



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA  
CURSO DE MESTRADO**

**Diógenes Maclayne Bezerra de Melo**

**A SIMETRIA DE REFLEXÃO: ELEMENTOS DE CONCEPÇÕES  
MOBILIZADAS POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

**Recife  
2010**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**Diógenes Macllyne Bezerra de Melo**

**A SIMETRIA DE REFLEXÃO: ELEMENTOS DE CONCEPÇÕES  
MOBILIZADAS POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientadora: Dra. Iranete Maria da Silva Lima

**Recife**

**2010**

**Diógenes Maclyne Bezerra de Melo**

**A SIMETRIA DE REFLEXÃO: ELEMENTOS DE CONCEPÇÕES  
MOBILIZADAS POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

**Comissão examinadora:**

---

**1º Examinador/ Presidente**

**Profa. Dra. (orientadora) Iranete Maria da Silva Lima –  
CAA/UFPE/PE**

---

**2º Examinador**

**Profa. Dra. Tânia Maria Mendonça Campos – UNIBAN/SP**

---

**3º Examinador**

**Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos – CAP/UFPE/PE**

**Recife, 29 de Março de 2010**

Dedico este trabalho a todos aqueles que me ensinaram a sonhar.

## **Agradecimentos**

Nossos sonhos nunca se realizam somente pelo esforço individual. Contamos sempre com pessoas que, ao nosso lado, fazem os entraves se tornarem menos difíceis, possibilitando aos nossos sonhos ganhar vida e se efetivar. Assim, para a concretização deste trabalho, agradeço:

Ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Pernambuco que me possibilitou crescer tanto profissionalmente com pessoalmente.

À orientadora, a professora Iranete Maria da Silva Lima, pelo rigor das exigências durante o processo de orientação e também pelos ensinamentos.

Aos amigos que conquistei no mestrado, pessoas que aprendi a admirar pelo lado humano, pela inteligência e sensibilidade: Kátia Cilene, Viviane Bona e Wagner Costa.

Ao professor Marcelo Câmara por ter aceitado o convite de estar nesta banca, pela pessoa amiga que demonstrou ser e, também, por ter me ensinado que o bom profissional não precisa ser melhor que o outro, mas melhor para o outro.

Aos professores da banca de qualificação Ana Paula Jahn e Frank Bellemain, pelas sugestões, pelos comentários e pelas críticas que tanto contribuíram para a elaboração e evolução desta dissertação. A Ana Paula Jahn agradeço também por ter dado continuidade, após a qualificação, com contribuições na elaboração do instrumento de coleta de dados.

À minha namorada Pollyana pelo amor, carinho e pela paciência, com também por ter sido uma das pessoas que mais incentivou a conclusão deste trabalho.

À professora Tânia Campos por aceitar o convite para fazer parte da minha banca e ter disponibilizado seu trabalho para nós, pernambucanos, ampliarmos nosso conhecimento sobre a Didática da Matemática.

Aos alunos, diretores e professores das escolas onde foi realizada a coleta desta pesquisa, pela valiosa colaboração sem a qual este trabalho não teria sido realizado.

Aos professores do programa que contribuíram para a minha aprendizagem. Em especial, a Sergio Abranches que me inquietou até hoje com as discussões em sua disciplina e a Fátima Cruz pelo incentivo e crença em meu potencial.

Às pessoas do grupo de pesquisa Fenômenos Didáticos, em especial a Anna Paula Brito, Lúcia e Mônica pelas contribuições e incentivo à minha carreira profissional. A Abraão pela aprendizagem proporcionada, durante todo esse tempo de convívio no grupo, por meio de sua mente brilhante.

Aos professores da linha de pesquisa Didática da Matemática: Paula Baltar, Rosinalda e Paulo Figueiredo por suas contribuições e respeito pelos trabalhos construídos.

Aos meus pais por me ensinarem o contraponto da vida.

Aos grandes amigos e professores Luciano Cavalcanti, Kátia de França por apresentarem novos caminhos à minha vida.

À coordenação, pela atenção, dedicação e pelo carinho que tiveram com a primeira turma de Mestrado em Educação Matemática e tecnológica (EDUMATEC).

A todos os colegas da primeira turma de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica, pela amizade, pelo companheirismo em muitos momentos do curso, em especial, a Gracivane pela luta desde a seleção para o mestrado e a Luciana (Felufak) pelas discussões sobre simetria.

Aos profissionais da secretaria do programa em especial, a Dona Marlene pela atenção disponibilizada aliada à alegria que sempre teve para nos atender.

A muitos da minha família por me oferecerem condições para chegar a este degrau, em especial, a Ermiro Lins e Silva (In memoriam), Nadir Lima, Nilza Melo e Edjane Arruda.

Enfim, a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta pesquisa.



## RESUMO

Esta pesquisa se inscreve na problemática da modelização de conhecimentos, em particular, ao estudo das concepções que os alunos do ensino fundamental mobilizam quando resolvem problemas de simetria de reflexão. Para realizar o estudo, utilizamos o Modelo cKç (BALACHEFF, 1995) que é ancorado na Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1998). As concepções dos alunos foram analisadas a partir das estruturas de controle. Inicialmente, estudamos a simetria de reflexão do ponto de vista do ensino, a saber, livros didáticos e documentos que orientam o ensino do objeto matemático estudado. A pesquisa está baseada, também, nos resultados de pesquisas sobre a temática abordada (GRENIER, 1988 e LIMA, 2006). Os resultados dos estudos realizados subsidiaram a escolha dos problemas propostos na experimentação e na análise a priori, bem como a construção dos instrumentos de coleta e análise dos dados. A experimentação foi implementada com 51 alunos do 9º ano de escolas das redes pública, municipal e estadual de ensino do agreste pernambucano. Os estudantes resolveram problemas de construção e de identificação de figuras simétricas em relação a um eixo de simetria. A pesquisa confirma resultados de estudos precedentes como, por exemplo, os alunos mobilizaram controles ligados a direção vertical e horizontal, independentemente da orientação do eixo de simetria. Controles ligados à conservação de forma e de tamanho das figuras também foram bastante mobilizados pelos alunos, isso dá indícios de que as respostas estão baseadas na visualização das figuras.

**Palavras-chave:** Modelo cKç; Concepção; Simetria de reflexão, Modelização.

## ABSTRACT

This research forms part of the problem of modeling knowledge, in particular, in the study of concepts that elementary school students mobilize when solving problems of reflection symmetry. To perform the study we use the cKç model (Balacheff, 1995) which is anchored in the Theory of Didactic Situations (BROUSSEAU, 1998). The students' conceptions were analyzed from the control structures. Initially, we studied the symmetry of reflection in terms of education, namely, books and documents that guide the teaching of mathematical object studied. The research is also based on the results of research on the topic addressed (GRENIER 1988, LIMA 2006). The results of the studies supported the choice of problems offered in the trial and in the analysis a priori, and the construction of instruments for collecting and data analysis. The trial was implemented with 51 (fifty) students of the 9th year of public schools, city and state, education of the countryside of Pernambuco. The students solved problems of construction and identification of the symmetrical images with respect to an axis of symmetry. The research confirms results of previous studies, for example, students are bound controls the vertical and horizontal direction, regardless of the orientation of the axis of symmetry. Control linked at conservation of shape and size of pictures were also quite mobilized, giving evidence that the responses are based on viewing the pictures.

**Key words:** cKç model, concepts, reflection symmetry, modeling.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Exemplos de construção da figura simétrica de um segmento por simetria de reflexão .....	20
Figura 2. Problema 1 .....	49
Figura 3. Problema 1_Direção.....	51
Figura 4. Problema 2 .....	52
Figura 5. Problema 2_Direção.....	53
Figura 6. Problema 3 .....	55
Figura 7. Problema 2_Direção.....	56
Figura 8. Problema 4 .....	58
Figura 9. Problema 4_Direção.....	60
Figura 10. Problema 5a.....	61
Figura 11. Problema 5a_Direção .....	63
Figura 12. Problema 5b .....	64
Figura 13. Problema 5b_Direção.....	65
Figura 14. Problema 1 .....	68
Figura 15. Problema 2 .....	73
Figura 16. Problema 3 .....	79
Figura 17. Problema 4 (Pb Trevo).....	84
Figura 18. Problema 5a (Pb Segmento vertical).....	88
Figura 19. Problema 5b (Pb Segmento Oblíquo).....	91

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1. Limitações apontadas pelo Guia do Livro Didático sobre a abordagem da simetria nos Livros Didáticos (BRASIL 2007, p. 32).....	27
Quadro 2. Variáveis didáticas e valores levados em conta na pesquisa .....	32
Quadro 3. Controles de Direção .....	44
Quadro 4. Controle de distância ao eixo de simetria .....	44
Quadro 5. Controles de Tamanho.....	45
Quadro 6. Controle de Forma.....	45
Quadro 7. Problema_barco - figura correta: justificativas dos alunos.....	74
Quadro 8. Problema barco: exemplos de construção e explicação dadas e controles identificados .....	76
Quadro 9. Problema espada: exemplos de construção e explicação dadas e controles identificados .....	81
Quadro 10. Pb_Trevo (resposta correta): justificativas dos alunos .....	85
Quadro 11. Pb_Trevo – Alternativa b: justificativas dos alunos .....	86
Quadro 12. Pb_Trevo – Item c: justificativas dos alunos .....	87
Quadro 13. Problema segmento vertical: exemplos de construção e explicação dadas e controles identificados.	89

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Problemas de reflexão, rotação e translação nos LD analisados.....	29
Tabela 2. Problemas de simetria de reflexão do 6° ao 9°ano .....	30
Tabela 3. Variável didática e valores: tipos de problema.....	34
Tabela 4. Variável didática e valores: especificidade da figura.....	35
Tabela 5. Variável didática: natureza da figura .....	36
Tabela 6. Variável didática: orientação do eixo de simetria na folha de papel.....	36
Tabela 7. Variável didática: orientação do(s) segmento(s) da figura na folha de papel .....	37
Tabela 8. Variável didática: intersecção da figura com o eixo de simetria.....	38
Tabela 9. Variável didática: tipo de papel .....	38
Tabela 10. Problema Triângulo_Tipo de resposta .....	69
Tabela 11. Problema barco_tipo de resposta .....	74
Tabela 12. Problema espada: tipo de resposta .....	80
Tabela 13. Problema Trevo: tipos de resposta.....	85
Tabela 14. Problema segmento vertical: tipos de resposta .....	88
Tabela 15. Problema Segmento Oblíquo: tipos de resposta .....	92

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	13
CAPÍTULO 1: CONTEXTUALIZAÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA .....	16
1.1. Justificativa.....	16
1.2. Alguns resultados de pesquisas sobre o ensino de simetria de reflexão .....	18
1.3. A Simetria de reflexão do ponto de vista do ensino .....	21
1.3.1. Orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN - sobre o ensino da simetria no Ensino Fundamental .....	23
1.3.2. Base Curricular Comum – BCC – Pernambuco .....	25
1.3.3. Programa Nacional dos Livros Didáticos – PNLD.....	26
1.3.4. Livros didáticos .....	27
CAPÍTULO 2: QUADRO TEÓRICO-METODOLÓGICO.....	40
Modelo cKç: a noção de concepção .....	40
CAPÍTULO 3: PROBLEMAS E ANÁLISE A PRIORI .....	43
3.1. Controles sobre a simetria de reflexão.....	43
3.2. Problemas da experimentação e análise a priori em termos de controles ( $\Sigma$ ) ...	48
CAPÍTULO 4: EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	66
4.1. Apresentação do dispositivo experimental .....	66
4.2. Análise das Produções dos Alunos .....	68
4.1.1. Problema 1 (Pb triângulo): .....	68
4.1.2. Problema 2 (Pb barco):.....	73
4.1.3. Problema 3 (Pb espada).....	79
4.1.4. Problema 4 (Pb_Trevo) .....	84
4.1.5. Problema 5a (Pb_Segmento vertical) .....	88
4.1.6. Problema 5b (Pb_Segmento Oblíquo).....	91
CAPÍTULO 5: DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS ....	95
5.1. Os documentos analisados .....	95
5.2. As produções dos alunos .....	98
5.3. Considerações finais .....	101
REFERÊNCIAS.....	102

## INTRODUÇÃO

Esta pesquisa se inscreve na problemática da *modelização* de conhecimentos do aluno, focalizando, em particular, o estudo de concepções sobre a simetria de reflexão de alunos do Ensino Fundamental.

Segundo Lima (2008), a *modelização* de conhecimentos consiste na criação de um modelo (pelo pesquisador ou por um observador do comportamento de um sujeito) que represente a maneira como esse sujeito, no caso o aluno, entende uma determinada noção estudada.

Para melhor situar essa problemática, buscamos diferenciar de forma sintética, o que entendemos por *modelo* e *modelização*.

Em seus estudos Lima (2006) afirma que,

Um modelo não é construído para resolver um problema que se impõe a uma comunidade, ele tem antes de tudo a função de fornecer os elementos que podem auxiliar de forma significativa na compreensão de um fenômeno. Um modelo pode ter vários objetivos. Ele pode ser usado, por exemplo, como meio de comunicação, de intercâmbio de pontos de vista. Ele pode também funcionar como uma ferramenta aqueles que o constroem ou aqueles que o utilizam a compreender um problema de uma maneira mais precisa. Ele pode ainda dar conta, de maneira simplificada, do funcionamento de um sistema complexo tornando-o mais compreensível. Quanto mais um problema é complexo, mais o modelo pode se tornar pertinente, porque ele permite um maior nível de visibilidade do fenômeno estudado, em termos de detalhes e de abstração, do que a situação real (LIMA, 2006, p.11-12).

Em relação à Matemática, especificamente, Barreto (1988) alega que se tem um modelo para um conjunto de fenômenos:

[...] quando se tem uma estrutura matemática cujos conceitos e relações entre conceitos podem ser interpretados como conceitos e relações entre conceitos presentes em tais fenômenos e, além disso, ocorre uma correspondência entre as propriedades válidas em cada um desses contextos (BARRETO 1988, apud BELLEMAIN & LIMA, 2002).

Balacheff & Margolinas (2005, p.104) afirmam que *Modelizar* “é dar uma forma que permite o raciocínio, o cálculo, para entender e decidir<sup>1</sup>.” A utilidade de *modelizar* um sistema complexo é construir a sua “inteligibilidade, sua compreensão” (Le Moigne 1990, apud Lima 2006).

Segundo Lima,

[...] o objetivo fundamental da modelização é permitir de uma parte, a estruturação dos objetos e de outra parte, a representação do conjunto das interpretações atribuídas a este objeto por um observador (LIMA, 2006, p.12).

Como anunciamos anteriormente, para realizar a modelização no quadro da nossa pesquisa escolhemos a simetria de reflexão. De fato, este estudo representa a continuidade da pesquisa realizada por Lima (ibid.) que foi desenvolvida no contexto do ensino francês. Neste, foi realizada uma modelização de concepções dos alunos com base na formalização fornecida pelo Modelo cK $\phi$  e nos resultados dos estudos de Hart (1981), Grenier & Laborde (1987), Grenier (1998), Tahri (1993), dentre outros, sobre a temática abordada. Os resultados do estudo a priori subsidiaram a análise de produções de alunos franceses de classe correspondente ao 8º ano do ensino fundamental no Brasil. Vale salientar que a modelização de concepções no quadro da pesquisa desenvolvida por Lima, teve como principal objetivo de estudo, a finalidade de fornecer os elementos necessários para o estudo das decisões didáticas de professores de matemática.

A presente pesquisa não tem a pretensão de estudar a problemática do professor, restringir-se-á, apenas, à problemática da modelização de concepções. Mesmo não se tratando, a princípio, de estudo comparativo, partimos da seguinte hipótese: o fato das pesquisas terem sido desenvolvidas em contextos escolares diferentes e apoiadas em orientações diferentes, elas poderiam fornecer resultados igualmente diferentes em termos de concepções. Essa hipótese é ainda mais pertinente, tendo em vista que o estudo das transformações geométricas, no ensino fundamental, incluindo a simetria de reflexão, é ainda bastante recente nas escolas brasileiras.

---

<sup>1</sup> *Modéliser, c'est donner une forme qui permet le raisonnement, le calcul, pour comprendre et décider. Balacheff & Margolinas (2005, p. 104).*



No Brasil, algumas pesquisas vêm sendo desenvolvidas sobre a simetria, principalmente, após a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997, 1998) em que se ressalta a importância do estudo desta noção no ensino fundamental. Dentre estas, podemos citar as pesquisas de Araújo & Gitirana (2000), Siqueira & Gitirana (2000) e Alves & Gitirana (2005) desenvolvidas na Universidade Federal de Pernambuco - UFPE; como também as de pesquisas tais como: Mega (2001), Vaz (2004), e Cerqueira (2005) realizadas na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP.

Mesmo reconhecendo a relevância e a contribuição desses estudos, com o desenvolvimento do estudo presente, buscaremos encontrar alguns elementos de resposta para questões ainda não estudadas no contexto brasileiro, como por exemplo, *que concepção ou elementos de concepção o aluno do ensino fundamental mobiliza quando resolve um problema de simetria de reflexão?*

Esta última questão envolve a simetria de reflexão, enquanto objeto matemático, como é importante para o contexto do ensino escolar. Sua relevância se justifica, por um lado, pela aplicabilidade da simetria, no cotidiano e em diversas áreas do conhecimento e, por outro, porque a “simetria é, sem dúvida, um dos princípios básicos para a formulação de modelos matemáticos e para os fenômenos naturais” (BRASIL, 2007, p. 45).

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos que trazem os enfoques descritos a seguir.

O primeiro capítulo traz a contextualização da pesquisa e a análise de documentos sobre a simetria de reflexão. Aqui é apresentada a justificativa das escolhas feitas no estudo e a relevância do tema. São apresentados, também, os resultados de algumas pesquisas realizadas sobre a simetria de reflexão no Brasil e no exterior, bem como uma reflexão sobre as abordagens frequentemente adotadas nas escolas brasileiras. Nesse contexto, realizamos um breve estudo nos documentos que orientam a prática do professor, incluindo os livros didáticos. Por fim, com base nos resultados deste estudo preliminar, delimitamos o objeto de estudo com vistas a evidenciar em que consiste o avanço deste trabalho, em relação aos resultados das pesquisas anteriores.

No segundo capítulo, é apresentado o quadro teórico-metodológico utilizado na pesquisa, com ênfase a dois elementos da concepção no quadro do Modelo cKç

(BALACHEFF,1995), a saber, o conjunto de problemas (P) e a estrutura de controle( $\Sigma$ ).

No terceiro capítulo, apresentamos a análise a priori dos problemas propostos aos alunos, tomando por base a modelização proposta por Lima (2006).

O quarto capítulo contempla a metodologia de coleta, a análise dos dados e a experimentação.

No último capítulo, apresentamos a conclusão apresentando os resultados de pesquisa obtidos e, nossas considerações finais.

## **CAPÍTULO 1: CONTEXTUALIZAÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA**

### **1.1. Justificativa**

Esta pesquisa se propõe a estudar as concepções de alunos do Ensino Fundamental sobre a simetria de reflexão.

A escolha dessa noção se justifica porque o estudo das transformações geométricas, em particular, da simetria de reflexão no Brasil ainda está em fase inicial. Para vários estudiosos do campo do ensino da Geometria o fato se deve, em certa medida, ao quase abandono que se deu ao ensino de conceitos geométricos, nas escolas, durante algumas décadas do século passado. Na década de noventa, os problemas do ensino da Geometria na Educação Básica foram estudados por vários pesquisadores em Educação Matemática como Perez (1991), Pavanello (1993), Lorenzato (1995) e Fainguelernt (1999). Os resultados desses estudos mostram que a maioria das escolas brasileiras, naquela época, ensinava as noções geométricas quase sempre de forma insatisfatória ou, na maioria das vezes, simplesmente não as ensinavam.

Alguns pesquisadores apontam, também, o advento da Matemática Moderna como um dos fatores que podem ter contribuído para o abandono do ensino da Geometria nas escolas brasileiras (MIGUEL e MIORIN, 1986). Isso porque sua ênfase estava centrada nas estruturas algébricas e na utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos.

Segundo Lima (2007), no fim da década de noventa, observou-se uma mudança considerável no quadro acima descrito. Para a autora, essa mudança evidencia-se devido ao crescente interesse de professores, editores de livros e pesquisadores em Educação Matemática pelo estudo da Geometria. Isso se comprova por meio das várias iniciativas que vêm sendo implementadas no sistema educacional brasileiro, como, por exemplo, a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997, 1998).

Outra iniciativa que tem contribuído para a retomada do ensino da Geometria nas escolas é o *Programa Nacional do Livro Didático – PNLD* (BRASIL, 2007, 2009), que tem como uma de suas principais metas orientar o professor na escolha do livro didático, por meio das resenhas que são elaboradas por especialistas de diversas áreas do conhecimento. No que se refere ao *Guia de Livro Didático em Matemática*, há um grande incentivo para o resgate do trabalho com a Geometria na sala de aula, apontando-se, em particular, a relevância do estudo da simetria para a construção do pensamento geométrico pelo aluno (BRASIL, 2007).

Em Pernambuco, onde desenvolvemos a experimentação desta pesquisa, o documento de orientação para o professor da rede pública estadual de ensino - Base Curricular Comum – BCC (PERNAMBUCO, 2008), também contribui nesse sentido, trazendo orientações relevantes para o ensino da Geometria.

Nesta perspectiva de avanço, destaca-se ainda o amadurecimento e o aprofundamento das pesquisas neste campo matemático por meio do desenvolvimento de diversas pesquisas, a exemplo de Miskulin (1999), Nacarato & Passos (2003), Andrade et al. (2004).

Apesar desses importantes avanços, as lacunas observadas, em relação ao ensino da Geometria ainda não foram preenchidas de forma satisfatória. Para Lima (2007), uma das dificuldades para a superação do problema reside no fato de que a aprendizagem da Geometria demanda do aluno uma maneira específica de planejar a resolução de um problema, que está estritamente ligada ao conhecimento que ele tem do objeto geométrico. Esse conhecimento, mesmo que implícito, rege a ação do aluno na resolução de um problema proposto. Diante disso, é preciso o professor conhecer os erros e as dificuldades dos alunos na aprendizagem de conceitos geométricos, bem como as concepções que eles mobilizam quando resolvem problemas que envolvem tais conceitos.

A pesquisa que ora apresentamos foi desenvolvida, portanto, na perspectiva de contribuir para a compreensão do fenômeno da aprendizagem do conceito de simetria de reflexão pelos alunos, focalizando, especificamente, o estudo de concepções que eles mobilizam na resolução de problemas.

## **1.2. Alguns resultados de pesquisas sobre o ensino de simetria de reflexão**

Vários trabalhos sobre as transformações geométricas foram desenvolvidos, também, por outros pesquisadores. Dentre estes estudos citamos: Grenier & Laborde (1987), Grenier (1988), Tahri (1993), Jahn (1998), Miyakawa (2005), Lima (2006) cujas pesquisas foram realizadas no contexto do ensino francês, Araújo & Gitirana (2000), Siqueira & Gitirana (2000), Alves & Gitirana (2005), Mega (2001), Vaz (2004), e Cerqueira (2005), desenvolveram seus estudos no Brasil.

Dentre os estudos realizados no Brasil, alguns versam sobre a simetria de reflexão axial. A pesquisa realizada por Siqueira & Gitirana (2000), cujo título foi *“Explorando a simetria de reflexão: uma seqüência didática no Cabri-Géomètre”* (CG), teve origem no projeto de pesquisa denominado *“O conceito de simetria de reflexão no ensino fundamental”*. Segundo os pesquisadores, esse trabalho visou *“a construção de uma engenharia didática para o ensino do conceito em epígrafe, destinada a alunos da 6ª série do Ensino Fundamental”* (ibid., p.3). Os resultados obtidos mostram que, no pré-teste, os alunos tiveram dificuldade para construir a imagem das figuras, principalmente, quando o eixo de simetria interceptava a figura dada, dificuldade que foi atenuada após o desenvolvimento da seqüência didática no CG. Isso pode indicar que, para esses alunos, a imagem de uma figura está de um lado ou do outro do eixo de simetria, não admitindo a invariância de pontos sobre esse eixo. A pesquisa mostra, também, que alguns alunos construíram a imagem da figura em relação ao eixo de simetria sem respeitar a distância da figura ao referido eixo. Além disso, constatou-se, em diversas situações, que os alunos confundiram a simetria de reflexão com a translação ou a rotação.

A pesquisa de Alves e Gitirana (2005) investigou os efeitos de uma seqüência didática sobre o conceito de *Reflexão Axial*, com alunos da 6ª série de uma escola pública, utilizando, também, um ambiente de geometria dinâmica, o Cabri-Géomètre (LABORDE & BELLEMAIN, 1994). Essa pesquisa confirma os resultados acima

apresentados, bem como a não observância da propriedade de equidistância e da perpendicularidade entre a reta suporte de um ponto e do seu simétrico, e o eixo de simetria.

As pesquisas desenvolvidas na Inglaterra (HART, 1981) e na França (GRENIER & LABORDE, 1987; GRENIER, 1988, TAHRI, 1993; LIMA 2006) mostram a estabilidade de certas concepções mobilizadas pelos alunos, como por exemplo, o caso do “paralelismo”. Lima descreve esta concepção da seguinte maneira:

Os alunos constroem a imagem de um segmento com relação a um eixo de simetria, paralelo ao segmento, independente da orientação do eixo na folha de papel. Uma explicação dada pelos pesquisadores para esse comportamento do aluno é o amplo domínio de validade desta concepção, ou seja, em muitas situações a sua mobilização conduz o aluno a dar a resposta correta, dependendo das variáveis do problema proposto (LIMA, 2008, p.2).

Investigando a problemática da construção da imagem de um segmento em relação a um eixo de simetria, Grenier & Laborde (1987) propuseram a seguinte tipologia de procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de problemas de construção da imagem de um segmento em relação a um eixo de simetria:

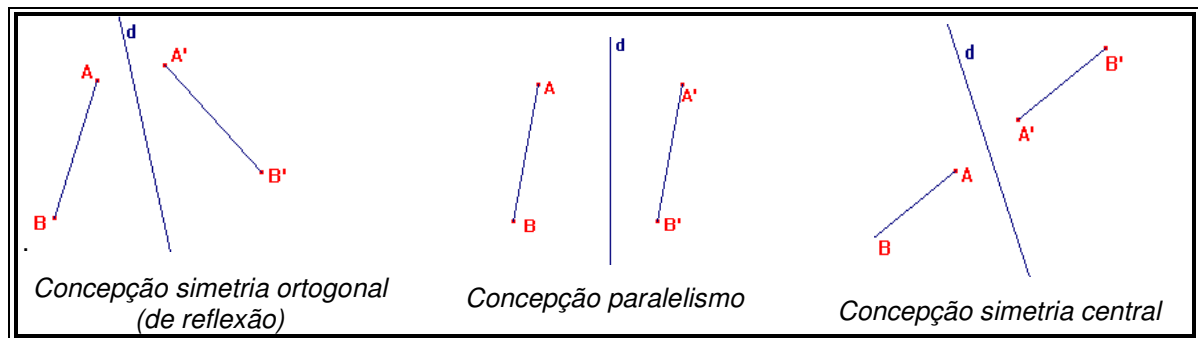
**Direção ortogonal:** a determinação de um ponto da figura imagem se faz em função de uma direção ortogonal ao eixo de simetria. **Direção por prolongamento:** esse procedimento dá por imagem de um ponto, um ponto situado no prolongamento de uma direção materializada pela figura objeto. **Direção horizontal** ou **Direção vertical:** dão por ponto-imagem um ponto situado sobre uma mesma reta horizontal ou uma mesma reta vertical que o ponto objeto (GRENIER & LABORDE 1987, p. 71-72) <sup>2</sup>.

Com base nessa tipologia, Tahri (1993) propôs uma classificação de concepções, dentre as quais citamos as seguintes:

**Concepção simetria ortogonal:** a imagem do segmento é obtida por simetria ortogonal em relação ao eixo. **Concepção paralelismo:** o segmento e sua imagem são paralelos e de mesmo comprimento. **Concepção simetria central:** o segmento imagem é obtido por simetria central. Seja no prolongamento do segmento objeto, seja paralelo e de sentido inverso (TAHRI, 1993, p. 68-69)

---

<sup>2</sup> Essas direções podem ser observadas, no capítulo 3, na seção da análise a priori.



**Figura 1. Exemplos de construção da figura simétrica de um segmento por simetria de reflexão**

Em sua pesquisa, Lima (2006) também se interessou pela problemática segmento/eixo. No entanto, ampliou esse estudo na perspectiva da construção da imagem de figuras que denominou de *complexas*. A autora descreve essas figuras como sendo figuras formadas por segmentos, polígonos, arcos de círculos etc.

Assim, além das variáveis didáticas consideradas nos estudos anteriores inerentes à problemática investigada<sup>3</sup>, a mesma autora delimitou outras variáveis partindo da hipótese de que a construção da imagem de figuras complexas poderia influenciar a concepção dos alunos. Dentre essas variáveis, citamos a *especificidade da figura dada* (possui ou não eixo de simetria, seu eixo de simetria é paralelo ou não ao eixo de transformação...) ou a *natureza da figura* (figura geométrica ou não, familiar ou não...). Os resultados da experimentação, realizada com alunos de série equivalente ao oitavo ano do Ensino Fundamental, confirmaram a hipótese apresentada pela autora.

Os resultados dos estudos de Lima (2006) estão em consonância com os resultados de pesquisa dos estudos anteriores, ainda que em contextos de ensino, onde as experimentações foram realizadas foram distintos, sobretudo, na abordagem do conceito em foco. A recorrência dos erros e dificuldades dos alunos parecem indicar a persistência de algumas concepções errôneas que por sua vez, podem estar relacionadas diretamente às variáveis do problema proposto.

<sup>3</sup> Nos seus estudos, Grenier (1988) e Tahri (1993) consideraram as seguintes variáveis didáticas: orientação do eixo de simetria e do segmento inicial; ângulo formado entre o eixo de simetria e o segmento inicial; interseção entre o eixo e o segmento inicial.

O presente estudo se apóia fortemente nos resultados dessas pesquisas, tendo como objetivo principal identificar as concepções ou os elementos de concepções mobilizados pelos alunos, quando resolvem problemas de simetria de reflexão, independentemente, de suas respostas serem corretas ou errôneas do ponto de vista da matemática. Para tanto utilizamos a formalização de controles ( $\Sigma$ ) modelizados por Lima (Ibid.), à luz da formalização contida no Modelo cK $\phi$ .

Desta forma, neste estudo buscamos responder a seguinte questão: *Que elementos de concepção os alunos do Ensino Fundamental mobilizam quando resolvem problemas da noção de simetria de reflexão?* Para tanto, realizamos um estudo deste objeto matemático do ponto de vista do ensino.

### 1.3. A Simetria de reflexão do ponto de vista do ensino

O termo *simetria* é frequentemente citado na vida corrente, seja na reflexão das imagens sobre o espelho ou água, seja na contemplação de objetos da natureza, seja na arquitetura ou em diferentes campos da matemática como a álgebra, a análise e a geometria, por exemplo.

Antes de abordarmos a simetria de reflexão do ponto de vista do ensino, apresentaremos algumas definições matemáticas, a fim de situar, mais precisamente o conceito de simetria de reflexão empregado nesta pesquisa.

A simetria de reflexão é uma das três isometrias indicadas para ser estudada na Educação Básica. Nesse contexto, vale destacar o que entendemos por isometria e, para tanto, tomamos aqui, como referência, a seguinte definição:

**Isometria** é uma transformação (ou uma permutação) do plano<sup>4</sup> (i. é uma bijeção do plano no plano). Entendemos que toda isometria é uma composição de, no máximo, três reflexões, que produzem apenas 4 tipos de transformações geométricas: reflexões em relação a uma reta; translações; rotações em torno de um ponto; reflexões com deslizamento em relação a uma reta (SIQUEIRA & GITIRANA, 2000, p. 2):

---

<sup>4</sup> Esses autores definem o plano da seguinte maneira: “plano  $\Pi$  é entendido como um espaço onde se adota uma distância (a distância euclidiana). Uma isometria no plano é uma função,  $\delta : \Pi \rightarrow \Pi$ , que preserva distância entre pontos do plano.”

As reflexões, em relação a uma reta, interesse central desta pesquisa é pelos autores acima citados da seguinte maneira:

Dada uma reta  $r$ , diz-se que  $\delta : \Pi \rightarrow \Pi$  é uma reflexão com relação à reta  $r$  (referida como o **eixo de simetria**) se esta é a mediatriz do segmento de extremidades  $P$  e  $\delta(P)$ , onde  $P$  representa um ponto qualquer do plano (Ibid.).

Como dito anteriormente, dentre as transformações geométricas estudadas na escola, nosso interesse, em particular, é pelas reflexões em relação a uma reta.

Mesmo considerando as iniciativas para o resgate do ensino da Geometria nas escolas, percebemos que vários conceitos geométricos ainda merecem uma atenção especial ou um estudo mais aprofundado, como é o caso da simetria. A preocupação com o ensino dessa noção levou Ripplinger (2006, p.24) a levantar questões como: “*O que está se fazendo com o ensino especificamente da Simetria? O que sua aprendizagem possibilita? O que de Simetria vem sendo ensinado em nossas escolas?*” (RIPPLINGER, 2006, p.24).

Buscando alguns elementos de resposta para algumas dessas questões, realizamos uma breve análise nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL 1997, 1998), a fim de identificar as orientações contidas nesse documento sobre a abordagem da simetria no Ensino Fundamental. Além dos PCN, estudamos o *Guia do Livro Didático* publicado pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD (BRASIL, 2008) cujo objetivo é orientar o professor na escolha do livro didático, como também consultamos a Base Curricular Comum – BCC documento de orientação para os professores de toda rede de ensino em Pernambuco. A análise desses documentos contemplou do 2º ao 9º ano do Ensino Fundamental (1ª a 8ª séries). Por fim, realizamos uma análise dos livros didáticos adotados em escolas públicas pernambucanas, especificamente, na região agreste, uma vez que esta pesquisa se realizou nessa região.

Esse estudo pormenorizado subsidiou a escolha do ano (série) no qual a experimentação foi implementada, além das escolhas dos problemas a serem propostos aos alunos.



### **1.3.1. Orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN - sobre o ensino da simetria no Ensino Fundamental**

As orientações encontradas neste documento para o ensino da Matemática do segundo ao quinto ano (1<sup>a</sup> à 4<sup>a</sup> séries) sinalizam para a importância do ensino da Geometria, afirmando que:

Uma das possibilidades mais fascinantes do ensino da geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. Isso pode ocorrer por meio de atividades em que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos, casa de abelha, teia de aranha, ou formas em obra de arte, esculturas, arquitetura, ou, ainda, em desenhos feitos em tecidos, vasos, papéis decorativos, mosaicos, pisos e etc. (BRASIL, 1997, p.128).

Considerando que a simetria de reflexão é uma das noções matemáticas indicadas para ser trabalhada no Ensino Fundamental, constam, nesses documentos, algumas orientações sobre o ensino da mesma.

No primeiro ciclo (segundo e terceiro anos), orienta-se uma abordagem, por meio de observações, de formas geométricas presentes em elementos naturais, em objetos criados pelo homem, considerando-se as suas características: arredondadas, ou não simétricas ou não, etc., (Ibid. p. 73). Nessa fase da escolaridade, a simetria ainda não é um objeto de estudo em si mesmo, mas deve ser enfocada como uma propriedade da figura (algo presente, ou não, na figura/configuração), que dá suporte ao entendimento de formas geométricas.

No segundo ciclo (quarto e quinto anos), as orientações para este ensino são apresentadas, também, nessa mesma perspectiva (p.56). No entanto, a simetria deve ser abordada no sentido de auxiliar o aluno, por exemplo, na identificação de semelhanças e diferenças de polígonos. Nesse caso, a simetria pode ajudar os alunos na comparação de figuras que têm, ou não, a mesma forma. Para tanto, o eixo de simetria deve ser um dos critérios utilizados. Nesse sentido, o estudo em sala de aula deve evoluir de modo que leve os alunos a desenvolverem a “sensibilidade para observar simetrias e outras características das formas geométricas, na natureza, nas artes, nas edificações” (p. 62). Recomenda-se, assim, a proposição de diferentes atividades como “compor e decompor figuras, perceber a simetria como característica de algumas figuras e não de outras etc.” (p. 82).

Para o terceiro ciclo (sexto e sétimo anos), encontramos a seguinte recomendação:

Neste ciclo, os alunos reorganizam e ampliam os conhecimentos sobre Espaço e Forma abordados no ciclo anterior, trabalhando com problemas mais complexos de localização no espaço e com as formas nele presentes. Assim, é importante enfatizar as noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo, as classificações das figuras geométricas (quanto à planicidade, quanto à dimensionalidade), as relações entre figuras espaciais e suas representações planas, a exploração das figuras geométricas planas, pela sua decomposição e composição, transformação (reflexão, translação e rotação), ampliação e redução. (BRASIL, 1998, p. 68).

Como lemos no extrato acima, o estudo das simetrias de reflexão, translação e rotação deve ser ampliado e aprofundado, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as figuras planas por meio de relações mais complexas. Em outros termos, o estudo da simetria deve passar do nível de visualização de figuras e da percepção, recomendados nos ciclos anteriores, para um nível de maior complexidade, no qual as figuras são reconhecidas pelos alunos por suas propriedades e pelas relações entre os seus atributos (perímetro, área, quantidade de lados).

Para tanto, o estudo deve ser feito a partir de observações, manuseios e construções de figuras. Com isso, o trabalho inicial pode ser realizado com o auxílio de dobraduras, papel de decalque e espelhos, por exemplo. Posteriormente, por meio da utilização dos instrumentos de desenho (régua graduada ou não, esquadros, compasso...) com o intuito de favorecer o desenvolvimento do pensamento matemático no aluno, da habilidade de fazer conjecturas e tomar decisões. As orientações deste documento sugerem ainda que:

Construindo figuras a partir da reflexão, por translação, por rotação de outra figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada são as mesmas. As atividades de transformações são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias) (BRASIL, 1998, p. 86).

Para o quarto ciclo (oitavos e nonos anos), assim como no ciclo anterior, os PCN propõem que o conceito de congruência de figuras planas seja abordado “a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composição destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície)” (ibid. p.89). Dessa forma, ressalta-se a importância de se privilegiar atividades que envolva as transformações de uma figura no plano, tendo em vista que “permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter dinâmico para este estudo” (ibid. 124).

Esta breve análise evidencia a relevância do estudo das transformações geométricas acima apresentadas no Ensino Fundamental, desde a sua utilização, como meio para estudar outros conceitos geométricos, até o seu estudo, enquanto objeto matemático. Além disso, essa análise esclarece como o estudo da simetria de reflexão, em particular, deve evoluir ao longo do ensino fundamental.

### **1.3.2. Base Curricular Comum – BCC – Pernambuco**

Tendo em vista que o estudo experimental foi realizado no estado de Pernambuco e contemplou as escolas da rede pública de ensino, estudamos o documento oficial que orienta a atividade do professor dessa rede de ensino. Trata-se da *Base Curricular Comum (BCC) para as Redes Públicas de Pernambuco* (PERNAMBUCO, 2008), que analisa as áreas de Matemática e de Língua Portuguesa para o ensino fundamental e médio.

Em relação ao ensino da Matemática, os conteúdos estão apresentados em três níveis: *anos iniciais do Ensino Fundamental; anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio*. De acordo com o documento, a expressão “conteúdos matemáticos” refere-se a situações, aos conceitos, as representações e aos procedimentos matemáticos (p. 77).

Em todo o documento, a única referência ao ensino da reflexão, translação e rotação é a seguinte:

As atividades explorando as de figuras transformações geométricas de figuras planas (reflexão, translação e rotação) são importantes

para desenvolver, no aluno, habilidades de percepção espacial, favorecendo também a construção da noção de congruência de figuras planas. (BRASIL, 2008, p. 102).

Vale ressaltar que essa recomendação é apresentada apenas para os alunos dos anos finais do ensino fundamental.

### **1.3.3. Programa Nacional dos Livros Didáticos – PNLD**

Como anunciamos anteriormente esta análise foi realizada a partir do *Guia do Livro Didático 2007 e 2008* (BRASIL 2006, 2007). Na seção dedicada à abordagem dos campos de conteúdos, nas coleções aprovadas dos Guias de Livros Didáticos (BRASIL 2006, 2007), ou seja, em coleções do 2º ao 5º ano e coleções do 6º ao 9º ano, ressalta-se a relevância do estudo da simetria no ensino fundamental, em função da importância dessa noção matemática, no domínio científico e em diversas atividades humanas. Nessa direção destaca-se o seguinte:

De modo amplo, simetria esteve sempre associada às idéias de harmonia, equilíbrio, repetição, uniformidade ou igualdade entre partes constituintes de um objeto ou de sua representação. [...] Do ponto de vista matemático, mas não formal, o conceito de simetria envolve três noções básicas: um conjunto de elementos; uma transformação “interna” desse conjunto em si mesmo; a existência de um subconjunto desse conjunto maior que fica invariante quando submetido a tal transformação (BRASIL, 2006, p.31).

Há uma constatação de que a maioria dos livros didáticos destinados aos anos finais do ensino fundamental aborda a simetria. No entanto, as resenhas contidas nos *Guias* acima citados mostram que, nem sempre, o conceito de simetria é abordado da forma mais adequada. A tentativa de introduzir o estudo dessa noção no Ensino Fundamental de uma forma contextualizada dá origem a alguns equívocos.

Apesar da proposição de muitas atividades adequadas para o início da construção do conceito de simetria, pelo aluno, o documento aponta algumas limitações que apresentamos a seguir, de forma pontual.

**Quadro 1. Limitações apontadas pelo Guia do Livro Didático sobre a abordagem da simetria nos Livros Didáticos (BRASIL 2007, p. 32)**

1. São consideradas, de forma indiscriminada, as noções de “figura simétrica” e de “simétrico de parte de uma figura”;
2. Identificam-se figuras simétricas pela visualização de representações (fotos, desenhos etc.) de objetos tridimensionais. Falando-se, nesses casos, de “eixo de simetria”, sem que fique claro que tal eixo pode existir numa representação plana do objeto, mas que, no espaço tridimensional, haveria não um eixo, mas um plano de simetria;
3. Representação plana considerada com perspectiva do objeto espacial, na qual o possível plano de simetria corresponde a uma reta que não é, sequer, um eixo de simetria do desenho do objeto;
4. O estudo da simetria isolado dos demais conteúdos matemáticos de outros campos do conhecimento;

A identificação dessas limitações e orientações apontadas pelo Guia é relevante para a pesquisa, à medida que podem influenciar, indiretamente, porém de forma consequente, as concepções dos alunos sobre a simetria. Não se deve perder de vista o papel de destaque que o Livro Didático ocupa no cenário do ensino escolar.

A próxima seção é, portanto, dedicada à apresentação do estudo de algumas dessas obras.

#### **1.3.4. Livros didáticos**

Os resultados de pesquisas mostram que o Livro Didático (LD) é um dos recursos mais utilizados pelo professor no planejamento de suas aulas, na escolha das atividades, para subsidiar a elaboração dos instrumentos de avaliação da aprendizagem e, sobretudo, na sala de aula. Segundo Silva Júnior:

O Livro Didático tornou-se indispensável em sala de aula, estabelecendo o roteiro de trabalhos para o ano letivo, dosando as atividades cotidianas de cada professor em sala de aula e ocupando os alunos em classe e em casa. Assim, para alguns professores, o uso do LD possui influência direta em seu planejamento didático (textos, exemplos e atividades) e conteudista (sequência de

conteúdos), que passa a ser feito exclusivamente tendo como referência sugestões que estes livros trazem em seu apoio, processo pelo qual as aulas são organizadas e programadas, podendo chegar a ser a própria aula. (SILVA JUNIOR, 2005, p. 1).

Nessa mesma perspectiva, Pais alega que:

O livro didático é um dos recursos quase sempre presente no ensino da matemática, onde funciona como uma forte referência para a validação do saber escolar. Quer seja por parte de alunos ou de professores, se constitui em uma importante fonte de informações para a elaboração de um tipo específico de conhecimento, onde generalidade e abstração assumem um estatuto diferenciado em relação às outras disciplinas escolares (PAIS, 2003, p.1).

O LD se constitui, assim, em um instrumento de grande valia para o professor. Pelo lugar de destaque que esse recurso didático ocupa no processo de ensino e aprendizagem, pode-se considerar que as abordagens adotadas nessas obras podem estar atreladas a muitas das dificuldades de aprendizagem dos alunos, e na origem de algumas concepções por eles mobilizadas. Segundo Lima,

No que diz respeito às concepções dos alunos em relação à simetria de reflexão, consideramos que a identificação dos saberes abordados nos manuais<sup>5</sup> pode nos servir, para a caracterização dos controles das concepções susceptíveis de ser mobilizada pelos alunos na resolução de problemas (LIMA, 2006, p.55).

É nessa perspectiva de Lima que realizamos esta análise. Além disso, visto que a pesquisa visa também subsidiar à escolha dos problemas para a experimentação, realizamos um estudo dos problemas encontrados nas coleções analisadas, em termos de variáveis didáticas e de valores que podem ser a elas atribuídos.

Para a efetivação desta análise, em um primeiro momento, visitamos 22 (vinte e duas) escolas das redes estadual e municipal de ensino, além de escolas particulares da região agreste de Pernambuco, onde foi realizado o estudo

---

<sup>5</sup> O termo "Manuais" é aqui empregado com sinônimo de Livro Didático.

experimental, com a finalidade de identificar as coleções adotadas. As 7 (sete) coleções adotadas nessas escolas são as seguintes:

- *Tudo é Matemática* (Editora Ática);
- *Novo Praticando Matemática* (Editora do Brasil);
- *Fazendo a Diferença – Matemática* (Editora FTD);
- *Projeto Araribá – Matemática* (Editora Moderna);
- *Matemática e Realidade* (Editora Saraiva);
- *Matemática* (Editora Moderna);
- *A Conquista da Matemática* (Editora FTD).

As coleções acima apresentadas correspondem aos anos finais do Ensino Fundamental. Dentre elas, apenas cinco constam no *Guia de Livro Didático – PNLD 2008* (BRASIL, 2007). No entanto, não consideramos essa variável em nosso estudo.

Das sete coleções analisadas, apenas quatro abordam as isometrias (reflexão, translação e rotação), por vezes, limitando-se, apenas, a reflexão. Considerando que cada coleção é composta de 4 (quatro) livros, somente um quarto do total de vinte e oito, trazem a simetria de reflexão.

Encontramos nesses livros 68 (sessenta e oito) problemas de reflexão, translação e rotação. Desses, 51 (cinquenta e um) são de simetria de reflexão, objeto matemático estudado nesta pesquisa. Os demais estão distribuídos como indicado a Tabela 1:

Problemas		Quantidade	% <sup>6</sup>
Reflexão	Axial	51	75
	no espaço tridimensional	02	03
Rotação		03	04
Translação		09	14
Mistos <sup>7</sup>		03	04

**Tabela 1. Problemas de reflexão, rotação e translação nos LD analisados**

<sup>6</sup> Os valores percentuais estão arredondados.

<sup>7</sup> Chamamos de problemas mistos os problemas que envolvem mais de um tipo de simetria.

Observa-se, na Tabela 1, que a reflexão axial é a mais contemplada nos livros didáticos. Já a reflexão no espaço tridimensional é apresentada, nos livros, por meio de problemas de reconhecimento. Em um deles, o problema apresenta várias figuras tridimensionais, e pede-se para que o aluno identifique qual delas dá a ideia de simetria. Em outro problema, o enunciado apresenta uma figura afirma que além de ser uma esfera, apresenta simetria espacial e solicita ao aluno identificação da quantidade de planos de simetria existente na figura.

### ***1) A abordagem da simetria de reflexão***

Nessa pesquisa levamos em conta apenas os problemas de reflexão axial e focalizamos, na análise, os 51 (cinquenta e um) problemas identificados. Na Tabela 2 apresentamos como esses problemas estão distribuídos do 6° ao 9°ano.

<b>Ano</b>	<b>Qtd de problemas</b>	<b>%</b>
6º	15	29
7º	31	61
8º	05	10
9º	00	00

**Tabela 2. Problemas de simetria de reflexão do 6° ao 9°ano**

Em termos de problemas propostos, nessas coleções, a simetria de reflexão é tratada com mais ênfase nos 6° e 7° anos do Ensino Fundamental. Vale ressaltar que somente um dos livros do nono ano aborda a simetria de reflexão, porém, de forma sintética, sem propor problemas para o aluno. Observa-se, com isso, que o estudo da simetria de reflexão, nos livros analisados, não segue as orientações contidas nos PCN, pois a simetria no quarto ciclo deveria ser abordada de maneira mais aprofundada.

A seguir apresentamos um breve estudo desses problemas, em termos de variáveis didáticas e dos valores que podem ser a elas atribuídos.



## II) Descrição dos problemas em termos de variáveis didáticas

Antes de descrever os problemas encontrados nos livros analisados em termos de variáveis didáticas, faz-se necessário explicitar o que entendemos por variável didática no quadro desse trabalho.

### ***A noção de variável didática***

Os conteúdos matemáticos, como os de outras áreas do conhecimento, podem ser modelados de várias maneiras, dentre elas por meio de problemas que possuem características intrínsecas e são constituídos de elementos passíveis de manipulação pelo professor. Essas características do problema são as variáveis didáticas, e os elementos que as constituem são os seus valores.

A noção de variável didática é utilizada no seio da Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1998). Grenier (1988), afirma que as variáveis constituem características do problema as quais têm influência sobre as regras de resolução utilizadas pelo aluno, provocando mudanças no *status* das respostas. Quanto mais sofisticada for a escolha desses valores, maior pode ser a mobilização de conhecimentos, referentes a um mesmo conteúdo.

Santos e Bellemain, destaca a importância das variáveis didáticas na categorização de problemas matemáticos.

“... a variável didática é uma ferramenta importante na categorização dos problemas matemáticos a serem propostos aos alunos, na elaboração de problemas adaptados para desestabilizar regras de ação errôneas, na escolha de problemas que contribuam significativamente para a aprendizagem e na análise dos procedimentos de resolução mobilizados pelos alunos, inclusive nos erros cometidos” (SANTOS e BELLEMAIN, 2007, p.3).

Em um estudo diagnóstico, é importante conhecer as variáveis didáticas e escolher valores para essas variáveis. A escolha do valor de determinadas variáveis pelo pesquisador ou professor pode ajudá-lo a diferenciar quando há, ou não, mobilização de uma determinada concepção acerca de um conteúdo específico.

A partir deste ponto, descrevemos os problemas propostos pelos livros didáticos, analisados em termos de variáveis didáticas e valores que são

considerados neste estudo. As variáveis e valores levados em conta nesta pesquisa são propostos por Grenier (1988) e Tahri (1993) no estudo da problemática segmento/eixo, e, posteriormente, retomados e ampliados por Lima (2006, p. 71). Esses elementos são expressos no Quadro 2.

**Quadro 2. Variáveis didáticas e valores levados em conta na pesquisa**

<b>Variáveis didáticas</b>	<b>Valores</b>
Tipo de problema	<i>Reconhecimento de figura simétrica</i> <i>Reconhecimento de eixo de simetria</i> <i>Construção de figura simétrica</i> <i>Construção de eixo de simetria</i> <i>Outros</i>
Especificidade da figura	<i>Possui eixo de simetria ou não</i> <i>Codificada ou não</i>
Natureza da figura F	<i>Geométrica usual (triângulo, quadrado, etc.) ou não</i> <i>Representa um objeto real ou não</i> <i>Simples (segmento) ou Complexa (composta de segmentos, círculos, arcos de círculos, etc.)</i>
Orientação do eixo de simetria na folha de papel	<i>Horizontal, vertical e oblíquo</i>
Orientação dos segmentos da figura F na folha de papel	<i>Horizontal, vertical e oblíquo</i>
Intersecção da figura F com o eixo de simetria	<i>Vazia</i> <i>A figura toca o eixo</i> <i>Corta o eixo</i>
Tipo de papel	<i>Liso (branco ou colorido)</i> <i>Quadriculado</i> <i>Pontilhado</i> <i>Outros</i>

**a) Tipos de problemas<sup>8</sup>**

- 1) *Reconhecimento de figura simétrica*: são dadas a figura F, a transformação (representada por uma reta) e várias figuras candidatas à imagem. Pede-se ao aluno que escolha dentre elas a imagem de F.
  
- 2) *Reconhecimento de eixo de simetria*: admite três tipos de problemas:
  - I. É dada uma figura e uma reta e pede-se ao aluno para identificar se esta reta é ou não seu eixo de simetria;
  - II. São dadas duas figuras e uma reta e pede-se para o aluno identificar se a reta dada transforma uma figura na outra, por uma simetria de reflexão;
  - III. É dada uma figura e pede-se para o aluno responder se ela possui eixos de simetria ou não.
  
- 3) *Reconhecimento de propriedades de simetria de reflexão*: são dadas uma figura F, sua imagem F' e a transformação T representada por uma reta. O aluno deve identificar as propriedades da simetria de reflexão a partir da observação dessas figuras.
  
- 4) *Construção de figuras simétricas*: são dadas a figura F e a transformação T representada por uma reta e pede-se ao aluno para construir a imagem F'.
  
- 5) *Construção de eixo de simetria*: são dadas duas figuras e pede-se ao aluno para traçar o eixo de simetria que transforma uma figura na outra.

Além dos acima descritos, os problemas podem ser identificados como, por exemplo, problemas de prova, de demonstração. Tendo em vista que eles são, raramente encontrados nas obras destinadas ao ensino fundamental, atribuímos o valor “outros” a variável “tipo de problema”, para identificá-los.

Levando-se em consideração essas definições, segue na Tabela 3 a classificação dos problemas encontrados nos LD:

---

<sup>8</sup> As definições desses tipos de problemas foram baseadas no trabalho de LIMA (2006, pp. 59-68).

Tipo de problema		Ano	Qtd	Total
Construção	de eixo de simetria	6º	02	22
		7º	02	
	de figura simétrica	6º	03	
		7º	10	
		8º	05	
Reconhecimento	de eixo de simetria (I)	6º	02	29
	de eixo de simetria (II)	6º	01	
		7º	01	
	de eixo de simetria (III)	7º	03	
	de figura simétrica	6º	07	
		7º	08	
de propriedades da simetria de reflexão	7º	07		

**Tabela 3. Variável didática e valores: tipos de problema**

Como podemos observar na Tabela 3, os problemas de reconhecimento são os mais frequentes nas obras analisadas, com ênfase no reconhecimento da figura simétrica em relação a um eixo de simetria.

Nos problemas de construção de figuras simétricas, o tipo mais frequente de construção é proposto, em sua maioria, nos livros de 6º ao 8º ano. Nesta presente análise, é importante mencionar que nenhum dos livros sugeriu o uso do material de desenho na construção dos problemas.

### ***b) Especificidade da figura com relação ao eixo de simetria***

Como mostra o *Quadro 2*, os valores que atribuímos a variável *Especificidade da figura em relação ao eixo de simetria* são os seguintes: *a figura possui eixo de simetria, ou não; é codificada, ou não*. Dizemos que uma figura é codificada quando alguns dos pontos que a compõem estão nomeados na figura, quando há marcas de ângulos e de comprimento de segmentos e, sobretudo, quando há marcas da transformação. Sobre isso Sangaré (2004, p.10) afirma: “as marcas constituem uma representação visual da ligação funcional da transformação em jogo. Elas podem ser traçadas de forma efetiva, mas também de forma equivocada ao longo de uma resolução do problema”.

A seguir apresentamos o resultado da análise das obras em função dessa variável didática:

Variável Didática	Valor	%
Especificidade da figura	<i>Possui eixo de simetria</i>	30
	<i>Não possui eixo de simetria</i>	70
	<i>Codificada</i>	04
	<i>Não codificada</i>	96

**Tabela 4. Variável didática e valores: especificidade da figura**

A maioria das figuras fornecidas nas coleções analisadas não possui, elas mesmas, eixo de simetria. daquelas que possuem eixo de simetria, 30% estão no 6º ano, 50% no 7º ano e 20% no 8º ano. No mais, os autores optam por não codificar a figura, mesmo quando se trata dos exemplos dados ou de problemas de construção. Esse resultado dá indícios de que as propriedades da simetria, como, por exemplo, de igualdade de distâncias e de perpendicularidade da reta suporte de pontos simétricos com o eixo de simetria, não são a tônica do estudo. Esse tipo de abordagem pode influenciar a concepção do aluno, levando-o a apreender o conceito de simetria baseado apenas na visualização da figura, em detrimento das propriedades matemáticas que a caracterizam.

### **c) Natureza da figura F**

Atribuímos três valores a esta variável: *Geométrica usual* (triângulo, quadrado, etc.), *ou não; representa um objeto real, ou não; Simples* (segmento) *ou Complexa* (composta de segmentos, círculos, arcos de círculos, etc.).

Chamamos de figuras “geométrica usual” as figuras indicadas pelos PCN para serem estudadas nos primeiros anos de escolaridade, como, por exemplo, triângulo, quadrado e retângulo. A figura geométrica não usual são figuras mais complexas do ponto de vista dos objetos matemáticos que a compõem.

Um barco, uma flor são exemplos de figuras que representam um objeto real.

Por sua vez, dizemos que uma figura é simples quando representa um ponto, um ou dois segmentos de reta, por exemplo. A figura complexa, ao contrário da

simples, pode ser formada por vários segmentos, arcos de círculos e círculos. A construção da sua imagem pode se constituir em uma atividade mais complexa para o aluno.

Dentre os 51 problemas propostos, 11 trazem figuras geométricas usuais e 18 trazem figuras representativas de objetos reais. Além disso, em 15 problemas, as figuras dadas podem ser classificadas com simples. A *Tabela 5* apresenta todos os valores da variável em pauta, em termos percentuais.

Variável didática	Valor da variável	%
Natureza da figura	<i>Geométrica usual (triângulo, quadrado, etc.)</i>	20
	<i>Geométrica não usual</i>	80
	<i>Representa um objeto real</i>	33
	<i>Não representa um objeto real</i>	67
	<i>Simples</i>	27
	<i>Complexa</i>	73

**Tabela 5. Variável didática: natureza da figura**

#### d) Orientação do eixo de simetria na folha de papel

Segundo a categorização que atribuímos no Quadro 2, essa variável admite os seguintes valores: *horizontal, vertical ou oblíquo*.

Em termos de orientação do eixo de simetria, os problemas estão distribuídos nas obras analisadas da seguinte maneira:

Variável didática	Valor da variável	%
Orientação do eixo do problema na folha de papel	Horizontal	39
	Vertical	40
	Oblíquo	21

**Tabela 6. Variável didática: orientação do eixo de simetria na folha de papel**

Como se pode constatar na tabela acima, a maioria das figuras dos problemas propostos aos alunos traz figuras em que o eixo de simetria dado está na posição horizontal ou vertical. Os resultados de pesquisas mostram que a

mobilização da “concepção paralelismo”, à qual nos referimos anteriormente, é muito frequente nos casos em que a orientação do eixo é vertical ou horizontal na folha de papel. De fato, quando um segmento dado é paralelo ao eixo de transformação, a mobilização dessa concepção leva o aluno a dar uma resposta correta, o que não é válido nos demais casos. A proposição de problemas, nos quais o eixo de simetria é oblíquo e que os segmentos da figura não sejam paralelos a esse eixo, pode mostrar ao aluno o limite dessa concepção.

### e) Orientação do(s) segmento(s) da figura F na folha de papel

Como no caso da orientação do eixo de simetria, atribuímos os valores *horizontal, vertical ou oblíquo* a esta variável. Os resultados encontrados nos LD são os seguintes:

Variável didática	Valor da variável	%
Orientação do(s) segmento(s) da figura na folha de papel	<i>Oblíquo</i>	13
	<i>Horizontal, vertical e oblíquo</i>	47
	<i>Vertical e oblíquo</i>	07
	<i>Horizontal, vertical</i>	20
	<i>Horizontal e oblíquo</i>	13

**Tabela 7. Variável didática: orientação do(s) segmento(s) da figura na folha de papel**

Nos problemas analisados, os segmentos que compõem as figuras possuem uma, duas ou as três orientações previstas. Assim, o maior ou menor nível de complexidade do problema dependerá da influência das demais variáveis e valores envolvidos.

### f) Intersecção da figura F com o eixo

Os três valores atribuídos a essa variável são os seguintes: *vazia, a figura toca o eixo de simetria e Corta o eixo de simetria*. Em função dessa variável, os problemas estão distribuídos nos livros analisados da seguinte maneira:

Variável didática	Valor da variável	%
Intersecção da figura com o eixo de simetria	<i>Vazia</i>	60
	<i>Toca o eixo</i>	30
	<i>Corta o eixo</i>	10

**Tabela 8. Variável didática: intersecção da figura com o eixo de simetria**

Na maioria dos problemas propostos, a intersecção entre as figuras dadas e o eixo de simetria é vazia. Os resultados dos estudos de Grenier (1988) e Tahri (1993) mostram que os alunos tiveram mais dificuldades no reconhecimento ou construção de uma figura simétrica, quando elas tocavam ou cortavam o eixo de simetria. A ênfase, nos problemas em que essa intersecção é vazia, pode levar o aluno a não estabelecer a relação entre tais elementos. Ele pode, por exemplo, ter dificuldade em reconhecer que o simétrico de um ponto que pertence ao eixo de simetria é o próprio ponto.

### g) Tipo de papel

Os valores que atribuímos a esta variável didática são: *papel pontilhado, quadriculado, liso (branco ou colorido) e outros*. Nos livros analisados encontramos o seguinte:

Variáveis didáticas	Valores das variáveis	%
<b>Tipo de papel</b>	<i>Liso (branco ou colorido)</i>	44
	<i>Quadriculado</i>	33
	<i>Pontilhado</i>	10
	<i>Outros</i>	13

**Tabela 9. Variável didática: tipo de papel**

Os tipos de papéis aos quais atribuímos o valor “outro” são parcialmente tracejados ou pintados. Na maioria das vezes, encontram-se em obras de arte e croquis, como, por exemplo, na representação de um campo de futebol.

Segundo os resultados de pesquisas precedentes, a utilização de suportes como papel quadriculado ou pontilhado, nos problemas de simetria, podem levar o



aluno a utilizar a contagem para transferir ou conferir a distância entre os pontos objeto e a imagem e o eixo de simetria ou, simplesmente, entre eles.

Com base nos resultados desse estudo, escolhemos os problemas que foram propostos aos alunos na experimentação.

## CAPÍTULO 2: QUADRO TEÓRICO-METODOLÓGICO

### Modelo cKç: a noção de concepção

Como quadro teórico-metodológico de referência, utilizamos o Modelo cKç desenvolvido por Nicolas Balacheff (1995) com a finalidade de oferecer uma formalização de concepção. De início, esse modelo não foi criado com fins didáticos, ele foi concebido para utilização em informática, tendo em vista ser este o principal foco de interesse dos estudos do pesquisador naquele momento. No entanto, alguns pesquisadores fizeram uso do Modelo e mostraram, nos resultados dos seus estudos o seu interesse didático (GAUDIN, 2005; MIYAKAWA, 2005; LIMA, 2006).

Esse modelo está ancorado na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1998) e na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990), duas das teorias de referências da Didática da Matemática de origem francesa. Segundo Miyakawa (2005, p.9), “este modelo se diferencia do de Vergnaud pela dissociação de operador e da estrutura de controle”<sup>9</sup>. Para o mesmo autor,

O modelo cKç repousa sobre a problemática da teoria situações didáticas desenvolvida por Brousseau (1998) nas quais a questão da relação entre os comportamentos de um sujeito e os conhecimentos é considerado como fundamental. A teoria das situações didáticas modela a situação de aprendizagem e de ensino na qual têm lugar as diversas interações entre os alunos, o meio e o professor. Esta posição da teoria é completamente radical para a modelização dos conhecimentos dos alunos. (MIYAKAWA, 2005, p.10).<sup>10</sup>

Anteriormente, o termo concepção era utilizado no senso comum. Segundo Tiberghien, pesquisador em didática das ciências naturais,

nos anos 80-90, uma pluralidade de termos trouxe todos os mesmos significados que são utilizados nas pesquisas. Entre estes termos, cita: representações, concepções, falsa concepção, alternativa

<sup>9</sup> *Ce modèle se différencie de celui de Vergnaud par la dissociation de l'opérateur et de la structure de contrôle.*

<sup>10</sup> *Le modèle cKç repose sur la problématique de la théorie des situations didactiques développée par Brousseau (1998) dans laquelle la question de la relation entre les comportements d'un sujet et les connaissances est considérée comme fondamentale. La théorie des situations didactiques modélise la situation d'apprentissage et d'enseignement dans laquelle ont lieu les diverses interactions entre les élèves, le milieu et l'enseignant. Cette position de la théorie est tout à fait radicale pour la modélisation des connaissances des élèves.*

framework, raciocínio espontâneo, modelo espontâneo. A hipótese subjacente a estas investigações deve que o sujeito é o construtor dos seus novos conhecimentos, a partir de seus conhecimentos e de suas experiências anteriores. As questões que são geralmente a origem deste trabalho referem-se à identificação dos conhecimentos e os procedimentos utilizados pelos alunos quando resolvem um problema, bem como sua evolução no tempo. De acordo com o autor, a variedade de termos utilizados nas pesquisas testemunha que não há uma abordagem teórica única, adotada pelas diferentes correntes. (TIBERGHIE, 2005, apud LIMA, 2006, p. 29-30).

Por sua vez, Charlier afirma o seguinte:

No sentido comum da palavra, uma concepção pode ser compreendida como uma idéia, uma representação ou uma crença que tem o sujeito em relação a algo. Numa abordagem construtivista, uma concepção pode ser definida como um tipo específico de conhecimento individual construído na interação do sujeito com o meio (um ambiente). Depende então ao mesmo tempo do meio no qual o sujeito encontra-se e do sujeito com ele mesmo (a sua história, as suas intenções...) (CHARLIER, 1998 apud LIMA 2006, p. 29).

Foi Michele Artigue (1991) que sinalizou a necessidade de uma formalização da noção de concepção nas pesquisas em Didática da Matemática.

O Modelo cK $\phi$  é ancorado na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau, na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gerard Vergnaud e na Teoria de Registro de Representação Semiótica (TRRS) de Reymond Duval.

Segundo Lima (2008, p.3), no modelo cK $\phi$ , “uma concepção é definida como uma estrutura mental atribuída a um sujeito por um observador do seu comportamento e a aprendizagem é entendida como a passagem de uma concepção a outra”. A concepção nesse modelo é concebida como um estado de equilíbrio do sistema, “sujeito<->meio”, considerando as limitações, imposições, ou seja, algo que influencia ou interfere no seu funcionamento.

A concepção pertence ao sujeito, dessa forma, ela pode ser correta, ou não, do ponto de vista do conhecimento de referência, no caso desta pesquisa a matemática e, especificamente, a simetria de reflexão. Outro aspecto importante é que a concepção muitas vezes é local no sentido de que ela funciona para resolver um determinado problema e não outro o que aponta para um domínio de validade.

Uma concepção funciona em função do problema, este, por sua vez, é descrito em termos de variáveis didáticas.

No quadro deste modelo, a concepção C é formada de quatro elementos (P, L, R,  $\Sigma$ ), os quais serão descritos a seguir.

**a) P é um conjunto de problemas sobre o qual C é operatório**

Um problema é resultado de uma perturbação do equilíbrio do sistema [sujeito-meio] (BALACHEFF 1995, p.227). Nesse modelo, o conjunto P de uma concepção C é o conjunto de problemas pelos quais a concepção C participa da sua resolução.

**b) R é um conjunto de operadores**

Os operadores são explicitados na ação do sujeito quando resolve um problema. Eles são atestados na ação a partir dos comportamentos do aluno.

**c) L é um sistema de representação e permite exprimir os elementos de P e de R**

Esse sistema permite expressar os elementos de P e de R e pode ser gráfico, gestual ou sonoro.

**d)  $\Sigma$  é uma estrutura de controles e assume a não contradição de C**

É o elemento novo apresentado por Balacheff (1995) no modelo em pauta, é uma ampliação do modelo proposto por Vergnaud (1990). Essa estrutura rege a ação do sujeito que resolve o problema.

Gaudin (2002) afirma que os controles explicitam os critérios que orientam a escolha, a adequação, a decisão, a validade da ação e a resolução, ou não, do problema. Por essas características, as estruturas de controle é o principal foco de interesse desta pesquisa.

Dessa forma, apresentamos no próximo capítulo, a análise a priori dos problemas que foram propostos aos alunos na experimentação, em termos de controles.

## CAPÍTULO 3: PROBLEMAS E ANÁLISE A PRIORI

Neste capítulo apresentamos os problemas que compõem o instrumento de coleta de dados utilizado no estudo experimental, e a análise a priori dos problemas propostos aos alunos. Para tanto, faz-se necessário apresentar de antemão a modelização de controles realizada por Lima (2006), uma vez que a mesma serviu de base na construção desta análise.

### 3.1. Controles sobre a simetria de reflexão

A modelização de controles foi realizada a partir de alguns critérios que foram estabelecidos por Lima (2006) por meio de um estudo da simetria de reflexão, do ponto de vista matemático e didático<sup>11</sup>. Os critérios levados em conta são:

- a) **Direção:** perpendicular ao eixo, horizontal, vertical, prolongamento de um segmento de F, outra;
- b) **Distância ao eixo de simetria:** conservada, não conservada;
- c) **Forma:** conservada, não conservada;
- d) **Tamanho:** conservada, não conservada;
- e) **Sentido:** mesmo sentido, sentido inverso;
- f) **Posição:** translação, translação seguida da inversão da figura, rotação, rotação seguida da inversão da figura.

Para cada um desses critérios foram modelizados, a priori, os seguintes controles.

---

<sup>11</sup> Os detalhes dessa modelização podem ser encontrados em LIMA (2006, pp. 45-71)

**a) Direção**

**Quadro 3. Controles de Direção**

<b>Direção</b>	<b>Controles</b>
Perpendicular ao eixo	<b><math>\Sigma_{\text{perpend}}</math></b> : a figura (ou subfigura) simétrica de uma figura (ou subfigura) por simetria de reflexão é construída na direção perpendicular ao eixo de simetria.
Horizontal	<b><math>\Sigma_{\text{hor}}</math></b> : a imagem de uma figura (ou subfigura) por uma simetria de reflexão é construída numa direção horizontal
Vertical	<b><math>\Sigma_{\text{vert}}</math></b> : a imagem de uma figura (ou subfigura) por uma simetria de reflexão é construída numa direção vertical
Prolongamento de um segmento de F	<b><math>\Sigma_{\text{prolong}}</math></b> : a imagem de uma figura (ou subfigura) por uma simetria de reflexão é construída na direção dada pelo prolongamento de um segmento desta figura.
Outra	<b><math>\Sigma_{\text{outra}}</math></b> (definir conforme o caso)

**b) Distância ao eixo de simetria**

**Quadro 4. Controle de distância ao eixo de simetria**

<b>Distância ao eixo</b>	<b>Controle</b>
Conservada	<b><math>\Sigma_{\text{dist}}</math></b> : uma figura (subfigura) e a sua simétrica estão à mesma “distância” do eixo de simetria
Não conservada	----

Neste contexto, a “distância” pode se tratar da distância euclidiana, da percepção global que o aluno tem da distância da figura F ao eixo de simetria (sem levar em conta nenhum ponto de F em particular), ou ainda, da distância ao longo de uma direção apontada, por exemplo, por um segmento da figura. A não conservação de distância é considerada como ausência de controle relativo a este critério.

**c) Tamanho**

**Quadro 5. Controles de Tamanho**

<b>Tamanho</b>	<b>Controles</b>
Conservada	<b><math>\Sigma</math>_forma:</b> o simétrico de um segmento é um segmento do mesmo comprimento. <b><math>\Sigma</math>raio_círculo:</b> o simétrico de um círculo é um círculo do mesmo raio.
Não conservada	---

**d) Forma**

**Quadro 6. Controle de Forma**

<b>Forma</b>	<b>Controle</b>
Conservada	<b><math>\Sigma</math>_forma:</b> uma figura e a sua imagem por simetria de reflexão têm a mesma forma (ex: o simétrico de um segmento é um segmento)
Não conservada	---

Nesse contexto, a ideia de “forma”, nas figuras formadas de segmentos, está ligada à propriedade de conservação das medidas de ângulos pela simetria de reflexão.

**e) Sentido**

<b>Sentido</b>	<b>Controles</b>
Mesmo sentido <sup>12</sup>	<b><math>\Sigma</math>mesmo_sentido:</b> uma figura e a sua simétrica têm o mesmo sentido.
Sentido inverso <sup>13</sup>	<b><math>\Sigma</math>sentido_inverso:</b> uma figura e a sua simétrica têm o sentido oposto.

<sup>12</sup> Duas figuras são do mesmo sentido se para qualquer três pontos A, B, C da primeira, os simétricos A', B', C' da segunda têm a mesma orientação no plano.

<sup>13</sup> Duas figuras são de sentido oposto se para qualquer três pontos A, B, C da primeira, os simétricos A', B', C' da segunda têm a orientação oposta no plano.

**f) Posição**

<b>Posição</b>	<b>Controles</b>
Translação da figura F	<b><math>\Sigma_{\text{translação}}</math></b> : a imagem de uma figura F por simetria de reflexão é obtida por uma translação de F numa direção escolhida
Translação da figura F seguida de uma inversão	<b><math>\Sigma_{\text{translação}}</math></b> <b><math>\Sigma_{\text{sentido\_inverso}}</math></b>
Rotação da figura F	<b><math>\Sigma_{\text{rotação}}</math></b> : a imagem de uma figura pela simetria de reflexão é obtida por uma rotação de F em torno de um ponto e de um ângulo escolhidos
Rotação da figura F seguida de uma inversão	<b><math>\Sigma_{\text{rotação}}</math></b> <b><math>\Sigma_{\text{sentido\_inverso}}</math></b>
Outra	<b><math>\Sigma_{\text{posição\_outra}}</math></b> (definir segundo o caso)

Vale salientar que o critério de posição busca dar conta da escolha realizada pelo aluno e da posição da figura imagem  $F'$ , em relação à posição da figura F.

Além dos controles ligados aos critérios acima apresentados, outros controles foram modelizados por Lima (2006). Dentre eles, destacamos:

**a) Controles ligados à dobradura:**

**$\Sigma_{\text{dobradura\_1}}$** : uma figura e o seu simétrico sobrepõem-se por dobradura ao longo do eixo simetria;

**$\Sigma_{\text{dobradura\_2}}$** : uma figura e o seu simétrico sobrepõem-se por dobradura.

**b) Controles ligados à natureza da figura  $F'$**

**$\Sigma_{\text{natureza\_F'}}$** : o simétrico de uma figura é uma figura de mesma natureza

**$\Sigma_{\text{segmento}}$** : se as extremidades de um segmento são simétricas às extremidades de outro segmento, em relação ao eixo de simetria, então estes dois segmentos são simétricos, em relação a esse eixo.



**c) Controles ligados à relação entre a figura F e o eixo de simetria:**

**$\Sigma$ ponto\_invariante:** o simétrico de um ponto sobre o eixo é o ponto nele mesmo;

**$\Sigma$ extremidade\_sobre\_eixo:** O simétrico de um segmento que possui uma extremidade sobre o eixo é um segmento que possui, igualmente, uma extremidade sobre o eixo.

**$\Sigma$ semi\_plano:** a simétrica da figura F está situada do outro lado de eixo de simetria.

**d) Controles de paralelismo**

**$\Sigma$ paralelismo\_segmento:** um segmento e o seu simétrico são paralelos.

**$\Sigma$ paralelismo\_eixo:** uma reta e a sua simétrica são paralelas

Além de todos os controles acima citados, merece destaque o controle de equidistância dos pontos da figura objeto e imagem ao eixo de simetria, que permite a construção da imagem de uma figura por simetria de reflexão. Definimos esse controle da seguinte maneira:

**$\Sigma$ \_equidistância:** um ponto e seu simétrico, por simetria de reflexão, são equidistantes de um ponto pertencente ao eixo de simetria.

Vale ressaltar que logo uma concepção é, no quadro deste Modelo, um conhecimento do sujeito, logo as estruturas de controles podem ser corretas ou errôneas, ou seja, do ponto de vista da matemática, corresponde a um saber de referência.

A seguir apresentamos os problemas utilizados no estudo experimental e a análise a priori, em termos dos controles possíveis de serem mobilizados pelos alunos na resolução desses problemas.

### 3.2. Problemas da experimentação e análise a priori em termos de controles ( $\Sigma$ )

Os problemas de simetria utilizados na experimentação foram escolhidos com base no resultado do estudo realizado nos livros didáticos adotados nas escolas onde foi realizada a experimentação. Assim, realizamos essa escolha observando as variáveis didáticas e os valores identificados, de maneira que os problemas fossem familiares aos alunos.

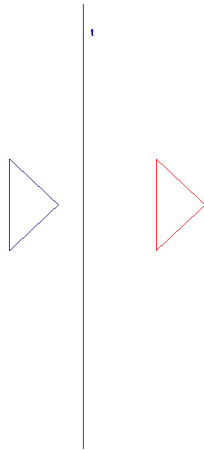
Em termos de “tipos de problemas”, propomos aos alunos problemas de *reconhecimento e de construção de figuras simétricas*. As demais variáveis e valores, que determinaram a escolha, de cada problema serão explicitados ao longo desta análise.

Dessa maneira, após a apresentação do enunciado e das figuras fornecidas em cada problema, fazemos uma descrição em termos de valores e de variáveis consideradas na escolha, e um estudo, em relação às respostas e controles passíveis de serem utilizados pelos alunos na resolução.

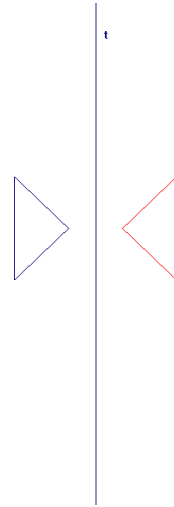
**1) Problema 1 (Pb triângulo)**

**Enunciado:** Na situação abaixo construiu-se o simétrico do triângulo azul em relação ao eixo  $t$ . Assinale dentre as alternativas abaixo qual corresponde à construção correta do simétrico da figura azul em relação à  $t$  e justifique a sua escolha:

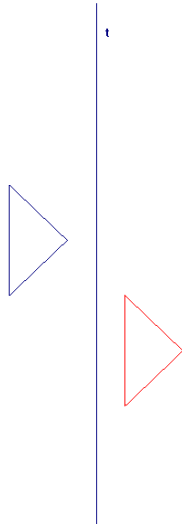
a ( )



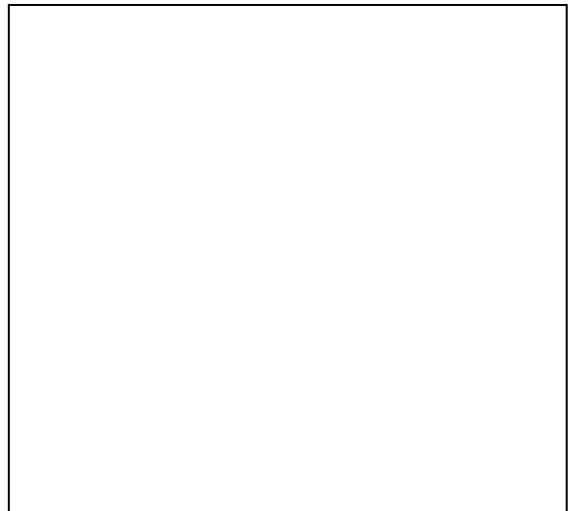
b ( )



c ( )



Justificativa:



**Figura 2. Problema 1**

### 1a) Variáveis didáticas e valores considerados na escolha do problema

- Tipo de Problema: reconhecimento de figura simétrica
- Especificidade da Figura: a figura possui eixo de simetria
- Orientação do eixo de simetria: vertical
- Natureza da figura: *geométrica usual (triângulo)*
- *Intersecção da figura com o eixo de simetria: vazio*
- Tipo de papel: branco (liso)

### 1b) Controles prováveis de serem mobilizados pelos alunos na resolução do problema e levados em conta nesse estudo

**Direção:**

**Itens “a” e “b” (resposta correta):**  $\Sigma_{perpend}$ ,  $\Sigma_{hor}$ .

Tendo em vista que o eixo de simetria é vertical na folha de papel, a distinção entre a mobilização do controle ligado a direção de perpendicularidade ou direção horizontal dependerá da justificativa, dada pelo aluno. Caso não haja justificativa por parte do aluno, indicaremos uma possível mobilização desses controles realizada pelo aluno.

**Item “c”:**  $\Sigma_{prolong}$ .

Direção dada pela reta suporte de um dos lados dos triângulos azul (figura objeto: a esquerda do eixo de simetria) e vermelho (figura candidata à imagem do triângulo azul: a direita do eixo de simetria).

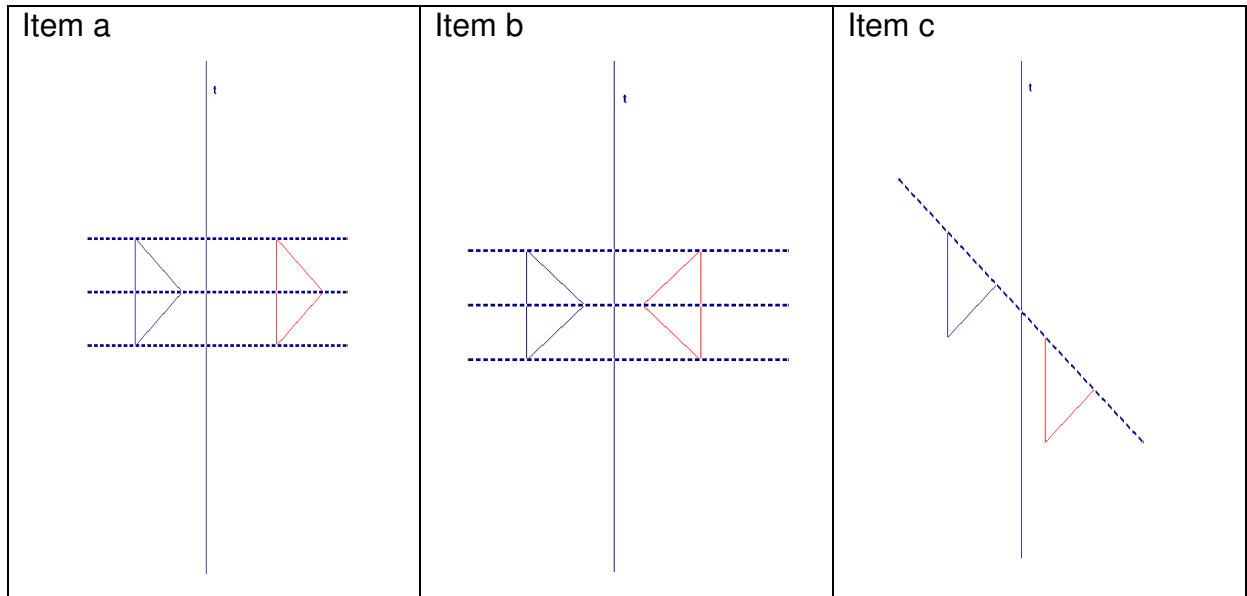


Figura 3. Problema 1\_Direção

**- Distância ao eixo de simetria, forma, tamanho:**

Nas três respostas possíveis, o aluno pode mobilizar um controle de “distância”, porém, diversos significados podem ser a ele atribuído, como descrito na apresentação dos controles. Por esse motivo, a identificação, ou não, desse controle dependerá somente da justificativa dada pelo aluno.

O mesmo se observa quanto aos controles ligados à conservação de forma e de tamanho da figura, e de semiplano. O fato das figuras objeto e imagem serem dadas no problema não favorece uma manipulação dessas figuras pelo aluno. Isso dificulta a identificação dos controles  $\Sigma\_forma$ ,  $\Sigma\_tamanho$  e  $\Sigma\_sempiانو$ . De fato, esses controles são mais suscetíveis de serem identificados nos problemas de construção de figuras simétricas.

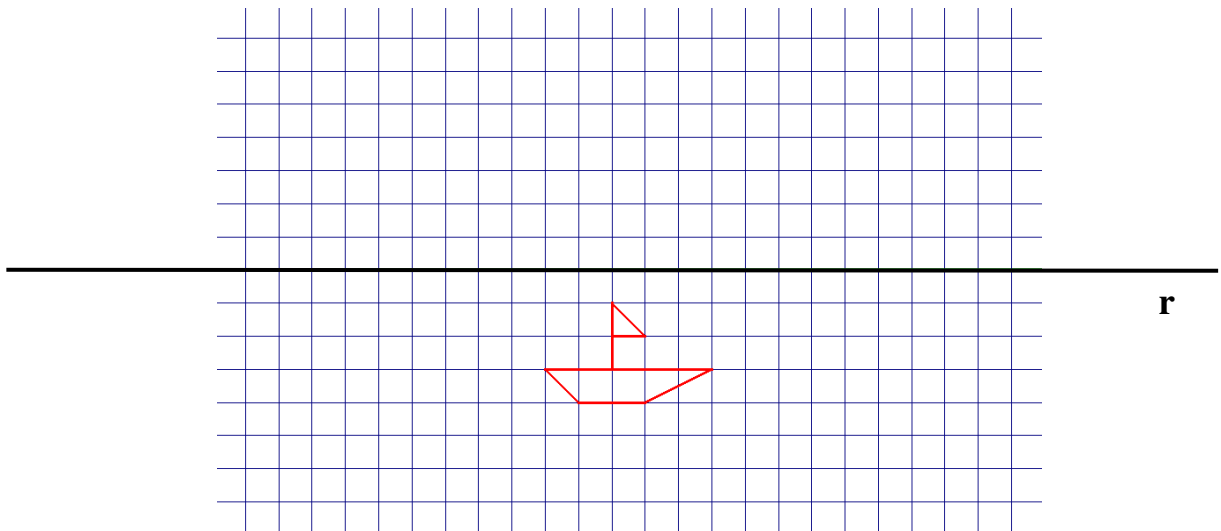
**- Posição e sentido:**

A identificação dos controles ligados a esses dois critérios é importante neste problema à medida que permite distinguir a escolha do aluno pelo “item a” ou pelo “item b” (resposta correta). A escolha do “item a” pode remeter à mobilização dos seguintes controles:  $\Sigma\_translação$  e/ou  $\Sigma\_paralelismo\_segmento$ . Nos dois casos, o aluno pode resolver o problema por meio de um procedimento global (LIMA, 2006).

Além desses controles, admitimos a possibilidade do aluno resolver o problema por meio da utilização de dobraduras, efetivas, ou não, e, nesse caso, a escolha da figura imagem será feita com base nos controles relativos à sobreposição das figuras, ao longo do eixo de simetria, ou não ( $\Sigma_{dobradura1}$  ou  $\Sigma_{dobradura1}$ )<sup>14</sup>.

## 2) Problema 2 (Pb barco)

**Enunciado:** *Construa o simétrico da figura vermelha abaixo com relação à reta r e explique como você fez a sua construção.*



**Figura 4. Problema 2**

### **2a) Variáveis didáticas e valores considerados na escolha do problema**

- Tipo de problema: *construção de figura simétrica;*
- Especificidade da figura: *figura não possui eixo de simetria;*
- Orientação do eixo do problema na folha de papel: *horizontal;*
- Tipo de papel: *quadriculado;*

<sup>14</sup> Tendo em vista que esta possibilidade é provável em todos os problemas, na análise dos outros problemas não nos referimos a esse controle, admitindo, por princípio, que o aluno pode escolher sua resposta com base na sobreposição da figura a, efetivando, ou não, a dobradura, mesmo não havendo a orientação para tal nos enunciados dos problemas. O mesmo admitimos em relação ao controle de equidistância (como definido neste estudo) por se tratar de um controle suscetível de mobilização, pelo aluno, na resolução de qualquer problema de simetria de reflexão.

- Intersecção da figura com o eixo de simetria: *vazia*
- Natureza da figura: *representa um objeto real; complexa (composta de segmentos)*.

Na escolha do problema consideramos, também, o fato de que a figura representada por um objeto familiar aos alunos e possui uma posição prototípica.

## 2b) Controles prováveis de serem mobilizados pelos alunos na resolução do problema e levados em conta neste estudo

- **Direção:** I)  $\Sigma_{\text{perpend}}$ ; II)  $\Sigma_{\text{vert}}$ ; III)  $\Sigma_{\text{prolong}}$ .

Exemplos de respostas possíveis por meio de mobilização desses controles são dados a seguir:

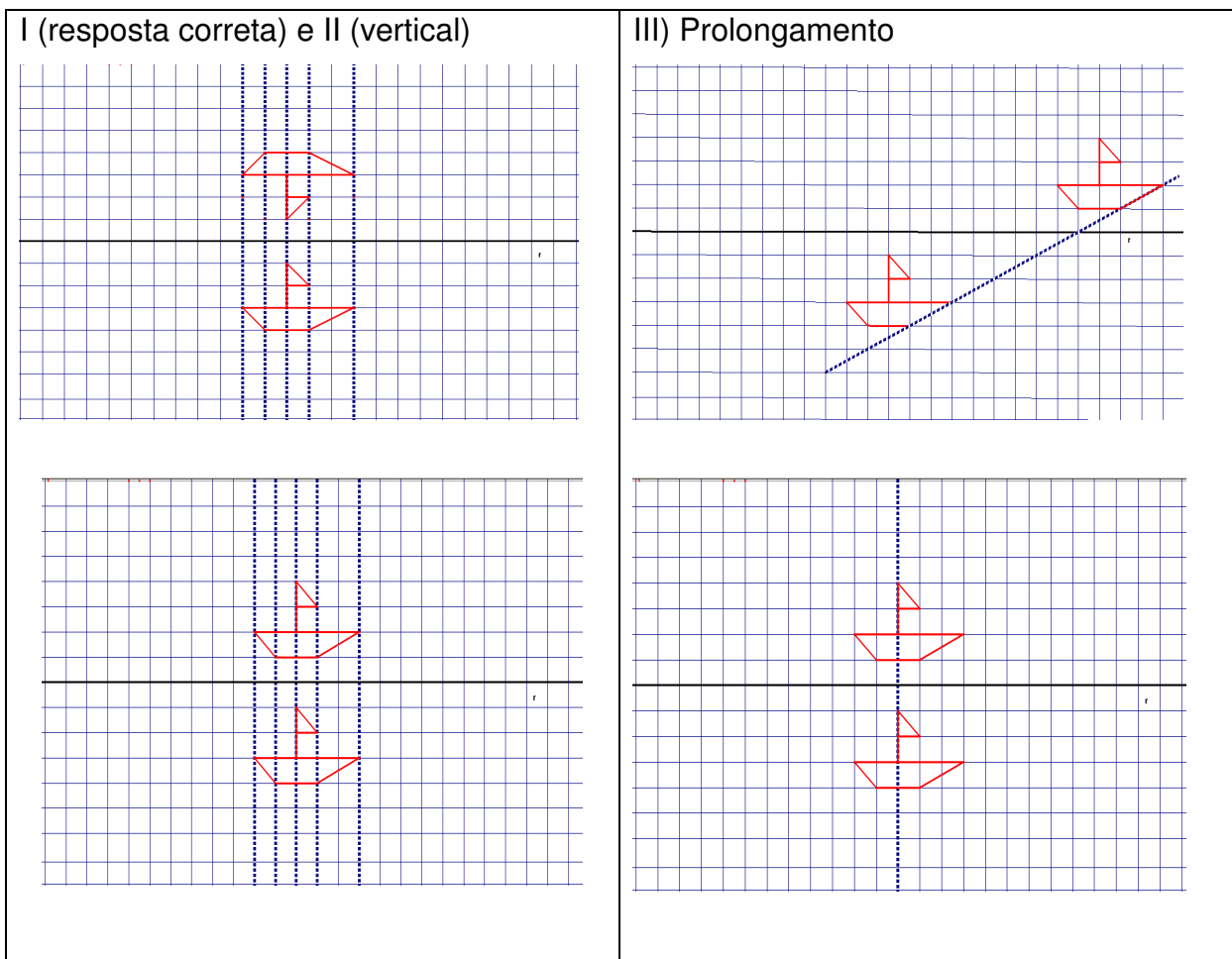


Figura 5. Problema 2\_Direção

**- Distância ao eixo de simetria:**  $\Sigma_{dist}$ .

Consideramos que um controle de distância pode ser mobilizado pelo aluno na resolução deste problema. A figura dada em papel quadriculado é frequentemente utilizada nos problemas propostos nos livros didáticos, podendo, com isso, favorecer a construção da figura correta, por meio de um procedimento de contagem dos quadradinhos. Esse aspecto será levado em conta na análise a posteriori.

**- Forma, tamanho:**  $\Sigma_{forma}$ ,  $\Sigma_{tamanho}$ .

O fato da figura ser composta por segmentos de reta e representar um objeto familiar pode levar o aluno a construir a imagem globalmente, baseado apenas na visualização da figura.

**- Sentido:**  $\Sigma_{sentido\ inverso}$ .

Espera-se que o aluno mobilize esse controle, ao menos, para validar a sua construção. O fato da figura não possuir, ela mesma, eixo de simetria pode nos permitir essa identificação. Fazemos a hipótese, no entanto, que o fato da figura barco ficar “de cabeça para baixo”, pode levar alguns alunos a uma situação de conflito, induzindo-o a dar uma resposta incorreta.

**- Posição e Sentido:**  $\Sigma_{translação}$ .

A especificidade da figura (um barco), que tem uma posição prototípica, pode levar o aluno a efetivar uma translação da figura na vertical e para cima. A mobilização desse controle pode estar associada ao controle semiplano (*a simétrica da figura F esta situada do outro lado de eixo de simetria*). O fato da vela do barco apontar para o lado direito, pode, também, levar o aluno a realizar

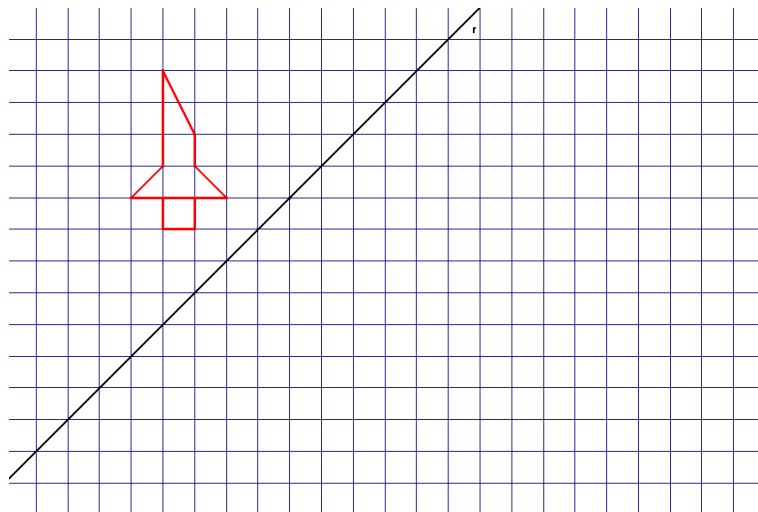


uma translação da figura na direção horizontal e para a direita. Nesse caso, o controle de semiplano será desconsiderado na construção.

No mais, entendemos que o controle semiplano será mobilizado, ou não, em função de outros controles, como, por exemplo, aqueles ligados à posição.

### **3) Problema 3 (Pb espada)**

**Enunciado:** *Construa o simétrico da figura vermelha abaixo com relação à reta  $r$  e explique a sua construção.*



**Figura 6. Problema 3**

### **3a) Variáveis didáticas e valores considerados na escolha do problema**

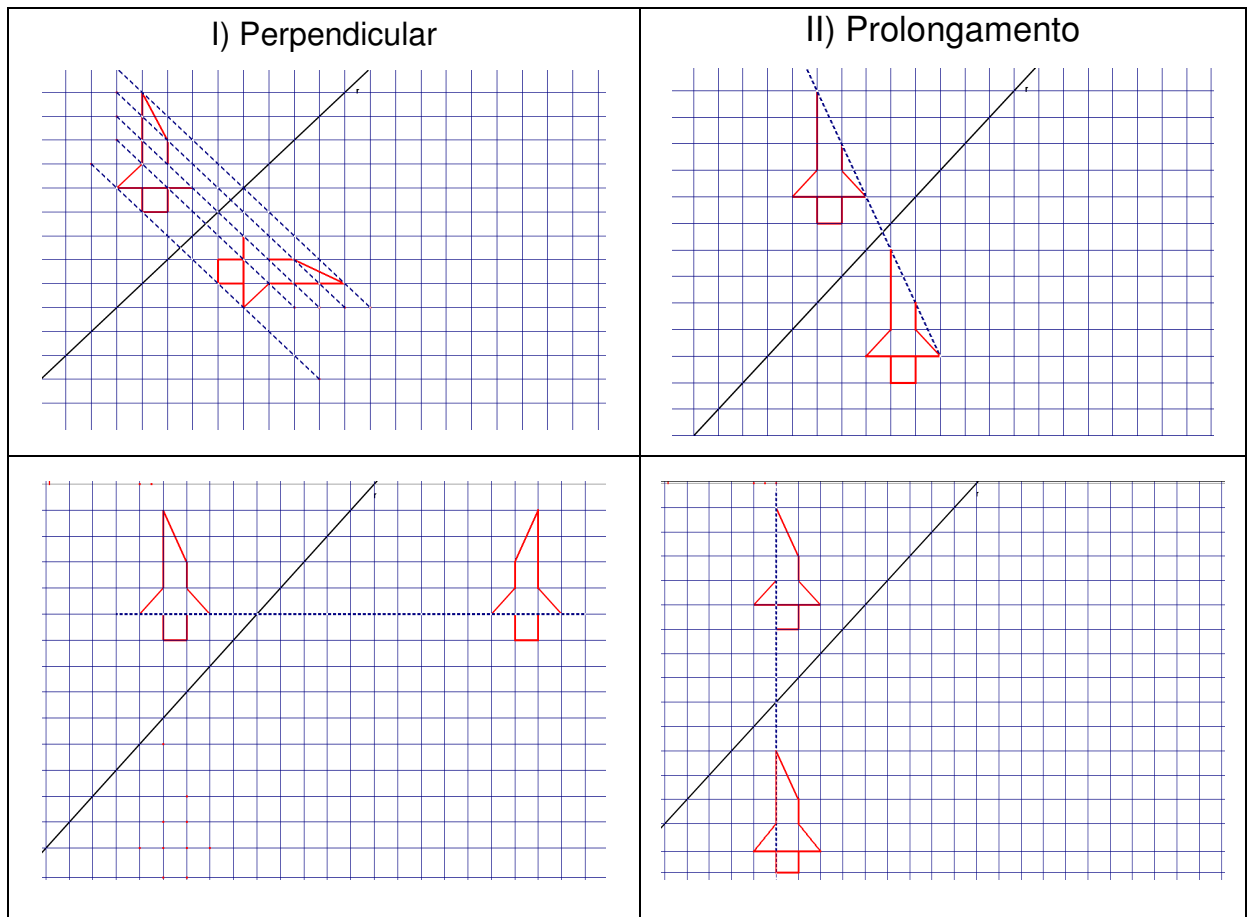
- Tipo de problema: *construção da figura simétrica;*
- Especificidade da figura: *a figura não possui eixo de simetria;*
- Orientação do eixo de simetria na folha de papel: *oblíquo;*
- Tipo de papel: *quadriculado;*
- Natureza da figura: *geométrica não usual; representa um objeto real ou não; complexa (composta de segmentos).*

Na escolha da figura fornecida neste problema, levamos em conta, o fato da mesma não ter uma posição prototípica, como a figura do problema precedente.

**3b) Controles prováveis de serem mobilizados pelos alunos na resolução do problema e levados em conta nesse estudo**

- **Direção:** : I)  $\Sigma_{perpend}$ ; II)  $\Sigma_{vert}$ ; III)  $\Sigma_{hor}$ ; IV)  $\Sigma_{prolong}$ .

O fato do eixo de simetria possuir orientação oblíqua nos permite distinguir se o aluno mobilizou um controle de perpendicularidade ou se construiu a figura na direção horizontal ou vertical, na folha de papel. Seguem algumas construções que podem ser realizadas pelos alunos a partir da mobilização desses controles:



**Figura 7. Problema 2\_Direção**

Nos casos em que a direção vertical e horizontal são escolhidas pelo aluno, em função de um segmento da figura, e não de um ponto em particular, a distinção entre esses controles e o do prolongamento será possível, apenas, a partir da explicação do aluno.

- **Distância ao eixo de simetria:**  $\Sigma_{dist}$ ;
- **Forma:**  $\Sigma_{forma}$ ;
- **Tamanho:**  $\Sigma_{tamanho}$ .

Esses controles são passíveis de serem mobilizados pelos alunos pelas mesmas razões explicitadas no problema precedente.

- **Posição e Sentido:**  $\Sigma_{translação}$  e  $\Sigma_{rotação}$ , associados ou não ao controles  $\Sigma_{mesmo\_sentido}$  e  $\Sigma_{sentido\_inverso}$ .

Tendo em vista que a figura não possui uma posição prototípica, todos esses controles são passíveis de serem mobilizados pelos alunos, na resolução do problema.

#### 4) Problema 4 (Pb Trevo)

**Enunciado:** Nesta situação construiu-se o simétrico da figura vermelha em relação ao eixo  $t$ . Assinale dentre as alternativas qual corresponde à construção correta do simétrico da figura vermelha em relação à reta  $t$  e justifique a sua escolha:

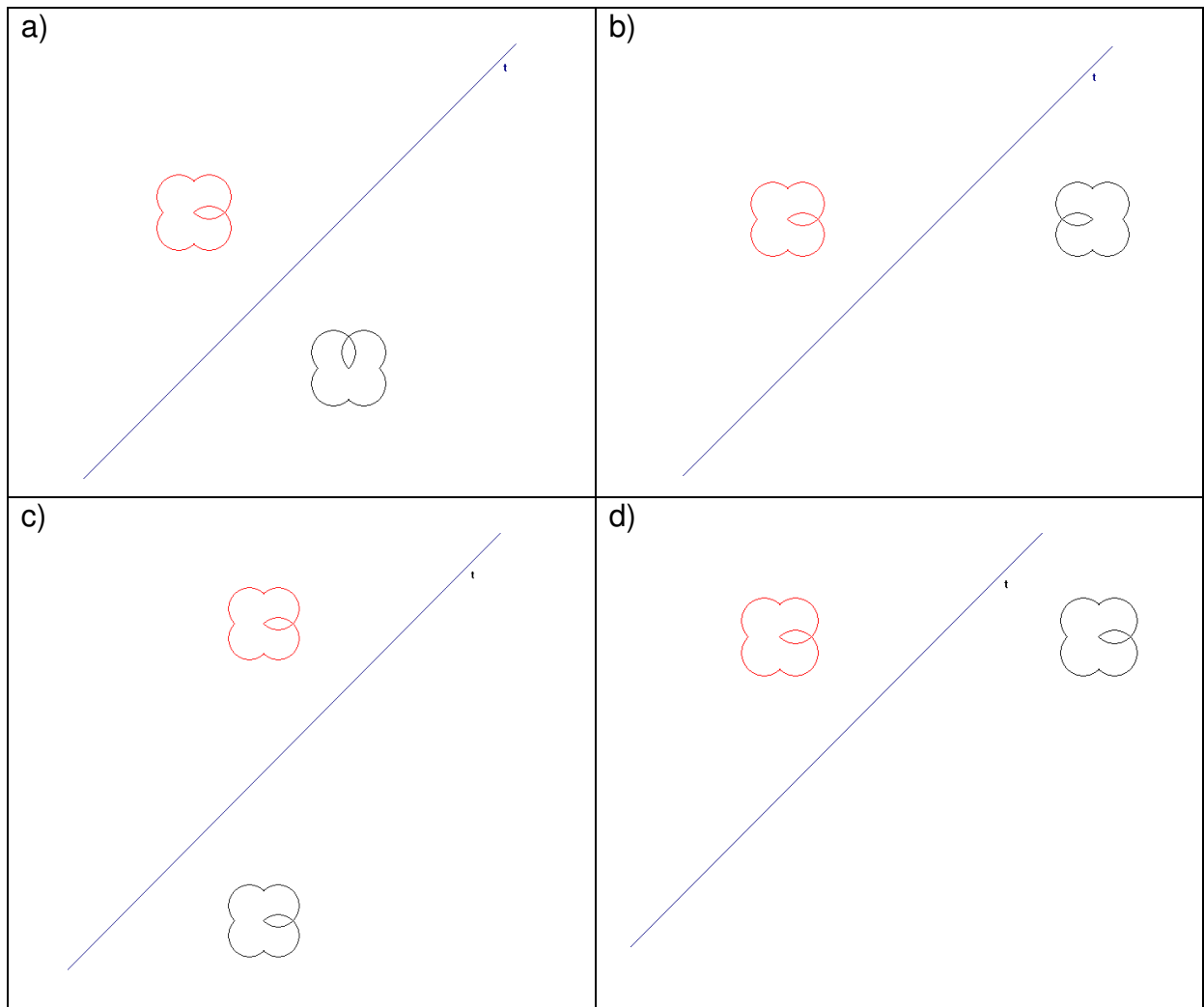


Figura 8. Problema 4

#### 4a) Variáveis didáticas e valores considerados na escolha do problema

- Tipo de problema: *reconhecimento da figura simétrica*;
- Especificidade da figura: a *figura possui eixo de simetria*;
- Orientação do eixo de simetria na folha de papel: *oblíquo*;

- Tipo de papel: *branco (liso)*;
- Intersecção com o eixo de simetria: vazia
- Natureza da figura: *geométrica não usual*

Na escolha deste problema, levamos também em consideração os seguintes aspectos: (1) a figura não possui segmento (traçado). Neste caso, o aluno pode se apoiar em um ponto da figura para fazer a escolha da imagem da figura por simetria de reflexão. Ele pode, ainda, traçar alguns segmentos, passando por alguns pontos da figura ou escolher a figura baseando-se, apenas, na visualização. (2) o eixo de simetria da figura não é paralelo ao eixo de simetria dado no problema.

Além disso, optamos por fazer esta proposição após alguns problemas de construção. Com isso, intentamos observar até que ponto a variável “tipo de problema” pode interferir na concepção mobilizada pelo aluno.

Vale lembrar que, como explicitado anteriormente, admitimos a possibilidade de que o aluno resolva este problema utilizando dobraduras efetivas, ou não. Nesses casos, a escolha do aluno será feita com base nos controles relativos à sobreposição das figuras, ao longo do eixo de simetria, ou não ( $\Sigma_{dobradura1}$  ou  $\Sigma_{dobradura1}$ ).

#### **4b) Controles prováveis de serem mobilizados pelos alunos na resolução do problema e levados em conta nesse estudo**

**- Direção:**

**Item “a”:**  $\Sigma_{perpend}$ ;

**Item “b” e “d”:**  $\Sigma_{hor}$ ;

**Item “c”:**  $\Sigma_{vert}$ .

Tendo em vista que a figura não possui segmentos traçados, o controle do prolongamento é pouco provável de ser mobilizado pelos alunos.

A seguir, indicamos algumas figuras que explicam e dão indicativos da mobilização desses controles ligados à escolha de uma direção:

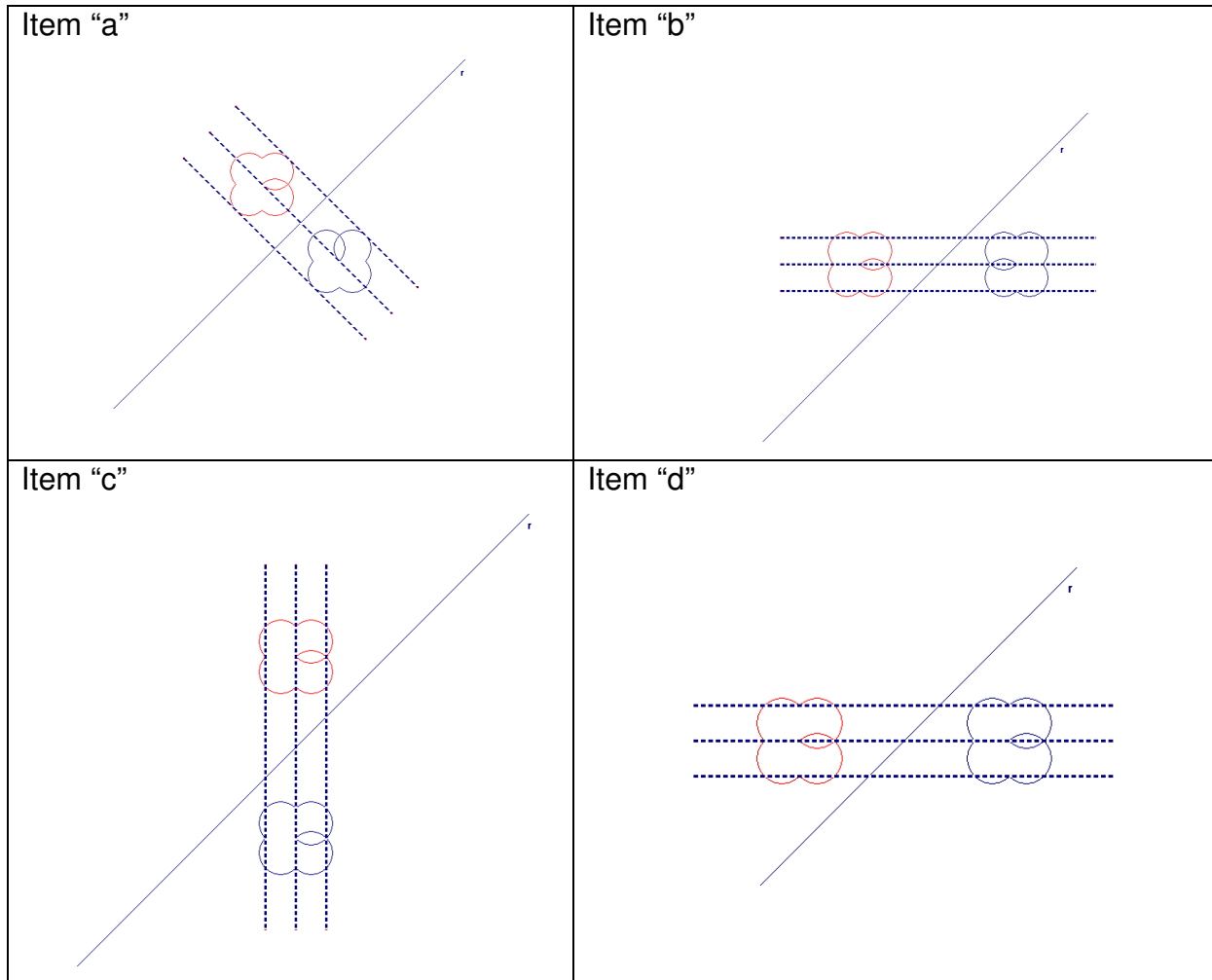


Figura 9. Problema 4\_Direção

- **Distância ao eixo de simetria:**  $\Sigma_{dist}$ ;
- **Forma:**  $\Sigma_{forma}$ ;
- **Tamanho:**  $\Sigma_{tamanho}$ .

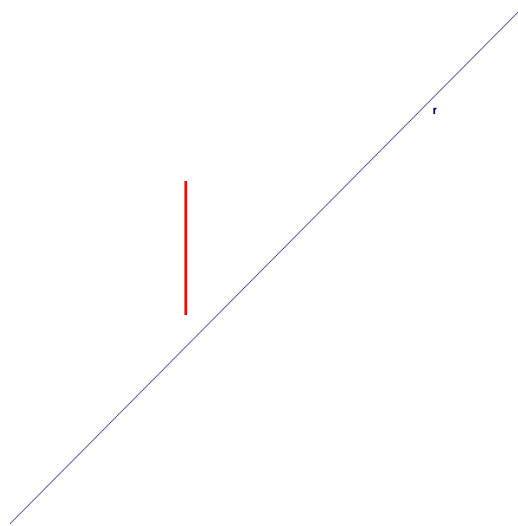
Em conformidade com a análise do *Problema 1*, admitimos, aqui, que, nas quatro escolhas possíveis, o aluno pode mobilizar um controle de “distância”, porém, levando-se em conta os diversos significados que podem ser a este controle atribuídos, como descrito na apresentação controles. O mesmo pode ser observado em relação aos controles ligados à conservação de forma e de tamanho da figura, e com relação à mobilização do controle semiplano ( $\Sigma_{sempi\ plano}$ ).

Ressaltamos que, o fato das figuras objeto e imagem serem dadas no problema, não favorece a manipulação das mesmas por parte do aluno.

Em comparação com o Problema 1, a importância da proposição deste problema está, sobretudo, no fato de que a orientação do eixo de simetria permite a distinção entre a mobilização dos controles ligados ao critério de direção:  $\Sigma_{\text{perpend}}$  e  $\Sigma_{\text{hor}}$ .

### **5) Problema 5a (Pb Segmento Vertical)**

**Enunciado:** *Construa o simétrico do segmento com relação ao eixo de simetria  $r$ , utilizando os instrumentos de desenho.*



**Figura 10. Problema 5a**

#### **5a) Variáveis didáticas e valores considerados na escolha do problema**

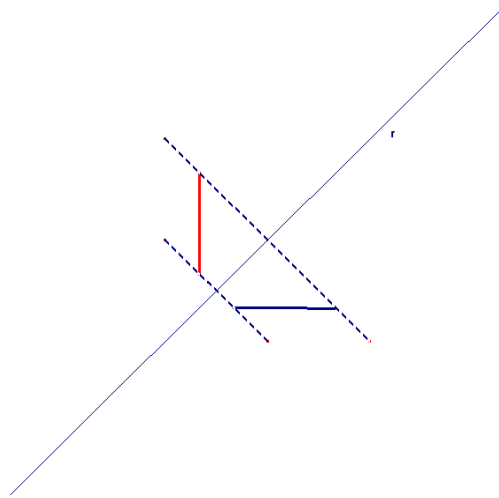
- Tipo de problema: *construção de figura simétrica*;
- Orientação do eixo de simetria na folha de papel: *oblíquo*;
- Orientação do segmento: *horizontal na folha de papel*;
- Tipo de papel: *branco (liso)*;
- Intersecção com o eixo de simetria: *vazia*;
- Natureza da figura: *geométrica usual*.

**5b) Controles prováveis de serem mobilizados pelos alunos na resolução do problema e levados em conta neste estudo**

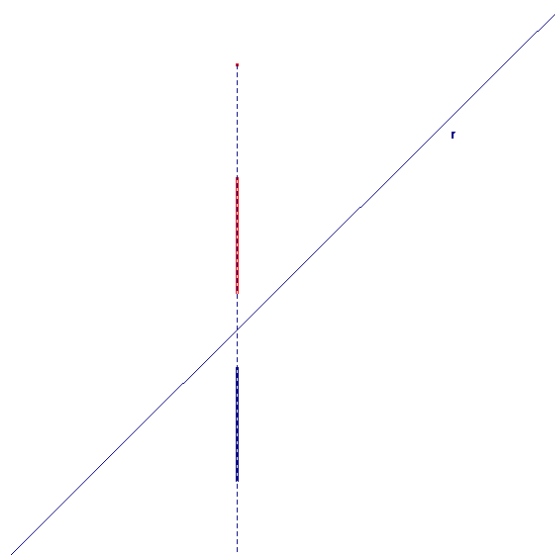
- **Direção:** I)  $\Sigma_{\text{perpend}}$ ; II)  $\Sigma_{\text{prolong}}$ ; III)  $\Sigma_{\text{hor}}$ .

Tipos de respostas possíveis, pela mobilização destes controles:

I) *Perpendicular*



II) *Prolongamento*





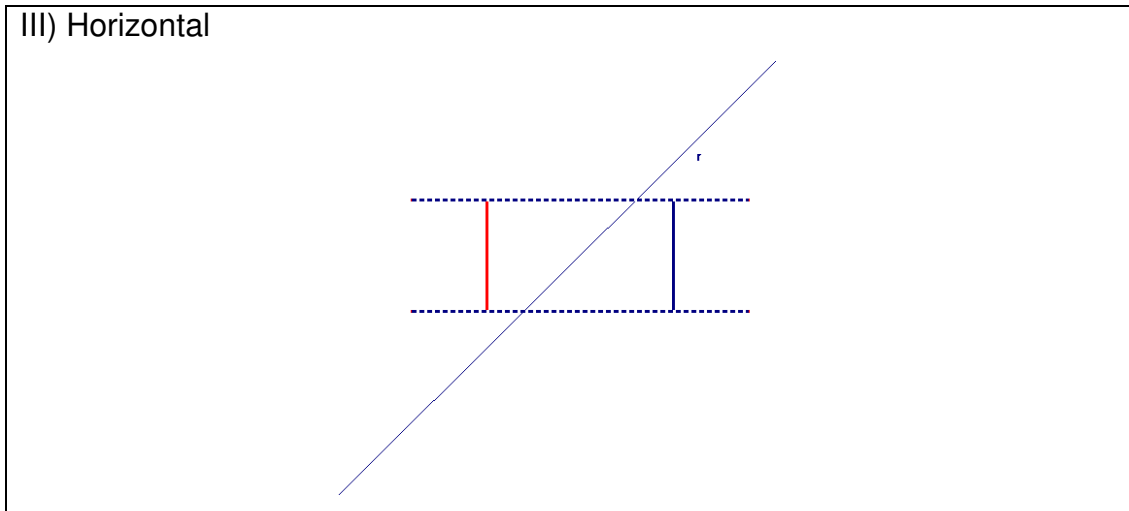


Figura 11. Problema 5a\_Direção

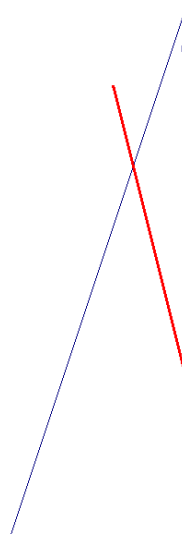
- Distância ao eixo de simetria:  $\Sigma_{dist}$ ;
- Forma:  $\Sigma_{forma}$ ;
- Tamanho:  $\Sigma_{tamanho}$ .

Controles ligados à natureza da figura F':  $\Sigma_{natureza\_F'}$ ;  $\Sigma_{segmento}$ ;  
 $\Sigma_{semiplano}$ .

Controles de paralelismo:  $\Sigma_{paralelismo\_segmento}$ ;  $\Sigma_{paralelismo\_eixo}$ .

**5) Problema 5b (Pb segmento corta o eixo de simetria)**

**Enunciado:** *Construa o simétrico do segmento com relação ao eixo de simetria  $r$ , utilizando os instrumentos de desenho*



**Figura 12. Problema 5b**

**5b) Variáveis didáticas e valores considerados na escolha do problema**

- Tipo de problema: *construção de figura simétrica*;
- Orientação do eixo de simetria na folha de papel: *oblíquo*;
- Orientação do Segmento: *oblíquo*;
- Tipo de papel: *branco (liso)*;
- Intersecção com o eixo de simetria: *corta*
- Natureza da figura: *geométrica usual*.

**5b) Controles prováveis de serem mobilizados pelos alunos na resolução do problema e levados em conta neste estudo**

- **Direção:** I)  $\Sigma_{perpend}$ ; II)  $\Sigma_{hor}$ .

Tipos de respostas possíveis, pela mobilização desses controles:

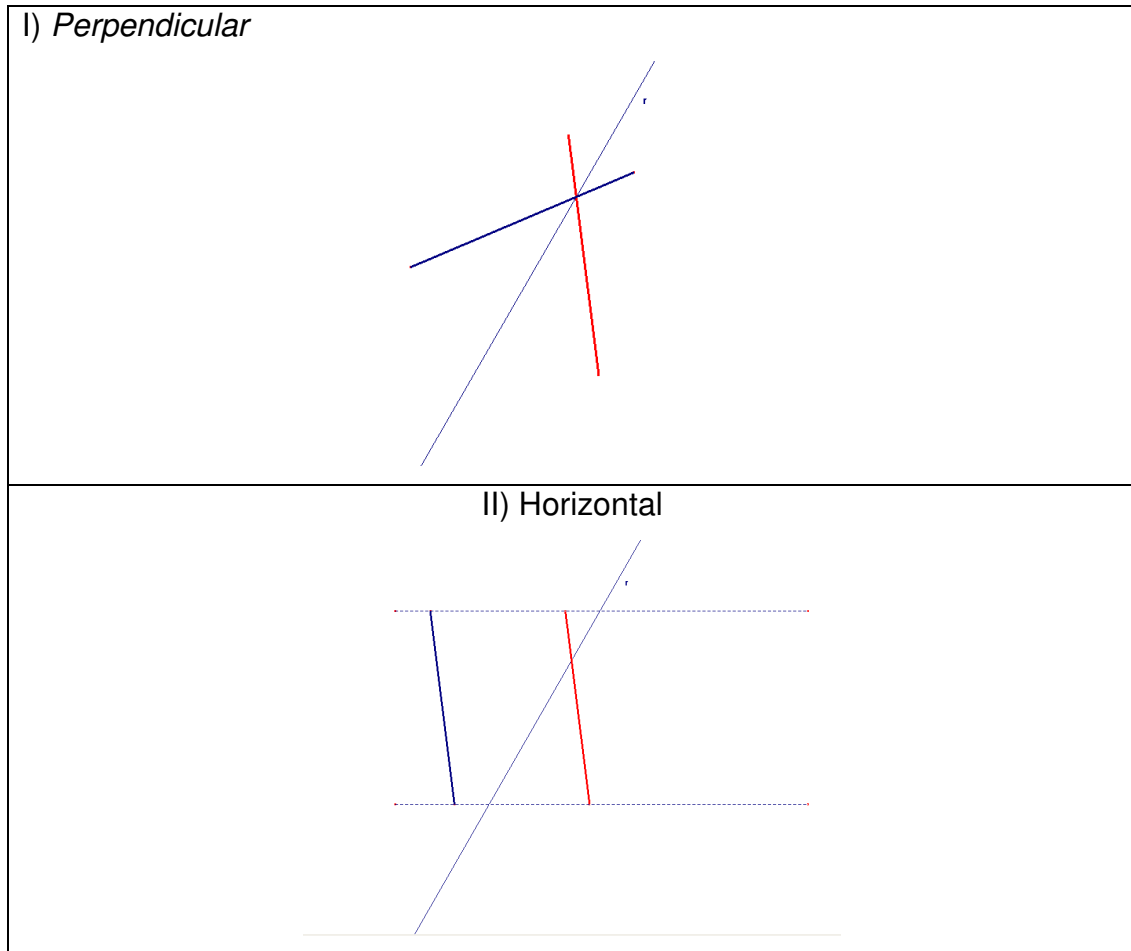


Figura 13. Problema 5b\_Direção

- Distância ao eixo de simetria:  $\Sigma_{dist}$ ;
- Forma:  $\Sigma_{forma}$ ;
- Tamanho:  $\Sigma_{tamanho}$ .

**Controles ligados à natureza da figura  $F'$ :**  $\Sigma_{natureza\_F'}$ ;  $\Sigma_{segmento}$ ;  
 $\Sigma_{semiplano}$ .

**Controles de paralelismo:**  $\Sigma_{paralelismo\_segmento}$ ;  $\Sigma_{paralelismo\_eixo}$ .

## **CAPÍTULO 4: EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS**

Neste capítulo apresentamos a metodologia adotada na elaboração da pesquisa e no estudo experimental e a análise dos resultados obtidos.

### **4.1. Apresentação do dispositivo experimental**

Nesta pesquisa utilizamos alguns elementos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1992), a saber, as análises preliminares e a priori apresentadas nos capítulos precedentes.

Nas análises preliminares, estudamos alguns elementos do funcionamento do ensino atual no Brasil, a partir dos PCN, guia de Livros Didáticos, BCC-PE e de livros didáticos de matemática, atualmente adotados na região agreste de Pernambuco, onde foi realizada a experimentação. Além disso, apresentaremos os resultados de pesquisas que são relevantes ao nosso estudo.

Os resultados desses estudos subsidiaram a escolha dos problemas propostos aos alunos, cuja análise a priori foi apresentada no capítulo anterior.

Na implementação da experimentação junto aos alunos, expusemos os objetivos e as condições da aplicação do instrumento. Esses alunos são oriundos de escolas das redes pública, municipal e estadual, de ensino da região do agreste do estado de Pernambuco. Esta escolha se justifica pelo fato do projeto estar vinculado a um projeto de pesquisa mais amplo, em desenvolvimento no Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco, que tem como principal objetivo modelizar concepções de alunos do Ensino Básico sobre a simetria de reflexão. Além disso, vale salientar que esta pesquisa é financiada pela Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco – FACEPE, vinculada ao eixo *interiorização*, que prioriza projetos que contribuem para a interiorização das atividades de pesquisa no estado.

A experimentação foi realizada com cinquenta e um alunos do nono ano do ensino fundamental, de quatro turmas distintas, os quais trabalharam individualmente. Em três das turmas nas quais o instrumento foi aplicado o professor

de matemática esteve presente durante a aplicação; em outra turma esteve presente um professor de outra disciplina. A única intervenção realizada na sala foi de uma profissional que trabalha com alunos especiais, já que um dos alunos participantes não falava e nem ouvia. Com isso, foi necessária a presença de uma intérprete.

A escolha do 9º ano como nível escolar a ser estudado se deu pelo fato de que os alunos participantes da pesquisa já haviam estudado a simetria de reflexão nas aulas de matemática ou de Artes.

Os alunos participantes sabiam que se tratava de uma atividade proposta para pesquisa e que não seria utilizada para composição da nota/conceito. Durante a coleta, registramos as observações, consideradas relevantes, dos fatos ocorridos durante a aplicação do instrumento de pesquisa, por meio de registros de observações.

O instrumento aplicado aos alunos foi composto de cinco problemas, sendo dois de reconhecimento do simétrico da figura e três de construção do simétrico da figura. Cada problema foi apresentado em uma folha separada o que facilitou a identificação da utilização, ou não, da dobradura em cada um dos problemas.

Os instrumentos de desenho (régua, compasso, esquadros e transferidor) foram disponibilizados para uso pelos alunos em todos os problemas, no entanto, apenas no último problema foi pedido, no enunciado, para que os alunos construíssem utilizando esses materiais.

Em cada um dos problemas, o enunciado pediu para que o aluno justificasse sua escolha, para os problemas de reconhecimento e para os problemas de construção, o aluno teria que justificar a construção realizada. Entendemos que essas justificativas poderiam auxiliar numa melhor interpretação da identificação de alguns controles mobilizados pelos alunos na resolução do problema.

A experimentação foi realizada em uma única seção e aos alunos trabalharam individualmente. Fizemos essa escolha como finalidade de identificar as concepções de cada aluno, a partir da sua produção escrita (escolhas, construções e justificativas).

Não estabelecemos um tempo para que resolvessem a atividade. Cada aluno respondia e entregava no momento que se sentisse confortável para isso. Esse tempo variou entre 20 a 150 minutos.

De posse das respostas dos alunos, analisamos aspectos referentes a) às construções e identificações realizadas; b) às argumentações; c) aos procedimentos de resolução utilizados pelos alunos.

## 4.2. Análise das Produções dos Alunos

Essa análise foi realizada em termos de problemas. Assim, apresentamos, para cada problema uma tabela de frequência de tipos de respostas dadas pelos alunos. Nos problemas de construção, consideramos uma resposta correta, quando o aluno apresentou explicações que nos permitiram afirmar que a figura fora construída tendo-se por base as propriedades da simetria de reflexão. Dizemos que a figura é aproximadamente correta, quando o enunciado solicitou a utilização do material de desenho e o aluno não os utilizou e construiu uma figura que era perceptivelmente correta.

Como dissemos anteriormente, 51 alunos participaram da experimentação. Porém, na análise, figurará a produção de 50 porque um dos alunos não respondeu os problemas.

### 4.1.1. Problema 1 (Pb triângulo):

*Na situação abaixo construiu-se o simétrico do triângulo azul em relação ao eixo  $t$ . Assinale dentre as alternativas abaixo qual corresponde à construção correta do simétrico da figura azul em relação à  $t$  e justifique a sua escolha:*

a ( )                                  b ( )                                  c ( )

The figure contains three sub-diagrams, each with a vertical axis labeled 't' and a small tick mark at the top. In each diagram, a blue triangle is positioned to the left of the axis. 
   
Diagram a: A red triangle is positioned to the right of the axis, forming a perfect mirror image of the blue triangle across the axis.
   
Diagram b: A red triangle is positioned to the right of the axis, but it is a mirror image of the blue triangle across the axis with a different orientation (it appears to be a reflection across a horizontal axis).
   
Diagram c: A red triangle is positioned to the right of the axis, but it is a mirror image of the blue triangle across the axis with a different orientation (it appears to be a reflection across a diagonal axis).

**Figura 14. Problema 1**

O problema consiste em escolher, entre as figuras candidatas, aquela que é a imagem da figura objeto, em relação ao eixo de simetria dado no problema. As respostas obtidas foram as seguintes:

<b>Tipo de resposta</b>	<b>Frequência (sobre 50)</b>	<b>%</b>
Alternativa a	04	8
Alternativa b (resposta correta)	41	82
Alternativa c	04	8
Alternativas a) e b)	01	2

**Tabela 10. Problema Triângulo\_Tipo de resposta**

Como se pode observar, a maioria dos alunos (82%) respondeu o problema corretamente. A seguir, apresentamos alguns extratos das justificativas dos alunos que escolheram esta resposta:

***a) Problema 1 - alternativa b (resposta correta)***

A seguir, apresentamos as justificativas, mais freqüentes, dos alunos para explicar suas escolhas e alguns elementos de análise.

**A17<sup>15</sup>:** *Porque fica do mesmo jeito frente a frente não muda nada.*

**Análise:** 8 dos 41 alunos argumentaram neste sentido. Entendemos a expressão “frente a frente” como sendo a manifestação do controle de sentido inverso ( $\Sigma\_sentido\ inverso$ ). Por sua vez, a expressão “não muda nada” pode fazer referência ao fato de que a figura conserva suas propriedades. Em outros termos, o triângulo continua sendo o triângulo, mantendo o comprimento dos lados e a medida dos ângulos:  $\Sigma\_forma$  e  $\Sigma\_tamanho$ .

---

<sup>15</sup> Deste ponto em diante, utilizaremos este tipo de nomenclatura para identificar os alunos participantes da pesquisa.

**A40:** *Porque as figuras são iguais, mas estão em posições contrárias.*

**Análise:** 7 dos 41 alunos justificaram assim a escolha. A expressão “as figuras são iguais” se aplica a todas as alternativas, não sendo, portanto, reveladora do controle mobilizado pelo aluno. Entretanto, como no caso precedente, o fato de reconhecerem que as figuras objeto e imagem estão em “*posições contrárias*” revela a mobilização do controle de sentido inverso ( $\Sigma\_sentido\ inverso$ ) como sendo relevante para a escolha feita por esses alunos.

**A23:** *Porque quando está diante de um espelho, fica-se na mesma altura, mas ao inverso da figura ilustrada.*

**Análise:** 6 dos 41 alunos justificaram dessa maneira suas escolhas. A utilização efetiva do espelho pelos alunos, na escolha da figura simétrica, pode ter uma relação direta com o livro didático que utilizam e com a maneira como o professor trabalhou esse conceito na sala de aula. Os 6 alunos que justificaram com a palavra “espelho” não utilizaram efetivamente este para resolver os problemas. Na análise dos livros, verificamos que dos 7 livros que apresentam a simetria de reflexão como sugestão para o ensino escolar, em apenas 3 deles o espelho é utilizado como recurso para auxiliar o aluno na compreensão deste conteúdo. A alegação de “mesma altura” pode estar associada à propriedade de conservação do alinhamento dos pontos pela simetria de reflexão, o que remete aos controles ligados à direção. Além disso, como nos dois casos precedentes, a inversão da figura (orientação dos ângulos) parece ter sido determinante nas escolhas dos alunos, o que remete ao controle  $\Sigma\_sentido\ inverso$ .

**A45:** *Porque tem o mesmo reflexo* e **A6:** *Porque a figura está oposta.*

**Análise:** 6 dos 41 fizeram referência à expressão “mesmo reflexo” e 2 ao fato das figuras estarem opostas. Nossa hipótese consiste no fato de que a escolha pode ter sido influenciada pelo uso de espelho efetivo, ou não. O controle que pode ser considerado como determinante nessa escolha é, mais uma vez,  $\Sigma\_sentido\ inverso$ .



**A1:** *O triângulo vermelho foi construído em relação ao eixo 't', logo o triângulo azul deve estar perfeitamente posicionado em relação ao mesmo eixo. Então são chamados de congruentes.*

**Análise:** 3 dos 41 justificam neste sentido suas respostas. A expressão “perfeitamente posicionado” dá indícios da mobilização do controle de direção ( $\Sigma_{perpend}$  ou  $\Sigma_{hor}$ ) e de igualdade da distância entre as figuras objeto e imagem e o eixo de simetria dado ( $\Sigma_{dist}$ ). A alusão feita pelos alunos à congruência das figuras remete aos controles de conservação de forma (medida dos ângulos) e de comprimento dos segmentos que compõem o triângulo:  $\Sigma_{forma}$  e  $\Sigma_{tamanho}$ .

**A2:** *Quando o plano é dobrado ao meio as figuras ficam iguais.*

**Análise:** apenas um aluno justificou assim sua resposta. Entendemos a referência ao “plano” como sendo uma dificuldade deste aluno com a linguagem matemática. Assim, nossa análise está baseada apenas na escolha da alternativa correta e na sua afirmação de que “dobrado ao meio as figuras ficam iguais”. Mesmo não tendo dobrado a folha de papel sobre o eixo de simetria, essa explicação do aluno pode ser interpretada como uma referência à sobreposição das figuras simétricas por dobradura.

Tendo em vista que os livros didáticos incentivam a utilização da dobradura, fizemos inicialmente a hipótese de que os alunos utilizariam essa técnica, em grande escala, na identificação da figura simétrica. No entanto, isso não se observou nesta experimentação. Um elemento de explicação para esse resultado pode ser dado pelo fato da utilização da dobradura não ter sido explicitada no enunciado do problema, o que pode apontar para a força do Contrato Didático estabelecido (BROUSSEAU, 1998).

**A33:** *Porque eles têm a mesma medida.*

**Análise:** a justificativa deste aluno pode ser interpretada como sendo a manifestação do controle ligado ao comprimento dos segmentos que compõem a figura dada (um triângulo) e seu simétrico:  $\Sigma_{tamanho}$ .

### ***b) Problema 1 - Alternativa a***

Como mostrado na tabela 10, apenas 4 dos 50 alunos que responderam esta questão, deram esse tipo de resposta. Um quinto dos alunos que esta resposta, assinalou, também, a “alternativa b”. Casos como esse serão analisados a seguir.

### ***c) Problema 1 - Alternativa c***

Como explicitado na análise a priori, a escolha desta alternativa pelos alunos, pode estar associada aos controles  $\Sigma$ \_translação e  $\Sigma$ paralelismo\_segmento.

As justificativas dadas pelos alunos foram as seguintes: “as figuras estão emparelhadas”; “porque o reflexo está na forma azul” e “porque são iguais”. Essas afirmativas dos alunos, por si mesmas, não nos permite a identificação dos controles previstos a priori, nem de outros controles que, porventura, eles mobilizaram. Dessa forma, a hipótese inicial não foi confirmada.

É possível que a escolha esteja relacionada à direção dada pelo prolongamento de um dos segmentos da figura ( $\Sigma$ \_prolong), como ilustrado na análise a priori (Cf. figura 3). Dos 5 alunos que escolheram essa alternativa, apenas 1 apresentou elementos, em sua justificativa, que podem ser interpretados como sendo a mobilização do controle acima citado: “eu acho que a resposta certa é a ‘c’ porque a figura estão seguindo pro lado certo”.

### ***d) Problema 1 – “Alternativa a” e “Alternativa b”***

Um aluno (A9) assinalou duas alternativas como resposta, e justificou sua escolha da seguinte maneira: “Eu acho que é certo a letra ‘a e b’, porque o espelho reflete na nossa frente e por trás também fica facilmente de nos ver”. Essa resposta não traz elementos que nos possibilitem afirmar os controles mobilizados por esse aluno. No entanto, indica que, a noção de simetria de reflexão parece estar associada à ideia de uma figura refletida no espelho, embora ainda não tenha consciência de como a imagem seria materializada na folha de papel.

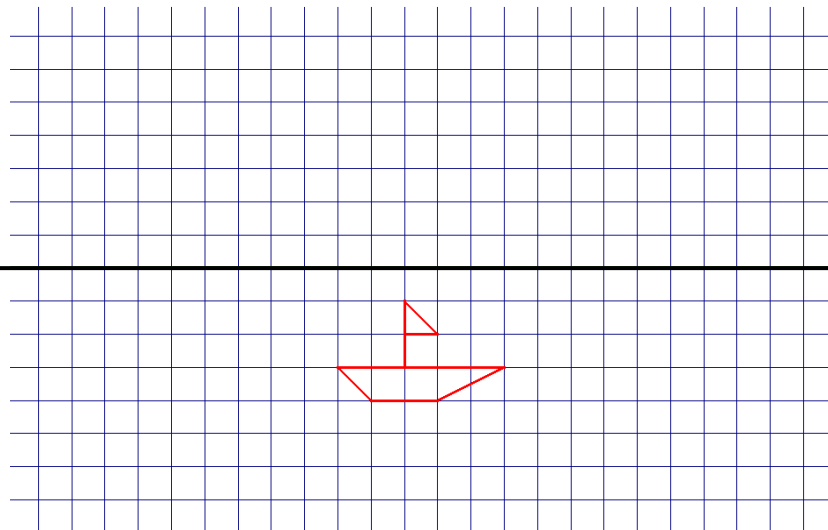
Como podemos observar nas análises acima, a maioria dos alunos que identificaram corretamente a imagem da figura dada por simetria de reflexão justificou suas escolhas baseada no fato de que a imagem da figura dada, por essa

simetria, está refletida como em um espelho. Essa resposta pode ser interpretada pela conservação da orientação dos ângulos da figura inicial. Dessa forma, o controle  $\Sigma\_sentido\ inverso$  foi mais facilmente identificado neste problema.

Como previsto a priori, visto que o eixo de simetria fornecido no problema em análise tem orientação vertical em relação à folha de papel, a identificação entre os controles ligados ao critério de direção seria possível, apenas, a partir das justificativas dos alunos e/ou de marcas realizadas sobre as figuras. Nesta experimentação, as explicações dadas não nos permitiram identificá-los e distingui-los. Dessa maneira, buscaremos encontrar esses elementos de respostas na análise do Pb\_trevo cuja orientação do eixo é oblíqua.

#### 4.1.2. Problema 2 (Pb barco):

*Construa o simétrico da figura vermelha abaixo com relação à reta  $r$  e explique como você fez a sua construção.*



**Figura 15. Problema 2**

Como apresentado na análise a priori, trata-se de um problema de construção de uma figura que representa um objeto familiar (barco) sobre papel quadriculado. O problema é caracterizado, também, pela orientação horizontal do eixo de simetria e pelo fato de a figura fornecida não possuir eixo de simetria. Os resultados obtidos em termos de tipos de respostas são apresentados na tabela seguinte:

<b>Tipo de resposta</b>	<b>Frequência (sobre 50)</b>	<b>%</b>
Figura correta	11	22
Figura incorreta	36	72
Não respondeu	03	06

**Tabela 11. Problema barco\_tipo de resposta**

**a) Problema 2 (Pb\_barco): figura correta**

Apenas 11 dos 50 alunos responderam que construíram a imagem da figura, como solicitado, sobre papel quadriculado. Exemplos de justificativas dadas pelos alunos, bem como a análise em termos de estruturas de controle são apresentadas no quadro a seguir:

**Quadro 7. Problema\_barco - figura correta: justificativas dos alunos**

<b>A8:</b> <i>Para construir a figura contei os números de pontos da figura vermelha e desenhei de forma oposta a imagem vermelha</i>
<b>A16:</b> <i>Eu acho que com o reflexo o eixo parece estar o contrário</i>
<b>A17:</b> <i>Eu acho que eles tem que ficar igual e também muda a simetria que está reta</i>
<b>A18:</b> <i>Eu só mudei a posição e contei os quadradinhos</i>
<b>A19:</b> <i>Porque o barco ficou diferente no espelho</i>
<b>A22:</b> <i>Ela fica de cabeça para baixo porque está num espelho e a foto está na posição para cima e o reflexo fica para baixo.</i>
<b>A24:</b> <i>Porque o espelho está acima dele, aí o desenho tem que ficar de cabeça para baixo</i>
<b>A25:</b> <i>Fiz observando em qual quadrado teria que ficar meu barco e sabendo que teria que ficar virado pro outro barco.</i>

Como se pode constatar, a partir das respostas dos alunos, a construção da figura correta está baseada, em sua maioria, na reflexão da figura através do espelho. A contagem dos quadradinhos, explicitada por alguns alunos, mostra que eles construíram a imagem da figura por meio de um procedimento de contagem. Os demais alunos podem ter construído a figura imagem utilizando um procedimento global, baseado na visualização da figura que lhes é familiar, observando a igualdade de distâncias entre elas e o eixo de simetria.

Dessa forma, interpretamos que esses alunos podem ter mobilizado um controle de distância ( $\Sigma_{distância}$ ), utilizando o procedimento da contagem dos quadradinhos.

Expressões como “mudei a posição”, “cabeça para baixo”, “*sabendo que teria que ficar virado pro outro barco*” e “*desenhei de forma oposta a imagem vermelha*”, utilizadas pelos alunos, indicam a mobilização do controle  $\Sigma_{sentido\ inverso}$ .

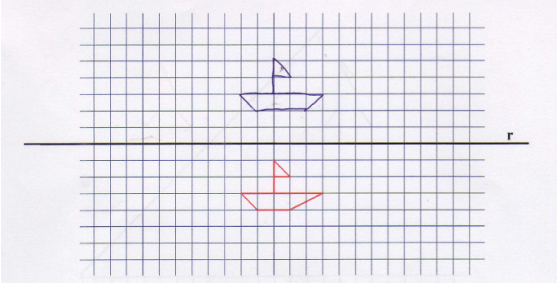
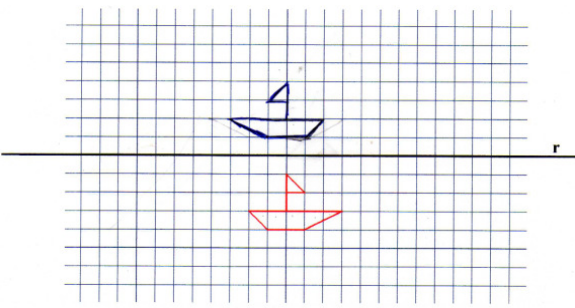
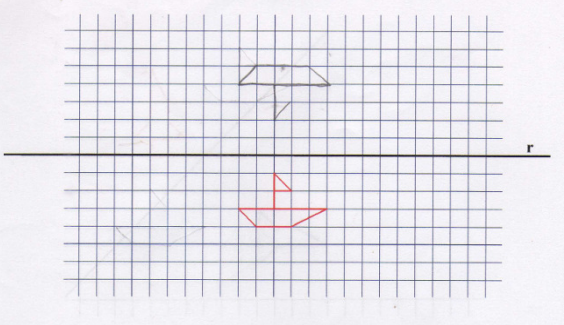
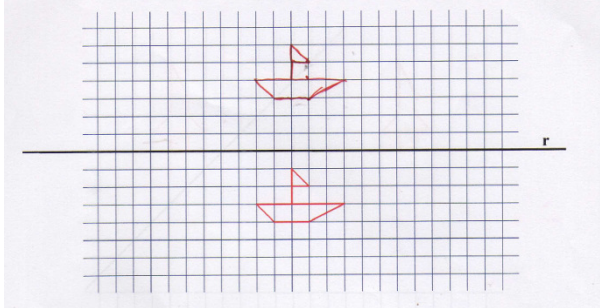
No mais, consideramos que alguns controles ligados aos critérios de direção, à conservação da forma e comprimento dos segmentos e ao controle semiplano podem ter sido mobilizados por estes alunos, como dissemos a priori. No entanto, as respostas obtidas não nos permitem confirmar essa hipótese.

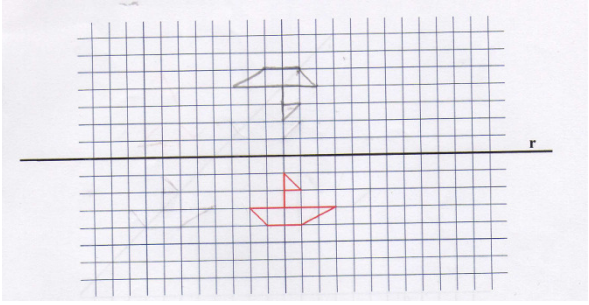
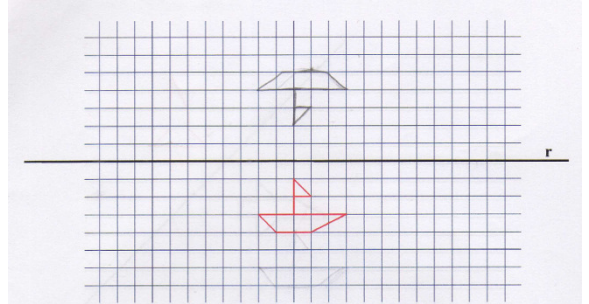
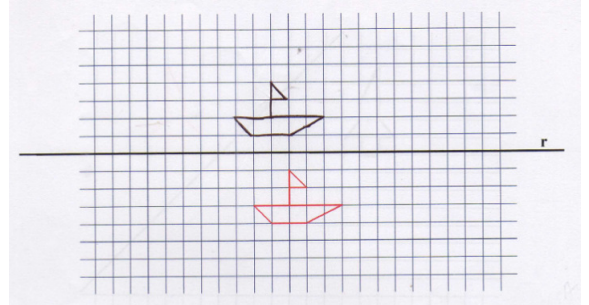
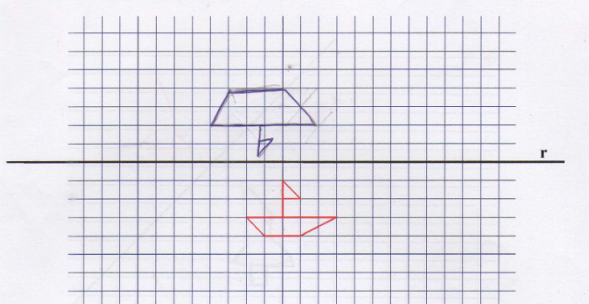
### ***b) Problema 2 (Pb\_barco): figuras incorretas***

Vimos na tabela 11, que 36 alunos construíram figuras incorretas. Vale salientar, no entanto, que todos eles construíram a figura de um barco, quer seja a imagem do barco fornecido no problema ou uma figura aproximada, ainda que não correspondesse à simétrica da figura fornecida.

Diversas construções incorretas foram realizadas pelos alunos e podem ser associadas à concepções diferentes. Buscando ilustrar de forma mais precisa essa afirmação, apresentamos, no quadro a seguir, algumas dessas construções relacionadas às explicações dos alunos e à nossa interpretação, em termos de estruturas de controle.

**Quadro 8. Problema barco: exemplos de construção e explicação dadas e controles identificados**

Construção e explicação do Aluno	$\Sigma$ identificados
<p><b>A28</b></p> 	<p><i>A figura de barco ficou igual a de cima pois estavam alinhada igualmente ou seja na mesma linha geométrica</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\Sigma</math> _prolong</li> <li><math>\Sigma</math> _forma</li> <li><math>\Sigma</math> _tamanho</li> <li><math>\Sigma</math>semi_plano</li> <li><math>\Sigma</math>mesmo_sentido</li> </ul>
<p><b>A30</b></p> 	<p><i>Eu construí o simétrico da figura vermelha acima da reta R porque eu acho que o simétrico é o contrário da figura.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\Sigma</math> _forma</li> <li><math>\Sigma</math> _tamanho</li> <li><math>\Sigma</math>sentido_inverso</li> <li><math>\Sigma</math>semi_plano</li> </ul>
<p><b>A33</b></p> 	<p><i>A figura simétrica existente acima da linha R: existe porque é como se existisse um espelho ai ela está refletindo</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\Sigma</math> _prolong</li> <li><math>\Sigma</math> _forma</li> <li><math>\Sigma</math> _tamanho</li> <li><math>\Sigma</math>semi_plano</li> <li><math>\Sigma</math>sentido_inverso</li> </ul>
<p><b>A34</b></p> 	<p><i>Porque o eixo está no mesmo sentido</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\Sigma</math> _vert</li> <li><math>\Sigma</math> _prolong</li> <li><math>\Sigma</math> _forma</li> <li><math>\Sigma</math> _tamanho</li> <li><math>\Sigma</math>semi_plano</li> <li><math>\Sigma</math>mesmo_sentido</li> </ul>

<p><b>A35</b></p> 	<p><i>Eu construí como se tivesse olhando para o espelho</i></p>	<p><math>\Sigma</math> _prolong  <math>\Sigma</math> _forma  <math>\Sigma</math> _tamanho  <math>\Sigma</math> semi_plano  <math>\Sigma</math> sentido_inverso</p>
<p><b>A36</b></p> 	<p><i>Dobrando a folha, eles ficam quase que posicionado no mesmo lugar e na mesma direção</i></p>	<p><math>\Sigma</math>dobradura_1</p>
<p><b>A40</b></p> 	<p><i>Eu fiz, mas errei na posição era de cabeça para baixo e eu puxei o barco para esquerda</i></p>	<p><math>\Sigma</math> _perpendicular  <math>\Sigma</math> _forma  <math>\Sigma</math> _tamanho  <math>\Sigma</math> semi_plano  <math>\Sigma</math> mesmo_sentido</p>
<p><b>A44</b></p> 	<p><i>O barco ficou de cabeça prá baixo por quê? O reflexo do barco na água fica ao contrário por isso é uma razão do barco ficar de cabeça prá baixo.</i></p>	<p><math>\Sigma</math> semi_plano  <math>\Sigma</math> sentido_inverso</p>

Como se pode verificar, no quadro 8, as explicações dos alunos que construíram as imagens da figura dada de maneira incorreta utilizaram, quase

sempre, o mesmo tipo de argumento. Sendo assim, os controles identificados em função das explicações dos alunos são muito próximos dos identificados na construção das figuras corretas. É, justamente, com base na análise das construções realizadas que os demais foram identificados.

Um dos aspectos que chama a atenção nesta análise é quanto à conservação da igualdade de distância entre os pontos das figuras objeto e imagem e o eixo de simetria. Como previsto na análise a priori, esperava-se que o fato da figura ter sido dada sobre papel quadriculado pudesse favorecer um procedimento de contagem, influenciando de maneira mais efetiva as respostas dos alunos e, conseqüentemente, as concepções por eles mobilizadas. No entanto, os resultados não confirmam essa hipótese, como pode ser comprovado pelo número de figuras incorretas.

O mesmo se observa em relação à conservação da forma da figura e do comprimento dos segmentos. Cerca de um terço dos alunos desenha uma figura diferente da figura do barco fornecida no problema. Esse resultado indica que, mesmo utilizando o papel quadriculado, os alunos desenharam a figura utilizando um procedimento global, sem observar as propriedades de conservação pela simetria de reflexão (igualdade dos pontos, alinhamento dos pontos, medida dos ângulos...).

Vale destacar, porém, que 8 alunos construíram suas figuras muito próximas da resposta correta (A15, A19, A20, A23, A37, A38, A42), sendo o erro caracterizado por alguma imprecisão na figura, não permitindo a identificação dos controles acima citados.

As 8 respostas apresentadas no quadro 8, podem ser divididas em diferentes subgrupos, em função dos controles mobilizados. Se consideramos, por exemplo, a orientação dos ângulos da figura, temos o seguinte resultado em termos de controle:

$\Sigma$  *\_sentido inverso*: alunos A30, A33, A35, A36, A44.

$\Sigma$  *\_mesmo sentido*: alunos A28, A34 e A 40.

Nesse caso, mais alunos sabem que a orientação dos ângulos da imagem de uma figura, por simetria de reflexão, é “oposta” à orientação dos ângulos da figura dada.

Mesmo assim, se quiséssemos caracterizar a concepção desses oito alunos, por esse critério, outros elementos deveriam ser levados em conta. Por exemplo, o



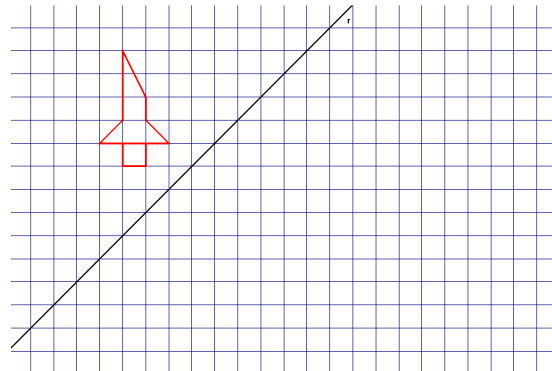
aluno A30 explica sua construção argumentando que “o simétrico é o contrário da figura” e constrói uma figura do outro lado do eixo de simetria, como se correspondesse a uma translação vertical e para cima na folha de papel, invertendo a posição do triângulo que representa a vela do barco. Para ele, é justamente essa “inversão” que determina ser a figura é simétrica da figura dada. Podemos fazer a seguinte hipótese: por ter o barco uma posição prototípica, o aluno não admitiu que o mesmo ficasse de cabeça para baixo.

Essa breve análise mostra que a caracterização da concepção de um sujeito sobre um dado conhecimento é uma tarefa bastante complexa. Isso justifica a nossa decisão de caracterizarmos, apenas, alguns elementos das concepções dos alunos, à luz do quadro teórico de referência.

Por fim, vale destacar, também, a referência ao reflexo na água, bem como à dobradura da folha, embora esta não fora, de fato, efetivada. Esses argumentos indicam que os alunos podem ter mobilizados os seguintes controles:  $\Sigma_{sentido\_inverso}$  e  $\Sigma_{dobradura\_1}$  (ao longo do eixo de simetria dado).

#### 4.1.3. Problema 3 (Pb espada)

*Construa o simétrico da figura vermelha abaixo com relação à reta  $r$  e explique a sua construção.*



**Figura 16. Problema 3**

A diferença deste problema em relação ao anterior se configura, sobretudo, pela orientação oblíqua do eixo de simetria, bem como o fato da figura não ter uma posição prototípica (voltada para cima), como no caso do barco.

As respostas obtidas são apresentadas na tabela a seguir:

<b>Tipo de resposta</b>	<b>Frequência (sobre 50)</b>	<b>%</b>
Figura correta	1	2
Figura incorreta	42	84
Não respondeu	6	12
Abandonou a construção	1	2

**Tabela 12. Problema espada: tipo de resposta**

**a) Problema 3 (Pb\_espada): figura correta**

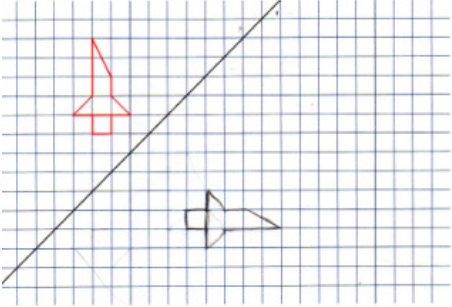
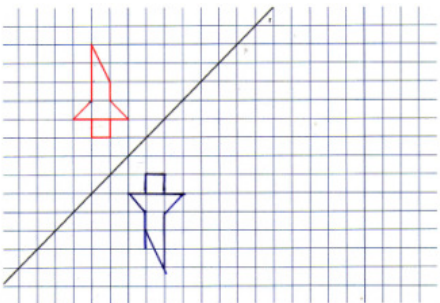
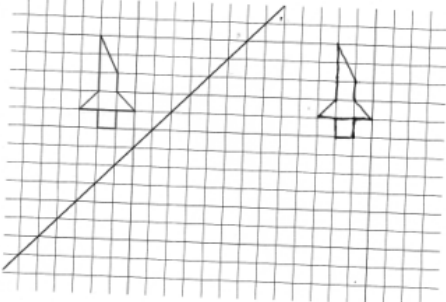
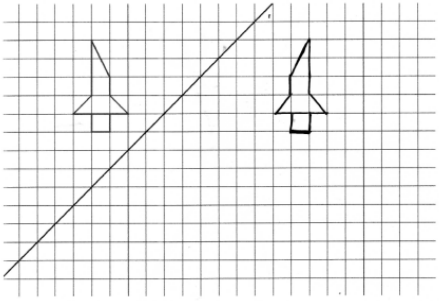
Como se pode observar na tabela 12, a maioria absoluta dos alunos construiu a imagem da figura dada de maneira incorreta.

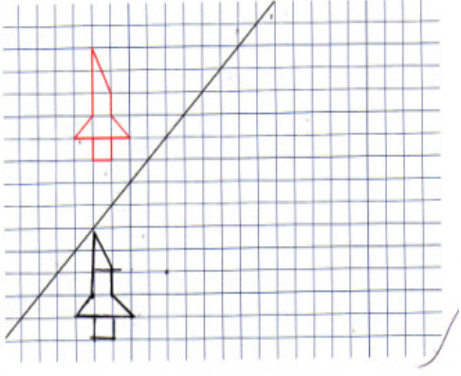
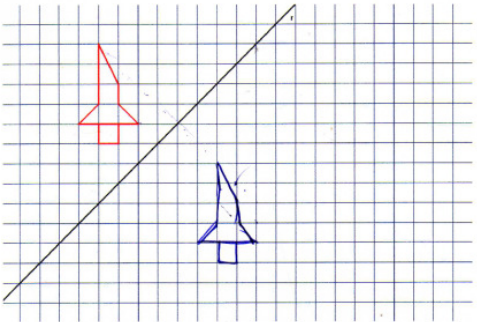
Apenas um aluno (A25) a construiu corretamente e justificou a sua resposta da seguinte maneira: “a mesma resposta do 2º mas é uma espada e não um barco”. Como apresentado no quadro 7, a explicação dada por esse aluno, no problema barco foi: “Fiz observando em qual quadrado teria que ficar meu barco e sabendo que teria que ficar virado pro outro barco”. Mesmo sem deixar marcas efetivas sobre o papel, a partir da explicação apresentada interpretamos que ele utilizou o procedimento de contagem dos quadradinhos para realizar a construção. Assim, os controles passíveis de serem por ele mobilizados são:  $\Sigma$  \_perpend ou  $\Sigma$  \_prolong;  $\Sigma$  \_distância;  $\Sigma$  \_forma;  $\Sigma$  \_tamanho e  $\Sigma$  semiplano.

**b) Problema 3 (Pb\_espada): figuras incorretas**

A tabela 12 mostra que 42 alunos construíram como imagem da figura dada, uma figura incorreta. Como no caso do problema barco, as figuras construídas indicam a mobilização de controles diferentes que, por sua vez, podem caracterizar concepções igualmente diferentes. Segue, portanto, algumas respostas dadas pelos alunos:

**Quadro 9. Problema espada: exemplos de construção e explicação dadas e controles identificados**

Construção e explicação do aluno		$\Sigma$ identificados
<p><b>A33</b></p> 	<p><i>A figura simétrica foi criada com posições diferentes, mas quando se imagina se estivesse olhando no espelho, estão em posições iguais.</i></p>	<p><math>\Sigma_{\text{perpend}}</math>  <math>\Sigma_{\text{direção\_outra}}</math>  <math>\Sigma_{\text{tamanho}}</math>  <math>\Sigma_{\text{forma}}</math>  <math>\Sigma_{\text{semiplano}}</math>  <math>\Sigma_{\text{sentido\_inverso}}</math></p>
<p><b>A23</b></p> 	<p><i>O desenho fica ao inverso no espelho para que fique correto.</i></p>	<p><math>\Sigma_{\text{direção\_outra}}</math>  <math>\Sigma_{\text{tamanho}}</math>  <math>\Sigma_{\text{forma}}</math>  <math>\Sigma_{\text{semiplano}}</math>  <math>\Sigma_{\text{rotação}}</math>  <math>\Sigma_{\text{sentido\_inverso}}</math></p>
<p><b>A34</b></p> 	<p><i>Porque o reflexo do foguete está alinhado</i></p>	<p><math>\Sigma_{\text{hor}}</math>  <math>\Sigma_{\text{tamanho}}</math>  <math>\Sigma_{\text{forma}}</math>  <math>\Sigma_{\text{semiplano}}</math>  <math>\Sigma_{\text{translação}}</math>  <math>\Sigma_{\text{mesmo\_sentido}}</math>  <math>\Sigma_{\text{paralelismo\_segmento}}</math></p>
<p><b>A40</b></p> 	<p><i>Eu construí respeitando a distância, o tamanho e a posição das figuras</i></p>	<p><math>\Sigma_{\text{hor}}</math>  <math>\Sigma_{\text{tamanho}}</math>  <math>\Sigma_{\text{forma}}</math>  <math>\Sigma_{\text{semiplano}}</math>  <math>\Sigma_{\text{translação}}</math>  <math>\Sigma_{\text{sentido\_inverso}}</math></p>

<p><b>A19</b></p> 	<p><i>Eu coloquei porque está de frente ao espelho.</i></p>	<p><math>\Sigma_{\text{vert}}</math>  <math>\Sigma_{\text{tamanho}}</math>  <math>\Sigma_{\text{forma}}</math>  <math>\Sigma_{\text{semiplano}}</math>  <math>\Sigma_{\text{translação}}</math>  <math>\Sigma_{\text{mesmo\_sentido}}</math>  <math>\Sigma_{\text{paralelismo\_segmento}}</math></p>
<p><b>A37</b></p> 	<p><i>Porque tem o mesmo eixo que se diz reflexo.</i></p>	<p><math>\Sigma_{\text{prolong}}</math>  <math>\Sigma_{\text{tamanho}}</math>  <math>\Sigma_{\text{forma}}</math>  <math>\Sigma_{\text{semiplano}}</math>  <math>\Sigma_{\text{translação}}</math>  <math>\Sigma_{\text{mesmo\_sentido}}</math>  <math>\Sigma_{\text{paralelismo\_segmento}}</math></p>

Os exemplos acima são representativos das respostas dadas pelos 42 alunos que construíram a imagem da figura de maneira incorreta.

A orientação oblíqua do eixo de simetria exerceu, provavelmente, um papel fundamental na resposta dos alunos. Esta hipótese é reforçada pelo fato de que a figura dada não ter uma posição prototípica como no caso do barco da atividade anterior. Dessa forma, os alunos se sentiram mais à vontade para desenhá-la em posições diferentes, sem que a concepção mobilizada entrasse em conflito com a posição culturalmente estabelecida, como no caso do barco. Isso pode ser um dos elementos de explicação para o fato de que 10 (dez) dos alunos que construíram corretamente a imagem da figura barco (Pb\_2) erraram esta construção. Esse resultado coloca em evidência a relação que existe entre o problema, descrito em termos de variáveis didáticas e valores a elas atribuídos, e a concepção mobilizada pelo aluno na sua resolução (LIMA, 2006).

Sendo assim, analisamos os exemplos apresentados no quadro 9, de forma pontual, em termos de controles como segue.

O Aluno A33 construiu uma figura bem próxima da resposta correta, porém sem observar a igualdade da distância dos pontos das figuras (objeto e imagem) ao eixo de simetria. Assim, podemos caracterizar a sua concepção pela falta do controle de distância:  $\Sigma_{dist}$ .

Mesmo se tratando de um problema de construção da simétrica da figura com relação a um eixo de simetria dado, o aluno A23 construiu a imagem como sendo por uma rotação em torno de um ponto sobre o eixo dado. Os controles que podem ser a ele atribuídos são:  $\Sigma_{direção\_outra}$ ;  $\Sigma_{tamanho}$ ;  $\Sigma_{forma}$ ;  $\Sigma_{semi\_plano}$ ;  $\Sigma_{rotação}$ ;  $\Sigma_{sentido\_inverso}$ .

Os alunos A34 e A40 parecem ter construído a figura imagem por meio de um procedimento de translação horizontal e para a direita, observando o controle de semi plano (a imagem de uma figura por simetria de reflexão está situada do outro lado do eixo de simetria). O que diferencia a concepção mobilizada por estes dois alunos são os controles ligados ao sentido da figura, nos termos definidos na análise a priori. Assim, enquanto o aluno A34 conservou a orientação dos ângulos da figura objeto, o aluno A40 inverteu essa orientação, o que pode demonstrar que ele conhece essa propriedade de conservação pela simetria de reflexão.

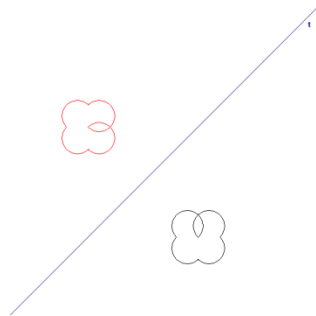
A construção do aluno A34 pode estar associada igualmente ao controle do paralelismo dos segmentos ( $\Sigma_{paralelismo\_segmento}$ ). O mesmo se verifica nos casos dos alunos A19 e A37 cujas construções podem ser descritas como sendo uma translação na direção vertical e para baixo ( $\Sigma_{translação}$ ;  $\Sigma_{vert}$ ), no primeiro caso, e uma translação na direção dada pelo prolongamento de um segmento da figura ( $\Sigma_{translação}$ ;  $\Sigma_{prolong}$ ), no segundo caso. Em ambos os casos, é possível que tenha sido mobilizado o controle ( $\Sigma_{paralelismo\_segmento}$ ). Uma análise da produção dos alunos que deram esses tipos de respostas, problema por problema, se faz necessária para verificar esta hipótese.

No mais, destacamos o seguinte fato: a noção de que uma figura simétrica a um eixo de simetria se reflete como em um espelho é bastante arraigada entre os alunos que participaram da experimentação, podendo ser este um conhecimento trabalhado pelo professor, de maneira mais efetiva, em detrimento das propriedades de simetria.

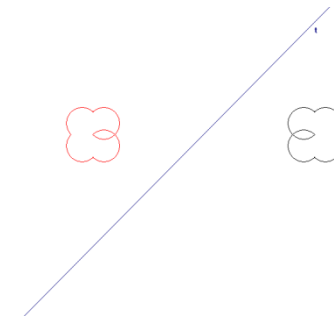
#### 4.1.4. Problema 4 (Pb\_Trevo)

Nesta situação construiu-se o simétrico da figura vermelha em relação ao eixo  $t$ . Assinale dentre as alternativas qual corresponde à construção correta do simétrico da figura vermelha em relação à reta  $t$  e justifique a sua escolha

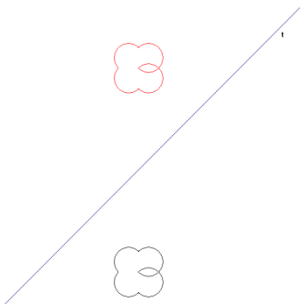
a)



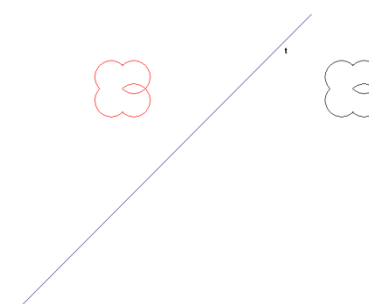
b)



c)



d)



**Figura 17. Problema 4 (Pb Trevo)**

Como se pode constatar, propomos este problema de identificação de figura simétrica, após dois problemas de construção de figuras simétricas sobre papel quadriculado. A finalidade desta escolha foi, sobretudo, observar se a mudança de orientação do eixo de simetria influencia as respostas dos alunos, comparada ao Problema 1. As respostas obtidas foram as seguintes:

<b>Tipo de resposta</b>	<b>Frequência (sobre 50)</b>	<b>%</b>
Alternativa a (resposta correta)	10	20
Alternativa b	18	36
Alternativa c	09	18
Alternativa d	04	08
Alternativas a, b, c e d	01	02
Alternativas b e d	01	02
Não responderam	07	14

**Tabela 13. Problema Trevo: tipos de resposta**

***a) Problema 4 (Pb\_Trevo) - Alternativa a (resposta correta)***

O número de respostas corretas neste problema é relativamente pequeno, se comparado ao problema triângulo. Enquanto 41 responderam àquele problema de forma correta, apenas 10 identificaram a simétrica da figura dada entre as quatro alternativas disponíveis.

As justificativas mais frequentes dos alunos que responderam corretamente foram:

**Quadro 10. Pb\_Trevo (resposta correta): justificativas dos alunos**

<b>A8:</b> <i>Pois quando juntos se encaixam</i>
<b>A24:</b> <i>Porque está inclinado</i>
<b>A33:</b> <i>Porque as figuras mesmo em posições diferentes vistas a frente de um espelho ficam iguais</i>
<b>A35:</b> <i>Porque tem a mesma medida se tivesse olhando no espelho</i>
<b>A37:</b> <i>Porque tem o mesmo reflexo</i>

Essas explicações são muito próximas daquelas dadas pelos alunos ao Pb\_Triângulo. Em outros termos, a maioria dos alunos justificou suas escolhas levando em conta que a imagem da figura, por simetria de reflexão, está refletida

como em um espelho. Interpretamos essa resposta, portanto, como sendo a manifestação do controle  $\Sigma_{sentido\_inverso}$ .

### **b) Problema 4 (Pb\_Trevo) - Alternativa b**

Tendo em vista a inclinação do eixo de simetria, as variáveis didáticas desse problema, em particular a orientação do eixo de simetria, favorece a distinção dos controles ligados à direção perpendicular ( $\Sigma_{perpend}$ ) e horizontal ( $\Sigma_{hor}$ ) ou vertical ( $\Sigma_{Vert}$ ). Assim, a escolha da “alternativa b” pelo aluno dá indícios da mobilização do controle  $\Sigma_{hor}$ .

18 alunos, dentre os 51, escolheram esta alternativa. Apresentamos, a seguir, as explicações mais frequentes para esta escolha:

**Quadro 11. Pb\_Trevo – Alternativa b: justificativas dos alunos**

<b>A1:</b> <i>Porque as imagens são iguais, só estão espelhadas e divididas por um eixo</i>
<b>A2:</b> <i>Quando a figura é dobrada ao meio elas ficam iguais.</i>
<b>A4:</b> <i>É oposta a outra e se dobrar o plano elas se tornam em uma só.</i>
<b>A17:</b> <i>Porque a figura tem que ficar lado a lado</i>
<b>A20:</b> <i>Por causa da imagem igual</i>
<b>A21:</b> <i>Porque ela está de frente prá outra</i>
<b>A22:</b> <i>Por causa do reflexo.</i>
<b>A23:</b> <i>Porque fica ao inverso diante do espelho, eu acho, rs.</i>
<b>A30:</b> <i>Porque eu acho que é o contrário da figura normal.</i>
<b>A40:</b> <i>Porque as figuras são iguais e estão em posições opostas como um reflexo</i>

Além da direção horizontal, as explicações dos alunos apontam para a mobilização dos seguintes controles:

$\Sigma_{forma}$  e  $\Sigma_{tamanho}$ : “imagens iguais”;

$\Sigma_{dobradura\_1}$ : “quando a figura é dobrada ao meio elas ficam iguais”;

$\Sigma_{sentido\_inverso}$  e  $\Sigma_{semi\_plano}$ : “é oposta a outra”, “de frete prá outra”...



**c) Problema 4 (Pb\_Trevo) - Alternativa c**

Esta alternativa se configura, principalmente, por uma translação da figura na direção vertical e para baixo, do outro lado do eixo de simetria. 9 (nove) alunos fizeram essa escolha. As justificativas mais frequentes para a mesma foram:

**Quadro 12. Pb\_Trevo – Item c: justificativas dos alunos**

<b>A14:</b> <i>Porque você desce a figura ela vai ficar igual.</i>
<b>A12:</b> <i>Eu acho que essa é a resposta certa, porque meu reflexo vai ficar reto e não de lado.</i>

Interpretamos esta escolha dos alunos pela mobilização dos controles:  $\Sigma$ \_translação:  $\Sigma$ \_vert e  $\Sigma$ semi\_plano.

**d) Problema 4 (Pb\_Trevo) - Alternativa d**

Por sua vez, a “alternativa d” se configura pela translação da figura na direção horizontal e para a direita, do outro lado do eixo de simetria. 9 alunos fizeram essa escolha. 4, dos 9 alunos deram esta resposta, utilizando justificativas muito próximas daquelas apresentadas “na alternativa c” . Assim, associamos a esta escolha os seguintes controles:  $\Sigma$ \_translação:  $\Sigma$ \_hor e  $\Sigma$ semi\_plano.

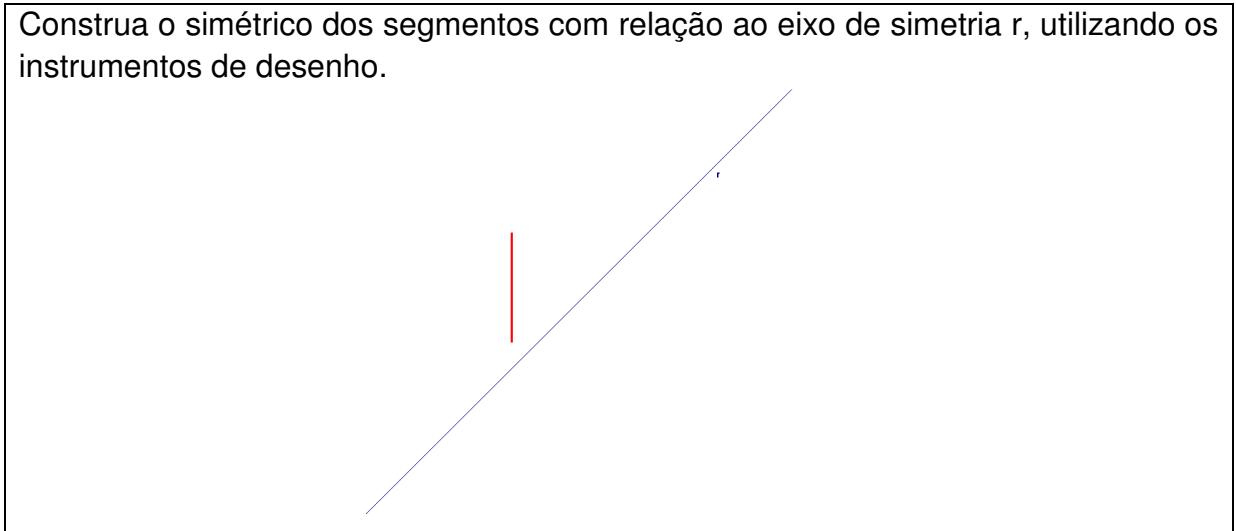
Além disso, um dos alunos assinalou duas alternativas (como ocorrido no Pb\_triângulo). Outro aluno assinalou todas as alternativas. No entanto, não dispomos de elementos de análise que nos permitam afirmar que controles teriam sido por eles mobilizados.

Finalizando a análise deste problema, confirmamos a sua relevância no instrumento de coleta de dados, tendo em vista as variáveis e valores adotados, sobretudo, no que concerne à orientação do eixo de simetria. De fato, a distinção entre os controles ligados à escolha de uma direção pelo aluno foi favorecida pela inclinação do eixo de simetria. Confirmando resultados de pesquisas precedentes (GRENIER & LABORDE 1987; TAHRI 1993), observamos que a escolha de uma direção vertical e horizontal foi privilegiada pelos alunos, influenciando de forma

relevante as concepções que mobilizaram na resolução de problemas de simetria de reflexão.

#### 4.1.5. Problema 5a (Pb\_Segmento vertical)

Construa o simétrico dos segmentos com relação ao eixo de simetria  $r$ , utilizando os instrumentos de desenho.



**Figura 18. Problema 5a (Pb Segmento vertical)**

Para auxiliar a construção, foi pedido aos alunos que utilizassem os instrumentos de desenho (régua graduada, compasso, esquadros...), na resolução. Assim, com essa escolha, buscou-se favorecer a utilização de um procedimento analítico de construção: construir as extremidades do segmento  $e$ , a partir desses pontos, construir o segmento simétrico. Nossa hipótese foi a de que esse tipo de procedimento pode favorecer a explicitação de controles ligados às propriedades da simetria como, por exemplo, perpendicularidade da reta suporte dos pontos objeto e imagem e o eixo de simetria. As repostas obtidas neste problema são as seguintes:

<b>Tipos de resposta</b>	<b>Frequência (sobre 50)</b>	<b>%</b>
Figura correta	—	---
Figura incorreta	41	82
Não respondeu	09	18

**Tabela 14. Problema segmento vertical: tipos de resposta**



**a) Problema 5a: figura correta**



Como mostra a Tabela 14, nenhum aluno construiu o simétrico do segmento corretamente. Uma explicação para este resultado pode ser a dificuldade que os alunos têm em utilizar os instrumentos de desenho. Apenas 2 alunos tentaram dobrar o papel sobre o eixo de simetria, o que não foi plenamente efetivado.

**b) Problema 5a: figura incorreta**

O quadro 12 mostra as construções e as respostas mais frequentes dos alunos.

**Quadro 13. Problema segmento vertical: exemplos de construção e explicação dadas e controles identificados**

Construção e explicação do aluno		Σ identificados
<p><b>A23</b></p> 	<p><i>Construí o simétrico igual ao eixo vermelho, mas fica inverso no espelho.</i></p>	<p>Σdireção_outra Σ_tamanho Σsemi_plano Σparalelismo_segmento</p>
<p><b>A8</b></p> 	<p><i>Imaginei a imagem do outro lado em uma posição em que pudesse se encaixar.</i></p>	<p>Σ_perpend Σ_tamanho Σsemi_plano</p>

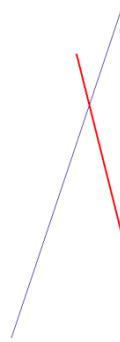
<p><b>A37</b></p> <p>a)</p> 	<p><i>Se tem o mesmo reflexo.</i></p>	<p><math>\Sigma_{\text{prolong}}</math>  <math>\Sigma_{\text{semi\_plano}}</math>  <math>\Sigma_{\text{paralelismo\_segmento}}</math></p>
<p><b>A28</b></p> <p>a)</p> 	<p><i>Todas direções iguais são simétricas.</i></p>	<p><math>\Sigma_{\text{hor}}</math>  <math>\Sigma_{\text{semi\_plano}}</math>  <math>\Sigma_{\text{paralelismo\_segmento}}</math></p>

Como dissemos, os exemplos que apresentamos no Quadro 12 são representativos das construções e explicações dadas pelos alunos. A maioria dos alunos desenhou um segmento de mesmo comprimento (ou aproximado) e paralelo ao segmento dado. Esses segmentos foram traçados a partir da escolha da direção horizontal ou vertical ou no prolongamento do segmento dado. O segmento traçado, por exemplo, pelo aluno A37, poderia ser interpretado como sendo a rotação do segmento dado, em torno de um ponto do eixo de simetria. No entanto, o fato de não ter conservado o comprimento do segmento e a sua explicação que as figuras “*tem o mesmo reflexo*” dão indícios de que se trata da construção da imagem, na direção dada pelo prolongamento do segmento. Sendo assim, os controles passíveis de mobilização, em cada construção, estão listados no Quadro 12, ao lado de cada construção.

Dessa análise, concluímos que os alunos tiveram, de fato, dificuldade com a utilização dos instrumentos de desenho, o que não favoreceu a identificação dos controles previstos.

#### 4.1.6. Problema 5b (Pb\_Segmento Oblíquo)

Construa o simétrico dos segmentos com relação ao eixo de simetria  $r$ , utilizando os instrumentos de desenho.



**Figura 19. Problema 5b (Pb Segmento Oblíquo)**

Com este problema de construção do simétrico de um segmento em papel branco (liso), intentamos comparar os resultados obtidos em Pb\_Barco, Pb\_Espada e Pb\_Segmento Vertical, problemas de construção de figura simétrica nos quais não há contato entre o eixo de simetria e a figura.

Como conjecturamos, na análise daqueles problemas, os resultados mostraram que o controle semiplano parece ter influenciado a resposta dos alunos, tendo em vista que os alunos não construíram as figuras imagens no mesmo semiplano da figura objeto, como previsto a priori. Para auxiliar a construção, foi pedido aos alunos que utilizassem os instrumentos de desenho (régua graduada, compasso, esquadros...), na resolução. Assim, com essa escolha, buscou-se favorecer a utilização de um procedimento analítico de construção: construir as extremidades do segmento e, a partir desses pontos, construir o segmento simétrico. Nossa hipótese foi a de que esse tipo de procedimento pudesse favorecer a explicitação de controles ligados às propriedades da simetria como, por exemplo, perpendicularidade da reta suporte dos pontos objeto e imagem e o eixo de simetria.

As repostas obtidas neste problema foram as seguintes:

<b>Tipo de resposta</b>	<b>Frequência (sobre 50)</b>	<b>%</b>
Figura correta	02	4
Figura incorreta	33	66
Não respondeu	15	30

**Tabela 15. Problema Segmento Oblíquo: tipos de resposta**

***a) Problema 5b (Pb\_Segmento Oblíquo): figura correta***

Como mostra a Tabela 15, 2(dois) alunos construíram o simétrico do segmento corretamente. Apenas 1 pareceu ter dobrado o papel sobre o eixo de simetria.

A25: Coloquei a reta como se estivesse na frente de um espelho.
---




A36: Dobrando a folha ele ficaria posicionado mais ou menos nesta posição.
--

Analisando as justificativas dos alunos que acertaram este problema, observamos que, mais uma vez, a palavra espelho apareceu na justificativa do A25, aparentando ter sido utilizada como um recurso para resolver o problema. Nesse caso, devido ao fato do eixo de simetria estar orientado em relação à folha de papel como oblíquo, podemos interpretar sobre os possíveis controles que o aluno A25 pode ter mobilizado, são eles:  $\Sigma$  \_perpend;  $\Sigma$  \_distância;  $\Sigma$  \_forma;  $\Sigma$  \_tamanho e  $\Sigma$ semi\_plano. Já o aluno A36 pode ter mobilizado os controles do A25, como também o controle  $\Sigma$  \_dobradura\_1.

**b) Problema 5b (Pb\_Segmento Oblíquo): figura incorreta**

O Quadro 14 apresenta as construções e as respostas mais frequentes dos alunos.

**Quadro 14. Problema Segmento Oblíquo: exemplos de construção e explicação dadas e controles identificados**

Construção e explicação do aluno		Σ identificados
<p><b>A20</b></p> <p>b)</p> 	<p><i>Porque a linha R corresponde a um espelho.</i></p>	<p>Σdireção_outra Σparalelismo_segmento Σsemiplano</p>
<p><b>A33</b></p> <p>b)</p> 	<p><i>Porque o eixo da figura fica em lugar diferente.</i></p>	<p>Σ_perpend Σ_dist Σsemi_plano</p>
<p><b>A16</b></p> <p>b)</p> 	<p><i>Com o espelho o eixo parece estar ao contrário.</i></p>	<p>Σdireção_outra Σparalelismo_segmento Σsemi_plano</p>

Como dissemos, os exemplos que apresentamos no Quadro 13 são representativos das construções e explicações dadas pelos alunos. Ao contrário do Pb\_Segmento Vertical, a maioria dos alunos não construiu o segmento de mesmo comprimento (ou aproximado) e paralelo ao segmento dado. Apenas 15 dos alunos pareceram mobilizar os controles  $\Sigma$ \_forma;  $\Sigma$ \_tamanho. Poucos segmentos foram traçados a partir da escolha da direção horizontal ou vertical ou no prolongamento do segmento dado. Apenas 2 alunos parecem ter mobilizado o controle  $\Sigma$ \_hor e 3  $\Sigma$ \_vert. Os alunos A20 e A16 justificaram com a palavra espelho, e o espelho parece tê-los ajudado no sentido inverso do segmento, em relação ao segmento objeto, ignorando o eixo de simetria.

Dessa análise, concluímos que os alunos tiveram, de fato, dificuldade com a utilização dos instrumentos de desenho, o que não favoreceu a identificação dos controles previstos. Além disso, as dificuldades apresentadas, na construção de uma figura complexa (formada por vários segmentos) em papel quadriculado e de uma figura simples (um segmento) em papel branco, foram praticamente as mesmas.



## **CAPÍTULO 5: DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Esta pesquisa teve por objetivo identificar elementos de concepção de alunos do nono ano (oitava série) do ensino fundamental, em relação à noção (ou conceito) de simetria de reflexão.

Para isso, apoiamo-nos em outros estudos como o de Grenier (1988) e Lima (2006). Grenier estudou a concepção do aluno sobre a simetria de reflexão, fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais, utilizando, nos problemas, apenas figuras simples (ponto e segmento de reta). Já Lima, além de trabalhar com figuras simples, utilizou também figuras complexas, uma vez que seu objetivo era identificar concepções para subsidiar a investigação sobre a tomada de decisão didática do professor.

Como forma de dar continuidade à pesquisa realizada por Lima, estudamos a simetria do ponto de vista do ensino básico no Brasil. Este contexto é diferente dos trabalhos de Grenier (1988) e Lima (2006), os quais foram realizados na França, buscou responder a seguinte questão: *“Que concepção ou elementos de concepção o aluno do ensino fundamental mobiliza quando resolve um problema de simetria de reflexão?”*

### **5.1. Os documentos analisados**

Foram analisados documentos como: a) o PCN, para apontar qual o ciclo no qual a simetria é orientada para ser ensinada como objeto de estudo; b) a BCC, para verificar se há orientações do ensino da simetria para as escolas públicas; c) o PNLD, para identificar a existência, ou não, de orientações sobre o ensino da simetria; d) os livros didáticos que, associados à modelização já realizada em Lima (2006), forneceram elementos para a construção do instrumento diagnóstico.

Nos PCN (1997/8) a análise foi realizada do 1º ao 4º ciclo e constatamos que, no 1º ciclo, a simetria ainda não é um objeto de estudo em si mesma, mas deve ser enfocada como uma característica da figura (algo presente ou não na figura), dando

suporte ao entendimento de formas geométricas. No 2º ciclo, a simetria ainda não é um objeto de estudo em si mesma, como no 1º ciclo, ela funciona como um recurso, na busca de compreender se figuras possuem ou não as mesmas formas. Neste caso, a simetria deve ser abordada no sentido de auxiliar o aluno, por exemplo, na identificação de semelhanças e diferenças entre polígonos, podendo auxiliá-los, ainda, os alunos na comparação de figuras que têm, ou não, a mesma forma. A partir do 3º ciclo aparecem as orientações para ensino da simetria como transformação geométrica. Apontar se uma figura é simétrica, ou não, não corresponde a dizer que houve transformação geométrica, fato esse que acontece no 1º e 2º ciclos. O estudo da simetria, a partir do 3º ciclo, deve passar do nível de visualização de figuras e da percepção, para um nível de maior complexidade, ou seja, um nível de transformação, no qual as figuras são reconhecidas pelos alunos por suas propriedades e pelas relações entre os seus atributos (perímetro, área, quantidade de lados). No 4º ciclo, assim como no 3º, os PCN propõem que o conceito de congruência de figuras planas seja abordado a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composição destas), a fim de identificar as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície). Assim, a partir do exposto, foi possível tomar a decisão de realizar o estudo com os alunos do 4º ciclo, visto que o nosso objetivo foi trabalhar em um contexto onde a simetria fosse sugerida como um objeto de estudo.

Na BCC (2008), a simetria foi sintetizada em um parágrafo, com sugestões de atividades, que buscavam favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas. Com isso, foi possível verificar que existem orientações de ensino da simetria para o ensino básico na Rede Pública Estadual de Ensino em Pernambuco, o que possibilitou a validação do contexto, previamente escolhido, para o estudo de caso.

No PNLD (2008), foram apontadas algumas limitações, sobre a simetria no Ensino Fundamental, que merecem atenção para uma melhor aprendizagem do conceito, são elas:

- a. *São consideradas, de forma indiscriminada, as noções de “figura simétrica” e de “simétrico de parte de uma figura”;*
- b. *Identificam-se figuras simétricas pela visualização de representações (fotos, desenhos etc.) de objetos tridimensionais. Falando-se, nesses casos, de “eixo de*

*simetria”, sem que fique claro que tal eixo pode existir numa representação plana do objeto, mas que, no espaço tridimensional, haveria não um eixo, mas um plano de simetria;*

*c. Representação plana considerada com perspectiva do objeto espacial, na qual o possível plano de simetria corresponde a uma reta que não é, sequer, um eixo de simetria do desenho do objeto;*

*d. O estudo da simetria isolado dos demais conteúdos matemáticos de outros campos do conhecimento.*

Dentre as recomendações encontradas no PNLD (2008), foram elencadas algumas, segundo os objetivos desta pesquisa, para análise dos livros didáticos.

Nos livros didáticos, a análise foi realizada, em termos de variáveis didáticas, somente nos livros de 3º e 4º ciclos, das coleções selecionadas. Antes desta, constatamos pouca ênfase, nas coleções, sobre o estudo da simetria. Das 7 coleções analisadas, em 3 delas, não constatamos a presença do conteúdo de simetria proposta para o ensino escolar. Das 4 coleções, nas quais identificamos a simetria como proposta de ensino, num total de 16 livros, apenas em 7 destes identificamos a presença da simetria. Verificamos que, dos 7 livros onde a simetria aparece, o único livro do 9º ano, em que consta a simetria de reflexão, não apresenta atividades para o aluno, pois neste o foco das transformações geométricas remete a homotetia. Nos 7 livros analisados, foram identificados 68 problemas das diferentes isometrias (reflexão, rotação e translação) e constatamos que 51 destes eram de simetria de reflexão axial (reflexão no eixo). Dos 51 problemas, 31 estão concentrados no 7º ano. Da análise realizada nos livros, em termos de variáveis didáticas, encontramos os mesmos tipos de problemas, já identificados por Lima (2006), a saber: a) problemas de construção; b) problemas de reconhecimento.

Constatamos que, em nenhum dos livros, as atividades sugerem o uso do material de desenho. Isso pode levar o aluno a não explicitar a mobilização de alguns controles mobilizados por meio dos procedimentos analíticos. Constatamos, na análise dos livros que apenas 2, dos 68 problemas de simetria, são de reflexão no espaço tridimensional.

## 5.2. As produções dos alunos

As produções dos alunos foram analisadas a partir da relação entre os problemas propostos para resolução, os índices de acertos e os controles mobilizados pelos alunos para resolução dos problemas. Esses aspectos esses que foram analisados à luz das variáveis didáticas que, segundo dados da análise *a priori*, poderiam influenciar na concepção do aluno sobre simetria de reflexão. Para tanto, foram adotadas as variáveis didáticas apresentadas no estudo de Lima (2006), como exposto na análise dos LD.

Analisando-se individualmente cada problema, pode-se observar que, no Pb\_triângulo, a maioria dos alunos que identificaram, corretamente, a imagem da figura dada por simetria de reflexão justificou suas escolhas baseada no fato de que a imagem da figura dada, por esta simetria, está refletida como em um espelho. Interpretamos esta resposta pela conservação da orientação dos ângulos da figura inicial, como também pela mobilização do controle forma e tamanho. Desta maneira, o controle  $\Sigma\_sentido\ inverso$  foi mais facilmente identificado neste problema.

No Pb\_barco, um dos aspectos que chamou atenção, nesta análise, refere-se à conservação da igualdade de distância entre os pontos das figuras objeto e imagem e o eixo de simetria. Como previsto na análise *a priori*, esperava-se que o fato da figura ter sido dada sobre papel quadriculado pudesse favorecer um procedimento de contagem, influenciando de maneira mais efetiva as respostas dos alunos e, conseqüentemente, as concepções por eles mobilizadas. No entanto, os resultados não confirmam essa hipótese, como ficou comprovado pelo número de figuras incorretas. No Pb\_espada, entretanto, a orientação oblíqua do eixo de simetria exerceu, provavelmente, um papel fundamental na resposta dos alunos. Os alunos pareceram se sentir mais à vontade para desenhar a figura em posições diferentes, sem que a concepção mobilizada entrasse em conflito com a posição culturalmente estabelecida, como no caso do barco. Esse resultado coloca em evidência a relação que existe entre o problema, descrito em termos de variáveis didáticas e valores a elas atribuídos, e a concepção mobilizada pelo aluno na sua resolução (LIMA, 2006).

A análise do Pb\_trevo confirmou a sua relevância no instrumento de coleta de dados, tendo em vista as variáveis e valores adotados, sobretudo, no que concerne à orientação do eixo de simetria. De fato, a distinção entre os controles ligados à escolha de uma direção pelo aluno, que foi favorecida pela inclinação do eixo de simetria. Confirmando resultados de pesquisas precedentes (GRENIER & LABORDE 1987; TAHRI 1993), observamos que a escolha de uma direção vertical e horizontal foi privilegiada pelos alunos, influenciando de forma relevante as concepções que mobilizaram na resolução de problemas de simetria de reflexão.

Tanto no Pb\_Segmento Vertical, quanto no Pb\_segmento Oblíquo, os alunos não utilizaram, de fato, todos os instrumentos de desenho, o que não favoreceu a identificação de alguns controles previstos. Além disso, as dificuldades apresentadas na construção de uma figura complexa (formada por vários segmentos), em papel quadriculado, e de uma figura simples (um segmento), em papel branco, pareceram ser praticamente as mesmas. Dessa forma, estas variáveis didáticas, em particular, pareceram não exercer uma influência relevante nas concepções dos alunos.

Analisando-se as produções dos alunos, quanto aos tipos de problemas pôde-se verificar, nos problemas de construção, que as variáveis didáticas que apresentaram valores diferentes foram “natureza da figura” cujo valor é “geométrica usual ou não usual”, pois, no problema\_1, a figura era geométrica usual, enquanto que, no problema\_4, a figura era geométrica não usual. O fato da figura do problema\_4 não ser geométrica usual, poderia explicar a diferença de 82% para 20% no índice de acertos do problema\_1 para o problema\_4, ambos de reconhecimento. Outra variável que também pode ter influenciado na dificuldade de resolução do problema\_4 pelos alunos é a “orientação do eixo de simetria em relação à folha de papel” que, no primeiro, é vertical e, no segundo, oblíquo.

Os problemas de construção apresentaram menor índice de acerto do que os de reconhecimento. Isso comprova os resultados apresentados por Siqueira & Gitirana (2000), em seu estudo sobre a simetria de reflexão axial, no qual os alunos tiveram dificuldade para construir a imagem das figuras. Em relação aos controles mobilizados erroneamente pelos alunos na resolução dos problemas de construção, pode-se citar a recorrência dos controles  $\Sigma$ \_rotação e  $\Sigma$ \_translação. O mesmo fato aconteceu no estudo realizado por Siqueira & Gitirana (2000), em que foi

constatada, em diversas situações, a troca pelos alunos entre a simetria de reflexão e a translação ou rotação.

Analisando-se as produções dos alunos quanto aos índices de acertos pode-se verificar que os problemas de reconhecimento apresentaram maiores índices de acertos (82% e 20%), e os problemas de construção apresentaram os menores índices 22%, 2%, 0% e 4%. Esse fato pode estar relacionado ao tipo de problema, ou seja, à maior complexidade dos problemas de construção. A inferência de que o tipo de papel (quadriculado ou liso) poderia influenciar na construção, não se confirmou neste estudo, visto que os dois primeiros problemas de construção utilizaram papel quadriculado e apresentaram uma diferença significativa dos índices de acerto entre si (22% e 2%, respectivamente).

No problema 5b, de construção de um segmento de reta, apesar de nenhum aluno ter construído corretamente a imagem do segmento, a maioria dos alunos construiu um segmento de mesmo comprimento (ou aproximado) e paralelo ao segmento dado, traçando-o a partir da escolha da direção horizontal ou vertical ou no prolongamento, o que caracteriza a ocorrência de dois dos procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de problemas de construção da imagem de um segmento, em relação a um eixo de simetria, os quais compõe a tipologia proposta por (GRENIER & LABORDE, 1987, p. 71-72): direção por prolongamento e direção horizontal ou direção vertical.

Analisando-se as produções dos alunos, quanto aos controles mobilizados, pode-se observar que o controle  $\Sigma\_sentido\ inverso$  foi mobilizado tanto pelos alunos que acertaram, quanto pelos que erraram. Já os controles de  $\Sigma\_forma$  e  $\Sigma\_tamanho$  foram mobilizados em todos os problemas.

Confrontando-se as inferências feitas, a partir da análise *a priori*, pôde-se verificar que, no problema\_1, foram mobilizados pelos alunos os controles  $\Sigma\_forma$  e  $\Sigma\_tamanho$ , relacionados à conservação da razão de semelhança e tamanho do(s) segmento(s) da figura. No problema 2, o controle que mais pareceu ter sido mobilizado foi o de  $\Sigma\_sentido\ inverso$ , confirmando a hipótese de utilização desse comando para validação da construção. O problema 3 parece ter apresentado maior incidência na mobilização dos controles  $\Sigma\_forma$  e  $\Sigma\_tamanho$ , apesar do fato de que a figura dada em papel quadriculado pode ter favorecido a construção da forma correta da figura, por meio de um procedimento de contagem dos quadradinhos. Na

resolução do problema 4, os alunos parecem ter mobilizado os controles  $\Sigma_{\text{perpend}}$  ou  $\Sigma_{\text{prolong}}$ . Para a resolução do problema 5a parecem ter sido mobilizados frequentemente, os controles  $\Sigma_{\text{tamanho}}$ ,  $\Sigma_{\text{semi_plano}}$  e  $\Sigma_{\text{paralelismo}}$ , no entanto, para a resolução do problema 5b parecem ter sido mobilizados mais frequentemente, os controles  $\Sigma_{\text{tamanho}}$  e  $\Sigma_{\text{semi_plano}}$ . A frequente mobilização de tais controles pode denotar estabilidade de certas concepções mobilizadas pelos alunos, como, por exemplo, o caso do “paralelismo”. Esse fato também foi mostrado nas pesquisas desenvolvidas na Inglaterra (HART, 1981) e na França (GRENIER & LABORDE, 1987; GRENIER, 1988, TAHRI, 1993; LIMA 2006).

### 5.3. Considerações finais

A pesquisa confirma resultados de estudos precedentes como, por exemplo, a constatação de que os alunos mobilizam controles ligados à direção vertical e horizontal, independentemente, da orientação do eixo, exceto nos problemas de reconhecimento. Controles ligados à conservação da forma e tamanho das figuras também foram bastante mobilizados pelos alunos, demonstrando indícios de que as respostas estão baseadas na visualização das figuras.

A variável didática “orientação do eixo de simetria” parece ter influenciado na mobilização dos controles pelos alunos, independentemente, da natureza e da complexidade da figura.

Alguns dados que emergiram, durante a pesquisa, por exemplo: na análise dos protocolos dos alunos, vimos que muitos dos que acertaram, bem como muitos dos que erraram citaram o espelho nas suas justificativas. Isso demonstra que os alunos associam a imagem da figura ou objeto refletida no espelho à simetria de reflexão

Percebemos a necessidade de organizar um novo dispositivo experimental, a fim de se ter acesso aos outros elementos da concepção,  $r$  (operadores) e  $I$  (sistemas de representação) dos alunos. Para isso, será necessária a proposição de um novo instrumento de coleta de dados, utilizando-se de recursos como a gravação de áudios e de vídeos, além de entrevistas.

## REFERÊNCIAS

ALVES, D. S. & GITIRANA GOMES FERREIRA, V. **Simetria axial**: uma seqüência didática para alunos da 6ª série com o uso de software de geometria dinâmica. Recife: UFPE, 2005.

ANDRADE, J. A. A. & NACARATO, A. M. Tendências didático-pedagógicas no ensino de geometria: Um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEM. In: **Educação Matemática em Revista**. Ano 11, nº 17. Recife: SBEM, 2004, p. 61-70.

ARAÚJO, A. J. & GITIRANA GOMES FERREIRA, V. Simetria de Rotação: uma seqüência didática com o Cabri-Géomètre. In: **23a. ANPED - Reunião Nacional de Pesquisadores em Educação**, Caxambu: ANPED, 2000. p.1- 16.

ARTIGUE, Michèle. Didactic Engineering. In: DOUADY, Régine; MERCIER, Alain (ed.). **Research in Didactique of Mathematics**. Grenoble: Editions La Pensee Sauvage, 1992. p.41- 65.

ARTIGUE, Michele. Épistémologie et didactique. **Recherches en didactique des mathématiques**. 10(2/3), p. 241-285, 1991.

BALACHEFF, N. & MARGOLINAS, C. cKç Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In Mercier A. & Margolinas C. (Ed.), **Balises en Didactiques des Mathématiques**, p. 75 – 106. Grenoble : La Pensée Sauvage – Éditions, 2005.

BALACHEFF, N. Conception, Connaissance et Concept. **Didactique et Technologies Cognitives en Mathématiques** - Séminaires 1994-1995. Grenoble: Université Joseph Fourier, 1995.

BALACHEFF, N. Conception, propriété du sujet/milieu. In: Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (ed.) **Actes de la VII° Ecole d'été de didactique des mathématiques** (pp.215-229). Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand, 1995.

BELLEMAIN e LIMA. **Considerações sobre o ensino de grandezas no Ensino Fundamental**. SBHM, Natal, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2008: Matemática/Ministério da Educação**. — Brasília: MEC, 2007. 148 p. — (Anos Finais do Ensino Fundamental)

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, ensino de quinta a oitava séries**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, Ensino de primeira a quarta séries**. Brasília: MEC/SEF, 1997.



BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques**, [Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield], Grenoble : La Pensée Sauvage - Éditions, coll. Recherches en Didactique des Mathématiques, 1998.

CERQUEIRA, A. P. F. **Isometrias**: Análise de documentos curriculares e uma proposta de situações de aprendizagem para o ensino médio. Mestrado profissional, São Paulo: PUC-SP, 2005.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação**: representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

GATTI, B. A. **A construção da Pesquisa em Educação no Brasil**. Brasília: Editora Líber, 2007.

GAUDIN, N. **Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de fonction**. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1, 2005.

GRENIER, D. & LABORDE, C. **Transformations géométriques : le cas de la symétrie orthogonale**. In **Didactique et acquisition des connaissances scientifiques**. Actes du Colloque de Sèvres. Grenoble: La Pensée Sauvage – Éditions, 1987.

GRENIER, D. **Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième**. Thèse d'Université. LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, 1988.

HART, K. M. **Children's understanding of mathematics: 11-16**. Alden Press, Oxford, London, 1981.

JAHN, A. P. **Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre**. Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1998.

LABORDE, J. & BELLEMAIN, F. G. **Cabri-geometry II**. Dallas: Texas Instruments, 1994.

LIMA, I. Concepções de alunos do Ensino Fundamental na resolução de problemas de simetria de reflexão. In: **II Jornada Nacional de Educação Matemática**, 2008, Passo Fundo. Educação Matemática na Atualidade. Passo Fundo: Editora da UPF, 2008. v. único.

LIMA, I. **De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs**: étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale. Thèse d'Université, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2006.

LIMA, I. **Procedimentos de resolução utilizados por alunos do ensino Básico na construção de figuras por simetria de reflexão**. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática - IX ENEM – 2007.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? In: **A educação matemática em revista-SBEM**. n.4, São Paulo, 1995.

MEGA, E. **Ensino/aprendizagem da rotação na 5ª série**: um estudo comparativo em relação ao material utilizado. Dissertação de Mestrado, São Paulo: PUC-SP, 2001.

MIGUEL, A. & MIORIN M. A. **O ensino de matemática no primeiro grau**. São Paulo, Ed. Atual, 1986.

MISKULIN, R. G. S. **Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem da geometria**. Campinas: Unicamp - Tese de Doutorado, 1999.

MIYAKAWA, T. **Une étude du rapport entre connaissance et preuve** : le cas de La notion de symétrie orthogonale. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1, 2005.

NACARATO, A. M. & PASSOS, C. L. B. **A geometria nas séries iniciais**: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. 1ª ed. v.1. São Carlos: Ed. UFRSCar, 2003. p.151.

PAIS, L. C. **Estratégias de ensino de geometria em livros didáticos de matemática de 5ª a 8ª série do ensino fundamental**. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil, 2003.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria no Brasil: Causas e Conseqüências. In: **Zetetiké**. n.1. São Paulo: Unicamp, 1993.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino da geometria para as camadas populares (1º e 2º graus)**. Tese de doutorado. São Paulo, 1991.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: matemática**/Secretaria de Educação. - Recife : SE. 2008. 134p.

RIPPLINGER, H. M. G. **A simetria nas práticas escolares**. Dissertação de mestrado. Curitiba, 2006.

SANTOS, M. & BELLEMAIN, P. M. B. **A área do paralelogramo no livro didático de matemática**. Educação Matemática em Revista. SBEM. Ano 13, nº 23. Recife, 2007.

SILVA JUNIOR & RÉGNIER. J. C. Critérios de adoção e utilização do livro didático de matemática no ensino fundamental do nordeste brasileiro. Estudo exploratório baseado na análise estatística implicativa. In: **IV Encuentro Internacional de Análisis Estadístico Implicativo**. Castellón de la Plana – España, 2007.

SIQUEIRA, J. E. **Explorando a Simetria de Reflexão: uma seqüência didática no Cabri-Géomètre**. 2000. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Licenciatura Em Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco. Orientador: Verônica Gitirana Gomes Ferreira.

TAHRI, S. **Modélisation de l'interaction didactique: un tuteur hybride sur CABRIGÉOMÈTRE pour l'analyse de décisions didactiques**. Thèse d'Université, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1993.

VAZ, R. **O uso das isometrias do software Cabri-Géomètre como recurso no processo de prova e demonstração**. Dissertação de mestrado. São Paulo: PUC-SP, 2004.

VERGNAUD, G. **La Théorie des Champs Conceptuels**, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, n°2.3. 1990. p. 133-170.

### **Manuais Escolares**

**A Conquista da Matemática** - Giovanni/Castrucci/Giovanni Jr - Editora FTD.

**Fazendo a Diferença/Matemática** - Ayrton Olivares/Bonjorno-Editora FTD;

**Matemática e Realidade** - Antonio dos Santos Machado/Gelson Iezzi/Hygino Hugueros Domingues/Osvaldo Dolce - Editora Saraiva;

**Matemática** - Edwaldo Bianchini - Editora Moderna;

**Novo Praticando Matemática** - Álvaro Andrini/Maria José Couto de V. Zampirolo - Editora do Brasil;

**Projeto Araribá/Matemática** - Editora Moderna;

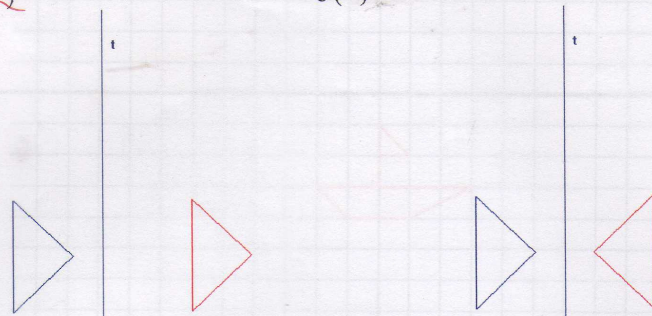
**Tudo é Matemática** - Luiz Roberto Dante -Editora Ática;

# **ANEXOS**

## Anexo 1<sup>i</sup>

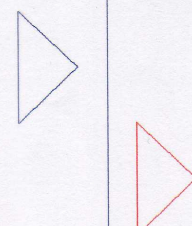
- 1) Na situação abaixo construiu-se o simétrico do triângulo azul em relação ao eixo  $t$ . Assinale dentre as alternativas abaixo qual corresponde à construção do simétrico da figura vermelha em relação a  $t$  e justifique sua escolha.

a  b ( )



EXPLICAÇÃO

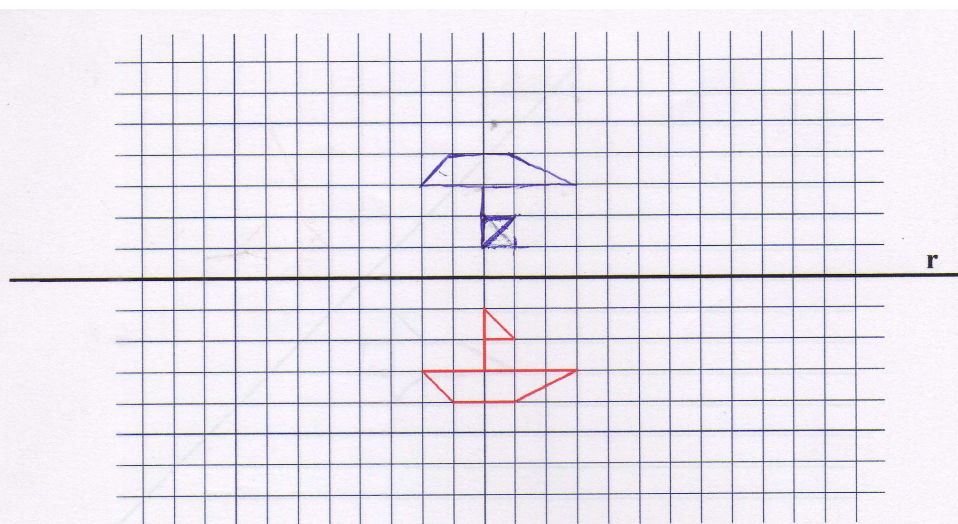
c ( )



JUSTIFICATIVA:

PORQUE O REFLEXO ESTÁ NA FORMA AZUL

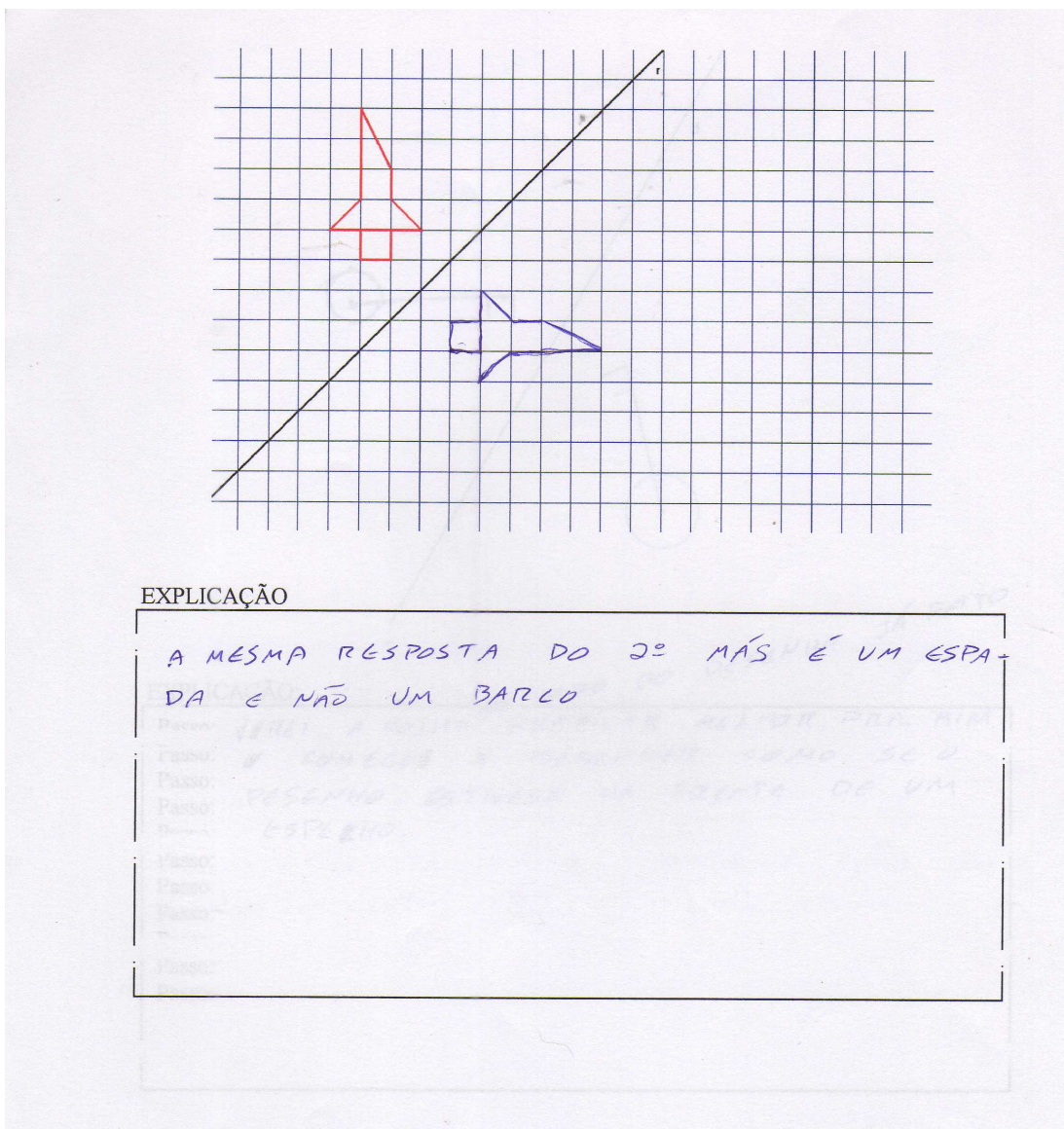
- 2) Construa o simétrico da figura vermelha abaixo com relação à reta  $r$  e explique como você fez a sua construção.



#### EXPLICAÇÃO

FIZ OBSERVANDO EM QUAL QUADRADO TERIA QUE FICAR MEU BARCO E SABENDO QUE TERIA QUE FICAR VIRADO PRO OUTRO BARCO.

- 3) Construa o simétrico da figura vermelha abaixo com relação à reta  $r$  e explique a sua construção.



4) Nesta situação construiu-se o simétrico da figura vermelha em relação ao eixo  $t$ . Assinale dentre as alternativas qual corresponde à construção correta do simétrico da figura vermelha em relação a reta  $t$  e justifique a sua escolha.

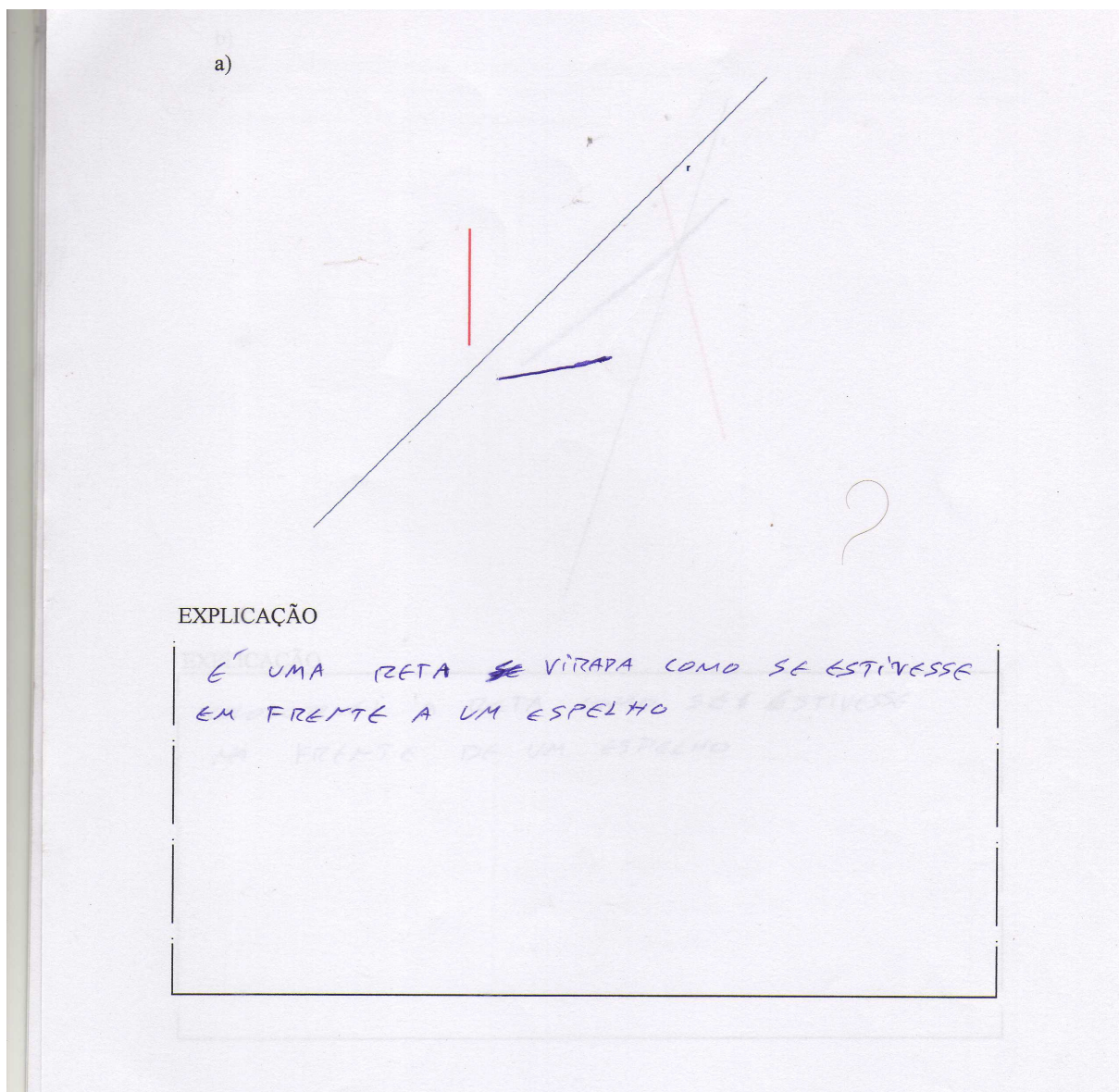
EXPLICAÇÃO

JUSTIFICATIVA

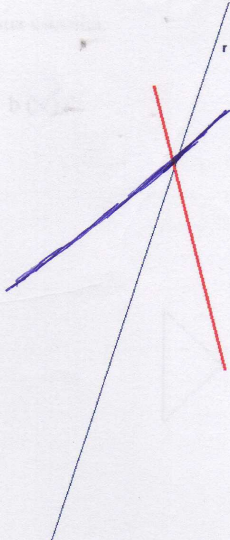
A MINHA ESCOLHA FOI A VERMELHA POR QUE MAIS FIGURAS



- 5) Construa o simétrico dos segmentos com relação ao eixo  $r$ , utilizando os instrumentos de desenho.



b)



EXPLICAÇÃO

COLOQUEI A RETA COMO SE ESTIVESSE  
NA FRENTE DE UM ESPELHO

Muito obrigado!

<sup>i</sup> Protocolo de um aluno participante da pesquisa.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)