

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
(Mestrado)

THIAGO PINGUELLO DE ANDRADE

Operadores de Hill e a Estabilidade Orbital de Ondas Viajantes  
Periódicas

Maringá-PR

2010

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

THIAGO PINGUELLO DE ANDRADE

# Operadores de Hill e a Estabilidade Orbital de Ondas Viajantes Periódicas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Fabio Matheus Amorin Natali

Maringá

2010

# Operadores de Hill e a Estabilidade Orbital de Ondas Viajantes Periódicas

**Thiago Pinguello de Andrade**

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Dr. Fabio Matheus Amorin Natali - UEM .....  
(Orientador)

Prof. Dr. Jaime Angulo Pava - USP .....

Prof(a). Dr(a). Valéria N. Domingos Cavalcanti - UEM .....

Maringá  
Julho , 2010

*Dedico este trabalho a Deus.*

*A minha mãe.*

*Laura Pinquello de Andrade.*

## Agradecimentos

À Deus em primeiro lugar, à minha família, meu pai Jesus Carlos, minha finada mãe Laura, minha segunda mãe Delmita, meus irmãos João Paulo e Lucas. Aos professores de graduação Magda e Adilandre, pelo incentivo que deram para eu fazer o mestrado, aos amigos Régis e Issamu pelo companheirismo e ajuda logo no início. À minha namorada Débora. Aos meus professores do mestrado, Cícero, Marcelo Escudeiro, Marcos Primo, Rosali, Elenice, Carlos Braga, Marcelo Cavalcanti, Gleb e em especial o professor Fábio Natali que foi meu orientador que com certeza me ajudou muito sempre cobrando e exigindo o máximo. Ao professor Aldevino que sempre me acolheu. À todos os meus amigos do mestrado e demais amigos em geral. Ao professor Jaime e à professora Valeria que aceitaram o convite para banca desta dissertação.

À Capes, pelo apoio financeiro.

## Resumo

Esse trabalho tem como objetivo o estudo do espectro relacionado ao operador de Hill  $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + Q(x)$ . Mostramos que os autovalores não positivos de  $\mathcal{L}$  podem ser caracterizados conhecendo-se uma das suas autofunções. Aplicações deste resultado são estabelecidas com respeito à estabilidade orbital de soluções ondas viajantes periódicas para alguns modelos dispersivos.

# Abstract

This work is concerned with the study of the spectrum related to the Hill operator  $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + Q(x)$ . We show that the non-positive eigenvalues of  $\mathcal{L}$  can be characterized by knowing one of its eigenfunctions. Applications of this result are established regarding the orbital stability of periodic traveling wave solutions for some dispersive models.



---

---

# SUMÁRIO

---

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>17</b>
1.1 Notações e conceitos. . . . .	17
1.2 Elementos da Análise Funcional. . . . .	19
1.3 Funções elípticas de Jacobi. . . . .	22
1.4 Propriedades analíticas do discriminante. . . . .	24
1.5 Resultados auxiliares. . . . .	26
1.5.1 Alternativa de Fredholm. . . . .	26
1.5.2 Teorema Espectral para o operador $\mathcal{L}_c$ . . . . .	27
<b>2 Teoria Floquet</b>	<b>32</b>
2.1 Teorema de Floquet. . . . .	32
2.2 Teste de estabilidade. . . . .	44
2.3 Caso simétrico. . . . .	46
2.4 Teorema da Oscilação. . . . .	53
2.5 Equação diferencial para o produto de soluções. . . . .	75
<b>3 Famílias isonerciais de operadores autoadjuntos</b>	<b>80</b>
3.1 Índice de inércia e famílias isonerciais. . . . .	80
3.2 Famílias isonerciais de operadores de Hill. . . . .	82
<b>4 Operador de Hill</b>	<b>89</b>
4.1 Nova versão para o Teorema de Floquet. . . . .	89

4.2	O espectro não positivo do operador de Hill. . . . .	99
<b>5</b>	<b>Estabilidade Orbital</b>	<b>106</b>
5.1	Estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas para a equação KdV. . . . .	113
5.1.1	Existência de curva de soluções ondas periódicas para KdV. . . . .	114
5.1.2	Propriedade espectral. . . . .	132
5.1.3	Estabilidade . . . . .	138
5.2	Estabilidade de ondas viajantes periódicas para a equação mKdV. . . . .	143
5.2.1	Existência de curva de soluções ondas periódicas para mKdV. . . . .	144
5.2.2	Propriedade espectral. . . . .	158
5.2.3	Estabilidade. . . . .	163
<b>6</b>	<b>Apêndice</b>	<b>166</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>168</b>

---

# INTRODUÇÃO

---

O estudo da estabilidade no sentido orbital associado à equações diferenciais parciais não lineares de evolução com condições de fronteira periódicas tem recebido um tratamento muito satisfatório nos últimos anos devido ao grande número de problemas que tem sido abordados, bem como a importância física que os mesmos apresentam. Por exemplo, os problemas que apresentam este tipo de condição de fronteira são fisicamente mais aceitáveis do que os que possuem condições nulas no infinito (ver Osborne [46]). Neste sentido, a presente dissertação visa estabelecer uma contribuição relevante para esta abordagem.

Vamos agora ilustrar algumas contribuições concernentes à este assunto. De fato, um dos primeiros trabalhos nesta direção é devido à Benjamin em [15] com respeito às soluções suaves chamadas de ondas *cnoidal*. Estas, foram deduzidas primeiramente por Korteweg e de Vries em [34] para a conhecida equação de Korteweg-de Vries (KdV daqui em diante),

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

onde  $u = u(x, t)$ ,  $x, t \in \mathbb{R}$ , é uma função à valores reais. Esta equação modela a propagação de ondas de águas rasas em um canal. Benjamin em [15] adiantou um esboço para a estabilidade de ondas do tipo cnoidal na forma,

$$\varphi(\xi) = \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2) \operatorname{cn}^2 \left( \sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{12}} \xi, k \right), \quad (2)$$

onde  $\operatorname{cn}$  denota a *função elíptica de Jacobi* chamada cnoidal,  $k \in (0, 1)$  é denominado o módulo da função elíptica e  $\beta_i$  são parâmetros reais,  $i = 1, 2, 3$ . Todavia, o trabalho em [15] apresentou uma justificativa pouco detalhada para a estabilidade e muitos aspectos não são muito claros. Recentemente, Angulo, Bona e Scialom em [11] estabeleceram uma teoria completa para a estabilidade de ondas viajantes periódicas da forma  $u(x, t) = \varphi(x - ct)$ , onde  $\varphi$  é do tipo (2) para a equação (1). A abordagem para este resultado foi

a adaptação ao caso periódico da teoria desenvolvida por Grillakis, Shatah e Strauss em [29]. Outros resultados de estabilidade no sentido orbital para soluções do tipo cnoidal em (2) para sistemas do tipo Schrödinger, Hirota-Satsuma e Klein-Gordon-Schrödinger foram estabelecidos por Angulo [13], Angulo e Linares [9] e Natali e Pastor [40], respectivamente. Em todos estes trabalhos, fez-se necessário o uso de uma teoria espectral elaborada para o problema de autovalor periódico,

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}\Psi + [\rho - n(n+1)k^2\text{sn}^2(x; k)]\Psi = 0 \\ \Psi(0) = \Psi(2K(k)), \quad \Psi'(0) = \Psi'(2K(k)), \end{cases} \quad (3)$$

com  $n \in \mathbb{N}$  e  $\text{sn}$  denotando a função elíptica de Jacobi de tipo *snoidal*. A função  $K$  representa a integral elíptica completa de primeiro tipo dada por,

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

A equação diferencial de segunda ordem em (3) é conhecida como a *forma de Jacobi da equação de Lamé*.

Podemos ainda mencionar que Angulo em [10] estabeleceu a primeira prova de estabilidade orbital para ondas viajantes/estacionárias para a equação Schrödinger não linear (NLS daqui em diante),

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2u = 0, \quad (4)$$

e para a equação modificada de Korteweg-de Vries (mKdV daqui em diante),

$$u_t + u^2u_x + u_{xxx} = 0, \quad (5)$$

cujos perfis da onda periódica do tipo *dnoidal* é dada por

$$\varphi(\xi) = \eta_2 \text{dn}(\eta_1 \xi, k), \quad (6)$$

onde  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2$ , são parâmetros reais. Nestes dois casos, foram utilizados a teoria de estabilidade dada por Weinstein [49], combinada com a teoria espectral associada ao problema de autovalor em (3). Ademais, Natali e Pastor em [41] deduziram um resultado de estabilidade orbital para ondas estacionárias do tipo (6), associada à equação de Klein-Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} + u - |u|^2u = 0, \quad (7)$$

usando a teoria de estabilidade contida em Grillakis, Shatah e Strauss [28]. Mais ainda, neste trabalho foi dada a primeira prova de *instabilidade* orbital para ondas do tipo *cnoidal*,

$$\varphi(\xi) = \alpha_2 \operatorname{cn}(\alpha_1 \xi, k), \quad (8)$$

para  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , usando novamente a teoria em [28]. É importante mencionar que as equações (4) e (5) admitem ondas periódicas do tipo (8) (ver Seção 5.2). Contudo, não é possível concluir um resultado de estabilidade/instabilidade para estes dois casos (ver Angulo [10]).

Agora, para equações dispersivas de evolução em uma forma geral

$$u_t + u^p u_x - (Mu)_x = 0, \quad (9)$$

Angulo e Natali em [7], estabeleceram uma teoria completa no estudo da estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas e positivas da forma  $u(x, t) = \varphi(x - ct)$ , isto é,  $\varphi$  é solução da seguinte equação,

$$(M + c)\varphi - \frac{1}{p+1}\varphi^{p+1} = A_\varphi, \quad (10)$$

onde  $A_\varphi$  é uma constante de integração a qual assumimos ser nula, ou seja,  $A_\varphi \equiv 0$ . Em (9) temos,  $p \geq 1$  um inteiro e  $M$  denota um operador tipo multiplicador definido via transformada de Fourier (ver Seção 1.1) dado por

$$\widehat{Mg}(k) = \beta(k)\widehat{g}(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

onde o símbolo  $\beta$  denota uma função mensurável, localmente limitada e par sobre  $\mathbb{R}$ .

A teoria em [7] determinou, por exemplo, a primeira prova sobre a estabilidade não linear de uma família de ondas viajantes periódicas positivas para a equação de Benjamin-Ono

$$u_t + uu_x - \mathcal{H}u_{xx} = 0, \quad (12)$$

onde  $\mathcal{H}$  denota a transformada de Hilbert no contexto periódico dada por

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{L} \text{p.v.} \int_0^L \cotg\left[\frac{\pi(x-y)}{L}\right] f(y) dy. \quad (13)$$

Outra consequência importante da teoria em [7], foi a determinação da estabilidade e instabilidade de ondas viajantes/estacionárias associadas às equações crítica de Korteweg-de Vries e crítica Schrödinger, dadas respectivamente, por

$$u_t + u^4 u_x + u_{xxx} = 0, \quad (14)$$

e

$$iu_t + u_{xx} + |u|^4 u = 0. \quad (15)$$

Outras contribuições podem ser encontradas em [2], [4], [5], [6], [8], [12] e [14].

Neste momento, concentraremos nossos esforços em equações do tipo (9). Com efeito, em todos os trabalhos citados acima (excetuando-se o caso da equação (12)), faz-se necessário o conhecimento da quantidade e multiplicidade dos autovalores não-positivos (o qual nos referiremos como *propriedade espectral*, em toda a dissertação) associados aos operadores de Hill do tipo

$$\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \quad (16)$$

onde o potencial  $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função infinitamente diferenciável e periódica de período  $L > 0$ . O conhecimento desta propriedade espectral é crucial no estudo da estabilidade. Por exemplo, seguindo as idéias de Bona [17], Grillakis, Shatah e Strauss [29] e Weinstein [49], as condições que determinam a estabilidade para equações de evolução não lineares da forma (9) podem ser listadas da seguinte forma:

( $P_0$ ) existe uma curva suave de soluções periódicas não triviais

$$c \in I \subseteq \mathbb{R} \mapsto \varphi_c \in H_{per}^n([0, L]), \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

( $P_1$ )  $\mathcal{L}$  possui um único autovalor negativo  $\lambda$ , o qual é simples; (17)

( $P_2$ ) o autovalor 0 é simples e está associado à autofunção  $\frac{d}{dx}\varphi_c$ ;

$$(P_3) \quad \frac{d}{dc} \int_0^L \varphi_c^2(x) dx > 0.$$

Desta forma, quando consideramos as equações (1) ou (5), isto é,  $p = 1$  ou  $p = 2$  ( $M = -\partial_x^2$  para os dois casos) em (9), tem-se

$$\mathcal{L}_c = -\frac{d^2}{dx^2} + c - \varphi_c^p, \quad (18)$$

onde  $p = 1, 2$ . Nestes casos, podemos estabelecer as propriedades espectrais ( $P_1$ ) e ( $P_2$ ) em (17) estudando o problema periódico (3) (c.f. [10] e [11]) ou, então, estudar o comportamento da transformada de Fourier de  $\widehat{\varphi}_c$  e  $\widehat{\varphi}_c^p$  (c.f. [7]). No caso  $p = 4$  e  $M = -\partial_x^2$ ,

não é possível determinar as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  usando um problema do tipo (3). Podemos estabelecer o resultado desejado pela abordagem em [7] (ver [3]).

Agora estabeleceremos as principais características desta dissertação. Nosso estudo se baseia no recente trabalho de Neves em [43]. Com efeito, consideremos o operador de Hill  $\mathcal{L}$  em (16) definido em  $L^2_{per}([0, L])$  com domínio  $D(\mathcal{L}) = H^2_{per}([0, L])$ . Usando a imersão compacta  $H^1_{per}([0, L]) \hookrightarrow L^2_{per}([0, L])$  e o fato que  $\mathcal{L}$  é autoadjunto (ver Teorema 1.23 no caso específico em que  $Q = c - \varphi_c^p$ ) temos que o resolvente de  $\mathcal{L}$  é compacto e assim o espectro de  $\mathcal{L}$  é uma sequência de números reais,

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

Portanto, pelo Teorema da Oscilação (ver Teorema 2.11) temos,

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots < \lambda_{2n-1} \leq \lambda_{2n} < \dots, \quad (19)$$

onde a igualdade  $\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n}$  significa que temos um autovalor duplo. Nesta dissertação caracterizaremos os autovalores não positivos ou equivalentemente conforme o Teorema 1.23 o espectro não positivo de  $\mathcal{L}$  dado em (16), sabendo-se apenas o comportamento de uma de suas autofunções. De fato, seja  $p(x)$  uma autofunção de  $\mathcal{L}$  associado ao autovalor  $\lambda$ . Pelo Teorema da Oscilação (ver Teorema 2.11) é sabido que se  $p(x)$  tem  $2n$  zeros no intervalo  $[0, L)$  então  $\lambda$  pode ser  $\lambda_{2n-1}$  ou  $\lambda_{2n}$ . A abordagem que apresentaremos neste trabalho estabelece que  $p(x)$  contém toda a informação necessária para caracterizar o autovalor  $\lambda$ , a saber se  $\lambda$  é simples ou duplo e quando  $\lambda = \lambda_{2n-1}$  ou  $\lambda = \lambda_{2n}$ . Uma resposta parcial para esta questão vem dada pela segunda parte do Teorema de Floquet (ver Teorema 2.1).

Embora o Teorema de Floquet seja um resultado difícil de ser aplicado pois é necessário o conhecimento específico de um par de soluções normalizadas associadas à equação de Hill

$$-y'' + Q(x)y = 0, \quad (20)$$

isto é, um par  $y_1$  e  $y_2$  de soluções *linearmente independentes* (LI daqui em diante) satisfazendo

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1,$$

por meio de uma reinterpretação deste Teorema obteremos uma condição que depende somente da autofunção conhecida  $p(x)$  e, conseqüentemente, obteremos uma caracterização

específica do seu autovalor associado. Mais precisamente, usando a segunda parte do Teorema de Floquet, concluiremos que se  $p(x)$  é uma solução periódica de (20) e  $y(x)$  for outra solução de (20) LI com  $p(x)$  tem-se

$$y(x + L) = \rho_1 y(x) + \theta p(x), \quad \text{onde } \theta \text{ é constante.} \quad (21)$$

Mais ainda, se  $\theta = 0$  temos que  $y$  é periódica de período  $L$  ou  $2L$ . Em (21),  $\rho_1$  é uma das raízes da equação *característica*

$$\rho^2 - [y_1(L) + y_2'(L)]\rho + 1 = 0.$$

Com estes argumentos em mãos, é possível explicitar um valor exato para  $\theta$  conhecendo apenas o comportamento da função  $p(x)$ . O resultado central desta dissertação (ver Teorema 4.4) nos mostra que se  $p(x)$  é uma autofunção do operador  $\mathcal{L}$  com autovalor associado  $\lambda_k$ ,  $k \geq 1$ , e  $\theta$  é a constante em (21) então  $\lambda_k$  é simples se, e somente se,  $\theta \neq 0$ . Além disso, se  $p(x)$  possui  $2n$  zeros no intervalo semi-aberto  $[0, L)$ , então  $\lambda_k = \lambda_{2n-1}$  desde que  $\theta < 0$  e  $\lambda_k = \lambda_{2n}$  desde que  $\theta > 0$ .

Conforme veremos em nossas aplicações, temos que  $\frac{d}{dx}\varphi_c$  é uma autofunção do operador  $\mathcal{L}_c$  em (18) associado ao autovalor  $\lambda_k = 0$ . No caso da equação KdV temos que esta possui uma solução onda viajante periódica par e positiva com o perfil dado por (2). Assim, como  $\frac{d}{dx}\varphi_c$  tem dois zeros no intervalo  $[0, L)$  então  $\lambda_1 = 0$  ou  $\lambda_2 = 0$ , isto é, o autovalor zero é o segundo ou o terceiro na sequência (19). Logo, fixando  $L = \pi$  temos que  $\theta \approx -0,01 < 0$ . Portanto  $\lambda_1 = 0$  e é um autovalor simples. Como  $\lambda_0$  é sempre simples (ver Lema 2.18) temos que as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  em (17) são verificadas. Para estabelecer a propriedade  $(P_0)$  fazemos uso do Teorema da Função Implícita. Este Teorema determina que as constantes  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dependem suavemente de  $c \in I$  (o qual é essencial na obtenção de  $(P_3)$ ) e que as ondas viajantes periódicas da forma (2) tenham o mesmo período  $L > 0$ , para todo  $c \in I$ . Desta maneira, usando as propriedades das funções elípticas de Jacobi tem-se que a propriedade  $(P_3)$  é verificada e, conseqüentemente, temos provado a estabilidade.

No caso da equação mKdV, para ondas periódicas do tipo dnoidal em (6), a situação é análoga, isto é, fixando  $L = \pi$  temos que  $\theta \approx -0,59 < 0$ . Portanto  $\lambda_1 = 0$  e é um autovalor simples. Como  $\lambda_0$  é sempre simples temos que as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  em (17) também são verificadas. Isto posto, fazendo uso do Teorema da Função Implícita e propriedades das funções elípticas de Jacobi tem-se que  $(P_0)$  e  $(P_3)$  são satisfeitas e,



portanto, obtemos o resultado de estabilidade desejado.

Todavia, de modo a estabelecer o valor de  $\theta$  e como consequência a determinação da posição do autovalor zero na sequência (19) associado as equações aqui estudadas, faz-se necessário uma série de cálculos numéricos utilizando um bom programa matemático. Nesta dissertação, usamos o aplicativo *Maple 12* para fazer estes cálculos. Assim, não é possível estabelecer o valor de  $\theta$  em (21) para valores arbitrários de  $L > 0$  e de  $c \in I$ . Logo, fixando  $L = \pi$ , escolhemos um  $c_0$  conveniente no intervalo  $I$  determinado via Teorema da Função Implícita de modo a obter os cálculos requeridos. Poderíamos ser induzidos a pensar que a estabilidade a qual estamos propondo a estudar só pode ser provada para este valor  $c_0 \in I$ . Contudo, usaremos um outro resultado devido à Neves em [44] o qual determina que a quantidade e a multiplicidade dos autovalores não positivos (que estamos supondo que sejam uma quantidade finita) associados aos operadores de Hill

$$\mathcal{L}_s = -\frac{d^2}{dx^2} + Q(x, s),$$

onde  $Q(x, s)$  é assumido ser uma função periódica de período  $\pi$  na variável  $x$  e é continuamente diferenciável para  $x \in \mathbb{R}$  e  $s$  pertencente a um intervalo aberto  $J \subset \mathbb{R}$ , não muda quando  $s$  percorre  $J$ . Neste caso, dizemos que a família  $\mathcal{L}_s$  é isonercial. Logo, é suficiente estabelecermos o resultado para um valor fixado  $s_0 \in J$ . Para esta abordagem, usaremos a conhecida Lei da Inércia de Sylvester na forma generalizada.

O plano desta dissertação é dado como segue. No Capítulo 1 apresentamos as notações e alguns resultados auxiliares que serão utilizados nos demais capítulos. No Capítulo 2 estabelecemos alguns resultados da Teoria Floquet para que estes sirvam como base nos argumentos do Capítulo 4. No Capítulo 3 estudamos a família isonercial de operadores de Hill o qual será de grande utilidade na obtenção das propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$ . No Capítulo 4 provamos uma nova versão do Teorema de Floquet que utilizaremos para caracterizar o espectro dos operadores de Hill. Finalmente, no Capítulo 5 aplicaremos os argumentos dos capítulos anteriores para a obtenção da estabilidade para ondas viajantes periódicas para as equações KdV e mKdV.

# Preliminares

## 1.1 Notações e conceitos.

Seja  $\Omega$  um conjunto aberto de  $\mathbb{R}$  e  $1 \leq p < \infty$ , definimos  $L^p(\Omega)$  o espaço das funções (mais precisamente, de classe de equivalências) definidas em  $\Omega$  à valores reais ou complexos e mensuráveis à Lebesgue com norma

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se  $p = \infty$ , tem-se

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

O espaço  $L^p(\Omega)$  quando munido com uma das normas acima é um espaço de Banach. Se  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  torna-se um espaço de Hilbert munido do produto interno,

$$(f, g)_2 := (f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(\Omega).$$

Definiremos agora os espaços de Sobolev periódicos, usando os conceitos de Iório e Iório [32]. Denote por  $\mathcal{P} = C_{per}^{\infty}$  a coleção de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  que são infinitamente diferenciáveis e periódicas de período fixado  $L > 0$ . A coleção  $\mathcal{P}'$  de todos os funcionais lineares contínuos definidos de  $\mathcal{P}$  em  $\mathbb{C}$  é denominado o conjunto das distribuições periódicas. Dado  $\psi \in \mathcal{P}'$  o valor de  $\psi$  em  $\varphi \in \mathcal{P}$  é denotado por,

$$\psi(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle.$$

Seja  $k \in \mathbb{Z}$  e considere  $\Theta_k(x) = e^{\frac{2ik\pi x}{L}}$  para  $x \in \mathbb{R}$ . A transformada de Fourier de  $\psi$  em  $\mathcal{P}'$  é a função  $\widehat{\psi} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\widehat{\psi}(k) = \frac{1}{L} \langle \psi, \Theta_{-k} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Toda função  $\psi \in L^p([0, L])$ ,  $p \geq 1$  é um elemento de  $\mathcal{P}'$  definido por

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L \psi(x)\varphi(x)dx,$$

onde  $\varphi \in \mathcal{P}$ . Se  $\psi \in L^p([0, L])$ ,  $p \geq 1$ , então para  $k \in \mathbb{Z}$ , define-se a transformada de Fourier de  $\psi$  como

$$\widehat{\psi}(k) = \frac{1}{L} \int_0^L \psi(x)e^{-\frac{2ikx\pi}{L}} dx.$$

Para  $s \in \mathbb{R}$ , o espaço de Sobolev  $H_{per}^s([0, L]) := H_{per}^s$  é definido como sendo o conjunto das  $f \in \mathcal{P}'$  tais que

$$\|f\|_{H_{per}^s}^2 = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty.$$

A coleção  $H_{per}^s([0, L])$  é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno,

$$(f, g)_s = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}.$$

Quando  $s = 0$ ,  $H_{per}^0([0, L])$  será denotado por  $L_{per}^2([0, L])$ . Temos que  $L_{per}^2([0, L])$  é um espaço de Hilbert munido do produto interno,

$$(f, g) := (f, g)_0 = \int_0^L f(x)\overline{g(x)}dx$$

e norma  $\|\cdot\|_{L_{per}^2}$ .

Para  $s = p \in \mathbb{Z}^+$ , o espaço de Sobolev  $H_{per}^p([0, L]) := H_{per}^p$  pode ser definido como sendo o conjunto das funções  $f$  mensuráveis, periódicas com período  $L$  e

$$D^\alpha f \in L_{per}^p([0, L]) \text{ para } |\alpha| \leq p,$$

onde  $D^\alpha f$  é a derivada considerada no sentido fraco.

O espaço das sequências  $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de quadrado somável denotado por  $l^2(\mathbb{Z})$  é definido como sendo,

$$l^2(\mathbb{Z}) = \left\{ \alpha ; \|\alpha\|_{l^2} := \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Apresentamos agora o Teorema de Parseval que será utilizado no decorrer desta dissertação. Tal resultado pode ser encontrado em Iório e Iório [32]. Denotemos por  $PC_{per}$  o espaço das funções contínuas por partes e periódicas de período  $L$ . Dado  $f \in PC_{per}$ , a

transformada de Fourier de  $f$  é a sequência de números complexos  $\widehat{f} = \left(\widehat{f}(k)\right)_{k \in \mathbb{Z}}$  definida por,

$$\widehat{f}(k) = c_k = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-\frac{2ikx\pi}{L}} dx.$$

Os números  $\widehat{f}(k) = c_k$  são os coeficientes de Fourier de  $f$  e a série,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{2i\pi kx}{L}},$$

é a série de Fourier gerada por  $f$ .

**Teorema 1.1** (*Parseval*). *Seja  $f \in C_{per}$  e suponha que  $f' \in PC_{per}$ . Então a série de Fourier gerada por  $f$  converge uniformemente à  $f$  sobre  $\mathbb{R}$ . Além disso, temos a identidade*

$$\|\widehat{f}\|_{l^2}^2 = \frac{1}{L} \|f\|_{L_{per}^2}^2.$$

*Ou equivalentemente,*

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{l^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{L} (f, g)_{L_{per}^2}.$$

*A última igualdade é conhecida como identidade de Parseval.*

**Demonstração:** Ver [32]. □

**Teorema 1.2** (*Plancherel*). *A transformada de Fourier*

$$\mathcal{F} : L_{per}^2([0, L]) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}),$$

*onde  $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ , é um isomorfismo vetorial topológico.*

**Demonstração:** Ver [32]. □

## 1.2 Elementos da Análise Funcional.

Nesta seção definiremos o adjunto de um operador linear não limitado e exibiremos alguns resultados que serão utilizados no decorrer da dissertação. Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$  um operador linear definido num domínio  $D(A) \subset E$ ,

(o qual chamamos de operador não limitado) tal que  $D(A)$  é denso em  $E$ . Definamos o seguinte conjunto,

$$D(A^*) = \{\tau \in F'; \tau \circ A \text{ é limitada}\}, \quad (1.1)$$

onde  $\tau \circ A$  é a composta de  $\tau \in F'$  com o operador  $A$ , isto é,  $(\tau \circ A)(\nu) = \tau(A(\nu))$  para todo  $\nu \in D(A)$ .

Em outras palavras,

$$D(A^*) = \{\tau \in F'; \text{ existe } C \geq 0 \text{ tal que } |\langle \tau, A(\nu) \rangle| \leq C\|\nu\|_E, \text{ para todo } \nu \in D(A)\}.$$

Como  $\tau \in D(A^*)$  e  $A$  é linear temos que  $\tau \circ A$  é linear e limitada, e  $D(\tau \circ A) = D(A)$  é denso em  $E$ . Logo, pelo Princípio da extensão (ver [33]), temos que existe uma única extensão  $f_\tau : E \rightarrow \mathbb{R}$  linear e limitada que estende  $\tau \circ A : D(A) \rightarrow \mathbb{R}$  à todo espaço  $E$ . Além disso,  $\|f_\tau\|_{E'} = \|\tau \circ A\|_{D(A)}$ . Definamos então,

$$\begin{aligned} A^* : D(A^*) \subset F' &\longrightarrow E' \\ \tau &\longmapsto A^*(\tau) = f_\tau. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Como  $f_\tau$  estende  $\tau \circ A$ , então  $f_\tau$  coincide com  $\tau \circ A$  em  $D(A)$ , ou seja,

$$f_\tau(\nu) = (\tau \circ A)(\nu), \text{ para todo } \nu \in D(A).$$

Resulta daí e de (1.2) a seguinte relação de adjunção:

$$\langle A^*(\tau), \nu \rangle_{E', E} = \langle \tau, A(\nu) \rangle_{F', F}, \text{ para todo } \nu \in D(A) \text{ e para todo } \tau \in D(A^*). \quad (1.3)$$

Observe que,  $D(A^*)$  é claramente um subespaço vetorial. Mais além,  $A^*$  é um operador linear. Com efeito, sejam  $\tau_1, \tau_2 \in D(A^*)$ . Então,  $A^*(\tau_1 + \tau_2) = f_{\tau_1 + \tau_2}$ , onde  $f_{\tau_1 + \tau_2}$  é a única extensão linear e limitada de  $(\tau_1 + \tau_2) \circ A$  a todo  $E$ . No entanto,  $f_{\tau_1} = A^*(\tau_1)$  e  $f_{\tau_2} = A^*(\tau_2)$  são tais que estendem  $\tau_1 \circ A$  e  $\tau_2 \circ A$  a  $E$ , respectivamente. Assim,  $A^*(\tau_1) + A^*(\tau_2) = f_{\tau_1} + f_{\tau_2}$  estende  $(\tau_1 + \tau_2) \circ A$  à todo  $E$ . Pela unicidade da extensão resulta que  $f_{\tau_1 + \tau_2} = f_{\tau_1} + f_{\tau_2}$ , ou seja,  $A^*(\tau_1 + \tau_2) = A^*(\tau_1) + A^*(\tau_2)$ , o que prova a linearidade de  $A^*$ .

**Definição 1.3.** *O operador linear  $A^* : D(A^*) \subset F' \rightarrow E'$  referido acima denomina-se adjunto de  $A$ . Se  $A = A^*$ , dizemos que  $A$  é um operador autoadjunto.*

**Observação 1.4.** Se  $A$  é limitado, então  $\tau \circ A$  é limitado para todo  $\tau \in F'$ . Logo,

$$D(A^*) = \{\tau \in F'; \text{ existe } C \geq 0 \text{ tal que } |\langle \tau, A(\nu) \rangle| \leq C \|\nu\|_E, \text{ para todo } \nu \in D(A)\} = F'.$$

Além disso, se  $D(A) = E$  vem que  $A^*(\tau) = \tau \circ A$  pois  $A^*(\tau)|_{D(A)} = \tau \circ A$ .

Ademais, temos duas definições importantes do qual faremos uso nesta dissertação, a definição de operadores fechados e a definição de operadores compactos.

**Definição 1.5.** Seja  $A$  um operador linear definido num domínio  $D(A)$ . Dizemos que  $A$  é fechado se ele satisfaz a seguinte propriedade: Sempre que  $\{\nu_n\} \subset D(A)$  é uma sequência satisfazendo  $\nu_n \rightarrow \nu$  e  $A(\nu_n) \rightarrow f$ , então  $\nu \in D(A)$  e  $A(\nu) = f$ .

**Definição 1.6.** Um operador linear  $A$  definido num espaço de Hilbert  $H$  é denominado compacto, quando para toda sequência limitada  $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de vetores de  $H$ , podemos extrair de  $\{A(\nu_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma subsequência convergente em  $H$ . Em outras palavras,  $A$  leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos, isto é, conjuntos cujo fecho é compacto.

Enunciaremos agora alguns resultados envolvendo o operador Adjunto  $A^*$ .

**Proposição 1.7.** O adjunto  $A^*$  de  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  é um operador fechado.

**Demonstração:** Ver [19]. □

**Teorema 1.8.** Seja  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  um operador linear, fechado com  $\overline{D(A)} = E$ . Se  $A^{-1}$  existe e é limitado. Então,  $(A^*)^{-1}$  existe e é limitado, com

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Reciprocamente, se  $(A^*)^{-1}$  existe e é limitado. Então  $A^{-1}$  existe e é limitado, com  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ .

**Demonstração:** Ver [33]. □

**Teorema 1.9.** Seja  $S$  e  $A$  operadores densamente definidos sobre um espaço de Hilbert  $H$ . Se  $A$  é limitado e  $S$  é fechado, então  $T = S + A$  é fechado.

**Demonstração:** Ver [14]. □

**Proposição 1.10.** *Seja  $A$  é um operador simétrico e sobrejetivo densamente definido num espaço de Hilbert  $H$ , ou seja,  $A(D(A)) = H$ , então  $A$  é autoadjunto.*

**Demonstração:** Ver [22]. □

**Teorema 1.11.** *Sejam  $S$  e  $A$  operadores densamente definidos em um espaço de Hilbert  $H$ , tais que  $S$  é autoadjunto e  $A$  é limitado, simétrico com  $D(S) \subset D(A)$ . Então,  $T = A + S$  é autoadjunto.*

**Demonstração:** Ver [14]. □

**Definição 1.12.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach com  $X \subset Y$ . Dizemos que  $X$  está compactamente imerso em  $Y$  se,*

(i)  $X \hookrightarrow Y$ , isto é, se existe  $c > 0$  tal que,  $\|u\|_Y \leq \|u\|_X \quad \forall u \in X$ .

(ii) Se  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset X$  é limitada, então existe  $\{u_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{u_m\}$  convergente em  $Y$ , ou seja, a inclusão  $I : X \rightarrow Y$  é compacta.

Denotamos esta imersão compacta por,  $X \xhookrightarrow{c} Y$ .

## 1.3 Funções elípticas de Jacobi.

Apresentamos agora algumas propriedades básicas das integrais elípticas e as funções elípticas de Jacobi, as quais são denotadas por  $\text{sn}(u)$ ,  $\text{cn}(u)$  e  $\text{dn}(u)$ . Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada nas referências [18] e [20]. A integral elíptica de primeiro tipo, é definida por

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)}} \equiv F(\varphi, k),$$

onde  $y = \sin(\varphi)$ . A integral elíptica de segundo tipo é

$$\int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)} d\theta \equiv E(\varphi, k).$$

O número  $k$  é chamado *módulo* da integral elíptica e pertence ao intervalo  $(0, 1)$ . O número  $k' = \sqrt{1-k^2}$  é chamado o módulo complementar. O parâmetro  $\varphi$  é chamado o

argumento das integrais elípticas. É usualmente entendido que  $0 \leq y \leq 1$  ou ainda que  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Para  $y = 1$ , as integrais acima são ditas completas. Neste caso, escrevemos,

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv K(k) \equiv K,$$

e

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)} d\theta \equiv E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv E(k) \equiv E.$$

Ademais, temos que  $\lim_{k \rightarrow 0^+} K(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} E(k) = \frac{\pi}{2}$ , enquanto que  $\lim_{k \rightarrow 1^-} E(k) = 1$  e  $\lim_{k \rightarrow 1^-} K(k) = +\infty$ . Para  $k \in (0, 1)$ , temos

$$\frac{dK}{dk} > 0, \quad \frac{d^2K}{dk^2} > 0, \quad \frac{dE}{dk} < 0, \quad \frac{d^2E}{dk^2} < 0, \quad \text{e } E(k) < K(k).$$

Além disso,  $E(k) + K(k)$  e  $E(k)K(k)$  são funções estritamente crescentes para  $k \in (0, 1)$ . Podemos ainda deduzir algumas derivadas das funções  $K$  e  $E$  que serão usadas no decorrer desta dissertação,

$$\begin{cases} \frac{dK}{dk} = \frac{E - k'^2 K}{kk'^2}, \\ \frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k}. \end{cases}$$

As funções elípticas de Jacobi são definidas como segue. Considere a integral elíptica,

$$u(y_1; k) \equiv u = \int_0^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \equiv F(\varphi, k),$$

que é uma função estritamente crescente na variável  $y_1$ . Sua inversa é escrita como sendo  $y_1 = \sin(\varphi) \equiv \text{sn}(u; k)$  onde  $\varphi = \text{am}(u; k)$  (a função  $\text{am}(u; k)$  é chamada função amplitude de  $u$ ). Podemos escrever ainda,  $y_1 = \text{sn}(u)$  quando não é necessário enfatizar o módulo  $k$ . As outras duas funções elípticas básicas, as funções cnoidal e dnoidal são definidas em termos de  $\text{sn}$  por,

$$\begin{cases} \text{cn}(u; k) = \sqrt{1 - \text{sn}^2(u; k)}, \\ \text{dn}(u; k) = \sqrt{1 - k^2 y_1^2} = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(u; k)}. \end{cases}$$

Notemos que estas funções são normalizadas fazendo-se uso de  $\text{sn}(0; k) = 0$ ,  $\text{cn}(0; k) = 1$  e  $\text{dn}(0; k) = 1$ . A função  $\text{sn}$  é ímpar, enquanto que  $\text{cn}$  e  $\text{dn}$  são pares. Mais ainda, tais funções são periódicas com períodos reais  $4K$ ,  $4K$  e  $2K$  respectivamente, isto é,

$$\text{sn}(u + 4K; k) = \text{sn}(u; k), \quad \text{cn}(u + 4K; k) = \text{cn}(u; k), \quad \text{dn}(u + 2K; k) = \text{dn}(u; k).$$



Temos, ainda, as relações básicas,

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{cn}^2(u) = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{dn}^2(u) = 1, \quad k'^2 \operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{cn}^2(u) = \operatorname{dn}^2(u), \\ -1 \leq \operatorname{sn}(u; k) \leq 1, \quad -1 \leq \operatorname{cn}(u; k) \leq 1, \quad k'^2 \leq \operatorname{dn}(u; k) \leq 1, \\ \operatorname{sn}(u + 2K; k) = -\operatorname{sn}(u; k), \quad \operatorname{cn}(u + 4K; k) = -\operatorname{cn}(u; k), \end{array} \right.$$

para todo  $k \in (0, 1)$  e  $u \in \mathbb{R}$ . Além disso,

$$\operatorname{sn}(0) = 0, \quad \operatorname{cn}(0) = 1, \quad \operatorname{sn}(K) = 1, \quad \operatorname{cn}(K) = 0,$$

e

$$\operatorname{sn}(u; 0) = \sin(u), \quad \operatorname{cn}(u; 0) = \cos(u), \quad \operatorname{sn}(u; 1) = \tanh(u), \quad \operatorname{cn}(u; 1) = \operatorname{sech}(u).$$

Finalmente, tem-se as fórmulas derivadas,

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn}(u) = \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u), \quad \frac{d}{du} \operatorname{cn}(u) = -\operatorname{sn}(u) \operatorname{dn}(u), \quad \frac{d}{du} \operatorname{dn}(u) = -k^2 \operatorname{cn}(u) \operatorname{sn}(u).$$

## 1.4 Propriedades analíticas do discriminante.

Nesta seção apresentaremos a função discriminante  $\Delta$  bem como alguns resultados importantes relacionados a tais funções. Temos, por exemplo, que a função  $\Delta$  é uma função analítica inteira. Considere a equação

$$y'' + [\lambda + Q(x)]y = 0, \tag{1.4}$$

onde  $Q(x)$  é contínua e periódica com período minimal  $L = \pi$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Isto é, para todo  $x$  temos,

$$Q(x + \pi) = Q(x) \tag{1.5}$$

e se  $p$  é um número tal que  $0 < p < \pi$ , então existe um intervalo minimal  $I$  tal que  $Q(x + p) \neq Q(x) \forall x \in I$ . A equação (1.4) é denominada equação de Hill. Pela teoria de equações diferenciais ordinárias temos que (1.4) possui duas soluções continuamente diferenciáveis  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  que são univocamente determinadas pelas condições,

$$y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \quad y_2(0, \lambda) = 0 \quad \text{e} \quad y_2'(0, \lambda) = 1. \tag{1.6}$$

As condições dadas em (1.6) são chamadas condições normalizadas referentes a equação (1.4).

Neste contexto definimos a função  $\Delta$ .

**Definição 1.13.** *Seja  $y_1(x, \lambda)$  e  $y_2(x, \lambda)$  as soluções de (1.4) univocamente determinadas pelas condições iniciais (1.6). Então, a função discriminante denotada por  $\Delta$  é definida por*

$$\Delta(\lambda) = y_1(\pi, \lambda) + y_2'(\pi, \lambda).$$

Exibimos agora um resultado que garante que o discriminante é uma função analítica inteira e que possui infinitos zeros.

**Teorema 1.14.** *A função*

$$\Delta(\lambda) = y_1(\pi, \lambda) + y_2'(\pi, \lambda),$$

*é uma função analítica inteira de variável complexa  $\lambda$ . Sua ordem de crescimento para  $|\lambda| \rightarrow +\infty$  é exatamente  $\frac{1}{2}$ , isto é existe uma constante positiva  $M$  tal que,*

$$|\Delta(\lambda)| e^{-M\sqrt{|\lambda|}} \quad \text{é limitada, } \forall \lambda \quad (1.7)$$

*e uma constante positiva  $m$  tal que,  $\lambda$  real e  $\lambda \rightarrow -\infty$  implica que*

$$|\Delta(\lambda)| e^{-m\sqrt{|\lambda|}} \rightarrow +\infty. \quad (1.8)$$

**Demonstração:** Uma demonstração pode ser encontrada em [38] (ver também [39]).  $\square$

**Corolário 1.15.** *As funções,*

$$\Delta(\lambda) + 2 \quad \text{e} \quad \Delta(\lambda) - 2,$$

*possuem um número infinito de zeros .*

**Demonstração:** Ver [38].  $\square$

## 1.5 Resultados auxiliares.

### 1.5.1 Alternativa de Fredholm.

Nesta seção apresentaremos a Alternativa de Fredholm, que sob certas condições garante a existência de soluções  $L$ -periódicas para sistemas lineares não homogêneos da forma

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad (1.9)$$

onde  $A(t)$  é uma matriz,  $n \times n$ , contínua e  $A(t)$ ,  $f(t)$  são funções  $L$ -periódicas com relação a variável  $t$ . Os conceitos neste tópico podem ser encontrados em [26].

**Definição 1.16.** *Seja  $A(t)$  uma matriz,  $n \times n$ , contínua. O sistema linear,*

$$\dot{y} = -A(t)^t y(t)$$

onde  $A(t)^t$  denota a matriz transposta da matriz  $A(t)$ , é chamado de equação adjunta de

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (1.10)$$

A equação adjunta também pode ser escrita na forma

$$\dot{y} = -yA(t), \quad (1.11)$$

com  $y$  designando um vetor linha. Se  $X(t)$  é a matriz principal de (1.10), então  $Y(t) = X(t)^{-1}$  é a matriz principal de (1.11). De fato, derivando  $y = y_0 X^{-1}(t)$  obtemos,

$$\dot{y} = -y_0 X^{-1} \dot{X} X^{-1} = -y_0 X^{-1} A = -yA.$$

Analisemos então a existência de soluções  $L$ -periódicas para (1.9), isto é, soluções de período minimal  $L$  para (1.9). No caso homogêneo, isto é,  $f \equiv 0$ , tem-se o seguinte resultado.

**Lema 1.17.** *Se  $A(t)$  é  $L$ -periódica, então os sistemas homogêneos (1.10) e (1.11) têm o mesmo número de soluções linearmente independentes.*

**Demonstração:** Ver [26].

□

**Teorema 1.18** (*Alternativa de Fredholm*). *O sistema (1.9) tem solução  $L$ -periódica se, e somente se, a condição de ortogonalidade*

$$\int_0^L y(t)f(t)dt = 0$$

*está satisfeita para toda solução  $L$ -periódica de (1.11). O integrando  $y(t)f(t)$  é o produto usual da matriz linha  $y(t)$  pela matriz coluna  $f(t)$ .*

**Demonstração:** Ver [26]. □

### 1.5.2 Teorema Espectral para o operador $\mathcal{L}_c$ .

Antes de enunciarmos e demonstrarmos o Teorema Espectral para o operador  $\mathcal{L}_c$ , veremos a definição de espectro e resolvente de um operador  $A$ , definido num domínio  $D(A) \subset H$ , onde  $H$  é um espaço de Hilbert. Enunciaremos o resultado que caracteriza o espectro de  $A$  quando este é um operador autoadjunto e alguns outros resultados que serão utilizados.

**Definição 1.19** (*Resolvente e Espectro*). *Seja  $A : D(A) \rightarrow H$  um operador fechado com domínio  $D(A) \subset H$ . Os conjuntos*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ possui inversa limitada e } \mathcal{R}(A - \lambda I) = H\},$$

*onde  $\mathcal{R}(A - \lambda I)$  denota a imagem da aplicação  $A - \lambda I$  e  $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ , são chamados respectivamente o conjunto resolvente de  $A$  e o conjunto espectro de  $A$ . Se  $\lambda \in \rho(A)$ ,  $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$  é chamado de operador resolvente de  $A$  em  $\lambda$ .*

O espectro de  $A$  pode ser dividido em três partes disjuntas.

(i) Dizemos que  $\lambda \in \sigma_p$  (*espectro pontual*) de  $A$ , se  $(A - \lambda I)\nu = 0$  possui solução não trivial. Em outras palavras  $\lambda \in \sigma_p$  se  $\lambda$  é um autovalor associado ao operador  $A$ .

(ii) Dizemos que  $\lambda \in \sigma_c$  (*espectro contínuo*) de  $A$  se o operador  $(A - \lambda I)^{-1}$  existe, está densamente definido em  $H$ , porém não é limitado.

(iii) Dizemos que  $\lambda \in \sigma_r$  (*espectro residual*) de  $A$  se  $(A - \lambda I)^{-1}$  existe, porém não está densamente definido em  $H$ , podendo  $(A - \lambda I)^{-1}$  ser limitado ou não.

**Teorema 1.20** (*Espectro de operador autoadjunto*). *Seja  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  um operador autoadjunto com domínio  $D(A)$  denso em  $H$ . Então,*

(i)  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ .

(ii)  $A$  não possui espectro residual. Assim  $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$ .

**Demonstração:** Ver [14] □

Neste contexto, definimos também o espectro essencial do operador  $A$  citado acima.

**Definição 1.21** (*Espectro Essencial*). *Seja  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  um operador linear.*

(a)  $\lambda \in \sigma(A)$  é não essencial se, e somente se as seguintes condições são satisfeitas,

(1)  $\lambda$  é um autovalor isolado de  $\sigma(A)$ ,

(2) o Núcleo  $\mathcal{N}(A - \lambda I)$  possui dimensão finita.

Neste caso chamamos este conjunto de  $\lambda$ 's de espectro discreto de  $A$  e o denotamos por  $\sigma_{disc}(A)$ .

(b) O complementar do conjunto  $\sigma_{disc}(A)$  no  $\sigma(A)$  é chamado de espectro essencial de  $A$ . Denotamos este conjunto por  $\sigma_{ess}(A)$ . Assim,  $\sigma(A) = \sigma_{disc}(A) \cup \sigma_{ess}(A)$ .

**Teorema 1.22** (*Invariância do Espectro Essencial*). *Sejam  $A$  e  $B$ , operadores autoadjuntos sobre um espaço de Hilbert  $H$ , tal que*

(1)  $D(A) = D(B)$ ,

(2)  $A - B$  é um operador compacto de  $D(A)$  em  $H$ , onde  $D(A)$  é considerado com a norma do gráfico gerado por  $A$ ,  $\|u\|_A^2 = \|A(u)\|^2 + \|u\|^2$  (note que  $D(A)$  com a norma do gráfico  $\|\cdot\|_A$  é um espaço de Banach, pois  $A$  é fechado).

Então,  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$ .

**Demonstração:** Ver [14]. □

Vamos agora enunciar e demonstrar o Teorema Espectral para o operador  $\mathcal{L}_c$ .

**Teorema 1.23.** *O operador  $\mathcal{L}_c$  definido por*

$$\mathcal{L}_c(y) = -y'' + (c - \varphi^p)y \tag{1.12}$$

é fechado, não limitado e autoadjunto sobre  $L_{per}^2([0, L])$ . Seu espectro consiste em um número enumerável infinito de autovalores (que se acumulam no infinito), isto é, tem-se  $\sigma_{ess}(\mathcal{L}_c) = \emptyset$  (onde  $\sigma_{ess}(\mathcal{L}_c)$  denota o espectro essencial do operador  $\mathcal{L}_c$ ). Em particular,  $\mathcal{L}_c$  tem o autovalor 0 com a autofunção  $\varphi'_c$ .

**Demonstração:** Suponhamos que nossas funções periódicas tenham período  $L$ . Note que o operador  $\mathcal{L}_c$  definido em  $H_{per}^2([0, L])$  é um operador fechado e autoadjunto sobre  $L_{per}^2([0, L])$ . De fato, o operador  $\mathcal{L}_c$ , pode ser escrito na forma,

$$\mathcal{L}_c = S + A,$$

onde  $S = -\frac{d^2}{dx^2} + c$  e  $A = -\varphi_c^p$ . Note que, para todo  $u, v \in D(S)$ , temos

$$\begin{aligned} (S(u), v)_{L_{per}^2} &= (-u'' + cu, v)_{L_{per}^2} \\ &= \int_0^L -u''(x)v(x)dx + \int_0^L cu(x)v(x)dx \\ &= \int_0^L -u(x)v''(x)dx + \int_0^L cu(x)v(x)dx \\ &= (u, -v'' + cv)_{L_{per}^2} = (u, S(v))_{L_{per}^2}, \end{aligned}$$

isto é,  $S$  é simétrico. Além disso, o problema  $-\frac{d^2}{dx^2}u + cu = f$  sempre admite solução, para toda  $f \in L_{per}^2([0, L])$ , ou seja,  $S$  é sobrejetor. Assim, pela Proposição 1.10, o operador  $S$  é autoadjunto. Por outro lado, observe que  $A$  é simétrico e  $D(S) = H_{per}^2([0, L]) \subset L_{per}^2([0, L]) = D(A)$ . Ademais, como  $\varphi_c^p$  é periódica, então  $\varphi_c^p$  é limitada e consequentemente  $A$  é limitado. Portanto, pelo Teorema 1.11,  $S + A$  é autoadjunto e assim  $\mathcal{L}_c$  é autoadjunto. Podemos também, usar  $\mathcal{L}_c$  na forma  $\mathcal{L}_c = S + A$ , para garantir que  $\mathcal{L}_c$  é um operador fechado. Com efeito, como  $A$  é limitado e  $S$  é fechado, temos pelo Teorema 1.9 que  $\mathcal{L}_c$  é fechado. Poderíamos ter usado que  $\mathcal{L}_c$  é autoadjunto, neste caso, a Proposição 1.7 garantiria que  $\mathcal{L}_c$  é fechado.

O operador  $\mathcal{L}_c$  possui espectro essencial vazio, isto é,  $\sigma_{ess}(\mathcal{L}_c) = \emptyset$ . De fato, para  $S = -\frac{d^2}{dx^2} + c$ , sabemos que  $\sigma_{ess}(S) = \emptyset$ . Por outro lado, considerando  $A = \mathcal{L}_c$ , obtemos  $T = A - S : D(A) = H_{per}^2([0, L]) \longrightarrow L_{per}^2([0, L])$  tal que,  $T(u) = -\varphi_c^p u$ . Ademais, sendo  $u_n \longrightarrow u$  em  $H_{per}^2([0, L])$ ,  $H_{per}^2([0, L]) \xrightarrow{c} L_{per}^2([0, L])$  e  $\varphi_c^p$  limitado, existe uma subsequência  $u_{n_k}$  tal que,

$$\varphi_c^p u_{n_k} \longrightarrow \varphi_c^p u \quad \text{em } L_{per}^2([0, L]), \text{ se } k \longrightarrow +\infty.$$

Logo,  $T$  é compacto. Portanto, como  $D(A) = D(S)$  e  $T$  é compacto, temos pelo Teorema 1.22 que  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(S)$ , de onde encontramos que,  $\sigma_{ess}(\mathcal{L}_c) = \emptyset$ .

Vamos provar agora que o espectro  $\mathcal{T} := -\frac{d^2}{dx^2} + c$  é um conjunto infinito enumerável de autovalores satisfazendo

$$\gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots, \quad (1.13)$$

onde  $\gamma_n \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . De fato, pelo Teorema de Lax-Milgran o operador  $-\frac{d^2}{dx^2} + c$  é inversível, deste modo seja  $R_c := \left(-\frac{d^2}{dx^2} + c\right)^{-1}$ , cujo símbolo é  $\frac{1}{c+n^2}$  para  $n \in \mathbb{Z}$ . Como  $\frac{1}{c+n^2} \in l^2(\mathbb{Z})$  então pelo Teorema de Plancherel existe um único  $G_c \in L^2_{per}([0, L])$  tal que  $\widehat{G}_c(n) = \frac{1}{c+n^2}$ . Devido a este fato tem-se a ação

$$R_c f(x) = \frac{1}{L} \int_0^L G_c(x-y) f(y) dy,$$

definida em  $L^2_{per}([0, L])$ . Como o intervalo  $[0, L]$  é limitado e

$$\int_0^L \int_0^L |G(x-y)|^2 dx dy = L \|G\|_{L^2_{per}}^2$$

temos que  $H_c(x, y) := G_c(x-y) \in L^2_{per}([0, L]) \times L^2_{per}([0, L])$ , isto é, o núcleo  $H_c(x, y) := G_c(x-y) \in L^2_{per}([0, L] \times [0, L])$  e assim, obtemos que  $R_c$  é um operador Hilbert-Schmidt sobre  $L^2_{per}([0, L])$  (ver [33]). Portanto  $R_c$  é um operador compacto sobre  $L^2_{per}([0, L])$  para todo  $c > 0$  (ver [1]). Desta maneira, obtemos (1.13).

O próximo passo é mostrar que existe  $\mu_1$  suficientemente grande de modo que  $\mathcal{M} := (\mathcal{L}_c + \mu_1)^{-1}$  existe e define um operador limitado, positivo, autoadjunto e compacto. Com efeito, primeiramente, temos que  $\mathcal{L}_c$  é limitado por baixo, isto é, se  $f \in D(\mathcal{L}_c)$  tem-se,  $\langle \mathcal{L}_c f, f \rangle \geq -\beta \langle f, f \rangle$ , onde  $\beta = \|\varphi_c\|_{L^\infty_{per}} + c$ . Então, podemos escolher um  $\mu_1$  tal que  $\mathcal{L}_c + \mu_1 > 0$ , isto é,  $\mathcal{M}$  é positivo. Denotemos,  $\mu := \mu_1$  somente por conveniência. Seja  $\nu$  um número positivo tal que  $\nu + \varphi_c - c > 0$  e  $\nu + \mu > 0$ . Logo, para  $\mu > 0$  tem-se,  $f = (\mathcal{L}_c + \mu)g \Leftrightarrow \left(I - \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)\right)g = \Upsilon f$  onde  $-\frac{d^2}{dx^2}g = R_{\mu+\nu}[(\nu + \varphi_c - c)g]$  e  $\Upsilon = R_{\nu+\mu}$ . Denotaremos  $h = \nu + \varphi_c - c$ . Agora, do Teorema de Parseval, segue que

$$\left\| \frac{d^2}{dx^2} g \right\|_{L^2_{per}} \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{n^2 + \nu + \mu} \right\} \|h\|_{L^\infty_{per}} \|g\|_{L^2_{per}}.$$

Então, podemos escolher,  $\mu$  tal que  $\left\| -\frac{d^2}{dx^2} \right\|_{B(L^2_{per})} < 1$  e  $\mathcal{L}_c + \mu > 0$ . Então,  $I - \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)$  é invertível e com isto  $g = \left(I - \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)\right)^{-1} \Upsilon f$ . Assim escrevemos  $\mathcal{M} = (\mathcal{L}_c + \mu)^{-1} = \left(I - \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)\right)^{-1} \Upsilon$ . Sendo  $\Upsilon$  um operador compacto e  $\left(I - \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)\right)^{-1} \in$

$B(L^2_{per}([0, L]))$  temos que  $\mathcal{M}$  é um operador compacto. Então existe uma base ortonormal  $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$  de  $L^2_{per}([0, L])$  constituída de autofunções de  $\mathcal{M}$  com autovalores não nulos  $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$  satisfazendo,

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \dots > 0,$$

e  $\mu_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Como,  $\mathcal{M}\varphi_k = \mu_k\varphi_k \in D(\mathcal{L}_c + \mu)$  obtemos

$$\mathcal{L}_c\varphi_k = \left(\frac{1}{\mu_k} - \mu\right)\varphi_k := \lambda_k\varphi_k.$$

Então, existe uma sequência de autovalores de  $\mathcal{L}_c$ ,  $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ , satisfazendo

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots,$$

e  $\lambda_k \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Este argumento mostra o desejado.

□



# Teoria Floquet

Neste capítulo apresentaremos um breve estudo da teoria Floquet. Os principais resultados são o Teorema de Floquet e o Teorema da Oscilação. Esses resultados serão de grande utilidade para a teoria desenvolvida nos capítulos seguintes.

## 2.1 Teorema de Floquet.

Seja  $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) uma função de variável real  $x$  definida para todos os valores de  $x$ .

Assumimos que  $Q(x)$  é contínua e periódica com período minimal  $\pi$ . Isto é para todo  $x$  temos,

$$Q(x + \pi) = Q(x). \quad (2.1)$$

Se  $Q(x)$  possui as propriedades mencionadas acima, então conforme [30] a equação diferencial,

$$y'' + Q(x)y = 0, \quad (2.2)$$

possui duas soluções continuamente diferenciáveis  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  as quais são univocamente determinada pelas condições.

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0 \quad \text{e} \quad y_2'(0) = 1. \quad (2.3)$$

As soluções da equação (6.2) juntamente com as condições (2.3) são denominadas soluções normalizadas de (6.2).

Antes de estabelecermos o Teorema de Floquet, devemos definir a equação característica e o expoente característico associado à (6.2). Neste contexto, a equação característica é a equação

$$\rho^2 - [y_1(\pi) + y_2'(\pi)]\rho + 1 = 0, \quad (2.4)$$

e o expoente característico é o número  $\alpha$  o qual satisfaz as equações

$$e^{i\alpha\pi} = \rho_1 \quad e^{-i\alpha\pi} = \rho_2, \quad (2.5)$$

onde  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são as raízes da equação característica (6.3).

A partir destas definições, podemos observar o seguinte fato,

$$2\cos(\alpha\pi) = y_1(\pi) + y_2'(\pi). \quad (2.6)$$

Com efeito, substituindo (6.4) em (6.3) temos,

$$\begin{cases} e^{2i\alpha\pi} - (y_1(\pi) + y_2'(\pi))e^{i\alpha\pi} + 1 = 0 \\ e^{-2i\alpha\pi} - (y_1(\pi) + y_2'(\pi))e^{-i\alpha\pi} + 1 = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Subtraindo em (6.5) uma equação da outra temos

$$2i\sin(2\alpha\pi) - (y_1(\pi) + y_2'(\pi))e^{i\alpha\pi} + (y_1(\pi) + y_2'(\pi))e^{-i\alpha\pi} = 0,$$

ou seja,

$$2i(2\sin(\alpha\pi)\cos(\alpha\pi)) + (y_1(\pi) + y_2'(\pi))(e^{-i\alpha\pi} - e^{i\alpha\pi}) = 0. \quad (2.8)$$

Temos agora três casos a considerar,  $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha = a + bi$  com  $b \neq 0$  e  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

Se  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , então  $e^{-i\alpha\pi} - e^{i\alpha\pi} = 2i\sin(\alpha\pi) \neq 0$ , assim de (2.8) temos,

$$y_1(\pi) + y_2'(\pi) = \frac{-4i\sin(\alpha\pi)\cos(\alpha\pi)}{e^{-i\alpha\pi} - e^{i\alpha\pi}} = \frac{-4i\sin(\alpha\pi)\cos(\alpha\pi)}{-2i\sin(\alpha\pi)} = 2\cos(\alpha\pi).$$

Se  $\alpha = n \in \mathbb{Z}$  então  $e^{i\alpha\pi} = e^{in\pi} = e^{-in\pi} = \pm 1$ , assim (6.3) e (6.4) implicam que (2.6) é válido.

Se  $\alpha = a + bi$  com  $b \neq 0$  então  $e^{-i\alpha\pi} - e^{i\alpha\pi} \neq 0$ . De fato, suponha que  $e^{-i\alpha\pi} - e^{i\alpha\pi} = 0$  então,

$$e^{-ia\pi}e^{b\pi} = e^{ia\pi}e^{-b\pi}.$$

Multiplicando esta equação por  $e^{-ia\pi}e^{b\pi}$  temos,

$$(\cos(2a\pi) - i\sin(2a\pi))e^{2b\pi} = 1$$

e separando a parte real e a imaginária obtemos,

$$\begin{cases} \cos(2a\pi)e^{2b\pi} = 1 \\ \sin(2a\pi)e^{2b\pi} = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

A segunda equação de (2.9) fornece que  $2a$  é um inteiro. Mas se  $2a$  for um inteiro então da primeira equação de (2.9) temos que  $e^{2b\pi} = 1$ , isto é  $b = 0$  o que é contradição. Portanto  $e^{-i\alpha\pi} - e^{i\alpha\pi} \neq 0$  e como no caso que  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  temos (2.6). Ademais, podemos observar que  $\rho_1\rho_2 = e^{i\alpha\pi}e^{-i\alpha\pi} = 1$ .

**Teorema 2.1.** (*Teorema de Floquet.*)

(i) Se as raízes  $\rho_1$  e  $\rho_2$  da equação característica (6.3) são distintas, então a equação de Hill (6.2) possui duas soluções linearmente independentes,

$$f_1(x) = e^{i\alpha x}P_1(x), \quad f_2(x) = e^{-i\alpha x}P_2(x),$$

onde  $P_1(x)$  e  $P_2(x)$  são periódicas com período  $\pi$ .

(ii) Se  $\rho_1 = \rho_2$ , então a equação (6.2) tem uma solução não trivial a qual é periódica com período  $\pi$  (quando  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ) ou  $2\pi$  (quando  $\rho_1 = \rho_2 = -1$ ). Se  $p(x)$  for uma solução periódica e  $y(x)$  for outra solução linearmente independente de  $p(x)$ .

Então

$$y(x + \pi) = \rho_1 y(x) + \theta p(x), \quad \text{onde } \theta \text{ é constante.} \quad (2.10)$$

Ainda,  $\theta = 0$  é equivalente a

$$y_1(\pi) + y_2'(\pi) = \pm 2, \quad y_2(\pi) = 0 \quad e \quad y_1'(\pi) = 0.$$

**Demonstração:** (i) Caso  $\rho_1 \neq \rho_2$ . Se  $y(x)$  é uma solução de (6.2), então sendo a equação (6.2) autônoma, temos que  $y(x + \pi)$  é também uma solução de (6.2). Em particular  $y_1(x + \pi)$  e  $y_2(x + \pi)$  são soluções de (6.2). Como  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  formam uma base para o conjunto de todas as soluções de (6.2), é possível expressar  $y_1(x + \pi)$  e  $y_2(x + \pi)$  como combinação linear de  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$ , logo,

$$\begin{cases} y_1(x + \pi) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \\ y_2(x + \pi) = c_3 y_1(x) + c_4 y_2(x) \end{cases} \quad (2.11)$$

Pela primeira equação de (2.11) temos,

$$y_1(\pi) = y_1(0 + \pi) = c_1 y_1(0) + c_2(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1,$$

isto é,

$$y_1(\pi) = c_1.$$

Por outro lado, derivando a primeira equação obtemos,

$$y_1'(x + \pi) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x),$$

e considerando  $x = 0$  obtém-se,

$$y_1'(0) = y_1'(0 + \pi) = c_1 y_1'(0) + c_2 y_2'(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = c_2,$$

isto é,

$$c_2 = y_1'(\pi).$$

Desta forma,

$$y_1(x + \pi) = y_1(\pi)y_1(x) + y_1'(\pi)y_2(x).$$

Através de um raciocínio análogo, tem-se

$$y_2(x + \pi) = y_2(\pi)y_1(x) + y_2'(\pi)y_2(x).$$

Portanto o sistema (2.11) assume a forma,

$$\begin{cases} y_1(x + \pi) = y_1(\pi)y_1(x) + y_1'(\pi)y_2(x) \\ y_2(x + \pi) = y_2(\pi)y_1(x) + y_2'(\pi)y_2(x). \end{cases} \quad (2.12)$$

Assuma agora que  $y \not\equiv 0$  é uma solução de (6.2) tal que,

$$y(x + \pi) = \rho y(x), \quad (2.13)$$

para alguma constante  $\rho$ . Se  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ , resulta de (2.12) que  $c_1$  e  $c_2$  devem satisfazer o seguinte sistema linear,

$$\begin{cases} (y_1(\pi) - \rho)c_1 + y_2(\pi)c_2 = 0 \\ y_1'(\pi)c_1 + (y_2'(\pi) - \rho)c_2 = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \rho y(x) = y(x + \pi) &= c_1 y_1(x + \pi) + c_2 y_2(x + \pi) \\ &= c_1 (y_1(\pi)y_1(x) + y_1'(\pi)y_2(x)) + c_2 (y_2(\pi)y_1(x) + y_2'(\pi)y_2(x)) \\ &= c_1 y_1(\pi)y_1(x) + c_1 y_1'(\pi)y_2(x) + c_2 y_2(\pi)y_1(x) + c_2 y_2'(\pi)y_2(x), \end{aligned}$$

e como  $y = c_1y_1 + c_2y_2$  temos,

$$\rho(c_1y_1(x) + c_2y_2(x)) = (c_1y_1(\pi) + c_2y_2(\pi))y_1(x) + (c_1y_1'(\pi) + c_2y_2'(\pi))y_2(x).$$

Então,

$$(c_1y_1(\pi) + c_2y_2(\pi) - \rho c_1)y_1(x) + (c_1y_1'(\pi) + c_2y_2'(\pi) + \rho c_2)y_2(x) = 0 \quad (2.15)$$

Assim, pelo fato de  $y_1$  e  $y_2$  serem linearmente independentes, segue por (2.15) o desejado em (2.14).

Reciprocamente, se (2.14) é satisfeito então  $y$  satisfaz (2.13). Agora uma condição necessária e suficiente para (2.14) possuir uma solução  $c_1, c_2$  não trivial é

$$\begin{vmatrix} y_1(\pi) - \rho & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) - \rho \end{vmatrix} = 0. \quad (2.16)$$

Por um lado, observe que para todo  $x$ , o Wronskiano de  $y_1$  com  $y_2$  é 1. De fato por (2.3) temos,

$$W(y_1, y_2)(0) = y_1(0)y_2'(0) - y_2(0)y_1'(0) = 1 \neq 0.$$

Então pela fórmula de Abel Liouville temos que o Wronskiano num ponto arbitrário  $x$  é dado por,

$$W(y_1, y_2)(x) = W(y_1, y_2)(0)e^{-\int_0^x p(s)ds},$$

onde  $p(x)$  é o coeficiente do termo  $y'$  da EDO  $y'' + py' + y = f$ , que no nosso caso é zero.

Desta forma, concluí-se,

$$W(y_1, y_2)(x) = W(y_1, y_2)(0) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, (2.16) é dado por,

$$\begin{aligned} 0 &= (y_1(\pi) - \rho)(y_2'(\pi) - \rho) - y_1'(\pi)y_2(\pi) \\ &= y_1(\pi)y_2'(\pi) - \rho(y_1(\pi) + y_2'(\pi)) + \rho^2 - y_1'(\pi)y_2(\pi) \\ &= \rho^2 - \rho(y_1(\pi) + y_2'(\pi)) + (y_1(\pi)y_2'(\pi) - y_2(\pi)y_1'(\pi)) \\ &= \rho^2 - \rho(y_1(\pi) + y_2'(\pi)) + W(y_1, y_2)(x_0) \\ &= \rho^2 - \rho(y_1(\pi) + y_2'(\pi)) + 1. \end{aligned}$$

Portanto, (2.16) é idêntica a equação característica (6.3).

Deste modo, se  $\rho = \rho_1$  é uma raiz de (2.16) podemos encontrar  $c_1$  e  $c_2$  tal que  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \neq 0$  com  $y$  satisfazendo (2.13), isto é,  $y(x + \pi) = \rho y(x)$ . Sendo (2.13) satisfeito, vamos definir

$$P_1(x) = e^{-i\alpha x} y(x).$$

Então, como  $P_1 \neq 0$ , pois  $y \neq 0$  temos,

$$\begin{aligned} P_1(x + \pi) &= e^{-i\alpha(x+\pi)} y(x + \pi) \\ &= e^{-i\alpha x} e^{-i\alpha\pi} y(x + \pi) \\ &= e^{-i\alpha x} e^{-i\alpha\pi} \rho y(x). \end{aligned}$$

Sendo  $\rho = \rho_1 = e^{i\alpha\pi}$  temos,

$$P_1(x + \pi) = e^{-i\alpha x} e^{-i\alpha\pi} e^{i\alpha\pi} y(x) = e^{-i\alpha x} y(x) = P_1(x).$$

Daí,  $P_1$  é periódica com período  $\pi$ . Além disso, podemos escrever  $y$  como sendo

$$y(x) = e^{+i\alpha x} e^{-i\alpha x} y(x) = e^{i\alpha x} P_1(x).$$

Associado a esse  $\rho_1$ , obtemos assim uma solução de (6.2), dada por,

$$f_1(x) = e^{i\alpha x} P_1(x)$$

onde  $P_1$  é periódica com período  $\pi$ .

Suponha que (2.16) possua uma segunda solução  $\rho = \rho_2 \neq \rho_1$ . Assim, por um procedimento similar ao feito no caso  $\rho = \rho_1$ , definimos  $P_2(x) = e^{i\alpha x} y(x)$ , donde obtemos

$$f_2(x) = e^{-i\alpha x} P_2(x),$$

com  $P_2$  periódica com período  $\pi$  e  $P_2 \neq 0$ . Como  $P_1 \neq 0$  e  $P_2 \neq 0$ , temos da definição de  $f_1$  e  $f_2$  que,

$$f_1 \neq 0 \quad \text{e} \quad f_2 \neq 0. \quad (2.17)$$

Contudo, a primeira parte do Teorema de Floquet ainda não está demonstrada. Resta mostrar que  $f_1$  e  $f_2$  são linearmente independentes. Suponha por absurdo que  $f_1$  e  $f_2$  são

linearmente dependentes, então existem constantes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  (não nulas simultaneamente) tais que,

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Sendo  $P_1$  e  $P_2$  periódicas com período  $\pi$  temos,

$$f_1(x + \pi) = e^{i\alpha x} e^{i\alpha\pi} P_1(x + \pi) = \rho_1 e^{i\alpha x} P_1(x) = \rho_1 f_1(x)$$

e

$$f_2(x + \pi) = e^{-i\alpha x} e^{-i\alpha\pi} P_2(x + \pi) = \rho_2 e^{-i\alpha x} P_2(x) = \rho_2 f_2(x).$$

Assim, de (2.18) temos,

$$\lambda_1 \rho_1 f_1(x) + \lambda_2 \rho_2 f_2(x) = \lambda_1 f_1(x + \pi) + \lambda_2 f_2(x + \pi) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

Sendo  $\lambda_1 f_1$  e  $\lambda_2 f_2$  não ambas identicamente nulas, as equações (2.18) e (2.19) são compatíveis somente se  $\rho_1 = \rho_2$ . Com efeito, as equações (2.18) e (2.19) nos fornecem o seguinte sistema,

$$\begin{cases} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0 \\ \lambda_1 \rho_1 f_1(x) + \lambda_2 \rho_2 f_2(x) = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Se  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$ , multiplicando a primeira equação do sistema (2.20) por  $\rho_2$  obtemos,

$$\begin{cases} \lambda_1 \rho_2 f_1(x) + \lambda_2 \rho_2 f_2(x) = 0 \\ \lambda_1 \rho_1 f_1(x) + \lambda_2 \rho_2 f_2(x) = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Subtraindo as equações em (2.21) temos,

$$\lambda_1 f_1(x) (\rho_2 - \rho_1) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como  $\lambda_1 \neq 0$  e de (2.17) tem-se  $f_1 \not\equiv 0$ ,  $\exists x_0$  tal que  $f_1(x_0) \neq 0$ . Assim,  $\lambda_1 f_1(x_0) (\rho_1 - \rho_2) = 0$  e sendo  $\lambda_1 f_1(x_0) \neq 0$ , segue que  $\rho_2 - \rho_1 = 0$  e então  $\rho_2 = \rho_1$ . Logo, temos uma contradição, pois supomos inicialmente que  $\rho_1 \neq \rho_2$ .

Se  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 = 0$ , temos da primeira equação de (2.20) que  $f_1 \equiv 0$ , porém isto é contradição, pois vimos em (2.17) que  $f_1 \not\equiv 0$ . Da mesma forma, se  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$  temos da primeira equação de (2.20) que  $f_2 \equiv 0$ , porém isto também é contradição, já que vimos em (2.17) que  $f_2 \not\equiv 0$ . Consequentemente, temos que  $\{f_1, f_2\}$  é LI. Este argumento mostra o teorema para  $\rho_1 \neq \rho_2$ .

Como  $\rho_1\rho_2 = 1$ , então ou  $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$  ou pelo menos um dos valores  $|\rho_1|$  ou  $|\rho_2|$  excede 1. No primeiro caso temos que todas as soluções de (6.2) são limitadas e no segundo caso temos que existem soluções de (6.2) ilimitadas, desde que  $\rho_1 \neq \rho_2$  ( $\alpha$  sendo real ou não, ver Corolário 2.2 e Corolário 2.3 ou Teste de Estabilidade).

(ii) Consideremos o caso  $\rho_1 = \rho_2$ . Pelo fato de  $\rho_1$  ser solução de (6.3) podemos construir uma solução  $y_1^*(x)$  de (6.2) tal que,

$$y_1^*(x + \pi) = \rho_1 y_1^*(x). \quad (2.22)$$

Como  $\rho_1 = \rho_2$  e  $\rho_1\rho_2 = 1$  temos que  $\rho_1 = \pm 1$  e assim  $y_1^*$  é periódica com período  $\pi$  ou  $2\pi$ , com efeito, se  $\rho_1 = 1$ , temos de (2.22) que  $y_1^*$  é periódica com período  $\pi$  e se  $\rho_1 = -1$  então,

$$y_1^*(x + 2\pi) = y_1^*(x + \pi + \pi) = -y_1^*(x + \pi) = -(-y_1^*(x)) = y_1^*(x)$$

e portanto  $y_1^*(x)$  é periódica com período  $2\pi$ . Observe o seguinte, se  $\rho$  é raiz de (6.3) (e  $\rho \neq 0$ ) temos,

$$\frac{\rho^2 + 1}{\rho} = y_1(\pi) + y_2'(\pi).$$

Assim, supondo  $\rho = \pm 1$  vem que

$$y_1(\pi) + y_2'(\pi) = \frac{2}{\rho} = 2\rho. \quad (2.23)$$

Com o intuito de encontrar as propriedades da solução  $y_2^*$  a qual é LI com  $y_1^*$  assumimos primeiramente que  $y_2(\pi) \neq 0$ . Então, podemos escolher por (2.14) e (6.3),  $c_1 := y_2(\pi)$  obtendo  $c_2 = (\rho_1 - y_1(\pi))$  e  $y_1^*$  como sendo,

$$\begin{cases} y_1^*(x) = y_2(\pi)y_1(x) + [\rho_1 - y_1(\pi)]y_2(x) \\ y_2^*(x) = y_2(x). \end{cases}$$

Pela definição de  $c_1$ , temos que  $c_1$  e  $c_2$  satisfazem a primeira equação de (2.14). Porém  $c_1$  e  $c_2$  devem satisfazer a segunda equação de (2.14) para existir  $y_1^*$  tal que  $y_1^*(x + \pi) = y_1(x)$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} y_1'(\pi)c_1 + (y_2'(\pi) - \rho)c_2 &= y_1'(\pi)y_2(\pi) + (y_2'(\pi) - \rho)(\rho - y_1(\pi)) \\ &= y_1'(\pi)y_2(\pi) + \rho(y_2'(\pi) - y_2'(\pi)y_1(\pi) - \rho^2 + \rho y_1(\pi)) \\ &= -W(y_1, y_2)(\pi) - 1 + \rho(y_2'(\pi) + y_1(\pi)), \end{aligned}$$



ou seja,

$$y_1'(\pi)c_1 + (y_2'(\pi) - \rho)c_2 = -2 + \rho(y_2'(\pi) + y_1(\pi)). \quad (2.24)$$

Multiplicando (2.23) por  $\rho$ , obtemos por (2.24)

$$\begin{aligned} y_1'(\pi)c_1 + (y_2'(\pi) - \rho)c_2 &= -2 + 2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma, dada qualquer função  $y_2^*$  LI com  $y_1^*$ , definamos  $y_2 = y_2^*$  e tomemos  $y_2^*$  no sistema fundamental juntamente com  $y_1$ . Observe que  $c_1 = y_2(\pi) \neq 0$  garante que  $y_1$  e  $y_2^*$  sejam LI. Agora de (2.12) e de (2.23) temos,

$$\begin{aligned} y_2^*(x + \pi) = y_2(x + \pi) &= y_2(\pi)y_1(x) + y_2'(\pi)y_2^*(x) \\ &= y_2(\pi)y_1(x) + (2\rho_1 - y_1(\pi))y_2^*(x) \\ &= y_2(\pi)y_1(x) + (\rho_1 + \rho_1 - y_1(\pi))y_2^*(x) \\ &= y_2(\pi)y_1(x) + \rho_1 y_2^*(x) + \rho_1 y_2(x) - y_1(\pi)y_2(x) \\ &= \rho_1 y_2^*(x) + [y_2(\pi)y_1(x) + (\rho_1 - y_1(\pi))y_2(x)] \\ &= \rho_1 y_2^*(x) + y_1^*(x) \\ &= \rho_1 y_2^*(x) + \theta y_1^*(x). \end{aligned}$$

Vamos agora, assumir que  $y_2(\pi) = 0$ . Sendo  $W(y_1, y_2)(\pi) = 1$  temos,

$$y_1(\pi)y_2'(\pi) - y_1'(\pi)y_2(\pi) = 1.$$

Porém,  $y_2(\pi) = 0$  implica que  $y_1(\pi)y_2'(\pi) = 1$ . Então por (2.23), temos o sistema

$$\begin{cases} y_1(\pi)y_2'(\pi) = 1 \\ y_1(\pi) + y_2'(\pi) = \pm 2 = 2\rho_1. \end{cases}$$

Daí,

$$y_1(\pi) = y_2'(\pi) = \rho_1. \quad (2.25)$$

Escolhendo  $y_1^* = y_2$  temos de (2.12), (2.23) e (2.25)

$$\begin{aligned} y_1^*(x + \pi) &= y_2(x + \pi) = \underbrace{y_2(\pi)}_{=0} y_1(x) + y_2'(\pi) y_2(x) = (\rho_1 + \rho_1 - y_1(\pi)) y_2(x) \\ &= \rho_1 y_2(x) + (\rho_1 - y_1(\pi)) y_2(x) = \rho_1 y_2(x) + \underbrace{(y_1(\pi) - y_1(\pi))}_{=0} y_2(x) \\ &= \rho_1 y_1^*(x). \end{aligned}$$

Sendo  $y_2^*$  solução LI com  $y_1^* = y_2$ , podemos definir  $y_1 = y_2^*$  e teremos,

$$\begin{aligned} y_2^*(x + \pi) &= y_1(x + \pi) \\ &= y_1(\pi) y_1(x) + y_1'(\pi) y_2(x) \\ &= \rho_1 y_2^*(x) + y_1'(\pi) y_1^*(x). \end{aligned}$$

Além disso, notemos que o caso  $\theta = 0$  pode ocorrer somente quando  $y_2(\pi) = 0$ , pois se  $y_2(\pi) \neq 0$  vimos que  $\theta = 1$ . Portanto se  $\theta = 0$  então  $y_2(\pi) = 0$ . Por outro lado se  $y_2(\pi) = 0$  temos  $\theta = y_1'(\pi)$ . Logo se  $y_2(\pi) = 0$  e  $y_1'(\pi) = 0$  então  $\theta = 0$ . Estes argumentos provam a seguinte equivalência,

$$\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_2(\pi) = 0 \text{ e } y_1'(\pi) = 0.$$

A afirmação  $y_1(\pi) + y_2'(\pi) = \pm 2$  ocorre do fato de  $\rho_1 = \rho_2 = \pm 1$ . Temos finalmente a prova do Teorema de Floquet.  $\square$

O Teorema de Floquet nos fornece algumas consequências imediatas que nos permitem caracterizar quando algumas soluções de (6.2) são limitadas.

**Corolário 2.2.** *Se  $\rho_1 \neq \rho_2$  e  $\alpha$  é real, então existe um limite superior  $M$  que não depende de  $x$  para o valor absoluto  $|y(x)|$  de toda solução de (6.2).*

**Demonstração:** Seja  $y$  solução de (6.2). Como  $\rho_1 \neq \rho_2$  temos pelo Teorema de Floquet,

$$y = c_3 f_1 + c_4 f_2.$$

Além disso, sendo  $\alpha$  real então  $|e^{i\alpha x}| = |e^{-i\alpha x}| = 1$ . Sendo  $P_1$  e  $P_2$  contínuas e periódicas temos,

$$\begin{aligned} |y(x)| &= |c_3 f_1(x) + c_4 f_2(x)| \leq |c_3 f_1(x)| + |c_4 f_2(x)| \\ &= |c_3 e^{i\alpha x} P_1(x)| + |c_4 e^{-i\alpha x} P_2(x)| = |c_3 P_1(x)| + |c_4 P_2(x)| \leq M, \end{aligned}$$

onde  $M$  não depende de  $x$ . □

**Corolário 2.3.** *Se  $\rho_1 \neq \rho_2$  e  $\alpha$  não é real então existe uma solução não trivial e ilimitada  $y(x)$  de (6.2).*

**Demonstração:** De fato, se  $\alpha$  não é real então existe  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$  tal que,

$$\alpha = a + bi.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} |f_1(x)| &= |e^{i\alpha x} P_1(x)| = |e^{i(a+bi)x} P_1(x)| \\ &= |e^{-bx} e^{iax} P_1(x)| = e^{-bx} |P_1(x)|. \end{aligned}$$

Portanto  $f_1$  é ilimitada e como  $f_1$  é solução de (6.2) temos o desejado. □

**Corolário 2.4.** *Se  $\rho_1 = \rho_2 = \pm 1 = \rho$ , então para toda solução de (6.2) ser limitada é necessário e suficiente que*

$$y_1(\pi) + y_2'(\pi) = \pm 2, \quad y_2(\pi) = 0 \quad e \quad y_1'(\pi) = 0,$$

ou equivalentemente que  $\theta = 0$  (de acordo com o Teorema de Floquet).

**Demonstração:** Suponhamos que toda solução de (6.2) seja limitada, vimos no Teorema de Floquet (quando  $\rho = \rho_1 = \rho_2 = \pm 1$ ) que existe uma solução  $y_1$  de (6.2) tal que  $y_1(x + \pi) = \rho y_1(x)$ . Sendo  $y_2$  outra solução LI com  $y_1$  ela deve satisfazer

$$y_2(x + \pi) = \rho y_2(x) + \theta y_1(x).$$

Assim, para mostrar o desejado, basta mostrar que  $\theta = 0$ . Suponha por absurdo que  $\theta \neq 0$ . Definamos,

$$g_1(x) = y_1(x),$$

onde  $y_1$  satisfaz  $y_1(x + \pi) = \rho y_1(x)$  e

$$g_2 = y_2 - \frac{\theta}{\pi\rho} x g_1(x),$$

onde  $y_2$  é LI com  $y_1$ . A solução  $y_2$  satisfaz a condição (ii) do Teorema de Floquet, isto é,

$$y_2(x + \pi) = \rho y_2(x) + \theta y_1(x).$$

Notemos que  $g_1$  e  $g_2$  são periódicas de período  $\pi$  ou  $2\pi$ . De fato,  $g_1$  é  $\pi$ -periódica ou  $2\pi$ -periódica por definição e  $g_2$  satisfaz,

$$\begin{aligned}
 g_2(x + \pi) &= y_2(x + \pi) - \frac{\theta}{\pi\rho}(x + \pi)g_1(x + \pi) \\
 &= \rho_1 y_2(x) + \theta y_1(x) - \frac{\theta}{\pi\rho}x g_1(x + \pi) - \frac{\theta\pi}{\pi\rho}g_1(x + \pi) \\
 &= \rho y_2(x) + \theta y_1(x) - \frac{\theta}{\pi\rho}x \rho y_1(x) - \frac{\theta\pi}{\pi\rho}\rho y_1(x) \\
 &= \rho(y_2(x) - \frac{\theta x}{\pi\rho}y_1(x)) = \rho g_2(x).
 \end{aligned}$$

Disto segue que  $g_2$  também é periódica com período  $\pi$  ou  $2\pi$ .

Portanto com a condição  $\theta \neq 0$  e  $\rho = \rho_1 = \rho_2$  temos duas soluções de (6.2) dadas por;

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(x) = \frac{1}{\rho}g_1(x) \\ y_2(x) = g_2(x) + \frac{\theta}{\pi\rho}x g_1(x). \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Assim, como  $g_1$ ,  $g_2$  são periódicas e  $\theta \neq 0$ , segue pela segunda equação de (2.26) que  $y_2$  é uma solução ilimitada, o que é contradição pois havíamos assumido inicialmente que todas as soluções de (6.2) são limitadas. Portanto,  $\theta = 0$  e pelo Teorema de Floquet,

$$y_1(\pi) + y_2'(\pi) = \pm 2, \quad y_2(\pi) = 0, \quad y_1'(\pi) = 0.$$

Reciprocamente, se  $y_1(\pi) + y_2'(\pi) = \pm 2$ ,  $y_2(\pi) = 0$  e  $y_1'(\pi) = 0$  temos do fato de  $\rho_1 = \rho_2 = \pm 1$  e  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  serem linearmente independentes que  $y_1(x + \pi) = \pm y_1(x)$  e  $y_2(x + \pi) = \pm y_2(x) + \theta y_1(x)$  com  $\theta = 0$  daí,

$$y_1(x + \pi) = \pm y_1(x) \quad \text{e} \quad y_2(x + \pi) = \pm y_2(x)$$

e portanto todas as soluções de (6.2) são limitadas.  $\square$

Definiremos agora a noção de solução estável para (6.2).

**Definição 2.5.** *Sempre que todas as soluções de (6.2) forem limitadas diremos que elas são estáveis. Caso contrário, diremos que elas são instáveis.*

**Corolário 2.6.** *Se (6.2) possui uma solução periódica não trivial com período  $n\pi$ ,  $n \geq 2$  mas nenhuma solução com período  $\pi$  ou  $2\pi$ , então todas as soluções são periódicas com período  $n\pi$ .*

**Demonstração:** Pelo Teorema de Floquet, vimos se  $\rho_1 = \rho_2$  então existe uma solução de período  $\pi$  ou  $2\pi$ . Logo, se (6.2) não possui nenhuma solução com período  $\pi$  ou  $2\pi$  então  $\rho_1 \neq \rho_2$ . Deste modo, pela parte (i) do Teorema de Floquet temos que toda solução  $y$  de (6.2) é da forma,

$$y(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x). \quad (2.27)$$

Seja  $y$  uma solução não trivial periódica com período  $n\pi$ . Então

$$y(x) = y(x + n\pi) = c_1 a_1 f_1(x) + c_2 a_2 f_2(x), \quad (2.28)$$

onde,  $a_1 = e^{i\alpha n\pi}$  e  $a_2 = e^{-i\alpha n\pi}$ . Assim, por (2.27) e (2.28) temos,

$$(1 - a_1)c_1 f_1 + (1 - a_2)c_2 f_2 \equiv 0.$$

Mas sendo  $f_1$  e  $f_2$  LI tem-se,

$$c_1(a_1 - 1) = 0 \quad \text{e} \quad c_2(a_2 - 1) = 0.$$

Como  $y$  é solução não trivial, então  $c_1$  ou  $c_2$  é não nulo e com isso  $a_1 = 1$  ou  $a_2 = 1$ . Em ambos os casos encontramos que  $n\alpha$  é um inteiro par. Logo pela definição de  $a_1$  e  $a_2$  temos que  $a_1 = a_2 = 1$  e assim para todo  $i = 1, 2$  encontramos,

$$f_i(x + n\pi) = a_i f_i(x) = 1 \cdot f_i(x) = f_i(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Portanto todas as soluções de (6.2) são periódicas com período  $n\pi$ .  $\square$

## 2.2 Teste de estabilidade.

**Teorema 2.7** (*Teste de Estabilidade*). *As soluções de (6.2) são estáveis, se e somente, se  $y_1(\pi) + y_2(\pi)$  é real e*

$$y_1(\pi) + y_2'(\pi) < 2 \quad \text{ou}$$

$$y_1(\pi) + y_2'(\pi) = \pm 2 \quad \text{e} \quad y_2(\pi) = y_1'(\pi) = 0.$$

**Demonstração:** *Caso  $\rho_1 \neq \rho_2$ .*

Sendo  $\rho_1 \neq \rho_2$  então  $\alpha \neq k \forall k \in \mathbb{Z}$ . De fato, se  $\alpha = k$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$  teremos,

$$\rho_1 = e^{ik\pi} = \cos(k\pi) + i \sin(k\pi) = \cos(k\pi) + i \cdot 0 = \cos(k\pi) - i \sin(k\pi) = e^{-ik\pi} = \rho_2,$$

o que não ocorre. Por outro lado, fazendo uso dos Corolários 2.2 e 2.3 temos que a estabilidade de soluções é equivalente ao caso de  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Contudo,  $\alpha \in \mathbb{R}$  se, e somente se  $y_1(\pi) + y_2'(\pi) \in \mathbb{R}$  e  $|y_1(\pi) + y_2'(\pi)| < 2$ . Com efeito, suponha  $\alpha \neq k \forall k \in \mathbb{Z}$  com  $\alpha$  real. Assim,  $2 \cos(\alpha\pi) \in \mathbb{R}$  e como  $y_1(\pi) + y_2'(\pi) = 2 \cos(\alpha\pi)$ , temos que  $y_1(\pi) + y_2'(\pi) \in \mathbb{R}$ . Além disso,  $|y_1(\pi) + y_2'(\pi)| = |2 \cos(\alpha\pi)| < 2$ , pois  $\alpha \neq k \forall k \in \mathbb{Z}$ .

Reciprocamente, supondo  $y_1(\pi) + y_2'(\pi) \in \mathbb{R}$  e  $|y_1(\pi) + y_2'(\pi)| < 2$ . Mostremos que  $\alpha$  é real. De fato, como  $y_1(\pi) + y_2'(\pi) \in \mathbb{R}$  e  $y_1(\pi) + y_2'(\pi) = 2 \cos(\alpha\pi)$ , temos que  $2 \cos(\alpha\pi) \in \mathbb{R}$ . Agora seja  $\alpha = a + bi$  e suponha que  $b \neq 0$ , então

$$\cos(\alpha\pi) = \cos(a\pi + b\pi i) = \cos(a\pi) \cos(b\pi i) - \sin(a\pi) \sin(b\pi i).$$

Por outro lado, note que  $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$  implica

$$\cos(ix) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh(x)$$

e  $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  implica,

$$\sin(ix) = \frac{e^{-x} - e^x}{2i} = i \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = i \sinh(x).$$

Então,

$$\cos(\alpha\pi) = \cos(a\pi) \cosh(b\pi) - i \sin(a\pi) \sinh(b\pi).$$

Sendo  $\cos(\alpha\pi) \in \mathbb{R}$ , segue que  $\sin(a\pi) \sinh(b\pi) = 0$ . Porém  $b \neq 0$  e com isto  $\sinh(b\pi) \neq 0$ , donde  $\sin(a\pi) = 0$  e conseqüentemente  $a \in \mathbb{Z}$ . Disto segue que

$$|y_1(\pi) + y_2'(\pi)| = 2 |\cos(\alpha\pi)| = 2 |\cos(a\pi)| |\cosh(b\pi)| > 2,$$

o que é uma contradição. Portanto  $b = 0$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Portanto se  $\rho_1 \neq \rho_2$ , então toda solução ser estável é equivalente à  $y_1(\pi) + y_2'(\pi)$  ser real e  $|y_1(\pi) + y_2'(\pi)| < 2$ .

Se  $\rho_1 = \rho_2$  já vimos no Corolário 2.4 que estabilidade de toda solução de (6.2) é equivalente à

$$y_1(\pi) + y_2'(\pi) = \pm 2, \quad y_2(\pi) = 0 \quad \text{e} \quad y_1'(\pi) = 0.$$

□

## 2.3 Caso simétrico.

Nesta seção, vamos deduzir algumas propriedades das soluções de (6.2) quando assumimos que o potencial  $Q(x)$  é uma função par, isto é,

$$Q(x) = Q(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.29)$$

Veremos que é possível estabelecer relações entre os valores de  $y_1, y_2, y_1'$  e  $y_2'$  nos pontos  $x = \frac{\pi}{2}$  e  $x = \pi$  e estas relações permitem uma classificação mais detalhada das soluções de período  $\pi$  ou  $2\pi$ .

**Teorema 2.8.** *Seja  $y_1$  e  $y_2$  soluções normalizadas de (6.2) e assumamos que  $Q$  satisfaz (2.29). Então valem as seguintes relações.*

$$(i) \quad y_1(\pi) = 2y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = 1 + 2y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) y_2\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(ii) \quad y_2(\pi) = 2y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(iii) \quad y_1'(\pi) = 2y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(iv) \quad y_2'(\pi) = y_1(\pi).$$

*Em todos os casos temos que  $y_1$  é par e  $y_2$  é ímpar. Quando existe uma solução não trivial de (6.2) de período  $\pi$  ou  $2\pi$ , há também uma tal solução periódica a qual é par ou ímpar. Portanto estas soluções periódicas são necessariamente múltiplas de uma das soluções normalizadas  $y_1$  ou  $y_2$ , a menos que todas as soluções são periódicas com período  $\pi$  ou  $2\pi$  (pois assim sempre haverá tal solução periódica e múltipla de  $y_1$  ou  $y_2$ ).*

**Demonstração:** Se  $Q$  é par e se  $y(x)$  é uma solução de (6.2) então  $y(-x)$  é também uma solução. De fato,

$$\frac{d^2}{dx^2}(y(-x)) + Q(x)y(-x) = -(-y''(-x)) + Q(-x)y(-x) = y''(-x) + Q(-x)y(-x) = 0.$$

Como

$$1 = y_1(0) = y_1(-0), \quad 0 = y_1'(0) = y_1'(-0)$$

e

$$0 = y_2(0) = y_2(-0) = -y_2(-0), \quad 1 = y_2'(-0) = \frac{d}{dx}y_2(-0) = -y_2'(-0),$$

temos que as condições normalizadas coincidem para  $y_1(-x)$  e  $y_1(x)$  bem como para  $y_2(x)$  e  $-y_2(-x)$ . Portanto pelo teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias tem-se

$$y_1(x) = y_1(-x) \quad \text{e} \quad y_2(x) = -y_2(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

isto é,  $y_1(x)$  é par e  $y_2(x)$  é ímpar. Portanto encontramos a partir de (2.12) para  $x = -\frac{\pi}{2}$ ,

$$y_1\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right) = y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_1(\pi)y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - y_1'(\pi)y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (2.30)$$

$$y_2\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right) = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_2(\pi)y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - y_2'(\pi)y_2\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (2.31)$$

Note também que  $y_1'(x)$  é ímpar e  $y_2'(x)$  é par. Com efeito, como  $y_1$  é par e  $y_2$  é ímpar

$$-y_1'(-x) = -\frac{d}{dx}y_1(-x) \cdot (-1) = \frac{d}{dx}y_1(x) = y_1'(x)$$

e

$$y_2'(-x) = \frac{d}{dx}[y_2(-x)] = \frac{d}{dx}y_2(-x) \cdot (-1) = -\frac{d}{dx}(-y_2(x)) = \frac{d}{dx}y_2(x) = y_2'(x).$$

Por outro lado diferenciando (2.12) com relação a  $x$  temos,

$$\begin{cases} y_1'(x + \pi) &= y_1(\pi)y_1'(x) + y_1'(\pi)y_2'(x) \\ y_2'(x + \pi) &= y_2(\pi)y_1'(x) + y_2'(\pi)y_2'(x). \end{cases}$$

Considerando  $x = -\frac{\pi}{2}$  e usando que  $y_1'$  é ímpar e  $y_2'$  é par, temos

$$y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -y_1(\pi)y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) + y_1'(\pi)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (2.32)$$

$$y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -y_2(\pi)y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) + y_2'(\pi)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (2.33)$$

Podemos considerar (2.30) até (2.33) como um sistema de equações lineares nas variáveis



$y_1(\pi)$ ,  $y_2(\pi)$ ,  $y_1'(\pi)$  e  $y_2'(\pi)$ .

$$\begin{cases} y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_1(\pi)y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - y_1'(\pi)y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_2(\pi)y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - y_2'(\pi)y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -y_1(\pi)y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) + y_1'(\pi)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -y_2(\pi)y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) + y_2'(\pi)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

De (2.30) e (2.32) obtemos,

$$\begin{cases} y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_1(\pi)y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - y_1'(\pi)y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -y_1(\pi)y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) + y_1'(\pi)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Como queremos encontrar  $y_1(\pi)$  e  $y_1'(\pi)$ , resolvemos este sistema em função destas variáveis. De fato, sendo  $A$  a matriz dos coeficientes referente a este sistema encontramos que,

$$\det A = \begin{vmatrix} y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) & -y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) & y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{vmatrix} = W(y_1, y_2)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Assim, o sistema possui solução única e pela a regra de Crammer ela vem dada por,

$$\begin{aligned} y_1(\pi) &= y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) + y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) - y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) + y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) + y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= W(y_1, y_2)\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 + 2y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2\left(\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_1'(\pi) &= y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) + y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$y_1(\pi) = 1 + 2y_1' \left( \frac{\pi}{2} \right) y_2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{e} \quad y_1'(\pi) = 2y_1 \left( \frac{\pi}{2} \right) y_1' \left( \frac{\pi}{2} \right),$$

provando (i) e (iii). Agora de (2.31) e (2.33) temos,

$$\begin{cases} y_2 \left( \frac{\pi}{2} \right) = y_2(\pi) y_1 \left( \frac{\pi}{2} \right) - y_2'(\pi) y_2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \\ y_2' \left( \frac{\pi}{2} \right) = -y_2(\pi) y_1' \left( \frac{\pi}{2} \right) + y_2'(\pi) y_2' \left( \frac{\pi}{2} \right). \end{cases}$$

Novamente, temos que o determinante desse sistema é dado por

$$W(y_1, y_2) \left( \frac{\pi}{2} \right) = 1 \neq 0.$$

Fazendo uso da regra de Crammer, a solução do sistema vem dada por

$$y_2(\pi) = y_2 \left( \frac{\pi}{2} \right) y_2' \left( \frac{\pi}{2} \right) + y_2' \left( \frac{\pi}{2} \right) y_2 \left( \frac{\pi}{2} \right) = 2y_2' \left( \frac{\pi}{2} \right) y_2 \left( \frac{\pi}{2} \right),$$

e

$$\begin{aligned} y_2'(\pi) &= y_1 \left( \frac{\pi}{2} \right) y_2' \left( \frac{\pi}{2} \right) + y_1' \left( \frac{\pi}{2} \right) y_2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \\ &= y_1 \left( \frac{\pi}{2} \right) y_2' \left( \frac{\pi}{2} \right) - y_1' \left( \frac{\pi}{2} \right) y_2 \left( \frac{\pi}{2} \right) + 2y_1' \left( \frac{\pi}{2} \right) y_2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 1 + 2y_1' \left( \frac{\pi}{2} \right) y_2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \\ &= y_1(\pi), \end{aligned}$$

ou seja,

$$y_2(\pi) = 2y_2' \left( \frac{\pi}{2} \right) y_2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{e} \quad y_2'(\pi) = y_1(\pi).$$

Provando (ii) e (iv). Se  $y(x)$  é periódica com período  $\pi$  ou  $2\pi$  e não identicamente nula, as funções,

$$u(x) = y(x) + y(-x) \quad \text{e} \quad v(x) = y(x) - y(-x),$$

também são periódicas. Como  $u$  é par e  $v$  é ímpar, pois

$$u(-x) = y(-x) + y(-(-x)) = y(-x) + y(x) = u(x)$$

e

$$-v(-x) = -(y(-x) - y(-(-x))) = y(x) - y(-x) = v(x)$$

temos que  $u$  e  $v$  não podem ser ambas nulas exceto se  $y \equiv 0$ . Provemos a última afirmação do teorema. De fato, temos

$$u(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_1 y_1(-x) + c_2 y_2(-x).$$

Como  $y_1(x)$  é par e  $y_2(x)$  é ímpar temos,

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_1 y_1(x) - c_2 y_2(-(-x)) \\ &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_1 y_1(x) - c_2 y_2(x) \\ &= 2c_1 y_1(x). \end{aligned}$$

Disto segue que  $u$  é múltiplo de  $y_1(x)$ . Da mesma forma, vemos que  $v$  é múltiplo de  $y_2(x)$  isto é,

$$v(x) = u(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) - c_1 y_1(x) - c_2 y_2(-x) = 2c_2 y_2(x).$$

□

**Lema 2.9.** *Assuma que  $y_1(x)$  seja uma solução par de (6.2). Então  $y_1(x)$  possui semi-período  $\pi$  se, e somente, se  $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .*

**Demonstração:** Se  $y_1(x)$  é semi-periódica com semi-período  $\pi$  então,

$$y_1(x + \pi) = -y_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então para  $x = -\frac{\pi}{2}$  temos,

$$-y_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = y_1\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right) = y_1\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Logo,

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -y_1\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

donde  $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , já que  $y_1$  é par e com isto  $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_1\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  e mostremos que  $y_1(x + \pi) = -y_1(x)$ . De fato, note primeiro que  $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  e  $y_1$  par, implica  $y_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -y_1\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  e  $y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -y_1'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  pois  $y_1$  é par. Considere o seguinte problema,

$$\begin{cases} y_1''(x) + Q(x)y_1(x) = 0 \\ y_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -y_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -y_1'\left(-\frac{\pi}{2}\right). \end{cases} \quad (2.34)$$

Já vimos que  $y_1(x + \pi)$  é solução da equação (2.34). Além disso,  $-y_1(x)$  é solução, pois,

$$(-y_1(x))'' + Q(x)(-y_1(x)) = -(y_1''(x) + Q(x)y_1(x)) = 0.$$

Observe ainda que sendo  $y_1$  par e  $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  tem-se

$$y_1\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right) = y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -y_1\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

ou seja  $y_1(x + \pi)$  e  $-y_1(x)$  satisfaz a mesma condição em  $x = -\frac{\pi}{2}$ . Além disso,

$$y_1'\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right) = y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -y_1'\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

isto é,  $y_1'(x + \pi)$  satisfazem a mesma condição que  $-y_1'(x)$  em  $x = -\frac{\pi}{2}$ . Pelo Teorema de Existência e Unicidade para equação diferenciais ordinárias linear de 2ª ordem temos que  $y_1(x + \pi) = -y_1(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  e com isto  $y_1$  é semi-periódica de semi-período  $\pi$ .  $\square$

**Teorema 2.10.** *Se as condições do Teorema 2.8 são satisfeitas, então existe uma solução periódica não trivial de (6.2)*

- (i) *par e de período  $\pi$  se, e somente se  $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,*
- (ii) *ímpar e de período  $\pi$  se, e somente se  $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,*
- (iii) *par e de período  $2\pi$  se, e somente se  $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,*
- (iv) *ímpar e de período  $2\pi$  se, e somente se  $y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .*

**Demonstração:** Com intuito de mostrar o teorema, usaremos do Teorema 2.8 o fato que uma solução par de (6.2) é um múltiplo de  $y_1$  e uma solução ímpar de (6.2) é um múltiplo de  $y_2$ .

Para provar (1) vamos assumir primeiro que existe  $y$  solução de (6.2) não trivial par e periódica com período  $\pi$ . Assim  $y_1$  é também periódica com período  $\pi$  e o mesmo vale para  $y_1'$ . De fato, como  $y$  é par segue que  $y$  é múltiplo de  $y_1$ . Logo  $y_1 = c_k y$  pois  $y$  é não trivial. Então,

$$y_1(x + \pi) = c_k y(x + \pi) = c_k y(x) = y_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Além disso,  $y_1'(x + \pi) = y_1'(x)$ , já que  $y_1(x + \pi) = y_1(x)$ . Deste modo  $y_1'(\frac{\pi}{2}) = y_1'(-\frac{\pi}{2})$ , pois  $y_1'(-\frac{\pi}{2} + \pi) = y_1'(-\frac{\pi}{2})$ . Por outro lado  $y_1'$  é uma função ímpar, donde  $y_1'(\frac{\pi}{2}) = -y_1'(-\frac{\pi}{2})$ . Conseqüentemente,

$$y_1'(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Reciprocamente, se  $y_1'(\frac{\pi}{2}) = 0$  então  $y_1'(-\frac{\pi}{2}) = 0$ , pois  $y_1'$  é ímpar. Ademais,  $y_1(-\frac{\pi}{2}) = y_1(\frac{\pi}{2})$ , pois  $y_1$  é par. Portanto  $y_1$  satisfaz a mesma condição em  $x = -\frac{\pi}{2}$  e em  $x = \frac{\pi}{2}$ . A partir disto, podemos considerar o problema,

$$\begin{cases} y_1''(x) + Q(x)y_1(x) = 0 \\ y_1(-\frac{\pi}{2}) = y_1(\frac{\pi}{2}) \\ y_1'(\frac{\pi}{2}) = y_1'(-\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Defina agora,  $h(x) = y_1(x + \pi) \forall x \in \mathbb{R}$ . Como já vimos  $h$  é solução de (2.35). Além disso,

$$h(-\frac{\pi}{2}) = y_1(\frac{\pi}{2}) = y_1(-\frac{\pi}{2}) \quad \text{e} \quad h'(-\frac{\pi}{2}) = y_1'(\frac{\pi}{2}) = y_1'(-\frac{\pi}{2}) = 0,$$

isto é,  $h$  satisfaz a mesma condição que  $y_1$  em  $x = -\frac{\pi}{2}$  e  $h'$  satisfaz a mesma condição que  $y_1'$  em  $x = -\frac{\pi}{2}$ . Assim pelo Teorema de Existência e Unicidade temos que  $\varphi = y_1$  e portanto  $y_1$  é  $\pi$ -periódica. Seguindo a mesma idéia acima, obtemos (2). Neste caso, basta utilizar que  $y_2$  é ímpar e que  $\varphi(x) = y_2(x + \pi)$  satisfaz a mesma condição que  $y_2$  em  $x = \frac{\pi}{2}$  e é solução do problema

$$\begin{cases} y_2''(x) + Q(x)y_2(x) = 0, \\ y_2(-\frac{\pi}{2}) = -y_2(\frac{\pi}{2}) = 0, \\ y_2'(-\frac{\pi}{2}) = y_2'(\frac{\pi}{2}). \end{cases} \quad (2.36)$$

Para provar (3), suponha que exista solução de (6.2) não trivial a qual é par e de período  $2\pi$  e mostremos que  $y_1(\frac{\pi}{2}) = 0$ . De fato, pelo item (i) deste teorema temos que  $y_1'(\pi) = 0$ . Assim por (iii) do Teorema 2.8, temos que  $y_1(\frac{\pi}{2})y_1'(\frac{\pi}{2}) = 0$ , isto é,  $y_1(\frac{\pi}{2}) = 0$  ou  $y_1'(\frac{\pi}{2}) = 0$ . Se  $y_1(\frac{\pi}{2}) = 0$  temos o desejado. Suponhamos então que  $y_1(\frac{\pi}{2}) \neq 0$  e  $y_1'(\frac{\pi}{2}) = 0$ . Sendo  $y_1'(\frac{\pi}{2}) = 0$  temos por (i) do Teorema 2.8 que  $y_1(\pi) = 1$  e como já vimos que  $y_1'(\pi) = 0$ , segue de (2.12) que  $y_1(x + \pi) = y_1(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Disto e do fato que uma solução par é múltipla de  $y_1$  nos fornece que  $y$  é periódica com período  $\pi$  o que é uma contradição. Reciprocamente, como  $y_1(\frac{\pi}{2}) = 0$  temos pelo Lema 2.9 que

$y_1$  é semi-periódica com semi-período  $\pi$  e portanto  $y_1$  é periódica com período  $2\pi$ . Sendo  $y_1$  par, temos o desejado.

A parte (4) segue por um raciocínio similar aos da parte (3). Neste caso, por (ii) deste teorema temos,  $y_2(\pi) = 0$ . Logo (ii) do Teorema 2.8 implica que  $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ . Caso  $y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$ , então  $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ . Deste modo, por (iv) e (i) do Teorema 2.8 temos que  $y_2'(\pi) = 1$ . Como  $y_2(\pi) = 0$  e  $y_2'(\pi) = 1$ , temos de (2.12) que  $y_2(x + \pi) = y_2(x) \forall x$ . Assim  $y_2$  é ímpar e periódica com período  $\pi$ , o que é um absurdo (pois caso exista uma solução ímpar, esta será múltipla de  $y_2$  e conseqüentemente periódica com período  $\pi$ , isto é, não pode haver uma solução ímpar com período  $2\pi$ ). Uma demonstração análoga a demonstração do Lema 2.9 mostra que se  $y_2$  é uma solução ímpar para (6.2), então  $y_2$  possui semi-período  $\pi$  se, e somente, se  $y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ . Isto estabelece a volta da parte (4).  $\square$

## 2.4 Teorema da Oscilação.

Considere agora a seguinte equação,

$$y'' + [\lambda + Q(x)]y = 0, \quad (2.37)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro e  $Q$  é uma função periódica real de  $x$  com período  $\pi$ . Neste contexto, salvo menção em contrário, vamos assumir  $Q$  duas vezes diferenciável.

Sejam  $y_1$  e  $y_2$  duas soluções LI de (2.37) satisfazendo as condições iniciais

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0 \quad \text{e} \quad y_2'(0) = 1.$$

Para enfatizar sua dependência sobre  $\lambda$ , às vezes escreveremos  $y_1(x, \lambda)$  e  $y_2(x, \lambda)$  em vez de  $y_1$  e  $y_2$ . Um dos nossos principais problemas será a determinação dos valores de  $\lambda$  para o qual as soluções da equação (2.37) são estáveis. Um outro problema será a determinação desses valores de  $\lambda$  para o qual a equação (2.37) possui uma solução de período  $\pi$  ou  $2\pi$ . O seguinte teorema devido a Liapounoff [37] e a Haupt [31] conecta os dois problemas.

**Teorema 2.11.** *(Teorema da Oscilação) A cada equação diferencial (2.37), há duas sequências de números reais monótonas não decrescentes,*

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \dots \quad (2.38)$$

e

$$\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_4, \lambda'_5, \lambda'_6, \lambda'_7, \dots \quad (2.39)$$

tal que (2.37) possui uma solução de período  $\pi$  se, e somente, se  $\lambda = \lambda_n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  e uma solução de período  $2\pi$  se, e somente, se  $\lambda = \lambda'_n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Os  $(\lambda_n)$ 's e  $(\lambda'_n)$ 's satisfazem a desigualdade,

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \leq \lambda'_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots \quad (2.40)$$

com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda'_n} = 0. \quad (2.41)$$

As soluções de (2.37) são estáveis nos intervalos

$$(\lambda_0, \lambda'_1), (\lambda'_2, \lambda_1), (\lambda_2, \lambda'_3), (\lambda'_4, \lambda_3), \dots \quad (2.42)$$

Nos pontos finais desses intervalos as soluções de (2.37) são em geral instáveis. Isto sempre é verdadeiro para  $\lambda = \lambda_0$ . As soluções de (2.37) são estáveis para  $\lambda = \lambda_{2n+1}$  ou  $\lambda = \lambda_{2n+2}$  se, e somente, se  $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$  e elas são estáveis para  $\lambda = \lambda'_{2n+1}$  ou  $\lambda = \lambda'_{2n+2}$  se, e somente, se  $\lambda'_{2n+1} = \lambda'_{2n+2}$ .

Para valores complexos de  $\lambda$ , (2.37) possui sempre soluções instáveis. Os  $(\lambda_n)$ 's são as raízes da equação  $\Delta(\lambda) = 2$  e os  $(\lambda'_n)$ 's são as raízes da equação  $\Delta(\lambda) = -2$ , onde,

$$\Delta(\lambda) = y_1(\pi, \lambda) + y'_2(\pi, \lambda).$$

Antes de iniciar a demonstração deste teorema, faremos algumas considerações que serão úteis no decorrer da demonstração e no seu entendimento. Os números reais  $(\lambda_n)$ 's serão chamados valores característicos de primeira espécie de (2.37) e os  $(\lambda'_n)$ 's serão chamados de valores característicos de segunda espécie. Os intervalos em (2.42) sobre o eixo real  $\lambda$  serão chamados de intervalos de estabilidade, deste modo um ponto final de um tal intervalo pertencerá a ele se, e somente, se (2.37) possuir soluções estáveis para o correspondente valor de  $\lambda$ . Similarmente falaremos sobre os intervalos de instabilidade. Ambos os intervalos de estabilidade e instabilidade são ordenados de maneira natural. O intervalo de instabilidade  $(-\infty, \lambda_0)$  estará sempre presente e o chamaremos de intervalo de instabilidade de ordem zero, o intervalo  $(\lambda'_1, \lambda'_2)$  é denominado como o primeiro intervalo de instabilidade.

Observe que de acordo com o Teorema da Oscilação, nenhum intervalo de estabilidade e nem de instabilidade pode ser reduzido a um ponto pois  $\lambda'_{2n+2} < \lambda_{2n+1}$  e  $\lambda_{2n} < \lambda'_{2n+1}$ .

Os intervalos de estabilidade nunca podem desaparecer, mas dois deles podem reunir-se em um único caso  $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$  ou  $\lambda'_{2n+1} = \lambda'_{2n+2}$ . Por exemplo se  $\lambda_1 = \lambda_2$  temos um novo intervalo que é  $(\lambda'_3, \lambda_3)$ , analogamente se  $\lambda'_3 = \lambda'_4$  teremos o intervalo  $(\lambda_2, \lambda_3)$ . Contudo os intervalos de instabilidade (com exceção do intervalo de ordem zero) podem desaparecer completamente, isso acontece se  $Q(x)$  é constante. Uma demonstração deste fato é dado na seção 7.6 em [38].

**Demonstração:** (*Teorema da Oscilação*)

Vamos dividir a demonstração em vários passos e lemas.

*Passo-1)* Excluiremos primeiro a possibilidade de soluções estáveis para (2.37), no caso de  $\lambda$  ser um valor complexo. Assuma que  $\lambda = \mu + i\sigma$  onde  $\mu$  e  $\sigma$  são reais e  $\sigma \neq 0$ . Seja  $y = u + iv$  uma solução de (2.37) a qual é do tipo,

$$y(x) = e^{i\alpha x} p(x) = u + iv \quad (2.43)$$

onde  $\alpha$  é real e onde  $p$  é periódica com período  $\pi$ . De acordo com o Teorema de Floquet, uma tal solução  $y(x)$  existe se temos estabilidade para alguma solução de (2.37). De fato, escrevendo (2.37) como  $y'' + Q_1 y = 0$ , temos dois casos a considerar:

1) Se  $\rho_1 \neq \rho_2$ , então a solução estável  $g$  o qual existe pode ser escrita da forma,

$$g = c_1 f_1 + c_2 f_2$$

onde  $f_1$  e  $f_2$  são dadas no Teorema de Floquet. Por outro lado,

$$g^2 = c_1^2 e^{2i\alpha x} p_1^2(x) + c_1 c_2 p_1(x) p_2(x) + c_2^2 e^{-2i\alpha x} p_2^2(x).$$

Desta forma, sendo  $g$  estável e  $c_1 c_2 p_1(x) p_2(x)$  limitada vem que  $f_1$  e  $f_2$  são estáveis. Portanto  $f_1$  ou  $f_2$  pode ser considerada a solução do tipo (2.43). Note que, como  $f_1$  e  $f_2$  são estáveis então  $\alpha$  é real.

2) Se  $\rho_1 = \rho_2$ , então  $\rho_1 = \rho_2 = \pm 1$  e  $\alpha$  é real. Como sempre existe uma solução da forma  $y(x + \pi) = \rho_1 y(x)$ , definindo  $p_1(x) = e^{-i\alpha x} y(x)$ , temos que  $f(x) = e^{i\alpha x} p_1(x)$  é a solução do tipo (2.43) com  $\alpha$  real.

Isto garante que  $\lambda$  complexo e existência de uma solução estável implica na existência de uma solução do tipo (2.43) com  $\alpha$  real.



Dividindo (2.37) em sua parte real e imaginária encontramos,

$$\begin{aligned}
 0 &= y'' + (\lambda + Q(x))y \\
 &= (u + iv)'' + (\mu + i\sigma + Q(x))(u + iv) \\
 &= u'' + iv'' + \mu u + i\mu v + iu\sigma - \sigma v + uQ(x) + ivQ(x) \\
 &= u'' + \mu u - \sigma v + uQ(x) + i(v'' + \mu v + u\sigma + vQ(x)),
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} u'' + \mu u - \sigma v + uQ(x) = 0 \\ v'' + \mu v + \sigma u + vQ(x) = 0. \end{cases}$$

Podemos reescrever o sistema acima como,

$$\begin{cases} u'' + [\mu + Q(x)]u = v\sigma \\ v'' + [\mu + Q(x)]v = -u\sigma. \end{cases} \quad (2.44)$$

Agora, se multiplicarmos a primeira equação de (2.44) por  $v$  e a segunda por  $u$  e subtrairmos, os resultados vemos

$$\begin{cases} u''v + [\mu + Q(x)]uv = v^2\sigma \\ v''u + [\mu + Q(x)]vu = -u^2\sigma, \end{cases}$$

e

$$u''v - v''u = \sigma(u^2 + v^2). \quad (2.45)$$

Vamos integrar a expressão (2.45) de modo a obter

$$\int_0^x (u''(t)v(t) - v''(t)u(t))dt = \sigma \int_0^x (u^2(t) + v^2(t))dt. \quad (2.46)$$

O termo do lado esquerdo de (2.46) pode ser manipulado usando integração por partes e desta forma

$$u'(t)v(t)\Big|_0^x - \int_0^x u'(t)v'(t)dt - \left[ v'(t)u(t)\Big|_0^x - \int_0^x v'(t)u'(t)dt \right] = \sigma \int_0^x (u^2(t) + v^2(t))dt.$$

Com isto,

$$u'(t)v(t)\Big|_0^x - v'(t)u(t)\Big|_0^x = \sigma \int_0^x (u^2(t) + v^2(t))dt,$$

e assim temos,

$$u'(x)v(x) - v'(x)u(x) = \sigma \int_0^x (u^2(t) + v^2(t))dt + c \quad (2.47)$$

onde  $c = -u'(0)v(0) + v'(0)u(0)$  é uma constante.

Agora, vemos por (2.43) que todas as funções  $|u|$ ,  $|v|$ ,  $|u'|$  e  $|v'|$  devem ser limitadas para todos os valores de  $x$ , já que  $p(x)$  é diferenciável e periódica. Com efeito,

$$|u + iv| = |e^{i\alpha x} p(x)| = |p(x)| \leq M.$$

Então

$$\sqrt{u^2 + v^2} \leq M$$

$$u^2 + v^2 \leq M^2.$$

Logo,

$$\begin{cases} u^2 \leq M^2 \\ v^2 \leq M^2, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} |u| \leq M \\ |v| \leq M. \end{cases}$$

Similarmente,

$$|u' + iv'| = \left| \frac{d}{dx} (e^{i\alpha x} p(x)) \right| = |\alpha e^{i\alpha x} p(x) + e^{i\alpha x} p'(x)| \leq C_1 M + |p'(x)| \leq C,$$

isto é,

$$\begin{cases} |u'| \leq C \\ |v'| \leq C. \end{cases}$$

Assim existe um limite superior para  $|uv' - vu'|$  a qual é independente de  $x$ . De acordo com (2.47) o mesmo vale para o valor absoluto de

$$I(x) = \int_0^x [u^2(t) + v^2(t)] dt.$$

Contudo  $|I(x)| \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \infty$ , pois  $u^2 + v^2 = |p|^2$  e portanto para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$I(n\pi) = \int_0^{n\pi} [u^2(t) + v^2(t)] dt = n \int_0^\pi |p(t)|^2 dt.$$

Portanto se  $\lambda$  é não real não podemos ter uma solução do tipo (2.43).

*Passo-2* No que segue, desejamos mostrar que existe um número real  $\lambda^*$  tal que para qualquer  $\lambda \leq \lambda^*$  as solução de (2.37) são instáveis. Para este propósito selecionamos um  $\lambda^*$  tal que para todo  $x$

$$\lambda^* + Q(x) < 0.$$

Este fato é certamente possível pelo fato de  $Q(x)$  ser uma função periódica e portanto limitada de  $x$ . Mostraremos que se  $\lambda \leq \lambda^*$ , então  $y_1(x, \lambda) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \infty$ . Para isto, escrevamos (2.37) na forma,

$$y'' = D(x)y, \quad (2.48)$$

onde  $D(x) = -\lambda - Q(x) > 0$ , para todo  $x$ . Observe que  $y_1(0) = 1$ ,  $y_1'(0) = 0$  (usando as condições iniciais) e  $y_1''(0) = D(0)y_1(0) = (-\lambda - Q(0)) > 0$ , deste modo 0 é um ponto de mínimo local de  $y_1(x)$ , isto é,

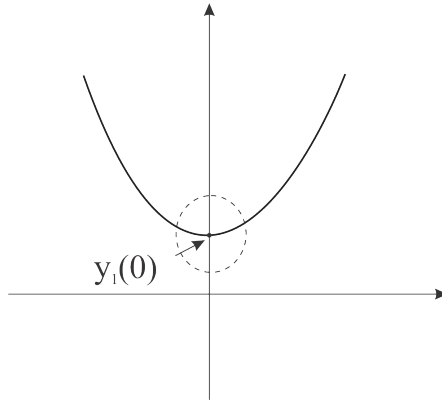


Figura 2.1:

Logo  $y_1'(x)$  é crescente em uma vizinhança à direita de 0. Assim, segue que para todo  $x$  positivo suficientemente pequeno tem-se  $y_1'(x) > 0$ . Seja  $S$  o conjunto de zeros positivos de  $y_1'$ . Mostremos que  $S = \emptyset$ . De fato, se por absurdo  $S \neq \emptyset$  temos que  $\inf S = \varepsilon > 0$ . Então, seja  $(x_n) \subseteq S$  tal que  $x_n \rightarrow \varepsilon$ , assim  $y_1'(x_n) \rightarrow y_1'(\varepsilon)$ . Como  $y_1'(x_n) = 0$  para todo  $n$ , segue que  $y_1'(\varepsilon) = 0$ . Agora multiplicando (2.48) por  $y_1'(x)$  temos,

$$y_1''(x)y_1'(x) = D(x)y_1(x)y_1'(x). \quad (2.49)$$

Usando (2.49) temos após integrarmos em  $[0, x]$  que

$$\int_0^x y_1''(x)y_1'(x)dx = \int_0^x D(x)y_1(x)y_1'(x)dx. \quad (2.50)$$

Podemos integrar o lado esquerdo de (2.50) de modo a obter

$$(y_1'(x))^2 - (y_1'(0))^2 - \int_0^x y_1''(x)y_1'(x)dx = \int_0^x D(x)y_1(x)y_1'(x)dx.$$

Agora, por (2.48) e o fato que  $y_1'(0) = 0$  tem-se

$$(y_1'(x))^2 - \int_0^x D(x)y_1(x)y_1'(x)dx = \int_0^x D(x)y_1(x)y_1'(x)dx,$$

ou seja,

$$(y_1'(x))^2 = 2 \int_0^x D(x)y_1(x)y_1'(x)dx. \quad (2.51)$$

Considerando  $x = \varepsilon$  em (2.51) e usando que  $y_1'(\varepsilon) = 0$  obtemos

$$0 = (y_1'(\varepsilon))^2 = 2 \int_0^\varepsilon D(x)y_1(x)y_1'(x)dx. \quad (2.52)$$

Mas  $y_1(0) = 1$  e  $y_1'(x) \geq 0$  em  $[0, \varepsilon]$  e assim  $y_1(x) \geq 1$  em  $[0, \varepsilon]$ . Ademais, sendo  $D(x) > 0 \forall x$ , temos de (2.52) que

$$\int_0^\varepsilon D(x)y_1(x)y_1'(x)dx > 0,$$

o que é um absurdo. Isso mostra que  $y_1'(x) > 0$  para todo  $x > 0$ . Portanto  $y_1(x)$  é monótona crescente para  $x > 0$ , o que significa que  $y_1(x) > 1$  para  $x > 0$  já que  $y_1(0) = 1$ . Além disso, como  $D$ ,  $y_1$  e  $y_1'$  são funções estritamente positivas, (2.51) implica que,  $y_1'$  é monótona crescente. Dado um  $x$  arbitrário mas fixado, temos pelo Teorema do Valor Médio que existe  $0 \leq x_0 \leq x$ , tal que

$$y_1'(x_0) = \frac{y_1(x) - y_1(0)}{x - 0} = \frac{y_1(x) - 1}{x - 0}.$$

Desde que  $\delta = y_1'(x_0) > 0$  vemos,

$$y_1(x) \geq 1 + \delta(x - 0) \geq 1 + \delta(x - x_0).$$

e com isso  $y_1(x) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \infty$ .

De maneira semelhante temos que  $y_2'(x) > 1$  para  $x > 0$ . De fato, assumindo que o conjunto  $S$  de zeros de  $y_2'$  seja não vazio, encontramos que

$$0 = y_2'(\varepsilon)^2 = 1 + 2 \int_0^\varepsilon D(x)y_2(x)y_2'(x)dx,$$

onde  $D(x) > 0$  para todo  $x$  e  $y_2$  e  $y_2'$  são positivas em  $(0, \varepsilon)$ , o que é uma contradição. Portanto  $S = \emptyset$  e então  $y_2'(x) > 0$  para todo  $x \geq 0$ . Concluimos então que  $y_2(x)$  é crescente em  $(0, \infty)$  e como

$$y_2(0) = 0 \quad \text{e} \quad y_2'(x)^2 = 1 + 2 \int_0^x D(x)y_2(x)y_2'(x)dx,$$

segue que  $y_2'(x)$  é monótona crescente. Logo,  $y_2'(0) = 1$  implica que  $y_2'(x) > 1$  para todo  $x > 0$ .

Provamos com estes argumentos o seguinte lema.

**Lema 2.12.** *Se  $\lambda \leq \lambda^*$ , então para todo  $x > 0$ , temos*

$$y_1(x, \lambda) + y_2'(x, \lambda) > 2.$$

□

Note que se  $\rho_1 = \rho_2$  então  $\rho_1 = \rho_2 = \pm 1$  e pela equação característica, temos  $y_1(\pi, \lambda) + y_2'(\pi, \lambda) = \pm 2$ . Deste modo, o Lema 2.12 nos fornece que  $\rho_1 \neq \rho_2$  e daí  $\alpha$  em  $y_1(x) = Ae^{i\alpha x}p_1(x) + Be^{-i\alpha x}p_2(x)$  não pode ser real, pois se  $\alpha$  fosse real teríamos  $y_1(x)$  estável o que não ocorre. Portanto encontramos que se  $\lambda$  é complexo ou se  $\lambda \leq \lambda^*$ , então não existe solução  $y(x)$  de (2.37) a qual é do tipo (2.43) com  $\alpha$  real. Examinaremos de perto as propriedades das funções  $\Delta(\lambda) - 2$  e  $\Delta(\lambda) + 2$ , onde

$$\Delta(\lambda) = y_1(\pi, \lambda) + y_2'(\pi, \lambda). \quad (2.53)$$

**Observação 2.13.** *Observe que  $\Delta(\lambda) = 2 \Leftrightarrow \rho^2 - 2\rho + 1 = 0 \Leftrightarrow (\rho - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \rho = 1$ . Analogamente  $\Delta(\lambda) = -2 \Leftrightarrow \rho = -1$ , assim  $\Delta(\lambda) = 2$  é equivalente à  $\rho_1 = \rho_2 = 1$  e  $\Delta(\lambda) = -2$  é equivalente à  $\rho_1 = \rho_2 = -1$ . Logo se  $\Delta(\lambda) = \pm 2$ , então (2.37) terá uma solução do tipo (2.43) com  $\alpha$  real. De fato,  $\Delta(\lambda) = 2$  implica que  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ , então por (ii) Do teorema de Floquet, existe  $y(x)$  solução de (2.37) tal que  $y(x + \pi) = e^{i\alpha\pi}y(x)$  e definindo  $p_1(x) = e^{-i\alpha x}y(x)$  teremos  $y(x) = e^{i\alpha x}p_1(x)$  com  $p_1(x)$  periódica com período  $\pi$ .*

Como para  $\lambda$  complexo ou  $\lambda \leq \lambda^*$  temos que (2.37) não admite solução do tipo (2.43) com  $\alpha$  real, temos o seguinte lema.

**Lema 2.14.** *Todas as raízes da equação  $\Delta(\lambda) - 2 = 0$  e  $\Delta(\lambda) + 2 = 0$  são reais e maiores que  $\lambda^*$ .*

**Demonstração:** Se  $\lambda$  for complexo vimos que (2.37) não admite solução do tipo (2.43). Por outro lado como  $\lambda$  é raiz de  $\Delta(\lambda) - 2 = 0$  ou  $\Delta(\lambda) + 2 = 0$  temos da Observação 2.13 que existe uma solução do tipo (2.43) o que é um absurdo e portanto  $\lambda$  é real. Também se  $\lambda \leq \lambda^*$  não há solução do tipo (2.43), porém como  $\lambda$  é raiz de  $\Delta(\lambda) - 2 = 0$  ou  $\Delta(\lambda) + 2 = 0$  então (2.37) admite solução do tipo (2.43) e temos novamente um absurdo, logo  $\lambda > \lambda^*$ . Portanto as raízes de  $\Delta(\lambda) - 2 = 0$  e  $\Delta(\lambda) + 2 = 0$  são reais e maiores que  $\lambda^*$ . □

Conforme vimos no Teorema 1.14 e no Corolário 1.15 nas preliminares, as funções  $\Delta(\lambda) - 2$  e  $\Delta(\lambda) + 2$  são funções analíticas inteiras de  $\lambda$  e possuem infinitos zeros. De acordo

com o Lema 2.14 todos estes zeros são reais e maiores que  $\lambda^*$ . Esses fatos estabelecem a existência das duas sequências (2.38) e (2.39) desse teorema. Concluiremos que estas sequências são não decrescente, quando mostrarmos mais adiante as desigualdades dadas em (2.40).

Na verdade, fazendo uso do Teorema de Floquet, temos o seguinte lema.

**Lema 2.15.** *A equação (2.37) possui uma solução periódica de período  $\pi$  se, e somente, se  $\Delta(\lambda) = 2$  e uma solução periódica de período  $2\pi$  se, e somente, se  $\Delta(\lambda) = -2$ .*

**Demonstração:** Basta notar que  $\Delta(\lambda) = 2$  é equivalente à  $\rho_1 = \rho_2 = 1$  e  $\Delta(\lambda) = -2$  é equivalente à  $\rho_1 = \rho_2 = -1$ . Pois se  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ , pelo item (ii) do Teorema de Floquet, (2.37) possui uma solução periódica com período  $\pi$  e se  $\rho_1 = \rho_2 = -1$  pelo mesmo motivo, (2.37) possui uma solução semi-periódica com semi-período  $\pi$  e conseqüentemente uma função periódica com período  $2\pi$ .

Reciprocamente, se (2.37) possui uma solução periódica  $y(x)$  de período  $\pi$ , então esta solução deve satisfazer  $y(x + \pi) = y(x)$  para todo  $x$ . Suponha que  $\rho_1 \neq \rho_2$ , então por (i) do Teorema de Floquet,

$$y(x) = Ae^{i\alpha x}p_1(x) + Be^{-i\alpha x}p_2(x).$$

Então

$$y(x + \pi) = Ae^{i\alpha(x+\pi)}p_1(x) + Be^{-i\alpha(x+\pi)}p_2(x),$$

e como  $y(x + \pi) = y(x)$ , vem que

$$Ae^{i\alpha x}p_1(x)(1 - e^{i\alpha\pi}) + Be^{-i\alpha x}p_2(x)(1 - e^{-i\alpha\pi}) = 0.$$

Sendo  $e^{i\alpha x}p_1(x)$  LI com  $e^{-i\alpha x}p_2(x)$  e  $y \not\equiv 0$  temos,

$$A(1 - e^{i\alpha\pi}) = B(1 - e^{-i\alpha\pi}) = 0, \tag{2.54}$$

e portanto  $\rho_1 = \rho_2 = 1$  o que é contradição. Note que  $y \not\equiv 0$  garante que  $A$  ou  $B$  é diferente de zero, já que basta apenas que um desses valores seja diferente de zero em (2.54) para termos  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ .

Deste modo,  $\rho_1 = \rho_2$  e como  $y(x + \pi) = y(x)$  segue que por (ii) do Teorema de Floquet que  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ . Se essa solução  $y(x)$  for LI com a solução periódica de período  $\pi$  o

ítem (ii) do Teorema de Floquet e a periodicidade de  $y(x)$  garantem que  $\theta = 0$  e assim  $\rho_1 = \rho_2 = 1$  da mesma forma.

Se (2.37) possui uma solução periódica  $y(x)$  com período  $2\pi$  então supondo  $\rho_1 \neq \rho_2$  e usando raciocínio análogo ao feito acima obtemos

$$Ae^{i\alpha x}p_1(x)(1 - e^{i\alpha\pi})(1 + e^{i\alpha\pi}) + Be^{-i\alpha x}p_2(x)(1 - e^{-i\alpha\pi})(1 + e^{-i\alpha\pi}) = 0.$$

Consequentemente,

$$A(1 - e^{i\alpha\pi})(1 + e^{i\alpha\pi}) = B(1 - e^{-i\alpha\pi})(1 + e^{-i\alpha\pi}) = 0, \quad (2.55)$$

donde  $\rho_1 = \rho_2$ , o que é contradição. Portanto  $\rho_1 = \rho_2$ . Logo, se  $y(x)$  for a solução periódica com período  $2\pi$  dada por (ii) do Teorema de Floquet ou uma solução LD com ela, então  $y(x + \pi) = -y(x)$  e consequentemente  $\rho_1 = \rho_2 = -1$ . Caso  $y(x)$  seja uma solução LI com a solução periódica de período  $2\pi$  dada por (ii) do teorema de Floquet, do fato de  $y(x)$  ser periódica com período  $2\pi$ , teremos  $\theta = 0$  e novamente  $\rho_1 = \rho_2 = -1$ .

□

Provamos até o momento que a cada equação (2.37), há duas sequências  $\lambda_n$  e  $\lambda'_n$  que são limitadas inferiormente por  $\lambda^*$  tal que (2.37) possui uma solução de período  $\pi$  se, e somente, se  $\lambda = \lambda_n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  e uma solução de período  $2\pi$  se, e somente, se  $\lambda = \lambda'_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Ademais, como  $\Delta(\lambda)$  é uma função analítica inteira a qual possui infinitos zeros, temos que as relações limite em (2.41) são verdadeiras. Provemos agora a desigualdade (2.40). Para este propósito necessitamos do seguinte lema.

**Lema 2.16.** *Seja  $\mu$  uma raiz da equação  $\Delta(\lambda) - 2 = 0$  tal que  $\Delta'(\lambda) \leq 0$  para  $\lambda = \mu$ . Então  $\Delta'(\lambda) < 0$  em qualquer intervalo aberto  $\mu < \lambda < \mu_1^*$  em que  $\Delta(\lambda) > -2$ . Similarmente, seja  $\mu'$  uma raiz de  $\Delta(\lambda) + 2 = 0$  e seja  $\Delta'(\mu') \geq 0$ , então  $\Delta'(\lambda) > 0$  em qualquer intervalo aberto  $\mu' < \lambda < \mu'_1$  em que  $\Delta(\lambda) < 2$ .*

Antes de provarmos o Lema 2.16, podemos observar que ele prova ambas as desigualdades (2.40) e a afirmação de que os intervalos abertos (2.42) são intervalos de estabilidade. De fato, veja pelo Lema 2.12 que se  $\lambda \leq \lambda^*$ , então  $\Delta(\lambda) > 2$ . Ademais, concluímos que entre os infinitos zeros reais da função  $\Delta(\lambda) - 2$  deve haver um menor a qual chamaremos de  $\lambda_0$ .

Provaremos mais tarde (veja Lema 2.18) que  $\Delta'(\lambda_0) < 0$ . Portanto, o Lema 2.16 mostra que para  $\lambda > \lambda_0$ ,  $\Delta(\lambda)$  deve ser uma função decrescente até  $\Delta(\lambda) = -2$ . Isto deve

realmente acontecer para um certo  $\lambda = \lambda'_1 > \lambda_0$ , desde que  $\Delta(\lambda) + 2$  possui infinitos zeros reais sem um ponto limite finito. Também  $\Delta'(\lambda'_1) = 0$  ou  $\Delta'(\lambda'_1) < 0$ . Se  $\Delta'(\lambda'_1) = 0$ ,  $\lambda'_1$  é uma raiz dupla de  $\Delta(\lambda) + 2 = 0$  e será listada como  $\lambda'_1$  e  $\lambda'_2$  e nesse caso  $\lambda'_1 = \lambda'_2$ .

De acordo com o Lema 2.71 o qual será visto depois,  $\Delta(\lambda) + 2 = 0$  não pode possuir raízes de multiplicidade superior a dois. Assim  $\Delta'(\lambda'_1) = 0$  implica, conforme o Lema 2.16, que  $\Delta(\lambda)$  aumenta para  $\lambda > \lambda'_2 = \lambda'_1$  até que ele atinja o valor 2.

Por outro lado se  $\Delta'(\lambda'_1) < 0$ , então  $\Delta(\lambda) < -2$  para  $\lambda'_1 < \lambda < \lambda'_2$ , onde  $\lambda'_2$  é o menor zero de  $\Delta(\lambda) + 2$  o qual é maior que  $\lambda'_1$ . Como  $\Delta(\lambda) < -2$  no intervalo  $(\lambda'_1, \lambda'_2)$ , pelo Teste de Estabilidade temos que este intervalo é um intervalo de instabilidade para as soluções de (2.37).

Como  $\Delta(\lambda) < \Delta(\lambda'_2)$  para todo  $\lambda < \lambda'_2$  e suficientemente próximo de  $\lambda'_2$ , temos,  $\Delta'(\lambda'_2) \geq 0$ . Com isto, usando o Lema 2.16, podemos concluir que  $\Delta(\lambda)$  é uma função crescente de  $\lambda$  em qualquer intervalo  $\lambda'_2 < \lambda < \lambda_1$ , na qual  $\Delta(\lambda) < 2$ . O maior intervalo deste tipo é o intervalo  $(\lambda'_2, \lambda_1)$  onde  $\lambda_1$  denota a menor raiz de  $\Delta(\lambda) - 2$  o qual é maior que  $\lambda'_2$ . O Teste de Estabilidade mostra que este intervalo é um intervalo de estabilidade para as soluções de (2.37).

Continuando desta maneira, encontramos que as desigualdades (2.40) valem e que os intervalos abertos em (2.42) são somente intervalos de estabilidade para as soluções de (2.37). A Figura 2.2 ilustra melhor estes fatos.

Vamos enfim provar o Lema 2.16.

**Demonstração:** (Lema 2.16). No decorrer desta prova iremos omitir as variáveis  $x$  e  $\lambda$  de modo a simplificar a notação.

Diferenciando  $y_1$  e  $y_2$  com respeito à  $\lambda$ , denotaremos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\lambda} y_1(x, \lambda) = z_1(x, \lambda), \quad \frac{d}{d\lambda} y_2(x, \lambda) = z_2(x, \lambda) \\ e \\ \frac{d}{d\lambda} y'_1(x, \lambda) = z'_1(x, \lambda), \quad \frac{d}{d\lambda} y'_2(x, \lambda) = z'_2(x, \lambda) \end{array} \right.$$

onde,

$$\frac{d}{dx} z_1 = \frac{d}{dx} \frac{d}{d\lambda} y_1 = \frac{d}{d\lambda} \frac{d}{dx} y_1 = \frac{d}{d\lambda} y'_1 = z'_1.$$



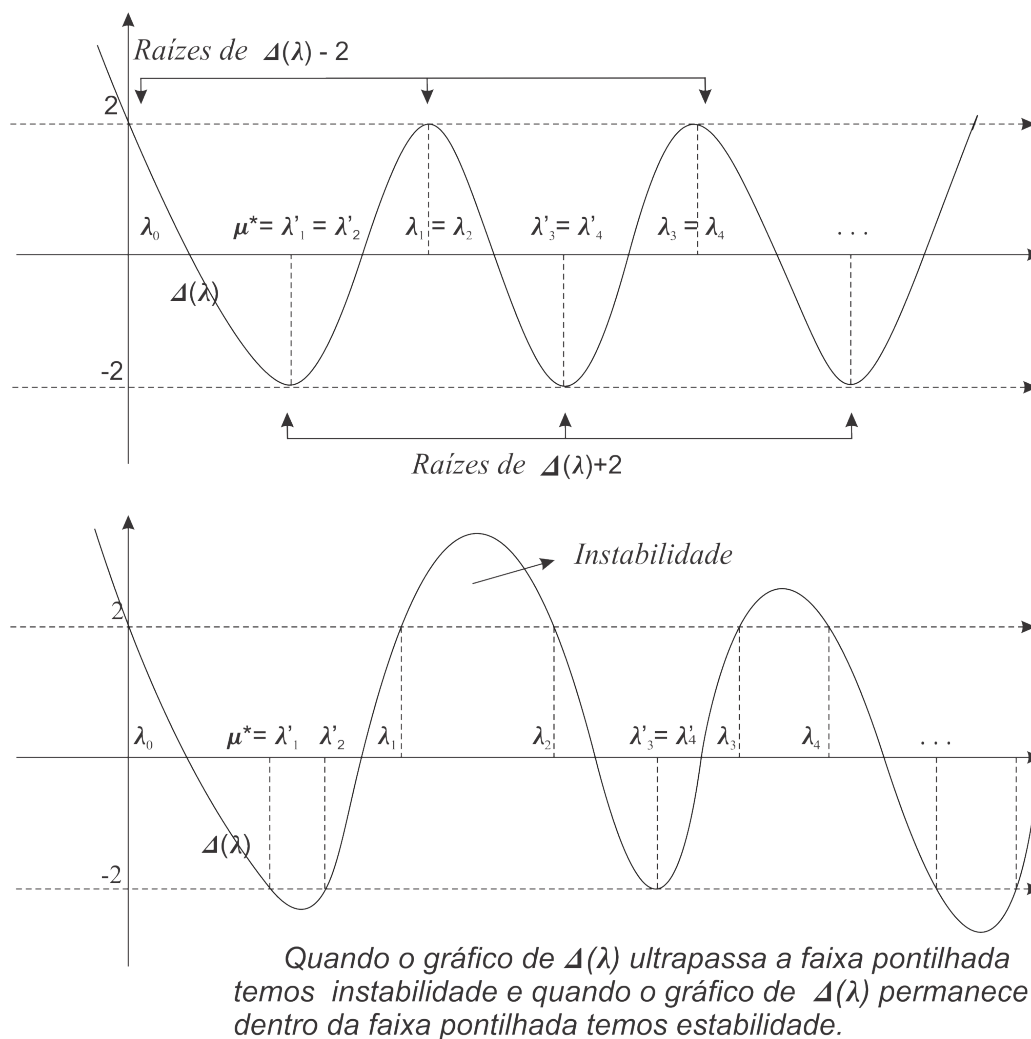


Figura 2.2:

Do mesmo modo,

$$z'_2 = \frac{d}{dx} z_2.$$

Também escreveremos  $\eta_1, \eta_2, \eta'_1$  e  $\eta'_2$ , respectivamente para  $y_1(\pi, \lambda), y_2(\pi, \lambda), y'_1(\pi, \lambda)$  e  $y'_2(\pi, \lambda)$ . Como antes, escreveremos  $\Delta$  para  $\eta_1 + \eta'_2$  e  $\Delta'$  para a derivada de  $\Delta$  com respeito a  $\lambda$  o qual é,

$$\Delta'(\lambda) = z_1(\pi, \lambda) + z'_2(\pi, \lambda).$$

No que segue, iremos obter a fórmula,

$$\Delta'(\lambda) = (\eta_1 - \eta'_2) \int_0^\pi y_1(x)y_2(x)dx - \eta_2 \int_0^\pi (y_1(x))^2 dx + \eta'_1 \int_0^\pi (y_2(x))^2 dx. \quad (2.56)$$

Para provar (2.56), diferenciamos (2.37) com respeito a  $\lambda$  e obtemos para  $y = y_1$  e

$y = y_2$  as seguintes equações,

$$z_1'' + (\lambda + Q)z_1 = -y_1 \text{ e } z_2'' + (\lambda + Q)z_2 = -y_2,$$

respectivamente. De fato,

$$\frac{d}{d\lambda}[y_1'' + (\lambda + Q)y_1] = \frac{d}{d\lambda}(0) = 0.$$

Então,

$$\frac{d}{d\lambda}y_1'' + (\lambda + Q)\frac{d}{d\lambda}y_1 + 1 \cdot y_1 = 0,$$

isto é,

$$z_1'' + (\lambda + Q)z_1 = -y_1.$$

Usando a mesma argumentação obtemos também

$$z_2'' + (\lambda + Q)z_2 = -y_2.$$

Deste modo, temos o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem,

$$\begin{cases} z_1'' + (\lambda + Q)z_1 = -y_1 \\ z_2'' + (\lambda + Q)z_2 = -y_2. \end{cases} \quad (2.57)$$

Associado a este sistema, temos as condições iniciais,

$$z_1(0) = z_1'(0) = 0 \text{ e } z_2(0) = z_2'(0) = 0. \quad (2.58)$$

De fato, como  $y_1(0, \lambda) = 1 \ \forall \lambda$ , temos,

$$z_1(0, \lambda) = \frac{d}{d\lambda}y_1(0, \lambda) = \frac{d}{d\lambda}(1) = 0.$$

De maneira análoga, encontramos as outras condições iniciais em (2.58).

A fórmula geral para a solução de uma equação diferencial de segunda ordem não homogênea em termos da solução da equação homogênea vem dado por,

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1(x) = y_1(x) \int_0^x y_2(t)y_1(t)dt - y_2(x) \int_0^x (y_1(t))^2 dt \\ z_1'(x) = y_1'(x) \int_0^x y_2(t)y_1(t)dt - y_2'(x) \int_0^x (y_1(t))^2 dt \\ z_2(x) = y_1(x) \int_0^x (y_2(t))^2 dt - y_2(x) \int_0^x y_1(t)y_2(t)dt \\ z_2'(x) = y_1'(x) \int_0^x (y_2(t))^2 dt - y_2'(x) \int_0^x y_1(t)y_2(t)dt. \end{array} \right. \quad (2.59)$$

Onde as funções  $z_1$  e  $z_2$  em (2.59) são aquelas soluções de (2.57) a qual satisfazem as condições iniciais (2.58).

Com efeito, para cada  $\lambda$  arbitrário mas fixado temos que o sistema (2.57) se torna um sistema de EDO de 2ª ordem. Considere assim o problema homogêneo associado,  $y'' + (\lambda + Q)y = 0$  o qual é justamente (2.37). Para esta equação, temos duas soluções  $y_1, y_2$  a qual satisfazem  $y_1(0) = 0, y_1'(0) = 1, y_2(0) = 1$  e  $y_2'(0) = 0$ . Queremos encontrar  $\alpha_1(x)$  e  $\alpha_2(x)$  tal que  $z_1(x) = \alpha_1(x)y_1(x) + \alpha_2(x)y_2(x)$  seja solução da primeira equação em (2.57) e  $\beta_1(x)$  e  $\beta_2(x)$ , tal que  $z_2(x) = \beta_1(x)y_1(x) + \beta_2(x)y_2(x)$  seja solução da segunda equação em (2.57). Como  $W(y_1, y_2) = 1$  temos,

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= \frac{y_1 y_2}{W(y_1, y_2)} = y_1 y_2 \\ \dot{\alpha}_2 &= -\frac{y_1 y_1}{W(y_1, y_2)} = -y_1^2 \\ \dot{\beta}_1 &= \frac{y_2 y_2}{W(y_1, y_2)} = y_2^2 \\ \dot{\beta}_2 &= -\frac{y_1 y_2}{W(y_1, y_2)} = -y_1 y_2. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Assim, para descobrirmos  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  e  $\beta_2$  podemos integrar as quatro igualdades (2.60) de modo a obter

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) - \alpha_1(0) &= \int_0^x y_1(t)y_2(t)dt, \\ \alpha_2(x) - \alpha_2(0) &= -\int_0^x (y_1(t))^2 dt \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\beta_1(x) - \beta_1(0) = \int_0^x (y_2(t))^2 dt, \quad (2.62)$$

$$\beta_2(x) - \beta_2(0) = - \int_0^x y_1(t)y_2(t)dt.$$

Deste modo,

$$z_1(x) = y_1(x) \int_0^x y_2(t)y_1(t)dt - y_2(x) \int_0^x (y_1(t))^2 dt + y_1(x)\alpha_1(0) + y_2(x)\alpha_2(0). \quad (2.63)$$

Sendo  $z_1(0) = 0$ , então (2.63) implica,

$$0 = z_1(0) = y_1(0)\alpha_1(0) + y_2(0)\alpha_2(0) = 0.\alpha_1(0) + 1.\alpha_2(0) = \alpha_2(0).$$

Por outro lado derivando (2.63) e usando que  $z_1'(0) = 0$ , temos  $\alpha_1(0) = 0$  donde obtemos  $z_1(x)$  e  $z_1'(x)$  como em (2.59). Para obter  $z_2(x)$  e  $z_2'(x)$  em (2.59) basta usar um argumento análogo.

As funções  $z_1(x)$  e  $z_2(x)$  em (2.59) são as soluções de (2.57) a qual satisfazem as condições iniciais  $z_1(0) = z_1'(0) = 0$  e  $z_2(0) = z_2'(0) = 0$ . Como

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} y_1(x, \lambda) = z_1(x, \lambda), \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} y_2(x, \lambda) = z_2(x, \lambda)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} y_1'(x, \lambda) = z_1'(x, \lambda), \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} y_2'(x, \lambda) = z_2'(x, \lambda)$$

e sendo as condições iniciais para  $y_1$  e  $y_2$  independentes de  $\lambda$ , temos que as soluções em (2.59) são de fato as soluções para (2.57).

Atribuindo  $x = \pi$  na primeira e na terceira igualdade de (2.59) e substituindo este fato na fórmula de  $\Delta'(\lambda)$  obtemos,

$$\begin{aligned} \Delta'(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} y_1(\pi, \lambda) + \frac{d}{d\lambda} y_2'(\pi, \lambda) \\ &= z_1(\pi) + z_2(\pi) \\ &= y_1(\pi) \int_0^\pi y_2(t)y_1(t)dt - y_2(\pi) \int_0^\pi (y_1(t))^2 dt \\ &\quad + y_1'(\pi) \int_0^\pi (y_2(t))^2 dt - y_2'(\pi) \int_0^\pi y_1(t)y_2(t)dt, \end{aligned}$$

isto é,

$$\Delta'(\lambda) = [y_1(\pi) - y_2'(\pi)] \int_0^\pi y_1(t)y_2(t) - y_2(\pi) \int_0^\pi (y_1(t))^2 dt + y_1'(\pi) \int_0^\pi (y_2(t))^2 dt ,$$

provando assim a fórmula (2.56).

Como  $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = 1$ , para todo  $x$ , encontramos para  $x = \pi$  que

$$\eta_1 \eta_2' - \eta_2 \eta_1' = 1 . \quad (2.64)$$

Então por (2.64) tem-se,

$$\begin{aligned} \Delta^2 - 4 &= (\eta_1 + \eta_2')^2 - 4(\eta_1 \eta_2' - \eta_2 \eta_1') \\ &= \eta_1^2 + 2\eta_1 \eta_2' + \eta_2'^2 - 4\eta_1 \eta_2' + 4\eta_2 \eta_1' \\ &= \eta_1^2 - 2\eta_1 \eta_2' + \eta_2'^2 + 4\eta_2 \eta_1' \\ &= (\eta_1 - \eta_2')^2 + 4\eta_2 \eta_1' . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta^2 - 4 = (\eta_1 - \eta_2')^2 + 4\eta_2 \eta_1' . \quad (2.65)$$

Denote,  $sgn(\eta_1') = 1$  se  $\eta_1' > 0$  e  $sgn(\eta_1') = -1$  se  $\eta_1' < 0$ . Assumindo que  $\eta_1' \neq 0$ , encontramos de (2.56) uma caracterização para  $\Delta'(\lambda)$ ,

$$\Delta'(\lambda) = F(y_1, y_2, \eta_1, \eta_2) , \quad (2.66)$$

onde

$$F(y_1, y_2, \eta_1, \eta_2) = sgn(\eta_1') \left\{ \int_0^\pi \left( \sqrt{|\eta_1'|} y_2 + sgn(\eta_1') \frac{(\eta_1 - \eta_2')}{2\sqrt{|\eta_1'|}} y_1 \right)^2 dx - \frac{(\Delta^2 - 4)}{4|\eta_1'|} \int_0^\pi y_1^2 dx \right\}$$

De fato, por (2.64) podemos ver que,

$$\begin{aligned} F(y_1, y_2, \eta_1, \eta_2) &= sgn(\eta_1') \int_0^\pi \eta_1' y_2^2 dx + (sgn(\eta_1'))^2 \int_0^\pi 2 \frac{(\eta_1 - \eta_2')}{2\sqrt{|\eta_1'|}} y_1 \sqrt{|\eta_1'|} y_2 dx \\ &\quad + sgn(\eta_1') \int_0^\pi \frac{(\eta_1 - \eta_2')^2}{4|\eta_1'|} y_1^2 dx - sgn(\eta_1') \frac{(\Delta^2 - 4)}{4|\eta_1'|} \int_0^\pi y_1^2 dx \\ &= (\eta_1 - \eta_2') \int_0^\pi y_1 y_2 dx + sgn(\eta_1') |\eta_1'| \int_0^\pi y_2^2 dx - sgn(\eta_1') \frac{4\eta_1' \eta_2}{4|\eta_1'|} \int_0^\pi y_1^2 dx . \end{aligned}$$

Como  $\eta_1' \neq 0$ , temos dois casos a considerar:

(1) Se  $\eta'_1 < 0$ , então  $|\eta'_1| = -\eta'_1$  e  $\text{sgn}(\eta'_1) = -1$ .

Por (2.56) temos,

$$\begin{aligned} F(y_1, y_2, \eta_1, \eta_2) &= (\eta_1 - \eta'_2) \int_0^\pi y_1 y_2 dx + (-1)(-\eta'_1) \int_0^\pi y_2^2 dx - (-1) \frac{\eta'_1}{-\eta'_1} \eta_2 \int_0^\pi y_1^2 dx \\ &= (\eta_1 - \eta'_2) \int_0^\pi y_1 y_2 dx + \eta'_1 \int_0^\pi y_2^2 dx - \eta_2 \int_0^\pi y_1^2 dx \\ &= \Delta'(\lambda). \end{aligned}$$

(2) Se  $\eta'_1 > 0$ , então  $\text{sgn}(\eta'_1) = 1$  e  $|\eta'_1| = \eta'_1$ . Logo,

$$\begin{aligned} F(y_1, y_2, \eta_1, \eta_2) &= (\eta_1 - \eta'_2) \int_0^\pi y_1 y_2 dx + \eta'_1 \int_0^\pi y_2^2 dx - \eta_2 \int_0^\pi y_1^2 dx \\ &= \Delta'(\lambda). \end{aligned}$$

Em ambos os casos temos  $F(y_1, y_2, \eta_1, \eta_2) = \Delta'(\lambda)$ , como queríamos.

A equação (2.66) mostra que  $\Delta'(\lambda)$  possui o mesmo sinal que  $\eta'_1$  em qualquer intervalo na qual  $\eta'_1 \neq 0$  e  $\Delta^2 \leq 4$ . Considere agora um valor  $\mu$  de  $\lambda$  tal que

$$\Delta(\mu) = 2 \quad \text{e} \quad \Delta'(\mu) \leq 0.$$

Desejamos estabelecer o fato de que, para um  $\delta$  suficientemente pequeno  $\Delta(\lambda)$  é decrescente no intervalo,  $\mu < \lambda < \mu + \delta$ . Se  $\Delta'(\mu) < 0$ , isto é evidente pois  $\Delta$  é uma função diferenciável. Assuma agora que  $\Delta(\mu) = 2$  e  $\Delta'(\mu) = 0$ . Nesse caso, de acordo com (2.66), devemos ter  $\eta'_1(\mu) = 0$ , pois se  $\eta'_1(\mu) \neq 0$  então por (2.66), teremos

$$y_2 = \frac{-\text{sgn}(\eta'_1)(\eta_1 - \eta'_2)}{2|\eta'_1|} y_1$$

e assim,  $W(y_1, y_2)(t_0) = 0$ , o que é contradição. Como também temos

$$0 = \Delta^2 - 4 = (\eta_1 - \eta'_2)^2 + 4\eta'_1 \eta_2$$

encontramos que  $\eta_1(\mu) - \eta'_2(\mu) = 0$  e como  $\eta_1 \eta'_2 - \eta_2 \eta'_1 = 1$  segue que  $\eta_1 \eta'_2 - \eta_2 \cdot 0 = 1$ , isto é,  $\eta_1 \eta'_2 = 1$ . Assim como  $\eta_1(\mu) - \eta'_2(\mu) = 0$  temos

$$\eta_1(\mu) = \eta'_2(\mu) = 1.$$

Então (2.56) se reduz na forma,

$$\Delta'(\lambda) = -\eta_2 \int_0^\pi y_1^2(x) dx.$$

Portanto  $\Delta'(\mu) = 0$  implica que  $\eta_2(\mu) = 0$ , já que  $y_1(0) = 1$  garante que  $y_1$  não seja constante igual a zero em  $[0, \pi]$ . Calculemos agora ,

$$\Delta''(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \Delta'(\lambda),$$

para  $\lambda = \mu$ , onde  $\mu$  é tal que

$$\eta_1'(\mu) = \eta_2(\mu) = 0 \quad \text{e} \quad \eta_1(\mu) = \eta_2'(\mu) = 1. \quad (2.67)$$

Faremos isto diferenciando (2.56) com respeito a  $\lambda$  e usando (2.59) para  $x = \pi$  a fim de obter as derivadas com respeito a  $\lambda$  de  $\eta_1'(\lambda), \eta_2'(\lambda)$  para  $\lambda = \mu$ . Através de um cálculo vemos que se (2.67) vale então,

$$\Delta''(\lambda) = 2 \left( \int_0^\pi y_1(x) y_2(x) dx \right)^2 - 2 \int_0^\pi y_1^2(x) dx \int_0^\pi y_2^2(x) dx. \quad (2.68)$$

Com efeito, diferenciando (2.56), temos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \Delta'(\lambda) &= \left( \frac{d}{d\lambda} (\eta_1 - \eta_2') \right) \int_0^\pi y_1(x) y_2(x) dx - \left( \frac{d}{d\lambda} \eta_2 \right) \int_0^\pi y_1^2(x) dx \\ &+ \left( \frac{d}{d\lambda} \eta_1' \right) \int_0^\pi y_2^2(x) dx + (\eta_1 - \eta_2') \frac{d}{d\lambda} \left( \int_0^\pi y_1(x) y_2(x) dx \right) \\ &- \eta_2 \frac{d}{d\lambda} \left( \int_0^\pi y_1^2(x) dx \right) + \eta_1' \frac{d}{d\lambda} \left( \int_0^\pi y_2^2(x) dx \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \Delta'(\lambda) &= (z_1(x) - z_2'(x)) \int_0^\pi y_1(x) y_2(x) dx - z_2(x) \int_0^\pi y_1^2(x) dx \\ &+ z_1'(x) \int_0^\pi y_2^2(x) dx + (\eta_1 - \eta_2') \frac{d}{d\lambda} \left( \int_0^\pi y_1(x) y_2(x) dx \right) \\ &- \eta_2 \frac{d}{d\lambda} \left( \int_0^\pi y_1^2(x) dx \right) + \eta_1' \frac{d}{d\lambda} \left( \int_0^\pi y_2^2(x) dx \right). \end{aligned}$$

Agora usando as quatro igualdades de (2.59) para  $x = \pi$  e considerando  $\lambda = \mu$  temos,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{d\lambda} \Delta'(\lambda) \right|_{\lambda=\mu} &= \left( y_1(\pi) \int_0^\pi y_2(t)y_1(t)dt - y_2(\pi) \int_0^\pi y_1^2(t)dt - y_1'(\pi) \int_0^\pi y_2^2(t)dt \right. \\
&\quad \left. + y_2'(\pi) \int_0^\pi y_1(t)y_2(t)dt \right) \int_0^\pi y_1(t)y_2(t)dt - \left( y_1(\pi) \int_0^\pi y_2^2(t)dt \right. \\
&\quad \left. - y_2(\pi) \int_0^\pi y_1(t)y_2(t)dt \right) \int_0^\pi y_1^2(t)dt + \left( y_1'(\pi) \int_0^\pi y_2(t)y_1(t)dt \right. \\
&\quad \left. - y_2'(\pi) \int_0^\pi y_1^2(t)dt \right) \int_0^\pi y_2^2(t)dt \\
&= \left( 2 \int_0^\pi y_2(t)y_1(t)dt \right) \int_0^\pi y_1(t)y_2(t)dt - \left( \int_0^\pi y_2^2(t)dt \right) \int_0^\pi y_1^2(t)dt \\
&\quad - \left( \int_0^\pi y_1^2(t)dt \right) \int_0^\pi y_2^2(t)dt \\
&= 2 \left( \int_0^\pi y_2(t)y_1(t)dt \right)^2 - 2 \left( \int_0^\pi y_2^2(t)dt \right) \left( \int_0^\pi y_1^2(t)dt \right),
\end{aligned}$$

de onde obtemos (2.68). Assim como  $y_1$  e  $y_2$  são LI, usando a desigualdade de Schwartz temos,

$$\left( \int_0^\pi y_1(x)y_2(x)dx \right)^2 = (y_1, y_2)_{L^2}^2 < \|y_1\|_{L^2}^2 \|y_2\|_{L^2}^2 = \int_0^\pi y_1^2(x)dx \int_0^\pi y_2^2(x)dx.$$

Consequentemente de (2.68) segue que,

$$\Delta''(\mu) < 0. \tag{2.69}$$

Desta forma,  $\Delta(\lambda)$  é novamente encontrado como sendo decrescente ( $\mu$  é ponto de máximo local,  $\mu \neq \lambda_0$ ) em um intervalo  $\mu < \lambda < \mu + \delta$ .

Suponha que o Lema 2.16 seja falso. Então, existe um número  $\mu^* > \mu$  tal que  $\Delta'(\lambda) < 0$  para  $\mu < \lambda < \mu^*$ , já que garantimos o  $\delta$  acima. Porém  $\Delta'(\mu^*) = 0$  apesar de  $\Delta(\lambda^*) > -2$ . Devemos ter então,

$$\Delta^2(\mu^*) - 4 = (\eta_1 - \eta_2')^2 + 4\eta_1'\eta_2 < 0, \tag{2.70}$$

pois  $\Delta$  decresce a partir de  $\mu$  onde  $\Delta(\mu) = 2$  e quando chega em  $\mu^*$  temos que a função  $\Delta$  para de decrescer uma vez que  $\Delta'(\mu^*) = 0$ . Contudo  $-2 < \Delta'(\mu^*) < 2$ , e assim  $|\Delta(\mu^*)| < 2$ . A Figura 2.3 ilustra melhor este fato.



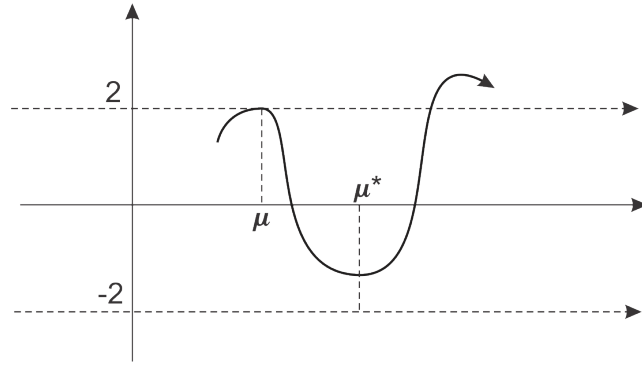


Figura 2.3:

Portanto  $\eta'_1\eta_2 < 0$  para  $\lambda = \mu^*$ . Mas então  $\eta'_1(\mu^*) \neq 0$  e de acordo com (2.66),  $\Delta'(\mu^*) \neq 0$ , a qual é uma contradição. Deste modo provamos o Lema 2.16 no caso  $\Delta(\lambda) = 2$  e  $\Delta'(\mu) \leq 0$ .

Analisemos o caso  $\Delta(\lambda) = -2$  e  $\Delta'(\mu) \geq 0$ . Vamos estabelecer o fato que existe um  $\delta$  suficientemente pequeno tal que  $\Delta(\lambda)$  é crescente no intervalo  $\mu < \lambda < \mu + \delta$ . Se  $\Delta'(\mu) > 0$  isto é imediato. Se  $\Delta'(\mu) = 0$ , da mesma forma como fizemos no outro caso temos,  $\eta_1(\mu) - \eta'_2(\mu) = 0$  e  $\eta_1\eta'_2 = 1$ , porém com  $\Delta(\lambda) = -2$  e  $\eta_1 = \eta'_2 = -1$ . Daí  $\Delta''(\mu) > 0$  e  $\Delta(\lambda)$  é crescente no intervalo  $\mu < \lambda < \mu + \delta$ . Assim suponha novamente que o lema é falso. Como existe um  $\delta$  tal que  $\Delta$  é crescente no intervalo  $\mu < \lambda < \mu + \delta$ , então existe um menor  $\mu^*$  tal que  $\Delta'(\lambda) > 0$  para  $\mu < \lambda < \mu^*$ , mas  $\Delta'(\mu^*) = 0$  apesar de  $\Delta(\mu^*) < 2$ , teremos então  $\Delta^2(\mu^*) - 4 = (\eta_1 - \eta'_2)^2 + 4\eta'_1\eta_2 < 0$ . Logo,  $\eta'_1\eta_2 < 0$  para  $\lambda = \mu^*$  e daí  $\eta'_1(\mu^*) \neq 0$  e por (2.66) encontraremos  $\Delta'(\mu^*) \neq 0$ , o que é uma contradição. Portanto provamos o lema no caso  $\Delta(\lambda) = -2$  e  $\Delta'(\mu) \geq 0$ .  $\square$

Incidentalmente mostramos de fato que o seguinte lema é verdadeiro.

**Lema 2.17.** (i) As raízes da equação  $\Delta^2(\lambda) = 4$  ou são raízes simples ou raízes duplas.

(ii) Se para um valor de  $\lambda = \mu$  temos  $\Delta^2(\mu) = 4$  e  $\Delta'(\mu) = 0$ , então  $\Delta''(\mu) < 0$  se  $\Delta(\mu) = 2$  e  $\Delta''(\mu) > 0$  se  $\Delta(\mu) = -2$ .

(iii) Condições necessárias e suficientes para  $\Delta^2(\mu) - 4$  e  $\Delta'(\mu)$  anularem-se simultaneamente são,

$$\eta_1(\mu) - \eta'_2(\mu) = \eta'_1(\mu) - \eta_2(\mu) = 0. \quad (2.71)$$

**Demonstração:** (i) Pela demonstração do Lema 2.16 temos que,  $\Delta''(\mu) > 0$  ou  $\Delta''(\mu) < 0$ , isto é,  $\Delta''$  nunca é zero. Sendo  $\Delta(\lambda)$  é uma função analítica (ver Teorema 1.14) e  $\mu$  uma raiz de  $\Delta^2(\lambda) - 4$ , temos que existe  $m \neq 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  tal que,

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = (\lambda - \mu)^m g(\lambda), \quad (2.72)$$

com  $g(\lambda) \neq 0 \forall \lambda$ . Note que,

$$(\Delta^2(\lambda) - 4)' = 2\Delta(\lambda)\Delta'(\lambda) = m(\lambda - \mu)^{m-1}g(\lambda) + (\lambda - \mu)^m g'(\lambda) \quad (2.73)$$

e

$$\begin{aligned} (\Delta^2(\lambda) - 4)'' &= 2\Delta(\lambda)\Delta''(\lambda) + 2(\Delta'(\lambda))^2 = m(m-1)(\lambda - \mu)^{m-2}g(\lambda) \\ &+ m(\lambda - \mu)^{m-1}g'(\lambda) + (\lambda - \mu)^m g''(\lambda) + m(\lambda - \mu)^{m-1}g'(\lambda). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Deste modo para mostrar o lema, basta estabelecer que se  $\mu$  é raiz de  $\Delta^2(\lambda) - 4$  e  $\Delta''(\lambda) \neq 0$ , então  $m$  em (2.72), é menor ou igual a 2 ( $m$  acima é a multiplicidade da raiz  $\mu$ ). Suponha então que  $m > 2$ , assim o lado direito da equação (2.74) é igual a zero em  $\lambda = \mu$ . Logo,

$$2\Delta(\mu)\Delta''(\mu) + 2(\Delta'(\mu))^2 = 0.$$

Temos dois casos a considerar:  $\Delta'(\mu) = 0$  e  $\Delta'(\mu) \neq 0$ . Se  $\Delta'(\mu) = 0$  então  $2\Delta(\mu)\Delta''(\mu) = 0$  e como  $\Delta(\mu) = \pm 2$ , segue que  $\Delta''(\mu) = 0$  o que é uma contradição e então  $m \leq 2$ . Se  $\Delta'(\mu) \neq 0$ , temos do fato de  $\Delta(\mu) = \pm 2$  e da equação (2.73) que,  $m(\lambda - \mu)^{m-1}g(\lambda) + (\lambda - \mu)^m g'(\lambda) \neq 0$ , o que é uma contradição quando  $m \geq 2$ . Portanto novamente temos  $m < 2$ .

A parte (ii) já foi feita na demonstração do Lema 2.16.

Verifiquemos finalmente a parte (iii). Assuma que  $\Delta^2(\mu) - 4 = 0$  e  $\Delta'(\mu) = 0$ . Então (2.66) implica que  $\eta_1'(\mu) = 0$ . Por outro lado de (2.65) temos que  $(\eta_1 - \eta_2) = 0$ . Assim substituindo  $(\eta_1 - \eta_2) = \eta_1'(\mu) = 0$  em (2.56) temos,

$$0 = \Delta'(\mu) = -\eta_2 \int_0^\pi y_1^2(x) dx.$$

Sendo  $y_1 \not\equiv 0$  em  $[0, \pi]$  pois  $y_1'(0) = 1$  e  $y_1$  é suave, temos  $\eta_2(\mu) = 0$ . Portanto  $\eta_1(\mu) - \eta_2'(\mu) = \eta_1'(\mu) - \eta_2(\mu) = 0$ . Reciprocamente, substituindo (2.71) em (2.56) temos  $\Delta'(\mu) = 0$  e substituindo (2.71) em (2.65) temos que  $\Delta^2(\mu) - 4 = 0$ .  $\square$

Para completar a prova do Teorema da Oscilação, necessitamos do lema abaixo.

**Lema 2.18.** *Seja  $\lambda_0$  a menor raiz da equação  $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$ . Então  $\lambda_0$  é uma raiz simples e  $\Delta'(\lambda_0) < 0$ .*

**Demonstração:** Como  $\Delta^2(\lambda) - 4$  é uma função analítica, para provar que  $\lambda_0$  é uma raiz simples basta mostrar que  $\Delta'(\lambda_0) \neq 0$ . Com efeito, suponha que  $\Delta'(\lambda_0) = 0$ . Conforme vimos no Lema 2.12, se  $\lambda < \lambda_0$  então  $\Delta(\lambda) > 2$ . Assim  $\lambda = \lambda_0$  não pode ser ponto de máximo. Por outro lado se  $\Delta'(\lambda_0) = 0$  e  $\Delta^2(\lambda_0) - 4 = 0$ , então  $\Delta'(\lambda_0) = 0$  e  $\Delta(\lambda_0) = 2$  ou  $\Delta'(\lambda_0) = 0$  e  $\Delta(\lambda_0) = -2$ , mas o caso  $\Delta(\lambda_0) = -2$  não pode ocorrer, pois  $\Delta(\lambda) > 2 \forall \lambda < \lambda_0$  e  $\Delta(\lambda)$  é suave. Logo,  $\Delta'(\lambda_0) = 0$  e  $\Delta(\lambda_0) = 2$  e de acordo com o Lema 2.17,  $\lambda_0$  é ponto de máximo de  $\Delta(\lambda)$  o que é contradição. Portanto  $\Delta'(\lambda_0) \neq 0$  e  $\lambda_0$  é raiz simples. Ademais como  $\Delta(\lambda)$  é suave, decrescente a esquerda de  $\lambda_0$  e  $\Delta'(\lambda_0) \neq 0$ , segue que  $\Delta'(\lambda_0) < 0$ .  $\square$

Como veremos uma comparação do Lema 2.17 e do Teorema de Floquet mostra que podemos completar a prova do *Teorema da Oscilação* através do seguinte corolário.

**Corolário 2.19.** *A equação (2.37) possui duas soluções LI, periódicas com período  $\pi$  ou  $2\pi$  se, e somente, se a equação  $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$  possui raiz dupla.*

**Demonstração:** De fato, no Lema 2.17 vimos que uma condição necessária e suficiente para  $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$  e  $\Delta'(\lambda) = 0$  é que

$$\eta_1(\mu) - \eta_2'(\mu) = \eta_1'(\mu) = \eta_2(\mu) = 0. \quad (2.75)$$

Assim se (2.37) possui duas soluções LI de período  $\pi$  ou  $2\pi$ , as soluções de (2.37) são estáveis e como  $\Delta(\mu) = \pm 2$ , pelo Teste de Estabilidade segue que  $\eta_1'(\mu) = \eta_2(\mu) = 0$  e por (2.65) temos que  $\eta_1(\mu) - \eta_2'(\mu) = 0$ , logo (2.75) vale. Reciprocamente, como (2.75) ocorre temos  $\Delta(\mu) = \pm 2$ , e daí,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  raízes da equação característica satisfazem,  $\rho_1 = \rho_2 = \pm 1$  (ver Observação 2.13). Assim, (2.75) implica que  $\theta = 0$  em (ii) no Teorema de Floquet. Portanto, temos duas soluções LI de período  $\pi$  ou  $2\pi$ .  $\square$

O Teste de Estabilidade, o Corolário 2.19 e o Lema 2.17 mostram que as soluções de (2.37) são estáveis para  $\lambda = \lambda_{2n+1}$  (respectivamente,  $\lambda = \lambda'_{2n+1}$ ) se, e somente, se  $\lambda_{2n+1}$  (respectivamente,  $\lambda'_{2n+1}$ ) é uma raiz dupla de  $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$ , isto é, se e somente, se  $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$  (respectivamente,  $\lambda'_{2n+1} = \lambda'_{2n+2}$ ). Com efeito, sendo as soluções de (2.37) estáveis e  $|\Delta(\lambda_{2n+1})| = 2$  (respectivamente,  $|\Delta(\lambda'_{2n+1})| = 2$ ) temos pelo teste de estabilidade que  $\Delta(\lambda_{2n+1}) = 2$ . (respectivamente,  $|\Delta(\lambda'_{2n+1})| = -2$ ) e  $\eta_2 = \eta_1' = 0$ . Deste fato e

de (2.65) segue que  $\eta_1 - \eta_2' = 0$  e do Lema 2.72 obtemos que  $\Delta'(\lambda_{2n+1}) = \Delta'(\lambda_{2n+1}') = 0$  e portanto  $\lambda_{2n+1}$  (respectivamente,  $\lambda_{2n+1}'$ ) é raiz dupla. Reciprocamente, pelo Corolário 2.19 se  $\lambda_{2n+1}$  (respectivamente,  $\lambda_{2n+1}'$ ) é uma raiz dupla então há duas soluções LI periódicas e portanto as soluções de (2.37) são estáveis para  $\lambda = \lambda_{2n+1}$  (respectivamente,  $\lambda = \lambda_{2n+1}'$ ).

□

## 2.5 Equação diferencial para o produto de soluções.

Nesta seção veremos algumas propriedades da equação,

$$y''' + 4Qy' + 2Q'y = 0 \quad (2.76)$$

a qual é chamada equação para o produto de duas soluções da equação de Hill. Este nome vem do fato que o produto de quaisquer duas soluções da equação de Hill é solução de (2.76). Veremos ainda que toda solução de (2.76) é obtida como combinação linear de produtos de duas soluções da equação de Hill.

**Lema 2.20.** *Seja  $\eta_1$  e  $\eta_2$  duas soluções quaisquer de,*

$$y''(x) + Q(x)y(x) = 0 \quad (2.77)$$

onde  $Q(x + \pi) = Q(x)$ ,  $\forall x$ . Então  $z = \eta_1\eta_2$  satisfaz,

$$\frac{d^3}{dx^3}z(x) + 4Q(x)\frac{d}{dx}z(x) + 2\left(\frac{d}{dx}Q(x)\right)z(x) = 0. \quad (2.78)$$

Isto é, o produto de qualquer duas soluções de (2.77) é solução de (2.78). Além disso, a equação (2.76) possui ao menos uma solução periódica não trivial com período  $\pi$ .

**Demonstração:**

Diferenciando  $z = \eta_1\eta_2$  com respeito a  $x$  três vezes temos,

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dx^3}z(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx}z(x) \right) \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} (\eta_1'\eta_2 + \eta_2'\eta_1) \right) \\ &= \frac{d}{dx} (\eta_1''\eta_2 + \eta_1'\eta_2' + \eta_2''\eta_1 + \eta_2'\eta_1') = \frac{d}{dx} (-Q(x)\eta_1\eta_2 + \eta_1'\eta_2' - Q(x)\eta_2\eta_1 + \eta_2'\eta_1'), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dx^3} z(x) &= \frac{d}{dx} (-2Q(x)\eta_1\eta_2 + 2\eta_1'\eta_2') = -2\frac{d}{dx} (Q(x)\eta_1\eta_2) + 2(\eta_1''\eta_2 + \eta_1'\eta_2'') \\ &= -2\left(\frac{d}{dx}Q(x)\right)\eta_1\eta_2 - 2Q(x)(\eta_1'\eta_2 + \eta_1\eta_2') + 2(-Q(x)\eta_1\eta_2' - Q(x)\eta_2\eta_1') \\ &= -2\left(\frac{d}{dx}Q(x)\right)z(x) - 4Q(x)\left(\frac{d}{dx}z(x)\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d^3}{dx^3} z(x) + 4Q(x)\frac{d}{dx} z(x) + 2\left(\frac{d}{dx}Q(x)\right)z(x) = 0,$$

como queríamos. Observe que não impomos a condição de que  $\eta_1$  fosse diferente de  $\eta_2$  e assim  $\eta_1^2$ ,  $\eta_2^2$  também são soluções de (2.76). Verifiquemos agora a existência de solução periódica para (2.78). Com efeito, pelo Teorema de Floquet temos que se  $\rho_1 \neq \rho_2$  então  $z = f_1 f_2$  é a solução periódica procurada onde  $f_1(x) = e^{i\alpha x} p_1(x)$  e  $f_2(x) = e^{-i\alpha x} p_2(x)$ . Caso  $\rho_1 = \rho_2$  então o item (ii) do Teorema de Floquet garante a existência de uma solução  $g(x)$  periódica com período ou semi-período  $\pi$  para (2.77). Assim,  $z = g^2$  é uma solução  $\pi$ -periódica para (2.76).  $\square$

Os próximos resultados nos dizem um pouco mais sobre a equação para o produto de soluções de (2.77).

**Lema 2.21.** *Se  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são duas soluções linearmente independentes de (2.77) então,*

$$\eta_1^2, \quad \eta_1\eta_2 \quad e \quad \eta_2^2$$

*são soluções linearmente independentes de (2.76).*

**Demonstração:** Sendo  $\eta_1$  e  $\eta_2$  duas soluções de (2.77), temos do Lema 2.20 que  $\eta_1^2$ ,  $\eta_1\eta_2$  e  $\eta_2^2$  são soluções de (2.78). Assim para provarmos o lema, basta mostrarmos que o Wronskiano destas três soluções em  $x = 0$  é diferente de zero. Com efeito,

$$\begin{aligned} W(\eta_1^2, \eta_1\eta_2, \eta_2^2) &= \det \begin{bmatrix} \eta_1^2 & \eta_1\eta_2 & \eta_2^2 \\ (\eta_1^2)' & (\eta_1\eta_2)' & (\eta_2^2)' \\ (\eta_1^2)'' & (\eta_1\eta_2)'' & (\eta_2^2)'' \end{bmatrix} \\ &= -6\eta_1\eta_1'\eta_2(\eta_2')^2 + 2\eta_1^3(\eta_2')^3 + 6\eta_1(\eta_1')^2\eta_2^2\eta_2' - 2(\eta_1')^3\eta_2^3. \end{aligned}$$

Como  $\eta_1(0) = 1 = \eta_2'(0)$  e  $\eta_1'(0) = 0 = \eta_2(0)$ , temos

$$\begin{aligned} W(\eta_1^2, \eta_1\eta_2, \eta_2^2)(0) &= -6\eta_1(0)\eta_1'(0)\eta_2(0)(\eta_2')^2(0) + 2\eta_1^3(0)(\eta_2')^3(0) \\ &\quad + 6\eta_1(0)(\eta_1')^2(0)\eta_2^2(0)\eta_2'(0) - 2(\eta_1')^3(0)\eta_2^3(0) = 2. \end{aligned}$$

Logo,  $W(\eta_1^2, \eta_1\eta_2, \eta_2^2)(0) \neq 0$  e portanto as soluções acima são LI.  $\square$

**Lema 2.22.** *Se a equação característica para a equação (2.77) possui raízes  $\rho_1$  e  $\rho_2$  com  $\rho_1 \neq \rho_2$  e se  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são soluções não triviais de (2.77) então,*

$$\eta_1(x + \pi) = \rho_1\eta_1(x) \quad e \quad \eta_2(x + \pi) = \rho_2\eta_2(x). \quad (2.79)$$

Além disso,  $\eta_1\eta_2$  é periódica com período  $\pi$  e todas soluções de (2.76) com período  $\pi$  são múltiplas desta solução.

**Demonstração:** Observe que (2.79) é praticamente o item (i) do Teorema de Floquet, pois se  $\rho_1 \neq \rho_2$ , então  $\eta_1(x) = e^{i\alpha x}p_1(x)$  e  $\eta_2(x) = e^{-i\alpha x}p_2(x)$  com  $p_1(x)$  e  $p_2(x)$  periódicas com período  $\pi$ . Assim,

$$\eta_1(x + \pi) = e^{i\alpha(x+\pi)}p_1(x + \pi) \quad e \quad \eta_2(x + \pi) = e^{-i\alpha(x+\pi)}p_2(x + \pi)$$

donde obtemos (2.79). Também,  $\eta_1\eta_2$  é periódica com período  $\pi$  do fato que  $\rho_1\rho_2 = 1$ . Deste modo, resta mostrar que toda solução  $\pi$ -periódica de (2.76) é múltipla de  $\eta_1\eta_2$ . Com efeito, como a equação (2.76) é linear e homogênea e como as soluções  $\eta_1^2$ ,  $\eta_1\eta_2$  e  $\eta_2^2$  de (2.76) são LI (ver o Lema 2.21), temos que qualquer solução de (2.76) é combinação linear de  $\eta_1^2$ ,  $\eta_1\eta_2$  e  $\eta_2^2$ . Seja então  $y_4 = a_1\eta_1^2 + a_2\eta_1\eta_2 + a_3\eta_2^2$  uma solução arbitrária de (2.76) com período  $\pi$ . Mostremos que

$$y_4 = \alpha\eta_1\eta_2. \quad (2.80)$$

Note que, sendo  $\eta_1\eta_2$  de período  $\pi$  temos,

$$\begin{aligned} y_4(x + \pi) &= a_1\eta_1^2(x + \pi) + a_2\eta_1\eta_2(x + \pi) + a_3\eta_2^2(x + \pi) \\ &= a_1\eta_1^2(x + \pi) + a_2\eta_1\eta_2(x) + a_3\eta_2^2(x + \pi). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Por outro lado, como  $y_4(x + \pi) = y_4(x)$  temos de (2.81) a seguinte igualdade,

$$a_1\eta_1^2(x + \pi) + a_3\eta_2^2(x + \pi) = a_1\eta_1^2(x) + a_3\eta_2^2(x),$$

isto é,

$$a_1 u + a_3 v = 0,$$

onde  $u(x) = \eta_1^2(x + \pi) - \eta_1^2(x)$  e  $v(x) = \eta_2^2(x + \pi) - \eta_2^2(x)$ . Dividiremos agora  $a_1$  e  $a_3$  em três casos,

(i) Se  $a_1 \neq 0$  e  $a_3 = 0$ .

Neste caso  $\eta_1^2(x + \pi) - \eta_1^2(x) = 0$ , então  $\eta_1(x + \pi) = \pm \eta_1(x)$  e conseqüentemente  $\rho_1 = \pm 1$  o que é uma contradição.

(ii) Se  $a_1 = 0$  e  $a_3 \neq 0$ .

Do mesmo modo temos,  $\eta_2(x + \pi) = \pm \eta_2(x)$  e assim  $\rho_2 = \pm 1$  o que é uma contradição.

(iii) Se  $a_1 \neq 0$  e  $a_3 \neq 0$ .

Então  $a_1 u + a_3 v = 0$  com  $a_1, a_3 \neq 0$ . Daí  $u = -\frac{a_3}{a_1} v$  que implica que  $u$  e  $v$  são linearmente dependentes. Como  $\rho_j \neq \pm 1$ ,  $j = 1, 2$ , segue que,

$$\eta_1^2(x) = \left( \frac{a_3(\rho_2^2 - 1)}{a_1(\rho_1^2 - 1)} \right) \eta_2^2(x),$$

o que é uma contradição pois vimos que  $\eta_1^2$  e  $\eta_2^2$  são linearmente independentes.

Portanto vemos que nenhum dos três casos podem ocorrer. Isto nos mostra que  $a_1 = a_3 = 0$ . Assim, considerando  $\alpha = a_2$  em (2.81), obtemos (2.80) como queríamos.

□

**Proposição 2.23.** *Ou todas as soluções de (2.78) com período  $\pi$  são múltiplas de uma única, ou todas soluções de (2.78) são periódicas com período  $\pi$ . Isso acontece se, e somente, se todas as soluções de (2.77) são periódicas com período  $\pi$  ou todas periódicas com período  $2\pi$ .*

**Demonstração:** Mostremos primeiro a segunda parte.

Se todas as soluções de (2.77) são  $\pi$ -periódicas (ou todas  $2\pi$ -periódicas), então

$$\rho_1 = \rho_2 = 1 \quad (\text{ou } \rho_1 = \rho_2 = -1).$$

Daí,  $\eta_1(x + \pi) = \eta_1(x)$  e  $\eta_2(x + \pi) = \eta_2(x)$  (ou  $\eta_1(x + \pi) = -\eta_1(x)$  e  $\eta_2(x + \pi) = -\eta_2(x)$ ). Em ambos os casos  $\eta_1^2$ ,  $\eta_1\eta_2$  e  $\eta_2^2$  são periódicas com período  $\pi$  e como são LI segue que todas as soluções de (2.78) são periódicas com período  $\pi$ .

Reciprocamente, se todas as soluções de (2.77) são periódicas de período  $\pi$ , então  $\eta_1^2$ ,  $\eta_2^2$  e  $\eta_1\eta_2$  são periódicas de período  $\pi$ . Como  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são soluções LI por (2.77), resta mostrar que elas são periódicas com período  $\pi$  ou  $2\pi$ . Observe que  $\eta_1^2(x + \pi) = \eta_1^2(x)$  implica que  $\eta_1(x + \pi) = \pm\eta_1(x)$  e do mesmo modo  $\eta_2(x + \pi) = \pm\eta_2(x)$ . Contudo não podemos ter  $\eta_1$  periódica com período  $\pi$  e  $\eta_2$  periódica com período minimal  $2\pi$ , ou equivalentemente,  $\eta_1(x + \pi) = \eta_1(x)$  e  $\eta_2(x + \pi) = -\eta_2(x)$ . Com efeito, se este fato ocorre, então

$$\eta_1\eta_2(x + \pi) = -\eta_1\eta_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

o que não é verdadeiro, pois  $\eta_1\eta_2$  é periódica de período  $\pi$ .

Provemos agora a primeira parte do lema. Para isto negamos a primeira afirmação e mostremos que a segunda é válida. Com efeito, temos pela contrapositiva do Lema 2.22 que  $\rho_1 = \rho_2 = \pm 1$ . Deste modo, por (ii) do Teorema de Floquet temos que existem  $\eta_1$  e  $\eta_2$  soluções LI de (2.77) tais que  $\eta_1(x + \pi) = \rho_1\eta_1(x)$  e  $\eta_2(x + \pi) = \rho_1\eta_2(x) + \theta\eta_1(x)$  onde  $\theta$  é uma constante. Se  $\theta = 0$  então todas as soluções de (2.77) são periódicas com período  $\pi$  ou  $2\pi$ . Pela segunda parte do lema (o qual já demonstramos) temos que todas as soluções de (2.78) são periódicas com período  $\pi$ . Se  $\theta \neq 0$  então (2.77) possui apenas uma solução  $\eta$ , periódica com período  $\pi$  ou periódica com semi-período  $\pi$  e conseqüentemente  $\eta^2$  é a única solução periódica de (2.78). Assim todas as soluções de (2.78) com período  $\pi$  serão múltiplas de  $\eta^2(x)$ . Isto é uma contradição quando negamos a primeira afirmação. Então  $\theta = 0$  e temos provado a proposição.

□



# Famílias isonerciais de operadores autoadjuntos

## 3.1 Índice de inércia e famílias isonerciais.

Começemos este capítulo com a seguinte definição oriunda da teoria elementar de matrizes.

**Definição 3.1.** *A inércia de uma matriz simétrica  $A$  é uma terna de inteiros não negativos  $(n, z, p)$  onde  $n, z$  e  $p$  são respectivamente o número de elementos negativos, nulos e positivos do espectro de  $A$ , contados com suas respectivas multiplicidades.*

No caso de operadores autoadjuntos  $\mathcal{L}$  (possivelmente ilimitados) definidos em um espaço de Hilbert  $H$  de dimensão infinita, definimos o índice de inércia  $In(\mathcal{L})$  como sendo o par  $(n, z)$ , onde  $n$  é a dimensão do subespaço negativo de  $\mathcal{L}$  (espaço gerado pelos autovetores ou autofunções associados aos elementos negativos do espectro de  $\mathcal{L}$ ) e  $z$  é a dimensão do subespaço nulo de  $\mathcal{L}$  (subespaço gerado pelos autovetores ou autofunções associados aos elementos nulos do espectro de  $\mathcal{L}$ ).

Os operadores com o qual estamos lidando são autoadjuntos, seu espectro coincide com o conjunto dos autovalores, isto é,  $\sigma_{ess}(\mathcal{L}) = \emptyset$  ( $\sigma_{ess}$  denota o espectro essencial, ver subseção 1.5.2) e os operadores satisfazem a seguinte propriedade. Existe  $\gamma > 0$  tal que o espectro de  $\mathcal{L}$  que fica a esquerda de  $\gamma$  consiste de um número finito de auto valores e a correspondente projeção espectral possui dimensão finita. Deste modo o índice de inércia fica bem definido.

**Definição 3.2.** *Uma família de operadores autoadjuntos  $\mathcal{L}_s := \mathcal{L}(s)$ , que depende de um parâmetro  $s$  é chamada isonercial se o índice de inércia  $In(\mathcal{L}_s)$  de  $\mathcal{L}_s$  não depende de  $s$ .*

O método que utilizaremos para obtermos famílias isonerciais de operadores é baseada na lei de inércia de Sylvester (cuja demonstração pode ser encontrada em [27]). No caso periódico esta lei pode ser resumida como segue.

**Lema 3.3.** (*Lei da inércia de Sylvester generalizada*) Se  $\mathcal{L}$  é um operador autoadjunto e  $M$  é um operador limitado inversível com adjunto  $M^*$ , então  $\text{In}(M\mathcal{L}M^*) = \text{In}(\mathcal{L})$ , onde  $M\mathcal{L}M^*$  é um operador autoadjunto com domínio  $(M^*)(D(\mathcal{L}))$ .

**Demonstração:** Ver [27] □

Suponha agora que a família de operadores  $\mathcal{L}(s)$  depende suavemente do parâmetro  $s$  e satisfaz a seguinte equação,

$$\frac{d\mathcal{L}}{ds} = B(s)\mathcal{L}(s) + \mathcal{L}(s)B^*(s) \quad (3.1)$$

onde  $B(s)$  é um operador dado. Seja  $M(s)$  a solução de,

$$\frac{d}{ds}M(s) = B(s)M(s), \quad M(s_0) = I. \quad (3.2)$$

Temos de (3.1) que  $\mathcal{L}(s)$  satisfaz,

$$\mathcal{L}(s) = M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s). \quad (3.3)$$

De fato, podemos ver que  $M(s)\mathcal{L}(s)M^*(s)$  é solução do problema,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{ds}\mathcal{L}(s) = B(s)\mathcal{L}(s) + \mathcal{L}(s)B^*(s) \\ \mathcal{L}(s_0) = \mathcal{L}_0 = M(s_0)\mathcal{L}(s_0)M^*(s_0), \end{array} \right.$$

posto que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s)) &= M(s)\mathcal{L}(s_0)\frac{d}{ds}(M^*(s)) + \frac{d}{ds}(M(s))\mathcal{L}(s_0)M^*(s) \\ &= M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s)B^*(s) + B(s)M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s) \\ &= [M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s)]B^*(s) + B(s)[M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s)]. \end{aligned}$$

Por outro lado  $\mathcal{L}(s)$  também é solução do problema acima e como os dados iniciais coincidem isto é,  $M(s_0)\mathcal{L}(s_0)M^*(s_0) = \mathcal{L}(s_0)$  temos pelo teorema de existência e unicidade que (3.3) realmente ocorre.

Deste modo, se  $M(s)$  é um operador inversível e limitado, o Lema 3.3 nos fornece

$$\text{In}(\mathcal{L}(s_0)) = \text{In}(M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s)). \quad (3.4)$$

Logo, por (3.3) temos,

$$\text{In}(M(s)\mathcal{L}(s_0)M^*(s)) = \text{In}(\mathcal{L}(s)). \quad (3.5)$$

Portanto de (3.4) e (3.5) temos que a família  $\mathcal{L}(s)$  é isonercial. *A equação (3.1) é a equação que governa as famílias de operadores isonerciais.*

## 3.2 Famílias isonerciais de operadores de Hill.

Esta seção é devotada ao estudo das famílias de operadores de Hill definidos em  $L_{per}^2([0, \pi])$ .

$$\mathcal{L}(s)(h) = -h'' + Q(x, s)h, \quad (3.6)$$

onde  $h'$  é a derivada de  $h$  com respeito à  $x$ . O domínio do operador  $\mathcal{L}(s)$  é  $D(\mathcal{L}(s)) = H_{per}^2([0, \pi])$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ . O potencial  $Q(x, s)$  é assumido como sendo periódico com período  $\pi$  no espaço e continuamente diferenciável para  $x \in \mathbb{R}$  e  $s$  em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ .

O núcleo de  $\mathcal{L}(s)$  é constituído de todas as soluções periódicas da equação,

$$-y'' + Qy = 0. \quad (3.7)$$

A equação (3.7) é fechada com relação ao produto de duas soluções

$$-y''' + 4Qy' + 2Q'y = 0. \quad (3.8)$$

Em outras palavras, o produto de quaisquer duas soluções de (3.7) é solução de (3.8) (ver página 75). Observe que em vez da equação de Hill como em (6.2), estamos lidando com a equação dada (3.7). Porém, podemos usar os resultados obtidos anteriormente sem perda de generalidade, já que podemos multiplicar (3.7) por  $(-1)$  e obter

$$-(-y'') - Qy = 0.$$

Assim, escrevendo  $-Q = Q_1$ , temos (3.7) na forma da equação de Hill em (6.2). Pelo Lema 2.21 temos que se  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são duas soluções LI de (3.7) então  $\eta_1^2$ ,  $\eta_1\eta_2$  e  $\eta_2^2$  são três

soluções LI de (3.8). Assumiremos agora a seguinte hipótese,

$$(H) \quad \lambda = 0 \text{ é um autovalor de } \mathcal{L}(s) \text{ para cada } s \in I.$$

Observe que esta hipótese é equivalente a assumir que a equação de Hill possui solução não trivial. Considere  $T(s)$  como sendo o operador de  $L_{per}^2([0, \pi])$  com domínio  $D(T) = H_{per}^3([0, \pi])$  dado por

$$T(s)y = -y''' + 4Qy' + 2Q'y.$$

Então a Proposição 2.23 provada na Seção 2.5 torna-se.

**Lema 3.4.** *Se a hipótese (H) é satisfeita então o núcleo de  $T(s)$  possui dimensão 1 ou 3. O caso de dimensão 3 ocorre se, e somente se todas as soluções de (3.7) são periódicas com período  $\pi$ .* □

Seja  $y_1 = y_1(x, s)$  e  $y_2 = y_2(x, s)$  duas soluções quaisquer de (3.7). Estas soluções são continuamente diferenciáveis em todas as variáveis. Então, diferenciando (3.7) com respeito à  $s$ , tem-se que

$$z_1 = \frac{dy_1}{ds}(x, s) \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{dy_2}{ds}(x, s),$$

devem satisfazer

$$-z_1'' + Qz_1 + \frac{dQ}{ds}y_1 = 0, \quad (3.9)$$

e

$$-z_2'' + Qz_2 + \frac{dQ}{ds}y_2 = 0, \quad (3.10)$$

respectivamente. Multiplicando (3.9) por  $y_2$  e integrando de 0 à  $\pi$  obtemos,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dQ}{ds}y_1y_2dx &= \int_0^\pi (z_1''y_2 - Qz_1y_2)dx \\ &= \int_0^\pi z_1''y_2dx - \int_0^\pi Qz_1y_2dx \\ &= z_1'y_2 \Big|_0^\pi - \int_0^\pi z_1'y_2'dx - \int_0^\pi Qz_1y_2dx \\ &= z_1'y_2 \Big|_0^\pi - z_1y_2' \Big|_0^\pi - \int_0^\pi z_1y_2''dx - \int_0^\pi Qz_1y_2dx \\ &= \int_0^\pi -z_1(-y_2'' + Qy_2)dx. \end{aligned}$$

Sendo  $-y_2'' + Qy_2 = 0$  temos,

$$\int_0^\pi \frac{dQ}{ds} y_1 y_2 dx = 0. \quad (3.11)$$

Similarmente, multiplicando (3.9) por  $y_1$  encontramos,

$$\int_0^\pi \frac{dQ}{ds} y_1^2 dx = 0. \quad (3.12)$$

Também, multiplicando (3.10) por  $y_2$  deduzimos,

$$\int_0^\pi \frac{dQ}{ds} y_2^2 dx = 0. \quad (3.13)$$

Portanto de (3.11), (3.12) e (3.13) temos,

$$\frac{dQ}{ds} \in [y_1^2, y_2^2, y_1 y_2]^\perp,$$

onde  $[y_1^2, y_2^2, y_1 y_2]$  denota o subespaço gerado por  $y_1^2$ ,  $y_2^2$  e  $y_1 y_2$ . Por outro lado, como a equação (3.8) é linear e homogênea com  $y_1^2$ ,  $y_2^2$ ,  $y_1 y_2$  soluções LI de (3.8), temos que qualquer solução de (3.8) é combinação linear de  $y_1^2$ ,  $y_2^2$ ,  $y_1 y_2$ . Assim, temos

$$[y_1^2, y_2^2, y_1 y_2] = Ker(T(s)).$$

Consequentemente,

$$\frac{dQ}{ds} \in Ker(T(s))^\perp. \quad (3.14)$$

Além disso, para todo  $u \in D(T(s))$  e  $v \in D(T^*(s))$  temos,

$$(T(s)(u), v)_{L_{per}^2} = (u, T^*(s)(v))_{L_{per}^2},$$

isto é,

$$(-u''' + 4Qu' + 2Q'u, v)_{L_{per}^2} = (u, T^*(s)(v))_{L_{per}^2}. \quad (3.15)$$

Logo como  $u$  e  $v$  são periódicas com período  $\pi$  segue de (3.15)

$$\begin{aligned} (u, T^*(s)(v))_{L_{per}^2} &= -(u''', v)_{L_{per}^2} + 4(Qu', v)_{L_{per}^2} + 2(Q'u, v)_{L_{per}^2} \\ &= (u, v''')_{L_{per}^2} - 4(u, v'Q + Q'v)_{L_{per}^2} + 2(u, vQ')_{L_{per}^2} \\ &= (u, v''' - 4v'Q - 2Q'v)_{L_{per}^2} \\ &= (u, -T(s)(v))_{L_{per}^2}. \end{aligned}$$

Daí  $T^*(s) = -T(s)$  e de (3.14) concluí-se,

$$\frac{dQ}{ds} \in \text{Ker}(T(s))^\perp = \text{Ker}(T^*(s))^\perp.$$

Agora, a equação  $-y''' + 4Qy' + 2Q'y = 0$  pode ser reduzida no seguinte sistema,

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2Q' + 4Q & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

onde  $u_1 = -y$ ,  $u_1' = u_2$ ,  $u_2' = u_3$  e  $u_3' = 2Q'u_1 + 4Qu_1$ . Como a matriz acima é contínua usando a alternativa de Fredholm (Teorema 1.18) temos que a equação,

$$-y''' + 4Qy' + 2Q'y = \frac{dQ}{ds} \quad (3.16)$$

possui ao menos uma solução periódica com período  $\pi$ . Seja  $b = b(x, s)$  uma solução periódica de (3.16). Considere o operador  $B(s)$  definido por,

$$B(s)(h) = (2bh)' + b'h \quad (3.17)$$

onde  $'$  denota a derivada em  $x$ . O operador adjunto de  $B(s)$  é,

$$B^*(s)(h) = -2bh' + b'h. \quad (3.18)$$

De fato,

$$\begin{aligned} (B(s)(h), u)_{L_{per}^2} &= (3b'h + 2bh', u)_{L_{per}^2} \\ &= (3b'h, u)_{L_{per}^2(0, \pi)} + (2bh', u)_{L_{per}^2} \\ &= (h, 3b'u)_{L_{per}^2} + (h', 2bu)_{L_{per}^2} \\ &= (h, 3b'u)_{L_{per}^2} + (h, -2u'b - 2b'u)_{L_{per}^2} \\ &= (h, -2bu' + b'u)_{L_{per}^2} \end{aligned}$$

e como  $(B(s)(h), u)_{L_{per}^2} = (h, B^*(s)(u))_{L_{per}^2}$ , para todo  $h \in D(B(s))$  e  $u \in D(B^*(s))$ , temos (3.18). Mostremos agora que os operadores  $\mathcal{L}(s)$ ,  $B(s)$  e  $B^*(s)$  dados respectivamente por (3.6), (3.17) e (3.18) satisfazem a equação que governa as famílias de operadores isonerciais

(3.1). Com efeito, por um lado temos,

$$\begin{aligned}
\left( (B\mathcal{L} + \mathcal{L}B^*)(s) \right)(h) &= B(s) \left( \mathcal{L}(s)(h) \right) + \mathcal{L}(s) \left( B^*(s)(h) \right) \\
&= B(s) \left( -h'' + Qh \right) + \mathcal{L}(s) \left( -2bh' + b'h \right) \\
&= 3b' \left( -h'' + Qh \right) + 2b \left( -h'' + Qh \right)' - \left( -2bh' + b'h \right)'' \\
&\quad + Q \left( -2bh' + b'h \right) \\
&= -3b'h'' + 3b'Qh - 2bh''' + 2bQ'h + 2bQh' + 2 \left( b'h'' + b''h' \right. \\
&\quad \left. + bh''' + b'h'' \right) - b'''h - b''h' - b'h'' - b'h' - 2Qbh' + Qb'h \\
&= \frac{d}{ds} Q(h),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\left( B(s)\mathcal{L}(s) + \mathcal{L}(s)B^*(s) \right)(h) = \frac{d}{ds} Q(h). \quad (3.19)$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}(h) = \frac{d}{ds} (-h''(x) + Q(x, s)h(x)) = \frac{d}{ds} Q(h). \quad (3.20)$$

Assim de (3.19) e (3.20) temos o desejado. Além disso, o problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} &= B(s)u(s) \\ u(s_0) &= u_0 \end{cases} \quad (3.21)$$

é uma EDP linear de primeira ordem com coeficientes suaves. Portanto ele é solúvel para ambos valores negativos e positivos de  $s$  e  $u(s)$  é inversível e limitado. De fato, usando a definição de  $B(s)$ , podemos reescrever (3.21) na forma,

$$g(x, s) \cdot D(u(x, s)) + c(x, s)u(x, s) = 0, \quad (3.22)$$

onde  $g(x, s) = (-2b(x, s), 1)$ ,  $D(u(x, s)) = (u_x(x, s), u_s(x, s))$  e  $c(x, s) = -3b_x(x, s)$ . Conforme a referência [25], a equação (3.22) pode ser resolvida utilizando o método das

características. Neste contexto, defina  $\alpha(t) = u(x(t), s(t))$ . Como estamos no caso linear, então

$$\dot{\alpha}(t) = g(x(t), s(t)) \cdot D(u(x(t), s(t))).$$

Assim, por (3.22) temos,

$$\dot{\alpha}(t) = 3b_x(x(t), s(t))\alpha(t).$$

Além disso, temos que  $D(u(x(t), s(t))) = g(x(t), s(t))$ . Desta forma, (3.22) pode ser reduzida no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -2b(x(t), s(t)) \\ \dot{s}(t) &= 1 \\ \dot{\alpha}(t) &= 3b_x(x(t), s(t))\alpha(t), \end{cases} \quad (3.23)$$

que resolvendo nos fornece,

$$\alpha(t) = c_1(x(t))T(t, t_0), \quad (3.24)$$

onde  $T(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t 3b_x(x(\xi), s(\xi))d\xi}$ .

Contudo de (3.23) temos,  $s(t) = t$  com  $s(t_0) = s_0$ . Então por (3.24)

$$u(x, s) = c_1(x)T(s, s_0), s \in \mathbb{R},$$

onde,

$$\begin{aligned} T(s_0, s_0) &= I \\ T(s, s_0) &= T(s_0, s)^{-1} \\ T(s, s_0)T(s_0, r) &= T(s, r). \end{aligned}$$

Assim, definindo

$$M(s) = T(s, s_0),$$

temos,

$$\begin{aligned} M(s_0) &= I \\ M(s)^{-1} &= T(s, s_0)^{-1} = T(s_0, s). \end{aligned}$$

Portanto por (3.2) o operador  $M(s)$  está bem definido, inversível e limitado.

Provamos desta forma o principal resultado desta seção.

**Teorema 3.5.** *Considere  $\mathcal{L}(s)$  o operador de Hill,*

$$\mathcal{L}(s)(h) = -h''(x) + Q(x, s)h(x)$$



cujo domínio é  $D(\mathcal{L}(s)) = H_{per}^2([0, \pi])$ . Se  $\lambda = 0$  é um autovalor de  $\mathcal{L}(s)$ , para cada  $s$  no intervalo  $I$  e o potencial  $Q(x, s)$  é continuamente diferenciável, então a família de operadores  $\mathcal{L}(s)$ ,  $s \in I$ , é isonercial.

□

**Observação 3.6.** Como veremos mais adiante, o operador de Hill

$$\mathcal{L}(s)(h) = -h''(x) + Q(x, s)h(x)$$

para um potencial  $Q$  fixado, possui, para um  $s_0$  fixo, um único autovalor negativo simples e  $0$  é auto valor simples. Daí o índice de inércia  $In(\mathcal{L}(s_0)) = (1, 1)$ , para esse  $s_0$  fixo. Assim, o teorema anterior garante que a família de operadores  $\mathcal{L}(s)$  é isonercial e  $In(\mathcal{L}(s)) = (1, 1)$  para todo  $s \in I$ .

# Operador de Hill

Neste capítulo, demonstraremos um importante resultado que caracteriza o espectro não positivo do operador de Hill (6.2), à partir de uma autofunção conhecida. Para isso, demonstramos uma versão melhorada do Teorema de Floquet de modo a caracterizar a constante  $\theta$  que aparece em (2.10).

## 4.1 Nova versão para o Teorema de Floquet.

Seja a equação de Hill,

$$y'' + Qy = 0, \quad (4.1)$$

com  $Q$  contínua periódica com período  $\pi$  e a equação característica associada a (4.1),

$$\rho^2 - [y_1(\pi) + y_2'(\pi)]\rho + 1 = 0 \quad (4.2)$$

onde  $y_1$  e  $y_2$  são duas soluções LI da equação (4.1) univocamente determinadas pelas condições iniciais,

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0 \quad \text{e} \quad y_2'(0) = 1.$$

Vimos no Teorema de Floquet que se  $\rho_1 = \rho_2 = 1$  é raiz de (4.1), então (4.1) admite uma solução  $p$  periódica com período  $\pi$ . Além disso, se  $y$  for uma outra solução de (4.1) LI com  $p$  então  $y$  satisfaz,

$$y(x + \pi) = y(x) + \theta p(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

com  $\theta$  constante.

O que veremos agora é uma nova versão para o item (ii) do Teorema de Floquet. Vamos considerar o caso  $\rho_1 = \rho_2 = 1$  e nosso principal objetivo é obter uma fórmula para

$\theta$  que dependa somente da solução  $p$  de (4.1), a qual é não trivial e periódica com período  $\pi$ . Suponha que  $p$  possua zeros simples  $z_1 < z_2 < z_3 < \dots < z_{2n}$  no intervalo  $[0, \pi)$ . Temos então,

$$p(z_i) = 0, p'(z_i) \neq 0 \quad \text{e} \quad p''(z_i) = -(\lambda + Q(z_i))p(z_i) = 0.$$

Note que  $p'(z_i) \neq 0$  é garantido pelo fato de  $z_i$  ser um zero simples de  $p(x)$ . Então, usando a fórmula de Taylor, podemos escrever  $p(x)$  como

$$p(x) = (x - z_i)p'(z_i) + \mathcal{O}((x - z_i)^3)$$

onde  $\mathcal{O}((x - z_i)^3)$  é o resto do desenvolvimento em série de Taylor de  $p$ . Portanto para  $x$  próximo de  $z_i$ , temos

$$\frac{p(x)}{(x - z_i)} = \frac{(x - z_i)p'(z_i)}{(x - z_i)} + \frac{\mathcal{O}((x - z_i)^3)}{(x - z_i)} = p'(z_i) + \mathcal{O}((x - z_i)^2).$$

Logo,

$$\frac{x - z_i}{p(x)} = \frac{1}{p'(z_i) + \mathcal{O}((x - z_i)^2)}.$$

Como  $p(x)$  é diferenciável e  $z_{i-1} < z_i$ , pelo teorema de Rolle, podemos escolher um ponto  $x_i$  no intervalo  $(z_{i-1}, z_i)$  tal que  $p'(x_i) = 0$ . Assumimos também que este  $x_i$  é único em cada intervalo  $(z_{i-1}, z_i)$ . Portanto os zeros  $z_i$  de  $p$  e  $x_i$  de  $p'$  são intercalados da seguinte forma,

$$z_1 < x_1 < z_2 < x_2 < z_3 < x_3 < \dots < x_{2n-1} < z_{2n} < x_{2n}. \quad (4.3)$$

Ademais, eles se repetirão para direita e para esquerda pela periodicidade da função  $p$ .

Defina para  $[x_1, x_1 + \pi)$  a função  $q$  dada por,

$$q(x) = \frac{x - z_i}{p(x)} = \frac{1}{p'(z_i) + \mathcal{O}((x - z_i)^2)}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i), \quad (4.4)$$

onde  $i = 2, 3, \dots, 2n + 1$ ,  $z_{2n+1} = z_1 + \pi$  e  $x_{2n+1} = x_1 + \pi$ . A Figura 4.1 ilustra os intervalos onde  $q$  está definida.

Como  $p$  é periódica com período  $\pi$  e  $z_{2n+1} = z_1 + \pi$  temos que  $q$  pode ser estendida em toda a reta de modo que  $q$  seja periódica com período  $\pi$ . Esta função auxiliar desempenha um papel importante nesta dissertação, ela nos serve para caracterizar  $\theta$  em (2.10) no Teorema de Floquet.

Vejamos agora algumas propriedades da função  $q(x)$ .

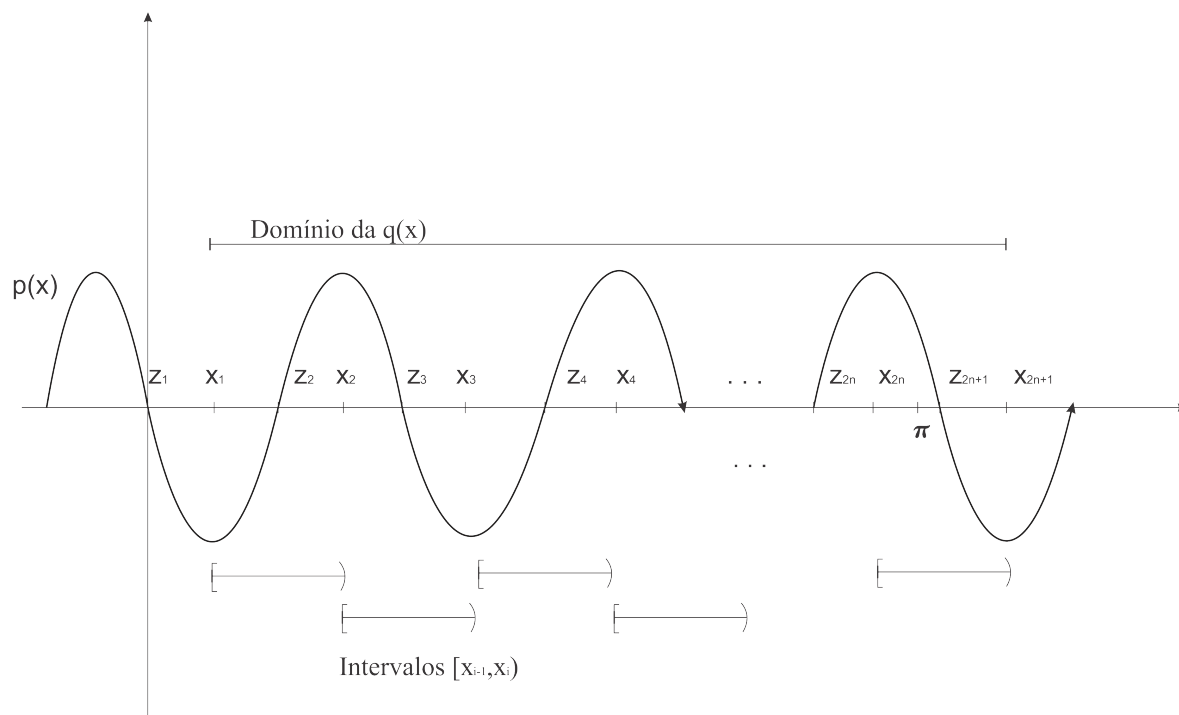


Figura 4.1:

(i) A função  $q(x)$  é suave por partes com descontinuidades de tipo salto nos pontos  $x_i$ 's pois  $q(x_i^+) \neq q(x_i^-)$ . Além disso  $q(x)$  é contínua à direita, já que,

$$q(x_{i-1}^+) = \lim_{x \rightarrow x_{i-1}^+} \frac{x - z_i}{p(x)} = q(x_{i-1}),$$

enquanto,

$$q(x_i^-) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{x - z_i}{p(x)} = \frac{x_i - z_i}{p(x_i)} \neq \frac{x_i - z_{i+1}}{p(x_i)} = q(x_i).$$

Em adição, pela definição de  $q$  encontramos,

$$q(z_i) = \frac{1}{p'(z_i)}.$$

A Figura (4.2) ilustra o comportamento da função  $q$ .

(ii) A derivada da função  $q$  para  $x$  diferente de  $z_i$  e  $x_i$  vem dada por,

$$q'(x) = \frac{p(x) - (x - z_i)p'(x)}{p^2(x)} = \frac{1 - q(x)p'(x)}{p(x)}. \quad (4.5)$$

Agora, aplicando a regra L'Hospital duas vezes obtemos,

$$\lim_{x \rightarrow z_i} q'(x) = \lim_{x \rightarrow z_i} \frac{-(x - z_i)p'''(x) - p''(x)}{2(p'(x))^2 + 2p(x)p''(x)} = \frac{0}{2(p'(z_i))^2} = 0.$$

Com isto,  $q'$  pode ser definida nos pontos  $z_i$ 's, bastando definir  $q'(z_i) = 0$ .

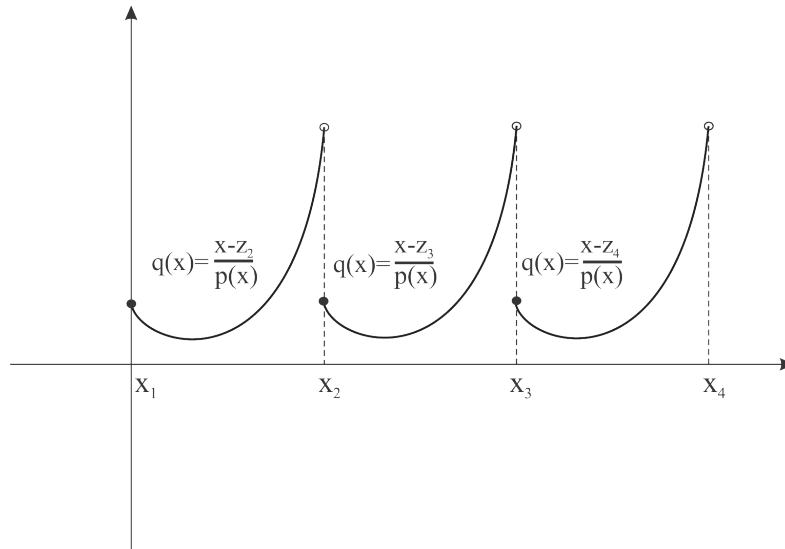


Figura 4.2:

Por outro lado, como  $p'(x_i^+) = p'(x_i^-) = 0$  segue que,

$$q'(x_i^+) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} \frac{1 - q(x)p'(x)}{p(x)} = \frac{1}{p(x_i)} = \lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{1 - q(x)p'(x)}{p(x)} = q'(x_i^-).$$

Deste modo,  $q'$  pode ser definida nos pontos  $x_i$ 's, bastando definir  $q'(x_i) = \frac{1}{p(x_i)}$ . Portanto podemos assumir que  $q'(x)$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .

(iii) Verifiquemos agora que

$$\frac{q'(x)}{p(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (4.6)$$

está bem definida e é contínua em  $\mathbb{R}$ . Com efeito, pelo visto acima,  $q'$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , assim resta verificar o comportamento de  $\frac{q'}{p}$  nos pontos  $z_i$ 's, uma vez que estes são os zeros de  $p(x)$ . Como temos indeterminação nos pontos  $z_i$ 's podemos usar a regra de L'Hospital. Assim após três aplicações sucessivas desta regra obtemos,

$$\lim_{x \rightarrow z_i} \frac{q'(x)}{p(x)} = \lim_{x \rightarrow z_i} \left( \frac{1}{2(p'(x))^3 + 4p(x)p'(x)p''(x)} \right) \left( \frac{-(x - z_i)p'''(x) - p''(x)}{2(p'(x))^2 + 2p(x)p''(x)} \right) = \frac{0}{2(p'(z_i))^3} = 0$$

Logo o limite existe e com isso podemos redefinir  $\frac{q'}{p}$  de modo que seja contínua nestes pontos.

Definamos agora

$$j(x_i) = \frac{q(x_i^+) - q(x_i^-)}{p(x_i)} = \frac{1}{p(x)} \left( \frac{x_i - z_{i+1}}{p(x)} - \frac{(x_i - z_i)}{p(x)} \right) = \frac{z_i - z_{i+1}}{p^2(x_i)}. \quad (4.7)$$

Podemos formular o seguinte lema,

**Lema 4.1.** *Se  $p(x)$  é uma solução periódica de período  $\pi$  de (2.37),  $q(x)$  é a função definida em (4.4) e  $j(x_i)$  vem dada por (4.7). Então, para cada  $a \in \mathbb{R}$  fixado,*

$$y(x) = -q(x) + \left( \sum_{x_i \in (a, x]} j(x_i) \right) p(x) + 2p(x) \int_a^x \frac{q'(t)}{p(t)} dt, \quad (4.8)$$

é solução de (2.37) no intervalo  $[a, a + \pi)$ . Satisfazendo as condições iniciais

$$y(a) = -q(a), \quad y'(a) = q'(a). \quad (4.9)$$

Em particular  $y(x)$  é LI com  $p(x)$  e  $W(p(x), y(x)) = 1$ .

**Demonstração:** Vamos começar provando a continuidade de  $y(x)$ . É suficiente checar a continuidade nos pontos  $x_i$ 's onde  $q(x)$  é descontínua. Note que nos pontos  $z_i$ 's já verificamos que  $\frac{q'}{p}$  é contínua. De (4.8) e do fato de  $j(x_i)$  não ser atingido quando calculamos  $y(x_i^-)$ , tem-se,

$$\begin{aligned} y(x_i^-) &= -q(x_i^-) + \left( \sum_{x_i \in (a, x_i)} j(x_i) \right) p(x_i) + 2p(x_i) \int_a^{x_i} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \\ &= -q(x_i^-) + \left( \sum_{x_i \in (a, x_i]} j(x_i) \right) p(x_i) - j(x_i)p(x_i) + 2p(x_i) \int_a^{x_i} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \end{aligned} \quad (4.10)$$

e de (4.7) temos,

$$q(x_i^-) + j(x_i)p(x_i) = q(x_i^+). \quad (4.11)$$

Então por (4.10) e (4.11) concluímos,

$$y(x_i^-) = -q(x_i^+) + \left( \sum_{x_i \in (a, x_i]} j(x_i) \right) p(x_i) + 2p(x_i) \int_a^{x_i} \frac{q'(t)}{p(t)} dt = y(x_i^+).$$

Portanto a função  $y(x)$  definida por (4.8) é contínua. Deste modo, para  $x \neq x_i$ , temos pelo fato de  $q'(x) = -q'(x) + 2q'(x) = -q'(x) + 2p(x)\frac{q'(x)}{p(x)}$  que,

$$y'(x) = q'(x) + \left( \sum_{x_i \in (a, x]} j(x_i) \right) p'(x) + 2p'(x) \int_a^x \frac{q'(t)}{p(t)} dt. \quad (4.12)$$

Para  $x = x_i$  temos  $p'(x_i) = 0$ , daí  $y'(x_i^-) = q'(x_i) = y'(x_i^+)$ . Portanto  $y$  é uma função continuamente diferenciável. Além disso  $y$  satisfaz a condição inicial (4.9). De fato,

$$y(a) = -q(a) + \left( \sum_{x_i \in (a, a]} j(x_i) \right) p(a) + 2p(a) \int_a^a \frac{q'(t)}{p(t)} dt = -q(a)$$

e

$$y'(a) = q'(a) + \left( \sum_{x_i \in (a, a]} j(x_i) \right) p'(a) + 2p'(a) \int_a^a \frac{q'(t)}{p(t)} dt = q'(a).$$

Finalmente para  $x$  diferente de  $z_i$  e  $x_i$  tem-se,

$$y''(x) = q''(x) + \left( \sum_{x_i \in (a, x]} j(x_i) \right) p''(x) + 2p''(x) \int_a^x \frac{q'(t)}{p(t)} + 2p'(x) \frac{q'(x)}{p(x)} \quad (4.13)$$

e de (4.5),

$$\begin{aligned} q''(x) &= \frac{-q(x)p''(x) - q'(x)p'(x)}{p(x)} - \left( \frac{1 - q(x)p'(x)}{p(x)} \right) \frac{p'(x)}{p(x)} \\ &= -\frac{q(x)p''(x)}{p(x)} - \frac{2q'(x)p'(x)}{p(x)} \\ &= -Q(x)q(x) - 2p'(x) \frac{q'(x)}{p(x)}. \end{aligned}$$

Então, usando (4.13) e que  $p$  é solução de (4.1) temos,

$$\begin{aligned} y''(x) &= -Q(x)q(x) - 2p'(x) \frac{q'(x)}{p(x)} + \left( \sum_{x_i \in (a, x]} j(x_i) \right) p''(x) + 2p''(x) \int_a^x \frac{q'(t)}{p(t)} + 2p'(x) \frac{q'(x)}{p(x)} \\ &= Q(x) \left[ -q(x) + \left( \sum_{x_i \in (a, x]} j(x_i) \right) p(x) + 2p(x) \int_0^x \frac{q'(t)}{p(t)} dt \right] \\ &= Q(x)y(x). \end{aligned}$$

Ademais, para  $x$  diferente de  $x_i$  e  $z_i$  temos,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y(x) & p(x) \\ y'(x) & p'(x) \end{vmatrix} &= y(x)p'(x) - y'(x)p(x) \\ &= \left[ -q(x) + \left( \sum_{x_i \in (a, x]} j(x_i) \right) p(x) + 2p(x) \int_0^x \frac{q'(t)}{p(t)} dt \right] p'(x) \\ &\quad - \left[ q'(x) + \left( \sum_{x_i \in (a, x]} j(x_i) \right) p'(x) + 2p'(x) \int_a^x \frac{q'(t)}{p(t)} \right] p(x) \\ &= -q(x)p'(x) - p(x)q'(x). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Usando (4.14) e (4.5) temos,

$$W(p(x), y(x)) = p'(x)q(x) + p(x) \left( \frac{1 - q(x)p'(x)}{p(x)} \right) = 1.$$

Portanto o lema está provado no caso que  $x$  é diferente de  $x_i$  e  $z_i$ . Verifiquemos agora o caso em que  $x = x_i$  e  $x = z_i$ .

Observe que podemos caracterizar de (4.8) e (4.4) a segunda derivada de  $y(x)$  e  $q(x)$  respectivamente para  $x$  diferente de  $x_i$  e  $z_i$  sem fazer simplificações, isto é,

$$\begin{aligned} y''(x) &= -q''(x) + \left( \sum_{x_i \in (a, x]} j(x_i) \right) p''(x) + 2p''(x) \int_a^x \frac{q'(t)}{p(t)} + 2p'(x) \frac{q'(x)}{p(x)} \\ &+ \frac{[2p(x)q''(x) + 2p'(x)q'(x)]p(x) - 2p'(x)p(x)q'(x)}{p^2(x)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

e

$$q''(x) = \frac{-(x - z_i)p^2(x)p''(x) - 2p^2(x)p'(x) + 2(x - z_i)p(x)(p'(x))^2}{p^4(x)} \quad (4.16)$$

onde  $x \in [x_{i-1}, x_i)$ .

Seja então  $x = z_i$ , nesse caso se o limite abaixo existe então podemos estender continuamente  $q''(x)$  nos pontos  $z_i$ 's definindo  $q''(z_i)$  como sendo o valor do limite,

$$q''(z_i^+) = q''(z_i^-) = \lim_{x \rightarrow z_i} \frac{-(x - z_i)p^2(x)p''(x) - 2p^2(x)p'(x) + 2(x - z_i)p(x)(p'(x))^2}{p^4(x)}.$$

Como podemos observar temos uma indeterminação nesse limite, daí aplicando a regra de L'Hospital quatro vezes encontramos que o limite existe e é dado por

$$\begin{aligned} q''(z_i) &= \frac{-24(p'(z_i))^2 p'''(z_i) + 56(p'(z_i))^2 p'''(z_i) - 40(p'(z_i))^2 p'''(z_i)}{24(p'(z_i))^4} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{Q(z_i)(p'(z_i))^3}{(p'(z_i))^4} \\ &= -\frac{1}{3} Q(z_i)q(z_i). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Da mesma forma como fizemos para definir continuamente  $q''(x)$  nos pontos  $z_i$ 's, definimos

$$2p'(x) \frac{q'(x)}{p(x)} \quad \text{e} \quad \frac{[2p(x)q''(x) + 2p'(x)q'(x)]p(x) - 2p'(x)p(x)q'(x)}{p^2(x)},$$

nos pontos  $z_i$ 's, porém aplicando a regra de L'Hospital uma vez para  $2p \frac{q'}{p}$  e duas vezes para  $\frac{[2pq'' + 2p'q']p - 2p'pq'}{p^2}$ . Neste caso definimos,

$$2p' \frac{q'}{p}(z_i) = 2q''(z_i) \quad (4.18)$$



e

$$\left( \frac{[2pq'' + 2p'q']p - 2p'pq'}{p^2} \right) (z_i) = 2q''(z_i). \quad (4.19)$$

Portanto de (4.15), (4.17), (4.18) e (4.19) vemos que  $y''(x)$  pode ser definida continuamente para os pontos  $z_i$ 's e  $y''(z_i)$  é dada por

$$\begin{aligned} y''(z_i) &= 3q''(z_i) + \left( \sum_{x_i \in (a, x]} j(x_i) \right) Q(z_i)p(z_i) + 2Q(z_i)p(z_i) \int_a^{z_i} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \\ &= Q(z_i) \left( -q(z_i) + \left( \sum_{x_i \in (a, x]} j(x_i) \right) p(z_i) + 2p(z_i) \int_a^{z_i} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \right) \\ &= Q(z_i)y(z_i). \end{aligned}$$

Como para  $x \neq x_i$  e  $x \neq z_i$ ,  $W(p(x), y(x)) = 1$ , temos da fórmula de Abel Liouville em [26] que  $W(p(z_i), y(z_i)) = 1$ .

No caso em que  $x = x_i$  a função  $q$  tem uma descontinuidade de salto, porém ela está bem definida neste ponto e é diferenciável a direita dos pontos  $x_i$ 's. Considerando então a derivada à direita mostremos que  $y$  satisfaz a equação nos pontos  $x_i$ 's. Com efeito, de (4.16) temos que,

$$q''(x_i) = -\frac{(x_i - z_{i+1})p''(x_i)}{p^2(x_i)} = -Q(x_i)q(x_i). \quad (4.20)$$

Portanto de (4.15) e (4.20) temos que,

$$\begin{aligned} y''(x_i) &= -q''(x_i) + \left( \sum_{x_i \in (a, x]} j(x_i) \right) Q(x_i)p(x_i) + 2Q(x_i)p(x_i) \int_a^{x_i} \frac{q'(t)}{p(t)} dt + 2q''(x_i) \\ &= Q(x_i) \left( -q(x_i) + \left( \sum_{x_i \in (a, x]} j(x_i) \right) p(x_i) + 2p(x_i) \int_a^{x_i} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \right) \\ &= Q(x_i)y(x_i). \end{aligned}$$

Como para  $x \neq x_i$  e  $x \neq z_i$   $W(p(x), y(x)) = 1$ , temos novamente da fórmula de Abel Liouville em [26] que  $W(p(x_i), y(x_i)) = 1$ .

□

O próximo teorema é uma nova versão do item (ii) do teorema de Floquet, porém um

pouco melhorada já que neste caso, conseguimos uma caracterização para  $\theta$  em termos da função periódica  $p$  a qual é LI com  $y$  dada em (4.8).

**Teorema 4.2.** *Se  $p$  é uma solução periódica com período  $\pi$  de (2.37),  $q$  é a função definida em (4.4) e  $j(x_i)$  é dado em (4.7). Então a solução  $y$  linearmente independente de  $p$  tal que  $W(p(x), y(x)) = 1$  satisfaz,*

$$y(x + \pi) = y(x) + \theta p(x) \quad (4.21)$$

onde  $\theta$  é dado por,

$$\theta = \sum_{x_i \in (0, \pi]} j(x_i) + 2 \int_0^\pi \frac{q'(t)}{p(t)} dt \quad (4.22)$$

Em particular,  $y(x)$  é periódica com período  $\pi$  se, e somente se  $\theta = 0$ .

**Demonstração:** Observemos primeiro que devido a periodicidade, o valor de  $\theta$  dado por (4.22) é o mesmo para cada constante  $a$  fixada isto é,

$$\theta = \sum_{x_i \in (a, a+\pi]} j(x_i) + 2 \int_a^{a+\pi} \frac{q'(t)}{p(t)} dt$$

No que segue  $y(x)$  será a solução dada em (4.8), a qual está definida no intervalo  $[a, a + \pi)$ . Como  $p(a + \pi) = p(a)$  e  $y(a) = -q(a)$  temos que se  $a + \pi$  não coincide com os pontos  $x_i$ 's então,

$$\begin{aligned} y(a + \pi) &= y((a + \pi)^-) \\ &= -q((a + \pi)^-) + \left( \sum_{x_i \in (a, a+\pi)} j(x_i) \right) p(a + \pi) + 2p(a + \pi) \int_a^{a+\pi} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \\ &= -q(a + \pi) + \left( \sum_{x_i \in (a, a+\pi]} j(x_i) + 2 \int_a^{a+\pi} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \right) p(a + \pi) \\ &= -q(a) + \theta p(a + \pi) \\ &= y(a) + \theta p(a), \end{aligned}$$

isto é,

$$y(a + \pi) = y(a) + \theta p(a). \quad (4.23)$$

Se  $a + \pi$  coincide com algum ponto de salto  $x_i$ , então a igualdade (4.11) e o argumento usado no Lema 4.1 implica

$$\begin{aligned}
y(a + \pi) &= y((a + \pi)^-) \\
&= -q((a + \pi)^-) + \left( \sum_{x_i \in (a, a + \pi)} j(x_i) \right) p(a + \pi) + 2p(a + \pi) \int_a^{a + \pi} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \\
&= -q(a + \pi) + \left( \sum_{x_i \in (a, a + \pi]} j(x_i) + 2 \int_a^{a + \pi} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \right) p(a + \pi) \\
&= -q(a) + \theta p(a + \pi) \\
&= y(a) + \theta p(a).
\end{aligned}$$

Agora da periodicidade de (4.12) e da periodicidade de  $q'$  e  $p'$ , obtemos,

$$\begin{aligned}
y'(a + \pi) &= y'((a + \pi)^-) \\
&= q'((a + \pi)^-) + \left( \sum_{x_i \in (a, a + \pi)} j(x_i) \right) p'(a + \pi) + 2p'(a + \pi) \int_a^{a + \pi} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \\
&= q'((a + \pi)^+) + \left( \sum_{x_i \in (a, a + \pi]} j(x_i) + 2 \int_a^{a + \pi} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \right) p'(a + \pi) \\
&= q'(a) + \theta p'(a),
\end{aligned}$$

isto é,

$$y'(a + \pi) = y'(a) + \theta p'(a). \quad (4.24)$$

As igualdades (4.23) e (4.24) implica que  $y(x)$  pode ser estendida suavemente para toda a reta pela relação,  $y(x + \pi) = y(x) + \theta p(x)$  e assim o teorema está provado.  $\square$

## 4.2 O espectro não positivo do operador de Hill.

Nesta seção caracterizamos o espectro não positivo do operador de Hill à partir de uma autofunção dada e esta caracterização depende desta autofunção. Seja  $Q(x)$  uma função periódica infinitamente diferenciável, com período minimal  $\pi$ . Seja  $\mathcal{L}$  o operador sobre  $L_{per}^2([0, \pi])$  com domínio  $D(\mathcal{L}) = H_{per}^2([0, \pi])$  definido por,

$$\mathcal{L}(y(x)) = -y''(x) + Q_1(x)y(x) \quad (4.25)$$

onde  $Q_1 = -Q$ . De acordo com o Teorema da Oscilação, o espectro do operador de  $\mathcal{L}$  é formado por uma sequência ilimitada de números reais,

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots < \lambda_{2n-1} \leq \lambda_{2n} \dots$$

onde os  $\lambda_n$ s são as raízes da equação característica, que no caso  $\rho_1 = \rho_2 = 1$  é dada por,

$$\Delta(\lambda) = y_1(\pi, \lambda) + y_2'(\pi, \lambda) = 2 \quad (4.26)$$

e  $y_1(x, \lambda)$  e  $y_2(x, \lambda)$  são as soluções LI da equação diferencial

$$-y''(x) + (Q_1(x) - \lambda)y(x) = 0 \quad (4.27)$$

determinada pelas condições iniciais,

$$y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \quad y_2(x, \lambda) = 0 \quad \text{e} \quad y_2'(0, \lambda) = 1 \quad (4.28)$$

Além disso, o Teorema da Oscilação garante que o espectro de  $\mathcal{L}$  está relacionado ao espectro do problema semi-periódico, isto é, o valor de  $\lambda$  tal que (4.27) possui soluções não triviais  $2\pi$ -periódicas. O espectro semi-periódico é formado por uma sequência  $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots$  onde os  $(\lambda'_n)$ 's são as raízes da equação característica,

$$\Delta(\lambda) = y_1(\pi, \lambda) + y_2'(\pi, \lambda) = -2.$$

Os autovalores  $\lambda_n$  e  $\lambda'_n$  satisfaz a desigualdade,

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \leq \lambda'_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots \quad .$$

Portanto a derivada  $\Delta'(\lambda)$  para  $\lambda = \lambda_n$  é maior ou igual a zero se  $n$  é ímpar e menor ou igual a zero se  $n$  é par. Estes fatos já verificamos no teorema da Oscilação.

O próximo resultado foi provado por Haupt [31].

**Teorema 4.3.** *Seja  $y(x, \lambda)$  uma solução periódica real e não trivial de (2.37) com período  $\pi$  ou  $2\pi$ . Se  $\lambda = \lambda'_{2n+1}$  ou  $\lambda = \lambda'_{2n}$  então  $y(x, \lambda)$  possui exatamente  $2n + 1$  zeros no intervalo semi-aberto  $0 \leq x < 2\pi$ . Se  $\lambda = \lambda_{2n-1}$  ou  $\lambda = \lambda_{2n}$ , então  $y(x, \lambda)$  possui exatamente  $2n$  zeros no intervalo  $0 \leq x < \pi$ .*

**Demonstração:** Ver [38], [24]. □

O espectro de  $\mathcal{L}$  é também caracterizado pelo número de zeros das autofunções conforme veremos no próximo teorema. O Teorema 4.3 nos diz que se  $p$  é uma autofunção associada ao auto valor  $\lambda_{2n-1}$  ou  $\lambda_{2n}$ , então  $p$  possui exatamente  $2n$  zeros no intervalo  $[0, \pi)$ .

Veremos agora o principal resultado desta dissertação o qual nos fornece uma volta para o Teorema 4.3 em um certo sentido.

**Teorema 4.4.** *Se  $p(x)$  é autofunção de  $\mathcal{L}$  associada ao autovalor  $\lambda_k$ ,  $k \geq 1$  e  $\theta$  é a constante dada pelo Teorema 4.2, então  $\lambda_k$  é simples se, e somente, se  $\theta \neq 0$ . Além disso, se  $p$  possui  $2n$  zeros no intervalo semi-aberto  $[0, \pi)$ , então  $\lambda_k = \lambda_{2n-1}$  se  $\theta < 0$  e  $\lambda_k = \lambda_{2n}$  se  $\theta > 0$ .*

**Demonstração:** *Primeira afirmação.*

Usando o Lema 2.71, temos que as raízes  $\lambda_k$  são simples ou duplas. Suponha que a raiz  $\lambda_k$  é simples e que  $\theta = 0$ . Sendo  $\theta = 0$  temos do Teorema 4.2 que toda solução de (4.27) é estável para  $\lambda = \lambda_k$ , assim pelo Teorema da Oscilação a raiz  $\lambda_k$  é dupla o que é uma contradição.

Reciprocamente se para  $\lambda_k$  temos  $\theta \neq 0$ , então pela demonstração do Teste de Estabilidade, temos que existe uma solução instável para (4.27), logo pelo Teorema da Oscilação segue que  $\lambda_k$  é simples.

*Segunda afirmação.*

Para mostrarmos a segunda afirmação, consideremos as funções,

$$\xi(x, \lambda) = \frac{d}{d\lambda} y_1(x, \lambda), \quad \eta(x, \lambda) = \frac{d}{d\lambda} y_2(x, \lambda)$$

onde  $y_1(x, \lambda)$  e  $y_2(x, \lambda)$  são as soluções LI de (4.27).

As funções  $\xi(x, \lambda)$  e  $\eta(x, \lambda)$  satisfazem respectivamente as equações do sistema,

$$\begin{cases} -\xi(x, \lambda)'' + (Q_1(x) - \lambda)\xi(x, \lambda) = y_1(x, \lambda) \\ -\eta(x, \lambda)'' + (Q_1(x) - \lambda)\eta(x, \lambda) = y_2(x, \lambda) \end{cases} \quad (4.29)$$

e a condição inicial homogênea,

$$\xi(0, \lambda) = \xi'(0, \lambda) = \eta(0, \lambda) = \eta'(0, \lambda) = 0. \quad (4.30)$$

Com efeito, como  $y_1(x, \lambda)$  é solução de (4.27) temos,

$$\begin{aligned} -\xi(x, \lambda)'' + (Q_1(x) - \lambda)\xi(x, \lambda) &= -\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d}{d\lambda} y_1(x, \lambda) \right) + (Q_1(x) - \lambda) \frac{d}{d\lambda} y_1(x, \lambda) \\ &= -\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{d^2}{dx^2} y_1(x, \lambda) \right) + \frac{d}{d\lambda} ((Q_1(x) - \lambda)y_1(x, \lambda)) \\ &\quad - \left( \frac{d}{d\lambda} (Q_1(x) - \lambda) \right) y_1(x, \lambda). \end{aligned}$$

Então, usando (4.27) temos

$$\begin{aligned} -\xi(x, \lambda)'' + (Q_1(x) - \lambda)\xi(x, \lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \left( -\frac{d^2}{dx^2} y_1(x, \lambda) + (Q_1(x) - \lambda)y_1(x, \lambda) \right) + y_1(x, \lambda) \\ &= \frac{d}{d\lambda} (0) + y_1(x, \lambda) = y_1(x, \lambda) \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} -\eta(x, \lambda)'' + (Q_1(x) - \lambda)\eta(x, \lambda) &= -\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d}{d\lambda} y_2(x, \lambda) \right) + (Q_1(x) - \lambda) \frac{d}{d\lambda} y_2(x, \lambda) \\ &= -\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{d^2}{dx^2} y_2(x, \lambda) \right) + \frac{d}{d\lambda} ((Q_1(x) - \lambda)y_2(x, \lambda)) \\ &\quad - \left( \frac{d}{d\lambda} (Q_1(x) - \lambda) \right) y_2(x, \lambda) \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left( -\frac{d^2}{dx^2} y_2(x, \lambda) + (Q_1(x) - \lambda)y_2(x, \lambda) \right) + y_2(x, \lambda) \\ &= \frac{d}{d\lambda} (0) + y_2(x, \lambda) = y_2(x, \lambda) \end{aligned}$$

Em adição, como  $y_1(0, \lambda) = 1 \quad \forall \lambda$ , temos,

$$\xi(0, \lambda) = \frac{d}{d\lambda} y_1(0, \lambda) = \frac{d}{d\lambda} (1) = 0$$

De maneira análoga, encontramos as outras condições iniciais em (4.30).

Seja  $y$  a solução de (4.27) linearmente independente com  $p$  dada pelo Teorema 4.2. Observe que  $p$  é autofunção de  $\mathcal{L}$  associada ao autovalor  $\lambda_k$ . Deste modo,  $y$  é solução de (4.27) para  $\lambda = \lambda_k$ . De fato, como  $p$  é autofunção associado a  $\lambda_k$ , então  $p$  é solução de (4.27) com  $\lambda = \lambda_k$ . Além disso, no Teorema 4.2  $p$  e  $y$  são soluções da mesma equação. Assim  $y$  é solução para (4.27) com  $\lambda = \lambda_k$ .

Sendo  $\{y, p\}$  um conjunto de soluções linearmente independentes de (4.27) para  $\lambda = \lambda_k$ , então existem constantes  $c_1$  e  $c_2$  tal que  $y_2(x, \lambda_k) = c_1 p(x) + c_2 y(x)$  e constantes  $c_3$  e  $c_4$  tal que  $y_1(x, \lambda_k) = c_3 p(x) + c_4 y(x)$ . A fim de encontrar  $c_1$  e  $c_2$  consideremos os dados iniciais sobre  $y_1(x, \lambda)$  e  $y_2(x, \lambda)$  para obtermos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} 0 = y_2(0, \lambda_k) = c_1 p(0) + c_2 y(0) \\ 1 = y_2'(0, \lambda_k) = c_1 p'(0) + c_2 y'(0) \end{cases} \quad (4.31)$$

Por outro lado, usando o Teorema 4.2, temos que o determinante da matriz dos coeficientes é dado por,

$$\det \begin{bmatrix} p(0) & y(0) \\ p'(0) & y'(0) \end{bmatrix} = W(p, y)(0) = 1.$$

Logo, usando a Regra de Crammer temos que as soluções do sistema (4.31) são,

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y(0) \\ 1 & y'(0) \end{vmatrix}}{1} = -y(0) \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} p(0) & 0 \\ p'(0) & 1 \end{vmatrix}}{1} = p(0).$$

Assim,

$$y_2(x, \lambda_k) = -y(0)p(x) + p(0)y(x). \quad (4.32)$$

Da mesma forma temos que,

$$y_1(x, \lambda_k) = y'(0)p(x) - p'(0)y(x) \quad (4.33)$$

Portanto usando (4.21), (4.32) e (4.33) obtemos,

$$y_1(\pi, \lambda_k) = 1 - \theta p(0)p'(0), \quad y_1'(\pi, \lambda_k) = -\theta(p'(0))^2 \quad (4.34)$$

$$y_2(\pi, \lambda_k) = \theta p^2(0) \quad \text{e} \quad y_2'(\pi, \lambda_k) = 1 + \theta p(0)p'(0)$$

Com efeito, substituindo as constantes nas suas respectivas equações temos,

$$\begin{aligned} y_1(\pi, \lambda_k) &= y'(0)p(\pi) - p'(0)y(\pi) \\ &= y'(0)p(0 + \pi) - p'(0)y(0 + \pi) \\ &= y'(0)p(0) - p'(0)[y(0) + \theta p(0)] \\ &= W(p, y)(0) - \theta p'(0)p(0) \\ &= 1 - \theta p'(0)p(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(\pi, \lambda_k) &= -y(0)p(\pi) + p(0)y(\pi) \\ &= -y(0)p(0 + \pi) + p(0)y(0 + \pi) \\ &= -y(0)p(0) + p(0)[y(0) + \theta p(0)] \\ &= \theta p^2(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1'(\pi, \lambda_k) &= y'(0)p'(\pi) - p'(0)y'(\pi) \\ &= y'(0)p'(0 + \pi) - p'(0)y'(0 + \pi) \\ &= y'(0)p'(0) - p'(0)[y'(0) + \theta p'(0)] \\ &= -\theta p'(0)p(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2'(\pi, \lambda_k) &= -y(0)p'(\pi) + p(0)y'(\pi) \\ &= -y(0)p'(0 + \pi) + p(0)y'(0 + \pi) \\ &= -y(0)p'(0) + p(0)[y'(0) + \theta p'(0)] \\ &= W(p, y)(0) + \theta p(0)p'(0) \\ &= 1 + \theta p(0)p'(0). \end{aligned}$$

Agora, resolvendo o sistema não homogêneo (4.29) com condições iniciais (4.30) e usando (4.34) para avaliar as soluções em  $x = \pi$  e  $\lambda = \lambda_k$ , obtemos,

$$\begin{aligned} \xi(\pi, \lambda_k) &= y_1(\pi, \lambda_k) \int_0^\pi y_2(t)y_1(t)dt - y_2(\pi, \lambda_k) \int_0^\pi y_1^2(t)dt \\ &= (1 - \theta p(0)p'(0))(y_1, y_2)_{L_{per}^2} - \theta p^2(0) \|y_1\|_{L_{per}^2}^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\eta(\pi, \lambda_k) &= y_1(\pi, \lambda_k) \int_0^\pi y_2^2(t) dt - y_2(\pi, \lambda_k) \int_0^\pi y_1(t) y_2(t) dt \\
&= (1 - \theta p(0) p'(0)) \|y_2\|_{L_{per}^2}^2 - \theta p^2(0) (y_1, y_2)_{L_{per}^2} \\
\xi'(\pi, \lambda_k) &= y_1'(\pi, \lambda_k) \int_0^\pi y_2(t) y_1(t) dt - y_2'(\pi, \lambda_k) \int_0^\pi y_1^2(t) dt \\
&= -\theta (p'(0))^2 (y_2, y_1)_{L_{per}^2} - (1 + \theta p(0) p'(0)) \|y_1\|_{L_{per}^2}^2 \\
\eta'(\pi, \lambda_k) &= y_1'(\pi, \lambda_k) \int_0^\pi y_2^2(t) dt - y_2(\pi, \lambda_k) \int_0^\pi y_1(t) y_2(t) dt \\
&= -\theta (p'(0))^2 \|y_2\|_{L_{per}^2}^2 - (1 + \theta p(0) p'(0)) (y_1, y_2)_{L_{per}^2}.
\end{aligned}$$

Portanto a derivada  $\Delta'(\lambda)$  em  $\lambda = \lambda_k$  é dada por,

$$\begin{aligned}
\Delta'(\lambda_k) &= \xi(\pi, \lambda_k) + \eta'(\pi, \lambda_k) \\
&= (1 - \theta p(0) p'(0)) (y_1, y_2)_{L_{per}^2} - \theta p^2(0) \|y_1\|_{L_{per}^2}^2 \\
&\quad - \theta (p'(0))^2 \|y_2\|_{L_{per}^2}^2 - (1 + \theta p(0) p'(0)) (y_1, y_2)_{L_{per}^2} \\
&= -\theta \left[ \|y_1\|_{L_{per}^2}^2 p^2(0) + 2(y_1, y_2)_{L_{per}^2} p(0) p'(0) + \|y_2\|_{L_{per}^2}^2 (p'(0))^2 \right].
\end{aligned}$$

Observemos que o termo que aparece multiplicando  $\theta$  acima é uma forma quadrática positiva de  $\mathbb{R}^2$  avaliada em  $(p(0), p'(0))$  e que  $p(0)$  e  $p'(0)$  não podem anular-se simultaneamente. Assim temos,

$$\Delta'(\lambda_k) \theta < 0. \quad (4.35)$$

A desigualdade (4.35) nos fornece a prova do teorema, pois se  $\theta < 0$ , então  $\Delta'(\lambda_k) > 0$  e assim  $\lambda_k = \lambda_{2n-1}$  e se  $\theta > 0$  então  $\Delta'(\lambda_k) < 0$  e assim  $\lambda_k = \lambda_{2n}$ . A Figura 4.3 ilustra melhor este fato.

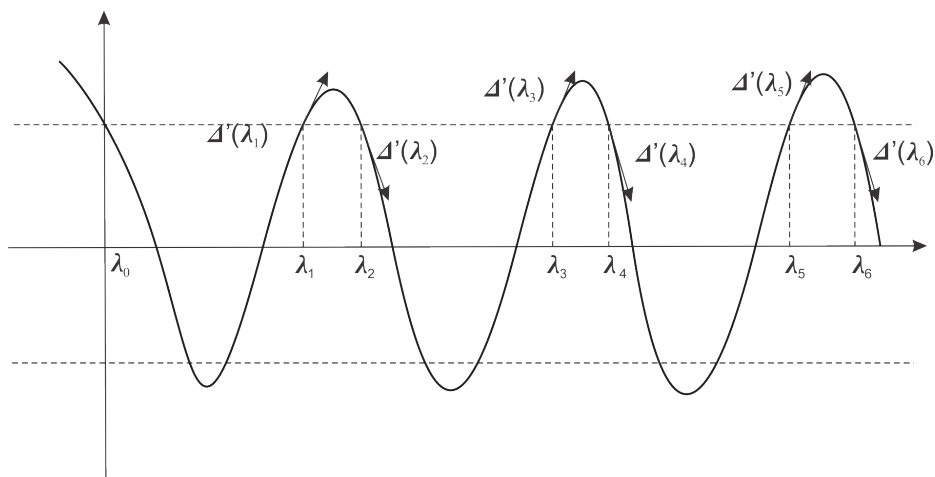


Figura 4.3:

Como  $\theta \neq 0$  não há risco de algum  $\lambda_k$  ser raiz dupla da equação característica.

□

**Observação 4.5.** Se  $p$  possui  $2n$  zeros em  $[0, \pi)$  e  $\theta < 0$ , então  $\lambda_k = \lambda_{2n-1}$  e não apenas um  $\lambda$  da forma  $\lambda_{2m-1}$  com  $m$  não necessariamente sendo  $n$ . De fato, suponha que  $\lambda_k$  é algum  $\lambda$  da forma  $\lambda_{2m-1}$  com  $m \neq n$ . Note que  $\theta \neq 0$  implica que  $\lambda_{2m-1}$  é simples e assim  $\dim \text{Aut}(\lambda_{2m-1}) = 1$ . Por outro lado, se  $\lambda_{2m-1}$  é autovalor associado a outra autofunção, digamos  $f$ , temos pelo Teorema 4.3 que  $f$  possui  $2m$  zeros no intervalo  $[0, \pi)$ . Portanto  $f = cp$  e assim  $p$  também possui  $2m$  zeros em  $[0, \pi)$ , o que é uma contradição.

## Estabilidade Orbital

Neste capítulo, temos como objetivo obter alguns resultados de estabilidade no sentido orbital de soluções ondas viajantes periódicas para equações do tipo KdV. Isto é, equações da forma

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} = 0, \quad (5.1)$$

onde  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica de período  $L$  no espaço,  $p \geq 1$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . A equação (5.1) admite soluções ondas viajantes da forma

$$u(x, t) = \varphi_c(x - ct), \quad (5.2)$$

onde  $\varphi_c$  é uma função suave e periódica com período  $L$ . Consideraremos aqui somente os casos  $p = 1$  e  $p = 2$ , os quais consistem nas equações de Korteweg-de Vries (KdV) e modificada Korteweg-de Vries (mKdV). Para o caso  $p = 4$ , ver Angulo e Natali em [3]. Para os outros casos não é conhecido uma teoria de existência e estabilidade.

Substituindo  $u(x, t) = \varphi_c(x - ct)$  em (5.1) temos,

$$(\varphi_c(x - ct))_t + (\varphi_c(x - ct))^p (\varphi_c(x - ct))_x + (\varphi_c(x - ct))_{xxx} = 0,$$

isto é,

$$-c\varphi_c' + \varphi_c^p \varphi_c' + \varphi_c''' = 0.$$

Agora usando o fato que  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{p+1} \varphi_c^{p+1} \right) = \varphi_c^p \varphi_c'$  e integrando de  $\gamma_0$  a  $\gamma$  temos,

$$-c \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d}{dx} \varphi_c dx + \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{p+1} \varphi_c^{p+1} \right) dx + \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d}{dx} \varphi_c'' dx = 0,$$

ou seja,

$$-c\varphi_c(\gamma) + \frac{1}{p+1} \varphi_c^{p+1}(\gamma) + \varphi_c''(\gamma) = A\varphi_c. \quad (5.3)$$

Escolhendo  $A_{\varphi_c} \equiv 0$ , obtemos a equação que determina as ondas viajantes periódicas para a equação (5.1),

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + c \right) \varphi_c - \frac{1}{p+1} \varphi_c^{p+1} = 0. \quad (5.4)$$

Associado com (5.4), consideramos o operador linear autoadjunto, fechado e ilimitado  $\mathcal{L}_c : D(\mathcal{L}_c) \longrightarrow L^2_{per}([0, L])$  definido em um subespaço denso de  $L^2_{per}([0, L])$  por

$$\mathcal{L}_c(y) = -y'' + (c - \varphi_c^p)y. \quad (5.5)$$

Conforme vimos na Proposição 1.23 e no Teorema da Oscilação 2.11, o espectro do operador  $\mathcal{L}_c$  é um conjunto infinito e enumerável de autovalores,  $\{\lambda_n\}$ , com

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \cdots < \lambda_{2n-1} \leq \lambda_{2n} < \cdots,$$

e  $\lambda_k \longrightarrow \infty$  quando  $k \longrightarrow \infty$ .

**Definição 5.1.** *Seja  $\varphi$  uma solução onda viajante periódica com período  $L$  da equação,*

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + c\right)\varphi - \frac{1}{p+1}\varphi^{p+1} = 0$$

e considere  $\tau_r\varphi(x) = \varphi(x+r)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  e  $r \in \mathbb{R}$ . Definimos o conjunto  $\Omega_\varphi \subset H^1_{per}([0, L])$ , a órbita gerada por  $\varphi$ , como sendo,

$$\Omega_\varphi = \{g; \quad g = \tau_r\varphi, \quad \text{para algum } r \in \mathbb{R}\}$$

e para qualquer  $\eta > 0$  defina o conjunto  $U_\eta \subset H^1_{per}([0, L])$  por

$$U_\eta = \left\{f; \quad \inf_{g \in \Omega_\varphi} \|f - g\|_{H^1_{per}} < \eta\right\}.$$

Com esta terminologia, dizemos que  $\varphi$  é orbitalmente estável em  $H^1_{per}([0, L])$  pelo fluxo gerado pela equação (5.1) se,

- (i) Existe  $s_0$  tal que  $H^{s_0}_{per}([0, L]) \subset H^1_{per}([0, L])$  e o problema de valor inicial associado à (5.1) é globalmente bem posto em  $H^{s_0}_{per}([0, L])$ .
- (ii) Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que para cada  $u_0 \in U_\delta \cap H^{s_0}_{per}([0, L])$ , a solução de (5.1) com  $u(0, x) = u_0(x)$  satisfaz  $u(t) \in U_\varepsilon$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

O teorema que segue, garante o item (i) da definição de estabilidade.

**Teorema 5.2** (Boa colocação para KdV e mKdV). *Seja  $s \geq 1$ . Para cada  $u_0 \in H^s_{per}([0, L])$  existe uma única solução de (5.1) tal que para  $T > 0$ , pertence à  $C([0, T]; H^s_{per}([0, L]))$ .*

Além disso, a correspondência  $u_0 \mapsto u$  é uma função analítica entre espaços de funções adequados. Tem-se ainda as quantidades conservadas,

$$\mathcal{E}(u) = \int_0^L \left( \frac{u_x^2}{2} - \frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \right) dx = \mathcal{E}(u_0)$$

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2(x) dx = \mathcal{F}(u_0).$$

**Demonstração:** Ver [23]. □

Neste contexto, conforme as referências [16], [17], [29] e [49] as condições que implicam estabilidade no sentido orbital de soluções ondas viajantes periódicas para a equação (5.1) são,

( $P_0$ ) Existe uma curva suave não trivial de soluções periódicas para (5.4) da forma  $c \in J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \varphi_c \in H_{per}^n([0, L]) \forall n \in \mathbb{N}$ . Onde  $J$  é um intervalo a ser determinado;

( $P_1$ ) O operador linearizado  $\mathcal{L}_c$  possui um único autovalor negativo o qual é simples. (5.6)

( $P_2$ ) O autovalor 0 é simples e está associado com a autofunção  $\varphi'_c$ .

$$(P_3) \quad \frac{d}{dc} \int_0^\pi \varphi_c^2(x) dx > 0.$$

Seguindo as idéias de Grillakis M., Shatah J. e Strauss W. em [28], pode-se provar o seguinte resultado.

**Teorema 5.3.** *Seja  $\varphi_c$  uma solução onda viajante periódica de (5.4) e suponha que a parte (i) da definição de estabilidade ocorre. Suponha também que as propriedades ( $P_1$ ) e ( $P_2$ ) em (5.6) sejam satisfeitas. Escolha  $\chi \in L_{per}^2$  tal que  $\mathcal{L}\chi = \varphi_c$ , e defina  $I = (\chi, \varphi_c)_{L_{per}^2}$ . Se  $I < 0$ , então  $\varphi_c$  é estável.*

**Observação 5.4.** *Se mostrarmos a condição ( $P_0$ ) em (5.6) temos que  $\chi$  pode ser escolhido como sendo  $\chi = -\frac{\partial}{\partial c} \varphi_c$ . Desta forma, temos que*

$$I < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dc} \int_0^L \varphi_c^2(x) dx > 0. \quad (5.7)$$

O próximo passo é estabelecer uma proposição que diz que a função  $\varphi_c$  dada em (5.2) é ponto crítico do funcional  $\mathcal{G} := \mathcal{E} + c\mathcal{F}$  onde  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{F}$  são definidos por,

$$\mathcal{E}(\nu) = \int_0^\pi \left( \frac{\nu_x^2}{2} - \frac{\nu^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \right) dx \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(\nu) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \nu^2 dx. \quad (5.8)$$

Além disso, o operador  $\mathcal{L}_c$  pode ser caracterizado como sendo,

$$\mathcal{L}_c(y) = \mathcal{G}''(\varphi)(y) = \mathcal{E}''(\varphi)(y) + c\mathcal{F}''(\varphi)(y). \quad (5.9)$$

**Proposição 5.5.** *Seja o funcional  $\mathcal{G} := \mathcal{E} + c\mathcal{F} : H_{per}^1([0, L]) \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{F}$  são definidos em (5.8). Então a solução onda viajante periódica  $\varphi_c$  é ponto crítico desse funcional e  $\mathcal{L}_c$  é caracterizado como sendo (5.9).*

**Demonstração:** Inicialmente mostramos que o funcional  $\mathcal{G} : H_{per}^1([0, L]) \rightarrow \mathbb{R}$  é duas vezes diferenciável e que suas derivadas primeira e segunda são dadas por,

$$\mathcal{G}'(\nu) = -\nu'' + c\nu - \frac{\nu^{p+1}}{p+1}$$

e

$$\mathcal{G}''(\nu)(y) = -y'' + cy - \nu^p y,$$

respectivamente. Com efeito, seja o funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : H_{per}^1([0, L]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \nu &\longmapsto \mathcal{E}(\nu) = \int_0^L \left( \frac{\nu_x^2}{2} - \frac{\nu^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \right) dx. \end{aligned}$$

Sabemos que  $\mathcal{E}$  é Gateaux diferenciável se existe  $f \in B(H_{per}^1([0, L]), \mathbb{R}) = (H_{per}^1([0, L]))'$  tal que o limite abaixo existe e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \mathcal{E}(\nu + th) - \mathcal{E}(\nu) - \langle f, th \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] = 0, \quad \forall h \in H_{per}^1([0, L]).$$

Além disso a derivada de Gateaux de  $\mathcal{E}$  é dada por  $\mathcal{E}'(\nu) = f$ . Deste modo, definindo

$$\vartheta_{\mathcal{E}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \mathcal{E}(\nu + th) - \mathcal{E}(\nu) - \langle f, th \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right],$$

temos,

$$\begin{aligned} \vartheta_{\mathcal{E}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \mathcal{E}(\nu + th) - \mathcal{E}(\nu) - \langle f, th \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \int_0^L \left( \frac{(\nu_x + th_x)^2}{2} - \frac{(\nu + th)^{p+2}}{(p+1)(p+2)} - \frac{\nu_x^2}{2} + \frac{\nu^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \right) - \langle f, th \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \vartheta_{\mathcal{E}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} & \left[ \int_0^L \left( \frac{\nu_x^2}{2} + \nu_x th_x + \frac{t^2 h_x^2}{2} - \frac{\binom{p+2}{0} \nu^{p+2}}{(p+1)(p+2)} - \frac{\binom{p+2}{1} \nu^{p+1} th}{(p+1)(p+2)} \right. \right. \\ & - \frac{\binom{p+2}{2} \nu^p t^2 h^2}{2(p+2)} - \dots - \frac{\binom{p+2}{p} \nu^2 t^p h^p}{(p+1)(p+2)} - \frac{\binom{p+2}{p+1} \nu t^{p+1} h^{p+1}}{(p+1)(p+2)} - \frac{\binom{p+2}{p+2} t^{p+2} h^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \\ & \left. \left. - \frac{\nu_x^2}{2} + \frac{\nu^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \right) - \langle f, th \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \vartheta_{\mathcal{E}} = \lim_{t \rightarrow 0} & \left[ \int_0^L \left( \nu_x h_x + \frac{1}{2} th_x^2 - \frac{\binom{p+2}{1} \nu^{p+1} h}{(p+1)(p+2)} - \frac{\binom{p+2}{2} \nu^p th^2}{(p+1)(p+2)} - \dots - \frac{\binom{p+2}{p} \nu^2 t^{p-1} h^p}{(p+1)(p+2)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\binom{p+2}{p+1} \nu t^p h^{p+1}}{(p+1)(p+2)} - \frac{\binom{p+2}{p+2} t^{p+1} h^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \right) dx - \langle f, h \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right]. \end{aligned}$$

Assim, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos,

$$\vartheta_{\mathcal{E}} = \int_0^L \left( \nu_x h_x - \frac{\nu^{p+1} h}{(p+1)} \right) dx - \langle f, h \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1}. \quad (5.10)$$

Agora, integrando (5.10) por partes e usando o fato de  $\nu$  ser periódica encontramos que,

$$\vartheta_{\mathcal{E}} = \left\langle -\nu_{xx} - \frac{\nu^{p+1}}{p+1}, h \right\rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} - \langle f, h \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1}.$$

Com isto, se tomarmos  $f = -\nu_{xx} - \frac{\nu^{p+1}}{p+1} \in H_{per}^{-1}([0, L])$ , pela arbitrariedade de  $h$  teremos que o limite acima existira e será zero. Portanto

$$\mathcal{E}'(\nu) = -\nu'' - \frac{\nu^{p+1}}{p+1}.$$

Do mesmo modo, definindo

$$\vartheta_{\mathcal{F}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \mathcal{F}(\nu + th) - \mathcal{F}(\nu) - \langle g, th \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right],$$

temos,

$$\begin{aligned} \vartheta_{\mathcal{F}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \mathcal{F}(\nu + th) - \mathcal{F}(\nu) - \langle g, th \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \int_0^L \left( \frac{1}{2} (\nu + th)^2 - \frac{\nu^2}{2} \right) dx - \langle g, th \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\vartheta_{\mathcal{F}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \int_0^L \left( \frac{1}{2}(\nu)^2 + t\nu h + \frac{t^2 h^2}{2} - \frac{\nu^2}{2} \right) dx - \langle g, th \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \int_0^L \left( \nu h + \frac{t h^2}{2} \right) dx \right] - \langle g, h \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1}.\end{aligned}$$

Usando novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos,

$$\begin{aligned}\vartheta_{\mathcal{F}} &= \int_0^L (\nu h) dx - \langle g, h \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \\ &= \langle \nu, h \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} - \langle g, h \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1}.\end{aligned}$$

Logo basta considerarmos  $g = \nu$  que o limite acima existirá e será zero. Disto segue que,

$$\mathcal{F}'(\nu) = g = \nu.$$

Portanto o funcional  $\mathcal{G}$  é Gâteaux diferenciável e como ele é contínuo temos que  $\mathcal{F}$  é Fréchet diferenciável e a derivada de Fréchet de  $\mathcal{G}$  é,

$$\mathcal{G}'(\nu) = \mathcal{E}'(\nu) + c\mathcal{F}'(\nu) = -\nu'' + c\nu - \frac{\nu^{p+1}}{p+1}. \quad (5.11)$$

Podemos finalmente, verificar que  $\varphi_c$  é ponto crítico do funcional  $\mathcal{G}$ . De fato, usando que  $\varphi_c$  é solução de (5.4) e (5.11) temos,

$$\mathcal{G}'(\varphi_c) = -\varphi_c'' + c\varphi_c - \frac{\varphi_c^{p+1}}{p+1} = 0,$$

isto é  $\varphi_c$  é ponto crítico do funcional  $\mathcal{G}$ .

Com o intuito de obter  $\mathcal{L}_c \equiv \mathcal{G}''(\varphi)$ , analisemos a diferenciabilidade do operador  $\mathcal{G}' : H_{per}^1([0, L]) \longrightarrow H_{per}^{-1}([0, L])$ . Sabemos que,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}' : H_{per}^1([0, L]) &\longrightarrow H_{per}^{-1}([0, L]) \\ v &\longmapsto \mathcal{E}'(v) = -v'' - \frac{v^{p+1}}{p+1} : H_{per}^1([0, L]) \longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \mathcal{E}'(v)(h).\end{aligned}$$

Se existe

$$f \in B(H_{per}^1([0, L]); H_{per}^{-1}([0, L])) = X,$$

tal que o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\mathcal{E}'(\varphi + th) - \mathcal{E}'(\varphi)] = f(h),$$



existe e é zero para todo  $h \in H_{per}^1([0, L])$ , então  $\mathcal{E}'$  é Gateaux diferenciável e a derivada de Gateaux de  $\mathcal{E}'$  em  $v$  é dada por  $\mathcal{E}''(v) \equiv f$ , onde  $\mathcal{E}''(v)(h) = f(h) \forall h \in H_{per}^1([0, L])$ .

Neste caso, definindo

$$\bar{\vartheta}_{\mathcal{E}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\mathcal{E}'(\varphi + th) - \mathcal{E}'(\varphi)] - f(h)$$

temos,

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_{\mathcal{E}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\mathcal{E}'(v + th) - \mathcal{E}'(v)] - f(h) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ -(v + th)'' - \frac{(v + th)^{p+1}}{p+1} + v'' + \frac{v^{p+1}}{p+1} \right] - f(h), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_{\mathcal{E}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ -v'' - th'' - \frac{\binom{p+1}{0} v^{p+1}}{p+1} - \frac{\binom{p+1}{1} v^p th}{p+1} - \frac{\binom{p+1}{2} v^{p-1} t^2 h^2}{p+1} - \dots - \frac{\binom{p+1}{p} v t^p h^p}{p+1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\binom{p+1}{p+1} t^{p+1} h^{p+1}}{p+1} + v'' + \frac{v^{p+1}}{p+1} \right] - f(h) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ -h'' - hv^p - \frac{\binom{p+1}{2} v^{p-1} t h^2}{p+1} - \dots - \frac{\binom{p+1}{p+1} t^p h^{p+1}}{p+1} \right] - f(h) \\ &= -h'' - hv^p - f(h). \end{aligned}$$

Como  $-\frac{d^2}{dx^2} - v^p \in B(H_{per}^1([0, L]); H_{per}^{-1}([0, L]))$ , basta considerar,

$$f = \left( -\frac{d^2}{dx^2} - v^p \right) \in B(H_{per}^1([0, L]); H_{per}^{-1}([0, L]))$$

que o limite  $\bar{\vartheta}_{\mathcal{E}}$  existirá e será zero. Além disso,

$$\mathcal{E}''(v) \equiv \left( -\frac{d^2}{dx^2} - v^p \right) \quad \text{e} \quad \mathcal{E}''(v)(y) = -y'' - v^p y.$$

Encontremos agora a derivada de Gateaux de,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' : H_{per}^1([0, L]) &\longrightarrow H_{per}^1([0, L]) \\ v &\longmapsto \mathcal{F}'(v) = v. \end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\mathcal{F}'(v + th) - \mathcal{F}'(v)] - g(h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [v + th - v] - g(h) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [th] - g(h) \\ &= I_d(h) - g(h). \end{aligned}$$

Assim quando  $g \equiv I_d : H_{per}^1([0, L]) \longrightarrow H_{per}^1([0, L])$  temos que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\mathcal{F}'(v + th) - \mathcal{F}'(v)] - g(h) = 0.$$

Daí,  $\mathcal{F}''(\varphi) = I_d$  e  $\mathcal{F}''(\varphi)(y) = y$ . Logo,  $\mathcal{G}''(v) = \mathcal{E}''(v) + c\mathcal{F}''(v) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + c - v^p$ . Como  $\mathcal{E}''(\varphi) + c\mathcal{F}''(\varphi)$  é contínua, temos Fréchet diferenciabilidade.

Portanto, a derivada de Fréchet de  $\mathcal{G}'$  no ponto  $v = \varphi$  é dada por,

$$\mathcal{G}''(\varphi) = -\frac{d^2}{dx^2} + c - \varphi^p = \mathcal{L}_c,$$

como queríamos. Com isso a prova da proposição está completa.  $\square$

## 5.1 Estabilidade de soluções ondas viajantes periódicas para a equação KdV.

Nesta seção temos como objetivo obter a estabilidade no sentido orbital de soluções ondas viajantes periódicas para equação de Korteweg-de Vries (KdV) dada em (5.5) para  $p = 1$ . Isto é,

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (5.12)$$

onde  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  é periódica de período  $L$  na variável  $x$ .

Na primeira subseção garantimos que a propriedade  $(P_0)$  em (5.6) ocorre, isto é, que existe uma curva suave de soluções ondas periódicas de período  $L$  para (5.4) com  $p = 1$ . Em seguida, na segunda subseção faremos o uso do Teorema 4.4 que caracteriza o espectro não positivo de  $\mathcal{L}_c$  dado em (5.5) para garantir as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  em (5.6). Finalmente, na última subseção provamos que o valor de  $I$  definido no Teorema 5.3 é negativo e assim todas as hipóteses do Teorema 5.3 estão satisfeitas, o que nos permite concluir a estabilidade neste caso.

### 5.1.1 Existência de curva de soluções ondas periódicas para KdV.

Construiremos agora uma curva suave de ondas periódicas com período  $L$  da forma  $u(x, t) = \varphi_c(x - ct)$  que são soluções de (5.4) no caso  $p = 1$ . Observe que multiplicando (5.4) (caso  $p = 1$ ) por  $\varphi'$  temos,

$$-c\varphi_c\varphi'_c + \frac{1}{2}\varphi_c^2\varphi'_c + \varphi_c''\varphi'_c = 0.$$

Integrando esta última equação de  $a$  a  $\gamma$  temos,

$$\int_a^\gamma \left( -c\varphi_c(x)\varphi'_c(x) + \frac{1}{2}\varphi_c^2(x)\varphi'_c(x) + \varphi'_c(x)\varphi_c''(x) \right) dx = 0,$$

isto é,

$$\int_a^\gamma \left( -\frac{c}{2} \frac{d}{dx} \varphi_c^2(x) + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{d}{dx} \varphi_c^3(x) + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\varphi'_c(x))^2 \right) dx = 0.$$

Portanto,

$$\frac{(\varphi'_c)^2}{2} = -\frac{1}{6}\varphi_c^3 + \frac{c}{2}\varphi_c^2 + B_{\varphi_c}$$

o qual pode ser escrito no forma,

$$(\varphi'_c)^2 = \frac{1}{3}P(\varphi_c), \quad (5.13)$$

onde  $P(t) = -t^3 + 3ct^2 + 6B_{\varphi_c}$ .

Agora para um  $c > 0$  fixado, explicitaremos uma solução periódica, positiva e não constante  $\varphi_c$  para (5.13) utilizando o método da quadratura. Se  $P(t)$  possui somente uma raiz real  $\beta$ , então temos soluções ilimitadas, o que não nos fornece soluções periódicas. A Figura 5.1 ilustra isto.

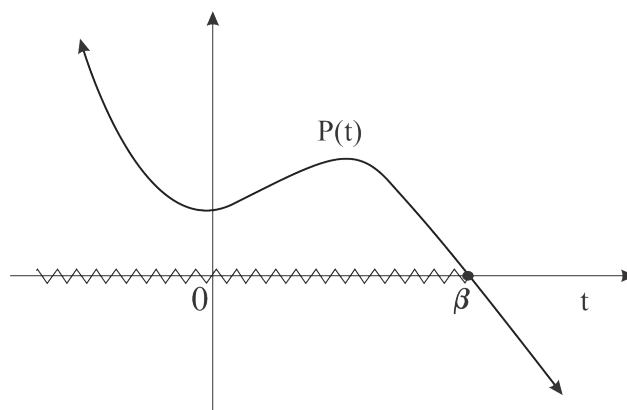


Figura 5.1:

Portanto  $P(t)$  deve possuir três raízes reais, digamos  $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ . Logo,  $P(t)$  assume a forma,

$$P(t) = (t - \beta_1)(t - \beta_2)(\beta_3 - t), \quad (5.14)$$

onde o sinal de menos está incorporado no terceiro fator. Desenvolvendo (5.14) obtemos,

$$\begin{aligned} P(t) &= (t^2 - t\beta_2 - t\beta_1 + \beta_1\beta_2)(\beta_3 - t) \\ &= -t^3 + t^2(\beta_3 + \beta_2 + \beta_1) + t(-\beta_2\beta_3 - \beta_1\beta_3 - \beta_1\beta_2) + \beta_1\beta_2\beta_3. \end{aligned}$$

Assim temos o sistema,

$$\begin{cases} \beta_3 + \beta_2 + \beta_1 = 3c \\ \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_3 + \beta_1\beta_2 = 0 \\ \beta_1\beta_2\beta_3 = 6B_{\varphi_c}. \end{cases} \quad (5.15)$$

Como procuramos soluções positivas e periódicas para (5.13), escolhemos  $\beta_2, \beta_3$  tal que  $0 < \beta_2 < \beta_3$ . Veremos adiante (página 121), que se  $\beta_2 = 0$  então há solução  $\varphi_c$  para (5.13) com “período infinito”.

**Observação 5.6.** *Nesta dissertação escolhemos trabalhar com soluções positivas para facilitar a construção de uma curva suave de soluções como veremos adiante. A teoria desenvolvida no Capítulo 4 pode ser aplicada em soluções que mudam de sinal ou são negativas (caso existam).*

O gráfico de  $P(t)$  deve assumir a forma dada na Figura 6.1.

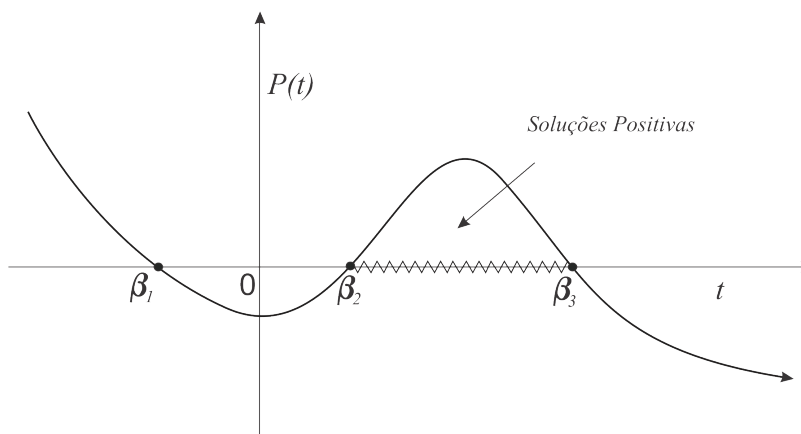


Figura 5.2:

Logo, a solução  $\varphi_c$  que procuramos deve assumir valores no intervalo  $[\beta_2, \beta_3]$ . Como

$\beta_3 > 0$ , podemos normalizar  $\varphi_c$  colocando  $\rho = \frac{\varphi_c}{\beta_3}$  tal que (5.13) torna-se,

$$(\rho')^2 = \frac{1}{3}\beta_3 \left( \frac{\beta_3\rho - \beta_1}{\beta_3} \right) \left( \frac{\beta_3\rho - \beta_2}{\beta_3} \right) (1 - \rho),$$

isto é,

$$(\rho')^2 = \frac{\beta_3}{3}(\rho - \eta_1)(\rho - \eta_2)(1 - \rho), \quad (5.16)$$

onde  $\eta_i = \frac{\beta_i}{\beta_3}$ ,  $i = 1, 2$ . Note que a variável  $\rho$  mora no intervalo  $(\eta_2, 1)$ . Com o intuito de explicitar uma solução para (5.13) vamos fazer uma mudança de variáveis pondo-se,

$$\rho = 1 + (\eta_2 - 1) \sin^2(\psi), \quad (5.17)$$

com  $\psi(0) = 0$  e  $\psi$  contínua. Substituindo  $\rho$  em (5.16) temos,

$$\begin{aligned} [(1 + (\eta_2 - 1) \sin^2(\psi))']^2 &= \frac{\beta_3}{3} [1 + (\eta_2 - 1) \sin^2(\psi) \\ &\quad - \eta_1] [1 + (\eta_2 - 1) \sin^2(\psi) - \eta_2] [-(\eta_2 - 1) \sin^2(\psi)] \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} [2(\eta_2 - 1) \sin(\psi) \cos(\psi) \psi']^2 &= \frac{\beta_3}{3} [1 + (\eta_2 - 1) \sin^2(\psi) \\ &\quad - \eta_1] [1 + (\eta_2 - 1) \sin^2(\psi) - \eta_2] [-(\eta_2 - 1) \sin^2(\psi)], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} [2(\eta_2 - 1) \sin(\psi) \cos(\psi) \psi']^2 &= \frac{\beta_3}{3} (1 - \eta_1) [1 + (\eta_2 - 1) \sin^2(\psi) - \eta_2] [-(\eta_2 - 1) \sin^2(\psi)] \\ &\quad + \frac{\beta_3}{3} [(\eta_2 - 1) \sin^2(\psi)] [1 + (\eta_2 - 1) \sin^2(\psi) \\ &\quad - \eta_2] [-(\eta_2 - 1) \sin^2(\psi)]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Como  $\rho \in (0, 1)$ , segue de (5.17) que  $(\eta_2 - 1) \sin^2(\psi) \neq 0$  e  $\cos^2(\psi) \neq 0$ . Logo  $(\eta_2 - 1) \sin^2(\psi) \cos^2(\psi) \neq 0$ . Assim podemos isolar  $(\psi')^2$  em (5.18) e obter,

$$\begin{aligned} (\psi')^2 &= \frac{\beta_3}{12} (1 - \eta_1) \left[ \frac{1 + (\eta_2 - 1) \sin^2(\psi) - \eta_2}{(\eta_2 - 1)^2 \sin^2(\psi) (1 - \sin^2(\psi))} \right] \\ &\quad + \frac{\beta_3}{12} \left[ \frac{((\eta_2 - 1) \sin^2(\psi)) (1 + (\eta_2 - 1) \sin^2(\psi) - \eta_2) (-(\eta_2 - 1) \sin^2(\psi))}{(\eta_2 - 1)^2 \sin^2(\psi) (1 - \sin^2(\psi))} \right], \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
(\psi')^2 &= \frac{\beta_3}{12}(1 - \eta_1) \left[ \frac{1 + (\eta_2 - 1) \sin^2(\psi) - \eta_2}{(\eta_2 - 1)^2 \sin^2(\psi)(1 - \sin^2(\psi))} \right. \\
&\quad \left. - \frac{((\eta_2 - 1) \sin^2(\psi))(1 + (\eta_2 - 1) \sin^2(\psi) - \eta_2)((\eta_2 - 1) \sin^2(\psi))}{((1 - \eta_1)(\eta_2 - 1)^2 \sin^2(\psi)(1 - \sin^2(\psi)))} \right], \\
&= \frac{\beta_3}{12}(1 - \eta_1) \left[ \left( \frac{-(1 - \eta_2)(\eta_2 - 1) \sin^2(\psi)}{(\eta_2 - 1)^2 \sin^2(\psi)(1 - \sin^2(\psi))} - \frac{(\eta_2 - 1) \sin^2(\psi)(\eta_2 - 1) \sin^2(\psi)}{(\eta_2 - 1)^2 \sin^2(\psi)(1 - \sin^2(\psi))} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{(1 - \eta_2) \sin^2(\psi)}{(1 - \eta_1)(1 - \sin^2(\psi))} + \frac{(\eta_2 - 1) \sin^2(\psi) \sin^2(\psi)}{(1 - \eta_1)(1 - \sin^2(\psi))} \right) \right].
\end{aligned}$$

Logo,  $(\psi')^2$  assume a seguinte forma,

$$\begin{aligned}
(\psi')^2 &= \frac{\beta_3}{12}(1 - \eta_1) \left[ \left( \frac{1}{1 - \sin^2(\psi)} - \frac{\sin^2(\psi)}{1 - \sin^2(\psi)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(1 - \eta_2)}{(1 - \eta_1)} \left( \frac{\sin^2(\psi)}{1 - \sin^2(\psi)} - \frac{\sin^2(\psi) \sin^2(\psi)}{1 - \sin^2(\psi)} \right) \right],
\end{aligned}$$

isto é,

$$(\psi')^2 = \frac{\beta_3}{12}(1 - \eta_1) \left[ 1 - \frac{1 - \eta_2}{1 - \eta_1} \sin^2(\psi) \right]$$

com  $\psi(0) = 0$  e  $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ . Definindo

$$k^2 = \frac{1 - \eta_2}{1 - \eta_1} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{\beta_3}{12}(1 - \eta_1), \tag{5.19}$$

obtemos,

$$(\psi')^2 = \lambda(1 - k^2 \sin^2(\psi)). \tag{5.20}$$

Como  $k^2 = \frac{1 - \eta_2}{1 - \eta_1} = \frac{\beta_3 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_1}$ ,  $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$  e  $0 < \beta_2 < \beta_3$ , temos que  $0 < k^2 < 1$ .

Além disso,  $\lambda = \frac{\beta_3}{12}(1 - \eta_2) = \frac{\beta_3 - \beta_1}{12}$  e  $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$  implica que  $\lambda > 0$ . Deste modo podemos reescrever (5.20) da forma,

$$1 = \frac{\psi'}{\sqrt{\lambda} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}}. \tag{5.21}$$

Integrando (5.21) de 0 a  $z$ , encontramos que,

$$\int_0^z 1 ds = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^z \frac{\psi'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}} ds,$$

e usando mudança de variáveis obtemos,

$$F(\psi, k) = \sqrt{\lambda}z = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}}. \quad (5.22)$$

O lado direito de (5.22) é justamente uma integral elíptica de primeiro tipo, assim pelas propriedades de funções elípticas (ver seção 1.3) temos,

$$\sin \psi = \operatorname{sn}(\sqrt{\lambda}z; k). \quad (5.23)$$

Substituindo (5.23) em (5.17), encontramos

$$\rho = 1 + (\eta_2 - 1)\operatorname{sn}^2(\sqrt{\lambda}z; k).$$

Como  $\operatorname{sn}^2 + \operatorname{cn}^2 = 1$  temos,

$$\rho = \eta_2 + (1 - \eta_2)\operatorname{cn}^2(\sqrt{\lambda}z; k).$$

Portanto da definição de  $\rho$ , de  $\lambda$  e de  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2$  encontramos que,

$$\varphi_c = \beta_3 \left[ \frac{\beta_2}{\beta_3} + \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_3}\right) \operatorname{cn}^2 \left( \sqrt{\frac{\beta_3}{12} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_3}\right)} z; k \right) \right].$$

E finalmente,

$$\varphi_c = \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2)\operatorname{cn}^2 \left( \sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{12}} z; k \right) \quad (5.24)$$

é uma solução explícita para (5.13).

Vamos analisar agora o período fundamental da solução encontrada  $\varphi_c$ . Como  $\operatorname{cn}^2$  possui período real fundamental  $2K$ , onde  $K = K(k)$  representa a integral elíptica completa de primeiro tipo, segue que a solução onda cnoidal  $\varphi_c$  em (5.24) possui período fundamental  $T_{\varphi_c}$  dado por,

$$T_{\varphi_c} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\beta_3 - \beta_1}} K(k). \quad (5.25)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \varphi_c \left( z + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\beta_3 - \beta_1}} K; k \right) &= \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2)\operatorname{cn}^2 \left( \frac{\sqrt{\beta_3 - \beta_1}}{2\sqrt{3}} \left( z + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\beta_3 - \beta_1}} K \right); k \right), \\ &= \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2)\operatorname{cn}^2 \left( \frac{\sqrt{\beta_3 - \beta_1}}{2\sqrt{3}} z + 2K; k \right) \\ &= \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2)\operatorname{cn}^2 \left( \frac{\sqrt{\beta_3 - \beta_1}}{2\sqrt{3}} z; k \right) \\ &= \varphi_c(z; k). \end{aligned}$$

Podemos observar que o período fundamental da solução  $\varphi_c$  para um  $c$  fixado depende de  $k$ ,  $\beta_3$  e  $\beta_1$ . Então usaremos (5.19) e o sistema (5.15) para encontrar algumas propriedades do período fundamental  $T_{\varphi_c}$  como por exemplo que  $T_{\varphi_c} > \frac{2\sqrt{3}\pi}{\sqrt{3c}}$  para um  $c > 0$  fixado.

Da primeira equação de (5.15) e de (5.19) temos que,

$$k^2 = \frac{\beta_3 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_1} = \frac{\beta_3 - \beta_2}{\beta_3 - (3c - \beta_2 - \beta_3)} = \frac{\beta_3 - \beta_2}{2\beta_3 + \beta_2 - 3c}. \quad (5.26)$$

Por outro lado, como estamos considerando  $0 < \beta_2 < \beta_3$ , temos da segunda equação de (5.15) que,

$$\beta_1 = -\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_2 + \beta_3}. \quad (5.27)$$

Substituindo (5.27) na segunda equação de (5.15) temos,

$$-\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_2 + \beta_3} + \beta_2 + \beta_3 = 3c,$$

isto é,

$$\beta_3^2 + \beta_3(\beta_2 - 3c) + (\beta_2^2 - 3c\beta_2) = 0. \quad (5.28)$$

Resolvendo esta equação em função de  $\beta_3$  encontramos que,

$$\beta_3 = \beta_3(\beta_2) = \frac{3c - \beta_2 + \sqrt{(\beta_2 - 3c)^2 - 4(\beta_2^2 - 3c\beta_2)}}{2}. \quad (5.29)$$

Note que consideramos o caso  $+$  pois  $\beta_3 > 0$ , do contrário, podemos ter  $c = \beta_2$  e teremos  $\beta_3 = c(1 - \sqrt{3}) < 0$  o que é uma contradição.

A fim de simplificar nossa notação definiremos a seguinte função,

$$\Delta_c(x) = (x - 3c)^2 - 4(x^2 - 3cx).$$

Deste modo  $\beta_3(\beta_2) = \frac{3c - \beta_2 + \sqrt{\Delta_c(\beta_2)}}{2}$  e  $2\beta_3 + \beta_2 - 3c = \sqrt{\Delta_c(\beta_2)}$ . Com esta terminologia temos de (5.26) que,

$$k^2 = \frac{(3c - \beta_2 + \sqrt{\Delta_c(\beta_2)}) - \beta_2}{2(2\beta_3 + \beta_2 - 3c)} = \frac{3c - 3\beta_2 + \sqrt{\Delta_c(\beta_2)}}{2\sqrt{\Delta_c(\beta_2)}},$$

ou seja,

$$k^2 = \frac{3(c - \beta_2) + \sqrt{\Delta_c(\beta_2)}}{2\sqrt{\Delta_c(\beta_2)}}. \quad (5.30)$$

Ademais, como estamos considerando  $0 < \beta_2 < \beta_3$  com  $\beta_3$  real temos que  $\Delta_c(\beta_2) \geq 0$ , mais precisamente  $\Delta_c(\beta_2) = -3\beta_2^2 + 6c\beta_2 + 9c^2 \geq 0$ . As raízes de  $\Delta_c(\beta_2)$  são  $-c$  e  $3c$ , porém



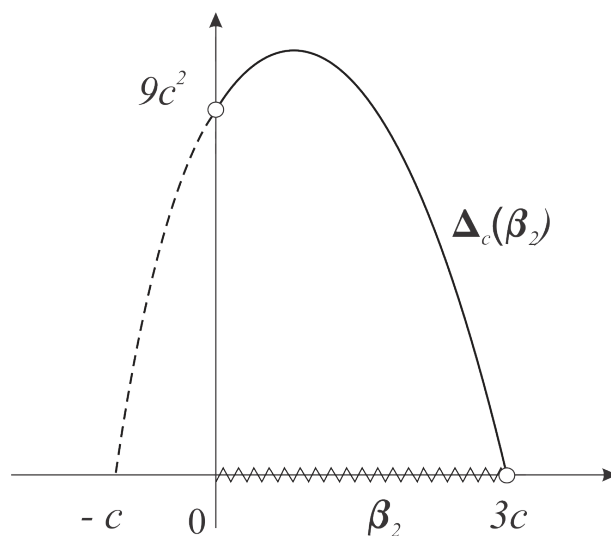


Figura 5.3:

elas não são atingidas já que  $\beta_2 > 0$  e  $\beta_3 \neq 0$ . A Figura 5.3 ilustra o comportamento de  $\Delta_c(\beta_2)$ .

Como podemos ver  $\Delta(\beta_2) \geq 0$  e a expressão para  $\beta_3(\beta_2)$  implica que  $0 < \beta_2 < 3c$ . Porém quando  $\beta_2 = 2c$  temos que,  $\beta_3(2c) = \frac{3c - 2c + \sqrt{\Delta_c(2c)}}{2} = 2c$ , mas isto não pode ocorrer pois estamos considerando  $0 < \beta_2 < \beta_3$ . Assim  $\beta_3(\beta_2) = \frac{3c - \beta_2 + \sqrt{\Delta_c(\beta_2)}}{2}$  é representado graficamente pela Figura 5.4.

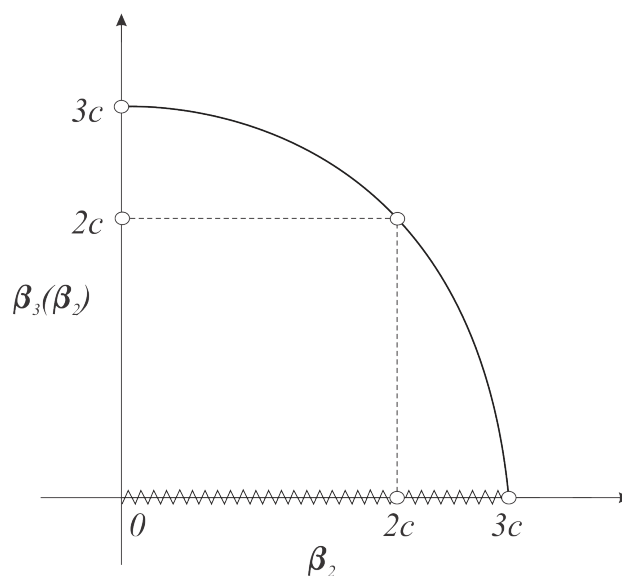


Figura 5.4:

Pelo fato de  $\beta_2 \in (0, 2c) \cup (2c, 3c)$ , segue que  $\beta_2 \in (0, 2c) \cup (2c, 3c)$ . Porém se  $\beta_3 < 2c$ ,

então  $\beta_2 > 2c > \beta_3$  o que contraria  $0 < \beta_2 < \beta_3$ . Daí,  $2c < \beta_3 < 3c$  e conseqüentemente  $0 < \beta_2 < 2c$ . Portanto temos a relação,

$$0 < \beta_2 < 2c < \beta_3 < 3c. \quad (5.31)$$

Agora de (5.30) temos que,

$$k(\beta_2) \longrightarrow 1^- \quad \text{quando} \quad \beta_2 \longrightarrow 0 \quad (5.32)$$

e

$$k(\beta_2) \longrightarrow 0^+ \quad \text{quando} \quad \beta_2 \longrightarrow 2c. \quad (5.33)$$

Logo, usando (5.32) temos  $K(k(\beta_2)) \longrightarrow +\infty$  e conseqüentemente,

$$T_{\varphi_c}(\beta_2) = \frac{4\sqrt{3}}{[\Delta_c(\beta_2)]^{\frac{1}{4}}} K \longrightarrow +\infty,$$

quando  $\beta_2 \longrightarrow 0$ . Ademais de (5.33) segue que,  $K(k(\beta_2)) \longrightarrow \frac{\pi}{2}$  e conseqüentemente,

$$T_{\varphi_c}(\beta_2) = \frac{4\sqrt{3}}{[\Delta_c(\beta_2)]^{\frac{1}{4}}} K \longrightarrow \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3c}} \frac{\pi}{2} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{\sqrt{3c}}$$

quando  $\beta_2 \longrightarrow 2c$ .

Conforme afirmamos na pagina 115, se  $\beta_2 = 0$  então temos solução  $\varphi_c$  para (5.13) com “período infinito”. De fato, vimos acima que o período fundamental,  $T_{\varphi_c} \longrightarrow +\infty$  quando  $\beta_2 \longrightarrow 0^+$ . Ademais, se  $\beta_2 \longrightarrow 0^+$  então  $k \longrightarrow 1^-$  e neste caso,

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} \text{cn}(u; k) = \text{sech}(u),$$

deste modo,  $\varphi_c$  vem dada por,

$$\varphi_c(x) = 3c \text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}x\right).$$

Veremos no próximo teorema que  $T_{\varphi_c}$  em função de  $\beta_2$  é uma função estritamente decrescente e assim o período fundamental  $T_{\varphi_c}$  de  $\varphi_c$  deve satisfazer,

$$T_{\varphi_c} > \frac{2\sqrt{3}\pi}{\sqrt{3c}}$$

para  $c$  fixado. A Figura 5.5 ilustra o comportamento do período fundamental  $T_{\varphi_c}(\beta_2)$ .

Mostremos agora, que existe para um período  $L > 0$  fixado, uma curva suave de soluções ondas cnoidais para a equação 5.13.

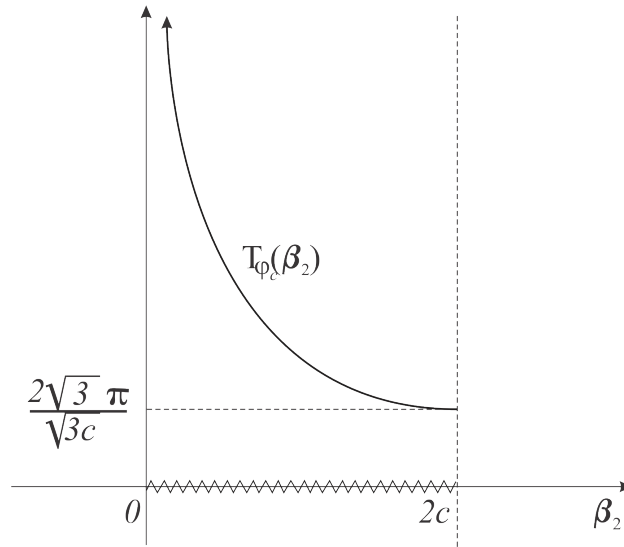


Figura 5.5:

Inicialmente, verifiquemos que existe uma família de soluções ondas cnoidais com um período fixado. De fato, seja  $L > 0$  e  $c > 0$  tal que,  $c > \frac{4\pi^2}{L^2}$ . Conforme vimos anteriormente, a função  $\beta_2 \in (0, 2c) \mapsto T_{\varphi_c}(\beta_2)$  é estritamente decrescente, assim existe um único  $\beta_2 = \beta_2(c) \in (0, 2c)$  tal que o período fundamental da onda cnoidal  $\varphi_c$  será  $T_{\varphi_c}(\beta_2(c)) = L$ . Isto nos garante que existe uma família de ondas cnoidais de período  $L$  fixado.

O próximo teorema, garante que existe a curva suave de soluções ondas cnoidais para a equação 5.13.

**Teorema 5.7.** *Seja  $L > 0$  arbitrário mas fixado. Considere  $c_0 > \frac{4\pi^2}{L^2}$  e o único  $\beta_{2_0} = \beta_2(c_0) \in (0, 2c_0)$  tal que  $T_{\varphi_{c_0}} = L$ . Então,*

- (1) *Existe um intervalo  $J(c_0)$  com  $c_0$  em seu interior, um intervalo  $B(\beta_{2_0})$  com  $\beta_{2_0}$  em seu interior e uma única função  $\Lambda(c_0) = \beta_{2_0}$  e*

$$T_{\varphi_c}(\beta_2) = \frac{4\sqrt{3}}{(\Delta_c(\beta_2))^{\frac{1}{4}}} K(k) = L \quad (5.34)$$

*onde  $c \in J(c_0)$ ,  $\beta_2 = \Lambda(c)$  e  $k^2 = k^2(c) \in (0, 1)$  é definido por (5.30).*

- (2) *A solução onda cnoidal em (5.24), determinada por  $\beta_1(c)$ ,  $\beta_2(c)$ ,  $\beta_3(c)$ , possui período fundamental  $L$  e satisfaz (5.13). Além disso a aplicação*

$$c \in J(c_0) \mapsto \varphi_c \in H_{per}^n([0, L]), \quad n \in \mathbb{N}$$

é uma função suave.

(3)  $J(c_0)$  pode ser escolhido como  $\left(\frac{4\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$ .

**Demonstração:** A idéia da demonstração é aplicar o Teorema da Função Implícita. Com efeito, considere o conjunto aberto  $\Omega = \left\{(\beta_2, c); c > \frac{4\pi^2}{L^2}, \beta_2 \in (0, 2c)\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$  e defina  $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por,

$$\Psi(\beta, c) = \frac{4\sqrt{3}}{\Delta_c(\beta_2)^{\frac{1}{4}}} K(k(\beta_2, c))$$

onde  $k^2(\beta_2, c) = \frac{3c - 3\beta_2 + \sqrt{\Delta_c(\beta_2)}}{2\sqrt{\Delta_c(\beta_2)}}$ ,  $\Delta_c(\beta_2) = (\beta_2 - 3c)^2 - 4(\beta_2^2 - 3c\beta_2)$  e

$$\frac{d\Delta_c}{d\beta_2} = -6\beta_2 + 6c.$$

No que segue mostramos que,

$$\frac{d\Psi}{d\beta_2}(\beta_2, c) > 0. \quad (5.35)$$

Observe que

$$\frac{d\Psi}{d\beta_2}(\beta_2, c) = \frac{-6(c - \beta_2)\sqrt{3}}{\Delta_c^{\frac{5}{4}}(\beta_2)} K(k) + \frac{4\sqrt{3}}{\Delta_c^{\frac{1}{4}}(\beta_2)} \frac{dK}{dk} \frac{dk}{d\beta_2}.$$

Agora diferenciando  $k^2(\beta_2, c)$  com respeito a  $\beta_2$  temos,

$$2k \frac{dk}{d\beta_2} = \frac{-6\sqrt{\Delta_c(\beta_2)} + (6c - 6\beta_2) - \Delta_c^{-\frac{1}{2}}(\beta_2)(6c - 6\beta_2)(3c - 3\beta_2 + \sqrt{\Delta_c(\beta_2)})}{4\Delta_c(\beta_2)}$$

isto é,

$$\frac{dk}{d\beta_2} = \frac{-6\sqrt{\Delta_c(\beta_2)} + (6c - 6\beta_2) - \Delta_c^{-\frac{1}{2}}(\beta_2)(6c - 6\beta_2)(3c - 3\beta_2 + \sqrt{\Delta_c(\beta_2)})}{8k\Delta_c(\beta_2)} \quad (5.36)$$

Denotando o numerador do lado direito de (5.36) por  $\sigma$ , temos

$$\begin{aligned} \sigma &= -6\sqrt{\Delta_c(\beta_2)} + 6c - 6\beta_2 - \Delta_c^{-\frac{1}{2}}(\beta_2)(18c^2 - 18c\beta_2 + 6c\sqrt{\Delta_c(\beta_2)} \\ &\quad - 18c\beta_2 + 18\beta_2^2 - 6\beta_2\sqrt{\Delta_c(\beta_2)}) \\ &= -6\sqrt{\Delta_c(\beta_2)} - 18c^2\Delta_c^{-\frac{1}{2}}(\beta_2) + 36c\beta_2\Delta_c^{-\frac{1}{2}}(\beta_2) - 18\beta_2^2\Delta_c^{-\frac{1}{2}}(\beta_2) \\ &= -(6\sqrt{\Delta_c(\beta_2)} + 18\Delta_c^{-\frac{1}{2}}(\beta_2)(\beta_2 - c)^2). \end{aligned}$$

Então (5.36) pode ser reescrito da forma,

$$\frac{dk}{d\beta_2} = -\frac{(6\sqrt{\Delta_c(\beta_2)} + 18\Delta_c^{-\frac{1}{2}}(\beta_2)(\beta_2 - c)^2)}{8k\Delta_c(\beta_2)} < 0. \quad (5.37)$$

Usando (5.37) e a relação,

$$\frac{dK}{dx}(x) = \frac{E(x) - (1 - x^2)K(x)}{x(1 - x^2)}, \quad \forall x \in (0, 1),$$

onde  $E$  é a integral elíptica de segundo tipo, temos a seguinte equivalência,

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\beta_2}(\beta_2, c) > 0 \Leftrightarrow [k^2(1 - k^2) - k^4(1 - k^2) + 2(1 - k^2) + 2(1 - k^2)^2(1 - k^2) \\ + 2k^2(1 - k^2)] K - [2((1 - k^2)^2 + k^2)] E < 0. \end{aligned} \quad (5.38)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\beta_2}(\beta_2, c) &= \frac{2(3c - 3\beta_2)\sqrt{3}}{-\Delta_c^{\frac{5}{4}}(\beta_2)} K(k) + \frac{4\sqrt{3}}{\Delta_c^{\frac{1}{4}}(\beta_2)} \left[ \frac{E(k) - (1 - k^2)K(k)}{x(1 - k^2)} \right] \frac{dk}{d\beta_2} \\ &= \frac{k(1 - k^2)\Delta_c^{\frac{1}{4}}(\beta_2)(3c - 3\beta)2\sqrt{3}K + \Delta_c^{\frac{5}{4}}(\beta_2)4\sqrt{3} \left( -\frac{dk}{d\beta_2} \right) (E - (1 - k^2)K)}{-\Delta_c^{\frac{3}{2}}(\beta_2)k(1 - k^2)}. \end{aligned}$$

Logo usando (5.30) vemos que,

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\beta_2}(\beta_2, c) &= \frac{k(1 - k^2)\Delta_c^{\frac{1}{4}}(\beta_2)(2\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)k^2 - \Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2))2\sqrt{3}K}{-\Delta_c(\beta_2)^{\frac{3}{2}}k(1 - k^2)} \\ &\quad + \frac{\Delta_c^{\frac{5}{4}}(\beta_2)4\sqrt{3} \left( -\frac{dk}{d\beta_2} \right) (E - (1 - k^2)K)}{-\Delta_c(\beta_2)^{\frac{3}{2}}k(1 - k^2)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\beta_2}(\beta_2, c) &= \frac{k(1 - k^2)\Delta_c^{\frac{3}{4}}(\beta_2)(2k^2 - 1)2\sqrt{3}K + \Delta_c^{\frac{3}{4}}(\beta_2)\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)4\sqrt{3} \left( -\frac{dk}{d\beta_2} \right) (E - (1 - k^2)K)}{-\Delta_c^{\frac{3}{2}}(\beta_2)k(1 - k^2)} \\ &= \frac{k(1 - k^2)(2k^2 - 1)2\sqrt{3}K + \Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)4\sqrt{3} \left( -\frac{dk}{d\beta_2} \right) (E - (1 - k^2)K)}{-\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)k(1 - k^2)} \\ &= \frac{-2\sqrt{3}}{\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)k(1 - k^2)} \left[ k(1 - k^2)(2k^2 - 1)K - 2\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2) \left( \frac{dk}{d\beta_2} \right) (E - (1 - k^2)K) \right] \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)k(1 - k^2)} \left[ k(1 - k^2)(1 - 2k^2)K + 2\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2) \left( \frac{dk}{d\beta_2} \right) (E - (1 - k^2)K) \right]. \end{aligned}$$

Denotando  $\Gamma = \left[ k(1 - k^2)(1 - 2k^2)K + 2\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2) \left( \frac{dk}{d\beta_2} \right) (E - (1 - k^2)K) \right]$  temos,

$$\frac{d\Psi}{d\beta_2}(\beta_2, c) = \frac{2\sqrt{3}}{\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)k(1 - k^2)} [\Gamma] .$$

Por outro lado, por (5.30) e (5.37) temos,

$$\begin{aligned} \Gamma &= k(1 - k^2)(1 - 2k^2)K - 2\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2) \left[ \frac{(6\sqrt{\Delta_c(\beta_2)} + 18\Delta_c^{-\frac{1}{2}}(\beta_2)(\beta_2 - c)^2)}{8k\Delta_c(\beta_2)} \right] (E - (1 - k^2)K) \\ &= k(1 - k^2)(1 - 2k^2)K - \Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2) \left[ \frac{(3\sqrt{\Delta_c(\beta_2)} + \Delta_c^{-\frac{1}{2}}(\beta_2)(2\sqrt{\Delta_c(\beta_2)}k^2 - \sqrt{\Delta_c(\beta_2)})^2)}{8k\Delta_c(\beta_2)} \right] \\ &\quad (E - (1 - k^2)K) \\ &= k(1 - k^2)(1 - 2k^2)K - \Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2) \left[ \frac{3\Delta_c(\beta_2) + (4\Delta_c(\beta_2)k^4 - 4\Delta_c(\beta_2)k^2 + \Delta_c(\beta_2))}{2k\Delta_c(\beta_2)\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)} \right] \\ &\quad (E - (1 - k^2)K) \\ &= k(1 - k^2)(1 - 2k^2)K - \Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2) \left[ \frac{3 + (4k^4 - 4k^2 + 1)}{2k\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)} \right] (E - (1 - k^2)K) . \end{aligned}$$

Logo,

$$\Gamma = k(1 - k^2)(1 - 2k^2)K - 2 \left( \frac{k^4 - k^2 + 1}{k} \right) (E - (1 - k^2)K) .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\beta_2}(\beta_2, c) &= \frac{2\sqrt{3}}{\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)k(1 - k^2)} \left[ k(1 - k^2)(1 - 2k^2)K - 2 \left( \frac{k^4 - k^2 + 1}{k} \right) (E - (1 - k^2)K) \right] \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)k^2(1 - k^2)} [k^2(1 - k^2)(1 - 2k^2)K - 2(k^4 - k^2 + 1)(E - (1 - k^2)K)] \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)k^2(1 - k^2)} [(k^2(1 - k^2))^2 - k^4(1 - k^2) + 2(1 - k^2)^2(1 - k^2) \\ &\quad + 2k^2(1 - k^2)K - 2((1 - k^2) + k^2)E] . \end{aligned}$$

Sendo  $\frac{2\sqrt{3}}{\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)k^2(1-k^2)} > 0$ , temos a equivalência desejada em (5.38).

Daí,  $\frac{d\Psi}{d\beta_2}(\beta_2, c) > 0$  se e somente se,

$$(-3k^2 + k^4 + 2)K - (2 - 2k^2 + 2k^4)E < 0.$$

Definamos agora a seguinte função,

$$g(k) = (-3k^2 + k^4 + 2)K - (2 - 2k^2 + 2k^4)E.$$

Observe que,

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} g(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} 2[K(k) - 2E(k)] = 2\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{2} = 0.$$

Assim para mostrarmos que  $\frac{d\Psi}{d\beta_2}(\beta_2, c) > 0$ , basta mostrarmos que  $g(k)$  é estritamente decrescente em  $(0, 1)$ . De fato,

$$\begin{aligned} g'(k) &= (-6k + 4k^3)K + (-3k^2 + k^4 + 2)\frac{dK}{dk} - (-4k + 8k^3)E - (2 - 2k^2 + 2k^4)\frac{dE}{dk} \\ &= (-6k + 4k^3)K + (-3k^2 + k^4 + 2)\left[\frac{E - (1 - k^2)K}{k(1 - k^2)}\right] \\ &\quad - (-4k + 8k^3)E - (2 - 2k^2 + 2k^4)\left[\frac{E - K}{k}\right] \\ &= 5k(k^2K - 2k^2E - K + E) \\ &= 5k((1 - 2k^2)E - (1 - k^2)K). \end{aligned}$$

Sendo  $k > 0$  temos que  $g'(k) < 0$  se e somente se,

$$(1 - 2k^2)E - (1 - k^2)K < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1 - 2k^2)E < (1 - k^2)K.$$

Porém como  $k^2 \in (0, 1)$  segue que,

$$1 - 2k^2 = 1 - k^2 - k^2 < 1 - k^2 - k^2 + k^2 = 1 - k^2$$

e como  $(1 - k^2) > 0$ ,  $E > 0$  e  $K > 0$  temos

$$(1 - 2k^2)E < (1 - k^2)K,$$

como queríamos.

Portanto pelo Teorema da Função Implícita, existe uma única função suave  $\Lambda$  definida numa vizinhança  $J(c_0)$ , tal que  $\Psi(\Lambda(c), c) = L$  para cada  $c \in J(c_0)$ , donde se obtém (5.34). Como  $c_0$  foi escolhido arbitrariamente no intervalo  $J = \left(\frac{4\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$ , segue da unicidade da função  $\Lambda$ , que podemos estender seu domínio de definição para todo intervalo  $J$ , completando assim a prova.  $\square$

**Corolário 5.8.** *Considere a aplicação  $\Lambda : J(c_0) \longrightarrow B(\beta_{2_0})$  determinada pelo Teorema 5.7. Então  $\Lambda$  é uma função estritamente decrescente em  $I(c_0)$ .*

**Demonstração:** Pela prova do Teorema 5.7, sabemos que  $\Psi(\Lambda(c), c) = L$  para cada  $c \in J(c_0)$ . Assim usando o Teorema da Função Implícita,

$$\frac{d\Lambda}{dc}(c) = -\frac{\frac{d\Psi}{dc}}{\frac{d\Psi}{d\beta_2}}. \quad (5.39)$$

Porém, como já provamos que  $\frac{d\Psi}{d\beta_2} < 0$ , basta mostrarmos que  $\frac{d\Psi}{dc} < 0$  ocorre de modo a obtermos  $\frac{d\Lambda}{dc}(c) < 0$ . Com efeito, diferenciando  $\Psi$  com respeito à  $c$  obtemos,

$$\frac{d\Psi}{dc} = \frac{-\sqrt{3}(6\beta + 18c)}{\Delta_c^{\frac{5}{4}}(\beta_2)} K + \frac{4\sqrt{3}}{\Delta_c^{\frac{1}{4}}(\beta_2)} \frac{dK}{dk} \frac{dk}{dc}. \quad (5.40)$$

Por outro lado diferenciando  $k^2 = \frac{3c - 3\beta_2 + \sqrt{\Delta_c(\beta_2)}}{2\sqrt{\Delta_c(\beta)}}$  com respeito à  $c$  e usando a própria expressão de  $k^2$  em (5.30) obtemos,

$$\begin{aligned} 2k \frac{dk}{dc} &= \frac{(6\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2) + (6\beta_2 + 18c)) - \Delta_c^{-\frac{1}{2}}(\beta_2)(6\beta_2 + 18c)(2\Delta_c^{\frac{1}{2}}k^2)}{4\Delta_c(\beta_2)} \\ &= \frac{(6\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2) + (6\beta_2 + 18c)) - 2(6\beta_2 + 18c)(k^2)}{4\Delta_c(\beta_2)}. \end{aligned}$$

Desta forma, encontramos,

$$\frac{dk}{dc} = \frac{(6\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2) + (6\beta_2 + 18c))(1 - 2k^2)}{8k\Delta_c(\beta_2)}. \quad (5.41)$$

Agora substituindo (5.41) em (5.40) temos,



$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dc} &= \frac{-\sqrt{3}(6\beta_2 + 18c)}{\Delta_c^{\frac{5}{4}}(\beta_2)} K + \frac{4\sqrt{3}}{\Delta_c^{\frac{1}{4}}(\beta_2)} \left[ \frac{E - (1 - k^2)K}{k(1 - k^2)} \right] \left[ \frac{(6\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2) + (6\beta_2 + 18c)(1 - 2k^2))}{8k\Delta_c(\beta_2)} \right] \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{8k^2(1 - k^2)\Delta_c^{\frac{5}{4}}(\beta_2)} \left[ -2k^2(1 - k^2)(6\beta_2 + 18c)K \right. \\ &\quad \left. + (E - (1 - k^2)K)(6\sqrt{\Delta_c(\beta_2)} + (6\beta_2 + 18c)(1 - 2k^2)) \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dc} &= \frac{4\sqrt{3}(6\beta_2 + 18c)}{8k^2(1 - k^2)\Delta_c^{\frac{5}{4}}(\beta_2)} \left[ -2k^2(1 - k^2)K + (1 - 2k^2)(E - (1 - k^2)K) \right] \\ &\quad + \frac{24\sqrt{3}\sqrt{\Delta_c(\beta_2)}}{8k^2(1 - k^2)\Delta_c^{\frac{5}{4}}(\beta_2)} \left[ E - (1 - k^2)K \right] \\ &= \frac{4\sqrt{3}(6\beta_2 + 18c)}{8k^2(1 - k^2)\Delta_c^{\frac{5}{4}}(\beta_2)} \left[ (k^2 - 1)K + (1 - 2k^2)E \right] \\ &\quad + \frac{24\sqrt{3}\sqrt{\Delta_c(\beta_2)}}{8k^2(1 - k^2)\Delta_c^{\frac{5}{4}}(\beta_2)} \left[ E + (k^2 - 1)K \right]. \end{aligned}$$

Assim  $\frac{d\Psi}{dc} < 0$  se e somente se,

$$\frac{4\sqrt{3}(6\beta_2 + 18c)}{8k^2(1 - k^2)\Delta_c^{\frac{5}{4}}(\beta_2)} \left[ (k^2 - 1)K + (1 - 2k^2)E \right] < \frac{24\sqrt{3}\sqrt{\Delta_c(\beta_2)}}{8k^2(1 - k^2)\Delta_c^{\frac{5}{4}}(\beta_2)} \left[ (1 - k^2)K - E \right]. \quad (5.42)$$

Porém, (5.42) ocorre se, e somente se

$$4\sqrt{3}(6\beta_2 + 18c)[(k^2 - 1)K + (1 - 2k^2)E] < 24\sqrt{3}\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)[(1 - k^2)K - E]$$

o que é equivalente à

$$[4\sqrt{3}(6\beta_2 + 18c)(1 - 2k^2) + 24\sqrt{3}\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)]E < [24\sqrt{3}\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)(1 - k^2) + 4\sqrt{3}(6\beta_2 + 18c)(1 - k^2)]K.$$

Como  $E < K$ ,  $E > 0$ ,  $K > 0$  e  $[24\sqrt{3}\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)(1 - k^2) + 4\sqrt{3}(6\beta_2 + 18c)(1 - k^2)] > 0$ , temos

as seguintes equivalências,

$$[4\sqrt{3}(6\beta_2 + 18c)(1 - 2k^2) + 24\sqrt{3}\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)] < [24\sqrt{3}\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2)(1 - k^2) + 4\sqrt{3}(6\beta_2 + 18c)(1 - k^2)]$$

$$\Leftrightarrow -4\sqrt{3}(6\beta_2 + 18c)k^2 + 24\sqrt{3}\sqrt{\Delta_c(\beta_2)} < 24\sqrt{3}\sqrt{\Delta_c(\beta_2)}(1 - k^2) \quad \Leftrightarrow$$

$$-4\sqrt{3}(6\beta_2 + 18c)k^2 < -24\sqrt{3}\sqrt{\Delta_c(\beta_2)}k^2 \quad \Leftrightarrow \quad \beta_2 + 3c > \sqrt{\Delta_c(\beta_2)}.$$

Como  $\beta_2 + 3c > 0$  e  $\sqrt{\Delta_c(\beta_2)} > 0$ , então  $\beta_2 + 3c > \sqrt{\Delta_c(\beta_2)}$  se, e somente se,

$$\beta_2^2 + 6c\beta_2 + 9c^2 > -3\beta_2^2 + 6c\beta_2 + 9c^2 \quad \Leftrightarrow \quad \beta_2^2 > -3\beta_2^2.$$

Portanto  $\frac{d\Psi}{dc} < 0$  e finalmente  $\frac{d\Lambda}{dc} < 0$ . □

Veremos agora um resultado que será útil para mostrar que o valor  $I$  dado pelo Teorema 5.4 é negativo.

**Corolário 5.9.** *A função  $k^2$  definida em (5.19) dada por,*

$$k^2(c) = \frac{3c - 3\Lambda(c) + \sqrt{\Delta_c}}{2\sqrt{\Delta_c}}. \quad (5.43)$$

*é suave com respeito à  $c$  e  $\frac{d}{dc}k^2(c) > 0$ .*

**Demonstração:** Pelo Teorema 5.7 vemos que  $\beta_2 = \Lambda(c)$ . Assim substituindo  $\beta_2 = \Lambda(c)$  em (5.3) encontramos que  $k^2$  depende de  $c$  e vem dado por (5.43). Ademais, o Teorema 5.7 nos garante que a função  $\Lambda(c)$  é suave e portanto sendo  $\Delta_c(\Lambda(c)) > 0$  temos que  $k^2(c)$  é suave.

Verifiquemos agora que  $\frac{d}{dc}k^2(c) > 0$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc}\Delta_c &= -6\Lambda(c)\frac{d}{dc}\Lambda(c) + 6\Lambda(c) + 6c\frac{d}{dc}\Lambda(c) + 18c \\ &= 6\frac{d}{dc}\Lambda(c)(c - \Lambda(c)) + 6\Lambda(c) + 18c. \end{aligned}$$

Por outro lado, a derivada com respeito a  $c$  de (5.43) vem dada por,

$$\frac{d}{dc}k^2(c) = \frac{1}{4\Delta_c} \left[ 2\sqrt{\Delta_c} \left( 3 - 3\frac{d}{dc}\Lambda(c) + \frac{1}{2\sqrt{\Delta_c}}\frac{d}{dc}\Delta_c \right) - \frac{1}{\Delta_c}\frac{d}{dc}\Delta_c \left( 3c - 3\Lambda(c) + \sqrt{\Delta_c} \right) \right],$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dc}k^2(c) &= \frac{1}{4\Delta_c} \left[ 2 \left( 3 - 3 \frac{d}{dc}\Lambda(c) + \frac{1}{2} \frac{6 \frac{d}{dc}\Lambda(c) (c - \Lambda(c)) + 6\Lambda(c) + 18c}{\sqrt{\Delta_c}} \right) \sqrt{\Delta_c} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(6 \frac{d}{dc}\Lambda(c) (c - \Lambda(c)) + 6\Lambda(c) + 18c) (3c - 3\Lambda(c) + \sqrt{\Delta_c})}{\sqrt{\Delta_c}} \right] \\
&= -\frac{6}{4\Delta_c} \left[ -\Delta_c + \frac{d}{dc}\Lambda(c)\Delta_c + 3 \frac{d}{dc}\Lambda(c)c^2 - 6c \frac{d}{dc}\Lambda(c)\Lambda(c) + 3 \frac{d}{dc}\Lambda(c)\Lambda(c)^2 \right. \\
&\quad \left. - 6c\Lambda(c) - 3\Lambda(c)^2 + 9c^2 \right] \\
&= -\frac{6}{4\Delta_c} \left[ \frac{d}{dc}\Lambda(c)\Delta_c + 3 \frac{d}{dc}\Lambda(c)c^2 - 6c \frac{d}{dc}\Lambda(c)\Lambda(c) + 3 \frac{d}{dc}\Lambda(c)\Lambda(c)^2 - 12c\Lambda(c) \right] \\
&= -\frac{6}{4\Delta_c} \left[ \frac{d}{dc}\Lambda(c) (\Delta_c + 3c^2 - 6c\Lambda(c) + 3\Lambda(c)^2) - 12c\Lambda(c) \right],
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{d}{dc}k^2(c) = \frac{6}{4\Delta_c} \left[ -\frac{d}{dc}\Lambda(c) (12c^2) + 12c\Lambda(c) \right]. \quad (5.44)$$

Pelo Corolário (5.8) temos que  $-\frac{d}{dc}\Lambda(c) > 0$ . Portanto,  $\Lambda(c) > 0$ ,  $c > 0$  e (5.44) implica que

$$\frac{d}{dc}k^2(c) > 0.$$

□

Podemos explicitar  $c$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$  em função de  $k$  e  $L$ . Portanto a solução  $\varphi_c$  pode ser explicitada em função de  $k$  e  $L$ .

Isto é possível graças ao seguinte sistema,

$$\left\{ \begin{array}{l} k^2 = \frac{3c - 3\beta + \sqrt{\Delta_c(\beta_2)}}{2\sqrt{\Delta_c(\beta)}} \\ L = \frac{4\sqrt{3}}{\Delta_c^{\frac{1}{4}}(\beta_2)} K. \end{array} \right. \quad (5.45)$$

Note que elevando a segunda equação de (5.45) ao quadrado temos,

$$\Delta_c^{\frac{1}{2}}(\beta_2) = \frac{48K^2}{L^2}. \quad (5.46)$$

Substituindo (5.46) na primeira equação de (5.45) temos,

$$k^2 = \left(3c - 3\beta_2 + \frac{48K^2}{L^2}\right) \frac{L^2}{96K^2} = \frac{L^2(3c - 3\beta_2) + 48K^2}{96K^2}.$$

Daí,

$$L^2(3c - 3\beta_2) = 48K^2(2k^2 - 1)$$

e então,

$$c = \frac{16K^2(2k^2 - 1)}{L^2} + \beta_2. \quad (5.47)$$

Agora, substituindo  $\Delta_c(\beta_2) = -3\beta_2^2 + 6\beta_2c + 9c^2$  em (5.46) temos a equação,

$$\beta_2^2 - 2\beta_2c - 3c^2 + \frac{16.48K^4}{L^4} = 0. \quad (5.48)$$

Resolvendo (5.48) para  $\beta_2$ , tem-se

$$\beta_2 = c \pm \frac{1}{2} \sqrt{16c^2 - \frac{4.16.48K^4}{L^4}}.$$

Substituindo  $\beta_2$  em (5.47) temos,

$$c = \frac{2.16K^2(2k^2 - 1)}{2L^2} + c \pm \frac{1}{2} \sqrt{16c^2 - \frac{4.16.48K^4}{L^4}},$$

isto é,

$$2.16K^2(2k^2 - 1) = \pm \sqrt{16c^2L^4 - 4.16.48K^4}. \quad (5.49)$$

Usando (5.49) temos,

$$4.16^2K^4(1 - 2k^2)^2 = 16c^2L^4 - 4.16.48K^4.$$

ou seja,

$$c^2 = \frac{4.16.K^4(1 - 4k^2 + 4k^4 + 3)}{L^4}.$$

Como  $c > 0$ , temos

$$c = \frac{16K^2\sqrt{1 - k^2 + k^4}}{L^2}. \quad (5.50)$$

e conseqüentemente de (5.47) vemos,

$$\beta_2 = \frac{16K^2(\sqrt{1 - k^2 + k^4} + (1 - 2k^2))}{L^2}. \quad (5.51)$$

Usando a fórmula para  $\beta_3$  em função de  $\beta_2$  (5.29), (5.50), (5.51) e a segunda equação do sistema (5.45) temos,

$$\beta_3 = \frac{1}{2} \left[ 3 \left( \frac{16K^2\sqrt{1 - k^2 + k^4}}{L^2} \right) - 16K^2 \left( \frac{\sqrt{1 - k^2 + k^4} + (1 - 2k^2)}{L^2} \right) + \frac{48K^2}{L^2} \right],$$

isto é,

$$\beta_3 = \frac{16K^2 (\sqrt{1 - k^2 + k^4} + (1 + k^2))}{L^2}. \quad (5.52)$$

Ademais, como  $\beta_3 - \beta_1 = 2\beta_3 + \beta_2 - 3c = \sqrt{\Delta_c(\beta_2)} = \frac{48K^2}{L^2}$  temos,

$$\beta_1 = \frac{16K^2 (\sqrt{1 - k^2 + k^4} - (2 - k^2))}{L^2}. \quad (5.53)$$

Portanto substituindo (5.51), (5.52) e (5.53) em (5.24) encontramos que,

$$\varphi_c(\xi) = \varphi_{c(k)}(\xi) = \frac{16K^2 (\sqrt{1 - k^2 + k^4} + (1 - 2k^2))}{L^2} + \frac{48K^2 k^2}{L^2} \operatorname{cn}^2 \left( \sqrt{\frac{4K^2}{L^2}} \xi; k \right).$$

### 5.1.2 Propriedade espectral.

Nosso objetivo agora é mostrar as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  da condição de estabilidade. No que segue, consideraremos  $L = \pi$ , pois usaremos um método numérico. Usaremos  $\pi$  para simplificar, mas poderíamos utilizar qualquer valor real fixado.

Observe que o Teorema 3.5 implica que a família de operadores  $\mathcal{L}_c$  é isonercial, isto é, o número de autovalores negativos e nulos é sempre o mesmo para qualquer que seja  $c > 0$ . Deste modo, é suficiente verificar as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  para um  $c > 0$  fixado arbitrariamente, digamos um  $c_0$ .

A curva  $\varphi_c$  solução de (5.4), o qual será objeto de trabalho nesta seção é sempre periódica com período  $L$ , qualquer que seja  $c > 0$ , em particular para  $c = c_0$ . Isto foi garantido por meio do Teorema da Função Inversa na subseção 5.1.1.

Observe agora que,  $\varphi'_{c_0}$  onde  $'$  denota a derivada com respeito á variável espacial é uma autofunção do operador  $\mathcal{L}_{c_0}$  associado ao autovalor 0. De fato, usando (5.4) temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{c_0}(\varphi'_{c_0}) &= \varphi'''_{c_0} + c_0 \varphi'_{c_0} - \varphi_{c_0} \varphi'_{c_0} \\ &= \varphi'''_{c_0} + c_0 \varphi'_{c_0} - \frac{1}{2} (\varphi_{c_0}^2)' \\ &= \left( \varphi''_{c_0} + c_0 \varphi_{c_0} - \frac{1}{2} \varphi_{c_0}^2 \right)' \\ &= 0. \end{aligned}$$

Com o intuito de garantir as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  em (5.6), vamos encontrar a constante  $\theta$  dada no Teorema 4.2 e em seguida aplicar o Teorema 4.4. Note que é possível determinar  $\theta$ , pois  $\theta$  depende somente da autofunção  $\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{c_0}(x)$  associada ao operador  $\mathcal{L}_{c_0}$  e no nosso caso temos uma forma explícita para essa autofunção.

Como a constante  $c$  está fixada arbitrariamente, isto é,  $c = c_0$  e  $c$  depende univocamente de  $k$ , fixamos  $c_0$  de modo que o correspondente  $k_0$  satisfaça  $k_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ . Neste contexto, defina

$$p(x) = \frac{d}{dx} \varphi_{c_0}(x)$$

e

$$\theta = j(x_1) + j(x_2) + 2 \int_0^\pi \frac{q'(t)}{p(t)} dt.$$

De modo a obter  $\theta$ , temos que determinar os zeros de  $p(x)$  no intervalo  $[0, \pi]$  e em seguida encontrar as raízes de  $p'(x)$  no intervalo  $[0, \pi]$ . Com efeito, temos

$$p(x) = \frac{d}{dx}(\varphi_{c_0}(x))$$

onde

$$\varphi_{c_0}(x) = 2 \frac{\left(K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 \sqrt{3}}{\pi^2} + \text{cn}^2 \left( 2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Logo,

$$p(x) = -\frac{4}{\pi} \text{cn} \left( 2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{dn} \left( 2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{sn} \left( 2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Os zeros de  $p(x)$  em  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  são,

$$z_1 = 0 \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Considerando as raízes de  $p$  no lado negativo e utilizando que  $p(x)$  é ímpar temos,

$$q(-x) = \frac{-x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{p(-x)} = \frac{x - \frac{\pi}{2}}{p(x)} = q(x),$$

isto é,  $q(x)$  é par. Logo  $\frac{q'(x)}{p(x)}$  é par e sendo,

$$j(x_1) = -\frac{z_2 - z_1}{p^2(x_1)} = -\frac{\frac{\pi}{2} - 0}{p^2(x_1)} = -\frac{(0 + \pi) - \frac{\pi}{2}}{(-p(-x_1))^2} = -\frac{(z_1 + \pi) - z_2}{p^2(x_2)} = j(x_2)$$

obtemos que a expressão de  $\theta$  pode ser simplificada. Com efeito, podemos obtê-la usando apenas a metade do intervalo  $[0, \pi]$  isto é,

$$\theta = 2j(x_1) + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q'(t)}{p(t)} dt.$$

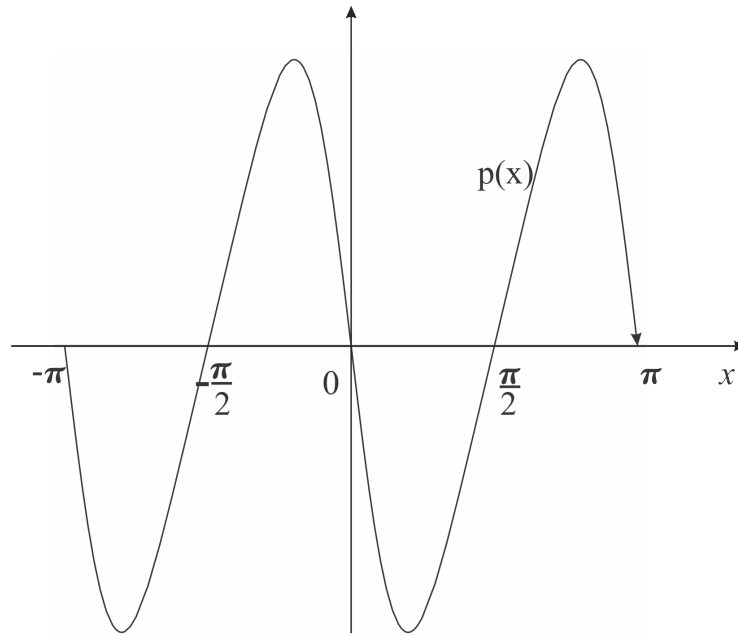


Figura 5.6:

Observe que,  $p$  ser periódica e (4.3) garantem que  $p(-x_1) = p(x_2)$ . Observe também que esta simplificação permite que encontremos  $\theta$  com apenas uma raiz de  $p'$ .

O gráfico de  $p(x)$  vem dado na Figura 5.6. Derivando  $p(x)$  encontramos  $p'(x)$ , isto é,

$$\begin{aligned}
 p'(x) &= \frac{192}{\pi^4} \left( K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)^4 \operatorname{dn}^2 \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{sn}^2 \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
 &+ \frac{96}{\pi^4} \left( K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)^4 \operatorname{cn}^2 \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{sn}^2 \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
 &- \frac{192}{\pi^4} \left( K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)^4 \operatorname{cn}^2 \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{dn}^2 \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).
 \end{aligned}$$

A função  $p'(x)$  possui um zero em  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Usando o programa Maple, este zero pode ser encontrado como sendo,

$$x_1 \simeq 0,624795.$$

Vamos agora encontrar  $j(x_1)$ . Como  $j(x_1) = -\frac{\pi}{2p^2(x_1)}$  temos,

$$j(x_1) = -\frac{\pi}{2} \left( -\frac{4}{\pi} \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) x_1}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{dn} \left( 2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) x_1}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) x_1}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)^{-2}$$

$$\simeq -0,02096018906.$$

Logo,

$$2j(x_1) \simeq -0,04192037812.$$

Como  $z_1 = 0$  e  $z_2 = \frac{\pi}{2}$  temos que  $q(x)$  é dado por,

$$q(x) = \begin{cases} \frac{x}{p(x)}, & x \in [0, x_1) \\ \frac{x - \frac{\pi}{2}}{p(x)}, & x \in [x_1, \frac{\pi}{2}] \end{cases}.$$

A Figura 5.7 ilustra a função  $q$ .

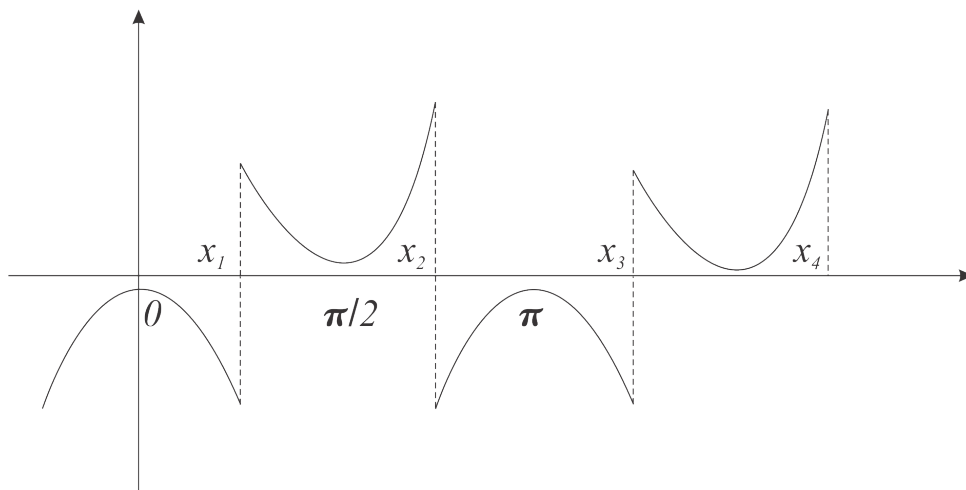


Figura 5.7:

Assim para  $x \in [0, x_1)$  temos,

$$q(x) = x \left( -\frac{4}{\pi} \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{dn} \left( 2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)^{-1}$$



e conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
q'(x) = & -\frac{1}{96} \pi^3 K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-3} \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-1} \operatorname{dn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-1} \\
& \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-1} - \frac{1}{48} x \pi^2 K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-2} \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-2} \\
& - \frac{1}{96} x \pi^2 K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-2} \operatorname{dn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-2} + \frac{1}{48} x \pi^2 K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-2} \\
& \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-2}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se  $x \in \left[ x_1, \frac{\pi}{2} \right]$  temos,

$$q(x) = \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \left( -\frac{4}{\pi} \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{dn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)^{-1}.$$

Derivando com respeito a  $x$ , a função  $q$ , obtemos

$$\begin{aligned}
q'(x) = & -\frac{1}{96} \pi^3 K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-3} \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-1} \operatorname{dn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-1} \\
& \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-1} - \frac{1}{48} \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \pi^2 K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-2} \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-2} \\
& - \frac{1}{96} \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \pi^2 K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-2} \operatorname{dn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-2} \\
& + \frac{1}{48} \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \pi^2 \left( K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)^{-2} \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) x}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{-2}.
\end{aligned}$$

Logo,  $\frac{q'(x)}{p(x)}$  em  $[0, x_1]$  e  $\frac{q'(x)}{p(x)}$  em  $[x_1, \frac{\pi}{2}]$  vem dado respectivamente por,

$$\begin{aligned} \frac{q'(x)}{p(x)} = & -\frac{1}{96} \left( -\frac{1}{96} \pi^3 K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-3} \operatorname{cn}\left(2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \operatorname{dn}\left(2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \right. \\ & \operatorname{sn}\left(2 \frac{cK(1/2\sqrt{2})z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} - \frac{1}{48} z \pi^2 K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} \operatorname{cn}\left(2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} \\ & \left. - \frac{1}{96} z \pi^2 K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} \operatorname{dn}\left(2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} + \frac{1}{48} z \pi^2 K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} \right. \\ & \left. \operatorname{sn}\left(2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} \right) \pi^3 K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-3} \operatorname{cn}\left(2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \\ & \operatorname{dn}\left(2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \operatorname{sn}\left(2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{q'(x)}{p(x)} = & -\frac{1}{96} \left( -\frac{1}{96} \pi^3 K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-3} \operatorname{cn}\left(2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \operatorname{dn}\left(2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \right. \\ & \operatorname{sn}\left(2 \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} - \frac{1}{48} \left(z - \frac{1}{2}\pi\right) \pi^2 K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} \operatorname{cn}\left(2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} \\ & \left. - \frac{1}{96} \left(z - \frac{1}{2}\pi\right) \pi^2 K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} \operatorname{dn}\left(2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} + \frac{1}{48} \left(z - \frac{1}{2}\pi\right) \pi^2 \right. \\ & \left. K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} \operatorname{sn}\left(2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} \right) \pi^3 K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-3} \operatorname{cn}\left(2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \\ & \operatorname{dn}\left(2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \operatorname{sn}\left(2 \frac{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} . \end{aligned}$$

Usando novamente o programa Maple, obtemos que a integral de  $\frac{q'}{p}$  em  $[0, x_1)$  é

$$\int_0^{x_1} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \simeq 0,003047359311$$

e em  $[x_1, \frac{\pi}{2}]$  temos,

$$\int_{x_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \simeq 0,003099057633.$$

Portanto conseguimos estimar o valor aproximado de  $\theta$ .

$$\begin{aligned} \theta &= 2j(x_1) + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \\ &= 2j(x_1) + 4 \int_0^{x_1} \frac{q'(t)}{p(t)} dt + 4 \int_{x_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \\ &\simeq -0,04192037812 + 4(0,003047359311) + 4(0,003099057633) \\ &\simeq -0,01733471035. \end{aligned}$$

Assim,

$$\theta \simeq -0,01.$$

Portanto, como  $p(x)$  possui exatamente dois zeros no intervalo  $[0, \pi)$  (ver Figura 5.6) e  $\theta$  é negativo, temos pelo Teorema 4.4 que o autovalor 0 é simples e é o segundo autovalor associado a autofunção  $\varphi'_{c_0}$  do operador linearizado  $\mathcal{L}_{c_0}$ . Com isso, o espectro do operador linearizado  $\mathcal{L}_{c_0}$ , possui a seguinte estrutura,

$$\lambda_0 < \lambda_1 = 0 < \lambda_2 < \lambda_3 \leq \dots$$

e assim temos exatamente um autovalor negativo o qual é simples.

Como a família de operadores de Hill é isonercial (ver Teorema 3.5), temos que esta propriedade vale para o operador  $\mathcal{L}_c$ , para todo  $c \in (4, \infty)$ .

Neste caso,  $In(\mathcal{L}_c) = (1, 1) \forall c \in (4, \infty)$ .

### 5.1.3 Estabilidade

Para obtermos a estabilidade, segundo o Teorema 5.3, temos que exibir um  $\chi \in L^2_{per}([0, \pi])$ , tal que  $\mathcal{L}_c(\chi) = \varphi_c$  e  $I = (\chi, \varphi_c)_{L^2_{per}} < 0$ , uma vez que já mostramos as

propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  da condição de estabilidade em (5.6). Ademais, como provamos também a condição  $(P_0)$  da condição de estabilidade, temos pela Observação 5.4 que  $\chi$  pode ser escolhido como sendo  $\chi = -\frac{d}{dc}\varphi_c$ . Este  $\chi$  satisfaz  $\mathcal{L}_c(\chi) = \varphi_c$ . Com efeito, como  $-\varphi_c'' + c\varphi_c - \frac{1}{2}\varphi_c^2 = 0$  então,  $-\frac{d}{dc}\left(-\varphi_c'' + c\varphi_c - \frac{1}{2}\varphi_c^2\right) = 0$  e assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_c\left(-\frac{d}{dc}\varphi_c\right) &= \left(\frac{d}{dc}\varphi_c\right)'' - c\left(\frac{d}{dc}\varphi_c\right) + \varphi_c\left(\frac{d}{dc}\varphi_c\right) \\ &= \frac{d}{dc}(\varphi_c'') - \frac{d}{dc}(c\varphi_c) + \frac{1}{2}\frac{d}{dc}(\varphi_c^2) + \varphi_c \\ &= -\frac{d}{dc}\left(-\varphi_c'' + c\varphi_c - \frac{1}{2}\varphi_c^2\right) + \varphi_c \\ &= \varphi_c.\end{aligned}$$

Deste modo, para obtermos a estabilidade procurada basta mostrar que  $I < 0$ . Os lemas que seguem serão úteis para a demonstração deste fato.

**Lema 5.10.** *Seja  $K(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}} dx$  a integral elíptica completa de primeiro tipo e  $E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(1-k^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}} dx$  a integral elíptica completa de segundo tipo, então  $\Upsilon(k) = K(k)E(k)$  é crescente.*

**Demonstração:** Defina a função,  $h : (0, 1) \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que,

$$h(k) = E(k) - \sqrt{1-k^2}K(k).$$

Observe que,

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} h(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} (E(k) - K(k)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0. \quad (5.54)$$

Por outro lado,  $h$  é estritamente crescente no intervalo  $(0, 1)$ . De fato,

$$\begin{aligned}h'(k) &= \frac{dE}{dk}(k) - \frac{d}{dk}\left(\sqrt{1-k^2}\right)K(k) - \sqrt{1-k^2}\frac{dK}{dk} \\ &= \frac{E(k) - K(k)}{k} + \frac{kK(k)}{k'} + \frac{k'^2K(k)}{kk'} - \frac{E(k)}{kk'} \\ &= \frac{k'E(k) - k'K(k) + k^2K(k) + k'^2K(k) - E(k)}{kk'} \\ &= \frac{k'E(k) - k'K(k) + K(k) - E(k)}{kk'},\end{aligned}$$

ou seja,

$$h'(k) = \frac{(1 - k')K(k) - (1 - k')E(k)}{kk'} = \frac{(1 - k')}{kk'}(K(k) - E(k)).$$

Assim, como  $k \in (0, 1)$  e  $E(k) < K(k)$ , encontramos

$$h'(k) > 0, \quad \forall k \in (0, 1).$$

isto é,  $h$  é estritamente crescente no intervalo  $(0, 1)$ . Deste fato e (5.54), obtemos

$$h(k) > 0 \quad \forall k \in (0, 1). \quad (5.55)$$

Além disso, de (5.55) temos,

$$E^2(k) - (1 - k^2)K^2(k) > 0. \quad (5.56)$$

Mostremos agora que  $\Upsilon(k)$  é crescente. Diferenciando  $\Upsilon(k)$  com respeito a  $k$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d\Upsilon}{dk}(k) &= \left( \frac{E(k)}{(1 - k^2)k} - \frac{K(k)}{k} \right) E(k) + K(k) \left( \frac{E(k)}{k} - \frac{K(k)}{k} \right) \\ &= \frac{(E(k))^2 - (K(k))^2 + (K(k))^2 k^2}{(1 - k^2)k}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{d\Upsilon}{dk}(k) = \frac{E^2(k) - (1 - k^2)K^2(k)}{(1 - k^2)k}. \quad (5.57)$$

Portanto de (5.56) e (5.57), temos que  $\frac{d\Upsilon}{dk}(k) > 0 \quad \forall k \in (0, 1)$  e assim  $\Upsilon$  é estritamente crescente.  $\square$

**Lema 5.11.** *Seja  $K(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\sqrt{(1-k^2x^2)}}} dx$  a integral elíptica completa de primeiro tipo, então a função  $\Gamma(k) = K^2(k) (-2 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4})$  é crescente.*

**Demonstração:** Mostremos que  $\frac{d\Upsilon}{dk} > 0$ . De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d\Upsilon}{dk} &= \frac{d}{dk} \left[ K^2(k) (-2 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4}) \right] \\ &= 2K(k) \frac{dK}{dk}(k) (-2 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4}) + K^2(k) \left( 2k + \frac{4k^3 - 2k}{2\sqrt{1 - k^2 + k^4}} \right) \\ &= 2K(k) \left[ \frac{E(k) - (1 - k^2)K(k)}{k(1 - k^2)} \right] (-2 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4}) \\ &\quad + K^2(k) \left( 2k + \frac{4k^3 - 2k}{2\sqrt{1 - k^2 + k^4}} \right) \end{aligned}$$

Como a função  $(-2 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4})$  é estritamente negativa em  $(0, 1)$  e  $E(k) < K(k)$  temos que

$$(-2 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4})E(k) > (-2 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4})K(k).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d\Upsilon}{dk} &> 2K^2(k) \left[ \underbrace{\frac{1 - 2(1 - k^2)}{k(1 - k^2)}(-2 + k^2 + \sqrt{1 - k^2 + k^4}) + 2k + \frac{4k^3 - 2k}{2\sqrt{1 - k^2 + k^4}}}_{V(k)} \right] \\ &= 2K^2(k)V(k). \end{aligned}$$

Como  $V(k) > 0$  em  $(0, 1)$  temos que  $\frac{d\Upsilon}{dk} > 0$  como queríamos.  $\square$

A proposição seguinte mostra que  $I < 0$  e assim  $\varphi_c$  é estável no sentido orbital.

**Proposição 5.12.** *A solução onda viajante periódica de (5.4)  $\varphi_c$  dado por*

$$\varphi_c(x) = \frac{16K^2(k)}{\pi^2}(\sqrt{1 - k^2 + k^4}) + 48\frac{K^2(k)}{\pi^2}k^2\text{cn}^2\left(\sqrt{\frac{4K^2(k)}{\pi^2}}x, k\right)$$

satisfaz  $I = (\chi, \varphi_c)_{L^2_{per}} < 0$ .

**Demonstração:** Note que,

$$I = \left(-\frac{d}{dc}\varphi_c, \varphi_c\right)_{L^2_{per}} = \int_0^\pi -\frac{d}{dc}\varphi_c(\varphi_c)dx = -\int_0^\pi \frac{1}{2}\frac{d}{dc}(\varphi_c)^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dc}\int_0^\pi (\varphi_c)^2 dx$$

Deste modo para mostrar que  $I < 0$ , basta verificar que  $\frac{1}{2}\frac{d}{dc}\int_0^\pi (\varphi_c)^2 > 0$ .

Com o intuito de facilitar esta estimativa usaremos que,

$$\int_0^\pi \varphi_c^2(x)dx = 2c \int_0^\pi \varphi_c(x)dx. \quad (5.58)$$

Para isto, basta integrarmos a equação  $-\varphi_c'' + c\varphi_c - \frac{\varphi_c^2}{2} = 0$  de 0 à  $\pi$ , onde encontramos,

$$\int_0^\pi \varphi_c''(x)dx + c \int_0^\pi \varphi_c(x)dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \varphi_c^2(x)dx = 0. \quad (5.59)$$

Como  $\varphi_c$  é periódica com período  $\pi$ , temos que  $\int_0^\pi \varphi_c''(x)dx = -\varphi_c'(x) \Big|_0^\pi = -\varphi_c'(\pi) + \varphi_c'(0) = 0$ , assim (5.59) nos fornece a igualdade desejada (5.58).

Por (5.58) e o fato de  $\varphi_c$  ser positiva,  $I$  torna-se,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{d}{dc} \left( c \int_0^\pi \varphi_c(x) dx \right) \\ &= -2 \int_0^\pi \varphi_c(x) dx - 2c \frac{d}{dc} \int_0^\pi \varphi_c(x) dx \\ &< -2c \frac{d}{dc} \int_0^\pi \varphi_c(x) dx. \end{aligned}$$

Assim é suficiente mostrarmos que,

$$\frac{d}{dc} \int_0^\pi \varphi_c(x) dx > 0. \quad (5.60)$$

A integral em (5.60) é dada por,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi_c(x) dx &= \int_0^\pi \frac{16K^2(k)}{\pi^2} (\sqrt{1-k^2+k^4} + 1 - 2k^2) + 48 \frac{K^2(k)}{\pi^2} k^2 \operatorname{cn}^2 \left( \sqrt{\frac{4K^2(k)}{\pi^2}} x, k \right) dx \\ &= \frac{16K^2(k)}{\pi} (\sqrt{1-k^2+k^4} + 1 - 2k^2) + 48 \frac{K^2(k)}{\pi^2} k^2 \int_0^\pi \operatorname{cn}^2 \left( \frac{2K(k)}{\pi} x, k \right) dx. \end{aligned}$$

Escrevendo  $\xi = \frac{2K(k)}{\pi} x$  segue que,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi_c(x) dx &= \frac{16K^2(k)}{\pi} (\sqrt{1-k^2+k^4} + 1 - 2k^2) + 48 \frac{K^2(k)}{\pi^2} k^2 \frac{\pi}{2K(k)} \int_0^{2K(k)} \operatorname{cn}^2(\xi, k) d\xi \\ &= \frac{16K^2(k)}{\pi} (\sqrt{1-k^2+k^4} + 1 - 2k^2) + 24 \frac{K(k)}{\pi} k^2 \int_0^{2K(k)} \operatorname{cn}^2(\xi, k) d\xi \\ &= \frac{16K^2(k)}{\pi} (\sqrt{1-k^2+k^4} + 1 - 2k^2) + 48 \frac{K(k)}{\pi} k^2 \int_0^{K(k)} \operatorname{cn}^2(\xi, k) d\xi \\ &= \frac{16K^2(k)}{\pi} (\sqrt{1-k^2+k^4} + 1 - 2k^2) + 48 \frac{K(k)}{\pi} k^2 \left[ \frac{1}{k^2} (E(\xi) - (1-k^2)\xi) \right]_0^{K(k)} \\ &= \frac{16K^2(k)}{\pi} (\sqrt{1-k^2+k^4} + 1 - 2k^2) + 48 \frac{K(k)}{\pi} k^2 \left[ \frac{1}{k^2} (E(k) - (1-k^2)\xi) \right] \\ &= \frac{16K(k)}{\pi} \left[ -2K(k) + k^2 K(k) + \sqrt{1-k^2+k^4} K(k) + 3E(k) \right] \\ &= \frac{16}{\pi} \left[ K^2(k) \left( -2 + k^2 + \sqrt{1-k^2+k^4} \right) \right] + \frac{48}{\pi} K(k) E(k). \end{aligned}$$

Usando a notação dos Lemas 5.10 e 5.11 temos,

$$\int_0^\pi \varphi_c(x) dx = \frac{16}{\pi} \Gamma(k) + \frac{48}{\pi} \Upsilon(k). \quad (5.61)$$

Por outro lado, como  $c$  depende de  $k$ ,

$$\frac{d}{dc} \int_0^\pi \varphi_c(x) dx = \frac{d}{dk} \left( \int_0^\pi \varphi_c(x) dx \right) \frac{dk}{dc}, \quad (5.62)$$

onde pelo Corolário 5.9,  $\frac{dk}{dc} > 0$ .

Portanto usando (5.62), (5.61) e os Lemas 5.10 e 5.11, encontramos que  $\int_0^\pi \varphi_c(x) dx$  é crescente com respeito a variável  $c$ . Assim, temos válido a desigualdade (5.60) e consequentemente a proposição.  $\square$

Utilizando os argumentos estabelecidos nesta seção e o Teorema 5.3 tem-se o seguinte teorema de estabilidade.

**Teorema 5.13.** *Seja  $c \in (4, \infty)$ . Então  $\varphi_c$  dada em (5.24), solução para (5.4) é estável em  $H_{per}^1([0, L])$  pelo fluxo da equação Korteweg-de Vries.*

$\square$

## 5.2 Estabilidade de ondas viajantes periódicas para a equação mKdV.

Neste capítulo vamos obter a estabilidade no sentido orbital de soluções ondas viajantes periódicas para equação modificada Korteweg-de Vries (mKdV) dada em (5.1) com  $p = 2$ , em outras palavras, vamos considerar

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad (5.63)$$

onde  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica de período  $L$  no espaço. Novamente, aplicaremos as teorias desenvolvidas nos capítulos iniciais, como o Teorema 4.4 e o Teorema 5.3 para obter estabilidade.

Com o intuito de facilitar as contas no decorrer desta seção, consideremos a equação mKdV (5.63) na forma,

$$u_t + 3u^2 u_x + u_{xxx} = 0. \quad (5.64)$$



Neste caso, como temos a constante 3 no termo  $u^2u_x$  de (5.64) e como para mKdV  $p$  em (5.1) é igual a dois, temos que a equação que determina as ondas viajantes periódicas é dada por,

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + c\right) - \varphi_c^3 = 0. \quad (5.65)$$

Ademais, o operador  $\mathcal{L}_c$  se torna,

$$\mathcal{L}_c(y) = -y'' + (c - 3\varphi_c^2)y. \quad (5.66)$$

Como no caso da KdV, garantiremos primeiro que existe uma curva suave de soluções ondas periódicas para (5.65) todas elas de mesmo período  $L$ . Em seguida mostraremos que o operador  $\mathcal{L}_c$  dado em (5.66) possui um único auto valor negativo e simples e 0 é autovalor simples associado a auto função  $\varphi'_c$ . Finalmente usaremos o Teorema 5.3 para garantir a estabilidade no sentido orbital das ondas periódicas relacionadas a equação (5.64).

### 5.2.1 Existência de curva de soluções ondas periódicas para mKdV.

Nesta seção, explicitamos uma curva suave de ondas periódicas com período  $L > 0$  da forma  $u(x, t) = \varphi_c(x - ct)$  o quais são soluções de (5.65). De fato, multiplicando (5.65) por  $\varphi'_c$  temos,

$$-\varphi_c''\varphi'_c + c\varphi_c\varphi'_c - \varphi_c^3\varphi'_c = 0. \quad (5.67)$$

Integrando (5.67) de  $\gamma_0$  a  $\gamma$  temos,

$$-\int_{\gamma_0}^{\gamma} \varphi_c''(x)\varphi'_c(x)dx + c \int_{\gamma_0}^{\gamma} \varphi_c(x)\varphi'_c(x)dx - \int_{\gamma_0}^{\gamma} \varphi_c^3(x)\varphi'_c(x)dx = 0. \quad (5.68)$$

Observe que (5.68) pode ser reescrita na forma,

$$-\int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d}{dx}(\varphi'_c(x))^2 dx + c \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d}{dx}\varphi_c^2(x)dx - \frac{1}{4} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d}{dx}\varphi_c^4(x)dx = 0.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo temos,

$$-\frac{(\varphi'_c)^2}{2} = -\frac{c}{2}\varphi_c^2 + \frac{1}{4}\varphi_c^4 + 2B_{\varphi_c},$$

onde  $B$  é uma constante de integração não nula. Logo,

$$[\varphi'_c(x)]^2 = \frac{1}{2} [-\varphi_c^4(x) + 2c\varphi_c(x)^2 + 4B_{\varphi_c}]. \quad (5.69)$$

Ademais, podemos escrever (5.69) na forma,

$$[\varphi'_c(x)]^2 = \frac{1}{2}P(\varphi_c(x)), \quad (5.70)$$

onde  $P(t) = -t^4 + 2ct^2 + 4B_{\varphi_c}$ . A equação (5.70) é uma EDO de primeira ordem não linear.

No que segue, para cada  $c > 0$  fixado, explicitaremos uma solução periódica  $\varphi_c$  para (5.70) fazendo uso da forma da quadratura. De fato  $\varphi_c$  deve satisfazer (5.69) e como assumimos que  $P(t)$  possui quatro raízes reais,  $P(t)$  assume a forma,

$$\begin{aligned} P(t) &= (\sigma_1^2 - t^2)(t^2 - \sigma_2^2) \\ &= -t^4 + t^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1^2\sigma_2^2, \end{aligned} \quad (5.71)$$

onde  $-\sigma_1, \sigma_1, -\sigma_2$  e  $\sigma_2$  são os zeros reais do polinômio  $P(t)$ . Note que, este polinômio deve possuir raízes reais pois estamos procurando solução  $\varphi_c$  que assumem valores em  $\mathbb{R}$ . Caso tenhamos duas raízes reais e duas raízes complexas, então  $P(t)$  possui o comportamento conforme ilustra a Figura 5.8.

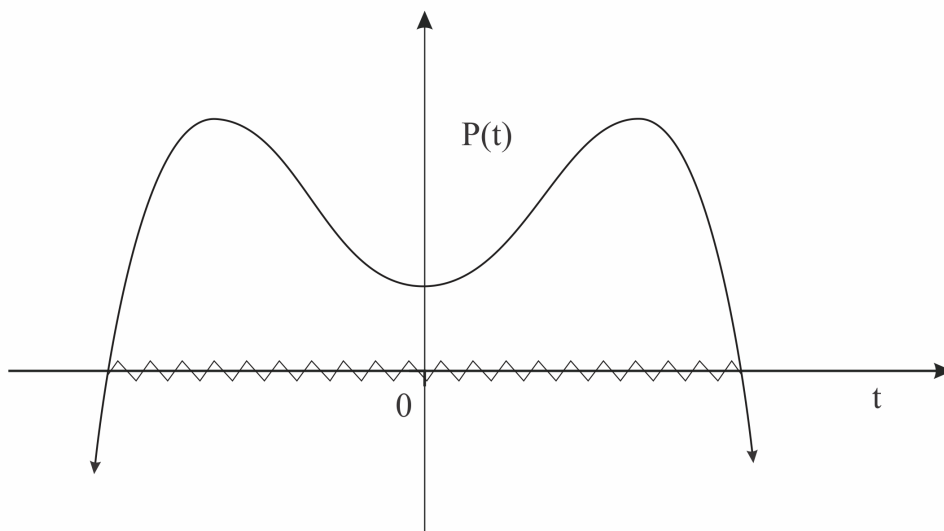


Figura 5.8:

Neste caso, conforme [10], teremos uma solução  $\varphi_c$  que muda de sinal. Mais precisamente,

$$\varphi_c(x) = bcn(\beta x; k),$$

onde  $b$  e  $\beta$  dependem de  $c$ . Além disso, ainda por [10], para esta  $\varphi_c$  o operador  $\mathcal{L}_c$  possui dois autovalores negativos e não podemos aplicar a teoria de estabilidade estabelecida aqui.

Assumimos então  $P(t)$  com quatro raízes reais. Desta forma, como  $\varphi_c$  deve satisfazer (5.69) e  $P(t)$  é caracterizado em (5.71), temos que as raízes de  $P(t)$  devem satisfazer,

$$\begin{cases} 2c &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ 4B &= -\sigma_1^2 \sigma_2^2. \end{cases} \quad (5.72)$$

Como procuramos soluções positivas e periódicas para (5.65), escolhemos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , tais que

$$0 < \sigma_2 < \sigma_1. \quad (5.73)$$

Veremos mais adiante (página 152), que se  $\sigma_2 = 0$ , então obtém-se soluções com “período infinito”.

O polinômio  $P(t)$  deve possuir o comportamento como ilustra a Figura 5.9.

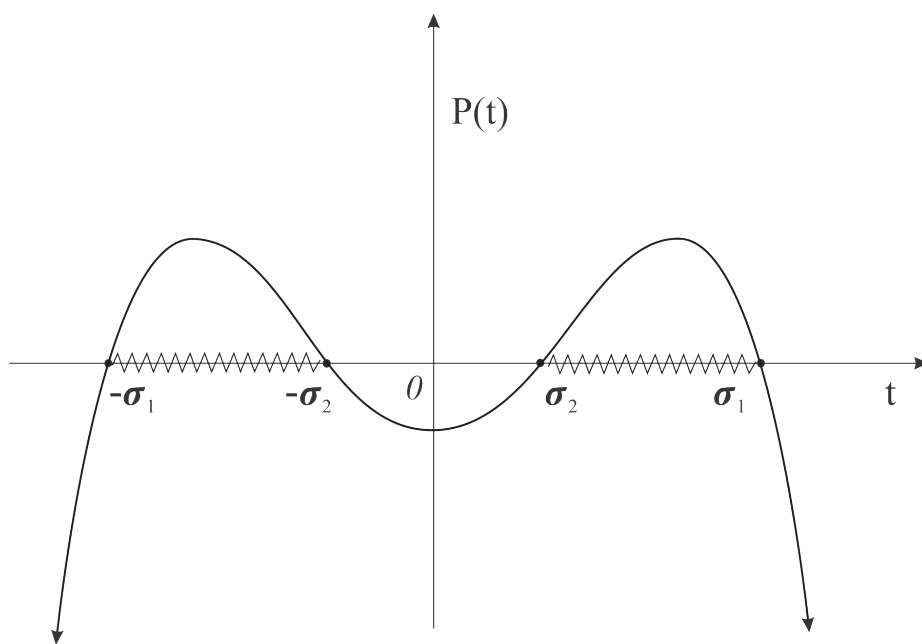


Figura 5.9:

Deste modo por (5.70), a solução  $\varphi_c$  para (5.65) que procuramos deve assumir valores no intervalo  $\sigma_2 < \varphi_c < \sigma_1$ . Definindo

$$\phi = \frac{\varphi_c}{\sigma_1}, \quad (5.74)$$

$$k^2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2}, \quad (5.75)$$

e substituindo em (5.70) temos,

$$\begin{aligned} [\phi' \sigma_1]^2 &= \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \phi^2 \sigma_1^2)(\phi^2 \sigma_1^2 - \sigma_2^2) \\ &= \frac{\sigma_1^2}{2}(1 - \phi^2)(\phi^2 \sigma_1^2 - \sigma_2^2). \end{aligned}$$

Como  $\sigma_1 > 0$ , podemos isolar  $(\phi')^2$ , isto é,

$$\begin{aligned} [\phi']^2 &= \frac{\sigma_1^2}{2}(1 - \phi^2) \left( \phi^2 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \right) \\ &= \frac{\sigma_1^2}{2}(1 - \phi^2) \left( \phi^2 - 1 + \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2} \right). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Logo, (5.75) e (5.76) implica que,

$$[\phi']^2 = \frac{\sigma_1^2}{2}(1 - \phi^2) (\phi^2 - 1 + k^2). \quad (5.77)$$

Vamos introduzir uma nova variável através da relação,

$$\phi^2 = 1 - k^2 \sin^2(\psi). \quad (5.78)$$

Substituindo (5.76) em (5.77) temos,

$$\left[ \left( \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)} \right)' \right]^2 = \frac{\sigma_1^2}{2}(k^2 \sin^2(\psi)(k^2 - k^2 \sin^2(\psi)),$$

isto é,

$$\frac{(-2k^2 \sin(\psi) \cos(\psi) \psi')^2}{4(1 - k^2 \sin^2(\psi))} = \frac{\sigma_1^2}{2}(k^2 \sin^2(\psi)(k^2 - k^2 \sin^2(\psi))). \quad (5.79)$$

Como  $\sigma_2 < \varphi_c(x) < \sigma_1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , pela definição de  $\phi$  em (5.74) segue que,

$$\phi(x) \in \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, 1 \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5.80)$$

Além disso pela definição de  $k^2$  em (5.75) temos de (5.73),

$$k^2 \in (0, 1). \quad (5.81)$$

Desta forma, por (5.78), (5.80) e (5.81) segue que,

$$1 - k^2 \sin^2(\psi) \neq 0, \quad \sin(\psi) \neq 0 \quad \text{e} \quad \cos(\psi) \neq 0. \quad (5.82)$$

Portanto, usando (5.82) podemos isolar  $(\psi')^2$  em (5.79), isto é,

$$[\psi']^2 = \frac{\sigma_1^2}{2}(1 - k^2 \sin^2(\psi)) \left[ \frac{4k^2 \sin^2(\psi)(k^2 - k^2 \sin^2(\psi))}{4k^2 k^2 \sin^2(\psi) \cos^2(\psi)} \right],$$

ou seja,

$$[\psi']^2 = \frac{\sigma_1^2}{2}(1 - k^2 \sin^2(\psi)). \quad (5.83)$$

Escrevendo  $l = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}$ , temos que (5.83) se torna,

$$[\psi']^2 = \frac{2l^2}{2}(1 - k^2 \sin^2(\psi)),$$

isto é,

$$\psi' = l\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}. \quad (5.84)$$

Como já vimos em (5.82) que  $1 - k^2 \sin^2(\psi) \neq 0$ , podemos reescrever (5.84) na forma,

$$l = \frac{\psi'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}}. \quad (5.85)$$

Agora, integrando (5.84) de 0 a  $x$ , encontramos

$$\int_0^x l ds = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}} \psi'(s) ds$$

e usando mudança de variáveis obtemos,

$$lx = \int_0^\psi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(t)}}. \quad (5.86)$$

O lado direito de (5.86) é justamente uma integral elíptica de primeiro tipo. Assim pelas propriedades de funções elípticas em 1.3 temos,

$$\sin(\psi) = \operatorname{sn}(lx; k). \quad (5.87)$$

Substituindo (5.87) em (5.78), temos

$$\phi^2 = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(lx; k).$$

Sendo  $\operatorname{dn}^2(u) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2$  obtemos,

$$\phi^2 = \operatorname{dn}^2(lx; k).$$

Daí, usando a definição de  $\phi$  em (5.74) e o fato em que  $l = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}$  obtém-se,

$$\varphi_c^2 = \sigma_1^2 \operatorname{dn}^2\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}x, k\right).$$

Portanto, como  $\sigma_1 > 0$  e  $0 < \sigma_2 < \varphi_c(x) < \sigma_1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , encontramos,

$$\varphi_c(x) = \sigma_1 \operatorname{dn} \left( \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} x; k \right). \quad (5.88)$$

A função  $\varphi_c$  em (5.88) é uma solução positiva e periódica para (5.65) que procurava-mos.

Analisemos agora o período fundamental da solução  $\varphi_c$  de (5.65). Como  $\operatorname{dn}$  possui período fundamental real  $2K$ , onde  $K = K(k)$  representa a integral elíptica completa de primeiro tipo, segue que a solução onda dnoidal  $\varphi_c$  em (5.88) possui período fundamental  $T_{\varphi_c}$  dado por,

$$T_{\varphi_c} = \frac{2\sqrt{2}}{\sigma_1} K(k). \quad (5.89)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \varphi_c \left( x + \frac{2\sqrt{2}}{\sigma_1} K(k) \right) &= \sigma_1 \operatorname{dn} \left( \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} \left( x + \frac{2\sqrt{2}}{\sigma_1} K(k) \right), k \right) \\ &= \sigma_1 \operatorname{dn} \left( \frac{\sigma_1 x}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}}{\sigma_1} K(k), k \right) \\ &= \sigma_1 \operatorname{dn} \left( \frac{\sigma_1 x}{\sqrt{2}} + 2K(k), k \right) \\ &= \sigma_1 \operatorname{dn} \left( \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} x; k \right) = \varphi_c(x). \end{aligned}$$

Observe que o período fundamental da solução  $\varphi_c$  para um  $c > 0$  fixo depende de  $K$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Mostremos agora que o período fundamental  $T_{\varphi_c}$  depende de uma única variável.

Com efeito, pela primeira equação de (5.72) temos,

$$\sigma_1^2 = 2c - \sigma_2^2. \quad (5.90)$$

Substituindo (5.90) em (5.75) encontramos,

$$k^2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{2c - \sigma_2^2 - \sigma_2^2}{2c - \sigma_2^2} = \frac{2c - 2\sigma_2^2}{2c - \sigma_2^2}, \quad (5.91)$$

isto é, para cada  $c > 0$  fixo,  $k^2 = k^2(\sigma_2)$ . Desta forma substituindo (5.90) e (5.91) na expressão para o período fundamental (5.89), obtemos

$$T_{\varphi_c} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2c - \sigma_2^2}} K(k),$$

onde  $k^2(\sigma_2)$  é dado em (5.91). Logo o período fundamental  $T_{\varphi_c}$  depende de uma única variável  $\sigma_2$ .

Com o intuito de obter o comportamento do período fundamental  $T_{\varphi_c}$  em função de  $\sigma_2$ , verifiquemos qual é o seu domínio para cada  $c > 0$  fixado. Sabemos de (5.90) que,

$$\sigma_2 = \sqrt{2c - \sigma_1^2}. \quad (5.92)$$

Além disso, como  $\sigma_2$  é real e  $0 < \sigma_2 < \sigma_1$  temos que  $2c - \sigma_1^2 > 0$ , isto é,

$$0 < \sigma_2 < \sigma_1 < \sqrt{2c}. \quad (5.93)$$

Por outro lado, se  $\sigma_1 = \sqrt{c}$ , então de (5.92) temos,

$$\sigma_2 = \sqrt{2c - \sigma_1^2} = \sqrt{2c - (\sqrt{c})^2} = \sqrt{2c - c} = \sqrt{c} = \sigma_1, \quad (5.94)$$

o que é uma contradição. Desta forma, por (5.93) e (5.94) temos,

$$\sigma_2 \in (0, \sqrt{c}) \cup (\sqrt{c}, \sqrt{2c}).$$

Contudo, se  $\sigma_2 \in (\sqrt{c}, \sqrt{2c})$ , então  $\sqrt{c} < \sigma_2 < \sqrt{2c}$  e  $c < \sigma_2^2$ . Também,  $0 < \sigma_2 < \sigma_1$  implica que  $\sigma_2^2 < \sigma_1^2$ . Assim,

$$c < \sigma_2^2 < \sigma_1^2. \quad (5.95)$$

Logo, por (5.95) e (5.92), encontramos que

$$2c = c + c < \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 2c$$

o que é uma contradição. Com isso,

$$\sigma_2 \in (0, \sqrt{c}). \quad (5.96)$$

Ademais, sendo  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 2c$  temos de (5.96) que,

$$\sigma_1 \in (\sqrt{c}, \sqrt{2c}). \quad (5.97)$$

Portanto de (5.96), (5.97) e (5.93) encontramos o domínio procurado,

$$0 < \sigma_2 < \sqrt{c} < \sigma_1 < \sqrt{2c}.$$

A Figura (5.10) ilustra a função  $\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_2) = \sqrt{2c - \sigma_2^2}$ .

Como vimos, o período fundamental  $T_{\varphi_c}$  depende de  $\sigma_2$ . Vamos então verificar o que ocorre com  $T_{\varphi_c}(\sigma_2)$  quando  $\sigma_2$  se aproxima de zero ou de  $\sqrt{c}$ . Se  $\sigma_2 \rightarrow 0$ , então por

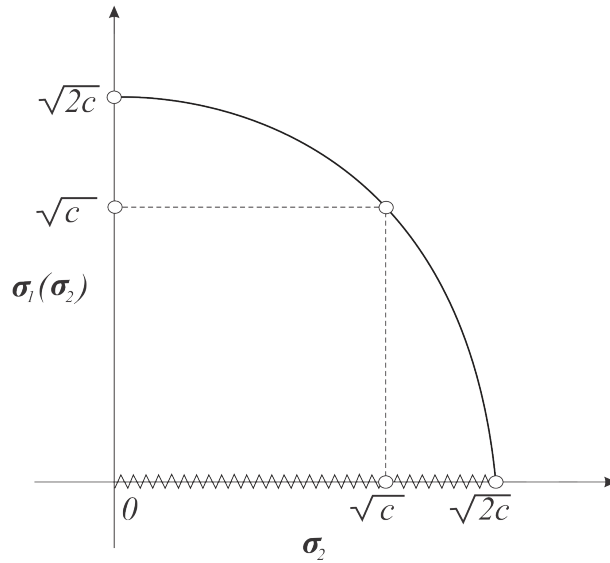


Figura 5.10:

(5.91)  $k^2(\sigma_2) \rightarrow 1^-$  e assim pelas propriedades da integral elíptica completa de primeiro tipo  $K(k)$ , temos que  $K(k) \rightarrow +\infty$ . Portanto

$$T_{\varphi_c}(\sigma_2) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2c - \sigma_2^2}} K(k(\sigma_2)) \rightarrow +\infty \quad (5.98)$$

quando  $\sigma_2 \rightarrow 0$ . Por outro lado se  $\sigma_2 \rightarrow \sqrt{c}$ , então de (5.91),

$$k^2(\sigma_2) = \frac{2c - 2\sigma_2^2}{2c - \sigma_2^2} \rightarrow \frac{2c - 2(\sqrt{c})^2}{2c - (\sqrt{c})^2} = 0$$

e assim  $K(k(\sigma_2)) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Portanto

$$T_{\varphi_c}(\sigma_2) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2c - \sigma_2^2}} K(k(\sigma_2)) \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2c - (\sqrt{c})^2}} \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{c}} \quad (5.99)$$

quando  $\sigma_2 \rightarrow \sqrt{c}$ .

No próximo teorema veremos que a função para o período fundamental  $T_{\varphi_c}$  é estritamente decrescente. Desta forma,

$$T_{\varphi_c}(\sigma_2) > \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{c}}, \quad \forall \sigma_2 \in (0, \sqrt{c}).$$

A Figura 5.11 ilustra o comportamento da função  $T_{\varphi_c}$ .

Portanto, para um  $c > 0$  fixado, existe uma solução  $\varphi_c$  de (5.65) tal que o período de  $\varphi_c$  é  $T_{\varphi_c}(\sigma_2)$  com  $\sigma_2 = \sigma_2(c)$  podendo variar no intervalo  $(0, \sqrt{c})$ . Vimos nesse caso que  $T_{\varphi_c}$  varia no intervalo  $\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{c}}, +\infty\right)$ .



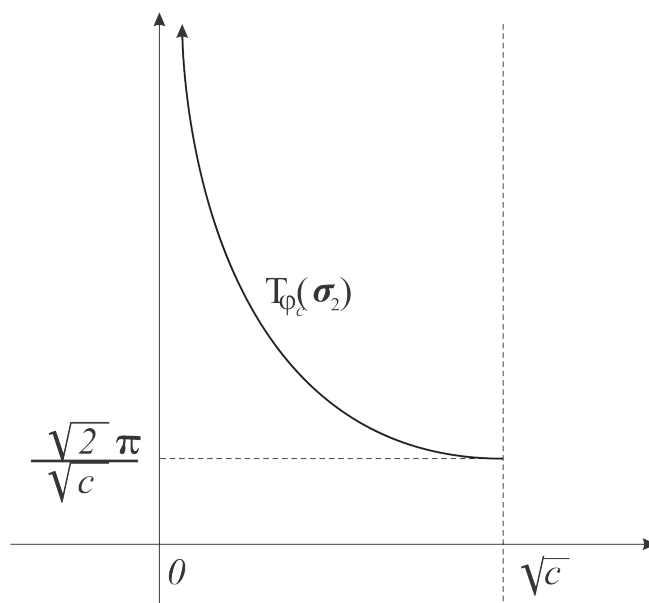


Figura 5.11:

Mencionamos na página 146, que se  $\sigma_2 = 0$  então temos solução  $\varphi_c$  para (5.65) com “período infinito”. De fato, vimos acima que o período fundamental,  $T_{\varphi_c} \rightarrow +\infty$  quando  $\sigma_2 \rightarrow 0^+$ . Ademais, se  $\sigma_2 \rightarrow 0^+$  então  $k \rightarrow 1^-$  e neste caso,

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} \operatorname{dn}(u; k) = \operatorname{sech}(u),$$

isto é, teremos  $\varphi_c$  dada por,

$$\varphi_c(x) = \sqrt{2c} \operatorname{sech}(\sqrt{c}x).$$

Mostremos agora, que existe para um período  $L > 0$  fixado, uma curva suave de soluções ondas dnoidais para a equação (5.65).

Inicialmente, verifiquemos que existe uma família de soluções ondas dnoidais com um período fixado. De fato, seja  $L > 0$  e  $c > 0$  tal que,  $c > \frac{2\pi^2}{L^2}$ . Conforme vimos anteriormente, a função  $\sigma_2 \in (0, \sqrt{c}) \mapsto T_{\varphi_c}(\sigma_2)$  é estritamente decrescente, assim existe um único  $\sigma_2 = \sigma_2(c) \in (0, \sqrt{c})$  tal que o período fundamental da onda dnoidal  $\varphi_c$  será  $T_{\varphi_c}(\sigma_2(c)) = L$ . Isto nos garante que existe uma família de ondas dnoidais com período  $L$  fixado.

O próximo teorema, garante que existe a curva suave de soluções ondas dnoidais para a equação 5.65.

**Teorema 5.14.** *Seja  $L > 0$  arbitrário mas fixado. Considere  $c_0 > \frac{2\pi^2}{L^2}$  e o único  $\sigma_{2_0} = \sigma_2(c_0) \in (0, \sqrt{c_0})$  tal que  $T_{\varphi_{c_0}} = L$ . Então,*

(1) *Existe um intervalo  $J_1(c_0)$  com  $c_0$  em seu interior, um intervalo  $B_1(\sigma_{2_0})$  com  $\sigma_{2_0}$  em seu interior e uma única função  $\Lambda_1(c_0) = \sigma_{2_0}$  e*

$$T_{\varphi_c}(\sigma_2) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2c - \sigma_2^2}} K(k) = L, \quad (5.100)$$

onde  $c \in J_1(c_0)$ ,  $\sigma_2 = \Lambda_1(c)$  e  $k^2 = k^2(c) \in (0, 1)$  é definido por (5.91).

(2) *A solução onda dnoidal em (5.88), determinada por  $\sigma_1(c)$  e  $\sigma_2(c)$ , possui período fundamental  $L$  e satisfaz (5.65). Além disso a aplicação*

$$c \in J_1(c_0) \mapsto \varphi_c \in H_{per}^2([0, L])$$

*é uma função suave.*

(3)  *$J_1(c_0)$  pode ser escolhido como  $\left(\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$ .*

**Demonstração:** A demonstração consiste em uma aplicação do Teorema da Função Implícita. Considere o conjunto aberto,

$$\Omega_1 = \left\{ (\sigma_2, c); c > \frac{2\pi^2}{L^2}, \sigma_2 \in (0, \sqrt{c}) \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

e defina  $\Psi_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\Psi_1(\sigma_2, c) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2c - \sigma_2^2}} K(k(\sigma_2, c)), \quad (5.101)$$

onde  $k^2$  é definido em (5.75). Temos por hipótese que  $\Psi_1(\sigma_{2_0}, c_0) = L$ . Com o intuito de aplicar o Teorema da Função Implícita, mostremos que  $\frac{d\Psi_1}{d\sigma_2}(\sigma_2, c) < 0$ . Com efeito, diferenciando  $\Psi_1(\sigma_2, c)$  com respeito à  $\sigma_2$ , temos

$$\frac{d\Psi_1}{d\sigma_2}(\sigma_2, c) = \frac{2\sqrt{2}\sigma_2}{(2c - \sigma_2^2)^{\frac{3}{2}}} K(k) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2c - \sigma_2^2}} \frac{dK}{dk} \frac{dk}{d\sigma_2}. \quad (5.102)$$

Por outro lado diferenciando  $k^2 = \frac{2c - 2\sigma_2^2}{2c - \sigma_2^2}$  com respeito à  $\sigma_2$ , temos

$$2k(\sigma_2) \frac{dk}{d\sigma_2}(\sigma_2) = \frac{-4\sigma_2(2c - \sigma_2^2) - (-2\sigma_2^2)(2c - 2\sigma_2^2)}{(2c - \sigma_2^2)^2}$$

isto é,

$$\frac{dk}{d\sigma_2}(\sigma_2) = \frac{-4\sigma_2 c + 2\sigma_2^3 + 2\sigma_2 c - 2\sigma_2^3}{k(2c - \sigma_2^2)^2} = \frac{-2\sigma_2 c}{k(2c - \sigma_2^2)^2}. \quad (5.103)$$

Como  $\sigma_2, c, k > 0$ , temos de (5.103) que,

$$\frac{dk}{d\sigma_2}(\sigma_2, c) < 0, \quad \forall \sigma_2, c. \quad (5.104)$$

Portanto de (5.102) e (5.103) segue que,  $\frac{dk}{d\sigma_2}(\sigma_2, c) < 0$  se, e somente se,

$$\frac{2\sqrt{2}\sigma_2}{(2c - \sigma_2^2)^{\frac{3}{2}}} K(k) < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2c - \sigma_2^2}} \frac{dK}{dk}(k) \left( \frac{2\sigma_2 c}{k(2c - \sigma_2^2)^2} \right). \quad (5.105)$$

Multiplicando (5.105) por  $\frac{k(2c - \sigma_2^2)^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt{2}\sigma_2} > 0$ , temos que (5.105) ocorre se, e somente se

$$k(2c - \sigma_2^2)K(k) < 2c \frac{dK}{dk}(k). \quad (5.106)$$

Como  $\frac{dK}{dk} = \frac{E - (1 - k^2)K}{k(1 - k^2)}$  onde  $E$  é a integral elíptica completa de segundo tipo, então de (5.106) temos as equivalências,

$$\begin{aligned} k(2c - \sigma_2^2)K(k) < 2c \frac{dK}{dk}(k) &\Leftrightarrow k(2c - \sigma_2^2)K(k) < 2c \left( \frac{E(k) - (1 - k^2)K(k)}{k(1 - k^2)} \right) \\ \Leftrightarrow k^2(1 - k^2)(2c - \sigma_2^2)K(k) + 2c(1 - k^2)K(k) < 2cE(k) &\Leftrightarrow \\ [k^2(2c - \sigma_2^2) + 2c](1 - k^2)K(k) < 2cE(k). & \end{aligned} \quad (5.107)$$

Usando a expressão para  $k^2$  em (5.75), temos que (5.107) ocorre se, e somente se

$$2(1 - k^2)K(k)(2c - \sigma_2^2) < 2cE(k) \quad (5.108)$$

Por outro lado, ainda da fórmula para  $k^2$  em (5.75) temos,

$$\frac{2c}{2c - \sigma_2^2} = \frac{-(2c - 2\sigma_2^2)}{2c - \sigma_2^2} + \frac{4c - 2\sigma_2^2}{2c - \sigma_2^2} = -k^2 + 2.$$

Desta forma temos que (5.108) vale se, e somente se

$$2(1 - k^2)K(k) < (2 - k^2)E(k). \quad (5.109)$$

Definindo  $\beta^2 = 1 - k^2$ , temos que  $\frac{d\beta}{d\sigma_2} = \frac{-k}{\sqrt{1 - k^2}} \frac{dk}{d\sigma_2}$ . Assim, como  $k \in (0, 1)$  segue de (5.104) que  $\beta$  é uma função decrescente de  $\sigma_2 \in (0, \sqrt{c})$ . Além disso, da definição de  $\beta^2$

temos  $\beta(\sigma_2) \in (0, 1)$ ,  $\beta(0) = 0$ , e  $\beta(1) = 1$ . Logo, de (5.109) e da definição de  $\beta^2$  temos que

$$\frac{d}{d\sigma_2}\Psi_1(\sigma_2, c) < 0 \Leftrightarrow (2 + \beta^2 - 1)E(\sqrt{1 - \beta^2}) - 2(1 + \beta^2 - 1)K(\sqrt{1 - \beta^2}) > 0,$$

isto é,

$$\frac{d}{d\sigma_2}\Psi_1(\sigma_2, c) < 0 \Leftrightarrow f(\beta) = (1 + \beta^2)E(\sqrt{1 - \beta^2}) - 2\beta^2K(\sqrt{1 - \beta^2}) > 0,$$

Como  $f(1) = 0$   $\left( \lim_{x \rightarrow 0^+} E(k) = \lim_{x \rightarrow 0^+} K(k) = \frac{\pi}{2} \right)$  é suficiente mostrar que  $f$  é estritamente decrescente. De fato, como  $k \frac{dE}{dk}(k) = E(k) - K(k)$  temos,

$$\begin{aligned} f'(\beta) &= 2\beta E(k) - \frac{(1 + \beta^2)\beta[E(k) - K(k)]}{1 - \beta^2} - 4\beta K(k) + \frac{2\beta(E(k) - K(k)) + (1 - \beta^2)K(k)}{1 - \beta^2} \\ &= \frac{2(1 - \beta^2)\beta E(k) - (1 + \beta^2)\beta E(k) + (1 + \beta^2)\beta K(k) - (1 - \beta^2)4\beta K(k)}{1 - \beta^2} \\ &\quad + \frac{2\beta E(k) - 2\beta K(k) + 2\beta(1 - \beta^2)K(k)}{1 - \beta^2}. \end{aligned}$$

Assim, temos as equivalências,

$$\begin{aligned} f'(\beta) < 0 &\Leftrightarrow [2(1 - \beta^2)\beta - (1 + \beta^2)\beta + 2\beta] E(k) < [3(1 + \beta^2)\beta + 2\beta - 2\beta(1 - \beta^2)] K(k) \\ &\Leftrightarrow [2(1 - \beta^2) - (1 + \beta^2) + 2] E(k) < [3(1 + \beta^2) + 2 - 2(1 - \beta^2)] K(k) \Leftrightarrow \\ &3(1 - \beta^2)E(k) < 3\left(1 + \frac{5}{3}\beta^2\right) K(k) \Leftrightarrow (1 - \beta^2)E(k) < \left(1 + \frac{5}{3}\beta^2\right) K(k) \end{aligned}$$

Como  $E(k) < K(k)$ ,  $1 + \frac{5}{3}\beta^2 > 0$  e  $(1 - \beta^2) < (1 - \frac{5}{3}\beta^2)$  segue o desejado. Mostramos então que  $\frac{d}{d\sigma_2}\Psi_1(\sigma_2, c) < 0$ .

Portanto pelo Teorema da Função Implícita, existe uma única função suave  $\Lambda_1$  definida numa vizinhança  $J_1(c_0)$ , tal que  $\Psi_1(\Lambda_1(c), c) = L$  para cada  $c \in J_1(c_0)$ . Mostramos desta forma o item (i) e (ii) do teorema. Como  $c_0$  foi escolhido arbitrário no intervalo  $J_1 = \left(\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$ , segue da unicidade da função  $\Lambda_1$ , que podemos estender seu domínio de definição para  $\left(\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty\right)$ . Isto prova o ultimo item do teorema.  $\square$

O próximo corolário garante que a função  $\Lambda_1$  definida no Teorema 5.14 é uma função estritamente decrescente.

**Corolário 5.15.** *Considere a aplicação  $\Lambda_1 : J_1(c_0) \longrightarrow B_1(\sigma_{2_0})$ , determinada pelo Teorema 5.14. Então  $\Lambda_1$  é uma função estritamente decrescente em  $J_1(c_0)$ .*

**Demonstração:** Pelo Teorema da Função Implícita, ainda no contexto da demonstração do Teorema 5.14, temos que  $\Psi_1(\Lambda_1(c), c) = L$  para cada  $c \in J_1(c_0)$  e

$$\frac{d}{dc}\Lambda_1(c) = -\frac{\frac{d\Psi_1}{dc}}{\frac{d\Psi_1}{d\sigma_2}}.$$

Como já provamos que  $\frac{d\Psi_1}{d\sigma_2} < 0$ , para mostrar o corolário basta mostrar que  $\frac{d\Psi_1}{dc} < 0$ . De fato, derivando (5.121) com respeito a  $c$ , temos

$$\frac{d\Psi_1}{dc} = -\frac{2\sqrt{2}}{(2c - \sigma_2^2)^{\frac{3}{2}}}K(k) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2c - \sigma_2^2}}\frac{dK}{dk}\frac{dk}{d\sigma_2}. \quad (5.110)$$

Por outro lado, diferenciando (5.75) com respeito a  $c$  temos,

$$\begin{aligned} 2k\frac{dK}{dc} &= \frac{2(2c - \sigma_2^2) - 2(2c - 2\sigma_2^2)}{(2c - \sigma_2^2)^2} \\ &= \frac{4c - 2\sigma_2^2 - 4c + 4\sigma_2^2}{(2c - \sigma_2^2)^2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{dK}{dc} = \frac{\sigma_2^2}{k(2c - \sigma_2^2)^2}. \quad (5.111)$$

Substituindo (5.111) em (5.110), temos as equivalências.  $\frac{d\Psi_1}{dc}(\sigma_2, c) < 0 \iff$

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{2}}{(2c - \sigma_2^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\sigma_2^2}{k(2c - \sigma_2^2)^2}\frac{dK}{dk} &< \frac{2\sqrt{2}}{(2c - \sigma_2^2)^{\frac{3}{2}}}K(k) \iff \frac{\sigma_2^2}{k(2c - \sigma_2^2)}\frac{dK}{dk} < K(k) \iff \\ \frac{\sigma_2^2}{k}\frac{dK}{dk} &< (2c - \sigma_2^2)K(k). \end{aligned} \quad (5.112)$$

Definindo  $k'^2 = (1 - k^2)$ , temos

$$(2c - \sigma_2^2)k'^2 = (2c - \sigma_2^2)(1 - k^2) = (2c - \sigma_2^2)\left[1 - \frac{2c - 2\sigma_2^2}{2c - \sigma_2^2}\right] = \sigma_2^2. \quad (5.113)$$

Assim, de (5.113), a desigualdade (5.112) ocorre se, e somente se

$$K(k) > \frac{k'^2}{k}\frac{dK}{dk}. \quad (5.114)$$

Finalmente como  $\frac{dK}{dk} = \frac{E - k'^2 K}{kk'^2}$ , temos de (5.114) que

$$\frac{d\Psi_1}{dc}(\sigma_2, c) < 0 \iff k^2 K(k) > E(k) - k'^2 K(k) \iff (k^2 + k'^2)K(k) > E(k)$$

e como  $k^2 + k'^2 = 1$ , temos que

$$\frac{d\Psi_1}{dc}(\sigma_2, c) < 0 \Leftrightarrow K(k) > E(k).$$

□

Como no caso da  $KdV$ , podemos explicitar  $c$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  em função de  $k$  e  $L$ . Com isso a solução  $\varphi_c$  para (5.65) pode ser explicitada em função de  $k$  e  $L$ .

Para isto considere o sistema,

$$\begin{cases} k^2 = \frac{2c - 2\sigma_2^2}{2c - \sigma_2^2} \\ L = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2c - \sigma_2^2}} K(k). \end{cases} \quad (5.115)$$

Elevando a segunda equação de (5.115) ao quadrado temos,

$$-\sigma_2^2 = \frac{8K^2(k)}{L^2} - 2c. \quad (5.116)$$

Substituindo (5.116) na primeira equação de (5.115) encontramos,

$$k^2 = \frac{2c + 2\left(\frac{8K^2(k)}{L^2} - 2c\right)}{2c + \left(\frac{8K^2(k)}{L^2} - 2c\right)} = \frac{\left(\frac{16K^2(k)}{L^2} - \frac{2cL^2}{L^2}\right)}{\left(\frac{8K^2(k)}{L^2}\right)} = \frac{16K^2(k) - 2cL^2}{8K^2(k)} = \frac{8K^2(k) - cL^2}{4K^2(k)}. \quad (5.117)$$

Usando (5.117), segue que

$$cL^2 = 8K^2(k) - 4k^2K^2(k),$$

isto é,

$$c = \frac{4K^2(k)}{L^2}(2 - k^2), \quad k \in (0, 1). \quad (5.118)$$

Ademais, substituindo (5.118) em (5.116), vem que

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= -\frac{8K^2(k)}{L^2} + 2\left(\frac{4K^2(k)}{L^2}(2 - k^2)\right) \\ &= \frac{8K^2(k)}{L^2}(1 - k^2), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sigma_2 = \frac{2\sqrt{2}k'^2 K(k)}{L}. \quad (5.119)$$

Finalmente, como  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 2c$  temos,

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= 2 \left( \frac{4K^2(k)}{L^2} (2 - k^2) \right) - \frac{8K^2(k)}{L^2} (1 - k^2) \\ &= \frac{8K^2(k)}{L^2} [(2 - k^2) - (1 - k^2)] \\ &= \frac{8K^2(k)}{L^2},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{2}K(k)}{L}. \quad (5.120)$$

Portanto a solução dada em (5.88) se torna,

$$\varphi_c(x) = \frac{2\sqrt{2}K(k)}{L} \operatorname{dn} \left( \frac{\frac{2\sqrt{2}K(k)}{L}}{\sqrt{2}} x; k \right),$$

isto é,

$$\varphi_c(x) = \frac{2\sqrt{2}}{L} K(k) \operatorname{dn} \left( \frac{2K(k)}{L} x; k \right). \quad (5.121)$$

O fato de  $\varphi_c$  depender somente de  $k$  e  $L$  será útil para caracterizarmos o espectro do operador  $\mathcal{L}_c$ , uma vez que usaremos  $\varphi_c$  na forma (5.121).

### 5.2.2 Propriedade espectral.

Nesta seção vamos mostrar que as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  da condição de estabilidade em (5.6) ocorrem. Novamente pelo Teorema 3.5, temos que a família de operadores  $\mathcal{L}_c$  em (5.66) é isonerual. Assim é suficiente provar  $(P_1)$  e  $(P_2)$  para um  $c > 0$  fixado arbitrariamente, digamos  $c_0$ .

Note que,  $\varphi'_{c_0}$  onde  $'$  denota a derivada em  $x$ , é autofunção do operador  $\mathcal{L}_{c_0}$  dado em (5.66), associado ao autovalor 0. De fato, como  $\varphi_{c_0}$  é solução de (5.65) temos,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{c_0}(\varphi'_{c_0}) &= -\varphi'''_{c_0} + c_0\varphi'_{c_0} - 3\varphi_{c_0}^2\varphi'_{c_0} = -\varphi'''_{c_0} + c_0\varphi'_{c_0} - \frac{1}{3}3(\varphi_{c_0}^3)' \\ &= (-\varphi''_{c_0} + c_0\varphi_{c_0} - \varphi_{c_0}^3)' = 0\end{aligned}$$

Com o objetivo de garantir as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$ , vamos encontrar a constante  $\theta$  dada no Teorema 4.2 e em seguida aplicar o Teorema 4.4. Note que é possível estimar

o valor de  $\theta$ , pois  $\theta$  depende somente da autofunção  $\varphi'_{c_0}$  associada ao operador  $\mathcal{L}_{c_0}$  e no nosso caso, temos uma forma explícita para essa autofunção.

Como a constante  $c$  está fixada, isto é,  $c = c_0$  e  $c$  depende univocamente de  $k$ , então  $k$  também está fixado. Por outro lado, a constante  $c$  é fixada arbitrariamente. Logo fixamos  $c$  de modo que o  $k$  fixo satisfaça  $k_0 = k(c_0) = \frac{1}{2}$ . Para este  $k_0$  temos,

$$\varphi_{c_0}(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} K\left(\frac{1}{2}\right) \operatorname{dn}\left(\frac{2K\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi}x; \frac{1}{2}\right).$$

Assim, a autofunção  $p(x) = \varphi'_c(x)$  é dada por,

$$p(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} K\left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{4}\right) \operatorname{sn}\left(\frac{2K\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi}x; \frac{1}{2}\right) \operatorname{cn}\left(\frac{2K\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi}x; \frac{1}{2}\right) \frac{2K\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi},$$

isto é,

$$p(x) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi^2} K^2\left(\frac{1}{2}\right) \operatorname{sn}\left(\frac{2K\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi}x; \frac{1}{2}\right) \operatorname{cn}\left(\frac{2K\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi}x; \frac{1}{2}\right). \quad (5.122)$$

Como  $\operatorname{dn}$  é uma função par, temos que  $p$  é uma função ímpar. O gráfico de  $p$  é dado na Figura 5.12.

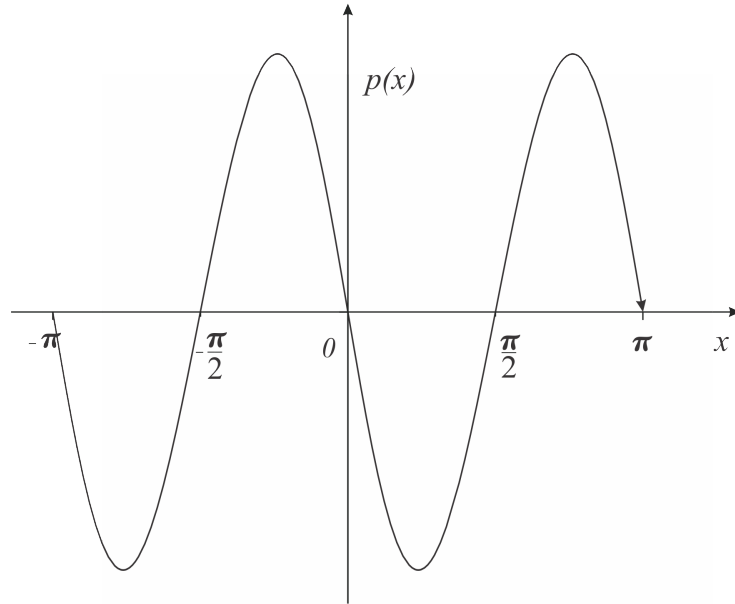


Figura 5.12:

A função  $p(x)$  possui dois zeros no intervalo  $[0, \pi)$ , o quais são  $z_1 = 0$  e  $z_2 = \frac{\pi}{2}$ . Consequentemente  $p'(x)$  possui um zero  $x_1$  no intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$  e outro zero  $x_2$  no intervalo



$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ . Assim, a constante  $\theta$  deduzida no Teorema 4.2 é dada por,

$$\theta = j(x_1) + j(x_2) + 2 \int_0^\pi \frac{q'(t)}{p(t)} dt. \quad (5.123)$$

onde  $j$  é definida em (4.7) e  $q$  definida em (4.4). Por outro lado, como  $p$  é ímpar, temos

$$q(-x) = \frac{-x - (-z_i)}{p(-x)} = \frac{x - z_i}{p(x)} = q(x),$$

isto é,  $q$  é uma função par. Do fato de  $\frac{q'(x)}{p(x)}$  ser par e

$$j(x_1) = -\frac{z_2 - z_1}{p^2(x_1)} = -\frac{\frac{\pi}{2} - 0}{p^2(x_1)} = -\frac{(0 + \pi) - \frac{\pi}{2}}{(-p(-x_1))^2} = -\frac{(z_1 + \pi) - z_2}{p^2(x_2)} = j(x_2)$$

temos que a expressão para  $\theta$  em (5.123) pode ser reduzida ao intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , ou seja,

$$\theta = 2j(x_1) + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q'(t)}{p(t)} dt. \quad (5.124)$$

Desta forma, para obtermos o valor de  $\theta$ , temos que estimar  $p'(x)$ , encontrar sua raiz  $x_1$  no intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , obter o valor de  $j(x_1)$  e finalmente encontrar  $q$  e obter o valor de  $\theta$  através da equação (5.124).

Seguindo esse cronograma, diferenciamos  $p$  dada em (5.122), isto é,

$$p'(x) = -\sqrt{2} \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^2 \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right)}{\pi} x, \frac{1}{2} \right) \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right)}{\pi} x, \frac{1}{2} \right) \pi^{-2}$$

A função  $p'$  possui um zero  $x_1$  no intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Usando o programa Maple, conseguimos um valor aproximado para  $x_1$ ,

$$x_1 \simeq 0,7495150.$$

Como encontramos um valor aproximado para  $x_1$ , podemos então obter um valor aproximado para  $j(x_1)$ . De fato, sabemos que,

$$\begin{aligned} j(x_1) &= -\frac{\frac{\pi}{2} - 0}{p^2(x_1)} = -\frac{\pi}{2p^2(x_1)} \\ &= -\frac{1}{4} \pi^5 \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-4} \left( \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right)}{\pi} x_1, \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \left( \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right)}{\pi} x_1, \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \end{aligned}$$

Usando novamente o programa Maple, obtemos

$$j(x_1) \simeq -37,89451252.$$

Como  $z_1 = 0$  e  $z_2 = \frac{\pi}{2}$ , temos que  $q$  é dado por,

$$q(x) = \begin{cases} \frac{x}{p(x)} & , x \in [0, x_1) \\ \frac{x - \frac{\pi}{2}}{p(x)} & , x \in [x_1, \frac{\pi}{2}] . \end{cases}$$

Assim, para  $x \in [0, x_1)$  temos,

$$q(x) = -\frac{1}{2} x \sqrt{2} \pi^2 \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \left( \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left( \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} .$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} q'(x) &= -\frac{1}{2} \sqrt{2} \pi^2 \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \left( \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left( \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \\ &\quad - x \sqrt{2} \pi \operatorname{dn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left( \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \\ &\quad + x \sqrt{2} \pi \operatorname{dn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left( \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \end{aligned}$$

Para  $x \in [x_1, \frac{\pi}{2}]$  temos,

$$q(x) = -\frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} \pi \right) \sqrt{2} \pi^2 \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \left( \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left( \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-1}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} q'(x) &= -\frac{1}{2} \sqrt{2} \pi^2 \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \left( \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left( \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \\ &\quad - \left( x - \frac{1}{2} \pi \right) \sqrt{2} \pi \operatorname{dn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left( \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \\ &\quad + \left( x - \frac{1}{2} \pi \right) \sqrt{2} \pi \operatorname{dn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left( \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} . \end{aligned}$$

Logo,  $\frac{q'}{p}$  em  $[0, x_1)$  vem dado por,

$$\begin{aligned} \frac{q'(x)}{p(x)} = & -\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \sqrt{2\pi^2} \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \left( \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left( \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \right. \\ & - x \sqrt{2\pi} \operatorname{dn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left( \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \\ & \left. + x \sqrt{2\pi} \operatorname{dn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left( \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \right) \\ & \sqrt{2\pi^2} \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \left( \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left( \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Por outro lado,  $\frac{q'}{p}$  em  $\left[ x_1, \frac{\pi}{2} \right]$  é dado por,

$$\begin{aligned} \frac{q'(x)}{p(x)} = & -\frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{2\pi^2} \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \left( \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left( \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \right. \\ & - \left( x - \frac{1}{2} \pi \right) \sqrt{2\pi} \operatorname{dn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left( \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \\ & \left. + \left( x - \frac{1}{2} \pi \right) \sqrt{2\pi} \operatorname{dn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left( \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \right] \\ & \sqrt{2\pi^2} \left( K \left( \frac{1}{2} \right) \right)^{-2} \left( \operatorname{cn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left( \operatorname{sn} \left( 2 \frac{K \left( \frac{1}{2} \right) x}{\pi}, \frac{1}{2} \right) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Usando o programa Maple, temos que a integral de  $\frac{q'}{p}$  em  $[0, x_1)$  é aproximadamente

$$\int_0^{x_1} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \simeq 0,4754396367$$

e em  $\left[ x_1, \frac{\pi}{2} \right)$  temos,

$$\int_{x_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \simeq 9,392268479.$$

Deste modo, conseguimos o valor de  $\theta$ ,

$$\begin{aligned}\theta &= 2j(x_1) + 4 \int_0^{x_1} \frac{q'(t)}{p(t)} dt + 4 \int_{x_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \\ &\simeq 2(-37,89451250) + 4(9,407248707) + 4(9.392268479),\end{aligned}$$

isto é,

$$\theta \simeq -0,59095625.$$

Portanto como  $p(x)$  possui exatamente dois zeros no intervalo  $[0, \pi)$  e  $\theta$  é negativo, temos pelo Teorema 4.4 que o autovalor 0 é simples e é o segundo autovalor associado a autofunção  $p(x) = \varphi'_{c_0}(x)$  do operador  $\mathcal{L}_{c_0}$  dado em (5.66). Com isso para  $c = c_0$  o espectro do operador  $\mathcal{L}_{c_0}$  dado em (5.66) satisfaz  $(P_1)$  e  $(P_2)$ .

### 5.2.3 Estabilidade.

Como já mostramos que as propriedades  $(P_1)$  e  $(P_2)$  em (5.6) ocorrem, para obtermos a estabilidade no sentido orbital das ondas viajantes periódicas para mKdV, segundo o Teorema 5.3, basta exibir um  $\chi \in L^2_{per}([0, L])$ , tal que  $\mathcal{L}_c(\chi) = \varphi_c$  e  $I = (\chi, \varphi_c)_{L^2_{per}} < 0$ . Ademais, mostramos também a propriedade  $(P_0)$  da condição de estabilidade, assim a observação 5.4 implica que  $\chi$  pode ser escolhido como,  $\chi = -\frac{d}{dc}\varphi_c$ . Note que, construímos uma curva suave de soluções  $\varphi_c$  para (5.65) dependendo de  $c$ , ela não depende do período  $L$ .

A função  $\chi$  realmente satisfaz  $\mathcal{L}_c(\chi) = \varphi_c$ . De fato, como  $-\varphi_c'' + c\varphi_c - \varphi_c^3 = 0$ , então  $-\frac{d}{dc}(-\varphi_c'' + c\varphi_c - \varphi_c^3) = 0$  e assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_c\left(-\frac{d}{dc}\varphi_c\right) &= \left(\frac{d}{dc}\varphi_c\right)'' - c\left(\frac{d}{dc}\varphi_c\right) + 3\varphi_c^2\left(\frac{d}{dc}\varphi_c\right) \\ &= \frac{d}{dc}\varphi_c'' - c\frac{d}{dc}(\varphi_c) + 3\frac{1}{3}\frac{d}{dc}(\varphi_c^3) + \varphi_c \\ &= \frac{d}{dc}(-\varphi_c'' + c\varphi_c - \varphi_c^3) + \varphi_c = \varphi_c.\end{aligned}$$

Desta forma, para obtermos a estabilidade procurada, basta mostrar que  $I < 0$ .

A próxima proposição mostra que  $I < 0$  e conseqüentemente a estabilidade para solução ondas viajantes periódicas para mKdV.

**Proposição 5.16.** *A solução onda viajante periódica de (5.65)  $\varphi_c$  dada por*

$$\varphi_c = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} K(k) \operatorname{dn} \left( \frac{2K(k)}{\pi} x; k \right)$$

*satisfaz  $I = (\chi, \varphi_c)_{L^2_{\text{per}}} < 0$ , onde  $\chi = -\frac{d}{dc} \varphi_c$ .*

**Demonstração:** Observe que,

$$I = \left( \frac{d}{dc} \varphi_c, \varphi_c \right)_{L^2_{\text{per}}} = \int_0^\pi -\frac{d}{dc} (\varphi_c(x)) \varphi_c(x) dx = - \int_0^\pi \frac{1}{2} \frac{d}{dc} (\varphi_c)^2 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dc} \int_0^\pi (\varphi_c)^2(x) dx.$$

Deste modo, para mostrar que  $I < 0$ , basta mostrar que,

$$\frac{d}{dc} \int_0^\pi \varphi_c^2(x) dx > 0. \quad (5.125)$$

A integral em (5.125) é dada por,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi_c^2(x) dx &= \int_0^\pi \frac{8}{\pi^2} K^2(k) \operatorname{dn}^2 \left( \frac{2K(k)}{\pi} x; k \right) dx \\ &= \frac{8}{\pi^2} K^2(k) \int_0^\pi \operatorname{dn}^2 \left( \frac{2K(k)}{\pi} x; k \right) dx. \end{aligned}$$

Escrevendo  $\xi = \frac{2K(k)}{\pi} x$  e usando que  $\operatorname{dn}$  é par e  $\int_0^{K(k)} \operatorname{dn}^2(\xi, k) d\xi = E(k)$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi_c^2(x) dx &= \frac{8K^2(k)}{\pi^2} \frac{\pi}{2K(k)} \int_0^{2K(k)} \operatorname{dn}^2(\xi, k) d\xi \\ &= \frac{4K(k)}{\pi} \int_0^{2K(k)} \operatorname{dn}^2(\xi, k) d\xi = \frac{8K(k)}{\pi} \int_0^{K(k)} \operatorname{dn}^2(\xi, k) d\xi \\ &= \frac{8K(k)}{\pi} E(k). \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^\pi \varphi_c^2(x) dx = \frac{8K(k)}{\pi} E(k). \quad (5.126)$$

Porém  $c$  depende de  $k$ , daí

$$\frac{d}{dc} \int_0^\pi \varphi_c^2(x) dx = \frac{d}{dc} \left( \int_0^\pi \varphi_c^2(x) dx \right) \frac{dk}{dc}. \quad (5.127)$$

Usando (5.126) e o Lema 5.10, temos que

$$\frac{d}{dk} \left( \int_0^\pi \varphi_c(x) dx \right) > 0. \quad (5.128)$$

Por outro lado, de (5.111) temos que  $\frac{dk}{dc} > 0$ .

Portanto de (5.111), (5.128) e (5.127), temos que (5.125) é válido. Isto prova a proposição e conseqüentemente a estabilidade no sentido orbital de soluções ondas viajantes periódicas para a equação modificada Korteweg-de Vries (mKdV).  $\square$

Na verdade, os argumentos estabelecidos nesta seção e o Teorema 5.3 provam o seguinte teorema de estabilidade.

**Teorema 5.17.** *Seja  $c \in (2, \infty)$ . Então a solução  $\varphi_c$  de (5.65) dada em (5.88), é estável em  $H_{per}^1([0, L])$  pelo fluxo da equação modificada Korteweg-de Vries.*

$\square$

# Apêndice

Neste apêndice analisaremos o espectro não positivo do operador  $\mathcal{L}_c$  no caso da KdV,

$$\mathcal{L}_c(y) = -y'' + (c - \varphi_c)y$$

onde  $\varphi_c$  tem período minimal  $\pi$  e  $D(\mathcal{L}_c) = H_{per}^2([0, L])$ . Os argumentos aqui mencionados podem ser aplicados a outros tipos de operadores de Hill.

Conforme vimos no capítulo 5, o operador  $\mathcal{L}_c$  possui uma autofunção  $p(x) = \frac{d}{dx}\varphi_{c_0}$  com período  $\pi$ , onde  $\varphi_c$  é dada por,

$$\varphi_c(\xi) = \frac{16K^2(\sqrt{1-k^2+k^4} + (1-2k^2))}{L^2} + \frac{48K^2k^2}{L^2} \text{cn}^2\left(\frac{2K}{L}\xi; k\right) \quad (6.1)$$

A função  $p$  é representada por,

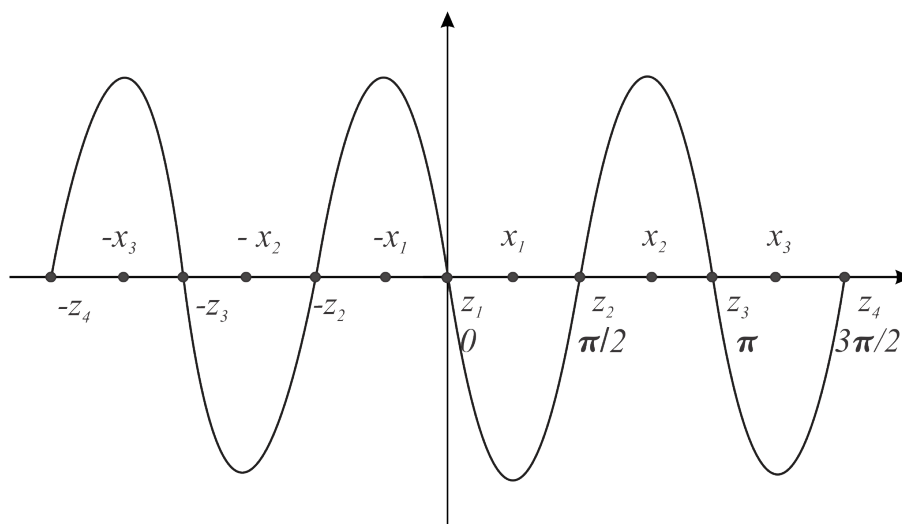


Figura 6.1:

Como  $p$  é periódica com período  $\pi$  e  $p$  é ímpar, temos

$$p^2(x_i) = p^2(x_{i+1}), \quad \forall i \in \mathbb{N}^*. \quad (6.2)$$

Por outro lado, ainda pelo fato de  $p$  ser periódica com período  $\pi$  e  $p$  ímpar,

$$z_{i+1} - z_i = z_{i+2} - z_{i+1}, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*. \quad (6.3)$$

Portanto, como  $j(x_i) = \frac{z_{i+1} - z_i}{p^2(x_i)}$ , temos de (6.2) e (6.3) que,

$$j(x_i) = j(x_{i+1}), \quad \forall i \in \mathbb{N}^*. \quad (6.4)$$

Pela periodicidade de  $\frac{q'}{p}$ ,

$$\int_a^{a+\pi} \frac{q'(t)}{p(t)} dt = \int_0^\pi \frac{q'(t)}{p(t)} dt,$$

para qualquer  $a \in \mathbb{R}$  fixado. Neste contexto, para  $a = k\pi$  temos,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{q'(t)}{p(t)} dt = \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{q'(t)}{p(t)} dt = \int_0^\pi \frac{q'(t)}{p(t)} dt \quad (6.5)$$

onde  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Vamos agora definir o espaço  $H_{m\pi-per}^s$ , para  $m \in \mathbb{N}^*$ .

**Definição 6.1.** *O espaço  $H_{m\pi-per}^s$  é o espaço  $H_{per}^s$  porém com suas funções sendo periódicas com período  $m\pi$ . Observe que para  $m = 1$ ,  $H_{m\pi-per}^s = H_{per}^s$ .*

Como toda função periódica com período  $\pi$  é periódica com período  $m\pi$ , temos bem definido em  $H_{m\pi-per}^2$  o operador

$$\mathcal{L}_{c,m\pi} = -\frac{d^2}{dx^2} + c - \varphi_c,$$

onde  $\varphi_c$  é periódica com período  $\pi$ .

Na busca por alguma propriedade espectral para o espectro não positivo deste operador, consideramos a constante  $\theta$  dada pelo Teorema (4.2),

$$\theta_{m\pi} = \sum_{x_i \in (0, m\pi]} j(x_i) + 2 \int_0^{m\pi} \frac{q'(t)}{p(t)} dt$$

Para  $m = 1$ , temos  $\theta_1 = \theta$ , que já encontramos como sendo

$$\theta \simeq -0,01.$$

Observe que  $\theta_{m\pi}$  pode ser reescrito na forma,

$$\theta_{m\pi} = \sum_{x_i \in (0, m\pi]} j(x_i) + 2 \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \left( \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \right) \right].$$



Como  $p$  é periódica com período  $\pi$  e  $\sum_{x_i \in (0, \pi]} j(x_i) = 2j(x_1)$ , temos por (6.4) que,

$$\theta_{m\pi} = 2mj(x_1) + 2 \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \left( \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{q'(t)}{p(t)} dt \right) \right]$$

e usando (6.5) tem-se,

$$\begin{aligned} \theta_{m\pi} &= 2mj(x_1) + 2m \int_0^\pi \frac{q'(t)}{p(t)} dt \\ &= m \left( 2j(x_1) + 2 \int_0^\pi \frac{q'(t)}{p(t)} dt \right) \\ &= m\theta_1 = m\theta. \end{aligned}$$

Sendo  $\theta \simeq -0,01$ , temos que

$$\theta_{m\pi} \simeq -(0,01).m$$

e assim  $\theta_{m\pi} < 0$ .

Portanto, pelo teorema (4.4), 0 é simples e 0 é o  $2m$ -ésimo auto valor do espectro de  $\mathcal{L}_{c,m\pi}$ .

---

# BIBLIOGRAFIA

---

- [1] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, (1975).
- [2] ALVAREZ, B. e ANGULO, J., *Existence and stability of periodic travelling-wave solutions of the Benjamin equation*. Commun. Pure Appl. Anal. 4, p. 367-388, (2005).
- [3] ANGULO, J. e NATALI, F., *Stability and instability of periodic travelling waves solutions for the critical Korteweg-de Vries and non-linear Schrödinger equations*, Physica D, 238, p. 603-621, (2009).
- [4] ANGULO, J., *Nonlinear dispersive equations. Existence and stability of solitary and periodic travelling wave solutions*. Mathematical Surveys and Monographs, 156, American Mathematical Society, Providence, RI, (2009).
- [5] ANGULO, J. e PASTOR, A., *Stability of periodic optical solitons for a nonlinear Schrödinger system*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 139, p. 927-959, (2009).
- [6] ANGULO, J., MATHEUS, C. e PILOD, D. *Global well-posedness and non-linear stability of periodic traveling waves for a Schrödinger-Benjamin-Ono system*. Commun. Pure Appl. Anal., 8, p. 815-844, (2009).
- [7] ANGULO, J. e NATALI, F., *Positivity properties of the Fourier transform and stability of periodic travelling waves solutions*. SIAM J. Math. Anal., 40, p. 1123-1151 (2008).
- [8] ANGULO, J. e QUINTERO, J., *Existence and orbital stability of cnoidal waves for a 1D Boussinesq equation*. Int. J. Math. Math. Sci., Art. ID 52020, (2007).
- [9] ANGULO, J. e LINARES, F., *Periodic pulses of coupled nonlinear Schrodinger equations in optics*, Indiana Univ. Math. J. 56 No. 2, p. 847-878, (2007).

- 
- [10] ANGULO, J., *Non-linear stability of periodic travelling wave solutions to the Schrödinger and modified Korteweg-de Vries equations*, J. Diff. Equat. 235, p. 1-30, (2007).
- [11] ANGULO, J., BONA, J.L. e SCIALOM, M., *Stability of cnoidal waves*, Advances in Differential Equations 11, p. 1321-1374, (2006).
- [12] ANGULO, J., *Stability of dnoidal waves to Hirota-Satsuma system*. Differential Integral Equations 18, p. 611-645, (2005).
- [13] ANGULO, J., *Stability of cnoidal waves to Hirota-Satsuma systems*, Mat. Contemp., 27, p. 189-223, (2004).
- [14] ANGULO, J., *Existence and stability of solitary wave solutions to nonlinear dispersive evolution equations*. IMPA Mathematical Publications, 24th Brazilian Mathematics Colloquium, (IMPA), Rio de Janeiro, (2003).
- [15] BENJAMIN, T.B., *Lectures on nonlinear wave motion, Nonlinear wave motion*, AMS Providence, RI 15, p. 3-47, (1974).
- [16] BENJAMIN, T. B., *The stability of solitary waves*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 338, p. 153-183, (1972).
- [17] BONA, J. L. , *On the stability theory of solitary waves*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 344, p. 363-374, (1975).
- [18] BOWMAN, F., *Introduction to elliptic functions with applications*, Dover publications, NY, (1961).
- [19] BRÉZIS, H., *Análisis funcional teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, (1984).
- [20] BYRD, P. F. e FRIEDMAN, M. D., *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*, 2nd ed., Springer, NY, (1971).
- [21] CAVALCANTI, M. M. e CAVALCANTI, V. N. D., *Introdução à teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolov*, Maringá, Eduem, (2009).

- [22] CAVALCANTI, M. M. e CAVALCANTI, V. N. D., *Introdução à análise funcional*, Livro Texto-Universidade Estadual de Maringá, UEM/DMA, (2007).
- [23] COLLIANDER, J., KEEL, M., STAFFILANI, G., TAKAOKA, H. e TAO, T., *Sharp global wellposedness for the KdV and modified KdV on  $\mathbb{R}$  and  $\mathbb{T}$* , J. American Math. Soc., 16, p. 705-749, (2003).
- [24] EASTHAM, M. S. P., *The spectral theory of periodic differential equation*, Scottish Academic Press, Edinburgh and London, (1973).
- [25] EVANS, L., C., *Partial differential equations*, American Mathematical Society, (1949).
- [26] FIGUEIREDO, D. G. e Neves, A. F., *Equações diferenciais aplicadas*, 3ªEd., RJ, IMPA, (2007).
- [27] GOLUB, G. H. e VAN LOAN, C.F., *Matrix computations*, Johns Hopkins University Press, (1989).
- [28] GRILLAKIS, M., SHATAH, J. e STRAUSS, W., *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II*, J. Funct. Anal., 74, p. 308-348, (1990).
- [29] GRILLAKIS, M., SHATAH, J. e STRAUSS, W., *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I*, J. Functional Anal., 74 , p. 160-197, (1987).
- [30] HALE, K. J., *Ordinary differential equations* Wiley Interscience, NY, (1969).
- [31] HAUPT, O., *Über eine methode zum beweis von oszillations theoremen* Math. Ann., 76, p.67-104. (1914).
- [32] IÓRIO, R.J.Jr. e IÓRIO, V.M.V., *Fourier analysis and partial differential equations*, 70, Cambridge Stud. in Advan. Math. (2001).
- [33] KATO, T., *Perturbation theory for linear operators* . Springer-Verlag Berlin, (1980).
- [34] KORTEWEG, D.J. e de-VRIES, G., *On the change of form of long wave advancing in a rectangular canal, and on a nem type of long stationary waves*, Philos. Mag., 39, p. 422-443, (1895).

- [35] KREYSZIG, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, University of Windsor, NY, (1978).
- [36] LEVIN, B. Ja. *Distribution of Zeros of Entire Functions* American Mathematical Society (1964).
- [37] LIAPOUNOFF, A., *Problème général de la stabilité du mouvement*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (2), 9, p. 203-474, (1907).
- [38] MAGNUS, W. e Winkler, S. *Hill's equation*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, vol. 20. Wiley, NY, (1966).
- [39] MAGNUS, W., *The discriminant of Hill's equations*, Research Report, Institute of Mathematical Sciences, NY Univ., (1959).
- [40] NATALI, F. e PASTOR, A., *Stability properties of periodic standing waves for the Klein-Gordon-Schrödinger system*, Commun. Pure. Appl. Anal., 9, p. 413-430, (2010).
- [41] NATALI, F. e PASTOR, A., *Stability and instability of periodic standing wave solutions for some Klein-Gordon equations*, J. Math. Anal. Appl., 347, p. 428-441, (2008).
- [42] NATALI, F., *Propriedades de positividade e estabilidade de ondas viajantes periódicas*, Tese de Doutorado-2007, Doutorado em Matemática-Campinas-SP, (2007).
- [43] NEVES, A., *Floquet's Theorem and stability of periodic solitary waves*, J. Dyn. Diff. Equat., Springer, (2009).
- [44] NEVES, A., *Isoinertial family of operators and convergence of KdV cnoidal waves to solitons*. J. Diff. Equat. 244, p. 875-886 (2008).
- [45] NIREMBERG, L., *Topics in nonlinear functional analysis*, Courant lecture notes in mathematics, NY.
- [46] OSBORNE, A.R., *Nonlinear topics in ocean physics*, ed. North-Holland, Amsterdam (1991).

- 
- [47] REED, S. e SIMON, B., *Methods of modern mathematical physics: Functional analysis, self-adjointness*, vol. II, Academic Press (1975).
- [48] TITCHMARSH, E. C., *Eigenfunction problem with periodic potentials*, Proc. Royal Soc. London Ser. A., 203, p. 501-514. (1938).
- [49] WEINSTEIN, M.I., *Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations*, Comm. Pure Appl. Math., 39, p. 51-68, (1986).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)