Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

Centro de Educação
Campus Universitário
Cidade Universitária
Recife-PE/BR CEP: 50.670-901
Fone/Fax: (81) 2126-8952
E. Mail: edumatec@ufpe.br
www.ufpe.br/ppgedumatec

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

RITA DE CÁSSIA GOMES DE LIMA

O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO DE ALUNOS DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: DO INÍCIO DA ESCOLARIZAÇÃO ATÉ O ENSINO MÉDIO

RECIFE
2010

RITA DE CÁSSIA GOMES DE LIMA

RITA DE CÁSSIA GOMES DE LIMA

O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO DE ALUNOS DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: DO INÍCIO DA ESCOLARIZAÇÃO ATÉ O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Profª Drª Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Recife
2010

Lima, Rita de Cássia Gomes de
O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos: do início da escolarização até o ensino médio / Rita de Cássia Gomes de Lima: O Autor, 2010.
151 f. : il. ; quad. ; tab. ; 30 cm.
Orientadora: Profª. Dra. Rute E. de S. R. Borba
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica, 2010.

Inclui bibliografia e anexos.

1. Matemática - estudo e ensino 2. Educação de jovens e adultos I. Título.

37 CDU (2.ed.) UFPE
372.7 CDD (22.ed.) CE2010-046

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

ALUNA

RITA DE CÁSSIA GOMES DE LIMA

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

"O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO DE ALUNOS DA EDUCAÇÃO DE JUVENS E ADULTOS: DO INÍCIO DE ESCOLARIZAÇÃO ATÉ O ENSINO MÉDIO."

COMISSÃO EXAMINADORA:

Rute E S R Borba

Presidente e Orientador
Profª. Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Maria da Conceição F R Fonseca

Examinador Externo
Profª. Drª. Maria da Conceição Ferreira Reis Fonseca

APaula Brito

Examinador Externo
Profª. Drª. Anna Paula de Avelar Brito Lima

Gilda Guimarães

Examinador Interno
Profª.Drª. Gilda Lisbôa Guimarães

Recife, 29 de março de 2010.

“As teorias do desenvolvimento referem-se, historicamente, de modo predominante à criança e ao adolescente, não tendo estabelecido, na verdade, uma boa psicologia do adulto. Os processos de construção do conhecimento e de aprendizagem dos adultos são, assim, muito menos explorados na literatura psicológica do que aqueles referentes às crianças e adolescentes” (OLIVEIRA. 1999).

“O campo da Educação Matemática é também um campo possível de contestação, onde a subversão pode estar a serviço de uma Educação que se contraponha aos processos de exclusão” (KNIJNIK, 1998).

AGRADECIMENTOS

Na vida, o que vale mesmo é o amor que sentimos, nem tanto o amor que recebemos, pois do que vale um coração sem a experiência da doação do amor? Creio que nada. E é em nome do amor que escrevo essas poucas linhas em agradecimento aos que tanto me iluminaram nesta caminhada.

Agradeço ao meu amor maior, Deus. Sem o Senhor, não sou nada e tampouco teria encontrado pessoas tão maravilhosas, encantadoras, dedicadas, amorosas, pacientes, enfim, verdadeiros seres divinos em forma de família e amigos. Sem as Tuas mãos, sempre a me guiar, teria me perdido ao longo da jornada e quando, mesmo cansada me entregava à dor, foi sempre em Teu amor paciente, solidário e revigorante que me sentia acolhida e pronta para retornar à caminhada.

Agradeço à minha orientadora Rute Borba por toda a dedicação, carinho e paciência. Por todos os ensinamentos não só pedagógicos, mas de vida. A essa mãe acadêmica que soube cuidar dessa sua filha tão bem como só as mães sabem fazer.

Aos meus pais, Dulce (*in memoriam*) e Arnaldo, agradeço pelos anos de luta por minha educação, pelo exemplo de vida, apoio e, principalmente, amor incondicional. Ao meu irmão, Ricardo, agradeço pela paciência, apoio e amor que cultivamos em toda a nossa vida. Sem vocês três, meu mundo seria vazio. E mesmo com a saudade da mãe/companheira honrosa, amorosa, dedicada e guerreira, enfrentamos juntos desafios, vencemos e continuamos a lutar em nome de um tesouro chamado família. Amo vocês!

Aos meus primos Rudrigo Lima, Isa Brito, Marcus Lima, Janaína Lima, Márcia Calado e Júnior Calado, agradeço pelo apoio nas horas difíceis e alegrias proporcionadas. Pessoas que além do laço sanguíneo, construíram laços de eterna amizade.

Aos meus tios amados, pessoas que me acolhem com ternura.

Agradeço às minhas mães do coração, Ester e Tia Francisca, que sempre acreditaram em mim e são os pilares de minha vida neste momento, os ombros que me confortam, as mãos que me consolam, os olhares que me guiam e as vozes que me animam.

Aos anjos que Deus colocou em minha vida ao longo dos anos em forma de amigos:

Danielle Rodrigues, amiga/irmã que sempre me apoiou e confiou em mim, que foi uma das responsáveis por hoje eu ter chegado aqui, amiga que sempre me incentivou e me acolheu. Você é e sempre será fonte de sabedoria na qual sempre quero me refrescar;

Patrícia Correia, amiga que foi responsável por eu ter conhecido Rute e pessoa que também sempre me apoiou. Paty, obrigada por todo desprendimento e carinho;

Maurício Lima, amigo que, além do incentivo, trouxe novas perspectivas à minha vida. Jamais esquecerei da oportunidade de lecionar em sua escola, da mãe que compartilhou comigo quando mais precisei (Dona Irene) e de tudo que aprendi com você;

Maria Auxiliadora Rattes, amiga/irmã/mãe/conselheira que adentrou em minha vida para trazer luz. Pessoa adorável, iluminada, dedicada, honrosa, zelosa, gentil, alegre... Dôra, obrigada pelo apoio e pelo grande incentivo. Você me ensinou e me ensina a sempre buscar ser uma pessoa melhor;

Andréa Duda e Daniela Salgues, amigas/irmãs de décadas que acompanham toda minha história, inclusive acadêmica, e são fontes de inspiração, alegria e apoio;

Maria Letícia, amiga que apoiou-me e incentivou-me a entrar no mestrado;

Izauriana Borges (Dainha), amiga que foi professora e psicóloga quando precisei;

Michela Macêdo e Marcela Farias, amigas que encontrei a pouco, mas que desde sempre amei;

Tia Lourdes, pelo apoio de sempre e por ser essa tia tão maravilhosa!

Às amigas/professoras do grupo GERAÇÃO (Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da UFPE), Cristiane Pessoa, Glauce Vilela, Cristiane Rocha, Martha Ferraz, Michaelle Moraes, Juliana Azevedo e Rute Borba, por todo o incentivo, ensinamentos e apoio. Construímos juntas um grupo, além de vencedor, purpurinado.

Agradeço a Gilda Guimarães por todo o empenho em ajudar-me e pela professora dedicada, guerreira e forte que sempre lutou por seus ideais.

Agradeço a Ana Selva e Anna Paula Lima pelas valiosas sugestões efetuadas quando da qualificação do projeto e as estas e a Maria da Conceição, agradeço pelas contribuições no momento da defesa.

Aos meus companheiros de jornada no EDUMATC, a turma Número 1 desta Pós-Graduação, pessoas comprometidas com a educação.

À direção, coordenação e professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade de Pernambuco.

À CAPES, órgão financiador deste trabalho.

Agradeço ao amor de todos que, de uma forma ou de outra, influenciou significativamente para meu desenvolvimento como profissional e como pessoa. Amo todos vocês!

RESUMO

Neste estudo analisamos a compreensão de alunos da Educação de Jovens e Adultos em processo de escolarização sobre problemas de estrutura multiplicativa, mais especificamente os que envolvem o *raciocínio combinatório*. Participaram da pesquisa 150 alunos de cinco instituições (uma municipal, duas estaduais, uma federal e uma mantida pelo Serviço Social do comércio (SESC). Os alunos resolveram dezesseis questões envolvendo problemas de estrutura multiplicativa, incluindo os de *raciocínio combinatório* de naturezas distintas (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano). Na análise dos resultados verificamos o desempenho em relação às variáveis série e tipo de problema (variáveis controladas) e da faixa etária, atividades profissionais e estratégias apresentadas pelos alunos (variáveis não controladas experimentalmente). Das variáveis trabalhadas, a única que não exerceu influência no desempenho dos educandos foi a faixa etária, sendo as demais fatores interferentes. Observamos também que alunos desta modalidade de ensino resistem a usar representações não-formais para a resolução dos problemas combinatórios e os que o fazem utilizam-se mais da listagem de possibilidades. Percebemos que o trabalho do educador no auxílio aos alunos no processo de construção desses conceitos é fundamental para o desenvolvimento dos conhecimentos de *Combinatória,* sendo essencial que o professor reconheça como válidos os conceitos já adquiridos pelos alunos, antes mesmo da formalização dos mesmos, para que assim se possa ampliar e aprofundar o *raciocínio combinatório* dos estudantes.

Palavras-chave: Educação de Jovens e Adultos; Estruturas Multiplicativas; Raciocínio Combinatório.

ABSTRACT

In the present study, adults', in initial process of schooling, understanding of problems of multiplicative structures – in particular those of *combinatorial reasoning* – was analysed. One hundred and fifty adult students of five institutions (a municipal one, two state ones, one federal and a philanthropic institution) took part in the research. The students solved 16 multiplicative structure problems, including some that involved *combinatorial reasoning* of distinct natures (arrangements, combinations, permutations and Cartesian products). In data analysis, students' performance was observed in relation to the variables school year and problem type (controlled variables) and age, professional activity and strategies presented by students (variables not experimentally controlled). Of the variables considered, the only one that did not present evidence of influence on performance was age, all the others influenced performance. It was also observed that students in initial process of schooling resist in using non-formal symbolic representations whilst solving combinatorial problems and those that do so, use mostly the listing of possibilities. Teaching is, thus, fundamental in the development of *Combinatorics* knowledge, being essential the recognition of concepts acquired before formalization, so that students' *combinatorial reasoning* may be increased and enriched.

Keywords: Adult initial schooling; Multiplicative Structures; Combinatorial Reasoning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho foi analisar a compreensão de alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) em processo de escolarização sobre problemas de estrutura multiplicativa, mais especificamente os que envolvem o raciocínio combinatório. Participaram do estudo alunos da Educação de Jovens e Adultos de cinco módulos desta modalidade de ensino (Módulos I, II, III, IV e PROEJA - Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos). Para cada módulo participaram 30 alunos. Os estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental eram da rede municipal de ensino de Olinda e do Serviço Social do Comércio (SESC). Os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental foram todos de uma única escola da rede estadual de ensino do Estado de Pernambuco. Os participantes do Ensino Médio pertenciam a uma instituição federal de ensino, todos eram do segundo período do curso de Mecânica e já haviam realizado o Ensino Médio anteriormente.

A Educação de Jovens e Adultos nas redes municipais e estaduais de ensino em Pernambuco organizam os anos iniciais desta modalidade de ensino em módulos. Cada módulo corresponde a dois anos do ensino regular, ou seja, o Módulo I corresponde aos segundo e terceiro anos do Ensino Fundamental; o Módulo II corresponde aos quarto e quinto anos; o Módulo III corresponde aos sexto e sétimo anos; e o Módulo IV corresponde aos oitavo e nono anos do Ensino Fundamental.

O PROEJA é organizado em períodos e tem uma duração de seis períodos no curso de Mecânica. Vale salientar que no momento da coleta havia apenas turmas em períodos iniciais de seus cursos e a instituição autorizou a realização da pesquisa em apenas uma turma.

Como um dos focos da presente pesquisa foi a Educação Matemática de Jovens e Adultos julgamos necessário entender um pouco sobre esta modalidade de ensino.

A Educação de Jovens e Adultos é um campo que vai além da escolarização em seu sentido estrito, pois ela abrange diversos processos formativos como iniciativas, visando a qualificação profissional, o desenvolvimento comunitário, a formação política e outras questões culturais conduzidas em outros espaços que não o escolar. Quando os processos de escolarização da Educação de Jovens e Adultos são focalizados no âmbito escolar, com suas regras, espaços e tempos delimitados,tem-se, também, um fértil campo de estudo, visando inovações práticas e teóricas.

Esta modalidade de ensino é elemento importante da história de nosso país, pois a mesma é uma realidade brasileira que passou por várias fases diferentes até chegar ao estágio atual, passando de uma educação cujos propósitos se restringiam à cristianização e à sedimentação do colonizador para uma educação que visa a confiança na capacidade dos jovens e adultos.

Na atualidade, o Brasil ainda adota práticas de alfabetização na decodificação do sistema alfabético como uma estratégia de política pública mais difundida, o que dificulta a exploração do potencial formativo dos ambientes urbanos e de trabalho e dos meios de comunicação e informação. Esse tipo de prática inibe a formação de políticas intersetoriais que criem uma articulação entre “o ensino básico, as políticas culturais, de qualificação profissional e geração de trabalho e renda de formação para a cidadania, de educação ambiental e para a saúde” (Di Pierro, 2008).

Esta prática vai contra as metas discutidas na V Confitea – Conferência Internacional de Educação de Adultos, realizada em Hamburgo, Alemanha, no ano de 1997 – que teve como um dos temas principais abordados a garantia ao direito universal à alfabetização e à educação básica como ferramentas para a democratização do acesso à cultura aos meios de comunicação e às novas tecnologias da informação, sendo esta modalidade de ensino valorizada na contribuição a uma sociedade mais consciente com relação à igualdade entre homens e mulheres, à formação para o trabalho, à preservação do meio ambiente e da saúde.

Segundo Di Pierro (2001), nas concepções mais restritas do fenômeno educativo, a educação de jovens e adultos não se apresenta ligada ao pensamento político e à reflexão pedagógica, ou seja, nestas concepções restritas não há, para a esta modalidade de ensino, uma visão crítica de mundo nas quais os educandos sejam agentes de sua própria história sócio-cultural. Mas, quando a visão do fenômeno educativo é sistêmica e ampla, a EJA é considerada como parte integrante da história da educação de nosso país, um importante espaço de luta para a democratização do acesso ao conhecimento.

Para Oliveira (1999), quando nos referíamos à Educação de Jovens e Adultos no Brasil, falávamos de um adulto que era um indivíduo proveniente, em sua maior parte, de áreas rurais que chegava às grandes metrópoles e que procurava tardiamente a escola para alfabetizar-se ou cursar algumas séries do ensino supletivo. Hoje a identidade da Educação de Jovens e Adultos apresenta-se de forma diferente. Temos mais alunos em centros urbanos provenientes do próprio centro e não vindos de meios rurais. Outro fator importante que caracteriza essa clientela atualmente é a presença significativa de jovens em salas de EJA.

Também sendo um excluído da escola, contudo, geralmente incorporado aos cursos supletivos em fases mais adiantadas da escolaridade, com chances maiores de concluir o Ensino Fundamental ou Médio e estando mais ligado ao mundo urbano, o jovem atualmente compõe boa parte das turmas de alunos dessa modalidade de ensino. Segundo Ferrari e Amaral (2005), o censo de 2000 já indicava uma parcela de aproximadamente três milhões de estudantes na EJA dos quais 79% eram jovens, caracterizando, desta forma, um novo perfil dessa clientela.

Para compreender como jovens e adultos da EJA pensam e aprendem é necessário, segundo Oliveira (1999), percorrer três campos que contribuem para a definição do seu lugar social:

1. ***A condição de não-criança***, que reflete diretamente as práticas escolares, no que diz respeito ao fato que é ainda possível encontrar alunos com idade acima de 14 anos freqüentando turmas para crianças, em situações bastante constrangedoras, bem como turmas da EJA utilizando livros direcionados a crianças e, ainda, professores com práticas que infantilizam estes alunos. Tal infantilização tende a gerar atitudes de resistência, pois os educandos adultos vêem-se negados em suas características de faixa etária.

2**. *A condição de excluído da escola*** está relacionada aos fatores que levam o aluno da EJA a desistir da escola, sejam estes externos (sociais, econômicos) ou mesmo os que são gerados dentro da própria escola mediante práticas pedagógicas que provocam o insucesso do aluno, levando-o a sentir-se culpado por isto.

3. ***A condição de membros de determinados grupos culturais,*** que se refere diretamente à diversidade de vivências e experiências que fazem os alunos serem portadores de uma cultura específica, de um conhecimento próprio de um grupo.

Estas condições devem ser reconhecidas quando do levantamento dos conhecimentos de alunos da EJA e quando da proposição de atividades para esta modalidade de ensino.

De acordo com Fonseca (2002), a vida adulta proporciona experiências que adolescentes e crianças ainda não vivenciaram e mesmo que atualmente os sujeitos entrem precocemente na fase adulta cada etapa da vida humana tem suas peculiaridades e a maneira como cada um as vivencia é sensivelmente diferente.

Em relação à aprendizagem da Matemática, Fonseca (2002), coloca que existem traços muito próprios da relação dos educandos jovens e adultos com o conhecimento matemático, pois dela surge uma relação utilitária, ou seja, um indivíduo que necessita ser sujeito de conhecimento que precisa realizar-se na atualidade.

Na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986), o conhecimento não é compreendido isoladamente, ele deve ser inserido dentro de um campo conceitual que se relaciona com outros conhecimentos. Assim, um conceito se desenvolve na relação com outros conceitos, por meio de diferentes tipos de problemas, utilizando várias situações e simbolismos. Nessa teoria, defende-se que no estudo do desenvolvimento conceitual deve-se considerar um *triplet* (como o autor acima designa) de três conjuntos: (S) o conjunto de situações que dão sentido ao conceito; (I) o conjunto de invariantes que constituem as diferentes propriedades do conceito, e (R) o conjunto de representações simbólicas usadas para representar invariantes e situações.

Campo Conceitual é, portanto, “um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas e estreita conexão” (VERGNAUD, 1986).

Deste modo, a compreensão de conceitos pode começar antes mesmo do início do ensino formal e ser influenciada tanto por experiências no âmbito escolar como fora dela.

Em relação ao *raciocínio combinatório*, o estudo de Pessoa (2009) aponta dados interessantes com relação aos tipos de respostas e estratégias utilizadas por alunos dos sete aos dezessete anos. Neste estudo observou-se que os alunos, de modo geral, são capazes de compreender problemas que envolvem *raciocínio combinatório* e, mesmo quando estes não chegam ao final da resolução e não encontram a resposta correta, desenvolvem estratégias diversas na resolução dos problemas, demonstrando compreensão dos significados e invariantes implícitos nos problemas.

O *raciocínio combinatório* é um modelo matemático utilizado não somente nas escolas, mas também na vida cotidiana, sendo, portanto, importante o desenvolvimento de estudos nesta temática. Esse tipo de raciocínio é aplicado em diversas áreas: em problemas de transporte, de elaboração de horários e planos de produção, programação linear, biologia molecular, lógica, teoria da informação, economia etc. (Guirado e Cardoso, 2007).

Segundo Morgado, Pitombeira de Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991), a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. São destacados dois tipos de problemas freqüentes em análise combinatória: (1) demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições e (2) contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

A *Análise Combinatória*, para Merayo (2001), é a técnica de saber quantos elementos têm em um conjunto sem ter que necessariamente contá-los, porque para isto não é preciso listar ou enumerar todos os elementos do conjunto. Dentre os problemas combinatórios, Merayo (2001) anuncia os *arranjos*, as *permutações* e as *combinações*, situações distintas das trabalhadas nos anos iniciais de ensino – os *produtos cartesianos*. No presente estudo abordamos os problemas mais comuns de análise combinatória: *produtos cartesianos*, *permutações*, *combinações* e *arranjos*.

Para Nesher (1988, apud Nunes e Bryant, 1997), o tipo de problema multiplicativo mais difícil para as crianças é o que envolve produtos cartesianos, ou seja, um tipo de situação que requer raciocínio combinatório. São distinguidos por esta autora dois motivos para que isto ocorra: (1) o problema envolve dois conjuntos básicos mais um terceiro conjunto, o qual é identificado pela combinação de cada elemento em um conjunto básico com cada elemento do outro conjunto; (2) a correspondência um-a-muitos não é explicitamente indicada na formulação verbal.

De acordo com Brown (1981), este é um problema mais difícil do que outros problemas de relação um-a-muitos. Este resultado também foi obtido mais recentemente por Pessoa, Silva e Matos Filho (2005).

Diante do levantamento de estudos que abordam o *raciocínio combinatório*, observamos que estes focam um ou alguns dos quatro tipos de problemas que envolvem esse raciocínio. Merayo (2001) trabalhou com *arranjo, combinação* e *permutação*. Nunes & Bryant (1997), Vergnaud (1990) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) abordam o *produto cartesiano*. Pessoa e Borba (2009) sugerem uma classificação única que engloba estes quatro tipos de problemas.

O *raciocínio combinatório* não aparece com ênfase nos problemas de estrutura multiplicativa que alunos da EJA solucionam em sala de aula, embora este seja um raciocínio fundamental para que os educandos possam compreender as estruturas multiplicativas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) destacam quatro grupos de situações relacionadas às estruturas multiplicativas no ensino da Matemática que precisam ser exploradas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Entre elas estão as situações “associadas à ideia de Combinatória” (PCN, 1997).

Na área da Educação Matemática observamos, nas últimas décadas, uma variedade de pesquisas realizadas. Neste conjunto, muitas são as pesquisas sobre o processo de elaboração das crianças e adolescentes em relação a diversos conceitos matemáticos. Contudo, estudos que abordem como jovens e adultos constroem esses conceitos são relativamente pouco numerosos. Menos ainda encontramos pesquisas que abordem a compreensão de alunos da Educação de Jovens e Adultos sobre a Combinatória.

Para o desenvolvimento desta dissertação procuramos estudos que abordam o desenvolvimento de conceitos, em especial os que investigaram desenvolvimentos conceituais em *raciocínio combinatório*, e efetuamos um levantamento realizado com alunos da EJA dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e Médio Profissionalizante desta modalidade de ensino. Todos os alunos resolveram as mesmas questões que apresentavam problemas de estrutura multiplicativa: *multiplicação, divisão, produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação*. Abordar estes problemas de naturezas diferentes em um teste foi necessário para que pudéssemos comparar com estudos anteriores que afirmam que problemas que envolvem o raciocínio combinatório são os mais difíceis dentro do campo das estruturas multiplicativas e também para que pudéssemos identificar quais dentre estes problemas os alunos apresentam maior dificuldade.

Carraher, Carraher, e Schliemann (1988), em suas pesquisas efetuadas com profissionais de áreas diversas com relação à experiência social e à formação de conceitos matemáticos, observaram que é possível a construção de conhecimentos matemáticos no exercício de algumas profissões e que estes desenvolvem estratégias de cálculo para resolver situações-problema que envolvem o seu contexto de trabalho e, além disso, se depararam com o fato de que a experiência social combinada com a experiência escolar melhoram o desempenho matemático.

Outros dois estudos, focando números decimais, apontam resultados importantes na área da Educação Matemática de jovens e adultos. O estudo de Silva (2006), realizado com 64 estudantes, metade adultos e a outra metade crianças, 32 portadores de escolaridade em números decimais e os demais detentores apenas de experiência extra-escolar, observou que os adultos tiveram um desempenho superior ao das crianças, inclusive alguns não escolarizados se saíram melhor do que as crianças que haviam estudado decimais na escola. Gomes (2007) focou os conhecimentos de alunos jovens e adultos em relação aos números decimais, buscando referências em suas atividades profissionais (marceneiros e pedreiros) para resolverem as situações propostas. Os resultados demonstraram que a experiência de pedreiros e marceneiros foi significativa na formação do conceito de número decimal, por causa das estratégias de cálculo usadas e pelas habilidades demonstradas por eles.

Schliemann (1988), que desenvolveu uma pesquisa, referente ao raciocínio combinatório, com três grupos de sujeitos: cambistas do jogo do bicho, estudantes recém aprovados no vestibular e trabalhadores que eram do mesmo grupo socioeconômico que os cambistas. Observou-se que os cambistas comparados com os outros profissionais demonstraram um melhor desempenho. Dos três grupos o que teve um melhor desempenho foi o dos estudantes, contudo a diferença não foi estatisticamente significativa. No estudo concluiu-se que a experiência dos cambistas auxiliou no desempenho e que a experiência escolar também exerceu influência no desempenho dos estudantes, ou seja, que não é necessário o apoio em fórmulas matemáticas para solucionar estes tipos de problemas. O interessante é combinar a experiência escolar com a diária.

Bryant, Morgado e Nunes (1992) realizaram uma pesquisa que envolveu trinta e duas crianças entre oito e nove anos, resolvendo problemas de correspondência um-a-muitos simples e problemas de produtos cartesianos (um tipo de situação combinatória). As crianças foram divididas em dois grupos. Observou-se que nenhuma das crianças de oito anos respondeu corretamente os problemas de produto cartesiano sem o apoio do material completo e os que tinham material completo tiveram melhor desempenho, embora não tenha sido estatisticamente significativa a diferença entre os dois grupos. Observou-se também que os alunos de nove anos não apresentaram um resultado satisfatório.

O presente estudo tem por objetivo analisar a compreensão de indivíduos da Educação de Jovens e Adultos em todos os níveis desta modalidade de ensino sobre problemas de estruturas multiplicativas, especificamente os que envolvem o *raciocínio combinatório*. Dentre os possíveis campos conceituais, tem-se, segundo Vergnaud (1986), as estruturas aditivas (conceitos de número natural, de adição, de subtração, de número inteiro relativo, de medida, etc.) e as estruturas multiplicativas (conceitos relacionados à multiplicação, à divisão, ao número racional, ao raciocínio combinatório etc.).

Para Pessoa (2009), tanto na escola como fora dela problemas que envolvem situações nas quais é necessário categorizar elementos e combiná-los estão presentes no cotidiano. E para resolver situações que se apresentam ao educando em seu dia-a-dia, o mesmo precisa colocar em ação seus conhecimentos adquiridos, provocando a formação de novos saberes. Assim, na escola os estudos de conteúdos, relacionados ou aparentemente sem relação, proporcionam aos alunos desenvolvimento de certos conceitos e possibilitam fazer a relação com situações nas quais estes conceitos são vivenciados.

Assim, como se pode observar, problemas que envolvem o raciocínio combinatório apresentam-se como um desafio para os educandos de diferentes faixas etárias.

Com este estudo buscamos compreender como alunos jovens e adultos resolvem problemas que envolvem *raciocínio combinatório*, com a finalidade de contribuir para esta área, pois é importante entender como essa clientela pensa sobre problemas dessa natureza, quais suas dificuldades e facilidades, estratégias utilizadas e quais conhecimentos prévios eles possuem.

O primeiro capítulo desta dissertação trata da educação de jovens e adultos no Brasil, abordando as leis e diretrizes da EJA e discutindo também a Educação Matemática nesta modalidade de ensino. Visando uma melhor compreensão sobre o desenvolvimento de conceitos, fez-se necessário subdividir o segundo capítulo em duas partes: A Teoria dos Campos Conceituais e as Estruturas Multiplicativas. No terceiro capítulo abordamos o Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório. No capítulo seguinte são apresentados os objetivos da pesquisa e discutimos o método utilizado para o desenvolvimento do estudo. Em seguida, no Capítulo 5, apresentamos os resultados obtidos com análise e discussão dos mesmos. No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões tiradas e as implicações educacionais que surgiram a partir da realização do estudo.

CAPÍTULO 1

EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

1.1 Breve Histórico da Educação de Jovens e Adultos

Para a realização deste estudo foi necessário um levantamento de produções acadêmicas que envolvem a Matemática na Educação de Jovens e Adultos, além de trabalhos sobre o desempenho de alunos na resolução de problemas que envolvem o raciocínio combinatório. Nessa busca, encontramos poucos estudos sobre este último tópico e uma gama considerável de trabalhos sobre a Educação de Jovens e Adultos. Portanto, muito poucos estudos foram identificados que se dedicaram ao levantamento de estratégias e dificuldades na resolução de problemas combinatórios de alunos jovens e adultos.

A Educação de Jovens e Adultos na história da educação brasileira passou por modificações ao longo dos anos. Com o desenvolvimento da economia capitalista de produção no século XVII, a mão-de-obra um pouco mais qualificada passou a ser mais exigida. Isto levou a esforços para a institucionalização da escola.

Embora a escolarização tenha passado a ser um item elementar na sociedade capitalista em pleno desenvolvimento, a burguesia não podia permitir que as camadas menos favorecidas fossem instruídas a ponto de elevar o nível das técnicas, pois isto poderia significar um risco à subversão da ordem. A solução a este impasse foi favorecer aos filhos da elite uma educação humanística de “tipo clássico”, e às massas caberiam uma educação elementar, limitada a ler, escrever e contar, pois estes eram conhecimentos indispensáveis no manejo das máquinas.

Na década de 40 se constitui no Brasil a educação de jovens e adultos como tema de política educacional. Embora já se mencionasse em textos normativos, em meados da década de 30, essa modalidade de ensino começou a tomar corpo mesmo na década seguinte com iniciativas concretas e uma preocupação em oferecer às camadas populares, até então excluídas da escola, os benefícios da escolarização.

De acordo com Beiseigel (1999), a Campanha Nacional de Educação de Jovens e Adultos, da década de 40, foi parte importante da história da educação no Brasil, pois esta foi uma política governamental que exprimia o entendimento da educação de adultos como elemento essencial na elevação dos níveis educacionais da população em seu conjunto. Ela tinha por objetivo levar a “educação de base” ou “educação fundamental” a todos os brasileiros iletrados nas cidades e nas áreas rurais. Porém, ela perdeu força em meados dos anos 50 devido às críticas em função dos métodos utilizados.

O trabalho de Paulo Freire passou a direcionar experiências diversas de educação de adultos, organizadas por atores distintos, com graus variados de ligação com o aparato governamental – os programas do Movimento de Educação de Base (MEB) e o Movimento de Cultura Popular do Recife foram alguns exemplos disso.

Em 1963, após a II Conferência Internacional de Educação de Adultos, em Montreal, essa modalidade de ensino passou a ser vista de duas formas: como continuação da educação formal, permanente, e como uma educação de base ou comunitária. Um ano após, no Brasil, o Ministério da Educação organizou o último dos programas de porte nacional desse ciclo, o Programa Nacional de Alfabetização de Adultos, cujo planejamento incorporou largamente as orientações de Paulo Freire. Ações como essa acabaram por desaparecer durante o regime militar devido à violenta repressão do governo.

A partir de 69 o governo federal organizou o Movimento Brasileiro de Alfabetização (MOBRAL) que foi concebido como um sistema que visava ao controle da alfabetização da população, principalmente a rural. Diferente do que aconteceu na Campanha de 1947, o governo federal investiu significativamente em recursos na montagem de uma organização de âmbito nacional e autônoma em relação às secretarias estaduais e ao próprio Ministério da Educação.

Após a III Conferência no ano de 1972, em Tóquio, a Educação de Adultos volta a ser entendida como suplência da Educação Fundamental, reintroduzindo jovens e adultos, principalmente analfabetos, no sistema formal de educação.

Em 1985, na cidade de Paris, surge o conceito de Educação de Adultos na IV Conferência Internacional de Educação de Adultos. Neste mesmo ano, foi extinto o MOBRAL e a Fundação Educar foi criada em meio ao processo de abertura política. Diferentemente do MOBRAL, a Fundação Educar passou a fazer parte do Ministério da Educação, exercendo a supervisão e o acompanhamento junto às instituições e secretarias que recebiam os recursos transferidos para execução de seus programas.

Em 1990, o Governo Collor fechou a Fundação Educar, não criando nenhuma outra que assumisse suas funções. A partir de então, tem-se a ausência do Governo Federal como articulador nacional e indutor de uma política de educação de alfabetização de jovens e adultos no Brasil.

Embora nas últimas décadas o Brasil tenha conseguido avanços significativos no campo da educação, em relação à Educação de Jovens e Adultos ainda há muito o que ser feito, principalmente no que se refere ao diversos tipos de analfabetismo. São 65 milhões de jovens e adultos com mais de quinze anos de idade sem o ensino fundamental completo, sendo 33 milhões analfabetos funcionais e 14,6 milhões analfabetos absolutos (PNAD, 2003 apud Henriques e Ireland, 2008). Quando analisadas a partir do recorte geográfico, de gênero e de raça/etnia, verifica-se que as taxas de analfabetismo são diferentes. As maiores taxas de analfabetismo encontram-se na região Nordeste. Entre os negros (média nacional) a taxa é de 12,9%, duas vezes mais superior que a encontrada entre os brancos. Com relação ao gênero, o analfabetismo entre as mulheres chega a 52%. Diante desta realidade, o governo atual expressa a alfabetização como prioridade política. A EJA neste momento não passa a ser vista como etapa abreviada de alfabetização, mas diretamente articulada com o aumento da escolarização de jovens e adultos.

A educação de jovens e adultos, hoje, compõe a dimensão da inclusão. “A articulação com cursos de profissionalização explicita o papel da alfabetização como portal de entrada da inclusão e da cidadania” (Henriques e Ireland, 2008).

Lançado em 2003, o *Brasil Alfabetizado* tem por principal objetivo a inclusão pela efetiva alfabetização de pessoas jovens e adultas com quinze ou mais anos que não tiveram acesso à leitura e à escrita. Esse programa do governo pretende, segundo Henriques e Ireland (2008), ser um portal de entrada à cidadania.

> “O governo definiu o Brasil Alfabetizado como uma campanha plural, que acolhe toda sorte de iniciativas já em andamento e uma diversidade de metodologias de alfabetização. Representantes de várias instituições e segmentos sociais terão assento no Conselho Nacional de Alfabetização, que orientará os rumos futuros do Programa” (DI PIERRO & GRACIANO, 2003).

Este Programa, através do MEC – Ministério da Educação e do Desporto – contribui financeiramente com órgãos públicos estaduais e municipais, instituições de ensino superior e organizações sem fins lucrativos que desenvolvem ações de alfabetização, compreendendo também o incentivo à leitura e a difusão de livros para recém alfabetizados.

Paiva (1987) sintetiza a história da Educação de Jovens e Adultos no Brasil em três períodos: 1º - de 1946 a 1958, quando foram realizadas campanhas nacionais de iniciativa oficial para erradicar-se o analfabetismo; 2º - de 1958 a 1964, sendo em 1958 realizado o 2º Congresso Nacional de Educação de Adultos, tendo a participação marcante de Paulo Freire. Esse congresso abriu as portas para o problema da alfabetização que desencadeou o Plano Nacional de Alfabetização de Adultos, dirigido por Paulo Freire e extinto pelo Golpe de Estado de 1964; 3º - o MOBRAL, que foi concebido como um sistema que visava ao controle da alfabetização da população, principalmente a rural. Com a redemocratização (1985), a "Nova República" extinguiu o MOBRAL, criou a Fundação Educar e outras iniciativas surgiram.

1.2 Leis e Diretrizes para a Educação de Jovens e Adultos

A Constituição de 1988 ratificou o dever do Estado em proporcionar escolaridade básica, independentemente da idade, elevando, assim, a Educação de Jovens e Adultos ao mesmo patamar da educação de crianças de 07 a 14 anos, garantindo a sua obrigatoriedade e gratuidade.

Atualmente, o sistema educacional brasileiro está organizado em dois níveis: Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio) e Ensino Superior. A Educação Básica é flexível para atender aos jovens e adultos e os portadores de necessidades especiais. A Educação profissional é opcional e complementar à Educação Básica, podendo ser cursada ao mesmo tempo ou após a mesma.

Nosso sistema de ensino permite a participação da iniciativa privada, porém é direito do cidadão e dever do Estado sua oferta pública e gratuita no nível fundamental, médio e na educação infantil.

Sancionada em 20 de dezembro de 1996, a Lei nº 9394 estabeleceu as diretrizes e bases da Educação Nacional e reservou a Seção V, Artigos 37 e 38, para a Educação de Jovens e Adultos, nos quais estão explicitadas as responsabilidades do poder público para com essa parcela da população, viabilizando e estimulando o acesso e a permanência do trabalhador na escola, pois os sistemas de ensino assegurarão gratuitamente aos jovens e adultos, que não puderam efetuar os estudos na idade regular, oportunidades educacionais apropriadas. (Haddad, 1998).

Na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 9.394/96, constam no

Título V, Capítulo II, Seção V, dois artigos relacionados, especificamente, à Educação de Jovens e Adultos:

> Art. 37 - A educação de jovens e adultos será destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos no ensino fundamental e médio na idade própria.
> § 1º Os sistemas de ensino assegurarão gratuitamente aos jovens e aos adultos, que não puderam efetuar os estudos na idade regular, oportunidades educacionais apropriadas, consideradas as características do alunado, seus interesses, condições de vida e trabalho, mediante cursos e exames.
> § 2º O Poder Público viabilizará e estimulará o acesso e a permanência do trabalhador na escola, mediante ações integradas e complementares entre si.
> Art. 38 - Os sistemas de ensino manterão cursos e exames supletivos, que compreenderão a base nacional comum do currículo, habilitando ao prosseguimento de estudos em caráter regular.
> § 1º Os exames a que se refere este artigo realizar-se-ão:
> I. no nível de conclusão do ensino fundamental, para os maiores de quinze anos; II. no nível de conclusão do ensino médio, para os maiores de dezoito anos.
> § 2º Os conhecimentos e habilidades adquiridos pelos educandos por meios informais serão aferidos e reconhecidos mediante exames (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, 1996).

Essa lei se distingue da Lei 5692/71 em ao menos um aspecto importante que se refere à distinção entre a Educação de Jovens e Adultos (Capítulo II. Seção V. art.37 e 38), destinada àqueles que não tiveram acesso aos estudos no Ensino Fundamental e Médio e a Educação Profissional (Capítulo III. art. 39 a 42), voltada para o aprimoramento e qualificação daqueles vinculados à vida produtiva.

Um outro aspecto importante, estabelecido pela Nova Lei, refere-se à redução da idade mínima de acesso aos exames supletivos:

I Maiores de 15 anos: no nível de conclusão do ensino fundamental, (anteriormente o limite era de 18 anos);

II Maiores de 18 anos: no nível de conclusão do ensino médio, (anteriormente o limite era de 21 anos).

Um dos objetivos e prioridades no Plano Nacional de Educação é a

> “Garantia de ensino fundamental a todos os que não tiveram acesso na idade própria ou que não o concluíram. A erradicação do analfabetismo faz parte dessa prioridade, considerando-se a alfabetização de jovens e adultos como ponto de partida e intrínseca desse nível de ensino. A alfabetização dessa população é entendida no sentido amplo de domínio dos instrumentos básicos da cultura letrada, das operações matemáticas elementares, da evolução histórica da sociedade humana, da diversidade do espaço físico e político mundial e da constituição da sociedade brasileira. Envolve, ainda, a formação do cidadão responsável e consciente de seus direitos”. (Plano Nacional de Educação - Introdução: objetivos e prioridades dois, 2000).

Os alunos da Educação de Jovens e Adultos têm seu direito assegurado no Título VIII, Capítulo III, Seção I – da Educação da Constituição Federal, Artigo 208, Inciso I, que garante a provisão pública de “*ensino fundamental obrigatório e gratuito, assegurada, inclusive, sua oferta para todos os que a ela não tiveram acesso na idade própria*”.

Para Rocha, Karl, Veiga & Guimarães (2002), a Educação de Jovens e Adultos deve ser sempre uma educação multicultural, uma educação que desenvolva o conhecimento e a integração na diversidade cultural, uma educação para a compreensão mútua, contra a exclusão por motivos de raça, sexo, cultura ou outras formas de discriminação e, para isso, o educador deve conhecer bem o próprio meio do educando, pois somente conhecendo a realidade desses jovens e adultos é que haverá uma educação de qualidade.

Em 1997 foi realizada em Hamburgo, Alemanha, a V Conferência Internacional de Educação de Adultos – Confitea – na qual 1500 participantes firmaram acordo diante do direito dos cidadãos de todo o planeta à aprendizagem no desenvolver da vida.

O objetivo da Educação de Jovens e Adultos de acordo com a *Declaração de Hamburgo* aprovada na V Confitea é de desenvolver a autonomia e a responsabilidade de cada indivíduo e comunidade no enfrentamento das mudanças socioeconômicas e culturais do mundo atual, em meio a uma cultura de paz e democrática que promova a coexistência tolerante e a participação coletiva e consciente dos cidadãos.

De acordo com o Art. 3º da *Declaração de Hamburgo* entende-se por Educação de Adultos,

> "O conjunto de processos de aprendizagem, formal ou não, graças ao qual as pessoas consideradas adultas pela sociedade a que pertencem desenvolvem as suas capacidades, enriquecem os seus conhecimentos e melhoram as suas qualificações técnicas e profissionais, ou as reorientam de modo a satisfazerem as suas próprias necessidades e as da sociedade. A educação de adultos compreende a educação formal e a educação permanente, a educação não-formal e toda a gama de oportunidades de educação informal e ocasional existentes numa sociedade educativa multicultural em que são reconhecidas as abordagens teóricas e baseadas na prática" (*Declaração de Hamburgo*, 1997, apud VÓVIO e IRELAND, 2008).

Embora encontros como estes ocorram com a finalidade de promover melhoramentos e valorização da Educação de Jovens e Adultos, grande parte dos governos mundiais reduziram financiamento público para aprendizagem dos adultos. Isso ocorre em grande parte devido à prioridade concedida à educação de crianças e adolescentes por parte dos governos nacionais e de agências internacionais como o Banco Internacional para Reconstrução e Desenvolvimento (BIRD).

No Brasil, embora a *Declaração de Hamburgo* tenha influenciado o Parecer do relator das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação de Jovens e Adultos, é predominante, ainda, a visão compensatória que atribui à Educação de Jovens e Adultos (EJA) a mera função de reposição de escolaridade não realizada na infância ou adolescência, distanciando-se, assim, da multiplicidade de processos formais e informais de aprendizagem e educação continuada ao longo da vida, necessárias, de acordo com o conceito de formação de adultos adquirido a partir da V Confitea.

Pensar na EJA, no mundo globalizado, é compreendê-la como um direito de todos, que se dá ao longo de toda a vida e, que pode ser adquirida nos diversos setores que compõem a sociedade. A Educação de Adultos na visão da Declaração de Hamburgo, no seu artigo 3º, é vista como um processo que engloba as

> *(...) aprendizagens, formal ou informal, onde pessoas consideradas 'adultas' pela*

> *sociedade desenvolvem suas habilidades, enriquecem seu conhecimento e aperfeiçoam suas qualificações técnicas e profissionais, direcionando-as para a satisfação de suas necessidades e as da sua sociedade. (Declaração de Hamburgo, 1997, apud VÓVIO e IRELAND, 2008).*

Daí, compreender que a EJA representa um resgate da dívida social para com aqueles que não tiveram acesso ao código escrito como um bem social, indispensável para a conquista de uma cidadania plena.

O Brasil precisa, ainda, implementar mudanças no sistema educativo, que garantam a todos oportunidades de acesso e permanência numa escola que trabalhe os conhecimentos científicos e tecnológicos, na perspectiva de fazê-los operar, rever e reconstruir saberes, para que possam enfrentar o mundo do trabalho cada vez mais exigente e competitivo.

A vida cotidiana dos jovens e adultos é constituída de situações problemáticas com as quais se defrontam diariamente, e sua resolução depende de sua capacidade de organizar seu pensamento, de criar, de programar e controlar ações, de comparar resultados, de reconhecer erros e refazer ações e, sobretudo, pela capacidade de tomar decisões.

A Câmara de Educação Básica (CEB) do Conselho Nacional de Educação (CNE) teve aprovados o Parecer CNE/CEB nº 04, em 29 de janeiro de 1998, e o Parecer CNE/CEB nº 15, de 1º de junho de 1998, cujas homologações resultaram nas Resoluções CNE/CEB nº 02 de 15/4 e CEN/CEB nº 3 de 23/6, ambas de 1998. De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, a Câmara de Educação Básica respondia à sua atribuição de *deliberar sobre as diretrizes curriculares propostas pelo Ministério da Educação e do Desporto* (art. 9º, § 1º, alínea “c" da Lei nº 4.024/61, com a versão dada pela Lei nº 9.394/96). Assim, as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio se estenderiam e passariam a viger para a Educação de Jovens e Adultos. De acordo com a lei nº 9.394/96, a EJA passou a ser uma modalidade da Educação Básica nas etapas do Ensino Fundamental e Médio, com suas especificidades, recebendo, deste modo, um tratamento voltado a ela.

1.3 A Educação de Jovens e Adultos e o Ensino de Matemática

Ao se falar em Educação Matemática de Jovens e Adultos estamos nos referindo a uma educação básica voltada a sujeitos que não iniciaram ou estão reiniciando a vida escolar, mas que possuem ricas experiências anteriores – incluindo muitos conhecimentos matemáticos. Referimos-nos, de um modo mais amplo, a um público de excluídos sociais que procuram ser re-incluídos (ou incluídos) numa oportunidade de escolarização que reconheça suas aprendizagens anteriores.

Para Melo e Passeggi (2006), nas aulas de Matemática é que observamos acentuadamente a baixa auto-estima dos alunos da Educação de Jovens e Adultos. De modo geral, esses alunos apresentam dificuldades na resolução de situações-problema propostas pelo professor quando solicitados a utilizar-se do registro escrito. Contudo, muitos conseguem resolvê-las mediante procedimentos de cálculo utilizados no cotidiano, realizando operações mentalmente com rapidez.

A Matemática é elemento importante para o exercício da cidadania, o que exige que as pessoas sejam cada vez mais escolarizadas. Provavelmente este é um dos motivos pelos quais jovens e adultos procurem (re)inserir-se na escola, na esperança de melhoria das condições de vida. A aprendizagem da Matemática na Educação de Jovens e Adultos deve se justificar “com oportunidades de fazer emergir uma emoção que co-move os sujeitos enquanto resgata (e atualiza) vivências, sentimentos, cultura e, num processo de confronto e reorganização, acrescenta mais um elo à história do conhecimento matemático” (FONSECA, 2002).

É por meio das experiências vividas, habilidades, cultura, valores e capacidade de reflexão que os alunos da EJA levam seus conhecimentos à escola. Estes aspectos, quando trabalhados na instituição escolar, devem considerar as formas como os alunos percebem o que está sendo ensinado ou como lêem o mundo, propiciando a problematização da realidade de forma a levá-los a uma intervenção na mesma.

Em todos os níveis e modalidades de ensino, em particular na EJA, é necessário respeitar e considerar os conhecimentos incorporados intuitivamente pelos alunos do modelo cultural ao qual pertencem.

Carvalho (1995), afirma que muitas vezes a escola não reconhece o conhecimento matemático do aluno advindo da prática social, o que faz urgente repensar a formação do professor que atua na EJA.

A escola não pode deixar de reconhecer que o educando cria maneiras próprias de resolução de problemas para viver num mundo letrado e situar-se nele, estabelecer relações, elaborar hipóteses, enfim, envolve-se em atividades que se constituem em conhecimentos matemáticos não sistematizados.

Com relação à valorização dos saberes dos educandos, Paulo Freire (1996), ensina que a escola precisa não apenas respeitar os conhecimentos que os educandos socialmente constituíram em suas práticas, como também possibilitar-lhes uma reflexão sobre esses saberes e a sua relação com o estudo dos conteúdos escolares. Considerar os conhecimentos anteriores dos alunos é a prática na qual o educador está dando vez ao aprendiz, reconhecendo que ele não é agente passivo da história, mas sujeito que a constrói.

Entre muitos alunos da EJA práticas de cálculo oral são frequentes e, sobre o cálculo mental, Melo e Passeggi (2006) afirmam que este não deve ser substituído pelo cálculo escrito, mas é essencial reconhecer sua relevância. Faz-se, portanto, mister a socialização dos procedimentos utilizados pelos alunos na resolução dos problemas, pois, assim, o educando pode relacionar o trabalhado na escola com o fazer matemático do seu cotidiano.

Freire (1986) afirma que o aprendizado de cada indivíduo ocorre de forma diferente, de acordo com a maneira em que ele se encontra inserido no mundo. Assim, se cada educando aprende de um jeito próprio, distinto dos demais, de acordo com sua vivência, é necessário também que o educador não só respeite os saberes com que os educandos chegam até ele, mas também, é necessário "discutir com os alunos a razão de ser de alguns desses saberes em relação com o ensino de conteúdos" (FREIRE, 1996).

Ressaltando a importância de se valorizar e estabelecer conexão entre os conhecimentos anteriores dos educandos jovens e adultos com os científicos no processo de ensino-aprendizagem, temos que retomar três condições analisadas por Oliveira (1999):

1) ***A condição de não-criança*** – observa-se ainda práticas de infantilização da Educação de Jovens e Adultos, uma vez que alguns livros didáticos e certas práticas docentes enfatizam procedimentos e métodos voltados ao público infantil. Na psicologia observam-se mais estudos sobre o processo de desenvolvimento cognitivo de crianças e adolescentes, contudo, os processos de aprendizagem dos

adultos são poucos explorados, pois se encara essa fase da vida humana como um período de estabilidade e ausência de mudanças. Porém, é necessário distinguir adultos de crianças. Os adultos trazem consigo uma história diferente das crianças, pois vivenciaram mais eventos, estão inseridos no mundo do trabalho e as relações interpessoais são distintas das vividas pelas crianças. As peculiaridades da vida adulta permitem que o educando traga consigo diferentes habilidades e dificuldades e que tenha uma capacidade maior de reflexão sobre o conhecimento e seus próprios processos de aprendizagem.

2) ***A condição de excluídos da escola*** – a situação de exclusão contribui para desenhar a especificidade de jovens e adultos como sujeitos de aprendizagem. Como este público não é o "público alvo", currículos, programas, procedimentos metodológicos são concebidos para crianças e adolescentes. Essas inadequações levam, muitas vezes, à evasão escolar. Há, frequentemente, uma distância entre a escola e alunos jovens e adultos, o que pode conduzir ao afastamento desses alunos. Porém, devemos levar em consideração que fatores sociais e econômicos também são relevantes nessa ação exclusiva. Outro fator importante é o afetivo, pois muitos alunos deixam de frequentar a escola por vergonha, pois acreditam que serão os únicos adultos em salas de aula com crianças.

3) ***A condição de membros de determinados grupos culturais*** – o problema da Educação de Jovens e Adultos remete-nos a uma questão de especificidade cultural. É necessário que suas especificidades culturais sejam examinadas com relação a outros aspectos que os definem como um grupo com vivências e experiências próprias.

Estudos apontam, segundo Fonseca (2002), que alunos da EJA têm anseio por dominar conceitos e procedimentos da Matemática, isto é parte importante para alunos que voltam ou começam a estudar. Contudo, não é apenas buscar adquirir dentro da escola um instrumental para uso imediato no cotidiano, pois boa parte dos conhecimentos e habilidades matemáticas eles já possuem e dominam bem, como observam Carraher, Carraher e Schliemann (1988).

Para Fonseca (2002) seria necessário atribuir sentido ao envolvimento consciente com práticas e critérios matemáticos. E essa conscientização não estaria atrelada apenas à capacidade de selecionar e utilizar estratégias matemáticas de forma eficaz, mas ter uma visão crítica da função social dessas práticas e critérios, de sua seleção e utilização, de suas expressões e de seus registros. Caso contrário, o ensino de Matemática poderá contribuir para a evasão escolar, dando razões aos alunos para se distanciarem cada vez mais da escola e permitindo a reprodução de fórmulas de discriminação etária, cultural ou social, justificando, assim, o insucesso dos processos de ensino/aprendizagem.

Na Educação de Jovens e Adultos, a escola deve possibilitar acesso democrático à cultura letrada. Assim sendo, a educação matemática não apenas dará acesso a um vocabulário específico, mas proporcionará provimento de modos de tratamento, organização e registro da informação, orientando a compreensão e viabilizando a comunicação. Isto dará uma resignificação à dinâmica dialógica entre educador e educando, auxiliando o seu desenvolvimento profissional, cultural, intelectual e ético.

Durante anos no Brasil, a EJA esteve particularmente voltada à questão da alfabetização restringindo, assim, seu campo de atuação. Atualmente a concepção de EJA tende a ampliar seus horizontes, pois pretende oferecer aos jovens e adultos conteúdos de aprendizagem imprescindíveis à sua inserção social, ajudando no trato com ferramentas essenciais para que continuem aprendendo.

Segundo Arroyo (2003), é possível construir uma escola para a Educação de Jovens e Adultos que nasce no âmbito escolar, a partir das vivências cotidianas nas quais surgem as dificuldades, expectativas, desejos e propostas relacionadas à aquisição de conhecimento dos envolvidos no processo educacional.

Fonseca (2002) orienta que uma proposta educativa precisa indagar seus alunos sobre suas expectativas, demandas e desejos, questionando-se a si mesma sobre a realidade de sua disposição e sobre a disponibilidade de suas condições para atender os anseios dos alunos ou com eles negociar. Percebemos, entretanto, que muitas propostas não têm priorizado o aluno em suas elaborações.

Para Arroyo (2005), o direito à Educação de Jovens e Adultos deverá ultrapassar a oferta de uma segunda oportunidade de escolarização. É necessário reconhecer esses alunos como sujeitos de direitos humanos. O autor defende que a história da EJA pode fornecer didáticas, conteúdos, processos, tempos e espaços a serem levados em conta na sua reconfiguração. Nesta perspectiva é necessário considerar os conhecimentos anteriores dos educandos jovens e adultos, incluindo nessa necessidade de (re)conhecimento a base cultural desses indivíduos, pois segundo Sacristán (2000), a escola deve considerar os conteúdos culturais dos aprendizes jovens e adultos.

Para Silva (2006), uma contribuição importante para o processo de ensino-aprendizagem na EJA é o levantamento dos conhecimentos matemáticos desse público. Desta forma, os educadores devem adotar uma prática reflexiva, avaliando suas ações e contribuições para a facilitação do processo de aprendizagem.

De acordo com Fonseca (2002), a idade cronológica do indivíduo proporciona experiências, as quais crianças e adolescentes ainda não puderam vivenciar. Mesmo que o desenvolvimento socioeconômico e cultural tenha acelerado a entrada precoce na vida adulta, cada fase da vida humana tem suas peculiaridades e o modo como cada um se insere nela é sensivelmente diferente.

Ao contrário da educação de crianças e adolescentes que tem uma referência no porvir, na educação de adultos a Matemática adquire um caráter de atualidade, num resgate de um indivíduo que necessita ser sujeito de conhecimento que precisa realizar-se no presente. E assim, a Matemática pode proporcionar experiências significativas por não serem apenas vivenciadas, mas também apreciadas pelo educando.

Estudos sobre a Educação de Jovens e Adultos e o ensino da Matemática demonstram esforços para contribuir com o desenvolvimento da EJA no país. Um exemplo é o estudo de Silva (2006), que realizou uma pesquisa com 64 estudantes, 32 adultos e 32 crianças, metade portadores de escolaridade em números decimais e os demais detentores apenas de experiência extra-escolar. Observou-se que o desempenho dos adultos foi estatisticamente superior ao das crianças e que mesmo adultos não escolarizados em decimais desempenharam-se bem melhor que crianças que já haviam estudado decimais na escola.

Sobre saberes de adultos e crianças sobre números decimais, alguns adultos não escolarizados, neste estudo de Silva, conseguiram resolver problemas com números decimais melhor que alguns já escolarizados. Assim, a falta de efeito da escolarização no desempenho dos participantes revela quanto o ensino deste conteúdo precisa ser revisto, para que se possa proporcionar aos alunos aprendizagens significativas.

Os índices de reprovação em Matemática mostram que é necessário que o educador tome consciência de que esta disciplina acaba excluindo os alunos no processo educativo, o que nega o direito à cidadania.

Silva & Monteiro (2000, 2001a e 2001b) realizaram estudos com adultos com pouca escolaridade. Foram levantadas situações nas quais os educandos teriam se sentido “lesados” no exercício da sua cidadania. Constatou-se que os jovens e adultos detêm saberes experienciais e do quanto eles necessitam aprender para conseguirem enfrentar as situações diárias. Os alunos que participaram destas pesquisas destacaram como ponto crucial em suas atividades comerciais ou profissionais a importância em se dominar o código escrito na representação matemática.

Fantinato (2004) aborda três eixos de análise com foco na educação matemática como construto da formação para o exercício da cidadania. O primeiro se refere à educação matemática enquanto instrumento de conscientização política; o segundo enquanto instrumento para o mercado de trabalho e o terceiro considerando os modos próprios de raciocínio matemático do educando enquanto ferramenta para sobreviver. Fantinato encontra dados semelhantes aos de Silva & Monteiro, nos quais os alunos de EJA ignoram os centavos no cálculo e arredondam o valor dos produtos para cima para “não arriscar de não ter dinheiro na hora do caixa” (FANTINATO, 2004).

Carraher, Carraher e Schliemann (1988), em suas pesquisas efetuadas com profissionais de áreas diversas com relação à experiência social e à formação de conceitos matemáticos, descobriram que é possível a construção de conhecimentos matemáticos no exercício de algumas profissões e que estes desenvolvem estratégias de cálculo para resolver situações-problema que envolvem o seu contexto de trabalho e, além disso, se depararam com o fato de que a experiência social combinada com a experiência escolar melhoram o desempenho matemático.

Schliemann (1988) desenvolveu uma pesquisa com três grupos de sujeitos (20 cambistas do jogo do bicho, 20 estudantes recém aprovados no vestibular – metade havia escolhido a área de ciências exatas e tecnologia e a outra metade cursos da área de humanas e sociais – e 20 trabalhadores que eram do mesmo grupo socioeconômico que os cambistas, mas exerciam funções que não exigiam o uso da análise combinatória). Todos responderam a questões que envolviam problemas combinatórios. Observou-se que os cambistas comparados com os outros profissionais demonstraram um bom desempenho. No grupo dos estudantes verificou-se não existir nenhuma relação entre o nível de desempenho nos problemas de permutação e o reconhecimento de que eram problemas já estudados pelos alunos na escola em análise combinatória. Concluiu-se que por terem experiência com o jogo do bicho, os cambistas descobriram estratégias para solucionar as permutações possíveis entre os elementos de um conjunto. Os estudantes entre os três grupos apresentaram melhor desempenho, seguido pelos cambistas. Embora estes tenham se saído bem, se evidenciou que a experiência funcional dos mesmos não é suficiente para promover uma evolução sistemática deste conhecimento. Também não é suficiente o apoio em fórmulas matemáticas para solucionar estes tipos de problemas. O interessante é combinar a experiência escolar com a diária.

No estudo de Gomes (2007) sobre os conhecimentos de alunos jovens e adultos em relação aos números decimais, os participantes também buscaram referências em suas atividades profissionais (marceneiros e pedreiros) para resolverem as situações propostas. Assim, a experiência de pedreiros e marceneiros foi significativa na formação do conceito de número decimal, devido às estratégias de cálculo usadas e pelas habilidades demonstradas por eles.

O conjunto de discussões e estudos aqui expostos evidencia que conhecimentos matemáticos se desenvolvem dentro fora da sala de aula e levantar os saberes anteriormente desenvolvidos por alunos pode servir de ponto de partida para construções posteriores – o que pode ser o caso do desenvolvimento do entendimento multiplicativo e, em particular, do raciocínio combinatório. No próximo capítulo serão discutidos pressupostos teóricos que justificam o desenvolvimento de conceitos dentro de campos, inter-relacionando multiplicação e divisão e outros conceitos correlatos.

CAPÍTULO 2

A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E O CAMPO DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

2.1 A Teoria dos Campos Conceituais

Gérard Vergnaud amplia e direciona, com sua teoria, o foco dos estudos de Jean Piaget das operações lógicas gerais, das estruturas gerais de pensamento, para o estudo do funcionamento cognitivo do “sujeito-em-ação”. De acordo com Vergnaud (1998), o desenvolvimento cognitivo depende de situações e de conceitualizações específicas necessárias para lidar com elas. No entanto, segundo Vergnaud, no momento em que passamos a nos preocupar com aquilo que é trabalhado em sala de aula, somos obrigados a nos interessar pelo conteúdo do conhecimento (1996). Assim, o autor anteriormente citado, no que se refere à Matemática, ao se interessar por conceitos matemáticos específicos, interessou-se pelas dificuldades próprias a estes conceitos. Para Vergnaud (1982), o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre durante um longo período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem.

Nessa teoria, o cerne do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização (Vergnaud, 1996). É ela a peça chave da cognição (Vergnaud, 1998). Assim, deve-se dar toda atenção aos aspectos conceituais dos esquemas e à análise conceitual das situações para as quais os estudantes desenvolvem seus esquemas, dentro ou fora da escola (Vergnaud, 1994).

A Teoria dos Campos Conceituais não é uma teoria de ensino de conceitos explícitos e formalizados, trata-se de uma teoria psicológica do processo de conceitualização que permite localizar e estudar continuidades e rupturas entre conhecimentos do ponto de vista de seu conteúdo conceitual (Vergnaud, 1990). Ela é ampla, pois envolve a complexidade decorrente da necessidade de abranger em uma única perspectiva teórica todo o desenvolvimento de situações progressivamente dominadas, dos conceitos e teoremas necessários para operar eficientemente nessas situações, e das palavras e símbolos que podem representar eficazmente esses conceitos e operações para os estudantes, dependendo de seus níveis cognitivos.

Além do conceito de *campo conceitual*, outros conceitos são fundamentais nesta teoria: os conceitos de *esquema~~s~~*, *situação*, *invariante~~s~~ operatório~~s~~* (*teorema-em-ação* e *conceito-em-ação*), e a conceitualização propriamente dita.

Campo Conceitual é definido por Vergnaud (1983) de maneira mais ampla, como um conjunto de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações diferentes, mas relacionados, ou seja, é um conjunto de situações cuja apropriação requer o domínio de vários conceitos de naturezas distintas. Nessa perspectiva, o campo das estruturas multiplicativas consiste de todas as situações que envolvem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação dessas operações (Vergnaud, 1983). Já o campo das estruturas aditivas é o conjunto de situações cujo domínio requer uma adição, uma subtração ou uma combinação de tais operações.

Vergnaud (1983) define conceito como uma composição de três conjuntos:

(**S**) conjunto de situações que dão sentido ao conceito;

(**I**) conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto;

(**R**) conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, consequentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Com relação às situações, Vergnaud (1990) recorre ao sentido de situação que é atribuído pelo psicólogo, no qual os processos cognitivos e as respostas do sujeito são função das situações com as quais ele é confrontado. Vergnaud (1990) também destaca duas ideias principais em relação ao sentido de situação: variedade e história, ou seja, em um certo campo conceitual, existe uma variedade de situações e os conhecimentos dos educandos são moldados pelas situações que eles encontram (a história delas) e que, em seguida, dominam, particularmente pelas primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que desejamos que aprendam (Vergnaud, 1990).

Embora as situações deem sentido ao conceito, ou seja, são responsáveis pelos sentidos atribuídos ao conceito, e que um conceito se torne significativo através da variedade de situações, o sentido não está nas situações em si mesmas nem nas palavras nem nos símbolos. O sentido é uma relação do sujeito com as situações e com os significantes.

As classes de situações são distinguidas por Vergnaud de duas formas:

1. Classes de situações as quais o sujeito domina num certo momento de seu

desenvolvimento e, sob certas circunstâncias, possui competências necessárias para poder tratar quase que imediatamente da situação;

2. Classes de situações para as quais o sujeito não possui todas as competências necessárias para lidar com a situação, desta forma, para enfrentá-la ele é obrigado a refletir e explorar durante certo tempo, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso.

Para o autor acima mencionado, o conceito de esquema não funciona do mesmo modo nas duas classes. Na primeira, observam-se, para uma mesma classe de situações, condutas amplamente automatizadas, organizadas por um só esquema, enquanto que na segunda observa-se a sucessiva utilização de vários esquemas, que podem entrar em competição e que, para atingir a meta desejada, devem ser acomodados, descombinados e recombinados.

Quando ocorre do indivíduo utilizar um esquema ineficaz para uma determinada situação, ele muda de esquema ou modifica o mesmo (Vergnaud, 1990). Na ideia piagetiana, os esquemas estão no centro do processo de adaptação das estruturas cognitivas, i.e, na assimilação e acomodação. Porém, Vergnaud amplia esse conceito de esquema, afirmando que os esquemas devem relacionar-se com as características das situações às quais se aplicam.

São os invariantes operatórios que fazem a ligação entre teoria e prática, pois a percepção, a busca e a seleção de informações baseiam-se no sistema de conceitos-em-ação disponíveis ao sujeito e nos teoremas-em-ação subjacentes à sua conduta (Vergnaud, 1996).

Conceitos-em-ação e *teorema-em-ação* são expressões que designam os conhecimentos contidos nos esquemas. São designados por Vergnaud (1996) pela expressão i*nvariantes operatórios*. Teorema-em-ação é uma hipótese considerada verdadeira sobre o real; conceito-em-ação é uma categoria de pensamento considerada relevante. Essas duas expressões, que designam invariantes operacionais, referem-se a componentes essenciais dos esquemas e determinam as diferenças entre eles, pois a forma como se reage diante de situações dependem dos teoremas possuídos e das conceitualizações desenvolvidas.

De acordo com Vergnaud (1990; 1996), há uma relação dialética entre teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, uma vez que conceitos são ingredientes[1]

[1] Segundo Vergnaud (1998), são ingredientes de um esquema: 1) metas e antecipações; 2) regras de ação; 3) invariantes operatórios e 4) possibilidades de inferência.

de teoremas e teoremas são propriedades que dão aos conceitos seus conteúdos.

Por gerarem ações, os esquemas são fundamentais, mas podem gerar essas ações porque contêm invariantes operatórios (teoremas e conceitos-em-ação) que formam o núcleo da representação. Contudo, um conceito-em-ação só é um conceito científico e um teorema-em-ação só é um teorema verdadeiro se esses se tornam explícitos. Muito embora os conceitos e os teoremas sejam explícitos, podendo ser discutido suas veracidades e pertinências, o mesmo não acontece com os invariantes operatórios, mas conceitos-em-ação e teoremas-em-ação podem, progressivamente, tornarem-se verdadeiros conceitos e teoremas científicos. O status do conhecimento é muito diferente quando ele é explicitado ao invés de ficar totalmente imerso na ação. O conhecimento explícito pode ser comunicado a outros e discutido, o conhecimento implícito não (Vergnaud, 1998).

Muitas vezes os alunos não conseguem explicar ou expressar de maneira natural os teoremas e conceitos-em-ação que utilizam em determinadas situações. Em uma situação, os trabalhos com dados e as sequências de cálculos a serem realizados dependem dos teoremas-em-ação e da identificação de diferentes tipos de elementos pertinentes. Na maioria das vezes, os conceitos e teoremas-em-ação permanecem implícitos, podendo tornarem-se explícitos sendo aí que entra o papel do ensino, ou seja, para auxiliar o aluno na construção dos conceitos e teoremas explícitos e cientificamente aceitos, partindo de seus conhecimentos implícitos.

No triplet indicado por Vergnaud (1983), que define um conceito, temos S (o conjunto de situações que dão sentido ao conceito), que é a realidade, I (invariantes operatórios) e R (representações simbólicas), que são a representação dessa realidade, que podem ser considerados como dois aspectos interagentes do pensamento, o significado (I) e o significante (R).

Vergnaud (1983) usa o termo representação como sendo o de um sistema simbólico que significaria algo para o sujeito: um sistema de signos e uma sintaxe, ou operações sobre elementos do sistema. Para este autor, o melhor critério para aquisição de conceitos seria através da habilidade em resolver situações em linguagem natural e que a simbolização ajudaria nisso (Vergnaud, 1982, p. 57). Desta forma, como há problemas mais fáceis que outros, também existem representações simbólicas mais potentes que outras. Vergnaud fala em teorias de representação e afirma que, para que estas sejam mais úteis, devem conter a ideia de que as representações oferecem possibilidades de inferências (Vergnaud, 1998), que nos tornem capazes de antecipar eventos futuros e gerar condutas para chegar a algum efeito positivo ou evitar algum efeito negativo. Segundo ele, temos representações computáveis para gestos e ações do mundo físico, e também para comportamentos verbais e interações sociais. Essas representações podem ser corretas ou não, precisas ou vagas, implícitas ou explícitas, mas, em todo caso, elas funcionam como substitutos computáveis da realidade. Então, o conhecimento se constrói na constituição progressiva de representações mentais que são homomórficas à realidade para alguns aspectos e para outros não (Vergnaud, 1990).

Conforme se domine progressivamente um campo conceitual, os teoremas-em-ação vão se aproximando de teoremas científicos. Semelhantemente, à medida que se adquire mais conhecimentos científicos, os modelos mentais aproximam-se dos modelos científicos.

2.2 O Campo das Estruturas Multiplicativas

Campo Conceitual é definido por Vergnaud (1983) como um conjunto de situações que para ~~se~~ dominá-las é preciso articular vários outros conceitos de diferentes naturezas. A definição de campo conceitual é bastante clara, porém, as fronteiras cognitivas entre os campos conceituais não são necessariamente bem definidas.

Dentre os possíveis campos conceituais, tem-se, segundo Vergnaud (1986), as estruturas aditivas (conceitos de número natural, de adição, de subtração, de número inteiro relativo, de medida, etc.) e as estruturas multiplicativas (conceitos relacionados à multiplicação, à divisão, ao número racional, ao raciocínio combinatório etc.). Nessa perspectiva, o campo das estruturas multiplicativas consiste de todas as situações que envolvem necessariamente uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação dessas operações (Vergnaud, 1990) e o campo das estruturas aditivas é o conjunto de situações cujo domínio requer uma adição, uma subtração ou uma combinação de tais operações.

Muitos conceitos matemáticos estão envolvidos nas situações que constituem o campo conceitual das estruturas multiplicativas e no pensamento necessário para realizar tais situações. Dentre os conceitos citados por Vergnaud (1990) estão o de função linear, função não-linear, espaço vetorial, análise dimensional, fração, razão, taxa, número racional, multiplicação e divisão.

De acordo com Nunes e Bryant (1997), comumente vemos a multiplicação e divisão como operações distintas e que devem ser ensinadas após o aluno ter aprendido a adição e a subtração. Pode-se, entretanto, defender que há uma estreita relação entre a multiplicação e divisão e estas operações não necessariamente precisam ser tratadas após um domínio mais amplo da adição e subtração. Embora possam ser tratadas simultaneamente, há uma forte distinção entre os campos multiplicativo e aditivo. Apesar da multiplicação poder ser resolvida via adição de parcelas repetidas, segundo Nunes e Bryant há bases de raciocínio diferenciadas entre adição/subtração e multiplicação/divisão. Para Nunes e Bryant (1997), as escolas costumam ensinar adição antes da multiplicação por diversas razões, sendo uma delas a de que a multiplicação é considerada mais difícil que a adição. Outro motivo é de que acredita-se que a adição conduz à multiplicação, pois alguns aspectos da adição formam a base da multiplicação. Embora essas duas razões sejam em parte verdade, segundo estes autores, seria errado tratar a multiplicação como uma forma mais complicada de adição e a divisão como forma mais complicada de subtração, pois há mais na compreensão da multiplicação e divisão do que simplesmente calcular quantidades. Assim, as crianças devem "aprender e entender um conjunto inteiramente novo de sentidos de número e um novo conjunto de invariáveis, todas as quais estão relacionadas à multiplicação e à divisão, mas não à adição e à subtração" (NUNES & BRYANT, 1997). No campo aditivo a base é a relação parte-todo e no multiplicativo é a correspondência um-a-muitos.

Com relação às diferenças conceituais, Vergnaud (1991) coloca que, mesmo quando procedimentos de cálculos são iguais, a ampliação da perspectiva conceitual de uma criança exige a competência para a realização do cálculo relacional que a torna capaz de escolher a operação adequada ao que o problema propõe e para realizar o cálculo numérico apropriado. Vale salientar que *cálculo relacional* envolve operações de pensamento necessárias para a compreensão das relações envolvidas na operação e o *cálculo numérico* envolve as resoluções dos algoritmos e outros procedimentos de cálculo propriamente ditos.

Nas estruturas multiplicativas, o cálculo relacional foi classificado de formas distintas por alguns autores, mas, a maioria das categorias se inter-relacionam. A seguir serão apresentadas as classificações de problemas multiplicativos segundo Vergnaud (1983, 1991), os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) e

Nunes e Bryant (1997).

Vergnaud (1983, 1991), descreve três classes de problemas multiplicativos que envolvem relações ternárias e quaternárias: *isomorfismo de medidas*, *produto de medidas* e *proporções múltiplas*[2]. Cada uma apresenta subclasses de problemas. De acordo com cada tipo de problema, existem complexidades distintas, podendo ser resolvidos através da multiplicação ou divisão ou até mesmo pela combinação das duas, contudo, o grau de dificuldade do problema será determinado pela sua estrutura e não pela aplicação de uma ou outra operação.

Os problemas de *isomorfismo de medidas* envolvem uma relação quaternária entre quantidades, na qual duas delas são medidas de um tipo e as outras são medidas de outro tipo, envolvendo uma proporção direta simples entre esses dois espaços de medidas. Um exemplo: “Um pacote de sabonete tem 9 sabonetes. Quantos sabonetes há em quatro pacotes?”. Este problema envolve multiplicação, já para a divisão poderíamos ter a seguinte questão: “Marta tem 63 adesivos em sua coleção. Em cada página do álbum ela colou 9 adesivos. Quantas páginas do álbum ela já usou?”. Este problema é, segundo a classificação de Vergnaud, do tipo *isomorfismo de quotição*. O outro tipo é de *isomorfismo de partição*. A seguir temos um exemplo de partição: “Para enfeitar a loja no Natal, Seu Marcos comprou 7 árvores pequenas de Natal e 56 bolas vermelhas. Ele quer enfeitar cada arvore com a mesma quantidade de bolas. Quantas bolas ele vai colocar em cada árvore?”.

Os problemas de *produto de medidas* envolvem uma relação ternária, na qual uma quantidade é o produto das outras duas no plano numérico e no dimensional. Sua estrutura consiste na composição cartesiana de duas medidas para encontrar a terceira. Por exemplo, para a multiplicação (problema direto) temos a seguinte situação: “Na fabrica “Bola Tudo” há 4 tamanhos de bolas e estas são feitas em 7 desenhos diferentes. Quantos tipos de bolas são fabricadas?”. Para a divisão (problema inverso), temos o seguinte exemplo: “A loja “Tudo sofá” vende sofás de 3 tamanhos diferentes (grande, médio e pequeno) e em cores diferentes. Se na loja são vendidos 18 sofás diferentes, quantas são as cores que podem ser escolhidas?”.

De acordo com Pessoa (2009), os problemas de produto de medidas nem sempre são fáceis de analisar por parte dos alunos, pois envolvem duas medidas

[2] Neste trabalho discutiremos apenas isomorfismo de medidas e produto de medidas, pois proporções múltiplas não serão foco de análise no mesmo. Ressalta-se que proporções múltiplas constituem-se em problemas com base no isomorfismo de medidas, mas que envolvem mais que quatro elementos.

distintas e é necessário encontrar uma terceira medida diferente das outras duas. Desta forma, segundo a autora acima citada, os problemas de produto de medidas podem ser mais difíceis do que os de isomorfismo de medidas.

Segundo Vergnaud (1991), o esquema mais natural para representar a relação que existe entre produto de medidas é o quadro cartesiano, pois é a noção de produto cartesiano que explica a estrutura de produto de medidas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN – Brasil, 1997), o cálculo relacional dos problemas multiplicativos pode ser agrupado em quatro grupos de situações: *comparativa*, *proporcionalidade*, *configuração retangular* e *combinatória*.

Na situação *comparativa* é estabelecida uma comparação entre as quantidades trabalhadas, como, por exemplo: “Marcelo tem oito bolas de gude e João tem o triplo dessa quantidade. Quantas bolas de gude João tem?”.

Na *proporcionalidade* a ideia envolvida é a de proporção comparando razões. Por exemplo: “Maria subirá cinco lances de escada e em cada lance há nove degraus. Quantos degraus Maria subirá?”.

A *configuração retangular* está associada à distribuição espacial e envolve situações ligadas ao cálculo da área. Um exemplo: “Numa sala as bancas estão dispostas em oito filas e em cada fila há sete bancas. Quantas bancas há ao todo nessa sala?”.

A *combinatória* envolve situações em que é necessário escolher e agrupar elementos de um grupo. Tem-se, por exemplo: “O restaurante “QDelicia” serve vários tipos de pratos prontos (prato quente e sobremesa). Se há 6 opções de pratos quentes e 4 opções de sobremesa, quantos tipos de pratos prontos o restaurante serve?”.

Nunes e Bryant (1997) distinguem três tipos principais de situação multiplicativa: 1) situação de *correspondência-um-a-muitos*; 2) situações que envolvem *relações entre variáveis*; e 3) situações que envolvem *distribuição* e *divisões sucessivas*.

As situações de *correspondência-um-a-muitos* envolvem dois novos sentidos de número: a *proporção* – expressada por um par de números que permanece invariável em uma situação, mesmo quando o conjunto varia; e *fator escalar* – referente ao número de replicações aplicadas a ambos os conjuntos, mantendo a proporção constante.

Nesta situação temos três tipos de problemas: multiplicação direta, problema inverso de multiplicação e produto cartesiano. Tem-se por exemplos:

- *Problema de multiplicação direta*

Na padaria “Pão Quente” cada pão de forma é cortado em 8 fatias. Quantas fatias serão obtidas se 9 pães forem cortados?

- *Problema inverso de multiplicação*

Marta tem 63 adesivos em sua coleção. Em cada página do álbum ela colou 9 adesivos. Quantas páginas do álbum ela já usou?

- *Problema de produto cartesiano*

Na fabrica “Bola Tudo” há 4 tamanhos de bolas e estas são feitas em 7 desenhos diferentes. Quantos tipos de bolas são fabricadas?

As situações de *relações entre variáveis (co-variação)* são aquelas nas quais duas ou mais variáveis co-variam como uma consequência de convenção ou de causa. Neste caso, as variáveis são quantidades contínuas, constituindo, assim, um caso particular de correspondência um-a-muitos.

As situações que envolvem *distribuições* são diferentes da adição e da subtração porque elas envolvem o estabelecimento de uma relação multiplicativa entre dois ou mais conjuntos. As relações parte-todo estão também envolvidas em distribuição e divisão, mas nestas últimas é necessário considerar três elementos: o tamanho do todo, o número de partes e o tamanho das partes, que deve ser o mesmo para todas as partes. Tem-se, por exemplo: “Maria fez quinze sanduíches. Ela tem três filhos. E quer partilhar igualmente esses sanduíches entre seus filhos. Com quantos sanduíches cada criança ficará?”. Nesta situação as crianças precisam enfrentar as relações entre três conjuntos: o número total de sanduíches, o número de filhos e o número de sanduíches por filho. Mantendo o número de crianças e aumentando o de sanduíches, aumenta-se o número de sanduíches por filho, mas, se o número de sanduíches permanece o mesmo e aumenta-se o número de filhos, haverá menos sanduíches por filho. Semelhantemente, nas situações de *corte sucessivo*, varia-se o valor correspondente a cada unidade. Assim, há novas relações a serem entendidas com a distribuição e cortes sucessivos que não se encontram na situação de correspondência-um-a-muitos (multiplicação direta), na qual a proporção permanece sempre fixa. Os problemas aqui classificados por Nunes e Bryant (1997) como produto cartesiano, combinatória para os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) e como produto de medidas por Vergnaud (1983, 1991), no presente estudo adotamos a denominação produto cartesiano, expressa por Pessoa (2009) em sua tese de doutorado.

Os problemas discutidos acima por Vergnaud, Nunes e Bryant e os PCN no campo da Combinatória tratam apenas do produto cartesiano, contudo, no estudo de Pessoa (2009), além dessas classificações, trata-se também de mais outros três tipos de problemas combinatórios: arranjos, combinações e permutações. Deste modo, nesta pesquisa trataremos de analisar a compreensão de jovens e adultos em raciocínio combinatório envolvendo os quatro tipos de problemas trabalhados por Pessoa (2009): Arranjo, Combinação, Permutação e Produto Cartesiano, discutidos em maior detalhamento no próximo capítulo.

Diante da discussão do campo conceitual multiplicativo, em particular do domínio das situações combinatórias, o presente estudo objetiva levantar os esquemas e teoremas-em-ação utilizados pelos alunos da EJA, que evidenciam os conceitos-em-ação por eles já construídos, bem como o que ainda é necessário desenvolver, de modo a que possuam um amplo conhecimento da Combinatória.

CAPÍTULO 3

O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

3. 1 Breve Histórico da Combinatória

Acredita-se que o conceito de número e o processo de contagem tenham sido desenvolvidos antes dos primeiros registros históricos, pois a partir do momento que se precisaram efetuar contagens, o ser humano começou uma sistematização no processo de contar. Gradativamente surgiram, assim, os sistemas de agrupamento simples, os multiplicativos, os cifrados e o posicional.

A Combinatória tem como base a contagem e desde cedo este campo da Matemática relacionou-se com a *arte de contar*. Não um contar simples de elementos, mas uma contagem de agrupamentos possíveis a partir de dados elementos e determinadas condições. Diferentes formas de análise combinatória surgiram, assim, ao longo da história das civilizações.

De acordo com Esteves (2001), o livro chinês *I – King* ou *Livro das permutações*, datado de 1182 – 1135 a.C., é provavelmente o registro mais antigo que aborda a Combinatória.

A partir do século XVII, a Combinatória passou a ser desenvolvida em grande escala, principalmente para resolver problemas de jogos de azar. Girolamo Cardano (1501 – 1576) escreveu um manual do jogador (*De Ludo Aleae*) publicado em 1663, no qual problemas de análise combinatória e probabilidade aparecem.

O “problema de pontos” (introduzido na obra Suma de Pacioli em 1494) está ligado à origem da probabilidade e que se utiliza de análise combinatória, tendo sido analisado por vários matemáticos do século XVI e XVII. O grande avanço neste problema se deu em 1654, quando Chevalier de Méré propôs esse problema a Pascal que, por sua vez, o levou a Fermat, ocorrendo, assim, uma correspondência entre os dois matemáticos. Cada um chegou ao resultado correto, embora de maneiras distintas.

Outros importantes contribuidores do desenvolvimento da Análise Combinatória foram: Jakob Bernoulli (1654 – 1705) que na segunda parte de sua obra, *Ars Conjectandi*, se dedicou à Teoria das combinações e permutações, que descrevia quase toda a teoria da Análise Combinatória; Euler (1707 – 1783), que desenvolveu em seu livro clássico, *Introductio in Analysin Infinitorum*, a técnica das funções geradoras, utilizada para abordar o problema das partições de um inteiro; F.P. Ramsey (1903 – 1930) que em seu teorema afirma que se tivermos no plano um conjunto de pontos n, com $n \geq 6$, tais que nenhum subconjunto com três pontos seja colinear, e, se unirmos todos os pontos dois a dois, usando duas cores distintas para traçar os segmentos de retas que unirão os pontos, então forçosamente terá se formado um triângulo cujos lados são todos da mesma cor.

Deste modo, observamos que o desenvolvimento da Combinatória foi um processo longo até se chegar ao que hoje se tem em relação aos tipos de problemas combinatórios e às expressões formais que os caracterizam.

3.2 Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório

No campo da Educação Matemática temos uma grande variedade de pesquisas. Muitas tratam das elaborações de crianças, adolescentes, adultos e professores, referentes a diversos conceitos matemáticos presentes nos currículos escolares. A literatura nesta área do conhecimento já apresenta muitos resultados relevantes da compreensão das estruturas multiplicativas. Porém, poucas investigações foram realizadas no que concerne à construção de conceitos e relações multiplicativas em problemas que envolvem o raciocínio combinatório, e menos ainda na Educação de Jovens e Adultos.

De acordo com Vergnaud (1983, 1991), os problemas de produto de medidas pertencem ao campo conceitual das estruturas multiplicativas. Assim, para haver um amplo domínio dos problemas multiplicativos, faz-se necessária a compreensão dos problemas combinatórios.

Para Placha (2009), problemas de produto de medidas não são frequentes entre os que as crianças solucionam em sala de aula, embora envolvam o raciocínio combinatório, essencial na Matemática e também aplicável na solução de problemas de outras áreas. Privando alunos de discutirem situações combinatórias, compromete-se a ampliação de seus conhecimentos multiplicativos e de seus desenvolvimentos referente a novas maneiras de pensar.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam grupos de situações relacionadas às estruturas multiplicativas que precisam ser exploradas nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Entre elas estão “as situações associadas à ideia de combinatória” (Brasil – Ministério da Educação, 2001), ou seja, reconhece a importância de se trabalhar nos anos iniciais com a Combinatória.

“Bernoulli, em 1713, define a Combinatória como a arte de enumerar todas as maneiras possíveis em que um número dado de objetos pode ser misturado e combinado de modo que não falte nenhum" (BATANERO, GODINO E NAVARRO-PELAYO, 1997).

Sendo a contagem de elementos de diferentes conjuntos uma das primeiras aprendizagens da criança, para a resolução de problemas Combinatórios, é preciso que se supere a simples ideia de enumeração de elementos de um conjunto para passar à contagem de grupos de objetos.

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas, tendo dois tipos de problemas frequentes em destaque: (1) demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições e (2) contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas (Morgado, Pitombeira de Carvalho, Pinto de Carvalho & Fernadez, apud Pessoa e Borba, 2008).

De acordo com Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997), os problemas de enumeração são um tipo de problema combinatório, assim como os problemas de existência (se podem ou não existirem determinadas possibilidades em certas condições), de contagem (a determinação do número total de possibilidades de certas situações), de classificação (a verificação de possíveis organizações de possibilidades) e de optimização (condições ideais para que terminadas possibilidades existam).

Segundo Merayo (2001), apud Pessoa e Borba (2008), Análise Combinatória é o procedimento que permite saber quantos elementos tem em um conjunto sem precisar contá-los, ou seja, não é necessário listar ou enumerar todos os elementos do conjunto.

Para Nesher (1988), apud Nunes e Bryant (1997), e Brown (1981), apud Pessoa e Matos Filho (2005), dentre os problemas multiplicativos os mais difíceis para as crianças são os que envolvem produto cartesiano. Dois são os motivos para que isso ocorra, segundo Nesher: o problema envolve dois conjuntos básicos mais um terceiro conjunto, o qual é identificado pela combinação de cada elemento em um conjunto básico com cada elemento do outro conjunto; e a correspondência um-a-muitos não é explicitamente indicada na formulação verbal. Destaca-se que estas autoras não consideraram permutações, combinações e arranjos em suas análises, mas apenas o produto cartesiano como problema combinatório.

Apesar de serem de natureza mais complexa, segundo Borba, Rocha, Martins e Lima (2009), a prática docente tem mostrado que problemas de *raciocínio* *combinatório* podem despertar nos alunos curiosidades e a participação na sala de aula. Essa interação com esse conhecimento matemático possibilita aos alunos intervir mais no desenvolvimento das aulas, nas atividades propostas, nos problemas a serem resolvidos. Observa-se, também, que a Combinatória é importante no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático de alunos, como já anteriormente apontado por Inhelder e Piaget (1955).

De acordo com Inhelder e Piaget (1955), operações combinatórias representam mais do que um mero ramo da Matemática, a capacidade combinatória é fundamental para o raciocínio dedutivo hipotético. Para estes autores, os adolescentes, por meio da maturação, descobrem formas sistemáticas de enumeração combinatória.

Para Fischbein (1975, apud Batanero, Godino Navarro-Pelayo, 1997), mesmo tendo a capacidade de resolver problemas de combinatória, nem sempre adolescentes alcançam esta habilidade sem ensino específico.

De acordo com Fischbein e Gazit (1988, apud Batanero et al, 1997), até mesmo crianças de 10 anos podem aprender noções de combinatória com o auxílio da árvore de possibilidades. O mais importante dos estudos de Fischbein é o alerta da necessidade de ensino formal para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Embora a Combinatória seja um conhecimento matemático importante a ser estudado, observa-se um número relativamente pequeno de estudos que tratam especificamente deste campo[3]. Este é um campo importante – tanto para o desenvolvimento de outros conceitos matemáticos, como para o domínio de algumas situações práticas.

Pessoa (2009) entende raciocínio combinatório como

> Um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto. Na combinatória contam-se, baseando-se no raciocínio multiplicativo, grupos de possibilidades, através de uma ação sistemática, seja pelo uso de fórmula, seja pelo desenvolvimento de uma estratégia que dê conta de atender aos requisitos desses

[3] O Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco (Geração) realizou um levantamento do Estado da Arte dos trabalhos relacionados ao Raciocínio Combinatório e, neste estudo, constatou-se que são poucas as pesquisas nesta área. Parte deste levantamento será aqui apresentado.

> tipos de problemas, como a constituição de agrupamentos, a determinação de possibilidades e sua contagem. Assim, a *Análise Combinatória* é a parte da Matemática que estuda os agrupamentos a partir de alguns critérios; a *Combinatória* é o assunto referente a esta parte da Matemática e que está diretamente relacionada com os problemas de produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação; o *raciocínio combinatório* é a forma de pensar referente à Combinatória; e *combinação* é um dos significados dos problemas de combinatória, juntamente com arranjo, produto cartesiano e permutação" (PESSOA, 2009).

A autora acima citada se refere aos tipos de problemas de combinatória referindo-se a *significados de problemas de combinatória*, cada um com características de levantamento de possibilidades – por contagem direta ou indireta. Os significados da *combinatória* apresentados pela mesma são: *produtos cartesianos, combinações, arranjos e permutações*.

Estudos anteriores abordaram problemas que envolviam estes tipos de significados, contudo, encontramos apenas na pesquisa de Pessoa e Borba (2007)[4], uma organização única que envolve esses quatro tipos de problema, pois estas autoras consideram que os mesmos são característicos do pensamento combinatório, o que contribui para a reflexão teórica da importância de se trabalhar em sala de aula com a diversidade de problemas de combinatória.

O presente estudo se apoia na categorização adotada por Pessoa e Borba (2007) – *produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação* – utilizando-se de problemas trabalhados pelas mesmas em seus estudos, bem como de problemas propostos por Selva e Borba (2008). No Quadro 1 apresentamos exemplos e características de cada significado. Para cada tipo de problema de combinatória há um invariante, contudo, o invariante geral da combinatória é o fato de que todos combinam elementos.

[4] Desde então as autoras citadas têm proposto esta forma de classificar os problemas de Combinatória.

SIGNIFICADO	CARACTERÍSTICA	EXEMPLO
Produto Cartesiano (Nunes e Bryant, 1997), Produto de Medidas (Vergnaud, 1983, 1991) ou Combinatória (PCN, 1997)	Envolve dois conjuntos básicos mais um terceiro que com a combinação de seus elementos resultará em um novo conjunto.	Na fábrica “Bola Tudo” há 4 tamanhos de bolas e estas são feitas em 7 desenhos diferentes. Quantos tipos de bolas são fabricadas? (Selva e Borba, 2008).
Arranjo simples (sem repetição)	É dado um grupo maior e dele tirado elementos a serem organizados; a ordem é importante na composição das possibilidades.	Para representante de uma sala de aula se candidataram 3 pessoas (João, Mariana,Vítor). Quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante? (Pessoa, 2009).
Combinação simples (sem repetição)	É dado um grupo maior e dele tirado elementos a serem organizados; a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.	Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas iguais. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso? (Pessoa, 2009).
Permutação simples (sem repetição)	Todos os elementos são usados em ordens diferentes.	Calcule o número de palavras que podem ser criadas (existentes ou inventadas) usando a palavra AMOR. (Pessoa, 2009).

Quadro 1. Significados, características e exemplos de cada tipo de problema combinatório.

Borba, Rocha, Martins e Lima (2009), realizaram um levantamento do estado da arte referente ao desenvolvimento do raciocínio combinatório e probabilidade no Ensino Fundamental, Médio e Superior, com a finalidade de entender melhor os resultados de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de conceitos combinatórios. Salienta-se que na Combinatória há o estudo de possibilidades, essencial para o desenvolvimento da compreensão de probabilidade. A revisão dos estudos efetuada por Borba e colaboradoras, a partir de anais de eventos nacionais e internacionais, foi dividida em quatro aspectos: 1) Análise de recursos didáticos; 2) Reflexões sobre a formação e a prática docente; 3) Investigações de conhecimentos de alunos e 4) Relatos de experiências vivenciadas em sala de aula.

No estudo de Borba et al (2009) foi observado um número relativamente pequeno de estudos que tratam especificamente do raciocínio combinatório o que denota, segundo as autoras, uma necessidade dentro da Educação Matemática, uma vez que no estudo da Combinatória há grandes possibilidades de desenvolvimento matemático dos alunos e consequente domínio de várias situações práticas.

A seguir são apresentadas as pesquisas analisadas de acordo com as quatro categorias definidas por Borba et al (2009).

A) Análises de recursos didáticos

No trabalho *Livro Didático: como estão abordando os problemas de raciocínio combinatório no Ensino Fundamental*, Matos Filho e Pessoa (2006), analisaram oito coleções de livros didáticos de Matemática da 1ª à 4ª série do Ensino Fundamental, sendo quatro coleções que foram aprovadas pelo Plano Nacional do Livro Didático 2004 e quatro coleções que não foram submetidas ao programa. Os autores buscaram: a) identificar os problemas que envolvem raciocínio combinatório e como estes são abordados antes da introdução formal da multiplicação, b) verificar como o conceito de multiplicação é tratado, se apenas como a soma de parcelas repetidas ou se existe uma abordagem mais ampla ligada à idéia de combinatória, c) verificar se os problemas de raciocínio combinatório estabelecem ligação com a construção de conceitos de probabilidade e estatística e d) observar quais as orientações fornecidas pelos manuais dos livros didáticos para os professores em relação ao trabalho com os problemas de Combinatória.

Os principais resultados obtidos pelo estudo foram:

1) Todas as coleções analisadas mostraram um baixo percentual de problemas de raciocínio combinatório, quando comparados ao todo de problemas de estrutura multiplicativa ou, até mesmo, algumas não apresentaram problemas de raciocínio combinatório; 2) 87% dos livros didáticos analisados estabeleceram uma relação conceitual entre a multiplicação e o raciocínio combinatório e duas coleções

estabelecem também uma ligação com a ideia de proporção; 3) 62,5% dos livros analisados apresentam os problemas de raciocínio combinatório sempre após os problemas de multiplicação e estes últimos são apresentados sempre após os de adição e subtração, vinculando a construção do conceito de multiplicação ao conceito de adição; 4) Mais da metade (62,5%) dos livros didáticos não trazem sugestões e orientações que possam auxiliar os professores no trabalho com os problemas de raciocínio combinatório.

Matos Filho e Pessoa (2006) chegaram à conclusão de que, apesar das orientações sugeridas pelos documentos oficias e pelas diversas pesquisas que justificam o trabalho com os problemas de raciocínio combinatório, os livros didáticos apresentam um número muito reduzido desses problemas. Desta forma, torna-se necessária uma maior atenção dos autores/editores em relação ao número de problemas de raciocínio combinatório propostos em suas obras, bem como há necessidade de melhor orientação ao professor – por meio de pressupostos teóricos, referências bibliográficas, resultados de pesquisas, explicações, orientações e sugestões.

Outra investigação na temática identificada foi a pesquisa de Sandoval, Trigueros e Lozano (2007), intitulada *Uso de um interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria*, motivada por resultados da avaliação nacional de educação do México, a qual indicou que grande parte dos alunos da escola primária mexicana não consegue resolver problemas que necessitem de análise combinatória. A proposta das autoras para a superação das dificuldades dos estudantes foi o desenvolvimento de um software – *Diagrama de Arbol* – criado para explorar ideias relacionadas à Combinatória por meio da construção de diagramas de árvore.

A pesquisa de Sandoval et al (2007) foi realizada com 25 estudantes mexicanos de 11 a 13 anos de 5º e 6º anos que utilizaram o software, o qual permite o cálculo de arranjos, combinações, permutações e produtos cartesianos, utilizando cores para diferenciar as possibilidades geradas. Observou-se que o software permitiu que os alunos representassem os problemas e desenvolvessem estratégias de resolução mais eficientes. As autoras afirmaram que objetivam em estudos futuros investigar com profundidade como as ideias de combinatória se modificam na utilização deste interativo e como o aprendizado pode ser transferido para ambientes de papel e lápis.

Embora a avaliação tenha sido positiva de Sandoval *et al* (2007), é necessário atentar para cuidados que professores precisam ter ao proporem o uso de diagramas – com ou sem recurso informático – pois em alguns casos, como os de *combinação*, os alunos precisarão excluir casos repetidos gerados na árvore de possibilidades.

B) Reflexões sobre a formação e a prática docente

Rodrigues (2006), em seu estudo *Formação matemática de professores de atuação multidisciplinar nas séries iniciais do ensino fundamental: indicativos para estudos de noções de probabilidade*, buscou identificar os conhecimentos referentes à probabilidade que devem ser abordados durante a formação de professores das séries iniciais, objetivando uma melhor formação nesse conteúdo. Nessa pesquisa, foram feitas análises de livros, sites e anais de congressos que versam sobre formação de professores, em particular aqueles que ensinam Matemática, como também foram pesquisados autores que escreveram sobre os papéis e lugares da probabilidade.

Segundo Rodrigues (2006), o estudo de probabilidade na escola deve objetivar: a) desenvolver a criticidade do aluno; b) lidar com a chamada era da informação; c) contemplar os desenvolvimentos da ciência; d) romper com o determinismo e a linearidade, predominantes nos currículos de Matemática; e) contribuir para a alteração da imagem social da Matemática que é tida como ciência pronta e acabada.

Este autor advoga que definições, fórmulas e regras sejam justificadas como tratamento mais econômico para se representar simbolicamente uma ideia ou conceito matemático que pode ser inicialmente concebido intuitivamente. Acrescenta ainda, que os professores deveriam se sentir confortáveis com o que ensinam, compreendendo – no caso específico de noções de probabilidade – os conceitos e ideias básicas que estão sendo mobilizados. O mesmo acredita que os formadores deveriam envolver os futuros professores em experiências matemáticas através de situações didáticas para o estudo de probabilidade e outros tópicos da Matemática.

Os resultados mostram, por um lado, que a formação matemática dos professores de séries iniciais é problemática e que a discussão entre fatores como: a) o baixo desempenho matemático que muitos desses futuros professores têm ao ingressarem na instituição universitária; b) o tempo destinado à sua formação matemática e; c) o fato de que esses professores têm ao seu encargo diversas disciplinas a ensinar, precisam ser observados pelas instituições formadoras.

No estudo intitulado *Estágio de docência e a formação do professor de Matemática: uma experiência com análise combinatória por meio da resolução de problemas*, Cyrino e Teixeira (2007), buscaram analisar o estágio de docência desenvolvido na disciplina Metodologia e Prática de Ensino de Matemática II com Estágio Supervisionado na UEL (Universidade Estadual de Londrina). Os estagiários planejaram, desenvolveram e avaliaram uma oficina, cujo conteúdo abordado foi o de análise combinatória. A oficina, desenvolvida em 12 horas, foi aplicada aos sábados numa escola estadual e teve como objetivo propiciar discussões com os alunos e desencadear, nos processos de sistematização, a construção de conceitos, a explicação e a dedução de algumas de fórmulas a serem utilizadas.

Os autores acima citados afirmam que a atividade de docência permitiu aos estagiários desenvolver a capacidade de análise e reflexão sobre as situações de ensino e aprendizagem da Matemática e sobre os problemas da prática profissional do professor, mobilizando saberes adquiridos e construindo novos conhecimentos. Esta conclusão foi feita a partir da construção da oficina, na qual os estagiários puderam refletir sobre os conceitos, as fórmulas e o porquê de muitos procedimentos que são utilizados na resolução de problemas de análise combinatória, bem como no relacionamento com os alunos em sala de aula, ao percebê-los como sujeitos ativos no processo de aprendizagem.

Pinheiro e Sá (2007) apresentaram um estudo intitulado *O ensino de análise combinatória: a prática pedagógica predominante segundo os docentes*, no qual realizaram uma investigação com a colaboração de 20 professores de Ensino Médio de Belém do Pará e a questão-base de pesquisa era: *Qual é a prática pedagógica predominante no ensino de análise combinatória no Ensino Médio?* Os autores utilizaram como instrumento um questionário fechado contendo itens sobre dados pessoais, formação acadêmica e procedimentos metodológicos desenvolvidos durante as aulas ministradas pelos professores participantes do estudo.

Mesmo com professores neste estudo tendo especialização na área de Matemática ou em Educação, a maior parte deles indicou que a sua prática predominante no ensino de Análise Combinatória era partir de definições e, em seguida, apresentar exemplos, propriedades e exercícios. Mesmo tendo participado de cursos de formação continuada, estes docentes utilizavam-se exclusivamente de métodos formais nas aulas de Análise Combinatória. Já os que apresentavam menos tempo lecionando Combinatória (quatro professores), indicaram que partem de uma situação-problema para, em seguida, formalizar os conceitos. Observou-se, também, que o recurso didático, praticamente exclusivo utilizado pelos professores – graduados e pós-graduados – era o livro didático.

Pinheiro e Sá (2007) chegaram à conclusão de que, mesmo alguns professores tendo apontado a resolução de problemas ou a modelagem no desenvolvimento da aula de Análise Combinatória, ainda é muito forte a tendência de apresentar fórmulas e, a seguir, aplicações das mesmas.

No estudo *Investigando a aprendizagem de análise combinatória simples em uma turma de licenciandos em Matemática submetida a uma prática de ensino tradicional*, de Rocha (2007), objetivou-se identificar a compreensão dos graduandos sobre os conceitos de análise combinatória simples, acompanhando esse avanço ao longo de uma prática tradicional de ensino. Os participantes eram 17 alunos do sexo masculino com idade entre 18 e 27 anos e apenas 10 destes participaram de todo processo da intervenção. Foi elaborado um pré-teste sobre Combinatória com cinco questões para comparação com o resultado final. Os resultados do pré-teste indicam que apesar de haver uma quantidade significativa de tentativas para resolver os problemas propostos, os participantes obtiveram um resultado bem inferior ao esperado para uma turma de futuros professores (dois sujeitos acertaram uma questão enquanto outro apenas duas). Estes tinham dificuldades em definir ou exemplificar noções básicas da Combinatória (apenas 20% conseguiram enunciar corretamente o Princípio Multiplicativo ou as noções de Arranjo ou Combinação). Os temas que fizeram parte das aulas foram o princípio multiplicativo, o princípio aditivo, arranjos, combinações e permutações, por se acreditar serem noções exploradas em qualquer curso de combinatória simples.

Após as aulas, poucos avanços foram observados, indicando dificuldades persistentes dos licenciandos, embora reconhecessem a relevância do ensino de Combinatória na Matemática e que, mais importante que a memorização de fórmulas, seria os alunos compreenderem o *Princípio Fundamental da Contagem.*

C) Investigações de conhecimentos de alunos

Frant, Castro e Lima (2001), realizaram um estudo intitulado *Pensamento combinatório: uma análise baseada na estratégia argumentativa*, com os objetivos de verificar como ocorre a produção de significados em campos semânticos distintos e de como elaborar atividades que não escamoteiem este processo de saltos e rupturas em simples passagens. As autoras partiram dos argumentos básicos de que não é o mesmo usar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo e que a multiplicação, no caso combinatório, é mais complexa que na adição de parcelas iguais.

Frant *et al* (2001) acompanharam a resolução de três alunos da 6ª série, de um problema combinatório, e analisaram o processo de desenvolvimento das argumentações e ações destes alunos. O problema colocado era: *Em uma reunião, algumas pessoas compareceram. Elas se cumprimentavam umas as outras apertando suas mãos. Uma pessoa observa que no total foram 66 apertos de mãos. Quantas pessoas estavam nesta reunião?* Os alunos eram solicitados a afirmarem como haviam pensado para resolverem a situação e a compartilharem suas ideias com o grupo, a partir do levantamento de questões sobre a situação-problema, do registro inicial de suas ideias e do registro, em seguida, de suas ideias após as discussões, de modo que seus colegas e professores pudessem entendê-las.

O foco da análise de Frant *et al* (2001) recaiu sobre: 1) a reconstrução de sequências coerentes de raciocínio; 2) o completar de implícitos nas falas dos estudantes; 3) a identificação dos significados produzidos; 4) a caracterização dos argumentos através de esquemas; e 5) a interpretação desses esquemas, a partir do Modelo de Estratégia Argumentativa (Frant e Rabello, 2000), modelo alternativo para a análise do discurso em sala de aula, buscando analisar a produção dos significados nos argumentos e não nas palavras.

Jan e Amit (2006), realizaram um estudo intitulado *What's the connection between ears and dice? They both promote probabilistic understanding*, no qual relatam um jogo de dados que objetivava investigar conceitos de probabilidade, a partir de conflitos, argumentações, persuasões e consensos. Participaram do estudo alunos de 7º e 8º anos de escolas israelenses. A situação colocada para os alunos era: *O jogador A ganhará um ponto se a soma de dois dados lançados for 2, 3, 4, 10, 11 ou 12 e o jogador B ganhará um ponto se a soma de dois dados lançados for*

5, 6, 7, 8 ou 9. Questionava-se, então: *Qual dos dois jogadores possui maior probabilidade de completar 10 pontos antes do outro jogador?*

A partir da apresentação da regra do jogo, os alunos iniciaram os questionamentos sobre a equidade de oportunidades para ambos vencerem. Nesta situação, os jogadores iniciaram um processo de cálculo do espaço amostral, visando identificar a quantidade de eventos e, assim, sugerir as regras justas para o jogo.

Amit e Jan (2006), apresentaram no mesmo evento do estudo anterior relatado, ou seja no PME 30 (30th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education), um estudo intitulado *Autodidactic Learning of Probabilistic Concepts Through Games*, realizado com alunos israelenses dos anos 6 a 9 que não possuíam experiência formal com probabilidades. Estes participaram de um jogo de lançar moedas, com o objetivo de levá-los a desenvolver terminologias e conceitos probabilísticos. Os alunos foram convidados a responderem questões sobre as chances de ocorrência de um evento, sob diferentes situações, e a convencerem seus colegas de corrigirem suas respostas.

As principais conclusões tiradas por Amit e Jan (2006) apontam para um desenvolvimento intuitivo de conceitos probabilísticos. Os alunos construíram formas de quantificar probabilisticamente, usando frações e percentagens. Sem a intervenção do conhecimento formal, eles criaram uma ligação entre tamanho da amostra e probabilidade de um evento, e construíram uma linguagem probabilística própria, com a finalidade de uma comunicação recíproca. Esta constatação contradiz achados parciais anteriores, que afirmam que existe uma tendência para ignorar intuitivamente a influência do tamanho da amostra na estimativa de probabilidades.

Soares e Moro (2006), num estudo intitulado *Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na Escola Fundamental*, descreveram níveis e subníveis da construção inicial do raciocínio combinatório de alunos de 5ª e de 6ª série do Ensino Fundamental, com o objetivo de verificar a possibilidade de descrição psicogenética do raciocínio combinatório. Participaram do estudo 60 alunos de uma escola pública de periferia (31 da 5ª série (atual 6º ano) e 29 da 6ª série (atual 7º ano) com idades entre 10 anos e 7 meses e 11 anos e 11 meses) que responderam um teste escolar com uso de caneta e papel no qual constavam 4 problemas de produto cartesiano com duas e/ou três variáveis e valores numéricos pequenos e/ou grandes, sem e com presença de valores distractores[5].

Foram categorizados, por Soares e Moro (2006), quatro níveis de construção de raciocínio combinatório: 1) ausência de solução combinatória; 2) primeiros indícios de soluções combinatórias; 3) alguma aproximação de soluções combinatórias e 4) presença de soluções combinatórias.

Examinando-se descritivamente as frequências e os percentuais das soluções dos participantes, conforme o nível de raciocínio combinatório que elas revelaram, foram detectados indícios de relação negativa entre avanço na escolaridade (soluções de nível mais adiantado na 5ª e não na 6ª serie). Tais indícios, porém são muito perturbados pela alta incidência de soluções de Nível 1, ou seja, a *ausência de solução combinatória* em ambas as séries, independentemente do problema, com percentuais que variaram de 60,0% a 82,8%. De outra parte, não são claros os indícios de relação entre níveis de solução e tipo de problema trabalhado, pois, para qualquer um deles há percentuais relativamente altos de soluções correspondentes ao Nível 1.

As autoras destacam os limites do estudo relatado e de seus resultados, tais como: a amostra restrita, de grupos pequenos de alunos de 5ª e 6ª série (6º e 7º anos, respectivamente), escolhidos por conveniência, mas concluem ser necessário um trabalho escolar com problemas de produto cartesiano desde os anos iniciais de escolarização, devendo ocorrer em um crescendo entre anos em atenção ao seu significado matemático específico; como circunstância de construção do raciocínio combinatório, entre outras relações significativas ao desenvolvimento cognitivo do aluno, com prováveis reflexos em outras áreas de sua aprendizagem escolar.

Abrahamson e Cendak (2006), realizaram um estudo intitulado *The odds of understanding the law of large numbers: a design for grounding intuitive probability in combinatorial analysis*. Neste estudo, 28 alunos norte-americanos, dos Anos 4 a 6, participaram de uma entrevista clínica, tendo como objetivos levantar: a) as intuições dos alunos relacionadas à probabilidade; (b) o acesso de um conjunto de ferramentas de aprendizagem para a articulação dessas intuições e (c) a utilidade dos eixos de aprendizagem e ferramentas no trabalho de suporte das diagnoses, design e análise de dados.

A situação proposta aos alunos por Abrahamson e Cendak era a de um

---

[5] Valores distractores são valores expressos no enunciado de um problema, mas que não têm relação com a questão, ou seja, devem ser desconsiderados na solução do problema.

recipiente contendo 100 bolas verdes e 100 bolas azuis, e um instrumento de seleção de quatro bolas, conforme a figura que segue, na qual se perguntava: Quais as possíveis configurações que podem ser encontradas nesse experimento? Os alunos utilizaram lápis e papel para construírem a torre de cartões de papel, cada uma apresentando uma configuração diferente.

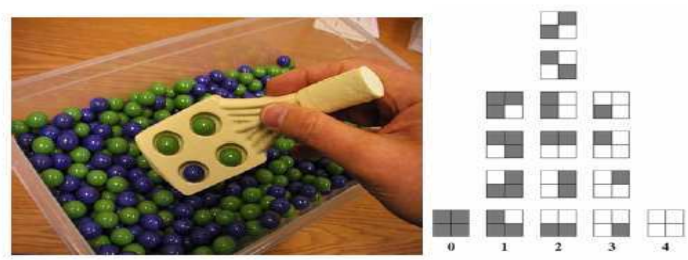


Figura 1. Atividade de configurações proposta por Abrahamson e Cendak (2006)

Após chegarem ao fim das 16 combinações possíveis, observou-se que todos, exceto dois estudantes, inicialmente predisseram que blocos com duas bolas verdes e duas azuis era a configuração mais comum. Nenhum estudante iniciou uma exploração do espaço combinatório como um meio de validar aquela intuição. No final, os alunos entenderam que as classes de eventos têm diferentes probabilidades, de acordo com seus tamanhos.

Pessoa (2009) buscou levantar a compreensão de problemas combinatórios de alunos do segundo ano do Ensino Fundamental ao final do Ensino Médio, observando as estratégias utilizadas por esses alunos. Participaram do estudo 568 alunos de quatro escolas pernambucanas (duas públicas e duas particulares). Os alunos resolveram oito problemas com os quatro tipos de problemas combinatórios (*arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano*), dois para cada tipo de problema. Evidenciou-se que muitos alunos são capazes de resolver problemas combinatórios e, mesmo não chegando ao final da solução, alunos de séries distintas desenvolvem estratégias para encontrar a resposta correta, utilizando-se de representações simbólicas diversas que, segundo a autora, “demonstram compreensão dos significados e invariantes implícitos nos problemas” (PESSOA, 2009).

Os resultados deste conjunto de estudos evidenciam compreensões de Combinatória de diferentes níveis de escolarização mas também apontam algumas dificuldades persistentes que devem ser alvo do ensino formal.

D) Relatos de experiências vivenciadas em sala de aula.

Um dos relatos de experiência identificados foi o de Fontes e Fontes (2007), intitulado *Análise combinatória: uma abordagem através de contexto*. Os autores propuseram uma abordagem contextualizada de problemas de Análise Combinatória, visto que os alunos consideram este um dos conteúdos da Matemática dos mais difíceis de ser compreendido devido, segundo os alunos, à não aplicabilidade na vida cotidiana.

A metodologia adotada por Fontes e Fontes (2007) foi a de elaboração de problemas “autênticos”, baseados em situações que, embora por vezes fictícias, representassem os tipos de problemas encontrados na vida real.

Os autores avaliaram a experiência como positiva, apontando a necessidade de se buscar suporte em meios de comunicação como internet, revistas e jornais para elaboração de questões que tenham significados para os alunos, de modo que os conteúdos matemáticos abordados estejam relacionados ao cotidiano dos estudantes.

Santos (2008) observou, em seu relato de experiência com uma turma de alunos da Educação de Jovens e Adultos com a finalidade de possibilitar aos seus educandos a construção e desenvolvimento do conceito de multiplicação através do raciocínio combinatório utilizando-as na resolução de problemas do contexto social por diferentes procedimentos (cálculos mentais, cálculos escrito), que no aprendizado da multiplicação, os problemas combinatórios são importantes, no entanto, em muitos desses problemas é difícil os alunos perceberem a presença da multiplicação. De modo geral, os alunos da EJA não apresentaram maiores dificuldades em situações com relação ternária entre três quantidades (numéricas ou dimensionais), em que uma é produto das outras duas, embora não relacionassem as mesmas à multiplicação.

Com estes estudos concluímos que é necessário um maior investimento na formação de professores quanto ao ensino e a aprendizagem de conceitos combinatórios, de modo a possibilitar que conhecimentos intuitivos de alunos sejam identificados e explorados no ensino formal da Análise Combinatória e não apenas a exploração de fórmulas**.** Livros didáticos e outros recursos precisam ampliar os tipos de problemas abordados – em situações significativas aos alunos – e mais orientações se tornam necessárias para que professores saibam como melhor explorar as situações propostas em manuais e em recursos tecnológicos, como softwares educativos.

Sendo relativamente baixo o número de estudos sobre raciocínio combinatório, divulgados em eventos recentes da área de Educação Matemática, torna-se necessário que mais estudos sejam realizados, dada a importância deste raciocínio no desenvolvimento lógico matemático dos alunos.

O presente estudo buscou contribuir para o acréscimo de investigações sobre raciocínio combinatório, em particular na Educação de Jovens e Adultos.

No capítulo que se segue discutiremos o método utilizado no percurso da pesquisa.

CAPÍTULO 4

MÉTODO

Neste capítulo é apresentado o percurso metodológico escolhido para este estudo com seus objetivos gerais e específicos. Nele são descritos os participantes, especificando quantidade e caracterização dos mesmos e das escolas onde a pesquisa foi realizada – apresentando a forma como cada escola organiza a educação de jovens e adultos e como foram escolhidas. Os procedimentos metodológicos adotados são expostos, apresentando o teste utilizado e a maneira como ele foi aplicado. Por fim, é descrita a forma como os resultados foram analisados.

4.1 Objetivos

4.1.1 Geral

Analisar a compreensão de indivíduos da Educação de Jovens e Adultos em cinco níveis desta modalidade de ensino sobre problemas de estruturas multiplicativas, especificamente os que envolvem o *raciocínio combinatório*.

4.1.2 Específicos

- Verificar se entre os problemas multiplicativos os que envolvem o *raciocínio combinatório* são os que apresentam maiores dificuldades por parte dos alunos;
- Levantar os tipos de problemas de *Combinatória* que os alunos de EJA têm maior e menor dificuldade;
- Analisar as estratégias utilizadas por esses alunos na resolução de problemas de *Combinatória* de diferentes naturezas;
- Comparar os resultados obtidos por estudos anteriores com alunos do Ensino Fundamental e Médio sobre este conteúdo matemático.
- Comparar os desempenhos em função das atividades profissionais exercidas pelos alunos de EJA;
- Comparar o desempenho em função da escolaridade.

4.2 Participantes

Participaram deste estudo 150 alunos da Educação de Jovens e Adultos de escolas públicas (uma municipal, duas estaduais e uma federal e uma mantida pelo Serviço Social do Comércio - SESC) do Estado de Pernambuco, sendo 30 alunos de cada módulo desta modalidade de ensino. As instituições foram escolhidas por conveniência, por disponibilizarem tempo e espaço para a realização da pesquisa. As turmas a participarem do estudo também foram escolhidas por conveniência, de acordo com a disponibilidade dos professores em conceder tempo de aula e espaço físico para a coleta. Para que em cada módulo fosse possível ter o mesmo quantitativo de alunos, foi necessário para os dois primeiros módulos da EJA efetuar a coleta de dados em mais de uma instituição.

A instituição pública municipal atende alunos dos anos inicias do Ensino Fundamental para a Educação de Jovens e Adultos. Na primeira instituição pública estadual os alunos eram dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental. A segunda instituição estadual atende apenas alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Para cada módulo da EJA nesta escola havia ao menos duas turmas. Nas turmas destas três escolas não encontramos um número elevado de alunos. Apenas na segunda escola estadual as turmas chegavam a conter cerca de 25 a 30 alunos. A instituição federal de ensino atende uma clientela voltada a cursos profissionalizantes. Nesta instituição, os cursos que atendem alunos da EJA são denominados de PROEJA – Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos. Este modelo de curso será descrito mais adiante. Cada período do curso deste programa tem aproximadamente uma duração de seis semestres. Na instituição pública mantida pelo Serviço Social do Comércio (SESC), o Ensino Fundamental para Jovens e Adultos é direcionado a comerciários, dependentes e usuários que não frequentaram a escola nos anos regulares. Cada turma é composta de, no máximo, 30 alunos. É organizado em ciclos de aprendizagem, respeitando a mesma organização das demais instituições de ensino.

A seguir apresentamos uma tabela da distribuição dos participantes por módulo e instituição.

Tabela 1. Distribuição dos participantes por módulo e instituição

Instituição	**Módulos**				
	Módulo I	**Módulo II**	**Módulo III**	**Módulo IV**	**PROEJA**
Municipal	10	10	-	-	-
Estadual 1	10	10	-	-	-
Estadual 2	-	-	30	30	-
Federal	-	-	-	-	30
SESC	10	10	-	-	-
Total	**30**	**30**	**30**	**30**	**30**

Como podemos observar na Tabela 1, trabalhamos com quatro esferas do sistema educacional brasileiro: Municipal, Estadual, Federal e mantida pelo Serviço Social do Comercio (SESC). Com exceção da instituição federal, todas as escolas organizam a Educação de Jovens e Adultos da seguinte maneira: Módulo I – referente aos dois primeiros anos do Ensino Fundamental 1 (atualmente denominados 2º e 3º anos); Módulo II – dois últimos anos do Ensino Fundamental 1 (atualmente denominados 4º e 5º anos); Módulo III – dois primeiros anos do Ensino Fundamental 2 (atualmente denominados 6º e 7º anos); Módulo IV – dois últimos anos do Ensino Fundamental 2 (atualmente denominados 8º e 9º anos). Os alunos do Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos – PROEJA – que participaram deste estudo pertencem ao segundo período do curso de Mecânica. Os cursos de PROEJA desta instituição são organizados em períodos de seis meses. Ao todo são seis períodos para cada curso.

O Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos – PROEJA - abrange cursos que, como o próprio nome diz, proporcionam formação profissional com escolarização para jovens e adultos. A idade mínima para acessar os cursos do PROEJA é de 18 anos na data da matrícula e não há limite máximo. A base legal do Programa é o Decreto no 5.840, de 13 de julho de 2006. Outros atos normativos que fundamentam o PROEJA são: a Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996, o Decreto no 5.154, de 23 de julho de 2004, os Pareceres CNE/CEB nº 16/99, nº 11/2000 e nº 39/2004 e as Resoluções CNE/CEB nº 04/99 e nº 01/2.

De acordo com o MEC (Brasil, 2007) e a partir da construção do projeto pedagógico integrado, os cursos PROEJA podem ser oferecidos das seguintes formas:

- Educação profissional técnica de nível médio com ensino médio, destinado a quem já concluiu o ensino fundamental e ainda não possui o ensino médio e pretende adquirir o título de técnico.
- Formação inicial e continuada com o ensino médio, destinado a quem já concluiu o ensino fundamental e ainda não possui o ensino médio e pretende adquirir uma formação profissional mais rápida.
- Formação inicial e continuada com ensino fundamental (5ª a 8ª série ou 6º a 9º ano), para aqueles que já concluíram a primeira fase do ensino fundamental.
- Dependendo da necessidade regional de formação profissional, são, também, admitidos cursos de formação inicial e continuada com o ensino médio. Os cursos podem ser oferecidos de forma integrada ou concomitante. A forma integrada é aquela em que o estudante tem matrícula única e o curso possui currículo único, ou seja, a formação profissional e a formação geral são unificadas. Na forma concomitante, o curso é oferecido em instituições distintas, isto é, em uma escola o estudante terá aulas dos componentes da educação profissional e em outra do ensino médio ou do ensino fundamental, conforme o caso. As instituições que optarem pela forma concomitante devem celebrar convênios de intercomplementaridade, visando o planejamento e o desenvolvimento de projetos pedagógicos unificados.

No decorrer do estudo tivemos a necessidade de criar grupos de faixa etária, uma vez que as idades apresentavam-se muito variadas. Para tanto organizamos os participantes em três grupos de idade distintos.

Segundo Palácios e Oliva (2004), de um modo geral, costumamos entender a etapa da adolescência iniciando-se por volta dos 12, 13 anos até aproximadamente os 20 anos de idade. De acordo com Palácios (2004), é comum fazer uma fragmentação da idade adulta e da velhice agrupando-as de forma que possamos falar de idade adulta inicial, que vai dos 25 aos 40 anos; idade adulta média, dos 40 aos 65 anos; idade adulta tardia ou velhice precoce, dos 65 aos 75 anos e velhice tardia, mais de 75 anos. Contudo, o valor atribuído a essa fragmentação é relativo e outros agrupamentos também podem ser feitos.

Assim sendo, neste estudo optamos por realizar uma fragmentação seguindo, em parte, a orientação de Palácios. Houve necessidade de junção de faixas etárias para possibilitar as análises estatísticas efetuadas. A seguir, apresentamos a Tabela 2 com a distribuição dos alunos por faixa etária e módulo.

Tabela 2. Distribuição dos participantes por faixa etária e módulo

Faixa etária	Módulo				
	Módulo I	**Módulo II**	**Módulo III**	**Módulo IV**	**PROEJA**
14 – 25	4	5	15	14	14
26 – 40	9	15	11	12	13
41 – 66	17	10	4	4	3

Na Tabela 3 apresenta-se a distribuição dos participantes em relação ao gênero e módulo.

Tabela 3. Distribuição dos participantes por gênero e módulo

Gênero	Módulo				
	Módulo I	**Módulo II**	**Módulo III**	**Módulo IV**	**PROEJA**
Feminino	23	22	17	15	4
Masculino	7	8	13	15	26

Dos que participaram da pesquisa, pode-se observar suas ocupações na Tabela 4, apresentada a seguir. Procuramos organizar os participantes em grupos profissionais a partir das funções exercidas em cada uma delas.

Cada grupo foi formulado de acordo com as funções exercidas por cada profissão. Em atividades domésticas inserimos as seguintes ocupações: dona-de-casa, doméstica, serviços gerais, auxiliar de serviços gerais, servente, diarista, babá e copeira. Em atividades de produção de alimentos temos: cozinheira e auxiliar de cozinha. Em atividade com transporte temos: mecânico, caminhoneiro e motorista. O quarto grupo é composto apenas por estudantes. No quinto – o de atividades comerciais – temos: vendedores e comerciantes. No sexto – atividades em atendimento e serviço em alimentação – temos: garçom e garçonetes. O sétimo – o de atividades de construção civil - temos: pedreiro, serralheiro, eletricista e torneiro mecânico. No oitavo e último grupo – caracterizado como *outros*, devido ao número reduzido em cada profissão – temos: cabeleireira, manicure, segurança, operador de máquina, auxiliar prático, costureira, autônomo, técnico de farmácia, auxiliar de escritório, aposentado e equitador[6]

Tabela 4. Distribuição dos alunos por profissão e módulo

Profissão	**Módulo**				
	Módulo I	**Módulo II**	**Módulo III**	**Módulo IV**	**PROEJA**
Atividades domésticas	16	20	8	6	2
Atividades de produção de alimentos	1	-	-	1	-
Atividades com transporte	1	1	-	1	7
Estudantes	6	5	16	15	12
Atividades comerciais	-	1	1	4	1
Atividades de atendimento e serviço em alimentação	-	-	3	-	-
Atividades da construção civil	1	1	1	1	3
Outras	5	2	1	2	5
Total	**30**	**30**	**30**	**30**	**30**

A distribuição dos alunos em relação aos anos de estudo, gênero e módulo seguem na Tabela 5[7] apresentada abaixo.

Tabela 5. Distribuição dos participantes por sexo, módulo e anos de estudo

Gênero	**Anos de estudos**	**Módulos**				
		Módulo I	Módulo II	Módulo III	Módulo IV	PROEJA
Feminino	**0-4 anos**	17	18	3	1	-
	5-7 anos	6	4	9	9	-
	8-10 anos	-	-	5	5	2
	Mais de 10 anos	-	-	-	-	2
Masculino	**0-4 anos**	5	6	3	3	-
	5-7 anos	2	2	6	3	-
	8-10 anos	-	-	4	4	8
	Mais de 10 anos	-	-	-	5	18
Total		**30**	**30**	**30**	**30**	**30**

6 Equitador é um cavaleiro; que sabe equitação.

7 As tabelas desta seção apresentam como os dados foram organizados para serem analisados.

4.3 Procedimentos

Os alunos resolveram, individualmente, um teste contendo 16 questões multiplicativas e de combinatória (duas questões para cada tipo de problema). Os problemas multiplicativos foram necessários para verificar o desempenho dos alunos na resolução das questões e para confirmar a hipótese de que os problemas do tipo que envolve o raciocínio combinatório são os que se apresentam como os mais difíceis para os alunos, conforme indicado em estudos anteriores. Numa folha à parte do teste, os alunos responderam a um pequeno questionário para que fosse possível traçar o perfil dos mesmos.

Cada questão foi disposta de forma que nenhum dos tipos ficasse próximo~~s~~ um do outro, por exemplo, se a primeira questão fosse de multiplicação direta a seguinte não poderia ser do mesmo tipo, pois o aluno poderia ser levado a utilizar a mesma estratégia de resolução para ambas as questões.

O teste aplicado com os alunos da Educação de Jovens e Adultos foi elaborado a partir do estudo de Selva e Borba (2008) intitulado *Sondando o conhecimento de professoras sobre o desenvolvimento conceitual multiplicativo.* Os problemas de combinatória fazem parte do estudo de Pessoa (2009), *"Quem dança com quem: a compreensão do raciocínio combinatório dos 7 aos 17 anos"*.

Não foi estipulado tempo para a resolução dos problemas. Nos anos iniciais do Ensino Fundamental a pesquisadora leu cada questão quantas vezes se fizeram necessária para os alunos, pois alguns ainda não dominavam a leitura e escrita. Todas as questões apresentam desenhos, pois no estudo de Selva e Borba (2008) os problemas foram apresentados desta maneira. Deste modo, decidimos utilizar desenhos em todas as questões de combinatória.

Seguem os problemas na ordem em que foram apresentados para os alunos.

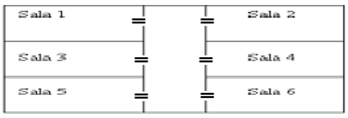
01. Marta tem 63 adesivos em sua coleção. Em cada página do álbum ela colou 9 adesivos. Quantas páginas do álbum ela já usou?

(Quotição)

02. Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Pedro, Sandra,Vítor, Nívea,Roberto,Laura e Mateus) dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 poderemos fazer?

(Combinação)

03. A escola “Mundo da Aprendizagem” conseguiu uma doação de 42 cadeiras. Ela tem 6 salas de aula e quer colocar a mesma quantidade de cadeiras em cada sala. Quantas cadeiras novas serão colocadas?



(Partição)

04. Calcule o número de palavras que podem ser criadas (existentes ou inventadas) usando a palavra AMOR.

A
M
O
R **(Permutação)**

05. A loja “Tudo sofá” vende sofás de 3 tamanhos diferentes (grande, médio e pequeno) e em cores diferentes. Se na loja são vendidos 18 sofás diferentes quantas são as cores que podem ser escolhidas?

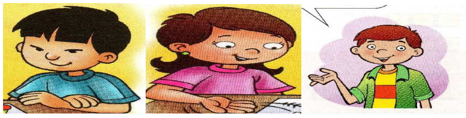
(Produto cartesiano Inverso)

06. Na padaria “Pão Quente” cada pão de forma é cortado em 8 fatias. Quantas fatias serão obtidas se 9 pães forem cortados?

(Multiplicação direta)

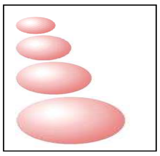
07. Para representante de uma sala de aula se candidataram 3 pessoas (João,

Mariana,Vítor). Quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?



(Arranjo)

08. Na fabrica “Bola Tudo” há 4 tamanhos de bolas e estas são feitas em 7 desenhos diferentes. Quantos tipos de bolas são fabricadas?



(Produto Cartesiano Direito)

09. Para enfeitar a loja no Natal, Seu Marcos comprou 7 arvores pequenas de Natal e 56 bolas vermelhas. Ele quer enfeitar cada arvore com a mesma quantidade de bolas. Quantas bolas ele vai colocar em cada arvore?

(Partição)

10. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

(Permutação)

11. O supermercado “PreçoCerto” organiza os sabonetes em pacotes com 4 sabonetes cada. Na prateleira tem 9 pacotes. Quantos sabonetes estão à venda?

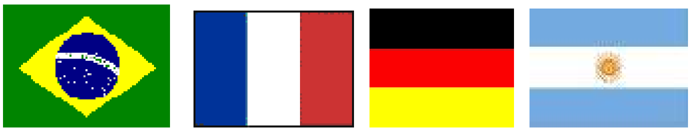
(Multiplicação)

12. Na sorveteria “Friofrio” você escolhe o sabor e a calda do seu sorvete. Há 4 tipos e caldas: chocolate, morango, caramelo e ameixa e ao todo tem-se 32 opções

diferentes de sorvete. Quantos sabores diferentes são oferecidos?

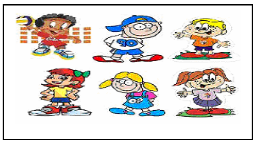
(Produto Cartesiano Inverso)

13. As quartas de final da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina.De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?



(Arranjo)

14. No campeonato de vôlei de uma escola se inscreveram 48 crianças. Cada time é formado por 6 crianças. Quantos times irão disputar o campeonato?



(Quotição)

15. O restaurante "QDelicia" serve vários tipos de pratos prontos (Prato quente e sobremesa). Se há 6 opções de pratos quentes e 4 opções e sobremesa, quantos tipos de pratos prontos o restaurante serve?

"Prato Pronto: Prato quente e sobremesa"

Escolha sua opção!

Pratos quentes	Sobremesa
➢ Bife	➢ Bolo
➢ Filé	➢ Doce de goiaba
➢ Frango	➢ Salada de frutas
➢ Macarronada	➢ sorvete
➢ Peixe	
➢ Sopa	

(Produto Cartesiano Direto)

16. Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas iguais. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos

no concurso?

  **(Combinação)**

Após a coleta de dados, os mesmos foram analisados por meio do Statistical Package for the Social Sciences - SPSS. Os dados foram analisados quantitativa e qualitativamente.

Foram analisados os desempenhos dos participantes a partir das variáveis controladas: série e tipos de problemas; e das variáveis externas: anos de estudo, faixa etária e profissão exercida. Também foram analisados os tipos de respostas e estratégias utilizadas pelos alunos. Estas análises são apresentadas e discutidas no capítulo que segue.

CAPÍTULO 5

APRESENTAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Com a finalidade de analisar a compreensão de indivíduos da Educação de Jovens e Adultos em todos os níveis desta modalidade de ensino sobre problemas de estruturas multiplicativas, em especial os que envolvem o *raciocínio combinatório*, tivemos como objetivos específicos: verificar se entre os problemas multiplicativos os que envolvem o *raciocínio combinatório* são os que apresentam maior dificuldade por parte de alunos da Educação de Jovens e Adultos; levantar os tipos de problemas de *Combinatória* que os alunos de EJA têm maior e menor dificuldade; analisar as estratégias utilizadas por esses alunos na resolução de problemas de *Combinatória* de diferentes naturezas; comparar os resultados obtidos por estudos anteriores com alunos do Ensino Fundamental e Médio sobre este conteúdo matemático; comparar os desempenhos em função da escolaridade.

Para atingir estes objetivos, analisamos os resultados quantitativamente com o auxílio do Statistical Package for the Social Sciences – SPSS. Com este programa estatístico pudemos analisar diferenças de desempenho por módulo (série), por tipo de problema (as duas variáveis controladas), por anos de escolaridade, por idade, por profissão e por gênero (variáveis externas não controladas). Os desempenhos por tipos de problema e as estratégias utilizadas pelos alunos foram também analisados qualitativamente. Com respeito às estratégias, procuramos analisar a relação dessas com o nível escolar e com os anos de escolaridade.

A seguir, apresentaremos os resultados obtidos e análises efetuadas em relação ao desempenho dos alunos da EJA do Módulo I até o Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos (PROEJA), da série, dos tipos de problemas, da idade e da profissão exercida. Nas discussões efetuadas buscaremos relacionar os resultados da presente pesquisa com as discussões teóricas anteriormente efetuadas e com resultados obtidos em estudos empíricos anteriores.

5.1 Desempenho em função da série (módulos)

Por meio da ANOVA (Análise de variância) realizada, verificou-se que entre os módulos houve diferenças significativas no desempenho dos alunos ($F(4, 149) = 21.732$, $p < 0.001$). Os testes post-hoc realizados indicaram diferenças significativas (em nível $p < 0.001$) entre alguns dos cinco módulos, conforme se pode observar na Tabela 6. Os desempenhos no PROEJA foram significativamente superiores aos desempenhos nos demais níveis e os desempenhos dos participantes do primeiro módulo em comparação aos dos dois últimos da EJA também evidenciaram diferenças significativas, uma vez que os alunos dos módulos referentes às séries finais do Ensino Fundamental apresentaram desempenhos superiores aos das séries inicias. Não foram observadas diferenças significativas entre os desempenhos dos alunos do Módulo I e Módulo II nem entre os do Módulo III e IV.

Tabela 6. Distribuição de significâncias entre os módulos (séries)

Módulo/Série	**Significância*/Módulo (série)**				
	Módulo I	**Módulo II**	**Módulo III**	**Módulo IV**	**PROEJA**
Módulo I	-	0.989	0.004	0.227	0.001
Módulo II	0.989	-	0.019	0.487	0.001
Módulo III	0.004	0.019	-	0.578	0.001
Módulo IV	0.227	0.487	0.578	-	0.001
PROEJA	0.001	0.001	0.001	0.001	-

* Foi considerado significante p inferior ou igual a 0.05.

Na Tabela 7 pode-se observar a distribuição dos participantes por módulo e acerto total. Verificamos, assim, que houve progressos de um nível de ensino para outro, com um destaque maior no desempenho dos alunos do último nível de escolarização, no caso os alunos do PROEJA. Nos Módulos I e II há praticamente o mesmo número de participantes que acertam entre nenhuma e oito questões, o mesmo ocorrendo entre os participantes dos Módulos III e IV. O que muda entre os alunos dos dois primeiros módulos (correspondentes às séries iniciais do Ensino Fundamental) e os dos dois seguintes (correspondentes às séries finais) é o acréscimo no número de participantes que acertam mais de oito questões. Há um evidente avanço no desempenho dos alunos do PROEJA, com a maioria destes alunos acertando mais de oito questões.

Tabela 7. Distribuição dos participantes por módulo e acerto total

Módulos (séries)	**Total de acertos**	
	0 – 8 acertos	**Mais de 8 acertos**
Módulo I	30	-
Módulo II	30	-
Módulo III	27	3
Módulo IV	26	4
PROEJA	22	8

Nas Figuras 2 e 3 podem ser observadas respostas distintas de alunos de níveis diferentes de ensino para uma mesma questão. Na Figura 2 a aluna do primeiro módulo da EJA parece não ter compreendido o problema e dá como resposta um dos dados do enunciado, sem explicitar como chegou à solução registrada por ela. Provavelmente ela chegou à conclusão de que se a loja produz 18 sofás diferentes é possível que sejam 18 cores diferentes de sofás. Ela não considerou que é uma cor para cada conjunto de tamanho de sofá. Se forem três tamanhos diferentes e a loja faz ao todo 18 sofás distintos a loja trabalha com seis cores diferentes. Já o aluno do PROEJA percebeu essa relação e conseguiu chegar ao resultado correto da questão utilizando-se do algoritmo da divisão.

Figura 2. Solução incorreta do Problema 5 (produto cartesiano inverso) do P3 (Participante 3), sexo feminino, doméstica, 43 anos de idade, um ano de estudo, Módulo I da Educação de Jovens e Adultos.

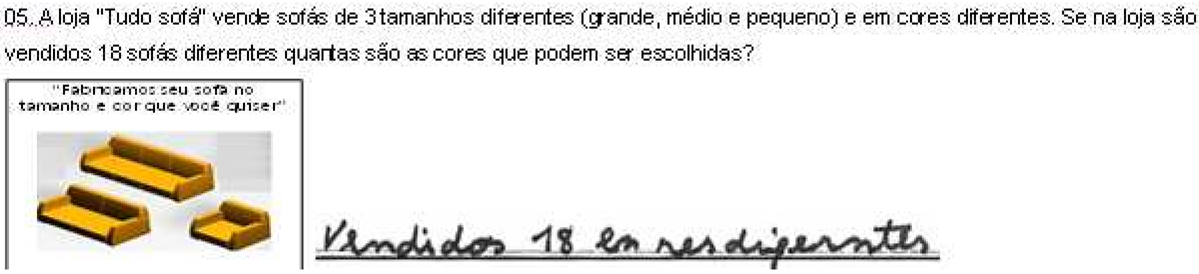
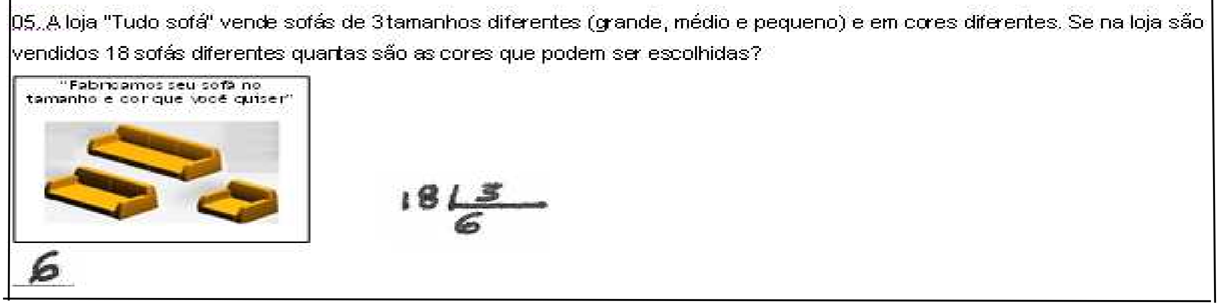


Figura 3. Solução correta do Problema 5 (produto cartesiano inverso) do P 128 (Participante 128), sexo masculino, estudante, 38 anos de idade, oito a dez anos de estudo, PROEJA – Mecânica.



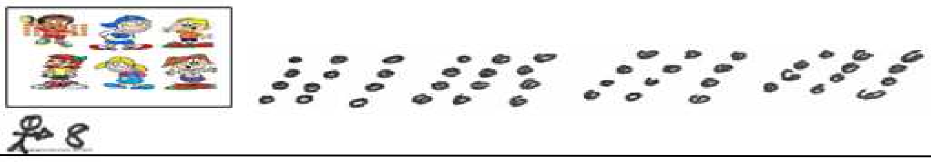
Nas Figuras 4 e 5 observamos um mesmo procedimento utilizado por alunos de níveis diferentes de ensino (Módulos I e II da EJA) para a resolução do mesmo problema multiplicativo. Os dois alunos usaram a representação icônica para obter o resultado correto do problema. Com estas quatro soluções apresentadas, exemplifica-se como não houve diferença significativa de desempenho entre os Módulos I e II da EJA e que houve diferença significativa entre o Módulo I e o PROEJA.

Figura 4. Solução correta do Problema 14 (quotição) do P 42 (Participantes 42), sexo masculino, caminhoneiro, 20 anos, nenhum a quatro anos de estudo, Módulo II da EJA.

14. No campeonato de vôlei de uma escola se inscreveram 48 crianças. Cada time é formado por 6 crianças. Quantos times irão disputar o campeonato?

Figura 5. Solução correta do Problema 14 (quotição) do P 8 (Participante 8), sexo masculino, 20 anos, estudante, nenhum a quatro anos de estudo, Módulo I da EJA

14. No campeonato de vôlei de uma escola se inscreveram 48 crianças. Cada time é formado por 6 crianças. Quantos times irão disputar o campeonato?



Observa-se, assim, que o efeito da escolarização evidenciou-se entre grupos distantes, mas não entre grupos próximos, ou seja, entre módulos seguidos não houve diferenças significativas de desempenho, mas entre módulos iniciais e finais as diferenças de desempenho eram altamente significativas. Estes dados assemelham-se ao que foi observado também em relação a anos de escolarização. Se a diferença de anos de escolarização era pequena, os desempenhos não se diferenciaram significativamente, mas quando as diferenças eram grandes (como no caso dos participantes com mais de 10 anos de escolarização) diferenças significativas foram observadas. Assim, o efeito da escolarização sobre o desempenho foi fortemente evidenciada quando os participantes possuíam um número elevado de anos de escolarização e estavam frequentando séries mais avançadas.

Os dados aqui obtidos se assemelham aos de Pessoa (2009). No estudo de Pessoa os alunos evidenciaram avanços significativos no final da primeira fase (5º Ano) e da segunda fase (9º Ano) do Ensino Fundamental e também no final (3º Ano) do Ensino Médio. Esses avanços foram creditados à maturidade e/ou vivência de experiências fora e dentro da sala de aula, que não necessariamente estivessem relacionadas diretamente ao ensino da Combinatória. A autora justificou que no 5º Ano do Ensino Fundamental (no qual concentra-se o estudo das estruturas multiplicativas) e no 3º Ano do Ensino Médio (no qual já ocorreu o aprendizado da Análise Combinatória) as experiências escolares podem ter tido uma influência maior no desempenho, mas há evidências de que outras experiências podem influenciar o desenvolvimento do raciocínio combinatório pois, de acordo com a autora acima citada, “nos anos finais do Ensino Fundamental os alunos melhoram significativamente mesmo sem instrução escolar específica” (PESSOA, 2009).

A maturação pode ser um dos fatores que influencia o desenvolvimento matemático, mas acredita-se que há limites na influência deste fator e que outros fatores podem ter uma influência mais forte no desempenho.

Pode-se observar, por meio do exame da Tabela 8 que há uma concentração maior de jovens nos últimos módulos da Educação de Jovens e Adultos. Verificamos que o número de alunos jovens nesta modalidade de ensino aumenta conforme a elevação do nível escolar. Os educandos adultos são em número maior nas séries iniciais, principalmente no Módulo I, referente ao segundo e terceiro anos do Ensino Fundamental I. Desse modo, os alunos mais jovens foram os que evidenciaram maior desempenho nas questões propostas e essa variável – idade dos participantes – será analisada em maior detalhamento em uma seção posterior.

Tabela 8. Distribuição dos participantes por módulo (série) e faixa etária

Módulo (série)	**Faixa etária**			**Total**
	14 - 25	**26 - 40**	**41 - 66**	
Módulo I	4	9	17	30
Módulo II	5	15	10	30
Módulo III	15	11	4	30
Módulo IV	14	12	4	30
PROEJA	14	13	3	30
Total	52	60	38	150

Com relação à distribuição dos alunos por profissão, conforme mostrado na Tabela 9, pode-se observar que nos dois primeiros módulos da EJA há um número maior de participantes em atividades domésticas, são 24% do total de participantes (36 dos 150 participantes) nesta atividade profissional. Observa-se, assim, que 67% dos alunos do total de participantes dos dois primeiros módulos (36 de 54 participantes) estão no grupo das atividades domésticas.

A atividade profissional com maior número de participantes é o de estudantes. Pode-se perceber que o número dos que exercem exclusivamente a atividade de estudante aumenta de acordo com o aumento do nível escolar.

A influência da variável profissão exercida sobre o desempenho será analisada em uma seção posterior do presente estudo.

Discutiremos adiante a influência da idade para observar se procede ou não o que Fischbein (1975) afirma, em termos de que a habilidade na resolução de problemas combinatórios nem sempre é alcançada na idade adulta, assim é preciso que haja instrução escolar específica para que essa habilidade aconteça.

Tabela 9. Distribuição dos participantes por módulo (série) e atividades profissionais

Módulo (série)	**Profissão**								**Total**
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	
Módulo I	16	1	1	6	-	-	1	5	**30**
Módulo II	20	-	1	5	1	-	1	2	**30**
Módulo III	8	-	-	16	1	3	1	1	**30**
Módulo IV	6	1	1	15	4	-	1	2	**30**
PROEJA	2	-	7	12	1	-	3	5	**30**
Total	**52**	**2**	**10**	**54**	**7**	**3**	**7**	**15**	**150**

A – Atividades domésticas; **B** – Atividades de produção de alimentos; **C** – Atividades com transporte; **D** – Estudantes; **E** – Atividades comerciais; **F** – Atividades de atendimento e serviço em alimentação; **G** – Atividades da construção civil; **H** – Outras.

5.2 Desempenho por tipo de problema multiplicativo e combinatório

Na Tabela 10 pode-se perceber que, dentre os problemas multiplicativos, os que envolvem o raciocínio combinatório – no caso o produto cartesiano – é o tipo de problema que os alunos apresentaram maior dificuldade. Observa-se que em todas as séries a dificuldade maior foi com os problemas de produto cartesiano. No Módulo I nenhum dos participantes foi capaz de acertar todos os problemas deste tipo e no Módulo II muito poucos foram capazes de fazê-lo. Nas outras séries, o desempenho nos problemas de produto cartesiano foi mais baixo, principalmente no PROEJA cujos alunos apresentaram um muito bom desempenho nas demais questões.

O resultado encontrado como verificamos na Tabela 10 confirma o encontrado por Nesher (1988) que afirmou que dentre os problemas multiplicativos os mais difíceis para as crianças são os que envolvem produto cartesiano, pois este tipo de problema envolve dois conjuntos básicos que combinados resultam em um terceiro conjunto distinto, composto por elementos de um e do outro conjunto básico e a correspondência um-a-muitos não é explicitamente indicada na formulação verbal. Destaca-se que esta autora não considerou permutações, combinações e arranjos em sua análise, mas apenas o produto cartesiano como problema combinatório.

Tabela 10. Percentual de acerto por problema multiplicativo e módulo (série)[8]

Módulo (série)	**Problemas Multiplicativos**				
	Multiplicação	**Quotição**	**Partição**	**PCD**	**PCI**
Módulo I	37	20	37	-	-
Módulo II	23	13	30	3	3
Módulo III	43	43	37	23	17
Módulo IV	43	33	30	17	7
PROEJA	80	80	90	20	10

PCD = Produto Cartesiano Direto; **PCI** = Produto Cartesiano Inverso.

Borba, Selva, Luna, Silva e Ferreira (2008) também identificaram o produto cartesiano como sendo um tipo de problema mais difícil que outros problemas multiplicativos. Segundo estas autoras, outro possível motivo para esta dificuldade pode ser a pouca familiaridade dos alunos com este tipo de problema, pois os mesmos são pouco vivenciados em sala de aula, além de neste tipo de problema a relação um-para-muitos não ser explícita e serem três naturezas distintas de elementos envolvidas.

À semelhança do observado em Selva et al (2008), os problemas de multiplicação direta apresentaram-se como os mais fáceis. Dentre os multiplicativos que envolviam divisão, de modo geral, os de partição foram os que os alunos demonstraram um melhor desempenho em quase todas as séries, mas poucas foram as diferenças entre os desempenhos entre problemas de divisão partitiva e quotitiva.

Os estudos de Selva (1998) e Selva, Borba, Magina, Spinillo e Campos

[8] Para a elaboração da Tabela 10 optamos por considerar apenas os alunos que acertaram as duas questões de cada tipo de problema.

(2006) apontam que não há diferenças significativas no desempenho dos alunos em problemas de partição e quotição, contudo, é possível argumentar que problemas de quotição têm um grau maior de dificuldade na compreensão do problema, pois é um problema inverso de multiplicação, o que exige do aluno mais uma operação mental – a inversão. Os problemas de partição podem ser considerados como problemas diretos de divisão e, assim, podem ser considerados como mais fáceis de compreender. Outra questão apontada pelas autoras acima para o fato de que os problemas de quotição podem apresentar-se como mais difíceis é devido à baixa frequência com que são trabalhados em sala de aula.

Os resultados do presente estudo replicam, assim, os achados de estudos anteriores realizados com crianças. Dessa forma, as dificuldades na resolução de problemas de crianças e de jovens e adultos se assemelham. Os problemas de multiplicação direta são os mais facilmente resolvidos, seguidos dos de divisão (partitiva e quotitiva) e, por fim, há um desempenho mais fraco nos problemas de produto cartesiano (direto e inverso).

Ao analisar o desempenho dos alunos por módulo e tipo de problemas de Combinatória, percebemos, ao examinar a Tabela 11, que, dentre os problemas combinatórios, os de produto cartesiano são os que apresentam menor dificuldade por parte dos alunos. Apenas alguns dos alunos do Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos – PROEJA conseguiram acertar as duas questões para os demais tipos de problemas de Combinatória, ou seja, problemas de arranjos, permutações e combinações.

Tabela 11. Percentuais de dois acertos por problema combinatório e módulos (série)[9]

Módulo (série)	Problemas de Combinatória				
	Arranjo	**Combinação**	**Permutação**	**PCD**	**PCI**
Módulo I	-	-	-	-	-
Módulo II	-	-	-	3	3
Módulo III	-	-	-	23	17
Módulo IV	-	-	-	17	7
PROEJA	13	3	7	20	10

PCD = Produto Cartesiano Direto; **PCI** = Produto Cartesiano Inverso.

Na Tabela 12 pode-se observar o percentual de acerto dos alunos que

[9] Esta tabela apresenta o percentual de acertos dos alunos que responderam corretamente as duas questões de cada tipo de problema.

responderam corretamente apenas uma das questões para cada tipo de problema combinatório. Nesta tabela observamos que o desempenho dos alunos foi melhor nos problemas de produto cartesiano, seguido pelos de combinação. Os problemas de permutação e de arranjo apresentaram um menor percentual de acerto.

Tabela 12. Percentuais de um acerto por problemas combinatórios e módulos (série)

Módulo (série)	**Problemas Multiplicativos**				
	Arranjo	**Combinação**	**Permutação**	**PCD**	**PCI**
Módulo I	-	-	-	17	17
Módulo II	3	3	-	13	20
Módulo III	3	3	10	47	33
Módulo IV	7	7	3	27	7
PROEJA	27	40	33	40	10

PCD = Produto Cartesiano Direto; **PCI** = Produto Cartesiano Inverso.

Os resultados aqui encontrados se assemelham em alguns aspectos e se diferenciam em outros aos de estudo anteriormente realizado. No estudo de Pessoa (2009), os problemas de produto cartesiano apresentaram-se como os mais fáceis entre os problemas combinatórios, exatamente como ocorrido no presente estudo. Diferentemente dos resultados obtidos neste estudo, os problemas mais difíceis encontrados por Pessoa (2009) foram os de permutação e combinação, sendo que este último apresentou os percentuais mais baixos de acertos em todos os níveis de ensino e o problema de permutação foi o de mais difícil compreensão no Ensino Fundamental I. No presente estudo, os problemas de permutação e arranjo foram os mais difíceis para os alunos da Educação de Jovens e Adultos.

Em todos os módulos (séries) os problemas de produto cartesiano, especialmente o de produto cartesiano direto, foram os que apresentaram o maior percentual de acertos. De acordo com o estudo de Pessoa (2009), isso pode acontecer por influência da escola, pois os problemas que envolvem o raciocínio combinatório geralmente são explicitamente trabalhados com as crianças a partir do 3º ou 4º ano do Ensino Fundamental, sendo o produto cartesiano trabalhado em conjunto com outros significados das estruturas multiplicativas, por exemplo, proporcionalidade, configuração retangular e comparativa.

Embora os PCN (1997) orientem para que os problemas combinatórios (arranjo, permutação e combinação) sejam trabalhados desde cedo, foi evidenciado no estudo de Barreto, Amaral e Borba (2007), que há um trabalho não sistematizado e implícito em alguns livros didáticos de anos iniciais de escolarização com estes tipos de problemas de Combinatória e apenas o produto cartesiano é explicitamente trabalhado.

Na análise de variância realizada encontramos diferenças significativas no desempenho (em nível de $p < 0.001$) entre os tipos de problemas, segundo disposto na Tabela 13.

Tabela 13. Distribuição dos problemas por significância

Tipos de Problemas	Problema	Significância
Multiplicação	PCD	0.001
	PCI	0.001
	Combinação	0.001
	Permutação	0.001
	Arranjo	0.001
PCD	Partição	0.001
	Quotição	0.001
	Combinação	0.001
	Permutação	0.001
	Arranjo	0.001
PCI	Partição	0.001
	Quotição	0.001
	Combinação	0.001
	Permutação	0.001
	Arranjo	0.001
Partição	Combinação	0.001
	Permutação	0.001
	Arranjo	0.001
Quotição	Combinação	0.001
	Permutação	0.001
	Arranjo	0.001

PCD = Produto Cartesiano Direto; **PCI** = Produto Cartesiano Inverso.

Observamos que, de modo geral, os desempenhos entre os problemas multiplicativos que não envolvem o raciocínio combinatório e os que envolvem o raciocínio combinatório foram significativamente diferentes, apresentando os alunos da EJA maiores dificuldades com os problemas combinatórios. De acordo com o teste post-hoc efetuado (Tukey HSD), não há diferença significativa de desempenho entre os problemas de produto cartesiano direto e inverso; problemas de partição e quotição; combinação e permutação; combinação e arranjo e permutação e arranjo. Estes resultados evidenciam que, de modo geral, os alunos desempenharam-se de modo semelhante nos problemas de divisão e também nos problemas combinatórios.

Nas Figuras 6, 7, 8 e 9, apresentamos alguns exemplos de alunos que compreenderam os diferentes tipos de problemas e outros que tiveram dificuldade em compreendê-los. Temos as resoluções corretas e incorretas de alunos do mesmo nível de ensino, apresentando cada um uma forma diferente de resolver a mesma questão.

O aluno representado pela Figura 6 utiliza o Princípio Fundamental da Contagem para resolver o problema de arranjo. Embora sua resposta esteja correta, o fatorial de três (P3!) indica que ele quis utilizar-se da fórmula para o arranjo, contudo, não a soube efetuar. Desta maneira seu procedimento foi inadequado, pois o aluno tenta utilizar uma fórmula não adequada para a situação, o que nos leva a pensar que “não basta conhecer as fórmulas, mas é necessário saber utilizá-las nas situações corretas, ou seja, é preciso estar atento ao cálculo relacional, observando bem as características da situação e optando por procedimento adequado à mesma” (PESSOA, 2009).

Figura 6. Solução incorreta do Problema 7 (arranjo) do P 123 (Participante 123), sexo masculino, eletricista, 21 anos de idade, mais de dez anos de estudo, PROEJA – Mecânica.

07. Para representante de uma sala de aula se candidataram 3 pessoas (João, Mariana,Vítor). Quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?

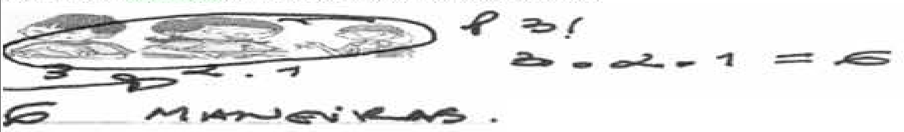


Figura 7. Solução correta do Problema 7 (arranjo) do P 129 (Participante 129), sexo masculino, 28 anos de idade, estudante, oito a dez anos de estudo, PROEJA – Mecânica.

07. Para representante de uma sala de aula se candidataram 3 pessoas (João, Mariana,Vítor). Quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?

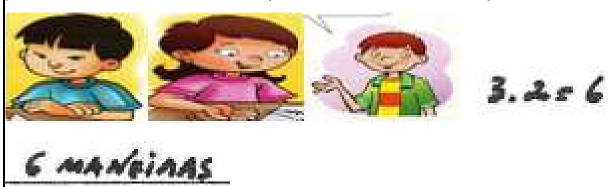


Figura 8. Solução correta do Problema 7 (arranjo) do P 130 (Participante 130), sexo masculino, 19 anos de idade, estudante, oito a dez anos de estudo, PROEJA – Mecânica.

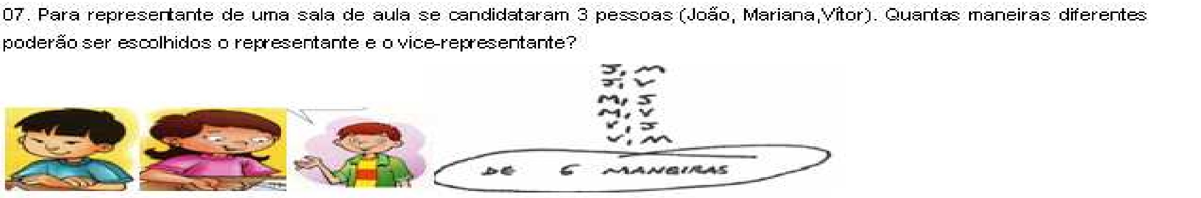
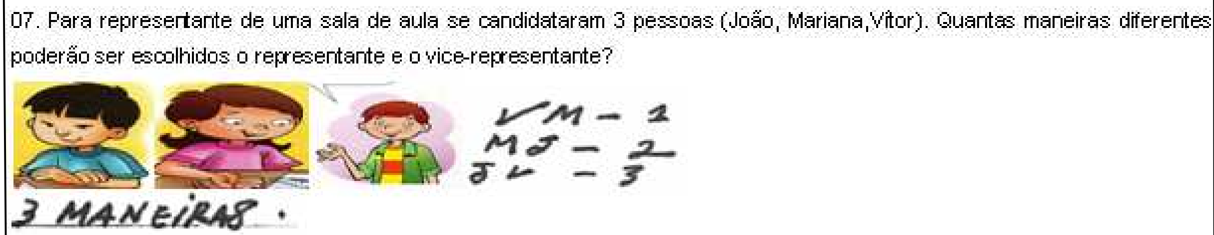


Figura 9. Solução incorreta do Problema 7 (arranjo) do P 134 (Participante 134), sexo masculino, 50 anos, torneiro mecânico, oito a dez anos de estudo, PROEJA – Mecânica.



A Figura 7 representa a estratégia de um aluno que resolve o problema via multiplicação. Na Figura 8 o aluno utilizou a listagem de possibilidades para chegar ao resultado correto do problema, tendo percebido a necessidade de retirar conjuntos menores para gerar novas possibilidades e percebendo ainda, que a ordem neste tipo de problema é importante e que gera novas possibilidades. Dessa forma, o aluno estava atento aos invariantes do problema de arranjo. Já o aluno representado pela Figura 9 percebeu que era necessário retirar do conjunto maior elementos que formassem um novo conjunto, porém, não percebeu que variando a ordem desses elementos obteria novas possibilidades.

Segundo Pessoa (2009), dos tipos de problemas combinatórios menos trabalhados no Ensino Fundamental – arranjo, combinação e permutação – os problemas de arranjo se apresentam como os mais fáceis, isso baseado no desempenho dos alunos participantes de sua pesquisa. Isso aconteceu porque este problema de Combinatória apresenta como um de seus invariantes o agrupamento de conjuntos menores que a quantidade dada pelo conjunto maior. Por exemplo, é dado um conjunto de quatro elementos e solicita-se que se formem agrupamentos de um, dois e três elementos. De acordo com este invariante de arranjos, tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de um elemento, dois elementos ... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais. Outro invariante conceitual é que a ordem dos elementos gera novas possibilidades. Assim, para listar as possibilidades não será preciso desconsiderar algumas delas. No problema de combinação é necessário desconsiderar metade das possibilidades, pois existem casos iguais que variam em ordem, mas que não geram novas possibilidades.

A maioria dos alunos dos cinco níveis de ensino não percebeu alguns dos invariantes do arranjo, pois eles não selecionaram apenas alguns elementos do conjunto e/ou não esgotaram todas as possibilidades ou não fizeram uso de fórmulas adequadas.

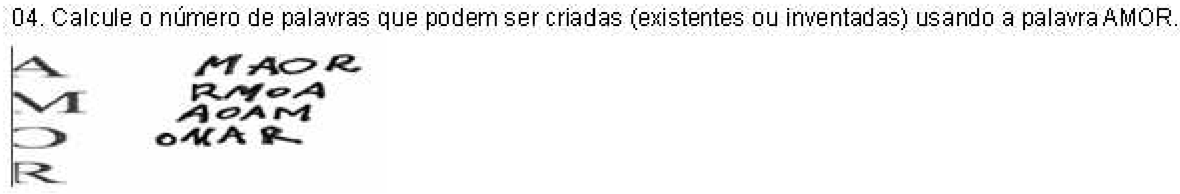
Diferentemente das crianças, os jovens e adultos apresentaram uma resistência em resolver os problemas através de desenhos e através da listagem de possibilidades. Apesar de serem procedimentos não formalizados que podem auxiliar na solução de problemas de diversas naturezas, inclusive de situações combinatórias, os jovens e adultos tendiam a resistir na utilização destes procedimentos. O que se pode perceber é que este grupo buscava utilizar-se mais dos algoritmos para a resolução das situações e quando não sabiam utilizá-los preferiram deixar as questões em branco.

Os problemas de permutação necessitam de uma sistematização bem rigorosa para que o aluno não se perca na organização das possibilidades, pois ao reconhecer os invariantes da permutação o aluno necessita considerar que todos os elementos serão usados cada um apenas uma vez e a ordem dos elementos gera novas possibilidades. Tanto no estudo de Pessoa (2009) quanto neste, ocorreu com certa frequência nas soluções de permutação que os alunos não buscaram esgotar todas as possibilidades, listando apenas alguns acasos.

A seguir temos exemplos de soluções de alunos de diferentes níveis de ensino nos problemas de permutação.

Na Figura 10 evidencia-se a dificuldade de uma aluna em resolver este tipo de problema. A aluna percebeu uma das propriedades da permutação, que é utilizar-se de todos os elementos do conjunto para formar novas possibilidades. Contudo, ela não esgotou todas as possibilidades, finalizando antes do término da solução completa da situação e não executou a questão de forma sistematizada.

Figura 10. Solução incorreta do Problema 4 (permutação) da P3 (Participante 3), sexo feminino, 43 anos de idade, doméstica, nenhum a quatro anos de estudo, Módulo I da EJA.


04. Calcule o número de palavras que podem ser criadas (existentes ou inventadas) usando a palavra AMOR.

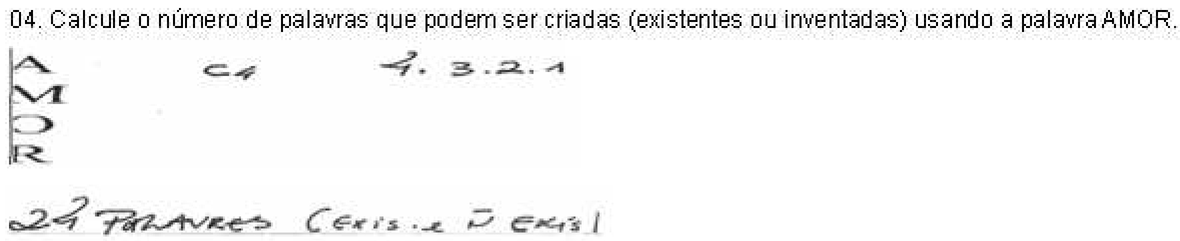
A
M
O
R

MAOR
RMOA
AOAM
OMAR

Salienta-se que nenhum aluno do primeiro ao quarto módulo acertou as duas questões de permutação e apenas 7% dos alunos do PROEJA conseguiram obter a resposta correta nas duas questões que envolviam esse tipo de problema combinatório. Dentre os alunos que acertaram apenas uma questão de permutação, 10% dos alunos acertaram uma das duas questões e este percentual diminui para 3% no quarto módulo da EJA. No PROEJA observamos um aumento do percentual, com 33% dos alunos acertando ao menos uma das duas questões. Muitos alunos utilizaram listagem de possibilidades para resolver os problemas de permutação, contudo, muitos destes não perceberam a necessidade de enumerar todas as possibilidades.

O aluno representado pela Figura 11, apesar de ter encontrado a resposta correta, utilizou um procedimento inadequado para a questão. Ele utilizou o Princípio Fundamental da Contagem, o que validaria sua resposta, contudo, ao registrar C4 ele demonstrou estar tentando utilizar a fórmula da combinação e não da permutação.

Figura 11. Solução incorreta do Problema 4 (permutação) do P 123 (Participante 123), sexo masculino, eletricista, 21 anos de idade, mais de dez anos de estudo, PROEJA – Mecânica.


04. Calcule o número de palavras que podem ser criadas (existentes ou inventadas) usando a palavra AMOR.

A
M
O
R

C4   4.3.2.1

24 PALAVRAS (EXIS. e Ñ EXIS)

De um modo geral, os problemas de combinação foram os mais difíceis, quando comparados com os demais e quando consideramos apenas dois acertos.

Este tipo de problema exige que o aluno perceba que, assim como os problemas de arranjo, tem-se um conjunto maior e que são retiradas dele possibilidades para formar subconjuntos. Contudo, diferente dos problemas de arranjo, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades. Por exemplo, três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas iguais. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso? Aqui poderemos ter Mário e Raul; Mário e Júnior; Júnior e Raul. Se considerássemos Raul e Mário seria a mesma coisa que Mário e Raul, pois neste problema a ordem dos elementos não gera novas possibilidades. Desta forma, teremos três resultados obtidos no concurso.

Figura 12. Solução incorreta do Problema 2 (combinação) do P 122 (participante 122), sexo masculino, motorista, 28 anos de idade, mais de dez anos de estudo, PROEJA – Mecânica.

É importante atentar para o fato de que um dos problemas de combinação envolvia números grandes e isto exigia que os alunos efetuassem uma rigorosa sistematização, pois dificilmente conseguiriam obter o resultado correto usando uma estratégia menos formal. Vale ressaltar que nenhum aluno dos 150 que participaram deste estudo acertaram a questão de combinação que envolvia números grandes.

Diante dos resultados obtidos, ficou evidente que os problemas de produto cartesiano são os mais fáceis do que os demais problemas combinatórios, embora seja o mais difícil entre os outros problemas multiplicativos. Dentre os outros problemas combinatórios, o que apresentou maior percentual de acerto foi o de arranjo, seguido pelo de combinação e por fim pelo de permutação.

Na Figura 12 observamos que o aluno utilizou uma multiplicação inadequada, usando os dados do enunciado para obter um produto. É necessário deixar claro que o ensino da Combinatória envolve problemas multiplicativos, contudo, deve ser realizada uma multiplicação adequada e não simplesmente o produto das quantidades envolvidas no problema. Especificamente na combinação é preciso atentar para a necessidade de dividir o total de possibilidades pelo número de repetições, pois neste problema não ocorrem novas possibilidades devido à ordem dos elementos.

Este estudo difere em parte do de Pessoa (2009) e de Correia e Fernandes (2007), apud Pessoa, 2009), no percentual de acertos encontrados nos problemas de arranjos, seguidos dos problemas de permutação e como mais difíceis os de combinação. Segundo Pessoa (2009), estes três tipos de problemas requerem que os alunos compreendam quais elementos dos conjuntos dados podem ser selecionados e como serão organizados. Nos problemas de permutação a dificuldade está em organizar todos os elementos em ordens variadas e nas combinações é preciso verificar quais casos são idênticos para não contá-los duas vezes.

A seguir será apresentado e discutido o desempenho em função dos anos de estudo dos participantes da pesquisa.

5.3 Desempenho em função dos anos de estudo

Como anteriormente mencionado, organizamos os anos de estudos em quatro categorias: nenhum a quatro anos de estudo; cinco a sete anos de estudo; oito a dez anos de estudo e mais de dez anos de estudo. Na Tabela 14 pode-se observar a distribuição dos alunos por anos de estudo e faixa etária.

Tabela 14. Distribuição dos participantes por anos de estudo e faixa etária

Faixa etária	**Anos de estudo**			
	0 - 4	**5 - 7**	**8 – 10**	**Mais de 10**
14 – 25	3	6	12	31
26 – 40	4	19	18	19
41 – 66	8	16	6	8

Verificamos que os participantes mais jovens (de 14 a 25 anos de idade) tendiam a ter mais anos de estudo (mais de 8). Os participantes da segunda faixa etária (dos 26 aos 40 anos de idade) se distribuíam majoritariamente nas faixas de cinco a sete, de oito a 10 e mais de dez anos de estudo. Dentre os alunos mais velhos, a maior concentração era na faixa dos cinco aos sete anos de estudo e poucos destes tinham mais de oito anos de estudo. Observa-se, assim, que os mais novos tendiam a ter mais tempo de estudo e os mais velhos apresentavam menor tempo de estudo.

Na análise de variância (ANOVA) realizada, observou-se que houve diferenças significativas entre os anos de estudo em relação ao acerto total no teste ($F (3, 149) = 10.787$, $p < 0.001$). Por meio dos post-hocs realizados (Bonferroni e Tukey) verificou-se que há diferença significativa de desempenho entre os participantes com nenhum e quatro anos e aqueles com mais dez anos de estudo ($p = 0.017$); entre os com cinco a sete anos de estudo em relação aos com mais de dez anos de estudo ($p < 0.001$) e entre os com oito a dez anos em relação àqueles com mais de dez anos de estudo ($p = 0.003$). Observou-se, assim, que a variável anos de estudo teve efeito no desempenho dos participantes, mas apenas os que tinham mais de dez anos de estudo desempenharam-se significativamente melhor em relação aos outros participantes. Desta forma, apenas os que possuíam muitos anos de estudo conseguiram evidenciar um melhor conhecimento dos problemas multiplicativos.

Na Tabela 15 pode-se verificar os percentuais de acerto dos alunos por anos de estudo.

Tabela 15. Percentuais de acerto total por anos de estudo

Anos de estudo	**Acerto total**	
	0 – 8 acertos	**Mais de 8 acertos**
0 – 4 anos de estudo	10	-
5 – 7 anos de estudo	26	1
8 – 10 anos de estudo	23	2
Mais de 10 anos de estudo	31	7

De modo geral, conforme os anos de escolarização aumentam observa-se um maior número de acertos no teste. O acréscimo no número de acertos é mais evidente nos alunos com mais de dez anos de estudo. Entre os alunos das outras três faixas de anos de estudo também há melhoras de desempenho, pois da primeira faixa (até quatro anos de estudo) e a segunda (de cinco a sete anos) observa-se um elevado acréscimo no número de participantes com até seis acertos e entre a segunda faixa e a terceira (de oito a 10 anos de estudo) há um pequeno acréscimo no número daqueles que acertaram mais de oito questões.

Examinando em maior detalhamento quem são os participantes que possuem maior tempo de escolarização, na Tabela 16 pode-se observar que nem sempre há uma relação direta entre anos de escolarização e a série frequentada. Há, porém, uma tendência de que os alunos das séries mais avançadas tenham maior tempo de estudo.

Tabela 16. Distribuição dos participantes por anos de estudo e módulo (série)

Anos de estudo	Módulo					Total
	Módulo I	Módulo II	Módulo III	Módulo IV	PROEJA	
0 – 4	12	2	1	-	-	**15**
5 – 7	10	22	5	4	-	**41**
8 – 10	6	3	15	12	-	**36**
Mais de 10	2	3	9	14	30	**58**
Total	**30**	**30**	**30**	**30**	**30**	**150**

Esta tendência de relacionar-se anos de escolarização com a série frequentada fica evidente também no Gráfico 1. Pode-se observar neste gráfico um gradativo aumento daqueles que têm mais de 10 anos de estudo e o avanço nas séries frequentadas, pois os alunos que têm mais anos de estudo concentram-se nas séries finais do Ensino Fundamental e no PROEJA. Como, porém, não há sempre no caso destes alunos da EJA uma relação direta entre os anos de escolarização e a série frequentada.

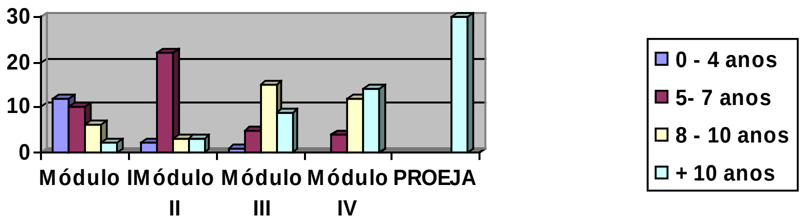


Gráfico 1 - Distribuição dos participantes por anos de estudo e módulo (série)

Na próxima seção deste capítulo será discutido o efeito específico da faixa etária do participante sobre o seu desempenho nas questões que envolviam problemas multiplicativos.

5.4 Desempenho em função da faixa etária

Na Tabela 17 se pode observar que há praticamente todas as profissões identificadas em todas as faixas etárias e que estes dois fatores – idade e profissão – isolados ou em conjunto podem ter influenciado os desempenhos dos participantes. Nesse sentido, nesta seção será discutida a influência da idade no desempenho e na próxima seção se discutirá o papel da profissão no desempenho dos participantes do estudo.

Tabela 17. Distribuição dos participantes por faixa etária e atividades profissionais

Faixa etária	**Profissões**								**Total**
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	
14 – 25	4	-	3	39	1	1	2	2	**52**
26 – 40	25	1	7	13	4	2	2	6	**60**
41 – 66	23	1	-	2	2	-	3	7	**38**
Total	**52**	**2**	**7**	**54**	**7**	**3**	**7**	**15**	**150**

A – Atividades domésticas; **B** – Atividades de produção de alimentos; **C** – Atividades com transporte; **D** – Estudantes; **E** – Atividades comerciais; **F** – Atividades de atendimento e serviço em alimentação; **G** – Atividades da construção civil; **H** – Outras.

Na Tabela 18 pode-se observar a distribuição dos participantes por faixa etária e acerto total no teste. Por meio da análise de variância efetuada, verificamos que não há uma diferença significativa no desempenho dos participantes em função de suas idades ($F\ (2, 149) = 1.194$, $p = 0.306$). Observa-se que, independentemente da faixa etária, a maioria dos participantes acertou entre zero a oito das questões

Tabela 18. Percentuais de distribuição dos participantes por faixa etária e acerto total

Faixa etária	**0 – 8 acertos**	**Mais de 8 acertos**
14 – 25 anos	85	15
26 – 40 anos	92	8
41 – 66 anos	95	5

Pode-se observar nas Figuras 13 e 14 soluções corretas realizadas por alunos de níveis de ensino e faixa etárias diferentes. Com estes exemplos, tem-se uma amostra que evidencia que participantes de todas as faixas etárias apresentavam procedimentos corretos e incorretos, não sendo o fator idade um elemento diferenciador de desempenho.

Figura 13. Solução correta do Problema 15 (produto cartesiano direto) do P 105 (Participante 105), sexo masculino, motorista, 32 anos de idade, mais de dez anos de estudo, PROEJA – Mecânica.

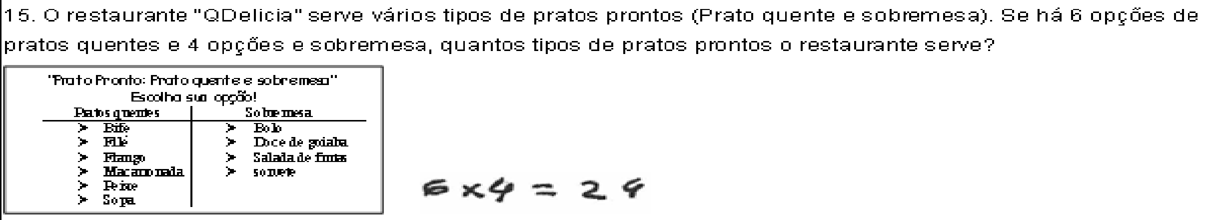
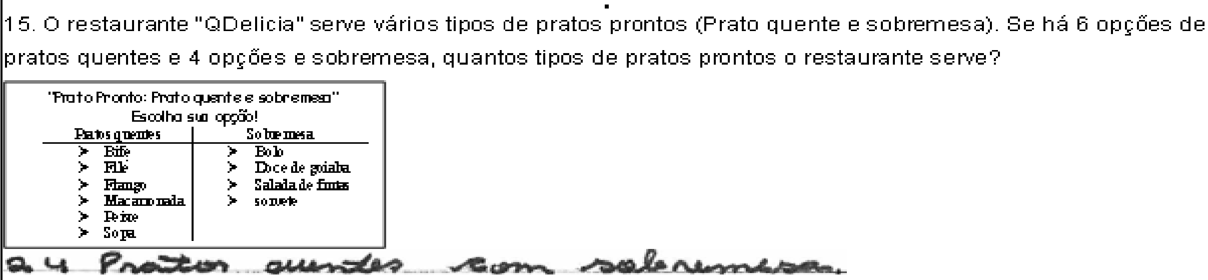


Figura 14. Solução correta do Problema 15 (produto cartesiano direto) do P 62 (Participante 62), sexo, feminino, estudante, 14 anos de idade , oito a dez anos de estudo, Módulo III da EJA .



5.5 Desempenho em função da profissão exercida

Na Tabela 19 pode-se observar a distribuição dos participantes por acerto total e profissão exercida. Verificamos que 30% dos profissionais da atividade doméstica acertam até oito questões e apenas 5% destes acertam mais de oito questões no teste. O percentual de até oito acertos também é alto no grupo dos estudantes, mas é no grupo de estudantes que se encontra o maior número de participantes com mais de oito acertos. Nos demais grupos, com exceção das atividades de transporte, os percentuais tendem a manter-se constantes.

Estudos anteriores evidenciam que jovens e adultos sofrem influência de suas atividades profissionais no desenvolvimento de conceitos matemáticos.

No estudo de Gomes (2007) sobre os conhecimentos de alunos jovens e adultos em relação aos números decimais, os participantes buscaram referências em suas atividades profissionais (marceneiros e pedreiros) para resolverem as situações propostas. Assim, a experiência de pedreiros e marceneiros foi significativa na formação do conceito de número decimal devido às estratégias de cálculo usadas e pelas habilidades demonstradas por eles.

Tabela 19. Percentuais de distribuição dos participantes por acerto total e profissão

Profissões	Total de acertos	
	0 – 8 acertos	**Mais de 8 acertos**
A	33	1
B	1	1
C	5	1
D	33	4
E	4	1
F	2	-
G	3	1
H	9	1

A – Atividades domésticas; **B** – Atividades de produção de alimentos; **C** – Atividades com transporte; **D** – Estudantes; **E** – Atividades comerciais; **F** – Atividades de atendimento e serviço em alimentação; **G** – Atividades da construção civil; **H** – Outras.

Segundo Silva (2006), o homem em diversos contextos desenvolve atividades que envolvem inúmeros problemas com números e operações, grandezas e medidas, relações espaciais e tratamento da informação. Assim, os conhecimentos vão sendo construídos nos diferentes âmbitos da vida – no trabalho, no convívio social e nas relações interpessoais.

No estudo realizado com 64 estudantes, sendo 32 alunos da Educação de Jovens e Adultos dos módulos I e IV, 32 crianças do 2º ano do 2º ciclo e do 2º ano do 3º ciclo que objetivou investigar o que adultos e crianças sabiam sobre números decimais antes e após o ensino formal e em que sentido os saberes de adultos e crianças se diferenciava, Silva (2006) observou que os adultos tiveram um desempenho melhor do que as crianças. Mesmo aqueles que não tinham escolarização obtiveram melhores resultados no teste que as crianças que já possuíam experiência escolar na aprendizagem de números decimais. Esse grupo superou o das crianças na representação simbólica testada (oral e escrita), nos dois significados dados ao decimal (fração e divisão), em relação às propriedades de comparação e de conversão de decimais e quando os problemas eram inseridos em diferentes contextos (métrico e monetário). Um dos destaques de seu estudo é que adultos não escolarizados em números decimais são capazes de abordar com sucesso problemas envolvendo decimais.

No presente estudo observou-se que o exercício de atividades profissionais domésticas não parece auxiliar no desenvolvimento do raciocínio combinatório, mas, embora não havendo direta relação com a Combinatória, outras profissões podem indiretamente influenciar o desempenho na solução de situações combinatórias.

Certamente a atividade de estudante – em particular os que tiveram oportunidade de alcançar mais elevados níveis de escolarização, possibilitam direta e indiretamente ao desenvolvimento do raciocínio combinatório.

A seguir serão apresentados e discutidos os diferentes tipos de respostas apresentadas pelos participantes do presente estudo.

5.6 Tipos de respostas apresentadas pelos alunos nos módulos e nas atividades profissionais

Na análise quantitativa do desempenho dos alunos, verificamos os acertos totais no teste, contudo, é necessário atentar para outros aspectos a serem analisados e que se constituem como elementos fundamentais nesta pesquisa. Os tipos de respostas são um desses aspectos a serem considerados na análise.

Como já mencionamos anteriormente, os jovens e adultos que participaram deste estudo demonstraram uma tendência em resistir a utilizar-se de outras formas de resolução que não o modo formal. Isto pode explicar, pelo menos em parte, o elevado índice de respostas em branco. Parece haver indícios de que muitos participantes preferiam deixar a questão em branco a buscar procedimentos informais de resolução. As falas de alguns participantes, de um estudo piloto anteriormente realizado, evidenciam este procedimento, pois alguns afirmavam que não havia números no enunciado e, portanto, não havia como realizar alguma operação para encontrar a solução do problema. Outra possibilidade é a de que os participantes deixaram as questões em branco não porque resistiam em usar procedimentos informais, mas porque não entendiam o que de fato estava sendo solicitado no enunciado das questões.

No Quadro 2 são apresentados os tipos de respostas utilizados na análise de dados do presente estudo. Esta categorização de respostas é de Pessoa (2009).

1. Em branco	Não é possível saber se nestes casos o aluno não respondeu porque não sabia, não se interessou ou se considerou o problema de difícil resolução.
2. Apenas resposta incorreta	O aluno apresentou apenas a resposta errada para o problema proposto, embora seja possível, muitas vezes, inferir qual a operação por ele realizada.
3. Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação correta	Incompreensão do problema – o aluno apresentou uma resposta incorreta e na sua resolução não há indícios de relação com a questão proposta.
4. Resposta incorreta ou incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática	Apresenta certa compreensão do problema – o aluno errou a resposta ou não conseguiu completá-la, entretanto, sua estratégia de resolução é válida para o que é solicitado, mantém uma relação com a lógica do problema, entretanto, não organizou sistematicamente a estratégia, listando, desenhando, fazendo árvore de possibilidades, quadros, diagramas ou outra estratégia de maneira não sistemática, sem controlar os elementos, não conseguindo esgotar todas as possibilidades.
5. Resposta incorreta ou incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia sistemática	O aluno apresentou certa compreensão do problema, contudo, mesmo utilizando uma estratégia mais organizada, mais sistemática, errou a resposta ou não conseguiu chegar ao final da resolução. Sua estratégia de resolução é válida para o que é solicitado, mantém uma relação com a lógica do problema, entretanto, na maioria das vezes, neste caso, o aluno não conseguiu esgotar todas as possibilidades para o tipo de problema proposto.
6. Apenas resposta correta	O aluno apresentou apenas a resposta certa para o problema proposto, embora seja possível, muitas vezes, inferir qual a operação por ele realizada.
7. Resposta correta (explicitando estratégia)	O aluno conseguiu compreender a lógica do problema e chegar à resposta correta, utilizando e explicitando uma estratégia válida e encontrando formas de esgotar todas as possibilidades.

Quadro 2. Tipos de respostas apresentadas pelos alunos investigados ao resolverem os problemas de *Combinatória* propostos (Pessoa, 2009).

Em todos os níveis de escolarização também observamos percentuais elevados de respostas incorretas. Isto parece indicar que os alunos não conseguiram compreender o que foi solicitado nas questões nas quais apresentaram respostas incorretas. Assim como no estudo de Pessoa (2009), os participantes apresentaram respostas aleatórias incorretas.

Pode-se observar na Tabela 20 os tipos de resposta, em função do tipo de problema e do módulo frequentado pelo participante.

Tabela 20. Percentuais de tipo de resposta por módulo (série) e tipo de problema

Módulos (séries)		**Tipos de respostas**						
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
MI	Mult.	36	18	10	4	-	25	7
	Quo.	33	43	7	3	-	-	14
	Part.	22	25	8	2	-	16	27
	PCD	30	56	5	-	-	2	7
	PCI	35	47	11	-	-	2	5
	Comb.	33	57	7	3	-	-	-
	Perm.	32	37	15	16	-	-	-
	Arr.	38	55	7	-	-	-	-
MII	Mult.	23	15	10	2	8	27	15
	Quo.	22	38	17	7	2	7	7
	Part.	23	15	12	2	-	18	30
	PCD	37	48	5	-	-	3	7
	PCI	33	38	15	-	-	-	14
	Comb.	40	53	5	-	-	2	-
	Perm.	18	48	17	17	-	-	-
	Arr.	32	61	2	3	-	2	-
MIII	Mult.	8	22	3	-	7	15	45
	Quo.	18	33	10	2	2	7	28
	Part.	8	20	13	-	7	15	37
	PCD	15	24	10	-	3	15	33
	PCI	20	29	17	-	-	10	24
	Comb.	33	50	15	-	-	2	-
	Perm.	17	40	8	30	-	3	2
	Arr.	32	56	8	2	-	-	2
MIV	Mult.	24	10	5	-	7	20	34
	Quo.	37	22	5	-	4	14	18
	Part.	33	7	7	-	7	16	30
	PCD	55	13	2	-	-	7	23
	PCI	42	18	18	-	2	2	18
	Comb.	48	32	16	-	-	2	2
	Perm.	28	28	17	23	4	-	-
	Arr.	64	28	3	-	2	3	-
PEjA	Mult.	4	6	-	-	2	16	72
	Quo.	13	11	7	7	10	15	37
	Part.	-	2	-	-	3	18	77
	PCD	10	17	17	-	17	13	26
	PCI	17	28	17	-	-	-	38
	Comb.	13	31	8	12	7	22	7
	Perm.	12	38	5	17	5	6	17
	Arr.	20	33	7	8	5	5	22

Problemas:
Mult=Multiplicação; Quo=Quotição; Part=Partição; PCD=Produto Cartesiano Direto; PCI=Produto Cartesiano Inverso; Comb=Combinação; Perm=Permutação; Arr=Arranjo.

Tipos de respostas:
1 – Em branco; **2** – Apenas resposta incorreta; **3** - Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação correta; **4** - Resposta incorreta ou incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática; **5 –** Resposta incorreta ou incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia sistemática; **6** – Apenas resposta correta; **7** – Resposta correta (explicitando estratégia).

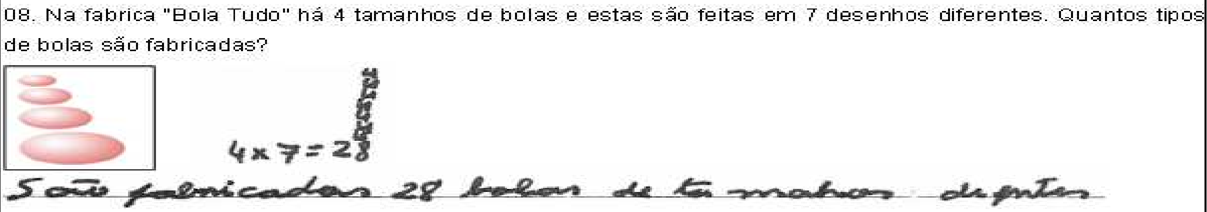
Módulos: MI – Módulo I; MII – Módulo II; MIII – Módulo III; MIV – Módulo IV; PEJA – PROEJA.

Pode-se perceber, na Tabela 20, que a categoria *apenas resposta incorreta* apresenta percentuais elevados em relação aos outros tipos de respostas, porém, a categoria de respostas *em branco* também apresenta percentuais altos.

Os percentuais de respostas corretas, explicitando ou não estratégias, tenderam a aumentar no decorrer dos anos escolares, chegando a ter seus maiores índices no PROEJA. Há, desse modo, indícios de que a experiência escolar pode estar interferindo no avanço do desempenho, pois conforme se avança na escolarização, as experiências escolares dos alunos aumentam.

A seguir são apresentados dois protocolos (Figuras 15 e 16) que mostram soluções nas quais o tipo de resposta é correta, com e sem explicitação de estratégia.

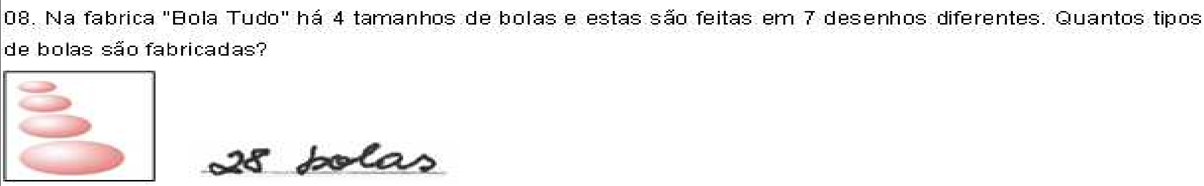
Figura 15. Solução correta do Problema 8 (produto cartesiano direto) – *resposta correta (explicitando estratégia)*. P 57 (Participante 57), sexo masculino, estudante, 17 anos de idade, cinco a sete anos de estudo, Módulo II da EJA.


08. Na fabrica "Bola Tudo" há 4 tamanhos de bolas e estas são feitas em 7 desenhos diferentes. Quantos tipos de bolas são fabricadas?

4x7=28

São fabricadas 28 bolas de tamanhos diferentes

Figura 16. Solução correta do Problema 8 (produto cartesiano direto) – *apenas resposta correta*. P 31 (Participante 31), sexo masculino, estudante, 27 anos de idade, cinco a sete anos de estudo, Módulo II da EJA.


08. Na fabrica "Bola Tudo" há 4 tamanhos de bolas e estas são feitas em 7 desenhos diferentes. Quantos tipos de bolas são fabricadas?

28 bolas

Nos exemplos acima, as soluções dos alunos do Módulo II da EJA exemplificam bem a diferença entre as categorias apenas resposta correta e resposta correta (explicitando estratégia) O aluno representado pela Figura 19 acerta o problema e explicita a estratégia através da adição repetida de parcelas repetidas. Embora o mesmo tenha registrado o algoritmo da multiplicação corretamente, consideramos que o procedimento utilizado pelo mesmo para conseguir chegar a um resultado foi somar as parcelas, no caso da questão de produto cartesiano demonstrada acima, as parcelas de tamanhos de bolas. Provavelmente, em seguida, ele registrou a “conta” de multiplicação para deixar claro que tipo de algoritmo é utilizado nesta questão e para validar sua resposta. O aluno representado pela Figura 16 pertence ao mesmo nível de ensino do aluno anterior. Este dá o resultado correto para este problema, porém, não registra o procedimento utilizado na resolução da questão.

A categoria *apenas resposta correta* ocorreu em um percentual alto, principalmente nos módulos das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio Profissionalizante. Nas séries finais do Ensino Fundamental para a EJA e no Ensino Médio Profissionalizante há uma concentração maior da categoria apenas resposta correta. É provável que os alunos que apresentaram este tipo de resposta usaram cálculo mental para resolver as questões.

Quando o aluno demonstra compreensão do que é proposto no problema, mas a resposta é incorreta, significa que o mesmo consegue desenvolver estratégias válidas para a resolução do problema, contudo, não consegue chegar à resposta correta. Nesta perspectiva, poderíamos categorizar este caso como *resposta incorreta com o estabelecimento de relação, usando estratégia sistemática* ou *estratégia não sistemática.* De acordo com Pessoa (2009), o que ocorre na maioria das vezes é que os alunos não conseguem esgotar todas as possibilidades, pois esta dificuldade só aparece nos alunos que compreenderam o tipo de problema.

Os percentuais de *respostas incorretas com estabelecimento de relação correta utilizando uma estratégia sistemática* são relativamente baixos em todas as séries, mas os percentuais são mais altos no tipo de *resposta incorreta com estabelecimento de relação correta utilizando uma estratégia não sistemática*. Isso demonstra que há uma dificuldade em estabelecer uma relação correta e elaborar uma estratégia sistematizada. Dessa maneira, fica evidente nos resultados obtidos no presente estudo que não adianta o ensino de Combinatória sem que este seja realizado de maneira que possibilite aos educandos entender os significados envolvidos em cada tipo de problema, enfatizando a necessidade de sistematização e do esgotamento de possibilidades.

A seguir, será discutida a relação entre o tipo de resposta apresentada e a profissão exercida pelo participante (Tabela 21).

Tabela 21. Percentuais de tipo de resposta por atividades profissionais e tipo de problema

Atividades profissionais		Tipos de respostas						
		1	2	3	4	5	6	7
A	Mult.	28	42	4	1	1	10	14
	Quo.	26	16	10	4	1	17	26
	Part.	22	17	8	1	1	19	32
	PCD	38	40	6	-	1	3	12
	PCI	38	41	5	-	-	-	16
	Comb.	40	46	8	2	2	2	-
	Perm.	28	34	12	16	-	3	1
	Arr.	47	46	6	1	-	-	-
B	Mult.	-	-	-	-	-	50	50
	Quo.	25	-	25	-	-	-	50
	Part.	25	-	-	-	-	-	75
	PCD	-	50	-	-	-	-	50
	PCI	-	25	50	-	-	-	25
	Comb.	25	75	-	-	-	-	-
	Perm.	-	50	25	25	-	-	-
	Arr.	25	75	-	-	-	-	-
C	Mult.	20	-	-	-	10	-	70
	Quo.	5	5	5	-	5	-	80
	Part.	20	-	-	-	-	-	80
	PCD	15	20	20	-	15	10	20
	PCI	20	-	35	-	-	-	45
	Comb.	25	30	15	-	10	15	5
	Perm.	25	30	5	5	-	20	15
	Arr.	30	30	10	5	10	-	15
D	Mult.	17	16	4	-	9	18	36
	Quo.	24	11	8	1	5	17	34
	Part.	18	15	9	-	8	14	36
	PCD	34	19	7	-	3	9	28
	PCI	34	30	18	-	1	4	13
	Comb.	39	41	10	5	-	5	-
	Perm.	22	23	12	23	2	15	3
	Arr.	43	41	3	3	-	5	5
E	Mult.	7	21	7	-	7	14	44
	Quo.	14	-	7	-	-	21	58
	Part.	15	7	7	-	-	21	50
	PCD	22	42	7	-	-	7	22
	PCI							
	Comb.	7	21	14	-	-	-	58
	Perm.	22	29	35	-	-	7	7
	Arr.	7	29	14	29	7	14	-
F	Mult.	17	33	-	-	-	50	-
	Quo.	-	33	-	-	-	50	17
	Part.	-	33	-	-	-	50	17
	PCD	17	50	-	-	-	33	-
	PCI	17	33	17	-	-	33	-
	Comb.	17	83	-	-	-	-	-
	Perm.	-	50	-	50	-	-	-
	Arr.	-	100	-	-	-	-	-
G	Mult.	-	14	7	-	-	21	58
	Quo.	7	7	-	-	-	21	65
	Part.	-	-	-	-	-	28	72
	PCD	7	36	15	-	-	21	21
	PCI	14	42	14	-	-	-	30
	Comb.	14	5	7	-	7	7	7
	Perm.	-	28	14	22	7	7	22
	Arr.	7	50	-	14	-	-	29
H	Mult.	3	7	13	7	3	20	47
	Quo.	10	17	7	-	7	17	42
	Part.	7	10	13	3	-	20	47
	PCD	13	44	7	-	3	13	20
	PCI	18	38	26	-	-	-	20
	Comb.	11	60	8	7	3	8	3
	Perm.	-	27	23	30	3	10	7
	Arr.	7	73	10	7	-	-	3

Problemas:
Mult=Multiplicação; Quo=Quotição; Part=Partição; PCD=Produto Cartesiano Direto; PCI=Produto Cartesiano Inverso; Comb=Combinação; Perm=Permutação; Arr=Arranjo.

Tipos de respostas:
1 – Em branco; **2** – Apenas resposta incorreta; **3** - Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação

correta; **4** - Resposta incorreta ou incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática; **5 –** Resposta incorreta ou incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia sistemática; **6** – Apenas resposta correta; **7** – Resposta correta (explicitando estratégia).

A partir do que vemos na Tabela 21, percebemos que se fôssemos fazer um ranking das atividades profissionais que tiveram um melhor desempenho por *respostas corretas com explicitação de estratégia* teríamos em primeiro lugar o grupo de atividades com transporte, em segundo o da construção civil e o terceiro das atividades comerciais. Obviamente não pretendemos realizar esse ranking dando melhor destaque a um e a outro. Observamos, entretanto, que algumas profissões apresentaram um desempenho melhor do que as outras no percentual de acertos. Não parece haver, entretanto, uma relação explicativa entre as profissões exercidas e o desempenho nos problemas, o que pode ter ocorrido foi uma interação entre este fator e outras variáveis – tais como a escolarização.

Os grupos com menores percentuais na categoria *respostas corretas com explicitação de estratégia* foram os de atividades domésticas e de serviço e atendimento em alimentação, tendo estes grupos um percentual maior em questões deixadas em branco e respostas incorretas.

Ressalta-se também que os mais bem sucedidos foram aqueles que ousaram criar estratégias para a resolução das situações, ou seja, não ficaram presos à realização de operações formais convencionais. A seguir apresentamos soluções de alunos que exemplificam que muitos participantes bem sucedidos buscaram métodos informais de solução das questões.

Figura 17. Solução correta do Problema 10 (permutação) – *resposta correta (explicitando estratégia)*. P 130 (Participante 130), sexo masculino, estudante, 19 anos de idade, oito a dez anos de estudo, PROEJA - Mecânica.

10. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

(I, P, M / M, I, P / M, P, I) P, M, I / P, I, M

6 Formas

O aluno representado pela Figura 17 apresentou solução correta para a Questão 10, referente à permutação. O participante utilizou listagem de possibilidades para chegar ao resultado correto.

Outro exemplo bem sucedido é o do Participante 124 (Figura 18). Este aluno obteve a resposta correta por meio do uso de um diagrama para resolver o problema.

Figura 18. Solução correta do Problema 10 (permutação) – *resposta correta (explicitando estratégia).* P 124 (participante 124), sexo masculino, mecânico, 20 anos de idade, mais de dez anos de estudo, PROEJA - Mecânica.

10. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

Na seção a seguir apresentamos os percentuais de tipo de estratégias de acordo com os problemas multiplicativos e a profissão.

5.7 Tipos de estratégia utilizada pelos alunos por tipos de problema multiplicativo e por profissão

Baseamos-nos nas categorias de Pessoa (2009) e Selva et al (2008) para criarmos um novo quadro de categorias de estratégias que atendesse às análises propostas nesse estudo.

A partir desses dois estudos elaboramos um novo quadro que compreendesse as estratégias utilizadas pelos alunos tanto em problemas multiplicativos como em problemas combinatórios.

Vale salientar que este novo quadro (Quadro 3) de categorias foi organizado em ordem de grau de eficiência, sendo a primeira correspondente ao menor nível e o último ao maior nível de eficiência. Vale destacar, ainda, que dentre os problemas de multiplicação, de divisão e de combinatória buscou-se organizar as categorias em ordem de eficiência dentro de cada uma dessas subcategorias. Poder de generalização é um dos aspectos considerados no julgamento de eficiência, pois estratégias informais são válidas em muitos casos, mas, em particular, quando quantidades maiores são envolvidas nas situações, procedimentos mais formais são mais eficientes.

1 – Não explicitou estratégia	Quando o aluno apenas forneceu a resposta, correta ou incorreta. Desse modo fica difícil precisar com certeza qual estratégia foi utilizada para a resolução.
2 – Não identificada	Não foi possível identificar o procedimento utilizado pelo aluno.
3 – Dá como respostas um dos dados	O aluno utilizou como resposta os dados do enunciado. A resposta é incorreta.
4 – Registra uma operação e efetua outra	O aluno registrou uma operação e efetuou outra. A resposta é incorreta.
5 – Adição e/ou subtração dos dados	O aluno utilizou os valores apresentados no enunciado numa soma ou subtração. A resposta é incorreta.
6 - Adição e/ou subtração inadequada de parcelas repetidas	O aluno utilizou a adição ou subtração de parcelas repetidas, mas esta é inadequada para o que o problema solicita. A resposta é incorreta.
7 - Adição e/ou subtração adequada de parcelas repetidas	O aluno utilizou a adição ou subtração de parcelas repetidas para resolver o problema, geralmente substituindo a multiplicação adequada. A resposta pode estar correta ou não.
8a – Multiplicação inadequada	O aluno relacionou o problema a um produto em situações nas quais ela não se aplica. A resposta é incorreta.
8b – Multiplicação adequada	O aluno relacionou o problema a um produto, com a possibilidade correta de seu uso. A resposta pode estar correta ou não.
9a – Desenha e distribuição	O aluno desenhou a quantidade do enunciado e realizou uma distribuição dessa quantidade.
9b – Desenha o todo e agrupa	O aluno desenhou a quantidade total do enunciado e depois realizou agrupamentos. A resposta pode estar correta ou não.
9c – Desenha a cota até atingir o todo	O aluno utilizou-se dos desenhos das cotas para ao final somar e chegar ao total. A resposta pode estar correta ou não.
9d – Algoritmo da divisão	O aluno utilizou-se do algoritmo da divisão para resolver a questão. A resposta pode estar correta ou não.
10a – Desenho de possibilidades/ representação icônica	O aluno faz um desenho/representação icônica das possibilidades, utilizando-se dos dados, podendo a resposta estar correta ou não, havendo, ou não, sistematização no processo de resposta e com ou sem o esgotamento de todas as possibilidades.
10b – Listagem de possibilidades	O aluno realizou uma listagem com nomes ou símbolos. A resposta pode estar correta ou não, havendo, ou não o estabelecimento de relação e/ou o esgotamento de todas as possibilidades.
10c – Árvore de possibilidades	O aluno construiu uma árvore de possibilidades, podendo apresentar uma resposta *correta* ou *incorreta*, *com ou sem sistematização dos elementos, com* ou *sem esgotamento de possibilidades*.
10d – Quadro/diagrama	O aluno construiu um quadro ou um diagrama para representar o processo de solução. Pode haver resposta *correta* ou *incorreta*, *com* ou *sem sistematização*, *com* ou *sem esgotamento de possibilidades*.
10e – Percepção ou busca de regularidade	O aluno utiliza-se de uma estratégia qualquer para resolver o problema e no desenvolvimento desta percebeu que pode generalizar as descobertas iniciais para os casos seguintes. A resposta pode estar correta ou não.
10f – Uso inadequado de fórmulas	Quando for utilizada pelo aluno uma fórmula inadequada para a resolução do problema . Resposta incorreta sem relação.
10g – Princípio Fundamental da Contagem	Quando for utilizada pelo aluno o PFC para resolver a questão. A resposta pode estar correta ou não.
10h – Uso adequado de fórmulas	Quando for utilizada pelo aluno uma fórmula adequada ao problema. A resposta pode estar correta ou não.

Quadro 3. Estratégias apresentadas pelos alunos ao resolverem os problemas multiplicativos e de Combinatória.[10]

Pode-se observar que há uma forte relação entre a estratégia utilizada e a forma de representação simbólica a ela associada. Desta maneira, apresentaremos, a seguir, as representações utilizadas pelos participantes do estudo nos tipos de problema.

A Tabela 22 apresenta os percentuais dos tipos de problemas por módulos e estratégias.

Tabela 22. Percentuais de tipo de estratégia por módulos (séries) e tipo de problema

Módulo (série)		Tipos de estratégia																				
	Probl.	1	2	3	4	5	6	7	8a	8b	9a	9b	9c	9d	10a	10b	10c	10d	10e	10f	10g	10h
Módulo I	Mult.	63	2	-	3	3	-	12	-	10	2	-	-	2	3	-	-	-	-	-	-	-
	Quo.	65	3	3	-	2	-	5	3	3	7	2	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Part.	60	-	5	-	2	-	12	2	2	-	2	8	8	3	-	-	-	-	-	-	-
	PCD	75	-	15	-	3	-	2	-	2	-	2	2	3	3	-	-	-	-	-	-	-
	PDI	70	-	13	-	2	2	-	3	2	-	-	-	3	-	5	-	-	-	-	-	-
	Com.	90	2	2	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-
	Perm.	68	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	32	-	-	-	-	-	-
	Arr.	87	2	2	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	3	3	-	-	-	-	-	-
Módulo II	Mult.	63	3	-	-	8	-	15	-	8	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-
	Quo.	53	-	2	-	12	-	8	3	-	-	-	3	17	2	-	-	-	-	-	-	-
	Part.	55	8	-	2	2	2	12	5	-	-	-	3	10	2	-	-	-	-	-	-	-
	PCD	82	-	5	-	3	-	2	2	3	-	-	2	7	-	-	-	-	-	-	-	-
	PDI	68	-	5	-	3	2	2	2	12	-	-	-	3	-	3	-	-	-	-	-	-
	Com.	94	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	-	2	-	2	-	-	-	-	-	-
	Perm.	64	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	32	-	-	-	-	-	-
	Arr.	94	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	-	-	-	-	-	-
Módulo III	Mult.	52	-	3	-	2	-	-	-	43	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Quo.	42	-	-	-	3	-	-	5	3	-	-	-	47	-	-	-	-	-	-	-	-
	Part.	42	-	-	-	2	-	2	12	2	-	-	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-
	PCD	52	-	2	-	8	-	-	3	13	-	-	-	18	-	-	-	-	-	-	-	-
	PDI	57	-	3	-	-	-	-	5	12	-	-	-	18	-	5	-	-	-	-	-	-
	Com.	90	2	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-
	Perm.	60	-	-	-	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	37	-	-	-	-	-	-
	Arr.	90	-	-	-	2	-	-	2	3	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-

[10] A categorização foi adaptada de Pessoa (2009) e de Selva, Borba, Campos, Silva, Ferreira e Luna (2008).

Tabela 22. (Continuação) Percentuais de tipo de estratégia por módulos (séries) e tipo de problema

Módulo IV	Mult.	57	-	-	-	5	-	3	-	35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Quo.	58	-	-	-	3	-	3	-	12	-	-	-	24	-	-	-	-	-	-	-	-
	Part.	55	-	-	-	3	2	-	3	13	-	-	-	24	-	-	-	-	-	-	-	-
	PCD	73	-	2	-	2	-	5	-	12	-	-	-	13	-	-	-	-	-	-	-	-
	PDI	60	-	3	-	3	-	-	5	7	-	-	-	22	-	-	-	-	-	-	-	-
	Com.	82	-	-	-	10	-	-	5	2	-	-	-	2	-	-	-	2	-	-	-	-
	Perm.	58	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	42	-	-	-	-	-	-
	Arr.	90	-	2	-	2	-	-	2	2	-	-	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-
PROEJA	Mult.	20	-	-	-	-	-	-	-	80	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Quo.	27	-	-	-	-	-	-	-	8	-	-	-	65	-	-	-	-	-	-	-	-
	Part.	20	-	-	-	-	-	-	-	2	-	-	-	78	-	-	-	-	-	-	-	-
	PCD	40	-	-	-	5	-	-	2	13	-	-	-	35	-	-	-	-	-	5	-	-
	PDI	45	-	-	-	-	-	-	17	30	-	-	-	8	-	-	-	-	-	-	-	-
	Com.	80	-	-	-	-	-	-	8	2	-	-	-	3	-	7	-	-	-	-	-	-
	Perm.	57	-	-	-	-	-	-	2	2	-	-	-	-	-	28	-	5	-	-	6	-
	Arr.	58	-	-	-	-	2	-	-	5	-	-	-	-	-	18	-	10	-	-	7	-

Problemas:
Mult=Multiplicação; Quo=Quotição; Part=Partição; PCD=Produto Cartesiano Direto; PCI=Produto Cartesiano Inverso; Com=Combinação; Per=Permutação; Arr=Arranjo.

Tipos de estratégias:
1 - Não explicitou estratégia; **2 -** Não identificada; **3 -** Dá como resposta um dos dados; **4 -** Registra uma operação e efetua outra; **5 -** Adição e/ou subtração dos dados; **6 -** Adição e/ou subtração inadequada de parcelas repetidas; **7 -** Adição e/ou subtração adequada de parcelas repetidas; **8a -** Multiplicação inadequada; **8b -** Multiplicação adequada; **9a -** Desenha e distribui; **9b -** Desenha o todo e agrupa; **9c -** Desenha a cota até atingir o todo**;** **9d -** Algoritmo da divisão; **10a -** Desenho de possibilidades/representação icônica**;** **10b -** Listagem de possibilidades; **10c -** Árvore de possibilidades; **10d -** Quadro/diagrama; **10e -** Percepção ou busca de regularidade; **10f -** Uso inadequado de fórmulas; **10g -** Princípio Fundamental da Contagem (PFC); **10h -** Uso adequado de fórmulas.

Mesmo quando os educandos utilizavam fórmulas, era necessário que eles percebessem que era preciso fazê-lo de maneira adequada. Assim, a escola – em sua proposta de ensino sistematizado – deve ajudar o aluno a pensar sobre a lógica implícita em cada tipo de problema. Quando o educando utiliza repetidamente fórmulas de modo inadequado, evidencia-se que o ensino mesmo formalizando não está atendendo às necessidades de compreensão do aluno.

De acordo com Pessoa (2009), é necessário desde o Ensino Fundamental I explorar as estratégias espontâneas para a resolução dos problemas de situações que envolvem significados e invariantes diversos, assim, estimula-se o uso de diferentes formas de representações simbólicas (Vergnaud, 1986). É importante explorar os conceitos-em-ação dos alunos para partir dos conhecimentos que eles possuem com o objetivo de aprofundar os saberes relacionados à Combinatória. Acompanhando as estratégias utilizadas pelos educandos, pode-se identificar quais teoremas-em-ação os mesmos estão utilizando para que assim possam ser auxiliados no desenvolvimento das relações predicativas (Vergnaud, 2009) das situações combinatórias.

Dentre as estratégias utilizadas para resolução dos problemas de permutação a mais usada foi a listagem de possibilidades, principalmente na quarta questão (anagramas da palavra AMOR). Os alunos, em sua maioria, tentaram resolver este problema através da listagem de possibilidades. Os alunos da EJA demonstraram bastante empenho em solucionar este problema, provavelmente porque ele envolve formação de novas palavras. Os alunos perceberam que este problema trata de contagem de elementos de conjuntos. Os mesmos estabeleceram relações, compreenderam do que tratavam os problemas e buscaram estratégias válidas para resolvê-los. A dificuldade estava na resolução numérica. Mesmo elaborando estratégias distintas para solucionar os problemas, muitos dos alunos não conseguiram esgotar todas as possibilidades.

Para Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997) a listagem é uma estratégia adequada a problemas de enumeração, sendo este um tipo de problema combinatório que solicita que sejam listados os casos possíveis para uma determinada situação.

Conforme passam os anos escolares, verificamos um aumento no uso da multiplicação, seja ela adequada ou inadequada. Isto pode ocorrer devido às experiências escolares, pois no decorrer dos anos, os alunos vão se familiarizando com esta operação. Assim, a influência do ensino escolar auxilia na percepção de que há uma relação entre os problemas de combinatória e a multiplicação.

O uso de fórmulas e do Princípio Fundamental da Contagem apenas apareceu na turma de PROEJA (referente ao Ensino Médio). Isso evidencia que o que é trabalhado na escola pode ter importância para o aluno, já que após aprender a trabalhar com fórmulas, esses alunos do PROEJA passaram a usá-las, embora numa frequência muito baixa. No presente estudo, o uso de fórmulas foi, na maioria das vezes, inadequado. Os alunos reconheceram que podiam usar as fórmulas, mas não demonstram saber usá-las adequadamente.

Das vinte e uma categorias elaboradas, algumas não apareceram nas resoluções dos participantes. As mais frequentes foram: não explicitou estratégia, multiplicação inadequada, multiplicação adequada, algoritmo da divisão e listagem de possibilidades. Apenas 4% do total de participantes utilizou corretamente o Princípio Fundamental da Contagem.

Assim como no estudo de Pessoa (2009), encontramos um baixo percentual do uso de adições e subtrações na resolução dos problemas combinatórios. Salienta-se que utilizar-se dessas operações para resolver problemas de *raciocínio combinatório* levaria ao erro. Contudo, ao contrário do que Pessoa afirma em sua pesquisa, que esse baixo percentual evidencia que os alunos compreendem os problemas desse tipo, neste estudo, o percentual de questões em branco foi bastante alto. Isso indica que os alunos, em sua maioria, provavelmente não compreenderam os problemas de natureza combinatória. Nos problemas multiplicativos (multiplicação, quotição e partição) os alunos não demonstraram maiores dificuldades em compreender qual tipo de operação precisariam ser realizadas para cada resolução do problema. A estratégia do algoritmo da divisão, assim como no estudo de Pessoa (2009), foi pouco mobilizada pelos participantes na solução dos problemas combinatórios, indicando que os alunos perceberam que por meio desta estratégia não conseguiriam resolver os problemas.

Como já mencionado anteriormente, os jovens e adultos demonstraram resistência em usar outras formas de representação que não as formais. Encontramos um baixo percentual de alunos que utilizaram desenhos e/ou representações icônicas. Esse tipo de representação aparece mais nos primeiros anos de escolarização. Isso reflete a prática escolar de não incentivar maneiras diversas de resolver problemas, o que é importante no desenvolvimento de conceitos matemáticos, pois permite melhor compreensão das propriedades de cada tipo de problema. “Esta estratégia, que deveria ser incentivada pela escola, serve como um apoio ao que o aluno representa mentalmente sobre a resolução e as possíveis soluções para o que o problema solicita” (PESSOA, 2009).

Diferentemente do estudo de Pessoa (2009), nesta pesquisa nenhum aluno usou a árvore de possibilidades para resolver problemas de Combinatória. Para Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997) a árvore de possibilidades é uma importante representação, pois auxilia na visualização da estrutura do problema.

É possível, segundo Fischbein, Pampu e Minzat (1970), que crianças de 10 anos aprendam noções de Combinatória a partir árvore de possibilidades e isso pode ser verdade também para os alunos da EJA. Na presente pesquisa foi mais frequente a listagem de possibilidades, pois talvez seja uma estratégia considerada pelos alunos mais transparente do que a árvore de possibilidades.

Segundo Piaget e Inhelder (1951), independentemente de instrução escolar, é no estágio das operações formais que se desenvolve a capacidade de descobrir uma abordagem sistemática para encontrar todas as permutações entre os elementos de um conjunto. Considerando essa afirmativa, acreditamos que os indivíduos podem desenvolver o raciocínio lógico independentemente de instrução escolar, contudo, há que se alertar ao fato de que a instrução escolar é necessária para o desenvolvimento de sistematização e compreensão de conhecimentos de Combinatória.

Os estudos de Fischbein, Pampu e Minzat (1970) confirmam este posicionamento. Estes autores mostram que com ensino específico o desempenho em tarefas de combinatória pode ser melhorado. Os resultados do presente estudo parecem apontar para evidências de influência da escola e de experiências extra-escolares no desempenho dos participantes.

Ao perceberem os invariantes de cada tipo de problema, os alunos buscaram estratégias que correspondiam ao solicitado na situação. Acertando, ou não, a busca por estratégias demonstra interesse do aluno em determinar que tipo de procedimento pode ser usado em determinada situação.

Esteves e Magina (2001), em um estudo sobre o uso de representações realizado com alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e de 2º ano do Ensino Médio, observaram que em algumas situações as representações ajudaram e em outras provocaram uma interpretação errônea do problema, principalmente quando o problema envolvia grandes quantidades. No presente estudo também observou-se como foram efetuadas escolhas adequadas e inadequadas de estratégias com suas respectivas representações simbólicas. Compreender essas relações permite a criação de situações-problema que favoreçam o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos do aluno para situações mais elaboradas.

A Tabela 23 apresenta os percentuais dos tipos de estratégias por atividades profissionais e tipo de problemas.

Tabela 23. Percentuais de tipo de estratégia por atividades profissionais e tipo de problema

Ativ. Prof.	Probl.	Tipos de estratégia																				
		1	2	3	4	5	6	7	8a	8b	9a	9b	9c	9d	10a	10b	10c	10d	10e	10f	10g	10h
A	Mult.	70	1	1	1	4	-	7	-	15	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Quo.	60	-	1	-	4	-	4	5	1	-	2	1	21	1	-	-	-	-	-	-	-
	Part.	56	4	1	-	3	-	6	4	3	-	1	2	18	2	-	-	-	-	-	-	-
	PCD	70	-	8	-	6	-	-	-	15	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	
	PDI	71	-	8	-	1	-	-	4	8	-	-	-	8	-	-	-	-	-	-	-	-
	Com.	91	-	-	4	-	-	-	1	-	-	-	-	1	-	3	-	-	-	-	-	-
	Perm.	71	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	28	-	1	-	-	-	-
	Arr.	92	-	1	-	2	-	-	1	-	-	-	-	1	1	1	-	1	-	-	-	-
B	Mult.	50	-	-	-	-	-	-	-	50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Quo.	25	-	-	-	25	25	25	-	-	-	-	-	-	50	-	-	-	-	-	-	-
	Part.	50	-	-	-	-	-	25	-	-	-	-	-	25	-	-	-	-	-	-	-	-
	PCD	50	-	-	-	-	-	-	-	50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	PDI	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	-	25	-	-	-	-	-	-
	Com.	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Perm.	50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	-	-	-	-	-	-
	Arr.	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
C	Mult.	20	-	-	-	-	-	-	-	80	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	20
	Quo.	10	-	5	-	-	-	-	-	15	-	-	5	65	-	-	-	-	-	-	-	10
	Part.	20	-	-	-	5	-	-	-	5	-	-	-	70	-	-	-	-	-	-	-	20
	PCD	40	-	-	-	10	-	-	-	40	-	-	-	40	-	-	-	-	-	10	-	40
	PDI	20	-	-	-	-	-	-	30	35	-	-	-	15	-	-	-	-	-	-	-	20
	Com.	75	-	-	5	-	-	-	20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	75
	Perm.	75	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10	-	5	-	-	75
	Arr.	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100
D	Mult.	49	1	-	1	3	-	7	-	39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Quo.	50	-	1	-	5	-	5	2	7	-	1	1	28	-	-	-	-	-	-	-	-
	Part.	49	1	2	-	-	1	4	5	3	-	-	2	33	-	-	-	-	-	-	-	-
	PCD	61	-	2	-	5	4	-	-	28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	PDI	63	-	4	-	4	2	1	5	8	-	-	-	10	-	3	-	-	-	-	-	-
	Com.	86	1	1	2	-	-	-	5	-	-	-	-	4	-	1	-	-	-	-	-	-
	Perm.	62	1	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	36	-	-	-	-	-	-
	Arr.	88	-	-	-	-	-	-	2	3	-	-	-	1	1	5	-	-	-	-	-	-
E	Mult.	43	-	-	-	7	-	-	-	50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Quo.	36	-	-	-	7	-	-	-	7	-	-	-	50	-	-	-	-	-	-	-	-
	Part.	50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	-	-	-	-	-	-	-	-
	PCD	43	-	21	-	-	-	-	-	29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7	-	-
	PDI	21	-	7	-	-	-	-	14	43	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Com.	58	-	-	14	-	-	-	14	7	-	-	-	-	-	-	-	7	-	-	-	-
	Perm.	50	-	-	-	-	-	-	7	-	-	-	-	-	-	43	-	-	-	-	-	-
	Arr.	58	-	7	-	-	-	-	7	14	-	-	-	-	-	7	-	7	-	-	-	-

Tabela 23. (Continuação)Percentuais de tipo de estratégia por atividades profissionais e tipo de problema

F	Mult.	83	-	17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Quo.	50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	-	-	-	-	-	-	-	-
	Part.	83	-	-	-	-	-	17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	PCD	83	-	17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	PDI	66	-	17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	17	-	-	-	-	-	-
	Com.	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Perm.	50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	-	-	-	-	-	-
	Arr.	83	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	17	-	-	-	-	-
G	Mult.	36	-	-	-	7	-	-	-	50	-	-	-	7	-	-	-	-	-	-	-	-
	Quo.	36	-	-	-	-	-	-	-	14	-	-	-	50	-	-	-	-	-	-	-	-
	Part.	50	-	-	-	-	-	7	-	7	-	-	7	50	-	-	-	-	-	-	-	-
	PCD	65	-	-	-	7	-	-	7	21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	PDI	58	-	7	-	-	-	-	-	14	-	-	-	14	-	7	-	-	-	-	-	-
	Com.	64	-	-	7	-	-	-	7	-	-	-	-	-	-	22	-	-	-	-	-	-
	Perm.	50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	-	-	-	-	-	-
	Arr.	43	-	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	36	-	-	-	-	14	-
H	Mult.	30	3	-	-	3	-	10	-	46	-	-	-	3	5	-	-	-	-	-	-	-
	Quo.	39	7	-	-	3	-	-	-	3	-	-	-	48	-	-	-	-	-	-	-	-
	Part.	57	-	-	-	3	-	7	-	3	-	-	-	30	-	-	-	-	-	-	-	-
	PCD	70	-	-	-	3	3	-	-	21	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-
	PDI	60	-	-	-	-	-	-	7	7	-	-	-	19	-	7	-	-	-	-	-	-
	Com.	83	3	--	8	-	-	-	-	3	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-
	Perm.	40	-	-	-	-	-	-	3	3	-	-	-	3	-	48	-	3	-	-	-	-
	Arr.	60	4	-	-	4	4	-	-	-	-	-	-	-	4	20	-	4	-	-	-	-

A – Atividades domésticas; **B** – Atividades de produção de alimentos; **C** – Atividades com transporte; **D** – Estudantes; **E** – Atividades comerciais; **F** – Atividades de atendimento e serviço em alimentação; **G** – Atividades da construção civil; **H** – Outras.

Problemas:
Mult=Multiplicação; Quo=Quotição; Part=Partição; PCD=Produto Cartesiano Direto; PCI=Produto Cartesiano Inverso; Comb=Combinação; Perm=Permutação; Arr=Arranjo.

Tipos de estratégias:
1 - Não explicitou estratégia; **2 -** Não identificada; **3 -** Dá como resposta um dos dados; **4 -** Registra uma operação e efetua outra; **5 -** Adição e/ou subtração dos dados; **6 -** Adição e/ou subtração inadequada de parcelas repetidas; **7 -** Adição e/ou subtração adequada de parcelas repetidas; **8a -** Multiplicação inadequada; **8b -** Multiplicação adequada; **9a -** Desenha e distribui; **9b -** Desenha o todo e agrupa; **9c -** Desenha a cota até atingir o todo**; 9d -** Algoritmo da divisão; **10a -** Desenho de possibilidades/representação icônica**; 10b -** Listagem de possibilidades; **10c -** Árvore de possibilidades; **10d -** Quadro/diagrama; **10e -** Percepção ou busca de regularidade; **10f -** Uso inadequado de fórmulas; **10g -** Princípio Fundamental da Contagem (PFC); **10h -** Uso adequado de fórmulas.

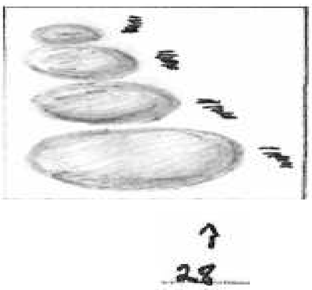
De acordo com o que observamos na Tabela 23, os que apenas estudavam tendiam a utilizar-se mais de procedimentos formais, estando estes certos ou não. As estratégias mais utilizadas foram o algoritmo da divisão e da multiplicação e a listagem de possibilidades. Contudo, a listagem de possibilidades é mais utilizada pelos grupos profissionais que não obtiveram um bom desempenho. Estes grupos usaram esta estratégia mais especificamente em uma questão de permutação na qual era necessário escrever palavras que existiam ou não com as letras da palavra AMOR. Quando utilizados os procedimentos formais por alunos das séries iniciais da EJA, estes tendiam a usá-los de forma incorreta.

A seguir, apresentaremos algumas das estratégias mais utilizadas pelos alunos na resolução de cada um dos problemas combinatórios.

Produto Cartesiano Direto

Figura 19. Solução correta do Problema 8 (produto cartesiano direto) – *resposta correta (explicitando estratégia)*. P 8 (participante 8), sexo masculino, estudante, 20 anos de idade, Nenhum a quatro anos de estudo, Módulo I da EJA.

08. Na fabrica "Bola Tudo" há 4 tamanhos de bolas e estas são feitas em 7 desenhos diferentes. Quantos tipos de bolas são fabricadas?



O aluno representado pela Figura 19 efetuou uma adição repetida de parcelas iguais, contudo, para isto utilizou uma representação icônica para resolver o problema. Sua estratégia de solução é válida, pois, uma vez percebidas as relações envolvidas no enunciado, o participante conseguiu desenvolver um procedimento de resolução adequado.

Produto Cartesiano Inverso

Figura 20. Solução correta do Problema 5 (produto cartesiano inverso) – *resposta correta (explicitando estratégia)*. P 110 (participante 110), sexo feminino, doméstica, 33 anos de idade, Cinco a sete anos de estudo, Módulo IV da EJA.

05. A loja "Tudo sofá" vende sofás de 3 tamanhos diferentes (grande, médio e pequeno) e em cores diferentes. Se na loja são vendidos 18 sofás diferentes quantas são as cores que podem ser escolhidas?

18 | 3
(0) 6

podem ser escolhidas 6 cores

A aluna representada na Figura 20 utilizou o algoritmo da divisão para resolver o problema. Evidencia-se que ela compreendeu o enunciado da situação. Também podemos dizer que provavelmente esta aluna foi influenciada pela instrução escolar, ou seja, a utilização do algoritmo da divisão foi por ela reconhecido como adequado para resolver situações como esta – de relação inversa de produto cartesiano.

Permutação

O aluno representado na Figura 21 usou o Princípio Fundamental da Contagem para responder a questão.

Figura 21. Solução correta do Problema 10 (permutação) – *resposta correta (explicitando estratégia)*. P 123 (participante 123), sexo masculino, eletricista, 21 anos de idade, Mais de dez anos de estudo, PROEJA.

10. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

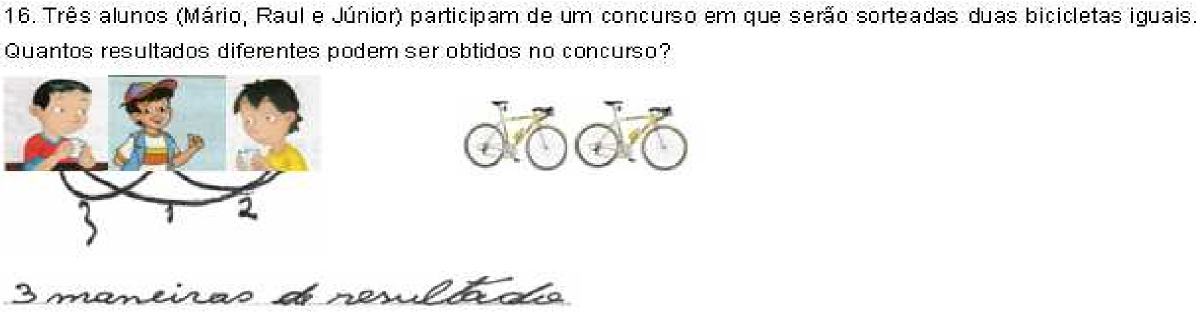
~~3x4=12~~

3 · 2 · 1 = 6

6 formas.

Combinação

Figura 22. Solução correta do Problema 16 (combinação) – *resposta correta (explicitando estratégia)*. P 99 (participante 99), sexo masculino, vendedor, 19 anos de idade, Mais de dez anos de estudo, Módulo IV da EJA.



Na Figura 22 observamos que o participante utiliza-se de um diagrama para auxiliar na resolução do problema. Desta forma, fica evidenciado que ele compreendeu as propriedades do problema e com isso elaborou uma estratégia que o ajudou na solução da questão e na validação de sua resposta.

Arranjo

A seguir, temos um exemplo de solução realizado por um aluno do PROEJA (Figura 23). Este participante efetuou a listagem dos países participantes da Copa. No decorrer do processo, ele percebeu que havia uma regularidade e não chegou a listar as possibilidades restantes. O procedimento seguinte não foi registrado pelo mesmo, mas supomos que percebendo a regularidade, o educando calculou mentalmente as possibilidades restantes. Ficou evidenciado que o aluno compreendeu as relações implícitas no problema e buscou uma forma de organizar sua solução de maneira sistemática, uma vez que o mesmo lista as possibilidades organizadamente, país por país, e percebeu uma regularidade presente na situação.

Figura 23. Solução correta do Problema 13 (arranjo) – *resposta correta (explicitando estratégia)*. P 130 (participante 130), sexo masculino, estudante, 19 anos de idade, Oito a dez anos de estudo, PROEJA- Mecânica.

Essa representação simbólica foi espontaneamente criada pelo aluno para a resolução da situação e se mostrou uma estratégia eficiente de solução do problema, demonstrando, através desta representação, que compreendeu os significados e invariantes implícitos no problema.

Percebemos que os alunos pesquisados utilizam diferentes formas de resolução. Embora se tenha observado resistência da maioria dos participantes em utilizarem representações simbólicas, menos formais, encontramos algumas estratégias interessantes e bem semelhantes às encontradas por Pessoa (2009). Observamos que o uso de variadas representações pode estar associada à reflexão dos significados e invariantes das situações apresentadas.

Desta forma, consideramos essencial levar em consideração as representações usadas pelos alunos na resolução dos problemas, pois estas possibilitam que os mesmos explicitem o seu nível de conhecimento e de entendimento em relação aos problemas e seus significados e invariantes. É necessário, também, que os alunos sejam estimulados a utilizarem variadas formas de representação – das informais às mais formalizadas – nas quais se evidenciem as particularidades de casa situação trabalhada.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nos capítulos iniciais deste estudo foram discutidos os aspectos mais relevantes da Educação de Jovens e Adultos e a Educação Matemática voltada a este público, voltamos-nos ao Campo das Estruturas Multiplicativas para tratarmos do *raciocínio combinatório*. Em conseguinte detalhamos o percurso metodológico utilizado e os resultados obtidos a partir dos mesmos. Neste momento abordaremos as considerações finais desta pesquisa e algumas implicações pedagógicas que decorrem das análises realizadas ao longo deste estudo, relacionadas ao *raciocínio combinatório.*

É necessário ressaltar a importância de se investigar o desempenho dos alunos da Educação de Jovens e Adultos, modalidade de ensino esta que apresenta poucas produções acadêmicas relacionadas ao desenvolvimento cognitivo deste público que apresenta características peculiares provenientes de seu processo histórico-social e cultural.

Ciente dessa importância, buscamos contribuir para este campo da educação brasileira com a realização desta pesquisa que procurou analisar a compreensão de alunos da Educação de Jovens e Adultos em todos os níveis desta modalidade de ensino sobre problemas de estruturas multiplicativas, mais especificamente os que envolvem o *raciocínio combinatório*.

Dentre as variáveis analisadas as que controlamos foram série e tipo de problema. Embora as demais variáveis (profissão exercida, anos de estudo e faixa etária – variáveis externas) não tenham sido controladas nesta pesquisa algumas delas exerceram influência no desempenho dos alunos na resolução dos problemas multiplicativos.

Um dos objetivos principais do estudo foi comparar o desempenho em função da escolaridade. Este é um aspecto importante, pois os alunos da EJA fazem parte de um público que procura (re)inserir-se no âmbito escolar o que caracteriza um compromisso social para que nesta nova oportunidade tenham a garantia de uma educação que favoreça o desenvolvimento de seus conhecimentos.

Quando relacionados com os anos de escolarização, percebeu-se que à medida que avançavam na escolarização também ocorreram avanços nos desempenhos com relação à compreensão dos significados dos problemas, ou seja, no sentido que avançavam nos anos escolares, os alunos iam utilizando os conceitos-em-ação característicos de cada tipo de problemas dos conceitos *combinatórios*.

Uma variável importante no estudo foi a das séries (módulos), pois percebemos que a escolarização é um fator que influencia fortemente no desempenho dos alunos. O desempenho dos educandos do Ensino Médio Profissionalizante – PROEJA foi significativamente superior ao dos demais níveis e o desempenho no primeiro módulo em comparação aos dois últimos da EJA também apresentaram uma diferença significativa, uma vez que os desempenhos dos alunos dos módulos referentes às séries finais do Ensino Fundamental foram superiores aos das séries inicias. Nesta perspectiva, percebemos que o ensino da Combinatória é elemento fundamental no desenvolvimento do *raciocínio combinatório,* pois com o passar dos anos escolares, o desempenho melhora no que se refere a este raciocínio. Pessoa (2009), alerta para o fato de que outros conhecimentos matemáticos e de outras áreas (adquiridos dentro e fora da escola) também podem influenciar na construção do *raciocínio combinatório.* Dessa forma, é preciso reconhecer que tanto o ensino direto quanto o implícito de princípios combinatórios têm forte influência no desenvolvimento de uma nova forma de pensar dos estudantes.

O nível de ensino e os anos de escolarização mostraram-se variáveis interferentes no desempenho dos participantes da pesquisa, pois à medida que os anos escolares passaram o desempenho avançou, quanto mais tempo de escola, melhor o desempenho nos problemas combinatórios. A diferença no desempenho foi mais significativa entre os módulos do Ensino Fundamental e a turma de Mecânica do PROEJA, mas observamos diferenças significativas também entre os módulos I, III e IV.

A partir da análise de desempenho dos participantes, pudemos observar quais problemas multiplicativos os alunos da Educação de Jovens e Adultos apresentam maior e menor dificuldade. Obtivemos fortes evidências com relação aos procedimentos utilizados pelos sujeitos da pesquisa na resolução dos problemas multiplicativos, em especial os de *raciocínio combinatório*, porém, o que pensam quando resolvem tais tipos de problemas seria mais facilmente identificado através de outros métodos, como uma entrevista clínica piagetiana. Pudemos identificar significados de Combinatória mais facilmente compreendidos, bem como formas de representação simbólica preferidas e pudemos inferir sobre os invariantes operatórios que os alunos percebem ao resolver os problemas. Dentre os problemas combinatórios os de combinação e arranjo apresentaram-se como os que os alunos demonstraram um mais fraco desempenho. Dentre as estratégias a mais utilizada pelos participantes foi a listagem de possibilidades.

Consideramos ainda a importância desta pesquisa em investigar dentro da Educação Matemática o *raciocínio combinatório*. Este é um modo de pensar presente em diversas situações cotidianas nas quais é necessário realizar um agrupamento dado um conjunto de elementos com a finalidade de atender a critérios específicos para determinar o total de agrupamentos possíveis.

Com o levantamento de estudos que abordam o raciocínio combinatório verificamos que estes focam um ou alguns dos quatro tipos de problemas combinatórios. Pessoa e Borba (2007, 2009) sugerem o trabalho com os quatro tipos de problemas (*permutação, arranjo, combinação e produto cartesiano*), pois as relações básicas de Combinatória contidas nestes quatro tipos de problemas levam os estudantes a terem contato com a variedade de situações que pode possibilitar um mais amplo desenvolvimento do *raciocínio combinatório*.

Embora cada situação combinatória apresente uma particularidade as mesmas têm características que as aproximam, desta maneira, fazem parte de um mesmo campo conceitual, o das estruturas multiplicativas (Vergnaud, 1991).

A variável externa profissão, embora não tenha sido controlada, nos mostra que o exercício profissional é um fator que pode influenciar o desempenho dos participantes na resolução de problemas combinatórios. O grupo das atividades domésticas foi o que apresentou maior percentual de no máximo oito acertos, enquanto que grupos como o de transporte teve um percentual maior que este grupo em mais de oito acertos. Estudos anteriores apontam para o fato de que o exercício profissional exerce influência no desempenho dos sujeitos na resolução de problemas matemáticos. No estudo de Schiliemann (1988), por exemplo, realizado com cambistas do jogo do bicho, estudantes universitários e trabalhadores de condições sociais e financeiras semelhantes aos dos cambistas demonstra que apesar de não terem passado pela formalização de conceitos combinatórios os cambistas apresentaram bom desempenho, ficando atrás dos estudantes universitários. A autora acima citada conclui que tanto conhecimentos informais como os formais são necessários ao desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos, mais especificamente os que envolvem a permutação.

Nesta perspectiva, o desenvolvimento do conhecimento *combinatório* ocorre, atrelado a algumas variáveis que fazem grande diferença no desempenho dos alunos. Os educandos apresentam desempenho mais satisfatório ou menos satisfatório, dependendo dessas variáveis. Alguns problemas são de mais fácil compreensão e outros mais difíceis, devido à estrutura do problema e do trabalho realizado em sala de aula. Neste sentido, o *cálculo relacional* será mais fácil ou difícil dependendo da natureza da situação e da experiência dos alunos em lidarem com proposições semelhantes.

De modo geral, os alunos têm melhor desempenhos nos problemas de multiplicação direta, quotição e partição. É provável que isto aconteça porque desde os anos iniciais do Ensino Fundamental trabalhe-se com esses tipos de problemas em sala de aula. Esse melhor desempenho confirma o que foi pontuado por Nesher (1988) e Brown (1981) que entre os problemas multiplicativos os de produto cartesiano são os mais difíceis.

Estudos anteriores pontuaram que problemas que envolvem a partição e a quotição não apresentam diferenças significativas no desempenho dos alunos (Selva, 1998; Selva et al, 2006), embora os de quotição apresentaram-se como um pouco mais difíceis. Um motivo apontado pelas autoras acima citadas foi o fato de que problemas de quotição podem ser considerados como problemas inversos de multiplicação, o que exige que o aluno realize uma inversão mental. Já a partição são considerados problemas diretos de divisão e são mais usualmente trabalhados.

Os resultados mostram que os problemas de produto cartesiano são os mais fáceis entre os problemas combinatórios, seguido dos problemas de permutação, combinação e arranjo. Isto indica que é necessário perceber a natureza variada dos problemas, identificando seus invariantes. Estudos anteriores apontam que dentre os problemas combinatórios os de arranjo são os mais fáceis seguidos dos de permutação e combinação (Pessoa, 2009). Observamos que estes dados coincidem com os encontrados neste estudo quando observamos os acertos dos alunos nas duas questões de cada tipo de problema.

Segundo Vergnaud (1983), o melhor critério para aquisição de conceitos é através da habilidade em resolver situações em linguagem natural e utilizar símbolos para ajudar na resolução de problemas.

Diferentemente de estudos anteriores, que apontam que mesmo quando os alunos não conseguem obter a resposta correta muitos demonstram compreender as relações envolvidas e utilizam diversas estratégias válidas para resolverem as questões, encontramos no presente estudo percentuais baixos de sujeitos que tenham usado estratégias distintas das formais para resolverem os problemas propostos. Dentre os que utilizaram formas distintas das formais para a resolução dos problemas, encontramos estratégias semelhantes aos evidenciados por Pessoa (2009) com crianças de sete a dezessete anos, como o uso da listagem de possibilidades. Esta representação entre os problemas combinatórios apresentou um percentual maior do que uso de fórmulas e/ou quadro ou diagramas. Contudo, os alunos usaram mais multiplicação e adição de parcelas repetidas para resolver estes tipos de problemas, mesmo o percentual tendo sido menores do que os observados na *não apresentação de estratégia*.

A maior parte dos alunos respondeu as questões utilizando procedimentos formais, contudo, é nas séries iniciais da EJA que observamos formas distintas de resolver os problemas. A mais usual foi a representação icônica e a listagem de possibilidades na questão quatro (problema de permutação que trabalha a formação de palavras existentes ou não com as letras da palavra AMOR), entre os alunos destes módulos iniciais. Em todos os níveis, esta foi uma questão em que os alunos tentaram resolver através da listagem de possibilidades. Ninguém obteve sucesso na resolução, pois apesar de alguns terem percebido o que o enunciado pedia nenhum aluno esgotou todas as possibilidades.

A análise de tipos de respostas e de estratégias evidencia, porém, que os procedimentos mais bem sucedidos e os tipos de respostas que mais se aproximam das corretas se concentram mais nos alunos do PROEJA – Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos. Assim, fica evidenciado que a escolarização é determinante no desempenho dos alunos e que o ensino da Combinatória se faz essencial para o desenvolvimento do *raciocínio combinatório*.

As representações simbólicas são parte importante no processo de compreensão dos significados, na construção do pensamento combinatório. O uso de diferentes representações mostra formas distintas de compreender o problema. Os tipos de respostas e as estratégias utilizadas pelos alunos nos mostram como esse desenvolvimento do raciocínio combinatório ocorre. É necessário que a escola encoraje o uso de representações distintas e não apenas as formais para a resolução de problemas, pois elas indicam o nível de compreensão dos alunos e qual ação deve ser tomada pelo professor. É preciso que o educador esteja atento às estratégias usadas pelos educandos, com a finalidade de aproveitá-las no sentido de perceber o que mobiliza os alunos na compreensão dos problemas combinatórios, pois daí será possível ajudá-los a avançar nas estratégias de solução e na compreensão da *Combinatória*. O acompanhamento das estratégias dos alunos permite identificar quais conceitos-em-ação e quais teoremas-em-ação os alunos utilizam no desenvolvimento do pensamento *combinatório*.

Diante dos resultados obtidos, observamos que a escola é essencial para o desenvolvimento do conhecimento *combinatório*, pois é ela que guiará os educandos à formalização dos conhecimentos sobre este raciocínio através da percepção dos conceitos-em-ação e dos teoremas-em-ação que os alunos usam. Percebemos também que os alunos utilizam formas distintas de resolução e isto indica que este conhecimento é já mobilizado antes mesmo da formalização. Deste modo, entendemos que é papel da escola fornecer aos alunos oportunidade de desenvolver formas distintas de resolução, a fim de propiciar uma melhor compreensão desses educandos sobre *raciocínio combinatório*. Assim, os mesmos poderão desenvolver melhor o processo de sistematização, aprofundamento, ampliação e formalização dos seus conhecimentos em *Combinatória*.

Estudos anteriores em *raciocínio combinatório* forneceram subsídios para a construção deste estudo. A contribuição desta pesquisa em relação às outras já realizadas é que focamos um grupo específico de estudantes, alunos da Educação de Jovens e Adultos. Este público, embora muito estudado em relação à sua história social, cultural e econômica, ainda apresenta poucos estudos sobre a forma de pensar dessa clientela com relação à resolução de problemas matemáticos. No sentido de contribuir para a melhora deste grupo específico, decidimos realizar este estudo em cinco níveis da EJA, a fim de entender como esses alunos compreendem *Combinatória*.

Este estudo nos possibilitou inferir sobre algumas variáveis na relação dos alunos da EJA na resolução de problemas multiplicativos (anos de escolarização, atividades profissionais, faixa etária, tipos de respostas e estratégias apresentadas) principalmente nos problemas de Combinatória. Deste modo, novas pesquisas podem ser efetuadas no intuito de investigar com mais profundidade como esses alunos relacionam esses conhecimentos e como eles se dão de forma mais explícitas em relação aos problemas combinatórios. Podemos, ainda, realizar intervenções em sala de aula a partir dos dados obtidos neste estudo, utilizando-se desses resultados para verificar como se dá o ensino de Combinatória e como esses alunos se apropriam desses conhecimentos.

Outra investigação que pode ser realizada é com indivíduos que não estejam em processo de escolarização e/ou sejam de um grupo específico profissional, com a finalidade de verificar quais representações são utilizadas por esses na resolução de problemas que envolvem o *raciocínio combinatório*.

Outra possibilidade é verificar o uso do material manipulativo na resolução de problemas que envolvam a *Combinatória* por alunos jovens e adultos observando, assim, quais estratégias essa clientela utiliza diante de recursos distintos.

Esperamos ter contribuído para a compreensão de como alunos da EJA desenvolvem o raciocínio combinatório, evidenciando fatores que contribuem para esta construção. A apresentação das estratégias utilizadas pelos alunos e as dificuldades registradas pelos mesmos nos tipos de problemas podem contribuir para reflexão de como estes problemas podem ser trabalhados em sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAHAMSON, Dor & CENDAK, Rose. The odds of understanding the law of large numbers: a design for grounding intuitive probability in combinatorial analysis. In: ***Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*-PME 30 -** Praga, República Tcheca, 2006.

AMIT, Miriam & JAN, Irma. Autodidactic learning of probabilistic concepts through games. In: ***Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* -PME 30 -** Praga, República Tcheca, 2006.

ARROYO, Miguel. **Reflexão sobre a reorganização e reorientação curricular da Educação de Jovens e Adultos na perspectiva da proposta de Reorganização e Reorientação curricular.** São Paulo, 2003.

______________. Educação de jovens-adultos: um campo de direitos e de responsabilidade pública. In: SOARES, Leôncio; GIOVANETTI, Maria Amélia; GOMES, Nilma (org). **Diálogos na Educação de Jovens e Adultos**. Belo Horizonte, Minas Gerais: Autêntica, 2005.

BAIL, Viviane Schumacher. **Educação matemática de jovens e adultos, trabalho e inclusão.** Florianópolis: Insular, 2002.

BARRETO, Fernanda; AMARAL, Fábio & BORBA, Rute. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais. **Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia**, Recife: UFPE, 2007, v. 2, p. 1-21.

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan & NAVARRO-PELAYO, Virginia. Combinatorial Reasoning and its Assessment In: Gal, I. & Garfield, J. B. (editors). **The Assessment Challenge in Statistics Education.** IOS Press, 1997.

BEISIEGEL, Celso de Rui. **Questões da atualidade na educação popular: ensino fundamental de jovens e adultos analfabetos ou pouco escolarizados.** São Paulo: FEUSP (texto apresentado em mesa redonda na 22ª Reunião Anual da ANPEd), Caxambu, Mg: set. 1999.

BINI, Márcia Bárbara. **Atividades interativas como geradoras de situações no Campo Conceitual da Matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2008.

BORBA, Rute., ROCHA, Cristiane., MARTINS, Glauce., & LIMA, Rita de Cássia. O que dizem os estudos recentes sobre o raciocínio combinatório? **Anais do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática.** Injuí, 2009.

BORBA, Rute E. S. R.; SELVA, Ana C. V.; LUNA, Maria Helena T.; SILVA, Dayse B. e FERREIRA, Maria N. P. Sondando o conhecimento de professoras sobre o desenvolvimento conceitual multiplicativo. **Anais do 2º SIPEMAT – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Recife, UFRPE, 2008.

BRASIL. MEC. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação**. Disponível em:

<http://www.mec.gov.br>. Acesso em: 21 de julho de 2008.

______. **Plano Nacional de Educação**. Disponível em: <http://www.mec.gov.br>. Acesso em: 21 de julho de 2008.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática. 3º e 4º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental, Brasília, 1997.

BROWN, Margareth. Number operations. In: Hart, Kathleen (ed.) **Children's understanding of Mathematics: 11-16**. .Windsor :NFER-Nelson, 1981, pp.23-47.

BRYANT, Peter, MORGADO, Luísa & NUNES, Terezinha. Children's understanding of multiplication. **Proceedings of the Annual Conference of the Psychology of Mathematics Education.** Tokyo, 1992.

CARRAHER, Terezinha, CARRAHER, David. & SCHLIEMANN, Analúcia. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

CARVALHO, Dione L. de. **A interação entre o conhecimento matemático da prática e o escolar.** Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1995.

CORREIA, P. F. & FERNANDES, J. A. Estratégias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória. **Libro de Actas do Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagoxia.** A. coruña/Universidade de Coruña: Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxia e Educación, 2007.

COSTA, Claudinei. **As concepções dos professores de Matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental***.* 161 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

CYRINO, Márcia & TEIXEIRA, B. Estágio de docência e a formação do professor de Matemática: uma experiência com análise combinatória por meio da resolução de problemas. In: *Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática*, Belo Horizonte, 2007.

DI PIERRO, Maria Clara & GRACIANO, Mariângela. **A educação de jovens e adultos no Brasil: Informe apresentado à Oficina Regional da UNESCO para América Latina y Caribe.** São Paulo: Ação Educativa. Junho de 2003. <WWW.acaoeducativa.org.br/dowload/relorealc.pdf >. Acesso em 2 de fevereiro de 2009.

DI PIERRO, Maria Clara. Um balanço da evolução recente da educação de jovens e adultos no Brasil. In: VÓVIO, Cláudia Lemos; IRELAND, Timothy denis. (org.). **Construção coletiva: Contribuições à Educação de Jovens e Adultos**. 2ª ed. Brasília: UNESCO, MEC, RAAAB, 2008.

DI PIERRO, Maria Clara. **Descentralização, focalização e parceria: Uma análise das tendências nas políticas públicas de educação de jovens e adultos.** Educação e Pesquisa, São paulo, v. 27, n. 2, p. 321 – 337, jul/dez, 2001.

ESTEVES, Inez. & MAGINA, Sandra. Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescente de 14 anos – 8ª série do Ensino Fundamental. **Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática.** Rio de Janeiro, 2001.

FANTINATO, Maria Cecília. **A construção de saberes matemáticos entre jovens e adultos no Morro de São Carlos.** In: Revista Brasileira de Educação, n. 27, 2004.

FISCHBEIN, Efraim & GAZIT, Avikam. The Combinatorial Solving Capacity in Children and Adolescents, **Zentralblatt f ¨ur Didaktitk der Mathematik** 5, 1988, pp. 193–198.

FISCHBEIN, Efraim. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**, Reidel, Dordrecht, 1975.

FISCHBEIN, Efraim; PAMPU, Ileana & MINZAT, Ion. Effects of age and instruction on combinatory ability in children. **The British Journal of Educational Psychology,** nº 40, 1970.

FONSECA, Maria da Conceição F. R. (org.). Letramento no Brasil: habilidades matemáticas: reflexão a partir do INAF 2002 – São Paulo: Glogal: Ação educativa Assessoria, Pesquisa e informação Instituto Paulo Montenegro, 2004.

FONSECA, Maria da Conceição F. R. **Educação Matemática de jovens e adultos: especificações, desafios e contribuições.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

FONTES, M. & FONTES, D. Análise combinatória: uma abordagem através de contexto. In: *Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática*, Belo Horizonte, 2007.

FRANCHI, Anna. **Considerações sobre a Teoria dos Campos Conceituai**. In: Educação Matemática: Uma Introdução. São Paulo: EDUC/PUC – SP, 2002.

FRANT, Janete; CASTRO, Mônica & LIMA, Tânia. Pensamento Combinatório: Uma análise baseada na Estratégia Argumentativa. **Anais da 24ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Educação (ANPEd).** Caxambu, MG, 2001.

____________. ***Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa.*** São Paulo: Paz e Terra, 1996.

____________e BETTO. **Esta escola chamada vida**. Depoimentos ao repórter Ricardo Kotscho. São Paulo: Ática, 1986.

GOMES, Maria José. **Profissionais fazendo Matemática: O conhecimento de números decimais de alunos pedreiros e marceneiros da Educação de Jovens e Adultos.** Dissertação de Mestrado da UFPE, 2007.

HENRIQUES, Ricardo; IRELAND, Timothy. A política de educação de jovens e adultos no Governo Lula. In: VÓVIO, Cláudia Lemos; IRELAND, Timothy Denis. (org.) **Construção coletiva: Contribuições à educação de jovens e adultos**. 2ª ed. Brasília: UNESCO, MEC, RAAAB, 2008.

INHELDER, Barbara & PIAGET, Jean. **De la logique de l'enfant à la logique se l'adolescent**. Paris: Presses Universitaires de France, 1955.

JAN, Irma & AMIT Miriam. What's the connection between ears and dice? They both promote probabilistic understanding. In: ***Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*** **-PME 30**.- Praga, República Tcheca, 2006.

MATOS FILHO, Maurício & PESSOA, Cristiane. Livro Didático: como estão abordando os problemas de raciocínio combinatório no Ensino Fundamental? **VI Encontro Pernambucano de Educação Matemática - VI EPEM**, Caruaru, 2006.

MELO, Maria José Medeiros Dantas & PASSEGGI, Maria da Conceição. **A matemática na educação de jovens e adultos: algumas reflexões.** Horizontes, v. 24, n.1, p.23-32. jan. e jun de 2006. Disponível em: <www.saofrancisco.edu.br/edusf/publicacoes/RevistaHorizontes/Volume_01/upçoadAddress/Art2%5B6170%5D.pdf >. Acesso em: 2 de fevereiro de 2009.

MERAYO, Felix. **Matemática Discreta.** Madri: Editora Thomson Paraninfo S.A., 2001.

MORGADO, Augusto, PITOMBEIRA DE CARVALHO, João, PINTO DE CARVALHO, Paulo. & FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

NESHER, Pearla. Multiplicative school word problems: theoretical approaches and empirical findings. In: J. Hiebert and M. Behr (eds.): **Number concepts and operations in the middle grades**. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1988, p. 19-40.

NUNES, Terezinha & BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, Terezinha, CAMPOS, Tânia, MAGINA, Sandra, & BRYANT, Peter. **Introdução à Educação Matemática: os números e as operações numéricas**. São Paulo: PROEM, 2001.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. **Jovens e adultos como sujeitos de conhecimento e aprendizagem.** Revista Brasileira de Educação. São Paulo: ANPED – Associação

Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Educação, n.12, 1999, p. 59-73.

PALACIOS, Jesús. Mudança e desenvolvimento durante a idade adulta e a velhice. In: COLL, César; MARCHESI, Álvaro e PALACIOS, Jesús. (org). **Desenvolvimento psicológico e educação**. 2 ed. Porto Alegre: Artmed, 2004.

PALACIOS, Jesús; OLIVA, Alfredo. A dolescência e seu significado evolutivo. In: COLL, César; MARCHESI, Álvaro e PALACIOS, Jesús. (org). **Desenvolvimento psicológico e educação**. 2 ed. Porto Alegre: Artmed, 2004.

PAIVA, Vanilda Pereira. **Educação popular e educação de adultos**. 4 ed. São Paulo, Loyola, 1987

PESSOA, Cristiane. **Quem dança com quem: O desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.** Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

PESSOA, Cristiane & BORBA, Rute. Resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos do 6º ao 9º ano. **Anais do 19º Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste**, João Pessoa, 2009.

PESSOA, Cristiane & BORBA, Rute. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série.** ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan-jun, 2009.

PESSOA, Cristiane & MATOS FILHO, Maurício. Raciocínio combinatório: uma análise dos livros didáticos de matemática de 1ª a 4ª séries **Anais da VII Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul**, Águas de Lindóia, 2006b.

PESSOA, Cristiane; SILVA, Cledjane & MATOS FILHO, Maurício. Como os alunos de 3ª e 5ª série resolvem os problemas de estrutura multiplicativa? **Anais do XI Encontro Baiano de Educação Matemática**, Salvador, 2005.

PESSOA, Cristiane. & BORBA, Rute. Como crianças de 1ª à 4ª série resolvem problemas de raciocínio combinatório? **Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Recife, 2008.

PESSOA, Cristiane & BORBA, Rute. Estratégias de resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos de 1ª a 4ª série. In: **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte**. Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte, 2007.

PIAGET, Jean & INHELDER, Barbra. **La génese de l’idée de hasard chez l’enfant.** Paris, Press Universitaires de France, 1951.

PINHEIRO, Carlos & SÁ, Pedro. de. O ensino de análise combinatória: a prática pedagógica predominante segundo os docentes. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)**, Belo Horizonte, 2007.

PLACHA, Kelly Cristine.; MORO, Maria Lúcia faria. **Problemas de Produto Cartesiano, Raciocínio Combinatório e Intervenção do professor**. Psicologia: Teoria e Pesquisa. Jan/mar. Vol. 25, n. 1, 2009.
RIBEIRO, Vera Maria Masagão. BRASIL. MEC. **Proposta Curricular do 1º segmento da Educação de Jovens e Adultos: Ensino Fundamental.** 3ª edição. São Paulo/Brasília, 2001. Disponível em: <http://www.mec.gov.br>. Acesso em: 21 de julho de 2008.

ROCHA, José de Arimatéa. Investigando a aprendizagem de análise combinatória simples em uma turma de licenciandos em matemática submetida a uma prática de ensino tradicional. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM),** Belo Horizonte, 2007.

ROCHA, Halline Fialho da. KARL, Helena de Azevedo. VEIGA, Marise Schmidt. & GUIMARÃES, Michelle. **As práticas educativas na Educação de Jovens e Adultos.** Relatório de Pesquisa apresentado como requisito de conclusão do Curso de Pedagogia da Faculdade de Educação da Universidade Católica de Petrópolis – UCP. Petrópolis, 2002.

RODRIGUES*, José Maria. Formação matemática de professores de atuação multidisciplinar nas séries iniciais do Ensino Fundamental: indicativos para estudos de noções de probabilidade.* In: ***Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática***, Águas de Lindóia, São Paulo, 2006.

SANDOVAL, Ivone; TRIGUEIROS, Maria & LOZANO, Dolores. Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria. In: **Anais do XII Comitê Interamericano de Educação Matemática,** Querétaro, México, 2007.

SANTOS, L. F. Raciocínio Combinatório na EJA. **Anais do VIII Encontro Sergipano de Educação Matemática**. VIII Encontro Sergipano de Educação Matemática, Aracajú, 2008.

SCHLIEMANN, Analúcia. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David & SCHLIEMANN, Analúcia. **Na vida dez, na escola zero***.* São Paulo: Cortez, 1988.

SELVA, Ana Coelho Vieira & BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Sondando o conhecimento de professoras sobre o desenvolvimento conceitual multiplicativo. **Anais do 2º SIPEMAT – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Recife: UFPE, 2008

SELVA, Ana; BORBA, Rute; CAMPOS, Tânia; BIVAR, Dayse; FERREIRA, Maria Neuza; LUNA, Maria Helena. O raciocínio multiplicativo de crianças de 3ª e 5ª séries: O que compreendem? Que dificuldades apresentam? **Anais do 2º Simpósio Internacional de Educação Matemática.** Recife, 2008.

SELVA, Ana.; BORBA, Rute.; MAGINA, Sandra.; SPINILLO, A. & CAMPOS, T. A resolução de problemas multiplicativos por crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental – o que resolvem e por que resolvem? **Anais do III SIPEM,** São Paulo, 2006.

SELVA, Ana Coelho Vieira. Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. In Schliemann, A. & Carraher, D. (orgs). **A compreensão de conceitos aritméticos. Ensino e Pesquisa.** São Paulo. Papirus editora: 95-119, 1998.

SILVA, Valdenice. Números **decimais: No que os saberes de adultos diferem dos de crianças?** Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2006.

SILVA, Valdenice. & MONTEIRO, Carlos. "Atitudes no currículo da Educação de Jovens e Adultos". In: **Anais do XV EPENN – Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste** – UFMA, Maranhão, Jun de 2001.

________________. Currículo e cidadabia na Educação de Jovens e Adultos. In: **Anais da 53ª Reunião Anual da SBPC**. Realizada na UFBA, Salvador, Jun de 2001.

________________. Currículo e Educação de Jovens e Adultos: Abordando a cidadania. In: Anais da 23ª Reunião Anual da ANPEd – Caxambu, Minas Gerai, 2000.

SOARES, Maria. Teresa. & MORO, Maria Lúcia. Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na escola fundamental. **Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Águas de Lindóia, SP, 2006.

VERGNAUD, Gérard. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, Thomas, Moser, Joseph & Romberg, Thomas. (Eds.), **Addition and subtraction: a cognitive perspective**. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum, 1982.

________________. Multiplicative structures. In: Lesh, R. & Landau, M. (Eds.). **Acquisition of mathematics: Concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983.

________________. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica, 1,** 1986, pp. 75-90.

________________**.** La théorie de champs conceptuels. **Recherches en Didactique de Mathématiques,** , vol 10, nº2.3, Pensée Sauvage: Grenoble, França. 1990, pp. 133-170.

________________. **El niño, las matemáticas y la realidad - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria**. Mexico: Trillas, 1991.

________________. Multiplicative conceptual field: what and why? In Guershon, H.

and Confrey, J. (1994). (Eds.) **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994, pp. 41-59.

________________. **A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos**. Revista do GEMPA, nº 4, Porto Alegre, 1996, pp. 9-19.

_________________. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **JMB – Journal of Mathematical Behavior.** CRNS, Paris, nº 17 (2), 1998, pp. 167-181.

_________________. The theory of conceptual fields. **Human Development**. 52, 2009, p. 83-94.

ANEXOS

ANEXO 1 – QUETIONÁRIO

1 – Nome : _______________________________ Idade : ____________________
2 – Sexo : Feminino (   )   Masculino (   )
3 – Profissão : ________________________ Tempo de profissão : __________________
4 – Local de nascimento : ____

5 – Quantos anos já estudou?

1 – Nenhum (   )
2 – 1 (   )
3 – 2 a 4 anos (   )
4 – 5 a 7 anos (   )
5 – 8 a 10 anos (   )
6 – Mais _______

ANEXO 2 – TESTE MULTIPLICATIVO

Escola:____

Nome:____

Data:_________ Idade: ______Série:__________Turma:________________

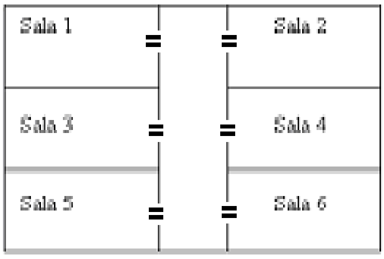
01) Marta tem 63 adesivos em sua coleção. Em cada página do álbum ela colou 9 adesivos. Quantas páginas do álbum ela já usou?

Resposta:____

02)Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Pedro, Sandra,Vítor, Nívea,Roberto,Laura e Mateus) dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 poderemos fazer?

Resposta:____

03) A escola "Mundo da Aprendizagem" conseguiu uma doação de 42 cadeiras. Ela tem 6 salas de aula e quer colocar a mesma quantidade de cadeiras em cada sala. Quantas cadeiras novas serão colocadas?



Resposta:____

04) Calcule o número de palavras que podem ser criadas (existentes ou inventadas) usando a palavra AMOR.

A

M

O

R

Resposta:____

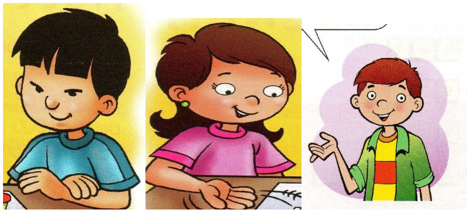
05) A loja “Tudo sofá” vende sofás de 3 tamanhos diferentes (grande, médio e pequeno) e em cores diferentes. Se na loja são vendidos 18 sofás diferentes quantas são as cores que podem ser escolhidas?

Resposta:____

06) Na padaria “Pão Quente” cada pão de forma é cortado em 8 fatias. Quantas fatias serão obtidas se 9 pães forem cortados?

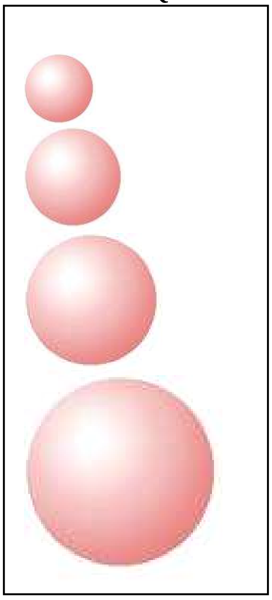
Resposta:____

07) Para representante de uma sala de aula se candidataram 3 pessoas (João, Mariana,Vítor). Quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?



Resposta:____

08) Na fabrica “Bola Tudo” há 4 tamanhos de bolas e estas são feitas em 7 desenhos diferentes. Quantos tipos e bolas são fabricadas?



Resposta:____

09) Para enfeitar a loja no Natal, Seu Marcos comprou 7 arvores pequenas de Natal e 56 bolas vermelhas. Ele quer enfeitar cada arvore com a mesma quantidade de bolas. Quantas bolas ele vai colocar em cada arvore?

Resposta:____

10. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

Resposta:____

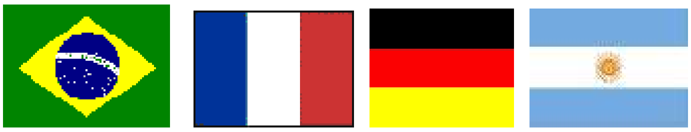
11) O supermercado "PreçoCerto" organiza os sabonetes em pacotes com 4 sabonetes cada. Na prateleira tem 9 pacotes. Quantos sabonetes estão à venda?

Resposta:____

12) Na sorveteria "Friofrio" você escolhe o sabor e a calda do seu sorvete. Há 4 tipos e caldas: chocolate, morango, caramelo e ameixa e ao todo tem-se 32 opções diferentes de sorvete. Quantos sabores diferentes são oferecidos?

Resposta:____

13.) As quartas de final da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil,França,Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?



Resposta:____

14.)No campeonato de vôlei de uma escola se inscreveram 48 crianças. Cada time é formado por 6 crianças. Quantos times irão disputar o campeonato?

Resposta:____

15). O restaurante “QDelicia” serve vários tipos de pratos prontos (Prato quente e sobremesa). Se há 6 opções de pratos quentes e 4 opções e sobremesa, quantos tipos de pratos prontos o restaurante serve?

“Prato Pronto: Prato quente e sobremesa”
Escolha sua opção!

Pratos quentes	Sobremesa
➢ Bife	➢ Bolo
➢ Filé	➢ Doce de goiaba
➢ Frango	➢ Salada de frutas
➢ Macarronada	➢ sorvete
➢ Peixe	
➢ Sopa	

Resposta:____

16) Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas iguais. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?





Resposta:____