

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

***Modelos Não Lineares do Método dos Elementos de Contorno para Análise
de Problemas de Fratura e Aplicação de Modelos de Confiabilidade e
Otimização em Estruturas Submetidas à Fadiga***

Edson Denner Leonel

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Tit. Wilson Sergio Venturini

**São Carlos
2009**

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

L583m Leonel, Edson Denner
Método dos elementos de contorno aplicado à análise de
sólidos multi-fraturados / Edson Denner Leonel. -- São
Carlos, 2006.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de São
Carlos-Universidade de São Paulo, 2006.

Área: Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Tit. Wilson Sergio Venturini.

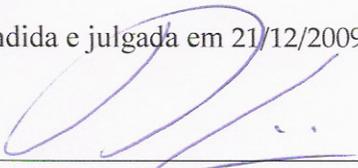
1. Método dos elementos de contorno. 2. Mecânica da
fratura elástico-linear. 3. Propagação de fissuras.

I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

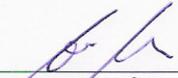
Candidato: Engenheiro **EDSON DENNER LEONEL**.

Tese defendida e julgada em 21/12/2009 perante a Comissão Julgadora:



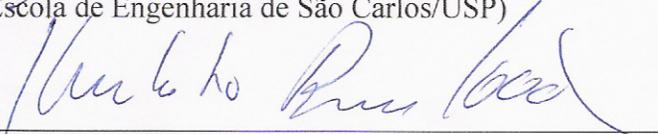
Prof. Titular **WILSON SERGIO VENTURINI (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO



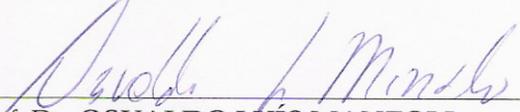
Prof. Dr. **ANDRÉ TEÓFILO BECK**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO



Prof. Associado **HUMBERTO BREVES CODA**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO



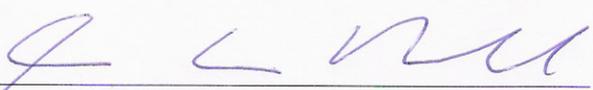
Prof. Dr. **OSVALDO LUÍS MANZOLI**
(Universidade Estadual Paulista/Campus de Bauru)

APROVADO

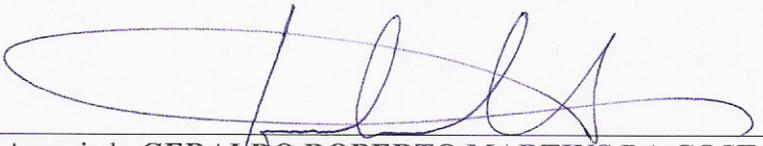


Prof. Dr. **PAULO SOLLERO**
(Universidade Estadual de Campinas)

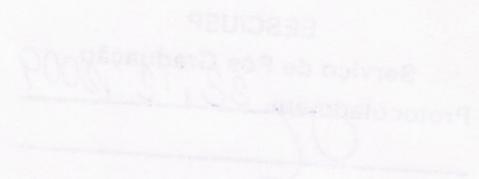
APROVADO



Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)



Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

ESCU
Serviço de Pós-Graduação
Procurador


*Dedico esse trabalho carinhosamente à
minha esposa Tânia e aos meus pais
Edson e Alda*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado saúde, paz e tranquilidade para superar mais essa importante etapa em minha vida.

Agradeço a minha amada esposa Tânia pela paciência, amor e cumplicidade a mim dedicados durante todo o nosso período juntos. Sem a sua participação esse trabalho não seria possível.

Agradeço a toda a minha família em especial aos meus pais Edson e Alda pelo incentivo dado em todos os momentos difíceis que enfrentei.

Ao Professor Venturini, que apesar dos problemas de saúde enfrentados, procurou estar presente e participar dentro de suas possibilidades.

Agradeço ao Professor Humberto B. Coda por sua disposição em ajudar os alunos sempre que preciso. Agradeço por presidir a banca de meu exame de qualificação e pelas importantes contribuições dadas ao meu trabalho naquela ocasião. Agradeço também pelas discussões que muito contribuíram para a minha maturidade em diversos assuntos.

Ao Professor André T. Beck pelas importantes contribuições dadas no desenvolvimento dos modelos de confiabilidade deste trabalho.

Ao amigo e professor Georgios E. Stavroulakis, Technical University of Crete, pelos grandes ensinamentos dados no período em que trabalhamos juntos na Grécia. Grande parte da minha motivação em relação à pesquisa eu devo a seus valiosos ensinamentos.

Agradeço aos professores Osvaldo L. Manzoli e Walter Libardi pelas importantes contribuições dadas durante meu exame de qualificação.

Aos professores Alaa Chateaneuf e Philippe Bressolette, Université Blaise Pascal, que me receberam e me orientaram durante meu estágio sanduíche na França.

A todos os amigos com quem convivi no departamento. Em especial Caio, Eduardo, Luciano, Denis, Walter, Sudano, Marlos, Paccola e Leandro pelas sempre valiosas troca de idéias.

Aos grandes amigos Lael, Tânia, Mario, Juliana, Clodoaldo e Giovanna que por sua amizade me fizeram acreditar em coisas que a maioria das pessoas não crêem.

Aos queridos Guilherme, Damiana, Valentina, Caio, Camila, Wallace, Priscila, Jinane, Karim, Kien, Hassan, Omar, Miguel, François, Odile, Regina e todos os amigos que tornaram nossa estadia na França extremamente agradável e produtiva.

Aos professores e funcionários do SET que muito contribuíram para a minha formação pessoal e profissional.

À FAPESP e CAPES pelo apoio financeiro dado sem o qual esse trabalho não seria possível.

“... Se em alguma atividade houver um *empurrador* de serviço, pode saber, não é um Leonel!...”

Resumo

LEONEL, E.D. **Modelos Não Lineares do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Problemas de Fratura e Aplicação de Modelos de Confiabilidade e Otimização em Estruturas Submetidas à Fadiga**. 406p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 2009.

Apresentam-se neste trabalho formulações do método dos elementos de contorno (MEC), visando sua utilização em problemas de fratura e também de modelos de confiabilidade e otimização aplicados na análise de problemas de fadiga. Com relação aos progressos e avanços nas formulações do MEC, apresentam-se modelos que representam o processo de crescimento de fissuras em domínios planos constituídos por materiais frágeis, quase-frágeis e dúcteis. Considerando esses diferentes tipos de materiais, a formulação numérica adotada na análise descreve o comportamento estrutural não linear decorrente do processo de propagação das fissuras e conseqüente degradação estrutural. Nos modelos de fratura é empregada a formulação MEC dual, a qual é mais adequada para a análise da propagação aleatória de fissuras. São também apresentadas as expressões dos operadores tangente para as formulações não lineares que tratam os problemas de fratura elástico linear e coesiva, problemas de contato e os problemas de domínios enrijecidos. Com relação às análises de confiabilidade estrutural, o modelo mecânico de fadiga é acoplado a algoritmos de confiabilidade para a determinação do índice de confiabilidade e do conjunto de valores aleatórios com maior probabilidade de ocorrência. São testados alguns algoritmos de confiabilidade, podendo-se claramente definir um deles como mais eficiente para a análise de problemas de fadiga. A esse modelo é acoplado um algoritmo de otimização para a determinação das dimensões do elemento estrutural e dos intervalos para os procedimentos de manutenção e inspeção, que levam ao mínimo custo estrutural com base nas incertezas determinadas pelo modelo de confiabilidade. São apresentados vários exemplos validando e mostrando a eficiência das formulações desenvolvidas.

Palavras Chave: Método dos Elementos de Contorno, Confiabilidade Estrutural, Otimização, Mecânica da Fratura.

Abstract

LEONEL, E.D. **Nonlinear Boundary Element Models to Analyse Fracture Problems and Reliability / Optimization Models applied to Structures submitted to Fatigue.** 406p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 2009.

This work deals with the development of Boundary Element Method (BEM) formulations to be used in engineering problems. Particular attention is given to using these formulations in development of reliability and optimization models applied to fatigue problems. Contributions to BEM formulations are developed, particularly, models that deal with crack growth in plane domains composed by brittle, quasi-brittle and ductile materials. Taking into account these different types of materials, the proposed formulation properly represents the nonlinear structural behaviour induced by crack growth and the resulting structural damage. The dual BEM formulation is adopted here for the proposed crack model and to analyse random crack propagation. In this thesis tangent operators are used in the non-linear BEM formulations, in order to deal with cohesive crack, contact problems and debonding problems in reinforced domains. Regarding structural reliability analysis, the fatigue mechanical model was coupled with appropriate reliability algorithms to compute the reliability index and other important random values. Several reliability algorithms were tested for this coupled model, in order to find the most efficient in the analysis of fatigue problems. An optimization model was also coupled with the fatigue reliability model, in order to evaluate the optimal structural element dimensions and also to schedule the intervals for maintenance and inspection procedures, taking into account the minimum cost and problem uncertainties. Many examples are presented in order to show the efficiency and accuracy of the proposed formulations in dealing with crack propagation, fatigue reliability analysis and optimization problems.

Keywords: Boundary Element Method, Structural Reliability, Optimization, Fracture Mechanics, Fatigue.

Sumário

1. – Introdução.....	1
1.1 – <i>Objetivos e Delimitações</i>	1
1.2 – <i>Organização dos Capítulos da Tese</i>	4
2. – Revisão Bibliográfica	7
2.1 – <i>Método dos Elementos de Contorno</i>	7
2.2 – <i>Método dos Elementos de Contorno em Problemas de Fratura</i>	10
2.3 – <i>Método dos Elementos de Contorno para Análise Não Linear</i>	13
2.4 – <i>Confiabilidade Estrutural</i>	14
2.5 – <i>Fadiga em Estruturas</i>	21
2.6 – <i>Mecânica do Contato</i>	24
2.7 – <i>Acoplamento entre o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos</i>	26
3. – Mecânica da Fratura e Contato	29
3.1 – <i>Balanço de Energia de Griffith</i>	30
3.2 – <i>O Fator de Intensidade de Tensão</i>	32
3.3 – <i>Modos de Solicitação ao Fraturamento</i>	33
3.4 – <i>Relação entre Campo de Tensão e o Fator de Intensidade de Tensão</i>	34
3.5 – <i>A Integral J</i>	36
3.6 – <i>Técnica de Correlação de Deslocamentos</i>	37
3.7 – <i>Teorias de Interação de Modos de Solicitação ao Fraturamento</i>	38
3.7.1 – <i>Critério da Máxima Tensão Circunferencial</i>	38
3.7.2 – <i>Critério da Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial</i>	40
3.7.3 – <i>Critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação</i>	41
3.8 – <i>Mecânica da Fratura Aplicada ao Concreto</i>	42
3.9 – <i>Modelos de Fratura Coesiva</i>	45
3.10 – <i>Modelo de Fissura Fictícia</i>	48
3.11 – <i>Fadiga dos Materiais</i>	51
3.11.1 – <i>Filosofia de Projetos à Fadiga</i>	52
3.11.2 – <i>Abordagem Safe-Life</i>	52

3.11.3 –Abordagem Fail-Life.....	53
3.11.4 –Abordagem de Tolerância ao Dano.....	53
3.11.5 –Taxa de Propagação de Fissuras em Fadiga.....	55
3.11.6 –Leis de Crescimento de Fissuras em Fadiga.....	58
3.11.7 –Crack Closure Effect.....	60
3.12 – Considerações Sobre o Contato entre Superfícies.....	61
3.12.1 –Considerações Sobre Atrito.....	62
3.12.2 –Classificação do Contato.....	63
3.12.3 –Modos de Contato.....	64
4. – Tópicos de Confiabilidade Estrutural	65
4.1 – Probabilidade e Confiabilidade.....	65
4.2 –Índice de Confiabilidade.....	68
4.3 – Método de Simulação de Monte Carlo.....	69
4.3.1 –Simulação de Monte Carlo Simples.....	69
4.3.2 –Simulação de Monte Carlo com Amostragem por Importância.....	71
4.4 – FORM / SORM.....	72
4.4.1 –Algoritmo Para Cálculo do Índice de Confiabilidade.....	73
4.5 – Método de Superfície de Resposta.....	74
4.5.1 –Etapas do Método de Superfície de Resposta.....	76
4.5.2 –Adaptatividade das Superfícies de Resposta.....	76
4.5.3 –Formulação Para a Determinação da Equação de Estado Limite.....	81
4.6 – Acoplamento Direto entre Modelo Mecânico e HLRF / FORM.....	83
4.7 – Modelagem Probabilística da Degradação.....	84
4.7.1 –Modelo de Degradação Instantânea.....	88
4.7.2 –Modelo de Degradação da Margem Acumulada.....	89
5. - Método dos Elementos de Contorno	91
5.1 – Soluções Fundamentais para os Problemas Bidimensionais e Tridimensionais.....	92
5.2 – Equacionamento para o Problema Elástico Plano.....	94
5.3 – Aproximações sobre o Contorno.....	98
5.4 – Funções de Aproximação.....	99
5.5 – Construção do Sistema de Equações.....	101
5.6 – Grandezas Internas.....	102
5.7 – Formulações do MEC em Problemas de Fratura.....	103
5.8 – Equação Integral em Forças de Superfície.....	105
5.9 – Aproximações sobre o Contorno.....	109
5.10 – Estratégias de Modelagem e Discretização.....	110
5.11 – Sistema Final de Equações e Atualizações.....	111
6. – Formulações Não Lineares do Método dos Elementos de Contorno para a Análise de Problemas de Fratura e Contato.....	113

6.1 – <i>Formulações do MEC para a Análise de Fratura Coesiva</i>	114
6.1.1 – <i>Cálculo do Estado de Tensão na Extremidade da Fissura</i>	114
6.1.2 – <i>Cálculo do Ângulo de Propagação da Fissura</i>	116
6.1.3 – <i>Incremento no Comprimento da Fissura</i>	116
6.1.4 – <i>Modelo Coesivo via Operador Constante</i>	117
6.1.5 – <i>Formulação do MEC para a Análise de Problemas de Fratura Coesiva via Operador Tangente Consistente</i>	117
6.1.6 – <i>Exemplo 1: Viga sob Flexão em Três Pontos</i>	122
6.1.7 – <i>Exemplo 2: Viga Analisada em GALVEZ et. al (1998)</i>	124
6.1.8 – <i>Exemplo 3: Viga Multi-Fissurada sob Flexão em Quatro Pontos</i>	127
6.2 – <i>Formulação do MEC Para a Análise de Fratura Elástico Linear</i>	128
6.2.1 – <i>Formulação do MEC Para Análise de Problemas de Fratura Elástico Linear via Operador Tangente Consistente</i>	129
6.2.2 – <i>Cálculo dos Fatores de Intensidade de Tensão e do Ângulo de Propagação</i>	130
6.2.3 – <i>Exemplo 4: Determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão e do Ângulo de Propagação em Problema de Fratura Elástico Linear</i>	130
6.2.4 – <i>Exemplo 5: Estrutura Plana com Dois Furos e Duas Fissuras</i>	132
6.2.5 – <i>Exemplo 6: Chapa com uma Fissura Solicitada em Modo II</i>	134
6.2.6 – <i>Exemplo 7: Análise de Localização e Coalescência em Chapa com Múltiplas Fissuras</i>	137
6.3 – <i>Formulação do MEC Para a Análise de Problemas de Contato entre Faces de Fissuras via Operador Tangente Consistente</i>	139
6.3.1 – <i>Formulação com Operador Tangente Consistente para o Caso de Contato sem Escorregamento e com Escorregamento</i>	140
6.3.2 – <i>Exemplo 8: Chapa com Fissura de Aresta com Contato sem Atrito</i>	141
6.3.3 – <i>Exemplo 9: Chapa com Fissura de Aresta com Contato Considerando Atrito</i>	143
6.3.4 – <i>Exemplo 10: Chapa com Duas Fissuras com Contato Considerando Atrito</i>	146
6.4 – <i>Formulação de um Acoplamento MEC-MEC para a Análise de Problemas de Contato em Estruturas Compostas via Operador Tangente Consistente</i>	148
6.4.1 – <i>Exemplo 11: Estrutura Plana em Balanço Composta por 3 Domínios</i>	152
6.4.2 – <i>Exemplo 12: Chapa Enrijecida com Furo Central</i>	155
6.4.3 – <i>Exemplo 13: Análise do Escorregamento entre Dois Blocos</i>	158
6.4.4 – <i>Exemplo 14: Análise do Contato em Estrutura Composta por 4 Domínios</i>	161
7. – Acoplamento entre Método dos Elementos de Contorno e Método dos Elementos Finitos	165
7.1 – <i>Equações do Elemento Finito de Fibra</i>	166
7.2 – <i>Formulação do Acoplamento das Fibras com o Domínio via Combinação MEC-MEF</i>	167
7.2.1 – <i>Equações do Acoplamento</i>	167
7.2.2 – <i>Combinação das Equações MEC-MEF com Regularização por Mínimos Quadrados</i>	174
7.3 – <i>Aplicações do Acoplamento MEC-MEF</i>	176
7.3.1 – <i>Exemplo 1: Estrutura Plana com um Enrijecedor</i>	176

7.3.2 – Exemplo 2: Chapa Tracionada Enrijecida	181
7.3.3 – Exemplo 3: Estrutura Enrijecida Solicitada por Carga Tangencial	184
7.3.4 – Exemplo 4: Chapa Tracionada com Enrijecedores Longitudinais e Transversais	186
7.4 – Formulação do Acoplamento MEC-MEF com Comportamento Elastoplástico dos Elementos de Fibra.....	190
7.4.1 – Breve Revisão Bibliográfica sobre Teoria da Plasticidade	191
7.4.2 – Conceitos Básicos	192
7.4.3 – Formulação do Problema Plástico Unidimensional	193
7.4.4 – Influência da Plastificação nas Equações do Acoplamento MEC- MEF .	199
7.4.5 – Exemplo 5: Análise Elastoplástica de uma Fibra em uma Chapa Tracionada	199
7.4.6 – Exemplo 6: Chapa Tracionada com Enrijecedor Inclinado	202
7.4.7 – Exemplo 7: Viga Biapoiada com Enrijecedores Longitudinais e Transversais	206
7.5 – Formulação do Acoplamento MEC-MEF Considerando o Escorregamento entre as Fibras e o Domínio	211
7.5.1 – Breve Revisão Bibliográfica sobre Aderência entre Fibras e Domínio ...	211
7.5.2 – Modelo Não Linear de Aderência CEB-FIP (1990)	213
7.5.3 – Formulação Não Linear do Acoplamento MEC-MEF com Modelo de Escorregamento	214
7.5.4 – Exemplo 8: Análise do Arrancamento de um Enrijecedor	215
7.5.5 – Exemplo 9: Propagação de Fissura em Domínio Enrijecido	218
7.5.6 – Exemplo 10: Chapa com Múltiplas Fissuras e Enrijecedores.....	220
7.6 – Acoplamento MEC-MEF Aplicado à Análise de Domínios com Múltiplas Fibras Aleatoriamente Distribuídas no Domínio	223
7.6.1 – Exemplo 11: Estrutura Plana com Múltiplos Enrijecedores	225
7.6.2 – Exemplo 12: Propagação de Fissura em Chapa com Múltiplos Enrijecedores	228
8. – Modelo de Fadiga para Metais e Materiais Frágeis.....	231
8.1 – Estimativa da Vida Útil Estrutural	231
8.2 – Exemplo 1: Viga Solicitada à Flexão em Três Pontos.....	233
8.3 – Exemplo 2: Estrutura Plana com Três Furos	236
8.4 – Exemplo 3: Chapa Perfurada	239
8.5 – Exemplo 4: Estrutura Plana com um Furo.....	241
8.6 – Exemplo 5: Chapa com Múltiplas Fissuras e Furos.....	245
9. – Acoplamento entre Modelos Mecânicos e de Confiabilidade Estrutural.....	249
9.1 – Exemplo 1: Chapa Tracionada com Fissura Central.....	250
9.1.1 – 1º Cenário	251
9.1.2 – 2º Cenário	253
9.1.3 – 3º Cenário	254
9.2 – Exemplo 2: Viga Solicitada à Flexão em 3 Pontos.....	256
9.2.1 – 1º Cenário	258
9.2.2 – 2º Cenário	259

9.2.3 – 3° Cenário	261
9.3 – Exemplo 3: Propagação de Fissura sob Regime de Fadiga em Viga Solicitada à Flexão em 3 Pontos	263
9.3.1 – 1° Cenário	264
9.3.2 – 2° Cenário	266
9.3.3 – 3° Cenário	269
9.3.4 – 4° Cenário	271
9.4 – Exemplo 4: Estrutura Plana Contendo Furos Solicitada à Flexão	273
9.4.1 – 1° Cenário	274
9.4.2 – 2° Cenário	276
9.4.3 – 3° Cenário	279
9.4.4 – 4° Cenário	281
9.5 – Exemplo 5: Estrutura Plana com Furo Solicitada à Tração	283
9.5.1 – 1° Cenário	285
9.5.2 – 2° Cenário	287
9.5.3 – 3° Cenário	290
9.5.4 – 4° Cenário	292
9.6 – Exemplo 6: Chapa Multifissurada com Furos	294
9.6.1 – 1° Cenário	295
9.6.2 – 2° Cenário	296
10. – Acoplamento entre Modelo Mecano-Fiabilístico e um Algoritmo de Otimização	299
10.1 – Programação Quadrática Sequencial (SQP)	300
10.1.1 – Equações do Método SQP	302
10.1.2 – Estrutura do Método	303
10.1.3 – Algoritmo do Método SQP	305
10.2 – Modelos de Otimização para a Determinação do Instante de Inspeção e Manutenção	307
10.2.1 – Modelo de Manutenção Perfeita	308
10.2.2 – Exemplo 1: Modelo de Manutenção Perfeita Aplicado a uma Viga sob Flexão em Três Pontos	309
10.2.3 – Modelo de Manutenção Imperfeita	311
10.2.4 – Exemplo 2: Modelo de Manutenção Imperfeita Aplicado a uma Viga sob Flexão em Três Pontos	312
10.3 – Modelo de Confiabilidade e Otimização RBDO	315
10.3.1 – Exemplo 3: Análise de uma Viga Solicitada à Flexão em Três Pontos Usando um Modelo RBDO	316
10.4 – Modelo RBDO considerando Inspeção, Manutenção e Falha	319
10.4.1 – Exemplo 4: Análise RBDO considerando Inspeção, Manutenção e Falha	321
10.5 – Considerações Finais Sobre os Modelos deste Capítulo	323
11. – Considerações Finais	325

Anexo A. – Integrais Singulares.....	355
Anexo B. – Integrais Analíticas Hiper-Singulares	359
Anexo C. – Sub-Elementação	369
Anexo D. – O Concreto Estrutural	373
Anexo E. – Função Delta de Dirac.....	379
Anexo F. – A Mecânica do Dano.....	381
Anexo G. – Coeficientes Planos de Experiência	385
Anexo H. – Método Golden Section.....	393
Anexo I. – Tópicos da Teoria da Elasticidade.....	399

1. – Introdução

1.1 – Objetivos e Delimitações

Este trabalho aborda dois tópicos que vem sendo amplamente discutidos pela comunidade científica: desenvolvimento de formulações do método dos elementos de contorno visando sua utilização em problemas de engenharia e também modelos de confiabilidade e otimização aplicados na análise de problemas dependentes do tempo.

O método dos elementos de contorno (MEC) tem-se mostrado uma opção viável para o estudo de diversos problemas de engenharia. Dentre esses problemas destacam-se aqueles onde a presença de singularidades (concentração de tensão no caso de mecânica dos sólidos) torna-se um complicador adicional. Nessas situações esse método numérico já é reconhecido como uma solução eficiente ou tem potencial para gerar um procedimento recomendável necessitando apenas de desenvolvimentos mais adequados para melhorar a precisão e quando possível diminuir tempo de processamento.

Com relação aos progressos e avanços nas formulações do MEC objetiva-se, em especial neste trabalho, o desenvolvimento de modelos que abordem o processo de crescimento de fissuras em domínios planos constituídos por materiais frágeis, quase-frágeis e dúcteis. Considerando esses diferentes tipos de materiais a formulação numérica adotada na análise deve representar o comportamento estrutural não linear decorrente do processo de propagação das fissuras e conseqüente degradação estrutural. Uma das contribuições apresentadas neste trabalho refere-se ao emprego do operador tangente consistente na resolução desses problemas não lineares. Esse operador permite que o problema não linear seja resolvido empregando-se um número menor de iterações, quando comparado a modelos que empregam operador constante, tornando assim a formulação mais precisa e também eficiente do ponto de vista computacional. Deve-se ressaltar que o operador tangente consistente depende da lei não linear adotada

no problema. Assim para cada problema não linear a ser solucionado deve-se deduzir os termos deste operador.

Ainda com relação à análise de estruturas fissuradas, outro progresso diz respeito ao estudo de corpos caracterizados pela presença de múltiplas fissuras dispersas aleatoriamente ou não em seu interior. As aplicações desse tipo de formulação são diversas, porém atenção será dada ao estudo do crescimento das fissuras iniciais culminando com a localização em uma única a qual levará o sólido à ruptura.

Outro foco do trabalho trata do desenvolvimento de formulações do MEC para o tratamento de problemas envolvendo o contato entre corpos. Em diversos tipos de estruturas o carregamento externo aplicado é transferido pelos componentes estruturais por meio do contato entre eles e, portanto a eficiência mecânica do sistema depende da natureza da interação entre as superfícies em contato. Apesar da grande importância da mecânica do contato, ainda se busca o melhor entendimento sobre a modelagem dos fenômenos que ocorrem nessa condição. Na prática o conhecimento da mecânica do contato pode ser desenvolvido por meio da experiência e observação. Como a observação direta é muitas vezes impossível, pelo fato das áreas de interesse estarem escondidas sobre as superfícies em contato, somente é possível a determinação do efeito médio da zona de contato no comportamento dos corpos em análise. Neste trabalho o operador tangente consistente foi novamente utilizado para o desenvolvimento de uma formulação não linear do MEC que trata de problemas de contato. Além de permitir a análise do contato entre as faces das fissuras a formulação também aborda problemas envolvendo estruturas constituídas por diferentes tipos de materiais. Nesse último caso o contato ocorre no contorno comum de cada componente estrutural, como no caso de sistemas solo, em diversas camadas, fundação e também estruturas compostas por chapas soldadas.

O desenvolvimento de formulações para a análise de estruturas compostas por diferentes materiais é também objetivo e tema de outro conjunto de modelos desenvolvidos nesse trabalho. Esses modelos tratam da análise de domínios planos onde considera-se em seu interior a presença de enrijecedores (fibras). A formulação desse modelo foi desenvolvida efetuando-se o acoplamento entre as equações do MEC e do método dos elementos finitos (MEF). O MEC e o MEF são os métodos numéricos com maior utilização em análises de problemas de engenharia na atualidade. Apesar da ampla utilização de ambos, cada um apresenta maior eficiência na análise de determinados tipos de problemas. Nesse contexto surgiu a idéia de acoplar esses dois

métodos numéricos de tal maneira que cada um deles seja utilizado na representação de sub-estruturas onde apresenta maior eficiência. Nessa formulação o MEF representa enrijecedores presentes no domínio do problema enquanto o MEC representa o contorno e o domínio 2D do problema, sendo que os efeitos não lineares de plastificação dos enrijecedores e do escorregamento destes em relação ao meio contínuo ao qual pertencem são considerados.

Outro importante problema de engenharia tratado nesse trabalho refere-se ao crescimento de fissuras sob efeito de carregamentos cíclicos e fadiga. Quando estruturas fissuradas são expostas a esses tipos de efeitos, as fissuras existentes no elemento estrutural crescem sob carregamentos bem inferiores a aqueles que produzem a fratura sob solicitações monotônicas, levando assim a estrutura ao colapso repentino e inesperado. A maioria dos equipamentos e estruturas está sujeita a carregamentos cíclicos como em bombas, hélices e aviões, pontes, navios e estruturas offshore.

Na fadiga de alto ciclo as zonas plásticas são geralmente pequenas e, portanto, podem ser aplicados os conceitos da mecânica da fratura elástico linear. Considerando-se que a previsão da vida útil de estruturas submetidas à fadiga é de grande importância no projeto de uma obra ou equipamento, existe a necessidade de ferramentas práticas para a análise de estruturas sujeitas a este fenômeno, sendo esta uma das principais motivações para o desenvolvimento deste modelo. Com esse modelo é possível a determinação da vida útil estrutural bem como sua configuração de falha, por meio da trajetória de crescimento das fissuras.

Além do desenvolvimento de formulações do MEC para a análise mecânica de estruturas, este trabalho objetiva também o acoplamento de modelos de confiabilidade estrutural à modelos mecânicos, os quais identificam modos de falha estrutural, propiciando assim a realização da análise probabilística do colapso da estrutura. Embora seja conhecido na literatura como um acoplamento de modelos, os algoritmos para os dois problemas envolvidos são independentes. O acoplamento é imposto apenas no processo iterativo de busca do conjunto de variáveis aleatórias com maior probabilidade de ocorrência e conseqüente probabilidade de um modo de falha ser atingido.

Quantificar a segurança e estabelecer custos é uma das principais tarefas hoje da engenharia para a definição de prioridades. Para avaliar o desempenho e qualidade de uma obra ou um produto com relação a sua utilização e segurança, o conceito embutido na variável confiabilidade é mais realista, inclusive sob o ponto de vista matemático, para a determinação de custos.

Finalmente, outro foco deste trabalho refere-se ao acoplamento dos modelos mecânico e de confiabilidade estrutural a um algoritmo de otimização. O modelo resultante desse triplo acoplamento pode ser aplicado a diversos problemas particulares. Em especial, neste trabalho este modelo é utilizado na abordagem de problemas de concepção, inspeção e manutenção de estruturas sujeitas ao crescimento de fissuras sob efeitos de fadiga, considerando-se análise probabilística de estruturas.

Dessa forma podem ser abordados problemas complexos fazendo-se considerações mais realísticas sobre as incertezas presentes na estrutura, baseadas em dados estatísticos, obtendo-se um dimensionamento, tanto de concepção quanto de manutenção e inspeção, mais preciso e realista. Modelos como os propostos permitem a realização de uma análise de risco real em relação à utilização da estrutura ou da peça em análise.

1.2 – Organização dos Capítulos da Tese

Esta tese está dividida em onze capítulos sendo que, desse total, cinco abordam os desenvolvimentos e progressos obtidos com este trabalho de pesquisa.

No segundo capítulo é efetuada a revisão bibliográfica sobre os temas referidos na tese. Como uma forma de melhor organizar este capítulo os temas citados estão divididos por itens pesquisados.

No capítulo três são considerados os tópicos referentes à mecânica da fratura. Neste capítulo o balanço de energia, que permite a verificação sobre as condições de estabilidade à propagação da fissura e as expressões para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão para o problema de Griffith são enfatizados. São apresentadas também as teorias de interação de modos além de tópicos relacionados à fadiga e mecânica do contato. Discutem-se também os modelos de propagação de fissuras para materiais quase-frágeis resultando nos modelos coesivos.

O tema confiabilidade estrutural é discutido no capítulo quatro. São apresentados alguns conceitos essenciais como probabilidade de falha e ponto de projeto. São também discutidos os algoritmos para a busca do ponto de projeto e determinação da probabilidade de falha. Apresentam-se também conceitos relacionados a confiabilidade dependente do tempo.

A formulação do MEC para o problema elástico bidimensional é apresentada no capítulo cinco. As soluções fundamentais de Kelvin e as equações integrais do método são obtidas. A montagem do sistema matricial resultante e a obtenção das grandezas internas ao contorno são apresentadas. É também mostrada neste capítulo a formulação para a metodologia dual via elementos de contorno. São discutidos os termos da equação integral escrita em força de superfície além das equações integrais utilizadas por esta formulação.

No capítulo seis são apresentadas algumas formulações não lineares para o tratamento do problema envolvendo fissuras. Inicialmente é discutida uma formulação, para a análise da propagação de fissuras em domínios formados por materiais quase-frágeis, onde é utilizado um operador tangente consistente. Em seguida esse mesmo tipo de operador é empregado na análise de problemas de mecânica do contato. O modelo é aplicado inicialmente ao contato entre faces de fissuras e em seguida a formulação é estendida para o caso de contato entre diversos corpos. Finalmente apresenta-se um modelo para a análise do problema de fratura em materiais frágeis.

O modelo de acoplamento MEC/MEF é o tema principal do capítulo sete. Inicialmente são apresentadas as equações para o acoplamento entre os dois métodos numéricos considerando-se aderência perfeita entre os enrijecedores, MEF, e o domínio plano, MEC, admitindo-se ainda comportamento elástico linear da estrutura. Em seguida o efeito não linear de plastificação dos enrijecedores é considerado e a formulação inicialmente descrita é modificada para a consideração deste efeito. A formulação não linear para a abordagem do problema de perda de aderência entre as fibras e o domínio é também apresentada neste capítulo.

No capítulo oito discute-se o modelo de propagação de fissuras considerando-se os efeitos de carregamentos cíclicos e fadiga. As hipóteses do modelo são apresentadas assim como diversas aplicações. Ênfase é dada na abordagem de problemas envolvendo múltiplas fissuras.

No capítulo nove, atenção é dada aos modelos de confiabilidade estrutural. Apresentam-se inicialmente resultados do acoplamento entre o modelo mecânico de fratura elástico linear e os algoritmos do FORM, SORM e método de superfície de resposta. Na seqüência, os algoritmos de confiabilidade são acoplados ao modelo mecânico de propagação de fissuras sob fadiga. São mostrados resultados desse último modelo de acoplamento.

O modelo resultante do acoplamento entre o modelo mecânico de propagação de fissuras sob fadiga e confiabilidade estrutural a um algoritmo de otimização é discutido no capítulo dez. São mostradas aplicações em alguns casos particulares onde são obtidas as dimensões mínimas do corpo, assim como os intervalos para a realização dos procedimentos de manutenção e inspeção que levam ao mínimo custo do sistema.

O capítulo onze apresenta as conclusões obtidas com o desenvolvimento do trabalho e discute possíveis sugestões para pesquisas futuras.

Nos anexos desta tese são apresentados alguns temas que foram tratados nesta pesquisa, mas que não são o foco principal do trabalho.

2. – Revisão Bibliográfica

Apresentam-se nesse item alguns importantes trabalhos científicos que constam na literatura técnica relacionados aos temas tratados nessa pesquisa. De forma a facilitar o estudo optou-se por organizar as referências por temas.

2.1 – Método dos Elementos de Contorno

A base matemática do método dos elementos de contorno é constituída, basicamente, na transformação da equação diferencial que rege um determinado problema em uma equação integral. Nesse sentido deve-se destacar o trabalho do matemático norueguês ABEL (1823). Abel foi o primeiro a deduzir uma equação integral para solucionar o problema do “pêndulo isócrono”. Outro passo importante ocorreu com VOLTERRA (1884), no campo dos problemas de potencial, onde foram empregadas equações integrais para o estudo da distribuição de cargas elétricas na superfície de uma esfera.

De posse da grande potencialidade dos métodos integrais FREDHOLM (1903) realizou o primeiro estudo aprofundado sobre as equações integrais. Nesse trabalho Fredholm demonstrou que podem ser encontradas soluções para equações integrais e posteriormente desenvolveu condições para a determinação da existência e unicidade de tais soluções na forma dos Teoremas de Fredholm.

Em seguida, pesquisadores oriundos das repúblicas soviéticas como MUSKHELISHVILI (1953), MIKHLIN (1957, 1965) e SMIRNOV (1964) apresentaram soluções para problemas de elasticidade linear. Esses autores inspiraram-se no trabalho de KELLOG (1929) o qual foi o pioneiro no emprego de equações integrais aplicada à solução de problemas governados pela equação de Laplace.

KUPRADZE (1965) propôs uma formulação numérica para deslocamentos em corpos sob o regime elástico linear. MASSONET et. al (1965) efetuou a descrição de

uma solução numérica para problemas de valores de tensões no contorno formulada em termos de uma equação integral singular baseada na solução de Kelvin.

Todos os trabalhos até aqui apresentados versam sobre problemas de equações integrais analisadas via métodos indiretos. Os métodos indiretos foram os primeiros a serem empregados e tem essa denominação por exprimirem a solução do problema analisado em função de variáveis fictícias associadas ao contorno. As variáveis físicas do problema são obtidas a partir dos valores calculados para as variáveis fictícias, as quais não tem significado físico, e são obtidas a partir de condições de contorno em um determinado número de pontos. Os métodos indiretos, segundo PALERMO JR (1989), são reconhecidos também como métodos de contorno menos robustos. A forma mais simples desse método consiste no uso de soluções singulares unitárias que satisfazem as equações diferenciais do problema no domínio.

JASWON (1963) e SYMM (1963) introduziram um equacionamento do problema elástico bidimensional usando as variáveis físicas do problema mas ainda mantendo uma função de tensão auxiliar. Como estão presentes na análise variáveis físicas e fictícias esse método é conhecido na literatura como método semi-direto.

O trabalho de RIZZO (1967) foi o primeiro a apresentar uma formulação direta para o tratamento de equações integrais com aplicações em elasticidade bidimensional. Deve-se destacar que nas formulações diretas as incógnitas são as próprias variáveis físicas do problema real e, no caso de RIZZO (1967), são os deslocamentos e forças de superfície. Nesse trabalho a discretização do contorno foi efetuada por elementos de geometria reta sendo que os deslocamentos e forças de superfície são considerados constantes dentro de cada elemento.

Vários outros trabalhos seguiram ao de RIZZO (1967). Dentre eles destacam-se os de CRUSE (1968, 1969, 1973) que estendeu a formulação plana para problemas tridimensionais e o de RIZZO & SHIPPY (1968) que sugeriram o emprego de sub-regiões para o tratamento de domínios não homogêneos.

SWELDON & CRUSE (1971) e RICARDELA (1973) apresentaram formulações para análises elastoplásticas admitindo-se materiais anisotrópicos. Apesar do forte desenvolvimento observado, principalmente a partir dos trabalhos de RIZZO (1967), foi LCHAT (1975) que conseguiu apresentar uma maior generalização do método. Esse trabalho apresenta um eficiente tratamento numérico do método empregando representações paramétricas dos elementos no contorno e das funções de aproximação das forças de superfície e dos deslocamentos nas quais admitiam-se

variações lineares, quadráticas e cúbicas. As integrais são calculadas por meio de fórmulas de quadratura gaussiana. LACHAT (1975) também propôs a técnica de sub-regiões não só para análise de domínios não homogêneos, mas também para permitir que o sistema de equações resultante fosse definido por blocos possibilitando assim o emprego de algoritmos de resolução de equações mais eficientes.

BREBBIA (1978b) introduziu a formulação das equações integrais empregando a técnica dos resíduos ponderados. A partir desse ponto o método das equações integrais poderia ser combinado a outras técnicas numéricas, tratando ambas por meio da técnica dos resíduos ponderados, possibilitando assim um equacionamento elegante bem como consistente. Deve-se também a BREBBIA (1978a, 1978b, 1984) o nome “Método dos Elementos de Contorno” que a partir de então tornou-se corrente em detrimento ao então conhecido método das equações integrais.

De posse da formulação em resíduos ponderados e da abrangência em relação ao campo de atuação do método dos elementos de contorno várias formulações foram desenvolvidas envolvendo problemas de placas, mecânica dos solos e das rochas, não linearidade física, mecânica da fratura, interação solo-estrutura entre outros.

De forma a possibilitar a realização desses tipos de análises o acoplamento com o método dos elementos finitos tornou-se de grande valia. Nessa junção a principal vantagem é que cada método é associado à sub-estruturas onde proporciona resultados mais consistentes. Os primeiros a empregarem a combinação entre o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno foram McDONALD & WEXLER (1972), os quais aplicaram a problemas relacionados a eletricidade. Já CHEN & MEI (1974) o fizeram para problemas de mecânica dos fluidos onde o método dos elementos de contorno representava um meio infinito, o fluido. Em relação à engenharia estrutural ZIENKIEWICZ et. al (1977), SHAW & FALBY (1977) e OSIAS et. al (1977) foram os primeiros a analisarem sólidos deformáveis utilizando o método dos elementos de contorno no contexto convencional do método dos elementos finitos. WEARING & BURSTOW (1994) aplicaram a junção destes métodos numéricos para análise de problemas elastoplásticos e de mecânica da fratura elastoplástica convencional.

No tocante as pesquisas desenvolvidas no “Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos” devem ser destacados alguns trabalhos que contribuíram substancialmente para a excelência do departamento nessa área de pesquisa.

Inicialmente RODRIGUES (1986) fez o estudo de problemas elásticos lineares bidimensionais por meio de elementos lineares contínuos e também descontínuos. Nesse trabalho é também abordada a técnica de resolução de sistemas lineares por blocos para problemas que utilizam sub-regiões. PALERMO JR (1989) considerou estruturas de parede fina isotrópicas atuando em regime elástico linear. Essas estruturas eram consideradas de forma estratificada sendo cada lâmina capaz de simular efeitos de um estado plano de tensão acoplado a efeitos de flexão.

Diversas pesquisas tratam da análise de placas pelo método dos elementos de contorno. Esses trabalhos empregam as diversas teorias conhecidas para a representação do comportamento estrutural das placas assim como idealizam o comportamento estrutural do material sob o ponto de vista não-linear. Nesse contexto RIBEIRO (1992), CHUEIRI (1994), SILVA (1996) e FERNANDES (1998) devem ser mencionados.

Quanto a problemas envolvendo interação solo-estrutura vários são os trabalhos já desenvolvidos. Nesses trabalhos são consideradas interação entre estaca/solo, placa/solo e bloco de fundação/solo tanto em análises bidimensionais quanto tridimensionais. Ainda admite-se a hipótese de simulação do solo de forma estratificada ou não. Nessa área os trabalhos de PAIVA (1993), FERRO (1999), RIBEIRO (2009) e ALMEIDA,V,S. (2003) podem ser destacados. Ainda em relação a esse tópico, problemas relacionados a escavação do solo foram também tratados. Nesse campo de pesquisa os trabalhos de MESQUITA (2002) e KOMATSU (1995) também se destacam.

No tocante a análises dinâmicas alguns trabalhos desenvolvidos devem ressaltados. Diversas são as formulações empregadas bem como os tipos de estruturas consideradas. Nesse campo os trabalhos de CODA (1990, 1993) e ALMEIDA,F,P,A. (2003) devem ser citados.

2.2 – Método dos Elementos de Contorno em Problemas de Fratura

Em relação a problemas de fratura, um dos temas alvo desse trabalho, podem ser destacadas algumas publicações que permitiram o avanço desse ramo de pesquisa ao nível observado atualmente. Na literatura pode ser encontrada, atualmente, uma vasta quantidade de trabalhos importantes sobre o desenvolvimento de formulações do método dos elementos de contorno em problemas de mecânica da fratura.

Um dos primeiros trabalhos que trataram do problema da análise de trincas é ainda da década de setenta de autoria de CRUSE & VAN BUREN (1971). Nesse trabalho os autores analisaram o campo de tensões próximo a trinca em modelos elásticos tridimensionais. Já CRUSE (1972) analisou modelos bi e tridimensionais aproximando a geometria da trinca por uma forma elíptica. Essa técnica levou a erros significativos e, além disso, exigia um número grande de elementos para aproximar as variáveis da superfície da fissura, portanto não apresentou um desempenho satisfatório e foi abandonada.

O trabalho do Prof. T. A. Cruse em fratura teve continuidade, e em 1975 propôs uma formulação baseada no uso de funções de Green, SNYDER & CRUSE (1975). As funções de Green representavam a solução exata de um domínio infinito com a presença da trinca que se pretendia analisar. Com essa técnica os termos integrais referentes ao contorno da trinca desaparecem e a solução é extremamente precisa. Sua aplicação é, entretanto, restrita. Permite o estudo dos fatores de intensidade de tensão, porém não possibilita o estudo do avanço da trinca.

Alguns livros sobre o assunto acabaram tornando-se fortes referências e devem receber atenção especial como, CRUSE (1988) e ALIABADI & ROOKE (1992).

O uso da equação singular para o tratamento de trincas aparece posteriormente no trabalho de BLANDFORD et al. (1981), que utiliza a técnica das sub-regiões para simular o crescimento da fissura entre dois contornos. Esse recurso é muito semelhante ao empregado por VENTURINI (1982) para representação da separação e deslizamento em juntas.

A formulação singular também aparece nos trabalhos de CEN & MAIER (1992) e de LIANG & LI (1991) que utilizaram a técnica para a modelagem de fratura por meio de um modelo coesivo. O modelo de sub-regiões contém o mesmo problema computacional dos métodos de elementos finitos clássico. Há a necessidade de se fazer previsões sobre o crescimento da superfície da fissura com as correspondentes modificações da malha em função da resposta obtida. Vários outros trabalhos aparecem na literatura como variações desses ou utilizando outra metodologia. É oportuno mencionar o método de descontinuidade de deslocamentos, CROUCH (1976), com aplicações práticas mostradas em CROUCH & STARFIELD (1983), WEN & FAN (1994), MEWS (1987) e mais recentemente em TELLES & GUIMARÃES (2000).

Uma técnica alternativa para a representação desses problemas é a que emprega campo de tensões iniciais para a correção do estado de tensão em fissuras. A espessura

da região de processo é degenerada para zero, isto é, quando a zona de processo se transforma numa fissura. Com a eliminação das tensões da zona de processo se simula a presença da fissura. Essa técnica mostrou-se bastante eficiente e foram os seguintes os trabalhos publicados sobre essa técnica VENTURINI (1994), LOPES & VENTURINI (1997), JIANG & VENTURINI (1998, 2000).

Outra técnica promissora na análise de problemas de fratura baseia-se na utilização de equações integrais de deslocamento e de forças de superfície para nós definidos nas superfícies opostas de uma fissura. Com esse procedimento, o número de incógnitas e equações independentes para os pontos da fissura é igual, garantindo assim a solução do sistema final de equações algébricas. Esse procedimento aparece inicialmente nos trabalhos de WATSON (1986, 1988) para problemas bidimensionais e depois no trabalho de GRAY et al. (1990) para problemas tridimensionais.

A técnica é hoje bem difundida e conhecida como método dos elementos de contorno dual. Os trabalhos tornaram a técnica mais versátil ampliando seu campo e utilização. Nessa linha destacam-se PORTELA (1992), PORTELA et al. (1992, 1993), MI & ALIABADI (1992a, 1992b, 1994a, 1994b, 1995), MI (1996), MELLINGS & ALIABADI (1994), SOLLERO & ALIABADI (1994) e SALEH (1997), CHEN et al. (1999).

Mais recentemente houveram alguns trabalhos voltados para a modelagem de fissuras utilizando apenas a formulação singular. Nesse caso as faces da fissura são definidas muito próximas uma da outra. Esse estudo feito na EESC-USP demonstrou que esse modelo é preciso desde que as integrais sobre os elementos da fissura sejam bem avaliadas, utilizando-se para isso sub-elementação adequada ou integração analítica dos termos integrais. Resultados desses esforços estão nos trabalhos de MACIEL (2003) e LEITE (2007). Outros trabalhos tratando da simulação de descontinuidades em meios contínuos também devem ser mencionados como os de ROCHA (1988), AGOSTINHO (1998) e LEONEL (2006).

De forma a permitir a análise de uma gama maior de materiais ampliou-se o conceito de fratura englobando a fratura coesiva. Os modelos coesivos têm origem nos trabalhos de DUGDALE (1960) e BAREMBLATT (1962) e depois bastante detalhado e estudado numérica e experimentalmente nos trabalhos de HILLERBORG et. al (1976) e CARPINTERI (1992).

Nesse modelo considera-se a existência de uma zona de processo localizada à frente da região onde há a separação propriamente dita das superfícies da fissura. Nessa

zona de processo, ocorre a perda de rigidez com o aumento das micro-fissuras e a conseqüente dissipação de energia. Sendo essa zona pequena, uma possível aproximação seria considerar que a dissipação se dá numa fissura fictícia colocada à frente da fissura real. Nessa região fictícia idealiza-se uma abertura fictícia limite na qual ocorre a transferência de tensão entre as superfícies da fissura. A relação constitutiva que governa a tensão máxima na zona de processo e a abertura das faces da fissura reflete o comportamento de amolecimento.

A representação mais simples desse modelo é utilizar uma curva linear dada por dois parâmetros do material, abertura fictícia máxima e resistência máxima de tração. No entanto, na literatura há diversas outras aproximações sugeridas. Alguns recentes trabalhos importantes realizados sobre o assunto, além dos mencionados, são BARPI & VALENTE (1998), PLANAS, et. al (2003), CARPINTERI et. al. (2003), TVERGAARD (2003), ELICES et. al (2002), MAI (2002). Trabalhos em fratura utilizando outros métodos numéricos como método dos elementos finitos e métodos sem malha podem ser consultados em LEONEL (2006).

2.3 – Método dos Elementos de Contorno para Análise Não Linear

Um dos campos de grande aplicação do método dos elementos de contorno é em análises do tipo não linear. Por meio das técnicas de análise não linear é possível a abordagem mais realista de fenômenos tais como: grandes deformações, plastificação, dano em estruturas, fratura em materiais dúcteis e quase frágeis, dentre outros, que em uma análise linear não são bem representados.

No campo da análise não linear deve-se destacar o trabalho de OWEN & HINTON (1980) os quais apresentam procedimentos do tipo Newton para a resolução de problemas não lineares como os comumente encontrados em engenharia estrutural. CRISFIELD (1991) apresentou o procedimento de comprimento de arco, o qual tornou-se uma valiosa ferramenta na obtenção do equilíbrio durante o processo iterativo. Recomenda-se que esse procedimento numérico seja utilizado em problemas não lineares que apresentem o comportamento do tipo “snap-back”.

A abordagem de problemas não lineares empregando o método dos elementos de contorno pode ser encontrada em VENTURINI (1982) e em TELLES (1983), os quais empregam o esquema de resolução do problema incremental utilizando matriz

constante. Formulações utilizando o conceito de operador tangente consistente vêm sendo utilizadas, via método dos elementos finitos, a partir do trabalho de SIMO & TAYLOR (1985), enquanto que as primeiras implementações desse conceito em elementos de contorno podem ser encontradas em BONNET & MUKHERJEE (1996) e POON et al. (1998). A partir desses dois últimos trabalhos alguns trabalhos foram desenvolvidos no “Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos” podendo-se destacar BOTTA (2003) que desenvolveu uma formulação não linear para a análise numérica de sólidos danificados, considerando-se o fenômeno da localização das deformações. FUDOLI (1999) que estudou problemas de localização de deformações com plasticidade com gradiente. Já LEITE (2007) desenvolveu uma formulação para análise de sólidos bidimensionais constituídos por múltiplas regiões.

2.4 – Confiabilidade Estrutural

No contexto da engenharia, a confiabilidade é bem definida. Na engenharia de estruturas, por exemplo, pode ser entendida como a probabilidade de sobrevivência de um componente ou um sistema estrutural desde que utilizado de acordo com as especificações de projeto. Portanto, a confiabilidade é dada pelo complemento da probabilidade de se atingir um estado limite. Para avaliar o desempenho e qualidade de uma obra ou um produto com relação a sua utilização e segurança, o conceito embutido na variável confiabilidade é mais realista, inclusive sob o ponto de vista matemático, para a determinação de custos.

Podem ser citados alguns trabalhos que foram de grande importância para a evolução da confiabilidade estrutural até o ponto em que se encontra hoje. Inicialmente podem ser destacados os trabalhos de MAYER (1926) e WIERZBICKI (1936) aos quais são atribuídas as primeiras formulações matemáticas do problema de segurança estrutural. Estes pesquisadores concluíram que as cargas e os parâmetros de resistências são variáveis aleatórias e dessa forma verifica-se que para cada estrutura existe uma probabilidade de falha finita.

FREUDENTHAL (1947) aparece como o pioneiro a discutir o uso das teorias estatísticas para a avaliação da segurança estrutural. Neste trabalho é proposto que a probabilidade de falha deve ser calculada pela integração de uma região caracterizada pelas distribuições de probabilidade das variáveis, chamada de domínio de falha.

ANG & AMIN (1968) descrevem os conceitos básicos de uma análise onde pretende-se considerar as incertezas das variáveis estruturais. Os autores enfatizam que a falta de dados probabilísticos é o principal entrave para a aplicação dos conceitos em maior escala e que o procedimento de cálculo da sobrevivência (confiabilidade) é o mesmo para sistemas determinados e indeterminados. VANMARCKE (1973) descreve um método matricial geral para o cálculo da confiabilidade de estruturas em escala real que leva em conta as correlações entre os modos de falha do sistema. O trabalho dispôs-se a apresentar um procedimento de otimização do peso da estrutura com restrição de confiabilidade, permitindo levar em conta o desempenho e a segurança ao mesmo tempo.

No entanto foi a partir do trabalho de HASOFER & LIND (1974) que foram possíveis aplicações práticas da teoria da confiabilidade. Neste trabalho os pesquisadores propõem a definição de um índice denominado *índice de confiabilidade* obtido a partir de medidas no espaço normal padrão. Nesse trabalho foi proposto que a função de estado limite deve ser avaliada no ponto de projeto e não mais com base na média das variáveis. O ponto de projeto é o ponto, sob a equação de estado limite, com a maior probabilidade de ocorrência. A partir daí obtém-se o índice de confiabilidade como sendo a distância da origem do sistema de coordenadas no espaço normal padrão até o ponto de projeto localizado na superfície de falha da estrutura.

A formulação de um procedimento numérico iterativo para o cálculo do índice de confiabilidade foi feito no trabalho de RACKWITZ & FIESSLER (1978). Nesse método as funções de probabilidades das variáveis são consideradas. Portanto podem ser consideradas variáveis cuja distribuição seja não gaussiana. Nesse caso são necessárias transformações de forma a considerar estas variáveis como gaussianas equivalentes.

A análise de sistemas estruturais é efetuada em MELCHERS (1983). Neste trabalho é estudada a representação em paralelo para avaliar a confiabilidade de sistemas estruturais. Destaca-se nesse trabalho a importância em se considerar a correlação entre elementos estruturais para a correta determinação da probabilidade global de ruína.

Em MADSEN (1988) é efetuada a análise dos fatores de sensibilidade do problema de confiabilidade. Esses fatores indicam a influência das variáveis aleatórias no valor do índice de confiabilidade. Dessa forma é possível selecionar as variáveis aleatórias que realmente são importantes no problema considerado, possibilitando assim

uma resolução mais rápida sem perda significativa de precisão na determinação da probabilidade de falha da estrutura.

Um algoritmo adaptativo baseado no método da superfície de resposta (MSR) é apresentado em ENEVOLDSEN, FABER & SORENSEN (1994). A técnica é formulada utilizando-se apenas o plano de experiência composto e pode ser dividida em duas etapas. Na primeira etapa, o domínio que contém o ponto de projeto é determinado em um processo de busca global. Na segunda etapa, uma superfície de resposta mais precisa é encontrada em torno do mesmo ponto de falha definido na etapa anterior, caracterizando um processo de busca local. A grande evolução deste algoritmo encontra-se no fato de que, após o cálculo do ponto de projeto da próxima iteração do MSR, verifica-se se o ponto encontrado está no domínio definido por uma distância máxima entre o centro do plano composto e o ponto de canto que constitui o plano. Se o ponto encontrado estiver fora dos limites definidos por essa distância máxima, reinicia-se o processo com uma nova distância máxima. Procedendo dessa forma, os autores afirmam que se obtém estabilidade numérica no processo de busca do ponto mais provável de falha e, conseqüentemente, na estimativa do índice de confiabilidade.

Já TURK, RAMIREZ & COROTIS (1994) fazem uma abordagem simples sobre o MRS, enfatizando suas vantagens sobre os métodos tradicionais de confiabilidade, tais como as simulações de Monte Carlo e os métodos de segundo momento com aproximações em primeira ordem. No entanto alertam para o fato da precisão do modelo mecânico para a correta definição de falha da estrutura.

Os pesquisadores KIM & NA (1997) propõem uma melhoria para o MSR através da determinação de novos pontos amostrais (plano de experiência) através da técnica do vetor projetado. Os novos pontos são posicionados próximos à função de estado limite original pela projeção dos pontos amostrais convencionais sobre a superfície de resposta obtida na iteração anterior. Assim tem-se uma ligeira perturbação desses pontos próximos do ponto de projeto na superfície de falha. Os autores garantem que funções lineares para aproximar a superfície de falha podem ser utilizadas no lugar de polinômios quadráticos, bem como métodos de primeira ordem para o cálculo do índice de confiabilidade. Além disso, a técnica permite diminuir o erro existente entre a superfície de falha aproximada e a função de estado limite real do problema.

Uma avaliação sobre a precisão de um novo MSR é feita no trabalho de FALSONE & IMPOLLONIA (2004). Na verdade, esta nova metodologia, também proposta pelos mesmos autores, considera como função de desempenho, uma relação

entre os graus de liberdade do elemento finito escolhido na análise e os coeficientes do polinômio aproximador da superfície de resposta. Nessa análise, os autores desconsideram o termo cruzado do polinômio de segundo grau. Concluem que a técnica é exata para estruturas estaticamente determinadas e que, para as estruturas hiperestáticas, o método apresenta precisão bastante significativa não importando o grau de hiperestaticidades da estrutura.

A teoria da confiabilidade é especialmente importante na análise probabilística de estruturas submetidas à fadiga. Além de ser esta uma das principais causas de ruína em estruturas, no processo de fadiga estão envolvidos diversos processos cujos parâmetros apresentam grande variabilidade, como mostra BECK (2003). Como conseqüência dessa grande variabilidade, principalmente encontrada nos resultados de análises experimentais, pesquisas sobre o assunto tem recebido grande atenção. Juntamente com o desenvolvimento da mecânica da fratura e a necessidade de análises de confiabilidade e avaliação de risco para algumas estruturas importantes como plantas nucleares, aviões, navios entre outros, a mecânica da fratura probabilística começou a desenvolver-se, como mostrado nos trabalhos de PROVAN (1987) e BOGDANOFF & KOZIN (1985).

Um dos mais importantes tópicos da mecânica da fratura probabilística é a modelagem probabilística da propagação de fissuras sob fadiga. Muitos modelos foram propostos baseando-se simplesmente no ajuste de curvas sob resultados experimentais de crescimento de fissuras. Esses modelos têm sido criticados por alguns pesquisadores uma vez que não retratam a realidade geral do problema de fadiga, como mostrado nos trabalhos de YANG & MANNING (1990) e SOBCZYK & SPENCER (1992).

Diversos são os trabalhos que abordam as incertezas no processo de crescimento de fissuras sob fadiga. Dentre esses podem ser destacadas as pesquisas de HOEPPNER & KRUPP (1974), SCHWALBE (1974), CHAND & GARG (1985), FREUDENTHAL & GUMBEL (1953), SOBCZYK & SPENCER (1992), ROCHA & SCHUELLER (1996) e BECK & MELCHERS (2004) onde é discutida a variabilidades encontrada nos parâmetros que governam o processo de fadiga e também a dificuldade em se determinar a correlação entre esses parâmetros.

No trabalho de VIRKLER et al. (1979) é apresentada uma análise estatística, baseada nos resultados experimentais de estruturas submetidas a fadiga, onde são discutidas as incertezas presentes no processo de crescimento de fissuras de estruturas nessa situação. Com base em seus resultados experimentais esses autores mostram a

importância da abordagem estatística no processo de crescimento de fissuras uma vez que as incertezas incidem sobre as variáveis presentes nas leis de crescimento de fissuras. GHONEM & DORE (1987) apresentam um estudo experimental e teórico sobre o processo de propagação de fissuras em estruturas submetidas à fadiga. Nesse trabalho os autores utilizam um modelo teórico por eles mesmos desenvolvido em GHONEM & DORE (1985), o qual é baseado no processo de Markov. Esse modelo teórico depende de parâmetros obtidos em análises experimentais, não sendo necessária uma lei para descrever o crescimento da fissura em função da vida útil estrutural. Os resultados desse modelo mostram-se precisos quando comparados às respostas experimentais.

O desenvolvimento de modelos de confiabilidade para a análise de fadiga, baseando-se nas deformações da estrutura, tem também sido alvo de pesquisas. Esse estudo se aplica principalmente nas indústrias de geração de energia onde esse tipo de abordagem é mais adequada que a análise de fadiga via tensões. Nesse campo destacam-se os trabalhos de WIRSCHING et al. (1991), ZHAO (2000) e BARGMANN et al. (1994) onde são apresentados modelos baseados em resultados experimentais de ensaios cíclicos de deformação para determinação da vida útil estrutural.

Muitas pesquisas têm sido dedicadas ao estudo do crescimento de fissuras curtas, ou seja, das fissuras que crescem na região denominada de primário como os trabalhos de NEWMAN (1994) e DOLLEY & WEI (1998). Diferentes são os modelos probabilísticos propostos para descrever o crescimento de fissuras nessa região que, juntamente com os modelos que descrevem a região II (secundário), permitem uma melhor estimativa da vida útil estrutural.

Algumas pesquisas têm focado na abordagem numérica deste problema. Nesses casos os algoritmos de confiabilidade são acoplados a métodos numéricos como os métodos dos elementos finitos e elementos de contorno. Apesar do grande potencial que resulta desses modelos, não são muitos os trabalhos que abordam o assunto.

Um modelo resultante do acoplamento entre o método dos elementos finitos e os métodos de primeira e segunda ordem (FORM e SORM) para a análise de problemas estruturais elásticos lineares é mostrada em DER KIUREGHIAN & KE (1988). Esse mesmo tipo de acoplamento é também utilizado em LIU & DER KIUREGHIAN (1991) para o tratamento de problemas com não linearidade geométrica e em BESTERFIELD et al. (1991) para a análise probabilística de estruturas submetidas à fadiga. Esses modelos levaram a interessantes resultados mostrando a eficiência dos métodos FORM

e SORM na análise de confiabilidade. Um modelo do método dos elementos finitos estocásticos é acoplado ao MSR em FARAVELLI (1986, 1989) para a avaliação de incertezas e confiabilidade de um sistema estrutural mecânico com alto grau de não linearidade.

Entretanto, em muitos casos, particularmente em mecânica da fratura, fadiga e propagação de fissuras, o método dos elementos de contorno torna-se uma opção mais atrativa se comparado ao método dos elementos finitos, devido a sua precisão e eficiência nesse tipo de problema, além da redução de dimensionalidade da malha, o que possibilita mais facilmente a análise do crescimento de fissuras. Destaca-se nesse campo de pesquisa o trabalho de LUA et al. (1992) onde um modelo do método dos elementos de contorno estocásticos é acoplado ao MSR para a análise de fadiga em estruturas. Como pode ser observado, são poucos os trabalhos que acoplam o método dos elementos de contorno a modelos de confiabilidade, o que inclusive motiva o desenvolvimento desse trabalho.

Outra interessante aplicação dos modelos de confiabilidade é encontrada quando estes são acoplados a modelos de otimização. No tocante à fadiga verifica-se que nos últimos anos a filosofia de tolerância ao dano, utilizada para a concepção de estruturas submetidas à fadiga, tem superado abordagens mais tradicionais como “safe life design” e “infinite life design” como mostrado em GRANDT JR (2004). Em um projeto tolerante ao dano assume-se que o componente estrutural tem já um dano inicial no instante em que este entra em serviço. Porém, nessa abordagem o objetivo da concepção estrutural concentra-se na habilidade do componente em resistir a um determinado dano durante um dado período de tempo.

De uma forma geral, a concepção de um projeto por meio da abordagem de tolerância ao dano pode ser dividida em três etapas principais, as quais são: previsão sobre a criação de uma microfissura, modelagem do crescimento da microfissura e finalmente determinação dos intervalos de inspeção. Os dois primeiros casos são largamente estudados na teoria de fadiga. Já o último trata de técnicas não destrutivas de detecção de fissuras dentro de um planejamento de inspeção. Levando-se em conta o fato de que a taxa de propagação das fissuras, bem como seu comprimento, são pequenos no início da vida útil estrutural, tornando difícil sua detecção nessa etapa, um número suficiente mas não excessivo de inspeções precisa ser planejado para se obter o máximo benefício da abordagem de tolerância ao dano. Como verbas para manutenção e reabilitação são quase sempre limitadas, a utilização de modelos probabilísticos

acoplados a modelos de otimização torna-se uma valiosa ferramenta para racionalização das ações de manutenção e gerenciamento de sistemas estruturais. YANG & TRAPP (1975) foram os primeiros a formular o problema da determinação de frequência ótima de inspeção como um problema de minimização com restrições. Eles indicaram que várias variáveis incluindo frequência das inspeções e qualidade da inspeção podem ser ajustadas com o objetivo de minimizar uma função custo pré definida. MIZUTANI & FUJIMOTO (1994) apresentaram um método de minimização seqüencial cujo objetivo é apontar uma estratégia de inspeção ótima para que o custo total esperado no período entre a atual inspeção e a próxima seja mínima. TANAKA & TOYODA-MAKINO (1998) investigaram um plano de inspeção ótimo, considerando uma única inspeção, baseando-se em uma função de mínimo custo. Nesse trabalho o crescimento das fissuras é considerado por meio de um modelo de crescimento difuso de fissuras. Mais tarde TOYODA-MAKINO (1999) estendeu este trabalho para o caso de múltiplas inspeções. Metodologia de otimização baseada na previsão da vida útil estrutural para inspeções e reabilitação de estruturas que deterioram ao longo do tempo devido a fatores outros que fadiga também tem sido considerados como em FRANGOPOL et al (1997) o qual analisa vigas de seção T em pontes ferroviárias que se deterioram devido a corrosão. Conceitos probabilísticos são aplicados com sucesso nas ações de planejamento de manutenção e reabilitação em estruturas offshore como mostrado em MADSEN et al (1989) e GOYET e MAROINI(1996). Estruturas soldadas também são consideradas como nos trabalhos de CREMONA (1996) e LUKIC & CREMONA (2001). Nesse trabalho os autores consideram que o crescimento de fissuras em juntas soldadas é governado por uma expressão analítica, sobre a qual é feita a análise de confiabilidade. Com base nas probabilidades de ruína obtidas é efetuada a análise de otimização para a determinação dos intervalos de inspeção que produzem o mínimo custo de inspeção. KULKARNI & ACHENBACH (2007) efetuam análise semelhante, porém a aplicam ao crescimento de fissuras em estruturas planas. Nesse trabalho os autores empregam o algoritmo “*Sequential Quadratic Programming*” (SQP) para o desenvolvimento da análise de otimização.

Dentre as pesquisas na área de confiabilidade estrutural pode-se destacar inicialmente algumas que foram tema de trabalhos desenvolvidos no “Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos”. Por exemplo SOARES (2001) abordou a análise pórticos planos, NEVES (2004) analisou estruturas em grelha e NOGUEIRA (2005) tratou problemas de pórticos planos tendo como

modelo mecânico um modelo de dano. Em comum nesses trabalhos foram desenvolvidos modelos mecano-confiabilístico voltados à análise de segurança de estruturas de concreto armado.

2.5 – Fadiga em Estruturas

A palavra fadiga é originária do vocábulo latim *fatigare* que significa cansar. Apesar de comumente associada ao estado físico e mental de pessoas esse termo é largamente aceito e empregado no vocabulário de engenharia para designar dano e ruína em materiais sujeitos ao regime de cargas cíclicas. Fadiga pode ser definida como o conjunto de processos necessários para a mudança das propriedades internas de materiais, devido a aplicações repetidas de tensões e deformações, em especial a mudanças que causam fissuração e ruína.

O primeiro estudo de fadiga em metais foi desenvolvido por ALBERT (1838), o qual conduziu testes em correntes utilizadas em minas. Depois deste trabalho o interesse no estudo de fadiga cresceu, no entanto, este deveu-se principalmente ao grande aumento no uso de materiais metálicos particularmente em ferrovias e estruturas de pontes. A primeira pesquisa detalhada sobre fadiga em metais iniciou-se, segundo SMITH (1910), em 1942 após um catastrófico acidente próximo a Versailles, França, que culminou com a perda de diversas vidas. A causa do acidente foi atribuída à falha, por fadiga, do eixo frontal da locomotiva.

RANKINE (1843) reconheceu uma importante característica em estruturas que apresentam entalhes e concentradores de tensão. Essas estruturas são mais sensíveis a ação da fadiga, ou seja, nesses tipos de estruturas falhas ocorrem após um número de ciclos de carga menor que em estruturas que não apresentam tal característica.

Pesquisas em fratura e fadiga foram conduzidas por BRAITHWAITE (1854), o qual empregou o termo fadiga exclusivamente para denotar a fissuração em metais sob cargas repetidas. Entretanto, a introdução do termo fadiga para designar fissuração e ruína em estruturas é creditada a PONCELET (1839), o qual estudou a falha em ligações metálicas.

WÖHLER (1860) caracterizou o comportamento de materiais sob solicitação cíclica com curvas do tipo “ σ -N”, relacionando tensão máxima ao número de ciclos para ruptura. GERBER (1874) pesquisou metodologias para o desenvolvimento de

projetos considerando os efeitos da fadiga. Suas contribuições incluem uma metodologia para o cálculo de vida útil em estruturas sujeitas a diferentes níveis de tensões cíclicas.

O fato da possibilidade do limite elástico, em metais sujeitos a carregamentos cíclicos, ser diferente do observado em estados monotônicos de carregamento foi introduzida por BAUSCHINGER (1886). Além de confirmar alguns resultados de WÖHLER (1860) seu trabalho identifica a ocorrência de ciclos de amolecimento e encruamento nos carregamentos reversos.

BASQUIM (1910) propôs leis empíricas para a caracterização de curvas “ σ -N” de metais. Seu trabalho mostrou que curvas em escala log x log, de tensão por número de ciclos, resultam em uma relação linear para estados de tensão próximos à resistência do material.

A partir de 1920 o campo de fadiga envolveu um maior número de pesquisadores e também de linhas de atuação. Nesse período podem ser destacados McADAM (1926) que estudou fadiga sob corrosão em metais. Modelos de acumulação de dano para ruína sob fadiga foi alvo das pesquisas de PALMGREN (1924). Os efeitos de entalhes e concentradores de tensão em carregamentos monotônico e cíclicos foram estudados por NEUBER (1946), enquanto fadiga sob carregamentos variáveis foi tratado por LANGER (1937). Teorias estatísticas e resistência de materiais foram alvo dos estudos de WEIBULL (1939).

De grande importância também são os trabalhos de GRIFFITH (1921) e IRWIN (1957) os quais forneceram substanciais contribuições para o desenvolvimento da mecânica da fratura elástico linear. Por meio dessa teoria verifica-se que a magnitude da singularidade de tensão à frente da ponta da fissura pode ser expressa através de um escalar denominado fator de intensidade de tensão, K . Nesse contexto PARIS, GOMEZ e ANDERSON (1961) e PARIS & ERDOGAN (1963) foram os primeiros a sugerir que o incremento no comprimento da fissura por ciclo, da/dN , poderia ser relacionado à amplitude de variação do fator de intensidade de tensão, ΔK .

Atenção foi dada também ao crescimento sub-crítico das fissuras como em NEUMANN (1969) e McCLINTOCK (1963). Houve também o interesse no estudo de processos em que ΔK poderia se alterar durante a história do avanço da ponta da fissura. Nesse campo destaca-se ELBER (1970), que mostrou que as faces da fissura, sob regime de fadiga, podem fechar-se mesmo antes da retirada total do carregamento

atuante devido a presença de uma região plástica próxima a ponta da fissura. Esse resultado implica que a taxa de crescimento das fissuras pode não mais ser determinada pelo valor nominal de ΔK , mas sim por meio de um valor efetivo, o qual é avaliado segundo a rugosidade das faces das fissuras presentes no corpo em análise.

A maioria dos trabalhos e pesquisas em fadiga reporta-se a materiais metálicos. No entanto grande interesse também tem surgido no estudo de fadiga em materiais não metálicos e compostos, os quais apresentam grande potencialidade de aplicação nas áreas mecânica, térmica e ambiental. Nesse campo podem ser destacados os trabalhos de ROEBBEN et. al (1996) e CARPINTERI et. al. (2006). Destacam-se também os trabalhos de SURESH (2004) e SAXENA (1998), os quais apresentam diversos resultados experimentais e várias leis de crescimento de fissuras em fadiga, além de abordar diversos aspectos referentes à ciência dos materiais para a explicação do fenômeno da fadiga

Com relação à modelagem numérica do problema de fadiga pode-se destacar CISILINO & ALIABADI (1999) os quais conduziram análises elásticas e elastoplásticas, via método dos elementos de contorno, da propagação de fissuras em meios tridimensionais. YANG et al. (2001) utilizam esse mesmo método numérico para a realização de análises do crescimento de fissuras em estruturas planas considerando materiais quase-frágeis. A análise de fadiga em corpos com múltiplas fissuras é tratada em YAN (2006) para materiais que são regidos pela mecânica da fratura elástico linear, enquanto o acoplamento método dos elementos finitos e método dos elementos de contorno é utilizado por SEKINE et. al (2005) para a consideração de estruturas reforçadas com FRP. Problemas térmicos e fadiga são tratados em KHATIR & LEFEBVRE (2004) e fadiga sob corrosão em JIVKOV (2004).

Embora menos estudado, o fenômeno da propagação de fissuras devido à fadiga é de grande importância também para os materiais quase-frágeis Para a fratura coesiva alguns trabalhos importantes que procuram descrever as condições de carga e descarga necessárias para a definição da fadiga são: BAZANT & LI (1995), BAZANT & LI (1997), BEGLEY et al (1997), XU & NEEDLEMAN (1994), ORTIZ (1996), BUYUKOZTURK & HEARING (1998), YANG & RAVI-CHANDAR (1998a), de ANDRÉS (1999), YANG, et al (2001), ROE & SIEGMUND (2003), e LI & CHANDRA (2003). Além da fadiga em fratura coesiva, outro assunto de grande interesse é a fadiga ao longo de interfaces, isto é, a influência da fadiga nos processo de delaminação e perda de aderência. Nesse caso, o efeito do dano acumulado pode

também ser calculado utilizando-se modelos similares aos propostos para a fratura coesiva e dano contínuo, YANG et al. (2003). Usando o método dos elementos de contorno foram pouquíssimos os trabalhos sobre fadiga coesiva que aparecem na literatura, podendo-se destacar: YANG & RAVI-CHANDAR (1998b) e YANG et al (2001).

2.6 – Mecânica do Contato

A mecânica do contato é um importante tópico dentro do campo da mecânica dos sólidos e que nos últimos anos tem recebido atenção especial de pesquisadores pela sua complexidade e importância tecnológica. O conhecimento sobre o comportamento de superfícies em contato é de grande importância principalmente nas indústrias mecânica, aeronáutica e naval, onde a transferência de carga é efetuada pelo contato entre componentes estruturais, como em engrenagens, conectores, juntas e fissuras.

O primeiro trabalho que trata do problema de contato deve-se a HERTZ (1882). Este analisou o contato, sem a consideração de atrito entre as superfícies, em sólidos bidimensionais deformáveis. Apesar do tratamento simplificado dado ao problema, esse trabalho forneceu sólidos conceitos para o desenvolvimento de teorias mais gerais sobre o assunto. Mas tarde GALIN (1961) estendeu as proposições de MUSKHELISHVILI (1953) para problemas tridimensionais sem a consideração de atrito entre as superfícies envolvidas. Destacam-se também os trabalhos de GLADWELL (1980) e JOHNSON (1985), os quais abrangem aspectos teóricos importantes e diversas aplicações em problemas de engenharia. KIKUCHI & ODEN (1988) tratam do desenvolvimento da base teórica para a análise de problemas de contato com e sem atrito para a aplicação em técnicas variacionais e elementos finitos.

Apesar do grande desenvolvimento teórico observado na mecânica do contato, o tratamento de problemas de contato mais complexos somente é possível com a utilização de aplicativos numéricos. Os modelos numéricos permitem a abordagem de problemas com geometrias e condições de contorno complexas. Além de tratar de forma mais consistente a natureza não linear presente nos problemas com atrito.

Nesse sentido podem ser destacadas algumas formulações numéricas que são utilizadas com êxito no tratamento desse problema, as quais são baseadas no método dos elementos de contorno, métodos das penalidades, multiplicadores de Lagrange e

programação matemática. Apesar de serem abordagens diferentes, a idéia básica envolvida na solução do problema de contato e a mesma, ou seja, quando os corpos não estão em contato ocorre o movimento relativo entre eles, enquanto que na condição de contato as forças presentes no contato precisam ser conhecidas.

Para a modelagem de problemas de contato pelo método das penalidades, inicialmente deve ser efetuado o acoplamento dos graus de liberdade nas regiões propensas à ocorrência do contato. A partir de então é monitorado o valor da abertura (separação) entre as superfícies envolvidas para a determinação da condição de penetração. No caso da ocorrência do contato, ou seja, valor da abertura menor ou igual a zero, a condição de penalidade será ativada e os valores das forças na região do contato estarão associados aos dos deslocamentos nessa região através do fator de penalidade. Nessa abordagem destacam-se os trabalhos de JIANG & ROGERS (1988), DONIDA et. al (1990), BAYRAM & NIED (2000) e MURADOVA & STAVROULAKIS (2007).

Uma abordagem alternativa a apresentada é a que relaciona os graus de liberdade do problema de contato à multiplicadores de Lagrange. Por meio dessa técnica, variáveis adicionais são introduzidas no sistema, as quais fornecerão as forças no contato. Podem ser citados os trabalhos de BATHE & CHAUDHARY (1985), PASCOE & MOTTERSHEAD (1988) e PAPADOPOULOS & SOLBERG (1998), que aplicam com sucesso essa técnica na análise de problemas de contato com atrito sob condições estática e dinâmica.

A abordagem do problema de contato através de programação matemática consiste basicamente na realização de um processo de minimização com restrição acompanhada de condições de complementaridade. A minimização é formulada como um processo de programação matemática e a solução é obtida usando procedimentos incrementais de programação linear ou quadrática. O problema de minimização pode também ser formulado com condições de desigualdades variacionais usando funções de penalidade para atrito como em KLARBRING & BJORKKMAN (1988). Extensas pesquisas com essa técnica têm sido propostas para a análise de problemas de contato com e sem atrito. Esse método apresenta a vantagem que todas as condições de contorno, incluindo as condições de contato, são incorporadas em uma única desigualdade variacional e qualquer método de minimização pode ser empregado na solução do problema. Destacam-se nessa técnica GONZALEZ & ABASCAL (2000),

PANAGIOTOPOULOS & STAVROULAKIS (1988), STAVROULAKIS & ANTES (2000).

Para a análise de problemas de contato via método dos elementos de contorno os graus de liberdade na zona do contato são obtidos aplicando-se as condições de equilíbrio e compatibilidade nos nós presentes nessa região. A condição de contato é determinada a partir do monitoramento da abertura presente entre as superfícies envolvidas. Quando o valor da abertura obtida na análise é positivo verifica-se a condição de separação e assim o contato não ocorre. Quando a abertura é negativa a condição de penetração nula é violada e as condições de equilíbrio e compatibilidade devem ser impostas.

A primeira aplicação do método dos elementos de contorno baseado nesta metodologia foi desenvolvida por ANDERSSON (1982). Já KARAMI (1987) e PARIS & GARRIDO (1985) analisaram estruturas bidimensionais utilizando elementos quadráticos contínuos e descontínuos. MAN (1994) e ALIABADI (2002) analisaram diversos tipos de estruturas através da técnica de sub-regiões e mostraram que a solução obtida empregando elementos de contorno lineares é melhor e mais estável que a fornecida por elementos quadráticos. GONZALEZ & ABASCAL (1998) analisam problemas de contato entre cilindros empregando a lei de atrito de Coulomb. CHEN & CHEN (1998) e NJIWA & STEBUT (2004) utilizam essa mesma lei de atrito na análise de problemas envolvendo fissuras enquanto GUN (2004) realizou uma análise tridimensional elastoplástica considerando o efeito de atrito em placas com inclusões rígidas. Problemas de contato em materiais anisotrópicos são tratados em BLAZQUEZ et. al (2006).

2.7 – Acoplamento entre o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos

A idéia de acoplar o método dos elementos de contorno (MEC) com outro método numérico, em particular com o método dos elementos finitos (MEF), sempre foi atrativa para os pesquisadores. A combinação entre os diversos métodos numéricos é um assunto de grande interesse, pois possibilita empregar o método numérico mais conveniente na representação da sub-estrutura onde este apresenta melhor eficiência, aproveitando melhor as particularidades de cada um.

Além de alguns dos trabalhos já citados no item 2.1, podem ser destacados também os esforços de BREBBIA & GEORGIO (1980), os quais analisaram problemas bidimensionais através da combinação MEC-MEF. Os autores combinaram elementos de contorno constantes com elementos finitos quadráticos e, apesar dos diferentes graus de aproximação utilizados, foram obtidos bons resultados. MUSTOE & VOLAIT (1980) também estudaram a combinação MEC-MEF para analisar a interação túnel-suporte considerando os efeitos da descontinuidade entre rocha e concreto. Problemas envolvendo escavações reforçadas são também tratados em STAMOS & BESKOS (1995) enquanto que aplicações em problemas planos podem ser encontradas em VALLABHAN & SIVAKUMAR (1986) e em PAVLATOS & BESKOS (1994) sendo que nesse último trabalho os autores desenvolvem um esquema de acoplamento no domínio do tempo para a análise dinâmica de estruturas elastoplásticas. Aplicações do acoplamento para análise de distribuição de tensões em problemas de engenharia são apresentados em CODA et. al (1999) e CODA & VENTURINI (1999).

Diversos são os trabalhos que abordam o acoplamento MEC-MEF em problemas de interação solo-estrutura. Nesse tipo de problema o solo é na maioria dos casos representado pelo MEC, já que este pode ser tratado como um domínio infinito, enquanto a super-estrutura e as fundações são simuladas pelo MEF, geralmente empregando-se elementos finitos de barras. Nesse campo de pesquisa podem ser citados os trabalhos de FERRO & VENTURINI (1992) que aplicaram a combinação MEC-MEF para analisar a interação entre estacas e o solo. As estacas são consideradas como elementos de barra modelados pelo MEF e, o solo como um domínio infinito, tridimensional, homogêneo, elástico linear e tratado pelo MEC. Com isto, resulta um modelo tridimensional enrijecido. Já em PAIVA (1993), foi apresentada uma formulação para a análise de placas elásticas em que a representação integral discretizada de Stern é alterada, de forma que a força equivalente de Kirchhoff é admitida concentrada nos pontos nodais ao longo do contorno. MENDONCA & PAIVA (2003) utilizam o acoplamento MEC-MEF no tratamento de problemas de interação solo-fundação sendo o primeiro tratado pelo MEC enquanto no segundo, estacas e radiers, é empregado o MEF.

CODA (2001) apresenta uma análise do comportamento não-linear dinâmico e estático de meios reforçados através de uma abordagem do acoplamento MEC-MEF, onde o MEF é utilizado para representar os reforços no meio discretizado pelo MEC. MESQUITA & CODA (2007) apresentam uma formulação, utilizando o acoplamento

MEC-MEF, para a abordagem de problemas viscoelásticos, enquanto formulações desse acoplamento para o tratamento de problemas envolvendo interação fluido estrutura são apresentados em MARQUEZ et al. (2004).

LEITE et al. (2003) apresentaram um estudo bidimensional de sólidos reforçados com barras usando o MEC. Estes reforços são simulados via sub-regiões onde é feita uma redução dos graus de liberdade do contorno através de uma aproximação linear de deslocamento da seção transversal do enrijecedor, fazendo a integração da solução fundamental de Kelvin de forma totalmente analítica, tanto para as integrais singulares como para as não singulares. FERNANDES & VENTURINI (2002) também aplicam a técnica de redução de graus de liberdade no acoplamento MEC-MEC, para problemas em placas.

BOTTA (2003) desenvolveu o acoplamento MEC-MEF em chapas, estudando problemas de contato, na interface entre o domínio e o enrijecedor. Para minimizar perturbações indesejáveis nos resultados na interface é aplicada à técnica de suavização do contorno com mínimos quadrados.

Problemas envolvendo mecânica da fratura são tratados em AOUR et al. (2007). Nesse trabalho o acoplamento MEC-MEF é desenvolvido de tal forma que nas faces da fissura são empregados elementos de contorno, enquanto no restante do corpo analisado são utilizados elementos finitos. Nesse trabalho os autores obtiveram bons resultados na obtenção dos fatores de intensidade de tensão.

3. – Mecânica da Fratura e Contato

Com o advento da revolução industrial o emprego do aço e também de outros materiais metálicos em aplicações estruturais ganhou forte impulso. Destacam-se nesse período as estruturas de caldeiras a vapor, largamente empregadas nas indústrias e em meios de transporte como trens. No século XX as grandes guerras mundiais foram eventos que proporcionaram também grande aplicação aos materiais metálicos.

Apesar do amplo emprego estrutural dos metais, diversas estruturas apresentaram falhas sob níveis de carregamento muito inferiores aos previstos no projeto. Dentre as falhas mais conhecidas destacam-se a dos navios “Liberty”, BROEK (1986). Dos 2.500 navios produzidos para a II Guerra mundial 145 partiram-se ao meio (ainda parado nas docas) e 700 apresentaram danos que impossibilitaram sua utilização. A explicação para esse grande prejuízo pode ser obtida atentando-se para falhas inerentes aos materiais constituintes da estrutura. Nesse período o processo de fabricação dos metais ainda era consideravelmente deficiente. Assim, micro-falhas pré-existentes nos materiais davam início a um progressivo processo de fraturamento levando a estrutura ao colapso.

Como forma de solucionar esses problemas, que já se arrastavam desde o século XIX, deu-se início ao estudo da mecânica da fratura elástico linear. As teorias da mecânica da fratura elástico linear tornaram-se uma poderosa ferramenta para a análise e resolução de problemas envolvendo fissuras cuja zona de comportamento não linear a frente da fissura seja desprezível, ou seja, materiais de comportamento frágil na ruptura. O primeiro trabalho a tratar o problema de fissuras deve-se a KIRCH (1898) o qual propôs uma solução para um problema clássico da mecânica da fratura, uma chapa infinita com uma fissura central, conhecida como solução de Kirch. Os trabalhos em mecânica da fratura continuaram e em 1921 Griffith analisou o problema da propagação de fissuras em vidros. A formulação empregada por Griffith consistia na realização de um balanço de energia no qual se verifica a propagação da fissura quando ocorre

redução da energia total da estrutura. Esta diminuição (dissipação) da energia é utilizada na criação de novas superfícies para a fissura. Para maiores detalhes sobre os temas discutidos neste capítulo sugere-se consultar GDOUTOS (1990), EWALDS & WANHILL (1984) e SHAH et AL (1995) além das referências citadas neste capítulo.

3.1 – Balanço de Energia de Griffith

Durante o fenômeno de fratura ocorre o crescimento das fissuras pré-existentes no sólido. Com isso, novas superfícies para estas são criadas, caracterizando um processo não conservativo de energia. Dessa forma, a realização de um balanço de energia, ou seja, a procura pelo ponto a partir do qual a variação de energia total em relação ao comprimento da fissura é nula, foi a solução encontrada por Griffith para a modelagem do crescimento das fissuras conforme ilustra a Fig. (3.1).

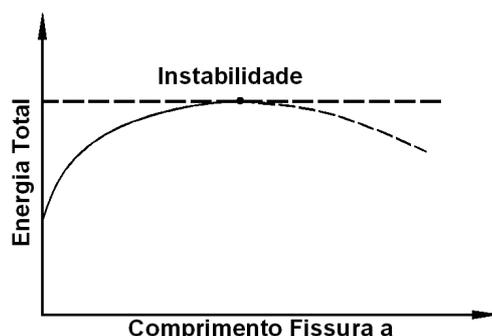


Figura 3.1 Evolução da energia com o aumento do comprimento da fissura.

Empregando a 1ª lei da termodinâmica é possível decompor a energia total presente no sistema corpo fissurado/carregamento externo. Segundo esta lei pode-se verificar que o trabalho realizado pelos carregamentos atuantes, somado à energia térmica aplicada ao corpo é igual a variação das energias potencial interna e cinética além da energia dissipada pelo corpo com o aumento das superfícies da fissura. Essa igualdade de energia é apresentada na Eq. (3.1), ressaltando que o ponto sobre as variáveis denota variação no tempo, ou seja, representa o valor da grandeza em um determinado instante.

$$\dot{W} + \dot{Q} = \dot{Y} + \dot{O} + \dot{Z} \quad (3.1)$$

em que: \dot{W} é o trabalho das forças externas, $\dot{W} = \int_{\sum T} P_k \cdot \dot{u}_k dT + \int_{\Omega} \rho \cdot b_k \cdot \dot{u}_k d\Omega$, sendo ρ a densidade do material, $\sum T$ é o somatório do contorno onde atuam as forças de

superfície e Ω é o domínio do corpo. \dot{Q} representa a energia térmica fornecida.

$$\dot{Q} = \int_{\sum q} \dot{q}_k \cdot \eta_k dq + \int_{\Omega} \rho \cdot \dot{h}_u d\Omega, \text{ sendo } q \text{ o vetor de condução de calor por unidade de}$$

superfície, h_u são as fontes unitárias por unidade de massa e $\sum q$ indica as superfícies

sob as quais estão aplicados os carregamentos térmicos. \dot{Y} é a energia potencial interna.

$$\dot{Y} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho \cdot \lambda d\Omega \right), \lambda \text{ é a densidade de energia interna por unidade de massa. } \dot{O} \text{ é a}$$

$$\text{energia cinética. } \dot{O} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \dot{u}_k \cdot \dot{u}_k d\Omega \right) \text{ e } \dot{Z} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\sum A} \gamma dA \right), \gamma \text{ é a energia necessária}$$

para a formação de novas superfícies (unitárias) da fissura.

Em muitos problemas de engenharia, dentre os quais enquadram-se aqueles tratados neste trabalho, pode-se admitir que a propagação das fissuras ocorre de forma quase estática. Nessa condição os campos de velocidades de deslocamento, \dot{u}_k , desenvolvidos no corpo são pequenos e assim a variação da energia cinética, \dot{O} , que é proporcional ao quadrado dessa grandeza, pode ser desprezada (deve-se destacar que essa parcela não pode ser omitida em problemas envolvendo campos dinâmicos).

Outra parcela que pode ser omitida, ainda considerando os problemas tratados neste trabalho, refere-se a da energia térmica \dot{Q} . Isso ocorre devido ao fato de carregamentos térmicos não serem objeto dos estudos aqui propostos. Assim a propagação das fissuras ocorrerá sob condições adiabáticas. De acordo com as condições descritas pode-se reescrever o balanço de energia apresentado na Eq. (3.1) da seguinte forma:

$$\dot{W} = \dot{Y} + \dot{Z} \quad (3.2)$$

Para os problemas onde a Eq. (3.2) é válida, as mudanças que ocorrem ao longo do tempo são causadas por variações no comprimento das fissuras. Assim, pode-se minimizar esta expressão, diferenciando seus termos em relação ao comprimento da fissura, a , de forma a se determinar as condições segundo as quais ocorrerá o crescimento das fissuras. Sendo assim tem-se:

$$\frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial Y}{\partial a} = \frac{\partial Z}{\partial a} \quad (3.3)$$

Realizando uma breve análise dos termos da Eq. (3.3) pode-se constatar que o termo $\partial W/\partial a$ representa a variação de energia, em relação ao comprimento da fissura, decorrente do trabalho do carregamento externo aplicado. Já a parcela $\partial Y/\partial a$ contabiliza a variação da energia potencial elástica do corpo em relação ao comprimento da fissura. Assim, pode-se verificar que o primeiro membro da Eq. (3.3) representa a quantidade de energia que é fornecida ao sistema para o crescimento da fissura.

Já o segundo membro da Eq. (3.3) representa a energia de superfície elástica da fissura, ou seja, a energia necessária para a formação de novas superfícies para a fissura. Este termo pode ser denominado também de resistência, R , já que a fissura não cresce se o primeiro membro da Eq. (3.3) for menor que o seu segundo membro. Analogamente pode-se definir os termos do primeiro membro da Eq. (3.3) como taxa de liberação de energia, G . Assim:

$$R = \frac{\partial Z}{\partial a} \quad (3.4)$$

$$G = \frac{\partial}{\partial a}(W - Y) \quad (3.5)$$

A Eq. (3.3) representa um critério para o crescimento das fissuras. Assim a fissura não crescerá se a seguinte equação for atendida:

$$R \geq G \quad (3.6)$$

Assim, ocorrerá a propagação das fissuras quando a taxa de liberação de energia, G , atingir um valor crítico que é uma propriedade do material.

3.2 – O Fator de Intensidade de Tensão

Apesar da eficácia do processo de balanço de energia na determinação da propagação das fissuras, verifica-se que a sua obtenção é uma árdua tarefa. Além disso, o termo G , referente a energia fornecida para o crescimento das fissuras, reflete o estado energético global da estrutura. Assim esse processo torna-se ineficaz e custoso quando é necessária a avaliação do comportamento isolado das fissuras que é de fato um estudo local. De forma a contornar este entrave, IRWIN (1957) propôs que o balanço de energia pode ser obtido empregando uma grandeza especial denominada fator de intensidade de tensões, K . Por meio do parâmetro K é possível realizar a correta avaliação do campo de tensões a frente da extremidade da fissura e assim saber a evolução do seu comportamento.

Na teoria proposta pela mecânica da fratura elástico linear o estado de tensão na extremidade da fissura pode ser obtido empregando a Eq. (3.7):

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}(\theta) \quad (3.7)$$

sendo: K o fator de intensidade de tensão, r é a distância da extremidade da fissura ao ponto considerado e θ coordenada cilíndrica em um ponto referenciada a extremidade da fissura. O valor do fator de intensidade de tensão para diversos problemas e materiais pode ser obtido em “handbooks”, dentre os quais podem ser destacados SIH (1973) e MURAKAMI (1987), ou mesmo em livros dedicados ao estudo de mecânica da fratura, como BROEK (1986).

IRWIN (1957) demonstrou que se uma fissura tem seu comprimento aumentado de uma extensão infinitesimal, da , o trabalho realizado pelo campo de tensões na extremidade da fissura devido ao crescimento da mesma é equivalente a mudança na energia de deformação, $G \cdot da$. Assim, é possível determinar um fator de intensidade de tensão crítico correspondente a uma taxa de liberação de energia crítica. Considerando problemas planos, a relação entre a energia crítica e o fator de intensidade de tensão é dada por:

$$G_c = \frac{K_c^2}{E} \quad (3.8)$$

A Eq. (3.8) representa a taxa crítica de energia liberada para o problema plano de tensão. Para os problemas de estado plano de deformação essa variável é obtida de forma análoga, assim:

$$G_c = \frac{K_c^2}{E} \cdot (1 - \nu^2) \quad (3.9)$$

Além de ser um parâmetro local, o emprego do fator de intensidade de tensão ainda apresenta outra grande vantagem se comparado ao balanço de energia. Sabe-se que o fator de intensidade de tensão crítico, K_c , é uma propriedade do material. Assim a sua determinação pode ser efetuada por meio de análises experimentais, considerando diversos tipos de materiais bem como diferentes geometrias.

3.3 – Modos de Solicitação ao Fraturamento

A Fig. (3.2) apresenta os modos básicos de solicitação ao fraturamento para corpos tridimensionais. Na verdade existem infinitos modos de fraturamento possíveis,

no entanto todos podem ser obtidos combinando-se os modos básicos. Para os casos tratados neste trabalho, problemas planos, apenas os modos de sollicitação I e II estão presentes. Conforme apresenta a Fig. (3.2) os modos básicos de fraturamento podem ser assim descritos:

⇨ **Modo I, Modo de Abertura:** Nesse modo de fraturamento as faces da fissura separam-se simetricamente relativamente ao plano formado por elas antes da ocorrência da deformação. Dessa forma após a deformação as faces da fissura permanecem simétricas com relação aos planos xy e xz .

⇨ **Modo II, Modo de Deslizamento:** Esse modo caracteriza-se pelo fato das faces da fissura apresentarem anti-simetria com relação ao plano xz e simetria com relação ao plano xy após a ocorrência da deformação. As faces da fissura separam-se em direções opostas, mas sob o mesmo plano.

⇨ **Modo III, Modo de Rasgamento:** As faces da fissura nesse modo separam-se de forma anti-simétrica com relação aos planos formados pelos eixos xy e xz . A separação entre as faces da fissura ocorre de forma transversalmente oposta.

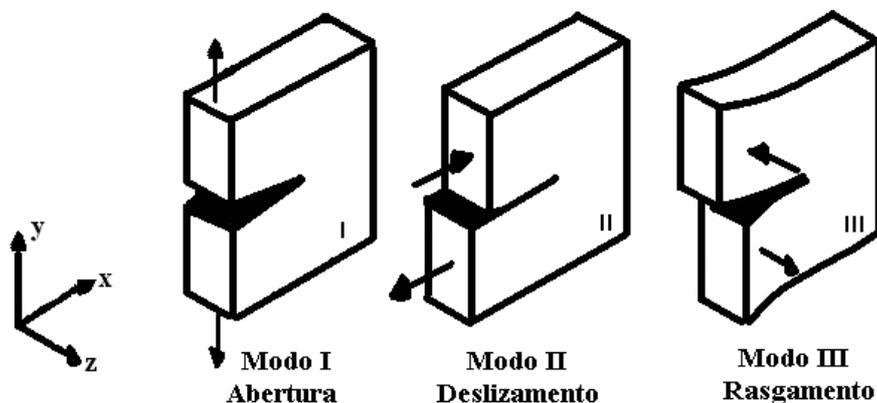


Figura 3.2 Modos básicos de sollicitação ao fraturamento. BROEK (1986).

3.4 – Relação entre Campo de Tensão e o Fator de Intensidade de Tensão

Em diversas situações problemas tridimensionais podem ser transformados, sem perdas sensíveis de representatividade, em problemas planos. Os modelos planos são largamente empregados em elasticidade e em problemas de fratura, tornando possível o equacionamento de alguns tipos de problemas.

O desenvolvimento de modelos analíticos para os problemas planos de fratura passa pela determinação do fator de intensidade de tensão. Este fator é uma grandeza fundamental que governa o campo de tensão a frente da extremidade da fissura. O fator

de intensidade de tensão depende tanto da geometria quanto das condições de contorno presentes no corpo. Existem diversas maneiras para a sua determinação, as quais podem ser divididas em:

↗ Teóricos: método de Westergaard, método semi-inverso, método do potencial complexo e métodos energéticos.

↗ Numéricos: funções de green, funções ponderadoras, método dos elementos finitos e método dos elementos de contorno.

↗ Experimentais: foto-elasticidade, métodos óticos e extensométricos.

Os métodos teóricos são geralmente restritos a chapas de dimensões infinitas com condições de contorno simplificadas. Para situações mais complexas, empregam-se os métodos numéricos e experimentais. Apesar de métodos teóricos não atingirem uma ampla gama de problemas, esses são de grande valia principalmente na calibração de modelos numéricos. Nesse contexto pode-se citar WESTERGAARD (1939) o qual empregou funções de tensão complexas para a determinação do campo de tensão para os três modos básicos de fraturamento. A seguir serão apresentadas as expressões obtidas por Westergaard sendo sua dedução apresentada em livros mecânica da fratura como em PAPADOPOULOS (1993).

Para o modo I:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\end{aligned}\quad (3.10)$$

Modo II:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{-K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right]\end{aligned}\quad (3.11)$$

Modo III:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{-K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \tau_{yz} &= \frac{-K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \text{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}\quad (3.12)$$

Onde as variáveis r e θ foram já discutidas na apresentação da Eq. (3.7).

3.5 – A Integral J

A integral J trata de uma forma alternativa o balanço de energia proposto na Eq. (3.1). Esta integral é válida desde que o material seja elástico, não necessariamente linear. A integral J pode ser avaliada por meio de uma integral de linha que independe do caminho escolhido para a integração, conforme RICE (1968). Dessa forma para um contorno geral a integral J é dada por:

$$J = \int_{\Gamma} W_E \cdot dy - \int_{\Gamma} P_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x} \cdot ds \quad (3.13)$$

em que: W_E densidade de energia de deformação dada por $W_E = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}$ e P_i são as forças de superfície.

A integral J pode ser obtida também por meio da minimização da energia potencial total para um aumento no comprimento da fissura.

$$J = \frac{-d\Pi}{da} \quad (3.14)$$

sendo: Π energia potencial total.

Para materiais elástico-lineares sabe-se que:

$$G = \frac{-d\Pi}{da} \quad (3.15)$$

E assim a integral J pode ser relacionada ao fator de intensidade de tensões por:

$$J = G = \frac{K^2}{E} \quad (3.16)$$

A Eq. (3.16) representa a expressão para problemas plano de tensão. Para os problemas de estado plano de deformação essa relação pode ser reescrita como:

$$J = G = \frac{K^2}{E} \cdot (1 - \nu^2) \quad (3.17)$$

O trabalho de PEREIRA (2004) aborda a extração do fator de intensidade de tensão por meio da integral J e de suas variações. Neste trabalho pode-se destacar uma técnica, inicialmente proposta em LI et. al (1985), que transforma a integral J, originalmente uma integral de linha, em uma integral de área de forma a tornar sua utilização via método dos elementos finitos mais conveniente.

3.6 – Técnica de Correlação de Deslocamentos

A determinação dos fatores de intensidade de tensão por meio da técnica de correlação de deslocamento é efetuada mediante o correlacionamento dos deslocamentos, determinados numericamente nos pontos nodais do elemento localizado na extremidade da fissura, com soluções analíticas.

Por meio das funções de tensão de WESTERGAARD (1939) é possível obter as equações que descrevem o campo de deslocamento na região próxima à extremidade da fissura as quais são apresentadas nas Eq. (3.18) e Eq. (3.19).

$$u = \frac{K_I}{2 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[(\kappa - 1) + 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{2 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[(\kappa + 1) + 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (3.18)$$

$$v = \frac{K_I}{2 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[(\kappa + 1) - 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{2 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[(\kappa - 1) + 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (3.19)$$

em que: κ é igual a $3 - 4 \cdot \nu$ se estado plano de deformação e $(3 - \nu)/(1 + \nu)$ se estado plano de tensão. θ é ângulo de inclinação do ponto considerado em relação a extremidade da fissura. r é a distância do ponto considerado a extremidade da fissura. u é o deslocamento paralelo as faces da fissura e v o deslocamento normal as faces da fissura.

A determinação das expressões para a avaliação dos fatores de intensidade de tensão é efetuada avaliando as Eq. (3.18) e Eq. (3.19) para ângulos iguais a π e $-\pi$, ou seja, nas faces da fissura. As expressões obtidas dessa operação devem ser subtraídas de forma a se obter equações que definam os fatores de intensidade de tensão em função da diferença entre os deslocamentos das faces da fissura. Efetuando esta operação são obtidas as Eq. (3.20) e Eq. (3.21) as quais referenciam os fatores de intensidade de tensão à diferença entre os deslocamentos paralelo e perpendicular ao plano da fissura.

$$K_I = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{r}} \cdot \frac{\mu}{(\kappa + 1)} \cdot COD \quad (3.20)$$

$$K_{II} = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{r}} \cdot \frac{\mu}{(\kappa + 1)} \cdot CSD \quad (3.21)$$

sendo: COD “Crack Open Displacement” diferença entre os deslocamentos perpendiculares ao plano da fissura e CSD “Crack Sliding Displacement” diferença entre os deslocamentos paralelos ao plano da fissura.

3.7 – Teorias de Interação de Modos de Solicitação ao Fraturamento

O processo de fratura provoca no corpo em análise uma progressiva perda de rigidez a qual em casos extremos chega à ruína em virtude do crescimento e coalescência das fissuras. Por meio do estudo da mecânica da fratura é possível a definição de critérios de forma a se conseguir determinar a direção de propagação da fissura assim como a carga crítica de fratura.

Muitos são os critérios propostos para tal objetivo dentre os quais podem ser destacados os critérios da máxima tensão circunferencial, máxima taxa de liberação de energia (critério G) e mínima densidade de energia de deformação (critério S). A seguir será efetuada uma breve descrição destes critérios sendo que maiores detalhes sobre o assunto poderão ser consultados em livros referências como BROEK (1986) e MI (1996).

3.7.1 - Critério da Máxima Tensão Circunferencial

O critério da máxima tensão circunferencial foi proposto por ERDOGAN e SIH (1963) e define que a fissura irá crescer perpendicularmente à direção de atuação da máxima tensão circunferencial atuante na extremidade da fissura.

Para a determinação da formulação para o cálculo do ângulo de propagação é necessária, inicialmente, a obtenção das relações que expressem o estado de tensão na região próxima a extremidade da fissura. Considerando o sistema de coordenadas como apresentado na Fig. (3.3) e empregando as funções de tensão de WESTERGAARD (1939) é possível determinar estas expressões as quais podem ser escritas como:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[K_I \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} \cdot K_{II} \cdot \text{sen}(\theta) \right] \quad (3.22)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[K_I \cdot \text{sen}(\theta) + K_{II} \cdot (3 \cdot \cos(\theta) - 1) \right] \quad (3.23)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[K_I \cdot \left(1 + \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + \frac{3}{2} \cdot K_{II} \cdot \text{sen}(\theta) - 2 \cdot K_{II} \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (3.24)$$

sendo que: $\sigma_{\theta\theta}$ é a tensão circunferencial, σ_{rr} a tensão radial, $\tau_{r\theta}$ a tensão cisalhante, K_I o fator de intensidade de tensão para o modo I e K_{II} fator de intensidade de tensão para o modo II.

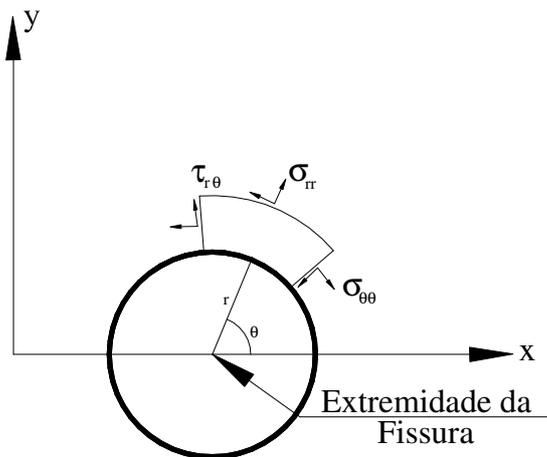


Figura 3.3 Sistema de coordenadas para a determinação das expressões de tensão na ponta da fissura.

Para a determinação do ângulo de propagação a tensão circunferencial, $\sigma_{\theta\theta}$, deve ser máxima e conseqüentemente uma tensão principal. De acordo com os conceitos da mecânica dos sólidos para que essa situação ocorra a tensão de cisalhamento deve ser nula. Assim para determinar a direção de propagação da fissura, θ_p , deve-se fazer $\tau_{r\theta} = 0$. Por meio dessa condição é possível obter:

$$K_I \cdot \text{sen}(\theta_p) + K_{II} \cdot (3 \cdot \cos(\theta_p) - 1) = 0 \quad (3.25)$$

Empregando relações trigonométricas é possível reescrever a relação acima como:

$$\tan\left(\frac{\theta_p}{2}\right) = \frac{1}{4} \left[\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right] \quad (3.26)$$

Por meio da resolução da Eq. (3.26) são obtidos dois ângulos sendo que o ângulo a ser considerado como o de propagação é aquele que maximiza o valor da tensão circunferencial, Eq. (3.22).

Esta teoria também prevê a determinação do valor do fator de intensidade de tensão crítico, calculado numericamente. Na literatura, MI (1996) e BITTENCOURT et al (2003), essa grandeza é também denominada de fator de intensidade de tensão efetivo ou equivalente e para a sua determinação deve-se reescrever a Eq.(3.22) de forma mais conveniente. Assim:

$$\sigma_{\theta\theta} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[K_I \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} \cdot K_{II} \cdot \text{sen}(\theta) \right] \quad (3.27)$$

Comparando o primeiro membro da Eq. (3.27) com a Eq. (3.7) é possível verificar que esse membro é equivalente ao fator de intensidade de tensão. Dessa forma pode-se definir o fator de intensidade de tensão equivalente, o qual deverá ser comparado ao fator de intensidade de tensão resistente do material para a verificação da estabilidade à propagação da fissura, por meio da seguinte relação:

$$K_{Eq} = K_I \cos^3\left(\frac{\theta_p}{2}\right) - 3 \cdot K_{II} \cdot \cos^2\left(\frac{\theta_p}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta_p}{2}\right) \quad (3.28)$$

A denominação fator de intensidade de tensão equivalente é atribuída por ser essa variável uma combinação dos fatores de intensidade de tensão para os modos I e II.

3.7.2 - Critério da Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial

O critério da máxima taxa de liberação de energia potencial se baseia na energia potencial que é liberada durante o processo de fratura. Para propagações colineares (que não mudam de direção) em regime elástico linear, a taxa de liberação de energia é igual a soma das energias liberadas para os modos de fraturamento I e II.

$$G = G_I + G_{II} \quad (3.29)$$

sendo: G_I a taxa de liberação de energia para modo I puro e G_{II} a taxa de liberação de energia para modo II puro.

Da teoria da mecânica da fratura a taxa de liberação de energia potencial está relacionada aos fatores de intensidade de tensão por meio das seguintes relações:

$$G_I = \frac{\kappa+1}{8 \cdot \mu} \cdot K_I^2 \quad (3.30)$$

$$G_{II} = \frac{\kappa+1}{8 \cdot \mu} \cdot K_{II}^2 \quad (3.31)$$

No entanto nem sempre a propagação das fissuras ocorre de forma colinear, como no fraturamento em modo misto. Nessa situação, a propagação da fissura ocorre

em uma direção arbitrária. No trabalho de HUSSAIN, PU & UNDERWOOD (1974) foi sugerido que o crescimento da fissura ocorra na direção que provoca a máxima taxa de liberação de energia de fratura. Para isso esses autores estabeleceram uma equação, utilizando uma função de mapeamento com variáveis complexas, onde θ define uma direção radial com respeito à ponta da fissura corrente. Utilizando a técnica proposta, HUSSAIN PU & UNDERWOOD (1974) chega-se à seguinte expressão:

$$G(\theta) = \frac{4}{E} \cdot \left(\frac{1}{3 + \cos^2(\theta)} \right)^2 \cdot \left(\frac{1 - \theta/\pi}{1 + \theta/\pi} \right)^{\theta/\pi} \cdot \left[(1 + 3 \cdot \cos^2(\theta)) \cdot K_I^2 + \right. \\ \left. - 8 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot K_I \cdot K_{II} + (9 - 5 \cdot \cos^2(\theta)) \cdot K_{II}^2 \right] \quad (3.32)$$

Dessa forma o ângulo de propagação é obtido a partir da maximização da variável $G(\theta)$ na Eq. (3.32). Assim como a taxa de liberação de energia, nesta expressão os fatores de intensidade de tensões K_I e K_{II} também foram definidos como funções de θ , conforme as equações a seguir.

$$K_I(\theta) = \left(\frac{4}{3 + \cos^2(\theta)} \right) \cdot \left(\frac{1 - \theta/\pi}{1 + \theta/\pi} \right)^{\theta/2\pi} \cdot \left[K_I \cdot \cos(\theta) + \frac{3}{2} \cdot K_{II} \cdot \sin(\theta) \right] \quad (3.33)$$

$$K_{II}(\theta) = \left(\frac{4}{3 + \cos^2(\theta)} \right) \cdot \left(\frac{1 - \theta/\pi}{1 + \theta/\pi} \right)^{\theta/2\pi} \cdot \left[K_{II} \cdot \cos(\theta) - \frac{1}{2} \cdot K_I \cdot \sin(\theta) \right] \quad (3.34)$$

Além desse critério prever que a fissura propaga na direção de máxima taxa de liberação de energia potencial verifica-se também que a condição de estabilidade para o crescimento é dada pela seguinte relação:

$$G(\theta) = \frac{\kappa + 1}{8 \cdot \mu} \cdot K_{EQ}^2 \quad (3.35)$$

Assim a Eq. (3.35) representa a expressão para o cálculo do fator de intensidade de tensão equivalente que será comparado ao fator de intensidade de tensão resistente do material para verificação da condição de estabilidade ao crescimento da fissura.

3.7.3 - Critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação

Neste critério, proposto por SIH (1974), a direção da propagação da fissura é determinada pelo valor da densidade de energia de deformação, S , nas proximidades da fissura. A energia de deformação é definida como a energia armazenada no sistema

devido a mudanças no estado de deformação. Para corpos elásticos lineares essa energia pode ser escrita como:

$$\text{Energia Deformação} = \int_V \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dV \quad (3.36)$$

A densidade de energia de deformação, portanto pode ser definida como:

$$\frac{d}{dV}(\text{Energia Deformação}) = \frac{d}{dV} \left(\int_V \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dV \right) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (3.37)$$

Utilizando a lei de Hooke generalizada mostrada no Anexo I, Eq. (I.5), juntamente com as equações que relacionam os fatores de intensidade de tensão às tensões na extremidade da fissura, Eq. (3.10), Eq. (3.11) e Eq. (3.12), é possível obter a expressão para a determinação da densidade de energia, como mostra a Eq. (3.38).

$$S(\theta) = a_{11} \cdot K_I^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot K_I \cdot K_{II} + a_{22} \cdot K_{II}^2 \quad (3.38)$$

Nessa expressão os termos a_{ij} são dados por:

$$a_{11} = \frac{1}{16 \cdot \mu} [(1 + \cos(\theta)) \cdot (\kappa - \cos(\theta))] \quad (3.39)$$

$$a_{12} = \frac{1}{16 \cdot \mu} \cdot \sin(\theta) \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - (\kappa - 1)] \quad (3.40)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16 \cdot \mu} \cdot [(\kappa + 1) \cdot (1 - \cos(\theta)) + (1 + \cos(\theta)) \cdot (3 \cdot \cos(\theta) - 1)] \quad (3.41)$$

O ângulo de propagação é aquele que minimiza o termo $S(\theta)$ da Eq. (3.38). Por meio desse critério define-se que a fissura irá propagar na direção em que a densidade de energia de deformação for mínima. Além disso, a estabilidade para o crescimento das fissuras é efetuada por meio da seguinte relação:

$$S_{cr} = \frac{\kappa - 1}{8 \cdot \pi \cdot \mu} \cdot K_{IC}^2 \quad (3.42)$$

Nesse critério verifica-se que a fissura irá propagar quando a densidade de energia de deformação atingir um valor crítico S_{cr} .

3.8 – Mecânica da Fratura Aplicada ao Concreto

Sabe-se que durante o processo de fratura surge, à frente da extremidade da fissura, uma zona onde ocorrem processos inelásticos sendo esta zona denominada zona de processos inelásticos. De acordo com o comportamento estrutural do material a zona de processo apresenta diferentes características. Para materiais dúcteis esta zona

apresenta dimensões grandes se comparadas ao comprimento da fissura além de esta ser governada pela tensão de escoamento do material. Já para materiais frágeis a área de abrangência da zona de processo é pequena em relação ao comprimento da fissura analisada.

Existem também os materiais quase-frágeis em que a zona de processo apresenta um comportamento intermediário entre os presentes nos materiais dúcteis e frágeis. Suas dimensões são grandes em relação ao comprimento da fissura e a resistência coesiva das partículas a frente da fissura é bem maior se comparada a dos materiais frágeis. Esse comportamento pode ser explicado, em parte, pela presença de micro-danos, que são na verdade micro-fissuras, vazios e poros do material, localizados a frente da extremidade da fissura, que devido à concentração de tensão existente estes provocam uma perda de rigidez progressiva do material. O crescimento dos micro-danos acaba por gerar interconexões (coalescência) entre eles, o que delimita a direção da propagação bem como os incrementos de comprimento da fissura principal. A Fig. (3.4) ilustra a presença dos micro-danos na zona de processo bem como a sua coalescência.

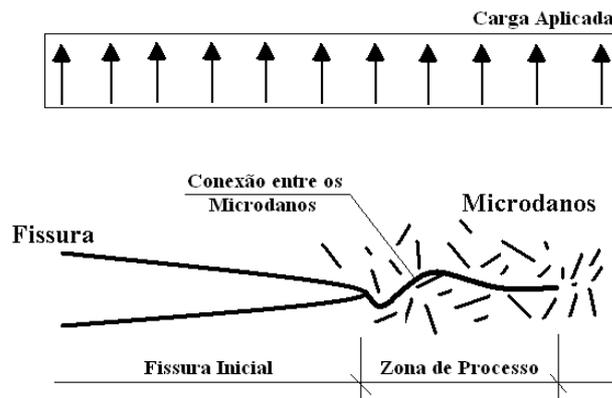


Figura 3.4 Representação do processo de coalescência das fissuras e conexão dos micro-danos.

A zona de processo caracteriza-se também por dissipar uma grande quantidade de energia. A energia absorvida é empregada na danificação do material e assim a fissura propaga mesmo sob tensão inferior a tensão última. A presença do amolecimento (Anexo D), observada em curvas tensão x deformação uniaxial à compressão e tração de concretos, é atribuída ao efeito da zona de processo.

No tocante ao concreto, além da zona de processo, outros fatores devem ser também levados em conta. Inicialmente, a presença de vazios e de agregados graúdos à frente da extremidade da fissura deve ser considerada. A mudança brusca de rigidez provocada por estes dois fatores altera o regime de propagação da fissura influenciando

substancialmente o seu comportamento. Outro fator de grande interesse na análise é o intertravamento dos agregados o qual torna o elemento estrutural em questão mais rígido já que permite a transferência de tensões por atrito, entre as faces da fissura, mesmo com a fissura configurada.

Devido à presença da zona de processo a fissura apresenta, à frente de sua extremidade, uma região de rigidez inferior ao restante do corpo. Em um material quase frágil a fissura pode ser modelada como apresenta a Fig. (3.5), onde a fissura e a zona de processo são representadas por uma fissura de comprimento efetivo a . A resistência da zona de processo é representada por uma tensão $\sigma(w)$ denominada tensão coesiva cujo valor é igual a resistência à tração do material no fim da zona de processo. A tensão coesiva tende a fechar a fissura, sendo uma função do deslocamento da abertura da fissura, e diminui conforme o ponto aproxima-se da extremidade da fissura.

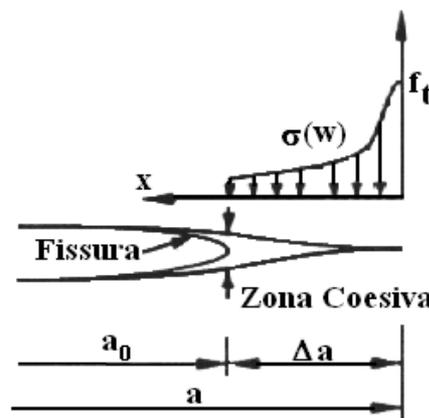


Figura 3.5 Representação de fissuras coesivas para materiais quase-frágeis.

Empregando esta representação para as fissuras em materiais quase-frágeis tem-se que a taxa de energia total liberada, devido à carga aplicada, é balanceada por dois mecanismos de dissipação de energia de fratura. A primeira contribuição refere-se à energia consumida durante o fraturamento na criação de novas superfícies para a fissura. Já a segunda parcela representa a energia necessária para superar a tensão coesiva e assim propagar a fissura. Dessa forma:

$$G_q = G_{lc} + G_\sigma \quad (3.43)$$

em que: G_q taxa total de liberação de energia, G_{lc} energia para superação da superfície da fissura e G_σ energia da zona coesiva.

A partir da Eq. (3.43) pode-se descrever a propagação de fissuras para materiais quase-frágeis ou então a partir dessa relação realizar aproximações sobre o mecanismo

de dissipação de energia e obter diferentes modelos para previsão da propagação de fissuras. Com base nessas aproximações os modelos da mecânica da fratura não linear de materiais quase frágeis podem ser classificados como de fissura fictícia e fissura elástica equivalente.

Por meio do modelo de fissura fictícia assume-se que a energia necessária para criar novas superfícies é pequena se comparada à energia necessária para separá-las. Conseqüentemente pode-se admitir que $G_{lc} = 0$. Nesse campo de modelos destacam-se os de HILLERBORG et. al. (1976) e BAZANT & OH (1983).

Os modelos de fissura elástica equivalente prescrevem que a zona de processo nos materiais quase frágeis pode ser descrita pelo critério de energia de Griffith. Dessa forma, nesse modelo a fissura é governada por um critério da mecânica da fratura elástico linear e o comprimento efetivo da fissura é basicamente o que diferencia os diversos modelos propostos. Dentre esses modelos destacam-se os de JENQ & SHAH (1985), BAZANT & KAZEMI (1990) e NALLATHAMBI & KARIHALOO (1986).

PLANAS & ELICES (1990) apud SHAH et al. (1995) compararam resultados numéricos empregando os modelos de fissura fictícia e fissura elástica equivalente. A comparação entre os modelos permite concluir que determinando adequadamente as propriedades de fratura do material os dois conjuntos de modelos são capazes de representar, com considerável precisão, estruturas cujas dimensões sejam as de utilização corrente em laboratório. Segundo os autores, entretanto, esses modelos, podem apresentar diferenças quando aplicados a estruturas de concreto cujas dimensões sejam consideravelmente maiores que aquelas comumente utilizadas em laboratório. Esses autores argumentam que uma razão para essa diferença pode ser atribuída a forma muitas vezes não consistente para a definição do efeito de escala nos modelos.

3.9 – Modelos de Fratura Coesiva

Sabe-se que a mecânica da fratura elástico linear tem sido uma valiosa ferramenta para resolução de problemas de fratura quando a zona de processos inelásticos a frente da extremidade da fissura apresenta dimensões desprezíveis se comparada às dimensões da fissura ou mesmo a outras dimensões significativas do corpo. No entanto, a dimensão da zona de processo presente em materiais dúcteis e cimentícios não segue a configuração apresentada nos materiais frágeis sendo

consideravelmente maior. Isso faz com que sejam necessárias modificações na teoria original de forma a esta conseguir representar esses fenômenos.

A proposição dessas modificações deu origem aos modelos coesivos os quais apresentam aproximações sobre o comportamento da zona de processo de materiais com diferentes comportamentos estruturais. Por meio desses modelos a zona de processo é exposta a uma tensão, denominada tensão coesiva, que tende a fechar a fissura. A tensão coesiva, entretanto, atua somente em uma porção da extremidade da fissura denominada de zona coesiva.

O primeiro modelo coesivo proposto deve-se a DUGDALE (1960) o qual aplica-se, principalmente, a materiais dúcteis. Segundo esse modelo a fissura real é substituída por uma fissura denominada efetiva cujo comprimento é maior que o da fissura real devido ao acréscimo no comprimento decorrente da presença de uma zona plástica, da , a frente da extremidade da fissura conforme ilustra a Fig. (3.6).

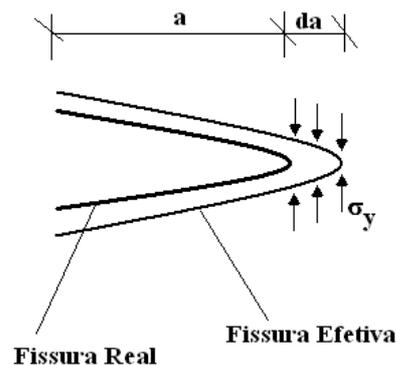


Figura 3.6 Configuração do modelo de DUGDALE (1960).

A extensão no comprimento da fissura, da , está sujeita a tensões de plastificação (tensões coesivas) constantes atuando no sentido de fechar as extremidades da fissura. O comprimento da é tal que as tensões singulares na extremidade da fissura desaparecem e assim o fator de intensidade de tensão torna-se igual a zero.

Outro modelo coesivo proposto é o de BARENBLATT (1962). Este modelo assume também que as tensões coesivas atuam em uma pequena região de dimensão c fazendo as faces da fissura fecharem-se suavemente, como mostrado na Fig. (3.7). As tensões coesivas dependem da abertura das faces da fissura, δ_c . Quando a abertura atinge um valor considerado crítico as tensões coesivas cessam e a propagação da fissura ocorre.

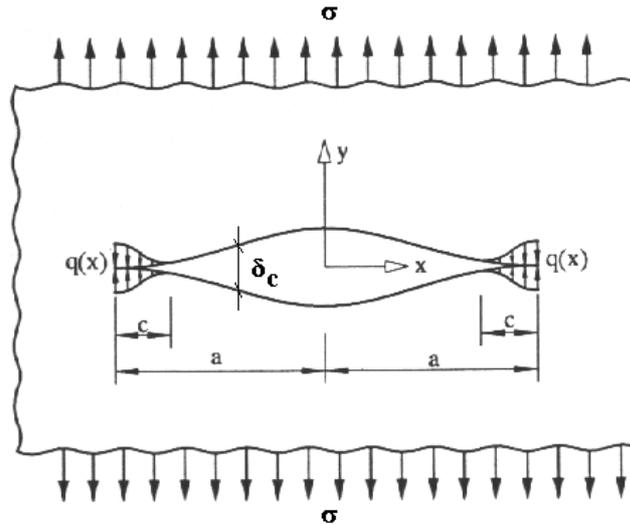


Figura 3.7 Distribuição de tensões coesivas no modelo proposto por BARENBLATT (1962).

A partir do modelo de BARENBLATT (1962) surgiram outras propostas de modelos como os de MODEER (1979), PETERSSON (1981) e GUSTAFSSON (1985). No entanto, a diferença básica entre eles refere-se a dimensão da zona coesiva e a forma da distribuição das tensões coesivas.

A primeira teoria de mecânica da fratura não linear aplicada a materiais quase frágeis foi proposta por HILLERBORG et. al (1976). Neste trabalho foi incluído o amolecimento à tração na zona de processo por meio de uma fissura fictícia próxima à fissura pré-existente cujas faces estão sujeitas à tensões coesivas. O termo fictício é empregado para ressaltar o fato que essa parte da fissura não pode ser descontínua com total separação das faces como em uma fissura de tração livre. A Fig. (3.8) ilustra a atuação da tensão coesiva na fissura do modelo de HILLERBORG et. al. (1976), devendo-se destacar neste modelo o fato da tensão coesiva não ser constante ao longo da zona coesiva.

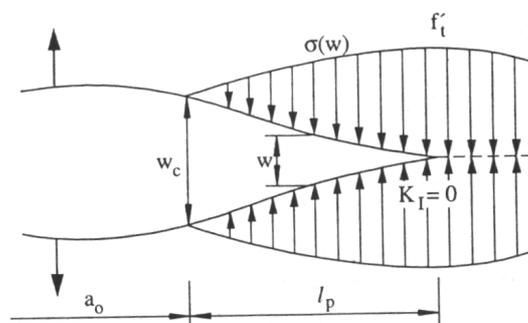


Figura 3.8 Distribuição de tensões coesivas no modelo de HILLERBORG et. al. (1976).

Essa tensão aumenta de zero, em um ponto referenciado a abertura crítica da extremidade da fissura, até seu valor pleno igual à resistência à tração do material na extremidade da fissura. Outro fator de destaque é que nesse modelo a dimensão da zona de processo pode não ser pequena em comparação com o comprimento da microfissura pré-existente, assim como no modelo para materiais elastoplásticos.

A energia de fratura, necessária para a representação do processo de amolecimento do concreto à tração, pode ser obtida por meio da relação tensão deslocamento na zona de amolecimento. A área sob a curva de amolecimento a tração, como apresenta a Fig. (3.9), exprime o valor da energia liberada durante o processo de fissuração nessa região.

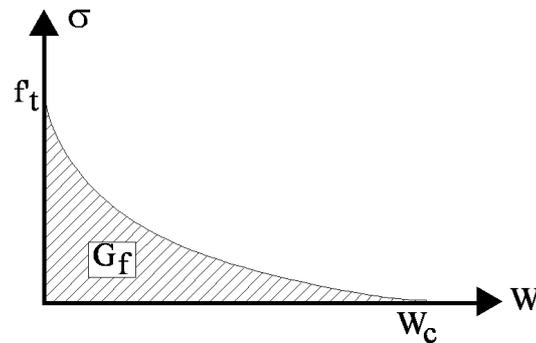


Figura 3.9 Diagrama tensão x abertura da fissura. Determinação da liberação de energia crítica.

A área do diagrama acima pode ser obtida por meio das seguintes integrais:

$$G_f = \int_{f_t}^0 w(\sigma) d\sigma = \int_0^{w_c} \sigma(w) dw \quad (3.44)$$

em que: G_f energia necessária para a ruptura do corpo, w abertura da fissura e $\sigma(w)$ é a tensão coesiva.

3.10 – Modelo de Fissura Fictícia

O modelo de fissura fictícia é uma importante ferramenta na modelagem numérica da zona de processo em materiais dúcteis e quase frágeis. Esse modelo é baseado nas seguintes hipóteses:

1) A zona de processo inicia seu desenvolvimento quando a máxima tensão principal na ponta da fissura alcança a resistência à tração teórica do material

2) A fissura cresce perpendicularmente a direção de atuação da máxima tensão principal

3) A zona de processo é parcialmente danificada durante o crescimento da fissura, porém esta é ainda capaz de transferir tensões as quais são dependentes da abertura das faces da fissura.

4) As propriedades do material fora da zona de processo permanecem elástico linear.

Quando a tensão na ponta da fissura coesiva excede a resistência à tração do material a fissura fictícia cresce conforme a hipótese 2. Por outro lado, se a abertura das faces da fissura alcançar um valor limite a fissura coesiva torna-se fissura física, com superfície livre de forças coesivas.

A intensidade das forças coesivas pode ser relacionada ao valor da abertura das faces da fissura, ΔU , por meio de leis constitutivas. Existem diversas leis para tal fim e serão aqui destacadas as três relações mais utilizadas na modelagem numérica de fratura de materiais quase frágeis. A primeira, e mais empregada, trata da lei linear apresentada na Fig. (3.10). Nessa lei constitutiva as forças coesivas são associadas a ΔU através de uma relação linear.

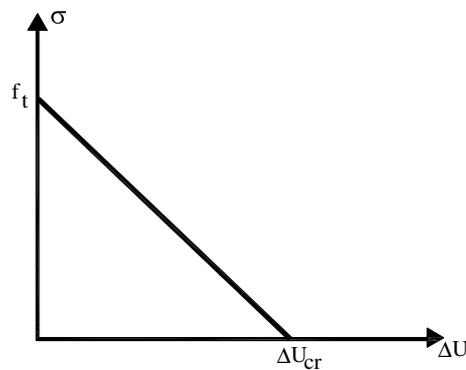


Figura 3.10 Lei coesiva linear.

Essa relação é a ilustrada pela Eq. (3.45), a qual incorpora as situações onde ΔU é maior que a abertura crítica.

$$\begin{aligned}
 \sigma &= E\varepsilon & \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_c \\
 \sigma(\Delta U) &= f_t \cdot \left(1 - \frac{\Delta U}{\Delta U_{cr}}\right) & \text{se } 0 \leq \Delta U \leq \Delta U_{cr} \\
 \sigma(\Delta U) &= 0 & \text{se } \Delta U > \Delta U_{cr}
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Outra relação amplamente empregada é lei bi-linear representada graficamente na Fig. (3.11).

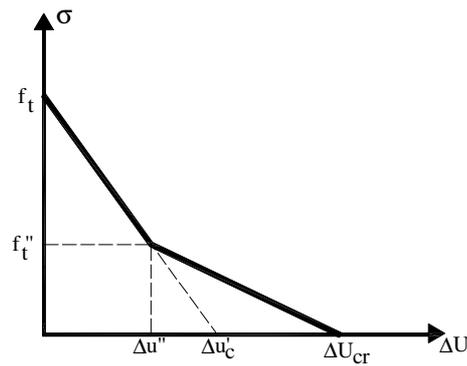


Figura 3.11 Lei coesiva bi-linear

Com essa lei constitutiva as forças coesivas são associadas a ΔU por meio de duas retas com inclinações diferentes entre si. Considerando essa lei as forças coesivas são obtidas como apresentado na Eq. (3.46).

$$\begin{aligned}
 \sigma &= E\varepsilon & \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_c \\
 \sigma(\Delta U) &= f_t - \left(\frac{f_t - f_t''}{\Delta u''} \right) \cdot \Delta U & \text{se } 0 \leq \Delta U \leq \Delta u'' \\
 \sigma(\Delta U) &= \frac{f_t'' \cdot \Delta U}{\Delta u'' - \Delta U_{cr}} + f_t'' \cdot \left(1 - \frac{\Delta u''}{\Delta u'' - \Delta U_{cr}} \right) & \text{se } \Delta u'' \leq \Delta U \leq \Delta U_{cr} \\
 \sigma(\Delta U) &= 0 & \text{se } \Delta U > \Delta U_{cr}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Nesse trabalho considera-se o modelo de PETERSSON (1981) para a lei coesiva bi-linear assim:

$$\begin{aligned}
 f_t'' &= \frac{f_t}{3} \\
 \Delta u'' &= \frac{0,8 \cdot G_f}{f_t} \\
 \Delta U_{cr} &= \frac{3,6 \cdot G_f}{f_t}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Por fim é possível também modelar a zona coesiva considerando uma relação exponencial. Essa lei é apresentada na Fig. (3.12) sendo as equações que a governam expressas pela Eq. (3.48).

$$\begin{aligned}
 \sigma &= E\varepsilon & \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_c \\
 \sigma(\Delta U) &= f_t \cdot e^{-\frac{f_t \cdot \Delta U}{G_f}} & \text{se } \Delta U > 0
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

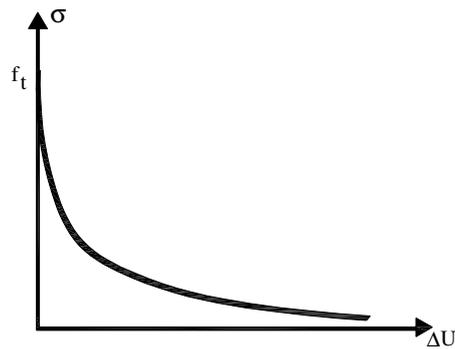


Figura 3.12 Lei coesiva exponencial.

3.11 – Fadiga dos Materiais

No domínio da fadiga emprega-se o termo “vida útil” para se referir ao número de ciclos de carregamento que uma estrutura pode ser submetida antes da ocorrência de sua falha ou ao número de ciclos para o qual a estrutura foi projetada à fadiga. Apesar deste tema ser abordado em livros que tratam da mecânica da fratura, como os já discutidos anteriormente, maiores detalhes sobre fadiga e comportamento micro mecânico das estruturas nessa condição podem ser encontrados em SURESH (2004) e SAXENA (1998).

Em geral a vida útil de uma estrutura pode ser dividida de acordo com a evolução do processo de danificação ao qual esta é sujeita, sob a ação dos carregamentos. Existem diferentes tipos de danos causados por fadiga em componentes estruturais. Inicialmente micro-defeitos, inerentes a estrutura dos materiais, podem crescer e nuclear uma fissura e esta propagar até a ocorrência da ruína. Assim, a evolução do dano sob fadiga pode ser classificada nos seguintes estágios.

- 1) Mudanças micro-estruturais que causam nucleações e danos permanentes.
- 2) Criação de fissuras microscópicas.
- 3) Crescimento e coalescência de microfissuras e formação de fissuras dominantes que poderão, eventualmente, conduzir a falha.
- 4) Propagação estável das microfissuras.
- 5) Instabilidade estrutural e fratura da estrutura.

A formação de fissuras corresponde ao período de nucleação o qual depende de vários fatores, como: carregamento, propriedades do material, acabamento da superfície, dentre outros. Diversas estruturas são submetidas a carregamentos cíclicos

durante a sua vida útil, como exemplos podem ser citadas as estruturas aeronáuticas. A cada voo corresponde um ciclo de carregamento de pressurização, na decolagem, e despressurização, na aterrissagem. Assim, é bem provável que fissuras irão se desenvolver em algum estágio da vida útil da aeronave.

A maior parcela da vida de uma estrutura corresponde, geralmente, às fases de nucleação da fissura e seu crescimento. Para a previsão do surgimento das fissuras em estruturas, duas abordagens são geralmente aplicadas: a tradicional ou método “ σ -N” (stress-based approach) e o método “ ϵ -N” (strain-based approach), os quais relacionam variação das tensões e deformações, respectivamente, ao número de ciclos necessários a ruptura da peça em análise. À medida que o carregamento cíclico vai sendo aplicado, as fissuras tendem a propagar-se lentamente de modo estável. Nesses casos de estruturas com fissuras, os métodos “ σ -N” e “ ϵ -N” não podem mais ser utilizados. Nessa situação conceitos da mecânica da fratura elástico linear, adaptados para carregamentos cíclicos, podem ser empregados para caracterizar a propagação de fissuras por fadiga.

3.11.1 – Filosofias de Projetos à Fadiga

A partir dos anos 50, a ocorrência de vários acidentes, com causas associadas à fadiga, revelou que um critério de projeto consistindo apenas de análises estáticas sem a consideração de efeitos dependentes do tempo, não era suficiente para garantir a integridade estrutural de alguns tipos de estruturas. Abordagens de projeto a fadiga foram então desenvolvidas para esta aplicação, dentre elas destacam-se:

- 1) safe-life: abordagem focada na iniciação de fissuras.
- 2) fail-life: filosofia de projeto baseada em estruturas redundantes.
- 3) projeto de tolerância ao dano.

Essas abordagens são aplicadas principalmente nas indústrias aeronáuticas, automobilística e naval, as quais apresentam estruturas que são mais susceptíveis aos efeitos de fadiga.

3.11.2 – Abordagem Safe-Life

Na abordagem safe-life de projetos à fadiga, a estrutura é analisada, ou testada em laboratório, sob condições de carregamento típicas a que estarão sujeitas em serviço,

e uma vida útil, correspondendo a um número de ciclos de carregamento, é estimada para a estrutura. Geralmente nessa previsão de vida útil é aplicado um fator de segurança para levar em conta as incertezas envolvidas, tais como: mudanças inesperadas de condições de carregamento, erros na estimativa do carregamento, dispersão dos resultados experimentais, possível variação das propriedades dos materiais, dentre outros. A previsão de vida útil de uma estrutura projetada com esta filosofia é feita por meio dos métodos de iniciação de fissuras, ou seja, “ σ -N” e “ ϵ -N”, ou baseado em dados experimentais.

Ao final dessa vida útil estimada, a estrutura é retirada de serviço, mesmo que nenhuma fissura ou falha tenha sido detectada durante o tempo de serviço e mesmo que a estrutura ainda tenha considerável vida residual. Escolhendo-se uma margem de segurança alta, espera-se obter uma previsão de vida que garanta a integridade estrutural, mesmo que essa abordagem conservativa leve a perdas de desempenho e aumento de custo. Entretanto, podem ocorrer falhas em decorrência da propagação de fissuras na estrutura, fato esse que não é considerado nessa filosofia de análise, durante o tempo de serviço. Assim, nessa abordagem o foco da análise de fadiga é a prevenção da iniciação de trincas por fadiga.

3.11.3 – Abordagem Fail-Safe

O objetivo da filosofia fail-safe é projetar estruturas redundantes de tal forma que se um elemento estrutural falhar, os elementos remanescentes terão capacidade suficiente para suportar cargas adicionais oriundas do elemento danificado, até que a falha seja detectada por meio de inspeções periódicas de manutenção.

3.11.4 – Abordagem de Tolerância ao Dano

A abordagem de um projeto de estrutura sob fadiga com tolerância ao dano apresenta vantagens econômicas e também de segurança em relação às duas abordagens citadas anteriormente. O projeto de estruturas sob fadiga utilizando o conceito de tolerância ao dano é baseado no princípio de que a estrutura deve ser capaz de suportar carregamentos usuais de dimensionamento até a detecção e reparo de componentes com fissuras originadas por fadiga ou por danos acidentais ocorridos em serviço. Assim, o objetivo principal desta filosofia é detectar fissuras nos elementos estruturais principais

antes que a propagação da fissura leve a ruína desse elemento estrutural e, conseqüentemente, da estrutura. Um elemento estrutural principal é aquele cuja falha pode resultar em perda da estrutura. Em geral são realizadas análises de:

- 1) resistência residual para verificar a integridade estrutural, ou seja, a capacidade da estrutura suportar cargas quando um ou mais componentes estruturais estão ruídos.
- 2) propagação da fissura visando obter o número de ciclos que leva à falha do elemento estrutural.

O comprimento estável máximo da fissura, para um nível específico de carregamento, é o objetivo principal da análise de resistência residual. A interação entre elementos estruturais intactos ou com fissuras gera redistribuição de tensões e, em geral, a falha da estrutura pode ocorrer por escoamento da seção remanescente do componente estrutural ou por ter sido alcançado o comprimento crítico da fissura o qual leva à propagação instável da fissura.

Entretanto, a informação sobre o comprimento crítico da fissura tem pouca importância caso não se consiga prever com quantos ciclos, ou mesmo em quanto tempo, a fissura atinge essa dimensão. Logo, o segundo objetivo da análise de tolerância ao dano é a determinação da curva de propagação da estrutura como mostrado na Fig. (3.13). Geralmente sob a ação do carregamento de serviço a fissura propaga por fadiga a uma taxa de propagação cada vez maior.

A partir de um comprimento inicial a_0 , a fissura propaga até a_f . Baseado na curva de propagação, Fig (3.13), obtém-se o número de ciclos N_f de operação segura da estrutura até a fissura atingir o comprimento crítico. Sendo a_0 o comprimento de um defeito inicial, então a estrutura deve ser reparada ou substituída quando esta atingir o número de ciclos N_f . Em geral, a_0 é baseado no tamanho mínimo de trinca que pode ser detectado pelo método específico de inspeção que será utilizado. Como não se pode permitir que a fissura atinja o comprimento crítico esta deve ser detectada antes da estrutura ser submetida ao número de ciclos N_f . Como a fissura não pode ser detectada para comprimentos de trinca inferiores a a_0 , as inspeções devem ocorrer entre N_0 e N_f .

Com a abordagem de tolerância ao dano para projeto à fadiga é indispensável a realização de inspeções periódicas na estrutura para detecção de fissuras, ou até mesmo acompanhar a taxa de propagação da fissura a fim de possibilitar a avaliação da necessidade de reparos ou substituição de componentes. Entre os métodos mais

empregados para inspeção podem ser citados o visual, com líquido penetrante, ultra som e o raio X.

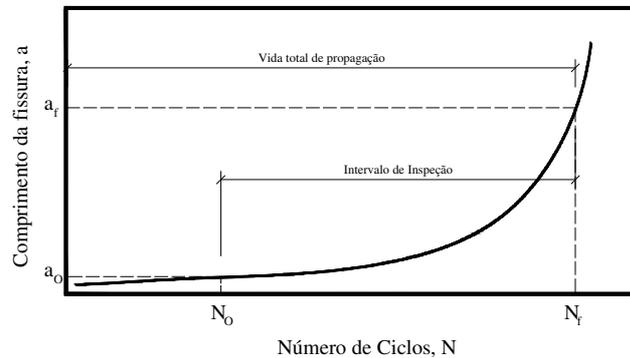


Figura 3.13 Curva típica de propagação de fissuras em função do número de ciclos de carga atuante.

A previsão do número de ciclos decorridos na propagação da fissura envolve a utilização de curvas empíricas da taxa de propagação da fissura e de conceitos da mecânica da fratura elástico linear. Para analisar a propagação da fissura é necessária a determinação do comprimento inicial da fissura, o carregamento aplicado, as propriedades de fratura e a curva de propagação do material.

Ao contrário da filosofia safe-life, em que componentes estruturais são substituídos se estiverem ou não danificados após certo período de serviço, na abordagem de tolerância ao dano, os componentes são substituídos somente se uma fissura é encontrada durante uma inspeção.

Portanto, a análise de tolerância ao dano consiste basicamente de três partes:

- 1) Determinação da curva de resistência residual para se obter o tamanho crítico da fissura.
- 2) Determinação do número de ciclos necessários para a fissura atingir o comprimento crítico
- 3) Especificação do intervalo de inspeção.

3.11.5 – Taxa de Propagação de Fissuras em Fadiga

Quando uma fissura com comprimento inicial a_0 , propaga de um incremento Δa , devido a ação de um número de ciclos de carregamento ΔN , a taxa de propagação da fissura pode ser caracterizada pela razão $\Delta a/\Delta N$, e para pequenos intervalos de propagação da fissura, esta razão tende a da/dN . A taxa de propagação da fissura por fadiga indica quanto a fissura cresce por ciclo de carregamento e é definida como sendo

a inclinação da curva que relaciona o tamanho da fissura ao número de ciclos de carregamento conforme apresenta a Fig. (3.14).

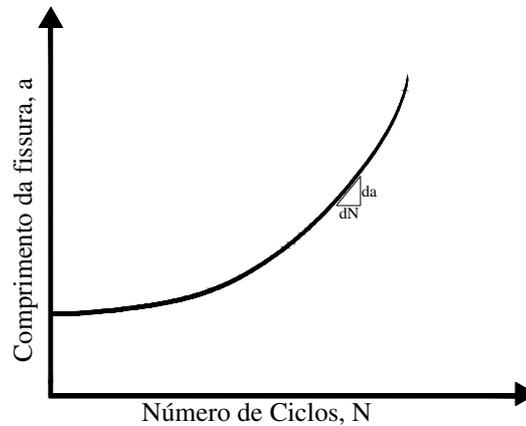


Figura 3.14 Variação do comprimento da fissura ao longo do número de ciclos

Ao se aplicar um carregamento cíclico de amplitude constante, é usual definir a variação de tensões, $\Delta\sigma$, e a razão de tensões, R .

$$\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \quad (3.49)$$

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (3.50)$$

Sendo: σ_{\max} a tensão máxima durante um ciclo de carregamento e σ_{\min} a tensão mínima durante um ciclo de carregamento.

No caso das fissuras, a taxa de propagação de fissura por fadiga é controlada pela variação do fator de intensidade de tensão definida como:

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min} \quad (3.51)$$

Onde: K_{\max} é o valor máximo do fator de intensidade de tensão durante um ciclo de carregamento e K_{\min} o valor mínimo do fator de intensidade de tensão durante um ciclo de carregamento. A Fig. (3.15) ilustra a variação dos fatores de intensidade de tensão durante os ciclos de carregamento.

Como a tensão e o fator de intensidade de tensão são proporcionais, pode-se reescrever a Eq (3.50) em função de K_{\max} e K_{\min} .

$$R = \frac{K_{\min}}{K_{\max}} \quad (3.52)$$

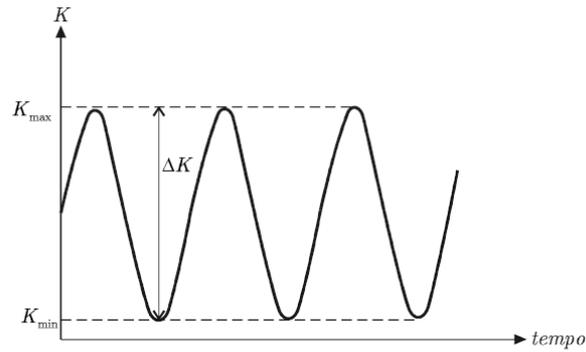


Figura 3.15 Definição de K_{\max} , K_{\min} e ΔK

A propagação da fissura por fadiga pode ser caracterizada por uma curva, em geral de forma sigmoïdal quando desenhada em escala logarítmica, que relaciona a taxa de propagação da fissura e a variação do fator de intensidade de tensão aplicada na estrutura. Essa curva clássica é apresentada na Fig. (3.16).

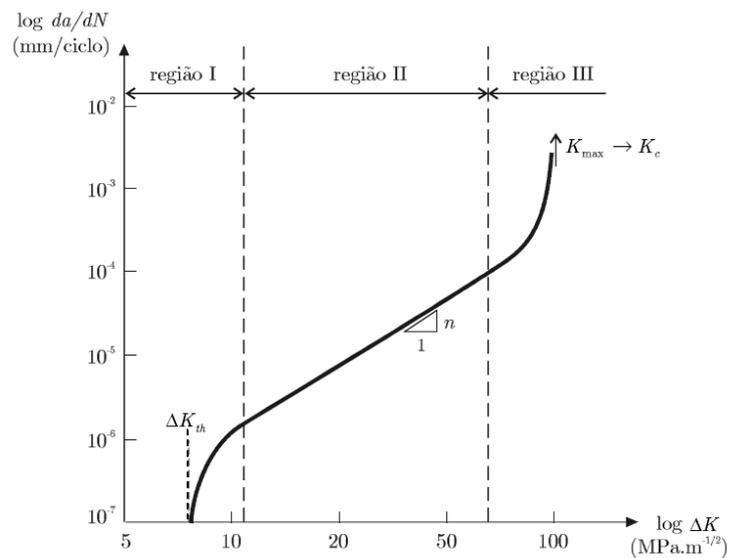


Figura 3.16 Curva da taxa de crescimento das fissuras da/dN .

Em geral a curva da Fig. (3.16) pode ser dividida em três regiões distintas. Em níveis baixos de variação dos fatores de intensidade de tensão, região I, a fissura propaga rapidamente. Isso ocorre pelo fato das fissuras, nessa fase, apresentarem pequeno comprimento e, além disso, estarem mergulhadas em uma região danificada pelo processo de fabricação do elemento estrutural. Nesta região, pode-se definir um valor específico da variação dos fatores de intensidade de tensão como limiar de propagação, ΔK_{th} . Esse valor pode ser interpretado como sendo o valor da variação do fator de intensidade de tensão abaixo do qual não ocorre propagação da fissura ou a taxa

de propagação da fissura é muito baixa, praticamente não detectável. Segundo BARSOM (1987) ΔK_{th} assume os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
 \Delta K_{th} &= 6,4 \cdot (1 - 0,85 \cdot R) \text{ MPa} / \sqrt{m} & R > 0,1 \\
 \Delta K_{th} &= 7,04 \cdot (1 - 0,85 \cdot R) \text{ Ksi} / \sqrt{\text{in}} & R > 0,1 \\
 \Delta K_{th} &= 5,5 \text{ Ksi} / \sqrt{\text{in}} & R < 0,1 \\
 \Delta K_{th} &= 6,0 \text{ MPa} / \sqrt{m} & R < 0,1
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

Na região II, a curva é praticamente linear e a fissura propaga de maneira estável. Em geral, a maior parcela do número de ciclos de propagação da fissura durante a vida útil da estrutura está associada a essa região da curva, sendo nesta baseados a maioria dos modelos e análises. Na região III, as taxas de propagação de fissura são extremamente altas e K_{max} tende a um valor próximo a K_c , denominado de tenacidade à fratura, que corresponde ao valor do fator de intensidade de tensão no qual ocorre fratura, ou seja, propagação instável da fissura. Em muitas situações, quando a estrutura alcança a região III, o problema deixa de ser de fadiga e passa a ser de fratura.

3.11.6 – Leis de Crescimento das Fissuras em Fadiga

Um grande número de critérios para propagação de fissuras sob fadiga tem sido proposto na literatura. Esses critérios prevêm relações, principalmente baseadas em dados experimentais, relacionando a taxa de crescimento da fissura por ciclo, da/dN , com variáveis como carregamento, comprimento da fissura, geometria e propriedades do material.

Um critério largamente utilizado é o apresentado em PARIS et. al (1961) e PARIS & ERDOGAN (1963). Esse critério descreve coerentemente somente a propagação das fissuras na região II e é usualmente referenciado na literatura como “Lei de Paris”. A relação entre a taxa de crescimento da fissura e a variação dos fatores de intensidade de tensão é dada por:

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^n
 \tag{3.54}$$

em que: C e n são constantes do material e representam os coeficientes linear e angular do trecho reto da curva da Fig. (3.16), respectivamente.

Apesar de ser um critério muito utilizado, a “Lei de Paris” não é adequada para representar o processo de crescimento de fissuras quando as variações do fator de intensidade de tensão, ΔK , são muito elevadas, região III, ou muito baixas, região I. Para a região III de crescimento, FORMAN et al. (1967) propuseram o critério de propagação de fissuras descrito pela seguinte relação:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C \cdot (\Delta K)^n}{(1-R) \cdot K_c - \Delta K} \quad (3.55)$$

Nota-se que o critério de FORMAN et al. (1967) é uma modificação da “Lei de Paris” pela introdução do termo $(1-R) \cdot K_c - \Delta K$ no denominador. Verifica-se que quanto maior for a variação entre os fatores de intensidade de tensão no ciclo de carga, menor será o denominador da Eq. (3.55) e assim maior será a taxa de crescimento da fissura. Para o caso limite em que K_{\max} é igual a K_c , tenacidade do material, o denominador é igual a zero e há um valor singular para a Eq.(3.55). Nessa situação, a propagação da fissura não ocorre devido a fadiga, mas sim pela violação do fator de intensidade de tensão crítico do material em análise, ou seja, fratura.

Já para a propagação de fissuras sob fadiga na região I, DONAHUE et al.(1972) apresentaram o critério baseado na seguinte relação:

$$\frac{da}{dN} = K_c \cdot \left[\Delta K - (1-R)^\gamma \cdot K_{th} \right]^m \quad (3.56)$$

sendo: m e γ parâmetros característicos do material.

Há ainda um critério para propagação de fissuras sob fadiga proposto por ERDOGAN & RATWANI (1970) que engloba os três regimes de propagação apresentados na Fig.(3.16). Esse critério é representado pela relação a seguir:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C \cdot (1+\beta)^m \cdot (\Delta K - K_{th})^n}{K_c - (1+\beta) \cdot \Delta K} \quad (3.57)$$

onde: C, n e m são parâmetros do material, da geometria e das condições de carregamento, respectivamente. β é dado pela seguinte relação, $\beta = \frac{K_{\max} + K_{\min}}{K_{\max} - K_{\min}}$.

A Eq. (3.57) apresenta bons resultados em relação a ensaios experimentais para taxas de crescimento das fissuras no intervalo de 10^{-8} a 10^{-2} in/ciclo.

Mais informações sobre esses modelos, bem como dados experimentais em diversos tipos de materiais, podem ser encontrados em SURESH (2004), BROEK (1986) e SAXENA (1998).

3.11.7 – Crack Closure Effect

A introdução do conceito de “crack closure” ocorreu no trabalho de ELBER (1970). Nesse trabalho o autor demonstrou sua grande capacidade na compreensão do processo de crescimento de fissuras em carregamentos cíclicos explicando um efeito até então ainda não bem entendido. Suas observações podem ser apresentadas com o auxílio da Fig. (3.17). Esta figura mostra um padrão de abertura e fechamento de uma fissura durante um dado carregamento que varia de zero a um determinado fator de intensidade de tensão máximo desejado.

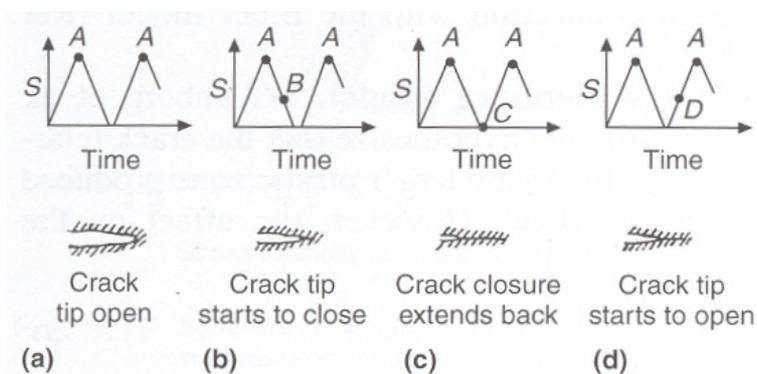


Figura 3.17 Análise do efeito de crack closure. SURESH (2004).

O conceito natural que se tem é que quando a estrutura está descarregada as faces da fissura estão fechadas. Quando está presente um dado carregamento as fissuras abrem-se e depois da retirada do carregamento as faces da fissura voltam a fechar-se. Essa idéia é intuitiva, uma vez que na fadiga os carregamentos atuantes são baixos, levando o analista a pensar de forma elástica sobre o comportamento estrutural.

Entretanto, durante o processo de carga e descarga ocorre, na frente da ponta da fissura, a degradação da rigidez do material. Devido a esse comportamento as faces da fissura podem fechar-se antes mesmo da retirada total do carregamento. Durante o restante da fase de descarregamento as faces da fissura fecham-se, mas na ponta da fissura a solicitação de fadiga não mais ocorre. De forma similar, quando ocorre o recarregamento, apenas uma parte da amplitude total do fator de intensidade de tensão influenciará nos deslocamentos da ponta da fissura. A amplitude do fator de intensidade de tensão que governa o crescimento da fissuras é apresentada pelos trechos AB e DA na Fig. (3.17) e não pelo trecho AC. Deve-se destacar que esse efeito é importante em materiais que apresentam comportamento elastoplástico e a amplitude dos carregamentos aplicados induzem tensões na estrutura próximas à tensão de escoamento

do material. Em materiais de comportamento frágil e para carregamentos de baixa amplitude esse efeito pode ser desprezado.

ELBER (1970) expressou matematicamente esse conceito por meio de uma variação efetiva no valor do fator de intensidade de tensão. Dessa forma nas Eq. (3.54), Eq. (3.55), Eq. (3.56) e Eq. (3.57) o termo ΔK deve ser substituído por outro denominado ΔK_{eff} que medirá a variação efetiva do fator de intensidade de tensão que provoca solitação na ponta da fissura. Na Fig. (3.18) estão apresentados os resultados de ELBER (1970) para ΔK_{eff} em dois carregamentos distintos. Verifica-se que para um carregamento com R igual a zero ΔK_{eff} é igual a 50% da amplitude total. Já para um carregamento onde R é igual a 0,5 constata-se que ΔK_{eff} é aproximadamente igual a 70% da amplitude de variação do fator de intensidade de tensão.

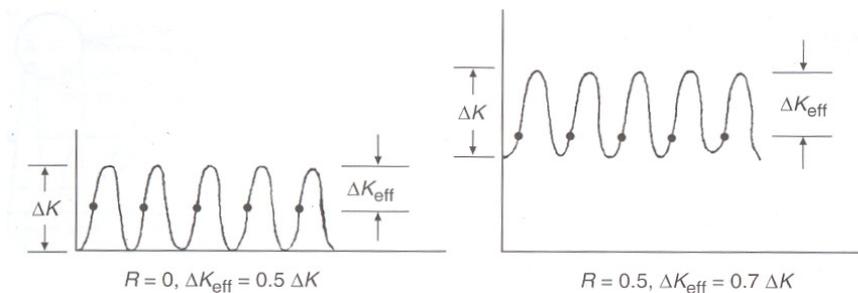


Figura 3.18 Comportamento de ΔK_{eff} em dois carregamentos distintos SURESH (2004).

3.12 – Considerações Sobre o Contato entre Superfícies

Em diversos tipos de estruturas o carregamento externo aplicado é transferido pelos componentes estruturais por meio do contato entre eles e, portanto, a eficiência mecânica do sistema depende da natureza da interação entre as superfícies em contato. Apesar da grande importância da mecânica do contato, ainda se busca melhor entendimento sobre a modelagem dos fenômenos que ocorrem nessa condição.

Na prática, o conhecimento da mecânica do contato pode ser desenvolvido por meio da experiência e observação. Como a observação direta é muitas vezes impossível, pelo fato das áreas de interesse estarem escondidas sob as superfícies em contato, somente é possível a determinação do efeito médio da zona de contato no comportamento dos corpos em análise. Em análises experimentais os parâmetros de interesse a determinar são a coesão dos materiais e o ângulo de atrito, os quais

permitirão inferir se as superfícies em contato permanecerão em aderência completa ou se ocorrerá escorregamento, MAN (1994).

Outra grande dificuldade do problema está no fato de que o comportamento do contato é dependente dos materiais envolvidos, da textura da superfície, da topologia, da taxa de carregamento, magnitude do carregamento, direção de carga, condições de contorno, etc. Em diversos projetos de estruturas mecânicas, muitos aspectos de segurança no projeto levam em conta a contribuição do atrito. Embora em muitos casos o efeito do atrito não seja crítico, a falta de conhecimento sobre esse fenômeno e seus efeitos pode levar a projetos ineficientes e não seguros. Atualmente não existe uma formulação única para a análise desse problema. São diversas as abordagens encontradas na literatura algumas delas já apresentadas no capítulo 2. Para maiores detalhes sobre o problema sugere-se consultar PARIS & CAÑAS (1997), PAPADOPOULOS & SOLBERG (1998) e MAN (1994).

3.12.1 – Considerações Sobre Atrito

O mecanismo físico associado ao atrito pode ser entendido como a resistência ao escorregamento entre as superfícies em contato. A existência de uma adesão entre as superfícies em contato é fortemente influenciada pela rugosidade das mesmas e também pela microestrutura dos materiais envolvidos. O atrito tem um grande efeito sobre a interação entre as forças de superfície normais e tangenciais na situação de contato. Por esta razão uma solução precisa é obtida somente com a consideração do atrito.

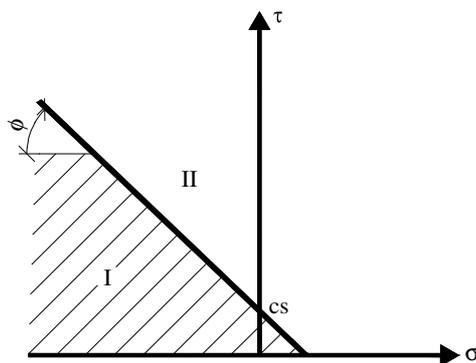


Figura 3.19 Critério de atrito de Coulomb

Para a modelagem do atrito a lei de atrito de Coulomb é usualmente empregada. A definição básica da lei de atrito de Coulomb é que o escorregamento entre os corpos em contato ocorre quando a força de superfície tangencial, em qualquer ponto do

contato, exceder a soma entre a coesão inicial e o produto da força de superfície normal, no ponto, pelo coeficiente de atrito, o qual representa a rugosidade das superfícies envolvidas. Essa lei é apresentada na Eq. (3.58).

$$\tau = c_s - \sigma \cdot \tan(\varphi) \quad (3.58)$$

Graficamente a lei de Coulomb pode ser visualizada na Fig. (3.19).

3.12.2 – Classificação do Contato

O contato pode ser classificado de acordo com algumas características importantes. A seguir serão descritos os tipos de contato que apresentam maior ocorrência em aplicações estruturais.

a) Contato sem atrito: esse tipo de contato é uma idealização de um modo de contato que apresenta limitada aplicação. Geralmente, esse caso se aplica quando se tem superfícies lisas, suaves, contínuas e muito bem lubrificadas. Nesse tipo de contato os corpos envolvidos possuem a capacidade de escorregar um sobre o outro sem qualquer resistência ao longo das direções tangencial e paralela ao contato. Com a aplicação do carregamento externo, somente tensões normais ao contato podem ser desenvolvidas. O equilíbrio do sistema é mantido pela transferência de tensões normais na região do contato.

b) Contato com atrito: o atrito é um fenômeno físico encontrado naturalmente em todos os problemas de contato. Quando o atrito é levado em consideração a análise do problema torna-se substancialmente mais complexa. Nesse caso o movimento tangencial a direção do contato apresentará um força restritiva (de atrito) que dependerá da força normal atuante. A relação entre as forças tangencial e normal impõem uma relação não linear entre o movimento tangencial e a carga externa aplicada. Na situação de atrito o escorregamento poderá ou não acontecer o que divide esse tipo de atrito em adesão perfeita e escorregamento.

c) Contato conforme: um contato é dito ser conforme se as superfícies em contato apresentam a mesma extensão considerando o corpo com carregamento e descarregado. Assim nesse tipo de contato o tamanho da superfície em contato é independente da carga aplicada e, portanto a história do carregamento não é importante para essa categoria.

d) Contato não conforme: para o caso em que a área de contato entre os corpos apresenta dimensões diferentes de acordo com o carregamento atuante tem-se um

contato não conforme. Nessa situação a configuração da zona de contato dependerá da história do carregamento aplicado. A modificação das dimensões da área de contato depende de diversos aspectos. Dentre eles, podem ser citadas as propriedades dos materiais, configuração inicial do contato, taxa de aplicação do carregamento, direção do carregamento, dentre outras. Além disso, os fatores citados apresentam comportamento distinto se atuam isoladamente ou em conjunto com outros fatores. Portanto esse é um dos modos de contato de maior dificuldade de representação analítica.

Existem outros tipos de contato sendo aqui descritos os de maior ocorrência em aplicações estruturais.

3.12.3 – *Modos de Contato*

A região cuja superfície está sujeita ao contato é denominada “área potencial de contato”. Essa região recebe essa denominação, pois dependendo das condições geométricas e de carregamento poderá ocorrer o contato ou a separação dos corpos em análise. Assim os modos de contato podem ser classificados como:

a) Modo de separação: nesse modo de contato a abertura entre as superfícies envolvidas é positiva e, portanto os corpos em análise permanecem separados.

b) Modo de escorregamento: o movimento na direção paralela ao contato é permitido podendo existir ou não a ação de forças restritivas. Assim, nesse modo as superfícies podem deslizar uma em relação a outra. No entanto, na direção normal ao contato ocorre o movimento conjunto das superfícies.

c) Modo de contato pleno: esse modo é caracterizado pelo movimento conjunto das superfícies em contato, tanto na direção tangencial quanto na normal. Assim, a análise desse modo deve fornecer além dos deslocamentos na interface em contato as forças de equilíbrio na região.

d) Modo de escorregamento parcial: esse caso representa um modo intermediário entre os descritos nos casos b, escorregamento perfeito, e c, adesão perfeita. Nesse modo de contato ocorre a adesão perfeita quando as forças atuantes da região do contato forem inferiores às prevista por um critério de resistência. Caso contrário ocorre o deslizamento das superfícies com a presença de uma força de atrito.

4. – Tópicos de Confiabilidade Estrutural

A concepção, o dimensionamento e a previsão sobre o bom funcionamento estrutural conduzem a verificações, nos elementos estruturais, com relação a requisitos resultantes dos conhecimentos físico e mecânico e também da experiência de seus analistas e construtores. Esses requisitos se traduzem, sob formas mais ou menos complexas, em critérios cujo objetivo é definir valores limiares para variáveis estruturais como tensões decorrentes de solicitações, deslocamentos, deformações, entre outras.

Em uma análise de confiabilidade estrutural cada critério pode ser entendido como um evento estatístico e suas conseqüências como cenários de falha. A verificação de cada critério, portanto se traduz na verificação de cada modo potencial de falha. Para tanto, deve-se descrever e formular o problema considerando suas variáveis com as devidas incertezas. O objetivo passa a ser então avaliar uma probabilidade, aquela de se encontrar uma situação de falha, considerando o conhecimento estatístico de cada variável e sua influência sobre o comportamento estrutural.

4.1 – Probabilidade e Confiabilidade

Nesse tópico serão apresentados três importantes conceitos da teoria da confiabilidade estrutural que são probabilidade de falha, risco e confiabilidade. No entanto antes de fazê-lo serão discutidos os termos “probabilidade” e “propensão” que são de grande valia para o entendimento de risco e confiabilidade e também têm ampla utilização na literatura, KAMINSKI JR (2007).

O termo propensão pode ser entendido como uma medida da crença na ocorrência de um evento futuro. Evento pode ser interpretado como um resultado dentro do conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento (espaço amostral). Já o

termo probabilidade é um conceito matemático, cuja definição axiomática, proposta por KOLMOGOROV (1956), está baseada em três axiomas:

$$0 \leq \text{Prob}\{A\} \leq 1$$

$$\text{Prob}\{\Omega\} = 1 \quad (4.1)$$

$$\text{Prob}\{A \cup B\} = \text{Prob}\{A\} + \text{Prob}\{B\}$$

Pode-se verificar que nos axiomas mostrados na Eq. (4.1) A e B são eventos mutuamente excludentes do conjunto Ω de todos os resultados possíveis de A e B. Se estes eventos não forem mutuamente excludentes, a partir dos axiomas básicos, tem-se:

$$\text{Prob}\{A \cup B\} = \text{Prob}\{A\} + \text{Prob}\{B\} - \text{Prob}\{A \cap B\} \quad (4.2)$$

Em geral o termo propensão à falha deve ser utilizado em um contexto geral, porém quando a teoria de probabilidades é utilizada na estimativa da confiabilidade, que é o caso na grande maioria dos problemas em engenharia estrutural, o termo probabilidade de falha deve ser usado na quantificação da propensão à falha.

A probabilidade de falha pode ser definida como a propensão de que ocorra um evento de falha, ou seja, que um estado limite seja alcançado. Deve-se salientar que o termo falha é bastante abrangente, significando a interrupção de uma determinada função da estrutura e não necessariamente a sua ruína. O complemento da probabilidade de falha é a confiabilidade estrutural, que trata da propensão de que um estado limite não seja alcançado, considerando as variáveis fundamentais do projeto estrutural. Já o termo risco deve ser empregado quando se busca considerar as conseqüências da falha. Essa grandeza pode ser definida multiplicando-se a probabilidade de falha por suas conseqüências.

Para CHRISTENSEN & BAKER (1982) o termo confiabilidade estrutural deve ser empregado em dois sentidos. No primeiro, com sentido mais geral, a confiabilidade de uma estrutura é sua capacidade de atendimento aos propósitos de projeto, durante um determinado período de tempo. Já no segundo, sentido matemático, a confiabilidade é a probabilidade de que a estrutura não alcance nenhum dos estados limites ou modos de falha especificados durante um determinado período de referência.

Deve-se destacar que as propriedades de um sistema estrutural, como por exemplo, a sua resistência mecânica, bem como as ações e seus efeitos, possuem características estatísticas (aleatórias). Assim, o fenômeno de falha deve ser descrito em termos probabilísticos sendo necessários modelos de probabilidade para as duas partes do problema de forma a incluir todas as incertezas que dizem respeito às ações e seus

efeitos e à resistência ou rigidez dos componentes. Além disso, outro importante fator a definir é o período de referência. A sua definição é de fundamental importância na análise da confiabilidade, uma vez que a maioria das ações em estruturas varia de forma incerta com o tempo e, portanto, a propensão de que uma determinada intensidade da ação seja excedida em um intervalo de tempo depende do tamanho deste intervalo. Assim, a confiabilidade é também dependente do tempo em que a estrutura fica exposta ao carregamento, sendo também afetada quando as propriedades do material variam, normalmente deterioram, com o tempo.

Em engenharia estrutural os problemas de confiabilidade podem ser formulados por meio de sua capacidade ou resistência, R , e demanda ou efeito das ações, S . A análise é usualmente fundada no cálculo do complemento da confiabilidade, ou seja, a propensão à falha P_f . Sendo resistência e solicitação variáveis aleatórias estatisticamente independentes, com distribuições de probabilidade conhecidas e estacionárias no tempo, a probabilidade de falha, P_f , pode ser avaliada pela solução da seguinte equação:

$$P_f = \text{Prob}[(R-S) \leq 0] = \int_0^{\infty} F_R(x) \cdot f_s(x) dx \quad (4.3)$$

Na Eq. (4.3) $F_R(x)$ é a função de probabilidade acumulada da resistência e $f_s(x)$ é a função densidade de probabilidade da solicitação. A Eq. (4.3) é conhecida como integral de convolução com relação a “ x ”, correspondendo à soma de todos os casos de solicitação para os quais a resistência é menor que a solicitação.

Esta equação pode também ser escrita em termos da função de probabilidade acumulada da solicitação, $F_s(x)$, e da função densidade de probabilidade da resistência $f_R(x)$. Assim:

$$P_f = \text{Prob}[(R-S) \leq 0] = \int_0^{\infty} [1 - F_s(x)] \cdot f_R(x) dx \quad (4.4)$$

Segundo FREUDENTHAL et al. (1966): “a probabilidade de falha é o limite estocástico da proporção de estruturas que devem falhar quando cada uma das estruturas selecionadas aleatoriamente da população $F_R(x)$ é submetida a uma ação selecionada aleatoriamente da população $F_s(x)$.”

Enfim, como visto nesse tópico procurou-se apresentar alguns conceitos importantes da teoria da confiabilidade. Outras definições sobre probabilidade, vida útil estrutural e confiabilidade podem ser encontradas na literatura, porém as definições apresentadas são perfeitamente compatíveis com a utilização da teoria da confiabilidade nesse trabalho.

4.2 – Índice de Confiabilidade

O índice de confiabilidade pode ser apresentado considerando, por simplicidade, a equação de estado limite do problema fundamental. Esta equação é definida como a diferença entre a resistência da estrutura e a sollicitação atuante na mesma. Assim:

$$G = R - S \quad (4.5)$$

O problema posto pela Eq. (4.5) pode ser resolvido, como já apresentado, com o emprego das Eq. (4.3) e Eq. (4.4). No caso de R e S serem variáveis aleatórias, G será também uma variável aleatória. Além disso, se R e S forem variáveis gaussianas o problema poderá ser resolvido analiticamente já que nessa situação G será também uma variável normal. Sendo R e S variáveis independentes os parâmetros de G podem ser assim calculados:

$$\mu_G = \mu_R - \mu_S \quad (4.6)$$

$$\sigma_G = \sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_S^2} \quad (4.7)$$

Onde μ e σ representam a média e o desvio padrão da variável aleatória. A variável aleatória G pode ser transformada em uma variável normal padrão, ou seja, com média nula e desvio padrão unitário.

$$Y_G = \frac{G - \mu_G}{\sigma_G} \quad (4.8)$$

Esta transformação permite avaliar probabilidades associadas à G através da função de distribuição cumulativa normal padrão. A probabilidade de falha resulta:

$$P_f = \text{Prob}[G \leq 0] \Rightarrow P_f = \Phi \left[-\frac{\mu_G}{\sigma_G} \right] \quad (4.9)$$

O termo entre colchetes, dado pela razão entre a média e o desvio padrão de G, é denominado índice de confiabilidade, sendo usualmente representado pela letra β .

Apesar de apresentar o índice de confiabilidade em apenas duas variáveis gaussianas é possível a abordagem de problemas onde as variáveis apresentem uma

distribuição qualquer. Nesse caso deve ser considerada uma transformação intermediária para a obtenção de variáveis normais equivalentes e só depois calcular as variáveis no espaço normal padrão.

O índice de confiabilidade apresenta também uma interessante interpretação geométrica. A menor distância entre a origem do espaço normal padrão e um ponto sobre a equação de estado de limite, G igual a zero, corresponde ao índice de confiabilidade.

De grande importância também é o ponto sobre a equação de estado limite mais próximo a origem no espaço normal padrão. Este ponto é o ponto de ruína mais provável. De posse desse ponto no espaço normal padrão deve-se fazer a transformação para a sua obtenção no espaço físico. No espaço físico esse ponto é chamado de ponto de projeto, indicando o conjunto de valores que provavelmente conduz a ruína.

4.3 – Método de Simulação de Monte Carlo

4.3.1 – Simulação de Monte Carlo Simples

O método de simulação de Monte Carlo se caracteriza por envolver grande número de repetições de um processo de amostragem ou de realizações das variáveis aleatórias do problema. Essas realizações são obtidas de acordo com números aleatórios gerados conforme conveniente distribuição de probabilidades. As repetições fornecem um conjunto de soluções (uma para cada realização) que representam a resposta simulada do modelo mecânico. Este procedimento é similar, por exemplo, a realização de experimentos em laboratório e, portanto, os resultados também podem receber tratamento estatístico. Sendo uma técnica de amostragem, o método está sujeito aos problemas relativos a erros de amostragem. Normalmente, requerem-se amostras de tamanho elevado para que um conjunto de simulações seja representativo.

O núcleo do método reside na obtenção do conjunto de realizações aleatórias, obedecendo a uma lei definida, através da geração de números aleatórios. Para gerar-se uma seqüência obedecendo a uma distribuição qualquer, deve-se gerar uma seqüência obedecendo a uma distribuição uniforme entre 0 e 1 e em seguida, realizar uma transformação de inversão da função de probabilidade acumulada. Esses números

aleatórios são gerados via computadores, onde bilhões de números aleatórios podem ser gerados rapidamente.

Por meio do método de Monte Carlo a probabilidade de falha é calculada pela seguinte equação:

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_{x_i}(x_i) dx_i = \int_{\Omega} I(x_i) \cdot f_{x_i}(x_i) dx_i = E(I(x)) \quad (4.10)$$

O estimador $I(x)$ é definido como:

$$I(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega_f \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega_f \end{cases} \quad (4.11)$$

Repetindo as análises para um número de simulações conveniente, n_s , a média empírica dos valores de $I(x)$ é um estimador da probabilidade de falha. Ou seja:

$$\bar{P}_f = \frac{1}{n_s} \cdot \sum_{i=1}^{n_s} I(x_i) \quad (4.12)$$

A variância do estimador $I(x)$ é:

$$\sigma_{I(x)}^2 = \frac{1}{n_s^2} \cdot \left[n_s \cdot \sum_{i=1}^{n_s} I^2(x_i) - \left(\sum_{i=1}^{n_s} I(x_i) \right)^2 \right] \quad (4.13)$$

Graficamente cada experimento em uma análise via simulação de Monte Carlo pode ser visualizada na Fig. (4.1).

A grande desvantagem do método está relacionada ao número excessivo de simulações necessárias para que se possa estimar com precisão a probabilidade de falha. Em geral, para estimar uma probabilidade de falha da ordem de 10^{-n} , o número de simulações não deve ser inferior a 10^{n+2} ou 10^{n+3} . Significa que nas estruturas civis, com probabilidade de falha de 10^{-3} a 10^{-6} , são necessárias 10^5 a 10^9 amostras.

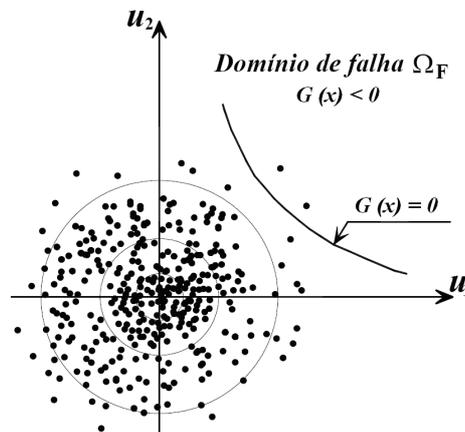


Figura 4.1 Pontos de Amostragem Simulações de Monte Carlo, NEVES (2004).

Dessa forma, com a utilização dos modelos não-lineares de representação do comportamento das estruturas, o método de Monte Carlo não é dos mais eficazes. Além disso, esse método não fornece nenhuma informação adicional sobre o ponto de projeto e a sensibilidade da probabilidade de falha em relação às variáveis aleatórias.

4.3.2 – Simulação de Monte Carlo com Amostragem por Importância

Como observado na Fig. (4.1) pode-se verificar que a grande maioria dos pontos experimentados encontra-se sobre o domínio de segurança, assim para a determinação da probabilidade falha é necessário um número elevado de simulações. Para contornar esse problema podem ser empregadas as técnicas de amostragem por importância. Essas técnicas são também conhecidas por amostragem inteligente já que procuram deslocar os pontos de amostragem para regiões importantes do domínio de falha, como apresenta a Fig. (4.2). Elas reduzem o número de simulações por evitar a simulação excessiva de pontos longe da região de interesse. Estas técnicas geralmente fazem uso de alguma informação adicional sobre o problema como, por exemplo, as coordenadas do ponto de projeto.

Os pontos de amostragem são gerados a partir de uma função de amostragem que os desloca para o domínio de falha. Assim a probabilidade de falha pode ser calculada como:

$$P_f = \int_{\Omega} I(x_i) \cdot \frac{f_{x_i}(x_i)}{l_{x_i}(x_i)} \cdot l_{x_i}(x_i) dx_i \quad (4.14)$$

Onde $l_x(x)$ é a função de amostragem.

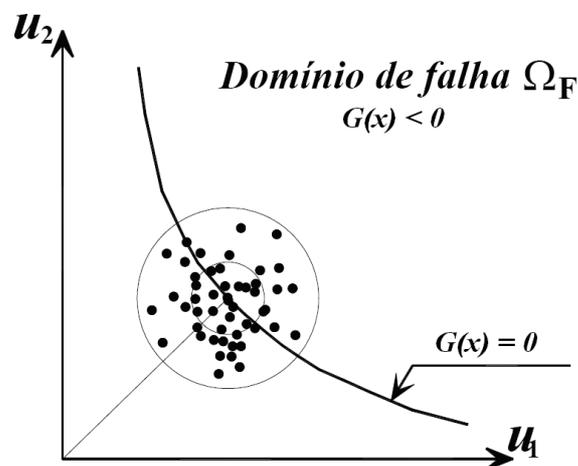


Figura 4.2 Simulações de Monte Carlo com amostragem por importância, NEVES (2004).

A estimativa da probabilidade de falha fica dada, portanto como:

$$\bar{P}_f = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} I(\bar{x}_i) \cdot \frac{f_{x_i}(x_i)}{l_{x_i}(x_i)} \quad (4.15)$$

Por meio da Eq. (4.15) verifica-se que cada ponto amostrado está associado a um peso de simulação dado pela razão $f_{x_i}(x_i)/l_{x_i}(x_i)$. Como a função de amostragem $l_{x_i}(x_i)$ desloca os pontos amostrados para o domínio de falha, o indicador $I(\bar{x}_i)$ será maior que $I(x_i)$, da Eq. (4.12), no entanto cada ponto amostrado está associado a um peso menor que um. Deve-se destacar a importância na escolha da função $l_{x_i}(x_i)$ já que uma má escolha dessa função pode levar a resultados incorretos e piores do que os obtidos com a amostragem simples.

4.4 – FORM / SORM

O método de confiabilidade de primeira ordem ou FORM fornece uma estimativa da probabilidade de falha da estrutura através da linearização da função de estado limite no ponto de projeto no espaço normal padrão. A linearização se faz através de um hiper-plano tangente à superfície de falha no ponto de projeto. A aproximação FORM é suficientemente precisa para os casos em que a curvatura da superfície de falha é pequena e a probabilidade de falha tem um valor pequeno. Além disso, o erro nesse tipo de aproximação depende da concavidade da superfície de falha, ou seja, para superfícies côncavas, a aproximação é a favor da segurança, ao passo que para superfícies convexas, o FORM resulta contra a segurança.

O SORM é uma tentativa de melhorar a aproximação da probabilidade de falha baseado em maiores informações sobre a superfície de falha da estrutura. O princípio é exatamente o mesmo da aproximação FORM, porém requer um melhor conhecimento sobre a geometria da função de estado limite na vizinhança do ponto de projeto. Nesse tipo de aproximação, a função de estado limite é tratada como uma hiper-superfície do segundo grau ao invés do hiper-plano tangente. As informações adicionais sobre a função de estado limite são suas curvaturas principais, além do índice de confiabilidade. O método exige que no ponto de projeto, a superfície quadrática aproximadora seja contínua e que seja duas vezes diferenciável, além de ter o mesmo plano tangente e a mesma curvatura principal que a função de estado limite real. Existem várias

aproximações quadráticas disponíveis na literatura técnica para a forma da hiper-superfície empregada no SORM. A escolha depende da precisão requerida bem como do tempo disponível de processamento. Entre as diversas opções para o SORM estão: aproximação por uma hiper-esfera centrada, hiper-esfera excêntrica e aproximações assintóticas.

4.4.1 – Algoritmo Para Cálculo do Índice de Confiabilidade

Na maioria dos métodos utilizados para análise da confiabilidade necessita-se de um algoritmo de otimização para encontrar o ponto de projeto. Nesses métodos, a otimização é utilizada para encontrar a mínima distância entre um ponto sobre a superfície de falha e o centro do sistema de coordenadas no espaço normal padrão não correlacionado. Neste trabalho será utilizado o algoritmo HLRP, o qual apresenta eficiência comprovada em trabalhos de outros pesquisadores como SOARES (2001), NEVES (2004) e NOGUEIRA (2005).

Esse algoritmo está baseado na aproximação de um ponto, x , à superfície de falha, $G(x)=0$, e na perpendicularização entre o vetor posição, x , e a superfície de falha, $G(x)=0$.

Esse algoritmo pode ser descrito nos seguintes passos:

- 1) Escolha do ponto inicial, geralmente a origem do espaço normal padrão $\{x_i^0\} = 0$.
- 2) Cálculo da função de estado limite no ponto $\{x_i^k\} = 0$, $G^k = G(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$.
- 3) Cálculo do vetor gradiente da função de estado limite, $\{\nabla G_i^k\}$, e de sua respectiva norma, $\|\nabla G\|^k$.
- 4) Cálculo do vetor de cossenos diretores, $\{\alpha_i^k\}$ e do índice de confiabilidade, β^k , por meio das seguintes relações:

$$\{\alpha_i^k\} = \frac{\nabla G_i^k}{\|\nabla G\|^k} \quad (4.16)$$

$$\beta^k = \frac{G^k - \{\nabla G_i^k\}^T \{x_i^k\}}{\|\nabla G\|^k} \quad (4.17)$$

- 5) Cálculo do próximo ponto $\{x_i^{k+1}\}$, $\{x_i^{k+1}\} = -\beta^k \cdot \{\alpha_i^k\}$

- 6) Os passos 2 a 5 devem ser repetidos até a convergência, ou seja, até que a diferença do índice de confiabilidade entre duas iterações consecutivas seja menor que determinada tolerância.

Por meio desse algoritmo, além do cálculo do índice de confiabilidade, é possível também a determinação dos fatores de sensibilidade das variáveis envolvidas na análise.

4.5 – Método de Superfície de Resposta

Apesar de levar ao cálculo da probabilidade de falha o método de simulação de Monte Carlo é por vezes inviável em aplicações práticas, pois necessita de um número extremamente grande de pontos de amostragem elevando sensivelmente o custo computacional da análise. Uma solução alternativa para este problema encontra-se no método de superfície de resposta (MSR).

Esse método, como qualquer outro, apresenta vantagens e desvantagens. Pode-se considerar como a principal vantagem o reduzido custo computacional envolvido no processo de avaliação da probabilidade de falha e do ponto de projeto. Como desvantagens citam-se as aproximações implícitas do método, o que por vezes pode conduzir a respostas não precisas e dificuldades de convergência. A respeito dessas aproximações, a maior dificuldade é definir uma superfície de falha para a estrutura, uma vez que as estruturas são em geral hiperestáticas e apresentam respostas mecânicas não lineares. Essa dificuldade leva um número razoável de pesquisadores a trabalharem com superfícies de falha predefinidas, viabilizando apenas a análise de casos simples com comportamento mecânico bem conhecido. Para superar esta dificuldade e possibilitar a análise de estruturas mais complexas, é efetuado nesse trabalho um processo aproximado para a obtenção da superfície de falha em função da resposta mecânica da estrutura.

Uma vez definida esta superfície, existem vários algoritmos apresentados na literatura para calcular o ponto de projeto e conseqüentemente o índice de confiabilidade de uma estrutura. Dentre eles destacam-se, os de Hasofer & Lind e Rackwitz & Fiessler, HLRF, ou mesmo métodos clássicos de otimização. Conhecido o ponto de projeto, o índice de confiabilidade é facilmente determinado por métodos como o FORM e o SORM.

Independente do método utilizado para o cálculo do índice de confiabilidade é sempre necessária a determinação de várias soluções mecânicas da estrutura em análise, isto é, um número importante de realizações da função de estado limite. Cada análise pode resultar de consulta a um modelo complexo, com solução também complexa e de alto custo computacional. Com o objetivo de minimizar o número de realizações mecânicas, uma das soluções possíveis é construir uma representação analítica simples (polinômios) na vizinhança do ponto de projeto. A estes métodos é dado o nome de métodos de superfícies de resposta. Tais métodos permitem que o cálculo da probabilidade de falha seja bastante simplificado e tenha reduzido custo computacional. Porém, a dificuldade desses métodos é justificar a aproximação adotada para a equação de estado limite do problema.

No MSR a equação de estado limite é escrita na forma polinomial, envolvendo as variáveis aleatórias da análise, sendo esta construída com base em consultas ao modelo mecânico. Portanto, o objetivo é construir uma resposta aproximada explícita da função de estado limite real em torno do ponto de falha mais provável. Para isso, é necessária a repetição do cálculo determinístico (modelo mecânico) para um certo número de pontos selecionados na vizinhança do ponto de projeto e em seguida efetua-se uma análise de interpolação ou regressão. O nível de aproximação depende do nível de conhecimento do ponto de projeto e do grau da não linearidade da função de estado limite relacionada.

Não é possível conhecer a priori qualquer informação sobre a superfície de resposta. De acordo com LEMAIRE (1998), o desenvolvimento construído por uma expansão polinomial é o mais eficiente no caso de falta de informações sobre a forma da superfície de resposta, sendo esta escolha feita pela maioria dos pesquisadores que utilizam o MSR. Polinômios de grau dois são uma boa solução para o problema apesar de, em alguns trabalhos, ser possível a utilização de polinômios de primeiro grau. Já a utilização de polinômios de graus elevados pode oscilar ou variar muito no domínio do problema. Portanto, conclui-se que é aconselhável trabalhar com superfícies de resposta com polinômio de ordem baixa, segunda ou terceira ordem.

Uma vez definida a forma da superfície de resposta, propõe-se com o MSR desenvolvê-la em torno do ponto de projeto, que a princípio tem posição desconhecida. A solução consiste em procurar uma seqüência de pontos de projeto associada a uma seqüência de superfícies de resposta na qual o domínio de definição contenha o ponto de

projeto. Esse procedimento é largamente utilizado apesar do mesmo não garantir a convergência para um mínimo global.

4.5.1 – Etapas do Método de Superfície de Resposta

O processo de busca do ponto de projeto e da probabilidade de falha, pelo MSR, envolve passos sucessivos que contêm as convergências dos procedimentos mecânicos e de confiabilidade.

1º passos sucessivos: a superfície de resposta é construída devido a uma evolução do centro da mesma que converge para um mínimo, ponto de projeto, o qual deve pertencer ao domínio de construção da superfície de resposta. Em geral esse ponto é um mínimo absoluto sobre a superfície de resposta, mas não necessariamente um mínimo global para o problema original. Assim, torna-se necessário efetuar um processo iterativo tal que as duas últimas superfícies de resposta apresentem o mesmo ponto de mínimo. Assim, esse passo envolve processos adaptativos de construção das superfícies de resposta de forma que essas conduzam ao ponto de projeto do problema original.

2º convergência mecânica: o modelo mecânico é verificado em cada iteração sendo a superfície de resposta construída com base em suas respostas

3º convergência de confiabilidade: de posse da equação de estado limite (superfície de resposta), o índice de confiabilidade é obtido a cada passo usando-se o FORM e/ou SORM.

4.5.2 – Adaptatividade das Superfícies de Resposta

Superfícies de resposta representam com boa precisão a resposta real da estrutura apenas em uma vizinhança do ponto central do plano de experiência. Estas superfícies tratam de aproximar a equação de estado limite do problema real.

Portanto, utiliza-se um processo iterativo no qual as superfícies de resposta são recalculadas a cada iteração de forma a convergirem para uma solução do problema original. Para construir as superfícies de resposta necessita-se de um conjunto de simulações da estrutura, que é efetuado variando-se os valores das variáveis aleatórias do problema. Tais variações obedecem a um critério predeterminado denominado *plano de experiência (PE)*. Os planos de experiência são um dos principais responsáveis pela convergência do algoritmo e pelo custo computacional do modelo proposto. Na

literatura há uma grande busca por novos planos de experiência para melhorar essas características, podendo-se dizer que qualquer proposta de um novo PE que forneça melhorias no custo computacional e também no processo de convergência do algoritmo de confiabilidade são aceitas.

Os planos de experiência podem ser classificados em duas grandes categorias: planos de experiência sistemáticos e planos de experiência aleatórios. A diferença entre um PE sistemático e um PE aleatório, é que, para duas experiências com dados idênticos, ao utilizar um PE sistemático a igualdade entre os resultados é total, o que não acontece com planos de experiência aleatórios. Os planos de experiência aleatórios podem conduzir a singularidades no sistema, exigindo um número maior de pontos para evitar essa singularidade. Outra característica é que os pontos não se localizam necessariamente em torno da solução devido a aleatoriedade, podendo necessitar de mais superfícies de resposta para a convergência do modelo. Entretanto, para problemas com elevado número de variáveis aleatórias pode-se tornar difícil estabelecer um PE numérico que garanta convergência. Nessas situações o PE aleatório pode ser mais adequado.

Neste trabalho foram considerados somente planos de experiência sistemáticos. O plano de experiência sistemático é um conjunto de valores determinísticos com os quais será aproximada a hipersuperfície da resposta estrutural. Dessa forma, supõe-se um sistema de coordenadas, onde cada uma delas equivale a uma variável aleatória de resistência e a outra equivale à resposta estrutural. O PE é responsável pela variação determinística das variáveis aleatórias para gerar a hipersuperfície da resposta estrutural também determinística, a qual definirá a hipersuperfície de falha do problema mecano-probabilístico.

Existem várias formas de planos de experiência disponíveis na literatura. Entretanto, necessitam-se definir os coeficientes que melhor se adequam ao problema estudado. Os planos de experiência considerados nesse trabalho são: estrela, hiper-cubo, mínimo, composto, 13 pontos e 8 pontos. Estes dois últimos planos de experiência não são citados na literatura e foram desenvolvidos pelo autor.

A distância dos pontos pertencentes ao plano de experiência à origem do sistema depende do desvio padrão considerado. A origem refere-se a média, enquanto os demais pontos são obtidos considerando a média mais “n” desvios padrão. Em geral “n” é tomado igual a 3. No Anexo G encontram-se as expressões das coordenadas dos pontos pertencentes aos planos de experiência utilizados nesse trabalho.

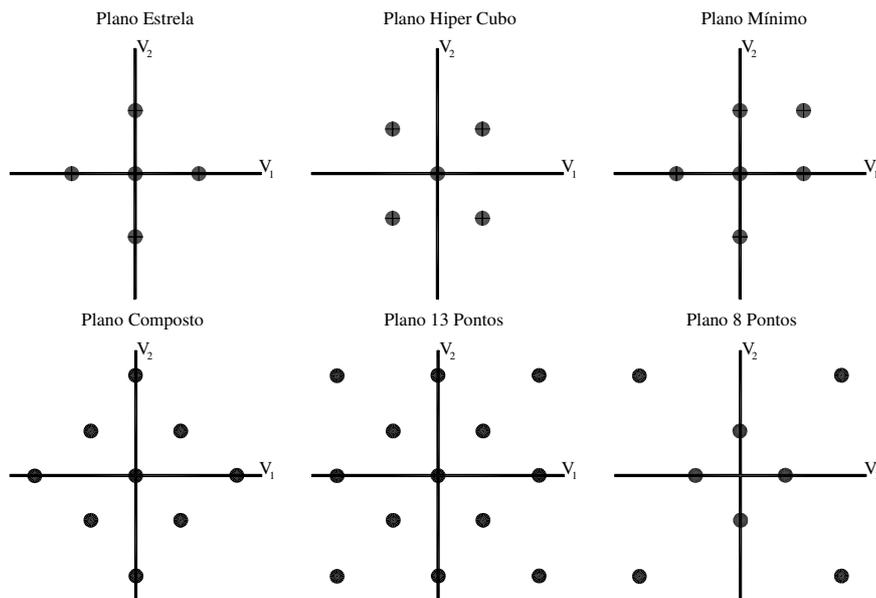


Figura 4.3 Planos de Experiência e sua distribuição considerando duas variáveis aleatórias.

Os planos de experiência caracterizam as superfícies de resposta adaptativas requeridas pelo MSR desde o início do processo iterativo até a convergência. A velocidade de convergência, ou o custo computacional do método depende em boa parte de uma boa escolha desses planos. A definição do melhor plano a ser utilizado deve ser feita de acordo com o problema estudado.

Nesse trabalho a evolução ou adaptatividade das superfícies de resposta é feita de duas maneiras diferentes. Em ambas, a equação da superfície de resposta é determinada a cada iteração sendo, em cada iteração, eliminados todos os pontos da iteração anterior. Assim, torna-se necessário definir todos os pontos da superfície de resposta a cada nova iteração. Nas duas formas consideradas de adaptatividade das superfícies de resposta o ponto médio do plano de experiência, localizado no centro do sistema de coordenadas do PE no espaço físico, assume as características do ponto de projeto da última iteração, e os demais pontos continuam sendo determinados segundo o PE adotado. Ou seja, o plano de experiência é transladado, com seu centro localizado no ponto de projeto encontrado na iteração anterior. Esse procedimento pode ser visualizado com a ajuda da Fig. (4.4).

As duas formas consideradas para a evolução das superfícies de resposta empregadas neste trabalho diferem na maneira escolhida para se efetuar o refinamento da solução. Na primeira delas, a solução é refinada à medida que a convergência do processo de confiabilidade é obtida. Inicialmente o modelo que governa o

comportamento mecânico da estrutura deve ser consultado com os valores para as variáveis aleatórias definidos segundo o plano de experiência escolhido. Então, constrói-se a equação de estado limite (polinômio) e obtêm-se as coordenadas de um ponto de projeto. De posse desse resultado, o centro dos pontos de amostragem (centro do PE adotado) é transladado para o ponto de projeto obtido na iteração anterior.

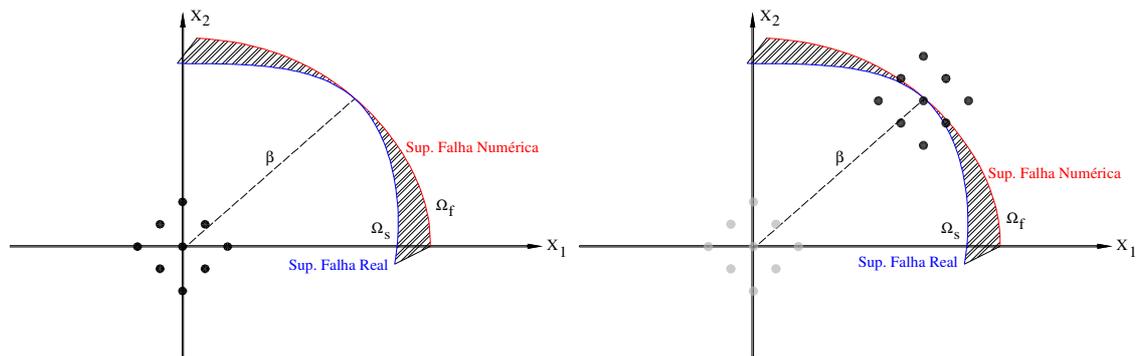


Figura 4.4 Adaptatividade dos planos de experiência na análise.

Quando a distância entre os pontos de projeto de duas iterações consecutivas é menor que uma tolerância imposta na análise, a distância entre os pontos do plano de experiência escolhido é reduzida. Assim, à medida que obtêm-se convergência, a amostragem é efetuada em pontos cada vez mais próximos como ilustra a Fig. (4.5). Quando a distância entre os pontos no PE é menor que uma determinada tolerância estabelecida a análise é interrompida e o índice de confiabilidade e as coordenadas do ponto de projeto são encontrados. Caso contrário, a redução da distância entre os pontos no PE ocorre sendo esta distância considerada igual a distância entre os pontos do PE da iteração anterior dividida por dois.

Esse procedimento fornece bons resultados, como será apresentado. Além disso, à medida que a distância entre os pontos no plano de experiência vai sendo reduzida, os resultados obtidos por meio dos diversos planos de experiência convergem para um único resultado. No entanto, esse procedimento é muitas vezes de elevado custo computacional, uma vez que envolve a convergência do procedimento de confiabilidade diversas vezes.

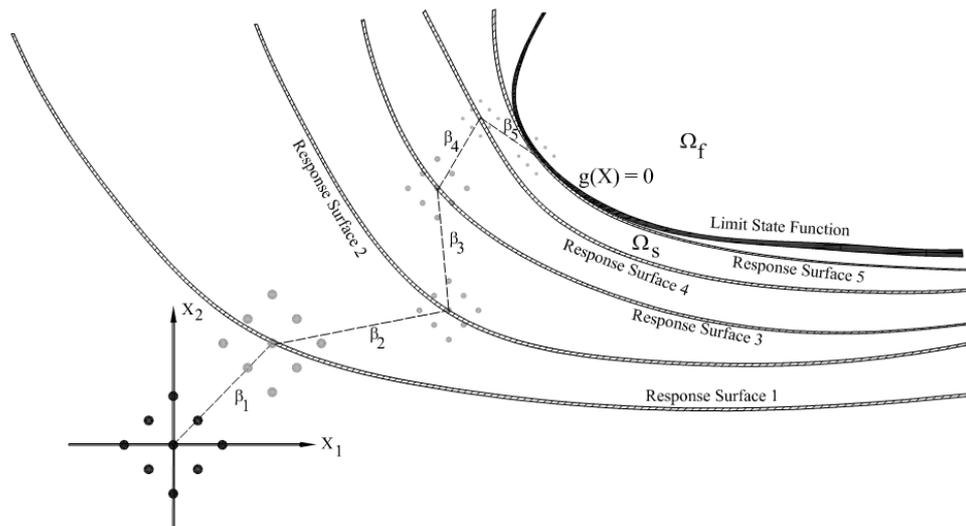


Figura 4.5 Sistema adaptativo para os parâmetros do plano de experiência. Redução após convergência

Já na segunda forma de adaptatividade considerada nesse trabalho a solução é refinada a cada nova construção de uma superfície de resposta. Assim como a forma anterior, o modelo que governa o comportamento mecânico da estrutura é consultado com os valores para as variáveis aleatórias definidos segundo o plano de experiência escolhido. À medida que o ponto de projeto em cada iteração é obtido, o centro dos pontos de amostragem vai sendo transladado para o ponto de projeto obtido na iteração anterior. A diferença em relação à forma anterior é que nesta forma de refinamento a distância entre os pontos no plano de experiência vai sendo reduzida progressivamente a cada nova construção de uma superfície de falha, como mostra a Fig. (4.6). A convergência da análise ocorre quando a distância entre pontos de projeto de duas iterações consecutivas é menor que uma tolerância imposta na análise.

Essa forma de refinamento conduz a bons resultados, como poderá ser visualizado na seqüência deste trabalho. Uma grande vantagem dessa forma de adaptatividade é a estabilidade do processo numérico até a obtenção da solução. Nesse caso é observado que o caminho percorrido pelas variáveis aleatórias até a convergência é praticamente o mesmo, não importando o plano de experiência empregado na análise. Além disso, essa forma de refinamento apresenta um custo computacional menor quando comparado com o esquema anterior, uma vez que a solução é obtida mais rapidamente já que a distância entre os pontos no plano de experiência é reduzida progressivamente.

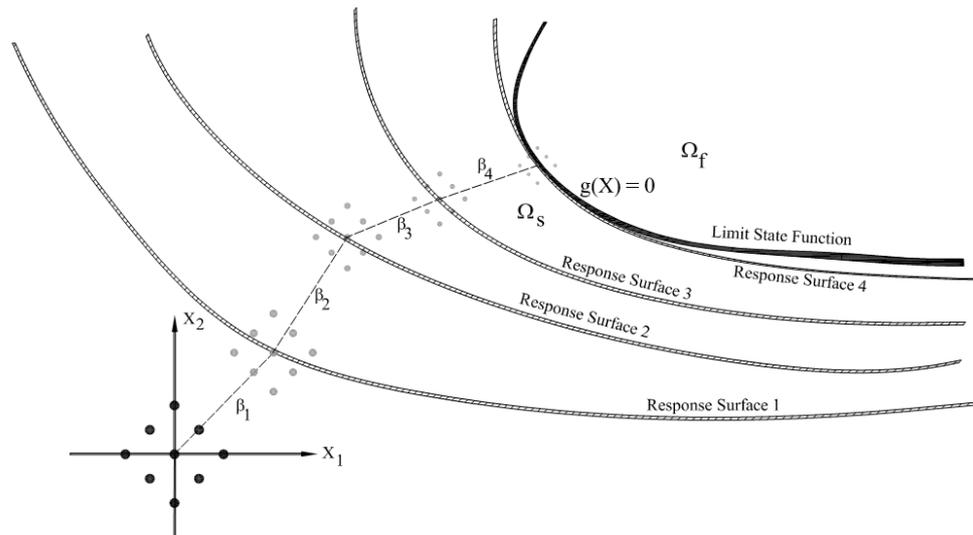


Figura 4.6 Sistema adaptativo para os parâmetros do plano de experiência. Redução progressiva

4.5.3 – Formulação Para a Determinação da Equação de Estado Limite

No caso da superfície de falha ser implícita (numérica) utiliza-se um método de regressão para se determinar as constantes do polinômio aproximador da hipersuperfície de estado limite. Será mostrado agora um método de regressão para um polinômio de dimensão e ordem quaisquer. Conhecendo-se esse procedimento, a expressão para representação da superfície de estado limite da estrutura, válida em torno do ponto de projeto, é facilmente determinada.

A regressão é feita segundo o método dos mínimos quadrados, ou seja, minimizando o quadrado das distâncias entre as respostas reais e as aproximadas pelo polinômio. Representam-se o polinômio por $Q(x)$ e as respostas ou pontos, que dão origem à regressão, por R_i , que no caso equivalem às respostas mecânicas da estrutura. Então, $Q(x)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$Q(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j \quad (4.18)$$

sendo n o número de variáveis aleatórias que definem a dimensão do polinômio.

A regressão tem como objetivo minimizar a distância entre os pontos e a superfície aproximada, que é a incógnita do problema. Então, o problema da regressão passa a ser um problema de minimização escrito na seguinte forma:

$$\min d = \min \sum_{i=1}^{n_p} (Q(x^i) - R^i)^2 \quad (4.19)$$

onde n_p é o número de respostas conhecidas.

$Q(x)$ pode ser escrito por meio da seguinte relação:

$$Q(x) = \{A\}^t \{X\} \quad (4.20)$$

em que $\{A\}^t$ contém os escalares que multiplicam os termos do polinômio $\{X\}$. Para maior clareza $\{A\}^t$ e $\{X\}$ da Eq. (4.20) podem também ser escritos da seguinte forma:

$$\{A\}^t = \{a_0, a_1, \dots, a_n, b_{11}, \dots, b_m, b_{12}, \dots, b_{(n-1)n}\} \quad (4.21)$$

$$\{X\}^t = \{1, x_1, \dots, x_n, x_1^2, \dots, x_n^2, x_1 x_2, \dots, x_{(n-1)} x_n\} \quad (4.22)$$

Assim a Eq.(4.19) pode ser reescrita como:

$$d = \min \sum_{k=1}^{np} \left((\{A\}^t \{X^k\} - R^k) (\{X^k\}^t \{A\} - R^k) \right) \quad (4.23)$$

Expandindo os termos da Eq. (4.23) obtém-se:

$$d = \min \sum_{k=1}^{np} \left(\{A\}^t \{X^k\} \{X^k\}^t \{A\} - 2R^k \{A\}^t \{X^k\} + R^{k^2} \right) \quad (4.24)$$

Para a determinação do mínimo da Eq. (4.24) uma das condições necessárias é que o gradiente de d seja nulo. Assim:

$$\nabla_A d = \sum_{k=1}^{np} \left(2\{X^k\} \{X^k\}^t \{A\} - 2R^k \{X^k\} \right) = 0 \quad (4.25)$$

Que pode ser ainda simplificada como:

$$\nabla_A d = \sum_{k=1}^{np} \left(\{X^k\} \{X^k\}^t \{A\} - R^k \{X^k\} \right) = 0 \quad (4.26)$$

A partir da Eq. (4.26) pode-se definir que:

$$[P] = \sum_{k=1}^{np} \left(\{X^k\} \{X^k\}^t \right) \quad (4.27)$$

E que:

$$[V] = \sum_{k=1}^{np} \left(R^k \{X^k\} \right) \quad (4.28)$$

Assim, para que a Eq. (4.26) seja verdadeira o resultado das operações dos termos dentro do somatório deve ser nulo. Dessa forma:

$$\{X^k\} \{X^k\}^t \{A\} - R^k \{X^k\} = 0 \quad (4.29)$$

De posse das definições apresentadas nas Eq. (4.27) e Eq. (4.28) pode-se escrever que:

$$[P]\{A\} = \{V\} \quad \Leftrightarrow \quad \{A\} = [P]^{-1} \{V\} \quad (4.30)$$

Assim determina-se a superfície de resposta em torno do ponto de projeto em uma determinada iteração. Isso significa que se determinou a resistência, R , da estrutura considerando todo o comportamento não linear e as incertezas das variáveis de projeto consideradas. Para se obter a função de estado limite ou superfície de falha da estrutura, deve-se incorporar os efeitos da solicitação, S , a qual pode ser um valor determinístico ou mesmo uma variável aleatória inserida facilmente na formulação do FORM e ou SORM.

4.6 – Acoplamento Direto entre Modelo Mecânico e HLRF/ FORM

O MSR é um método robusto para a análise de confiabilidade estrutural, pois, além de fornecer bons resultados, permite o desenvolvimento de análises confiabilísticas de sistemas estruturais complexos. Porém, muitas vezes esse método torna-se caro do ponto de vista computacional, uma vez que necessita de muitas consultas ao modelo mecânico para a obtenção da convergência. Para tentar solucionar este problema foi também considerado neste trabalho um método alternativo, onde o modelo mecânico é acoplado diretamente ao HLRF / FORM.

Como discutido anteriormente, no MSR a equação de estado limite da estrutura é implícita e escrita com base em consultas ao modelo mecânico via planos de experiência. A forma da equação de estado limite no método, em geral um polinômio, é uma aproximação inerente, muitas vezes grosseira, ao método. Apesar desta metodologia fornecer bons resultados é possível melhorá-la eliminando tal aproximação. Para isso foi considerado nesse trabalho um modelo onde o acoplamento do modelo mecânico é feito diretamente ao algoritmo HLRF / FORM, sem a construção de superfícies aproximadas. Com esse acoplamento a equação de estado limite permanece implícita e dada pelo modelo mecânico. Porém a diferença está no fato de que, com o acoplamento direto os gradientes da função de estado limite, necessários à determinação do ponto de projeto conforme mostrados no item 4.4.1, são calculados numericamente por meio da Eq. (4.31), efetuando-se consultas ao modelo mecânico. Nesse trabalho ξ é considerado igual a 0,1% do valor médio da variável aleatória.

Assim, não existem aproximações sobre a forma da equação de estado limite e conseqüentemente sobre os seus gradientes. Esses valores são obtidos por meio de consulta direta ao modelo mecânico, sem aproximações.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(a,b,\dots,z)}{\partial a} &= \lim_{\xi_a \rightarrow 0} \frac{F(a+\xi_a,b,\dots,z) - F(a,b,\dots,z)}{\xi_a} \\
\frac{\partial F(a,b,\dots,z)}{\partial b} &= \lim_{\xi_b \rightarrow 0} \frac{F(a,b+\xi_b,\dots,z) - F(a,b,\dots,z)}{\xi_b} \\
&\vdots \\
\frac{\partial F(a,b,\dots,z)}{\partial z} &= \lim_{\xi_z \rightarrow 0} \frac{F(a,b,\dots,z+\xi_z) - F(a,b,\dots,z)}{\xi_z}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

O modelo resultante do acoplamento direto entre o modelo mecânico e o HLRF / FORM fornece bons resultados como será apresentado oportunamente. Além de bons resultados esse modelo obtém a solução do problema de confiabilidade realizando um número menor de chamadas do modelo mecânico quando comparado ao MSR, assim esse modelo é mais eficiente. Deve-se destacar também que os resultados obtidos por meio dessa metodologia são estáveis, o que é um bom indicativo sobre a qualidade de sua solução.

4.7 – Modelagem Probabilística da Degradação

A degradação de um sistema estrutural, ou dos materiais que o constituem, é o reflexo de uma evolução lenta e irreversível de uma ou várias propriedades dos materiais, o qual é considerado a partir de um ponto inicial de referência, geralmente a fim do ciclo de fabricação. Esta evolução pode resultar em modificações na estrutura das macromoléculas, as quais asseguram sua coesão mecânica, sua composição ou sua morfologia. O envelhecimento instala problemas que produzem alterações nas propriedades afetando o desempenho funcional (aspectos, resistência mecânica, perda do desempenho funcional) e/ou de propriedades mais específicas afetando a segurança (isolação elétrica, permeabilidade gasosa ou líquida, toxicidade, entre outras). Para o estudo do comportamento estrutural ao envelhecimento é necessária a identificação dos ciclos de carga que são aplicados ao sistema e o estudo da sua influência sobre a vida útil estrutural.

A fim de poder formular o problema de confiabilidade, será discutido o conceito de margem de segurança. Esta variável pode ser entendida como uma equação de estado limite, porém que evolui no tempo. Esta variável pode ser definida em termos de duas entidades principais resistência e sollicitação. A resistência, $R(t)$, nos problemas dependentes do tempo pode representar: a resistência do equipamento a uma ação ou a

um efeito mecânico, térmico, magnético, etc. Pode representar também o limitador admissível de uma grandeza, observável ou não, como o deslocamento em um determinado ponto, o comprimento e a abertura das faces de fissuras, o dano crítico ou o tempo de falha. Já a solicitação, $S(t)$, nestes problemas pode representar: a solicitação resultante aplicada ao equipamento como força, pressão, temperatura, etc. A resposta do sistema a uma solicitação aplicada: tensões mecânicas, temperatura induzida, deslocamento interno entre componentes, etc. O acúmulo de uma grandeza em função da entrada e saída em serviço ou mesmo da idade do equipamento: danos de fadiga, fissuração, fluência, idade consumida.

Além destas entidades, a expressão da margem pode conter parâmetros determinísticos específicos e/ou das variáveis de concepção e manutenção. De uma forma geral, a margem disponível pode ser descrita pela diferença entre a resistência e a solicitação:

$$G(r, s, t) = R(t) - S(t) \quad (4.32)$$

onde $R(t)$ é a resistência disponível no sistema e $S(t)$ é a solicitação, as duas entidades são geralmente dependentes do tempo, t . Na Fig. (4.7) é apresentada a evolução da margem para um sistema degradável.

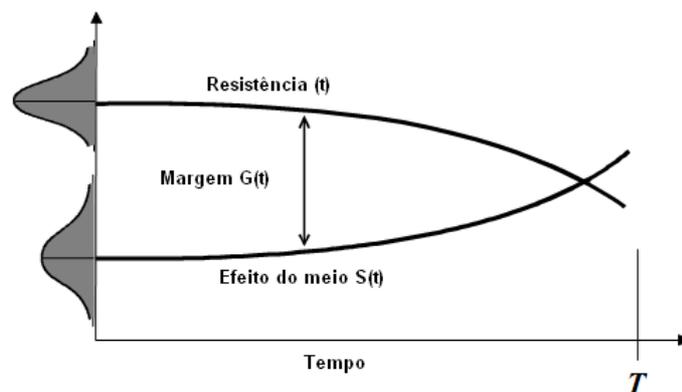


Figura 4.7 Evolução da resistência e das solicitações do meio ao longo do tempo.

Na modelagem da degradação estrutural distinguem-se dois casos que deve ser destacados: degradação instantânea da margem (resistência) e degradação acumulada da margem (resistência).

Degradação instantânea da margem: trata-se da situação onde a resistência, $R(t)$, diminui com o tempo acompanhado ou não de um aumento da solicitação $S(t)$, igualmente gerada pela degradação.

Degradação acumulada da margem: trata-se do caso em que o acúmulo da degradação, como a propagação de fissuras por fadiga, conduz a falha. Nesse caso o efeito da solicitação, $S(t)$, cresce com o tempo em serviço até o consumo dos recursos disponíveis, $R(t)$.

Do ponto de vista probabilista, um sistema não degradável é aquele em que a margem apresenta uma função de densidade de probabilidade constante para toda a sua vida útil (ou vida de serviço). Do ponto de vista prático esta se reduz geralmente a uma média e a um desvio padrão constantes sobre toda a vida de serviço supondo-se que a lei de distribuição permaneça imutável. Admitindo sempre esta última hipótese (tipo de lei de distribuição independente da idade do sistema) um sistema degradado é aquele que apresenta evoluções (deterministas ou aleatórias) dos momentos estatísticos (média e desvio padrão) ao longo do tempo.

O sistema não degradável, como o da Fig. (4.8), é aquele que mantém a mesma distribuição da margem de segurança para toda sua vida útil. Nesse caso, uma simples descrição sobre as variáveis aleatórias é suficiente para definir a distribuição probabilística da margem de segurança:

$$f_G(g, t) = f_G(g, 0) = f_G(g) \quad (4.33)$$

Considerando que:

$$\mu_G(t) = \mu_G \quad e \quad \sigma_G(t) = \sigma_G \quad (4.34)$$

No caso de variáveis gaussianas e independentes, a média e o desvio padrão da margem são simplesmente expressas em função dos parâmetros R e S como:

$$\mu_G = \mu_R - \mu_S \quad e \quad \sigma_G = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (4.35)$$

Para um sistema degradável, diferentes modelos podem ser propostos em função do fenômeno a ser estudado. Um modelo geral consiste em dividir a vida útil em quatro fases distintas: Fase de Iniciação, Fase de Amortecimento, Fase de Propagação e Fase de Aceleração. Cada uma destas fases pode ser visualizada na Fig. (4.9). A seguir cada uma destas fases será brevemente descrita.

Fase de Iniciação: no curso desta fase, os mecanismos de degradação não têm efeito sobre o sistema, geralmente graças às medidas de proteção iniciais. Esta fase tem uma duração mais ou menos longa segundo o mecanismo de degradação considerado. No caso das armaduras de concreto armado, a corrosão nesses elementos pode variar de

alguns dias, pela despassivação do aço sob vapor salino, a várias décadas para aços protegidos no concreto (este é o tempo de penetração de cloros dentro do cobrimento).

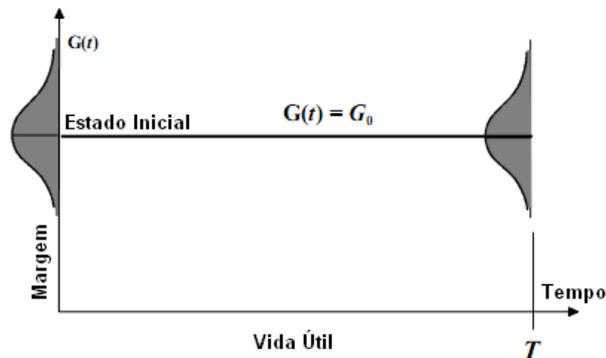


Figura 4.8 Evolução da margem para um sistema estrutural não degradável.

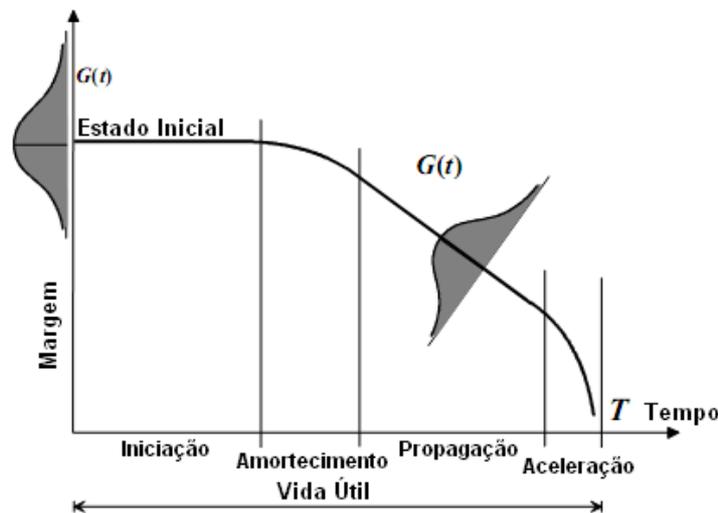


Figura 4.9 Margem de um sistema de envelhecimento.

Fase de Amortecimento: trata-se do período no qual o fator agressivo age diretamente sobre o sistema, seguida da perda da proteção ou ao aumento do nível de sollicitação. Esta fase é geralmente rápida se comparada à vida útil da estrutura.

Fase de Propagação: esta fase concerne a degradação lenta e geralmente continua do sistema, causando danos cada vez mais importantes. Entretanto, o sistema continua a executar suas funções, muitas vezes não como nas condições iniciais. Esta fase é acompanhada geralmente pela presença de danos significativos e normalmente detectáveis.

Fase de Aceleração: nesta fase, o dano torna-se realmente importante e contribui significativamente à aceleração do processo de degradação. Pode-se dizer que a aceleração resulta da interação entre os danos e a ação do meio, e não somente do meio. Nesta fase é geralmente muito tarde para efetuar operações de manutenção.

Segundo o mecanismo estudado algumas destas fases são muito curtas e podem ser desprezadas no modelo. Dois modelos simplificados são frequentemente usados na literatura como indica a Fig. (4.10). O modelo multi-linear é constituído por duas fases principais: iniciação e propagação, seguidas da fase de aceleração (este último normalmente não considerada em estudos de vida útil). O modelo não linear é representado por uma curva de degradação contínua no tempo, que considera somente a fase de propagação, onde a degradação é progressiva com uma taxa de crescimento.

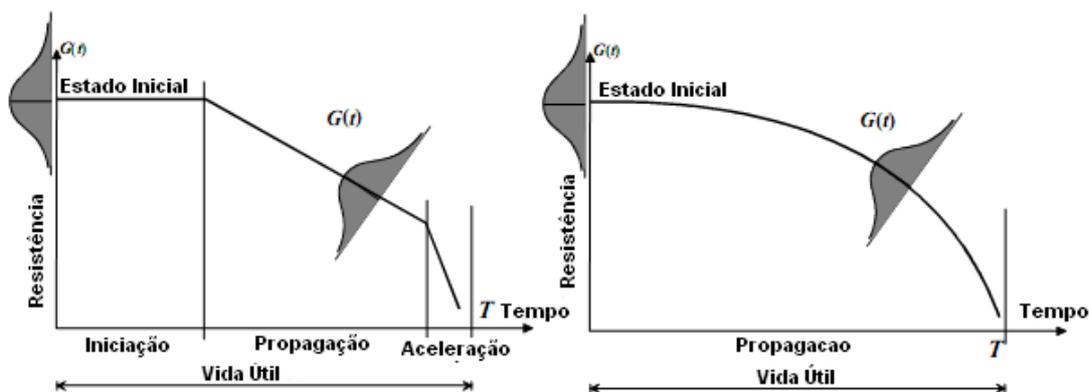


Figura 4.10 Modelos de degradação simplificados.

Na literatura, BUCHER & FRANGOPOL (2006), LAGGOUNE et al. (2009) e ONOUFRIOU & FRANGOPOL (2002), descrevem esses dois modelos como modelo de degradação da margem instantânea e modelo de degradação acumulada da margem respectivamente.

4.7.1 – Modelo de Degradação Instantânea

Esse modelo se aplica em situações onde observa-se a diminuição da resistência em função da idade (ou do tempo de serviço). Esta diminuição está, entretanto ligada a história do meio de carregamento, isto é, da evolução dos carregamentos, da temperatura, etc. Ela pode ser acompanhada, ou não, pelo aumento dos efeitos do meio como, por exemplo, no caso de perda de espessura devida a corrosão que gera um aumento das tensões sob o mesmo carregamento.

Na modelagem probabilística da degradação é necessário se levar em conta a evolução de incertezas ao longo do tempo. Essas incertezas resultam de duas causas: degradação inerente do sistema em função das condições de serviço previstas e imperfeições na previsão das condições operacionais, de estado do sistema e dos

modelos de degradação. A formulação desse modelo pode ser simplificada admitindo-se que a degradação ao longo do tempo resulte do produto da resistência inicial (normalmente aleatória) por uma função da degradação determinista.

$$R(t) = R_0 \cdot h(t) \quad (4.36)$$

sendo que $R(t)$ é a resistência ao longo do tempo, R_0 é a resistência do estado inicial (colocado em serviço em $t = 0$) e $h(t)$ é a função de degradação que depende da idade do componente. De uma maneira geral, a função de degradação pode ser obtida por desenvolvimentos matemáticos ou por simulações numéricas por meio do método dos elementos de contorno ou mesmo do método dos elementos finitos, por exemplo.

Em algumas situações particulares é possível exprimir a função $h(t)$ sob a forma analítica como apresentado em ELLINGWOOD & MORI (1995). Porém, em um caso mais realista onde a resistência pode ser afetada por incidentes aleatórios intervindo ao longo da vida útil, a resistência é melhor modelada por um processo estocástico com variação lenta. Esta variação pode ser descrita por uma densidade de probabilidade de transição $h_R(r, t)$, da qual a avaliação necessita a resolução do modelo de degradação estocástico, como ilustra a Fig.(4.11). A título de exemplo, pode-se citar caso de propagação de fissuras sob carregamento aleatório no qual a taxa de propagação é modelada por um processo aleatório dependente do tempo. Vários autores desenvolveram e/ou aplicaram modelos de difusão de Markov nestes problemas.

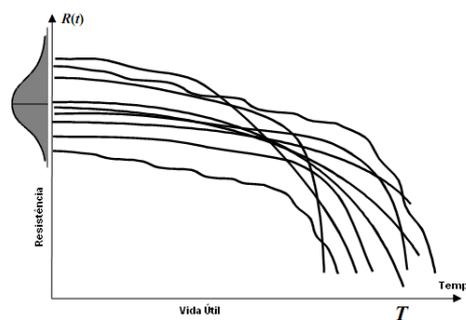


Figura 4.11 Curvas evolutivas de resistência em um modelo de degradação estocástica.

4.7.2 – Modelo de Degradação da Margem Acumulada

Esta situação corresponde ao acúmulo do dano até se atingir um valor limite para o funcionamento do sistema, como ilustra a Fig.(4.12). Neste caso, a resistência corresponde ao um limiar a não ser ultrapassado, isto é, um valor limite admissível. E o

efeito do meio, como cargas, temperaturas, entre outros, corresponde ao dano acumulado. Este acúmulo de danificação é gerado pelas condições de exploração da estrutura a qual está exposta às ações, entre outros, do meio mecânico (fadiga) e térmico (danos, fadiga). Existem combinações entre os cenários de carregamento e degradação do equipamento.

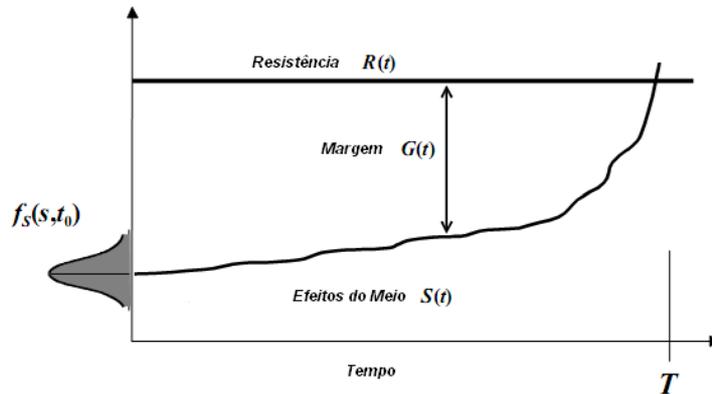


Figura 4.12 Modelo de acúmulo de dano estocástico.

Nesse modelo é possível também utilizar funções de degradação como no modelo discutido anteriormente. A diferença principal é que nestes modelos essa função deve ser descrita sob a forma incremental em função dos efeitos do meio.

$$S(t) = S(S_0, h(S(\tau), E(\tau), t)) \quad \text{com } 0 \leq \tau \leq t \quad (4.37)$$

Esta equação coloca em evidência o acoplamento entre os efeitos do meio, $S(t)$, e o próprio meio, $E(t)$, para toda a história do sistema. A margem de segurança é escrita então sob a forma:

$$G(r, s, t) = R(t) - S(t) = R - S(S_0, h(S(\tau), E(\tau), t)) \quad (4.38)$$

Esta expressão pode ser igualmente escrita em função do dano $D(t)$ e de seu valor limite D_L :

$$G(r, s, t) = D_L - D(D_0, h(D(\tau), E(\tau), t)) \quad (4.39)$$

Para um componente submetido a degradação, o modelo estocástico de confiabilidade dependente do tempo é geralmente desenvolvido sob a hipótese de um indicador de degradação, ou de dano, $D(t)$, modelado por um processo de Markov, onde o acúmulo de dano a ser determinado é condicionado pelo estado presente, independente do passado. A falha ocorrerá no momento da violação do limiar do dano.

5. - Método dos Elementos de Contorno

Os métodos numéricos, de forma geral, apresentaram forte evolução a partir da década de setenta quando os computadores assumiram a função de execução de operações matemáticas facilitando e agilizando os procedimentos de análise.

Nesse contexto destaca-se o método dos elementos de contorno (MEC), o qual é uma opção interessante para análises em diversos campos como mecânica dos sólidos, aeromecânica, geomecânica entre outros. Além disso, o método tem se mostrado muito promissor em áreas como mecânica dos solos, mecânica da fratura e mecânica das estruturas devido a precisão e robustez na modelagem de problemas de domínio infinito bem como de problemas onde surgem grandes concentrações de tensão. Outra grande vantagem é a capacidade de associação com outros métodos numéricos, em especial o método dos elementos finitos, ampliando assim as possibilidades em simulação de problemas.

O MEC é um método numérico que utiliza equações integrais escritas sobre o contorno, obtidas a partir das equações diferenciais que descrevem o fenômeno físico. Devido a essas transformações o método foi, no início de seu desenvolvimento, conhecido também como método das equações integrais. Segundo ALIABADI & ROOKE (1992), existem várias formas para o desenvolvimento da formulação do MEC. O emprego do teorema da reciprocidade de Betti talvez seja a forma mais direta de obtenção do equacionamento. Ainda podem ser empregados os conceitos de resíduos ponderados, como apresentado em BREBBIA & DOMINGUEZ (1992).

A formulação do MEC pode ser dividida, basicamente, em duas diferentes categorias. A primeira, e talvez a mais empregada, refere-se a formulação direta. Por meio dessa formulação as grandezas envolvidas no problema são empregadas e obtidas diretamente sem a necessidade de funções auxiliares. No caso dos problemas elásticos as variáveis principais são os deslocamentos e forças de superfície. Já a formulação indireta é caracterizada por certo desprendimento em relação a alguns aspectos do problema físico. Isso se deve ao fato do emprego de funções fictícias na representação

das grandezas do problema físico. Dessa forma os parâmetros do problema analisado, tais como deslocamentos e forças de superfície, não são utilizados diretamente e sua determinação é obtida por integrações das funções fictícias definidas na formulação. Essa formulação teve grande aplicação em campos como eletromagnetismo e mecânica dos fluidos.

5.1 – Soluções Fundamentais para os Problemas Bidimensionais e Tridimensionais

Para o desenvolvimento da formulação do MEC torna-se necessária a obtenção de soluções fundamentais para as grandezas envolvidas no problema. Para problemas elásticos estas soluções representam as respostas de um domínio infinito sujeito a um carregamento unitário pontual localizado em um ponto denominado ponto fonte, BREBBIA & DOMINGUEZ (1992).

As soluções fundamentais de problemas elástico lineares são atribuídas a Kelvin e podem ser obtidas por meio da equação de equilíbrio do corpo representada pela Eq. (I.2), do Anexo I. Inicialmente tem-se que a carga unitária pontual aplicada no ponto fonte é representada pela função Delta de Dirac, Anexo E. Levando essa condição à equação de equilíbrio, Eq. (I.2), verifica-se que a função Delta de Dirac deve ser igual ao carregamento de corpo b_i .

$$b_i = \Delta^f \cdot e_i \quad (5.1)$$

sendo: Δ^f função delta de Dirac aplicada no ponto fonte e e_i o versor necessário para definição da direção de aplicação da carga.

De posse desse resultado a equação de equilíbrio do corpo, Eq. (I.2), pode ser reescrita em termos de deslocamentos. Para realizar esse procedimento deve-se empregar a Lei de Hooke generalizada, Eq. (I.5), a qual relaciona tensões a deformações, e em seguida aplicar as relações deformação-deslocamento, Eq. (I.7), ambas discutidas no Anexo I. Procedendo dessa forma a equação de equilíbrio em termos de deslocamento, para material isótropo sob estado plano de deformação, pode ser definida como:

$$\left(\frac{1}{1-2 \cdot \nu} \right) \cdot u_{i,ij} + u_{j,ii} + \frac{\Delta^f \cdot e_i}{\mu} = 0 \quad (5.2)$$

A solução da Eq. (5.2) representa a solução fundamental para deslocamentos. No caso plano de deformação a solução é dada por:

$$u_{lk}^*(f, c) = \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot \mu \cdot (1 - \nu)} \cdot \left[(3 - 4 \cdot \nu) \cdot \ln\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \delta_{lk} + r_{,l} \cdot r_{,k} \right] \quad (5.3)$$

em que: $r_{,k}$ é a derivada da distância, entre o ponto fonte e os pontos onde devem ser avaliados a solução fundamental, pontos campo, em relação a direção k .

Deve-se destacar que o símbolo * representa variáveis associadas ao estado fundamental. Efetuando a diferenciação da Eq. (5.3) é possível obter a expressão para a solução fundamental das deformações. O resultado dessa operação é dado por:

$$\varepsilon_{ilk}^*(f, c) = \frac{-1}{8 \cdot \pi \cdot \mu \cdot (1 - \nu) \cdot r} \cdot \left[(1 - 2 \cdot \nu) \cdot (r_{,k} \cdot \delta_{il} + r_{,l} \cdot \delta_{ik}) - r_{,i} \cdot \delta_{lk} + 2 \cdot r_{,i} \cdot r_{,l} \cdot r_{,k} \right] \quad (5.4)$$

A partir da solução fundamental das deformações pode se aplicar a Lei de Hooke generalizada, Eq. (I.5), e assim obter a expressão para a solução fundamental das tensões conforme apresenta a Eq. (5.5).

$$\sigma_{ilk}^*(f, c) = \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r} \cdot \left[(1 - 2 \cdot \nu) \cdot (r_{,k} \cdot \delta_{il} + r_{,l} \cdot \delta_{ik} - r_{,i} \cdot \delta_{lk}) + 2 \cdot r_{,i} \cdot r_{,l} \cdot r_{,k} \right] \quad (5.5)$$

Por fim, o equilíbrio pode ser efetuado no contorno com o objetivo de obter a expressão para a solução fundamental das forças de superfície. Efetuando esse procedimento resulta a seguinte expressão:

$$P_{lk}^*(f, c) = \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r} \cdot \left\{ r_{,n} \cdot \left[(1 - 2 \cdot \nu) \cdot \delta_{lk} + 2 \cdot r_{,l} \cdot r_{,k} \right] + (1 - 2 \cdot \nu) \cdot (\eta_l \cdot r_{,k} - \eta_k \cdot r_{,l}) \right\} \quad (5.6)$$

Para problemas tridimensionais o procedimento para a obtenção das soluções fundamentais é análogo. A seguir são apresentadas as expressões das soluções fundamentais para o problema tridimensional.

$$u_{lk}^*(f, c) = \frac{1}{16 \cdot \pi \cdot \mu \cdot (1 - \nu)} \cdot \left[(3 - 4 \cdot \nu) \cdot \delta_{lk} + r_{,l} \cdot r_{,k} \right] \quad (5.7)$$

$$\varepsilon_{ilk}^*(f, c) = \frac{-1}{16 \cdot \pi \cdot \mu \cdot (1 - \nu) \cdot r^2} \cdot \left[(1 - 2 \cdot \nu) \cdot (r_{,k} \cdot \delta_{il} + r_{,l} \cdot \delta_{ik}) - r_{,i} \cdot \delta_{lk} + 3 \cdot r_{,i} \cdot r_{,l} \cdot r_{,k} \right] \quad (5.8)$$

$$\sigma_{ilk}^*(f, c) = \frac{-1}{8 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^2} \cdot \left[(1 - 2 \cdot \nu) \cdot (r_{,k} \cdot \delta_{il} + r_{,l} \cdot \delta_{ik} - r_{,i} \cdot \delta_{lk}) + 3 \cdot r_{,i} \cdot r_{,l} \cdot r_{,k} \right] \quad (5.9)$$

$$P_{lk}^*(f, c) = \frac{-1}{8 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^2} \cdot \left\{ r_{,n} \cdot \left[(1 - 2 \cdot \nu) \cdot \delta_{lk} + 3 \cdot r_{,l} \cdot r_{,k} \right] + (1 - 2 \cdot \nu) \cdot (\eta_l \cdot r_{,k} - \eta_k \cdot r_{,l}) \right\} \quad (5.10)$$

As expressões das soluções fundamentais apresentadas possuem uma característica importante que é a singularidade, representada pela distância entre os

pontos fonte e campo. Quando os pontos fonte e campo aproximam-se o valor das soluções fundamentais tendem a infinito. Isso requer um procedimento mais preciso de integração dos termos das matrizes constituintes do problema. Para contornar esse problema pode ser empregado o processo de sub-elementação, Anexo C, onde o elemento de contorno considerado é subdividido em elementos menores permitindo um melhor mapeamento das grandezas envolvidas tornando o processo de integração das equações mais preciso.

5.2 – Equacionamento para o Problema Elástico Plano

O equacionamento do problema elástico via MEC pode ser efetuado com sucesso e de forma expedita empregando o princípio da reciprocidade de Betti. Este teorema estabelece que o trabalho realizado pelas tensões de um estado I sobre as deformações de um estado II é igual ao trabalho das tensões do estado II sobre as deformações do estado I admitindo-se o mesmo material em ambos os estados. Esse teorema pode ser representado por meio da Eq. (5.11).

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^I \cdot \varepsilon_{ij}^{II} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{II} \cdot \varepsilon_{ij}^I d\Omega \quad (5.11)$$

Aplicando esta equação para a formulação do MEC deve-se substituir um dos estados do problema pelo estado fundamental, ou seja, representado pelas soluções fundamentais. Assim a Eq. (5.11) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ilk}^*(f, c) \cdot \varepsilon_{lk}(c) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{lk}(c) \cdot \varepsilon_{ilk}^*(f, c) d\Omega \quad (5.12)$$

Aplicando a relação deformação-deslocamento, Eq. (I.7), é possível exprimir a relação (5.12) em termos de deslocamentos.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ilk}^*(f, c) \cdot u_{l,k}(c) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{lk}(c) \cdot u_{il,k}^*(f, c) d\Omega \quad (5.13)$$

Integrando por partes ambos os termos da Eq. (5.13) e aplicando a condição de equilíbrio de superfície, representada pela Eq. (I.3), pode-se obter uma expressão envolvendo tensões, deslocamentos e forças de superfície tanto do estado fundamental quanto do problema estudado. Dessa forma:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ilk,k}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Omega + \int_{\Gamma} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma = -\int_{\Omega} \sigma_{lk,k}(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Omega + \int_{\Gamma} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Gamma \quad (5.14)$$

Nesse ponto deve-se empregar a equação de equilíbrio, representada pela Eq. (I.2), tanto no problema real quanto no problema fundamental como forma de substituir os termos de derivada das tensões por forças de corpo. Deve-se atentar para o fato que no problema fundamental a carga de corpo, b_i , é igual à função Delta de Dirac, Δ^f . Efetuando essas substituições pode-se reescrever a Eq. (5.14) como:

$$\int_{\Omega} \Delta^f \cdot u_l(c) d\Omega + \int_{\Gamma} P_{il}^*(f,c) \cdot u_l(c) d\Gamma = \int_{\Omega} b_l(c) \cdot u_{il}^*(f,c) d\Omega + \int_{\Gamma} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f,c) d\Gamma \quad (5.15)$$

Integrando o termo detentor da função Delta de Dirac obtém-se a seguinte expressão:

$$u_i(f) + \int_{\Gamma} P_{il}^*(f,c) \cdot u_l(c) d\Gamma = \int_{\Gamma} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f,c) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{il}^*(f,c) \cdot b_l(c) d\Omega \quad (5.16)$$

A Eq. (5.16) representa a identidade Somigliana, a qual fornece os valores de deslocamento e tensões em qualquer ponto do domínio dependendo dos valores dos deslocamentos e forças de superfície, conhecidos sobre o contorno, das forças de corpo e das soluções fundamentais, BREBBIA & DOMINGUEZ (1992).

Como o MEC pertence a classe das técnicas de contorno torna-se necessário transformar a Eq. (5.16), válida para todo domínio, em uma equação integral válida somente para valores de contorno. Para efetuar esse processo é necessário inicialmente admitir a divisão do domínio e do contorno em duas partes, conforme apresenta a Fig. (5.1), podendo ambas serem expressas por:

$$\hat{\Omega} = \Omega - \bar{\Omega} + \Omega_{\varepsilon} \quad (5.17)$$

$$\hat{\Gamma} = \Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_{\varepsilon} \quad (5.18)$$

As grandezas Ω_{ε} e Γ_{ε} referem-se a introdução de um semi-círculo, de raio \bar{r} , estando o ponto de colocação situado em seu centro conforme ilustra a Fig. (5.1). Assim a identidade Somigliana fica avaliada no contorno se as parcelas desta equação referentes à Ω_{ε} e Γ_{ε} forem consideradas no limite de \bar{r} tendendo a zero.

Procedendo dessa maneira a identidade Somigliana passa a ser expressa por:

$$u_i(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_{\varepsilon}} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f,c) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \bar{\Omega} + \Omega_{\varepsilon}} u_{il}^*(f,c) \cdot b_l(c) d\Omega - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_{\varepsilon}} P_{il}^*(f,c) \cdot u_l(c) d\Gamma \quad (5.19)$$

Por facilidade a análise da Eq. (5.19) será efetuada considerando-se cada termo isoladamente. Tomando inicialmente o primeiro termo do segundo membro desta equação pode-se reescrevê-lo como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Gamma \quad (5.20)$$

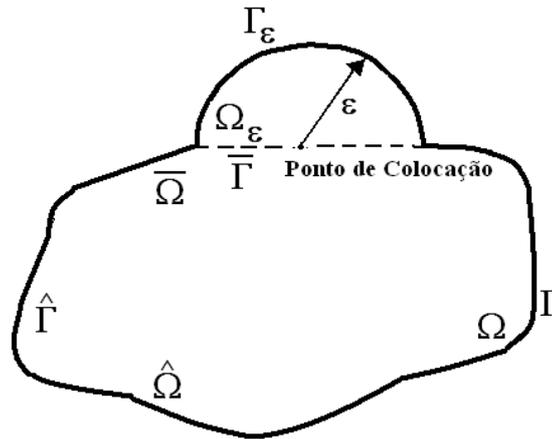


Figura 5.1 Divisão do domínio e do contorno para determinação da equação integral sobre o contorno

A singularidade logarítmica presente na solução fundamental de deslocamentos, Eq. (5.3), é classificada, de acordo com PORTELA (1992), como do tipo fraca. De acordo com este grau de singularidade pode-se verificar que o segundo termo do segundo membro da Eq. (5.20) anula-se durante a realização da operação de limite. Já o primeiro termo deste membro permanece de forma a ser avaliado no contorno.

Voltando à Eq. (5.19) o segundo termo do segundo membro pode ser analisado mais facilmente se escrito da seguinte maneira:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \bar{\Omega} + \Omega_\varepsilon} u_{il}^*(f, c) \cdot b_l(c) d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \bar{\Omega}} u_{il}^*(f, c) \cdot b_l(c) d\Omega + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} u_{il}^*(f, c) \cdot b_l(c) d\Omega \quad (5.21)$$

De forma análoga ao termo já analisado, Eq. (5.20), constata-se que a singularidade presente na expressão fundamental de deslocamento leva o segundo termo do segundo membro da Eq. (5.21) a tomar valor nulo durante a execução do limite. Já o primeiro termo permanece de forma a ser avaliado no domínio.

O último termo do segundo membro da Eq. (5.19) deve ser analisado reescrevendo-o como segue:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma \quad (5.22)$$

A singularidade forte, $1/r$, da solução fundamental para forças de superfície, Eq. (5.6), leva a um comportamento diferente desse termo em relação aos demais já considerados. O primeiro termo do segundo membro da Eq. (5.22) deve ser avaliado tomando a parte finita de Cauchy. Para a sua existência os deslocamentos prescritos no contorno devem obedecer à condição de continuidade de Hölder expressa pela seguinte relação:

$$\left| u_{(c)}^j - u_{(f)}^j \right| \leq B \cdot r_{(f,c)}^\vartheta \quad (5.23)$$

sendo: B, ϑ constantes reais positivas. $|B| < \infty$ e $0 < \vartheta \leq 1$ e $r_{(f,c)}$ a distância entre os pontos fonte e campo.

Obedecendo à condição expressa pela Eq. (5.23) o termo analisado pode ser avaliado no contorno do problema. Já a análise do segundo termo do segundo membro da Eq. (5.22) será efetuada considerando a expansão dos deslocamentos, em torno do ponto fonte, em série de Taylor. Será considerado somente o primeiro termo desta série já que os demais termos anulam-se durante a execução da operação limite. Dessa forma é possível obter a expressão representada pela Eq. (5.24).

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(f) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(f) d\Gamma \quad (5.24)$$

Esta expressão pode ser simplificada como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot (u_l(c) - u_l(f)) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(f) d\Gamma \quad (5.25)$$

Levando em conta a continuidade da função de deslocamentos no ponto fonte tem-se que o primeiro termo do segundo membro da Eq. (5.25) é nulo. Assim:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma = u_l(f) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) d\Gamma \quad (5.26)$$

Dessa forma verifica-se que a integração e a realização da operação limite do segundo termo do segundo membro da Eq. (5.22) gera um termo independente que deve ser, inicialmente isolado, e em seguida adicionado ao termo livre de deslocamento presente no primeiro termo da Eq. (5.19).

Considerando, portanto os resultados previstos pelas Eq. (5.20), Eq. (5.21) e Eq. (5.22) a expressão da identidade Somigliana escrita para o contorno é a seguinte:

$$c_{il}(f, c) \cdot u_l(f) + \int_{\Gamma} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma = \int_{\Gamma} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{il}^*(f, c) \cdot b_l(c) d\Omega \quad (5.27)$$

sendo: \oint integral da parte finita de Cauchy.

O termo c_{il} , resultante da adição do termo apresentado no primeiro membro da Eq. (5.19) com o termo livre conseqüente da avaliação do último termo do segundo membro dessa mesma equação do domínio para o contorno, é dependente da geometria do contorno analisado. Conforme apresenta VENTURINI (1988) os valores para esse termo podem ser obtidos empregando-se o seguinte tensor:

$$c_{il} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} + \frac{\text{Cos}(2 \cdot \gamma) \cdot \text{Sen}(\alpha)}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} & \frac{\text{Sen}(2 \cdot \gamma) \cdot \text{Sen}(\alpha)}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \\ \frac{\text{Sen}(2 \cdot \gamma) \cdot \text{Sen}(\alpha)}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} & \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} + \frac{\text{Cos}(2 \cdot \gamma) \cdot \text{Sen}(\alpha)}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Sendo α e γ dependentes da posição do ponto singular sobre o contorno. A Fig. (5.2) ilustra a obtenção dessas variáveis.

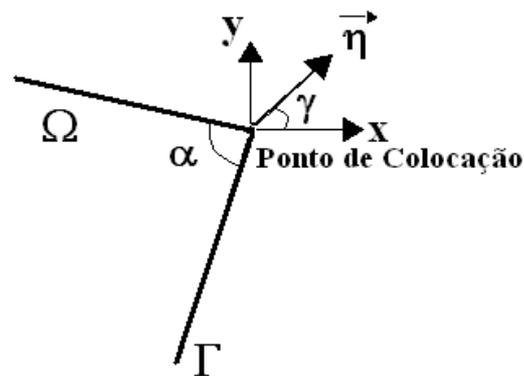


Figura 5.2 Parâmetros para cálculo da equação integral sobre o contorno

Se o ponto de colocação não estiver sob um ponto de angulosidade, ao contrário da Fig. (5.2), o tensor (5.28) torna-se igual a uma matriz identidade multiplicada por $1/2$.

5.3 – Aproximações sobre o Contorno

Após a dedução da equação integral em deslocamentos para pontos sobre o contorno torna-se necessária a sua utilização pelo MEC. Para tanto o contorno do problema analisado deve ser discretizado em elementos de contorno. Estas entidades efetuam a aproximação da geometria do problema sendo necessários também para a delimitação de funções de aproximação que permitirão a aproximação das grandezas envolvidas no problema.

De acordo com o grau de aproximação empregado para as grandezas envolvidas no problema os elementos de contorno podem ser classificados como constantes, lineares, quadráticos, cúbicos e de ordem superior. Há também a possibilidade de adoção de diferentes graus de aproximação tanto para a geometria quanto para as grandezas envolvidas no problema. Essa particularidade conduz a caracterização dos elementos de contorno os quais podem ser sub-paramétricos, isoparamétricos e super-paramétricos.

Para o desenvolvimento do presente trabalho serão considerados elementos de contorno lineares isoparamétricos. Desconsiderando as forças de corpo a Eq. (5.27) pode ser discretizada da seguinte forma:

$$[c]\{u\}^p + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [P^*] \{u\} d\Gamma_j \right) = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [u^*] \{P\} d\Gamma_j \right) \quad (5.29)$$

sendo: NE o número de elementos de contorno adotados para a descrição do problema. p o ponto fonte considerado.

5.4 – Funções de Aproximação

Como o elemento de contorno adotado é o linear as funções de aproximação necessárias são duas e estas podem ser definidas em termos de coordenadas adimensionais. A Fig. (5.3) apresenta o comportamento das funções de forma ao longo do elemento bem como as coordenadas adimensionais utilizadas.

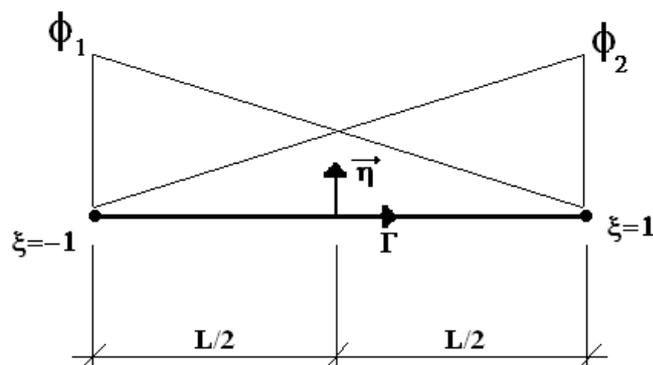


Figura 5.3 Coordenadas adimensionais e funções de aproximação

Para este elemento as funções de aproximação são:

$$\phi_1 = \frac{1-\xi}{2} \quad (5.30)$$

$$\phi_2 = \frac{1+\xi}{2} \quad (5.31)$$

Os deslocamentos no interior do elemento de contorno são descritos por meio das funções de aproximação e dos valores nodais disponíveis, assim:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = [\Phi] \{u\}_n^j \quad (5.32)$$

De forma análoga as forças de superfície podem ser expressas por:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_1^2 \\ P_2^2 \end{Bmatrix} = [\Phi] \{P\}_n^j \quad (5.33)$$

Os termos u_k^l e P_k^l indicam deslocamentos e forças de superfície atuantes no nó l segundo a direção k . Já os vetores $\{u\}_n^j$ e $\{P\}_n^j$ representam deslocamentos e forças de superfície nodais presentes nos nós pertencentes ao elemento j atuando segundo a direção n .

A geometria do elemento é aproximada de forma semelhante à apresentada nas Eq. (5.32) e Eq. (5.33). A interpolação pode ser representada como:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x^1 \\ y^1 \\ x^2 \\ y^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^1 \\ y^1 \\ x^2 \\ y^2 \end{Bmatrix} = [\Phi] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_n^j \quad (5.34)$$

Depois de incorporadas as funções de interpolação nas expressões de deslocamentos e forças de superfície deve-se reescrever a Eq. (5.29) substituindo nessa expressão as Eq. (5.32) e Eq. (5.33). Assim:

$$[c][\Phi]^p \{u\}_n^p + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [P^*][\Phi] d\Gamma_j \right) \{u\}_n^j = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [u^*][\Phi] d\Gamma_j \right) \{P\}_n^j \quad (5.35)$$

Na Eq. (5.35) o termo $\{u\}_n^p$ representa os deslocamentos nodais do elemento onde encontra-se o ponto fonte.

5.5 – Construção do Sistema de Equações

As integrais apresentadas na Eq. (5.35) relacionam deslocamentos do ponto de colocação considerado às forças de superfície e deslocamentos nodais dos demais elementos presentes na malha construída. Dessa forma as matrizes resultantes do processo de integração contém a influência de todos os elementos presentes na malha sendo por isso muitas vezes denominadas de matrizes de influência. A Eq. (5.35) pode ser reescrita de uma forma mais compacta admitindo-se variáveis auxiliares.

$$\left[\hat{H}_{INF} \right]^{pj} = \int_{\Gamma_j} [P^*] [\Phi] d\Gamma_j \quad (5.36)$$

$$\left[G_{INF} \right]^{pj} = \int_{\Gamma_j} [u^*] [\Phi] d\Gamma_j \quad (5.37)$$

Admitindo-se ainda a seguinte simplificação:

$$\left[H_{INF} \right] = \begin{cases} \left[\hat{H}_{INF} \right]^{pj} & se \ j \not\subset p \\ \left[\hat{H}_{INF} \right]^{pj} + [c][\phi]^p & se \ j \subset p \end{cases} \quad (5.38)$$

Pode-se reescrever a Eq. (5.35) de forma mais compacta como:

$$\sum_{j=1}^{NE} [H_{INF}]^{pj} \{u\}_n^j = \sum_{j=1}^{NE} [G_{INF}]^{pj} \{P\}_n^j \quad (5.39)$$

Nos problemas elásticos planos sabe-se que o número de graus de liberdade por nó é quatro, sendo dois deslocamentos e duas forças de superfície. No entanto a metade destes parâmetros é conhecida diretamente por meio da aplicação das condições de contorno do problema. Dessa forma o problema passa a ser resolvido se for escrito um número de equações igual a duas vezes o número de nós da malha. Escrevendo as equações para todos os pontos de colocação do modelo tem-se um sistema resultante da ordem de duas vezes o número de nós da malha e que pode ser representado de forma geral como:

$$[H]\{u\} = [G]\{P\} \quad (5.40)$$

A resolução do sistema matricial apresentado na Eq. (5.40) somente é possível aplicando-se as condições de contorno do problema. Para introduzir as condições de contorno no sistema as matrizes $[H]$ e $[G]$ devem ser manipuladas de tal forma que todas

as variáveis conhecidas estejam no primeiro membro enquanto que incógnitas no segundo. Esse procedimento é feito mediante troca de colunas entre as duas matrizes citadas obtendo-se o seguinte sistema:

$$[A]\{Inc\} = [B]\{VP\} \quad (5.41)$$

em que: $[A]$ e $[B]$ são formas modificadas das matrizes $[H]$ e $[G]$ respectivamente, $\{Inc\}$ vetor das incógnitas e $\{VP\}$ é o vetor das variáveis prescritas.

5.6 – Grandezas Internas

Depois de conhecidos os valores dos deslocamentos e das forças de superfície no contorno algumas grandezas importantes podem ser determinadas no interior do domínio. Os deslocamentos, nos pontos internos, podem ser obtidos de forma expedita empregando-se a identidade Somigliana. Escrevendo-a na forma matricial para pontos internos tem-se:

$$\{u\}^{pi} + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [P^*][\Phi] d\Gamma_j \right) \{u\}_n^j = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [u^*][\Phi] d\Gamma_j \right) \{P\}_n^j \quad (5.42)$$

Onde o vetor $\{u\}^{pi}$ representa os deslocamentos no ponto interno pi .

Substituindo na Eq. (5.42) as Eq. (5.36) e Eq. (5.37) pode-se obter uma expressão mais compacta para a descrição dos deslocamentos nos pontos internos:

$$\{u\}^{pi} + \sum_{j=1}^{NE} [H'_{INF}]^{pj} \{u\}_n^j = \sum_{j=1}^{NE} [G'_{INF}]^{pj} \{P\}_n^j \quad (5.43)$$

Deve-se salientar que para a obtenção dos deslocamentos internamente ao domínio os pontos fonte passam a ser os pontos determinados no interior do domínio. Por esse motivo as matrizes H e G recebem o símbolo ' para diferenciá-las das matrizes H e G utilizadas na obtenção dos deslocamentos e forças de superfície no contorno.

As tensões nos pontos internos podem ser obtidas empregando-se a Eq. (I.5) modificada pela introdução da relação entre deformações e deslocamentos, Eq. (I.7). Dessa forma é possível escrever a seguinte expressão para as tensões:

$$\sigma_{ij}^{pi} = \frac{2 \cdot \mu \cdot \nu}{(1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \delta_{ij} \cdot u_{l,l} + \mu \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5.44)$$

Substituindo a identidade Somigliana Eq. (6.16) na Eq. (6.44), e desprezando as forças de corpo, é possível obter a seguinte expressão para as tensões:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{pi} = & \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2 \cdot \mu \cdot \nu}{(1-2 \cdot \nu)} \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_l} + \mu \cdot \left(\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right\} P_k d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2 \cdot \mu \cdot \nu}{(1-2 \cdot \nu)} \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial P_{lk}^*}{\partial x_l} + \mu \cdot \left(\frac{\partial P_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial P_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right\} u_k d\Gamma \end{aligned} \quad (5.45)$$

A Eq. (5.45) pode ser escrita de forma compacta como:

$$\sigma_{ij}^{pi} = \int_{\Gamma} D_{kij} \cdot P_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} \cdot U_k d\Gamma \quad (5.46)$$

Sendo os termos D_{kij} e S_{kij} dados pelas seguintes expressões:

$$D_{kij} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot (1-\nu) \cdot r} \cdot \left\{ (1-2 \cdot \nu) \cdot (r_{,k} \cdot \delta_{ij} + r_{,j} \cdot \delta_{ki} - r_{,i} \cdot \delta_{jk}) + 2 \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} \cdot r_{,k} \right\} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} S_{kij} = & \frac{E}{4 \cdot \pi \cdot (1-\nu^2) \cdot r^2} \cdot \left\{ 2 \cdot r_{,n} \cdot \left[(1-2 \cdot \nu) \cdot r_{,k} \cdot \delta_{ij} + \nu \cdot (r_{,j} \cdot \delta_{ik} + r_{,i} \cdot \delta_{jk}) - 4 \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} \cdot r_{,k} \right] \right. \\ & \left. + 2 \cdot \nu \cdot (\eta_{,i} \cdot r_{,j} \cdot r_{,k} + \eta_{,j} \cdot r_{,i} \cdot r_{,k}) \right. \\ & \left. + (1-2 \cdot \nu) \cdot (2 \cdot \eta_{,k} \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} + \eta_{,j} \cdot \delta_{ik} + \eta_{,i} \cdot \delta_{jk}) - (1-4 \cdot \nu) \cdot \eta_{,k} \cdot \delta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Em forma matricial a Eq. (5.46) pode ser escrita como:

$$\{\sigma\}^{pi} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{NE} [G_{INF}^n] \{p\}_n^j - \sum_{j=1}^{NE} [H_{INF}^n] \{u\}_n^j \quad (5.49)$$

As matrizes H_{INF}^n e G_{INF}^n indicam as matrizes resultantes do processo de integração das variáveis S_{kij} e D_{kij} respectivamente sendo o ponto fonte o ponto interno ao domínio.

5.7 – Formulações do MEC em Problemas de Fratura

Diversas são as metodologias para a análise de problemas de fratura via MEC. A primeira a ser proposta trata do emprego da formulação singular, a qual é baseada somente na equação integral em deslocamentos apresentada na Eq. (5.27). Por meio desta formulação os elementos de contorno adotados na discretização de ambas as faces da fissura empregam equações algébricas baseadas na Eq. (5.27). Utilizando esse procedimento a fissura é considerada no modelo como um vazio, estando as faces da fissura separadas por uma pequena distância. Assim quanto menor for a distância entre as faces da fissura mais próxima a geometria do modelo numérico estará do modelo

real. No entanto à medida que adota-se a distância entre as faces da fissura próxima a zero o sistema de equações algébricas resultantes tende a ser singular. Isso ocorre pelo fato da localização de pontos fontes, simetricamente dispostos em faces opostas da fissura, ser muito próxima. Assim o processo de integração das soluções fundamentais em deslocamentos e forças de superfície gera linhas idênticas no sistema matricial final tornando-o singular. Técnicas especiais de integração, como sub-elementação, podem ser empregadas, no entanto formulações mais avançadas tornaram-se necessárias para analisar o problema.

As fissuras podem ser tratadas também por meio de uma formulação que incorpora a perda de rigidez causada pela presença da fissura nas soluções fundamentais empregadas. Esta formulação utiliza as conhecidas funções de Green as quais prescrevem soluções fundamentais compatíveis que eliminam a necessidade da discretização das faces da fissura. Apesar de ser uma formulação elegante o método das funções de Green é limitado apresentando algumas restrições principalmente no tocante à análise da propagação das fissuras.

Já o método da descontinuidade de deslocamento supera a dificuldade na modelagem da fissura substituindo cada par de nós coincidentes, no contorno da fissura, por um único ponto fonte. Neste método a diferença dos deslocamentos entre os contornos da fissura é introduzida como funções desconhecidas no problema e dessa forma a fissura é modelada com um contorno único. Apesar da redução de esforço computacional na análise da fissura, novas variáveis são introduzidas nas integrais de contorno dificultando o emprego do método.

Outra abordagem para a análise dos problemas de fratura é via método das sub-regiões. Por meio dessa metodologia consideram-se nós coincidentes na fissura, os quais recebem condições de contorno referentes à compatibilidade dos domínios envolvidos. A fissura é definida no encontro dos domínios envolvidos e, apesar disso, a principal dificuldade do método encontra-se na introdução das condições de contorno. Com o crescimento da fissura torna-se necessária a reconstrução e reaplicação das condições de contorno nos nós afetados pelo crescimento da fissura o que acaba por deixar a utilização do método bastante custosa.

Outra formulação possível é a proposta pelo método dual. Por meio desta metodologia o domínio analisado pode ser considerado como uma única sub-região e os contornos da fissura, localizados na mesma posição física, são discretizados sendo que cada face da fissura é discretizada por um tipo de equação integral. Uma face da fissura

é descrita empregando-se a equação integral em deslocamentos descrita pela Eq. (5.27). Já a face oposta da fissura é representada por uma equação integral escrita em termos de forças de superfície a qual será mostrada a seguir neste capítulo. Apesar da existência de pontos fontes com mesma localização o sistema de equações resultante não é singular. Esse procedimento é mais geral para a análise de domínios multi-fraturados e com propagação aleatória das fissuras.

5.8 – Equação Integral em Forças de Superfície

Para a obtenção das equações necessárias à análise via MEC dual torna-se necessário inicialmente retomar a identidade Somigliana representada pela Eq. (5.50).

$$u_i(f) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(f, c) \cdot u_j(c) d\Gamma = \int_{\Gamma} P_j(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(f, c) \cdot b_j(c) d\Omega \quad (5.50)$$

Deve-se perceber que a Eq. (5.50) é diferenciável, pois os termos P_{ij}^* e u_{ij}^* dependem unicamente da distância entre os pontos fonte e campo. Efetuando a diferenciação da Eq. (5.50) e admitindo-se a ausência de forças de corpo presentes no problema obtém-se a seguinte expressão:

$$u_{i,k}(f) - \int_{\Gamma} P_{ij,k}^*(f, c) \cdot u_j(c) d\Gamma = - \int_{\Gamma} P_j(c) \cdot u_{ij,k}^*(f, c) d\Gamma \quad (5.51)$$

Em que as derivadas dos campos fundamentais são referenciadas ao ponto fonte.

O campo de tensões é obtido introduzindo-se na Eq. (5.51) a relação constitutiva do material considerado, Eq.(I.5). Efetuando este procedimento é possível escrever a expressão da identidade Somigliana em termos de tensões da seguinte forma:

$$\sigma_{ij}(f) + \int_{\Gamma} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma \quad (5.52)$$

Nesta equação os termos S_{kij} e D_{kij} contêm as derivadas dos termos P_{ij}^* e u_{ij}^* respectivamente. Admitindo-se o emprego das soluções fundamentais de Kelvin, os termos S_{kij} e D_{kij} são os já apresentados nas Eq.(5.47) e Eq. (5.48) respectivamente.

A Eq. (5.52) é válida para pontos localizados no domínio do problema. Aplicando a proposta do MEC deve-se, portanto avaliar esta equação apenas nos pontos localizados sobre o contorno. Para efetuar esse procedimento é necessário tomar um

ponto no domínio muito próximo ao contorno e em seguida fazer a distância entre eles tender a zero conforme ilustra a Fig. (5.1).

Efetuada esse procedimento tem-se:

$$\sigma_{ij}(f) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma \quad (5.53)$$

Por facilidade cada termo da Eq. (5.53) será analisado isoladamente. Tomando primeiramente o termo D_{kij} pode-se perceber que este apresenta uma singularidade do tipo forte representada pelo fator $1/r$. Para a execução do limite proposto na Eq. (5.53) pode-se inicialmente reescrever o termo considerado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(f) d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(f) d\Gamma \end{aligned} \quad (5.54)$$

A análise pode ser melhor conduzida agrupando-se os termos comuns da relação anterior. Assim:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) \cdot [P_k(c) - P_k(f)] d\Gamma \\ &+ P_k(f) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma \end{aligned} \quad (5.55)$$

Para o prosseguimento da análise deve-se assumir a existência da continuidade de Hölder, apresentada na Eq. (5.56), para os termos representantes das forças de superfície aplicadas no contorno como se segue:

$$\left| P_{(c)}^j - P_{(f)}^j \right| \leq B \cdot r_{(f,c)}^\beta \quad (5.56)$$

Admitindo a existência da continuidade de Hölder verifica-se que o primeiro termo do segundo membro da Eq. (5.55) é nulo. O segundo termo do lado direito da Eq. (5.55) é integrável e resulta um fator independente após a realização da operação de limite. Essa operação resulta o termo:

$$P_k(f) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) d\Gamma = A_{kij}(f, c) \cdot P_k(f) \quad (5.57)$$

O termo A_{kij} é um fator que depende das propriedades elásticas do material e do sistema de coordenadas adotado.

Já o último termo do segundo membro da Eq. (5.55) resulta uma integral imprópria que deve ser avaliada ao longo do contorno. Essa integral deve ser avaliada empregando-se a parte finita de Cauchy podendo ser representada como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma \quad (5.58)$$

Tomando agora a análise do termo S_{kij} , Eq. (5.53), verifica-se a presença de uma hiper-singularidade, representada pelo fator $1/r^2$, conforme descreve a Eq. (5.48). Para realizar a análise do termo citado deve-se inicialmente efetuar a expansão dos deslocamentos, em torno do ponto fonte, em série de Taylor e em seguida tomar os dois primeiros termos. Os demais termos da série não serão representados, pois anulam-se durante a execução da operação limite. Efetuando este procedimento obtém-se a seguinte relação para o termo S_{kij} :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma + \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot u_{k,m}(f) \cdot (x_m(c) - x_m(f)) d\Gamma &- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot u_{k,m}(f) \cdot (x_m(c) - x_m(f)) d\Gamma + \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(f) d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(f) d\Gamma &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma \quad (5.59) \end{aligned}$$

Reorganizando os termos da Eq. (5.59) obtém-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot [u_k(c) - u_k(f) - u_{k,m}(f) \cdot (x_m(c) - x_m(f))] d\Gamma \\ &+ u_k(f) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) d\Gamma + u_{k,m}(f) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot (x_m(c) - x_m(f)) d\Gamma \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma \quad (5.60) \end{aligned}$$

Admitindo-se que as derivadas dos deslocamentos no contorno possuam continuidade de Hölder, de acordo com a Eq. (5.61), pode-se verificar que o primeiro termo do segundo membro da Eq.(5.60) é nulo.

$$\left| u_k(c) - u_k(f) - u_{k,m}(f) \cdot (x_m(c) - x_m(f)) \right| \leq B \cdot |x_m(c) - x_m(f)|^{p+1} \quad (5.61)$$

Já o segundo e o quarto termos do segundo membro da Eq. (5.60) devem ser analisados conjuntamente. Esse procedimento deve ser efetuado, pois o segundo termo gera, depois da integração, um fator com singularidade e assim durante a execução da operação de limite seu valor tenderá ao infinito. Esta singularidade é contornada com a soma desses dois termos, já que o quarto termo é uma integral imprópria. A expressão resultante da soma dos dois termos considerados deve ser analisada por meio da parte finita de Hadamard podendo ser representada como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma^-} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma + u_k(f) \cdot \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma \quad (5.62)$$

em que: \int_{Γ} integral da parte finita de Hadamard.

PORTELA (1992) apresenta que a singularidade presente no segundo termo do primeiro membro da Eq. (5.62) é sempre cancelada com outro termo singular liberado do processo de integração do primeiro termo desse mesmo membro, resultando portanto um valor finito.

Já o terceiro termo do segundo membro da Eq. (5.60) é integrável e resulta um termo independente, após a execução da operação limite, que deve ser analisado separadamente, assim:

$$u_{k,m}(f) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot (x_m(c) - x_m(f)) d\Gamma = B_{kijm}(f, c) \cdot u_{k,m}(f) \quad (5.63)$$

O fator B_{kijm} depende das propriedades elásticas do material e também do sistema de coordenadas empregado.

De forma a propor uma melhor organização do equacionamento os termos independentes provenientes da análise dos fatores S_{kij} e D_{kij} podem ser adicionados de forma a gerar um único termo independente. PORTELA (1992) apresenta que a junção dos resultados das Eq. (5.57) e Eq. (5.63) produzem:

$$A_{kij} \cdot P_k' - B_{kijm} \cdot u_{k,m}' = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}(f) \quad (5.64)$$

O fator $\frac{1}{2}$ resulta da consideração de contorno suave no posicionamento do ponto fonte. Sob essa condição devem ser empregados elementos de contorno descontínuos para a representação das faces da fissura. Isso ocorre pelo fato do equacionamento requerer a continuidade da derivada do deslocamento a qual é

respeitada com o ponto fonte internamente ao elemento como nos elementos descontínuos.

Dessa forma a equação integral para a representação das tensões somente com pontos sob o contorno pode ser escrita como:

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}(f) + \int_{\Gamma} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma \quad (5.65)$$

Para a obtenção da equação integral para a representação das forças de superfícies deve ser utilizada a Eq. (I.3) a qual relaciona tensões e forças de superfícies por meio do equilíbrio. Efetuando este equilíbrio obtém-se:

$$\frac{1}{2} \cdot P_i(f) + \eta_j \cdot \int_{\Gamma} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma = \eta_j \cdot \int_{\Gamma} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma \quad (5.66)$$

As equações integrais apresentadas nas Eq. (5.66) e Eq. (5.27) devem ser empregadas conjuntamente na discretização das faces da fissura no modelo dual.

Neste trabalho o processo de integração das equações integrais escritas em termos de deslocamentos é efetuado de forma numérica por meio da quadratura de Gauss. Com o objetivo de tornar o cálculo mais preciso é empregado o procedimento de sub-elementação o qual pode ser consultado com detalhes no Anexo C. Já para as equações integrais em termos de forças de superfície o processo de integração é efetuado de forma analítica. Para tanto foram consultados os trabalhos de WUTZOW (2003) e FOLTRAN (1999) os quais determinaram as expressões analíticas para tal problema empregando o elemento de contorno linear. Estas expressões são apresentadas nos Anexo A e Anexo B.

5.9 – Aproximações sobre o Contorno

De forma análoga ao já descrito no capítulo anterior, para a equação integral em deslocamentos, no emprego do MEC deve-se efetuar a discretização da equação integral em forças de superfície, Eq. (5.66). Dessa forma:

$$\frac{1}{2} \cdot [I]\{P\}^p + \eta \cdot \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [S]\{u\} d\Gamma_j \right) = \eta \cdot \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [D]\{P\} d\Gamma_j \right) \quad (5.67)$$

sendo: $[I]$ matriz identidade.

A partir da Eq. (5.67) é possível a obtenção de matrizes de influência as quais podem ser representadas de forma concisa como:

$$\sum_{j=1}^{NE} [H_{INF}^{F.Superf.}]^{pj} \{u\}_n^j = \sum_{j=1}^{NE} [G_{INF}^{F.Superf.}]^{pj} \{P\}_n^j \quad (5.68)$$

Analogamente ao descrito para a formulação integral escrita em deslocamentos pode-se impor as condições de contorno do problema sobre a Eq. (5.68) e assim obter o sistema matricial final o qual pode é apresentado na Eq. (5.69)

$$[A]\{Inc\} = [B]\{VP\} \quad (5.69)$$

De forma geral o processo de discretização da Eq. (5.66) sobre o contorno é idêntico ao ilustrado para a formulação integral escrita em deslocamentos. A diferença encontra-se nos núcleos integrais já que as expressões fundamentais são diferentes.

5.10 – Estratégias de Modelagem e Discretização

O processo de criação da malha de elementos de contorno é de grande importância visto que é a partir deste que criam-se os nós e os elementos de contorno sobre os quais são definidas as funções para aproximação tanto da geometria quanto das grandezas envolvidas no problema. Além dos elementos e nós o processo de discretização gera também pontos fontes ao longo do contorno, os quais são usualmente relacionados ao posicionamento dos nós, e que são de grande importância para o emprego e definição das equações integrais.

Para a realização da discretização torna-se necessária a definição de uma estratégia a qual está intrinsecamente ligada às exigências da análise como, por exemplo, das condições de existência das equações integrais. O atendimento dessas exigências conduz à correta utilização da formulação possibilitando assim análises consistentes do problema. No MEC dual algumas condições devem ser observadas para a definição de uma estratégia de discretização dentre as quais podem ser citadas:

↗ Discretização simétrica das faces da fissura.

↗ Para a existência das equações integrais de deslocamento e força de superfície a continuidade de deslocamento e força de superfície deve ser observada. As continuidades necessárias na formulação são:

$u_k(f) \in C^{0,\alpha}$ para parte finita de Cauchy.

$u_k(f) \in C^{1,\alpha}$ e $P_k(f) \in C^{0,\alpha}$ para parte finita de Hadamard.

Devido às condições de continuidade exigidas pelos deslocamentos e forças de superfície para a existência de suas respectivas equações integrais considerações

especiais devem ser efetuadas a respeito do tipo de elemento a ser utilizado na discretização das faces da fissura o qual deve ser descontínuo.

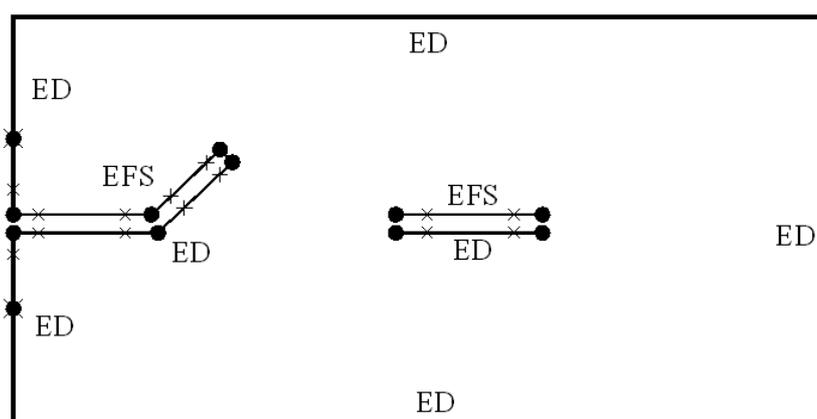
Já em termos do emprego das equações integrais via MEC dual a estratégia de utilização das mesmas podem ser assim enunciadas:

⇒ Para cada fissura a equação integral de deslocamentos é aplicada aos pontos fontes pertencentes a uma face da fissura.

⇒ Para os pontos fontes pertencentes a face oposta é aplicada a equação integral de força de superfície.

⇒ Para as partes do contorno não pertencentes às fissuras a equação integral em deslocamentos é aplicada.

Por meio dessas considerações sobre a modelagem a formulação do MEC dual torna-se uma ferramenta robusta para a análise de fissuras aleatoriamente posicionadas no problema em análise. A Fig. (5.4) apresenta o emprego das equações integrais via metodologia dual.



- Localização do Nó
- × Localização do Ponto Fonte
- ED Equação em Deslocamento
- EFS Equação em Força de Superfície

Figura 5.4 Estratégia de discretização para o MEC dual

5.11 – Sistema Final de Equações e Atualizações

Uma grande vantagem na utilização da formulação dual do MEC na abordagem de problemas de crescimento de fissuras está na construção e atualização do sistema de equações durante o crescimento das fissuras. A medida que as fissuras crescem são necessários na análise novos nós e elementos na discretização das novas faces das

fissuras. Nesse momento devem ser incluídas novas equações para a determinação das grandezas, deslocamento e forças de superfície, nesses novos pontos.

No entanto a grande vantagem da formulação dual é que, durante o processo de crescimento das fissuras, a reconstrução total ou de grande parte da malha de elementos de contorno não é necessário. Isso ocorre pelo fato da criação de novos elementos acontecer, em grande parte, nas fissuras que tiveram seu comprimento aumentado. Eventualmente durante o processo de propagação as fissuras presentes no problema podem interceptar um ou mais elementos presentes no contorno. Quando esse processo ocorre a discretização do modelo é refeita apenas localmente afetando unicamente o elemento que sofreu a interceptação.

Devido à nova discretização os elementos criados irão gerar novas equações as quais devem ser reunidas às equações já existentes objetivando atualizar o sistema total de equações. Dessa forma novas linhas e colunas serão adicionadas ao sistema matricial final.

A atualização de posições já existentes não é necessária desde que não haja a interseção entre as fissuras que propagam e os elementos de contorno já existentes. A Fig. (5.5) apresenta de forma esquemática o crescimento do sistema matricial final durante o processo de propagação das fissuras.

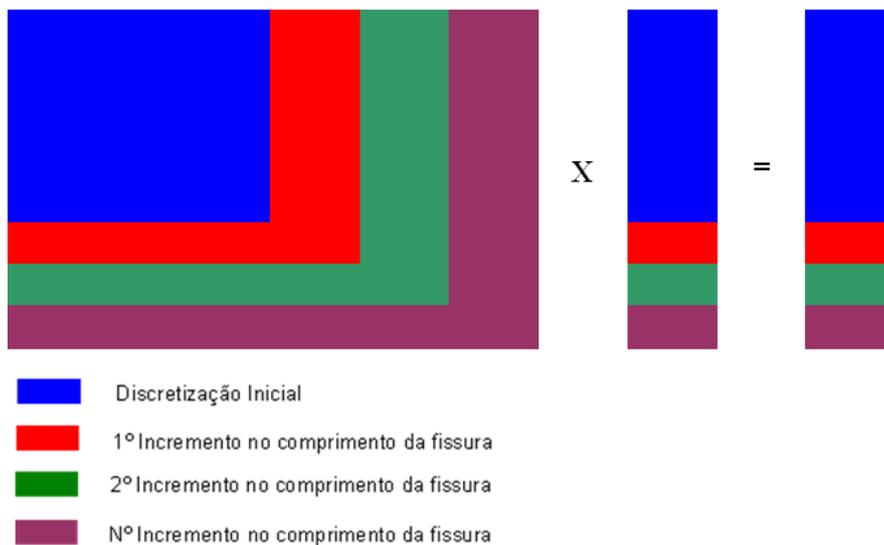


Figura 5.5 Crescimento e atualização do sistema matricial final

6. – Formulações Não Lineares do Método dos Elementos de Contorno para a Análise de Problemas de Fratura e Contato

Neste capítulo serão apresentadas as formulações não lineares propostas neste trabalho para a análise de problemas envolvendo fratura elástico linear, fratura não linear (coesiva) e também contato entre corpos utilizando as equações do método dos elementos de contorno (MEC).

Primeiramente serão discutidos os modelos desenvolvidos para a análise de problemas de fratura não linear. Nesse conjunto de modelos, também denominados de modelos de fratura coesiva, foram consideradas duas formulações. Na primeira delas a resolução do sistema de equações não linear é efetuada utilizando um operador constante. Este tipo de abordagem vem sendo empregada em diversos trabalhos na literatura e leva a bons resultados. Porém propõe-se neste trabalho uma formulação que resolve o problema não linear empregando um operador tangente consistente. Esse segundo modelo leva também a bons resultados, no entanto esta formulação necessita de um número consideravelmente menor de iterações para a obtenção do equilíbrio em cada incremento de carga, tornando-a mais eficiente do ponto de vista computacional.

Foi desenvolvido também um modelo para a análise da propagação de fissuras em materiais que são regidos pelos conceitos da mecânica da fratura elástico linear. Nesse modelo os fatores de intensidade de tensão são calculados utilizando a técnica de correlação de deslocamento. Além disso, foram também implementadas três teorias de interação de modos para a obtenção do ângulo de propagação da fissura e também do fator de intensidade de tensão equivalente. Do ponto de vista de formulação do MEC, esse problema é tratado também considerando um operador tangente consistente, o qual será também mostrado neste capítulo.

Quanto ao modelo de contato foi desenvolvida uma formulação, empregando também um operador tangente consistente, para a análise do contato em dois diferentes problemas. O primeiro deles refere-se ao contato entre faces de fissuras, ou seja, na simulação do fechamento de uma fissura. Já para o segundo, este modelo é aplicado à

análise de materiais compostos o qual permite simular o contato e escorregamento entre os diversos materiais que constituem a estrutura. Em ambas aplicações adota-se a lei de Coulomb para governar o comportamento de aderência da região do contato, ou seja, dos deslocamentos e das forças de superfície nesta região.

6.1 – Formulações do MEC para a Análise de Fratura Coesiva

Neste item serão discutidas as duas formulações desenvolvidas neste trabalho para a análise de fratura coesiva. Porém, primeiramente serão apresentados os procedimentos considerados para o cálculo do ângulo de propagação da fissura, da tensão na extremidade da fissura e também do comprimento de propagação.

6.1.1 – Cálculo do Estado de Tensão na Extremidade da Fissura

Por meio do modelo de fissura fictícia, utilizado na modelagem do comportamento de materiais quase frágeis, a estabilidade ao crescimento da fissura é verificada mediante a comparação entre o estado de tensão atuante na extremidade da fissura com um estado de tensão admissível previsto por um critério de ruptura. Geralmente emprega-se o critério de ruptura de Rankine, ou seja, a ruptura ocorre se a maior tensão, em módulo, for de maior magnitude que a resistência do material. Esse critério é utilizado em SALEH (1997) e foi também considerado neste trabalho. Nesse caso é verificado se a máxima tensão principal de tração é de magnitude maior que a resistência à tração do material.

Para a determinação do estado de tensão na extremidade da fissura é empregado um processo de extrapolação polinomial o qual será descrito na seqüência. Inicialmente são distribuídos pontos internos à frente da extremidade da fissura conforme o padrão apresentado na Fig. (6.1). O número de semi-círculos assim como o número de pontos internos em cada um deles podem ser escolhidos conforme a precisão desejada na análise.

Após a determinação do estado de tensão em cada um desses pontos internos o processo de extrapolação polinomial é efetuado. Sobre cada posição radial dada determina-se um polinômio o qual descreverá o comportamento das tensões ao longo da dada posição radial. O grau do polinômio é escolhido de acordo com o número de

pontos internos presente em cada uma das posições radiais, destacadas na Fig. (6.1). Assim, sendo n o número de pontos internos ao longo de cada posição radial o grau do polinômio interpolador será $n-1$.

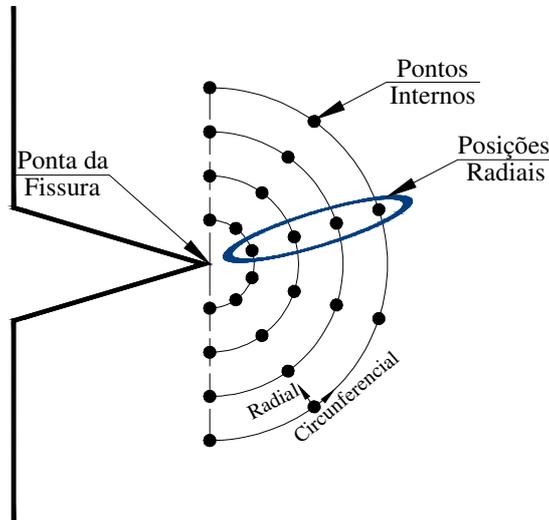


Figura 6.1 Distribuição dos pontos internos à frente da ponta da fissura.

As variáveis do processo de interpolação são o valor da tensão, a qual poderá ser x , y ou cisalhante xy , e a distância em relação à ponta da fissura. Conseqüentemente será obtido um polinômio que correlacionará o valor da tensão à distância em relação à extremidade da fissura. Sendo m o número de posições radiais, presentes na extremidade da fissura, são realizadas m interpolações polinomiais com a obtenção de m valores do estado de tensão na extremidade da fissura. O estado de tensão na ponta da fissura é obtido após a execução de uma média aritmética simples entre os m estados de tensão obtidos das interpolações.

O processo de interpolação será brevemente descrito a seguir. Pretende-se obter um polinômio que relacione o valor do estado de tensão à distância em relação a ponta da fissura, assim:

$$F(\sigma) = a_0 + a_1 \cdot r + a_2 \cdot r^2 + \dots + a_n \cdot r^n \quad (6.1)$$

sendo: $F(\sigma)$ função polinomial que determina a tensão desejada, r a distância em relação a extremidade da fissura e $a_0 \dots a_n$ termos constantes do polinômio.

Para a obtenção dos termos constantes do polinômio basta resolver o seguinte sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & r_0 & r_0^2 & \dots & r_0^n \\ 1 & r_1 & r_1^2 & \dots & r_1^n \\ 1 & r_2 & r_2^2 & \dots & r_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & r_n & r_n^2 & \dots & r_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Como o ponto de interesse na análise é a extremidade da fissura a distância a ser considerada é zero e assim o único fator de interesse na análise é o termo livre do polinômio, a_0 , o qual representará o estado de tensão na ponta da fissura.

6.1.2 – Cálculo do Ângulo de Propagação da Fissura

Um parâmetro de grande importância na análise de propagação de fissuras é o ângulo de crescimento das mesmas. Conforme descrito no capítulo 3 utiliza-se a teoria da máxima tensão circunferencial, segundo a qual define-se que a fissura irá crescer perpendicularmente a direção de atuação da máxima tensão principal de tração. Para tanto deve ser utilizado o estado de tensão atuante na extremidade da fissura e em seguida a direção pode ser obtida empregando a seguinte relação:

$$\theta_p = \frac{1}{2} \cdot \text{ArcTan} \left(\frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad (6.3)$$

Esse procedimento é empregado com sucesso no trabalho de SALEH (1997) e fornece bons resultados conforme será apresentado neste capítulo.

6.1.3 – Incremento no Comprimento da Fissura

Quando o estado de tensão na extremidade da fissura supera o previsto pelo critério de ruptura ocorre a propagação da fissura. No entanto a magnitude do incremento no comprimento da fissura deve obedecer a lei não linear adotada para a representação das tensões coesivas. Assim deve ser encontrado o ponto, na direção definida pela Eq. (6.3), em que o estado de tensão seja igual, ou pelo menos próximo dentro de uma certa tolerância, ao previsto pelo critério de ruptura. Quando esse ponto é encontrado determina-se a “nova” ponta da fissura coesiva. Neste trabalho a nova extremidade da fissura coesiva é encontrada utilizando-se o método da bissecção. Assim os incrementos no comprimento das fissuras são determinados automaticamente no

código computacional desenvolvido. Além disso, esse procedimento é consistente já que obedece a uma lei coesiva escolhida.

6.1.4 – Modelo Coesivo via Operador Constante

Após determinados o estado de tensão na ponta da fissura, o ângulo de propagação e o incremento no comprimento da fissura pode-se agora partir para o processo incremental iterativo. Será aqui descrito o procedimento desenvolvido para a análise de materiais quase frágeis, empregando o modelo de fissura fictícia via MEC, utilizando o operador constante. Nesse modelo o equilíbrio é obtido por meio da reaplicação da diferença entre as tensões atuantes reais e as tensões máximas previstas pelo critério coesivo. As matrizes que multiplicam as grandezas conhecidas e desconhecidas no contorno não mudam durante o processo iterativo, o que dá origem a denominação operador constante.

Nesse tipo de análise os seguintes passos devem ser seguidos:

- 1) Aplica-se um incremento no carregamento aplicado.
- 2) Calcula-se o estado de tensão na ponta da fissura, o ângulo de propagação e também o incremento no comprimento da fissura.
- 3) Calcula-se a tensão verdadeira por meio da lei coesiva adotada.
- 4) A diferença entre a tensão atuante e a tensão verdadeira deve ser reaplicada na estrutura de forma a obtenção do equilíbrio.
- 5) Verifica-se a convergência por meio do cálculo das normas de deslocamento ou força: $\|\Delta U_i - \Delta U_{i-1}\| \leq Tolerância$ ou $\|\Delta P_i - \Delta P_{i-1}\| \leq Tolerância$.
- 6) Se a norma para convergência é atendida aplica-se um novo incremento de carga. Caso contrário deve-se repetir os passos 3 a 6.

Constata-se que esse procedimento é bastante simples e conduz a bons resultados, apesar de requerer um elevado número de iterações na busca pelo equilíbrio.

6.1.5 – Formulação do MEC para a Análise de Problemas de Fratura Coesiva via Operador Tangente Consistente

Nesse tópico será descrita a formulação não linear com operador tangente consistente para a análise de fratura coesiva via MEC. A utilização desse operador tem

por objetivo tornar a análise mais eficiente, reduzindo o número de iterações necessárias para a obtenção do ponto de equilíbrio em cada incremento de carga. Esse procedimento foi já empregado com sucesso nos trabalhos de FUDOLI (1999), BOTTA (2003) e LEITE (2007), embora nesses trabalhos os modelos não lineares tratados não fossem de fratura.

Inicialmente pode-se escrever a equação geral do MEC, conforme discutido no capítulo 5, da seguinte maneira:

$$HU = GP \quad (6.4)$$

As matrizes e vetores descritos na Eq. (6.4) podem ser divididos segundo sua localização no modelo. Os pontos fontes podem estar sobre o contorno, c , ou sobre as faces de fissuras, f . Assim:

$$\begin{aligned} H_{cc}U_c + H_{cf}U_f &= G_{cc}P_c + G_{cf}P_f \\ H_{fc}U_c + H_{ff}U_f &= G_{fc}P_c + G_{ff}P_f \end{aligned} \quad (6.5)$$

A fissura apresenta duas faces, uma delas localizada a direita e a outra a esquerda de sua linha geométrica média. Na Eq. (6.5) os pontos fontes localizados sobre a fissura podem ser separados em pontos fontes pertencentes à face esquerda e à face direita. Assim:

$$\begin{aligned} H_{cc}U_c + H_{cf}^dU_f^d + H_{cf}^eU_f^e &= G_{cc}P_c + G_{cf}^dP_f^d + G_{cf}^eP_f^e \\ H_{fc}U_c + H_{ff}^dU_f^d + H_{ff}^eU_f^e &= G_{fc}P_c + G_{ff}^dP_f^d + G_{ff}^eP_f^e \end{aligned} \quad (6.6)$$

Onde os índices d e e distinguem os pontos fontes localizados nas faces direita e esquerda da fissura respectivamente.

O sistema de equações apresentado na Eq. (6.6) pode ser resolvido para as grandezas conhecidas no contorno. Dessa forma:

$$\begin{aligned} A_{cc}X + H_{cf}^dU_f^d + H_{cf}^eU_f^e &= F + G_{cf}^dP_f^d + G_{cf}^eP_f^e \\ A_{fc}X + H_{ff}^dU_f^d + H_{ff}^eU_f^e &= F_1 + G_{ff}^dP_f^d + G_{ff}^eP_f^e \end{aligned} \quad (6.7)$$

As matrizes A_{cc} , A_{fc} resultam da troca de colunas entre as matrizes H_{cc} e G_{cc} , H_{fc} e G_{fc} respectivamente. Os vetores F e F_1 são obtidos a partir das grandezas conhecidas no contorno. Na Eq. (6.7), os deslocamentos e forças de superfície obtidos nos pontos fontes são referenciados ao sistema cartesiano ortogonal xy . No entanto pretende-se que essas grandezas sejam descritas segundo as direções paralela e normal aos elementos de contorno aos quais pertencem. Dessa forma as grandezas citadas devem ser multiplicadas pela matriz de rotação mostrada na Eq. (6.8).

$$\begin{bmatrix} U^p \\ U^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\theta) & \text{Sen}(\theta) \\ -\text{Sen}(\theta) & \text{Cos}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^x \\ U^y \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} P^p \\ P^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\theta) & \text{Sen}(\theta) \\ -\text{Sen}(\theta) & \text{Cos}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^x \\ P^y \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Na Eq. (6.8) os índices p e n referem-se às direções paralela e normal ao elemento de contorno considerado. A variável θ representa o ângulo de inclinação entre o elemento de contorno considerado e o eixo x do sistema cartesiano. Considerando a separação dos deslocamentos e forças de superfície nas faces das fissuras nas direções paralela e normal pode-se reescrever a Eq. (6.7) como:

$$\begin{aligned} A_{cc} X + H_{cf}^{dp} U_f^{dp} + H_{cf}^{dn} U_f^{dn} + H_{cf}^{ep} U_f^{ep} + H_{cf}^{en} U_f^{en} &= F + G_{cf}^{dp} P_f^{dp} + G_{cf}^{dn} P_f^{dn} + G_{cf}^{ep} P_f^{ep} + G_{cf}^{en} P_f^{en} \\ A_{fc} X + H_{ff}^{dp} U_f^{dp} + H_{ff}^{dn} U_f^{dn} + H_{ff}^{ep} U_f^{ep} + H_{ff}^{en} U_f^{en} &= F_1 + G_{ff}^{dp} P_f^{dp} + G_{ff}^{dn} P_f^{dn} + G_{ff}^{ep} P_f^{ep} + G_{ff}^{en} P_f^{en} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Podem ser definidas agora duas variáveis que serão de grande importância na formulação. A primeira delas refere-se a soma entre os deslocamentos paralelos nos pontos fontes simetricamente opostos das faces da fissura. Essa variável, chamada aqui de ΔU_s , será utilizada para a substituição dos deslocamentos paralelos situados na face esquerda da fissura. A outra variável é a soma entre os deslocamentos normais nos pontos fontes simetricamente opostos nas faces da fissura. Essa soma dá origem a abertura entre as faces da fissura e será aqui denominada de ΔU . Assim como no caso anterior ΔU será empregado na substituição dos deslocamentos normais da face esquerda. Assim:

$$\begin{aligned} \Delta U_s &= U_f^{dp} + U_f^{ep} \quad \Rightarrow \quad U_f^{ep} = \Delta U_s - U_f^{dp} \\ \Delta U &= U_f^{dn} + U_f^{en} \quad \Rightarrow \quad U_f^{en} = \Delta U - U_f^{dn} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Substituindo os termos apresentados na Eq. (6.10) na Eq. (6.9) obtém-se:

$$\begin{aligned} A_{cc} X + H_{cf}^{dp} U_f^{dp} + H_{cf}^{dn} U_f^{dn} + H_{cf}^{ep} (\Delta U_s - U_f^{dp}) + H_{cf}^{en} (\Delta U - U_f^{dn}) &= F + G_{cf}^{dp} P_f^{dp} + G_{cf}^{dn} P_f^{dn} + G_{cf}^{ep} P_f^{ep} + G_{cf}^{en} P_f^{en} \\ A_{fc} X + H_{ff}^{dp} U_f^{dp} + H_{ff}^{dn} U_f^{dn} + H_{ff}^{ep} (\Delta U_s - U_f^{dp}) + H_{ff}^{en} (\Delta U - U_f^{dn}) &= F_1 + G_{ff}^{dp} P_f^{dp} + G_{ff}^{dn} P_f^{dn} + G_{ff}^{ep} P_f^{ep} + G_{ff}^{en} P_f^{en} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Agrupando os termos semelhantes da Eq. (6.11) esta pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} A_{cc} X + (H_{cf}^{dp} - H_{cf}^{ep}) U_f^{dp} + (H_{cf}^{dn} - H_{cf}^{en}) U_f^{dn} + H_{cf}^{ep} \Delta U_s + H_{cf}^{en} \Delta U &= F + G_{cf}^{dp} P_f^{dp} + G_{cf}^{dn} P_f^{dn} + G_{cf}^{ep} P_f^{ep} + G_{cf}^{en} P_f^{en} \\ A_{fc} X + (H_{ff}^{dp} - H_{ff}^{ep}) U_f^{dp} + (H_{ff}^{dn} - H_{ff}^{en}) U_f^{dn} + H_{ff}^{ep} \Delta U_s + H_{ff}^{en} \Delta U &= F_1 + G_{ff}^{dp} P_f^{dp} + G_{ff}^{dn} P_f^{dn} + G_{ff}^{ep} P_f^{ep} + G_{ff}^{en} P_f^{en} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Agrupando os termos da equação em um único membro tem-se:

$$\begin{aligned} Y(U, P) &= A_{cc} X + (H_{cf}^{dp} - H_{cf}^{ep}) U_f^{dp} + (H_{cf}^{dn} - H_{cf}^{en}) U_f^{dn} + H_{cf}^{ep} \Delta U_s + H_{cf}^{en} \Delta U - F - G_{cf}^{dp} P_f^{dp} - G_{cf}^{dn} P_f^{dn} - G_{cf}^{ep} P_f^{ep} - G_{cf}^{en} P_f^{en} \\ &+ A_{fc} X + (H_{ff}^{dp} - H_{ff}^{ep}) U_f^{dp} + (H_{ff}^{dn} - H_{ff}^{en}) U_f^{dn} + H_{ff}^{ep} \Delta U_s + H_{ff}^{en} \Delta U - F_1 - G_{ff}^{dp} P_f^{dp} - G_{ff}^{dn} P_f^{dn} - G_{ff}^{ep} P_f^{ep} - G_{ff}^{en} P_f^{en} \end{aligned} \quad (6.13)$$

A equação de equilíbrio não linear, Eq. (6.13), é geral para qualquer que seja a lei constitutiva para as tensões coesivas. Isso torna a formulação única e aplicável a uma vasta categoria de modelos coesivos.

Para resolver a Eq. (6.13), não linear em $X, U_f^{dp}, U_f^{dn}, \Delta U_s, \Delta U$ utiliza-se um esquema iterativo, adotando-se um procedimento do tipo Newton-Raphson, com as fases de previsão e correção. Na solução iterativa utiliza-se:

$$\begin{aligned}\Delta X_n^{i+1} &= \Delta X_n^i + \delta \Delta X_n^i \\ \Delta U_{f_n}^{dp\ i+1} &= \Delta U_{f_n}^{dp\ i} + \delta \Delta U_{f_n}^{dp\ i} \\ \Delta U_{f_n}^{dn\ i+1} &= \Delta U_{f_n}^{dn\ i} + \delta \Delta U_{f_n}^{dn\ i} \\ \Delta U_{s_n}^{i+1} &= \Delta U_{s_n}^i + \delta \Delta U_{s_n}^i \\ \Delta U_n^{i+1} &= \Delta U_n^i + \delta \Delta U_n^i\end{aligned}\quad (6.14)$$

Onde o índice i indica a iteração. A determinação das variações $\delta \Delta X_n^i, \delta \Delta U_{f_n}^{dp\ i}, \delta \Delta U_{f_n}^{dn\ i}, \delta \Delta U_{s_n}^i$ e $\delta \Delta U_n^i$ na iteração i resultam da expansão em série de Taylor, em torno de $\Delta X_n^i, \Delta U_{f_n}^{dp\ i}, \Delta U_{f_n}^{dn\ i}, \Delta U_{s_n}^i$ e ΔU_n^i , da Eq. (6.13), ou seja:

$$Y(U_n^i, P_n^i) + \frac{\partial Y(U_n^i, P_n^i)}{\partial \Delta X_n^i} \cdot \delta \Delta X_n^i + \frac{\partial Y(U_n^i, P_n^i)}{\partial \Delta U_{f_n}^{dp\ i}} \cdot \delta \Delta U_{f_n}^{dp\ i} + \frac{\partial Y(U_n^i, P_n^i)}{\partial \Delta U_{f_n}^{dn\ i}} \cdot \delta \Delta U_{f_n}^{dn\ i} + \frac{\partial Y(U_n^i, P_n^i)}{\partial \Delta U_{s_n}^i} \cdot \delta \Delta U_{s_n}^i + \frac{\partial Y(U_n^i, P_n^i)}{\partial \Delta U_n^i} \cdot \delta \Delta U_n^i = 0 \quad (6.15)$$

A matriz formada pelo conjunto das sub-matrizes que multiplicam os termos das variações constituem o operador tangente consistente. Esse operador dependerá da lei coesiva adotada a qual deverá estar incidindo sobre os termos ao qual têm influência.

As leis coesivas mais utilizadas na literatura relacionam as forças coesivas atuantes nas faces da fissura ao deslocamento normal das mesmas. Como estas forças de superfície devem estar em equilíbrio pode-se reescrever a Eq. (6.13) como:

$$Y(U, P) = \begin{aligned} &A_{cc} X + (H_{cf}^{dp} - H_{cf}^{ep}) U_f^{dp} + (H_{cf}^{dn} - H_{cf}^{en}) U_f^{dn} + H_{cf}^{ep} \Delta U_s + H_{cf}^{en} \Delta U - F - G_{cf}^{dp} P_f^{dp} - G_{cf}^{ep} P_f^{ep} - (G_{cf}^{dn} + G_{cf}^{en}) P_f \\ &A_{fc} X + (H_{ff}^{dp} - H_{ff}^{ep}) U_f^{dp} + (H_{ff}^{dn} - H_{ff}^{en}) U_f^{dn} + H_{ff}^{ep} \Delta U_s + H_{ff}^{en} \Delta U - F_1 - G_{ff}^{dp} P_f^{dp} - G_{ff}^{ep} P_f^{ep} - (G_{ff}^{dn} + G_{ff}^{en}) P_f \end{aligned} \quad (6.16)$$

Portanto a matriz tangente para o caso de fratura coesiva é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cc} \\ A_{fc} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial U_f^{dp}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (H_{cf}^{dp} - H_{cf}^{ep}) \\ (H_{ff}^{dp} - H_{ff}^{ep}) \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial U_f^{dn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (H_{cf}^{dn} - H_{cf}^{en}) \\ (H_{ff}^{dn} - H_{ff}^{en}) \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \Delta U_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{cf}^{ep} \\ H_{ff}^{ep} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \Delta U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{cf}^{en} - (G_{cf}^{dn} + G_{cf}^{en}) \cdot \frac{\partial P_f}{\partial \Delta U} \\ H_{ff}^{en} - (G_{ff}^{dn} + G_{ff}^{en}) \cdot \frac{\partial P_f}{\partial \Delta U} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Nessa formulação foram consideradas duas leis coesivas, as quais são descritas no capítulo 3. Estas são as leis coesivas linear e bi-linear. Para a lei coesiva linear as forças coesivas são regidas pela seguinte equação:

$$P_f = f_t \cdot \left(1 - \frac{\Delta U}{\Delta U_{cr}} \right) \quad (6.22)$$

Onde o termo ΔU_{cr} representa a abertura crítica do material e f_t a resistência à tração do material. Com essa lei constitutiva o termo $\partial P_f / \partial \Delta U$ é dado por:

$$\frac{\partial P_f}{\partial \Delta U} = - \frac{f_t}{\Delta U_{cr}} \quad (6.23)$$

A lei coesiva bi-linear é formada por dois trechos lineares, com diferentes inclinações, relacionando as forças coesivas à abertura normal das faces da fissura conforme discutido no capítulo 3. A lei coesiva bi-linear é dada pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} P_f &= f_t - \left(\frac{f_t - f_t''}{\Delta u''} \right) \cdot \Delta U && \text{se } 0 \leq \Delta U \leq \Delta u'' \\ P_f &= \frac{f_t'' \cdot \Delta U}{\Delta u'' - \Delta U_{cr}} + f_t'' \cdot \left(1 - \frac{\Delta u''}{\Delta u'' - \Delta U_{cr}} \right) && \text{se } \Delta u'' \leq \Delta U \leq \Delta U_{cr} \end{aligned} \quad (6.24)$$

Sendo:

$$f_t'' = \frac{f_t}{3} \quad \Delta u'' = \frac{0,8 \cdot G_f}{f_t} \quad \Delta U_{cr} = \frac{3,6 \cdot G_f}{f_t} \quad (6.25)$$

Onde G_f representa a energia de fratura. De acordo com a Eq. (6.24) pode-se agora determinar o termo $\partial P_f / \partial \Delta U$ para a lei coesiva bi-linear. Esse termo para os dois trechos da lei coesiva são apresentados na Eq. (6.26).

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_f}{\partial \Delta U} &= - \left(\frac{f_t - f_t''}{\Delta u''} \right) && \text{se } 0 \leq \Delta U \leq \Delta u'' \\ \frac{\partial P_f}{\partial \Delta U} &= \frac{f_t''}{\Delta u'' - \Delta U_{cr}} && \text{se } \Delta u'' \leq \Delta U \leq \Delta U_{cr} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Através dessa formulação a convergência em cada passo de carga é obtida calculando-se a norma dos deslocamentos ou das forças: $\|\Delta U_i - \Delta U_{i-1}\| \leq \text{Tolerância}$ ou $\|\Delta P_i - \Delta P_{i-1}\| \leq \text{Tolerância}$. Se uma dessas relações for atendida, ou mesmo ambas, obtém-se a convergência do passo de carga e passa-se a um novo incremento de carga.

Quando $\Delta U \geq \Delta U_{cr}$ o termo $\partial P_f / \partial \Delta U$ torna-se nulo e o operador é recalculado.

6.1.6 – Exemplo 1: Viga sob Flexão em Três Pontos

A estrutura considerada neste exemplo refere-se a uma viga de concreto solicitada sob flexão em três pontos, conforme apresentado na Fig. (6.2). Trata-se de uma viga de 80 cm de comprimento e 20 cm de altura com um entalhe central de profundidade igual a 5 cm. O resultado experimental dessa estrutura é apresentado em SALEH (1997) sendo seguintes as propriedades do material: resistência a tração do concreto, $f_t = 3,0 \text{ MPa}$; módulo de elasticidade longitudinal, $E = 30000 \text{ MPa}$; coeficiente de Poisson de $\nu = 0,15$; e energia de fratura $G_f = 75 \text{ N/m}$.

Na análise desse exemplo foram consideradas três diferentes leis constitutivas para a representação das tensões coesivas. As leis empregadas são linear, bi-linear e exponencial que já foram discutidas anteriormente no capítulo 3. Foram considerados ainda 24 passos de carga para a aplicação do carregamento sendo que a tolerância para a convergência de cada passo é igual a $1 \cdot 10^{-5}$, baseada na norma de forças.

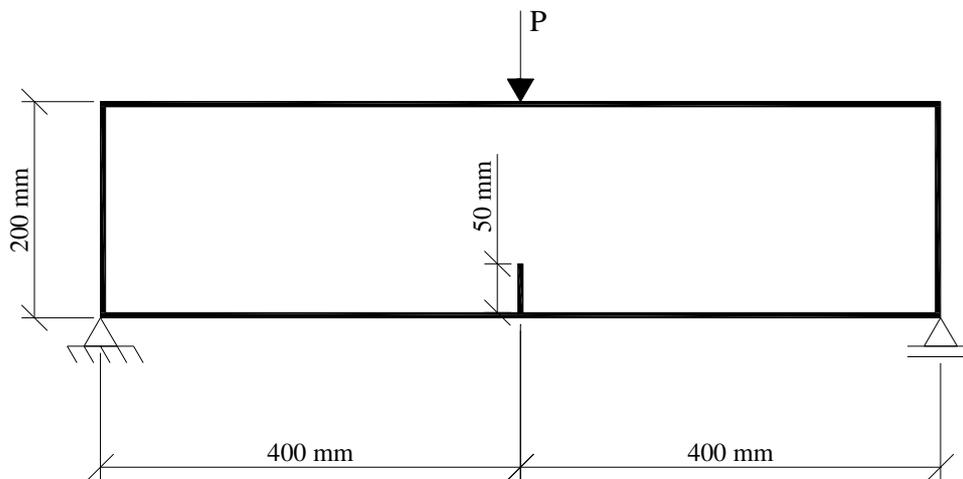


Figura 6.2 Estrutura considerada na análise.

Na análise desse exemplo foram utilizadas as formulações com operadores tangente e constante. Nos resultados que serão apresentados o índice “OT” indicam as curvas onde foi empregada a formulação com Operador Tangente sendo que nas demais curvas foi utilizado operador constante.

Na Fig. (6.3) é mostrado um diagrama carga \times deslocamento envolvendo as análises experimental e numéricas. Nessa figura pode-se constatar que as três leis constitutivas utilizadas para governar as tensões normais nas faces da fissura levam a resultados coerentes com o previsto pelo modelo experimental. Além disso, ambas as

formulações utilizadas levam a resultados que concordam com o resultado experimental validando, portanto, o código computacional e o algoritmo proposto.

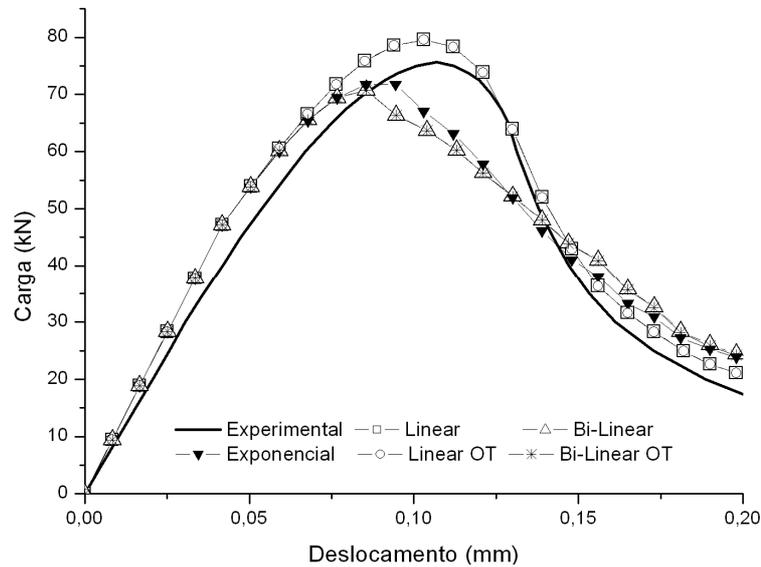


Figura 6.3 Diagrama Carga x Deslocamento para a estrutura analisada.

Na Fig. (6.4) é apresentada a evolução da propagação do entalhe central até o último ponto de aplicação de carregamento. Pode-se observar que a estrutura fica muito próxima ao colapso, no entanto não ocorre a separação do corpo em duas partes.

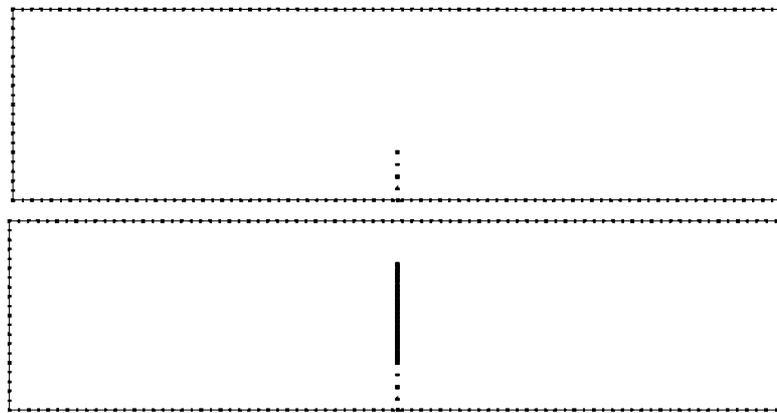


Figura 6.4 Propagação da fissura. Entalhe inicial e configuração final.

Na Fig. (6.5) é mostrado um comparativo com o número de iterações necessárias por intervalo de passos de carga para a obtenção do equilíbrio. Essa figura ilustra a eficiência da formulação proposta via operador tangente consistente, uma vez que essa formulação permite a resolução do problema não linear empregando um número menor de iterações, quando comparada à formulação com operador constante. Como mostra a Fig. (6.5), mesmo durante a fase de amolecimento, a partir do passo de carga 5, a formulação via operador tangente consistente consegue obter o equilíbrio com poucas

iterações. Esta figura mostra também que a formulação proposta via operador tangente necessita de um número de iterações aproximadamente 10 vezes menor quando comparado a formulação via operador constante. Isso mostra que a formulação proposta além de fornecer bons resultados é mais eficiente, sendo a solução obtida mais rapidamente.

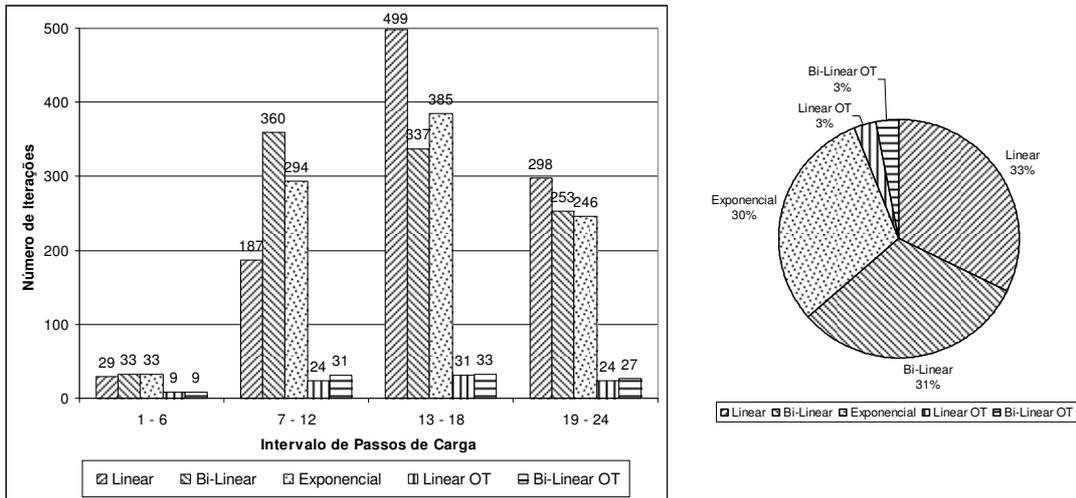


Figura 6.5 Comparativo do número de iterações por passo de carga. Número de iterações proporcionais.

6.1.7 – Exemplo 2: Viga Analisada em GALVEZ et. al (1998)

A estrutura considerada neste exemplo refere-se a viga de concreto solicitada a flexão e apresentada na Fig. (6.6). Trata-se de uma viga de 67,5 cm de comprimento e 15 cm de altura com um entalhe inicial posicionado em sua face inferior de profundidade igual a 7,5 cm. O resultado experimental dessa estrutura é apresentado em GALVEZ et al. (1998) sendo seguintes as propriedades do material: resistência a tração do concreto, $f_t = 3,0 \text{ MPa}$; módulo de elasticidade longitudinal, $E = 37000 \text{ MPa}$; coeficiente de Poisson de $\nu = 0,20$; e energia de fratura $G_f = 69 \text{ N/m}$.

Nesse exemplo as leis coesivas linear, bi-linear e exponencial foram empregadas para governar o comportamento das forças de superfícies normais durante o processo de crescimento da fissura. Foram considerados ainda 24 passos de carga para a aplicação do carregamento sendo que a tolerância para a convergência de cada passo é igual a $1 \cdot 10^{-5}$, baseado na norma de forças. Na análise desse exemplo foram utilizadas as formulações com operadores tangente e constante. Assim como no exemplo anterior, o termo “OT” indicam as curvas onde foi empregada a formulação com Operador Tangente sendo que nas demais curvas foi utilizado operador constante.

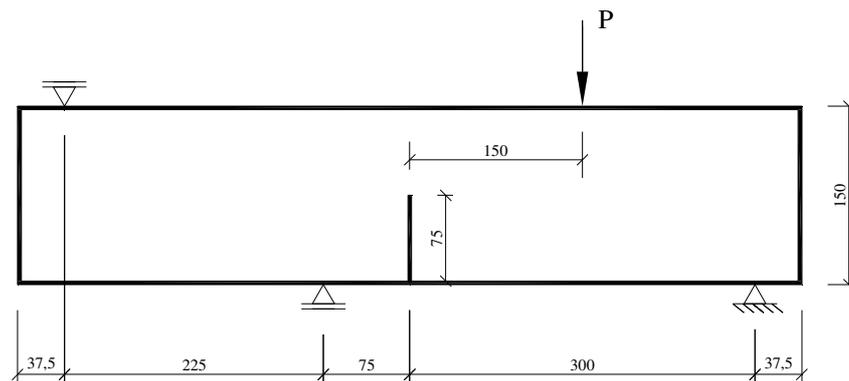


Figura 6.6 Estrutura considerada na análise. Dimensões em mm.

Na Fig. (6.7) é apresentado um diagrama carga \times deslocamento, para o ponto de aplicação da carga, onde são mostrados os resultados das análises experimental e numéricas. Por meio dessa figura pode-se constatar que as três leis constitutivas utilizadas na determinação das tensões coesivas levam a resultados coerentes com o previsto pelo modelo experimental. Além disso, ambas as formulações utilizadas levam a resultados que concordam com o resultado experimental validando, portanto, o código computacional e o algoritmo proposto. Deve-se ainda ressaltar que nos modelos via operador tangente os resultados obtidos encontram-se mais próximos, ao modelo experimental, do que os obtidos pelo modelo com operador constante.

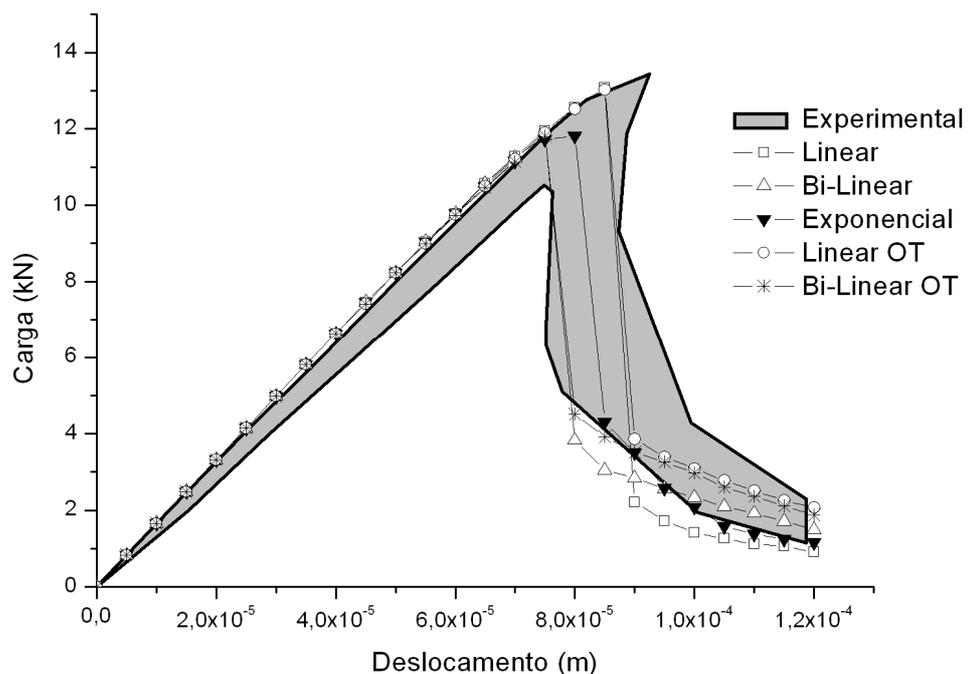


Figura 6.7 Diagrama Carga \times Deslocamento para a estrutura analisada.

Na Fig. (6.8) é ilustrada a trajetória de crescimento da fissura até o último

incremento de carga. Consta-se que essa trajetória é coerente com a resposta experimental mostrada em GALVEZ et al. (1998).

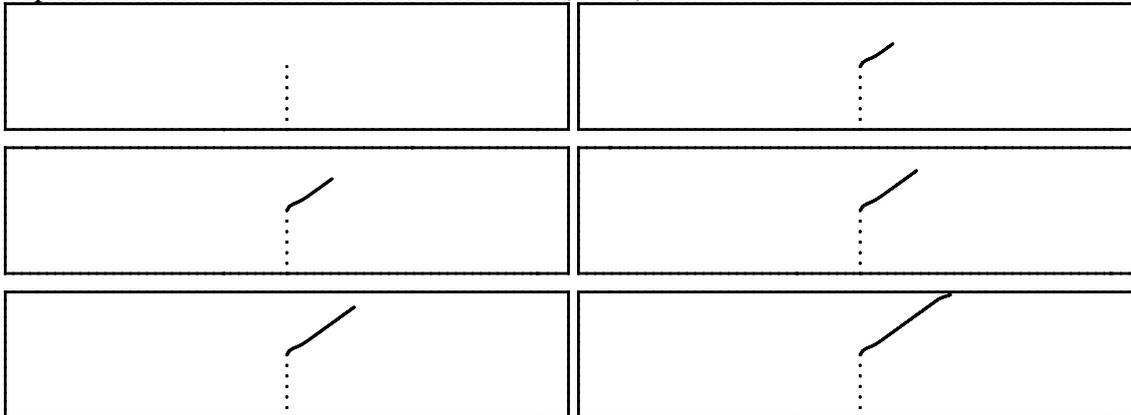


Figura 6.8 Propagação da fissura. Entalhe inicial, crescimento da fissura e configuração final.

Na Fig. (6.9) é mostrado um comparativo com o número de iterações necessárias por intervalos de passo de carga para a obtenção do equilíbrio. Essa figura ilustra a eficiência da formulação proposta via operador tangente uma vez que essa formulação permite a resolução do problema não linear empregando um número menor de iterações, quando comparado a formulação via operador constante. Como mostra a Fig. (6.9), mesmo durante a fase de amolecimento, a partir do passo de carga 10, a formulação via operador tangente consegue obter o equilíbrio com poucas iterações. Esta figura mostra também que a formulação proposta via operador tangente necessita de um número de iterações 8 vezes menor, aproximadamente, quando comparado a formulação via operador constante. Isso mostra que a formulação proposta é mais eficiente sendo a solução obtida mais rapidamente.

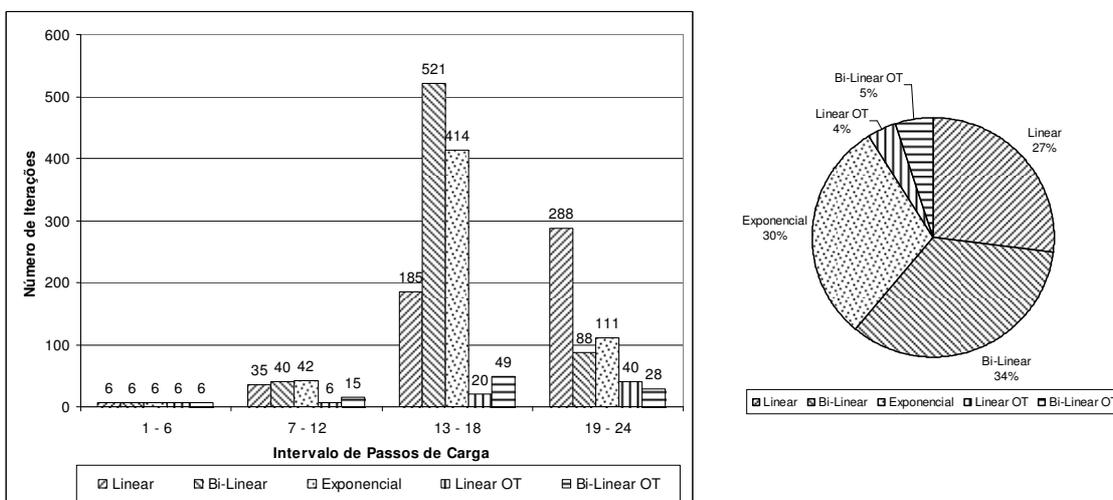


Figura 6.9 Comparativo do número de iterações por passo de carga. Número de iterações proporcionais.

6.1.8 – Exemplo 3: Viga Multi-Fissurada sob Flexão em Quatro Pontos

Nesse exemplo será analisada a estrutura apresentada na Fig. (6.10). Trata-se de uma viga de concreto solicitada à flexão em quatro pontos a qual apresenta comprimento igual a 1,5 m e altura de 0,50 m, sendo as cargas aplicadas nos terços médios da viga. Foram adotadas as seguintes propriedades para o material que constitui a viga: resistência a tração, $f_t = 3,0 MPa$; módulo de elasticidade longitudinal, $E = 30000 MPa$; coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$; e energia de fratura $G_f = 75 N/m$.

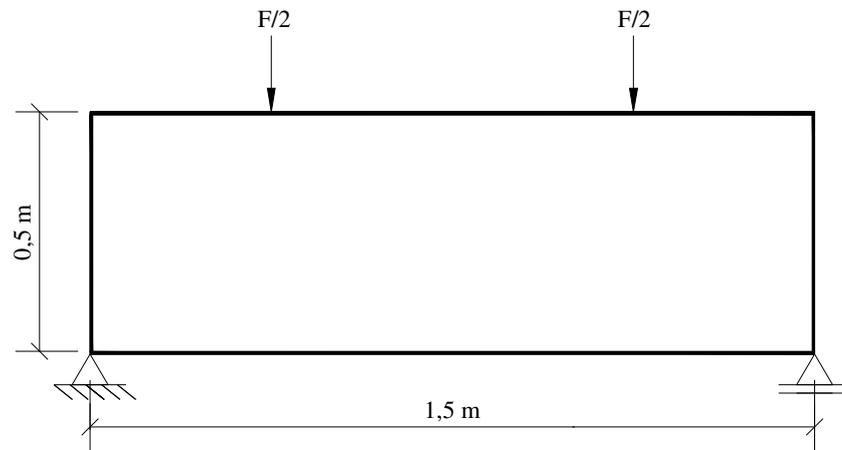


Figura 6.10 Estrutura considerada na análise.

Na análise desta estrutura foi considerada a presença de 11 fissuras distribuídas em sua borda inferior como mostra a Fig. (6.11). Nesta figura vê-se também a malha de elementos de contorno utilizada. Para a análise desse exemplo foram consideradas duas leis constitutivas para a representação da distribuição das tensões coesivas nas faces das fissuras, leis coesivas linear e bi-linear, sendo utilizada somente a formulação que emprega o operador tangente. Foram considerados ainda 25 passos de carga para a aplicação do carregamento sendo que a tolerância para a convergência de cada passo igual a $1 \cdot 10^{-5}$, baseado na norma de força.

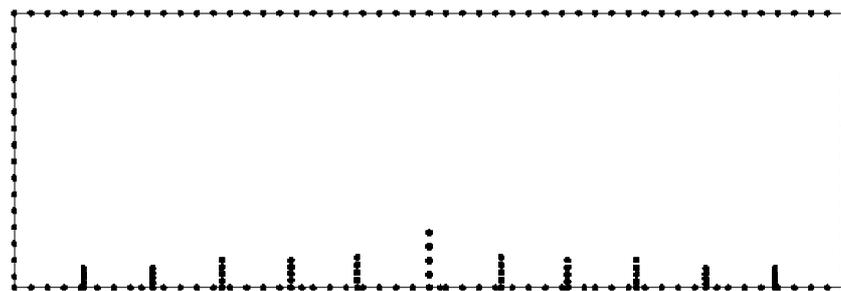


Figura 6.11 Distribuição das fissuras e malha de elementos de contorno utilizada.

Foi analisado o diagrama carga \times deslocamento para a estrutura o qual é apresentado na Fig. (6.12). Pode-se constatar que o resultado obtido é semelhante ao apresentado nas Fig. (6.3) e Fig. (7.7), ou seja, a análise utilizando lei coesiva linear é ligeiramente mais rígida se comparada ao caso onde a lei coesiva bi-linear é empregada. Em ambos os casos foi possível obter parte do trecho de amolecimento da curva.

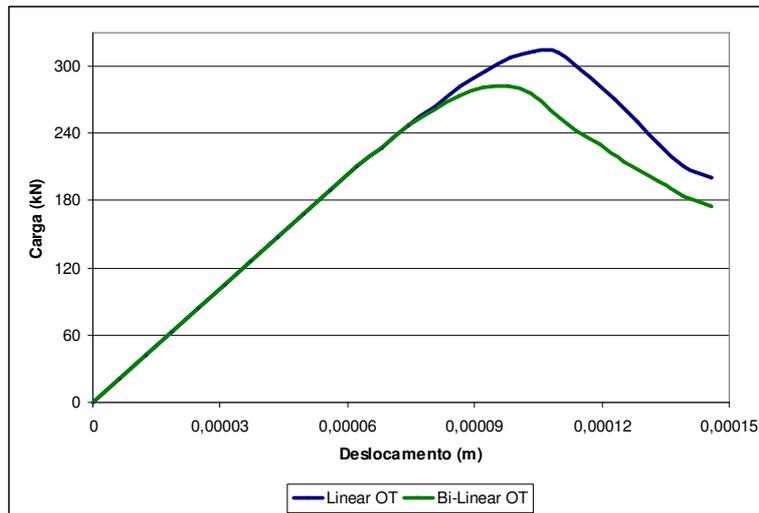


Figura 6.12 Diagrama Carga x Deslocamento para a estrutura analisada.

Na Fig. (6.13) é apresentada a evolução do crescimento das fissuras até o último ponto de aplicação de carregamento. Pode-se observar que apenas cinco das onze fissuras propagam durante o processo.

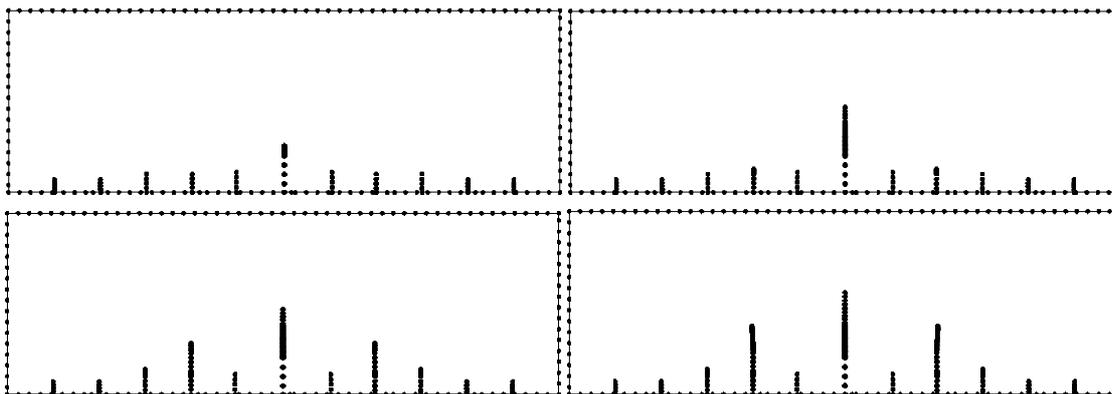


Figura 6.13 Propagação das fissuras. Estágio inicial, crescimentos intermediários e configuração final.

6.2 – Formulação do MEC Para a Análise de Fratura Elástico Linear

Neste item será discutida uma formulação desenvolvida para a análise de problemas de propagação de fissuras em estruturas planas sob o regime de

comportamento da mecânica da fratura elástico linear. Será apresentada uma formulação empregando um operador tangente e também os procedimentos considerados para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão nos modos I e II, o ângulo de propagação e o fator de intensidade de tensão equivalente.

6.2.1 – Formulação do MEC Para Análise de Problemas de Fratura Elástico Linear via Operador Tangente Consistente

A formulação que será aqui apresentada para a análise de fratura elástico linear é muito semelhante à apresentada no item 6.1, para problemas não lineares. A grande diferença é que nos problemas de fratura elástico lineares não existe uma lei coesiva para governar o comportamento das forças de superfície após o crescimento das fissuras. O que ocorre nesses modelos é a ruptura sempre frágil do material, o que faz com que as forças de superfície atuantes nas faces das fissuras que crescem sejam nulas. Sendo assim, as grandezas a serem determinadas na análise são $X, U_f^{dp}, U_f^{dn}, \Delta U_s$ e ΔU .

De acordo com o discutido acima pode-se reescrever a Eq. (6.13) considerando a condição de ruptura frágil do material. Assim:

$$Y(U, P) = \begin{aligned} & A_{cc} X + (H_{cf}^{dp} - H_{cf}^{ep}) U_f^{dp} + (H_{cf}^{dn} - H_{cf}^{en}) U_f^{dn} + H_{cf}^{ep} \Delta U_s + H_{cf}^{en} \Delta U - F - (G_{cf}^{dp} + G_{cf}^{ep}) P_f^p - (G_{cf}^{dn} + G_{cf}^{en}) P_f^n \\ & A_{fc} X + (H_{ff}^{dp} - H_{ff}^{ep}) U_f^{dp} + (H_{ff}^{dn} - H_{ff}^{en}) U_f^{dn} + H_{ff}^{ep} \Delta U_s + H_{ff}^{en} \Delta U - F_1 - (G_{ff}^{dp} + G_{ff}^{ep}) P_f^p - (G_{ff}^{dn} + G_{ff}^{en}) P_f^n \end{aligned} \quad (6.27)$$

Portanto os termos do operador tangente consistente para o problema de fratura elástico linear ficam dados por:

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial X} \right] = \begin{bmatrix} A_{cc} \\ A_{fc} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial U_f^{dp}} \right] = \begin{bmatrix} (H_{cf}^{dp} - H_{cf}^{ep}) \\ (H_{ff}^{dp} - H_{ff}^{ep}) \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial U_f^{dn}} \right] = \begin{bmatrix} (H_{cf}^{dn} - H_{cf}^{en}) \\ (H_{ff}^{dn} - H_{ff}^{en}) \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial \Delta U_s} \right] = \begin{bmatrix} H_{cf}^{ep} \\ H_{ff}^{ep} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial \Delta U} \right] = \begin{bmatrix} H_{cf}^{en} \\ H_{ff}^{en} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

6.2.2 – Cálculo dos Fatores de Intensidade de Tensão e do Ângulo de Propagação

Além da formulação para a determinação das grandezas desconhecidas no contorno deve-se ainda utilizar procedimentos para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão e do ângulo de propagação das fissuras envolvidas na análise. Nesse trabalho foi escolhida a técnica de correlação de deslocamentos para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão nos modos I e II. Esta técnica correlaciona os deslocamentos de pontos sobre as faces da fissura aos fatores de intensidade de tensão nos modos I e II. Esta técnica, assim como suas equações, estão descritas no capítulo 3.

O ângulo de propagação e o fator de intensidade de tensão equivalente são calculados utilizando-se teorias de interação de modos. Nesse trabalho foram consideradas as teorias da máxima tensão circunferencial, máxima taxa de liberação de energia e mínima densidade de energia. Por meio dessas três teorias de interação existem expressões para o cálculo do ângulo de propagação e do fator de intensidade de tensão equivalente as quais são escritas em termos dos fatores de intensidade de tensão nos modos I e II. No capítulo 3 essas teorias de interação são discutidas, bem como as expressões para o cálculo dessas grandezas.

6.2.3 – Exemplo 4: Determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão e do Ângulo de Propagação em Problema de Fratura Elástico Linear

Será discutida neste item a obtenção dos fatores de intensidade de tensão e do ângulo de propagação para um problema típico da mecânica da fratura elástico linear. Neste problema é possível exprimir as grandezas citadas através de expressões analíticas, as quais servirão de parâmetro para aferição da precisão da formulação desenvolvida e implementada. Os fatores de intensidade de tensão serão determinados pela técnica de correlação de deslocamentos já discutida no capítulo 3. Já para o ângulo de propagação e o fator de intensidade de tensão equivalente serão testadas as três teorias de interação de modos descritas também no capítulo 3.

A estrutura a ser analisada é a apresentada na Fig. (6.14). Trata-se de uma viga bi-apoiada com uma carga concentrada no centro do vão apresentando ainda uma fissura localizada no centro de sua face inferior. A viga apresenta 5 metros de

comprimento e 1 metro de altura, com os seguintes parâmetros do material: módulo de elasticidade longitudinal $E = 210 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$.

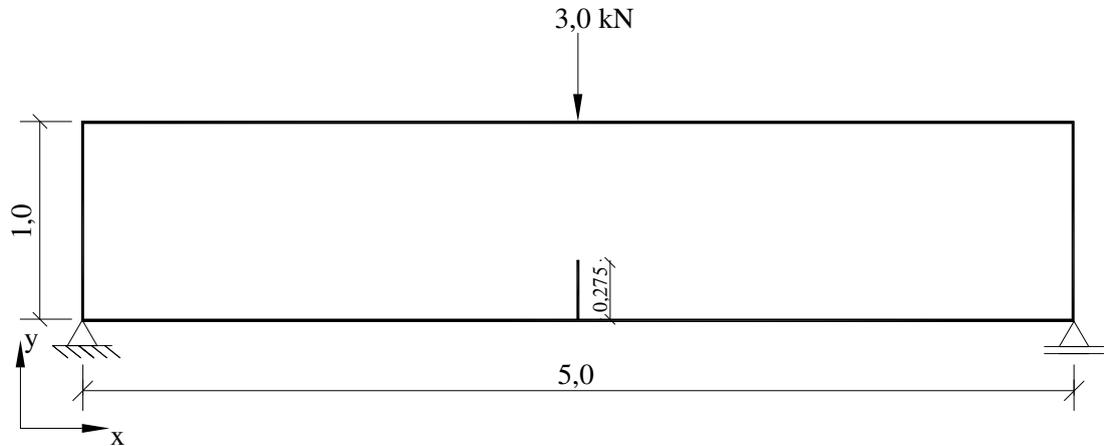


Figura 6.14 Geometria e carregamentos para análise. Dimensões em m.

Inicialmente serão comparados os valores para os fatores de intensidade de tensão para o modo I e II. A solução analítica para o problema em questão é apresentada em BROEK (1986) sendo é igual a:

$$K_I = \frac{P_v \cdot S_v}{B_v \cdot W_v^{3/2}} \cdot \frac{3 \cdot \left(\frac{a}{W_v}\right)^{1/2} \cdot \left[1,99 - \frac{a}{W_v} \cdot \left(1 - \frac{a}{W_v}\right) \cdot \left(2,15 - 3,93 \cdot \left(\frac{a}{W_v}\right) + 2,7 \cdot \left(\frac{a}{W_v}\right)^2 \right) \right]}{2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{a}{W_v}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{W_v}\right)^{3/2}} \quad (6.33)$$

em que: S_v é o vão da viga, W_v a altura da viga, a extensão da fissura, B_v espessura do corpo e P_v valor da carga concentrada.

A estrutura em questão é solicitada somente ao modo I de fratura, portanto, a resposta analítica para o fator de intensidade de tensão no modo II deve ser nula. Foram utilizadas três diferentes discretizações para as faces da fissura na análise, as quais são compostas por 8, 10 e 12 elementos. Na tabela 6.1 são apresentados os resultados.

Tabela 6.1 Comparação dos fatores de intensidade de tensão modo I e II.

Número de elementos na discretização da fissura	K_I MEC	K_{II} MEC	K_I Analítico	K_{II} Analítico
8	21,61374	$1,29036 \cdot 10^{-2}$	21,4086	0,00000
10	21,4961	$1,40899 \cdot 10^{-2}$		
12	21,41077	$1,43933 \cdot 10^{-2}$		

Por meio da tabela 6.1 constata-se que os resultados obtidos são muito próximos aos previstos analiticamente mesmo com o emprego de uma discretização não muito

refinada nas faces da fissura. Para a malha com 12 elementos o erro em relação ao previsto analiticamente é de apenas 0,010% para o modo I indicando assim a eficiência da formulação implementada.

Foram comparados também o fator de intensidade de tensão equivalente e o ângulo de propagação para as três teorias de interação de modos descritas no capítulo 3. Os resultados do comparativo dessas grandezas são mostrados na tabela 6.2.

Tabela 6.2 Comparação dos fatores de intensidade de tensão equivalentes e ângulo de propagação.

<i>Teoria de Interação de modos</i>	$K_{equivalente}$	$\Phi_{propagacao}$ (rad)
Máxima Tensão Circunferencial	21,41079	1,569434
Máxima Taxa de Liberação de Energia	21,41079	1,569295
Mínima Densidade de Energia	21,93039	1,569435

Pode ser verificado que os resultados obtidos são coerentes com os descritos na Tabela 6.1 para o fator de intensidade de tensão equivalente. Como a estrutura é solicitada somente ao modo de fraturamento I é natural que o fator de intensidade de tensão equivalente seja próximo ao valor do fator de intensidade de tensão no modo I. Além disso, os resultados para esta grandeza obtidos pelas três teorias de interação empregadas concordam entre si indicando a coerência dos resultados.

Já as respostas para o ângulo de propagação seguem o mesmo comportamento. Os valores dessa grandeza obtidos por meio das três teorias de interação não diferem substancialmente quanto comparados entre si, sendo esses valores coerentes com o modo de fraturamento atuante, ou seja, ângulo de propagação próximo a 90°.

Dessa forma, os resultados obtidos validam a formulação proposta. Mais resultados dessa formulação podem ser encontrados em LEONEL (2006) e em LEONEL et. al (2006, 2007).

6.2.4 – Exemplo 5: Estrutura Plana com Dois Furos e Duas Fissuras

Após ser validado o procedimento de cálculo dos fatores de intensidade de tensão e do ângulo de propagação será agora verificada a trajetória de crescimento da fissura. Para isso será analisada a trajetória de crescimento das fissuras, sob o regime da mecânica da fratura elástico linear, na estrutura apresentada na Fig. (6.15). Trata-se de uma estrutura plana com 20 mm de comprimento e 10 mm de altura contendo dois furos de diâmetro igual a 4 mm em seu interior. Nessa estrutura estão ainda presentes

duas fissuras, cada uma com comprimento igual a 1,0 mm, as quais estão posicionadas em suas bordas laterais.

O carregamento considerado é composto por deslocamentos prescritos nas faces inferior e superior respectivamente. Nesse exemplo adotaram-se como propriedades do material estrutural $E=98000\text{MPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu=0,3$. Nesse exemplo a estabilidade ao crescimento da fissura não foi estudada uma vez que o interesse está em se comparar a trajetória de crescimento das fissuras.

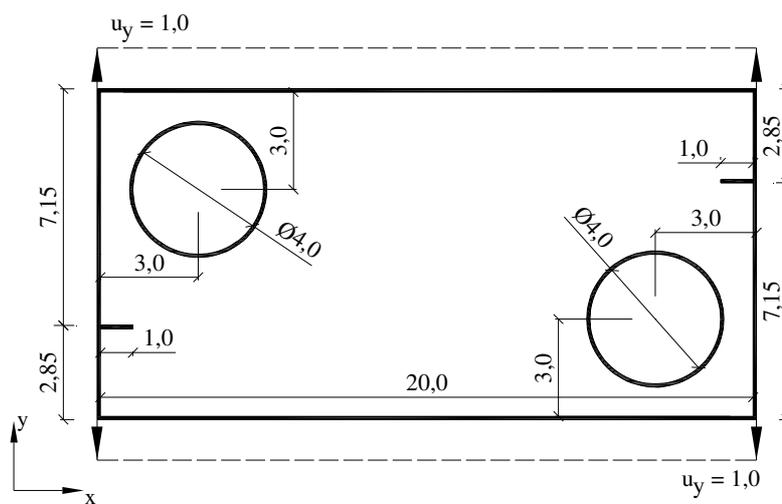


Figura 6.15 Estrutura e carregamentos analisados. Dimensões em mm.

Nessa análise foi empregada a técnica de correlação de deslocamentos para a determinação dos fatores de intensidade de tensão atuantes nas fissuras. Foi utilizada também a teoria da máxima tensão circunferencial para a determinação do ângulo de propagação e também do fator de intensidade de tensão equivalente solicitante nas fissuras.

A trajetória de crescimento das fissuras foi comparada com a resposta obtida em BOUCHARD et. al. (2003) onde os autores estudam o crescimento de fissuras em domínios bidimensionais via método dos elementos finitos. No modelo de BOUCHARD et. al. (2003) os fatores de intensidade de tensão nos modos I e II são calculados utilizando-se a integral J, enquanto o ângulo de propagação e o fator de intensidade de tensão equivalente são calculados pela teoria da máxima tensão circunferencial.

Na Fig. (6.16) são apresentadas as trajetórias de crescimento das fissuras obtidas pela formulação implementada, via MEC, e por meio da metodologia apresentada em BOUCHARD et. al. (2003).

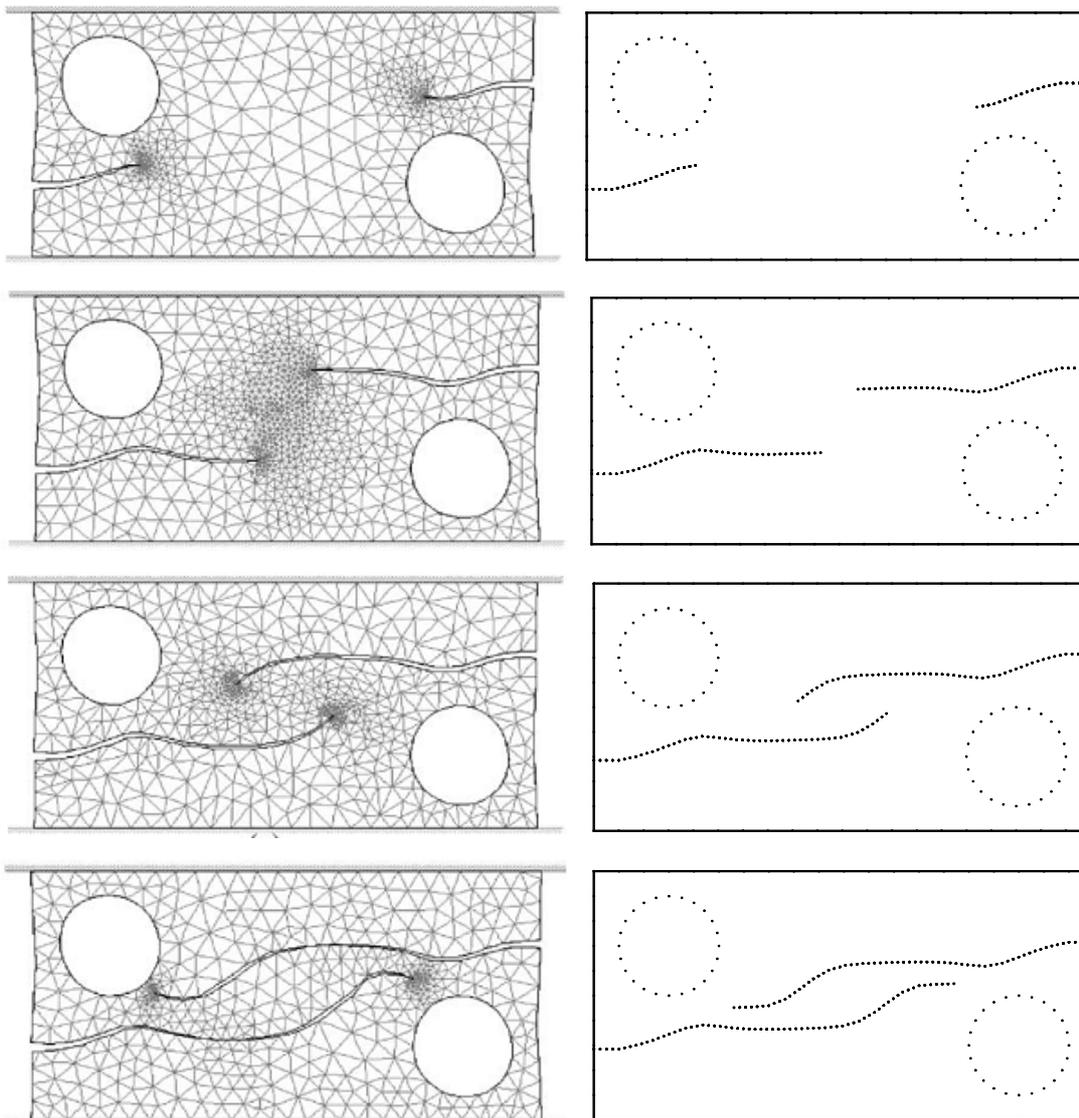


Figura 6.16 Comparativo do crescimento das fissuras na estrutura considerada.

Como apresentam as respostas da Fig. (6.16) verifica-se que as trajetórias de crescimento das fissuras são muito semelhantes validando, portanto a implementação do código via MEC efetuada para a modelagem do crescimento de fissuras em domínios bidimensionais.

6.2.5 – Exemplo 6: Chapa com uma Fissura Solicitada em Modo II

Nesse item será tratada a estrutura apresentada na Fig. (6.17). Trata-se de uma estrutura plana solicitada predominantemente em modo II de fraturamento. Nessa estrutura está presente uma fissura a qual está posicionada no meio de sua face

esquerda. O carregamento considerado nesse exemplo é composto por quatro forças de superfície simetricamente posicionadas nas faces da estrutura com valor unitário.

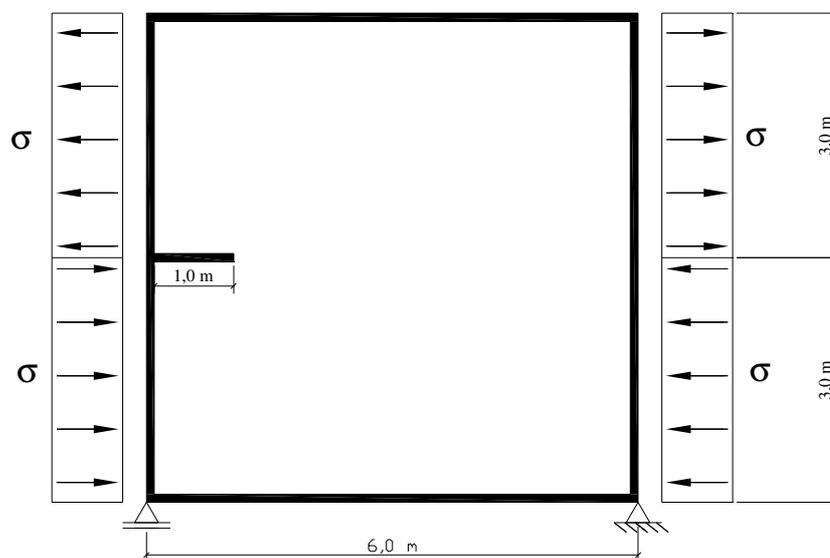


Figura 6.17 Estrutura e carregamentos analisados.

Nesse exemplo foram adotados os seguintes valores para as propriedades do material que constitui a estrutura: módulo de elasticidade longitudinal igual a $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. A estabilidade ao crescimento da fissura não foi verificada uma vez que o interesse da análise encontra-se em comparar a trajetória de crescimento da fissura e também os fatores de intensidade de tensão atuantes na fissura. Nessa análise não se busca obter a carga de ruptura da estrutura.

Os fatores de intensidade de tensão foram calculados utilizando-se a técnica de correlação de deslocamentos. Foi utilizada também a teoria da máxima tensão circunferencial para a determinação do ângulo de propagação e também do fator de intensidade de tensão equivalente.

Na análise estrutural atenção especial foi dada à trajetória de crescimento da fissura e aos fatores de intensidade de tensão atuantes. Além de ser analisada pelo código computacional em elementos de contorno desenvolvido, a estrutura foi também analisada pelo programa FRANC 2D. Este programa, disponível gratuitamente na internet, foi desenvolvido pela Universidade de Cornell, EUA, permitindo a análise de propagação de fissuras em estruturas planas via método dos elementos finitos. Na construção do modelo via FRANC 2D os fatores de intensidade de tensão são calculados pela técnica de correlação de deslocamentos e o ângulo de propagação pela teoria da máxima tensão circunferencial. Na Fig. (6.18) é apresentado um comparativo

da trajetória de crescimento da fissura pelos dois métodos numéricos citados. Como pode-se observar por meio dessa figura verifica-se que as trajetórias de crescimento da fissura são muito semelhantes o que valida a implementação do código via MEC efetuada.

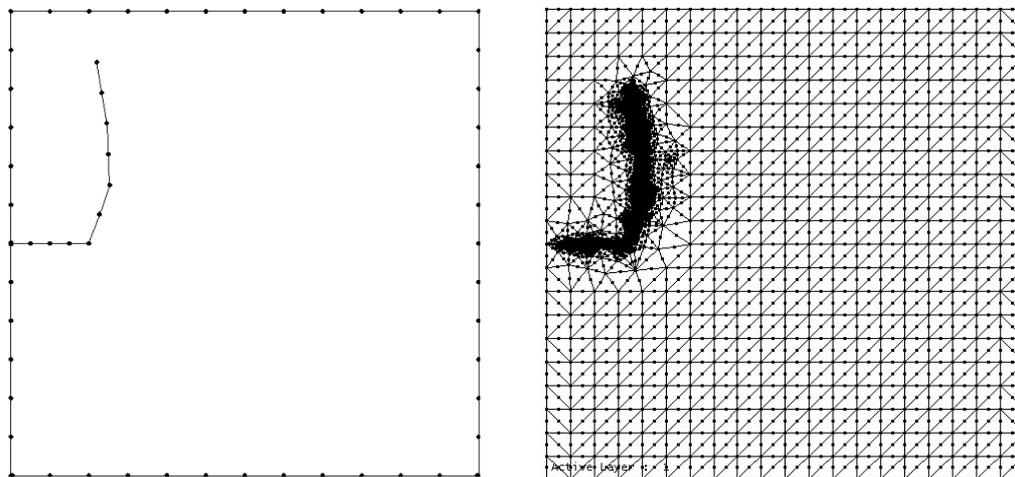


Figura 6.18 Comparativo para as trajetórias de crescimento da fissura. MEC e FRANC 2D.

Nas Fig. (6.19) e Fig. (6.20) é apresentado um comparativo para os fatores de intensidade de tensão atuantes na estrutura para o carregamento aplicado. Por meio dessas figuras pode-se verificar que as respostas, tanto para o modo I quanto para o modo II de fraturamento, fornecidas pelo programa FRANC 2D e pelo código via MEC desenvolvido são concordantes o que valida a implementação desenvolvida nesse trabalho.

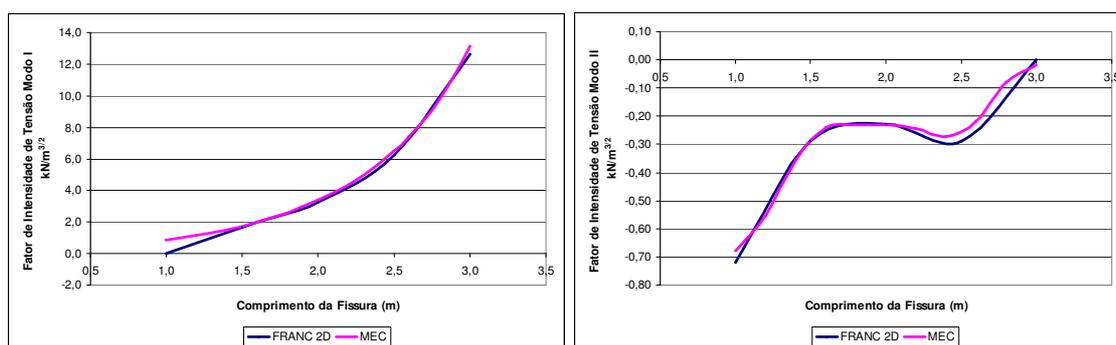


Figura 6.19 Comparativo K_I FRANC 2D e MEC. Figura 6.20 Comparativo K_{II} FRANC 2D e MEC.

Além de comparar os resultados desse exemplo com uma modelagem via método dos elementos finitos, esses resultados serão agora comparados com as respostas obtidas por SILVEIRA et al. (2005). Nesse trabalho os autores efetuaram a análise da propagação da fissura utilizando o MEC por meio de uma formulação que

emprega funções de Green. Na Fig. (6.21) são mostradas as trajetórias de crescimento da fissura obtidas por SILVEIRA et al. (2005), formulação do MEC desenvolvida nesse trabalho e pela análise via método dos elementos finitos através do FRANC 2D. Como apresenta essa figura o resultado fornecido pela formulação desenvolvida nesse trabalho concorda com os resultados obtidos pelos pesquisadores SILVEIRA et al. (2005) e também com o obtido através de outro método numérico, FRANC 2D. Assim considera-se validada a implementação computacional do modelo em elementos de contorno para a análise da propagação de fissuras considerando a teoria da mecânica da fratura elástico linear.

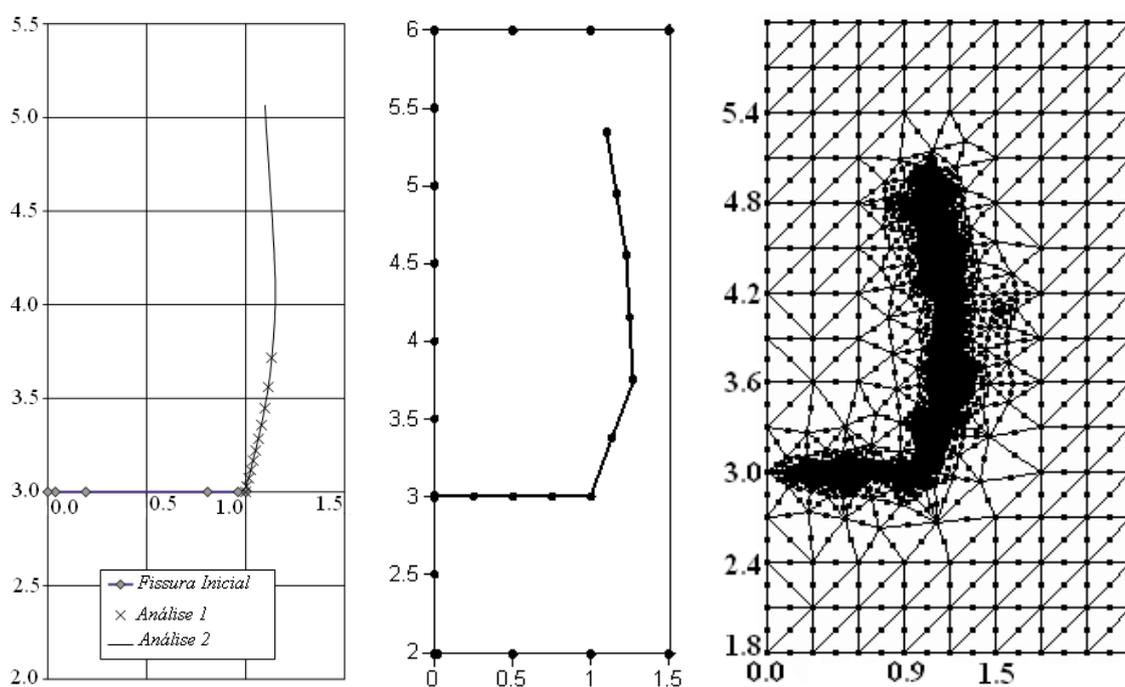


Figura 6.21 Trajetórias de crescimento da fissura. SILVEIRA et al (2005), MEC e FRANC 2D.

6.2.6 – Exemplo 7: Análise de Localização e Coalescência em Chapa com Múltiplas Fissuras

Neste exemplo serão analisadas a localização e a coalescência de múltiplas fissuras presentes em uma estrutura plana. A estrutura em questão é a apresentada na Fig. (6.22). Trata-se de uma estrutura plana de 400 cm de comprimento e 200 cm de altura onde são prescritos dois deslocamentos em suas faces superior e lateral direita. Existem ainda duas restrições ao deslocamento presentes na face esquerda, engaste, e por um apoio pontual na face inferior.

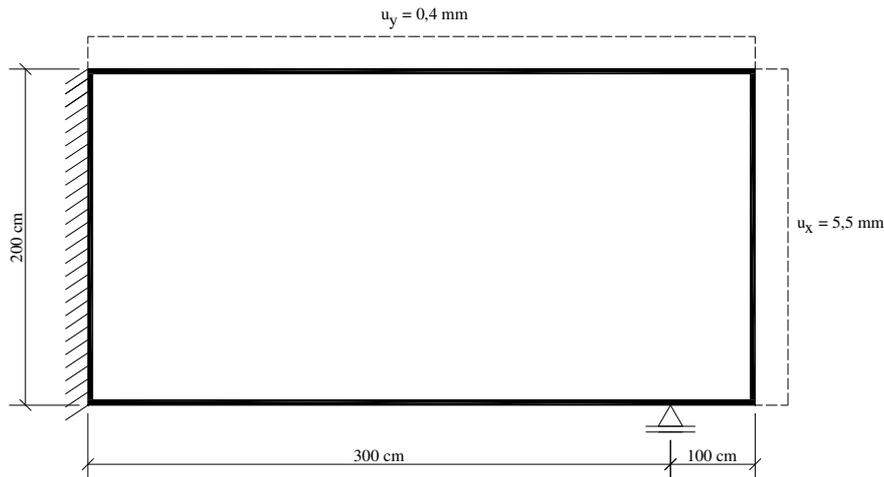


Figura 6.22 Estrutura e carregamentos analisados.

Nesta estrutura estão presentes quarenta fissuras distribuídas aleatoriamente no domínio do corpo conforme apresentado na Fig. (6.23). Tanto o comprimento quanto o ângulo de inclinação e localização na estrutura são aleatoriamente escolhidas.

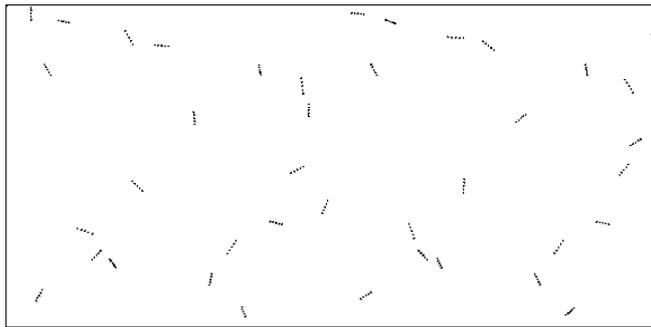


Figura 6.23 Fissuras aleatoriamente distribuídas no domínio do corpo.

Nesse exemplo adotou-se módulo de elasticidade longitudinal igual a $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de Poisson de $\nu = 0,3$ e fator de intensidade de tensão resistente de $K_c = 1,04 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^{3/2}$. A análise da estrutura foi realizada empregando-se 30 incrementos de carga. Nesse exemplo foi empregada a técnica de correlação de deslocamentos para a determinação dos fatores de intensidade de tensão de cada fissura. Foi utilizada também a teoria da máxima tensão circunferencial para a determinação do ângulo de propagação e também do fator de intensidade de tensão equivalente.

Na Fig. (6.24) é mostrada a trajetória de crescimento das diversas fissuras presentes na estrutura. Verifica-se a propagação de várias fissuras as quais, por coalescência, geram uma fissura principal que provoca a ruína da peça. Observa-se

claramente a localização da danificação gerando uma fissura principal. Nessa análise, como mostra a Fig. (6.24), constata-se a ruptura da estrutura em duas partes principais.

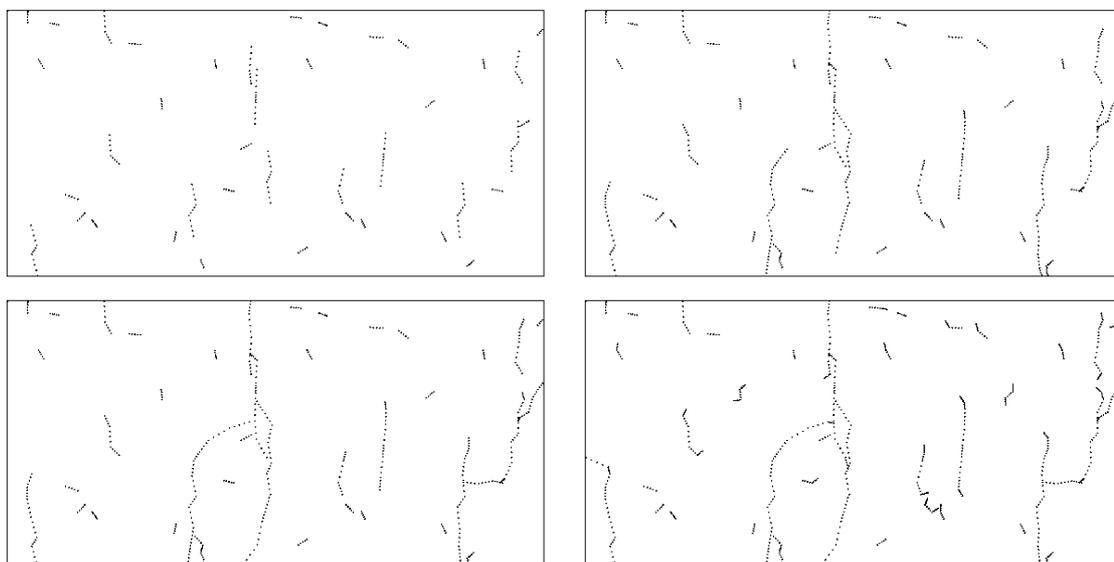


Figura 6.24 Análise do crescimento das fissuras durante a análise até a ruptura do corpo em duas partes.

Na Fig. (6.25) é apresentado o campo de deslocamentos na direção horizontal após a ruptura do corpo. Fica bem claro o movimento de corpo rígido após a separação da estrutura em duas partes.

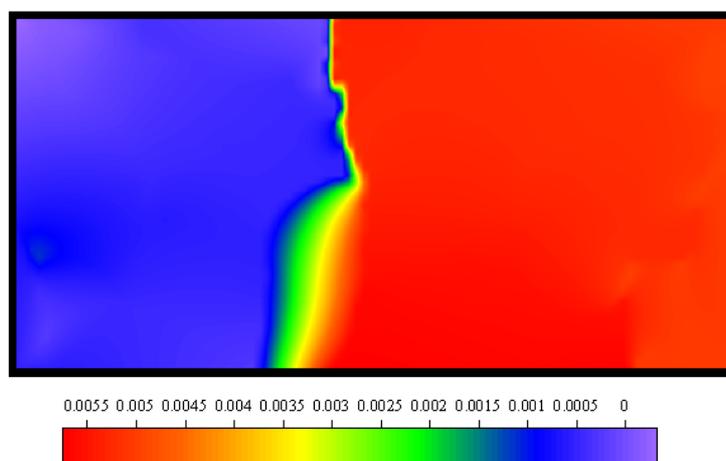


Figura 6.25 Campo de deslocamento final na direção X.

6.3 – Formulação do MEC Para a Análise de Problemas de Contato entre Faces de Fissuras via Operador Tangente Consistente

Neste item será apresentada uma formulação, via operador tangente consistente, para a análise de contato entre faces de fissuras. Inicialmente será apresentada a formulação para o contato sem escorregamento (aderência perfeita). Em seguida serão

Capítulo 6 – Formulações Não Lineares do MEC para a Análise de Problemas de Fratura e Contato

mostrados os termos do operador tangente consistente para o caso de escorregamento. Neste modelo o contato ocorre somente entre as faces de fissuras.

6.3.1 – Formulação com Operador Tangente Consistente para o Caso de Contato sem Escorregamento e com Escorregamento

Para o desenvolvimento da formulação do problema de contato será retomada a formulação desenvolvida no item 6.1.5. Para a análise de problemas de contato a diferença em relação ao caso já discutido no item 6.1.5 são as grandezas que sofrem variação no processo de Newton-Raphson. Para o caso de contato sem escorregamento tem-se que tanto ΔU_s quanto ΔU não sofrem variação durante o processo iterativo, elas são nulas por definição. Nesse tipo de contato as forças de superfície atuantes nas faces da fissura, que são a região de contato, são as grandezas a serem determinadas. Assim a Eq. (6.13) pode ser reescrita considerando essas proposições da seguinte maneira:

$$Y(U, P) = \begin{matrix} A_{cc}X + (H_{cf}^{dp} - H_{cf}^{ep})U_f^{dp} + (H_{cf}^{dn} - H_{cf}^{en})U_f^{dn} + H_{cf}^{ep}\Delta U_s + H_{cf}^{en}\Delta U - F - (G_{cf}^{dp} + G_{cf}^{ep})P_f^p - (G_{cf}^{dn} + G_{cf}^{en})P_f^n \\ A_{fc}X + (H_{ff}^{dp} - H_{ff}^{ep})U_f^{dp} + (H_{ff}^{dn} - H_{ff}^{en})U_f^{dn} + H_{ff}^{ep}\Delta U_s + H_{ff}^{en}\Delta U - F_1 - (G_{ff}^{dp} + G_{ff}^{ep})P_f^p - (G_{ff}^{dn} + G_{ff}^{en})P_f^n \end{matrix} \quad (6.34)$$

Deve-se salientar que nesse modo de contato o problema a ser resolvido é elástico linear. A não linearidade surge no momento que o escorregamento ocorre e uma lei é definida para governar o comportamento das forças de superfície na região do contato. Portanto os termos do operador tangente consistente para o caso de contato sem escorregamento ficam dados por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cc} \\ A_{fc} \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial U_f^{dp}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (H_{cf}^{dp} - H_{cf}^{ep}) \\ (H_{ff}^{dp} - H_{ff}^{ep}) \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial U_f^{dn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (H_{cf}^{dn} - H_{cf}^{en}) \\ (H_{ff}^{dn} - H_{ff}^{en}) \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial P_f^p} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{cf}^{dp} + G_{cf}^{ep} \\ G_{ff}^{dp} + G_{ff}^{ep} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial P_f^n} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{cf}^{dn} + G_{cf}^{en} \\ G_{ff}^{dn} + G_{ff}^{en} \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

Para o caso de contato com o escorregamento entre as faces das fissuras deve-se escolher uma lei para governar o comportamento das forças de superfície atuantes na

região do contato, uma vez que esta deve ser introduzida na formulação. Neste trabalho é utilizado o critério de Coulomb o qual pode ser expresso pela seguinte equação:

$$P_f^p \leq cs - P_f^n \cdot \tan(\varphi) \quad (6.40)$$

Na Eq. (6.40) cs representa a coesão entre os materiais do contato e φ é o ângulo de atrito. Assim as forças de superfície paralelas às faces da fissura dependem da coesão, do ângulo de atrito e também da força de superfície normal às faces da fissura. Deve-se destacar que, na região do contato, quando o primeiro membro da Eq. (6.40) é menor que o segundo observa-se a situação de contato perfeito, ou seja, não ocorre escorregamento. Nesse caso empregam-se as Eq. (6.35) a Eq. (6.39) para a determinação das forças de superfície e deslocamentos no contorno. Já quando se tem a situação de igualdade da Eq. (6.40) observa-se o escorregamento das superfícies em contato.

Nessa condição de contato as grandezas que sofrem variação na análise são $X, U_f^{dp}, U_f^{dn}, \Delta U_s, P_f^n$. Por definição ΔU deve ser igual a zero e P_f^p é determinado a partir da lei de Coulomb. Assim o operador tangente consistente para o contato com escorregamento fica assim definido:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cc} \\ A_{fc} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial U_f^{dp}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (H_{cf}^{dp} - H_{cf}^{ep}) \\ (H_{ff}^{dp} - H_{ff}^{ep}) \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial U_f^{dn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (H_{cf}^{dn} - H_{cf}^{en}) \\ (H_{ff}^{dn} - H_{ff}^{en}) \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \Delta U_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{cf}^{ep} \\ H_{ff}^{ep} \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial P_f^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(G_{cf}^{dn} + G_{cf}^{en}) - (G_{cf}^{dp} + G_{cf}^{ep}) \cdot \frac{\partial P_f^p}{\partial P_f^n} \\ -(G_{ff}^{dn} + G_{ff}^{en}) - (G_{ff}^{dp} + G_{ff}^{ep}) \cdot \frac{\partial P_f^p}{\partial P_f^n} \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

Para os pontos fontes que pertencem à região de contato com escorregamento $\partial P_f^p / \partial P_f^n = \tan(\varphi)$. Deve-se destacar que no caso da análise de problemas de contato com escorregamento mas sem atrito, deve-se apenas definir que a coesão e o ângulo de atrito do problema sejam iguais a zero.

6.3.2 – Exemplo 8: Chapa com Fissura de Aresta com Contato sem Atrito

Neste item será analisada a estrutura apresentada na Fig. (6.26). Trata-se de uma chapa quadrada com o comprimento do lado igual a dois metros contendo, em uma de suas arestas, uma fissura com um metro de comprimento. Esta estrutura é engastada em sua base e em seu topo são prescritos dois deslocamentos unitários com os sentidos indicados na Fig. (6.26). Foram considerados os seguintes valores para as propriedades do material: módulo de elasticidade longitudinal, $E = 1000 \text{ kN/m}^2$; coeficiente de Poisson de $\nu = 0,2$; coesão e ângulo de atrito são iguais a zero.

Na análise deste exemplo foi empregada a formulação para o problema de contato via operador tangente. Os resultados obtidos por meio dessa formulação foram comparados aos previstos pelo ANSYS, onde o mesmo problema foi modelado utilizando o método dos elementos finitos.

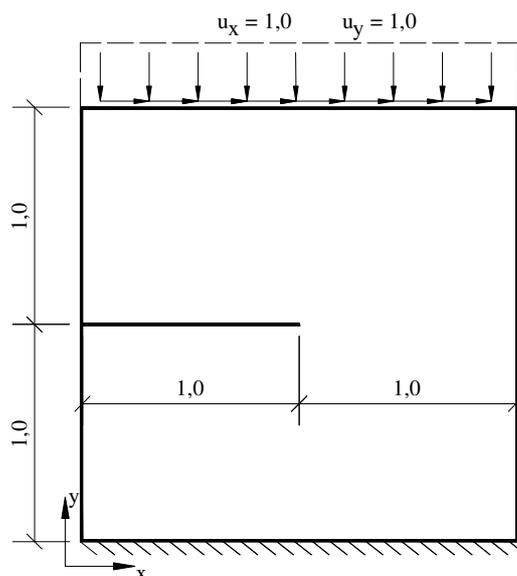


Figura 6.26 Estrutura analisada. Dimensões em m.

Inicialmente são comparados os deslocamentos na direção x obtidos por meio das duas análises consideradas. Os resultados são apresentados na Fig. (6.27) onde pode-se verificar que as respostas obtidas são concordantes para as duas faces da fissura.

Os deslocamentos na direção y foram também comparados sendo os mesmos mostrados na Fig. (6.28). Por meio desta figura pode-se também verificar que as

respostas obtidas usando os dois métodos numéricos considerados são muito semelhantes indicando a eficiência da formulação do MEC.

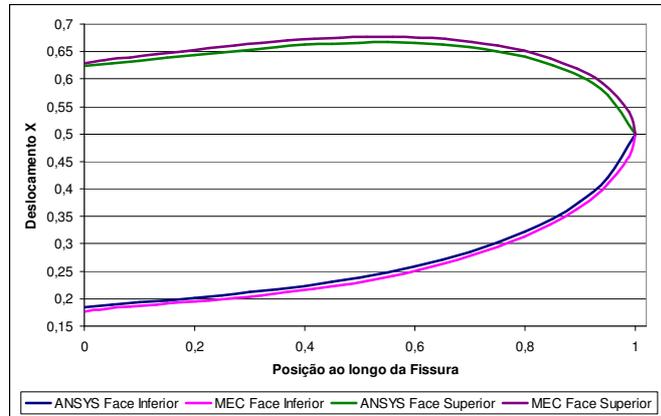


Figura 6.27 Comparativo dos deslocamentos nas faces da fissura direção x.

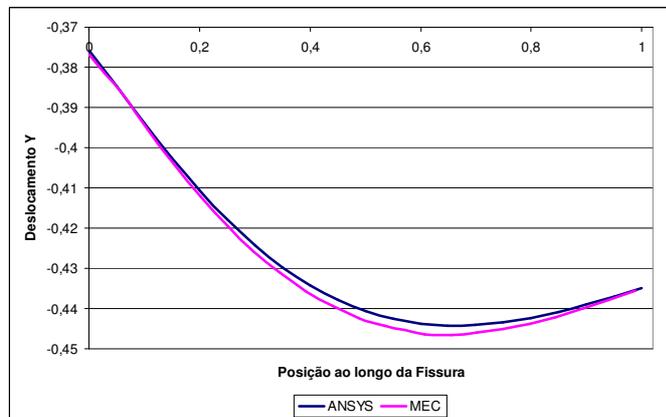


Figura 6.28 Comparativo dos deslocamentos nas faces da fissura direção y.

Finalmente as forças de superfície na região do contato foram também comparadas, sendo estas apresentadas na Fig. (6.29). Observa-se também que para esta grandeza os resultados obtidos por ambas as análises realizadas são concordantes, validando, portanto, a formulação desenvolvida e implementada.

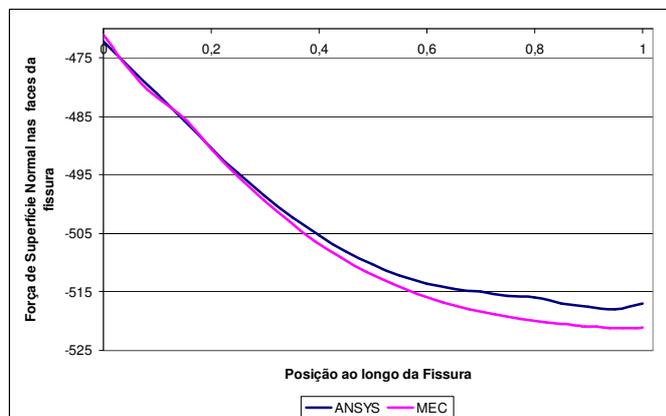


Figura 6.29 Comparativo das forças de superfície na região do contato.

6.3.3 – Exemplo 9: Chapa com Fissura de Aresta com Contato Considerando Atrito

A estrutura considerada para este exemplo é a ilustrada na Fig. (6.30). Assim como no exemplo anterior a estrutura é formada por uma chapa quadrada com o comprimento do lado igual a dois metros contendo, em uma de suas arestas, uma fissura com um metro de comprimento. A estrutura apresenta um engaste em sua base sendo que em seu topo são prescritos dois deslocamentos com os valores e direções mostrados na Fig. (6.30). Os valores para as propriedades dos materiais considerados foram: módulo de elasticidade longitudinal, $E=1000 \text{ kN/m}^2$; coeficiente de Poisson de $\nu=0,2$; coesão igual a zero e ângulo de atrito $\varphi=30^\circ$.

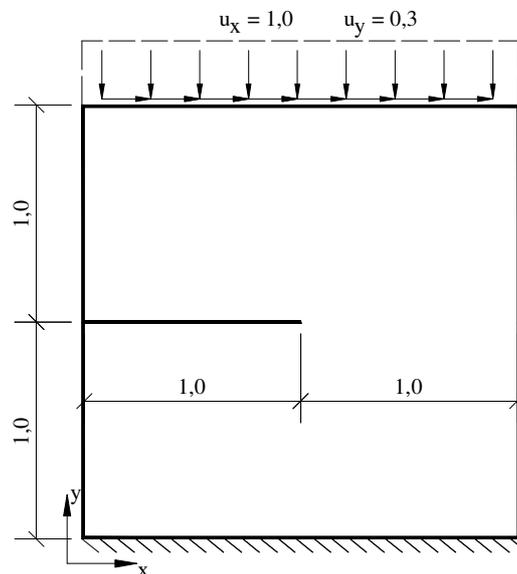


Figura 6.30 Estrutura analisada. Dimensões em m.

Assim como no exemplo anterior foi empregada a formulação para o problema de contato via operador tangente, sendo os resultados obtidos por meio dessa formulação, comparados aos previstos pelo software ANSYS, onde o mesmo modelo foi analisado utilizando-se o método dos elementos finitos. Primeiramente são comparados os deslocamentos na direção x obtidos por ambas as análises consideradas. Na Fig. (6.31) são apresentadas as curvas obtidas para os deslocamentos das duas faces da fissura. Pode-se observar que as respostas obtidas por ambos os modelos são concordantes indicando a precisão da formulação desenvolvida. Já os deslocamentos na direção y também foram comparados sendo ilustrados na Fig. (6.32). Por meio desta figura pode-se também verificar, assim como nos resultados da Fig. (6.31), que as

respostas obtidas por ambos os modelos são muito semelhantes validando a formulação proposta via MEC.

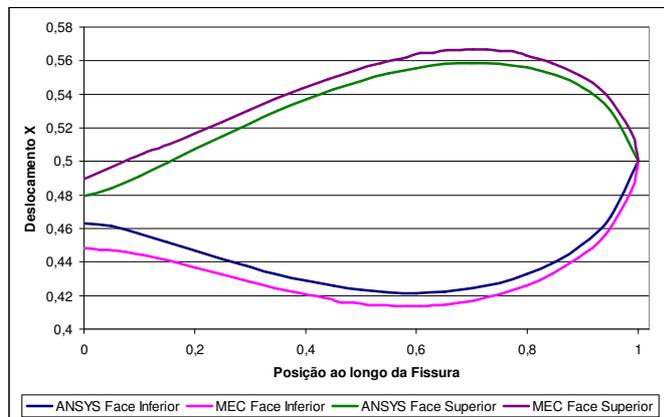


Figura 6.31 Comparativo dos deslocamentos nas faces da fissura direção x.

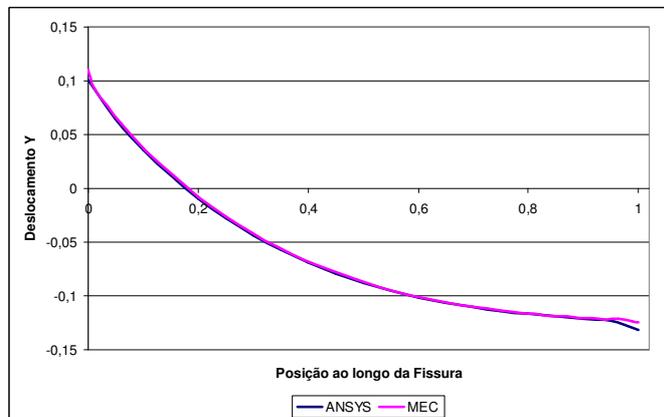


Figura 6.32 Comparativo dos deslocamentos nas faces da fissura direção y.

As forças de superfície na região do contato foram também comparadas sendo apresentadas na Fig. (6.33). Observa-se também para essa grandeza a concordância entre os resultados obtidos pelo MEC e o ANSYS. Assim considera-se validada a formulação desenvolvida e implementada para o problema de contato.

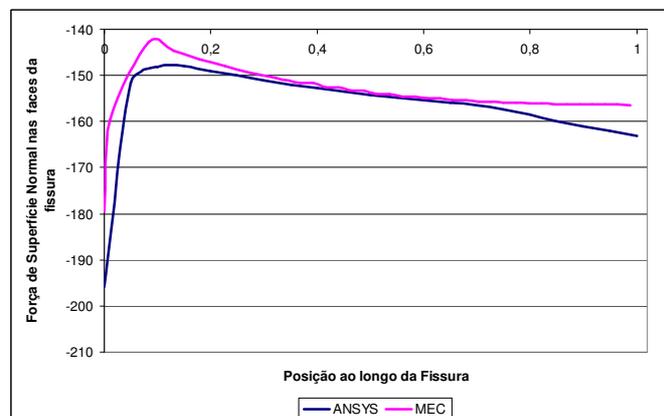


Figura 6.33 Comparativo das forças de superfície normais às faces da fissura.

6.3.4 – Exemplo 10: Chapa com Duas Fissuras com Contato Considerando Atrito

Nesse tópicos será analisada a estrutura ilustrada na Fig. (6.34). Trata-se de uma estrutura plana retangular contendo duas fissuras localizadas em suas bordas laterais. A estrutura apresenta um engaste em sua base sendo, em seu topo, prescritos dois deslocamentos com os valores e direções mostrados na Fig. (6.34). Os valores para as propriedades dos materiais considerados foram: módulo de elasticidade longitudinal, $E = 1000 \text{ kN/m}^2$; coeficiente de Poisson de $\nu = 0,2$; coesão igual a zero e ângulo de atrito $\phi = 15^\circ$. A região do contato é formada por duas fissuras de comprimento igual a 80 cm posicionadas, cada uma delas, em uma de suas faces laterais.

A análise desse exemplo foi conduzida utilizando-se apenas a formulação desenvolvida para o problema de contato via operador tangente consistente por meio do MEC.

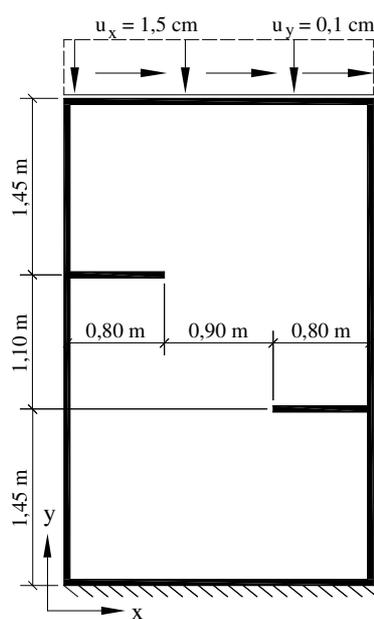


Figura 6.34 Estrutura analisada. Dimensões em m.

Primeiramente serão apresentados os resultados para o deslocamento, na direção X, das faces das duas fissuras existentes na estrutura. Esses resultados são mostrados nas Fig. (6.35) e Fig. (6.36). Conforme indicam essas figuras pode-se verificar que o comportamento dos deslocamentos na direção X, para as duas fissuras existentes na análise, é muito semelhante ao observado no último exemplo analisado. Além disso, pode-se constatar também um comportamento simétrico da resposta para o

deslocamento X quando se compara essa grandeza entre as duas fissuras, o que é coerente de acordo com o posicionamento dessas na estrutura.

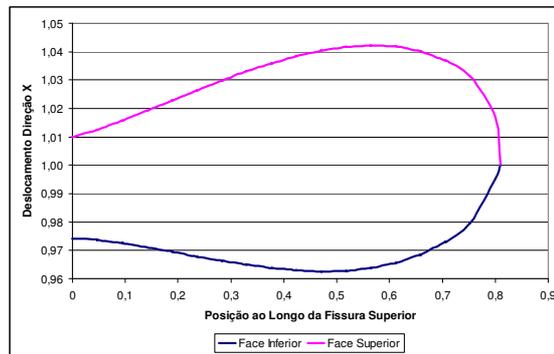


Figura 6.35 Deslocamentos X Fissura Superior.

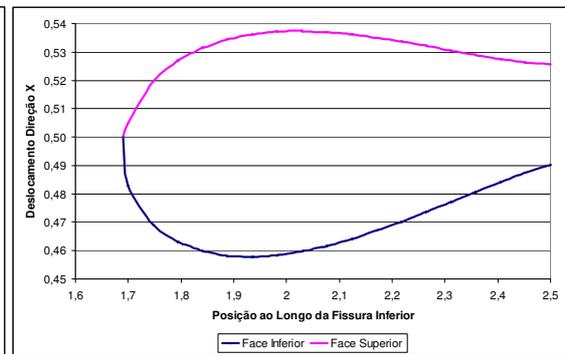


Figura 6.36 Deslocamentos X Fissura Inferior.

Os deslocamentos na direção Y foram também analisados. A Fig. (6.37) mostra o comportamento dessa grandeza para as duas fissuras consideradas na análise. De acordo com essa figura pode-se observar um comportamento de simetria para essa grandeza. Essa resposta é coerente dada a simetria no posicionamento das fissuras.

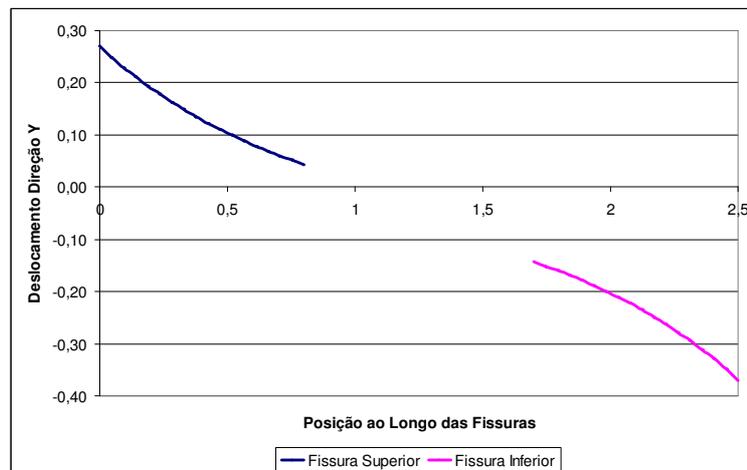


Figura 6.37 Deslocamentos Direção Y nas faces das fissuras.

Finalmente, foram também analisadas as respostas para as forças de superfície nas regiões de contato, as quais são apresentadas na Fig. (6.38). Assim como os resultados observados para os deslocamentos nas faces das fissuras, pode-se também verificar um comportamento de simetria para as respostas das forças de superfície.

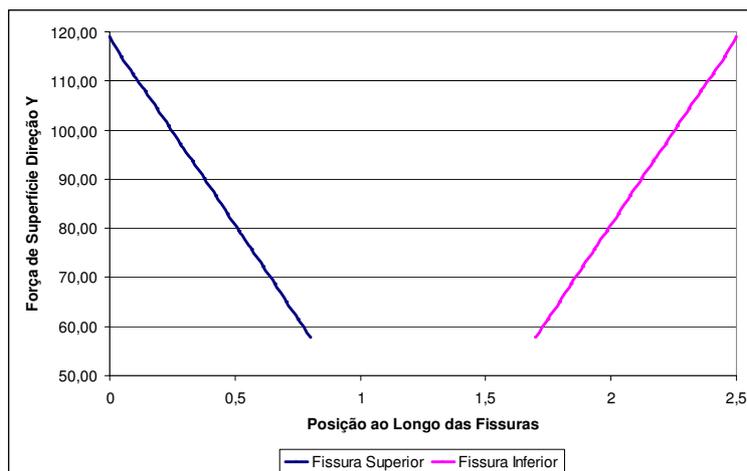


Figura 6.38 Forças de Superfície normais as faces das fissuras.

6.4 – Formulação de um Acoplamento MEC-MEC para a Análise de Problemas de Contato em Estruturas Compostas via Operador Tangente Consistente

Neste item a formulação via operador tangente consistente desenvolvida para a análise de problemas de contato entre faces de fissuras será expandida para a análise do contato em estruturas compostas. Nessa aplicação o contato será estudado na interface entre os diversos materiais que compõem a estrutura. A expansão na formulação citada refere-se ao fato de que com o mesmo conjunto de equações desenvolvido anteriormente, ou seja, Eq. (6.35) a Eq. (6.45) pode-se agora simular o contato em estruturas compostas por diversos materiais e não somente um único material como era o caso do contato nas faces de fissuras. A diferença da formulação do contato entre faces de fissuras para a formulação expandida é que anteriormente eram calculados os deslocamentos e as forças de superfície das faces direita e esquerda da fissura. Na formulação expandida essas grandezas são calculadas em relação aos domínios posicionados a direita e a esquerda da região do contato. Assim no conjunto de equações Eq. (6.35) a Eq. (6.45) o sub-índice f que indica fissura designará nessa aplicação domínio.

Após esta breve discussão será agora descrita a formulação para o contato entre vários domínios. Inicialmente pode-se escrever a equação geral do MEC:

$$HU = GP \quad (6.46)$$

Como na formulação serão consideradas estruturas formadas por vários subdomínios a Eq.(6.46) pode ser escrita em termos de somatórios.

$$\sum_{i=1}^{Nd} H^i U^i = \sum_{i=1}^{Nd} G^i P^i \quad (6.47)$$

Onde Nd refere-se ao número de domínios presentes na análise. Pode-se reescrever a Eq. (6.47) em termos dos pontos fontes. Estes serão separados em pontos fontes pertencentes a região de contato e pontos fontes fora da região de contato.

$$\sum_{i=1}^{Ndn} H^i U^i + \sum_{j=1}^{Ndc} H^j U^j = \sum_{i=1}^{Ndn} G^i P^i + \sum_{j=1}^{Ndc} G^j P^j \quad (6.48)$$

Nesta equação Ndn representa os pontos fontes fora da região do contato e Ndc são os pontos fontes dentro da região do contato. Sendo que a soma entre Ndn e Ndc resulta no número total de pontos fontes presentes na análise. A partir da Eq. (6.48) pode-se expandir os termos presentes na região do contato nas direções normal e paralela a interface de contato. Para isto utiliza-se a matriz de rotação apresentada na Eq. (6.8) já discutida anteriormente. Assim:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{Ndn} H^i U^i + \sum_{k=1}^{Nic} \left(\sum_{j=1}^{Ndc^k} H_{dp}^j U_{dp}^j + \sum_{j=1}^{Ndc^k} H_{dn}^j U_{dn}^j \sum_{j=1}^{Ndc^k} H_{ep}^j U_{ep}^j + \sum_{j=1}^{Ndc^k} H_{en}^j U_{en}^j \right)_k = \sum_{i=1}^{Ndn} G^i P^i + \\ + \sum_{k=1}^{Nic} \left(\sum_{j=1}^{Ndc^k} G_{dp}^j P_{dp}^j + \sum_{j=1}^{Ndc^k} G_{dn}^j P_{dn}^j \sum_{j=1}^{Ndc^k} G_{ep}^j P_{ep}^j + \sum_{j=1}^{Ndc^k} G_{en}^j P_{en}^j \right)_k \end{aligned} \quad (6.49)$$

Na Eq. (6.49) Nic indica o número de interfaces de contato. O sub-índices e e d representam as faces esquerda e direita do contato respectivamente, enquanto os sub-índices p e n indicam as direções paralela e normal à interface de contato considerada.

O sistema de equações mostrado na Eq. (6.49) pode ser resolvido para as grandezas conhecidas na região fora do contato. Dessa forma:

$$\begin{aligned} Y(U, P) = \sum_{i=1}^{Ndn} A^i X^i + \sum_{k=1}^{Nic} \left(\sum_{j=1}^{Ndc^k} H_{dp}^j U_{dp}^j + \sum_{j=1}^{Ndc^k} H_{dn}^j U_{dn}^j \sum_{j=1}^{Ndc^k} H_{ep}^j U_{ep}^j + \sum_{j=1}^{Ndc^k} H_{en}^j U_{en}^j \right)_k - F \\ - \sum_{k=1}^{Nic} \left(\sum_{j=1}^{Ndc^k} G_{dp}^j P_{dp}^j + \sum_{j=1}^{Ndc^k} G_{dn}^j P_{dn}^j \sum_{j=1}^{Ndc^k} G_{ep}^j P_{ep}^j + \sum_{j=1}^{Ndc^k} G_{en}^j P_{en}^j \right)_k \end{aligned} \quad (6.50)$$

A matriz A^i resulta da troca de colunas entre as matrizes H^i e G^i respectivamente. O vetor F é obtido a partir das grandezas conhecidas na região fora da interface de contato.

Para o caso de aderência perfeita, sem escorregamento, devem ser obedecidas as seguintes condições de compatibilidade e equilíbrio.

$$U_e = -U_d \quad e \quad P_e = P_d \quad (6.51)$$

A partir do definido na Eq. (6.51) pode-se reescrever a Eq. (6.50) como:

$$Y(U, P) = \sum_{i=1}^{Ndn} A^i X^i + \sum_{k=1}^{Nic} \left[\sum_{j=1}^{Ndc^k} (H_{dp}^j - H_{ep}^j) U_{dp}^j + \sum_{j=1}^{Ndc^k} (H_{dn}^j - H_{en}^j) U_{dn}^j \right]_k - F - \sum_{k=1}^{Nic} \left[\sum_{j=1}^{Ndc^k} (G_{dp}^j + G_{ep}^j) P_{dp}^j + \sum_{j=1}^{Ndc^k} (G_{dn}^j + G_{en}^j) P_{dn}^j \right]_k \quad (6.52)$$

Dessa forma, os termos da matriz tangente para o caso de contato sem escorregamento ficam dados por:

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial X} \right] = \left[\sum_{i=1}^{Ndn} A^i \right] \quad (6.53)$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial U_{dp}^j} \right] = \left[\sum_{k=1}^{Nic} \left[\sum_{j=1}^{Ndc^k} (H_{dp}^j - H_{ep}^j) \right]_k \right] \quad (6.54)$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial U_{dn}^j} \right] = \left[\sum_{k=1}^{Nic} \left[\sum_{j=1}^{Ndc^k} (H_{dn}^j - H_{en}^j) \right]_k \right] \quad (6.55)$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial P_{dp}^j} \right] = - \left[\sum_{k=1}^{Nic} \left[\sum_{j=1}^{Ndc^k} (G_{dp}^j + G_{ep}^j) \right]_k \right] \quad (6.56)$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial P_{dn}^j} \right] = - \left[\sum_{k=1}^{Nic} \left[\sum_{j=1}^{Ndc^k} (G_{dn}^j + G_{en}^j) \right]_k \right] \quad (6.57)$$

Para o caso de contato com escorregamento será utilizada a lei de Coulomb para governar o comportamento das forças de superfície paralelas à interface de contato. Esta lei é apresentada pela Eq. (6.40) a qual estabelece uma relação entre as forças de superfície paralela e normal à região de contato. Assim, nesta região devem ser determinados os deslocamentos paralelos em cada face da interface de contato, o deslocamento normal da interface de contato, que será igual para ambas as faces, e as forças de superfície na direção normal ao contato, as quais também serão iguais para ambas as faces do contato. Utilizando-se a lei de Coulomb serão obtidos os valores das forças de superfície na direção paralela à interface de contato.

Para a determinação do operador tangente para o caso do contato com escorregamento deve-se substituir a lei de Coulomb na Eq. (6.52) além é claro de se impor as condições de contato. Assim:

$$\begin{aligned}
Y(U, P) = & \sum_{i=1}^{Ndn} A^i X^i + \sum_{k=1}^{Nic} \left[\sum_{j=1}^{Ndc^k} H_{dp}^j U_{dp}^j + \sum_{j=1}^{Ndc^k} H_{ep}^j U_{ep}^j + \sum_{j=1}^{Ndc^k} (H_{dn}^j - H_{en}^j) U_{dn}^j \right]_k - F \\
& - \sum_{k=1}^{Nic} \left\{ \sum_{j=1}^{Ndc^k} (G_{dp}^j + G_{ep}^j) c s^k + \sum_{j=1}^{Ndc^k} \left[(G_{dn}^j + G_{en}^j) - (G_{dp}^j + G_{ep}^j) \tan(\varphi) \right] P_{dn}^j \right\}_k \quad (6.58)
\end{aligned}$$

Assim os termos do operador tangente ficam dados por:

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial X} \right] = \left[\sum_{i=1}^{Ndn} A^i \right] \quad (6.59)$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial U_{dp}^j} \right] = \left[\sum_{k=1}^{Nic} \left[\sum_{j=1}^{Ndc^k} H_{dp}^j \right]_k \right] \quad (6.60)$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial U_{ep}^j} \right] = \left[\sum_{k=1}^{Nic} \left[\sum_{j=1}^{Ndc^k} H_{ep}^j \right]_k \right] \quad (6.61)$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial U_{dn}^j} \right] = \left[\sum_{k=1}^{Nic} \left[\sum_{j=1}^{Ndc^k} (H_{dn}^j - H_{en}^j) \right]_k \right] \quad (6.62)$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial P_{dn}^j} \right] = - \left[\sum_{k=1}^{Nic} \left[\sum_{j=1}^{Ndc^k} (G_{dn}^j + G_{en}^j) - (G_{dp}^j + G_{ep}^j) \frac{\partial P_p}{\partial P_n} \right]_k \right] \quad (6.63)$$

Para os pontos fontes que pertencem à região de contato com escorregamento $\partial P_p / \partial P_n = \tan(\varphi)$.

Além do operador tangente, foram consideradas também nesta formulação diferentes equações do MEC para a discretização do modelo. No modelo de contato entre faces de fissuras foi empregada a formulação dual do MEC, onde são utilizadas as equações singular, Eq. (5.27) e hiper singular, Eq. (5.66), conjuntamente na discretização do contorno das faces da fissura. Nesta formulação considerando múltiplos domínios há a possibilidade de se discretizar todo o modelo empregando-se somente equação singular, Eq.(5.27), ou somente a equação hiper-singular, Eq.(5.66), além é claro de uma discretização empregando-se as duas equações, modelo dual. Isso é possível pelo fato de cada sub-domínio ser integrado separadamente, sendo somente após aplicadas as condições de equilíbrio e compatibilidade. Dessa forma, nesta formulação é possível a utilização somente da equação singular na discretização de todo o modelo. Essa equação, pelo fato de ter um grau de singularidade menor quando comparada à equação hiper singular, tende a ser mais estável fornecendo assim melhores resultados.

Depois de apresentadas as equações serão mostradas aplicações validando a formulação proposta. Primeiramente serão mostradas aplicações considerando-se a

aderência perfeita na interface entre os diversos componentes da estrutura, ou seja, será empregado o conjunto de equações Eq. (6.53) a Eq. (6.57) como o operador tangente. Em seguida, o comportamento do escorregamento entre os componentes estruturais será considerado, assim, o operador tangente utilizado será dado pelo conjunto de equações formado pelas Eq. (6.59) a Eq. (6.63).

6.4.1 – Exemplo 11: Estrutura Plana em Balanço Composta por 3 Domínios

A estrutura considerada para este exemplo é a ilustrada na Fig. (6.39). Trata-se de uma estrutura plana em balanço composta por três diferentes materiais. Os três subdomínios que formam a estrutura apresentam o comprimento igual a 1,5 m e possuem alturas diferentes, porém, todos estão simetricamente posicionados em relação ao eixo horizontal. O carregamento atuante na estrutura é composto por dois deslocamentos prescritos na face lateral direita do domínio 3, com os valores e direções mostrados na Fig. (6.39). Nesse exemplo o comportamento do escorregamento entre os componentes estruturais não será considerada, ou seja, será considerado o comportamento de aderência perfeita.

Os valores para as propriedades dos materiais considerados na análise foram:

$$\text{Domínio 1 } E = 3,0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2 \text{ e } \nu = 0,2$$

$$\text{Domínio 2 } E = 2,1 \cdot 10^9 \text{ kN/m}^2 \text{ e } \nu = 0,33$$

$$\text{Domínio 3 } E = 2,3 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2 \text{ e } \nu = 0,15$$

Onde E é o módulo de elasticidade longitudinal e ν o coeficiente de Poisson

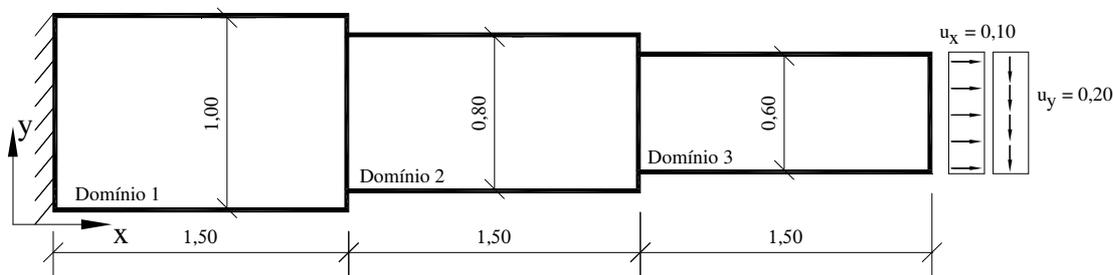


Figura 6.39 Estrutura e carregamentos para a análise. Dimensões em m.

A estrutura foi analisada considerando-se as três combinações possíveis para o uso das equações do MEC, ou seja, equação singular, equação hiper-singular e as equações singular e hiper singular juntas (modelo dual). Além disso, foi utilizado o Capítulo 6 – Formulações Não Lineares do MEC para a Análise de Problemas de Fratura e Contato

programa ANSYS, onde um modelo equivalente foi construído utilizando as equações do método dos elementos finitos. Esse último modelo foi utilizado para a validação da formulação implementada.

Primeiramente serão comparados os resultados para os deslocamentos na direção x obtidos por meio dos modelos considerados. Na Fig. (6.40) são apresentadas as curvas obtidas para os deslocamentos atuantes ao longo do contorno externo da estrutura. Nessa figura a numeração dos nós começam no canto inferior esquerdo do domínio 1, percorrem todo o contorno externo da estrutura no sentido anti-horário até juntar-se novamente na posição inicial. Por meio da Fig. (6.40) pode-se observar que as respostas obtidas pelos modelos utilizados são concordantes validando a formulação implementada.

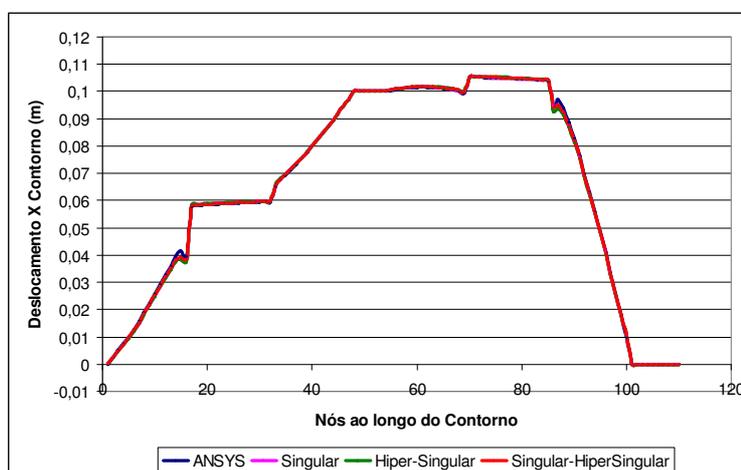


Figura 6.40 Comparativo dos deslocamentos ao longo do contorno externo direção x .

Já os deslocamentos na direção y , também medidos ao longo do contorno externo, foram comparados sendo os mesmos ilustrados na Fig. (6.41). A posição dos nós ao longo do contorno obedece a mesma ordem citada para o comparativo dos deslocamentos x . Por meio desta figura pode-se também verificar, assim como nos resultados da Fig. (6.40), que as respostas obtidas pelos modelos considerados na análise são muito semelhantes validando a formulação proposta via MEC.

Finalmente, foram comparadas as tensões atuantes ao longo do eixo de simetria da estrutura (eixo horizontal). As tensões x , y e xy foram calculadas sendo apresentadas nas Fig. (6.42), Fig. (6.43) e Fig. (6.44). De acordo com essas figuras constata-se que os resultados previstos pela formulação do MEC concordam com os resultados obtidos pelo programa ANSYS para toda a extensão da linha média da estrutura, validando assim a formulação implementada.

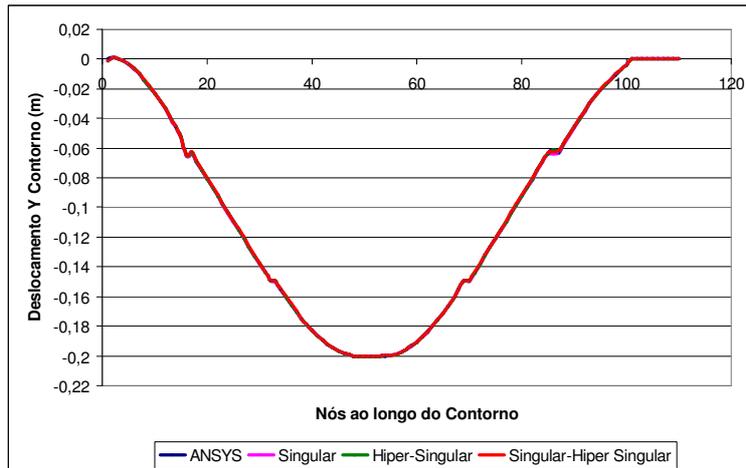


Figura 6.41 Comparativo dos deslocamentos ao longo do contorno externo direção y.

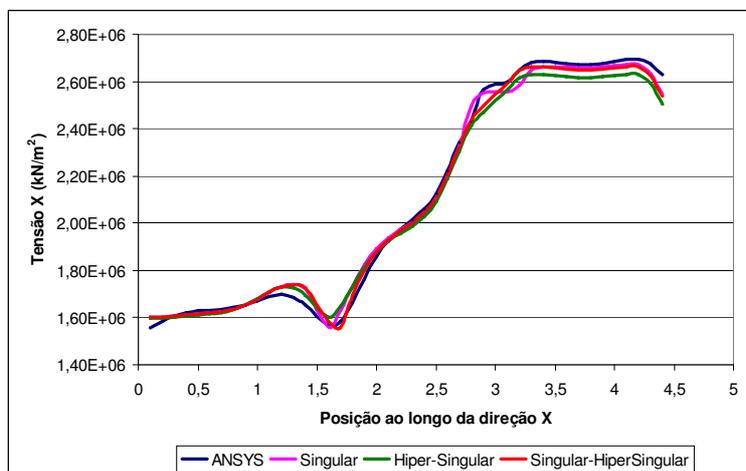


Figura 6.42 Comparativo das tensões X ao longo da linha média da estrutura.

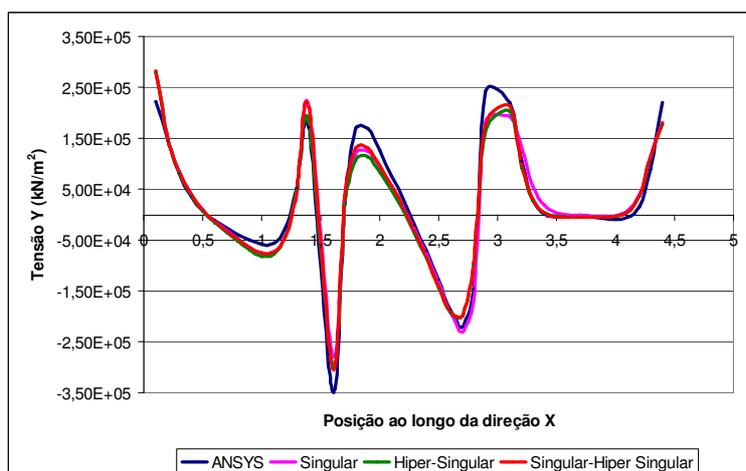


Figura 6.43 Comparativo das tensões Y ao longo da linha média da estrutura.

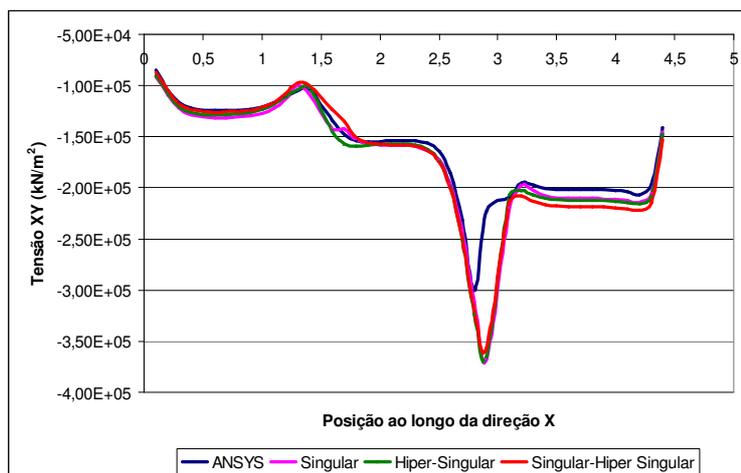


Figura 6.44 Comparativo das tensões XY ao longo da linha média da estrutura.

6.4.2 – Exemplo 12: Chapa Enrijecida com Furo Central

Neste exemplo será analisada a estrutura mostrada na Fig. (6.45). Trata-se de uma estrutura plana com um furo central enrijecida por dois sub-domínios (áreas hachuradas) posicionados conforme indica a Fig. (6.45). Nesse exemplo os dois sub-domínios hachurados representam enrijecedores próximos à região do furo, este último posicionado no centro da estrutura. A estrutura é formada por dois diferentes materiais os quais constituem os três diferentes domínios da análise. Com relação às condições de contorno, a estrutura é engastada em sua base sendo em seu topo aplicado uma força de superfície com a intensidade e sentido mostrados na Fig. (6.45). Nesse exemplo o comportamento do escorregamento entre os componentes estruturais não será considerado, ou seja, será considerado o comportamento de aderência perfeita.

Os valores para as propriedades dos materiais considerados na análise foram:

$$\text{Domínio 1 } E = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2 \text{ e } \nu = 0,3$$

$$\text{Domínio 2 } E = 4,0 \cdot 10^9 \text{ kN/m}^2 \text{ e } \nu = 0,15$$

onde E representa o módulo de elasticidade longitudinal e ν o coeficiente de Poisson. O domínio 2 é formado pelas duas áreas hachuradas na figura.

A estrutura foi analisada considerando-se as três combinações possíveis para o uso das equações do MEC, ou seja, equação singular, equação hiper-singular e as equações singular e hiper singular juntas (dual). Além disso, na análise utilizando o modelo dual foram feitas duas considerações. Na primeira o domínio 1 é discretizado com a equação singular e os dois domínios 2 são discretizados com a equação hiper

singular. Nos diagramas esta hipótese está indicada como Singular Hiper-Singular 1. Na segunda o domínio 1 é discretizado com a equação hiper singular e os domínios 2 são discretizados com a equação hiper singular. Nos diagramas esta hipótese está indicada como Singular Hiper-Singular 2. Finalmente, foi também utilizado o programa ANSYS, onde a estrutura foi modelada utilizando o método dos elementos finitos. Esse último modelo foi utilizado para a validação da formulação implementada.

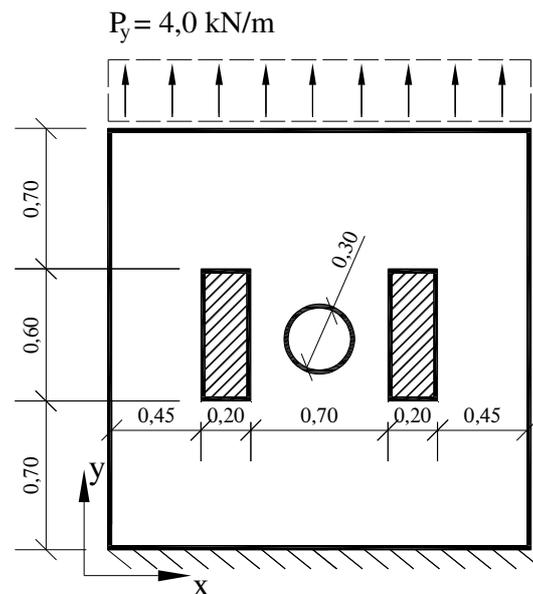


Figura 6.45 Estrutura e carregamentos para a análise. Dimensões em m.

Inicialmente são comparados os deslocamentos na direção x obtidos por meio dos modelos considerados. Os resultados são apresentados na Fig. (6.46) sendo que nessa figura a numeração dos nós começam no canto inferior esquerdo do domínio 1, percorrem todo o contorno externo do domínio 1 no sentido anti-horário até juntar-se novamente na posição inicial. Em seguida, a numeração continua na interface entre os domínios 1 e as áreas hachuradas, primeiro da esquerda e depois da direita, começando no canto inferior esquerdo da área hachurada da esquerda seguindo no sentido horário até juntar-se a posição inicial. Finalizando esta ordem a numeração, é feita para a área hachurada da direita. Por meio da Fig. (6.46) pode-se verificar que as respostas obtidas pelos modelos via MEC são concordantes com as respostas dadas pelo ANSYS ao longo de todo o contorno do modelo, validando assim a implementação efetuada.

Os deslocamentos na direção y , ao longo do contorno externo e das interfaces de contato, também foram comparados sendo os mesmos ilustrados na Fig. (6.47). A posição dos nós ao longo do contorno obedece a mesma ordem citada para o

comparativo dos deslocamentos x . Por meio desta figura pode-se também verificar que as respostas obtidas pelos modelos considerados na análise são muito semelhantes para todo o contorno do modelo, validando a formulação proposta via MEC.

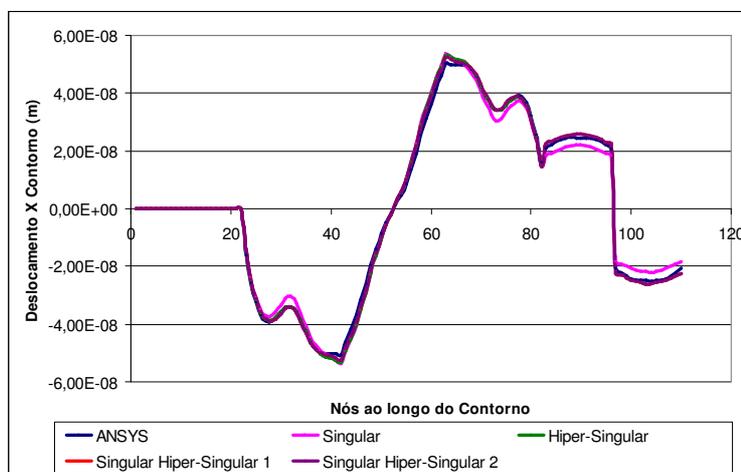


Figura 6.46 Comparativo dos deslocamentos ao longo dos contornos da estrutura direção x .

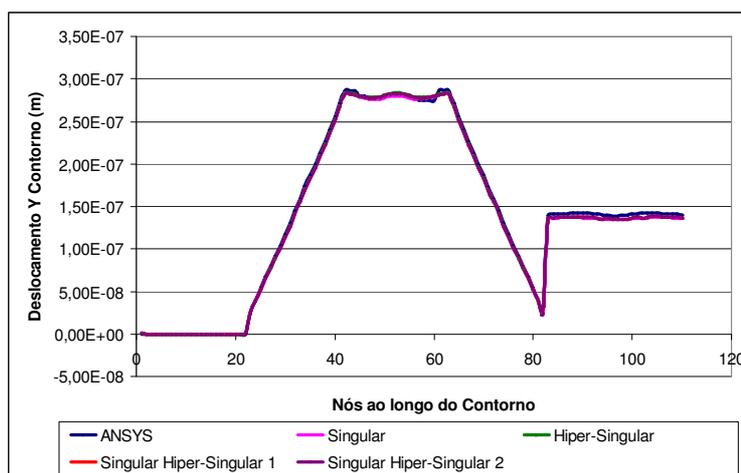


Figura 6.47 Comparativo dos deslocamentos ao longo dos contornos da estrutura direção y .

Finalmente foram também comparadas as forças de superfície atuantes nas interfaces entre os domínios 1 e 2 (nas duas áreas hachuradas). Os diagramas são mostrados nas Fig. (6.48) e Fig. (6.49) para as forças de superfície nas direções x e y sendo que a numeração dos nós nessas figuras começa no canto inferior esquerdo do domínio 2, área hachurada da esquerda, percorre toda essa área no sentido horário até juntar-se na posição inicial. Em seguida a numeração continua na área hachurada da direita respeitando a mesma ordem.

Através dessas figuras, constata-se que as respostas obtidas pelos modelos empregados são concordantes, com exceção do modelo que utiliza em sua discretização a equação hiper singular do MEC. Verifica-se que tanto para as forças de superfície na

direção x quanto as forças de superfície na direção y e os resultados desse modelo são instáveis. Esse resultado pode ser explicado pelo fato da singularidade existente nesse tipo de equação integral ser mais acentuada do que observado nos outros modelos. Isso pode gerar um comportamento instável do modelo.

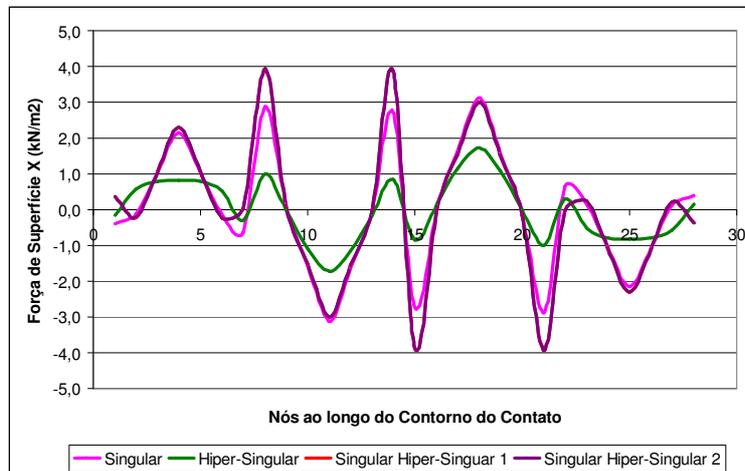


Figura 6.48 Comparativo das forças de superfície x ao longo das interfaces.

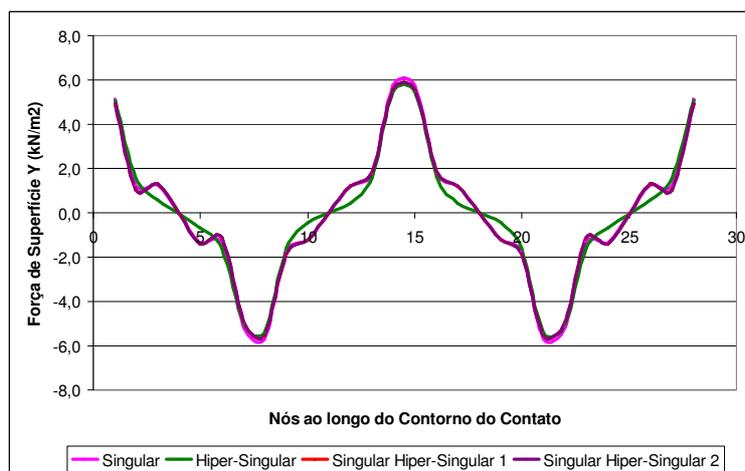


Figura 6.49 Comparativo das forças de superfície y ao longo das interfaces.

6.4.3 – Exemplo 13: Análise do Escorregamento entre Dois Blocos

Nesse exemplo será realizada a análise da estrutura apresentada na Fig. (6.50). Trata-se de uma estrutura plana composta por dois domínios formados por dois diferentes tipos de materiais. Os dois domínios da análise apresentam comprimento igual a 2 m e altura de 1 m sendo o domínio 2 localizado sobre o domínio 1. A estrutura é engastada na base do domínio 1 sendo no topo do domínio 2 aplicados dois deslocamentos prescritos com os sentidos mostrados na Fig. (6.50). Nesse exemplo o

comportamento do escorregamento entre os componentes estruturais será considerado. Assim a formulação com operador tangente com escorregamento será utilizada.

Os valores para as propriedades dos materiais considerados na análise foram:

$$\text{Domínio 1 } E=3,0 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2 \text{ e } \nu=0,2$$

$$\text{Domínio 2 } E=2,0 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2 \text{ e } \nu=0,3$$

onde E representa o módulo de elasticidade longitudinal e ν o coeficiente de Poisson. Nesse exemplo a coesão entre os domínios é considerada igual a zero e o ângulo de atrito é igual a 45° .

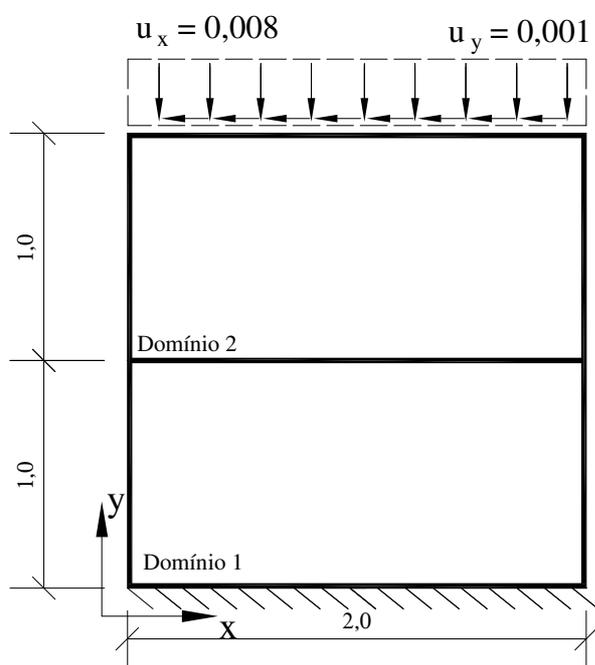


Figura 6.50 Estrutura e carregamentos para a análise. Dimensões em m.

O modelo via MEC foi construído utilizando-se somente a equação singular na discretização do contorno. Além disso, foi construído um modelo equivalente no programa ANSYS, o qual permite a análise de estruturas via método dos elementos finitos. Neste exemplo, o modelo construído no ANSYS será utilizado para a validação da formulação implementada.

Primeiramente serão comparados os deslocamentos, na direção X, ao longo do contorno da estrutura. As curvas comparativas contendo as respostas do modelo via método dos elementos finitos e MEC são apresentadas na Fig. (6.51). A numeração dos nós mostrada nessa figura inicia-se no canto inferior esquerdo do domínio 1 e cresce com os pontos percorrendo este domínio em sentido

anti-horário até o ponto inicial. Em seguida, a numeração continua a partir do canto inferior esquerdo do domínio 2 sendo este também percorrido no sentido anti-horário até o ponto inicial. Como pode ser observado na Fig. (6.51) as respostas obtidas por meio do modelo construído via MEC são concordantes com as respostas dadas pelo modelo de elementos finitos do ANSYS para todo o contorno do modelo, validando assim a implementação efetuada.

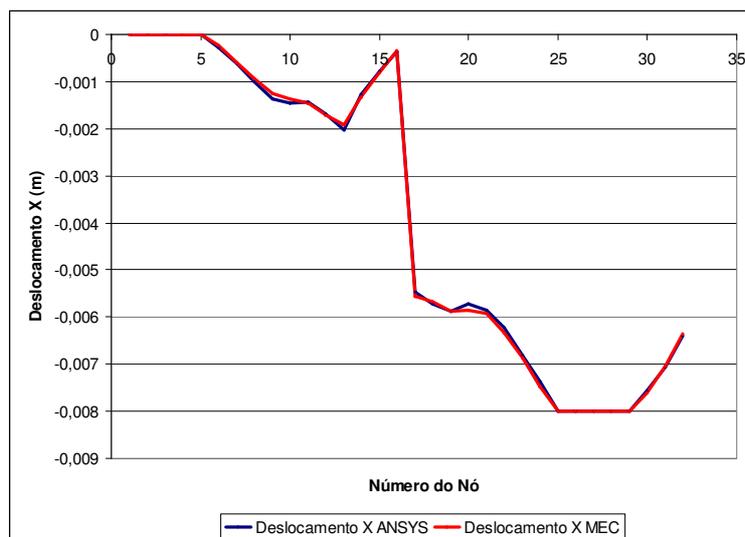


Figura 6.51 Comparativo dos deslocamentos ao longo dos contornos da estrutura direção x.

Em seguida os deslocamentos na direção Y foram também comparados os quais são mostrados na Fig. (6.52). A numeração dos nós nessa figura obedece a mesma ordem citada para os resultados da Fig. (6.51). Assim como o resultado anterior, verifica-se também aqui que os deslocamentos na direção y obtidos pela formulação proposta são concordantes com as respostas verificadas pelo modelo do ANSYS. Assim considera-se validada esta formulação.

Na Fig. (6.53) é mostrado o deslocamento relativo na região do contato. Esse diagrama foi construído com base nos resultados obtidos pelo modelo via MEC, uma vez que os deslocamentos ao longo do contorno obtidos por esse modelo são concordantes com os observados pelo modelo do ANSYS. Observa-se que o deslocamento relativo cresce ligeiramente à medida que os pontos aproximam-se da lateral direita da estrutura.

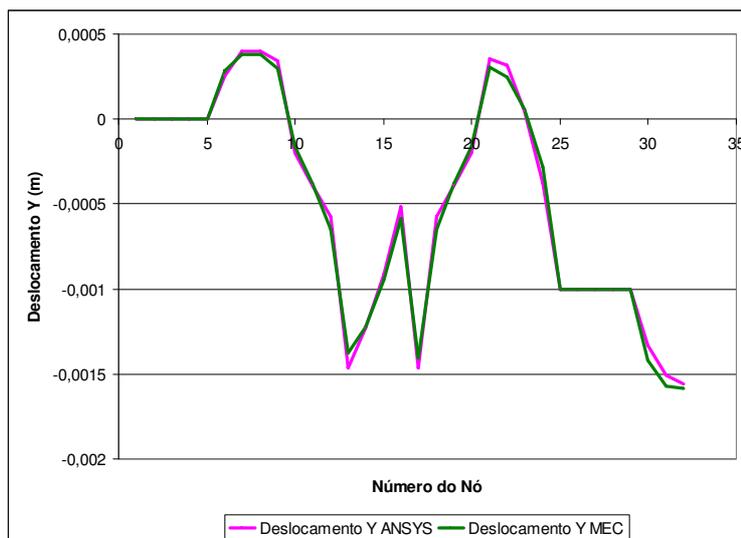


Figura 6.52 Comparativo dos deslocamentos ao longo dos contornos da estrutura direção y.

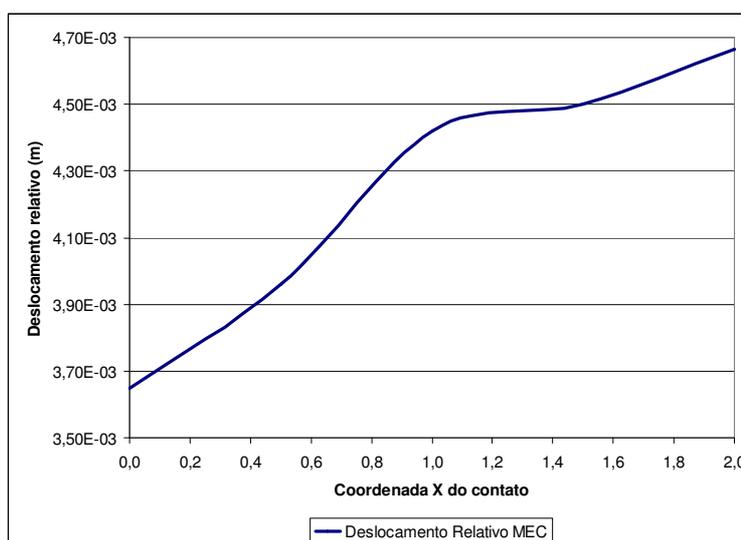


Figura 6.53 Deslocamento relativo na região do contato.

6.4.4 – Exemplo 14: Análise do Contato em Estrutura Composta por 4 Domínios.

Neste exemplo será analisada a estrutura mostrada na Fig. (6.54). Esta estrutura é composta por três diferentes tipos de material sendo quatro os sub-domínios envolvidos em sua composição. Nesta análise o domínio 2 é representado pelas duas áreas onde as hachuras estão inclinadas. Durante a exposição deste exemplo as áreas do domínio 2 serão citadas como domínio 2D, referindo-se a área da direita, e domínio 2E para designar a área a esquerda. O domínio 3 é formado pela área onde a hachura é feita por bolhas e finalmente o domínio 1 é representado pela área sem hachuras.

A estrutura é engastada ao longo das laterais dos domínios 1 e 3 e também na base do domínio 3. Além disso, são prescritos deslocamentos na face superior dos domínios 2 com os sentidos e intensidades indicados na Fig. (6.54). Nesse exemplo o comportamento do escorregamento entre os componentes estruturais será considerado. Assim a formulação com operador tangente com escorregamento será utilizada.

Os valores para as propriedades dos materiais considerados na análise foram:

$$\text{Domínio 1 } E = 2,5 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2 \text{ e } \nu = 0,2$$

$$\text{Domínio 2 } E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2 \text{ e } \nu = 0,3$$

$$\text{Domínio 3 } E = 3,0 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2 \text{ e } \nu = 0,15$$

onde E representa o módulo de elasticidade longitudinal e ν o coeficiente de Poisson. Nesse exemplo a coesão entre os domínios 1 e 2 é considerada igual a zero. Já a coesão entre os domínios 1 e 3 é igual a $3,0 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$. O ângulo de atrito considerado entre os domínios 1 e 2 é considerada igual a 45° enquanto essa grandeza para os domínios 1 e 3 é igual a 30° .

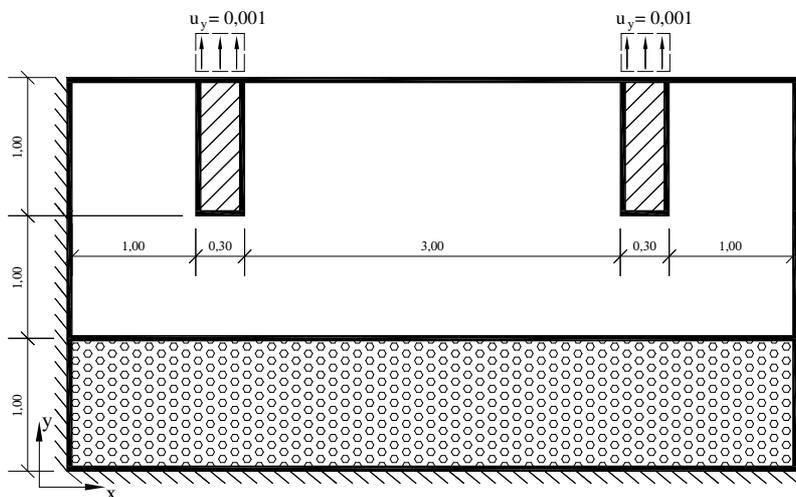


Figura 6.54 Estrutura e carregamentos para a análise. Dimensões em m.

A estrutura foi analisada considerando-se apenas a formulação via MEC e operador tangente proposta. Nesse exemplo foi utilizada somente a equação singular para a discretização da estrutura. Primeiramente foi analisado o deslocamento y dos nós na região do contato entre os domínios 1 e 2. As curvas são apresentadas na Fig. (6.55) onde a posição dos nós ao longo do contorno são numeradas começando-se pelo canto superior direito dos domínios 2 crescendo a medida que estes são percorridos no sentido

horário até seu canto superior esquerdo. Nessa figura pode-se perceber o escorregamento entre as laterais dos domínios 2 e 1. Houve um descolamento dos domínios 2 em relação ao domínio 1.

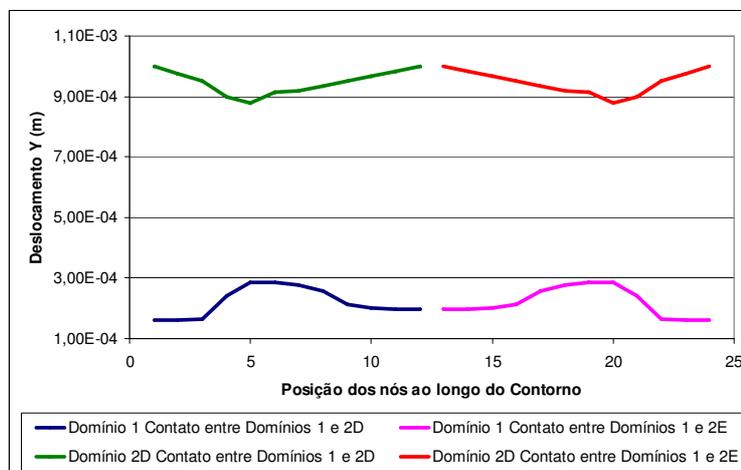


Figura 6.55 Deslocamento y na região do contato entre domínios 1 e 2.

Os deslocamentos y ao longo de todo o modelo foram também verificados. O diagrama é mostrado na Fig. (6.56) onde pode ser observado que os maiores deslocamentos y ocorrem nas regiões próximas aos domínios 2, uma vez que são nessas regiões onde são aplicados os deslocamentos prescritos.

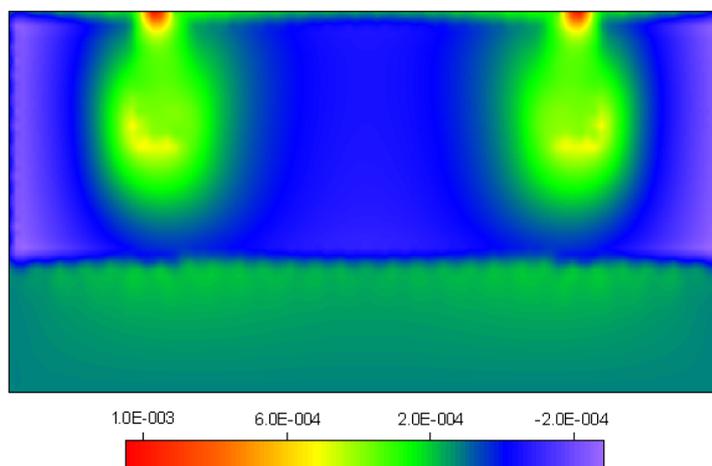


Figura 6.56 Deslocamento y para o modelo analisado.

As tensões x e y para o modelo foram calculadas sendo estas mostradas nas Fig. (6.57) e Fig. (6.58). Estas figuras mostram a concentração de tensão existente no modelo. Observa-se que próximo das regiões de contato entre o domínio 1 e os domínios 2 existe uma concentração de tensão a qual pode ser explicada pela mudança de rigidez presente na transição dos materiais.

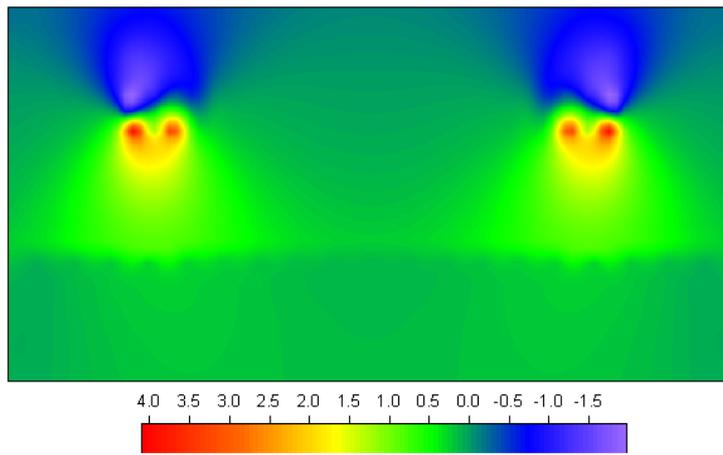


Figura 6.57 Tensão y para o modelo analisado.

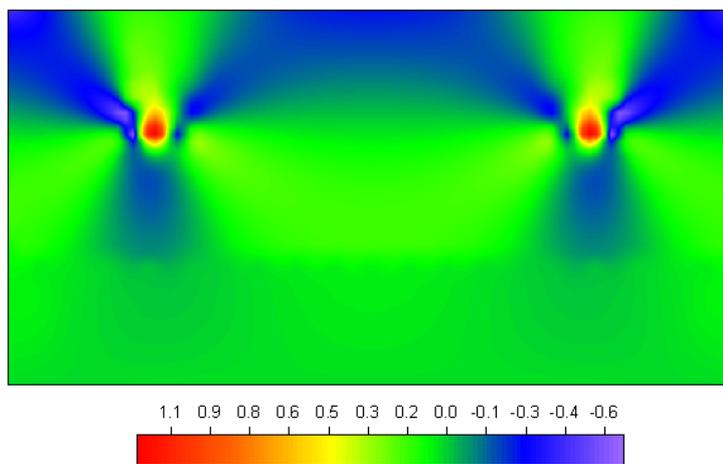


Figura 6.58 Tensão x para o modelo analisado.

7. – Acoplamento entre Método dos Elementos de Contorno e Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos de contorno (MEC) e o método dos elementos finitos (MEF) são os métodos numéricos com maior utilização em análises de problemas de engenharia na atualidade. Apesar da ampla utilização de ambos os métodos numéricos cada um apresenta maior eficiência na análise de determinados tipos de problemas. O MEF é mais empregado na análise de problemas envolvendo geometrias finitas, elementos de geometria linear, plasticidade, grandes deformações. Já o MEC é mais indicado para a abordagem de problemas que apresentam grandes concentrações das grandezas envolvidas no problema, geometrias infinitas, dentre outros.

Nesse contexto surgiu a idéia de acoplar esses dois métodos numéricos de tal maneira que cada um deles seja utilizado na representação de sub-estruturas onde apresenta maior eficiência. Existem duas formas para a execução do acoplamento entre os dois métodos numéricos. Na primeira, o sistema de equações obtido a partir do MEF é transformado em um sistema similar, na forma do proveniente do MEC, e a outra, pelo contrário, converte as equações referentes ao MEC, em um sistema com as características do MEF. A metodologia escolhida nesse trabalho é a primeira uma vez que o objetivo final é o de se obter a contribuição dos enrijecedores nos pontos do contorno.

A formulação do acoplamento MEC-MEF a ser apresentada nesse trabalho tem como base a apresentada no trabalho de BOTTA (2003). Esse autor desenvolveu as equações do acoplamento MEC-MEF de forma semelhante ao que será apresentado nesse capítulo. A diferença é que em BOTTA (2003) o processo de regularização é aplicado somente nas equações de deslocamento dos pontos internos, enquanto aqui a regularização pode ser aplicada nas equações de deslocamento dos pontos internos, nas equações fornecidas pelo MEF ou mesmo sobre o conjunto final de equações da formulação.

7.1 – Equações do Elemento Finito de Fibra

Neste trabalho, serão consideradas fibras retilíneas, mergulhadas em qualquer direção dentro do domínio bidimensional. As extremidades das fibras podem chegar ao contorno, e valores de força ou deslocamento podem ser prescritos diretamente no elemento da fibra. As fibras serão modeladas com elementos finitos de barra de geometria reta, com dois graus de liberdade de deslocamento, paralelo e normal ao eixo da barra.

Para uma força \bar{f} , aplicada longitudinalmente, distribuída ao longo da fibra, a equação diferencial de equilíbrio para um ponto x qualquer do domínio da barra é:

$$\frac{d^2(u(x))}{dx^2} + \frac{1}{2 \cdot G \cdot S \cdot (1 + \nu)} \bar{f}(x) = 0 \quad (7.1)$$

sendo: $u(x)$ o deslocamento longitudinal do ponto x , G o módulo de elasticidade transversal do material da fibra, ν o coeficiente de Poisson e S é área da seção transversal da fibra.

Parece bastante razoável a adoção de polinômios com diferentes graus para as aproximações dos deslocamentos, $u(x)$, e das forças, \bar{f} , por elemento finito. Para o elemento de barra da fibra, adota-se polinômio cúbico para aproximar os deslocamentos e linear para as forças. Assim, a derivada segunda do deslocamento aproximado tem o mesmo grau polinomial que a força aproximada, conforme a equação diferencial de equilíbrio, Eq. (7.1). Definem-se, por elemento finito, quatro variáveis nodais de deslocamento e duas de força, conforme apresenta a Fig. (7.1).

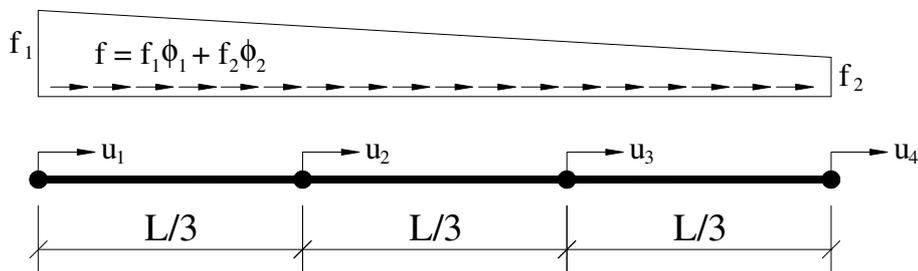


Figura 7.1 Variáveis nodais do elemento finito de fibra.

Conforme a Fig. (7.1), os quatro nós com as variáveis de deslocamento estão definidos nas duas extremidades do elemento e nos dois terços de vão. Os nós com as variáveis de força são os dois de extremidade. As equações algébricas de equilíbrio do

elemento da Fig. (7.1) são obtidas utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais, expresso pela equação:

$$\sum_{\Omega_E=1}^{NF} \left(\int_{\Omega_E} [\sigma(u^E) \cdot \delta \varepsilon(\delta u^E)] d\Omega_E - \int_{\Omega_E} (f^E \cdot \delta u^E) d\Omega_E - F^i \cdot \delta u^{E_i} \right) = 0 \quad (7.2)$$

onde: $\sigma(u^E)$ é a tensão normal na fibra, $\varepsilon(u^E)$ é a deformação longitudinal na fibra, u^E é o deslocamento nodal, f^E a força nodal, F^i a força concentrada no nó i , Ω_E o domínio do elemento finito, δ as variações das grandezas compatíveis com os vínculos e NF o número total de fibras da malha.

Da Eq. (7.2) resulta o sistema de equações do elemento finito.

$$[K^E] \{u^E\} = [G^E] \{f^E\} + \{F^E\} \quad (7.3)$$

em que: K^E é a matriz de rigidez do elemento finito, G^E lumping matrix, u^E o vetor com os deslocamentos nodais, f^E o vetor com as forças de superfície e F^E o vetor com as forças concentradas nos nós.

A matriz G^E , função das características geométricas do elemento, é dada pelo produto das funções polinomiais linear e cúbica da segunda integral da Eq. (7.2). Para os nós posicionados da forma como apresentado na Fig. (7.1) o sistema matricial da Eq. (7.3) pode ser explicitado. Assim:

$$\frac{E \cdot S}{L} \begin{bmatrix} 3.7 & -4.725 & 1.35 & -0.325 \\ -4.725 & 10.8 & -7.425 & 1.35 \\ 1.35 & -7.425 & 10.8 & -4.725 \\ -0.325 & 1.35 & -4.725 & 3.7 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^E \\ u_2^E \\ u_3^E \\ u_4^E \end{Bmatrix} = L \begin{bmatrix} 13/120 & 1/60 \\ 3/10 & 3/40 \\ 3/40 & 3/10 \\ 1/60 & 13/120 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} f_1^E \\ f_2^E \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1^E \\ F_2^E \\ F_3^E \\ F_4^E \end{Bmatrix} \quad (7.3)$$

sendo: E o módulo de elasticidade longitudinal e L o comprimento do elemento finito.

7.2 – Formulação do Acoplamento das Fibras com o Domínio via Combinação MEC-MEF

7.2.1 – Equações do Acoplamento

Para considerar o domínio bidimensional enrijecido com fibras, estas modeladas com elementos finitos e o primeiro com elementos de contorno, propõe-se uma formulação combinando as equações dos dois métodos, considerando-se aderência

perfeita entre os dois meios. O acoplamento entre os materiais é garantido via imposição das equações de equilíbrio de forças e compatibilidade de deslocamentos. Assim:

$$f^D = -f^E \quad (7.4)$$

$$u^D = u^E \quad (7.5)$$

onde: f^D, f^E são forças do domínio do corpo e na fibra respectivamente e u^D, u^E os deslocamentos nos pontos nodais no domínio e na fibra respectivamente.

O termo f^E corresponde à força distribuída que a fibra aplica ao corpo a qual, por equilíbrio, é igual e de sinal oposto a força que atua na própria fibra. Os deslocamentos na interface devem ser iguais por compatibilidade. Para o problema discretizado, as Eq. (7.4) e Eq. (7.5) são equivalentes a:

$$\{f^D\} = -\{f^E\} = \{f\} \quad (7.6)$$

$$\{u^D\} = \{u^E\} = \{u\} \quad (7.7)$$

O equilíbrio e a compatibilidade são por nó de interface. Para o problema tratado, ou seja, domínio plano com fibras retilíneas, a reação das fibras sobre o domínio equivale a uma linha de carga aplicada ao domínio do corpo. Esta linha de carga, por equilíbrio com a força admitida linear no elemento finito, tem a forma de uma seqüência de trechos lineares ligando nós consecutivos, conforme mostra a Fig. (7.2).

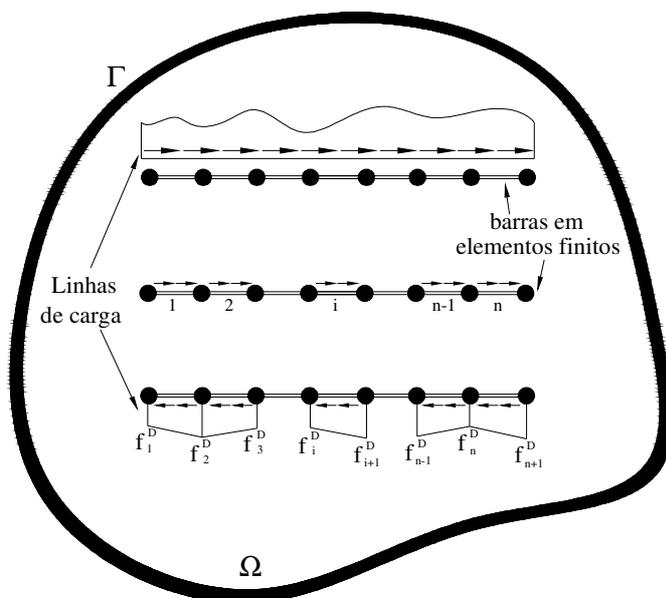


Figura 7.2 Linhas de carga aplicadas ao domínio.

Na Fig.(7.2), os elementos são contínuos, ou seja, para n elementos finitos de uma barra, tem-se $(n+1)$ nós e variáveis de força. A força incógnita aplicada ao

domínio, como uma linha de carga, precisa ser levada em conta nas equações do MEC. A linha de carga aparece nas equações como se fosse uma força de massa aplicada num volume que tende a zero, ou a uma reta, nos casos planos. Tomando a identidade de Somigliana, Eq. (5.16), a última integral dessa equação referente ao termo de domínio pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} b_j(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) d\Omega = \int_{\Omega_E} f_j^D(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) d\Omega_E \quad (7.8)$$

sendo: f_j^D é a reação da fibra sobre o domínio, segundo a direção j do sistema cartesiano.

A Eq. (7.8) fica melhor escrita se, ao invés de f^D , for decomposta a solução fundamental u_{ij}^* . Dessa forma:

$$\int_{\Omega_E} f_j^D(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) d\Omega_E = \int_{\Omega_E} f^D(c) \cdot u_{ij}^{*D}(f, c) d\Omega_E = \int_{\Omega_E} f^D(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) \cdot \eta_j^* d\Omega_E \quad (7.9)$$

Na Eq. (7.9) o termo η_j^* indica os cossenos diretores da linha de carga em relação ao sistema de coordenadas cartesianas. A última integral da Eq. (7.9) pode ser transformada em uma somatória:

$$\sum_{fb=1}^{ND} \int_{\Omega_E} f^D(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) \cdot \eta_j^* d\Omega_E = \sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f^D(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) \cdot \eta_j^* d\Omega_{E_k} \quad (7.10)$$

Nessa notação ND representa o número total de fibras do domínio e NEF o número total de elementos finitos contidos em cada fibra. Sendo a força aproximada linearmente sobre as linhas de carga, a Eq. (7.10) pode ser reescrita como:

$$\sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f^D(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) \cdot \eta_j^* d\Omega_{E_k} = \sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} (\varphi(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) \cdot \eta_j^*) \cdot f_n^D(c) d\Omega_{E_k} \quad (7.11)$$

sendo: φ a função de aproximação do carregamento e f_n^D os valores nodais do carregamento atuante sobre as fibras.

As integrais apresentadas na Eq. (7.11) podem ser avaliadas numericamente empregando-se quadratura de gauss-legendre. Para melhoria de precisão pode ser utilizado o procedimento de sub-elementação, o qual foi utilizado neste trabalho sendo o mesmo descrito no Anexo C. Caso o ponto fonte pertença à linha de carga deve-se calcular a integral empregando-se recursos analíticos. As expressões analíticas para a integração dessas expressões encontram-se apresentadas nos Anexo A e Anexo B.

Dessa forma a expressão para a determinação das grandezas no contorno é a apresentada na Eq. (7.12).

$$[H_{bb}]\{U_b\} = [G_{bb}]\{P_b\} + [G_{bE}]\{f^D\} \quad (7.12)$$

sendo as matrizes $[H_{bb}]$ e $[G_{bb}]$ iguais às matrizes $[H]$ e $[G]$ já apresentadas no capítulo 5 e os sub-índices b indicando contorno. A matriz $[G_{bE}]$ contém os coeficientes de integração da Eq. (7.11). Deve ser ressaltado que na análise de corpos fissurados por meio da formulação dual deve-se avaliar a Eq. (7.12) considerando a equação hiper-singular já apresentada no capítulo 5, inclusive o termo $[G_{bE}]$, decorrente da presença do enrijecedor.

Para completar as equações necessárias ao acoplamento e a conseqüente determinação dos parâmetros do contorno, falta montar as equações algébricas dos deslocamentos dos pontos internos. Deve-se escrever uma equação para cada deslocamento do meio contínuo, nos pontos coincidentes com os nós de deslocamento dos elementos finitos, para que a Eq. (7.7) seja obedecida. Da Eq. (5.42) tem-se:

$$u^D = u_i(f)\eta_i^* = \int_{\Gamma} P_j(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) \cdot \eta_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j(c) \cdot P_{ij}^*(f, c) \cdot \eta_i^* d\Gamma + \int_{\Omega_E} f^E(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) \cdot \eta_j^* \eta_i^* d\Omega_E \quad (7.13)$$

Ou seja, a (7.13) é a equação integral dos deslocamentos dos pontos internos do sólido, na direção do eixo da fibra, que é a direção do grau de liberdade em deslocamento do elemento de barra, Fig. (7.1). A Eq. (7.13) vale somente para pontos “ f ” internos, pois admite-se C_{ij} da Eq. (5.28) igual à matriz identidade. A equação algébrica que resulta da Eq. (7.13), aplicada a todos os nós internos, fica:

$$[H_{Eb}]\{U_b\} + \{U_E\} = [G_{Eb}]\{P_b\} + [G_{EE}]\{f^D\} \quad (7.14)$$

sendo $[H_{Eb}]$, $[G_{Eb}]$ e $[G_{EE}]$ matrizes de influência das integrações dos pontos internos.

Na Fig. (7.3), tem-se a representação de uma barra, discretizada em n elementos finitos, e da linha de carga de domínio, superposta à barra. Os nós de deslocamento, definidos geometricamente para cada elemento finito segundo a Fig. (7.1), estão representados por quadrados na Fig. (7.3). As cruces representam os pontos fontes “ f ” da Eq. (7.13) dos deslocamentos internos. Observa-se que, nas extremidades da fibra, para os primeiro e último nós, as equações do MEC não são escritas na posição dos nós, mas para posições deslocadas, internas à linha de carga. Para os demais nós, internos à linha de carga, os pontos fonte da equação do MEC coincidem com os nós de deslocamento dos elementos finitos.

O esquema da Fig (7.3) estende-se, nesta formulação, para todas as fibras do domínio. Este esquema facilita a integração analítica sobre o primeiro e último elementos da linha de carga da integral da Eq. (7.11), para a equação dos pontos deslocados de extremidade. Outra vantagem é permitir que as extremidades das fibras possam chegar ao contorno do corpo, sem que a equação do MEC necessite ser escrita para pontos do contorno.

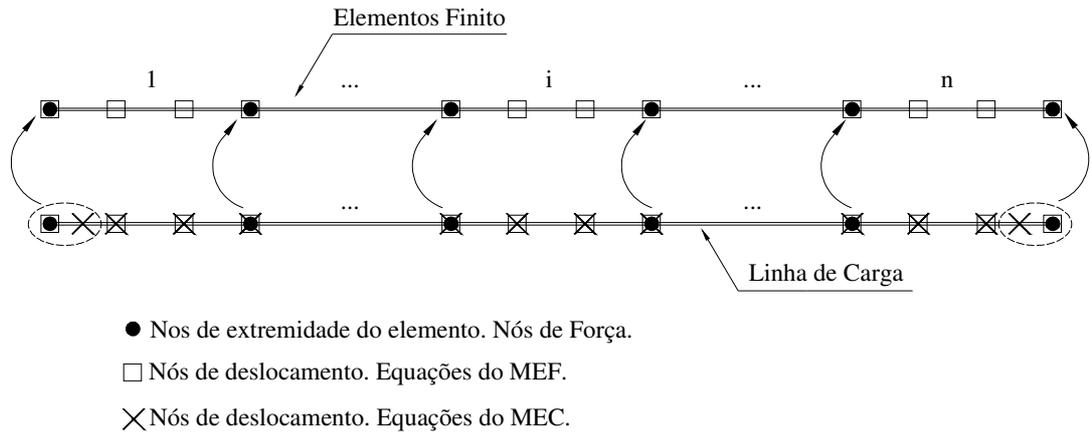


Figura 7.3 Nós internos para a equação dos deslocamentos do MEC.

Com as posições dos nós definidas na Fig. (7.3), a equação de compatibilidade de deslocamentos deve ser reescrita como:

$$\{u^D\} = [T]\{u^E\} = [T]\{u\} \quad (7.15)$$

sendo $[T]$ a matriz que relaciona a posição dos nós de $\{u^D\}$ com os nós de $\{u^E\}$. Por exemplo, da Fig. (7.3), para os dois pontos fonte deslocados das extremidades da fibra, supondo-os distantes de cada extremidade, por $L/6$ o comprimento do primeiro ou do último elemento, que contém os pontos fonte, tem-se:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0.3125 & 0.9375 & -0.3125 & 0.0625 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.0625 & -0.3125 & 0.9375 & 0.3125 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

Ou seja, com exceção da primeira e da última linha, a matriz é igual à identidade.

Dessa forma o conjunto de equações para a determinação dos parâmetros do acoplamento MEC-MEF e os valores de contorno podem ser resumidos como na Eq. (7.17).

$$\begin{aligned}
[H_{bb}]\{U_b\} &= [G_{bb}]\{P_b\} + [G_{bE}]\{f^D\} \\
[H_{Eb}]\{U_b\} + [T]\{U_E\} &= [G_{Eb}]\{P_b\} + [G_{EE}]\{f^D\} \\
[K^E]\{U^E\} &= -[G^E]\{f^D\} + \{F^E\}
\end{aligned}$$

⇓

$$\begin{aligned}
[A_{bb}]\{X\} &= [B_{bb}]\{F_b\} + [G_{bE}]\{f^D\} \\
[A_{Eb}]\{X\} + [T]\{U_E\} &= [B_{Eb}]\{F_b\} + [G_{EE}]\{f^D\} \\
[K^E]\{U^E\} &= -[G^E]\{f^D\} + \{F^E\}
\end{aligned}$$

sendo que $[A_{bb}]$ e $[B_{bb}]$ resultam da troca de colunas entre as matrizes $[H_{bb}]$ e $[G_{bb}]$. Já $[A_{Eb}]$ e $[B_{Eb}]$ decorre da troca de colunas entre as matrizes $[H_{Eb}]$ e $[G_{Eb}]$. $\{F_b\}$ são os valores prescritos de força de superfície e deslocamentos no contorno, enquanto $\{X\}$ são as grandezas incógnitas no contorno.

Resta ainda uma última equação a ser apresentada a qual refere-se à determinação das tensões nos pontos internos ao contorno. Nesse caso, a exemplo da identidade Somigliana, as forças de domínio são levadas em conta através da integral:

$$\int_{\Omega} b_j(c) \cdot D_{ijk}(f, c) d\Omega = \int_{\Omega_E} f_j^D(c) \cdot D_{ijk}(f, c) d\Omega_E \quad (7.18)$$

onde o termo D_{ijk} foi apresentado no capítulo 5.

E a exemplo da Eq. (7.11) tem-se:

$$\sum_{jb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f^D(c) \cdot D_{ijk}(f, c) \cdot \eta_k d\Omega_{E_k} = \sum_{jb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} (\varphi(c) \cdot D_{ijk}^*(f, c) \cdot \eta_k) \cdot f_n^D(c) d\Omega_{E_k} \quad (7.19)$$

Assim a equação para a determinação das tensões internas pode ser matricialmente expressa como:

$$\left[\bar{H}_{Ib} \right] \{U_b\} + \{\sigma\} = \left[\bar{G}_{Ib} \right] \{P_b\} + \left[\bar{G}_{IE} \right] \{f^D\} \quad (7.20)$$

onde o sub-índice I indica ponto interno. As matrizes $\left[\bar{H}_{Ib} \right]$ e $\left[\bar{G}_{Ib} \right]$ foram apresentadas no capítulo 5 e a $\left[\bar{G}_{IE} \right]$ é obtida como resultado da solução da Eq. (7.19).

A formulação pode ser estendida para o caso em que os elementos finitos de fibra possuem dois graus de liberdade (x e y) e não apenas um grau de liberdade, paralelo ao comprimento da fibra. Esse procedimento foi efetuado neste trabalho e

permite a análise de fibras que formem uma configuração de treliça no interior do domínio. A consideração desse tipo de configuração nos enrijecedores é de grande importância, pois permite a análise de estruturas mais complexas e ao mesmo tempo contribui para as formulações do MEC uma vez que acoplamentos MEC-MEF que consideram esse tipo de interação entre enrijecedores não é comum na literatura. Para tanto as Eq.(7.3), Eq. (7.11), Eq. (7.13), Eq. (7.16) e Eq. (7.19) devem ser reescritas.

Para a Eq. (7.3) a matriz de rigidez deve ser expandida de forma a contemplar também os deslocamentos na direção normal ao corpo da fibra. O mesmo aplica-se a “lumping matrix” a qual deve também abranger as forças normais ao elemento de fibra.

Assim a matriz de rigidez pode ser reescrita como:

$$\frac{E \cdot S}{L} \begin{bmatrix} 3,7 \cdot C^2 & 3,7 \cdot C \cdot S & -4,725 \cdot C^2 & -4,725 \cdot C \cdot S & 1,35 \cdot C^2 & 1,35 \cdot C \cdot S & -0,325 \cdot C^2 & -0,325 \cdot C \cdot S \\ 3,7 \cdot C \cdot S & 3,7 \cdot S^2 & -4,725 \cdot C \cdot S & -4,725 \cdot S^2 & 1,35 \cdot C \cdot S & 1,35 \cdot S^2 & -0,325 \cdot C \cdot S & -0,325 \cdot S^2 \\ -4,725 \cdot C^2 & -4,725 \cdot C \cdot S & 10,8 \cdot C^2 & 10,8 \cdot C \cdot S & -7,425 \cdot C^2 & -7,425 \cdot C \cdot S & 1,35 \cdot C^2 & 1,35 \cdot C \cdot S \\ -4,725 \cdot C \cdot S & -4,725 \cdot S^2 & 10,8 \cdot C \cdot S & 10,8 \cdot S^2 & -7,425 \cdot C \cdot S & -7,425 \cdot S^2 & 1,35 \cdot C \cdot S & 1,35 \cdot S^2 \\ 1,35 \cdot C^2 & 1,35 \cdot C \cdot S & -7,425 \cdot C^2 & -7,425 \cdot C \cdot S & 10,8 \cdot C^2 & 10,8 \cdot C \cdot S & -4,725 \cdot C^2 & -4,725 \cdot C \cdot S \\ 1,35 \cdot C \cdot S & 1,35 \cdot S^2 & -7,425 \cdot C \cdot S & -7,425 \cdot S^2 & 10,8 \cdot C \cdot S & 10,8 \cdot S^2 & -4,725 \cdot C \cdot S & -4,725 \cdot S^2 \\ -0,325 \cdot C^2 & -0,325 \cdot C \cdot S & 1,35 \cdot C^2 & 1,35 \cdot C \cdot S & -4,725 \cdot C^2 & -4,725 \cdot C \cdot S & 3,7 \cdot C^2 & 3,7 \cdot C \cdot S \\ -0,325 \cdot C \cdot S & -0,325 \cdot S^2 & 1,35 \cdot C \cdot S & 1,35 \cdot S^2 & -4,725 \cdot C \cdot S & -4,725 \cdot S^2 & 3,7 \cdot C \cdot S & 3,7 \cdot S^2 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

em que: C é o cosseno do ângulo de inclinação do elemento finito e S o seno do ângulo de inclinação do elemento finito.

Enquanto a “lumping matrix” expandida pode ser reescrita como:

$$L \begin{bmatrix} 13/120 & 0 & 1/60 & 0 \\ 0 & 13/120 & 0 & 1/60 \\ 3/10 & 0 & 3/40 & 0 \\ 0 & 3/10 & 0 & 3/40 \\ 3/40 & 0 & 3/10 & 0 \\ 0 & 3/40 & 0 & 3/10 \\ 1/60 & 0 & 13/120 & 0 \\ 0 & 1/60 & 0 & 13/120 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

A equação dos deslocamentos nos pontos internos, determinada pelo MEC, deve também conter os deslocamentos no plano da estrutura. Assim a Eq. (7.13) deve ser reescrita como:

$$u^D = u_i(f) = \int_{\Gamma} P_j(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j(c) \cdot P_{ij}^*(f, c) d\Gamma + \int_{\Omega_E} f^E(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) d\Omega_E \quad (7.23)$$

Já a Eq. (7.11) deve ser reescrita de forma a considerar as duas forças atuantes em cada extremidade do elemento finito. Dessa forma a Eq. (7.11), para esse caso, passa a ser:

$$\sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f^D(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) d\Omega_{E_k} = \sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} (\varphi(c) \cdot u_{ij}^*(f, c)) \cdot f_n^D(c) d\Omega_{E_k} \quad (7.24)$$

Para a determinação das tensões nos pontos internos a Eq. (7.19) deve ser reescrita como:

$$\sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f^D(c) \cdot D_{ijk}(f, c) d\Omega_{E_k} = \sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} (\varphi(c) \cdot D_{ijk}^*(f, c)) \cdot f_n^D(c) d\Omega_{E_k} \quad (7.25)$$

Para a Eq. (7.16) os valores nodais devem interpolados tanto na direção x quanto na direção y. Assim quando o nó em consideração não é descontínuo atribui-se valor unitário a diagonal correspondente. Caso contrário os valores não nulos apresentados na Eq. (7.16) devem ser aplicados para os deslocamentos nas direções x e y.

7.2.2 – Combinação das Equações MEC-MEF com Regularização por Mínimos Quadrados

Observando-se os vetores com as variáveis nodais de deslocamento e força internos, e das definições para as aproximações desses campos sobre os elementos finitos, constata-se que existem mais variáveis em deslocamento do que em força. O número de variáveis de deslocamentos internos é igual a duas vezes o número total de nós do elemento finito enquanto que para as forças o número de variáveis é igual a duas vezes o número de nós de extremidade do elemento finito.

Observando-se a Eq.(7.17) pode-se perceber que as variáveis do problema são $\{U_b\}, \{P_b\}, \{U_E\}$ e $\{f^D\}$. No entanto, o conjunto citado tem mais equações que o número de incógnitas. A causa é simples, vem da adoção de diferentes graus para os polinômios aproximadores das forças e deslocamentos internos. Para que o problema tenha solução, utiliza-se um procedimento simples baseado na técnica dos mínimos quadrados. Como o número de equações é maior que o de incógnitas, é necessário reduzi-lo a um número conveniente. A técnica dos mínimos quadrados é aplicada nesse problema para reduzir o número de equações, tornando o sistema linear solvível, minimizando o erro da resposta quando levada ao sistema original.

Serão agora descritos os três procedimentos implementados neste trabalho para a redução das equações de forma a tornar o sistema solvível. O primeiro deles consiste na aplicação do processo de mínimos quadrados somente sobre as equações de deslocamentos nos pontos internos. Já no segundo, o processo de mínimos quadrados é aplicado somente sobre as equações provenientes do MEF enquanto que o terceiro trata da aplicação de mínimos quadrados sobre o conjunto total de equações do acoplamento.

Primeiramente será descrito o processo de regularização utilizando as equações de deslocamento nos pontos internos. O processo de mínimos quadrados aplicado nesse conjunto de equações consiste na pré-multiplicação de todos os termos dessa equação por uma matriz $[G_{EE}^*]$. Assim:

$$[G_{EE}^*][A_{Eb}]\{X\} + [G_{EE}^*][T]\{U_E\} = [G_{EE}^*][B_{Eb}]\{F_b\} + [G_{EE}^*][G_{EE}]\{f^D\} \quad (7.26)$$

A matriz $[G_{EE}^*]$ pode apresentar duas configurações diferentes para a regularização. Na primeira delas $[G_{EE}^*]$ é tomada igual à transposta da matriz $[G_{EE}]$. Nesse caso a regularização é global já que envolve a influência de cada elemento de fibra sobre os demais. Na segunda configuração, $[G_{EE}^*]$ é igual à transposta de $[G_{EE}]_{ii}$, sendo que essa última matriz contém apenas a influência de cada elemento sobre si próprio. Nesse caso aplica-se a regularização para cada conjunto de equações de cada barra.

Uma segunda alternativa, para a realização do processo de regularização, é a que emprega as equações provenientes do MEF. Nesse caso o processo de mínimos quadrados se faz pré-multiplicando todas as equações fornecidas pelo MEF pela transposta da “lumping matrix”, $[G^E]$. Dessa forma:

$$[G^E]^T [K^E]\{U^E\} = -[G^E]^T [G^E]\{f^D\} + [G^E]^T \{F^E\} \quad (7.27)$$

Existe também a possibilidade da realização do processo de mínimos quadrados sobre o conjunto final de equações. Para tal deve-se reescrever a Eq. (7.17) de uma forma mais conveniente.

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & 0 & -[G_{bE}] \\ [A_{Eb}] & [T] & -[G_{EE}] \\ 0 & [K^E] & [G^E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{U_E\} \\ \{f^D\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_{bb}] \\ [B_{Eb}] \\ 0 \end{bmatrix} \{F_b\} \quad (7.28)$$

A regularização é efetuada pré-multiplicando todo o sistema de apresentado na Eq. (7.28) pela transposta da matriz que multiplica as incógnitas. Assim:

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & [A_{Eb}] & 0 \\ 0 & [T] & [K^E] \\ -[G_{bE}] & -[G_{EE}] & [G^E] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A_{bb}] & 0 & -[G_{bE}] \\ [A_{Eb}] & [T] & -[G_{EE}] \\ 0 & [K^E] & [G^E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{U_E\} \\ \{f^D\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{bb}] & [A_{Eb}] & 0 \\ 0 & [T] & [K^E] \\ -[G_{bE}] & -[G_{EE}] & [G^E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [B_{bb}] \\ [B_{Eb}] \\ 0 \end{Bmatrix} \{F_b\} \quad (7.29)$$

Esse procedimento é mais custoso do ponto de vista computacional uma vez que necessita da transposição de uma matriz de grandes dimensões ao passo que nos outros dois casos anteriores apenas uma parte do sistema final é alterado.

7.3 – Aplicações do Acoplamento MEC-MEF

Serão apresentadas a seguir algumas aplicações utilizando a formulação descrita nesse capítulo. É considerada interação completa entre fibra e domínio, ou seja, sem escorregamento.

7.3.1 – Exemplo 1: Estrutura Plana com um Enrijecedor

Será apresentada, como exemplo de aplicação da formulação implementada, a análise da estrutura ilustrada na Fig. (7.4). Trata-se de uma estrutura plana com três metros de comprimento e um metro de altura. Esta estrutura é engastada na sua extremidade esquerda sendo prescrito um deslocamento igual a dois, na direção de sua maior dimensão, em sua extremidade oposta. Foram consideradas para a matriz as seguintes propriedades: $E = 1,5 \frac{kN}{m^2}$ e $\nu = 0$. Já para as fibras foi adotado $E \cdot S = 1,0 kN$.

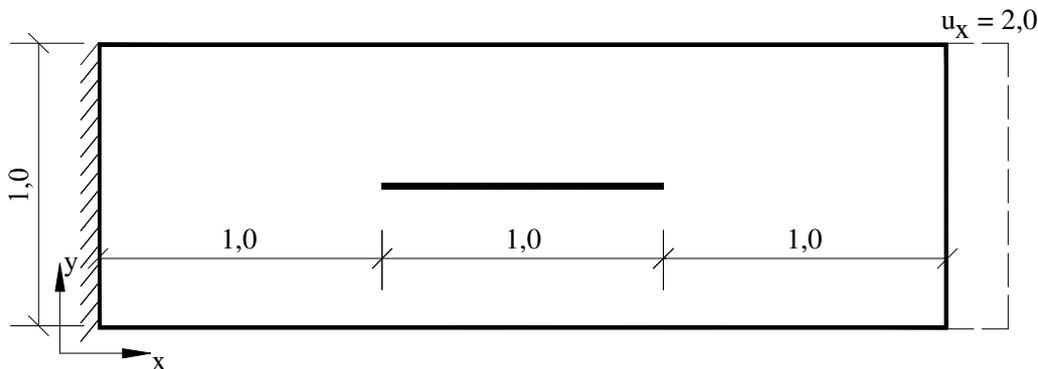


Figura 7.4 Estrutura analisada. Dimensões em m.

Para a discretização do contorno da estrutura foram utilizados 260 elementos de contorno. Já para as fibras foram utilizadas três diferentes discretizações as quais são

compostas por 50, 100 e 200 elementos finitos. Em cada uma dessas diferentes discretizações os elementos finitos utilizados apresentam comprimento uniforme.

Nesse exemplo os três procedimentos para a regularização descritos anteriormente foram empregados e os mesmos comparados entre si. Foram utilizados: mínimos quadrados nas equações de deslocamento nos pontos internos (MEC), mínimos quadrados nas equações do MEF (MEF) e mínimos quadrados sobre o conjunto total de equações (GLOBAL). Inicialmente serão analisados os deslocamentos ao longo da interface da fibra com o domínio, deslocamentos na direção x . As Fig. (7.5), Fig., (7.6) e Fig. (7.7) ilustram os deslocamentos para as três discretizações consideradas.

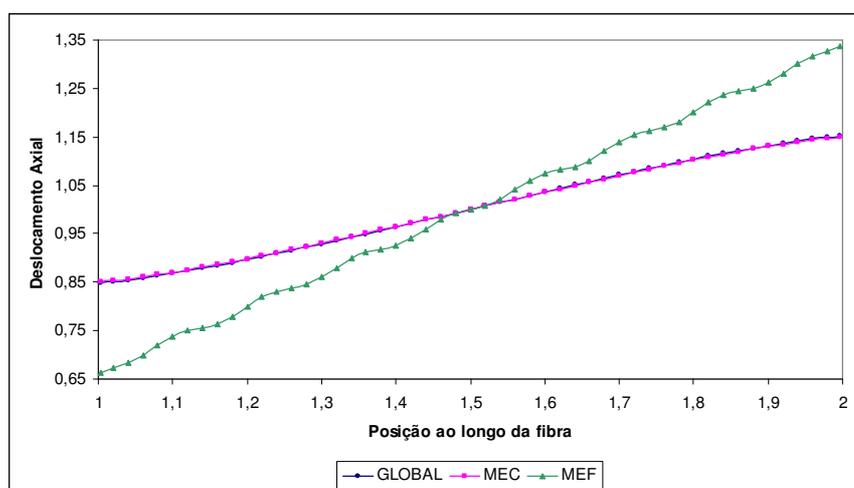


Figura 7.5 Deslocamento direção x (m). Malha com 50 elementos.

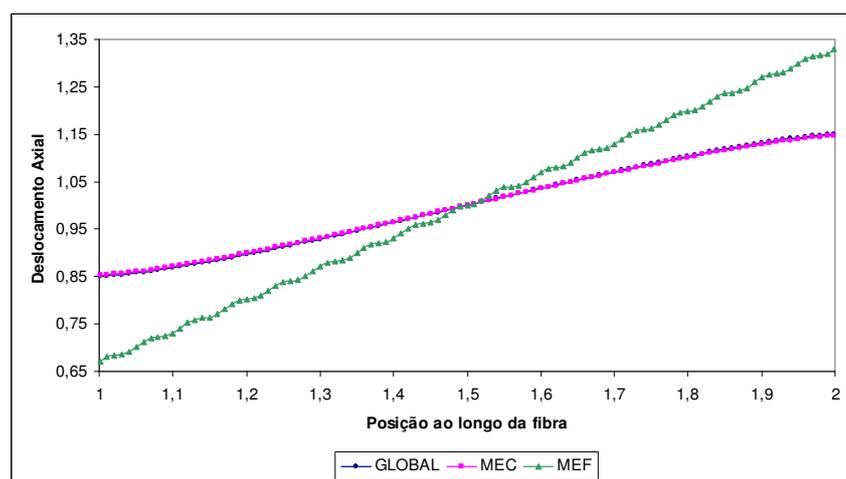


Figura 7.6 Deslocamento direção x (m). Malha com 100 elementos.

Verifica-se que os deslocamentos obtidos utilizando o processo de mínimos quadrados segundo as formas GLOBAL e MEC são semelhantes mesmo para a discretização mais pobre adotada. As respostas obtidas nesses dois casos são suaves e coerentes com o carregamento atuante. Já para a opção de regularização MEF constata-

se que os resultados obtidos não são estáveis e, portanto, não suaves. No entanto para a discretização mais refinada adotada os resultados, para essa forma de regularização, concordam com os obtidos pelas regularizações GLOBAL e MEC. Esse resultado é coerente já que o processo de mínimos quadrados é efetuado sobre as equações do MEF e assim é de se esperar que com um número maior de equações a resposta torne-se mais precisa.

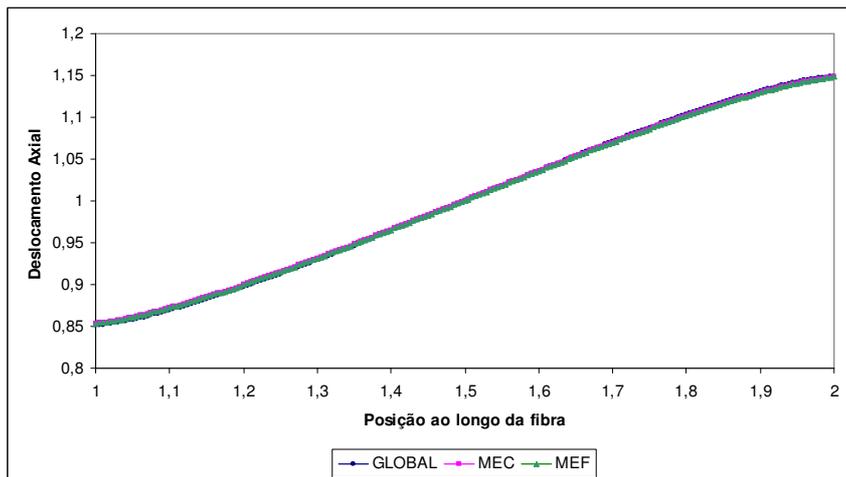


Figura 7.7 Deslocamento direção x (m). Malha com 200 elementos.

Foi também estudado o comportamento da força de superfície na interface entre a fibra e o domínio. Para as três discretizações adotadas os resultados das forças de superfície na direção x podem ser visualizados nas Fig. (7.8), Fig. (7.9) e Fig. (7.10).

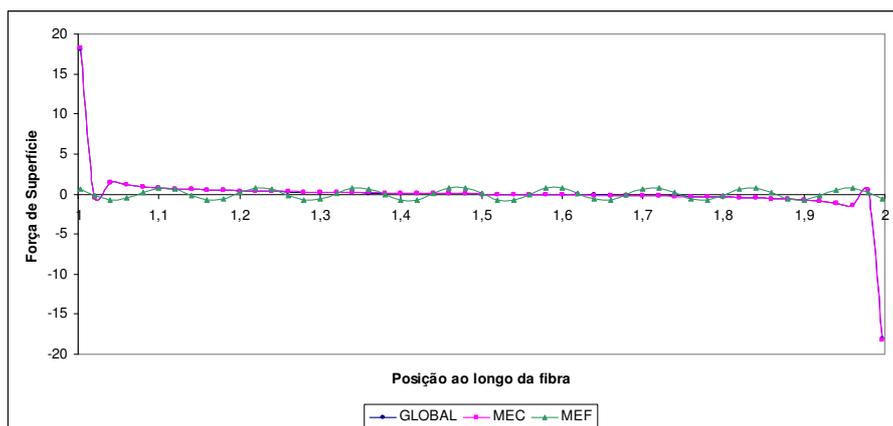


Figura 7.8 Força de Superfície x. Malha com 50 elementos.

Por meio dessas figuras pode-se verificar que, para as três discretizações empregadas, há uma perturbação, salto, nos valores das forças de superfície nas extremidades da fibra. Esse comportamento foi também observado em BOTTA (2003) e

pode ser entendido como uma concentração de tensão existente nessa posição decorrente da mudança brusca de rigidez no ponto devido à rigidez da fibra e da matriz.

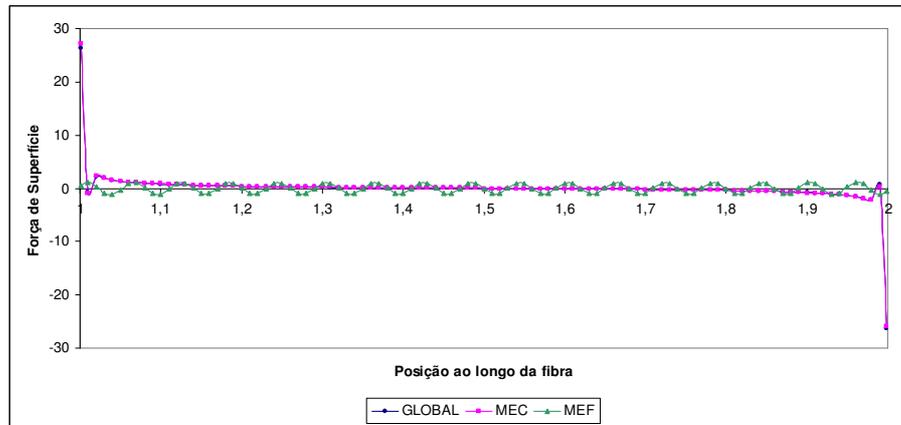


Figura 7.9 Força de Superfície x. Malha com 100 elementos.

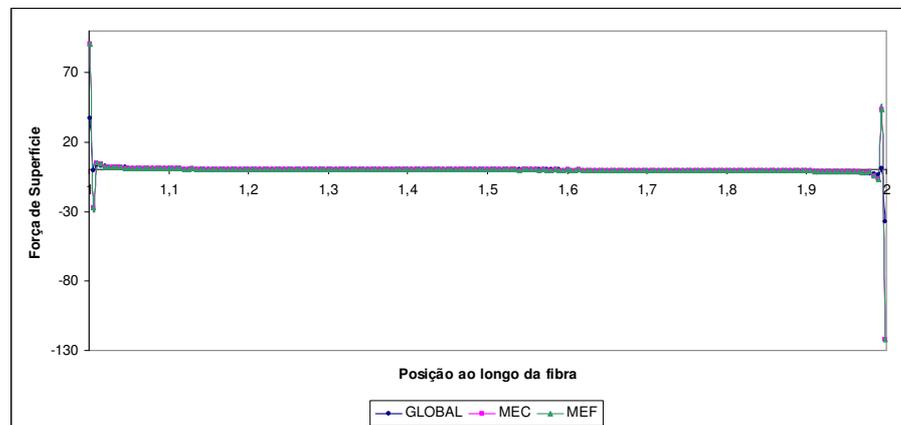


Figura 7.10 Força de Superfície x. Malha com 200 elementos.

Nas Fig. (7.11), Fig. (7.12) e Fig.(7.13) os três últimos diagramas são novamente construídos excetuando-se as regiões próximas à extremidade da fibra onde houve o salto das forças de superfície.

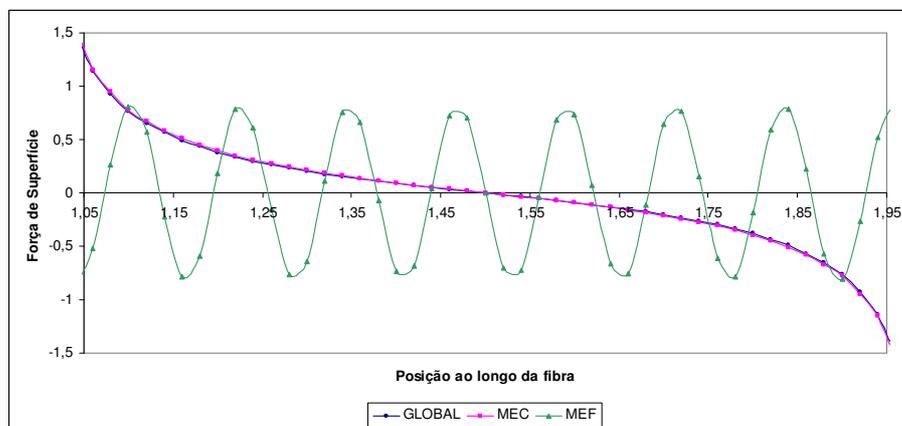


Figura 7.11 Força de Superfície x. Malha com 50 elementos.

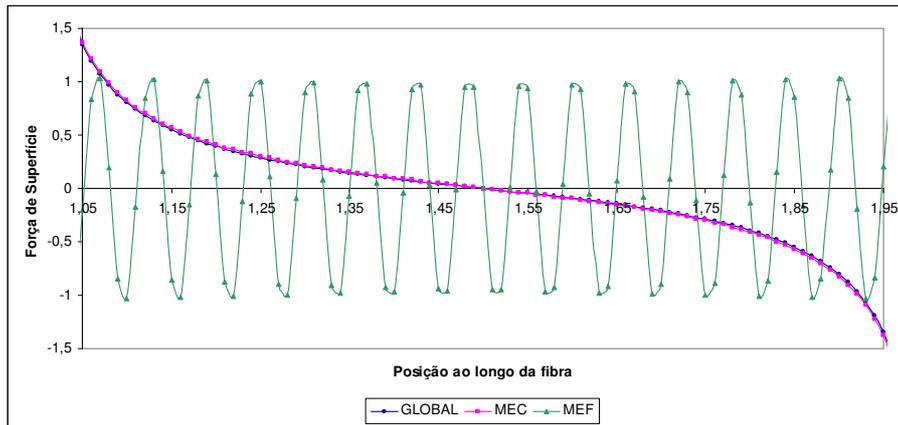


Figura 7.12 Força de Superfície x. Malha com 100 elementos.

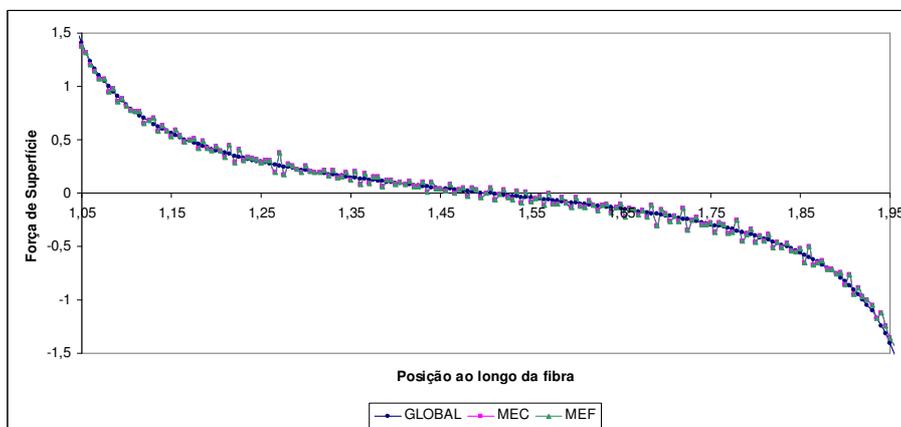


Figura 7.13 Força de Superfície x. Malha com 200 elementos.

Pode-se constatar que os resultados obtidos para as forças de superfície utilizando a regularização nas formas GLOBAL e MEC são suaves para as três discretizações consideradas. No entanto, quando utiliza-se a regularização nas equações do MEF a resposta obtida não é correta para as duas discretizações mais pobres. Nesse caso observa-se um comportamento oscilante das forças de superfície o que não é condizente com o carregamento aplicado. Somente quando se utiliza a discretização mais refinada obtém-se um resultado mais coerente, com oscilação consideravelmente reduzida. No entanto, esse comportamento oscilatório das forças de superfície tende a diminuir a medida que se aumenta a discretização.

De acordo com os resultados observados nesse exemplo, pode-se verificar que a regularização aplicada sobre as equações de deslocamento nos pontos internos e sobre todas as equações do acoplamento (MEC e GLOBAL) geram bons resultados, tanto para os deslocamentos quanto para as forças de superfície da interface MEC-MEF, mesmo com discretizações não muito refinadas nos elementos finitos. Deve ser destacado também que o custo computacional para a execução do processo de mínimos

Capítulo 7 – Acoplamento entre Método dos Elementos de Contorno e Método dos Elementos Finitos

quadrados nas equações de deslocamento nos pontos internos é bem menor se comparado ao caso onde considera-se o conjunto total de equações. Esse fato faz com que a regularização MEC seja mais eficiente.

Para a regularização aplicada sobre as equações do MEF verificou-se que os resultados não foram muito precisos para discretizações não muito refinadas. No entanto, a medida que foram acrescentados mais elementos à discretização da fibra, os resultados convergiram a aqueles observados nas regularizações MEC e GLOBAL. Assim, para a obtenção de bons resultados, tanto em termos de deslocamentos quanto em forças de superfície, torna-se necessária a adoção de discretizações bem refinadas com o emprego desse tipo de regularização.

7.3.2 – Exemplo 2: Chapa Tracionada Enrijecida

A estrutura a ser considerada nesse item é a apresentada na Fig. (7.14). Trata-se de uma estrutura plana com três metros de comprimento e um metro de altura contendo quatro fibras uniformemente distribuídas em seu interior. Esta estrutura é engastada na sua extremidade esquerda sendo prescrito um deslocamento igual a 0,1 m na extremidade oposta, na direção de sua maior dimensão. Foram consideradas para o domínio as seguintes propriedades: $E = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ e $\nu = 0,20$. Já para as fibras foram adotados $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ e $S = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

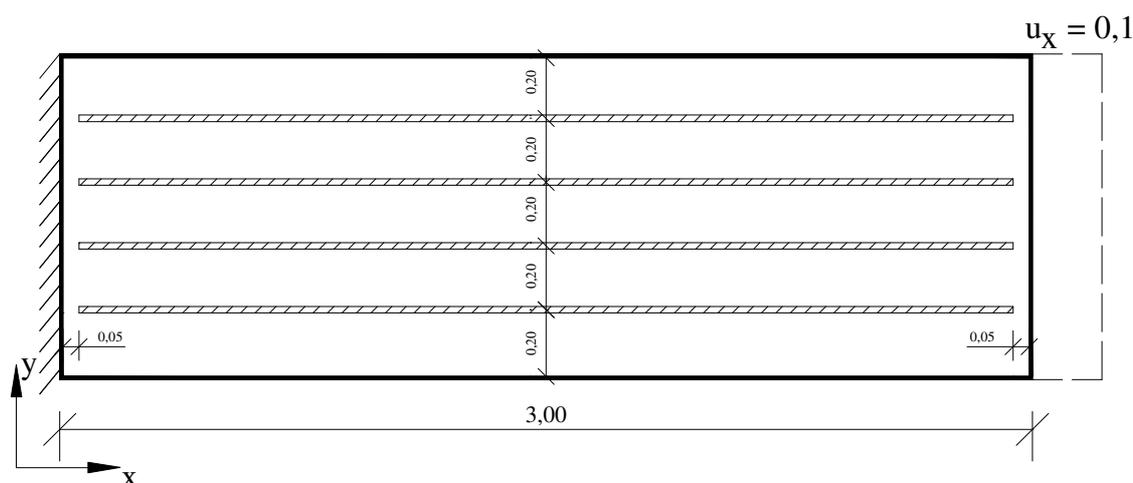


Figura 7.14 Estrutura analisada. Dimensões em m.

Foram utilizados 160 elementos para a discretização do contorno enquanto em cada fibra são distribuídos 116 elementos finitos. A regularização é executada fazendo-

se o processo de mínimos quadrados nas equações de deslocamentos nos pontos internos.

Os resultados obtidos nesse exemplo são comparados a um modelo equivalente construído no software ANSYS o qual analisa estruturas empregando as equações do MEF. No modelo construído no ANSYS foi utilizada uma malha uniforme e regular com 1200 elementos planos para o domínio enquanto cada fibra foi discretizada em 58 elementos. Inicialmente são comparados os deslocamentos ao longo do comprimento da fibra. O diagrama comparativo para esse resultado é mostrado na Fig. (7.15).

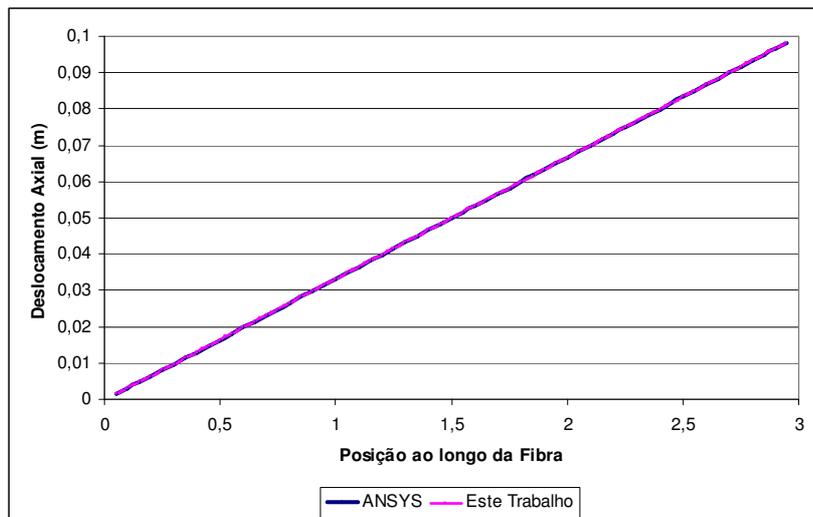


Figura 7.15 Comparativo dos deslocamentos na direção x fibras.

Verifica-se que os resultados obtidos nas duas análises realizadas são concordantes, demonstrando a eficiência da formulação implementada. Na Fig. (7.16) é ilustrado o diagrama comparativo para as forças normais nos elementos de fibra.

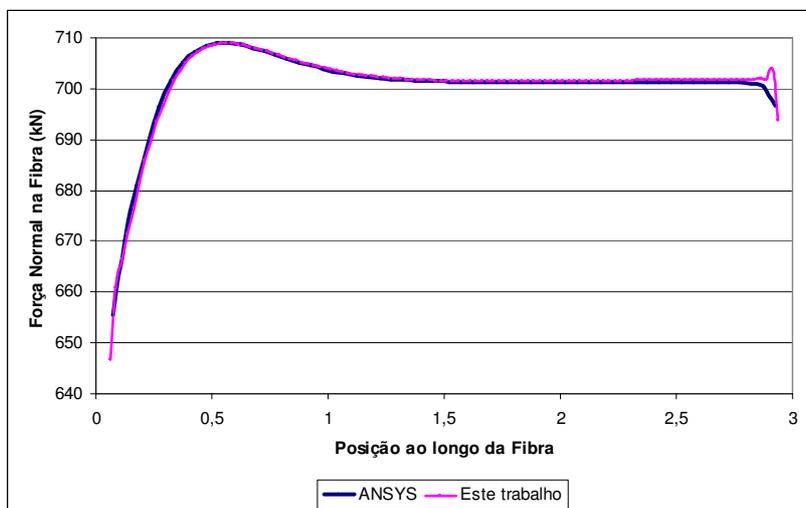


Figura 7.16 Comparativo para forças normais nas fibras.

A figura acima mostra também a eficiência da formulação desenvolvida e implementada. Os resultados fornecidos pela formulação implementada e pelo software ANSYS são concordantes. Apenas nas extremidades das fibras observa-se uma pequena diferença, a qual se explica pela oscilação existente na determinação das forças de superfície nessa posição.

Finalmente foram comparados os deslocamentos nas direções X e Y para os nós do contorno da estrutura. Nas Fig. (7.17) e Fig. (7.18) são apresentados os diagramas comparativos para essa grandeza onde os deslocamentos são apresentados em função da numeração dos nós presentes na discretização do contorno. A numeração começa no canto inferior esquerdo e, a partir da face inferior, cresce no sentido anti-horário. Como pode ser visualizado por meio dessas duas figuras verifica-se que os resultados obtidos pelos dois modelos numéricos considerados concordam entre si. Esse resultado valida o modelo de acoplamento MEC-MEF implementado.

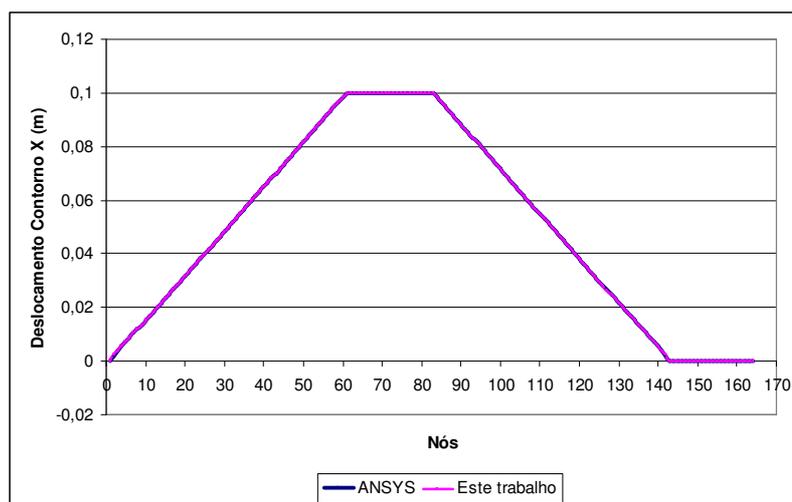


Figura 7.17 Comparativo dos deslocamentos direção X para os nós do contorno.

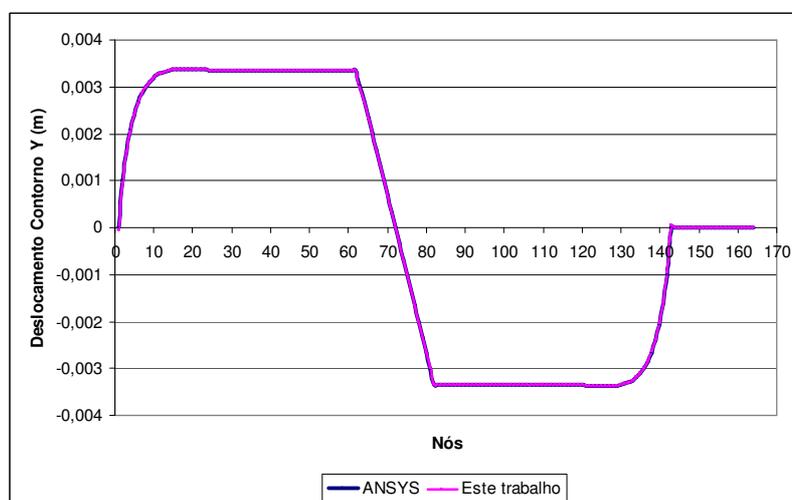


Figura 7.18 Comparativo dos deslocamentos direção Y para os nós do contorno.

7.3.3 – Exemplo 3: Estrutura Enrijecida Solicitada por Carga Tangencial

A estrutura a ser analisada nesse item é a apresentada na Fig. (7.19). Trata-se de uma estrutura plana com cinco metros de comprimento e um metro de altura contendo uma fibra de quatro metros de comprimento posicionada em seu centro. Esta estrutura é engastada em sua extremidade esquerda sendo prescrita uma força de superfície na direção y igual a $10,0 \text{ kN/m}$ na extremidade oposta. Foram consideradas para o domínio as seguintes propriedades: $E = 2,0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ e $\nu = 0,0$. Já para as fibras foram adotados $E = 2,0 \cdot 10^{11} \text{ kN/m}^2$ e $S = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$.

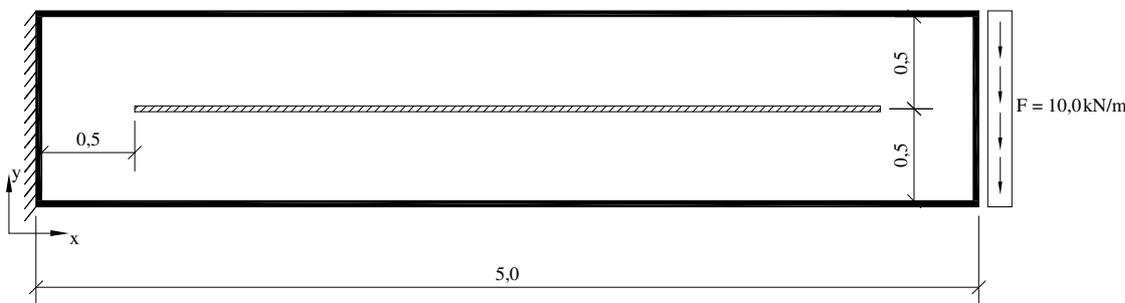


Figura 7.19 Estrutura analisada. Dimensões em m.

Foram utilizados 120 elementos para a discretização do contorno enquanto na fibra são distribuídos 80 elementos finitos. A regularização é executada fazendo-se o processo de mínimos quadrados nas equações do método dos elementos finitos.

Os resultados obtidos nesse exemplo são comparados a um modelo equivalente construído no software ANSYS o qual analisa estruturas empregando as equações do MEF. No modelo construído no ANSYS foi utilizada uma malha uniforme e regular com 963 elementos planos para o domínio enquanto cada fibra foi discretizada em 80 elementos. Inicialmente foram comparados os deslocamentos nas direções x e y para os nós do contorno. Nas Fig. (7.20) e Fig. (7.21) são apresentados os diagramas comparativos para essa grandeza onde os deslocamentos são apresentados em função da numeração dos nós presentes na discretização do contorno da estrutura. A numeração começa no canto inferior esquerdo e, a partir da face inferior, cresce no sentido anti-horário.

Como pode ser visualizado por meio dessas duas figuras verifica-se que os resultados obtidos pelos dois modelos considerados concordam entre si. Esse resultado valida o modelo de acoplamento MEC-MEF implementado.

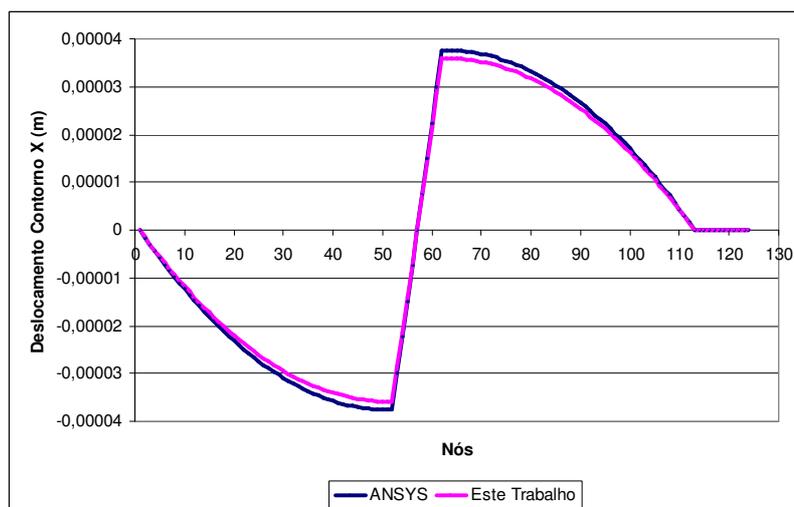


Figura 7.20 Comparativo dos deslocamentos direção x para os nós do contorno.

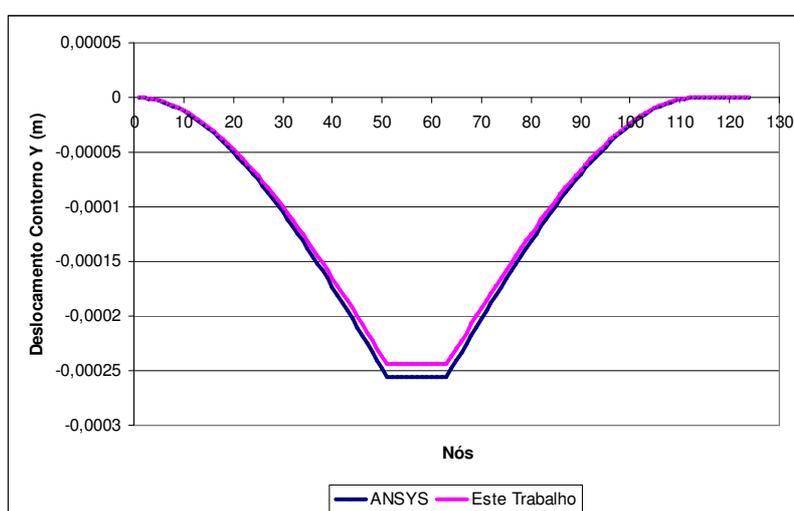


Figura 7.21 Comparativo dos deslocamentos direção y para os nós do contorno.

Os resultados para o deslocamento na direção y, nos nós presentes na interface entre a fibra e o domínio, foram também comparados. Na Fig. (7.22) são apresentadas as curvas comparativas para essa grandeza.

Assim como para os outros resultados, verifica-se que as respostas obtidas nas duas análises realizadas são concordantes demonstrando a eficiência da formulação implementada. Com base nesses resultados considera-se a formulação implementada para o acoplamento MEC-MEF validada.

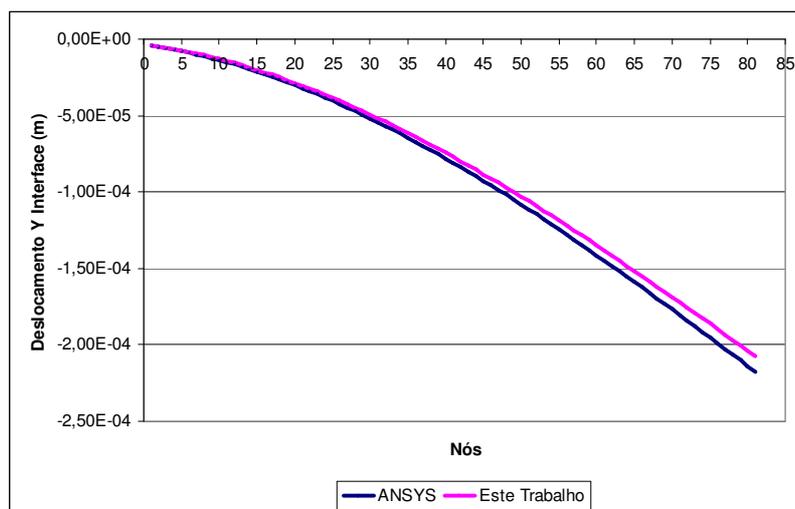


Figura 7.22 Comparativo dos deslocamentos y na interface entre fibra e domínio.

7.3.4 – Exemplo 4: Chapa Tracionada com Enrijecedores Longitudinais e Transversais

O exemplo 4 trata da estrutura apresentada na Fig. (7.23). Esta é uma estrutura plana de três metros de comprimento por cinquenta centímetros de altura. O carregamento atuante na estrutura é constituído por um deslocamento de 0,05 metros imposto em sua extremidade direita, enquanto na extremidade esquerda a estrutura é engastada. São distribuídas fibras no domínio da estrutura conforme indicam as linhas na cor azul, apresentadas na Fig. (7.23). As fibras são divididas em fibras superior, inferior e estribos as quais formam uma sistema de treliça no interior da estrutura. As propriedades dos materiais adotadas para a estrutura são as seguintes: para a matriz $E = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ e $\nu = 0,20$, para todas as fibras foi considerado $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, no entanto a área da seção transversal foi considerada diferente para cada uma delas. Para as fibras superiores tem-se $S_{\text{superiores}} = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, fibras inferiores $S_{\text{inferiores}} = 9,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ e estribos $S_{\text{estribos}} = 7,85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$. O contorno foi discretizado em 700 elementos enquanto nas fibras foram utilizados 250 elementos finitos. A regularização é executada fazendo-se o processo de mínimos quadrados nas equações fornecidas pelo MEF.

Inicialmente foram analisados os deslocamentos ao longo do contorno, das fibras superiores e inferiores e também no estribo central. Esses resultados foram comparados às respostas fornecidas por um modelo equivalente construído no software ANSYS. Via ANSYS foram utilizados 15000 elementos, distribuídos em uma malha regular para a discretização do domínio sendo nas fibras utilizados 1100 elementos.

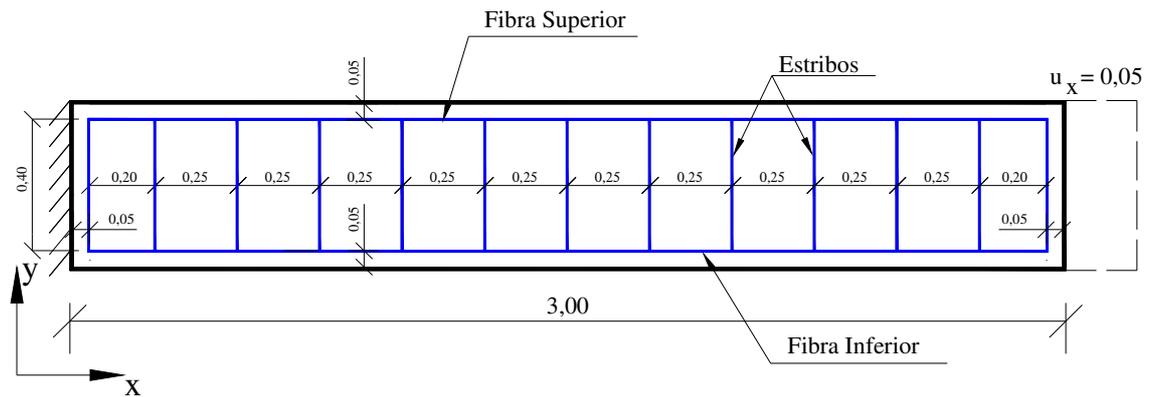


Figura 7.23 Estrutura Analisada, dimensões em m.

Os diagramas comparativos com as respostas estão ilustrados nas Fig. (7.24), Fig. (7.25), Fig. (7.26), Fig. (7.27) e Fig. (7.28). Nas duas primeiras figuras os deslocamentos são mostrados em função da numeração dos nós a qual inicia-se no canto inferior esquerdo e, a partir da face inferior, cresce no sentido anti-horário.

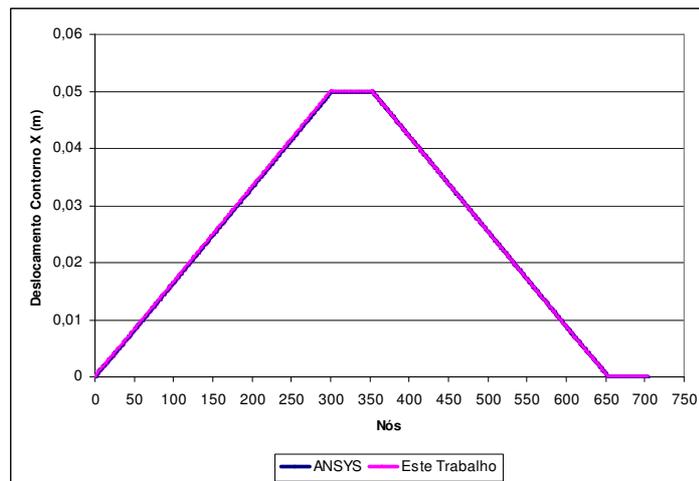


Figura 7.24 Comparativo dos deslocamentos direção x para os nós do contorno.

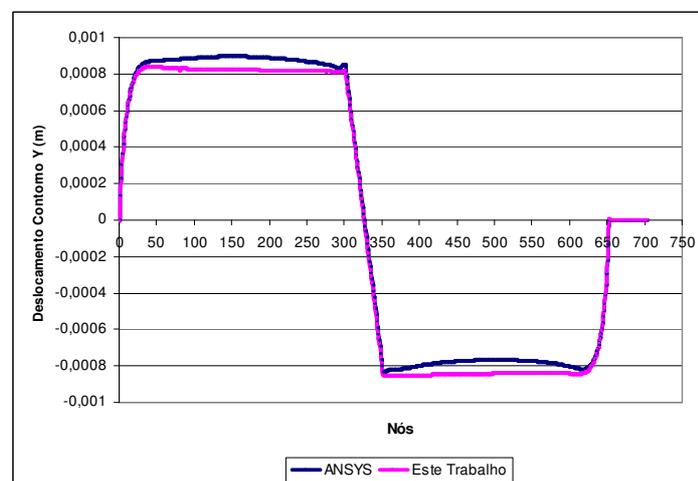


Figura 7.25 Comparativo dos deslocamentos direção y para os nós do contorno.

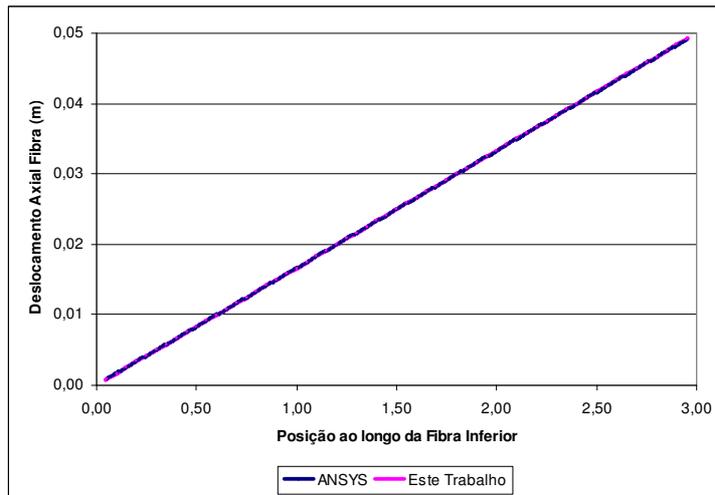


Figura 7.26 Comparativo do deslocamento direção x para a fibra inferior.

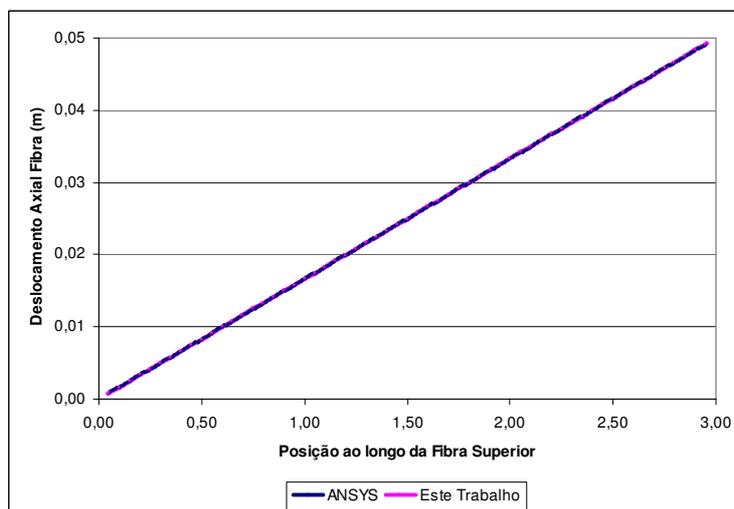


Figura 7.27 Comparativo do deslocamento direção x para a fibra superior.

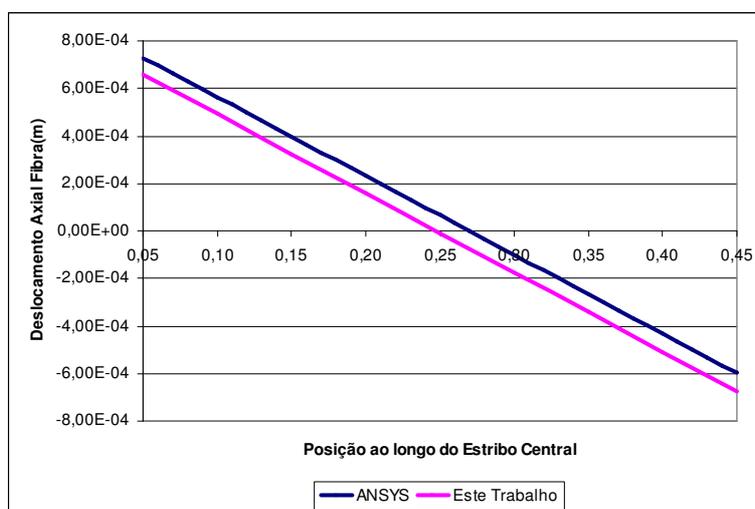


Figura 7.28 Comparativo do deslocamento direção y ao longo do estribo central.

De acordo com os diagramas comparativos apresentados pode-se verificar que a formulação desenvolvida e implementada fornece bons resultados quando comparado aos resultados fornecidos pelo ANSYS. A formulação proposta conseguiu reproduzir os resultados previstos pelo ANSYS o que valida a implementação efetuada.

Com relação às forças de superfície os resultados são apresentados nas Fig. (7.29) e Fig. (7.30). O comportamento observado para as forças de superfície é muito semelhante ao observado nos exemplos anteriores. Como mostrado nessas duas figuras, observa-se uma concentração de tensões nas extremidades das fibras. Esse comportamento já é esperado devido a diferença entre a rigidez da matriz e da fibra. Para os demais pontos ao longo da fibra, observa-se que as forças de superfície são suaves e coerentes com o carregamento atuante.

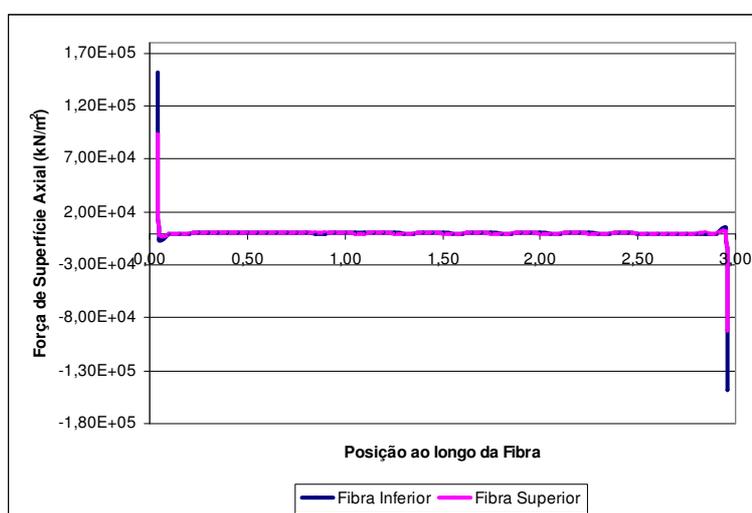


Figura 7.29 Comparativo das forças de superfície para as fibras superior e inferior direção x.

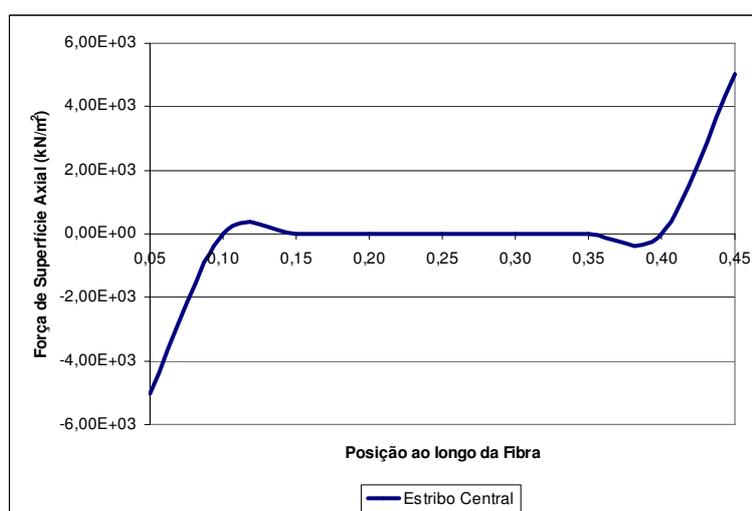


Figura 7.30 Comparativo da força de superfície para estribo central direção y.

As forças normais nas fibras foram também calculadas, sendo os diagramas comparativos, apresentados nas Fig. (7.31) e Fig. (7.32) para as fibras inferior e superior respectivamente. Como pode ser observado nessas figuras, os resultados obtidos por meio do modelo proposto concordam com os verificados no modelo construído no ANSYS. Como a malha de elementos finitos utilizada no ANSYS é muito refinada foi possível, no modelo do ANSYS, observar a concentração de tensões existente na extremidade das fibras.

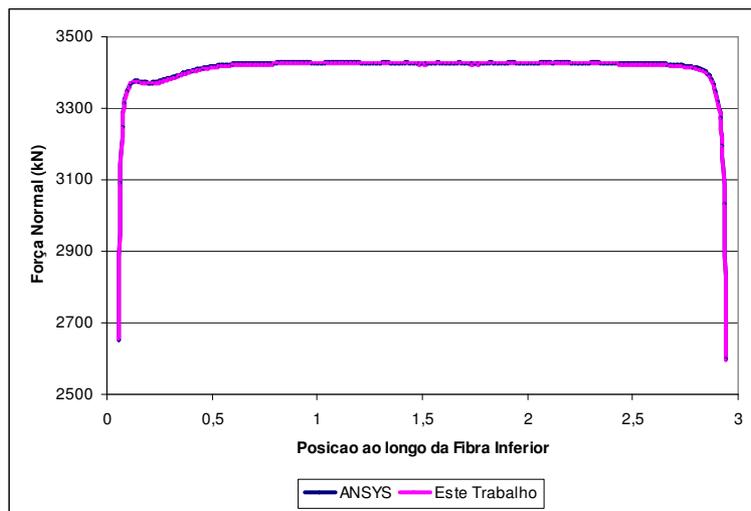


Figura 7.31 Força normal fibra inferior.

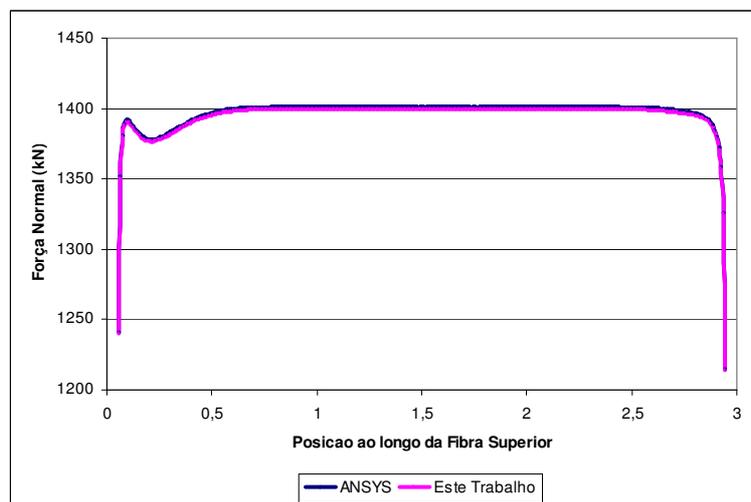


Figura 7.32 Força normal fibra superior.

7.4 – Formulação do Acoplamento MEC-MEF com Comportamento Elastoplástico dos Elementos de Fibra

Neste tópico será discutida a formulação do acoplamento MEC-MEF quando consideram-se os efeitos de não-linearidade física, plastificação, sobre os elementos

Capítulo 7 – Acoplamento entre Método dos Elementos de Contorno e Método dos Elementos Finitos

finitos. Inicialmente será apresentada uma revisão bibliográfica sobre teoria da plasticidade. Em seguida serão discutidos alguns conceitos da teoria da plasticidade que tem como objetivo fornecer as bases para o desenvolvimento da formulação. Finalmente a formulação desenvolvida será apresentada a qual também leva em conta a utilização do operador tangente consistente. Maiores detalhes sobre teoria da plasticidade e formulações elastoplásticas podem ser consultados em CHEN & HAN (1988), SIMO & HUGHES (1997), PROENCA (2004) e nos trabalhos citados nos itens a seguir.

7.4.1 – Breve Revisão Bibliográfica sobre Teoria da Plasticidade

O marco inicial da teoria da plasticidade deu-se com o trabalho de TRESCA (1864) o qual versa sobre o processo de extrusão em metais. Nesse trabalho foi proposto um critério de plastificação segundo o qual um metal deforma-se plasticamente quando a máxima tensão de cisalhamento atinge um valor limite. SAINT-VENANT (1870) apresentou as relações constitutivas, para estado plano, de um material rígido-plástico. Saint-Venant propôs também uma regra de fluxo através da qual os incrementos de deformação se dão segundo as direções dos eixos principais de tensão.

VON MISES (1913) apresenta um critério de plastificação que tem como base a limitação sobre a tensão octaédrica de cisalhamento (invariante de tensões desviadoras). Em VON MISES (1928) é efetuada a generalização dos conceitos apresentados em VON MISES (1913) para permitir a adoção de uma função de plastificação arbitrária. Além disso, Von Mises apresentou uma relação entre a direção da deformação plástica e a superfície de plastificação, definindo a regra de fluxo plástico. PRANDTL (1924) incluiu nas equações desenvolvidas por Saint-Venant/Von Mises a componente elástica da deformação, conceituando o modelo elastoplástico, e REUSS (1930) fez a extensão para o caso tridimensional.

O foco das discussões, nos trabalhos citados anteriormente, se dava sobre o comportamento rígido ou elastoplástico perfeito. As relações constitutivas para materiais que apresentam o fenômeno do encruamento positivo (hardening) foram desenvolvidas mais lentamente, podendo-se citar o trabalho de MELAN (1938). Nas décadas de 1940 e 1950 houve intensa pesquisa para o desenvolvimento dos conceitos básicos da chamada Teoria Clássica da Plasticidade em Metais. PRAGER (1949) definiu relações constitutivas para materiais com encruamento e superfícies de plastificação regulares. Foram também formulados e discutidos os conceitos de função

de carregamento (ou plastificação), de condição de carregamento ou de descarregamento, a condição de consistência e a de irreversibilidade da deformação plástica. A inter-relação entre a convexidade da superfície de carregamento, a regra da normalidade em relação ao incremento de deformação plástica e a unicidade da solução do problema de valor de contorno associado foi claramente estabelecida.

A partir desses conceitos, DRUCKER (1951) propôs o chamado Postulado da Estabilidade de um material, o que permitiu provar a unicidade da solução tanto para materiais elastoplásticos perfeitos como para os que sofrem encruamento positivo.

7.4.2 – Conceitos Básicos

Macroscopicamente, o comportamento plástico de um material pode ser caracterizado por meio da ocorrência de deformações irreversíveis, ou seja, não recuperáveis, observadas num ciclo de carregamento e descarregamento. Usualmente, o material apresenta um nível de tensão denominado tensão de plastificação, que uma vez atingido pode levar à ocorrência de deformações plásticas.

Materiais elastoplásticos perfeitos são aqueles nos quais a tensão jamais excede a tensão de plastificação e uma vez que esta seja atingida e mantida, toda a deformação adicional que passa a ocorrer é exclusivamente de natureza plástica conforme ilustra a Fig. (7.33), para o caso de tração uniaxial. Materiais cuja tensão pode aumentar além da tensão de plastificação (usualmente denominada nesse caso de limite elástico) apresentam o fenômeno do encruamento positivo, como indicado na Fig. (7.34).

Nos materiais em regime elastoplástico, a deformação total é composta por parcelas plástica e elástica. Nesse regime não há uma correspondência unívoca entre tensão e deformação, sendo necessário o conhecimento da história de carregamento, caracterizada pelo nível de deformação plástica acumulada.

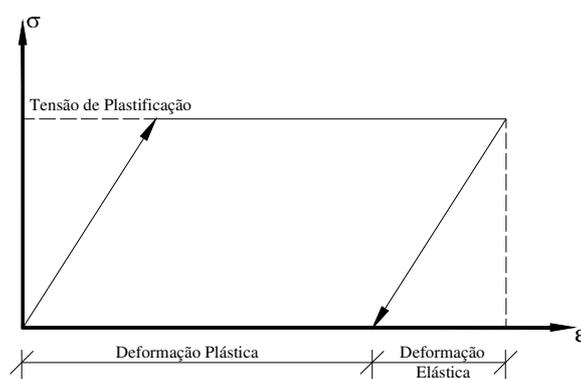


Figura 7.33 Relação constitutiva elastoplástica perfeito.

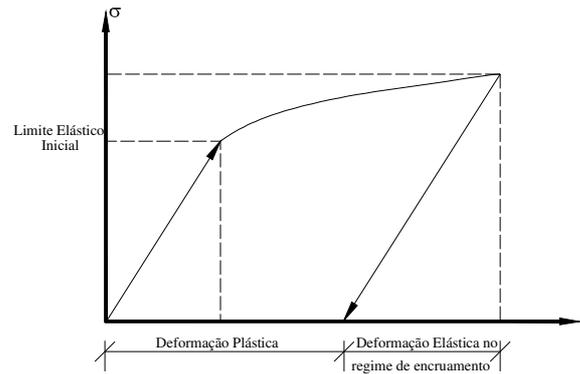


Figura 7.34 Relação constitutiva elastoplástica com encruamento.

7.4.3 – Formulação do Problema Plástico Unidimensional

Neste tópico será apresentada a formulação do comportamento elastoplástico para o caso unidimensional. Será tratada a formulação para os problemas elastoplástico perfeito e elastoplástico com encruamento, sendo que nesse último caso serão considerados os critérios de encruamento isótropo, cinemático e misto.

Inicialmente admite-se que a deformação total presente no problema, ε , possa ser decomposta em duas outras parcelas referentes às parcelas elástica, ε^e , e plástica, ε^p . Assim:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (7.30)$$

A tensão atuante no elemento de fibra é dada por:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon^e \Rightarrow \sigma = E \cdot (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (7.31)$$

A Eq. (7.31) pode ser escrita em termos de taxas, admitindo-se que a tensão e as deformações plástica e elástica sejam funções contínuas no tempo. Dessa forma:

$$\dot{\sigma} = E \cdot \dot{\varepsilon}^e \Rightarrow \dot{\sigma} = E \cdot \left(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p \right) \quad (7.32)$$

onde: $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$, $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$, $\dot{\varepsilon}^p = \frac{d\varepsilon^p}{dt}$

No modelo elastoplástico perfeito, a tensão não pode exceder, em valor absoluto, o valor da tensão de plastificação, σ_y . Isso se exprime através do seguinte critério de plastificação, que define o intervalo de tensões admissíveis:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (7.33)$$

A evolução da plastificação, $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$, ocorre apenas se $f(\sigma) = 0$, ou seja, se $|\sigma| = \sigma_y$. Caso $f(\sigma) < 0$ a resposta imediata do material é exclusivamente elástica e $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e$, $\dot{\varepsilon}^p = 0$. Usualmente denomina-se $\dot{\lambda} \geq 0$ ao valor do módulo da taxa de deformação plástica. Portanto valem as relações:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}, \text{ se } \sigma = \sigma_y \quad (7.34)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = -\dot{\lambda}, \text{ se } \sigma = -\sigma_y \quad (7.35)$$

De modo compacto, pode-se escrever que:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \cdot \text{sign}(\sigma) \quad (7.36)$$

sendo que $\text{sign}(\sigma) = 1$, se $\sigma > 0$ e $\text{sign}(\sigma) = -1$, se $\sigma < 0$.

Entre $\dot{\lambda}$ e \dot{f} há, portanto, uma clara condição de complementaridade, expressa na forma:

$$\dot{\lambda} \cdot \dot{f} = 0 \quad (7.37)$$

Porém, um estado de tensão tal que $f(\sigma) = 0$ não implica obrigatoriamente em evolução da plastificação. É necessário verificar a variação da função f no tempo, $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}$. Caso $f = 0$ e $\dot{f} = 0$, poderá haver evolução da plastificação, pois o novo estado de tensão se manterá sobre o nível limite σ_y e, portanto $\dot{\lambda} > 0$. Se $f = 0$ e $\dot{f} < 0$ configura-se uma situação de descarregamento e $\dot{\lambda} = 0$ não ocorrendo deformação plástica. Com isso se estabelece a condição de consistência dada por:

$$\dot{\lambda} \cdot \dot{f} = 0 \quad (7.38)$$

A condição de consistência permite obter uma expressão para $\dot{\lambda}$ impondo-se $\dot{f} = 0$. Utilizando as Eq. (7.32), Eq. (7.33) e Eq. (7.36) obtêm-se:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial |\sigma|}{\partial t} \cdot \dot{\sigma} = \text{sign}(\sigma) \cdot E \cdot \left(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p \right) = \text{sign}(\sigma) \cdot E \cdot \dot{\varepsilon} - \text{sign}(\sigma) \cdot E \cdot \dot{\lambda} \cdot \text{sign}(\sigma) = 0 \quad (7.39)$$

Sabendo-se que $[\text{sign}(\sigma)]^2 = 1$, tem-se:

$$\dot{\lambda} = \text{sign}(\sigma) \dot{\varepsilon} \quad (7.40)$$

Substituindo a Eq. (7.40) na Eq. (7.36) chega-se a expressão para a deformação plástica, $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}$, indicando que no escoamento todo o acréscimo de deformação é plástico.

Nos problemas que envolvem plastificação com encruamento o intervalo elástico inicial se altera com a evolução da plastificação, seja em tamanho, posição ou uma combinação de ambos. O encruamento é chamado isótropo quando ocorre uma expansão do intervalo elástico de modo simétrico ao seu centro. Normalmente, postula-se que o encruamento seja uma função da deformação plástica acumulada (encruamento por deformação). Caso seja diretamente proporcional ao módulo da deformação plástica, o encruamento isótropo é dito linear, como ilustrado na Fig. (7.35). Para este caso, a função de plastificação tem por expressão:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_y + K^p \cdot \alpha) \leq 0 \quad (7.41)$$

Na Eq. (7.41) o termo K^p é chamado de módulo plástico de encruamento isótropo, σ_y é a tensão de escoamento do material e α é uma medida da deformação plástica acumulada, definida pela seguinte expressão:

$$\alpha = \int_0^t \left| \dot{\varepsilon}^p \right| dt \quad (7.42)$$

O módulo utilizado na Eq. (7.42) implica que a evolução da plastificação tanto na compressão como na tração produz encruamento, ou seja, um aumento do intervalo elástico inicial.

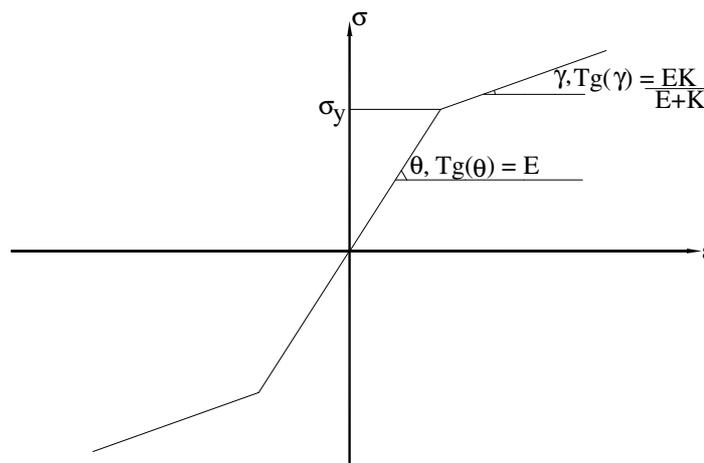


Figura 7.35 Encruamento isótropo linear.

De modo análogo ao apresentado no problema elastoplástico perfeito, as condições sobre a deformação plástica são agora expressas como:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}, \text{ se } \sigma = (\sigma_y + K^p \alpha) \quad (7.43)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = -\dot{\lambda}, \text{ se } \sigma = -(\sigma_y + K^p \alpha) \quad (7.44)$$

No encruamento isótropo a Eq. (7.36) permanece válida e das duas últimas equações pode-se concluir que $\dot{\lambda} = \left| \dot{\varepsilon}^p \right|$. Da Eq. (9.42) tem-se que $\dot{\alpha} = \left| \dot{\varepsilon}^p \right|$. Portanto obtém-se que:

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \quad (7.45)$$

Utilizando a relação de consistência e as Eq. (7.32), Eq. (7.36), Eq. (7.41) e Eq. (7.45) é possível obter uma expressão para $\dot{\lambda}$:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = \text{sign}(\sigma) \cdot E \cdot \left[\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \cdot \text{sign}(\sigma) \right] - K^p \cdot \dot{\lambda} = 0 \quad (7.46)$$

Isolando-se $\dot{\lambda}$, tem-se:

$$\dot{\lambda} = \frac{\text{sign}(\sigma) \cdot E \cdot \dot{\varepsilon}}{(E + K^p)} \quad (7.47)$$

Combinando-se as Eq. (7.32), Eq. (7.36) e Eq. (7.47), pode-se calcular $\dot{\varepsilon}^p$ e $\dot{\sigma}$.

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{E}{(E + K^p)} \dot{\varepsilon} \quad (7.48)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{E \cdot K^p}{(E + K^p)} \dot{\varepsilon} \quad (7.49)$$

o termo $\frac{E \cdot K^p}{(E + K^p)}$ define o módulo elastoplástico tangente no trecho de encruamento, como apresentado na Fig. (7.35).

Já no problema envolvendo encruamento cinemático o intervalo elástico inicial tem seu tamanho mantido, porém sua origem no espaço das tensões é modificada pelo processo de plastificação. Neste caso, a função de plastificação assume a forma:

$$f(\sigma, q) = |\sigma - q| - \sigma_y \leq 0 \quad (7.50)$$

A variável q dá o deslocamento do intervalo elástico em relação à sua posição original, sendo, também, uma função da deformação plástica. No caso de uma relação linear entre ambas, a lei de evolução do parâmetro q é:

$$\dot{q} = H^p \cdot \dot{\epsilon}^p \quad (7.51)$$

sendo H^p denominado módulo plástico de encruamento cinemático.

Deve-se observar que o sentido da variação do parâmetro q é definido pelo sentido do fluxo plástico. Conforme apresenta a Fig. (7.36), uma plastificação devida à tração altera o limite elástico à tração para $(\sigma_y + q_1)$ e reduz, em módulo, o limite elástico à compressão. Essa assimetria induzida pelo modelo de encruamento cinemático permite reproduzir o chamado efeito BAUSCHINGER (1886).

Seguindo o procedimento análogo ao anterior a taxa de deformação plástica é definida a partir das seguintes condições:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda}, \text{ se } \sigma - q = \sigma_y \quad (7.52)$$

$$\dot{\epsilon}^p = -\dot{\lambda}, \text{ se } \sigma - q = -\sigma_y \quad (7.53)$$

Condensando as duas últimas equações:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \cdot \text{sign}(\sigma - q) \quad (7.54)$$

sendo que $\text{sign}(\sigma - q) = 1$, se $(\sigma - q) > 0$ e $\text{sign}(\sigma - q) = -1$, se $(\sigma - q) < 0$.

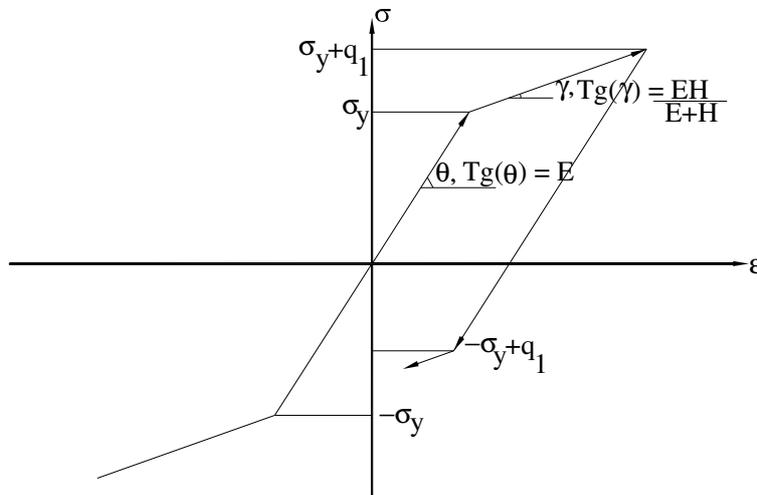


Figura 7.36 Encruamento cinemático linear.

Combinando as Eq. (7.51) e Eq. (7.54) pode-se escrever que:

$$\dot{q} = \dot{\lambda} \cdot H^p \cdot \text{sign}(\sigma - q) \quad (7.55)$$

A expressão para $\dot{\lambda}$ é obtida impondo-se $\dot{f} = 0$. Fazendo-se então o uso das Eq. (7.32), Eq. (7.50), Eq. (7.54) e Eq. (7.55) têm-se:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} = \text{sign}(\sigma - q) \cdot E \cdot \left[\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \cdot \text{sign}(\sigma - q) \right] - \text{sign}(\sigma - q) \cdot H^p \cdot \dot{\lambda} \cdot \text{sign}(\sigma - q) = 0 \quad (7.56)$$

Isolando-se $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{\text{sign}(\sigma - q) \cdot E}{(E + H^p)} \dot{\varepsilon} \quad (7.57)$$

Finalmente com as Eq. (7.32), Eq. (7.54) e Eq. (7.57) calcula-se:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{E}{(E + H^p)} \dot{\varepsilon} \quad (7.58)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{E \cdot H^p}{(E + H^p)} \dot{\varepsilon} \quad (7.59)$$

onde $\frac{E \cdot H^p}{(E + H^p)}$ é o módulo elastoplástico tangente, conforme ilustrado na Fig. (7.36).

Pode também ser construído um modelo que mescle as características presentes nos encruamentos isótropo e cinemático. Este tipo de encruamento é o misto o qual fornece expansão e translação do intervalo elástico. Nesse tipo de modelo o critério de plastificação passa a ser dado por:

$$f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - (\sigma_y + K^p \cdot \alpha) \leq 0 \quad (7.60)$$

As variáveis q e α já foram definidas nas Eq. (7.55), Eq. (7.42), portanto deve-se agora obter a expressão para o incremento nas deformações plásticas. Assim como nos casos anteriores a taxa de deformação plástica é definida a partir das seguintes condições:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}, \text{ se } \sigma - q = \sigma_y + K^p \cdot \alpha \quad (7.61)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = -\dot{\lambda}, \text{ se } \sigma - q = -(\sigma_y + K^p \cdot \alpha) \quad (7.62)$$

As duas últimas equações podem ser condensadas como:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \cdot \text{sign}(\sigma - q) \quad (7.63)$$

sendo que $\text{sign}(\sigma - q) = 1$, se $(\sigma - q) > 0$ e $\text{sign}(\sigma - q) = -1$, se $(\sigma - q) < 0$.

A expressão para $\dot{\lambda}$ é obtida fazendo-se $\dot{f} = 0$. De posse das Eq. (7.32), Eq. (7.45), Eq. (7.55), Eq. (7.60) e Eq. (7.63) têm-se:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = \text{sign}(\sigma - q) \cdot E \cdot \left[\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \cdot \text{sign}(\sigma - q) \right] - \text{sign}(\sigma - q) \cdot H^p \cdot \dot{\lambda} \cdot \text{sign}(\sigma - q) - K^p \cdot \dot{\lambda} = 0 \quad (7.64)$$

Isolando-se $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{\text{sign}(\sigma - q) \cdot E}{(E + H^p + K^p)} \dot{\epsilon} \quad (7.65)$$

Finalmente com as Eq. (7.32), Eq. (7.63) e Eq. (7.65) tem-se:

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{E}{(E + H^p + K^p)} \dot{\epsilon} \quad (7.66)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{E \cdot (H^p + K^p)}{(E + H^p + K^p)} \dot{\epsilon} \quad (7.67)$$

sendo $\frac{E \cdot (H^p + K^p)}{(E + H^p + K^p)}$ o módulo elastoplástico tangente para o encruamento misto.

7.4.4 – Influência da Plastificação nas Equações do Acoplamento MEC- MEF

O processo de plastificação ocorre somente nos elementos de fibra, portanto, apenas as equações do MEF devem ser atualizadas após a plastificação dos elementos. No entanto, quando se verifica as equações provenientes do MEF, constata-se que somente a matriz de rigidez local dos elementos finitos que já plastificaram deve ser atualizada. Nesse caso, estas matrizes são reconstruídas utilizando o módulo elastoplástico tangente conforme já definido no item 7.4.3.

Por meio desse procedimento, faz-se uso do operador tangente consistente, já que a matriz de rigidez será atualizada após a plastificação dos elementos. Utilizando os critérios de plastificação bi-lineares serão necessárias poucas iterações para a obtenção do equilíbrio, o que torna a formulação interessante do ponto de vista de eficiência computacional.

7.4.5 – Exemplo 5: Análise Elastoplástica de uma Fibra em uma Chapa Tractionada

O exemplo 5 trata da estrutura apresentada na Fig. (7.37). Trata-se de uma estrutura quadrada plana tendo o comprimento do lado igual a cinquenta centímetros. O carregamento atuante na estrutura é constituído por um deslocamento de 0,05 metros imposto em sua extremidade direita, enquanto na extremidade esquerda a estrutura é engastada. A estrutura contém uma fibra de comprimento igual a quarenta centímetros posicionada a metade da altura da estrutura conforme mostra a Fig. (7.37).

As propriedades dos materiais adotadas para o exemplo são as seguintes: para a matriz $E = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ e $\nu = 0,20$, para a fibra $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, área da seção transversal $S = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, tensão de escoamento $\sigma_y = 500 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$, módulo de encruamento isótopo $K^p = 200 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$, módulo de encruamento cinemático $H^p = 2 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$.

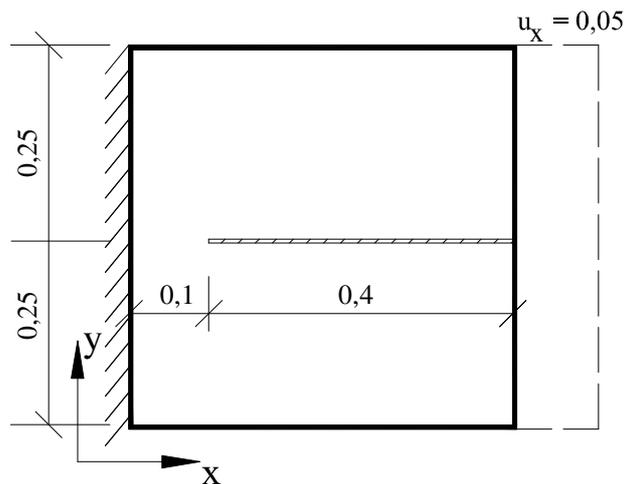


Figura 7.37 Estrutura Analisada. Dimensões em m.

Nessa análise, o contorno foi discretizado em 100 elementos de contorno enquanto nas fibras foram utilizados 80 elementos finitos. A regularização é executada fazendo-se o processo de mínimos quadrados nas equações fornecidas pelo MEF.

Foram analisados os deslocamentos ao longo do contorno da estrutura, as deformações elástica e plástica ao longo da fibra e também a força normal atuante nos elementos finitos. Esses resultados foram comparados às respostas fornecidas por um modelo equivalente construído no software ANSYS onde foram empregados 2564 elementos na discretização do domínio e o 80 elementos na discretização da fibra. Os diagramas comparativos estão ilustrados nas Fig. (7.38), Fig. (7.39), Fig. (7.40), Fig. (7.41) e Fig. (7.42). Nas duas primeiras figuras os deslocamentos são mostrados em função da numeração dos nós. A numeração começa no canto inferior esquerdo e, a partir da face inferior, cresce no sentido anti-horário.

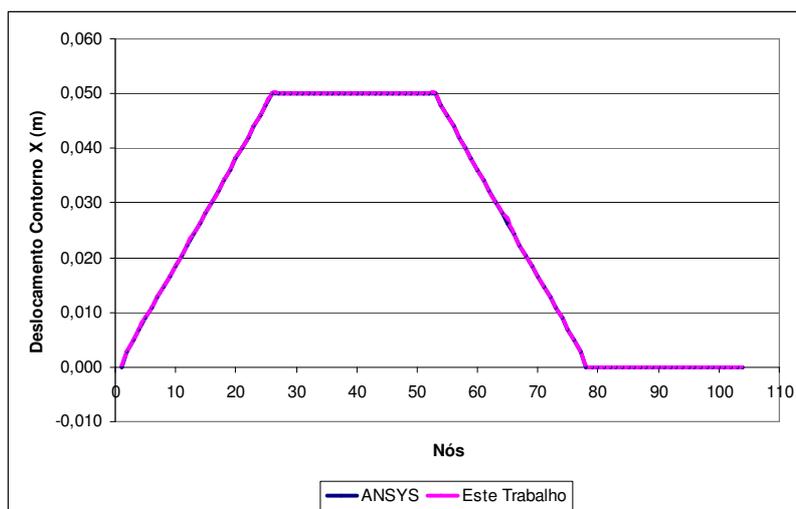


Figura 7.38 Comparativo dos deslocamentos direção x para os nós do contorno.

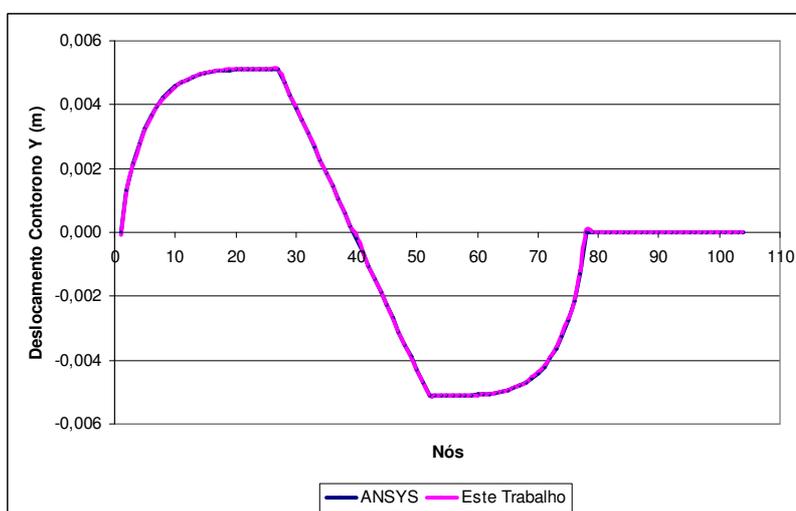


Figura 7.39 Comparativo dos deslocamentos direção y para os nós do contorno.

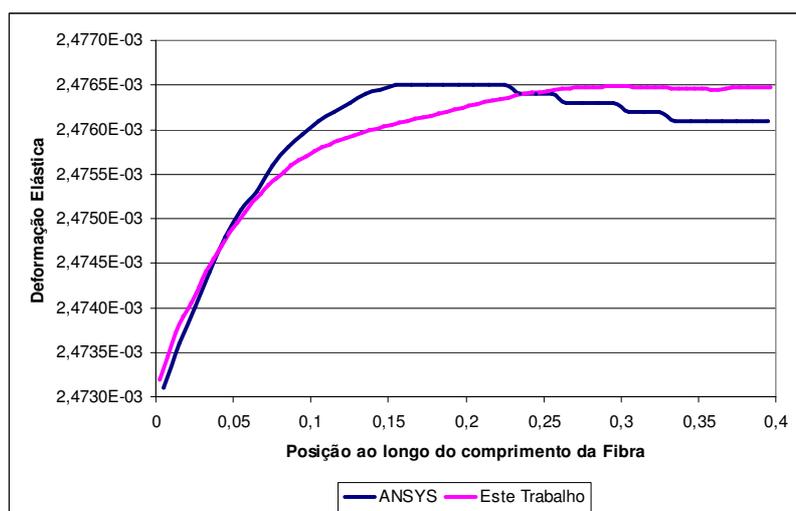


Figura 7.40 Comparativo da deformação elástica ao longo da fibra.

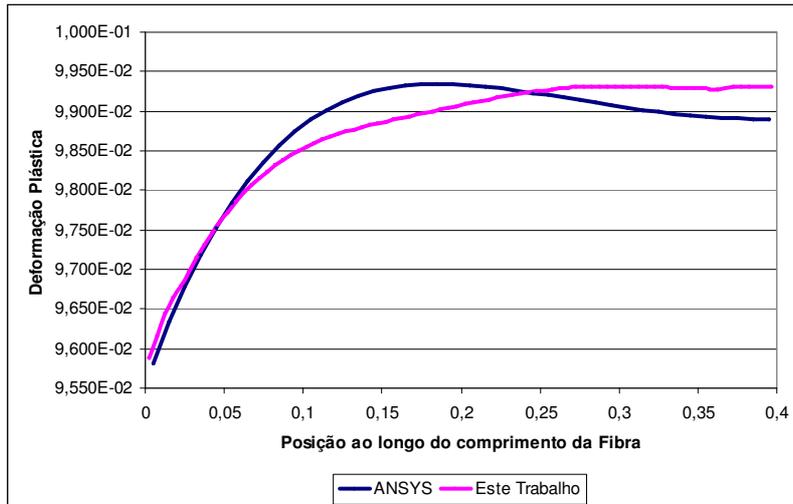


Figura 7.41 Comparativo da deformação plástica ao longo da fibra.

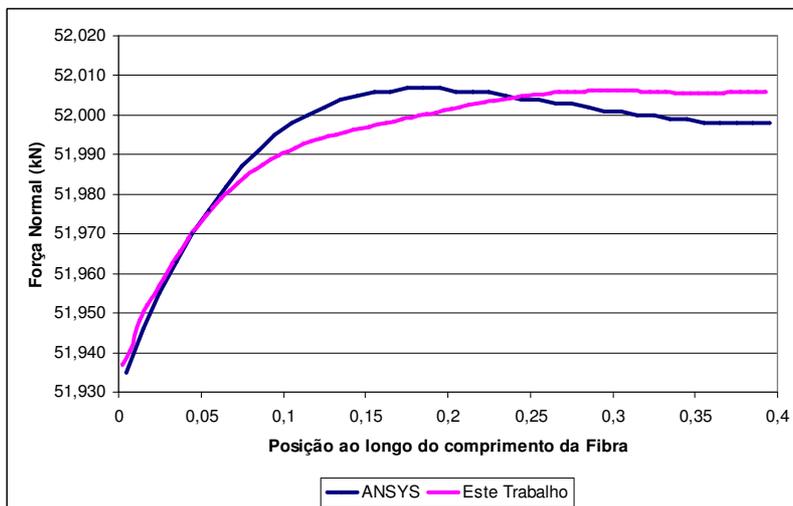


Figura 7.42 Comparativo da força normal ao longo do comprimento da fibra.

De acordo com os diagramas comparativos, pode-se verificar que a formulação desenvolvida e implementada fornece bons resultados quando comparado aos resultados fornecidos pelo ANSYS. Mesmo com uma discretização não muito refinada nas fibras, consegue-se reproduzir os resultados previstos pelo ANSYS. Dessa forma, considera-se validada a formulação desenvolvida do acoplamento MEC-MEF considerando o efeito de plastificação dos enrijecedores.

7.4.6 – Exemplo 6: Chapa Tracionada com Enrijecedor Inclinado

Nesse exemplo será analisada a estrutura apresentada na Fig. (7.43). Trata-se de uma estrutura plana de comprimento igual a 2,0 metros e altura de 0,50 metros. O carregamento atuante na estrutura é constituído por um deslocamento de 0,05 metros

Capítulo 7 – Acoplamento entre Método dos Elementos de Contorno e Método dos Elementos Finitos

imposto em sua extremidade direita, enquanto na extremidade esquerda a estrutura é engastada. A estrutura apresenta ainda cinco enrijecedores dispostos conforme indicam as fibras hachuradas da Fig. (7.43).

As propriedades dos materiais adotadas para o exemplo são as seguintes: para a matriz $E = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ e $\nu = 0,20$, para as fibras $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, área da seção transversal $S = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, tensão de escoamento $\sigma_y = 500 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$, módulo de encruamento isótropo $K^p = 2,3333 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$.

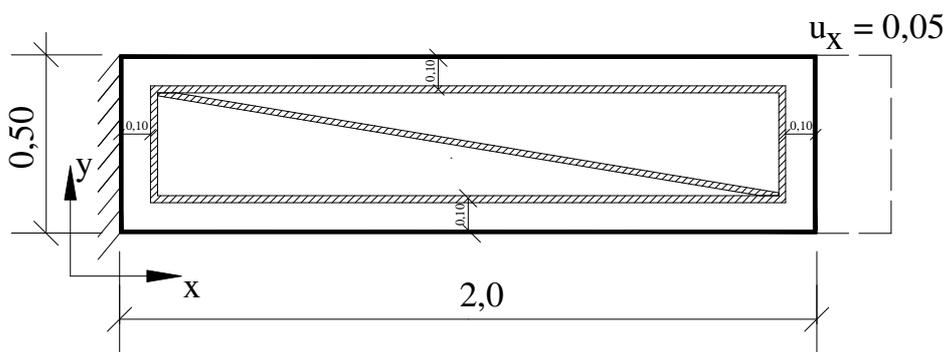


Figura 7.43 Estrutura Analisada. Dimensões em m.

O contorno foi discretizado em 126 elementos enquanto nas fibras foram empregados 526 elementos finitos. A regularização é executada fazendo-se o processo de mínimos quadrados nas equações fornecidas pelo método dos elementos finitos.

Inicialmente foram analisados os deslocamentos ao longo do contorno da estrutura. Esse resultado foi comparado à resposta fornecida por um modelo equivalente construído no software ANSYS onde foram empregados 1070 elementos finitos na discretização do domínio e 526 na discretização das fibras. Nos diagramas comparativos dos deslocamentos essa grandeza é mostrada em função da numeração dos nós do contorno. Nesse modelo a numeração começa no canto inferior esquerdo e, a partir da face inferior, cresce no sentido anti-horário. Os diagramas estão apresentados nas Fig. (7.44) e Fig. (7.45) as quais indicam um bom desempenho da formulação proposta.

Foram analisados também os resultados para as fibras inclinada e inferior mostradas na Fig. (7.43). Primeiramente foram comparados os resultados para as deformações plásticas observadas nas fibras para o carregamento dado. Na Fig. (7.46) é apresentado o diagrama comparativo onde a deformação plástica é mostrada em função do número de elementos finitos presente em cada fibra. Para a fibra inferior a numeração dos elementos começa no canto inferior esquerdo e termina no canto inferior

direito. Já para a fibra inclinada a numeração começa no canto inferior direito e termina no canto superior esquerdo.

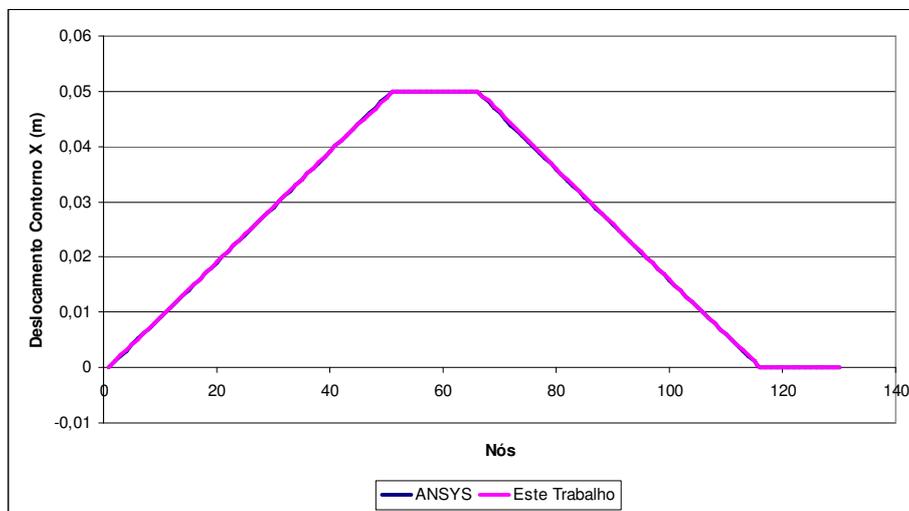


Figura 7.44 Comparativo dos deslocamentos direção x para os nós do contorno.

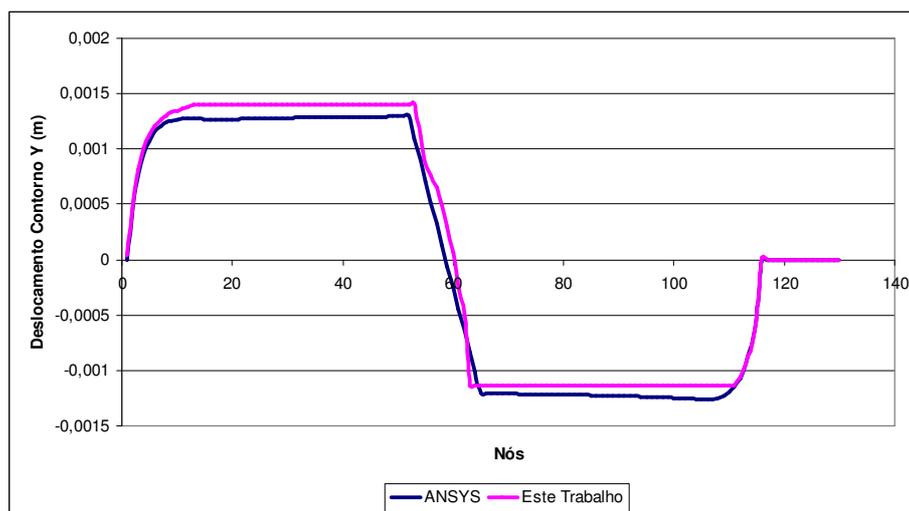


Figura 7.45 Comparativo dos deslocamentos direção y para os nós do contorno.

O diagrama apresentado na Fig. (7.46) mostra que os resultados fornecidos pelo modelo de acoplamento MEC-MEF são muito próximos aos previstos pelo modelo em elementos finitos via ANSYS, validando dessa forma a formulação implementada.

O diagrama comparativo para a força normal atuante nas fibras inferior e inclinada para o carregamento dado é mostrado na Fig. (7.47). Assim como na comparação para a deformação plástica os resultados para a força normal são apresentados em função do número de elementos finitos em casa fibra.

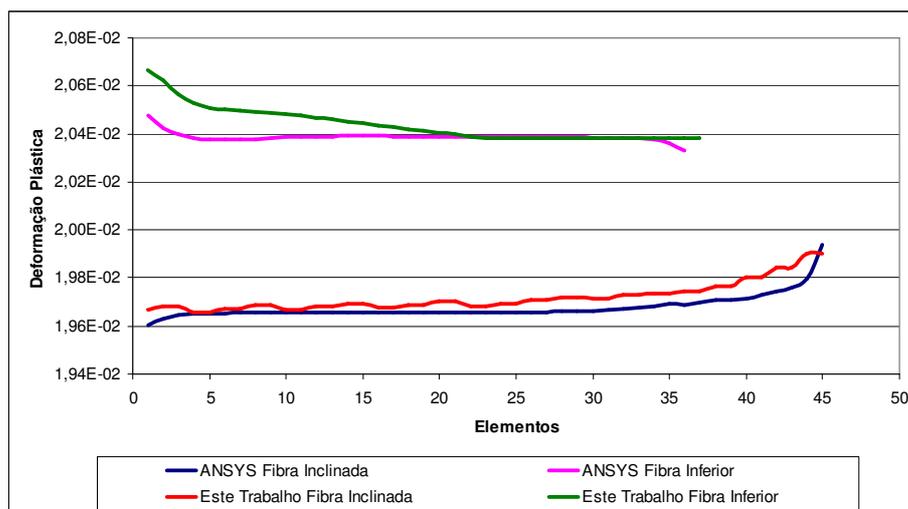


Figura 7.46 Comparativo da deformação plástica para as fibras inferior e inclinada.

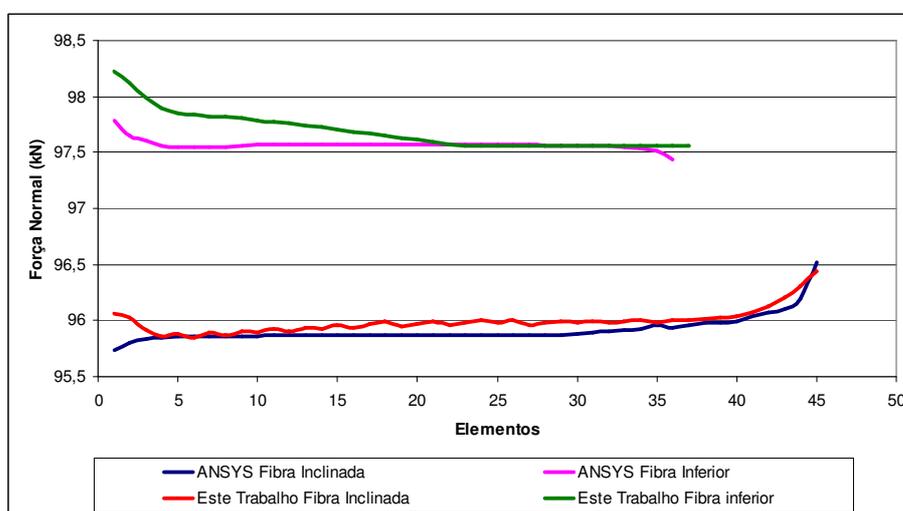


Figura 7.47 Comparativo da força normal ao longo das fibras inferior e inclinada.

Verifica-se, por meio da Fig. (7.47), que os resultados obtidos para a força normal nas duas fibras consideradas são concordantes com a resposta fornecida pelo modelo em elementos finitos construído via ANSYS. Assim esse resultado valida a formulação proposta e implementada.

Por fim, o comportamento das deformações elásticas, para as fibras inferior e inclinada, foi estudado sendo o comparativo dos resultados apresentados na Fig. (7.48). Assim como nos casos anteriores o modelo de acoplamento MEC-MEF implementado fornece bons resultados quando comparado ao modelo construído no programa ANSYS indicando a eficiência da formulação implementada.

Assim, de acordo com os resultados obtidos para esse exemplo constata-se que a formulação proposta fornece bons resultados quando comparado aos resultados

fornecidos por um modelo equivalente construído no software ANSYS. Portanto considera-se validada a formulação proposta e sua implementação.

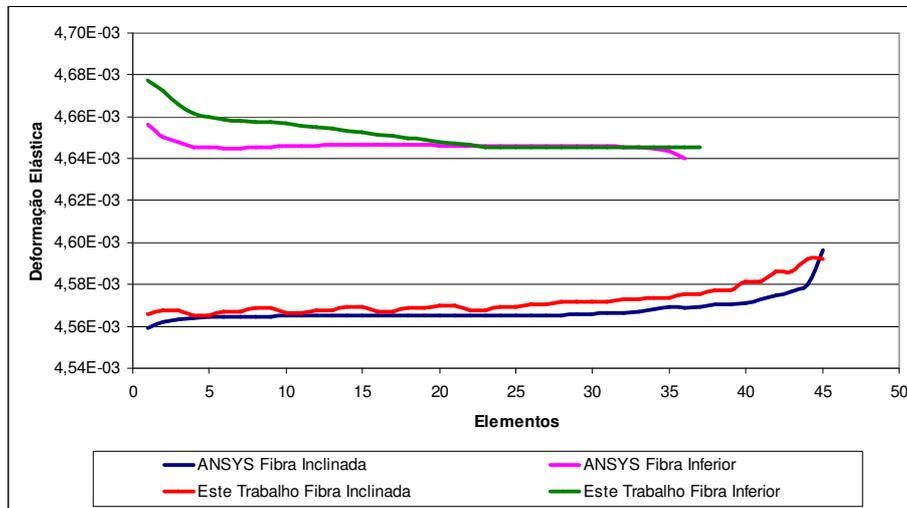


Figura 7.48 Comparativo da deformação elástica ao longo das fibras inferior e inclinada.

7.4.7 – Exemplo 7: Viga Biapoiada com Enrijecedores Longitudinais e Transversais

Nesse exemplo será discutida a estrutura mostrada na Fig. (7.49). Trata-se de uma estrutura plana bi-apoiada de três metros de comprimento por cinquenta centímetros de altura. O carregamento atuante na estrutura é constituído por uma força de superfície igual a 10000 kN/m prescrito em sua face superior. São distribuídas fibras no domínio da estrutura conforme indicam as linhas na cor azul, apresentadas na Fig. (7.49). As fibras são divididas em fibras superior, inferior e estribos as quais formam uma sistema de treliça no interior da estrutura. As propriedades dos materiais adotadas para a estrutura são as seguintes: para a matriz $E = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ e $\nu = 0,20$, para todas as fibras foi considerado $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ e módulo de encruamento isótropo $K^p = 2,3333 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, no entanto a área da seção transversal foi considerada diferente para cada uma delas. Para as fibras superiores tem-se $S_{\text{superiores}} = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, fibras inferiores $S_{\text{inferiores}} = 9,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ e estribos $S_{\text{estribos}} = 7,85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$. Para as fibras inferior e superior a tensão de escoamento foi admitida igual a $\sigma_y = 500 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$ e para os estribos essa grandeza foi considerada igual a $\sigma_y = 250 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$.

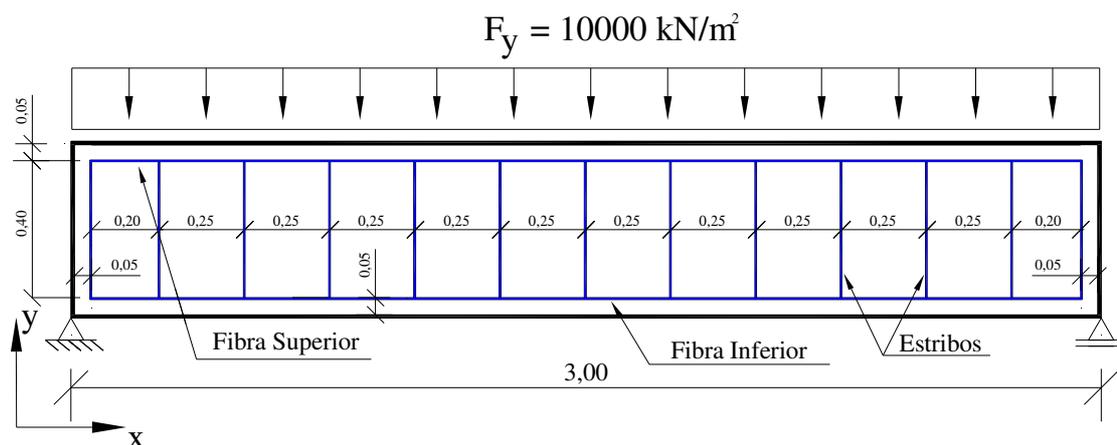


Figura 7.49 Estrutura Analisada, dimensões em m.

O contorno foi discretizado em 700 elementos enquanto nas fibras foram utilizados 250 elementos finitos. A regularização é executada fazendo-se o processo de mínimos quadrados nas equações fornecidas pelo MEF. Foram analisados os deslocamentos ao longo do contorno, as deformações elásticas e plásticas e as forças normais nas fibras superiores e inferiores e também no estribo central. Esses resultados foram comparados aos fornecidos por um modelo equivalente construído no software ANSYS. No modelo do ANSYS foram utilizados 15000 elementos, distribuídos em uma malha regular, para a discretização do domínio, enquanto nas fibras foram empregados 1100 elementos.

Os diagramas comparativos dos deslocamentos no contorno da estrutura são apresentados nas Fig. (7.50) e Fig. (7.51). Nesses diagramas os deslocamentos são apresentados em função da numeração dos nós no contorno sendo que essa numeração começa no canto inferior esquerdo e, a partir da face inferior, cresce no sentido anti-horário.

Conforme apresentam essas duas figuras, o modelo proposto de acoplamento MEC-MEF fornece bons resultados quando comparados ao modelo do ANSYS. Tanto os deslocamentos na direção x quanto na direção y obtidos por ambos modelos numéricos considerados convergem, validando assim a formulação do acoplamento MEC-MEF proposto e implementado.

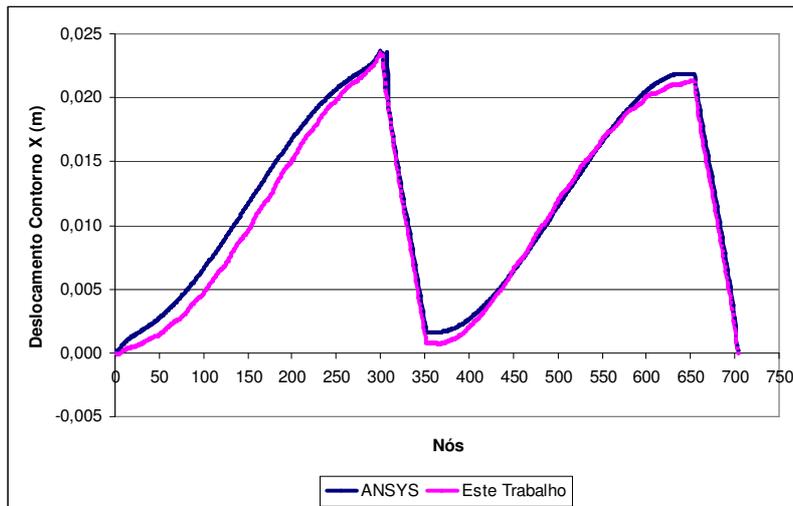


Figura 7.50 Comparativo dos deslocamentos direção x para os nós do contorno.

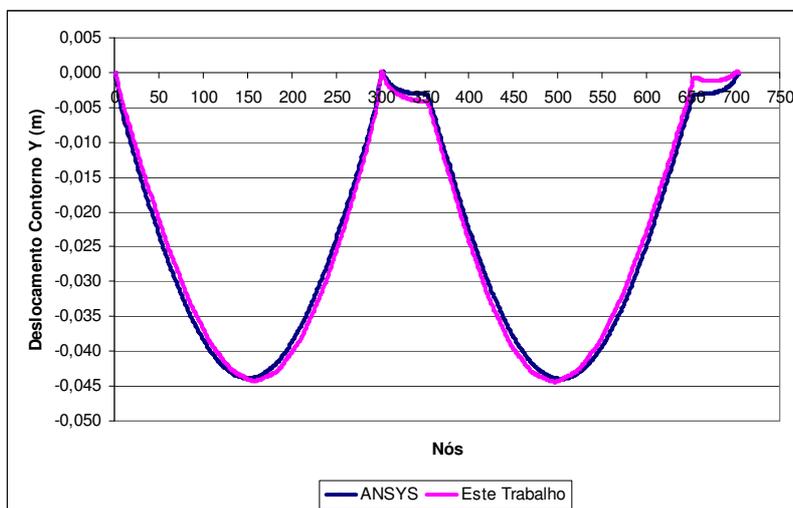


Figura 7.51 Comparativo dos deslocamentos direção y para os nós do contorno.

Os resultados obtidos para as fibras superior e inferior são mostrados nas Fig. (7.52), Fig. (7.53) e Fig. (7.54), onde são estudadas as deformações elásticas, plásticas e a força normal respectivamente. Nessas figuras essas grandezas são comparadas aos resultados fornecidos pelo programa ANSYS. Por meio dessas figuras constata-se que os resultados obtidos são concordantes entre os métodos numéricos empregados validando assim a formulação para o acoplamento MEC/MEF proposta e implementada.

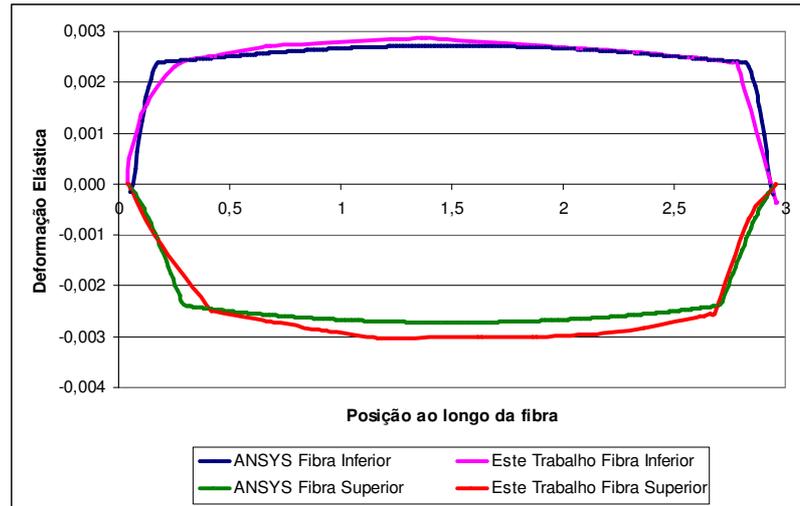


Figura 7.52 Comparativo das deformações elásticas nas fibras inferior e superior.

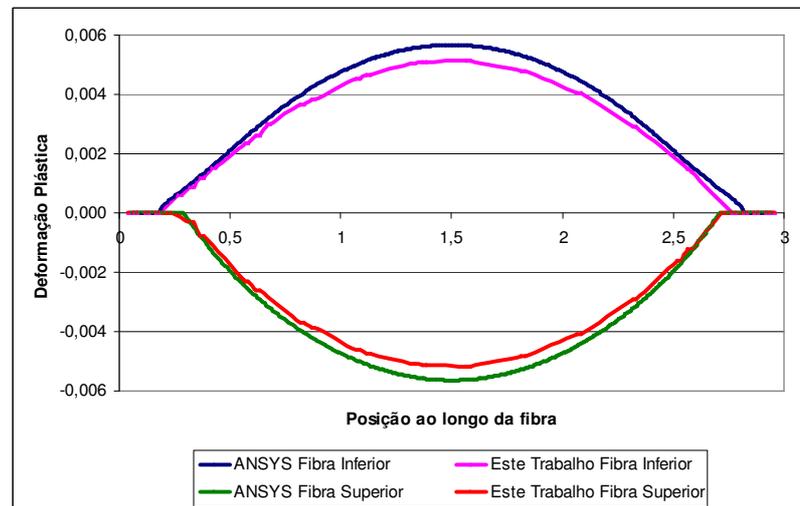


Figura 7.53 Comparativo das deformações plásticas nas fibras inferior e superior.

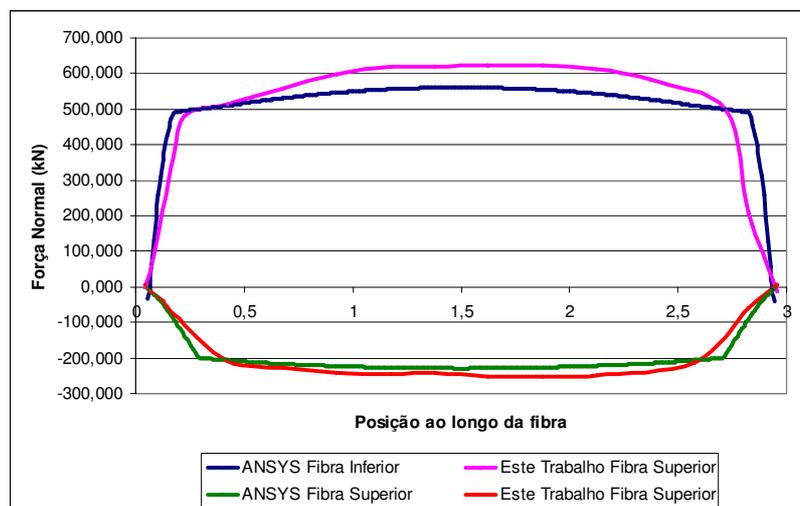


Figura 7.54 Comparativo das forças normais nas fibras inferior e superior.

Os resultados para as deformações elásticas, plásticas e força normal foram também comparados para o estribo central da estrutura, sendo os mesmos apresentados nas Fig. (7.55), Fig. (7.56) e Fig. (7.57). Nessas figuras as grandezas citadas são apresentadas em função da posição da fibra, a qual cresce de acordo com o crescimento da coordenada y dos elementos no estribo central.

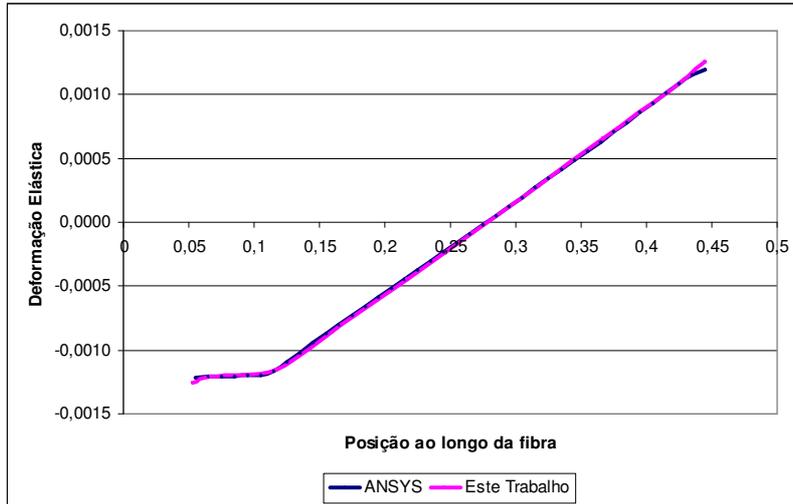


Figura 7.55 Comparativo deformações elásticas no estribo central.



Figura 7.56 Comparativo das deformações plásticas no estribo central.

Conforme mostram essas figuras os resultados obtidos pelo modelo de acoplamento MEC-MEF proposto são concordantes com os resultados fornecidos pelo programa ANSYS. Assim considera-se validada a formulação proposta e implementada.

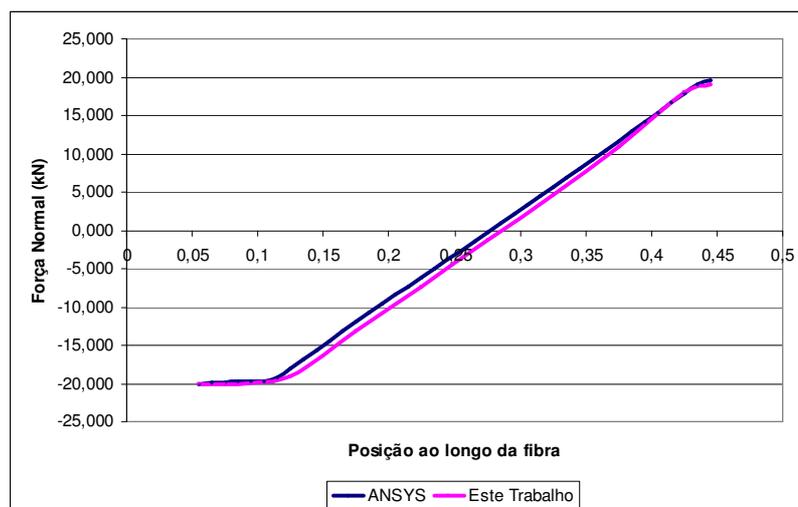


Figura 7.57 Comparativo da força normal no estribo central.

7.5 – Formulação do Acoplamento MEC-MEF Considerando o Escorregamento entre as Fibras e o Domínio

7.5.1 – Breve Revisão Bibliográfica sobre Aderência entre Fibras e Domínio

O interesse em se conhecer o complexo mecanismo da aderência entre dois meios, em especial entre o aço e o concreto, nas estruturas, apresentou substancial crescimento a partir da década de 40. Através de análises teóricas e/ou ensaios práticos, pesquisadores têm tido como interesse a explicação desse fenômeno para que, conceituada de forma mais realista, permita o desenvolvimento de métodos e modelos que serão aplicados na análise comportamental e no cálculo de estruturas.

WATSTEIN (1941) analisou a distribuição da tensão de aderência, ao longo de barras de aço, a partir do ensaio de arrancamento (pull-out test). Com o auxílio de extensômetros mecânicos, ele mediu o alongamento e a tensão na barra da parte encravada no cilindro de concreto. MYLREA (1948), através do ensaio e da análise da resistência ao arrancamento de barras encravadas no concreto, e de trechos de barras ancoradas em vigas simples submetidas à flexão, apresentou um estudo da distribuição e progressão da tensão de aderência e da diminuição da segurança causada pela falha na aderência.

NGO & SCORDELIS (1967) utilizaram o MEF para a construção de um modelo numérico para estudar o comportamento de vigas de concreto armado considerando os efeitos das tensões de aderência. Para a representação da rigidez da aderência entre as

barras de aço e o concreto, foi desenvolvido um elemento finito de ligação adimensional (bond link), colocado entre os elementos finitos que representam o concreto e os elementos finitos que representam as barras de aço. BRESLER & BERTERO (1968) investigaram a contribuição da história do carregamento e do meio ambiente na deterioração de estruturas de concreto armado a partir de ensaios de arrancamento submetidos a ciclos de carregamento e descarregamento. Este estudo foi baseado no efeito acumulativo de diversos danos: fissuração, redução da rigidez, dentre outros, sendo verificadas as suas influências na transferência de tensão entre o aço e o concreto. NILSON (1968), utilizando o MEF e o elemento de ligação apresentado por NGO & SCORDELIS (1967), desenvolveu modelos analíticos de representação de amostras de concreto armado submetidas a ensaio de arrancamento excêntrico. A rigidez dos elementos de ligação, utilizada nos cálculos, foi obtida a partir do desenvolvimento de uma função polinomial de terceiro grau que relaciona a tensão de aderência com o deslizamento entre a barra de aço e o concreto. Para o desenvolvimento dessa equação foram utilizados os resultados experimentais obtidos por BRESLER & BERTERO (1968). DUCATTI (1993) estudou a aderência entre o concreto de alto desempenho e a armadura através da realização de ensaios de arrancamento. Entre os objetivos visados destacaram-se: determinação da curva de comportamento de aderência e a comparação dos parâmetros obtidos para estas curvas com os regulamentados por normas internacionais de concreto comum; quantificação de diversos parâmetros sobre a relação tensão de aderência e deslizamento, e o desenvolvimento de um ensaio de arrancamento capaz de eliminar o efeito do confinamento do concreto circunvizinho à barra de arrancamento. BARBOSA (2004) apresenta uma análise comparativa e crítica de diversos modelos numéricos aplicáveis ao estudo da aderência aço-concreto. Dentre os modelos discutidos destacam-se os de TASSIOS (1979), CEB-FIP (1990) e MARTINS (1989).

ROSA (1994) apresentou uma análise comparativa das várias curvas de aderência x deslizamento entre o aço e o concreto, proposta na literatura, quando aplicadas ao MEF. Foi analisado o desempenho quanto ao tempo de processamento, número de interações necessárias, facilidade de utilização e precisão dos resultados obtidos quando comparados com os resultados de ensaio. YANKELEVSKY (1997) apresentou o desenvolvimento de um elemento finito bidimensional, que representa o comportamento da interface entre o aço e o concreto, para estruturas submetidas a

ensaio de tração. A rigidez dos elementos incorpora parâmetros do aço, do concreto e da relação entre a tensão de aderência x deslizamento.

SPACONE & LIMKATANYU (2000) discutem a importância da modelagem da aderência e do deslizamento no comportamento de estruturas de concreto armado sob carregamentos estático e dinâmico, apresentando formulações para implementação em modelos de elementos finitos, considerando os fenômenos de aderência e deslizamento na análise dessas estruturas. DESIR (1998) propôs um modelo numérico para simular o comportamento do fenômeno da aderência entre o aço e o concreto utilizando leis constitutivas baseadas nos conceitos da termodinâmica clássica, o qual considera a interface como sendo uma superfície de descontinuidade. Este modelo numérico foi incorporado na formulação de um elemento finito que representa tanto o aço quanto o concreto, onde cada material tem um comportamento próprio definido por uma lei constitutiva separada.

Conforme apresentado, diversos são os trabalhos que tratam do problema de aderência enrijecedor-meio contínuo via MEF. No entanto a abordagem desse problema por meio do MEC ainda é pouco estudada justificando inclusive as formulações apresentadas nesse capítulo. Apesar disso, deve-se destacar o trabalho de BOTTA (2003) o qual estudou o acoplamento MEC-MEF adotando o critério proposto pelo CEB-FIP (1990) para a análise do escorregamento entre armadura e concreto.

7.5.2 – Modelo Não Linear de Aderência CEB-FIP (1990)

Neste item será apresentada a formulação do acoplamento MEC-MEF considerando o comportamento não linear físico, para o escorregamento relativo entre as fibras e o meio contínuo, decorrente da perda de aderência entre os dois materiais. Visando a aplicação numérica da formulação, será descrito um modelo simplificado de aderência para as fibras e o meio contínuo. O modelo para a aderência adotado está proposto no código modelo CEB-FIP (1990) sendo voltado para aplicações em concreto armado.

O problema da perda de aderência entre enrijecedores e meio contínuo, em especial armadura e concreto, é bastante complexo. A natureza física do fenômeno é de difícil compreensão e são muitas as variáveis envolvidas na sua descrição. Além disto, é grande a variabilidade dos resultados experimentais. No entanto, do ponto de vista das formulações matemáticas para previsão do comportamento mecânico, interessa a lei

constitutiva que, no caso, estabelece a relação não-linear entre tensão de aderência e escorregamento.

A curva da Fig. (7.58) representa o modelo não-linear que relaciona força de aderência τ com escorregamento relativo s^L . O modelo tem os seguintes parâmetros: tensão de aderência máxima τ_{MAX} , tensão de aderência residual τ_F , valores característicos do escorregamento s_1^L , s_2^L e s_3^L , constante α da curva referente ao intervalo $[0, s_1^L]$. No código modelo os parâmetros são identificados em função do tipo de armadura, das condições de aderência e da resistência característica do concreto à compressão.

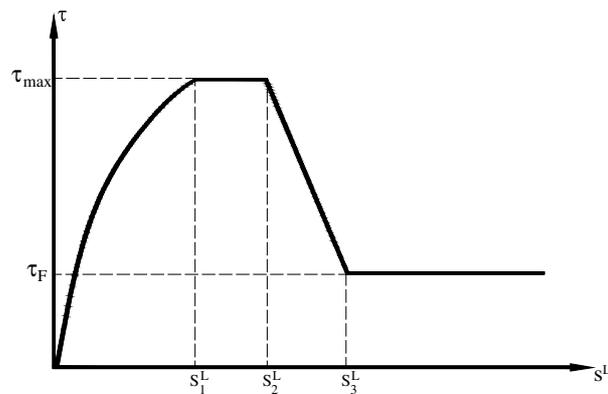


Figura 7.58 Relação tensão de aderência escorregamento do CEB-FIP (1990)

Na Fig. (7.58) têm-se as diferentes relações entre tensão de aderência, τ , e escorregamento, s^L , para cada trecho, dadas por:

$$\begin{aligned}
 \tau &= \tau_{MAX} \cdot \left(\frac{s^L}{s_1^L} \right)^\alpha && \text{para } [0, s_1^L] \\
 \tau &= \tau_{MAX} && \text{para } [s_1^L, s_2^L] \\
 \tau &= \frac{\tau_{MAX} \cdot s_3^L - \tau_F \cdot s_2^L + (\tau_F - \tau_{MAX}) \cdot s^L}{(s_3^L - s_2^L)} && \text{para } [s_2^L, s_3^L] \\
 \tau &= \tau_F && \text{para } s^L > s_3^L
 \end{aligned} \tag{7.68}$$

7.5.3 – Formulação Não Linear do Acoplamento MEC-MEF com Modelo de Escorregamento

O problema do escorregamento introduz uma nova variável nas equações, a variável s^L do escorregamento relativo entre os meios. O equilíbrio de forças,

conforme apresenta a Eq. (7.4), continua valendo mas a compatibilidade dos deslocamentos é agora expressa pela equação:

$$u^D = u \quad (7.69)$$

$$u^E = S^L + u^D \quad \Rightarrow \quad u^E = S^L + u \quad (7.70)$$

Ou seja, o deslocamento relativo S^L deve ser aproximado por elemento finito e introduzido nas equações de equilíbrio do MEF. Os campos com os deslocamentos u e S^L da Eq. (7.70) são independentes entre si, e podem ser aproximados por polinômios diferentes sobre cada elemento de barra. O deslocamento u é aproximado pelo mesmo polinômio cúbico definido no item 7.1. O deslocamento relativo S^L será nesta formulação aproximado linearmente. A razão dessa escolha é por ser o mesmo polinômio que aproxima as forças de superfície no elemento. Neste caso, devem coincidir os nós das aproximações das forças de superfície e do escorregamento, em vista da utilização do modelo não-linear da Fig. (7.58).

Com a introdução do escorregamento relativo S^L , a equação de equilíbrio Eq. (7.3) do elemento de fibra deve ser reescrita como:

$$[K^E]\{u^D\} + [K^S]\{S^L\} = [G^E]\{f^E\} + \{F^E\} \quad (7.71)$$

em que: K^S é a matriz de rigidez do elemento finito que multiplica os escorregamentos e $\{f^E\}$ as forças de superfície governadas pela lei de escorregamento.

A matriz K^S pode ser facilmente obtida a partir de K^E como:

$$[K^S] = \frac{E \cdot S}{L} \begin{bmatrix} 3.7 & -4.725 & 1.35 & -0.325 \\ -4.725 & 10.8 & -7.425 & 1.35 \\ 1.35 & -7.425 & 10.8 & -4.725 \\ -0.325 & 1.35 & -4.725 & 3.7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1^L \\ \frac{2 \cdot S_1^L + S_2^L}{3} \\ \frac{S_1^L + 2 \cdot S_2^L}{3} \\ S_2^L \end{Bmatrix} \Rightarrow [K^S] = \frac{E \cdot S}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_1^L \\ S_2^L \end{Bmatrix} \quad (7.72)$$

Sabendo-se que $\left[\frac{2 \cdot S_1^L + S_2^L}{3} \right]$ e $\left[\frac{S_1^L + 2 \cdot S_2^L}{3} \right]$ são valores de S^L nos terços do

comprimento do elemento.

7.5.4 – Exemplo 8: Análise do Arrancamento de um Enrijecedor

Neste exemplo considera-se a análise do comportamento da aderência de uma barra embutida num domínio plano. A estrutura considerada é a apresentada na Fig. (7.59) a qual é solicitada mediante a prescrição de um carregamento no nó de

extremidade da fibra. A carga aplicada na estrutura é equivalente a um deslocamento imposto de valor igual a $3,80 \cdot 10^{-3} m$. Será considerado apenas o efeito do escorregamento entre a barra e o meio, sendo que este último comporta-se elasticamente.

As propriedades dos materiais adotadas para o exemplo são as seguintes: para a matriz $E = 2,5 \cdot 10^7 kN/m^2$ e $\nu = 0,20$, para as fibras $E = 2,1 \cdot 10^8 kN/m^2$, área da seção transversal $S = 1,0 \cdot 10^{-4} m^2$, parâmetros do modelo de escorregamento $\tau_{MAX} = 10 \cdot 10^3 kN/m^2$, $\tau_F = 2 \cdot 10^3 kN/m^2$, $S_1^L = 6 \cdot 10^{-4} m$, $S_2^L = 7 \cdot 10^{-4} m$, $S_3^L = 1 \cdot 10^{-3} m$ e $\alpha = 1$.

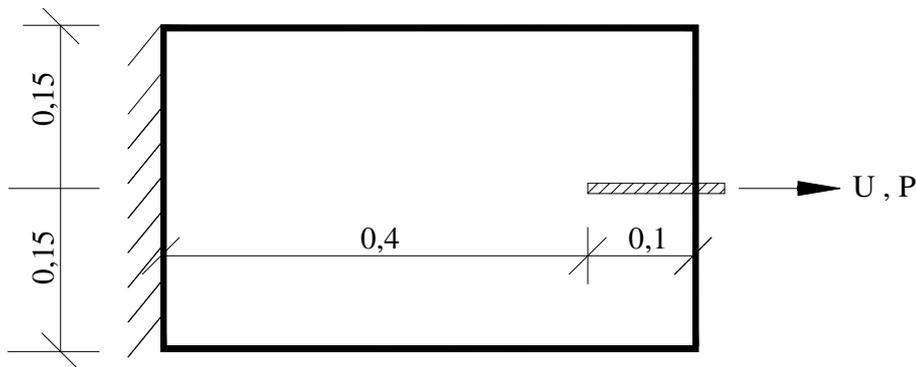


Figura 7.59 Estrutura a ser analisada. Dimensões em m.

Na Fig. (7.60) encontram-se as curvas com as forças de superfície ao longo do comprimento da fibra para sete valores diferentes de carga mostrando assim a evolução da reação ao arrancamento mobilizada pela barra em instantes diferentes.

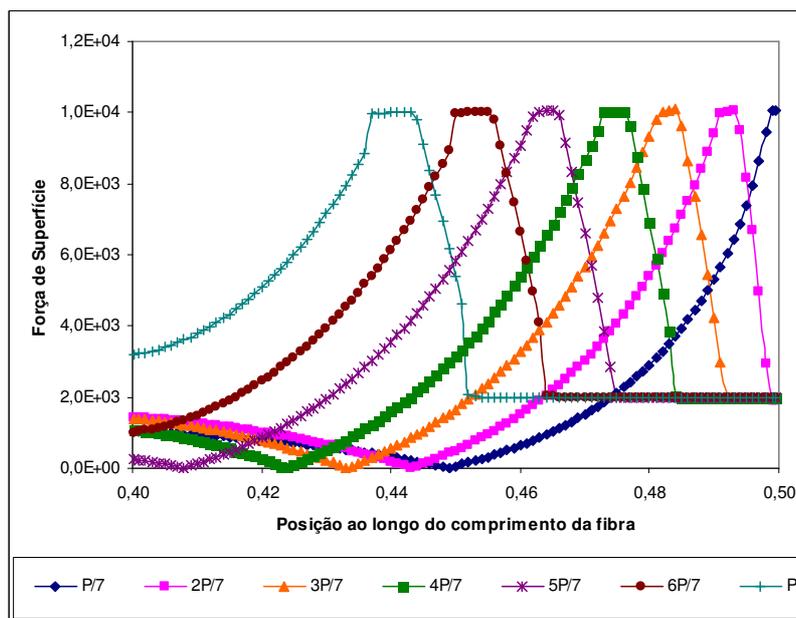


Figura 7.60 Diagrama das Forças de Superfície ao longo da barra.

Na Fig. (7.61) estão apresentadas as curvas com os deslocamentos dos pontos do meio contínuo localizados na interface com a fibra. Pode-se verificar nessa figura a diminuição no deslocamento, nos pontos localizados próximos ao ponto de aplicação da carga, à medida que o carregamento evolui indicando o arrancamento da fibra.

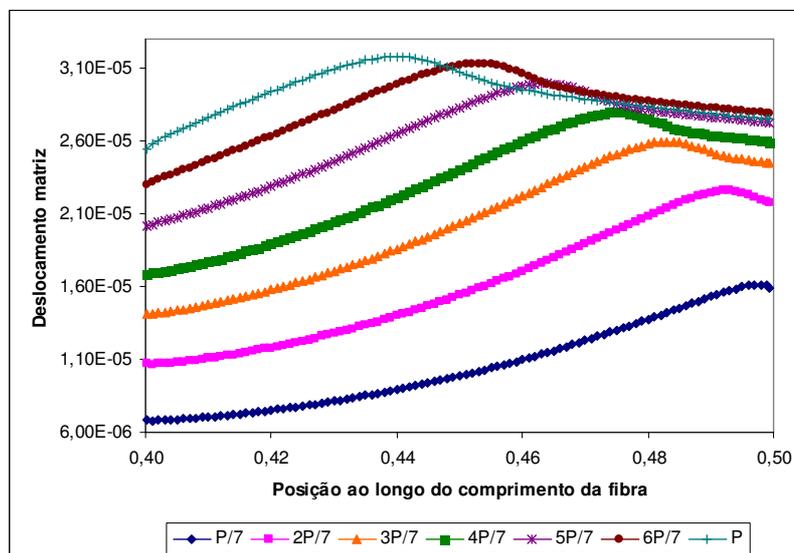


Figura 7.61 Diagrama dos deslocamentos da matriz ao longo da interface.

Finalmente na Fig. (7.62) são apresentadas as curvas com os deslocamentos relativos entre a fibra e o meio contínuo. Pela definição apresentada na Eq. (7.70) os deslocamentos da fibra são obtidos somando-se os resultados apresentados nas Fig. (7.61) e Fig. (7.62).

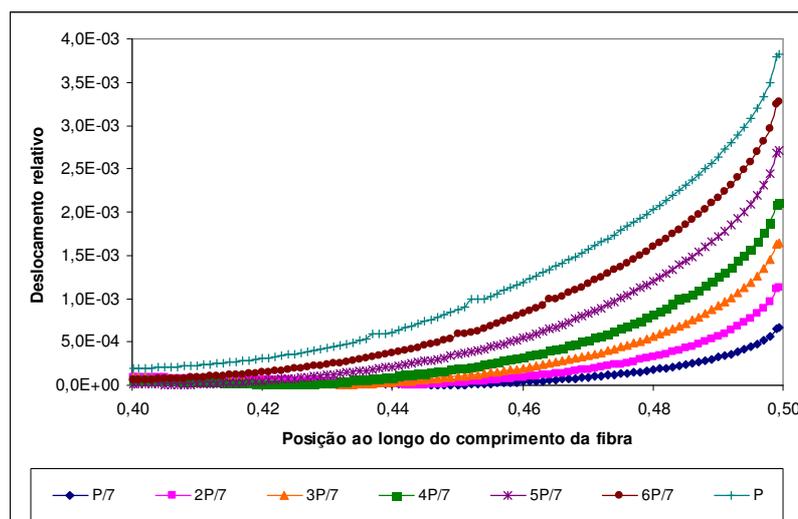


Figura 7.62 Diagrama dos deslocamentos relativos entre matriz e fibra.

7.5.5 – Exemplo 9: Propagação de Fissura em Domínio Enrijecido

Nesse exemplo será analisada a estrutura mostrada na Fig. (7.63). Trata-se de uma estrutura plana, de três metros de comprimento e um metro de altura, contendo dois enrijecedores posicionados longitudinalmente à estrutura como indicado na Fig. (7.63). Nessa estrutura ainda verifica-se a presença de uma fissura de comprimento igual a cinco centímetros posicionada no centro da face inferior da estrutura. O carregamento considerado é composto por um deslocamento prescrito, de valor igual a cinco centímetros atuante na direção x , aplicado na extremidade direita da estrutura. A estrutura ainda apresenta restrição aos deslocamentos x e y ao longo de toda sua extremidade esquerda.

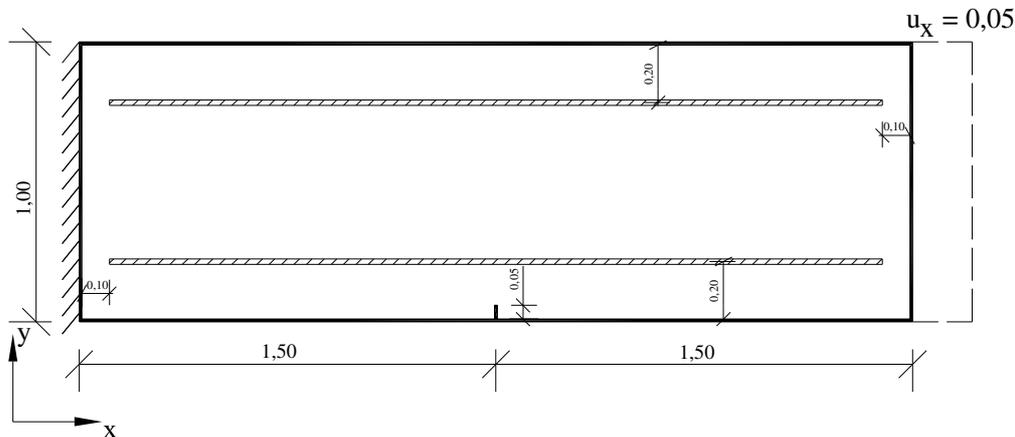


Figura 7.63 Estrutura a ser analisada. Dimensões em m.

As propriedades dos materiais adotadas para a estrutura são as seguintes: para a matriz $E = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,20$ e $K_c = 1,04 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^{3/2}$, para as fibras $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, área da seção transversal $S = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, parâmetros do modelo de escorregamento $\tau_{MAX} = 6 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$, $\tau_F = 5 \cdot 10^2 \text{ kN/m}^2$, $S_1^L = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $S_2^L = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $S_3^L = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ e $\alpha = 1$, tensão de escoamento $\sigma_y = 500 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$ módulo de encruamento isotrópico $K^p = 2,0 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$ e módulo de encruamento cinemático $H^p = 2,0 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$.

Inicialmente será analisado o comportamento de crescimento da fissura o qual é apresentado na Fig. (7.64). De acordo com esta figura verifica-se que a fissura cresce até a separação do corpo em duas partes. A lei de escorregamento permite que a fissura passe pelos enrijecedores e a separação da estrutura ocorra.

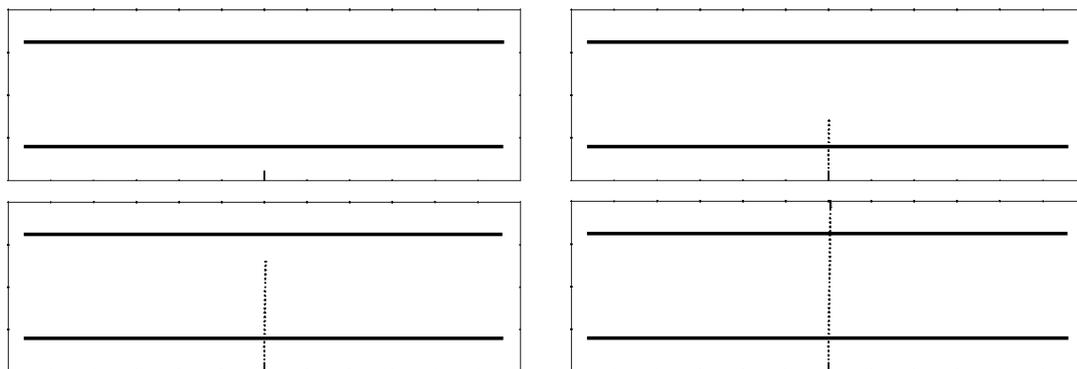


Figura 7.64 Crescimento da fissura. Configuração inicial até a ruptura.

Na Fig. (7.65) pode ser observado o comportamento do deslocamento na direção x para o último incremento de carga. Consta-se que houve a separação do corpo em duas partes e que essas partes são ligadas pelos enrijecedores presentes na estrutura. Na parte do corpo onde é aplicado o deslocamento prescrito verifica-se uma configuração próxima a um deslocamento de corpo rígido.

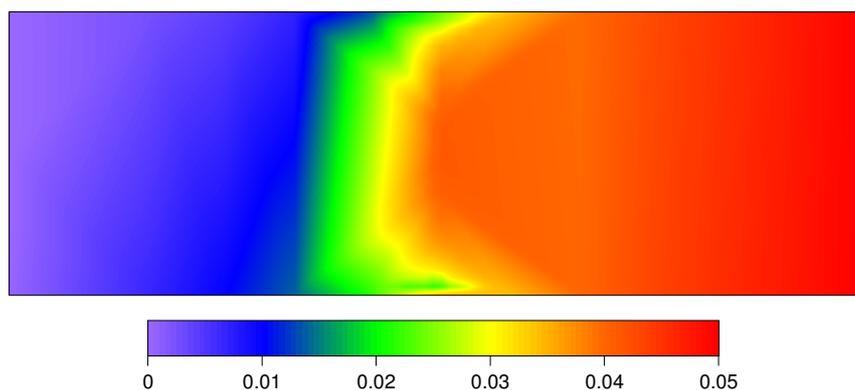


Figura 7.65 Deslocamento x (m) na estrutura para último incremento de carga.

Na Fig. (7.66) é apresentado o comportamento da deformação plástica nas fibras para a análise efetuada. Verifica-se ao longo das fibras a presença da deformação plástica, no entanto essa é mais acentuada no centro da estrutura, na região próxima a fissura, onde ocorrem os picos de tensão.

Na Fig. (7.67) é apresentado o resultado para o deslocamento axial das fibras e dos pontos, sob as fibras, que pertencem ao domínio. Pode-se observar o salto no deslocamento no ponto onde a fissura corta as fibras.

Finalmente, pode ser observado também o comportamento do escorregamento entre as fibras e o domínio. Conforme mostra a Fig. (7.68) pode-se verificar que essa grandeza é mais importante nas extremidades das fibras e também nos pontos de intersecção entre as fibras e a fissura.

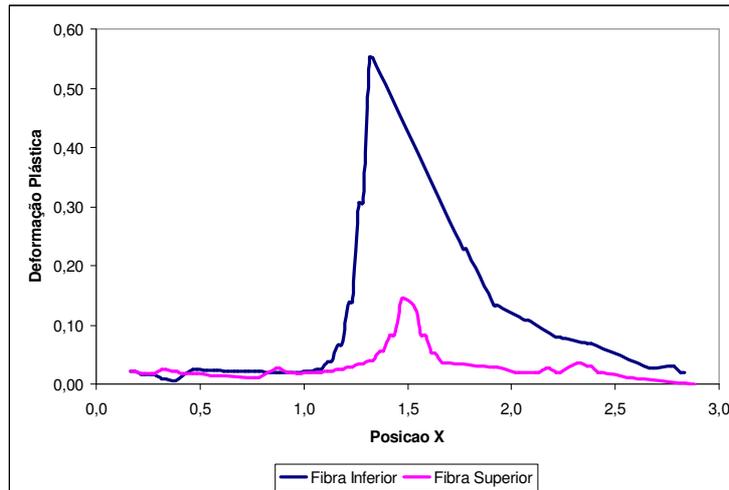


Figura 7.66 Deformação plástica nas fibras inferior e superior para o exemplo.

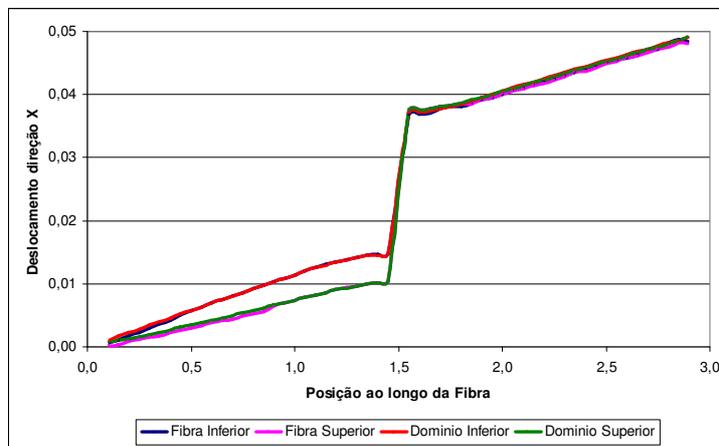


Figura 7.67 Deslocamento axial (m), direção x, fibras e domínio.

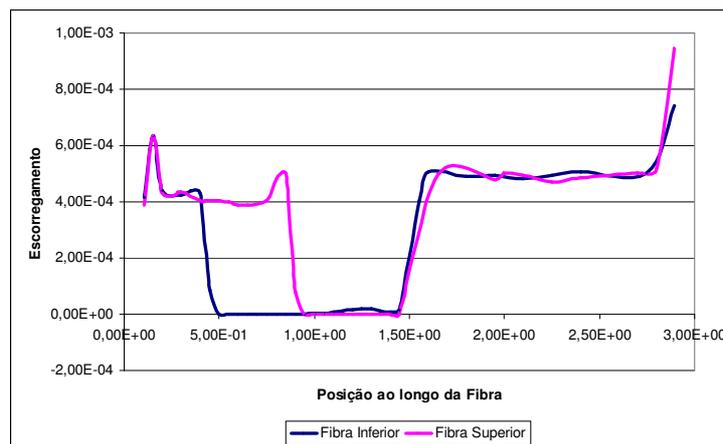


Figura 7.68 Escorregamento (m) entre fibra e domínio.

7.5.6 – Exemplo 10: Chapa com Múltiplas Fissuras e Enrijecedores

A estrutura considerada nesse exemplo é a mostrada na Fig. (7.69). Trata-se de uma estrutura plana, de três metros de comprimento e um metro de altura, contendo sete

enrijecedores posicionados no interior do domínio conforme indica a Fig. (7.69). Nessa estrutura observa-se ainda a presença de dez fissuras aleatoriamente distribuídas no corpo como apresentado na Fig. (7.70). O carregamento considerado é composto por um deslocamento prescrito, de valor igual a 0,014 m, atuante na direção x, aplicado na extremidade direita da estrutura. A estrutura ainda apresenta restrição aos deslocamentos x e y ao longo de toda sua extremidade esquerda.

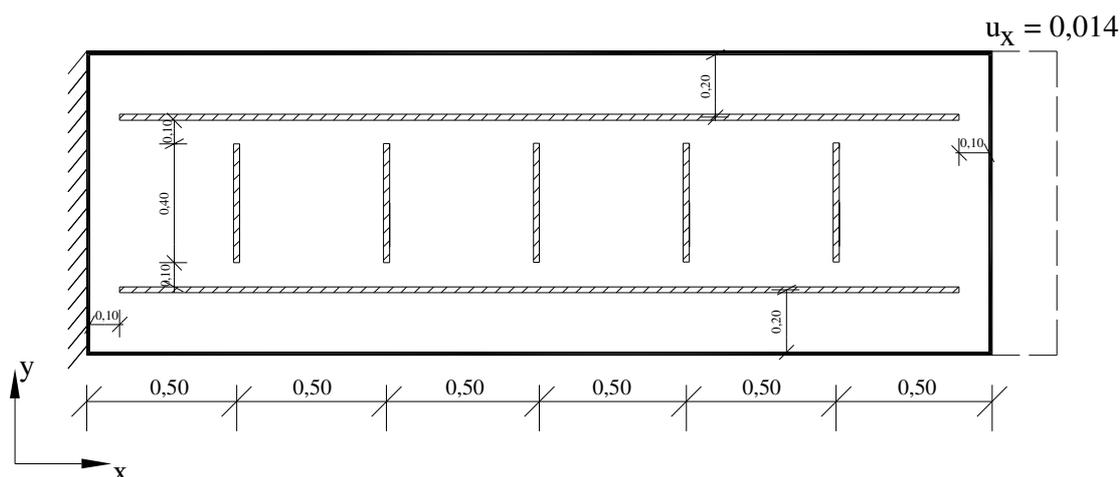


Figura 7.69 Estrutura considerada. Dimensões em m.

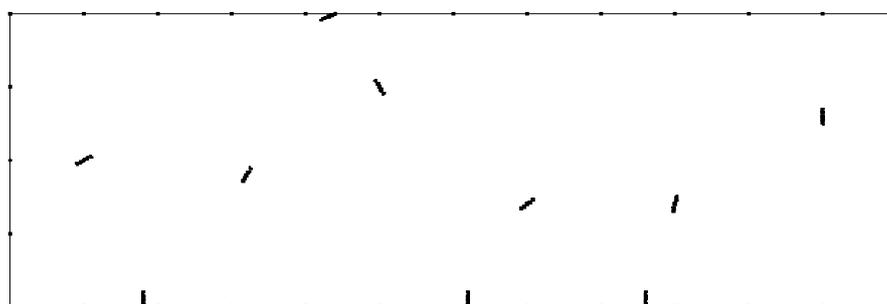


Figura 7.70 Distribuição aleatória das fissuras no corpo.

As propriedades dos materiais adotadas para a estrutura são as seguintes: para a matriz $E = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,20$ e $K_c = 1,04 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^{3/2}$, para as fibras $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, área da seção transversal $S = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, parâmetros do modelo de escorregamento $\tau_{MAX} = 6 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$, $\tau_F = 5 \cdot 10^2 \text{ kN/m}^2$, $S_1^L = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $S_2^L = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $S_3^L = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ e $\alpha = 1$, tensão de escoamento $\sigma_y = 500 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$ módulo de encruamento isótopo $K^p = 2,0 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$ e módulo de encruamento cinemático $H^p = 2,0 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$.

Inicialmente será analisado o comportamento do crescimento das fissuras conforme apresentado na Fig. (7.71).

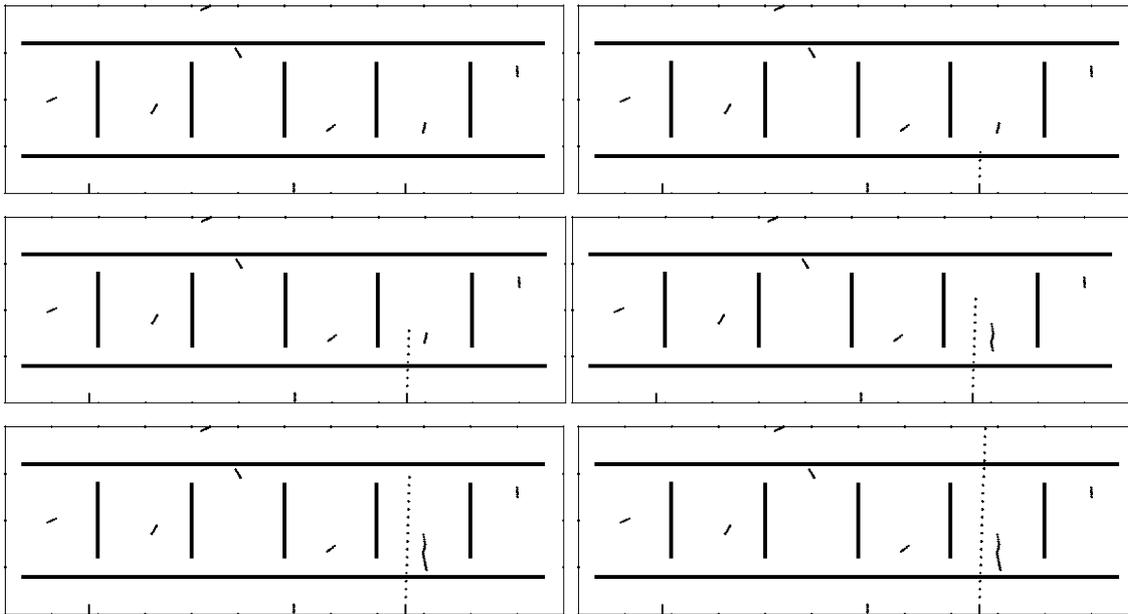


Figura 7.71 Crescimento da fissura. Configuração inicial até a ruptura.

Como apresentado na Fig. (7.71) constata-se que a fissura cresce até a separação do corpo em duas partes. A lei de escorregamento permite que a fissura passe pelos enrijecedores e a separação da estrutura ocorra.

Na Fig. (7.72) é apresentado o comportamento do deslocamento na direção x para o último incremento de carga. Verifica-se que houve a separação do corpo em duas partes e que essas partes são ligadas pelos enrijecedores presentes na estrutura. Na parte do corpo onde é aplicado o deslocamento prescrito verifica-se uma configuração que tende a um deslocamento de corpo rígido.

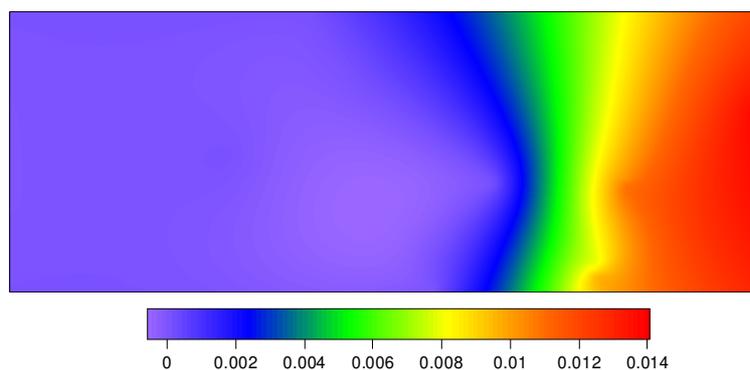


Figura 7.72 Deslocamento x (m) na estrutura para último incremento de carga.

Na Fig. (7.73) é apresentado o comportamento da deformação plástica nas fibras longitudinais da estrutura, superior e inferior, para a análise efetuada. Observa-se ao longo das fibras a presença da deformação plástica, porém essa é mais acentuada nas

regiões próximas as fissuras. No ponto onde a fissura que divide o corpo em duas partes intersecta as fibras é observada a maior deformação plástica.

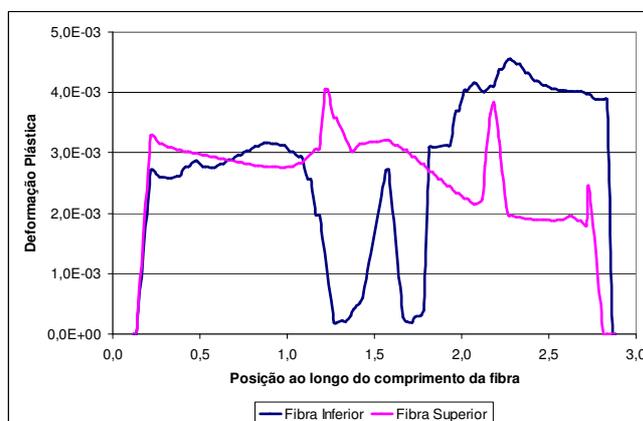


Figura 7.73 Deformação plástica nas fibras inferior e superior para o exemplo.

Na Fig. (7.74) é apresentado o resultado para o deslocamento axial das fibras e dos pontos, sob as fibras, que pertencem ao domínio. Pode-se observar o salto no deslocamento no ponto onde a fissura corta as fibras.

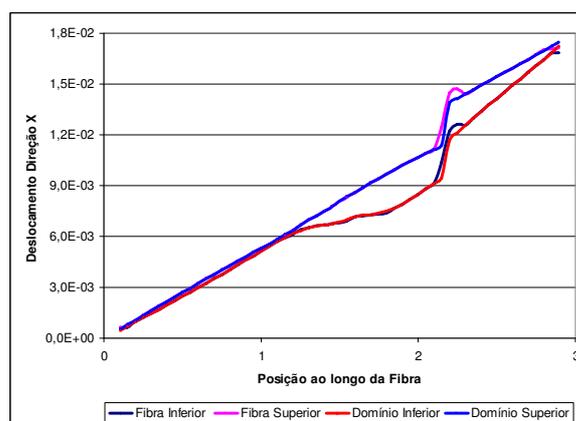


Figura 7.74 Deslocamento axial (m), direção x, fibras e domínio.

Como observado na Fig. (7.74), verifica-se que o escorregamento entre as fibras e o domínio é muito pequeno. Porém ele existe e é mais acentuado no ponto onde a fissura corta a fibra.

7.6 – Acoplamento MEC-MEF Aplicado à Análise de Domínios com Múltiplas Fibras Aleatoriamente Distribuídas no Domínio

Nesse tópico será discutida uma interessante aplicação do acoplamento MEC-MEF a qual refere-se à análise estrutural de domínios planos com a presença de

Capítulo 7 – Acoplamento entre Método dos Elementos de Contorno e Método dos Elementos Finitos

múltiplas fibras aleatoriamente distribuídas em seu interior. Essa combinação permite a abordagem e tratamento de alguns tipos de materiais compósitos, materiais estes que vem ganhando cada vez maior aplicação em engenharia, os quais unem uma matriz a um determinado tipo de enrijecedor com o objetivo de produzir um material composto que apresente um comportamento estrutural desejado.

No material compósito a eficiência do reforço com fibras pode ser avaliada de acordo com a melhoria de resistência e de tenacidade do conjunto comparado com a matriz frágil. Com relação às fibras, estas podem ser curtas, de alguns centímetros, ou longas, adicionadas no momento da moldagem, ou cortadas após a fabricação da peça. A escolha entre um tipo de fibra e uma matriz depende fundamentalmente da aplicação dada ao material compósito e também do desempenho requerido. O custo, em muitos casos, pode também ser um fator de escolha entre um ou outro componente.

Muitos são os trabalhos que abordam esse assunto dentre os quais podem ser citados: HYER (1997) o qual apresenta diversas informações sobre esses materiais abordando critérios de resistência e análise teórica de tensões. No trabalho de FIGUEIREDO (2000) é encontra uma fundamentação teórica abrangente sobre concreto reforçado com fibras de aço. Com relação ao estudo de cisalhamento em vigas, pesquisas recentes têm mostrado a melhoria de desempenho devido à introdução de fibras curtas de aço em elementos de concreto submetidos a solicitações tangenciais, como mostrado em KHUNTIA et al. (2000) e HOLANDA (2002).

Com relação a estudos numéricos deve ser destacado o trabalho de VANALLI (2004). Nesse trabalho o autor desenvolveu uma formulação, via MEF, para a análise de estruturas com a presença de múltiplas fibras distribuídas aleatoriamente no domínio. Na formulação de VANALLI (2004) a inserção das fibras dentro do elemento finito é feita sem que graus de liberdade extras sejam adicionados na análise. Dessa forma, tal formulação, além de fornecer bons resultados, torna-se muito eficiente do ponto de vista computacional. Com o acoplamento MEC-MEF, da forma como é feita nesse trabalho, graus de liberdade extras são acrescentados na análise para que as condições de equilíbrio e compatibilidade sejam obedecidas. No entanto deve ser destacado que acoplamentos MEC-MEF como o feito nesse trabalho não são encontrados na literatura o que justifica seu desenvolvimento.

Com relação ao acoplamento MEC-MEF para as fibras distribuídas aleatoriamente no domínio a formulação empregada é a mesma já apresentada nesse capítulo, onde os efeitos de plastificação e escorregamento são considerados nos

enrijecedores. A diferença se faz na disposição dos enrijecedores dentro do domínio, a qual é feita aleatoriamente. Para isso é utilizada a geração aleatória das coordenadas do centro da fibra e de seu ângulo de inclinação em relação ao sistema global de coordenadas. O comprimento da fibra pode também ser definido como aleatório, porém na maioria das aplicações de engenharia as fibras têm o mesmo comprimento. Sendo assim foi implementado no código computacional desenvolvido essas duas opções de tal forma que o usuário possa escolher a opção que melhor se adapte a estrutura estudada.

7.6.1 – Exemplo 11: Estrutura Plana com Múltiplos Enrijecedores

A estrutura considerada nesse exemplo é a mostrada na Fig. (7.75). Trata-se de uma estrutura plana, de dois metros de comprimento e um metro de altura, contendo dois enrijecedores longitudinais principais posicionados no interior do domínio. Nessa estrutura observa-se ainda a presença de vinte fibras aleatoriamente distribuídas no interior do domínio como apresenta a Fig. (7.76).

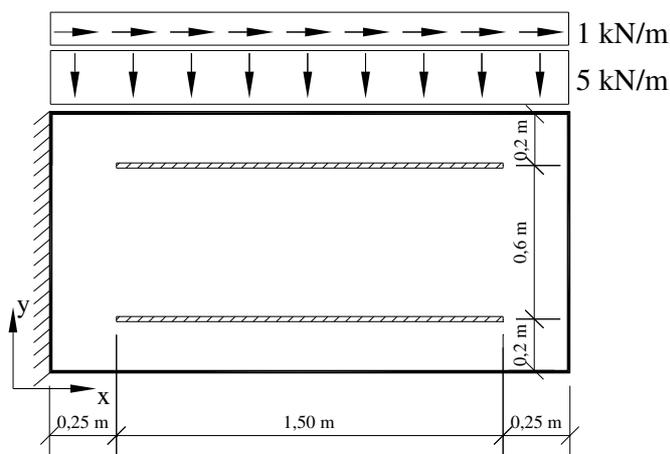


Figura 7.75 Estrutura analisada.

O carregamento considerado é composto por duas forças de superfície prescritas na face superior da estrutura. A intensidade do carregamento assim como seu sentido estão indicados na Fig. (7.75). As restrições ao deslocamento estão aplicadas em uma das faces da estrutura. A estrutura apresenta um engaste em sua extremidade esquerda.

As propriedades dos materiais adotadas para a estrutura são as seguintes: para a matriz $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$ e $\nu = 0,30$, para as fibras longitudinais principais $E_{fp} = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, área da seção transversal $S_{fp} = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, tensão de escoamento

$\sigma_{y_{fp}} = 500 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$ módulo de encruamento isótropo $K_{fp}^p = 2,333 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$. Para as fibras aleatoriamente distribuídas $E_{fad} = 2,1 \cdot 10^9 \text{ kN/m}^2$ área da seção transversal $S_{fad} = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, tensão de escoamento $\sigma_{y_{fad}} = 50 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$ módulo de encruamento isótropo $K_{fp}^p = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, módulo de encruamento cinemático $H_{fad}^p = 2,5 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$. Para o modelo de escorregamento os parâmetros adotados foram $\tau_{MAX} = 6 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$, $\tau_F = 5 \cdot 10^2 \text{ kN/m}^2$, $S_1^L = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $S_2^L = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $S_3^L = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ e $\alpha = 1$.



Figura 7.76 Distribuição aleatória das fibras no domínio.

Inicialmente pode ser analisado o comportamento dos deslocamentos da estrutura. Nas Fig. (7.77) e Fig. (7.78) são apresentados os resultados dos deslocamentos da estrutura nas direções x e y respectivamente. Como pode ser visto nessas duas figuras os deslocamentos observados são compatíveis com o carregamento atuante. Na Fig. (7.77) constata-se que o deslocamento, na direção x, da borda superior é mais acentuado que na borda inferior oriundo da presença do carregamento na face superior da estrutura. Com relação ao deslocamento na direção Y percebe-se que este é mais acentuado na extremidade direita da estrutura fruto da sua configuração de balanço.

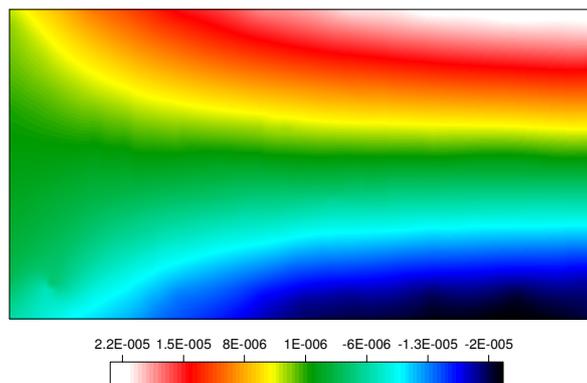


Figura 7.77 Deslocamento da estrutura (m) na direção x.

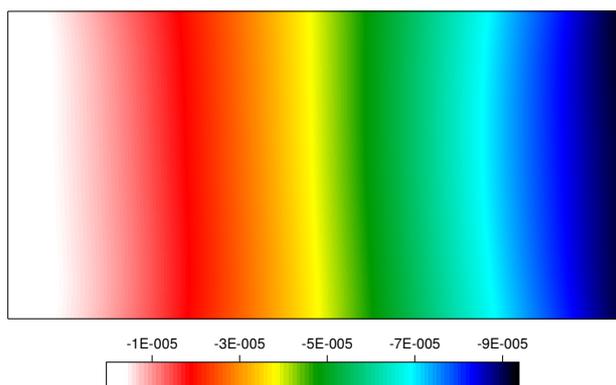


Figura 7.78 Deslocamento da estrutura (m) na direção Y.

O comportamento das tensões foi também estudado. Nas Fig.(7.79), Fig. (7.80) e Fig. (7.81) estão apresentados o comportamento das tensões principais de tração, σ_1 , tensões na direção, σ_x , e tensões cisalhantes, τ_{xy} . Por meio dessas três figuras pode-se verificar que existe uma concentração de tensão próxima às extremidades das fibras. Esse resultado é fruto da mudança brusca de rigidez existente na mudança entre fibra e matriz.

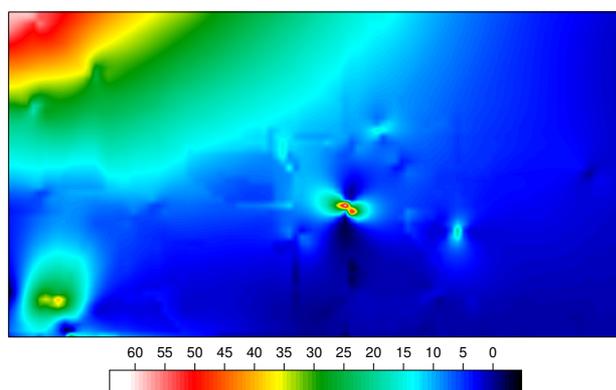


Figura 7.79 Comportamento das tensões principais de tração, σ_1 .

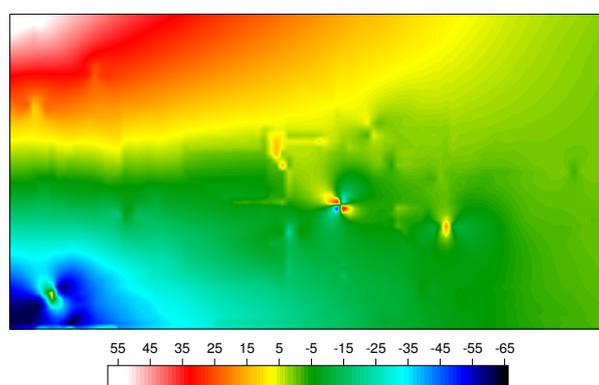


Figura 7.80 Comportamento das tensões na direção x, σ_x .

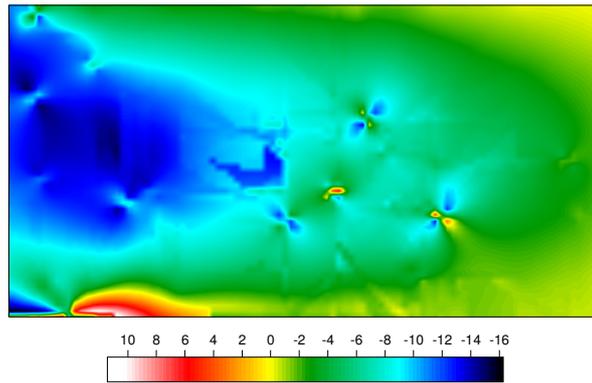


Figura 7.81 Comportamento das tensões de cisalhamento, τ_{xy} .

7.6.2 – Exemplo 12: Propagação de Fissura em Chapa com Múltiplos Enrijecedores

A estrutura considerada nesse exemplo é a apresentada na Fig. (7.82). Trata-se de uma estrutura plana não simétrica que contém uma fissura posicionada em uma de suas faces. O carregamento considerado é composto por dois deslocamentos prescritos na face inferior da estrutura. As intensidades dos deslocamentos prescritos bem como seus sentidos estão indicados na Fig. (7.82). As restrições ao deslocamento, as quais estão também mostradas nessa figura, estão aplicadas em duas das faces da estrutura, duas das faces da estrutura estão impedidas de deslocar nas direções x e y . A fissura presente na estrutura tem comprimento igual a 0,15 m.

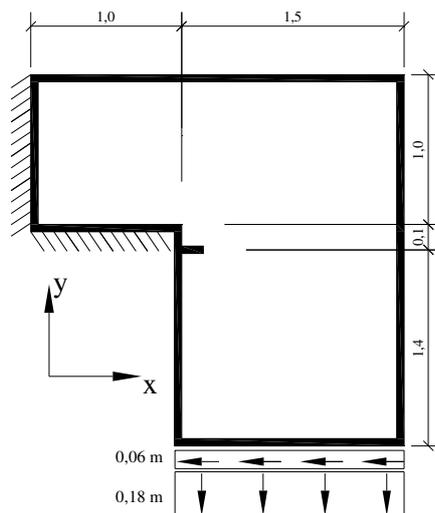


Figura 7.82 Estrutura e carregamentos considerados. Dimensões em m.

Na análise desta estrutura foi considerada também a presença de fibras as quais foram aleatoriamente posicionadas no domínio da estrutura. Foram consideradas na análise 25 fibras as quais podem ser visualizadas pelos traços vermelhos apresentados

Capítulo 7 – Acoplamento entre Método dos Elementos de Contorno e Método dos Elementos Finitos

na Fig. (7.83). As propriedades dos materiais adotadas para a estrutura são as seguintes: para a matriz $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,30$ e $K_c = 7,4 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^{3/2}$, para as fibras aleatoriamente distribuídas $E_{fad} = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ área da seção transversal $S_{fad} = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, tensão de escoamento $\sigma_{yfad} = 500 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$ módulo de encruamento isótropo $K_{fp}^p = 2,3333 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$. Para o modelo de escorregamento os parâmetros adotados foram $\tau_{MAX} = 6 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$, $\tau_F = 5 \cdot 10^2 \text{ kN/m}^2$, $S_1^L = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $S_2^L = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $S_3^L = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ e $\alpha = 1$.

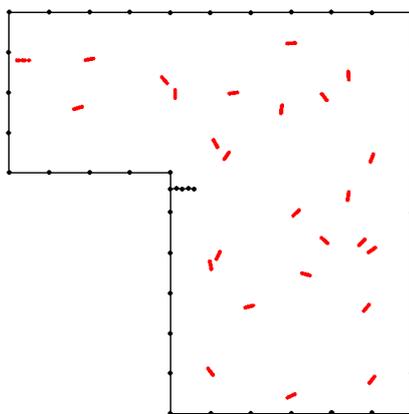


Figura 7.83 Fibras aleatoriamente distribuídas no domínio.

Inicialmente pode ser estudada a trajetória de crescimento da fissura presente na estrutura. Como mostra a Fig. (7.84) pode ser verificado que a fissura partiu a estrutura em duas partes, levando a estrutura ao colapso. Constata-se também por meio dessa figura que a fissura propagou em modo misto uma vez que a inclinação de sua trajetória de crescimento é diferente da inclinação da fissura inicial.

Os resultados para os deslocamentos da estrutura foram também estudados. As repostas para os deslocamentos nas direções y e x são mostradas nas Fig. (7.85) e Fig. (7.86). Por meio da Fig. (7.84) constatou-se que a fissura partiu o domínio em análise em duas partes. Esse resultado é confirmado pelas Fig. (7.85) e Fig. (7.86) onde observa-se o comportamento de deslocamento de corpo rígido da parte inferior da estrutura, região esta onde foram prescritos os deslocamentos não nulos. Através desse resultado verifica-se que o procedimento via MEC é estável e conduz a bons resultados.

O comportamento dos fatores de intensidade de tensão estão apresentados nas Fig. (7.87) e Fig. (7.88). Por meio dessas figuras verifica-se que a fissura propaga prioritariamente em modo I, já que os valores para os fatores de intensidade de tensão para o modo I e equivalentes são praticamente iguais. Exceção é feita no início e no fim

Capítulo 7 – Acoplamento entre Método dos Elementos de Contorno e Método dos Elementos Finitos

da propagação uma vez que nesses dois instantes o fator de intensidade de tensão no modo II apresenta-se mais ativo, o que pode ser visto inclusive pela mudança na direção da trajetória de crescimento da fissura.

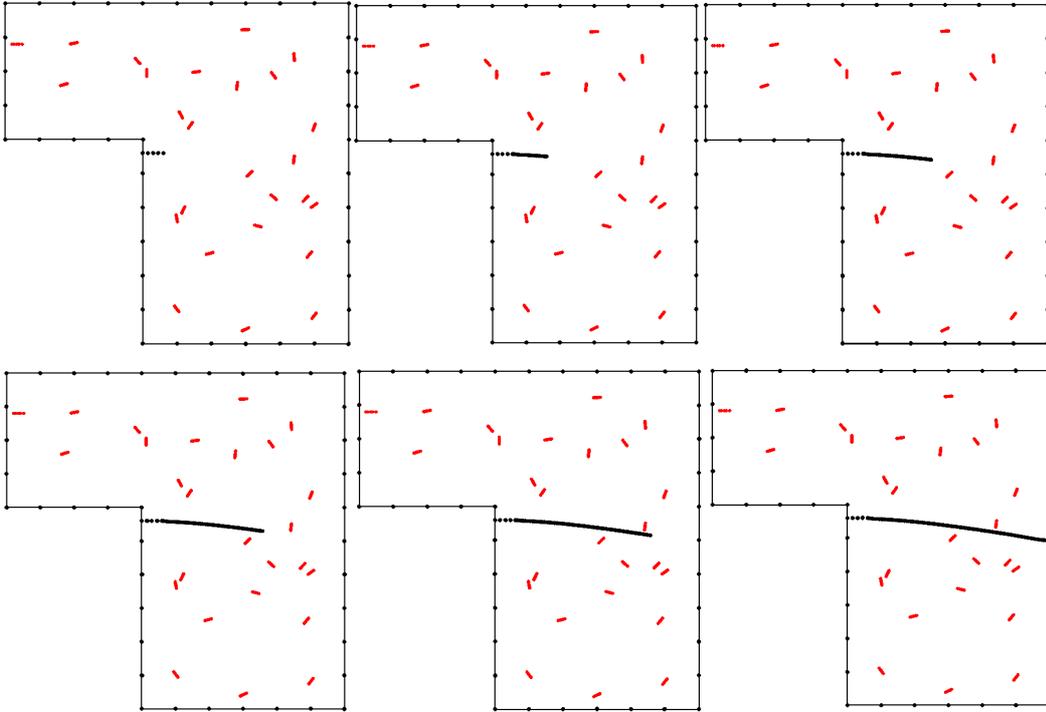


Figura 7.84 Crescimento da fissura até a ruptura do corpo.

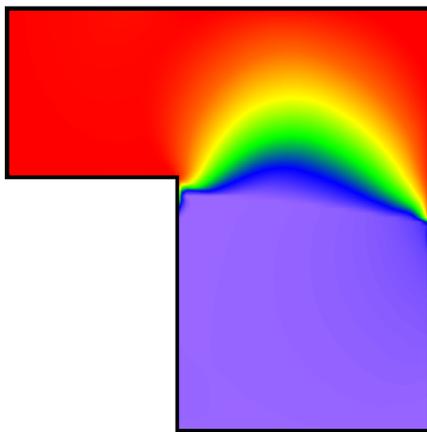


Figura 7.85 Deslocamento (m) direção Y.

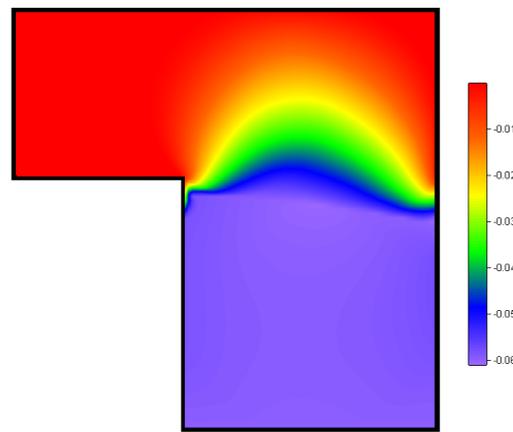


Figura 7.86 Deslocamento (m) direção X.

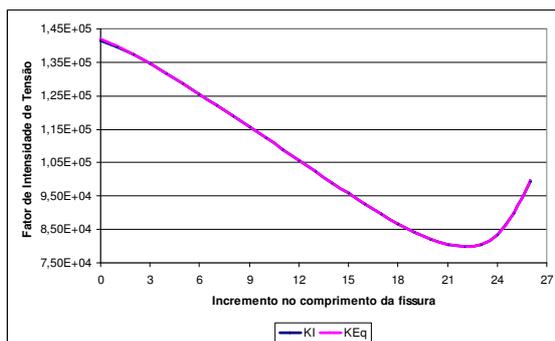


Figura 7.87 Comportamento de K_I e K_{Eq} .

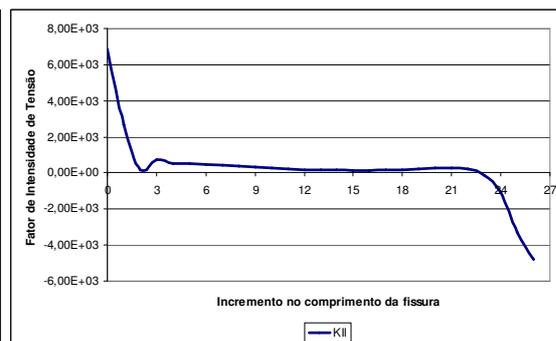


Figura 7.88 Comportamento de K_{II} .

8. – Modelo de Fadiga para Metais e Materiais Frágeis

Neste capítulo serão apresentados detalhes sobre a implementação do modelo desenvolvido para a análise da propagação de fissuras sob fadiga em metais e materiais frágeis. A lei adotada para governar o crescimento das fissuras com relação ao número de ciclos de carga é a consagrada lei de Paris. Apesar de existirem diversas leis empíricas para a previsão da vida útil estrutural, a lei de Paris é a mais utilizada nos trabalhos existentes na literatura e, além disso, conduz a resultados precisos. Esse critério foi apresentado nos trabalhos de PARIS et. al (1961) e PARIS & ERDOGAN (1963) e, conforme discutido no capítulo 3, a lei de Paris descreve adequadamente somente a propagação na região II (região esta que é a de maior importância na vida de fadiga de uma estrutura). A lei de Paris pode ser expressa por meio da seguinte relação:

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^n \quad (8.1)$$

em que: C e n são constantes do material e ΔK a amplitude de variação dos fatores de intensidade de tensão.

8.1 – Estimativa da Vida Útil Estrutural

Considerando que ΔK aumenta com o comprimento da fissura, durante carregamentos com amplitude constante, e considerando que da/dN depende de ΔK , pode-se concluir que a razão de crescimento não será constante, mas aumenta com o comprimento da fissura. Este comportamento da taxa da/dN obriga o uso de procedimentos numéricos para a integração da Eq. (8.1) de forma a se estimar a vida útil e o crescimento da fissura.

Como mostrado nos modelos descritos no capítulo 3, a taxa de crescimento da fissura da/dN é dada como função de diversos fatores podendo ser escrita de forma geral como:

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, \Delta K_{th}, R, K_{Ic}) \quad (8.2)$$

O número de ciclos para o crescimento da fissura pode ser calculado resolvendo esta equação para dN . Integrando os dois lados da Eq. (8.2) tem-se:

$$\int_{N_i}^{N_f} dN = N_f - N_i = N_{if} = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{f(\Delta K, \Delta K_{th}, R, K_{Ic})} \quad (8.3)$$

Esta integral fornece o número de ciclos necessários para a fissura crescer de um comprimento inicial a_i , correspondente a N_i , para um comprimento final a_f , correspondente a N_f . A variação do número de ciclos é dada por N_{if} . A integral pode ser avaliada analiticamente ou numericamente, desde que a amplitude de variação do fator de intensidade de tensões seja conhecida.

Assim, o procedimento para analisar o comportamento do crescimento das fissuras submetidas à fadiga pode ser sistematizado como:

- 1- Através de uma adequada inspeção no elemento estrutural com defeito determinar o comprimento inicial, a_0 , da fissura presente, e estimar o número de ciclos necessário para iniciá-la. Por simplicidade, neste trabalho a determinação das posições das fissuras iniciais e dos comprimentos iniciais é feita de forma arbitrária.
- 2- Escolher o modelo empírico conveniente para a determinação da estimativa da vida à fadiga. Neste trabalho é escolhida a lei de Paris.
- 3- Assumir um incremento Δa para o crescimento de cada fissura em cada passo.
- 4- Determinar a amplitude de variação dos fatores de intensidade de tensão. Nesse trabalho essas grandezas são calculadas pela técnica de correlação de deslocamentos.
- 5- Escolher uma teoria de interação de modos de fraturamento para a determinação da direção de propagação das fissuras em cada passo. As teorias de interação de modos utilizadas neste trabalho foram descritas no capítulo 3.
- 6- Integrar a lei de Paris para determinar o número de ciclos necessário para cada fissura atingir um comprimento crítico. Neste trabalho, esta integração é feita numericamente.

O número de ciclos total, N_{Total} , é dado pela soma do número de ciclos estimados para a nucleação da fissura, $N_{Inicial}$, e o número de ciclos da propagação da fissura, $N_{Propagação}$. Assim:

$$N_{Total} = N_{Inicial} + N_{Propagação} \quad (8.4)$$

Vale ressaltar que o procedimento descrito acima é baseado em uma propagação fundamentalmente de modo I de fraturamento. Isso porque os modelos empíricos descritos na literatura estão baseados apenas no modo de abertura. No entanto, neste trabalho, o procedimento é estendido a modos mistos de propagação. Isso só tem validade porque é permitido que as fissuras propaguem mudando de direção. Como consequência da mudança de orientação das fissuras, a ordem de grandeza do fator de intensidade de tensão para modo II será bem menor do que para o modo I, isto é, quando é permitido que as fissuras mudem de direção, o seu comportamento pode ser considerado como fundamentalmente de modo I, o que justifica o uso desses modelos empíricos.

O código computacional desenvolvido para o problema de fadiga ainda leva em conta dois critérios para que se possa distinguir o problema de fadiga do problema de fratura. Primeiro o programa proposto já verifica se o fator de intensidade de tensão equivalente, na situação de máxima sollicitação, é maior que K_{Ic} . Caso essa situação ocorra a análise é interrompida, pois o problema passa a ser de fratura e não mais de fadiga. Além disso, é verificada também se a taxa de crescimento das fissuras por ciclo, da/dN , é maior que $0,1 \text{ mm/ciclo}$ (esse valor é recomendado em PIMENTA et. al. (2001)). Em caso afirmativo a análise também é interrompida, pois, assim no caso anterior, o problema passa a ser de fratura e não mais de fadiga.

Por fim, ainda é verificada a amplitude de variação do fator de intensidade de tensão, ΔK . Caso essa grandeza seja inferior a ΔK_{th} o analista é informado, pois nessa situação a ocorrência do crescimento das fissuras por fadiga é desprezível.

8.2 – Exemplo 1: Viga Solicitada à Flexão em Três Pontos

O primeiro exemplo a ser analisado nesse capítulo refere-se a estrutura apresentada na Fig. (8.1). Trata-se de uma viga, com 5,0 metros de comprimento e 1,25 metros de altura, sollicitada a flexão em três pontos apresentando um entalhe inicial, de comprimento igual a 0,275 metros, simetricamente posicionado em sua face inferior. O carregamento atuante na estrutura é composto por uma carga concentrada simetricamente posicionada em sua face superior. Esse carregamento é considerado como cíclico apresentando o comportamento ilustrado na Fig. (8.2).

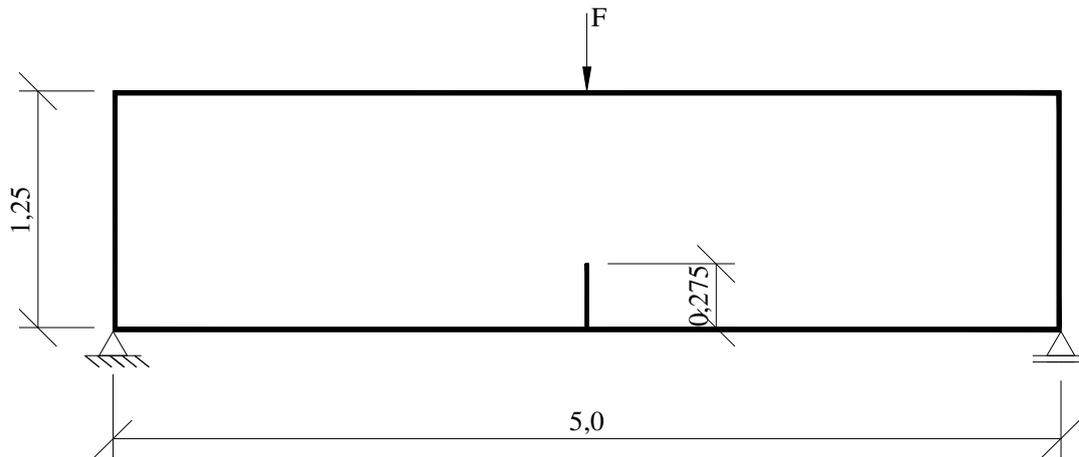


Figura 8.1 Viga a flexão em três pontos. Dimensões em m.

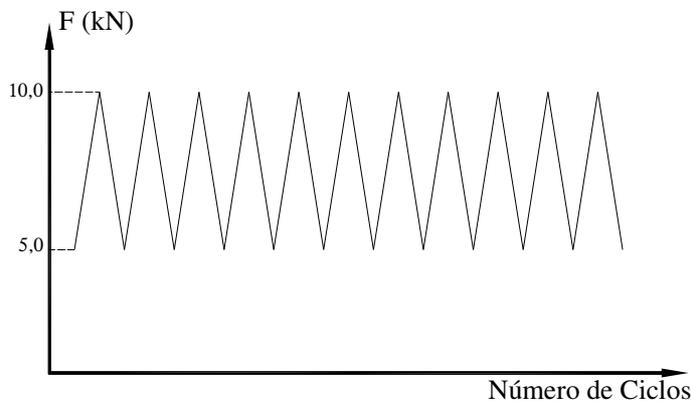


Figura 8.2 Configuração para o carregamento considerado.

Foram adotadas as seguintes propriedades para o material constituinte da estrutura: módulo de elasticidade longitudinal $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$, tenacidade ao fraturamento $K_c = 1,04 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^{3/2}$, tenacidade limitante $\Delta K_{th} = 1,0 \text{ kN/m}^{3/2}$ e parâmetros da lei de Paris $C = 3,0 \cdot 10^{-11} \text{ m/ciclos} \left(\text{kN/m}^{3/2} \right)^n$ e $n = 2,92$.

Foram empregados 120 elementos na discretização da estrutura sendo considerado o incremento no comprimento da fissura igual a $\Delta a = 0,05 \text{ m}$.

Esse exemplo é utilizado aqui para a validação da formulação proposta. Os resultados obtidos na análise da estrutura apresentada na Fig. (8.1) foram comparados aos previstos pela resposta analítica desse problema mostrada no capítulo 6 e enumerada como Eq. (6.33). Inicialmente foram comparados os resultados para a amplitude de variação do fator de intensidade de tensão, ΔK . As respostas obtidas pelos modelos numérico e analítico são apresentadas na Fig. (8.3).

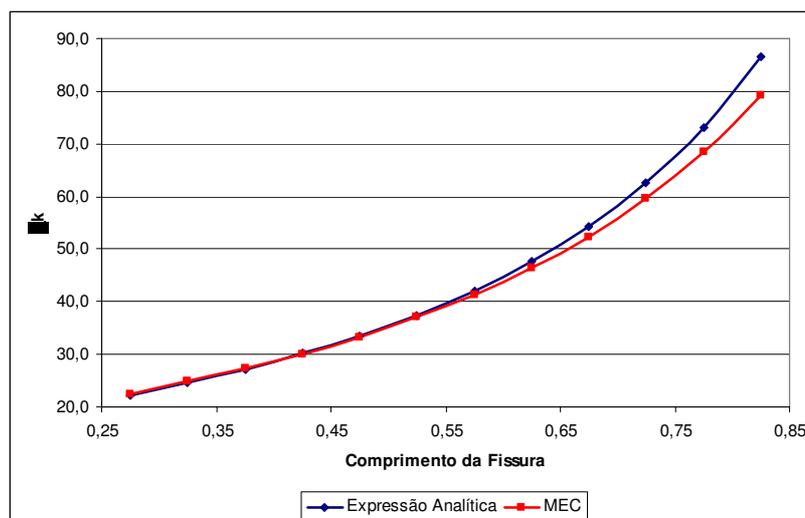


Figura 8.3 Comparativo entre as respostas de ΔK .

Conforme pode-se verificar na Fig. (8.3) as respostas obtidas pelo código computacional proposto conseguem acompanhar com boa precisão o resultado previsto pelo modelo analítico, indicando assim a eficiência da formulação proposta. A análise foi interrompida quando o comprimento da fissura alcançou 0,825 metros. Isso se deve ao critério citado no início desse capítulo o qual prevê que a análise seja interrompida se da/dN for maior que $0,1 \text{ mm/ciclo}$.

De posse da amplitude de variação dos fatores de intensidade de tensão pode ser então calculada a vida útil prevista pelos modelos analítico e numérico. O resultado dessa comparação pode ser observado na Fig. (8.4). Constata-se que os resultados obtidos pelo modelo numérico, assim como no caso anterior, são precisos se comparados ao modelo analítico. Assim considera-se validado o algoritmo proposto.

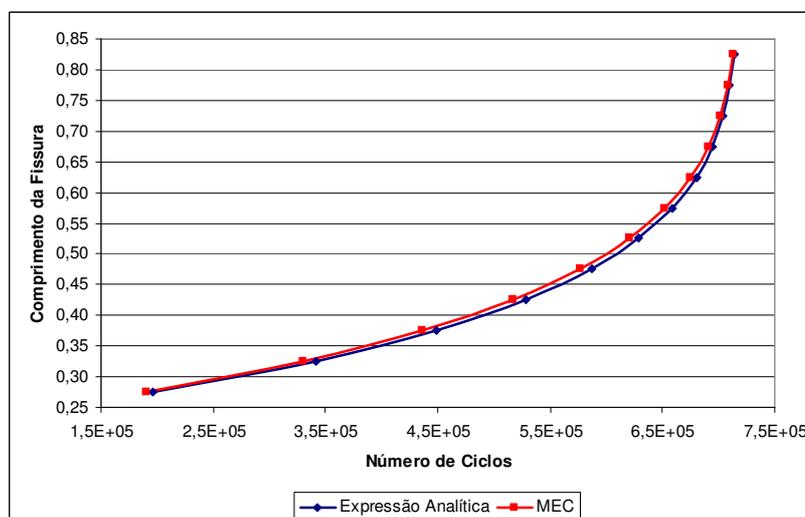


Figura 8.4 Comparativo entre as respostas para a vida útil da estrutura.

8.3 – Exemplo 2: Estrutura Plana com Três Furos

Neste exemplo será analisada a estrutura mostrada na Fig. (8.5). Trata-se de uma estrutura plana simplesmente apoiada contendo três furos. Observa-se ainda a presença de um entalhe inicial posicionado em sua face inferior. As dimensões apresentadas na Fig. (8.5) estão em polegada. O carregamento considerado na análise constitui-se de uma carga concentrada simetricamente posicionada em sua face superior de valor unitário. Esse carregamento é considerado cíclico variando de 1,0 (valor máximo) até o valor mínimo igual a zero.

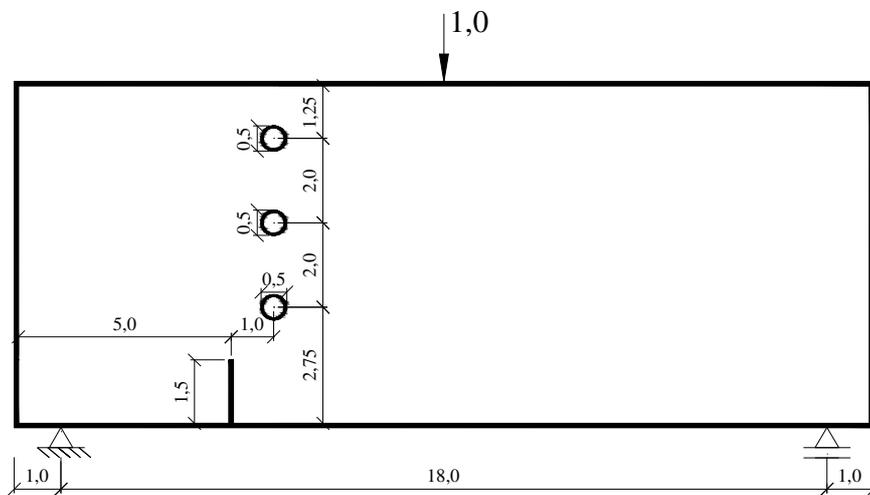


Figura 8.5 Estrutura plana a ser analisada. Dimensões em in.

Foram adotadas as seguintes propriedades para o material constituinte da estrutura: módulo de elasticidade longitudinal $E = 300 \text{ Ksi}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$, tenacidade ao fraturamento $K_c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ ksi}/\text{in}$, tenacidade limitante $\Delta K_{th} = 0,1 \text{ ksi}/\text{in}$ e parâmetros da lei de Paris $C = 7,0 \cdot 10^{-9} \text{ in}/\text{ciclos} \left(\frac{\text{ksi}}{\sqrt{\text{in}}} \right)^n$ e $n = 3,0$. Foram empregados 278 elementos na discretização da estrutura sendo considerado o incremento no comprimento da fissura igual a $\Delta a = 0,4 \text{ in}$.

Os resultados obtidos por meio do código computacional proposto foram comparados aos previstos pelo modelo numérico apresentado em CARVALHO et al. (1999) o qual analisa problemas de fadiga por meio de um modelo em elementos finitos.

Inicialmente foi comparado o comportamento do crescimento da fissura com relação ao número de ciclos de carga. O diagrama comparativo entre os dois modelos numéricos pode ser visualizado na Fig.(8.6).

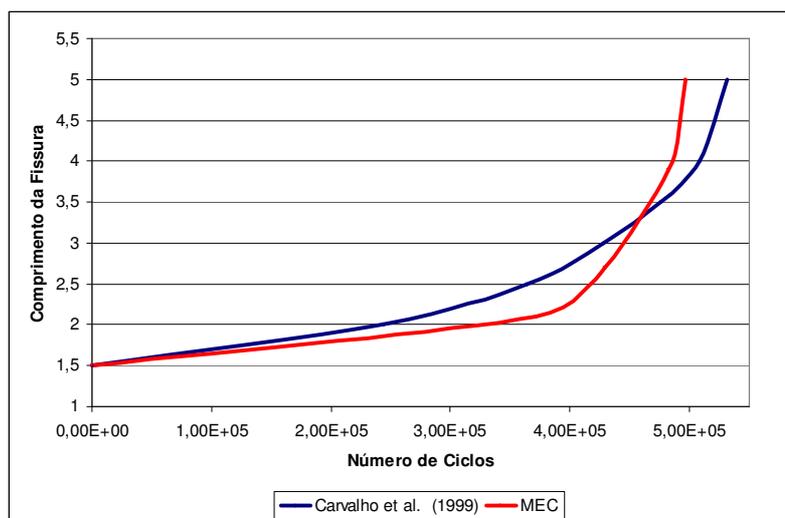


Figura 8.6 Diagrama comparativo para número de ciclos x comprimento da fissura.

Conforme pode ser observado na Fig. (8.6) as respostas obtidas pelos dois modelos numéricos são semelhantes indicando assim a validade da formulação proposta e implementada.

Foi também comparada a trajetória de crescimento da fissura. A estrutura em questão foi analisada experimentalmente por BITTENCOURT et al. (1996), sendo, portanto, possível a comparação da configuração de ruína com um modelo real. Na Fig. (8.7) está ilustrada a configuração do crescimento da fissura obtida pelo código computacional desenvolvido nesse trabalho. Na Fig. (8.8) estão ilustradas as trajetórias de crescimento da fissura para o modelo experimental e para o modelo numérico de CARVALHO et al (1999).

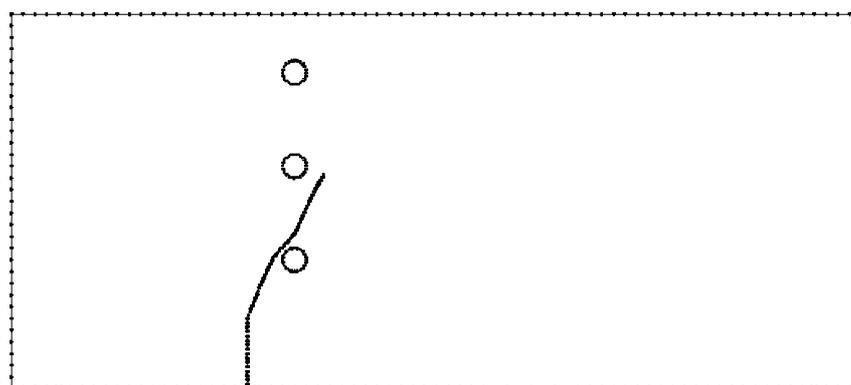


Figura 8.7 Trajetória de crescimento da fissura. Modelo em elementos de contorno.

Como pode ser observado na Fig. (8.8) a trajetória de crescimento da fissura, do modelo experimental, convergiu para o segundo furo existente na estrutura. Isso se deve, provavelmente, a imperfeições criadas nas bordas deste furo durante a sua

construção. A trajetória da fissura próxima ao segundo furo não foi bem representada pelos dois modelos numéricos considerados. Nessa análise as trajetórias obtidas pelos dois modelos numéricos foram semelhantes indicando a convergência entre eles. No entanto, como as bordas dos furos são consideradas estruturalmente íntegras, nos modelos numéricos, não foi possível representar a interseção entre o furo e a fissura.

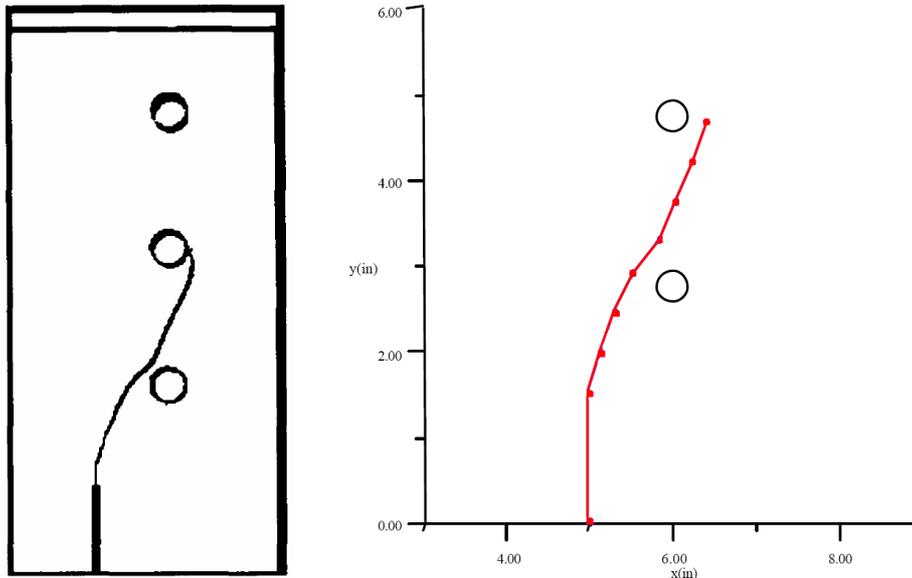


Figura 8.8 Trajetória de crescimento da fissura modelos experimental e numérico em elementos finitos.

De acordo com os resultados obtidos pelos dois modelos numéricos discutidos nesse exemplo considera-se validado o modelo de fadiga proposto nesse trabalho.

Para tentar representar a trajetória de crescimento da fissura obtida no modelo experimental foi efetuada uma análise do problema considerando a presença de quatro pequenas fissuras posicionadas nas bordas do segundo furo. Essas fissuras têm a finalidade de representar um possível dano provocado nessa região quando da criação desse furo no modelo experimental. A Fig. (8.9) mostra a geometria da estrutura analisada considerando a presença das quatro fissuras.

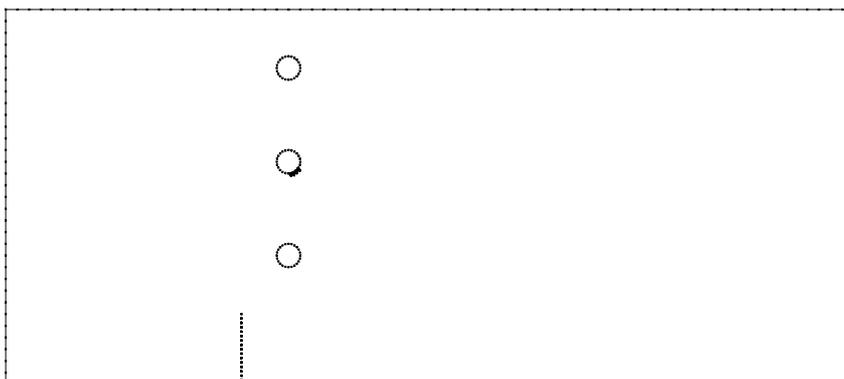


Figura 8.9 Geometria considerada com a presença de quatro fissuras na borda do segundo furo.

A estrutura foi analisada e a configuração de ruína observada é a apresentada na Fig.(8.10). Pode-se verificar que a resposta para o crescimento da fissura obtido pelo modelo numérico, via MEC, é muito próximo ao observado no modelo experimental o que indica a existência de danos nas bordas do segundo furo, conforme anteriormente dicutido.

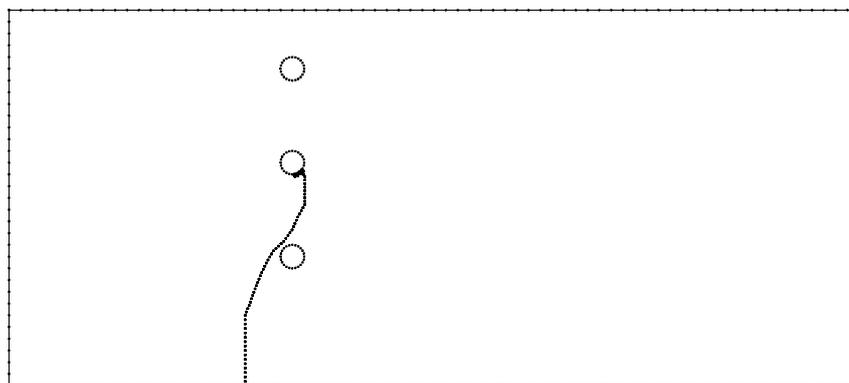


Figura 8.10 Trajetória de crescimento da fissura modelo numérico em elementos de contorno.

8.4 – Exemplo 3: Chapa Perfurada

A estrutura analisada nesse item é muito semelhante a apresentada no exemplo anterior. Trata-se de uma estrutura retangular plana contendo três furos. Esta estrutura é biapoiada e apresenta um carregamento oscilatório, com valor máximo igual a um e mínimo igual a zero, localizado no ponto médio de sua face superior. As diferenças em relação a estrutura do exemplo anterior são a localização da fissura e o seu comprimento conforme ilustrado na Fig. (8.11).

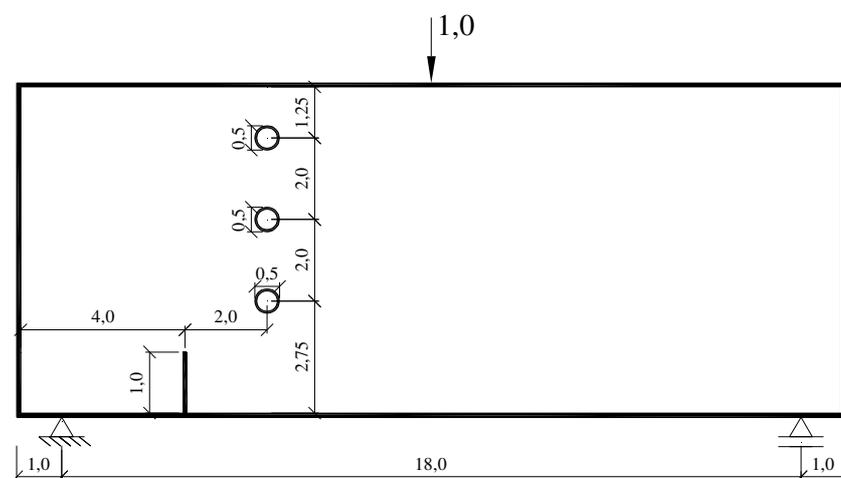


Figura 8.11 Estrutura considerada nesse exemplo. Dimensões em in.

As propriedades adotadas para o material constituinte da estrutura foram as seguintes: módulo de elasticidade longitudinal $E = 300 \text{ Ksi}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$, tenacidade ao fraturamento $K_c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ ksi}/\text{in}$, tenacidade limitante $\Delta K_{th} = 0,1 \text{ ksi}/\sqrt{\text{in}}$ e parâmetros da lei de Paris $C = 7,0 \cdot 10^{-9} \text{ in}/\text{ciclos} \left(\frac{\text{ksi}}{\sqrt{\text{in}}} \right)^n$ e $n = 3,0$. Foram empregados 278 elementos na discretização da estrutura e foram testados três diferentes incrementos no comprimento da fissura.

Inicialmente será discutido o diagrama da Fig. (8.12). Esse diagrama mostra a evolução do número de ciclos com relação ao crescimento da fissura para sete diferentes incrementos no comprimento da fissura. Pode-se perceber, por meio da Fig. (8.12), que para os sete incrementos no comprimento da fissura adotados o comportamento das curvas é semelhante. Verifica-se ainda a proximidade das repostas obtidas para os incrementos de 0,05 in e 0,10 in o que indica que com esses valores obtém-se a convergência para a integração da lei de Paris.

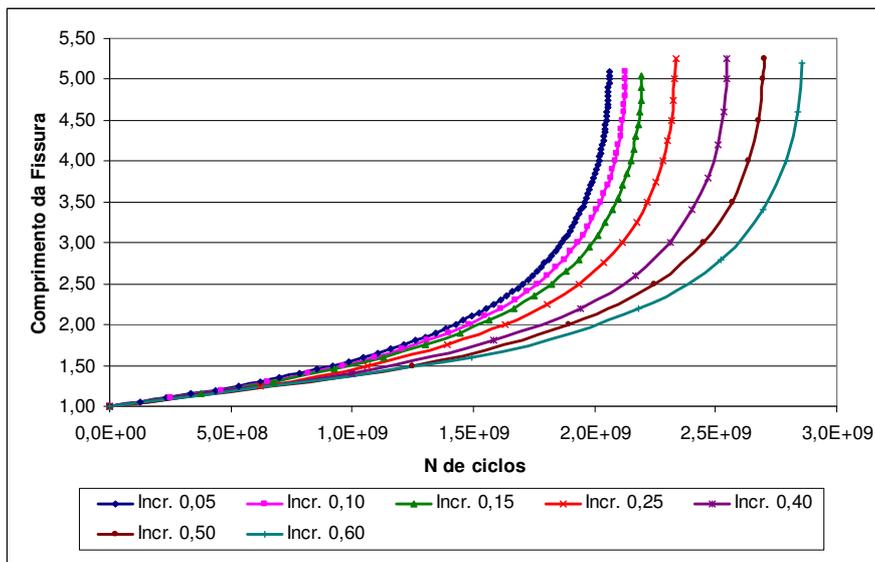


Figura 8.12 Diagrama comparativo para número de ciclos x comprimento da fissura.

Foi verificada também a trajetória de crescimento da fissura. Essa estrutura foi analisada numérica e experimentalmente por BITTENCOURT et al. (1996). Como apresenta as Fig. (8.13) e Fig. (8.14) pode-se constatar que a trajetória de crescimento da fissura obtida pelo modelo do MEC concorda com a resposta dos modelos experimental e numérico, via MEF, de BITTENCOURT et al. (1996), o que valida portanto a formulação e o modelo do MEC para fadiga proposto.

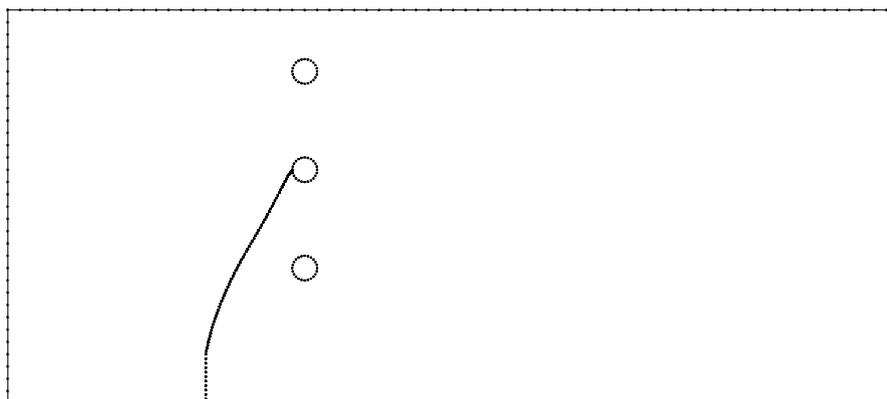


Figura 8.13 Trajetória de crescimento da fissura obtido por meio da formulação do MEC.

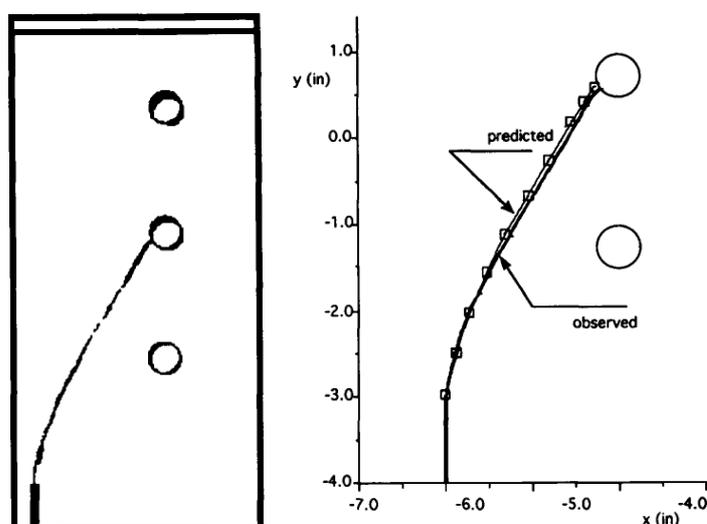


Figura 8.14 Trajetória de crescimento da fissura. Modelos experimental e numérico via MEF.

8.5 – Exemplo 4: Estrutura Plana com um Furo

A estrutura a ser analisada nesse exemplo é a apresentada na Fig. (8.15). Esta é uma estrutura plana que contém um furo e uma fissura a qual está localizada em uma de suas bordas. A estrutura está engastada em sua base e apresenta um carregamento oscilatório P , com valor máximo igual a $P = 50 \text{ kN/m}$ e mínimo igual a zero, localizado em sua borda superior.

Foram adotados os seguintes valores para as propriedades do material constituinte da estrutura: módulo de elasticidade longitudinal $E = 3,0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$, tenacidade ao fraturamento $K_c = 1,04 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^{3/2}$,

tenacidade limitante $\Delta K_{th} = 5,0 \frac{kN}{m^{3/2}}$ e parâmetros da lei de Paris

$$C = 2,0 \cdot 10^{-10} m / \text{ciclos} \left(\frac{kN}{m^{3/2}} \right)^n \text{ e } n = 2,70 .$$

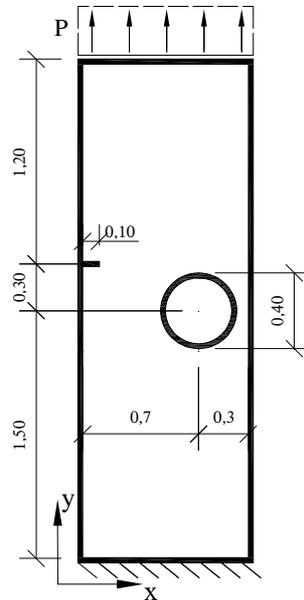


Figura 8.15 Estrutura analisada. Dimensões em metro.

Na discretização da estrutura foram empregados 78 elementos de contorno. Os resultados fornecidos pelo código computacional desenvolvido via MEC foram comparados aos fornecidos pelo programa FRANC 2D, programa esse desenvolvido pelo grupo de pesquisa em mecânica da fratura da Universidade de Cornell EUA, o qual analisa problemas envolvendo o crescimento de fissuras por meio do MEF. Por meio do FRANC 2D a estrutura foi analisada utilizando-se uma malha com 20825 elementos finitos triangulares de aproximação quadrática. Na Fig. (8.16) é apresentado um comparativo para a trajetória de crescimento da fissura obtida por meio dos dois códigos computacionais empregados. Como pode ser visto na Fig. (8.16) verifica-se que a trajetória de crescimento fornecida pelos dois códigos computacionais empregados são muito próximas validando, portanto, o código via MEC desenvolvido.

Foram também comparados os resultados para os fatores de intensidade de tensão, tanto para o modo I quanto para o modo II de fraturamento. Os diagramas comparativos para essas duas grandezas estão apresentados nas Fig. (8.17) e Fig. (8.18). Através dessas duas figuras pode-se verificar que os resultados obtidos utilizando os dois códigos computacionais já citados são concordantes, principalmente no trecho envolvendo o início do processo de crescimento da fissura até o instante em que esta

alcança o comprimento de 0,60 m. A partir desse ponto observa-se uma diferença entre os resultados a qual pode ser explicada pela proximidade entre a fissura e a borda do furo. Nessa região a concentração de tensão na extremidade da fissura é mais acentuada, devido a iminência de ruptura, portanto esse é um ponto de instabilidade onde os resultados numéricos podem apresentar certa diferença.

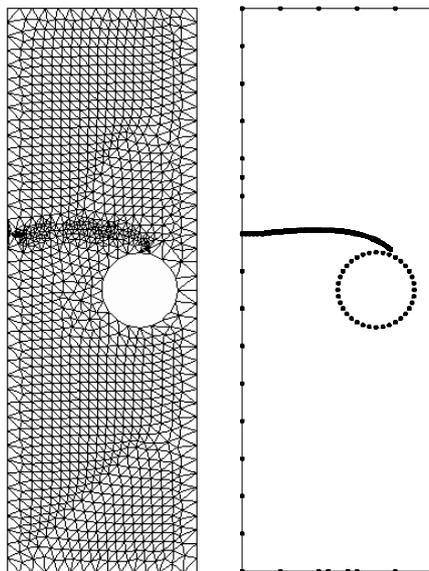


Figura 8.16 Configuração final estrutura. Análise via FRANC 2D e código desenvolvido MEC.

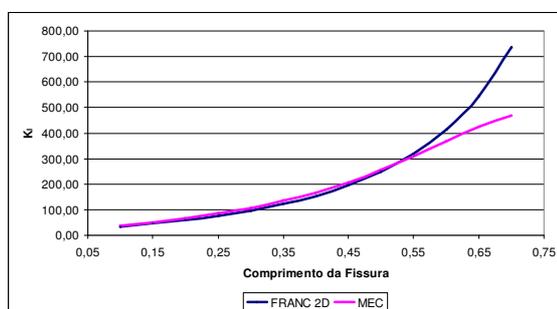


Figura 8.17 Comparativo K no modo I.

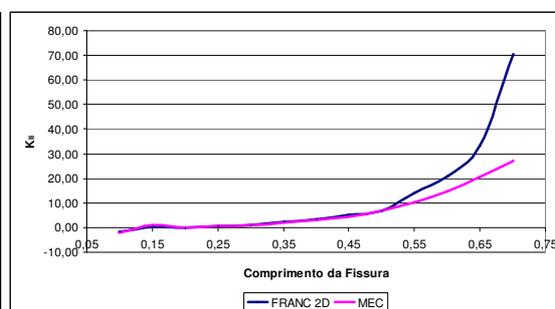


Figura 8.18 Comparativo K no modo II.

A análise da estrutura à fadiga foi também efetuada. O diagrama ilustrando o comportamento da evolução do número de ciclos em relação ao comprimento da fissura é apresentado na Fig. (8.19). Na análise à fadiga foram adotados sete diferentes incrementos no comprimento da fissura para a integração da Lei de Paris, os quais estão mostrados nessa figura. O comportamento das curvas para cada incremento no comprimento da fissura é semelhante, no entanto quanto menor o incremento no comprimento da fissura melhor o resultado uma vez que a equação de Paris é integrada com maior precisão. Assim, conforme apresentado na Fig. (8.19), pode-se perceber que

os resultados para os incrementos 0,01m e 0,007m são muito próximos indicando que a convergência ocorreu com esses incrementos.

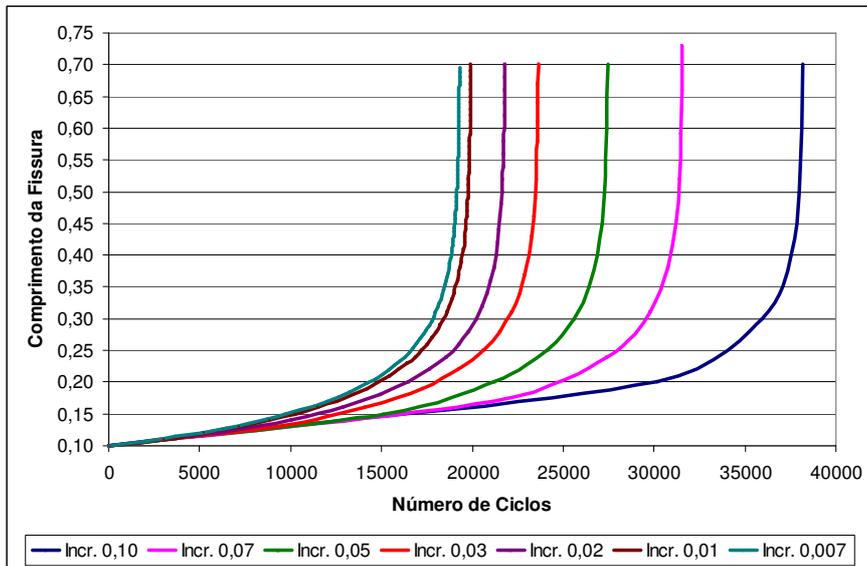


Figura 8.19 Diagrama comparativo para número de ciclos x comprimento da fissura.

A previsão da vida útil da estrutura foi também estudada considerando os dois métodos numéricos utilizados. Na Fig. (8.20) é apresentado o diagrama comparativo da previsão de vida útil sendo o incremento no comprimento da fissura igual a 0,1m.

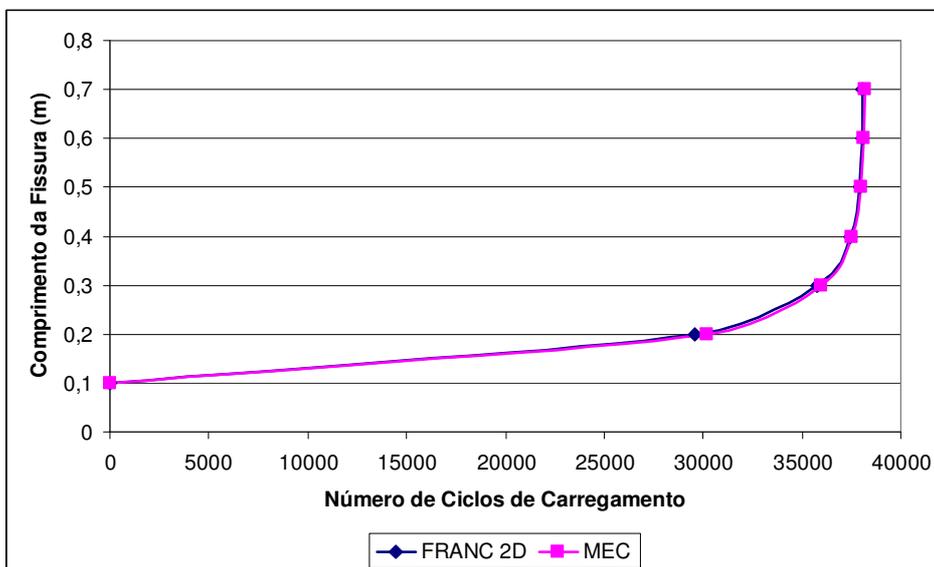


Figura 8.20 Diagrama comparativo para vida útil estrutural. Incremento igual a 0,1m.

Como pode ser verificado através dessa figura a resposta obtida por meio do FRANC 2D e através do modelo via MEC são muito próximas validando assim o código implementado.

8.6 – Exemplo 5: Chapa com Múltiplas Fissuras e Furos

Nesse tópico será analisada a estrutura mostrada na Fig. (8.21). Trata-se de uma estrutura plana que contém dez furos distribuídos em seu interior, sendo que em cada furo estão presentes duas fissuras. O diâmetro adotado para os furos é 5,0 mm. A vinculação da estrutura está localizada nas bordas dos furos, como indica a Fig. (8.21), onde a metade esquerda dos furos é engastada.

O carregamento considerado é composto por duas forças de superfície, F_x e F_y , atuantes na face esquerda da estrutura. O carregamento é oscilatório, com valor máximo de $F_x = 9,0 \text{ kN/m}$ e $F_y = 1,0 \text{ kN/m}$ e valor mínimo igual a zero. As fissuras estão localizadas nas bordas dos furos, como indica a Fig. (8.21), e apresentam o comprimento inicial igual a 0,5 mm. Foram adotados os seguintes valores para as propriedades do material constituinte da estrutura: módulo de elasticidade longitudinal $E = 3,0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$, tenacidade ao fraturamento $K_c = 1,04 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^{3/2}$, tenacidade limitante $\Delta K_{th} = 0,05 \text{ kN/m}^{3/2}$ e parâmetros da lei de Paris $C = 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ m/ciclos} \left(\text{kN/m}^{3/2} \right)^n$ e $n = 2,60$. A estrutura foi discretizada utilizando-se 390 elementos de contorno.

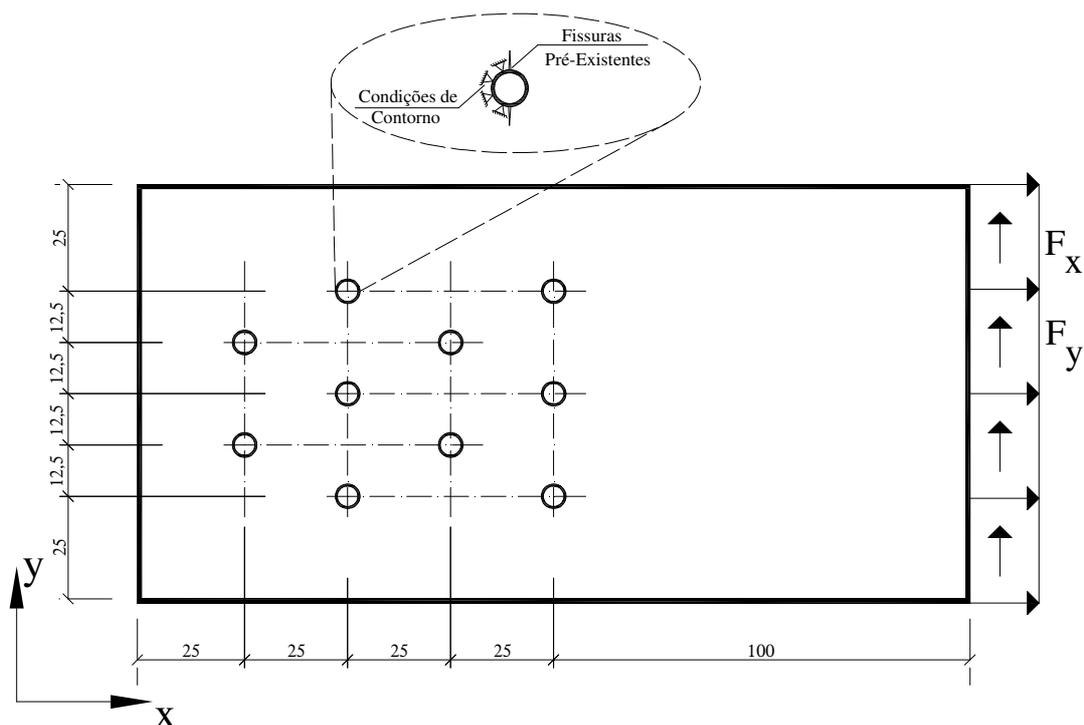


Figura 8.21 Estrutura analisada. Dimensões em milímetro.

Inicialmente pode ser analisada a trajetória de crescimento das fissuras para a situação descrita. Na Fig. (8.22) é apresentada a configuração da estrutura para alguns incrementos no comprimento das fissuras.

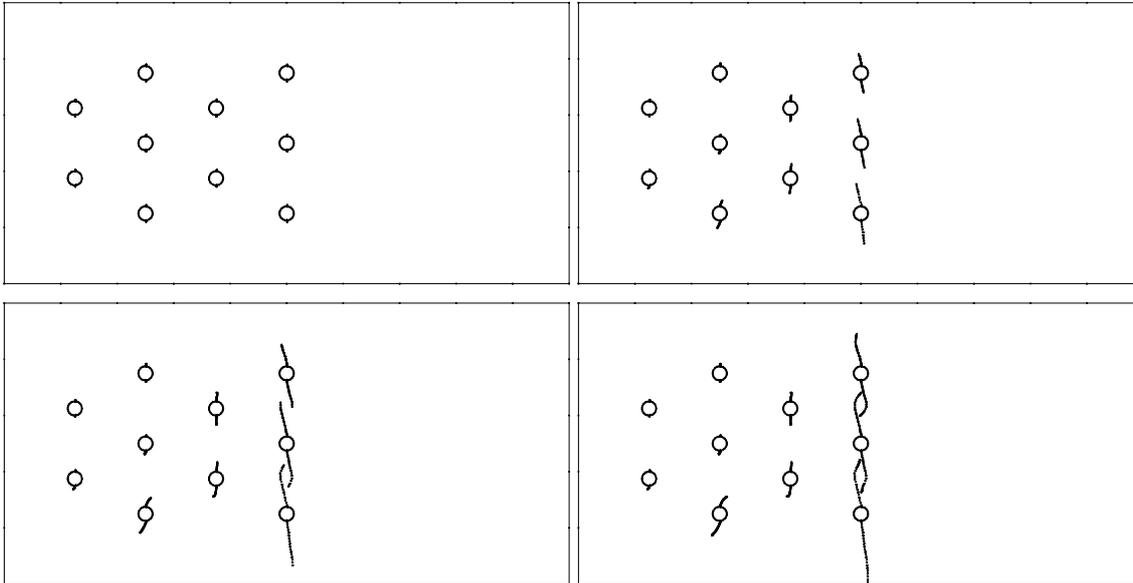


Figura 8.22 Trajetória de crescimento das fissuras para a estrutura analisada.

Por meio da Fig. (8.22) pode-se perceber que o modo I de fraturamento é predominante na análise da estrutura uma vez que é pequena e suave a mudança na direção de propagação da maioria das fissuras. Além disso, verifica-se que é na região mais tracionada, parte inferior da estrutura, que a ruptura ocorre.

Na Fig.(8.23) é apresentado o diagrama comparativo para os fatores de intensidade de tensão equivalentes para os diferentes incrementos no comprimento da fissura adotados. Esse resultado é referenciado à fissura mais solicitada. Foram adotados nessa análise quatro diferentes incrementos no comprimento da fissura os quais podem também ser visualizados na Fig. (8.23). Como apresenta essa figura, para os diferentes incrementos no comprimento da fissura empregados o resultado é semelhante indicando que a resposta é precisa mesmo para o maior incremento utilizado.

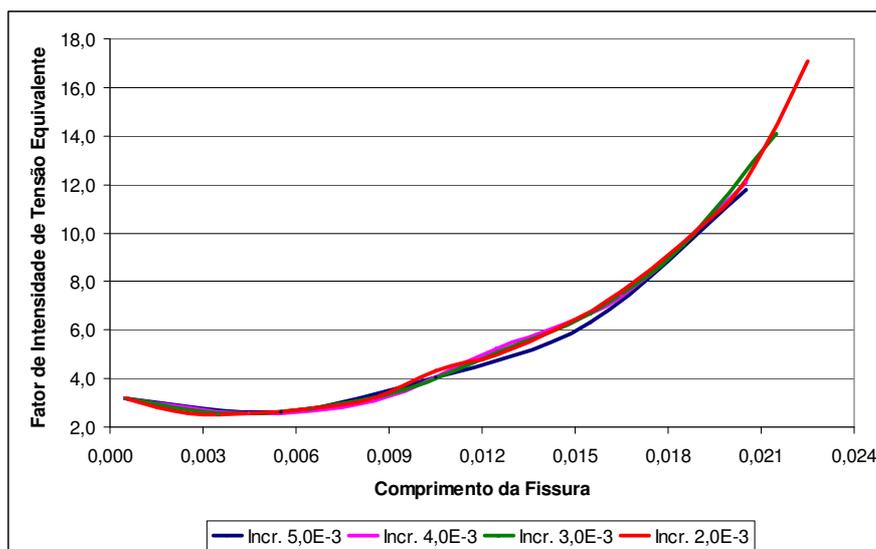


Figura 8.23 Diagrama comparativo para o fator de intensidade de tensão equivalente.

A análise da estrutura à fadiga foi também efetuada. O diagrama ilustrando o comportamento da evolução do número de ciclos em relação ao comprimento da fissura é apresentado na Fig. (8.24). Na análise à fadiga foram adotados quatro diferentes incrementos no comprimento da fissura para a integração da lei de Paris, os quais estão mostrados nessa figura.

O comportamento observado para as curvas, em cada incremento no comprimento da fissura utilizado, é muito semelhante. A diferença observada na resposta para o maior e o menor incrementos é pequena. Esse resultado indica que mesmo para o maior incremento adotado o resultado pode ser considerado preciso.

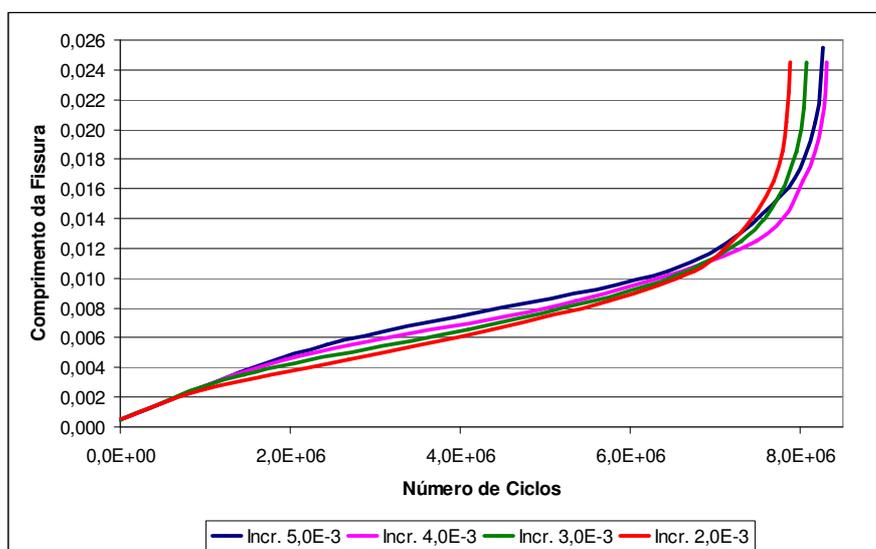


Figura 8.24 Diagrama comparativo para número de ciclos x comprimento da fissura.

Dessa forma considera-se validade a formulação via MEC desenvolvida para a análise de estruturas planas multi-fissuradas submetidas a carregamentos oscilatórios e fadiga.

9. – Acoplamento entre Modelos Mecânicos e de Confiabilidade Estrutural

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos pelos modelos construídos a partir do acoplamento entre modelos mecânicos e modelos de confiabilidade estrutural. Neste acoplamento os modelos mecânicos simulam o comportamento estrutural de domínios bidimensionais sujeitos ao crescimento de fissuras sob dois diferentes regimes. No primeiro deles as fissuras propagam-se sob o regime comportamental da mecânica da fratura elástico linear, considerando-se ruptura frágil conforme discutido no capítulo 3. Já no segundo analisam-se problemas de propagação de fissuras em estruturas expostas a carregamentos cíclicos, ou seja, o crescimento das fissuras ocorre devido ao efeito de fadiga. Em ambos modelos o comportamento mecânico é descrito pelas equações do MEC.

Quanto às análises de confiabilidade estrutural, foram considerados neste trabalho quatro modelos de confiabilidade, os quais objetivam a determinação das coordenadas do ponto de projeto e também do índice de confiabilidade, β . Os modelos de confiabilidade considerados são FORM, SORM, método de superfície de resposta (MSR) e acoplamento direto entre o modelo mecânico e os algoritmos HLRF / FORM, os quais foram já discutidos no capítulo 4. Com relação ao modelo do MSR foram consideradas duas diferentes formas de adaptatividade dos pontos pertencentes aos planos de experiência. Na primeira a redução da distância dos pontos no plano de experiência é feita após a convergência de cada análise de confiabilidade. Já na segunda, a redução da distância é feita progressivamente, após cada iteração do método. Nos resultados que serão apresentados neste capítulo a segunda forma de adaptatividade dos pontos nos planos de experiência será identificada pelo sufixo *Prog*, indicando progressivamente, enquanto a primeira forma será identificada somente pelo plano de experiência adotado.

9.1 – Exemplo 1: Chapa Tracionada com Fissura Central

O primeiro exemplo a ser apresentado nesse capítulo trata da análise de confiabilidade da estrutura mostrada na Fig. (9.1). Esta é uma estrutura plana retangular que contém uma fissura inicial posicionada simetricamente em seu centro apresentando ainda duas forças de superfície prescritas em suas extremidades. Nesta análise a propagação da fissura será efetuada considerando-se o regime da mecânica da fratura elástico linear.

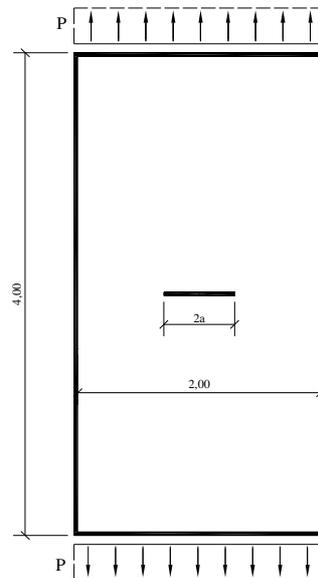


Figura 9.1 Estrutura analisada. Dimensões em metro.

Essa estrutura é largamente discutida nos livros de mecânica da fratura, onde são apresentadas expressões para a determinação dos fatores de intensidade de tensão em função das forças de superfície atuantes. Segundo BROEK (1986) a expressão para o fator de intensidade de tensão, para o modo I, em função do carregamento atuante para esta estrutura é a mostrada na Eq. (9.1).

$$K_I = P \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \left[1 + 0,256 \cdot \left(\frac{a}{W} \right) - 1,152 \cdot \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 12,2 \cdot \left(\frac{a}{W} \right)^3 \right] \quad (9.1)$$

onde: W é a largura da chapa, $2 \cdot a$ extensão da fissura, P a força de superfície aplicada.

A equação de estado limite considerada para o problema será escrita em termos das forças de superfície resistente e solicitante. Dessa forma, para a análise em questão esta equação pode ser assim escrita:

$$G = P_R - P_S \quad (9.2)$$

sendo: P_R a força de superfície resistente e P_S a força de superfície solicitante.

Utilizando-se a Eq. (9.1) pode-se reescrever a Eq. (9.2) da seguinte forma:

$$G = \frac{K_C}{\sqrt{\pi \cdot a} \cdot \left[1 + 0,256 \cdot \left(\frac{a}{W} \right) - 1,152 \cdot \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 12,2 \cdot \left(\frac{a}{W} \right)^3 \right]} - P_S \quad (9.3)$$

Na análise desse problema foram utilizados os métodos de confiabilidade FORM, SORM, MSR e acoplamento direto. Foram feitas também duas diferentes abordagens sobre o comportamento mecânico da estrutura. Na primeira a carga resistente da estrutura é calculada pela Eq. (9.3) dando origem a um modelo denominado neste capítulo de analítico. Já no segundo, a carga resistente da estrutura é avaliada por meio do código computacional via MEC desenvolvido neste trabalho, resultando nos modelos denominados de numéricos. Neste exemplo as análises via FORM e SORM utilizam a Eq. (9.3) para a determinação da carga resistente da estrutura enquanto nos modelos via MSR e acoplamento direto essa variável é calculada utilizando o modelo via MEC.

Esse exemplo é utilizado como forma de validação do modelo resultante do acoplamento efetuado entre os modelos de confiabilidade e mecânico (via MEC). Assim será possível comparar os resultados de uma análise de confiabilidade efetuada por meio de um modelo analítico e um modelo numérico com o objetivo de validar os resultados numéricos.

A análise de confiabilidade da estrutura mostrada na Fig. (9.1) será realizada considerando-se três diferentes cenários. No primeiro deles serão consideradas 2 variáveis aleatórias, no segundo 3 variáveis aleatórias e no terceiro novamente 3 variáveis aleatórias porém sendo duas delas com distribuição Log-Normal.

9.1.1 – 1º Cenário

Neste cenário a análise de confiabilidade será efetuada considerando-se como variáveis aleatórias o comprimento inicial da fissura e o fator de intensidade de tensão resistente do material que constitui a estrutura. Foram adotadas as seguintes propriedades estatísticas para essas variáveis aleatórias: comprimento inicial da fissura $2 \cdot a \sim N(0,1;0,03)m$, fator de intensidade de tensão resistente $K_C \sim N(50,0;15,0) \text{ kN/m}^{3/2}$. Foram consideradas como variáveis determinísticas a largura da estrutura,

$W = 4,0m$ e o carregamento atuante $P_s = 50,0kN/m$. A tolerância adotada para a convergência da análise foi de $1 \cdot 10^{-4}$.

Foram comparados os resultados para o índice de confiabilidade e para o ponto de projeto por meio dos quatro modelos de confiabilidade utilizados. Na tabela 9.1 são mostradas as respostas obtidas para o índice de confiabilidade. Esta tabela mostra que os resultados obtidos por meio dos quatro métodos de confiabilidade utilizados são muito semelhantes. Esse resultado é coerente e indica um bom desempenho dos métodos MSR e acoplamento direto onde a carga resistente da estrutura é determinada via MEC. Apesar das aproximações existentes no modelo do MEC e também das aproximações presentes no MSR ainda assim é possível a obtenção de bons resultados se comparado ao FORM e SORM onde é utilizada uma solução analítica.

Tabela 9.1 Índices de Confiabilidade Exemplo 1 Cenário 1.

Índice de Confiabilidade						
Modelo Analítico		Modelos Numéricos				
FORM	SORM	Superfície de Resposta				Acoplamento Direto
		13 Pontos	Composto	8 Pontos	Mínimo	
1,96692	1,97659	1,96692	1,96692	1,96692	1,96692	1,96692

Comportamento semelhante foi observado na determinação das coordenadas do ponto de projeto conforme mostra a tabela 9.2. Assim como para o índice de confiabilidade, as respostas obtidas por meio dos modelos de confiabilidade adotados são concordantes validando a implementação desenvolvida.

Tabela 9.2 Coordenada do Ponto de Projeto no espaço físico. Exemplo 1 Cenário 1.

Coordenadas do Ponto de Projeto						
Variável Aleatória	Modelo Analítico	Modelos Numéricos				
	FORM	Superfície de Resposta				Acoplamento Direto
		13 Pontos	Composto	8 Pontos	Mínimo	
2a	0,11110	0,11111	0,11111	0,11111	0,11112	0,11110
K_C	21,02290	21,02374	21,02402	21,02351	21,02449	21,02281

Os planos de experiência utilizados no MSR foram 13 pontos, Composto (utiliza 9 pontos), 8 pontos e Mínimo (utiliza 6 pontos) os quais produziram bons resultados. A análise foi efetuada também utilizando-se os planos de experiência Estrela e Hiper-Cubo os quais contêm apenas 5 pontos. No entanto com esses dois últimos planos de experiência não foram obtidos resultados satisfatórios indicando que nesse tipo de problema o polinômio quadrático que representa a resistência da estrutura, no MSR,

necessita de um número maior de consultas ao modelo mecânico para ser corretamente construído.

9.1.2 – 2º Cenário

No segundo cenário a análise de confiabilidade da estrutura será desenvolvida considerando-se três variáveis aleatórias. Para essa análise o comprimento inicial da fissura, o fator de intensidade de tensão resistente do material que constitui a estrutura e a força de superfície atuante foram consideradas como variáveis aleatórias. Foram adotadas as seguintes propriedades estatísticas para essas variáveis aleatórias: comprimento inicial da fissura $2 \cdot a \sim N(0,1;0,01)m$, fator de intensidade de tensão resistente $K_C \sim N(50,0;5,0) \text{ kN/m}^{3/2}$ e força de superfície solicitante $P_S \sim N(50,0;4,0) \text{ kN/m}$. A largura da estrutura foi considerada como variável determinística sendo igual a $W = 4,0m$. A tolerância adotada para a convergência das análises foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$.

Os quatro métodos de confiabilidade descritos neste trabalho, FORM, SORM, MSR e acoplamento direto, foram utilizados para a determinação do índice e confiabilidade e das coordenadas do ponto de projeto. Na tabela 9.3 são apresentadas as respostas obtidas para o índice de confiabilidade. Por meio dessa tabela pode-se verificar que os resultados obtidos, através dos quatro métodos utilizados, são muito semelhantes. Esse resultado é coerente e indica um bom desempenho dos métodos MSR e acoplamento direto, apesar das aproximações presentes nesses dois modelos numéricos. No primeiro são utilizadas superfícies limites aproximadas para a equação de estado limite enquanto no segundo os gradientes do processo de busca do índice de confiabilidade são calculados numericamente, ainda assim é possível a obtenção de bons resultados se comparado ao FORM e SORM onde é utilizada uma solução analítica.

Tabela 9.3 Índices de Confiabilidade. Exemplo 1 Cenário 2.

Índice de Confiabilidade						
Modelo Analítico		Modelos Numéricos				
FORM	SORM	Superfície de Resposta				Acoplamento Direto
		13 Pontos	Composto	8 Pontos	Mínimo	
5,60396	5,60832	5,60396	5,60396	5,60396	5,60396	5,60396

Comportamento semelhante pode ser observado nas respostas para as coordenadas do ponto de projeto conforme mostra a tabela 9.4.

Tabela 9.4 Coordenada do Ponto de Projeto no espaço físico. Exemplo 1 Cenário 2.

Coordenadas do Ponto de Projeto						
Variável Aleatória	Modelo Analítico	Modelos Numéricos				
	FORM	Superfície de Resposta				Acoplamento Direto
		13 Pontos	Composto	8 Pontos	Mínimo	
2a	0,11134	0,11135	0,11135	0,11135	0,11135	0,11134
K_C	23,99520	23,99510	23,99530	23,99500	23,99539	23,99459
P_S	57,00552	57,00512	57,00548	57,00492	57,00552	57,00513

Os planos de experiência utilizados nas análises pelo MSR foram 13 pontos, Composto (utiliza 9 pontos), 8 pontos e Mínimo (utiliza 6 pontos) os quais produziram bons resultados. A análise foi efetuada também utilizando-se os planos de experiência Estrela e Hiper-Cubo os quais contêm apenas 5 pontos. No entanto os resultados obtidos com esses dois últimos planos de experiência não foram satisfatórios indicando que nesse tipo de problema o polinômio quadrático que representa a resistência da estrutura necessita de um número maior de consultas ao modelo mecânico para ser corretamente construído.

De acordo com os bons resultados obtidos considera-se validado o algoritmo implementado para a análise de confiabilidade estrutural via acoplamento entre o modelo do MEC e modelos de confiabilidade.

9.1.3 – 3º Cenário

A estrutura mostrada na Fig. (9.1) pode agora ser analisada considerando outra distribuição estatística para as variáveis aleatórias da análise. Será considerada a distribuição LogNormal para governar o comportamento das variáveis aleatórias comprimento inicial da fissura e fator de intensidade de tensão resistente da estrutura. Nessa nova análise foram consideradas as seguintes propriedades estatísticas para as variáveis aleatórias: comprimento inicial da fissura $2 \cdot a \sim LN(0,1;0,01)m$, fator de intensidade de tensão resistente $K_C \sim LN(50,0;5,0) kN/m^{3/2}$ e força de superfície solicitante $P_S \sim N(50,0;4,0) kN/m$. Assim como no cenário 2, a largura da estrutura foi

considerada como variável determinística sendo igual a $W = 4,0m$. A tolerância adotada para a convergência das análises foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$.

Assim como nos cenários anteriores deste exemplo a estrutura será analisada considerando-se os métodos FORM e SORM, MSR e acoplamento direto. Utilizando os quatro métodos citados os resultados foram obtidos em termos do índice e confiabilidade e das coordenadas do ponto de projeto. Na tabela 9.5 são apresentadas as respostas obtidas para o índice de confiabilidade.

Tabela 9.5 Índices de Confiabilidade. Exemplo 1 Cenário 3.

Índice de Confiabilidade						
Modelo Analítico		Modelos Numéricos				
FORM	SORM	Superfície de Resposta				Acoplamento Direto
		13 Pontos	Composto	8 Pontos	Mínimo	
6,94091	6,94407	6,93038	6,94773	6,93565	6,94126	6,94126

Como pode ser observado nessa tabela os resultados obtidos pelos modelos de confiabilidade considerados são muito semelhantes. Esse resultado é coerente e indica um bom desempenho dos métodos MSR e acoplamento direto onde mesmo com respostas numéricas aproximadas é possível a obtenção de bons resultados se comparados aos FORM e SORM onde é utilizada uma solução analítica.

Com relação às respostas para as coordenadas do ponto de projeto o comportamento é semelhante. As respostas obtidas para esse ponto estão apresentadas na tabela 9.6.

Tabela 9.6 Coordenada do Ponto de Projeto no espaço físico. Exemplo 1 Cenário 3.

Coordenadas do Ponto de Projeto						
Variável Aleatória	Modelo Analítico	Modelos Numéricos				
	FORM	Superfície de Resposta				Acoplamento Direto
		13 Pontos	Composto	8 Pontos	Mínimo	
2a	0,13068	0,13070	0,13074	0,13073	0,13074	0,13071
K_C	29,02980	29,08043	29,02628	29,06180	29,04325	29,04068
P_S	63,59260	63,61116	63,62311	63,60384	63,60718	63,60862

Os planos de experiência utilizados foram 13 pontos, Composto (utiliza 9 pontos), 8 pontos e Mínimo (que utiliza 6 pontos) os quais forneceram boas respostas. A análise foi efetuada também utilizando-se os planos de experiência Estrela e Hiper-Cubo os quais contêm 5 pontos. No entanto, assim como nos cenários anteriores deste exemplo, os resultados obtidos com esses dois últimos planos de experiência não foram satisfatórios indicando que nesse tipo de problema o polinômio quadrático que

representa a resistência da estrutura necessita de um número maior de consultas ao modelo mecânico para ser construído.

Deve-se destacar, nesse exemplo, a grande influência que a distribuição estatística adotada para as variáveis aleatórias exerce sobre as respostas da análise. Apesar das médias e desvios padrão das variáveis aleatórias comprimento da fissura e fator de intensidade de tensão resistente serem iguais nas duas análises realizadas verificou-se que a resposta obtida é consideravelmente diferente. Assim, com esse resultado recomenda-se, em análises de confiabilidade estrutural, uma escolha criteriosa das distribuições estatísticas para as variáveis aleatórias consideradas.

Com base nos resultados apresentados nas tabelas 9.1 a 9.6 constata-se que as respostas obtidos pelos modelos de confiabilidade que utilizam modelos mecânicos analíticos e numéricos são muito próximas para os três cenários de cálculo considerados. Assim considera-se validado o código computacional implementado envolvendo o acoplamento entre o modelo mecânico do MEC e os modelos de confiabilidade estrutural com os métodos MSR e acoplamento direto.

9.2 – Exemplo 2: Viga Solicitada à Flexão em 3 Pontos

Nesse tópico serão apresentados os resultados da análise de confiabilidade da estrutura mostrada na Fig. (9.2). Trata-se de uma viga solicitada à flexão em três pontos contendo um entalhe inicial em sua face inferior. Assim como a estrutura discutida no exemplo anterior, nesta análise a propagação da fissura será efetuada considerando-se o regime da mecânica da fratura elástico linear.

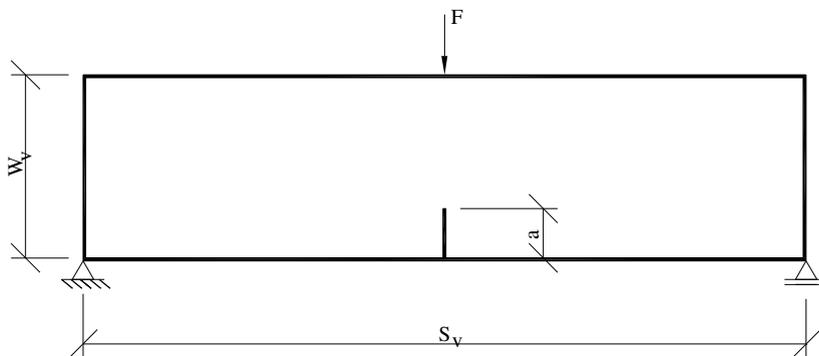


Figura 9.2 Estrutura analisada.

A viga considerada neste exemplo é bastante discutida em livros de mecânica da fratura, nos quais encontram-se expressões para a determinação dos fatores de

Capítulo 9 – Acoplamento entre Modelos Mecânicos e de Confiabilidade Estrutural_____

intensidade de tensão em função da carga atuante. BROEK (1986) apresenta a equação que relaciona o fator de intensidade de tensão, no modo I, ao carregamento atuante. Esta expressão é apresentada na Eq. (9.4).

$$K_I = \frac{F \cdot S_v}{B_v \cdot W_v^{3/2}} \cdot \frac{3 \cdot \left(\frac{a}{W_v}\right)^{1/2} \cdot \left[1,99 - \frac{a}{W_v} \cdot \left(1 - \frac{a}{W_v}\right) \cdot \left(2,15 - 3,93 \cdot \left(\frac{a}{W_v}\right) + 2,7 \cdot \left(\frac{a}{W_v}\right)^2 \right) \right]}{2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{a}{W_v}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{W_v}\right)^{3/2}} \quad (9.4)$$

onde: S_v é o vão da viga. Considerado igual a 5 metros na análise. W_v altura da viga, a extensão da fissura, B_v espessura do corpo admitido igual a um na análise, pois considera-se estado plano de tensão e F valor da carga concentrada.

Assim como no exemplo anterior, a equação de estado limite para esta análise será dada como apresentada na Eq. (9.2), ou seja, escrita em termos de forças prescritas no contorno. Utilizando-se a Eq. (9.4) pode-se reescrever a Eq. (9.2), aplicada a esse problema, da seguinte forma:

$$G = \frac{K_c \cdot 2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{a}{W_v}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{W_v}\right)^{3/2} \cdot B_v \cdot W_v^{3/2}}{S_v \cdot 3 \cdot \left(\frac{a}{W_v}\right)^{1/2} \cdot \left[1,99 - \frac{a}{W_v} \cdot \left(1 - \frac{a}{W_v}\right) \cdot \left(2,15 - 3,93 \cdot \left(\frac{a}{W_v}\right) + 2,7 \cdot \left(\frac{a}{W_v}\right)^2 \right) \right]} - F_S \quad (9.5)$$

Foram utilizados na análise deste exemplo os métodos de confiabilidade FORM, SORM, MSR e acoplamento direto. Nas análises via FORM e SORM a força resistente é calculada empregando-se a Eq. (9.5) sendo denominado neste capítulo de modelo analítico, uma vez que a resposta mecânica da estrutura é obtida a partir de um modelo analítico. Já os modelos que empregam os métodos MSR e acoplamento direto a força resistente da estrutura é calculada por meio do código computacional, via MEC, desenvolvido neste trabalho para a análise da propagação de fissuras sob o regime da mecânica da fratura elástico linear. Assim, esses dois últimos modelos de confiabilidade serão denominados de numéricos já que obtêm as respostas confiabilísticas a partir dos resultados numéricos do programa do MEC.

Os resultados obtidos pelos modelos de MSR e acoplamento direto serão comparados às respostas aferidas nos modelo FORM e SORM. Esse procedimento será efetuado como forma de validação dos modelos onde a resposta mecânica da estrutura é simulada pelo modelo numérico via MEC. Assim pretende-se comparar as repostas de

uma análise confiabilística obtidas a partir de um modelo numérico e um modelo analítico.

A análise de confiabilidade da estrutura mostrada na Fig. (9.2) será realizada considerando-se três diferentes cenários. A diferença entre eles encontra-se no número de variáveis aleatórias consideradas na análise. No primeiro deles serão consideradas 2 variáveis aleatórias, no segundo 3 variáveis aleatórias e no terceiro 4 variáveis aleatórias.

9.2.1 – 1º Cenário

No primeiro cenário, a análise de confiabilidade será realizada considerando-se como variáveis aleatórias o comprimento inicial da fissura e o fator de intensidade de tensão resistente do material que constitui a estrutura. Foram adotadas as seguintes propriedades estatísticas para essas variáveis aleatórias: comprimento inicial da fissura $a \sim LN(0,1;0,02)m$, fator de intensidade de tensão resistente $K_C \sim LN(500,0;100,0) kN/m^{3/2}$. Nesta análise as demais variáveis são consideradas determinísticas. A altura da viga W_v é igual a 1,25 m e a força aplicada é de $F = 65,0 kN$. Nesta análise a tolerância para a convergência foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$.

Nesta análise serão comparados os resultados, em termos do índice de confiabilidade e das coordenadas do ponto de projeto, obtidos pelos quatro modelos de confiabilidade empregados. Na tabela 9.7 são apresentados os resultados para o índice de confiabilidade. Por meio desta tabela pode-se verificar que os resultados obtidos, pelos quatro métodos de confiabilidade utilizados, concordam entre si. Esse resultado é coerente e valida os algoritmos do MSR e acoplamento direto implementados.

Tabela 9.7 Índices de Confiabilidade. Exemplo 2 Cenário 1.

Índice de Confiabilidade						
Modelo Analítico		Modelos Numéricos				
FORM	SORM	Superfície de Resposta				Acoplamento Direto
		13 Pontos	Composto	8 Pontos	Mínimo	
4,70783	4,72523	4,70799	4,70799	4,70799	4,70799	4,70799

Na tabela 9.8 são apresentados os resultados obtidos para as coordenadas do ponto de projeto. Assim como observado para o índice de confiabilidade, as repostas

obtidas pelos quatro métodos de confiabilidade empregados são concordantes validando a implementação desenvolvida.

Na análise desse exemplo, via MSR, foram empregados os planos de experiência 13 pontos, Composto (com 9 pontos), 8 pontos e Mínimo (com 6 pontos). Planos de experiência com um número menor de pontos, como o plano Estrela e o Hiper-Cubo, foram também utilizados, porém os resultados obtidos não foram satisfatórios mostrando que para esse problema o polinômio quadrático, que representa a resistência da estrutura, necessita de um número maior de consultas ao modelo mecânico para ser corretamente construído.

Tabela 9.8 Coordenada do Ponto de Projeto no espaço físico. Exemplo 2 Cenário 1.

Coordenadas do Ponto de Projeto						
Variável Aleatória	Modelo Analítico	Modelos Numéricos				Acoplamento Direto
	FORM	Superfície de Resposta				
		13 Pontos	Composto	8 Pontos	Mínimo	
2a	0,14316	0,14322	0,14322	0,14321	0,14323	0,14319
K_C	209,1080	209,1463	209,1492	209,1435	209,1565	209,1292

9.2.2 – 2º Cenário

No segundo cenário o problema da Fig. (9.2) foi analisado considerando-se três variáveis aleatórias. Nessa análise foram consideradas como variáveis aleatórias o comprimento inicial da fissura, o fator de intensidade de tensão resistente do material que constitui a estrutura e a força concentrada atuante. Foram adotadas as seguintes propriedades estatísticas para essas variáveis aleatórias: comprimento inicial da fissura $a \sim N(0,1;0,01)m$, fator de intensidade de tensão resistente $K_C \sim N(500,0;50,0) kN/m^{3/2}$ e força concentrada solicitante $F \sim N(65,0;8,0)kN$. Na análise a tolerância para a convergência foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$ e o valor da altura da viga, W_v , foi considerada igual a 1,25 metros.

A estrutura foi analisada pelos métodos FORM, SORM, MSR e acoplamento direto sendo obtidos os resultados para o índice de confiabilidade e para as coordenadas do ponto de projeto. Na tabela 9.9 são apresentados os resultados para o índice de confiabilidade. Pode-se verificar, por meio dessa tabela, que os resultados obtidos, pelos quatro métodos utilizados, concordam entre si. Esse resultado é coerente e valida os

algoritmos do MSR e acoplamento direto implementados os quais estão acoplados ao modelo numérico do MEC para a determinação da carga resistente da estrutura.

Tabela 9.9 Índices de Confiabilidade. Exemplo 2 Cenário 2.

Índice de Confiabilidade						
Modelo Analítico		Modelos Numéricos				
FORM	SORM	Superfície de Resposta				Acoplamento Direto
		13 Pontos	Composto	8 Pontos	Mínimo	
5,79104	5,79545	5,79105	5,79104	5,79104	5,79104	5,79105

Na tabela 9.10 são apresentados os resultados obtidos para as coordenadas do ponto de projeto. Assim como observado para o índice de confiabilidade, as repostas obtidas pelos métodos de confiabilidade empregados são muito semelhantes entre si validando os códigos computacionais desenvolvidos.

Tabela 9.10 Coordenada do Ponto de Projeto no espaço físico. Exemplo 2 Cenário 2.

Coordenadas do Ponto de Projeto						
Variável Aleatória	Modelo Analítico	Modelos Numéricos				
	FORM	Superfície de Resposta				Acoplamento Direto
		13 Pontos	Composto	8 Pontos	Mínimo	
a	0,10991	0,10992	0,10992	0,10992	0,10992	0,10991
K_C	240,66250	240,66110	240,66345	240,65980	240,66420	240,65630
F_S	84,01720	84,01631	84,01705	84,01590	84,01715	84,01696

Na análise desse exemplo, via MSR, foram empregados os planos de experiência 13 pontos, Composto (com 9 pontos), 8 pontos e Mínimo (com 6 pontos). Planos de experiência com um número menor de pontos, como os planos Estrela e Hiper-Cubo, foram também utilizados, porém assim como nas análises anteriores, os resultados obtidos não foram satisfatórios mostrando que para esse problema o polinômio quadrático, que representa a resistência da estrutura, necessita de um número maior de consultas ao modelo mecânico para ser construído corretamente.

O problema apresentado nesse tópico foi analisado considerando-se 3 variáveis aleatórias as quais são o comprimento inicial da fissura, fator de intensidade de tensão resistente e força atuante. Nessa análise, com o MSR, o polinômio quadrático que representa a resistência da estrutura é construído utilizando-se apenas duas variáveis aleatórias (a e K_C). Dessa forma foram utilizados planos de experiência contendo apenas as variações de a e K_C . A força atuante é levada em conta durante a resolução do problema de confiabilidade, diretamente no algoritmo do HLRF / FORM. Este procedimento leva a bons resultados, como pode ser observado nas tabelas anteriores, e

permite análises de confiabilidade onde o carregamento atuante seja também uma variável aleatória, o que é um caso comum em aplicações práticas. Assim apesar de se considerar 3 variáveis aleatórias utilizam-se planos de experiência somente com conjuntos de dois pontos, a e K_C .

Foram também implementados, no código computacional do MSR, planos de experiência para três variáveis aleatórias. Foram implementados os planos de experiência estrela, hiper-cubo, mínimo, composto, 13 pontos e 8 pontos. Como forma de validação da implementação efetuada para o modelo de superfície de resposta, com planos de experiência com 3 variáveis aleatórias, e também do método que considera o acoplamento direto entre o modelo mecânico e o HLRF / FORM a análise de confiabilidade da estrutura tratada nesse item foi refeita considerando uma variável aleatória adicional a qual se refere à altura da viga, W_v . Esta análise será apresentada no cenário seguinte.

9.2.3 – 3º Cenário

No 3º cenário a análise de confiabilidade foi efetuada considerando-se as seguintes variáveis aleatórias, com as suas respectivas propriedades estatísticas: comprimento inicial da fissura $a \sim N(0,1;0,01)m$, fator de intensidade de tensão resistente $K_C \sim N(500,0;50,0) kN/m^{3/2}$, altura da viga $W_v \sim N(1,25;0,10)m$ e força solicitante $F \sim N(65,0;8,0)kN$. Nesta análise a tolerância adotada para a convergência foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$.

A análise de confiabilidade foi efetuada sendo obtidos os valores das coordenadas do ponto de projeto e do índice de confiabilidade. Foram utilizados os métodos de confiabilidade FORM, SORM, MSR e acoplamento direto. Nestes dois últimos modelos o problema mecânico é resolvido utilizando-se o modelo do MEC para a análise da propagação de fissuras sob o regime da mecânica da fratura elástico linear, enquanto via FORM e SORM a força resistente é obtida por meio da Eq. (9.4).

Na tabela 9.11 são apresentados os resultados para o índice de confiabilidade. Pode-se verificar, por meio dessa tabela, que os resultados obtidos, pelos quatro métodos de confiabilidade utilizados, são concordantes entre si, validando assim os algoritmos dos MSR e acoplamento direto implementados. Além disso, os resultados

obtidos até aqui mostram que os modelos numéricos (MSR e acoplamento direto) conseguem representar com uma boa precisão os resultados previstos por um modelo analítico. Assim nos exemplos seguintes serão utilizados somente os modelos de superfície de resposta e acoplamento direto, os quais já mostraram fornecer bons resultados. Além disso, esses modelos permitem a análise de estruturas com condições de contorno mais complexas.

Tabela 9.11 Índices de Confiabilidade. Exemplo 2 Cenário 3.

Índice de Confiabilidade						
Modelo Analítico		Modelos Numéricos				
FORM	SORM	Superfície de Resposta				Acoplamento Direto
		13 Pontos	Composto	8 Pontos	Mínimo	
4,24323	4,21946	4,24323	4,24323	4,24323	4,24323	4,24324

Na tabela 9.12 são apresentados os resultados para as coordenadas do ponto de projeto. Assim como observado para o índice de confiabilidade, as repostas obtidas pelos métodos de confiabilidade empregados concordam entre si validando assim a implementação computacional desenvolvida.

Tabela 9.12 Coordenada do Ponto de Projeto no espaço físico. Exemplo 2 Cenário 3.

Coordenadas do Ponto de Projeto						
Variável Aleatória	Modelo Analítico	Modelos Numéricos				
	FORM	Superfície de Resposta				Acoplamento Direto
		13 Pontos	Composto	8 Pontos	Mínimo	
a	0,10657	0,10657	0,10657	0,10657	0,10657	0,10656
K_C	402,28550	402,27215	402,26800	402,27255	402,26670	402,25800
W_v	0,91612	0,91613	0,91614	0,91613	0,91615	0,91613
F_S	77,91544	77,91462	77,91579	77,91456	77,91498	77,91326

Assim como nas análises de confiabilidade já efetuadas até esse o momento com o MSR os resultados obtidos empregando-se os planos de experiência estrela e hiper-cubo não foram satisfatórios mostrando que para esse problema o polinômio quadrático, que representa a resistência da estrutura, necessita de um número maior de consultas ao modelo mecânico para ser corretamente construído. Dessa forma esses dois planos de experiência não serão mais utilizados nos exemplos que seguem nesse capítulo.

Com base nos resultados obtidos nos exemplos até aqui apresentados consideram-se validados os algoritmos desenvolvidos dos métodos MSR e acoplamento direto. Nos exemplos seguintes serão utilizados somente esses dois modelos de confiabilidade, uma vez que estes estão acoplados ao modelo do MEC. Assim esse acoplamento torna possível a análise de estruturas mais complexas, tanto do ponto de

vista de condições de contorno como também de comportamento estrutural. Nos exemplos seguintes neste capítulo serão apresentadas análises de confiabilidade estrutural de estruturas submetidas ao crescimento de fissuras sob regime de fadiga.

9.3 – Exemplo 3: Propagação de Fissura sob Regime de Fadiga em Viga Solicitada à Flexão em 3 Pontos

Nesse exemplo será apresentada a análise de confiabilidade da estrutura mostrada na Fig. (9.3). Trata-se de uma viga solicitada à flexão em três pontos contendo um entalhe inicial posicionado na metade de sua face inferior. Nesta análise a propagação da fissura será efetuada considerando-se o regime de carregamento oscilatório e fadiga. Neste exemplo o carregamento oscilatório é composto por um ciclo de carregamento e descarregamento completo.

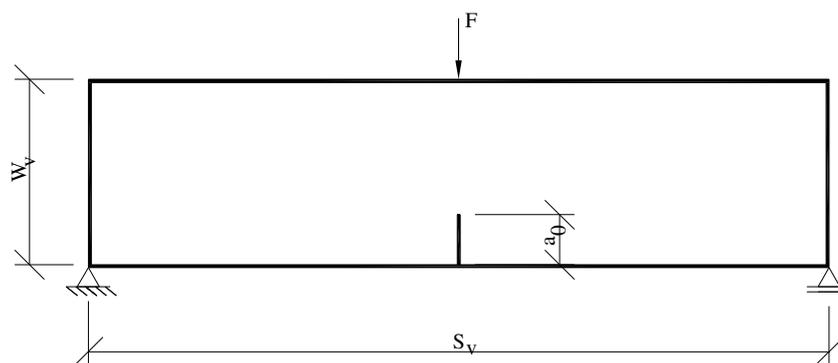


Figura 9.3 Estrutura analisada.

Na análise deste exemplo foram adotadas as seguintes propriedades para o material constituinte da estrutura: módulo de elasticidade longitudinal $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$, fator de intensidade de tensão resistente $K_c = 1,04 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^{3/2}$, fator de intensidade de tensão limite da lei de Paris $\Delta K_{th} = 1,0 \text{ kN/m}^{3/2}$ e expoente n parâmetro da lei de Paris $n = 2,70$. A lei de Paris foi integrada, em todos os cenários deste exemplo, considerando o incremento no comprimento da fissura igual a $\Delta a = 0,05 \text{ m}$.

Na análise de confiabilidade a equação de estado limite do problema é escrita em termos de resistência e sollicitação. Para o problema de fadiga esta é escrita em termos

do número de ciclos de carregamento resistente e solicitante. Assim, restam calcular os termos dos ciclos de carga resistente e atuante:

$$G = N_{\text{Ciclos}}^{\text{Resistente}} - N_{\text{Ciclos}}^{\text{Atuante}} \quad (9.6)$$

O problema de confiabilidade foi resolvido considerando os métodos MSR e acoplamento direto, aos quais estão acoplados um modelo do MEC para a resolução do problema mecânico de propagação de fissuras sob fadiga. Dessa forma a variável $N_{\text{Ciclos}}^{\text{Resistente}}$ é representada por meio de um polinômio quadrático construído a partir das respostas mecânicas da estrutura, via método de MSR. No acoplamento direto o processo de busca do ponto de projeto é efetuado avaliando numericamente os gradientes da função de estado limite por meio de consultas ao modelo mecânico considerando pequenas variações nos valores das variáveis aleatórias do problema.

Via MSR a estrutura foi analisada considerando-se quatro planos de experiência diferentes sendo eles os planos de experiência Mínimo, Composto, 13 Pontos e 8 Pontos. Além disso, foram consideradas duas diferentes formas de adaptatividade dos pontos nos planos de experiência as quais são após convergência e progressivamente já discutidas anteriormente.

A análise de confiabilidade da estrutura mostrada na Fig. (9.3) será realizada considerando-se quatro diferentes cenários, os quais diferem quanto às variáveis aleatórias consideradas, às distribuições estatísticas para estas variáveis e também quanto ao número de variáveis aleatórias na análise. No primeiro cenário serão consideradas 3 variáveis aleatórias, enquanto no segundo considera-se 4 variáveis aleatórias. Já no terceiro são 3 variáveis aleatórias e finalmente no quarto 5 variáveis aleatórias. Nos dois primeiros cenários somente a distribuição Normal é utilizada para governar o comportamento estatístico das variáveis aleatórias enquanto nos dois últimos cenários emprega-se também a distribuição Log-Normal. Nos três primeiros cenários serão utilizados os métodos de confiabilidade MSR e acoplamento direto. Porém no 4º cenário a estrutura será analisada considerando-se somente o acoplamento direto.

9.3.1 – 1º Cenário

Na análise deste cenário foram consideradas 3 variáveis aleatórias as quais são o carregamento atuante, a altura da viga e o número de ciclos de carga atuante. Foram adotadas as seguintes propriedades estatísticas para essas variáveis aleatórias:

carregamento atuante $F \sim N(5,0;0,50)kN$, altura da viga $W_v \sim N(1,25;0,10)m$ e número de ciclos de carga atuante $N_{Ciclos}^{Atuante} \sim N(1,0 \cdot 10^6; 1,0 \cdot 10^5) ciclos$. As demais variáveis da análise são consideradas como determinísticas. O vão da viga foi considerado igual a $S_v = 5,0m$, o comprimento inicial a da fissura $a_0 = 0,275m$ e o parâmetro C da lei de Paris $C = 3,0 \cdot 10^{-11} m / ciclos \left(kN/m^{3/2} \right)^n$. A tolerância adotada para a convergência da análise foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$.

Nas Fig.(9.4), Fig.(9.5), Fig.(9.6) e Fig.(9.7) são apresentados os resultados da convergência das variáveis aleatórias do problema e também do índice de confiabilidade, β , para a análise realizada.

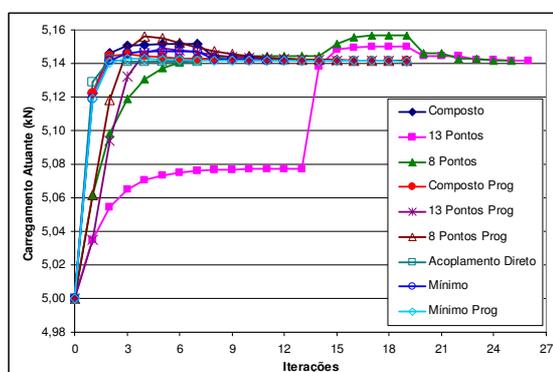


Figura 9.4 Convergência para carregamento.

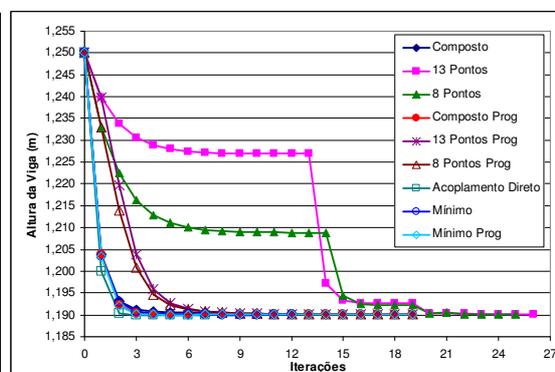


Figura 9.5 Convergência para altura da viga.

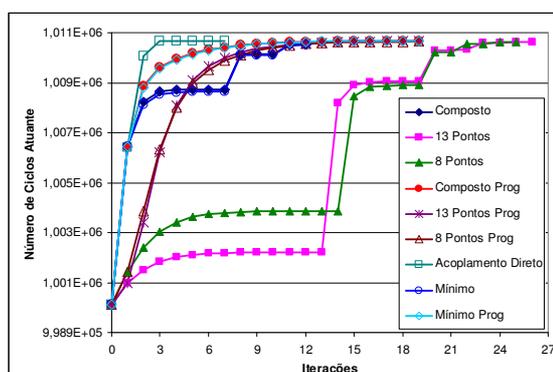


Figura 9.6 Convergência para N° de ciclos atuante.

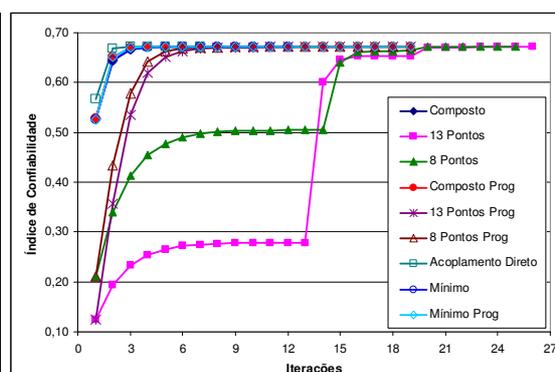


Figura 9.7 Convergência para β .

Os resultados apresentados nessas quatro figuras mostram que as respostas obtidas por meio dos modelos MSR e acoplamento direto concordam entre si, o que é um bom indicativo sobre a convergência dos modelos e unicidade da solução obtida. Pode ser verificado também que nos modelos de superfície de resposta que empregam a redução progressiva da distância entre os pontos do plano de experiência a solução é mais suave e estável quando comparado ao modelo em que a redução da distância dos

pontos é feita após a convergência. Além disso, com o modelo de redução progressiva o caminho de convergência das variáveis aleatórias é praticamente o mesmo não dependendo do plano de experiência adotado.

Apesar da resposta obtida pelos diferentes métodos de confiabilidade utilizados ser a mesma constata-se que o custo computacional de cada análise, medido pelo número de chamadas do modelo mecânico, é bem diferente como mostra a Fig. (9.8).

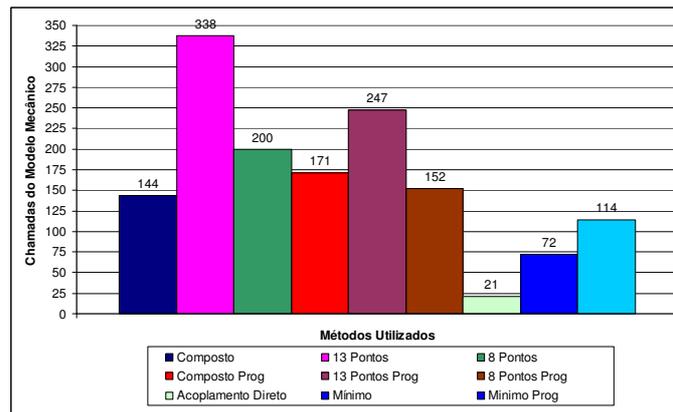


Figura 9.8 Número de chamadas do modelo mecânico para as análises numéricas efetuadas.

Por meio dessa figura pode-se observar que o modelo de acoplamento direto é o mais eficiente uma vez que este obteve a convergência da análise com somente 21 chamadas do modelo mecânico. Os modelos MSR, pelo fato de aproximarem a equação de estado limite, necessitam de um número maior de chamadas do modelo mecânico para a convergência. Nesse conjunto de modelos a análise com o plano de experiência Mínimo, com a redução da distância entre os pontos no plano de experiência após a convergência, foi a mais eficiente necessitando de 72 chamadas para a convergência. Entre os dois métodos de confiabilidade utilizados vê-se que o acoplamento direto é o mais eficiente uma vez que este obtém a convergência com um número de chamadas do modelo mecânico bem inferior ao requerido pelos modelos MSR.

9.3.2 – 2º Cenário

No segundo cenário do problema, a estrutura será analisada considerando-se quatro variáveis aleatórias. A variável aleatória adicional considerada é o comprimento do vão S_v . Com esse conjunto de variáveis aleatórias o polinômio quadrático que representa a resistência da estrutura no MSR será construído utilizando-se as seguintes variáveis aleatórias: F, W_v e S_v . Enquanto no acoplamento direto o processo de busca do

ponto de projeto é feito avaliando numericamente os gradientes da função de estado limite por meio de consultas ao modelo mecânico considerando-se pequenas variações nos valores das variáveis aleatórias do problema.

Além dessas três variáveis aleatórias o número de ciclos de carregamento atuante, $N_{Ciclos}^{Atuante}$, será também considerado como variável aleatória na análise. Assim, nessa análise foram adotadas as seguintes propriedades estatísticas para as variáveis aleatórias: carregamento atuante $F \sim N(5,0;0,50)kN$, altura da viga $W_v \sim N(1,25;0,10)m$, comprimento do vão $S_v \sim N(5,0;0,15)m$ e número de ciclos atuante $N_{Ciclos}^{Atuante} \sim N(1,0 \cdot 10^6; 1,0 \cdot 10^5) ciclos$. As demais variáveis do problema são consideradas como determinísticas. O comprimento inicial a da fissura será $a_0 = 0,275 m$ e o parâmetro C da lei de Paris $C = 3,0 \cdot 10^{-11} m / ciclos \left(kN / m^{3/2} \right)^n$. A tolerância considerada para a convergência da análise foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$.

Os resultados foram verificados para o índice de confiabilidade e para as coordenadas do ponto de projeto. Nas Fig.(9.9), Fig.(9.10), Fig.(9.11), Fig.(9.12) e Fig.(9.13), são apresentados os resultados para a convergência das variáveis aleatórias da análise e também para o índice de confiabilidade, β .

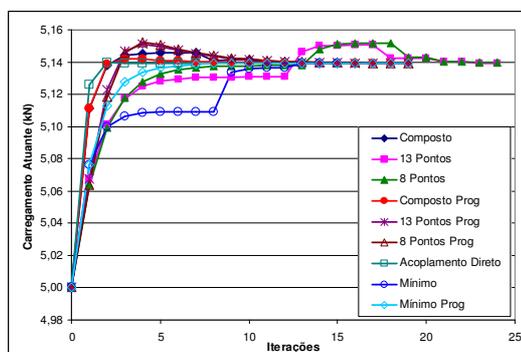


Figura 9.9 Convergência para carregamento.

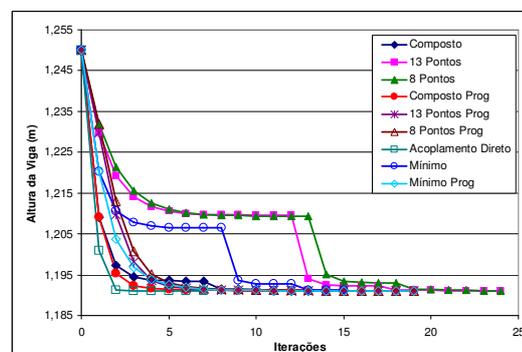


Figura 9.10 Convergência para altura da viga, W_v .

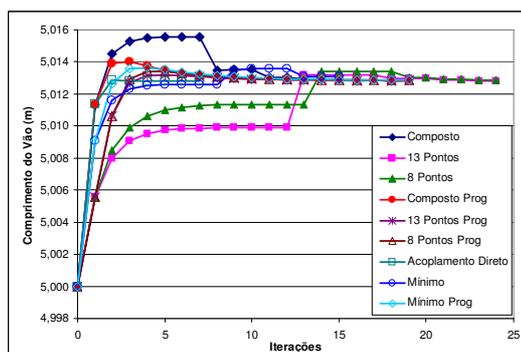


Figura 9.11 Convergência para S_v .

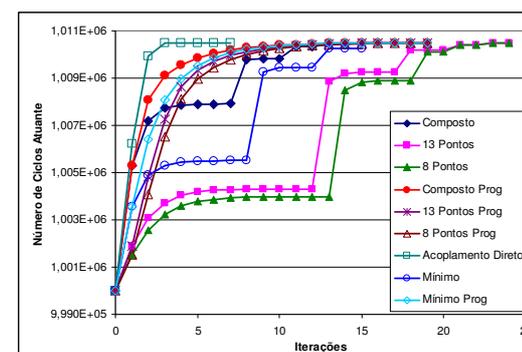


Figura 9.12 Convergência para N° de ciclos atuante.

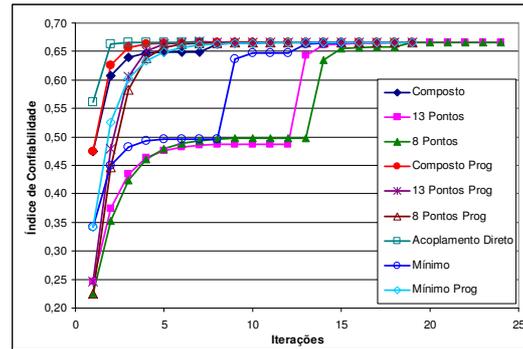


Figura 9.13 Convergência para β .

Os resultados ilustrados nessas figuras mostram que as respostas fornecidas pelos modelos de superfície de resposta e acoplamento direto são concordantes, o que é um bom indicativo sobre a unicidade da solução obtida e também sobre a convergência dos modelos. Assim como no cenário anterior constata-se que nos modelos MSR que empregam a redução progressiva da distância entre os pontos do plano de experiência a solução é mais suave e estável quando comparado ao modelo em que a redução da distância dos pontos é feita após a convergência. Além disso, com o modelo de redução progressiva o caminho de convergência das variáveis aleatórias é praticamente o mesmo não dependendo do plano de experiência adotado.

Foi comparado também o custo computacional de cada análise efetuada. Esse parâmetro é medido pelo número de chamadas do modelo mecânico necessárias para a obtenção da convergência da análise de confiabilidade. Apesar da resposta obtida pelos diferentes métodos de confiabilidade estrutural empregados ser a mesma essa discussão é importante para identificar qual método é o mais eficiente. O diagrama comparativo com o número de chamadas do modelo mecânico é apresentado na Fig. (9.14).

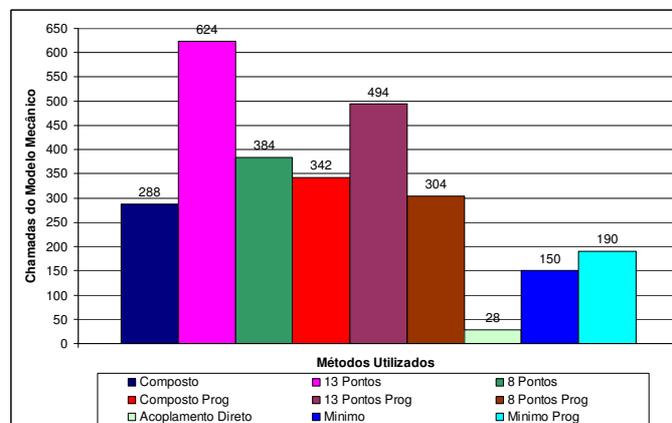


Figura 9.14 Número de chamadas do modelo mecânico para as análises numéricas efetuadas.

Por meio dessa figura pode-se observar que o modelo de acoplamento direto é o mais eficiente uma vez que este obteve a convergência da análise com somente 28 chamadas do modelo mecânico. Os modelos MSR, pelo fato de aproximarem a equação de estado limite, necessitam de um número maior de chamadas do modelo mecânico para a convergência. Nesse conjunto de modelos a análise com o plano de experiência Mínimo, com a redução da distância entre os pontos no plano de experiência após a convergência, foi a mais eficiente necessitando de 150 chamadas do modelo mecânico para a convergência. Quando comparamos os dois métodos de confiabilidade utilizados vemos que o acoplamento direto é mais eficiente já que necessita de um número de chamadas bem inferior quando comparados aos modelos de Superfície de Resposta.

9.3.3 – 3º Cenário

No terceiro cenário de análise o problema será novamente abordado considerando-se 3 variáveis aleatórias. No entanto neste cenário, diferentemente do 1º cenário, as variáveis aleatórias consideradas são o carregamento atuante, F , o parâmetro C da lei de Paris e o comprimento inicial da fissura, a_0 . Nessa análise foram consideradas as seguintes propriedades estatísticas para essas variáveis aleatórias:

$$F \sim N(5,0;0,80)kN, \quad C \sim LN(3,0 \cdot 10^{-10}; 1,8 \cdot 10^{-10})m/ciclos \left(kN/m^{3/2} \right)^n \quad e$$

$a_0 \sim LN(0,01;0,003)m$. As demais variáveis do problema são consideradas de forma determinística. O comprimento do vão foi adotado igual a $S_v = 5,0m$, a altura da viga foi considerada igual a $W_v = 1,25m$ e o número de ciclos de carregamento atuante na estrutura considerado igual a $N_{Ciclos}^{Atuante} = 2,0 \cdot 10^6$ ciclos. A tolerância adotada para a convergência da análise foi de $1 \cdot 10^{-4}$.

Foram verificados os valores do índice de confiabilidade e também das coordenadas do ponto de projeto. Estes resultados são apresentados nas Fig.(9.15), Fig.(9.16), Fig.(9.17) e Fig.(9.18).

Os resultados ilustrados nessas figuras mostram que as respostas fornecidas pelos modelos MSR e acoplamento direto são concordantes, mostrando que ambos os modelos foram capazes de encontrar a resposta do problema. Assim como nos cenários anteriores constata-se que nos modelos com superfície de resposta que empregam a redução progressiva da distância entre os pontos do plano de experiência a solução é

mais suave e estável quando comparado ao modelo em que esta redução é feita após a convergência. Além disso, com o modelo de redução progressiva o caminho de convergência das variáveis aleatórias é praticamente o mesmo não dependendo do plano de experiência adotado.

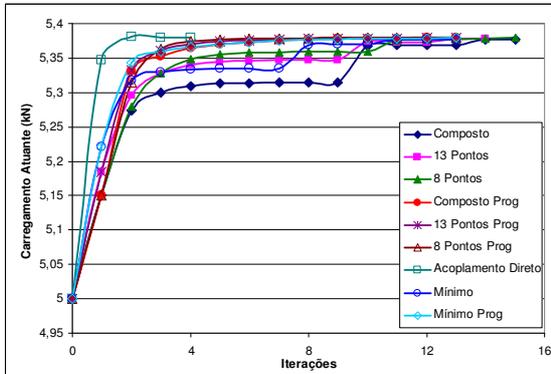


Figura 9.15 Convergência para carregamento.

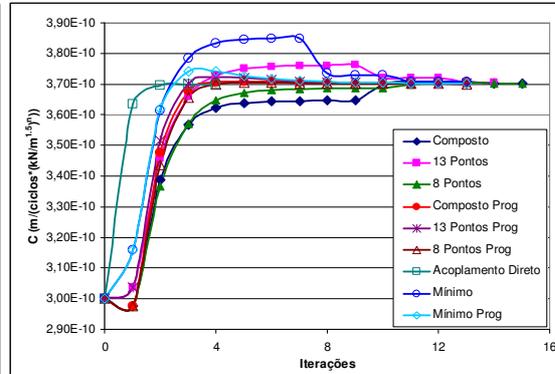


Figura 9.16 Convergência parâmetro C Lei Paris.

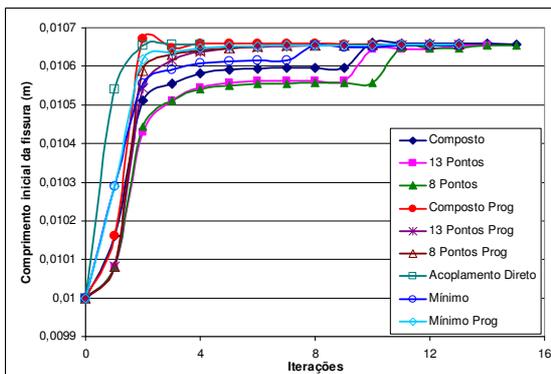


Figura 9.17 Convergência para a_0 .

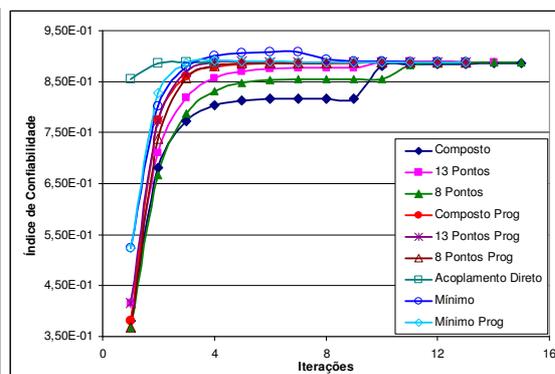


Figura 9.18 Convergência para β .

Foi comparado também o custo computacional de cada análise efetuada. Esse parâmetro é medido pelo número de chamadas do modelo mecânico necessárias para a obtenção da convergência da análise de confiabilidade. Apesar da resposta obtida pelos diferentes métodos de confiabilidade estrutural empregados ser a mesma essa discussão é importante para identificar o método mais eficiente. O diagrama comparativo do número de chamadas do modelo mecânico é apresentado na Fig. (9.19).

Por meio dessa figura pode-se observar que o modelo de acoplamento direto é o mais eficiente uma vez que este obteve a convergência da análise com somente 16 chamadas do modelo mecânico. Os modelos MSR, pelo fato de aproximarem a equação de estado limite, necessitam de um número maior de chamadas do modelo mecânico para a convergência. Nesse conjunto de modelos a análise com o plano de experiência Mínimo, com a redução da distância entre os pontos no plano de experiência tanto

progressiva quanto após convergência, foram os mais eficientes necessitando de 130 chamadas para a convergência. Quando comparamos os dois métodos de confiabilidade utilizados vemos que o método de acoplamento direto é mais eficiente já que necessita de um número de chamadas bem inferior quando comparados aos modelos MSR.

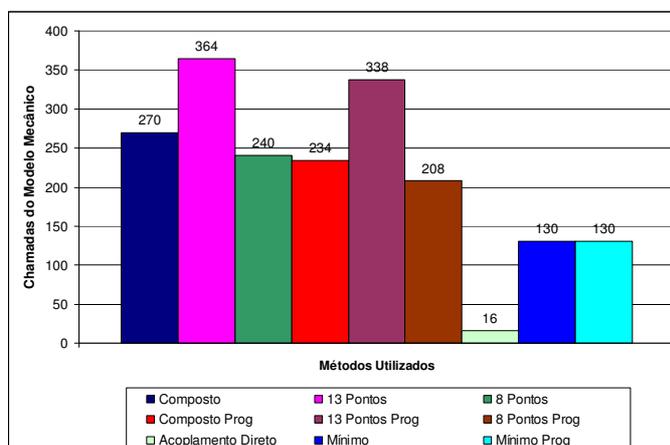


Figura 9.19 Número de chamadas do modelo mecânico para as análises numéricas efetuadas.

9.3.4 – 4º Cenário

Para finalizar a análise do problema proposto neste tópico será agora efetuada a análise de confiabilidade da estrutura mostrada na Fig. (9.3) considerando-se 5 variáveis aleatórias. Nessa análise foram consideradas como variáveis aleatórias o carregamento atuante, o parâmetro C da lei de Paris, a altura da viga, o comprimento do vão e o comprimento inicial da fissura. Os parâmetros estatísticos adotados para essas variáveis são: $F \sim LN(5,0;0,80)kN$, $W_v \sim N(1,25;0,03)m$, $S_v \sim N(5,0;0,10)m$, $C \sim LN(3,0 \cdot 10^{-11};1,0 \cdot 10^{-11})m/ciclos(kN/m^{3/2})^n$ e $a_0 \sim LN(0,005;0,002)m$. Nessa análise o número de ciclos de carga atuante foi considerado determinístico sendo igual a $N_{Ciclos}^{Atuante} = 1,0 \cdot 10^6$ ciclos. A tolerância adotada para a convergência da análise foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-7}$.

Esta análise foi efetuada considerando-se somente o método de acoplamento direto. Adotou-se este procedimento porque com esse método é possível analisar problemas com um número maior de variáveis aleatórias sem um grande aumento no número de chamadas do modelo mecânico durante cada iteração, como ocorre com os modelos baseados no MSR. Além disso, esse método já se mostrou eficiente na

obtenção do ponto de projeto e do índice de confiabilidade conforme resultados apresentados neste capítulo capacitando-o para tal análise.

Nas Fig.(9.20), Fig.(9.21), Fig.(9.22), Fig.(9.23), Fig.(9.24) e Fig.(9.25), são apresentados os resultados obtidos para a convergência das variáveis aleatórias da análise e também para o índice de confiabilidade, β . Esses diagramas mostram um bom desempenho do método de acoplamento direto sendo que o caminho percorrido até a convergência é suave e estável. Deve-se destacar também que mesmo com cinco variáveis aleatórias presentes na análise a convergência foi obtida com somente 14 iterações o que resulta 84 chamadas do modelo mecânico.

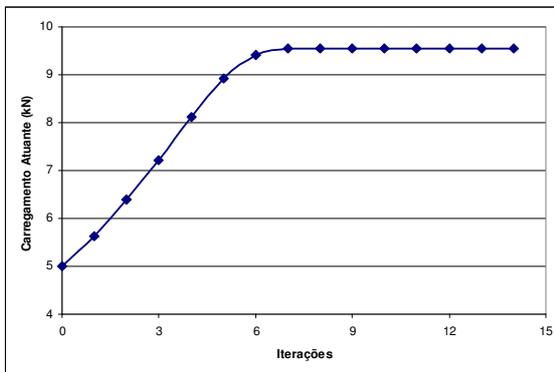


Figura 9.20 Convergência para carregamento.

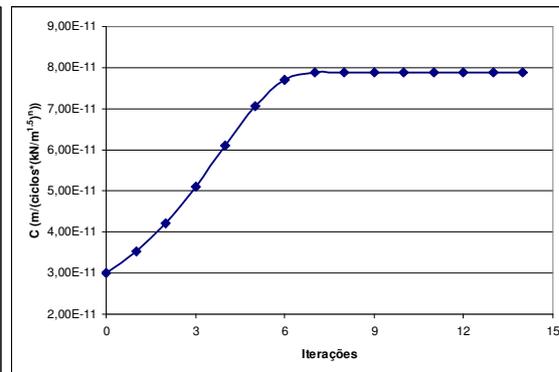


Figura 9.21 Convergência parâmetro C Lei Paris.

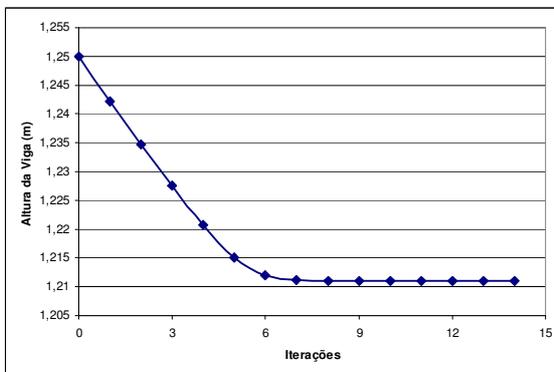


Figura 9.22 Convergência para W_V .

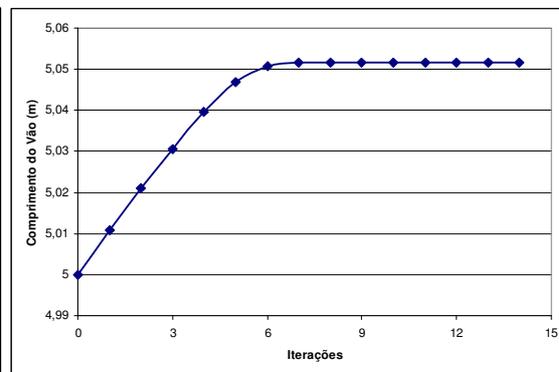


Figura 9.23 Convergência para S_V .

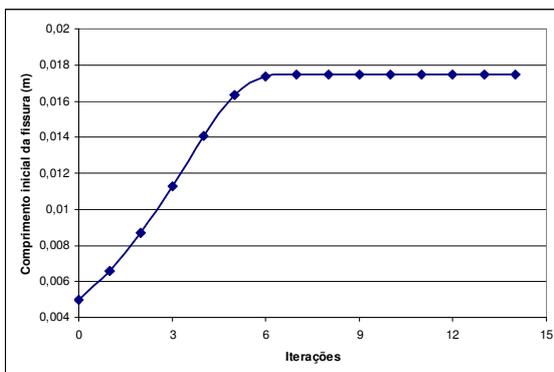


Figura 9.24 Convergência para a_0 .

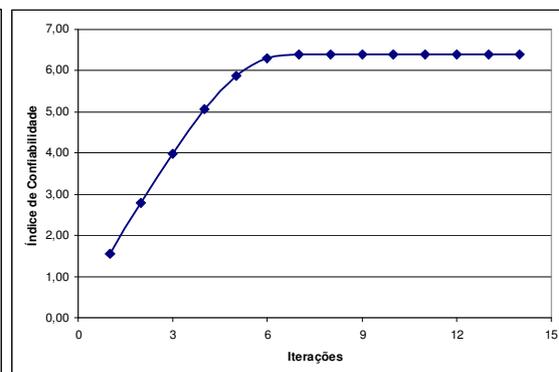


Figura 9.25 Convergência para β .

9.4 – Exemplo 4: Estrutura Plana Contendo Furos Solicitada à Flexão

Neste exemplo será realizada a análise de confiabilidade da estrutura mostrada na Fig. (9.26). Trata-se de uma estrutura plana com três furos em seu interior contendo um entalhe inicial localizado em sua face inferior. A estrutura é biapoiada sendo solicitada por um carregamento pontual no centro de sua face superior.

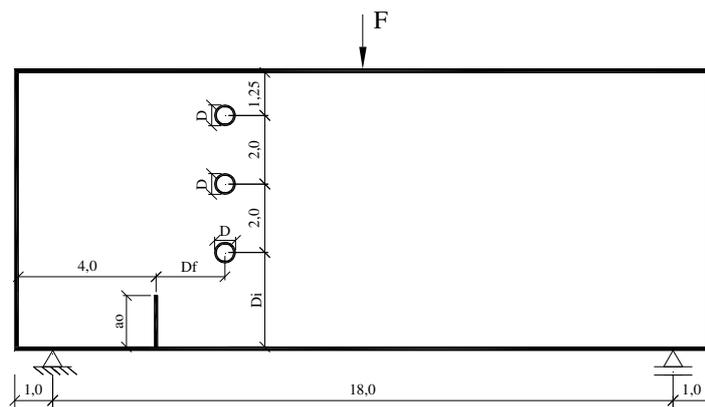


Figura 9.26 Estrutura analisada. Dimensões em polegada.

Nesta análise a propagação da fissura será efetuada considerando-se o regime de carregamento oscilatório e fadiga. Neste exemplo o carregamento oscilatório é composto por um ciclo de carregamento e descarregamento completo. Foram adotadas as seguintes propriedades para o material constituinte da estrutura: módulo de elasticidade longitudinal $E = 300 \text{ ksi}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$, fator de intensidade de tensão resistente do material $K_c = 1,87271 \cdot 10^3 \text{ ksi}/\sqrt{\text{in}}$, fator de intensidade de tensão limite da lei de Paris $\Delta K_{th} = 0,15 \text{ ksi}/\sqrt{\text{in}}$ e parâmetros n da lei de Paris $n = 3,0$. A lei de Paris foi integrada, em todos os cenários deste exemplo, considerando o incremento no comprimento da fissura igual a $\Delta a = 0,40 \text{ in}$.

Na análise de confiabilidade desse exemplo a equação de estado limite é escrita em termos do número de ciclos de carregamento. Assim, na análise são considerados os ciclos de carga resistente e atuante:

$$G = N_{\text{Ciclos}}^{\text{Resistente}} - N_{\text{Ciclos}}^{\text{Atuante}} \quad (9.7)$$

O problema de confiabilidade foi resolvido considerando os MSR e acoplamento direto. Dessa forma a variável $N_{\text{Ciclos}}^{\text{Resistente}}$ é representada por meio de um polinômio quadrático construído a partir das respostas mecânicas da estrutura via MSR. No método de acoplamento direto o processo de busca do ponto de projeto é efetuado

avaliando numericamente os gradientes da função de estado limite por meio de consultas ao modelo mecânico considerando pequenas variações nos valores das variáveis aleatórias do problema.

Através do MSR a estrutura foi analisada considerando quatro planos de experiência diferentes sendo eles os planos de experiência Mínimo, Composto, 13 Pontos e 8 Pontos. Além disso, foram consideradas duas formas diferentes de adaptatividade dos pontos nos planos de experiência as quais são após convergência e progressivamente já discutidas anteriormente.

A análise de confiabilidade da estrutura mostrada na Fig. (9.26) será realizada considerando-se quatro diferentes cenários os quais se diferem quanto às variáveis aleatórias consideradas, às distribuições estatísticas para estas variáveis e também quanto ao número de variáveis aleatórias na análise. No primeiro cenário serão consideradas 3 variáveis aleatórias, enquanto no segundo considera-se 4 variáveis aleatórias. Já no terceiro serão 3 variáveis aleatórias e finalmente no quarto cenário a análise será realizada considerando-se 6 variáveis aleatórias. Nos dois primeiros cenários somente a distribuição Normal é utilizada para governar o comportamento estatístico das variáveis aleatórias enquanto nos dois últimos cenários emprega-se também a distribuição Log-Normal. Nos três primeiros cenários serão utilizados os métodos de confiabilidade MSR e acoplamento direto. Porém no 4º cenário a estrutura será analisada considerando-se somente o acoplamento direto.

9.4.1 – 1º Cenário

No primeiro cenário a estrutura será analisada considerando-se três variáveis aleatórias. As variáveis consideradas são o carregamento atuante, F , o diâmetro dos furos da estrutura, D , e o número de ciclos de carregamento atuante, $N_{Ciclos}^{Atuante}$. Foram adotadas as seguintes propriedades estatísticas para essas variáveis aleatórias: carregamento atuante $F \sim N(3,0;0,03)kip$, diâmetro dos furos $D \sim N(0,50;0,03)in$ e número de ciclos de carregamento atuante $N_{Ciclos}^{Atuante} \sim N(8,0 \cdot 10^7; 3,0 \cdot 10^6)ciclos$. As demais variáveis da análise são consideradas determinísticas. O comprimento inicial da fissura é considerado igual a $a_0 = 1,0in$, a distância entre a fissura e o centro dos furos é igual a $D_f = 2,0in$, a distância dos furos à base da estrutura é igual a $D_i = 2,75in$ e

finalmente o parâmetro C da lei de Paris $C = 7,0 \cdot 10^{-9} \text{ in} / \text{ciclos} \left(\frac{\text{ksi}}{\sqrt{\text{in}}} \right)^n$. A tolerância para a convergência da análise foi adotada igual a $1 \cdot 10^{-4}$.

Foram obtidos os resultados para as coordenadas do ponto de projeto e para o índice de confiabilidade. Nas Fig.(9.27), Fig.(9.28), Fig.(9.29) e Fig.(9.30) são apresentados os resultados para a convergência das variáveis aleatórias da análise e também para o índice de confiabilidade, β .

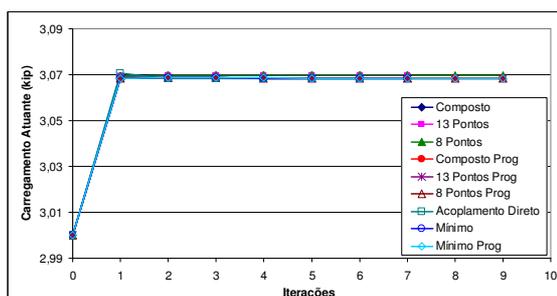


Figura 9.27 Convergência para carregamento.

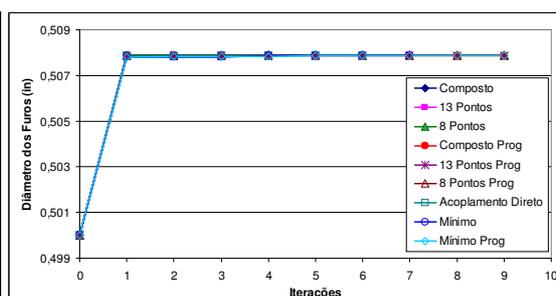


Figura 9.28 Convergência para D .

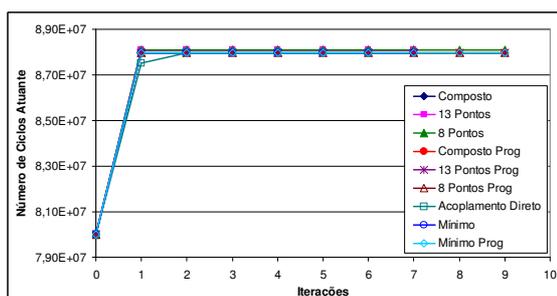


Figura 9.29 Convergência para N° de ciclos atuante.

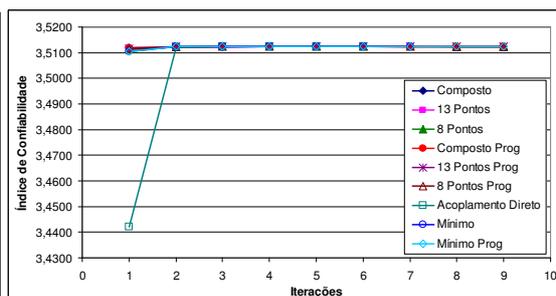


Figura 9.30 Convergência para β .

Os resultados apresentados nessas quatro figuras mostram que as respostas obtidas por meio dos modelos MSR e acoplamento direto concordam entre si, o que é um bom indicativo sobre a unicidade da solução obtida e também sobre convergência dos modelos. Pode ser verificado também nessa análise que o caminho de convergência das variáveis aleatórias é praticamente o mesmo não importando o método de confiabilidade estrutural empregado. Constata-se que não houve dificuldade durante o processo de convergência, todos os métodos de confiabilidade empregados praticamente chegam à solução final do problema com somente duas iterações.

Apesar da resposta obtida pelos diferentes métodos de confiabilidade utilizados ser a mesma constata-se que o custo computacional de cada análise, medido pelo número de chamadas do modelo mecânico, é bem diferente como mostra a Fig. (9.31).

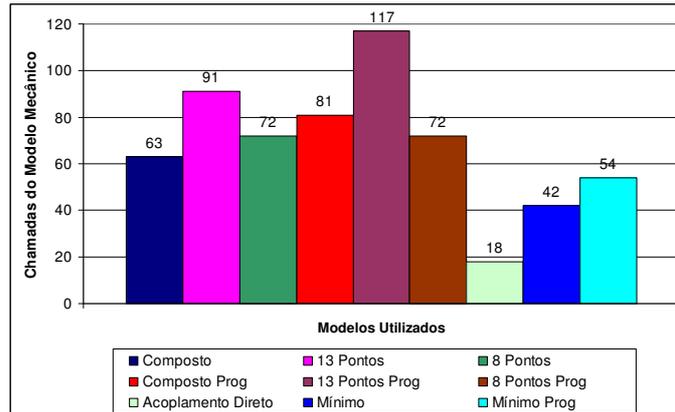


Figura 9.31 Número de chamadas do modelo mecânico para as análises numéricas efetuadas.

Por meio da Fig. (9.31) observa-se que o modelo de acoplamento direto foi mais uma vez o mais eficiente já que este obteve a convergência da análise com somente 18 chamadas do modelo mecânico. Os modelos MSR, pelo fato de aproximarem a equação de estado limite, necessitam de um número maior de chamadas do modelo mecânico para a convergência. Nesse conjunto de modelos a análise com o plano de experiência Mínimo, com a redução da distância entre os pontos no plano de experiência após a convergência, foi a mais eficiente necessitando de 42 chamadas para a convergência. Entre os dois métodos de confiabilidade utilizados vê-se que o método de acoplamento direto é o mais eficiente uma vez que este obtém a convergência com um número de chamadas do modelo mecânico bem inferior ao requerido pelos modelos MSR.

9.4.2 – 2º Cenário

Esse problema pode agora ser analisado considerando quatro variáveis aleatórias. Neste cenário a variável aleatória adicional considerada é a distância entre a fissura e o centro dos furos, D_f . Por meio do MSR o polinômio quadrático que representa a resistência da estrutura será construído utilizando-se as seguintes variáveis aleatórias: F, D_e e D_f . Enquanto com o acoplamento direto o processo de busca do ponto de projeto é feito avaliando numericamente os gradientes da função de estado limite por meio de consultas ao modelo mecânico considerando pequenas variações nos valores das variáveis aleatórias do problema.

Além dessas três variáveis aleatórias o número de ciclos de carregamento atuante, $N_{Ciclos}^{Atuante}$, será também considerado. Nesta análise a equação de estado limite

permanece sendo a apresentada na Eq. (9.7). Foram adotadas as seguintes propriedades estatísticas para essas variáveis aleatórias: carregamento atuante $F \sim N(3,0;0,03)kip$, diâmetro dos furos $D \sim N(0,50;0,05)in$, distância entre a fissura e o furo $D_f \sim N(2,0;0,05)in$ e número de ciclos de carga atuante $N_{Ciclos}^{Atuante} \sim N(8,0 \cdot 10^7; 3,0 \cdot 10^6)ciclos$. As demais variáveis aleatórias da análise são admitidas como determinísticas. O comprimento inicial da fissura é considerado igual a $a_0 = 1,0in$, o parâmetro C da lei de Paris $C = 7,0 \cdot 10^{-9} in / ciclos \left(\frac{ksi}{\sqrt{in}} \right)^n$ e finalmente a distância dos furos à base da estrutura é igual a $D_i = 2,75in$. A tolerância para a convergência da análise foi adotada igual a $1 \cdot 10^{-4}$.

Nesta análise os resultados foram obtidos para as coordenadas do ponto de projeto e também para o índice de confiabilidade. Nas Fig.(9.32), Fig.(9.33), Fig.(9.34), Fig.(9.35) e Fig.(9.36) são apresentados os resultados para a convergência das variáveis aleatórias da análise e também para o índice de confiabilidade, β .

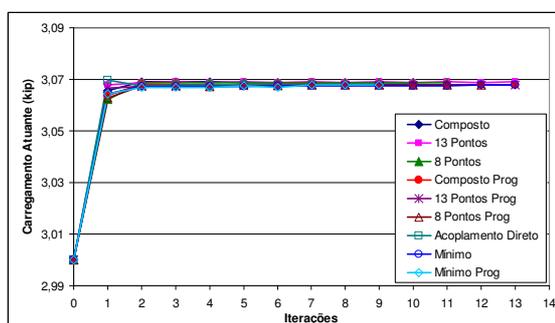


Figura 9.32 Convergência para carregamento.

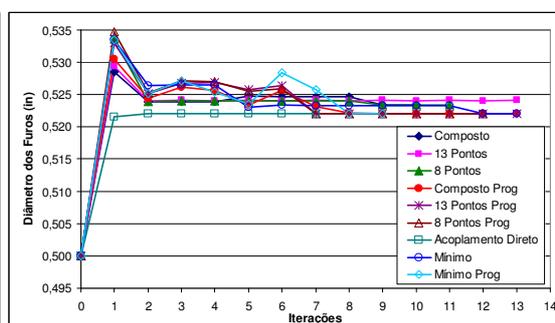


Figura 9.33 Convergência para D .

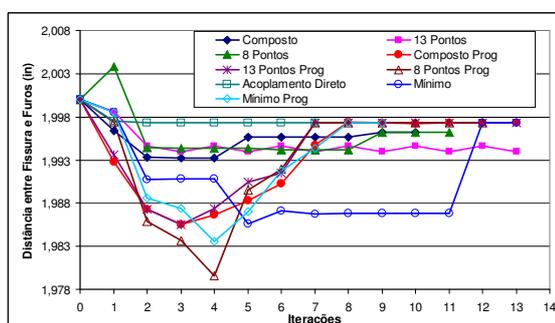


Figura 9.34 Convergência para D_f .

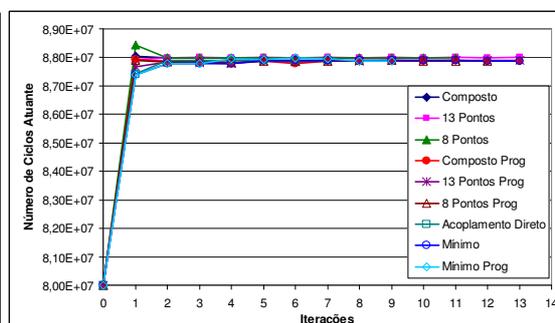


Figura 9.35 Convergência para N° de Ciclos.

Por meio dessas figuras constata-se que os resultados obtidos pelos métodos de confiabilidade empregados para o carregamento atuante, diâmetro dos furos e número de ciclos de carga atuantes são concordantes, o que é um bom indicativo sobre a

Capítulo 9 – Acoplamento entre Modelos Mecânicos e de Confiabilidade Estrutural

precisão das respostas obtidas. Deve-se destacar inclusive que para estas variáveis aleatórias o caminho de convergência observado é praticamente o mesmo não importando o método de confiabilidade estrutural empregado. Porém, para a variável aleatória D_f pode ser observada a ocorrência de dificuldade de convergência entre os modelos que utilizam superfícies de resposta.

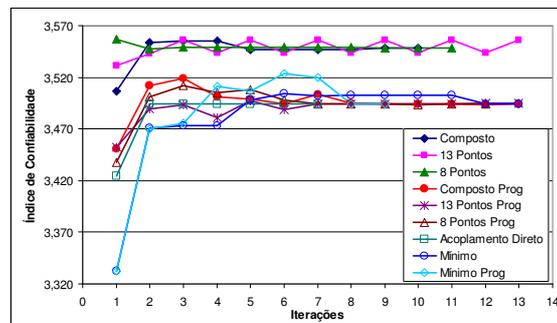


Figura 9.36 Convergência para β .

Constata-se que nos modelos do MSR com plano de experiência Composto e 8 pontos, ambos com redução da distância dos pontos nesses planos após convergência, o valor final obtido é ligeiramente inferior aos observados pelos outros métodos de confiabilidade. Além disso, observa-se também que no modelo com plano de experiência 13 pontos, redução da distância dos pontos no plano de experiência após convergência, verifica-se que não houve convergência para a análise. Esse resultado reflete-se na obtenção do índice de confiabilidade o qual depende das coordenadas do ponto de projeto.

Nos modelos que empregam MSR comportamentos como os observados nesses três últimos casos podem ocorrer uma vez que a resistência da estrutura é escrita através de um polinômio quadrático obtido a partir da resistência da estrutura, medida em cada ponto no plano de experiência, e de um processo de mínimos quadrados. Esse processo pode levar algumas vezes a processos instáveis e mesmo à obtenção de resultados ligeiramente diferentes uns dos outros dependentes do plano de experiência adotado. Outro fator que deve ser destacado nesse conjunto de modelos é a distância inicial entre os pontos no plano de experiência. Verifica-se que nos modelos MSR com redução progressiva da distância dos pontos no plano de experiência a resposta obtida foi coerente com as respostas dadas pelo modelo de acoplamento direto e também pelo modelo MSR com o plano de experiência Mínimo com redução da distância no plano após convergência. Assim a instabilidade observada nas respostas desse modelo podem

ser atribuídas, em parte, à construção do polinômio que representa a resistência da estrutura a qual depende do plano de experiência adotado e também da distância entre os pontos em cada plano.

Foi comparado também o custo computacional de cada análise efetuada. Esse parâmetro é medido pelo número de chamadas do modelo mecânico necessárias para a obtenção da convergência da análise de confiabilidade. O diagrama comparativo do número de chamadas do modelo mecânico é apresentado na Fig. (9.37).

Por meio dessa figura pode-se observar que o modelo de acoplamento direto é o mais eficiente uma vez que este obteve a convergência da análise com somente 28 chamadas do modelo mecânico. Os modelos MSR, pelo fato de aproximarem a equação de estado limite, necessitam de um número maior de chamadas do modelo mecânico para a convergência. Nesse conjunto de modelos a análise com o plano de experiência Mínimo, com a redução progressiva da distância entre os pontos no plano de experiência, foi a mais eficiente necessitando de 90 chamadas para a convergência. Quando comparamos os dois métodos de confiabilidade utilizados vemos que o acoplamento direto é mais eficiente já que este necessita de um número aproximadamente 3 vezes menor de chamadas do modelo mecânico do que o modelo mais eficiente do modelo MSR.

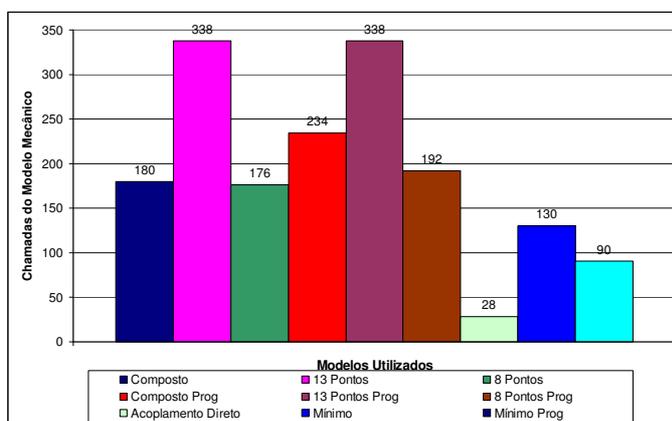


Figura 9.37 Número de chamadas do modelo mecânico para as análises numéricas efetuadas.

9.4.3 – 3º Cenário

No terceiro cenário a estrutura será novamente analisada porém considerando-se três variáveis aleatórias. As variáveis aleatórias adotadas na análise são o carregamento atuante, F , o parâmetro C da lei de Paris e a distância entre a fissura e o centro dos furos, D_f . Nessa análise foram consideradas as seguintes propriedades estatísticas para

essas variáveis aleatórias: $F \sim LN(3,0;0,60)kip$, $D_f \sim N(2,0;0,05)in$ e $C \sim LN(7,0 \cdot 10^{-9}; 2,4 \cdot 10^{-9}) in/ciclos \left(\frac{ksi}{\sqrt{in}} \right)^n$. As demais variáveis aleatórias da análise são admitidas determinísticas. O comprimento inicial da fissura é considerado igual a $a_0 = 1,0in$, o diâmetro dos furos igual a $D = 0,5in$, a distância dos furos à base da estrutura de $D_i = 2,75in$ e finalmente o número de ciclos de carga atuante $N_{Ciclos}^{Atuante} = 5,2 \cdot 10^7$ ciclos. A tolerância para a convergência da análise foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$.

A análise foi efetuada utilizando MSR e acoplamento direto. Foram verificados os resultados para o índice de confiabilidade e para as coordenadas do ponto de projeto. Nas Fig.(9.38), Fig.(9.39), Fig.(9.40) e Fig.(9.41), são apresentados os resultados para a convergência das variáveis aleatórias da análise e também para o índice de confiabilidade, β . Nessas figuras não estão mostradas as respostas obtidas por meio do modelo MSR com o plano de experiência Composto. Isso se deve ao fato desse plano de experiência não atingir a convergência durante a análise.

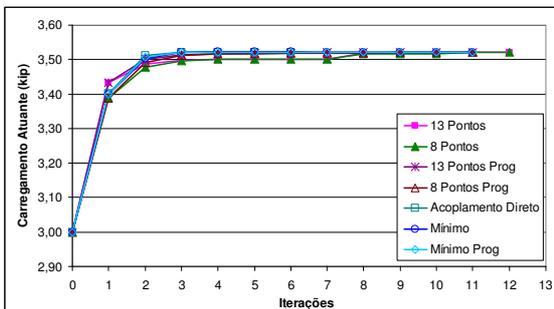


Figura 9.38 Convergência para carregamento.

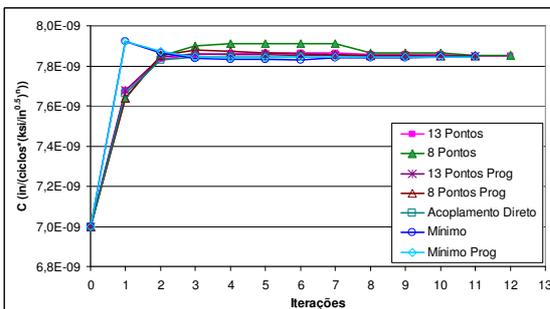
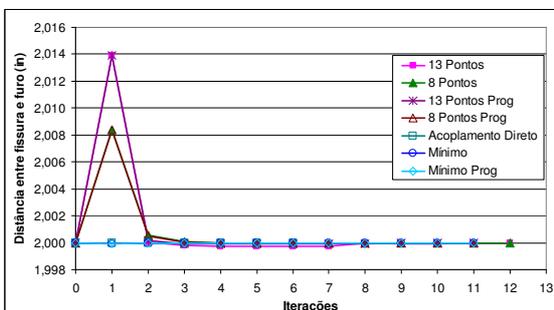
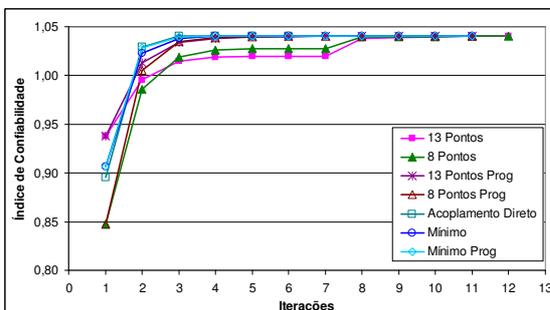


Figura 9.39 Convergência parâmetro C Lei Paris.

Figura 9.40 Convergência para D_f .Figura 9.41 Convergência para β .

Os resultados ilustrados nessas figuras mostram que as respostas fornecidas pelos modelos MSR e acoplamento direto são concordantes, o que é um bom indicativo sobre a unicidade da solução e sobre convergência dos modelos da análise. Assim como

nas análises anteriores constata-se que nos modelos MSR que empregam a redução progressiva da distância entre os pontos do plano de experiência a solução é mais suave e estável quando comparado ao modelo em que a redução da distância dos pontos é feita após a convergência. Além disso, no modelo de redução progressiva o caminho de convergência das variáveis aleatórias é praticamente o mesmo não dependendo do plano de experiência adotado.

Foi comparado também o custo computacional de cada análise efetuada. Esse parâmetro é medido pelo número de chamadas do modelo mecânico necessárias para a obtenção da convergência da análise de confiabilidade. Esta discussão é importante para a identificação do método mais eficiente. O diagrama comparativo do número de chamadas do modelo mecânico é apresentado na Fig. (9.42).

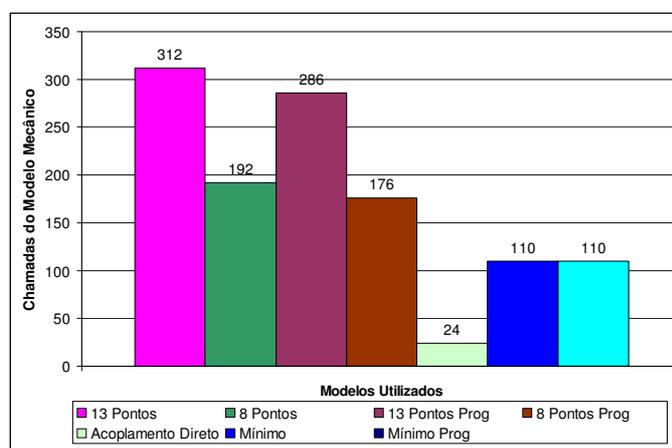


Figura 9.42 Número de chamadas do modelo mecânico para as análises numéricas efetuadas.

Por meio dessa figura pode-se observar que o modelo de acoplamento direto é mais uma vez o mais eficiente já que este obteve a convergência da análise com somente 24 chamadas do modelo mecânico. Os modelos MSR, pelo fato de aproximarem a equação de estado limite, necessitam de um número maior de chamadas do modelo mecânico para a convergência. Nesse conjunto de modelos a análise com o plano de experiência Mínimo foi a mais eficiente necessitando de 110 chamadas para a convergência. Quando comparamos os dois métodos de confiabilidade utilizados vemos que o acoplamento direto é mais eficiente já que necessita de um número de chamadas do modelo mecânico bem inferior quando comparados aos modelos MSR.

9.4.4 – 4º Cenário

Para finalizar a análise de confiabilidade dessa estrutura foi efetuada ainda uma análise considerando 6 variáveis aleatórias. Nessa análise foram consideradas como variáveis aleatórias o carregamento atuante, F , o parâmetro C da lei de Paris, a distância entre a fissura e o centro dos furos, D_f , o diâmetro dos furos, D , a distância entre o centro dos furos e a base da estrutura, D_i , e finalmente o comprimento inicial da fissura, a_0 . Os parâmetros estatísticos dessas variáveis são: $F \sim LN(3,0;0,60) \text{ kip}$, $D \sim N(0,5;0,01) \text{ in}$, $D_f \sim N(2,0;0,05) \text{ in}$, $D_i \sim N(2,75;0,06875) \text{ in}$, $a_0 \sim LN(0,1;0,02) \text{ in}$ e $C \sim LN(7 \cdot 10^{-9}; 2,4 \cdot 10^{-9}) \text{ in} / \text{ciclos} \left(\frac{\text{ksi}}{\sqrt{\text{in}}} \right)^n$. Nessa análise o número de ciclos de carga atuante foi considerado determinístico sendo igual a $N_{Ciclos}^{Atuante} = 5,0 \cdot 10^7 \text{ ciclos}$. A tolerância adotada para a convergência é igual a $1 \cdot 10^{-7}$.

Esta análise foi efetuada considerando-se somente o acoplamento direto. Este procedimento foi considerado uma vez que esse método vem se mostrando ser mais eficiente do que os métodos MSR, conforme os resultados obtidos até aqui neste capítulo. Além disso, com esse método é possível analisar problemas com um número maior de variáveis aleatórias sem um grande aumento no número de chamadas do modelo mecânico durante cada iteração, como ocorre com os modelos baseados em superfícies de resposta. Isso permite a análise de problemas de confiabilidade mais complexos, considerando-se um número maior de variáveis aleatórias.

As respostas para esta análise foram obtidas para as coordenadas do ponto de projeto e para o índice de confiabilidade. Nas Fig.(9.43), Fig.(9.44), Fig.(9.45), Fig.(9.46), Fig.(9.47), Fig.(9.48) e Fig. (9.49), são apresentados os resultados para a convergência das variáveis aleatórias da análise e também para o índice de confiabilidade, β . Na Fig. (9.50) é apresentada a evolução do valor da equação de estado limite, onde pode ser verificada a convergência da análise.

Esses diagramas mostram um bom desempenho do método de acoplamento direto. Mesmo com seis variáveis aleatórias consideradas na análise a convergência foi obtida com somente 12 iterações o que resulta em 84 chamadas do modelo mecânico. Durante a análise foram observados alguns pontos onde o algoritmo enfrentou dificuldades de convergência. No entanto o método foi capaz de ultrapassar esses pontos e atingir a convergência. Isso indica que além de eficiente esse método é também robusto.

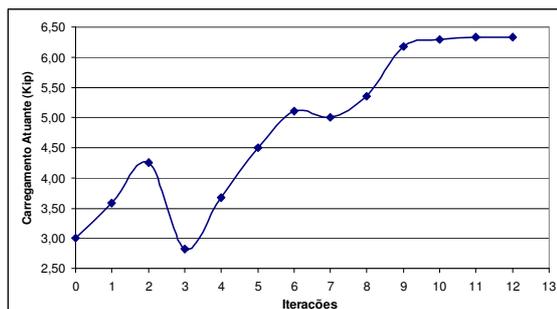


Figura 9.43 Convergência para carregamento.

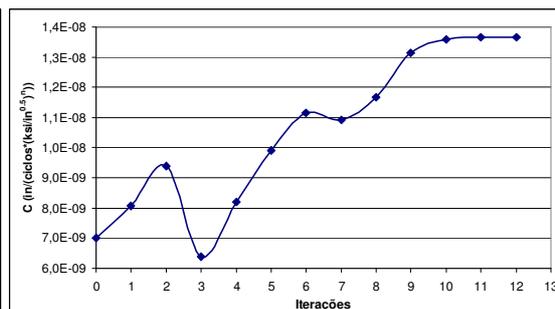


Figura 9.44 Convergência parâmetro C Lei Paris.

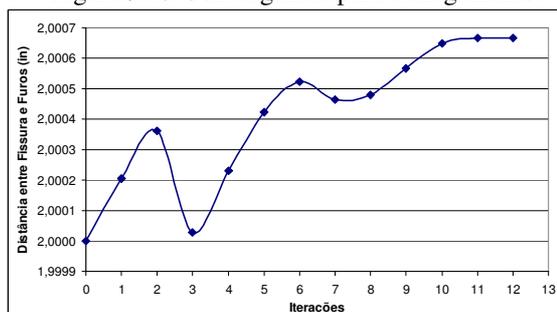
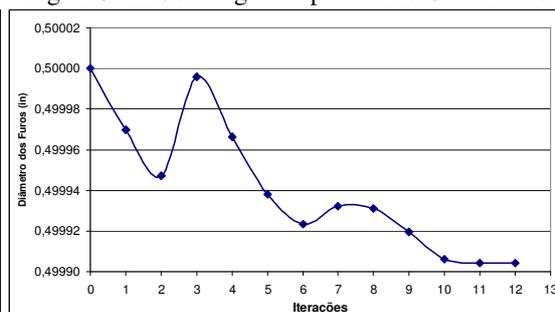
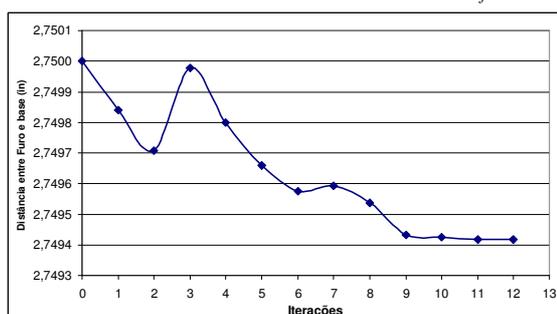
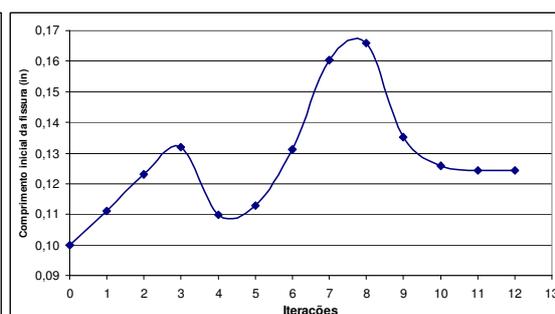
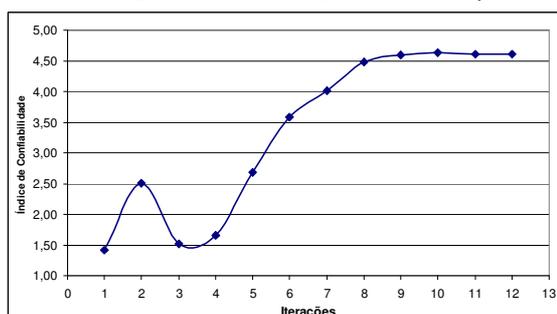
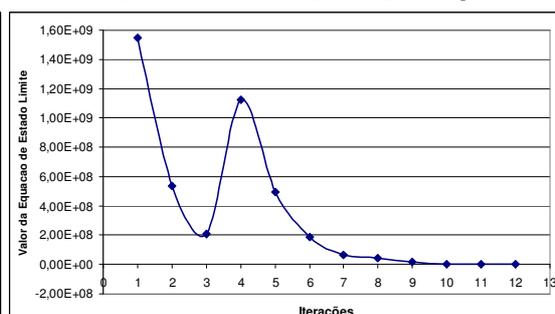
Figura 9.45 Convergência para D_f .Figura 9.46 Convergência para D .Figura 9.47 Convergência para D_i .Figura 9.48 Convergência para a_0 .Figura 9.49 Convergência para β .

Figura 9.50 Convergência para Eq. Estado Limite.

9.5 – Exemplo 5: Estrutura Plana com Furo Solicitada à Tração

Será efetuada nesse tópico a análise de confiabilidade da estrutura mostrada na Fig. (9.51). Trata-se de uma estrutura plana retangular, apresentando um metro de comprimento e três metros de altura, com um furo em seu interior e um entalhe inicial em uma de suas faces laterais. A estrutura está engastada em sua base sendo solicitada por um carregamento de tração em sua face superior. Nesta análise a propagação da

Capítulo 9 – Acoplamento entre Modelos Mecânicos e de Confiabilidade Estrutural

fissura será efetuada considerando-se o regime de carregamento oscilatório e fadiga. Neste exemplo o carregamento oscilatório é composto por um ciclo de carregamento e descarregamento completo.

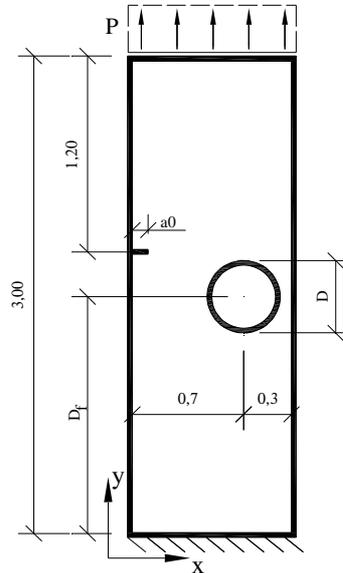


Figura 9.51 Estrutura analisada. Dimensões em metro.

Foram adotadas as seguintes propriedades para o material constituinte da estrutura: módulo de elasticidade longitudinal $E = 3,0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$, fator de intensidade de tensão resistente do material $K_c = 1,04 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^{3/2}$, fator de intensidade de tensão limite da lei de Paris $\Delta K_{th} = 1,0 \text{ kN/m}^{3/2}$ e parâmetros n da lei de Paris $n = 2,7$. A lei de Paris foi integrada considerando o incremento no comprimento da fissura igual a $\Delta a = 0,02 \text{ m}$.

Na análise de confiabilidade a equação de estado limite é escrita em termos do número de ciclos de carregamento. Assim, na análise são considerados os ciclos de carga resistente e atuante:

$$G = N_{\text{Ciclos}}^{\text{Resistente}} - N_{\text{Ciclos}}^{\text{Atuante}} \quad (9.8)$$

O problema de confiabilidade foi resolvido considerando os métodos MSR e de acoplamento direto. Dessa forma a variável $N_{\text{Ciclos}}^{\text{Resistente}}$ é representada por meio de um polinômio quadrático construído a partir das respostas mecânicas da estrutura via MSR. No acoplamento direto o processo de busca do ponto de projeto é efetuado avaliando-se numericamente os gradientes da função de estado limite por meio de consultas ao modelo mecânico considerando pequenas variações nos valores das variáveis aleatórias

do problema. Através do MSR a estrutura foi analisada considerando quatro planos de experiência diferentes sendo eles os planos de experiência Mínimo, Composto, 13 Pontos e 8 Pontos. Além disso, foram consideradas duas formas diferentes de adaptatividade dos pontos nos planos de experiência as quais são após convergência e progressivamente já discutidas anteriormente.

A análise de confiabilidade da estrutura mostrada na Fig. (9.51) será realizada considerando-se quatro diferentes cenários os quais se diferem quanto às variáveis aleatórias consideradas, às distribuições estatísticas para estas variáveis e também quanto ao número de variáveis aleatórias na análise. No primeiro cenário serão consideradas 3 variáveis aleatórias, enquanto no segundo consideram-se 4 variáveis aleatórias. Já no terceiro serão 3 variáveis aleatórias e finalmente no quarto cenário a análise será realizada considerando-se 5 variáveis aleatórias. Nos dois primeiros cenários somente a distribuição Normal é utilizada para governar o comportamento estatístico das variáveis aleatórias enquanto nos dois últimos cenários emprega-se também a distribuição Log-Normal. Nos três primeiros cenários serão utilizados os métodos de confiabilidade MSR e acoplamento direto. Porém no 4º cenário a estrutura será analisada considerando-se somente o acoplamento direto.

9.5.1 – 1º Cenário

Na análise do primeiro cenário desse problema foram consideradas como variáveis aleatórias o carregamento atuante, P , o diâmetro do furo da estrutura, D , e o número de ciclos de carga atuante, $N_{Ciclos}^{Atuante}$. Foram adotadas as seguintes propriedades estatísticas para essas variáveis aleatórias: carregamento atuante $P \sim N(5,0;0,80)kN/m$, diâmetro do furo $D \sim N(0,40;0,025)m$ e número de ciclos de carga atuante $N_{Ciclos}^{Atuante} \sim N(5,0 \cdot 10^6; 1,0 \cdot 10^5)ciclos$. As demais variáveis envolvidas no problema foram consideradas como determinísticas. A distância do centro do furo à base da estrutura é igual a $D_f = 1,5m$, o comprimento inicial da fissura foi admitido igual a $a_0 = 0,10m$ e finalmente o parâmetro C da lei de Paris foi igual a $C = 2,0 \cdot 10^{-10} m/ciclos \left(kN/m^{3/2} \right)^n$. A tolerância adotada para a convergência da análise foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$.

Os resultados foram verificados para as coordenadas do ponto de projeto e também para o índice de confiabilidade. Nas Fig.(9.52), Fig.(9.53), Fig.(9.54) e Fig.(9.55) são apresentados os resultados para a convergência das variáveis aleatórias da análise e também para o índice de confiabilidade, β .

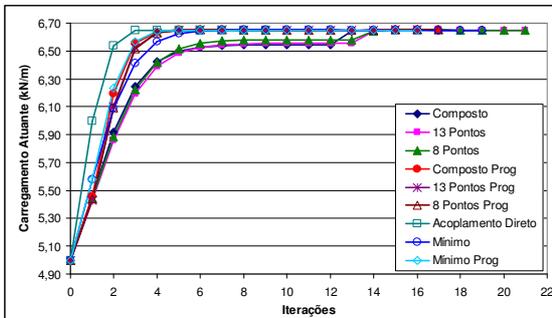


Figura 9.52 Convergência para carregamento.

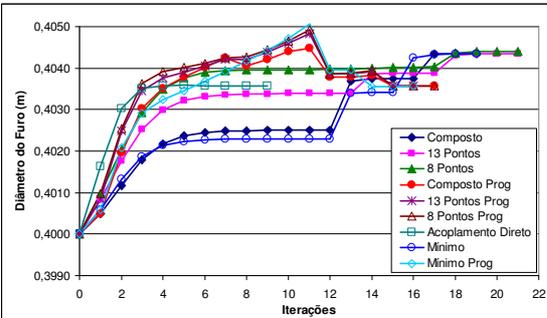


Figura 9.53 Convergência para diâmetro do furo.

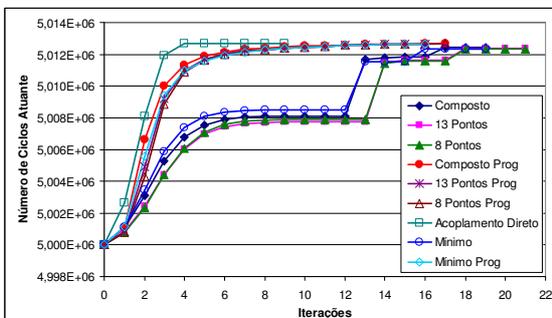


Figura 9.54 Convergência para N° de ciclos atuante.

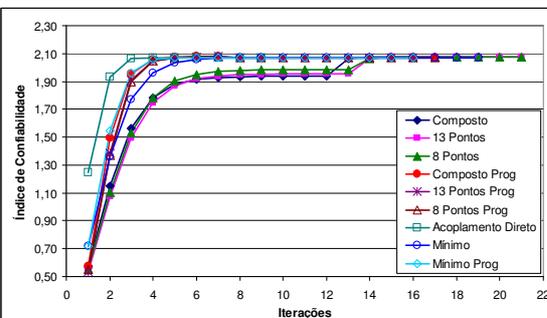


Figura 9.55 Convergência para β .

Os resultados apresentados nessas quatro figuras mostram que as respostas obtidas por meio dos modelos de superfície de resposta e acoplamento direto concordam entre si, o que é um bom indicativo sobre a convergência dos modelos e a unicidade da solução obtida. Pode ser verificado também que nos modelos MSR que empregam a redução progressiva da distância entre os pontos do plano de experiência a solução é mais suave e estável quando comparado ao modelo em que a redução da distância dos pontos é feita após a convergência. Além disso, pode-se observar também que os modelos com redução progressiva o caminho de convergência das variáveis aleatórias é praticamente o mesmo não dependendo do plano de experiência adotado.

Apesar da resposta obtida pelos diferentes métodos de confiabilidade utilizados ser a mesma constata-se que o custo computacional de cada análise, medido pelo número de chamadas do modelo mecânico, é bem diferente como mostra a Fig. (9.56). Por meio dessa figura pode-se observar que o modelo de acoplamento direto é o mais eficiente uma vez que este obteve a convergência da análise com somente 27 chamadas

do modelo mecânico. Os modelos MSR, pelo fato de aproximarem a equação de estado limite, necessitam de um número maior de chamadas do modelo mecânico para a convergência. Nesse conjunto de modelos a análise com o plano de experiência Mínimo, com a redução da distância entre os pontos no plano de experiência após a convergência, foi a mais eficiente necessitando de 114 chamadas para a convergência. Entre os dois métodos de confiabilidade utilizados vê-se que o acoplamento direto é o mais eficiente uma vez que este obtém a convergência com um número de chamadas do modelo mecânico bem inferior ao requerido pelos modelos MSR.

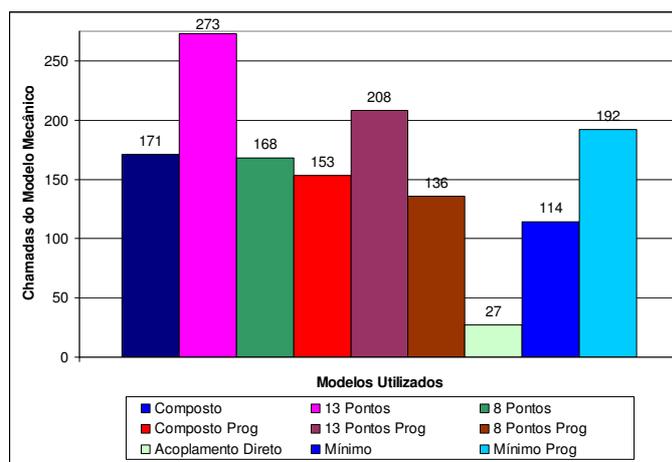


Figura 9.56 Número de chamadas do modelo mecânico para as análises numéricas efetuadas.

9.5.2 – 2º Cenário

Esse problema pode agora ser analisado considerando-se quatro variáveis aleatórias. A variável aleatória adicional considerada é a distância entre o centro do furo e a base da estrutura, D_f . Pelo MSR o polinômio quadrático que representa a resistência da estrutura será construído utilizando-se as seguintes variáveis aleatórias: P, D e D_f . Enquanto com o acoplamento direto o processo de busca do ponto de projeto é feito avaliando-se numericamente os gradientes da função de estado limite por meio de consultas ao modelo mecânico considerando pequenas variações nos valores das variáveis aleatórias do problema. Além dessas três variáveis aleatórias o número de ciclos de carregamento atuante, $N_{Ciclos}^{Atuante}$, será também admitido como variável aleatória.

Foram adotadas as seguintes propriedades estatísticas para essas variáveis aleatórias: carregamento atuante $P \sim N(5,0;0,80)kN/m$, diâmetro do furo $D \sim N(0,40;0,025)m$, distância entre o centro do furo e a base da estrutura

$D_f \sim N(1,50;0,15)m$ e número de ciclos de carregamento atuante $N_{Ciclos}^{Atuante} \sim N(5,0 \cdot 10^6; 1,0 \cdot 10^5) ciclos$. As demais variáveis envolvidas no problema foram consideradas como determinísticas. O comprimento inicial da fissura foi admitido igual a $a_0 = 0,10m$ e o parâmetro C da lei de Paris foi igual a $C = 2,0 \cdot 10^{-10} m/ciclos (kN/m^{3/2})^n$. A tolerância adotada para a convergência da análise foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$.

Assim como no cenário anterior, os resultados foram obtidos para as coordenadas do ponto de projeto e para o índice de confiabilidade. Nas Fig.(9.57), Fig.(9.58), Fig.(9.59), Fig.(9.60) e Fig.(9.61) são apresentados os resultados da convergência dessas variáveis aleatórias e também para o índice de confiabilidade, β .

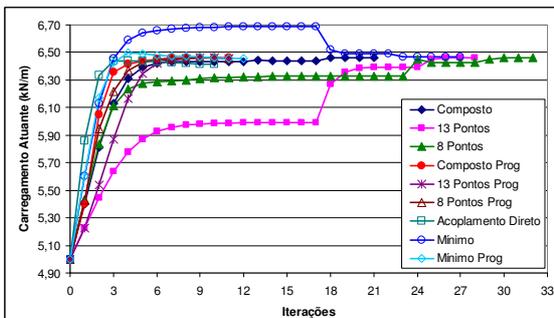


Figura 9.57 Convergência para carregamento.

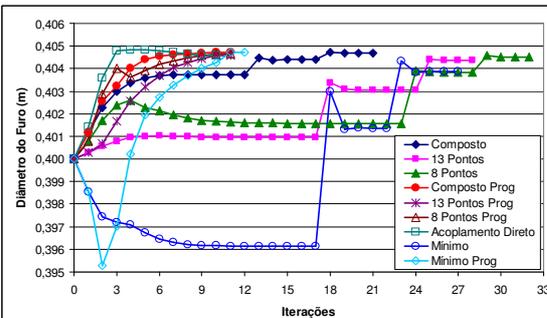


Figura 9.58 Convergência para diâmetro do furo.

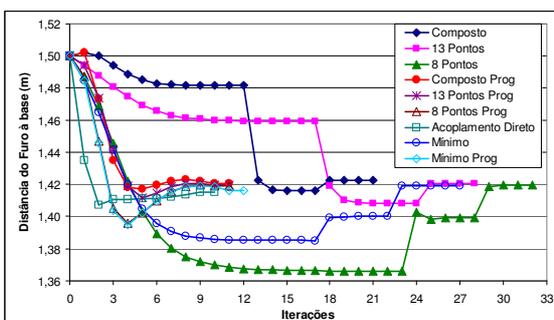
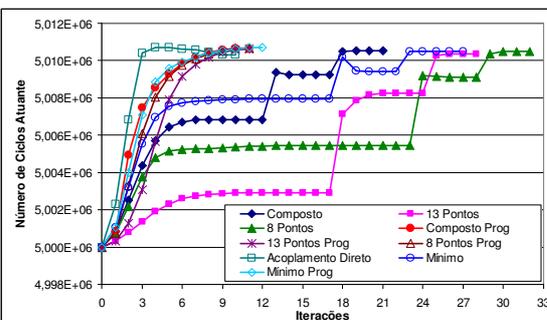
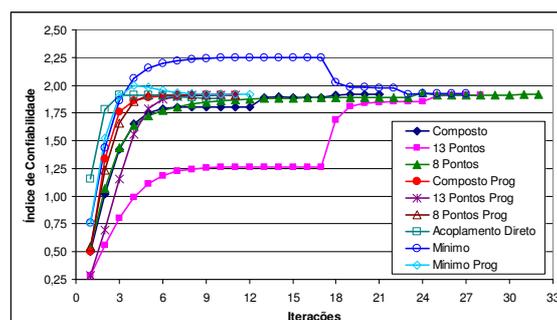
Figura 9.59 Convergência para D_f .

Figura 9.60 Convergência para nº de Ciclos.

Figura 9.61 Convergência para β .

Os resultados ilustrados nessas figuras mostram que as respostas fornecidas pelos modelos MSR e acoplamento direto são concordantes, o que é um bom indicativo sobre a unicidade da solução obtida. Assim como no cenário anterior constata-se que nos modelos via superfície de resposta que empregam a redução progressiva da distância entre os pontos do plano de experiência a solução é mais suave e estável quando comparado ao modelo em que a redução da distância dos pontos é feita após a convergência. Além disso, com o modelo de redução progressiva o caminho de convergência das variáveis aleatórias é praticamente o mesmo não dependendo do plano de experiência adotado.

Foi comparado também o custo computacional de cada análise efetuada. Esse parâmetro é medido pelo número de chamadas do modelo mecânico necessárias para a obtenção da convergência da análise de confiabilidade. O diagrama comparativo do número de chamadas do modelo mecânico é apresentado na Fig. (9.62).

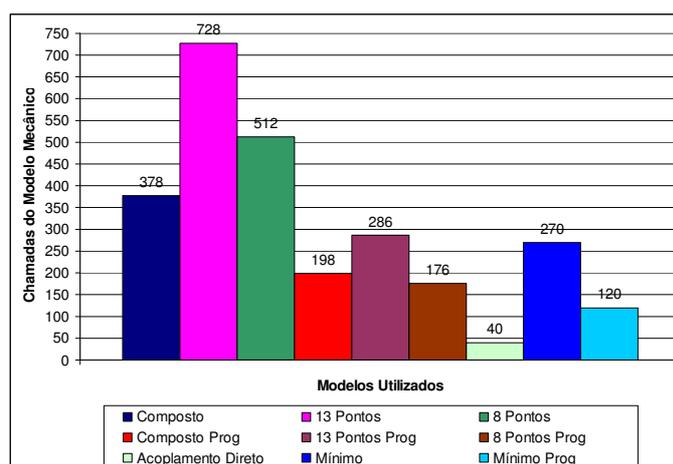


Figura 9.62 Número de chamadas do modelo mecânico para as análises numéricas efetuadas.

Por meio dessa figura pode-se observar que o modelo de acoplamento direto é novamente o mais eficiente uma vez que este obteve a convergência da análise com somente 40 chamadas do modelo mecânico. Os modelos de superfície de resposta, pelo fato de aproximarem a equação de estado limite, necessitam de um número maior de chamadas do modelo mecânico para a convergência. Nesse conjunto de modelos a análise com o plano de experiência Mínimo, com a redução progressiva da distância entre os pontos no plano de experiência, foi a mais eficiente necessitando de 120 chamadas para a convergência. Quando comparamos os dois métodos de confiabilidade utilizados vemos que o acoplamento direto é mais eficiente já que necessita de um número de chamadas do modelo mecânico bem menor que nos modelos MSR.

9.5.3 – 3º Cenário

Esse problema pode ser novamente abordado considerando-se novamente 3 variáveis aleatórias. Nesta análise as variáveis aleatórias adotadas são o carregamento atuante, F , o parâmetro C da lei de Paris e o comprimento inicial da fissura, a_0 . Nessa análise foram consideradas as seguintes propriedades estatísticas para essas variáveis aleatórias:

$$P \sim LN(5,0;0,80)kN/m, \quad a_0 \sim LN(0,01;0,003)m \quad e$$

$$C \sim LN(2,0 \cdot 10^{-10}; 7,0 \cdot 10^{-11})m/ciclos \left(kN/m^{3/2}\right)^n.$$

As demais variáveis envolvidas no problema foram consideradas como determinísticas. A distância do centro do furo à base da estrutura é igual a $D_f = 1,5m$, o diâmetro do furo foi considerado igual a $D = 0,40m$ e por último o número de ciclos de carga atuante $N_{Ciclos}^{Atuante} = 15,0 \cdot 10^7$ ciclos. A tolerância adotada para a convergência da análise foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$.

Os resultados foram verificados em termos das coordenadas do ponto de projeto e também do índice de confiabilidade. Nas Fig.(9.63), Fig.(9.64), Fig.(9.65) e Fig.(9.66), são apresentados os resultados para a convergência das variáveis aleatórias da análise e também para o índice de confiabilidade, β . Nessas figuras não estão mostradas as respostas obtidas por meio dos planos de experiência Composto e 13 Pontos. Isso se deve ao fato desses planos não obterem convergência durante a análise.

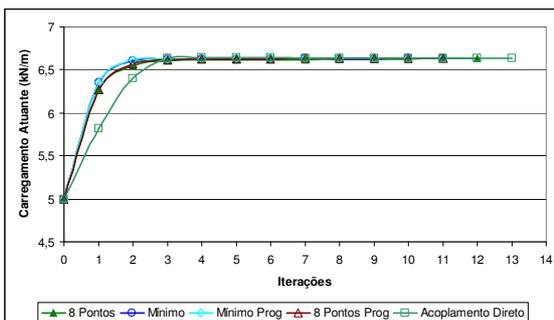


Figura 9.63 Convergência para carregamento.

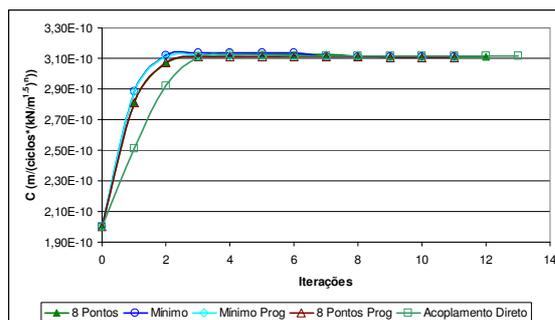


Figura 9.64 Convergência parâmetro C Lei Paris.

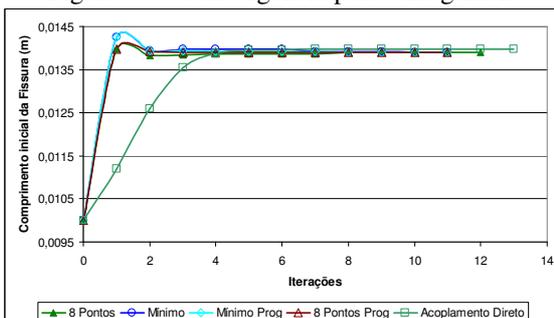


Figura 9.65 Convergência para a_0 .

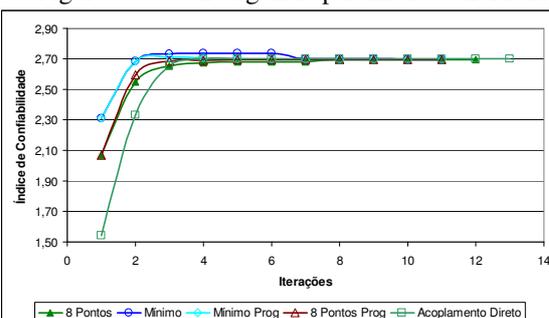


Figura 9.66 Convergência para β .

Os resultados ilustrados nessas figuras mostram que as respostas fornecidas pelos modelos MSR e acoplamento direto são concordantes, o que é um bom indicativo sobre a unicidade da solução obtida. Assim como nas análises anteriores constata-se que nos modelos via superfície de resposta que empregam a redução progressiva da distância entre os pontos do plano de experiência a solução é mais suave e estável quando comparado ao modelo em que a redução da distância dos pontos é feita após a convergência. Além disso, com o modelo de redução progressiva o caminho de convergência das variáveis aleatórias é praticamente o mesmo não dependendo do plano de experiência adotado.

Foi comparado também o custo computacional de cada análise efetuada. Esse parâmetro é medido pelo número de chamadas do modelo mecânico necessárias para a obtenção da convergência da análise de confiabilidade. Apesar da resposta obtida pelos diferentes métodos de confiabilidade estrutural empregados ser a mesma essa discussão é importante para identificar qual método é o mais eficiente. O diagrama comparativo do número de chamadas do modelo mecânico é apresentado na Fig. (9.67).

Por meio dessa figura pode-se observar que o modelo de acoplamento direto é o mais eficiente uma vez que este obteve a convergência da análise com somente 52 chamadas do modelo mecânico. Os modelos MSR, pelo fato de aproximarem a equação de estado limite, necessitam de um número maior de chamadas do modelo mecânico para a convergência. Nesse conjunto de modelos a análise com o plano de experiência Mínimo foi a mais eficiente necessitando de 110 chamadas para a convergência. Quando comparamos os dois métodos de confiabilidade utilizados vemos que o acoplamento direto é mais eficiente já que necessita de um número de chamadas bem inferior quando comparados aos modelos MSR.

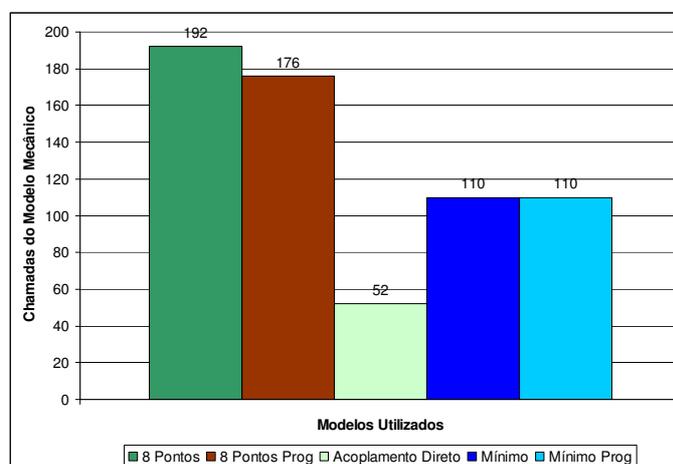


Figura 9.67 Número de chamadas do modelo mecânico para as análises numéricas efetuadas.

Além de necessitar de um número menor de chamadas do modelo mecânico para a obtenção da resposta da análise o acoplamento direto tem-se mostrado também robusto nas diversas análises realizadas até o momento. Mesmo em análises com várias variáveis aleatórias e em análises onde alguns modelos de MSR não apresentaram convergência o acoplamento direto foi capaz de obter a resposta.

Nesta análise constata-se que o MSR não obteve convergência para os planos de experiência Composto e 13 Pontos. Assim como observado no terceiro cenário do exemplo quatro a não convergência da análise pode ser atribuída à má construção do polinômio quadrático que representa a resistência da estrutura o qual depende da quantidade de pontos para a determinação dos coeficientes do polinômio e também da distancia dos pontos nos planos de experiência. Assim, com base nos resultados obtidos até o momento verifica-se o método de acoplamento direto tem-se mostrado mais eficiente e também mais robusto do que o MSR para a análise de problemas de confiabilidade e propagação de fissuras sob fadiga em domínios planos.

9.5.4 – 4º Cenário

Para finalizar a análise da estrutura mostrada na Fig. (9.51) será efetuada neste tópico a análise de confiabilidade dessa estrutura considerando-se 5 variáveis aleatórias. Foram consideradas como variáveis aleatórias o carregamento atuante, P , o parâmetro C da lei de Paris, o comprimento inicial da fissura, a_0 , o diâmetro do furo, D , e a distância do centro do furo em relação a base da estrutura, D_f . Os parâmetros estatísticos dessas

variáveis são: $P \sim LN(5,0;0,80)kN/m$, $a_0 \sim LN(0,01;0,003)m$,

$C \sim LN(2,0 \cdot 10^{-10};7,0 \cdot 10^{-11})m/ciclos \left(kN/m^{3/2}\right)^n$, $D \sim N(0,40;0,008)m$ e

$D_f \sim N(1,5;0,03)m$. Nessa análise o número de ciclos de carga atuante foi considerado como variável determinística sendo igual a $N_{Ciclos}^{Atuante} = 1,0 \cdot 10^6$ ciclos. A tolerância adotada para a convergência foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-7}$.

Esta análise será efetuada considerando-se somente o acoplamento direto. Este procedimento foi considerado uma vez que esse método vem se mostrando ser mais eficiente e robusto do que o MSR, conforme os resultados obtidos até aqui neste capítulo. Além disso, com esse método é possível analisar problemas com um número maior de variáveis aleatórias sem um grande aumento no número de chamadas do

Capítulo 9 – Acoplamento entre Modelos Mecânicos e de Confiabilidade Estrutural_____

modelo mecânico durante cada iteração, como ocorre com os modelos baseados em Superfícies de Resposta. Isso permite a análise de problemas de confiabilidade mais complexos, considerando-se um número maior de variáveis aleatórias.

Os resultados foram obtidos em termos das coordenadas do ponto de projeto e do índice de confiabilidade. Nas Fig.(9.68), Fig.(9.69), Fig.(9.70), Fig.(9.71), Fig.(9.72) e Fig.(9.73), são apresentados os resultados para a convergência das variáveis aleatórias da análise e também para o índice de confiabilidade, β .

Esses diagramas mostram um bom desempenho do acoplamento direto. Mesmo com cinco variáveis aleatórias a convergência foi obtida com somente 14 iterações o que resulta em 84 chamadas do modelo mecânico. O caminho para a convergência das variáveis aleatórias da análise foi suave e estável indicando um bom desempenho deste método.

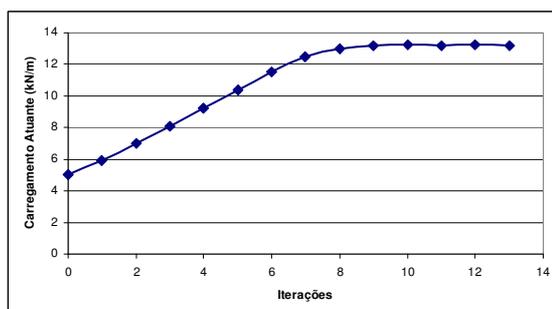


Figura 9.68 Convergência para carregamento.

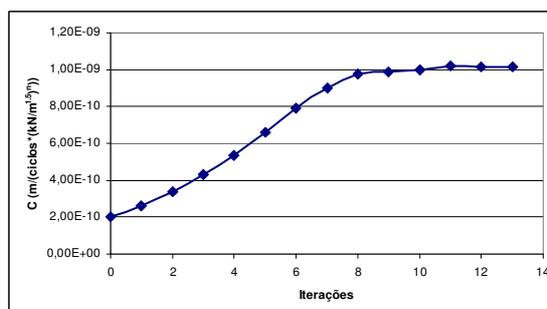


Figura 9.69 Convergência parâmetro C Lei Paris.

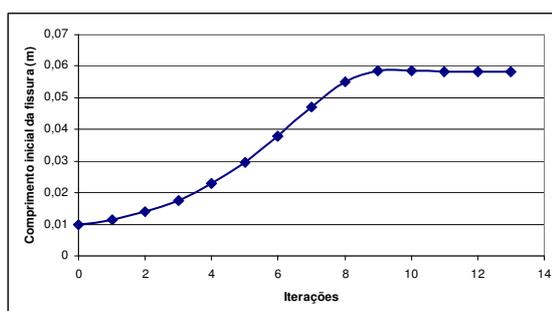


Figura 9.70 Convergência para a_0 .

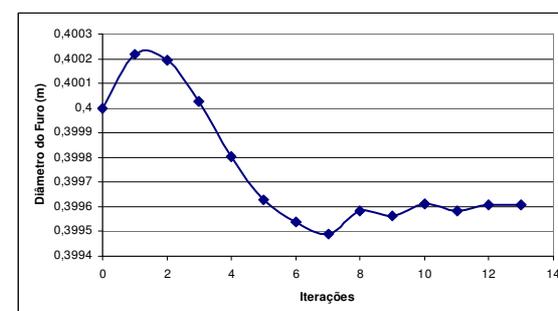


Figura 9.71 Convergência para D .

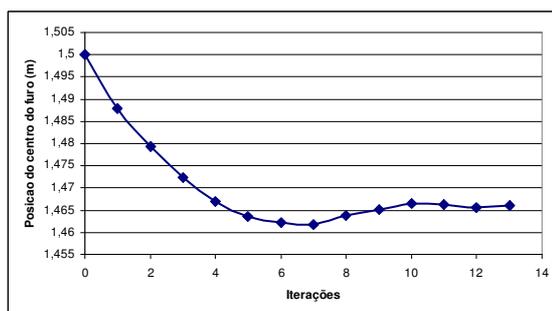


Figura 9.72 Convergência para D_f .

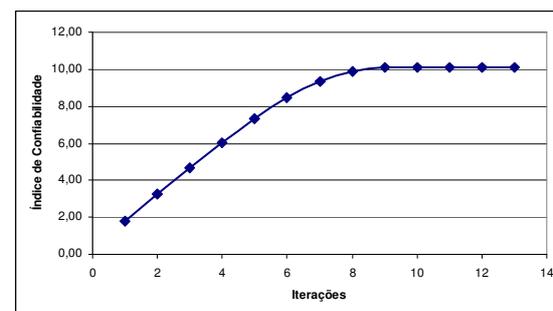


Figura 9.73 Convergência para β .

9.6 – Exemplo 6: Chapa Multifissurada com Furos

Neste tópico será apresentada a análise de confiabilidade da estrutura mostrada na Fig. (9.74). Trata-se de uma estrutura plana, usualmente utilizada na ligação entre componentes estruturais, com 200 mm de comprimento e 25 mm de altura, contendo ainda 10 furos distribuídos em seu interior. As fissuras estão posicionadas nas bordas dos furos, como indica a Fig. (9.74), sendo que em cada furo estão presentes duas fissuras. Nessa figura são também ilustradas as condições de restrição ao deslocamento que atuam nas bordas dos furos. O carregamento é composto por duas forças de superfície atuantes na extremidade direita da estrutura, sendo $F_y = F_x/9$.

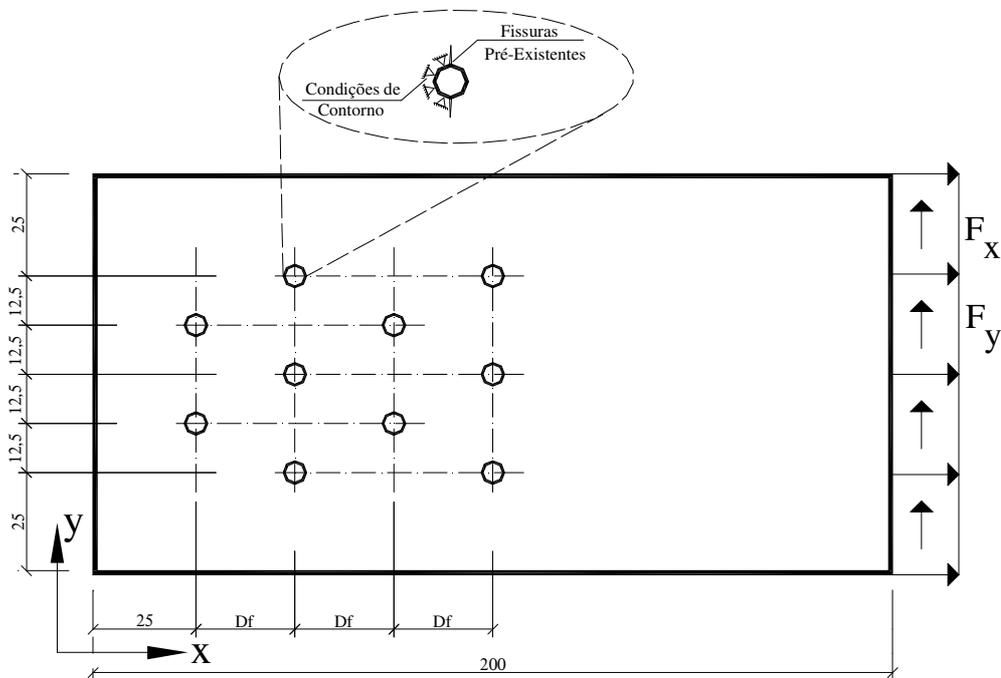


Figura 9.74 Estrutura analisada. Dimensões em milímetro.

Foram adotadas as seguintes propriedades para o material constituinte da estrutura: módulo de elasticidade longitudinal $E = 3,0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$, fator de intensidade de tensão resistente do material $K_c = 7,4 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^{3/2}$, fator de intensidade de tensão limite da lei de Paris $\Delta K_{th} = 1,0 \text{ kN/m}^{3/2}$ e parâmetro n da lei de Paris $n = 3,0$. A lei de Paris foi integrada considerando o incremento no comprimento da fissura igual a $\Delta a = 0,003 \text{ m}$.

Na análise de confiabilidade a equação de estado limite é escrita em termos do número de ciclos de carregamento. Assim, nesta análise são considerados os ciclos de carga resistente e atuante:

$$G = N_{Ciclos}^{Resistente} - N_{Ciclos}^{Atuante} \quad (9.9)$$

O problema de confiabilidade foi resolvido considerando-se somente o acoplamento direto. Nesse método o processo de busca do ponto de projeto é efetuado avaliando-se numericamente os gradientes da função de estado limite por meio de consultas ao modelo mecânico considerando pequenas variações nos valores das variáveis aleatórias do problema. Este procedimento foi considerado uma vez que esse método vem se mostrando ser mais eficiente e robusto do que o MSR, conforme os resultados obtidos até aqui neste capítulo. Além disso, com esse método é possível analisar problemas com um número maior de variáveis aleatórias sem um grande aumento no número de chamadas do modelo mecânico durante cada iteração, como ocorre com os modelos baseados em superfícies de resposta. Isso permite a análise de problemas de confiabilidade mais complexos, considerando-se um número maior de variáveis aleatórias.

A análise de confiabilidade da estrutura mostrada na Fig. (9.74) será realizada considerando-se dois diferentes cenários os quais se diferem quanto ao número de variáveis aleatórias consideradas na análise. No primeiro cenário serão consideradas 3 variáveis aleatórias enquanto no segundo consideram-se 5 variáveis aleatórias.

9.6.1 – 1º Cenário

Na análise de confiabilidade realizada no primeiro cenário foram consideradas como variáveis aleatórias a força aplicada na extremidade direita da estrutura, F_x , o coeficiente C da lei de Paris e a distância entre os furos, D_f . Foram adotadas as seguintes propriedades estatísticas para essas variáveis aleatórias: carregamento atuante $F_x \sim N(6,0;1,0)kN/m$, distância entre os furos $D_f \sim N(0,025;0,001)m$ e parâmetro C da lei de Paris, $C \sim LN(1,63 \cdot 10^{-13}; 4,0 \cdot 10^{-14})m/ciclos(kN/m^{3/2})^n$. As demais variáveis envolvidas no problema foram consideradas como determinísticas. O comprimento inicial da fissura foi admitido igual a $a_0 = 0,50mm$, o diâmetro dos furos da chapa

$D = 5,0\text{ mm}$ e o número de ciclos de carga aplicado igual a $N_{\text{Ciclos}}^{\text{Atuante}} = 4,0 \cdot 10^{13}$ ciclos. A tolerância adotada para a convergência da análise foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$.

Os resultados foram obtidos em termos das coordenadas do ponto de projeto e do índice de confiabilidade. Nas Fig.(9.75), Fig.(9.76), Fig.(9.77) e Fig.(9.78) são apresentados os resultados para a convergência das variáveis aleatórias da análise e também para o índice de confiabilidade, β .

Esses diagramas mostram um bom desempenho do acoplamento direto. Nesta análise foram realizadas 19 iterações o que resulta em 76 chamadas do modelo mecânico até a convergência. Durante a análise foram observados alguns pontos onde o algoritmo enfrentou dificuldades de convergência. No entanto o método foi capaz de ultrapassar esses pontos e atingir a convergência. Isso indica que além de eficiente esse método é também robusto.

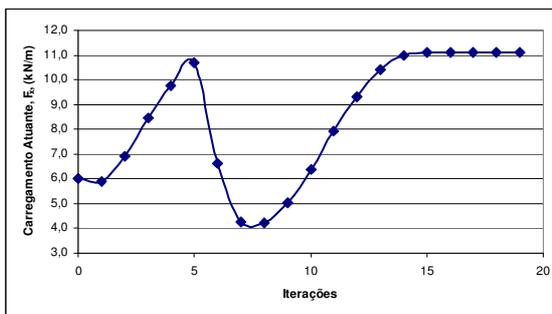


Figura 9.75 Convergência para carregamento.

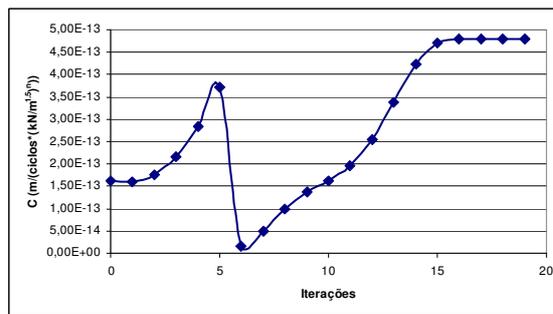


Figura 9.76 Convergência parâmetro C Lei Paris.

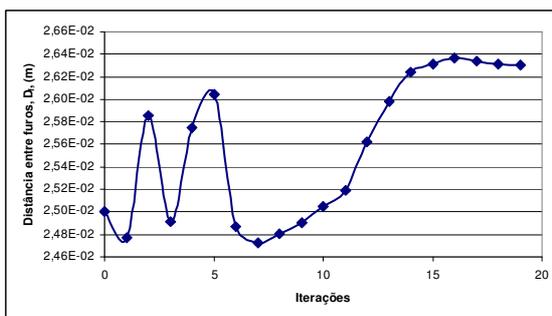


Figura 9.77 Convergência para D_f .

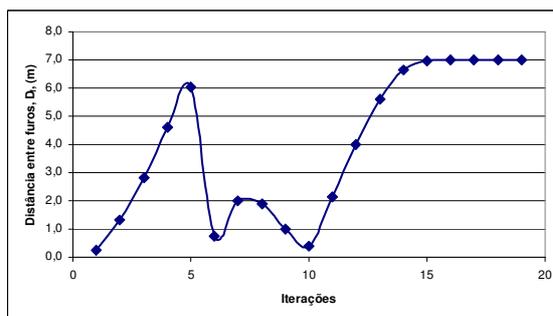


Figura 9.78 Convergência para β .

9.6.2 – 2º Cenário

No segundo cenário da análise de confiabilidade deste problema são consideradas 5 variáveis aleatórias. A análise será efetuada admitindo-se que o carregamento atuante, F_x , o parâmetro C da lei de Paris, o diâmetro dos furos, D , a distância entre os furos, D_f , e o comprimento inicial das fissuras, a_0 são variáveis

aleatórias. Foram consideradas as seguintes propriedades estatísticas para essas variáveis aleatórias: carregamento atuante $F_x \sim N(6,0;2,0)kN/m$, distância entre os furos $D_f \sim N(0,025;0,001)m$, parâmetro C da lei de Paris, $C \sim LN(1,63 \cdot 10^{-13};4,0 \cdot 10^{-14})m/ciclos(kN/m^{3/2})^n$, diâmetro dos furos $D \sim N(0,005;0,0001)m$ e comprimento inicial das fissuras $a_0 \sim LN(0,0005;0,0003)m$. O número de ciclos de carregamento atuante foi considerado como determinístico sendo igual a $N_{Ciclos}^{Atuante} = 4,0 \cdot 10^{13} ciclos$. A tolerância adotada para a convergência da análise foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$.

Assim como no primeiro cenário os resultados foram obtidos em termos das coordenadas do ponto de projeto e do índice de confiabilidade. Nas Fig.(9.79), Fig.(9.80), Fig.(9.81), Fig.(9.82), Fig.(9.83) e Fig.(9.84) são apresentados os resultados para a convergência das variáveis aleatórias da análise e também para o índice de confiabilidade, β .

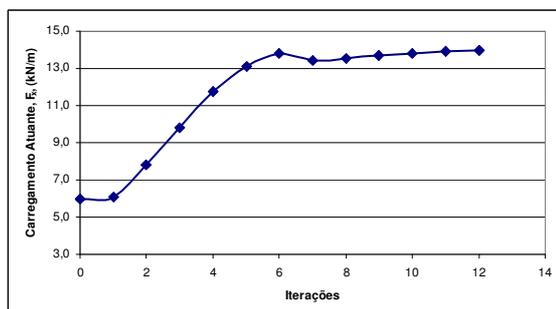


Figura 9.79 Convergência para carregamento.

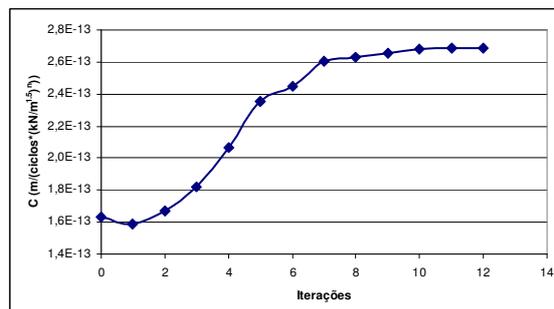


Figura 9.80 Convergência parâmetro C Lei Paris.

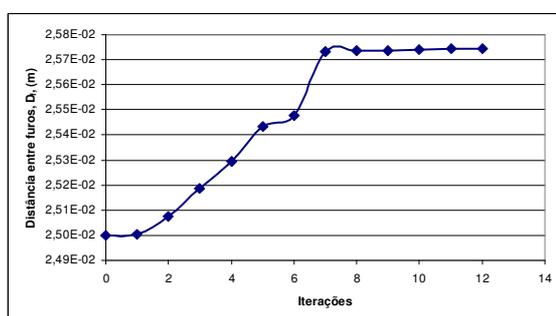


Figura 9.81 Convergência para D_f .

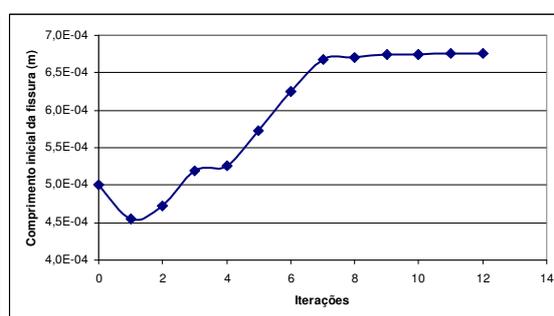


Figura 9.82 Convergência para a_0 .

Esses diagramas mostram um bom desempenho do acoplamento direto. Nesta análise foram realizadas 12 iterações o que resulta em 72 chamadas do modelo mecânico até a convergência. Nesta análise não foram observados trechos com a

ocorrência de instabilidades e dificuldades de convergência o que conduziu a convergência do problema com somente 12 iterações.

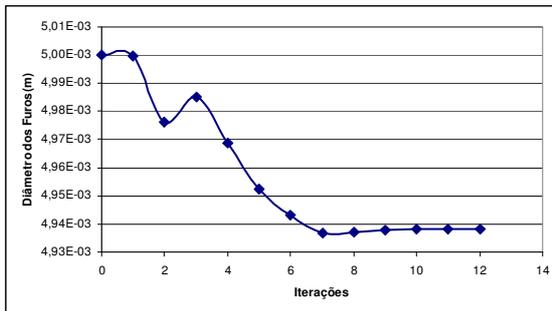


Figura 9.83 Convergência para D .

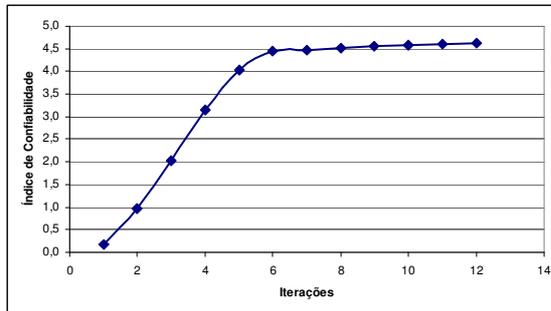


Figura 9.84 Convergência para β .

Com base nos resultados deste capítulo verifica-se que o modelo usando o acoplamento direto é um método de confiabilidade robusto e eficiente.

10. – Acoplamento entre Modelo Mecano-Fiabilístico e um Algoritmo de Otimização

Problemas envolvendo mínimos e máximos de funções são largamente encontrados no domínio da engenharia de estruturas. Para a resolução desse tipo de problema recorre-se à programação matemática e não linear, onde são encontrados algoritmos de otimização para a busca dos pontos extremos de funções.

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos pelo modelo resultante do acoplamento triplo entre o modelo mecânico de fadiga, via MEC, o modelo de confiabilidade, via acoplamento direto, e um modelo de otimização. O modelo resultante desse triplo acoplamento pode ser aplicado a vários problemas particulares, dos quais destacam-se os problemas de concepção, inspeção e manutenção. Dessa forma podem ser abordados problemas complexos fazendo-se considerações mais realísticas sobre as incertezas presentes na estrutura, baseadas em dados estatísticos, obtendo-se um dimensionamento, tanto de concepção quanto de manutenção e inspeção, mais realista.

Serão apresentados neste capítulo três modelos desenvolvidos neste trabalho para a análise da manutenção e concepção de estruturas submetidas a fadiga. O primeiro modelo trata da determinação do instante de inspeção ótimo, para um dado índice de confiabilidade. Nesse caso o modelo determina o número de ciclos no qual a manutenção deve ser efetuada para manter o nível de segurança desejado. Nesse modelo são consideradas manutenções perfeitas e imperfeitas. Na primeira delas a peça estrutural é substituída, após ser atingido o número de ciclos de carregamento crítico, por outra igual e em bom estado. Já com a manutenção imperfeita admite-se que as faces das fissuras são fechadas com algum tipo de material colante antes da substituição do elemento estrutural. Deve-se ressaltar que nesse modelo determina-se somente o instante da inspeção sem, no entanto preocupar-se com o custo da mesma. A variável custo é considerada nos outros modelos de otimização e confiabilidade construídos nesse trabalho.

O segundo modelo refere-se a um modelo do tipo RBDO (Reliability Based Design Optimization) onde as dimensões da geometria do elemento estrutural são obtidas a partir das análises confiabilísticas e de otimização. Objetiva-se nesse modelo obter as dimensões geométricas do elemento estrutural de forma a minimizar o volume da estrutura, considerando um dado nível de segurança estrutural desejado, de forma a obter o mínimo custo de produção da estrutura. Assim, a equação a minimizar deve relacionar as dimensões da estrutura ao seu volume, enquanto a equação de restrição do problema de otimização relaciona as dimensões estruturais ao índice de confiabilidade, sendo construída por meio de superfícies de resposta das variáveis da geometria da estrutura.

O terceiro modelo desenvolvido objetiva obter as dimensões mínimas da estrutura assim como os intervalos de manutenção e inspeção que conduzem ao mínimo custo da estrutura levando-se em conta os custos de concepção, inspeção, manutenção e falha. Assim, a função a minimizar é uma função custo que abrange os custos de concepção, inspeção, manutenção e falha. A função de restrição da análise é construída com base na evolução do índice de confiabilidade no tempo, sendo definida por meio de superfícies de resposta das variáveis.

Porém, primeiramente será apresentado o algoritmo de otimização adotado neste trabalho. Optou-se por implementar o algoritmo da programação quadrática seqüencial (SQP) o qual vem sendo vastamente utilizado pelos pesquisadores que trabalham no domínio de confiabilidade e otimização. Este algoritmo fornece convergência quadrática para o problema de otimização, como explica VANDERPLAATS (2001). Isso o torna eficiente, já que não necessita de um número muito grande de iterações para a convergência, o que o destaca dentre os métodos de otimização explicados na literatura.

10.1 – Programação Quadrática Seqüencial (SQP)

Segundo NOCEDAL & WRIGHT (1999) e LUKIC & CREMONA (2001) o SQP é um dos métodos mais eficientes para a resolução de problemas de programação não linear. A idéia principal dessa classe de métodos é efetuar a transformação de um problema de otimização com restrição em um problema de otimização sem restrição por meio da geração de subproblemas quadráticos, os quais são mais facilmente solvíveis, a cada passo.

Esse conjunto de métodos foi popularizado principalmente a partir de meados da década de 70 com o surgimento das versões Quasi-Newton e suas generalizações. Destacam-se nesse início de desenvolvimento do método os trabalhos de POWELL (1977, 1978) e HAN (1977). As pesquisas sobre SQP tratam do uso eficiente de derivadas segundas da função objetivo, particularmente em problemas de difícil resolução. Assim os métodos de SQP são generalizações do método de Newton para o problema geral de otimização onde correntemente aborda-se um problema com função objetivo e restrições não lineares. A idéia central do método consiste em linearizar as condições de otimalidade do problema, expressando as equações resultantes desse processo em um sistema solvível. A linearização permite a adoção de algoritmos com rápida convergência local tornando o método eficiente. Dessa forma o SQP trabalha substituindo, a cada iteração, a função objetivo por uma aproximação quadrática da função lagrangeana do problema original num ponto x_k e as restrições por aproximações lineares também no ponto x_k . Esse processo justifica inclusive o nome do método. Essa aproximação pode ser feita expandindo-se a função lagrangeana em série de Taylor e tomar os três primeiros termos, para a função objetivo, os dois primeiros termos, para as restrições. Dessa maneira o subproblema a ser resolvido a cada iteração k é um problema quadrático com restrições lineares, que comparado com o problema original, pode ser considerado de mais fácil resolução. Esses métodos podem ser considerados métodos primais-duais, no sentido que eles trabalham simultaneamente no espaço das variáveis primais e no espaço dos multiplicadores de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), variáveis duais.

Em geral, os algoritmos de programação não linear resolvem problemas de obtenção de extremos calculando, em cada iteração, dois parâmetros principais: direção de descida (ou de subida se o problema for maximização) e a distância a percorrer na direção calculada (extremo unidirecional). Por meio do SQP são obtidas as direções de descida (ou subida) para cada variável considerada no problema. Já o problema da obtenção do extremo unidirecional é resolvido utilizando-se outro tipo de algoritmo de otimização, neste caso aplicado a problemas unidirecionais. Existem vários algoritmos para tratar esse último problema podendo-se destacar os métodos de aproximações polinomiais e também dicotomia. No entanto neste trabalho optou-se por utilizar o método Golden Section para a resolução do problema unidirecional. Este método é

explicado com detalhes no Anexo H onde são mostradas as equações do método e também seu algoritmo.

Para uma discussão mais aprofundada deste método e também de outros métodos de programação não linear sugere-se consultar as seguintes referências BONNANS et al. (2002), NOCEDAL & WRIGHT (1999), HAFTKA & KAMAT (1985) e VANDERPLAATS (2001).

10.1.1 – Equações do Método SQP

Neste item serão apresentadas as equações utilizadas pelo SQP e também a filosofia deste método. Inicialmente, observa-se que problemas que contém unicamente restrições de igualdade não são muito comuns na prática da engenharia, porém a discussão inicial a ser apresentada aqui será restringida a este caso. Assim será tratado o seguinte problema o qual deseja-se resolver:

$$(PE) \quad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & h_i(x) = 0 \quad i = 1 \dots m \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array} \quad (10.1)$$

Sendo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funções continuamente diferenciáveis e h um vetor de m funções h_i . A função Lagrangeano para esse problema é dada por:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) \quad (10.2)$$

A idéia principal do SQP para o problema PE é a partir de x_k , fazer uma aproximação que gera um subproblema quadrático e, após resolver esse subproblema, definir o novo ponto x_{k+1} . Uma das maneiras de se achar a solução ótima desse subproblema é encontrar o ponto KKT. Essa busca é feita através da resolução do sistema com $n+m$ variáveis x e λ e $n+m$ equações.

$$F(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x) \\ h_i(x) \end{bmatrix} = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (10.3)$$

Será usado A^k para denotar a matriz jacobiana das restrições h no ponto x_k , isto é:

$$A^k = [\nabla h_1(x^k), \nabla h_2(x^k), \dots, \nabla h_m(x^k)] \quad (10.4)$$

E a matriz hessiana em x da função Lagrangeano associada ao problema PE no ponto (x_k, λ_k) será denotada por:

$$W^k = \nabla_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k) = \nabla^2 f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla^2 h_i(x^k) \quad (10.5)$$

Como A , no ponto ótimo, tem posto completo, a solução ótima, (x_k^*, λ_k^*) , do problema PE satisfaz a Eq. (10.3). O passo de Newton da iteração k é dado por:

$$\begin{bmatrix} x^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^k \\ v^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^k \\ \lambda^k \end{bmatrix} \quad (10.6)$$

Sendo que p_k e v_k é a solução do seguinte sistema KKT:

$$\begin{bmatrix} W^k & A^{k^t} \\ A^k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^k \\ v^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_x L(x^k, \lambda^k) \\ -h(x^k) \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

Deve ser destacado que a matriz jacobiana da Eq. (10.3) no ponto (x_k, λ_k) é:

$$J^k = J(x^k, \lambda^k) = \begin{bmatrix} W^k & A^{k^t} \\ A^k & 0 \end{bmatrix} \quad (10.8)$$

O passo de Newton está bem definido quando a matriz J^k é não-singular. Como esta condição é atendida, o algoritmo de Newton para sistemas não lineares converge quadraticamente para a solução. Entretanto, o método de Newton tem alguns inconvenientes:

1) O sistema mostrado na Eq. (10.7) poderá determinar não somente os possíveis minimizadores locais, mas também os maximizadores e também pontos de sela.

2) A seqüência (x_k, λ_k) poderá não convergir se a escolha do ponto inicial não for suficientemente próxima da solução ótima (x_k^*, λ_k^*) .

A escolha de um ponto inicial próximo da solução ótima do problema é o principal inconveniente para a construção do algoritmo geral e real baseado no método de Newton. Desejando remediar esses inconvenientes e ainda fazer uso da convergência quadrática do passo de Newton, quando o ponto inicial está próximo da solução ótima, usa-se o método de Newton associado a outros métodos.

10.1.2 – Estrutura do Método

Existe uma outra maneira de olharmos os sistemas Eq.(10.7). Suponha que na iteração k o subproblema quadrático definido seja:

$$\begin{aligned}
 \text{(SQ)} \quad & \text{minimizar} && \frac{1}{2} p^t W^k p + \nabla^t f^k p \\
 & \text{sujeito a} && A^k p + h(x^k) = 0
 \end{aligned} \tag{10.9}$$

sendo W^k dado pela Eq. (10.5). Ressalta-se que a função objetivo do problema SQ difere apenas por uma constante da aproximação quadrática da função Lagrangeana associada ao problema SQ, definida da seguinte forma:

$$L(p, \lambda) = \frac{1}{2} p^t W^k p + \nabla^t f^k p + \lambda^t (A^k p + h(x^k)) \tag{10.10}$$

De fato, dado (x_k, λ_k) o modelo quadrático para a função Lagrangeana é:

$$M_L(p) = L(x^k, \lambda^k) + \nabla^t L(x^k, \lambda^k) p + \frac{1}{2} p^t W^k p \tag{10.11}$$

Mas tem-se que:

$$L(x^k, \lambda^k) = f(x^k) + \lambda^{k^t} h(x^k) \tag{10.12}$$

$$\nabla^t L(x^k, \lambda^k) p = \nabla^t f(x^k) p + \lambda^{k^t} A^k p \tag{10.13}$$

Dessa forma a Eq.(10.11) pode ser reescrita como:

$$M_L(p) = \frac{1}{2} p^t W^k p + \nabla^t f(x^k) p + v \tag{10.14}$$

Sendo que a constante v pode ser definida como:

$$v = L(x^k, \lambda^k) + \lambda^{k^t} A^k p = f(x^k) + \lambda^{k^t} (A^k p + h(x^k)) \tag{10.15}$$

Considerando-se a restrição do subproblema SQ, tem-se $v = f(x^k)$. Assim cada iteração do SQP consiste em minimizar o modelo quadrático da função Lagrangeana, sujeito a linearização das restrições.

Se as condições usadas para mostrar a não-singularidade de J^k se verificam, o subproblema SQ tem solução única (p_k, μ_k) que satisfaz:

$$\begin{bmatrix} W^k p + \nabla f^k + A^{k^t} \mu^k \\ A^k p + h^k \end{bmatrix} = 0 \tag{10.16}$$

Note-se que p_k e v_k podem ser identificados como solução do sistema de Newton Eq. (10.7). Subtraindo-se $A^{k^t} \lambda^k$ em ambos os lados da Eq. (10.7) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} W^k & A^{k'} \\ A^k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \lambda^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x^k) \\ -h(x^k) \end{bmatrix} \quad (10.17)$$

Pela não singularidade dos coeficientes da matriz tem-se que $p = p^k$ e $\lambda^{k+1} = v^k$.

Como conclusão, o sistema KKT mostrado na Eq. (10.7) para o problema PE é equivalente às condições de otimalidade para o problema SQ.

A interpretação em termos do método de Newton facilita a análise de convergência enquanto que a estrutura da Programação Quadrática Sequencial permite desenvolver algoritmos práticos para resolver problemas como SQ.

A estrutura do SQP para problemas não lineares com restrição de igualdade é facilmente estendida para os problemas com restrições de desigualdade do tipo:

$$A^k p + g(x) \leq 0 \quad (10.18)$$

A cada passo deve-se resolver o problema quadrático:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \frac{1}{2} p^t W^k p + \nabla^t f^k p \\ \text{(SQI)} & && \\ & \text{sujeito a} && A^k p + g(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (10.19)$$

O problema pode ser resolvido semelhantemente à maneira descrita para o problema com igualdade. A modificação existente relaciona-se ao fato de que no passo p^k e a nova estimativa do multiplicador λ^{k+1} são definidos através da solução e dos multiplicadores de Lagrange correspondentes ao problema SQI.

10.1.3 – Algoritmo do Método SQP

Considere que deseja-se resolver o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_g \end{aligned} \quad (10.20)$$

Assumindo-se que na i ésima iteração o processo iterativo encontra-se sobre um dado ponto x_i , deve-se determinar inicialmente a direção de descida (subida) da função objetivo para a determinação do extremo desejado. Esta direção, s , é obtida a partir da resolução do seguinte problema de programação quadrática:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \varphi(s) = f(x_i) + s^T \cdot g(x_i) + \frac{1}{2} \cdot s^T \cdot A(x_i, \lambda_i) \cdot s \\ \text{sujeito a} \quad & g_j(x_i) + s^T \cdot \nabla g(x_i) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_g \end{aligned} \quad (10.21)$$

onde g é o gradiente da função objetivo f , A é uma aproximação positiva definida para o Hessiano da função Lagrangeano. Após a resolução deste problema de programação quadrática serão obtidos os valores para os multiplicadores de lagrange e também para as direções de descida (subida), variáveis (s_i, λ_i) . Assim o próximo ponto do processo iterativo é obtido por meio da seguinte expressão:

$$x_{i+1} = x_i + \alpha \cdot s \quad (10.22)$$

Sendo que α é encontrado através da minimização da seguinte função unidimensional:

$$\Psi(\alpha) = f(x) + \sum_{j=1}^{n_g} \mu_j \left| \min[0, g_j(x)] \right| \quad (10.23)$$

Nesta equação μ_j é igual ao valor absoluto dos multiplicadores de lagrange para a primeira iteração, como mostra a Eq. (10.24):

$$\mu_j = \max \left[\left[\lambda_j^{(i)}, \frac{1}{2} \left(\mu_j^{(i-1)} + \left| \lambda_j^{(i-1)} \right| \right) \right] \right] \quad (10.24)$$

onde o índice i denota o número da iteração. Neste trabalho o problema unidirecional é resolvido usando-se o método Golden Section explicado no Anexo H. A matriz A é uma matriz positiva definida que aproxima o hessiano da função objetivo. Na primeira iteração esta matriz é definida como uma matriz identidade sendo atualizada à medida que o processo iterativo avança. Esta atualização é feita utilizando-se a equação proposta por BROYDON-FLETCHER-SHANNO-GOLDFARB, equação BFGS, e recomendada em VANDERPLAATS (2001). Assim:

$$A_{\text{novoo}} = A - \frac{A \cdot \Delta x \cdot \Delta x^T \cdot A}{\Delta x^T \cdot A \cdot \Delta x} + \frac{\Delta l \cdot \Delta l^T}{\Delta x^T \cdot \Delta x} \quad (10.25)$$

Sendo que nesta equação Δx e Δl são definidos como:

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i \quad (10.26)$$

$$\Delta l = \nabla_x \mathcal{L}(x_{i+1}, \lambda_i) - \nabla_x \mathcal{L}(x_i, \lambda_i) \quad (10.27)$$

onde \mathcal{L} é a função Lagrangeana e ∇_x representa o gradiente da função Lagrangeana com relação às variáveis x . Para garantir que A seja positiva definida, Δl é modificada se a seguinte relação é verdadeira.

$$\Delta x^T \cdot \Delta l \leq 0,2 \cdot \Delta x^T \cdot A \cdot \Delta x \quad (10.28)$$

Se a Eq. (10.28) for verdadeira Δl deve ser recalculado pela seguinte equação:

$$\Delta l' = \theta \cdot \Delta l + (1 - \theta) A \cdot \Delta x \quad (10.29)$$

sendo que:

$$\theta = \frac{0,8 \cdot \Delta x^T \cdot A \cdot \Delta x}{\Delta x^T \cdot A \cdot \Delta x - \Delta x^T \cdot \Delta l} \quad (10.30)$$

De posse das equações e do algoritmo do SQP serão a seguir mostradas as aplicações resultantes do acoplamento entre este método de otimização e o modelo mecano-fiabilístico descrito no capítulo anterior.

10.2 – Modelos de Otimização para a Determinação do Instante de Inspeção e Manutenção

Neste item discute-se um modelo desenvolvido neste trabalho para a determinação do instante ideal para a realização da inspeção e manutenção estruturais para um dado um nível de segurança desejado. Esse modelo, fruto do acoplamento triplo entre os modelos mecânico de fadiga, confiabilidade e otimização, considera dois tipos de manutenção: manutenção perfeita e manutenção imperfeita. No primeiro tipo de manutenção, considera-se que a estrutura é substituída por outra igual em perfeito estado após ser atingido o número de ciclos de carregamento crítico, o qual é determinado em função da segurança estrutural desejada. Nesse modelo objetiva-se determinar o número ciclos de carregamento limite para o qual a estrutura deve ser substituída.

Já no modelo de manutenção imperfeita devem ser definidos inicialmente o número de inspeções e manutenções previstas antes da substituição do elemento estrutural por outro. A manutenção é dita imperfeita porque a estrutura não é substituída quando atingido o estado limite, mas sim reparada. No caso estudado, crescimento de fissuras sob fadiga, a manutenção é efetuada inserindo-se um tipo de material colante entre as faces das fissuras. O estado limite considerado para a determinação do instante da inspeção, para a manutenção imperfeita, é o comprimento das fissuras. Assim, determina-se o número de ciclos de carregamento crítico considerando um determinado nível de segurança e o comprimento máximo das fissuras.

O nível de segurança a ser considerado em cada caso depende da importância do elemento estrutural considerado no sistema estrutural ao qual pertence. ONOUFRIOU (1999) apresenta uma tabela, a qual é reproduzida a seguir, contendo os valores para o índice de confiabilidade alvo segundo a importância do elemento estrutural estudado. Esses valores serão adotados nas análises desenvolvidas neste trabalho.

Tabela 10.1 Índices de Confiabilidade Alvo segundo ONOUFRIOU (1999).

Consequencia da Falha	Índice de Confiabilidade Alvo	Probabilidade de Falha
<i>Muito Sério</i>	4,2	1,4E-05
<i>Sério</i>	3,7	1,1E-04
<i>Não Sério</i>	3,1	9,7E-04
<i>Efeitos Locais</i>	2,3	1,0E-02
<i>Não Afeta</i>	1,0	1,0E-01

Em ambos os modelos, o algoritmo de otimização escolhido é o Golden Section uma vez que o problema de otimização depende de uma única variável que é o número de ciclos de carregamento atuante. Deve ser ressaltado que nesse modelo não é discutido o custo da manutenção bem como dos materiais envolvidos na reparação estrutural. Essa variável será considerada nos outros modelos construídos nesse trabalho.

10.2.1 – Modelo de Manutenção Perfeita

Nesse modelo objetiva-se determinar o instante ideal para a realização da inspeção e manutenção, para um dado nível de segurança desejado, de forma a se efetuar a substituição do elemento estrutural considerado por outro em bom estado. Nesse modelo o problema de otimização a ser resolvido é o apresentado na Eq. (10.31):

Determinar o número de ciclos de carregamento atuante de forma a:

(10.31)

$$\text{Minimizar} \quad f(x, y, z) = \left| \beta_{\text{Estrutural}}(x, y, z) - \beta_{\text{Alvo}} \right|$$

nessa equação x representa as variáveis aleatórias do problema de confiabilidade, y as variáveis a serem otimizadas e z os parâmetros do modelo mecânico de fadiga, β_{Alvo} indica o índice de confiabilidade alvo escolhido para o momento da manutenção e $\beta_{\text{Estrutural}}(x, y, z)$ é o índice de confiabilidade calculado com os parâmetros do modelo de confiabilidade e o número de ciclos de carga determinado pelo modelo de otimização.

Nesse modelo os estados limites são os já discutidos no capítulo 9, ou seja, fator de intensidade de tensão maior que o fator de intensidade de tensão limite, taxa de propagação de fissura maior que a taxa de propagação limite e finalmente conexão da fissura com algum lado da estrutura.

10.2.2 – Exemplo 1: Modelo de Manutenção Perfeita Aplicado a uma Viga sob Flexão em Três Pontos

Nesse item o modelo de manutenção perfeita será aplicado ao estudo da estrutura mostrada na Fig. (10.1). Trata-se da mesma viga já discutida nos capítulos anteriores, solicitada à flexão em três pontos, contendo um entalhe inicial posicionado no meio de sua face inferior. Nesta análise a propagação da fissura sob fadiga será efetuada considerando-se o regime de carregamento oscilatório composto por um ciclo de carregamento e descarregamento completo.

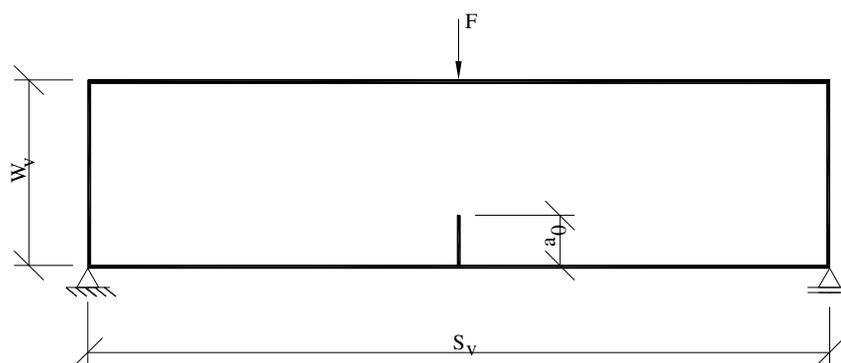


Figura 10.1 Estrutura considerada.

Foram adotadas as seguintes propriedades para o material constituinte da estrutura: módulo de elasticidade longitudinal $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$, fator de intensidade de tensão resistente $K_c = 1,04 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^{3/2}$, fator de intensidade de tensão limite da lei de Paris $\Delta K_{th} = 1,0 \text{ kN/m}^{3/2}$ e expoente n parâmetro da lei de Paris $n = 2,70$. A lei de Paris foi integrada considerando o incremento no comprimento da fissura igual a $\Delta a = 0,05 \text{ m}$.

O modelo de confiabilidade foi construído considerando-se 3 variáveis aleatórias: o carregamento atuante, F , o parâmetro C da lei de Paris e o comprimento inicial da fissura, a_0 . Foram adotadas as seguintes propriedades estatísticas para essas

variáveis aleatórias: carregamento atuante $F \sim N(5,0;0,80) \text{ kN}$, parâmetro C da lei de Paris $C \sim LN(3,0 \cdot 10^{-10}; 1,8 \cdot 10^{-10}) \text{ m/ciclos} \left(\text{kN/m}^{3/2} \right)^n$ e comprimento inicial da fissura $a_0 \sim N(0,01;0,003) \text{ m}$. As demais variáveis da análise são consideradas como determinísticas. O vão da viga foi considerado igual a $S_v = 5,0 \text{ m}$ e a altura da viga foi admitida igual a $W_v = 1,25 \text{ m}$. A tolerância adotada para a convergência da análise foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$. Para completar os dados da análise, o índice de confiabilidade alvo para o modelo de otimização foi considerado igual a $\beta_{Alvo} = 3,10$. Esse valor é recomendado em ONOUFRIOU (1999), sendo mostrado na Tabela 10.1, para rupturas que não afetam seriamente o comportamento do sistema estrutural ao qual pertence.

Na Fig. (10.2) é apresentado o diagrama de convergência para o modelo de otimização via Golden Section utilizado. A análise foi desenvolvida considerando-se três intervenções na viga considerada. Como mostra esta figura a convergência do modelo de confiabilidade/otimização, para cada uma dessas curvas, foi obtida empregando-se 26 chamadas do modelo de confiabilidade. Além disso, essas curvas mostram um bom desempenho do algoritmo de otimização o qual converge suavemente para a solução.

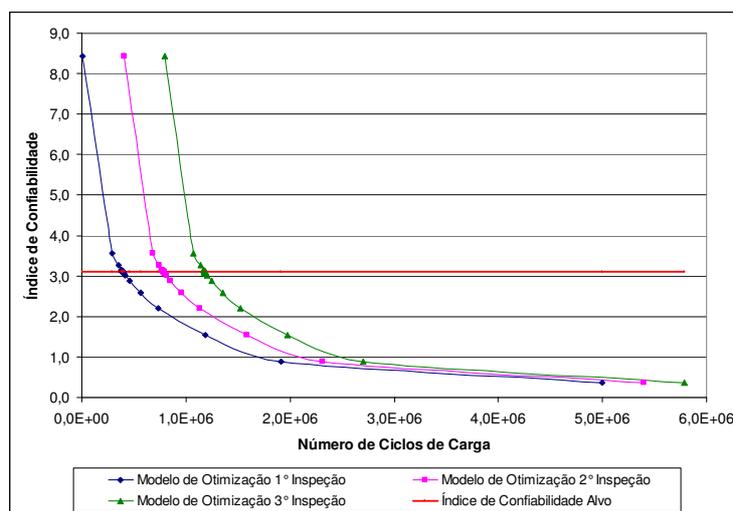


Figura 10.2 Diagrama β x Número de Ciclos.

Na Fig. (10.3) são mostradas as curvas de manutenção obtidas pelo modelo utilizado. Verifica-se que as manutenções devem ser efetuadas quando o número de ciclos de carregamento atuante na estrutura for igual a $3,942 \cdot 10^5$ ou múltiplos desse

valor. Nesse instante a estrutura se encontrará com o índice de confiabilidade igual ao desejado na análise.

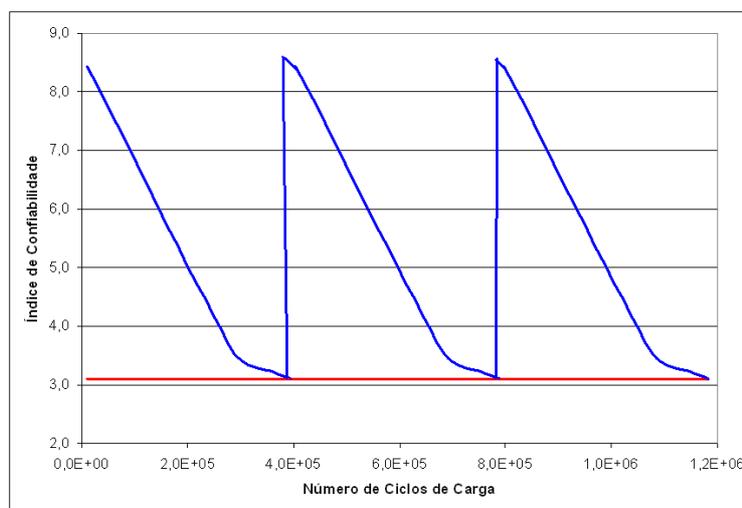


Figura 10.3 Curvas de Manutenção (preditiva).

10.2.3 – Modelo de Manutenção Imperfeita

Será agora discutido o modelo de manutenção imperfeita desenvolvido nesse trabalho. Nesse modelo, assim como no anterior, objetiva-se determinar o instante ideal para a realização da inspeção e manutenção, para um dado nível de segurança desejado. A diferença desse modelo em relação ao modelo discutido no item 10.2.1 encontra-se no fato de que nesse modelo o instante da inspeção e manutenção determinado pelo modelo de otimização não implica em substituição do elemento estrutural, mas sim em sua reparação. O sistema de reparação considerado é formado por um elemento colante inserido entre as faces da fissura.

Assim o problema de otimização a ser resolvido continua sendo o apresentado pela Eq. (10.31). No entanto mudam-se os estados limites do modelo de confiabilidade a serem considerados. Além de se considerar os estados limites discutidos no capítulo 9 para o problema de confiabilidade, ou seja, fator de intensidade de tensão maior que o fator de intensidade de tensão limite, taxa de propagação de fissura maior que a taxa de propagação limite e conexão da fissura com algum lado da estrutura considera-se também o comprimento máximo da fissura o qual é fornecido pelo analista do problema. Dessa forma determina-se com quantos ciclos de carregamento a fissura atingirá o comprimento máximo especificado pelo analista do problema. Assim a

manutenção com a inserção do material colante é efetuada considerando o estado limite do comprimento da fissura.

Para a representação do material colante entre as faces da fissura foi feita uma modificação no modelo mecânico de fadiga via MEC. O material colante é simulado por meio de elementos de mola conectados nos pontos fontes localizados nas faces da fissura. Esses elementos foram considerados como elementos finitos tendo a seguinte matriz de rigidez:

$$K_{MOLA} \cdot \begin{bmatrix} c^2 & c \cdot s & -c^2 & -c \cdot s \\ c \cdot s & s^2 & -c \cdot s & s^2 \\ -c^2 & -c \cdot s & c^2 & c \cdot s \\ -c \cdot s & s^2 & c \cdot s & s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_x^i \\ U_y^i \\ U_x^f \\ U_y^f \end{bmatrix} \quad (10.32)$$

onde c e s são o cosseno e o seno do ângulo de inclinação entre o elemento e o sistema de coordenadas considerado, respectivamente, K_{MOLA} é a rigidez da mola e os índices i e f são os nós finais e iniciais para a conectividade.

10.2.4 – Exemplo 2: Modelo de Manutenção Imperfeita Aplicado a uma Viga sob Flexão em Três Pontos

Será discutida nesse item a aplicação do modelo de manutenção imperfeita ao estudo da estrutura mostrada na Fig. (10.4). Trata-se de uma viga solicitada à flexão em três pontos contendo um entalhe inicial posicionado no meio de sua face inferior. Nesta análise a propagação da fissura em fadiga será efetuada sob carregamento oscilatório composto por um ciclo de carregamento e descarregamento completo.

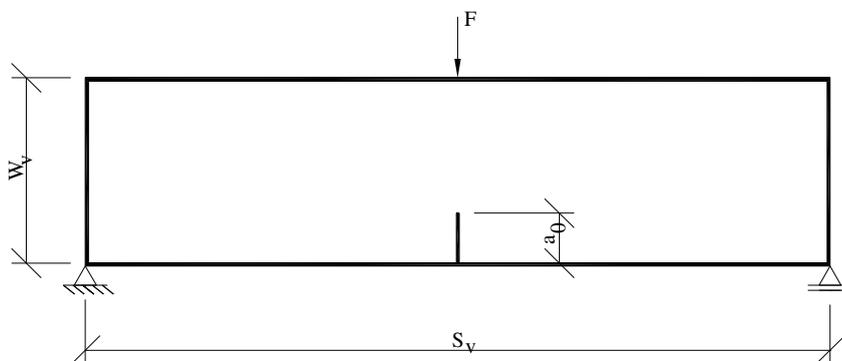


Figura 10.4 Estrutura considerada.

Foram adotadas as seguintes propriedades para o material constituinte da estrutura: módulo de elasticidade longitudinal $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$, fator de intensidade de tensão resistente $K_c = 1,04 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^{3/2}$, fator de intensidade de tensão limite da lei de Paris $\Delta K_{th} = 1,0 \text{ kN/m}^{3/2}$ e expoente n parâmetro da lei de Paris $n = 2,70$. A lei de Paris foi integrada considerando o incremento no comprimento da fissura igual a $\Delta a = 0,05 \text{ m}$.

O modelo de confiabilidade foi construído considerando-se 2 variáveis aleatórias as quais são o carregamento atuante, F , e o parâmetro C da lei de Paris. Foram adotadas as seguintes propriedades estatísticas para essas variáveis aleatórias: carregamento atuante $F \sim N(5,0; 0,80) \text{ kN}$ e parâmetro C da lei de Paris $C \sim LN(3,0 \cdot 10^{-10}; 1,8 \cdot 10^{-10}) \text{ m/ciclos} \left(\text{kN/m}^{3/2} \right)^n$. As demais variáveis da análise são consideradas como determinísticas. O vão da viga foi considerado igual a $S_v = 5,0 \text{ m}$, a altura da viga foi admitida igual a $W_v = 1,25 \text{ m}$ e o comprimento inicial da fissura de $a_0 = 0,01 \text{ m}$. A tolerância adotada para a convergência da análise foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$.

Para completar os dados da análise, o índice de confiabilidade alvo para o modelo de otimização foi considerado igual a $\beta_{Alvo} = 2,30$, conforme critério da Tabela 10.1. A estrutura foi analisada considerando-se que o processo de manutenção será constituído por uma manutenção imperfeita e uma manutenção perfeita.

O número de ciclos de carregamento, a ser obtido pelo modelo de otimização, para a realização da manutenção imperfeita será calculado considerando-se como estado limite o comprimento da fissura igual a 10 cm. Dessa forma o modelo de otimização irá calcular o número de ciclos de carga no qual deve ser efetuada a manutenção de forma que o índice de confiabilidade da estrutura seja igual ao alvo desejado. A manutenção imperfeita será efetuada considerando-se que o material colante colocado nas faces da fissura apresenta rigidez igual a $K_{MOLA} = 1,0 \cdot 10^9 \text{ kN/m}$.

Na Fig. (10.5) é apresentado o diagrama de convergência para o modelo de otimização via Golden Section utilizado. De forma comparativa foi efetuado a análise dessa estrutura considerando-se também o modelo de manutenção perfeita. Como

mostra essa figura para a construção de cada curva, ou seja, para a convergência do modelo, são necessárias 21 chamadas do modelo de confiabilidade.

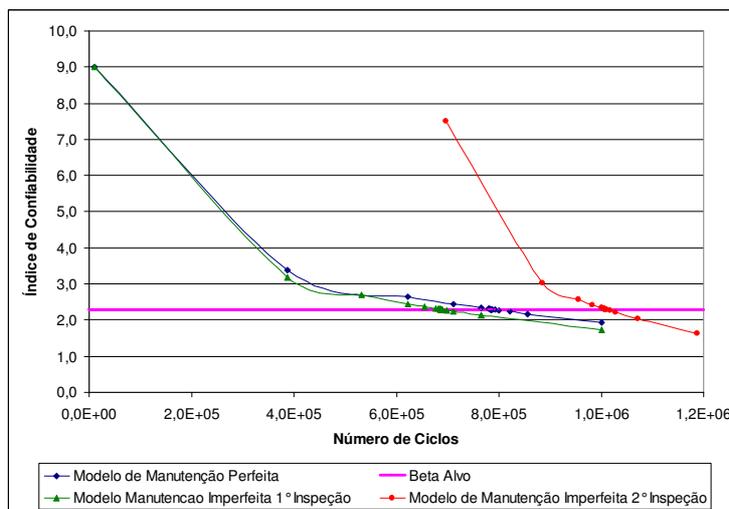


Figura 10.5 Diagrama β x Número de Ciclos.

Na Fig.(10.6) são apresentadas as curvas de manutenção para a análise da estrutura considerada. A curva em verde mostra a evolução do índice de confiabilidade com relação ao número de ciclos de carregamento aplicado até a realização da primeira inspeção, quando a fissura atinge o comprimento de 10 cm. Observa-se que para a manutenção imperfeita a primeira inspeção deve ser feita quando o número de ciclos de carregamento for igual a $6,873 \cdot 10^5$. Nesse instante é aplicado o material colante nas faces da fissura e a estrutura é novamente exposta ao carregamento de fadiga. A partir desse ponto deve-se verificar a curva em vermelho a qual representa a evolução do índice de confiabilidade com relação ao número de ciclos de carga atuante após a realização da manutenção no elemento estrutural. Observa-se que após a realização da manutenção a estrutura recupera parte de sua capacidade resistente a fadiga e conseqüentemente parte de sua segurança estrutural. Segundo a análise de otimização realizada, o elemento estrutural estudado deve ser substituído quando o número de ciclos de carregamento atuante for igual a $1,01 \cdot 10^6$. Apenas por comparação a estrutura foi também analisada considerando-se manutenção perfeita. A evolução do índice de confiabilidade em relação ao número de ciclos de carga atuante para o modelo de manutenção perfeita é mostrada pela curva azul. Observa-se que por meio desse modelo a estrutura deve ser substituída quando exposta a $7,845 \cdot 10^5$ ciclos de carga. Assim efetuando-se somente uma manutenção imperfeita no elemento estrutural consegue-se aumentar a vida útil da estrutura em aproximadamente 23%, o que é um ganho

Capítulo 10 – Acoplamento entre Modelo Mecano-Fiabilístico e um Algoritmo de Otimização_____

significativo. Esse valor aumenta ainda mais efetuando-se um número maior de inspeções ao longo do tempo.

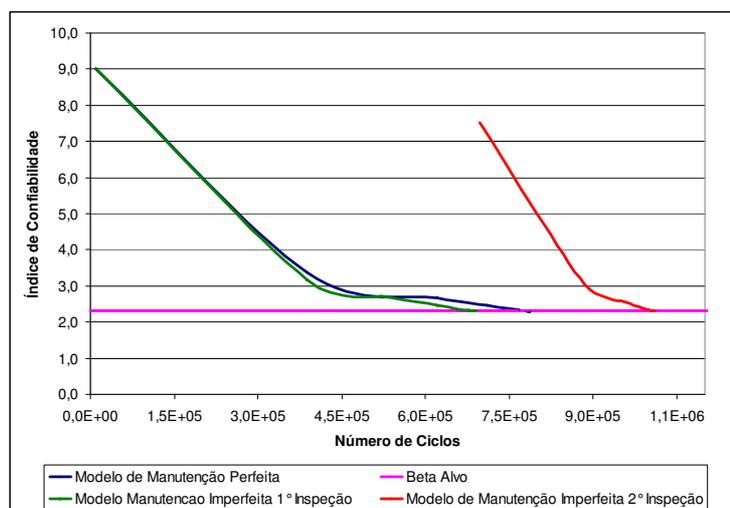


Figura 10.6 Evolução do β com o número de ciclos de carga aplicado. Curvas de Manutenção.

10.3 – Modelo de Confiabilidade e Otimização RBDO

Nesse item será discutido o modelo Reliability Based Design Optimization, RBDO, aplicado à minimização do volume de elementos estruturais submetidos a fadiga. Assim como os modelos já discutidos anteriormente, no modelo RBDO a análise é desenvolvida em dois domínios diferentes, os quais são os domínios de confiabilidade, onde são definidas as variáveis aleatórias consideradas, e físico onde são definidas as dimensões das variáveis de otimização.

Nesse modelo a análise de otimização é realizada de forma a se efetuar a minimização do volume do elemento estrutural. Para isso restrições quanto ao nível de segurança estrutural são consideradas. Essa restrição é determinada a cada iteração por meio de consultas ao modelo de confiabilidade. A equação que exprime o valor do índice de confiabilidade segundo as variações das variáveis a otimizar é obtida construindo-se uma superfície de resposta, ou seja, um polinômio de segundo grau completo que relaciona as variáveis a otimizar ao índice de confiabilidade. Para a construção dessa equação foi utilizada a distribuição dos pontos segundo o plano de experiência mínimo, como pode ser visto no Anexo G.

Assim, o problema a ser resolvido a cada iteração é o apresentado na Eq. (10.33):

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimizar} & f(y) \\
 \text{Sujeito a} & \beta_{Alvo} - \beta_{Estrutural}(x, y, z) \leq 0 \\
 & h_i(y) \leq 0
 \end{array} \quad (10.33)$$

nessa equação x representa as variáveis aleatórias do problema de confiabilidade, y as variáveis a serem otimizadas e z os parâmetros do modelo mecânico de fadiga, $f(y)$ é a função objetivo a minimizar a qual relaciona o volume da estrutura as suas dimensões, β_{Alvo} indica o índice de confiabilidade alvo escolhido para o momento da manutenção, $\beta_{Estrutural}(x, y, z)$ é a expressão relacionando o índice de confiabilidade às variáveis do problema de otimização (superfície de resposta) e $h_i(y)$ são restrições quanto às dimensões máximas e mínimas da estrutura. Deve-se destacar que as variáveis dos problemas de confiabilidade e otimização podem não ser as mesmas.

Nesse modelo o algoritmo escolhido para a resolução do problema de otimização é o SQP, já discutido anteriormente. Nesse modelo o custo não está embutido diretamente na função objetivo. Porém a função custo é escrita multiplicando-se o volume pelo custo volumétrico da estrutura. Assim minimizando o volume da estrutura minimiza-se também seu custo de construção.

10.3.1 – Exemplo 3: Análise de uma Viga Solicitada à Flexão em Três Pontos Usando um Modelo RBDO

Será discutida nesse item a aplicação do modelo RBDO ao estudo da estrutura mostrada na Fig. (10.7). Trata-se de uma viga solicitada à flexão em três pontos contendo um entalhe inicial posicionado no meio de sua face inferior. Nesta análise a propagação da fissura sob fadiga será efetuada considerando-se o regime de carregamento oscilatório composto por um ciclo de carregamento e descarregamento completo.

Foram adotadas as seguintes propriedades para o material constituinte da estrutura: módulo de elasticidade longitudinal $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$, fator de intensidade de tensão resistente $K_c = 1,04 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^{3/2}$, fator de intensidade de tensão limite da lei de Paris $\Delta K_{th} = 1,0 \text{ kN/m}^{3/2}$ e expoente n parâmetro da

lei de Paris $n=2,70$. A lei de Paris foi integrada considerando o incremento no comprimento da fissura igual a $\Delta a=0,05m$.

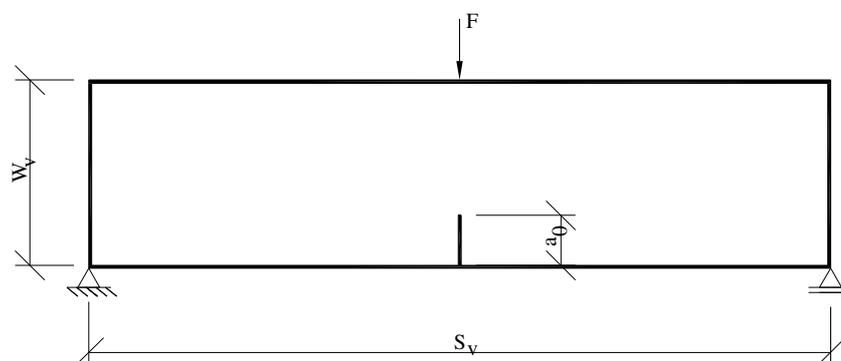


Figura 10.7 Estrutura considerada.

O modelo de confiabilidade foi construído considerando-se 3 variáveis aleatórias as quais são o carregamento atuante, F , o parâmetro C da lei de Paris e o comprimento inicial da fissura, a_0 . Foram adotadas as seguintes propriedades estatísticas para essas variáveis aleatórias: carregamento atuante $F \sim N(5,0;0,80) \text{ kN}$, parâmetro C da lei de Paris $C \sim LN(3,0 \cdot 10^{-10}; 1,8 \cdot 10^{-10}) \text{ m/ciclos} \left(\text{kN/m}^{3/2} \right)^n$ e comprimento inicial da fissura $a_0 \sim LN(0,01;0,003) \text{ m}$. As demais variáveis da análise são consideradas como determinísticas. O vão da viga foi considerado igual a $S_v = 5,0 \text{ m}$, a altura da viga foi admitida igual a $W_v = 1,25 \text{ m}$ e o número de ciclos de carregamento aplicado $N_{Ciclos}^{Atuante} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ ciclos}$. A tolerância adotada para a convergência da análise foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$.

Para completar os dados da análise, o índice de confiabilidade alvo para o modelo de otimização foi considerado igual a $\beta_{Alvo} = 2,30$, conforme critério da Tabela 10.1. A tolerância de convergência para o problema de otimização é de $1 \cdot 10^{-4}$. A função que descreve o volume da estrutura em relação às dimensões do elemento estrutural é mostrada abaixo:

$$f(y) = S_v \cdot W_v \cdot T_v \quad (10.34)$$

onde T_v indica a espessura da peça. Nesse problema objetiva-se minimizar $f(y)$ considerando-se como variável a otimizar apenas a espessura do elemento estrutural. O comprimento da viga e sua altura são considerados como constantes na análise do

problema de otimização. Assim nesse exemplo pretende-se determinar a mínima espessura do elemento estrutural de forma que o índice de confiabilidade do elemento estrutural resultante seja igual ao β_{Alvo} especificado.

Na Fig. (10.8) é apresentada a convergência do processo iterativo para a espessura do elemento estrutural. Por meio desta figura constata-se que a convergência da análise foi obtida com 4 iterações. Esse número de iterações resulta em 18 chamadas do modelo de confiabilidade. O valor final obtido para a espessura é de $0,2965m$ o que resulta um volume de $1,8533m^3$.

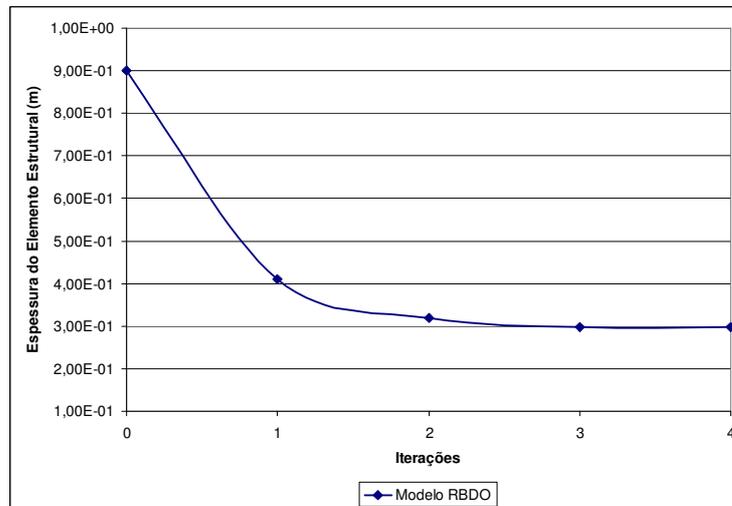


Figura 10.8 Convergência do processo iterativo para a espessura do elemento estrutural.

Este problema pode ser novamente analisado fazendo-se outras considerações com relação às variáveis do modelo de otimização. Nessa abordagem o problema apresentado na Fig. (10.7) será analisado admitindo-se duas variáveis a otimizar e duas condições de restrição para o problema de otimização. As variáveis aleatórias e determinísticas para a análise confiabilística permanecem as mesmas da análise anterior. O índice de confiabilidade alvo para o modelo de otimização permanece igual a $\beta_{Alvo} = 2,30$, assim como a tolerância para a convergência adotada para o modelo de otimização é de $1 \cdot 10^{-4}$. A função a minimizar é a apresentada na Eq. (10.35) a qual relaciona o volume da estrutura às dimensões do elemento estrutural:

$$f(y) = S_v \cdot W_v \cdot T_v \quad (10.35)$$

Nessa análise considera-se que T_v e W_v serão as variáveis a otimizar. Além da restrição quanto ao índice de confiabilidade nessa análise considera-se também uma

restrição quanto a dimensão mínima de T_v . Assim nessa análise as restrições serão compostas pelas equações mostradas na Eq. (10.36).

$$\begin{aligned} \beta_{Alvo} - \beta_{Estrutural}(x, y, z) &\leq 0 \\ 0,30 - T_w &\leq 0 \end{aligned} \quad (10.36)$$

Na Fig. (10.9) é apresentada a convergência do processo iterativo para as variáveis otimizadas na análise deste exemplo. Por meio desta figura constata-se que a convergência da análise foi obtida com 3 iterações do modelo conjunto de confiabilidade e otimização. Em cada iteração do modelo conjunto são necessárias 6 chamadas do modelo de confiabilidade resultando assim 18 chamadas do modelo de confiabilidade para a obtenção da resposta. O valor final obtido para a espessura é de $0,300m$ e a altura da viga $1,226m$ o que resulta um volume de $1,8390m^3$.

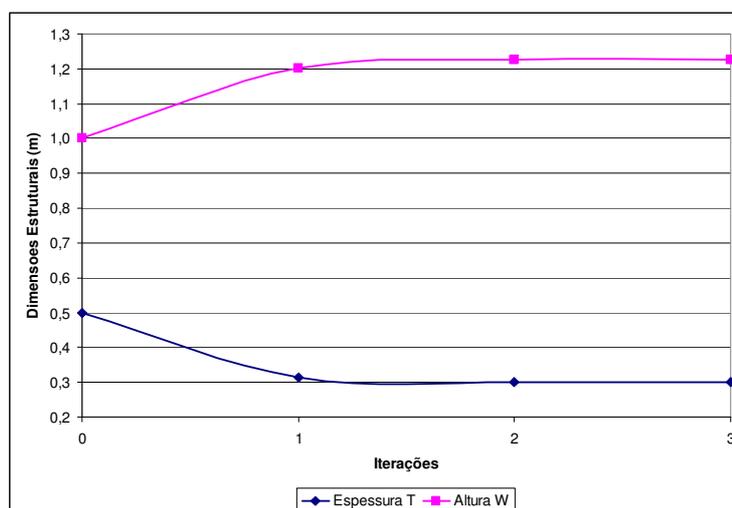


Figura 10.9 Convergência do processo iterativo para as variáveis otimizadas na análise.

10.4 – Modelo RBDO considerando Inspeção, Manutenção e Falha

Neste item será discutido o último modelo desenvolvido neste trabalho que aborda o acoplamento entre os modelos mecano-fiabilístico e um algoritmo de otimização. Neste último modelo objetiva-se determinar os parâmetros estruturais que conduzem ao menor custo da estrutura, levando-se em consideração os custos de fabricação, inspeção, manutenção e falha. Essa abordagem é atual e mais realista uma vez que considera não somente os custos de construção, mas também os de manutenção, inspeção e falha, que são geralmente negligenciados, mas que são de grande importância.

No modelo proposto o foco está voltado para a obtenção das dimensões da geometria da estrutura e também dos intervalos para a realização dos procedimentos de manutenção e inspeção dado um determinado nível de segurança a ser atendido pela estrutura. Assim o problema de otimização a ser resolvido pode ser formulado usando-se a Eq. (10.37):

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } V \cdot C_{\text{Fabricação}} + C_{\text{Falha}} \cdot P_{\text{Falha}} + C_{\text{Inspeção}} \cdot (1 - P_{\text{Falha}}) \cdot N + C_{\text{Manutenção}} \cdot (1 - P_{\text{Falha}}) \cdot N \\
 & \text{Sujeito a } \beta_{\text{Alvo Estrutura}} - \beta_{\text{Estrutural}}(x, y, z) \leq 0 \\
 & \beta_{\text{Alvo Inspeção}} - \beta_{\text{Tempo}}(x, y, z) \leq 0 \\
 & h_i(y) \leq 0
 \end{aligned} \tag{10.37}$$

sendo V o volume da estrutura obtido multiplicando-se a altura o comprimento e a espessura do elemento estrutural, $C_{\text{Fabricação}}$ é o custo de fabricação volumétrico da estrutura, C_{Falha} é o custo de falha da estrutura, $C_{\text{Inspeção}}$ o custo devido ao procedimento de inspeção, $C_{\text{Manutenção}}$ é o custo do procedimento de manutenção, P_{Falha} a probabilidade de falha da estrutura. $\beta_{\text{Alvo Estrutura}}$ é o valor do índice de confiabilidade alvo para a determinação dos parâmetros geométricos, $\beta_{\text{Estrutural}}(x, y, z)$ é a expressão para o índice de confiabilidade calculado com base nos parâmetros do modelo de confiabilidade sendo uma superfície de resposta, $\beta_{\text{Alvo Inspeção}}$ é o valor do índice de confiabilidade alvo para a determinação dos intervalos de manutenção e inspeção, $\beta_{\text{Tempo}}(x, y, z)$ é a expressão que relaciona a evolução do índice de confiabilidade com o número de ciclos de carregamento aplicado sendo obtido considerando-se uma superfície de resposta, $h_i(y)$ são restrições quanto às dimensões máximas e mínimas da estrutura as quais podem ser inseridas na análise, x representa as variáveis aleatórias do problema de confiabilidade, y as variáveis a serem otimizadas, z os parâmetros do modelo mecânico de fadiga e N o número de inspeções.

Nesse modelo é utilizado o SQP para a resolução do problema de otimização com restrição apresentado na Eq. (10.37). Assim, nesse modelo obtêm-se as dimensões da estrutura e também o número de ciclos, no qual devem ser efetuados os procedimentos de manutenção e inspeção, que conduzem ao menor custo estrutural levando-se em consideração índices de confiabilidade (nível de segurança) pré-estabelecidos pelo analista.

Os parâmetros de custo envolvidos na análise, $C_{Fabricação}$, C_{Falha} , $C_{Inspeção}$ e $C_{Manutenção}$, são geralmente inseridos na função a minimizar como taxas relacionadas ao custo de falha da estrutura. Assim, a função a minimizar na Eq. (10.37) é dividida pelo custo de falha e conseqüentemente o valor final da função custo obtido estará também dividido pelo custo de falha.

10.4.1 – Exemplo 4: Análise RBDO considerando Inspeção, Manutenção e Falha

A estrutura analisada neste tópico refere-se à viga sob flexão em três pontos com um entalhe em sua face inferior mostrada na Fig. (10.10). Assim como nas análises anteriores a propagação da fissura sob fadiga será efetuada considerando-se o regime de carregamento oscilatório composto por um ciclo de carregamento e descarregamento completo.

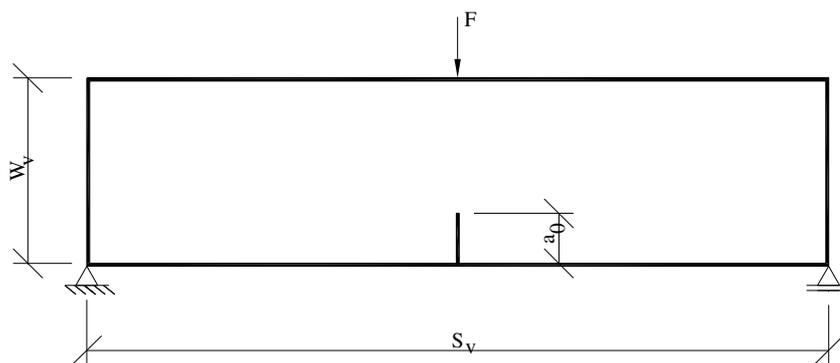


Figura 10.10 Estrutura analisada.

Foram adotadas as seguintes propriedades para o material constituinte da estrutura: módulo de elasticidade longitudinal $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$, fator de intensidade de tensão resistente $K_c = 1,04 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^{3/2}$, fator de intensidade de tensão limite da lei de Paris $\Delta K_{th} = 1,0 \text{ kN/m}^{3/2}$ e expoente n parâmetro da lei de Paris $n = 2,70$. A lei de Paris foi integrada considerando o incremento no comprimento da fissura igual a $\Delta a = 0,05 \text{ m}$.

O modelo de confiabilidade foi construído considerando-se 3 variáveis aleatórias as quais são o carregamento atuante, F , o parâmetro C da lei de Paris e o comprimento inicial da fissura, a_0 . Foram adotadas as seguintes propriedades estatísticas para essas variáveis aleatórias: carregamento atuante $F \sim N(5,0; 0,80) \text{ kN}$, parâmetro C da lei de

Paris $C \sim LN(3,0 \cdot 10^{-10}; 1,8 \cdot 10^{-10}) m / \text{ciclos} (kN/m^{3/2})^n$ e comprimento inicial da fissura $a_0 \sim LN(0,01; 0,003) m$. As demais variáveis da análise são consideradas como determinísticas. O vão da viga foi considerado igual a $S_v = 5,0 m$, a altura da viga foi admitida igual a $W_v = 1,25 m$ e a tolerância adotada para a convergência da análise foi considerada igual a $1 \cdot 10^{-4}$. O índice de confiabilidade alvo para os parâmetros geométricos foi considerado igual a $\beta_{Alvo Estrutura} = 2,30$ e o índice de confiabilidade alvo para os intervalos de manutenção e inspeção igual a $\beta_{Alvo Inspeção} = 2,30$. A tolerância para a convergência adotada para o modelo de otimização é de $1 \cdot 10^{-4}$.

As taxas para os custos envolvidos na Eq. (10.37) estão apresentadas na tabela 10.2. Esses valores foram arbitrados pelo autor, porém no caso de aplicações práticas cada empresa tem em seus registros os custos relacionados a cada etapa do processo. Dessa forma em cada aplicação desse modelo deve-se adequar essas taxas para a correta análise do problema.

Tabela 10.2 Taxas para os custos envolvidos na função a minimizar.

$C_{Fabricacao}/C_{Falha}$	$C_{Manutenção}/C_{Falha}$	$C_{Inspeção}/C_{Falha}$	C_{Falha}/C_{Falha}
0,15	0,25	0,05	1,00

Nessa análise a função que descreve o volume da estrutura em relação às dimensões do elemento estrutural é mostrada abaixo:

$$V = S_v \cdot W_v \cdot T_v \quad (10.38)$$

O primeiro objetivo dessa análise é determinar o valor da espessura da peça, T_v , que leva ao menor custo estrutural levando-se em consideração os valores de β_{Alvo} especificados. O segundo objetivo refere-se à determinação do número de ciclos de carregamento no qual devem ser efetuados os procedimentos de manutenção e inspeção. Nessa análise considera-se somente uma única intervenção durante toda a vida útil da estrutura.

Nas Fig. (10.11) e Fig. (10.12) estão apresentados os diagramas de convergência para as variáveis citadas do problema de otimização. Por meio desta figura constata-se que a convergência da análise foi obtida com 6 iterações do modelo conjunto de confiabilidade/otimização. Em cada iteração são necessários 6 chamadas do modelo de

confiabilidade, assim, nessa análise foram necessárias 36 chamadas do modelo de confiabilidade estrutural.

De acordo com as respostas obtidas nas Fig. (10.11) e Fig. (10.12) verifica-se que o valor final obtido para a espessura é de $0,3000m$ e a intervenção na estrutura para a realização dos procedimentos de manutenção e inspeção deve ocorrer quando a estrutura for sujeita a 25799 ciclos de carregamento.

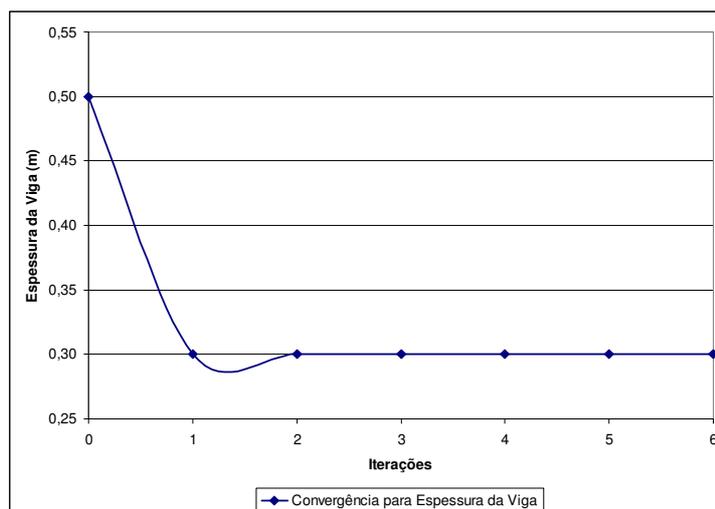


Figura 10.11 Convergência do processo iterativo para a espessura da estrutura.

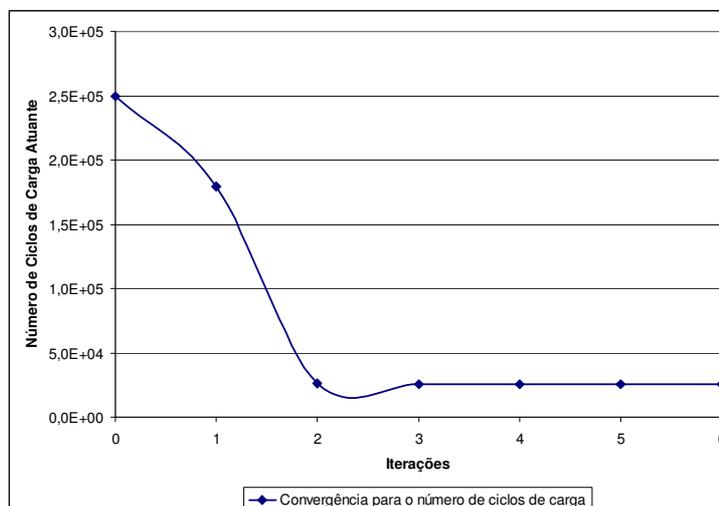


Figura 10.12 Convergência do processo iterativo para o instante de intervenção.

Os valores obtidos conduzem ao menor custo da estrutura e também atendem aos requisitos de segurança estabelecidos na análise.

10.5 – Considerações Finais Sobre os Modelos deste Capítulo

Neste capítulo foram tratados problemas envolvendo o acoplamento entre o modelo mecano-fiabilístico e um algoritmo de otimização. Os parâmetros que resultam dessa análise são as dimensões da geometria do elemento estrutural e também os intervalos para a realização dos procedimentos de manutenção e inspeção.

Deve-se enfatizar que os exemplos tratados neste capítulo são simples e tem apenas o objetivo de mostrar o potencial de aplicação dos modelos de confiabilidade em problemas práticos, como nos tratados neste trabalho relacionados à fadiga. Outro fator que deve ser comentado é o custo computacional da análise resultante desse modelo de acoplamento triplo. Como são necessárias várias chamadas do modelo de confiabilidade, durante o processo iterativo de busca de solução, fazem-se também necessárias diversas chamadas do modelo mecânico. Apesar de adotar-se o modelo de confiabilidade de acoplamento direto que, como mostrado no capítulo anterior, fornece a solução mais rapidamente, ainda sim são necessárias várias chamadas do modelo mecânico, o que penaliza muito as análises envolvendo problemas mecânicos mais complexos. Por isso todos os exemplos desse capítulo correspondem a viga sob flexão em 3 pontos com entalhe central.

Espera-se em um futuro próximo analisar esse problema utilizando computação paralela. Com essa ferramenta, cada problema de confiabilidade pode ser enviado a um nó do cluster, permitindo reduções significativas nos tempos de processamento. Esta inclusive é uma sugestão para trabalhos futuros.

11. – Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivos o desenvolvimento de formulações não lineares do MEC para a análise de problemas de fratura e também a realização de uma abordagem probabilística do problema de fadiga por meio do acoplamento entre um modelo mecânico, que trata da propagação de fissuras sob fadiga, e modelos de confiabilidade estrutural. Os dois temas tratados nesta tese são hoje considerados prioritários para o desenvolvimento de pesquisas em qualquer instituição de primeira linha no mundo, como é o caso da Universidade de São Paulo.

Primeiramente, foram abordados aspectos teóricos dos problemas de fratura e de confiabilidade. Esses temas foram bem detalhados nesta tese uma vez que, em geral, os trabalhos da área de métodos numéricos muitas vezes não discutem adequadamente os aspectos físicos do problema tratado, dedicando-se quase que exclusivamente ao desenvolvimento de formulações numéricas. O entendimento do problema físico tratado permite o desenvolvimento mais rápido das formulações numéricas. Em seguida discutiram-se as equações do MEC para a análise de domínios bidimensionais. Foram apresentadas as equações integrais escritas em termos de deslocamentos e forças de superfície, as quais em conjunto dão origem ao modelo dual. São poucos os livros que apresentam a dedução da equação integral escrita em termos de forças de superfície. Espera-se que o capítulo 5 dessa tese ajude o entendimento do modelo dual pelos alunos que estão iniciando suas pesquisas nessa área.

A seqüência do texto desse trabalho foi dedicada à discussão das formulações desenvolvidas. Inicialmente foram apresentadas duas formulações não lineares para a abordagem de problemas envolvendo a propagação de fissuras em domínios quase-frágeis. Na primeira delas foi utilizado um operador constante para a resolução do problema não linear. Esse modelo é largamente utilizado na literatura e fornece bons resultados, porém, para a obtenção do equilíbrio, é necessário um grande número de iterações, o que resulta em um elevado número de resoluções do sistema de equações final. Assim, por vezes essa formulação torna-se custosa do ponto de vista de tempo de

Capítulo 11– Considerações Finais

computação. Como alternativa para a solução desse problema foi proposta uma formulação que emprega um operador do tipo tangente consistente. Esse operador permite a solução do problema não linear utilizando um número menor de iterações, o que o torna atrativo do ponto de vista de eficiência computacional. Esta formulação foi desenvolvida empregando-se duas leis coesivas diferentes (linear e bi-linear). No entanto, para outras leis coesivas a formulação permanece válida, sendo necessário somente introduzir o termo da variação da força coesiva em relação à abertura das faces da fissura. Assim, essa formulação é geral e aplicável a diversas estruturas. Os resultados obtidos comprovam a eficiência da formulação proposta.

Um segundo modelo proposto trata da análise da propagação de fissuras em domínios formados por materiais frágeis. Existem na literatura alguns trabalhos que versam sobre o assunto, porém em todos eles o número de fissuras existente no corpo é consideravelmente reduzido (em geral 3 ou 4) e a propagação é efetuada somente para alguns incrementos no comprimento das fissuras. A contribuição deste trabalho nesse campo de pesquisa refere-se à consideração de um número maior de fissuras distribuídas no corpo e também a possibilidade da análise da coalescência e da localização. Apesar da formulação do MEC proposta para esse modelo ser simples, nessa tese esse problema foi analisado com êxito. Com esse modelo pode-se determinar claramente a localização da danificação e conseqüente ruptura do corpo.

Uma formulação do MEC para a análise de contato na interface entre corpos e também fissuras foi desenvolvida. Os problemas de aderência e contato são de grande interesse na engenharia, uma vez que em muitas situações os carregamentos são transmitidos por meio do atrito entre os componentes dos elementos estruturais. Essa formulação emprega também um operador tangente consistente para a solução do sistema não linear de equações, sendo as forças de superfície na região do contato governadas pela lei de Coulomb. Esse modelo leva a resultados compatíveis com os obtidos pelo programa ANSYS. Apesar de fornecer bons resultados, a formulação foi aplicada a problemas simples. Essa formulação poderá ser, no futuro, acoplada a outros modelos não lineares para a simulação de problemas complexos como, por exemplo, na análise estrutural do conjunto super-estrutura/fundação/solo.

Outra interessante contribuição desse trabalho refere-se aos modelos que tratam domínios enrijecidos. Essa formulação decorre do acoplamento MEC/MEF onde as equações do MEC discretizam o domínio em análise e as do MEF os enrijecedores. Nesse trabalho esse acoplamento foi efetuado tomando-se como base o trabalho de

BOTTA (2003). No entanto, os modelos tratados aqui consideram dois graus de liberdade por nó em cada enrijecedor, possibilitando assim a abordagem de problemas onde os enrijecedores formam uma configuração de treliça no interior do corpo. Os efeitos não lineares de plastificação dos enrijecedores e aderência destes ao domínio foram também tratados, sendo apresentadas neste trabalho as equações para sua consideração.

Sobre o modelo de acoplamento MEC/MEF, foi inserido o modelo de propagação de fissuras sobre regime elástico linear. Esse modelo leva a interessantes resultados e permite analisar algumas estruturas onde esse efeito é importante. Esse último modelo pode ser aprimorado no futuro com a consideração dos efeitos não lineares sobre a propagação das fissuras, onde o modelo de operador tangente consistente aplicado a materiais quase-frágeis poderá ser inserido.

Encerrando o tópico relacionado ao desenvolvimento de formulações do MEC, foi também desenvolvida uma formulação para a análise de problemas de propagação de fissuras em regime de fadiga. Esse modelo é aplicável a materiais de comportamento frágil e dúctil e tem grande aplicação em diversas estruturas, sobretudo aquelas inseridas no contexto de estruturas mecânicas (aeronáutica, naval, automobilística, etc). Esse modelo usa a lei de Paris e foram interessantes os resultados obtidos por meio dessa formulação. Foi possível abordar estruturas com múltiplas fissuras possibilitando assim estudar estruturas onde danificações crescem em diferentes posições no interior do corpo. No futuro, esse modelo poderá ser ampliado para a consideração de fadiga e corrosão em estruturas formadas por materiais quase-frágeis como o concreto.

Modelos probabilísticos foram também considerados nesse trabalho, sendo aplicados à análise de estruturas submetidas à fadiga. Sabe-se que a integridade das estruturas em serviço depende essencialmente de sua capacidade de manter um padrão de resistência ao longo do tempo. A formação e crescimento de fissuras devido a processos de fadiga estão entre as principais causas de rupturas de sistemas estruturais reais, como os presentes nas estruturas aeronáuticas, estruturas navais, automobilística e estruturas marítimas de modo geral. Assim, a análise precisa do crescimento de fissuras preexistentes durante a utilização de uma estrutura ou equipamento tem papel fundamental para a elaboração de um projeto, que visa garantir sua funcionalidade durante uma vida útil. Foram implementados os algoritmos FORM, SORM, MSR e o acoplamento direto entre FORM e modelo mecânico (acoplamento direto). De acordo com os resultados obtidos, pode-se perceber que o acoplamento direto forneceu

melhores respostas quando comparado ao MSR. Isso porque nesse método não se faz nenhuma aproximação sobre a forma da equação de estado limite, sendo os gradientes dessa equação obtidos diretamente por meio de consultas ao modelo mecânico. Apesar do MSR fornecer também respostas precisas, constatou-se que esse método é mais custoso do ponto de vista computacional, além de não oferecer convergência para a análise confiabilística com determinados planos de experiência.

A esse modelo probabilístico foi acoplado um algoritmo de otimização para a determinação de parâmetros como as dimensões da geometria da estrutura e também intervalos para a realização dos procedimentos de manutenção e inspeção, levando-se em conta funções objetivo escritas em termos de custo e segurança estruturais. Foram implementados os algoritmos de otimização SQP e Golden Section, os quais são detalhados em alguns livros que tratam do assunto. Deve-se ressaltar que esse modelo foi aplicado na análise de exemplos simples, apenas com o intuito de mostrar a sua grande potencialidade. Espera-se que no futuro, mais pesquisas no departamento abordem esse tipo de problema, o qual tem grande interesse prático e também acadêmico. Na literatura esse problema é formulado para estruturas simples, baseando-se em resultados muitas vezes experimentais. Dessa forma, trabalhos que tratem esse problema com modelos mecânicos precisos e gerais sempre fornecerão contribuições. Assim, esses modelos de acoplamento triplo são uma boa sugestão para pesquisas futuras.

Finalmente, deve-se destacar que essa tese abordou assuntos que podem ser considerados inovadores em alguns campos como formulações do MEC e também em confiabilidade estrutural. O autor declara-se satisfeito com o resultado final do trabalho, uma vez que diversos assuntos foram tratados com êxito. Apesar das inúmeras dificuldades enfrentadas, os resultados foram obtidos e o trabalho pôde ser concluído com sucesso.

12. – Referências Bibliográficas

ABEL, N.H. (1823). Ouvres complètes Norvegien Christiania, v.1.

AGOSTINHO, P.C.P. (1998). Associação de chapas através da combinação dos métodos dos elementos de contorno e finitos considerando enrijecedores e crack coesivo. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ALBERT, W.A.J. (1838). Über Treibseile am Harz, Archive für Mineralogie, Geognosie, Bergbau und Hüttenkunde, 10, 215-234.

ALIABADI, M.H; ROOKE, D.P. (1992). Numerical Fracture Mechanics, Southampton, Computational Mechanics Publications.

ALIABADI, M.H. (2002). The Boundary Element Method, Volume 2: Applications in Solids and Structures. John Wiley & sons, LTD.

ALMEIDA, F.P.A. (2003). Aplicação do acoplamento entre o MEC e o MEF para o estudo da interação dinâmica elastoplástica entre o solo e estruturas. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ALMEIDA, V.S. (2003). Análise da interação solo não-homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ANDERSSON, T. (1982). Boundary Elements in two dimensional Contact and Friction, Diss. n° 85, Linköping Institute of technology.

ANG, A.H.S; AMIN, M (1968). Reliability of structures and structural systems. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.94, n° EM2, 671-691.

AOUR, B; RAHMANI, O; NAIT-ABDELAZIZ, M (2007). A coupled FEM/BEM approach and its accuracy for solving crack problems in fracture mechanics. International Journal of Solids and Structures. V. 44, 2523-2539.

ARMENTANI, E; CITARELLA, R. (2006). DBEM and FEM analysis on non-linear multiple crack propagation in an aeronautic doubler-skin assembly. International Journal of Fatigue. Em processo de publicação.

ASKES, H; PAMIN, J; DE BORST, R. (2000). Dispersion analysis and element-free Galerkin solutions of second-and fourth order gradient enhanced damage models, Int J Num Meth Engrg, V.49, 811-832.

- BABUŠKA, I; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. (1994). Special finite element method for a classe of second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, V.31, n.4,727-981.
- BARBOSA, M.T.G (2004). Análise Comparativa e Crítica de Diversos Modelos numéricos aplicáveis ao estudo da aderência aço-concreto. XXXI Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural, Mendoza, Argentina. 1-14.
- BARENBLATT, G.I. (1962). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. In: *Advances in Applied Mechanics*, V. 7, 55-129.
- BARGMANN, H; RUSTENBERG, I; DEVLUKIA, J. (1994). Reliability of metal components in fatigue: a simple algorithm for the exact solution. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*.17:1445-1502.
- BARPI, F; VALENTE, S. (1998). Size-effects induced bifurcation phenomena during multiple cohesive crack propagation. *International Journal of Solids and Structures*, V.35, 1851-1861.
- BARROSO, L. C; BARROSO, M. M. A; CAMPOS, F. F. F; CARVALHO, M. L. B; MAIA, M. L. (1987). *Cálculo Numérico*, 2º Ed., Editora Harba, Sao Paulo.
- BARSOM, J.M. (1987). *Fracture and Fatigue Control in Structures*, Prentice-Hall.
- BASQUIM, O.H. (1910). The exponential law of endurance tests. *Proceedings of the American Society for Testing and Materials*, 10, 625-630.
- BATHE, K,J; CHAUDHARY,A. (1985). A solution method for planar and axisymmetric contact problems, *Int. Journal Numer. Methods*, V21 65-88.
- BAUSCHINGER, J. (1886). Ueber die Veränderungen der Elastizitätsgrenze und der festigkeit des Eisens und Stahls durch Strecken, Quetschen, Erwärmen Abkühlen und durch oftmals wiederholte Belastung. *Mitt: Mech-Tech Lab, XIII München*.
- BAYRAM, Y,B; NIED,H,F. (2000). Enriched finite element-penalty function method for modeling interface cracks with contact, *Engineering Fracture Mechanics*, V.65, 5, 541-557.
- BAZANT, Z. P. (1982). Crack band model for fracture of Geomaterials, *Proc. 4 th Intern. Confer. on Numerical Methods in Geomechanics*, held in Edmonton, Alberta Canadá, June 1982.
- BAZANT, Z. P; CEDOLIN, L. (1983). Finite Element modelling of crack band propagation. *Journal of Structural Engineer, ASCE*, V.109, 69-92.
- BAZANT, Z.P; KAZEMI,M.T (1990). Determination of Fracture Energy, Process Zone Length and Brittleness Number from Size Effect, with Application to rock and concrete, *International Journal of Fracture*, V. 44, 111-131.
- BAZANT, Z. P; OH, B.H. (1983). Crack band theory for fracture of concrete, *Materials and Structures (RILEM, Paris)*, V.16, 155-177.

BAZANT, Z.P; LI, Y. N. (1995). Stability of cohesive crack model: Part I – Energy principles. *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics* 62: 959–964.

BAZANT, Z.P; LI, Y. N. (1997). Cohesive crack model with rate-dependent opening and viscoelasticity: I. Mathematical model and scaling. *International Journal of Fracture* 86: 247–265.

BECK, A. T. (2003). Reliability Analysis of degrading uncertain structures with applications to fatigue and fracture under random loading, Tese (Doutorado) – University of Newcastle, Austrália.

BECK, A.T; MELCHERS, R.E. (2004). Overload failure of structural components under random crack propagation and loading – a random process approach, *Structural Safety*, V. 26, 4, 471-488.

BEGLEY, M.R; COX, B.N; McMEEKING, R.M. (1997). Creep crack growth with small scale bridging in ceramic matrix composites. *Acta Materialia* 45: 2655–3088.

BELYTSCHKO, T; FLEMING, M. (1999). Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method, *Computers and Structures*, V. 71, 173-195.

BELYTSCHKO, T; KRONGAUZ, Y; ORGAN, D; FLEMING, M; KRYSL, P. (1996). Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Meth Appld Mech Engrg*; V.139, 3-47.

BESTERFIELD, G.H; LIU, W. K; LAWRENCE, M.A; BELYTSCHKO, T. (1991). Fatigue crack growth reliability by probabilistic finite elements. *Comput. Meth. appl. Mech. Engng* 86, 297-320.

BEZINE, G; COURTIN, S; GARDIN, C; HAMOUDA, H. B. H. (2005). Advantages of the J-integral approach for calculating stress intensity factors when using the commercial finite element software ABAQUS, *Engineering Fracture Mechanics*, V. 72, 2174-2185.

BITTENCOURT, T. N; WAWRZYNEK, P. A; INGRAFFEA, A. R; SOUSA, J. L. (1996). Quase-Automatic Simulation of Crack Propagation for 2D LEFM Problems. *Engineering Fracture Mechanics*, V. 55, 321–334.

BITTENCOURT, T. N; MIRANDA, A. C. O; MEGGIOLARO, M. A; CASTRO, J. T. P; MARTHA, L. F. (2003). Fatigue life and crack path predictions in generic 2D structural components. *Engineering Fracture Mechanics*, V. 70, 1259–1279.

BLANDFORD, G. E; INGRAFFEA, A. R; LIGGET, J. A. (1981). Two-dimensional Stress Intensify Factor computations using the Boundary Element Method. *Int. J. Num. Meth. Engn.*, V.17, 387-404.

BLAZQUEZ, M; MANTIC, V; PARIS, F. (2006). Application of BEM to generalized plane problems for anisotropic elastic materials in presence of contact. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, V. 30, 6, 489-502.

BOGDANOFF, J.L; KOZIN. F. (1985). Probabilistic models of cumulative damage. New York: Wiley.

- BONNANS, J,F; GILBERT, J,C; LEMARECHAL, C; SAGASTIZABAL, C,A. (2002). Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects. Springer Verlag, Berlin
- BONNET, M; MUKHERJEE,S. (1996). Implicit BEM formulation for usual and sensitivity problems in elastoplasticity using the consistent tangent operator concept. International Journal of Solids and Structures, 33, p. 4461-4480.
- BOTTA, A. S. (1998). Cálculo de Esforços e Deslocamentos em Estruturas reticuladas considerando-se a Mecânica do Dano para a Modelagem do Concreto Armado, Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- BOTTA, A. S. (2003). Método dos elementos de contorno para análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformações. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- BOUCHARD, P.O; BAY, F; CHASTEL, Y (2003). Numerical modelling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria, Computer methods in applied mechanics and engineering, 192, 3887-3908.
- BRAITHWAITE, F. (1854). On the fatigue and consequent fracture of metals, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, London, 13, 463-475.
- BREBBIA, C. A. (1978a). The Boundary element method for engineers, London, Pentech Press.
- BREBBIA, C. A. (1978b). Weighted residual classification of approximate methods. Appl. Math. Modelling, v.2, n.3.
- BREBBIA, C. A; WALKER, S. (1980). Boundary Element Techniques in Engineering, London, Newnes-Butterworths.
- BREBBIA, C. A. (1984). The Boundary Element for Engineers, London, Pentech Press.
- BREBBIA, C. A; DOMINGUEZ, J. (1992). Boundary Elements – An Introductory Course, Southampton, McGraw Hill.
- BREBBIA, C.A.; GEORGIO, P. (1980). Combination of boundary and finite elements for elastostatics. Appl. Math. Modelling, v.3, p.212-220.
- BRESLER, B.; BERTERO, V.(1968). Behavior of reinforced concrete under repeated load. ASCE, Journal of the Structural Division, Vol. 94, No. ST6, June, pp. 1567-1590.
- BROEK, D. (1986). Elementary Engineering Fracture Mechanics, Kluwer Academic Publ. Dordrecht.
- BUCHER, C.H; FRANGOPOL, D,M. (2006). Optimization of lifetime maintenance strategies for deteriorating structures considering probabilities of violating safety, condition and cost thresholds. Probabilistic Engineering Mechanics. vol. 21, pp. 1-8.
- BUDERKIN, F. M; STONE, D. E. W. (1966). The crack Opening Displacement Approach to Fracture Mechanics in Yielding, Jour. of Strain Analysis, V.1, 145-153.

- BUYUKOZTURK, O; HEARING, B. (1998). Crack propagation in concrete composites influenced by interface fracture parameters. *International Journal of Solids and Structures*, 35: 4055-4066.
- CARRAZEDO, R.(2002). Mecanismos de Confinamento e suas Implicações no Reforço de Pilares de Concreto por Encamisamento com Compósito de Fibras de Carbono. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- CARPINTERI, A. (1992). *Meccanica dei Materiali e della Frattura*. Pitagora Editrice, Bologna.
- CARPINTERI, A; CORNETTI, P; BARPI, F; VALENTE, S. (2003). Cohesive crack model description of ductile to brittle size-scale transition: dimensional analysis vs. renormalization group theory, *Engineering Fracture Mechanics*, V.70, 1809-1839.
- CARPINTERI, A; SPAGNOLI, A; VANTADORI, S. (2006). An elastic-plastic crack bridging model for brittle-matrix fibrous composite beams under cyclic loading., *International Journal of Solids and Structures*, 43, 4917-4936.
- CARVALHO, C. V. A (1998). Simulação Bidimensional Adaptativa por Elementos Finitos de processos de Fraturamento por Fadiga. Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro.
- CARVALHO, C.V.A; ARAUJO, T.D.P; BITTENCOURT, T.N; MARTHA, L.F; (1999). Simulação Bidimensional Adaptativa de Processo de Fraturamento por Fadiga. In XX CILAMCE – Congresso Ibero-Latino Americano em Métodos Computacionais em Engenharia. São Paulo – Brasil.
- CEB, (1990). Bulletin d'information n° 195 e 197.
- CEN, Z; MAIER, G. (1992). Bifurcations and Instabilities in Fracture of Cohesive-softening structures: A boundary element analysis, *Fatigue Fract. Engng Mater.*,V.15, 911-928.
- CHAND, S; GARG, S, B, L. (1985). Propagation under constant amplitude loading. *Engineering Fracture Mechanics*, V.21, 1-30.
- CHEN, T, C; CHEN,W,H. (1998). Frictional contact analysis of multiple cracks by incremental displacement and resultant traction boundary integral equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, V.21, 339-348.
- CHEN,W.F; HAN,D.J. (1988). *Plasticity for Structural Engineers*, McGraw Hill.
- CHEN, W. F; MEI, C.C. (1974). Oscillations and wave forces in a man-made harbour. In: *Naval Hydro Symp.*, 10th, Dept. of Civil Eng., MIT., Cambridge, USA.
- CHEN, T; WANG, B; CEN, Z; WU, Z. (1999). A symmetric Galerkin multi-zone boundary element method for cohesive crack growth, *Engineering Fracture Mechanics*, V.63, 591-609.

CHUEIRI, L. H. M. (1994). Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas. Tese (Doutorado), – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

CISILINO, A.P; ALIABADI, M.H. (1999). Three-dimensional boundary element analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear fracture problems, *Engineering Fracture Mechanics*, 63, 713-733.

CODA, H. B. (1990). Análise da vibração livre de meios elásticos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno. Dissertação (Mestrado), – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

CODA, H. B. (1993). Análise tridimensional transiente de estruturas pela combinação entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos. Tese (Doutorado), – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

CODA, H. B; VENTURINI, W. S. (1999). On the coupling of 3D BEM and FEM frame model applied to elastodynamic analysis. *International Journal of Solids and Structures*, V.36, n.31-32, 4789-4804.

CODA, H.B; VENTURINI, W.S, ALIABADI, M.H. (1999). A general 3D BEM/FEM coupling applied to elastodynamic continua/frame structures interaction analysis. *Int. J Numer Meth Engng* ; v. 46, p. 695–712.

CODA, H.B. (2001). Dynamic and static non-linear analysis of reinforced media: a BEM/FEM coupling approach. *Computers & Structures*, V.79, 2751-2765.

CORNELL Fracture Group (2006). Ithaca, NY: Cornell University. Disponível em: <http://www.cfg.cornell.edu/projects/spiral_bevel.html>. Acesso em: 10 out. 2007.

CREMONA, C. (1996). Reliability updating of welded joints damage by fatigue, *Int. Journal of Fatigue*, V.18, 567-575.

CRISFIELD, M. A. (1991). Non-linear finite element analysis of solids and structures. Chichester, New York: Wiley, 494 p..

CHRISTENSEN, P.T; BAKER, M. J. (1982). Structural reliability theory and its application. New York: Springer-Verlag.

CROUCH, S. L. (1976). Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. *Int. J. Num. Meth. Eng*, V.10, 301-342.

CROUCH, S. L.; STARFIELD, A. M. (1983). Boundary element method in solid mechanics. George Allen and Unwin.

CRUSE, T. A. (1968). A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem II, *Journal of Math. Analysis and Applications*, V.22, 341.

CRUSE, T. A. (1969). Numerical solutions in three dimensional elastostatics. *Int. Journal of Solid and Structures*, V.5, 1259-1274.

CRUSE, T. A. (1972). Numerical Evaluation of elastic stress intensity factor by the boundary –integral equation method. In: Swedlon, JL, ed. *The surface crack: Physical Problems and computational solutions*. New York.

CRUSE, T.A. (1973). Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis. *Computer and Structures*, V. 3, 509-527.

CRUSE, T. A. (1988). *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*, Dordrecht, Computational Mechanics Publications.

CRUSE, T. A; RIZZO, F. J. (1968). A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I, *Journal of Math. Analysis and Applications*, V. 22, 244.

CRUSE, T. A.; VANBUREN, W. (1971). Three dimensional elastic stress analysis of a fracture specimem with an edge crack. *Int. Journal Mech.*, V. 7, 1-15.

DAVIS, P.J; RABINOWITZ, P. (1984). *Methods of numerical integration*, Computer Science and Applied Mathematics, Orlando.

de ANDRES, A; PEREZ, J,L; ORTIZ, M.(1999). Elastoplastic finite element analysis of three-dimensional fatigue crack growth in aluminum shafts subjected to axial loading. *International Journal of Solids and Structures* 36: 2175–2320.

DESIR, J. M. (1998). *Interface aço-concreto: reformulando os modelos constitutivos e numéricos*; Tese Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro – RJ, Brasil.

DER KIUREGHIAN, A; KE, B.J (1988). The stochastic finite element method in structural reliability. *Probabilistic Engng Mech.* 3, 83-91.

DOLLEY, E,J; WEI, R,P. (1998). Importance of chemically short-crack growth on fatigue life. 2nd Joint NASA/FAA/DoD Conference on Aging Aircraft, Williamsburg, VA, 679-687.

DONAHUE,R,J; CLARK,H,M; ATANMO,P; KUMBLE,R; MCEVILY,A,J (1972), Crack opening displacement and the rate of fatigue crack growth, *International Journal of Fracture Mechanics*, V.8, 209-219.

DONIDA, G; BERNETTI, R; BRUSCHI, R. (1990). The penalty function method for problems of contact. *Computers & Structures*, V 36, 4, 777-782.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. (1996). *Hp clouds – an hp meshless method*. Numerical Methods for Partial Differential Equations. John Wiley & Sons, 1 - 34.

DUCATTI, V. A. (1993). *Concreto de elevado desempenho: estudo da aderência com a armadura*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo – SP, Brasil.

DUGDALE, D.S. (1960). Yelding of steel sheets containing slits. *J. of Mechanics and Physics of Solids*, V.8, 100-104.

DRUCKER, D. C. (1951). A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. In: U. S. NATIONAL CONGRESS ON APPLIED MECHANICS, 1st, New York, ASME. *Proceedings*. p. 487-491.

ENEVOLDSEN, I.; FABER, M.H.; SORENSEN, J.D. (1994), Adaptive response surface techniques in reliability estimation. *Structural Safety & Reliability*. In: Schueller, Shinozuka & Yao, Balkema, Rotterdam, p.1257-1264.

ELBER, W. (1970). Fatigue crack closure under cyclic tension, *Engineering of Fracture Mechanics*, V. 2, 37-44.

ELICES, M; GUINEA, G.V; PLANAS, J; GOMEZ, J. (2002). The cohesive zone model: Advantages, Limitations and Challenges. *Engineering of Fracture Mechanics*, V.69, 137-163.

ELLINGWOOD, B.R; MORI, Y. (1995). Reliability-based service life assessment of concrete structures in nuclear power plants: optimum inspection and repair. 13th international conference on structural mechanics in reactor technology (SMiRT 13). 529-537.

ERDOGAN, F; SIH, G.C (1963). On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *J. Basic Engng.*, V.85, 519-527.

ERDOGAN, F; RATWANI, M (1970). Fatigue and fracture of cylindrical shells containing a circumferential crack, *International Journal of Fracture Mechanics*, V.6, 379-392.

EWALDS, H.L; WANHILL, R.J.H (1984). *Fracture Mechanics*, Victoria, Australia; Delft, The Netherlands : Edward Arnold: Delftse Uitgevers.

FALSONE, G.; IMPOLLONIA, N. (2004), About accuracy of a novel response surface method for the analysis of finite element modeled uncertain structures. *Probabilistic Engineering Mechanics*, v19, p.53-63.

FARAVELLI, L. (1986). A response surface approach for reliability analysis. *RILEM Symp. Stoch. Meth. Mater. Struct. Engng.*

FARAVELLI, L. (1989). Response surface approach for reliability analysis. *J. Engng Mech. ASME* 15, 2763-2781.

FERNANDES, G. R. (1998). O método dos elementos de contorno aplicado à análise não-linear de placas. *Dissertação (Mestrado)*, – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

FERNANDES, G. S.; VENTURINI, W.S. (2002). Non-linear boundary element analysis of plates applied to concrete slabs. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 26, p. 169-181.

FERRO, N. C. P. (1999). Uma combinação MEC/MEF para análise de interação solo-estrutura. *Tese (Doutorado)* – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

FERRO, N.C.P.; VENTURINI, W.S. (1992). BEM-FEM coupling for building structure analysis. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON METHODS, 14th., Seville, November. Proceedings.

FIGUEIREDO, A.D. (2000). Concreto com fibras de aço. Apostila publicada pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo.

FOLTRAN, C.E. (1999). Análise de problemas planos em regime elasto-plástico pelo método dos elementos de contorno. Campinas. Dissertação (mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas.

FRANGOPOL, D.M; LIN, K.Y; ESTES, A.C (1997). Life-cycle cost design of deteriorating structures. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, V. 123, 1390-1401.

FORMAN,R,G; KEARNEY,V,E; ENGLE,R,M (1967), Numerical analysis of crack propagation in cyclic loaded structures, *Journal of Basic Engineering Trans*, ASME, V.89, 459-464.

FREDHOLM, I. (1903). Sur une classe d'équation fonctionnelles, *Acta Math*, V.27, 365-390.

FREUDENTHAL, A.M. (1947), The safety of structures. *Transactions of ASCE*, 112: 125–180.

FREUDENTHAL, A. M.; GUMBEL, E, J. (1953). On the statistical interpretation of fatigue tests. *Proc. Roy. Soc. London*. A216:309-362.

FREUDENTHAL, A. M.; GARRELTS, J. M.; SHINOZUKA, M.(1966). The analysis of structural safety. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v. 92, n. ST1.

FUDOLI, C, A. (1999). Formulação do método dos elementos de contorno e plasticidade com gradiente. Tese (Doutorado), – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

GALIN, L, A. (1961). Contact problems in the theory of elasticity. Traduzido por H. Moss, North Caroline State College, Department of Mathematics.

GALVEZ, J,C; ELICES, M; GUINEA, G,V; PLANAS, J (1998). Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading. *International Journal of Fracture*, V. 94, 267-284.

GDOUTOS, E,E. (1990). *Fracture Mechanics Criteria and Applications*. Kluwer Academic Publishers.

GERBER, H. (1874). Bestimmung der zulässigen Spannungen in Eisen-konstruktionem. *Zeitschrift des Bayerischen Architekten und Ingenieur-Vereins*, 6, 101, 110.

GHONEM, H; DORE, S. (1985). Probabilistic description of fatigue crack propagation in polycrystalline solids. *Engineering Fracture Mechanics*, V. 21, 1151-1168.

- GHONEM, H; DORE, S. (1987). Experimental Study of the constant-probability crack growth curves under constant amplitude loading. *Engineering Fracture Mechanics*, V. 27, 1, 1-25.
- GLADWELL, G, M, L. (1980). *Contact problems in the classical Theory of Elasticity*, Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff.
- GONZALEZ, J,A; ABASCAL, R. (1998). Using the boundary element method to solve rolling contact problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, V. 21, 4, 385-392.
- GONZALEZ, J,A; ABASCAL, R. (2000). Solving 2D rolling problems using the NORM-TANG iteration and mathematical programming. *Computers & Structures*, V. 78, 1-3, 149-160.
- GOYET, J; MAROINI, A. (1996). Offshore platform reliability. Optimal inspection and repair planning: an application with a sensitivity study using IMREL methodology. *Int. Conf. on fatigue of welded components and structures*, Semis, France 149-162.
- GRANDT JR, A,J (2004). *Fundamentals of structural integrity*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- GRAY, L. J; MARTHA, L. F; INGRAFFEA, A. R. (1990). Hyper singular integrals in boundary element fracture analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, V.29, 135-1158.
- GRIFFITH, A.A. (1921). The phenomenon of Rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society, London*, A221, 163-197.
- GUN,H. (2004). Boundary Element analysis of 3-D elasto-plastic contact problems with friction. *Computers and Structures*, V. 82, 555-566.
- GUSTAFSSON,P.J. (1985). *Fracture Mechanics Studies of non-Yielding Materials Like concrete: Modeling of Tensile Fracture and Applied Strength Analysis*. Report N° TVBM-1007, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund Sweden.
- HADAMARD, J.(1902). Sur les problemes aux derivées partieles et leur signification physique, *Bull. Univ. Pricenton*, V.13, 46-52.
- HAFTKA, R,T; KAMAT, M, P (1985). *Elements of Structural Optimization*. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers.
- HAN, S.P. (1977). A globally convergent methods for nonlinear programming. *Journal of optimization theory and applications*. V.22. p 297-309.
- HASOFER, A.M. & LIND,N.C. (1974), Exact and invariant second moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*. 100 (EM1): 111-121.
- HILBERT,D.(1904). Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie, *Verh. III, Int Math. Kongr, Heidelberg*.

HERTZ, H. (1882). On the contact of elastic solids. Traduzido por Jones, D.E. Macmillan e Co Ltd, Londres, 1986.

HILLERBORG, A; MODEER, M; PETERSSON, P.E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cements Concrete Research*, V.6, 773-782.

HOEPPNER, D.W; KRUPP, W.E. (1974). Prediction of component life by application of fatigue crack growth knowledge, *Engineering of Fracture Mechanics*, V.6, 47-70.

HOLANDA, K. M. A. (2002). Análise dos mecanismos resistentes e das similaridades de efeitos da adição de fibras de aço na resistência e na ductilidade à punção de lajes cogumelo e ao cisalhamento de vigas de concreto. São Carlos, 302p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

HUSSAIN, M.A; PU, S.U; UNDERWOOD, J (1974). Strain Energy release rate for a crack under combined mode I and II, *ASTM STP*, V. 560, 2-28.

HYER, M. W. (1997). Stress Analysis of fiber-reinforced Composite Materials. McGraw-Hill Publ., New York, 627 p.

INGRAFFEA, A.R; GERSTLEN, W. (1984). Non-Linear Fracture Models for Discrete Crack Propagation, *Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites*. S.P.Shah editor. Martinus Nijhoff Publishers, 171-209.

INGRAFFEA, A.R; SAOUMA, V. (1985). Numerical Modelling of Discrete Crack Propagation in Reinforced and Plain Concrete. Cap. 4 de *Application of Fracture Mechanics to Concrete Structures*, G.C Sih and A. DiTommaso editors, . Martinus Nijhoff Publishers.

IRWIN, G.R. (1957). Analysis of Stress and Strain near the end of a crack traversing a plate, *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, V.24, 361-364.

JASWON, M.A. (1963). Integral equation methods in potential theory I. *Proc. Royal Society Ser.*, V. A275, 23-32.

JENQ, Y.S; SHAH, S.P (1985). A Two Parameter Fracture Model for Concrete, *Journal of Engineering Mechanics*, V.111, n.4, 1227-1241.

JIANG, L; ROGERS, R.J (1988). Combined Lagrangian multiplier and penalty function finite element technique for elastic impact analysis, *Computers & Structures*, V. 30, 6, 1219-1229.

JIANG, Y.S; VENTURINI, W.S. (1998). Limit analysis of slope stability with boundary element methods. In: *The IV world congress on comp. mechanics*, June 29 to 2 July, 1998, Buenos Aires, Argentina.

JIANG, Y.S; VENTURINI, W.S. (2000). A general boundary element method for analysis of slope stability. In: *Computational Civil and Structural Engineering*, eds. G. de Roeck & B.H.V. Topping, 191-198, Civil-comp Press.

- JIRASEK,M; ZDENEK,P; BAZANT,Z.P; CAROL,L. (2004). A framework for microplane models at large strain with application to hyperelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, V.41, 511-557.
- JIVKOV, A.P. (2004). Fatigue corrosion crack extension across the interface of an elastic bi-material, *Engineering Fracture Mechanics*, 71, 1119-1113.
- JOHNSON, K, L. (1985). *Contact Mechanics*, Cambridge University Press.
- KACHANOV, L.M. (1958). On the Time to Failure under Creep Conditions, *Izv. Akad. Nauk. SSR, Otd. Tekhn. n.8*, 26-31.
- KACHANOV, L.M. (1986). *Introduction to Continuum Damage Mechanics*, Martinus Nighoff Publishers.
- KACHANOV, L.M; LEMAITRE,J. (1987). *Continuum Damage Mechanics, Theory and Applications*, Springer Verlag.
- KAMINSKI JR, J (2007). Incertezas de modelo na análise de torres metálicas treliçadas de linhas de transmissão. Tese de Doutorado, UFRGS, 2007.
- KARAMI,G. (1987). A Boundary Element Method for 2D contact problems. Tese de doutorado Mechanical Engineering Department, Imperial college of Science and Technology, University of London.
- KEBIR,H; ROELANDT,J.M; CHAMBON,L. (2006).Dual boundary element method modelling of aircraft structural joints with multiple site damage. *Engineering Fracture Mechanics*. V. 73, 418–434.
- KELLOG,O.D. (1929). *Foundations of Potencial Theory*, Springer Verlag, Germany.
- KIM, S.-H.; NA, S.-W. (1997), Response surface method using vector projected sampling points. *Structural Safety*, v.19, n.1, p.3-19.
- KIRCH, G (1898), *Verein Deutscher Ingenieure*.
- KHATIR, Z; LEFEBVRE, S. (2004). Boundary element analysis of thermal fatigue effects on high power IGBT modules. 44, 929-938.
- KLARBRING, A; BJORKMAN, G. (1988). A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying contact surface, *Comp. Struct.*, V.30, 1185-1198.
- KOLMOGOROV, A. N. (1956). *Foundations of the theory of probability*. Second english edition. New York: Chelsea Publishing Company.
- KOMATSU, J.S. (1995). Estudo de problemas de escavação através da combinação elementos de contorno e elementos finitos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- KRAJCINOVIC, D. (2000). *Damage Mechanics : Accomplishments, trends and needs*. *International Journal of Solids and Structures*, V.37, 267-277.

KRAJCINOVIC, D; MASTILOVIC,S. (2001). Brittle and quasi-ductile at large strain rates. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, V.35, 9-18.

KHUNTIA, M., STOJADINOVIC, B., GOEL, S.C. (2000). Shear Strength of normal and high-strength fiber reinforced concrete beams without stirrups. *ACI Structural Journal*, V.96, n.2, pg.282-89, march-april.

KULKARNI, S,S; ACHENBACH, J,D.(2007). Optimization of inspection schedule for a surface-breaking crack subject to fatigue loading. *Probabilistic Engineering Mechanics*, V. 22, 301-312.

KUPRADZE, V.D. (1965). *Potencial methods in the theory of elasticity*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations.

LACHAT, J.C. (1975). A further development of the boundary integral technique for elastostatics. Southampton, Ph. D. Thesis – University of Southampton.

LAGGOUNE, R; CHATEAUNEUF, A; AISSANI, D. (2009). Opportunistic policy for optimal preventive maintenance of a multi-component system in continuous operating units. *Computers & Chemical Engineering*. Aceito em Fevereiro de 2009.

LANGER, B.F. (1937). Fatigue failure from stress cycles of varying amplitude. *Journal of Applied Mechanics*, 59, 160-172.

LEITAO, V.M.A. (1994). *Boundary Elements in Nonlinear Fracture Mechanics*, Computational Mechanics publications.

LEITE, L.G.S.; CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. (2003). Two-dimensional solids reinforced by thin bars using the boundary element method. *Engineering analysis with boundary elements*, v. 27, pp. 193-201.

LEITE, L.G.S. (2007). Desenvolvimento de modelo numérico para análise de problemas de interação de domínio bidimensionais. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

LEMAIRE, M. (1998), Finite element and reliability: combined methods by response surface. G.N. Frantziskonis (ed.), *PROBAMAT – 21st Century: Probability and Materials*, p. 317-331.

LEMAITRE, J; CHABOCHE, J.L. (1990). *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press.

LEONEL, E.D. (2006). Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Análise de Sólidos Multi-Fraturados. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

LEONEL, E.D; RIBEIRO, G.O; PAULA, F.A. (2003). Simulação Numérica de Estruturas de Concreto Armado via MEF/ANSYS. In: V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, 7 a 10 de junho de 2003, São Paulo, Brasil.

- LEONEL, E.D; LOVON,O.B.R; VENTURINI, W.S. (2006). Boundary element formulation applied to multi-fractured bodies. In: Proceedings of the Boundary element method XXVIII Computational Mechanics Publications, Sounthampton.
- LEONEL, E.D; STAVROULAKIS, G.E; VENTURINI, W.S. (2007). Multi-fractured plate analysis using the boundary element method. In VIII HSTAM – International Congress on Mechanics. Patras – Grécia.
- LEONEL, E.D; VENTURINI, W.S. (2007). Análise de Estruturas Quase-Frágeis pelo Método dos Elementos de Contorno. In XXVIII CILAMCE – Congresso Ibero-Latino Americano em Métodos Computacionais em Engenharia. Porto – Portugal.
- LI, F. Z.; SHIH, C. F.; NEEDLEMAN, A. (1985). A comparison of methods for calculating energy release rates. *Engineering fracture mechanics*, V.21, n.2, 405-421.
- LIANG, R.Y; LI, Y.N. (1991). Simulations of non-linear fracture process zone in cementitious material a boundary element approach, *J. Computational Mechanics*, V.7, 413-427.
- LI, H; CHANDRA, N. (2003) Analysis of crack growth and crack-tip plasticity in ductile materials using cohesive zone models. *International Journal of Plasticity* 19 (6): 849-882.
- LIU, P.L; DER KIUREGHIAN, A (1991). Finite element reliability of geometrically nonlinear uncertain structures. *J. Engng Mech. ASCE* , 17, 1806-1825.
- LOPES JR, M.C; VENTURINI, W.S. (1997). Cohesive crack analysis by the boundary element method. In: *Complas V*,eds. Oñate, E. & Owen, D.R.J., Pineridge Press.
- LOVON, O.B.R. (2006). Formulação h-adaptativa do método dos elementos de contorno para elasticidade bidimensional com ênfase na propagação da fratura. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- LUA, Y. J; LIU, W. K; BELYTSCHKO,T. (1992). A stochastic damage model for the rupture prediction of a multi-phase solid. Part II: statistical approach. *Int. J. Fracture Mech.* 55, 341-361.
- LUKIC, M; CREMONA, C (2001). Probabilistic optimization of welded joints maintenance versus fatigue and fracture. *Reliability engineering & system safety*. V.72, 253-264.
- MARTINS, P.C.R. (1989). Modélisation du Comportement jusqu'a la Rupture en béton à Precontrainte Extérieure ou Mixte. Thèse de D. Sc. Ecole Centrale , Paris, France.
- MASSONET, C.E; ZIENKIEWICZ, O.C; HOLLISTER, G.S. (1965). Numerical use for integral procedures. *Stress analysis*. London: Wiley, cap. 10.
- MAI, Y.W. (2002). Cohesive zone and crack–resistance (R)-curve of cementitious materials and their fibre-reinforced composites, *Engineering Fracture Mechanics*, V.69, 219-234.

MACIEL, D.N. (2003), Determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão Estáticos e Dinâmicos via MEC com integração analítica em coordenadas locais. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MADSEN, H.O. (1988), Omission sensitivity factors. *Structural Safety*, v.5, issue 1, january, p.34-45.

MADSEN, H.O; SORENSEN, J.D; OLESEN,R. (1989) Optimal inspections planning for fatigue damage of offshore structures. Proc. ICOSSAR 89, San Francisco, 2099-2106.

MAN,K,W. (1994). Contact Mechanics using Boundary Elements. *Topics in Engineering*, V. 22, Comp. Mech. Publ.

MARQUEZ, A; MEDDAHIS; SELGAS.V. (2004). A new BEM-FEM coupling strategy for two-dimensional fluid-solid interaction problems. *Journal of Computational Physics*, V. 199, 205-220.

MARTHA,L.F; WAWRZYNEK,P.A; INGRAFFEA,A.R. (1988). Computational Environment for the Simulation of Fracture Processes in Three Dimensions, in *Anal. Numer. Aspects of Three Dimensional Fracture Process*, A.J. Rosakis et al.(Editors), ASME, AMD 91, 321-327.

MAYER, M. (1926). Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften statt nach zulässigen Spannungen. Berlin, Springer-Verlag.

McADAM, D.J. (1926). Stress-strain relationship and the corrosion fatigue of metals, In *Corrosion Fatigue*, Special Technical Publication, 26, 224-254, Philadelphia: American Society for Testing and Materials.

McCLINTOCK, F.A. (1963). On the plasticity of the growth of fatigue cracks, In *Fracture of solids* (eds. D.C. Drucker & J.J. Gilman), 20, 65-102. New York Wiley.

McDONALD, B.H.; WEXLER, A. (1972). Finite element solution of unbounded field problems. *IEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, MTT-20, 841-47.

MELAN, E. (1938). Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums. *Ing. Arch.* , v. 9, p. 116-126.

MELCHERS, R.E. (1983), Reliability of parallel structural systems. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.109, n.11, november, p.2651-2665.

MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. (1996). The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, V.139, 289-314.

MELLINGS, S.C; ALIABADI, M.H. (1994). Three-dimensional flaw identification using sensitivity analysis. In: Brebbia, C.A. (ed.), *Boundary elements methods 16th*, 149-156.

- MENDONÇA, A.V; PAIVA, J.B. (2003). An elastostatic FEM/BEM analysis of vertically loaded raft and piled raft foundation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, V.27, 919-933.
- MESQUITA, A.D. (2002). Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento MEC/MEF progressivo. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- MESQUITA, A.D; CODA, H.B. (2007). A Boundary element methodology for viscoelastic analysis: Part II without cells, *Applied Mathematical Modelling*, V.31, 1171-1185.
- MEHTA, P.K; MONTEIRO, P.J.M. (1994). *Concreto Estrutura Propriedades e Materiais*, Editora PINI.
- MEWS, H. (1987). Calculation of stress intensity factors for various crack problems with the Boundary Element Method. In: C.A.Brebbia, W.L.Wendland and G.Kuhn (Eds). *Boundary Elements IX*, Springer Verlag.
- MI, Y. (1996). Three-dimensional analysis of crack growth. *Topics in Engineering*. V.28, Comp. Mech. Publications.
- MI, Y; ALIABADI, M.H. (1992a). Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, V.10, 161-171.
- MI, Y; ALIABADI, M.H. (1992b). Dual boundary element method for analysis of 3-D crack problems. In: *boundary element 14*, Brebbia C.A. (ed.), V.2, 315-329.
- MI, Y; ALIABADI, M.H. (1994a). Three-dimensional crack growth simulation using BEM, *Computers & Structures*, V.52, 871-878.
- MI, Y; ALIABADI, M.H. (1994b). Discontinuous crack-tip elements: application to 3-D boundary element method. *Int. J. of Fracture*, V.67, R67-R71.
- MI, Y; ALIABADI, M.H. (1995). An automatic procedure for mixed-mode crack growth analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, V.11, 167-177.
- MIKHLIN, S.G. (1957). *Integral equations*. London: Pergamon Press.
- MIKHLIN, S.G. (1965). *Multi-dimensional singular integrals and integral equations*. Oxford: Pergamon Press.
- MIKHLIN, S.G. (1965). *Approximate methods for solution of differential and integral equations*. Oxford: Pergamon Press.
- MIZUTANI, M; FUJIMOTO, Y (1994). Inspection strategy for deteriorating structures based on sequential cost minimization method. Part I: Framework of the method. In: *Structural safety and reliability proceedings of ICOSAR'93*. Rotterdam: Balkema, 1005-1012.

- MODEER, M. (1979). A Fracture Mechanics Approach to Failure Analysis of concrete Materials, Report N° TVBM-1001, Division of Building Materials, Lund institute of Technology, Lund, Sweden.
- MURADOVA, A; STAVROULAKIS, G.E. (2007). A unilateral contact model with buckling in von Kármán plates. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, V.8, 4, 1261-1271.
- MURAKAMI, Y. (1976). A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, V. 8, 643-655.
- MURAKAMI, Y. (1987). *Stress Intensity Factors Handbook*, Pergamon Press.
- MUSKHELISHVILI, N.I. (1953). Some basic problems of mathematical theory of elasticity. Groningen, Holand: Noordhoff.
- MUSTOE, G.G.; VOLAIT, F. (1980). A symmetric direct integral equation method for twodimensional elastostatics. In: *INT. SEMINAR ON BOUNDARY ELEMENT METHODS*, 2nd, Southampton. Proceedings
- MYLREA, T. D. (1948). Bond and anchorage. *ACI Journal, Proc.* Vol. 44, March, pp. 521-552.
- NALLATHAMBI, P; KARIHALOO, B.L. (1986). Determination of Specimen-Size Independent Fracture Toughness of Plain Concrete. *Magazine of Concrete Research*, V.38, n.135, 67-76.
- NEUBER, H. (1946). *Theory of Notch Stresses: Principle for Exact Stress Calculations*. Ann Arbor, MI: Edwards.
- NEVES, R.A. (2004). Desenvolvimento de modelos mecânico-probabilísticos para estruturas de pavimentos de edifícios. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- NEUMANN, P. (1969). Coarse slip model of fatigue. *Acta Metallurgica*, 17, 1219-1225.
- NEWMAN, J.C. (1976). A Finite Element Analysis of Fatigue Crack Closure, *ASTM*, 490, 281-301.
- NEWMAN, J.C. (1994) A review of modeling small-crack behavior and fatigue life predictions for aluminum alloys. *Fatigue Fract. Eng. Mater Struct.* V. 17; 429-439.
- NGO, D; SCORDELIS, A.C. (1967). Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, *Journal of the American Concrete Institute*, V.64, 152-163.
- NILSON, A. H. (1968). Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method. *ACI Journal, Proc.* Vol. 65, September, pp. 757-766.

- NJIWA, K,R; STEBUT, J, V. (2004). Three dimensional boundary element analysis of internal cracks under sliding contact load with a spherical indenter. *Engineering Fracture Mechanics*, V. 71, 18, 2607-2620.
- NOCEDAL,J; WRIGHT, S,J. (1999). *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research. Springer Verlag.
- NOGUEIRA, C.G. (2005). Um modelo de confiabilidade e otimização aplicado às estruturas de barras de concreto armado. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- ONATE,E; OLLER,S; SALOMON,O. (2005). A continuum mechanics model for mechanical fatigue analysis. *Computational Materials Science*, V. 32, Issue 2, 175-195.
- ONOUFRIOU,T. (1999). Reliability based inspection planning of offshore structures. *Marine Structures*, V. 12, 521-539.
- ONOUFRIOU,T; FRANGOPOL,D,M. (2002). Reliability-based inspection optimization of complex structures: a brief retrospective. *Computers and Structures* V. 80, 1133-1144.
- ORTIZ, M. (1996). Computational micromechanics. *Computational Mechanics* 18: 321–338.
- OSIAS, J.R; WILSON, R.B; SEITELMAN, R.A. (1977). Combined boundary integral equation finite element analysis of solids. In: *Symposium on Innovative Numerical Analysis in Applied Eng. Science*, 1st, Versailles, CETIM – Proc.
- OWEN, D. R. J., HINTON, E. (1980). *Finite Elements in Plasticity – Theory and Practice*. Swansea, U. K.: McGraw-Hill, 594 p..
- PAIVA, J.B. (1993). *Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise da Interação solo estrutura*. São Carlos. Tese de Livre Docência. Escola de Engenharia de São Carlos – USP.
- PALERMO JR, L. (1989). *Análise de peças delgadas como associação de placas pelo método dos elementos de contorno*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- PALMGREN, A. (1924). Die Lebensdauer von Kugellagern. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, 68, 339-341.
- PANAGIOTOPOULOS, P,D; STAVROULAKIS, G,E. (1988). A variational hemivariational inequality approach to the laminated plate theory under subdifferential boundary conditions. *Appl. Math*, XLVI, 409-430.
- PAPADOPOULOS, G.A. (1993). *Fracture mechanics: the experimental method of caustics and the det.-criterion of fracture*. London, Springer-Verlag.
- PAPADOPOULOS, P; SOLBERG, J,M. (1998). A Lagrange multiplier method for the finite element solution of frictionless contact problems. *Mathematical and Computer Modelling*, V.28, 4-8, 373-384.

PARIS, F; CAÑAS, J. (1997). Boundary Element Method fundamentals and applications, Oxford University Press.

PARIS, P.C, GOMEZ, M.P., ANDERSON, W.P. (1961). A rational analytic theory of fatigue. *The Trend in Engineering*, 13, 9-14.

PARIS, P.C, ERDOGAN, F. (1963). A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering*, 85, 528-534.

PARIS, F, GARRIDO, J,A. (1985). On the use of discontinuous elements in 2 D contact problems. *Boundary Elements VII*, 13-27. Computational Mechanics Publications, Southampton.

PASCOE, S,K; MOTTERSHEAD, J,E. (1988). Linear elastic contact problems using curved elements and including dynamic friction. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, V. 26, 1631-1643.

PAVLATOS, G.D., BESKOS, D.E., 1994, Dynamic elastoplastic analysis by BEM/FEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.14, n.1, p.51-63.

PEREIRA,J.P.A (2004). Extração dos Fatores de Intensidade de Tensão utilizando a solução do método dos elementos finitos generalizados. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

PETERSSON, P.E. (1981). Crack growth and development of Fracture Zone in Plain Concrete and similar materials, Report N° TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology , Lund Sweden.

PIMENTA, P.M; RICARDO, L.C.H; CAMARAO, A.F (2001). Modern trends on fatigue. SAE Brasil International Conference on Fatigue, São Paulo, Brasil.

PLANAS, J; ELICES, M. (1990). Fracture Criteria for concrete: Mathematical approximations and experimental validation, *Engineering Fracture Mechanics*, V. 35 n.1,2,3.

PLANAS, J; ELICES, M; GUINEA, G.V; GÓMEZ, F.J; CENDÓN, D.A; ARBILLA, I. (2003), Generalizations and specializations of cohesive crack models, *Engineering Fracture Mechanics*, V.70, 1759-1776.

POINCARÉ, H.(1910). *Lecons de Mécanique Céleste*, V.3, Chap.10, Paris.

PONCELET, J.V. (1839). *Introduction à la Mécanique , Industrielle, Physique ou Expérimentale*, pp.317-318. Deuxième édition, Imprimerie de Gauthier-Villars, Paris.

POON, H., MUKHERJEE, S., BONNET, M. (1998). Numerical implementation of a CTO-based implicit approach for the BEM solution of usual and sensitivity problems in elasto-plasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 22, p. 257-269.

PORTELA, A. (1992). Dual boundary element incremental analysis of crack growth. PhD Thesis, Wessex Institute of Technology, Univ. of Portsmouth, Southampton.

- PORTELA, A; ALIABADI, M.H; ROOKE, D.P. (1992). Dual boundary element method: Efficient implementation for cracked problems. *Int. J. Num. Meth. Engn.*, V.33, 1269-1287.
- PORTELA, A; ALIABADI, M.H; ROOKE, D.P. (1993). Dual boundary element incremental analysis of crack propagation. *Computers & Structures*, V.46, 237-247.
- PORTELA, A; MATOS, P.F.P; MOREIRA, P.M.G.P; CASTRO, P.M.S.T. (2004). Dual boundary element analysis of cracked plates: post-processing implementation of the singularity subtraction technique. *Computers and Structures*, V. 82. 1443–1449.
- POWELL, M,J,D. (1977). A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations. In G.A. Watson editor, *Numerical Analysis Dundee*, Number 630 in *Lecture notes in Mathematics*, p. 144-157. Springer-Verlag Berlin.
- POWELL, M,J,D. (1978). Algorithms for nonlinear constraints that use lagrangian functions. *Mathematical Programming*, v. 14, p. 224-248.
- PRAGER, W. (1949). Recent developments in the mathematical theory of plasticity. *J.Appl. Phys.*, v. 20, n. 3, p. 235-241.
- PRANDTL, L. (1924). Spannungsverteilung in plastischen Koerpern. In: *INTERNATIONAL CONGRESS ON APPLIED MECHANICS*, 1st, Delft. *Proceedings*. p. 43-54.
- PROENCA, S,P,B.(2004). *Notas de Aula da disciplina Análise Nao Linear*. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PROVAN J,W.(1987). *Probabilistic fracture mechanics and reliability*. Dordrecht, The Netherlands: Martinus Nijhoff.
- RANKINE, W.J.M. (1843). On the causes of unexpected breakage of the journals of railway axles and the means of preventing such accidents by observing the law of continuity in their construction. *Proceeding of the Institute of Civil Engineers*, London, 2, 105-108..
- RASHID, Y.R. (1968). Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels, *Nuclear Engng and Design*, V.7, 334-344.
- RACKWITZ, R. & FIESSLER, B. (1978), Structural reliability under combined random load sequences. *Computers & Structures*. 9: 489-494.
- REDDY,J,N; CHENG,Z,Q. (2004). Green_s functions for an anisotropic thin plate with a crack or an anticrack, *International Journal of Engineering Science*.V.42, 271–289.
- REUSS, A (1930). Berücksichtigung der elastischen formänderung in der plastizitäts theorie. *Z. Angew. Math. Mech.*, v. 10, p. 266.
- RIBEIRO, D. B. (2009). Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

RIBEIRO, G. O. (1992). Sobre a formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Flexão de Placas usando as hipóteses de Reissner. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos.

RICARDELLA, P.C. (1973). An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity. Pittsburg: Dept. Mech. Eng., Carnegie-Mellon University

RICE, J.R. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, . J. Appl Mech, n. 35, 379-386.

RIZZO, F.J. (1967). An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics, Quarterly of Applied Mathematics, V.25, 83-95.

RIZZO, F.J; SHIPPY, D.F. (1968). A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem, Int. Journ. Solid Structures, V.4, 1161-1179.

ROCHA, M.M; SCHUELLER, G.I. (1996). A probabilistic criterion for evaluating the goodness of fatigue crack growth models. Journal of Engineering Fracture Mechanics. V.5, 707-731.

ROCHA, F.S. (1988). Análise de Descontinuidade pelo Método dos Elementos de Contorno, Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos.

ROCHA, J.A.L. (1999). Contribuição para a teoria termodinamicamente consistente da fratura. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos.

RODRÍGUEZ, J.C.G. (1986), Sobre o emprego do método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ROE, K,L; SIEGMUND, T.(2003), An irreversible cohesive zone model for interface fatigue crack growth simulation. Engineering Fracture Mechanics 70 (2): 209-232.

ROEBBEN, G; STEEN, M. BRESSERS, J.; VANDERBIEST, O. (1996). Mechanical fatigue in monolithic non-transforming ceramics. Progress in Materials Science, 40, 265-331.

ROSA, W. A. (1994). Modelagem do deslizamento entre o aço e o concreto com tensão de aderência não-linear; Dissertação Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro–UFRJ, Rio de Janeiro – RJ, Brasil.

SAINT-VENANT, B. (1870). Memoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. *Compt. Rend.*, v. 70, p. 473-480.

SALEH, A.L. (1997). Crack growth in concrete using boundary elements. Topics in Engineering, V. 30, Comp. Mech. Publ.

- SAXENA, A. (1998). *Nonlinear Fracture Mechanics for Engineers*, CRC Press.
- SCHWALBE, K. H. (1974). Comparison of several fatigue crack propagation laws with experimental results. *Engineering Fracture Mechanics*, V. 6, 325-341.
- SEKINE, H; YAN, B; YASUHO, T. (2005). Numerical simulation study of fatigue crack growth behavior of cracked aluminum panels repaired with a FRP composite patch using combined BEM/FEM., *Engineering Fractured Mechanics*, 72, 2549-2563.
- SHAW, R.P; FALBY, W. (1977). FEBIE: A combined finite element-boundary integralequations method. In: *Symposium on Innovative Numerical Analysis in Applied Eng. Science*, 1st, Versailles. Proceedings.
- SHAH, S.P; SWARTZ, S.E; OUYANG, C. (1995). *Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and other quasi-Brittle Materials*, John Wiley & Sons, Inc.
- SIH,G; PARIS,P; ERDOGAN,F. (1962). Crack tip stress intensity factors for plane extension and plane bending problems. *ASME, Série E*, V. 84, 306-312.
- SIH, G.C. (1973). *Handbook of stress Intensity Factor*, Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University.
- SIH,G,C (1974). Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems, *Int. Journal Fract. Mechanics*, V. 10, 305-321.
- SILVEIRA, N,P,P; GUIMARAES, S; TELLES, J,C,F (2005). A numerical Green's function BEM formulation for crack growth simulation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, V. 29, 978-985.
- SIMO, J. C. ; HUGHES, T. J. R. (1997). *Computational Inelasticity*. New York, Springer-Verlag.
- SIMO, J,C; TAYLOR,R.L. (1985). Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computacional Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, p.101-118.
- SILVA, N.A. (1996). *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno a Placas com enrijecedores utilizando a Teoria de Reissner*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos.
- SMIRNOV, V.J. (1964). *Integral equations and partial differential equations in a course in higher mathematics*, London, Addison-Wesley.
- SMITH, J.H. (1910). Some experiments on the fatigue of metals. *Journal of Iron and Steel Institute*, 91, 365-397.
- SNYDER, M. D; CRUSE, T.A. (1975). Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates, *Int. J. Fracture*,V.11, 315-328.

SOARES, R.C. (2001). Um estudo sobre modelos mecânico-probabilísticos para pórticos de concreto armado. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

SOBCZYK, K; SPENCER, B, F. (1992). Random Fatigue: From Data to Theory. Academic Press.

SOLLERO, P; ALIABADI, M.H. (1994). Anisotropy analysis of cracks emanating from circular holes in composite laminates using the boundary element. Eng. Fract. Mech., V.49, 213-224.

SOUTHWELL, R.V. (1946). Relaxation Methods in Theoretical Physics, Oxford University Press, London

SPACONE, E.; LIMKATANYU, S. (2000). Responses of reinforced concrete members including bond-slip effects. ACI Structural Journal, Vol. 97, No. 6, November-December, pp. 831-839.

STAMOS, A, A; BESKOS, D.E. (1995). Dynamic analysis of large 3D underground structures by the BEM. Earthquake engineering and structural dynamics, v. 24, p. 917-934.

STAVROULAKIS, G, E; ANTES, H. (2000). Unilateral Crack Identification: A Filter-Driven, Iterative Boundary Element Approach. Journal of Global Optimization, V.17, 339-352.

SURESH, S. (2004). Fatigue of Materials, second edition, Cambridge Press.

SYMM, G.T. (1963). Integral equation methods in potential theory II. Proc. Royal Society Ser., v. A275, 33-46.

SWEDLON, G.L; CRUSE, T.A. (1971). Formulation of boundary integral equations for the three dimensional elastoplastic flow. Int. Journal Solids Structures, V.7, 1673-1683.

TANAKA, K. (1974). Fatigue propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis. Engng. Fract. Mech. V.6, 493-507.

TANAKA, H; TOYODA-MAKINO, M. (1998). Cost-based optimal relation between inspection time and assessment time for random fatigue crack growth. Probabilistic Engineering Mechanics, V13, 69-76

TASSIOS, T. (1979). Properties of Bond between Concrete and Steel under load Cycles idealizing seismic Actions. In: CEB – Symposium, V.1.

TELLES, J.C.F. (1983). The Boundary Element Method applied to inelastic problems. Springer:Berlin

TELLES, J.C.F; GUIMARÃES, S. (2000). Green's function: A numerical generation for fracture mechanics problems via Boundary Elements. Comput. Meth. Appl. Mech., V.188, 847-858.

- TELLES, J.C.F; GUIMARÃES, S; SILVEIRA, N.P.P (2005). A numerical Green's function BEM formulation for crack growth simulation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, V. 29, 978-985.
- TIMOSHENKO, S.P; GOODIER, J.N. (1970). *Theory of Elasticity*, McGraw Hill.
- TOYODA-MAKINO, M (1999). Cost-based optimal history-dependent inspections strategy for random fatigue crack growth. *Probabilistic Mechanics*, V14, 339-347.
- TRESCA, H. (1864). Sur l'écoulement des corps solides soumis à des fortes pressions. *Compt. Rend.*, v. 59, p. 754.
- TURK, G.; RAMIREZ, M.R.; COROTIS, R.B. (1994), Structural reliability analysis of nonlinear systems. *Structural Safety & Reliability*. In: Schueller, Shinozuka & Yao, Balkema, Rotterdam, p.1345-1352.
- TURNER, M.J; CLOUGH, R.W; MARTIN, H.C; TOPP, J.L. (1956). Stiffness and deflection analysis for complex structures. *Journal Aeronautic Science*, V. 23, n. 9, 805-823.
- TVERGAARD, V. (2003). Cohesive zone representations of failure between elastic or rigid solids and ductile solids, *Engineering Fracture Mechanics*, V.70, 1859-1868.
- VALLABHAN, C.V.G; SIVAKUMAR, J. (1986). Coupling of BEM and FEM for 3D problems in geotechnical engineering. In: 2nd Boundary Element Technology Conference, MIT, Massachusetts, USA, Proceedings, 675-686.
- VANALLI, L. (2004). O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e compostos, Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos.
- VANDERPLAATS, G,N. (2001). *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, Colorado Springs : Vanderplaats Research & Development.
- VANMARCKE, E.H. (1973). Matrix formulation of reliability analysis and reliability based design, *Computers & Structures*. V.3 757-770.
- VENTURINI, W.S. (1982). Application of the boundary element formulation to solve geomechanical problems. Southampton, Ph. D. Thesis – University of Southampton.
- VENTURINI, W.S ; BREBBIA, C.A. (1983). Some applications of the boundary element method in geomechanics. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, V.7, 419-434.
- VENTURINI, W.S. (1988). Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia. São Carlos. Tese de Livre Docência. Escola de Engenharia de São Carlos – USP.
- VENTURINI, W.S. (1994). A new boundary element formulation for crack analysis. In: Brebbia, C.A., (ed.) *Boundary element method XVI*. Southampton/Boston, Computational Methods Publ., 405-412.

- VIRKLER, D.A; HILLBERRY, B.M; GOEL, P.K. (1979). The statistical nature of fatigue crack propagation. *Journal of Engineering Materials and Technology*. V. 101, 148-153.
- VOLTERRA, V. (1896). Sulla inversione degli integrali multipli. *Atti Accad Naz Lincei Rend Cl Sci Fis Mat Natur*. V. 5, 289-300.
- VON MISES, R. (1913). Mechanik der festen Koerper in plastisch deformablen Zustant. *Goettinger Nachr., Math.-Phys. Kl.*, p. 582-592.
- VON MISES, R. (1928). Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. *Z. Angew. Math. Mech.*, v. 8, p. 161-185.
- WATSON, J.O. (1986). Hermitian cubic end singular elements for plane strain. In: Banerjee P K & Watson J O (eds) *Developments in boundary element methods 4*. Elsevier Applied Science Publ. 1-28.
- WATSON, J.O. (1988). Hermitian cubic boundary element for the analysis of cracks of arbitrary geometry. In Cruse, T A (ed) *Advances in Boundary Element Methods*. Springer-Verlag.
- WATSTEIN, D. (1941). Bond stress in concrete pull-out specimens. *ACI Journal, Proc.* Vol. 38, September, pp. 37-50.
- WEARING, J.C; BURSTOW, M.C. (1994). Elastoplastic analysis using the coupled boundary element finite element technique. *Engineering analysis with Boundary elements*, V.14, 39-49.
- WEIBULL, W. (1939). A statistical theory of the strength of materials, *Proceedings 151*. Stockholm: Royal Swedish Academy of Engineering Sciences.
- WEN, P; FAN, T. (1994). The discontinuity displacement method applied to three-dimensional co-planar crack problem for any boundary value condition. *Eng. Fract. Mech.*, V.48, 691-702.
- WESTERGAARD, H.M. (1939). Bearing pressures and cracks, *J. Appl. Mechanics* n.6 49-53
- WIERZBICKI, W. (1936), Safety of structures as a probabilistic problem. (Technical review). *Przeglad Techniczny*, Warsaw.
- WIRSCHING, P,H; TORNG, T,Y; MARTIN, W,S. (1991). Advanced fatigue reliability analysis. *International Journal of Fatigue*. 13: 389-483.
- WUTZOW, W.W. (2003). *Formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise de chapas com Enrijecedores*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- WÖHLER, A. (1860). Versuche über die Festigkeit der Eisenbahnwagenachsen, *Zeitschrift für Bauwesen*, 10, English Summary. *Engineering*, 4, 160-201.

XU, X,P;. NEEDLEMAN, A.(1994). Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42: 1397–1434.

YAN,X (2004).A numerical analysis of cracks emanating from a square hole in a rectangular plate under biaxial loads. Technical Note. *Engineering Fracture Mechanics*. V.71. 1615–1623.

YAN,X (2006).Multiple crack fatigue growth modeling by displacement discontinuity method with crack-tip elements. *Applied Mathematical Modelling*. Em processo de publicação.

YANG, B; MALL, S; RAVI-CHANDAR, K. (2001). A cohesive zone model for fatigue crack growth in quasibrittle materials, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 3927-3944.

YANG, J,N; TRAPP, W,J. (1975). Inspection frequency optimization for aircraft structures based on reliability analysis. *Journal of Aircraft*, AIAA, V.12, 494-496.

YANG, J,N; MANNING, S,D. (1990). Stochastic crack growth analysis methodologies for metallic structures. *Eng. Fract. Mechanics*. V.37.1105–24.

YANG, B. & RAVI-CHANDAR, K.(1998^a). Antiplane shear crack growth under quasistatic loading in a damaging material. *International Journal of Solids and Structures* 35 (28-29): 3695-3715.

YANG, B. & RAVI-CHANDAR, K.(1998^b). A single-domain dual-boundary-element formulation incorporating a cohesive zone model for elastostatic cracks. *International Journal of Fracture* 93 (1-4): 115-144.

YANG, B; PAN, E; YUAN, F.G. (2003). Three-dimensional stress analyses in composite laminates with an elastically pinned hole. *International Journal of Solids and Structures*, 40 (8): 2017-2035.

YANKELEVSKY, D. Z. (1997). A two-phase one dimensional model for steel-concrete interaction. *Computers & Structures*, Vol. 65, No. 6, pp. 781-794.

ZHAO,Y,X. (2000). A methodology for strain-based fatigue reliability analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, V.70, 205-213.

ZDENEK, P;BAZANT,Z.P; LUZIO,G.D. (2004). Nonlocal microplane model with strain softening yield limits. *International Journal of Solids and Structures*, V.41, 7209-7240.

ZIENKIEWICZ, O.C; KELLY,D.W; BETTESS, P. (1977), The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, V.11, 355-375.

Anexo A. – Integrais Singulares

De forma a tornar as relações mais compactas segue inicialmente a definição de algumas constantes que serão empregadas nas expressões das integrais constantes nas matrizes H e G.

$$C_1 = \frac{(1-2 \cdot \nu)}{4 \cdot \pi \cdot (1-\nu)} \quad (\text{A.1})$$

$$C_2 = \frac{L}{16 \cdot \pi \cdot \mu \cdot (1-\nu)} \quad (\text{A.2})$$

Nas expressões a serem apresentadas os termos φ_1 e φ_2 representam os cossenos diretores da normal ao elemento de contorno integrado.

Elemento de Contorno Contínuo

As expressões apresentadas referem-se ao nó singular localizado na posição nodal inicial do elemento integrado.

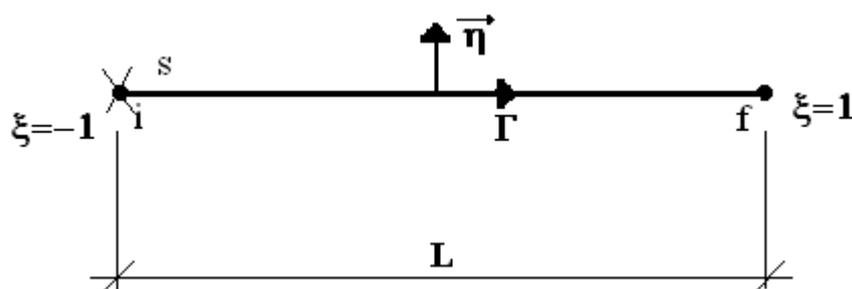


Figura A.1 Elemento de contorno com nó singular sobre o nó inicial

Matriz H

$$\begin{aligned}
 H_{12}^1 &= C_1 \cdot (1 - \ln(L)) \\
 H_{12}^2 &= -C_1 \\
 H_{21}^1 &= -H_{12}^1 \\
 H_{21}^2 &= -H_{12}^2 \\
 H_{11}^1 &= H_{22}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^2 = 0
 \end{aligned}
 \tag{A.3}$$

Matriz G

$$\begin{aligned}
 G_{11}^1 &= C_2 \cdot \left[(3 - 4 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + \varphi_2^2 \right] \\
 G_{22}^1 &= C_2 \cdot \left[(3 - 4 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + \varphi_1^2 \right] \\
 G_{11}^2 &= C_2 \cdot \left[(3 - 4 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + \varphi_2^2 \right] \\
 G_{22}^2 &= C_2 \cdot \left[(3 - 4 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + \varphi_1^2 \right] \\
 G_{12}^1 &= G_{12}^2 = G_{21}^1 = G_{21}^2 = -C_2 \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2
 \end{aligned}
 \tag{A.4}$$

Caso o ponto singular situe-se sobre o nó final do elemento de contorno integrado as expressões passam a ser.

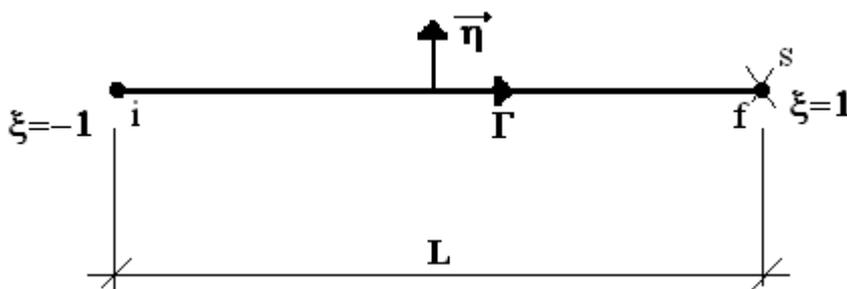


Figura A.2 Elemento de contorno com nó singular sobre o nó final

Matriz H

$$H_{12}^1 = C_1$$

$$H_{12}^2 = -C_1 \cdot (1 - \ln(L))$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{22}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^2 = 0$$

(A.5)

Matriz G

$$G_{11}^1 = C_2 \cdot \left[(3 - 4 \cdot v) \cdot \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + \varphi_2^2 \right]$$

$$G_{22}^1 = C_2 \cdot \left[(3 - 4 \cdot v) \cdot \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + \varphi_1^2 \right]$$

$$G_{11}^2 = C_2 \cdot \left[(3 - 4 \cdot v) \cdot \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + \varphi_2^2 \right]$$

$$G_{22}^2 = C_2 \cdot \left[(3 - 4 \cdot v) \cdot \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + \varphi_1^2 \right]$$

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^1 = G_{21}^2 = -C_2 \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2$$

(A.6)

Elemento de Contorno Descontínuo

A seguir serão apresentadas as expressões para os elementos de contorno descontínuos.

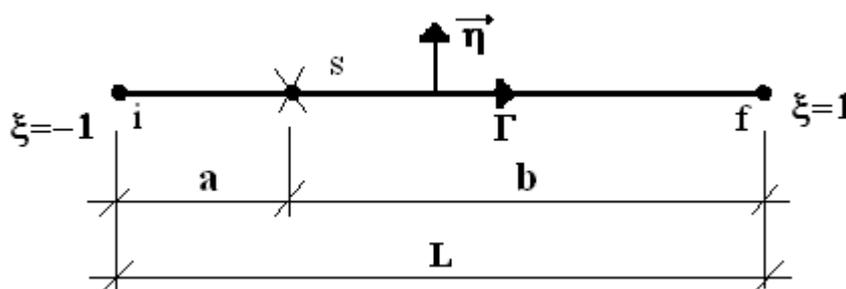


Figura A.3 Elemento de contorno descontínuo

Matriz H

$$H_{12}^1 = \frac{C_1}{L} \cdot \left(L - b \cdot \text{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) \right)$$

$$H_{12}^2 = \frac{C_1}{L} \cdot \left(a \cdot \text{Ln} \left(\frac{a}{b} \right) - L \right)$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1 \tag{A.7}$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{22}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^2 = 0$$

Matriz G

$$G_{11}^1 = \frac{2 \cdot C_2}{L^2} \cdot \left\{ -(3 - 4 \cdot v) \cdot \left[\left(a \cdot b + \frac{a^2}{2} \right) \cdot \text{Ln}(a) + \frac{b^2}{2} \cdot \text{Ln}(b) - \left(\frac{a^2}{4} + a \cdot b + \frac{3 \cdot b^2}{4} \right) + \frac{L^2}{2} \cdot \varphi_2^2 \right] \right\}$$

$$G_{22}^1 = \frac{2 \cdot C_2}{L^2} \cdot \left\{ -(3 - 4 \cdot v) \cdot \left[\left(a \cdot b + \frac{a^2}{2} \right) \cdot \text{Ln}(a) + \frac{b^2}{2} \cdot \text{Ln}(b) - \left(\frac{a^2}{4} + a \cdot b + \frac{3 \cdot b^2}{4} \right) + \frac{L^2}{2} \cdot \varphi_1^2 \right] \right\}$$

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^1 = G_{21}^2 = -C_2 \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \tag{A.8}$$

$$G_{11}^2 = \frac{2 \cdot C_2}{L^2} \cdot \left\{ -(3 - 4 \cdot v) \cdot \left[\left(a \cdot b + \frac{b^2}{2} \right) \cdot \text{Ln}(b) + \frac{a^2}{2} \cdot \text{Ln}(a) - \left(\frac{b^2}{4} + a \cdot b + \frac{3 \cdot a^2}{4} \right) + \frac{L^2}{2} \cdot \varphi_2^2 \right] \right\}$$

$$G_{22}^2 = \frac{2 \cdot C_2}{L^2} \cdot \left\{ -(3 - 4 \cdot v) \cdot \left[\left(a \cdot b + \frac{b^2}{2} \right) \cdot \text{Ln}(b) + \frac{a^2}{2} \cdot \text{Ln}(a) - \left(\frac{b^2}{4} + a \cdot b + \frac{3 \cdot a^2}{4} \right) + \frac{L^2}{2} \cdot \varphi_1^2 \right] \right\}$$

Anexo B. – Integrais Analíticas Hiper-Singulares

Para tornar as relações mais compactas a seguir serão definidas algumas constantes.

$$C_1 = \frac{-1}{8 \cdot \pi \cdot \mu \cdot (1 - \nu)} \quad (\text{B.1})$$

$$C_2 = (3 - 4 \cdot \nu) \quad (\text{B.2})$$

$$C_3 = \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \quad (\text{B.3})$$

$$C_4 = (1 - 2 \cdot \nu) \quad (\text{B.4})$$

$$C_5 = (1 - 4 \cdot \nu) \quad (\text{B.5})$$

$$C_6 = \frac{\mu}{2 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \quad (\text{B.6})$$

$$\phi_1 = \left(1 - \frac{y_s}{L} \right) \quad (\text{B.7})$$

$$\phi_2 = \frac{y_s}{L} \quad (\text{B.8})$$

Nas expressões a serem apresentadas os termos ϕ_1 e ϕ_2 não são as funções de forma, mas sim as partes constantes das mesmas que foram usadas para simplificar a representação dos resultados.

Ponto Fonte não alinhado com o elemento

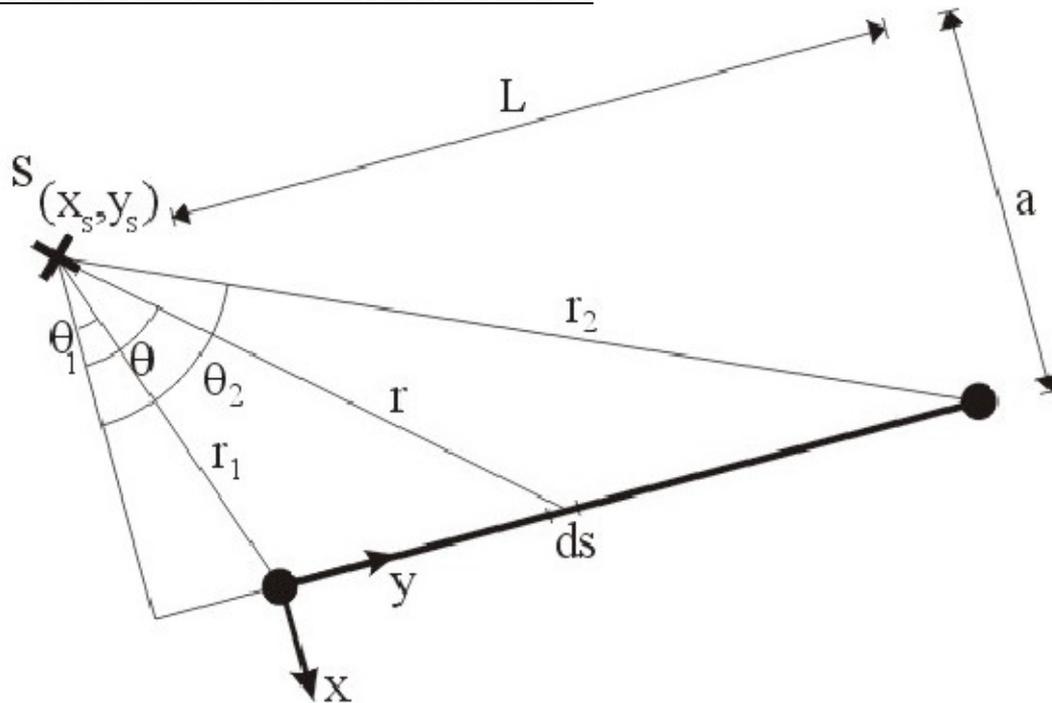


Figura B.1 Ponto fonte não alinhado com o elemento. WUTZOW (2003).

Matriz S

$$\begin{aligned}
 S_{11}^1 = & \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 + 4 \cdot v) \cdot (\text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2) - (2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2))^3 + \right. \right. \\
 & + 3 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + 3 \cdot \theta_2 + (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \theta_2 \left. \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[-(2 \cdot C_4 + 4 \cdot v) \cdot \cos(\theta_2)^2 + \right. \\
 & + 2 \cdot \cos(\theta_2)^4 - (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \left. \right] \left. \right\} - \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 + 4 \cdot v) \cdot (\text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1) + \right. \right. \\
 & - (2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1))^3 + 3 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + 3 \cdot \theta_1 + (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \theta_1 \left. \right] \cdot \phi_1 + \\
 & \left. - \frac{a}{L} \cdot \left[-(2 \cdot C_4 + 4 \cdot v) \cdot \cos(\theta_1)^2 + 2 \cdot \cos(\theta_1)^4 - (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\} \quad (\text{B.9})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{12}^1 = & \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[-(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \cos(\theta_2)^2 + 2 \cdot \cos(\theta_2)^4 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot (-\text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \theta_2) - (-2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2))^3 + \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right] \right\} + \\
 & - \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[-(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \cos(\theta_1)^2 + 2 \cdot \cos(\theta_1)^4 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot (-\text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \theta_1) - (-2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1))^3 + \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\} \quad (\text{B.10})
 \end{aligned}$$

$$S_{21}^1 = S_{12}^1 \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned}
S_{22}^1 &= \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \theta_2 - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2)^3 + \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right) \right] \cdot \phi_1 + \right. \\
&\left. - \frac{a}{L} \cdot \left[-v \cdot \left(\text{sen}(\theta_2)^2 + \cos(\theta_2)^2 + 2 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right) \right] - 2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^4 - C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right\} + \\
&- \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \theta_1 - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1)^3 + \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right) \right] \cdot \phi_1 + \right. \\
&\left. - \frac{a}{L} \cdot \left[-v \cdot \left(\text{sen}(\theta_1)^2 + \cos(\theta_1)^2 + 2 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right) \right] - 2 \cdot \text{sen}(\theta_1)^4 - C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right\} \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{31}^1 &= \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \theta_2 - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2)^3 + \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right) \right] \cdot \phi_1 + \right. \\
&\left. - \frac{a}{L} \cdot \left[-2 \text{sen}(\theta_2)^4 - (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \right\} + \\
&- \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \theta_1 - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1)^3 + \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right) \right] \cdot \phi_1 + \right. \\
&\left. - \frac{a}{L} \cdot \left[-2 \text{sen}(\theta_1)^4 - (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\} \quad (\text{B.13})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{32}^1 &= \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[-(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \cos(\theta_2)^2 - 2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^4 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \left(-\text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \right. \right. \right. \\
&\left. \left. \left. + \theta_2 \right) - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^3 \cdot \cos(\theta_2) - 3 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + 3 \cdot \theta_2 \right) \right] \right\} + \\
&- \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[-(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \cos(\theta_1)^2 - 2 \cdot \cos(\theta_1)^4 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \left(-\text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \right. \right. \right. \\
&\left. \left. \left. + \theta_1 \right) - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_1)^3 \cdot \cos(\theta_1) - 3 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + 3 \cdot \theta_1 \right) \right] \right\} \quad (\text{B.14})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{11}^2 &= \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 + 4 \cdot v) \cdot \left(\text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right) - \left(2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2)^3 + \right. \right. \right. \\
&\left. \left. \left. + 3 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + 3 \cdot \theta_2 \right) + (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \theta_2 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[-(2 \cdot C_4 + 4 \cdot v) \cdot \cos(\theta_2)^2 + \right. \right. \\
&\left. \left. + 2 \cdot \cos(\theta_2)^4 - (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \right\} - \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 + 4 \cdot v) \cdot \left(\text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right) + \right. \right. \\
&\left. \left. - \left(2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1)^3 + 3 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + 3 \cdot \theta_1 \right) + (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \theta_1 \right] \cdot \phi_2 + \right. \\
&\left. + \frac{a}{L} \cdot \left[-(2 \cdot C_4 + 4 \cdot v) \cdot \cos(\theta_1)^2 + 2 \cdot \cos(\theta_1)^4 - (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\} \quad (\text{B.15})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{12}^1 = \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[-(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \cos(\theta_2)^2 + 2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^4 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot (-\text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \right. \right. \\
\left. \left. + \theta_2) - (-2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2)^3 + \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2) \right] \right\} + \\
- \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[-(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \cos(\theta_1)^2 + 2 \cdot \cos(\theta_1)^4 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot (-\text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \right. \right. \\
\left. \left. + \theta_1) - (-2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1)^3 + \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1) \right] \right\} \quad (\text{B.16})
\end{aligned}$$

$$S_{21}^2 = S_{12}^2 \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned}
S_{22}^2 = \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \theta_2 - (-2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2)^3 + \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2) \right] \cdot \phi_2 + \right. \\
\left. + \frac{a}{L} \cdot \left[-v \cdot (\text{sen}(\theta_2)^2 + \cos(\theta_2)^2 + 2 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2))) - 2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^4 - C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \right\} + \\
- \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \theta_1 - (-2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1)^3 + \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1) \right] \cdot \phi_2 + \right. \\
\left. + \frac{a}{L} \cdot \left[-v \cdot (\text{sen}(\theta_1)^2 + \cos(\theta_1)^2 + 2 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1))) - 2 \cdot \text{sen}(\theta_1)^4 - C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\} \quad (\text{B.18})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{31}^2 = \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \theta_2 - (-2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2)^3 + \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2) \right] \cdot \phi_2 + \right. \\
\left. + \frac{a}{L} \cdot \left[-2 \text{sen}(\theta_2)^4 - (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \right\} + \\
- \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \theta_1 - (-2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1)^3 + \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1) \right] \cdot \phi_2 + \right. \\
\left. + \frac{a}{L} \cdot \left[-2 \text{sen}(\theta_1)^4 - (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\} \quad (\text{B.19})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{32}^2 = \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[-(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \cos(\theta_2)^2 - 2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^4 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot (-\text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \right. \right. \\
\left. \left. + \theta_2) - (-2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^3 \cdot \cos(\theta_2) - 3 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + 3 \cdot \theta_2) \right] \right\} + \\
- \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[-(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \cos(\theta_1)^2 - 2 \cdot \cos(\theta_1)^4 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot (-\text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \right. \right. \\
\left. \left. + \theta_1) - (-2 \cdot \text{sen}(\theta_1)^3 \cdot \cos(\theta_1) - 3 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + 3 \cdot \theta_1) \right] \right\} \quad (\text{B.20})
\end{aligned}$$

Matriz D

$$D_{11}^1 = -C_3 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 1) \cdot \theta_2 + \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[-C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 1) \cdot \theta_1 + \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[-C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \right\} \quad (\text{B.21})$$

$$D_{12}^1 = -C_3 \cdot \left\{ \left[C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[-C_4 \cdot (\tan(\theta_2) - \theta_2) - \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[-C_4 \cdot (\tan(\theta_1) - \theta_1) - \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\} \quad (\text{B.22})$$

$$D_{21}^1 = -C_3 \cdot \left\{ \left[-C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[C_4 \cdot (\tan(\theta_2) - \theta_2) - \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[-C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[C_4 \cdot (\tan(\theta_1) - \theta_1) - \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\} \quad (\text{B.23})$$

$$D_{22}^1 = -C_3 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 1) \cdot \theta_2 - \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[(-C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 1) \cdot \theta_1 - \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[(-C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \right\} \quad (\text{B.24})$$

$$D_{31}^1 = -C_3 \cdot \left\{ \left[(-C_4 + 1) \cdot \theta_2 - \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[(C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[(-C_4 + 1) \cdot \theta_1 - \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[(C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \right\} \quad (\text{B.25})$$

$$D_{32}^1 = -C_3 \cdot \left\{ \left[(-C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[C_4 \cdot (\tan(\theta_2) - \theta_2) + \frac{2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^5}{\cos(\theta_2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^3 + \cos(\theta_2) + 3 \cdot \cos(\theta_2) \cdot \text{sen}(\theta_2) - 3 \cdot \theta_2 \right] \right\} + C_3 \cdot \left\{ \left[(-C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) + \right. \right. \\ \left. \left. - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[C_4 \cdot (\tan(\theta_1) - \theta_1) + \frac{2 \cdot \text{sen}(\theta_1)^5}{\cos(\theta_1)} + 2 \cdot \text{sen}(\theta_1)^3 + \cos(\theta_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \text{sen}(\theta_1) - 3\theta_1 \right] \right\} \quad (\text{B.26})$$

$$D_{11}^2 = -C_3 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 1) \cdot \theta_2 + \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[-C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 1) \cdot \theta_1 + \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[-C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \right\} \quad (\text{B.27})$$

$$D_{12}^2 = -C_3 \cdot \left\{ \left[C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[-C_4 \cdot (\tan(\theta_2) - \theta_2) - \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[-C_4 \cdot (\tan(\theta_1) - \theta_1) - \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\} \quad (\text{B.28})$$

$$D_{21}^2 = -C_3 \cdot \left\{ \left[-C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[C_4 \cdot (\tan(\theta_2) - \theta_2) - \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[-C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[C_4 \cdot (\tan(\theta_1) - \theta_1) - \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\} \quad (\text{B.29})$$

$$D_{22}^2 = -C_3 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 1) \cdot \theta_2 - \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[(-C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 1) \cdot \theta_1 - \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[(-C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \right\} \quad (\text{B.30})$$

$$D_{31}^2 = -C_3 \cdot \left\{ \left[(-C_4 + 1) \cdot \theta_2 - \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[(C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[(-C_4 + 1) \cdot \theta_1 - \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[(C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \right\} \quad (\text{B.31})$$

$$D_{32}^2 = -C_3 \cdot \left\{ \left[(-C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[C_4 \cdot (\tan(\theta_2) - \theta_2) + \frac{2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^5}{\cos(\theta_2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^3 + \cos(\theta_2) + 3 \cdot \cos(\theta_2) \cdot \text{sen}(\theta_2) - 3 \cdot \theta_2 \right] \right\} + C_3 \cdot \left\{ \left[(-C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) + \right. \right. \\ \left. \left. - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[C_4 \cdot (\tan(\theta_1) - \theta_1) + \frac{2 \cdot \text{sen}(\theta_1)^5}{\cos(\theta_1)} + 2 \cdot \text{sen}(\theta_1)^3 + \cos(\theta_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \text{sen}(\theta_1) - 3\theta_1 \right] \right\} \quad (\text{B.32})$$

Ponto Fonte alinhado com o elemento posicionado atrás do mesmo

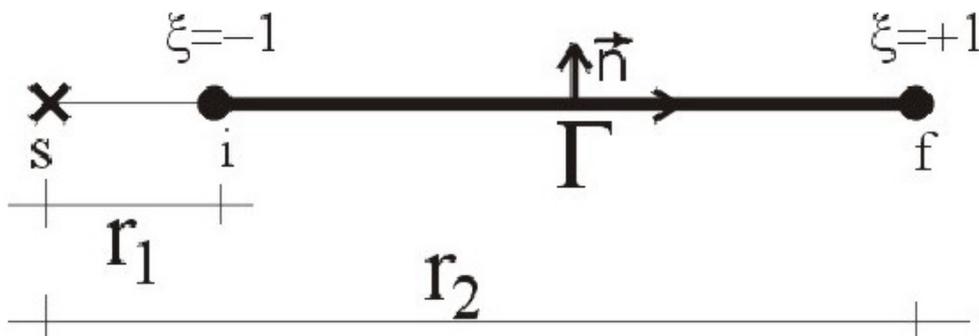


Figura B.2 Ponto fonte alinhado com o elemento posicionado atrás do mesmo. WUTZOW (2003).

Matriz S

$$S_{11}^1 = C_6 \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \left(-\frac{1}{r_2} \right) \right] \cdot \phi_1 - \frac{1}{L} \cdot [(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot Ln(r_2)] \right\} +$$

$$-C_6 \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] \cdot \phi_1 - \frac{1}{L} \cdot [(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot Ln(r_1)] \right\} \quad (B.33)$$

$$S_{11}^2 = C_6 \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \left(-\frac{1}{r_2} \right) \right] \cdot \phi_2 - \frac{1}{L} \cdot [(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot Ln(r_2)] \right\} +$$

$$-C_6 \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] \cdot \phi_2 - \frac{1}{L} \cdot [(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot Ln(r_1)] \right\} \quad (B.34)$$

$$S_{22}^1 = C_6 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \left(-\frac{1}{r_2} \right) \right] \cdot \phi_1 - \frac{1}{L} \cdot [(C_4 + 2 \cdot v) \cdot Ln(r_2)] \right\} +$$

$$-C_6 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] \cdot \phi_1 - \frac{1}{L} \cdot [(C_4 + 2 \cdot v) \cdot Ln(r_1)] \right\} \quad (B.35)$$

$$S_{22}^2 = C_6 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \left(-\frac{1}{r_2} \right) \right] \cdot \phi_2 + \frac{1}{L} \cdot [(C_4 + 2 \cdot v) \cdot Ln(r_2)] \right\} +$$

$$-C_6 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] \cdot \phi_2 + \frac{1}{L} \cdot [(C_4 + 2 \cdot v) \cdot Ln(r_1)] \right\} \quad (B.35)$$

$$S_{31}^1 = S_{11}^1 \quad (B.36)$$

$$S_{31}^2 = S_{11}^2 \quad (B.37)$$

$$S_{12}^1 = S_{21}^1 = S_{32}^1 = S_{12}^2 = S_{21}^2 = S_{32}^2 = 0 \quad (B.38)$$

Matriz D

$$D_{12}^1 = C_3 \cdot C_4 \cdot \left\{ -\left(\frac{r_2}{L} \right) - \phi_2 \cdot Ln(r_2) + Ln(r_2) + \left(\frac{r_1}{L} \right) - \phi_2 \cdot Ln(r_1) - Ln(r_1) \right\} \quad (B.39)$$

$$D_{12}^2 = C_3 \cdot C_4 \cdot \left\{ \left(\frac{r_2}{L} \right) + \phi_2 \cdot Ln(r_2) - \left(\frac{r_1}{L} \right) - \phi_2 \cdot Ln(r_1) \right\} \quad (B.40)$$

$$D_{32}^1 = (-C_3 \cdot C_4 - 2 \cdot C_3) \cdot \left\{ -\left(\frac{r_2}{L} \right) + \phi_2 \cdot Ln(r_2) + Ln(r_2) + \left(\frac{r_1}{L} \right) + \phi_2 \cdot Ln(r_1) - Ln(r_1) \right\} \quad (B.41)$$

$$D_{12}^2 = (-C_3 \cdot C_4 - 2 \cdot C_3) \cdot \left\{ \left(\frac{r_2}{L} \right) + \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_2) - \left(\frac{r_1}{L} \right) - \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_1) \right\} \quad (\text{B.42})$$

$$D_{21}^1 = -D_{12}^1 \quad (\text{B.43})$$

$$D_{21}^2 = -D_{12}^2 \quad (\text{B.44})$$

$$D_{11}^1 = D_{22}^1 = D_{31}^1 = D_{11}^2 = D_{22}^2 = D_{31}^2 = 0 \quad (\text{B.45})$$

Ponto Fonte alinhado com o elemento posicionado a frente do mesmo

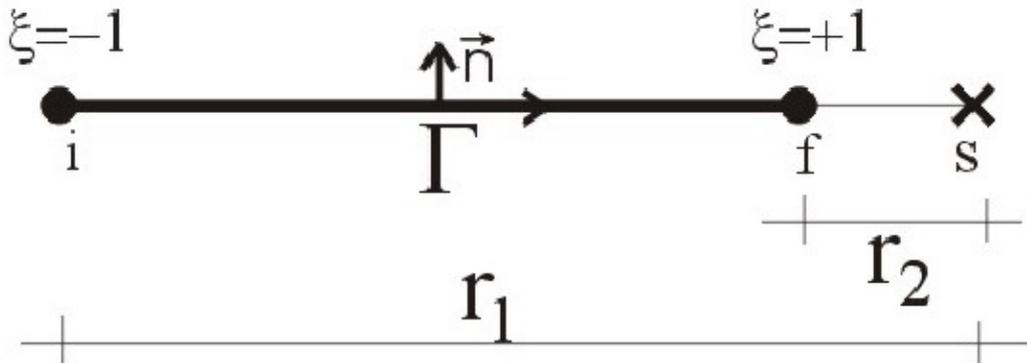


Figura B.3 Ponto fonte alinhado com o elemento posicionado a frente do mesmo. WUTZOW (2003).

Matriz S

$$S_{11}^1 = C_6 \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] \cdot \phi_1 - \frac{1}{L} \cdot [(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(r_2)] \right\} +$$

$$-C_6 \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \cdot \phi_1 - \frac{1}{L} \cdot [(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(r_1)] \right\} \quad (\text{B.46})$$

$$S_{11}^2 = C_6 \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] \cdot \phi_2 + \frac{1}{L} \cdot [(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(r_2)] \right\} +$$

$$-C_6 \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \cdot \phi_2 + \frac{1}{L} \cdot [(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(r_1)] \right\} \quad (\text{B.47})$$

$$S_{22}^1 = C_6 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] \cdot \phi_1 - \frac{1}{L} \cdot [(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \text{Ln}(r_2)] \right\} +$$

$$-C_6 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \cdot \phi_1 - \frac{1}{L} \cdot [(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \text{Ln}(r_1)] \right\} \quad (\text{B.48})$$

$$S_{22}^2 = C_6 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] \cdot \phi_2 + \frac{1}{L} \cdot [(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \text{Ln}(r_2)] \right\} +$$

$$-C_6 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \cdot \phi_2 + \frac{1}{L} \cdot [(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \text{Ln}(r_1)] \right\} \quad (\text{B.49})$$

$$S_{31}^1 = S_{11}^1 \quad (\text{B.50})$$

$$S_{31}^2 = S_{11}^2 \quad (\text{B.51})$$

$$S_{12}^1 = S_{21}^1 = S_{32}^1 = S_{12}^2 = S_{21}^2 = S_{32}^2 = 0 \quad (\text{B.52})$$

Matriz D

$$D_{12}^1 = C_3 \cdot C_4 \cdot \left\{ \left(\frac{r_2}{L} \right) - \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_2) + \text{Ln}(r_2) + \left(\frac{r_1}{L} \right) - \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_1) - \text{Ln}(r_1) \right\} \quad (\text{B.53})$$

$$D_{12}^2 = C_3 \cdot C_4 \cdot \left\{ -\left(\frac{r_2}{L} \right) + \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_2) + \left(\frac{r_1}{L} \right) - \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_1) \right\} \quad (\text{B.54})$$

$$D_{32}^1 = (-C_3 \cdot C_4 - 2 \cdot C_3) \cdot \left\{ \left(\frac{r_2}{L} \right) - \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_2) + \text{Ln}(r_2) - \left(\frac{r_1}{L} \right) - \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_1) - \text{Ln}(r_1) \right\} \quad (\text{B.55})$$

$$D_{12}^2 = (-C_3 \cdot C_4 - 2 \cdot C_3) \cdot \left\{ \left(\frac{r_2}{L} \right) + \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_2) + \left(\frac{r_1}{L} \right) - \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_1) \right\} \quad (\text{B.56})$$

$$D_{21}^1 = -D_{12}^1 \quad (\text{B.57})$$

$$D_{21}^2 = -D_{12}^2 \quad (\text{B.58})$$

$$D_{11}^1 = D_{22}^1 = D_{31}^1 = D_{11}^2 = D_{22}^2 = D_{31}^2 = 0 \quad (\text{B.59})$$

Ponto Fonte pertence ao elemento a ser integrado

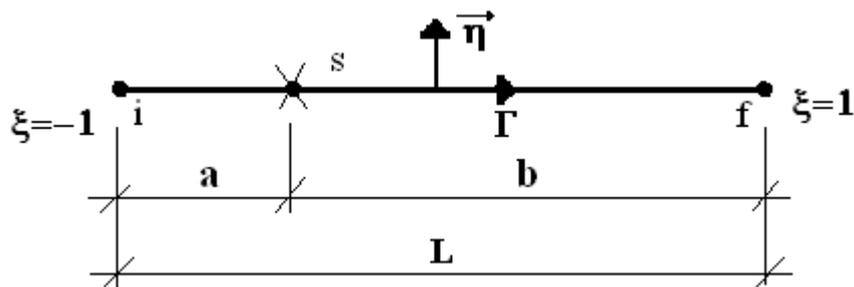


Figura B.4 Ponto fonte pertence ao elemento a ser integrado.

Matriz S

$$S_{ij}^1 = C_3 \cdot \left\{ \text{Ln}(a) - \text{Ln}(b) - \frac{b}{a} - 1 \right\} \quad (\text{B.60})$$

$$S_{ij}^2 = C_3 \cdot \left\{ -\ln(a) + \ln(b) - \frac{a}{b} - 1 \right\} \quad (\text{B.61})$$

Matriz D

$$D_{ij}^1 = C_4 \cdot \{ b \cdot [\ln(a) - \ln(b) + 1] + a \} \quad (\text{B.62})$$

$$D_{ij}^2 = C_4 \cdot \{ a \cdot [\ln(a) - \ln(b) - 1] - a \} \quad (\text{B.63})$$

Anexo C. – Sub-Elementação

Quando o ponto de colocação considerado não pertencer ao elemento de contorno a ser integrado procedimentos numéricos devem ser empregados para a realização do processo de integração. Normalmente emprega-se o procedimento de integração de Gauss-Legendre o qual consiste em aproximar o valor de uma dada integral, situada em um intervalo normalizado e -1 a 1 , pela integral de um polinômio interpolador nesse trecho. A integral do polinômio é efetuada tomando-se o somatório do valor da função polinomial em determinadas abscissas multiplicado-os por fatores de ponderação.

No entanto quando o ponto de colocação encontra-se não muito distante do elemento de contorno a ser integrado o procedimento numérico de integração não conduz a bons resultados. Isso se deve ao fato do núcleo dos termos integrais apresentarem elevados gradientes tornando a integral quase singular mesmo com um número elevado de pontos de integração.

De forma a contornar esse problema pode ser utilizada a técnica de sub-elementação o qual consiste basicamente em dividir o elemento de contorno a ser integrado em elementos menores (sub-elementos). Os sub-elementos podem ser de igual comprimento ou então tomar a forma progressiva, sendo essa última a mais indicada.

Para a formulação dos sub-elementos admite-se como válida a seguinte relação:

$$\int_{\Gamma_j} f(\Gamma_j) \varphi_\eta d\Gamma_j = \sum_{i=1}^{NSub} \int_{\Gamma_{ji}} f(\Gamma_{ji}) \varphi_\eta d\Gamma_{ji} \quad (C.1)$$

Onde o posicionamento das variáveis pode ser visualizado na Fig. (C.1).

Transformando o intervalo de integração em coordenadas adimensionais η pode-se reescrever a Eq. (C.1) como:

$$\begin{aligned} \Gamma = a_i &\rightarrow \eta = -1 \\ \Gamma = b_i &\rightarrow \eta = 1 \end{aligned} \quad (C.2)$$

$$\int_{\Gamma_j} f(\Gamma_j) \varphi_\eta d\Gamma_j = \sum_{i=1}^{NSub} \frac{L_i}{2} \int_{-1}^1 f(\eta) \varphi_\eta d\eta \quad (C.3)$$

Deve-se atentar para o fato de que as funções de forma φ_η estão referenciadas ao sistema adimensional ε . No procedimento de sub-elementação o sistema adimensional adotado é na variável η e assim uma correlação entre os dois sistemas deve existir para o cálculo da integral.

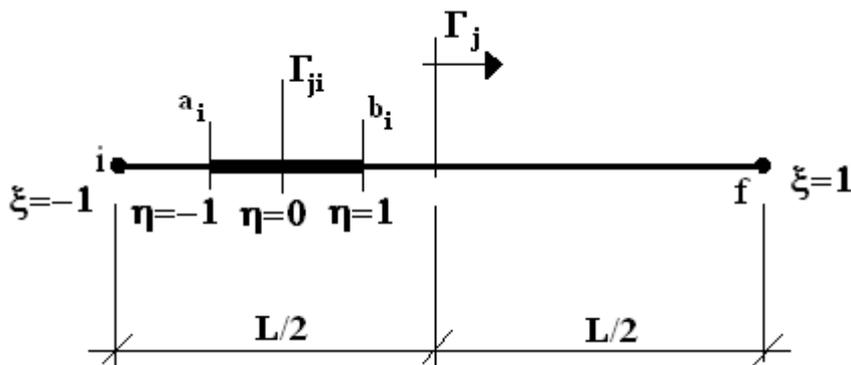


Figura C.1 Integração com sub-elemento

Para a aplicação do procedimento de sub-elementação deve-se inicialmente pesquisar quais os elementos de contorno que realmente necessitam dessa ferramenta para a melhoria da precisão das integrais envolvidas. Para identificá-los, e determinar quais as dimensões dos sub-elementos, deve-se inicialmente calcular a distância do ponto de colocação ao elemento a ser integrado bem como os co-senos diretores da reta representativa dessa distância conforme apresenta a Fig. (C.2).

$$r = \sqrt{(x_i - x_a)^2 + (y_i - y_a)^2} \quad (C.4)$$

$$\cos(\beta) = \frac{x_a - x_i}{r} \quad (C.5)$$

$$\text{sen}(\beta) = \frac{y_a - y_i}{r} \quad (C.6)$$

Da Fig. (C.2) pode-se constatar que:

$$\gamma = \beta - \alpha \rightarrow \cos(\gamma) = \cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) \quad (C.7)$$

E assim o ângulo ψ pode ser escrito como:

$$\psi = \pi - \gamma \quad (C.8)$$

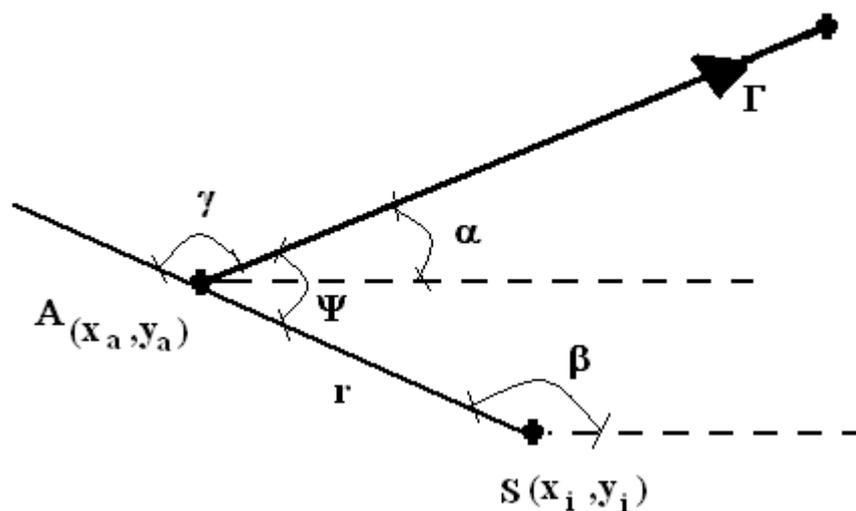


Figura C.2 Teste para verificar a necessidade de sub-elemento

O teste a ser efetuado refere-se ao ângulo ψ . Se esse ângulo for inferior a 60° então o comprimento do sub-elemento será dado pela interseção da mediatriz da distância r com o elemento a ser integrado conforme apresenta a Fig. (C.3).

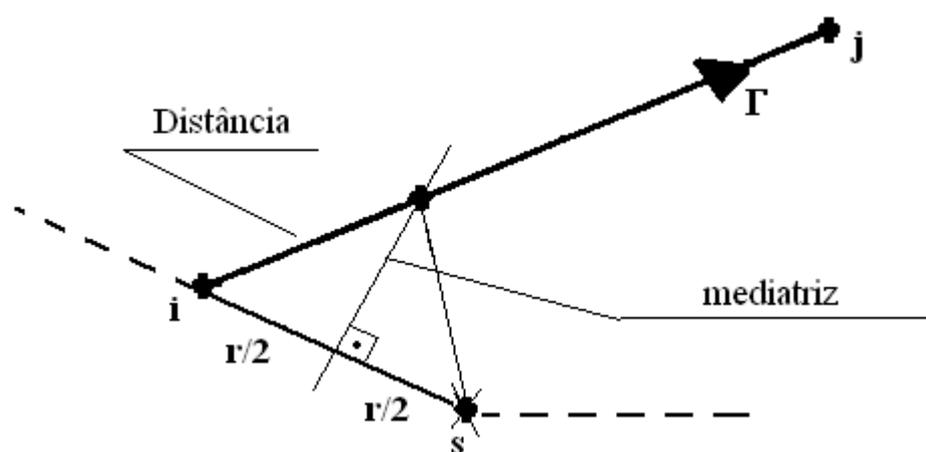


Figura C.3 Comprimento do sub-elemento

Dessa forma o comprimento do sub-elemento será dado pela seguinte relação:

$$\cos(\psi) = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)}{\text{distância}} \rightarrow \text{distância} = \left| \frac{r}{2 \cdot \cos(\psi)} \right| \quad (\text{C.9})$$

Conforme apresenta a Eq. (C.8) pode-se concluir que:

$$\cos(\psi) = -\cos(\gamma) \quad (\text{C.10})$$

Caso o ângulo ψ seja maior que 60° o comprimento do sub-elemento será igual a distância r .

Esse procedimento deve ser repetido até que o somatório do comprimento dos sub-elementos seja maior ou igual ao elemento integrado. Caso esse somatório resulte em comprimento superior ao do elemento integrado o último sub-elemento deve sofrer um processo de correção de comprimento de forma que o somatório sempre coincida com o comprimento total do elemento integrado.

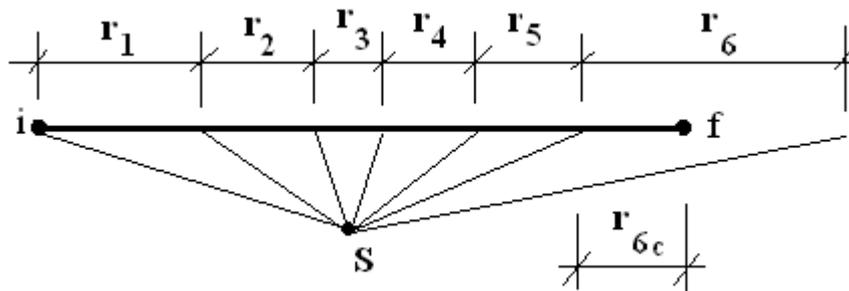


Figura C.4 Correção no comprimento do sub-elemento

Anexo D. – O Concreto Estrutural

O concreto é um dos materiais de maior utilização no campo da engenharia civil, tanto pelo custo associado quanto pelo fácil acesso. Além disso, o concreto não requer mão de obra especializada (ao contrário do aço) o que permite sua utilização inclusive em regiões de menores recursos econômico e humano.

Apesar de sua larga utilização o concreto apresenta um comportamento substancialmente complexo em consequência de sua não homogeneidade. Dessa forma fatores como ruptura frágil, diferentes respostas a tensões de tração e compressão e relação tensão-deformação não-linear encontram explicação em sua intrincada estrutura interna.

O Concreto

O concreto é o material mais empregado em edificações e um dos materiais mais utilizados no mundo. O consumo de concreto só é menor que o da água no planeta sendo aproximadamente de seis bilhões de toneladas/ano.

Esse elevado consumo pode ser atribuído a algumas propriedades do concreto que o tornam mais adequado em diversas aplicações:

- *Resistência à água:* Os elementos de concreto apresentam um bom comportamento quando submetidos à ação da água. Essa propriedade o faz adequado como material constituinte de barragens, tanques e condutos de água como pode ser observado no Brasil e em grande parte do mundo. Se corretamente executado a durabilidade dessas estruturas pode ser considerável como se observa em condutos de água na Itália e em reservatórios na Grécia.

- *Facilidade de adequação de formas:* O concreto fresco apresenta uma consistência plástica que o permite fluir por formas complexas. Pode-se constatar essa propriedade em inúmeras estátuas e monumentos dispersos pelo mundo.
- *Economicamente acessível:* Dos materiais estruturais o concreto é o que apresenta menor custo além de ser o mais facilmente disponível no canteiro. Segundo estudos realizados por MEHTA e MONTEIRO (1994) estima-se que o preço por quilograma de concreto pode chegar a R\$ 0,06 em algumas regiões. Além disso, grande quantidade de resíduos industriais podem ser reciclados no concreto tornando-o ainda adequado do ponto de vista de conservação de recursos naturais.

Apesar de todas essas vantagens em relação ao emprego do concreto o conhecimento de suas propriedades físicas e de seu comportamento sob várias combinações de tensões ainda merecem atenção especial dos pesquisadores.

O concreto pode ser definido como um material composto consistindo de uma matriz de aglomerante sobre a qual estão dispersas partículas de agregados. Sua estrutura altamente não homogênea faz com que o concreto apresente características marcantes como ruptura frágil, relação tensão-deformação não linear, diferentes reações e comportamentos a tensões de tração e compressão e efeitos dependentes do tempo. Esse comportamento característico do concreto é largamente influenciado pela zona de transição presente em sua microestrutura interna.

A zona de transição localiza-se ao redor dos agregados graúdos formando uma região interfacial entre o agregado graúdo e a pasta de cimento. Essa zona é geralmente menos resistente que os demais constituintes do concreto exercendo, portanto, influência sensível no comportamento mecânico do concreto.

A formação da zona de transição deve-se a exsudação interna, ou seja, pela formação de uma película de água ao redor dos agregados graúdos, decorrente dos processos de adensamento. Isso faz com que a relação água/cimento seja mais elevada nas proximidades dos agregados graúdos. O fato dessa região apresentar fator água/cimento mais elevado a torna suscetível a formação de produtos de hidratação relativamente grandes, destacando-se a Etringita e a Portlandita, fazendo com que essa região seja mais porosa do que a matriz aglomerante. Além da porosidade a orientação em planos de clivagem da Portlandita torna a zona de transição consideravelmente menos resistente.

Comportamento do Concreto à Compressão Uniaxial

A resistência do concreto é fortemente influenciada pelo processo de fissuração tanto na zona de transição quanto na matriz aglomerante. Um diagrama tensão-deformação uniaxial típico de um ensaio de compressão apresentado na Fig. (D.1) ilustra essa dependência.

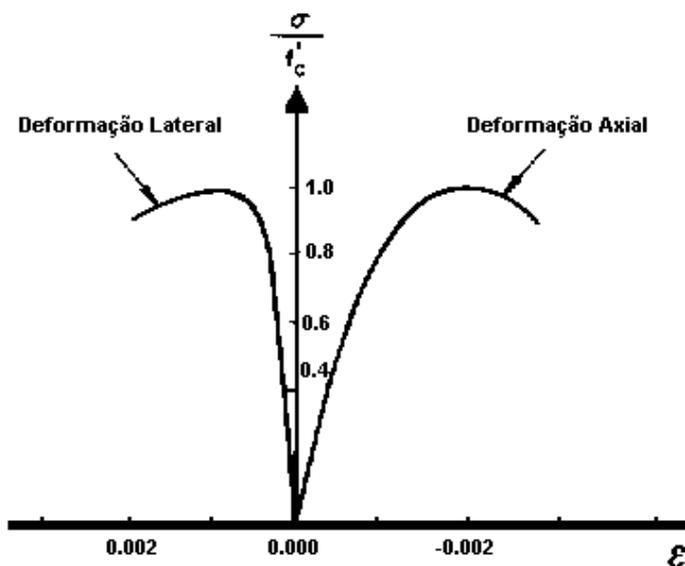


Figura D.1 Diagrama tensão x deformação típico compressão uniaxial do concreto CHEN & HAN (1988)

Para cargas até 30% da resistência à compressão uniaxial, F_c , observa-se um comportamento praticamente elástico-linear, pois cargas nessa faixa não afetam significativamente as microfissuras presentes na zona de transição.

Com tensões no intervalo entre 30% a 50% F_c começa a ocorrer a extensão das fissuras presentes na zona de transição devido à concentração de tensões na extremidade das fissuras. Diz-se que esse trecho apresenta propagação estável de fissuras, pois mantido o carregamento constante não ocorre propagação das fissuras.

No intervalo de carregamento entre 50% a 75% F_c inicia-se a extensão das microfissuras presentes na matriz aglomerante e aliada à rápida propagação das fissuras da zona de transição tende a tornar o sistema instável.

A propagação das fissuras no concreto torna-se instável para carregamentos superiores a 75% F_c . Nesse intervalo ocorre a conexão entre as fissuras da zona de transição e da matriz aglomerante e rapidamente observa-se a ruína da peça.

Comportamento do Concreto à Tração Uniaxial

O comportamento do concreto à tração uniaxial apresenta algumas semelhanças em relação ao observado na compressão uniaxial o que pode ser constatado em um diagrama tensão-deformação típico de um ensaio de tração, apresentado na Fig. (D.2).

Para níveis de tensão inferiores a 60% resistência à tração uniaxial, F_t , a propagação das fissuras pode ser desprezada, sendo esse limite considerado como elástico.

Para tensões no intervalo de 60% a 75% F_t inicia-se a extensão das fissuras tanto na zona de transição quanto na matriz de argamassa.

Acima de 75% F_t observa-se o início do ramo descendente da curva causado pela conexão das fissuras da zona de transição e da matriz aglomerante. Esse intervalo de carregamento é muito curto devido à rápida propagação das fissuras no elemento tracionado.

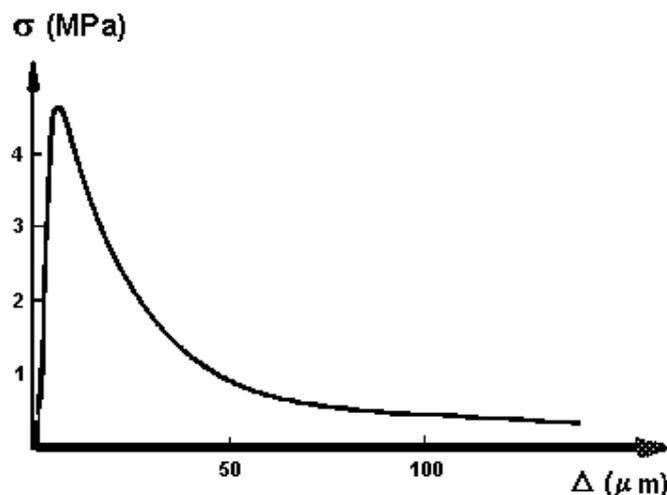


Figura D.2 Diagrama tensão x deformação típico a tração uniaxial do concreto CHEN & HAN (1988)

Observa-se através dos diagramas das Fig. (D.1) e Fig. (D.2) que o intervalo estável de propagação das fissuras é menor na tração. Esse fenômeno ocorre pois a energia necessária para extensão das fissuras à tração é consideravelmente menor que à compressão. Esse fato explica o comportamento frágil observado na ruptura à tração e também a ductilidade constatada na ruptura à compressão. Além disso, a menor energia necessária para extensão das fissuras na tração é o principal motivo para a resistência do concreto à tração ser significativamente menor comparada à resistência à compressão.

Comportamento do Concreto Sujeito a Carregamentos Cíclicos

Em relação a carregamentos cíclicos pode-se verificar que elementos de concreto submetidos a esse tipo de carregamento não apresentam danos significativos se as tensões não superarem 50% F_c . Para carregamentos cíclicos com tensões no intervalo de 50% a 75% de F_c constata-se uma degradação progressiva da rigidez (módulo de elasticidade e resistência) que pode ser atribuída ao contínuo processo de fissuração tanto na zona de transição quanto na matriz aglomerante. Um diagrama tensão-deformação do concreto em ensaios cíclicos pode ser observado na Fig. (D.3).

Conforme apresenta a Fig. (D.3) verifica-se que aumentando o número de ciclos as curvas de descarregamento apresentam não linearidades e uma curva característica de histerese é formada no recarregamento.

Para níveis de tensão superiores a 75% F_c o comportamento é semelhante, porém a não linearidade das curvas carga e descarga tornam-se mais acentuadas.

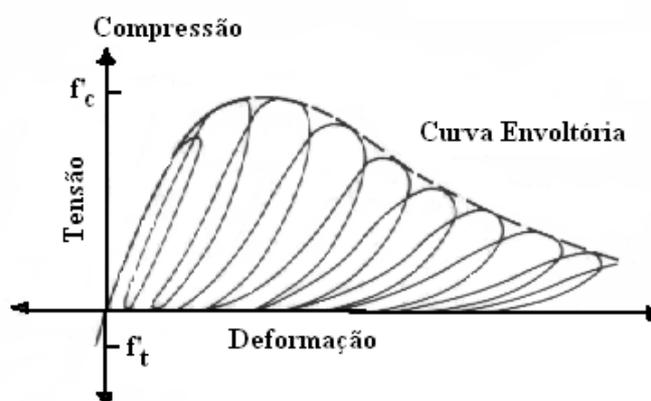


Figura D.3 Diagrama tensão x deformação típico carregamento cíclico MEHTA & MONTEIRO (1994)

Comportamento do Concreto sob Estados de Tensões Multiaxiais

O comportamento do concreto sujeito a estados de tensão biaxiais e multiaxiais difere substancialmente dos observados nos estados uniaxiais. Nos estados de tensão biaxiais e multiaxiais, quando estão envolvidas tensões de compressão, surgem tensões que provocam confinamento no material o que acaba por aumentar a capacidade resistente além da ductilidade da peça estrutural. A Fig. (D.4) apresenta uma envoltória típica de peças de concreto expostas a carregamentos biaxiais.

Conforme apresentado por CARRAZEDO (2002) para tensões de compressão iguais em duas direções o ganho em resistência do material pode alcançar 16%. O

aumento máximo de resistência pode chegar a 27% quando a relação entre as tensões σ_1 e σ_2 é próxima de 0,50.

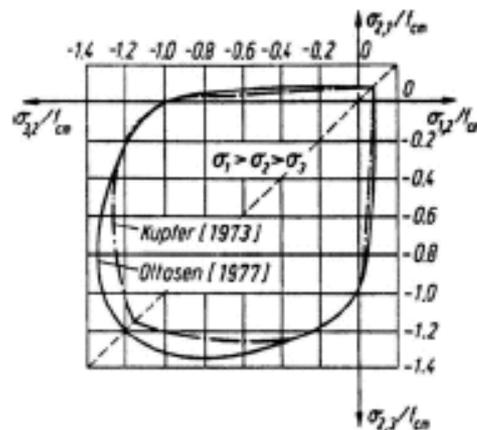


Figura D.4 Diagrama da envoltória de ruptura em estados biaxiais de tensão CARRAZEDO (2002)

Quando uma peça de concreto está submetida a um estado de compressão-tração a resistência à compressão apresenta queda praticamente linear à medida que se aumentam as tensões de tração. Para o estado biaxial de tração constata-se que a resistência do concreto à tração mantém-se praticamente igual à apresentada em um ensaio uniaxial.

No tocante a estados multiaxiais de tensões ainda não há um conjunto de ensaios padrões que comprovem o comportamento do concreto quando sujeito a esse tipo de sollicitação. Mesmo entre os pesquisadores do concreto ainda não existe um consenso sobre qual a forma de ruptura do concreto quando sujeito a estados multiaxiais de tensão. Muitos pesquisadores da área de modelagem numérica de estruturas de concreto armado têm representado o comportamento do concreto considerando critérios elasto-plásticos. Os resultados observados através dessa consideração são satisfatórios como apresentado em LEONEL et.al.(2003) apesar do elevado custo computacional.

Uma outra abordagem fortemente empregada no estudo sobre considerações mais realistas do comportamento das estruturas de concreto armado trata do emprego da mecânica do dano e do fraturamento. A mecânica da fratura fornece uma poderosa ferramenta para análise de fissuração que é um critério de crescimento das fissuras baseado em energia. Esse critério pode ser aliado as variáveis de Dano avaliando mais precisamente a degradação da rigidez do elemento de concreto.

Anexo E. – Função Delta de Dirac

A função Delta de Dirac é de grande valia na representação de ações pontuais como cargas concentradas em problemas da teoria da elasticidade ou mesmo de impulsos na Teoria Cinemática da Física. As propriedades da função Delta de Dirac são estudadas no campo da Teoria das Funções Generalizadas sendo sua obtenção possível por meio da diferenciação da função degrau unitário ou Heaviside.

A Fig. (E.1) apresenta a representação da função Delta de Dirac.

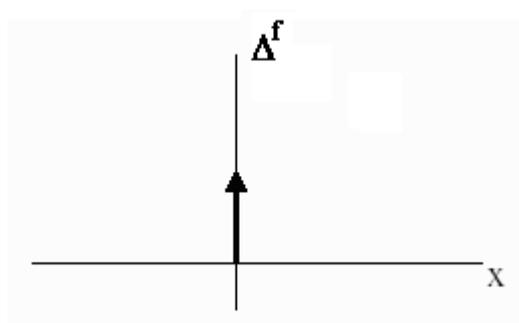


Figura E.1 Representação da função Delta de Dirac.

A função Delta de Dirac pode ser definida como:

$$\Delta^f = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ \infty, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Existem algumas propriedades interessantes da função Delta de Dirac. Inicialmente admita-se conhecida uma função $f(x)$ conhecida e bem definida no ponto $x=0$. Pode ser mostrado por meio do teorema da média para integrais que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \Delta^f(x) dx = f(0) \quad (\text{E.2})$$

Essa propriedade é algumas vezes denominada de propriedade de filtragem da função Delta e ocorre pelo fato da variação da função $f(x)$ em torno do ponto $x=0$ ser desprezível.

De forma mais geral pode-se definir que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \Delta^f(x-a) dx = f(a) \quad (\text{E.3})$$

Os conceitos da função Delta de Dirac podem também ser expandidos para domínios planos. Nessa situação pode-se definir:

$$\Delta^f(p, Q) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \neq Q \\ \infty, & \text{se } p = Q \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

De forma análoga tem-se

$$\int_{\Omega} f(Q) \cdot \Delta^f(p, Q) d\Omega = f(p) \quad (\text{E.5})$$

Deve-se ressaltar que este tipo de formulação não é correta com os conceitos comuns de uma função matemática, isto é, as ações concentradas como forças ou impulsos não são funções, mas, apesar disto, são tratadas formalmente como sendo funções, permitindo o estabelecimento de várias propriedades, sendo que, pelo uso destas, obtém-se resultados corretos.

Anexo F. – A Mecânica do Dano

Diversos materiais de utilização contínua em engenharia são expostos a condições mecânicas e ou ambientais desfavoráveis durante sua vida útil. Tais condições geram mudanças na microestrutura interna desses materiais levando, na grande maioria dos casos, a reduções na resistência e durabilidade.

De forma a permitir a criação de modelos para a representação de materiais expostos a níveis de degradação surgiu a mecânica do dano contínuo. Conforme apresenta LEMAITRE & CHABOCHE (1990) o desenvolvimento da mecânica do dano iniciou-se em 1958 quando KACHANOV (1958) publicou o primeiro trabalho dedicado as variáveis de dano contínuas.

O objetivo da mecânica do dano é descrever a influência do dano na rigidez e resistência do material. Para isso KACHANOV (1958) descreveu o processo de degradação da rigidez do material por meio de um escalar denominado variável de dano. No entanto, com o desenvolvimento das pesquisas, percebeu-se que esse processo é melhor descrito por meio de um tensor de dano que é aplicado ao tensor representativo das propriedades constitutivas do material.

Diferenças entre Mecânica da Fratura e Mecânica do Dano

Apesar de representarem com considerável precisão materiais que apresentam processos de fissuração (danificação) as teorias da mecânica da fratura e mecânica do dano apresentam uma diferença marcante que deve ser ressaltada.

A mecânica da fratura lida com defeitos discretos e de tamanho significativo dentro da região de análise do fenômeno. Essa teoria considera ainda que o material, a partir de uma determinada distância em relação à extremidade da fissura, mantém suas características elásticas iniciais. Já a mecânica do dano trata as microfissuras distribuídas continuamente e de forma aleatória na região de análise do fenômeno, com

as propriedades mecânicas do material se alterando em função do grau de deterioração presente. A fissura discreta pode ser entendida como resultado de uma localização de micro-defeitos.

KRAJCINOVIC (2000) ressaltam o fato de que em diversos corpos reais tanto as fissuras discretas quanto as microfissuras podem estar atuando conjuntamente. Procurando representar cada fenômeno isoladamente obtém-se valores de carga última diferentes ao observado no corpo real. BOTTA (1998) comenta que um modelo mais realista deve englobar tanto aspectos pertencentes à mecânica do fraturamento quanto a mecânica do dano. A Fig. (F.1) apresenta uma representação esquemática de cada teoria.

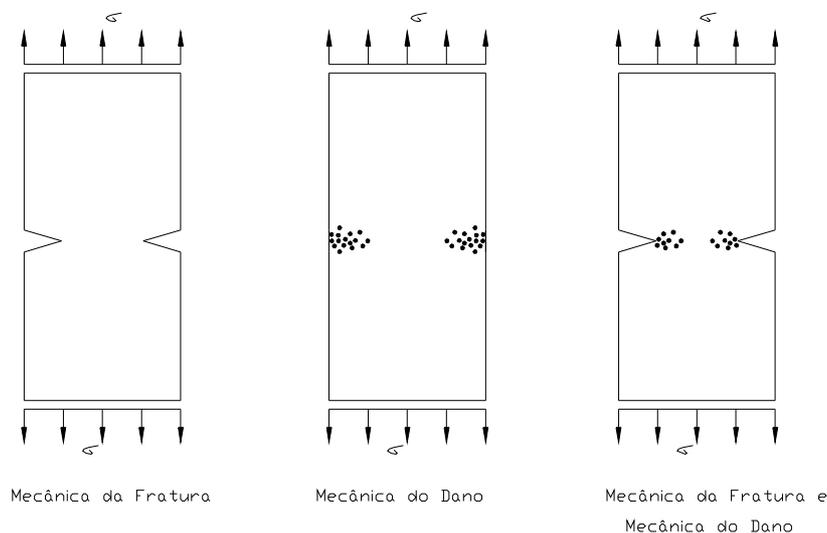


Figura F.1 Representação esquemática das teorias de fraturamento e dano

Modelos para Dano

Os modelos empregando a teoria do dano podem ser formulados para representar diversos fenômenos associados à danificação da microestrutura interna dos materiais. Dentre os modelos propostos KACHANOV (1986) destaca aqueles associados a fluência, materiais elasto-plásticos e fadiga.

No tocante ao emprego da teoria do dano aplicado a modelos numéricos destaca-se o modelo de dano isotrópico. Por meio desse modelo o dano no material é considerado através de uma variável denominada variável de dano isotrópico.

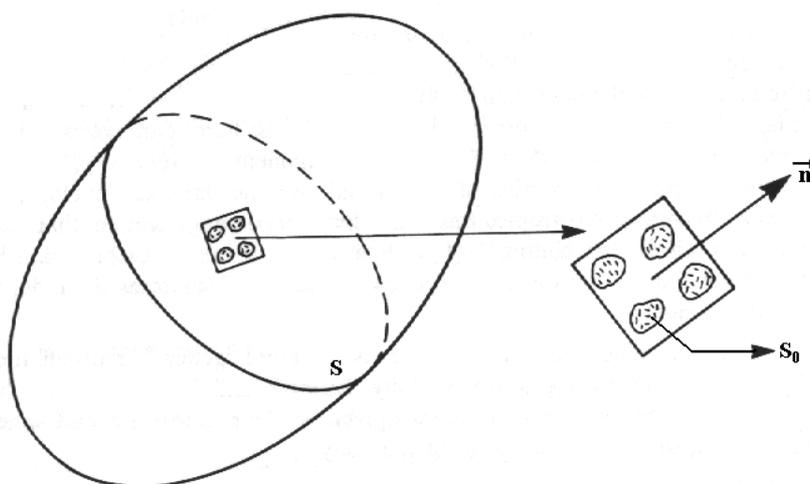


Figura F.2 Representação variáveis de dano KACHANOV (1986)

Empregando-se esse modelo o dano é considerado igual em todas as direções e pode ser definido pela razão entre as áreas plenas e danificadas ilustradas na Fig. (F.2).

$$D = \frac{S_0}{S} \quad (\text{F.1})$$

em que:

S_0 área danificada.

S área sã.

D variável de Dano.

Pode-se inferir que $0 \leq D \leq 1$. Quanto mais próximo de zero encontra-se D menor o dano presente no material. Já para o caso de D tender a um verifica-se uma situação de proximidade de ruína do material.

Admitindo que exista uma força F atuando segundo a normal n apresentada na Fig. (F.2) pode-se definir uma tensão efetiva dada por:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} \quad (\text{F.2})$$

sendo:

$\tilde{\sigma}$ = tensão efetiva.

F = força.

\tilde{S} = área útil.

Por meio da Eq. (F.2) pode-se inserir diretamente a variável de dano no cálculo da tensão efetiva conforme apresenta a Eq. (F.3):

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1-D)} \quad (\text{F.3})$$

onde:

σ = Estado de tensão sem danificação

Empregando a hipótese de deformação equivalente pode-se aplicar a Eq. (F.3) à Lei de Hooke como ilustra a Eq. (F.4).

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{(1-D) \cdot E} \quad (\text{F.4})$$

em que:

E = Módulo de Elasticidade Longitudinal.

Para a criação de modelos numéricos é usual aplicar a variável de Dano no tensor representativo das propriedades do material como mostra o denominador da Eq. (F.4). Assim pode-se definir um tensor com as propriedades efetivas do material.

$$\tilde{E} = (1-D) \cdot E \quad (\text{F.5})$$

E dessa forma a lei associando tensões a deformações poder ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma = \tilde{E} \cdot \varepsilon \quad (\text{F.6})$$

Existem diversos modelos para representação de dano em materiais os quais diferenciam-se pela diferente abordagem na evolução do dano com a aplicação do carregamento. No trabalho de BOTTA (1998) os modelos de Mazars e Cervera são aplicados com sucesso.

O emprego dessa teoria, por meio de modelos numéricos, tem permitido a realização de um elo conectando os estudos sobre a deterioração microscópica do material sob tensão e modelos usuais empregados em projetos de engenharia.

Anexo G. – Coeficientes Planos de Experiência

Nesse anexo serão apresentadas as expressões para os coeficientes dos planos de experiência utilizados nesse trabalho. Serão apresentadas as expressões para os planos de experiência estrela, composto, 13 pontos e 8 pontos. Em todas as expressões desse anexo a variável Ψ representa uma constante a qual indica a distância do ponto considerado em relação a média. O valor dessa constante é geralmente considerada igual a 3 para a construção da primeira superfície de falha. A partir de então, com a evolução do processo de convergência das superfícies de falha, essa distância pode ser reduzida para a obtenção de uma resposta mais precisa. Nas expressões a seguir será utilizado constantemente o termo δ_k o qual é dado pela seguinte equação:

$$\delta_k = \frac{\sigma_k}{\mu_k} \quad (\text{G.1})$$

onde: μ_k é a média da variável aleatória k.

σ_k é o desvio padrão da variável aleatória k.

Plano de Experiência Estrela

Para o plano de experiência estrela contendo duas variáveis aleatórias o modelo mecânico deve ser consultado com os valores indicados na Eq. (G.2).

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \\ x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \\ x_1 & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) \\ x_1 & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) \end{bmatrix} \quad (\text{G.2})$$

Considerando três variáveis aleatórias a Eq. (G.2) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix}
 x_1 & x_2 & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 & x_3 \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3)
 \end{bmatrix} \quad (G.3)$$

Plano de Experiência Composto

Considerando o plano de experiência composto com duas variáveis aleatórias o modelo mecânico deve ser consultado utilizando os termos mostrados na Eq. (G.4).

$$\begin{bmatrix}
 x_1 & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) \\
 x_1 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) \\
 x_1 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \\
 x_1 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) \\
 x_1 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) \\
 x_1 & x_2
 \end{bmatrix} \quad (G.4)$$

Considerando três variáveis aleatórias a Eq. (G.4) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix}
 x_1 & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \\
 x_1 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 & x_3 \\
 x_1 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \\
 x_1 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 & x_2 & x_3 \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 & x_2 & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3)
 \end{bmatrix} \tag{G.5}$$

Plano de Experiência 13 Pontos

Para o plano de experiência 13 pontos considerando duas variáveis aleatórias o modelo mecânico deve ser consultado por meio dos termos mostrados na Eq. (G.6).

$$\begin{bmatrix}
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) \\
 x_1 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) \\
 x_1 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \\
 x_1 & x_2 \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \\
 x_1 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) \\
 x_1 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2)
 \end{bmatrix} \quad (G.6)$$

Considerando três variáveis aleatórias a Eq. (G.6) deve ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix}
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \\
 x_1 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 & x_3 \\
 x_1 & x_2 & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 & x_3 \\
 x_1 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \\
 x_1 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 & x_2 & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3)
 \end{bmatrix}$$

(G.7)

Plano de Experiência 8 Pontos

Com o plano de experiência 8 pontos considerando duas variáveis aleatórias o modelo mecânico deve ser consultado com os termos mostrados na Eq. (G.8).

$$\begin{bmatrix}
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) \\
 x_1 & x_2 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) \\
 x_1 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \\
 x_1 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 \\
 x_1 & x_2 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2)
 \end{bmatrix} \quad (G.8)$$

Para três variáveis aleatórias a Eq. (G.8) deve ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix}
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 & x_2 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \\
 x_1 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 & x_3 \\
 x_1 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 & x_3 \\
 x_1 & x_2 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 & x_2 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot \left(1 + \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_1\right) & x_2 & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 & x_2 \cdot \left(1 - \frac{\Psi}{2} \cdot \delta_2\right) & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3)
 \end{bmatrix} \quad (G.9)$$

Plano de Experiência Hiper-Cubo

Para o plano de experiência Hiper-Cubo contendo duas variáveis aleatórias o modelo mecânico deve ser consultado com os valores indicados na Eq. (G.10).

$$\begin{bmatrix}
 x_1 & x_2 \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2)
 \end{bmatrix} \quad (G.10)$$

Considerando três variáveis aleatórias a Eq. (G.10) deve ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix}
 x_1 & x_2 & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 & x_2 & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3)
 \end{bmatrix} \quad (G.11)$$

Plano de Experiência Mínimo

Para o plano de experiência Mínimo contendo duas variáveis aleatórias o modelo mecânico deve ser consultado com os valores indicados na Eq. (G.12).

$$\begin{bmatrix}
 x_1 & x_2 \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2)
 \end{bmatrix} \quad (G.12)$$

Considerando três variáveis aleatórias a Eq. (G.11) deve ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix}
 x_1 & x_2 & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 & x_3 \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 & x_3 \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \\
 x_1 & x_2 & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_1) & x_2 & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 & x_2 \cdot (1 - \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3) \\
 x_1 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_1) & x_2 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_2) & x_3 \cdot (1 + \Psi \cdot \delta_3)
 \end{bmatrix} \quad (G.13)$$

Anexo H. – Método Golden Section

Neste item será descrito o método Golden Section o qual é utilizado nos modelo de otimização estrutural desenvolvidos neste trabalho. Este método é empregado na realização do processo de busca de mínimos unidirecionais (line search) nos algoritmos de otimização restrita. A idéia principal por trás deste método é bastante simples consistindo basicamente em se considerar um sub-domínio compacto (intervalo) para a busca do mínimo e à medida que as iterações evoluem esse sub-domínio diminui até que ele seja suficientemente pequeno em torno do mínimo da função. Neste trabalho este método é utilizado juntamente com o método da Programação Quadrática Seqüencial (SQP) para a obtenção de mínimos restritos. Neste caso a direção de busca do mínimo restrito é obtida pelo SQP e o mínimo na direção dada pelo SQP é obtido pelo método Golden Section.

O método Golden Section é uma técnica muito popular a qual é empregada com sucesso na obtenção de máximos, mínimos e zeros de funções objetivo de uma única variável. Existem várias razões para isso. A primeira delas é que este método não exige que a função objetivo considerada tenha derivadas contínuas na região de busca dos extremos. Outra vantagem é que sua taxa de convergência é conhecida ao contrário dos métodos que empregam interpolação polinomial. Finalmente, este método é facilmente programável em computador. Este método é também reconhecido por ser eficiente na análise de problemas que são pobremente condicionados como, por exemplo, onde encontra-se dificuldade na obtenção das derivadas da função objetivo, continuidade da função objetivo no sub-domínio de busca, entre outros. Porém, uma desvantagem deste método é que ele não apresenta melhorias na convergência, ou melhor, na velocidade dela, caso a função analisada seja bem condicionada (como por exemplos funções estritamente lineares ou quadráticas) dentro do domínio de busca dos pontos extremos.

O método será aqui apresentado considerando-se a busca do mínimo de uma função objetivo F , a qual depende de uma única variável X . Neste método assume-se que o sub-domínio de busca do mínimo é conhecido de antemão, ou seja, que são

conhecidos os limites superior, X_u , e inferior, X_l , para a variável X . Além disso, assume-se também que X_u e X_l delimitam o valor mínimo a ser encontrado, ou o mínimo da função. Conhecidos X_u e X_l determinam-se os valores da função objetivo em cada um dos extremos do intervalo, correspondendo a F_u e F_l respectivamente. Em seguida serão selecionados dois pontos intermediários X_1 e X_2 tal que $X_1 < X_2$ e avalia-se a função objetivo nesses pontos, resultando F_1 e F_2 respectivamente. O procedimento descrito até aqui é ilustrado na Fig. (H.1).

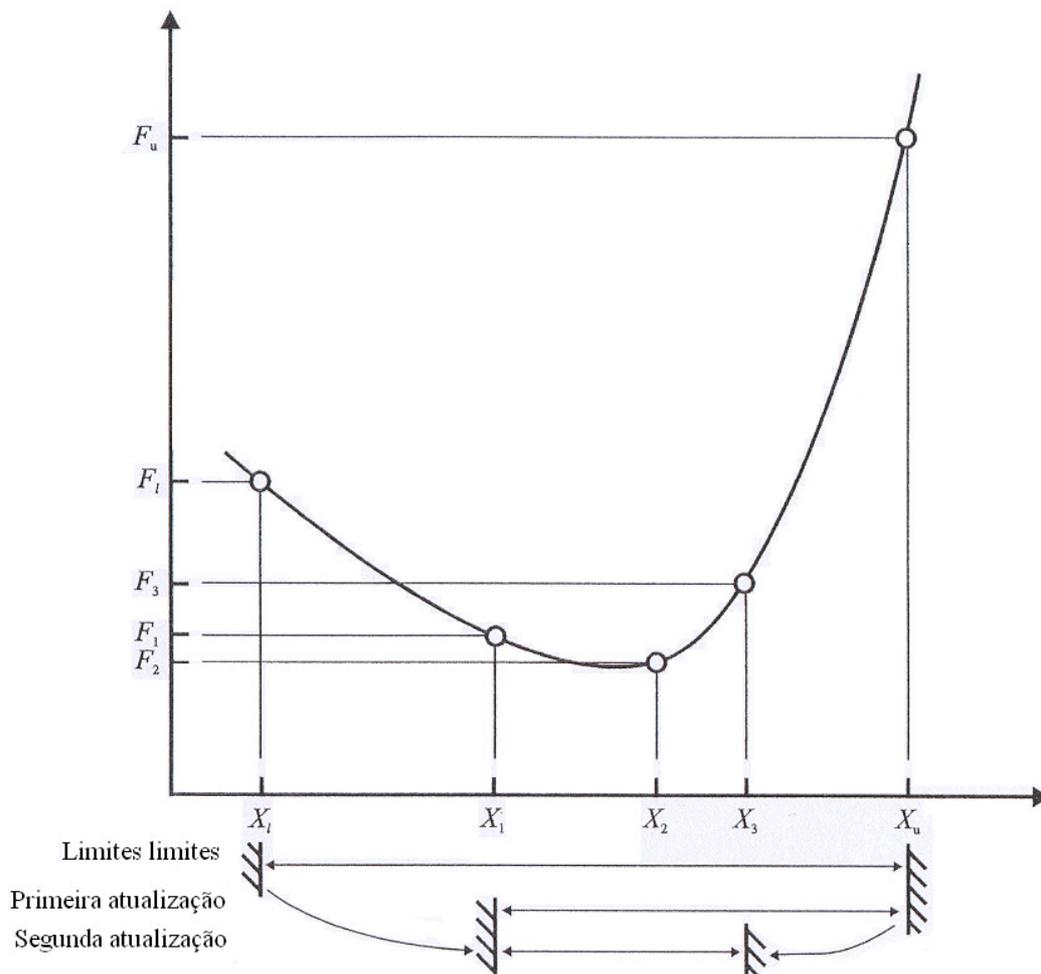


Figura H.1 O método Golden Section.

Pelo fato da função objetivo ser unimodal tem-se que X_1 ou X_2 formarão o novo limite do sub-domínio na próxima iteração. Neste caso, se F_1 for maior que F_2 então X_1 formará o novo limite inferior e assim o novo sub-domínio será delimitado

por X_l e X_u . Por outro lado, se F_2 for maior que F_1 então será X_2 que formará o novo limite superior, sendo dessa forma, o intervalo delimitado por X_l e X_2 .

Para o desenvolvimento do algoritmo do método Golden Section devem ser definidos critérios para a obtenção dos valores de X_l e X_2 de tal forma que a análise conduza à redução do intervalo de busca do mínimo da maneira mais rápida possível. Depois da escolha inicial de X_l, X_u, X_1 e X_2 será necessária apenas uma única avaliação da função objetivo a cada iteração. Assim a forma mais eficiente de redução do intervalo de busca do mínimo é considerar uma taxa constante de redução do mesmo a cada iteração.

Independente do fato de X_l tornar-se o novo limite inferior ou X_2 o novo limite superior esses novos valores serão tomados simétricos em relação ao centro do intervalo. Assim:

$$X_u - X_2 = X_1 - X_l \quad (\text{H.1})$$

Além disso, os novos valores de X_l e X_2 serão tomados de tal forma que obedeçam à seguinte relação:

$$\frac{X_l - X_l}{X_u - X_l} = \frac{X_2 - X_l}{X_u - X_l} \quad (\text{H.2})$$

Dessa forma, se X_l tornar-se o novo limite inferior X_l , então X_2 se tornará o novo X_l de tal maneira que a razão de $X_2 - X_l$ com relação ao intervalo $X_u - X_l$ seja sempre a mesma. Impondo-se por conveniência que $X_l = 0$ e $X_u = 1$ então os valores de X_l e X_2 podem ser obtidos como uma fração do intervalo $X_u - X_l$. De acordo com o posto, pode-se reescrever a Eq. (H.1) como:

$$X_2 = 1 - X_l \quad (\text{H.3})$$

Substituindo a Eq. (H.3) na Eq. (H.2) obtém:

$$X_l = \frac{1 - 2 \cdot X_l}{1 - X_l} \quad (\text{H.4})$$

Esta equação pode ser reescrita como:

$$X_l^2 - 3 \cdot X_l + 1 = 0 \quad (\text{H.5})$$

Resolvendo-se a Eq. (H.5) são obtidas duas raízes reais como mostra a Eq. (H.6):

$$X_1 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow 0,38197 \text{ e } 2,61803 \quad (\text{H.6})$$

A segunda raiz do polinômio pode ser ignorada pois esta não tem significado na análise já que seu valor é maior que 1, ou seja, está fora do intervalo de busca. Assim, utilizando-se a Eq. (H.3) tem-se finalmente que:

$$X_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,38197 \quad (\text{H.7})$$

$$X_2 = 1 - X_1 = 0,61803 \quad (\text{H.8})$$

Tomando-se a razão entre os valores obtidos tem-se:

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{0,38197}{0,61803} = 1,61803 \quad (\text{H.9})$$

Essa razão é conhecida como número “golden section” e apresenta ainda algumas propriedades adicionais como:

$$\frac{X_1}{X_2} = 0,61803 \Rightarrow X_2 = \frac{X_2}{X_1} - 1 \text{ e } X_1 = X_2^2 \quad (\text{H.10})$$

O Golden Section retorna muitas vezes à natureza como uma relação estética e ao longo da história como um número ao qual propriedades “mágicas” são atribuídas. Por exemplo, esta taxa é a mesma taxa entre a base e a altura de uma grande pirâmide. Além disso, segundo os estudos sobre as proporções do corpo humano de *Leonardo da Vinci* um corpo humano “ótimo” é aquele cuja razão entre a distância do umbigo aos pés e a distância do umbigo a ponta da cabeça é igual à Golden Section, como mostra a Fig. (H.2).

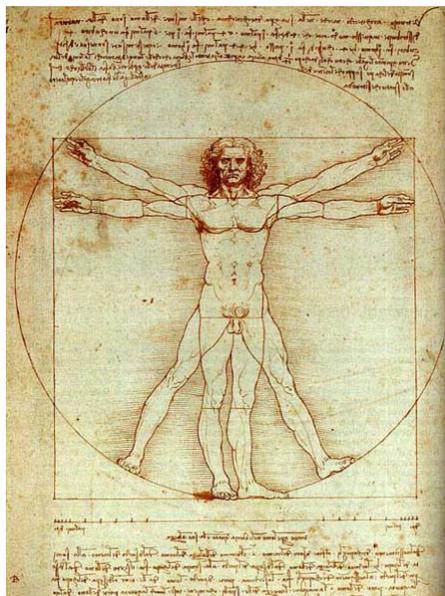


Figura H.2 Proporções do corpo humano de Leonardo da Vinci.

Para o problema considerado o método Golden Section fornece uma seqüência de cálculos que objetiva reduzir a cada iteração o intervalo de busca para a determinação do mínimo valor da função objetivo com um número tão pequeno quanto possível de avaliações de F . Voltando ao intervalo original dado por X_l e X_u , pode-se definir os pontos no interior desse intervalo, X_1 e X_2 , em termos de X_l , X_u e τ onde:

$$\tau = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,38197 \quad (\text{H.11})$$

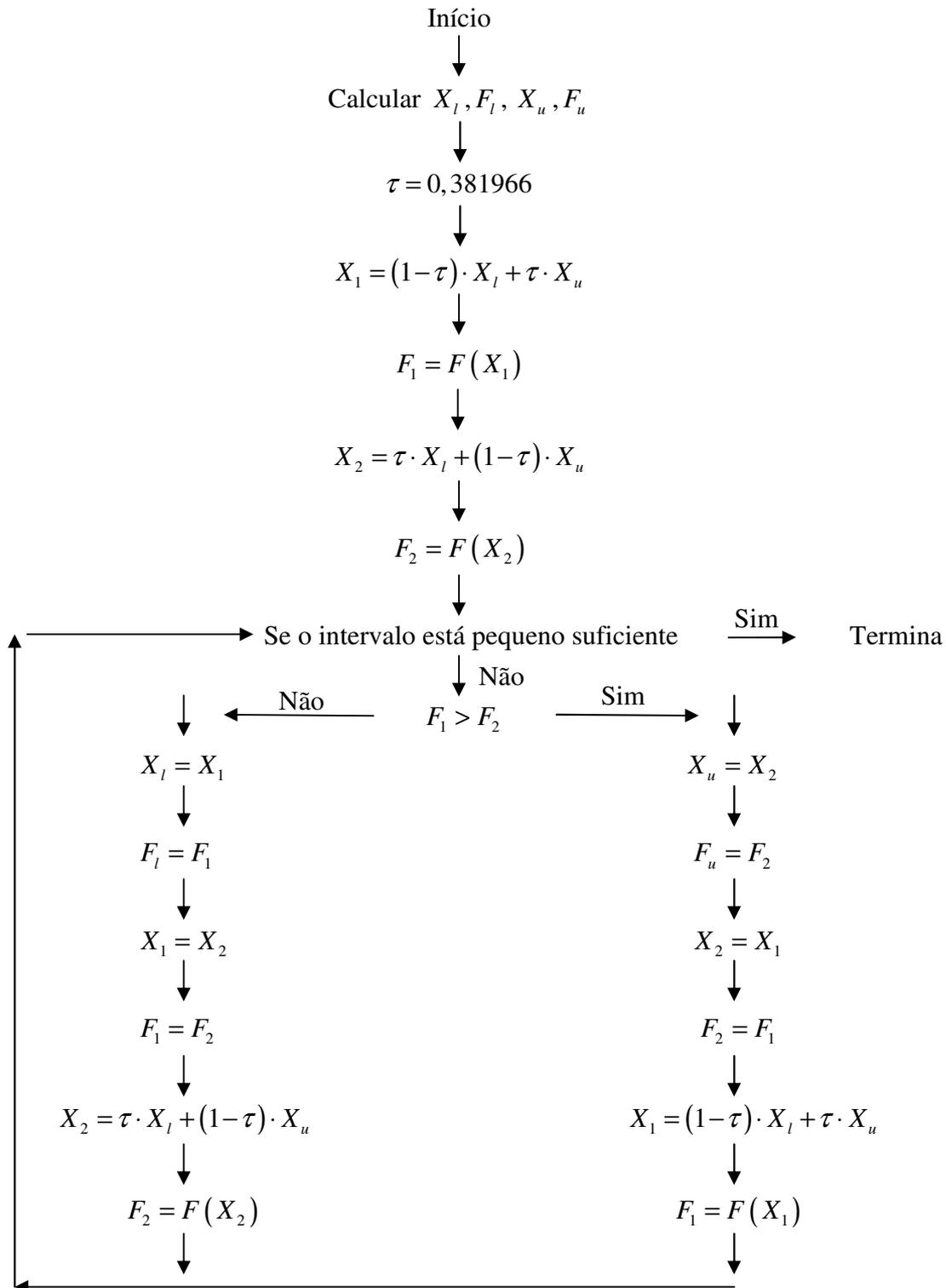
Deve ser notado que τ é simplesmente X_1 conforme definido em Eq.(H.7).

Assim, usando as equações mostradas acima pode-se escrever que:

$$X_1 = (1 - \tau) \cdot X_l + \tau \cdot X_u \quad (\text{H.12})$$

$$X_2 = \tau \cdot X_l + (1 - \tau) \cdot X_u \quad (\text{H.13})$$

A partir das equações acima e dos valores encontrados para X_l, X_u, X_1 e X_2 pode-se propor um procedimento iterativo para o método Golden Section. O critério de parada do algoritmo e conseqüente convergência do problema é o tamanho do intervalo considerado na iteração. Quando o intervalo considerado para a busca do mínimo de F está suficientemente pequeno, em torno do ponto de mínimo, diz-se que o algoritmo encontrou a solução. Na Fig. (H.3) está apreseto o fluxograma do algoritmo do Golden Section.



Anexo I. – Tópicos da Teoria da Elasticidade

O rápido progresso em vários campos da tecnologia tem criado a necessidade de novos tipos de materiais bem como de estruturas. Esse desenvolvimento requer formas mais racionais e econômicas no emprego desses novos materiais assim como a otimização dos materiais de uso corrente. Isso tem motivado os engenheiros estruturais a buscarem procedimentos mais precisos e completos como forma de avaliar o comportamento das novas estruturas e também aprimorar a modelagem das estruturas clássicas.

Dentre as ferramentas empregadas para esse fim destaca-se a teoria da elasticidade. Apesar de ser necessário, muitas vezes, o conhecimento do comportamento dos materiais além da fase elástica a teoria da elasticidade fornece fortes subsídios para o desenvolvimento de teorias que tratam, de forma mais abrangente, o processo de mudança de rigidez do material como as teorias da plasticidade, do dano e da fratura. Além disso, as suas relações permitem a formulação de métodos numéricos como é o caso do método dos elementos de contorno.

Na seqüência deste capítulo serão apresentadas algumas relações de interesse para a compreensão da formulação do problema elástico pelo método dos elementos de contorno.

1.1 – Equações de Equilíbrio

O estado de tensão em um ponto, de um corpo em equilíbrio, pode ser ilustrado representando o ponto estudado por um elemento de dimensões infinitesimais conforme apresenta a Fig. (I.1). Nesta figura estão apresentadas as componentes de tensão considerando o sistema de coordenadas cartesianas.

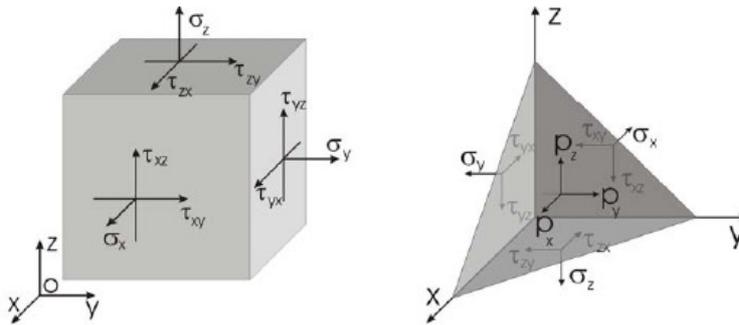


Figura I.1 Estado de tensão. Planos inclinados com forças de superfície. WUTZOW (2003).

O estado de tensão é caracterizado se conhecidas as nove componentes de tensão, sendo seis componentes cisalhantes e três normais. Estas componentes de tensão não são todas independentes. Considerando o equilíbrio no elemento infinitesimal em termos de momentos pode-se verificar que:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{I.1})$$

sendo:

σ_{ij} tensões internas ao corpo.

Efetuada agora o equilíbrio em termos de forças é possível encontrar a equação de equilíbrio do corpo que pode ser representada indicialmente por:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (\text{I.2})$$

em que:

b_i valores das forças de corpo presentes atuantes na direção i .

$\sigma_{ij,j}$ derivada da tensão ij em relação a direção j .

O equilíbrio deve também ser satisfeito na superfície do corpo. Dessa forma o estado de tensão, adjacente à superfície do corpo considerado, deve ser decomposto na direção do contorno de forma a igualar-se às forças de superfície atuantes. A Fig. (I.1) apresenta as forças de superfície atuantes sobre um plano inclinado em um elemento de dimensões infinitesimais. Indicialmente esta relação de equilíbrio pode ser representada como:

$$P_i = \sigma_{ij} \cdot \eta_j \quad (\text{I.3})$$

onde:

P_i forças de superfície.

η_j cossenos diretores da normal ao contorno.

1.2 – Relações Constitutivas

Em elasticidade linear clássica há uma única relação envolvendo tensões e deformações que é denominada Lei de Hooke generalizada. Por meio dessa lei, representada por um tensor de quarta ordem, cada componente de tensão é linearmente relacionada com todas as componentes de deformação do ponto em estudo. Esta relação é também válida no sentido inverso, ou seja, as componentes de deformação são linearmente relacionadas às componentes de tensão via tensor inverso das propriedades constitutivas. A Lei de Hooke generalizada pode ser representada de forma geral como:

$$[\sigma] = [D_c] \cdot [\varepsilon] \quad (1.4)$$

onde:

$[D_c]$ tensor de quarta ordem contendo as propriedades constitutivas do material.

$[\sigma]$ tensor de segunda ordem das tensões internas ao corpo.

$[\varepsilon]$ tensor de segunda ordem das deformações do corpo.

Para materiais anisótropos o tensor constitutivo contém 81 termos independentes os quais são função somente da direção dos eixos de referência. Contando com a simetria dos tensores de tensão e deformação o número de termos independentes do tensor constitutivo diminui para 36. Este número pode ser consideravelmente reduzido admitindo-se comportamento isotrópico para os materiais. Empregando este artifício é possível descrever o tensor D_c somente através do módulo de elasticidade longitudinal, E , e do coeficiente de Poisson, ν .

A Lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos pode ser escrita de forma concisa indicialmente conforme apresenta a Eq. (1.5).

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \cdot \left[\frac{\nu}{(1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{ij} \right] \quad (1.5)$$

sendo:

δ_{ij} delta de Kroenecker.

ε_{ij} deformações do corpo.

ν coeficiente de Poisson.

E módulo de elasticidade longitudinal.

De forma inversa as deformações podem ser relacionadas às tensões por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} \quad (\text{I.6})$$

I.3 – Relações Deformação-Deslocamento

A Fig. (I.2) ilustra as configurações deformada e indeformada de um corpo sujeito a um regime de pequenas deformações. Tomando a vizinhança de um ponto P, antes da deformação, verifica-se que este ponto desloca-se para o ponto P', após a ação do carregamento, sendo o deslocamento dado pela subtração dos vetores posição R' e R. Nessa situação a deformação pode ser obtida considerando a variação dos deslocamentos ao longo de uma direção de interesse. Assim as deformações estão diretamente relacionadas aos gradientes dos deslocamentos.

No âmbito do regime de pequenas deformações as componentes do estado de deformação em um corpo podem ser descritas empregando a simplificação da descrição via deformações infinitesimais. Por meio desta simplificação as deformações podem ser obtidas de acordo com a Eq. (I.7).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{I.7})$$

em que:

$u_{i,j}$ derivada do deslocamento da direção i em relação a direção j .

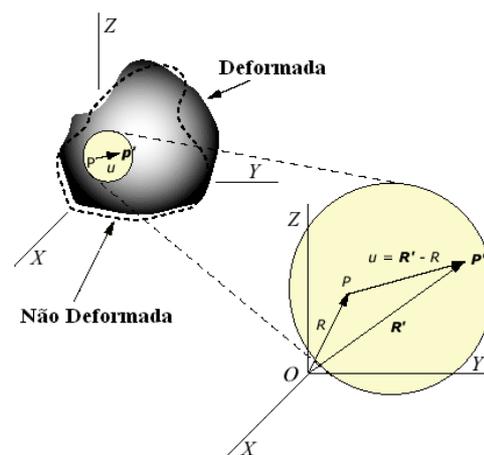


Figura I.2 Estados deformado e indeformado para corpo em regime de pequenas deformações. Determinação dos deslocamentos e das deformações em modelos 2D.

Tratando-se de regimes de grandes deformações a descrição do estado de deformação deve ser realizada empregando os recursos da deformação finita. Por meio desta descrição as deformações não são linearmente relacionadas ao gradiente dos

deslocamentos. A não linearidade da relação entre deformação e deslocamento se faz pela inserção de um produto diferencial como apresenta a Eq. (I.8).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{j,i} \cdot u_{i,j}) \quad (\text{I.8})$$

I.4 – Condições de Compatibilidade de Deformações

A relação deformação-deslocamento, apresentada na Eq. (I.7), representa um sistema composto por três componentes de deslocamentos e seis de deformação. De forma a resolver problemas empregando o caminho inverso ao sugerido por essa relação, ou seja, obter um campo de deslocamentos para um dado estado de deformação, torna-se necessário o emprego de equações de compatibilidade em termos de deformação. A teoria cinemática de corpos deformáveis prevê que a compatibilidade deve ser efetuada através da relação Eq. (I.9).

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (\text{I.9})$$

I.5 – Equacionamento dos Problemas Elásticos

O equacionamento de problemas elásticos é necessário para a determinação de tensões, deformações e deslocamentos em corpos sujeitos a esforços externos e a condições de restrição aos deslocamentos. Para a determinação das grandezas mencionadas acima fazem-se necessários o emprego das relações constitutiva, deformação-deslocamento e de equilíbrio. Além disso, as grandezas determinadas devem obedecer às condições de contorno impostas assim como as condições de compatibilidade. No total do equacionamento resultam 15 equações para a obtenção de 15 variáveis desconhecidas, as quais podem ser enunciadas: 6 tensões, 6 deformações e 3 deslocamentos.

Dependendo das condições de contorno impostas, as equações podem ser manipuladas de forma a tornar a resolução mais conveniente. No caso do problema estudado apresentar somente forças de superfície aplicada é desejável que as equações sejam escritas em termos de tensões. Caso contrário se estiverem presentes condições de contorno em termos de deslocamentos aplicados é mais vantajoso resolver o sistema de equações em termos de deslocamentos.

I.6 – Simplificação do Problema 3-D para Estados Planos

O equacionamento de problemas elásticos pode muitas vezes ser simplificado dependendo da geometria do corpo a ser analisado bem como das condições de contorno aplicadas. A transformação de problemas tridimensionais em problemas bidimensionais dá origem aos problemas ditos planos, os quais podem ser divididos em planos de tensão e planos de deformação.

Um problema é dito ser plano de deformação quando os vetores de deslocamento dos pontos pertencentes ao corpo em questão são paralelos entre si. Isso resulta que todos os pontos originalmente pertencentes a um plano, antes de o corpo ser deformado, permanecem nesse mesmo plano após a atuação das ações externas. Nessa classe de problemas enquadram-se, normalmente, problemas cuja geometria do corpo analisado apresenta uma de suas dimensões muito superior às demais como em barragens, tubulações e estruturas de contenção. Nesses casos citados o plano sob o qual estarão contidos os pontos é um plano normal a maior dimensão do corpo.

Admitindo por simplicidade que o plano que contém os deslocamentos do corpo seja o xy tem-se que as deformações presentes nesses tipos de problema são: $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$. O estado de tensão é representado pelas seguintes componentes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$, sendo que σ_z é função das tensões σ_x, σ_y .

Já os problemas de estado plano de tensão são caracterizados pela distribuição de tensões no corpo ser essencialmente plana. Nesta classe de problemas podem ser citadas estruturas cuja geometria apresente uma de suas dimensões muito menor que as demais como vigas-parede, chapas e paredes. Nestes casos o carregamento é considerado como composto por forças aplicadas de forma paralela ao plano formado pelas duas maiores dimensões do corpo sendo ainda distribuídas uniformemente ao longo da direção da menor dimensão (espessura).

Considerando que o plano formado pelas duas maiores dimensões do corpo seja o xy o estado de tensão do corpo pode ser representado pelas seguintes componentes: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Já o estado de deformação é caracterizado pelas componentes: $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}$. Nessa situação ϵ_z é função das deformações ϵ_x, ϵ_y .

1.7 – Tensões Principais

O estado de tensão em um ponto é definido por seis componentes orientadas segundo um sistema de coordenadas de referência. Muitas vezes é de interesse na análise o conhecimento do estado de tensão com referência em outro sistema de coordenadas. O processo de transformação do estado de tensão no ponto de um sistema de referência para outro é simples bastando, para tanto, o conhecimento dos ângulos de inclinação entre os sistemas de referência anterior e atual.

Apesar de ser fácil o processo de transformação do estado de tensão de um sistema de referência a outro é de grande interesse em engenharia a obtenção do estado de tensão em direções particulares onde as tensões cisalhantes sejam nulas. Em um problema tridimensional existem três planos perpendiculares entre si onde essa condição é atendida, ou seja, as tensões cisalhantes são nulas observando-se somente a presença de tensões normais. Essas tensões são chamadas de tensões principais e, os eixos que as contém, de eixos principais de tensões.

Assim, o vetor de tensão $\{\sigma^P\}$ é dito principal se a seguinte relação é verificada:

$$\{\sigma^P\} = \lambda \cdot \{\hat{\eta}\} \quad (\text{I.10})$$

Onde λ é um escalar denominado valor principal e $\{\hat{\eta}\}$ é o versor da normal particular que define uma direção principal.

Considerando a Eq. (I.3) pode-se escrever:

$$[\sigma] \cdot \{\hat{\eta}\} = \lambda \cdot \{\hat{\eta}\} \quad (\text{I.11})$$

Ou em termos de componentes:

$$\left(\sigma_{ij} \cdot \hat{\eta}_j \right) \cdot e_i = \left(\lambda \cdot \hat{\eta}_i \right) \cdot e_i \quad \therefore \quad \sigma_{ij} \cdot \hat{\eta}_j = \lambda \cdot \hat{\eta}_i \quad (\text{I.12})$$

$$\sigma_{ij} \cdot \hat{\eta}_j - \lambda \cdot \hat{\eta}_i = 0 \quad \therefore \quad (\sigma_{ij} - \lambda \cdot \delta_{ij}) \cdot \hat{\eta}_j = 0 \quad (\text{I.13})$$

Ou ainda, a última expressão da Eq. (I.13) pode ser reescrita como:

$$(\sigma_{ij} - \lambda \cdot \delta_{ij}) \cdot \hat{\eta}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} (\sigma_x - \lambda) & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & (\sigma_y - \lambda) & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & (\sigma_z - \lambda) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{\eta}_1 \\ \hat{\eta}_2 \\ \hat{\eta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.14})$$

A condição para que o sistema homogêneo apresente solução diferente da trivial, ou seja $\{\hat{\eta}\} = \{0\}$, é que o determinante da matriz de seus coeficientes se anule. Dessa imposição resulta o seguinte polinômio cúbico em λ :

$$\lambda^3 - I_1 \cdot \lambda^2 + I_2 \cdot \lambda - I_3 = 0 \quad (\text{I.15})$$

As raízes do polinômio da Eq. (I.15) são as tensões principais. Nessa equação, I_1, I_2 e I_3 são os invariantes do tensor de tensões, assim denominados, pois possuem o mesmo valor independente do referencial adotado. Os invariantes são definidos como:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{zx}^2 \\ I_3 &= \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot \sigma_{xy} \cdot \sigma_{xz} \cdot \sigma_{yz} - \sigma_x \cdot \sigma_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \sigma_{xz}^2 - \sigma_z \cdot \sigma_{xy}^2 \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

I.8 – Deformações Principais

Comportamento análogo ao das tensões pode ser observado também nas deformações. Isto é, existem direções onde não são observadas deformações distorcionais ocorrendo somente deformações axiais no corpo. Essas direções são chamadas de principais e as deformações axiais nessas direções são conhecidas como deformações principais.

Para se encontrar as deformações principais deve-se, como na Eq. (I.14), considerar que:

$$\begin{bmatrix} (\varepsilon_x - \lambda_\varepsilon) & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & (\varepsilon_y - \lambda_\varepsilon) & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & (\varepsilon_z - \lambda_\varepsilon) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} - \\ \eta_1 \\ - \\ \eta_2 \\ - \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.17})$$

O cálculo do determinante resulta, portanto, uma equação cúbica:

$$\lambda_\varepsilon^3 - I_1 \cdot \lambda_\varepsilon^2 + I_2 \cdot \lambda_\varepsilon - I_3 = 0 \quad (\text{I.18})$$

As raízes do polinômio da Eq. (I.18) fornecem as deformações principais, onde os invariantes do estado de deformação são definidos como:

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ I_2 &= \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_z - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2 \\ I_3 &= \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + 2 \cdot \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{xz} \cdot \varepsilon_{yz} - \varepsilon_x \cdot \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_y \cdot \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_z \cdot \varepsilon_{xy}^2 \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)