora científica ou financeira para os cálculos da função e^x .

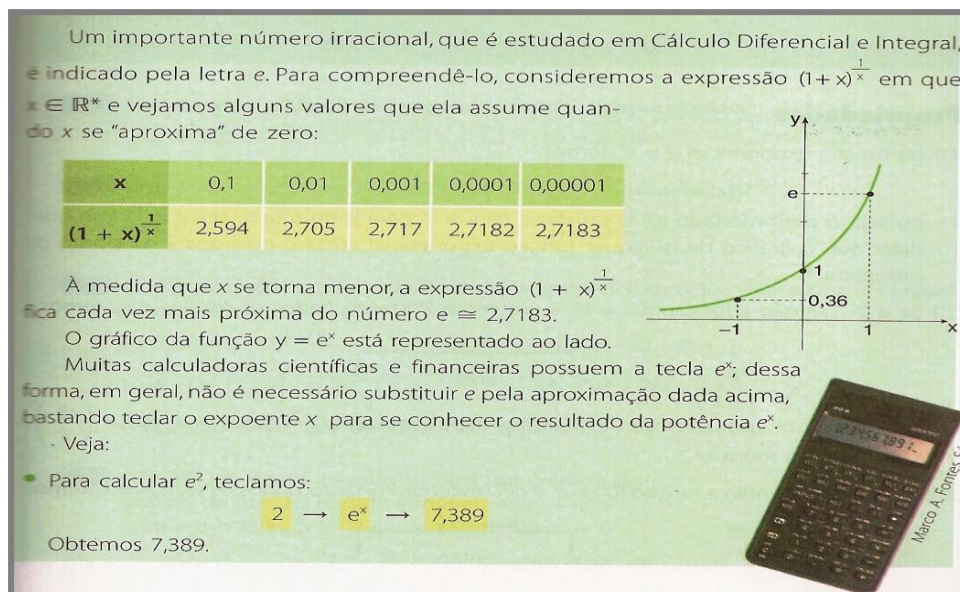


Figura 13: Exemplo gráfico da função exponencial $y = e^x$.
Fonte: IEZZI et al, 2004, p.179.

Observamos nesse exemplo o emprego dos registros: da língua natural, do algébrico, da tabela e do gráfico.

A seguir expõem de forma literal as propriedades da função exponencial, considerando seu crescimento ou decréscimo.

Depois enunciam vários exercícios, principalmente sobre construções de gráficos com suas propriedades a fim de extrair informações significativas a seu respeito. Alguns dos exercícios são contextualizados, trazendo situações do cotidiano aplicadas em outras áreas de conhecimento

O exemplo a seguir ilustra como são apresentados os exercícios sobre a função exponencial.

Um estudo revelou que a população de peixes em um lago está crescendo à taxa de 20% ao ano. Isso significa que a população de peixes em um determinado ano é 1,2 vez maior que a população do ano anterior. Atualmente, essa população está estimada em 10^3 peixes.

- a) Qual será a população de peixes daqui a 1 ano? E daqui a 2 anos?
- b) Obtenha a lei que define o número de peixes n nesse lago daqui a t anos.
- c) Esboce o gráfico dessa função.

Figura 14: Exercício sobre a Função Exponencial.
Fonte: IEZZI et al, 2004, p.182.

Em continuação ao tema são estudadas as equações e inequações exponenciais com seus respectivos exemplos e exercícios.

O capítulo sobre a Função Exponencial é concluído com exercícios extraídos de vestibulares e exercícios intitulados como desafios.

De acordo com a nossa análise, verificamos que em síntese, o livro está de acordo com as diretrizes curriculares nacionais para o Ensino Médio.

Em relação aos exercícios, proporciona ao aluno conhecimentos básicos, permitindo assim continuar seus estudos, bem como possibilita o reconhecimento das relações existentes entre os vários campos da Matemática com outras áreas de conhecimento, propondo conhecimento da teoria e prática, indispensável à cidadania.

No que diz respeito à integração do aluno na sociedade em que vive, procura contribuir na perspectiva de desenvolver as competências e habilidades necessárias à concorrência no mercado de trabalho.

O próximo assunto que apresentaremos será sobre a fundamentação teórica utilizada em nossa pesquisa.

2.4 Fundamentação Teórica

O referencial teórico escolhido para o desenvolvimento da nossa pesquisa está fundamentado na teoria sobre os Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003) e o Modelo 3UV de Sonia Ursini et al (2005).

Os referenciais teóricos nos nortearam nas análises: das atividades das produções dos alunos.

As atividades pertencentes à nossa pesquisa a respeito da Função Exponencial são apresentadas por meio de diversos registros de representação, nesse contexto entendemos que a utilização da teoria sobre os Registros de Representação Semiótica nos auxiliará nas análises dos dados obtidos das produções realizadas pelos alunos.

Quanto ao Modelo 3UV nos permite verificar como as variáveis são apresentadas nas atividades que serão aplicadas, se é por meio de um número desconhecido, termo genérico ou uma relação funcional.

2.4.1 Registros de representação semiótica

Na história do desenvolvimento da matemática, observou-se que o desenvolvimento das representações semióticas foram necessárias para a evolução do pensamento.

Segundo Duval (2003), a importância das representações semióticas se deve por duas razões fundamentais: a primeira é o tratamento matemático que depende do sistema de representação – por exemplo, as operações de cálculo utilizadas no sistema decimal de posição oferecem mais possibilidades que as do sistema grego ou romano de numeração, embora não seja simples para os alunos a aquisição desse sistema de numeração.

Os objetos matemáticos, como por exemplo, os números não são perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos, pois o seu acesso está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite designar.

A segunda razão é a grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática – além dos sistemas de numeração, existem as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural, mesmo se ela é utilizada de outra maneira que não a da linguagem corrente.

Duval (2003) denomina de registro de representação os diferentes tipos de representações semióticas utilizados em matemática.

A articulação de diferentes registros de representação oferece ao professor um auxílio quanto à aprendizagem, pois são meios que ajudarão a tornar mais acessível à compreensão da matemática, dessa maneira, a possibilidade de

compreensão de um objeto matemático poderá estar relacionada à apresentação do mesmo em diferentes registros de representações.

Em nossa pesquisa, o objeto matemático estudado é a função exponencial, e os registros de representação utilizados são: gráficos, tabela, algébrico e língua natural.

Para Duval é necessário considerar as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático e a compreensão destas representações são essenciais ao desenvolvimento do conhecimento. Um objeto matemático não deve ser confundido com a sua representação, normalmente observa-se uma confusão entre a representação do objeto matemático (*forma de representar*), com o próprio objeto (*conteúdo a ser representado*). (PELHO, 2003, p.24).

Duval (2003) descreve que “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação.” (p.14).

A seguir apresentamos um quadro e os registros multifuncionais e monofuncionais na representação discursiva e não discursiva.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: <ul style="list-style-type: none"> • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas. 	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). <ul style="list-style-type: none"> • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: <ul style="list-style-type: none"> • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. <ul style="list-style-type: none"> • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Figura 15: Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático.

Fonte: DUVAL, 2003, p.14.

2.4.2 Tipos de transformação de representação semiótica

Existem dois tipos de transformações de representações semióticas: o tratamento e a conversão.

Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.

As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica. (DUVAL, 2003, p.16)

Duval (2003) cita que geralmente, a conversão da representação de um objeto de um registro a outro, é considerada uma operação simples e local. Pois é comum descrever a conversão como uma associação preestabelecida entre nomes e figuras, ou reduzi-la a uma codificação.

De acordo com essas idéias, o ato da conversão seria uma das formas mais simples de tratamento, pois seria suficiente aplicar regras de correspondência para traduzir.

Essa tal visão é superficial e enganadora não somente nos fatos concernentes às aprendizagens, mas do ponto de vista teórico, pois a regra de codificação admite somente uma leitura pontual das representações, não permitindo uma apreensão global e qualitativa.

É importante descrever os dois tipos de fenômenos característicos que podem ser observados a respeito da conversão das representações: a congruência/não-congruência e a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão.

Na análise de uma atividade de conversão devemos comparar a representação no registro de partida com a representação terminal do registro de chegada, podendo ocorrer duas situações em que: a representação terminal transparece na representação de saída em que há a congruência, ou quando não há transparência absoluta, neste caso ocorre a não-congruência.

A seguir um exemplo dos casos de congruência e não-congruência.

	Correspondência semântica das unidades de significado	A unicidade semântica terminal	Conservação da ordem das unidades
O conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa $y > x$	Sim	Sim	Sim
O conjunto dos pontos que tem uma abscissa positiva $x > 0$	Não "Maior que zero" é uma perífrase (um só significado para várias palavras)	Sim	Sim
O conjunto dos pontos cuja abscissa e cuja ordenada têm o mesmo sinal $x, y > 0$ O produto da abscissa e da ordenada é maior que zero	Não	Não	Não Globalização descritiva (dois casos)

Figura 16: Exemplo de variação de congruência ou de não-congruência de uma conversão.

Fonte: DUVAL, 2003, p.19.

Apresentamos a seguir, um exemplo de congruência e não-congruência relacionado ao tema da nossa pesquisa.

Exemplo de congruência

Complete a tabela e em seguida represente seus pontos no sistema cartesiano ortogonal.

x	$f(x) = 2^x$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

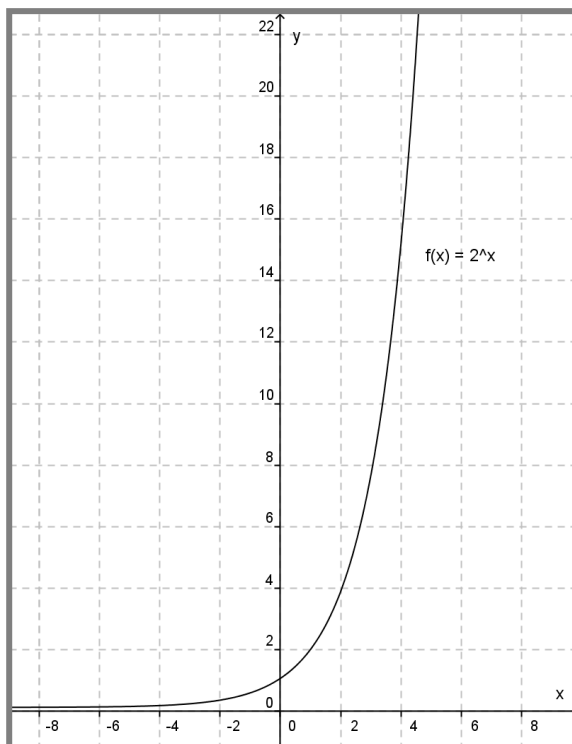
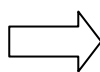


Figura 16a: Gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$.

Programa: software de geometria dinâmica Geogebra.

Observa-se uma conversão de registros, em que o registro de partida é o da língua natural e o de tabela, o de chegada é o registro gráfico. É um caso de congruência, pois a partir dos valores da tabela, o aluno pode chegar ao gráfico da função solicitada, ou seja, a representação terminal transparece na representação de saída.

Exemplo de não-congruência

Encontre a expressão algébrica do gráfico da função exponencial.

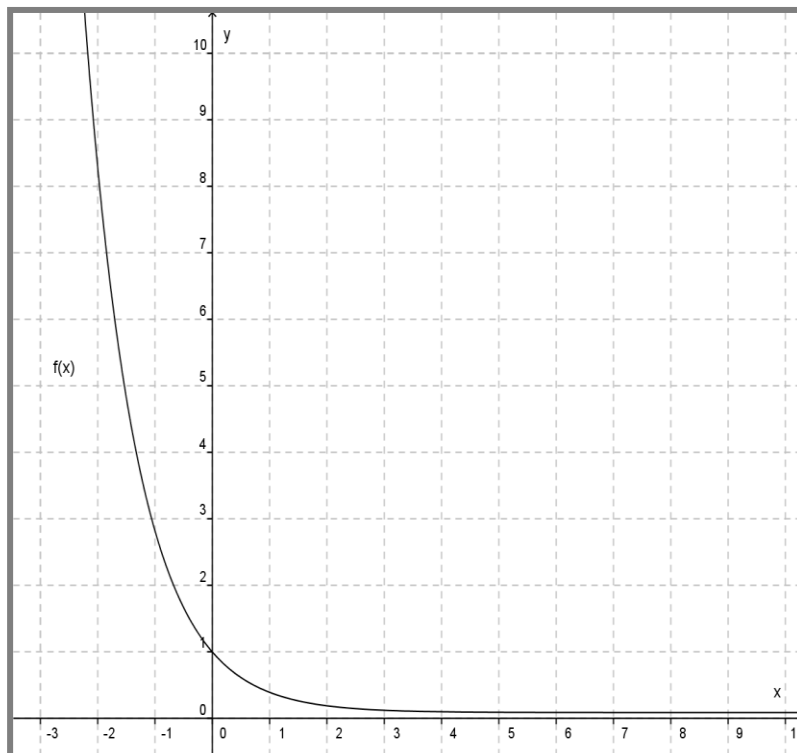
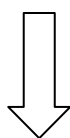


Figura 16b: Gráfico da função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Temos no exemplo, o registro de partida que é o da língua natural e gráfico e o de chegada que é o registro algébrico. Neste caso ocorre a não-congruência, pois é necessário conhecer propriedades do gráfico da função exponencial para realizar a conversão, ou seja, o registro de partida não transparece absolutamente no registro de chegada.

Os fatores apresentados nos exemplos acima permitem determinar os graus de congruência ou não-congruência que são geralmente correlacionados às variações de sucesso ou fracasso nas operações de conversão.

Sendo assim, utilizaremos a teoria sobre Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003) nas análises: das atividades selecionadas para a aplicação e nas produções dos alunos, pois essas têm por objetivos promover as mudanças de registros de representação semiótica, desta maneira acreditamos ser possível analisar quais as dificuldades ou não dos alunos nas mudanças de diferentes registros de representação semiótica.

2.4.3 Modelo 3UV

Esta teoria aponta para as dificuldades associadas ao conceito de variável.

São notáveis em pesquisas desenvolvidas na área do ensino de álgebra as dificuldades que os alunos apresentam relacionadas ao conceito de variável, principalmente quando este é apresentado em diversas formas na resolução de problemas algébricos.

Ursini et al (2005) descrevem em seus estudos as dificuldades dos alunos na compreensão adequada do uso das letras em álgebra.

A compreensão da noção de variável implica, pela nossa perspectiva, na possibilidade de superar a simples realização de cálculos e operações com letras e símbolos, para alcançar uma compreensão das razões por que funcionam estes procedimentos, a capacidade de prever aonde conduzem, e a possibilidade de estabelecer relações entre os distintos aspectos que as variáveis assumem no contexto da álgebra elementar. (TRIGUEROS; URSINI; 1998, p.446 apud QUEIROZ, 2008).

Rodrigues (2008) relata que Trigueros e Ursini a respeito das diferentes interpretações da letra como incógnita, número genérico e como variável, buscaram a elaboração de uma ferramenta de análise a respeito da compreensão de estudantes dos níveis médio e superior, e também de professores sobre o conceito de variável. Para as autoras, as interpretações são importantes para uma compreensão significativa de problemas algébricos elementares.

Para a construção de conceitos matemáticos, as autoras apresentam, baseada parcialmente na proposta de Dubinsky, uma decomposição genética do conceito de variável, pois para entender a forma como os estudantes aprendem matemática é necessário analisar os diferentes conceitos envolvidos nessa aprendizagem a fim de isolar seus principais componentes e dar descrições de

possíveis relações entre eles. O produto dessa análise é chamado de decomposição genética do conceito.

A seguir o quadro que apresenta aspectos da decomposição genética do conceito de variável, considerados por Trigueros e Ursini.

	Simbolização	Interpretação	Manipulação
Incógnita	Simbolização de um termo desconhecido em uma situação particular e/ ou em uma equação.	Interpretação de um símbolo como uma incógnita presente em equações nas quais ele aparece uma ou mais vezes.	Fatorar, simplificar, desenvolver, balancear uma equação para tornar a variável o sujeito dessa equação.
Número genérico	Simbolização de um objeto genérico envolvido em métodos ou regras gerais, deduzidos de padrões numéricos e/ou geométricos, ou em famílias de problemas similares.	Interpretação de um símbolo como um objeto genérico presente em expressões algébricas ou em regras gerais.	Fatorar, simplificar e desenvolver para reorganizar uma expressão.
Variáveis em relação funcional	Simbolização de relações funcionais a partir de uma tabela, um gráfico ou um problema em língua natural.	Interpretação da correspondência entre variáveis e de sua variação conjunta dada por meio de expressões algébricas, tabelas ou gráficos.	Fatorar, simplificar, desenvolver para reorganizar uma expressão; substituir valores para determinar intervalos de variação, valores de máximo e mínimo ou para analisar o comportamento global da relação.

Quadro 1: Decomposição do conceito de variável.
Fonte: RODRIGUES 2008, p.29.

Na apresentação dessa teoria é descrito um modelo no qual se ressaltam os aspectos que caracterizam os três usos da variável, mais empregados no ensino da álgebra.

O Modelo 3UV (Três usos da variável) consiste na interpretação dos aspectos da variável como:

- termo desconhecido;
- número genérico;
- relação funcional.

Vale ressaltar que analisaremos, em nossa pesquisa, atividades retiradas do Caderno do Professor de Matemática do 1º ano do Ensino Médio, referente ao

3º bimestre de 2008 sobre a função exponencial e verificaremos como são apresentadas nestas, as variáveis.

2.4.4 Termo desconhecido

Para compreender o uso da variável como termo desconhecido, o aluno deverá ser capaz de reconhecer que em determinada situação está envolvida uma quantidade cujo valor não é conhecido, mas que é possível determiná-lo, levando em consideração os dados apresentados. É necessário distinguir em quais situações o valor de uma variável pode ser ou não determinado. Ainda deverá ter a capacidade de representar simbolicamente uma quantidade desconhecida, relacionando com os dados do problema, utilizar os símbolos envolvidos como uma forma de encontrar um valor que torne a sentença verdadeira.

2.4.5 Número genérico

Ursini et al (2005), sugerem que um dos requisitos para a compreensão da variável como número genérico, consiste em desenvolver a capacidade do aluno para reconhecer padrões, utilizar os símbolos na representação de uma situação geral, uma regra ou um método que os descrevam.

Ainda manipular (simplificar ou fatorar) expressões que envolvam números genéricos.

Os números genéricos são encontrados em expressões do tipo:

Sentença aberta: $5x - 12$;

Tautologias: $(x + 7 = 7 + x)$;

Fórmulas gerais; $A = b \times h$;

Parâmetros nas equações: $y^2 + 5my + 7 = 0$;

Equações gerais: $(ax + b = cx + d)$.

O aluno deverá interpretar as quantidades gerais e distingui-las das variáveis simbólicas, que representam quantidades desconhecidas, mas específicas.

2.4.6 Relação funcional

Com relação à compreensão das variáveis como uma relação funcional é necessário distinguir as situações, pois estas podem ser representadas na forma verbal, em expressões analíticas, tabelas ou gráficos.

Segundo Ursini et al (2005), trabalhar com a correspondência implica:

- Ser capaz de atribuir valores a uma das variáveis e determinar o valor correspondente;
- Desenvolver a capacidade para determinar os intervalos de variação de uma das variáveis, dados os da outra;
- Determinar quando uma função cresce ou decresce;
- Determinar em quais pontos atinge um valor máximo ou mínimo;
- Quais intervalos que seus valores são positivos ou negativos e quando é constante;
- Representação de uma relação funcional de distintas formas e transformação de uma a outra.
- Simbolização de uma relação funcional de forma analítica, estabelecendo uma relação simbólica entre as variáveis envolvidas, independentemente de como a informação seja dada (verbal, tabela, gráfico).
- Diferenciação entre uma expressão simbólica que representa uma relação funcional, e outras que representam, por exemplo, uma equação ou uma tautologia.

A seguir um quadro com os aspectos que caracterizam cada um dos três usos da variável, denominado de Modelo 3UV.

<p>Variável como Incógnita (Termo Desconhecido)</p>	<p>I1- Reconhecer e identificar, em uma situação problema, a presença de algo desconhecido que pode ser determinado considerando as restrições do problema; I2 – Interpretar a variável simbólica que aparece em uma equação, como a representação de valores específicos; I3 – Substituir a variável pelo valor ou valores que fazem da equação um enunciado verdadeiro; I4 – Determinar a quantidade desconhecida que aparece em equações ou problemas, realizando operações algébricas, aritméticas ou de ambos os tipos; I5 – Simbolizar as quantidades desconhecidas identificadas em uma situação específica e utilizá-las para formular equações.</p>
<p>Variável como Número Genérico</p>	<p>G1 – Reconhecer padrões e perceber regras e métodos, em sequências e em famílias de problemas; G2 – Interpretar a variável simbólica como a representação de uma entidade geral, indeterminada, que pode assumir qualquer valor; G3 – Deduzir regras e métodos gerais, em sequências e em famílias de problemas; G4 – Manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica; G5 – Simbolizar enunciados, regras ou métodos gerais.</p>
<p>Variável em Relacionamento Funcional</p>	<p>F1 – Reconhecer a correspondência entre variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas); F2 – Determinar os valores da variável dependente, dados os valores da independente; F3 – Determinar os valores da variável independente, dados os valores da dependente; F4 – Reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação funcional, independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas); F5 – Determinar os intervalos de variação de uma das variáveis, dado o intervalo de variação da outra. F6 – Simbolizar uma relação funcional baseado na análise dos dados de um problema.</p>

Quadro 2: Habilidades necessárias à compreensão da variável em seus três usos.
Fonte: URSINI et al, 2005, p.35-37.

Com isso, podemos destacar que o Modelo 3UV aponta os aspectos que caracterizam cada uso das variáveis utilizadas no ensino de álgebra.

2.5 O uso da calculadora

Durante a realização de nossa pesquisa a respeito da Função Exponencial, decidimos pelo o uso da calculadora científica, pois entendemos que as dificuldades do cálculo referentes ao trabalho com lápis e papel amenizam com o seu uso. A calculadora é uma ferramenta que agiliza a etapa da realização de cálculos, faz com que o aluno gaste menos tempo com cálculos repetitivos e aprenda a pensar e desenvolver o raciocínio lógico.

Ressaltamos que o livro do Programa Ler e Escrever⁶, apresenta sugestões do uso da calculadora para realizar as operações de adição, subtração e multiplicação com números naturais.

[...] por meio de estratégias pessoais e do uso de técnicas operatórias convencionais, do cálculo mental e da calculadora, e usar estratégias de verificação e controle de resultados pelo uso do cálculo mental ou da calculadora. (SÃO PAULO, 2009a, p.21).

No artigo de D'Ambrosio (2003), o autor relata que o uso da calculadora nas salas de aula continua sendo questionado por professores, pais, legisladores e, até mesmo por alunos, pois muitos entendem que o uso pode afetar a memória e mesmo a capacidade de raciocinar bem. Porém para esse fato nada existe, em pesquisa que apóie esses temores.

Descrevemos alguns argumentos utilizados contra e a favor do uso da calculadora na sala de aula, retirados de um relatório de seminário sobre o uso da calculadora em sala de aula, realizado no 1º semestre de 2007 da disciplina de TIC (Tecnologias da Informação e Comunicação) do Programa de Pós-Graduandos em Educação Matemática da PUC-SP.

Argumentos contra o uso da calculadora

- Inibe o raciocínio dos alunos;
- Não deve ser usada porque é proibida no vestibular e demais concursos;

⁶ Ler e Escrever – Guia de Planejamento e Orientações Didáticas - Professor/4ª série. Material destinado para o Ciclo I (1ª a 4ª séries).

Obra cedida pela Prefeitura da Cidade de São Paulo à Secretaria da Educação do Estado de São Paulo para o Programa Ler e Escrever.

- Os alunos desaprendem a fazer cálculos;
- Tornam-se dependentes da máquina;
- Calculam mecanicamente e ficam preguiçosos.

Argumentos a favor do uso da calculadora

- Apreensão e assimilação dos processos matemáticos e não somente simplificação de cálculos;
- Útil para verificação de resultados;
- Correção de erros;
- Favorece a busca e a percepção de regularidades matemáticas;
- Ferramenta para a resolução de problemas cotidianos;
- Execução dos cálculos – maior agilidade e rapidez;
- Promove a aprendizagem de processos cognitivos.

Para os que são contra o uso da calculadora D'Ambrosio (2003), descreve que essas atitudes são atribuídas a um excessivo conservadorismo e uma falta de visão histórica sobre como a tecnologia é parte integrante da sociedade e determina os rumos tomados pelas civilizações.

Para Oliveira (1999) a utilização da calculadora em sala de aula, tem como objetivo desenvolver habilidades de cálculo nos alunos, como instrumento de descobertas e de formação de conceitos, levando à preparação dos jovens para o uso de uma ferramenta que faz parte do cotidiano, sendo o seu manuseio de importância fundamental.

Dessa maneira, a calculadora é apresentada como uma ferramenta auxiliar para a leitura e interpretação do mundo, podendo ser utilizada para a resolução dos problemas decorrentes dessa ação e na tomada de decisões diante das situações cotidianas.

Ao se reconhecer que a calculadora tem potencialidades educativas que devem ser exploradas, sua utilização deve estar direcionada para um duplo propósito: liberar o tempo gasto com atividades rotineiras e repetitivas, e aproveitar as novas e crescentes possibilidades que se abrem para a exploração, investigação e aplicação em torno das idéias e métodos da Matemática. (OLIVEIRA, 1999, p. 23).

Para Guinther (2009), a calculadora tal como régua e compasso, é um instrumento do qual se lança mão para resolver certos tipos de tarefas num dado contexto, porém, ressalta que o uso da calculadora na prática escolar, em alguns casos, requer conhecimentos matemáticos prévios, pois caso contrário de nada adianta uma máquina nas mãos de uma pessoa que não sabe manuseá-la.

É inegável que a calculadora é muito utilizada atualmente como instrumento de cálculo nas mais diversas atividades, inclusive pelos estudantes, quando atuam em situações da vida profissional e cotidiana. Seu uso efetivo em sala, nas aulas de Matemática, é desafiador, transcende o “permitir ou proibir”. Trata-se de uma questão que merece reflexão e que implica inicialmente em mudanças profundas na crença do que significa ensinar e aprender Matemática. Esta pode ser uma das razões pelas quais a calculadora não tem sido usada no ensino tradicional, ao contrário dos computadores, cujas vantagens foram mais discutidas e hoje fazem parte dos recursos didáticos da maioria das escolas. (GUINThER, 2009. pp.60-61)

Concordamos com Guinther (2009), no que diz respeito à utilização da calculadora mesmo que ela seja utilizada apenas como instrumento de cálculo, existe um ponto positivo: reduzir o tempo para a execução desse cálculo, além disso, pode ser um fator de motivação e interesse pelas aulas, gerando assim mais questionamentos e melhor aprendizagem matemática.

Entendemos ainda que o uso da calculadora seja um recurso útil para a verificação de resultados, correção de erros, podendo ser um importante instrumento de auto-avaliação, favorecendo a busca e percepção de regularidades matemáticas e o desenvolvimento de estratégias de resolução de situações-problema, além de estimular a investigação de hipóteses, uma vez que os alunos ganham tempo na execução dos cálculos.

No próximo capítulo faremos uma breve descrição da Proposta Curricular do Estado de São Paulo para a disciplina de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio.

CAPÍTULO 3

3.1 Breve descrição da proposta curricular do Estado de São Paulo para a disciplina de matemática ensino fundamental – ciclo II e ensino médio

A Proposta Curricular é apresentada pela SEE/SP - Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2008) por meio de uma carta destinada aos gestores e professores em que explicita o objetivo da Proposta, que é atender à necessidade de organização do ensino no sistema educacional do Estado de São Paulo.

Com esta nova Proposta Curricular, a SEE/SP espera que os profissionais que fazem parte da rede se aprimorem cada vez mais, também ressalta que o currículo apresentado e discutido em toda a rede está em constante evolução e aperfeiçoamento.

Refere-se à Proposta Curricular e todo o material que a integra não como uma simples orientação, mas como um subsídio, que por meio da sua implementação terá um foco definido que é oferecer uma melhor qualidade no ensino.

O projeto propõe um currículo para os níveis de ensino Fundamental – Ciclo II e Médio em que seja dado apoio ao trabalho realizado nas escolas estaduais, contribuindo assim para a melhor qualidade relativa às aprendizagens dos alunos.

Para isso, foram tomadas duas iniciativas complementares:

- Um amplo levantamento do acervo documental e técnico pedagógico existente;
- Início de um processo de consulta a escolas e professores, para a identificação, sistematização e divulgação das boas práticas existentes nas escolas de São Paulo.

Com isso a SEE/SP procura cumprir seu dever de garantir uma base comum para que as escolas funcionem de fato como uma rede.

A Proposta Curricular apresenta os princípios orientadores para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo.

A Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 2008 é composta de 4 documentos.

A estrutura do primeiro documento é a própria Proposta Curricular que estabelece a sua base, ou seja, apresenta os princípios e conceitos contidos nela.

O objetivo principal de uma proposta curricular é mapear as informações relevantes e organizá-las em narrativas significativas, em cada território disciplinar. Por meio das diversas disciplinas, os alunos adentram de maneira ordenada – disciplinarmente – o fecundo e complexo universo do conhecimento, em busca do desenvolvimento das competências básicas para sua formação pessoal.

(SÃO PAULO, 2008, p.41).

Com isso, a nova Proposta Curricular propõe que a aprendizagem seja produto da coordenação de ações entre as disciplinas, que aconteça o estímulo à vida cultural da escola, o fortalecimento de suas relações com a comunidade, e sugere orientações e estratégias para a educação continuada dos professores.

O segundo documento refere-se ao Caderno do Gestor.– Orientações para a Gestão do Currículo na Escola, direcionado especialmente às unidades escolares e aos dirigentes e gestores, que tem a importância de auxiliar no Projeto Pedagógico para que seja um recurso efetivo e dinâmico assegurando a aprendizagem dos conteúdos e a constituição das competências previstas na Proposta.

São apresentadas sugestões de organização do trabalho dos especialistas responsáveis pela gestão do currículo na escola.

Propostas de agenda, cronograma, atividades e organização de recursos para apoiar o trabalho do diretor, do professor coordenador, dos assistentes técnicos pedagógicos (ATP) e do supervisor.

O terceiro documento é denominado Caderno do Professor que contém atividades docentes para todas as aulas, em todas as séries e disciplinas.

São organizados por bimestre, trazendo indicações das competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos, em cada tema ou tópico dos

conteúdos. É constituída por cadernos que contemplam as disciplinas, citadas abaixo, para cada série do Ensino Fundamental (EF) e Médio (EM).

Arte EF/ EM ;
Educação Física EF/EM;
Ciências EF;
Geografia EF/EM;
História EF/EM;
Língua Estrangeira Moderna EF/EM;
Matemática EF/EM;
Língua Portuguesa EF/EM;
Biologia EM;
Filosofia EM;
Física EM;
Química EM;
Sociologia EM;

Também são incluídas sugestões de aulas, de material complementar, propostas de avaliação e projetos para recuperação paralela.

Durante o ano de 2008 a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo produziu Cadernos do Professor para cada bimestre, disciplina e séries do Ensino Fundamental e Médio, num total de 252 cadernos. O quarto documento foi produzido no início de 2009 e refere-se ao Caderno do Aluno.

Sua estrutura contém os conteúdos abordados no bimestre, proposta de atividades através de tópicos denominados situações de aprendizagens.

3.1 Caderno do professor de matemática

Ensino médio – 1ª série – 3º bimestre - 2008

Segundo as orientações gerais sobre os cadernos, os temas escolhidos para compor o conteúdo disciplinar de cada bimestre não se afastam, de maneira

geral, do que é usualmente ensinado nas escolas o do que é apresentado pelos livros didáticos.

A novidade refere-se à abordagem sugerida, pois evidencia a contextualização dos conteúdos, as competências relacionadas com a leitura e a escrita matemática, e seus elementos culturais internos e externos ligados à matemática.

A estrutura dos cadernos é disposta da seguinte maneira:

- ✓ Conteúdos organizados em oito unidades de extensões aproximadamente iguais, podendo corresponder a oito semanas de trabalho letivo;
- ✓ Quatro situações de aprendizagens distintas que ilustram a forma de abordagem sugerida, instrumentando o professor para sua ação na sala de aula;
- ✓ Materiais de apoio como, textos, *softwares*, sites e vídeos para o enriquecimento das aulas, sempre que possível.
- ✓ Algumas considerações sobre a avaliação, bem como o conteúdo considerado indispensável ao desenvolvimento das competências esperadas no presente bimestre em cada situação de aprendizagem apresentada.

Em nossa pesquisa, aplicaremos quatro atividades que foram extraídas do Caderno do Professor, referente ao 3º bimestre da 1ª série do Ensino Médio a respeito da Função Exponencial.

A disciplina de Matemática – Ensino Fundamental - Ciclo II e Ensino Médio é apresentada em quatro blocos temáticos: Números, Geometria, Grandezas e Medidas, e Tratamento da Informação.

O nosso tema de pesquisa sobre Função Exponencial está inserido no bloco de Grandezas e Medidas.

A seguir apresentamos um quadro com os conteúdos do Ensino Médio divididos por série e bimestre.

	1ª Série	2ª Série	3ª Série
1º Bimestre	Números e seqüências <ul style="list-style-type: none"> • Conjuntos numéricos. • Regularidades numéricas: seqüências. • Progressões aritméticas e progressões geométricas. 	Trigonometria <ul style="list-style-type: none"> • Fenômenos periódicos. • Funções trigonométricas. • Equações e inequações. • Adição de arcos. 	Geometria analítica <ul style="list-style-type: none"> • Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos. • Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares. • Ponto e reta: distância. • Circunferência: equação. • Reta e circunferência: posições relativas. • Cônicas: noções e aplicações.
2º Bimestre	Funções <ul style="list-style-type: none"> • Relação entre duas grandezas. • Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado. • Função de 1º grau. • Função de 2º grau. 	Matrizes, determinantes e sistemas lineares <ul style="list-style-type: none"> • Matrizes: significado como tabelas, características e operações. • A noção de determinante de uma matriz quadrada. • Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento. 	Equações algébricas e números complexos <ul style="list-style-type: none"> • Equações polinomiais. • Números complexos: operações e representação geométrica. • Propriedades das raízes de uma equação polinomial. • Relações de Girard.
3º Bimestre	Funções exponencial e logarítmica <ul style="list-style-type: none"> • Crescimento exponencial. • Função exponencial: equações e inequações. • Logaritmos: definição e propriedades. • Função logarítmica: equações e inequações. 	Análise combinatória e probabilidade <ul style="list-style-type: none"> • Raciocínio combinatório: princípios multiplicativo e aditivo. • Probabilidade simples. • Casos de agrupamentos: arranjos, combinações e permutações. • Probabilidade da reunião e/ou da intersecção de eventos. • Probabilidade condicional. • Distribuição binomial de probabilidades: o triângulo de Pascal e o Binômio de Newton. 	Estudo das funções <ul style="list-style-type: none"> • Qualidades das funções. • Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais. • Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação. • Composição: translações e reflexões. • Inversão.
4º Bimestre	Geometria-Trigonometria <ul style="list-style-type: none"> • Razões trigonométricas nos triângulos retângulos. • Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies. • Resolução de triângulos não retângulos: lei dos senos e lei dos co-senos. 	Geometria métrica espacial <ul style="list-style-type: none"> • Elementos de geometria de posição. • Poliedros, prismas e pirâmides. • Cilindros, cones e esferas. 	Estatística <ul style="list-style-type: none"> • Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos. • Medidas de tendência central: média, mediana e moda. • Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão. • Elementos de amostragem.

Quadro 3: Adaptado dos Conteúdos de Matemática por série e bimestre do Ensino Médio. Fonte: SÃO PAULO, 2008, p.56-59.

3.1.2 Conteúdos básicos do 3º bimestre da primeira série

O motivo da nossa escolha recair sobre o Caderno do Professor de Matemática do 3º bimestre para a 1ª série do Ensino Médio está relacionada ao nosso tema de pesquisa, que é a Função Exponencial. Embora o tema seja tratado na 3ª série do Ensino Médio, conforme o Quadro 3, optamos por direcionar a nossa pesquisa apenas na 1ª série do Ensino Médio, pois a abordagem do estudo desta função está focalizada no início do estudo sobre a Função Exponencial.

Encontramos ainda neste Caderno conteúdos sobre potências e logaritmos. Potência deve ser um tema conhecido dos alunos, pois é ensinada nas 5ª séries e 8ª séries do Ensino Fundamental. O tratamento dado agora é a consolidação do seu significado, sintetizando os fatos conhecidos na apresentação da função exponencial, com destaque para a sua forma peculiar de crescimento e decrescimento.

Já os logaritmos estão presentes dados pela sua importância não somente pela simplificação dos cálculos, mas pela sua adequação para a descrição de fenômenos em que as variáveis aparecem no expoente.

As atividades que pretendemos desenvolver em nossa pesquisa encontram-se na Unidade 1: Consolidação da idéia de potência – significado e operações com expoentes inteiros, racionais e reais.

A situação de aprendizagem 1 – As potências e o crescimento/decrescimento exponencial: a função exponencial.

O quadro a seguir ilustra os conteúdos referentes ao 3º bimestre da 1ª série do Ensino Médio.

- **Quadro geral de conteúdos do 3º bimestre da 1ª série do Ensino Médio**

Unidade 1: Consolidação da idéia de potência – significado e operações com expoentes inteiros, racionais e reais.

Unidade 2: A função exponencial – crescimento, decrescimento e gráficos.

Unidade 3: A idéia de logaritmo – uma idéia brilhante do século XVII cada vez mais importante no século XXI.

Unidade 4: Propriedades dos logaritmos – logaritmos em diferentes bases.

Unidade 5: Logaritmos em diferentes contextos: acidez, escala Richter e decibéis.

Unidade 6: As funções com variável no expoente: a exponencial e sua inversa, a logarítmica.

Unidade 7: Problemas envolvendo expoentes e logaritmos em diferentes contextos – equações e inequações.

Unidade 8: Uma aplicação importante: o uso de gráficos com escala logarítmica.

Quadro 4: Conteúdos do 3º bimestre da 1ª série do Ensino Médio.
Fonte: SÃO PAULO, 2008a, p.10.

Segundo a Proposta o objetivo é a consolidação da idéia de potenciação chegando na apresentação da função exponencial $y = a^x$, ou $f(x)=a^x$, sendo a base a um número positivo e diferente de 1.

Assim como as funções $f(x) = ax+b$ constituem um padrão para os estudos dos fenômenos lineares, em que o crescimento ou decrescimento acontece a taxas constantes, as funções exponenciais constituirão um novo padrão para a descrição e a compreensão de uma nova classe de fenômenos, de natureza não linear. (SÃO PAULO, 2008a, p.11).

Ao estudar funções desse tipo, os alunos estarão ampliando sua capacidade de entender como ocorrem diversos fenômenos naturais, assim como em quais contextos eles surgem.

Para essa Situação de Aprendizagem é sugerido ao professor que utilize duas semanas na concretização da idéia de potência e apresentação da função exponencial.

A seguir descrevemos as atividades que compõem a nossa pesquisa.

As atividades foram selecionadas a partir dos exercícios contidos no Caderno do Professor.

Dos sete exercícios da Situação de Aprendizagem 1, selecionamos quatro exercícios, pois consideramos não haver necessidade de aplicar os setes exercícios por serem semelhantes na sua resolução.

Atividade 1 – A1

Uma população N de micróbios cresce exponencialmente de acordo com a expressão $N = 5000 \cdot 3^t$ (t em horas).

a) Indique o valor de N para os seguintes valores de t :

a1) $t = 2$ h

a2) $t = 0,5$ h

a3) $t = (2/3)$ h

a4) $t = 1,25$ h

b) Esboce gráfico de N como função de t : $N = f(t)$

Figura 17: Situação de Aprendizagem 1 - Exercício 1.
Fonte: SÃO PAULO, 2008a, p.15.

Atividade 2 – A2

Em determinado país X , a produção de automóveis cresce em progressão geométrica, ano após ano, a partir do início do ano 2000, tendo aumentado 50% ao ano, desde então. Sabendo-se que em 2004 foram produzidos 162 000 automóveis, pergunta-se:

a) Qual a quantidade produzida no ano 2000?

b) Qual a produção estimada para o ano de 2010?

Figura 18: Situação de Aprendizagem 1 - Exercício 2.
Fonte: SÃO PAULO, 2008a, p.16.

Atividade 3 – A3

É possível construir o gráfico de uma função do tipo $f(x) = 2^{kx}$ de modo análogo ao de $y = 2^x$, quando k é positivo, ou ao de $y = 2^{-x}$, quando k é negativo. Nos dois casos ocorrerá apenas uma mudança na escala no eixo x . Para compreender tal fato, construa o gráfico de cada par de funções abaixo no mesmo sistema de coordenadas:

- a) $y = 2^x$ e $y = 2^{3x}$
 b) $y = 3^{-x}$ e $y = 3^{-0,5x}$

Figura 19: Situação de Aprendizagem 1 - Exercício 3.
 Fonte: SÃO PAULO, 2008a, p.16.

Atividade 4 – A4

A população N de determinado município cresce exponencialmente, desde a sua fundação, há 20 anos, de acordo com a expressão

$$N = 3000 \cdot 10^{0,1t}, \text{ sendo } t \text{ em anos.}$$

Calcule

- a) O valor de N quando o município foi fundado ($t = 0$).
 b) O valor de N dez anos após a fundação.
 c) O valor de N nos dias atuais.
 d) Depois de quanto tempo, após a fundação, a população atingirá a marca de 3000000 de habitantes, se o ritmo de crescimento continuar assim?

Figura 20: Situação de Aprendizagem 1 - Exercício 4.
 Fonte: SÃO PAULO, 2008a, p.17.

No próximo capítulo descreveremos os procedimentos metodológicos e a análise *a priori* das atividades.

CAPÍTULO 4

4.1 Procedimentos metodológicos

O objetivo dessa pesquisa é analisar se as atividades apresentadas no Caderno do Professor contribuem ou não para a compreensão do aluno a respeito do objeto Função Exponencial, se os alunos conseguem realizar ou não as mudanças de registro de representação semiótica à luz da teoria de Duval (2003). Também analisamos se está neste Caderno uma abordagem das variáveis conforme o Modelo 3UV (Três Usos da Variável) de Ursini et al (2005).

Consideramos em nossa pesquisa uma abordagem qualitativa, utilizando como fundamento as fases metodológicas da engenharia didática.

Essa metodologia tem por objetivo a articulação entre a investigação e a ação prática, apresentando uma forma de organizar os procedimentos metodológicos da pesquisa contemplando o campo teórico e experimental.

Segundo Artigue (1996) a metodologia da Engenharia Didática caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, enfatizando a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino.

A noção de engenharia didáctica emergiu em didáctica da matemática no início da década de 1980, com o objectivo de etiquetar uma forma do trabalho didáctico: aquela que era comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projecto preciso, se apóia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controlo de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objectos muito mais complexos do que os objectos depurados da ciência, e portanto a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas de que a ciência não quer ou ainda não é capaz de encarregar. (ARTIGUE,1996, p.193).

Suas características se completam em dois níveis, a microengenharia – relacionado ao estudo de um determinado objeto e a macroengenharia – referente ao estudo dos fenômenos ligados à duração nas relações ensino e aprendizagem, são consideradas nesta metodologia as respostas dos alunos e as condições em que são submetidas. É importante destacar que a forma de validação desta metodologia está fundamentada no confronto entre as análises *a priori* e as análises *a posteriori*, ou seja, uma validação interna, em que as análises *a priori*

estão baseadas no referencial teórico adotado e as análises *a posteriori* nos resultados da experimentação.

Tendo em vista tornar clara a singularidade da engenharia didática, Machado (2008) apresenta uma comparação dela com outras duas metodologias de fundamentações diferentes.

A de tipo etnográfico, embora coincida com a engenharia na suposição de que o pesquisador se insere no *locus* da investigação, no que concerne às fases da pesquisa ela não admite uma análise *a priori*, no que se contrapõe à engenharia didática, onde a análise *a priori* é uma fase fundamental. As que se baseiam em métodos estatísticos diferem da engenharia pela validação. Na engenharia didática, a validação é interna, enquanto as do segundo tipo têm uma validação do tipo externo, isto é, utilizam métodos comparativos para validar seus resultados, ou seja, fazem uma comparação estatística entre os desempenhos dos grupos-controle e grupo experimentais. (MACHADO, 2008, p.236-237).

Dessa maneira, Machado (2008) ainda ressalta que a singularidade da engenharia didática não repousa sobre seus objetivos, mas em suas características de funcionamento metodológico.

A seguir, faremos a apresentação das fases que constituem a metodologia da engenharia didática.

4.1.1 As fases da metodologia da Engenharia Didática

1ª Fase: As análises prévias

A primeira fase denominada de análises prévias é sustentada num quadro teórico e em conhecimentos didáticos já adquiridos no domínio estudado, mas que podem se apoiar em análises preliminares, por exemplo, na análise do ensino habitual e dos seus efeitos, ou a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução.

No nosso caso, fazem parte das análises prévias o levantamento bibliográfico, uma breve descrição da Proposta Curricular para o Estado de São Paulo de 2008 juntamente com o documento denominado Caderno do Professor da 1ª série do Ensino Médio do 3º bimestre de 2008, o livro didático utilizado pela escola, referente ao objeto matemático Função Exponencial, os referenciais teóricos.

2ª Fase: Análise a priori

Consiste em descrever e analisar o objeto de estudo, por meio da seleção das variáveis de comando julgadas importantes para trabalhar. As variáveis aqui mencionadas são do tipo: macro-didática ou global, que dizem a respeito à organização global da engenharia e micro-didática ou local, referente à uma organização de uma sessão ou fase.

Esta fase comporta uma parte de descrição e outra de previsão, baseada nas características de uma situação que se pretende criar e desenvolver com os alunos.

Faremos a análise *a priori* das atividades encontradas no Caderno do Professor da 1ª série do Ensino Médio do 3º bimestre de 2008, indicaremos a estratégia de resolução descrita no Caderno do Professor e mencionaremos os conhecimentos prévios necessários para a resolução.

3ª Fase: Experimentação

Inicia-se com o contato do pesquisador com os sujeitos da pesquisa.

Segundo Machado (1999), nesta fase são necessários alguns pontos como: a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa, a aplicação dos instrumentos da pesquisa, registros das observações feitas durante a experimentação e das produções dos alunos na sala de aula ou fora dela.

Na pesquisa desenvolvida neste trabalho, os dados coletados serão as produções desenvolvidas pelos dos alunos.

4ª Fase: análise a posteriori e validação

A quarta fase corresponde à análise *a posteriori*, em que analisaremos as produções dos alunos e as observações feitas a respeito do comportamento deles durante a aplicação das atividades.

Esta metodologia permite um confronto da análise *a priori* e da análise *a posteriori*, em que se busca validar ou não as hipóteses levantadas na análise *a priori*.

Sendo assim, esse confronto entre as duas análises representa a validação da metodologia usada para tal situação.

4.2 Sujeitos da pesquisa

A pesquisa realizada contou com 14 alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual, localizada na periferia da região noroeste de São Paulo, na qual atuamos como professora.

Solicitamos à direção da escola sua autorização para a realização da nossa pesquisa, e a mesma nos deu total apoio e incentivo.

Após a autorização por parte da direção conversamos com o professor das turmas de Matemática da 2ª série do Ensino Médio do período da manhã para que ficassem informados sobre o trabalho que seria desenvolvido com os alunos.

Escolhemos realizar a pesquisa com alunos da 2ª série, pois o assunto de Função Exponencial fora estudado na 1ª série e queríamos verificar como os alunos se saíam com a abordagem de um conteúdo supostamente já conhecido e apreendido por eles.

O passo seguinte foi conversar com os alunos e convidá-los a participar da nossa pesquisa e esclarecer que se tratava de um trabalho indispensável para obtenção do título de mestre na área de ensino de matemática.

Para os alunos que decidiram participar voluntariamente foi entregue um termo de autorização (Anexo 1) em que os pais deveriam assinar consentindo assim a participação do seu filho na pesquisa.

Também informamos aos alunos que a pesquisa ocorreria durante o período de aula e que os alunos participantes seriam encaminhados para outras salas de aulas, as que permaneciam vazias durante a aula de educação física de outra turma, assim não haveria necessidade de comparecer fora do horário de aula para participar da pesquisa.

Vale ressaltar que os professores de outras disciplinas também foram informados da nossa pesquisa, principalmente aqueles em que o horário da pesquisa coincidia com o horário de sua aula, pois o mesmo deveria liberar o aluno sem prejuízo na disciplina ou presença, devido a colaboração para o nosso trabalho.

4.3 O Instrumento de pesquisa

O nosso instrumento de pesquisa é composto de uma atividade de revisão de potências (elaborada pela pesquisadora) e quatro atividades referentes à introdução da Função Exponencial, encontradas no Caderno do Professor de Matemática da 1ª série do Ensino Médio do 3º bimestre de 2008.

O Caderno é dividido em quatro tópicos denominados de Situação de Aprendizagem, e em cada uma encontramos exercícios que abordam o assunto Função Exponencial e Logarítmica.

Desta forma, dos sete exercícios que encontramos na primeira Situação de Aprendizagem, selecionamos quatro exercícios, acreditamos não haver necessidade de aplicar os sete exercícios por serem semelhantes na sua resolução.

O motivo de analisarmos os exercícios da primeira Situação de Aprendizagem é porque se trata do início do estudo da Função Exponencial e o nosso objetivo é analisar se as atividades apresentadas no Caderno do Professor contribuem ou não para a compreensão do aluno sobre o objeto Função Exponencial, se os alunos conseguem realizar ou não as mudanças de registro de representação semiótica segundo a teoria de Duval (2003), e se é possível uma abordagem das variáveis em uma relação funcional conforme o Modelo 3UV de Ursini et al (2005).

Antes da aplicação das atividades consideramos pertinente realizar uma revisão sobre potências incluindo expoente natural, inteiro e racional, pois o próprio Caderno do Professor traz essa orientação.

Em conversas que antecederam o início da pesquisa, soubemos que os alunos não se lembravam deste conteúdo, e esta etapa foi necessária para o que viria depois.

A seguir faremos uma análise *a priori* das atividades apresentadas à luz da teoria de Duval (2003) sobre os registros de representação semiótica e do Modelo 3UV de Ursini et al (2005).

4.4 Análise *a priori* das atividades

Revisão de potências

Como foi sugerido no próprio Caderno do Professor de Matemática da 1ª série do Ensino Médio, 3º bimestre de 2008, a revisão de potenciação, apresentamos abaixo a atividade que foi aplicada como atividade inicial para diagnosticar quais conhecimentos os alunos têm a respeito do assunto.

Elaboramos essa atividade colocando exercícios usualmente trabalhados em sala de aula e apresentados nos livros didáticos, cujo objetivo era a revisão das propriedades de potenciação.

Nossa expectativa quanto aos itens contidos nessa revisão, é que os alunos não encontrem dificuldades para os itens cujas potências apresentem expoentes inteiros positivos.

É provável que encontrem dificuldades quanto aos itens que se têm potências de expoentes inteiros negativos e expoentes racionais (decimais ou fracionários); no caso dos itens k) a r), e ainda no caso dos itens s) e t) em que necessita calcular uma potência de potência.

A seguir os exercícios da revisão de potências.

Calcule o valor das potências:

- a) $(-5)^2$
- b) -5^2
- c) -4^3
- d) $-(-4)^3$
- e) $(-1/2)^5$
- f) $-(1/2)^5$
- g) 3^0
- h) $(-1)^{15}$
- i) $(2/3)^0$
- j) $-(-1)^{10}$
- k) 3^{-2}
- l) $(2/3)^{-2}$
- m) $(-3)^{-2}$
- n) $(0,1)^{-2}$
- o) $5^{0,5}$
- p) $5^{3/2}$
- q) $2^{1,25}$
- r) $2^{-0,5}$
- s) $(3^{-1})^2$
- t) $((2^{0,5})^{-1})^2$

Após uma breve descrição da Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 2008, faremos uma análise *a priori* das atividades selecionadas para compor a nossa pesquisa. São 4 atividades que fazem parte do Caderno do Professor de Matemática da 1ª série do Ensino Médio, referentes ao 3º bimestre de 2008.

Esperamos que as atividades possam nos auxiliar na exposição do tema que envolve a Função Exponencial e com isso, desejamos que a partir de sua aplicação ocorra uma compreensão no contexto em que a função exponencial é apresentada.

Pretendemos, nesta análise, mencionar os objetivos da questão, os conteúdos e conhecimentos mobilizados pelos alunos, necessários para a resolução. Os conteúdos necessários para o aluno realizar essas atividades são: a potenciação com expoentes naturais, inteiros, racionais e reais, a noção de função, o comportamento relacionado às variáveis x (independente) e y (dependente), domínio e imagem, construção do gráfico da função, escalas dos eixos x e y , características do crescimento e decrescimento da função exponencial e a compreensão das variáveis dependentes e independentes.

Os gráficos ilustrados a seguir, foram construídos com o auxílio do Geogebra⁷, *software* de matemática dinâmica.

Atividade 1 – A1

Uma população N de micróbios cresce exponencialmente de acordo com a expressão $N = 5000 \cdot 3^t$ (t em horas).

a) Indique o valor de N para os seguintes valores de t :

a1) $t = 2$ h

a2) $t = 0,5$ h

a3) $t = (2/3)$ h

a4) $t = 1,25$ h

b) Esboce gráfico de N como função de t : $N = f(t)$

Figura 21: Situação de Aprendizagem 1 - Exercício 1.
Fonte: SÃO PAULO, 2008, p.15.

Análise da Atividade 1 – A1

A atividade é apresentada no registro de partida na língua natural e algébrico $N = 5000 \cdot 3^t$ (t em horas).

Para o item a), ao substituir o valor de t (a variável independente) na expressão algébrica, o aluno deverá ter conhecimento de potenciação com expoentes naturais, inteiros e racionais e saber que o valor de t deverá ficar no lugar da letra t .

⁷ Disponível no site http://www.geogebra.org/cms/index.php?com_frontpage&lang=pt&Itemid=1. Acesso em 22 de outubro de 2009.

Nesta atividade, verificamos que ao encontrar o valor da população N de micróbios, a relação entre a variável t (horas) e a expressão $N = 5000 \cdot 3^t$ é uma relação funcional.

A função aqui representada por $N = 5000 \cdot 3^t$ relaciona duas grandezas, N (população de micróbios) e o t (horas do crescimento da população).

Não há mudança de registro, o que encontramos na situação é um tratamento. Porém ao substituir o tempo (t), por exemplo no item a2, podemos utilizar a conversão do registro de uma potência de expoente decimal $3^{0,5}$ para o registro do número irracional $\sqrt{3}$, conforme a resolução dada no Caderno do Professor.

Podemos realizar essa conversão para os itens a3 e a4.

Entretanto, com o uso da calculadora científica é possível que por uma questão de procedimentos, os alunos efetuem os cálculos sem a necessidade de realizar a conversão de $3^{0,5}$ para $\sqrt{3}$.

Com a utilização da calculadora objetivamos trabalhar a função exponencial na forma em que aparece $3^{0,5}$, pois basta o aluno usar a tecla x^y neste caso e obter diretamente o valor de $3^{0,5}$.

As dificuldades apontadas nessa atividade poderão ser o cálculo das potências e suas representações (potências com números fracionários ou decimais).

Para o item b), temos a mudança do registro algébrico $N = f(t)$ ou seja, $N = 5000 \cdot 3^t$ para o registro gráfico. Esse gráfico é como o gráfico de $y = 3^t$, sendo cada ordenada y multiplicada por 5000.

Neste item ainda podemos admitir a possibilidade de analisar $N = 5000 \cdot 3^t$ como uma relação funcional.

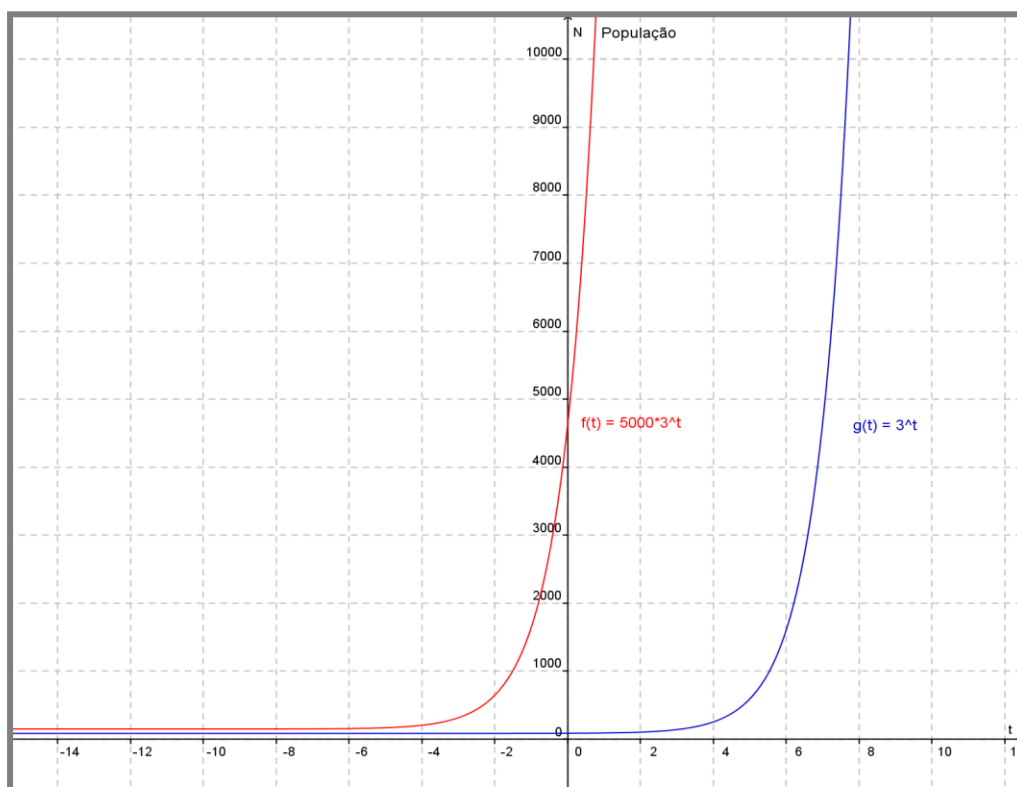


Figura 22: Gráfico de $f(t) = 5000 \cdot 3^t$ e $g(t) = 3^t$.

Podemos verificar nesse item as variações conjunta das variáveis dependente (N) e independente (t), os valores da variável dependente dados os valores da independente e verificar se os alunos são capazes de expressar “o crescimento rápido da população em pouco tempo”.

Também queremos verificar se as duplas reconhecem a Função Exponencial no registro algébrico e fazem a conversão para o registro gráfico. É possível que utilizem o registro de tabela para a resolução da atividade.

As dificuldades envolvidas neste item poderão ser a escala dos eixos x e y , pois envolve números na ordem dos milhares, talvez encontrem dificuldades porque quando trabalhamos com gráficos usualmente empregamos números na ordem das dezenas ou unidades, preferimos utilizar esses últimos, pois são representados com facilidade no sistema cartesiano ortogonal.

Uma possível resolução - Extraída do Caderno do Professor de Matemática p.15.

Calculando os valores de N , temos:

a1) $N = 5000 \cdot 3^2 = 5000 \cdot 9 = 45\,000$ micróbios;

a2) $N = 5000 \cdot 3^{0,5} = 5000 \cdot \sqrt{3} \cong 5000 \cdot 1,732 = 8\,660$ micróbios;

a3) $N = 5000 \cdot 3^{2/3} = 5000 \cdot \sqrt[3]{3^2} \cong 5000 \cdot 2,080 = 10\,400$ micróbios;

a4) $N = 5000 \cdot 3^{1,25} = 5000 \cdot 3^{5/4} \cong 5000 \cdot 3,948 = 19\,740$ micróbios

b) Esboce gráfico de N como função de t : $N = f(t)$

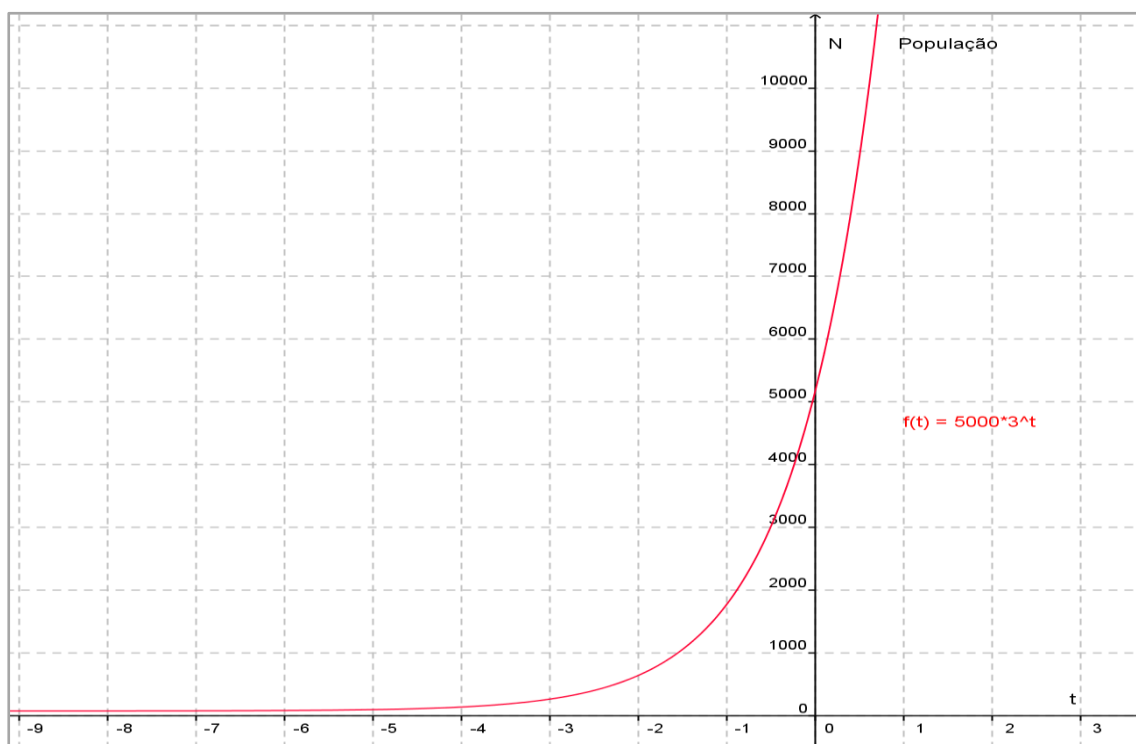


Figura 23: Gráfico de $N = f(t) = 5000 \cdot 3^t$.

Atividade 2 – A2

Em determinado país X , a produção de automóveis cresce em progressão geométrica, ano após ano, a partir do início do ano 2000, tendo aumentado 50% ao ano, desde então. Sabendo-se que em 2004 foram produzidos 162 000 automóveis, pergunta-se:

- a) Qual a quantidade produzida no ano 2000?
- b) Qual a produção estimada para o ano de 2010?

Figura 24: Situação de Aprendizagem 1 - Exercício 2.
Fonte: SÃO PAULO, 2008a, p.16

Análise da Atividade 2 – A2

A atividade 2 está no registro de partida da língua natural e no registro simbólico-numérico e é solicitada a mudança para a representação terminal no registro de chegada algébrico.

Podemos descrever a expressão algébrica da seguinte maneira:

$P(t) = P_0 \cdot (1,5)^t$, sendo P_0 a quantidade produzida no ano de 2000 e t (tempo).

Na atividade é solicitado o valor de P_0 que é um valor desconhecido. Para isso, esperamos que os alunos reconheçam e identifiquem que, na situação dada, o valor desconhecido pode ser determinado, pois sabemos o valor da produção de automóveis em determinado tempo, no caso $t = 4$.

Analisando à luz do modelo 3UV, podemos destacar aspectos referentes à simbolização, interpretação e manipulação das variáveis, presente na atividade.

Segundo Queiroz (2008a), a simbolização se caracteriza pela tradução de sentenças simples à linguagem algébrica para a resolução de problemas. Essa atividade requer a tradução do problema da língua natural em expressão algébrica.

Na interpretação da variável como termo desconhecido, tem-se o reconhecimento de um elemento simbólico, no caso o valor de P_0 .

E a manipulação é a utilização de diversos artifícios algébricos para se chegar à resolução.

No item b), é solicitado a produção estimada para o ano de 2010, utilizando-se dos valores encontrados do item a).

Provavelmente a dificuldade encontrada será a formulação da expressão algébrica.

A seguir uma possível resolução - Extraída do Caderno do Professor de Matemática p.16.

a) Qual a quantidade produzida no ano 2000?

Chamando a quantidade produzida em 2000 de P_0 , se a cada ano a produção aumenta em 50%, então, a cada ano, o valor inicial fica multiplicado por 1,50. Após t anos, o valor da quantidade produzida $P(t)$ será igual a:

$P(t) = P_0 \cdot (1,5)^t$. Sabendo-se que, em 2004, ou seja, que para $t = 4$, o valor da produção foi de 162 000 automóveis, resulta que:

$$162\,000 = P_0 \cdot (1,5)^4, \text{ ou seja,}$$

$$P_0 = \frac{162\,000}{(1,5)^4}.$$

Calculando a potência $(1,5)^4$, obtemos:

$$(1,5)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}.$$

$$\text{Segue que } P_0 = 162\,000 \cdot \left(\frac{16}{81}\right) = 32\,000 \text{ automóveis.}$$

b) Qual a produção estimada para o ano de 2010?

A produção estimada para o ano de 2010 é:

$$P(10) = 32\,000 \cdot (1,5)^{10} = 32\,000 \cdot \left(\frac{3^{10}}{2^{10}}\right) \cong 1\,845\,281 \text{ automóveis.}$$

Atividade 3 – A3

É possível construir o gráfico de uma função do tipo $f(x) = 2^{kx}$ de modo análogo ao de $y = 2^x$, quando k é positivo, ou ao de $y = 2^{-x}$, quando k é negativo. Nos dois casos ocorrerá apenas uma mudança na escala no eixo x . Para compreender tal fato, construa o gráfico de cada par de funções abaixo no mesmo sistema de coordenadas:

a) $y = 2^x$ e $y = 2^{3x}$

b) $y = 3^{-x}$ e $y = 3^{-0,5x}$

Figura 25: Situação de Aprendizagem 1 - Exercício 3.
Fonte: SÃO PAULO, 2008.p.16.

Análise da Atividade 3 – A3

A atividade encontra-se nos registros da língua natural e algébrico e para a sua resolução há a necessidade do aluno converter para os registros de chegada, os de tabela e gráfico. Podemos verificar nessa atividade como os alunos relacionam o gráfico da função quando o expoente do tipo kx , varia para k positivo ou negativo, sendo $k \in \mathbb{R}$.

Nesta atividade podemos explorar o crescimento e decrescimento da função a partir da relação expoente e base, ocorrendo uma relação funcional.

Sendo $a > 1$, e k positivo, quando o valor de x aumenta, o valor de a^x também aumenta, e a função $f(x) = a^x$ e $f(x) = a^{kx}$, será crescente.

Sendo $a > 1$, e k negativo, quando o valor de x aumenta, a função $f(x) = a^{-kx}$ será decrescente.

Neste caso temos uma situação em que o crescimento ou decrescimento da função está relacionado ao expoente kx .

A seguir uma possível solução - Extraída do Caderno do Professor de Matemática p.16.

a) $y = 2^x$ e $y = 2^{3x}$

Para construir o gráfico de $y = 2^x$ e de $y = 2^{3x}$, podemos escrever

$y = (2^3)^x = 8^x$. Os valores da seguinte tabela ajudam-nos a relacionar os dois gráficos a seguir:

x	-1	-2	0	1	2	3	4
2^x	1/2	1/4	1	2	4	8	16
$2^{3x} = 8^x$	1/8	1/64	1	8	64	512	4096

Os gráficos dessas funções são representados desta forma:

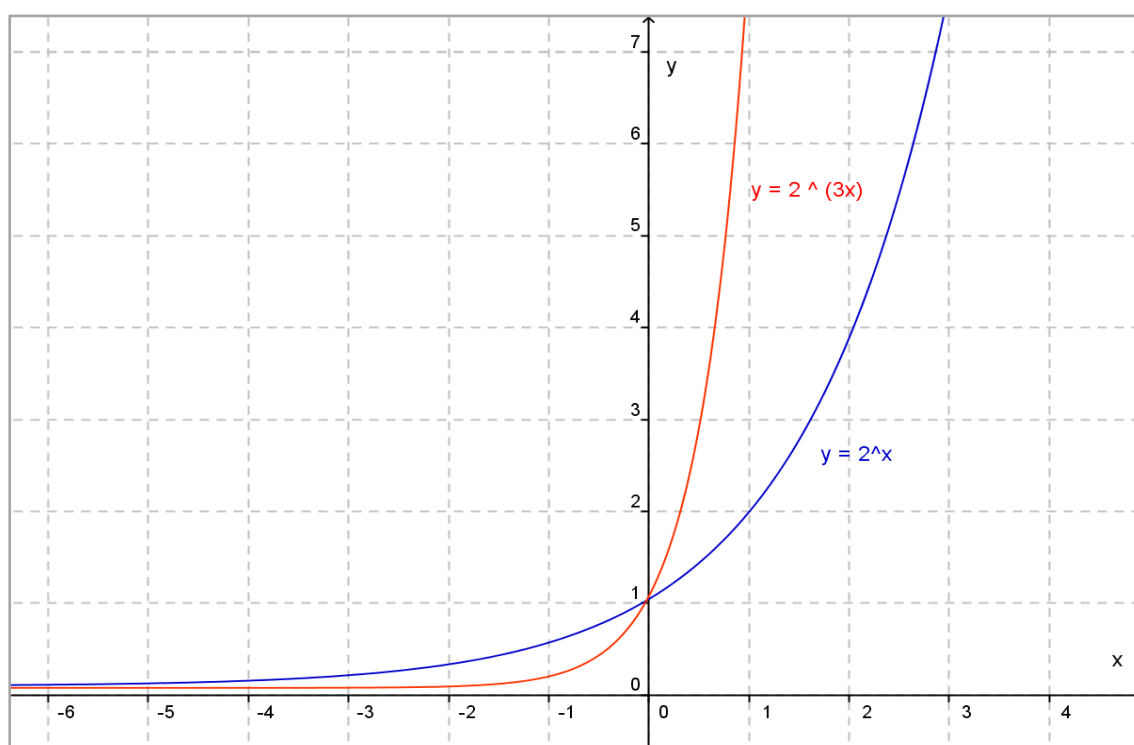


Figura 26: Gráficos das funções $y = 2^x$ e $y = 2^{3x}$.

b) $y = 3^{-x}$ e $y = 3^{-0,5x}$

De maneira análoga, para construir o gráfico de $y = 3^{-x}$ e $y = 3^{-0,5x}$, podemos escrever:

$$y = 3^{-x} = (3^{-1})^x = (1/3)^x$$

$$y = 3^{-0,5x} = ((3^{0,5})^{-1})^x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x.$$

Os gráficos dessas funções são representados desta forma:

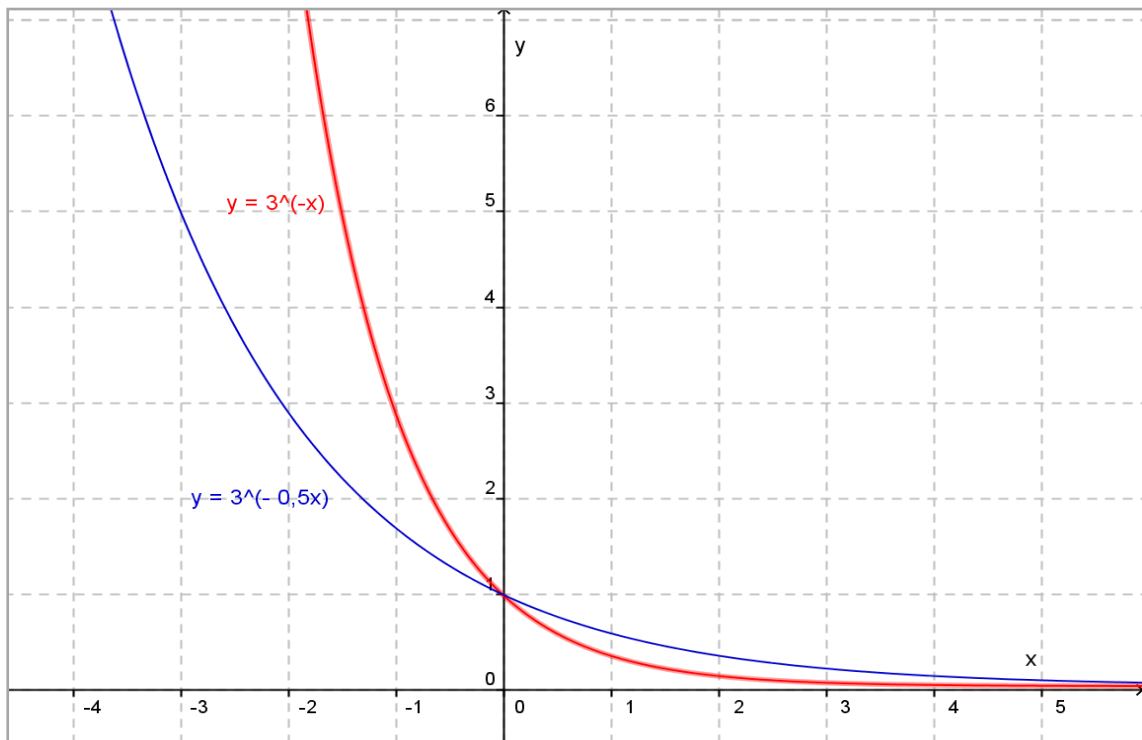


Figura 27: Gráficos das funções $y = 3^{-x}$ e $y = 3^{-0,5x}$.

Atividade 4

A população N de determinado município cresce exponencialmente, desde a sua fundação, há 20 anos, de acordo com a expressão

$$N = 3000 \cdot 10^{0,1t},$$

sendo t em anos.

Calcule

- O valor de N quando o município foi fundado ($t = 0$).
- O valor de N dez anos após a fundação.
- O valor de N nos dias atuais.
- Depois de quanto tempo, após a fundação, a população atingirá a marca de 3000000 de habitantes, se o ritmo de crescimento continuar assim?

Figura 28: Situação de Aprendizagem 1 - Exercício 4.
Fonte: SÃO PAULO, 2008.p.17

Análise da Atividade 4

A atividade está no registro de partida da língua natural e algébrico e é solicitado o tratamento da expressão algébrica $N = 3000 \cdot 10^{0,1t}$.

Nesta atividade, entendemos que o aluno deverá interpretar o que foi solicitado e substituir para cada item o tempo em que é fixado.

Para os itens a, b e c, o aluno deverá perceber como acontece o crescimento da população a partir do tempo $t = 0$, $t = 10$ e $t = 20$.

Entendemos que existe uma relação funcional do tempo (variável independente) com a população N do município (variável dependente) segundo o Modelo 3UV.

Já no item d, quando é solicitado para encontrar o N (população do município), temos um valor desconhecido que pode ser determinado considerando as condições do problema, ou a substituição da variável pelo valor que faz da expressão um enunciado verdadeiro.

A dificuldade encontrada poderá ser a interpretação do item c) em que se pede o valor nos dias atuais, pois se o aluno não entender que os dias atuais são equivalentes há 20 anos, conforme enunciado da atividade, poderá ficar em dúvida e pensar que se refere aos dias de hoje (data atual).

A seguir uma possível solução - Extraída do Caderno do Professor de Matemática p.18.

a) O valor de N quando o município foi fundado ($t = 0$)

Quando foi fundado, o município tinha uma população

$$N_0 = 3000 \cdot 10^0 = 3000 \text{ habitantes.}$$

b) O valor de N dez anos após a fundação.

Dez anos após a fundação, a população era igual a:

$$N_{10} = 3000 \cdot 10^{0,1 \cdot 10} = 3000 \cdot 10 = 30000 \text{ habitantes.}$$

c) O valor de N nos dias atuais.

O valor de N nos dias atuais ($t = 20$) é igual a:

$$N_{20} = 3000 \cdot 10^{0,1 \cdot 20} = 3000 \cdot 10^2 = 300\ 000 \text{ habitantes.}$$

- d) Depois de quanto tempo, após a fundação, a população atingirá a marca de 300 000 de habitantes, se o ritmo de crescimento continuar assim?

Para $N = 3\,000\,000$, devemos ter:

$3\,000\,000 = 3000 \cdot 10^{0,1t}$, ou seja, $10^{0,1t} = 1000$, de onde obtemos $0,1t = 3$, e, portanto, $t = 30$ anos.

4.5 Aplicação da atividade inicial – revisão de potências

A aplicação das atividades ocorreu em seis aulas de 50 minutos cada, uma no período da manhã entre os dias 18 e 26 de maio de 2008, para 14 alunos da 2ª série do Ensino Médio que foram convidados.

O convite foi realizado por meio de uma conversa que ocorreu entre a pesquisadora e o professor da turma. A pesquisadora conversou a respeito da pesquisa com o professor e ele mesmo se prontificou em fazer o convite aos alunos.

Depois da conversa conseguimos a participação de 14 alunos.

A princípio, tínhamos programado a realização das atividades entre os dias 18 e 25 de maio, mas devido a uma excursão a um dos parques de diversão da cidade de São Paulo promovida pela escola para o dia 22 de maio, a aplicação da nossa pesquisa foi concluída somente no dia 26 de maio de 2009.

Para cada encontro os alunos receberam a folha com as atividades propostas, as quais foram desenvolvidas em sete duplas.

O material utilizado pelos alunos foram as folhas de atividades xerocopiadas, caneta, lápis, borracha, régua e calculadora científica. Receberam, ainda o horário e o local (salas de aulas) em que seria realizada a pesquisa, pois os nossos encontros ocorreram em salas de aulas diferentes, pois dependíamos das salas vagas, desocupadas pelos alunos.

No primeiro encontro foi realizada uma revisão sobre o assunto de potências no dia 18 de maio de 2009.

O segundo encontro ocorreu no dia 19 de maio de 2009 em que foram realizadas as atividades referentes à revisão de potências, que denominamos de atividade inicial.

No dia 20 de maio de 2009 ocorreu o terceiro encontro.

Vale ressaltar que antes de aplicar a primeira atividade foi necessário dar orientações aos alunos sobre o manuseio da calculadora científica, pois optamos pelo seu uso devido os cálculos que seriam trabalhosos se efetuados à mão.

Solicitamos aos alunos que trouxessem calculadora científica, pois seria necessária para a realização da pesquisa, das sete duplas somente uma atendeu a solicitação. Muitos deles desconheciam esse tipo de calculadora. Mas nós já havíamos previsto esta situação e solicitamos antes aos nossos colegas professores o empréstimo das calculadoras, tínhamos duas e foi possível conseguir cinco calculadoras.

Nos demais, realizamos para cada encontro uma atividade e os que ocorreram as aplicações foram os dias 21, 25 e 26 de maio de 2009.

Fizemos observações e algumas anotações durante a sua realização.

Vale ressaltar que os alunos não tiveram auxílio no desenvolvimento das atividades.

Estavam presentes em sala de aula os 14 alunos e a pesquisadora.

4.6 Análise *a posteriori* das atividades

No primeiro encontro realizado para a aplicação das atividades, realizamos a revisão de potências de expoente natural, inteiro negativo e racional. A revisão foi realizada pela pesquisadora, utilizando a lousa e o uso do livro didático, que foi entregue aos alunos.

O encontro teve duração de 50 minutos e os 14 alunos participantes formaram duplas. A escolha das duplas foi realizada pelos alunos.

Já no início, um dos participantes perguntou se havia necessidade de anotar alguma coisa e falamos que isso ficaria a critério das duplas e que o nosso interesse naquele momento é que tivessem uma atenção para o conteúdo que estaríamos estudando, pois o mesmo seria utilizado nas atividades seguintes. Realizamos a revisão com aula expositiva, usando a lousa e o livro didático dado a cada dupla. Vale observar que o livro didático é o mesmo analisado em nossa pesquisa.

Optamos pelo seu uso em nossa explicação sobre a revisão de potências, pois o mesmo traz o assunto no início do capítulo sobre a função exponencial e achamos pertinente utilizá-lo para facilitar a nossa exposição, pois planejamos apenas um encontro para essa finalidade, e queríamos apenas lembrar os alunos das propriedades sem nos aprofundarmos no conteúdo. Dessa forma a revisão ocorreu de forma bem informal.

Durante a nossa exposição percebemos certa timidez por parte das duplas em perguntar, e incitamos as mesmas a perguntarem caso houvesse dúvidas.

Conforme íamos avançando na nossa explicação fazíamos perguntas. Em nossas observações nos pareceu que as duplas não tinham dúvidas quanto às potências de expoente natural e inteiro negativo, as dificuldades começaram a ser reveladas quando começamos a comentar sobre a potência com expoente racional.

Alguns dos alunos nos responderam dizendo que nunca tinham visto exercícios em que a potência tem um expoente fracionário e dessa forma o assunto de revisão de potências passou a ser um conteúdo novo para eles.

Percebemos a admiração e surpresa por parte de alguns quando transformamos uma potência de expoente fracionário em um número racional, por exemplo, $4^{3/2} = \sqrt[2]{4^3}$.

A respeito dessa situação, Paias (2009) aponta em sua pesquisa que o resultado das análises das respostas dos alunos indicou que grande parte deles, não tem o domínio da concepção sobre a operação potenciação; decorrendo disso, muitos a entendem como multiplicação, além disso, foi percebido que o aluno não domina a técnica de conversão de registros.

Esses resultados vêm ao encontro com o exemplo que citamos acima, em que ocorreu a mudança do registro de uma potência de expoente fracionário para o registro de um número racional.

Em continuação, seguimos a explicação do conteúdo e desta vez colocamos exemplos em que o expoente é decimal e mais uma vez o assunto causou surpresas, um aluno chegou a dizer: *“puxa e eu que achava que sabia potências”*, outro disse: *“professora, o professor do ano passado não ensinou isso ‘pra’ gente, acho que se fosse a senhora a gente tinha aprendido”*.

Percebemos que a revisão foi interessante para alguns que relataram ter aprendido naquele momento principalmente sobre as potências de expoente fracionário, também observamos que embora não fosse solicitado anotação, 3 das 7 duplas fizeram anotações em seus cadernos sobre o que tínhamos exposto.

Finalizamos o primeiro encontro e verificamos que os alunos já estavam bem mais descontraídos, ao contrário do início da aula em que se mostraram bem tensos e preocupados.

No segundo encontro, os alunos dispostos em duplas realizaram a atividade de revisão de potências, denominada atividade inicial.

O desenvolvimento da atividade durou aproximadamente 50 minutos.

Os alunos pareciam estar preocupados com o resultado das questões e logo que respondiam um item nos chamavam para perguntar se o que tinham feito estava correto, foi necessário comentar com eles que numa pesquisa buscamos analisar os dados obtidos por meio das respostas dadas, nos valendo também, dos caminhos pelo qual o aluno chegou à resposta, sendo esta certa ou errada, e ainda buscando a compreensão de como o aluno desenvolve o seu pensamento matemático para chegar ao resultado.

Nesse ponto, concordamos com Duval (2003) e acreditamos que é mais importante analisar os procedimentos que os alunos empregam por meio de uma abordagem cognitiva, do que simplesmente verificar se a questão está certa ou errada.

A originalidade de uma abordagem cognitiva não está em partir dos erros para tentar determinar as “concepções” dos alunos e a origem de suas dificuldades em álgebra, em decimais, neste ou naquele conceito geométrico etc. A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino. (DUVAL, 2003, p.12).

Feito esse comentário para as duplas percebemos certa tranquilidade e então não foi mais solicitada a nossa ajuda e não houve nenhuma intervenção da nossa parte, observamos também um envolvimento e interesse em realizar todos os itens da atividade que continha vinte itens em que solicitamos o valor das potências de expoente natural, inteiro, racional.

A seguir, apresentamos a análise dos protocolos dos alunos sobre a atividade inicial.

4.7 Análise da revisão sobre potências

Atividade inicial

Como já foi descrito, para as análises dos resultados sobre a revisão de potências nos basearemos na pesquisa de Paias (2009).

Vale ressaltar que é apenas a Questão 1 que se assemelha com a apresentada em nosso trabalho, mas só tivemos conhecimento desta pesquisa após termos aplicado nossa revisão de potências. Embora sejam parecidas em alguns aspectos, há uma diferença na solicitação da Questão.

A diferença se encontra no seu enunciado.

Paias (2009) enuncia a questão da seguinte maneira:

QUESTÃO 1 – Calcular o valor das potências e justificar as respostas, explicando como realizou a operação e o porquê do sinal.

A nossa questão está enunciada da seguinte maneira:

Revisão de potências – Calcule o valor das potências.

Com isso salientamos que nas análises não aparecem as justificativas, pois não foi exigido. A maioria das duplas respondeu os itens colocando apenas o resultado final.

Por não ser este o foco do nosso trabalho, a atividade foi dada apenas como uma revisão do conteúdo necessário para se estudar a Função Exponencial.

Para essa e as demais análises, chamaremos a primeira dupla de D1, a segunda de D2 e assim sucessivamente até a dupla D7.

Análise das respostas dos alunos – Atividade Inicial

Calcule o valor das potências

a) $(-5)^2$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
25	7	Todas	Resposta correta

b) -5^2

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
- 25	2	D2-D4	Resposta correta
25	5	D1-D3-D5-D6-D7	As duplas entendem que devem utilizar a regra de sinais, mas desconsideraram o sinal que acompanha o número

c) -4^3

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
-64	6	D2-D3-D4-D5-D6-D7	Resposta correta
-32	1	D1	Não efetuou o cálculo corretamente

d) $-(-4)^3$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
64	4	D3-D4-D6-D7	Resposta correta
-64	2	D2-D5	As duplas erraram a regra de sinais
-32	1	D1	Não efetuou o cálculo corretamente

e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
$\left(-\frac{1}{32}\right)$	6	D1-D2-D3-D5-D6-D7	Resposta correta
$\frac{1}{32}$	1	D4	A dupla efetua a operação de potenciação, mas não inclui o sinal negativo

f) $-\left(\frac{1}{2}\right)^5$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
$-\frac{1}{32}$	4	D2-D3-D4-D6	Resposta correta
$-\left(\frac{1}{32}\right)$	1	D5	Resposta correta. A dupla inclui os parênteses em sua resolução
$\frac{1}{32}$	2	D1-D7	As duplas erraram a regra de sinais, mas efetuam a operação de potenciação

g) 3^0

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
1	7	Todas	Resposta correta

h) $(-1)^{15}$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
-1	6	D2-D3-D4-D5-D6-D7	Resposta correta
-15	1	D1	A dupla efetua a multiplicação

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^0$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
1	7	Todas	Resposta correta

j) $-(-1)^{10}$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
-1	3	D2-D3-D4	Resposta correta
1	2	D6-D7	As duplas entendem que devem utilizar a regra de sinais, mas não reconhecem o uso dos parênteses, embora efetuem a operação de potenciação
$-(+1)$	1	D5	A dupla efetua a regra de sinais corretamente mas não elimina os parênteses
Branco	1	D1	

k) 3^{-2}

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
$\frac{1}{9}$	5	D2-D3-D4-D5-D6	Resposta correta
$-\frac{1}{9}$	1	D7	A dupla errou a operação com expoente negativo
Branco	1	D1	

$$l) \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
$\frac{9}{4}$	5	D2-D3-D4-D5-D6	Resposta correta
$\frac{4}{9}$	1	D1	A dupla não reconhece a operação com o expoente negativo
$\frac{1}{4/9}$	1	D7	A dupla reconhece a operação com expoente negativo mas não simplifica o resultado

$$m) (-3)^{-2}$$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
$\frac{1}{9}$	6	D2-D3-D4-D5-D6-D7	Resposta correta
Branco	1	D1	

$$n) (0,1)^{-2}$$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
100	3	D1-D2-D6	Resposta correta
$-\frac{1}{100}$	1	D7	As duplas erraram a operação de potenciação com base decimal e expoente negativo
$\frac{1}{20}$	1	D3	
$-\frac{1}{10}$	1	D4	
$\frac{1}{0,1}$	1	D5	

o) $5^{0,5}$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
$\sqrt{5}$	2	D6-D3	Resposta correta
$\frac{1}{2}$	1	D7	A dupla errou a operação de potenciação de número inteiro e expoente decimal
Branco	4	D1-D2-D4-D5	

p) $5^{3/2}$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
$\sqrt[2]{125}$	2	D2-D4	Resposta correta
$\sqrt[2]{5^3}$	4	D3-D1-D6-D7	Resposta correta indicada de forma não simplificada
Branco	1	D5	

q) $2^{1,25}$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
$\sqrt[4]{32}$	1	D2	Resposta correta
$\sqrt[4]{2^5}$	1	D6	Resposta correta indicada na forma não simplificada
$\frac{1}{50}$	1	D7	As duplas erraram a operação de potenciação de número inteiro e expoente decimal
$\frac{5}{4}$	1	D1	
Branco	3	D3-D4-D5	

r) $2^{-0,5}$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	D2	Resposta correta
$\sqrt[5]{2^{10}}$	1	D3	A dupla não considerou o expoente negativo
$\frac{1}{4}$	1	D6	As duplas erraram a operação de potenciação de números inteiros e expoente decimal negativo
$\frac{1}{5}$	1	D7	
Branco	3	D1-D4-D5	

s) $(3^{-1})^2$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
$\frac{1}{9}$	4	D2-D3-D5-D6	Resposta correta
-9	1	D7	A dupla não reconhece o expoente negativo
Branco	2	D1-D4	

t) $((2^{0,5})^{-1})^2$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
2	1	D2	As duplas erraram a propriedade de potência de potência
$\sqrt{2}$	1	D6	
$-\frac{1}{25}$	1	D7	
$\left(\left(\sqrt[5]{2^{10}}\right)^{-1}\right)^2$	1	D3	A dupla não conclui a resposta
Branco	3	D1-D4-D5	

O diagnóstico nos mostrou que alunos encontram dificuldades no cálculo das potências que são representadas com a base negativa sem a colocação de

parênteses. Isso ocorre no item b) da atividade em que temos $-5^2 = -25$, observamos que no exercício não constam parênteses, e como resposta 5 duplas responderam que o resultado é 25.

Podemos deduzir que as duplas pensaram da seguinte maneira: potências de base negativa e expoente par, o resultado é positivo, potências de base negativa e expoente ímpar, o resultado é negativo.

Para justificar a nossa suposição, verificamos que todas as duplas acertaram o item a) em que temos $(-5)^2 = 25$, e 6 duplas acertaram o item c) que é $-4^3 = -64$.

Provavelmente isso ocorreu pelo fato de que uma potência de base negativa e expoente ímpar têm sempre o resultado negativo, independente se esta tem em sua representação os parênteses ou não, é o caso também do item e) $(-1/2)^5 = -1/32$ e o item f) $-(1/2)^5 = -1/32$

Verificamos que a forma de representar potências com ou sem parênteses em determinadas situações causa certa confusão para os alunos.

Observamos que no item k), a dupla D7 apresenta a resposta errada com sinal negativo, mas acerta o item l) e m) com sinal positivo. Analisando as respostas, os itens acertados são apresentados entre parênteses, é provável que este aspecto tenha contribuído para a resolução da dupla.

Analisamos ainda que, para o item s) ocorreu mais acertos do que para o item r). Acreditamos que essa diferença seja pelo fato de existir no item s) apenas expoentes inteiro, ao contrário do item r) que se tem o expoente decimal negativo.

Em continuação queremos destacar algumas anotações importantes realizadas pelas duplas

No geral, não tiveram dificuldades relacionadas aos itens k) a m) em que temos potências de expoentes inteiros negativos.

Apenas o item n) em que a base é um número decimal, 4 duplas não souberam responder corretamente.

Os itens com maiores acertos pelas duplas foram os de potências com expoentes inteiros positivos.

Os erros mais cometidos foram quando calculavam a potência de:

- Número decimal e expoente inteiro negativo – item n);
- Número inteiro positivo e expoente decimal – itens o e q);
- Número inteiro positivo e expoente decimal negativo – item r);
- Número inteiro positivo e expoente decimal, inteiro positivo e negativo – item t).

Nesse último item as duplas deveriam utilizar uma das propriedades de potências, no caso potência de potência.

Para os itens de potências de expoentes racionais, tivemos poucos acertos, apenas 2 duplas realizaram o item o), que é $5^{0,5} = \sqrt{5}$, 4 duplas que não realizaram e uma dupla que respondeu incorretamente.

As duplas que tiveram melhores desempenhos foram as duplas D1 e D5.

Vale ressaltar que não foi utilizada a calculadora nesta atividade, o seu uso seria permitido a partir da atividade posterior, que incluem as questões selecionadas do Caderno do Professor de Matemática da 1ª série do Ensino Médio, referente ao 3º bimestre de 2008, documento integrante da nova Proposta Curricular para o Estado de São Paulo de 2008.

Estavam presentes em sala de aula os alunos e a pesquisadora.

4.8 Análise das Atividades 1, 2, 3 e 4

As atividades que compõem a nossa pesquisa dizem respeito ao tema de Potenciação e Função Exponencial. Estas atividades têm como objetivo investigar se o aluno compreende potências e suas propriedades e as características da Função Exponencial nos diferentes registros de representação.

As atividades apresentam o registro de partida da língua natural, algébrico, tabular e gráfico.

Esperávamos que os alunos realizassem o cálculo das potências solicitado na atividade inicial e que efetuassem as mudanças nos registros de representação semiótica solicitados nas demais questões, ocorrendo os

procedimentos necessários de conversão entre os diferentes registros e o reconhecimento da Função Exponencial.

4.8.1 Análise *a posteriori* da Atividade 1

Para esta atividade, os alunos formaram duplas e o tempo para o seu desenvolvimento foi de aproximadamente de 50 minutos incluindo o tempo em que receberam orientações sobre o uso das teclas y^x e a sua segunda função $\sqrt[x]{\quad}$ e as teclas correspondentes aos parênteses () da calculadora científica.

Para ensinar como utilizar as teclas acima descritas, realizamos alguns exemplos na lousa para elucidação dos alunos.

Este foi o modelo da calculadora científica utilizada nas atividades e os exemplos dados.

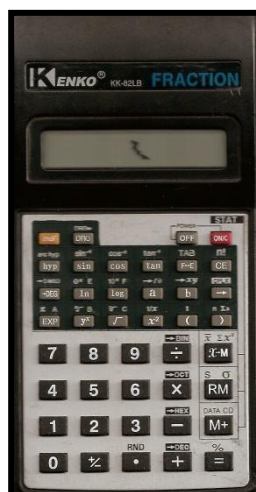


Figura 29: Calculadora Científica

1º Exemplo

Calcular o valor da potência 2^5 .

Utilizando a calculadora temos:

1. Tecla 2;
2. Tecla y^x ;
3. Tecla 5;
4. Tecla = ;

Resultado igual a 32.

2º Exemplo

Calcular o valor da potência $4^{0,5}$.

1. Tecla 4;
2. Tecla y^x ;
3. Tecla 0 (zero);
4. Tecla . (ponto);
5. Tecla 5;
6. Tecla = ;

Resultado igual a 2.

3º Exemplo

Calcular o valor da potência $5^{4/3}$.

Para realizar $5^{4/3}$ na calculadora é necessário o uso dos parênteses.

Utilizando as teclas para calcular $5^{4/3}$ que na calculadora é $5^{(4/3)}$ temos:

1. Tecla 5;
2. Tecla y^x ;
3. Tecla (;
4. Tecla 4;
5. Tecla \div ;
6. Tecla 3;
7. Tecla) ;
8. Tecla = ;

Resultado igual a 8,549879733

4º Exemplo

Calcular $\sqrt[3]{5^4}$

1. Tecla 5;
2. Tecla y^x ;
3. Tecla 4;
4. Tecla = ;
5. Tecla 2ndF (segunda função da calculadora);
6. Tecla $\sqrt[x]{\quad}$;

7. Tecla 3 ;

8. Tecla = ;

Resultado igual a 8,549 879 733.

Optamos pelo uso da calculadora por considerarmos que facilitaria nas operações com cálculos envolvendo potências com expoentes racionais e irracionais, pois isso poderia ser um dos obstáculos dos alunos na resolução das atividades.

Após a explicação dos exemplos acima, as duplas iniciaram a atividade.

Esta atividade foi realizada por duplas separadas e durante o seu processo de resolução não puderam contar com a ajuda da pesquisadora (que no primeiro momento pareceu ser uma situação não agradável) e não tiveram acesso a nenhum material referente ao assunto.

Percebemos que as duplas esperavam que ocorresse a nossa intervenção, mas dissemos que isso não seria possível, pois prejudicaria nas análises dos resultados.

Orientamos as duplas a realizarem a leitura da atividade proposta e descreverem sua resolução.

Na resolução do item a), conforme previsto na análise *a priori*, não há mudança de registro, o que encontramos na situação é um tratamento no registro algébrico.

A atividade é apresentada no registro da língua natural e também no registro algébrico por meio da expressão $N = 5000 \cdot 3^t$, em que ao substituir valores de t encontra-se o valor da população N de micróbios, conforme os itens a1), a2), a3) e a4).

Considerando o Modelo 3UV de Ursini et al (2005), temos nesta atividade uma situação em que a variável se encontra representada por meio de uma expressão algébrica no caso (do item a) e (no item b), por meio de tabela e gráfico, em que percebemos a relação funcional.

A seguir os resultados encontrados para a Atividade 1.

Análise da Atividade 1 – item a)

a1) $t = 2h$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
45 000	7	Todas	Resposta correta

Na resolução do item a1), as duplas não tiveram dúvidas para trabalhar com o expoente natural e responderam de forma correta.

a2) $t = 0,5h$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
8660	3	D1-D4-D6	As duplas realizam o cálculo de $N=5000.1,732$
8660,25	2	D2-D3	As duplas realizam o cálculo de $N=5000.3^{0,5}$
8650	2	D5-D7	As duplas realizam o cálculo de $N=5000.1,73$

Encontramos entre as respostas $N=8650$, $N=8\ 660$ e $N=8\ 660,25$.

A resposta de 8660 foi dada pelas duplas D1, D4 e D6.

Verificamos que a dupla D6 utilizou o valor da potência $3^{0,5}$ com três casas decimais resultando no número 1,732 que substituindo fica $N=5000.1,732=8660$.

Embora as duplas D1 e D4 tenham respondido com o mesmo valor, quando questionados sobre como tinham encontrado o valor, cada dupla separadamente teve respostas semelhantes.

Disseram que a resposta na calculadora era um número em que apareceram muitas casas decimais 8 660,254 038, então decidiram utilizar somente o número inteiro igual a $N=8660$.

Vale observar que as duplas não realizaram conversão do registro $3^{0,5}$ para $\sqrt{3}$ conforme a resolução sugerida no Caderno do Professor de Matemática. Acreditamos que isso se deve à utilização da calculadora, que possibilita a realização do cálculo diretamente, sem necessidades de conversões.

Vejamos a resolução da dupla D6 na figura seguinte.

ATIVIDADE 1

Uma população N de micróbios cresce exponencialmente de acordo com a expressão $N = 5000 \cdot 3^t$ (t em horas).

a) Indique o valor de N para os seguintes valores de t :

a1) $t = 2 \text{ h} = N = 5000 \cdot 3^2 = N = 5000 \cdot 9 = N = 45.000$

a2) $t = 0,5 \text{ h} = N = 5000 \cdot 3^{0,5} = N = 5000 \cdot 1,732 = N = 8.660$

a3) $t = (2/3) \text{ h} = N = 5000 \cdot 3^{2/3} = N = 5000 \cdot 2,080 = N = 10.400,41$

a4) $t = 1,25 \text{ h} = N = 5000 \cdot 3^{1,25} = N = 5000 \cdot 3,9482 = N = 19.741,1019$

Figura 30: Protocolo da Atividade 1, item a) realizada pela dupla D6.

Em seguida, analisamos a resposta dada pelas duplas D2 e D3.

As duplas D2 e D3 responderam o valor de $N=8660,25$.

Também procuramos saber o motivo da resposta de cada dupla e mais uma vez cada uma das duplas respondeu separadamente que após efetuar o cálculo na calculadora, o valor de $N=8660,254038$ foi aproximado para $8660,25$.

A dupla D3 disse que até pensou em escrever o número $8660,254038$ mas achou que seria “muito grande” colocá-lo dessa forma então preferiram escrever somente $N=8660,25$.

Analisando a resposta da D5 e D7, verificamos que ao substituírem o valor $t = 0,5$ na expressão $N=5000 \cdot 3^t$, as duplas utilizaram como resultado da potência $3^{0,5}$, o valor aproximado de $1,73$, concluindo dessa forma que $N=5000 \cdot 1,73 = 8650$, conforme a figura seguinte.

ATIVIDADE 1

Uma população N de micróbios cresce exponencialmente de acordo com a expressão $N = 5000 \cdot 3^t$ (t em horas).

a) Indique o valor de N para os seguintes valores de t :

a1) $t = 2 \text{ h} = N = 5000 \cdot 3^2 = 5000 \cdot 9 = 45.000 //$

a2) $t = 0,5 \text{ h} = N = 5000 \cdot 3^{0,5} = 5000 \cdot 1,73 = 8650 //$

a3) $t = (2/3) \text{ h} = N = 5000 \cdot 3^{2/3} = 5000 \cdot 2,08 = 10400 //$

a4) $t = 1,25 \text{ h} = N = 5000 \cdot 3^{1,25} = 5000 \cdot 3,94 = 19700 //$

Figura 31: Protocolo da Atividade 1 item a) realizada pela dupla D7.

Depois de analisar todas as respostas, consideramos corretas por corresponder a valores aproximados.

a3) $t = (2/3)h$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
10 400	2	D5-D7	As duplas realizam o cálculo $N = 5000 \cdot 2,08$
10 400,41	1	D6	A dupla realiza o cálculo $N = 5000 \cdot 2,080$
9665,9	1	D2	A dupla realiza o cálculo $N = 5000 \cdot 3^{0,6}$
7937	1	D1	A dupla não efetua o cálculo adequadamente
7,937	1	D4	A dupla não efetua o cálculo adequadamente
2,08	1	D3	A dupla indica apenas o valor aproximado de $3^{2/3}$

As duplas D5, D6 e D7 responderam adequadamente.

A dupla D2 não respondeu adequadamente, efetuou o seguinte cálculo;

Em primeiro lugar, fez a divisão do expoente da potência $3^{2/3}$,

obtendo $2 \div 3 = 0,6$.

Utilizaram a expressão $N=5000.3^{0,6}$ para chegar ao valor de 9665,9.

As duplas D1 e D4 também não responderam corretamente esse item.

Já a dupla D3 escreveu em sua resposta $N = 2,08$.

Analisando a resposta, verificamos que o erro consistiu em não multiplicar o número 2,08 por 5000.

a4) $t = 1,25h$

Respostas Apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
19 741,1	1	D2	Resposta correta
19741,11	1	D3	
19741,11019	1	D6	
19,741	1	D4	A dupla apresentou o resultado errado devido a posição da vírgula
19700	2	D5-D7	As duplas não efetuam o cálculo adequadamente
19,941	1	D1	A dupla não efetua o cálculo adequadamente

As duplas D2 , D3 e D6 responderam corretamente com $N=19741,1$; $N=19741,11$ e $N=19741,11019$ respectivamente, observamos que nenhuma dupla indicou a unidade.

Observamos que a diferença está na quantidade de casas decimais que cada dupla utilizou.

As duplas D1, D4, D5 e D7 não responderam corretamente.

Pelo resultado da dupla D4, observamos que o erro foi na colocação da vírgula. É provável que tenha se confundido no momento dos seus cálculos.

Em nossa análise *a priori* tínhamos apontado dificuldades para essa atividade referente aos cálculos das potências e suas representações na forma

fracionária, decimal ou racional, porém o que observamos foi que as duplas não enfrentaram muitas dificuldades.

Entendemos que a calculadora foi um recurso pedagógico que facilitou os cálculos e em consequência, as duplas acertaram a maioria dos itens.

Análise da Atividade 1 - item b)

O objetivo para esse item é verificar se as duplas reconhecem a Função Exponencial no seu registro algébrico e realizam a conversão para o registro gráfico, podendo utilizar o registro de tabela como um meio para se chegar ao registro gráfico.

A respeito do registro de tabela, Dominoni (2005) descreve que:

Este tipo de registro usa de uma disposição espacial que contém elementos de dois conjuntos representados por linhas e colunas formando uma tabela. Para que uma tabela seja representativa de uma Função Exponencial, ela deve incorporar as propriedades desta função. A Função Exponencial não está no desenho da tabela, mas sim na relação estabelecida entre duas variáveis x e y . Para que possamos identificar Função Exponencial nesta tabela, devemos perceber além dos pares ordenados, as relações entre as variáveis, analisando as regularidades que ocorrem nesta relação. (p.39).

O item b), as duplas deveriam construir o gráfico de N em função de t .

A seguir os resultados encontrados.

Resultados – Atividade 1 item b)

Duplas	Registro de tabela/Relação Funcional	Registro gráfico/Relação Funcional	Análise
D1	Realizou o registro incorretamente. Valores da variável dependente não correspondem à variável independente.	O gráfico apresentado não corresponde ao gráfico da função $N = 5000 \cdot 3^t$. Não foi reconhecida a correspondência entre as variáveis relacionadas.	Ocorreu a conversão do registro de tabela para o registro gráfico, no entanto a construção do gráfico está incorreta. É provável que os cálculos errados no registro de tabela resultaram na construção errada do gráfico. Não ocorreu de forma correta a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.
D2	Realizou o registro corretamente. Determinou o valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.	O gráfico apresentado se assemelha a uma reta. Não realizaram adequadamente a correspondência entre as variáveis relacionadas para a função $N = 5000 \cdot 3^t$.	Ocorreu a conversão do registro de tabela para o registro gráfico, no entanto a construção do gráfico está incorreta. Não ocorreu de forma correta a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.
D3	No registro de tabela, encontramos um erro quando $x = -1$. Valores da variável dependente não correspondem à variável independente.	O gráfico apresentado se assemelha a uma função exponencial. Não realizaram adequadamente a correspondência entre as variáveis relacionadas para a função $N = 5000 \cdot 3^t$.	Ocorreu a conversão entre o registro de tabela para o registro gráfico, no entanto, não representaram a função corretamente. Não ocorreu de forma correta a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.
D4	Realizou o registro corretamente para as duas funções. Determinou o valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.	Apresentou o gráfico das funções corretamente. Foi reconhecida a correspondência entre as variáveis relacionadas.	Ocorreu a conversão entre o registro de tabela para o gráfico. Ocorreu de forma correta a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.

D5	<p>Realizou o registro de tabela utilizando valores não correspondentes. Valores da variável dependente não correspondem à variável independente.</p>	<p>O gráfico apresentado se assemelha à uma reta. Não realizaram adequadamente a correspondência entre as variáveis relacionadas para a função $N = 5000 \cdot 3^t$.</p>	<p>Ocorreu a conversão do registro de tabela para o registro gráfico, no entanto a construção do gráfico está incorreta. Não ocorreu de forma correta a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.</p>
D6	<p>Realizou o registro corretamente para as duas funções. Determinou o valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.</p>	<p>O gráfico apresentado se assemelha à uma função exponencial. Não realizaram adequadamente a correspondência entre as variáveis relacionadas para a função $N = 5000 \cdot 3^t$.</p>	<p>Ocorreu a conversão entre o registro de tabela para o registro gráfico, no entanto, não representaram a função corretamente. Não ocorreu de forma correta a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.</p>
D7	<p>Realizou o registro corretamente para as duas funções. Determinou o valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.</p>	<p>Apresentou o gráfico das funções corretamente. Foi reconhecida a correspondência entre as variáveis relacionadas.</p>	<p>Ocorreu a conversão entre o registro de tabela para o gráfico. Ocorreu de forma correta a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.</p>

Quadro 5: Resultado da A1, item b)

Analisando os resultados das duplas verificamos que:

A dupla D1 utilizou o registro de tabela para se chegar ao registro gráfico.

Verificamos que os resultados obtidos na tabela para N não correspondem aos valores atribuídos t , conforme a Figura a seguir:

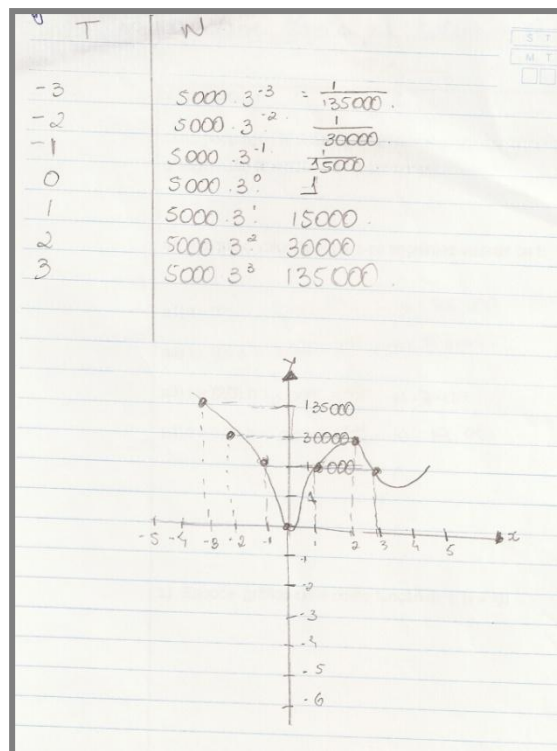


Figura 32: Protocolo da Atividade 1, item b) realizada pela dupla D1.

Conforme a resolução da dupla D1, observamos na Figura 32 que os cálculos errados na tabela resultaram também na construção errada do gráfico.

Interrogamos a dupla D1 com relação a tabela e nos explicaram como foram realizaram os cálculos.

Perguntamos por que tinham escolhidos os números -3, -2, -1, 0, 1, 2 e 3 para t , então responderam que sempre quando fazem gráficos utilizam geralmente esses números, pois são importantes para a construção do gráfico, pois estão próximo da origem zero (com isso queriam dizer a respeito da origem do sistema cartesiano ortogonal).

Podemos inferir dessa resposta que a dupla tem uma concepção criada pelo professor em suas aulas a respeito da construção da tabela, dizendo que sempre utilizam esses números por acharem que esses pontos facilitam a construção do gráfico.

Ainda a respeito da tabela, perguntamos sobre o valor obtido. Queríamos uma explicação para o resultado atingido, bem como o caminho por eles utilizado, então um dos alunos da dupla respondeu:

“Eu tenho cinco mil vezes três elevado a menos três ($5000 \cdot 3^{-3}$), isso é igual a multiplicar cinco mil por vinte sete e o resultado dá o numero cento e trinta e cinco mil, daí eu inverteo esse valor porque o expoente é -3”.

Por exemplo, para $t = -3$; encontraram como resposta $N = \frac{1}{135000}$.

Responderam que multiplicaram 5000 por 27 (resultado da potência 3^{-3}), concluindo que, como tem o expoente negativo, deveriam escrever o inverso do número 135000.

De fato, observamos que utilizaram esse raciocínio para os demais valores, com a diferença que não empregaram desta vez o cálculo da potência como ocorreu no caso em que $t = -3$, mas multiplicaram 5000 pelo número 3 (base da potência 3^{-2}) e desse resultado, multiplicaram então pelo expoente da mesma, e em seguida fizeram o inverso do resultado.

Descrevendo o que a dupla D1 realizou.

Para $t = -2$, multiplicaram 5000 por 3 (base da potência de 3^{-2}), resultando em 15000, depois multiplicaram 15000 por 2 (expoente da potência 3^{-2}), e finalizam a resolução com o inverso do resultado $N = \frac{1}{30000}$.

Esse raciocínio foi utilizado para os valores de $t = -1, 1$ e 2 .

Para $t = 0$, consideraram somente o valor da potência 3^0 igual a 1.

Para $t = 3$, multiplicaram 5000 por 27, resultando em 135000.

Ao passar esses valores para o sistema cartesiano ortogonal, a dupla D1 construiu um gráfico que não corresponde ao gráfico da Função Exponencial.

A dupla D2, utilizou os valores 0, 1, 2 e 3 para t , encontrando os valores de 5000, 15000, 45000, e 135000 respectivamente.

t	$3^0 = 1$	$5000 \cdot 1 = 5000$
0	$3^1 = 3$	$5000 \cdot 3 = 15000$
1	$3^2 = 9$	$5000 \cdot 9 = 45000$
2	$3^3 = 27$	$5000 \cdot 27 = 135000$
3		

Figura 33: Protocolo da Atividade 1, item b) tabela realizada pela dupla D2.

Podemos observar que utilizaram escalas diferentes para os eixos x e y, mas não realizaram adequadamente a correspondência entre os pares ordenados, desse modo não representaram o gráfico corretamente, este se assemelha mais à uma reta do que uma curva exponencial.

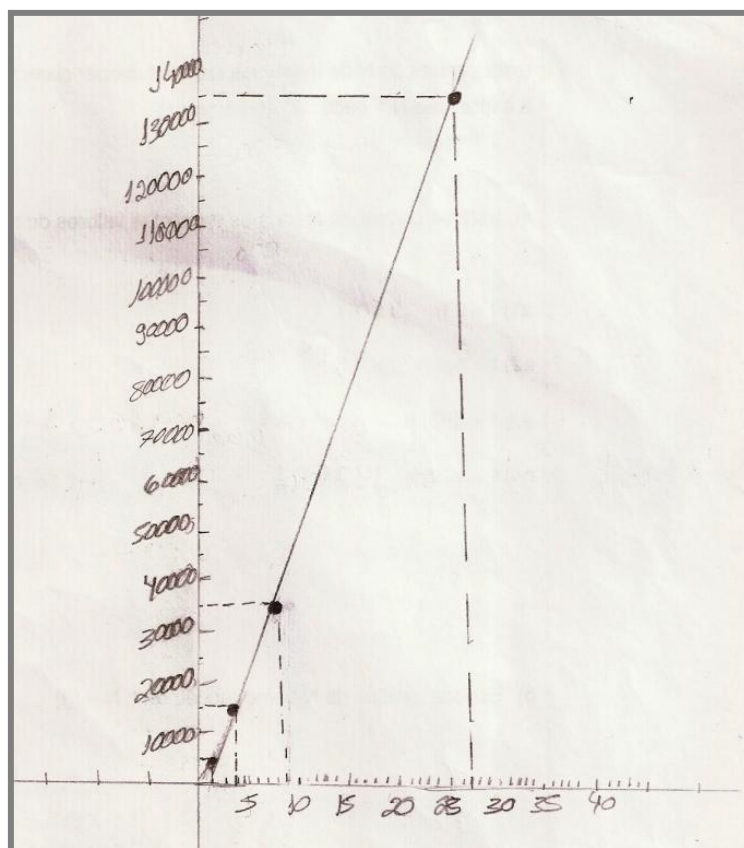


Figura 34: Protocolo da Atividade 1, item b), gráfico realizado pela dupla D2.

A dupla D3 construiu uma tabela para a função 3^t , uma coluna de valores -2, -1, 0, 1 e seus respectivos $1/9, 1/6, 1, 3$ e 9, observamos que há um erro para o valor $1/6$, o correto é $1/3$.

Na construção do gráfico não indicaram corretamente os eixos do sistema cartesiano ortogonal. O eixo y foi denominado de t e o eixo x de ficou sendo x .

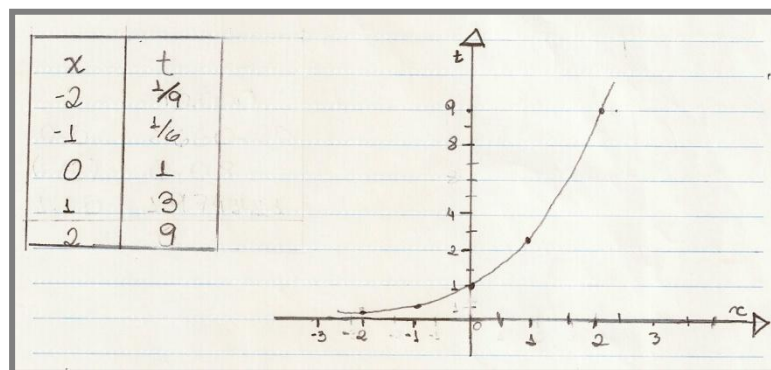


Figura 35: Protocolo da Atividade 1, item b) realizado pela dupla D3.

Podemos deduzir que faltou a compreensão no emprego das variáveis t e N no sistema cartesiano ortogonal e também a representação correta da função solicitada.

Podemos verificar mais uma vez que as duplas encontraram dificuldades em representar adequadamente a função solicitada por meio da tabela e gráfico.

As duplas D4 e D7 realizaram corretamente esse item.

A dupla D5 utilizou valores (do item a), não correspondente com os valores de x indicados na tabela.

x	y	Resultado
1	$5.000 \cdot 3^2$	45.000
2	$5.000 \cdot 3^{1,5}$	8.650
3	$5.000 \cdot 3^{2/3}$	10.400
4	$5.000 \cdot 3^{1,25}$	19.700

Figura 36: Protocolo da Atividade 1, item b) tabela realizada pela dupla D5.

Verificamos que a dupla utiliza as variáveis x e y no lugar de t e N , mas não há uma correspondência entre os valores escolhidos para x e o resultado dado na tabela.

A dupla D6 realizou o registro de tabela corretamente.

Pela construção do gráfico, constatamos que se tem a noção do gráfico da função exponencial solicitada, porém, um dos pares ordenados encontrado por meio do registro de tabela não foi colocado adequadamente no sistema cartesiano ortogonal e há erros de escala para o eixo y (variável N).

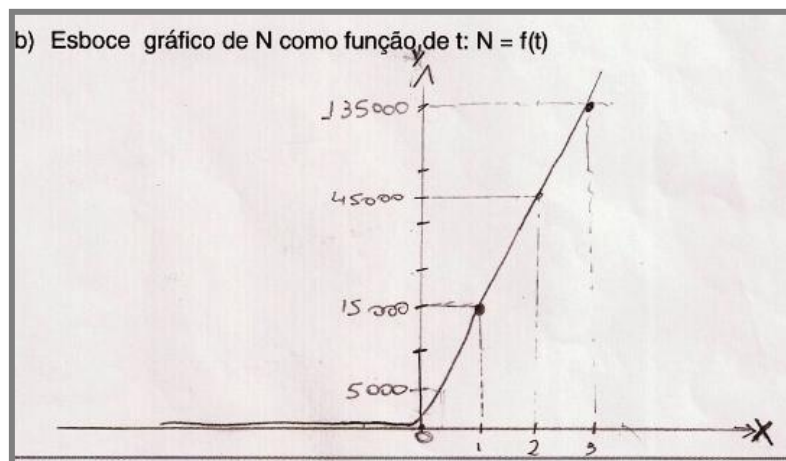


Figura 37: Protocolo da Atividade 1, item b) gráfico realizado pela dupla D6.

A partir das análises dos protocolos das atividades podemos em síntese apontar os erros e avanços cometidos nas resoluções das duplas.

Na análise apontamos erros no cálculo de potências com expoentes fracionários ou decimal, erro no registro de tabela resultando na confecção errada do gráfico (D1); o gráfico se assemelha a uma reta (D2); não compreensão do emprego das variáveis t e N no sistema cartesiano ortogonal (D3); valores não correspondentes com os indicados no registro de tabela (D5) e erros na escala do eixo y (D6).

Verificamos avanços no que se refere à conversão do registro de tabela para o registro gráfico nos protocolos das duplas (D4) e (D7).

4.8.2 Análise *a posteriori* da Atividade 2

A atividade 2 aconteceu no quarto encontro no dia 21 de maio de 2008 e conservamos as mesmas sete duplas. O tempo para essa atividade foi de 50 minutos e durante a aplicação estavam presentes os sujeitos da pesquisa e a pesquisadora.

Vale ressaltar que não houve intervenções por parte da pesquisadora para o desenvolvimento da atividade que teve como objetivo verificar se as duplas seriam capazes de fazer a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico.

O registro algébrico é expresso, na maioria das vezes, por letras e se utiliza de operações entre os coeficientes numéricos e variáveis de tal maneira que possa representar a relação entre as variáveis.

De acordo com as respostas dadas, observamos que todas as duplas encontraram dificuldades nesta atividade, pois nenhuma dupla conseguiu realizá-la corretamente.

Resultado da Atividade 2, item a)

Respostas apresentadas	Números de respostas	Duplas	Análise
10 125	2	D6-D7	A dupla efetua sucessivas divisões partindo do valor de 162 000 correspondente ao ano de 2004 até chegar no valor para o ano de 2000.
40 500	4	D1-D2-D3 D4	<p>A dupla D1 não aponta seus cálculos, apenas escreve que a quantidade produzida para o ano de 2000 é 40500.</p> <p>A dupla D2 efetua a divisão de 162 000 por 4.</p> <p>A dupla D3 efetua a multiplicação de 40500 por 4.</p> <p>A dupla D4 apresenta somente o resultado.</p>
Branco	1	D5	

Quadro 6: Resultado da A2, item a).

Resultado da Atividade 2, item b)

Respostas apresentadas	Números de respostas	Duplas	Análise
405000	3	D2-D3-D4	As duplas efetuaram a multiplicação de 40500 por 10.
648000	2	D1 – D5	A dupla D1 efetuou a multiplicação de 81000 por 6, em seguida realizou a adição de 486000 com 162000. A dupla D5 apresentou para o ano de 2010 o valor de 64800, embora a resposta final fosse de 648000 acrescentado de um comentário que o valor foi aumentado de 50%.
10 368 000	1	D7	A dupla descreve que o valor de 5184000 referente a 2009, foi acrescido de 50%, resultando o valor de 10368000 para o ano de 2010.
1 298 155 359	1	D6	A dupla apresentou vários cálculos a partir do valor de 162000, efetuando adições e divisões, chegando ao valor dado para o ano de 2010.

Quadro 7: Resultado da A2, item b).

Mesmo assim acreditamos ser pertinente comentar alguns procedimentos obtidos para a resolução realizados pelas duplas.

Apresentamos a seguir os protocolos da atividade realizada.

a) Qual a quantidade produzida no ano 2000?

$2000 = 10.125$ $162.000 \div 2 = 81.000$
 $2000 = 10.125$ $81.000 \div 2 = 40.500$
 $2000 = 10.125$ $40.500 \div 2 = 20.250$
 $2000 = 10.125$ $20.250 \div 2 = 10.125$

Dividimos 162.000 pelo método 4 vezes para chegar ao resultado do ano 2000.

Figura 38: Protocolo da Atividade 2, item a) realizado pela dupla D6.

b) Qual a produção estimada para o ano de 2010

$1,298,155,359$ automóveis
 $162.000 \div 2 + 162.000 = 243.000$
 $243.000 \div 2 + 243.000 = 364.500$
 $364.500 \div 2 + 364.500 = 546.750$
 $546.750 \div 2 + 546.750 = 820.125$

$8,201.25 \div 2 + 8,201.25 = 12,301,875$
 $12,301,875 \div 2 + 12,301,875 = 1,298,155,359$

1, 298 155,359
2010

Dividimos 162.000 pelo método e somamos mais ele mesmo.

Figura 39: Protocolo da Atividade 2, item b) realizado pela dupla D6.

A dupla D6 conforme a Figuras 38 e 39 resolveu o item a e b) partindo de sucessivas divisões até chegar ao valor pretendido.

A dupla descreve que valor de 162000 foi dividido pela metade quatro vezes para se chegar ao resultado do ano de 2000.

Pela resolução da dupla percebemos que acreditavam que ao dividir por dois o valor dado, encontrariam o valor esperado e seguiram o mesmo raciocínio para o item seguinte só que desta vez, dividiram o valor de 162 000 por dois somando a ele mesmo, conforme a descrição da dupla.

A dupla D7 também utilizou as divisões para se chegar ao resultado.

a) Qual a quantidade produzida no ano 2000?

A quantidade produzida no ano de 2000 foi de 10.125 automóveis

$$162.000 \div 2 = 81.000 \text{ em } 2008$$

$$81.000 \div 2 = 40.500 \text{ em } 2002$$

$$40.500 \div 2 = 20.250 \text{ em } 2001$$

$$20.250 \div 2 = 10.125 \text{ em } 2000$$

b) Qual a produção estimada para o ano de 2010

no ano de 2009 foi 5.184.000 de carros produzidos. Então $5.184 + 50\% = 10.368.000$ no ano de 2010

A produção estimada para o ano de 2010 com o crescimento de 50% ao ano chegaria ao total de 10.368.000 de automóveis

Figura 40: Protocolo da Atividade 2, itens a) e b) realizados pela dupla D7.

No encontro, realizado após a aplicação das atividades, pedimos à dupla que comentasse sobre a resolução do item b).

A dupla comentou que chegou ao valor de 5 184000 carros produzidos no ano de 2009 por meio de várias divisões do número de carros que já existiam em 2004, depois disso somaram o valor 5 184000 (correspondente ao 2009) mais cinquenta por cento, totalizando um valor de 10368000 automóveis.

Observamos que não efetuou o cálculo corretamente, pois 50% (aumento da produção anual) para a dupla foi o mesmo que multiplicar o valor de 5 184000 por 2, conforme o que está registrado na Figura 40.

Verificamos que a dupla teve dificuldades quanto ao cálculo da produção de carros, pois não soube utilizar os valores dados corretamente, e também no que diz respeito ao cálculo de porcentagem.

A dupla D3 para achar a quantidade produzida no ano de 2000 realizou o seguinte procedimento:

Para o item a), mostrou que 40500 multiplicado por 4 resulta no valor de 162 000, então a resposta para 2000 é 40500 automóveis.

a) Qual a quantidade produzida no ano 2000?

$$\begin{array}{r} 40500 \\ \times 4 \\ \hline 162000 \end{array} = 40500$$

Figura 41: Protocolo da Atividade 2, item a) realizado pela dupla D3.

Para o item b) utilizou o valor de 40500 encontrado para o ano de 2000 e multiplicou por dez, encontrando o valor de 405000 para o ano de 2010.

b) Qual a produção estimada para o ano de 2010

$$\begin{array}{r} 40500 \\ \times 10 \\ \hline 405000 \end{array}$$

Figura 42: Protocolo da Atividade 2, item b) realizado pela dupla D3.

A dupla D5 não respondeu o item a).

Para o item b), adicionou o valor de 81000 (que corresponde a cinquenta por cento de 162000) para o ano de 2004 obtendo assim o valor de 24300 para o ano de 2005, em seguida realizou o mesmo procedimento, adicionou 81000 a 24300 obtendo 32400, e assim sucessivamente até chegar ao resultado de 64800 que corresponde ao ano de 2010.

Embora a resposta seja 648000, aconteceram erros referentes aos valores dados. Observamos que a dupla não percebeu que 81000 somado ao valor 162000 é igual a 243000, e não 24300 como descrito na figura seguinte.

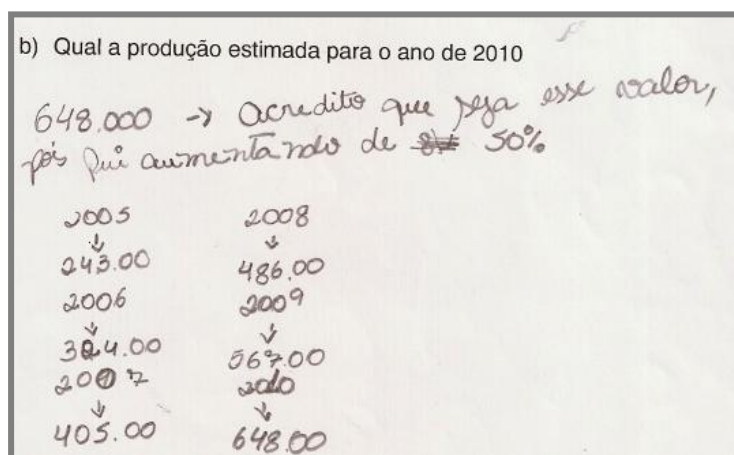


Figura 43: Protocolo da Atividade 2, item b) realizado pela dupla D5.

Verificamos que a dupla D5 utilizou o valor fixo de 81000 como sendo cinquenta por cento e aplicou aos anos de 2005 a 2010.

O que podemos verificar nesta atividade foi à falta de compreensão de todas as duplas para se chegar ao registro algébrico, pois nenhuma delas descreveu uma expressão algébrica, ao contrário, buscaram por meio de vários cálculos de divisões ou multiplicações chegarem à solução.

Essa atividade nos permite inferir que uma das dificuldades apontadas pelas duplas reside na mudança do registro da língua natural para o registro algébrico.

Também, não encontraram na situação dada, o valor desconhecido que era possível determiná-lo por meio do valor da produção de automóveis dada no enunciado.

Conforme o Modelo 3UV, não ocorreu a simbolização, que é a tradução do problema da língua natural para uma expressão algébrica.

Também não ocorreu a interpretação, que é quando se tem o reconhecimento de um elemento simbólico, no caso o valor de P_0 , e a manipulação quando se utiliza de diversos artifícios algébricos para se chegar à resolução.

Em síntese podemos deduzir que ocorreram dificuldades na conversão do registro da língua natural e simbólico-numérico para o registro algébrico, de modo que não conseguiram determinar o valor desconhecido (P_0).

Uma das soluções encontradas nos protocolos foi a de resolver a atividade efetuando sucessivas divisões ou multiplicações para o valor de 162000 automóveis.

Observamos que o ocorreu o previsto na análise *a priori* da atividade que foi concluir a questão no registro algébrico.

4.8.3 Análise *a posteriori* da Atividade 3

A atividade 3 aconteceu no quinto encontro no dia 25 de maio de 2008 e conservamos as mesmas duplas. O tempo para essa atividade foi de 50 minutos, e durante a aplicação estavam presentes os sujeitos da pesquisa e a pesquisadora.

Neste encontro tivemos a ausência de um dos alunos da dupla D4, mas o aluno presente da dupla não se incomodou em realizar sozinho a atividade.

Não houve intervenções por parte da pesquisadora para o desenvolvimento da atividade.

Esta atividade teve como objetivo verificar se as duplas construiriam o gráfico a partir de informações de uma situação problema proposta no registro da língua natural, com a possibilidade de empregar o registro de tabela finalizando com a construção gráfica.

Dominoni (2005) descreve que o registro gráfico é um tipo de representação que envolve o sistema cartesiano ortogonal, em que estão dispostos dois eixos ortogonais Ox e Oy , que tem a mesma origem O (zero). No plano cartesiano localizamos pontos, realizamos construções geométricas como linhas e curvas, que representam, por exemplo, uma função.

A seguir apresentamos os resultados da Atividade 3.

Resultados – Atividade 3 item a)

Duplas	Registro de tabela/Relação Funcional	Registro gráfico/Relação Funcional	Análise
D1	<p>Realizou o registro corretamente para as duas funções.</p> <p>Determinou o valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.</p> <p>Apenas um erro encontrado para $y = 2^{3x}$ quando $x = 0$.</p>	<p>O gráfico é apresentado por duas curvas que se assemelham à função exponencial, porém encontramos uma escala inadequada, principalmente para valores de y menores que 1. Não foi reconhecida a correspondência entre as variáveis relacionadas.</p>	<p>Ocorreu a conversão do registro de tabela para o registro gráfico, no entanto, encontramos falta de rigor na escala dos eixos x e y para o registro gráfico.</p> <p>Não ocorreu de forma correta a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.</p>
D2	<p>Realizou o registro corretamente para as duas funções.</p> <p>Determinou o valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.</p>	<p>Apresentou o gráfico da função $y = 2^x$ corretamente.</p> <p>Para o gráfico da função $y = 2^{3x}$, a dupla escreveu que não sabe fazer a proporção do gráfico. (Fig 46).</p> <p>Foi reconhecida a correspondência entre as variáveis relacionadas para a função $y = 2^x$.</p>	<p>Ocorreu a conversão do registro de tabela para o registro gráfico apenas para a função $y = 2^x$.</p> <p>Ocorreu de forma correta a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.</p>
D3	<p>Realizou o registro corretamente para as duas funções.</p> <p>Determinou o valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.</p>	<p>Não apresentou o registro gráfico e não foi reconhecida a correspondência entre as variáveis relacionadas.</p>	<p>Não ocorreu a conversão entre o registro de tabela para o registro gráfico e nem a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.</p>

D4	<p>Realizou o registro corretamente para as duas funções.</p> <p>Determinou o valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.</p>	<p>Apresentou o gráfico das funções corretamente.</p> <p>Foi reconhecida a correspondência das variáveis relacionadas para as funções $y = 2^x$ e $y = 2^{3x}$.</p>	<p>Ocorreu a conversão entre o registro de tabela para o gráfico.</p> <p>Ocorreu de forma correta a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.</p>
D5	<p>Realizou o registro corretamente para as duas funções.</p> <p>Determinou o valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.</p>	<p>Não apresentou o registro gráfico e não foi reconhecida a correspondência entre as variáveis relacionadas.</p>	<p>Não ocorreu a conversão entre o registro de tabela para o registro gráfico e nem a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.</p>
D6	<p>Realizou o registro corretamente para as duas funções.</p> <p>Determinou o valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.</p>	<p>Apresentou o gráfico da função $y = 2^x$ corretamente.</p> <p>Para o gráfico da função $y = 2^{3x}$, a dupla errou na localização das coordenadas.</p> <p>Foi reconhecida a correspondência entre as variáveis relacionadas para a função $y = 2^x$.</p>	<p>Ocorreu a conversão do registro de tabela para o registro gráfico apenas para a função $y = 2^x$.</p> <p>Ocorreu de forma correta a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.</p>
D7	<p>Realizou o registro corretamente para as duas funções.</p> <p>Determinou o valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.</p>	<p>O gráfico é apresentado por duas curvas que se assemelham à função exponencial, no entanto, encontramos erros na localização dos pontos devido a escala inadequada.</p> <p>Não foi reconhecida a correspondência entre as variáveis relacionadas.</p>	<p>Ocorreu a conversão do registro de tabela para o registro gráfico, no entanto, encontramos erros na escala dos eixos x e y para o registro gráfico.</p> <p>Não ocorreu de forma correta a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.</p>

Quadro 8: Resultado da A3, item a)

Resultados – Atividade 3 item b)

Duplas	Registro de tabela/Relação Funcional	Registro gráfico/Relação Funcional	Análise
D1	<p>Realizou o registro corretamente para as duas funções. Determinou o valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.</p>	<p>O gráfico é apresentado por duas curvas, uma crescente e outra decrescente. Não foi reconhecida a correspondência entre as variáveis relacionadas.</p>	<p>Ocorreu a conversão do registro de tabela para o registro gráfico, no entanto, as construções dos gráficos estão erradas, além da escala do eixo y estar inadequada. Não ocorreu a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.</p>
D2	<p>Realizou o registro corretamente para as duas funções. Determinou o valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.</p>	<p>Não apresentou o registro gráfico e não foi reconhecida a correspondência entre as variáveis relacionadas.</p>	<p>Não ocorreu a conversão entre o registro de tabela para o registro gráfico e nem a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.</p>
D3	<p>Não realizou o registro de tabela. Não ocorreu a determinação do valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.</p>	<p>Não apresentou o registro gráfico e não foi reconhecida a correspondência entre as variáveis relacionadas.</p>	<p>Não ocorreu a conversão entre o registro de tabela para o registro gráfico e nem a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.</p>
D4	<p>Realizou o registro corretamente para as duas funções. Determinou o valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.</p>	<p>Não apresentou o registro gráfico e não foi reconhecida a correspondência entre as variáveis relacionadas.</p>	<p>Não ocorreu a conversão entre o registro de tabela para o registro gráfico e nem a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.</p>

D5	<p>Não realizou o registro de tabela. Não ocorreu a determinação do valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.</p>	<p>Não apresentou o registro gráfico e não foi reconhecida a correspondência entre as variáveis relacionadas.</p>	<p>Não ocorreu a conversão entre o registro de tabela para o registro gráfico e nem a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.</p>
D6	<p>Realizou o registro incorretamente para as duas funções. Valores da variável dependente não correspondem à variável independente.</p>	<p>Os gráficos apresentados não correspondem as funções solicitadas. Não foi reconhecida a correspondência entre as variáveis relacionadas.</p>	<p>Ocorreu a conversão do registro de tabela para o registro gráfico, no entanto, as construções dos gráficos estão erradas. Não ocorreu a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas.</p>
D7	<p>Realizou o registro corretamente para as duas funções. Determinou o valor da variável dependente, dados os valores correspondentes à variável independente.</p>	<p>O gráfico é apresentado por duas curvas que se assemelham à função exponencial decrescente, no entanto, encontramos erros nos pontos localizados no gráfico da função $y = 3^{-0,5x}$.</p>	<p>Ocorreu a conversão do registro de tabela para o registro gráfico, no entanto, encontramos falta de rigor na escala dos eixos x e y para o registro gráfico. Ocorreu de forma correta a representação e a simbolização da relação funcional entre as variáveis envolvidas para a função $y = 3^{-x}$.</p>

Quadro 9: Resultado da A3, item b)

A dupla D1 realizou o registro de tabela corretamente para as duas funções do item a).

Dos valores indicados na tabela encontramos apenas um erro para a função $y = 2^{3x}$, quando $x = 0$, a dupla respondeu como resultado 2, sendo o valor correto 1. Conforme o que foi descrito, a dupla indicou o resultado da multiplicação do expoente $3 \cdot 0$ como sendo 1, ou seja, $y = 2^{3 \cdot 0} = 2^0 = 1$.

É possível que tenham confundido o valor do produto do expoente da potência 2^{3x} com sendo 1 e efetuado o resultado da potência como sendo resultado 2.

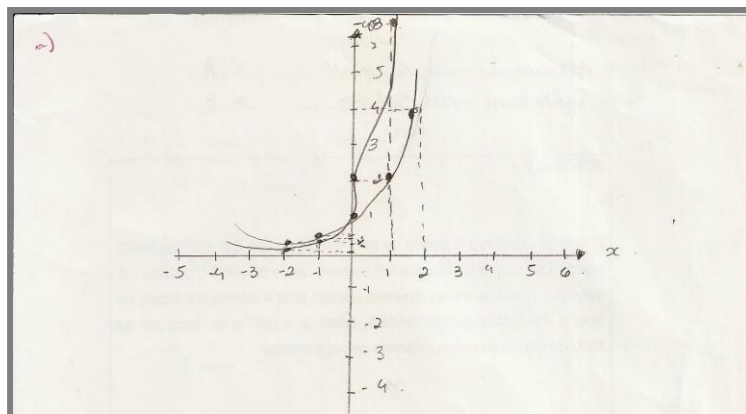


Figura 44: Protocolo da Atividade 3, item a) realizado pela dupla D1.

Ao analisarmos o gráfico construído percebemos que a dupla não identifica as funções $y = 2^x$ e $y = 2^{3x}$, não utiliza uma escala adequada para os gráficos, principalmente para os valores de y menores que 1 e que a construção do gráfico não está correta.

Para o item b) a dupla construiu uma tabela adequada, porém seu gráfico não foi construído corretamente.

Encontramos erros semelhantes ao do item a), como a escala inadequada e a própria construção dos gráficos; uma função como sendo decrescente e outra crescente, sendo que os dois gráficos são de funções decrescentes.

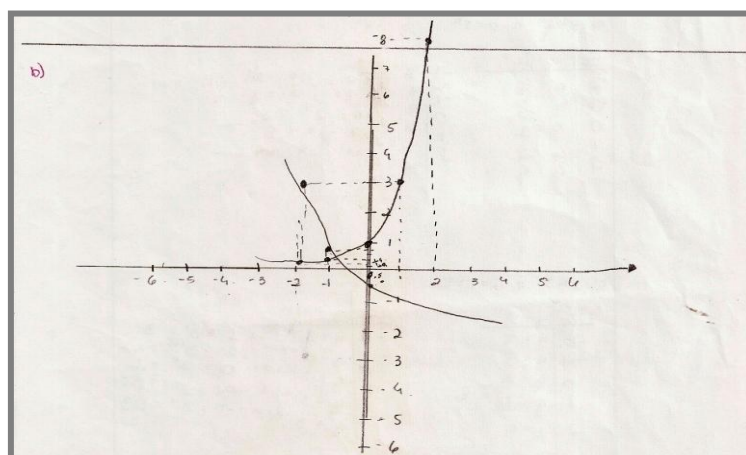


Figura 45: Protocolo da Atividade 3, item b), realizado pela dupla D1.

Já a dupla D2 construiu corretamente as duas tabelas para as respectivas funções $y = 2^x$ e $y = 2^{3x}$ e realizou a construção do gráfico da função $y = 2^x$

corretamente e para a função $y = 2^{3x}$ escreveu a seguinte observação conforme a figura abaixo.

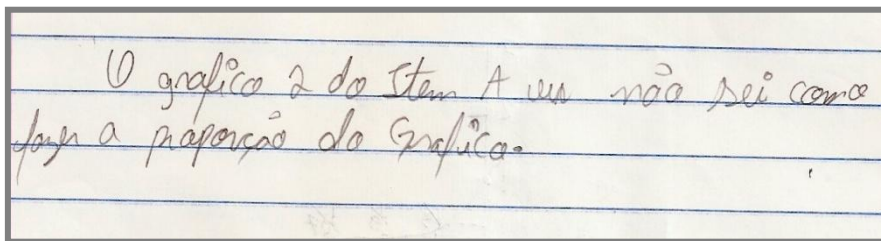


Figura 46: Protocolo da Atividade 3, item b), realizado pela dupla D2.

A dupla D3 construiu somente as tabelas do item a).

Observamos durante a realização da atividade que a dupla não estava bem concentrada na mesma, pareciam estar preocupadas com uma situação externa e conversavam entre si de forma quase silenciosa para não chamar atenção das outras duplas e da pesquisadora.

Quando perguntamos o motivo pelo qual não realizaram a atividade, responderam que não estavam bem naquele dia para participar da pesquisa.

Como descrevemos anteriormente, um dos integrantes da dupla D4 faltou, mas mesmo assim a atividade foi realizada apenas por um aluno.

O aluno presente da dupla D4 construiu corretamente o registro de tabela das funções referentes ao item a) e em seguida construiu os dois gráficos corretamente no mesmo sistema de coordenadas planas.

Também construiu as tabelas corretamente do item b), porém não construiu os gráficos.

Perguntamos por que não construiu os gráficos, então respondeu que não conseguiu fazer porque estava sozinho e que levou muito tempo para fazer os primeiros gráficos do item a), disse que se estivesse com o outro aluno era bem provável que terminaria a atividade.

A dupla D5 realizou somente o registro de tabela para as duas funções do item a), e indicou o sistema de coordenadas planas.

Também interrogamos a dupla acerca da atividade incompleta, responderam que sem a nossa ajuda estava difícil de fazer os gráficos.

A dupla D6 construiu e indicou os gráficos no sistema de coordenadas planas, no entanto ocorreram erros na localização das coordenadas que descreve a função $y = 2^{3x}$.

Para o item b), pelos cálculos realizados para a tabela, percebemos que utilizaram a calculadora, no entanto os resultados encontrados não correspondem aos gráficos das funções solicitadas, conforme a figura abaixo.

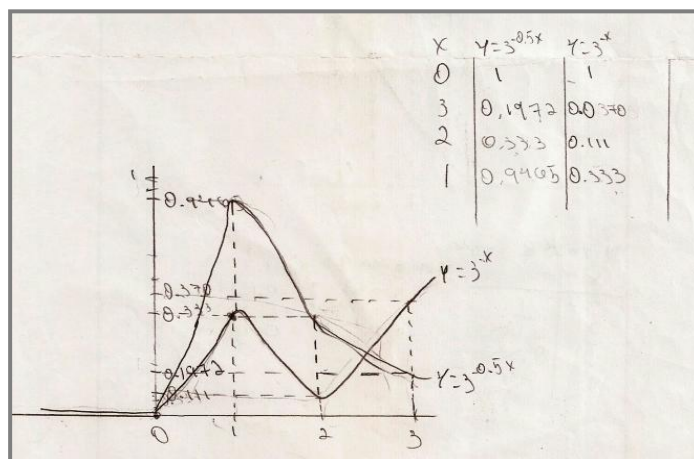


Figura 47: Protocolo da Atividade 3, item b), realizado pela dupla D6.

A dupla D7 foi a que mais se aproximou da resolução correta, porém encontramos erros que fizeram com que seus gráficos não correspondessem as funções solicitadas.

Foi a única dupla que percebeu que o item a) tratava de funções crescentes e o item b) de funções decrescentes.

Observamos de modo geral, que as conversões foram na maioria mediadas pelo registro de tabela. Esta é uma situação que se mostrou evidente na atividade realizada pelas duplas, uma vez que utilizaram as tabelas para chegar ao registro gráfico.

Percebemos também que os valores dados para x na confecção da tabela variam entre -2, -1, 0, 1, 2 e 3 para maioria das duplas;

Os erros cometidos nas tabelas fizeram com que a construção dos gráficos ficassem inadequadas.

Também verificamos erros na escala dos eixos do sistema cartesiano ortogonal, as duplas pareceram não se importar muito com esse detalhe, mesmo usando a régua para a construção do plano cartesiano.

Outro fator que observamos por meio das análises e que parecem ter dificuldades em construir o gráfico da função exponencial e o seu reconhecimento quando são crescentes ou decrescentes.

Em resumo, nesta atividade, as duplas não tiveram dificuldades em realizar o registro de tabela, porém foram encontradas irregularidades no registro gráfico, falta de identificação das funções, escalas inadequadas para o eixo x e y e erros na localização de pontos pertencentes ao gráfico da função.

Nesta atividade somente a duplas (D2) e (D4) realizaram o registro gráfico corretamente para o item a).

4.8.4 Análise *a posteriori* da Atividade 4

A atividade 4 aconteceu no sexto encontro no dia 26 de maio de 2008, e o tempo para o seu desenvolvimento foi de 50 minutos.

Como nos encontros anteriores, não houve intervenções por parte da pesquisadora para o desenvolvimento da atividade.

Estavam presentes as mesmas duplas (sujeitos da pesquisa) e a pesquisadora.

O objetivo desta atividade é a realização do tratamento no registro algébrico, ou seja, o tratamento consiste em transformar a representação do objeto matemático conservando o próprio registro em que ela foi tomada, sendo essa transformação interna a um registro.

Esta atividade contém itens em que solicitam a população N para determinados tempo t em anos, e um item em que solicita o tempo em que a população atingirá o número de habitantes pedido.

Verificamos que as duplas não tiveram dificuldades em responder ao item a) em que se pede o valor da população N quando o município foi fundado sendo $t = 0$.

Vale ressaltar que as duplas tiveram o auxílio da calculadora para efetuarem os cálculos.

Para os itens a), b) e c) as duplas deveriam substituir os valores do tempo t (variável independente) na expressão algébrica $N = 3000 \cdot 10^{0,1t}$ para encontrar o número da população N (variável dependente).

Resultado da A4, item a)

Respostas apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
3000	6	D1-D3-D4-D5-D6-D7	Resposta correta
3776,7	1	D2	A dupla calculou $N=3000 \cdot 10^{0,1}$.

Quadro 10: Resultado da A4, item a).

As duplas não encontraram dificuldades para o item a), apenas a dupla D2 não respondeu corretamente, seu resultado foi de 3776,7 habitantes.

Pelo resultado obtido da dupla D2, verificamos que realizaram o seguinte procedimento: com o auxílio da calculadora, efetuaram o cálculo da potência $10^{0,1}$, sendo que o valor obtido foi multiplicado por 3000, resultando em $N = 3776,7$.

O erro da dupla consistiu em não realizar a multiplicação do expoente da potência $10^{0,1}$ por zero.

Resultado da A4, item b)

Respostas apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
30 000	2	D2 – D7	A dupla D2 calculou $3000 \cdot 10^{0,1 \cdot 10} = 3000 \cdot 10^{1,0}$ A dupla D7 calculou $N=3000 \cdot 10^1$ $N=3000 \cdot 10$
3.13	2	D1 – D3	As duplas calcularam $N=3000 \cdot 10^{10}$ e apontaram a resposta por meio da notação científica
3300	1	D5	A dupla calculou $N=3000 \cdot 10^{10} = 3000 \cdot 1 \cdot 10$
300 000	1	D4	A dupla calculou $N=3000 \cdot 10^{10}$
3 000 000 000 000	1	D6	A dupla calculou $N=3000 \cdot 10^{10}$ $N=3000 \cdot 10\ 000\ 000\ 000$

Quadro 11: Resultado da A4, item b)

Para o item b), apenas as duplas D2 e D7 responderam corretamente.

Analisando as questões respondidas, verificamos que as cinco duplas ao substituir o $t = 10$, parecem não ter notado a necessidade de multiplicar o expoente da potência $10^{0,1t}$ por 10, observamos que em todas as respostas colocaram $N=3000 \cdot 10^{10}$ conforme exemplificado:

b) O valor de N dez anos após a fundação.

$$N = 3000 \cdot 10^{10} = 300000$$

Figura 48: Protocolo da Atividade 4, item b), realizado pela dupla D4.

b) O valor de N dez anos após a fundação.

$$3000 \cdot 10^{10} = 3000 \cdot 1.10 = 3300$$

Figura 49: Protocolo da Atividade 4, item b), realizado pela dupla D5.

b) O valor de N dez anos após a fundação.

$$N = 3000 \cdot 10^{10}$$

$$N = 3000 \cdot 1000000000000$$

$$N = 3000000000000000$$

Figura 50: Protocolo da Atividade 4, item b), realizado pela dupla D6.

Isso nos leva a pensar que os erros podem ter sido cometidos por falta de atenção, pois a variável t deve ser multiplicada pelo coeficiente 0,1 e isso não foi levado em conta.

Resultado da A4, item c)

Respostas apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
300 000	1	D7	Resposta correta A dupla realizou o cálculo $N = 3000 \cdot 10^2$ $N = 3000 \cdot 100$
3.23	2	D1 – D3	As duplas calcularam $N = 3000 \cdot 10^{20}$ e apontaram a resposta por meio da notação científica
3600	1	D5	A dupla calculou $3000 \cdot 10^{20} = 3000 \cdot 1,20$
60 000	1	D2	A dupla calculou $3000 \cdot 10^{0,1 \cdot 20} = 3000 \cdot 10^{2,0}$
3000×10^{24}	1	D6	A dupla apenas deixou indicado
3 000 000 000 000	1	D4	A dupla calculou $N = 3000 \cdot 10^9$

Quadro 12: Resultado da A4, item c)

Para o item c), ocorreram erros semelhantes ao item anterior.

Apenas a dupla D7 respondeu corretamente.

Desta vez, as duplas deveriam encontrar a população N para $t = 20$.

As duplas tiveram procedimentos diferentes.

A dupla D1 e D3 substituíram apenas o valor de $t = 20$ e indicam o resultado por meio de uma notação científica.

c) O valor de N nos dias atuais.

$$N = 3000 \cdot 10^{20}$$

$$N = 3.23$$

Figura 51: Protocolo da Atividade 4, item c), realizado pela dupla D1.

c) O valor de N nos dias atuais.

$$N = 3000 \cdot 10^{20}$$

$$N = 3.23$$

Figura 52: Protocolo da Atividade 4, item c), realizado pela dupla D3.

A dupla D2 descreveu corretamente a realização dos cálculos, mas errou no resultado final.

c) O valor de N nos dias atuais.

60.000

calculamos $3.000 \cdot 10^{0,1 \cdot 20}$
que é igual a $3.000 \cdot 10^{2,0}$

Figura 53: Protocolo da Atividade 4, item c), realizado pela dupla D2.

A dupla D4 não teve a compreensão que o valor de N nos dias atuais deveria ser substituído por $t = 20$ e substituíram um valor qualquer, no caso da resposta colocaram $t = 9$.

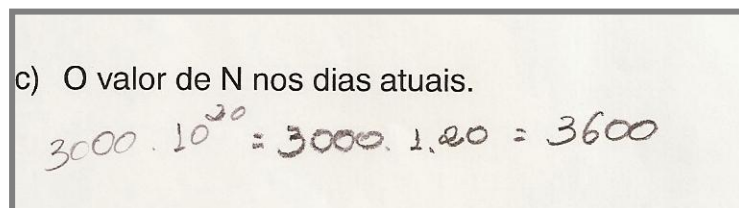
c) O valor de N nos dias atuais.

$$N = 3000 \cdot 10^9 = 30000000000000$$

Figura 54: Protocolo da Atividade 4, item c), realizado pela dupla D4.

Não considerou na potência $10^{0,1t}$ o coeficiente do expoente da expressão $N=3000 \cdot 10^{0,1t}$.

Assim como a dupla D4, a dupla D5 também não levou em conta o coeficiente da expressão dada, substituiu apenas o $t = 20$ e multiplicou o valor 3000 por 1,20 chegando ao resultado de 3600.



c) O valor de N nos dias atuais.
 $3000 \cdot 10^{20} = 3000 \cdot 1,20 = 3600$

Figura 55: Protocolo da Atividade 4, item c), realizado pela dupla D5.

Percebemos que a dupla efetuou de maneira inadequada o resultado da potência 10^{20} , isso demonstra uma dificuldade em realizar operações com potências.

A dupla D6 também demonstrou ter dificuldades com esse item.

Utilizaram uma notação não adequada e pela resposta dada percebemos que queriam deixá-la em notação científica, mas pelo o que foi descrito pela dupla tiveram dificuldades em encontrar o resultado correto.

Resultado da A4, item d)

Respostas apresentadas	Número de respostas	Duplas	Análise
300 000	6	D1-D2-D3 D5-D6-D7	As duplas D1, D2, D3, D6 e D7, calcularam e descreveram a justificativa da resposta. A dupla D5 somente realizou o cálculo de $3000 \cdot 10^2 = 3000 \cdot 100$
Branco	1	D4	

Quadro 13: Resultado da A4, item d).

Para o item d) é solicitado o tempo após a fundação em que a população atingirá o marca de 300 000 de habitantes.

Nenhuma das sete duplas respondeu corretamente a esse item.

Verificamos que as duplas utilizaram o registro da língua natural para justificar suas respostas.

A dupla D1 multiplicou 3000 por 100 que é igual a 300 000 e justificou dizendo que “se o crescimento continuar aumentar a cada 3000 anos em 100 anos os habitantes atingirá a marca de 300 000”.

Pela justificativa a dupla não esclarece a resposta, ao que parece ela quer dizer que se a população continuar aumentando 3 000 a cada ano, quando completar 100 anos atingirá o 300 000 de habitantes.

A dupla D2 também apontou como resultado 100 anos e justificou com o registro da língua natural.

A dupla respondeu: “Percebemos que em 10 anos havia 30 000 habitantes então multiplicamos os anos por 10 para dar 300 000”.

Ao que parece, utilizou o resultado do item b), que é 30 000 para responder esse item.

A dupla D3 do mesmo modo que a dupla D1 efetuou o cálculo de 3000 multiplicado por 100 e justifica escrevendo que “depois de 100 anos, pois o número da população cresce de 10 em 10 anos”.

A dupla D4 não realizou esse item.

A dupla D5 não indicou a sua resposta, mas ao que parece pela descrição dos cálculos que a resposta é 100 anos.

A dupla D6 descreveu que: “após cem anos a população atingirá o número de 300 000”.

Embora tenham utilizado de maneira incorreta, foi a única dupla que utilizou a expressão algébrica do enunciado.

Já a dupla D7 foi a única que respondeu diferente das demais, a resposta foi dada apenas no registro da língua natural.

A resposta da dupla: “A população atingirá 300 000 de habitantes quando a cidade completar 20 anos de fundação”.

Podemos verificar nessa atividade que existem ainda muitas dificuldades por parte dos alunos para realizar o tratamento de um registro, nesse caso específico o registro algébrico.

Podemos destacar que as dificuldades encontradas foram a realização de operações de potências com expoentes decimais e a dificuldade de realização do tratamento do registro algébrico.

Esse resultado nos surpreendeu, pois acreditávamos que não haveria muitas dificuldades para a realização dessa atividade.

Acreditamos que as respostas dadas por meio da multiplicação do número 3000 se dão por conta desse ser o número de habitantes quando ocorreu a fundação, pois as duplas realizam os cálculos utilizando esse número.

Observamos, ainda, que as duplas encontraram dificuldades em realizar o tratamento do registro algébrico, mesmo quando solicitamos algo que parece ser de simples compreensão.

As duplas não conseguiram compreender que substituindo o valor de 3000000 adequadamente na expressão $N = 3000 \cdot 10^{0,1t}$, realizaram um tratamento do registro algébrico.

Em síntese, não foi encontrada dificuldade no item a) da atividade, porém para os demais verificamos erros concernentes ao cálculo de potência com expoente decimal, aparecem também erros referentes à notação científica expressa no resultado da questão e falta de atenção ao efetuar a multiplicação do expoente decimal da potência $10^{0,1 \cdot 20}$.

Podemos inferir que as duplas ainda apresentam dificuldades como, por exemplo, resolver o produto de 3000 por $10^{0,1 \cdot 20}$, que é determinar os valores da variável dependente, dados os valores da independente.

4.8.5 Reaplicação e análise da Atividade 1

Depois de realizada as análises das atividades 1,2,3 e 4, decidimos reaplicar a Atividade (A1) por sugestão da banca no exame de qualificação, para duas duplas participantes da pesquisa (D2 e D6), a fim de analisar quais estratégias de cálculos realizados, se essas são semelhantes ou diferentes sem o auxílio da calculadora.

Verificamos que, com a calculadora as duplas realizaram o tratamento do registro algébrico utilizando valores conforme solicitados na atividade 1.

Por exemplo, para o item a2), quando $t = 0,5h$ as duplas substituíram o valor de $t = 0,5$ na função $N = 5000 \cdot 3^t$ e efetuaram o cálculo.

Com as análises realizadas, observamos que na reaplicação da atividade A1, a dupla D2 utilizou a mesma estratégia de solução apresentada no Caderno do Professor.

Para o item a2), optou em transformar $3^{0,5}$ em $\sqrt{3}$, ocorrendo o mesmo procedimento para os demais itens, conforme o protocolo.

a) Indique o valor de N para os seguintes valores de t:

a1) $t = 2 \text{ h}$ $5.000 \cdot 3^2 = 5000 \cdot 9 = 45.000$

a2) $t = 0,5 \text{ h}$ $5.000 \cdot \sqrt{3} = 5000 \cdot 1,3 = 6500,0$

a3) $t = (2/3) \text{ h}$ $5000 \cdot \sqrt[3]{27} = 5000 \cdot 5,2 = 26000,0$

a4) $t = 1,25 \text{ h}$ $5.000 \cdot \sqrt[3]{3^5} = 5.000 \cdot 3,9 = 19.500,0$

Figura 56: Protocolo da reaplicação da Atividade 1, item a) realizado pela dupla D2.

Ao final da atividade conversamos com a dupla e perguntamos qual a diferença em realizar a atividade sem a calculadora; uma integrante da dupla respondeu que com a calculadora é mais fácil, porém, como ela gosta de fazer contas não achou que teve muita diferença, é “possível fazer a atividade”, mas

acha que não são todos os alunos que conseguem, pois tem a questão do tempo e do raciocínio.

Para o item a), contou que realizou sucessivas multiplicações para achar o valor aproximado das raízes.

Ao compararmos as duas atividades realizadas (com/sem auxílio da calculadora), verificamos que a dupla obteve mais acertos quando utilizou a calculadora.

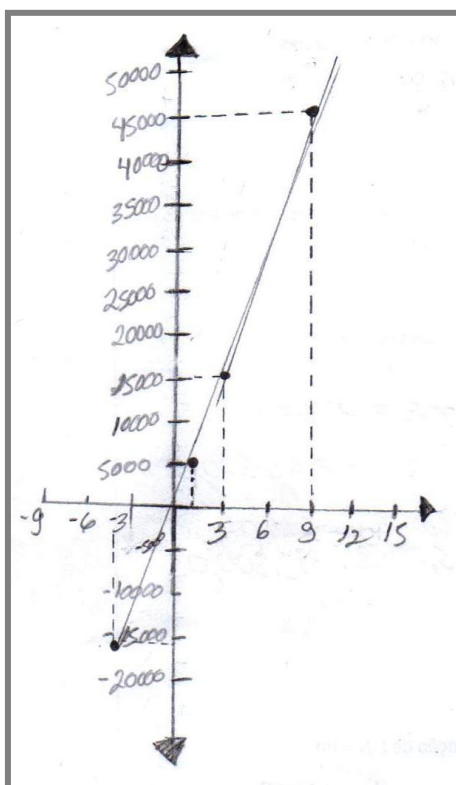


Figura 57: Protocolo da reaplicação da Atividade 1, item a) realizado pela dupla D2

Observamos que a dupla orientou o eixo y nos dois sentidos, isso nos leva a pensar que não sabem que a seta colocada nos eixos x e y serve para indicar a direção do eixo em um sentido.

Para o item b), realizou o registro de tabela com valores de $t = -1, 0, 1$ e 2 . Partindo para o registro gráfico, construiu o gráfico semelhante a uma reta. Observamos que os gráficos foram semelhantes para as duas vezes que se aplicou a atividade1.

A dupla D6 apresentou o tratamento do registro algébrico conforme os valores solicitados, porém dos resultados encontrados, apenas o item a1) está correto.

Perguntamos à dupla qual o procedimento para encontrar o valor de $N = 11\ 250$ para o item a2), a dupla respondeu que: “ se duas horas é 45 000, uma hora é 22 500 , então meia hora ($t = \frac{1}{2} h$) é 11 250”.

De modo análogo, respondeu o item a4), para $t = 1,25$ fez a metade de 11 250 e somaram o valor de 22 500 que é uma hora conforme a dupla, resultando no valor de 27 875.

Ao compararmos as atividades realizadas, verificamos que a dupla realizou corretamente todos os itens quando utilizaram a calculadora na atividade.

a) Indique o valor de N para os seguintes valores de t:

a1) $t = 2 h$ $N = 5000 \cdot 3^2 = N = 45.000$

a2) $t = 0,5 h$ $N = 5000 \cdot 3^{0,5} = N = 11.250$

a3) $t = (2/3) h$ $N = 5000 \cdot 3^{2/3} = N = 15.040$

a4) $t = 1,25 h$ $N = 5000 \cdot 3^{1,25} = N = 27.875$

Figura 58: Protocolo da reaplicação da Atividade 1, item a) realizado pela dupla D6.

Para o item b), efetuou o registro de tabela com valores retirados do item a), apresentou um gráfico semelhante a uma reta. Para esse mesmo item na primeira aplicação que utilizou a calculadora, o gráfico se assemelha ao de uma função exponencial.

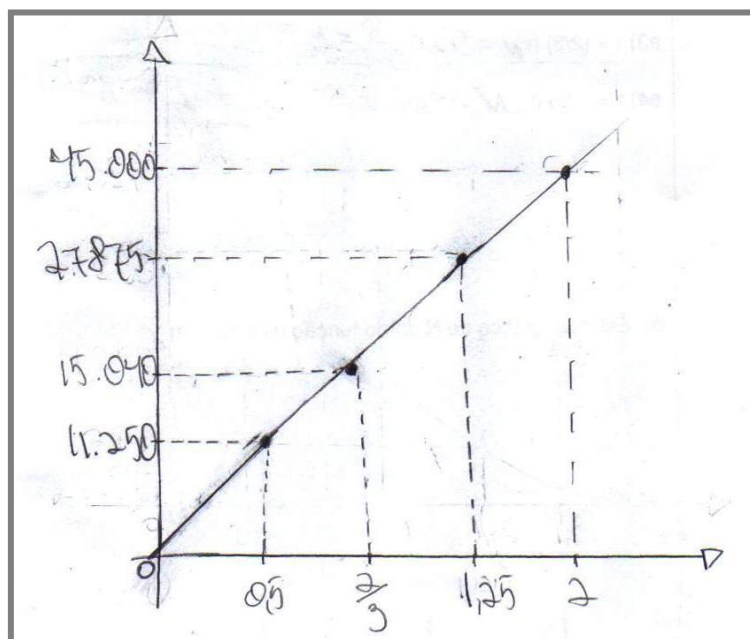


Figura 59: Protocolo da reaplicação da Atividade 1, item b) realizado pela dupla D6.

Também perguntamos à dupla qual diferença em realizar a atividade sem o auxílio da calculadora e a resposta foi que ficou mais difícil, além disso, a atividade ficou mais demorada, tiveram que pensar mais e dificultou porque tiveram que realizar mais cálculos à lápis, e com a calculadora o processo fica mais fácil e simplificado.

Considerando as soluções apresentadas, é possível que numa atividade sem o auxílio da calculadora o aluno recorra à transformação de uma potência de expoente decimal ou fracionário em um radical, como foi o caso da dupla D2.

Observamos que a estratégia da dupla D6 foi a de utilizar resultados obtidos de um item para o seguinte, conforme acima descrito para o item a).

Resumindo os dados da nossa análise, verificamos que a D2 utilizou uma estratégia diferente daquela desenvolvida na primeira aplicação da A1.

Sem o uso da calculadora a resolução foi semelhante à do Caderno do Professor, porém o gráfico construído foi novamente uma reta, além de orientar o eixo y para nos dois sentidos (para cima e para baixo).

A dupla D6 teve apenas um acerto para o item a) ao contrário da primeira aplicação em que todos estavam corretos. Para a construção do gráfico utilizou os dados do item a), esses dispostos no sistema cartesiano ortogonal formou uma reta.

Ao comparamos A1 e sua reaplicação constatamos que o uso da calculadora facilitou na resolução das atividades realizadas pelas duplas.

Podemos inferir que, o não uso da calculadora favorece o tratamento (Duval), pois para se chegar a algum valor significativo, faz-se necessário “reconhecer” o que se está calculando, e o registro pode e favorece esse reconhecimento.

Além disso, podemos observar nos protocolos de algumas duplas, principalmente no da D6 que mesmo tendo um melhor desempenho no registro de tabela, ao realizar o registro gráfico tendem para a construção de uma reta.

Isso nos leva a crer que os alunos trazem algumas propriedades relativas a função do 1º grau e proporcionalidade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve como objetivo analisar se as atividades apresentadas no Caderno do Professor contribuem ou não para a compreensão do aluno a respeito do objeto Função Exponencial, se os alunos conseguem realizar ou não as mudanças de registro de representação semiótica à luz da teoria de Duval (2003). Também analisamos se está neste Caderno uma abordagem das variáveis conforme o Modelo 3UV (Três Usos da Variável) de Ursini et al (2005).

O material é parte integrante da Nova Proposta Curricular de 2008 do Estado de São Paulo. As atividades que serviram como instrumento da nossa pesquisa encontram-se no documento intitulado Caderno do Professor de Matemática da 1ª série do Ensino Médio acerca do objeto matemático Função Exponencial, referente ao 3º bimestre de 2008.

Ressaltamos que o Caderno do Professor é composto por conteúdos divididos por bimestres e que de maneira geral, procurou proporcionar algo que se aproximasse do que é usualmente ensinado nas escolas ou do que é apresentado pelos livros didáticos. As diferenças encontradas referem-se à forma de abordagem de cada conteúdo, em que procura evidenciar aspectos do novo currículo, destacando a contextualização dos conteúdos e as competências individuais relacionadas com a leitura e a escrita matemática.

Utilizamos como referencial teórico, as teorias de Duval (2003) e de Ursini et al (2005).

Nosso interesse em realizar essa pesquisa partiu da observação em sala de aula, do baixo desempenho dos alunos referente ao estudo de funções e pela análise de avaliações realizadas pelo governo do Estado de São Paulo, tais como o SARESP/2007 que apresentou como resultados, baixos índices de aproveitamento dos alunos em Matemática.

Efetuamos também, um levantamento de dissertações e teses referente ao tema Função Exponencial e percebemos que são poucos os trabalhos desenvolvidos nesse tema, as pesquisas se concentram em sua maioria no estudo do conceito de função.

Foram apontadas por meio do levantamento bibliográfico pesquisas que nos auxiliaram no desenvolvimento das análises das atividades e produções dos alunos.

Consideramos em nossa pesquisa uma abordagem qualitativa, utilizando como fundamento metodológico a Engenharia Didática de Artigue (1996).

Apresentamos a seguir, o resultado de nossas análises obtidas por meio das produções dos alunos e as possíveis contribuições.

Vale observar que, realizamos a revisão de potências, denominada como atividade inicial, pois consideramos ser um dos obstáculos enfrentados no desenvolvimento das atividades seguintes referentes à Função Exponencial.

Verificamos que ocorreram dificuldades no cálculo de potências representadas com base negativa sem a colocação de parênteses, como exemplo o item b) -5^2 , em que 5 duplas responderam que o resultado é 25.

Para o item k), l) e m) a diferença está na colocação dos parênteses, percebemos que uma das duplas apresenta resultados que nos leva a entender que este seja um dos aspectos que determinaram o resultado da questão.

A análise ainda nos mostrou que os itens com menos acertos foram: o item n) cálculo da potência de número decimal e expoente inteiro negativo; os itens o), p) e r) cálculo da potência de número inteiro positivo e expoente decimal positivo ou decimal negativo e o item t) cálculo da potência de número inteiro positivo e expoente decimal, inteiro positivo e negativo.

Acreditamos que as dificuldades apresentadas se devem ao fato de os alunos não terem compreendido o assunto de potências quando este foi tratado ou ensinado e ainda a possibilidade de que a realização da revisão de potências não deu conta do conteúdo a ser apreendido.

Os resultados obtidos indicaram que as duplas tiveram dificuldades no que diz respeito à operação de potenciação com expoentes decimais ou fracionários, semelhantes às mencionadas na atividade inicial.

É possível que as dificuldades quanto ao tratamento de um registro algébrico, constatadas nas atividades A1 e A4 estejam relacionadas às operações de potenciação citadas acima.

Ainda podemos mencionar as dificuldades quanto à conversão do registro de partida para o registro de chegada (registro algébrico) solicitado na A2 e para o registro de chegada (registro gráfico) para a A3

Segundo Duval (2003), em uma resolução de problema um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, no entanto, deve ocorrer a possibilidade de passar de um registro ao outro, ou seja, a articulação nos diferentes registros é condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato.

Quanto às mudanças de registros, verificamos que nas atividades em que eram solicitadas a construção dos gráficos das funções, todas as duplas partem do registro algébrico para o registro de tabela e em seguida para o registro gráfico.

Embora realizem o registro de tabela e determine corretamente o valor da variável dependente dados os valores da variável independente, a maioria das duplas não apresentou a construção dos gráficos corretamente.

Foram observadas irregularidades nas escalas dos eixos x e y , falta de compreensão das variáveis, a não correspondência dos pontos encontrados, em consequência, a representação dos gráficos das funções incorretos.

Vale enfatizar que as construções de alguns gráficos se aproximaram do gráfico da função exponencial, demonstrando com isso que se tem a noção de como se comporta essa curva.

Quanto aos aspectos que caracterizam cada um dos três usos da variável (Modelo 3UV), podemos citar que nas atividades aplicadas ocorreu o uso da variável como uma relação funcional e a variável como valor desconhecido.

Segundo Ursini et al (2005) numa relação funcional é necessário reconhecer as correspondências relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais ou expressões analíticas); determinar os valores da variável dependente, dados os valores da independente e vice-versa; reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação funcional, independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais ou expressões analíticas).

Para a variável como valor desconhecido, Ursini et al (2005) descrevem que para trabalhar de forma bem sucedida com problemas e exercícios que

envolvem o valor desconhecido é necessário que se reconheça e identifique, em uma situação problema, a presença de algo desconhecido que pode ser determinado considerando as restrições do problema; substituir a variável pelo valor ou valores que fazem da equação um enunciado verdadeiro; determinar a quantidade desconhecida que está presente em equações ou problemas, realizando operações algébricas, aritméticas ou de ambos os tipos.

Nenhuma dupla realizou corretamente a atividade que solicitava a mudança do registro da língua natural para o registro algébrico, não ocorrendo conforme o Modelo 3UV, a simbolização, interpretação e manipulação das variáveis, presentes na atividade.

O que diz respeito à reaplicação da Atividade A1, tínhamos como objetivo analisar quais procedimentos utilizados pelas duas duplas participantes, se esses foram diferentes daqueles utilizados da primeira vez em que foi permitido o uso da calculadora.

Constatamos que, sem o auxílio da calculadora, optaram pela mudança de uma potência de expoente decimal ou fracionário em um radical, como foi o caso da dupla D2.

Concluimos que existem dificuldades quanto à realização das mudanças de registro de representação semiótica e limitações quanto à identificação das variáveis como uma relação funcional e termo desconhecido.

Acreditamos que as dificuldades enfrentadas para o estudo da Função Exponencial seja um reflexo das dificuldades indicadas desde o início do estudo das funções, com origem na noção do conceito de função, apontadas nas pesquisas de Lopes (2003), Pelho (2003) e Silva (2008).

Nossa sugestão para futuros trabalhos é que se realizem pesquisas acerca do estudo das funções exponenciais e logarítmicas, utilizando as atividades encontradas no Caderno do Professor de Matemática para o Ensino Médio.

A pesquisa nos levou a refletir no modo como apresentamos e ensinamos um conteúdo matemático para alunos, pois as análises demonstram que as dificuldades são muitas, e para alcançarmos resultados satisfatórios há de se trabalhar muito nesta questão. Por certo nossa prática pedagógica é algo a ser sempre questionada e revista no sentido de buscar estratégias que contribuam para uma melhor aprendizagem em Matemática.

Sendo assim, almejamos que o nosso estudo possa contribuir com o Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA o qual fazemos parte e para futuras investigações a respeito da Função Exponencial.

Referências

ANGIOLIN, A.G. **Trajetórias hipotéticas de aprendizagem sobre funções exponenciais**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC – SP, 2009.

ARDENGI, J.M. **Ensino do conceito de função: Pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC – SP, 2008.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. In. Didactica das Matemáticas. Org. Brun, Jean. Trad. Maria José Figueiredo, Delachaux et Niestlé, 1996. p. 193-217.

BONOTO, D.L. et al. **A análise dialética ferramenta-objeto no objeto de aprendizagem “potencializando o seu conhecimento”**. Disponível em: <http://vivencias.reitoria.b/index.php/rev_vivencias/article/viewArticle/37>. Acesso em: 21 de dez. 2009

BRASIL. **Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. Brasília: Ministério da Educação, 1999. 364p.

_____. **Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002. 144p.

CATTO, G.G. **Registro de Representação e o Número Racional – Uma abordagem em livros didáticos**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP, 2000.

CHEVALLARD, Y. **L'analyse dès pratiques enseignates en théorie anthropologique du didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques, 1999, vol. 19, n. 2, p.221-266. Tradução em espanhol de Ricardo Barroso Campos. Disponível em:<<http://www.auq.mx/matematicas/redm/art/a1005.pdf>>. Acesso em: 12 de nov. de 2009.

CURY, H.N. **As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos**. Tese de Doutorado em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.

D'AMBRÓSIO,U. **O uso da calculadora na sala de aula**. Disponível em: <http://www.ima.mat.br/ubi/pdf/uda_006.pdf,2003>. Acesso em: 10 ago. 2009.

DAMM, R.F. **Registros de Representação**. In: Educação Matemática: uma nova introdução - 3ª ed. revista. São Paulo: EDUC, 2008, p. 167 - 188.

DOMINONI, N.R.F. **Utilização de diferentes registros de representação: um estudo envolvendo funções exponenciais**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática - Universidade de Londrina, Paraná 2005.

DRABESKI, E.J; SILVA, R.F. **Estudo da função exponencial e a indução matemática com aplicação da Torre de Hanói**. Disponível em:<<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/696-4.pdf>>. Acesso em: 19 de nov. de 2009.

DUVAL. R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: Machado. S.D.A. (org). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papyrus, 2003. pp.11-33.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. tradução: Higyno H. Domingues. 3ª reimpressão. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2008. pp. 659-66.

FACCHINI, W. **Matemática: volume único**. 1ªed. São Paulo, SP: Editora Saraiva, 1996.

GIOVANNI, J.R; BONJORNO, J.R. **Matemática: uma nova abordagem**, 1ª série: ensino médio. São Paulo, SP. Editora FTD, 2002.

_____. **Matemática: uma nova abordagem /Guia Pedagógico**. São Paulo, SP. Editora FTD, 2002a.

GUINTEHER, A. **Análise do desempenho de alunos do ensino fundamental em jogos matemáticos: Reflexões sobre o uso da calculadora nas aulas de matemática**. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. PUC-SP, 2009.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações, 1ª série: ensino médio**. 2ª ed. São Paulo, SP: Editora Atual, 2004.

LOPES, W.S. **A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP 2003.

MACHADO, S.D.A. **Engenharia Didática**. In: Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999, p. 197- 208.

_____. _____. In: Educação Matemática: uma nova introdução - 3ª ed. revista. São Paulo: EDUC, 2008, p. 231- 247.

MAOR, E. **e: A história de um número**. tradução:Jorge Calife. 3ª ed. Rio de Janeiro, RJ: Editora Record, 2006. p. 291.

OLIVEIRA, J.C.G. **A visão dos professores de matemática do estado do Paraná em relação ao uso de calculadora nas aulas de matemática**. Tese de Doutorado em Educação. UNICAMP, 1999.

PAIAS, A.M. **Diagnóstico dos erros sobre a operação potenciação aplicado a alunos dos ensinos fundamental e médio.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP, 2009.

PELHO, E.B.B. **Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis.** 2003. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP, 2003.

QUEIROZ, P.C.G. **Conhecimentos relativos à variável, mobilizados por professores da Educação Básica.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP 2008.

_____. **Algumas reflexões relativas à variável, mobilizadas segundo o Modelo 3UV.** Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebapem2008/upload/128-1-A-gt08_queiroz_tc.pdf.pdf>. 2008a. Acesso em: 02 de fev. 2009.

REYES, A.; TRIGUEIROS, M.; URSINI, S. **College students' conceptions of variable.** In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 20., 1996, Spain. Proceedings... Spain, 1996. v.4, p. 315-322.

RODRIGUES, D.M. **A compreensão de alunos, ao final do Ensino Médio, relativa ao conceito de variável.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP 2008.

ROSSINI, R. **Saberes docentes sobre o tema Função: uma investigação das praxeologias.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. PUC-SP, 2006.

SANTOS, C.A.M. et al. **Matemática para o Ensino Médio: Volume único.** São Paulo, SP: Editora Ática, 1998.

SÃO PAULO. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática.** Coordenação geral, Maria Inês Fini. – São Paulo: SEE, 2008.

_____. Secretaria da Educação. **Caderno do professor: matemática, ensino médio – 1ª série, 3º bimestre.** Coordenação geral, Maria Inês Fini – São Paulo: SEE, 2008a.

_____. Secretaria da Educação. **Relatório pedagógico SARESP 2007.** Coordenação geral, Maria Inês Fini – São Paulo: SEE, 2008b.

_____. Secretaria da Educação. **Ler e Escrever: Guia de planejamento e orientações didáticas;** 3ª série – São Paulo: FDE, 2009.

_____. Secretaria da Educação. **Ler e Escrever: Guia de planejamento e orientações didáticas** – Professor/ 4ª série – São Paulo: FDE, 2009a.

SILVA, A.P. **Conceito de função: atividades introdutórias proposta no material de Matemática do ensino fundamental da rede pública estadual de São Paulo.** Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. PUC-SP, 2008.

SMOLE, K.C.S; DINIZ, M.I.S.V. **Matemática: ensino médio.** 4ª ed. reformulada. São Paulo, SP: Editora Saraiva, 2005.

URSINI, S. et al. **Enseñanza del Álgebra Elemental - Una propuesta alternativa.** México: Trillas, 2005. p.11-37.

Sites visitados:

<http://www.coladaweb.com/matematica/funcao>. Acesso em: 19 de out. 2008.

http://www.geogebra.org/cms/index.php?option=com_frontpage&lang=pt&Itemid=1. Acesso em: 22 de out. 2009.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Número_de_Euler . Acesso em: 17 de nov. 2009.

Anexo1**AUTORIZAÇÃO PARA REALIZAÇÃO DA PESQUISA****Termo de Autorização**

Eu, _____
RG _____ autorizo a professora Cláudia Vicente de Souza, a utilizar parcial ou integralmente, respostas a questionários ou gravações em áudio ou vídeo de falas de meu (minha) filho (a), _____, para fins de pesquisa, podendo divulgá-las integral ou parcialmente em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que o nome do meu filho(a) não será citado em hipótese alguma. Abdicando direitos meus e de meus descendentes, subscrevo o presente termo.

São Paulo, ____ de _____ de 2009

Responsável pelo aluno

Anexo2

AUTORIZAÇÃO PARA REALIZAÇÃO DA PESQUISA

Termo de Autorização da DireçãoSr^a. Diretora da Escola Estadual _____

Professora _____

Venho pelo presente solicitar vossa autorização para que eu, Cláudia Vicente de Souza, possa desenvolver parte da minha pesquisa de Mestrado, junto aos alunos da 2^a série do Ensino Médio do período da manhã desta Unidade Escolar.

A atividade com os alunos consiste em encontros semanais, dentro do período de aula, com entrevistas e pesquisas direcionadas, sobre o tema: Função Exponencial.

Informo que estou providenciando autorizações junto aos responsáveis para que os alunos participem dessa pesquisa.

Desde já agradeço a vossa compreensão

São Paulo, ____ de _____ de 2009

Professor-pesquisador

Direção da Escola

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)