PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Ana Lúcia Viveiros de Freitas

Ensinar e aprender transformações isométricas no ensino médio

MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO
2010

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Ana Lúcia Viveiros de Freitas

Ensinar e aprender transformações isométricas no ensino médio

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação da Professora Doutora Célia Maria Carolino Pires.

SÃO PAULO
2010

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:________________________________ **Local e Data:** ___________________

AGRADECIMENTOS

À **Deus,** por me guiar nos momentos mais difíceis.

À **Profª Drª Célia Maria Carolino Pires,** por sua amizade, seu carinho e sua primorosa orientação.

Ao **Profº Drº Armando Traldi Júnior,** por seus esclarecimentos, sugestões, sua disponibilidade e seu apoio.

Ao **Profº Drº Nelson Pirola,** por ter examinado meu trabalho com tanto carinho e sugerido valiosas contribuições para a elaboração final.

Ao meu marido **Rogério,** pela paciência, compreensão e incentivo. “Sem você nada disso seria possível. A vitória é nossa. Muito Obrigada”.

Aos meus filhos **Gustavo e Sofia,** que mesmo pequenos, compreenderam minha ausência.

A toda minha **família,** que esteve sempre ao meu lado, apoiando-me e incentivando-me. Mas, principalmente à minha querida **mãe,** que me ensinou a importância dos estudos.

Aos **professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP,** pela atenção e conhecimentos adquiridos.

Aos meus **amigos de Mestrado**, pelo convívio e amizade que pretendo preservar.

Aos **professores e alunos**, sujeitos desta pesquisa que, por sua disponibilidade, propiciaram sua efetiva realização.

Aos **coordenadores e diretores** das escolas envolvidas, principalmente à **Zilda Ap. Nunes Martins,** que me apoiou em todas as horas.

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, pela bolsa de estudos, sem a qual a realização deste trabalho não seria possível.

À todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

MUITO OBRIGADA

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo construir, discutir e avaliar a construção de uma THA a respeito do tema Isometrias. Elegemos como questões de pesquisa: investigar como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino das Isometrias, investigar como as pesquisas, na área da Educação Matemática, contribuem para a organização do ensino deste tema e analisar a atuação de professores de Matemática, no que se refere às atividades de planejamento, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem. Fundamenta-se nos trabalhos de Simon (1995) sobre a elaboração de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA). Trata-se de uma pesquisa qualitativa que envolve dois professores de Matemática de duas escolas públicas do Estado de São Paulo e sua atuação junto a 58 alunos da 2ª série do Ensino Médio. Dentre os resultados encontrados destacamos: (a) a elaboração de uma THA é uma tarefa mais condizente aos pesquisadores que aos professores; (b) a utilização de pesquisas em Educação Matemática permite aos professores elaborar atividades que possibilitem aos alunos enfrentar suas dificuldades, porém é preciso pensar em maneiras para que os professores tenham acesso a elas; (c) a elaboração de atividades que tenham perspectivas construtivistas não é suficiente para que a aprendizagem ocorra segundo esse aspecto, pois a atuação do professor tem papel decisivo neste processo; (d) o uso de novas tecnologias potencializa a compreensão de conceitos, mas é, ainda, uma estratégia pouco utilizada pelos professores.

Palavras-chave: Isometrias. Geometria. Educação Matemática. Ensino Médio. Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem. Currículo de Matemática.

ABSTRACT

This present work has as aim to build, discuss and evaluate the construction of a HLT related to the theme Isometries. We elected as questions of research: investigate through researches in the field of Mathematical Education, how could contribute for learning organization of Isometries and also analyse the performance of teachers of Mathematics related to activities of learning planning of Isometries in a compatible way with constructivist perspective of learning. It´s been based on Simon´s researches (1995) about elaborating Hypothetical Learning Trajectories (HLT). It´s been a qualitative research that involves two teachers of Mathematics in two public schools in São Paulo State and their work close to 58 students from High School second grade. Among the found results we selected: (a) the elaboration of a HLT is a task that is more suitable to researchers than teachers; (b) the usage of researches in Mathematical Education allows teachers to elaborate activities in order to face their difficulties, however it is necessary to think about how the teachers could access them; (c) the elaboration of activities which have constructivist perspectives aren´t enough in order to make it happen according to this aspect once the performance of the teacher has a decisive role in that process; (d) the usage of new technologies reinforce the understanding of concepts but it´s been a strategy still little used for the teachers.

Keywords: Isometries. Geometry. High School Education. Hypothetical Learning Trajectories . Curriculum of Mathematics.

Sumário

I. Inserção deste trabalho no Projeto de Pesquisa

Este trabalho está inserido no projeto de pesquisa denominado "Construção de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio". Tal projeto faz parte da linha de pesquisa "Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores", desenvolvido no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP).

O grupo de pesquisa, denominado por "Desenvolvimento Curricular em Matemática e Formação de Professores" é composto por seis doutorandos[1] e onze mestrandos[2] orientados pela coordenadora do projeto, e deste trabalho, a Professora Doutora Célia Maria Carolino Pires e pelo Professor Doutor Armando Traldi Júnior.

Os doutorandos têm como objetivo investigar e elaborar fundamentos teóricos a respeito de diferentes aspectos dos currículos de Matemática, tais como: interdisciplinaridade, eleição de critérios de avaliação de currículos, contextualização, caracterização histórica dos currículos de Matemática e polarização entre aplicações e práticas e especulações teóricas.

No caso dos mestrandos, o objetivo é o de construir, discutir e avaliar, para diferentes expectativas de aprendizagem do Ensino Médio, Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA).

Segundo Simon (1995), as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem consistem de objetivos para a aprendizagem dos estudantes, de tarefas matemáticas que serão utilizadas para promover a aprendizagem dos estudantes e do levantamento de hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos estudantes.

[1] Doutorandos: Márcio Antônio da Silva - Currículos de Matemática no Ensino Médio: estabelecendo critérios para a escolha e organização de conteúdos; Arlete Aparecida Oliveira de Almeida – Da polarização entre aplicações e especulações teóricas nos Currículos de Matemática do Ensino Médio às possibilidades de articulação; Harrison Júnior Lessa Gonçalves – A interdisciplinaridade no Currículo de Matemática de Ensino Médio; Márcia Maioli – Contextualização no Currículo de Matemática de Ensino Médio; Denise Franco Capello Ribeiro – Trajetória histórica dos livros didáticos de Geometria editados para os primeiros cursos do Ensino Médio brasileiro; Maryneusa Cordeiro Otone Silva – Currículos de Matemática do Ensino Médio no período de 1930 a 1960.

[2] Mestrandos: Alexandra Garrote Angiolin – Funções exponenciais; Américo Augusto Barbosa – Funções Trigonométricas; Ana Lúcia Viveiros de Freitas Isometrias e Geometria Plana; Antonio Celso Tonnetti – Estatística; Maria de Fátima Aleixo de Luna – Geometria Plana; José Manoel Vitolo – Variação de grandezas e funções, funções polinomiais do primeiro grau e funções constantes; Márcia Aparecida Nunes Mesquita – Funções polinomiais do segundo grau; Patrick Oliveira de Lima – Funções Logarítmicas; Vivaldo de Souza Bartolomeu – Dos números naturais aos números reais; Denílson Gonçalves Pereira – Geometria Analítica; Rubens de Souza Cabral Júnior – Combinatória e probabilidade.

As atividades propostas nestas THA procuram envolver resolução de problemas, uso de tecnologias, abordagens interdisciplinares, contextualização e aplicações de conceitos e procedimentos matemáticos às situações do cotidiano em diversas áreas do conhecimento, conforme as prescrições curriculares atuais sugerem.

Nosso trabalho tem por objetivo construir, discutir e avaliar a construção de uma THA a respeito do tema Isometrias.

Percebemos que este tema não é muito freqüente nos livros didáticos do Ensino Médio e até mesmo os documentos oficiais não apresentam, de maneira explícita, o ensino de Isometrias no currículo. Contudo, consideramos ser de grande importância na compreensão de alguns conceitos matemáticos, como por exemplo: áreas, funções e matrizes.

Sendo assim, nossa dissertação focaliza a elaboração e a aplicação de uma THA sobre Isometrias e pretende contribuir para uma nova visão do ensino deste tema no currículo do Ensino Médio.

Abaixo faremos uma breve descrição do projeto de pesquisa "Construção de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio" e, posteriormente, caracterizaremos a nossa participação.

II. Motivações e relevâncias do Projeto de Pesquisa

Pires (2004), em seu artigo "Formulações basilares e reflexões sobre a inserção da Matemática no currículo visando a superação do binômio máquina e produtividade" destaca a crescente importância dada, nas últimas décadas, ao papel da Matemática nos Currículos da Educação Básica do Brasil. Podemos confirmar este fato observando o crescente número de investigações relacionadas à análise do desenvolvimento curricular no Brasil e/ou propostas de inovações curriculares.

A trajetória das reformas curriculares, no Brasil, tem início com a chamada reforma Francisco Campos, em 1931, quando Euclides Roxo propôs a unificação dos campos matemáticos - Álgebra, Aritmética e Geometria – numa única disciplina chamada Matemática, com a finalidade de abordá-los de forma articulada visto que, anteriormente, cada um deles era estudado de forma independente. Além disso, a concepção de currículo deixou de ser simplesmente uma seleção de conteúdos e passou a ser composto por orientações didáticas.

Em 1942, com a reforma Gustavo Capanema, as reformas anteriores não se mantiveram, fato que evidencia que as decisões curriculares no Brasil sofreram a influência de questões políticas ou de poder de determinados grupos.

Entre 1965 e 1980 aconteceu, não só no Brasil, uma das principais reformas da Matemática, o Movimento Matemática Moderna, que tinha como preocupação central uma Matemática útil para a técnica, a ciência e a economia moderna. Como conseqüências dessa reforma, podemos citar a predominância de termos algébricos, comprometendo o ensino do cálculo, das medidas e, principalmente da Geometria.

A partir de 1980, as reformas lideradas por Secretarias Estaduais e Municipais de Ensino, buscavam se contrapor às idéias do Movimento Matemática Moderna. Segundo Pires (2008), um material elaborado na década de 70, por um projeto da UNICAMP, que teve como diretor o professor Ubiratan D´Ambrósio, foi inspirador na formulação da Proposta Curricular do Estado de São Paulo, elaborada pela Equipe Técnica de Matemática da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP) em 1986. Neste documento, o ensino de Matemática deveria buscar estabelecer uma continuidade entre a escola e a vida, demonstrando uma preocupação no trabalho com situações contextualizadas.

A reforma mais recente se deu a partir de 1995 e se manifesta pelo processo de elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEF e PCNEM) que, segundo Pires (2008), apesar de não representarem um rompimento radical com as propostas dos anos 80, incorporaram as recentes contribuições das investigações em Educação Matemática. Estas contribuições trouxeram aspectos novos ao currículo, como por exemplo: a importância que devemos dar aos conhecimentos prévios e hipóteses levantadas pelos alunos como ponto de partida para o trabalho em sala de aula, o papel do erro e as diferenças entre obstáculos didáticos e epistemológicos que interferem na aprendizagem.

O processo de elaboração dos PCNEM, pela Secretaria do Ensino Médio e Tecnológico do Ministério da Educação, foi desencadeado pela aprovação e publicação da Lei de Diretrizes e Bases, LDBEN 9394/96, posicionou o Ensino Médio como etapa final da Educação Básica, complementando o aprendizado iniciado no Ensino Fundamental. No mesmo período (1995 a 2002), o Conselho

Nacional de Educação apresentou as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM).

Segundo Pires (2008), foi a determinação destes documentos que desencadeou as discussões curriculares em pauta nos últimos anos. As proposições neles contidas revelaram consensos, porém também divergências e dúvidas que interferem na sua implementação.

A primeira proposição diz respeito à organização do currículo proposto para o Ensino Médio, que de acordo com as DCNEM, é organizado a partir de três áreas do conhecimento: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias; Linguagens, Códigos e suas tecnologias; Ciências Humanas e suas tecnologias.

A autora destaca que esta organização curricular é potencialmente rica no sentido de permitir conexões entre os diferentes campos do conhecimento, pois possibilitam uma abordagem interdisciplinar. Porém, caso não seja implementada com clareza, a especificidade e a contribuição de cada um dos campos que compõem a área de conhecimento pode se perder.

A segunda proposição diz respeito à importância, dada pela proposta, em explorar situações contextualizadas que poderão ser trabalhadas por meio de resolução de problemas e/ou da modelagem.

Para Pires (2008), esta perspectiva de trabalho é positiva no sentido de ter apoio teórico e grande quantidade de experiências, porém, ainda é muito desconhecida pelos professores, que tiveram formação no sentido oposto. Sendo assim, a autora considera necessária uma discussão mais aprofundada a respeito de contextualização, para que não se caia no conceito limitado de “fazer parte do cotidiano”. Afinal, devem ser consideradas outras formas de contextualização, com o mesmo nível de importância, tais como: a história da Matemática, sua aplicação em outras áreas e as contextualizações internas à própria Matemática, como as que relacionam aspectos numéricos, geométricos e algébricos de um mesmo conceito.

Pires (2008) salienta que além da seleção de conteúdos é fundamental discutir a sua organização. Tradicionalmente, a organização é linear, onde um dado tema é visto apenas uma vez, exaustivamente, o que dificulta a abordagem interdisciplinar. Modelos atuais de organização curricular em espiral ou em rede ainda não estão presentes nas propostas atuais para o Ensino Médio, porém já participam das discussões a respeito de organização curricular e foram incorporadas inclusive pelos livros didáticos, o que torna a temática interessante e desafiadora.

Além da organização curricular, novas idéias e proposições sobre currículos, como as apresentadas por Doll (1991) e Bishop (1997), nos fazem pensar que um currículo não é somente uma lista de conteúdos, mas também uma seqüência de procedimentos com a finalidade de proporcionar ao aluno uma visão mais ampla da Matemática.

O desenvolvimento de valores e atitudes tais como: ter iniciativa na busca de informações, demonstrar responsabilidade, fundamentar idéias e argumentar é outro aspecto, de acordo com as DCNEM, de extrema importância para que o aluno aprenda a aprender, tanto quanto a aprendizagem de conceitos e procedimentos.

Esses valores e atitudes são importantes para que o aluno possa se comunicar, aprender e perceber o valor da Matemática como bem cultural de leitura e interpretação da realidade, o que melhora seu preparo para o mundo do conhecimento e do trabalho.

Os PCNEM destacam, também, os diferentes papéis da Matemática. Além do aspecto formativo (que ajuda a estruturar o raciocínio dedutivo), ou instrumental (ferramenta que auxilia todas as atividades humanas), a Matemática também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. Estes diferentes papéis devem ser discutidos e estimulados de maneira que sejam trabalhados pelo professor equilibradamente. O conhecimento matemático deve ser apresentado ao aluno de modo que ele possa buscar novas informações e instrumentos para continuar aprendendo.

Mais um aspecto a ser considerado por Pires (2008) trata do objetivo do Ensino Médio. As DCNEM defendem a idéia que a aprendizagem no Ensino Médio deve ter como foco a construção de competências em torno do conhecimento e não o preparo para o ingresso no Ensino Superior. Porém, o sistema de acesso ao ensino superior não condiz com esta realidade, o que causa um desconforto nos professores. A autora ressalta, então, a importância de se fazer uma discussão a esse respeito implicando diretamente na seleção de conteúdos e avaliação de desempenho dos alunos do Ensino Médio.

O processo de implementação de inovações curriculares para o Ensino Médio apresenta ainda problemas quanto à prática dos docentes. Um dos mais freqüentes, destacados por Pires (2008), refere-se à predominância de uma prática de organização curricular em que os objetivos, os conteúdos, a metodologia e a avaliação aparecem desarticulados e independentes.

Além deste, existem outros aspectos, tais como: falta de oportunidades para desenvolvimento cultural dos alunos e para o uso de tecnologias da informação e das comunicações e um distanciamento entre as escolas de educação básica e as instituições formadoras de professores (cursos de licenciatura).

Pires (2008) relata que, na formação inicial e continuada de professores, não são consideradas as especificidades dos níveis e/ou modalidades de ensino em que são atendidos os alunos da educação básica. Além disso, os conhecimentos específicos e pedagógicos são desarticulados quase que em sua totalidade e não há a incorporação de dados de pesquisa tanto na área da Educação quanto na área de conhecimentos específicos.

A concepção de professor, revelada ao longo da formação inicial, é a de mero transmissor de conteúdos, previamente ordenados em livros e outras fontes de informação. Sendo assim, a concepção de aprendizagem remete a um processo que envolve atenção, memorização, fixação de conteúdos e treino através de atividades mecânicas e repetitivas, culminando num processo acumulativo de informações previamente selecionadas, hierarquizadas, ordenadas e apresentadas pelo professor.

O futuro professor vivencia situações em que ele, como aluno, é um agente passivo e individual no processo ensino-aprendizagem. Frente a isto, os processos de avaliação são baseados apenas na idéia de que o conhecimento do aluno tem correspondência direta e absoluta com os resultados apontados nas provas.

Por estas razões, os projetos de pesquisa que envolvam docentes, nos diversos níveis de formação, juntamente com professores do Ensino Médio da rede pública são extremamente pertinentes e seu objetivo deve ser o de possibilitar, na prática, a implementação de uma proposta curricular mais próxima dos pressupostos curriculares inovadores.

A participação dos professores do Ensino Médio no desenvolvimento de nossa pesquisa remete à idéia de pesquisa colaborativa citada por Boavida e Ponte (2002) em seu artigo “Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas”.

Segundo os autores, a pesquisa colaborativa é caracterizada pelo trabalho conjunto de seus participantes numa mesma base de igualdade, de modo a haver ajuda mútua na obtenção de objetivos que beneficiem a todos.

A colaboração pode ser entre pares, por exemplo, entre professores que trabalham num mesmo projeto, mas também entre participantes que tenham papéis diferenciados, por exemplo: entre professores e investigadores. É nesse âmbito que se caracteriza nosso trabalho.

Boavida e Ponte (2002) apresentam vantagens importantes a respeito da realização de uma investigação sobre a prática:

- Juntando diversas pessoas que se empenham num objetivo comum, reúnem-se, só por si, mais energias do que, as que possuem uma única pessoa, fortalecendo-se, assim, a determinação em agir;
- Juntando diversas pessoas com experiências, competências e perspectivas diversificadas, reúnem-se mais recursos para se concretizar, com êxito, um dado trabalho, havendo deste modo um acréscimo de segurança para promover mudanças e iniciar inovações;
- Juntando diversas pessoas que interagem, dialogam e refletem em conjunto, criam-se sinergias que possibilitam uma capacidade de reflexão acrescida e um aumento das possibilidades de aprendizagem mútua, permitindo, assim, ir muito mais longe e criando melhores condições para enfrentar, com êxito, as incertezas e obstáculos que surgem.

Porém, vale lembrar, que os participantes devem ter um objetivo comum, que deve prevalecer aos interesses individuais e as formas de trabalho e de relacionamento devem propiciar um trabalho conjunto. Por esta razão, Castle (1997, apud Boavida e Ponte, 2002) considera o relacionamento entre os participantes da equipe como a característica mais importante de um trabalho colaborativo.

Nesse sentido, Boavida e Ponte (2002) elegem três idéias fundamentais: confiança, diálogo e negociação, que são considerados pontos de extrema importância para que a equipe vença os momentos de crise.

Nosso trabalho, por se tratar de uma investigação sobre a prática, apresenta os requisitos para se enquadrar neste tipo de pesquisa, que permite diminuir a distância entre professores e pesquisadores, atendendo, nesse caso, uma das características almejadas pelas atuais pesquisas em desenvolvimento curricular.

III. Apresentação do trabalho

Os temas a serem desenvolvidos pelos mestrandos têm por objetivo a construção de competências e habilidades que permitam ao aluno do Ensino Médio:

- Compreender a Matemática como fruto de construções humanas, entendendo como ela se desenvolveu ao longo dos anos, relacionando o desenvolvimento científico com a transformação da sociedade;
- Analisar qualitativamente dados quantitativos, representados gráfica ou algebricamente, relacionados a contextos sócio-econômicos, científicos ou cotidianos;
- Identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações, interpolações e interpretações;
- Identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para o aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade;
- Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades;
- Compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências e das tecnologias e das atividades cotidianas;
- Entender o impacto das tecnologias associadas à Matemática na sua vida pessoal, nos processos de produção, no desenvolvimento do conhecimento e na vida social;
- Aplicar as tecnologias associadas à Matemática, na escola, no trabalho e em outros contextos relevantes para sua vida.

Nosso trabalho consiste na construção, análise e aplicação de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem, que atenda os quesitos citados acima explorando o tema Isometrias.

Por ser um tema que não faz parte diretamente dos conteúdos propostos para o Ensino Médio nos documentos oficiais, procuramos selecionar, em nossa THA, atividades diferenciadas, que vão desde a apresentação do conteúdo como objeto de estudo até o uso do mesmo, como ferramenta na resolução de atividades de diferentes conteúdos, valorizando a contextualização interna à própria Matemática.

Os documentos oficiais sugerem que os conteúdos de Geometria, aprendidos no Ensino Fundamental, sejam reforçados ao longo do Ensino Médio, mas não determinam quais são estes conteúdos e nem em que série eles devem ser trabalhados. Por nossa experiência, aplicamos as atividades para alunos do 2º ano do Ensino Médio, pois, segundo a proposta curricular, nesta série, eles já teriam conhecimento a respeito de estudo das funções e de cálculo de áreas, que serão os temas explorados sob o foco das Isometrias.

Assim, buscamos, com nossa pesquisa, responder as seguintes questões:

- Como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino das Isometrias?
- Como as pesquisas, na área da Educação Matemática, podem contribuir para a organização do ensino das Isometrias potencializando boas situações de aprendizagem aos alunos?
- Como é a atuação do professor de Matemática quanto às atividades de planejamento do ensino de Isometrias, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem?

IV. Procedimentos Metodológicos

Pelas características de nossa pesquisa apresentadas em seguida, podemos defini-la, segundo Ludke e André (1986, p. 11-13), como de natureza qualitativa. A estratégia utilizada é o estudo de caso, levando em conta, para isso, o fato de se pretender uma descrição dos fenômenos educativos, bem como a sua interpretação.

Para atingir nossos objetivos propostos convidamos professores de instituições diferentes que tivessem interesse em participar de nosso projeto. Nossa proposta inicial considerava a participação de três professores que seriam os colaboradores de nossa pesquisa, porém, o terceiro professor convidado optou por não participar, pois não concordou com a proposta das atividades.

Consideramos alguns critérios quanto à escolha dos professores e instituições que receberiam nosso convite. Quanto às instituições, escolhemos as próximas ao local de trabalho da professora pesquisadora a fim de facilitar o deslocamento entre as escolas. Com relação aos professores, foram indicados pelos coordenadores das escolas e escolhidos por apresentarem como características: responsabilidade e compromisso. Os professores, após o convite, se mostraram dispostos a participar colaborativamente do projeto.

Apresentamos a proposta de nosso projeto a cada professor, em reuniões individuais, ressaltando a participação efetiva em todas as etapas. Além do contato direto com os professores, entramos em contato com a direção e coordenação das instituições de ensino e obtivemos a autorização para o desenvolvimento de nossa pesquisa.

Participaram da pesquisa 26 alunos da instituição 1 e 32 alunos da instituição 2, totalizando 58 alunos do 2º ano do Ensino Médio.

O trabalho teve início a partir da 1ª entrevista individual com os professores onde apresentamos nosso projeto, discutimos as atividades propostas e levantamos as características pessoais de cada professor, tais como: tempo de magistério, formação acadêmica, familiaridade com o tema, etc. Apresentaremos estas informações no Capítulo 3 de nosso trabalho.

Durante o desenvolvimento do trabalho em sala de aula, a professora pesquisadora atuou como observadora e os comentários, tanto dos professores quanto dos alunos, que consideramos relevantes foram registrados para posterior análise, assim como características do desenvolvimento das aulas.

Algumas aulas aconteceram simultaneamente em instituições diferentes. Neste caso, as aulas foram filmadas e os registros escritos, que são predominantes nesta pesquisa, tiveram por base a filmagem e os relatos dos professores colaboradores.

O ambiente escolar é a fonte direta da coleta de dados, pois o desenvolvimento da THA, as entrevistas e discussões com os professores aconteceram nas respectivas instituições de ensino em que trabalham.

Os dados coletados durante o desenvolvimento das atividades da THA são predominantemente descritivos e geraram relatórios de cada aula dada ou discussão realizada com os professores colaboradores. Estes relatórios serão analisados no Capítulo 3.

É importante ressaltar que o interesse principal da investigação é verificar qual a atuação do professor colaborador em sala de aula e como se dá sua interação com os alunos tendo como base uma THA elaborada por um professor que é pesquisador, mas discutida e alterada de acordo com as propostas do professor colaborador.

Portanto, observar a atuação do professor em sala de aula, o desenvolvimento de sua prática e os conhecimentos que ele tem a respeito do tema a ser ensinado foram o foco do nosso trabalho. Podemos dizer que nos preocupamos mais com o processo que com o produto.

A análise de dados tende para um processo indutivo, pois nossa intenção não é buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do início dos estudos e sim o compromisso de capturar evidências conforme surgirem.

Nossa pesquisa foi desenvolvida em duas etapas, assim como as pesquisas dos demais mestrandos do grupo:

1ª Etapa: Planejamento do Projeto de Pesquisa e estudos coletivos sobre referências teóricas comuns ao grupo de pesquisa. Estudos individuais sobre o tema escolhido, utilizando dissertações, teses e artigos de diversas instituições. Elaboração e discussão com participantes do grupo de pesquisa e com a professora orientadora acerca das atividades que constituem a THA. Estudos da professora pesquisadora com os professores colaboradores, tendo em vista a discussão das atividades propostas na THA. Elaboração da THA para aplicação em sala de aula, considerando, se possível, as sugestões e modificações propostas pelos professores colaboradores. Elaboração, pela professora pesquisadora, de instrumentos para observação e coleta de dados durante a aplicação das atividades da THA em sala de aula.

2ª Etapa: Desenvolvimento da THA em sala de aula. Acompanhamento do andamento da pesquisa nas reuniões com a professora orientadora. Debates da professora pesquisadora com os professores colaboradores sobre o trabalho realizado e indicações de possíveis mudanças na THA. Elaboração da THA com as modificações finais. Escrita do material para qualificação. Escrita do material para defesa.

V. Estrutura do trabalho

Nosso trabalho está organizado em quatro capítulos:

No Capítulo 1, descrevemos o referencial teórico do grupo de pesquisa, ou seja, as formulações de Simon (1995). Na seqüência apresentamos uma revisão bibliográfica referente às pesquisas sobre ensino-aprendizagem das Isometrias e sua presença nos documentos curriculares.

No Capítulo 2, descrevemos o processo de construção da 1ª versão da THA onde selecionamos os objetivos de aprendizagem, indicamos as hipóteses sobre a aprendizagem dos alunos e escolhemos as tarefas que atendem aos objetivos propostos pela nossa THA. Em seguida apresentamos a análise da 1ª versão da THA junto aos professores colaboradores e suas sugestões de modificação.

No Capítulo 3, apresentamos como se deu a aplicação da THA em sala de aula. Na seqüência, apresentamos uma análise dos relatórios elaborados e alguns resultados de avaliação do conhecimento dos alunos durante e após o desenvolvimento da THA.

No Capítulo 4, buscamos verificar de que forma esse trabalho contribuiu com novos conhecimentos para o crescimento profissional da professora pesquisadora, dos professores colaboradores e também dos alunos. Ao final, apresentamos as modificações realizadas na THA, após sua aplicação em sala. Estas modificações foram analisadas e discutidas na última reunião da professora pesquisadora com os professores colaboradores e geraram a terceira versão da THA, dando continuidade ao ciclo descrito por Simon.

Por fim, apresentamos as conclusões obtidas e as considerações finais de nosso trabalho.

CAPÍTULO 1
FUNDAMENTOS TEÓRICOS E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo apresentamos o aporte teórico utilizado como base para o desenvolvimento de nossa pesquisa. Nosso aporte está dividido em duas partes. A primeira refere-se ao aporte utilizado pelo grupo de pesquisa e a segunda trata exclusivamente do assunto de nossa pesquisa.

Tomamos como referência geral do grupo o artigo “Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon”, Pires (2009), em que a autora discute como as idéias desse autor contribuíram para as reflexões do nosso grupo de pesquisa. Além deste, o próprio artigo de Simon (1995) *“Reconstructing mathematics pedagogy from a Constructivist Perspective*” foi fonte de referência.

No que se refere ao assunto de nossa pesquisa, apresentamos algumas contribuições com relação à Geometria, como as dissertações de mestrado de Pavanello (1989) e Gouvêa (1998) e outras que falam exclusivamente das Isometrias, tais como a de Mabuchi (2000).

1.1 Sobre Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem

Em seu artigo[3] “*Reconstructing mathematics pedagogy from a Constructivist Perspective*” Simon (1995) pretende discutir a tensão criativa entre a meta dos professores para o ensino e o compromisso de ser sensível ao pensamento matemático de seus alunos. Simon também apresenta reflexões de outros temas, a saber:

[3]Os dados apresentados no artigo de Simon foram coletados dentro de uma sala de aula experimental, de 25 alunos, em que o pesquisador acompanhou um professor de Matemática em tarefas sobre a construção do conceito de área; a partir da análise dos dados coletados, trabalhou numa fundamentação teórica visando à formulação de uma Pedagogia da Matemática.

- O pensamento/entendimento dos alunos sendo construído seriamente e tendo lugar central na estruturação e implementação da atividades de ensino;
- O conhecimento dos professores desenvolvendo-se simultaneamente com o crescimento do conhecimento dos alunos;
- O planejamento do ensino sendo gerado a partir de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem;
- A formação continuada dos professores dando continuidade as modificações de suas Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem.

Neste artigo, Simon (1995) observa que uma das perspectivas mais presentes em pesquisas na Educação Matemática é a perspectiva construtivista e ressalta que estas pesquisas muito têm contribuído para inovações nas reformas do ensino de Matemática.

Porém, apesar das contribuições do construtivismo no âmbito das reformas de ensino de Matemática, a reconstrução de uma “Pedagogia da Matemática” baseada na visão construtivista ainda representa um grande desafio onde a comunidade de Educação Matemática deu apenas os primeiros passos.

Segundo o autor, para que o construtivismo possa ser objeto de mudanças é necessário que se construam modelos de ensino baseados no construtivismo.

Para Pires (2009), ao apresentar sua proposta de Ciclo de Ensino de Matemática e de Trajetórias Hipotéticas da Aprendizagem, Simon busca situar sua posição em relação às perspectivas construtivistas e as relações entre construtivismo e Pedagogia da Matemática.

Recuperando aspectos da perspectiva construtivista

Segundo a perspectiva construtivista de Simon (1995), o conhecimento que temos do mundo é construído por meio de percepções e experiências mediadas por nosso conhecimento prévio.

> Nosso interesse está no trabalho (adaptação com a nossa experiência de mundo). Para esclarecer essa concepção de

> trabalho precisamos fazer uma extensão: construir nosso senso de percepção ou dados, construir um prognóstico adequado para resolver um problema ou para realizar uma meta. (SIMON, 1995, pág. 4).

Podemos ampliar nossa compreensão a respeito da perspectiva construtivista citando as pesquisas de Coll (2009). Para este autor, a concepção construtivista não é uma teoria e sim referencial explicativo e mostra toda sua potencialidade na medida em que é utilizado como ferramenta útil na tomada de decisões inerentes ao planejamento, aplicação e avaliação do ensino.

Coll (2009) destaca a importância dos conteúdos na concepção construtivista posicionando-os como elementos cruciais para entender, articular, analisar e inovar a prática docente.

O autor valoriza o papel do professor, pois mostra que, na perspectiva construtivista, o ensino é um processo conjunto na qual o aluno constrói seu conhecimento com a orientação do professor, mostrando-se progressivamente competente e autônomo na resolução de tarefas e utilização de conceitos.

Segundo Coll (2009), sob a perspectiva construtivista, a aprendizagem acontece quando somos capazes de elaborar uma representação pessoal sobre um objeto da realidade ou conteúdo que pretendemos aprender e essa elaboração se dá a partir de experiências, interesses e conhecimentos prévios que possam dar conta da novidade.

Para este autor, a perspectiva construtivista é, ainda, muito mais abrangente, pois deve envolver a escola como um todo, caracterizando o ensino-aprendizagem como um trabalho em equipe.

As idéias de Coll vêm ao encontro da visão de Simon a respeito das perspectivas construtivistas, da proposta de Ciclo de Ensino Matemático e das interações entre os envolvidos neste processo.

Simon (1995) destaca, também, que o interesse na difusão do construtivismo entre teóricos da Educação Matemática, pesquisadores e praticantes tem moldado o discurso para diferentes pretensões do construtivismo.

> De expressões como “Construtivismo Radical” e “Construtivismo Social” derivam algumas orientações, caracterizando a existência de uma diversidade de perspectivas epistemológicas semelhantes dentro dessas categorias. Conseqüentemente, parece importante

> uma descrição aprofundada da perspectiva construtivista na qual nossa pesquisa está baseada. (SIMON, 1995, pág. 4).

Em seu ponto de vista, a maior parte das informações que dividem os recentes debates epistemológicos sobre o conhecimento são, fundamentalmente, as que o identificam como um processo social e as que o tomam como um processo cognitivo.

O construtivismo radical focaliza a construção individual, obtendo desse modo uma perspectiva cognitiva. Embora a interação social seja vista como um contexto importante para o conhecimento, o foco está na reorganização cognitiva individual. Em contrapartida, o construtivismo sociocultural vê a construção mental como um processo socialmente determinado; o conhecimento individual origina-se da dimensão social. Para a perspectiva social, o conhecimento localiza-se na cultura, insere-se num sistema, que é maior que a soma de suas partes.

Simon declara que sua posição evita qualquer extremo e busca construir um trabalho teórico baseado nas duas vertentes construtivistas.

Segundo Cobb (1989, apud Simon 1995), uma das bases teóricas utilizadas por Simon, a coordenação das duas perspectivas construtivistas é necessária para que se entenda a aprendizagem em sala de aula, pois a mesma não está somente na dimensão social ou na dimensão cognitiva, mas preferencialmente, na combinação da análise dessas duas perspectivas.

Simon formula uma analogia à luz das teorias psíquicas:

> Nenhuma teoria em particular acena um enfoque suficiente para caracterizar dados psíquicos. Porém cada teoria tem construído uma contribuição significativa para basear teoricamente a pesquisa; considerando ser um enfoque particular e considerando ser um enfoque que acena também para cada teoria em particular, coordena a descoberta que se origina de cada perspectiva moldada para avanços neste campo. (SIMON, 1995, pág. 6).

Segundo Pires (2009), a organização do desenvolvimento do conhecimento em sala de aula segue os mesmos preceitos citados por Simon, pois representa uma análise particular coordenada, baseada em perspectivas psicológicas (cognitivas) e sociológicas.

A análise psicológica da aprendizagem da Matemática foca-se no conhecimento individual sobre a Matemática, seu entendimento para o outro e seu senso de funcionamento na aula de Matemática. A análise sociológica toma como ponto de partida o conhecimento e as normas sociais da sala de aula. As “normas sociais” referem-se àquilo que está entendido como a construção do conhecimento com a efetiva participação dos alunos nas aulas de Matemática. Incluem-se também as expectativas que os membros da comunidade têm sobre os professores e os alunos, conceitos dos meios utilizados para a elaboração da aula de Matemática e o caminho utilizado para validar a aula de Matemática.

Pires (2009) aponta ainda que, para Simon, é proveitoso ter uma visão da Matemática como uma atividade cognitiva, apreendida por processos culturais e sociais constituídos por uma comunidade altamente conscientizada.

A Pedagogia da Matemática a partir de uma perspectiva construtivista

Segundo Simon (1995), a aprendizagem escolar é entendida como um processo de construção individual e social mediados por professores com a concepção de um trabalho estruturado na qual se entende a aprendizagem dos alunos. Sendo assim, torna-se extremamente útil compreender o desenvolvimento da aprendizagem e tal fato leva à questão de como o construtivismo poderia contribuir para a reconstrução de uma Pedagogia da Matemática.

O uso do termo Pedagogia tem a intenção de significar todas as contribuições para a Educação Matemática na sala de aula. O autor inclui nestas contribuições não somente o trabalho multifacetado do professor, mas também contribuições para o ensino em sala de aula com um currículo construído, desenvolvendo materiais e pesquisas educacionais.

Assim, Simon, a partir da análise dos dados coletados em sua sala de aula experimental, propõe uma fundamentação teórica – o modelo de Ciclo de Ensino Matemático – visando a formulação de uma Pedagogia da Matemática.

Segundo Wood, Cobb e Yackel (1989, apud Simon 1995), os professores devem ter como finalidade a construção de uma prática que capacite seus alunos a percorrerem o caminho da aprendizagem matemática, portanto é este o desafio fundamental que deve fascinar os professores de Matemática. Os mesmos precisam reconstruir o significado de saber e fazer Matemática na escola e, deste modo, reconstruir o significado de ensinar Matemática.

Simon retoma a idéia de construtivismo como uma teoria epistemológica e que não define uma orientação particular de ensino. Para ele “o desenvolvimento do conhecimento está presente no professor ou no ensino realizado”.

Nesse sentido, Konold (1995, apud Simon), argumenta que o ensino, dentro da perspectiva epistemológica não se foca na maneira como se efetua e que não existe uma simples função que mapeie a metodologia de ensino dentro de princípios construtivistas. Ou seja, o construtivismo epistemológico não determina a apropriação ou inapropriação de estratégias de ensino.

Bauerfied (1995, apud Simon), define a construção cognitiva de natureza essencialmente humana, e a processual emergente dos temas, regularidades e normas, entrecruzando Matemática e interação social, para trazer a cognição e o social juntos, não podendo ser construídas com simples sumários prescritivos de ensino.

Pires destaca:

> Assim, não há referências a respeito da operacionalização de uma perspectiva construtivista social, sem contradizê-la. Comumente é usada a denominação “ensino construtivista”. No entanto, o construtivismo não oferece uma noção de como resolver os problemas de ensino ou de como efetivá-lo. (PIRES, 2009, p.10)

Segundo Simon é necessário ter atenção na seguinte questão: “Em que o construtivismo contribui para o desenvolvimento de um proveitoso trabalho teórico estruturado pela Pedagogia da Matemática”?

Pires concorda plenamente com Simon quando este afirma que considera excessivamente simplista aproveitar a conexão do construtivismo para o ensino com a romântica noção: “deixe os alunos sozinhos e eles construirão seu conhecimento matemático” ou igualmente: “coloque os alunos em grupos e deixe-os socializar como eles resolvem seus problemas” e aponta que grandes problemas relacionados ao papel do ensino e do professor, nas experiências educacionais brasileiras, foram ocasionados por idéias como estas.

Durante sua experiência com alunos, Simon perguntava-se como poderia entender o pensamento daqueles estudantes e como trabalhar com eles para verificar se seriam capazes de desenvolver raciocínios mais poderosos. E concluiu que, nessas experiências com alunos, ficou bem nítida a relação entre o projeto de atividades do professor e a consideração do pensamento que os alunos podem trazer em sua participação nessas atividades e que conduzem à formulação da idéia de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem, que, de acordo com o nosso entendimento, é produto da Pedagogia da Matemática.

Trajetória Hipotética de Aprendizagem, segundo Simon

Para Simon, uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) é um Ciclo de Conhecimento Matemático e tem como elementos importantes na sua construção o objetivo da aprendizagem, as atividades de aprendizagem, o pensamento e o conhecimento dos estudantes.

No que se refere ao conhecimento dos professores de Matemática, além de suas hipóteses sobre o conhecimento dos alunos, outros diferentes saberes profissionais intervêm, como por exemplo: teorias de ensino sobre Matemática, representações matemáticas, materiais didáticos, atividades e teorias sobre como os alunos constroem conhecimentos sobre um dado assunto, saberes esses derivados da pesquisa em literatura e/ou da própria experiência docente.

Durante o desenvolvimento de atividades pelos professores, um objetivo inicial planejado geralmente deveria ser modificado muitas vezes (talvez continuamente), durante o estudo de um conceito matemático particular. Quando os alunos começam a comprometer-se nas atividades planejadas, os professores deveriam "comunicar-se" com as observações dos alunos, nas quais eles formatam novas idéias sobre esse conceito. Assim, o ambiente de aprendizagem envolve resultados da interação entre o professor e os alunos e como eles se engajam em um conteúdo matemático.

Steffe (1990, apud Simon, 1995), assinala: "a modificação particular de um conceito matemático não pode estar para um professor mais do que os nutrientes que causam o crescimento das plantas".

Um professor pode propor uma tarefa; contudo, as formas como os alunos constroem suas tarefas e suas experiências é que determinam o potencial de aprendizagem. Assim por exemplo, se um aluno dá uma resposta a um problema elaborado pelo professor e, no entendimento do professor ele não obteve uma compreensão adequada sobre os conceitos ou procedimentos envolvidos, isso deve resultar num novo objetivo de ensino sobre o assunto. Este objetivo, temporariamente, substitui o original.

Simon afirma que, em suas experiências, a discussão na sala de aula o impulsionou a reexaminar diversos conhecimentos para favorecer a elaboração do seu “mapa conceitual” e destaca que o uso do termo “mapa”, neste contexto, é para enfatizar que o conhecimento do professor serve como um mapa que traduz como ele se empenha na construção da compreensão dos alunos e identifica o potencial de aprendizagem.

Ressalta que, o que foi observado em seus alunos mudou suas perspectivas sobre o conhecimento dos alunos e sua perspectiva na concepção matemática envolvida (seu mapa interno). Esta reorganização de perspectivas contribuiu para a modificação de seus objetivos e planos para atividades de ensino-aprendizagem que havia elaborado anteriormente.

O Ciclo de Ensino Matemático

A análise do episódio de ensino vivenciado por Simon contribuiu para o desenvolvimento do Ciclo de Ensino Matemático (Figura 1), como um modelo de inter-relações cíclicas dos aspectos do conhecimento do professor, hipóteses sobre o conhecimento dos alunos e tomada de decisões e atitudes com relação aos conhecimentos matemáticos.

Simon refere-se a hipóteses sobre o conhecimento dos alunos para enfatizar que não temos acesso direto ao conhecimento deles. E destaca:

> Como professor, minha concepção do conhecimento matemático dos alunos, está estruturado pelo meu próprio conhecimento da Matemática. Inversamente, o que observamos sobre o pensamento matemático dos alunos afeta nossa compreensão das idéias matemáticas envolvidas e suas interconexões. Estes dois fatores são esferas interativas do pensamento do professor. (SIMON, 1995, pág. 35).

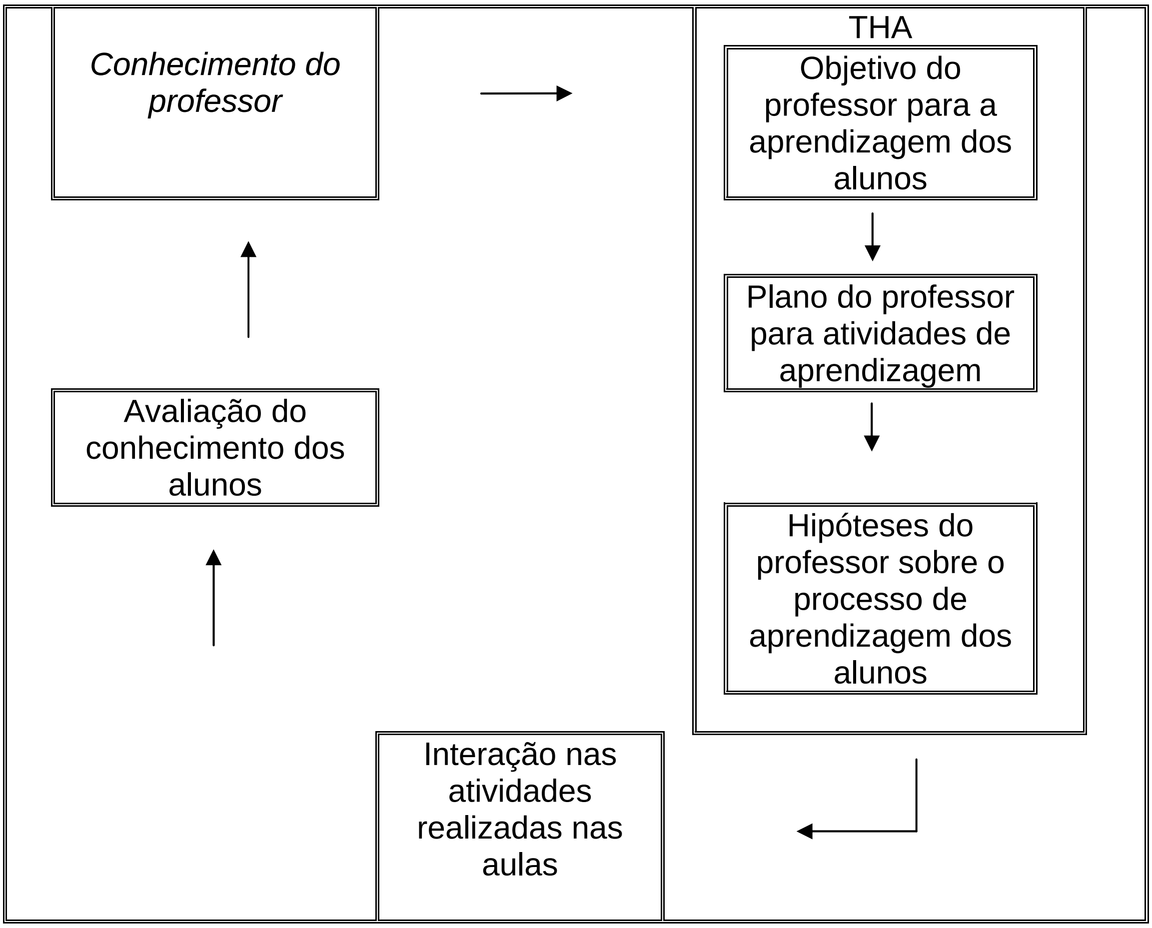


Figura 1: Ciclo de ensino de Matemática abreviado (Simon, 1995)

Para Steffe (1990, apud Simon 1995), os professores de Matemática devem interpretar a linguagem e as ações dos seus alunos usando seu próprio conhecimento matemático e tomar decisões sobre possíveis conhecimentos matemáticos dos alunos e sua possibilidade de aprendizagem.

Para Simon é o objetivo da aprendizagem que o professor tem para seus alunos que possibilita uma direção para uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

> Usaremos o termo Trajetória Hipotética de Aprendizagem tanto para fazer referência ao prognóstico do professor, como para o caminho que possibilitará o processamento da aprendizagem. É hipotética, pois caracteriza uma tendência esperada. O conhecimento individual dos estudantes ocorre de forma idiossincrática, embora freqüentemente em caminhos similares. Isso pressupõe que o conhecimento do indivíduo tem alguma regularidade (cf. Steffe, Von Glaserfield, Richards e Cobb, 1983), e, muitos alunos em uma mesma sala de aula pode se beneficiar das mesmas tarefas matemáticas. (SIMON, 1995, pág. 35)

Para Simon a Trajetória Hipotética de Aprendizagem dá ao professor a possibilidade de construir seu projeto de decisões, baseado em suas melhores suposições de como o conhecimento poderia ser processado.

Composição da Trajetória Hipotética de Aprendizagem, segundo Simon

Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) é composta por três elementos:

- O objetivo do professor com direções definidas para a aprendizagem de seus alunos;
- As atividades de ensino;
- O processamento hipotético de aprendizagem (uma suposição de como o pensamento e o entendimento dos alunos será colocada em ação no contexto de aprendizagem das atividades).

A criação das possibilidades de modificações da Trajetória Hipotética de Aprendizagem é a parte central do modelo em que está diagramado na figura abaixo.

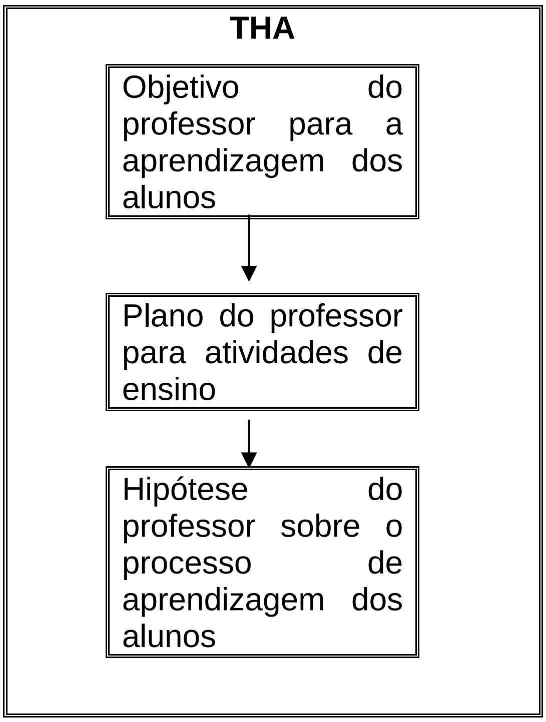


Figura 2: Parte do diagrama da figura 1
Ciclo de ensino da Matemática abreviado (SIMON, 1995)

Pires (2009) destaca que, para Simon, a noção da Trajetória Hipotética de Aprendizagem pressupõe a importância da relação entre a meta pretendida, o raciocínio sobre decisões de ensino e a hipótese sobre esse percurso. Para ele, o desenvolvimento de um processo hipotético de aprendizagem e o desenvolvimento de atividades de aprendizagem tem uma relação simbólica e a geração de idéias para atividades de aprendizagem é subordinada à hipótese do professor sobre o desenvolvimento do pensamento e aprendizagem de seus alunos.

A escolha da palavra “trajetória” é significativa para designar um caminho. Simon convida a fazer uma analogia:

> Considere que você tenha decidido viajar ao redor do mundo para visitar, na seqüência, lugares que você nunca tinha visto. Ir para a França, depois Havaí, depois Inglaterra, sem uma série de itinerário a seguir. Antes, você adquire conhecimento relevante para planejar sua possível jornada. Você faz um plano. Você pode inicialmente planejar toda a viagem ou uma única parte dela. Você estabelece sua viagem de acordo com seu plano. No entanto, você deve fazer constantes ajustes, por causa das condições que irá encontrar. Você continua a adquirir conhecimento sobre a viagem e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus planos a respeito da seqüência do seu destino. Você modifica o tamanho e a natureza de sua visita, de acordo com o resultado da interação com as pessoas no decorrer do caminho. Você adiciona os destinos à sua viagem que não eram de seu conhecimento. O caminho que você utilizará para viajar é sua “trajetória”. O caminho que você antecipa em algum ponto é a sua “trajetória hipotética”. (SIMON, 1995, pág. 36)

A geração de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem

Em seu texto, Simon (1995) destaca que a geração de uma THA prioriza buscar formas pelas quais o professor desenvolve seu planejamento em atividades de sala de aula, mas também, a identificar como o professor interage com as observações dos alunos, coletivamente, constituindo uma experiência e construindo novos conhecimentos.

> Esta experiência pela essência da sua construção social é diferente das primeiras antecipações dos professores. Simultaneamente ocorre uma construção social de atividades em sala de aula e a modificação das idéias e do conhecimento do

> professor, que ele vai construir em função do que está acontecendo ou do que aconteceu na sala de aula. (Simon, 1995, pág. 36)

O diagrama da figura 1, mostrado anteriormente, indica que a avaliação do pensamento do aluno (com constantes idas no modelo de ensino apresentado), pode trazer muitas adaptações a respeito de qualquer conhecimento do professor, possibilitando uma nova ou modificada Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

Simon apresenta, na figura 3, a relação entre os vários domínios do conhecimento do professor, a Trajetória Hipotética de Aprendizagem, e as interações com os alunos. Começando pelo topo do diagrama, o conhecimento matemático do professor interagindo com as hipóteses de aprendizagem sobre o conhecimento matemático dos alunos contribui para a identificação de um objetivo de ensino.

Estes domínios de conhecimento, o objetivo de ensino, o conhecimento da representação das atividades matemáticas para o professor, seu conhecimento sobre a aprendizagem individual do aluno, bem como a concepção de aprendizagem e ensino (ambos em geral dentro da Matemática), contribuem para o desenvolvimento de atividades de aprendizagem e processos de aprendizagens hipotéticas.

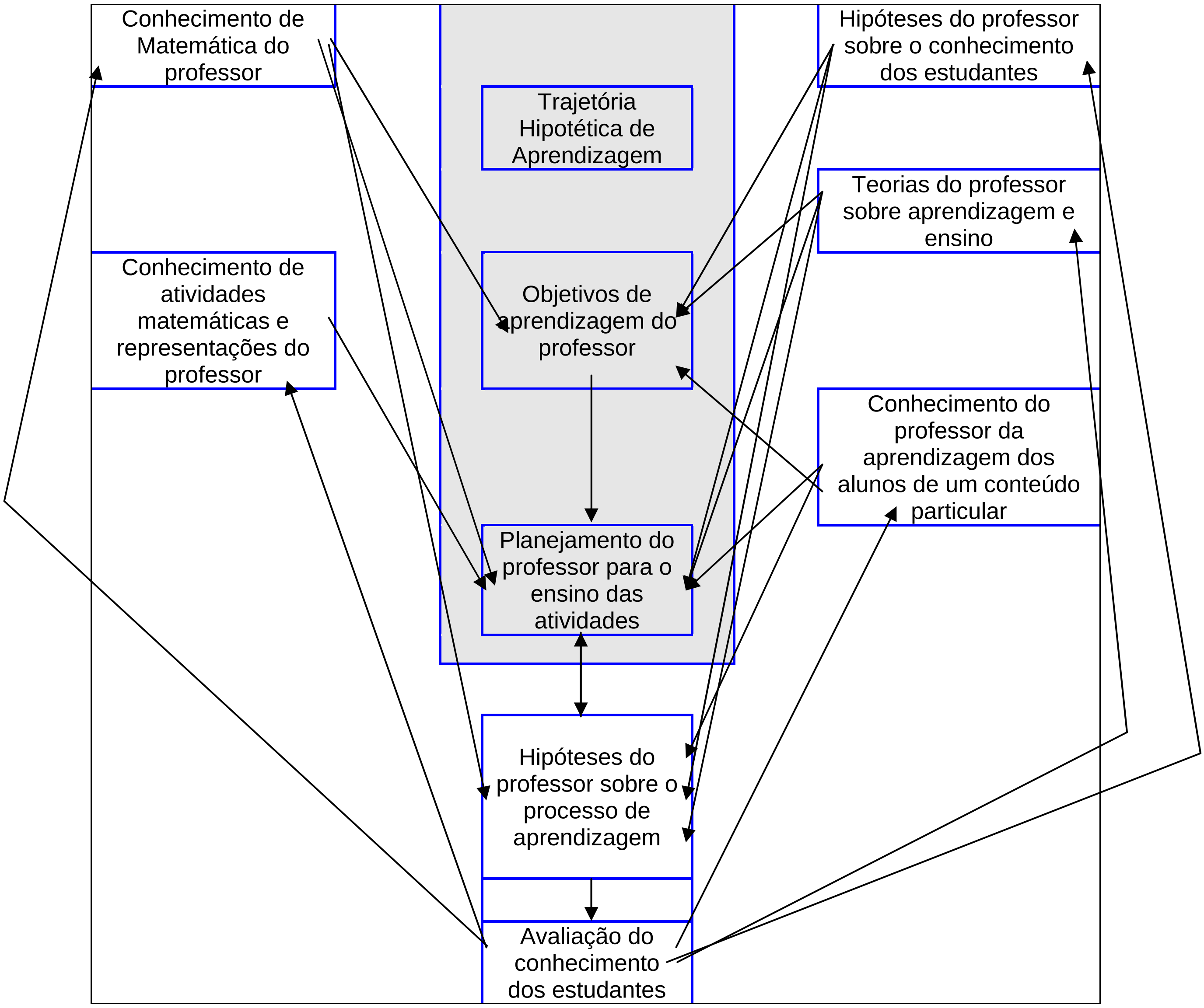


Figura 3: Domínios do conhecimento do professor, Trajetória Hipotética de Aprendizagem e interações com os alunos (SIMON, 1995)

Segundo Simon (1995), a modificação da Trajetória Hipotética de Aprendizagem não é aquela que ocorre somente durante o planejamento entre aulas. O professor está constantemente comprometido em ajustar a trajetória de aprendizagem que “hipotetizou”, para melhor refletir seu aumento de conhecimento. Ele está constantemente percebendo a extensão das modificações e transformações que podem afetar apenas um ou os três componentes da Trajetória Hipotética de Aprendizagem: o método, as atividades e o processamento hipotético da aprendizagem.

Concluindo seu artigo, Simon apresenta pontos que considera particularmente importantes no desenvolvimento do Ciclo de Ensino Matemático:

- O pensamento/entendimento dos estudantes é especialmente considerado e tem lugar central na formatação e implementação de instruções. O pensamento/entendimento é um processo contínuo do conjunto de dados e hipóteses construídas;
- O conhecimento do professor envolve-se simultaneamente com o crescimento do conhecimento do aluno. Quando os alunos estão aprendendo Matemática, o professor está aprendendo sobre Matemática, aprendendo, ensinando, a respeito do pensamento matemático dos seus alunos;
- O planejamento das instruções é parecido com a inclusão, a criação de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Esta visão reconhece e valida o método de ensino do professor e a importância de hipóteses sobre o processamento da aprendizagem dos alunos (idéias nas quais espera ter demonstrado que não estão em conflito com o construtivismo);
- A transformação continuada do conhecimento do professor cria mudanças contínuas na sua própria Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

Sendo assim, Simon considera o Ciclo de Ensino Matemático como um caminho para pensar sobre um ensino matemático significativo condizente com as perspectivas construtivistas tão presentes na Educação Matemática.

Outras contribuições para a reflexão sobre THAs

No artigo intitulado "*Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de Matemáticas de secundaria*", Gómez e Lupiáñez (2007) fazem uma análise a respeito do interesse de diferentes pesquisadores sobre a noção de THAs, especialmente no que se refere ao processo de formação inicial de professores.

Após uma breve explanação das noções de construção de uma THA, os autores destacam que o interesse pelas THAs se deu após a publicação de um número de *Mathematicas Thinking and Learning*, dedicado a sua discussão.

Steffe (2004, apud Gomez e Lupiánez, 2007) ressalta a importância da noção de Trajetória Hipotética de Aprendizagem dentro da Educação Matemática da seguinte forma:

> A construção de THAs dos alunos é um dos desafios mais urgentes que a Educação Matemática enfrenta atualmente. É também um dos problemas mais apaixonantes, pois é ali onde podemos construir nossa compreensão da Matemática dos alunos e, de que forma, nós professores, podemos influir nessa Matemática. (STEFFE, 2004, apud Gomez e Lupiánez, 2007)

Para Gomez e Lupiáñez (2007), apesar de diversos investigadores reconhecerem os três elementos centrais da THA (objetivos de aprendizagem, tarefas matemáticas e hipóteses sobre o processo de aprendizagem) e aceitarem pontos destacados por Simon, cada um interpreta e usa a noção de THA com propósitos e maneiras distintas. Os autores identificam claramente dois usos: como ferramenta de investigação e como ferramenta para planejamento, e justificam essa categorização após a análise dos trabalhos de alguns pesquisadores, como apresentamos nos parágrafos seguintes.

Os trabalhos de Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) e Clements, Wilson e Sarama (2004) (apud Gomez e Lupiánez, 2007) são trabalhos essencialmente de investigação nos quais se explora a THA para temas específicos.

Por outro lado, os trabalhos de Gravemeijer (2004) e Simon e Tzur (2004) (apud Gomez e Lupiánez, 2007) mesmo explorando também as THAs, preocupam-se em enfatizar seu uso no planejamento do professor. Finalmente, o trabalho de Batista (2004) (apud Gomez e Lupiánez, 2007) é centrado na avaliação.

Gómez e Lupiáñez (2007) apontam que em todos os trabalhos desenvolveram-se exemplos de THA em temas específicos. Para tanto, os investigadores assumiram o papel de professores em aulas reais. Os autores atentam para o fato de que mesmo que haja professores que participam de alguns projetos, não são eles que produzem os resultados das explorações.

De fato, alguns destes trabalhos vêem a construção de THAs como um trabalho do investigador, cujos resultados podem apoiar o trabalho do professor.

Segundo os autores, uma das principais diferenças de interpretação da noção de THA entre esses investigadores tem a ver com o nível de concretização com que a utilizam: desde o planejamento de várias aulas, até o trabalho com atividades específicas numa parte de uma aula. Para exemplificar, citam trabalhos de outros autores.

Gravemeijer (2004, apud Gómez e Lupiáñez, 2007) indica que sua proposta de teorias locais de ensino é a “descrição e a fundamentação para o caminho de aprendizagem prevista em sua relação com uma coleção de atividades de ensino de um determinado tema”.

Steffe (2004, apud Gómez e Lupiáñez, 2007), Lesh e Yoon (2004, apud Gómez e Lupiáñez, 2007) também utilizam a noção de THA para descrever a aprendizagem dos estudantes ao longo de várias sessões nas quais se trabalha um tema.

Simon e Tzur (2004, apud Gómez e Lupiáñez, 2007) vêem a THA como uma ferramenta para o planejamento de atividades matemáticas no dia a dia de uma sala de aula.

Finalmente Baroody, Cibulskis, Lai y Li (2004, apud Gómez e Lupiáñez, 2007) sugerem que a noção de THA pode ser utilizada para promover o “desenvolvimento micro-conceitual”, sendo esta a atividade central do ensino na aula.

Observando as propostas destes investigadores, os autores identificaram discordâncias quanto à questão: que relação existe entre a atividade diária do professor e a noção de THA? Para eles, um aspecto central ligado à atuação do professor tem a ver com o caráter reflexivo inerente à noção de THA: “há uma relação reflexiva onde a THA é o subsídio de juízos e decisões locais que, por sua vez, modificam a THA” (Gravemeijer, Cobb, Bowers e Whitenack, 2000, pp.249-250, apud Gómez e Lupiáñez, 2007).

Simon e Tzur (2004, apud Gómez e Lupiáñez, 2007), também enfatizam o papel do professor na construção e revisão permanente da THA. Mas, mostram um desafio: como fazer compatível o propósito de que seja o professor quem construa a revisão da THA se todos os exemplos que se tem de THA foram desenvolvidos por investigadores que assumiram o papel de professor?

Para Gómez e Lupiáñez (2007), propostas como as desenvolvidas por Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) são tão complexas e técnicas que acabam sendo pouco práticas para os professores. Por outro lado, as propostas de Simon e Tzur (2004) e

Gravemeijer (2004) têm um caráter essencialmente prático. Por fim, Baroody, Cibulskis, Lai e Li (2004, p.233, apud Gomez e Lupiánez, 2007) alertam para o fato de que: se é comprovado que uma THA é válida em uma circunstância particular (em um contexto, com alguns estudantes e um determinado professor), isto não quer dizer que essa THA tenha sentido em outras circunstâncias.

Os autores trazem ao debate preocupações como as expressas por Gravemeijer (2004, p. 107) que reconhece a dificuldade que teriam os professores para construir THAs como as que são produzidas pelos investigadores. No entanto, isso não quer dizer que a única coisa que se pode entregar aos professores seja meras seqüências de ensino para usar. Ele sugere dois elementos que podem ser úteis para os professores: (a) um marco de referência e (b) seqüências de atividades que lhes sirvam de exemplo. Mas questiona: porém, que pode fazer um professor com esta informação? Como pode usá-la para produzir e revisar sistematicamente sua própria THA para um tema, um contexto e alunos reais?

Steffe (apud Gómez e Lupiáñez, 2007) levanta outras questões: os professores, que participam diretamente das atividades dos alunos, devem produzir suas Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem? Que capacidades o professor deve ter para isso? O que pode ser feito na formação inicial dos professores para desenvolver essa capacidade?

Para Gómez e Lupiáñez (2007) a formação inicial é a melhor ocasião para que os futuros professores comecem a desenvolver as competências necessárias à construção de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem. Porém, como estes professores não têm experiência docente nem acesso às práticas de sala de aula, os autores sugerem uma adaptação da noção de THA que leva em conta estas restrições. Esta adaptação segue os passos abaixo:

a) análise cognitiva: os professores devem escrever suas hipóteses acerca da progressão dos alunos frente às atividades propostas;

b) análise de conteúdo e capacidade: trata de desenvolver, nos professores, habilidades para que eles possam elaborar atividades que contribuam na superação de dificuldades encontradas pelos alunos;

c) possíveis caminhos de aprendizagem: apresenta as mesmas características da Trajetória Hipotética de Aprendizagem, porém não contém a análise das tarefas;

d) possíveis caminhos de aprendizagem e dificuldades: trabalha a idéia de que o professor deve ter consciência dos possíveis erros e obstáculos escolares relacionados ao tema a ser ensinado;

e) análise de tarefas: a consciência dos itens anteriores permite aos futuros professores produzir conjecturas a respeito do melhor caminho a seguir e selecionar tarefas coerentes com seus objetivos.

Assim, a concepção de atividades de ensino-aprendizagem se torna um processo sistemático, aberto a críticas e discussões, presente nas atividades de planejamento do professor.

Considerações e reflexões do grupo de pesquisa Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores

Com relação às questões de como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com a planificação do ensino e de como as contribuições das pesquisas na área de Educação Matemática, podem contribuir para a organização de um ensino que potencialize boas situações de aprendizagem dos alunos, o grupo encontrou, nos trabalhos de Simon, características extremamente relevantes:

- A constatação de que as perspectivas construtivistas de aprendizagem têm dado sustentação a fundamentos teóricos no campo da Educação Matemática;
- Sugestões importantes para que os professores possam compreender e antecipar a forma de construção dos conhecimentos matemáticos de seus alunos.

Porém, o grupo considera particularmente importante o alerta de Simon no sentido de que, o construtivismo também aponta um desafio para a Educação Matemática, qual seja o de desenvolver modelos de ensino em que a construção de conhecimentos seja tomada como perspectiva teórica e considera o Ciclo de Ensino Matemático, proposto por Simon, uma importante ferramenta pela busca de tarefas modeladas pelo encontro de uma perspectiva do construtivismo social com o desafio das aulas de Matemática.

A leitura dos textos motivou a ampliação das discussões sobre a atuação do professor de Matemática no que se refere às atividades de planejamento do ensino e ao fato de que o aluno desempenha papel central na construção de suas aprendizagens. Além disso, os textos abriram espaço para a discussão acerca da utilidade e efetiva aplicação dos resultados de pesquisa na montagem e estruturação de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

Simon destaca, ainda, que indicações para o professor sobre a importância da interação de pequenos grupos e a manipulação de materiais, por exemplo, podem ser instrumentos valiosos nas mãos dos professores de Matemática. No entanto, estes instrumentos não são suficientes para permitir que os professores sejam arquitetos da produção de situações de aprendizagens que resultem num crescimento conceitual de seus alunos. Professores novatos, por exemplo, muitas vezes questionam o conhecimento de seus alunos, consciente ou inconscientemente, esperando que no mínimo um aluno esteja habilitado a explicar sua idéia para os outros. E perguntam o que devem fazer com um grupo de alunos, para que construam conceitos matemáticos.

Com relação a este fato, as discussões a respeito do artigo de Gómez e Lupiáñez (2007) possibilitaram uma análise quanto às limitações dos professores no que tange a elaboração de uma THA proporcionando aos pesquisadores compreender as dificuldades encontradas e propiciar aos professores colaboradores momentos de discussão onde eles possam explicitar suas dúvidas e opiniões sem constrangimento.

Segundo Pires (2008), na formação inicial e continuada de professores, não se consideram as especificidades próprias dos níveis e/ou modalidades de ensino e existe uma desarticulação, quase total, entre conhecimentos específicos e conhecimentos pedagógicos, assim como entre teoria e pratica.

Esses fatores contribuem para a defasagem dos professores quanto à capacidade de elaborar Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem. Sendo assim, o professor recém-formado tende a trabalhar, na prática, com modelos ultrapassados, construídos por ele mesmo, durante sua trajetória escolar, visto que questões a respeito de inovações curriculares, como as perspectivas construtivistas, não fazem parte da vivência do futuro professor durante sua passagem na Universidade.

Nosso grupo concluiu que, para mudanças significativas, os jovens professores precisam ter contato com os resultados atuais de pesquisa de forma que eles possam explorar este conhecimento na elaboração de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem que explorem os vários papéis da Matemática, proporcionando aos alunos aulas de Matemática mais significativas e atrativas e realimentando o professor para que o processo ensino-aprendizagem permaneça em constante atualização.

1.2 Investigações sobre o ensino das Isometrias

Um dos elementos importantes na elaboração de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem diz respeito ao conhecimento do professor acerca dos resultados de pesquisa referentes ao tema a ser trabalhado.

Deste modo, procuramos alguns trabalhos desenvolvidos até o momento que julgamos relevantes para a nossa pesquisa e que nos auxiliaram na construção de nosso primeiro modelo de THA. As buscas foram feitas no sentido de integrar os seguintes elementos: o ensino da Geometria e em particular, o ensino das Isometrias.

Dentre as diversas pesquisas realizadas até aqui, tomamos como referência os trabalhos de Pavanello (1989), Gouvêa (1998), Cerqueira (2005), entre outros.

Das pesquisas citadas acima, várias delas falam a respeito do abandono da Geometria nos currículos de Ensino Fundamental e Médio e apresentam argumentos na tentativa de justificar este fato. Compreendê-lo nos ajuda a entender a resistência encontrada junto aos professores quando os conteúdos a serem trabalhados se referem os tópicos da Geometria.

Para Pavanello (1989) a partir do momento em que as escolas de nível médio passam a atender um número maior de alunos das classes menos favorecidas, o ensino de Geometria vai sendo abandonado, ou em alguns casos, desenvolvido muito formalmente, a partir da introdução da Matemática Moderna.

Para esta autora, a idéia central da Matemática Moderna consistia em trabalhar a Matemática do ponto de vista de estruturas algébricas com a utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos. Sob esta orientação, não só se enfatizava o ensino da Álgebra, como se inviabilizava o da Geometria da forma como este era feito tradicionalmente.

Além da influência da Matemática Moderna, o descaso no ensino de Geometria tem outras razões: o despreparo do professor, em todos os níveis de ensino, e a necessidade de cumprir um extenso currículo de Matemática, leva a escola a ministrar apenas conteúdos relacionados a um raciocínio algébrico, como citam vários autores.

Para Pavanello (1989) a maioria dos professores que participaram de sua pesquisa não se achava capacitado para ensinar Geometria e por esta razão não a incluíam em seus planos de ensino. Dentre os que incluíam, o faziam sempre ao final do ano letivo, havendo falta de tempo para trabalhar vários de seus conteúdos.

Gouvêa (1998) reforça a idéia de que o ensino da Geometria passou a ser abandonado pelos professores após a introdução da Matemática Moderna. Segundo a autora “ensinar e aprender Geometria por meio de espaços vetoriais ou por meio de transformações, como pregava a Matemática Moderna, era difícil tanto para professores, como para alunos, por se tratar de uma nova abordagem”.

E num extenso trabalho de pesquisa, na intenção de ouvir os professores da rede pública no que diz respeito ao trabalho de Geometria em sala de aula, Perez (1991) cita a fala de um professor por ele entrevistado:

> O tempo não é suficiente para cumprir todo o programa, por isso, procuramos selecionar alguns conteúdos. Como a cada ano que passa a clientela estudantil sente mais dificuldades em receber a Geometria, o maior tempo é dedicado para Aritmética e Álgebra. (PEREZ, 1991, pág. 124)

Trabalhos como os de Pavanello (1989), Gouvêa (1998), Perez (1991) e Camilo (2007) comprovam a difícil realidade nas escolas no que se refere ao ensino de Geometria.

Nos últimos anos, porém, temos percebido que o ensino de Geometria vem tomando força novamente no currículo escolar. Perez (1991) já constatava este fato quando disse que alguns dados parecem prever que a Geometria vai reencontrar seu lugar no ensino da Matemática. Atualmente, as novas propostas curriculares apresentam tópicos de Geometria ao longo do ano letivo, em todas as séries da Educação Básica.

A retomada do ensino de Geometria pode ter como uma de suas razões o fato de existirem pesquisas comprovando o ensino de Geometria como um conhecimento necessário ao homem. Pavanello (apud Atiyah – 1982) afirma que tanto o pensamento visual, dominante na Geometria, como o pensamento seqüencial, característico da álgebra, são essenciais à educação Matemática, porém, tanto na pesquisa como no ensino da Matemática, houve uma priorização da álgebra, desenvolvendo somente um tipo de pensamento, sendo, portanto, necessário restabelecer o equilíbrio, retomando o ensino de Geometria.

A autora justifica esta constatação ao verificar, por exemplo, a pouca capacidade de percepção espacial dos alunos (e pessoas em geral), quando requeridas na compreensão de exercícios ou em atividades profissionais variadas.

Pavanello ressalta ainda que o desenvolvimento da percepção espacial não é a única contribuição da Geometria. A capacidade de abstrair, generalizar e transcender o que é imediatamente sensível, também é um objetivo da Matemática e o desenvolvimento de conceitos geométricos oferece condições para que o aluno atinja níveis sucessivos de abstração.

Camilo (2007) aponta em suas pesquisas, que, apesar dos documentos oficiais apresentarem prescrições curriculares quanto ao ensino de Geometria, a inserção dessas prescrições na prática ainda não acontece efetivamente.

Dentro da nossa proposta de pesquisa, o ensino das transformações Isométricas para o Ensino Médio, pode citar o trabalho de Cerqueira (2005), onde a autora afirma que este conteúdo raramente é mencionado em livros didáticos de Ensino Médio e quando o é, geralmente não apresenta uma abordagem de forma consistente, dificultando a tarefa do professor em desenvolver atividades.

Ainda segundo Cerqueira (2005), o ensino das transformações isométricas no curso de Ensino Médio pode proporcionar aos alunos uma compreensão mais adequada de determinados conteúdos propiciando aos alunos a oportunidade de estar frente a frente numa contextualização da Matemática para a própria Matemática.

Nossa pesquisa bibliográfica tem como foco também analisar os resultados de pesquisa no que se refere às possíveis dificuldades encontradas pelos alunos, no estudo das transformações geométricas – grupo das Isometrias.

Ao fazer esta análise percebemos que existe um maior número de estudos, referente a este conteúdo, com relação às séries de Ensino Fundamental do que no

Ensino Médio. Optamos por apresentar estes resultados e adequá-los, coerentemente, durante a elaboração de nossa THA.

Quanto a analise das dificuldades apresentadas pelos alunos, o livro "*El grupo de las Isometrias del Plano*", 1996, dos autores Jaime e Gutiérrez, nos apresenta, em detalhes, resultados de investigações que abordaram a problemática do ensino e aprendizagem das Isometrias e sugerem a teoria de Van Hiele como uma alternativa de desenvolvimento deste conceito geométrico.

Segundo Lorenzato (1995, apud Hamazaki, 2004), a teoria de Van Hiele concebe a aprendizagem geométrica em níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Ela se apresenta em cinco níveis com as seguintes características: no nível inicial (visualização), as figuras são avaliadas apenas pela sua aparência, a ele pertencem os alunos que só conseguem reconhecer ou reproduzir figuras (através das formas e não pelas propriedades); no nível seguinte (análise) os alunos conseguem perceber características das figuras e descrever algumas propriedades delas; no nível três (abstração), as propriedades das figuras são ordenadas logicamente e a construção das definições se baseia na percepção do necessário e do suficiente. As demonstrações podem ser acompanhadas, memorizadas, mas dificilmente elaboradas. Nos dois níveis seguintes (dedução e rigor) estão aqueles que constroem demonstrações e que comparam sistemas axiomáticos

Para Jaime e Gutiérrez (1996), uma boa compreensão da Matemática e uma aprendizagem produtiva necessitam ter presente duas coisas: 1) a Matemática é uma ciência ferramenta, logo é necessário mostrar aos alunos as conexões existentes entre a Matemática e outros campos do conhecimento, assim como entre as diferentes áreas da própria Matemática; 2) os conceitos matemáticos têm vários componentes e o ensino deve integrá-los em diferentes perspectivas.

Segundo os autores, estes dois pontos são de extrema importância no estudo das Isometrias.

Nos parágrafos seguintes, selecionamos as principais dificuldades dos alunos, encontradas por Jaime e Gutiérrez (1996), durante a realização de suas investigações. Estas dificuldades independem do contexto em que os alunos trabalharam de suas idades e do sistema educativo. Para uma melhor compreensão apresentaremos os resultados separados por tipo de Isometria.

Dificuldades freqüentes nos estudo das simetrias:

- Erros conceituais: os alunos não identificam a eqüidistância entre os pontos ou apresentam falta de perpendicularidade;
- Erros de interpretação visual: os alunos desenham a figura paralela, mesmo que o eixo de simetria não seja paralelo;
- Erros quanto ao tipo de figura: desenhar um segmento é mais difícil que desenhar um ponto e quanto mais complexa a figura, maior possibilidade de erros;
- Erros quanto à posição do eixo: é mais difícil desenhar figuras com eixos de simetria que não se apresentam na vertical ou horizontal ou quando o eixo de simetria corta o objeto;
- Erros quanto à inclinação da figura: é mais difícil desenhar figuras que apresentam ângulos diferentes de 0º, 45º ou 90º entre o eixo de simetria e o segmento.

Dificuldades freqüentes nos estudo das rotações:

- Erros quanto ao centro do giro: é mais fácil girar uma figura que contém um centro de giro que quando está separada dele;
- Erros quanto ao desconhecimento de operações com ângulos: os alunos apresentam dificuldade em estimar a amplitude de um ângulo, em comparar ângulos em diferentes posições ou em identificar ângulos formados por duas figuras congruentes que não se tocam.

Dificuldades freqüentes nos estudo das translações:

- Erros quanto à compreensão do conceito de vetor livre como um vetor associado a uma translação: os alunos tendem a pensar que uma translação consiste em levar a figura até o extremo da flecha desenhada como representante de um vetor de translação;
- Erros quanto à posição da figura: quando o vetor de translação é paralelo a um dos lados da figura (principalmente as que são

poligonais), é freqüente o aluno desenhar a figura começando num extremo do vetor e terminando em outro.

Os autores concluem que, em geral, os alunos têm uma tendência natural de utilizar uma concepção intuitiva visual, apoiada em imagens mentais e na posição das imagens formadas por estas figuras, sem utilizar suas propriedades matemáticas.

Trabalhos como os de Mabuchi (2000) e Luz (2007) confirmam os elementos encontrados por Jaime e Gutiérrez (1996) em suas investigações e fornecem subsídios para a escolha de atividades que farão parte da nossa Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

Duas outras publicações contribuíram para nosso trabalho. A primeira delas intitula-se "Isometrias e ornamentos do plano Euclidiano", de Ruoff (1982). Nesta publicação, a autora justifica o ensino das Isometrias no Ensino Médio dado a sua importância no estudo das estruturas matemáticas. A autora valoriza a intuição geométrica tanto quanto a precisão das demonstrações e a definição de conceitos elementares. A teoria e os exercícios são apresentados com o mesmo nível de importância e a teoria dos ornamentos foi escolhida para a aplicação da teoria das Isometrias, fazendo uma conexão entre a Matemática e as Artes.

Por fim, "As transformações geométricas e o ensino da Geometria", de Catunda et al (1990) foi a 2ª publicação que contribuiu para nossa pesquisa. Os autores valorizam o ensino das transformações geométricas através de um sistema dedutivo, substituindo a memorização mecânica pela compreensão e, para isso, provocam a atividade do aluno através de um processo entre a exposição e a descoberta onde estão presentes o concreto e o abstrato e o particular e as generalizações.

1.3 As Isometrias nos documentos curriculares

Podemos perceber, conforme confirma Cerqueira (2005), que as transformações geométricas têm presença nas propostas curriculares do Ensino Fundamental desde a década de 60/70, já por influência da Matemática Moderna e que continuaram presentes no desenvolvimento dos documentos oficiais seguintes: os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) e a nova Proposta Curricular (2008).

Faremos agora uma análise, com a intenção de identificar as orientações propostas pelos documentos oficiais do Ensino Fundamental, mas principalmente, do Ensino Médio, segmento foco de nossa pesquisa, no que tange ao ensino das transformações geométricas – grupo das Isometrias.

Ensino Fundamental

No Guia Curricular de Matemática, elaborado e divulgado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, na década de 1970, Cerqueira destaca a abordagem essencialmente algébrica presente nas sugestões acerca das Isometrias.

Já nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCN-EF, 1998), os conteúdos matemáticos foram divididos em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação e as transformações isométricas estão inseridas no bloco Espaço e Forma, que tem por objetivo desenvolver um tipo especial de pensamento que permite a compreensão, descrição e representação de forma organizada do mundo em que vive.

Nesta direção, Os PCN-EF sugerem que as transformações isométricas sejam incorporadas nos ciclos 3 e 4 (7ª e 8ª séries – EF) visando o desenvolvimento das habilidades de percepção espacial e favorecendo a construção de figuras. Como os conceitos a respeito das transformações isométricas já vêm sendo trabalhados em ciclos anteriores, nestes, eles devem ser consolidados. Por fim, afirmam que alguns conceitos serão completados e consolidados no Ensino Médio.

Quando analisamos a nova Proposta Curricular (2008), percebemos que a divisão dos conteúdos matemáticos por blocos temáticos se mantém e os conteúdos de Isometrias continuam presentes nos ciclos 3 e 4.

Ensino Médio

Como nosso foco é o Ensino Médio, optamos por analisar as propostas curriculares separadamente, como segue abaixo.

Proposta Curricular para o ensino de Matemática – 2º grau (1992)

Segundo a Proposta Curricular para o ensino de Matemática – 2º grau (1992, pág. 7), justifica-se o ensino da Matemática no currículo escolar pela necessidade de seu uso nas atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade e por desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de abstrair, generalizar, projetar e transcender o que é imediatamente sensível, alegando, ainda, que estas duas “funções” devem ser consideradas como elementos inseparáveis.

Com o intuito de abarcar estas “funções”, a proposta sugere os seguintes conteúdos: Funções, Geometria, Trigonometria, Potências e Expoentes, Análise Combinatória, Probabilidade, Geometria Analítica, Matemática Financeira e Estatística. Dentro da Geometria, porém, a proposta não sugere o estudo das Isometrias, ficando o desenvolvimento deste conteúdo a critério do professor.

Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN-EM, 1999)

Quanto aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1999, pág. 251), o ensino da Matemática justifica-se por ser útil em todas as áreas do conhecimento com o objetivo de tirar conclusões e fazer argumentações e tornar o aluno um consumidor prudente e responsável em tomar decisões sobre sua vida pessoal e profissional.

Para este objetivo, os PCN-EM admitem que a Matemática tenha alguns aspectos. O aspecto formativo, que contribui para o desenvolvimento dos processos de pensamento e aquisição de atitudes, o aspecto instrumental, considerado como sendo um conjunto de técnicas e estratégias que poderão ser utilizadas em outras áreas do conhecimento e o aspecto da Matemática vista como ciência, proporcionando ao aluno perceber as definições, demonstrações e encadeamentos lógicos a fim de que ele possa construir novos conceitos e utilizá-los para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas por ele.

Juntando-se a estes aspectos, os PCN-EM afirmam que, no Ensino Médio, os alunos estão aptos a utilizar e ampliar os conceitos aprendidos no Ensino Fundamental, dentro dos vários campos do conhecimento matemático, desenvolvendo de modo mais amplo as capacidades de abstração, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e da própria realidade.

E apontam que, a Matemática do Ensino Médio, deve apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que ele possa continuar aprendendo de forma autônoma.

Além dessas considerações, os PCN-EM apresentam as finalidades do ensino da Matemática no Ensino Médio, que devem levar o aluno a:

- Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- Expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;

- Promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática: Ensino Médio, 1999, pág. 254).

No que se refere ao conteúdo da Geometria, o documento propõe quatro unidades temáticas: Geometria plana, métrica, espacial e analítica. Quanto às habilidades e competências de um conteúdo específico, no nosso caso, as Isometrias, o documento não apresenta propostas explícitas.

Além disso, os PCN-EM não apresentam nenhum tipo de orientação didática, diferentemente dos PCN-EF, deixando por conta do professor a forma de aprendizagem, a escolha dos conteúdos trabalhados e a dosagem na exploração dos vários papéis da Matemática.

Diante dessas considerações, compreendemos porque existem tantas diferenças nos conteúdos trabalhados em diferentes escolas, ou até mesmo, diferenças entre salas da mesma escola, dificultando ainda mais a presença dos conteúdos de Geometria no currículo do Ensino Médio.

Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008)

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008, pág. 69) apontam que a escolha dos conteúdos de Matemática deve levar em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica e orientam que, ao final do Ensino Médio, os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano e modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento.

Além disso, devem compreender que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; perceber a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído e saber que a Matemática é importante no desenvolvimento científico e tecnológico.

Os conteúdos básicos se apresentam, neste documento, em quatro blocos: Números e Operações, Funções, Geometria e Análise de Dados, mas deve-se buscar a articulação entre eles.

Quanto ao estudo da Geometria, o documento orienta que alguns conceitos estudados no Ensino Fundamental devem ser consolidados no Ensino Médio e que a conexão com outras disciplinas pode servir como motivação para a consolidação de alguns conceitos.

Dentre as orientações a respeito do ensino de Geometria, presentes neste documento, destacamos: orienta ao professor que os alunos devem compreender os processos que levam ao estabelecimento de fórmulas e não a simples apresentação delas; incentiva a apresentação de algumas argumentações e demonstrações e aponta a necessidade de articulação entre Geometria e Álgebra.

Com relação ao ensino das Isometrias, o documento não faz nenhuma menção direta, mas faz conexões deste tema com outros conteúdos. As orientações didáticas para que estas conexões realmente aconteçam porém, ficam sob a responsabilidade do professor.

CAPITULO 2
CONSTRUÇÃO DA PRIMEIRA VERSÃO DA THA

Neste capítulo apresentamos como se deu o processo de construção da primeira versão de nossa THA. Destacamos aqui os objetivos de aprendizagem, a seleção das atividades escolhidas e as hipóteses sobre a aprendizagem dos alunos. Em seguida apresentamos a primeira versão da THA seguida pelos comentários dos professores colaboradores. Finalmente, a segunda versão, já com as alterações incorporadas.

2.1 Objetivos do professor pesquisador a respeito da aprendizagem dos alunos com relação ao tema Isometrias

Apresentamos abaixo os objetivos de aprendizagem para os alunos do 2º ano do Ensino Médio:

- Identificar transformações no plano como a simetria axial, a simetria central, a translação e a rotação e seu uso em ornamentos;
- Identificar e utilizar propriedades das Isometrias, conservação de medidas de lados e ângulos;
- Reconhecer elementos e características de figuras planas (lados, ângulos, eixos de simetria, paralelismo e perpendicularismo, etc.).

Segundo nossa concepção, o estudo das transformações geométricas propicia aos alunos a compreensão de inúmeros conceitos matemáticos, além de ser ferramenta importante para a compreensão de outros conteúdos, tornando-se um poderoso elemento de contextualização dentro da Matemática.

Porém, como já falamos anteriormente e verificamos na pesquisa de Cerqueira (2005), este conteúdo não é sugerido para o Ensino Médio em nenhum documento curricular oficial. Os documentos curriculares, apesar de considerarem o ensino de Geometria como ponto importante, não indicam que conteúdos poderão ser trabalhados, ficando a critério do professor a sua seleção.

Mesmo na nova proposta curricular para o Ensino (2008), o conceito de Isometria não aparece como objeto de estudo, porém é explorado na apresentação de outros conteúdos, tais como funções (1º ano do Ensino Médio) e trigonometria no ciclo (2º ano do Ensino Médio) destacando a importância desse conhecimento dentro da Matemática.

2.2 Hipóteses da professora pesquisadora a respeito do processo de aprendizagem dos alunos

Com base nas leituras realizadas durante a revisão bibliográfica e também na experiência como professora do Ensino Fundamental e médio, fizemos um levantamento a respeito das dificuldades que os alunos apresentam ao desenvolver o tópico "Transformações Isométricas".

As dificuldades encontradas no desenvolvimento de atividades de Isometrias, apresentadas por Jaime e Gutiérrez (1996) foram o eixo norteador para a escolha das atividades da THA e serviram de base para que nós identificássemos as seguintes hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos na THA:

- Despertar os conhecimentos já existentes nos alunos com a finalidade de facilitar o desenvolvimento das questões, valorizando o processo dedutivo;
- Apresentar diferentes estratégias de obtenção das Isometrias, de forma que o aluno conheça as diferentes perspectivas de um mesmo tema;
- Utilizar recursos tecnológicos a fim de contribuir para a formulação de conjecturas e validação de respostas;
- Apresentar o tema como objeto de estudo e depois como ferramenta de aplicação em outros conteúdos da Matemática, a fim de proporcionar ao aluno a contextualização da Matemática pela própria Matemática.

Acreditamos que estas hipóteses possam favorecer o aluno de forma que ele construa uma aprendizagem mais significativa, visto que as atividades propostas visam a exploração dos conhecimentos que ele já possui e facilitam a formulação de conjecturas.

Além disso, algumas atividades exploram o caráter instrumental da Matemática, tão valorizado pelos documentos oficiais:

> No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. (PCNEM, Brasil, 2002, p.251)

Apesar da importância dada ao caráter instrumental da Matemática, pelos documentos oficiais, podemos perceber, em nossa experiência como professoras e nas pesquisas a respeito de Geometria, que o conhecimento geométrico vem sendo apresentado ao aluno por meio de regras, fórmulas e propriedades que devem ser memorizadas, apresentando uma Geometria excessivamente formal, totalmente desvinculada das aplicações em outras áreas do conhecimento.

Desta forma, as atividades propostas visam desenvolver, através de um processo dedutivo, o ensino do tema Isometrias de maneira contextualizada, explorando os contextos dentro da própria Matemática. Consequentemente, nossas atividades procuram explorar de diferentes maneiras, variáveis que costumam induzir o aluno ao erro, como por exemplo, a posição do eixo de simetria.

Como destacam Jaime e Gutiérrez (1996), esses erros acontecem porque os alunos têm contato apenas com a variável sempre da mesma forma. Logo, quando colocados à frente de situações desconhecidas, o erro aparece.

Outro ponto explorado nas nossas atividades é a utilização de um software gratuito de Geometria que possibilita, aos alunos, a oportunidade de obter rapidamente as figuras isométricas favorecendo a compreensão de suas características e de suas propriedades, evitando a memorização arbitrária.

Enfim, ao final da realização das atividades, esperamos que os alunos consigam reconhecer as Isometrias, compreender suas propriedades e utilizá-las como ferramenta na resolução de problemas de outras áreas da Matemática, ou até mesmo, de outras do conhecimento.

2.3 O processo de construção da THA sobre Isometrias

A elaboração da THA teve como base nossos objetivos de aprendizagem, nossas hipóteses sobre aprendizagem, os resultados de pesquisa e nossa própria experiência como professora.

A escolha das atividades se deu após uma larga pesquisa em livros didáticos, publicações a respeito de Isometrias, como as de Ruoff (1982), Jaime e Gutiérrez (1996) e Catunda (1990), seqüências de ensino propostas em dissertações e na Internet. Porém, nossa escolha não foi fácil, pois a grande maioria das atividades encontradas se refere a alunos de Ensino Fundamental.

Para elaborarmos as tarefas de aprendizagem, partimos do pressuposto que os alunos já possuíam alguns conhecimentos a respeito de Isometrias pois esse assunto faz parte dos conteúdos sugeridos pelos documentos oficiais nos diversos ciclos do Ensino Fundamental.

Nossas atividades propõem, inicialmente, a exploração das rotações e translações a partir do conhecimento das simetrias axiais e depois da forma tradicional, propondo abordagens diferentes sobre o mesmo assunto para que o conceito seja compreendido de forma mais ampla.

A primeira atividade proposta, portanto é sobre simetria axial, visto que ela será o ponto chave no desenvolvimento dos outros conceitos. Esta atividade começa com a apresentação de um arquivo em Power Point que contém diversas figuras a fim de permitir que através do visual o aluno desperte para as noções de simetria. Esta atividade explora também a relação existente entre o número de eixos de simetria e a fração da figura formada. Ao final da atividade, esperamos que o aluno consiga definir o que são figuras simétricas.

A escolha da segunda atividade teve como base a mudança das variáveis: eixo de simetria e formato da figura. Procuramos propiciar aos alunos situações de construção de figuras modificando estas variáveis para que eles tenham contato com situações diferentes. Esperamos que os alunos percebam os elementos invariantes da simetria, independente das posições das figuras ou dos eixos. Esta atividade tem inspiração nas constatações de Jaime e Gutiérrez (1996) citadas em nossa revisão bibliográfica.

Como um dos objetivos de nossa THA é apresentar as rotações e translações a partir da simetria axial, exploramos, na atividade três, exercícios desse tipo. Os alunos devem construir as transformações através de duas reflexões e ao final levantar conjecturas a respeito de uma única movimentação que fosse capaz de obter a figura final.

A proposta da terceira atividade tem ainda o objetivo de relacionar a construção das figuras com suas propriedades. Novamente exploramos o processo dedutivo da Geometria, valorizando a compreensão dos conceitos em detrimento da memorização de propriedades.

A quarta atividade foi inspirada numa seqüência de ensino para ensinar transformações geométricas, proposta por Moura, que tem como público alvo os alunos da graduação de Matemática e tem por objetivos: explorar e investigar as transformações geométricas no plano, estabelecer relações entre álgebra e Geometria por meio de funções e visualizar e analisar gráficos de funções de 1º e 2º graus.

Para que a atividade tivesse significado em nossa THA, fizemos algumas modificações, como por exemplo, a exclusão das atividades de funções e a inserção do roteiro relacionado a rotação. Vale aqui um pequeno comentário a respeito da escolha do software.

Inicialmente, pensamos escolher o software Cabri Geòmetre para a realização das atividades, porém alguns obstáculos nos fizeram mudar de idéia. Em primeiro lugar, a questão da manipulação do software, que os professores não possuem, conhecendo-o apenas pelo nome, mas não os seus recursos e, posteriormente, pela incompatibilidade de versões, visto que a versão presente na escola é anterior àquela que trabalhamos na Universidade.

Estas razões, juntamente com vantagens de ser o Geogebra[4] um software free, de fácil manipulação e que trabalha visualmente com informações geométricas e algébricas, fizeram dele uma ferramenta útil na exploração das atividades propostas para nossa THA.

A atividade em questão tem a intenção de explorar as Isometrias quanto à identificação das propriedades das figuras e as relações entre as figuras e suas coordenadas, que serão utilizadas numa atividade posterior.

[4] O download do software Geogebra está disponível no site www.geogebra.org.

Após a realização desta atividade esperamos que os alunos consigam identificar os movimentos isométricos num plano cartesiano, relacionando-os às coordenadas e, consequentemente, aos quadrantes.

Na atividade seguinte procuramos explorar o conteúdo de cálculo de áreas utilizando para isto o conceito de reconfiguração. Essas reconfigurações serão obtidas com o uso de transformações isométricas. Nesta atividade as Isometrias são utilizadas como ferramenta de resolução e não como objeto de estudo. Escolhemos o cálculo de áreas por ser um conteúdo freqüente em problemas de Geometria.

A última atividade proposta para a THA trata do estudo de funções. As funções escolhidas foram $f(x) = x^2$ e $f(x) = \frac{1}{x}$. O foco desta atividade é o uso das simetrias axiais e centrais, que determinam as funções pares e ímpares. Porém, este não foi o único ponto explorado nesta atividade. A construção de gráficos a partir do acréscimo de valores em x e em y, relacionado à translação de figuras, também faz parte dessa atividade.

Esperamos que ao final da quinta e sexta atividades, os alunos compreendam que o estudo das Isometrias é ponto importante para o desenvolvimento de vários conceitos matemáticos e que, com as aplicações nestas atividades, seja mais fácil a visualização deste conceito em outros conteúdos da Matemática que não foram abarcados em nossa THA.

Finalmente, após a realização de todas as atividades propostas, acreditamos que os alunos possam identificar as Isometrias e suas propriedades em atividades dentro de contextos matemáticos, ou de outras áreas do conhecimento, dominem a construção de figuras e reconheçam a presença das Isometrias em situações do dia a dia.

Com relação ao tempo necessário para a realização das atividades, temos como hipótese, que serão necessárias doze aulas de cinqüenta minutos, considerando duas aulas para cada atividade proposta. Além disso, planejamos a utilização de mais duas aulas de cinqüenta minutos que serão utilizadas para a aplicação de uma avaliação, sendo, no total, quatorze aulas previstas.

2.4 Primeira versão da THA

Apresentamos aqui a primeira versão de nossa THA que contém as orientações para o professor em sala de aula, o tempo previsto para cada atividade, os objetivos e as instruções para o desenvolvimento das questões.

THA – 1ª versão

Objetivos:

- Identificar transformações no plano como a simetria axial, a simetria central, a translação e a rotação e seu uso em ornamentos.
- Identificar e utilizar propriedades das Isometrias, conservação de medidas de lados e ângulos.
- Reconhecer elementos e características de figuras planas (lados, ângulos, eixos de simetria, paralelismo e perpendicularismo etc.).

Instruções para a atividade um:

Atividade individual

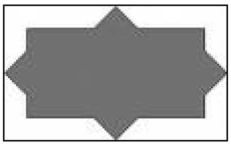
Professor inicie a aula com uma discussão sobre simetria e eixos de simetria. Peça para que os alunos desenhem os eixos nas figuras propostas no item c e completem as figuras propostas no item g. Ao finalizarem, volte novamente à discussão de simetria e apresente a definição.

Tempo previsto: 2 aulas

1. Entrando nos eixos:

   a) O que significa o termo simetria?
   b) Você saberia dizer o que são figuras simétricas?
   c) Observe as figuras abaixo:

FIGURA A FIGURA B FIGURA C

Quantos eixos de simetria têm cada uma destas figuras? Trace – os nas próprias figuras.

d) Observando os eixos que você traçou, identifique em quantas partes cada uma das figuras foi dividida.

e) Se você fosse desenhar cada uma das figuras acima, que parte de cada uma delas você precisaria para poder desenhá-las por inteiro?

f) As figuras abaixo têm um eixo de simetria. Complete-as.

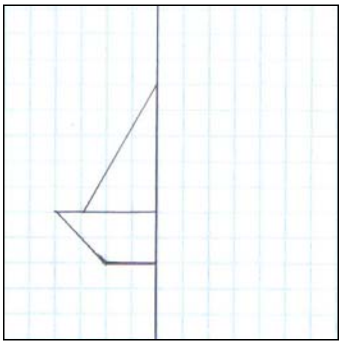
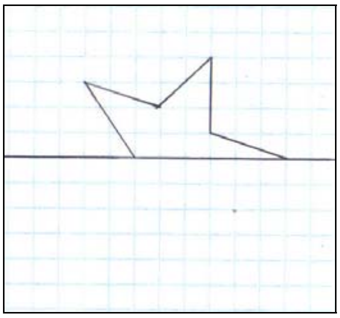
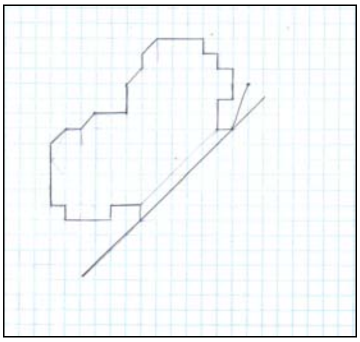
  

FIGURA A FIGURA B FIGURA C

g) Quais são as semelhanças que você observa entre a parte da figura que estava desenhada e a que você desenhou? E as diferenças?

Definição: Figuras simétricas são as figuras que contém um ou mais eixos de simetria, sendo que estes eixos dividem a figuras em partes exatamente iguais.

Instruções para a atividade dois:

Atividade em dupla

Professor, peça para que os alunos completem as figuras de acordo com seus próprios conhecimentos. Após terminarem os desenhos, peça para que eles troquem as folhas e discutam se concordam ou não com os desenhos feitos pelo seu colega. Peça para eles tentarem validar a resposta imaginando que ao dobrar o papel as figuras deverão se sobrepor. Finalmente, socialize as respostas.

2. Construindo figuras:

Nas malhas a seguir há diferentes figuras desenhadas. Desenhe a imagem como se pede:

a) A reta l é chamada eixo de simetria. A partir deste eixo, desenhe a imagem **refletida** das figuras:

FIGURA A

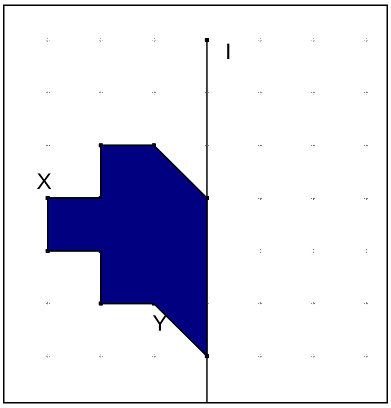


FIGURA B

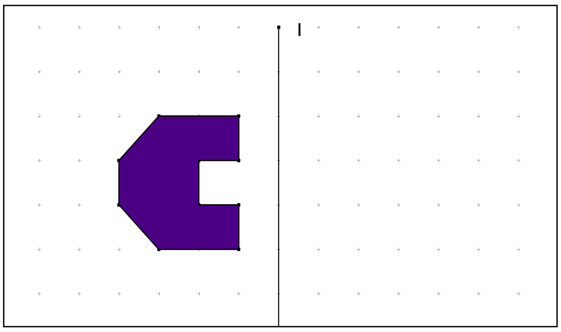


FIGURA C

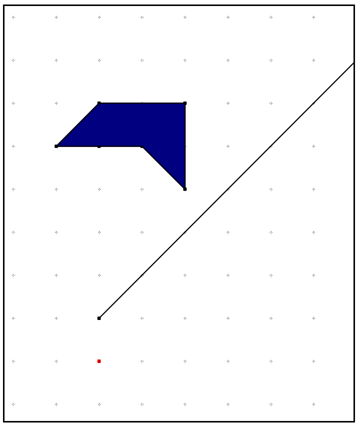


FIGURA D

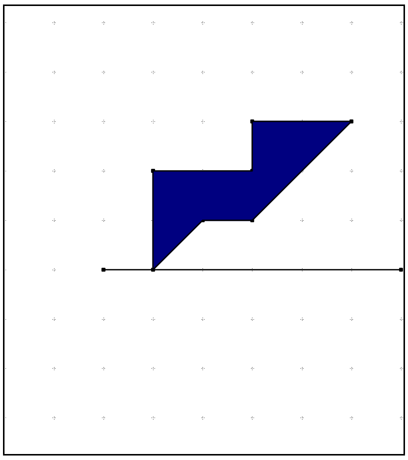


FIGURA E

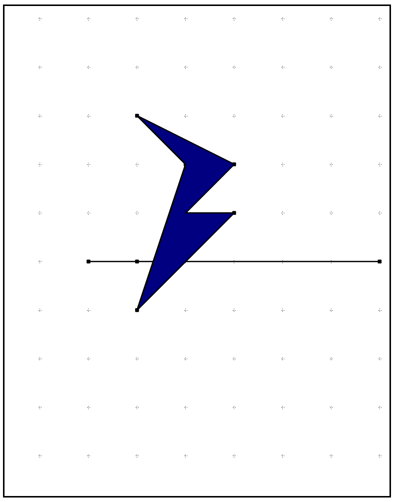
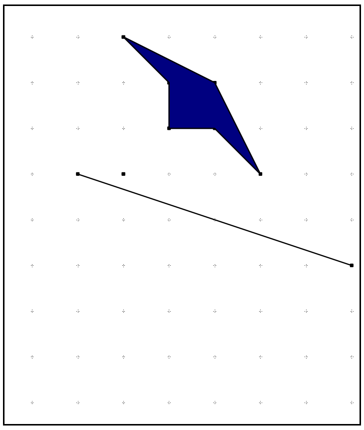


FIGURA F



b) Na figura A, qual seria o ponto simétrico do ponto X? Determine-o e chame-o de X1.
c) Meça a distância do ponto X ao eixo. Proceda da mesma forma com o ponto X1.
d) Meça a distância do ponto Y ao eixo. Proceda da mesma forma com o ponto Y1.
e) Escolha outro ponto qualquer e depois verifique se acontece a mesma coisa.
f) Faça a mesma verificação nas outras figuras. Escolha dois pontos de cada uma delas, nomeie estes pontos e faça suas verificações.
g) Escreva um pequeno texto sobre suas conclusões.

Instruções para a atividade três:

Atividade individual

Professor, deixe que os alunos completem as figuras propostas e respondam as questões. Após a resolução das questões, socialize as respostas e finalmente apresente a definição de Isometrias.

3) Conhecendo outras Isometrias:

A partir da reflexão em reta podemos identificar outras Isometrias: translação e rotação. As atividades propostas abaixo mostrarão o caminho.

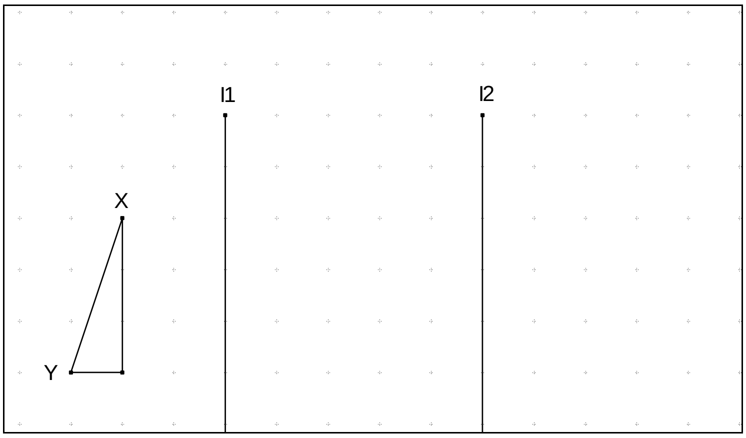


FIGURA A

3.1) Translação:

a) Observe a figura A e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura A1 e ponto X1.
b) Agora, reflita a figura encontrada, em torno do eixo I2, encontrando a figura A2 e o ponto X2.
c) Qual a distância entre os eixos I1 e I2?
d) Qual é a distância entre X e X2?
e) Proceda da mesma forma para o ponto Y.
f) Que relação você percebe quando analisa a distância entre os eixos I1 e I2 e a distância entre os pontos X e X2 ou Y e Y2?
g) O que você observa sobre as figuras A e A2?
h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura A e chegar na figura A2?

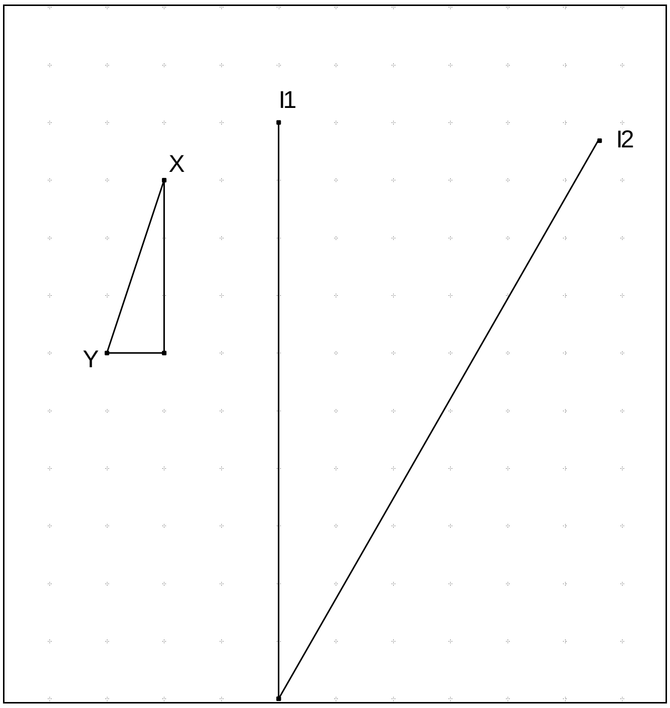


FIGURA B

3.2) Rotação com ângulo de 30º:

a) Observe a figura B e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura B1 e ponto X1.
b) Agora, reflita a figura encontrada, em torno do eixo I2, encontrando a figura B2 e o ponto X2.
c) Com a ajuda do transferidor, meça o ângulo entre os eixos I1 e I2?
d) Qual o valor do ângulo formado entre os pontos X e X2?
e) Proceda da mesma forma para o ponto Y.
f) Que relação você percebe quando analisa o ângulo encontrado entre os eixos I1 e I2 e o ângulo encontrado entre os pontos X e X2 ou Y e Y2?
g) O que você observa sobre as figuras B e B2?
h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura B e chegar na figura B2?

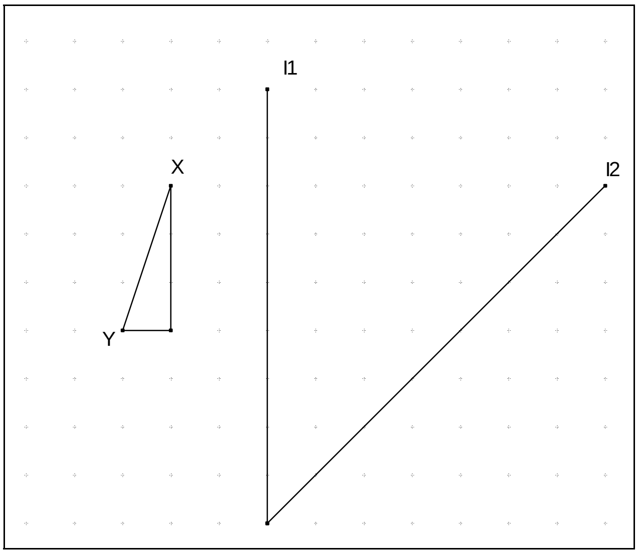


FIGURA C

3.3) Rotação com ângulo de 45º:

a) Observe a figura C e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura C1 e ponto X1.
b) Agora, reflita a figura encontrada, em torno do eixo I2, encontrando a figura C2 e o ponto X2.
c) Com a ajuda do transferidor, meça o ângulo entre os eixos I1 e I2?
d) Qual o valor do ângulo formado entre os pontos X e X2?
e) Proceda da mesma forma para o ponto Y.
f) Que relação você percebe quando analisa o ângulo encontrado entre os eixos I1 e I2 e o ângulo encontrado entre os pontos X e X2 ou Y e Y2?
g) O que você observa sobre as figuras C e C2?
h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura B e chegar na figura B2?

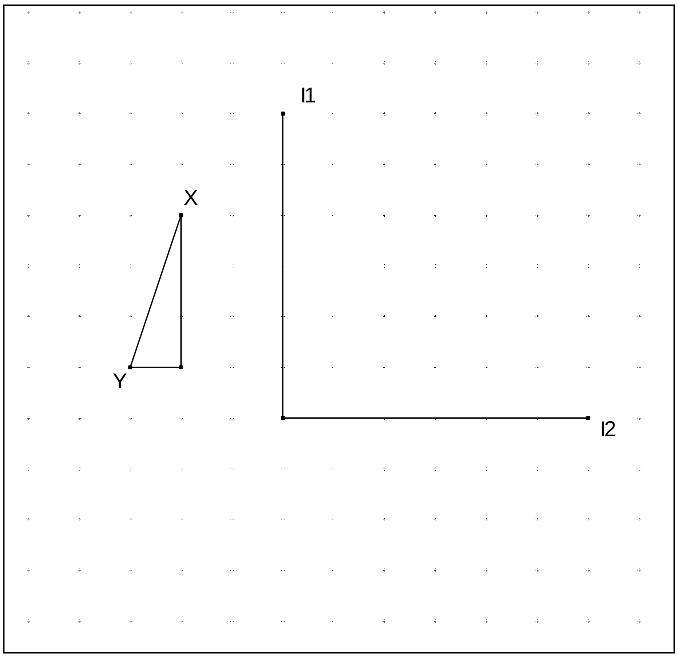


FIGURA D

3.4) Simetria Central:

a) Observe a figura D e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura D1 e ponto X1.
b) Agora, reflita a figura encontrada, em torno do eixo I2, encontrando a figura D2 e o ponto X2.
c) Com a ajuda do transferidor, meça o ângulo entre os eixos I1 e I2?
d) Qual o valor do ângulo formado entre os pontos X e X2?
e) Proceda da mesma forma para o ponto Y.
f) Que relação você percebe quando analisa o ângulo encontrado entre os eixos I1 e I2 e o ângulo encontrado entre os pontos X e X2 ou Y e Y2?
g) O que você observa sobre as figuras D e D2?
h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura D e chegar na figura D2?

Definição: uma Isometria é uma transformação geométrica que transforma uma figura em outra geometricamente igual. Três delas apresentam esta propriedade: translação, rotação e reflexão ou SIMETRIA AXIAL.

4) Identificando propriedades:

Material necessário: Software Geogebra

4.1) Descobrindo a simetria

Construção:

a) Abra o arquivo "construção 1"
b) Com a ferramenta "reflexão com relação à uma reta", clique no polígono P1 e depois no eixo x. Aparecerá um polígono que deverá ser nomeado P2, simétrico a P1, em relação ao eixo x.
c) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P1, propriedades e na opção cor, modifique a cor do polígono P1 a fim de distingui-lo de P2.
d) Faça um segmento de reta unindo os pontos A e A', obtendo o segmento $\overline{AA'}$. Qual é a posição desta reta em relação ao eixo de simetria? ____
e) Faça a mesma representação para os outros vértices simétricos da figura. Em que posições estão entre si as retas dos outros segmentos? E qual a posição destas retas com relação ao eixo de simetria? ____ ____
f) Considere o segmento $\overline{AA'}$. Chame de F o ponto de intersecção entre a reta e o eixo de simetria. Porque o ponto F é chamado de ponto médio do segmento? ____
g) O ponto de interseção dos outros segmentos com o eixo de simetria também é o ponto médio desses segmentos?____
h) Com a ferramenta "reflexão com relação à uma reta", clique novamente em P1 e, depois no eixo y. Agora aparecerá um polígono que deverá ser chamado de P3, simétrico à P1, em relação ao eixo y.
i) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P3, propriedades e na opção cor, modifique a cor do polígono P3 a fim de distingui-lo dos outros.

j) Utilizando a ferramenta “ângulo”, clique sobre os três polígonos e compare as medidas de todos os ângulos. ____

k) Utilizando a ferramenta “distância ou comprimento” sobre os lados dos três polígonos, calcule o perímetro de cada um deles e compare os resultados ____

l) Utilize a ferramenta “área” sobre os três polígonos e compare os resultados.____

m) Após responder a estas perguntas, você identificou algumas características das figuras simétricas. Faça uma síntese sobre estas características.____
____
____

n) Observe na janela de álgebra, as coordenadas correspondentes de cada ponto dos polígonos encontrados. Agora clique na ferramenta “move” e desloque um dos vértices do polígono P1. Verifique o que acontece com as coordenadas dos pontos, as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos. Depois digite seus comentários.
____
____

o) Grave seu arquivo com o nome “construção 1A".

4.2) Um movimento chamado translação

Construção:

a) Abra o arquivo “construção 2”
b) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P1, propriedades e na opção cor e modifique a cor do polígono P1 a fim de distingui-lo dos outros.
c) Crie um vetor vertical V1, de origem no ponto (0,0) e fim no ponto (0,4), no sentido positivo do eixo y e um vetor horizontal V2 de origem no ponto (0,0) e fim no ponto (6,0), no sentido positivo do eixo x.

d) Com a ferramenta “transladar por um vetor”, clique no polígono P1 e depois no vetor V1. Aparecerá um polígono que você nomeará de P2 e que foi obtido de P1.
e) Repita a operação utilizando o polígono P1 e o vetor V2. Nomeie este novo polígono de P3.
f) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P3, propriedades e na opção cor e modifique a cor do polígono P3 a fim de distingui-lo dos outros.
g) Observe na janela de álgebra o que aconteceu com as coordenadas dos pontos dos polígonos P2 e P3, comparados com as coordenadas de P1.____
h) Utilizando a ferramenta “ângulo”, clique sobre os três polígonos e compare as medidas de todos os ângulos. ______________________________
i) Utilizando a ferramenta “distância ou comprimento” sobre os lados dos três polígonos, calcule o perímetro de cada um deles e compare os resultados.

   ____
j) Utilize a ferramenta “área” sobre os três polígonos e compare os resultados.____
k) Clique na ferramenta “move” e desloque a extremidade dos vetores. Verifique o que acontece com as coordenadas dos vértices correspondentes dos polígonos. ______________________________
l) Clique novamente na ferramenta “move” e desloque um dos vértices do polígono P1. Verifique o que acontece com as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos .______________________
m) Digite seus comentários a respeito de suas percepções.

   ____

   ____

   ____

   ____
n) Grave seu arquivo com o nome “construção 2A".

4.3) Girando...

Construção:

a) Abra o arquivo “construção 3”

b) Marcar o ponto (0,0) e chamá-lo de O.
c) Com a ferramenta “girar em torno de um ponto por um ângulo”, clique no polígono P1, depois no ponto O e digite 30º sentido horário. Aparecerá um polígono que você nomeará de P2 e que foi obtido de P1.
d) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P2, ferramentas e na opção cor, modifique a cor do polígono P2.
e) Com a ferramenta “segmento definido por dois pontos”, encontre os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{AO'}$.
f) Utilizando a ferramenta “ângulo” encontre o ângulo formado entre estes dois segmentos. Escolha um outro ponto e repita o processo, anotando o que você observou ____

____
g) Grave seu arquivo como “construção 3A" e abra novamente o arquivo “construção 3”.
h) Marcar o ponto (0,0) e chamá-lo de O.
i) Com a ferramenta “girar em torno de um ponto por um ângulo”, clique no polígono P1, depois no ponto O e digite 80º sentido horário. Aparecerá um polígono que você nomeará de P3 e que foi obtido de P1.
j) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P3, ferramentas e na opção cor, modifique a cor do polígono P3.
k) Com a ferramenta “segmento definido por dois pontos”, encontre os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{AO'}$.
l) Utilizando a ferramenta “ângulo” encontre o ângulo formado entre estes dois segmentos. Escolha um outro ponto e repita o processo, anotando o que você observou ____
m) Grave seu arquivo como “construção 3B" e abra novamente o arquivo “construção 3”.
n) Marcar o ponto (0,0) e chamá-lo de O.
o) Com a ferramenta “girar em torno de um ponto por um ângulo”, clique no polígono P1, depois no ponto O e digite 180º sentido horário. Aparecerá um polígono que você nomeará de P4 e que foi obtido de P1.
p) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P4, ferramentas e na opção cor, modifique a cor do polígono P4.

q) Com a ferramenta “segmento definido por dois pontos”, encontre os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{AO'}$.

r) Utilizando a ferramenta “ângulo” encontre o ângulo formado entre estes dois segmentos. Escolha um outro ponto e repita o processo, anotando o que você observou ____

____

s) Utilizando a ferramenta “ângulo”, clique sobre os dois polígonos e compare as medidas de todos os ângulos _________________________

____

t) Utilizando a ferramenta “distância ou comprimento” sobre os lados dos dois polígonos, calcule o perímetro de cada um deles e compare os resultados ____

u) Utilize a ferramenta “área” sobre os dois polígonos e compare os resultados. ____

v) O que você percebeu ao analisar os resultados? Será que acontece a mesma coisa para os polígonos anteriores, feitos com outros ângulos? Por que? Escreva suas conclusões.__________________________________

____

____

____

Grave seu arquivo como “construção 3C".

Instruções para a atividade cinco:

Atividade individual

Professor lembre como se calcula a área de quadrados e retângulos e deixe que os alunos respondam as questões. Após a resolução das questões, socialize as respostas.

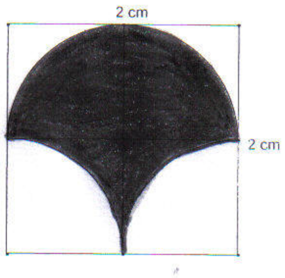
5) Calculando áreas

O cálculo de áreas é muito utilizado em Matemática. O uso das transformações geométricas é uma ferramenta que ajuda no cálculo de áreas de figuras que não são tradicionais.

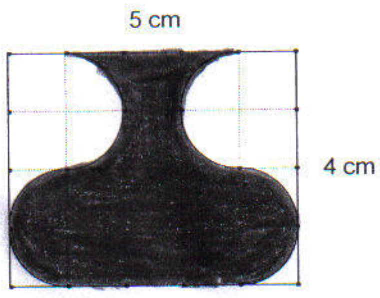
Quando, para calcular a área de uma figura, precisamos modificar a figura original de forma que tenhamos uma nova figura, mais simples e com o formato de uma figura geométrica conhecida, dizemos que estamos realizando uma RECONFIGURAÇÃO. Para realizar uma reconfiguração podemos utilizar como ferramenta as transformações geométricas.

Observe as figuras abaixo e calcule as áreas dessas figuras utilizando as transformações aprendidas.

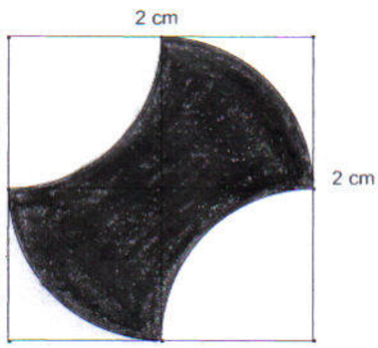
a) Qual é a área da figura pintada contida no quadrado de 2 cm?



b) Obter a área da figura pintada contida no retângulo de lados 4 cm e 5 cm.



c) Qual é a área da figura pintada contida no quadrado de 2 cm?



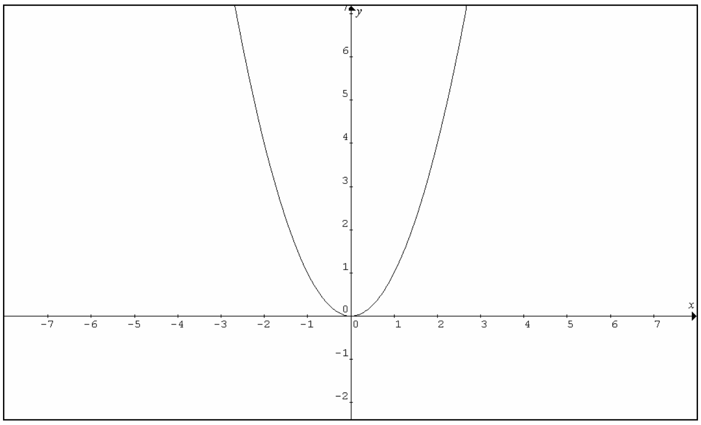
Instruções para a atividade seis:

Atividade em duplas

Professor, permita que os alunos discutam entre si as possíveis soluções. Ao final da realização das atividades, escolha duas duplas para que apresentem seus resultados à classe. Posteriormente, socialize as respostas.

6) Simetrias das funções:

6.1) Função quadrática



a) Observe o gráfico formado pela função $f(x) = x^2$. Ele é uma figura simétrica?
b) Onde está o eixo de simetria?
c) Que tipo de simetria é a deste gráfico?
d) Se acrescentarmos valores a x ou a y na função $f(x) = x^2$ podemos obter gráficos que são transladados em x ou em y. Acrescentando 2 à abscissa obtemos a função $f(x) = (x+2)^2$, representado pela figura A. Para construirmos a figura B, acrescentamos -3 à abscissa, obtendo a função $f(x) = (x-3)^2$. As figuras C e D tiveram acrescentados valores em x e em y. A função da figura C é $f(x) = (x+2)^2 - 3$, o que significa que foram acrescentados 2 unidades em x e 3 unidades em y. Sabendo que a função da figura D é $f(x) = (x-3)^2 + 4$, responda:
e) Que valor foi acrescentado em x?
f) Que valor foi acrescentado em y?
g) Trace os eixos de simetria das figuras A, B, C e D e determine as abscissas por onde eles passam.

h) O que você pode perceber ao observar os valores acrescentados em x e o eixo de simetria de cada figura?

i) Escolha um ponto do gráfico $f(x) = x^2$ e determine sua coordenada.

j) Encontre o simétrico deste ponto e sua respectiva coordenada

k) O que você pode concluir ao observar estas coordenadas?

FIGURA A

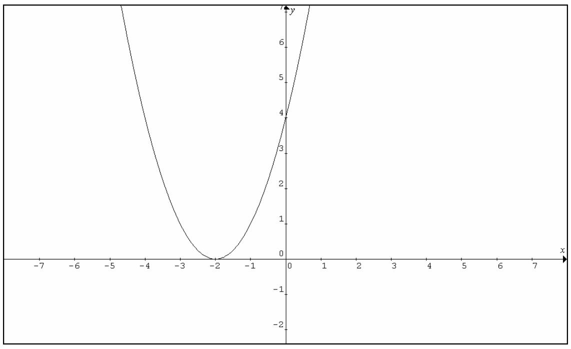


FIGURA B

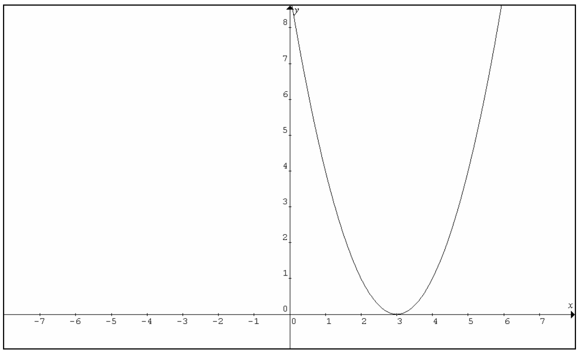


FIGURA C

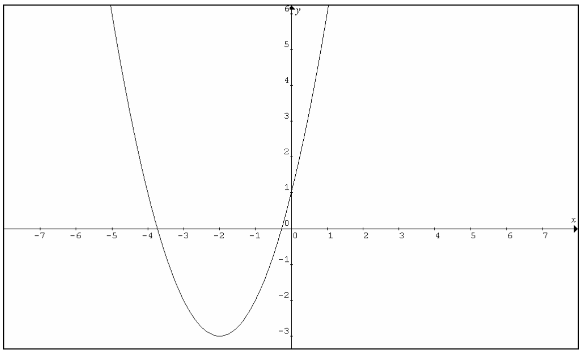
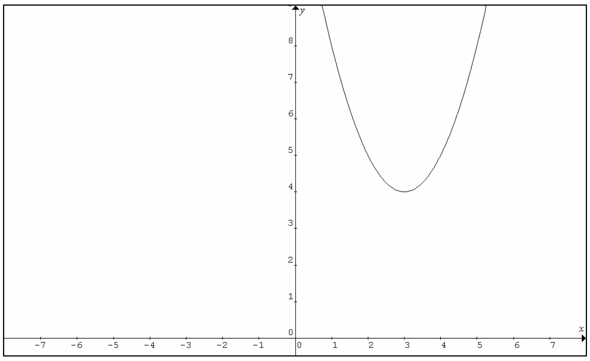
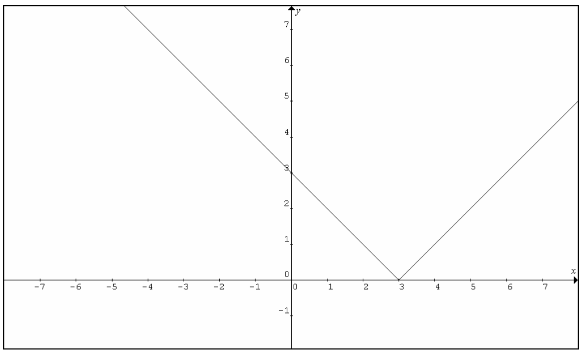
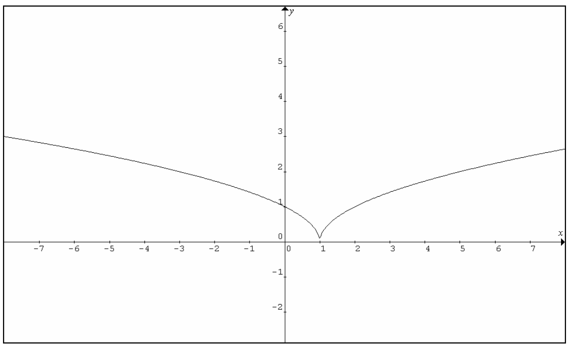


FIGURA D

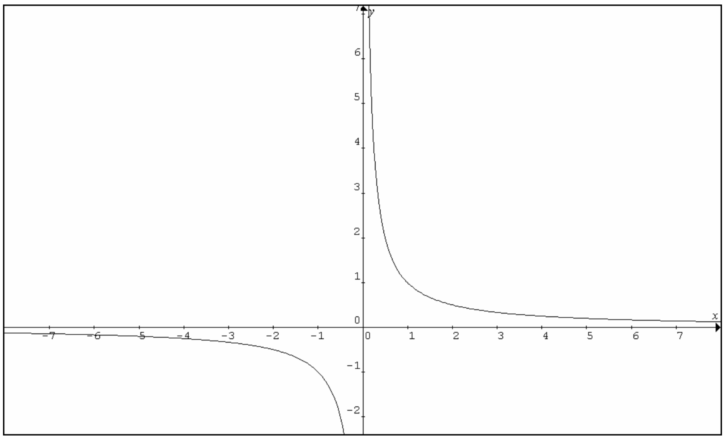


Funções que contém simetria axial são chamadas de **funções pares**. Veja abaixo outros exemplos e identifique nelas os eixos de simetria





6.2) Função $\frac{1}{x}$



a) Observe o gráfico formado por esta função. Ele é uma figura simétrica?
b) Onde está o eixo de simetria?
c) Que tipo de simetria é a deste gráfico?
d) Se acrescentarmos valores a x ou a y na função f(x) = $\frac{1}{x}$ podemos obter gráficos que são transladados em x ou em y. Acrescentando -2 à abscissa obtemos a função f(x) = $\frac{1}{x-2}$, representado pela figura E. Para construirmos a figura F, acrescentamos 3 à abscissa, obtendo a função f(x) = $\frac{1}{x+3}$. As figuras G e H tiveram acrescentados valores em x e em y. A função da figura G é f(x) = $\frac{1}{x+3}+4$, o que significa que foram acrescentados 3 unidades em x e 4 unidades em y. Sabendo que a função da figura D é f(x) = $\frac{1}{x-2}-1$, responda:
e) Que valor foi acrescentado em x?
f) Que valor foi acrescentado em y?
g) Trace os eixos de simetria das figuras E, F, G e H.
h) Determine duas coordenadas que pertencem a este eixo de simetria?
i) O que você pode perceber ao observar os valores acrescentados em x e em y e a localização do eixo de simetria de cada figura?

j) Escolha um ponto do gráfico f(x) = $\frac{1}{x}$ e determine sua coordenada.

k) Encontre o simétrico deste ponto e sua respectiva coordenada

l) O que você pode concluir ao observar estas coordenadas?

FIGURA E

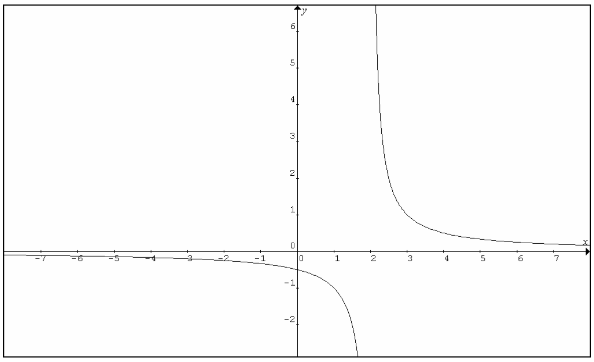


FIGURA F

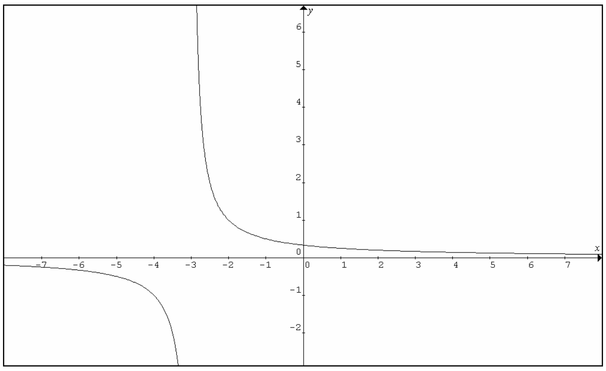


FIGURA G

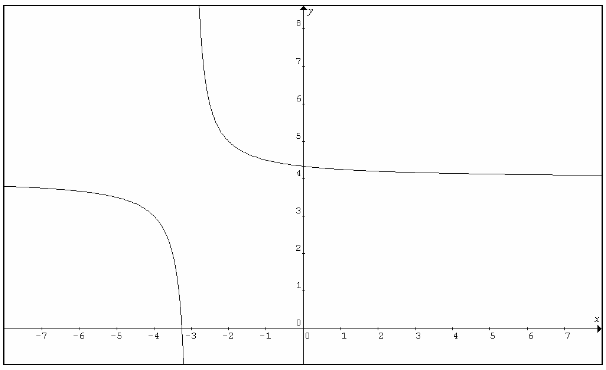
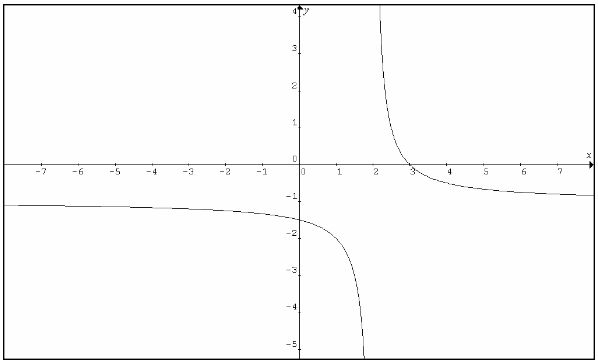
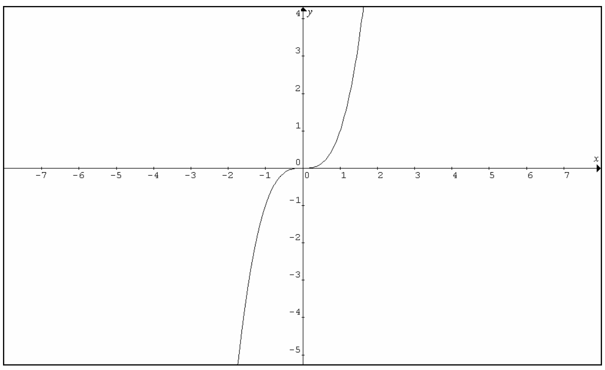
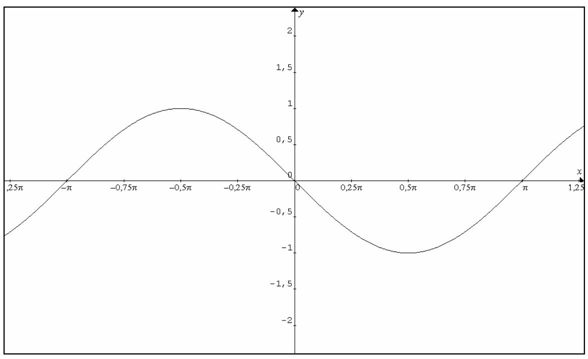


FIGURA H



Funções que contém simetria axial são chamadas de **funções ímpares**. Veja abaixo outros exemplos e identifique nelas os eixos de simetria





2.5 Análise da primeira versão da THA

Descrevemos agora as sugestões propostas pelos professores, suas razões e as modificações que foram incorporadas à primeira versão da THA.

Para a atividade um, o professor P1 sugeriu uma atividade introdutória. Esta atividade conteria conceitos básicos de Geometria, utilizados no estudo de transformações, como por exemplo: ângulos, retas paralelas e perpendiculares, vetores, etc. A sugestão foi a montagem de um arquivo em Power Point onde estas informações estivessem contidas e este arquivo seria apresentado aos alunos de forma rápida e clara como introdução à atividade um. Esta sugestão foi apoiada pelo professor P2, que também sentiu esta necessidade e alegou que os alunos não têm muitos conhecimentos em Geometria. Segundo ele, começar com a atividade um diretamente seria complicado e ele precisaria parar para explicar alguns conceitos básicos.

Com relação às tarefas da atividade um, eles não fizeram nenhum questionamento. O professor P2 apenas sugeriu que excluíssemos a definição de simetrias que estava no final da atividade.

Frente às sugestões dos professores, optamos por preparar um arquivo em Power Point, apresentado no anexo 4, contendo figuras simétricas, utilizadas para o início da discussão e, posteriormente, um glossário de Matemática, no qual o aluno pudesse consultar os termos desconhecidos, se necessário. Escolhemos esta opção no sentido de evitar que os professores começassem a atividade com uma aula expositiva. Com relação à definição de simetrias, decidimos deixar um espaço para que os alunos completem com suas próprias palavras.

Ao analisar a atividade dois, novamente o professor P1 sugeriu um arquivo em Power Point. Desta vez, sua sugestão foi justificada por sua preocupação na socialização das respostas. “Como desenhar na lousa estas figuras?”. O professor P2 apoiou a sugestão justificando que seria muito demorado e os alunos perderiam a concentração. Além disso, os desenhos sairiam imperfeitos, prejudicando a compreensão dos alunos.

Novamente, com relação às questões, sua disposição, desenhos escolhidos, etc., não houve nenhum comentário. Apenas considerações a respeito das dificuldades que os alunos encontrariam e qual das figuras seria mais difícil desenhar.

Esta sugestão foi amplamente apoiada por nós, visto que, realmente, se torna inviável desenhar as figuras perfeitamente na lousa, durante a aplicação da atividade. Portanto, montamos um arquivo em Power Point, apresentado no anexo 5, que contém o antes (metade da figura) e o depois (figura completa) de cada figura e será utilizado na socialização das respostas.

Com relação a terceira atividade, o professor P2 analisou a dificuldade de construção das figuras e sugeriu que na rotação fizéssemos a inversão das questões, apresentando primeiramente a construção com o ângulo de 45º e, posteriormente, a construção com o ângulo de 30º. O professor justificou esta alteração devido à posição do eixo na malha quadriculada, pois com o ângulo de 45º, o eixo fica sobre a malha, facilitando a construção e com o ângulo de 30º o eixo fica deslocado e isto dificulta a construção da figura pelo aluno. O professor P1 concordou com a sugestão.

Acatamos a sugestão do professor e alteramos a ordem das questões. Novamente, ao final da atividade, substituímos a definição de Isometrias que estava apresentada por um espaço para o aluno escrever suas próprias considerações.

A quarta atividade não teve nenhuma sugestão dos professores colaboradores. Vale observar que nenhum deles conhecia o software anteriormente, logo, não tinham condições de avaliar a atividade. Sendo assim, mostramos o que aconteceria durante a realização das atividades e os professores ficaram muito empolgados pois nunca tinham trabalhado com softwares de Geometria. Portanto, a atividade foi mantida integralmente.

A quinta e sexta atividades são de aplicação dos conceitos de Isometrias em outros conteúdos da Matemática. Tanto o professor P1 quanto o P2 definiram a quinta atividade como simples, pois os alunos já sabiam calcular área e justificaram que após o conhecimento das Isometrias, os alunos facilmente desenvolveriam a atividade. Sendo assim, propuseram a inserção de um exercício com nível de dificuldade maior, a fim de explorar mais a fundo os conhecimentos adquiridos.

Inicialmente ficamos preocupados em atender esta solicitação, pois alguns dependendo do exercício escolhido, outros conteúdos de Geometria precisariam ser dominados pelos alunos e isto poderia comprometer o processo. Por fim, achamos por bem acatar esta solicitação, escolhendo um exercício com um grau de dificuldade maior, porém que não explorasse conceitos geométricos diversos.

Finalmente, os exercícios da sexta atividade também de aplicação das Isometrias, agora no conceito de funções, foram temas de discussão entre os professores P1 e P2. Eles nunca tinham trabalhado a idéia de função sob o ponto de vista do exercício e sequer sabiam o significado de funções pares e ímpares. Logo, não surgiram sugestões de mudanças.

No comportamento dos professores frente as duas últimas atividades podemos comprovar o que observamos na revisão bibliográfica: o despreparo dos professores com a questão da Geometria, limitando-se a apresentar aos alunos um conjunto de regras e fórmulas, sem nenhuma conexão com outras áreas da Matemática.

2.6 Segunda versão da THA, a versão para a sala de aula

Aqui apresentamos a versão da THA que será aplicada em sala, ela contém todas as orientações da versão anterior e as modificações propostas pelos professores após as discussões a respeito das atividades.

THA – 2ª versão

Caro professor, esta THA tem como objetivo servir de instrumento facilitador na construção do aprendizado de Isometrias. Ela foi pensada para você e desenvolvida com o apoio de conhecimentos acadêmicos a respeito do tema em questão, de forma a permitir que os resultados de pesquisa possam fazer parte efetivamente da realidade do professor e visando fornecer caminhos mais seguros na escolha das estratégias de ensino e aprendizagem.

Esta THA é composta por seis atividades. No desenvolvimento destas atividades, procuramos utilizar diferentes estratégias a fim de proporcionar atividades diferenciadas e motivadoras tanto para você, professor, como para seus alunos.

Objetivos da THA:

- Identificar transformações no plano como a simetria axial, a simetria central, a translação e a rotação e seu uso em ornamentos.

- Identificar e utilizar propriedades das Isometrias, conservação de medidas de lados e ângulos.
- Reconhecer elementos e características de figuras planas (lados, ângulos, eixos de simetria, paralelismo e perpendicularismo etc.).

Instruções para a atividade um:

- Tempo previsto: 2 aulas
- Atividade individual
- Professor inicie a aula com uma discussão sobre simetria e eixos de simetria. Para esta discussão, segue um arquivo em Power Point que contém diversas figuras e que poderá ser utilizado para despertar no aluno algumas noções de simetria.

  Posteriormente, peça para que os alunos desenvolvam as atividades propostas e, ao finalizarem, volte novamente à discussão de simetria e apresente a definição.

1. Entrando nos eixos:

a) O que significa o termo simetria?

____

____

b) Você saberia dizer o que são figuras simétricas?

____

____

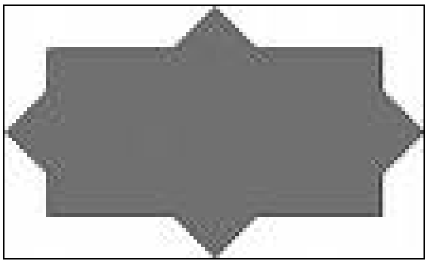
c) Desenhe uma figura que você considera simétrica.

d) Observe as figuras abaixo e identifique quantos eixos de simetria têm cada uma destas figuras. Trace – os nas próprias figuras.

FIGURA A

FIGURA B

FIGURA C



e) Observando os eixos que você traçou, identifique em quantas partes cada uma das figuras foi dividida.

Figura A: _________________

Figura B: _________________

Figura C: _________________

f) Se você fosse desenhar cada uma das figuras acima, que fração de cada uma delas você precisaria para poder desenhá-las por inteiro?

Figura A: _________________

Figura B: _________________

Figura C: _________________

g) As figuras abaixo têm um eixo de simetria. Complete-as.

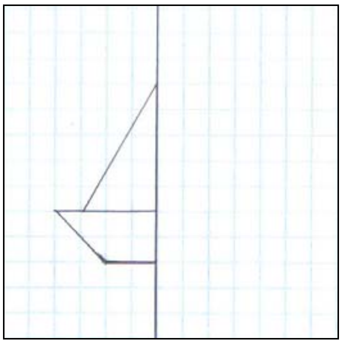


FIGURA A

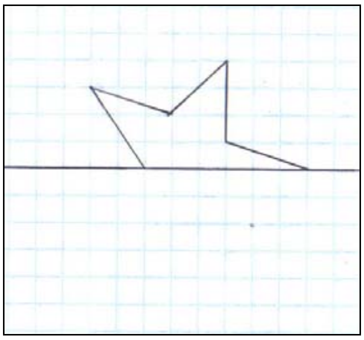


FIGURA B

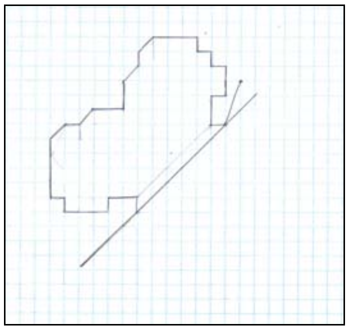


FIGURA C

h) Quais são as semelhanças que você observa entre a parte da figura que estava desenhada e a que você desenhou? E as diferenças?

____

____

____

____

Complete: Figuras simétricas são ____

____

____

Instruções para a atividade dois:

- Tempo previsto: 2 aulas
- Atividade em dupla
- Professor, deixe que os alunos completem as figuras de acordo com seus próprios conhecimentos. Após terminarem os desenhos, peça para que as duplas troquem as folhas entre si e discutam se concordam ou não com os desenhos feitos pelo seu colega. Peça para eles tentarem validar a resposta imaginando que ao dobrar o papel as figuras deverão se sobrepor. Finalmente, socialize as respostas. Para a socialização das respostas, utilize o arquivo de Power Point. Ele contém as figuras nos dois momentos (incompletas e completas) para que os alunos visualizem, de forma clara, a simetria de cada figura.

2. Construindo figuras

Nas malhas a seguir há diferentes figuras desenhadas. A reta l é chamada eixo de simetria. A partir deste eixo, desenhe a imagem **refletida** das figuras:

FIGURA A

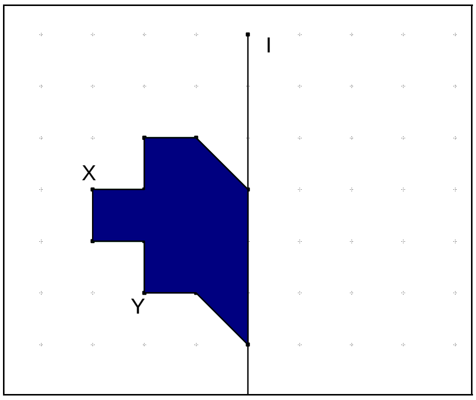


FIGURA B

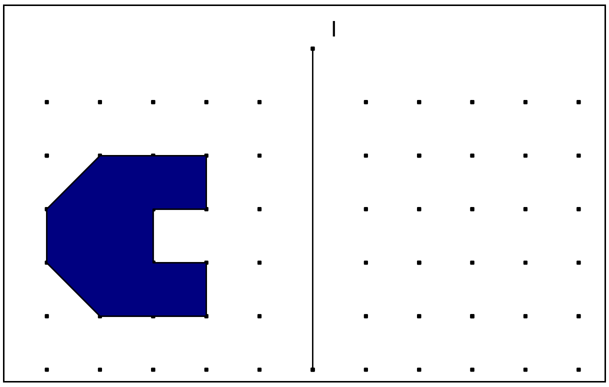


FIGURA C

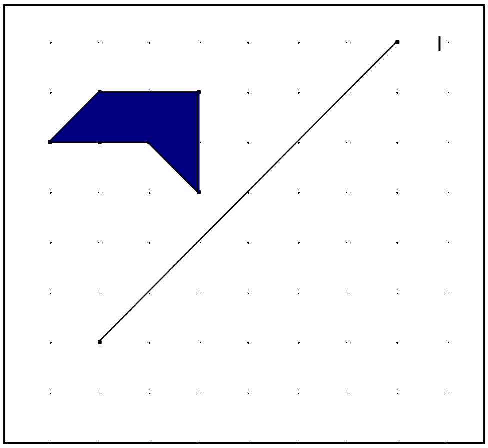


FIGURA D

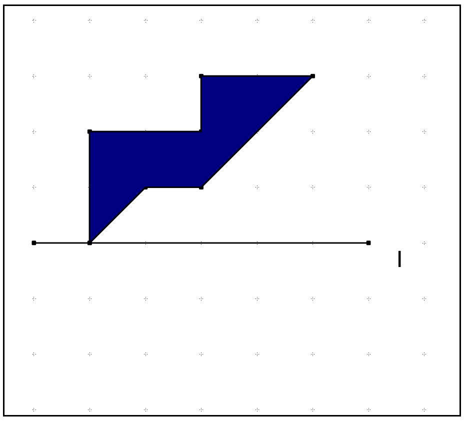


FIGURA E

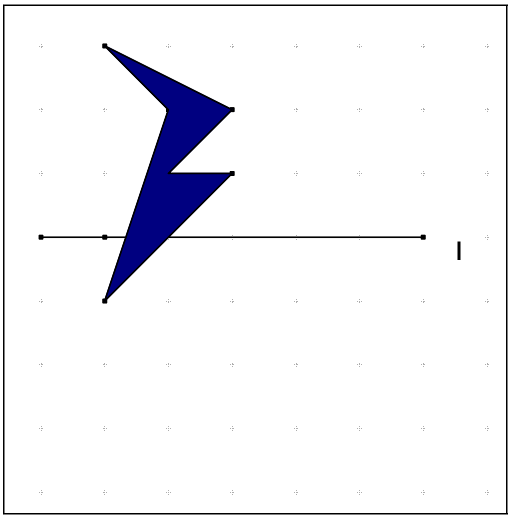
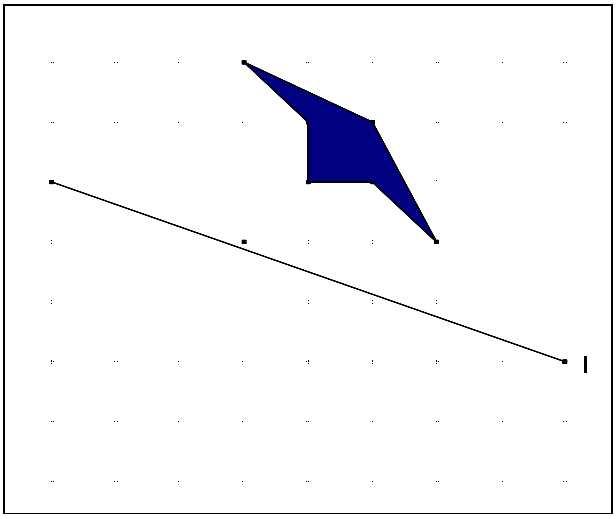


FIGURA F



h) Na figura A, determine o ponto simétrico ao ponto X? Chame-o de X1.

i) Meça a distância do ponto X ao eixo: ______________. Proceda da mesma forma com o ponto X1: ___________. Considere a distância entre dois pontos da malha quadriculada igual a 1un.

j) Meça também a distância do ponto Y ao eixo: _________. Proceda da mesma forma com o ponto Y1: __________.

k) Escolha outro ponto qualquer, nomeie de Z e depois verifique se acontece a mesma coisa. Distância de Z ao eixo: _________. Distância de Z1 ao eixo: ___________.

l) Faça a mesma verificação nas outras figuras. Escolha dois pontos de cada uma delas, nomeie estes pontos e faça suas verificações.

m) Escreva um pequeno texto sobre suas conclusões.

____

____

____

____

Instruções para a atividade três:

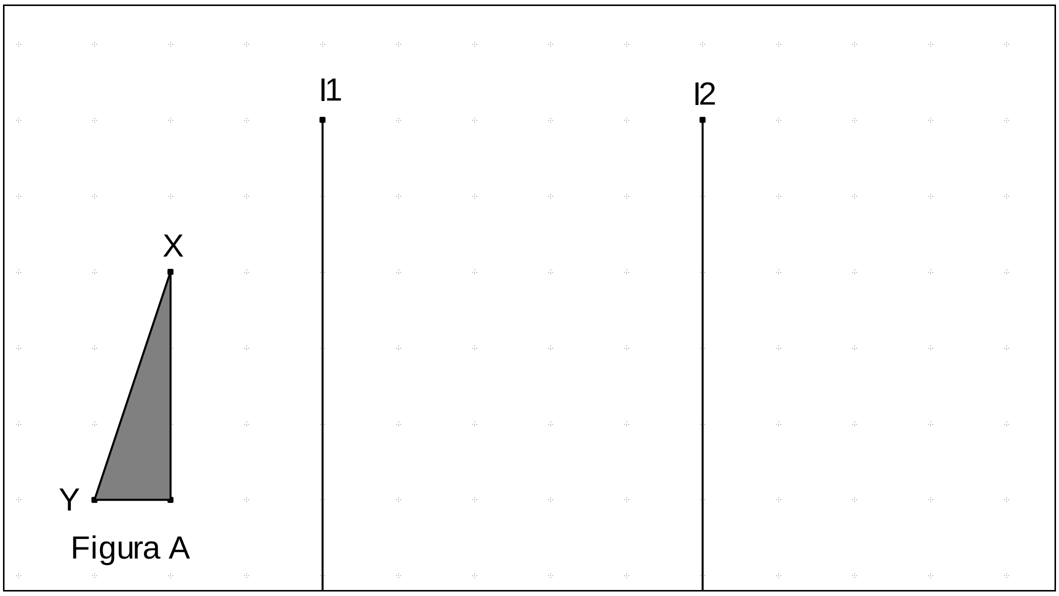
- Tempo previsto: 2 aulas
- Atividade individual

- Professor, deixe que os alunos completem as figuras propostas e respondam as questões. Após a resolução das questões, socialize as respostas e finalmente apresente a definição de Isometrias.

3. Conhecendo outras Isometrias

A partir da reflexão em reta podemos identificar outras Isometrias: translação e rotação. As atividades propostas abaixo mostrarão o caminho.

3.1) Translação:



a) Observe a figura A e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura A1 e ponto X1.
b) Agora, reflita a figura encontrada, em torno do eixo I2, encontrando a figura A2 e o ponto X2.
c) Qual a distância entre os eixos I1 e I2? ____________________________
d) Qual é a distância entre X e X2?__________________________________
e) Proceda da mesma forma para o ponto Y e registre a distância entre Y e Y2.______________
f) Que relação você percebe quando analisa a distância entre os eixos I1 e I2 e a distância entre os pontos X e X2 ou Y e Y2?

____

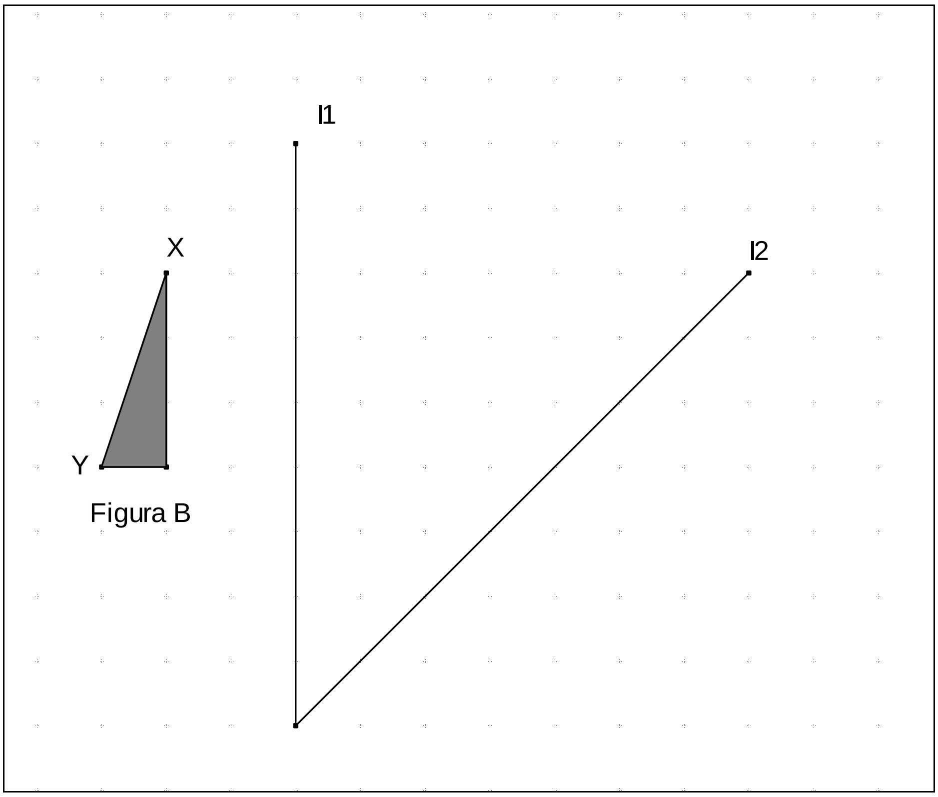
____

g) O que você observa sobre as figuras A e A2? ________________________

____

h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura A e chegar na figura A2?____

3.2) Rotação com ângulo de 45º:



a) Observe a figura B e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura B1 e ponto X1.

b) Agora, reflita a figura encontrada, em torno do eixo I2, encontrando a figura B2 e o ponto X2.

c) Com a ajuda do transferidor, meça o ângulo entre os eixos I1 e I2? ______

d) Qual o valor do ângulo formado entre os pontos X e X2? ______________

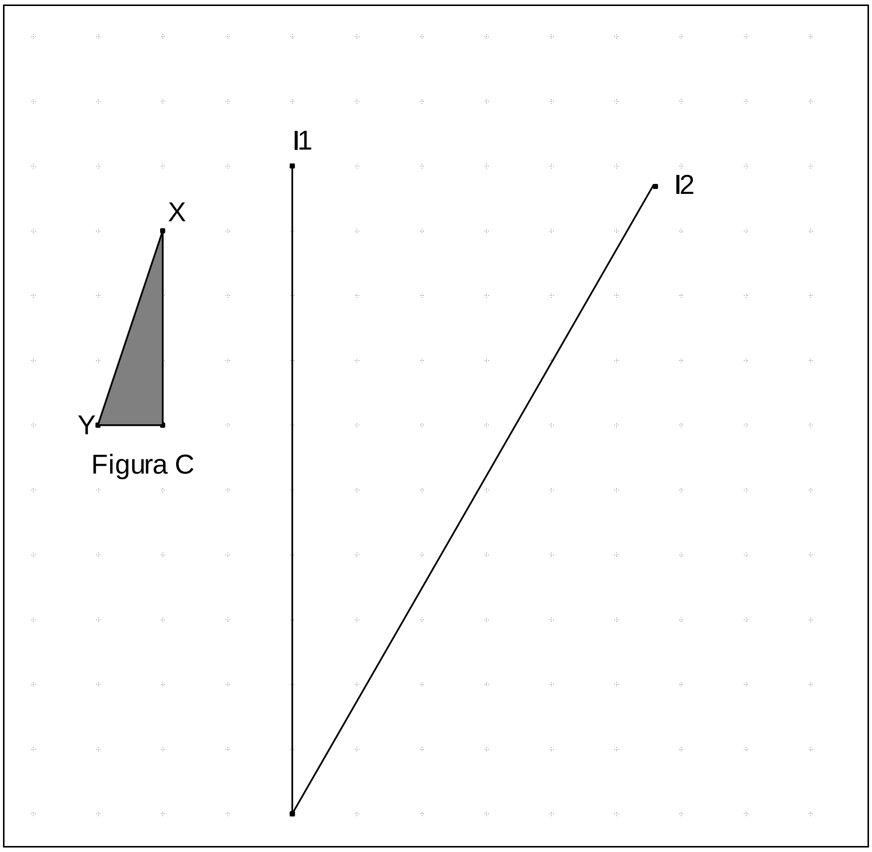
e) Proceda da mesma forma para o ponto Y e registre o ângulo entre Y e Y2.____________.

f) Que relação você percebe quando analisa o ângulo encontrado entre os eixos I1 e I2 e o ângulo encontrado entre os pontos X e X2 ou Y e Y2? ___
____

g) Que relação você percebe quando analisa o ângulo encontrado entre os eixos I1 e I2 e o ângulo encontrado entre os pontos X e X2 ou Y e Y2? ___
____

h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura B e chegar na figura B2? ____
____

3.3) Rotação com ângulo de 30º:



a) Observe a figura C e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura C1 e ponto X1.

b) Agora, reflita a figura encontrada, em torno do eixo I2, encontrando a figura C2 e o ponto X2.

c) Com a ajuda do transferidor, meça o ângulo entre os eixos I1 e I2? ______

d) Qual o valor do ângulo formado entre os pontos X e X2? _______________

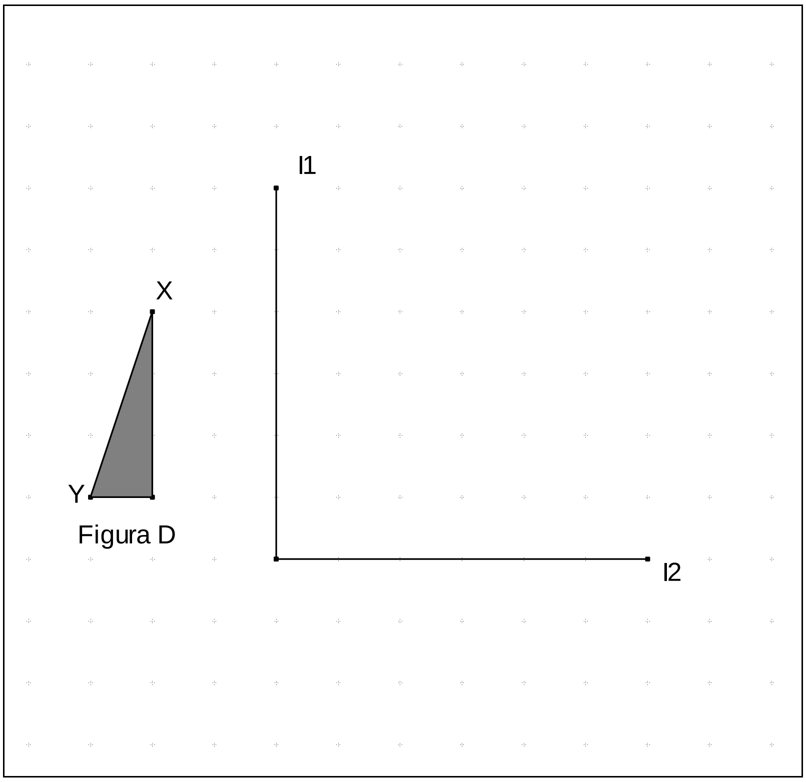
e) Proceda da mesma forma para o ponto Y e registre o ângulo entre Y e Y2.________________

f) Que relação você percebe quando analisa o ângulo encontrado entre os eixos I1 e I2 e o ângulo encontrado entre os pontos X e X2 ou Y e Y2? ___
____

g) O que você observa sobre as figuras C e C2? _______________________

h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura C e chegar na figura C2? ____
____

3.4) Simetria Central:



a) Observe a figura D e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura D1 e ponto X1.

b) Agora, reflita a figura encontrada, em torno do eixo I2, encontrando a figura D2 e o ponto X2.

c) Com a ajuda do transferidor, meça o ângulo entre os eixos I1 e I2? ______

d) Qual o valor do ângulo formado entre os pontos X e X2? ______________

e) Proceda da mesma forma para o ponto Y e registre o ângulo entre Y e Y2.______________

f) Que relação você percebe quando analisa o ângulo encontrado entre os eixos I1 e I2 e o ângulo encontrado entre os pontos X e X2 ou Y e Y2? __
____

g) O que você observa sobre as figuras D e D2? _______________________
____

h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura D e chegar na figura D2? ____
____

Complete: Isometria é uma transformação geométrica que ________________
____

As Isometrias são: ____

Instruções para a atividade quatro:

- Tempo previsto: 2 aulas
- Atividade em duplas ou trios
- Material necessário: Software Geogebra
- Professor, oriente os alunos para que eles realizem as atividades seguindo cada um dos roteiros. Para cada tarefa já existe um arquivo pronto, inicial, de onde os alunos deverão começar a desenvolver as tarefas. Ao final, verifique se os alunos salvaram todas as atividades.

4. Identificando propriedades das Isometrias:

4.1) Descobrindo a simetria

Construção:

a) Abra o arquivo “construção 1”
b) Com a ferramenta “reflexão com relação à uma reta”, clique no polígono P1 e depois no eixo x. Aparecerá um polígono que deverá ser nomeado P2, simétrico a P1, em relação ao eixo x.
c) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P1, propriedades e na opção cor, modifique a cor do polígono P1 a fim de distingui-lo de P2.
d) Faça um segmento de reta unindo os pontos A e A’, obtendo o segmento $\overline{AA'}$. Qual é a posição desta reta em relação ao eixo de simetria? ________________________________
e) Faça a mesma representação para os outros vértices simétricos da figura. Em que posições estão entre si as retas dos outros segmentos? E qual a posição destas retas com relação ao eixo de simetria? ________________
____
f) Considere o segmento $\overline{AA'}$. Chame de F o ponto de intersecção entre a reta e o eixo de simetria. Porque o ponto F é chamado de ponto médio do segmento? ____
g) O ponto de interseção dos outros segmentos com o eixo de simetria também é o ponto médio desses segmentos? _____________________
h) Com a ferramenta “reflexão com relação à uma reta”, clique novamente em P1 e, depois no eixo y. Agora aparecerá um polígono que deverá ser chamado de P3, simétrico à P1, em relação ao eixo y.
i) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P3, propriedades e na opção cor, modifique a cor do polígono P3 a fim de distingui-lo dos outros.
j) Utilizando a ferramenta “ângulo”, clique sobre os três polígonos e compare as medidas de todos os ângulos. _______________________________
____
k) Utilizando a ferramenta “distância ou comprimento” sobre os lados dos três polígonos, calcule o perímetro de cada um deles e compare os resultados
____
l) Utilize a ferramenta “área” sobre os três polígonos e compare os resultados.____

m) Após responder a estas perguntas, você identificou algumas características das figuras simétricas. Faça uma síntese sobre estas características.____

____

____

n) Observe na janela de álgebra, as coordenadas correspondentes de cada ponto dos polígonos encontrados. Agora clique na ferramenta “move” e desloque um dos vértices do polígono P1. Verifique o que acontece com as coordenadas dos pontos, as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos. Depois digite seus comentários. ____

____

____

____

o) Grave seu arquivo com o nome “construção 1A".

4.2) Um movimento chamado translação

Construção:

a) Abra o arquivo “construção 2”

b) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P1, propriedades e na opção cor e modifique a cor do polígono P1 a fim de distingui-lo dos outros.

c) Crie um vetor vertical V1, de origem no ponto (0,0) e fim no ponto (0,4), no sentido positivo do eixo y e um vetor horizontal V2 de origem no ponto (0,0) e fim no ponto (6,0), no sentido positivo do eixo x.

d) Com a ferramenta “transladar por um vetor”, clique no polígono P1 e depois no vetor V1. Aparecerá um polígono que você nomeará de P2 e que foi obtido de P1.

e) Repita a operação utilizando o polígono P1 e o vetor V2. Nomeie este novo polígono de P3.

f) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P3, propriedades e na opção cor e modifique a cor do polígono P3 a fim de distingui-lo dos outros.

g) Observe na janela de álgebra o que aconteceu com as coordenadas dos pontos dos polígonos P2 e P3, comparados com as coordenadas de P1.____

h) Utilizando a ferramenta “ângulo”, clique sobre os três polígonos e compare as medidas de todos os ângulos. ________________________________

i) Utilizando a ferramenta “distância ou comprimento” sobre os lados dos três polígonos, calcule o perímetro de cada um deles e compare os resultados.

   ____

j) Utilize a ferramenta “área” sobre os três polígonos e compare os resultados.____

k) Clique na ferramenta “move” e desloque a extremidade dos vetores. Verifique o que acontece com as coordenadas dos vértices correspondentes dos polígonos. _________________________________

l) Clique novamente na ferramenta “move” e desloque um dos vértices do polígono P1. Verifique o que acontece com as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos ._______________________

m) Digite seus comentários a respeito de suas percepções.

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

n) Grave seu arquivo com o nome “construção 2A".

4.3) Girando...

Construção:

a) Abra o arquivo “construção 3”

b) Marcar o ponto (0,0) e chamá-lo de O.

c) Com a ferramenta “girar em torno de um ponto por um ângulo”, clique no polígono P1, depois no ponto O e digite 30º sentido horário. Aparecerá um polígono que você nomeará de P2 e que foi obtido de P1.

d) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P2, ferramentas e na opção cor, modifique a cor do polígono P2.

e) Com a ferramenta "segmento definido por dois pontos", encontre os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{AO'}$.

f) Utilizando a ferramenta "ângulo" encontre o ângulo formado entre estes dois segmentos. Escolha um outro ponto e repita o processo, anotando o que você observou ____

____

_Grave seu arquivo como "construção 3A" e abra novamente o arquivo "construção 3".

g) Marcar o ponto (0,0) e chamá-lo de O.

h) Com a ferramenta "girar em torno de um ponto por um ângulo", clique no polígono P1, depois no ponto O e digite 80º sentido horário. Aparecerá um polígono que você nomeará de P3 e que foi obtido de P1.

i) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P3, ferramentas e na opção cor, modifique a cor do polígono P3.

j) Com a ferramenta "segmento definido por dois pontos", encontre os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{AO'}$.

k) Utilizando a ferramenta "ângulo" encontre o ângulo formado entre estes dois segmentos. Escolha um outro ponto e repita o processo, anotando o que você observou ____

l) Grave seu arquivo como "construção 3B" e abra novamente o arquivo "construção 3".

m) Marcar o ponto (0,0) e chamá-lo de O.

n) Com a ferramenta "girar em torno de um ponto por um ângulo", clique no polígono P1, depois no ponto O e digite 180º sentido horário. Aparecerá um polígono que você nomeará de P4 e que foi obtido de P1.

o) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P4, ferramentas e na opção cor, modifique a cor do polígono P4.

p) Com a ferramenta "segmento definido por dois pontos", encontre os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{AO'}$.

q) Utilizando a ferramenta “ângulo” encontre o ângulo formado entre estes dois segmentos. Escolha um outro ponto e repita o processo, anotando o que você observou ____
____

r) Utilizando a ferramenta “ângulo”, clique sobre os dois polígonos e compare as medidas de todos os ângulos. __________________________

s) Utilizando a ferramenta “distância ou comprimento” sobre os lados dos dois polígonos, calcule o perímetro de cada um deles e compare os resultados ____

t) Utilize a ferramenta “área” sobre os dois polígonos e compare os resultados. ____

u) O que você percebeu ao analisar os resultados? Será que acontece a mesma coisa para os polígonos anteriores, feitos com outros ângulos? Por que? Escreva suas conclusões.____________________________________
____
____
____

v) Grave seu arquivo como “construção 3C".

Instruções para a atividade cinco:

- Atividade em duplas
- Professor, se for necessário, relembre como se calcula a área de quadrados e retângulos. Deixe que os alunos respondam as questões sem antecipar os prováveis resultados. Após a resolução das questões, socialize as respostas.

5. Calculando áreas

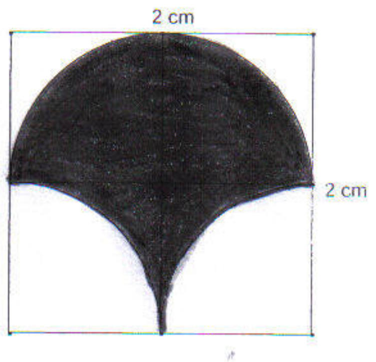
O cálculo de áreas é muito utilizado em Matemática. O uso das Isometrias é uma ferramenta que ajuda no cálculo de áreas de figuras que não são tradicionais.

Quando, para calcular a área de uma figura, precisamos modificar a figura original de forma que tenhamos uma nova figura, mais simples e com o formato de uma figura geométrica conhecida, dizemos que estamos realizando uma

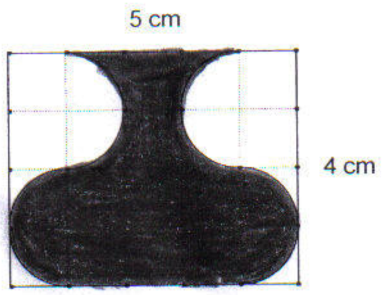
RECONFIGURAÇÃO. Para realizar uma reconfiguração podemos utilizar como ferramenta as Isometrias.

Observe as figuras abaixo e calcule as áreas dessas figuras utilizando as Isometrias aprendidas.

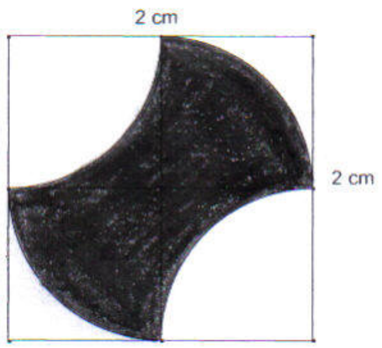
a) Qual é a área da figura pintada contida no quadrado de 2 cm?



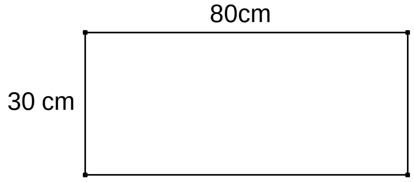
b) Obter a área da figura pintada contida no retângulo de lados 4 cm e 5 cm.



c) Qual é a área da figura pintada contida no quadrado de 2 cm?



d) Um carpinteiro possui uma prancha de 80 cm de comprimento e 30 cm de largura. Quer cortá-la em dois pedaços iguais de modo a obter uma peça retangular que tenha 1,20 m de comprimento e 0,20 m de largura. Você é capaz de descobrir como deverá ser este corte e desenhar a peça desejada pelo carpinteiro?

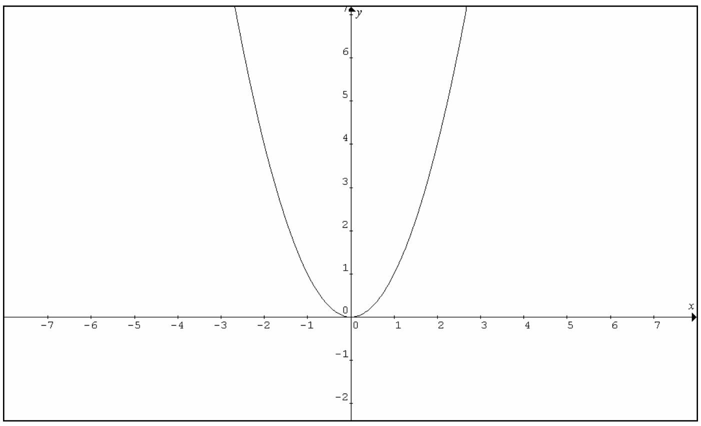


Instruções para a atividade seis:

- Atividade em duplas
- Professor, permita que os alunos discutam as possíveis soluções. Ao final da realização das atividades, escolha duas duplas para que apresentem seus resultados à classe. Posteriormente, socialize as respostas. Faça a leitura das questões e esclareça eventuais dúvidas no vocabulário.

6. Simetrias das funções:

6.1) Função x^2:



a) Observe o gráfico formado pela função $f(x) = x^2$. Ele é uma figura simétrica? ____________________

b) Onde está o eixo de simetria? Marque no gráfico, utilizando uma caneta colorida.

c) Que tipo de simetria é a deste gráfico? ______________________________

d) Se acrescentarmos valores a x ou a y na função $f(x) = x^2$ podemos obter gráficos que são transladados em x ou em y. Acrescentando 2 à abscissa obtemos a função $f(x) = (x+2)^2$, representado pela figura A. Para construirmos a figura B, acrescentamos -3 à abscissa, obtendo a função $f(x) = (x-3)^2$. As figuras C e D tiveram, também, valores acrescentados em x e em y. A função da figura C é $f(x) = (x+2)^2 - 3$, o que significa que foram acrescentados 2 unidades em x e 3 unidades em y. Sabendo que a função da figura D é $f(x) = (x-3)^2 + 4$, responda:

e) Que valor foi acrescentado em x? ________________________________

f) Que valor foi acrescentado em y?________________________________

g) Trace os eixos de simetria das figuras A, B, C e D e determine as abscissas por onde eles passam. ________________________________

____

h) O que você pode perceber ao observar os valores acrescentados em x e o eixo de simetria de cada figura? ________________________________

i) Escolha um ponto do gráfico $f(x) = x^2$ e determine suas coordenadas. ____

j) Encontre o simétrico deste ponto e suas respectivas coordenadas ______

k) O que você pode concluir ao observar estas coordenadas? ____________

____

FIGURA A

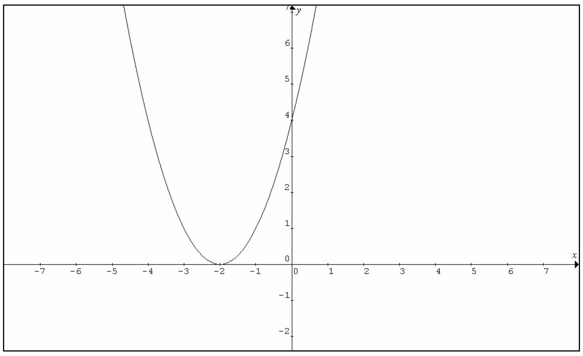


FIGURA B

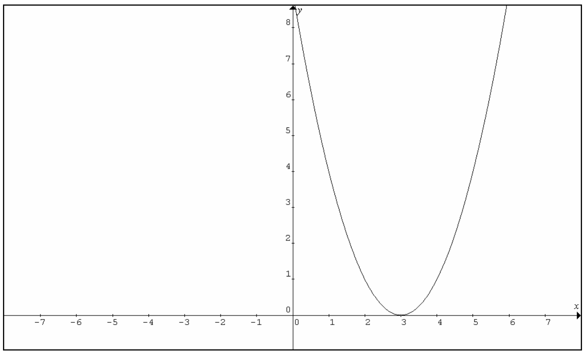


FIGURA C

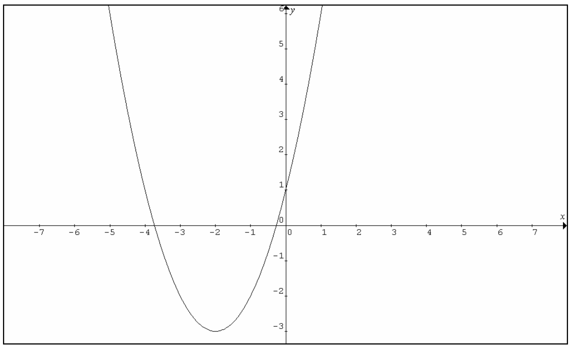
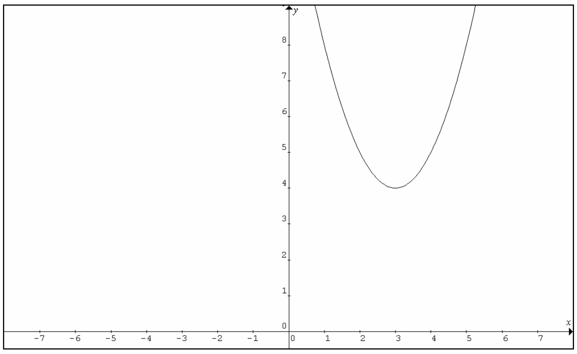
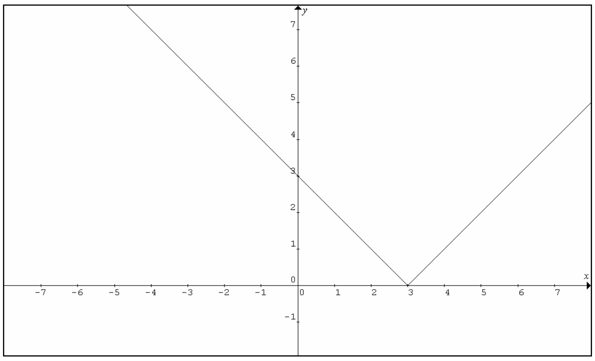
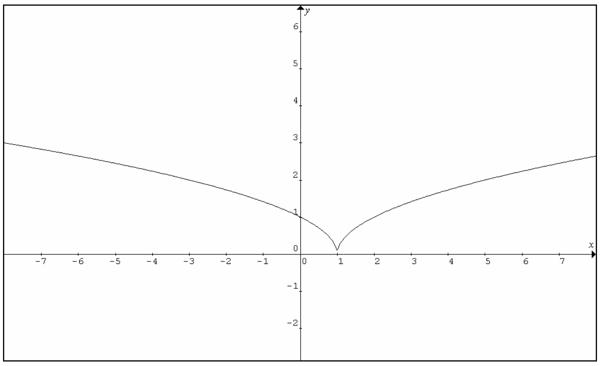


FIGURA D

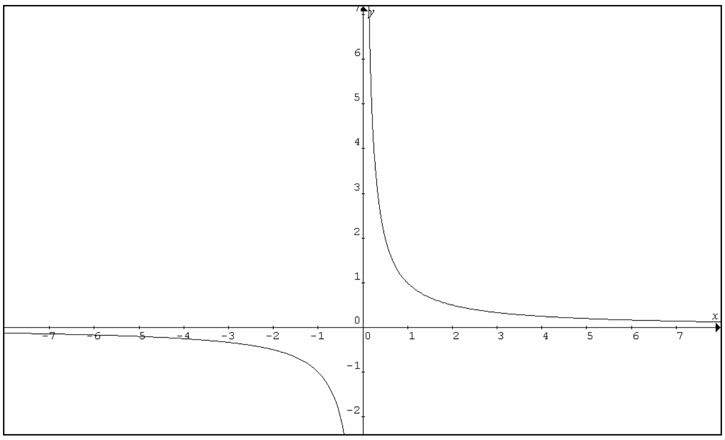


Funções que contém simetria axial são chamadas de **funções pares**. Veja abaixo outros exemplos e identifique nelas os eixos de simetria





6.2) Função $\frac{1}{x}$



a) Observe o gráfico formado por esta função. Ele é uma figura simétrica? ______________

b) Ela é simétrica com relação a um ponto. Marque este ponto no gráfico, com caneta colorida.

c) Que tipo de simetria é a deste gráfico? ______________________________

d) Se acrescentarmos valores a x ou a y na função f(x) = $\frac{1}{x}$ podemos obter gráficos que são transladados em x ou em y. Acrescentando -2 à abscissa obtemos a função f(x) = $\frac{1}{x-2}$, representado pela figura E. Para construirmos a figura F, acrescentamos 3 à abscissa, obtendo a função f(x) = $\frac{1}{x+3}$. As figuras G e H tiveram acrescentados valores em x e em y. A função da figura G é f(x) = $\frac{1}{x+3}+4$, o que significa que foram acrescentados 3 unidades em x e 4 unidades em y. Sabendo que a função da figura D é f(x) = $\frac{1}{x-2}-1$, responda:

e) Que valor foi acrescentado em x? __________________________________

f) Que valor foi acrescentado em y? __________________________________

g) Determine os pontos de simetria das figuras E, F, G e H. _______________

h) O que você pode perceber ao observar os valores acrescentados em x e em y e a localização do ponto de simetria de cada figura? ______________

____

i) Escolha um ponto do gráfico f(x) = $\frac{1}{x}$ e determine suas coordenadas. ___

j) Encontre o simétrico deste ponto e suas respectivas coordenadas _______

k) O que você pode concluir ao observar estas coordenadas?
____
____

FIGURA E

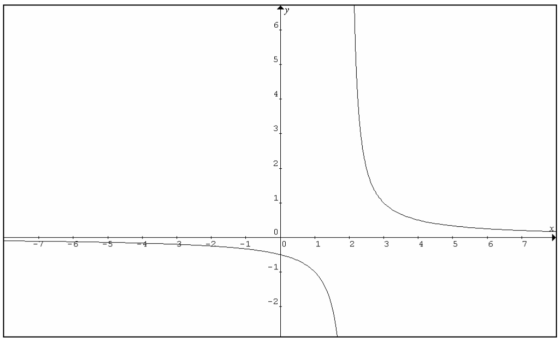


FIGURA F

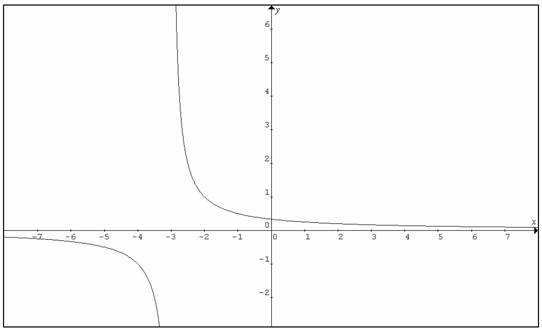


FIGURA G

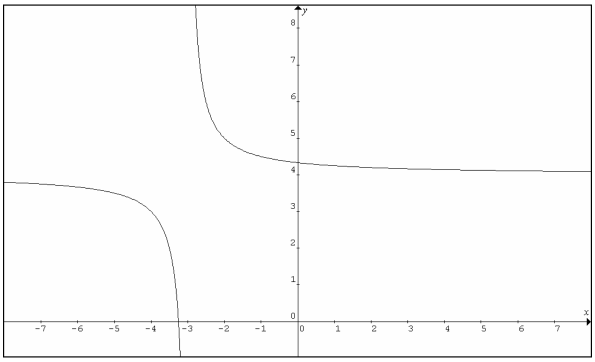
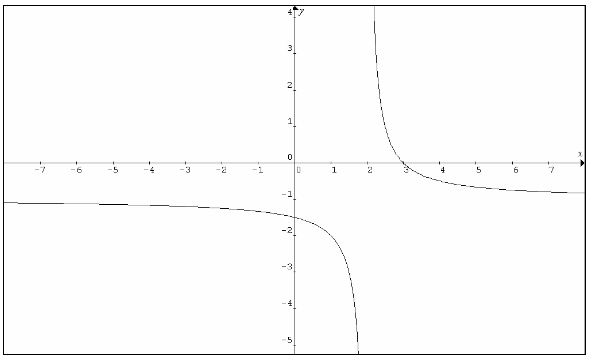
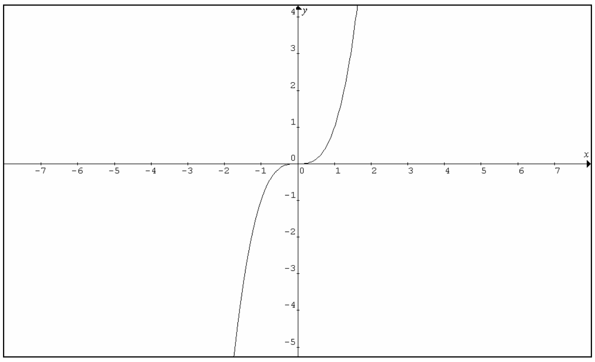
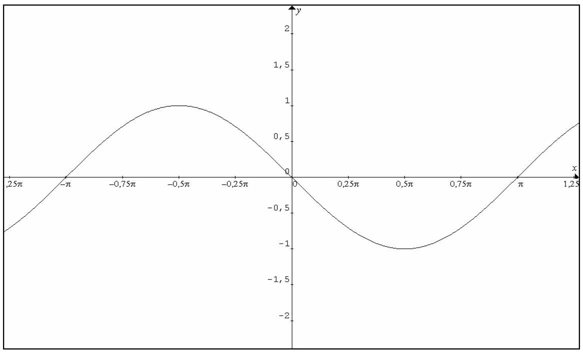


FIGURA H



Funções que contém simetria axial são chamadas de **funções ímpares**. Veja abaixo outros exemplos e identifique nelas os pontos de simetria





CAPITULO 3
A APLICAÇÃO DA THA EM SALA DE AULA

Nosso objetivo neste capítulo é relatar o desenvolvimento da THA em sala de aula, que inclui a realização das atividades e o processo de avaliação. Os dados apresentados estão baseados nos relatórios de aula, que se encontram no anexo, e nas filmagens efetuadas.

Antes, porém, apresentamos informações a respeito das escolas onde aplicamos a THA, dos professores colaboradores, P1, P2 e dos alunos participantes do projeto.

No anexo encontra-se a versão completa da THA aplicada em sala, resolvida por um aluno. Destacamos que, como os professores fizeram socialização e correção coletiva das atividades e, o material ficou com os alunos, não foi possível analisar os procedimentos, o que será feito relativo às atividades avaliativas, que foram individuais e recolhidas.

3.1 As escolas envolvidas

3.1.1 A escola do professor P1

Trata-se de uma Escola da rede Estadual de Ensino de São Paulo, na Zona Norte de Osasco. É uma escola de periferia onde a clientela é predominantemente dos arredores da escola. Tem uma estrutura simples, porém com todo o material necessário para o desenvolvimento de nossa pesquisa.

As aulas foram ministradas com o uso do data show, que ficou disponível durante todo o desenvolvimento da pesquisa. Como a escola não tem uma sala onde o equipamento esteja instalado, levamos o mesmo para a sala de aula e o professor P1 cuidou da instalação e manuseio.

A escola tem uma sala de informática com 11 computadores, porém nem todos em funcionamento. Além disso, o software utilizado, Geogebra, não estava instalado nas máquinas e apesar de nossos esforços, por dois dias seguidos, não conseguimos instalá-lo. No dia marcado para a aula, levamos três computadores particulares (pertencentes aos professores colaboradores e a professora pesquisadora) e dois computadores pertencentes à sala dos professores, onde conseguimos instalar o software Geogebra, para que os alunos fizessem as tarefas.

O contato com a escola foi feito, inicialmente, através do professor coordenador, que esteve disponível durante todo o desenvolvimento da THA, participando inclusive de algumas aulas e nos ajudando nos imprevistos, que são inevitáveis. Além dele, obtivemos a autorização e o apoio da direção e vice-direção da escola para o desenvolvimento de nossa pesquisa.

3.1.2 A escola do professor P2

Novamente temos uma Escola da rede Estadual de Ensino de São Paulo, na Zona Norte de Osasco. Também é uma escola de periferia e a clientela é predominantemente dos arredores da escola. É uma escola de porte médio, com anfiteatro (em reforma), sala de leitura, biblioteca e sala de informática (em reforma).

O professor P2 também optou pelas aulas no data show que ficou disponível, e já instalado, no anfiteatro. Sendo assim, os alunos saíam da sala de aula, sempre que necessário, para assistir às aulas no anfiteatro.

Apesar de ter uma sala de informática, a mesma estava em reforma e, portanto, não foi utilizada. No dia da realização da aula do Geogebra levamos os alunos à escola do professor P1, pois as escolas são próximas, após a autorização da direção das duas escolas. Os alunos, então, realizaram as atividades normalmente, utilizando os cinco computadores já citados.

O contato com a escola foi mais simples e direto, pois trata-se da escola que a professora pesquisadora leciona. Logo, a direção e a coordenação estiveram presentes em todas as atividades e ofereceram todo o apoio necessário para o desenvolvimento da pesquisa, fornecendo, inclusive, material para os alunos, como por exemplo: régua e transferidor.

3.2 Os professores envolvidos

3.2.1 O professor P1

O professor P1 tem 33 anos de idade e leciona Matemática na rede Estadual de Ensino de São Paulo há 13 anos, sempre para Ensino Médio – período noturno. Além disso, trabalha numa empresa privada, pois é Bacharel em Administração de Empresas. Sua formação na área de Matemática se deu por um curso de Complementação Pedagógica e ele não possui nenhum curso de Extensão.

Quanto ao trabalho colaborativo, o professor P1 declara já ter participado de atividades com características de trabalho colaborativo, como feiras e exposições. Porém, nada parecido com a proposta de nossa pesquisa.

Apesar da experiência de treze anos no magistério o Professor P1 não costuma trabalhar a Geometria em toda sua extensão, limitando-se ao cálculo de áreas e perímetros de triângulos e quadriláteros e à Geometria Analítica no 3º ano do Ensino Médio.

Com relação ao conteúdo de transformações isométricas, ele declara: *"Nunca trabalhei. Inclusive, nunca vi em planejamento."*

3.2.2 O professor P2

O professor P2 tem 36 anos de idade e leciona Matemática na rede Estadual de Ensino de São Paulo há 15 anos, para Ensino Fundamental e Ensino Médio. Além da Rede Estadual, leciona no SESI, também para os dois segmentos.

Sua formação inicial é em Matemática e iniciou um curso de aperfeiçoamento, porém não concluiu. Tem muito interesse em retomar o aperfeiçoamento mas não o fez, ainda, por falta de tempo.

Quanto ao trabalho colaborativo, o professor P2 declara nunca ter participado de nenhum trabalho que tivesse esta característica.

Ao longo de seus quinze anos de experiência no magistério, o Professor P2 também não costuma trabalhar a Geometria em toda sua extensão, limitando-se ao cálculo de áreas e perímetros de triângulos, quadriláteros e circunferência, além da Geometria Analítica. O professor aborda estes conteúdos utilizando recursos como data show, malhas quadriculadas e lousa.

Com relação ao conteúdo de transformações isométricas, ele declara abordá-lo no 8º ano, somente no SESI, e alega que os alunos não encontram dificuldades com relação a este conteúdo. Porém, aponta que, ao chegar ao Ensino Médio, a impressão que tem é que os alunos simplesmente nunca tiveram contato com este conteúdo, sendo necessário uma retomada por inteiro.

3.3 Os alunos envolvidos

Os alunos envolvidos em nossa pesquisa são estudantes de duas turmas do 2º ano do Ensino Médio, período noturno.

A escolha destas turmas foi feita pelos professores colaboradores e levou em consideração alguns critérios, definidos pelos mesmos:

- assiduidade;
- comportamento;
- desempenho.

3.3.1 Os alunos do professor P1

A turma selecionada pelo professor P1 é composta por vinte e seis alunos freqüentes, com idades entre dezesseis e dezenove anos, sendo onze do sexo masculino e quinze do sexo feminino.

O índice de repetência dos alunos é baixo (cinco alunos reprovaram alguma série do Ensino Fundamental) e praticamente a sua totalidade revela não dedicar tempo extra aos estudos, limitando a desenvolver, quando solicitado pelo professor, um trabalho de pesquisa ou deveres de casa.

Como já era esperado, por conhecermos a clientela da escola, mais de cinqüenta por cento dos alunos declaram ter outras atividades durante a semana. As atividades mencionadas foram: cursos de informática, inglês, esportes, estágios e atividade remunerada.

Quanto ao tema simetria, apenas cinco deles mencionaram ter estudado sobre o assunto em séries anteriores, porém declaram não se lembrar em que situações.

3.3.2 Os alunos do professor P2

A turma selecionada pelo professor P2 é composta por trinta e dois alunos freqüentes, com idades entre quinze e dezoito anos, sendo quatorze do sexo masculino e dezoito do sexo feminino.

O índice de repetência dos alunos é inferior a dez por cento (apenas dois deles reprovaram alguma série do Ensino Fundamental) e, grande parte deles dedica tempo extra ao estudo, que varia entre 1 e 6 horas semanais, tendo ou não trabalhos de pesquisa ou deveres de casa.

Com relação às outras atividades semanais, vinte e três deles confirmaram participar de cursos (inglês, informática, música, administração, etc.) ou atividade remunerada.

A simetria é lembrada por dezenove alunos, com predominância de ter sido vista nas 7ª e 8ª séries.

3.4 O desenvolvimento da THA em sala de aula

Nesta parte de nosso trabalho queremos mostrar como se deu a aplicação das atividades da THA em cada turma e apresentar algumas observações que consideramos relevantes quanto à nossa pesquisa.

Para tal, elegemos algumas categorias em função dos acontecimentos em sala de aula e também já com o pensamento na realimentação de nossa THA. Todas estas informações estão baseadas na análise de nossos relatórios e nas gravações que foram efetuadas.

As categorias que consideramos relevantes são:

(A) Papéis assumidos por professor e alunos durante a realização das atividades (interação, autonomia, intervenções, etc.);

(B) Dificuldades ocasionadas por desconhecimento de conceitos e/ou procedimentos matemáticos;

(C) Interesse despertado pelas situações propostas;

(D) Interesse despertado pelo uso do software Geogebra.

As categorias são analisadas com foco nas aulas de cada professor, separadamente.

3.4.1 O trabalho do professor P1

No início de cada atividade proposta pela THA, colocamos uma série de instruções, com o intuito de ajudar os professores no desenvolvimento da atividade e proporcionar uma interação dos alunos. Percebemos que as instruções foram irrelevantes para o professor P1. Com isso, a disposição dos alunos em sala de aula não seguiu nossa proposta e os alunos ficaram agrupados conforme sua própria vontade, alguns em trios, outros em duplas e alguns em grandes grupos de cinco ou seis alunos.

Outras instruções também não foram seguidas, como por exemplo, a troca de atividades com o colega e o tempo disponibilizado aos alunos para a resolução dos exercícios.

Com relação ao tempo previsto para as atividades, podemos dizer que foi adequado para o professor P1, com exceção das aulas no laboratório de informática que foram insuficientes, sendo necessário utilizar mais duas aulas para conclusão.

Abaixo, apresentamos a análise das aulas do professor P1 segundo as categorias que elegemos:

(A) Papéis assumidos por professor e alunos durante a realização do trabalho (interação, autonomia e intervenções).

O procedimento adotado pelo professor P1 foi de explicar o que deveria ser feito em cada atividade e posteriormente acompanhar as atividades realizadas pelos alunos.

A cada início de atividade questionava os alunos, incentivando-os a levantar hipóteses e fazer conjecturas. Além disso, percebemos uma preocupação do professor P1 em mostrar aos alunos algumas situações do cotidiano onde pudesse ser encaixada a atividade em questão explicando várias vezes cada um dos conceitos envolvidos.

Após a explicação das atividades, o professor circulava por entre as carteiras verificando o andamento das atividades, questionando os alunos sobre os procedimentos realizados, dando dicas e tirando dúvidas.

O clima durante as aulas foi de entrosamento e os alunos ficaram à vontade para esclarecer as dúvidas e apresentar suas soluções. Percebemos que a maioria dos alunos participou ativamente das discussões e das resoluções das tarefas, mas as atividades mais difíceis ou que exigiam conhecimentos anteriores, desmotivaram alguns alunos que, neste caso, preferiram copiar as respostas dos colegas.

A socialização das respostas e a correção das questões eram realizadas ao final de cada atividade para que os alunos pudessem esclarecer suas duvidas e compreender os conceitos envolvidos.

Com relação às atividades na sala de informática, o professor, mesmo conhecendo pouco o software Geogebra, participou, incentivou e acompanhou os alunos na realização das tarefas.

Além do relacionamento com os alunos, destacamos que o professor P1, manteve contato constante com a professora pesquisadora, tirando dúvidas, dando sugestões, comentando situações ocorridas na sala de aula, etc. O professor assumiu o papel de colaborador, efetivamente, e tratou da THA como se fosse parte integrante de sua matéria, dando a mesma importância a ela que a qualquer outro conteúdo que tivesse desenvolvendo com os alunos.

(B) Dificuldades ocasionadas por desconhecimento de conceitos e/ou procedimentos matemáticos.

O professor P1 declarou, já em nossa entrevista inicial, que algumas das atividades propostas na THA lhe eram desconhecidas. Porém, percebemos que ele costumava preparar suas aulas e mantinha contato constante com a professora pesquisadora, o que amenizou suas inseguranças e dificuldades. Além disso, o professor P1 procurava ler e estudar sobre o tema e pensar que metodologia usar em cada aula.

Por esta razão, somente em uma aula (atividade de rotação) foi necessário que a professora pesquisadora interviesse e concluísse a sistematização. Essa interferência foi feita a pedido do professor P1, pois os alunos tiveram dúvidas que ele não soube responder.

Percebemos que, apesar das dúvidas e dificuldades do professor P1, ele estava sempre disposto para responder aos alunos, sua relação com eles foi sempre de sinceridade e quando ele não tinha a resposta de uma questão, não se intimidava em dizer aos alunos e pedir que a professora pesquisadora o ajudasse. Mesmo com algumas dificuldades quanto ao conteúdo, o professor não deixou de participar ativamente das atividades e sua atitude motivava os alunos.

(C) Interesse despertado pelas situações propostas

Tendo como base os relatórios de aula e as entrevistas com o professor P1, verificamos que as atividades da THA motivaram os alunos. Observamos que os alunos participaram mais das aulas, dando sugestões, propondo respostas e sendo assíduos nas aulas, que eram realizadas inicialmente às sextas feiras. Aconteceram situações, inclusive, em que a escola não teria aula, o professor convocou a turma e eles compareceram em peso porque queriam fazer as atividades do projeto.

A THA motivou também o professor P1, que passou a se preocupar mais com o conteúdo de Geometria e com as metodologias que poderia usar de forma a explorar este conteúdo.

Aluno: *Gostei professor. Vamos fazer sempre assim?*

Aluno: *Matemática não é tão chato como eu pensava.*

Professor P1: *Que interessante, eu nunca tinha visto o uso das funções desta forma (comentário com relação à atividade seis, funções pares e ímpares).*

Professor P1: *Os alunos estão encantados. Eles nunca imaginaram que isto era Matemática. Achavam que sempre teriam cálculos para fazer e agora que estão trabalhando com os desenhos e construindo as figuras, eles estão super empolgados.*

Observamos que as atividades propostas agradaram os alunos, pois eram apresentadas numa metodologia diferente daquela usada em sala de aula. Além disso, o apoio dos arquivos em data show, ajudou na compreensão e construção dos conceitos e deixou a aula muito mais atraente e dinâmica.

Professor P1: *Percebi que não é tão difícil trabalhar com metodologias diferentes. E os alunos prestam mais atenção.*

Aluno: *Todas as aulas deveriam ser assim, com coisas diferentes pra gente fazer.*

Durante o desenvolvimento da THA, o professor P1 esteve sempre apoiando e esclarecendo as dúvidas dos alunos. O diálogo entre professor e alunos foi constante durante todas as aulas. Não houve nenhum caso de brincadeiras ou piadas por respostas erradas. Muito pelo contrário, quando isto acontecia, o professor incentivava o aluno a continuar, explicava novamente a atividade e mostrava porque o aluno estava errado até que ele descobrisse o jeito correto de fazer, valorizando o erro como parte do processo ensino aprendizagem.

Apesar de percebermos nas filmagens que os alunos conversavam a aula inteira, observamos que a conversa era sempre a respeito da atividade em questão. Quando um aluno do grupo tinha dúvidas, um outro explicava novamente, de forma que nenhum deles ficasse atrasado nas atividades e o grupo inteiro evoluísse para a questão seguinte.

(D) Interesse despertado pelo uso do software Geogebra

Aluno: *Até que enfim vamos usar a sala de informática.*

A frase deste aluno antecipa o que observamos nas atividades da sala de informática. Uma mudança total de atitude. Os alunos ficaram empolgados e muito motivados.

Aluno: *Nossa, professor, que programa legal! Dá pra baixar da Internet? Vou baixar no computador lá de casa.*

Professor P1: *Nossa! Quanto coisa legal podemos mostrar neste programa!*

Comparando as atividades feitas com lápis e papel com as que foram feitas no computador, observamos que o uso do software propiciou aos alunos um melhor aproveitamento com relação à compreensão dos conceitos. O uso do Geogebra possibilitou a construção de diferentes tentativas, que se não fossem adequadas poderiam ser rapidamente apagadas, permitindo aos alunos a formulação de hipóteses e a organização de estratégias. Nas atividades com lápis e papel isto seria inviável.

Por estas razões, consideramos que as atividades com o software deveriam preceder às de lápis e papel.

3.4.2 O trabalho do professor P2

Semelhante ao professor P1, o professor P2 também não deu importância às instruções propostas no início das atividades da THA. Sendo assim, a disposição dos alunos em sala de aula também não seguiu nossa proposta e os alunos ficaram agrupados conforme sua própria vontade, alguns em trios, outros em duplas e alguns em grandes grupos de cinco ou seis alunos.

Outras instruções também não foram seguidas, como por exemplo, a troca de atividades com o colega, a apresentação das resoluções dos alunos e o tempo inicial para a resolução dos exercícios.

Com relação ao tempo previsto para as atividades, o professor P2 precisou de mais duas aulas para desenvolver a atividade três (Conhecendo outras Isometrias) e, nas aulas de laboratório de informática, foi necessário utilizar mais duas aulas para conclusão.

Abaixo, apresentamos a análise das aulas do professor P2 segundo as categorias que elegemos:

(A) Papéis assumidos por professor e alunos durante a realização do trabalho (interação, autonomia, intervenções, etc.).

Nas duas primeiras atividades, o procedimento adotado pelo professor P2 foi, inicialmente, de explicar aos alunos o que deveria ser feito em cada atividade e, posteriormente, acompanhar a sua realização. O professor preocupou-se em dar exemplos do cotidiano, explicar várias vezes e solicitar a participação dos alunos.

Porém, percebemos que, conforme as aulas se desenvolveram, o professor P2 foi perdendo o interesse, sendo que em algumas situações ele simplesmente fez uma leitura da atividade e nem sequer levantou-se da cadeira. Nestas atividades, ele leu e respondeu as questões sem possibilitar aos alunos o levantamento de hipóteses ou a escolha de estratégias. Os alunos, por suas vez, limitaram-se a copiar as respostas faladas pelo professor sem questionar.

O professor, muitas vezes, chegada em cima da hora da aula e, na maioria das vezes, não tinha sequer lido a atividade, fazendo isso apenas minutos antes da explicação e já dentro da sala de aula. Com isso, sua explicação ficava limitada e, às vezes, incompleta, pois, como ele mesmo mencionou, na primeira entrevista, algumas atividades também lhe eram desconhecidas. Além disso, os alunos também foram perdendo o interesse e, nas últimas aulas, apenas alguns pequenos grupos se empenhavam em fazer e compreender as atividades. Os outros simplesmente copiavam.

O clima durante as aulas foi de total entrosamento entre professor e aluno à descaso e desinteresse geral. Até mesmo na sala de informática o professor pouco participou, ficando o professor P1 e a professora pesquisadora responsáveis pela ajuda aos alunos.

Lembramos que o laboratório de informática utilizado foi o da escola do professor P1 e por esta razão ele estava presente durante a realização da atividade.

(B) Dificuldades ocasionadas por desconhecimento de conceitos e/ou procedimentos matemáticos.

O professor P2 também declarou, em nossa entrevista inicial, o desconhecimento de algumas atividades propostas na THA.

Porém, como o professor não tinha o hábito de preparar suas aulas, aconteciam imprevistos que possibilitavam o surgimento de erros conceituais na explicação ou até mesmo ausência de explicação. Foi necessário que a professora pesquisadora interviesse algumas vezes, explicando ou fazendo a sistematização de algumas atividades.

O professor P2 não procurou eliminar suas dúvidas por nenhuma estratégia, seja por seu esforço individual ou pela ajuda da professora pesquisadora, trabalhando sempre no improviso. Para a quinta e sexta atividades, que foram as aulas onde ele apresentava maiores dificuldades, fizemos uma reunião, um dia antes da aplicação das atividades, com o intuito de explicar e resolver as atividades e esclarecer as dúvidas apresentadas por ele. Porém, não houve empenho do professor, como podemos verificar nos relatórios de aula apresentados no anexo, e as atividades foram apenas apresentadas aos alunos e não construídas com eles.

Notamos que o professor P2 esteve preocupado com o tempo utilizado nas atividades da THA, informando por várias vezes que a aplicação atrapalharia seu conteúdo programático. Além disso, o professor não assumiu o papel de colaborador. Isto ficou claro em suas atitudes, pois o professor estava sempre sugerindo que a professora pesquisadora aplicasse as atividades.

Professor P2: *Eu te dou a aula e você pode ficar com eles! Eu fico aqui! Tenho umas provas para corrigir.*

Percebemos que apesar de nossa conversa inicial e da explicação de nossa proposta, o professor P2 não percebeu seu papel no desenvolvimento das atividades.

(C) Interesse despertado pelas situações propostas

No início das atividades, percebemos que os alunos estavam muito motivados. A primeira aula foi muito atrativa e o professor P2 foi muito esclarecedor. O interesse foi diminuindo conforme as atividades decorriam por falta de motivação do próprio professor. Acreditamos que isso aconteceu porque o professor não costumava preparar suas aulas e, como algumas das atividades ele não dominava, a qualidade da aula diminuía pois se tornava simplesmente uma leitura de texto e resolução de atividade na lousa.

Apesar dos vários contatos que tivemos com o professor P2 explicando a intenção de nosso trabalho, percebemos que ele assumiu meramente o papel de “aplicador” e não de “colaborador”, como sugeria nossa proposta. As frases abaixo demonstram isso.

Professor P2: *Como eu faço para explicar esta atividade?*

Professor P2: *Você quer dar esta aula?*

Mesmo frente à desmotivação do professor, percebemos que os alunos apresentavam muita curiosidade com relação às atividades e, às vezes em que a professora pesquisadora interferiu, a pedido do professor, houve interesse nas explicações e participação dos alunos. Isto também acontecia às vezes em que o professor P2 explicava as atividades, pedia opiniões dos alunos, sugestões, etc.

Aluno: *Que atividade legal. Serão todas assim?*

O que percebemos ao analisar o desenvolvimento da THA pelo professor P2 foi que os alunos correspondiam sempre ao seu comportamento. Quando ele explicava as atividades, os alunos participavam, perguntavam e respondiam as questões. Quando ele sentava na cadeira e fazia uma simples leitura do texto, os alunos passavam a aula conversando, levantavam a todo o momento e muitos deles simplesmente copiavam o resposta de outros alunos mais dedicados.

(D) Interesse despertado pelo uso do software Geogebra

A escola do professor P2 está com a sala de informática em reforma, portanto utilizamos a sala de informática da escola do professor P1 (como já citamos anteriormente). Por conta desta situação, imaginamos que muitos dos alunos não compareceriam. Enganamos-nos. A presença foi quase de cem por cento dos alunos.

Somente este fato já nos mostra que o uso de tecnologias motiva muito os alunos. O comportamento dos alunos do professor P2 foi semelhante ao comportamento dos alunos do professor P1, ou seja, eles estavam muito motivados.

Inicialmente, tivemos que vencer as dificuldades com relação ao manuseio do software, porém depois disto, a turma executou as tarefas com facilidade e rapidez.

Como já citamos anteriormente, o professor P2 pouco participou desta atividade, ficando um longo tempo da aula em seu próprio computador. As dúvidas e os questionamentos dos alunos foram esclarecidos pelo professor P1, presente nesta aula, e pela professora pesquisadora.

3.5 Avaliação dos estudantes

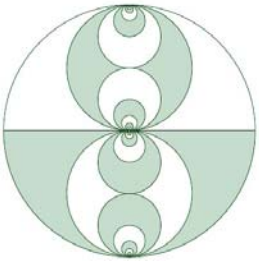
Ao final da aplicação da THA resolvemos aplicar uma atividade avaliativa. Como o foco de nossa pesquisa é observar a atuação do professor em sala de aula, sua prática e os conhecimentos que tem a respeito do tema a ser ensinado, destacamos, nesta avaliação, algumas situações onde mostramos que as atividades da THA, associadas à atuação do professor, contribuíram para a diminuição das dificuldades dos alunos apontadas no Capitulo 1 deste trabalho.

A atividade avaliativa

Questões 1 e 2

Questão 1: Na figura abaixo, a circunferência maior tem raio 4 cm, há duas circunferências de raio 2 cm, quatro circunferências de raio 1 cm, quatro de raio 0,5cm, quatro de raio 0,25cm, e assim por diante. Considere que:

• a é a soma das áreas de todas as regiões brancas.
• b é a soma das áreas de todas as regiões pintadas de cinza.



O que podemos dizer ao comparar as áreas das regiões branca e cinza? Selecione a alternativa que você acredita estar correta:

a) b > a

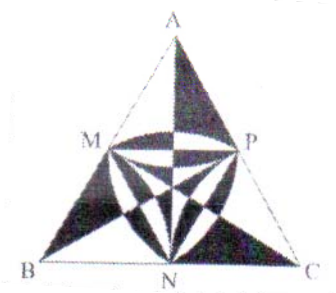
b) a > b

c) a = b

d) a = 2.b

Questão 2: O triângulo ABC abaixo é eqüilátero e seus lados medem 5 cm. Sabendo que a altura do triângulo é igual a $\frac{5\sqrt{3}}{2}$, calcule a medida da área sombreada.

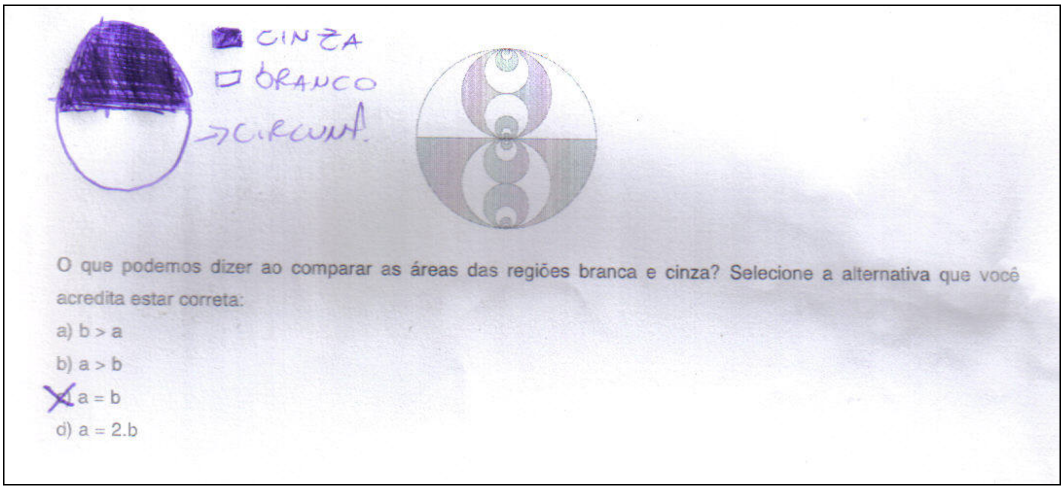
Obs.: área de triângulo = $\frac{b \times h}{2}$



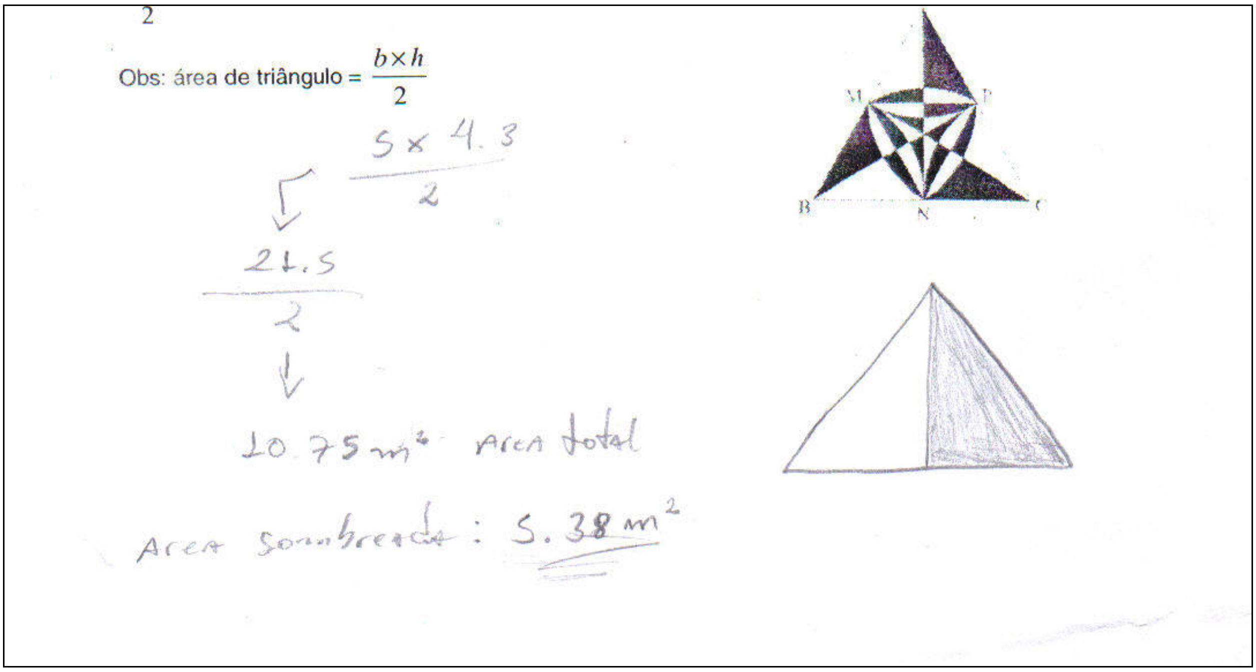
As questões 1 e 2 tem por objetivo explorar o uso do conceito simetria na reconfiguração de figuras para o cálculo de áreas. Observamos que a maior parte dos alunos não apresentou dificuldades nestas questões sendo 94% de acertos na questão 1 e 82% de acertos na questão 2.

Alguns alunos desenharam a figura reconfigurada mas, a grande maioria fez apenas indicações quanto à simetria da mesma. Segue abaixo alguns exemplos de resolução dos alunos.

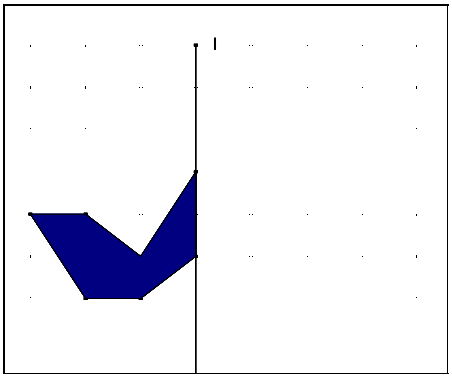
Exemplo de resolução da Questão 1

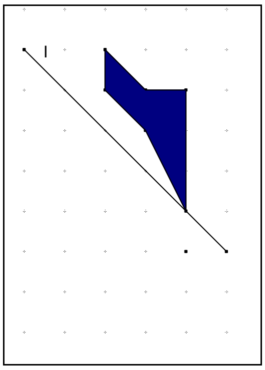


Exemplo de resolução da Questão 2



Questão 3: Nas figuras abaixo, desenhe a imagem refletida sabendo que I representa o eixo de simetria





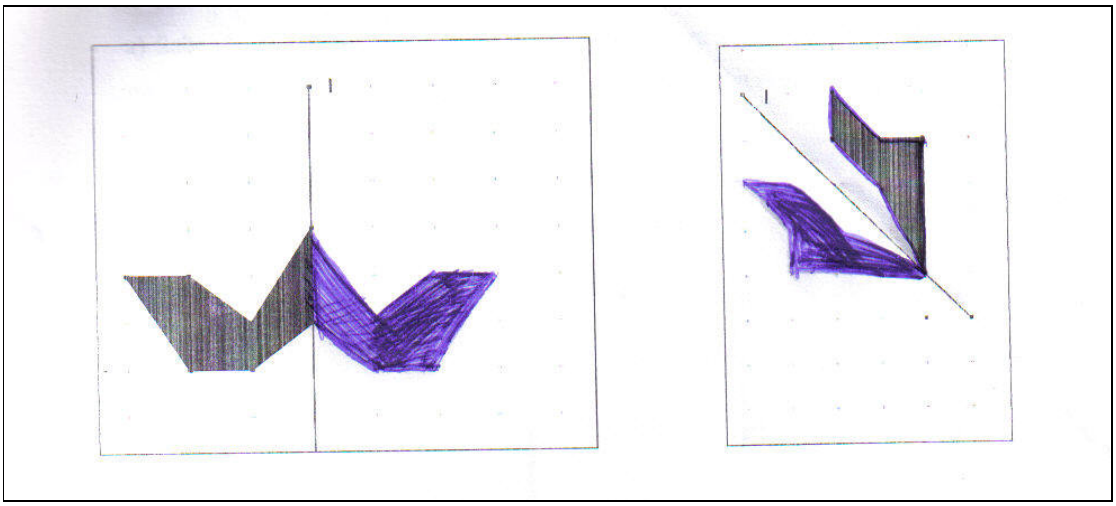
Buscamos, nesta questão, variar as posições das figuras e dos eixos de simetria para que os alunos percebam que estas variáveis não interferem nos elementos invariantes da simetria.

Na resolução destas questões, percebemos que muitos alunos usaram a estratégia de dobrar a folha sobre o eixo de simetria a fim de construir a figura simétrica. Esta estratégia foi apresentada pelos professores colaboradores durante o desenvolvimento das atividades.

Percebemos, ao analisar as resoluções desta questão, que as dificuldades com relação às variações do eixo, foram totalmente superadas por nossos alunos, pois houve 100% de acertos.

Acreditamos que as atividades propostas na THA exploraram estas variáveis de diferentes maneiras, permitindo aos alunos construir um conhecimento mais amplo e significativo.

Exemplo de resolução da Questão 3



Questão 4: Nas figuras abaixo, a imagem A, após sofrer 2 reflexões, se transformou na imagem b. Identifique onde estão os eixos de simetria desta figura e, se possível, a imagem intermediária.

FIGURA A

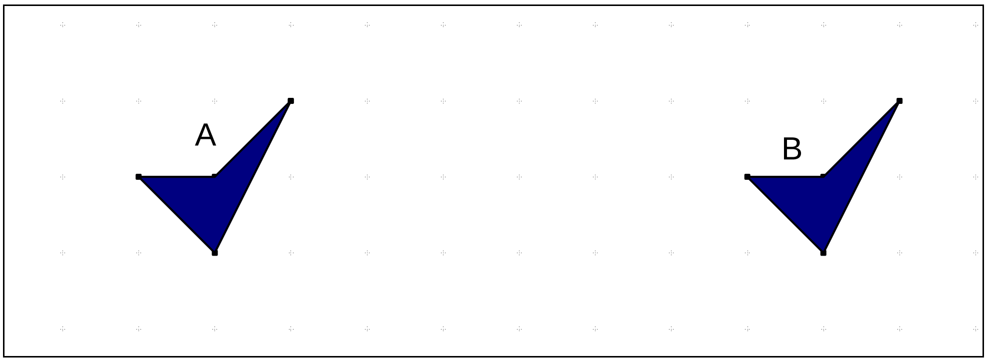


FIGURA B

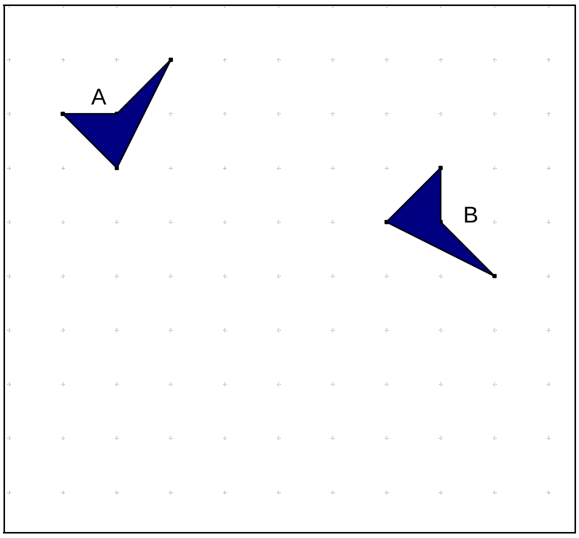
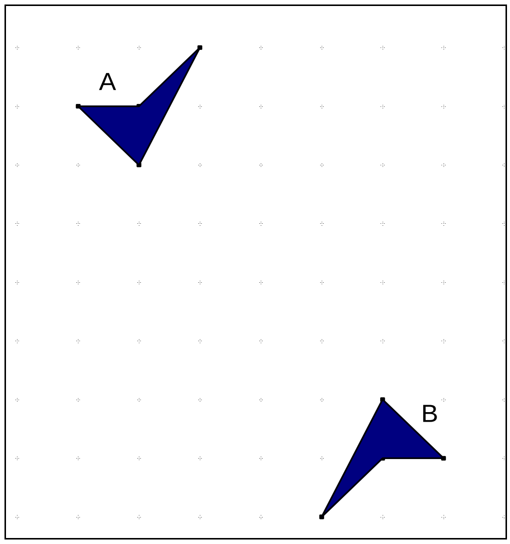


FIGURA C

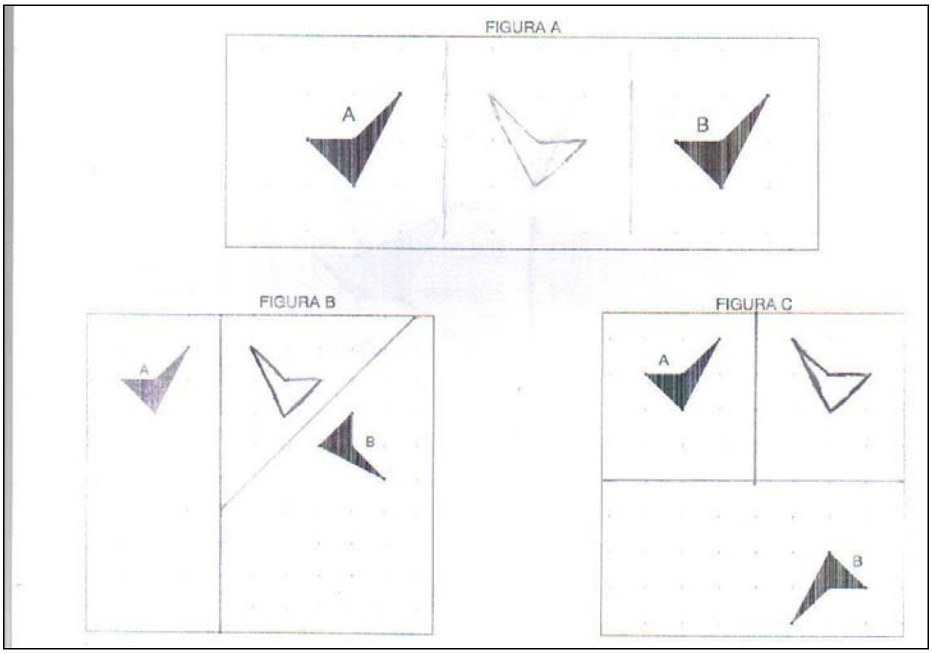


As Isometrias translação e rotação foram, em nossa THA, apresentadas a partir da simetria axial. Queremos então, com essa atividade, verificar se o aluno consegue identificar a figura intermediária, que é, ao mesmo tempo, produto da simetria da figura original e elemento de simetria que gera a figura final.

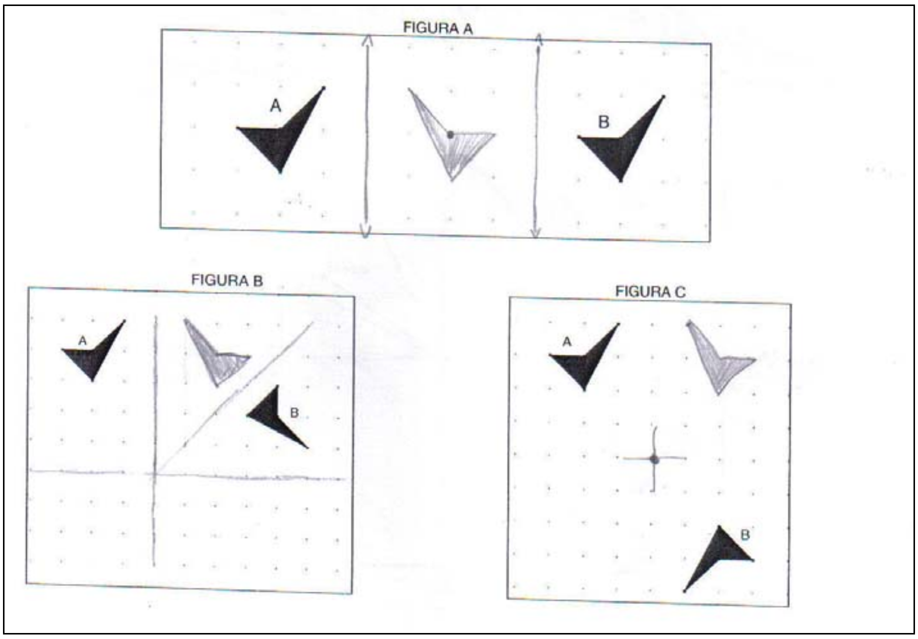
Tivemos 47% de acertos, 41% de erros e 12% não fizeram. Os conhecimentos que adquirimos durante a elaboração e aplicação da THA e a analise das resoluções dos alunos indicam que as atividades da THA realizadas para a compreensão destes conceitos não foram suficientes. Observamos que a maior incidência de erros aconteceu nas atividade de rotação.

Os resultados encontrados vão ao encontro das pesquisas realizadas por Jaime e Gutierrez (1996). Como citamos no Capitulo 1, os apontam que, para os alunos, é mais difícil girar uma figura quando o centro de rotação está fora dela. Por esta razão, consideramos algumas modificações na terceira versão da THA a fim de enfrentar estas dificuldades.

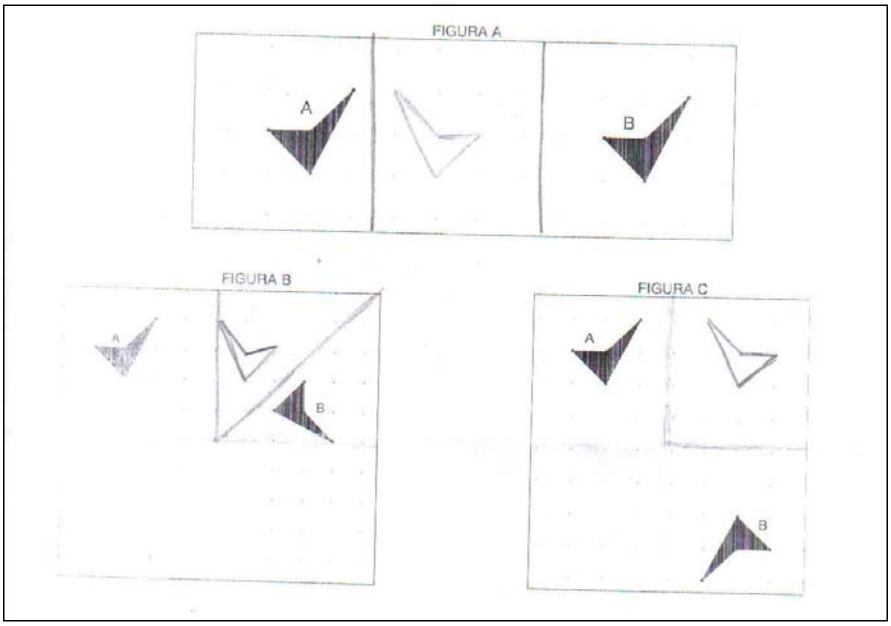
Exemplo 1 de resolução da Questão 4



Exemplo 2 de resolução da Questão 4



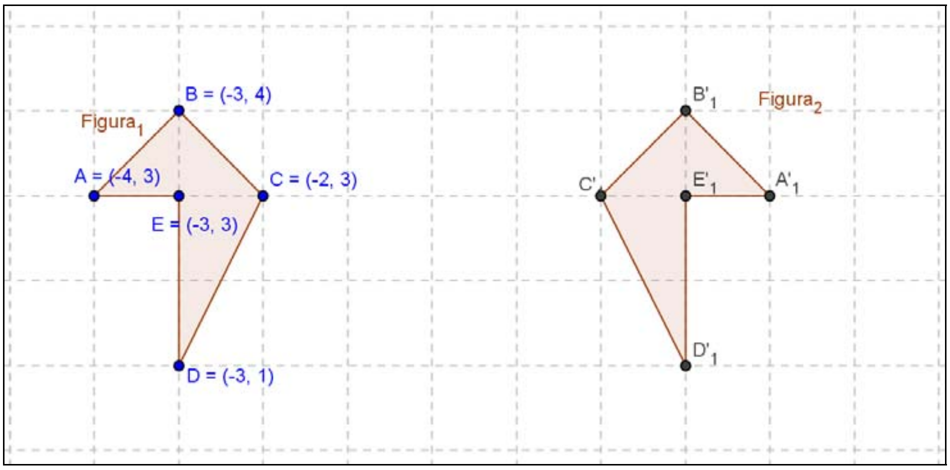
Exemplo 3 de resolução da Questão 4



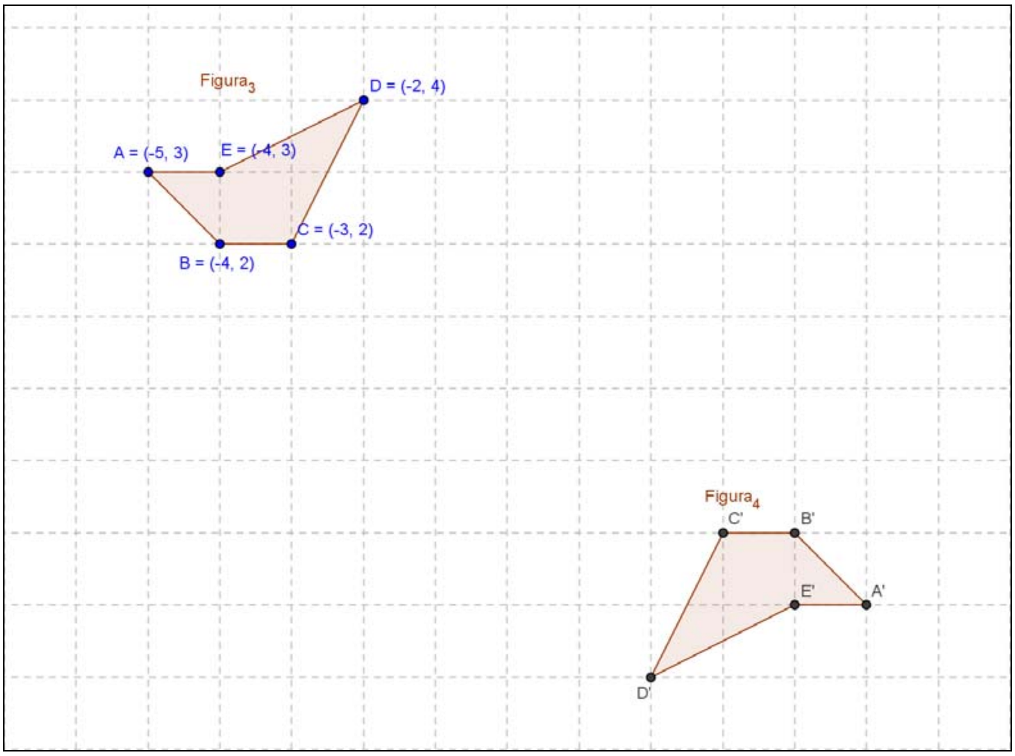
Questões 5 e 6

Questão 5: Observe as transformações abaixo e responda (considere o quadriculado de 1x1 cm):

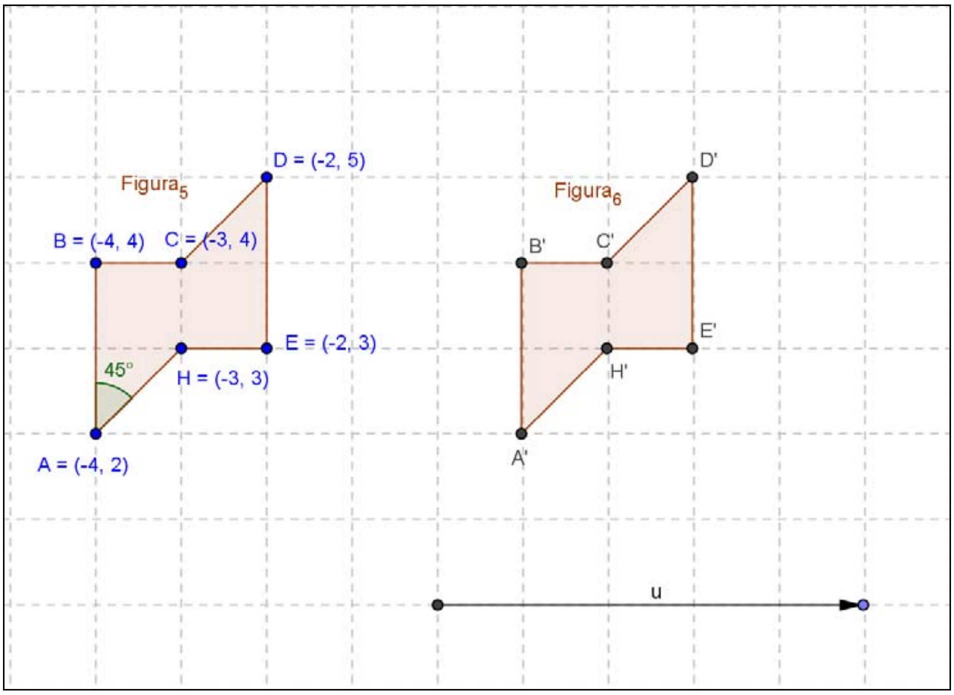
a) Sabendo que a figura 2 é simétrica à figura 1 com eixo de simetria em y, determine onde está o eixo de simetria (y) e quais são as coordenadas dos pontos da figura 2



b) Sabendo que a figura 4 tem simetria central à figura 3, determine o ponto de simetria e quais são as coordenadas dos pontos da figura 4.



c) Sabendo que a figura 6 é transladada da figura 5 pelo vetor u, determine o eixo y e as coordenadas dos pontos da figura 6.



Questão 6: Observe os gráficos acima e responda com base nas propriedades das figuras isométricas:

a) Se área da figura 1 é 2 cm^2, quanto vale a área da figura 2?: _________

b) Se o perímetro da figura 3 é 8 cm, qual o perímetro da figura 4?: _____

c) Se o ângulo marcado na figura 5 é 45º, qual o valor do ângulo correspondente na figura 6? _______________

A elaboração destas questões foi inspirada nas atividades do Geogebra propostas na THA. As questões 5a e 5b têm por objetivo observar se os alunos conseguem identificar, como eixos de simetria das figuras, os eixos do plano cartesiano, além de observar quais as características das coordenadas de figuras que são simétricas axial ou centralmente.

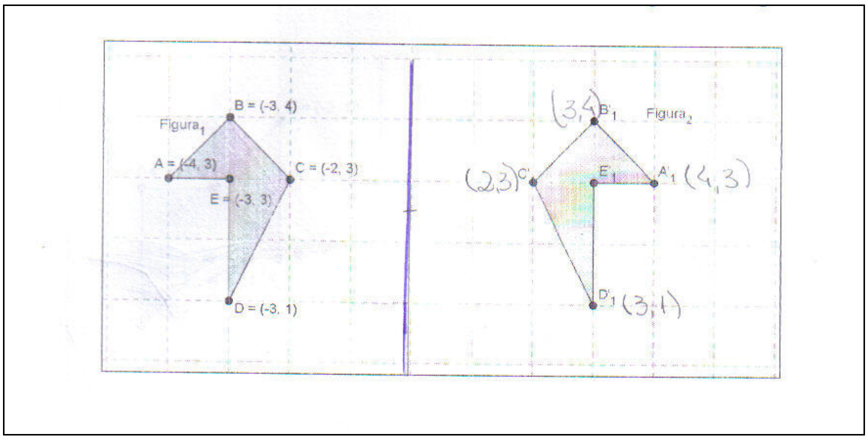
Quanto à atividade de translação, 5c, o objetivo é que os alunos observem como as coordenadas dos vértices das figuras se modificam no mesmo sentido do vetor e na mesma quantidade de unidades do vetor.

Observamos que alguns alunos apresentaram dificuldades com relação à localização dos eixos e dos pontos. Esta observação nos fez supor que estas dificuldades estão relacionadas à dificuldades quanto ao conceito de plano cartesiano, conteúdo apresentado no 1º ano do Ensino Médio.

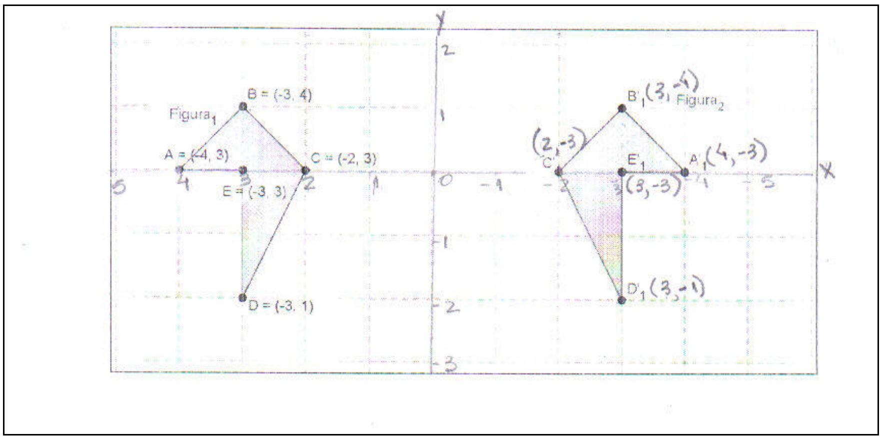
Por esta razão, decidimos incluir na atividade seis da THA, um Box com a função de retomar esse conceito.

Quanto à questão seis, percebemos que os alunos compreenderam os elementos invariantes das Isometrias, pois houve 100% de acertos nesta questão.

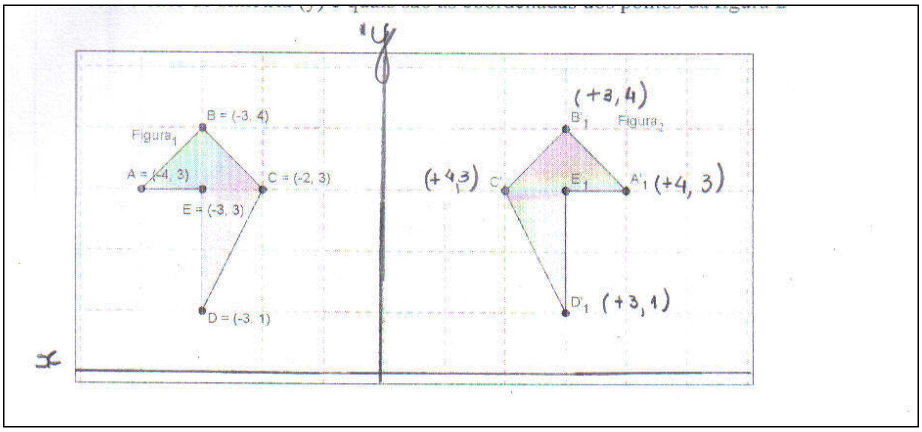
Exemplo 1 de resolução da Questão 5 – item a



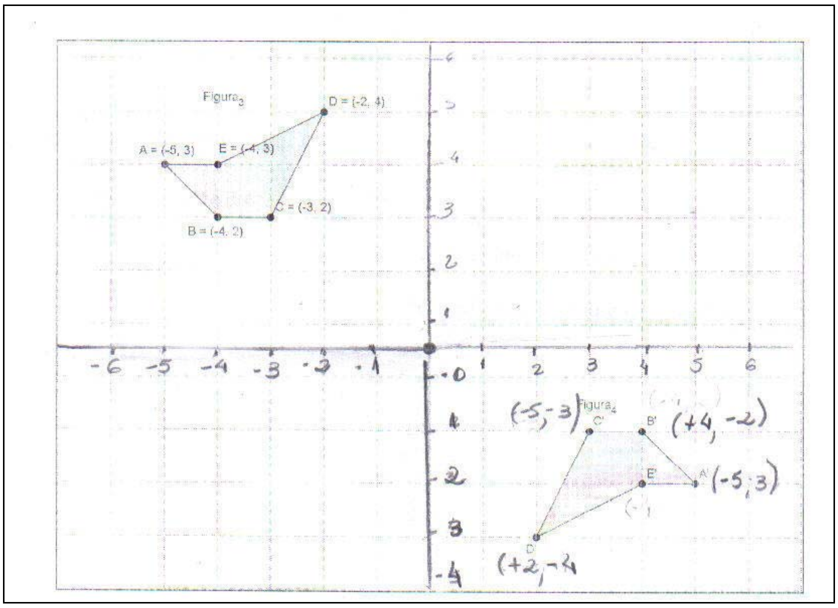
Exemplo 2 de resolução da Questão 5 – item a



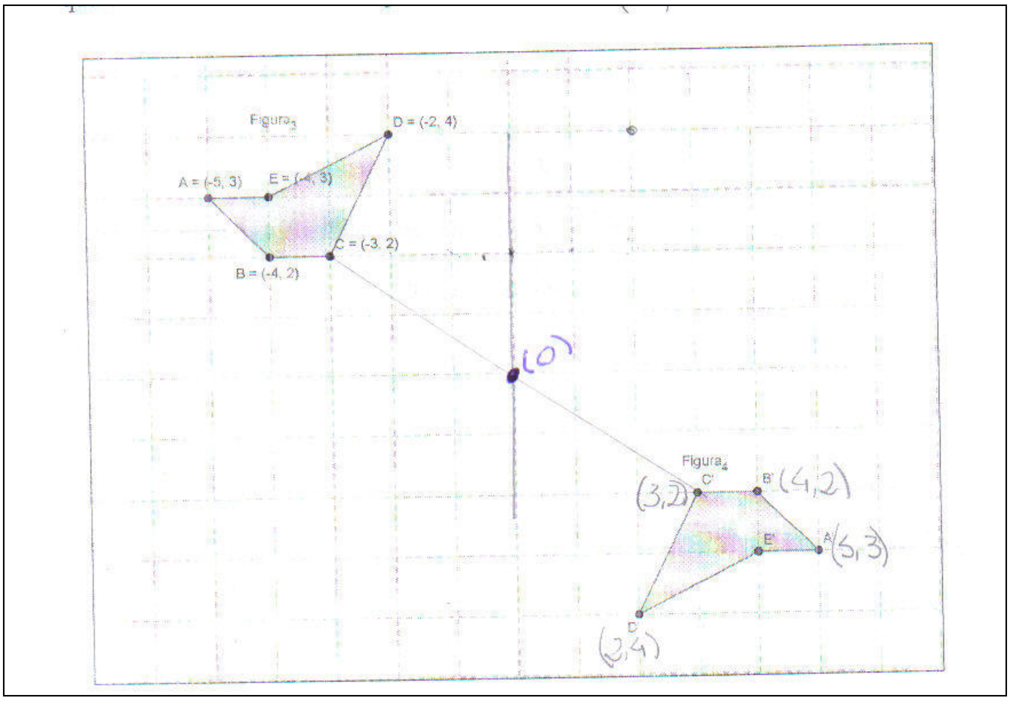
Exemplo 3 de resolução da Questão 5 – item a



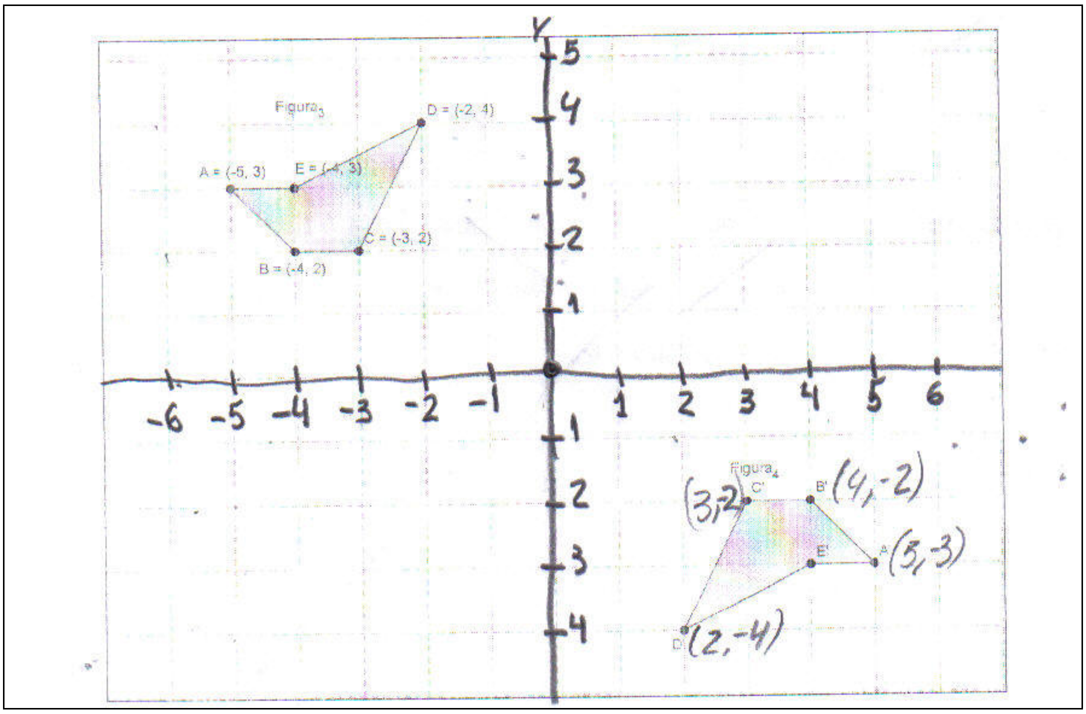
Exemplo 1 de resolução da Questão 5 – item b



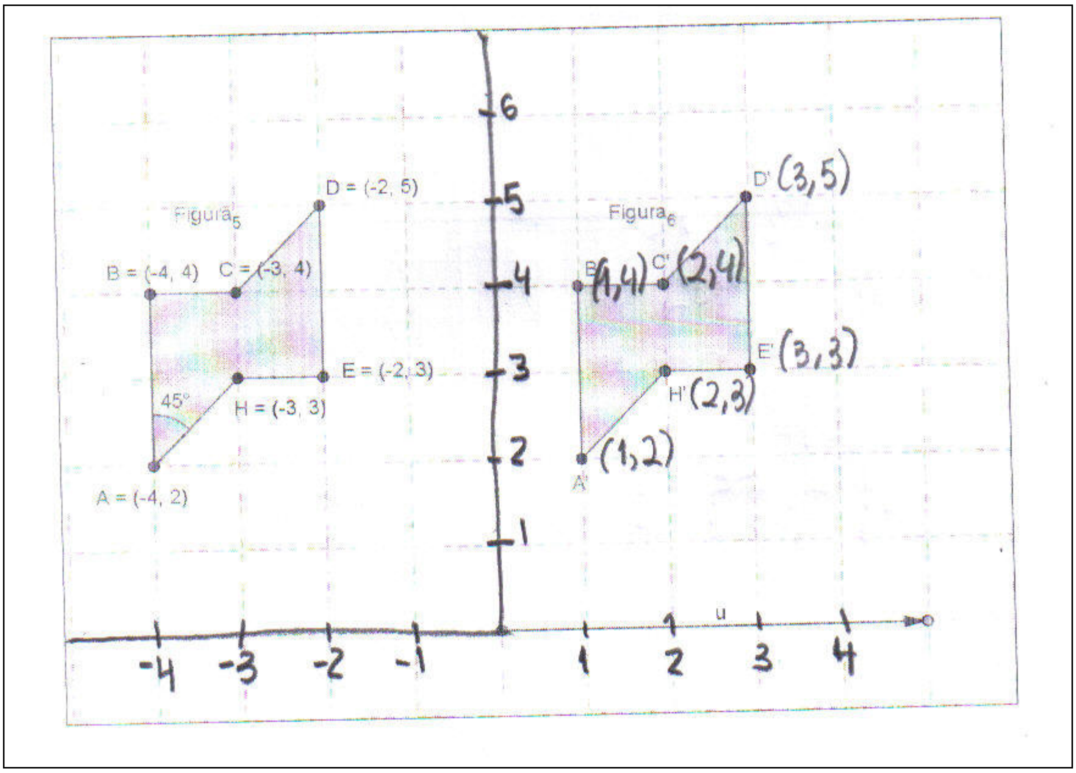
Exemplo 2 de resolução da Questão 5 – item b



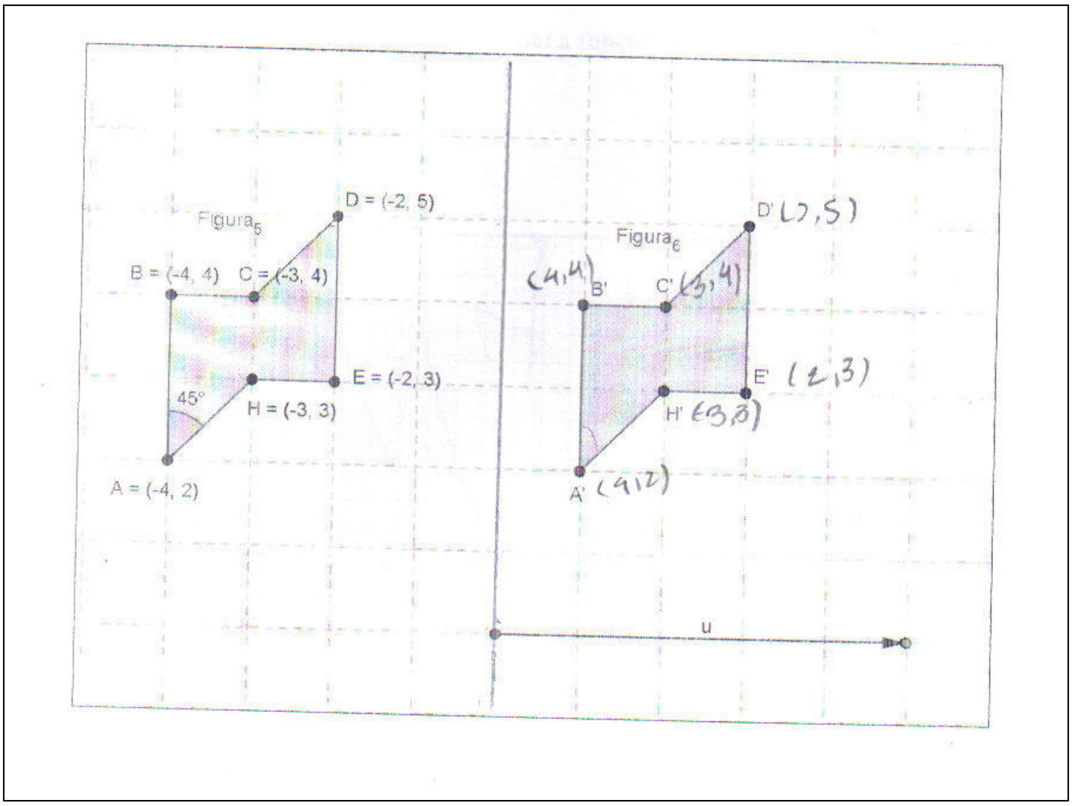
Exemplo 3 de resolução da Questão 5 – item b



Exemplo 1 de resolução da Questão 5 – item c



Exemplo 2 de resolução da Questão 5 – item c



Exemplo de resolução da Questão 6

6. Observe os gráficos acima e responda com base nas propriedades das figuras isométricas:

a) Se área da figura 1 é 2 cm^2, quanto vale a área da figura 2?: 2 cm^2

b) Se o perímetro da figura 3 é 8 cm, qual o perímetro da figura 4?: 8cm

c) Se o ângulo marcado na figura 5 é 45º, qual o valor do ângulo correspondente na figura 6? A: 45 figura 6

Questão 7: Construção de gráficos:

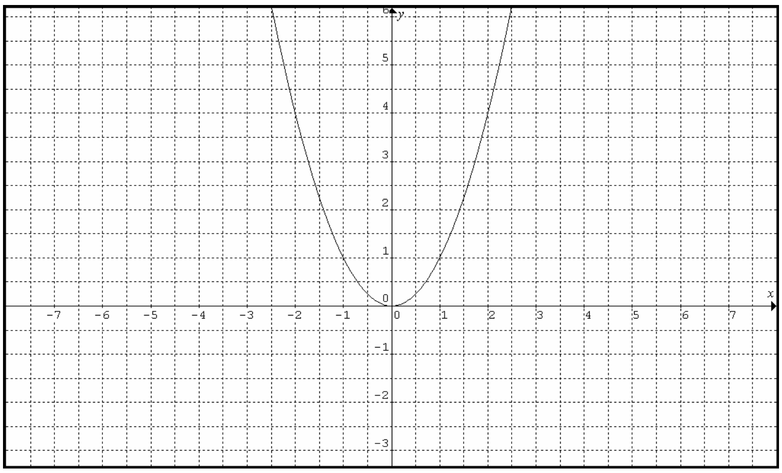
a) O gráfico abaixo representa a função f(x) = x2. Tendo esta função como base, podemos acrescentar valores a x ou a y e transladar a função.

Represente no Plano 1 as funções:

$f(x) = x^2+1$

$f(x) = x^2-2$

Plano 1

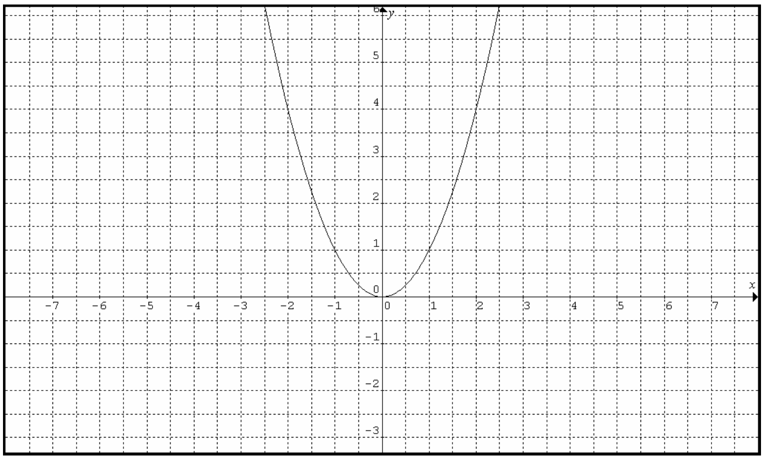


Represente no Plano 2 as funções

$f(x) = (x+4)^2$

$f(x) = (x-1)^2+2$

Plano 2

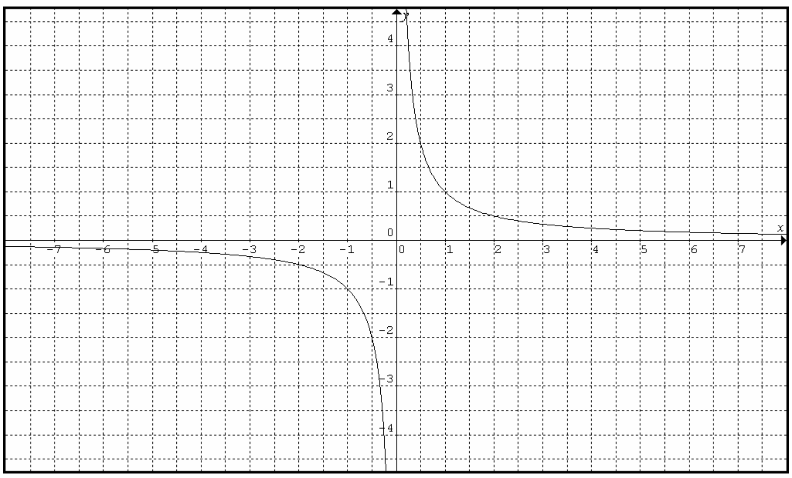


b) O gráfico abaixo representa a função f(x) = $\frac{1}{x}$. Tendo esta função como base, podemos acrescentar valores a x ou a y e transladar a função. Represente no Plano 1 as funções:

f(x) = $\frac{1}{x} + 1$

f(x) = $\frac{1}{x} - 2$

Plano 1

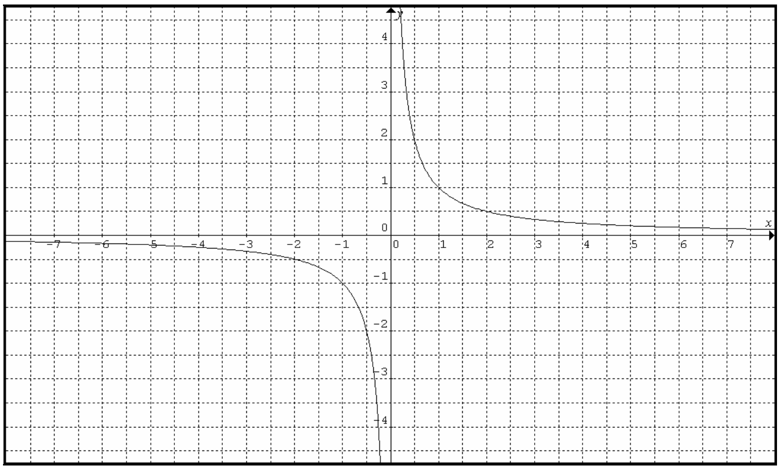


Represente no Plano 2 as funções:

f(x) = $\frac{1}{x+2}$

f(x) = $\frac{1}{x+3} - 2$

Plano 2



A seleção de atividades contextualizadas foi um dos aspectos que permeou a elaboração de nossa THA.

Nesta questão, que tem as mesmas características da sexta atividade da THA, nossa pretensão é observar se os alunos construíram o conhecimento a respeito da translação de funções.

Como somente 10% dos alunos realizaram esta atividade, selecionamos um exemplo de resolução que consideramos representativo dos erros encontrados. Observamos que os erros dos alunos estão relacionados à movimentação dos pontos com relação aos eixos, por exemplo: “na função f(x) = x^2+1, o gráfico movimenta-se no eixo x ou no eixo y?” ou então “movimenta-se no sentido positivo ou negativo do eixo?”

Verificamos também que, apesar desses erros, os alunos construíram as figuras simetricamente corretas. Podemos supor, por estas observações que as dificuldades dos alunos refletiram as dificuldades dos professores. Afinal, como apresentado no item 3.4, os professores colaboradores mencionaram não ter conhecimento sobre o conteúdo presente nesta atividade, funções pares e impares.

Além disso, percebemos o total desconhecimento dos alunos quanto à identificação das funções apresentadas e suas características, o que, acreditamos também, comprometeu o desenvolvimento da atividade da THA e por conseqüência, a realização das tarefas na avaliação.

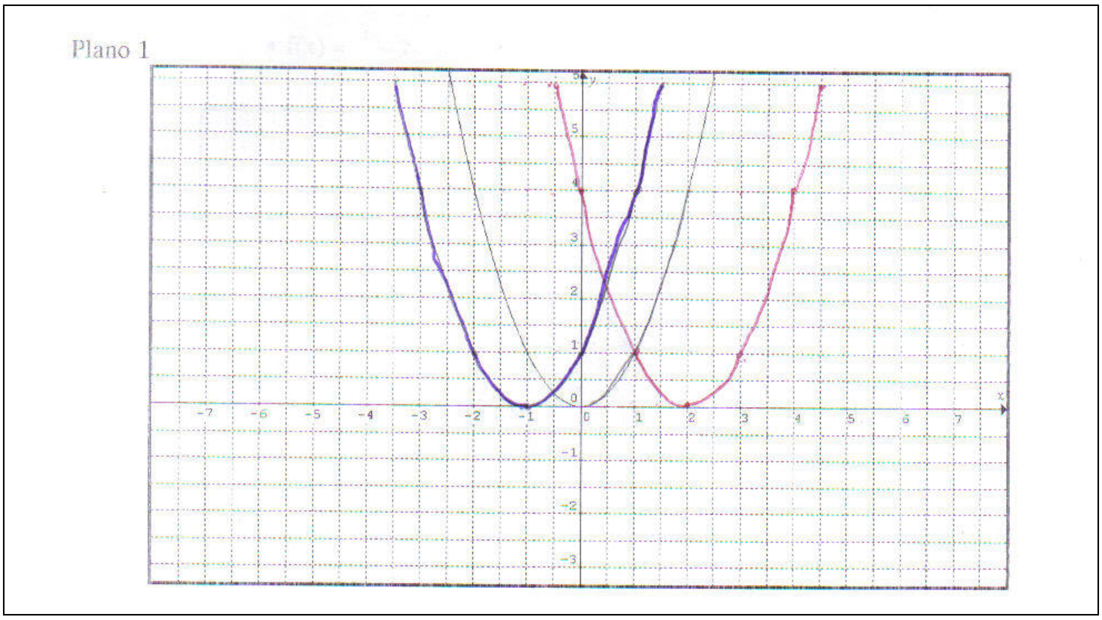
Estas dificuldades encontradas são indícios para o professor que, dependendo da turma onde será aplicada a THA, talvez seja necessário preparar uma atividade anterior, com foco nas funções que serão trabalhadas, proporcionando aos alunos uma retomada desses conceitos de maneira que eles tenham mais subsídios para a realização das atividades de funções pares e ímpares.

Não consideramos esta alteração na elaboração da terceira versão da THA por acreditarmos que se trata de uma situação particular, que deve ser analisada para cada turma e para cada professor.

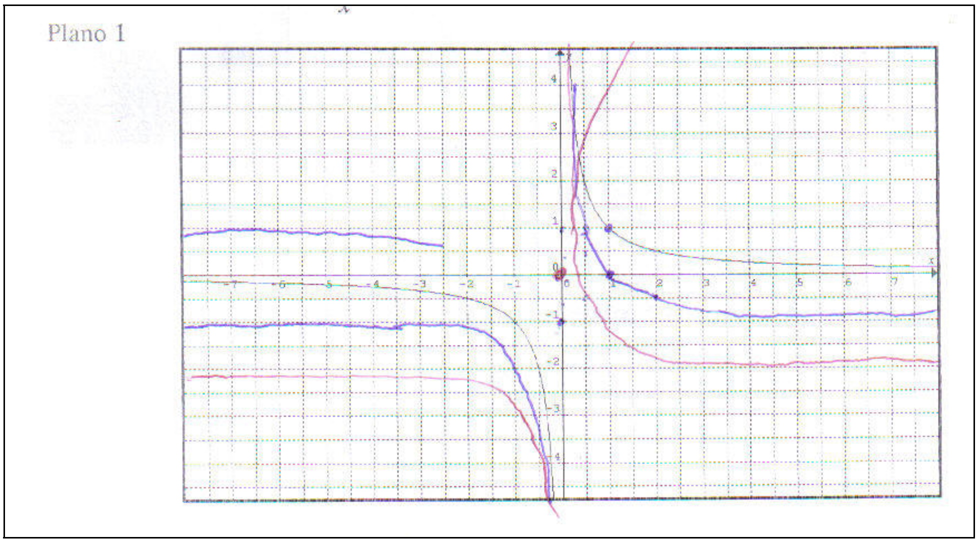
Voltando ao artigo de Simon (1995), verificamos que esta situação vai ao encontro do Ciclo de Ensino Matemático proposto por Simon (Figura 1, pág. 30) e comprova que a interação nas atividades realizadas nas aulas traz novos conhecimentos para o professor de forma que ele possa retomar sua THA a qualquer tempo e modificá-la a fim de atingir seus objetivos de aprendizagem.

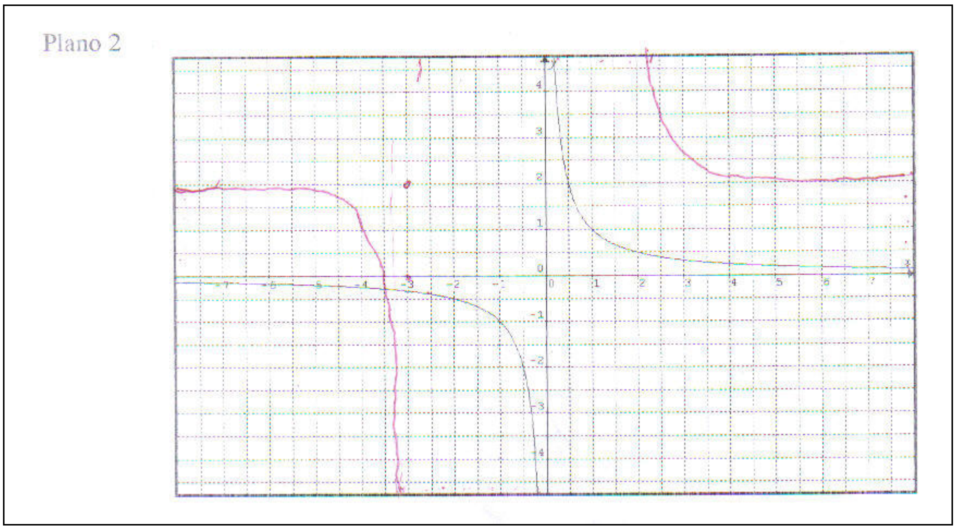
Afinal, para Simon, o professor está constantemente comprometido em ajustar sua trajetória e as modificações realizadas podem afetar o método, as atividades, ou o processamento hipotético da aprendizagem, ou ainda, os três simultaneamente.

Exemplo de resolução da Questão 7a



Exemplo da Questão 7b





Queremos lembrar que a análise da atividade avaliativa trouxe à professora pesquisadora novos conhecimentos, que serão utilizados na elaboração da terceira versão da THA. Não procuramos destacar, nesta análise, os erros dos alunos e sim valorizar os seus acertos, observando se as atividades propostas na THA foram satisfatórias quanto a enfrentar as dificuldades encontradas no estudo das Isometrias e propiciar aos alunos situações onde eles possam construir seus conhecimentos.

CAPíTULO 4
NOVOS CONHECIMENTOS CONSTRUÍDOS APÓS A THA

Neste capítulo apresentamos os novos conhecimentos dos professores colaboradores, construídos após o desenvolvimento da THA em sala de aula. Segundo Simon, 1995, o conhecimento do professor é o ponto de partida e o ponto de chegada no Ciclo de Conhecimento Matemático (THA) e a transformação desses conhecimentos possibilita mudanças contínuas na THA.

Tendo por base essas idéias, fizemos uma entrevista final com os professores colaboradores onde refletimos a respeito das atividades e identificamos que mudanças poderiam ser feitas na THA a fim de proporcionar aos alunos uma melhor aprendizagem.

Os conhecimentos adquiridos pela professora pesquisadora também serão considerados nas modificações realizadas na THA.

Completando a tríade, os alunos também ganharam novos conhecimentos. Apresentamos, então, algumas situações que acreditamos ser representativas deste fato.

Finalmente, apresentamos as propostas de modificação da THA, incluindo a nova versão das atividades que foram modificadas.

Apresentamos, nos anexos, a terceira versão completa da THA.

4.1 Os novos conhecimentos dos professores colaboradores

Após o desenvolvimento da THA, os professores colaboradores e a professora pesquisadora se reuniram a fim de analisar a aplicação da THA em sala de aula. Procuramos captar, dos professores colaboradores, quais conhecimentos novos eles construíram e que contribuirão para o seu desenvolvimento profissional.

Nesta entrevista, pedimos para que cada professor escrevesse um pequeno texto e apontasse suas impressões a respeito da aplicação da THA e de como essa experiência interferiu nas suas atividades diárias: planejamento, seleção de atividades, estratégias, metodologias de ensino, avaliação, etc.

Para o professor P1, a experiência ajudou a perceber que a utilização de metodologias diferentes pode enriquecer a aula e trazer melhores resultados na aprendizagem. Além disso, ele identificou ser de grande importância o planejamento e a escolha das atividades, explorando um determinado conteúdo de diferentes formas.

A aplicação da THA trouxe também para o professor P1 uma nova visão a respeito da Geometria. Ele percebeu que atividades planejadas mostram que o ensino de Geometria não precisa estar sempre vinculado a fórmulas e regras, mas pode ser explorado de forma divertida e curiosa.

Quanto ao professor P2, a situação mais valiosa foi o uso do software Geogebra. Para ele, os alunos se sentiram mais estimulados, se envolveram nas atividades e fixaram melhor os conteúdos. Outro ponto positivo, citado pelo professor P2, foi a montagem das aulas em Power Point, o que facilita a visualização e compreensão do aluno, diferente de uma aula na lousa onde seria muito difícil construir o grande número de figuras presente na THA.

Alguns aspectos importantes, porém, não foram levantados por eles e se mostram distantes de suas reflexões, por exemplo: a importância de conhecer pesquisas atuais a respeito das dificuldades dos alunos, a importância de levantar hipóteses sobre o conhecimento e o processo de ensino aprendizagem dos alunos e a seleção de atividades que atendam a esses objetivos e propiciem aos alunos situações onde possam construir seus conhecimentos, valorizando sua participação, sugestões, opiniões e questionamentos.

Percebemos que aspectos como reflexão da própria prática e replanejamento de atividades também não foram citados. Podemos notar que ainda persiste a idéia de planejamento como lista de conteúdos e não como elemento dinâmico do processo ensino aprendizagem.

Com esses comentários verificamos que apesar dos professores terem novos conhecimentos construídos, isso não garante uma mudança de postura em sala de aula. Percebemos que para isso, é necessário um comprometimento do professor em querer fazer diferente e percebemos, por nossa experiência e por pesquisas, que este é um desafio que ainda está distante de nossa realidade.

Acreditamos que investir na formação de professores de qualidade deve ser o primeiro passo para que aconteçam mudanças significativas no processo ensino-aprendizagem. É necessário que os novos professores tenham uma formação de qualidade, que forneça elementos para que eles sejam capazes de construir suas próprias trajetórias.

4.2 Os novos conhecimentos da professora pesquisadora

No que se refere ao nosso desenvolvimento profissional podemos perceber que o desenvolvimento da THA, em todo o seu processo, contribuiu de forma significativa para nossa mudança de postura profissional.

O aspecto mais marcante foi perceber que, quando conhecemos os resultados de pesquisa, podemos interferir no processo ensino-aprendizagem, diminuindo, ou até mesmo eliminando, obstáculos didáticos e epistemológicos. Afinal, utilizando resultados de outras experiências refletimos sobre elas e ganhamos conhecimentos que interferem em nossa prática de sala de aula.

Um segundo aspecto a considerar é a importância dada ao planejamento. Percebemos que o planejamento deve estar em permanente mudança e o professor deve refletir sobre ele a fim de buscar melhores estratégias para o desenvolvimento de um conteúdo. Afinal, um bom planejamento e responsável por grande parte do sucesso do processo ensino-aprendizagem.

Ao preparar a nossa THA, percebemos que o conhecimento está sempre em evolução e que não existe uma receita pronta, a mesma THA ganha diferentes facetas quando o professor incorpora nela características dos conhecimentos adquiridos e as hipóteses a respeito do conhecimento dos alunos.

Percebemos, também, a importância de observar, ao final do processo, se os obstáculos identificados na revisão bibliográfica foram superados. Este aspecto traz conhecimentos significativos para as modificações da THA.

4.3 Os novos conhecimentos dos alunos

Optamos por destacar os conhecimentos adquiridos pelos alunos após o desenvolvimento da THA, comparando as dificuldades freqüentes nas Isometrias, citadas no Capitulo 1, com os resultados obtidos na realização das atividades da avaliação.

Com relação aos erros comuns nas Reflexões, percebemos que os alunos não tiveram dificuldades na construção das figuras propostas na avaliação, pois a THA contemplou atividades de maneira que os alunos possam enfrentar essas dificuldades, que são: variações de posição do eixo com relação à figura, inclinação da figura ou do eixo e complexidade de figuras. Temos como hipótese que estas dificuldades surgem porque os professores costumam trabalhar sem considerar essas variações, limitando-se a mostrar figuras simples e com eixos sempre a 0, 45º e 90º.

Sendo assim, quando os alunos têm contato com atividades que consideram essas variações, os erros diminuem drasticamente, ou até mesmo, desaparecem.

Nas atividades de Rotação, percebemos que a dificuldade mais freqüente, relacionada ao centro do giro da figura, não foi superada pelos alunos. Na atividade avaliativa, este foi o exercício que apresentou maior incidência de erros. Com isso, percebemos que nossa THA precisa de mudanças nesse sentido a fim de proporcionar aos alunos maior clareza para a realização de atividades deste tipo. Essas mudanças constam na 3ª versão da THA.

Os exercícios de Translação foram realizados pelos alunos sem grandes dificuldades. Observamos que as atividades realizadas no Geogebra foram de grande importância para a compreensão desse conceito.

4.4 As sugestões de modificação na THA

Ao longo da aplicação das atividades, e influenciados pelos nossos novos conhecimentos, identificamos que alguns pontos poderiam ser mudados ou melhorados a fim de facilitar a aprendizagem dos conceitos envolvidos em nossa THA.

Juntamente com os professores colaboradores, refletimos a respeito destas observações e de sua incorporação na construção da terceira versão da THA e verificamos alguns aspectos gerais que precisam ser melhorados.

Um deles diz respeito aos conceitos anteriores (pré-requisito), necessários às atividades da THA, que os alunos não se lembram ou não aprenderam. Por conta desta dificuldade a sugestão dos professores foi a montagem de uma atividade preliminar, que tem por objetivo revisar e recordar estes conceitos (paralelo, perpendicular, medição de ângulo, etc.). Outra possibilidade é a de retomar estes conceitos e procedimentos no momento em que eles forem necessários, por meio de um Box localizado no final das atividades. Optamos, na terceira versão da THA, pela segunda possibilidade.

Algumas modificações de texto, visando facilitar a compreensão das atividades, também foram consideradas na terceira versão da THA. Para os professores, procuramos melhorar as orientações das atividades, a fim de facilitar o desenvolvimento das mesmas.

Algumas atividades da THA precisaram de mais tempo para realização. Por esta razão, fizemos também uma adequação quanto à quantidade de aulas necessárias.

Além dos aspectos gerais citados acima, consideramos algumas modificações especificas de exercícios. Para estes casos, analisamos as atividades separadamente. Apenas as atividades que tiveram modificações de exercícios, serão apresentadas, na seqüência.

A terceira versão completa será apresentada nos anexos.

Atividade um

Esta atividade teve como sugestão apenas a modificação de duas figuras que geraram dúvidas aos alunos. A primeira delas é a FIGURA B do exercício d. Neste caso os alunos precisavam traçar os quatro eixos de simetria e muitos apresentaram dificuldades. A sugestão adotada é a substituição por uma figura mais simples.

A segunda proposta de modificação foi a FIGURA C do exercício g. A justificativa dos professores é de que esta figura tem muitos detalhes, além de ter um eixo inclinado. Estas dificuldades desmotivaram os alunos, pois muitos deixaram em branco ou simplesmente fizeram de qualquer jeito. Segundo Jaime e Gutierrez, os alunos têm mais dificuldades em desenhar figuras complexas e, por esta razão escolhemos a figura em questão. Portanto, optamos por não adotar a sugestão dos professores e manter a figura.

Instruções para a atividade um:

- Tempo previsto: 2 aulas
- Atividade individual

- Professor inicie a aula com uma discussão sobre simetria e eixos de simetria. Para esta discussão, segue um arquivo em Power Point que contém diversas figuras e que poderá ser utilizado para despertar no aluno algumas noções de simetria.

  Posteriormente, peça para que os alunos desenvolvam as atividades propostas e, ao finalizarem, volte novamente à discussão de simetria, faça a socialização das atividades, peça para que os alunos apresentem suas definições de simetria e formalize.

1. Entrando nos eixos:

a) O que significa o termo simetria?

____

____

b) Você saberia dizer o que são figuras simétricas?

____

____

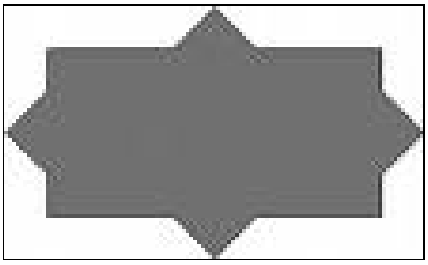
c) Desenhe uma figura que você considera simétrica.

d) Observe as figuras abaixo e identifique quantos eixos de simetria têm cada uma destas figuras. Trace – os nas próprias figuras.

FIGURA A

FIGURA B

FIGURA C



e) Observando os eixos que você traçou, identifique em quantas partes cada uma das figuras foi dividida.

Figura A: _________________

Figura B: _________________

Figura C: _________________

f) Se você fosse desenhar cada uma das figuras acima, que fração de cada uma delas você precisaria para poder desenhá-las por inteiro?

Figura A: _________________

Figura B: _________________

Figura C: _________________

g) As figuras abaixo têm um eixo de simetria. Complete-as.

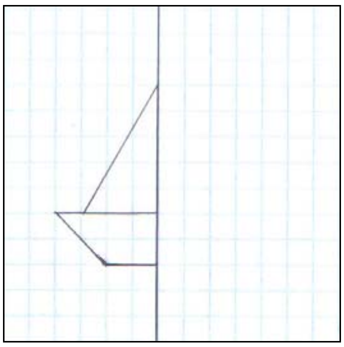


FIGURA A

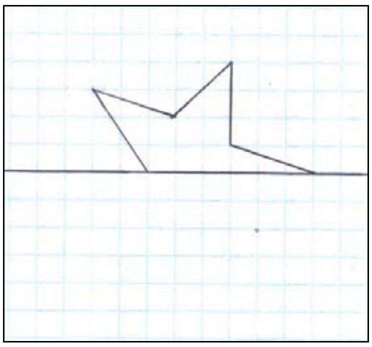


FIGURA B

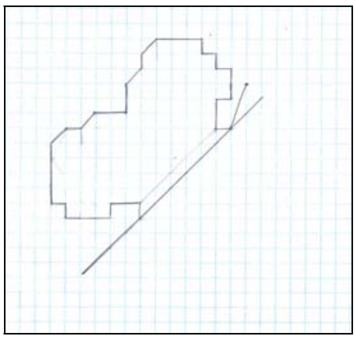


FIGURA C

h) Quais são as semelhanças que você observa entre a parte da figura que estava desenhada e a que você desenhou? E as diferenças?

____

____

____

____

Complete: Figuras simétricas são ____________________________________

____

____

Atividade dois

Não houve sugestões de modificações para esta atividade.

Atividade três

Os professores não sugeriram modificações nesta atividade. Porém, conforme falamos no tópico 3.5, após a análise da atividade avaliativa, percebemos que o conceito de rotação não ficou claro para os alunos. Neste caso, resolvemos incluir nos exercícios de rotação, questões que possibilitem a compreensão destes conceitos.

Além destas alterações, decidimos trocar a ordem desta atividade com a atividade do Geogebra. Sendo assim, na terceira versão da THA, esta atividade será a de número quatro. Justificamos esta tomada de decisão, pois percebemos que os alunos compreendem melhor os conceitos quando realizam as atividades no software, ficando a realização em papel e lápis numa etapa posterior, para a fixação desses conceitos.

Abaixo, ela aparece como atividade três, pois tomamos como referência de análise a versão dois da THA, onde ela ocupa esta posição.

Instruções para a atividade três:

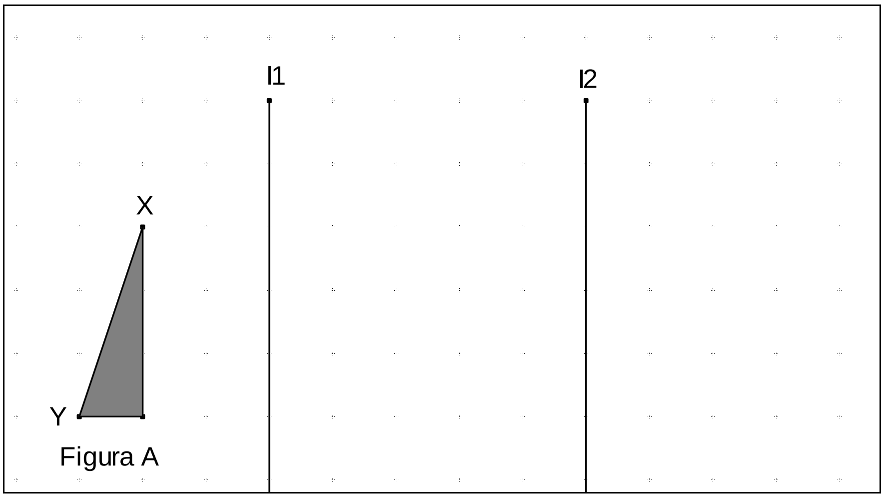
- Tempo previsto: 2 aulas

- Atividade individual
- Professor, deixe que os alunos completem as figuras propostas e respondam as questões. Após a resolução das questões, socialize as respostas e finalmente apresente a definição de Isometrias.

3. Conhecendo outras Isometrias

A partir da reflexão em reta podemos identificar outras Isometrias: translação e rotação. As atividades propostas abaixo mostrarão o caminho.

3.1) Translação:



a) Observe a figura A e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura A1 e ponto X1.
b) Agora, reflita a figura A1, em torno do eixo I2, encontrando a figura A2 e o ponto X2.
c) Qual a distância entre os eixos I1 e I2? __________. Considere a distância entre dois pontos da malha quadriculada igual a 1 cm.
d) Qual é a distância entre X e X2?_________________________________
e) Proceda da mesma forma para o ponto Y e registre a distância entre Y e Y2._____________
f) Que relação você percebe quando analisa a distância entre os eixos I1 e I2 e a distância entre os pontos X e X2? Esta relação também se aplica quando analisamos a distância entre os pontos Y e Y2?

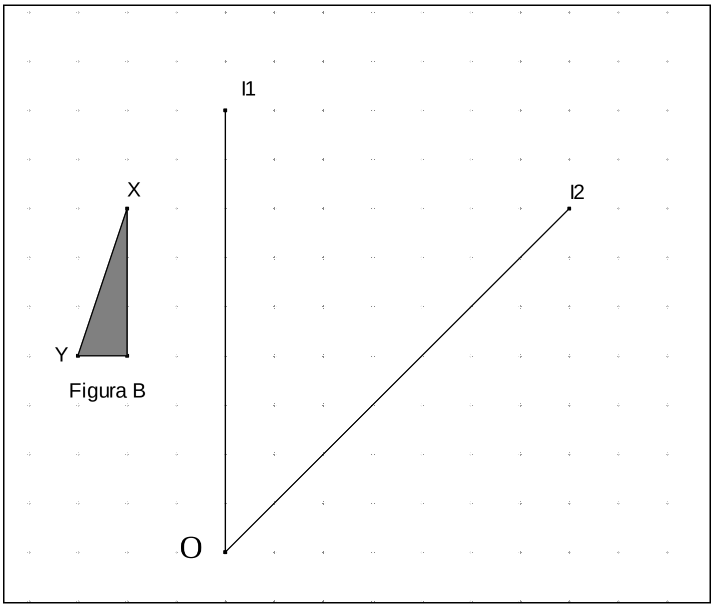
____

____

g) O que você observa sobre as figuras A e A2? ______________________

h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura A e chegar à figura A2 sem passar pela A1?________________________

3.2) Rotação com ângulo de 45º:



a) Observe a figura B e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura B1 e ponto X1.

b) Agora, reflita a figura B1, em torno do eixo I2, encontrando a figura B2 e o ponto X2.

c) Com a ajuda do transferidor, meça o ângulo entre os eixos I1 e I2? ______

d) Ligue os pontos X e X2 ao centro C e meça o ângulo formado entre eles.____________

e) Proceda da mesma forma para o ponto Y e registre o ângulo entre Y e Y2.______________

f) Que relação você percebe quando analisa o ângulo encontrado entre os eixos I1 e I2 e o ângulo encontrado entre os pontos X e X2? Esta relação também se aplica quando analisamos o ângulo formado entre Y e Y2?

____

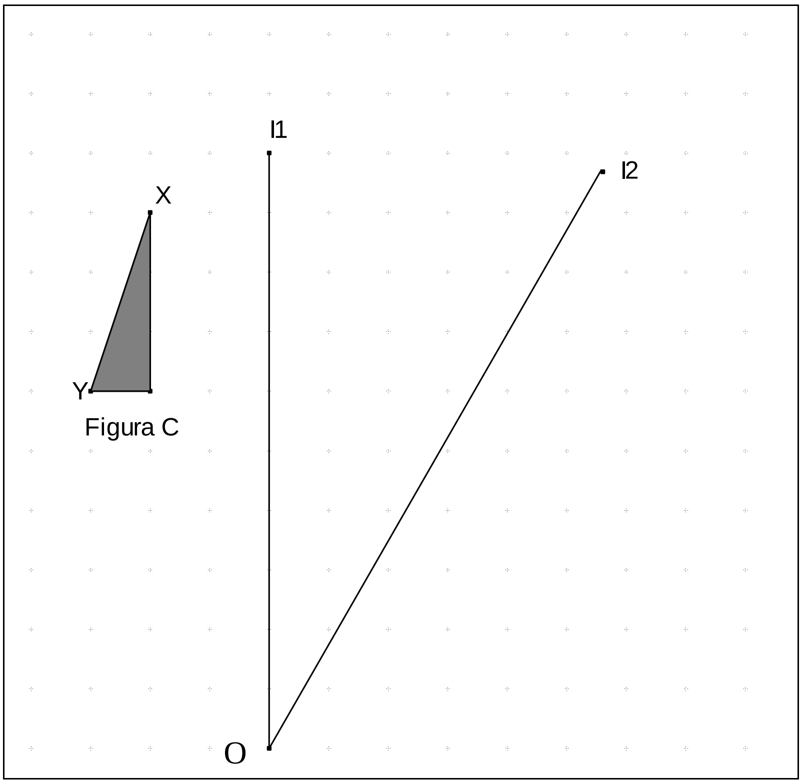
g) O que você observa sobre as figuras B e B2? ________________________

h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura B e chegar à figura B2? ____

i) Determine os segmentos $\overline{YY2}$ e $\overline{XX2}$. Trace a mediatriz desses segmentos e responda: em que ponto elas se cruzam?____

j) Trace uma circunferência de Centro O e raio $\overline{OX}$. Que pontos das figuras estão localizados nesta circunferência? _______________________________

3.3) Rotação com ângulo de 30º:



a) Observe a figura C e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura C1 e ponto X1.

b) Agora, reflita a figura encontrada, em torno do eixo I2, encontrando a figura C2 e o ponto X2.

c) Com a ajuda do transferidor, meça o ângulo entre os eixos I1 e I2? ______

d) Qual o valor do ângulo formado entre os pontos X e X2? _______________

e) Proceda da mesma forma para o ponto Y e registre o ângulo entre Y e Y2.________________

f) Que relação você percebe quando analisa o ângulo encontrado entre os eixos I1 e I2 e o ângulo encontrado entre os pontos X e X2 ou Y e Y2?

____

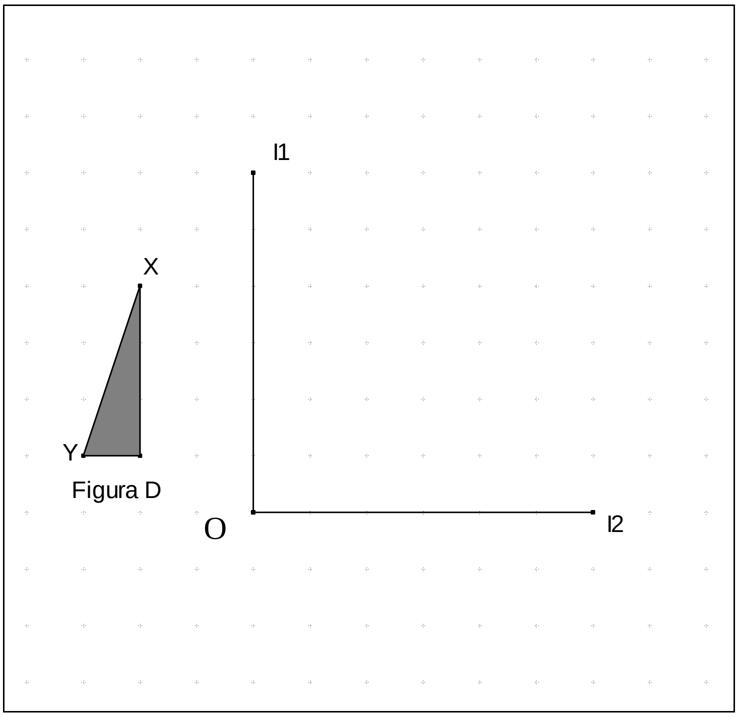
g) O que você observa sobre as figuras C e C2? _______________________

h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura C e chegar à figura C2? ____

i) Determine os segmentos $\overline{YY2}$ e $\overline{XX2}$. Trace a mediatriz desses segmentos e responda: em que ponto elas se cruzam?____

j) Trace uma circunferência de Centro O e raio $\overline{OX}$. Que pontos das figuras estão localizados nesta circunferência? ________________________________

3.4) Simetria Central:



a) Observe a figura D e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura D1 e ponto X1.

b) Agora, reflita a figura encontrada, em torno do eixo I2, encontrando a figura D2 e o ponto X2.
c) Com a ajuda do transferidor, meça o ângulo entre os eixos I1 e I2? ______
d) Qual o valor do ângulo formado entre os pontos X e X2? ______________
e) Proceda da mesma forma para o ponto Y e registre o ângulo entre Y e Y2.________________
f) Que relação você percebe quando analisa o ângulo encontrado entre os eixos I1 e I2 e o ângulo encontrado entre os pontos X e X2 ou Y e Y2?

____

g) O que você observa sobre as figuras D e D2? _______________________
h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura D e chegar à figura D2? ____

Complete: Isometria é uma transformação geométrica que _________________

____

As Isometrias são: ____

Atividade quatro

Incluímos, nesta atividade, algumas questões para reforçar o conceito de rotação e modificamos sua posição na THA. Ela será, na terceira versão da THA, a atividade três, como já justificamos acima. Abaixo, ela aparece como atividade quatro, pois tomamos como referência de análise a versão dois da THA, onde ela ocupa esta posição.

Outra modificação desta atividade é a inclusão de um Box com os conceitos necessários para a sua realização.

Instruções para a atividade quatro:

- Tempo previsto: 5 aulas
- Atividade em duplas ou trios
- Material necessário: Software Geogebra
- Professor, oriente os alunos para que eles realizem as atividades seguindo cada um dos roteiros. Para cada tarefa já existe um arquivo pronto, inicial, de onde os alunos deverão começar a desenvolver as tarefas. Ao final, verifique se os alunos

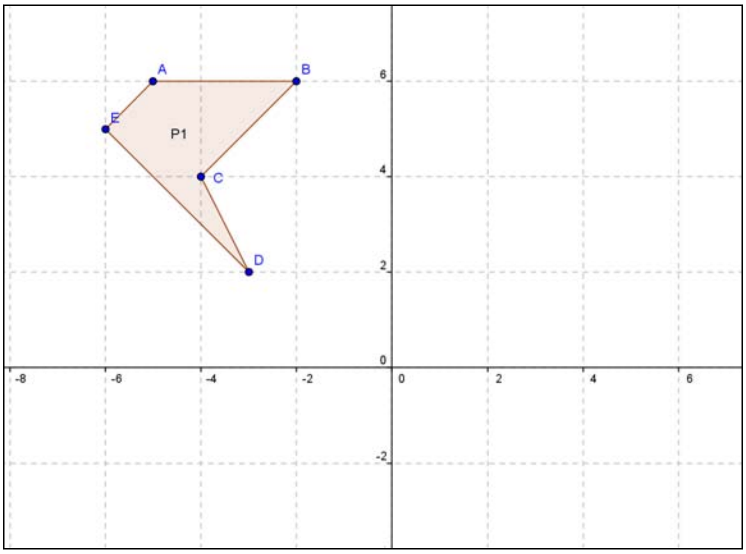
salvaram todas as atividades. A socialização deve ser feita após o término das atividades, utilizando o software para construir as figuras e formalizar suas características.

4. Identificando propriedades das Isometrias:

4.1) Descobrindo a simetria

Construção:

a) Abra o arquivo “construção 1”



b) Com a ferramenta “reflexão com relação à uma reta”, clique no polígono P1 e depois no eixo x. Aparecerá um polígono que deverá ser nomeado P2, simétrico a P1, em relação ao eixo x.

c) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P1, propriedades e na opção cor, modifique a cor do polígono P1 a fim de distingui-lo de P2.

d) Faça um segmento de reta unindo os pontos A e A’, obtendo o segmento $\overline{AA'}$. Qual é a posição desta reta em relação ao eixo de simetria? ________________________________

e) Faça a mesma representação para os outros vértices simétricos da figura. Em que posições estão entre si as retas dos outros segmentos? E qual a posição destas retas com relação ao eixo de simetria? ________________

____

____

f) Considere o segmento $\overline{AA'}$. Chame de F o ponto de intersecção entre a reta e o eixo de simetria. Porque o ponto F é chamado de ponto médio do segmento? ____

g) O ponto de interseção dos outros segmentos com o eixo de simetria também é o ponto médio desses segmentos? ______________________

h) Com a ferramenta “reflexão com relação à uma reta”, clique novamente em P1 e, depois no eixo y. Agora aparecerá um polígono que deverá ser chamado de P3, simétrico à P1, em relação ao eixo y.

i) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P3, propriedades e na opção cor, modifique a cor do polígono P3 a fim de distingui-lo dos outros.

j) Utilizando a ferramenta “ângulo”, clique sobre os três polígonos e compare as medidas de todos os ângulos. _________________________________

____

k) Utilizando a ferramenta “distância ou comprimento” sobre os lados dos três polígonos, calcule o perímetro de cada um deles e compare os resultados

____

l) Utilize a ferramenta “área” sobre os três polígonos e compare os resultados.____

m) Após responder a estas perguntas, você identificou algumas características das figuras simétricas. Faça uma síntese sobre estas características.____

____

____

____

n) Observe na janela de álgebra, as coordenadas correspondentes de cada ponto dos polígonos encontrados. Agora clique na ferramenta “move” e desloque um dos vértices do polígono P1. Verifique o que acontece com as coordenadas dos pontos, as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos. Depois anote suas conclusões.

____

____

____

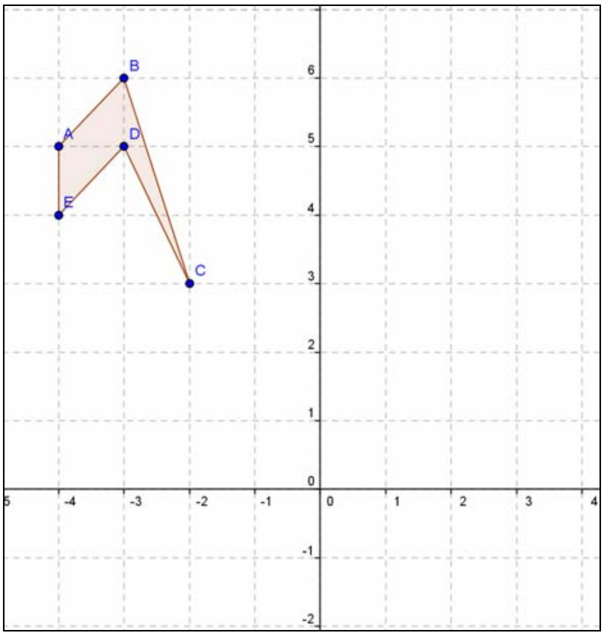
____

o) Grave seu arquivo com o nome “construção 1A – *nome do grupo*".

4.2) Um movimento chamado translação

Construção:

a) Abra o arquivo “construção 2”



b) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P1, propriedades e na opção cor e modifique a cor do polígono P1 a fim de distingui-lo dos outros.

c) Crie um vetor vertical V1, de origem no ponto (0,0) e fim no ponto (0,4), no sentido positivo do eixo y e um vetor horizontal V2 de origem no ponto (0,0) e fim no ponto (6,0), no sentido positivo do eixo x.

d) Com a ferramenta “transladar por um vetor”, clique no polígono P1 e depois no vetor V1. Aparecerá um polígono que você nomeará de P2 e que foi obtido de P1.

e) Repita a operação utilizando o polígono P1 e o vetor V2. Nomeie este novo polígono de P3.

f) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P3, propriedades e na opção cor e modifique a cor do polígono P3 a fim de distingui-lo dos outros.

g) Observe na janela de álgebra o que aconteceu com as coordenadas dos pontos dos polígonos P2 e P3, comparados com as coordenadas de P1.____

h) Utilizando a ferramenta “ângulo”, clique sobre os três polígonos e compare as medidas de todos os ângulos. _________________________________

i) Utilizando a ferramenta “distância ou comprimento” sobre os lados dos três polígonos, calcule o perímetro de cada um deles e compare os resultados

____

____

j) Utilize a ferramenta “área” sobre os três polígonos e compare os resultados.____

k) Clique na ferramenta “move” e desloque a extremidade dos vetores. Verifique o que acontece com as coordenadas dos vértices correspondentes dos polígonos. __________________________________

l) Clique novamente na ferramenta “move” e desloque um dos vértices do polígono P1. Verifique o que acontece com as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos _________________________

.____

____

m) Anote suas conclusões a respeito de suas percepções. _______________

____

____

____

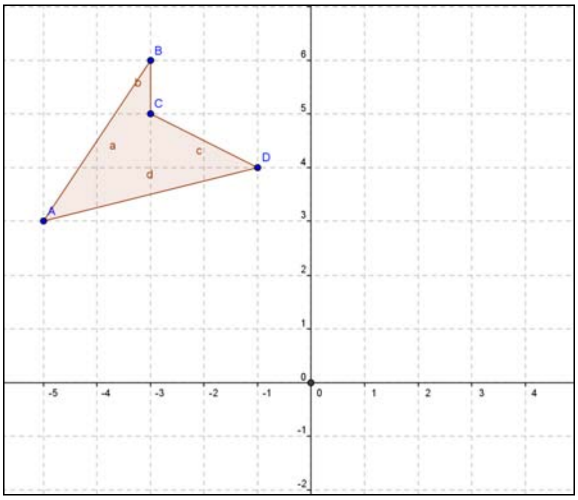
____

Grave seu arquivo com o nome “construção 2A – *nome do grupo*".

4.3) Girando...

Construção:

a) Abra o arquivo “construção 3”



b) Marcar o ponto (0,0) e chamá-lo de O.

c) Com a ferramenta “girar em torno de um ponto por um ângulo”, clique no polígono P1, depois no ponto O e digite 30º sentido horário. Aparecerá um polígono que você nomeará de P2 e que foi obtido de P1.

d) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P2, ferramentas e na opção cor, modifique a cor do polígono P2.

e) Com a ferramenta “segmento definido por dois pontos”, encontre os segmentos $\overline{DO}$ e $\overline{D'O}$. Calcule seus comprimentos. O que você observou? __________________________.

f) Utilizando a ferramenta “ângulo” encontre o ângulo formado entre estes dois segmentos. Escolha um outro ponto e repita o processo, anotando o que você observou ____

g) Utilizando a ferramenta “segmento definido por dois pontos”, encontre os segmentos $\overline{DD'}$ e $\overline{BB'}$. Depois encontre as mediatrizes destes dois segmentos. Em que ponto elas se cruzaram?_______________________. Que significado tem este ponto para as figuras que você encontrou? ______________________________________.

h) Grave seu arquivo como “construção 3A – *nome do grupo*" e abra novamente o arquivo “construção 3”.

i) Marcar o ponto (0,0) e chamá-lo de O.

j) Com a ferramenta “girar em torno de um ponto por um ângulo”, clique no polígono P1, depois no ponto O e digite 80º sentido horário. Aparecerá um polígono que você nomeará de P3 e que foi obtido de P1.

k) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P3, ferramentas e na opção cor, modifique a cor do polígono P3.

l) Com a ferramenta “segmento definido por dois pontos”, encontre os segmentos $\overline{DO}$ e $\overline{D'O}$. Calcule seus comprimentos. O que você observou? ____

m) Utilizando a ferramenta “ângulo” encontre o ângulo formado entre estes dois segmentos. Escolha um outro ponto e repita o processo, anotando o que você observou ____

n) Utilizando a ferramenta “segmento definido por dois pontos”, encontre os segmentos $\overline{DD'}$ e $\overline{BB'}$. Depois encontre as mediatrizes destes dois segmentos. Em que ponto elas se cruzaram?_______________________. Que significado tem este ponto para as figuras que você encontrou? ____

o) Grave seu arquivo como “construção 3B – *nome do grupo*" e abra novamente o arquivo “construção 3”.

p) Marcar o ponto (0,0) e chamá-lo de O.

q) Com a ferramenta “girar em torno de um ponto por um ângulo”, clique no polígono P1, depois no ponto O e digite 180º sentido horário. Aparecerá um polígono que você nomeará de P4 e que foi obtido de P1.

r) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P4, ferramentas e na opção cor, modifique a cor do polígono P4.

s) Com a ferramenta “segmento definido por dois pontos”, encontre os segmentos $\overline{DO}$ e $\overline{D'O}$. Calcule seus comprimentos. O que você observou? ____

t) Utilizando a ferramenta “ângulo” encontre o ângulo formado entre estes dois segmentos. Escolha um outro ponto e repita o processo, anotando o que você observou ____

u) Utilizando a ferramenta “ângulo”, clique sobre os dois polígonos e compare as medidas de todos os ângulos. ________________________________

____

v) Utilizando a ferramenta “distância ou comprimento” sobre os lados dos dois polígonos, calcule o perímetro de cada um deles e compare os resultados ____

w) Utilize a ferramenta “área” sobre os dois polígonos e compare os resultados. ____

x) O que você percebeu ao analisar os resultados? Será que acontece a mesma coisa para os polígonos anteriores, feitos com outros ângulos? Por quê? Escreva suas conclusões. ________________________________

____

____

____

y) Grave seu arquivo como “construção 3C – *nome do grupo*”

Atividade cinco

Houve apenas a inclusão de um Box que apresenta as fórmulas de áreas de quadrado e retângulo.

Atividade seis

Houve apenas a inclusão de um Box que apresenta um modelo de plano cartesiano.

Apresentamos, nos anexos, a versão completa e modificada de nossa THA, elaborada com as alterações sugeridas anteriormente, o que completa o ciclo sugerido por Simon (1995), na Figura 1, pág. 30. Não podemos dizer que esta é a última versão, nem que é uma versão perfeita, visto que uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem nunca é definitiva, sempre haverá um novo conhecimento que poderá ser incorporado dando continuidade ao Ciclo de Ensino Matemático.

Ao iniciar nosso trabalho formulamos três questões que escolhemos como orientadoras de nossa pesquisa.

Nos próximos parágrafos pretendemos respondê-las, não de maneira definitiva, mas trazendo novos elementos a fim de colaborar para a melhoria do ensino de Geometria no Ensino Médio.

Primeira questão: **Como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino das Isometrias?**

Percebemos, ao longo de nosso trabalho, que, elaborar uma THA não é tarefa fácil. Pela nossa experiência, como professora, encontramos algumas dificuldades que precisamos superar para finalizar a montagem da THA. A primeira delas diz respeito à rotina do professor. Não estamos acostumados a elaborar trajetórias de aprendizagem, ou seja, estabelecer objetivos de aprendizagem, determinar atividades levando em consideração o pensamento do aluno e prever prováveis dificuldades que eles possam encontrar.

A elaboração de uma THA que tenha uma perspectiva construtivista, necessita de muita pesquisa em trabalhos que já ofereçam uma direção com relação ao processo ensino-aprendizagem do conteúdo escolhido. Além disso, preparar atividades motivadoras, onde os alunos são colocados à frente de situações contextualizadas e problematizadoras, para que, a partir delas, possam construir seus conhecimentos, não é tarefa simples.

Lembramos que a montagem de nossa THA teve o apoio e a participação do grupo de pesquisa, que colaborou com sugestões durante todo o processo: seleção de objetivos, definição de hipóteses de aprendizagem e escolha das tarefas.

Além disso, para compatibilizar perspectivas construtivistas e propor tarefas que levem em consideração os conhecimentos dos alunos, prevendo as dificuldades que eles possam encontrar, foi necessário realizar uma grande pesquisa bibliográfica em trabalhos anteriores e documentos curriculares a fim de justificar a escolha de nossas atividades.

Não podemos esquecer também que, para que o aluno pudesse interagir, levantar hipóteses, construir estratégias de resolução, esboçar conjecturas, argumentar, relacionar e analisar, de forma a construir seu próprio conhecimento, a seleção das atividades levou em consideração estratégias diferenciadas como: o uso de tecnologias, abordagens interdisciplinares e aplicações no cotidiano e em outras áreas do conhecimento.

Quando observamos o planejamento preparado pelos professores no início do ano letivo, verificamos que ele é apenas uma lista de conteúdos distribuídos nos bimestres e que não prevê nenhuma indicação com relação às metodologias e estratégias que poderiam ser desenvolvidas durante o ensino dos conteúdos.

Percebemos também que, quando os professores encontram uma proposta de atividade que tenha características construtivistas e estratégias diferenciadas, como é o caso da THA, e possuem apoio para tirar dúvidas, discutir atividades ou sugerir modificações, sentem-se mais satisfeitos e motivados para ensinar e para aprender também, pois enriquecem as aulas com seus comentários e seus conhecimentos do conteúdo.

Sendo assim, respondendo nossa primeira questão, percebemos que é possível compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino das Isometrias. Porém, percebemos também, que este é um caminho demorado, que depende de inúmeros fatores que vão desde a formação de professores até as condições de ensino da rede pública estadual, visto que, como cita Pires (2008), as propostas curriculares oficiais apresentam diversos problemas com relação à sua implementação.

A Educação Matemática é um caminho que pode acelerar este processo, mas como Simon (1995) diz em seu texto:

> “(...) embora o construtivismo tenha apresentado aos professores de Matemática caminhos proveitosos para o entendimento de como se processam as aprendizagens, a tarefa de reconstrução de uma “Pedagogia da Matemática” baseada na visão construtivista é um desafio considerável, no qual a comunidade de Educação Matemática tem apenas começado a trabalhar” (SIMON, 1995, apud Pires, 2009, pág. 6)

Por sentir as dificuldades de se elaborar uma THA, acreditamos que esta é uma tarefa mais condizente aos pesquisadores que aos professores, como dizem Gomez e Lupiánez (2007). Porém, um pesquisador pode elaborar uma primeira versão de THA, que contenha a sua parte central, como apresenta Simon (1995) na Figura 2, pág. 31, e esta versão pode ser o ponto de partida para o professor. Ao aplicar esta versão, interagir com os alunos e avaliar os resultados, o professor estará adquirindo novos conhecimentos e se sentirá seguro para modificar a versão inicial e criar suas próprias versões, concluindo assim o ciclo proposto por Simon na Figura 1, pág. 30.

Vale lembrar que o comprometimento do professor é o que faz toda a diferença no processo ensino-aprendizagem. Um professor pode fazer de uma tarefa simples uma aula repleta de conexões e significados, ou de uma atividade extremamente elaborada uma simples lista de exercícios.

De qualquer forma, percebemos que o planejamento é a chave para a elaboração e modificação de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem e peça fundamental para o encontro do professor com os resultados de pesquisa, os conhecimentos dos alunos e seus próprios conhecimentos.

Segunda questão: **Como as pesquisas, na área da Educação Matemática, podem contribuir para a organização do ensino das Isometrias potencializando boas situações de aprendizagem aos alunos?**

As pesquisas relacionadas ao ensino de Isometrias no Ensino Médio são escassas. Em nossa pesquisa bibliográfica encontramos informações, em sua maioria, relacionadas ao Ensino Fundamental.

Utilizar esses resultados na prática, durante a elaboração da THA foi um grande desafio, mas também uma grande aprendizagem. Apesar de desafiador, percebemos que os conhecimentos adquiridos durante o levantamento bibliográfico foram de extrema importância para a seleção das atividades.

Conhecendo informações extraídas de pesquisas, foi possível propor aos alunos atividades que potencializassem o surgimento de dúvidas e a problematização de hipóteses para que, com a mediação dos professores, as dificuldades fossem superadas.

As pesquisas dos últimos anos na área da Educação Matemática, voltadas à Geometria, procuram identificar como é o pensamento geométrico dos alunos a fim de propor estratégias para explorar o ensino da Geometria de forma mais significativa e abrangente, relacionando-o com as outras áreas da Matemática.

A teoria de Van Hiele, citada no Capítulo 1, por exemplo, muito tem contribuído para a retomada do ensino de Geometria.

No caso especial das Isometrias, as pesquisas mostraram possíveis dificuldades dos alunos com relação à inclinação do eixo de simetria, à distância da figura ao eixo, o uso de vetores, a medição de ângulos, entre outros, e estes conhecimentos muito colaboraram para elaboração e modificação de nossa THA.

Apropriar-se dessas teorias e dos resultados de pesquisa trazem ao professor uma gama de conhecimentos que certamente farão diferença na elaboração das atividades da THA. Não que isto garanta o sucesso, pois uma THA válida numa determinada circunstância pode não ter sentido em outras circunstâncias, mas permite que as freqüentes dificuldades enfrentadas pelos alunos sejam minimizadas propiciando uma aprendizagem mais consistente.

Podemos verificar também que o uso de tecnologias é um conhecimento do professor que quando (bem utilizado) pode potencializar as situações de aprendizagem.

Na área da Geometria, a construção de figuras com simples toques de computador favorece o surgimento de hipóteses e possibilita que o erro seja explorado como recurso de aprendizagem visto que o aluno pode apagar figuras tão facilmente quanto às desenha, além de poder sobrepor umas às outras para verificação das diferenças entre elas. Numa aula onde o único recurso é a lousa, estas situações seriam praticamente impossíveis.

Porém, apesar de todas essas vantagens, percebemos, em nossa experiência com a aplicação da THA, que é ainda uma estratégia desconhecida por muitos professores.

Consideramos que o uso dos resultados de pesquisa potencializa boas situações de aprendizagem para os alunos, visto que permite selecionar atividades que enfrentem os obstáculos de aprendizagem. Mas, uma questão para as próximas pesquisas é: como os professores podem ter acesso a estes resultados?

Atualmente, o que percebemos com a experiência de professora pesquisadora e com o desenvolvimento de nossa pesquisa, é que os professores ficam limitados a atividades já prontas, retiradas de livros didáticos ou apostilas. Estas atividades raramente são modificadas por eles a fim de possibilitar melhores situações de aprendizagem.

Esperamos que, neste sentido, nosso trabalho venha a colaborar, se tornando mais uma referência para os professores que buscam, nos resultados de pesquisas, elementos que tornem suas aulas mais ricas e motivadoras.

Terceira Questão: **Como é a atuação do professor de Matemática quanto às atividades de planejamento do ensino de Isometrias, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem?**

Para responder esta questão, observamos a atuação dos professores em três etapas: antes, durante e depois da aplicação da THA.

Antes da aplicação da THA

Antes da primeira reunião com os professores colaboradores, a nossa expectativa era de que pouco contribuiriam para a construção da THA, pois, como já citamos outras vezes, o ensino das Isometrias no Ensino Médio não é um conteúdo presente nas propostas curriculares oficiais do Ensino Médio, não está presente nos livros didáticos e faz parte da Geometria tão pouco apreciada e explorada pelos professores.

Porém, para nossa surpresa, não foi isto que aconteceu. Os professores deram várias sugestões de modificação das atividades, e também das metodologias, a fim de aperfeiçoar a aplicação da THA em sala de aula.

Ou seja, acreditamos que, nesta fase do planejamento, a possibilidade de trabalhar com uma proposta diferente motivou a participação dos professores nas atividades de planejamento, anteriores à aplicação da THA.

Durante a aplicação da THA

Como acreditamos que o planejamento é vivo e acontece aula a aula, observamos as atuações de planejamento dos professores ao longo do desenvolvimento da THA.

Neste caso, observamos diferenças marcantes, e podemos dizer, até mesmo, opostas, entre o professor P1 e o professor P2.

O professor P1 apresentou uma motivação crescente no desenvolvimento da THA em sala de aula. Acreditamos que esse fato se deu porque o professor adquiriu o hábito de planejar suas aulas diariamente, a fim de escolher as melhores estratégias para o desenvolvimento das atividades. Por esta razão, estabeleceu contato freqüente com a professora pesquisadora onde tirava suas dúvidas e sugeria modificações tanto nas atividades quanto nos métodos.

Quanto ao professor P2, percebemos que não tinha como hábito o planejamento de suas aulas, pois chegava despreparado na sala, muitas vezes sem saber qual seria o tema a ser discutido. Percebemos que este fato comprometeu seu desempenho que culminou numa total desmotivação dele mesmo e de seus alunos.

Depois da aplicação da THA

Após a aplicação da THA, o professor P1 analisou as atividades avaliativas de seus alunos, verificou as dificuldades que não foram superadas e sugeriu modificações na terceira versão da THA. Em sua entrevista final, nos contou que vai montar sua própria versão da THA aplicada, a fim de atender as necessidades de seus alunos.

O professor P2 limitou-se, em sua entrevista final, em identificar quais as atividades que ele mais gostou, porém não mostrou interesse nos resultados das atividades avaliativas de seus alunos e não sugeriu modificações consistentes para a terceira versão da THA.

Podemos observar que o comportamento do professor P1 foi muito diferente do comportamento do professor P2. Frente a esta situação, percebemos que a atuação do professor em sala de aula é o aspecto mais importante a ser considerado no processo ensino-aprendizagem.

A seleção de atividades contextualizadas e problematizadoras não é suficiente para que se tenha um ensino de qualidade, afinal, as atividades não se desenvolvem por si só. Quando o professor não está comprometido com o conteúdo a ser ensinado, ele passa a ser um simples aplicador de atividades, repetindo-as ano a ano, turma a turma, sem nenhuma reflexão sobre elas.

Podemos supor que as propostas curriculares oficiais dos últimos anos, apesar de considerarem novas metodologias e contribuições da Educação

Matemática, não têm modificado significativamente a atuação do professor de Matemática em sala de aula. Acreditamos que este fato se dá, pois, conforme indica Pires (2008), existem vários problemas relacionados à implementação das propostas presentes destes documentos. Sendo assim, alguns professores permanecem com a concepção de que são meramente transmissores de conteúdo.

A proposta da THA vem de encontro a esta concepção e apresenta aos professores novas possibilidades de atuação em sala de aula. Diante dessas possibilidades, percebemos que o professor faz sua escolha, optando por conservar suas concepções, como aconteceu com o professor P2, em nossa pesquisa, ou quebrar seus paradigmas, incorporando em suas aulas novos conhecimentos, como foi o caso do professor P1.

Sendo assim, novas questões surgiram: a diferença das atitudes está relacionada ao comprometimento do professor? Ao seu gosto pessoal por determinada assunto?

Para responder estas questões, seriam necessárias novas investigações, que nosso trabalho não comporta. Por esta razão, limitamo-nos a conjecturar a hipótese de que o compromisso com a aprendizagem, inerente ao professor P1, foi responsável pela sua atuação presente nas atividades de planejamento.

Com isso, respondendo nossa terceira questão de pesquisa, a atuação do professor depende de sua concepção de ensino. Podemos acrescentar que o desenvolvimento de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem apresenta uma nova possibilidade de atuação do professor em sala de aula que tem como característica principal o planejamento contínuo de determinado conteúdo, situando-o não como uma atividade estanque, mas como um processo cíclico onde os novos conhecimentos dos professores e dos alunos contribuem igualmente para o sucesso do processo ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BISHOP, A.J. **Enculturación Matemática: la educación Matemática desde una perspectiva cultural**. Barcelona: Paidós, 1991.

BOAVIDA, M.A & PONTE, J. P. **Investigação colaborativa: potencialidades e problemas**. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jpontes/docspt%5C02-Boavida-Ponte(GTI).pdf> Acesso em: 10 abr.2009.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Ciências da Natureza**, **Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 1999.

____________. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** v.2. Brasília: MEC, 2008.

CAMILO, C. M. **Isometrias: análise de documentos curriculares e uma proposta de situações de aprendizagem para o Ensino Médio**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CATUNDA, O. et al. **As transformações geométricas e o ensino de geometria**. Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1990.

CERQUEIRA, A.P.F. **Isometrias: análise de documentos curriculares e uma proposta de situações de aprendizagem para o Ensino Médio**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

COLL, C. **O construtivismo na sala de aula**. São Paulo: Ática, 2009.

____________. **Psicologia e Currículo: uma aproximação psicopedagógica à elaboração do currículo escolar**. Tradução Cláudia Schilling. São Paulo: Ática, 1997.

DOLL JR., W.E. **Currículo: uma perspectiva pós moderna**. Tradução Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

FAZENDA, I.C. **A Interdisciplinaridade no ensino brasileiro**. São Paulo: Edições Loyola, 1979.

GÓMEZ, P. y LUPIAÑEZ, J. L. (2007). **Trayectorias hipoteticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matematicas de secundarias**. PNA,1(2), 79-98.

GOUVÊA, F. A. T. **Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de Matemática do Ensino Fundamental**. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

HAMAZAKI, A. C. **O ensino da geometria sob a ótica de Van Hiele**. Disponível em: <www.sbem.com.br/files/VIII/pdf/07/2PO13912905851.pdf>. Acesso em: 12 out. 2009.

JAIME P. A.; GUTIÉRREZ, R. **El grupo de las Isometrias del plano**. Madri: Editorial Síntesis S.A., 1996.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas.** São Paulo: E.P.U., 1986.

LUZ, V. A. **Um estudo sobre o ensino de transformações geométricas: da reforma da Matemática Moderna até os dias atuais**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MABUCHI, S. T. **Transformações geométricas: um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores**. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MACHADO, N.J. **Epistemologia e didática: a alegoria como norma e o conhecimento como rede**. 1994. Tese (Livre Docência) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

MENEZES, L. C. **O Brasileiro está chegando ao ensino médio**. Programa de Melhoria e Expansão do ensino médio no Estado de São Paulo. São Paulo, 2001.

____________. **Rever o quê, mudar por quê?** Revista de Educação e Informática, n.14. São Paulo: FDE, dez. 2000.

MORAN, J. M.; BEHRENS, M. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. São Paulo: Papirus, 2000.

MOURA, M. A. L. **Transformações Geométricas no Plano**. Proposta de atividade. Disponível em: <www.funcesi.br/Portals/1/Minicurso%20Transformacoes%20Geometricas%20no%20Plano.pdf>. Acesso em: 5 jun. 2008.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica**. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PERRENOUD, P. **A formação de competências na escola**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

____________. **Formação contínua e obrigatoriedade de competência na profissão do professor**. Revista Idéias, n. 30, São Paulo, 1998.

____________. **Novas competências para ensinar**. Tradução Patrícia C. Ramos. Porto Alegre: Artmed, 2000.

____________. **Dez novas competências para Ensinar**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

PIRES, C.M.C. **Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede.** São Paulo, FTD, 2000.

____________. **Formulações basilares e reflexões sobre a inserção da Matemática no currículo visando a superação do binômio máquina e produtividade**. Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, EDUC, 2004.

____________. **Educação Matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no Brasil**. v.1, p.1, Bolema (Rio Claro), 2008.

____________.**Orientações curriculares para a educação básica: qual o caminho?** Revista de Educação PUC-Campinas, v. 18, p. 25-34, Campinas, 2005.

____________.**Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon**. Educação Matemática Pesquisa, v.11, p. 6-24, 2009.

____________.**Construção de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio.** Projeto de Pesquisa, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PONTE, J. P. **Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática**. In: João P1 Ponte et al org. Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática: Que Formação? Lisboa, SPCE, 1995.

RUOFF, E. B. L. **Isometrias e Ornamentos do Plano Euclidiano**. São Paulo: Atual, 1982.

SÃO PAULO (ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Educacional: Currículo e Avaliação**. São Paulo, SE/CENP, 1992.

____________. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de Matemática no segundo grau**. São Paulo, SE/CENP, 1992.

____________. **Avaliação dos concluintes do ensino médio/97**. Programa de Expansão e Melhoria do ensino médio. vol 1. São Paulo, 2000.

SIMON, M. A. (1995). **Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective**. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114-145.

SODRÉ, U. **Dicionário de Matemática**. Disponível em <www.pessoal.sercomtel.com.br/matematica/index.html>. Acesso em: 15 out. 2009

SÓ MATEMÁTICA. **Dicionário de Matemática**. Disponível em <www.somatematica.com.br> Acesso em: 15 out. 2009

ANEXOS

ANEXO 1 – 2ª versão da THA desenvolvida por um aluno

ATIVIDADE 1

Entrando nos eixos

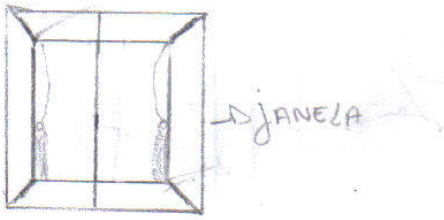
a) O que significa o termo simetria?

Simetria são figuras de lados e angulos iguais...

b) Você saberia dizer o que são figuras simétricas?

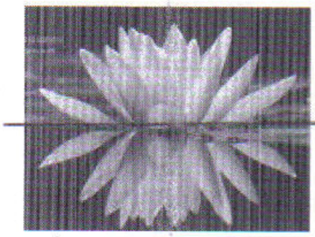
Claro, são figuras com lado iguais, como refletir algo em um espelho.

c) Desenhe uma figura que você considera simétrica.



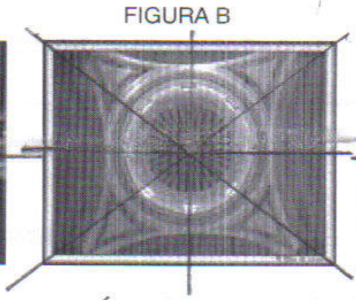
d) Observe as figuras abaixo e identifique quantos eixos de simetria têm cada uma destas figuras. Trace – os nas próprias figuras.

FIGURA A



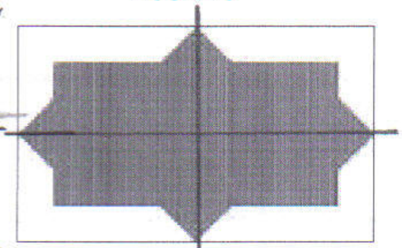
1 eixo

FIGURA B



4 eixo

FIGURA C



2 eixo

e) Observando os eixos que você traçou, identifique em quantas partes cada uma das figuras foi dividida.

Figura A: 2

Figura B: 8

Figura C: 4

f) Se você fosse desenhar cada uma das figuras acima, que fração de cada uma delas você precisaria para poder desenhá-las por inteiro?

Figura A: 1/2

Figura B: 1/8

Figura C: 1/4

g) As figuras abaixo têm um eixo de simetria. Complete-as.

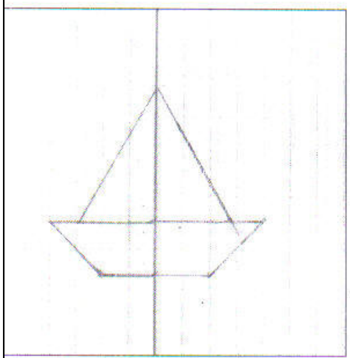


FIGURA A

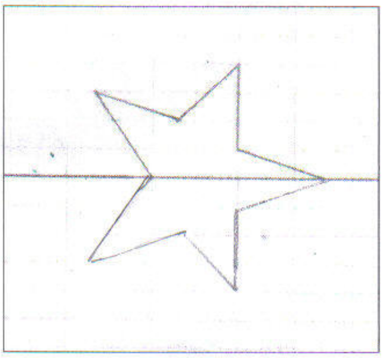


FIGURA B

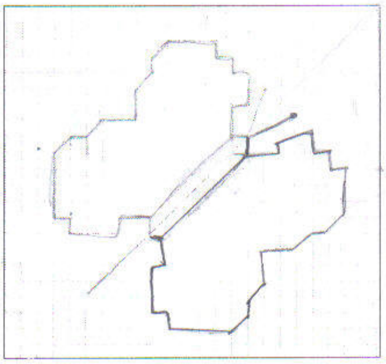


FIGURA C

h) Quais são as semelhanças que você observa entre a parte da figura que estava desenhada e a que você desenhou? E as diferenças?

São iguais e estão seguindo o eixo, e estão em posição diferentes...

Complete: Figuras simétricas são de lados e angulos exatamente iguais onde só muda as posições das imagens...

ATIVIDADE 2

Construindo figuras

Nas malhas a seguir há diferentes figuras desenhadas. A reta l é chamada eixo de simetria. A partir deste eixo, desenhe a imagem **refletida** das figuras:

FIGURA A

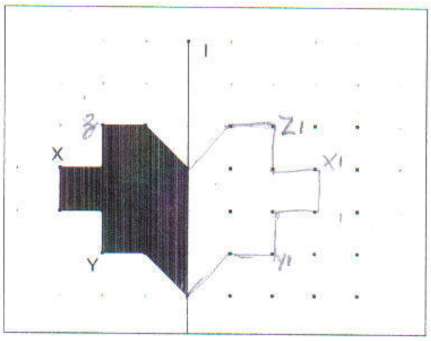
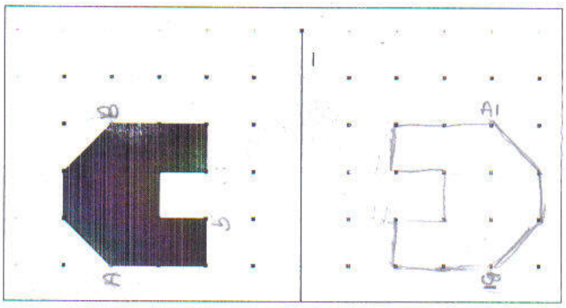
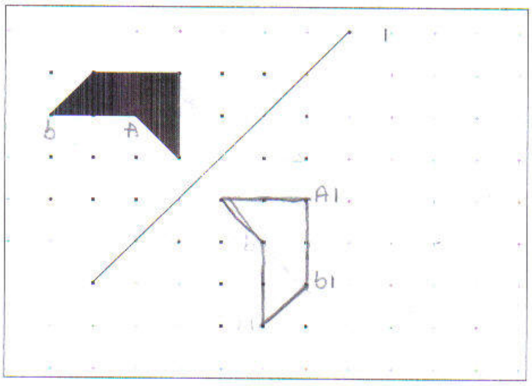


FIGURA B



4 pontos

FIGURA C



3 pontos

FIGURA D

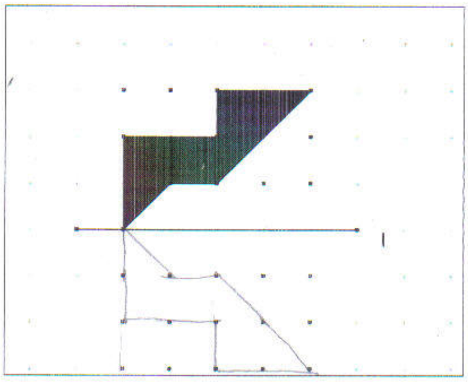


FIGURA E

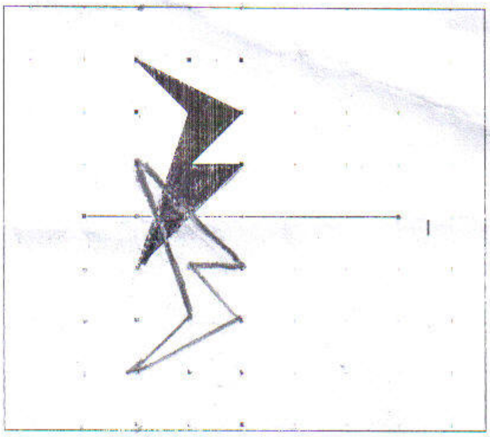
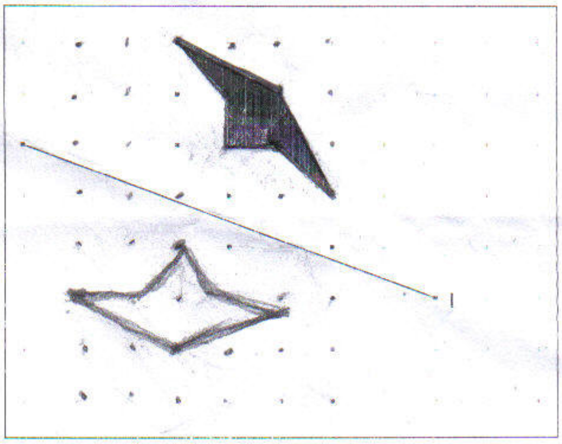


FIGURA F



a) Na figura A, determine o ponto simétrico ao ponto X? Chame-o de X1.

b) Meça a distância do ponto X ao eixo: 3 pontos. Proceda da mesma forma com o ponto X1: 3 pontos. Considere a distância entre dois pontos da malha quadriculada igual a 1un.

c) Meça também a distância do ponto Y ao eixo: 2 pontos. Proceda da mesma forma com o ponto Y1: 2 pontos.

d) Escolha outro ponto qualquer, nomeie de Z e depois verifique se acontece a mesma coisa. Distância de Z ao eixo: 3 pontos. Distância de Z1 ao eixo: 3 pontos.

e) Faça a mesma verificação nas outras figuras. Escolha dois pontos de cada uma delas, nomeie estes pontos e faça suas verificações.

f) Escreva um pequeno texto sobre suas conclusões.

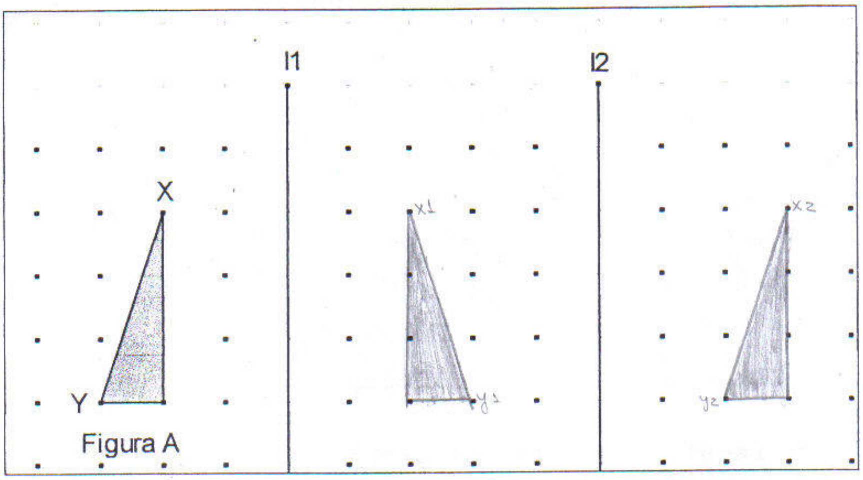
Bom, as figuras são iguais, mas do outro lado! São iguais as distâncias entre os pontos das figuras e o eixo

ATIVIDADE 3

Conhecendo outras isometrias

A partir da reflexão em reta podemos identificar outras isometrias: translação e rotação. As atividades propostas abaixo mostrarão o caminho.

3.1) Translação:



a) Observe a figura A e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo l1, encontrando a figura A1 e ponto X1.

b) Agora, reflita a figura encontrada, em torno do eixo l2, encontrando a figura A2 e o ponto X2.

c) Qual a distância entre os eixos l1 e l2? 5 cm.

d) Qual é a distância entre X e X2? 10 cm.

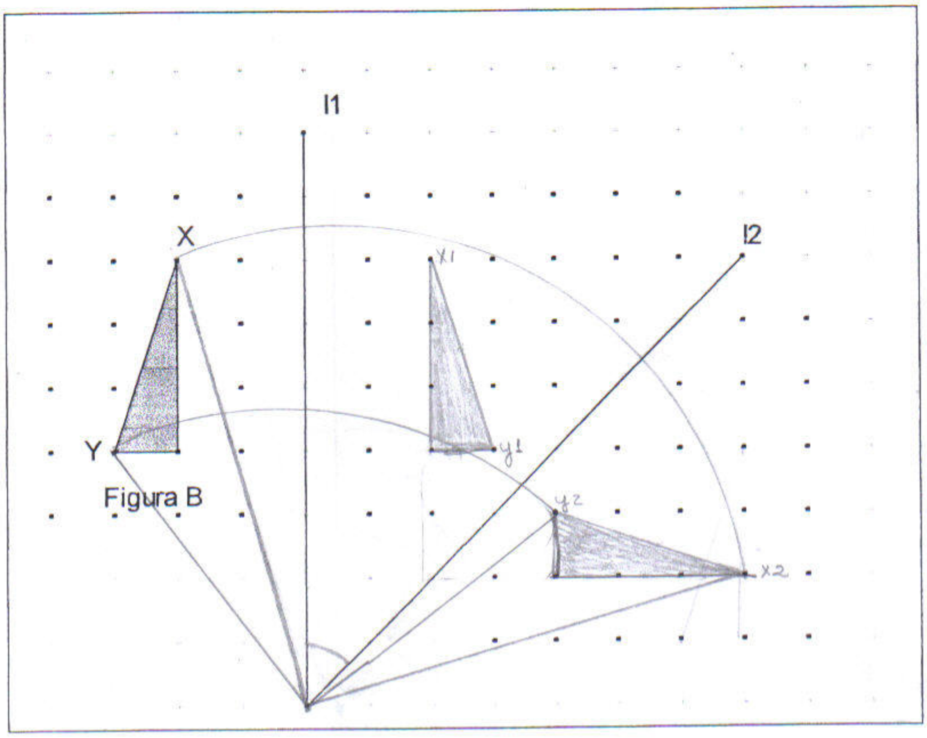
e) Proceda da mesma forma para o ponto Y e registre a distância entre Y e Y2. 10 cm.

f) Que relação você percebe quando analisa a distância entre os eixos l1 e l2 e a distância entre os pontos X e X2 ou Y e Y2? E diferença é que a distância de X a X2 é o dobro de Y e Y2.

g) O que você observa sobre as figuras A e A2? São iguais.

h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura A e chegar na figura A2? Pela translação.

3.2) Rotação com ângulo de 45º:



a) Observe a figura B e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura B1 e ponto X1.

b) Agora, reflita a figura encontrada, em torno do eixo I2, encontrando a figura B2 e o ponto X2.

c) Com a ajuda do transferidor, meça o ângulo entre os eixos I1 e I2? 45°

d) Qual o valor do ângulo formado entre os pontos X e X2? 90°.

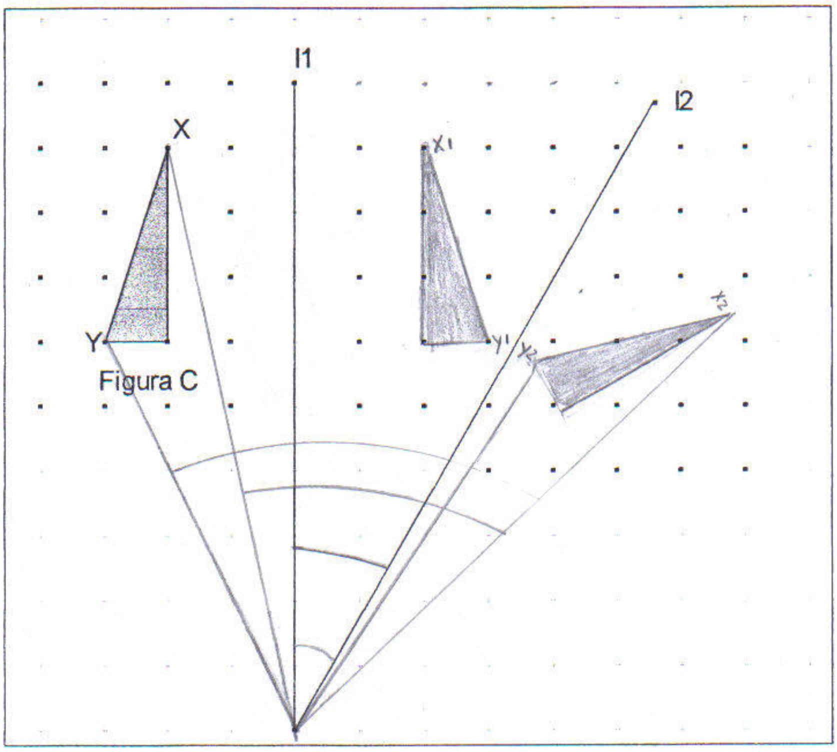
e) Proceda da mesma forma para o ponto Y e registre o ângulo entre Y e Y2. 90°

f) Que relação você percebe quando analisa o ângulo encontrado entre os eixos I1 e I2 e o ângulo encontrado entre os pontos X e X2 ou Y e Y2? É o dobro do Angulo.

g) O que você observa sobre as figuras B e B2? B está na vertical e B2 na orizontal e poo iguais.

h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura B e chegar na figura B2? Rotação de 90°.

3.3) Rotação com ângulo de 30º:



a) Observe a figura C e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo l1, encontrando a figura C1 e ponto X1.

b) Agora, reflita a figura encontrada, em torno do eixo l2, encontrando a figura C2 e o ponto X2.

c) Com a ajuda do transferidor, meça o ângulo entre os eixos l1 e l2? 30°

d) Qual o valor do ângulo formado entre os pontos X e X2? 60°

e) Proceda da mesma forma para o ponto Y e registre o ângulo entre Y e Y2. 60°

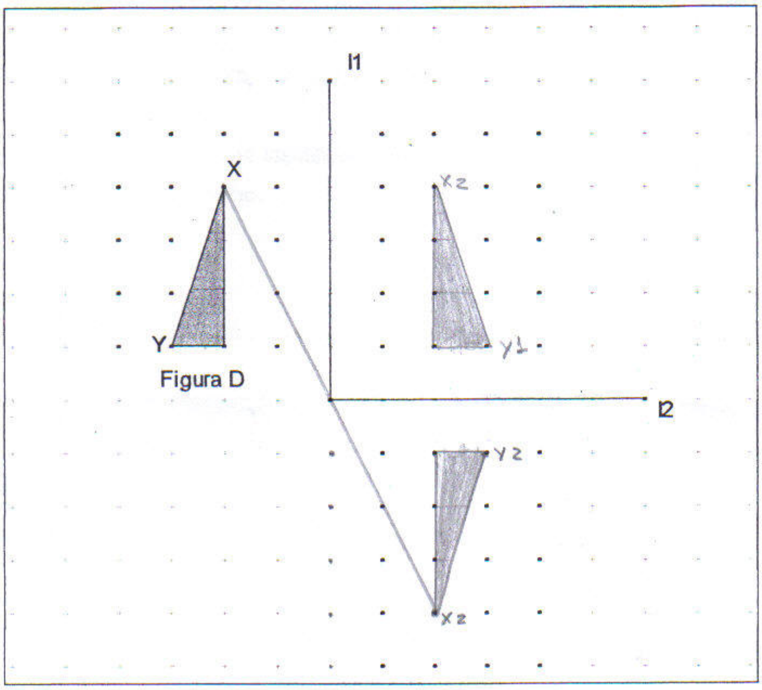
f) Que relação você percebe quando analisa o ângulo encontrado entre os eixos l1 e l2 e o ângulo encontrado entre os pontos X e X2 ou Y e Y2? O dobro

g) O que você observa sobre as figuras C e C2?

São iguais porem uma está inclinada

h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura C e chegar na figura C2? Rotação de 60°

3.4) Simetria Central:



a) Observe a figura D e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo l1, encontrando a figura D1 e ponto X1.

b) Agora, reflita a figura encontrada, em torno do eixo l2, encontrando a figura D2 e o ponto X2.

c) Com a ajuda do transferidor, meça o ângulo entre os eixos l1 e l2? 90°.

d) Qual o valor do ângulo formado entre os pontos X e X2? 180°.

e) Proceda da mesma forma para o ponto Y e registre o ângulo entre Y e Y2. 180°.

f) Que relação você percebe quando analisa o ângulo encontrado entre os eixos l1 e l2 e o ângulo encontrado entre os pontos X e X2 ou Y e Y2? É o dobro.

g) O que você observa sobre as figuras D e D2? São iguais

h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura D e chegar na figura D2? Tem uma rotação de 180°.

Complete: isometria é uma transformação geométrica que conserva medidas e ângulos iguais.

As isometrias são: simetrias, rotação e translação

ATIVIDADE 4

Identificando propriedades das isometrias

4.1) Descobrindo a simetria

Construção:

a) Abra o arquivo "construção 1"

b) Com a ferramenta "reflexão com relação à uma reta", clique no polígono P1 e depois no eixo x. Aparecerá um polígono que deverá ser nomeado P2, simétrico a P1, em relação ao eixo x.

c) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P1, propriedades e na opção cor, modifique a cor do polígono P1 a fim de distingui-lo de P2.

d) Faça um segmento de reta unindo os pontos A e A', obtendo o segmento $\overline{AA'}$. Qual é a posição desta reta em relação ao eixo de simetria? São Perpendiculares.

e) Faça a mesma representação para os outros vértices simétricos da figura. Em que posições estão entre si as retas dos outros segmentos? E qual a posição destas retas com relação ao eixo de simetria? Entre elas estão paralelos, e são perpendiculares.

f) Considere o segmento $\overline{AA'}$. Chame de F o ponto de intersecção entre a reta e o eixo de simetria. Porque o ponto F é chamado de ponto médio do segmento? Porque F faz divisão em duas figuras em partes iguais

g) O ponto de interseção dos outros segmentos com o eixo de simetria também é o ponto médio desses segmentos? Sim.

h) Com a ferramenta "reflexão com relação à uma reta", clique novamente em P1 e, depois no eixo y. Agora aparecerá um polígono que deverá ser chamado de P3, simétrico à P1, em relação ao eixo y.

i) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P3, propriedades e na opção cor, modifique a cor do polígono P3 a fim de distingui-lo dos outros.

j) Utilizando a ferramenta "ângulo", clique sobre os três polígonos e compare as medidas de todos os ângulos. Os angulos são iguais mesmo em posições diferentes.

k) Utilizando a ferramenta "distância ou comprimento" sobre os lados dos três polígonos, calcule o perímetro de cada um deles e compare os resultados Os perímetros A, B, C, D, E são iguais a 13,44

l) Utilize a ferramenta "área" sobre os três polígonos e compare os resultados. As areas dos Poligonos que são iguais e P1, P2 e P3 a 5,84.

m) Após responder a estas perguntas, você identificou algumas características das figuras simétricas. Faça uma síntese sobre estas características. Todas as figuras são iguais mais de posições, angulos e lados iguais e mesmo assim Todos correspondem os mesmos resultados

n) Observe na janela de álgebra, as coordenadas correspondentes de cada ponto dos polígonos encontrados. Agora clique na ferramenta "move" e desloque um dos vértices do polígono P1. Verifique o que acontece com as coordenadas dos pontos, as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos. Depois digite seus comentários.

todos os poligonos estavam se movendo, quando param os seus dados, sendo área e angulo e perímetro.

o) Grave seu arquivo com o nome "construção 1A".

4.2) Um movimento chamado translação

Construção:

a) Abra o arquivo "construção 2"

b) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P1, propriedades e na opção cor e modifique a cor do polígono P1 a fim de distingui-lo dos outros.

c) Crie um vetor vertical V1, de origem no ponto (0,0) e fim no ponto (0,4), no sentido positivo do eixo y e um vetor horizontal V2 de origem no ponto (0,0) e fim no ponto (6,0), no sentido positivo do eixo x.

d) Com a ferramenta "transladar por um vetor", clique no polígono P1 e depois no vetor V1. Aparecerá um polígono que você nomeará de P2 e que foi obtido de P1.

e) Repita a operação utilizando o polígono P1 e o vetor V2. Nomeie este novo polígono de P3.

f) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P3, propriedades e na opção cor e modifique a cor do polígono P3 a fim de distingui-lo dos outros.

g) Observe na janela de álgebra o que aconteceu com as coordenadas dos pontos dos polígonos P2 e P3, comparados com as coordenadas de P1. P1 e F funcionam como centro P2 e P3 surgiram com as coordenadas

h) Utilizando a ferramenta "ângulo", clique sobre os três polígonos e compare as medidas de todos os ângulos. Todos tem o mesmo angulo.

i) Utilizando a ferramenta "distância ou comprimento" sobre os lados dos três polígonos, calcule o perímetro de cada um deles e compare os resultados. P1, P2 e P3 tem o mesmo perimetro que é 9,23 (A, B, C, D, E)

j) Utilize a ferramenta "área" sobre os três polígonos e compare os resultados.
P1, P2 e P3 tem o mesmo área que é 1,5

k) Clique na ferramenta "move" e desloque a extremidade dos vetores. Verifique o que acontece com as coordenadas dos vértices correspondentes dos polígonos.
P1, P2 e P3 sempre serão iguais mas respeitando o vetor.

l) Clique novamente na ferramenta "move" e desloque um dos vértices do polígono P1. Verifique o que acontece com as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos. A área e os poligonos podem mudar mas as figuras sempre ficam iguais respeitando o vetor.

m) Digite seus comentários a respeito de suas percepções. ______________________

O Polígono sempre respeita o vetor.

n) Grave seu arquivo com o nome "construção 2A".

4.3) Girando......

Construção:

a) Abra o arquivo "construção 3"

b) Marcar o ponto (0,0) e chamá-lo de O.

c) Com a ferramenta "girar em torno de um ponto por um ângulo", clique no polígono P1, depois no ponto O e digite 30° sentido horário. Aparecerá um polígono que você nomeará de P2 e que foi obtido de P1.

d) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P2, ferramentas e na opção cor, modifique a cor do polígono P2.

e) Com a ferramenta "segmento definido por dois pontos", encontre os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{AO'}$.

f) Utilizando a ferramenta "ângulo" encontre o ângulo formado entre estes dois segmentos. Escolha um outro ponto e repita o processo, anotando o que você observou A distância entre os dois é a mesma.

g) Grave seu arquivo como "construção 3A" e abra novamente o arquivo "construção 3".

h) Marcar o ponto (0,0) e chamá-lo de O.

i) Com a ferramenta "girar em torno de um ponto por um ângulo", clique no polígono P1, depois no ponto O e digite 80° sentido horário. Aparecerá um polígono que você nomeará de P3 e que foi obtido de P1.

j) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P3, ferramentas e na opção cor, modifique a cor do polígono P3.

k) Com a ferramenta "segmento definido por dois pontos", encontre os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{AO'}$.

l) Utilizando a ferramenta "ângulo" encontre o ângulo formado entre estes dois segmentos. Escolha um outro ponto e repita o processo, anotando o que você observou A distância entre os dois pontos é 80°

m) Grave seu arquivo como "construção 3B" e abra novamente o arquivo "construção 3".

n) Marcar o ponto (0,0) e chamá-lo de O.

o) Com a ferramenta "girar em torno de um ponto por um ângulo", clique no polígono P1, depois no ponto O e digite 180° sentido horário. Aparecerá um polígono que você nomeará de P4 e que foi obtido de P1.

p) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P4, ferramentas e na opção cor, modifique a cor do polígono P4.

q) Com a ferramenta "segmento definido por dois pontos", encontre os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{AO'}$.

r) Utilizando a ferramenta "ângulo" encontre o ângulo formado entre estes dois segmentos. Escolha um outro ponto e repita o processo, anotando o que você observou

A distância dos pontos é o mesmo 180°.

s) Utilizando a ferramenta "ângulo", clique sobre os dois polígonos e compare as medidas de todos os ângulos. O ângulo de todos eles serão iguais independente ou não de 180°.

t) Utilizando a ferramenta "distância ou comprimento" sobre os lados dos dois polígonos, calcule o perímetro de cada um deles e compare os resultados Os perímetros são 10,96 e os angulos iguais também.

u) Utilize a ferramenta "área" sobre os dois polígonos e compare os resultados.

A área é de 4.

v) O que você percebeu ao analisar os resultados? Será que acontece a mesma coisa para os polígonos anteriores, feitos com outros ângulos? Por que? Escreva suas conclusões.

Sim todos os poligonos no final sempre acabam com resultados iguais

w) Grave seu arquivo como "construção 3C".

ATIVIDADE 5

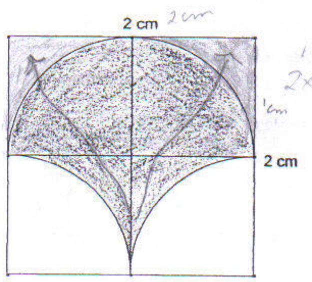
Calculando áreas

O cálculo de áreas é muito utilizado em matemática. O uso das isometrias é uma ferramenta que ajuda no cálculo de áreas de figuras que não são tradicionais.

Quando, para calcular a área de uma figura, precisamos modificar a figura original de forma que tenhamos uma nova figura, mais simples e com o formato de uma figura geométrica conhecida, dizemos que estamos realizando uma RECONFIGURAÇÃO. Para realizar uma reconfiguração podemos utilizar como ferramenta as isometrias.

Observe as figuras abaixo e calcule as áreas dessas figuras utilizando as isometrias aprendidas.

a) Qual é a área da figura pintada contida no quadrado de 2 cm? A figura tem a área de 2cm



$2 \times 1 = 2$

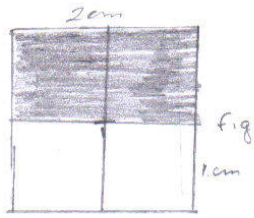
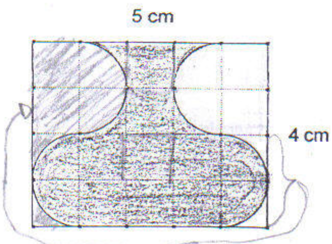
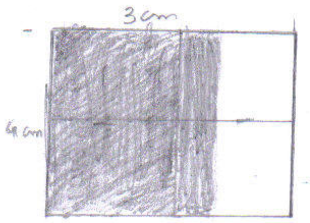


FIGURA RESULTANTE...

b) Obter a área da figura pintada contida no retângulo de lados 4 cm e 5 cm. A figura tem área de 12cm.

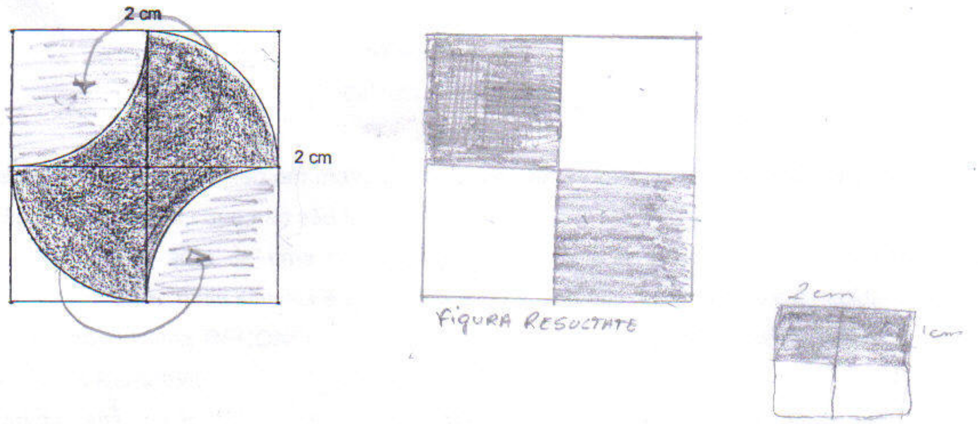




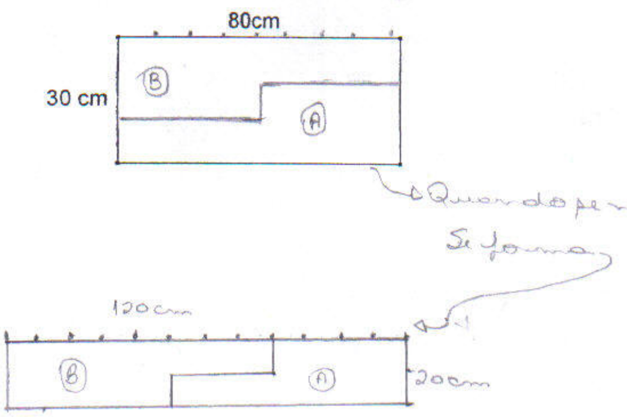
$4 \times 3 = 12$ cm

FIGURA RESULTANTE

c) **Qual é a área da figura pintada contida no quadrado de 2 cm?** Esta figura tem a área 2cm



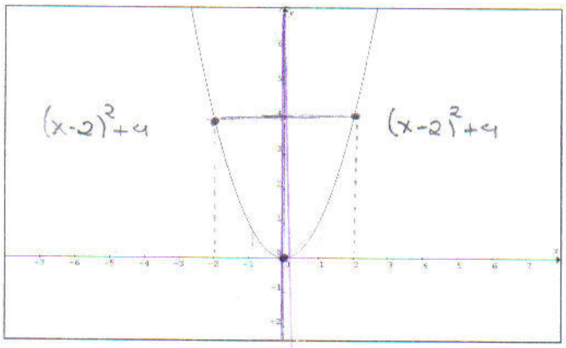
d) **Um carpinteiro** possui uma prancha de 80 cm de comprimento e 30 cm de largura. Quer cortá-la **em dois** pedaços iguais de modo a obter uma peça retangular que tenha 1,20 m de comprimento e 0,20 m de largura. Você é capaz de descobrir como deverá ser este corte e desenhar a peça desejada pelo carpinteiro?



ATIVIDADE 6

Simetrias das funções

6.1) Função x^2:



a) Observe o gráfico formado pela função $f(x) = x^2$. Ele é uma figura simétrica? Sim...

b) Onde está o eixo de simetria? Marque no gráfico, utilizando uma caneta colorida.

c) Que tipo de simetria é a deste gráfico? Axcial...

d) Se acrescentarmos valores a x ou a y na função $f(x) = x^2$ podemos obter gráficos que são transladados em x ou em y. Acrescentando 2 à abscissa obtemos a função $f(x) = (x+2)^2$, representado pela figura A. Para construirmos a figura B, acrescentamos -3 à abscissa, obtendo a função $f(x) = (x-3)^2$. As figuras C e D tiveram, também, valores acrescentados em x e em y. A função da figura C é $f(x) = (x+2)^2 - 3$, o que significa que foram acrescentados 2 unidades em x e 3 unidades em y. Sabendo que a função da figura D é $f(x) = (x-3)^2 + 4$, responda:

e) Que valor foi acrescentado em x? 3 unidades positivos.

f) Que valor foi acrescentado em y? 4 unidades positivos

g) Trace os eixos de simetria das figuras A, B, C e D e determine as abscissas por onde eles passam. A = y 4 e x -2 , B = x 3 , C = y -3 e x -2 , d = y 4 e x 3

h) O que você pode perceber ao observar os valores acrescentados em x e o eixo de simetria de cada figura? O eixo foi pro lado oposto dos valores acrescentados.

i) Escolha um ponto do gráfico $f(x) = x^2$ e determine suas coordenadas. $(x-2)^2+4$

j) Encontre o simétrico deste ponto e suas respectivas coordenadas $(x-2)^2+4$

k) O que você pode concluir ao observar estas coordenadas? Que os eixos sempre dão o mesmo valor sendo do lado oposto ou não.

FIGURA A

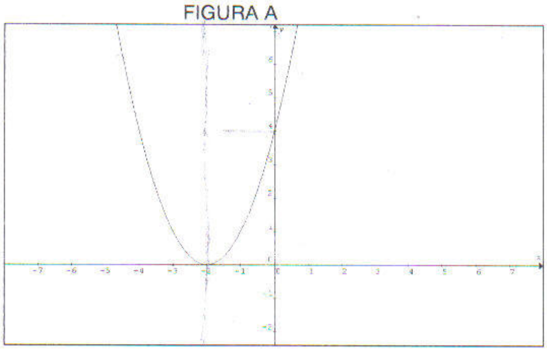


FIGURA B

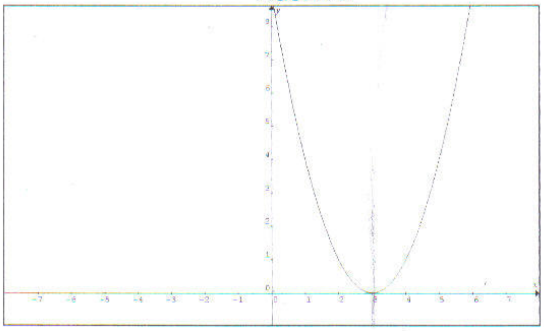


FIGURA C

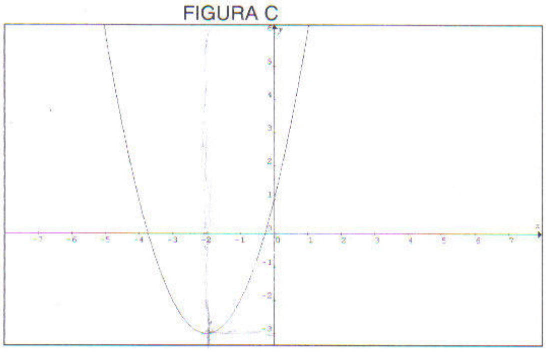
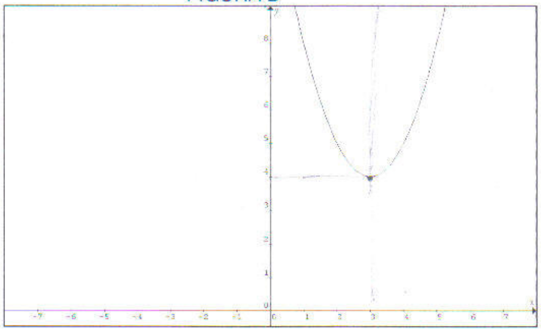
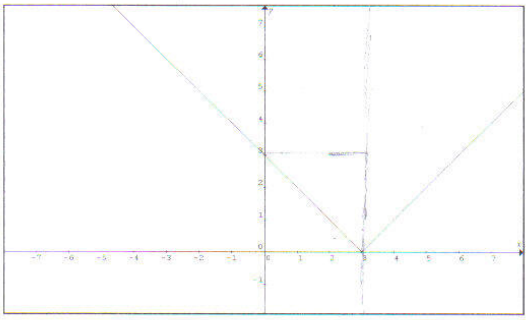
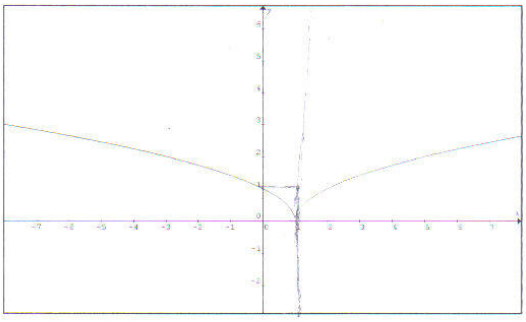


FIGURA D

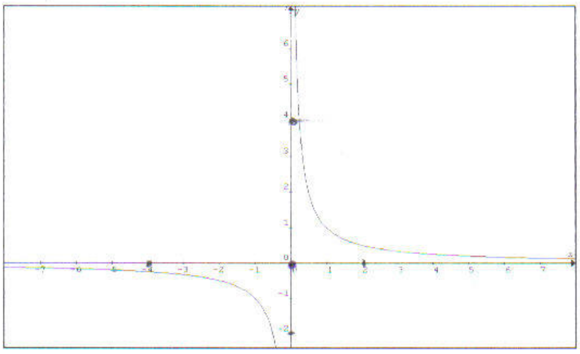


Funções que contém simetria axial são chamadas de **funções pares**. Veja abaixo outros exemplos e identifique nelas os eixos de simetria





6.2) Função $\frac{1}{x}$



a) Observe o gráfico formado por esta função. Ele é uma figura simétrica? Sim.

b) Ela é simétrica com relação a um ponto. Marque este ponto no gráfico, com caneta colorida.

c) Que tipo de simetria é a deste gráfico? Simetria central.

d) Se acrescentarmos valores a x ou a y na função f(x) = $\frac{1}{x}$ podemos obter gráficos que são transladados em x ou em y. Acrescentando -2 à abscissa obtemos a função f(x) = $\frac{1}{x-2}$, representado pela figura E. Para construirmos a figura F, acrescentamos 3 à abscissa, obtendo a função f(x) = $\frac{1}{x+3}$. As figuras G e H tiveram acrescentados valores em x e em y. A função da figura G é f(x) = $\frac{1}{x+3}+4$, o que significa que foram acrescentados 3 unidades em x e 4 unidades em y. Sabendo que a função da figura H é f(x) = $\frac{1}{x-2}-1$, responda:

e) Que valor foi acrescentado em x? -2

f) Que valor foi acrescentado em y? 1

g) Determine os pontos de simetria das figuras E, F, G e H. E = X2, F = X-3, G = X-3 e y4 H = x2 e y-1.

h) O que você pode perceber ao observar os valores acrescentados em x e em y e a localização do ponto de simetria de cada figura? Ele se move sempre para o lado oposto quando se muda o valor.

i) Escolha um ponto do gráfico f(x) = $\frac{1}{x}$ e determine suas coordenadas. $\frac{1}{x-4}+2$

j) Encontre o simétrico deste ponto e suas respectivas coordenadas $\frac{1}{x+4}-2$

k) O que você pode concluir ao observar estas coordenadas?

Nas coordenadas só se muda o x seja negativo ou positivo.

FIGURA E

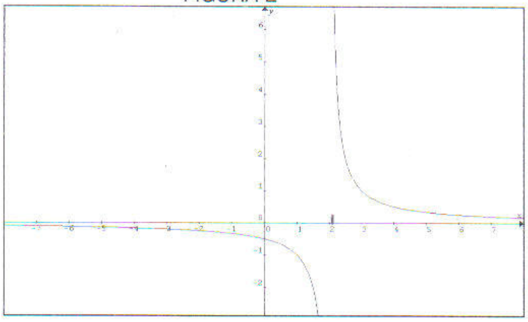


FIGURA F

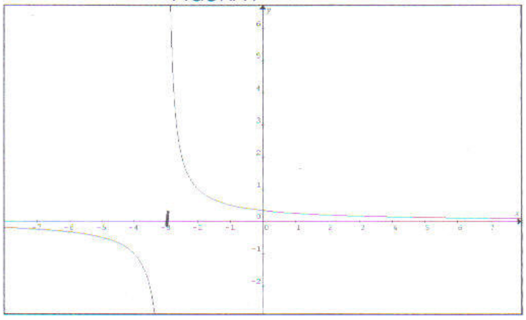


FIGURA G

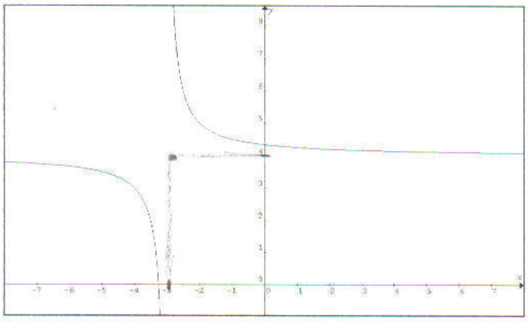
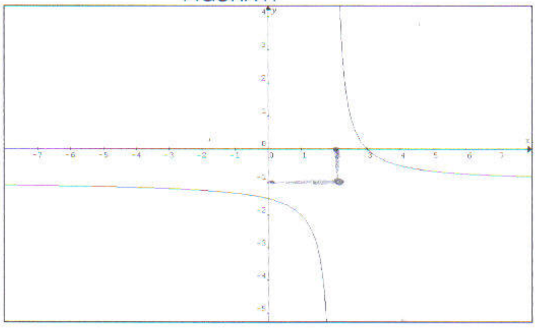
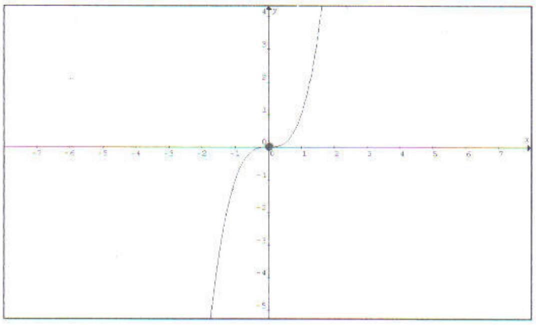
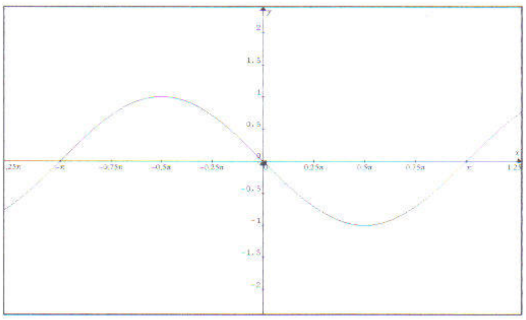


FIGURA H



Funções que contém simetria axial são chamadas de **funções ímpares**. Veja abaixo outros exemplos e identifique nelas os pontos de simetria





ANEXO 2 – Terceira versão da THA

Caro professor, esta THA tem como objetivo servir de instrumento facilitador na construção do aprendizado de Isometrias. Ela foi pensada para você e desenvolvida com o apoio de conhecimentos acadêmicos a respeito do tema em questão, de forma a permitir que os resultados de pesquisa possam fazer parte efetivamente da realidade do professor e visando fornecer caminhos mais seguros na escolha das estratégias de ensino e aprendizagem.

Esta THA é composta por seis atividades. No desenvolvimento destas atividades, procuramos utilizar diferentes estratégias a fim de proporcionar atividades diferenciadas e motivadoras tanto para você, professor, como para seus alunos.

Objetivos da THA:

- o Identificar transformações no plano como a simetria axial, a simetria central, a translação e a rotação e seu uso em ornamentos.
- o Identificar e utilizar propriedades das Isometrias, conservação de medidas de lados e ângulos.
- o Reconhecer elementos e características de figuras planas (lados, ângulos, eixos de simetria, paralelismo e perpendicularismo etc.).

Instruções para a atividade um:

- Tempo previsto: 2 aulas
- Atividade individual
- Professor inicie a aula com uma discussão sobre simetria e eixos de simetria. Para esta discussão, segue um arquivo em Power Point que contém diversas figuras e que poderá ser utilizado para despertar no aluno algumas noções de simetria.

  Posteriormente, peça para que os alunos desenvolvam as atividades propostas e, ao finalizarem, volte novamente à discussão de simetria, faça a socialização das atividades, incentive-os a apresentarem suas definições de simetria e formalize-as.

1. **Entrando nos eixos:**

a) O que significa o termo simetria?

____

____

b) Você saberia dizer o que são figuras simétricas?

____

____

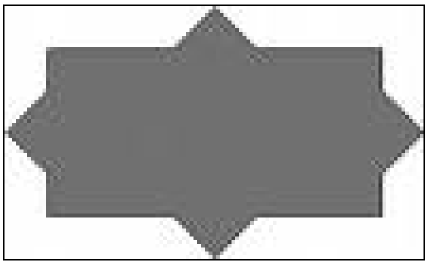
c) Desenhe uma figura que você considera simétrica.

d) Observe as figuras abaixo e identifique quantos eixos de simetria têm cada uma destas figuras. Trace – os nas próprias figuras.

FIGURA A

FIGURA B

FIGURA C



e) Observando os eixos que você traçou, identifique em quantas partes cada uma das figuras foi dividida.

Figura A: _________________

Figura B: _________________

Figura C: _________________

f) Se você fosse desenhar cada uma das figuras acima, que fração de cada uma delas você precisaria para poder desenhá-las por inteiro?

Figura A: _________________

Figura B: _________________

Figura C: _________________

g) As figuras abaixo têm um eixo de simetria. Complete-as.

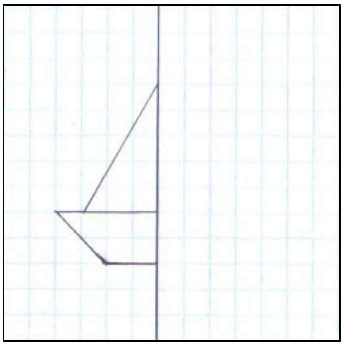


FIGURA A

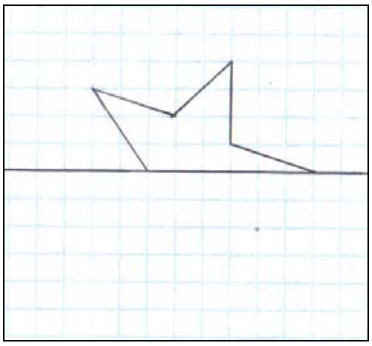


FIGURA B

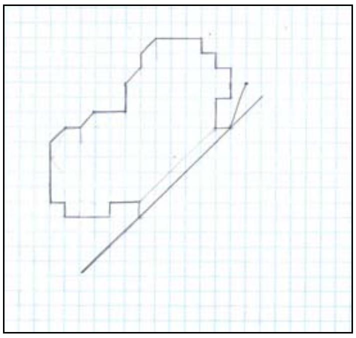


FIGURA C

h) Quais são as semelhanças que você observa entre a parte da figura que estava desenhada e a que você desenhou? E as diferenças?

____

____

____

____

Complete: Figuras simétricas são ______________________________________

____

____

Instruções para a atividade dois:

- Tempo previsto: 2 aulas
- Atividade em dupla

- Professor, deixe que os alunos completem as figuras de acordo com seus próprios conhecimentos. Após terminarem os desenhos, peça para que as duplas troquem as folhas entre si e discutam se concordam ou não com os desenhos feitos pelo seu colega. Peça para eles tentarem validar a resposta imaginando que ao dobrar o papel as figuras deverão se sobrepor. Finalmente, socialize as respostas. Para a socialização das respostas, utilize o arquivo de Power Point. Ele contém as figuras nos dois momentos (incompletas e completas) para que os alunos visualizem, de forma clara, a simetria de cada figura.

  Ao final da apresentação das figuras peça para que os alunos apontem as características encontradas nas figuras apresentadas e formalize. É necessário que os alunos compreendam os elementos invariantes das figuras

2. Construindo figuras

Nas malhas a seguir há diferentes figuras desenhadas. A reta l é chamada eixo de simetria. A partir deste eixo, desenhe a imagem **refletida** das figuras:

FIGURA A

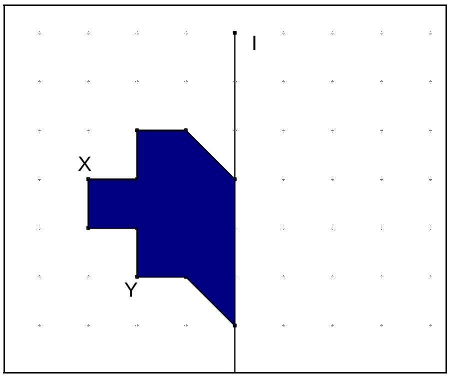


FIGURA B

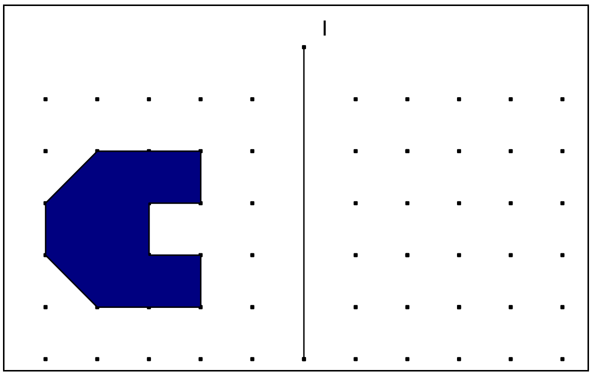
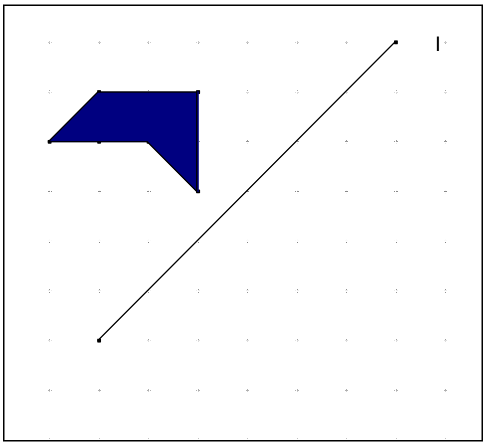


FIGURA C

FIGURA D



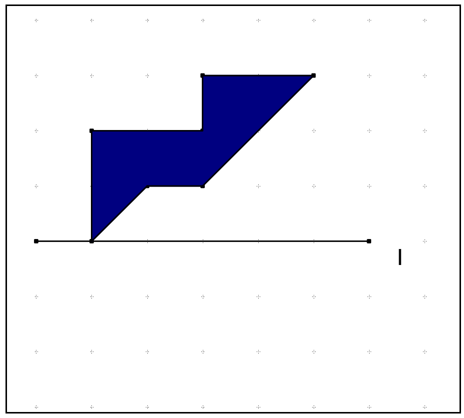
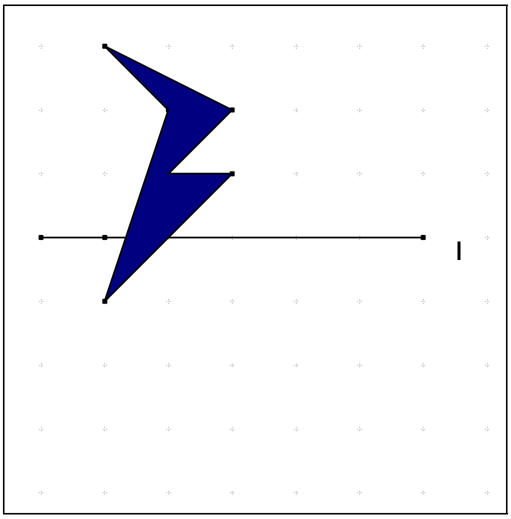
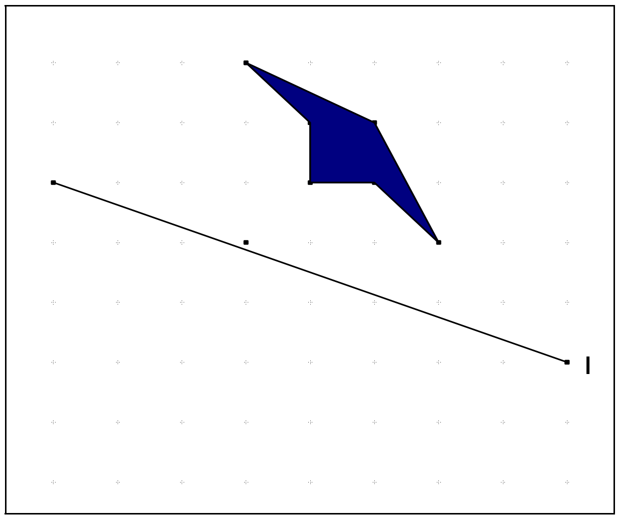


FIGURA E

FIGURA F





a) Na figura A, determine o ponto simétrico ao ponto X? Chame-o de X1.
b) Meça a distância do ponto X ao eixo: ______________. Proceda da mesma forma com o ponto X1: ___________. Considere a distância entre dois pontos da malha quadriculada igual a 1cm.
c) Meça também a distância do ponto Y ao eixo: _________. Proceda da mesma forma com o ponto Y1: __________.
d) Escolha outro ponto qualquer, nomeie-o por Z e depois verifique se acontece a mesma coisa. Distância de Z ao eixo: _________. Distância de Z1 ao eixo: ___________.
e) Faça a mesma verificação nas outras figuras. Escolha dois pontos de cada uma delas, nomeie-os e faça suas verificações.
f) Escreva um pequeno texto sobre suas conclusões.

Instruções para a atividade três:

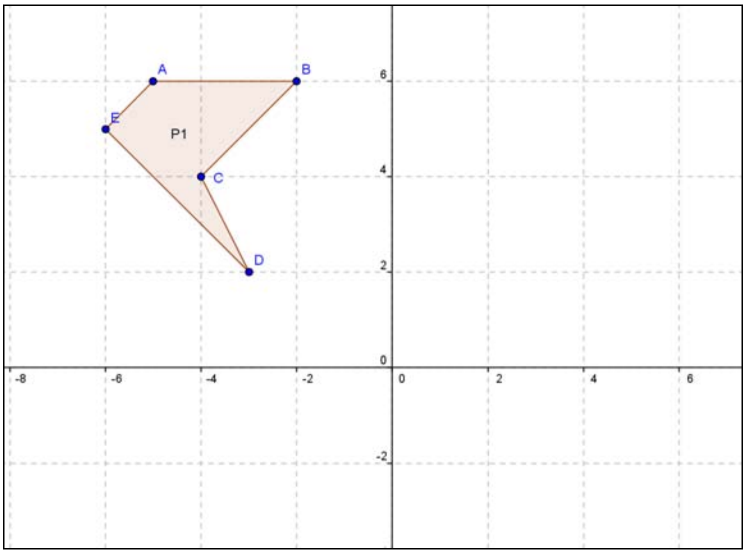
- Tempo previsto: 5 aulas
- Atividade em duplas ou trios
- Material necessário: Software Geogebra
- Professor, oriente os alunos para que eles realizem as atividades seguindo cada um dos roteiros. Para cada tarefa já existe um arquivo pronto, inicial, de onde os alunos deverão começar a desenvolver as tarefas. Ao final, verifique se os alunos salvaram todas as atividades. A socialização deve ser feita após o término das atividades, utilizando o software para construir as figuras e formalizar suas características.

3. Identificando propriedades das Isometrias:

3.1) Descobrindo a simetria

Construção:

a) Abra o arquivo "construção 1"



b) Com a ferramenta “reflexão com relação à uma reta”, clique no polígono P1 e depois no eixo x. Aparecerá um polígono que deverá ser nomeado P2, simétrico a P1, em relação ao eixo x.

c) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P1, propriedades e na opção cor, modifique a cor do polígono P1 a fim de distingui-lo de P2.

d) Faça um segmento de reta unindo os pontos A e A’, obtendo o segmento $\overline{AA'}$. Qual é a posição desta reta em relação ao eixo de simetria? ________________________________

e) Faça a mesma representação para os outros vértices simétricos da figura. Em que posições estão entre si as retas dos outros segmentos? E qual a posição destas retas com relação ao eixo de simetria? ________________

____

____

f) Considere o segmento $\overline{AA'}$. Chame de F o ponto de intersecção entre a reta e o eixo de simetria. Porque o ponto F é chamado de ponto médio do segmento? ____

g) O ponto de interseção dos outros segmentos com o eixo de simetria também é o ponto médio desses segmentos? _____________________

h) Com a ferramenta “reflexão com relação à uma reta”, clique novamente em P1 e, depois no eixo y. Agora aparecerá um polígono que deverá ser chamado de P3, simétrico à P1, em relação ao eixo y.

i) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P3, propriedades e na opção cor, modifique a cor do polígono P3 a fim de distingui-lo dos outros.

j) Utilizando a ferramenta “ângulo”, clique sobre os três polígonos e compare as medidas de todos os ângulos. ________________________________

____

k) Utilizando a ferramenta “distância ou comprimento” sobre os lados dos três polígonos, calcule o perímetro de cada um deles e compare os resultados

____

l) Utilize a ferramenta “área” sobre os três polígonos e compare os resultados.____

m) Após responder a estas perguntas, você identificou algumas características das figuras simétricas. Faça uma síntese sobre estas características.____

____

____

____

n) Observe na janela de álgebra, as coordenadas correspondentes de cada ponto dos polígonos encontrados. Agora clique na ferramenta “move” e desloque um dos vértices do polígono P1. Verifique o que acontece com as coordenadas dos pontos, as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos. Depois anote suas conclusões.

____

____

____

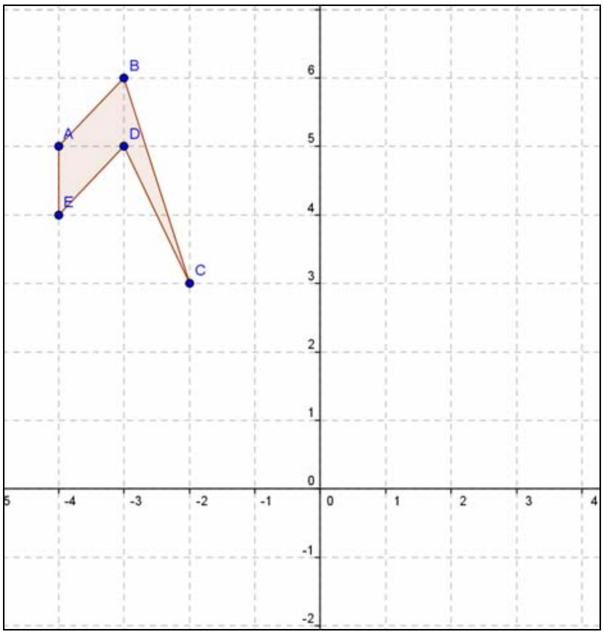
____

o) Grave seu arquivo com o nome “construção 1A – *nome do grupo*".

3.2) Um movimento chamado translação

Construção:

a) Abra o arquivo “construção 2”



b) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P1, propriedades e na opção cor e modifique a cor do polígono P1 a fim de distingui-lo dos outros.

c) Crie um vetor vertical V1, de origem no ponto (0,0) e fim no ponto (0,4), no sentido positivo do eixo y e um vetor horizontal V2 de origem no ponto (0,0) e fim no ponto (6,0), no sentido positivo do eixo x.

d) Com a ferramenta “transladar por um vetor”, clique no polígono P1 e depois no vetor V1. Aparecerá um polígono que você nomeará de P2 e que foi obtido de P1.

e) Repita a operação utilizando o polígono P1 e o vetor V2. Nomeie este novo polígono de P3.

f) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P3, propriedades e na opção cor e modifique a cor do polígono P3 a fim de distingui-lo dos outros.

g) Observe na janela de álgebra o que aconteceu com as coordenadas dos pontos dos polígonos P2 e P3, comparados com as coordenadas de P1.____

h) Utilizando a ferramenta “ângulo”, clique sobre os três polígonos e compare as medidas de todos os ângulos. ________________________________

i) Utilizando a ferramenta “distância ou comprimento” sobre os lados dos três polígonos, calcule o perímetro de cada um deles e compare os resultados

____

____

j) Utilize a ferramenta “área” sobre os três polígonos e compare os resultados.____

k) Clique na ferramenta “move” e desloque a extremidade dos vetores. Verifique o que acontece com as coordenadas dos vértices correspondentes dos polígonos. _________________________________

l) Clique novamente na ferramenta “move” e desloque um dos vértices do polígono P1. Verifique o que acontece com as medidas dos ângulos, dos lados, do perímetro e da área dos polígonos.____

____

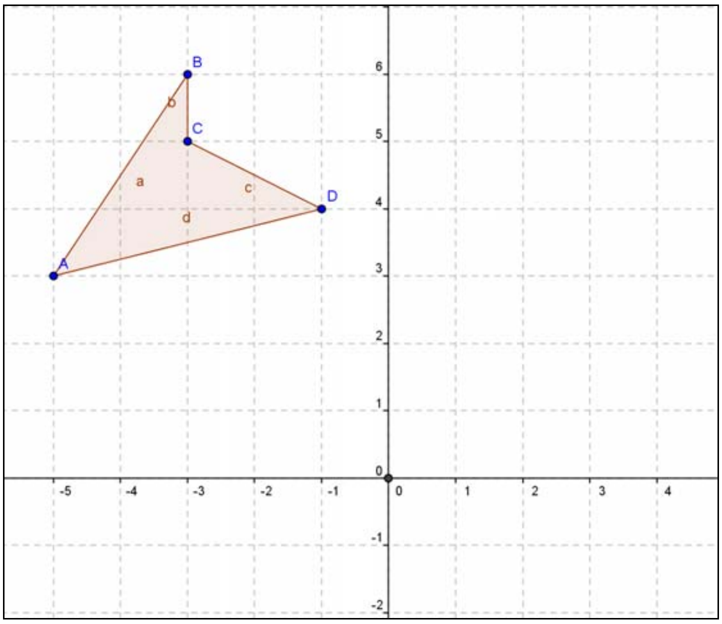
m) Anote suas conclusões a respeito de suas percepções. _______________

Grave seu arquivo com o nome “construção 2A – *nome do grupo*".

3.3) Girando...

Construção:

a) Abra o arquivo “construção 3”



b) Marcar o ponto (0,0) e chamá-lo de O.

c) Com a ferramenta “girar em torno de um ponto por um ângulo”, clique no polígono P1, depois no ponto O e digite 30º sentido horário. Aparecerá um polígono que você nomeará de P2 e que foi obtido de P1.

d) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P2, ferramentas e na opção cor, modifique a cor do polígono P2.

e) Com a ferramenta “segmento definido por dois pontos”, encontre os segmentos $\overline{DO}$ e $\overline{D'O}$. Calcule seus comprimentos. O que você observou? ___________________________.

f) Utilizando a ferramenta “ângulo” encontre o ângulo formado entre estes dois segmentos. Escolha um outro ponto e repita o processo, anotando o que você observou ____

g) Utilizando a ferramenta “segmento definido por dois pontos”, encontre os segmentos $\overline{DD'}$ e $\overline{BB'}$. Depois encontre as mediatrizes destes dois segmentos. Em que ponto elas se cruzaram?______________________. Que significado tem este ponto para as figuras que você encontrou? _____________________________________.

h) Grave seu arquivo como “construção 3A – *nome do grupo*" e abra novamente o arquivo “construção 3”.

i) Marcar o ponto (0,0) e chamá-lo de O.

j) Com a ferramenta “girar em torno de um ponto por um ângulo”, clique no polígono P1, depois no ponto O e digite 80º sentido horário. Aparecerá um polígono que você nomeará de P3 e que foi obtido de P1.

k) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P3, ferramentas e na opção cor, modifique a cor do polígono P3.

l) Com a ferramenta “segmento definido por dois pontos”, encontre os segmentos $\overline{DO}$ e $\overline{D'O}$. Calcule seus comprimentos. O que você observou? ___________________________

m) Utilizando a ferramenta “ângulo” encontre o ângulo formado entre estes dois segmentos. Escolha um outro ponto e repita o processo, anotando o que você observou ____

n) Utilizando a ferramenta “segmento definido por dois pontos”, encontre os segmentos $\overline{DD'}$ e $\overline{BB'}$. Depois encontre as mediatrizes destes dois segmentos. Em que ponto elas se cruzaram?______________________. Que significado tem este ponto para as figuras que você encontrou? ____

o) Grave seu arquivo como “construção 3B – *nome do grupo*" e abra novamente o arquivo “construção 3”.

p) Marcar o ponto (0,0) e chamá-lo de O.

q) Com a ferramenta “girar em torno de um ponto por um ângulo”, clique no polígono P1, depois no ponto O e digite 180º sentido horário. Aparecerá um polígono que você nomeará de P4 e que foi obtido de P1.

r) Com o lado direito do mouse, clique sobre o polígono P4, ferramentas e na opção cor, modifique a cor do polígono P4.

s) Com a ferramenta "segmento definido por dois pontos", encontre os segmentos $\overline{DO}$ e $\overline{D'O}$. Calcule seus comprimentos. O que você observou? ____

t) Utilizando a ferramenta "ângulo" encontre o ângulo formado entre estes dois segmentos. Escolha um outro ponto e repita o processo, anotando o que você observou ______________________________________

u) Utilizando a ferramenta "ângulo", clique sobre os dois polígonos e compare as medidas de todos os ângulos. ______________________________

____

v) Utilizando a ferramenta "distância ou comprimento" sobre os lados dos dois polígonos, calcule o perímetro de cada um deles e compare os resultados ____

w) Utilize a ferramenta "área" sobre os dois polígonos e compare os resultados. ____

x) O que você percebeu ao analisar os resultados? Será que acontece a mesma coisa para os polígonos anteriores, feitos com outros ângulos? Por quê? Escreva suas conclusões. ______________________________

____

____

____

y) Grave seu arquivo como "construção 3C – *nome do grupo*"

Glossário

Ângulo: ângulo é a reunião de dois segmentos de reta orientados (ou duas semi-retas orientadas) a partir de um ponto comum. A interseção entre os dois segmentos (ou semi-retas) é denominada vértice do ângulo e os lados do ângulo são os dois segmentos (ou semi-retas).

Área: é a medida de uma superfície.

Mediatriz: reta perpendicular traçada ao meio de um segmento.

Perímetro: medida do contorno de uma figura geométrica plana.

Retas paralelas: retas que nunca se cruzam e não estão sobrepostas.

Retas perpendiculares: retas que se cruzam formando um ângulo reto.

Vetor: segmento de reta orientado.

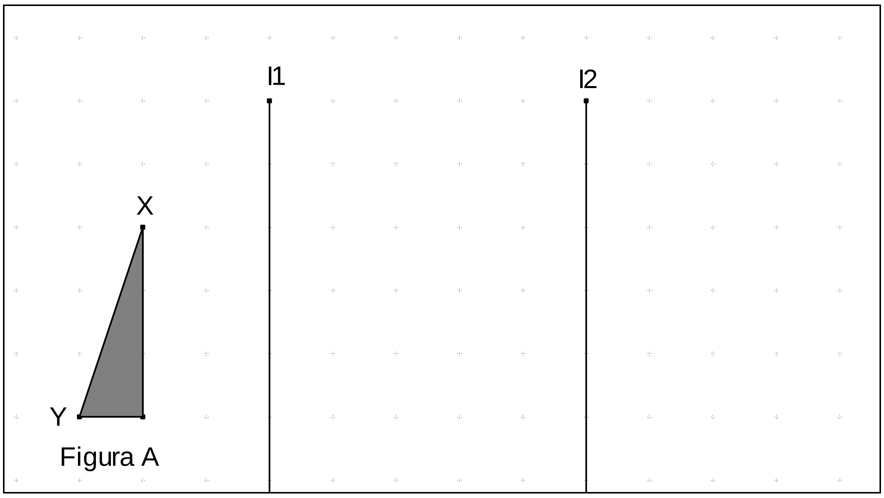
Instruções para a atividade quatro:

- Tempo previsto: 2 aulas
- Atividade individual
- Professor, deixe que os alunos completem as figuras propostas e respondam as questões. Após a resolução das questões, socialize as respostas e finalmente apresente a definição de Isometrias.

4. Conhecendo outras Isometrias

A partir da reflexão em reta podemos identificar outras Isometrias: translação e rotação. As atividades propostas abaixo mostrarão o caminho.

4.1) Translação:



a) Observe a figura A e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura A1 e ponto X1.
b) Agora, reflita a figura A1, em torno do eixo I2, encontrando a figura A2 e o ponto X2.
c) Qual a distância entre os eixos I1 e I2? ___________. Considere a distância entre dois pontos da malha quadriculada igual a 1cm.
d) Qual é a distância entre X e X2?__________________________________

e) Proceda da mesma forma para o ponto Y e registre a distância entre Y e Y2.______________

f) Que relação você percebe quando analisa a distância entre os eixos I1 e I2 e a distância entre os pontos X e X2? Esta relação também se aplica quando analisamos a distância entre os pontos Y e Y2?

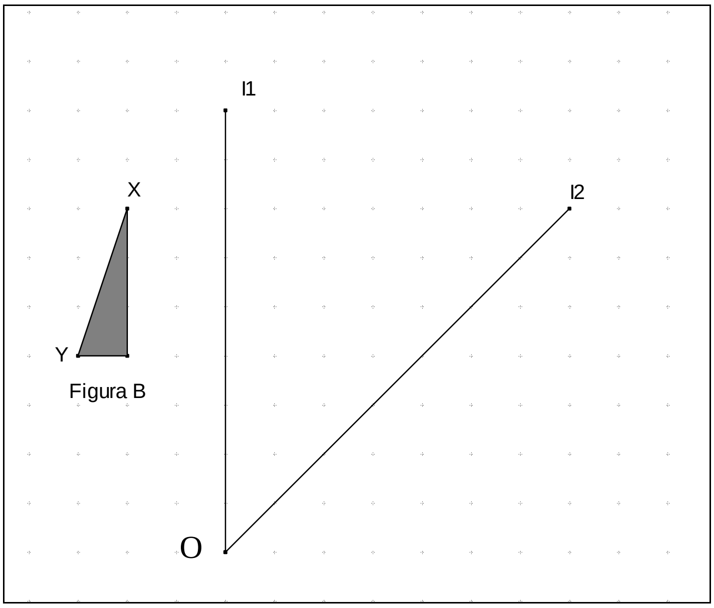
____

____

g) O que você observa sobre as figuras A e A2? ________________________

h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura A e chegar à figura A2 sem passar pela A1?__________________________

4.2) Rotação com ângulo de 45º:



a) Observe a figura B e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura B1 e ponto X1.

b) Agora, reflita a figura B1, em torno do eixo I2, encontrando a figura B2 e o ponto X2.

c) Com a ajuda do transferidor, meça o ângulo entre os eixos I1 e I2? ______

d) Ligue os pontos X e X2 ao centro C e meça o ângulo formado entre eles.______________

e) Proceda da mesma forma para o ponto Y e registre o ângulo entre Y e Y2.________________

f) Que relação você percebe quando analisa o ângulo encontrado entre os eixos I1 e I2 e o ângulo encontrado entre os pontos X e X2? Esta relação também se aplica quando analisamos o ângulo formado entre Y e Y2?

____

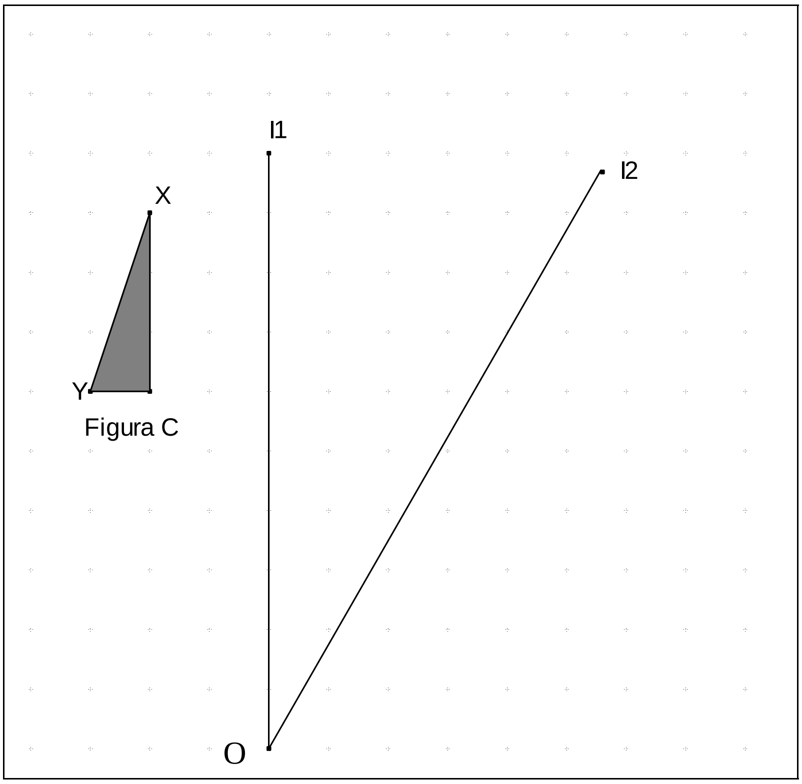
g) O que você observa sobre as figuras B e B2? ________________________

h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura B e chegar à figura B2? ____

i) Determine os segmentos $\overline{YY2}$ e $\overline{XX2}$. Trace a mediatriz desses segmentos e responda: em que ponto elas se cruzam?____

j) Trace uma circunferência de Centro O e raio $\overline{OX}$. Que pontos das figuras estão localizados nesta circunferência? _______________________________

4.3) Rotação com ângulo de 30º:



a) Observe a figura C e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura C1 e ponto X1.
b) Agora, reflita a figura encontrada, em torno do eixo I2, encontrando a figura C2 e o ponto X2.
c) Com a ajuda do transferidor, meça o ângulo entre os eixos I1 e I2? ______
d) Qual o valor do ângulo formado entre os pontos X e X2? ______________
e) Proceda da mesma forma para o ponto Y e registre o ângulo entre Y e Y2._______________
f) Que relação você percebe quando analisa o ângulo encontrado entre os eixos I1 e I2 e o ângulo encontrado entre os pontos X e X2 ou Y e Y2?

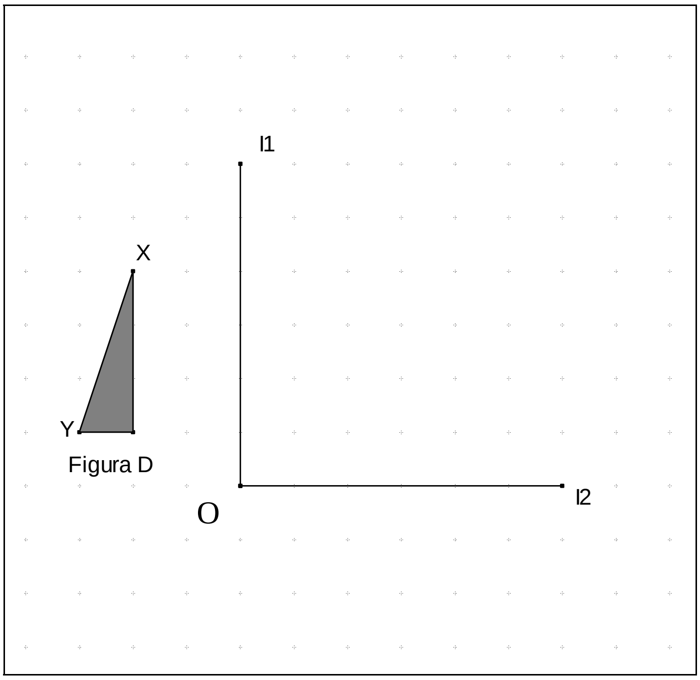
____

g) O que você observa sobre as figuras C e C2? ______________________
h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura C e chegar à figura C2? ____

i) Determine os segmentos $\overline{YY2}$ e $\overline{XX2}$. Trace a mediatriz desses segmentos e responda: em que ponto elas se cruzam?____

j) Trace uma circunferência de Centro O e raio $\overline{OX}$. Que pontos das figuras estão localizados nesta circunferência? ______________________________

4.4) Simetria Central:



a) Observe a figura D e o ponto X pertencente à ela. Reflita esta figura em torno do eixo I1, encontrando a figura D1 e ponto X1.
b) Agora, reflita a figura encontrada, em torno do eixo I2, encontrando a figura D2 e o ponto X2.
c) Com a ajuda do transferidor, meça o ângulo entre os eixos I1 e I2? ______
d) Qual o valor do ângulo formado entre os pontos X e X2? ______________
e) Proceda da mesma forma para o ponto Y e registre o ângulo entre Y e Y2.______________
f) Que relação você percebe quando analisa o ângulo encontrado entre os eixos I1 e I2 e o ângulo encontrado entre os pontos X e X2 ou Y e Y2?

____

g) O que você observa sobre as figuras D e D2? ______________________
h) Você saberia dizer se existe uma maneira de sair diretamente da figura D e chegar à figura D2? ____

Complete: Isometria é uma transformação geométrica que _________________

____

As Isometrias são: ____

Glossário:

Como medir ângulos com transferidor: O centro O do transferidor deve ser colocado sobre o vértice do ângulo. A linha horizontal que passa pelo centro deve coincidir com uma das semi-retas do ângulo. Verificamos a medida da escala em que passa a outra semi-reta.

Mediatriz: reta perpendicular traçada ao meio de um segmento.

Instruções para a atividade cinco:

- Atividade em duplas
- Professor, se for necessário, relembre como se calcula a área de quadrados e retângulos. Deixe que os alunos respondam as questões sem antecipar os prováveis resultados. Após a resolução das questões, socialize as respostas.

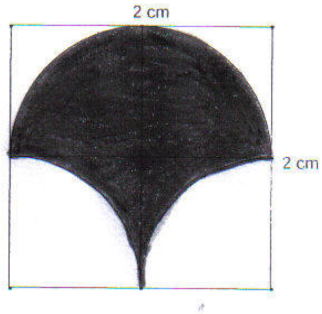
5. Calculando áreas

O cálculo de áreas é muito utilizado em Matemática. O uso das Isometrias é uma ferramenta que ajuda no cálculo de áreas de figuras que não são tradicionais.

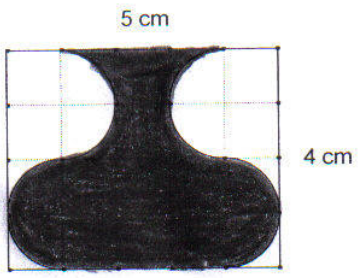
Quando, para calcular a área de uma figura, precisamos modificar a figura original de forma que tenhamos uma nova figura, mais simples e com o formato de uma figura geométrica conhecida, dizemos que estamos realizando uma RECONFIGURAÇÃO. Para realizar uma reconfiguração podemos utilizar como ferramenta as Isometrias.

Observe as figuras abaixo e calcule as áreas dessas figuras utilizando as Isometrias aprendidas.

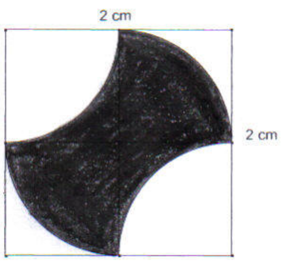
a) Qual é a área da figura pintada contida no quadrado de 2 cm de lado?



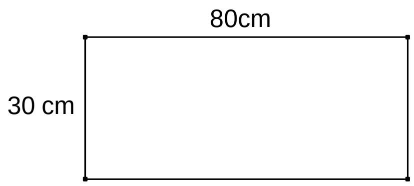
b) Obter a área da figura pintada contida no retângulo de lados 4 cm e 5 cm.



c) Qual é a área da figura pintada contida no quadrado de 2 cm de lado?



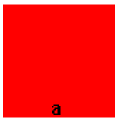
d) Um carpinteiro possui uma prancha de 80 cm de comprimento e 30 cm de largura. Quer cortá-la em dois pedaços iguais de modo a obter uma peça retangular que tenha 1,20 m de comprimento e 0,20 m de largura. Você é capaz de descobrir como deverá ser este corte e desenhar a peça desejada pelo carpinteiro?



Glossário:

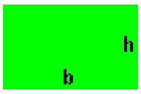
Área de um quadrado: lado x lado

A = a x a



Área de um retângulo: base x altura

A = b x h

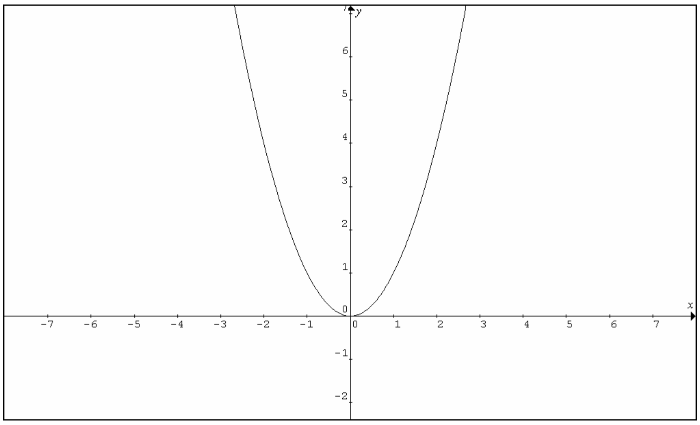


Instruções para a atividade seis:

- Atividade em duplas
- Professor, permita que os alunos discutam as possíveis soluções. Ao final da realização das atividades, escolha duas duplas para que apresentem seus resultados à classe. Posteriormente, socialize as respostas. Faça a leitura das questões e esclareça eventuais dúvidas no vocabulário.

6. Simetrias das funções:

6.1) Função x^2:



a) Observe o gráfico formado pela função $f(x) = x^2$. Ele é uma figura simétrica? ______________

b) Onde está o eixo de simetria? Marque no gráfico, utilizando uma caneta colorida.

c) Que tipo de simetria é a deste gráfico? ______________________________

d) Se acrescentarmos valores a x ou a y na função $f(x) = x^2$ podemos obter gráficos que são transladados em x ou em y. Acrescentando 2 à abscissa obtemos a função $f(x) = (x+2)^2$, representado pela figura A. Para construirmos a figura B, acrescentamos -3 à abscissa, obtendo a função $f(x) = (x-3)^2$. As figuras C e D tiveram, também, valores acrescentados em x e em y. A função da figura C é $f(x) = (x+2)^2 - 3$, o que significa que foram acrescentados 2 unidades em x e 3 unidades em y. Sabendo que a função da figura D é $f(x) = (x-3)^2 + 4$, responda:

e) Que valor foi acrescentado em x? __________________________________

f) Que valor foi acrescentado em y?________________________________

g) Trace os eixos de simetria das figuras A, B, C e D e determine as abscissas por onde eles passam. ________________________________

____

h) O que você pode perceber ao observar os valores acrescentados em x e o eixo de simetria de cada figura? ________________________________

i) Escolha um ponto do gráfico $f(x) = x^2$ e determine suas coordenadas. ____

j) Encontre o simétrico deste ponto e suas respectivas coordenadas ______

k) O que você pode concluir ao observar estas coordenadas? ____________

____

FIGURA A

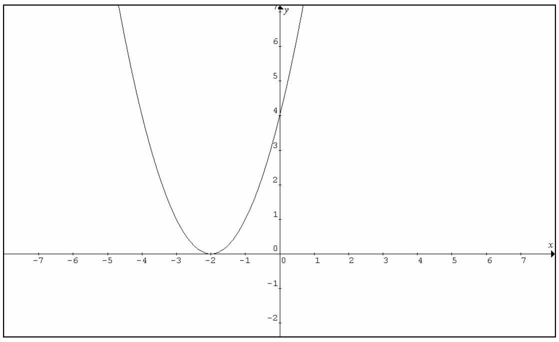


FIGURA B

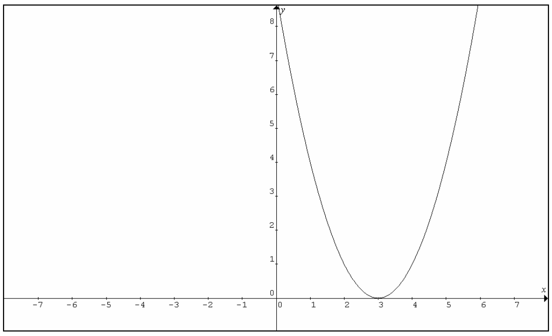


FIGURA C

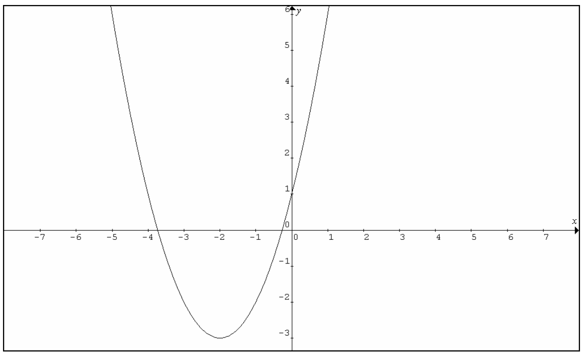
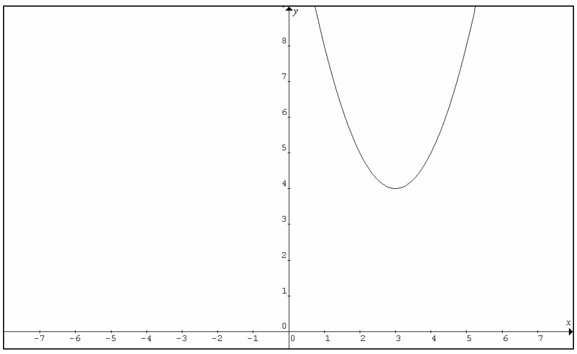
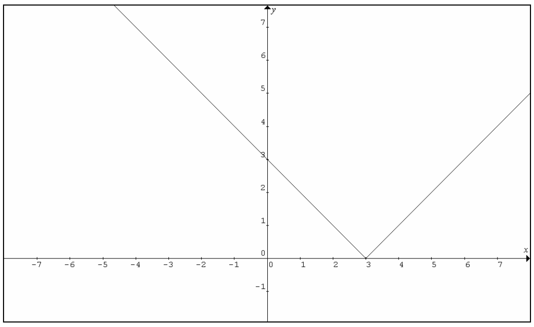
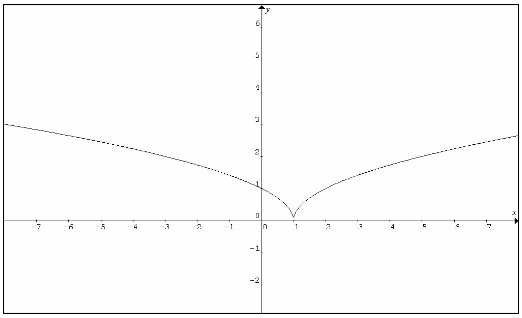


FIGURA D

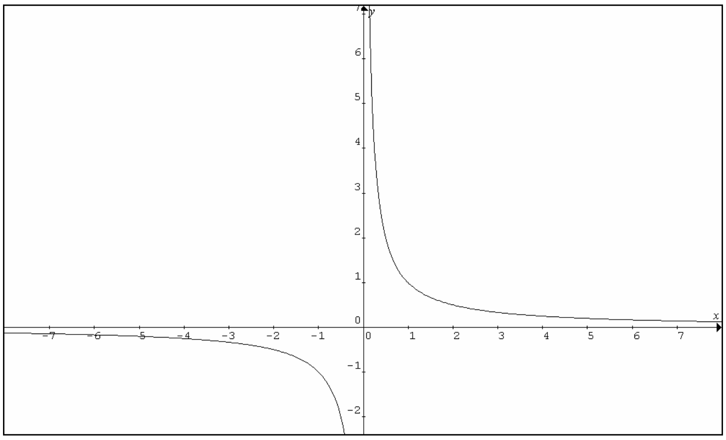


Funções que contém simetria axial são chamadas de **funções pares**. Veja abaixo outros exemplos e identifique nelas os eixos de simetria





6.2) Função $\frac{1}{x}$



a) Observe o gráfico formado por esta função. Ele é uma figura simétrica? ____________________

b) Ela é simétrica com relação a um ponto. Marque este ponto no gráfico, com caneta colorida.

c) Que tipo de simetria é a deste gráfico? ________________________________

d) Se acrescentarmos valores a x ou a y na função f(x) = $\frac{1}{x}$ podemos obter gráficos que são transladados em x ou em y. Acrescentando -2 à abscissa obtemos a função f(x) = $\frac{1}{x-2}$, representado pela figura E. Para construirmos a figura F, acrescentamos 3 à abscissa, obtendo a função f(x) = $\frac{1}{x+3}$. As figuras G e H tiveram acrescentados valores em x e em y. A função da figura G é f(x) = $\frac{1}{x+3}+4$, o que significa que foram acrescentados 3 unidades em x e 4 unidades em y. Sabendo que a função da figura D é f(x) = $\frac{1}{x-2} - 1$, responda:

e) Que valor foi acrescentado em x? ________________________________

f) Que valor foi acrescentado em y? ________________________________

g) Determine os pontos de simetria das figuras E, F, G e H. _____________

h) O que você pode perceber ao observar os valores acrescentados em x e em y e a localização do ponto de simetria de cada figura? ____________

____

i) Escolha um ponto do gráfico f(x) = $\frac{1}{x}$ e determine suas coordenadas. _________

j) Encontre o simétrico deste ponto e suas respectivas coordenadas _____________________

k) O que você pode concluir ao observar estas coordenadas? ___________

____

FIGURA E

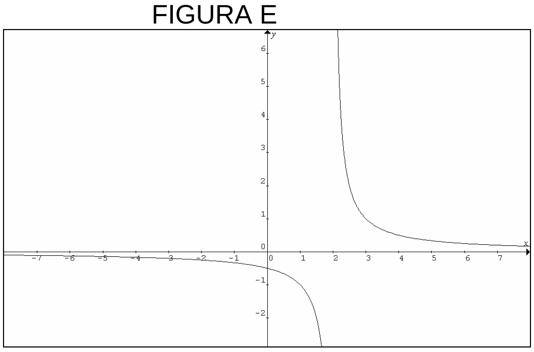


FIGURA F

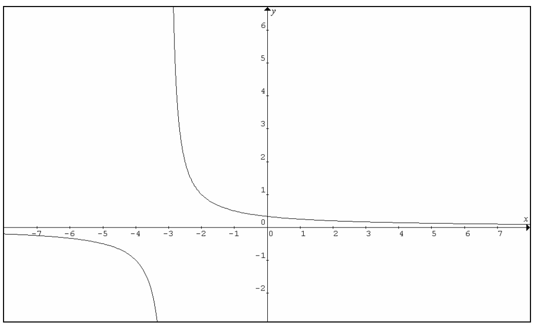


FIGURA G

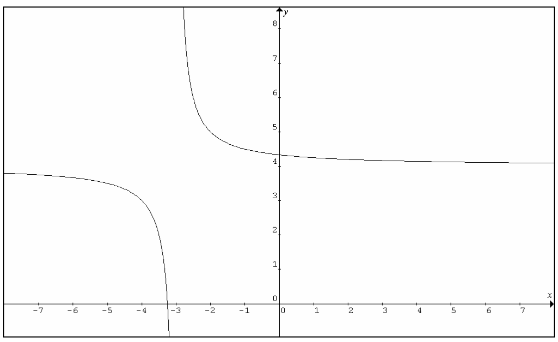
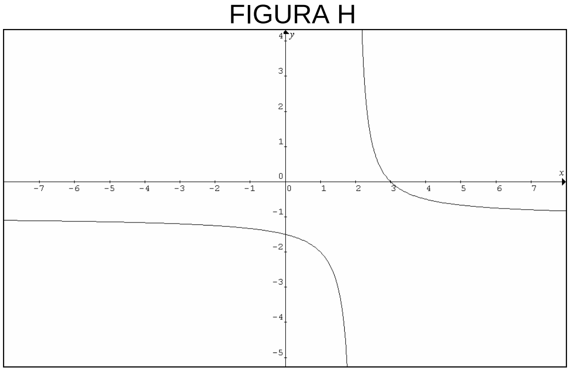
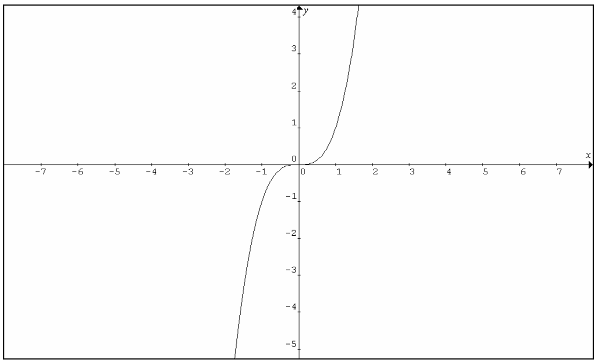
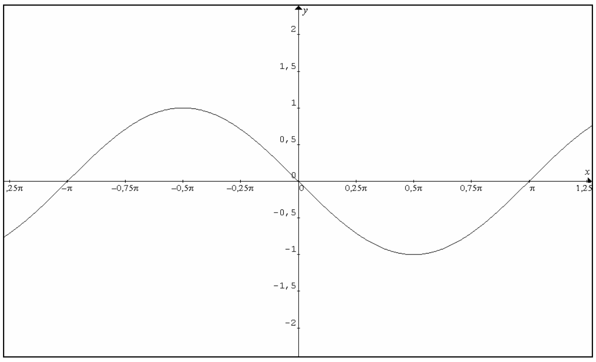


FIGURA H

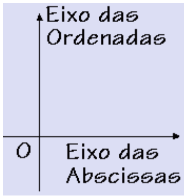


Funções que contém simetria axial são chamadas de **funções ímpares**. Veja abaixo outros exemplos e identifique nelas os pontos de simetria

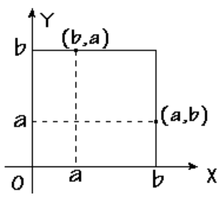
Glossário

Plano Cartesiano: o plano cartesiano ortogonal é constituído por dois eixos x e y perpendiculares entre si que se cruzam na origem. O eixo horizontal é o eixo das abscissas (eixo OX) e o eixo vertical é o eixo das ordenadas (eixo OY). Associando a cada um dos eixos o conjunto de todos os números reais, obtém-se o plano cartesiano ortogonal.



Cada ponto P=(a,b) do plano cartesiano é formado por um par ordenado de números, indicados entre parênteses, a abscissa e a ordenada respectivamente. Este par ordenado representa as coordenadas de um ponto.

O primeiro número indica a medida do deslocamento a partir da origem para a direita (se positivo) ou para a esquerda (se negativo).



O segundo número indica o deslocamento a partir da origem para cima (se positivo) ou para baixo (se negativo). Observe no desenho que: (a,b)≠(b,a) se a≠b.

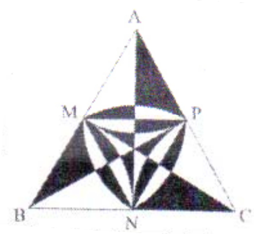
ANEXO 3 – Atividade Avaliativa

1. Na figura abaixo, a circunferência maior tem raio 4cm, há duas circunferências de raio 2cm, quatro circunferências de raio 1cm, quatro de raio 0,5cm, quatro de raio 0,25cm, e assim por diante. Considere que:
   • a é a soma das áreas de todas as regiões brancas.
   • b é a soma das áreas de todas as regiões pintadas de cinza.

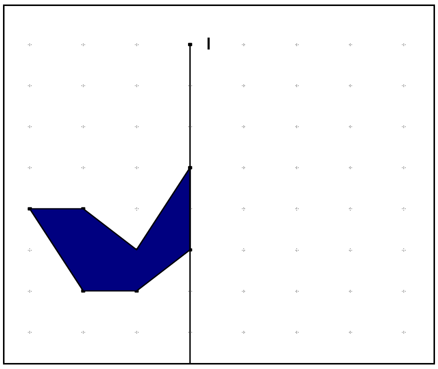
   

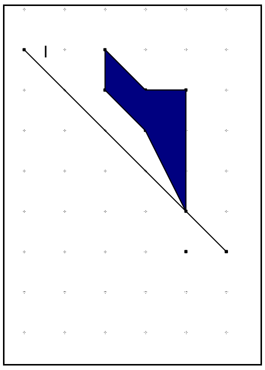
   O que podemos dizer ao comparar as áreas das regiões branca e cinza? Selecione a alternativa que você acredita estar correta:
   a) b > a
   b) a > b
   c) a = b
   d) a = 2.b

2. O triângulo ABC abaixo é eqüilátero e seus lados medem 5 cm. Sabendo que a altura do triângulo é igual a $\frac{5\sqrt{3}}{2}$, calcule a medida da área sombreada.
   Obs: área de triângulo = $\frac{b \times h}{2}$

3. Nas figuras abaixo, desenhe a imagem refletida sabendo que I representa o eixo de simetria





4. Nas figuras abaixo, a imagem A, após sofrer 2 reflexões, se transformou na imagem b. Identifique onde estão os eixos de simetria desta figura e, se possível, a imagem intermediária.

FIGURA A

FIGURA B

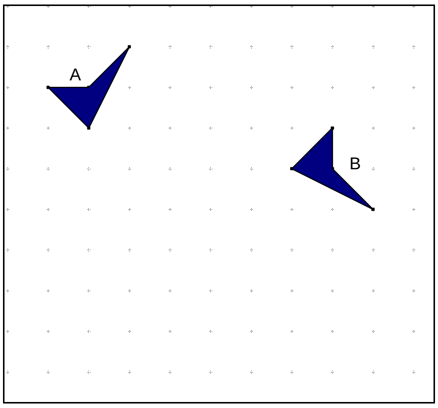
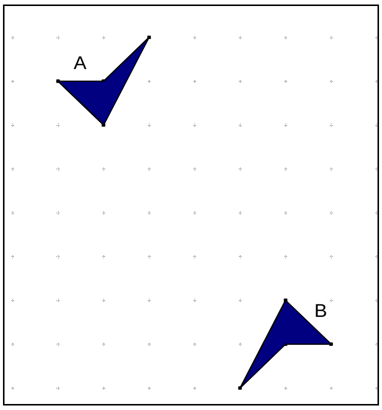
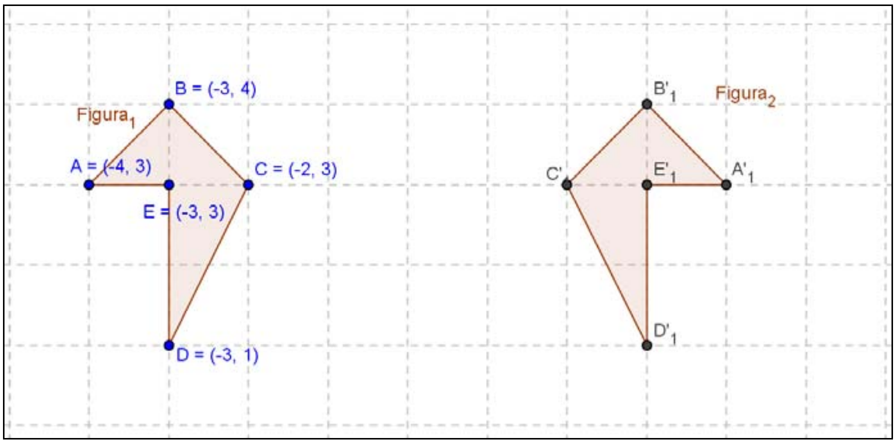


FIGURA C

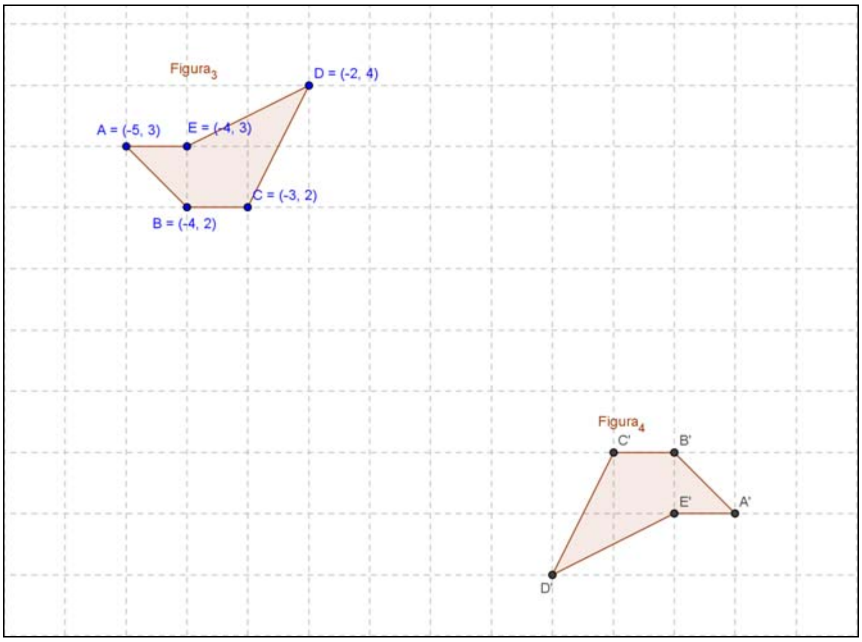


5. Observe as transformações abaixo e responda (considere o quadriculado de 1x1 cm):

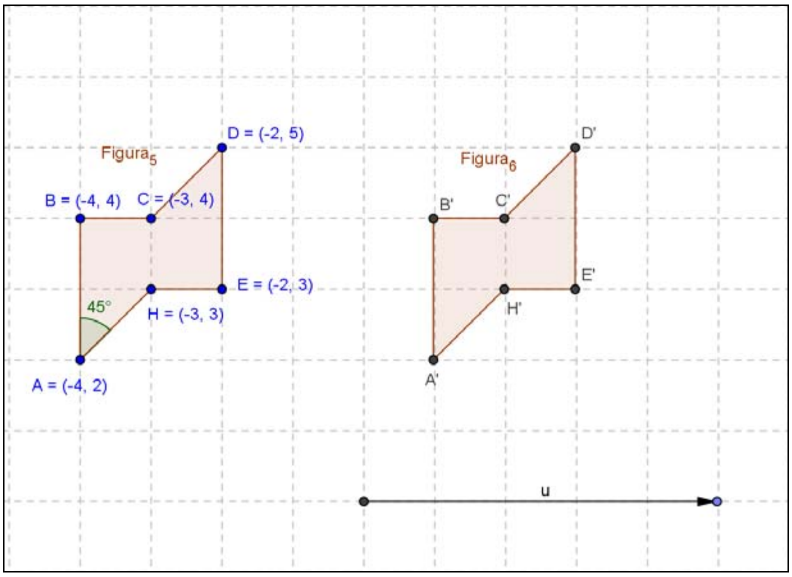
   a) Sabendo que a figura 2 é simétrica à figura 1 com eixo de simetria em y, determine onde está o eixo de simetria (y) e quais são as coordenadas dos pontos da figura 2



b) Sabendo que a figura 4 tem simetria central à figura 3, determine o ponto de simetria e quais são as coordenadas dos pontos da figura 4.



c) Sabendo que a figura 6 é transladada da figura 5 pelo vetor u, determine o eixo y e as coordenadas dos pontos da figura 6.



6. Observe os gráficos acima e responda com base nas propriedades das figuras isométricas:

   a) Se área da figura 1 é 2 cm2, quanto vale a área da figura 2?: ___________

   b) Se o perímetro da figura 3 é 8 cm, qual o perímetro da figura 4?: ________

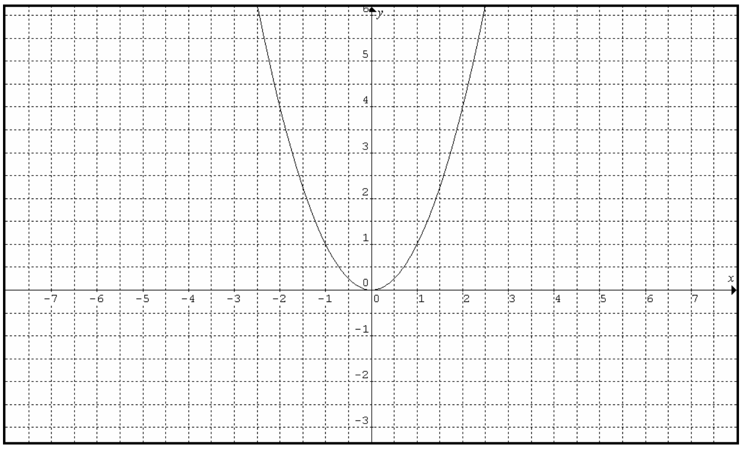
   c) Se o ângulo marcado na figura 5 é 45º, qual o valor do ângulo correspondente na figura 6? ____________

7. Construção de gráficos:

   a) O gráfico abaixo representa a função f(x) = x^2. Tendo esta função como base, podemos acrescentar valores a x ou a y e transladar a função. Represente no Plano 1 as funções:

   - f(x) = x^2+1
   - f(x) = x^2-2

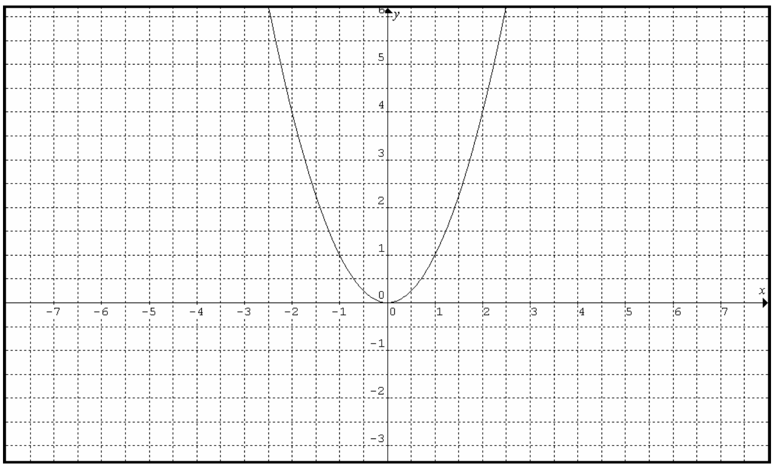
Plano 1



Represente no Plano 2 as funções

- $f(x) = (x+4)^2$
- $f(x) = (x-1)^2+2$

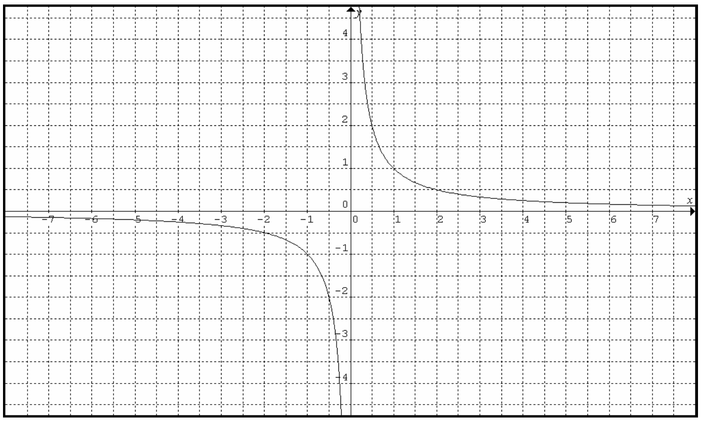
Plano 2



b) O gráfico abaixo representa a função $f(x) = \frac{1}{x}$. Tendo esta função como base, podemos acrescentar valores a x ou a y e transladar a função. Represente no Plano 1 as funções:

- $f(x) = \frac{1}{x}+1$
- $f(x) = \frac{1}{x}-2$

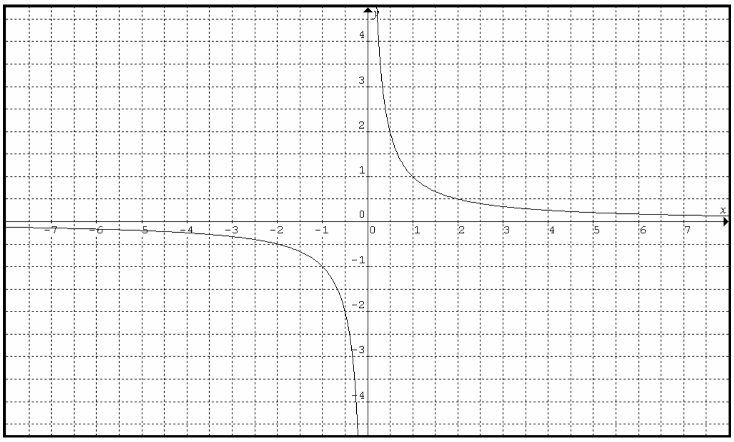
Plano 1



Represente no Plano 2 as funções:

- f(x) = $\dfrac{1}{x+2}$
- f(x) = $\dfrac{1}{x+3}-2$

Plano 2



ANEXO 4 – Arquivo Power Point – referente à atividade 1

FIGURAS SIMÉTRICAS



FIGURAS SIMÉTRICAS



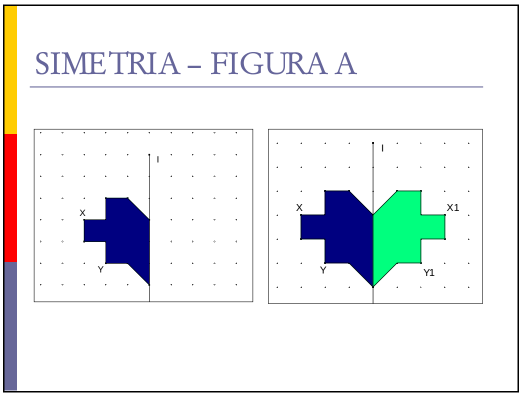
FIGURAS SIMÉTRICAS

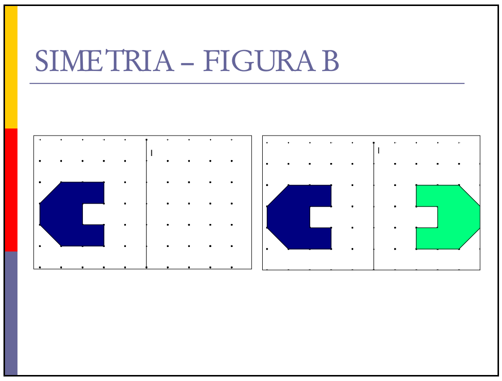


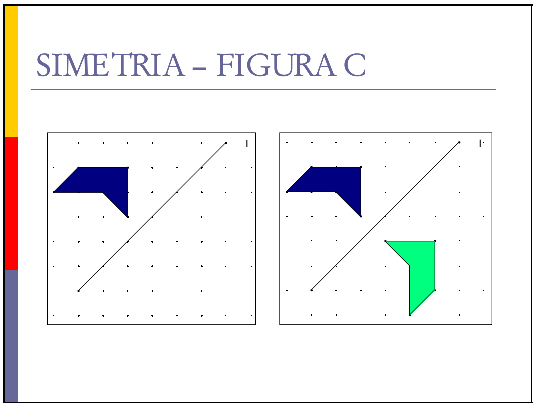
Simetria

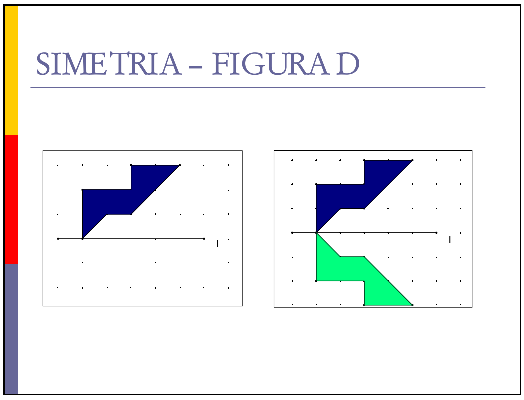
- uma figura em uma, duas ou três dimensões é dita simétrica se ela possui um ente de simetria (ponto, eixo ou plano), de modo que do outro lado deste ente de simetria a figura seja semelhante porem invertida como se tivesse sido colocada na frente de um espelho

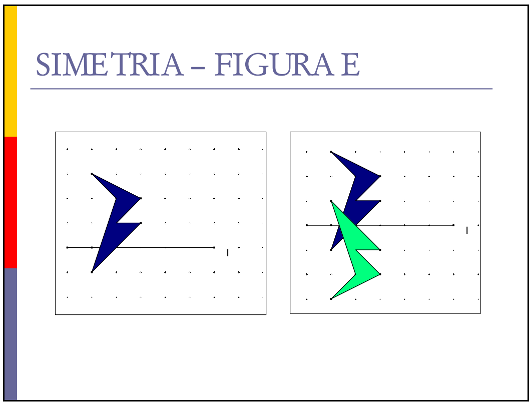
ANEXO 5 – Arquivo Power Point – referente à atividade 2

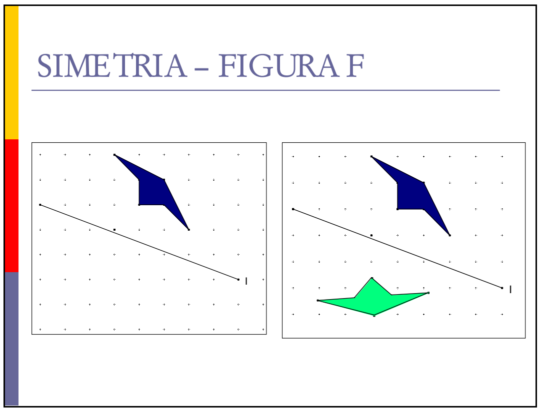












ANEXO 6 – Roteiro de observação do desenvolvimento da THA

Turma	Número de alunos presentes
Data	Professor:
Identificação da aula	Assunto

1. Organização da classe e clima dominante.
2. Consignas do professor sobre a tarefa e explicitação dos objetivos de aprendizagem.
3. Combinados com a classe.
4. Atitude dos alunos no desenvolvimento das tarefas e implicação dos alunos na busca de solução.
5. Eventuais problemas relacionados à leitura e compreensão do texto.
6. Eventuais problemas com relação à pré requisitos.
7. Interação entre alunos na realização das tarefas.
8. Dificuldades observadas e possíveis causas.
9. Interesse dos alunos nas atividades que envolvem contextualização de situações, situações de investigação e recursos tecnológicos.
10. Adequação do tempo previsto para a atividade.
11. Intervenções do professor durante a realização da atividade.
12. Socialização e sistematização das conclusões.
13. Perguntas, explicações, depoimentos do professor que merecem destaque.
14. Opinião dos alunos.
15. Possíveis comentários dos alunos que sejam relevantes.

ANEXO 7 – Relatórios de encontros com os professores

Primeiro Encontro:

Data: 21/09/09

No primeiro encontro com os professores colaboradores apresentamos a proposta de nossa pesquisa e esclarecemos a participação deles. Apresentamos a 1ª versão da THA e discutimos os exercícios um a um. Neste momento, os professores apresentaram as sugestões de modificação de cada atividade e mencionaram as suas próprias dificuldades quanto às atividades da THA.

Essas sugestões se concentraram principalmente na preparação de arquivos em Power Point que pudessem ser utilizados como apoio em sala de aula, pois, segundo eles, as atividades contém muitos desenhos, o que dificultaria o uso da lousa.

Outra solicitação dos professores foi a montagem de uma atividade inicial que apresentasse os conceitos básicos de Geometria, que segundo eles, os alunos não têm conhecimento. Nas atividades, os professores solicitaram apenas alterações simples, como por exemplo, a ordem de algumas questões.

Mais um ponto discutido neste encontro foras as dificuldades dos professores com relação às atividades três, quatro e seis. Quanto à atividade três, o professor P1 mencionou nunca ter visto o ensino das rotações e translações utilizando as reflexões. Para a atividade quatro, os professores mencionaram não ter conhecimento do software Geogebra e, quanto à atividade seis, eles informaram desconhecer o conteúdo de funções pares e ímpares e também o uso das isometrias funções.

Sendo assim, utilizamos este primeiro encontro também para esclarecer as dúvidas dos professores e resolver as atividades junto com eles. Apresentamos também o software Geogebra e alguns comandos básicos para a realização das atividades.

Definimos, neste encontro que, se surgissem outras dúvidas, os professores entrariam em contato com a professora pesquisadora para esclarecê-las.

Encontros intermediários:

Não aconteceram outros encontros, com exceção do último. As dúvidas que surgiram durante a aplicação das atividades foram esclarecidas com a professora pesquisadora durante a aplicação da THA ou, em alguns casos, por e-mails ou telefone.

Último Encontro:

Data: 18/12/09

Os professores colaboradores e a professora pesquisadora se reuniram a fim de analisar como foi a aplicação da THA em sala de aula.

Nesta reunião, procuramos captar que conhecimentos novos os professores adquiriram nesta experiência e como eles poderiam contribuir para o desenvolvimento profissional deles.

Para isso, os professores comentaram sobre as reações dos alunos, a atividade avaliativa e suas próprias impressões. Os principais pontos destacados por eles foram:

- A valorização do ensino da Geometria;
- O uso de metodologias diferenciadas;
- A importância do planejamento e da escolha das atividades;
- O uso do software Geogebra;

Finalizamos o último encontro analisando a 2ª versão da THA, aplicada em sala de aula e as possíveis modificações para a elaboração da 3ª versão.

ANEXO 8 – Questionário para os professores colaboradores

1) Nome

____

2) Formação (Graduação Plena em Matemática ou Complementação/Ano)

____

____

3) Tempo de magistério: ____________________________

4) Segmento que leciona: ( ) E.F.II ( ) E.M.

5) Pós-graduação cursada ou em andamento

a) ( ) Extensão

b) ( ) Aperfeiçoamento

c) ( ) Especialização

d) ( ) Mestrado

e) ( ) Doutorado

6) Já participou de algum trabalho colaborativo em sua escola? Qual?

____

____

____

7) Você costuma trabalhar geometria em suas aulas? Com que conteúdos ?

____

____

____

8) Que recursos você utiliza, além do livro didático, para ensinar geometria?

____

____

____

9) E quanto ao material da Secretaria da Educação. Você tem utilizado as atividades de geometria que são propostas?

____

____

____

10) Nas séries em que leciona você costuma abordar o ensino das transformações isométricas no plano?

____

____

____

11) Quais são as dificuldades que os alunos apresentam ao estudar este assunto?

____

____

____

12) Já fez o uso de algum software matemático para o estudo de geometria em suas aulas? Por quê?

____

____

____

ANEXO 9 – Relatórios de observação do desenvolvimento da THA - Professor 1 -

Data: 02/10/09 Número de alunos presentes: 25

Assunto: atividade 1 Duração: 2 aulas de 50 minutos

A classe estava tranqüila, porém falante. O professor P1 começou a aula num ambiente descontraído. Todos os alunos responderam as questões propostas. O professor passou toda a aula direcionando a realização das atividades.

Inicialmente, o professor P1 levantou idéias a respeito do que é simetria e o que significava um eixo. Para isto, ele lembrou de situações do cotidiano: o formato de uma pipa, a imagem formada por um espelho, as formas do corpo humano (inspirado na aula do professor P2, que ele assistiu). O professor perguntou se ele cortasse uma figura no meio ela era simétrica. Um aluno respondeu “Não professor, eu acho que é uma figura inteira”.

Depois desta primeira discussão, o professor mostrou aos alunos as figuras presentes no arquivo de Power Point, montado pela pesquisadora. O professor discutiu cada uma delas, mostrou as diferenças, mas não antecipou a idéia de simetria central. Apenas pediu para o aluno “guardar na memória que ele ia aprender”.

As atividades foram evoluindo sem maiores dificuldades. Com relação ao traçado dos eixos nas figuras, os alunos tiveram mais dificuldades em identificar a quantidade de eixos, porém depois de explicado pelo professor, encontraram as frações das figuras sem dificuldades.

Para explorar a questão dos eixos de simetria, o professor utilizou a idéia da pizza e dos cortes possíveis. Conforme ele aumentava o número de cortes na pizza, aumentava o número de pedaços e diminuía a fração. Foi um exemplo muito esclarecedor para os alunos.

Um dos alunos inclusive comentou que a pizza poderia ser montada novamente rodando o pedaço encontrado pelo corte. O professor elogiou o comentário e explicou que depois falaria sobre o giro.

Outro exemplo citado pelo professor a respeito de simetria foi o nome escrito na ambulância e como ele é visto no retrovisor do carro, levando a questão à área de conhecimento da Física. Os alunos logo identificaram o uso da simetria nos exercícios de Física que já tinham realizado, citando outros exemplos.

A construção das figuras e as outras questões do exercício foram resolvidas sem dificuldades. A idéia da dobra da folha no eixo também foi apresentada pelo professor e, após esta estratégia os alunos desenvolveram todas as questões sem problemas.

A sistematização das questões foi feita a cada final de exercício e não no final de toda a atividade.

Data: 19/10/09 Número de alunos presentes: 26

Assunto: atividade 2 Duração: 2 aulas de 50 minutos

A professora pesquisadora não estava presente nesta aula. Logo, as observações foram coletadas pela filmagem realizada e pela descrição do professor P1.

O professor P1 entregou a folha de atividades e deixou que os alunos construíssem as figuras em grupos. Durante toda a aula ele interagiu com os alunos, esclarecendo dúvidas e retomando a idéia de que a figura completa poderia ser obtida através da dobra do papel com relação ao eixo.

Os alunos responderam todas as questões e no final, o professor apresentou o arquivo de PPT, feito pela pesquisadora, com as figuras completas. Depois, foi conferindo as respostas dadas pelos alunos com relação às medidas encontradas e sistematizou as propriedades das simetrias, destacando a importância de manter a mesma distância com relação ao eixo.

As maiores dificuldades foram encontradas na construção da figura F. O professor então explicou a importância de se conhecer a distância com relação ao eixo, independente da posição em que ele se encontra.

Data: 20/10/09 Número de alunos presentes: 24

Assunto: atividade 3 Duração: 2 aulas de 50 minutos

O professor P1 começou a aula retomando a atividade anterior e construindo uma figura utilizando o Cabri, porém foi necessário interromper várias vezes a explicação, pois a sala estava muito barulhenta, os alunos estavam agitados, falando em excesso ou fazendo outras atividades durante a aula.

Após a explicação do desenho no Cabri, o professor mostrou como as distâncias deveriam ser medidas o que facilitou a resolução da atividade 3.

A construção da figura por translação não despertou dificuldades nos alunos, que já tinham o domínio da reflexão. Porém, os as atividades de rotação apresentaram várias dificuldades.

Um deles foi com relação ao material utilizado (régua e transferidor). A escola não tinha material disponível para todos e foi necessário o uso coletivo do material conseguido pela pesquisadora, além do que, os transferidores tinham a marcação errada, o que dificultou a explicação.

Outro problema enfrentado foi a falta de pré-requisito, pois os alunos não sabiam medir ângulos. Foi necessário passar em cada carteira e explicar como deveriam ser efetuadas as medições. O clima da sala se alterou, alguns alunos se desmotivaram, a sala estava muito barulhenta e, portanto, não foi possível terminar as atividades em tempo.

A atividade que apresentou um maior grau de dificuldade foi a de rotação em 30 graus. Esta dificuldade se deu pelo fato do eixo estar fora do pontilhado. Tanto o professor como a pesquisadora passaram a aula esclarecendo dúvidas a respeito da medição dos ângulos.

O professor P1, percebendo as dificuldades dos alunos parou o desenvolvimento das atividades e fez uma explicação sobre os ângulos, seus usos e citou vários exemplos. Depois, pediu que os alunos retomassem as atividades.

Terminamos estas aulas no exercício de rotação de 30º.

Data: 21/10/09 — Número de alunos presentes: 21

Assunto: atividade 3 – fechamento — Duração: 1 aula de 50 minutos

Nesta aula os alunos terminaram as atividades de simetria axial, novamente com a ajuda do professor e da pesquisadora para realizar a medição dos ângulos.

Como o professor P1 não tinha conhecimento do assunto, pois nunca tinha trabalhado as isometrias a partir das reflexões, a pesquisadora precisou interferir e explicar detalhadamente, mostrando os exemplos no Cabri e sistematizando as isometrias propostas.

Durante a explicação e a construção das figuras no Cabri, os alunos conseguiram compreender as propriedades e a definição das isometrias além de entender que as rotações, translações e simetrias centrais podem ser obtidas de maneiras diferentes.

A pesquisadora mostrou, no caso das rotações, que o centro do giro é o centro de infinitas circunferências que passam pelos pontos das figuras e que, para a simetria central, ligando-se os pontos correspondentes das figuras original e simétrica encontramos o ponto que represento centro desse tipo de simetria.

Como os alunos não tinham contato com a geometria, acharam a atividade muito interessante. Vários deles se interessaram pelo software.

Data: 22/10/09	Número de alunos presentes: 26
Assunto: atividade 4	Duração: 4 aulas de 50 minutos

A sala teve um comportamento excelente, talvez por sair da sala de aula. Foi a primeira vez que eles entraram no laboratório de informática da escola. Como só tínhamos cinco micros, ficaram cinco alunos, em média, em cada computador.

O professor P1 iniciou as atividades explicando detalhadamente os comandos que seriam utilizados e entregou a folha de atividades.

As aulas se passaram muito tranquilamente, os alunos cumpriram todas as atividades e as dúvidas apresentadas eram apenas a respeito de comandos ou de termos da matemática que eles desconheciam, como por exemplo, paralela, perpendicular, perímetro, etc.

A dificuldade na leitura e a preguiça de ler o roteiro fizeram com que alunos fizessem algumas atividades erradas, que foram corrigidas com as observações do professor. A pesquisadora também passou a aula tirando dúvidas dos alunos.

Os alunos ficaram muito empolgados com a atividade e conseguiram responder todas as questões.

Ao final das aulas, o professor não realizou nenhuma sistematização de conteúdos ou correção das questões, simplesmente recolheu as atividades.

Dos alunos presentes, dois não fizeram as questões e percebemos que os alunos mais indisciplinados participaram ativamente da aula.

Data: 27/10/09 — Número de alunos presentes: 30

Assunto: atividade 5 — Duração: 2 aulas de 50 minutos

Durante a realização desta atividade, muitos alunos que não costumam freqüentar as aulas estavam presentes. Este fato acarretou em uma aula tumultuada. Muitos alunos conversando, entrando e saindo da sala, falando ao celular, o que atrapalhou o empenho do professor.

Inicialmente, o professor entregou as folhas de atividades e foi à lousa explicar a noção de área de figuras mas não fez nenhum comentário a respeito da reconfiguração. Apresentou aos alunos as fórmulas de cálculo de área de retângulos, quadrados e triângulos e depois pediu para que os alunos fizessem as atividades.

Passado algum tempo, o professor percebeu que os alunos não tinham resolvido nenhuma questão. Sendo assim, o professor foi à lousa e resolveu o primeiro exercício diversas vezes, até esclarecer todas as dúvidas.

Em sua explicação, o professor mostrou a proposta de completar a figura para obter uma figura mais simples mas não citou a presença das isometrias na resolução das questões. Depois deixou o restante das aulas para que os alunos resolvessem as questões.

A partir daí, os alunos resolveram todos os exercícios sem dificuldades e utilizando estratégias diferentes. Com relação ao último exercício, que tem um nível de dificuldade maior, o professor pediu que os alunos tentassem e disse que daria a resposta na próxima aula.

No final das atividades, os alunos foram à frente da sala mostrar suas diferentes resoluções e o professor socializou todas as respostas.

A aula foi muito produtiva. No final, aqueles alunos que estavam atrapalhando ficaram curiosos para descobrir a resposta da última questão. Apresentaram várias tentativas sem êxito, mas muito próximas do resultado.

Um dos alunos conseguiu fazer o exercício e combinou com o professor de apresentar seu pensamento no início da próxima aula.

Data: 30/10/09 Número de alunos presentes: 18

Assunto: atividade 6 Duração: 2 aulas de 50 minutos

Logo no início da aula o professor retomou o último exercício da atividade 5 e o aluno que conseguiu descobrir a resposta foi à lousa explicar sua estratégia.

Após as explicações, o professor entregou a atividade 6. Para iniciar a atividade, o professor fez uma breve explicação sobre funções quadráticas, coordenadas de um ponto e plano cartesiano.

Os alunos começaram, então, a resolver as questões, sem grandes dificuldades, porém foi necessário lembrar os conceitos de simetria axial e central. Cada atividade era acompanhada pela professora pesquisadora com a apresentação do gráfico no graphmática. Conforme o professor explicava, a pesquisadora desenhava o gráfico e, a partir daí, o professor mostrava a translação obtida. Os alunos acompanharam muito bem a atividade.

Uma das dificuldades encontradas foi com relação à escolha das coordenadas. Neste caso, o professor foi novamente à lousa e explicou detalhadamente como se obtinha as coordenadas de um ponto e quais pontos poderiam ser utilizados. Alguns alunos não escolheram pontos fora do gráfico, justificando “eu não sabia que tinha que ser um ponto da linha”.

Somente na sistematização de construção de gráficos quando do acréscimo de valores em x ou em y, foi necessária a interferência da pesquisadora. O professor P1 não se sentiu à vontade para explicar, pois não tinha domínio do conteúdo. Para que a atividade tivesse significado, a pesquisadora mostrou a translação dos gráficos no software utilizando os exemplos da apostila e outros apropriados para o momento.

Ao final das atividades e da socialização das questões, os alunos conseguiram associar a idéia de funções pares e ímpares com o tipo de simetria e perceberam que os gráficos podem ser transladados no plano cartesiano de acordo com os números acrescentados a cada função.

Um dos alunos perguntou se isto acontece com qualquer função. A pesquisadora explicou que sim, a partir de um gráfico inicial, é possível obter outros usando a translação. A resolução dos exercícios ocorreu sem maiores dúvidas.

ANEXO 10 – Relatórios de observação do desenvolvimento da THA - Professor 2 -

Data: 30/09/09 Número de alunos presentes: 32

Assunto: atividade 1 Duração: 1 aula de 50 minutos

O professor P2 começou a aula num ambiente descontraído. A sala estava em silêncio mas foi participativa durante todo o desenvolvimento da atividade. Todos os alunos responderam as questões propostas. O professor tem domínio da sala e foi explicando as atividades num clima de “bate-papo”.

Inicialmente, o professor P2 levantou idéias a respeito do que é simetria. Para isto, ele lembrou de situações do cotidiano: o formato de uma pipa, a imagem formada por um espelho, as formas do corpo humano. Os alunos também citaram objetos que consideravam simétricos, mesmo sem uma definição prévia de simetria, por exemplo: a cadeira e um vaso.

Depois desta primeira discussão, o professor P2 mostrou aos alunos as figuras presentes no arquivo de Power Point, montado pela pesquisadora. Apesar do arquivo conter figuras com diferentes isometrias, o professor focou as figuras de simetria axial, discutindo-as uma a uma. Quando foi questionado a respeito das outras figuras o professor comentou que também tinham isometria, mas de forma diferente e que posteriormente os alunos aprenderiam.

O professor P2 pediu para que os alunos observassem em todas as figuras do arquivo, quais delas se encaixavam na categoria simetria.Os alunos responderam sem dificuldades e explicaram que “aquelas figuras eram iguais dos dois lados, como se tivesse uma linha separando-as no meio”.

Para reforçar a diferença, o professor P2 explicou a simetria da letra Z. Novamente, ele não adiantou a idéia de simetria axial mas mostrou que é um tipo diferente de simetria.

Os alunos encontraram, nas figuras do arquivo, todas as que tratavam de simetria axial e também seus eixos, sem maiores dificuldades.

Alguns alunos verificavam a igualdade entre os lados da figura tão detalhadamente que um deles percebeu na imagem da ponte (presente no arquivo) uma cerca de um determinado lado, excluindo-a do grupo de figuras simétricas.

Após a discussão com o arquivo em PPT, o professor P2 iniciou a resolução da atividade proposta. Ele não determinou tempo para resolução das atividades. Foi resolvendo junto com os alunos, mais ou menos como questões de pergunta e resposta. O professor lia a questão, dava dois minutos para responder e pedia para que os alunos dessem a resposta. A partir da resposta dada, ele discutia as dúvidas presentes e socializava o resultado.

Podemos destacar a dificuldade encontrada pelos alunos na questão f, onde os alunos precisavam determinar a fração da figura. Muitos deles tiveram dificuldades em determiná-la. Acreditamos que por problemas de pré-requisito referente a este conteúdo. Para sanar esta dificuldade o professor retomou o exercício, desenhou os eixos e mostrou a quantidade de partes resultantes na figura. Posteriormente explicou como se montava a fração.

Como a atividade é prevista para duas aulas e só utilizamos uma, terminamos na questão f.

Data: 01/10/09	Número de alunos presentes: 30
Assunto: simetria – atividades 1 e 2	Duração: 2 aulas de 50 minutos

O professor P2 começou a aula num ambiente descontraído. A sala estava em silêncio mas foi participativa durante todo o desenvolvimento da atividade. Todos os alunos responderam as questões propostas. O professor tem domínio da sala e foi explicando as atividades num clima de “bate-papo”.

O início da aula teve uma retomada das questões da aula anterior. Um dos destaques foi o comentário do professor com relação às figuras que os alunos desenharam na questão c. Muitos alunos desenharam figuras pela metade ou em posições que não havia simetria. O professor resolveu as questões e esclareceu as dúvidas quando pediu para que eles retomassem a figura e desenhassem nela o eixo de simetria. Os alunos que tinham feito figuras erradas, perceberam o erro e refizeram a questão.

Uma das falas do professor que ajudou a esclarecer esta dúvida foi: “o eixo de simetria corta a figura em duas partes iguais, se você dobrar a figura pelo eixo, tem que ficar igual dos dois lados.”

Uma outra dificuldade encontrada foi com relação à questão 1-g. Neste caso, as duas primeiras figuras foram de fácil resolução porém a terceira, devido à quantidade de detalhes, provocou algumas dificuldades. O professor atendeu os alunos individualmente. Muitos deles se lembraram que poderiam dobrar a folha pelo eixo e então encontrar a posição correta da outra metade da figura. Mesmo assim, alguns alunos desistiram alegando ser a figura muito complexa.

Ao final da atividade, o professor pediu para eu os alunos escrevessem a definição de figuras isométricas, deixou um tempo e depois socializou as respostas. Uma das respostas que destacamos foi: “são figuras que tem duas partes iguais”. Neste momento, o professor voltou às figuras da questão d mostrou que nem sempre as figuras terão somente dois eixos.

Em seguida o professor entregou a atividade 2, composta exclusivamente de figuras para completar. A maioria dos alunos imediatamente começou a dobrar as figuras pelo eixo e não sentiu muitas dificuldades.

O professor deu dicas mostrando que é mais simples fazer a simetria ponto a ponto e, neste momento, o professor teve a idéia de fazer uma construção no Cabri.

A pesquisadora desenhou uma parte de uma figura simétrica e o eixo de simetria numa malha pontilhada do Cabri e os alunos tinham que completar a outra parte da figura, simulando a atividade 2. Os alunos foram falando e a pesquisadora foi completando a figura, segmento a segmento. Após esta atividade, que fez muito sucesso com os alunos, a grande maioria concluiu os desenhos.

Vale comentar uma fala do aluno: “professor, no computador é mais fácil porque está tudo pontilhado”. O professor explicou: “O quadriculado, presente nos desenhos da folha de atividades também tem pontos no vértice de seus quadradinhos, então você pode fazer utilizando o mesmo procedimento que usamos no computador.”

As figuras que continham eixos inclinados foram as que geraram mais dúvidas, sendo que a mais difícil foi a figura E.

A aula não foi suficiente para socializar as respostas, sendo utilizada para que os alunos completassem as figuras.

Data: 19/10/09 | Número de alunos presentes: 29

Assunto: atividades 2 e 3 | Duração: 2 aulas de 50 minutos

O professor P2 começou a aula num ambiente descontraído. A sala estava em silêncio e uma aluna não participou das atividades. O professor tem domínio da sala e foi explicando as atividades num clima de “bate-papo”.

A aula teve início com a retomada da atividade 2. O professor P2 entregou a folha e os alunos completaram as questões. A dificuldade encontrada durante a resolução desta atividade se refere à contagem dos pontos para determinar a distância. Os alunos contavam o número de pontos entre a figura e o eixo e não os intervalos entre os pontos. O professor foi até o quadro e explicou que entre dois pontos existe uma distância. Os alunos resolveram, então, as questões sem maiores dificuldades.

Para o fechamento da atividade 2, a pesquisadora preparou um arquivo em PPT, de forma que aparecessem as figuras incompletas e, posteriormente, completas. O professor P2 pediu que os alunos trocassem as folhas de atividade com os colegas e então conferissem as figuras construídas. Antes de mostrarmos as figuras no arquivo, os alunos já identificaram erros nas atividades dos colegas, explicando o que deveria ser feito para consertar.

Após esta primeira discussão, o professor apresentou as figuras corretas, construídas pelo Cabri e socializou a resposta das questões referentes às distâncias. O professor não fez nenhum comentário a respeito da mudança da posição dos eixos e das figuras e também não apresentou aos alunos a propriedade de conservação de distâncias, permitindo que eles concluíssem por observação. Ao final, pediu para que os alunos escrevessem um texto sobre suas observações e recolheu as atividades.

Entregou então a atividade 3. Neste caso, por ser de maior complexidade, o professor decidiu fazer as atividades junto com alunos. A questão a respeito de translação não gerou muitas dúvidas, pois os alunos fixaram bem a questão das reflexões, utilizadas, neste caso, para a construção das figuras.

Foi possível responder, nestas aulas somente até o exercício de translação.

Data: 20/10/09	Número de alunos presentes: 31
Assunto: atividade 3	Duração: 1 aula de 50 minutos

O professor P2 começou a aula num ambiente descontraído. A sala estava em silêncio mas participativa. Os alunos interagiram, ajudando uns aos outros na construção das figuras. O professor tem domínio da sala e foi explicando as atividades passo a passo.

A atividade 2 teve início a partir da atividade de rotação pois todos os alunos tinham feito a atividade de translação na primeira aula.

Muitos problemas surgiram na resolução destas atividades. Primeiramente porque o professor não tinha domínio do conteúdo, apesar da pesquisadora ter realizado as atividades separadamente com ele e esclarecido as dúvidas. Devido a este fato, a pesquisadora precisou participar das atividades, ajudando os alunos.

Outro problema encontrado foi com relação ao material utilizado (régua e transferidor). A escola não tinha material disponível para todos e foi necessário o uso coletivo do material conseguido pela pesquisadora, além do que, os transferidores tinham a marcação errada, o que dificultou a explicação.

Além dos problemas práticos, os alunos apresentaram, nesta atividade, problemas de pré-requisito pois não sabiam medir ângulos. Foi necessário passar em cada carteira e explicar como deveriam ser efetuadas as medições. O clima da sala se alterou, alguns alunos se desmotivaram e a atividade demorou mais tempo que o previsto.

A atividade que apresentou um maior grau de dificuldade foi a de rotação em 30 graus. Esta dificuldade se deu pelo fato do eixo estar fora do pontilhado. Tanto o professor como a pesquisadora passaram a aula esclarecendo dúvidas a respeito da medição dos ângulos. O restante da atividade fluiu tranquilamente pois os alunos tinham domínio do conceito de reflexão e portanto não tiveram dúvidas com relação à construção das figuras nem com relação à medição das distâncias pedidas.

Não houve tempo para socialização das questões. Os alunos comentaram que a atividade foi muito cansativa.

Data: 21/10/09	Número de alunos presentes: 34
Assunto: atividade 3	Duração: 1 aula de 50 minutos

Durante a realização desta atividade, a classe esteve apática, tanto quanto o professor. O professor fez o fechamento das atividades, utilizando a demonstração preparada pela pesquisadora no Cabri. Os alunos não fizeram nenhum tipo de comentário.

Como o professor P2 não tinha conhecimento do assunto, pois nunca tinha trabalhado as isometrias a partir das reflexões, a pesquisadora precisou interferir e explicar detalhadamente, mostrando os exemplos no Cabri, e sistematizando as isometrias propostas.

Mesmo assim, os alunos apenas assistiram a construção das figuras sem participar com dúvidas e questionamentos.

Ao final, os alunos responderam a questão h de cada item, identificando quais eram as isometrias trabalhadas.

Data: 22/10/09	Número de alunos presentes: 29
Assunto: atividade 4	Duração: 4 aulas de 50 minutos

A aula trouxe uma nova motivação aos alunos. Primeiro porque foi realizada em outra escola, já que a escola não tem sala de informática funcionando, depois foi realizada no computador.

Durante esta atividade estavam presentes os professores P2 e P1. O professor P2 entregou as atividades propostas e deixou os alunos fazerem sozinhos. Não fez nenhuma explicação a respeito do software e de seus comandos, deixando os alunos descobrirem tudo sozinhos.

A primeira atividade foi a que apresentou mais dificuldades pois os alunos ainda não conheciam os comandos, porém as atividades seguintes foram desenvolvidas sem maiores dificuldades. As dúvidas que surgiram são com relação às retas paralelas e perpendiculares.

O que percebemos é que alguns alunos não se concentraram na leitura do roteiro e, por esta razão, realizaram algumas atividades de maneira errada.

Durante todas as aulas os professores P2 e P1 e a pesquisadora tiravam dúvidas com relação ao roteiro, às palavras desconhecidas ou comandos que não davam certo. O professor não socializou as respostas.

Os alunos gostaram muito das atividades. Todos participaram e fizeram as questões propostas.

Data: 23/10/09	Número de alunos presentes: 25

Assunto: atividade 5 Duração: 1 aula de 50 minutos

A professora pesquisadora não estava presente nesta aula. Logo, as observações foram coletadas pela filmagem realizada e pela descrição do professor P2. Percebemos, observando as filmagens que, como a professora pesquisadora não estava presente, a postura do professor modificou-se.

O professor P2 entregou a folha de atividades e deu 10 minutos para os alunos resolverem. Não fez nenhuma explicação a respeito de reconfiguração e de cálculo de áreas. Colocou na lousa a fórmula de cálculo de área de retângulos e passou o tempo todo sentado. Vários alunos não responderam as questões e passaram a aula inteira conversando. No final do tempo, o professor simplesmente resolveu as questões na lousa.

A última questão proposta como desafio apresentava uma solução criativa e apesar do interesse de alguns alunos, o professor não permitiu a discussão alegando que não daria tempo pois a aula ia acabar. Então o professor recolheu as atividades e colocou o resultado na lousa.

Data: 30/10/09 Número de alunos presentes: 30

Assunto: atividade 6 Duração: 2 aulas de 50 minutos

A professora pesquisadora não estava presente nesta aula. Logo, as observações foram coletadas pela filmagem realizada e pela descrição do professor P2.

O professor P2 entregou a folha de atividades e resolveu os exercícios com os alunos. Não permitiu que eles fizessem as atividades sozinhos, antecipando as respostas.

Os alunos estavam brincando muito durante a aula, falando ao celular e não houve nenhuma interferência do professor nesse sentido.

O professor utilizou o programa graphmática para mostrar as funções, conforme orientação da pesquisadora, porém não permitiu que os alunos pensassem a respeito da construção dos gráficos.

Sendo assim, os alunos não apresentaram dúvidas.

Preocupado com o tempo, o professor acelerou a resolução das questões de forma que os alunos só observavam os gráficos e preenchiam os espaços em branco. Não foi permitido tempo para discussão das questões e a conclusão foi simplesmente a leitura da definição de funções pares e ímpares.