

Dualidades Eletromagnéticas no Espaço-Tempo
Não-Comutativo e Formalismos Simpléticos

Davi Cabral Rodrigues

Clóvis José Wotzasek

Wilson Oliveira

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



UFRJ

Dualidades Eletromagnéticas no Espaço-Tempo Não-Comutativo e Formalismos Simpléticos

Davi Cabral Rodrigues

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

Orientador: Clóvis José Wotzasek

Co-orientador: Wilson Oliveira

Rio de Janeiro
Setembro de 2006

Dualidades Eletromagnéticas no Espaço-Tempo Não-Comutativo e Formalismos Simpléticos

Davi Cabral Rodrigues

Orientador: Clóvis José Wotzasek

Co-orientador: Wilson Oliveira

Tese de doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada por:

Dr. Clóvis José Wotzasek
(Orientador)

Dr. Wilson Oliveira
(Co-orientador)

Dr. Adilson José da Silva

Dr. Henrique Boschi Filho

Dr. Luis Esteban Oxman

Dr. Nelson Ricardo de Freitas Braga

Dr. Ricardo Machado de Amorim
(suplente interno)

Dr. José Abdalla Helayel-Neto
(suplente externo)

Rio de Janeiro, setembro de 2006.

R696 Rodrigues, Davi Cabral
Dualidades Eletromagnéticas no Espaço-Tempo Não-Comutativo e Formalismos Simpléticos - Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2006.
x, 151f.: il.; 31 cm.
Orientador: Clóvis José Wotzasek
Tese (doutorado) - UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-graduação em Física, 2006.
Referências Bibliográficas: f. 137-151.
1. Não-comutatividade. 2. Dualidade. 3. Formalismos simpléticos. 4. Mapa de Seiberg-Witten. 5. Eletromagnetismo. 6. Massa topológica. I. Wotzasek, Clóvis José. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física. III. Dualidades Eletromagnéticas no Espaço-Tempo Não-Comutativo e Formalismos Simpléticos.

Resumo

Dualidades Eletromagnéticas no Espaço-Tempo Não-Comutativo e Formalismos Simpléticos

Davi Cabral Rodrigues

Clóvis José Wotzasek

Wilson Oliveira

Resumo da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física. Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

O estudo de teorias de espaço-tempo não-comutativo tem atraído muita atenção nos últimos anos, o que se deve essencialmente a duas razões: i) teorias desse tipo aparecem como casos limites de modelos físicos *a priori* comutativos, como é o caso de teoria de cordas no limite de Seiberg-Witten e o de uma partícula no mais baixo nível de Landau; ii) por si mesmas são teorias de interesse físico, pois possuem propriedades bem particulares próximas a várias expectativas, de gravitação quântica a efeito Hall quântico fracionário.

Apresentamos nesta tese uma recente proposta de *gauge embedding* baseada no formalismo simplético de sistemas vinculados e analisamos extensões de dualidades eletromagnéticas clássicas para o espaço-tempo não-comutativo em 3D e em 4D. A análise dessas dualidades no espaço tempo não-comutativo é importante pois dualidades estabelecem equivalências não-triviais de formulações de uma mesma teoria, levando à descoberta de novas expressões e novas propriedades físicas. Em particular, é sabido que em 4D no limite de campos lentamente variantes (CLV), o parâmetro da não-comutatividade θ é transformado em seu dual Hodge $*\theta$ via dualidade eletromagnética, essa transformação conecta não-comutatividade no espaço somente com não-comutatividade entre tempo e espaço. Nesta tese estendemos essa

dualidade para 3D, avaliamos a necessidade do limite de CLV em 4D e em 3D, estudamos o caso tridimensional com massa topológica e estabelecemos uma extensão não-comutativa para o modelo autodual, esclarecendo certo conflito existente na literatura.

Também aqui apresentamos o desenvolvimento de uma recente técnica de *gauge embedding*, baseada no tratamento simplético de sistemas vinculados que já foi aplicada em alguns modelos, tanto comutativos quanto não-comutativos, tendo conseguido reproduzir com sucesso resultados obtidos através de outros métodos. Consideramos que esse recente método é promissor e esperamos que seu desenvolvimento conduza a soluções de problemas físicos atuais.

Palavras-chave: não-comutatividade, dualidade, formalismos simpléticos, mapa de Seiberg-Witten, eletromagnetismo, massa topológica.

Rio de Janeiro
Setembro de 2006

Abstract

Electromagnetic Dualities on Noncommutative Space-Time and Symplectic Formalisms

Davi Cabral Rodrigues

Clóvis José Wotzasek

Wilson Oliveira

Abstract da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física. Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

The study of noncommutative space-time theories has been attracting much attention in the last years, this is mainly due to two reasons: i) these theories appear as limiting cases of physical models which are *a priori* commutative, e.g., strings in the Seiberg-Witten limit and a charged particle in the Lowest Landau Level; ii) by themselves these theories are of physical interest, since they have very particular properties which are close to many expectations, from quantum gravity to fractionary quantum Hall effect.

In this thesis we present a recent proposal for gauge embedding inspired in the symplectic formalism for constrained systems and we analyse extensions of classical electromagnetic dualities to the noncommutative 3D and 4D space-times. This investigation is important since dualities establish nontrivial equivalences between different formulations of the same physical theory, leading to the discovery of new expressions and new physical properties. In particular, it is known that in the slowly varying fields (SVF) limit, the noncommutativity parameter θ becomes its Hodge dual $*\theta$ through the 4D electromagnetic duality, this transformation connects space noncommutativity with noncommutativity between space and time. In this

thesis we extend this duality to the 3D space-time, evaluate the necessity of the SVF limit in 4D and in 3D, study the 3D case with topological mass and establish a noncommutative extension to the the selfdual model, clarifying certain conflict found in the literature.

We also present here the development of a recent technique of gauge embedding, inspired in the symplectic handling of constraints which has already been applied in a number of models, both commutative and noncommutative, and success has been achieved in reproducing results obtained by other methods. We consider that this recent method is promising and we hope that its development will be helpful to the solution of current physical problems.

Keywords: noncommutativity, duality, symplectic formalisms, Seiberg-Witten map, electromagnetism, topological mass.

Rio de Janeiro
Setembro de 2006

Agradecimentos

- ◇ Em especial agradeço ao meu orientador, Prof. Clóvis Wotzasek. Agradeço a ele pelos seus diversos ensinamentos (técnicos ou não), por acreditar no meu potencial e me estimular, por mostrar que trabalho e diversão em física devem se misturar, pela ajuda nas questões referentes ao pós-doutorado, além das várias caronas para Niterói.
- ◇ Prof. Wilson Oliveira, meu co-orientador no doutorado e orientador de graduação e mestrado na UFJF. Agradeço a ele pela colaboração nos trabalhos sobre método simplético, pela oportunidade de apresentar o colóquio sobre dualidades eletromagnéticas não-comutativas na UFJF e por sempre ter me auxiliado no que precisei.
- ◇ Agradeço a Clifford Neves, meu co-orientador no mestrado, pela fundamental colaboração nos trabalhos sobre método simplético, pela grande paciência em aturar minhas incisivas perguntas e pelas ótimas discussões.
- ◇ Agradeço aos meus colaboradores e colegas Jorge Noronha e Marcelo Guimarães, aprendemos muito em conjunto. Em especial agradeço ao Marcelo por ter-me indicado várias referências e pelos comentários sobre esta tese.
- ◇ Agradeço ao Prof. Victor Rivelles pela discussão sobre o mapa de Seiberg-Witten e pela oportunidade de apresentar um colóquio na USP sobre dualidades eletromagnéticas não-comutativas.
- ◇ Agradeço ao Prof. Sergio Cacciatori e colaboradores pela atenção ao nosso problema e pela cordial correspondência.
- ◇ Agradeço ao meu amigo e consultor de matemática e informática Prof. Orestes Piermatei Filho.
- ◇ Para esta tese foi também importante o apoio, estímulo e compreensão de meus pais, avós e de minha irmã Ana, sou muito grato a eles. Agradeço também aos meus amigos que pouco entendem do que eu faço, mas estão sempre prontos para me ajudar no que eu precisar, conversar ou ouvir alguma estranha música.
- ◇ Agradeço ao CNPq pela bolsa de doutorado de ago/2002 a fev/2005 e à FAPERJ pela bolsa do programa *bolsa nota 10* de mar/2005 a jul/2006.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Teorias $U(N)$ em D dimensões e modelos duais | 5 |
| 2.1 | Notação e tópicos sobre geometria diferencial | 5 |
| 2.2 | Equações de Maxwell em D dimensões com métrica constante arbitrária | 12 |
| 2.3 | Teorias de calibre $SU(N)$ | 19 |
| 2.4 | Massa topológica e o termo de Chern-Simons | 23 |
| 2.5 | Dualidades eletromagnéticas | 27 |
| 3 | Formalismos Simpléticos | 37 |
| 3.1 | Formalismo simplético e parênteses generalizados | 37 |
| 3.1.1 | Noções de geometria simplética | 37 |
| 3.1.2 | Parênteses generalizados | 44 |
| 3.1.3 | Formalismo de Faddeev-Jackiw | 46 |
| 3.1.4 | Vínculos e o formalismo de Barcelos Neto-Wotzasek-Montani . | 49 |
| 3.1.5 | Simetrias de calibre | 54 |
| 3.1.6 | Exemplo 1: Eletromagnetismo | 57 |
| 3.1.7 | Exemplo 2: Modelo de Proca | 61 |
| 3.2 | Formalismo simplético de calibre | 64 |
| 3.2.1 | A versão mais simples: uma variável de Wess-Zumino | 64 |
| 3.2.2 | Generalizando: dois campos de Wess-Zumino | 67 |
| 3.2.3 | Exemplo 1: fluido irrotacional | 71 |
| 3.2.4 | Exemplo 2: modelo de Proca | 74 |
| 3.2.5 | Comentários finais | 80 |
| 4 | Não-comutatividade espaço-temporal | 82 |
| 4.1 | Aspectos gerais | 83 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.2 | O símbolo de Weyl e o produto Moyal | 87 |
| 4.3 | D -branas e o limite de Seiberg-Witten | 92 |
| 4.4 | Tópicos sobre quantização | 100 |
| 4.5 | Teorias $U_*(N)$ e o mapa de Seiberg-Witten | 104 |
| 5 | Dualidades eletromagnéticas no espaço-tempo não-comutativo | 112 |
| 5.1 | Sobre as extensões não-comutativas do modelo autodual induzidas por dualidade | 113 |
| 5.1.1 | A projeção dual do modelo MCS não-comutativo | 115 |
| 5.1.2 | Comentários finais | 119 |
| 5.2 | Dualidades eletromagnéticas não-comutativas em 3D, 4D e o limite de CLV | 121 |
| 5.2.1 | Dualidade 3D em primeira ordem em θ | 123 |
| 5.2.2 | Dualidade em ordens mais altas e o limite de CLV | 127 |
| 5.2.3 | Comentários finais | 131 |
| 6 | Conclusão | 133 |
| A | Formas diferenciais no espaço \hat{M} e equações de Maxwell | 135 |

Capítulo 1

Introdução

Desde as origens da ciência moderna sempre coube aos cientistas o trabalho de elaboração de teorias e verificação dessas através da experiência. Com o passar do tempo, mais fenômenos vieram a ser explicados pela ciência e com maior precisão, paralelamente as teorias foram se tornando mais complexas, exigindo cada vez mais trabalho teórico. No século XVII, um cidadão interessado era capaz de ler os últimos tratados científicos de seu tempo, como o *Diálogos Sobre as Duas Novas Ciências* (1638) de Galileu Galilei; entretanto, a partir do século XX, mesmo os conceitos mais básicos da física dificilmente são compreendidos por não-cientistas¹. Os livros atuais voltados para o público leigo, antes de descreverem superficialmente as pesquisas atuais, precisam introduzir os fundamentos da física que foram estabelecidos no início do século passado! Esse alto grau de distanciamento da ciência contemporânea pode, por outro lado, ser visto como um indício de que a ciência estaria realmente rumando de acordo com seus princípios de buscar pelos fundamentos da Natureza a despeito das crenças e apelos estéticos da sociedade de seu tempo². Atualmente há indícios de que estejamos próximos da teoria física fundamental, a qual provavelmente adviria da teoria de cordas (ou teoria M). Espera-se que resultados do *Large Hadron*

¹O filósofo K. Popper além de interesse pela física teve contato com grandes físicos de seu tempo e argumentou que uma interpretação da mecânica quântica deveria caber à filosofia. Todavia, ao apresentar sua interpretação em um capítulo de *A lógica da pesquisa científica* (1934), se aventurou além do que poderia e incorreu em erros básicos, como ele mesmo admite em edições subsequentes.

²Esta questão não é de forma alguma simples, mas não entraremos em mais detalhes.

Collider (LHC), cujas atividades começarão no próximo ano, auxiliem na escolha do caminho a se seguir para a consolidação da teoria de cordas.

A física atingiu um grau de refinamento teórico que a possibilita dar grandes saltos na compreensão da Natureza através da inspeção de sua estrutura formal e da criação de novas estruturas cuja correspondência com a Natureza só é entendida posteriormente. Nesse espírito, P. A. M. Dirac certa vez enunciou

It is more important to have beauty in one's equations than to have them fit experiment (...) because the discrepancy may be due to minor features that are not properly taken into account and that will get cleared up with further developments of the theory.

Embora a proposta original de C. N. Yang e R. L. Mills [1] tenha se demonstrado incorreta, se seu trabalho tivesse sido descartado hoje não teríamos o modelo padrão. A interpretação física original realmente era problemática, mas sua estrutura formal, a despeito das sérias dificuldades iniciais, continha a chave para o entendimento das forças nucleares. Segundo o próprio C. N. Yang:

We did not know how to make the theory fit experiment. It was our judgment, however, that the beauty of the idea alone merited attention.

Durante a formulação da mecânica quântica, os físicos da época, com destaque para W. Heisenberg, perceberam que as grandezas clássicas expressas por funções reais deveriam ser abandonadas em favor de novas grandezas dadas por operadores cujo comutador não é necessariamente nulo. A partir de então, tornou-se claro que o espaço de fase de um sistema físico é verdadeiramente não-comutativo. Todavia, somente várias décadas mais tarde, a geometria desses espaços veio a receber uma formulação geométrica precisa [2]. Esses avanços conceituais motivaram a busca por novas aplicações da geometria não-comutativa na física [3, 4, 5] e da revisão da antiga proposta de espaço quântico de H. S. Snyder [6]. Em particular foi descoberto

que, sob certo limite de baixa energia, a teoria de cordas prevê um espaço físico não-comutativo [4, 5, 7].

Muito do significado dessas teorias de espaço-tempo não-comutativo não é entendido, mas seus aspectos formais tornam-se a cada dia mais ricos. Uma nova revolução pode estar bem próxima. Não é claro até que ponto tais teorias devam ser vistas como fundamentais ou como efetivas, talvez a utilidade delas seja somente para dados fenômenos específicos, como o efeito Hall quântico ou como forma de modelar um sistema no mais baixo nível de Landau; mas podem se revelar até como uma proposta de teoria fundamental alternativa à teoria de cordas. As teorias $U_*(N)$ (teorias $U(N)$ não-comutativas) possuem propriedades não encontradas em outros modelos físicos conhecidos; em particular, transformações de coordenadas são um subgrupo de suas transformações de calibre, o que as torna fortes candidatos para modelar gravitação quântica. Ademais, em um espaço não-comutativo, há uma relação de incerteza no próprio espaço físico que o torna “embassado” (“fuzzy”), pontos são dissolvidos em pequenos planos “enevoados”, tal como ocorre no já tradicional espaço de fase quântico. Característica que é bem vinda para a compatibilização da gravitação com a teoria quântica, dado que por um lado a teoria quântica dita que é necessário uma quantidade de energia cada vez maior para examinar partes cada vez menores do espaço, enquanto a relatividade geral impõe que energia curva o espaço-tempo; o que leva a um colapso da geometria usual do espaço-tempo em regiões da ordem do comprimento de Planck.

Mais antigo que o conceito de não-comutatividade em física é o de dualidade, cuja origem pode ser traçada desde as observações de O. Heaviside [8] no final do século XIX. Assim como não-comutatividade, o conceito de dualidade foi revigorado nos últimos anos. Em particular devido às conexões que as dualidades fornecem às teorias de cordas, unificando todas as formulações, o que deu origem à chamada segunda revolução (para introduções veja as Refs. [9]).

Três conceitos formais físicos³ desempenham um papel de destaque nesta tese: não-comutatividade, dualidade e geometria do espaço de fase (geometria simplética). Esta tese foi elaborada sem pressupor que o leitor já tenha familiaridade com essas áreas e sua conexão com a física. Os resultados por nós obtidos podem ser divididos entre os referentes à criação do método simplético de calibre [10, 11] (Seção 3.2), o sobre a extensão da dualidade dos modelos Maxwell-Chern-Simons e autodual para o espaço-tempo não-comutativo [12] (Seção 5.1) e, por fim, sobre a dualidade eletromagnética sem massa topológica em 3D e 4D [13] (Seção 5.2).

No próximo capítulo introduzimos ou revisamos sucintamente alguns conceitos básicos que serão úteis para toda a tese, como geometria diferencial (a notação de formas diferenciais em especial), eletromagnetismo em D dimensões, grupos $SU(N)$, massa topológica e uma apresentação das dualidades eletromagnéticas com ênfase nas técnicas que serão usadas posteriormente. No Cap. 3 apresentamos uma introdução à geometria simplética no espaço de fase e ao chamado formalismo simplético, em seguida apresentamos o método simplético de calibre. O Cap. 4 é exclusivamente dedicado a uma introdução sobre não-comutatividade no espaço-tempo. Procuramos apresentar os tópicos necessários ao capítulo seguinte e mais alguns que nos parecem convenientes para dar uma melhor visão geral à questão. Quanto a esse último ponto, muito mais poderíamos acrescentar, muitos assuntos interessantes tiveram de ficar de fora, como transformações de Lorentz, mas acreditamos que o material apresentado, junto das referências indicadas, já seja o suficiente para uma compreensão razoável do quadro geral. No Cap.5 apresentamos os dois resultados independentes sobre dualidade eletromagnética no espaço-tempo não-comutativo. Por fim, o último capítulo é dedicado às nossas conclusões e perspectivas futuras.

³São físicos no sentido de estarem associados a interpretações físicas. A abordagem desta tese é física e não matemática.

Capítulo 2

Teorias $U(N)$ em D dimensões e modelos duais

2.1 Notação e tópicos sobre geometria diferencial

O principal objetivo desta seção é estabelecer a notação, para isso revisaremos de forma breve algumas propriedades de geometria diferencial. De particular interesse é a notação de formas diferenciais. É natural se questionar se essa notação realmente é relevante para a física ou para a tese em questão. Por se tratar de uma notação, os mesmos conceitos podem ser sempre expressos de através de outros meios, mas a importância de uma boa notação nunca deve ser subestimada, pois permite analisar o mesmo problema através de outros aspectos e pode possibilitar uma solução muito mais rápida, se atendo aos conceitos fundamentais em vez de extensos cálculos ou expressões. A notação de formas diferenciais é bem mais “limpa” que a notação tensorial (que nada mais é do que a expressão componente por componente das formas) e trata dos objetos físicos ou matemáticos diretamente a despeito de particularidades do sistema de coordenadas. Não importa qual a transformação de coordenadas utilizada, uma k -forma A é sempre expressa por A , enquanto seu tensor correspondente $A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}$ precisa se transformar de acordo. Operações frequentemente aqui utilizadas, como dualidade Hodge e diferenciação

externa, são simplesmente dadas por $*A$ e dA enquanto na notação de componentes assumem o aspecto $\epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k\nu_1\nu_2\dots\nu_{D-k}}A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}$ e $\partial_{[\nu}A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k]}$. Enfim, dada a simplicidade da notação mais moderna de formas diferenciais, a pergunta não deveria ser se é necessário recorrer a essa notação, mas sim se todas as vezes que a notação de componentes foi utilizada isso realmente foi necessário.

Esta apresentação não visa ser matematicamente rigorosa. Algum contato anterior com conceitos básicos de geometria diferencial é pressuposto. Vários resultados serão mencionados sem demonstração. Introduções mais detalhadas sobre o tema podem ser vistos, por exemplo, nas Refs. [14, 15, 16, 17].

Vetores no espaço Euclidiano \mathbb{E}^n se encontram nesse próprio espaço e não é importante especificar a que ponto $p \in \mathbb{E}^n$ certo vetor desse espaço está associado, pois a geometria do espaço Euclidiano é idêntica em todos seus pontos. Seja M uma variedade D -dimensional, associa-se a cada ponto $p \in M$ um espaço vetorial T_pM chamado de espaço tangente a M em p . Assim, um vetor associado a M pertence ao espaço tangente a M em certo ponto $p \in M$. O espaço T_pM tem a mesma dimensão de M , ou seja, D . O espaço dado pela união de todos os espaços tangentes a M é o fibrado tangente, cuja dimensão é $2D$, e escreve-se¹

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM. \quad (2.1)$$

Como T_pM é um espaço vetorial, existe um espaço vetorial dual a esse, que denotaremos por T_p^*M , cujos elementos associam um número real a cada vetor de T_pM , ou seja,

$$\omega \in T_p^*M \Leftrightarrow \omega : T_pM \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

O espaço T_p^*M é chamado de espaço cotangente a M em p . Reciprocamente, $V \in T_pM \Rightarrow V : T_p^*M \rightarrow \mathbb{R}$. Analogamente ao fibrado tangente, $T^*M := \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ é o fibrado cotangente a M .

¹Usaremos o símbolo $:=$ para indicar uma igualdade por definição. $A := B$ lê-se A é definido como sendo igual a B . Sempre que ele for usado uma definição estará sendo feita, mas a recíproca é falsa.

Sejam $\{e_\mu\}$ base de T_pM e $\{f^\mu\}$ base de T_p^*M , com $\mu = 1, 2, \dots, D$. A atuação de $V \in T_pM$ sobre $\omega \in T_p^*M$ define um produto interno $(\ , \)_p : T_p^*M \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ cuja atuação sobre a bases desses espaços é dada por²

$$V[\omega] = (\omega, V)_p = (\omega_\mu f^\mu, V^\nu e_\nu)_p = \omega_\mu V^\nu (f^\mu, e_\nu)_p. \quad (2.3)$$

Sabemos que $(f^\mu, e_\nu)_p \in \mathbb{R}$, mas seu valor em princípio é arbitrário. A fixação desse valor determinará o valor real da atuação de qualquer vetor sobre um covetor (ou o inverso). Fixaremos³ $(f^\mu, e_\nu)_p = \delta_\nu^\mu$, portanto

$$V[\omega] = \omega_\mu V^\mu. \quad (2.4)$$

Dado que o lado esquerdo da igualdade é invariante por transformações de coordenadas, o lado direito também é. Em particular isso mostra que as componentes de um covetor devem se transformar de acordo com o inverso da transformação das componentes de um vetor.

Até o momento não foi explicado como o espaço tangente é construído a partir de uma variedade diferenciável, só argumentamos em favor de sua existência e apresentamos algumas definições naturais e conseqüências imediatas. Usando derivadas ao longo de curvas em M que passam por $p \in M$, contrói-se o espaço T_pM . As componentes de um vetor V tangente a M em p ao longo da curva $c(t) \subset M$, com $c(0) = p$, são dadas por $V^\mu = \left. \frac{dx^\mu(c)}{dt} \right|_{t=0}$.

A taxa de variação de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ em p ao longo da curva c é dada por

$$\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c)(t)}{dt} \right|_{t=0}, \quad (2.5)$$

em que $\varphi : U_p \subset M \rightarrow \mathbb{R}^D$ é a aplicação que define o mapa entre certa vizinhança de⁴ p em M e o espaço \mathbb{R}^D . Há pouco escrevemos $x^\mu(c)$, mais precisamente $x^\mu(c)$

²A convenção da regra da soma sobre índices repetidos é assumida nessa equação e em todas as posteriores.

³Em que $\delta_\nu^\mu = 0$ se $\mu \neq \nu$ e $\delta_\nu^\nu = 1$ caso contrário.

⁴Sua existência, assim como a de sua inversa, é pré-requisito para M ser variedade.

se refere a uma das D componentes reais da aplicação $\varphi(c(t))$. De forma análoga, expressaremos $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x^\mu)$. A última equação pode então ser escrita como

$$\left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x). \quad (2.6)$$

Ou seja, taxas de variação de funções definidas em M são “orientadas” pelos vetores tangentes.

Uma forma de interpretar a equação anterior é considerar que o vetor V é um operador cuja base é dada por $\partial/\partial x^\mu$, e essa é a forma padrão da base de vetores tangentes a M . Comparando as Eqs. (2.6) e (2.4), vemos que podemos considerar $\partial_\mu f$ como componentes de um covetor. Há um escalar imediato que pode-se criar com essas componentes, esse é dado por $df = \partial_\mu f dx^\mu$. Assim identifica-se $\{dx^\mu\}$ como base de T_p^*M e $df(p)$ como elemento de T_p^*M . Covetores são comumente chamados de 1-formas. Se ω^k é k -forma em M então $\omega^k : T_pM \times T_pM \times \dots \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ é função k -linear totalmente anti-simétrica. Em particular, para $k = 2$, vem

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu}^2 (dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu) = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu}^2 dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (2.7)$$

$$\omega^2[V, S] = -\omega^2[S, V] = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu}^2 V^\mu S^\nu, \quad (2.8)$$

em que $\omega_{\mu\nu}^2 \in \mathbb{R}$, $\omega_{\mu\nu}^2 = -\omega_{\nu\mu}^2$ e $S, V \in T_pM$.

Toda k -forma pode ser escrita como segue, e sempre usaremos o mesmo fator constante,

$$\omega^k = \frac{1}{k!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}^k dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}. \quad (2.9)$$

O tensor $\omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}^k$ é sempre totalmente anti-simétrico.

O produto externo de uma k -forma por uma r -forma é uma $(k+r)$ -forma: $\omega^k \wedge \omega^r = \omega^{k+r} = (-1)^{kr} \omega^r \wedge \omega^k$.

Uma função real $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma 0-forma e df é uma 1-forma. $(k+1)$ -formas podem ser obtidas a partir da aplicação da derivada exterior sobre uma k -forma

segundo a regra

$$d\omega^k = \frac{1}{k!} \partial_\nu \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}^k dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}. \quad (2.10)$$

Dessa regra imediatamente conclui-se que

$$dd\omega^k = 0 \quad (2.11)$$

para qualquer k -forma (diferenciável).

Uma k -forma que satisfaça $d\omega^k = 0$ é chamada de fechada. Em particular, se existir uma $(k-1)$ -forma tal que $d\omega^{k-1} = \omega^k$, ω^k é forma exata. Em espaços Euclidianos, pseudo-Euclidianos ou homeomorfos a um desses dois, toda forma fechada é necessariamente exata (isso é uma consequência do Lema de Poincaré).

Como consequência da regra (2.10), vem

$$d(\omega^k \wedge \omega^r) = d\omega^k \wedge \omega^r + (-1)^k \omega^k \wedge d\omega^r. \quad (2.12)$$

Comumente consideraremos variedades munidas de uma métrica $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Métrica é uma forma simétrica, bilinear e não-degenerada que será expressa por

$$g_p = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (2.13)$$

Equivalentemente, ocasionalmente ela é expressa através do quadrado do elemento de linha ds^2 ,

$$ds^2 = g \left(dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.14)$$

Usaremos a usual convenção $(g_{\mu\nu})^{-1} =: (g^{\mu\nu})$.

A métrica estabelece um isomorfismo entre TM e T^*M . Seja $V \in T_p M$, logo $g_p(V, \cdot) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ e portanto $g_p(V, \cdot) \in T_p^* M$. Sendo V^μ as componentes do vetor V , adota-se a regra de escrever as componentes de seu covetor associado pela métrica por V_μ . Deve estar claro que V^μ e V_μ são componentes de diferentes objetos, em particular, $V = V^\mu e_\mu \neq V_\mu f^\mu = g_p(V, \cdot)$. Contudo, pode-se definir uma convenção cuja única utilidade será a de facilitar a expressão gráfica de algumas equações: $\omega = \omega_\mu f^\mu = \omega^\mu f_\mu$, em que $f_\mu := g_{\mu\nu} f^\nu$, lembrando que $f^\mu = dx^\mu$.

Convencionaremos que

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^D =: d^D x. \quad (2.15)$$

Portanto

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D} = \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} d^D x, \quad (2.16)$$

em que $\varepsilon^{1 2 \dots D} = 1$, ε é totalmente anti-simétrico e não se transforma por mudança de coordenadas.

Em espaços métricos, há uma forma natural de introduzir um elemento de volume invariante por transformações de coordenadas (exceto por paridade), esse é dado por

$$\Omega = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} d^D x. \quad (2.17)$$

Por meio da métrica, pode-se definir um isomorfismo natural entre o espaço das k -formas com o das $(D-k)$ -formas que é dado pela operação de dualidade de Hodge, cujo operador denotaremos por \star e sua atuação é expressa em uma k -forma A por

$$\begin{aligned} \star A &= \frac{1}{k!} A_{\mu_1 \dots \mu_k} \star(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}) \\ &= \frac{1}{k!} \frac{1}{(D-k)!} A_{\mu_1 \dots \mu_k} \omega^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_{D-k}} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{D-k}} \\ &= \frac{1}{k!} \frac{1}{(D-k)!} A_{\mu_1 \dots \mu_k} \omega^{\mu_1 \dots \mu_k \nu_1 \dots \nu_{D-k}} dx_{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\nu_{D-k}} \\ &= \frac{1}{k!} \frac{1}{(D-k)!} A^{\mu_1 \dots \mu_k} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k \nu_1 \dots \nu_{D-k}} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{D-k}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Todas as operações acima de levantar ou abaixar índices são apenas consequência do emprego da métrica. ω é totalmente anti-simétrico e deve se transformar de tal forma a preservar a invariância do lado esquerdo da igualdade por transformações de coordenadas.

Considere o produto

$$A \wedge \star A = \left(\frac{1}{k!}\right)^2 \frac{1}{(D-k)!} A_{\mu_1 \dots \mu_k} A^{\nu_1 \dots \nu_k} \omega_{\nu_1 \dots \nu_k \lambda_1 \dots \lambda_{D-k}} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_k} \wedge dx^{\lambda_1} \dots dx^{\lambda_{D-k}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{k!}\right)^2 \frac{1}{(D-k)!} A_{\mu_1 \dots \mu_k} A^{\nu_1 \dots \nu_k} \omega_{\nu_1 \dots \nu_k \lambda_1 \dots \lambda_{D-k}} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_k \lambda_1 \dots \lambda_{D-k}} d^D x \\
&= \left(\frac{1}{k!}\right)^2 A_{\mu_1 \dots \mu_k} A^{\nu_1 \dots \nu_k} f \delta_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_k} d^D x \\
&= \frac{1}{k!} A_{\mu_1 \dots \mu_k} A^{\mu_1 \dots \mu_k} f d^D x. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Acima foi usado que ω , por ser totalmente anti-simétrico e de posto máximo, deve ser proporcional a ε . Voltaremos à questão da contração de índices entre ε 's em breve. Da última equação, a fim de que $A \wedge *A$ seja invariante por transformações de coordenadas, vê-se que

$$f = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}. \tag{2.20}$$

Portanto

$$\omega_{\mu_1 \dots \mu_D} = \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_D} \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}, \tag{2.21}$$

em que $\epsilon_{1 \dots D} = 1$, ϵ é totalmente anti-simétrico e não se transforma por mudança de coordenadas. Para evitar confusão na operação de levantar e abaixar índices é útil estabelecer a distinção entre ε e ϵ . Em particular temos

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} := g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_D \nu_D} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_D} = \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} g^{-1}, \tag{2.22}$$

com $g := \det(g_{\mu\nu})$. A regra de contração dos índices dos símbolos anti-simétricos é dada por

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_k \nu_1 \dots \nu_{D-k}} \varepsilon^{\lambda_1 \dots \lambda_k \nu_1 \dots \nu_{D-k}} = (D-k)! \delta_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\lambda_1 \dots \lambda_k}. \tag{2.23}$$

Seguindo a notação usual, $\delta_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\lambda_1 \dots \lambda_k}$ é o determinante da matriz $k \times k$ de δ 's de elemento geral $\delta_{\mu_i}^{\lambda_j}$.

Empregando artifícios já apresentados, obtemos a seguinte útil relação:

$$**A = (-1)^{k(D-k)+a} A, \tag{2.24}$$

em que $(-1)^a$ é o sinal de g , ou seja, $(-1)^a = |g|/g$.

Essa notação e esses resultados são suficientes para passarmos para a próxima seção e começarmos a tratar de problemas mais diretamente ligados com a física.

2.2 Equações de Maxwell em D dimensões com métrica constante arbitrária

Esta seção tem dois objetivos importantes para o restante da tese: estabelecer as equações de Maxwell no espaço-tempo tridimensional e servir de primeiro exemplo de emprego da notação introduzida na seção anterior. Um espaço \mathbb{R}^n com dada métrica constante pode sempre, por meio de transformações de coordenadas, ser escrito como um espaço Euclideano ou pseudo-Euclideano. Toda a apresentação desta seção seria muito simplificada se assumíssemos logo de início uma métrica usual para o espaço-tempo, como $\text{diag}(+ - - -)$ em 4D ou $\text{diag}(+ - -)$ em 3D. Todavia, a substituição logo de início da métrica pelo seu valor constante esconde diversas propriedades da manipulação de formas diferenciais e das equações que descrevem o eletromagnetismo. Ademais, meios dielétricos podem ser modelados por métricas diferentes da do vácuo (ainda que constantes) [17] e a apresentação desta seção pode ser vista como o início de uma preparação pedagógica ao eletromagnetismo em espaços curvos (métricas não constantes). Devido ao valor da métrica não ser substituído logo de início, poderemos avaliar o comportamento das equações de Maxwell frente à inversão de sinal da métrica, relacionando dois tipos de métrica comumente usados em física $\text{diag}(- + + \dots)$ e $\text{diag}(+ - - \dots)$, veremos também que há certa sutileza importante na definição do campo magnético em 3D que depende da adoção do primeiro ou do segundo tipo de métrica.

Seja M uma variedade de dimensão D munida de uma métrica $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ constante ($g_x = g_{x'}$). Considere a seguinte ação para a k -forma $A \in T^* M$ com

simetria de calibre do tipo⁵ $U(1)$ e válida para qualquer dimensão D :

$$S_J[A] = a_D \int \left(\frac{1}{2} {}^*F \wedge F + e A \wedge {}^*J \right). \quad (2.25)$$

Acima, $F := dA$, a_D é uma constante que pode depender da dimensão de M , e é a constante do acoplamento de J com A e J é uma k -forma que satisfaz $d{}^*J = 0$. O acoplamento entre A e J acima pode também ser escrito como

$$\tilde{e} A \wedge \tilde{J}, \quad (2.26)$$

em que \tilde{J} é uma $(D - k)$ -forma que satisfaz $d\tilde{J} = 0$. Para dada métrica g , podemos considerar a introdução de \tilde{J} nada mais que uma nova notação, pois \tilde{J} e *J são $(D - k)$ -formas fechadas quaisquer, assim podemos em princípio simplesmente usar a substituição $\tilde{e} \tilde{J} \leftrightarrow e {}^*J$. Contudo, não estamos nesta seção exclusivamente interessados em resolver esse problema para dada métrica.

Diremos que a transformação $g \rightarrow -g$ define o que chamaremos de transformação de assinatura de M (ou do espaço-tempo). É imediato conferir que

$$\tilde{J} \xrightarrow{a} \tilde{J} \quad e \quad {}^*J \xrightarrow{a} (-1)^k {}^*J, \quad (2.27)$$

em que o símbolo a acima designa a transformação de assinatura. O acoplamento $A \wedge {}^*J$, dependendo do valor de k , muda de sinal, enquanto $A \wedge \tilde{J}$ permanece constante sempre.

No momento vamos aderir à interpretação da corrente como um ente físico tal como o potencial A , precisando da métrica para acoplar com A . Não há problema em se persistir no emprego de $A \wedge {}^*J$, mas precisaremos da regra

$$e \xrightarrow{a} (-1)^k e. \quad (2.28)$$

Lembrando que ${}^*\delta F = \delta {}^*F$, ${}^*\delta F \wedge F = {}^*F \wedge \delta F$, $\delta F = d\delta A$, $d({}^*F \wedge \delta A) = d{}^*F \wedge \delta A + (-1)^{D-(k+1)} {}^*F \wedge d\delta A$ e $\delta A \wedge {}^*J = (-1)^{k(D-k)} {}^*J \wedge \delta A$, a equação de

⁵Isto é, sendo $A' = A + d\lambda$, $S[A] = S[A']$.

movimento de S_J (2.25) é

$$d^*F + (-1)^{(k+1)(D-k)} e^*J = 0. \quad (2.29)$$

Somente o caso $k=1$ será relevante para o restante desta seção, assim, para esse valor,⁶

$$d^*F = -e^*J. \quad (2.30)$$

A fim de que seja possível com este formalismo modelar fenômenos do mundo “real”, é natural a introdução de uma diferença geométrica para uma das coordenadas em relação às demais, a qual seria associada com o tempo. Em uma métrica diagonal, a diferenciação geométrica correntemente usada é a da inversão de sinal da componente temporal frente às espaciais. No momento, a questão do sinal não será importante, exigiremos apenas uma condição de ortogonalidade. Embora praticamente todos os resultados que seguem só precisem dessa condição de ortogonalidade, vamos sempre supor que a componente g_{00} da métrica tenha sinal diferente das demais. Vamos usar⁷ $dt := dx^0$ para denotar o elemento da base que é ortogonal a todos os demais.

De forma geral, para qualquer métrica, vale a igualdade

$$dt \wedge^* dx^i = g^{0i} f d^D x, \quad (2.31)$$

em que $i = 1, 2, \dots, d$, $d := D - 1$, $f := \sqrt{|g|}$ e $g := \det(g_{\mu\nu})$. Vamos impor a condição de ortogonalidade

$$dt \wedge^* dx^i = 0, \quad (2.32)$$

ou, equivalentemente, $g^{0i} = 0$ (como consequência, $g_{0i} = 0$, pois $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu$).

A fim de separarmos a parte temporal de F de sua parte espacial, sejam E uma 1-forma e B uma 2-forma, ambas pertencentes ao espaço de base $\{dx^i\}$, isto é,

⁶Ambos os lados dessa equação são invariantes por transformação de assinatura, mas isso ocorre somente porque e se transforma segundo (2.28).

⁷Subentende-se que $\{dx^\mu\}$, com $\mu = 0, 1, \dots, D - 1$, seja, para dado $x \in M$, base de T_x^*M .

$E = E_i dx^i$ e $B = \frac{1}{2} B_{ij} dx^i \wedge dx^j$, e sejam essas tais que

$$E \wedge dt + B = F. \quad (2.33)$$

Lembremos que a 1-forma A pertence ao espaço cotangente à variedade D -dimensional M . Diremos que $E(x)$ pertence ao espaço cotangente a \hat{M} em $x \in \hat{M}$, que é uma variedade d -dimensional de métrica \hat{g} , com $g_{ij} = \hat{g}_{ij}$. Assim sendo, $B(x) \in T_x^* \hat{M} \times T_x^* \hat{M}$.

Como F é uma 2-forma exata, em particular ela é fechada ($dF = 0$). Em espaços topologicamente triviais (i.e., homeomorfos ao espaço Euclidiano ou ao de Minkowski), vale a recíproca. Portanto, em vez de definir E e B como funções de A , como sugere a Eq. (2.33), essas formas podem ser igualmente definidas por

$$dE \wedge dt + dB = 0. \quad (2.34)$$

Obter as equações de movimento em termos das componentes de E e B é simples, basta avaliar diretamente a Eq. (2.34) e o dual Hodge de (2.30). As equações abaixo valem para qualquer métrica constante e qualquer dimensão:

$$\partial_{[i} E_{j]} + \partial_0 B_{ij} = 0, \quad (2.35)$$

$$\partial_{[i} B_{jk]} = 0, \quad (2.36)$$

$$\partial^j B_{ji} - \partial^0 E_i = e J_i, \quad (2.37)$$

$$\partial_i E^i = e J_0, \quad (2.38)$$

em que os índices contravariantes acima são obtidos a partir do emprego da métrica, em particular E^i depende da métrica. Os colchetes acima indicam anti-simetrização dos índices sem fator de normalização. As duas primeiras equações, advindas da identidade de Bianchi, são topológicas, ao contrário do que ocorre com as demais.

A fim de associar as últimas equações com alguma física, é essencial determinar a relação desse formalismo com as grandezas mensuráveis experimentalmente.

Queremos associar E e B aos campos elétrico e magnético respectivamente. No espaço-tempo quadridimensional, denotaremos por

$$\vec{E} = E^i e_i \quad \text{e} \quad \vec{B} = B^i e_i \quad (2.39)$$

os campos físicos, isto é, os que são “diretamente” medidos, sendo $\{e_i\}$ base do espaço vetorial $T_x M$. Há arbitrariedades na associação entre os pares (\vec{E}, \vec{B}) e (E, B) . A fim de obtermos as equações de Maxwell com as convenções usuais, fixaremos a relação desses pares como sendo:

$$E^i = g^{ij} E_j \quad \text{e} \quad B^i = \frac{1}{2} \hat{\omega}^{ijk} B_{jk}, \quad (2.40)$$

em que $\hat{\omega}^{ijk} = \epsilon^{ijk} \sqrt{|\hat{g}|}$. Em princípio poderíamos usar, por exemplo, $B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} B_{jk}$, assim o vetor \vec{B} associado se comportaria tal qual o campo eletromagnético usual, porém somente em certas métricas, como $\text{diag}(-+++)$; no caso da métrica $\text{diag}(+---)$, \vec{B} deixa de ser o que usualmente chamamos de campo magnético, passando a ser o negativo desse (conforme pode ser verificado nas equações de Maxwell correspondentes).

As equações para os vetores \vec{E} e \vec{B} são⁸:

$$\nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0, \quad (2.41)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.42)$$

$$(-1)^{\hat{a}} \nabla \times \vec{B} + g^{00} \dot{\vec{E}} = -e \vec{J}, \quad (2.43)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = e J_0 = e g_{00} J^0, \quad (2.44)$$

com $\dot{\vec{E}} := \partial_0 \vec{E}$,

$$(-1)^{\hat{a}} = \frac{\hat{f}^2}{\hat{g}} = \frac{|\hat{g}|}{\hat{g}}, \quad (2.45)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} := \partial_i E^i \quad \text{e} \quad (\nabla \times \vec{E})^i := \hat{\omega}^{ijk} \partial_j E_k. \quad (2.46)$$

⁸Estas equações requerem a condição $g_{0i} = 0$; mas exceto por essa e por ser constante, a métrica é arbitrária.

Sendo $g = \text{diag}(- + ++)$, nota-se que $\hat{\omega}^{ijk} = \varepsilon^{ijk}$ e $(-1)^{\hat{a}} = 1$. Utilizando a convenção $\rho = J^0$, sendo ρ a densidade de carga, as equações de Maxwell em unidades Gaussianas com $c = 1$ são obtidas se $e = -4\pi$. Conseqüentemente, para $g = \text{diag}(+ - --)$ temos $e = 4\pi$.

Em qualquer dimensão é imediato associar um vetor espacial como campo elétrico advindo da 1-forma E , mas a associação da 2-forma B com um campo físico de natureza escalar ou vetorial é menos direta e depende da dimensão do espaço tratado. Seguindo a prescrição de representar o campo magnético através de certa operação de dualidade Hodge no espaço, vemos que em 3D o campo magnético deve ser representado por um escalar. Isso também é natural sob um ponto de vista físico. Suponhamos que em um laboratório esteja-se interessado em fenômenos eletromagnéticos que ocorram em uma superfície bidimensional. Passam por essa campos elétricos e magnéticos do nosso espaço tridimensional. A única componente do campo magnético que nos interessa é a perpendicular à superfície estudada (B_z), pois as componentes paralelas só produzem forças sobre as cargas da superfície na direção perpendicular a essa (por hipótese, estamos estudando um sistema que não evolui para fora da superfície original). Analogamente, a componente do campo elétrico perpendicular à superfície pode ser desprezada. Assim, o eletromagnetismo bidimensional no espaço deve ser descrito por um vetor elétrico \vec{E} e um escalar B_z ; mais precisamente é um pseudo-escalar (mudanças de paridade em 3D só invertem uma componente dos vetores espaciais).

Em termos das componentes de E e do escalar $B_z := \frac{k}{2}\hat{\omega}^{ij}B_{ij}$, sendo k uma constante que será determinada em breve, as Eqs. (2.35- 2.38) são escritas como

$$\hat{\omega}^{ij}\partial_i E_j + k^{-1}\dot{B}_z = 0, \quad (2.47)$$

$$(-1)^{\hat{a}}k^{-1}\hat{\omega}^{ij}\partial_j B_z + g^{00}\dot{E}^i = -eJ^i, \quad (2.48)$$

$$\partial_i E^i = eJ_0. \quad (2.49)$$

A Eq. (2.36) é identicamente nula no espaço bidimensional. O termo $(-1)^{\hat{a}}$ em 3D é sempre igual à unidade desde que t esteja associado ao tempo, em 4D esse termo troca de acordo com a mudança de assinatura; nas próximas equações em 3D ele não será escrito. As três equações acima podem também ser facilmente obtidas de (2.41 - 2.44) se for considerado que $E_z, B_y, B_x, J_z, \partial_z = 0$, $(-1)^{\hat{a}} = 1$ e $k = 1$. Se no caso quadridimensional tivermos $(-1)^{\hat{a}} = -1$, a redução dimensional não é compatível com as três equações acima para $k = 1$. A constante k se faz necessária pois as teorias eletromagnéticas em 3D e 4D são independentes entre si, mas desejamos que as mesmas convenções que usamos em 4D induzam convenções em 3D. Embora seja tentador crer que o campo magnético fisicamente mensurável seja sempre dado por uma espécie de dualidade Hodge no espaço da 2-forma B , ao adotar-se essa convenção entra-se em contradição, de forma geral, com as convenções usuais do espaço-tempo quadridimensional. A terceira componente, ou componente z , de \vec{B} é, segundo a definição original, dada por

$$B^3 = \frac{1}{2} \hat{\omega}^{3ij} B_{ij} = \frac{\hat{f}_{3d}}{\hat{g}_{3d}} B_{12}, \quad (2.50)$$

enquanto no espaço bidimensional temos

$$B_z = \frac{k}{2} \hat{\omega}^{ij} B_{ij} = k \frac{\hat{f}_{2d}}{\hat{g}_{2d}} B_{12}. \quad (2.51)$$

Portanto, a igualdade entre B_z e B_3 só pode ser obtida se

$$k = \frac{\hat{g}_{2d}}{\hat{f}_{2d}} \frac{\hat{f}_{3d}}{\hat{g}_{3d}}. \quad (2.52)$$

Se a métrica no espaço tridimensional for $\text{diag}(-+++)$, a métrica induzida no espaço bidimensional será $\text{diag}(-++)$, portanto $k = 1$ neste caso. Por outro lado, começando com $\text{diag}(+---)$, a métrica induzida é $\text{diag}(+--)$, logo $k = -1$.

Por motivos análogos, é necessário introduzir o mesmo fator k na definição de $\nabla \times \vec{E}$, portanto

$$\nabla \cdot \vec{E} := \partial_i E^i, \quad (\nabla \times B_z)^i := \hat{\omega}^{ij} \partial_j B_z \quad \text{e} \quad \nabla \times \vec{E} := k \hat{\omega}^{ij} \partial_i E_j, \quad (2.53)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \dot{B}_z = 0, \quad (2.54)$$

$$k^{-1} \nabla \times B_z + g^{00} \dot{\vec{E}} = -e \vec{J}, \quad (2.55)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = e J_0 = e g_{00} J^0. \quad (2.56)$$

No Apêndice A mostramos como, seguindo as idéias desta seção, introduzir formas diferenciais no espaço \hat{M} . Depois dessas diversas manipulações com tensores e formas diferenciais, na próxima seção trataremos das teorias de calibre não-Abelianas de forma mais objetiva.

2.3 Teorias de calibre $SU(N)$

O objetivo dessa seção é introduzir alguns conceitos básicos sobre teorias de calibre associadas a grupos unitários não-Abelianos. Conforme será apresentado nos próximos capítulos, as teorias de calibre não-comutativas do tipo $U(1)$ possuem fortes semelhanças com as não-Abelianas. Há inúmeras referências sobre o assunto que o abordam de forma mais profunda ou detalhada, esta apresentação baseia-se principalmente nas Refs. [1, 22, 15]. Sucintas introduções históricas podem ser encontradas nas Refs. [22, 18].

Em 1928, Dirac propôs sua conhecida Lagrangeana para descrever uma partícula quântica-relativística de spin $1/2$ e massa m :

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi. \quad (2.57)$$

Essa Lagrangeana possui uma simetria global trivial, a saber: $\psi \rightarrow S\psi$, com $S = \exp(i\varepsilon)$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$, ou seja, $S \in U(1)$. O operador S pode pertencer a outros grupos

unitários $U(N > 1)$ e ainda assim manter a invariância global de \mathcal{L}_D . Como $U(N) = U(1) \times SU(N)$, no que segue trataremos apenas dos grupos $SU(N)$ e $U(1)$.

A fim de implementar simetrias locais na Lagrangeana de matéria \mathcal{L}_M , isto é, simetrias com $\partial_\mu S \neq 0$, uma conexão é necessária para se definir uma derivada covariante D tal que $D\psi \xrightarrow{SU(N)} S D\psi$. Essa conexão naturalmente não deve ser a conexão métrica, usualmente representada por $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$, pois este problema independe da geometria do espaço-tempo. Considere

$$D = d - igA, \quad (2.58)$$

em que g é uma constante (adimensional em 4D) chamada de constante de acoplamento de calibre e A é uma 1-forma⁹ que atuará como conexão e se transforma segundo a regra

$$A \rightarrow A' = SAS^\dagger + \frac{i}{g} S dS^\dagger, \quad (2.59)$$

com $S \in SU(N)$, ou seja, $\det S = 1$ e $S^\dagger S = S S^\dagger = \mathbb{1}$.

Assim, substituindo ∂ por D no setor de matéria da ação, este torna-se invariante por transformações locais $SU(N)$.

Um elemento qualquer $S \in SU(N)$ pode ser univocamente representado por uma exponencial $S = \exp(i\varepsilon(x))$, em que ε é dito pertencer à álgebra de $SU(N)$ [i.e., $\varepsilon \in su(N)$]. No caso $U(1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Para $S \in SU(N)$, a fim de que $SS^\dagger = \mathbb{1}$ e $\det S = 1$, ε deve ser Hermiteano e de traço nulo.

Para o caso de transformações infinitesimais, isto é, ε suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} A \rightarrow A' &\approx (1 + i\varepsilon)A(1 - i\varepsilon) + \frac{1}{g}d\varepsilon \\ &\approx A + \frac{1}{g}d\varepsilon + i[\varepsilon, A]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

⁹Mais precisamente, veremos que A é uma 1-forma que pertence ao espaço da álgebra de $SU(N)$.

Sendo $\{t^a\}$ base de $su(N)$, os t^a 's são chamados de geradores do grupo $SU(N)$. Dados $S, T \in SU(N)$, sabemos que o produto ST também pertence a $SU(N)$ [admitindo que $SU(N)$ seja grupo, isso é imediato pela definição de grupo; paralelamente, pode-se verificar essa propriedade facilmente pela definição dos elementos de $SU(N)$ já apresentada]. Conseqüentemente, como $\{t^a\}$ é base de $su(N)$ existe $f^{abc} \in \mathbb{R}$, denominado constante de estrutura do grupo, tal que

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c. \quad (2.61)$$

(A regra da soma se aplica, embora todos os índices estejam no mesmo nível.)

Vamos assumir que os geradores e as constantes de estruturas são normalizadas de tal forma que a relação anterior seja preservada e

$$\text{tr}(t^a t^b) = n\delta^{ab}, \quad (2.62)$$

em que $n \in \mathbb{R}$. Como um traço sempre aparece nas ações não-Abelianas, a escolha de n influi na constante global da ação. A prescrição usual é trocar a constante global Abelianas por ela própria dividida por n . Para maior semelhança com o caso Abelianas, e menor confusão com constantes, vamos seguir a convenção de [1, 22] e adotar $n = 1$, ou, equivalentemente, vamos usar g^2 no lugar de ng^2 .

Retomando agora a análise da transformação de A (2.59), vemos que A deve pertencer ao mesmo espaço que o ε introduzido há pouco, ou seja, $A \in su(N)$; ademais, qualquer transformação de calibre de A nunca o leva para fora de $su(N)$, como pode ser diretamente verificado. Portanto, sempre podemos expandir a 1-forma A usando a base de $su(N)$, ou seja,

$$A = A_\mu dx^\mu = A_\mu^a t^a dx^\mu = A^a t^a, \quad (2.63)$$

conseqüentemente

$$A \wedge A = A^a \wedge A^b t^a t^b = \frac{1}{2} A^a \wedge A^b [t^a, t^b] = \frac{i}{2} A^a \wedge A^b f^{abc} t^c. \quad (2.64)$$

No caso $U(1)$, o termo da ação responsável pela dinâmica da parte de calibre é $DA \wedge *DA = dA \wedge *dA$, termo que é trivialmente invariante por transformações de calibre (2.59), pois $F = dA$ é invariante. De forma geral, o termo responsável pela dinâmica do campo de calibre é

$$S_{YM} = -\frac{1}{2g^2} \int \text{tr } F \wedge *F, \quad (2.65)$$

com

$$F = dA - iA \wedge A, \quad \text{ou seja, } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]. \quad (2.66)$$

Como, para dado A , a ação é um número, a presença do traço é natural. Por outro lado, sua presença é imprescindível para garantir a invariância da ação de Yang-Mills S_{YM} , pois perante transformações de calibre F não é invariante, a saber:

$$F \longrightarrow S F S^\dagger, \quad (2.67)$$

mas $\text{tr } F$ e $\text{tr } F \wedge *F$ são invariantes.

Nas últimas equações, uma redefinição de A foi feita: $A \rightarrow \frac{1}{g}A \Rightarrow D = d - iA$. Normalmente usaremos esta notação.

A ação localmente invariante por $SU(N)$ encontrada é portanto

$$S = S_{YM}[A] + S_M[\psi, \bar{\psi}, A], \quad (2.68)$$

em que A ocorre em S_{YM} somente interiormente a F e na ação de matéria S_M somente interiormente à derivada covariante D .

Em teorias $U(1)$, F satisfaz a identidade $dF = 0$. Em $SU(N)$ essa identidade é substituída pela seguinte (também topológica):

$$D'F = 0, \quad (2.69)$$

com $D' = d - i[A,]$ e $[A, B] = A \wedge B - B \wedge A$. As equações de movimento são

$$D'^*F = -\tilde{J}, \quad \text{ou seja, } D'_\mu F^{\mu\nu a} = -J^{\nu a}, \quad (2.70)$$

sendo

$$J^{\nu a} := -i \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta A_\nu^a}. \quad (2.71)$$

É interessante notar que, sendo \mathcal{L}_M invariante de calibre, a corrente $J^{\nu a}$ só é invariante no caso $U(1)$. Para $SU(N)$, \tilde{J} é covariante. A corrente \tilde{J} satisfaz a lei de conservação

$$D' \tilde{J} = 0, \quad \text{ou seja, } D'_\nu J^{\nu a} = 0. \quad (2.72)$$

Dentre várias outras observações a serem feitas é importante notar que teorias de Yang-Mills, mesmo na ausência de matéria, são teorias interagentes. A revisão de teorias não-Abelianas aqui exposta terá alguma utilidade direta nas próximas seções e será especialmente útil para o entendimento das teorias não-comutativas.

2.4 Massa topológica e o termo de Chern-Simons

A primeira referência na física ao termo de Chern-Simons (CS), embora sem utilizar essa nomenclatura, ocorreu no final da década de 70 e se deve a Siegel [23]. Desde o início da década de 80, especialmente devido aos trabalhos de Deser, Jackiw, Templeton e Schonfeld [24, 25, 26], as teorias que fazem uso desse termo têm despertado atenção de áreas diversas como QED_3 , teorias de cordas, gravitação e matéria condensada [19, 20, 24, 26, 21]. O termo de CS tem uma ligação direta com a classe característica secundária de Chern-Simons [27, 15], que já era conhecida no meio matemático.

Conforme introduzido em [24, 25, 26], espaço-tempos de dimensão ímpar permitem o aparecimento de uma estrutura topológica invariante de calibre capaz de conferir massa ao bóson correspondente. Um fóton com massa topológica no espaço-tempo tridimensional é descrito pelo modelo chamado de Maxwell-Chern-Simons

(MCS), esse possui uma série de diferenças em relação ao eletromagnetismo sem massa e ao modelo de Proca: os spins das partículas associadas a esses modelos são, respectivamente, dois singletos de spin 1, spin 0 e um dubleto de spin 1; todos os três são invariantes por conjugação de carga (C), os dois últimos são invariantes também por transformações de paridade (P) e de inversão temporal (T), enquanto o modelo MCS viola tanto P quanto T, sendo invariante por PT; o tensor energia-momento de MCS é diferente do de Proca e igual ao do eletromagnetismo puro em três dimensões; dentre outras particularidades que serão apresentadas nesta seção.

Sendo $A \in u(1)$ uma 1-forma em um espaço-tempo tridimensional, definimos o chamado termo de Chern-Simons (CS) pela seguinte ação:

$$S_{CSA} = \frac{m}{2g^2} \int A \wedge dA, \quad (2.73)$$

em que g é a constante de acoplamento de calibre e m é uma constante com dimensão de massa.

Sendo A elemento da álgebra $su(N)$, escreve-se

$$S_{CSnA} = \frac{m}{2g^2} \int \text{tr} \left(A \wedge dA - \frac{2i}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (2.74)$$

Dependendo das convenções usadas, as constantes que aparecem acima podem ser diferentes. Independentemente das convenções, é essencial que

$$\frac{\delta S_{CS}}{\delta A} \propto F. \quad (2.75)$$

Verifica-se diretamente que a Lagrangeana do termo de CS não é de forma geral invariante por transformações de calibre. A menos de termos de superfície, para transformações infinitesimais de calibre, as ações S_{SCA} e S_{SCnA} são invariantes. Para transformações de calibre finitas, há uma distinção clara entre o caso Abeliano e o não-Abeliano. A ação do primeiro mantém-se como invariante a menos de termos de superfície, a ação do segundo, porém, a menos de termos de superfície, transforma-se por uma constante global [26]

$$S_{CSnA} \longrightarrow \frac{8m \pi^2 \omega}{g^2} S_{CSnA}, \quad (2.76)$$

em que $\omega \in \mathbb{N}$. Impondo que a função partição de S_{CSnA} não se altera por transformações de calibre, a constante $\frac{8m\pi^2\omega}{g^2}$ tem de ser um múltiplo inteiro de 2π , ou seja,

$$4\pi \frac{m}{g^2} = n, \quad \text{com } n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (2.77)$$

Esta relação de quantização, naturalmente associada a uma quantização de m , estabelece uma distinção dramática entre as ações S_{CSA} e S_{CSnA} , pois, para dado g^2 , m na primeira pode ser qualquer. Essa propriedade é chamada de quantização de nível [26, 21].

As Lagrangeanas L_{CSA} e L_{CSnA} se conservam por C, mas trocam de sinal global por P ou T, sendo invariantes por PT e CPT [26].

O termo de CS é chamado de topológico devido a independer da métrica, essa não aparece nem entre as contrações dos índices e nem como fator do elemento de volume, como o caso Abeliano ilustra abaixo¹⁰:

$$\begin{aligned} S_{CSA} &= \frac{m}{2g^2} \int A_\mu \partial_\nu A_\lambda dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \\ &= \frac{m}{2g^2} \int A_\mu \partial_\nu A_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\lambda} d^3x. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Portanto o tensor energia-momento do termo de CS é nulo. A adição desse termo a qualquer modelo não altera o tensor energia-momento do modelo original.

O termo de CS, seja Abeliano ou não-Abeliano, possui zero grau de liberdade. Isso pode ser minuciosamente verificado através do método de Dirac¹¹[28] ou pelo simplético [29, 30]. Para o caso Abeliano, essa propriedade pode ser antevista dada sua trivial equação de movimento: $F = dA = 0$.

Para conferir dinâmica ao termo de CS é natural adicioná-lo ao termo de Maxwell,

¹⁰Deve-se lembrar que $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$ não depende da métrica, ao contrário de $\epsilon^{\mu\nu\lambda} = (\det g_{\mu\nu})^{-1} \varepsilon^{\mu\nu\lambda}$.

¹¹Ao fazer a contagem de graus de liberdade, deve-se estar atento à interdependência linear de seus vínculos.

assim formando a teoria Maxwell-Chern-Simons (MCS), que com fonte é dada por

$$S_{MCS}[A] = -\frac{1}{2g^2} \int (*F \wedge F \pm mA \wedge F) + \int A \wedge *J, \quad (2.79)$$

com $F = dA$ e $d*J = 0$. Assumiremos que a métrica é $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(+ \ - \ -)$ e $m > 0$. O sinal do termo de CS pode ser positivo ou negativo, um se transforma no outro por mudança de paridade. A equação de movimento é dada por

$$d*F \mp mF = -g^2 *J. \quad (2.80)$$

A equação acima é consistente com a conservação da corrente $d*J = 0$. Assim como no eletromagnetismo usual, e contrariamente ao modelo de Proca, o potencial A só ocorre nas equações de movimento internamente a F . Nota-se que m não só tem dimensão de massa como realmente está associada a um pólo no propagador [26]. A última equação pode ser escrita como

$$(d*d* + m^2)F = -g^2 dJ \mp g^2 m *J. \quad (2.81)$$

Essa equação é obtida ao se aplicar o “divergente” $d*$ em (2.80) e substituir $md*F$ pela sua própria expressão dada por (2.80). Não foi antes comentado, mas $d*d*F$ é proporcional ao d’Alambertiano de $F_{\mu\nu}$.

Dividindo a 2-forma F em duas formas no espaço E e B , como feito em (2.33), as equações advindas da identidade de Bianchi permanecem as mesmas (2.35, 2.36), enquanto a Eq. (2.80) se torna

$$\partial^j B_{ji} - \partial_0 E^i \mp m E^j \epsilon_{ji} = g^2 J_i, \quad (2.82)$$

$$\partial^i E_i \pm m B_{ij} \epsilon^{ij} = g^2 J_0. \quad (2.83)$$

Vamos introduzir a seguinte notação escalar-vetorial¹²:

¹²O sinal que aparece na frente de B_z e $\nabla \times \vec{E}$ é condizente com as observações da Seção 2.2 em relação à métrica adotada, ou seja, $k = -1$.

$$B_z := -\frac{1}{2}B_{ij}\epsilon^{ij} = -B_{12}, \quad (2.84)$$

$$\nabla \times \vec{E} := -\epsilon^{ij}\partial_i E_j, \quad (2.85)$$

$$(\nabla \times B_z)^i := \epsilon^{ij}\partial_j B_z, \quad (2.86)$$

$$(\vec{E})^i := \epsilon^{ij}E_j. \quad (2.87)$$

Conseqüentemente, nesta notação, as equações de movimento do modelo de MCS são

$$\nabla \times \vec{E} + \dot{B}_z = 0, \quad (2.88)$$

$$\nabla \times B_z - \dot{\vec{E}} \pm m \vec{E} = g^2 \vec{J}, \quad (2.89)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} \pm m B_z = g^2 J_0. \quad (2.90)$$

A violação de paridade é clara nas equações acima, pois B_z e \vec{E} são pseudo-escalar e pseudo-vetor. Na próxima seção veremos que, por meio da dualidade do modelo de MCS com o autodual, a união dos dois modos propagantes do modelo de MCS é descrita pelo modelo de Proca em 3D. A versão não-Abeliana do termo de CS será retomada no Cap. 5, ao tratamos do termo de CS não-comutativo.

2.5 Dualidades eletromagnéticas

Dualidade é por si só um tema muito vasto com diversas aplicações em física. Há vários tipos de dualidades empregadas na física e muitas vezes o conceito é utilizado de forma vaga, algumas introduções sobre o assunto podem ser vistas na Refs. [9, 31]. De forma geral, dualidade se refere a descrições distintas de um mesmo fenômeno ou sistema físico. Há diversas expectativas quanto ao papel das dualidades na física, incluindo o entendimento de confinamento, unificação das teorias de cordas, verificação

de monopólos magnéticos etc. Em teorias de cordas costuma-se distinguir três tipos de dualidades: S , T e U . Essencialmente, dualidades do tipo S (“strong/weak dualities”) são as que relacionam modelos por meio da inversão da constante de acoplamento, dualidades do tipo T (“target-space dualities”) relacionam modelos por meio da inversão do raio de compactificação e dualidades do tipo U são uma mistura dos dois casos anteriores. As dualidades eletromagnéticas são manifestações de dualidades do tipo S , são autodualidades das cordas do tipo IIB e podem ser descritas no contexto de teorias de campos. As dualidades eletromagnéticas, contudo, foram percebidas originalmente bem antes do surgimento das teorias de cordas, já no século XIX por Heaviside [8], e além de sua relevância intrínseca (que será comentada em breve) são úteis também como laboratórios para esclarecer o funcionamento de outras dualidades.

Dualidade eletromagnética é também um tema amplo e, embora antigo, continua a se desenvolver nos dias de hoje. Dentre os avanços das últimas décadas encontram-se a conjectura de Montonen-Olive ($\mathcal{N} = 4$) [32], dualidades com massa topológica [41], dualidade de Seiberg-Witten ($\mathcal{N} = 2$) [33], dualidade de Seiberg ($\mathcal{N} = 1$) [34], dualidades Abelianas não-lineares (DBI inclusive) [35], dualidades em espaços-tempos não-comutativos [125, 72] e mais recentemente a conexão com o programa de Langlands descoberta por Kapustin e Witten [37]. Revisões “pedagógicas” sobre os três primeiros tipos de dualidade se encontram nas Refs. [9, 31]. Somente alguns aspectos básicos das dualidades eletromagnéticas serão necessárias para os objetivos desta tese, nesta apresentação não iremos tratar de nenhum caso supersimétrico e nem da conexão com Langlands.

Essa complexa estrutura atual de dualidades eletromagnéticas teve início com uma simples observação das equações de Maxwell em 4D e sem fontes¹³,

$$\nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0, \quad (2.91)$$

¹³Veja as Eqs.(2.41-2.44) com $g = \text{diag}(+ - - -)$.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.92)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \dot{\vec{E}} = 0, \quad (2.93)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0. \quad (2.94)$$

É imediato notar que essas equações são invariantes pelas transformações $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ e $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ [equivalentemente escreve-se $(\vec{E}, \vec{B}) \rightarrow (\vec{B}, -\vec{E})$]. Caso esteja-se analisando uma onda eletromagnética no vácuo, essa transformação é equivalente a uma rotação de $\pi/2$. Essa correspondência possui também uma forma contínua, dada por

$$\begin{pmatrix} \vec{E}' \\ \vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix}, \quad (2.95)$$

em que o caso discreto anterior corresponde a $\alpha = \pi/2$. Pode-se ainda escrever vetores complexos que se mantêm invariantes por essas transformações, a menos de uma fase, e expressar as quatro equações de Maxwell através de duas apenas. Ademais, esse quadro ainda pode ser estendido para o caso de meios dielétricos e de teorias eletromagnéticas não-lineares, como a de Dirac-Born-Infeld. Nesse quadro geral, as equações de movimento são

$$\nabla \cdot (\vec{D} + i\vec{B}) = 0, \quad (2.96)$$

$$\nabla \times (\vec{E} + i\vec{H}) = i \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} + i\vec{B}), \quad (2.97)$$

em que $D^i = G^{i0}$, $H^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} G_{jk}$ e $G^{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}$ [35]. E essas equações são invariantes por

$$(\vec{D} + i\vec{B}) \rightarrow e^{i\alpha} (\vec{D} + i\vec{B}), \quad (2.98)$$

$$(\vec{E} + i\vec{H}) \rightarrow e^{i\alpha} (\vec{E} + i\vec{H}), \quad (2.99)$$

com α constante. Os detalhes dessas passagens podem ser vistos nas Refs. [35, 36]. Embora consideravelmente gerais e elegantes, essas correspondências não são imediatamente preservadas ao inserirmos fontes, não só por “questões formais”, mas também é evidente sob um ponto de vista físico. Em particular, frente a essas

correspondências ondas eletromagnéticas são rodadas por um ângulo α . No vácuo sem fontes, qualquer rotação da onda eletromagnética é indiferente, mas havendo um polarizador essa simetria é quebrada, a menos que ela passe a envolver o polarizador também. Outra forma de analisar essa questão, talvez mais óbvia, é considerar um sistema composto de carga elétrica junto de seu campo elétrico; assim, a fim de que a transformação $(\vec{E}, \vec{B}) \rightarrow (\vec{B}, -\vec{E})$ produza um sistema físico coerente, monopólos elétricos devem tornar-se monopólos magnéticos. Essa propriedade, em parte, levou a propostas de vários tipos de monopólos magnéticos.

Iremos analisar agora como essa simetria se apresenta na ação. Em termos da 2-forma eletromagnética, a simetria $(\vec{E}, \vec{B}) \rightarrow (\vec{B}, -\vec{E})$ é simplesmente descrita por $F \rightarrow *F$. Trocar F por $*F$ apenas altera o sinal global da ação do eletromagnetismo, pois $**F = -F$ no espaço-tempo tratado. Existe uma forma mais precisa e geral de analisar essa invariância física. Seja

$$S[A] = \frac{1}{2g^2} \int F \wedge *F \quad (2.100)$$

a ação do eletromagnetismo em 4D com $F := dA$, $g = \text{diag}(+---)$ e g^2 a constante de acoplamento. Considere a seguinte ação

$$S_M[A_D, F] = \int \frac{1}{2g^2} F \wedge *F + dA_D \wedge F. \quad (2.101)$$

Acima, F é uma 2-forma qualquer e A_D é uma 1-forma qualquer, cujas dinâmicas são determinadas pelo princípio de mínima ação (assume-se que a integral atua em ambas as parcelas acima). A variação dessa ação com respeito a A_D produz

$$dF = 0. \quad (2.102)$$

Como a topologia do espaço-tempo tratado é trivial, existe uma 1-forma A tal que $F = dA$. Substituindo esse resultado em S_M vem

$$S_M \leftrightarrow S[A] = \frac{1}{2g^2} \int dA \wedge *dA. \quad (2.103)$$

Considerando agora a variação de S_M com respeito a F , temos

$$dA_D = -\frac{1}{g^2} {}^*F. \quad (2.104)$$

Essa relação nos permite eliminar F de $S_M[A_D, F]$, conseqüentemente

$$S_M \leftrightarrow \tilde{S}[A_D] = \frac{g^2}{2} \int dA_D \wedge {}^*dA_D. \quad (2.105)$$

Ou seja,

$$S \leftrightarrow \tilde{S}. \quad (2.106)$$

O símbolo \leftrightarrow foi introduzido para indicar equivalência entre funcionais quando suas variações são tomadas como nulas. A equivalência obtida através da técnica acima é mais forte do que essa correspondência, mas não entraremos em detalhes no momento. O mapa que fornece a correspondência entre os campos de S e \tilde{S} é dado pela combinação das Eqs.(2.102, 2.104),

$$dA_D = -\frac{1}{g^2} {}^*dA. \quad (2.107)$$

Nota-se que ao aplicar d na equação acima obtém-se a equação de movimento de S , enquanto a aplicação de d^* leva à equação de movimento de \tilde{S} .

Esse mapa, a menos do fator $-\frac{1}{g^2}$, descreve exatamente a substituição de F por *F anteriormente mencionada. Embora classicamente esse fator não tenha importância, essa mesma dedução pode ser feita em funções partição (as variações acima correspondem a integrais Gaussianas) e vê-se que a constante de acoplamento é realmente invertida. Enfim, partindo da invariância $(\vec{E}, \vec{B}) \rightarrow (\vec{B}, -\vec{E})$ obtivemos um primeiro indício de existência de certa autodualidade que relaciona regiões de acoplamento forte com acoplamento fraco.

Com um pouco de experiência, percebe-se que essa técnica também pode ser usada para o caso com fontes. Considere a seguinte ação:

$$S_{M_\Lambda}[F, A_D] = \int \frac{1}{2g^2} F \wedge {}^*F + F \wedge (\Lambda + dA_D). \quad (2.108)$$

A variação com respeito a A_D implica que $dF = 0$ e portanto existe uma 1-forma A tal que

$$F = dA. \quad (2.109)$$

Substituindo esse resultado em S_{M_Λ} , vem

$$S_{M_\Lambda} \leftrightarrow S_J[A] = \int \frac{1}{2g^2} dA \wedge {}^*dA + A \wedge {}^*J, \quad (2.110)$$

em que usamos ${}^*J := d\Lambda$, o que é consistente com $d{}^*J = 0$. A variação de S_{M_Λ} com respeito a F fornece a teoria dual ao eletromagnetismo com fonte J . A equação de movimento provinda dessa variação lê-se

$$\frac{1}{g^2} {}^*F + \Lambda + dA_D = 0. \quad (2.111)$$

Seja $F_{D\Lambda} := dA_D + \Lambda$, a ação dual é portanto

$$S_{M_\Lambda} \leftrightarrow \tilde{S}_\Lambda[A_D] = \frac{g^2}{2} \int F_{D\Lambda} \wedge {}^*F_{D\Lambda}. \quad (2.112)$$

A teoria acima está acoplada a uma fonte, porém não através de um acoplamento mínimo. A identidade de Bianchi e a equação de movimento de S_J são

$$dF = 0 \quad d{}^*F = -g^2 {}^*J, \quad (2.113)$$

enquanto que no quadro dual a identidade de Bianchi e a equação de movimento são respectivamente

$$dF_{D\Lambda} = {}^*J \quad d{}^*F_{D\Lambda} = 0. \quad (2.114)$$

Um detalhe importante quanto a esse tipo de dualidade com fontes é a presença de uma simetria envolvendo Λ , chamado de *Chern-kernel* [38]. Enquanto S_J é invariante por $\Lambda \rightarrow \Lambda + d\lambda$, para qualquer 1-forma λ , a ação \tilde{S}_Λ é invariante pela combinação $\Lambda \rightarrow \Lambda + d\lambda$ e $A_D \rightarrow A_D - \lambda$. Pode-se optar pela fixação dessa simetria usada na Ref. [39], ou seja, $d{}^*\Lambda = 0$. Essa escolha leva à equação de movimento $d{}^*dA_D = 0$, que lembra a expressão usual do eletromagnetismo, exceto pela fonte

não se encontrar na equação de movimento, mas sim na identidade $dF_{D\Lambda} = *J$ acima apresentada.

Quanto ao significado da dualidade formal acima, alguns comentários precisam ser feitos. Em primeiro lugar nota-se que o mapa $F \rightarrow *F$ não se manteve inalterado, foi generalizado para $F \rightarrow *\Lambda + *F$ (2.111) (ignorando as constantes globais), ou seja, depende explicitamente do *Chern-kernel*. Em certo sentido, pode-se dizer que a teoria dual \tilde{S} contém monopólos magnéticos, isso ocorre se identificarmos o campo magnético no quadro dual como $\tilde{B}^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{D\Lambda_{jk}}$, assim devido a $dF_{D\Lambda} = *J$ temos $\nabla \cdot \vec{\tilde{B}} = J^0$. Por outro lado, pode-se corretamente argumentar que a questão de monopólos magnéticos físicos não está sendo abordada, apenas se está lidando com monopólos elétricos de uma forma não convencional. Foi obtida uma equivalência formal entre Lagrangianas, monopólos magnéticos simplesmente não foram introduzidos; todavia, no quadro dual, esses mesmos monopólos elétricos são descritos tal como se fossem monopólos magnéticos ($dF \neq 0$). Uma forma de introduzir monopólos magnéticos físicos é, na ação \tilde{S}_Λ , inserir uma nova corrente que se acople minimamente com A_D , tal como feito na Ref. [40].

A técnica acima utilizada, chamada de Lagrangiana (ou ação) mestra, foi introduzida em [41] para verificar a dualidade entre os modelos MCS e autodual. O modelo autodual foi proposto na Ref. [42] como uma espécie de “raiz quadrada” (segundo os próprios autores) do modelo de Proca em 3D. Seguindo a Ref. [42], sendo a ação do modelo de Proca dada por¹⁴

$$S_{\text{Proca}}[A] = -\frac{1}{2} \int F \wedge *F - m^2 A \wedge *A, \quad (2.115)$$

sua equação de movimento é

$$d*dA - m^2 *A = 0, \quad (2.116)$$

¹⁴Como nenhuma constante de acoplamento com dimensão foi inserida, nesta parte A tem dimensão de massa ^{$\frac{1}{2}$} .

Considere a seguinte equação:

$$A = \pm \frac{1}{m} \star dA. \quad (2.117)$$

Aplicando a última equação sobre ela mesma, a Eq. (2.116) é obtida (lembrar que $\star\star = 1$ em 3D). Substituindo A por f , a ação que tem (2.117) como equação de movimento é

$$S_{AD}[f] = \frac{1}{2} \int \mp \frac{1}{m} f \wedge df + f \wedge \star f. \quad (2.118)$$

A ação acima descreve o chamado modelo autodual. Esse modelo propaga 1 grau de liberdade para cada sinal do termo de CS $f \wedge df$, enquanto o modelo de Proca em 3D possui 2 graus de liberdade. Embora a motivação original desse modelo tenha sido puramente formal, posteriormente, por meio de um mecanismo de bosonização para m suficientemente grande, foi demonstrada sua correspondência com o modelo de Thirring [43]. Nessa referência os autores utilizam a dualidade entre as teorias MCS e autodual (obtendo a correspondência do modelo de Thirring com o MCS) que iremos agora apresentar e foi introduzida em [41]. Por brevidade, demonstraremos a dualidade apenas usando a técnica da ação mestra; mais detalhes sobre essa correspondência podem ser encontrados nas Refs. [41, 44]. No Cap.5 a dualidade entre as extensões não-comutativas dos modelos MCS e autodual será demonstrada através de outra técnica, a projeção dual.

Considere a seguinte transformação de Legendre na ação de MCS (2.79):

$$S_M[A, f] = \int \frac{g^2}{2} f \wedge \star f + dA \wedge f - \frac{m}{2g^2} A \wedge dA. \quad (2.119)$$

Trata-se essencialmente da mesma ação mestra que aparece na Eq. (2.101) com F substituído por f e com a adição do termo de CS. A variação com respeito a f leva S_M de volta a (2.79). A equação de movimento advinda da variação com respeito a f é

$$dA + g^2 \star f = 0. \quad (2.120)$$

Eliminando f de S_M retorna-se à ação original de MCS. Por outro lado, a variação de A tem como equação de movimento

$$df - \frac{m}{g^2} dA = 0, \quad (2.121)$$

a qual, ao ser empregada para eliminar A de S_M , leva justamente à ação do modelo autodual, a saber

$$S_{AD} = \frac{g^2}{2} \int \frac{1}{m} df \wedge f + f \wedge *f. \quad (2.122)$$

Substituindo m por $-m$ obtém-se a dualidade do outro modo propagante. Verifica-se que tanto o modelo MCS quanto o autodual violam P e T , mas preservam PT , C e CPT .

A dualidade entre os modelos MCS e autodual é uma das mais conhecidas, ela tem servido de paradigma para o estudo de várias outras dualidades. Para uma detalhada introdução à técnica da Lagrangiana mestra veja [31]. Embora haja correspondência física entre os modelos MCS e autodual, suas estruturas formais são consideravelmente distintas, em particular MCS é uma teoria de calibre de segunda ordem nas velocidades, enquanto o modelo autodual é de primeira ordem nas velocidades e não possui simetria de calibre. Ademais, o mapa dado pela Eq. (2.120) não descreve uma fixação de calibre (veja a Subseção 3.1.5), mas sim um colapso de todas as órbitas de calibre de MCS, cada uma para um único ponto da superfície de vínculo do modelo autodual. Devido às suas diferenças formais, ocasionalmente pode ser preferível usar um modelo em relação ao outro. Na Ref. [43] dá-se preferência à formulação de MCS para a avaliação de certo *loop* fermiônico advindo do modelo de Thirring, enquanto a Ref. [45] utiliza a formulação autodual para efetuar cálculos na rede referentes ao efeito Hall.

Outra diferença importante quanto aos modelos MCS e autodual se deve às suas extensões não-Abelianas e/ou não-comutativas. Na Ref. [41] a questão da dualidade não-Abeliana é considerada, mas a abordagem utilizada se demonstrou inconclusiva. Nas Refs. [46] os autores mostram que as extensões não-Abelianas desses modelos não são duais entre si. As extensões não-comutativas serão tratadas na Seção 5.1.

Capítulo 3

Formalismos Simpléticos

Na primeira parte deste capítulo apresentaremos uma revisão do formalismo simplético [29, 30, 47], trata-se de um formalismo alternativo ao de Dirac de dedução da dinâmica Hamiltoniana de sistemas vinculados [28] (redução Hamiltoniana). Na seção seguinte será apresentado o chamado formalismo simplético de calibre, originalmente introduzido, como uma aplicação particular, na Ref. [48]. Esse outro formalismo lida com a questão da “imersão em calibre” seguindo os princípios do método simplético, em vez dos de Dirac. A segunda seção apresenta esse formalismo e aplicações em acordo especialmente com a Ref. [10].

3.1 Formalismo simplético e parênteses generalizados

3.1.1 Noções de geometria simplética

Embora seja possível avaliar toda a física clássica de um sistema utilizando Hamiltonianas e parênteses de Dirac (ou generalizados) sem mencionar estruturas simpléticas ou simplectomorfismos, noções de geometria simplética possibilitam uma nova e mais geral forma de analisar problemas Hamiltonianos. Esta seção segue em especial os princípios utilizados na Ref. [14] (Cap. 9), outras referências úteis incluem [49, 50].

Considere uma variedade N de dimensão par munida de certa 2-forma f não-degenerada, ou seja,

$$\forall \zeta \neq 0, \exists \eta \mid f(\zeta, \eta) \neq 0 \quad (\zeta, \eta \in T_x N). \quad (3.1)$$

Equivalentemente, a matriz $(f_{\alpha\beta})$ que a representa possui determinante não-nulo ($f = \frac{1}{2} f_{\alpha\beta} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta$).

Uma diferença crucial entre f e uma possível métrica g no mesmo espaço é o fato do último ser simétrico, enquanto o primeiro é anti-simétrico. Por outro lado, g e f são transformações bilineares e ambos têm igual direito a definir regras de levantar ou abaixar índices, assim como suas próprias regras de ortogonalidade. Para evitar confusão, a regra de ser a métrica a única responsável por essa alteração nos índices será mantida¹. Há dois motivos por estarmos considerando uma variedade de dimensão par: i) desejamos associar N ao espaço de fase, cuja dimensão é o dobro da do espaço de configuração; ii) embora possa-se definir métricas em variedades de dimensão arbitrária, 2-formas não-degeneradas só ocorrem em variedades de dimensão par. A demonstração é imediata, pois, para qualquer matriz anti-simétrica f ,

$$\det(f_{\alpha\beta}) = \det[(f_{\alpha\beta})^T] = \det(f_{\beta\alpha}) = (-1)^{\dim N} \det(f_{\alpha\beta}), \quad (3.2)$$

Logo $\det f = 0$ se a dimensão de N for ímpar.

Sendo a 2-forma não-degenerada f constante para todos os pontos da variedade N , por meio de transformações de coordenadas, a matriz $(f_{\alpha\beta})$ pode sempre ser escrita na chamada forma canônica,

$$(f_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

com $\dim N = 2n$.

¹ $f^{\alpha\beta}$ será identificado como elementos da inversa de $(f_{\alpha\beta})$, mas a contração $\xi^\alpha f_{\alpha\beta}$ não será expressa por ξ_β .

Consideremos que N é uma “fatia” $2n$ -dimensional da variedade $2n+1$ -dimensional N_e com t constante, em que t é a variável adicional necessária para descrever N_e . Seja f_e uma 2-forma de posto máximo em N_e , ou seja, de posto $2n$. Conseqüentemente, a matriz de f_e , em cada ponto $\xi \in N_e$, possui um único autovetor $\nu(\xi)$ de autovalor nulo linearmente independente (autovetor esse chamado de modo-zero). Ou seja, f_e determina uma direção privilegiada em N_e em cada um de seus pontos, dada pelo campo vetorial $\nu(\xi)$. Essa direção privilegiada iremos associar à evolução temporal do sistema no espaço de fase. Para determinar como essa evolução se dará, precisa-se definir certa notável 1-forma em N_e ,

$$L = p_i dq^i - H(q, p)dt, \quad (3.4)$$

em que $i = 1, 2, \dots, n$, $\{q, p, t\}$ são coordenadas locais de N_e e $H(q, p)$ é dada função (0-forma) definida em N_e (constante para todo t). A diferenciação externa de L leva à seguinte 2-forma:

$$dL = dp_i \wedge dq^i - \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \wedge dt. \quad (3.5)$$

Em particular, podemos identificar a 2-forma acima com f_e (dL tem posto $2n$, como será visto). Usando o ordenamento $\{q^i\}, \{p_i\}, t$ para as coordenadas de N_e e $dL = f_e = \frac{1}{2} f_{e\alpha\beta} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta$, vem

$$(f_{e\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -I & -\frac{\partial H}{\partial q^j} \\ I & 0 & -\frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \frac{\partial H}{\partial q^i} & \frac{\partial H}{\partial p_i} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

em que I é a identidade $n \times n$, o índice i simboliza vetores linha, enquanto j vetores coluna. Comparando a matriz acima com a Eq. (3.3) é imediato ver que dL é uma extensão natural de f para N_e . A matriz f_e acima possui o seguinte modo-zero²:

$$(\nu^\alpha) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad 1 \right). \quad (3.7)$$

²Esse modo-zero poderia ser também representado na forma coluna, mas futuramente trataremos de modos-zero que são operadores, o que torna mais conveniente sua atuação pela esquerda da matriz f_e , ao invés da direita.

Qualquer outro vetor não-nulo cuja atuação em f_e produza um resultado nulo é necessariamente proporcional a ν .

Se a evolução temporal no espaço de fase de dado sistema é dada localmente em cada ponto de N pelo campo vetorial $\nu \in TN$, temos $\dot{\xi} = \nu(\xi)$, ou seja, obtém-se as seguintes equações de familiar aspecto:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (3.8)$$

Há várias observações a serem feitas. As equações acima devem ser vistas como as equações de movimento de um sistema físico, em que a função Hamiltoniana H é escolhida de forma a reproduzir as simetrias e equações de movimento do sistema físico estudado, determinando conseqüentemente a Lagrangiana, isto é, 1-forma L (veremos em breve o caso inverso e mais comum: a determinação de H a partir de L). Resultados equivalentes apareceriam se tivéssemos usado algum princípio variacional, mas para o objetivo desta seção essa outra dedução das equações de movimento nos parece mais esclarecedora. Nas equações acima consideramos que q e p podem ser vistos como funções de t . Evoluções arbitrárias de um sistema em N_e não possibilitam de forma geral escrever q e p como funções de t , mas a evolução dada por ν segue sempre a direção de t crescente e sempre com a mesma velocidade (3.7), o que permite a associação de t com o tempo. Escolhemos uma forma muito particular para a 2-forma f_e , falta saber até que ponto essa escolha não é excessivamente restritiva, isto é, se não há sistemas físicos que são descritos por outras 2-formas f_e ; como veremos agora, essa escolha inicial realmente foi restritiva demais.

Sendo f_e uma 2-forma exata de posto máximo em N_e ($2n$), considere uma curva (unidimensional) fechada γ_1 em N_e . A evolução temporal de γ_1 gera, a menos de alguns casos singulares, um tubo bidimensional de superfície σ no espaço de fase estendido N_e (como sempre, estamos supondo que essa evolução temporal seja dada pelo modo-zero ν de f_e). Seja γ_2 uma outra curva fechada que envolva o tubo gerado

por γ_1 . Em particular, γ_1 e γ_2 podem ser curvas de N em tempos t distintos, como mostram as figuras abaixo:

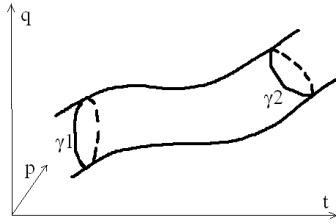


Fig.1

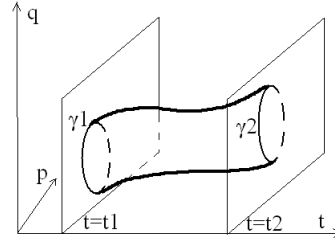


Fig.2

Para ambos os casos, sendo f_e exata, existe uma 1-forma L , não necessariamente dada pela Eq.(3.4), tal que $f_e = dL$, e portanto

$$\oint_{\gamma_1} L - \oint_{\gamma_2} L = \oint_{\partial\sigma} L = \int_{\sigma} f_e = 0. \quad (3.9)$$

A última igualdade se deve a f_e ser nulo para quaisquer vetores da superfície bidimensional σ , isto é, $f_e(\zeta, \eta) = 0 \quad \forall \zeta, \eta \in T\sigma$, pois $\nu \in T\sigma$. Para ser mais específico, $\forall \eta \in T\sigma$ temos $f(\nu, \eta) = 0$ (3.1); e devido a σ ser bidimensional (assim como $T_x\sigma$), temos $f_e(\zeta, \eta) = 0 \quad \forall \zeta, \eta \in T\sigma$. Da Eq. (3.9), para curvas γ_1 e γ_2 tais que $dt = 0$ (Fig. 2), segue imediatamente a conservação da integral da “parte cinética” da 1-forma L ,

$$\oint_{\gamma_1} a_{\alpha}(\xi) d\xi^{\alpha} = \oint_{\gamma_2} a_{\alpha}(\xi) d\xi^{\alpha}, \quad (3.10)$$

em que $\alpha = 1, 2, \dots, 2n$ e usamos a seguinte expressão geral para L (desconsiderando apenas qualquer dependência explícita em t):

$$L(\xi) = a_{\alpha}(\xi) d\xi^{\alpha} - H(\xi) dt. \quad (3.11)$$

Seja $\sigma_1 \in N_e$ a superfície cujo contorno é γ_1 em $t = t_1$. Em $t = t_2$, a superfície que γ_2 envolve é denotada por σ_2 . Como

$$\oint_{\gamma_{1,2}} a_{\alpha}(\xi) d\xi^{\alpha} = \int_{\sigma_{1,2}} da_{\alpha}(\xi) \wedge d\xi^{\alpha}, \quad (3.12)$$

usando a Eq. (3.10) vem

$$\int_{\sigma_1} da_\alpha(\xi) \wedge d\xi^\alpha = \int_{\sigma_2} da_\alpha(\xi) \wedge d\xi^\alpha. \quad (3.13)$$

A última equação tem como caso particular (caso canônico)

$$\int_{\sigma_1} dp_i \wedge dq^i = \int_{\sigma_2} dp_i \wedge dq^i, \quad (3.14)$$

com $i = 1, 2, \dots, n$. Dado que o produto externo de n dos elementos de área acima é proporcional ao elemento de volume $2n$ -dimensional

$$dp_{i_1} \wedge \dots \wedge dp_{i_n} \wedge dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_n}, \quad (3.15)$$

das Eqs. (3.13, 3.14) deduz-se o teorema de Liouville, ou seja, a evolução de estados no espaço de fase é tal que o volume é sempre preservado. Em (3.13), n produtos externos do termo $da_\alpha \wedge d\xi^\alpha = \partial_\beta a_\alpha d\xi^\beta \wedge d\xi^\alpha$ atuam como elemento de volume, desde que essa 2-forma seja não-degenerada (mais detalhes serão apresentados em breve).

Nota-se que a condição de f_e ser forma exata foi importante para a dedução do teorema de Liouville, contudo essa condição pode ser um pouco abrandada sem invalidar o teorema de Liouville, pois para o obter é necessário apenas que f_e seja fechada [14]. Essa maior generalidade não será de importância para nossos objetivos; como veremos, mesmo para sistemas vinculados, por fim a variedade estudada é topologicamente trivial. Enfim, continuaremos a considerar que f_e é 2-forma exata, sem perda de generalidade para nossos propósitos. Como veremos agora, a generalização de L dada pela Eq. (3.11) será especialmente útil, o caso dado por (3.4) não é suficientemente geral para abarcar grande parte dos problemas de interesse físico.

A fim de que a enésima potência de $da_\alpha \wedge d\xi^\alpha$ seja proporcional ao elemento de volume do espaço de fase $2n$ -dimensional, o qual desejamos associar a N , a 2-forma $da(\xi)$ não pode ser degenerada. Como essa 2-forma é definida em N e é igual a f_e em dado t , pois

$$f_e = dL = da_\alpha \wedge d\xi^\alpha - dH \wedge dt, \quad (3.16)$$

identificamos

$$f = da = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta. \quad (3.17)$$

Assim, $f \in N$ é 2-forma não-degenerada e exata, enquanto f_e é 2-forma exata de posto máximo na variedade $2n + 1$ -dimensional N_e .

Sendo f não-degenerado, f_e possui apenas um modo-zero e a dinâmica no espaço de fase encontra-se univocamente determinada. A Lagrangiana do eletromagnetismo é um bom exemplo de que nem sempre o termo cinético de L tem a forma $p_i \wedge dq^i$ [mesmo quando expressa em primeira ordem nas velocidades (3.67)]. Disso conclui-se que a generalização de L , como dada por (3.11), é necessária. Formulamos agora as seguintes definições:

Definição 3.1. Uma estrutura simplética em uma variedade N é uma 2-forma $f_\xi : T_\xi N \times T_\xi N \rightarrow \mathbb{R}$ fechada e não-degenerada, ou seja, $df = 0$ e

$$\forall \zeta \neq 0, \exists \eta \mid f(\zeta, \eta) \neq 0 \quad (\zeta, \eta \in T_x N). \quad (3.18)$$

Uma estrutura simplética pode também ser chamada de 2-forma simplética ou simplesmente forma simplética. Sendo f forma simplética e exata, a 1-forma $a_\xi : T_\xi N \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz $f = da$ é ocasionalmente chamada de 1-forma canônica.

Definição 3.2. Por variedade simplética chama-se o par (N, f) , em que N é uma variedade e f é uma estrutura simplética.

Definição 3.3. O par (N, h) , em que N é variedade e h é 2-forma fechada degenerada, é uma variedade pré-simplética. h é forma pré-simplética.

Conforme será visto nas próximas seções, da parte cinética de diversas Lagrangianas, quando expressas em primeira ordem nas velocidades (3.11), extrai-se de imediato uma 2-forma pré-simplética h , com $h = da$ e degenerado. Em princípio isso levaria a ambigüidades ou inconsistências dinâmicas, pois a extensão de h para

o espaço de fase estendido N_e pode gerar uma 2-forma cujo posto não é máximo em N_e , ou seja, teríamos mais de um modo-zero responsável pela evolução temporal do sistema no espaço de fase. Como será visto, isto é um sinal de que há vínculos e/ou simetria de calibre na Lagrangiana tratada. Em geral, não se assume que a Lagrangiana original seja problemática, mas sim que essa dificuldade não pode ser superada em uma variedade trivial como \mathbb{R}^{2n} , ou seja, supõe-se que interdependências entre as coordenadas que aparecem na Lagrangiana devem ser consideradas. Passa-se portanto para outra variedade trivial de dimensão maior \mathbb{R}^{2n+m} na qual a variedade não-trivial do espaço de fase físico estaria imersa (superfície de vínculos). Assim procedendo, encontra-se por fim uma verdadeira estrutura simplética f associada à variedade \mathbb{R}^{2n+m} , cuja extensão f_e para o espaço \mathbb{R}^{2n+m+1} possui um único modo-zero³.

3.1.2 Parênteses generalizados

Seja \mathbb{R}^{2n} um espaço de fase dado pelas coordenadas $q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$ cujos parênteses de Poisson satisfazem

$$\begin{aligned} \{q^i, q^j\} &= \{p_i, p_j\} = 0, \\ \{q^i, p_j\} &= -\{p_j, q^i\} = \delta_j^i, \\ \dot{q}^i &= \{q^i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

com $i, j = 1, 2, \dots, n$ e $H = H(q, p)$ é a função Hamiltoniana.

Essas propriedades podem ser apresentadas de forma mais compacta se a seguinte notação for introduzida:

$$\xi^i := q^i, \quad \xi^{n+i} := p_i, \tag{3.20}$$

$$(\sigma^{\alpha\beta}) := \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \\ -\delta_j^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

³Nota-se que m tem de ser par, isso será avaliado posteriormente

Com efeito,

$$\begin{aligned} \{\xi^\alpha, \xi^\beta\} &= \sigma^{\alpha\beta}, \\ \dot{\xi}^\alpha &= \sigma^{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi^\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Com esta notação, os parênteses de Poisson entre as funções $A(\xi)$ e $B(\xi)$ assumem a forma

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial \xi^\alpha} \sigma^{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial \xi^\beta}. \quad (3.23)$$

Nota-se que a matriz σ acima é igual à inversa da matriz simplética (3.3) na forma canônica. Como a estrutura simplética, independentemente da base utilizada, é a responsável por determinar a evolução do sistema no espaço de fase, define-se a seguinte generalização dos parênteses de Poisson:

$$\{A, B\}^* := \frac{\partial A}{\partial \xi^\alpha} f^{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial \xi^\beta}, \quad (3.24)$$

em que $f^{\alpha\beta}$ são elementos da inversa da matriz $(f_{\alpha\beta})$. Estruturas simpléticas induzem estruturas de Poisson [14, 50]. Esses parênteses generalizados são os que contém uma direta relação com a dinâmica de um sistema físico no espaço de fase.

Dado que um vínculo é escrito como uma função do espaço de fase que é igualada a zero ($\Omega_m = 0$), a quantização dessas funções leva a operadores nulos e o comutador de operadores nulos é sempre nulo. Por outro lado, os parênteses de Poisson de um vínculo com outra grandeza não são necessariamente nulos. Essa questão motivou Dirac a definir novos parênteses clássicos, os quais, em particular, produziriam sempre um resultado nulo quando envolvessem qualquer vínculo. Dirac propôs que, em teorias com vínculos, os parênteses de Poisson devem ser substituídos por [28, 49]

$$\{A, B\}_D := \{A, B\} - \{A, \Omega_m\} C^{mn} \{\Omega_n, B\}, \quad (3.25)$$

chamados de parênteses de Dirac. Acima, os Ω_m 's são os vínculos da teoria e (C^{mn}) é definida como a inversa da matriz $(\{\Omega_m, \Omega_n\})$, chamada de matriz de Dirac. Se-

gundo Dirac, seriam esses parênteses acima os que deveriam ser substituídos por comutadores ao proceder com a quantização de sistemas vinculados, em vez dos de Poisson, isto é,

$$\{A, B\}_D \longrightarrow -i[\hat{A}, \hat{B}]. \quad (3.26)$$

O formalismo de Dirac, embora correto, possui alguns inconvenientes, além de ser trabalhoso. Esse formalismo insere uma distinção entre vínculos primários e secundários que é arbitrária; isto é, diferentes aplicações do método distingüem um mesmo vínculo ora como primário ora como secundário [28, 49]. Os vínculos segundo esse formalismo são também classificados entre primeira classe e segunda classe. Os de primeira classe possuem duas propriedades distintas: além de imporem certa relação de dependência entre as coordenadas do espaço de fase, esses ainda são geradores de simetria de calibre, segundo a conjectura de Dirac [28, 49].

Décadas depois, Faddeev e Jackiw indicaram que a quantização de sistemas vinculados pode também ser feita através de métodos matemáticos mais modernos [29]. Em vez dos parênteses de Dirac, pode-se usar os parênteses induzidos pela inversa da estrutura simplética (3.24). Essa abordagem, que veio a ser conhecida como método simplético, foi posteriormente estendida por Barcelos Neto e Wotzasek [30] e a correspondência com os parênteses de Dirac foi demonstrada por Montani [47]. De forma geral, em vista da equivalência, chamaremos tanto os parênteses do método simplético quanto os de Dirac de parênteses generalizados.

3.1.3 Formalismo de Faddeev-Jackiw

Para encontrar a matriz simplética de um sistema vinculado e conseqüentemente seus parênteses generalizados, Faddeev e Jackiw [29] indicaram um método que se baseia na estreita relação dessa com a Lagrangiana de primeira ordem nas velocidades. A fim de esclarecer esta relação, continuemos a tratar de um sistema com $2n$ variáveis

canônicas independentes. A Lagrangiana pode ser escrita como

$$L = p_i \dot{q}^i - H, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.27)$$

Ao introduzir as variáveis simpléticas $\xi^i := q^i$, $\xi^{i+n} := p_i$, a 1-forma Ldt é escrita como

$$\begin{aligned} Ldt &= \frac{1}{2} \xi^\alpha f_{\alpha\beta} d\xi^\beta + \frac{1}{2} d(p_i q^i) - Hdt \\ &= \frac{1}{2} \xi^\alpha f_{\alpha\beta} d\xi^\beta - Hdt, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 2n, \end{aligned} \quad (3.28)$$

em que

$$(f_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_i^j \\ \delta_i^j & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Essa é matriz simplética em sua forma canônica (3.3).

Neste exemplo, a chamada 1-forma canônica é $a = \frac{1}{2} \xi^\alpha f_{\alpha\beta} d\xi^\beta$ (linear em ξ^α) e a 2-forma simplética $f = \frac{1}{2} f_{\alpha\beta} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta = da$ é constante. Pela definição de estrutura simplética, sabemos não ser este o caso mais geral: a diferencial externa de f deve se anular, mas f não precisa ser constante. Consideremos um caso mais geral de Lagrangiana de primeira ordem⁴:

$$L = a_\alpha(\xi) \dot{\xi}^\alpha - V(\xi), \quad \alpha = 1, 2, \dots, N. \quad (3.30)$$

As equações de Euler-Lagrange para a Lagrangiana (3.30) são⁵:

$$\frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\alpha} \dot{\xi}^\beta - \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\beta} \dot{\xi}^\beta, \quad (3.31)$$

logo

$$\begin{aligned} \partial_\alpha V &= (\partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha) \dot{\xi}^\beta \\ &= h_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta, \end{aligned} \quad (3.32)$$

⁴Nesta equação ξ^α deve ser visto como coordenada de um sistema qualquer, as equações de (3.20) não são necessariamente válidas.

⁵As coordenadas simpléticas são, a princípio, tratadas como independentes, o que justifica o emprego das equações de Euler-Lagrange.

onde foi usado $\partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$ e

$$h_{\alpha\beta} := \partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha. \quad (3.33)$$

A definição de $h_{\alpha\beta}$ coloca este tensor em proximidade com o tensor simplético. Seja h uma 2-forma diferencial dada pela derivada externa da 1-forma canônica $a = a_\alpha(\xi)d\xi^\alpha$, logo

$$\begin{aligned} h &= da_\beta \wedge d\xi^\beta \\ &= (\partial_\alpha a_\beta)d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha)d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta \\ &= \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta. \end{aligned} \quad (3.34)$$

A 2-forma h é fechada, pois $d(da) = 0$, ou seja, para ser possível identificar h com f (a 2-forma simplética), é necessário apenas que o determinante de $(h_{\alpha\beta})$ não se anule. Infelizmente isto nem sempre é verdade, por isto a matriz $(h_{\alpha\beta})$ será chamada de matriz pré-simplética.

A equação de movimento (3.32) e a equação (3.22) sugerem uma relação entre o potencial V e a Hamiltoniana. A Hamiltoniana de L é⁶

$$H(\Pi, \xi) = \Pi_\alpha \dot{\xi}^\alpha - L(\xi, \dot{\xi}), \quad (3.35)$$

em que $\Pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha}$. Como $\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} = a_\alpha(\xi)$, essa teoria possui, segundo o método de Dirac, N vínculos primários: $\Omega_\alpha(\Pi, \xi) = \Pi_\alpha - a_\alpha(\xi)$. Nosso objetivo não é proceder com o formalismo de Dirac, não vamos considerar tais relações de vínculos. Façamos simplesmente a substituição dos momentos Π_α pelas funções $a_\alpha(\xi)$ (o que parece ser, ao menos intuitivamente, mais sensato). Ao fazê-lo, $H(\Pi, \xi)$ passa a ser $H(\xi)$ e temos

$$H(\xi) = a_\alpha(\xi)\dot{\xi}^\alpha - L(\xi, \dot{\xi}) = V(\xi). \quad (3.36)$$

⁶Utilizando a nomenclatura de Dirac, essa Hamiltoniana é a canônica. Veremos que não será necessário definir novas Hamiltonianas análogas à total ou à estendida. Todo o procedimento simplético não é afetado diretamente, ou melhor, de forma explícita, pelo comportamento das funções fora da superfície de vínculo.

Sabemos que o operador Hamiltoniano é responsável pela evolução temporal dos operadores quânticos, portanto, em vista da relação que deve existir entre o comutador e os parênteses generalizados, a seguinte relação é esperada:

$$\dot{\xi}^\alpha = \{\xi^\alpha, H\}^*. \quad (3.37)$$

Substituindo H por V comprova-se sua coerência, pois, usando a definição dos parênteses generalizados seguida da equação de movimento, temos

$$\dot{\xi}^\alpha = \{\xi^\alpha, V\}^* = f^{\alpha\beta} \partial_\beta V = \dot{\xi}^\alpha. \quad (3.38)$$

Conclusão: Para obter os parênteses generalizados, é suficiente escrever a Lagrangiana da teoria em primeira ordem nas velocidades; donde infere-se as componentes da 1-forma canônica e determina-se o tensor pré-simplético. Se a matriz (pré-)simplética não for degenerada, esta será a matriz simplética, e sua inversa, por meio de (3.24), determinará os parênteses generalizados.

No caso de ser encontrada uma matriz h degenerada, a Ref. [29] sugere o emprego de redefinições de coordenadas (via teorema de Darboux) ou do próprio método de Dirac caso essa abordagem torne-se excessivamente complicada. Uma forma sistemática de lidar com teorias pré-simpléticas, isto é, que possuem “vínculos verdadeiros” segundo o formalismo simplético, foi proposta na Ref. [30] e será na próxima subseção exposta.

3.1.4 Vínculos e o formalismo de Barcelos Neto-Wotzasek-Montani

Até o presente momento, o termo “vínculo” só foi usado no sentido empregado pelo formalismo de Dirac. A seção anterior indica que tais vínculos não desempenham, a princípio, um papel importante no método simplético. A equação de movimento

(3.32), em especial, está de acordo com a última afirmativa; afinal, observa-se que a determinação das velocidades como funções das coordenadas depende exclusivamente da existência da inversa da matriz pré-simplética.

Seja $P < N$ o posto da matriz $(h_{\alpha\beta})_{N \times N}$, logo existem $N - P$ vetores não nulos e linearmente independentes, chamados modos-zero, que satisfazem⁷

$$\nu_m^\alpha h_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.39)$$

onde $m = 1, 2, \dots, N - P$. Portanto, de acordo com (3.32), temos

$$\nu_m^\alpha \partial_\alpha V = 0. \quad (3.40)$$

Entretanto, o potencial pode não satisfazer estas relações. A fim de eliminar a contradição, iremos impor (3.40). Desta imposição advém relações de dependência entre as coordenadas simpléticas, que constituem os vínculos do formalismo simplético.

É claro que, utilizando a imposição anterior, estamos resolvendo a inconsistência, porém sua origem ainda precisa ser apontada. Conforme já exposto, (3.32) foi deduzida desconsiderando qualquer relação de dependência entre as coordenadas simpléticas; agora vemos que essas relações são encontradas a posteriori. Não há, todavia, garantia de que todas as relações inicialmente omitidas estão contidas nessas $N - P$ equações (e de fato não estão necessariamente).

Chama-se de vínculo verdadeiro o termo $\nu_m^\alpha \partial_\alpha V$ que não é nulo a priori.

Apesar dos vínculos de Dirac não terem importância direta para a formulação simplética, há, sim, uma relação entre esses e a inversibilidade da matriz pré-simplética. Seja a Lagrangiana

$$L = a_\alpha(\xi) \dot{\xi}^\alpha - V(\xi), \quad \alpha = 1, 2, \dots, N. \quad (3.41)$$

⁷Os modos-zero serão sempre vistos como vetores linha. Tratando-se de campos, esta consideração é importante, pois os modos-zero podem ser operadores.

Esta possui os seguintes vínculos de Dirac: $\Omega_\alpha = \Pi_\alpha - a_\alpha(\xi)$. Os parênteses de Poisson destes, no espaço das coordenadas e dos momentos simpléticos, são

$$\begin{aligned} \{\Omega_\alpha, \Omega_\beta\}^{\xi, \Pi} &= -\frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\gamma} \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \Pi_\gamma} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \Pi_\gamma} \frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\gamma}, \\ &= -\partial_\beta a_\alpha + \partial_\alpha a_\beta, \\ &= h_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

A matriz $(\{\Omega_\alpha, \Omega_\beta\}^{\xi, \Pi})$ possui inversa se, e somente se, os vínculos forem de segunda classe⁸[28, 49], logo o mesmo pode ser concluído a respeito da matriz $(h_{\alpha\beta})$.

Sobre a correspondência entre vínculos verdadeiros e a interdependência das coordenadas simpléticas, acrescentamos aqui uma pequena nota. Sabemos que a existência de vínculos verdadeiros implica a existência de relações de dependência entre as coordenadas simpléticas ($\Phi_m(\xi) = 0$), averigüemos se a recíproca é verdadeira. Segundo a técnica dos multiplicadores de Lagrange, havendo M vínculos entre as coordenadas, as equações de movimento são $\Phi_m = 0$ e

$$h_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta = \partial_\alpha V + \lambda^m \partial_\alpha \Phi_m, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (3.43)$$

onde os λ^m 's são multiplicadores de Lagrange e os M vínculos são dados pelas funções $\Phi_m(\xi)$, isto é, $\Phi_m(\xi) = 0$; conseqüentemente, $\dot{\Phi}_m = \partial_\alpha \Phi_m \dot{\xi}^\alpha = 0$.

Suponhamos, por absurdo, que $(h_{\alpha\beta})$ possua inversa, isto é, seja a matriz simplética $(f_{\alpha\beta})$, logo

$$\partial_\beta \Phi_m \dot{\xi}^\beta = \partial_\beta \Phi_m f^{\beta\alpha} (\partial_\alpha V + \lambda^m \partial_\alpha \Phi_m). \quad (3.44)$$

Sabemos que o lado esquerdo dessa igualdade é nulo, portanto, devido ao termo que figura entre parênteses ser qualquer, conclui-se que $(f^{\beta\alpha})$ possui M modos-zero: $(\partial_\beta \Phi)_m$. Isto contraria a hipótese de $(f_{\alpha\beta})$ ser não-degenerada, logo há relações

⁸De acordo com a nomenclatura de Dirac, uma função do espaço de fase é de primeira classe se os parênteses de Poisson dessa com os vínculos da teoria forem nulos na superfície de vínculos. Caso contrário, isto é, se a função do espaço de fase não for de primeira classe, ela é dita ser de segunda classe.

de dependência entre as coordenadas simpléticas se, e somente se, houver vínculos verdadeiros.

Apresentemos agora o algoritmo proposto em [30]. O objetivo deste método é partir de uma Lagrangiana $L^{(0)}$ com vínculos verdadeiros e, após n iterações, obter uma Lagrangiana $L^{(n)}$ da qual infere-se a matriz simplética responsável por sua dinâmica.

Segundo esse formalismo, adiciona-se a derivada temporal dos vínculos à Lagrangiana por meio de multiplicadores de Lagrange, incorporando-os à parte cinética:

$$L^{(1)} \equiv L^{(0)} - \lambda^{(0)m} \dot{\Phi}_m^{(0)}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (3.45)$$

Esse não é o procedimento usual de lidar com vínculos através de multiplicadores de Lagrange, pois normalmente adiciona-se os vínculos somente, e não suas derivadas. O método de Dirac impõe que a evolução temporal dos vínculos deve também se anular, mas o faz por outros caminhos.

A menos de uma derivada temporal total,

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= L^{(0)} + \dot{\lambda}^{(0)m} \Phi_m^{(0)} \\ &= a_\alpha^{(1)} \dot{\xi}^{(1)\alpha} - V^{(1)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N + M, \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde⁹

$$\begin{aligned} (\xi^{(1)\alpha}) &= (\xi^{(0)\alpha} \quad \lambda^m), \\ (a_\alpha^{(1)})^T &= (a_\alpha^{(0)} \quad \Phi_m), \\ V^{(1)}(\xi^{(0)}) &= V^{(0)}(\xi^{(0)})|_{\Phi_m=0}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

isto é, no novo potencial os vínculos verdadeiros são removidos (caso eles se encontrem explícitos no potencial original). Esta remoção é feita para facilitar os cálculos;

⁹Com isto quero dizer que as N primeiras componentes do vetor $\xi^{(1)}$ são as do vetor $\xi^{(0)}$ e suas M últimas são as de λ . Rigorosamente, um outro índice diferente de α deveria ter sido escolhido para se associar ao vetor $\xi^{(1)}$, mas notação utilizada é mais prática.

tendo em vista exclusivamente a Lagrangiana final, ela é indiferente. Para determinar o inverso da matriz simplética, contudo, esse procedimento pode ser importante em alguns casos [51].

Com isto, partimos de $L^{(0)}$ e obtivemos $L^{(1)}$, cuja matriz pré-simplética é

$$(h_{\alpha\beta}^{(1)}) = \begin{pmatrix} h_{\alpha\beta}^{(0)} & \partial_\alpha \Phi_m^{(0)} \\ -\partial_\beta \Phi_n^{(0)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

com $m, n = 1, 2, \dots, M$, os índices α e β do lado direito da igualdade assumem N valores e

$$h_{\alpha\beta}^{(1)} \equiv \frac{\partial a_\beta^{(1)}}{\partial \xi^{(1)\alpha}} - \frac{\partial a_\alpha^{(1)}}{\partial \xi^{(1)\beta}}. \quad (3.49)$$

Os vínculos adicionados na parte cinética da Lagrangiana modificam a 1-forma canônica e, conseqüentemente, a matriz pré-simplética¹⁰.

Se $(h_{\alpha\beta}^{(1)})$ for não degenerada, o problema terá sido resolvido: a matriz simplética da teoria foi encontrada.

Pode ocorrer de $L^{(1)}$ ainda possuir vínculos a serem descobertos, nesse caso repete-se os mesmos procedimentos, obtendo $L^{(2)}$. Pode também ocorrer de alguns dos modos-zero de $(h_{\alpha\beta}^{(1)})$ não gerarem novos vínculos, isto é, de $\nu_m^{(0)\alpha} \partial_\alpha V^{(0)}$ ser nulo *a priori*. Isto está associado a simetrias de calibre da teoria. Para prosseguir com o método de obtenção da matriz simplética, deve-se inserir condições que fixem o calibre, condições essas que são inseridas tais como vínculos, e assim parte-se para a nova iteração. A partir de agora vamos considerar que dentre os M vínculos $\Phi_m^{(0)}$ também se encontram os fixadores de calibre.

Se após a inserção de todos os M vínculos $(h_{\alpha\beta}^{(1)})$ persistir degenerada, faz-se a segunda iteração: os modos-zero de $(h_{\alpha\beta}^{(1)})$ levam a novos vínculos ou a simetrias de calibre (que devem ser fixadas); os vínculos $\Phi_m^{(1)}$ (incluindo os fixadores de calibre) são adicionados à parte cinética de $L^{(1)}$ e eliminados de $V^{(1)}$; em seguida obtém-se $L^{(2)}$, cuja matriz pré-simplética é $(h_{\alpha\beta}^{(2)})$... E assim por diante, até encontrar a matriz simplética.

¹⁰Inserir os vínculos na parte potencial também modifica a matriz pré-simplética, porém apenas a acrescenta M linhas e M colunas nulas.

Em cada iteração, uma quantidade não nula de vínculos é obtida. A Lagrangiana $L^{(0)}$ possui um número finito de coordenadas¹¹, portanto possui no máximo tantos vínculos linearmente independentes quantas forem essas. Sendo assim, espera-se que os parênteses generalizados serão encontrados após um número finito de iterações.

3.1.5 Simetrias de calibre

Consideremos agora certa variação infinitesimal das coordenadas,

$$\xi'^{\alpha} = \xi^{\alpha} + \delta_{\varepsilon}\xi^{\alpha}. \quad (3.50)$$

O índice ε serve para indicar que a variação acima não é arbitrária, deve ser tal que produza o vetor ξ' a partir de ξ .

A expansão em série de Taylor de $S\{\xi'\}$ subtraída de $S\{\xi\}$ é

$$S\{\xi'\} - S\{\xi\} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \xi^{\alpha}}(\xi, \dot{\xi}) \delta_{\varepsilon}\xi^{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^{\alpha}}(\xi, \dot{\xi}) \delta_{\varepsilon}\dot{\xi}^{\alpha} \right] dt + O((\delta_{\varepsilon}\xi)^2). \quad (3.51)$$

Se $\delta_{\varepsilon}\xi$ for pequeno o suficiente para a contribuição de $O((\delta_{\varepsilon}\xi)^2)$ ser insignificante, e se $\delta_{\varepsilon}\xi(t_1) = \delta_{\varepsilon}\xi(t_2) = 0$, temos

$$\begin{aligned} S\{\xi'\} - S\{\xi\} \approx \delta_{\varepsilon}S &\equiv \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \xi^{\alpha}}(\xi, \dot{\xi}) \delta_{\varepsilon}\xi^{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^{\alpha}}(\xi, \dot{\xi}) \delta_{\varepsilon}\dot{\xi}^{\alpha} \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \xi^{\alpha}}(\xi, \dot{\xi}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^{\alpha}}(\xi, \dot{\xi}) \right] \delta_{\varepsilon}\xi^{\alpha} dt. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Independentemente dos valores dos instantes final e inicial, a integral acima deve se anular. Sendo L a Lagrangiana de primeira ordem (3.11) e impondo $\delta_{\varepsilon}S = 0$ (identicamente), ou seja, exigindo que ξ e ξ' estejam relacionados por transformação de calibre, conclui-se que

$$0 = \left(\frac{\partial a_{\beta}}{\partial \xi^{\alpha}} \dot{\xi}^{\beta} - \frac{\partial V}{\partial \xi^{\alpha}} - \frac{da_{\alpha}}{dt} \right) \delta_{\varepsilon}\xi^{\alpha} = \left(h_{\alpha\beta} \dot{\xi}^{\beta} - \partial_{\alpha}V \right) \delta_{\varepsilon}\xi^{\alpha}. \quad (3.53)$$

¹¹Tratando-se de campos, $L^{(0)}$ possui um número finito de coordenadas em cada ponto do espaço (um número infinito para todo o espaço), mas isso não altera esta argumentação, pois para qualquer ponto do espaço ela é válida.

Para esta equação ser satisfeita há duas possibilidades: a expressão acima entre parênteses se anula, ou

$$\delta_\varepsilon \xi^\alpha \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} = 0 \quad (3.54)$$

e

$$\delta_\varepsilon \xi^\alpha h_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta = 0. \quad (3.55)$$

A primeira possibilidade tem o aspecto de uma equação de movimento e é impossível de ser atingida identicamente. Explicando de outra forma: as velocidades e coordenadas simpléticas são variáveis independentes, portanto é impossível aplicar a derivada $\partial/\partial \xi^\alpha$ em uma função $V(\xi)$ e obter-se $h_{\alpha\beta}(\xi)\dot{\xi}^\beta$ como resposta.

O segundo caso é uma caracterização de transformação de calibre para a Lagrangiana tratada.

Em alguns sistemas, conforme antes mencionado, a contração de um modo-zero de $(h_{\alpha\beta})$ com o gradiente do potencial não é um vínculo, ou seja, o modo-zero é ortogonal ao gradiente do potencial. Quando isto ocorre, as equações (3.54) e (3.55) são válidas. Agora é claro que a anulação *a priori* de $\nu^\alpha \partial_\alpha V$ está associada a uma simetria infinitesimal de calibre, cuja variação das coordenadas é dada pelo modo-zero (desde que os valores de suas componentes sejam pequenos). Devido a esta última condição e a um múltiplo de um modo-zero ser também um modo-zero, costuma-se efetuar a seguinte identificação:

$$\delta_\varepsilon \xi^\alpha = \varepsilon \nu^\alpha, \quad (3.56)$$

em que $\varepsilon = \varepsilon(t)$ [ou $\varepsilon = \varepsilon(\vec{x}, t)$ para campos] possui a finalidade de tornar as componentes do modo-zero suficientemente pequenas. Devido à equação acima, diz-se que os modos-zero são os geradores das simetrias de calibre do método simplético.

Fixação de calibre

Não existe matriz simplética em teorias com simetrias calibre, logo, a fim de obtê-la, estas devem ser eliminadas tendo o cuidado de não alterar a física da teoria.

Este processo é chamado de fixação de calibre. A seguir o enunciaremos de forma mais precisa¹².

O conjunto de funções independentes

$$\Lambda_c(\xi) = 0, \quad c = 1, 2, \dots, C, \quad (3.57)$$

fixa o calibre de certa teoria se satisfizer:

i) Acessibilidade do calibre: para cada vetor simplético (que satisfaz as equações de movimento) deve existir uma sucessão de transformações infinitesimais de calibre capaz de mapear este vetor nas variáveis que obedecem as C equações de (3.57).

A partir de um vetor simplético ξ' , um outro pode ser obtido através de transformações infinitesimais de calibre da seguinte forma:

$$\xi''^\alpha = \xi'^\alpha + \varepsilon^g \nu_g^\alpha, \quad (3.58)$$

sendo $\{\nu_g^\alpha\}$, com $g = 1, 2, \dots, G$, o conjunto de todos os geradores de transformações de calibre (cada ν_g é tangente à superfície $V(\xi) = \text{constante}$).

Se ξ for um vetor que cumpre as C equações de (3.57) e ξ' for um vetor solução das equações de movimento, a condição *i* impõe a existência de uma combinação linear dos geradores tal que

$$\xi^\alpha = \xi'^\alpha + a^g \nu_g^\alpha, \quad (3.59)$$

com

$$a^g = \varepsilon_1^g + \varepsilon_2^g + \dots + \varepsilon_T^g \quad (3.60)$$

e T é o número total de transformações do tipo (3.58) que foram usadas (não necessariamente finito).

O número de componentes independentes do vetor de transformação de calibre ($a^g \nu_g^\alpha$) informa quantos ξ'^α 's podem ser independentemente modificados sem alterar a física do problema. Logo, obtivemos um limite superior para o número C :

$$C \leq \text{número de componentes independentes de } (a^g \nu_g^\alpha). \quad (3.61)$$

¹²Esta apresentação sobre fixação de calibre segue a Ref. [49] com a substituição de termos próprios ao método de Dirac pelos termos do método simplético.

ii) *Quebra da simetria*: dentre todos os vetores simpléticos equivalentes por transformações de calibre, somente um deve satisfazer as relações de (3.57). Se ξ for este vetor simplético, e ξ' for obtido por meio de uma transformação infinitesimal de calibre, as equações

$$\Lambda_c(\xi) - \Lambda_c(\xi') \approx \delta_\varepsilon \Lambda_c = \frac{\partial \Lambda_c}{\partial \xi^\alpha} \varepsilon^g \nu_g^\alpha = 0 \quad (3.62)$$

devem implicar

$$\varepsilon^g \nu_g^\alpha = 0, \quad (3.63)$$

isto é, $\xi = \xi'$.

Mas esta implicação só pode ser verdadeira se o número de equações em (3.62) for maior ou igual ao número de componentes independentes do vetor $(\varepsilon^g \nu_g^\alpha)$. Unindo este resultado com o obtido em (3.61), temos, enfim:

$$C = \text{número de componentes independentes de } (a^g \nu_g^\alpha). \quad (3.64)$$

No formalismo de Dirac, algo muito similar é encontrado, porém envolvendo os vínculos de primeira classe ao invés das componentes do modo-zero [49, 47].

Cada gerador de transformação de calibre pode ser associado a uma órbita de calibre, isto é, à região da superfície de vínculo cujos pontos correspondem a diferentes vetores simpléticos equivalentes por certa transformação de calibre; logo, geometricamente, a variedade determinada pelos fixadores de calibre (3.57) está contida na superfície de vínculo e intercepta uma única vez cada órbita independente de calibre.

3.1.6 Exemplo 1: Eletromagnetismo

Nesta subseção apresentamos um primeiro exemplo de aplicação do método simplético. Seu objetivo é exclusivamente ilustrar como aplicar o método simplético em dada Lagrangiana.

A densidade de Lagrangiana da teoria eletromagnética de Maxwell, na ausência de fontes, é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (3.65)$$

O tensor eletromagnético é $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, com $A_\mu = A_\mu(\vec{x}, t)$, e a métrica é $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(+ \ - \ - \ -)$.

O primeiro passo é linearizá-la nas velocidades. Os momentos são

$$\begin{aligned} \pi_\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} = -\frac{1}{2}F_{\gamma\nu} \frac{\partial F^{\gamma\nu}}{\partial \dot{A}^\mu} \\ &= -\frac{1}{2}F_{\gamma\nu}(\delta_0^\gamma \delta_\mu^\nu - \delta_\mu^\gamma \delta_0^\nu) \\ &= F_{\mu 0} = \partial_\mu A_0 - \dot{A}_\mu. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Sendo $i, j = 1, 2, 3$, a Lagrangiana de primeira ordem é, então,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)} &= \dot{A}^i \pi_i - \pi_i(\partial^i A_0 - \pi^i) - \frac{1}{2}F^{i0}F_{i0} - \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} \\ &= \dot{A}^i \pi_i - \pi_i \partial^i A_0 + \frac{1}{2}\pi_i \pi^i - \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Logo, identifica-se

$$\begin{aligned} V^{(0)} &= \pi_i \partial^i A_0 - \frac{1}{2}\pi_i \pi^i + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij}, \\ (\xi^{(0)\alpha}) &= (A^0 \ A^i \ \pi^i), \\ (a_\alpha^{(0)})^T &= (0 \ \pi_i \ 0), \end{aligned} \quad (3.68)$$

em que o momento conjugado a A^0 foi eliminado do vetor simplético por não aparecer na Lagrangiana. Aquele que desejar manter π^0 no vetor simplético deve, durante a linearização, inserir o vínculo $\pi_0 = 0$ por meio de um multiplicador de Lagrange ou sua derivada.

A matriz pré-simplética é¹³

$$(h_{\alpha\beta}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_{ij} \\ 0 & g_{ji} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.69)$$

¹³Se o vetor $\xi^{(0)}$ fosse $(A^0 \ A^i \ \pi_i)$, no lugar de g_{ij} teríamos δ_j^i . A estrutura usada para o vetor simplético tem o mérito de não misturar índices contravariantes com covariantes.

Esta possui o modo-zero

$$\nu^{(0)} = (1 \quad 0 \quad 0), \quad (3.70)$$

que produz o vínculo

$$\int \frac{\delta V^{(0)}(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})} d^3 y = -\partial^i \pi_i = \Phi^{(0)}. \quad (3.71)$$

O vínculo obtido nada mais é que a lei de Gauss no vácuo.

Estando o vínculo inserido no setor cinético de $\mathcal{L}^{(0)}$, ele pode ser eliminado do setor potencial, causando o desaparecimento de A_0 :

$$\mathcal{L}^{(1)} = \pi^i \dot{A}_i + \dot{\eta} \partial_i \pi^i - V^{(1)}, \quad (3.72)$$

com

$$V^{(1)} = -\frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij}. \quad (3.73)$$

De $\mathcal{L}^{(1)}$ obtém-se

$$\begin{aligned} (\xi^{(1)\alpha}) &= (A^i \quad \pi^i \quad \eta), \\ (a_{\alpha}^{(1)})^T &= (\pi_i \quad 0 \quad \partial_i \pi^i), \\ (h_{\alpha\beta}^{(1)}) &= \begin{pmatrix} 0 & -g_{ij} & 0 \\ g_{ji} & 0 & \frac{y}{\partial_i} \\ 0 & -\frac{x}{\partial_j} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (3.74)$$

os símbolos $\overset{x}{\partial}_j$ e $\overset{y}{\partial}_i$ indicam respectivamente: $\partial/\partial x^j$ e $\partial/\partial y^i$.

O modo-zero de $(h_{\alpha\beta}^{(1)})$ é

$$\nu^{(1)} = (-\partial^i \quad 0 \quad 1). \quad (3.75)$$

Averiguemos se um novo vínculo é obtido:

$$\begin{aligned} &\int \left(-\overset{x}{\partial}_x \frac{\delta V^{(1)}(\vec{y})}{\delta A^i(\vec{x})} + \frac{\delta V^{(1)}(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \right) d^3 y = \\ &= -\int \overset{x}{\partial} \frac{1}{2} F_{kl}(\vec{y}) (\overset{y}{\partial}^k \delta_i^l \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) - \overset{y}{\partial}^l \delta_i^k \delta^3(\vec{x} - \vec{y})) d^3 y \\ &= -\int \overset{x}{\partial} F_{ik}(\vec{y}) \overset{y}{\partial}^k \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) d^3 y \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Desse resultado, conclui-se a existência de uma transformação de calibre dada por:

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon A^i &= \partial^i \varepsilon, \\ \delta_\varepsilon \eta &= \varepsilon.\end{aligned}\tag{3.77}$$

É imediato checar que essa simetria realmente está presente em $\mathcal{L}^{(1)}$ (3.72) para ε arbitrário. Dado que ε é arbitrário, em particular pode-se escolher $\partial_i \partial^i \varepsilon = -\partial_i A^i$, conseqüentemente há campos A'^i que diferem de A^i por uma transformação de calibre tais que

$$\partial_i A'^i = \partial_i A^i + \partial_i \partial^i \varepsilon = 0.\tag{3.78}$$

Escolheremos o calibre $\partial_i A^i = 0$. Nota-se que essa escolha está de acordo com os critérios apresentados na subseção anterior, pois esse calibre é acessível (como mostrado pela última equação) e a simetria é quebrada (não há outra escolha de ε condizente com $\partial_i A^i = 0$; assim, ao substituirmos A por A' , a nova Lagrangiana não possui simetria de calibre).

A iteração seguinte da Lagrangiana é

$$\mathcal{L}^{(2)} = \pi_i \dot{A}^i + \dot{\eta} \partial_i \pi^i + \dot{\gamma} \partial_i A^i - V^{(2)},\tag{3.79}$$

com

$$V^{(2)} = V^{(1)} = -\frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij}.\tag{3.80}$$

Destas, obtém-se

$$\begin{aligned}(\xi^{(2)\alpha}) &= (A^i \quad \pi^i \quad \eta \quad \gamma), \\ (a_\alpha^{(2)})^T &= (\pi_i \quad 0 \quad \partial_i \pi^i \quad \partial_i A^i), \\ (f_{\alpha\beta}) &= \begin{pmatrix} 0 & -g_{ij} & 0 & \overset{y}{\partial}_i \\ g_{ji} & 0 & \overset{y}{\partial}_i & 0 \\ 0 & -\overset{x}{\partial}_j & 0 & 0 \\ -\overset{x}{\partial}_j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}).\end{aligned}\tag{3.81}$$

A inversa da matriz simplética é

$$(f^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & g^{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{\partial^k \partial_k} & 0 & \frac{\partial^i}{\partial^k \partial_k} \\ -g^{ij} + \frac{\partial^i \partial^j}{\partial^k \partial_k} & 0 & -\frac{\partial^i}{\partial^k \partial_k} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^j}{\partial^k \partial_k} & 0 & \frac{1}{\partial^k \partial_k} \\ \frac{\partial^j}{\partial^k \partial_k} & 0 & -\frac{1}{\partial^k \partial_k} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.82)$$

Nesta, todas as derivadas atuam em \vec{x} .

Os parênteses generalizados entre A^i e π^j são

$$\{A^i(\vec{x}, t), \pi^j(\vec{y}, t)\}^* = \left(g^{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{\partial^k \partial_k} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.83)$$

Esses são exatamente os parênteses obtidos pelo método de Dirac. O objetivo desta subseção foi atingido. Referências sobre quantização do eletromagnetismo usando os parênteses de Dirac podem ser vistos em [52]. Grande parte dos livros textos de teoria quântica de campos utilizam o formalismo de Gupta-Bleuler para a quantização canônica do eletromagnetismo; esse tem o mérito de ser mais simples, porém é menos geral que o de Dirac ou o simplético.

Originalmente a teoria possuía oito campos (4 campos A_μ e 4 momentos conjugados), dois foram eliminadas (A_0 e π_0), um vínculo foi encontrado e foi necessário introduzir um fixador de calibre, portanto esta teoria possui $(8 - 2 - 1 - 1)/2 = 2$ graus de liberdade, como era de se esperar [49].

3.1.7 Exemplo 2: Modelo de Proca

A densidade de Lagrangiana deste sistema é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu, \quad (3.84)$$

m é a massa do campo $A^\mu = A^\mu(x)$, x é vetor do espaço-tempo, a métrica deste é $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(+ \quad - \quad - \quad -)$ e o tensor eletromagnético é $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Este modelo designa a massa m ao fóton e possui, como será visto, um grau de liberdade a mais que a teoria de Maxwell. Devido à presença de uma massa não nula, a transformação de calibre $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ da teoria de Maxwell inexistente nesta.

É necessário escrever a Lagrangiana sob a forma

$$\mathcal{L}^{(0)} = a_\alpha^{(0)} \dot{\xi}^{(0)\alpha} - V^{(0)}. \quad (3.85)$$

Para isto, o momento conjugado ao quadrivetor potencial será calculado.

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} = F_{\mu 0}, \quad (3.86)$$

logo

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2\pi^i \pi_i + F^{ij} F_{ij}, \quad (3.87)$$

e

$$\dot{A}^i \pi_i = (-\pi^i + \partial^i A_0) \pi_i. \quad (3.88)$$

Portanto

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} = \dot{A}^i \pi_i - V^{(0)}, \quad (3.89)$$

onde

$$V^{(0)} = -A_0 \partial_i \pi^i - \frac{1}{2} \pi_i \pi^i + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu. \quad (3.90)$$

Os vetores simplético e potencial são

$$\begin{aligned} (\xi^{(0)\alpha}) &= (A^i \quad \pi^i \quad A_0), \\ (a_\alpha^{(0)})^T &= (\pi_i \quad 0 \quad 0). \end{aligned} \quad (3.91)$$

A matriz pré-simplética é

$$(h_{\alpha\beta}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & -g_{ij} & 0 \\ g_{ji} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.92)$$

Esta possui um modo-zero, que leva a um vínculo que expressa a lei de Gauss:

$$\Omega = \partial_i \pi^i + m^2 A_0. \quad (3.93)$$

Assim, obtém-se a Lagrangiana de primeira iteração

$$\mathcal{L}^{(1)} = \pi_i \dot{A}^i + \Omega \dot{\beta} - V^{(1)}, \quad (3.94)$$

com o seguinte potencial simplético:

$$V^{(1)} = -\frac{1}{2} \pi_i \pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} m^2 (A_0 A_0 - A_i A^i). \quad (3.95)$$

Os vetores $\xi^{(1)}$ e $a^{(1)}$ desta Lagrangiana são

$$\begin{aligned} (\xi^{(1)\alpha}) &= (A^i \quad \pi^i \quad A_0 \quad \beta), \\ (a_\alpha^{(1)})^T &= (\pi_i \quad 0 \quad 0 \quad \Omega), \end{aligned} \quad (3.96)$$

dos quais obtém-se a matriz simplética

$$(f_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -g_{ij} & 0 & 0 \\ g_{ji} & 0 & 0 & \partial_i^y \\ 0 & 0 & 0 & m^2 \\ 0 & -\partial_j^x & -m^2 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.97)$$

A matriz simplética foi obtida sem a necessidade de qualquer fixação de calibre, de acordo com o comentário feito no início desta seção.

Os parênteses generalizados são extraídos da inversa da matriz simplética:

$$\begin{aligned} \{A_i(\vec{x}), A_j(\vec{y})\}^* &= 0, \\ \{A_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\}^* &= g_{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\pi_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\}^* &= 0, \\ \{A_0(\vec{x}), A_i(\vec{y})\}^* &= \frac{1}{m^2} \partial_i^x \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{A_0(\vec{x}), \pi_i(\vec{y})\}^* &= 0. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Observe que somente um vínculo foi encontrado e π_0 foi excluído do vetor simplético. O modelo de Proca possui três graus de liberdade $[(8 - 1 - 1)/2]$.

Parte dos cálculos acima serão úteis para a próxima seção na qual trataremos da “imersão em calibre” do modelo de Proca usando o formalismo simplético.

3.2 Formalismo simplético de calibre

Na seção anterior comentamos sobre simetria de calibre e sua fixação no contexto do formalismo simplético. Ocorre que o procedimento oposto ao da fixação, ou seja, o da implementação de novas simetria de calibre, também é útil para diversos problemas em física. Dentre as possíveis aplicações, pode-se contornar problemas de quantização (como ordenamento dos operadores ou anomalias) [53, 54, 55, 56], encontrar simetrias escondidas [48, 57], possibilitar o emprego do mapa de Seiberg-Witten (caso o espaço seja NC) [58, 59], determinar teorias duais [60, 61] *etc.*

Um método recente nesse contexto é o chamado método simplético de calibre, esse usa a “filosofia” do método simplético anteriormente apresentado para inserir campos auxiliares (campos de Wess-Zumino) de forma consistente com a dinâmica da teoria original e com os desejados geradores da nova simetria de calibre. O método simplético de calibre foi empregado pela primeira vez no modelo de Skyrme [48], nessa aplicação certa simetria escondida foi avaliada e o espectro da teoria em sua versão de calibre foi diretamente demonstrada como sendo equivalente à da original. Posteriormente esse método foi generalizado e outras aplicações foram encontradas [10, 11, 62, 63, 60, 64]. Em [10, 11] o formalismo foi apresentado e sistematizado em sua forma mais geral, na próxima subseção iremos apresentar esse formalismo. A menos de algumas sutilezas, todas as referências mencionadas seguem o mesmo algoritmo. Conforme veremos, a maior diferença entre seus algoritmos encontra-se na escolha de empregar um ou dois campos de Wess-Zumino (WZ) [53].

3.2.1 A versão mais simples: uma variável de Wess-Zumino

Segundo o formalismo simplético, teoria de calibre é aquela que, para algum n , $(h_{\alpha\beta}^{(n)})$ é degenerada e seus modos-zero não produzem novos vínculos. A fim de conceder esta

propriedade a uma teoria que não a possui, acrescentaremos uma variável auxiliar,

$$\xi^\alpha \longrightarrow \tilde{\xi}^{\tilde{\alpha}} = (\xi^\alpha \quad \theta) \quad (3.99)$$

e duas novas funções: $\Psi(\xi)$ e $G(\xi, \theta)$, a primeira na parte cinética da Lagrangiana e a segunda na parte potencial; de tal forma que, ao tomar-se $\theta = 0$, retorne-se à Lagrangiana original.

Após a introdução de θ , Ψ e G , o primeiro passo é impor que a nova matriz pré-simplética ($\tilde{h}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$) seja degenerada, assim Ψ será determinado. O segundo passo consiste em impor que seus modos-zero não produzam novos vínculos, o que vem a determinar G . Com isto, obtém-se uma Lagrangiana com simetria de calibre, cuja fixação com a condição $\theta = 0$ (calibre que, por construção, será atingível) promove as mesmas equações de movimento da Lagrangiana original. Detalharemos esse procedimento agora.

Considere a Lagrangiana,

$$L = a_\alpha \dot{\xi}^\alpha - V. \quad (3.100)$$

Acrescentaremos a variável auxiliar $\theta(t)$ e as funções $\Psi = \Psi(\xi)$ e $G = G(\xi, \theta)$ da seguinte forma:

$$\tilde{L} = a_\alpha \dot{\xi}^\alpha + \Psi \dot{\theta} - V - G, \quad (3.101)$$

e consideraremos que G possa ser expandida em uma série de potências em θ com a condição $G(\theta = 0) = 0$, ou seja,

$$G(\xi, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\xi) \theta^n. \quad (3.102)$$

O tensor pré-simplético associado a \tilde{L} é dado por

$$\tilde{h}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \equiv \frac{\partial \tilde{a}_{\tilde{\beta}}}{\partial \tilde{\xi}^{\tilde{\alpha}}} - \frac{\partial \tilde{a}_{\tilde{\alpha}}}{\partial \tilde{\xi}^{\tilde{\beta}}}, \quad (3.103)$$

em que $(\tilde{\xi}^{\tilde{\alpha}}) = (\xi^\alpha \quad \theta)$ e $(\tilde{a}_{\tilde{\alpha}})^T = (a_\alpha \quad \Psi)$. Matricialmente temos

$$(\tilde{h}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}) = \begin{pmatrix} h_{\alpha\beta} & \partial_\alpha \Psi \\ -\partial_\beta \Psi & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.104)$$

Com $\partial_\alpha := \partial/\partial\xi^\alpha$.

Imporemos agora que a matriz acima possua um modo-zero do tipo

$$(\tilde{\nu}^{\tilde{\alpha}}) = (\mu^\alpha \quad 1), \quad (3.105)$$

sendo μ um vetor não nulo e diferente dos modos-zero de $(h_{\alpha\beta})$ (se esta possuir algum).

A *escolha* de μ determinará Ψ através das equações

$$\tilde{\nu}^{\tilde{\alpha}} \tilde{h}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = 0. \quad (3.106)$$

Esse modo-zero será responsável pela transformação de calibre da nova teoria, logo a simetria que será concedida é escolhida no momento em que define-se o vetor μ . O fato da última componente de $(\tilde{\nu}^{\tilde{\alpha}})$ ser a unidade assegura a existência de uma transformação de calibre envolvendo θ .

Estando os modos-zero escolhidos e a função Ψ determinada, dá-se início ao passo seguinte do método, o cálculo de G . Para termos uma teoria de calibre, temos de impor que novos vínculos não surjam, ou seja,

$$\tilde{\nu}^{\tilde{\alpha}} \partial_{\tilde{\alpha}} \tilde{V} = 0, \quad (3.107)$$

com $\tilde{V} := V + G$. Assim,

$$\mu^\alpha \left(\frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial G}{\partial \xi^\alpha} \right) + \frac{\partial G}{\partial \theta} = 0. \quad (3.108)$$

A partir da equação anterior, a função G pode ser encontrada. Usando que G pode ser escrita como uma série de potências (3.102), temos

$$\mu^\alpha \partial_\alpha V + \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \theta} = 0 \quad (3.109)$$

e

$$\mu^\alpha \partial_\alpha \mathcal{G}_n + \frac{\partial \mathcal{G}_{n+1}}{\partial \theta} = 0, \quad (3.110)$$

em que $\mathcal{G}_n := g_n(\xi)\theta^n$ e $n \geq 1$.

Com isto encerra-se o algoritmo do formalismo simplético de calibre para uma variável de WZ. A matriz pré-simplética $(\tilde{h}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}})$ não pode ser invertida e possui um modo-zero que não gera um novo vínculo. A teoria dada por \tilde{L} é de calibre e invariante por

$$\delta_\varepsilon \xi^\alpha = \mu^\alpha \varepsilon \quad \delta_\varepsilon \theta = \varepsilon. \quad (3.111)$$

Esta versão do formalismo simplético de calibre é bem simples, mas suficientemente forte para lidar com vários problemas. Sua passagem para o contínuo não tem maiores dificuldades. Como somente uma variável de WZ foi empregada, em particular não é a priori natural comparar qualquer resultado desse formalismo com o BFFT [55]. Mas o formalismo simplético pode ser estendido para duas variáveis de WZ

Isso pode ser feito estendendo o formalismo simplético para dois campos de WZ, como veremos na próxima subseção.

3.2.2 Generalizando: dois campos de Wess-Zumino

A fim de preparar a notação para as aplicações subseqüentes, esta subseção será apresentada diretamente para o caso contínuo, ao invés do mecânico. Como antes anunciado, há simetrias de calibre mais complexas que requerem o emprego de mais campos de WZ. Desde que para cada campo de WZ esteja associado um gerador de transformações de calibre independente, nenhum problema de violação de graus de liberdade é esperado. Analogamente, no BFFT, para cada campo de WZ inserido, um vínculo de segunda classe é convertido em um de primeira classe.

Em particular, com o formalismo anterior não é possível obter qualquer Lagrangiana invariante de calibre que seja quadrática em $\dot{\theta}$. Para generalizar a ex-

pressão (3.101) para dois campos de WZ pode-se usar

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\theta,\gamma}^{\text{geral}} = \mathcal{L} + \Psi(\xi, \theta, \gamma) \dot{\theta} + \Sigma(\xi, \theta, \gamma) \dot{\gamma} - G(\xi, \theta, \gamma), \quad (3.112)$$

mas os cálculos tornam-se incrivelmente complicados. Para as aplicações que seguem, precisaremos no máximo da seguinte forma:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\theta,\gamma} = \mathcal{L} + (\Psi(\xi, \theta) + \gamma)\dot{\theta} - G(\xi, \theta) - \frac{k}{2}\gamma\dot{\gamma}, \quad (3.113)$$

ou seja, a presença de γ permite que $\dot{\theta}^2$ apareça em $\tilde{\mathcal{L}}$.

Seja $(f_{\alpha\beta})$ a matriz simplética¹⁴ de \mathcal{L} , a matriz simplética de $\tilde{\mathcal{L}}_{\theta,\gamma}$ é dada por

$$\tilde{f}_{\theta,\gamma}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_{\alpha\beta} & \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta\xi^\alpha(\vec{x})} & 0_\alpha \\ -\frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta\xi^\beta(\vec{y})} & \Theta_{xy} & -\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ 0_\beta & \delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.114)$$

em que 0_α é uma coluna nula, 0_β uma linha nula e o símbolo Θ_{xy} é definido por

$$\Theta_{xy} := \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta\theta(\vec{x})} - \frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta\theta(\vec{y})}. \quad (3.115)$$

No formalismo com um campo de WZ, selecionaria-se agora o modo-zero que seria o gerador da simetria de calibre. No presente caso isso não é possível, devido ao aparecimento das δ 's em \tilde{f} . Para dar seguimento, será preciso supor que \mathcal{L} possua algum vínculo, de forma análoga ao que ocorre no formalismo BFFT, e contrariamente ao observado no caso com somente um campo de WZ. Assim, o único modo-zero à disposição tem o seguinte aspecto:

$$\tilde{\nu}^\alpha(\vec{x}) = (\nu^\alpha(\vec{x}) \quad 0 \quad b(\vec{x})), \quad (3.116)$$

em que (ν^α) é modo-zero de $(f_{\alpha\beta})$ e b em geral é uma função de ξ . A fim de que $\tilde{\nu}$ seja modo-zero de \tilde{f} , é suficiente e necessário que

$$\int d^n x \left(\nu^\alpha \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta\xi^\alpha(\vec{x})} + b\delta(\vec{x} - \vec{y}) \right) = 0. \quad (3.117)$$

¹⁴Ocasionalmente, por simplicidade e de acordo com uso corrente na literatura, chamaremos f de matriz simplética no lugar de (pré-)simplética.

Por simplicidade, comumente consideraremos que b é uma constante não-nula. A equação acima impõe uma primeira condição que Ψ deve satisfazer.

O modo-zero $\tilde{\nu}$ não serve como gerador de transformações de calibre, mas servirá para modificar o vínculo da teoria original \mathcal{L} gerado por ν , como segue

$$\begin{aligned} \int d^n y \tilde{\nu}^\alpha(\vec{x}) \frac{\delta \tilde{V}_{\theta, \gamma}(\vec{y})}{\delta \tilde{\xi}^\alpha(\vec{x})} &= \int d^n y \tilde{\nu}^\alpha(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta \tilde{\xi}^\alpha(\vec{x})} \left(V(\vec{y}) + G(\vec{y}) + \frac{k}{2} \gamma(\vec{y}) \gamma(\vec{y}) \right) \\ &= \Omega(\vec{x}) + \int d^n y \nu^\alpha(\vec{x}) \frac{\delta G(\vec{y})}{\delta \xi^\alpha(\vec{x})} + kb\gamma(\vec{x}) \quad (3.118) \\ &= \Omega + G_\nu + kb\gamma =: \tilde{\Omega}. \end{aligned}$$

Acima, $\tilde{\xi}^\alpha = (\xi^\alpha, \theta, \gamma)$, Ω é o vínculo da teoria original que é gerado por ν e G_ν encontra-se implicitamente definido.

Prosseguindo com as etapas usuais do método simplético, o vínculo modificado $\tilde{\Omega}$ é adicionado ao setor cinético de $\tilde{\mathcal{L}}_{\theta, \gamma}$ por meio de um multiplicador de Lagrange, definindo $\tilde{\mathcal{L}}_{\theta, \gamma}^{(1)}$, ou seja,

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\theta, \gamma}^{(1)} = a_\alpha \dot{\xi}^\alpha + (\Psi + \gamma)\dot{\theta} + \tilde{\Omega}\dot{\lambda} - \tilde{V}_{\theta, \gamma}. \quad (3.119)$$

Poderia-se modificar $\tilde{V}_{\theta, \gamma}$ usando $\tilde{\Omega} = 0$, como indicado em [30], mas esse passo não é indiferente para este formalismo. Vamos considerar que $\tilde{V}_{\theta, \gamma}$ ainda é dado por $V + G + \frac{1}{2}k\gamma\gamma$.

Sendo $\tilde{\xi}^{(1)\alpha} = (\xi^\alpha, \theta, \gamma, \lambda)$, a nova matriz simplética é

$$\tilde{f}_{\theta, \gamma}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} (f_{\alpha\beta}) & \frac{\delta \Psi(\vec{y})}{\delta \xi^\alpha(\vec{x})} & 0_\alpha & \frac{\delta(\Omega + G_\nu)(\vec{y})}{\delta \xi^\alpha(\vec{x})} \\ -\frac{\delta \Psi(\vec{x})}{\delta \xi^\beta(\vec{y})} & \Theta_{xy} & -\delta(\vec{x} - \vec{y}) & \frac{\delta G_\nu(\vec{y})}{\delta \theta(\vec{x})} \\ 0_\beta & \delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & kb(\vec{y})\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ -\frac{\delta(\Omega + G_\nu)(\vec{x})}{\delta \xi^\beta(\vec{y})} & -\frac{\delta G_\nu(\vec{x})}{\delta \theta(\vec{y})} & -kb(\vec{x})\delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.120)$$

Essa matriz possibilita a seleção de modos-zero que serão os geradores da simetria. Selecionaremos os dois seguintes geradores independentes:

$$\tilde{\nu}_\gamma^\alpha = (\nu^\alpha(\vec{x}) \quad 0 \quad b \quad 0) = (\tilde{\nu}^\alpha(\vec{x}) \quad 0), \quad (3.121)$$

$$\tilde{\nu}_\theta^\alpha = (\mu^\alpha(\vec{x}) \quad -kb \quad 0 \quad 1). \quad (3.122)$$

Acima, μ^α pode ser neste ponto fixado de acordo com a simetria desejada ou pode ser carregado como uma incógnita a ser fixada somente na Lagrangiana final do método. No primeiro caso, chega-se à resposta final mais rapidamente, mas corre-se o risco de se impor uma simetria incompatível com $\tilde{\mathcal{L}}$.

A condição de que $\tilde{\nu}_\gamma$ não deve gerar novos vínculos é imediatamente satisfeita, pois

$$\int d^n y \tilde{\nu}_\gamma^\alpha(\vec{x}) \frac{\delta \tilde{V}_{\theta,\gamma}(\vec{y})}{\delta \tilde{\xi}^{(1)\alpha}(\vec{x})} = \int d^n y \tilde{\nu}^\alpha(\vec{x}) \frac{\delta \tilde{V}_{\theta,\gamma}(\vec{y})}{\delta \tilde{\xi}^\alpha(\vec{x})} = \tilde{\Omega}(\vec{x}). \quad (3.123)$$

A condição de que $\tilde{\nu}_\theta$ não gere novos vínculos leva à equação diferencial

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^n y \tilde{\nu}_\theta^\alpha(\vec{x}) \frac{\delta \tilde{V}_{\theta,\gamma}(\vec{y})}{\delta \tilde{\xi}^{(1)\alpha}(\vec{x})} \\ &= \int d^n y \left(\mu^\alpha(\vec{x}) \frac{\delta(V+G)(\vec{y})}{\delta \xi^\alpha(\vec{x})} - kb \frac{\delta G(\vec{y})}{\delta \theta(\vec{x})} \right). \end{aligned} \quad (3.124)$$

Por fim, Ψ e a constante k são determinadas através das equações

$$\int d^n x \tilde{\nu}_\gamma^\alpha(\vec{x}) \tilde{f}_{\alpha\beta}^{(1)\theta,\gamma}(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \quad (3.125)$$

$$\int d^n x \tilde{\nu}_\theta^\alpha(\vec{x}) \tilde{f}_{\alpha\beta}^{(1)\theta,\gamma}(\vec{x}, \vec{y}) = 0. \quad (3.126)$$

Encontradas as soluções para as equações diferenciais (3.117, 3.124, 3.125, 3.126), $\tilde{\mathcal{L}}$ terá dois geradores independentes de transformações de calibre, dados por $\tilde{\nu}_\theta$ e $\tilde{\nu}_\gamma$. Usaremos $\delta_{\varepsilon_\theta}$ para designar variações de calibre devido a $\tilde{\nu}_\theta$ e $\delta_{\varepsilon_\gamma}$ para as de $\tilde{\nu}_\gamma$. Somando essas variações independentes, vem

$$\begin{aligned} (\delta_{\varepsilon_\gamma} + \delta_{\varepsilon_\theta})\xi^\alpha(\vec{x}) &= \int d^n y [\varepsilon_\gamma(\vec{y})\nu^\alpha(\vec{y}) + \varepsilon_\theta(\vec{y})\mu^\alpha(\vec{y})]\delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ (\delta_{\varepsilon_\gamma} + \delta_{\varepsilon_\theta})\theta(\vec{x}) &= -\varepsilon_\theta(\vec{x})kb, \\ (\delta_{\varepsilon_\gamma} + \delta_{\varepsilon_\theta})\gamma(\vec{x}) &= \varepsilon_\gamma(\vec{x})b, \\ (\delta_{\varepsilon_\gamma} + \delta_{\varepsilon_\theta})\lambda(\vec{x}) &= \varepsilon_\theta(\vec{x}). \end{aligned} \quad (3.127)$$

Eliminando γ por meio de sua equação de movimento $\gamma = \dot{\theta}/k$, da igualdade

$$(\delta_{\varepsilon_\gamma} + \delta_{\varepsilon_\theta})\dot{\theta} = k(\delta_{\varepsilon_\gamma} + \delta_{\varepsilon_\theta})\gamma \quad (3.128)$$

vem $\varepsilon_\gamma = -\dot{\varepsilon}_\theta$. Seja $\varepsilon := \varepsilon_\theta$ e $\delta_\varepsilon := (\delta_{\varepsilon_\gamma} + \delta_{\varepsilon_\theta})$, logo

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon \xi^\alpha(\vec{x}) &= \int d^n y [-\dot{\varepsilon}(\vec{y})\nu^\alpha(\vec{y}) + \varepsilon(\vec{y})\mu^\alpha(\vec{y})]\delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \delta_\varepsilon \theta(\vec{x}) &= -\varepsilon(\vec{x})kb, \\ \delta_\varepsilon \dot{\theta}(\vec{x}) &= -\dot{\varepsilon}(\vec{x})kb.\end{aligned}\tag{3.129}$$

Esse caso deve ser contraposto ao apresentado na Eq. (3.111). Não é de se esperar que μ^α em (3.111) envolva ∂_0 , pois essa derivada em geral impede que μ^α seja simultaneamente modo-zero de f e produza soluções para G que não envolvam derivadas temporais (pois do contrário G não é um termo do potencial). Graças à introdução de um segundo campo de WZ, foi possível de forma razoavelmente geral tratar do caso em que a Lagrangiana invariante de calibre envolve $\dot{\theta}^2$.

Nas próximas subseções ilustraremos esse formalismo em duas teorias bem distintas ambas sem simetria de calibre: o fluido irrotacional e o modelo de Proca. Estas duas aplicações se encontram em [10], outras aplicações podem ser vistas nas Refs. [10, 63, 62, 60].

3.2.3 Exemplo 1: fluido irrotacional

Nesta seção o método simplético de calibre será aplicado em uma teoria sem vínculos (no sentido do método simplético) e já linear nas velocidades. Ilustraremos o caso mais simples do método que emprega apenas um campo de WZ.

A Lagrangiana do modelo tratado em d dimensões espaciais é dada por [65]

$$\mathcal{L} = -\rho\eta + \frac{1}{2}\rho(\partial_a\eta)(\partial^a\eta) - \frac{g}{\rho},\tag{3.130}$$

em que $a = 1, 2, \dots, d$, ρ é a densidade de massa, η é o potencial de velocidade e g é uma constante. A métrica é Euclideana. Essa Lagrangiana não possui nem vínculos¹⁵ e nem simetria de calibre.

¹⁵Por ser uma Lagrangiana de primeira ordem nas velocidades, uma aplicação imediata do

A Lagrangiana invariante de calibre $\tilde{\mathcal{L}}$ possui o aspecto

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\rho\dot{\eta} + \Psi\dot{\theta} + \frac{1}{2}\rho \partial_a \eta \partial^a \eta - \frac{g}{\rho} - G, \quad (3.131)$$

com $\Psi = \Psi(\rho, \eta, \theta)$ e $G = G(\rho, \eta, \theta)$.

Sendo $\tilde{\xi}^\alpha = (\rho, \eta, \theta)$ o vetor simplético de coordenadas, o vetor simplético dos momentos e a matriz correspondente são $\tilde{a}_\alpha = (0, -\rho, \Psi)$ e

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta(\vec{x} - \vec{y}) & \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta\rho(\vec{x})} \\ \delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta\eta(\vec{x})} \\ -\frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta\rho(\vec{y})} & -\frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta\eta(\vec{y})} & \Theta_{xy} \end{pmatrix}. \quad (3.132)$$

Acima, \vec{x} e \vec{y} são vetores d -dimensionais, as deltas também são d -dimensionais e $\Theta_{xy} := \delta\Psi(\vec{y})/\delta\theta(\vec{x}) - \delta\Psi(\vec{x})/\delta\theta(\vec{y})$ (no caso mecânico Θ_{xy} é sempre nulo).

Selecionando o modo-zero mais geral,

$$\tilde{\nu} = (a \quad b \quad 1), \quad (3.133)$$

as seguintes condições são impostas a Ψ :

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta\rho(\vec{y})} &= b\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta\eta(\vec{y})} &= -a\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \Theta_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Por simplicidade, assumiremos que a e b são constantes.

Das Eqs. (3.134), encontra-se Ψ como sendo

$$\Psi = b\rho - a\eta + f(\theta), \quad (3.135)$$

em que $f(\theta)$ é uma função arbitrária de θ somente. Essa função, como pode ser facilmente verificado, apenas contribui com termos de superfície para $\tilde{\mathcal{L}}$, portanto ela não será mais escrita.

algoritmo de Dirac introduz um campo extra e um vínculo de segunda classe. Esse procedimento circular não faz parte do algoritmo simplético.

O último passo para concluir o método simplético de calibre é obter a função G . Essa função é determinada ao se exigir que $\tilde{\nu}$ não gere novos vínculos, ou seja,

$$\int d^d y \tilde{\nu}^\alpha(\vec{x}) \frac{\delta \tilde{V}(\vec{y})}{\delta \tilde{\xi}^\alpha(\vec{x})} = 0, \quad (3.136)$$

sendo \tilde{V} a parte potencial de $\tilde{\mathcal{L}}$,

$$\tilde{V} = -\frac{1}{2}\rho \partial_a \eta \partial^a \eta + \frac{g}{\rho} + G. \quad (3.137)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int d^d y \left\{ a \left(-\frac{1}{2} \partial_a \eta \partial^a \eta \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{g}{\rho^2} \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \frac{\delta G(\vec{y})}{\delta \rho(\vec{x})} \right) + \right. \\ \left. + b \left(-\rho \partial_a \eta \partial^a \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \frac{\delta G(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \right) + \frac{\delta G(\vec{y})}{\delta \theta(\vec{x})} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Acima, toda dependência implícita do vetor espacial se refere ao vetor \vec{y} .

Expandindo G em potências de θ , $G = \sum \mathcal{G}_n$, com $\mathcal{G}_n \propto \theta^n$ e $n \geq 1$ [devido a $G(\theta = 0) = 0$], temos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= a \left(\frac{1}{2} \partial_a \eta \partial^a \eta \theta + \frac{g}{\rho^2} \theta \right) + b \rho \partial_a \eta \partial^a \theta, \\ \mathcal{G}_2 &= -a \left(-a \frac{g}{\rho^3} \theta^2 + b \partial^a \eta \partial_a \theta \theta \right) - \frac{b^2}{2} \rho \partial_a \theta \partial^a \theta, \\ \mathcal{G}_3 &= a \left(a^2 \frac{g}{\rho^4} \theta^3 + \frac{b^2}{2} \theta \partial^a \theta \partial_a \theta \right), \\ \mathcal{G}_n &= a^n \frac{g}{\rho^{n+1}} \theta^n \quad \forall n \geq 4. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Sendo $\rho > a\theta$ a série $\sum \mathcal{G}_n$ converge e a seguinte Lagrangiana é encontrada:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} &= -\rho \dot{\eta} + (b\rho - a\eta) \dot{\theta} - \frac{g}{\rho - a\theta} + \\ &+ (\rho - a\theta) \left(\frac{1}{2} \partial_a \eta \partial^a \eta - b \partial^a \eta \partial_a \theta + \frac{b^2}{2} \partial^a \theta \partial_a \theta \right). \end{aligned} \quad (3.140)$$

Essa Lagrangiana é invariante pelas transformações dadas pelo modo-zero $\tilde{\nu}$, ou seja,

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon \rho &= a\varepsilon, \\ \delta_\varepsilon \eta &= b\varepsilon, \\ \delta_\varepsilon \theta &= \varepsilon.\end{aligned}\tag{3.141}$$

Pode-se verificar diretamente que realmente $\delta_\varepsilon \tilde{\mathcal{L}} = 0$.

3.2.4 Exemplo 2: modelo de Proca

O termo de massa inserido pelo modelo de Proca quebra a simetria $U(1)$ do eletromagnetismo usual. Nesta seção vamos empregar o método simplético com dois campos de WZ para recuperar essa simetria. Sendo mais específico, queremos implementar uma simetria em que $\delta_\varepsilon A^\mu = \partial^\mu \varepsilon$, $\delta_\varepsilon \tilde{\mathcal{L}} = 0$ e a dinâmica dada por $\tilde{\mathcal{L}}$ seja a mesma do modelo de Proca; ou seja, por meio de certo fixador de calibre, pode-se retornar à Lagrangiana do modelo de Proca. Como $\delta_\varepsilon A_0 = \dot{\varepsilon}$, isso sugere que precisamos da versão do formalismo com dois campos de WZ (3.129).

Antes de começar o método simplético de calibre é necessário introduzir campos auxiliares para obter uma Lagrangiana em primeira ordem nas velocidades. A Lagrangiana do modelo de Proca

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu,\tag{3.142}$$

pode ser escrita como

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_i, \pi_i, \partial_j \pi_i) = \pi^i \dot{A}_i + \frac{1}{2} \pi^i \pi_i - \pi^i \partial_i A_0 - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu,\tag{3.143}$$

em que $\mu = 0, 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$, $g = \text{diag}(+ \quad - \quad - \quad -)$ e $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Agora pode-se dar início ao formalismo. O primeiro passo é introduzir os campos de WZ θ e γ (3.113),

$$\tilde{\mathcal{L}} = \pi_i \dot{A}^i + (\Psi + \gamma) \dot{\theta} - \tilde{V},\tag{3.144}$$

com

$$\tilde{V} = -\frac{1}{2}\pi^i\pi_i + \pi^i\partial_i A_0 + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} - \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu + G + \frac{k}{2}\gamma\gamma. \quad (3.145)$$

Precisaremos agora determinar k , Ψ e G .

Seja $\tilde{\xi}^\alpha = (A^0, A^i, \pi^i, \theta, \gamma)$, logo os momentos associados são $\tilde{a}_\alpha = (0, \pi_j, 0, \Psi + \gamma, 0)$ e

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})} & 0 \\ 0 & 0 & -g_{ji}\delta(\vec{x} - \vec{y}) & \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta A^i(\vec{x})} & 0 \\ 0 & g_{ij}\delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta \pi^i(\vec{x})} & 0 \\ -\frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta A^0(\vec{y})} & -\frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta A^j(\vec{y})} & -\frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta \pi^j(\vec{y})} & \Theta_{xy} & -\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ 0 & 0 & 0 & \delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.146)$$

é a matriz simplética, cujas componentes acima são determinadas, como usual, a partir de

$$\tilde{f}_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{y}) \equiv \frac{\delta\tilde{a}_\beta(\vec{y})}{\delta\tilde{\xi}^\alpha(\vec{x})} - \frac{\delta\tilde{a}_\alpha(\vec{x})}{\delta\tilde{\xi}^\beta(\vec{y})}. \quad (3.147)$$

Alguns zeros que aparecem acima são verdadeiramente vetores linhas, colunas ou matrizes cujos elementos são todos nulos.

O modelo de Proca possui um vínculo que é gerado a partir do modo-zero $(1 \ 0_{1\times 3} \ 0_{1\times 3})$. Como antes apresentado, encontraremos um vínculo modificado a partir do seguinte vetor:

$$\tilde{\nu} = (1 \ 0_{1\times 3} \ 0_{1\times 3} \ 0 \ b), \quad (3.148)$$

em que consideraremos que b é constante.

Exigindo que $\tilde{\nu}$ seja modo-zero de \tilde{f} , encontra-se

$$\frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})} = -b\delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.149)$$

O vínculo associado a $\tilde{\nu}$ é dado por

$$\tilde{\Omega}(\vec{x}) = \int d^3y \tilde{\nu}^\alpha(\vec{x}) \frac{\delta\tilde{V}(\vec{y})}{\delta\tilde{\xi}^\alpha(\vec{x})} = -\partial_i\pi^i - m^2 A_0 + \int d^3y \frac{\delta G(\vec{y})}{\delta A_0(\vec{x})} + bk\gamma. \quad (3.150)$$

De forma mais compacta escreveremos $\tilde{\Omega} = \Omega + G_0 + bk\gamma$. G_0 é o G_ν usado na apresentação do formalismo geral.

Seguindo o procedimento padrão de lidar com vínculos no formalismo simplético [30], adicionamos $\dot{\lambda}\tilde{\Omega}$ a $\tilde{\mathcal{L}}$. Portanto,

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(1)} = \pi^i \dot{A}_i + (\Psi + \gamma)\dot{\theta} + \dot{\lambda}\tilde{\Omega} - \tilde{V}. \quad (3.151)$$

Costuma ser conveniente eliminar o vínculo do setor potencial, devido a ele já ter sido imposto no setor cinético [30], mas esse procedimento não será útil, portanto \tilde{V} permanece inalterado.

Sendo $\tilde{\xi}^{(1)\alpha} = (A^0, A^i, \pi^i, \theta, \gamma, \lambda)$, agora com $\alpha = 1, 2, \dots, 10$, e usando a Eq. (3.149), a seguinte matriz simplética é encontrada:

$$\tilde{f}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -b\delta^{(3)} & 0 & \frac{\delta G_0(\vec{y})}{\delta A_0(\vec{x})} - m^2\delta^{(3)} \\ 0 & 0 & -g_{ji}\delta^{(3)} & \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta A^i(\vec{x})} & 0 & \frac{\delta G_0(\vec{y})}{\delta A^i(\vec{x})} \\ 0 & g_{ij}\delta^{(3)} & 0 & \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta\pi^i(\vec{x})} & 0 & \frac{\delta G_0(\vec{y})}{\delta\pi^i(\vec{x})} - \partial_i^y\delta^{(3)} \\ b\delta^{(3)} & -\frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta A^j(\vec{y})} & -\frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta\pi^j(\vec{y})} & \Theta_{xy} & -\delta^{(3)} & \frac{\delta G_0(\vec{y})}{\delta\theta(\vec{x})} \\ 0 & 0 & 0 & \delta^{(3)} & 0 & bk\delta^{(3)} \\ -\frac{\delta G_0(\vec{x})}{\delta A_0(\vec{y})} + m^2\delta^{(3)} & \frac{\delta G_0(\vec{x})}{\delta A^j(\vec{y})} & \partial_j^x\delta^{(3)} - \frac{\delta G_0(\vec{x})}{\delta\pi^j(\vec{y})} & -\frac{\delta G_0(\vec{x})}{\delta\theta(\vec{y})} & -bk\delta^{(3)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.152)$$

Acima, $\delta^{(3)} := \delta(\vec{x} - \vec{y})$.

Agora, em acordo com as Eqs.(3.121, 3.122), selecionamos os seguintes modos-zero que serão responsáveis pela simetria de calibre:

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_{(\theta)} &= (a_0 \quad a\partial^i \quad c\partial^i \quad -kb \quad 0 \quad 1), \\ \tilde{\nu}_{(\gamma)} &= (1 \quad 0_{1\times 3} \quad 0_{1\times 3} \quad 0 \quad b \quad 0) = (\tilde{\nu} \quad 0). \end{aligned} \quad (3.153)$$

Esses modos-zero são mais gerais do que os correspondentes à proposta inicial, segundo a qual $\tilde{\mathcal{L}}$ deveria ser invariante por transformações do tipo $\delta_\varepsilon A_\mu = \partial_\mu \varepsilon$. Analisando a Eq. (3.129), vê-se que de imediato pode-se tomar $a_0 = 0$ e $a = 1$ para essa proposta. Contudo, embora considerar esses valores neste momento reduza

consideravelmente os cálculos futuros, carregaremos todos os termos acima, com a única restrição de serem constantes.

Conforme apresentado no formalismo geral, $\tilde{\nu}_{(\gamma)}$ não gera novos vínculos. A imposição de que $\tilde{\nu}_{(\gamma)}$ seja modo-zero implica que

$$\frac{\delta G_0(\vec{y})}{\delta A_0(\vec{x})} = (m^2 - b^2 k) \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.154)$$

Da imposição de que $\tilde{\nu}_{(\theta)}$ não deve gerar novos vínculos vem

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3 y \tilde{\nu}_{(\theta)}^\alpha(\vec{x}) \frac{\delta \tilde{V}(\vec{y})}{\delta \tilde{\xi}^{(1)\alpha}(\vec{x})} \\ &= \int d^3 y \left\{ a_0 \delta(\vec{x} - \vec{y}) (-\partial_i \pi^i - m^2 A_0) + a \partial_x^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) (\partial^j F_{ij} - m^2 A_i) + \right. \\ &\quad \left. + c \partial_x^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) (-\pi_i + \partial_i A_0) + \rho_x^\mu \frac{\delta G(\vec{y})}{\delta A^\mu(\vec{x})} + c \partial_x^i \frac{\delta G(\vec{y})}{\delta \pi^i(\vec{x})} - kb \frac{\delta G(\vec{y})}{\delta \theta(\vec{x})} \right\}. \end{aligned} \quad (3.155)$$

O índice x em ∂^i significa que as derivadas devem ser avaliadas com respeito a x , em vez de y , e

$$\rho_x^\mu := (a_0, a \partial_x^i). \quad (3.156)$$

Consideremos novamente a expansão de G em série de potências. Sendo \mathcal{G}_n proporcional a θ^n , escrevemos $G = \sum_n \mathcal{G}_n$. A condição $G(\theta = 0) = 0$ implica que $n \geq 1$. A solução em primeira ordem da Eq.(3.155) é

$$\mathcal{G}_1 = \frac{\theta}{kb} (-a_0 \partial_i \pi^i - m^2 \rho^\mu A_\mu - c \partial^i \pi_i + c \partial^i \partial_i A_0). \quad (3.157)$$

A menos de termos de superfície, a contribuição de segunda ordem em θ é

$$\mathcal{G}_2 = -\frac{1}{2(kb)^2} \{c(2a_0 + c) \partial_i \theta \partial^i \theta + m^2 \rho^\mu \theta \rho_\mu \theta\}. \quad (3.158)$$

A ausência de A^μ e π^i em \mathcal{G}_2 implica que $\mathcal{G}_n = 0$ para qualquer $n \geq 3$. Conseqüentemente, a função G é agora conhecida. Pode-se então calcular G_0 ,

$$G_0(\vec{x}) = \int d^3 y \frac{\delta G(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})} = \frac{1}{kb} (c \partial^i \partial_i \theta - m^2 a_0 \theta). \quad (3.159)$$

Aplicando esse resultado na Eq. (3.154), temos

$$k = \frac{m^2}{b^2}. \quad (3.160)$$

Agora G e k já se encontram determinados em função dos parâmetros dos modos-zero $\tilde{\nu}$ e $\tilde{\nu}_\theta$. Falta impormos todas as condições necessárias sobre Ψ a fim de que $\tilde{\nu}_\theta$ seja realmente um modo-zero. Dentre equações que levam à identidade trivial [usando as Eqs.(3.159, 3.160)], aparecem as seguintes:

$$c\partial_j^x \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \frac{m^2}{b} \frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta A^j(\vec{y})} = 0, \quad (3.161)$$

$$-a\partial_j^x \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \frac{m^2}{b} \frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta \pi^j(\vec{y})} + \partial_j^x \delta(\vec{x} - \vec{y}) = 0, \quad (3.162)$$

$$-ba_0\delta(\vec{x} - \vec{y}) + a\partial_x^i \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta A^i(\vec{x})} + c\partial_x^i \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta \pi^i(\vec{x})} - \frac{m^2}{b} \Theta_{xy} - \frac{\delta G_0(\vec{x})}{\delta \theta(\vec{y})} = 0. \quad (3.163)$$

Por meio das Eqs. (3.149, 3.161, 3.162, 3.163), a menos de termos que envolvam θ exclusivamente, Ψ pode ser encontrado como

$$\Psi = -\frac{b}{m^2} \{m^2 A_0 + c\partial_i A^i + (1-a)\partial^i \pi_i\}. \quad (3.164)$$

A Eq. (3.163) apenas fixa o valor de Θ_{xy} como nulo, a fim de termos consistência com as demais equações diferenciais.

Enfim, todas as incógnicas Ψ , G e k foram determinadas em função dos parâmetros dos modos-zero $\tilde{\nu}$ e $\tilde{\nu}_\theta$. Há porém certa restrição quanto ao valor de a que iremos encontrar agora. Primeiramente vamos remover os momentos π . Nota-se que Ψ e G possuem termos que dependem de π , portanto essas funções alteram a relação original entre π e A como segue

$$\pi_i = \partial_i A_0 - \dot{A}_i + \frac{b}{m^2} \{(1-a)\partial_i \dot{\theta} + (a_0 + c)\partial_i \theta\}. \quad (3.165)$$

Podemos também eliminar γ usando

$$\gamma = \frac{b^2}{m^2} \dot{\theta}. \quad (3.166)$$

Assim como a eliminação de γ não leva a uma Lagrangiana imediatamente invariante pelas transformações geradas por $\tilde{\nu}_\theta$ e $\tilde{\nu}_\gamma$, pois, conforme visto na apresentação do formalismo geral, essa eliminação só tem sentido se $\varepsilon_\gamma = -\dot{\varepsilon}_\theta$, faz-se necessário analisar cuidadosamente essa eliminação de π . A fim de que a Eq.(3.165) seja consistente com a aplicação de $\delta_\varepsilon := \delta_{\varepsilon_\theta} + \delta_{\varepsilon_\gamma}$ devemos fixar $a = 1$. Note que esse valor é exatamente aquele desejável para que recobremos a simetria $U(1)$, como comentado no início desta subseção. Uma eliminação de π e γ sem fixar o valor de a leva a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu + \frac{b}{m^2}\{-m^2A_0\dot{\theta} + (1-a)\partial_i\dot{\theta}(\partial^i A_0 - \dot{A}^i) + \\ & + a_0\theta(\partial^i\partial_i A_0 - \partial_i\dot{A}^i) + \theta m^2\rho^\mu A_\mu\} + \frac{b^2}{2m^2}\dot{\theta}\dot{\theta} + \\ & + \frac{b^2}{m^4}\left\{\frac{3}{2}(1-a)^2\partial_i\dot{\theta}\partial^i\dot{\theta} - \frac{1}{2}a_0^2\partial_i\theta\partial^i\theta + (1-a)(a_0+c)\partial_i\dot{\theta}\partial^i\theta + \frac{m^2}{2}\rho^\mu\theta\rho_\mu\theta\right\}. \end{aligned} \quad (3.167)$$

Alguns termos acima dependem de mais de uma derivada por campo, ademais há a constante c que é arbitrária e não participa mais das transformações de calibre. Felizmente, todos esses problemas desaparecem ao considerarmos que $a = 1$. Para esse valor de a , a Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}$ acima é invariante perante as transformações (3.129)

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon A_0 &= \varepsilon a_0 - \dot{\varepsilon}, \\ \delta_\varepsilon A^i &= -\partial^i \varepsilon, \\ \delta_\varepsilon \theta &= -\frac{m^2}{b}\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.168)$$

A constante b é apenas um reescalonamento de θ e tem dimensão de massa ao quadrado. Assim escolher $b = m^2$ é equivalente a substituir $\frac{b}{m^2}\theta$ por θ . Curiosamente, a constante a_0 permanece arbitrária. Pode-se checar diretamente que, para qualquer valor de a_0 e $a = 1$, realmente temos $\delta_\varepsilon \tilde{\mathcal{L}} = 0$. O motivo disso é simples, um

rearranjo da Eq. (3.167) com $a = 1$ mostra que a_0 e A_0 somente ocorrem dentro na seguinte combinação: $A_0 + a_0\theta =: \tilde{A}_0$, logo escolher $a_0 = 0$ é equivalente a substituir \tilde{A}_0 por A_0 .

Equivalentemente, esses mesmos valores dos parâmetros dos modos-zero podem ser obtidos impondo-se invariância de Lorentz explícita, e a Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}$ torna-se manifestamente invariante por transformações $U(1)$:

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu - m^2 A^\mu \partial_\mu \theta + \frac{m^2}{2}\partial^\mu \theta \partial_\mu \theta. \quad (3.169)$$

A Lagrangiana da Eq. (3.167) não é a mais geral atingível através do método simplético de calibre, outras estruturas dos modos-zero $\tilde{\nu}_{(\theta)}$ e $\tilde{\nu}_{(\gamma)}$ são também possíveis e suas componentes podem também depender de campos.

3.2.5 Comentários finais

Os dois exemplos anteriores ilustram o funcionamento do método simplético de calibre e apresentam os principais artifícios que são suficientes para sua aplicação em vários outros modelos. Os artifícios apresentados são eficientes também em teorias não-comutativas, como é o caso do modelo de Proca não-comutativo [63] e do modelo autodual não-comutativo [10]. Como mostrado em [64], o método simplético pode ser usado de forma a obter resultados iguais ao do BFFT [55], embora isso não seja uma necessidade [63]. Assim como há vários métodos de imersão em calibre que se fundamentam nos princípios do método de Dirac, futuros avanços do método simplético de calibre provavelmente o irão subdividir em vários métodos¹⁶. Dentre as investigações a serem feitas, encontra-se a formalização da implementação de simetrias de tipo não-Abeliana, isto é, de modos-zero que dependam dos próprios campos da teoria; ademais achamos que futuros desenvolvimentos do método podem o tornar consideravelmente mais sucinto em termos de trabalho algébrico. Uma

¹⁶De certa forma, alguma subdivisão já há, pois o método com um campo de WZ é consideravelmente diferente do com dois campos de WZ.

quantidade significativa de reproduções de soluções de outros métodos já foi obtida através do método simplético [10, 62, 64, 60], esperamos que futuro desenvolvimento desse método conduza a soluções de problemas físicos atuais. Essa esperança é justificável, o método simplético trata de forma mais moderna e direta da estrutura do espaço de fase que o método de Dirac, sendo em particular mais econômico, é portanto natural considerar que seus princípios venham a se demonstrar consideravelmente mais convenientes, ou mesmo poderosos, que as abordagens predecessoras para resolução de problemas por meio de imersão em calibre.

Capítulo 4

Não-comutatividade espaço-temporal

O espaço-tempo não-comutativo (NC) têm recebido muita atenção nos últimos anos, mas sua história é antiga, Heisenberg já teria proposto a inserção de certa não-comutatividade espacial a fim de resolver problemas relacionados com a auto-energia do elétron [66, 67]. Essas considerações em parte levaram Snyder a publicar o primeiro artigo sobre o tema [6]. Entretanto, o problema da auto-energia do elétron veio a ser resolvido através da teoria de renormalização, cujos resultados foram tão satisfatórios que eclipsaram as primeiras idéias de não-comutatividade espacial. Essa hipótese de inserir uma nova regra de não-comutatividade parece natural pois, assim como uma teoria quântica usual não tem seus estados físicos descritos por pontos no espaço de fase, mas sim por regiões de área proporcional a \hbar , um espaço-tempo NC também não possuiria pontos bem definidos (“fuzzy physics”).

Em grande parte devido à formulação matematicamente rigorosa da geometria não-comutativa na década de 80 [2] e à conexão encontrada entre teorias de cordas e o espaço-tempo NC [4, 5, 68, 7], a proposta de um espaço-tempo NC veio a ser revista em diversos contextos. Algumas de suas propriedades são bem vindas, como a eliminação do ponto espacial como estado físico e a conexão da Lagrangiana da teoria de Yang-Mills NC com gravitação, enquanto outras ainda precisam de melhor entendimento, em particular a renormalização dessas teorias. É perfeitamente

possível que futuramente, analogamente ao que ocorreu com a Lagrangeana de Yang-Mills, muitas das interpretações atuais sobre não-comutatividade espaço-temporal sejam abandonadas, mas a estrutura formal dessas teorias venha a ser essencial para uma nova física, conectada ou não com as teorias de cordas.

Este capítulo é dedicado a uma apresentação geral das teorias NC's, com enfoque aos itens pertinentes à próxima seção. A estrutura matemática dessas teorias é muito rica, há muitos trabalhos sobre o assunto, contudo aqui não será dada ênfase ao lado matemático. Introduções sobre esse assunto podem ser encontradas nas Refs. [2, 69]. Há novas abordagens recentes a essas teorias que parecem promissoras que não serão abordadas aqui, veja por exemplo [70] (e suas referências).

4.1 Aspectos gerais

Desde o estabelecimento da mecânica quântica no início do século XX, o emprego de operadores associados a observáveis físicos, em vez de variáveis reais, se tornou padrão na busca pelo entendimento das leis fundamentais da Natureza. A predição de resultados experimentais adquiriu uma natureza probabilística de caráter fundamental, consistentemente com a relação de incerteza de Heisenberg, a qual impõe um limite essencial ao conhecimento dos estados dos observáveis físicos. Neste contexto, estados físicos deixam de ser descritos por pontos no espaço de fase e passam a ser descritos por regiões desse espaço de área mínima da ordem de \hbar . Essa relação de incerteza é modelada, em conjunto com a definição de valor esperado da medida de observáveis, pela imposição de que coordenada e seu momento conjugado não comutam entre si, isto é¹,

$$[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\hbar. \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.1)$$

As teorias de espaço-tempo NC (ou, por simplicidade, teorias NC's) têm sido

¹Aqui o “chapéu” designa operador.

estudadas com o propósito de analisar a física de teorias com álgebras mais gerais que a anterior, a saber

$$[\hat{\xi}^\alpha, \hat{\xi}^\beta] = i\hat{\Theta}^{\alpha\beta}. \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 2N. \quad (4.2)$$

Em que $\hat{\xi} = (\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^N, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N)$, $\hat{\Theta}^{ij} \neq 0$ para alguns valores de i e j e $\hat{\Theta}^{i(j+N)} = \delta_j^i \hbar + O(\hat{\Theta}^{ij}, \hat{\Theta}^{(i+N)(j+N)})$.

Há várias formas de interpretar a alteração da álgebra quântica acima mencionada. A seguir, três abordagens a essa questão (não necessariamente populares) são comentadas:

i) Considerar que a existência do objeto $\hat{\Theta}^{ij} \neq 0$ seja tão fundamental quanto a de $\delta_j^i \hbar$. Esse novo objeto deveria introduzir pequenos desvios nos resultados teóricos que possuem boa concordância experimental e possibilitar a resolução de algum problema.

ii) $\hat{\Theta}^{ij}$ é introduzido para modelar algum processo físico desconhecido ou seqüência de interações não controlada, não tendo portanto um status de grandeza fundamental tal qual $\delta_j^i \hbar$. Desta forma, introduz-se a não-comutatividade no espaço-tempo com o intuito de criar um modelo efetivo, o qual poderia ser consistente com muitos dos fenômenos conhecidos ou só com alguns muito particulares.

iii) Como visto no Capítulo 3, a relação (4.1) só é válida de forma geral em sistemas sem vínculos. Há teorias físicas que, considerando sua estrutura de vínculos e sob certos limites, tornam-se não-comutativas no espaço-tempo, embora originalmente tenham sido formuladas em um contexto comutativo. Ou seja, nesta abordagem, não se assume $\hat{\Theta}^{ij} \neq 0$ *a priori*, mas a não-comutatividade espaço-temporal é obtida, sob certo limite, como uma nova descrição para a teoria original.

Essa classificação foi acima introduzida apenas para proporcionar uma visão ampla, porém vaga, de possíveis abordagens à não-comutatividade espaço-temporal. Não há na prática uma distinção bem definida entre essas abordagens.

O estudo da não-comutatividade espaço-temporal advinda da teoria de cordas sob o limite de Seiberg-Witten [7, 71, 72], assim como a análise do mais baixo nível de Landau em um contexto NC [73, 74] e estudos gerais de sistemas vinculados cuja quantização leve a $\hat{\Theta}^{ij} \neq 0$ [76, 75, 77], são bons exemplos da abordagem *iii*. Alguns exemplos de propostas fenomenológicas são a modificação da álgebra quântica usual a fim de modificar o limite GZK [78, 79, 80], extensões do modelo padrão por meio da inserção de alguma não-comutatividade [81, 3, 82], modelagem da recentemente observada rotação da luz sob forte fundo magnético [83, 84] e algumas propostas de gravitação quântica NC que não se reduzem, a priori, a conseqüências de teorias de cordas no limite de Seiberg-Witten [85]². Algumas referências sobre aspectos gerais fenomenológicos podem ser vistas em [82, 86].

Ocasionalmente comenta-se sobre a possibilidade de uma não-comutatividade espaço-temporal fundamental nas linhas da abordagem *i*, o que não está, em princípio, em acordo com a teoria de cordas. Como hoje se entende essas teorias NC's, elas não são teorias fundamentais da Natureza, pois, por menor que seja o parâmetro associado à não-comutatividade, várias inconsistências, ou sérias dificuldades, aparecem (especialmente no que concerne a quantização dessas teorias). Problemas dessa natureza ocorrem, por exemplo, no eletromagnetismo NC [87]. Conforme veremos, a teoria $U(1)$ não-comutativa é, sob vários aspectos, mais próxima das teorias do tipo $SU(N)$ do que de uma $U(1)$. É perfeitamente possível que esses modelos não venham a encontrar aplicação em fenômenos eletromagnéticos, mas sejam úteis para outros fenômenos. Em particular, o eletromagnetismo NC, como atualmente

²As referências acima citadas são apenas alguns poucos exemplos, não são necessariamente as mais representativas. Além disso, embora a distinção entre as três interpretações expostas possa parecer clara, na prática comumente é difícil, ou mesmo impossível, classificar satisfatoriamente um artigo segundo esses critérios.

o entendemos, possui liberdade assintótica e as únicas cargas possíveis são certa constante e , o negativo dessa constante e zero [87]. Por outro lado, e gostaríamos de deixar isto claro, não é possível prever como as teorias NC's irão se desenvolver nos próximos anos. O que há de sólido são suas relações formais, mas novas têm sido descobertas, as quais talvez possibilitem novas interpretações e uma readequação à fenomenologia eletromagnética. Enfim, não há no momento condições de se considerar a não-comutatividade espaço-temporal como algum princípio fundamental, e nem há indícios claros nessa direção. Talvez, futuramente, estando alguns modelos NC's em bom acordo com a experiência, e dispoendo esses de boa consistência interna, a questão da não-comutatividade espaço-temporal ser ou não ser fundamental se torne uma questão realmente relevante para a física; por enquanto ela fornece uma estrutura útil para propor novos modelos efetivos (de efeito Hall a gravitação quântica) e estudar outras teorias sob certos limites, como a teoria de cordas no limite de Seiberg-Witten.

No que segue, tal como grande parte da literatura sobre o assunto, iremos tratar somente da chamada não-comutatividade canônica, isto é, do caso em que $\hat{\Theta}^{ij}(\hat{\xi})$ é uma constante, a qual será denotada por θ e assumiremos que seus índices assumem D valores em um espaço-tempo D dimensional, ou seja,

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

com $\mu, \nu = 0, 1, \dots, D-1$. Estamos considerando uma deformação do espaço \mathbb{R}^D em um θ -deformado \mathbb{R}_θ^D [88] que satisfaz a álgebra acima e, em particular,

$$\mathbb{R}_\theta^D \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \mathbb{R}^D. \quad (4.4)$$

Essa deformação θ não altera a métrica, é verdadeiramente independente dela.

De forma análoga ao que ocorre na mecânica quântica usual, o comutador de \hat{x} com uma função $f : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty$ “aplicada” no operador \hat{x} [i.e., $f(\hat{x})$], define

uma derivada no espaço NC dada por

$$[\hat{x}^\mu, f(\hat{x})] = i\theta^{\mu\nu} \partial_\nu f(\hat{x}). \quad (4.5)$$

Se θ for matriz degenerada, existe em certo sistema de coordenadas μ_0 tal que $\theta^{\mu_0\nu} = 0 \quad \forall \nu$, logo $[\hat{x}^{\mu_0}, f(\hat{x})] = 0$. Neste último caso, a última relação não define derivada não-comutativa alguma, o que é natural, pois trata-se de uma componente que é verdadeiramente comutativa, logo sua derivada é a usual, independentemente dos comutadores. Neste caso temos $\mathbb{R}_\theta^D = \mathbb{R}_{\theta_r}^p \times \mathbb{R}^{D-p}$, em que p é o posto de θ , $\mathbb{R}_{\theta_r}^p$ é o espaço p -dimensional θ_r -deformado e θ_r é a matriz regular $p \times p$ obtida a partir de θ .

Usando o lema de Baker-Hausdorff, a não-localidade de \mathbb{R}_θ^D pode ser observada de forma mais clara, pois

$$\exp(ik_\mu \hat{x}^\mu) f(\hat{x}) \exp(-ik_\mu \hat{x}^\mu) = f(\hat{x}^\mu - \theta^{\mu\nu} k_\nu). \quad (4.6)$$

Esta relação já indica que há dificuldades no tratamento de observáveis em teorias de calibre no espaço-tempo NC. Em breve isto será visto.

4.2 O símbolo de Weyl e o produto Moyal

O produto Moyal [89] (ou Weyl-Moyal, ou Groenewold-Moyal), embora atualmente freqüentemente associado à não-comutatividade espaço-temporal, foi originalmente proposto no contexto da mecânica quântica usual. Em particular, esse produto é uma deformação não-comutativa do produto usual entre funções reais [88]. Na mecânica quântica, em vez dos observáveis serem descritos por operadores em um espaço de Hilbert, esses podem ser descritos por funções complexas obtidas a partir do símbolo de Weyl [90]. Para preservar o mapa entre operadores e funções complexas dado pelo símbolo de Weyl, um novo produto entre funções é induzido, esse

é chamado de produto Moyal e é associativo mas não-comutativo. Na mecânica quântica, esse produto é escrito como uma expansão em potências de³ \hbar e é especialmente útil para análises semiclássicas [91]. No contexto do espaço-tempo NC, esse produto é escrito como uma expansão em termos da matriz θ , como veremos.

A fim de evitar certas sutilezas matemáticas que estão além do objetivo desta tese, consideraremos apenas funções de Schwartz [92], isto é, funções pertencentes a C^∞ que vão para zero no infinito mais rapidamente que $1/x$, tal como todas suas derivadas⁴.

Para dada função real⁵ f de Schwartz [i.e., $f : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$, com $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^D)$], podemos associá-la a um operador pelo símbolo de Weyl, que é dado por

$$\hat{W}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) \exp(ik \cdot \hat{x}), \quad (4.7)$$

com $k \cdot \hat{x} := k_\mu \hat{x}^\mu$ e

$$\tilde{f}(k) := \int d^D x f(x) \exp(-ik \cdot x). \quad (4.8)$$

Vários símbolos podem ser introduzidos de forma a associar operadores a funções complexas, esses dependem da escolha da ordenação dos operadores. O símbolo de Weyl segue a ordenação de Weyl, como pode ser conferido pela expansão da exponencial de \hat{x} . Entre outras propriedades, sendo f uma função real, o operador de Weyl \hat{W} é Hermiteano; e $\hat{W}[f]|_{\theta=0} = f(\hat{x})$, em que \hat{x} na última equação é interpretado como uma coordenada comutativa.

Temos liberdade de introduzir um traço no espaço dos operadores, o qual escolhemos de forma a satisfazer

$$\text{Tr} e^{ik \cdot \hat{x}} = (2\pi)^D \delta^D(k). \quad (4.9)$$

Portanto,

$$\text{Tr} \hat{W}[f] = \int d^D x f(x). \quad (4.10)$$

³Para ser mais preciso, é uma expansão em termos de \hbar vezes a estrutura de Poisson.

⁴Alguns comentários simples e interessante sobre a extensão do produto Moyal para outras classes de funções por ser vista na Ref. [93].

⁵De forma mais geral, a função f pode ser complexa. Esta seção segue, em grande parte, a Ref. [66].

O traço no espaço dos operadores funciona como uma integral, e isso é condizente com o limite $\theta \rightarrow 0$ de \hat{W} comentado anteriormente. Ocasionalmente, no lugar de Tr escreve-se $\int \text{Tr}$ para deixar claro que Tr funciona como uma integral, mas não usaremos essa notação aqui. Isso é bem diferente do comportamento do traço que aparece na ação de teorias não-Abelianas, esse último não se confunde com a integral e o traço de um elemento da álgebra no ponto x é um número nesse ponto. No caso NC não há um número em dado ponto, ou mesmo em dada pequena região, o único número que advém do traço depende de todo o espaço.

Seja

$$\hat{\Delta}(x) := \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik \cdot \hat{x}} e^{-ik \cdot x}. \quad (4.11)$$

Usando o operador $\hat{\Delta}$ e o traço Tr pode-se inverter a Eq. (4.7) de forma a obter uma função real a partir de um operador Hermiteano \hat{W} , isto é,

$$f(x) = \text{Tr} \left(\hat{W}[f] \hat{\Delta}(x) \right), \quad (4.12)$$

pois

$$\text{Tr} \left(\hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y) \right) = \delta^D(x - y). \quad (4.13)$$

A multiplicação de operadores indica apenas a ordem em que devem ser aplicados, isto é, a multiplicação de $\hat{W}[f]$ por $\hat{W}[g]$ é simplesmente $\hat{W}[f] \hat{W}[g]$. Essa multiplicação define outro operador Hermiteano, o qual deve estar associado a outra função real pelo símbolo de Weyl. De forma geral, essa nova função não pode ser dada pelo produto usual (ou qualquer outro produto comutativo) entre f e g , assim a nova função real se relaciona a f e g através de um novo produto, que denotaremos por $*$. De forma mais específica,

$$(f * g)(x) := \hat{W}^{-1}(\hat{W}[f] \hat{W}[g]), \quad (4.14)$$

$$= \text{Tr} \left(\hat{W}[f] \hat{W}[g] \hat{\Delta}(x) \right),$$

$$= \int \frac{d^D k d^D k'}{(2\pi)^{2D}} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k' - k) e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{ik'_\mu x^\mu}, \quad (4.15)$$

$$= f(x) \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x), \quad (4.16)$$

ou seja,

$$(f * g)(x) = f(x) g(x) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \partial_\mu f(x) \partial_\nu g(x) + O(\theta^2). \quad (4.17)$$

O produto $*$, como acima definido, é o produto Moyal. Algumas propriedades imediatas desse produto:

$$[x^\mu, x^\nu]_* = i\theta^{\mu\nu}, \quad (4.18)$$

$$[x^\mu, f(x)]_* = i\theta^{\mu\nu} \partial_\nu f(x), \quad (4.19)$$

$$[f(x), g(x)]_* = 2i f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x), \quad (4.20)$$

$$\{f(x), g(x)\}_* = 2 f(x) \cos\left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x). \quad (4.21)$$

Acima, $[f, g]_* := f * g - g * f$ é o comutador Moyal e $\{f, g\}_* := f * g + g * f$ é o anticomutador Moyal.

As Eqs. (4.18, 4.19) devem ser comparadas com (4.3) e (4.5) respectivamente. As Eqs. (4.20, 4.21) serão úteis para o próximo capítulo.

Pode-se verificar também que o produto Moyal é associativo, ou seja,

$$A * (B * C) = (A * B) * C. \quad (4.22)$$

Como somente estamos considerando funções de Schwartz, nota-se que

$$\int A * B d^D x = \int A B d^D x. \quad (4.23)$$

Em particular, termos quadráticos na ação em um espaço-tempo NC são iguais, a menos de termos de superfície, a seus correspondentes comutativos. Conseqüentemente, os propagadores das teorias NC's são os mesmos das teorias comutativas [94].

Uma ação de uma teoria NC descrita por operadores deve usar o traço Tr , e esse possui a propriedade cíclica. Devido às duas últimas propriedades apresentadas, é fácil notar que uma propriedade cíclica também está presente no quadro Moyal, pois

$$\int A * B * C d^D x = \int A B * C d^D x = \int B * C * A d^D x. \quad (4.24)$$

Uma forma interessante de analisar a não-localidade do produto Moyal é considerar sua descrição integral no espaço de configuração. Seja K implicitamente definido por

$$(f * g)(x) = \int d^D y d^D y' f(y) g(y') K(y, y', x). \quad (4.25)$$

Sendo

$$f(x) = \delta_z(x) := \delta^D(x - z) \quad \text{e} \quad g(x) = \delta_{z'}(x) := \delta^D(x - z'), \quad (4.26)$$

vê-se que K de forma geral é dado por

$$K(y, y', x) = (\delta_y * \delta_{y'})(x) =: \delta^D(y - x) * \delta^D(y' - x). \quad (4.27)$$

Expressando as deltas de Dirac por meio de suas transformadas de Fourier, vem

$$K(y, y', x) = \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \int d^D h d^D h' e^{ih \cdot (x-y)} e^{-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} h_\mu h'_\nu} e^{ih' \cdot (x-y')}, \quad (4.28)$$

$$= \frac{1}{\pi^D |\det \theta|} e^{-2i\theta_{\mu\nu}^{-1} (x-y)^\mu (x-y')^\nu}. \quad (4.29)$$

A última equação é válida somente caso θ possua inversa, mas algo similar é válido para o subespaço em que θ for regular. A Eq. (4.28) mostra que o produto Moyal é uma modificação do produto ordinário tal que nenhum parâmetro além de θ é usado (nem mesmo a métrica) e a “interação” ponto a ponto entre f e g é quebrada, pois não é possível integrar h e h' de forma a obter duas deltas se $\theta \neq 0$. Note que a não-localidade do produto Moyal é bem mais interessante que uma mera interação à distância entre pontos.

A Eq.(4.29) ilustra uma propriedade dificilmente esperada das teorias NC's. Para $y = y'$, temos

$$(\delta_y * \delta_y)(x) = \frac{1}{\pi^D |\det \theta|}. \quad (4.30)$$

Ou seja, θ atua como um regularizador do quadrado de deltas de Dirac em $x = 0$, o que *a priori* pode ser visto como bem vindo. Considerando nossas expectativas iniciais, seria em princípio desejável, ou natural, que no caso NC existisse um a_0 cuja norma fosse da ordem de $\sqrt{||\theta||}$ tal que $\forall a \in \mathbb{R}^D$ com $||a|| > ||a_0||$ tivéssemos $(\delta * \delta)(a) = 0$. Mas isso não ocorre, o quadrado da delta em um mesmo ponto no espaço NC é uma constante para todo o espaço. Portanto temos uma não-localidade infinita associada ao quadrado de deltas de Dirac. Deltas de Dirac podem ser vistas como Gaussianas de largura infinitesimal, ou seja, um “campo” formado por um pulso muito localizado. O produto de deltas no mesmo ponto (Gaussianas cocêntricas), contudo, faz com que esses pulsos extremamente localizados influenciem todo o espaço. Essa propriedade pode ser vista como um indício da mistura ultravioleta/infravermelha, conforme mostrado na Ref. [95], veja também [66, 93, 96, 97, 98].

4.3 *D*-branas e o limite de Seiberg-Witten

A teoria exposta até aqui não determina como proceder com a quantização das teorias de espaço-tempo NC. Seria em princípio natural agora proceder com a dedução das regras de quantização canônica a partir do caso mecânico para, por fim, se possível, tratar das regras de Feynman. Mas esse não é o caminho padrão. Grande parte do interesse atual em teorias NC's vem de sua conexão com teorias de cordas. Como será visto de forma resumida, em certo limite de baixas energias e na presença de um fundo magnético (o limite de Seiberg-Witten), as *D*-branas [99, 100] são efetivamente descritas através de uma geometria NC e o produto entre campos torna-se o

Moyal⁶ [7]. Contudo, as medidas de integração permanecem as mesmas. Este último ponto não é trivial ou natural sob o ponto de vista de uma mecânica quântica não-comutativa, pois em princípio a quantização por integrais de Feynman poderia ser diferente, sua motivação original vem de deduções mecânicas de um espaço comutativo. Assim sendo conclui-se que a única novidade da quantização não-comutativa por integrais de Feynman no espaço dos momentos é a presença uma fase dependente de θ e dos momentos. As teorias livres, ou de ações com somente termos quadráticos, têm as mesmas propriedades quânticas da teoria comutativa equivalente devido à Eq. (4.23).

Seguindo a Ref. [7], considere a ação de Polyakov para uma folha de mundo Euclideana Σ de um espaço-alvo de métrica induzida $(g_{\mu\nu})$ na presença de um fundo magnético constante B , isto é,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \left(g_{\mu\nu} \partial_a x^\mu \partial^a x^\nu - 2\pi i \alpha' B_{\mu\nu} \epsilon^{ab} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} g_{\mu\nu} \partial_a x^\mu \partial^a x^\nu - \frac{i}{2} \int_{\partial\Sigma} B_{\mu\nu} x^\mu \partial_t x^\nu, \end{aligned} \quad (4.31)$$

com $a = 1, 2$ e ∂_t a derivada tangencial à borda da folha de mundo ($\partial\Sigma$). O campo B funciona como uma conveniente forma de selecionar as condições de contorno que as pontas das cordas estão sujeitas, pois igualando a variação de S a zero obtemos

$$(g_{\mu\nu} \partial_n x^\nu + 2\pi i \alpha' B_{\mu\nu} \partial_t x^\nu) |_{\partial\Sigma} = 0, \quad (4.32)$$

sendo ∂_n a derivada normal a $\partial\Sigma$. Portanto, para $B = 0$ as pontas das cordas satisfazem condições do tipo Neumann, enquanto $B \rightarrow \infty$ (ou $g_{\mu\nu} \rightarrow 0$) leva a condições do tipo Dirichlet. Neste último caso, as pontas das cordas estão presas a *D*-branas [99]⁷.

Com as condições de contorno dadas por (4.32), o propagador em $\partial\Sigma$, sendo $\partial\Sigma$

⁶Em contextos diferentes, resultados similares foram anteriormente obtidos em [4, 5].

⁷Alternativamente, pode-se impor as condições de contorno como uma condição externa à ação, isto é, sem usar o campo de Neveu-Schwartz B .

parametrizado por $\tau \in \mathbb{R}$, é [101, 102]

$$\langle x^\mu(\tau)x^\nu(\tau') \rangle = -\alpha' G^{\mu\nu} \log(\tau - \tau')^2 + \frac{i}{2} \theta^{ij} \epsilon(\tau - \tau'), \quad (4.33)$$

em que $\epsilon(\tau)$ vale 1 para τ positivo e -1 para τ negativo,

$$G_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} - (2\pi\alpha')^2 (Bg^{-1}B)_{\mu\nu}, \quad (4.34)$$

$$G^{\mu\nu} = \left(\frac{1}{g + 2\pi\alpha'B} g \frac{1}{g - 2\pi\alpha'B} \right)^{\mu\nu}, \quad (4.35)$$

$$\theta^{\mu\nu} := -(2\pi\alpha')^2 \left(\frac{1}{g + 2\pi\alpha'B} B \frac{1}{g - 2\pi\alpha'B} \right)^{\mu\nu}. \quad (4.36)$$

Devido à Eq.(4.33), G é a métrica efetiva, enquanto θ é o parâmetro de não-comutatividade, pois

$$\langle [x^\mu(\tau), x^\nu(\tau)] \rangle := \langle x^\mu(\tau)x^\nu(\tau^-) - x^\nu(\tau^+)x^\mu(\tau) \rangle = i\theta^{\mu\nu}, \quad (4.37)$$

com $\tau^+ := \tau + \varepsilon$, $\tau^- := \tau - \varepsilon$ e $\varepsilon > 0$. Isto mostra que certo tipo de não-comutatividade já está presente. Veremos que, sob certo limite, o propagador acima estabelece um ordenamento normal que é descrito por certo produto associativo, e esse é justamente o produto Moyal anteriormente apresentado. Como será apresentado, o fato de o limite a seguir induzir o produto Moyal é apenas uma de suas características não-triviais.

Considere o seguinte limite de baixas energias:

$$\alpha' \sim \epsilon^{1/2} \rightarrow 0, \quad (4.38)$$

$$g_{\mu\nu} \sim \epsilon \rightarrow 0, \text{ para } \mu, \nu = 1, 2, \dots, r, \quad (4.39)$$

sendo r o posto da matriz $(B_{\mu\nu})$ (a qual satisfaz $B_{\mu\nu} = 0 \quad \forall \mu > r$, o que pode ser sempre atingido por transformações de coordenadas). Através desse limite, que neste contexto é referido por limite de Seiberg-Witten, explora-se o limite de baixas energias de teorias de cordas sem alterar os parâmetros que caracterizam as cordas

abertas (G , θ e G_s), enquanto elimina-se a influência das cordas fechadas (descritas por g , B e g_s). As contantes g_s e G_s serão em breve introduzidas. No limite de Seiberg-Witten, as Eqs. (4.34-4.36) são dadas por

$$G_{\mu\nu} = \begin{cases} -(2\pi\alpha')^2 (Bg^{-1}B)_{\mu\nu} & \text{para } \mu, \nu = 1, 2, \dots, r \\ g_{\mu\nu} & \text{para } \mu, \nu > r \end{cases}, \quad (4.40)$$

$$G^{\mu\nu} = \begin{cases} -\frac{1}{(2\pi\alpha')^2} \left(\frac{1}{B}g\frac{1}{B}\right)^{\mu\nu} & \text{para } \mu, \nu = 1, \dots, r \\ g^{\mu\nu} & \text{para } \mu, \nu > r \end{cases}, \quad (4.41)$$

$$\theta^{\mu\nu} = \begin{cases} \left(\frac{1}{B}\right)^{\mu\nu} & \text{para } \mu, \nu = 1, 2, \dots, r \\ 0 & \text{para } \mu, \nu > r \end{cases}. \quad (4.42)$$

Agora o propagador perde a singularidade associada com $\tau \rightarrow \tau'$, pois

$$\langle x^\mu(\tau) x^\nu(\tau') \rangle = \frac{i}{2} \theta^{ij} \epsilon(\tau - \tau'). \quad (4.43)$$

Para quaisquer duas funções do operador x , o ordenamento normal associado a esse propagador satisfaz [103]

$$: f(x(\tau)) : : g(x(0)) : = e^{\frac{i}{2} \epsilon(\tau) \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu(\tau)} \frac{\partial}{\partial x^\nu(0)}} : f(x(\tau)) g(x(0)) : \quad (4.44)$$

e

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} : f(x(\tau)) : : g(x(0)) : = : f(x(0)) * g(x(0)) : . \quad (4.45)$$

Assim, temos

$$\left\langle \prod_{n=1}^m f_n(x(\tau)) \right\rangle = \int d^D x (f_1 * f_2 * \dots * f_m)(x(\tau)). \quad (4.46)$$

A relação com o operador de Weyl pode agora ser facilmente estabelecida,

$$\left\langle \prod_{n=1}^m f_n(x(\tau)) \right\rangle = \text{Tr} \hat{W}[f_1 * \dots * f_m] = \text{Tr} \prod_{n=1}^m \hat{W}[f_n]. \quad (4.47)$$

É interessante analisar como teorias de calibre se comportam nesse espaço não-comutativo. Campos de calibre se acoplam à borda da folha de mundo $\partial\Sigma$ (*Dp*-brana) por meio do termo

$$-i \int d\tau A_\mu(x) \partial_\tau x^\mu, \quad (4.48)$$

$\mu = 1, 2, \dots, p+1$, que é adicionado à ação (4.31).

Considerando que A esteja associado a uma simetria de calibre ordinária,

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda, \quad (4.49)$$

a variação clássica de (4.48) é nula, pois

$$\delta \int d\tau A_\mu \partial_\tau x^\mu = \int d\tau \partial_\tau \lambda = 0. \quad (4.50)$$

De forma geral, porém, é necessário avaliar a variação da função partição, a qual em primeira ordem em A se transforma por

$$\int d\tau : A_\mu \partial_\tau x^\mu : \int d\tau' : \partial_{\tau'} \lambda : . \quad (4.51)$$

Esse produto de operadores pode ser regularizado de várias formas. Em particular, usando a regularização de Pauli-Villars, o produto acima coincide com a variação clássica e é nulo. Uma outra regularização de interesse é a de separação de pontos (“point splitting”). Nesta, a região $|\tau - \tau'| < \delta$ é eliminada da integração, em seguida o limite $\delta \rightarrow 0$ é tomado. Assim procedendo,

$$\begin{aligned} & \int d\tau : A_\mu(x(\tau)) \partial_\tau x^\mu : : (\lambda(x(\tau^-)) - \lambda(x(\tau^+))) : = \\ & = \int d\tau : (A_\mu * \lambda - \lambda * A_\mu) \partial_\tau x^\mu : . \end{aligned} \quad (4.52)$$

Devido à não-comutatividade do produto Moyal, essa regularização quebra a simetria $U(1)$ presente no caso clássico. Por outro lado, a regularização de separação de pontos está associada a uma outra simetria de calibre. Em vez da variação (4.49),

deve-se considerar a seguinte⁸

$$\hat{\delta}\hat{A}_\mu = \partial_\mu\hat{\lambda} + i[\hat{\lambda}, \hat{A}_\mu]_* \quad (4.53)$$

O símbolo “ $\hat{}$ ” acima foi empregado para diferenciar os campos regularizados por Pauli-Villars dos regularizados por separação de pontos, ou seja, esse “chapéu” não designa operadores, serve apenas para diferenciar os campos que pertencem à álgebra $u(1)$ dos que pertencem a $u_*(1)$ (i.e., álgebra $u(1)$ NC). Os grupos NC’s serão introduzidos em outra seção.

A ação mais simples possível capaz de conferir dinâmica ao campo de calibre $\hat{A} \in Dp$ -brana de métrica G e que seja invariante por transformações do tipo $U_*(1)$ é

$$S_{\hat{A}} = k_p \int \hat{F} \wedge_* \hat{F}. \quad (4.54)$$

Acima, k_p é uma constante que depende da dimensão da brana associada, \wedge_* é o produto exterior $*$ -deformado (e.g., $A \wedge_* B = A_\mu * B_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu$, para duas quaisquer 1-formas) e \hat{F} é dado por

$$\hat{F} := d\hat{A} - i\hat{A} \wedge_* \hat{A}. \quad (4.55)$$

Essa construção segue de perto a construção usual de teorias de calibre não-Abelianas, embora no presente caso tenhamos uma teoria Abelianas.

Assim sendo, a descrição efetiva NC depende de θ somente através do produto Moyal $*$. Conforme minuciosa e originalmente argumentado na Ref. [7], ação (4.54) é a ação efetiva de uma D -brana com campos de calibre de posto um, regularizada por separação de pontos e no limite de Seiberg-Witten. Para o caso não-Abeliano, o aspecto da ação (4.54) é o mesmo, exceto pela presença de um traço no espaço da álgebra.

Por outro lado, desde 1985 [104] sabe-se que D -branas no limite de campos

⁸Embora só a primeira ordem tenha sido avaliada em (4.52), essa transformação de calibre é válida para todas as ordens da expansão da função partição; os detalhes se encontram em [7].

lentamente variantes ($\sqrt{2\pi\alpha'}|\frac{\partial F}{F}| \ll 1$) podem ser descritas por ações de Dirac-Born-Infeld (DBI) (para revisões veja por exemplo Refs. [105, 103]). Usando esse resultado e nesse limite, a Lagrangiana efetiva é

$$\mathcal{L}_{DBI} = \frac{1}{g_s(2\pi)^p(\alpha')^{\frac{p+1}{2}}} \sqrt{\det[g + 2\pi\alpha'(B + F)]}, \quad (4.56)$$

sendo g_s uma contante que não depende da dimensão da *D*-brana no espaço, isto é, do valor de p .

É importante notar que nessa Lagrangiana B e F ocorrem exclusivamente na soma $B + F$, o que leva à chamada simetria Λ : as transformações $A \rightarrow A + \Lambda$ e $B \rightarrow B - d\Lambda$ não alteram a Lagrangiana. É natural que essa simetria esteja presente na Lagrangiana efetiva acima, pois ela se encontra na ação (4.31) adicionada do termo de calibre (4.48), para B constante⁹.

A Lagrangiana (4.56) é dada em um espaço comutativo, sendo compatível com a regularização de Pauli-Villars. Consideremos o problema de determinar a Lagrangiana efetiva análoga para o caso NC. Como visto, no espaço NC os produtos são substituídos por produtos Moyais e esses carregam toda a influência do campo magnético B . Além disso a métrica efetiva é dada por G , portanto¹⁰

$$\mathcal{L}_{DBI*} = \frac{1}{G_s(2\pi)^p(\alpha')^{\frac{p+1}{2}}} \sqrt{\det(G + 2\pi\alpha'\hat{F})}. \quad (4.57)$$

Dado que as Lagrangianas acima só tem sentido como teorias efetivas no limite de campos lentamente variantes, os produtos Moyais que aparecem na expansão do determinante da Lagrangiana NC podem ser ignorados, assim toda a influência de B encontra-se no produto Moyal interno a \hat{F} . A análise da simetria Λ no quadro NC é menos óbvia, mas pode ser encontrada nas Refs. [7, 106, 71].

A relação entre as constantes g_s e G_s é encontrada mediante a igualdade

$$\mathcal{L}_{DBI}(F = 0) = \mathcal{L}_{DBI*}(\hat{F} = 0), \quad (4.58)$$

⁹A presença de B pode ser interpretada como uma modificação no potencial, $A \rightarrow A^B$, com $A_\mu^B := A_\mu + \frac{1}{2}B_{\nu\mu}x^\nu$. Sendo $F^B := dA^B$, vem $F^B = F + B$.

¹⁰Essa expressão é independente do limite de Seiberg-Witten.

ou seja,

$$G_s = g_s \left(\frac{\det G}{\det(g + 2\pi\alpha' B)} \right)^{1/2} = g_s \left(\frac{\det(g + 2\pi\alpha' B)}{\det g} \right)^{1/2}. \quad (4.59)$$

E a relação de G_s com a constante de acoplamento de calibre, aqui denotada por g_{YM} , é obtida a partir da análise do termo de segunda ordem em \hat{F} da expansão de \mathcal{L}_{DBI*} , ou seja,

$$\frac{1}{g_{YM}^2} = \frac{(\alpha')^{\frac{3-p}{2}}}{(2\pi)^{p-2} G_s}. \quad (4.60)$$

Em particular, nota-se que g_{YM}^2 só é adimensional em D3-branas, em conformidade com a invariância de escala de Yang-Mills em 4D. Em uma D2-brana, g_{YM}^2 tem dimensão de massa, tal qual é exigido por uma análise dimensional de uma teoria de calibre $U(1)$ [ou $U(N)$] em 3D, se os campos de calibre tiverem dimensão de massa.

A Eq. (4.60) fixa o valor de k_p em (4.54) como sendo [veja Eq. (2.65)]

$$k_p = \frac{1}{2g_{YM}^2} = \frac{(\alpha')^{\frac{3-p}{2}}}{2(2\pi)^{p-2} G_s}. \quad (4.61)$$

Esse limite de campos lentamente variantes (CLV) será importante para algumas considerações sobre o mapa de Seiberg-Witten e certos resultados apresentados no próximo capítulo.

Resumo. i) Não-comutatividade espaço-temporal ocorre naturalmente em teorias de cordas na presença de um fundo magnético (4.37); ii) o limite de Seiberg-Witten é, em particular, um limite de baixas energias que elimina a física das cordas fechadas, as cordas abertas têm condições de contorno do tipo Dirichlet, o produto Moyal é diretamente induzido pelo ordenamento normal e a ação de calibre efetiva é quadrática em¹¹ \hat{F} ; iii) dependendo da técnica de regularização, a ação efetiva em uma Dp -brana pode ser tanto descrita por uma teoria de calibre ordinária quanto por uma NC.

¹¹Em particular a ação efetiva pode depender de ordens superiores de \hat{F} . No limite de campos lentamente variantes, sem considerar o limite de Seiberg-Witten, ordens superiores de \hat{F} ocorrem, veja a Eq. (4.57).

4.4 Tópicos sobre quantização

Segundo o procedimento padrão de quantização de campos no espaço-tempo NC, as expectativas iniciais de eliminar divergências ultra-violetas (UV) por meio de não-comutatividade espaço-temporal são ingênuas. Teorias NC's de campos sofrem das mesmas divergências das teorias ordinárias e ainda possuem outras divergências, essas associadas a outros gráficos de Feynman que não ocorrem no caso ordinário, os gráficos não-planares [94]. Os gráficos não-planares estão associados à mistura ultra-violeta/infra-vermelho (UV/IV) [95] e uma abordagem direta usando as ferramentas usuais da teoria de campos não é capaz de tratar esse tipo de divergência. Há propostas referentes a essa questão, a abordagem ao problema pode variar bastante, veja [107]. Não é claro se essa mistura UV/IV é um problema a ser resolvido através de novas técnicas, ou se é uma “patologia” que deve ser eliminada por meio de outras abordagens à quantização.

Se a mistura UV/IV seria dificilmente prevista nos primórdios da não-comutatividade espaço-temporal, dificuldades referentes à causalidade ou unitariedade de teorias NC's com $\theta^{0i} \neq 0$ poderiam ser esperadas [108, 109]. Essas teorias são às vezes referidas por teorias de tempo/espaço NC e contém não-localidade temporal. Há essencialmente três abordagens a essa questão: i) qualquer teoria NC realista deve sempre satisfazer $\theta^{0i} = 0$ [108]; ii) qualquer teoria realista deve satisfazer $\theta^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} > 0$ (θ deve ser do tipo espaço), assim pode-se sempre mudar de referencial para um em que $\theta^{0i} = 0$ [82]; iii) supõe-se que o problema encontra-se na forma de quantização, assim outras abordagens poderiam ser realistas e evitar o problema de unitariedade [110]. Pouco depois do aparecimento do artigo [108], foi visto que há certa classe de teorias de tempo/espaço NC que não tem problemas de unitariedade, mesmo usando a quantização padrão, trata-se das teorias em que θ é do tipo luz $\theta^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} = 0$ [111]. Sob uma perspectiva de teoria de cordas, há realmente dificuldades de se produzir uma teoria NC de campos com não-comutatividade temporal [112].

Segundo os preceitos gerais apresentados nas seções anteriores, a versão NC de $\lambda\phi^4$ deve ser dada por

$$\begin{aligned}
S_{\phi^*} &= \text{Tr} \left(\hat{W}[\partial_\mu\phi]\hat{W}[\partial^\mu\phi] + \frac{m^2}{2}\hat{W}^2[\phi] + \frac{\lambda}{4!}\hat{W}^4[\phi] \right), \\
&= \text{Tr} \left(\frac{1}{2}\hat{W}[\partial_\mu\phi * \partial^\mu\phi] + \frac{m^2}{2}\hat{W}[\phi * \phi] + \frac{\lambda}{4!}\hat{W}[\phi * \phi * \phi * \phi] \right), \\
&= \int \left(\partial_\mu\phi \partial^\mu\phi + \frac{m^2}{2}\phi\phi + \frac{\lambda}{4!}\phi * \phi * \phi * \phi \right) d^Dx. \tag{4.62}
\end{aligned}$$

Não há produtos Moyais nos dois primeiros termos devido à propriedade (4.23). Assim, o propagador “livre” da teoria $\lambda\phi^4$ NC é igual ao da versão NC. A diferença do caso NC advém do termo

$$\text{Tr}\hat{W}^4[\phi] = \prod_{a=1}^4 \int d^Dk \tilde{\phi}(k_a) \delta^D \left(\sum_{a=1}^4 k_a \right) V(k_1, k_2, k_3, k_4), \tag{4.63}$$

com

$$V(k_1, k_2, k_3, k_4) := \prod_{a<b}^4 e^{-\frac{i}{2}k_a \wedge k_b} \tag{4.64}$$

e

$$k_a \wedge k_b := k_{ai}\theta^{ij}k_{bj}. \tag{4.65}$$

Devido à conservação do momento, ou seja, à delta que aparece acima, V é invariante por permutações cíclicas, embora, em geral,

$$V(k_1, k_2, k_3, k_4) \neq V(k_2, k_1, k_3, k_4). \tag{4.66}$$

Isso faz com que seja necessário prestar atenção ao ordenamento dos propagadores associados a cada vértice. Como regra adota-se o ordenamento cíclico para todos os vértices. Como veremos, dependendo da ordem de associação dos propagadores em relação ao ordenamento dos vértices, a contribuição de V pode ser uma fase global ou uma não-trivial fase interna ao gráfico. O primeiro caso é representado por diagramas planares, o segundo por não-planares, conforme será ilustrado a seguir.

As regras de Feynman para o propagador e para o vértice são

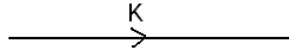


Fig.3: $\frac{1}{k^2 + m^2}$

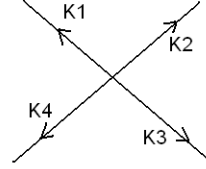


Fig.4: $\frac{\lambda}{4!} \prod e^{-\frac{i}{2}k_a \wedge k_b} \delta(\sum k_a)$

Considere os seguintes diagramas

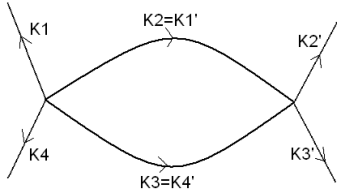


Fig.5: Diagrama Planar

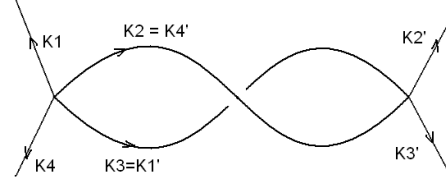


Fig.6: Diagrama Não-Planar

A contribuição dos vértices do diagrama não-planar é

$$V(k_1, k_2, k_3, k_4) V(-k_3, k'_2, k'_3, -k_2) \stackrel{\text{on shell}}{=} V(k_2, k_3, k_4, k_1) V(-k_2, -k_3, k'_2, k'_3). \quad (4.67)$$

Seja $k := k_1 + k_4$, logo $k = -k'_2 - k'_3$ e $k_3 = -k - k_2$. Assim,

$$V(k_2, k_3, k_4, k_1) V(-k_2, -k_3, k'_2, k'_3) = e^{-\frac{i}{2}k \wedge (2k_2 + k_1 + k'_2)}. \quad (4.68)$$

Contrariamente ao caso acima, a contribuição dos vértices para o diagrama planar é tal que os momentos internos se cancelam, ou seja, a única dependência associada à não-comutatividade reside nos momentos externos, a saber:

$$V(k_1, k_2, k_3, k_4) V(-k_2, k'_2, k'_3, -k_3) \stackrel{\text{on shell}}{=} V(k_2, k_3, k_4, k_1) V(-k_3, k_2, k'_2, k'_3) = e^{-\frac{i}{2}k \wedge (k_1 + k'_2)}. \quad (4.69)$$

Conseqüentemente, os gráficos planar e não-planar acima representam respectivamente as seguintes expressões:

$$\frac{\lambda^2}{4!^2} e^{-\frac{i}{2}k \wedge (k_1 + k'_2)} \int \frac{1}{k_2^2 + m^2} \frac{1}{(k + k_2)^2 + m^2} d^D k_2, \quad (4.70)$$

$$\frac{\lambda^2}{4!^2} e^{-\frac{i}{2}k \wedge (k_1 + k'_2)} \int \frac{1}{k_2^2 + m^2} \frac{e^{-i k \wedge k_2}}{(k + k_2)^2 + m^2} d^D k_2. \quad (4.71)$$

O que foi aqui apresentado para esses dois gráficos pode ser, sem maiores dificuldades, generalizado para quaisquer gráficos de teorias do tipo ϕ^n [94, 96, 66].

Na teoria ϕ^4 comutativa há 6 gráficos de auto-energia em 1 *loop* todos equivalentes entre si. No caso NC, dois desses são do tipo não-planares e as auto-energias em 1 *loop* são dadas por

$$\Pi_p^{(1)}(p) = \frac{1}{3} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m^2}, \quad (4.72)$$

$$\Pi_{np}^{(1)}(p) = \frac{1}{6} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ik \wedge p}}{k^2 + m^2}. \quad (4.73)$$

Acima, p , em vez do k usado anteriormente, é o momento total externo.

A primeira expressão é exatamente a que ocorre no caso ordinário, estando portanto sujeita a todas as complicações usuais. A fase que aparece em $\Pi_{np}^{(1)}$ funciona como um cutoff desde que o momento externo p seja suficientemente grande. Não sendo esse o caso, Π_{np} adquire a divergência UV de Π_p , porém agora sob a forma de uma divergência de longa distância (“UV/IR mixing”) [95].

Para melhor quantificar essa e outras propriedades quânticas, costuma-se usar a parametrização de Schwinger

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(k^2 + m^2)}, \quad (4.74)$$

assim

$$\Pi_{np} = \frac{1}{6(4\pi)^{D/2}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{D/2}} e^{-\alpha m^2 - \frac{p \circ p}{4\alpha} - \frac{1}{\Lambda^2 \alpha}}, \quad (4.75)$$

em que Λ é o cutoff empregado no caso usual e

$$p \circ p := p_\mu \theta^{\mu\nu} \delta_{\nu\lambda} \theta^{\lambda\kappa} p_\kappa. \quad (4.76)$$

Esse não convencional produto aparece naturalmente ao se avaliar a Gaussiana que aparece na integração de k em Π_{np} . $p \circ p$ é uma notação padrão no contexto de teorias NC's de campos.

Nas Refs. [108, 109, 111] foi demonstrado que uma condição necessária para que as integrais de Feynman convirjam de forma a preservar unitariedade é $p \circ p \geq 0$, o que em geral não ocorre no espaço de Minkovsky se $\theta^{0i} \neq 0$.

4.5 Teorias $U_*(N)$ e o mapa de Seiberg-Witten

A fim de se construir extensões NC's de teorias de calibre, o primeiro passo é definir os grupos apropriados. O grupo $U(N)$ possui uma extensão NC natural que denotaremos por $U_*(N)$ [grupo $U(N)$ NC]. Entretanto, embora $U(N) = U(1) \times SU(N)$, não existe em princípio uma versão NC do grupo $SU(N)$. Isso se deve a $\det(A*B) \neq \det A * \det B$ em geral. Há porém formas de contornar essa dificuldade e assim tratar de teorias NC's com grupos de calibre diferentes do $U_*(N)$ [113, 114]. Após a definição do grupo $U_*(N)$, definiremos a teoria de calibre correspondente e veremos que não será possível definir os observáveis tão diretamente como ocorre nas teorias $U(1)$ ou $SU(N)$, pois transformações de calibre em particular envolvem translações espaciais (4.6). Veremos que há certo mapa capaz de quebrar a interpolação entre translações espaciais e transformações de calibre, e esse mapa é exatamente o mesmo que associa a descrição ordinária com a não-comutativa de D -branas, conforme indicado na Seção 4.3.

Diremos que uma matrix $N \times N$ complexa g é elemento de $U_*(N)$ se satisfizer

$$g * g^\dagger = \mathbb{1}. \quad (4.77)$$

O conjunto $U_*(N)$ é um grupo, pois, para dados $g, h, j \in U_*(N)$,

$$i) g * (h * j) = (g * h) * j, \quad (4.78)$$

$$ii) \mathbb{1} * g = g * \mathbb{1} = g, \quad (4.79)$$

$$iii) \exists g^{-1} = g^\dagger, \quad (4.80)$$

$$iv) (g * h) \in U_*(N). \quad (4.81)$$

Assim como no caso $U(N)$, os geradores são dados por matrizes Hermiteanas. Pela definição do produto Moyal, é imediato conferir que, dados A e B Hermiteanos,

$$(i[A, B]_*)^\dagger = i[A, B]_*. \quad (4.82)$$

Pode-se checar que, além da constante de estrutura anti-simétrica f , a fim de expressar o comutador acima em função de certa base Hermiteana $\{t^a\}$, é necessário também uma constante de estrutura simétrica d . Outros detalhes sobre a álgebra $u_*(N)$ não serão importantes para o objetivo desta tese, mas podem ser encontrados na Ref. [114] (veja [115] para uma revisão).

Analogamente ao que foi apresentado na Seção 2.3, mas substituindo o produto usual pelo Moyal, constrói-se a seguinte ação para a teoria $U_*(N)$ de calibre:

$$S_{\hat{A}} = \frac{1}{2g^2} \int \text{tr } \hat{F} \wedge_* \hat{F}. \quad (4.83)$$

Acima \wedge_* é o produto exterior $*$ -deformado (e.g., $A \wedge_* B = A_\mu * B_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu$, para duas quaisquer 1-formas), o tr acima é um traço na álgebra e \hat{F} é dado por

$$\hat{F} := d\hat{A} - i\hat{A} \wedge_* \hat{A}. \quad (4.84)$$

O “ $\hat{}$ ” acima designa apenas campos que pertencem a uma álgebra NC, \hat{A} e \hat{F} não são operadores. $\hat{W}[\hat{A}]$ e $\hat{W}[\hat{F}]$, logo abaixo novamente utilizados, são operadores.

Sendo $S \in U_*(N)$, \hat{A} e \hat{F} se transformam segundo

$$\hat{A} \rightarrow \hat{A}' = S * \hat{A} * S^\dagger + iS * dS^\dagger \quad (4.85)$$

$$\hat{F} \rightarrow \hat{F}' = S * \hat{F} * S^\dagger \quad (4.86)$$

É importante notar que mesmo no caso $U_*(1)$ as transformações de calibre têm uma estrutura não-Abeliana. Em particular, \hat{F} não é um observável, pois se transforma por mudanças de calibre. Algo similar ocorre nas teorias $SU(N)$, conforme visto na Seção 2.3. Naquela seção foi possível construir um observável a partir do traço de F . O mesmo ocorre no caso $U_*(1)$, porém precisa-se do traço no espaço dos operadores, ou seja,

$$\text{Tr} \hat{W}[\hat{F}] \rightarrow \text{Tr}(\hat{W}[S] \hat{W}[\hat{F}] \hat{W}^\dagger[S]) = \text{Tr} \hat{W}[\hat{F}]. \quad (4.87)$$

Equivalentemente, usando a propriedade (4.24),

$$\int \hat{F} d^D x \rightarrow \int S * \hat{F} * S^\dagger d^D x = \int \hat{F} d^D x. \quad (4.88)$$

Para $U_*(N)$ precisa-se dos dois traços, tr e Tr .

Como o traço Tr precisa ser empregado, a abordagem acima não constrói observáveis locais. É natural que observáveis locais em uma teoria NC não possam ser facilmente construídos, pois, sendo $S \in U_*(N)$, em particular podemos escrever $S = \exp_*(i\lambda(x))$, o qual está, por meio do símbolo de Weyl, diretamente associado ao operador de translações espaciais, veja a Eq. (4.6).

Observáveis locais podem ser determinados em uma teoria NC através de caminhos menos diretos. Uma das possibilidades é usar uma variação do formalismo de *loops* de Wilson para espaços NC's [116]. A outra é utilizar certo mapa entre teorias de calibre ordinárias com as NC's, chamado de mapa de Seiberg-Witten [7]. A conexão entre essas duas abordagens foi explorada nas Refs. [117]. Nesta tese, somente a segunda possibilidade será explorada.

Os resultados da Seção 4.3 indicam que deve haver algum mapa que relacione uma teoria de calibre ordinária com uma NC. Existindo esse mapa, será possível definirmos observáveis locais usando o mesmo procedimento de uma teoria ordinária.

Necessariamente esse mapa deve satisfazer

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}(A) = \hat{A}(A + \delta_{\lambda} A) - \hat{A}(A); \quad (4.89)$$

ou seja, qualquer variação infinitesimal da conexão A , que seja uma transformação de calibre, induz, necessariamente, uma transformação infinitesimal de calibre em \hat{A} . A recíproca também procede. É importante notar que não estamos exigindo que os parâmetros λ e $\hat{\lambda}$ sejam iguais, $\hat{\lambda}$ é em princípio uma função qualquer de λ, θ e A .

Como órbitas de calibre são topológicas (pois são conseqüências imediatas da identidade de Bianchi) e a equação acima descreve certo mapa local entre órbitas de calibre, vamos usar a condição adicional de que o mapa dado por $\hat{A}(A)$ somente pode depender de A e de θ ; qualquer parâmetro adicional, o que inclui a métrica, não deve aparecer¹². Sob essas condições, para θ suficientemente pequeno e com a condição de contorno $\hat{A}|_{\theta=0} = A$, o mapa mais geral entre \hat{A} e A é (para $N = 1$)

$$\hat{A}_{\mu}(A) = A_{\mu} + \theta^{\alpha\beta} A_{\alpha} (k_1 \partial_{\mu} A_{\beta} + k_2 \partial_{\beta} A_{\mu}) + k_3 \theta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} A_{\beta}. \quad (4.90)$$

As constantes k_1, k_2 e k_3 serão avaliadas a seguir.

Como

$$\delta_{\lambda} A_{\mu} = \partial_{\mu} \lambda, \quad (4.91)$$

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}_{\mu} = \partial_{\mu} \hat{\lambda} + i[\hat{\lambda}, \hat{A}_{\mu}]_{*}, \quad (4.92)$$

usando a Eq. (4.89), vem

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} \hat{\lambda} - \theta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \lambda \partial_{\beta} A_{\mu} &= \tilde{A}_{\mu} + \theta^{\alpha\beta} \tilde{A}_{\alpha} (k_1 \partial_{\mu} \tilde{A}_{\beta} + k_2 \partial_{\beta} \tilde{A}_{\mu}) + \\ &+ k_3 \theta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} \tilde{A}_{\beta} - \hat{A}(A), \end{aligned} \quad (4.93)$$

¹²Essa será uma condição útil para o mapa ser construído. Contudo, embora fugindo da “filosofia” de um mapa entre estruturas topológicas, pode-se afrouxar essa condição e permitir que outros parâmetros apareçam no mapa, dentre eles a métrica. Em $4D$, curiosamente, todas as contribuições adicionais em primeira ordem em θ ou são nulas ou são termos de superfície, quando aplicados na ação de YM NC; mas em $3D$ aparecem contribuições não triviais [59]. Neste trabalho vamos sempre aderir à “filosofia” de que o mapa $\hat{A}(A)$ só deve depender de $A, \partial A$ e θ (esses são os únicos fatores que as identidades de Bianchi ordinária e NC dependem).

$$\begin{aligned} \partial_\mu f &= \theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \lambda \partial_\beta A_\mu (k_2 + 1) + k_1 \theta^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \lambda \partial_\mu A_\beta + A_\alpha \partial_\mu \partial_\beta \lambda + \partial_\alpha \lambda \partial_\mu \partial_\beta \lambda) + \\ &+ k_2 \theta^{\alpha\beta} (A_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \lambda + \partial_\alpha \lambda \partial_\beta \partial_\mu \lambda). \end{aligned} \quad (4.94)$$

Em que $\tilde{A} := A + \partial\lambda$ e f é dado por

$$\hat{\lambda}(\lambda, A) = \lambda + f(\lambda, A). \quad (4.95)$$

A fim de que possa-se integrar f em (4.94), vem

$$k_2 = -1. \quad (4.96)$$

Além disso, os termos de segunda ordem nas derivadas do parâmetro de calibre λ devem ser desprezados. Já seria de se esperar que certas restrições ao comportamento do parâmetro de calibre seriam necessárias, dada a grande diferença entre teorias $U(1)$ e $U_*(1)$. A última, embora Abelian, tem uma estrutura não-Abeliana e ainda mistura transformações de calibre com transformações espaciais.

Conseqüentemente,

$$\partial_\mu f = \theta^{\alpha\beta} [k_1 (\partial_\alpha \lambda \partial_\mu A_\beta + A_\alpha \partial_\mu \partial_\beta \lambda) - (A_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \lambda)], \quad (4.97)$$

cuja solução é

$$k_1 = \frac{1}{2} \quad (4.98)$$

e

$$f = \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \lambda A_\beta. \quad (4.99)$$

Curiosamente, a constante k_3 ficou livre, pois a Eq. (4.89) independe dela. Por outro lado, a ação do eletromagnetismo NC mapeada por Seiberg-Witten também independe dela, pois k_3 está associada a um termo de superfície [118, 59]. Em acordo com a Ref. [7], vamos escolher $k_3 = 0$.

Por fim, para $N = 1$ e em primeira ordem em θ , o mapa de Seiberg-Witten é dado por

$$\hat{A}_\mu = A_\mu + \theta^{\alpha\beta} A_\alpha \left(\frac{1}{2} \partial_\mu A_\beta - \partial_\beta A_\mu \right), \quad (4.100)$$

$$\hat{\lambda} = \lambda + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \lambda A_\beta. \quad (4.101)$$

Para N qualquer, deve-se usar

$$\delta_\lambda A_\mu = \partial_\mu \lambda + i[\lambda, A_\mu], \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}_\mu &= \partial_\mu \hat{\lambda} + i[\hat{\lambda}, \hat{A}_\mu]_* \\ &= \partial_\mu \hat{\lambda} + i[\hat{\lambda}, \hat{A}_\mu] - \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} \{ \partial_\alpha \hat{\lambda}, \partial_\beta \hat{A}_\mu \} + O(\theta^2). \end{aligned} \quad (4.103)$$

A presença do anti-comutador acima não é tão inesperada quanto pode parecer a princípio. No início desta seção, foi mencionado que em teorias não-Abelianas NC's precisa-se de duas constantes de estruturas, uma anti-simétrica e outra simétrica. O produto $\hat{\lambda}\hat{A}$ não pode ocorrer acima diretamente [como ocorre na expansão em primeira ordem da Eq. (4.92)], pois esse produto é proporcional ao quadrado dos geradores da álgebra, enquanto os demais termos da expressão são lineares nos geradores. Assim, só restam duas alternativas: ou emprega-se o anti-comutador desse produto ou o seu comutador. O último caso não é condizente com $N = 1$ (4.92, 4.93), mas o primeiro é.

Considerando a discussão sobre mapeamento de órbitas de calibre apresentada, no lugar de (4.90) temos¹³

$$\hat{A}_\mu(A) = A_\mu + \theta^{\alpha\beta} \{ A_\alpha, k_1 \partial_\mu A_\beta + k_2 \partial_\beta A_\mu + k'_2 [A_\beta, A_\mu] \}. \quad (4.104)$$

¹³Além do termo associado a k_3 que aparece em (4.90), outras possibilidades coerentes, e em particular compatíveis com o caso $N = 1$, são $k'_3 \theta^{\alpha\beta} \partial_\mu [A_\alpha, A_\beta]$, $k_4 \theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha [A_\mu, A_\beta]$ e $k'_4 \theta^{\alpha\beta} [A_\alpha, [A_\mu, A_\beta]]$. Nenhum desses termos é essencial para a existência do mapa, e não são considerados na Ref. [7]. Maiores detalhes sobre as conseqüências desses termos encontram-se em [118].

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \hat{\lambda} + i[\hat{\lambda}, \hat{A}_\mu] - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}\{\partial_\alpha \lambda, \partial_\beta A_\mu\} &= \tilde{A}_\mu + \\ &+ \theta^{\alpha\beta}\{\tilde{A}_\alpha, k_1 \partial_\mu \tilde{A}_\beta + k_2 \partial_\beta \tilde{A}_\mu + k'_2[\tilde{A}_\beta, \tilde{A}_\mu]\} - \hat{A}_\mu, \end{aligned} \quad (4.105)$$

com $\tilde{A} := A + \partial\lambda + i[\lambda, A]$.

Usando artifícios análogos¹⁴ aos já apresentados, descobre-se que o mapa de Seiberg-Witten para qualquer N e em primeira ordem em θ é dado por

$$\hat{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}\{A_\alpha, \partial_\mu A_\beta + F_{\beta\mu}\}, \quad (4.106)$$

$$\hat{\lambda} = \lambda + \frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}\{\partial_\alpha \lambda, A_\beta\}. \quad (4.107)$$

Segundo a análise feita na Seção 4.3, θ não é necessariamente muito pequeno, portanto deve haver alguma forma de generalizar o mapa apresentado em primeira ordem para qualquer ordem. Uma forma elegante de extensão do mapa apresentado é reinterpretar o θ anteriormente utilizado como uma variação infinitesimal $\delta\theta$ entre duas órbitas de calibre, uma de parâmetro θ e a outra com $\theta + \delta\theta$ [7]. Desta forma as Eqs.(4.106, 4.107) se tornam equações diferenciais cuja solução é um mapa $\hat{A}(A)$ para qualquer ordem em θ . Seguindo esse princípio, as Eqs. (4.106, 4.107) são promovidas para

$$\delta\hat{A}_\mu = -\frac{1}{4}\delta\theta^{\alpha\beta}\{\hat{A}_\alpha, \partial_\mu \hat{A}_\beta + \hat{F}_{\beta\mu}\}_*, \quad (4.108)$$

$$\delta\hat{\lambda} = \frac{1}{4}\delta\theta^{\alpha\beta}\{\partial_\alpha \hat{\lambda}, \hat{A}_\beta\}_*. \quad (4.109)$$

As deltas que aparecem acima no lado esquerdo das igualdades são iguais a $\delta\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$. Para resolver as equações acima para dada ordem em θ , expande-se \hat{A} e $\hat{\lambda}$ em

¹⁴Para $N > 1$, a seguinte identidade pode ser útil: $\{A, [B, C]\} + \{[A, B], C\} + \{[C, A], B\} = 0$.

potências de θ , assim, com a condição de contorno $\hat{A}|_{\theta=0} = A$, encontra-se uma relação recursiva cujos termos de primeira ordem em θ são dados por (4.106, 4.107). Não é difícil conferir diretamente que as Eqs. (4.108, 4.109) são condizentes com (4.89). Note que para esse caso a equação análoga a (4.105) é obtida pela substituição dos θ 's da expansão por $\delta\theta$ e de todos os comutadores e anti-comutadores por suas versões Moyais. Como não é necessário expressar esses (anti-)comutadores em função das constantes de estrutura para obter o mapa de Seiberg-Witten de N arbitrário, toda a demonstração segue sem maiores alterações para o caso da expansão em $\delta\theta$.

Capítulo 5

Dualidades eletromagnéticas no espaço-tempo não-comutativo

Extensões das dualidades vistas na Seção 2.5 para o caso NC não são triviais e suas conseqüências dificilmente podem ser consideradas como esperadas. As teorias de calibre $U_*(1)$ têm uma estrutura similar às teorias não-Abelianas, assim, em particular, mesmo sem fontes são teorias com interação. Entretanto, devido ao mapa de Seiberg-Witten, teorias $U_*(1)$ podem ser mapeadas em teorias ordinárias de calibre. Embora a teoria mapeada seja também não-linear, por ser uma teoria $U(1)$, vale a identidade de Bianchi ordinária $dF = 0$, o que será de grande ajuda para empregar os métodos apresentados na Seção 2.5.

Neste capítulo trataremos de duas dualidades de natureza eletromagnética. Primeiramente veremos o caso em 3D com massa topológica até a primeira ordem em θ com enfoque à Ref. [12], depois o caso sem massa topológica tanto em 4D quanto em 3D, seguindo a Ref. [13]. Mesmo na época da publicação do artigo [12], já havia outros que tratavam dessa dualidade [119, 120, 121, 122, 123, 124], porém com conclusões distintas e, em certos casos, incompatíveis. Curiosamente, a teoria dual encontrada em [12] não é idêntica a nenhuma anteriormente apresentada, embora compatível com as Refs. [123, 124]. Posteriormente sua resposta foi explicitamente confirmada em [59].

É importante notar que a dualidade eletromagnética não-massiva não é um caso

particular da com massa topológica, deve-se lembrar que a primeira, em 3D, relaciona vetores com escalares, enquanto a segunda relaciona vetores com vetores. Em [13], motivados especialmente pelos resultados em 4D das Refs. [125, 127], resolvemos estudar essa dualidade no contexto tridimensional e avaliar a necessidade do limite de campos lentamente variantes (CLV). Entender o funcionamento das dualidades eletromagnéticas é essencial para o entendimento das teorias $U_*(1)$, pois, em particular, essas dualidades conectam teorias sem não-comutatividade temporal a teorias com não-comutatividade temporal. Esse artigo [13] foi o primeiro a tratar da dualidade NC tridimensional não-massiva e o primeiro a avaliar a partir de que ordem o limite de CLV se faz necessário a fim de preservar certa regra de dualidade ($\theta \rightarrow g^{2*}\theta$) [125, 72] e manter o caráter S da dualidade.

5.1 Sobre as extensões não-comutativas do modelo autodual induzidas por dualidade

O termo de Chern-Simons não-comutativo (CS NC) tem sido estudado em vários contextos desde o final da década de 90 [129, 130, 131, 132] e é dado por

$$S_{CS*} = \frac{m}{2g^2} \int \text{tr} \left(A \wedge_* dA - \frac{2i}{3} A \wedge_* A \wedge_* A \right). \quad (5.1)$$

Esta é uma extensão natural para o modelo de CS [veja a Eq.(2.74)], ademais ela pode ser também obtida por meio de bosonização do modelo de Thirring NC [132, 131] e é motivada por resultados de teoria de cordas [20].

Dado o termo de Chern-Simons acima, constrói-se imediatamente o modelo NC de Maxwell-Chern-Simons (NC MCS). No contexto de dualidades, dado que a teoria MCS é equivalente à autodual, uma questão natural é se há um modelo autodual NC e se esse é equivalente ao modelo MCS NC. Considerando a Eq. (2.118), tem-se

a seguinte generalização (veja também [132]):

$$S_{ad*} = a_f \int \text{tr} \left[f \wedge_* {}^* f + \frac{1}{m} \left(f \wedge df - \frac{2i}{3} f \wedge_* f \wedge_* f \right) \right]. \quad (5.2)$$

Na Ref. [122] mostra-se a equivalência entre as ações S_{ad*} e S_{MCS*} em primeira ordem em θ , contudo os autores usam uma hipótese não ortodoxa, também usada nas Refs. [120], referente à existência de um mapa análogo ao mapa de Seiberg-Witten para teorias sem simetria de calibre ($\hat{f} = f + O(\theta)$). Mais recentemente [124, 59] demonstrou-se de forma direta que as ações S_{ad*} e S_{MCS*} não são equivalentes entre si. Em particular, a Ref. [59] mostra por meio de uma aplicação do mapa de Seiberg-Witten¹ que, mesmo em primeira ordem em θ , as ações S_{ad*} e S_{MCS*} mapeadas não são equivalentes.

Embora não se possa empregar diretamente um mapa de Seiberg-Witten para a ação (5.2), a teoria MCS NC induz por dualidade uma espécie de teoria autodual NC mapeada, como veremos. Essa questão foi explorada nas Refs. [123, 119, 12, 59], as quais usam em linhas gerais a seguinte técnica: a partir da versão mapeada por Seiberg-Witten de MCS NC, certa técnica de dualidade é empregada para encontrar a teoria dual, a qual, no limite $\theta \rightarrow 0$ torna-se a teoria autodual ordinária. Note que essa teoria autodual NC assim induzida não é necessariamente autodual e não há indícios de relações com algum modelo de Thirring NC; contudo, é uma questão relevante tanto para um melhor entendimento das teorias $U_*(1)$ quanto para possíveis futuras aplicações.

As teorias autoduais obtidas nas Refs. [12, 59] são idênticas entre si, o que inclui o mapa entre os campos do modelo MCS NC com os do autodual NC. Todavia os modelos autoduais obtidos anteriormente nas Refs. [123, 119] diferem entre si e dos dois últimos citados. Em particular, em [119] afirma-se que a teoria autodual induzida por dualidade é, ao menos em primeira ordem em θ , igual à autodual ordinária; tesse essa que é expressa de forma contundente no título “Maxwell-Chern-Simons The-

¹Para empregar um mapa de Seiberg-Witten em S_{ad*} , campos auxiliares foram inseridos de forma a implementar uma simetria de calibre, seguindo o resultado de [58].

ory is Free for Marginally Noncommutative Spacetimes”. Nosso resultado, obtido por meio da técnica projeção dual [133], embora diferente, é compatível com o da Ref. [123], mas descredita a tese de [119]. Devido à existência na época de dois resultados diferentes [123, 119], os quais também diferiam do nosso, depois de estabelecida a dualidade, checamos explicita e diretamente a correspondência entre os parênteses generalizados e a correspondência das equações de movimento. Nas próximas subseções detalharemos os passos e as conseqüências da Ref. [12].

5.1.1 A projeção dual do modelo MCS não-comutativo

A Lagrangiana do modelo MCS NC é dada por

$$\mathcal{L}_{MCS*} = -\frac{1}{4g}\hat{F}^{\mu\nu} * \hat{F}_{\mu\nu} + \frac{m}{2g}\epsilon^{\mu\nu\lambda} \left(\hat{A}_\mu * \partial_\nu \hat{A}_\lambda - \frac{2i}{3}\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu * \hat{A}_\lambda \right), \quad (5.3)$$

com

$$\hat{F}_{\mu\nu} := \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu + i\hat{A}_\nu * \hat{A}_\mu, \quad (5.4)$$

$\mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2$ e métrica $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(+ \ - \ -)$. Na notação anteriormente usada, acima deveria aparecer g^2 no lugar de g , aqui estamos seguindo a notação de [12].

Usando o mapa de Seiberg-Witten em primeira ordem em θ (4.100), a Lagrangiana \mathcal{L}_{MCS*} torna-se

$$g\mathcal{L}_{MCS\theta} = -\frac{1}{4} \left[F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + 2\theta^{\alpha\beta} \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \right] + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda. \quad (5.5)$$

O termo de CS NC é mapeado no termo usual de CS, não só na primeira ordem, como um cálculo direto demonstra, mas também em todas as ordens em θ [132].

No que segue, tal como feito em [123, 12], vamos nos restringir ao caso natural em que o tempo é uma coordenada comutante $\theta^{0i} = 0$. Essa restrição não é realmente

necessária para a obtenção dos próximos resultados, como comentado em [119] e provado de forma mais geral em [13], comentaremos sobre essa questão na próxima subseção. Assim, \mathcal{L}_{MCS_θ} pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} g\mathcal{L}_{MCS_\theta} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda - \frac{1}{8}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\left(1 + \theta\tilde{F}_0\right)\tilde{F}^\mu\tilde{F}_\mu + \frac{m}{2}A^\mu\tilde{F}_\mu, \end{aligned} \quad (5.6)$$

em que $\theta := \theta^{12}$ e $\tilde{F}^\mu := \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}F_{\nu\lambda} = \epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda$.

A fim de proceder com a técnica da projeção dual [133], primeiramente introduzimos um campo auxiliar π^μ como segue

$$g\mathcal{L}_{MCS_\theta} = \pi^\mu\tilde{F}_\mu + \frac{1}{2}\left(1 - \theta\tilde{F}_0\right)\pi^\mu\pi_\mu + \frac{m}{2}A_\mu\tilde{F}^\mu. \quad (5.7)$$

Como comentado na Seção 2.5, esse procedimento é apenas uma transformada de Legendre de parte da Lagrangiana. A equivalência entre as Eqs. (5.6) e (5.7) é verificada por meio da substituição das equações de movimento de π^μ em (5.7), ou seja,

$$\pi_\mu = -\left(1 + \theta\tilde{F}_0\right)\tilde{F}_\mu. \quad (5.8)$$

Nosso objetivo agora é realizar redefinições de campos² a fim de separar a Lagrangiana \mathcal{L}_{MCS_θ} em uma parte de puro calibre e outra sem simetria de calibre e que carrega toda a dinâmica. E isso realmente é possível, conforme veremos. Introduzindo

$$\chi_\mu := \pi_\mu - \frac{1}{2}\theta\delta_\mu^0\pi^\alpha\pi_\alpha, \quad (5.9)$$

temos

$$g\mathcal{L}_{MCS_\theta} = \left(\chi^\mu + \frac{m}{2}A^\mu\right)\tilde{F}_\mu + \frac{1}{2}(1 + \theta\chi_0)\chi^\mu\chi_\mu. \quad (5.10)$$

Agora façamos uma “translação” em χ^μ , definindo o campo p^μ ,

$$p^\mu := \chi^\mu + \frac{m}{2}A^\mu, \quad (5.11)$$

²Por redefinições de campos subentende-se que os novos campos introduzidos se relacionam com os originais de forma bijetiva, ou seja, trata-se do análogo de transformações de coordenadas para campos. Em particular, essas redefinições são transformações canônicas.

assim

$$g\mathcal{L}_{MCS_\theta} = p^\mu \tilde{F}_\mu + \frac{1}{2} \left(p - \frac{m}{2} A \right)^\nu \left(p - \frac{m}{2} A \right)_\nu \left(1 + \theta \left(p_0 - \frac{m}{2} A_0 \right) \right). \quad (5.12)$$

A equação acima está pronta para a aplicação do último passo da projeção dual.

Sejam

$$\begin{aligned} A_\mu &= A_\mu^+ + A_\mu^-, \\ p_\mu &= \frac{m}{2} (A_\mu^+ - A_\mu^-). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Essa escolha desacopla os campos, como pode ser visto a seguir:

$$g\mathcal{L}_{MCS_\theta} = \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu^+ \partial_\nu A_\lambda^+ + \frac{m^2}{2} (1 - m\theta A_0^-) A_\mu^- A^{-\mu} - \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu^- \partial_\nu A_\lambda^-. \quad (5.14)$$

O termo puro de CS é puro calibre, não propaga grau de liberdade algum. Entretanto, ele é responsável pela simetria de calibre observada no modelo original. A parte da Lagrangiana acima dependente de A^- field possui um grau de liberdade e nenhuma simetria de calibre. Essa carrega o mesmo conteúdo dinâmico da teoria dada por \mathcal{L}_{MCS_θ} . Portanto, chamamos essa parte da Lagrangiana como modelo autodual NC induzido por dualidade, a qual pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{AD_\theta} = \frac{1}{2g} (1 - \theta f_0) f_\mu f^\mu - \frac{1}{2mg} \epsilon^{\mu\nu\lambda} f_\mu \partial_\nu f_\lambda, \quad (5.15)$$

após a substituição

$$mA_\mu^- \rightarrow f_\mu. \quad (5.16)$$

O mapa entre os campos A e f é encontrado ao se “desfazer” as passagens (5.8, 5.9, 5.11, 5.13, 5.16), sendo dado por

$$f^\mu = \tilde{F}^\mu + \tilde{F}^\mu \tilde{F}^\alpha \tilde{\theta}_\alpha + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^\mu \tilde{F}^\alpha \tilde{F}_\alpha \quad (5.17)$$

e, conseqüentemente,

$$\tilde{F}^\mu = f^\mu - f^\mu f^\alpha \tilde{\theta}_\alpha - \frac{1}{2} \tilde{\theta}^\mu f^\alpha f_\alpha, \quad (5.18)$$

em que $\tilde{\theta}_\mu := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda}\theta^{\nu\lambda}$, logo $\tilde{\theta}_0 = \theta$ e $\tilde{\theta}_i = 0$.

Com a última passagem o método da projeção dual foi concluído e obtivemos êxito em determinar a teoria dual. Na próxima subseção apresentamos maiores detalhes sobre esse resultado e comparação com os demais existentes.

A Ref. [119] critica o uso de Lagrangianas mestras se não acompanhadas de uma verificação da álgebra (i.e., dos parênteses generalizados, do setor simplético). Esse procedimento nos parece redundante, contudo, devido aos conflitos existentes, e embora a projeção dual possa ser vista como um procedimento mais transparente que o da Lagrangiana mestra, em [12] consideramos conveniente checar explicitamente a correspondência das álgebras e das equações de movimento perante o mapa (5.17). Apresentaremos aqui também essa parte.

As equações de movimento dos modelos dados por (5.3) e (5.15) são respectivamente

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda}\partial^\nu \left(-\tilde{F}^\lambda - \frac{1}{2}\tilde{\theta}^\lambda\tilde{F}^\alpha\tilde{F}_\alpha - \tilde{\theta}^\alpha\tilde{F}_\alpha\tilde{F}^\lambda + mA^\lambda \right) = 0, \quad (5.19)$$

$$f_\mu - \frac{1}{m}\epsilon_{\mu\nu\lambda}\partial^\nu f^\lambda - \frac{1}{2}\tilde{\theta}_\mu f^\alpha f_\alpha - \tilde{\theta}^\alpha f_\alpha f_\mu = 0. \quad (5.20)$$

A existência de uma correspondência entre elas segue diretamente da correspondência entre seus campos encontrada em (5.17), como pode ser diretamente verificado, o que prova que ambos os modelos possuem a mesma dinâmica clássica, apenas a expressam através de diferentes campos. Veremos na próxima subseção que a dinâmica quântica desses modelos também é equivalente.

A álgebra do modelo MCS NC mapeado em primeira ordem em θ foi calculada na Ref. [119] [veja sua Eq. (14)]. Para encontrar a álgebra do modelo autodual NC usaremos o método simplético [29, 30]. Logo após a primeira iteração, observa-se que a matriz (pré-)simplética é singular. Seu modo-zero leva ao seguinte vínculo

$$-f_0 + \frac{1}{m}\epsilon_{ij}\partial^i f^j + \frac{1}{2}\theta f^i f_i + \frac{3}{2}\theta f_0 f_0 = 0. \quad (5.21)$$

Neste modelo, a forma mais rápida de encontrar os parênteses generalizados é considerar f_0 como função de f_i , resolvendo o vínculo acima. Paralelamente, pode-se também dar continuidade ao algoritmo do método simplético e inserir esse vínculo no setor cinético. Ver-se-á que a iteração seguinte produzirá uma matriz simplética não-degenerada e os parênteses generalizados (obtidos a partir das componentes de sua inversa) serão também dados por

$$\begin{aligned} \{f_0(\vec{x}), f_0(\vec{y})\}_* &= g\theta (f_i(\vec{x}) + f_i(\vec{y})) \partial_{(x)}^i \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{f_0(\vec{x}), f^i(\vec{y})\}_* &= g(1 + 3\theta f_0(\vec{x})) \partial_{(x)}^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) + mg\theta \epsilon^{ij} f_j(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.22) \\ \{f^i(\vec{x}), f^j(\vec{y})\}_* &= -mg \epsilon^{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned}$$

O asterisco acima associado aos colchetes indica apenas que se trata de parênteses generalizados (nenhuma relação neste caso com o produto Moyal).

Usando a prescrição dada pela Eq. (5.17), encontramos a seguinte álgebra para nosso modelo autodual NC:

$$\begin{aligned} \{B(\vec{x}), B(\vec{y})\}_* &= 0, \\ \{E^i(\vec{x}), B(\vec{y})\}_* &= g\epsilon^{ij}(1 + \theta B(\vec{x})) \partial_j^{(x)} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.23) \\ \{E^i(\vec{x}), E^j(\vec{y})\}_* &= -gm\epsilon^{ij}(1 + 2\theta B)\delta(\vec{x} - \vec{y}) - g\theta(\epsilon^{kj} E^i(\vec{x}) + \epsilon^{ki} E^j(\vec{y})) \partial_k^{(x)} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned}$$

em que $E^i := -\epsilon^{ij} \tilde{F}_j$ e $B := -\tilde{F}_0$. Como esperado, vê-se que há coincidência com a álgebra da teoria MCS NC mapeada por Seiberg-Witten, originalmente calculada na Ref³. [119] [veja sua Eq. (14)].

5.1.2 Comentários finais

Como inicialmente anunciado, foi possível estabelecer um modelo autodual NC induzido por dualidade. Em [59], através de outros métodos, a mesma dualidade foi

³A menos do coeficiente g , que se encontra nessa referência ausente desde o início, e de um erro de digitação de um sinal.

encontrada com o mesmo mapa, embora usando a função partição e sem a particularização $\theta^{0i} = 0$. Essa nossa particularização é desnecessária para obter a dualidade, isso mais tarde ficou claro ao obtermos certa relação mais geral em [13] [veja a Eq. (5.44) na próxima seção]. Como mencionado em [125] em um contexto similar, em primeira ordem em θ essa dualidade é automaticamente válida na função partição. Essa propriedade foi apresentada de forma mais detalhada em [13], justificando o motivo de [12] e [59] terem obtido a mesma resposta, embora o primeiro tenha usado somente argumentos de ordem clássica. Na próxima seção, que é dedicada à Ref. [13], esse ponto será retomado.

Nota-se que a Lagrangiana (5.15) é diferente da apresentada em [123] [sua Eq. (17)]. Infelizmente, nessa última referência, não se encontra explícita a resposta final, só há uma indicação. Todavia, dando continuidade aos seus cálculos, nota-se que sua Lagrangiana do modelo autodual que aparece em sua Eq. (17) não depende de um termo cúbico em f sem derivadas como na nossa Eq.(5.15), mas sim de um termo cúbico em ∂f . Por esse motivo, o autor sugeriu que essa dualidade induziria uma modificação no termo de CS, como diz o título “(...) *a new noncommutative Chern-Simons theory in $d=3$* ”. Embora não tenhamos obtido essa modificação no termo de CS, nossa resposta não nos parece ser incompatível com a de [123]. Há ambigüidades, mesmo em primeira ordem em θ , na definição do modelo autodual induzido por dualidade. O mapa entre f e A induzido pelo procedimento da Ref. [123] difere do nosso mapa⁴ (5.17). Como ambos resultados parecem perfeitamente corretos, as Lagrangianas autoduais induzidas pela dualidade obtidas em [123, 12] são equivalentes entre si em primeira ordem em θ , a despeito de suas diferenças aparentes. Esse ponto parece merecer uma análise mais geral.

Como antes comentado, a Ref. [119] também apresenta um modelo autodual induzido por dualidade diferente do nosso. Essa referência não usa nenhuma técnica

⁴Infelizmente, esse mapa não se encontra explícito nessa referência, mas pode ser deduzido seguindo suas indicações.

de dualidade específica. Após certas manipulações, conclui que a teoria autodual induzida é igual à autodual ordinária, isto é, não depende de θ . Um mapa explícito dessa dualidade não é fornecido nessa referência, ademais não conseguimos encontrar qualquer mapa consistente com essa proposta. Se tal mapa existisse, em particular teríamos que o modelo MCS NC mapeado por Seiberg-Witten em primeira ordem em θ seria equivalente ao modelo MCS ordinário. Como sabe-se que o termo de CS NC é mapeado no termo de CS ordinário [132], isso implicaria dizer que a Lagrangiana do eletromagnetismo NC mapeada por Seiberg-Witten é equivalente à Lagrangiana do eletromagnetismo ordinário, o que não pode ser correto por vários motivos; em particular, na versão mapeada do eletromagnetismo, mesmo em primeira ordem em θ , há quebra de isotropia [82].

5.2 Dualidades eletromagnéticas não-comutativas em 3D, 4D e o limite de CLV

Conforme visto na Seção 2.5, a dualidade eletromagnética em 4D associa duas teorias de calibre do tipo $U(1)$ cujas Lagrangianas são idênticas, a menos da inversão da constante de acoplamento g^2 . No espaço-tempo NC 4D em primeira ordem em θ , como originalmente apresentado na Ref. [125] através do emprego do mapa de Seiberg-Witten, dualidades eletromagnéticas relacionam duas teorias $U_*(1)$ que diferem pela troca de θ por $g^2 * \theta$. Esse resultado é mais que uma mera curiosidade, pois sugere um sério problema de consistência. Em 4D, sendo θ do tipo espaço, isto é, $\theta^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} > 0$, necessariamente $*\theta$ é do tipo tempo (pois $**\theta \wedge *\theta = -*\theta \wedge \theta$). Devido aos resultados das Refs. [108, 109], como comentado na Seção 4.4, em princípio estaria-se obtendo uma correspondência física entre uma teoria sem problemas de unitariedade com uma com problemas de unitariedade. O resultado da Ref. [125] é apenas um indicativo da presença das dificuldades mencionadas, pois a dualidade

foi obtida apenas na expansão em primeira ordem em θ . Mesmo assim, as conseqüências desse resultado tecnicamente simples não são triviais, outros trabalhos, por esse motivados e se atendo aos mesmos limites, apareceram depois [126].

Pouco depois da publicação da Ref. [125], ainda no ano 2000, foi publicado um estudo exato em θ (sem usar o mapa de Seiberg-Witten) sobre dualidade S em espaços NC's num contexto de teoria de cordas[72]. A dualidade S nesse contexto induz uma espécie de extensão NC da dualidade de Montonen-Olive para Super-Yang-Mills em 4D com $\mathcal{N} = 4$. Os autores obtiveram evidências para a conjectura da existência da extensão dessa dualidade, a qual, em particular, impõe para todas as ordens que θ se transforma em $g^2*\theta$ via dualidade, como originalmente indicado pela Ref. [125]. Nesse contexto os autores verificam que essa dualidade S não conecta duas teorias de campos NC's, pois teorias de campos com não-comutatividade temporal não são obtidas como teorias efetivas de cordas.

Nas Refs. [127], a dualidade eletromagnética NC em 4D é analisada sob o limite de campos lentamente variantes (CLV) [7, 128] num contexto de teoria de campos. Os autores usam o fato de, nesse limite, o mapa de Seiberg-Witten associar duas Lagrangianas de DBI (4.56), uma comutativa e outra NC, assim verificam que a regra $\theta \rightarrow g^2 * \theta$ é exata em θ (no limite de CLV e usando o mapa de Seiberg-Witten). Considerando os resultados das Refs. [125, 72, 108, 109, 111] é proposto em [127] que o parâmetro θ de teorias $U_*(1)$ fisicamente consistentes tem de ser do tipo luz ($\theta^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} = 0$). Essa restrição, contudo, pode ser eliminada se outras abordagens à quantização de teorias NC's forem usadas [110].

A extensão dessa dualidade NC para o caso 3D e uma análise da necessidade do limite de CLV, em um contexto de teoria de campos e por meio do emprego do mapa de Seiberg-Witten, é feita em [13]. Deve ser notado que os argumentos de [125] e outros dependem da dimensão do espaço-tempo, em particular, somente em 4D θ e seu dual $*\theta$ são ambos 2-formas. Em [13], a teoria escalar dual a $U_*(1)$ é obtida até segunda ordem em θ e é mostrado que até essa ordem a regra $\theta \rightarrow \tilde{\theta} := g^2*\theta$ pode ser

naturalmente estendida para 3D. A partir da terceira ordem, de forma geral, para qualquer dimensão $D \geq 2$, não é possível escrever a ação dual como função de $\tilde{\theta}$ sem recorrer a θ ($\propto \star\tilde{\theta}$), o que quebra a regra anterior e a versão “clássica” de dualidade S , pois a constante de acoplamento da teoria dual não é uma simples inversão da teoria original. Contudo, no limite de CLV, para todas as ordens em θ , seja em 4D ou 3D, a teoria dual é expressa por meio de $\tilde{\theta}$ somente. Em [13] é também deduzida uma fórmula que simplifica consideravelmente o mapa de Seiberg-Witten em 3D, essa foi usada para estabelecer alguns dos resultados acima mencionados. A seguir, apresentaremos os resultados da Ref. [13].

Não se encontra na Seção 2.5, mas a dualidade eletromagnética ordinária em 3D pode ser vista em detalhes na Ref. [13]. Não há novidades técnicas, basta repetir os passos da Seção 2.5 para o caso 3D.

5.2.1 Dualidade 3D em primeira ordem em θ

A ação da teoria de calibre $U_*(1)$, como visto nas Seções 4.3 e 4.5, é dada por

$$S_{\hat{A}^*} = a \int \hat{F} \wedge_* \star \hat{F}, \quad (5.24)$$

em que $a = -1/(2g^2)$ é constante.

Como $d\hat{F} \neq 0$, a técnica da ação mestra [41], como apresentada na Seção 2.5, não pode ser diretamente aplicada. Todavia, como visto na Seção 4.5, teorias de calibre NC's podem ser mapeadas em teorias de calibre ordinárias; assim, em particular, o caso $U_*(1)$ é mapeado em uma teoria cujo tensor eletromagnético satisfaz $dF = 0$ [7]. Além disso, esse mapa possibilita um tratamento direto dos observáveis, devido a desacoplar transformações de calibre das transformações espaciais. Para a primeira ordem em θ , o mapa de Seiberg-Witten para o caso $U(1)$ é dado por

$$\hat{A} = \left[A_\mu - \theta^{\alpha\nu} A_\alpha \left(\partial_\nu A_\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \right) \right] dx^\mu, \quad (5.25)$$

com $\delta_{\hat{\lambda}}\hat{A} = d\hat{\lambda} - 2i\hat{A} \wedge_{*} \hat{\lambda}$ e $\delta_{\lambda}A = d\lambda$.

Aplicando (5.25) em $S_{\hat{A}*}$, em primeira ordem em θ ,

$$\begin{aligned} S_{A_{\theta}} &= a \int F \wedge {}^*F (1 + \langle \theta, F \rangle) \\ &= -a \int (\vec{E}^2 - B^2) (1 - \vec{\theta} \cdot \vec{E} - \theta B) d^3x, \end{aligned} \quad (5.26)$$

em que $F := dA$, $(\vec{\theta})^i := \theta^{i0}$, $\theta := \theta^{12}$ e \langle , \rangle é o produto escalar entre formas diferenciais, em particular $\langle F, \theta \rangle = {}^*({}^*F \wedge \theta) = \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Acima já usamos que o termo $F^{\mu\nu}F_{\nu\lambda}\theta^{\lambda\kappa}F_{\kappa\mu}d^3x$ é proporcional a ${}^*F \wedge F \langle F, \theta \rangle$ (veja Seção 5.1). As equações de movimento são

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad (5.27)$$

$$\vec{\nabla} \times H = \vec{D}, \quad (5.28)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{B}. \quad (5.29)$$

Com $\vec{D} = \vec{E}(1 - \vec{\theta} \cdot \vec{E} - \theta B) - \frac{1}{2}\vec{\theta}(\vec{E}^2 - B^2)$ e $H = B(1 - \vec{\theta} \cdot \vec{E} - \theta B) + \frac{1}{2}\theta(\vec{E}^2 - B^2)$ (essas definições são análogas às usadas na Ref. [134]). A Eq. (5.29) não é modificada pela não-comutatividade do espaço-tempo, pois advém diretamente da identidade de Bianchi. Claramente, $\vec{\theta}$ (e não θ^{12}) é responsável pela violação de isotropia espacial.

Explorando a identidade de Bianchi, a seguinte ação mestra é proposta:

$$S_{M_{\theta}}[F, \phi] = \int [a {}^*F \wedge F (1 + \langle \theta, F \rangle) - d\phi \wedge F]. \quad (5.30)$$

A ação acima será usada para encontrar a dualidade em primeira ordem em θ , enquanto uma natural generalização dela será empregada para revelar dualidade em ordens mais altas. Essa não é a única ação mestra possível, as seguintes também levam a dualidades entre as mesmas descrições vetorial e escalar:

$$S_{M_{\theta,c}}[G, \phi] = \int \left[a G \wedge {}^*G (1 + c\langle \theta, G \rangle) - \left(1 + \frac{1}{2}(c-1)\langle \theta, G \rangle \right) d\phi \wedge G \right], \quad (5.31)$$

$$S_{M'_{\theta}}[B, A] = \int \left[-\frac{1}{4a} B \wedge {}^*B \left(1 - \frac{1}{2a}\langle \theta, {}^*B \rangle \right) - B \wedge dA \right]. \quad (5.32)$$

A primeira é uma generalização da ação mestra de (5.30) por um parâmetro arbitrário e contínuo c , sendo a última reobtida para $c = 1$. A ação $S_{M_{\theta,c}}$ possui a interessante propriedade de balancear a contribuição da não-comutatividade entre seus dois termos. Entretanto, para qualquer c , os modelos que ela conecta são os mesmos modelos vetorial e escalar que são encontrados por $S_{M_{\theta}}$. Na Eq.(5.32), A e B são 1-formas. Essa outra ação mestra equivalente parece ser mais adequada ao problema inverso ao proposto, isto é, o de encontrar o quadro vetorial a partir do quadro escalar.

Dando continuidade à análise de (5.30): de sua variação com respeito a ϕ , obtemos $dF = 0$, o que implica $F = dA$; inserindo esse resultado em S_{M^*} , S_{A^*} é obtida. Para determinar o outro lado da igualdade, a variação de F será avaliada, assim procedendo,

$$\frac{1}{2a}d\phi = {}^*F (1 + \langle \theta, F \rangle) + \frac{1}{2} \langle F, F \rangle {}^*\theta. \quad (5.33)$$

Acima, a propriedade $F \wedge {}^*F \langle F, \theta \rangle = \langle F, F \rangle {}^*\theta \wedge F$ foi usada. Com respeito aos campos \vec{D} e H , temos,

$$-\frac{1}{2a} \vec{\nabla} \times \phi = \vec{D}, \quad (5.34)$$

$$-\frac{1}{2a} \dot{\phi} = H. \quad (5.35)$$

Para primeira ordem em θ , o inverso das relações acima é

$${}^*F = \frac{1}{2a}d\phi \left(1 - \frac{1}{2a} \langle {}^*d\phi, \theta \rangle \right) - \frac{1}{8a^2} \langle d\phi, d\phi \rangle {}^*\theta, \quad (5.36)$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{2a} \left(1 - \frac{1}{2a} \vec{\theta} \cdot \vec{\nabla} \times \phi - \frac{1}{2a} \dot{\phi} \theta \right) \vec{\nabla} \times \phi + \frac{1}{8a^2} (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi - \dot{\phi}^2) \vec{\theta}, \quad (5.37)$$

$$B = -\frac{\dot{\phi}}{2a} \left(1 - \frac{1}{2a} \vec{\theta} \cdot \vec{\nabla} \times \phi - \frac{1}{2a} \dot{\phi} \theta \right) - \frac{1}{8a^2} (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi - \dot{\phi}^2) \theta. \quad (5.38)$$

A inserção da expressão para F em S_{M_θ} leva a uma extensão NC da ação do campo escalar, a saber,

$$S_{M_\theta} \leftrightarrow -\frac{1}{4a} \int d\phi \wedge {}^*d\phi \left(1 - \frac{1}{2a} \langle {}^*d\phi, \theta \rangle \right) = S_{\phi_\theta}. \quad (5.39)$$

A correspondência das equações de movimento entre os modelos vetorial e escalar, como esperado, é dado por $F = dA$ junto com a Eq.(5.33) (e sua inversa). Realmente, se d for aplicado em ambos os lados de (5.33), com $F = dA$, a equação de movimento de S_{A_θ} é obtida; enquanto a aplicação de d^* em (5.36) produz a equação de movimento de S_{ϕ_θ} .

Verifica-se diretamente que o mapa (5.33) corretamente relaciona as Hamiltonianas e colchetes de ambas as representações.

Com o último resultado, foi definido um novo modelo escalar cuja ação é, em primeira ordem, classicamente equivalente à teoria de calibre $U_*(1)$ em 3D. Embora haja termos cúbicos na Lagrangiana, essa dualidade não é apenas clássica, ela também é válida quanticamente. Isso também foi afirmado em [125]. Uma computação explícita com integrais de caminho de Feynman, no contexto da dualidade NC entre os modelos Maxwell-Chern-Simons e autodual, foi feita na Ref. [59], a qual apresenta a mesma dualidade de [12], que não usa argumentos quânticos. Esse resultado pode ser generalizado. Esquemáticamente, sejam $\mathcal{L}_1(A)$ e $\mathcal{L}_2(B)$ duas Lagrangianas classicamente equivalentes que estão relacionadas pela Lagrangiana mestra $\mathcal{L}_m(A, B)$ cuja função partição é

$$Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}B \exp \left[-i \int \left(a_1 A^2 + \theta A^3 + a_2 BA + f(B) \right) d^D x \right]. \quad (5.40)$$

Integrações em A podem ser convertidas em integrais Gaussianas por meio da introdução de mais dois campos, como segue,

$$\begin{aligned} Z = & \text{cte} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}B \mathcal{D}C \mathcal{D}D \exp \left[-i \int \left(a_1 A^2 + \theta ACC + D(C - A) + \right. \right. \\ & \left. \left. + a_2 BA + f(B) \right) d^D x \right]. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Agora a integral em A pode ser diretamente computada, deve-se substituir A por $\frac{1}{2a_1}(-\theta CC + D - a_2 B)$. Portanto, na teoria acima, se a dualidade clássica for válida para qualquer θ e dualidade quântica for válida para $\theta = 0$, a dualidade quântica também é válida. Esses argumentos se aplicam à dualidade NC escalar/vetorial aqui apresentada.

5.2.2 Dualidade em ordens mais altas e o limite de CLV

Na segunda ordem em θ , (5.26) é escrita como⁵ [71, 125, 123],

$$S_{A_\theta} = \frac{a}{2} \int \left[F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \left(1 + \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) + L_{\theta^2} \right] d^3x, \quad (5.42)$$

com

$$\begin{aligned} L_{\theta^2} = & -2 \operatorname{tr}(\theta F \theta F^3) + \operatorname{tr}(\theta F^2 \theta F^2) + \operatorname{tr}(\theta F) \operatorname{tr}(\theta F^3) - \frac{1}{8} \operatorname{tr}(\theta F)^2 \operatorname{tr}(F^2) + \\ & + \frac{1}{4} \operatorname{tr}(\theta F \theta F) \operatorname{tr}(F^2) \end{aligned} \quad (5.43)$$

e $\operatorname{tr}(AB) := A_{\mu\nu} B^{\nu\mu}$, $\operatorname{tr}(ABCD) := A_{\mu\nu} B^{\nu\lambda} C_{\lambda\kappa} D^{\kappa\mu}$ etc. Este traço aqui usado não é o mesmo tr que aparece como traço na álgebra, embora o símbolo seja o mesmo.

Felizmente, no espaço-tempo 3D, a expressão acima pode ser consideravelmente simplificada. Já foi usado na Eq. (5.26) que $\operatorname{tr}(FF\theta F) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(FF) \operatorname{tr}(F\theta)$; com certa reflexão, essa relação pode ser generalizada para a seguinte:

$$\operatorname{tr}(AB_1 AB_2 \dots AB_n) = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \prod_{k=1}^n \operatorname{tr}(AB_k), \quad (5.44)$$

para quaisquer tensores anti-simétricos de *rank* 2 $A, \{B_k\}$. Portanto,

$$L_{\theta^2} = \frac{1}{4} \operatorname{tr}(FF) \operatorname{tr}(\theta F)^2. \quad (5.45)$$

A ação mestra S_{M_θ} (5.30) pode agora ser estendida para segunda ordem em θ , isso é obtido pela adição de $-a \int \star F \wedge F \langle F, \theta \rangle^2$ à expressão em primeira ordem. Assim,

⁵Note que a Ref.[125] usa uma convenção diferente nos fatores constantes das formas diferenciais.

$$\begin{aligned}
 {}^*F = & \frac{d\phi}{2a} \left(1 - \frac{\langle \theta, {}^*d\phi \rangle}{2a} - 3 \frac{\langle \theta, {}^*d\phi \rangle^2}{4a^2} + \langle \theta, \theta \rangle \frac{\langle d\phi, d\phi \rangle}{8a^2} \right) - \\
 & - {}^*\theta \frac{\langle d\phi, d\phi \rangle}{8a^2} \left(1 - 5 \frac{\langle \theta, {}^*d\phi \rangle}{2a} \right)
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

e

$$S_{\phi_\theta} = -\frac{1}{4a} \int d\phi \wedge {}^*d\phi \left(1 - \langle \tilde{\theta}, d\phi \rangle + 3 \langle \tilde{\theta}, d\phi \rangle^2 + \frac{1}{4} \langle \tilde{\theta}, \tilde{\theta} \rangle \langle d\phi, d\phi \rangle \right), \tag{5.47}$$

em que $\tilde{\theta} = {}^*\theta/2a$. Portanto, no quadro escalar, ao menos até a segunda ordem, $\tilde{\theta}$ é o parâmetro de violação de Lorentz e θ é desnecessário. Note que apenas através do emprego de $\tilde{\theta}$ a constante de acoplamento a da teoria de calibre original aparece no quadro dual como um fator global a^{-1} . *A priori*, pode-se conjecturar que $\tilde{\theta}$ é o parâmetro fundamental do quadro escalar, enquanto θ é inferido pela dualidade. Entretanto, a menos que o limite de campos lentamente variantes (CLV) seja empregado, essa é apenas uma ilusão de uma simetria não exata.

A partir da expansão em terceira ordem em θ , termos com mais derivadas que campos aparecem no mapa de Seiberg-Witten de \hat{F} e estão presentes em L_{θ^3} , como será mostrado (qualquer L_{θ^n} pode apenas depender de A através de F , mas pode possuir mais derivadas que A 's). Esses fatores frustram a simetria acima sugerida. Para os inferir, usaremos a seguinte equação diferencial de Seiberg-Witten[7] [é obtida a partir da definição de \hat{F} e da equação diferencial que define o mapa $\hat{A}(A)$ (4.108)]

$$\begin{aligned}
 \delta \hat{F}_{\mu\nu}(\theta) = & \frac{1}{4} \delta \theta^{\alpha\beta} \left[2 \hat{F}_{\mu\alpha} * \hat{F}_{\nu\beta} + 2 \hat{F}_{\nu\beta} * \hat{F}_{\mu\alpha} - \hat{A}_\alpha * (\hat{D}_\beta \hat{F}_{\mu\nu} + \partial_\beta \hat{F}_{\mu\nu}) - \right. \\
 & \left. - (\hat{D}_\beta \hat{F}_{\mu\nu} + \partial_\beta \hat{F}_{\mu\nu}) * \hat{A}_\alpha \right].
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

Expandindo \hat{F} e \hat{A} em potências de θ até a terceira ordem, temos

$$\delta \hat{F}_{\mu\nu}^{(3)}(\theta) = -\frac{1}{4} \delta \theta^{\alpha\beta} \theta^{\alpha'\beta'} \theta^{\alpha''\beta''} (\partial_{\alpha'} \partial_{\alpha''} F_{\mu\alpha} \partial_{\beta'} \partial_{\beta''} F_{\nu\beta} - \partial_{\alpha'} \partial_{\alpha''} A_\alpha \partial_{\beta'} \partial_{\beta''} \partial_\beta F_{\mu\nu}) + \dots \tag{5.49}$$

Em que $F_{\mu\nu} = \hat{F}_{\mu\nu}^{(0)}$ e $A_\mu = A_\mu^{(0)}$. Apenas os termos com mais derivadas que campos foram escritos na expressão acima. Inserindo esse resultado na Eq.(5.24), os únicos

termos de L_{θ^3} que possuem mais derivadas que campos são os que estão na seguinte expressão⁶

$$\theta^{\alpha\beta}\theta^{\alpha'\beta'}\text{tr}(\partial_\alpha\partial_{\alpha'}F\theta\partial_\beta\partial_{\beta'}F) - \frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}\theta^{\alpha'\beta'}\text{tr}(F\theta)\text{tr}(\partial_\alpha\partial_{\alpha'}F\partial_\beta\partial_{\beta'}F). \quad (5.50)$$

A contribuição desses termos para as equações de movimento é dada por

$$\theta^{\alpha\beta}\theta^{\alpha'\beta'}\partial_\mu\left[F_{\alpha\alpha'}^\mu\theta F_{\beta\beta'}^\kappa + \frac{1}{2}\text{tr}(F_{\alpha\alpha'}\theta)F_{\beta\beta'}^{\kappa\mu} + F_{\alpha\alpha'}^{[\mu}F_{\beta\beta'}\theta^{\kappa]} + \frac{1}{4}\text{tr}(F_{\alpha\alpha'}F_{\beta\beta'})\theta^{\kappa\mu}\right]. \quad (5.51)$$

Acima introduzimos uma notação compacta: índices não explícitos são contraídos como na notação matricial, índices extras em F são derivadas e $F_{\alpha\alpha'}^{[\mu}F_{\beta\beta'}\theta^{\kappa]} = F_{\alpha\alpha'}^\mu F_{\beta\beta'}\theta^\kappa - F_{\alpha\alpha'}^\kappa F_{\beta\beta'}\theta^\mu$. Por exemplo, escreve-se o primeiro termo em (5.51) como $\partial_\alpha\partial_{\alpha'}F_{\nu}^{\mu}\theta^{\nu\lambda}\partial_\beta\partial_{\beta'}F_{\lambda}^{\kappa}$.

Uma cuidadosa análise das simetrias e anti-simetrias de cada termo de (5.51) e de sua independência linear para θ arbitrário com $D \geq 4$ mostra que (5.51) não é nulo. Para diretamente garantir que, em qualquer dimensão ($D \geq 2$), (5.51) não é a identidade trivial [ou, equivalentemente, que (5.50) não é nem nulo e nem um termo de superfície] pode-se avaliar um caso particular de (5.51); por exemplo, para $D \geq 3$, sejam $\kappa = 2$ e θ nulo exceto pelas componentes θ^{01} and θ^{10} , assim (5.51) equivale a

$$\begin{aligned} (\theta^{10})^3 \left[\partial_\mu \left(\ddot{F}^{\mu[0} F''^{1]2} + F''^{\mu[0} \ddot{F}^{1]2} - 2\dot{F}'^{\mu[0} \dot{F}'^{1]2} + \ddot{F}^{10} F''^{2\mu} + \right. \right. \\ \left. \left. + F''^{10} \ddot{F}^{2\mu} - 2\dot{F}'^{10} \dot{F}'^{2\mu} \right) + \partial_{[0} \left(\ddot{F}^{2\nu} F''_{1]\nu} + F''^{2\nu} \ddot{F}_{1]\nu} - 2\dot{F}'^{2\nu} \dot{F}'_{1]\nu} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.52)$$

em que cada ponto e cada “linha” significa, respectivamente, ∂_0 e ∂_1 . A expressão acima não é identicamente nula em nenhuma dimensão (maior que dois). Esse resultado está em conflito com certa proposição da Ref.[135], veja a próxima subseção para mais detalhes.

As expressões (5.48 - 5.51) são válidas para dimensões espaço-temporais arbitrárias. Novamente, no espaço-tempo 3D, uma simplificação considerável é possível.

⁶Esta solução pode também ser obtida através dos resultados na Ref. [136], Seção 3.2; nela o mapa de Seiberg-Witten é expandido em potências de A .

Embora a propriedade (5.44), naquela forma, não possa ser usada diretamente em (5.50), uma computação direta mostra que um resultado análogo é válido. No espaço-tempo 3D, a expressão (5.50) é igual a

$$\frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} \theta^{\alpha'\beta'} \operatorname{tr}(F_{\alpha\alpha'} F_{\beta\beta'}) \operatorname{tr}(F\theta). \quad (5.53)$$

Aderindo à expansão em terceira ordem, a contribuição da expressão acima a S_{ϕ_θ} (5.47) é obtida pela substituição $F \rightarrow *d\phi/(2a)$. Conseqüentemente, até a terceira ordem em θ , S_{ϕ_θ} não pode ser expresso exclusivamente através de $\tilde{\theta}$, θ também é necessário⁷. Isso viola a simetria entre θ e $\tilde{\theta}$ presente na dualidade eletromagnética até a segunda ordem em θ . Conseqüentemente, no quadro escalar, a constante a não aparece como um fator global a^{-1} e a estrutura esperada de uma dualidade S é quebrada.

No limite de CLV, os termos na ação mapeada por Seiberg-Witten que dependem das derivadas de F são ignorados, portanto S_{ϕ_θ} , na terceira ordem em θ , pode ser exclusivamente expresso em termos de $\tilde{\theta}$. Neste limite, como a Lagrangiana mapeada por Seiberg-Witten é uma função somente de F (sem derivadas) [7], a Lagrangiana é expressada como uma função de $\operatorname{tr}(FF)$ e $\operatorname{tr}(F\theta)$ somente [devido à Eq.(5.44)]; portanto, a ação escalar dual S_{ϕ_θ} para todas as ordens em θ pode ser expressa por $\tilde{\theta}$, sem referência a θ (ou $*\tilde{\theta}$). Embora a propriedade (5.44) seja em geral falsa no espaço-tempo 4D, a ação dual pode também ser expressa exclusivamente por $\tilde{\theta}$ no espaço-tempo 4D, em todas as ordens em θ , se o limite de CLV for usado [127]. A relação (5.44) simplifica consideravelmente a análise no espaço-tempo 3D.

⁷Pode-se artificialmente inserir ϵ 's a fim de mudar $\theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$ para $\propto \tilde{\theta}_\mu \epsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$, esse procedimento é inócua pois $*\tilde{\theta} \propto \theta$; mas estamos adotando a regra de sempre escrever ou θ , ou $\tilde{\theta}$, nunca $*\tilde{\theta}$. Ademais esse procedimento não evita as dificuldades com a dualidade S , pois $\tilde{\theta}$ não ocorrerá proporcionalmente a ϕ no quadro dual.

5.2.3 Comentários finais

Na última subseção demonstramos diretamente, por meio de cálculos válidos em qualquer dimensão maior que dois, que a Lagrangiana mapeada por Seiberg-Witten da teoria NC eletromagnética (L_{A_θ}) depende de F e suas derivadas⁸. Até a segunda ordem em θ , as derivadas em F podem ser combinadas com os campos A de forma a produzirem outro F (eliminando toda a dependência explícita nos A 's, pois há um número igual de derivadas e A 's). Entretanto, a equação diferencial de Seiberg-Witten (5.48) leva ao aparecimento de termos com mais derivadas que campos na expansão em terceira ordem. Esses termos foram aplicados na Lagrangiana do eletromagnetismo NC ($L_{\hat{A}_*}$) e os termos resultantes foram expressos em (5.50). Talvez surpreendentemente, esses termos não são nem nulos e nem são termos de superfície, como mostrado subsequente. Esse resultado não está em acordo com a primeira parte de uma proposição na Ref.[135]. Acreditamos que esse nosso resultado deve ser visto como um contra-exemplo a essa proposição. Realmente, a primeira parte da Proposição 3.1 não parece ser correta de forma geral [137]. Todavia, deve ser enfatizado que essa proposição claramente é válida no limite de campos lentamente variantes (CLV) e que, nesse limite, ela é compatível com nossos resultados; ademais, quaisquer resultados que dependam dessa proposição são perfeitamente válidos naquele limite. Há outras interessantes conseqüências que estamos agora avaliando [138].

Correntes podem ser facilmente inseridas na dualidade tratada, seguindo os passos da Seção 2.5, se for assumido um acoplamento independente de θ como $A \wedge {}^*J$ na ação mapeada. Contudo, isso viola a correspondência com a teoria $U_*(1)$, que impõe o acoplamento $\hat{A} \wedge {}^* \hat{J}$, cujo mapa foi encontrado na Ref.[139].

É interessante notar que a dualidade eletromagnética não viola isotropia espacial e, caso uma das teorias a viole, a direção privilegiada é rodada por $\pi/2$. Na teoria

⁸Embora não tenha sido explicitamente mostrado na subseção anterior, não é difícil avaliar que uma particularização de (5.50) para $D = 2$ é também diferente de zero.

$U_*(1)$, a direção privilegiada no espaço é dada por θ^{0i} enquanto na teoria dual, até segunda ordem ou no limite de CLV, a direção privilegiada espacial é dada por

$$\tilde{\theta}^i = \frac{1}{4a}\epsilon^{i\mu\nu}\theta_{\mu\nu} = \frac{1}{2a}\epsilon^{0ij}\theta_{j0}, \quad (5.54)$$

donde nota-se que a direção dada por $\vec{\theta}$ é ortogonal à de $\vec{\tilde{\theta}}$.

Capítulo 6

Conclusão

Os resultados por nós obtidos e apresentados nesta tese se dividem em três partes: *i*) o desenvolvimento do formalismo simplético de calibre (Seção 3.2); *ii*) a extensão não-comutativa (NC) da dualidade entre os modelos autodual e Maxwell-Chern-Simons (MCS) (Seção 5.1); *iii*) o estabelecimento da dualidade eletromagnética NC em 3D sem massa topológica e avaliação da relevância do limite de campos lentamente variantes (CLV) para essa dualidade tanto em 3D quanto em 4D (Seção 5.2). Os principais resultados obtidos em cada uma dessas partes foram comentados nas Subseções 3.2.5, 5.1.2 e 5.2.3 (veja também as Refs. [10, 11, 12, 13]).

Acreditamos que os resultados apresentados nas partes *ii* e *iii* acima são de valor para o entendimento das teorias eletromagnéticas não-comutativas, as quais, como mencionado, possuem relações com diversas áreas da física, embora o significado físico delas ainda não se encontre plenamente estabelecido; o que, achamos nós, não tardará a ocorrer. É possível que resultados do *Large Hadron Collider* (LHC), cujas atividades terão início no próximo ano, nos dêem pistas de como implementar a não-comutatividade espaço-temporal ou revelem novos fenômenos (não necessariamente relacionados ao eletromagnetismo) que possam ser modelados pela Lagrangiana $U_*(1)$. Deve-se ressaltar a conexão das teorias NC's com as teorias de cordas, pois alguns aspectos das *D*-branas são melhor entendidos através da

descrição NC [140]. Além disso, novos avanços continuam a surgir [141]¹.

O formalismo simplético de calibre (parte *i* acima) não deve ser visto como um método plenamente acabado, mas já se demonstrou capaz de reproduzir alguns resultados de outros métodos e nos parece que poderá se revelar útil para a resolução de problemas físicos atuais, dentre eles os relacionados com quantização, dualidade ou mesmo com o mapa de Seiberg-Witten.

Estamos no momento interessados em algumas interessantes conseqüências da Ref. [13] ainda não exploradas. Dentre elas, gostaríamos de analisar minuciosamente os resultados da Ref. [135] que se fundamentam na parte problemática de sua Proposição 3.1 e tentar extrair novos resultados referentes a aspectos mais físicos do eletromagnetismo NC em 4D. A Eq. (5.44) simplifica consideravelmente a expansão em Seiberg-Witten em 3D, esperamos usá-la em uma análise do eletromagnetismo NC nessa dimensão. O seu quadro dual escalar pode se demonstrar conveniente para essa análise. Avaliar as conseqüências do resultado acima num contexto de teoria de cordas é também tema de interesse.

¹Para citar apenas um dos vários artigos que se poderiam ser citados aqui.

Apêndice A

Formas diferenciais no espaço \hat{M} e equações de Maxwell

Aqui introduzimos formas diferenciais no espaço \hat{M} , seguindo as idéias da Seção 2.2, para expressar as Eqs. (2.35 - 2.38). Retomemos a Eq.(2.33) introduzindo o operador \hat{d} como segue

$$\hat{d}E \wedge dt + d_0B + \hat{d}B = 0, \quad (\text{A.1})$$

com $d_0 := dt \partial_0$ e $\hat{d} := dx^i \partial_i$. Nota-se que \hat{d} é a derivada exterior de \hat{M} . Usando essa notação, a equação de movimento de F (2.30), ou equivalentemente de E e B , pode ser reescrita como

$$d_0^*(E \wedge dt) + \hat{d}^*(E \wedge dt) + \hat{d}^*B = -e(J_0^*dt + J_i^*dx^i). \quad (\text{A.2})$$

O termo d_0^*B não aparece acima pois é identicamente nulo devido à condição de ortogonalidade (2.32).

Na equação anterior, a separação entre dt e $\{dx^i\}$ torna-se patente mediante a introdução de um operador de dualidade em $T_x^*\hat{M}$. Seja $C(x)$ uma k -forma em $T_x^*\hat{M}$, define-se o operador $\hat{\star}$ por

$$\hat{\star}C = \frac{1}{k!} \frac{1}{(d-k)!} C_{i_1 \dots i_k} \hat{\omega}^{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{d-k}} dx_{j_1} \dots dx_{j_{d-k}}, \quad (\text{A.3})$$

com $\hat{\omega}_{i_1 \dots i_d} = \epsilon_{i_1 \dots i_d} \hat{f}$, $\hat{f} = \sqrt{|\hat{g}|}$ e $\hat{g} = \det(g_{ij})$. Usando a Eq. (2.32) algumas relações

úteis podem ser deduzidas:

$${}^*dt = (-1)^{a_0} \sqrt{|g^{00}|} \hat{f} d^d x, \quad (\text{A.4})$$

$${}^*dx^i = -\sqrt{|g_{00}|} dt \wedge \hat{*}dx^i, \quad (\text{A.5})$$

$${}^*C = (-1)^k \sqrt{|g_{00}|} dt \wedge \hat{*}C, \quad (\text{A.6})$$

$${}^*(C \wedge dt) = (-1)^{a_0+k} \sqrt{|g^{00}|} \hat{*}C, \quad (\text{A.7})$$

em que $a_0 = 0$ se $g^{00} > 0$ e $a_0 = 1$ se $g^{00} < 0$. Nota: $g_{00} = 1/g^{00}$.

Portanto, a Eq. (A.2) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & (-1)^{1+a_0} \sqrt{|g^{00}|} d_0 \hat{*}E + (-1)^{1+a_0} \sqrt{|g^{00}|} \hat{d} \hat{*}E - \sqrt{|g_{00}|} dt \wedge \hat{d} \hat{*}B = \\ & = -e \left((-1)^{a_0} \sqrt{|g^{00}|} J_0 \hat{f} d^d x - \sqrt{|g_{00}|} J_i dt \wedge \hat{*}dx^i \right). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Cada uma das Eqs. (A.1) e (A.8) pode ser quebrada em duas, como segue¹:

$$\hat{d}E + \dot{B} = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\hat{d}B = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$g^{00} \hat{*}\dot{E} + \hat{d} \hat{*}B = -e J_i \hat{*}dx^i \quad (\text{A.11})$$

$$\hat{d} \hat{*}E = e J_0 \hat{f} d^d x, \quad (\text{A.12})$$

em que o ponto sobre um campo é uma derivada temporal parcial, i.e., $\dot{B} := \partial_0 B$.

As equações acima são equivalentes às Eqs. (2.35 - 2.38). Alguns textos apresentam o eletromagnetismo em formas diferenciais tendo como ponto de partida as equações acima. As últimas duas equações dependem da métrica, essa dependência possibilita a introdução das formas H e D que são iguais a B e E somente para certo valor da métrica (métrica do vácuo) [17].

¹Pode-se conferir diretamente que essas equações são invariantes pela transformação $g \rightarrow -g$.

Referências Bibliográficas

- [1] C.N. Yang, R.L. Mills, *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*, Phys.Rev.96 : 191-195 (1954).
- [2] A.Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press (1994).
- [3] A. Connes, J. Lott, *Particle Models And Noncommutative Geometry (Expanded Version)*, Nucl.Phys.Proc.Suppl.18B : 29-47 (1991).
- [4] E. Witten, *Noncommutative Geometry And String Field Theory*, Nucl.Phys.B268 : 253 (1986).
- [5] A. Connes, M.R.Douglas, A.Schwarz, *Noncommutative geometry and matrix theory: Compactification on tori*, JHEP 02 (1998) 003; M.R.Douglas, C.Hull, *D-branes and the noncommutative torus*, JHEP 02 (1998) 008.
- [6] H.S. Snyder, *Quantized space-time*, Phys.Rev.71 : 38-41, 1947 ; *The Electromagnetic Field in Quantized Space-Time*, Phys.Rev.72 : 68-71 (1947).
- [7] S. Seiberg and E. Witten, *String Theory and Noncommutative Geometry*, JHEP 9909 (1999) 032.
- [8] O. Heaviside, *Electromagnetic Theory*, London (1893).
- [9] D.I. Olive, *Exact Electromagnetic Duality*, Nucl.Phys.Proc.Suppl. 45A (1996) 88-102; Nucl.Phys.Proc.Suppl. 46 (1996) 1-15; C. Gomez, R. Hernandez, *Electric-Magnetic Duality and Effective Field Theories*, [hep-th/9510023]; J.A. Harvey, *Magnetic Monopoles, Duality, and Supersymmetry*, [hep-th/9603086]; A. Giveon, M. Rocek, *Introduction to duality*, [hep-th/9406178]; L.A.-Gaume,

- S.F. Hassan, *Introduction to S duality in N=2 supersymmetric gauge theories: a pedagogical review of the work of Seiberg and Witten*, Fortsch.Phys. 45 (1997) 159-236; J.M. F.-O’Farrill, *Electromagnetic Duality for Children*, [<http://www.maths.ed.ac.uk/~jmf/Teaching/EDC.html>]; N. Seiberg, *The Power of duality: Exact results in 4-D SUSY field theory*, Int.J.Mod.Phys. A16 (2001) 4365-4376; J.A. Mignaco, *Electromagnetic duality, charges, monopoles, topology, ...*, Braz.J.Phys.31 (2001) 235-246.
- [10] C. Neves, W. Oliveira, D. C. Rodrigues, C. Wotzasek, *Embedding commutative and noncommutative theories in the symplectic framework*, Phys. Rev. D69 : 045016 (2004).
- [11] A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, D. C. Rodrigues, *Symplectic embedding of second class systems*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 127 : 170-173 (2004).
- [12] M.S. Guimarães, J.L. Noronha, D.C. Rodrigues, C. Wotzasek, *On duality of the noncommutative extension of the Maxwell-Chern-Simons model*, Phys.Lett. B605 (2005) 419-425.
- [13] D.C. Rodrigues, C. Wotzasek, *Issues on 3D noncommutative electromagnetic duality*, [hep-th/0603027], submetido ao Phys. Rev. D.
- [14] V.I. Arnold, *Métodos matemáticos da mecânica clássica*, MIR (1979).
- [15] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, IOP (1990).
- [16] B. F. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge (1980).
- [17] P. Bamberg, S. Sternberg, *A course in mathematics for students of physics vol. II*, Cambridge University Press (1988).
- [18] R. Jackiw, *Fifty years of Yang-Mills theory and my contribution to it*, ’t Hooft, G. (ed.): 50 years of Yang-Mills theory* 229-254 [physics/0403109].
- [19] A. Zee, *Quantum Hall Fluids*, [cond-mat/9501022]; Z. F. Ezawa, *Quantum Hall Effect*, World Scientific (2000); S. Carlip, *(2+1)-dimensional Chern-Simons*

- gravity as a Dirac square root*, Phys.Rev. D45 (1992) 3584-3590; Erratum-ibid. D47 (1993) 1729; J. Zanelli, *Chern-Simons gravity: From (2+1)-dimensions to (2n+1)- dimensions*, Braz.J.Phys. 30 (2000) 251-267.
- [20] S. Mukhi, N.V. Suryanarayana, *Chern-Simons Terms on Noncommutative Branes*, JHEP 0011 (2000) 006.
- [21] R. Jackiw, *Topics In Planar Physics*, Nucl.Phys.Proc.Suppl.18A : 107-170 (1990).
- [22] S. Weinberg, *The quantum theory of fields vol II*, Cambridge (1996).
- [23] W. Siegel, *Unextended Superfields In Extended Supersymmetry*, Nucl. Phys. B 156 (1979), 135.
- [24] R. Jackiw e S. Templeton, *How Superrenormalizable Interactions Cure Their Infrared Divergences*, Phys. Rev. D 23 (1981), 2291.
- [25] J.F. Schonfeld, *A Mass Term For Three-Dimensional Gauge Fields*, Nucl.Phys.B185:157 (1981).
- [26] S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, *Topologically Massive Gauge Theories*, Ann. Phys.140 (1982) 372; *Three-Dimensional Massive Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. 48: 975-978 (1982).
- [27] S. Chern, *Complex Manifolds without Potential Theory*, 2nd ed., Springer (1979).
- [28] P. A. M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, Yeshiva University (1964).
- [29] L. Faddeev, R. Jackiw *Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems*, Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 1692; R. Jackiw, *(Constrained) Quantization without tears*, Monepulciano Workshop 163-175 (1993) [hep-th/9306075].
- [30] J. Barcelos Neto, C. Wotzasek, *Symplectic quantization of constrained systems* Mod. Phys. Lett. A7 1737 (1992) ; *Faddeev-Jackiw quantization and constraints*, Int. J. Phys. A7 4981 (1992).

- [31] S.E. Hjeltnel, U. Lindstrom, *Duality for the nonspecialist*, [hep-th/9705122].
- [32] C. Montonen, D.I. Olive, *Magnetic monopoles as gauge particles?*, Phys.Lett.B72 : 117 (1977).
- [33] N. Seiberg, E. Witten, *Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang-Mills theory*, Nucl.Phys. B426 (1994) 19-52; Erratum-ibid. B430 (1994) 485-486; *Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N=2$ supersymmetric QCD*, Nucl.Phys. B431 (1994) 484-550.
- [34] N. Seiberg, *Electric-Magnetic Duality in Supersymmetric Non-Abelian Gauge Theories*, Nucl.Phys. B435 (1995) 129-146.
- [35] G.W. Gibbons, D.A. Rasheed, *Electric - magnetic duality rotations in nonlinear electrodynamics*, Nucl.Phys. B454 (1995) 185-206; A.A. Tseytlin, *Selfduality of Born-Infeld action and Dirichlet three-brane of type IIB superstring theory*, Nucl.Phys. B469 (1996) 51-67.
- [36] S.M. Kuzenko, S. Theisen, *Nonlinear selfduality and supersymmetry*, Fortsch.Phys. 49 (2001) 273-309.
- [37] A. Kapustin, E. Witten, *Electric-Magnetic Duality And The Geometric Langlands Program*, [hep-th/0604151].
- [38] F. Wilczek, A. Zee, *Linking Numbers, Spin, and Statistics of Solitons*, Phys. Rev. Lett. 51, 2250-2252 (1983).
- [39] M. S. Guimarães, T. Mariz, R. Menezes, C. Wotzasek, *Searching for the dual of the Maxwell-Chern-Simons model minimally coupled to dynamical $U(1)$ charged matter*, Phys.Lett. B625 (2005) 351-356.
- [40] P. Gaete, C. Wotzasek, *Duality and confinement in $D=3$ models driven by condensation of topological defects*, Phys.Lett. B625 (2005) 365-374.

- [41] S. Deser, R. Jackiw, '*Selfduality*' of topologically massive gauge theories, Phys.Lett.B139 : 371 (1984).
- [42] P.K. Townsend, K. Pilch, P. van Nieuwenhuizen, *Selfduality In Odd Dimensions*, Phys.Lett.136B : 38 (1984), Addendum-ibid.137B : 443 (1984).
- [43] E. Fradkin e F.A. Schaposnik, *The Fermion - boson mapping in three-dimensional quantum field theory*, Phys.Lett. B338 (1994) 253-258.
- [44] J.C. Guillou, E.F. Moreno, C. Nunez, F.A. Schaposnik, *Duality between topologically massive and selfdual models*, Mod.Phys.Lett. A12 (1997) 2707-2716.
- [45] M.C. Diamantini, P. Sodano e C.A. Trugenberger, *Topological excitations in compact Maxwell-Chern-Simons theory*, Phys.Rev.Lett.71 (1993) 1969-1972.
- [46] N. Bralic, E. Fradkin, F.A. Schaposnik, *Bosonization of three-dimensional non-Abelian fermion field theories*, Nucl.Phys. B446 (1995) 144-158; A. Karlhede, U. Lindstrom, M. Rocek e P. van Nieuwenhuizen, *On 3-D Nonlinear Vector-Vector Duality*, Phys. Lett. B186 : 96 (1987).
- [47] H. Montani, *Symplectic analysis of constrained systems*, Int. J. Mod. Phys. A8 4319 (1993).
- [48] J. Ananias Neto, C. Neves, W. Oliveira, *Gauging the SU(2) Skyrme model*, Phys.Rev. D63 (2001) 085018.
- [49] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems*, Princeton (1992).
- [50] Algumas referências adicionais sobre geometria simplética: J. Stawianowski, *Geometry of phase spaces*, A Wiley-Interscience publication (1990); P. Libermann, C.-M. Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, D. Reidel (1987); A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Springer (2001) [livros e notas similares disponíveis em <http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/>].
- [51] H.J. Rothe, K.D. Rothe, *Lagrange versus symplectic algorithm for constrained systems*, J.Phys. A36 (2003) 1671-1682.

- [52] D.M. Gitman, I.V. Tyutin, *Quantization of fields with constraints*, Springer (1990); H.J. Matschull, *Dirac's canonical quantization program*, [quant-ph/9606031]; A.J. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma (1976).
- [53] J. Wess, B. Zumino, *Consequences of anomalous Ward identities*, Phys. Lett. B37, 95 (1971).
- [54] L.D. Faddeev, S.L. Shatashvili, *Realization Of The Schwinger Term In The Gauss Law And The Possibility Of Correct Quantization Of A Theory With Anomalies*, Phys. Lett. B167, 225 (1986).
- [55] I.A. Batalin, E.S. Fradkin, *Operator Quantization Of Dynamical Systems With Irreducible First And Second Class Constraints*, Phys. Lett. B 180, 157 (1986); *Operatorial Quantization Of Dynamical Systems Subject To Second Class Constraints*, Nucl. Phys. B279, 514 (1987); I.A. Batalin, E.S. Fradkin e T.E. Fradkina, *Another Version For Operatorial Quantization Of Dynamical Systems With Irreducible Constraints*, Nucl. Phys. B314, 158 (1989); I.A. Batalin, I. V. Tyutin, *Existence theorem for the effective gauge algebra in the generalized canonical formalism with Abelian conversion of second class constraints*, Int. J. Mod. Phys. A 6, 3255 (1991).
- [56] E. C. G. Stückelberg, Helv. Phys. Acta 11 (1938) 225; O. Babelon, F.A. Schaposnik, C.M. Viallet, *Quantization Of Gauge Theories With Weyl Fermions*, Phys.Lett.B177 : 385, (1986); R. Banerjee, H.J. Rothe, K.D. Rothe, *Batalin-Fradkin quantization of anomalous chiral gauge theories*, Phys.Rev.D49 : 5438-5445 (1994); C. Neves, C. Wotzasek, *Stuckelberg field shifting quantization of free particle on D-dimensional sphere*, J.Phys. A33 (2000) 6447-6456; H. Ruegg, M. Ruiz-Altaba, *The Stuckelberg Field*, Int.J.Mod.Phys. A19 (2004) 3265-3348; R. Banerjee, *Hamiltonian embedding of a second-class system with a Chern-Simons term*, Phys. Rev. D48, 5467 (1993).
- [57] C. Wotzasek, C. Neves, *On the hidden U(1) gauge symmetry in the nonlinear sigma model*, J.Math.Phys.34 : 1807-1817 (1993).

- [58] R. Amorim, N.R.F. Braga, C.N. Ferreira, *Nonequivalent Seiberg-Witten maps for noncommutative massive $U(N)$ gauge theory*, Phys.Lett. B591 (2004) 181-186.
- [59] E. Harikumar, V.O. Rivelles, *Noncommutative Maxwell-Chern-Simons theory in three dimensions and its dual*, Phys.Lett. B625 (2005) 156-164.
- [60] E.M.C. Abreu, A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, F.I. Takakura, *Duality through the symplectic embedding formalism*, [hep-th/0607180].
- [61] R. Banerjee, H.J. Rothe, *Batalin-Fradkin-Tyutin embedding of a selfdual model and the Maxwell-Chern-Simons theory*, Nucl.Phys. B447 (1995) 183-192.
- [62] J. Ananias Neto, C. Neves, E.R. Oliveira, W. Oliveira, *Operatorial quantization of Born-Infeld Skymion model and hidden symmetries*, J.Phys. A34 (2001) 5117; J. Ananias Neto, C. Neves, W. Oliveira, *Gauging by symmetries*, Int.J.Mod.Phys. A18 (2003) 1883-1901; C. Neves, W. Oliveira, *Clebsch parameterization from the symplectic point of view*, Phys.Lett. A321 (2004) 267-272; A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, *Symplectic embedding of a fluid dynamical model*, J.Phys.A37 (2004) 1927.
- [63] C. Neves, W. Oliveira, D.C. Rodrigues, C. Wotzasek, *Hamiltonian symplectic embedding of the massive noncommutative $U(1)$ theory*, J.Phys. A37 (2004) 9303-9316.
- [64] S.T. Hong, Y.W. Kim, Y.J. Park, K.D. Rothe, *Symplectic embedding and Hamilton-Jacobi analysis of Proca model*, Mod.Phys.Lett. A17 (2002) 435-452; Y.W. Kim, C.Y. Lee, S.K. Kim, Y.J. Park, *Symplectic embedding of a massive vector tensor theory with topological coupling*, Eur.Phys.J. C34 (2004) 383-392.
- [65] E.M. Lifshitz, L.D. Landau, *Fluid Mechanics, Second Edition: Volume 6 (Course of Theoretical Physics)*, Butterworth-Heinemann (1987).
- [66] R.J. Szabo, *Quantum field theory on noncommutative spaces*, Phys.Rept.378 : 207-299 (2003).

- [67] F.A. Schaposnik, *Three lectures on noncommutative field theories*, [hep-th/0408132].
- [68] Y.K.E. Cheung, M. Krogh, *Noncommutative Geometry from D0-branes in a Background B-field*, Nucl.Phys. B528 (1998) 185-196; F. Ardalan, H. Arfaei, M.M. Sheikh-Jabbari, *Noncommutative geometry from strings and branes*, JHEP 9902 (1999) 016.
- [69] J.C. Várilly, *An Introduction to noncommutative geometry*, [physics/9709045]; D.Bigatti, *Noncommutative geometry for outsiders. Part 1. An Elementary introduction to motivations and tools* [hep-th/9802129]; J.Madore, *Noncommutative geometry for pedestrians*, [gr-qc/9906059]; A. Connes, *Noncommutative geometry: Year 2000*, [math.qa/0011193].
- [70] A.P. Balachandran, *Noncommutative Geometry: Fuzzy Spaces, the Groenwald-Moyal Plane*, [hep-th/0606115].
- [71] M. Kreuzer, J.G. Zhou, *Λ -symmetry and background independence of noncommutative gauge theory on \mathbb{R}^n* , JHEP 0001 (2000) 011.
- [72] R. Gopakumar, J. Maldacena, S. Minwalla, A. Strominger, *S-Duality and Noncommutative Gauge Theory*, JHEP 0006 (2000) 036.
- [73] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, J. C. Rojas, *The Landau problem and noncommutative quantum mechanics*, Mod.Phys.Lett. A16 (2001) 2075-2078.
- [74] M. Hatsuda, S. Iso, H. Umetsu, *Noncommutative Superspace, Supermatrix and Lowest Landau Level*, Nucl.Phys. B671 (2003) 217-242.
- [75] H.O. Girotti, *Noncommutative quantum field theories*, [hep-th/0301237].
- [76] A. A. Deriglazov, *Poincare covariant mechanics on noncommutative space*, JHEP 0303 (2003) 021.
- [77] E.M.C. Abreu, C. Neves, W. Oliveira, *Noncommutativity from the symplectic point of view*, a aparecer em Int. J. Mod. Phys. A, [hep-th/0411108].

- [78] K. Greisen, *End to the cosmic ray spectrum?*, Phys. Rev. Lett. 16, 748 (1966); G.T. Zatsepin and V.A. Kuzmin, *Upper limit of the spectrum of cosmic rays*, JETP Lett.4:78-80,1966, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.4 : 114-117 (1966).
- [79] S. Coleman, S.L. Glashow, *High-energy tests of Lorentz invariance*, Phys. Rev. D 59 (1999) 116008.
- [80] J. Gamboa, J. Lopez-Sarrion, A.P. Polychronakos, *Ultraviolet modified photons and anisotropies in the cosmic microwave background radiation*, Phys.Lett.B634 : 471-473 (2006).
- [81] M. Chaichian, P. Presnajder, M.M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, *Noncommutative standard model: Model building*, Eur.Phys.J. C29 : 413-432 (2003).
- [82] S.M. Carroll, J.A. Harvey, V.A. Kostelecky, C.D. Lane, T. Okamoto, *Noncommutative field theory and Lorentz violation*, Phys.Rev.Lett.87 : 141601 (2001).
- [83] E. Zavattini et al (PVLAS Collaboration), *Experimental observation of optical rotation generated in vacuum by a magnetic field*, Phys.Rev.Lett. 96 (2006) 110406.
- [84] M. Chaichian, M.M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, *Noncommutativity of space and rotation of polarization of light in a background magnetic field*, [hep-ph/0511323]; N. Chatillon, A. Pinzul, *Light Propagation in a Background Field for Time-Space Noncommutativity and Axionic Noncommutative QED*, [hep-ph/0607243].
- [85] S. Majid, *Algebraic approach to quantum gravity. II. Noncommutative space-time*, [hep-th/0604132]; S. Cacciatori, A.H. Chamseddine, D. Klemm, L. Martucci, W.A. Sabra, D. Zanon, *Noncommutative Gravity in two Dimensions*, Class.Quant.Grav. 19 (2002) 4029-4042; E. Harikumar, V.O. Rivelles, *Noncommutative Gravity*, [hep-th/0607115].
- [86] R. Jackiw, *Physical Instances of Noncommuting Coordinates*, Nucl.Phys.Proc.Suppl. 108 (2002) 30-36, Phys.Part.Nucl. 33 (2002) S6-S11;

- I. Hinchliffe, N. Kersting, Y.L. Ma, *Review of the phenomenology of noncommutative geometry*, Int.J.Mod.Phys. A19 (2004) 179-204; A. Anisimov, T. Banks, M. Dine, M. Graesser, Comments on noncommutative phenomenology, Phys.Rev. D65 (2002) 085032; S. Godfrey, M.A. Doncheski, *Phenomenology of noncommutative field theories*, Hamburg 2002, Supersymmetry and unification of fundamental interactions, vol. 2, 1463-1470 [hep-ph/0211247].
- [87] M. Hayakawa, *Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative QED on \mathbb{R}^4* , Phys.Lett.B478 : 394-400 (2000); *Perturbative analysis on infrared and ultraviolet aspects of noncommutative QED on \mathbb{R}^4* , [hep-th/9912167].
- [88] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Deformation Theory And Quantization. 1. Deformations Of Symplectic Structures*, Annals Phys.111 : 61 (1978).
- [89] J.E. Moyal, *Quantum Mechanics as a Statistical Theory*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 45 (1949) 99.
- [90] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover, New York (1931).
- [91] T.A. Osborn, F.H. Molzahn, *Moyal quantum mechanics: The Semiclassical Heisenberg dynamics*, Annals Phys. 241 (1995) 79-127.
- [92] M.A. Rieffel, *Deformation Quantization for actions of \mathbb{R}^D* , Mem. Am. Math. Soc. 106 (1993) 1.
- [93] R. Wulkenhaar, *Quantum field theories on noncommutative \mathbb{R}^4 versus theta expanded quantum field theories*, [hep-th/0206018].
- [94] T. Filk, *Divergencies in a field theory on quantum space*, Phys.Lett.B376 : 53-58 (1996).
- [95] S. Minwalla, M.V. Raamsdonk, N. Seiberg, *Noncommutative perturbative dynamics*, JHEP 0002 : 020, (2000).

- [96] M.R. Douglas, N.A. Nekrasov, *Noncommutative field theory*, Rev.Mod.Phys. 73 (2001) 977-1029
- [97] I. Bars, *Nonpertubative Effects of Extreme Localization in Noncommutative Geometry*, [hep-th/0109132].
- [98] H. O. Girotti, M. Gomes, V. O. Rivelles, A. J. da Silva, *A consistent non-commutative field theory: The Wess-Zumino model*, Nucl. Phys. B 587 (2000) 299.
- [99] J. Dai, R.G. Leigh and J. Polchinski, *New connections between string theories*, Mod. Phys. Lett. A4 (1989) 2073.; J. Polchinski, *Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges*, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 4724.
- [100] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Cambridge (2004).
- [101] E.S. Fradkin, A.A. Tseytlin, *Nonlinear Electrodynamics From Quantized Strings*, Phys.Lett.B163 : 123 (1985).
- [102] C.G. Callan, C. Lovelace, C.R. Nappi, S.A. Yost, *String Loop Corrections To Beta Functions*, Nucl.Phys.B288 : 525 (1987); A. Abouelsaood, C.G. Callan, C.R. Nappi, S.A. Yost, *Open Strings In Background Gauge Fields*, Nucl.Phys.B280 : 599 (1987).
- [103] J. Polchinski, *String Theory vol. 1*, Cambridge University Press(1998).
- [104] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Non-linear electrodynamics from quantized strings*, Phys. Lett. B163 (1985) 123.
- [105] A.A. Tseytlin, *Born-Infeld action, supersymmetry and string theory*, Yuri Golfand memorial volume, ed. M. Shifman, World Scientific (2000) [hep-th/9908105].
- [106] N. Seiberg, *A Note on background independence in noncommutative gauge theories, matrix model and tachyon condensation*, JHEP 0009 (2000) 003.

- [107] S. Sarkar, *UV/IR mixing in noncommutative field theories and open closed string duality*, [hep-th/0606002]; S. Vaidya, B. Ydri, *On the Origin of the UV-IR Mixing in Noncommutative Matrix Geometry*, Nucl.Phys. B671 (2003) 401-431; A.P. Balachandran, A. Pinzul, B.A. Qureshi, *UV-IR mixing in noncommutative plane*, Phys.Lett. B634 (2006) 434-436; L. Griguolo, M. Pietroni, *Hard Non-commutative Loops Resummation*, Phys.Rev.Lett. 88 (2002) 071601.
- [108] J. Gomis and T. Mehen, *Space-time noncommutative field theories and unitarity*, Nucl.Phys. B591 (2000) 265.
- [109] N. Seiberg, L. Susskind and N. Toumbas, *Space-time noncommutativity and causality*, JHEP 0006 (2000) 044.
- [110] Algumas abordagens alternativas à quantização de teorias NC's: D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen and G. Piacitelli, *On the unitarity problem in space/time noncommutative theories*, Phys.Lett. B533 (2002) 178-181; H. Bozkaya, P. Fischer, H. Grosse, M. Pitschmann, V. Putz, M. Schweda and R. Wulkenhaar, *Space/time noncommutative field theories and causality*, Eur.Phys.J. C29 (2003) 133-141.
- [111] O. Aharony, J. Gomis, T. Mehen, *On Theories With Light-Like Noncommutativity*, JHEP 0009 (2000) 023
- [112] N. Seiberg, L. Susskind, N. Toumbas, *Strings in background electric field, space / time noncommutativity and a new noncritical string theory*, JHEP 0006 (2000) 021.
- [113] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp and J. Wess, *Gauge theory on noncommutative spaces*, Eur. Phys. J. C 16, 161 (2000); B. Jurco, S. Schraml, P. Schupp and J. Wess, *Enveloping algebra valued gauge transformations for nonAbelian gauge groups on noncommutative spaces*, Eur. Phys. J. C 17 , 521 (2000);
- [114] B. Jurco, L. Moller, S. Schraml, P. Schupp and J. Wess, *Construction of nonAbelian gauge theories on noncommutative spaces*, Eur. Phys. J. C 21, 383 (2001).

- [115] F.P.A. Farias, *A teoria de Yang-Mills sobre o espaço não-comutativo canônico*, tese de doutorado, IF-UFRJ (2004).
- [116] N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa, *Wilson loops in noncommutative Yang-Mills*, Nucl.Phys. B573 (2000) 573-593.
- [117] H. Liu, **-Trek II: $*_n$ Operations, Open Wilson Lines and the Seiberg-Witten Map*, Nucl.Phys. B614 (2001) 305-329; Y. Okawa, H. Ooguri, *An Exact solution to Seiberg-Witten equation of noncommutative gauge theory*, Phys.Rev. D64 (2001) 046009.
- [118] T. Asakawa, I. Kishimoto, *Comments on gauge equivalence in noncommutative geometry*, JHEP 9911 (1999) 024.
- [119] S. Ghosh, *Maxwell-Chern-Simons Theory is Free for Marginally Noncommutative Spacetimes*, Phys.Lett. B583 (2004) 347-352.
- [120] S. Ghosh, *Gauge Invariance and Duality in the Noncommutative Plane*, Phys.Lett. B558 (2003) 245-249; *Bosonization in the Noncommutative Plane*, Phys.Lett. B563 (2003) 112-116.
- [121] M.B. Cantcheff and P. Minces, *Duality between noncommutative Yang-Mills-Chern-Simons and nonAbelian selfdual models*, Phys.Lett. B557 (2003).
- [122] M.B. Cantcheff and P. Minces, *Duality in noncommutative topologically massive gauge field theory revisited*, Eur.Phys.J.C34:393-398 (2004).
- [123] O. F. Dayi, *Noncommutative Maxwell-Chern-Simons theory, duality and a new noncommutative Chern-Simons theory in $d=3$* , Phys. Lett. B560 (2003) 239.
- [124] T.Mariz, R. Menezes, J.R.S. Nascimento, R.F.Ribeiro, C. Wotzasek, *Issues of duality on noncommutative manifolds: The Nonequivalence between selfdual and topologically massive models*, Phys.Rev. D70 (2004) 085018.
- [125] O.J. Ganor, G. Rajesh, S.Sethi, *Duality and Non-Commutative Gauge Theory*, Phys.Rev. D62 (2000) 125008.

- [126] Y. Abe, R. Banerjee, I. Tsutsui, *Duality Symmetry and Plane Waves in Non-Commutative Electrodynamics*, Phys.Lett. B573 (2003) 248-254; R. Banerjee, *A Note on Duality Symmetry in Nonlinear Gauge Theories*, Phys.Lett. B576 (2003) 237-242; O.F. Dayi, B. Yapiskan, *Equivalence of partition functions for noncommutative $U(1)$ gauge theory and its dual in phase space*, JHEP 0411 (2004) 064; O. F. Dayi, L.T. Kelleyane, K. Ulker, *Duality invariance of non-anticommutative $N=1/2$ supersymmetric $U(1)$ gauge theory*, JHEP 0510 (2005) 035.
- [127] P. Aschieri, *Duality rotations and BPS monopoles with space and time noncommutativity*, Nucl.Phys.B617 : 321-347 (2001); *On duality rotations in lightlike noncommutative electromagnetism*, Mod.Phys.Lett.A16 : 163-170 (2001).
- [128] R. Banerjee, H.S. Yang, *Exact Seiberg-Witten map, induced gravity and topological invariants in noncommutative field theories*, Nucl.Phys. B708 (2005) 434-450.
- [129] T. Krajewski, *Gauge invariance of the Chern-Simons action in noncommutative geometry*, Proceeding of the ISI GUCCIA workshop "Quantum groups, noncommutative geometry and fundamental physical interactions", D. Kastler, M. Rosso editors, math-ph/9810015; A. A. Bichl, J. M. Grimstrup, V. Putz, M. Schweda, *Perturbative Chern-Simons Theory on Noncommutative R^3* , JHEP 0007 (2000) 046; Alexios P. Polychronakos, *Noncommutative Chern-Simons terms and the noncommutative vacuum*, JHEP 0011 (2000) 008.
- [130] L. Susskind, *The Quantum Hall Fluid and Non-Commutative Chern Simons Theory*, [hep-th/0101029].
- [131] Chong-Sun Chu, *Induced Chern-Simons and WZW action in Noncommutative Spacetime*, Nucl.Phys. B580 (2000) 352-362.
- [132] N.Grandi, G.A. Silva, *Chern-Simons action in noncommutative space*, Phys.Lett. B507 (2001) 345.

- [133] C. Wotzasek, *On the dimensional dependence of the electromagnetic duality groups*, Phys.Rev.D58 (1998) 125026; E.M.C. Abreu, C. Wotzasek, *Interference phenomenon for different chiral bosonization schemes* Phys.Rev.D58 (1998) 101701.
- [134] Z. Guralnik, R. Jackiw, S.Y. Pi, A.P. Polychronakos, *Testing Non-commutative QED, Constructing Non-commutative MHD*, Phys.Lett. B517 (2001) 450-456.
- [135] G. Berrino, S.L. Cacciatori, A. Celi, L. Martucci, A. Vicini, *Noncommutative Electrodynamics*, Phys.Rev. D67 (2003) 065021.
- [136] S. Fianza, *Towards an explicit expression of the Seiberg-Witten map at all orders*, JHEP 0206 (2002) 016.
- [137] S.L. Cacciatori, correspondência particular.
- [138] M.S. Guimarães and D.C. Rodrigues, trabalho em andamento.
- [139] R.Banerjee, C.K. Lee and H.S. Yang, *Seiberg-Witten-type Maps for Currents and Energy-Momentum Tensors in Noncommutative Gauge Theories*, Phys.Rev.D70 : 065015 (2004).
- [140] R.J. Szabo, *Symmetry, gravity and noncommutativity*, [hep-th/0606233].
- [141] A. Connes, *Noncommutative Geometry and the standard model with neutrino mixing*, [hep-th/0608226].

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)