

Camila Becker

**IDENTIFICAÇÃO DE FRONTEIRAS DE REGIÕES FECHADAS MEDIANTE O
ESTUDO DA CURVATURA E ANÁLISE DE *WAVELETS***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Sistemas e Processos Industriais – Mestrado, Área de Concentração em Controle e Otimização de Processos Industriais, Universidade de Santa Cruz do Sul – UNISC, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Sistemas e Processos Industriais.

Orientador: Dr. Rubén Edgardo Panta Pazos.

Santa Cruz do Sul, março de 2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Camila Becker

**IDENTIFICAÇÃO DE FRONTEIRAS DE REGIÕES FECHADAS MEDIANTE O
ESTUDO DA CURVATURA E ANÁLISE DE *WAVELETS***

Esta dissertação foi submetida ao Programa de Pós-Graduação em Sistemas e Processos Industriais - Mestrado, Área de Concentração em Controle e Otimização de Processos Industriais, Universidade de Santa Cruz do Sul – UNISC, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Sistemas e Processos Industriais.

Dr. Rubén Edgardo Panta Pazos

Professor Orientador

Dr. Rolf Fred Molz (UNISC/RS)

Dra. Lineia Schütz (FURG/RS)

Dedico esta conquista aos meus pais, Milton e Neuza, que nunca mediram esforços para minha formação, por todo o carinho, afeto e incentivo, muito obrigada!

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, origem, meio e fim de nossa jornada.

Aos meus pais, Milton e Neuza, pelo carinho, amor, dedicação, apoio e incentivo incondicionais, por abdicarem de seus sonhos em favor dos meus.

Ao meu irmão Carlos, pela amizade, incentivo e apoio em todos os momentos.

Ao meu noivo Juliano, companheiro de todas as horas, pela paciência, compreensão e incentivo.

Aos meus avós paternos, Edmundo e Joana Margarida Becker (*in memoriam*), que se estivessem entre nós estariam imensamente felizes por esta conquista, agradeço pelo exemplo de vida e por todo carinho a mim dispensado.

Agradeço, em especial, ao meu orientador, Dr. Rubén Edgardo Panta Pazos, pelo profissionalismo, pelo conhecimento compartilhado comigo, pelas orientações. Além disso, pelo amplo incentivo, dedicação e amizade. Muito Obrigada!

A todos os meus professores do Mestrado em Sistemas e Processos Industriais, eternos amigos, pelos ensinamentos compartilhados.

Aos colegas do mestrado, em especial a Muriel, pelo companheirismo e pela amizade.

As secretárias do Mestrado em Sistemas e Processos Industriais, especialmente a Janaina Ramires Haas, pela amizade, eficiência, presteza, disponibilidade e dedicação.

À professora Cleide Wittke, pela correção ortográfica e gramatical da presente dissertação, tendo em vista sua ampla dedicação.

Agradeço à Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pela concessão de bolsa de estudo, possibilitando a realização desta pesquisa.

*O valor das coisas não está no tempo que elas duram, mas
sim na intensidade com que acontecem. Por isso existem
momentos inesquecíveis, coisas inexplicáveis e pessoas
incomparáveis.*

Fernando Pessoa

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma metodologia que pode ser empregada para a identificação de falsificações, adulterações e defeitos de fábrica. O método abordado baseia-se na identificação de formas, através da utilização da análise da curvatura de curvas parametrizadas no plano, juntamente com as transformadas discretas *wavelets* unidimensionais objetivando, depois, a reconstrução da imagem original. Para tal, foi adotada a seguinte metodologia: inicialmente, as imagens bidimensionais foram selecionadas e processadas em um *software* de edição gráfica, encontrando-se pontos na fronteira dos estilos, visando gerar a função de curvatura de forma numérica. A etapa seguinte consistiu em aplicar as transformadas discretas *wavelets* unidimensionais, com vistas a encontrar subsinais que representem as principais características da função de curvatura de cada imagem. Finalmente, os modelos foram identificados e reconstruiu-se a imagem original. A combinação das noções de Geometria Diferencial, Transformadas Discretas *Wavelets* e Análise por Componentes Principais mostrou-se favorável à identificação dos estilos, atingindo o objetivo proposto de unidimensionalizar os estilos e identificar as formas. Esse método pode ser aplicado em áreas da indústria que utilizam a caracterização da fronteira, como é o caso do *Fashion Design*, dos perfis aerodinâmicos e da computação gráfica, citando apenas alguns dos casos possíveis.

Palavras-chave: Função de Curvatura, Análise da Curvatura, Transformadas Discretas *Wavelets*, Análise por Componentes Principais.

ABSTRACT

This work presents a methodology which can be used to identify falsifications, adulterations and factory deformities. The proposed method consists on shape identification, employing the curvature analysis of parametrical path in plane, together with the one-dimensional wavelets discrete transform, seeking, in order, to rebuild the original image. The schedule followed was basically the following: initially, the two-dimensional images were selected and processed in a graphic editor software, finding points on the boundaries of each styles, with the aim to generate the curvature function in a numerical form. The next step consisted in applying the one-dimensional wavelets discrete transform, with the intention to find sub-signals which represent the main characteristics of the curvature function of each image. Finally, the models were identified and the original image was rebuild. The combination of the notions of Differential Geometry, Wavelets Discrete Transforms and Principal Components Analysis indicated to be favorable to style identification, achieving the proposed target to one-dimensionalize the styles and identify the shapes. This method can be applied in industrial areas that use boundaries characterization, which is the case of fashion designs, aerodynamic profiles and computer graphics, mentioning only a few possible situations.

Keywords: Curvature Function, Curvature Analysis, Wavelets Discrete Transforms, Principal Components Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – (a) Imagem de um cardióide e do ponto no qual se procura a curvatura; (b) Exemplificação das etapas da aplicação do método abordado	27
Figura 2 – Análise tempo-frequência nas (a) Funções de base de Fourier; (b) Transformada discreta <i>Wavelet</i> Daubechies	35
Figura 3 – Esquema do algoritmo de Mallat	36
Figura 4 – Efeito da compactação sobre um sinal original (a) através da aplicação das transformadas <i>wavelets</i> , onde (b), (c) e (d) são o primeiro, segundo e terceiro nível, respectivamente, de aplicação da transformada <i>wavelets</i> e $x = [0, 1]$	47
Figura 5 – Gráfico das energias acumuladas dos sinais, em que a linha vermelha representa a energia acumulada do sinal original; a azul clara, a energia acumulada do subsinal a_1 ; a azul escura, a energia acumulada do subsinal a_2 e, finalmente, a linha rosa, a energia acumulada do subsinal a_3	48
Figura 6 – Esquema de execução da pesquisa (Organograma)	53
Figura 7 – Imagem utilizada para a implementação do método	55
Figura 8 – Gráfico da função de curvatura, encontrado de forma analítica	56
Figura 9 – Gráfico da função de curvatura, encontrado mediante o uso de um método numérico	57
Figura 10 – Gráfico comparativo da função de curvatura obtida de forma analítica e numérica	57
Figura 11 - Gráfico da função de curvatura, encontrado mediante a razão existente entre curvatura e raio de curvatura	58
Figura 12 - Gráfico comparativo dos métodos empregados para o cálculo da função de curvatura de forma analítica e numérica	59
Figura 13 - (a)(b)(c) Transformada <i>wavelets</i> de Haar primeiro, segundo e terceiro nível de compactação, respectivamente	60

Figura 14 – Sinal da função de curvatura reconstruído a partir do sinal do terceiro nível de compactação	61
Figura 15 – Curva tridimensional	62
Figura 16 – (a) Gráfico da função de curvatura; (b) gráfico da função torção	62
Figura 17 – Imagens da compactação da função de curvatura mediante a utilização da Transformada <i>Wavelet</i> de Haar: (a) Primeiro nível; (b) Segundo nível e, (c) Terceiro nível	63
Figura 18 – Imagens da compactação da função torção mediante a utilização da Transformada <i>Wavelet</i> de Haar: (a) Primeiro nível; (b) Segundo nível e, (c) Terceiro nível	63
Figura 19 – Reconstrução da função de curvatura (a) e da função torção (b), a partir da terceira compactação	64
Figura 20 – (a) Imagem do estilo de fashion design realizado em Paint ®; (b) Imagem do arquivo na etapa da tomada de pontos na fronteira; (c) Arquivo com os dados da imagem original	66
Figura 21 – Diagrama numérico da curvatura para o estilo apresentado na figura 20(a).....	67
Figura 22 – Gráfico do primeiro nível de compactação da função de curvatura, mediante a utilização da Transformada <i>Wavelets</i> de Haar, apresentada na figura 21	69
Figura 23 – Gráfico do segundo nível de compactação da função de curvatura, mediante a utilização da Transformada <i>Wavelets</i> de Haar, apresentada na figura 21	70
Figura 24 – Gráfico do terceiro nível de compactação da função de curvatura, mediante a utilização da Transformada <i>Wavelets</i> de Haar, apresentada na figura 21	71
Figura 25 – Matriz de covariância dos dados dos estilos de <i>fashion design</i> ; (b) Imagem da vista superior da matriz de covariância	72
Figura 26 – Diagrama dos autovalores da matriz de covariância	73
Figura 27 – Imagem do resultado da PCA em 3D	74
Figura 28 – Imagem do resultado para três sinais mediante a PCA	74

Figura 29 – Versão gráfica da matriz das distâncias tomadas entre os novos subsinais a_3 após ter realizado a PCA	75
Figura 30 – Imagem da vista superior da matriz das distâncias tomadas entre os novos subsinais a_3 após ter realizado a PCA	76
Figura 31 – Resultado da PCA para subsinais a_3 de estilos de diferentes blusas..	77
Figura 32 – Resultado da validação da classificação mediante PCA	78

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Alguns tipos de <i>wavelets</i> e suas características	39
Tabela 2 – Alguns estilos utilizados e seus respectivos gráficos da função de curvatura	67

LISTA DE ABREVIATURAS

a_k	Subsinais de acumulação
ARM	Análise de Multirresolução
d_k	Subsinais de detalhes
Daub4	Transformada de Daubechies com quatro coeficientes
DWT	Discrete Wavelets Transform
FFT	Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform)
Maple	Sistema de computação algébrica
Paint	Software de edição gráfica
PCA	Análise por Componentes Principais (Principal Component Analysis)
STFT	Transformada de Fourier de Tempo Curto (Short Time Fourier Transform)
TDW	Transformada Discreta <i>Wavelets</i>
WFT	Transformada de Fourier Janelada (Windowed Fourier Transform)

LISTA DE NOTAÇÕES

\mathfrak{R}	Conjunto dos Números Reais
\mathfrak{R}^n	Conjunto das n-uplas de Números Reais
γ	Aplicação diferenciável $\gamma : I \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^n$
I	Curva diferenciável
t_0	Ponto pertencente a I
C	Curva, tal que $C \subseteq \mathfrak{R}^n$
$\sigma(s)$	Curva plana parametrizada pelo comprimento de arco, $\sigma(s) = [x(s), y(s)]$
P	Ponto genérico, tal que $P = [x(s_0), y(s_0)]$
\bar{n}	Vetor unitário
s	Comprimento de arco
k	Curvatura
$\kappa(s)$	Curvatura em função do comprimento de arco
τ	Torção
$\tau(s)$	Torção em função do comprimento de arco
R	Raio de curvatura
P_1	Ponto sobre o qual consideramos a normal
$\psi(t)$	Função <i>wavelet</i> mãe ou função geradora tal que $\psi(t) \in L_2(\mathfrak{R})$
$f(t)$	Transformação por fator de escala: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t}{a}\right)$
$h(t)$	Efeito de translação: $h(t) = \psi(t - b)$
$L^2(\mathfrak{R})$	Espaço das funções Reais de quadrado integrável
$\psi_{a,b}$	Função de dois parâmetros, usada na definição de <i>wavelets</i> contínuas
$\frac{1}{\sqrt{a}}$	Constante de normalização
S	Pontos do sinal discreto
$Ener(S)$	Energia do sinal: $Ener(S) = \sum_{k=1}^{k_{max}} S_k^2$
$\phi(t)$	Função escala
Z	Conjunto dos Números Inteiros

$\Psi(\omega)$ Transformada de Fourier

$W(a, b)$ Transformada *wavelet*

LISTA DE EQUAÇÕES

1. Vetor tangente unitário à curva no ponto genérico P	24
2. Vetor de curvatura em P	24
3. Curvatura k no ponto P	25
4. Curvatura	25
5. Torção	25
6. Equação do Plano Osculador	26
7. Razão existente entre curvatura (k) e raio (R) de curvatura	26
8. Equação da curvatura resolvida de forma numérica	27
9. Relações entre três vetores unitários	28
10. Equação da taxa de variação	28
11 e 12. Condição de ortogonalidade do sistema de Frenet	28
13. Equação ao acrescentar o fator de proporcionalidade	28
14. Desenvolvimento da equação da torção	29
15. Equação da torção	29
16. Derivadas primeira, segunda e terceira de x	29
17. Curvatura ao quadrado em função de um parâmetro arbitrário	29
18. Torção em função de um parâmetro arbitrário	29
19. Primeira equação de Frenet	30
20. Segunda equação de Frenet	30
21. Terceira equação de Frenet	30
22. Representação matricial das equações de Frenet	30
23. Sistema de Equações Diferenciais para reconstrução do sinal original a partir da função de curvatura	30
24. Equação da série de Fourier	32
25. Coeficientes da equação da série de Fourier	32
26. Equação da transformação por fator de escala	36
27. Equação da transformação por translação	37
28. Base de funções das <i>wavelets</i>	37
29. Fórmula Geradora de <i>wavelets</i>	37
30. Equação da transformada <i>wavelet</i> contínua	37
31. Família de <i>wavelet</i> contínua normalizada	38
32. Correlação entre o sinal e as <i>wavelets</i>	38

33. Energia do Sinal	38
34. Função geradora da transformada <i>wavelet</i> discreta <i>Haar</i>	41
35. Valores para a TDW <i>Haar</i>	41
36. Formação do subsinal de acumulação mediante TDW <i>Haar</i>	41
37. Formação do subsinal de detalhes mediante TDW <i>Haar</i>	41
38. Forma matricial da TWD <i>Haar</i>	42
39. Formação do subsinal a_1 para um sinal de oito pontos mediante a TDW Daub4	43
40. Formação do subsinal d_1 para um sinal de oito pontos mediante a TDW Daub4	43
41. Filtro passa baixa da TWD Daub4	43
42. Filtro passa alta da TWD Daub4	43
43. Esquema matricial para a compactação, mediante a TDW Daub4	44
44. Construção de <i>wavelets</i> a partir de uma análise de multirresolução	45
45. Transformada inversa contínua	45
46. Representação de C	46
47. Versão matricial da inversa da TDW discreta de Daub4	46
48. Equação da Covariância	50
49. Forma da matriz de covariância	50
50. Forma do vetor característico	50
51. Equação da nova matriz dos componentes principais	50
52. Equação para retornar ao conjunto de dados originais	51
53. Equação da distância euclidiana generalizada	75

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	19
1 ESTADO DA ARTE	22
2 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA	23
2.1 Noções de Geometria Diferencial	23
2.1.1 Curvas	23
2.1.2 Função de Curvatura	24
2.1.3 Teorema Fundamental das Curvas	25
2.1.4 Curvatura	25
2.1.5 Torção	27
2.1.6 Fórmulas de Frenet	29
2.1.7 Reconstrução da imagem original a partir da função de curvatura	30
2.1.8 Considerações finais sobre noções de geometria diferencial	31
2.2 Transformada <i>wavelets</i>	31
2.2.1 Origem	31
2.2.1.1 Relações entre análise de Fourier e <i>Wavelets</i>	34
2.2.2 Definição de <i>wavelets</i>	35
2.2.3 Tipos de <i>wavelets</i>	39
2.2.3.1 Transformada <i>wavelet</i> de Haar	41
2.2.3.2 Transformada <i>wavelet</i> de Daubechies	42
2.2.4 Análise de multirresolução	44
2.2.5 Transformada inversa	45
2.2.6 Exemplo de aplicação da transformada <i>wavelets</i>	46
2.2.7 Considerações finais sobre as transformadas <i>wavelets</i>	48
2.3 Análise por Componentes Principais – PCA	48
2.3.1 Considerações finais sobre PCA	51
3 METODOLOGIA DA PESQUISA	52
3.1 Caracterização da pesquisa	52
3.2 Procedimentos Metodológicos	52

3.3 Considerações sobre o capítulo	54
4 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	55
4.1.1 Curvas 2D	55
4.1.2 Curvas 3D	61
4.2 Considerações do capítulo	64
5 RESULTADOS OBTIDOS A PARTIR DE MODELOS DO <i>FASHION DESIGN</i>	65
5.1 Processamento gráfico	65
5.2 Cálculo da curvatura	66
5.3 Aplicação das transformadas discretas <i>wavelets</i> unidimensionais	69
5.4 Identificação dos estilos	71
5.5 Reconstrução do sinal compactado	78
5.6 Considerações sobre o capítulo	78
CONCLUSÕES E POSSÍVEIS EXTENSÕES	80
REFERÊNCIAS	82
ANEXO A – Artigos publicados durante o período de realização do Mestrado.....	85
ANEXO B – Artigo publicado no VIII Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, Pelotas, 2008	87
ANEXO C – Artigo publicado no 8 th Brazilian Congress on Dynamics, Control and Applications, Bauru, 2009	96
ANEXO D – Artigo publicado no XXXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Cuiabá, 2009	102
ANEXO E – Artigo publicado no XXIX Encontro Nacional de Engenharia de Produção, Salvador, 2009	104

INTRODUÇÃO

A análise de formas é um campo de interesse em diversas áreas, tais como na Arqueologia, na Arquitetura, nas Imagens Médicas, nos Ambientes Virtuais, nas Aplicações em Segurança (como reconstrução de face, por exemplo), nas Indústrias de Entretenimento (filmes e jogos), na Computação Gráfica, no *Fashion Design*, nos Perfis Aerodinâmicos, entre outros dessa natureza.

No caso específico do *Fashion Design*, que envolve a criação de estilos para o vestuário, o desenvolvimento de novas tecnologias vem ocorrendo ao longo dos anos, com o intuito de diminuir o tempo de produção, bem como melhorar a qualidade do produto final. Citando alguns exemplos, vale lembrar que a produção de roupas em grande escala se tornou possível em 1829, a partir da invenção da máquina de costura. Foi, então, em 1921, com o surgimento da máquina de costura elétrica, que a produção do vestuário ampliou-se de forma destacável. Em anos recentes, novas tecnologias foram desenvolvidas nesse ramo de produção, como é o caso dos cortes de moldes a laser e dos sistemas computadorizados para o acompanhamento de distribuição e vendas.

Inicialmente, o projeto e a criação do vestuário eram realizados por costureiras. O primeiro estilista a ser conhecido foi Charles Frederick Worth (1826-1895), em Paris. Devido ao seu sucesso, muitos comércios começaram a empregar artistas no esboço de seus estilos. Os desenhos dos projetos eram mostrados aos clientes que solicitavam a sua produção, para confirmar se havia gostado do desenho, já que esse processo era mais barato do que produzir um vestuário real de amostra. Como se pode ver, a tradição de esboçar desenhos do vestuário começou como forma de economia.

A produção de vestuário sofreu influências de acontecimentos ao longo dos anos. Durante a Primeira Guerra Mundial, por exemplo, muitas mudanças ocorreram nos estilos, pois o número de mulheres que trabalhavam era cada vez mais crescente, sendo, então, necessário a utilização de roupas adequadas às suas atividades. Com a Segunda Guerra Mundial, os modismos passaram a ser fabricados em grande escala e se tornaram sempre mais populares.

No entanto, essa importante área da indústria não possui métodos simples para identificação de formas. Até o momento, a análise de formas ocorre por métodos com determinados níveis de complexidade, como é o caso da utilização da dimensão (borda) fractal, e também outro que consiste em abrir em malhas e analisar o que ocorre em cada parte da malha. Tem-se, também, utilizado métodos estatísticos ou a combinação de *wavelets* bidimensionais e métodos estatísticos. Além disso, e com maior frequência, tem-se utilizado softwares, de fácil manipulação, desenvolvidos especificamente para a realização das análises¹.

No entanto, essa proposta apresenta um método de análise de formas através da utilização de alguns conhecimentos de Geometria Diferencial, visando a identificar a noção de curvatura de curvas parametrizadas no plano. A função de curvatura representa uma espécie de assinatura do estilo. A aplicação das transformadas discretas *wavelets* unidimensionais ocorre com o intuito de decompor a função de curvatura em subsinais de acumulação e de detalhes. Posteriormente, as imagens são reconstruídas e identificadas mediante a utilização de métodos estatísticos e métricos. Assim, o objetivo principal desse método consiste em propor um processamento de sinais na fronteira (curvas ou caminhos) com domínios suaves, as quais aparecem em superfícies bidimensionais. Em síntese, se tenta unidimensionalizar o que é possível, utilizando o Teorema Fundamental das Curvas da Geometria Diferencial.

A hipótese do presente trabalho baseia-se no fato de que as fronteiras das regiões a serem estudadas devem ser suaves, ou seccionalmente suaves, o que, na matemática, significa assumir a perspectiva de que as derivadas são contínuas. Para domínios não suaves, pode-se fazer uma aproximação por um domínio suave, de forma tal que a distância (não precisando ser distância euclidiana) entre os dois domínios seja a menor possível.

O procedimento apresentado pode ser utilizado na entrada do processo de produção de vestimentas (desenvolvimento do projeto) e, também, na saída, através da identificação da imagem. Esse método possui algumas vantagens, pois utiliza a

¹ Ver COSTA e CESAR, 2000.

identificação mediante as transformadas discretas *wavelets* unidimensionais e seus procedimentos estatísticos e métricos, são bem mais simples do que os aplicados em casos bidimensionais.

Dando sequência ao trabalho, no capítulo 1, serão apresentados alguns estudos dedicados à análise de formas. Já no capítulo 2, se desenvolve os principais conceitos teóricos utilizados na fundamentação matemática, sendo que nas seções 2.1, 2.2 e 2.3 descrevem-se os conceitos principais de Geometria Diferencial, Transformadas *Wavelets* e Análise por Componentes Principais, respectivamente. No capítulo 3, aborda-se sobre a metodologia utilizada para a implementação do estudo proposto. Na seção seguinte, são apresentados os resultados obtidos a partir da simulação computacional de imagens bidimensionais e tridimensionais. Dedicase, então, o capítulo 5 para mostrar os resultados obtidos nos modelos de *Fashion Design*. Finalizando, apresentam-se as considerações finais obtidas com o presente estudo.

1 ESTADO DA ARTE

Da mesma forma como a matemática é utilizada em outros ofícios, também costureiras e alfaiates utilizam a matemática de maneira concisa.

Até o presente momento, existem alguns trabalhos que estudam a análise de formas, dos quais citamos Cesar e Costa (2000). Esses autores apresentam conceitos básicos matemáticos relacionados com a análise de forma e técnicas para a caracterização e classificação de formas em geral. Na obra, os autores utilizam medidas geométricas como perímetro e área, tangente e curvatura e Geometria Fractal para a caracterização de formas. Quanto à classificação de formas, Cesar e Costa (2000) utilizam Análise de Componentes Principais, Classificação Supervisionada, Classificação não Supervisionada, aspectos computacionais, Programação Orientada a Objetos e Engenharia de Software.

Além desses autores, Delfour e Zolésio (2001), ao estudar a análise de formas, apresentam em sua obra fundamentos matemáticos, construções, e as ferramentas necessárias para o estudo de problemas de otimização de forma.

Seguindo essa linha de trabalho, Floriani e Spagnuolo (2007) apresentam o processamento de diferentes aspectos da geometria das formas, com o intuito de representar e manipular uma forma em diferentes níveis de detalhe. Seu livro mostra uma variedade de tópicos relacionados à preservação e melhoria das informações de forma geométrica. Além disso, apresenta a identificação de forma através de componentes relevantes e suas relações mútuas.

Neste contexto, vale lembrar os artigos de Pazos (2008) e Becker, Pazos (2008, 2009), que utilizam a combinação de noções da Geometria Diferencial com a aplicação de *wavelets* unidimensionais para a identificação de formas. Tais trabalhos são resultados das pesquisas que já vêm sendo realizadas a algum tempo.

2 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo serão apresentadas considerações sobre os tópicos matemáticos utilizados na realização da pesquisa, quais sejam: Geometria Diferencial, Transformada Discreta Wavelets e Análise por Componentes Principais.

2.1 Noções de Geometria Diferencial

Neste trabalho se assumiu as condições de topologia usual no plano². Os conjuntos a serem considerados são limitados e fechados e, portanto, considerou-se que suas fronteiras são curvas fechadas seccionalmente contínuas. Por isso, serão apresentadas, neste capítulo, as definições de curvas, a função de curvatura, o Teorema Fundamental das Curvas, a importante noção de curvatura de curvas parametrizadas no plano, considerações sobre a torção e, para finalizar, serão incluídas as fórmulas de Frenet.

2.1.1 Curvas

Basicamente, uma curva é uma linha que pode ser precisamente representada por uma equação, de tal maneira que as coordenadas de seus pontos são funções de uma só variável ou parâmetro. Podem-se imaginar as curvas do espaço como trajetórias de um ponto em movimento; as coordenadas retangulares (x, y, z) do ponto se pode expressar por meio de três funções de um parâmetro t , que varia no interior de um intervalo fechado: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, onde $t_1 < t < t_2$ e $t_1, t_2 \in \mathfrak{R}$ (STRUİK, 1973).

Definição 1. (Curva Parametrizada Diferenciável.) Uma curva parametrizada diferenciável é uma aplicação diferenciável $\gamma : I \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ (PICADO, 2006)

Definição 2. (Ponto Singular.) Chama-se ponto singular de uma curva parametrizada diferenciável $\gamma : I \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ os pontos $t_0 \in I$ tais que $\gamma'(t_0) = 0$. Neste caso dizemos também que t_0 é uma singularidade da curva γ .

² A topologia usual é definida entre distância euclidiana.

Se $t_0 \in I$ não é uma singularidade para γ , dizemos que ele é um ponto regular (VALADARES, 1979).

Dada uma curva $C \subseteq \mathfrak{R}^n$, dizemos que um ponto $p_0 \in \mathfrak{R}^n$ é uma singularidade para C se para toda função γ de C com $\gamma(t_0) = p_0$, tem-se $\gamma'(t_0) = 0$.

Definição 3. (Curva Parametrizada Diferenciável Regular.) Uma Curva Parametrizada Diferenciável $\gamma: I \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é dita regular se, e somente se, $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in I$.

2.1.2 Função de Curvatura

Definição 4. (Vetor Tangente.) Considerando uma curva plana σ , em coordenadas cartesianas, parametrizada pelo seu comprimento de arco $s \in I \subseteq \mathfrak{R}$, $\sigma(s) = [x(s), y(s)]$, o vetor tangente unitário à curva, no ponto genérico P , $P = [x(s_0), y(s_0)]$, é dado por (KREYSZIG, 1991):

$$\frac{d\sigma}{ds} = [x'(s), y'(s)] \quad (1)$$

Assim, é possível considerar que a curvatura da curva mede a variação de seu vetor tangente, em seu deslocamento ao longo dela, o que conduz às seguintes definições:

Definição 5. (Vetor de Curvatura.) Denomina-se *vetor de curvatura* em P , ao vetor:

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2} = [x''(s), y''(s)] \quad (2)$$

Definição 6. (Curvatura.) Define-se a *curvatura* k , no ponto P , como o módulo do vetor de curvatura em P . Logo, o vetor curvatura é ortogonal ao vetor tangente à curva; ou seja:

$$\frac{d^2 \sigma}{ds^2} = k \vec{n} \quad (3)$$

em que \vec{n} é o vetor normal unitário em P . Essa equação chama-se primeira fórmula de Frenet (OPREA, 2007).

2.1.3 Teorema Fundamental das Curvas

Sejam $\kappa(s)$ e $\tau(s)$, ($s > 0$) duas funções analíticas dadas, então existe uma única curva (única até sua posição em \mathfrak{R}^3), tal que s é o comprimento de arco, $\kappa(s)$ a curvatura e $\tau(s)$ a torção. Para uma curva parametrizada no espaço \mathfrak{R}^3 , $\vec{r} = \vec{r}(s)$, a curvatura é dada por:

$$\kappa = \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^3} \quad (4)$$

e a torção é dada por:

$$\tau = \frac{[r' \times r''] \cdot r'''}{\|r' \times r''\|^2} \quad (5)$$

Para as curvas planas, a torção é nula (OPREA, 2007).

Segundo o Teorema, é possível reconstruir (conforme item 2.1.7) uma curva plana a partir de sua função de curvatura. Conforme Pazos (2008), a curva reconstruída difere da curva original por um movimento rígido.

2.1.4 Curvatura

Basicamente, a curvatura representa a linguagem matemática para descrever a forma das curvas. Logo, as retas possuem curvatura igual a zero. Os círculos possuem curvatura constante.

Definição 7. (Plano Osculador.) Plano Osculador é o plano determinado por três pontos consecutivos, cuja equação é representada por:

$$\begin{vmatrix} X_1 - x_1 & X_2 - x_2 & X_3 - x_3 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Definição 8. (Vetor de Curvatura.) A reta do plano osculador em P, perpendicular à tangente, se denomina normal principal. Considerando-se sobre essa um vetor unitário \vec{n} , cujo sentido pode eleger-se arbitrariamente de modo que seja contínua ao longo da curva. Caso adote-se a longitude do arco, como parâmetro, se tem: $x = x(s)$, $t = \frac{dx}{ds} = x'$, $t \cdot t = 1$, onde o acento representa derivação em relação a s ; derivando a identidade $t \cdot t = 1$ resulta: $t \cdot t' = 0$, o que prova que o valor $t' = \frac{dt}{ds}$ é perpendicular a t , e como $t = x' = \dot{x}u'$, $t' = \ddot{x}(u')^2 + \dot{x}u''$, vê-se que t está no plano de \dot{x} e \ddot{x} , e, portanto, no plano osculador. Em consequência, é possível introduzir um fator de proporcionalidade k de forma que $k = \frac{dt}{ds} = kn$. O vetor $k = \frac{dt}{ds}$, que expressa a variação proporcional da tangente, quando move-se sobre a curva, se chama vetor curvatura e o fator k se denomina curvatura. Nesse contexto, $|k|$ é a longitude do vetor de curvatura (STRUJK, 1973, p. 17).

Definição 9. (Relação entre curvatura e raio de curvatura.) Define-se R , denominado o raio de curvatura, como igual a k^{-1} . O valor absoluto de R é o raio de curvatura, que é o raio de uma circunferência que passa por três pontos consecutivos da curva, o círculo osculador (STRUJK, 1973, p. 18). Logo, a razão existente entre curvatura (k) e raio (R) da curva a qual pertence o ponto que se procura a curvatura é

$$\kappa = \frac{1}{R} \quad (7)$$

Por exemplo, dada a função de um cardióide³, busca-se calcular a curvatura aproximada do ponto selecionado (Figura 1a). Para isso, escolhem-se outros dois pontos próximos e encontra-se a circunferência que passa por estes três pontos (Figura 1b).

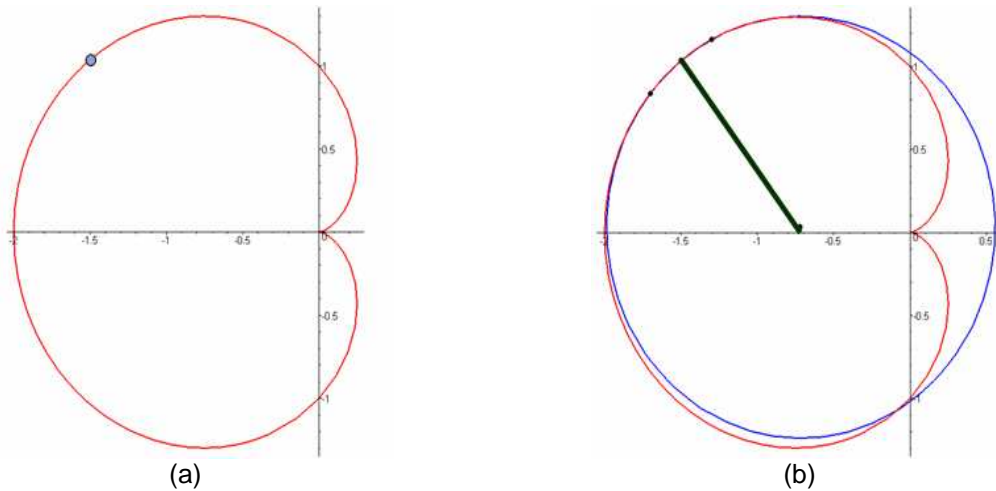


Figura 1 – (a) Imagem de um cardióide e do ponto no qual se procura a curvatura. (b) Exemplificação das etapas da aplicação do método abordado.

Fonte: Imagens obtidas pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Definição 10. (Cálculo da curvatura mediante aproximação por método numérico.) Pode-se, também, calcular a curvatura mediante métodos numéricos. Um desses métodos, possui a fórmula representada a seguir, utilizando o método de diferenças finitas para aproximar o valor das derivadas:

$$\kappa = \frac{x' \cdot y'' - x'' \cdot y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (8)$$

2.1.5 Torção

A torção mede a variação proporcional da tangente, ao longo da curva.

Consideramos a normal em P_1 , ao plano osculador ou binomial, sobre a qual levamos um vetor unitário binomial \vec{b} , de tal forma que o sentido $\vec{t} \rightarrow \vec{n} \rightarrow \vec{b}$ seja o

³ A função cardióide é representada por $r(t) = [\cos(t)(1 - \cos(t)), \sin(t)(1 - \cos(t))]$

mesmo que o de $OX \rightarrow OY \rightarrow OZ$. Em outras palavras, posto que \vec{t} , \vec{n} e \vec{b} são vetores unitários mutuamente perpendiculares, definimos o vetor \vec{b} por meio da fórmula $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$. Esses três vetores: \vec{t} , \vec{n} e \vec{b} , que podem tomar-se como novo sistema de referência, satisfazem as relações:

$$\begin{aligned} \vec{t} \cdot \vec{t} = 1, \quad \vec{n} \cdot \vec{n} = 1, \quad \vec{b} \cdot \vec{b} = 1 \\ \vec{t} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{b} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{t} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Este sistema de referência, que se desloca ao longo da curva, constitui o triedro móvel. A taxa de variação é proporcional do plano osculador está representada pelo vetor

$$b' = \frac{db}{ds}, \quad (10)$$

o qual tem a direção da normal principal, já que, de acordo com a equação $b \cdot t = 0$,

$$\begin{aligned} b' \cdot t + b \cdot t' = 0, \\ b' \cdot t = -b \cdot t' = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

e, por ser $b \cdot b = 1$,

$$b' \cdot b = 0, \quad (12)$$

de modo que, se introduzimos um fator de proporcionalidade τ ,

$$\frac{db}{ds} = -\tau n. \quad (13)$$

Esse fator τ se denomina torção da curva, que pode ser positiva ou negativa; todavia, enquanto a equação da curva somente determina k^2 , em compensação define univocamente τ . Isto pode ser nada mais do que expressar τ na forma (STRUİK, 1973, p. 20):

$$\begin{aligned}
\tau &= -n \cdot (t \times n)' = -n \cdot (t \times n') \\
&= -k^{-1} x'' \cdot \left[x' \times (k^{-1} x'')' \right] \\
&= k^{-2} \cdot (x' \cdot x'' \cdot x'''),
\end{aligned} \tag{14}$$

Ou

$$\tau = \frac{(x' \cdot x'' \cdot x''')}{x'' \cdot x''} \tag{15}$$

Já as equações

$$\begin{aligned}
x'(s) &= \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{du} \frac{du}{ds} = \dot{x} u' = \dot{x} (\dot{x} \cdot \dot{x})^{-1/2}, \\
x'' &= \ddot{x} (u')^2 + \dot{x} u'' = [(\dot{x} \cdot \dot{x}) \ddot{x} - (\dot{x} \cdot \dot{x}) \dot{x}] (\dot{x} \cdot \dot{x})^{-2}, \\
x''' &= \ddot{x} (u')^3 + 3\ddot{x} u' u'' + \dot{x} u'''
\end{aligned} \tag{16}$$

permitem expressar k^2 e τ em função de um parâmetro arbitrário, obtendo-se as fórmulas

$$k^2 = \frac{(\dot{x} \times \ddot{x}) \cdot (\dot{x} \times \ddot{x})}{(\dot{x} \cdot \dot{x})^3} \tag{17}$$

$$\tau = \frac{(\dot{x} \cdot \ddot{x} \cdot \ddot{x})}{(\dot{x} \times \ddot{x}) \cdot (\dot{x} \times \ddot{x})}, \tag{18}$$

onde x representa um vetor; \dot{x} , \ddot{x} e \ddot{x} representam, respectivamente, a primeira, segunda e terceira derivada de x e, por fim, \times representa o produto vetorial.

2.1.6 Fórmulas de Frenet

Obtidas da tese doutoral de Jean Frédéric Frenet, as chamadas fórmulas de Frenet ou de Frenet-Serret, como também são conhecidas, ocupam uma posição destacada na teoria das curvas suaves (com derivadas contínuas) e descrevem o

movimento do triedro móvel, ao longo da curva, juntamente com $\frac{dx}{ds} = t$ (STRUICK, 1973, p. 23). As três fórmulas vetoriais são as seguintes:

$$\frac{dt}{ds} = k \vec{n} \quad (19)$$

$$\frac{dn}{ds} = -k \vec{t} + \tau \vec{b} \quad (20)$$

$$\frac{db}{ds} = -\tau \vec{n} \quad (21)$$

Que podem ser matricialmente representadas:

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix} \quad (22)$$

2.1.7 Reconstrução da imagem original a partir da função de curvatura

Dispondo da função de curvatura, a reconstrução da imagem original é garantida pelo Teorema Fundamental das Curvas, exceto com um movimento rígido, que faz com que a curva reconstruída se diferencie da curva original.

Para a reconstrução da imagem original, a partir da função de curvatura, utiliza-se o sistema de equações diferenciais, apresentado abaixo (OPREA, 2007):

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{ds} = k(s) \\ \frac{db_1}{ds} = \cos(\theta(s)) \\ \frac{db_2}{ds} = \sin(\theta(s)) \end{cases} \quad (23)$$

2.1.8 Considerações finais sobre noções de Geometria Diferencial

Abordou-se, até o momento, sobre um importante tema no desenvolvimento da proposta apresentada, pois é a utilização das noções de Geometria Diferencial que permite a unidimensionalização da imagem. No entanto, além de unidimensionalizar, decompõe-se a função de curvatura, com o intuito de compactar a base de dados. Para tanto, outra ferramenta matemática se faz necessária, ou seja, as Transformadas *Wavelets*, tema que será abordado no item que segue.

2.2 Transformada *wavelets*

Aborda-se aqui sobre as Transformadas Discretas *wavelets*. No item 2.2.1 apresenta-se, de maneira resumida, sua origem. Na seção seguinte, expõe-se o conceito e as definições de *wavelets*. Dedicar-se o item 2.2.3 para apresentar, de maneira sucinta, alguns tipos de *wavelets* e, de forma mais aprofundada, os dois tipos utilizados no desenvolvimento do presente trabalho. Na seção 2.2.4 apresenta-se a análise em multirresolução. No item seguinte, expõe-se acerca da transformada inversa. Finalmente, mostra-se um exemplo de aplicação das transformadas *wavelets*.

2.2.1 Origem

Em 1800, Joseph Fourier descobriu que poderia sobrepor senos e cossenos para representar outras funções. Por muitas décadas, os cientistas queriam funções mais adequadas do que os senos e cossenos que compõem as bases da análise de Fourier, pois essas funções são não-locais, o que acarreta em aproximações fracas em pontas afiadas (GRAP, 1995).

Em 1807, o matemático francês Joseph Fourier, com suas teorias de análise de frequência, descobriu que as funções periódicas que satisfazem as condições de Dirichlet⁴ podem ser expressas como uma soma ponderada das funções

⁴ As condições de Dirichlet são: as funções f e f' são periódicas, de período T , contínuas em cada período fundamental, e a variação em cada ponto de descontinuidade é finita.

trigonométricas básicas. Ele afirmou que algumas funções periódicas $f(x)$ constituem na soma

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi}{2} x\right) + b_k \text{sen}\left(\frac{k\pi}{2} x\right) \right) \quad (24)$$

de sua série de Fourier. Os coeficientes a_0 , a_s e b_s são calculados por

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right) dx, \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{k\pi}{L} x\right) dx \quad (25)$$

$$\text{onde } L = \frac{\text{Período}}{2} .$$

Grap (1995) e Polikar (1999) explicitam que a afirmação de Fourier desempenhou um papel essencial na evolução do estudo sobre as funções.

A primeira menção de *wavelets* apareceu em um apêndice da tese de Alfred Haar, em 1909, embora o próprio Haar não soubesse que a família de funções que havia descoberto tratava-se de *wavelets*, pois as *wavelets* foram descobertas muito tempo depois, por volta dos anos 80. As *wavelets* de Haar eram ortogonais e de *suporte compacto* (a função é nula fora de um intervalo finito). Infelizmente, as *wavelets* de Haar são não continuamente diferenciáveis, o que limita um pouco a sua utilização (GRAP, 1995).

A primeira alteração à transformada de Fourier, para permitir a análise de sinais não-estacionários, veio como a Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT – *Short Time Fourier Transform*), também conhecida como a Transformada de Gabor. A idéia subjacente as STFT era segmentar o sinal através de um tempo de janela localizada, e realizar a análise para cada segmento. Dennis Gabor foi o primeiro a modificar a Transformada de Fourier em STFT, em 1946 (POLIKAR, 1999). Gabor enuncia o princípio da incerteza e propõe gaussianas transladadas na análise de sinais. Na verdade, Gabor foi o primeiro a criar “*janelas*” para estudar funções de variações abruptas, ou seja, família de *wavelets* não-ortogonais de

suporte ilimitado (OLIVEIRA, 2007). Polikar (1999, p.3) esclarece como ocorreu o surgimento da utilização das *janelas* para análise de sinais:

Na década de 1970, Jean Morlet, um engenheiro geofísico, foi confrontado com o problema de analisar sinais que tinham componentes de frequência muito alta com intervalos de tempo curtos, e os componentes de baixa frequência com intervalos de tempo longo. Ele, portanto, surgiu com a idéia de usar uma função de janela diferente para analisar diferentes faixas de frequência. Além disso, essas janelas foram geradas por dilatação ou compressão de um protótipo de Gauss. Estas funções janela tinham base compacta, tanto no tempo e na frequência (uma vez que a Transformada de Fourier de uma gaussiana é também uma Gaussiana).

Em 1976, Alain Croisier, Daniel Esteban e Claude Galand realizaram a decomposição com banco de filtros e reconstrução. Nesse mesmo período, J. Flanagan, R. Crochiere e S. Webber codificaram em sub-bandas (acústica da voz). Já em 1984, Jean Morlet e Alex Grossmann conceituaram e utilizaram as *wavelets* para modelagem de sinais sísmicos. (OLIVEIRA, 2007)

Yves Meyer, em 1985, construiu funções *wavelet* com base ortogonal. As *wavelets* de Meyer caracterizavam-se por serem continuamente diferenciáveis e de suporte compacto.

Ainda em 1985, Stéphane Mallat trabalhou no processamento digital de sinais. Ele descobriu algumas relações entre os filtros de quadratura espelhada, algoritmos de pirâmide, e bases de *wavelets* ortonormais (GRAP, 1995). Stéphane Mallat e Yves Meyer formularam o que foi chamado de análise multirresolucional, o que segundo Oliveira (2007), resultou na versão discreta (DWT – *Discrete Wavelets Transform*).

Alguns anos mais tarde, Ingrid Daubechies construiu um conjunto de funções *wavelet* de base ortonormais, de suporte compacto, criadas por métodos iterativos (e não através de funções explícitas).

Em 1992, Albert Cohen, Jean Feauveau e Daubechies construíram as *wavelets* bi-ortogonais de suporte compacto, que são preferidas por muitos pesquisadores, sobre as funções de base ortonormais. Nesse mesmo período,

esclarece Polikar (1999), R. Coifman, Meyer e Victor Wickerhauser desenvolveram pacotes *wavelet*, um prolongamento natural da ARM (Análise de Multirresolução).

2.2.1.1 Relações entre análise de Fourier e *Wavelets*

A transformada rápida de Fourier e as Transformadas Discretas *Wavelets* apresentam algumas semelhanças, que, conforme Grap (1995) são as seguintes:

- a geração de uma estrutura de dados que contém $\log_2 n$ segmentos de comprimentos diferentes;
- a transformação inversa da matriz, tanto para a Transformada Rápida de Fourier (FFT – *Fast Fourier Transform*) e como para a Transformada Discreta *Wavelets* (DWT – *Discrete Wavelets Transform*) é a transposição do original. Como resultado, ambas as transformações podem ser vistas como uma rotação no espaço, em função de um domínio diferente;
- as funções de base estão localizadas na frequência, tornando-se ferramentas matemáticas úteis na escolha das distribuições de frequências e capacidades de cálculo.

Por outro lado, a Transformada Rápida de Fourier e as Transformadas Discretas *Wavelets* também possuem diferenças. Uma delas consiste no fato que as funções *wavelet* são localizadas no espaço. Já as funções seno e cosseno de Fourier não são. Nas imagens que seguem é possível visualizar isso: a Figura 2a mostra a Transformada de Fourier Janelada (WFT - *Windowed Fourier Transform*), sendo que a janela é simplesmente uma onda quadrada. Como a janela é única e usada para todas as frequências da Transformada de Fourier Janelada, a resolução da análise é a mesma em todas as posições, no plano tempo-frequência. Já a Figura 1b mostra a análise tempo-frequência da Transformada *Wavelets*, sendo que, dessa vez, a janela muda. (GRAP, 1995)

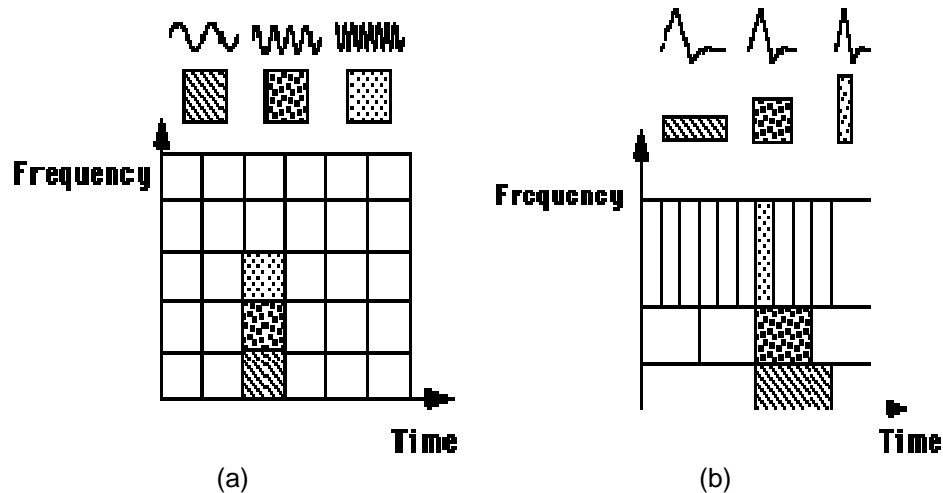


Figura 2 – Análise tempo-frequência nas (a) Funções de base de Fourier; (b) Transformada discreta *Wavelet* Daubechies.

Fonte: AMARA GRAP, 1995

Além disso, a transformada *wavelet* não tem um único conjunto de funções de base como acontece com a transformada de Fourier, que utiliza as funções seno e cosseno. Em vez disso, as transformadas *wavelets* têm maior diversidade de funções base possíveis.

2.2.2 Definição de *wavelets*

Para Ingrid Daubechies (1992), as *wavelets* são funções matemáticas que separam dados em suas diferentes componentes de frequências e extraem cada componente com uma resolução adequada à sua escala. Elas têm vantagens em relação à análise de Fourier, pois esta última analisa o sinal como um todo, acarretando uma representação mais pobre para sinais que contêm descontinuidade e variação bruscas.

A Transformada Discreta *Wavelets* (TDW) é calculada por sucessivos filtros de passa baixa e passa alta do sinal discreto, no domínio do tempo, acarretando na decomposição do sinal original. No primeiro nível de aplicação da TDW, o sinal original é decomposto em dois subsinais: a_1 e d_1 . Utilizando o subsinal de acumulação do primeiro nível de decomposição (a_1) aplicam-se novamente as TDW, obtendo novamente outros dois subsinais: a_2 e d_2 . No terceiro nível de decomposição, aplicam-se novamente as TDW ao subsinal de acumulação do segundo nível (a_2), decompondo o sinal em outros dois subsinais: a_3 e d_3 . Nestas

condições, o sinal original, após a aplicação das TDW até o terceiro nível de compactação, estará dividido em quatro subsinais: a_3 , d_3 , d_2 e d_1 .

Na figura 3, apresenta-se o esquema do algoritmo de Mallat, em que N é o número de pontos; a_k representa os subsinais de acumulação (também chamado de subsinais das somas ou das médias) e o d_k representa os subsinais dos detalhes. Esse método também é conhecido como *Lifting scheme*.

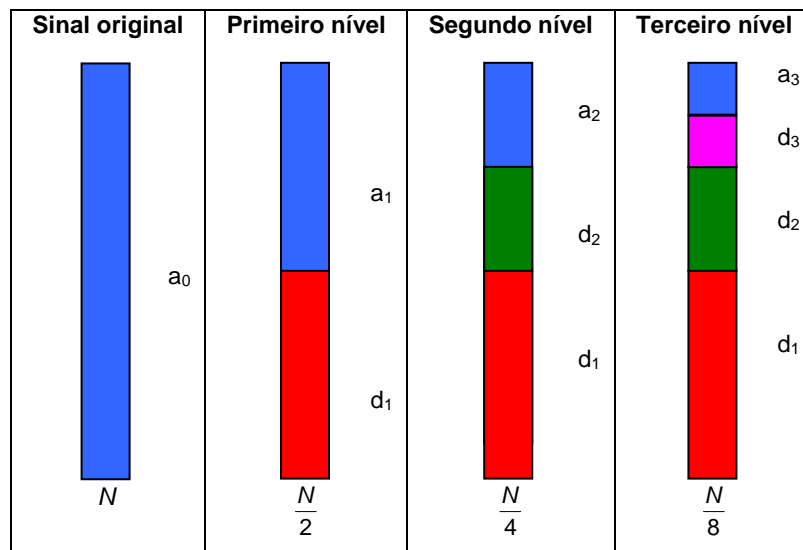


Figura 3 – Esquema do algoritmo de Mallat.

Fonte: Imagem criada pela autora.

As *wavelets* são classes de funções usadas para localizar uma determinada função no espaço e na escala. Uma família de *wavelets* pode ser construída a partir de uma função $\psi(t)$, também conhecida como *wavelet* mãe, ou função geradora, ou ainda, *wavelet* semente, tal que $\psi(t) \in L^2(\mathfrak{R})$. Além disso, para definir uma família de *wavelets*, utilizam-se parâmetros de escala (a) e deslocamento (b). A transformação por fator de escala é obtido por:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t}{a}\right), \quad (26)$$

e o efeito de translação é dado por

$$h(t) = \psi(t - b). \quad (27)$$

Definição 11. (Definição de *wavelets*.) Seja $\psi : D \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função de tipo $L^2(\mathfrak{R})$, denominada função geradora, de tal forma que as funções $\psi_{a,b}$ definidas por transformações de dilatação (ou contração) e de translação a partir de ψ

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{|a|^{1/p}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad \text{com } p > 0, a, b \in \mathfrak{R}, a \neq 0 \quad (28)$$

formem uma base de funções. A família de *wavelets* são as funções $\psi_{a,b}$, sendo que a frequência de valor $p = 2$ é a mais usada (BACHMAN, NARICI e BECKESTEIN, 2000). Nesse contexto, também se amplia a fórmula geradora

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad \text{com } j, k \in \mathbb{Z} \quad (29)$$

É de interesse saber se uma determinada família de funções $\{\psi_{a,b}\}_{(a,b) \in \mathfrak{R}^+ \times \mathfrak{R}}$ pode ser utilizada para decompor uma função $f(t)$. Para a realização da decomposição, utilizam-se as transformadas *wavelets*, discretas ou contínuas. Apresenta-se, então, a seguinte definição.

Definição 12. (Transformada *wavelet* contínua.) Seja $\{\psi_{a,b}\}_{(a,b) \in \mathfrak{R}^+ \times \mathfrak{R}}$ uma família de funções definidas por (26), e dada uma função $f(t)$ de quadrado integrável, a transformada *wavelet* contínua de $f \in L^2(\mathfrak{R})$ é a decomposição de f , mediante o conjunto de funções bases $\psi_{a,b}$:

$$\Psi_f(a, b) = \int_D f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt, \quad (30)$$

onde $*$ representa a conjugada complexa, e DL é o suporte compacto de $\psi(t)$, que é a função geradora.

Utiliza-se a constante $\frac{1}{\sqrt{a}}$ em (27) como constante de normalização. Tal utilização se deve ao fato das famílias de *wavelets* adotarem certas condições de ortogonalidade e ortonormalidade. Dessa forma, a família de *wavelets* é normalizada quando

$$\int_{\Re} |\psi_{a,b}(t)|^2 dt = \int_{\Re} |\psi(t)|^2 dt = 1, \quad (31)$$

de modo que todas as funções *wavelets* mantenham a mesma energia (PAZOS, 2007). A conservação da energia é importante, pois assim permitirá a reconstrução perfeita do sinal.

Pazos (2007) orienta que ao substituir (27) na fórmula da transformada *wavelet* (29), se pode escrever a transformada de $f(t)$ como uma correlação entre o sinal e as *wavelets* do tipo $f\left(\frac{t}{a}\right)$ da seguinte maneira:

$$\Psi_f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_D f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (32)$$

Definição 13. (Energia do sinal.) Dado um sinal $S = [S_1, S_2, S_3, S_4, \dots]$, a energia do sinal é definida como

$$Ener(S) = \sum_{k=1}^{k_{max}} S_k^2. \quad (33)$$

Com relação à energia, duas características devem ser satisfeitas: a energia deve se conservar: $Ener(S) = Ener(a_1) + Ener(d_1)$; e a energia deve acumular-se nos subsinais a_k .

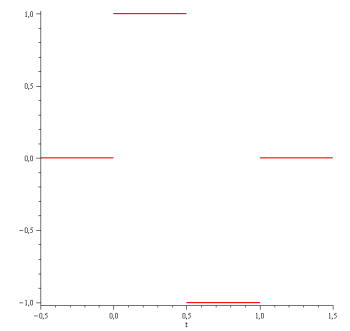
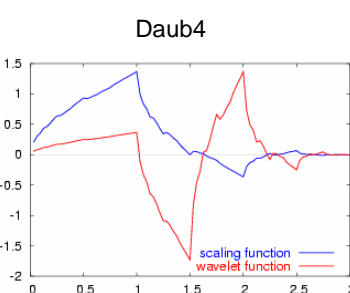
A transformada *wavelet* representa um instrumento moderno que admite a unificação de um vasto número de técnicas de análise e processamento. Ela foi desenvolvida nos campos da Matemática, da Engenharia e da Física Quântica. Atualmente, ela constitui uma das ferramentas mais potentes em processamento de sinais, possuindo uma infinidade de aplicações, como é o caso da Geologia Sísmica, do Processamento de Imagens, da Computação Gráfica, da predição de terremotos e de maremotos, da espectrometria, para citar apenas alguns exemplos (OLIVEIRA, 2007).

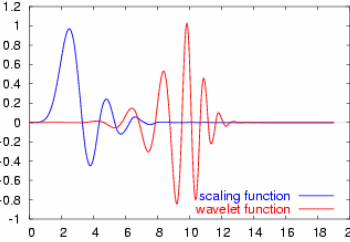
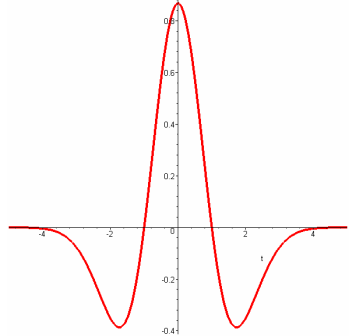
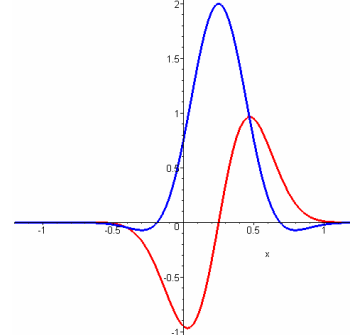
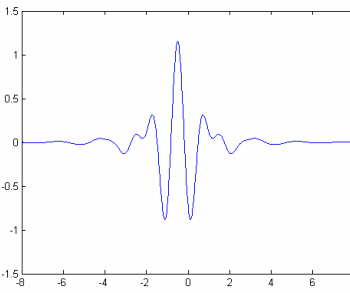
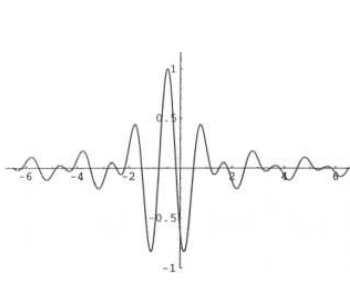
2.2.3 Tipos de *wavelets*

Existe, atualmente, uma grande gama de *wavelets* na literatura. Na tabela 1, abaixo, apresentam-se os principais tipos de *wavelets*, as funções geradoras, os respectivos gráficos da *wavelet* mãe e uma sucinta descrição de cada *wavelets*.

Tabela 1 – Alguns tipos de *wavelets* e suas características

Fonte: Adaptado de PAZOS (2007), OLIVEIRA (2007)

Tipo de Wavelet	Função Geradora	Gráfico da wavelet mãe	Descrição
Haar	$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ $\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{em outro caso.} \end{cases}$		As wavelets de Haar constituem a classe de wavelets mais simples, cujos filtros utilizam apenas somas e diferenças médias.
Daubechies	Nas wavelets de Daubechies, a função geradora é definida por recorrência, podendo conter 4, 6, 8, ou até 20 coeficientes.	<p>Daub4</p> 	As wavelets de Daubechies caracterizam-se por serem não simétricas, estritamente ortogonais e de suporte compacto próprio.

		<p style="text-align: center;">Daub 20</p> 	
<p>Sombreiro Mexicano</p>	$\psi^{(Mhat)}(t) = -\frac{2(t^2 - 1)e^{-t^2/2}}{\pi^{1/4}\sqrt{3}}$		<p>Caracteriza-se por ser simétrico, por imitar a um sombrero. Tal tipo de wavelets pode ser aplicada não somente em processamento de sinais, mas também em outras áreas.</p>
<p>Morlet</p>	$\psi(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2}$		<p>Esta família de wavelets foi utilizada para analisar padrões de voz. A função geradora é o produto de um elemento da base de Fourier, com uma função Gaussiana.</p>
<p>Meyer</p>	$\Psi(w) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3 w }{2\pi} - 1 \right) \right] e^{\frac{jw}{2}} & \frac{2\pi}{3} \leq w \leq \frac{4\pi}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{cos} \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3 w }{4\pi} - 1 \right) \right] e^{\frac{jw}{2}} & \frac{4\pi}{3} \leq w \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$		<p>É um tipo de wavelets simétricas, utilizada em sinais simétricos.</p>
<p>Shannon</p>	$\Psi(w) = \Pi \left(\frac{w - \frac{3\pi}{2}}{\pi} \right) + \Pi \left(\frac{w + \frac{3\pi}{2}}{\pi} \right)$ <p>Onde: $\Pi(t)$ é a função característica de intervalo $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$</p>		<p>A análise correspondente aos filtros passa-faixa ideais define uma decomposição, usando wavelets conhecidas como wavelets de Shannon. Essa wavelet tem suporte infinito.</p>

No presente trabalho, foram empregadas as wavelets de Haar e Daubechies que serão abordadas de forma mais detalhada, nas seções subsequentes.

2.2.3.1 Transformada *wavelet* de Haar

Alfred Haar, um matemático húngaro, realizou importantes contribuições no estudo de sistemas de funções ortogonais, equações diferenciais parciais, aproximações de Chebyshev e inequações funcionais. Esse matemático fez a descoberta das funções Haar em torno de 1909, muito antes de serem descobertas as *wavelets*. A construção dessas funções gerou uma base completa (ortonormal). A função semente, também conhecida como *wavelet* mãe, das funções de Haar, é definida como

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k). \quad (34)$$

Logo,

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (35)$$

As funções de Haar são definidas no intervalo de $[0, 1]$, mas podem ser estendidas a \mathfrak{R} . Graficamente, a representação da função semente está apresentada na Tabela 1 (página 39).

A família de funções Haar caracteriza-se por possuir a classe de filtros mais simples, pois esses utilizam somas e diferenças médias. Para aplicar a transformada *wavelet* de Haar, de forma algorítmica, utiliza-se as seguintes formulações:

- Para o cálculo de a_k : $\frac{f_{2j-1} + f_{2j}}{\sqrt{2}} \mapsto (H^+ f)_j, \quad j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ (36)

- Para o cálculo de d_k : $\frac{f_{2j-1} - f_{2j}}{\sqrt{2}} \mapsto (H^- f)_j, \quad j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ (37)

Para os demais níveis de compactação, o processo é basicamente o mesmo, só diferindo o fato que os cálculos serão realizados a partir do subsinal a_k anterior.

A matriz formada pelos coeficientes da transformada de Haar caracteriza-se por ser ortogonal, pois ela é igual a sua transposta e, esparsa, por possuir grande número de zeros. Apresenta-se, na figura 4, a matriz da transformada *wavelets* de Haar para um sinal de n pontos:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\
 \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 S_1 \\
 S_2 \\
 S_3 \\
 S_4 \\
 S_5 \\
 S_6 \\
 S_7 \\
 S_8 \\
 \vdots \\
 S_n
 \end{bmatrix}
 \quad (38)$$

Os coeficientes $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são chamados de filtros diádicos,

sendo o primeiro considerado filtro de passa baixa (utilizado na construção dos subsinais a_k) e o segundo, filtro de passa alta (utilizado na construção dos subsinais d_k), respectivamente (WALKER, 1999).

2.2.3.2 Transformada *wavelet* de Daubechies

Ingrid Daubechies criou diversas famílias de *wavelets* como é o caso das *Transformadas Daubechies* e também das *Transformadas Coeflet*. As funções

wavelets Daubechies caracterizam-se por serem não simétricas, estritamente ortogonais, com suporte compacto (próprio).

Considerando um sinal com oito pontos $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8$, a formação do subsinal a_1 será dada por:

$$\begin{aligned} S_1\alpha_1 + S_2\alpha_2 + S_3\alpha_3 + S_4\alpha_4 &= (a_1)_1 \\ S_3\alpha_1 + S_4\alpha_2 + S_5\alpha_3 + S_6\alpha_4 &= (a_1)_2 \\ S_5\alpha_1 + S_6\alpha_2 + S_7\alpha_3 + S_8\alpha_4 &= (a_1)_3 \\ S_7\alpha_1 + S_8\alpha_2 + S_1\alpha_3 + S_2\alpha_4 &= (a_1)_4 \end{aligned} \quad (39)$$

E o subsinal d_1 será formado a partir da seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} S_1\beta_1 + S_2\beta_2 + S_3\beta_3 + S_4\beta_4 &= (d_1)_1 \\ S_3\beta_1 + S_4\beta_2 + S_5\beta_3 + S_6\beta_4 &= (d_1)_2 \\ S_5\beta_1 + S_6\beta_2 + S_7\beta_3 + S_8\beta_4 &= (d_1)_3 \\ S_7\beta_1 + S_8\beta_2 + S_1\beta_3 + S_2\beta_4 &= (d_1)_4 \end{aligned} \quad (40)$$

sendo que α e β representam os filtros. O primeiro é o filtro de passa baixa e o segundo é o filtro de passa alta, respectivamente. Eles são representados pelos seguintes coeficientes:

$$\alpha = \left[\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right] \quad (41)$$

$$\beta = \left[\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{-3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{-1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right] \quad (42)$$

A matriz formada pelos coeficientes da transformada de Daubechies caracteriza-se por ser ortogonal. A seguir, na figura 5, apresenta-se o esquema matricial para a decomposição, mediante a Transformada de Daubechies. A primeira matriz representa a matriz dos coeficientes de Daub4 para um sinal de oito pontos e a segunda, os pontos do sinal original (pois se trata de sinais discretos):

$$\begin{bmatrix}
 \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\
 \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\
 \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\
 \beta_3 & \beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 S_1 \\
 S_2 \\
 S_3 \\
 S_4 \\
 S_5 \\
 S_6 \\
 S_7 \\
 S_8
 \end{bmatrix}
 \quad (43)$$

2.2.4 Análise de multirresolução

Em 1989, Stéphane Mallat e Yves Meyer criaram a análise multirresolucional, que consiste em analisar diferentes frequências, em diferentes resoluções. O princípio fundamental baseia-se na combinação de uma função escala $\phi(t)$ e *wavelets* $\psi(t)$ (OLIVEIRA, 2007).

Definição 14. (Análise de multirresolução.) Uma análise de multirresolução em $L^2(\mathfrak{R})$, explicita Oliveira (2007, p.82), consiste numa sequência de subespaços fechados $V_m \subset L^2(\mathfrak{R})$, $m \in \mathbb{Z}$, satisfazendo as seguintes relações:

- i) Encaixe crescente: $V_m \subset V_{m-1} (\forall m)$;
- ii) Densidade em níveis de escalas: $f(t) \in V_m \subset L^2(\mathfrak{R}) \Leftrightarrow f(2t) \in V_{m-1}$;
- iii) Densidade: $\text{clos} \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m = L^2(\mathfrak{R})$;
- iv) Separação: $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}$;

v) Base ortonormal: $\exists \phi(t) \in V_0$ tal que $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para V_0 .

Definição 15. (Construção de *wavelets* a partir de uma análise de multirresolução.) Dado $j \in \mathbb{Z}$, $W_j = V_{j+1} \ominus V_j$ é o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1} em relação ao produto interno de $L^2(\mathfrak{R})$.

Através das propriedades de densidade e de separação, pode-se escrever que

$$L^2(\mathfrak{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j. \quad (44)$$

Com isso, para que uma base de funções *wavelets* (equação 29) seja uma base ortonormal de $L^2(\mathfrak{R})$ ela somente precisa satisfazer a propriedade v, ou seja, deve existir ψ de tal maneira que $\{\psi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ seja uma base ortonormal de W_0 , uma vez que a propriedade ii mostra que $\{2^{j/2}\psi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal de W_j para todo $j \in \mathbb{Z}$ (PAZOS, 2007).

2.2.5 Transformada inversa

A transformada inversa é aplicada com o intuito de recompor o sinal original a partir de sua decomposição.

Definição 16. (Transformada Inversa.) Seja $\Psi(\omega)$ a transformada de Fourier da função $\psi(t)$ e considere $W(a, b)$ a transformada *wavelet* da função $f(t)$, usando a *wavelet* $\psi(t)$. Então, a transformada inversa é dada por:

$$f(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|^2} W(a, b) \psi_{a,b}(t) da db \quad (45)$$

onde $C \in \mathfrak{R}^+$ C é representado por

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|}{|\omega|} d\omega \quad (46)$$

e deve ser finito e positivo.

Basicamente, em sua versão discreta, a Transformada Inversa é encontrada mediante o produto da matriz do sinal pelo inverso da matriz dos coeficientes, que, por caracterizar-se como ortogonal, possui a inversa igual a transposta ($A_4^{-1} = A_4^t$). Considerando a transformada *wavelets* de Daubechies (equação 43), a inversa seria representada conforme a matriz abaixo:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_1 & 0 & 0 & \beta_3 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_4 & \beta_2 & 0 & 0 & \beta_4 \\ \alpha_3 & \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_3 & \beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & 0 & 0 & \beta_4 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_3 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_2 & 0 & 0 & \beta_4 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_3 & \beta_1 \\ 0 & 0 & \alpha_4 & \alpha_2 & 0 & 0 & \beta_4 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \end{bmatrix} \quad (47)$$

2.2.6 Exemplo de aplicação da transformada *wavelets*

Na função $f(x) = 20x^2(1-x)^4 \cos(12\pi x)$, com uma amostragem definida ($n = 512$), aplicam-se as transformadas *wavelets* até o terceiro nível de compactação. Os resultados encontram-se representados na figura 4:

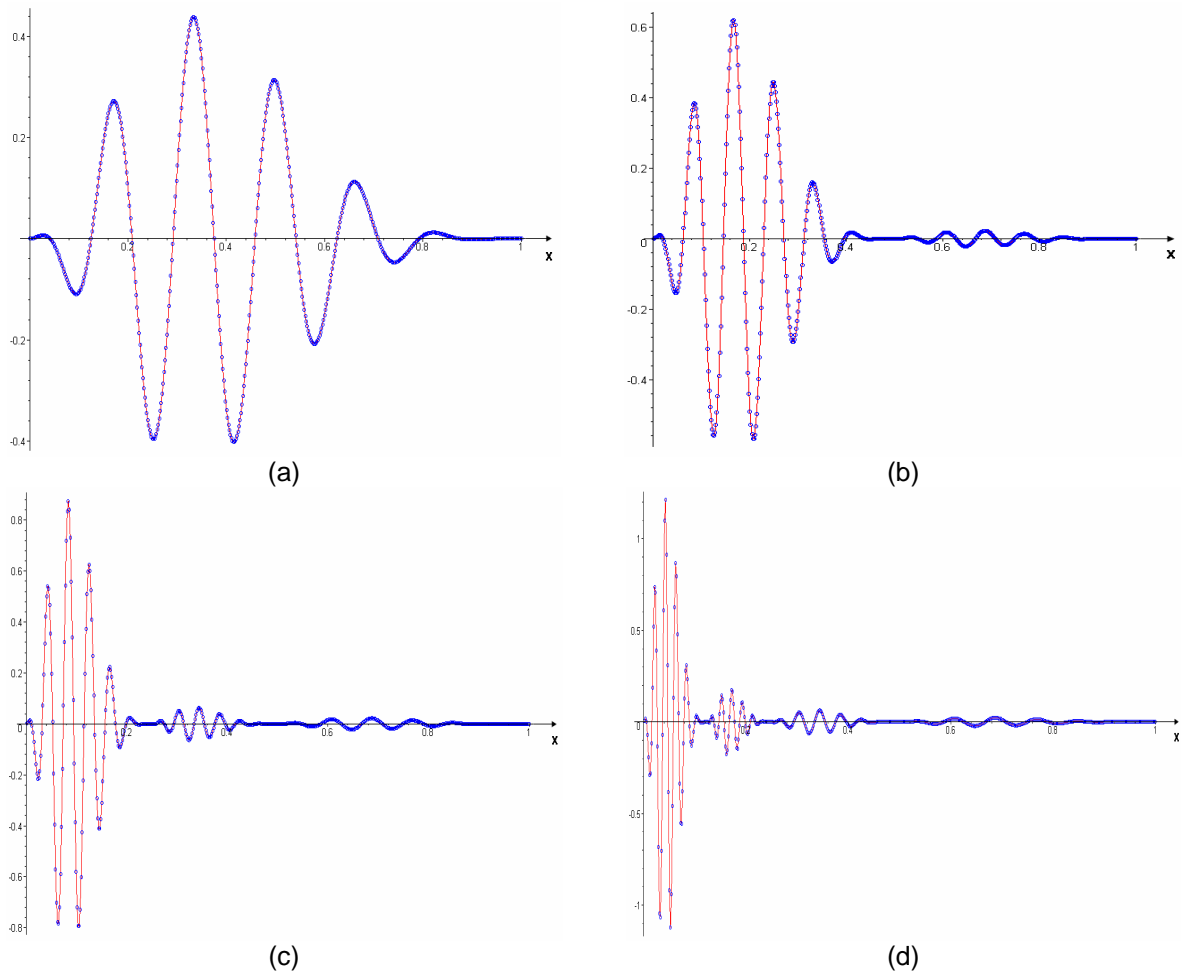


Figura 4 – Efeito da compactação sobre um sinal original (a), através da aplicação das transformadas *wavelets*, onde (b),(c) e (d) são o primeiro, segundo e terceiro nível, respectivamente, de aplicação da transformada *wavelets* e $x = [0, 1]$.

Fonte: Imagens obtidas pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

No caso particular do exemplo abordado, percebe-se que o subsinal a_1 apresentou acúmulo de 99,86 % da energia do sinal original. No que diz respeito ao detalhe d_1 , esse acumulou 0,14% da energia do sinal original. Já os subsinais a_2 e a_3 acumularam 99,86% e 97,15%, respectivamente, da energia do sinal original. Na sequência, na figura 5, podemos ver graficamente tanto a representação da energia acumulada do sinal original, quanto a energia acumulada nos subsinais.

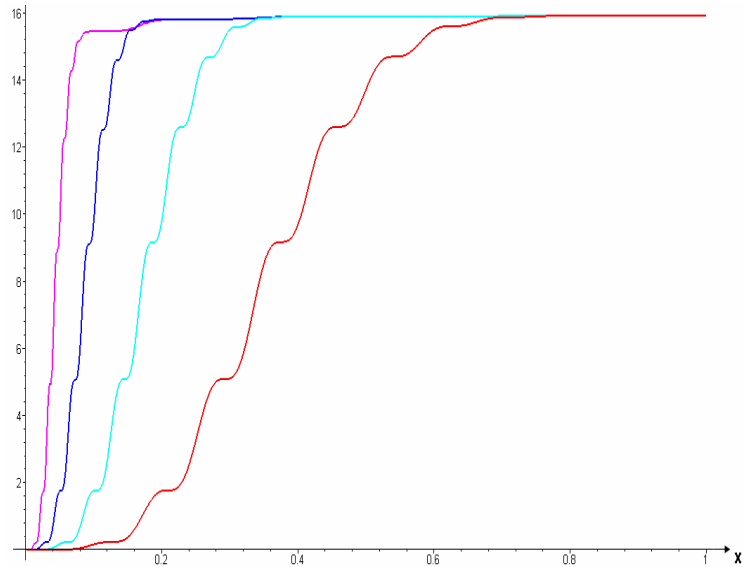


Figura 5 – Gráfico das energias acumuladas dos sinais, em que a linha vermelha representa a energia acumulada do sinal original; a azul clara, a energia acumulada do subsinal a_1 ; a azul escura, a energia acumulada do subsinal a_2 e, finalmente, a linha rosa, a energia acumulada do subsinal a_3 .

Fonte: Imagem obtida pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

2.2.7 Considerações finais sobre as transformadas *wavelets*

Nesta seção, foram apresentadas considerações sobre as Transformadas *Wavelets*, utilizadas para a decomposição, a redução de ruídos e a reconstrução do sinal. Sob essas condições, possibilitou a redução da dimensionalidade da base de dados formada para posterior classificação dos estilos, mediante a utilização de Análise por Componentes Principais – PCA, assunto que será detalhado no item 2.3, a seguir.

2.3 Análise por Componentes Principais – PCA

A Análise por Componentes Principais (do inglês “Principal Component Analysis”) objetiva, basicamente, reduzir os dados a partir de combinações lineares das variáveis originais. Esse processo acaba gerando componentes principais, que possuem como características essenciais a ortogonalidade e o fato de serem obtidos em ordem decrescente, de máxima variância.

O método de análise por componentes principais foi, inicialmente, apresentado por Karl Pearson (1901). O autor acreditava que esse método traria a

solução correta para alguns problemas biométricos que surgiram na época. Entretanto, os cálculos eram assustadores, mesmos para poucas variáveis, pois precisavam ser feitos a mão. Somente com o advento dos computadores eletrônicos é que a técnica por componentes principais alcançou amplo uso (MANLY, 2008).

No dizer de Hair et. al. (2005, p. 32),

a análise por componentes principais é uma abordagem estatística que pode ser usada para analisar inter-relações entre um grande número de variáveis e explicar essas variáveis em termos de suas dimensões inerentes comuns (fatores). O objetivo é encontrar um meio de condensar a informação contida em um número de variáveis originais em um conjunto menor de variáveis estatísticas (fatores) com uma perda mínima de informação.

Como podemos observar, o objetivo primordial da análise por componentes principais é reduzir a dimensionalidade do conjunto de dados expressando, em poucas componentes principais, a maior informação possível. A obtenção das componentes principais ocorre, explicita Morgano et al. (1999), por meio de transformações lineares $X P = T$, sendo que X é a matriz dos dados originais, T é a matriz de *scores* (contém as coordenadas das amostras no novo sistema de eixos) e P é a matriz dos *loadings* (onde os elementos de cada coluna correspondem aos coeficientes das combinações lineares das variáveis originais, ou seja, é formada pelos autovetores da matriz de correlação).

A metodologia a ser seguida para a aplicação da análise por componentes principais, segundo Smith (2002), é a seguinte:

- Inicialmente, adquirem-se os dados aos quais se quer aplicar a análise por componentes principais (PCA);
- Subtrai-se a média de cada uma das dimensões dos dados;
- Calcula-se a matriz de covariância. A covariância é uma medida da força da correlação entre duas ou mais variáveis aleatórias. Sua fórmula é representada por:

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{(n-1)}; \quad (48)$$

onde $n \in \mathbb{N}$. A matriz de covariância é formada pelos valores das covariâncias existentes entre as variáveis. A definição para a matriz de covariância de um conjunto de dados com n dimensões é:

$$C^{n \times n} = (c_{i,j}, c_{i,j} = \text{cov}(Dim_i, Dim_j)); \quad (49)$$

- Calculam-se os autovalores e autovetores da matriz de covariância, os quais são um conjunto especial de escalares, associado a um sistema de equações lineares;
- Escolhem-se os autovalores mais representativos e forma-se o vetor característico. O vetor característico é construído tendo os autovetores mais representativos

$$V = (\text{vet}_1 \quad \text{vet}_2 \quad \text{vet}_3 \quad \text{vet}_n); \quad (50)$$

- Selecionados os autovetores mais representativos é formado o vetor característico (VC), faz-se a transposta do vetor característico e multiplica-o pela transposta do conjunto de dados originais (DA):

$$FD = V C^T D A^T, \quad (51)$$

onde FD representa a nova matriz dos componentes principais, VC é a matriz do vetor característico e DA é a matriz dos dados ajustados.

- Finalmente, representa-se graficamente a PCA, permitindo obter uma maior compreensão sobre os dados trabalhados, visto que as amostras possuídas de maior similaridade agrupam-se entre si;
- Para voltar ao conjunto de dados originais, utiliza-se a seguinte equação:

$$O D^t = (V C^t FD) + \text{dado médio}, \quad (52)$$

sendo que OD representa os dados originais.

2.3.1 Considerações finais sobre PCA

Nesta seção, foram desenvolvidas considerações sobre a Análise por Componentes Principais, uma vez que representa um importante método de análise e classificação de dados. No próximo capítulo, será apresentada a descrição da metodologia utilizada para a realização desta pesquisa, descrevendo as etapas e procedimentos realizados.

3 METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo serão apresentados a caracterização da presente pesquisa e os procedimentos metodológicos utilizados na sua realização. A descrição da metodologia adotada ocorre na sequência, sendo a caracterização da pesquisa apresentada na seção 3.1 e os procedimentos metodológicos, na seção 3.2.

3.1 Caracterização da pesquisa

Segundo a natureza deste estudo, ele é caracterizado como experimental e de análise de pesquisas realizadas, pois utiliza fatos da realidade (imagens dos estilos cujas fronteiras foram empregadas, com o objetivo de “unidimensionalizar” o problema. As curvas da fronteira foram decompostas, classificadas e reconstruídas). Além disso, realizou-se a busca de material já elaborado, principalmente em livros e artigos científicos. Do ponto de vista dos objetivos, a presente proposta constitui-se em pesquisa exploratória. Segundo Gil (2002), a pesquisa exploratória tem como objetivo principal aperfeiçoar idéias ou descobertas de intuições. Proporciona maior conhecimento do problema, com o intuito de torná-lo mais claro.

Segundo a abordagem do problema, a pesquisa teve caráter quantitativo, pois mensurou a viabilidade da utilização da combinação da análise de curvatura e a utilização de *Wavelets* unidimensionais.

3.2 Procedimentos Metodológicos

A figura 6 (na sequência) representa um esquema de implementação da proposta desta pesquisa.

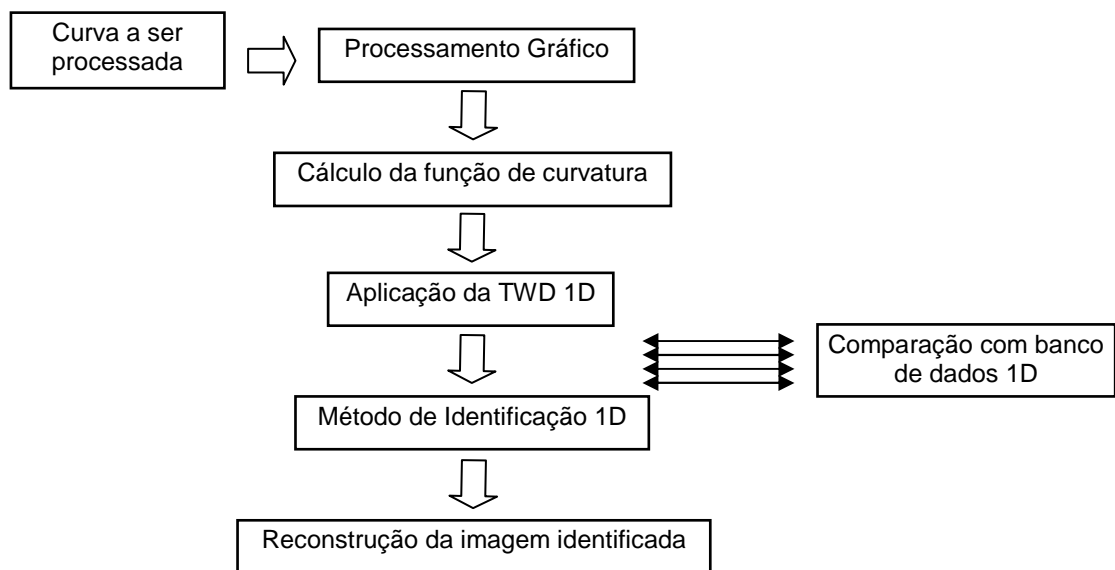


Figura 6 – Esquema de execução da pesquisa (Organograma).

Fonte: Imagem elaborada pela autora.

Na primeira etapa, foram coletadas e selecionadas imagens bidimensionais de *sites da Internet*, de *softwares de design* e de empresas de confecções. Dispondo dessas imagens, passou-se para o próximo passo que consistiu em processá-las em um *software* de edição gráfica, com o intuito de obter pontos das fronteiras das imagens selecionadas.

Utilizando os pontos obtidos, as imagens foram reconstruídas e partiu-se para a etapa seguinte, que consiste em encontrar a função de curvatura de cada estilo selecionado. Nessas funções, aplicaram-se, posteriormente, as Transformadas Discretas *Wavelets* unidimensionais, com vistas a compactar a função de curvatura de cada imagem. A aplicação ocorreu até o terceiro nível de compactação, em todas as funções de curvatura dos estilos selecionados.

Com os subsinais de acumulação do último nível de compactação (a_3), formou-se o banco de dados que, posteriormente, foi utilizado para a identificação dos estilos. Assim, o problema foi formulado sob duas perspectivas:

- Problema direto: aplicou-se o método, arquivaram-se as informações em um banco de dados, e reconstruiu-se a imagem;

- Problema inverso: comparou-se a curva, através de sua função de curvatura, com o banco de dados já existente.

Finalmente, as imagens originais foram reconstruídas a partir do terceiro nível de compactação da função de curvatura, com a utilização das Transformadas *Wavelets*, conforme mostra o esquema, na Figura 6.

Para o processamento gráfico, utilizou-se o *software Paint*. Já para as demais etapas da pesquisa, a implementação ocorreu em *softwares* tais como *Matlab* e *Maple*.

3.3 Considerações sobre o capítulo

Nos próximos capítulos, a metodologia empregada, descrita nesta seção, será detalhada, bem como serão apresentados os resultados obtidos. Num primeiro momento, no capítulo 4, serão apresentados os resultados obtidos para a simulação computacional. Já no capítulo 5, apresentam-se os resultados obtidos para os modelos de *Fashion Design*.

4 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos na simulação computacional do método proposto para curvas bidimensionais e tridimensionais. Como, neste caso, os resultados foram obtidos a partir de simulação computacional, utilizam-se curvas com a função já definida, visando a ilustrar o funcionamento do método apresentado neste estudo.

4.1.1 Curvas 2D

Para a realização da simulação computacional, no caso bidimensional, conforme mencionado anteriormente, são utilizadas curvas 2D com função já definida, não sendo realizada, neste caso, a primeira etapa da metodologia, que consiste na captação de pontos da fronteira e na parametrização da curva.

Na figura 7, apresenta-se uma curva (em que a coordenada x representa o produto de uma função exponencial por uma função trigonométrica, enquanto y é uma função polinomial) que foi utilizada na aplicação da técnica proposta, para a simulação computacional.

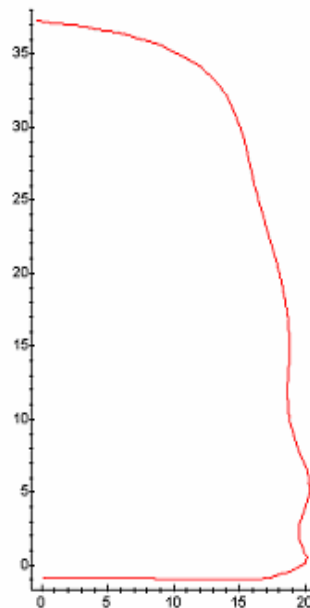


Figura 7 – Imagem utilizada para a implementação do método.

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Como a curva já possui função definida, parte-se para a etapa seguinte que se caracteriza por encontrar a função de curvatura da imagem original. Para obter-se a função de curvatura foram utilizados três métodos, sendo um analítico e os outros dois numéricos.

Com vistas a encontrar a função de curvatura pelo método analítico, utiliza-se a equação 4. Realizando os cálculos para a curva apresentada na figura 7, chegou-se à função de curvatura, cujo gráfico está representado na figura 8.

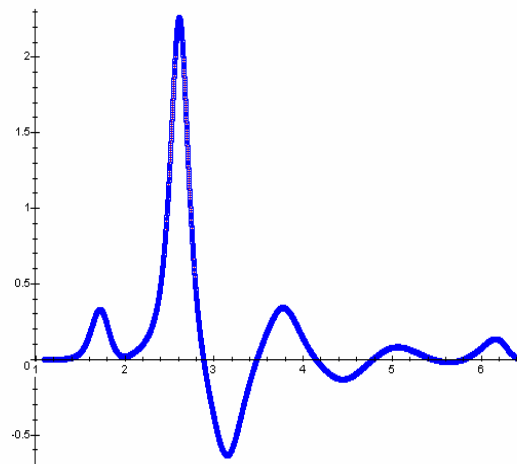


Figura 8 – Gráfico da função de curvatura, encontrado de forma analítica.

Fonte: Elaborado pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Utilizando, para o mesmo cálculo, um método numérico⁵, em que as derivadas foram calculadas de forma aproximada, mediante o uso de métodos de diferenças finitas, mais especificamente, aplicando métodos numéricos de diferenças centradas, chega-se ao seguinte gráfico para a função de curvatura (Figura 9) para a curva inicial (Figura 7).

⁵ Equação utilizada para o cálculo da curvatura, onde as derivadas foram aproximadas de forma numérica (equação 8):
$$\kappa = \frac{X'.Y'' - X''.Y'}{(X'^2 + Y'^2)^{3/2}}$$

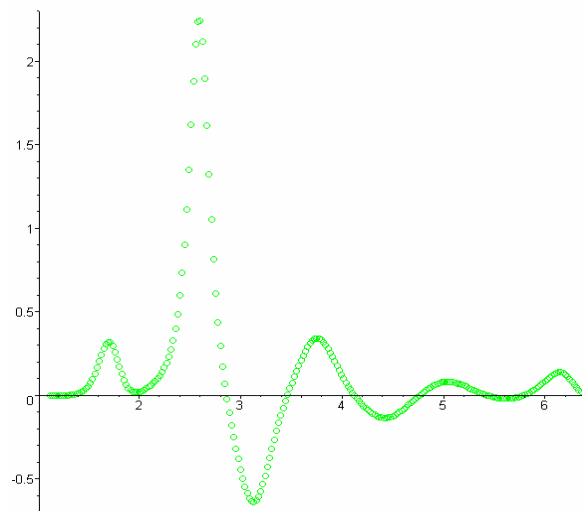


Figura 9 – Gráfico da função de curvatura, encontrado mediante o uso de um método numérico.

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Apresenta-se, na figura 10, o gráfico comparativo dos resultados encontrados à função de curvatura pelos dois métodos: analítico (linha preta) e numérico (pontos em verde). Verificou-se que os resultados são equivalentes, conforme mostra a figura a seguir.

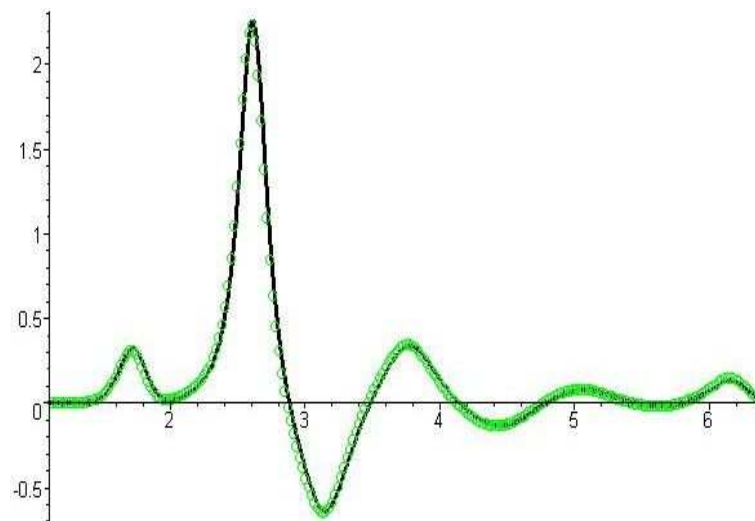


Figura 10 – Gráfico comparativo da função de curvatura obtida de forma analítica e numérica.

Fonte: Elaborado pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Outro método empregado refere-se à razão existente entre curvatura e raio de curvatura⁶. Para a utilização desse método, inicialmente, a imagem é discretizada e, a cada três pontos, encontra-se uma circunferência. Encontrada a circunferência, sabe-se, então, o valor do raio, e a curvatura será o inverso do raio. O resultado obtido para a função de curvatura da figura 7 está representado na figura 11, a seguir:

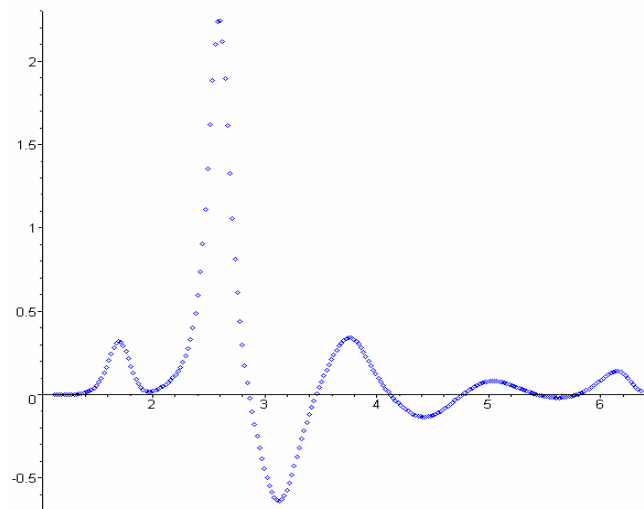


Figura 11 - Gráfico da função de curvatura, encontrado mediante a razão existente entre curvatura e raio de curvatura.

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Na figura 12, apresenta-se o gráfico comparativo dos resultados encontrados para o cálculo da função de curvatura pelo método analítico (linha vermelha) e pela razão existente entre curvatura e raio de curvatura (pontos em azul), onde é possível verificar que os resultados são similares.

⁶ Razão entre curvatura e raio de curvatura apresentada na equação 7: $\kappa = \frac{1}{R}$

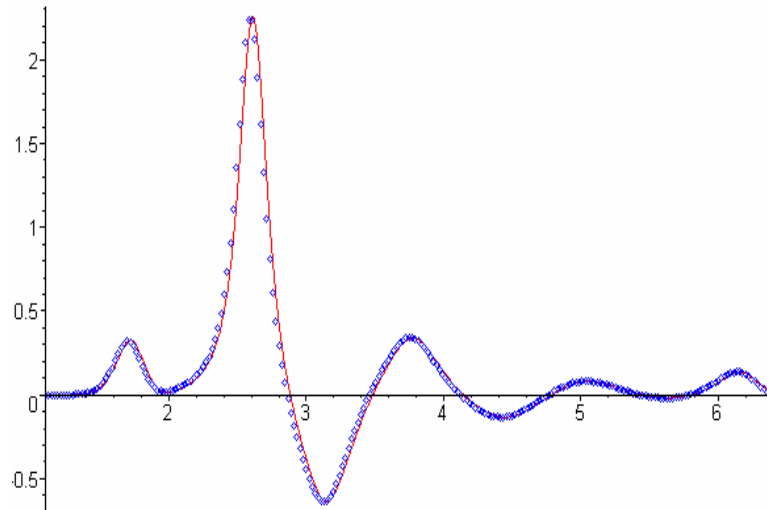


Figura 12 - Gráfico comparativo dos métodos empregados para o cálculo da função de curvatura de forma analítica e numérica.

Fonte: Elaborado pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Com a função de curvatura, passa-se para a próxima etapa, que consiste em aplicar as Transformadas Discretas *Wavelets* unidimensionais com o intuito de compactar a função e, com isso, realizar outras etapas. A aplicação das TDW ocorreu até o terceiro nível de compactação em função da energia que, até esta etapa, apresentou um acúmulo favorável para a reconstrução do sinal. Inicialmente, é preciso armazenar o resultado em um banco de dados para, posteriormente, classificar as imagens (problema inverso) e, com base nas compactações, reconstruir a imagem original (problema direto).

Na sequência, são apresentadas as imagens das compactações da função de curvatura encontrada para a curva inicial, mostrada na figura 7, mediante a utilização das transformadas *wavelets* de Haar, até o terceiro nível de compactação (Figura 13):

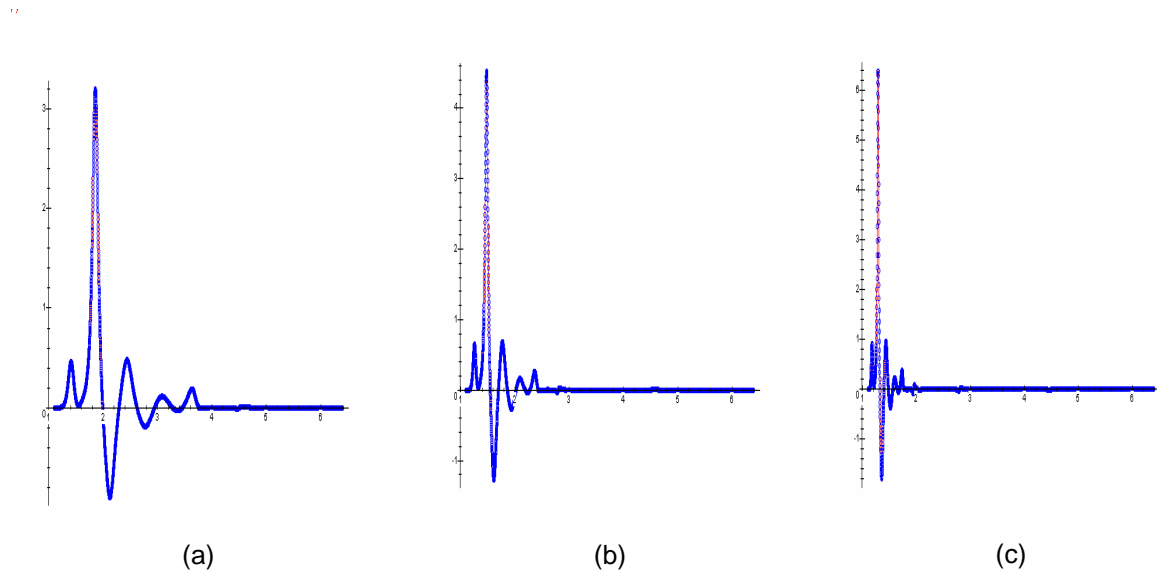


Figura 13 - (a)(b)(c) Transformada *wavelets* de Haar: primeiro, segundo e terceiro níveis de compactação, respectivamente.

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Do ponto de vista da análise da energia⁷ do sinal, verificou-se que o subsinal a_1 acumulou 99,998% da energia do sinal original; o subsinal a_2 acumulou 99,991% e o subsinal a_3 acumulou 99,963% da energia do sinal original. O fato dos subsinais a_k terem conservado a energia em altos percentuais permite uma excelente reconstrução do sinal.

A partir do sinal do terceiro nível de compactação, reconstrói-se o sinal da função de curvatura, após a eliminação de ruídos (Figura 14).

⁷ O cálculo da energia dos subsinais ocorreu mediante a utilização da equação da energia (equação 33).

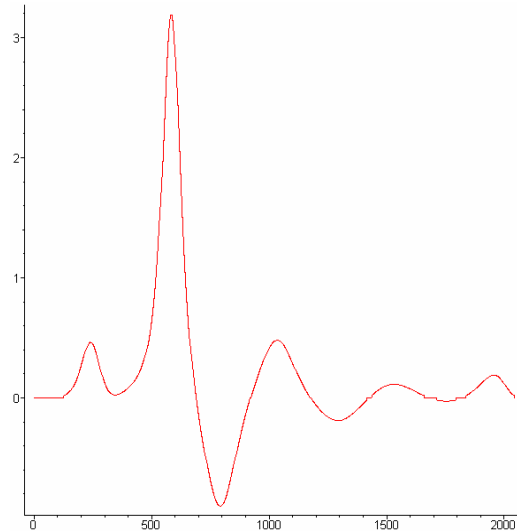


Figura 14 – Sinal da função de curvatura reconstruído a partir do sinal do terceiro nível de compactação.

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

No próximo item, apresentam-se os resultados obtidos para a simulação computacional de curvas tridimensionais.

4.1.2 Curvas 3D

Assim como no caso bidimensional, na simulação computacional de curvas tridimensionais, utilizam-se curvas de função já definida, não sendo, portanto, realizada a etapa inicial da metodologia que consiste na tomada de pontos da fronteira da imagem e posterior classificação.

Na figura 15, mostra-se uma curva tridimensional (em que as coordenadas x e y representam o produto de uma função trigonométrica por uma função exponencial, e a coordenada z uma função exponencial) que foi utilizada para a aplicação da proposta, na simulação computacional.

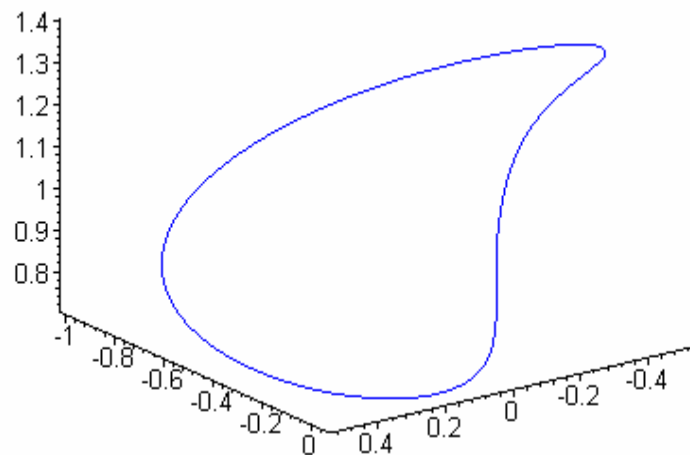


Figura 15 – Curva tridimensional

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Tratando-se de uma curva com função definida, parte-se para a próxima etapa que se caracteriza por encontrar a função de curvatura da imagem original. Além disso, por ser uma curva tridimensional, também será obtida uma função torção. Apresenta-se, então, o gráfico da função de curvatura (Figura 16a) e o gráfico da função torção (Figura 16b), para a curva tridimensional (Figura 15).

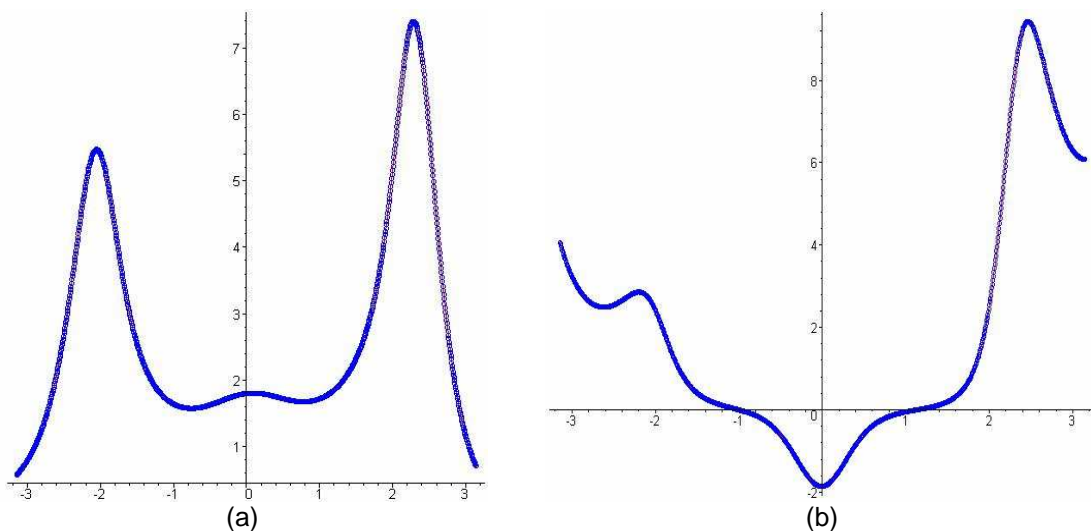


Figura 16 – (a) Gráfico da função de curvatura; (b) gráfico da função torção.

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Dispondo das funções de curvatura e torção, o próximo passo consiste em aplicar as Transformadas Discretas *Wavelets* unidimensionais, compactando a função de curvatura (Figura 17) e a função torção (Figura 18).

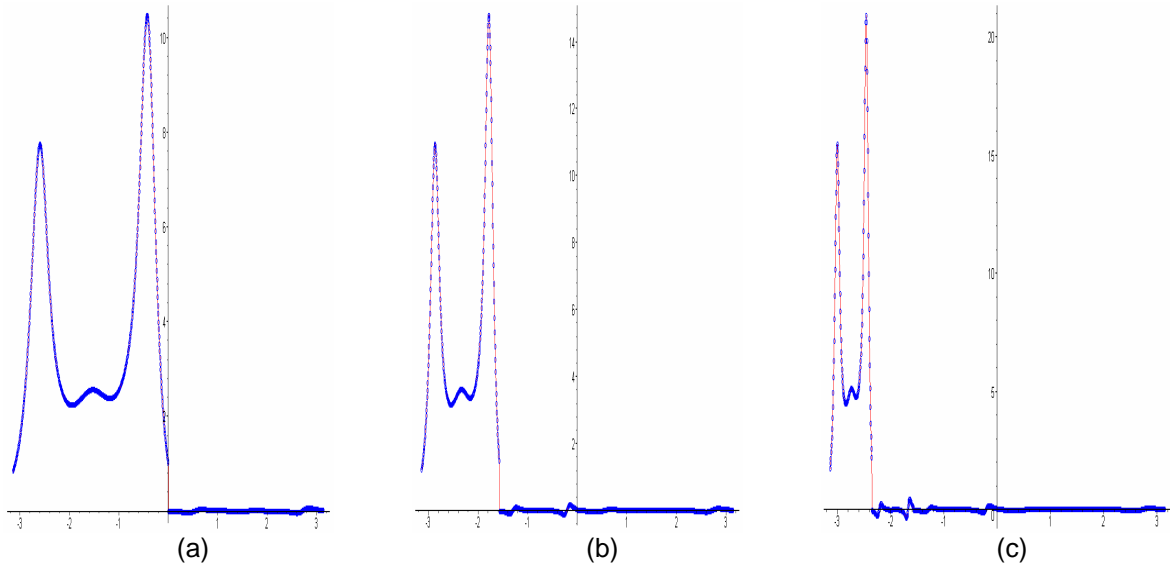


Figura 17 – Imagens da compactação da função de curvatura mediante a utilização da Transformada *Wavelet* de Haar: (a) Primeiro nível; (b) Segundo nível e, (c) Terceiro nível

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Do ponto de vista da energia no sinal, verificou-se que os subsinais de acumulação (a_1 , a_2 , a_3) da função de curvatura acumularam, respectivamente, 99,99%, 99,98% e 99,95% da energia do sinal original.

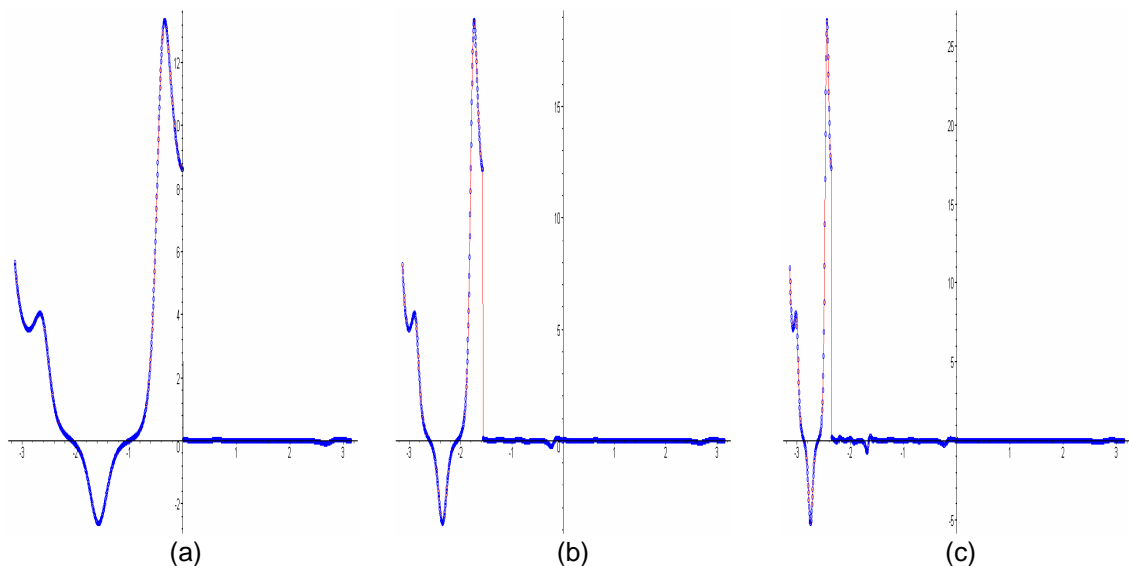


Figura 18 – Imagens da compactação da função torção mediante a utilização da Transformada *Wavelet* de Haar: (a) Primeiro nível; (b) Segundo nível e, (c) Terceiro nível

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Da mesma forma, com relação a energia no sinal, verificou-se que os subsinais de acumulação (a_1 , a_2 , a_3) da função torção acumularam, respectivamente, 99,86%, 99,85% e 99,81% da energia do sinal original.

Os subsinais a_k das decomposições das funções de curvatura e torção conservaram a energia em altos percentuais, o que permite uma excelente reconstrução do sinal. Apresenta-se, na figura 19, a reconstrução dos sinais a partir do terceiro nível de compactação após a remoção dos ruídos.

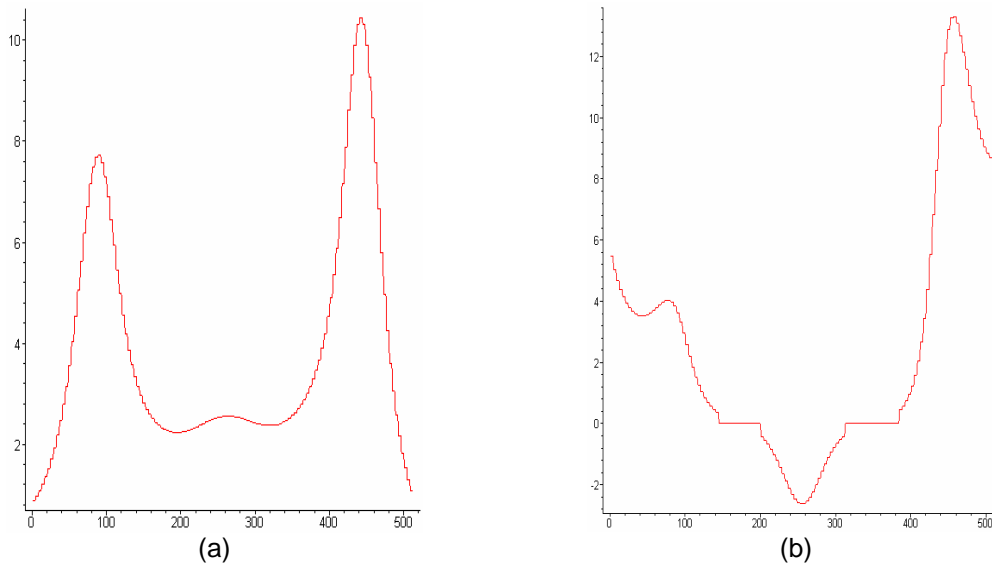


Figura 19 – Reconstrução da função de curvatura (a) e da função torção (b), a partir da terceira compactação.

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

4.2 Considerações do capítulo

Neste capítulo foram apresentados os resultados obtidos para a simulação computacional de curvas 2D e 3D. Essa etapa representou um grande passo, pois possibilitou o desenvolvimento de rotinas para a implementação nos modelos de *Fashion Design*, cujos resultados serão apresentados a seguir, no capítulo 5.

5 RESULTADOS OBTIDOS A PARTIR DE MODELOS DO *FASHION DESIGN*

No capítulo anterior foram mostrados os resultados obtidos para a simulação computacional de curvas 2D e 3D. A seguir, são apresentados os resultados obtidos para imagens bidimensionais de estilos de *Fashion Design*.

Os resultados serão apresentados de forma detalhada, em cada etapa da implementação para um estilo. No entanto, para a realização do presente trabalho, foram utilizados 30 estilos diferentes, ou seja, moldes de calças, saias, casacos, blusas e vestidos. Os modelos foram obtidos do site da Revista Burda (www.burdafashion.com).

Apresenta-se, na Tabela 2, alguns modelos utilizados e seus respectivos gráficos da curvatura, nos quais foram aplicadas as TDW, decompondo o sinal até o terceiro nível de compactação.

5.1 Processamento gráfico

Na etapa inicial da implementação do método proposto, ocorre à seleção das imagens a partir de sites da Internet, de softwares de design, de empresas de confecções. Com essas imagens, o próximo passo consiste em processá-las em um software de edição gráfica, com o intuito de obter pontos da fronteira das imagens. Para tanto, será utilizado um processador gráfico que contém régua em *pixels* (elemento básico de imagem digital, que representa a intensidade luminosa), como é o caso, por exemplo, do *software Paint* e do *software Photo Editor*.

O ponto inicial, para a identificação do estilo, pode ser escolhido de forma aleatória. A identificação ocorre independentemente da utilização do mesmo ponto inicial, pois se pode transformar a função de curvatura em função periódica.

Com vistas a elucidar essa etapa do processo, apresenta-se na figura 20 a imagem de um estilo de *Fashion Design*, no ambiente de trabalho do *software Paint*, no qual ocorre a captação de pontos na fronteira da imagem (figura 20 b) para a formação da base de dados (figura 20 c).

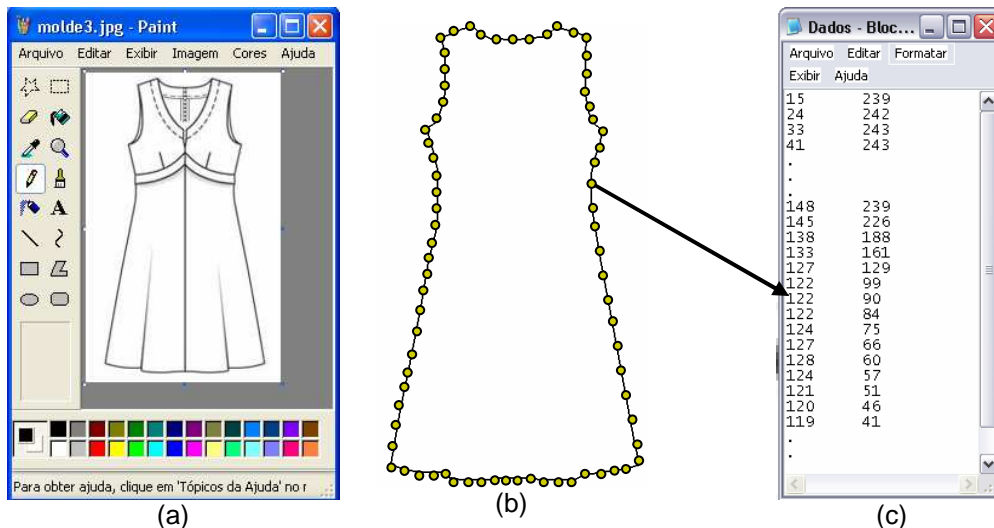


Figura 20 – (a) Imagem do estilo de fashion design realizado em Paint®; (b) Imagem do arquivo na etapa da tomada de pontos na fronteira; (c) Arquivo com os dados da imagem original.

Fonte: Elaborada pela autora.

Utilizou-se, uma amostragem ilusória: em todos os estilos uma amostragem de 206 pontos. Logo, a utilização de uma pequena quantidade de pontos resulta em um maior erro. No entanto, essa análise não foi realizada no presente trabalho.

5.2 Cálculo da função de curvatura

A partir dos pontos captados na fronteira das imagens bidimensionais, conforme apresentado no item anterior, parte-se para o próximo passo, que consiste em calcular a função de curvatura da fronteira da imagem bidimensional.

O cálculo da curvatura foi realizado de forma numérica, mediante o uso da equação 7, que utiliza a relação existente entre curvatura e raio de curvatura. Como já mostrado anteriormente, na fase de simulação computacional, foi verificado que os resultados obtidos por métodos numéricos, e também pelo método analítico eram semelhantes (conforme mostra a figura 12).

Assim, apresenta-se a seguir, na figura 21, a imagem da função de curvatura para o estilo apresentado na figura 20 (a).

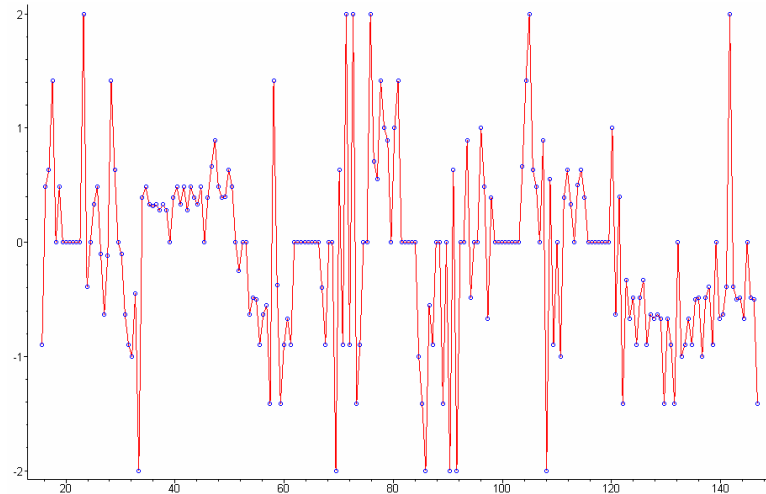



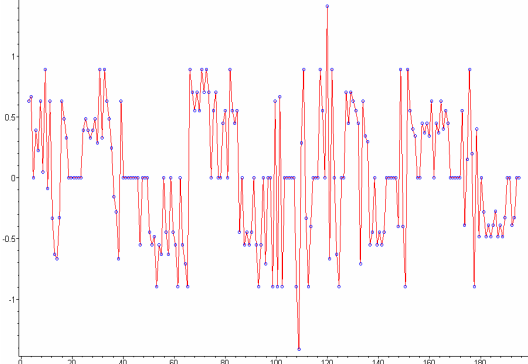
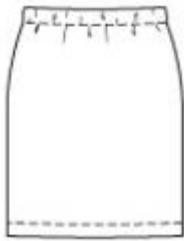
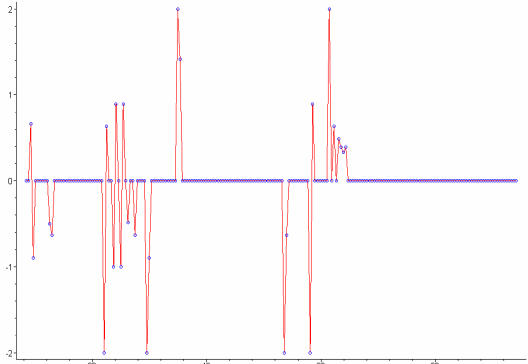
Figura 21 – Diagrama numérico da curvatura para o estilo apresentado na figura 20(a)

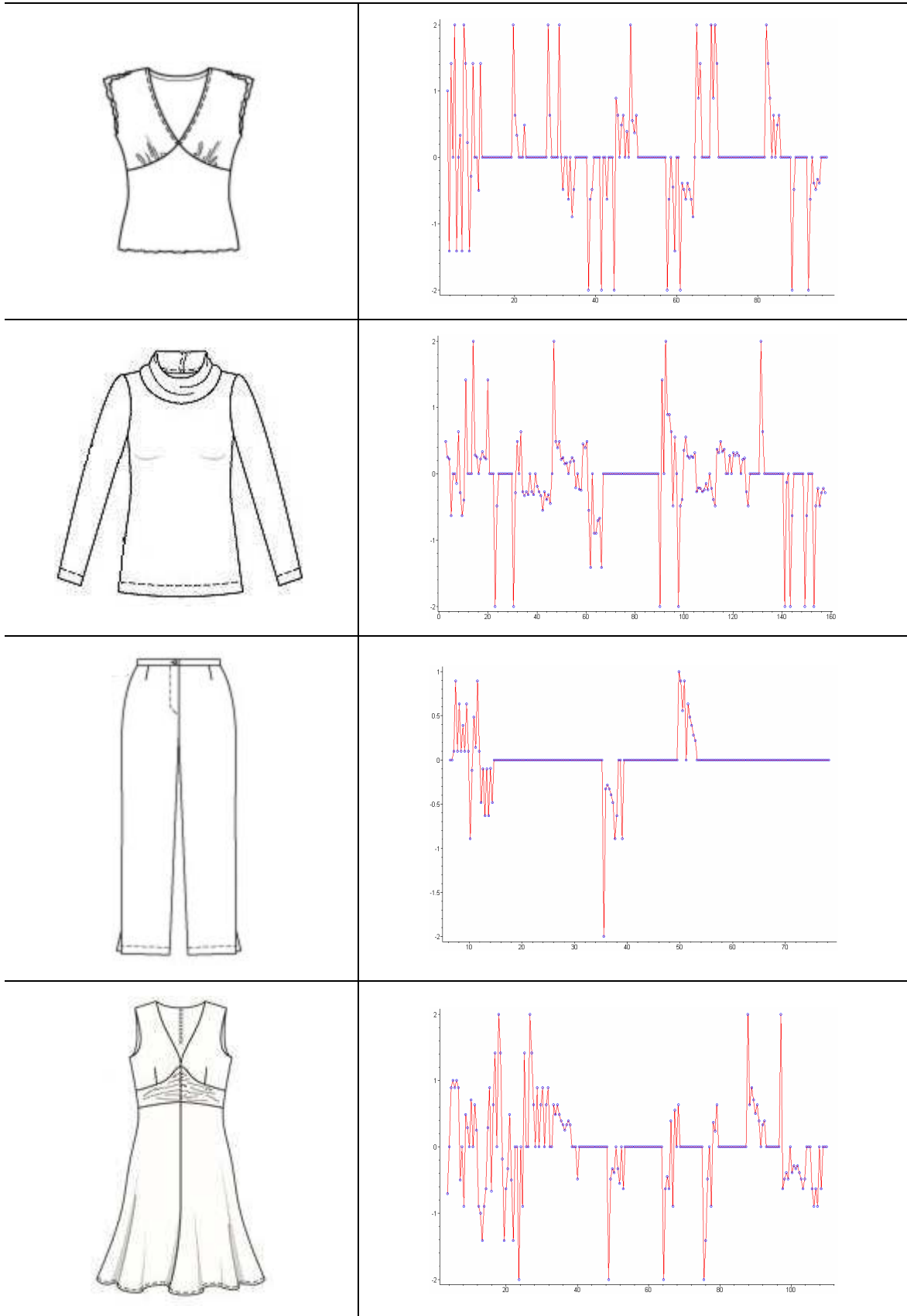
Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

O cálculo da curvatura ocorreu para todos os estilos utilizados, com o intuito de formar a base de dados. Apresentam-se, na sequência, na Tabela 2, alguns modelos utilizados e seus respectivos gráficos da função de curvatura calculada de forma numérica.

Tabela 2 – Alguns estilos utilizados e seus respectivos gráficos da função de curvatura

Fonte: Elaborada pela autora.

Modelo	Gráfico da função de curvatura
	
	



A presente etapa foi realizada em um sistema de computação algébrica Maple®.

5.3 Aplicação das transformadas discretas *wavelets* unidimensionais

A partir da função de curvatura, foram aplicadas as transformadas discretas *wavelets* unidimensionais, com o intuito de compactar a função na intenção de eliminar ruídos e, com isso, realizar as seguintes etapas: armazenar o resultado em um banco de dados (problema inverso) e, com base nas compactações, reconstruir a imagem original (problema direto).

Devido à quantidade de pontos, 206 em todos os estilos, optou-se pela aplicação das *wavelets* até terceiro nível de compactação, pois a energia do sinal apresentou, até esta etapa, um acúmulo favorável para a reconstrução. A escolha pelas TDW Haar e Daub4 ocorreu em virtude dessas terem apresentado bons resultados.

Aplicando as transformadas *wavelets* à função de curvatura, cujo gráfico está representado na figura 21, foram obtidos os resultados que estão representados nas figuras 22, 23 e 24, para a decomposição do sinal no primeiro, segundo e terceiro nível de aplicação, respectivamente.

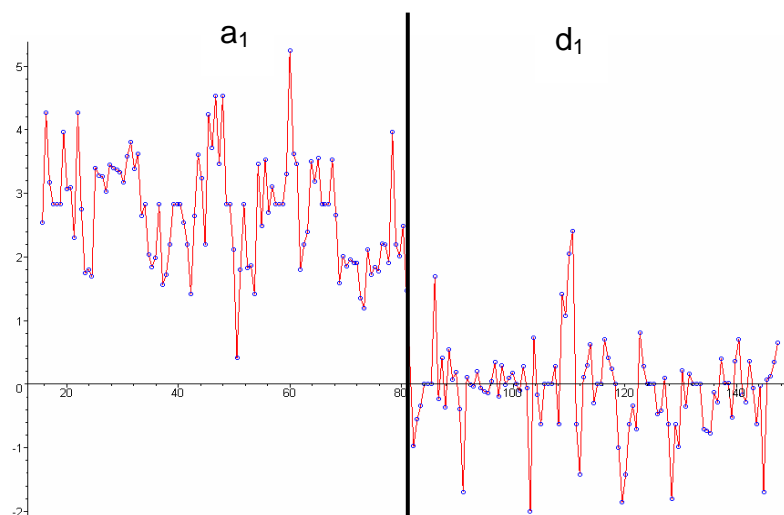


Figura 22 – Gráfico do primeiro nível de compactação da função de curvatura, mediante a utilização da Transformada *Wavelets* de Haar, apresentada na figura 21.

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

O gráfico da Figura 22 apresenta o primeiro nível de compactação da Transformada Discreta *Wavelets*. É possível observar que o sinal está decomposto em dois subsinais a_1 e d_1 . A energia se concentra no subsinal de acumulação (a_1), que contém 94,2%. Esse subsinal será utilizado para a realização do segundo nível de compactação. A Figura 23 apresenta dados do segundo nível de compactação.

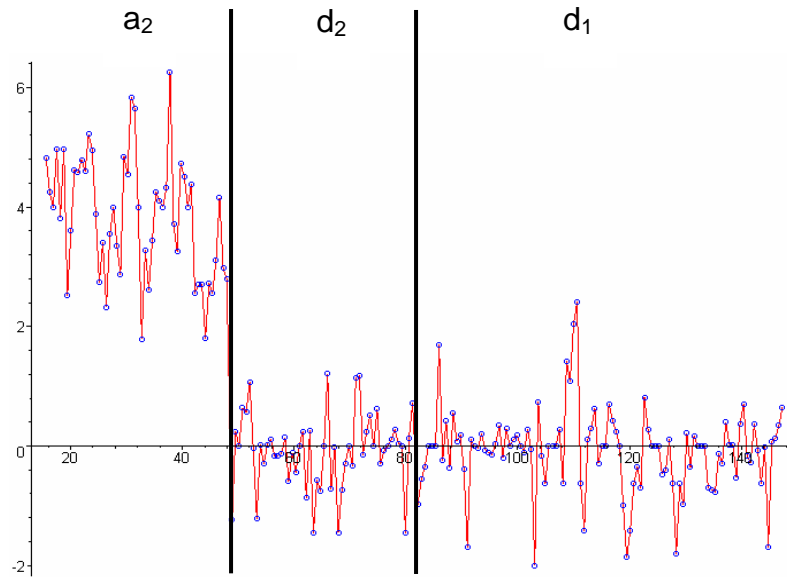


Figura 23 – Gráfico do segundo nível de compactação da função de curvatura, mediante a utilização da Transformada Wavelets de Haar, apresentada na figura 21

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

A Figura 23 apresenta o segundo nível de compactação, mostrando o sinal decomposto em três subsinais: a_2 , d_2 e d_1 . O subsinal de acumulação (a_2) concentra a maior parte da energia, ou seja, 91,9%, e é usado como base para a aplicação do terceiro nível de compactação, cuja representação está na Figura 24.

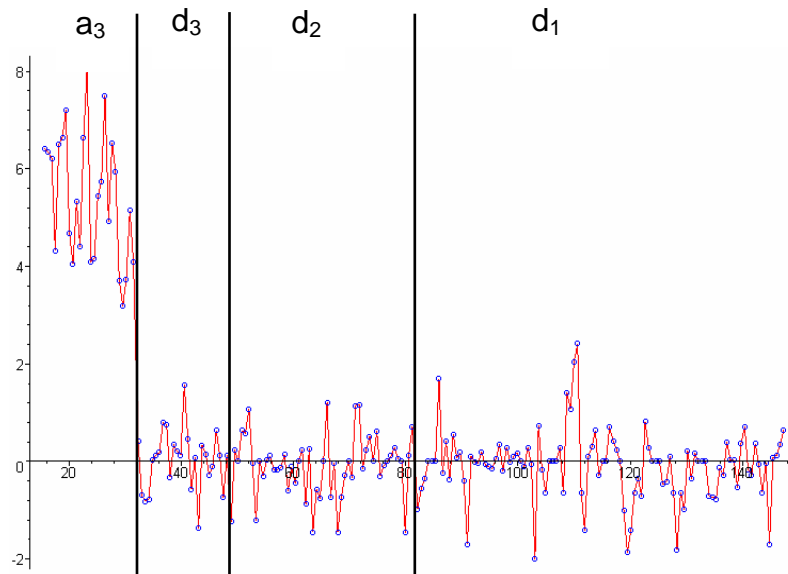


Figura 24 – Gráfico do terceiro nível de compactação da função de curvatura, mediante a utilização da Transformada *Wavelets* de Haar, apresentada na figura 21

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Na Figura 24, é mostrado o sinal decomposto no terceiro nível de compactação, formando os subsinais: a_3 , d_3 , d_2 e d_1 . O subsinal de acumulação (a_3) concentra a maior parte da energia, ou seja, 90,8% da energia acumulada do sinal original.

A aplicação das TDW mostrou que devido a quantidade de pontos utilizada em cada estilo, 206, os subsinais a_k apresentam menor acumulo da energia do que em situações anteriores.

Após a aplicação da TDW até terceiro nível de compactação nos trinta estilos, formou-se um banco de dados com os subsinais de acumulação do terceiro nível de compactação (a_3) dos gráficos da curvatura (alguns apresentados na Tabela 2). Aplicou-se, então, a Análise por Componentes Principais com o intuito de identificar os estilos da base de dados, tema sobre o qual se abordará no próximo item.

5.4 Identificação dos estilos

Visando a identificar os estilos, conforme foi mencionado anteriormente, formou-se uma base de dados que contém os subsinais de acumulação do terceiro nível de compactação. Através da comparação com essa base de dados e por meio

da utilização de um método de análise multivariada (PCA), os estilos puderam ser identificados.

O indicador da relação existente entre as variáveis é a covariância, que é uma análise de relevada importância na aplicação do PCA. A representação gráfica da matriz de covariância para os dados dos estilos de *Fashion Design* consta na Figura 25.

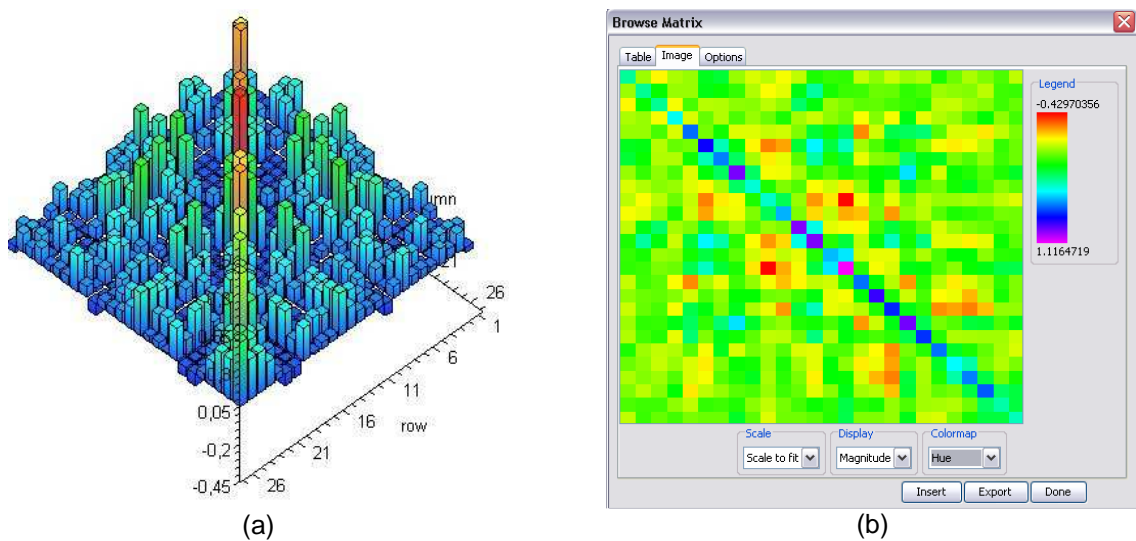


Figura 25 – (a) Matriz de covariância dos dados dos estilos de *fashion design*; (b) Imagem da vista superior da matriz de covariância.

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Analisando a figura 25, é possível verificar que os dados apresentam tanto covariância positiva quanto negativa, no entanto, nenhum apresenta covariância nula. A covariância positiva indica que duas variáveis movimentam-se no mesmo sentido, ou ambas aumentam ou diminuem. Logo, se a covariância for negativa, as variáveis movimentam-se em sentido contrário: quando uma aumenta a outra diminui e vice-versa.

Após encontrar a matriz de covariância, partiu-se para as demais etapas da implementação da Análise por Componentes Principais. Foram calculadas, então, os autovalores e autovetores da matriz de covariância.

Com intuito de identificar os autovalores mais representativos de forma gráfica e visualizá-los em um mesmo quadrante, realizou-se o cálculo de $y = \log(x+1)$, em que x representa os autovalores da matriz de covariância. O gráfico da representação dos autovalores aparece na sequência, na Figura 26.

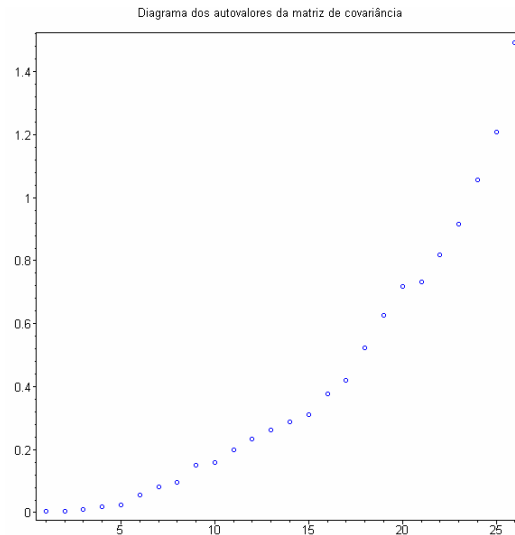


Figura 26 – Diagrama dos autovalores da matriz de covariância

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Com base no gráfico exposto na figura 26, é possível identificar os autovalores mais representativos. Foram escolhidos, então, três autovalores: os maiores e os respectivos autovetores para o agrupamento e posterior identificação, mediante a Análise por Componentes Principais.

Ao aplicar a Análise por Componentes Principais, utilizando os subsinais a_3 da função de curvatura, dos trinta estilos trabalhados, e com três componentes principais, verificou-se que os estilos se aglomeraram em três grupos, de acordo com a similaridade existente entre eles.

Na figura 27, é possível verificar o resultado da PCA, utilizando 3 Componentes Principais, em 3D. Os sinais organizaram-se em quatro grupos distintos, cada um recebendo uma coloração diferente: preto, azul, vermelho e verde.

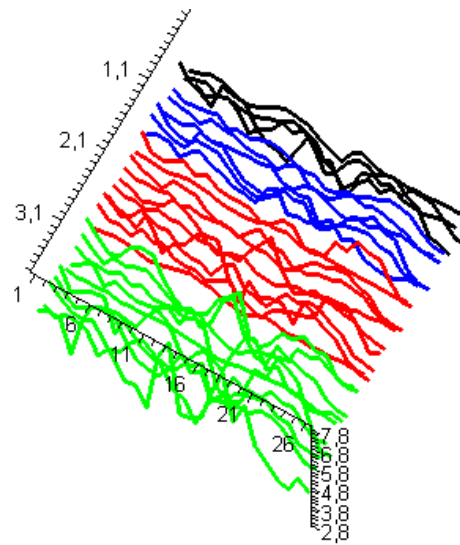


Figura 27 – Imagem do resultado da PCA em 3D

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Ao analisar o comportamento da PCA, para três sinais, de um mesmo grupo, verificou-se que os mesmos apresentavam grande semelhança. Tal fato é observado na figura que segue (Figura 28):

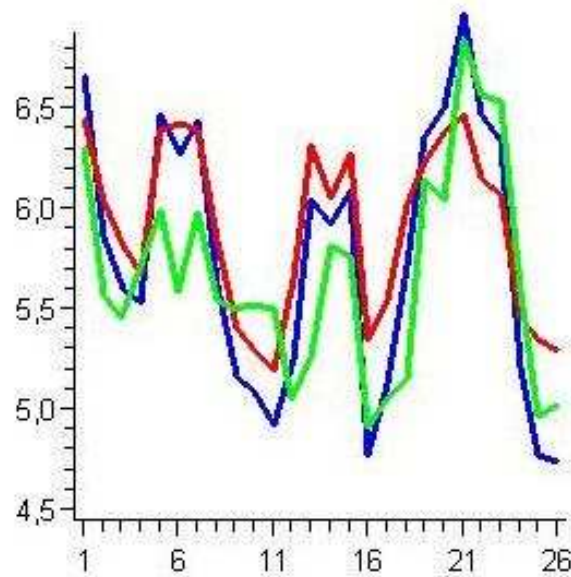


Figura 28 – Imagem do resultado para três sinais mediante a PCA

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Para uma melhor determinação, foi utilizada uma métrica definida por:

$$d(S_k, S_B) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |S_{A,j} - S_{B,j}|^2} \quad (53)$$

em que n representa o número de estilos utilizados, ou seja, 30. A distância foi calculada entre dois sinais do banco de dados, após ter sido aplicada a PCA.

Na figura 29, é possível verificar o gráfico da matriz obtido após calcular as distâncias entre subsinais:

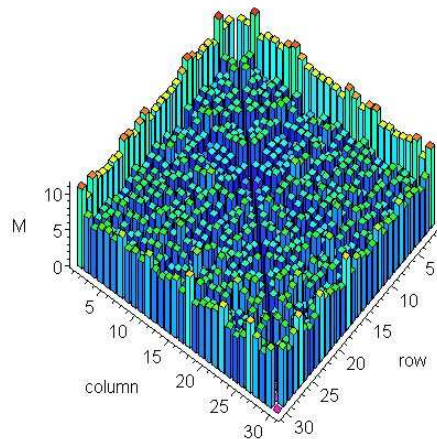


Figura 29 – Versão gráfica da matriz das distâncias tomadas entre os novos subsinais a_3 , após ter realizado a PCA

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Observando a imagem da Figura 29, não dá para ter uma determinação exata de todos os agrupamentos obtidos, mas, pode-se verificar apenas a separação de dois grupos: os estilos da borda e os do interior.

No entanto, ao analisar a imagem da vista superior da matriz dos resultados do PCA, nota-se, basicamente, a formação de quatro grupos distintos: o de coloração azul, verde, amarela, e vermelha conforme pode ser verificado na figura 30.

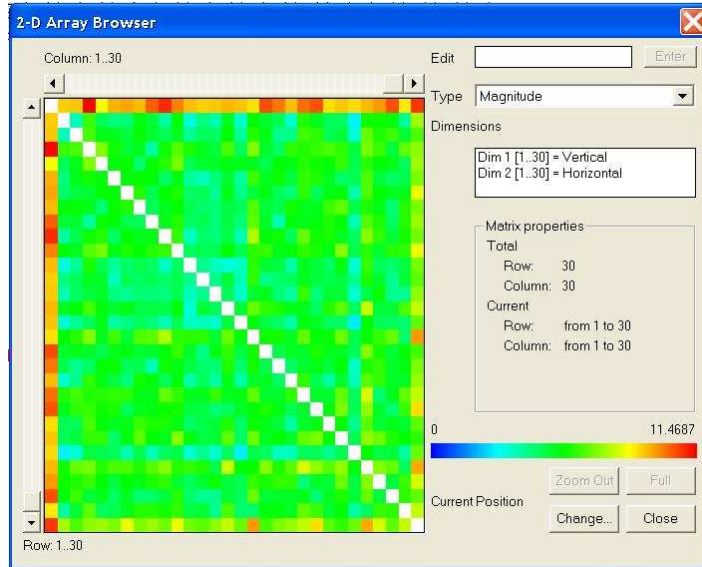


Figura 30 – Imagem da vista superior da matriz das distâncias tomadas entre os novos subsinais a_3 após ter realizado a PCA

Fonte: Elaborada pela autora.

Os resultados mostram que estilos como calças e saias agruparam-se devido à maior presença de cortes retos que, por sua vez, possuem curvatura nula. Os outros três grupos são formados, respectivamente, por estilos de vestidos, blusas e casacos. Tais agrupamentos ocorrem em função, basicamente, do comprimento da peça e das mangas.

Analisando os resultados obtidos com a PCA, verificou-se que devido à grande disparidade existente entre os modelos, estilos diferentes acabaram agrupando-se entre si. No entanto, os grupos estabelecidos apresentam características semelhantes como, por exemplo, é o caso do grupo formado por calças e saias que apresenta o gráfico da função de curvatura similar, em função da presença de traços retos nesses estilos. Tal fato é característico da PCA, visto que sua utilização além de condensar a informação, agrupa os resultados semelhantes.

Ao realizar a identificação de estilos de mesma categoria, sendo considerado para esta análise 10 estilos de diferentes blusas, verificou-se a formação de dois grupos distintos: um formado por blusas de manga curta e outro formado por blusas de manga longa, conforme pode ser visualizado na figura 31.

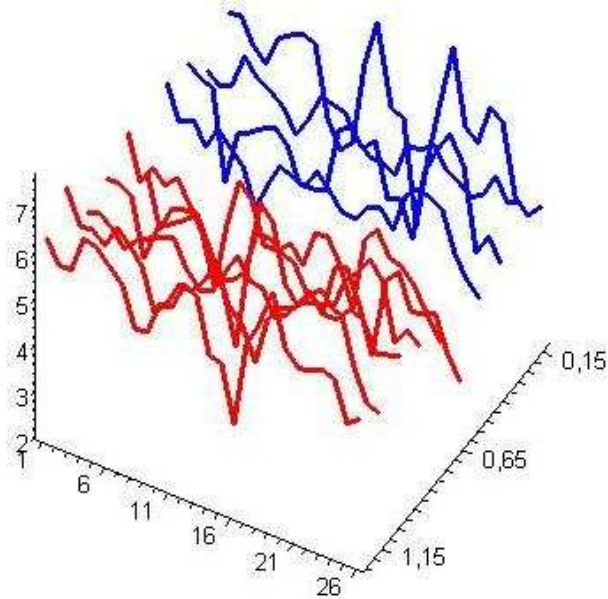


Figura 31 – Resultado da PCA para subsinais a_3 de estilos de diferentes blusas

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Analisando a imagem anterior, é possível verificar a formação de dois grupos diferentes: um representado pela cor azul, formado por estilos de blusas de manga curta, e outro de cor vermelha, constituído por estilos de blusas de manga longa. A PCA mostrou-se excelente para a identificação de diferentes blusas, agrupando corretamente os estilos.

Para validar o processo, aplicou-se o sinal da função de curvatura de um estilo de uma blusa, compactado até terceiro nível, a um conjunto formado por 8 sinais de estilos de dois grupos diferentes: um grupo formado por blusas e outro por vestido.

Na figura 32, apresenta-se o resultado obtido para a validação do método, onde o sinal representado pela cor preta é o sinal da função de curvatura que foi acrescentado ao conjunto de estilos.

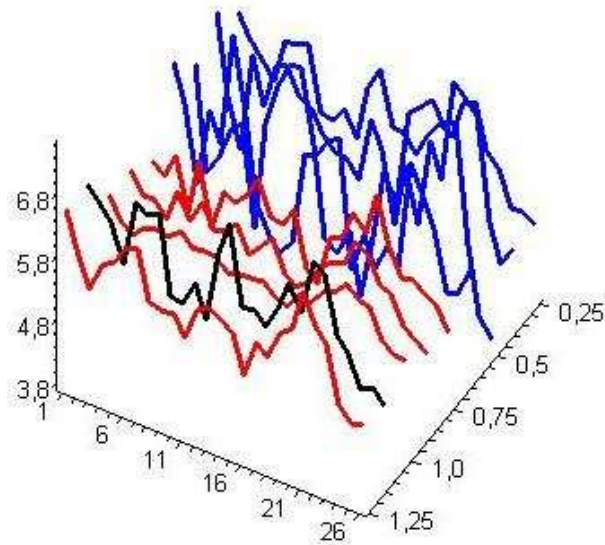


Figura 32 – Resultado da validação da classificação mediante PCA

Fonte: Elaborada pela autora, utilizando o sistema de computação algébrica Maple®.

Na figura 32 verifica-se que o estilo representado pela cor preta agrupou-se corretamente no grupo formado por estilos de blusas.

Em suma, a utilização do método de análise multivariada PCA permitiu identificar, satisfatoriamente, os estilos a partir dos subsinais a_3 da função de curvatura.

5.5 Reconstrução do sinal compactado

A partir do terceiro nível de compactação do sinal da função de curvatura é possível reconstruir a imagem inicial. Para isso, começa-se reconstruindo o sinal da função de curvatura, utilizando o terceiro nível de compactação do sinal e, a partir disso, é reconstruída a imagem original. A reconstrução dos estilos de *Fashion Design* não pode ser concluída devido à sua complexidade, ficando como tarefa a ser desenvolvida em momento oportuno.

5.6 Considerações sobre o capítulo

A aplicação da metodologia proposta apresentou excelentes resultados para os estilos de *Fashion Design*. Todavia, esse método pode, também, ser aplicado em

outras áreas, nas quais a análise de formas consiste em um elemento importante ao processo.

Encerrando o presente trabalho, apresentam-se, a seguir, as considerações finais obtidas e as possíveis extensões.

CONCLUSÕES E POSSÍVEIS EXTENSÕES

O presente estudo permite concluir que o método que combina noções de Geometria Diferencial, TDW e PCA mostrou-se satisfatório para a identificação de estilos de *fashion design*, atingindo o objetivo proposto de desenvolver um método de processamento de sinais na fronteira de superfícies bidimensionais e, posteriormente, identificar as formas utilizadas.

A criação do banco de dados, com os estilos escolhidos, ocorreu para servir de base para a identificação dos modelos de *fashion design*. A aplicação das TDW aconteceu com o objetivo de reduzir a dimensionalidade da base de dados, diminuindo, também, o custo computacional. A identificação foi possível mediante a utilização de PCA, em que os estilos foram agrupados de acordo com a similaridade existente entre eles.

A combinação da função de curvatura de uma imagem com as transformadas discretas *wavelets* unidimensionais, para a análise de formas, compactação, identificação e, posteriormente, a reconstrução da imagem original apresentou resultados satisfatórios. Dentre os benefícios encontrados por este método destaca-se: a fácil implementação computacional, o uso das transformadas discretas *wavelets* unidimensionais e seus procedimentos estatísticos e métricos, uma vez que são mais simples do que os aplicados nos casos bidimensionais.

O método proposto pode ser utilizado para a análise de curvas tridimensionais, pois as funções que garantem a unicidade, a curvatura e a torção são únicas, exceto com um movimento rígido (fazendo com que a curva reconstruída seja diferente da curva original).

A importância deste trabalho à área de *fashion design* reside no fato de que o método apresentado pode ser utilizado na identificação de adulterações, falsificações e defeitos de fábrica. Isso é possível por meio da análise dos sinais da curvatura, pois quando esses são compactados até o terceiro nível, as diferenças existentes, ficam mais evidentes e fáceis de serem constatadas.

O desenvolvimento de um *software* de fácil manipulação, que emprega essa metodologia, será um grande passo para a indústria de modo geral, pois aperfeiçoará a análise não só dos estilos de *fashion design*, como também será de interesse a outras áreas em que a análise de formas é importante. Uma das vantagens desse software será o custo computacional reduzido, uma vez que o método desenvolvido aplica as TDW, compactando os sinais, reduzindo, assim, a dimensionalidade da base de dados.

A possibilidade de identificar falsificações é um grande passo para a indústria em geral pois, atualmente, há um crescente número de imitações em diversos setores industriais como é o caso de roupas, calçados e acessórios, de inúmeras marcas conceituadas, as quais são livremente vendidas no mercado.

Além disso, essa metodologia pode ser utilizada para estudos em diversas aplicações na área da indústria, como, por exemplo, na indústria automobilística, em perfis aerodinâmicos, em indústrias de entretenimento (filmes e jogos), em computação gráfica, em imagens médicas, citando apenas alguns exemplos.

REFERÊNCIAS

BACHMAN, G.; NARICI, L.; BECKESTEIN, E.. *Fourier and wavelets analysis*. New York: Springer-Verlag, 2000.

BECKER, Camila. Identificação de fronteiras mediante a utilização do estudo da curvatura de estilos em *fashion design*. In: VIII *Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional*, 2008. Pelotas - RS. Anais do VIII Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional. CD-ROM.

BECKER, Camila; PAZOS, Rubén Edgardo Panta. Avanços na análise de formas na indústria do fashion design. In: XXIX *ENEGETP – Encontro Nacional de Engenharia da produção*. Anais do XXIX ENEGETP, 2009.

BECKER, C.; PAZOS, R. E. P. Estudo de estilos de fashion design aplicando transformada *wavelets* à função de curvatura. In: XXXII *CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, 2009, Cuiabá. Anais do XXXII CNMAC, 2009.

BECKER, Camila; PAZOS, Rubén Edgardo Panta. Identification of Patterns in Fashion Design Applying Wavelets Transform to the Curvature Function. In: 8th *Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications – DINCON*, 2009, Bauru – SP. Anais do 8th DINCON, 2009.

BURDA FASHION. *Patterns of the main collection*. Disponível em: http://www.burdafashion.com/en/Patterns/Main_Collection/1270778-1128998.html. Acesso em: 10 de abril de 2009.

COSTA, L. F.; CESAR, R. M. *Shape Analysis and Classification: Theory and Practice*, CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2000.

DAUBECHIES, I. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1992.

DELFOUR, M. C.; ZOLÉSIO, J. P. *Shapes and Geometries: Analysis, Differential Calculus, and Optimization*. USA: SIAM, 2001.

FLORIANI, L.; SPAGNUOLO, M. *Shape Analysis and Structuring*. Springer, 2007.

GIL, Antonio Carlos. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4 ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GRAP, Amara. *An Introduction to Wavelets*. Vol. 2. Num. 2. USA: IEEE Computational Science and Engineering, 1995.

HAIR Jr, J.; ANDERSON, R. E.; TATHAM, R. L.; BLACK, W. C. *Análise multivariada de dados*. 5 ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

KREYSZIG, Erwin. *Differential Geometry*. USA: Dover Science, 1991.

MANLY, Bryan F. J. *Métodos Estatísticos Multivariados: uma introdução*. 3 ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

MORGANO, M. A.; QUEIROZ, S. C. N.; FERREIRA, M. M. C. *Aplicação da Análise Exploratória na Diferenciação de Vegetais*. 1999. In: <http://chipre.iqm.unicamp.br/~marcia/Pub24.pdf>. Acesso: 08 de janeiro de 2009.

OLIVEIRA, Hélio Magalhães de. *Análise de sinais para engenheiros: uma abordagem via Wavelets*. Rio de Janeiro: Brasport, 2007.

OPREA, J.. *Differential Geometry and its Applications*. USA: The Mathematical Association of America, 2007.

PAZOS, Ruben Panta. *Teoría de Wavelets y sus aplicaciones*. In: XXV Colóquio de la Sociedad Matemática Peruana, 2007, Lima, Peru. Documentos de XXV Coloquio de la Sociedad Matematica Peruana. Lima, Peru : Sociedad Matemática Peruana, 2007.

_____. Estudo da Curvatura dos Aerofólios Gerados pela Transformação Generalizada de Joukowski. In: *XII Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional*, 2008. Foz do Iguaçu. Anais do XII Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional. CD-ROM.

PICADO, Jorge. *Apontamentos de Geometria Diferencial*. Portugal: Universidade de Coimbra, 2006.

POLIKAR, Robi. *The Story of Wavelets*. USA: IEEE Computational Science and Engineering, 1999.

STRUJK, Dirk J. *Geometria Diferencial Clasica*. 3 ed. Madrid: Aguilar, 1973.

SMITH, Lindsay I. *A tutorial on Principal Components Analysis*. 2002. Disponível em: http://www.cs.otago.ac.nz/cosc453/student_tutorials/principal_components.pdf. Acesso: 02 de fevereiro de 2009.

VALLADARES, Renato J. C. *Introdução à Geometria Diferencial*. Niterói: UFF, 1979.

WALKER, James S. *A Primer on Wavelets and their Scientific Applications*. Boca Raton, Florida, USA: Chapman & Hall / CRC, 1999.

ANEXO A – Artigos publicados durante o período de realização do Mestrado

Evento	Título do trabalho	Autores	Ano de Publicação
11 th PACAM	Airfoils classification using principal components analysis (PCA)	Camila Becker e Rúbem E. Panta Pazos	2010
8 th DINCON	Identification of patterns in fashion design applying wavelets transform to the curvature function	Camila Becker e Rúbem E. Panta Pazos	2009
XV Eremat Sul	Aplicando <i>Wavelets</i> a Sinais Unidimensionais e Bidimensionais em Softwares como Matlab, Maple e Microsoft Excel	Camila Becker e Rúbem E. Panta Pazos	2009
XXXII CNMAC	Estudo de estilos de <i>fashion design</i> aplicando transformada <i>wavelets</i> à função de curvatura	Camila Becker e Rúbem E. Panta Pazos	2009
XXIX ENEGEP	Avanços na análise de formas na indústria do <i>fashion design</i>	Camila Becker e Rúbem E. Panta Pazos	2009
VIII ERMAC	Identificação de fronteiras mediante a utilização do estudo da curvatura de estilos em <i>fashion design</i>	Camila Becker e Rúbem E. Panta Pazos	2008
XIV SIC e XIII JEPE	Análise de formas mediante <i>wavelets</i> e a função de curvatura	Camila Becker e Rúbem E. Panta Pazos	2008
XXXI CNMAC	Método de Gradiente Conjugado na otimização de problemas modelados na catalização de polímeros	Camila Becker, Rúbem E. Panta Pazos e Geraldo Lopes Crossetti	2008

XXVIII ENESEP	Métodos de otimização no processo de polimerização de olefinas	Camila Becker, Rúben E. Panta Pazos e Geraldo Lopes Crossetti	2008
XII ERMAC	Determinação computacional de áreas e volumes de tumores mediante imagens	Camila Becker e Rúben E. Panta Pazos	2008
XIII JEPE	Novos avanços na modelagem e otimização no processo de catalisação dos polímeros	Camila Becker, Rúben E. Panta Pazos e Geraldo Lopes Crossetti	2008
IV Bienal da SBM	Modelagem e análise do processo de catalisação de polímeros	Camila Becker, Rúben E. Panta Pazos e Geraldo Lopes Crossetti	2008

ANEXO B – Artigo publicado no VIII Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, Pelotas, 2008

Identificação de fronteiras mediante a utilização do estudo da curvatura de estilos em *fashion design*

Camila Becker¹, Rubén Edgardo Panta Pazos²

¹ Programa de Pós-Graduação em Sistemas e Processos Industriais – Mestrado
Universidade de Santa Cruz do Sul (UNISC)
96815-900 – Santa Cruz do Sul – RS – Brasil

² Programa de Pós-Graduação em Sistemas e Processos Industriais – Mestrado e
Departamento de Matemática – Universidade de Santa Cruz do Sul (UNISC)
96815-900 – Santa Cruz do Sul – RS – Brasil

camila_becker_87@hotmail.com, rpazos@unisc.br

Resumo. Neste trabalho analisam-se os estilos de *fashion design* utilizando a estudo da curvatura. Desta forma, a função curvatura representa uma espécie de assinatura do estilo, e pode-se aplicar as transformadas discretas wavelets visando compactar estas funções, para uma posterior classificação com uma base de dados. A reconstrução do estilo, a partir da função de curvatura, é obtida mediante um sistema de computação algébrica, MAPLE.

Abstract. In this work the styles of *fashion design* are analyzed using the study of the curvature function. In such a way, the curvature function represents a species of signature of the style, and can be applied discrete wavelet transform aiming at to compact the curvature function, for a posterior classification with a database. The reconstruction of the style from the curvature function is gotten by means of an algebraic computer system, MAPLE.

Palavras Chave. *Fashion design*, wavelets, análise de curvatura.

1. Introdução

A abrangência da área de *fashion design* é ampla, pois envolve a criação de estilos para diversos ramos como, por exemplo, para o vestuário, para acessórios e para móveis. No entanto, nesta área não existe métodos simples para identificação de formas, o que permite a adulteração e a imitação de estilos.

Este trabalho tem por objetivo utilizar um método consistente visando obter a noção de curvatura de curvas parametrizadas no plano, e aplicar as transformadas discretas *wavelets* unidimensionais para a identificação das formas que se apresentam na área de *fashion design*. No desenvolvimento deste trabalho foi utilizada uma figura de um estilo, uma blusa, que está representada na imagem abaixo.



Figura 1. Corte a ser processado.

A metodologia a ser utilizada consiste no seguinte: Dispondo de uma imagem de um estilo de *fashion design* (uma peça de roupa), iremos processá-la em um *software* de edição gráfica, com o intuito de obter pontos da fronteira da imagem. Com esses pontos, iremos reconstruí-la para posteriormente estabelecer uma única parametrização do contorno da imagem. A partir disso, podemos calcular a função de curvatura do estilo. Com essa função, o próximo passo consiste em aplicar as transformadas discretas *wavelets* unidimensionais, visando compactar a função de curvatura. Posteriormente iremos identificar a curva, mediante comparação com um banco de dados.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Na seção seguinte são apresentadas algumas considerações sobre *fashion design*. Na seção 3 são esboçadas algumas noções sobre a função de curvatura, bem como o teorema fundamental das curvas. Na seção 4, são apresentadas algumas considerações sobre as transformadas discretas *wavelets*. Os resultados obtidos são esboçados na seção 5. Finalmente são dadas algumas conclusões e possíveis extensões do trabalho.

2. *Fashion design*

Fashion design é uma área muito ampla que envolve a criação de estilos para diversos ramos como, por exemplo, para o vestuário e acessórios. Verifica-se que os estilos sofrem influências sociais e culturais de um determinado tempo. Difere-se de desenhar roupas porque seu núcleo de produção possui construção definida em duas estações, outono/inverno e primavera/verão.

Antigamente, o projeto e a criação de vestuário eram realizados por costureiras. O primeiro estilista que surgiu foi Charles Frederick Worth (1826-1895), em Paris. O sucesso dele era tal que muitas casas de *design* começaram a empregar artistas para

esboçar ou pintar projetos para vestuários. As imagens eram mostradas aos clientes e se o cliente gostasse do desenho, solicitava a sua produção, o que era muito mais barato do que produzir um vestuário real de amostra. Assim, a tradição de esboçar desenhos do vestuário começou como uma economia.

Durante o século XX as formas começaram a cruzar limites internacionais com rapidez. Os estilos ocidentais populares, por exemplo, foram adotados pelo mundo inteiro, e muitos estilistas tiveram um impacto profundo no estilo.

Existem três principais tendências no *fashion design*: a alta costura, o mercado das massas e uma intermediária a essas duas.

Abaixo, podemos ver alguns estilos pertencentes à alta costura.

- Calvin Klein. Estilista americano.

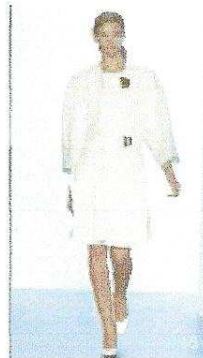


Figura 2. Imagem de um vestido da coleção de Calvin Klein.

- Gianni Versace. Estilista italiano.



Figura 3. Imagem de um vestido da coleção de Versace.

- Issey Miyake. Estilista japonesa.



Figura 4. Imagem de um vestido da coleção de Miyake.

3. Função de Curvatura

Consideremos uma curva plana em coordenadas cartesianas parametrizada pelo seu comprimento de arco s , então $\sigma(s) = [x(s), y(s)]$. O vetor tangente unitário à curva no ponto genérico P é dado por $\frac{d\sigma}{ds} = [x'(s), y'(s)]$.

Assim, é possível considerar que a curvatura da curva mede a variação de seu vetor tangente em seu deslocamento ao longo dela, o que conduz a as seguintes definições:

- Denomina-se *vetor de curvatura* em P ao vetor $\frac{d^2\sigma}{ds^2} = [x''(s), y''(s)]$;
- Define-se a *curvatura* k no ponto P como o módulo do vetor de curvatura em P .

Logo, o vetor curvatura é ortogonal ao vetor tangente à curva; ou seja, $\frac{d^2\sigma}{ds^2} = k\hat{h}$, onde

\hat{h} é o vetor normal unitário em P . Esta equação chama-se primeira fórmula de Frenet. (OPREA, 2007)

Teorema Fundamental das Curvas. Sejam $\kappa(s)$ e $\tau(s)$, ($s > 0$) duas funções analíticas dadas. Então existe uma única curva (única até sua posição em \mathbb{R}^3) tal que s é o comprimento de arco, $\kappa(s)$ a curvatura e $\tau(s)$ a torção. Para uma curva parametrizada

no espaço \mathbb{R}^3 , $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, a curvatura é dada por $\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}$ e a torção é dada por $\tau = \frac{[\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''] \cdot \mathbf{r}'''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^3}$. Deve-se salientar que para as curvas no plano a torção é nula.

Conforme o Teorema Fundamental das Curvas é possível reconstruir uma curva plana a partir exclusivamente de sua função de curvatura. A curva reconstruída difere da curva original por um movimento rígido. (OPREA, 2007)

4. Transformadas Discretas Wavelets

Wavelets são funções obtidas a partir da *wavelet* mãe $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$. O alvo está em obter uma família de funções base para descrever outras funções. Esse termo surgiu na literatura francesa, por Grossman e Morlet, que primeiro denominaram “*ondelette*” referindo-se às “ondas pequenas”. A terminologia inglesa *wavelet* deriva do vocábulo francês. (FARIA, 1997)

As *wavelets* são funções matemáticas que separam dados em suas diferentes componentes de frequências e extraem estas componentes com uma resolução adequada à sua escala. Elas têm vantagens em relação à análise de Fourier, pois esta última analisa o sinal em forma global, acarretando uma representação mais pobre para sinais que contêm descontinuidade e variações bruscas. (OLIVEIRA, 2007)

Seja $\psi : D \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função de tipo $L_2(\mathfrak{R})$, denominada função geradora, de tal forma que as funções $\psi_{a,b}$ definidas por transformações de dilatação (ou contração) e de translação a partir de ψ

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{|a|^{1/p}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad \text{com } p > 0, a, b \in \mathfrak{R}, a \neq 0 \quad (1)$$

formem uma base de funções. A família de *wavelets* são as funções $\psi_{a,b}$, sendo com frequência o valor $p = 2$ o mais usado. (PAZOS, 2007)

Também se emprega a fórmula geradora $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$, com $j, k \in \mathbb{Z}$.

5. Resultados Obtidos

Neste item serão apresentados os resultados obtidos com a utilização da figura 1, que se trata de um corte de uma peça de roupa, uma blusa. Seleccionada a imagem, foi realizado o próximo passo que consiste na determinação de pontos na fronteira da imagem a partir da utilização de um software de edição gráfica. Com estes pontos, foi possível reconstruir a imagem original.

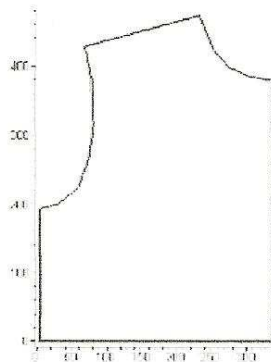


Figura 5. Imagem da reconstrução da figura 1 com a utilização do sistema de computação algébrica *Maple*.

Durante o desenvolvimento do trabalho foi utilizado o *software Maple*, que é um sistema de computação algébrica. Abaixo, é apresentada uma imagem do ambiente de trabalho deste sistema de computação algébrica.

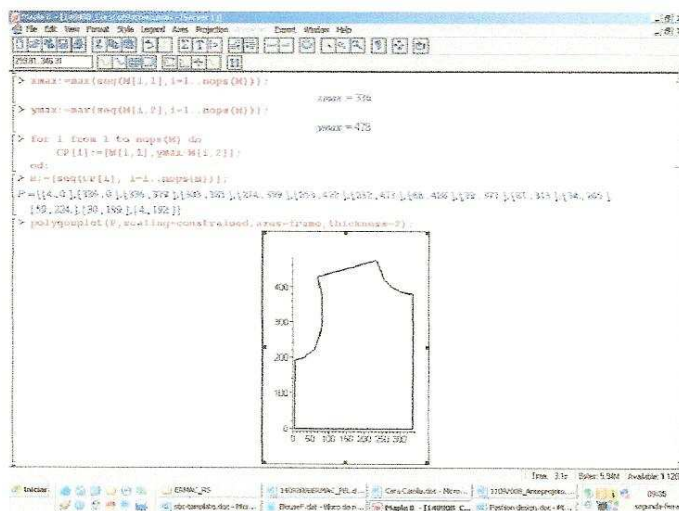


Figura 6. Imagem da folha de trabalho no *software Maple*.

O próximo passo consiste em estabelecer a parametrização do contorno da imagem. A parametrização da parte noroeste está representada na figura abaixo. Esta parametrização pode ser aprimorada mediante a utilização de *splines cúbicos*.

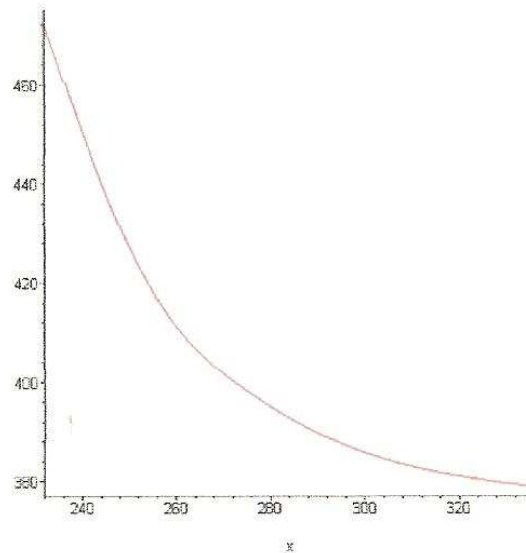


Figura 7. Parametrização de parte do estilo selecionado.

Com a parametrização da imagem é possível calcular, agora, a função de curvatura do corte utilizado.

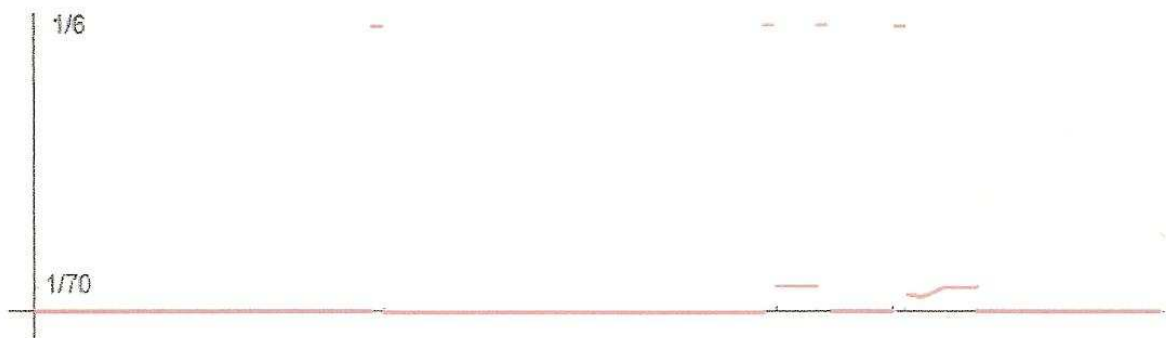


Figura 8. Função de curvatura da imagem.

O próximo passo consiste em aplicar as transformadas discretas *wavelets* de tipo unidimensional, visando compactar a função de curvatura. Abaixo é apresentada uma seqüência incluindo os resultados obtidos mediante a utilização da transformada discreta *wavelets* Haar.

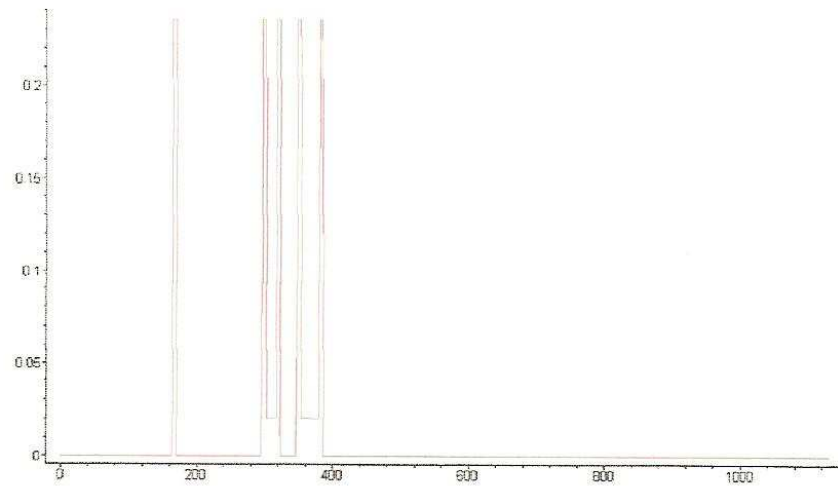


Figura 9. Nível 1 da transformada discreta *wavelets* Haar.

Nesta imagem é possível verificar que ocorre uma compactação no subsinal a_1 , que a primeira metade da transformada.

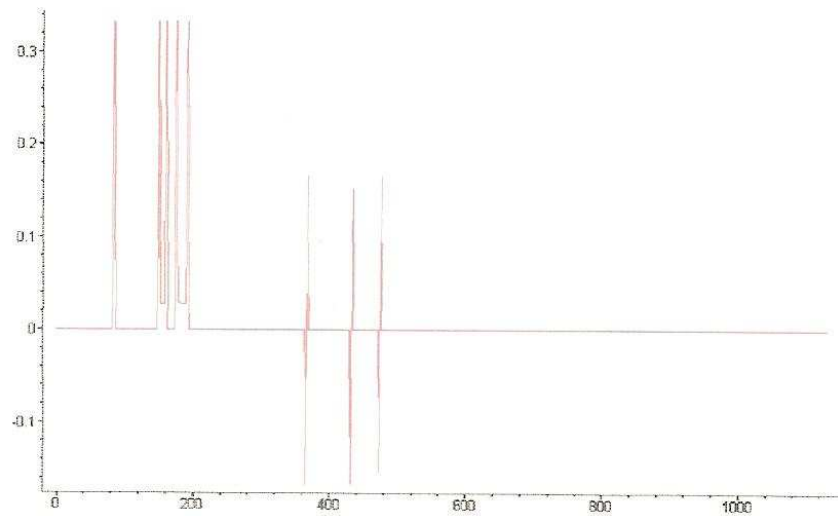


Figura 10. Nível 2 da transformada discreta *wavelets* Haar.

Na figura 10 é possível verificar que a compactação também ocorre na primeira metade da transformada, no subsinal a_2 .

Em relação à energia, deve salientar-se o seguinte:

1. A energia é definida como:

$$Ener(S) = \sum_{k=1}^{k_{\max}} S_k^2 \quad (2)$$

2. No caso particular do sinal da função de curvatura da blusa (parte frontal), a energia acumulada no subsinal a_1 foi 99,99% e no subsinal a_2 foi 90,64%.

Duas características são satisfeitas:

- A energia se conserva: $Ener(S) = Ener(a_1) + Ener(d_1)$; e
- A energia se acumula em a_1 .

Posteriormente iremos identificar a curva, mediante comparação com um banco de dados.

6. Conclusões

Neste trabalho se analisou o enfoque de utilizar o estudo da função de curvatura e as transformadas discretas *wavelets* unidimensionais como uma outra maneira para procurar classificar os estilos de cortes. Normalmente utilizam-se as transformadas *wavelets* bidimensionais para essa classificação.

O teorema fundamental das curvas permite garantir a reconstrução da imagem original a partir da sua função de curvatura, exceto com um movimento rígido.

Referências

Alencar, H.; Santos, W. (2003) “Geometria Diferencial das Curvas Planas”.

In: http://www.im.ufal.br/posgraduacao/posmat/download_files.pdf.

Faria, R. R. A. (1997) “Aplicação de *Wavelets* na Análise de Gestos Musicais em Timbres de Instrumentos Acústicos Tradicionais”. Escola Politécnica da USP, São Paulo, Brasil.

Oliveira, H. M. (2007) “Análise de sinais para engenheiros: uma abordagem via *Wavelets*”. Brasport, Rio de Janeiro.

Oprea, J. (2007) “Differential Geometry and its Applications”. The Mathematical Association of America, USA.

Pazos, R. P. (2007) “Teoria de *Wavelets* y sus aplicaciones”. In: XXV Colóquio de la Sociedad Matemática Peruana, Lima, Peru.

ANEXO C – Artigo publicado no 8th Brazilian Congress on Dynamics, Control and Applications, Bauru, 2009



DINCON'09
8th BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS,
CONTROL AND APPLICATIONS
MAY 18-22, 2009



IDENTIFICATION OF PATTERNS IN FASHION DESIGN APPLYING WAVELETS TRANSFORM TO THE CURVATURE FUNCTION

Camila Becker¹, Rubén Edgardo Panta Pazos²

¹ Post Graduation in Industrial Systems and Processes - University of Santa Cruz do Sul, Santa Cruz do Sul, Brazil, camila_becker_87@hotmail.com

² Post Graduation in Industrial Systems and Processes and Department of Mathematics, - University of Santa Cruz do Sul, Santa Cruz do Sul, Brazil, rpazos@unisc.br

Abstract: The aim of this paper is to analyze different styles in *fashion design* using discrete wavelet transform of the curvature of the pattern. The curvature function represents a kind of signature of style, and it is applied the *wavelet* transform in order to compress the curvature function for a future classification with database. The reconstruction of style from the function of curvature is obtained by an computer algebraic system, Maple.

Keywords: *Fashion design, wavelets, curvature function.*

1. INTRODUCTION

Frequently, the fashion design involves the creation of styles for various areas, such as clothing, accessories and furniture, and there not exist simple methods for the identification of styles, allowing the adulteration and imitation of models from remarkable stylists. Generally, the forms are basically manipulated and analyzed by ready software, and in case compaction happens, they use the two-dimensional wavelets transforms.

However, in this paper is presented a method of analysis of forms using notions of differential geometry, in order to identify the curvature functions of parameterized paths, and then it is applied the discrete wavelets transforms technique. For the implementation of this proposal, it was used an image of a style, such as the blouse of Figure 1.

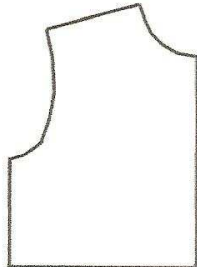


Figure 1: Style to be processed with the proposed method.

This paper is organized as follows. In the following section it is presented the methodology proposed. In section 3, some considerations are outlined on the field of fashion design. Section 4 is dedicated to present some ideas on the role of curvature and the fundamental theorem of curves. In the following section, there were included some

considerations about the discrete wavelets transform. Results are outlined in section 6. Finally some conclusions are given and possible extensions of this work.

2. METHODOLOGY

The methodology used is the following: with an image of fashion design pattern and an image processor, there are obtained points of the image from the border. These points are rebuilt in order to establish a unique parameterization of the image. Then, it can be calculated the curvature function of the style, so it can applied the discrete wavelet transform, compacting the curvature function. Later we will identify the curve by comparison with a database.

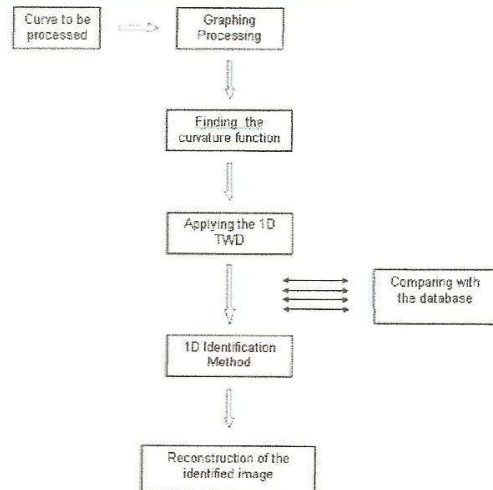


Figure 2: Diagram of the method proposed.

3. FASHION DESIGN

Fashion design is a very broad area involving the creation of styles in different areas, such as for clothing and accessories.

In the clothing industry, it is known that the mass production of clothes became possible in 1829 with the invention of the sewing machine, and the first productions were men's clothes and military uniforms. In 1921, with the

advent of electric sewing machine, the production of clothing was a remarkable increasing in the production of both male as female clothes. In recent years, new technologies were developed for this production area, such as laser cutting of molds to the grading and computerized systems for monitoring the distribution and sales. All these tools lead the reduction of time in production chain and improvement of the quality of the final product.

Previously, the design and creation of clothing were done by seamstresses. The first fashion designer was Charles Frederick Worth (1826-1895) in Paris, as the proper fashion design history recognizes; her success was such that many houses design began to hire artists to sketch or paint designs for clothing. The images were shown to clients and if the client liked of the design request, the production which was much cheaper than producing an actual garment of sample. Thus the tradition of designers sketching of clothing began as an economy.

During the twentieth century different styles began to cross international boundaries with intensity and high velocity. The popular Western styles, for example, were adopted by the entire world, and many designers had a profound impact on style. Thus, it seems that the styles have social and cultural influences in a lapse of time.

One of the branches in the fashion design world is the *haute couture*, including the work of various designers, as illustrates the Figures 3 to 5.



Figure 3: Picture of clothes from the collection of Calvin Klein.



Figure 4: Image of clothes from the collection of Gianni Versace.



Figure 5: Image of clothes from the collection of Giorgio Armani.

4. CUBIC SPLINES

Approximation by piecewise polynomials, the so-called spline, it is very convenient, since they have good properties for approximation, convergence and stability with respect to rounding errors. Let be a function $s(x)$; it is said an spline of degree n associated with the partition $\Pi = a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$ of $[a, b]$, if:

- i) $s(x)$ is a polynomial of degree n in each subinterval (x_{i-1}, x_i) ;
- ii) $s(x)$ has $(n-1)$ continuous derivatives at each x_i in (a, b) . (Cunha, 2000).

The cubic spline functions are used because they are smooth functions to fit the data and do not produce changes in behavior with interpolations. This behavior of oscillations is frequently caused by the use of interpolated polynomial of high degree, thus increasing the truncation error.

The function cubic spline (S) defined on an interval $[a, b]$ has the following properties:

- (i) $S(x_i) = y_i, 0 \leq i \leq n$.
- (ii) $S(x), S'(x)$ and $S''(x)$ are continuous functions in $[a, b]$.
- (iii) In each subinterval $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n, S(x)$ is a cubic polynomial, i. e., $S(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3, x_{i-1} \leq x \leq x_i$.
- (iv) $S^{(j)}(x_i^+) = S^{(j)}(x_i^-), i = 1, 2, \dots, n-1, j = 0, 1, 2$, for the condition of continuity. (Sperandio, 2003)

The procedure with cubic spline gives sufficient flexibility to ensure that the interpolation is not only continuously derivable, but it has continuous second derivative in $[a, b]$. (Burden, 2003)

Figure 6 gives an illustration of an interpolation using cubic splines.



DINCON'09

8th BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS,
CONTROL AND APPLICATIONS
MAY 18-22, 2009

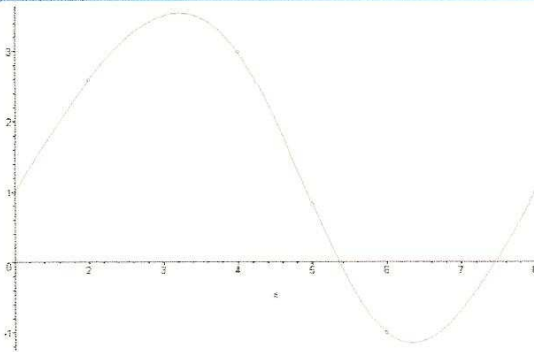


Figure 6: Interpolation using cubic splines, performed with the computer algebraic system Maple with four points.

5. CURVATURE FUNCTION

5.1 Parametrized curves

A continuous curve in the plane \mathfrak{R}^2 is defined as the continuous mapping $\alpha: I \rightarrow \mathfrak{R}^2$, whose domain is the interval $I \subset \mathfrak{R}$. The mapping α , defined by $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ is continuous, if each coordinate function $x, y: I \rightarrow \mathfrak{R}$ is a continuous function. The set of values $C = \{\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in I\}$, is called the *trace* of α . Note that in this case, α is called a *parameterization* of C and t represents the parameter of the curve α . (Alencar, 2003)

5.2 Curvature Function

Let be σ a plane curve in Cartesian coordinates parameterized by its arc length s , i.e. $\sigma(s) = [x(s), y(s)]$. The unit vector tangent to the curve in the generic point P is given by $\frac{d\sigma}{ds} = [x'(s), y'(s)]$.

The curvature of the curve is a measure of the variation of its tangent vector along its trajectory. They are given the following definitions:

- It is called the *curvature vector* at P the vector:
 $\frac{d^2\sigma}{ds^2} = [x''(s), y''(s)]$

- The curvature k at point P is defined as the module of the curvature vector at P. Therefore, the curvature vector is orthogonal to the tangent vector to the curve, i.e., $\frac{d^2\sigma}{ds^2} = k\bar{n}$, where \bar{n} is the unit normal vector at P. This equation is called the *first Frenet formula*. (OPREA, 2007)

5.2 Fundamental Theorem of Curves

Given $\kappa(s)$ and $\tau(s)$, (for $s > 0$) two analytical functions. Then, there is a single curve (unique up to a rigid transformation in \mathbb{R}^3) defined by $\kappa(s)$ the curvature and $\tau(s)$ torsion, being s the arc length of the curve. For a parameterized curve in the space \mathbb{R}^3 , $r = r(s)$, the curvature is given by:

$$\kappa = \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^3} \quad (1)$$

The torsion is given by:

$$\tau = \frac{[r' \times r''] \cdot r'''}{\|r' \times r''\|^3} \quad (2)$$

It should be noted that for the curves in the plane the torsion is zero.

The Fundamental Theorem of Curves express that a plane curve can be rebuild only from its curvature function. The reconstructed curve differs from the original curve by a rigid motion. (OPREA, 2007)

6. DISCRETE WAVELET TRANSFORM

The Fourier analysis was the main tool in signal processing for about two centuries. But many signals in diverse areas do not fit with the conditions for Fourier series or Fourier transform. Signals with abrupt variations require a powerful theory, and so appears the wavelet theory

The French geophysicist Jean Morlet around 1980 appointed to the study of wavelet functions with compact support in both time and frequency. This happened because of the seismic data studied that had sudden changes of frequencies in which the Fourier analysis was not appropriate.

Several mathematicians contributed with Morlet's research. Among these researchers are: Grossman, who provided the mathematical foundations, giving rise to the Theory of Wavelets, which represents the intersection and generalizations of concepts from several areas; Alfred Haar, found the first family of wavelets, generated by the orthogonal functions so-called Haar functions (1910), Ingrid Daubechies, who created ortonormal families of wavelets with compact support, and Stephane Mallat, associating the wavelet transform with the concept of special decomposition of a signal (multiresolution), creating an algorithm for decomposition of signals, the so-called algorithm of Mallat.

The development of wavelets has occurred independently in various fields, such as mathematics, quantum physics, electrical engineering and seismic geology.

Wavelets are "small waves", obtained from the mother wavelet $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ (Walker, 1999). The main objective is to obtain a family of functional basis in order to describe other features. Grossman and Morlet were the first that called "ondelette" these functions.

The *wavelets* are mathematical functions that divide data in different frequencies and extracting each component with a resolution adequate to its scale. They have advantages in relation to the Fourier analysis; it is ultimately the signal as a whole, causing a poor representation for signals that contain discontinuities and abrupt variations. (Oliveira, 2007) The *wavelets* allow the use of different scales according to the analyzed signal.

Is $\psi : D \rightarrow \mathfrak{R}$ a function of type $L_2(\mathfrak{R})$, called generating function, so that the functions $\psi_{a,b}$ transformations defined by the expansion (or contraction) and translation from ψ

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{|a|^{1/p}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \text{ with } p > 0, a, b \in \mathfrak{R}, a \neq 0 \quad (3)$$

form a functional basis. The family of wavelets are functions $\psi_{a,b}$, and often the value $p=2$ is used. (Pazos, 2007)

The *wavelet* discrete transform is, currently, a modern instrument that enables the unification of a large number of techniques for analysis and processing.

The *wavelets* have a wide range of applications, such as astronomy, the acoustics, nuclear engineering, the encoding of sub-bands, the signal processing and imaging, in neurophysiology, in music, magnetic resonance images, Voice discrimination, optics, fractals, turbulence, earthquake prediction, radar, human vision, and has also applications in other areas of mathematics.

7. SIGNAL ENERGY

One of the aims of the application of *wavelets* is the reconstruction of the processed signal from its compaction. For this, the energy of the signal plays a key role, since to get the reconstruction is needed the accumulation of energy in sub-signals of accumulation, or a_k .

The energy of signal S is defined as:

$$Ener(S) = \sum_{k=1}^{k_{max}} S_k^2 \quad (4)$$

There are two remarkable features of wavelet transform with respect to energy:

1. First, is the conservation of energy, *i.e.* in each level, the sum of all energies of sub signals, of averages and details, must be the same as the energy of the original signal:

$$\text{If } \langle a_n, |d_n|, |d_{n-1}|, \dots, |d_1| \rangle \text{ is the } k\text{-level decomposition, then} \\ E(S) = E(a_n) + E(d_n) + E(d_{n-1}) + \dots + E(d_1)$$

2. For an efficient application the energies are accumulated in the average signals, a_k .

In order to illustrate these concepts, let be $f(x) = 4x(1-x)$ an elementary function as shown in Figure 7 as an example of compression of a signal given by the original function, until the third level of compaction.

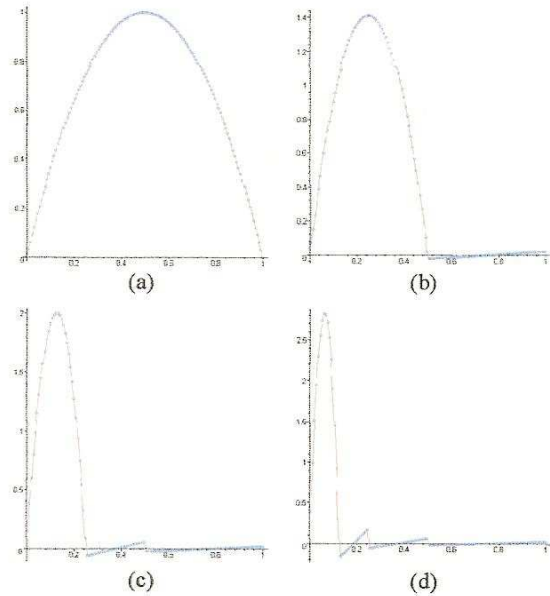


Figure 7: Effect of application of the Haar transform on the original signal (a) processed by the application of wavelets to the third level of compaction. Figure (b) first level of compaction, figure (c) the second level and figure (d) the third level.

In this case, the sub-signal a_1 accumulated 99,98% of the energy of the original signal. With regard to detail sub-signal, *i.e.* d_1 , accumulated 0,02% of the energy of the original signal.

Furthermore, the sub-signals a_2 and a_3 accumulated 99,92% and 99,68%, respectively, of the energy of the original signal. In Figure 8, it can be seen both the plots of the original signal energy and the energy accumulated of the transformed signals (up to level third level).

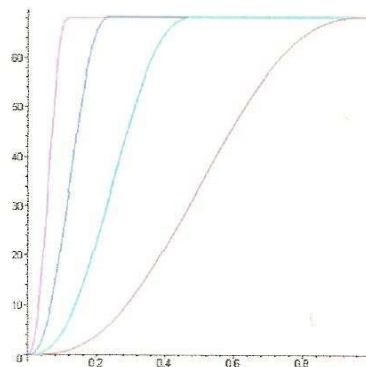


Figure 8: Plots of the accumulated energy of the original signal (in red), of the energy of the first level of Haar transform (in cyan), of the energy of the second level (blue), and finally, the energy in the third level (magenta).

8. RESULTS AND DISCUSSION

In the sequence there are presented the results obtained for the processing of a style, in this case as an illustration, the front of a blouse, which is shown in Figure 1.



DINCON'09

8th BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS,
CONTROL AND APPLICATIONS
MAY 18-22, 2009



The first step is the choice of the image to be processed; in order to accomplish the other steps (graphic processing, parameterization, calculation of the curvature function, and finally, application of discrete wavelet transform). All of the details are described now.

In the development of this proposal, it was employed an graphic processor¹ for determining the pixel position of the border of the image. Then it was used a computer algebraic system² for the other steps. In the next subsections it is described the main stages.

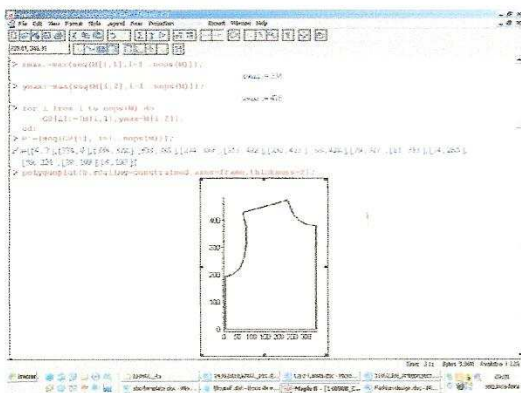


Figure 9: Image of the worksheet in the algebraic computation system.

8.1 Graphic processing

Graphic processing is in this stage; it consists in capturing the border points of the image. For this task is used a graphic editor software containing a ruler in pixels, such as the Paint Brush and Photo Editor Microsoft.

With the points so obtained the image is reconstructed using the software Maple. In Figure 10, is the reconstruction of the style used.

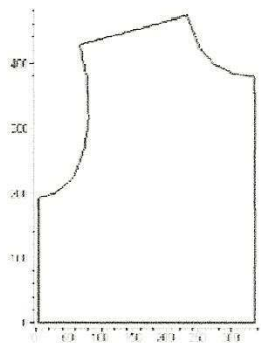


Figure 10: Reconstruction of the style used in Maple conducted after the taking of points made in the Paint software.

8.2 Parameterization of style

Using the points found previously the next task is the choice of a parameterization of the border of the image. Basically, the parameterization is the description of a curve using an independent variable, known as parameter (For surfaces two parameters are employed). The parametric equations give idea of motion on the curve. Several methods can be used to parameterization of a path, the length of arc and the cubic spline, some of them.

The parameterization of the northwestern part of the style, founded with the use of the points at the border of the image, can be seen in Figure 11.

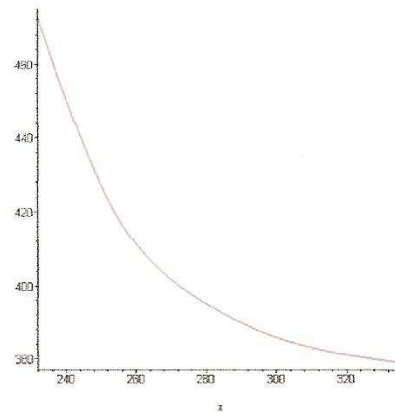


Figure 11: Parameterization of the style in Maple.

8.3 Calculation of the curvature function

With the parameterization of the border of the image the task for finding the curvature function of image is straightforward. The implementation in a Maple worksheet of equation (1) is easy. The Figure 12 shows the curvature function plot for the style used in Figure 1.

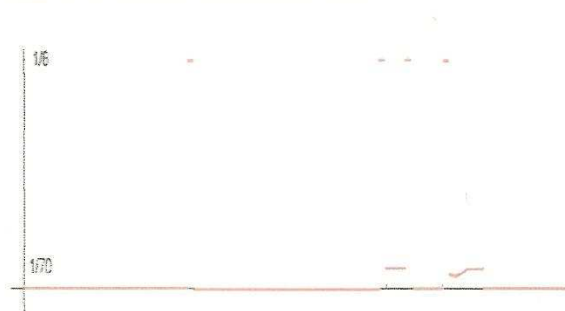


Figure 12: Curvature Function of the image.

8.4 Application of wavelets discrete transform

Now it is applied the discrete wavelet transform (DWT). The purpose of to decompose the curvature in sub signals a_1

¹ For this work the graphic processor was Paint Brush®

² Maple® of Maplesoft, Inc.

(average sub signal) and d_1 (detail sub signal), then the application of the DWT to the sub signal a_1 generates new sub signals a_2 and d_2 , and so on. The storage of the sub signals a_n form a database. In order to identify a new profile of a pattern in fashion design, it must applied it the DWT to the correspondent curvature function of this new profile and then compare its sub signal a_n with the elements of the database, so it can be detected the class of model of the new profile. Finally it proceeds to the reconstruct the original image (inverse problem).

Figures 13 and 14 show the images of compaction of the curvature function of the pattern chosen, using the *Haar* discrete transform, up the second level of compaction.

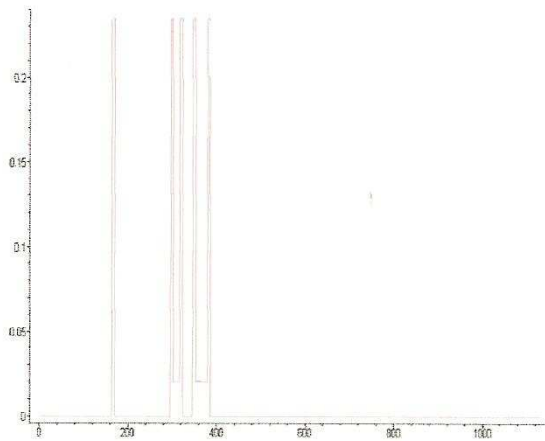


Figure 13: First level of application of the Haar discrete transform.

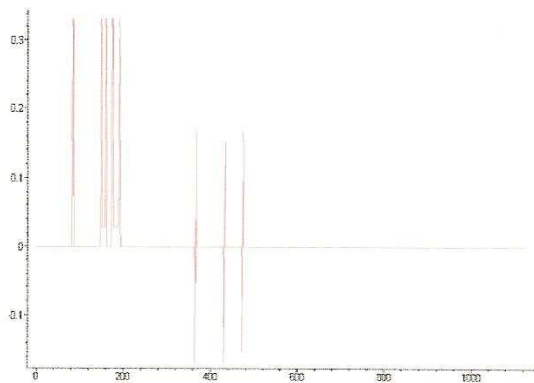


Figure 14: Second level of application of the Haar discrete transform.

In the last images it can see that the compaction had the characteristics of the original signal with respect to the accumulation of the energy of sub signals, a_k .

The energy of the sub-signal a_1 in relation of the energy of the original signal is 99.99% and the sub signal a_2 has 90.64% of the energy of the original signal.

Consequently the identification of the curve is realized by comparison with the database. The results of the styles that were used in the database are used for a proper identification. Furthermore, based on a sub signal a_n , it is possible to reconstruct the original image.

9. CONCLUSIONS

The aim of obtain a new technique for identifying diverse fashion style models was fruitful. This technique involves procedures of processing the borders of images with reduction of dimension with the help of the curvature function. The discrete wavelet transforms are employed in order to generate a database that serve as a mean to compare and identify.

The reconstruction of the original image from of the curvature function is guaranteed by the fundamental theorem of curves except with a rigid motion.

The proposed method can also be used for the analysis of curves in three dimensions because the functions ensuring the uniqueness, *i.e.* the curvature and torsion are unique, except for a rigid motion. Furthermore, the parameter should be the length of arc which is guaranteed by the Fundamental Theorem of Curves in \mathcal{R}^3 .

ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank University of Santa Cruz do Sul (UNISC), specially the Post Graduation in Industrial Systems Processes for financial support. Furthermore, the first author is grateful to the Commission for Personal Improvement of Superior Education - CAPES - for the outstanding support.

REFERENCES

- [1] M. C. C. Cunha. "Métodos Numéricos". 2 ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2000
- [2] D. Sperandio; J. T. Mendes and L. H. M. e Silva. "Cálculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos". São Paulo: Prentice Hall, 2003.
- [3] R. L. Burden and D. Faires. "Análise Numérica". São Paulo, BR: Editora Cengage, 2003.
- [4] H. Alencar and W. Santos. "Geometria Diferencial das Curvas Planas", 2003. In: http://www.im.ufal.br/posgraduacao/posmat/download_files.pdf
- [5] J. Oprea. "Differential Geometry and its Applications". The Mathematical Association of America, USA, 2007.
- [6] J. S. Walker. "A Primer on Wavelets and their Scientific Applications". Boca Raton, Florida, USA: Chapman & Hall / CRC, 1999.
- [7] H. M. Oliveira. "Análise de sinais para engenheiros: uma abordagem via Wavelets". Brasport, Rio de Janeiro, 2007.
- [8] R. P. Pazos. "Teoria de Wavelets y sus aplicaciones". In: XXV Colóquio de la Sociedad Matemática Peruana, Lima, Peru, 2007.

**ANEXO D – Artigo publicado no XXXII Congresso Nacional de Matemática
Aplicada e Computacional, Cuiabá, 2009**

**Estudo de estilos de *fashion design* aplicando transformada *wavelets* à
função de curvatura**

Camila Becker

Mestrado em Sistemas e Processos Industriais – Universidade de Santa Cruz do Sul (UNISC)
96815-900, Santa Cruz do Sul, RS
E-mail: camila_becker_87@hotmail.com

Rubén Edgardo Panta Pazos

Departamento de Matemática e Mestrado em Sistemas e Processos Industriais – Universidade de Santa Cruz do Sul
96815-900, Santa Cruz do Sul, RS
E-mail: rpazos@unisc.br

RESUMO

Neste trabalho é apresentado um método de análise de formas através da utilização de noções de geometria diferencial, visando identificar a noção de curvatura de curvas parametrizadas no plano, aplicando, posteriormente, as transformadas discretas *wavelets*.

A metodologia a ser empregada consiste no seguinte: a partir de uma imagem de um estilo de *fashion design*, aplica-se um *software* de edição gráfica, obtendo pontos da fronteira da imagem. Com estes pontos, reconstrói-se a imagem para estabelecer logo uma única parametrização do contorno da imagem. A partir disso, se determina a função de curvatura do modelo. O próximo passo consiste em aplicar as transformadas *wavelets* 1D, visando compactar a função de curvatura. As curvas são classificadas, usando a Análise por Componentes Principais - PCA.

Os estilos de *fashion design* serão identificados pelas fronteiras e as fronteiras, por sua vez, serão identificadas pelo Teorema Fundamental das Curvas, que diz:

Sejam $\kappa(s)$ e $\tau(s)$, ($s > 0$) duas funções analíticas dadas. Então existe uma única curva (única até sua posição em \mathbb{R}^3) tal que s é o comprimento de arco, $\kappa(s)$ a curvatura e $\tau(s)$ a torção. Para uma curva parametrizada no espaço \mathbb{R}^3 , $r = r(s)$, a curvatura é dada por: $\kappa = \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^3}$. A torção é dada por: $\tau = \frac{[r' \times r''] \cdot r'''}{\|r' \times r''\|^2}$. As curvas planas têm torção nula [2].

Desta forma, a função de curvatura representa uma espécie de assinatura do estilo.

Wavelets são funções obtidas a partir da *wavelet* mãe $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$. O objetivo primordial está em obter uma família de funções base para descrever outras funções [3]. As *wavelets* são funções matemáticas que separam dados em suas diferentes componentes de frequências e extraem cada componente com uma resolução adequada à sua escala [1]. O sinal é decomposto em dois sub-sinais em cada nível de compactação. O sub-sinal a_k é gerado pela ação dos filtros de passa baixa e os sub-sinais d_k pelos filtros de passa alta.

Seja $\psi : D \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função de tipo $L_p(\mathfrak{R})$, denominada função geradora, de tal forma que as funções $\psi_{a,b}$ definidas por transformações de dilatação (ou contração) e de translação a partir de ψ , $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{|a|^{1/p}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$, com $p > 1, a, b \in \mathfrak{R}, a \neq 0$, formem uma base de funções. A família de

wavelets são as funções $\psi_{a,b}$, sendo a frequência de valor $p = 2$ a mais usada [4].

Na seqüência, são apresentados os resultados obtidos para o processamento de um modelo, a maneira de ilustração do processo de identificação de estilo, que está representado na figura 1a.

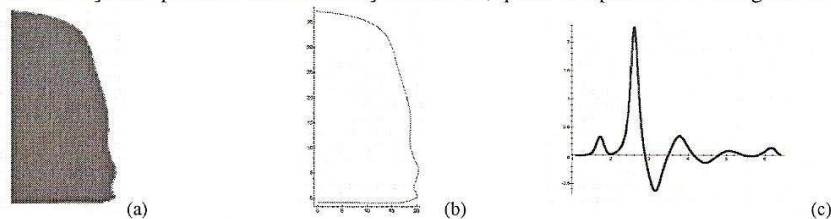


Figura 1: (a) Imagem de um modelo. (b) Imagem reconstruída em Maple. (c) Gráfico da função de curvatura.

Inicialmente ocorre o processamento gráfico, que consiste na tomada de pontos da fronteira da imagem, reconstruindo-a mediante a utilização do *software* Maple (figura 1b). Depois se calcula a função de curvatura da imagem 2D. O gráfico da função de curvatura está representado na figura 1c.

Na seqüência, aplicam-se as *wavelets* com o intuito de compactar a função de curvatura e, a partir disso, armazenam-se os resultados em um banco de dados e com base nas compactações, se reconstrói a imagem original. Na figura 2 apresentam-se as compactações da função de curvatura, utilizando as *wavelets* de Haar, até o terceiro nível de compactação.

Os filtros diádicos da transformada *wavelet* de Haar são: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ o filtro de *passa baixa*,

utilizado na construção dos sub-sinais a_k , e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ o filtro de *passa alta*, utilizado na construção dos sub-sinais d_k .

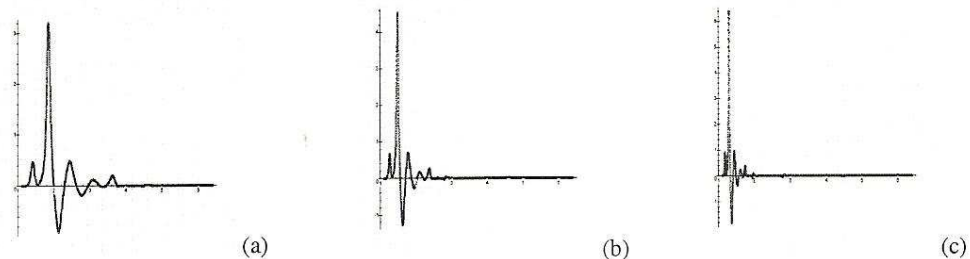


Figura 2: Imagem das compactações do sinal original até o terceiro nível com a transformada discreta *wavelets* de Haar. (a) primeiro nível; (b) segundo nível e (c) terceiro nível.

No primeiro nível de compactação, o sub-sinal a_1 acumulou 99,998% da energia do sinal original, e o sub-sinal d_1 0,002%. Já os sub-sinais a_2 e a_3 acumularam, respectivamente, 99,991% e 99,963% da energia do sinal original. Posteriormente, ocorre a identificação da curva, mediante a aplicação de PCA.

Neste trabalho analisou-se o uso da função de curvatura da fronteira do modelo e depois aplicaram-se as transformadas *wavelets* Haar como uma maneira para classificar os estilos de cortes. Essa combinação apresenta algumas vantagens em relação a outros procedimentos que utilizam métodos 2D, como: possui fácil implementação computacional; utiliza a identificação mediante as transformadas discretas *wavelets* 1D; e os procedimentos estatísticos e métricos empregados são mais simples do que os aplicados em casos 2D.

A reconstrução da imagem original, a partir da sua função de curvatura, é garantida pelo teorema fundamental das curvas, exceto por um movimento rígido. Esse método proposto pode, também, ser utilizado para a análise de curvas com três dimensões, pois as funções que garantem a unicidade, a curvatura e a torção são únicas.

Palavras-chave: *Função de curvatura, Wavelets, Fashion Design*

Referências

- [1] I. Daubechies. "Ten Lectures on Wavelets". Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1992.
- [2] J. Hair. "Análise multivariada de dados". Porto Alegre: Bookman, 2005.
- [3] J. Oprea. "Differential Geometry and its Applications". The Mathematical Association of America, USA, 2007.
- [4] J. S. Walker. "A Primer on Wavelets and their Scientific Applications". Boca Raton, Florida, USA: Chapman & Hall / CRC, 1999.
- [5] R. P. Pazos. "Teoria de Wavelets y sus aplicaciones". In: XXV Colóquio de la Sociedad Matemática Peruana, Lima, Peru, 2007.

ANEXO E – Artigo publicado no XXIX Encontro Nacional de Engenharia de Produção, Salvador, 2009

XXIX ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
A Engenharia de Produção e o Desenvolvimento Sustentável: Integrando Tecnologia e Gestão.
Salvador, BA, Brasil, 06 a 09 de outubro de 2009

AVANÇOS NA ANÁLISE DE FORMAS NA INDÚSTRIA DO FASHION DESIGN

Camila Becker (UNISC)

camila_becker_87@hotmail.com

Rubén Edgardo Panta Pazos (UNISC)

rpazos@unisc.br



A análise de formas é utilizada em diversas áreas da indústria como é o caso do fashion design, dos perfis aerodinâmicos, da indústria automobilística e da computação gráfica, citando apenas alguns exemplos. Em geral, empregam-se diversos métodos, e um deles usa as transformadas wavelets discretas 2D em combinação com métodos estatísticos ou métricos. Nesse trabalho apresenta-se um método para análise de formas mediante a combinação de noções da geometria diferencial com as transformadas wavelets unidimensionais para os estilos de fashion design. O Teorema Fundamental de Curvas garante que para uma curva parametrizada pelo comprimento de arco existem em forma única a função de curvatura e a função torção da curva dada, desde que esta satisfaça determinadas condições de derivabilidade. O problema da análise de formas 3D se reduz, mediante esta técnica, ao problema de analisar funções de curvatura e funções torção. A função de curvatura e a função torção representam uma espécie de assinatura do estilo analisado tridimensionalmente, e a posterior aplicação das transformadas discretas wavelets visa compactar, e possivelmente reduzir ruídos, para uma futura classificação com uma base de dados mediante a utilização de Análise por Componentes Principais (PCA) ou Análise por Agrupamento Hierárquico (HCA). Os resultados foram obtidos no sistema de computação algébrico Maple.

Palavras-chaves: Fashion design, wavelets, curvatura e torção



1. Introdução

A análise de formas possui aplicabilidade em diversas áreas tais como na arqueologia, na arquitetura, nas imagens médicas, nos ambientes virtuais, nas aplicações em segurança (como reconstrução da face), nas indústrias de entretenimento (filmes e jogos), na computação gráfica, no fashion design, nos perfis aerodinâmicos, entre outros.

A área de *fashion design*, por exemplo, que envolve a criação de estilos para diversos ramos como, por exemplo, para o vestuário, para acessórios e para móveis, não possui métodos simples para identificação de formas, pois as formas são, basicamente, analisadas por *softwares* prontos de fácil manipulação.

Até o presente momento, existem alguns trabalhos que estudam a análise de formas, como é o caso de CESAR e COSTA (2000), DELFOUR e ZOLÉSIO (2001), FLORIANI e SPAGNUOLO (2007), GIEBEL (2008) autores que utilizam diversos métodos, entre eles, técnicas estatísticas e de identificação de borda fractal.

O objetivo deste trabalho é, então, apresentar um método de análise de formas, com três dimensões, através da utilização de noções de geometria diferencial, visando a identificar a noção de curvatura e torção de curvas, aplicando, posteriormente, as transformadas discretas *wavelets*. Como ilustração do método proposto, utilizou-se a imagem de um colarinho de uma camisa, que está representado na figura 1.

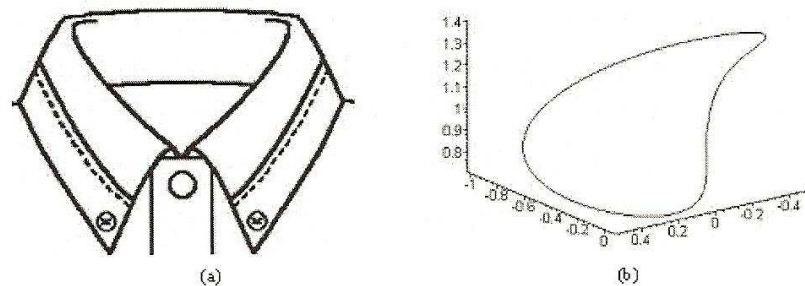


Figura 1 – (a) Exemplo de imagem em que será aplicado o método proposto. (b) Reconstrução tridimensional no *software Maple* do formato do colarinho

A metodologia a ser empregada consiste no seguinte: a partir de uma imagem de um estilo de *fashion design* em 3D, e utilizando um *software* de edição gráfica, obtêm-se pontos da fronteira da imagem. Disposto destes pontos, iremos reconstruí-la para posteriormente estabelecer a parametrização do contorno da imagem. A partir disso, podemos calcular a função de curvatura e de torção do estilo. Com essas funções, o próximo passo consiste em aplicar as Transformadas Discretas *Wavelets* unidimensionais, visando compactar a função de curvatura e a função torção. Posteriormente iremos identificar as curvas, mediante aplicação de Análise por Componentes Principais (PCA – *Principal Component Analysis*) ou Análise por Agrupamento Hierárquico (HCA – *Hierarchical Cluster Analysis*) e comparação com um banco de dados.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Na seção seguinte são apresentadas algumas considerações acerca da importante área do *fashion design*. Dedicar-se a seção 3 para apresentar o teorema fundamental das curvas. Na seção seguinte, são esboçadas algumas



considerações a respeito das Transformadas Discretas *Wavelets*. Os resultados obtidos são esboçados na seção 5. Finalmente apresentam-se as conclusões do trabalho.

2. Fashion design

Fashion design é uma área muito ampla que envolve a criação de estilos para diversos ramos como, por exemplo, para o vestuário e acessórios.

No ramo do vestuário, sabe-se que a produção de roupas em massa se tornou possível em 1829, com a invenção da máquina de costura, sendo que as primeiras peças a serem produzidas foram roupas masculinas e uniformes militares. Em 1921, com o surgimento da máquina de costura elétrica, a produção de vestuário teve um enorme aumento na produção. Em anos recentes, novas tecnologias foram desenvolvidas para esse ramo de produção, como é o caso dos cortes de moldes a laser, o gradeamento e sistemas computadorizados para o acompanhamento da distribuição e vendas. Todas essas ferramentas acarretaram na diminuição do tempo de produção, bem como na melhoria da qualidade do produto final.

Antigamente, o projeto e a criação de vestuário eram realizados por costureiras. O primeiro estilista que surgiu foi Charles Frederick Worth (1826-1895), em Paris. O sucesso dele era tal que muitas casas de design começaram a empregar artistas para esboçar ou pintar projetos para vestuários. As imagens eram mostradas aos clientes e se o cliente gostasse do desenho, solicitava a sua produção, o que era muito mais barato do que produzir um vestuário real de amostra. Assim, a tradição de esboçar desenhos do vestuário começou como uma economia.

A produção de vestuário sofreu inúmeras influências de acontecimentos ao longo dos anos. Durante a Primeira Guerra Mundial, por exemplo, muitas mudanças ocorreram nos estilos muito mais pela necessidade do que moda, pois a medida que mais e mais mulheres trabalhavam era necessário a utilização de roupas adequadas às suas atividades. A Segunda Guerra Mundial também gerou muitas mudanças na indústria da moda. Após a Guerra, os modismos passaram a serem fabricados em massa e se tornam cada vez mais populares.

Durante o século XX as formas começaram a cruzar limites internacionais com rapidez. Os estilos ocidentais populares, por exemplo, foram adotados pelo mundo inteiro, e muitos estilistas tiveram um impacto profundo no estilo. Dessa forma, verifica-se que os estilos sofrem influências sociais e culturais de um determinado tempo.

3. Teorema Fundamental das Curvas

Sejam $\kappa(s)$ e $\tau(s)$, ($s > 0$) duas funções analíticas dadas. Então existe uma única curva (única até sua posição em \mathbb{R}^3), tal que s é o comprimento de arco, $\kappa(s)$ a curvatura e $\tau(s)$ a torção. Para uma curva parametrizada no espaço \mathbb{R}^3 , $r = r(s)$, a curvatura é dada por:

$$\kappa = \frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^3} \quad (1)$$

e a torção é dada por:

$$\tau = \frac{[r' \times r''] \cdot r'''}{\|r' \times r''\|^3} \quad (2)$$

Para as curvas planas, a torção é nula (OPREA, 2007).

As funções que garantem a unicidade, a curvatura e a torção são únicas, exceto com um



movimento rígido (que faz com que a curva reconstruída seja diferente da curva original). (KREYSZIG, 1991)

4. Transformada discreta *wavelets*

Até os anos 70, a transformada de Fourier era o instrumento soberano no processamento de sinais. No entanto, inúmeros sinais em diversas áreas, como é o caso da engenharia e física, para citar alguns exemplos, não se adaptavam as condições para série e transformada de Fourier. Sinais com variações abruptas requerem do processamento de sinais abordagens matemáticas mais sofisticadas, surgindo, assim, a Teoria *Wavelets*. (OLIVEIRA, 2007)

A primeira família de *wavelets* foi desenvolvida pelo matemático húngaro Alfred Haar, em 1910. As *wavelets* de Haar tinham base compacta, porém, não eram contínuas. Ingrid Daubechies também contribuiu com a Teoria das *Wavelets*. Ela criou famílias de *wavelets* ortonormais, com suporte compacto. Outras contribuições vieram de Stephane Mallat, que relacionou a transformada *wavelet* com o conceito de multirresolução.

A denominação *wavelet* surgiu nos anos 80, com o geofísico francês Jean Morlet, introduzindo esse nome ao estudo das funções que tinham suporte compacto tanto no domínio de tempo como da frequência. Tal pesquisa ocorreu em função dos dados sísmicos que Morlet estudava, pois eles exibiam mudanças bruscas, mostrando que a análise de Fourier não era uma ferramenta adequada.

As bases da pesquisa de Morlet foram fornecidas por Alex Grossman, dando, assim, origem à Teoria de *Wavelets*, que representa o cruzamento e generalizações de conceitos de diversas áreas. O conjunto dessas pesquisas possibilitou a análise de diferentes sinais, nas mais diversas aplicações que possuem.

O desenvolvimento das *wavelets* ocorreu independentemente em diversos campos, como por exemplo, da matemática, de física quântica, da engenharia elétrica e da geologia sísmica.

Wavelets são funções matemáticas que separam dados em suas diferentes componentes de frequências e extraem cada componente com uma resolução adequada à sua escala. Elas apresentam vantagens em relação à análise de Fourier, pois esta última analisa o sinal com um todo, acarretando uma representação mais pobre para sinais que contém descontinuidade e variação bruscas. (PAZOS, 2007)

O objetivo primordial está em obter uma família de funções base para descrever outras funções. Assim, as *wavelets* são funções obtidas a partir da *wavelet* mãe $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, e, posteriormente, são geradas as funções *wavelets* filhas. Para isso, escolhe-se o tipo de *wavelet* adequada e utilizam-se filtros, que são formados por coeficientes especiais. A transformação *wavelet* decompõe um sinal discreto (sinais contínuos podem ser discretizados) em dois sub-sinais com a metade do tamanho do sinal original, sendo um o sub-sinal de acumulação, e o outro, o sub-sinal de detalhe. (WALKER, 1999)

Seja $\psi: D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de tipo $L_2(\mathbb{R})$, denominada função geradora, de tal forma que as funções $\psi_{a,b}$ definidas por transformações de dilatação (ou contração) e de translação a partir de ψ

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{|a|^{1/p}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \text{ com } p > 0, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (3)$$



formem uma base de funções. A família de wavelets são as funções $\psi_{a,b}$, sendo com frequência de valor $p=2$ é mais usado. Nesse contexto, também se amplia a fórmula geradora $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$, com $j, k \in Z$, (BACHMAN, NARICI, BECKESTEIN, 2000).

A transformada discreta *wavelet* representa, atualmente, um instrumento moderno que permite a unificação de um amplo número de técnicas de análise e processamento. Elas apresentam um vasto campo de aplicações, como é o caso da astronomia, da acústica, da engenharia nuclear, da codificação de sub-bandas, do processamento de sinais e imagens, na neurofisiologia, na música, em imagens de ressonância magnética, na discriminação de voz, na ótica, nos fractais, em turbulências, na predição de terremotos, em radar, na visão humana e, possui, também, aplicações na matemática pura.

Com relação a energia do sinal, é definida como:

$$Ener(S) = \sum_{k=1}^{k_{max}} S_k^2 \quad (4)$$

Além disso, com relação a energia, duas características devem ser satisfeitas:

- A energia do sinal original deve acumular-se nos sub-sinais de acumulação, ou a_k ;
- E, além disso, a energia deve-se conservar, ou seja, a soma da energia acumulada nos sub-sinais de acumulação, a_k , com a energia acumulada nos sub-sinais de detalhes, d_k , deve resultar na energia do sinal original.

Com vistas a elucidar os conceitos abordados até o momento, apresenta-se, abaixo, um exemplo de compactação de um sinal, dado pela função $f(x) = 20x^2(1-x)^4 \cos(12\pi x)$, com uma amostragem definida ($n=512$), aplicando-se as transformadas *wavelets* Haar até o terceiro nível de compactação. Os resultados estão representados na figura 2:

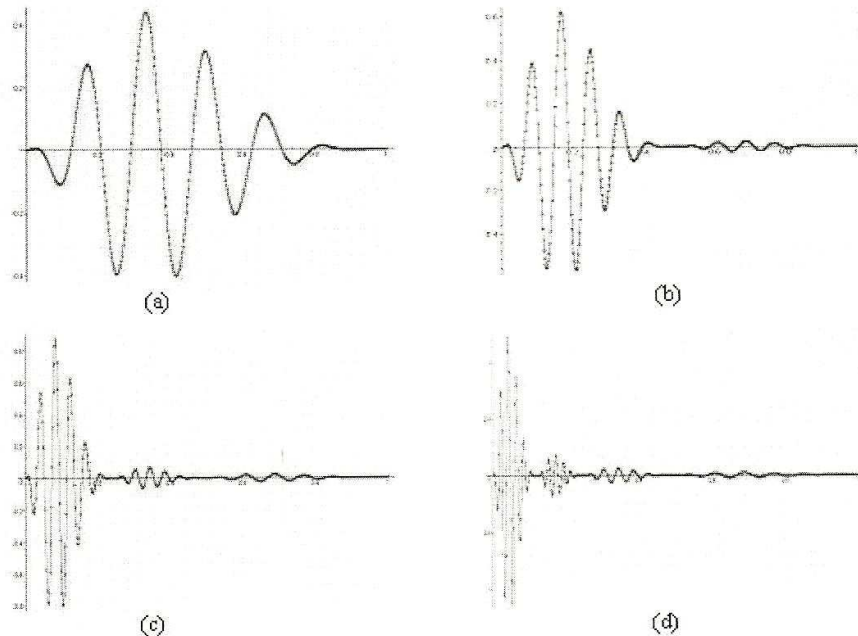


Figura 2 – Efeito da compactação sobre um sinal original (a) através da aplicação das transformadas *wavelets* até o terceiro nível de compactação. Figura (b) primeiro nível de compactação, figura (c) segundo nível e figura (d) terceiro nível

No caso particular do exemplo abordado, percebe-se que o sub-sinal a_1 apresentou acúmulo de 99,86 % da energia do sinal original. Logo, no que diz respeito ao detalhe, d_1 , esse apresentou 0,14% da energia do sinal original. Os sub-sinais a_2 e a_3 acumularam 99,86% e 97,15%, respectivamente, da energia do sinal original.

5. Resultados obtidos

A seguir serão apresentados os resultados obtidos para o processamento do colarinho (figura 1 a). Selecionada a imagem, passa-se para as demais etapas (quais são: o processamento gráfico, parametrização, cálculo da função de curvatura e função torção, aplicação das transformadas discretas *wavelets* unidimensionais e, finalmente, identificam-se as imagens mediante a utilização de Análise por Componentes Principais – PCA ou Análise por Agrupamento Hierárquico – HCA e comparação com banco de dados) que serão detalhadas abaixo.

Durante a realização das etapas de desenvolvimento desta proposta foram utilizados o *software Paint Brush*, para a captação dos pontos da fronteira da imagem, e um sistema de computação algébrica, *software Maple*[®], utilizado durante a realização dos demais passos.

Na primeira etapa, ocorre o processamento gráfico, que consiste na tomada de pontos da fronteira da imagem. Para a realização dessa tarefa, utiliza-se um *software* de edição gráfica que contenha régua em *pixels* como, por exemplo, o *software Paint Brush* e o *software Photo Editor*.

A imagem em que se aplicou o método proposto já está reconstruída em *Maple*, conforme a



figura 1b.

Utilizando os pontos encontrados anteriormente, encontra-se, agora, a única parametrização da imagem. Basicamente, a parametrização representa a descrição de uma curva (ou uma superfície) mediante a utilização de uma variável independente, conhecida como parâmetro. As equações paramétricas dão idéia de movimento em relação à curva. Para obter a parametrização da imagem podem-se utilizar diversos métodos, sendo o comprimento de arco e os *splines* cúbicos, alguns deles.

Dispondo da parametrização da figura, o próximo passo consiste em calcular a função de curvatura e a função torção da imagem tridimensional. Apresenta-se, inicialmente, o gráfico da função de curvatura para o estilo utilizado (Figura 1), na figura 3.

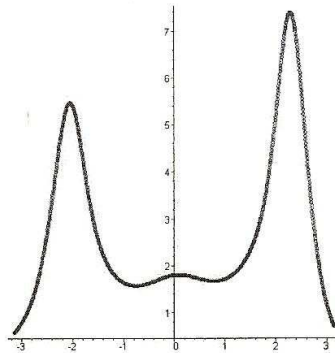


Figura 3 – Gráfico da função de curvatura

Além disso, encontra-se, também, a função torção, pois se trata de uma curva com três dimensões. Na figura 4, apresenta-se o gráfico da função torção.

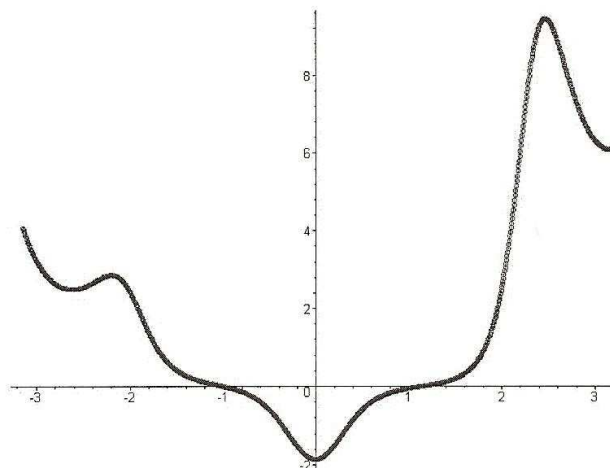


Figura 4 – Gráfico da função torção



Encontrada a função de curvatura e a função torção, passa-se para o próximo passo, que consiste em aplicar as Transformadas Discretas *Wavelets* unidimensionais. Essa etapa tem o intuito de compactar as funções curvatura e torção para, a partir disso, realizar as seguintes etapas: armazenar o resultado em um banco de dados e, com base nas compactações, reconstruir a imagem original.

A seguir, apresentam-se as imagens das compactações da função de curvatura, mediante a utilização das transformadas discretas *wavelets* de Haar, até o terceiro nível de compactação (Figura 5).

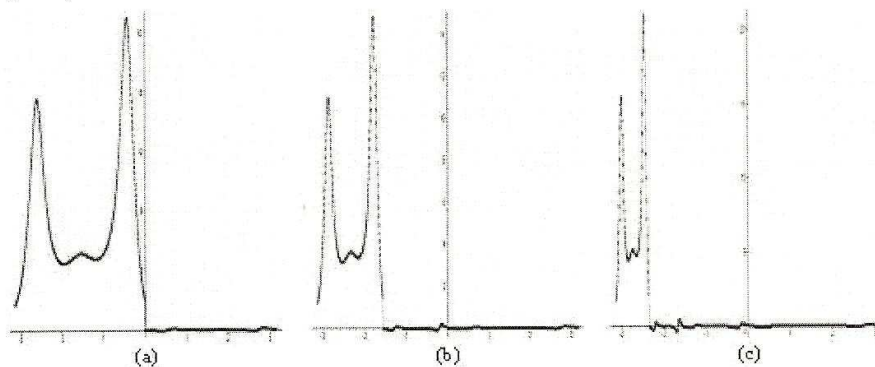


Figura 5 – Imagens da compactação da função de curvatura até o terceiro nível mediante a utilização da Transformada *Wavelet* de Haar: (a) Primeiro nível; (b) Segundo nível e, (c) Terceiro nível

Com relação a energia acumulada nas compactações da função de curvatura, verificou-se que o sub-sinal a_1 acumulou 99,994% e o sub-sinal d_1 0,006% da energia do sinal original. Por sua vez, os sub-sinais a_2 e a_3 acumularam, respectivamente, 99,985% e 99,949% da energia do sinal original.

Aplicam-se as transformadas discretas *wavelets* de Haar, também, na função torção estando as imagens das compactações até o terceiro nível apresentadas na Figura 6.

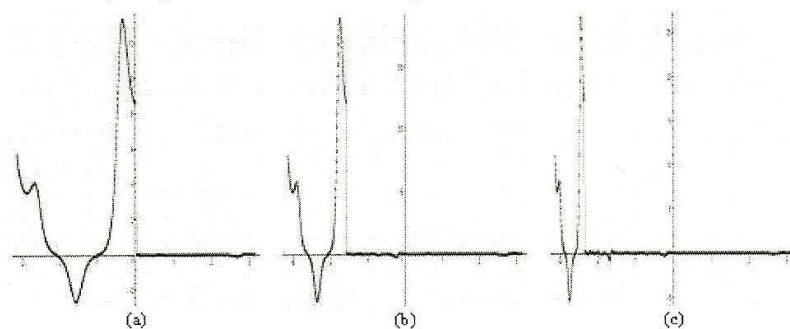


Figura 6 – Imagens da compactação da função torção até o terceiro nível mediante a utilização da Transformada *Wavelet* de Haar: (a) Primeiro nível; (b) Segundo nível e, (c) Terceiro nível

Calculando a energia acumulada nos sub-níveis de compactações da função torção, verificou-



se que o sub-sinal a_1 acumulou 99,86% e o sub-sinal d_1 0,14% da energia do sinal original. Por sua vez, o sub-sinal a_2 e a_3 acumularam, respectivamente, 99,85% e 99,81% da energia do sinal original.

O passo seguinte é gerar o banco de dados com o terceiro nível de compactação, mediante a aplicação das transformadas discretas *wavelets*, da função de curvatura e da função torção. Inclusive, para realizar essa tarefa, pode-se utilizar um tipo de *wavelets* para a função de curvatura e outro para a função torção.

Os resultados preliminares indicam que essas duas funções são importantes para identificar outros tipos de colarinhos.

Posteriormente, ocorre a identificação da curva, mediante a utilização de Análise por Componentes Principais (PCA) ou Análise por Agrupamento Hierárquico (HCA) e comparação com um banco de dados. Além disso, com base nas compactações, é possível reconstruir a imagem original.

Os métodos de análise multivariada, Análise por Componentes Principais e a Análise por Agrupamento Hierárquico, permitem a visualização gráfica de dados, ocasionando uma maior compreensão do conjunto de dados visto que verificam a presença ou a ausência de similaridade entre as amostras. Tanto HCA quanto PCA permitem a interpretação multivariada por meio de gráficos bi ou tridimensionais que apresentam informações sobre as inter-relações que podem existir entre as amostras.

A HCA objetiva agrupar as amostras em classes baseada na similaridade dos participantes de uma mesma classe e nas diferenças entre os participantes de classes distintas. A representação das amostras é dada em dendogramas que são gráficos bidimensionais. A PCA, por sua vez, visa a redução da dimensão do conjunto de dados original, preservando a maior quantidade de variância entre as amostras. Essa redução é obtida por meio do estabelecimento de novas variáveis ortogonais entre si, denominadas componentes principais (PCs). As componentes principais são, então, combinações lineares das variáveis. A representação gráfica ocorre em um sistema cartesiano onde os eixos são as PCs.

6. Conclusões

Neste trabalho se analisou o uso da função de curvatura e da função torção da fronteira do modelo, as transformadas discretas *wavelets* Haar e métodos de análise multivariada como uma maneira para classificar os estilos de cortes. Essa combinação apresenta algumas vantagens em relação a outros procedimentos, como: possui fácil implementação computacional; utiliza a identificação mediante as transformadas discretas *wavelets* unidimensionais; e os procedimentos estatísticos e métricos empregados são mais simples do que os aplicados em casos tridimensionais.

A reconstrução da imagem original, a partir da sua função de curvatura e da função torção, é garantida pelo teorema fundamental das curvas, exceto com um movimento rígido, que faz com que a curva reconstruída difere-se da curva original.

Esse método pode ser utilizado em diversas aplicações na área da indústria, como, por exemplo, na indústria automobilística, em perfis aerodinâmicos, em indústrias de entretenimento (filmes e jogos), em computação gráfica, no *fashion design*, para citar alguns exemplos.



Agradecimentos

Os autores agradecem à Universidade de Santa Cruz do Sul (UNISC) e ao Mestrado em Sistemas e Processos Industriais pelo apoio financeiro. Além disso, a primeira autora agradece de forma especial a Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior – CAPES – pelo destacável apoio, através da concessão de bolsa de estudos.

Referências

- BACHMAN, G.; NARICI, L. & BECKESTEIN, E. *Fourier and wavelets analysis*. New York: Springer-Verlag, 2000.
- BECKER, C. PAZOS, R. E. P. *Identificação de fronteiras mediante a utilização do estudo da curvatura de estilos em fashion design*. VIII Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, 2008. Pelotas - RS. Anais do VIII Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional. CD-ROM.
- COSTA, L. F.; CESAR, R. M. *Shape Analysis and Classification: Theory and Practice*. CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2000.
- DELFOUR, M. C.; ZOLÉSIO, J. P. *Shapes and Geometries: Analysis, Differential Calculus, and Optimization*. USA: SIAM, 2001.
- FLORIANI, L.; SPAGNUOLO, M. *Shape Analysis and Structuring*. Springer, 2007.
- GIEBEL, S.M. *Anwendung der Shape Analysis auf Nierentumore/Mathematikkonferenz Bursa*. 2008. In: <http://www20.uludag.edu.tr/~icjms20/abstracts.pdf>
- KREYSZIG, E. *Differential Geometry*. USA: Dover Science, 1991.
- OLIVEIRA, H. M. *Análise de sinais para engenheiros: uma abordagem via Wavelets*. Rio de Janeiro: Brasport, 2007.
- OPREA, J. *Differential Geometry and its Applications*. USA: The Mathematical Association of America, 2007.
- PAZOS, R. E. P. *Teoria de Wavelets y sus aplicaciones I*, XXV Colóquio de la Sociedad Matemática Peruana, 2007, Lima, Peru. Documentos de XXV Coloquio de la Sociedad Matematica Peruana. Lima, Peru : Sociedad Matemática Peruana, 2007.
- WALKER, J. S. *A Primer on Wavelets and their Scientific Applications*. Boca Raton, Florida, USA: Chapman & Hall / CRC, 1999.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)