

**WILFREDO MONTEALEGRE RUBIO**

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE TRANSDUTORES PIEZELÉTRICOS  
COM GRADAÇÃO FUNCIONAL DE MATERIAL: PROJETO,  
SIMULAÇÃO, ANÁLISE E FABRICAÇÃO**

**São Paulo  
2010**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**WILFREDO MONTEALEGRE RUBIO**

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE TRANSDUTORES PIEZELÉTRICOS  
COM GRADAÇÃO FUNCIONAL DE MATERIAL: PROJETO,  
SIMULAÇÃO, ANÁLISE E FABRICAÇÃO**

**Tese apresentada à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo como  
requerimento para a obtenção do título  
de Doutor em Engenharia.**

**Área de Concentração:  
Engenharia de Controle e Automação  
Mecânica**

**Orientador:  
Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva**

**São Paulo  
2010**

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 11 de fevereiro de 2010

---

Wilfredo Montealegre Rubio

---

Emílio Carlos Nelli Silva

## FICHA CATALOGRÁFICA

**Rubio, Wilfredo Montealegre**

**Otimização topológica de transdutores piezelétricos com gradação funcional de material: projeto, simulação, análise e fabricação / W.M. Rubio. – Ed. Rev. – São Paulo, 2010.**

**298 p.**

**Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.**

**1. Métodos numéricos de otimização 2. Método dos elementos finitos 3. Sensores eletromecânicos 4. Dinâmica das estruturas I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.**

*Aos meus pais, Alfonso e Adonay;  
por sempre me incentivar e lutar  
para que se abrissem as portas  
do meu futuro. Por todo seu  
amor, dedicação, exemplo de  
honradez e trabalho.*

*À minha amada esposa, Belky; pelo  
amor, apoio, incentivo e compreensão  
ao longo desta etapa de nossas vidas,  
sem o qual teria sido uma tarefa impossível.*

*À memória das minhas avós, Isabel  
e Teodolinda, e do meu avô Nicasio*

## AGRADECIMENTOS

A Deus pela saúde e magníficas oportunidades proporcionadas.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva, pela confiança em mim depositada. Mais que um orientador, é mestre, amigo, e guia nas horas de incerteza. Com paciência, auxiliou-me sobremaneira no desenvolvimento da presente tese, demonstrando com o seu exemplo o valor da vida acadêmica.

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), pela concessão da bolsa de estudos ao longo de quatro anos, que viabilizou a minha estada no Brasil.

Ao Prof. Gláucio H. Paulino, com quem tive a ventura de trabalhar e aprender o significado da perfeição, além de enriquecer a minha formação, acadêmica e profissional, com o seu exemplo de vida e significativos aportes à minha pesquisa.

Ao Prof. Flávio Buiochi, grande colaborador nos “meus passos” pela área do ultra-som, com quem aprendi o valor do trabalho em grupo e do trato amistoso que deve prevalecer nas relações profissionais.

Ao meu irmão Alfonso; minhas irmãs, Teodolinda e Nancy; e meus sobrinhos, pelo carinho e apoio sempre incondicional.

Ao meu sogro Israel, Mercedes, Carolina e Lina, que sempre têm representado para mim uma segunda família e têm estado sempre presentes nos momentos mais difíceis.

A meus amigos colombianos no Brasil pelos momentos de entretenimento que desfrutamos juntos e ajuda oferecida oportunamente. Em especial ao *viejo* Ediguer, La Maga, e Mario pela sua valiosa colaboração no desenvolvimento dos testes experimentais.

A meus colegas do grupo de otimização topológica, e de ultra-som; especialmente, ao Fausto pela sua ajuda, orientação e oportunos esclarecimentos das minhas dúvidas relacionadas com o funcionamento da máquina SPS.

## RESUMO

Materiais piezelétricos geram deslocamentos ao serem excitados com potencial elétrico, bem como potencial elétrico ao serem submetidos a força ou pressão. Eles são amplamente utilizados em aplicações relacionadas principalmente com a área de Mecânica de Precisão, Mecatrônica e aquisição de imagens por Ultra-Som. Por outro lado, os Materiais com Gradação Funcional (MGF) são materiais avançados compostos, os quais são projetados de forma que sua composição varie gradualmente numa direção espacial. Esses materiais combinam as vantagens de certas características de cada fase constitutiva; por exemplo, alta resistência à temperatura dos materiais cerâmicos com alta resistência mecânica dos metais. Vários trabalhos têm mostrado as vantagens de aplicar o conceito MGF ao projeto de transdutores piezelétricos. Entre essas vantagens podem-se mencionar: (i) atuadores flexensionais ou bilaminares sem interface entre materiais (ex: PZT e Alumínio); (ii) suavização da distribuição de tensões mecânicas; e (iii) aumento da largura de banda e redução das ondas refletidas em transdutores de ultra-som, principalmente. No entanto, na mesma literatura se observa uma carência de métodos computacionais para a sua modelagem e o seu projeto otimizado e sistemático. Baseado nessas idéias, esta tese propõe a formulação e desenvolvimento de modelos analíticos, algoritmos de elementos finitos, e algoritmos de otimização topológica para projetar Transdutores Piezelétricos com Gradação Funcional (TPGF) inovadores. Adicionalmente, amostras de TPGFs são fabricadas mediante *Spark Plasma Sintering* – SPS, sendo estudado o seu comportamento dinâmico e as suas características micro-estruturais. Assim, através de modelagem, análise, simulação, projeto otimizado, fabricação e caracterização explora-se a potencialidade do conceito de MGF em TPGFs; em particular, evidenciam-se as melhoras que os TPGF podem trazer em aplicações de ensaios não-destrutivos e aquisição de imagens médicas por ultra-som, e no aumento da vida útil de transdutores piezelétricos flexensionais.

## ABSTRACT

Piezoelectric materials generate displacements when they are excited by electrical potential and electrical potential when they are excited by force or pressure. These materials are widely applied in Precision Mechanics, Mechatronics, and Ultrasonic imaging areas. On the other hand, Functionally Graded Materials (FGM) are advanced materials, whose properties change continuously in a specified direction. These materials combine desirable features of their constituent phases; for instance, high temperature resistance typical of ceramics with mechanical strength of metals. Several works have shown the advantages of applying FGM concept to piezoelectric transducer design. These advantages are; for example: (i) flextensional actuators without interfaces (e.g. PZT and Aluminum); (ii) smoothing mechanical stresses; and (iii) increasing bandwidth and reducing reflected waves in ultrasonic transducers. However, in the literature, a lack of computational methods for modeling and systematic designing of Functionally Graded Piezoelectric Transducers (FGPT) is observed. According to above ideas, this work proposes the formulation and development of analytical models, finite element algorithms, and topology optimization algorithms to design novel Functionally Graded Piezoelectric Transducers (FGPT). In addition, FGPT samples are manufactured by using Spark Plasma Sintering – SPS, where it is studied their dynamic behavior and their micro-structural characteristics. Hence, by performing analysis, optimal designing, manufacturing and characterization, the FGM concept potential is explored for FGPTs; particularly, FGPTs can bring advantages in ultrasonic non-destructive testing and ultrasonic medical imaging, and increasing life-time of flextensional piezoelectric transducers.

# SUMÁRIO

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<b>1.</b>	<b>TRANSDUTORES PIEZELÉTRICOS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>Transdutores Piezelétricos .....</b>	<b>2</b>
<b>1.3</b>	<b>Transdutores Piezelétricos com Gradação Funcional .....</b>	<b>6</b>
1.3.1	Materiais com Gradação Funcional .....	6
1.3.2	Transdutores Piezelétricos Baseados no Conceito de MGF .....	8
	Modelagem e simulação de TPGF.....	11
	Fabricação de TPGF .....	16
	Perspectivas atuais no projeto, modelagem e fabricação de TPGF.....	19
<b>1.4</b>	<b>Objetivos .....</b>	<b>21</b>
<b>1.5</b>	<b>Contribuições Científicas .....</b>	<b>23</b>
<b>1.6</b>	<b>Organização da Tese.....</b>	<b>27</b>
<b>2.</b>	<b>MODELAGEM ANALÍTICA E MULTICAMADA DE TPGF: APLICAÇÕES DE ULTRA-SOM .....</b>	<b>28</b>
<b>2.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>28</b>
2.1.1	Introdução à modelagem analítica de TPGF de ultra-som .....	29
2.1.2	Introdução à modelagem multicamada de TPGF de ultra-som .....	32
<b>2.2</b>	<b>Modelagem Analítica de TPGF de Ultra-Som .....</b>	<b>34</b>
2.2.1	Modelagem do disco piezelétrico MGF com gradação linear .....	36
2.2.2	Modelagem da camada de amortecimento .....	41

2.2.3	Modelagem da camada de casamento de impedâncias .....	43
2.2.4	Modelagem do disco piezelétrico MGF com gradação exponencial .	44
2.2.5	Função de Transferência de Transmissão .....	47
2.2.6	Cálculo da impedância elétrica do disco piezelétrico MGF com gradação linear e exponencial.....	47
2.2.7	Modelagem de perdas no TPGF .....	48
<b>2.3</b>	<b>Modelagem Multicamada de TPGF de Ultra-Som .....</b>	<b>49</b>
2.3.1	Número de camadas .....	50
2.3.2	Descrição das funções de gradação .....	52
<b>2.4</b>	<b>Resultados .....</b>	<b>55</b>
2.4.1	Resultados com o Modelo Analítico .....	55
	Impedância elétrica de entrada do disco piezelétrico MGF .....	56
	Resposta Impulsiva .....	56
	Excitação com um pulso elétrico senoidal .....	58
2.4.2	Resultados com a Aproximação Multicamada .....	61
	Impedância elétrica de discos piezelétricos gradados ao longo da espessura .....	62
	TPGF multicamadas em aplicações de ultra-som .....	64
<b>2.5</b>	<b>Considerações finais .....</b>	<b>70</b>
<b>3.</b>	<b>MODELAGEM DE TPGF MEDIANTE O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GRADADOS .....</b>	<b>75</b>
<b>3.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>75</b>
<b>3.2</b>	<b>Soluções das Equações Piezelétricas mediante o MEF .....</b>	<b>76</b>
3.2.1	Análise Estática .....	76
3.2.2	Análise Modal .....	77
3.2.3	Análise Harmônica .....	80
3.2.4	Análise transiente .....	82
<b>3.3</b>	<b>Conceito dos Elementos Finitos Gradados .....</b>	<b>83</b>
<b>3.4</b>	<b>Descrição do Programa <i>piezoEFG</i> .....</b>	<b>85</b>
<b>3.5</b>	<b>Resultados .....</b>	<b>88</b>

3.5.1	Estudo de convergência.....	89
3.5.2	Estudo da mudança seletiva de propriedades.....	92
<b>3.6</b>	<b>Considerações finais .....</b>	<b>100</b>
<b>4.</b>	<b>PROJETO DE TPGF UTILIZANDO O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA .....</b>	<b>102</b>
<b>4.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>102</b>
<b>4.2</b>	<b>Formulações do MOT para o Projeto de TPGF .....</b>	<b>107</b>
4.2.1	Maximização de Autovalores .....	107
4.2.2	TPGF com frequências de ressonância específicas (projeto de ressonadores gradados) .....	109
4.2.3	Maximização do Coeficiente de Acoplamento EletroMecânico (CAEM) .....	110
4.2.4	Maximização da Constante Modal Piezelétrica (CMP) .....	110
4.2.5	Projeto de TPGF banda estreita e TPGF banda larga .....	111
4.2.6	Projeto de TPGF em aplicações de atuador flexensional.....	113
<b>4.3</b>	<b>Problema de Otimização .....</b>	<b>116</b>
4.3.1	Otimização da gradação de material .....	116
4.3.2	Otimização simultânea da gradação de material e topologia da estrutura .....	119
<b>4.4</b>	<b>Implementação Numérica do MOT para o projeto de TPGF .....</b>	<b>122</b>
4.4.1	Aproximação Contínua da Distribuição de Material .....	122
4.4.2	Critério de Garantia Modal .....	124
4.4.3	Técnica de Projeção de Material .....	127
4.4.4	Flexibilidade média .....	129
4.4.5	Problemas de otimização na forma discreta .....	130
4.4.6	Análise de Sensibilidades .....	131
	Sensibilidades para a Maximização de Autovalores (Função Objetivo $F_1$ ) .....	133
	TPGF com frequências de ressonância específicas (Função Objetivo $F_2$ ) .....	134

	Maximização do Coeficiente de Acoplamento EletroMecânico (Função Objetivo $F_3$ ) .....	135
	Maximização da Constante Modal Piezelétrica (Função Objetivo $F_4$ ) .....	136
	Projeto de TPGF banda estreita e TPGF banda larga .....	139
4.4.7	Procedimento para o projeto de TPGF utilizando o MOT .....	139
<b>4.5</b>	<b>Resultados do MOT aplicado ao projeto de TPGF .....</b>	<b>142</b>
4.5.1	Caracterização dinâmica de um transdutor piezelétrico PZT-5A .....	144
4.5.2	Resultados para a maximização de autovalores .....	148
	Maximização de freqüências de ressonância de modos de vibrar específicos .....	148
	Maximização da primeira freqüência de ressonância de TPGF .....	156
4.5.3	Resultados para o projeto de ressonadores gradados .....	158
	Projeto de um TPGF especificando o modo tipo pistão e a sua freqüência .....	158
	Projeto de um TPGF especificando três freqüências e um modo de vibrar .....	161
4.5.4	Resultados de TPGF com CAEMs maximizados .....	163
4.5.5	Resultados de TPGF com CMPs maximizadas .....	165
	Projeto de um TPGF tipo uni-modal .....	166
	Projeto de um TPGF tipo multi-modal .....	167
4.5.6	Resultados de TPGF banda estreita e TPGF banda larga .....	169
	Projeto de um TPGF banda estreita .....	169
	Projeto de um TPGF banda larga .....	171
4.5.7	Resultados para atuadores piezelétricos flexensionais gradados ..	173
<b>4.6</b>	<b>Considerações finais .....</b>	<b>176</b>
<b>5.</b>	<b>FABRICAÇÃO PRELIMINAR DE TPGF .....</b>	<b>181</b>
<b>5.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>181</b>
<b>5.2</b>	<b>Sinterização por Jato de Plasma ou SPS .....</b>	<b>182</b>
<b>5.3</b>	<b>Fabricação de TPGF .....</b>	<b>184</b>

5.3.1	Fabricação .....	184
5.3.2	Caracterização .....	187
	Caracterização microestrutural .....	187
	Caracterização dinâmica: Impedância elétrica .....	194
<b>5.4</b>	<b>Considerações finais .....</b>	<b>195</b>
<b>6.</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>198</b>
<b>6.1</b>	<b>Trabalhos futuros .....</b>	<b>202</b>
<b>7.</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS .....</b>	<b>205</b>
<b>APÊNDICE A: MODELAGEM DE TRANSDUTORES</b>		
<b>PIEZELÉTRICOS UTILIZANDO O MÉTODO DE</b>		
<b>ELEMENTOS FINITOS .....</b>		
		<b>229</b>
<b>A.1</b>	<b>Piezeletricidade .....</b>	<b>229</b>
<b>A.2</b>	<b>Equações do Efeito Piezelétrico .....</b>	<b>231</b>
<b>A.3</b>	<b>Descrição dos Tensores de Material .....</b>	<b>234</b>
A.3.1	Notação reduzida das equações constitutivas .....	234
A.3.2	Efeitos de simetria .....	235
A.3.3	Estado Plano de Tensões Mecânicas .....	238
A.3.4	Estado Plano de Deformações Mecânicas .....	238
A.3.5	Formulação Axissimétrica .....	239
<b>A.4</b>	<b>Formulação Variacional de Problemas Piezelétrico .....</b>	<b>240</b>
<b>A.5</b>	<b>Formulação de Elementos Finitos para Problemas</b>	
	<b>Piezelétricos .....</b>	<b>242</b>
<b>A.6</b>	<b>Elemento Finito Isoparamétrico para Problemas</b>	
	<b>Piezelétricos .....</b>	<b>245</b>
<b>A.7</b>	<b>Características Dinâmicas de Estruturas Piezelétricas .....</b>	<b>250</b>
A.7.1	Impedância Elétrica .....	250

A.7.2	Coeficiente de Acoplamento Eletromecânico .....	252
A.7.3	Constante Modal Piezelétrica .....	253
<b>APÊNDICE B: MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA .....</b>		<b>257</b>
<b>B.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>257</b>
<b>B.2</b>	<b>MOT Aplicado ao Projeto de Transdutores Piezelétricos ...</b>	<b>260</b>
<b>B.3</b>	<b>MOT Aplicado ao Projeto de Estruturas MGF .....</b>	<b>262</b>
<b>B.4</b>	<b>Conceitos Básicos do MOT .....</b>	<b>264</b>
B.4.1	Domínio Estendido Fixo de Projeto .....	264
B.4.2	Modelo de Material .....	265
	Método das Densidades .....	266
<b>B.5</b>	<b>Aspectos Numéricos do MOT .....</b>	<b>268</b>
B.5.1	Não-unicidade da solução .....	268
B.5.2	Dependência de malha .....	269
<b>APÊNDICE C: VERIFICAÇÃO NUMÉRICA DO PROGRAMA</b>		
	<i>piezoEFG</i> .....	<b>272</b>
<b>APÊNDICE D: FABRICAÇÃO DE ESTRUTURAS COM</b>		
	<b>GRADAÇÃO FUNCIONAL .....</b>	<b>276</b>
<b>D.1</b>	<b>Descrição da fabricação .....</b>	<b>276</b>
<b>D.2</b>	<b>Caracterização .....</b>	<b>278</b>
D.2.1	Caracterização microestrutural .....	279
D.2.2	Determinação da dureza, densidade e módulo de Young .....	284
	Dureza Vickers .....	284
	Densidade volumétrica .....	288
	Módulo de Young .....	289
<b>D.3</b>	<b>Validação do programa <i>piezoEFG</i> .....</b>	<b>292</b>
<b>D.4</b>	<b>Considerações finais .....</b>	<b>298</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1.	Exemplos dos diversos tipos de transdutores comumente encontrados na literatura .....	3
Figura 1.2.	Microfotografia de um Material com Gradação Funcional (MGF); especificamente, de um MGF do tipo Tungstênio/cobre (KIEBACK et al., 2003)...	7
Figura 1.3.	Representação de um material piezelétrico (não-MGF) e de um TPGF juntamente com exemplos de leis de gradação de material .....	9
Figura 1.4.	Conceito de materiais MGF em transdutores piezelétricos bilaminares. (a) Sem conceito de material MGF; (b) utilizando o conceito de material MGF.....	10
Figura 1.5.	Conceito de materiais MGF em transdutores piezelétricos de ultra-som. (a) Foto de um transdutor piezelétrico de ultra-som; (b) Esquema do mesmo transdutor de ultra-som com uma piezocerâmica MGF.....	11
Figura 1.6.	Aproximação multicamada da gradação contínua de material: (a) amostragem da gradação contínua da microestrutura de um material MGF; (b) correspondente representação utilizando um modelo de material multicamada ...	14
Figura 1.7.	Fabricação de TPGF: (a) Princípio da sinterização a partir de cerâmicas em verde; (b) técnica de <i>Electrophoretic deposition</i> . .....	17
Figura 1.8.	Fabricação de TPGF: (a) Através de ranhuras com diversos formatos (na figura com formato em V); (b) aplicando um gradiente de temperatura .....	18
Figura 2.1.	Representação esquemática do conceito MGF em transdutores de ultra-som .....	30
Figura 2.2.	Aproximação multicamada de TPGF utilizando diversas leis de gradação .....	32
Figura 2.3.	Diagrama de forças e velocidades atuantes nas interfaces de um TPGF .....	34
Figura 2.4.	Circuito equivalente do TPGF .....	35
Figura 2.5.	Modelo de um TPGF multicamada utilizado para simular a convergência do número de camadas .....	50
Figura 2.6.	Convergência da aproximação multicamadas .....	52
Figura 2.7.	Diversas distribuições de material ao longo da espessura do TPGF, utilizando como exemplo a constante piezelétrica $e_{33}$ .....	53
Figura 2.8.	Diversas distribuições de material na direção radial do TPGF, utilizando como exemplo a constante piezelétrica $e_{33}$ .....	54
Figura 2.9.	Curvas de impedância elétrica do disco piezelétrico MGF e não-MGF .....	56

Figura 2.10.	Resposta impulsiva normalizada na pressão.....	57
Figura 2.11.	(a) Espectro de sinais de entrada com diferente freqüência de excitação; (b) Espectro da Função de Transferência em Transmissão .....	59
Figura 2.12.	Espectro da resposta do transdutor piezelétrico de ultra-som utilizando as entradas elétricas da Fig. 2.11(a). (a) Transdutor piezelétrico não-MGF; (b) TPGF com função de gradação linear; (c) TPGF com função de gradação exponencial .....	59
Figura 2.13.	Comparação entre as curvas de impedância do modelo analítico e da aproximação multicamada .....	62
Figura 2.14.	(a) Curva de impedância elétrica e (b) função de resposta em freqüência (FRF) segundo a modelagem multicamada e várias funções de gradação de propriedades .....	63
Figura 2.15.	Comparação entre o modelo analítico e multicamada da onda de pressão emitida por um transdutor piezelétrico de ultra-som: (a) não-MGF; (b) TPGF utilizando uma função linear .....	65
Figura 2.16.	Resposta de onda de pressão utilizando o modelo multicamada e as funções de gradação ao longo da espessura da Fig. 2.7: (a) <i>função 1</i> ; (b) <i>função 2</i> ; (c) <i>função 3</i> ; (d) <i>função 4</i> .....	65
Figura 2.17.	Frente de onda de pressão propagando-se num fluido utilizando a aproximação multicamada: (a) transdutor não-MGF; (b) TPGF com gradação linear .....	66
Figura 2.18.	Onda de pressão normalizada emitidas pelo TPGF com gradação radial: (a) <i>função 1</i> ; (b) <i>função 2</i> ; (c) <i>função 3</i> ; (d) <i>função 4</i> .....	68
Figura 2.19.	Distribuição espacial instantânea do campo de pressão gerado pelo TPGF considerando gradação radial do tipo <i>função 1</i> .....	69
Figura 2.20.	Distribuição espacial instantânea do campo de pressão gerado pelo TPGF considerando gradação radial do tipo <i>função 2</i> .....	69
Figura 2.21.	Distribuição espacial instantânea do campo de pressão gerado pelo TPGF considerando gradação radial do tipo <i>função 3</i> .....	69
Figura 2.22.	Distribuição espacial instantânea do campo de pressão gerado pelo TPGF considerando gradação radial do tipo <i>função 4</i> .....	70
Figura 3.1.	Excitação elétrica para determinar: (a) freqüências de ressonância; (b) freqüências de anti-ressonância .....	78
Figura 3.2.	Conceito dos EFGs utilizando como exemplo uma variação exponencial de material (figura adaptada de Zhang, Paulino (2007)). (a) Elemento Finito Homogêneo; (b) Elemento Finito Gradado .....	84
Figura 3.3.	Fluxograma do programa <i>piezoEFG</i> .....	86
Figura 3.4.	Elemento finito Q4 para problemas piezelétricos .....	87

Figura 3.5.	Transdutor piezolétrico utilizado para obter os resultados: (a) em análise estática e transiente; (b) em análise harmônica e modal .....	90
Figura 3.6.	Estudo de convergência no valor do deslocamento vertical no extremo livre da viga piezolétrica da Fig. 3.5(a): (a) com EFGs; (b) com a abordagem multicamada .....	91
Figura 3.7.	Estudo de convergência no valor de tensão mecânica $\sigma_{xz}$ no extremo livre da viga piezolétrica da Fig. 3.5(a) (calculada no centro de cada EF): (a) com EFGs; (b) com a abordagem multicamada .....	92
Figura 3.8.	Estudo de convergência no valor de freqüência de ressonância da viga piezolétrica da Fig. 3.5(b): (a) modos de vibrar 1 e 2; (b) modos de vibrar 3 e 4; (c) modos de vibrar 5 e 6 .....	93
Figura 3.9.	Excitação elétrica para o problema transiente apresentado na Fig. 3.12 .....	95
Figura 3.10.	Comparação entre as abordagens por EFGs e multicamada para diversas gradações de propriedades numa análise estática (deslocamento vertical no extremo livre da viga piezolétrica da Fig. 3.5(a)): (a) todas as propriedades de material ( $\mu_1 = 85$ ; $\mu_2 = 322$ ; $\mu_3 = 106$ ); (b) propriedades dielétricas ( $\mu_1 = 0$ ; $\mu_2 = 0$ ; $\mu_3 = 106$ ); (c) propriedades piezolétricas ( $\mu_1 = 0$ ; $\mu_2 = 322$ ; $\mu_3 = 0$ ); (d) propriedades elásticas ( $\mu_1 = 85$ ; $\mu_2 = 0$ ; $\mu_3 = 0$ ) .....	96
Figura 3.11.	Comparação entre as abordagens por EFGs e multicamada para diversas gradações de propriedades numa análise estática (tensão mecânica $\sigma_{xz}$ calculada no centro de cada EF e no extremo livre da viga piezolétrica da Fig. 3.5(a)): (a) todas as propriedades de material ( $\mu_1 = 85$ ; $\mu_2 = 322$ ; $\mu_3 = 106$ ); (b) propriedades dielétricas ( $\mu_1 = 0$ ; $\mu_2 = 0$ ; $\mu_3 = 106$ ); (c) propriedades piezolétricas ( $\mu_1 = 0$ ; $\mu_2 = 322$ ; $\mu_3 = 0$ ); (d) propriedades elásticas ( $\mu_1 = 85$ ; $\mu_2 = 0$ ; $\mu_3 = 0$ ) .....	97
Figura 3.12.	Comparação entre as abordagens por EFGs e multicamada para diversas gradações de propriedades numa análise transiente (deslocamento vertical no ponto A da viga piezolétrica da Fig. 3.5(a)): (a) todas as propriedades de material ( $\mu_1 = 85$ ; $\mu_2 = 322$ ; $\mu_3 = 106$ ); (b) propriedades dielétricas ( $\mu_1 = 0$ ; $\mu_2 = 0$ ; $\mu_3 = 106$ ); (c) propriedades piezolétricas ( $\mu_1 = 0$ ; $\mu_2 = 322$ ; $\mu_3 = 0$ ); (d) propriedades elásticas ( $\mu_1 = 85$ ; $\mu_2 = 0$ ; $\mu_3 = 0$ ) .....	98
Figura 3.13.	Comparação entre as abordagens por EFGs e multicamada para diversas gradações de propriedades numa análise harmônica (deslocamento vertical no ponto A da viga piezolétrica da Fig. 3.5(b)): (a) todas as propriedades de material ( $\mu_1 = 85$ ; $\mu_2 = 322$ ; $\mu_3 = 106$ ); (b) propriedades dielétricas ( $\mu_1 = 0$ ; $\mu_2 = 0$ ; $\mu_3 = 106$ ); (c) propriedades piezolétricas ( $\mu_1 = 0$ ; $\mu_2 = 322$ ; $\mu_3 = 0$ ); (d) propriedades elásticas ( $\mu_1 = 85$ ; $\mu_2 = 0$ ; $\mu_3 = 0$ ) .....	99
Figura 4.1.	Princípio do projeto de TPGF através do MOT .....	103
Figura 4.2.	Princípio de atuadores piezolétricos flexensionais utilizando o conceito MGF.....	114
Figura 4.3.	Esquema do projeto de atuadores piezolétricos flexensionais utilizando o MOT e o conceito MGF, encontrando-se a sua função de gradação e a sua topologia..	115
Figura 4.4.	Problema de otimização tipo multicamada. (a) Gradação ao longo da espessura;	

	(b) gradação na direção radial ou longitudinal .....	117
Figura 4.5.	Representação do modelo de material utilizado no projeto de atuadores piezelétricos flexensionais gradados.....	120
Figura 4.6.	Tipos de elementos finitos utilizados no MOT. (a) Elemento tradicional (variáveis de projeto definidas por elemento); (b) elemento da formulação CAMD (variáveis de projeto definidas por nó) .....	123
Figura 4.7.	Representação da inversão de modos utilizando como exemplo o modo tipo pistão .....	124
Figura 4.8.	Representação esquemática do Modal Assurance Criterion .....	125
Figura 4.9.	Princípio da Técnica de Projeção de Material .....	128
Figura 4.10.	Diagrama de fluxo do procedimento de otimização .....	140
Figura 4.11.	Domínios de projeto fixos. (a) Para o problema das funções objetivo $F_1$ , $F_2$ , $F_4$ , $F_5$ e $F_6$ ; (b) para o problema da função objetivo $F_3$ .....	142
Figura 4.12.	Curva de convergência para determinar o tamanho de malha adequado para as simulações .....	145
Figura 4.13.	Diversos tipos de modo de vibrar para um transdutor piezelétrico uniforme de material PZT-5A, utilizando o programa <i>piezoEFG</i> .....	146
Figura 4.14.	(a) Constante Modal Piezelétrica, (b) Função de Resposta em Frequência (FRF) mecânica axial no ponto central da superfície superior do transdutor piezelétrico uniforme de material PZT-5A .....	147
Figura 4.15.	Histórico de diversas curvas para o TPGF livre-livre. (a) Valor do autovalor; (b) posição do modo desejado; (c) valor do MAC .....	149
Figura 4.16.	Exemplo do TPGF livre-livre. (a) Forma do modo desejado; (b) forma do modo de vibrar final; (c) distribuição de material final .....	150
Figura 4.17.	Histórico de diversas curvas para o TPGF da Fig.5.11(a) com gradação ao longo da espessura. (a) Valor do autovalor; (b) posição do modo desejado; (c) valor do MAC .....	152
Figura 4.18.	Exemplo do TPGF da Fig. 5.11(a) com gradação ao longo da espessura. (a) Forma do modo desejado; (b) forma do modo de vibrar final; (c) distribuição de material final .....	153
Figura 4.19.	FRF mecânica do deslocamento axial no ponto central da superfície superior para o exemplo do TPGF da Fig. 5.18(a) com gradação ao longo da espessura..	154
Figura 4.20.	Forma do modo de vibrar e distribuição de material final no exemplo do TPGF da Fig. 4.11(a) com gradação na direção longitudinal .....	155

Figura 4.21.	FRF mecânica do deslocamento axial no ponto central da superfície superior para o exemplo do TPGF da Fig. 5.20 com gradação na direção longitudinal .....	155
Figura 4.22.	Maximização do primeiro autovalor de um TPGF. (a) histórico da convergência da função multi-objetivo $F_1$ ; (b) função de gradação final; (c) FRF mecânica do deslocamento axial no ponto central da superfície superior .....	157
Figura 4.23.	Histórico de diversas curvas para um TPGF vibrando a $\lambda_{01} = 11,20 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ . (a) Função objetivo; (b) valor do autovalor; (c) posição do modo desejado; (d) valor do MAC .....	159
Figura 4.24.	Exemplo de um TPGF vibrando a $\lambda_{01} = 11,20 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ . (a) Forma do modo de vibrar final; (b) distribuição de material final .....	160
Figura 4.25.	FRF mecânica do deslocamento axial no ponto central da superfície superior para um TPGF vibrando a $\lambda_{01} = 11,20 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ .....	160
Figura 4.26.	Exemplo de um TPGF vibrando a $\lambda_{01} = 5,80 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ; $\lambda_{02} = 5,95 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ; $\lambda_{03} = 6,10 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ . (a) Forma do modo de vibrar final; (b) distribuição de material final .....	162
Figura 4.27.	FRF mecânica do deslocamento axial no ponto central da superfície superior para um TPGF vibrando a $\lambda_{01} = 5,80 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ; $\lambda_{02} = 5,95 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ; $\lambda_{03} = 6,10 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ .....	163
Figura 4.28.	Exemplo de um TPGF com o CAEM maximizado do modo de vibrar tipo pistão. (a) Forma do modo desejado; (b) forma do modo de vibrar final; (c) distribuição de material final; (d) curva de convergência do CAEM .....	164
Figura 4.29.	Exemplo de um TPGF com a CMP maximizada do modo de vibrar tipo pistão utilizando diversos valores de $r_{min}$ na eq.(4.16) .....	166
Figura 4.30.	Exemplo de um TPGF com a CMP maximizada do modo de vibrar tipo pistão ( $r_{min} = 1,8$ ). (a) Curva de convergência da CMP; (b) CMPs dos primeiros cinquenta modos de vibrar .....	167
Figura 4.31.	Exemplo de um TPGF tipo multi-modal. (a) Forma do modo de vibrar final; (b) distribuição de material final .....	168
Figura 4.32.	CMPs dos primeiros cinquenta modos de vibrar de um transdutor não-MGF e de um TPGF tipo multi-modal projetado mediante o MOT .....	168
Figura 4.33.	Exemplo de um TPGF banda estreita. (a) Forma do modo de vibrar final (modo final número 24) e distribuição de material final; (b) CMPs na faixa de 340 kHz a 410 kHz.....	170
Figura 4.34.	Exemplo de um TPGF banda larga. (a) Forma do modo de vibrar final e distribuição de material final; (b) CMPs na faixa de 340 kHz a 410 kHz .....	172

Figura 4.35.	Exemplo de um atuador piezelétrico flexensional considerando o domínio de projeto da Fig. 4.11(c). (a) Primeiro modo de vibrar sem gradação; (b) topologia ótima encontrada com o MOT; (c) função de gradação de material ótima.....	173
Figura 4.36.	Curvas de convergência de: (a) amplitude de vibração relativa no ponto A da Fig. 4.35(b); (b) amplitude de vibração relativa no ponto B da Fig. 4.35(b).....	174
Figura 4.37.	Exemplo de uma EGF: (a) domínio de projeto; (b) primeiro modo de vibrar sem gradação (somente Cobre); (c) topologia ótima encontrada com o MOT; (d) função de gradação de material ótima.....	175
Figura 4.38.	Curvas de convergência de: (a) amplitude de vibração relativa no ponto A da Fig. 4.37(c); (b) amplitude de vibração relativa no ponto B da Fig. 4.37(c).....	175
Figura 4.39.	Exemplo do projeto preliminar de um motor piezelétrico MGF: (a) domínio de projeto; (b) primeiro e segundo modo de vibrar considerando somente material PZT-5A; (c) resultado utilizando o programa <i>piezoFlexMOT</i> (gradação de material e topologia ótima).....	179
Figura 5.1.	(a) Configuração típica de um sistema SPS; (b) fotografia da maquina SPS marca Dr. SINTER disponível na EPUSP.....	182
Figura 5.2.	Fluxo dos pulsos de corrente elétrica através das partículas de pó (TOKITA, 2000).....	183
Figura 5.3.	Estrutura de camadas em verde de um TPGF antes da sinterização,.....	184
Figura 5.4.	Evolução da (a) corrente elétrica, (b) temperatura e (c) carregamento durante o processo de sinterização de um TPGF do tipo Ni-PZT.....	186
Figura 5.5.	Amostra de um TPGF Ni-PZT fabricado utilizando a técnica de SPS .....	187
Figura 5.6.	Microfotografias de um TPGF Ni-PZT utilizando diversos aumentos: (a) 100x; (b) 200x.....	188
Figura 5.7.	Amostra embutida de um TPGF Ni-PZT após o processo de <i>Sputtering</i> .....	189
Figura 5.8.	Composição química mediante espectrometria de três regiões ao longo da espessura de um TPGF Ni-PZT na: (a) camada 40% Ni - 60% PZT; (b) camada 20% Ni - 80% PZT; (c) 100% PZT.....	190
Figura 5.9.	Microfotografia por MEV da camada de 100% PZT-5A.....	191
Figura 5.10.	Difusão de grafite na camada de 100% PZT-5A: (a) microfotografia mostrando concentrações de Carbono (pontos escuros); (b) posição em que foi detectada difusão de grafite; (c) análise espectral de regiões com Carbono na coordenada apresentada na Fig. 5.10(b).....	192
Figura 5.11.	Curva de impedância experimental de um TPGF Ni-PZT.....	194
Figura A.1.	Polarização do material piezelétrico. (a) Orientação aleatório dos dipolos antes da polarização; (b) Polarização; (c) Re-orientação dos dipolos elétricos após a	

	polarização .....	229
Figura A.2.	Resposta mecânica de um material piezelétrico a potenciais elétricos aplicados .	230
Figura A.3.	Resposta elétrica de um material piezelétrico à aplicação de forças externas .....	230
Figura A.4.	Nomenclatura para as equações constitutivas piezelétricas. (a) Nomenclatura "tradicional"; (b) nomenclatura adotada pelo software ANSYS .....	235
Figura A.5.	(a) Sistema axissimétrico em (a) coordenadas cilíndricas (b) coordenadas cartesianas .....	239
Figura A.6.	(a) Elemento retangular bidimensional Q4 no espaço físico; (b) o mesmo elemento, mapeado no espaço $\xi\eta$ .....	246
Figura A.7.	Gráfico comum do módulo da impedância elétrica .....	251
Figura B.1.	Solução de um problema estrutural utilizando diferentes abordagens de otimização .....	257
Figura B.2.	Idéia básica do MOT aplicado na distribuição ótima de dois materiais .....	259
Figura B.3.	Conceito do domínio estendido fixo .....	265
Figura B.4.	Representação esquemática do Método da Continuação.....	269
Figura C.1.	Resultados em análise estática utilizando a abordagem (1) .....	273
Figura C.2.	Resultados em análise harmônica utilizando a abordagem (1) .....	274
Figura C.3.	Resultados em análise transiente utilizando a abordagem (1). (a) Sem amortecimento; (b) com amortecimento .....	274
Figura C.4.	Resultados em análise estática utilizando a abordagem (2), gradando somente as propriedades elásticas (figuras da esquerda) e gradando somente as propriedades piezelétricas (figuras da direita): (a) deslocamento vertical; (b) campo elétrico $E_z$ .....	275
Figura D.1.	Esquema da estrutura de camadas em verde antes da sinterização, junto com a porcentagem de material por camada .....	276
Figura D.2.	(a) Taxa de aquecimento e (b) carregamento programado na máquina de SPS.	277
Figura D.3.	Evolução da (a) corrente elétrica, (b) temperatura e (c) carregamento durante o processo de sinterização da EGF do tipo Cu-Ni.....	277
Figura D.4.	Amostra de uma EGF do tipo Ni-Cu manufaturada mediante a técnica de SPS ...	278
Figura D.5.	Metade de uma amostra EGF do tipo Ni-Cu embutida em baquelita junto com uma imagem macro obtida com o equipamento Lupa do Departamento de Metalurgia da EPUSP.....	280

Figura D.6.	Microfotografia da EGF Ni-Cu utilizando microscópio ótico a: (a) 100x; (b) 200x..	281
Figura D.7.	Microfotografias mediante MEV da EGF Ni-Cu em diversas camadas.....	282
Figura D.8.	Composição química mediante espectrometria das regiões correspondentes às camadas em verde: (a) 100% Cu; (b) 80% Cu - 20% Ni; (c) 60% Cu - 40% Ni; (d) 40% Cu - 60% Ni; (e) 20% Cu - 80% Ni; (f) 100% Ni. A unidade keV significa $10^3$ eletrons-volt (energia adquirida por um elétron quando acelerado através de uma diferença de potencial de 1 volt).....	283
Figura D.9.	(a) Esquema típico de um ensaio de dureza Vicker; (b) diversas impressões do endentador ao longo da espessura da EGF Ni-Cu.....	285
Figura D.10.	Curva de variação da dureza Vickers ao longo da espessura de uma EGF do tipo Ni-Cu.....	287
Figura D.11.	Esquema da montagem utilizada para medir a velocidade de propagação de onda longitudinal em amostras não-MGF de Cobre e Níquel.....	290
Figura D.12.	Sinais obtidos utilizando a técnica de ultra-som e a montagem da Fig. D.11 para: (a) uma das amostras não-MGF de Cu; (b) uma das amostras não-MGF de Ni.....	216
Figura D.13.	Diversas montagens utilizadas para aproximar a resposta em freqüência de uma estrutura não-piezelétrica mediante a utilização de cerâmicas piezelétricas: (a) estrutura analisada; (b) modelo aproximado número 1; (c) modelo aproximado número 2.....	293
Figura D.14.	Análise harmônica para os modelos geométricos da Fig. D.13.....	294
Figura D.15.	Comparação das curvas de resposta em freqüência de uma EGF Ni-Cu: (a) curva de impedância experimental e curva obtida mediante o programa <i>piezoEFG</i> ; (b) detalhe da curva experimental no intervalo 225 – 242 kHz.....	297

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1.	Dados de materiais utilizados no projeto de TPGF de ultra-som .....	51
Tabela 2.2.	Dimensões dos elementos utilizados na simulação multicamada de TPGF .....	62
Tabela 4.1.	Propriedades de materiais utilizados nos projetos de TPGFs .....	143
Tabela 4.2.	Parâmetros utilizados no MOT .....	143
Tabela 4.3.	Resumo dos resultados para o exemplo três de ressonadores MGF.....	161
Tabela 4.4.	Resumo dos resultados para o projeto de um TPGF tipo banda estreita .....	170
Tabela 4.5.	Resumo dos resultados para o projeto de um TPGF tipo banda larga .....	172
Tabela 4.6.	Propriedades utilizadas no exemplo da Fig. 4.37.....	176
Tabela 5.1.	Parâmetros programados na maquina de SPS para fabricar um TPGF.....	185
Tabela A.1.	Notação reduzida .....	234
Tabela D.1.	Valores de dureza Vicker ao longo da espessura em duas amostras Ni-Cu.....	286
Tabela D.2.	Valores de densidade das amostras não-MGF de Cu e Ni e de outros parâmetros relacionados com o seu cálculo.....	288
Tabela D.3.	Valores de Módulo de Young obtidos mediante a técnica de ultra-som.....	291
Tabela D.4.	Freqüências de ressonância dos modelos mostrados na Fig. D.12 .....	295
Tabela D.5.	Valores de freqüência de ressonância das curvas da Fig. D.15.....	297

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACDM	Aproximação Contínua de Distribuição de Material
APDL	<i>Ansys Parametric Design Language</i>
CAEM	Coefficiente de Acoplamento Eletromecânico
CAMD	<i>Continuous Approximation of Material Distribution</i>
CGM	Crítério de Garantia Modal
CMP	Constante Modal Piezelétrica
EDS	<i>Energy Dispersive Spectrometry</i>
EED	Espectroscopia por Energia Dispersiva
EF	Elementos Finitos
EFG	Elemento Finito Gradado
EFH	Elemento Finito Homogêneo
EGF	Estruturas com Gradação Funcional
EMCC	<i>ElectroMechanical Coupling Coefficient</i>
END	Ensaio não destrutivo
EPD	<i>ElectroPhoretic Deposition</i>
ERV	Elemento Representativo de Volume
FGS	<i>Functionally Graded Structures</i>
FRF	Função de Resposta em Frequência
FTT	Função de Transferência de Transmissão
LPPA	Linguagem de Projeto Paramétrico do Ansys
MAC	<i>Modal Assurance Criterion</i>
MEE	Método do Elemento Espectral
MEF	Método de Elemento Finitos
MEMS	<i>MicroElectroMechanical Systems</i>
MEV	Microscópio Eletrônico de Varredura
MGF	Materiais com Gradação Funcional
MMA	Método de Movimento Assintótico
MOT	Método de Otimização Topológica
OT	Otimização Topológica
PECS	<i>Pulsed Electric Current Sintering</i>

PL	Programação Linear
PLS	Programação Linear Seqüencial
PQS	Programação Quadrática Seqüencial
PZT	Titanato Zirconato de Chumbo
RAMP	<i>Rational Approximation of Material Properties</i>
SEM	<i>Spectral Element Method</i>
SIMP	<i>Simple Isotropic Material with Penalization</i>
SPS	<i>Spark Plasma Sintering</i>
TLM	<i>Thin-Layer Method</i>
TPGF	Transdutores Piezelétricos com Gradação Funcional
2D	Bidimensional
3D	Tridimensional

# 1 TRANSDUTORES PIEZELÉTRICOS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL

## 1.1 Introdução

Um material piezolétrico é aquele que produz uma carga elétrica quando uma tensão mecânica é aplicada (efeito direto). Pelo contrário, uma deformação mecânica é gerada quando um campo elétrico é aplicado nesse mesmo material (efeito inverso). Esse acoplamento direto eletromecânico foi descoberto em 1880 por Pierre e Jacques Curie, como consequência de estudos que examinavam a relação entre o fenômeno piroelétrico (acoplamento eletrotérmico) e a simetria do cristal (GALLEGO-JUARÉZ, 1989). O efeito inverso foi matematicamente deduzido de princípios de termodinâmica por Lippmann em 1881.

No campo da Engenharia o uso mais comum do efeito piezolétrico é sua aplicação em transdutores piezolétricos. A aplicação dos transdutores piezolétricos vai desde sensores e atuadores, na micro (MEMS) e macro escala, até aplicações de acústica; por exemplo, transdutores de ultra-som, hidrofones, sonares, detecção de imagens para aplicações médicas e testes não-destrutivos, entre outros (CLAEYSSSEN et al., 2001; MENCIASSI et al., 2003; NEWNHAM, RUSCHAU, 1991; PEREZ et al., 2005; RAI-CHOUDHURY, 2000; REYNAERTS et al., 1998; WU et al., 2003).

Por outro lado, os Materiais com Gradação Funcional (MGF) são aqueles cujas propriedades variam continuamente ao longo de uma ou varias direções. Essa variação de propriedades é, em geral, obtida através da mudança contínua da microestrutura do material, de tal modo que a fase que configura a matriz do material composto em um dado ponto passa a ser a inclusão em uma outra região (ABOUDI; PINDERA; ARNOLD, 1999). Assim, uma característica importante do material com gradação funcional é que a fração volumétrica das fases varia entre 0% e 100% entre dois pontos da estrutura. Esse conceito MGF tem sido explorado no projeto e na fabricação de transdutores piezolétricos, fato que determina o foco da presente tese. Nesta tese, os transdutores piezolétricos projetados e/ou fabricados em base

ao conceito MGF serão denominados Transdutores Piezelétricos com Gradação Funcional (TPGF).

Neste capítulo é feita uma revisão do estado da arte nos tópicos relacionados com Transdutores Piezelétricos com Gradação Funcional. Esses tópicos incluem uma introdução da aplicação dos materiais piezelétricos na construção de transdutores, onde se explica o tipo de transdutores mais comumente projetados, e a evolução desse projeto a técnicas de otimização genéricas e sistemáticas (Seção 1.2). Posteriormente, introduz-se o conceito de Materiais com Gradação Funcional e de Tradutores Piezelétricos com Gradação Funcional. Os temas que tratam dos MGF em geral e da sua aplicação em TPGF são apresentados na Seção 1.3.

## 1.2 Transdutores Piezelétricos

O projeto de transdutores piezelétricos tem sido direcionado, principalmente, para o projeto de transdutores do tipo sanduíche (FU et al., 2006; HEVERLY II et al., 2004); transdutores bilaminares (CHEN et al., 2006; IM, et al., 1998; SEELEY et al., 1996; SMITS et al., 1991); transdutores flexensionais (MOSTAFA et al., 2005; NEWNHAM et al., 1993); e transdutores piezocompostos (BENNETT, HAYWARD, 1997; LAMBERTI et al., 2000; SAFARI, 1994; SMITH, 1989); ver a Fig. 1.1.

Os transdutores do tipo sanduíche são formados por cerâmicas empilhadas com sentido de polarização alternado. As cerâmicas piezelétricas são conectadas mecanicamente em série e eletricamente em paralelo; assim, o deslocamento total é composto pela contribuição de cada um dos deslocamentos individuais de cada cerâmica. Esses transdutores são aplicados principalmente como atuadores e transdutores de potencia; ver a Fig. 1.1.

Outra classe de transdutores muito utilizada são os transdutores piezelétricos bilaminares. Esses dispositivos são formados de dois materiais piezelétricos com direção de polarização opostas; ver a Fig. 1.1. Uma vez que estão mecanicamente acoplados por uma face, ao aplicar um campo elétrico no sentido da espessura a estrutura irá fletir, devido ao fato das duas camadas se deformarem em direções opostas, gerando um deslocamento vertical que é função da geometria, do campo

elétrico e das propriedades do material. Geralmente, os transdutores piezelétricos bilaminares são utilizados como sensores e/ou atuadores (embora não se exclua sua utilização como elementos vibracionais), e podem ser acoplados a mecanismos de transformação mecânica, caso similar aos transdutores flexensionais. Em geral, o transdutor bilaminar possui pequenas forças de bloqueio (máxima força suportada pelo transdutor com deformação zero) e grandes deslocamentos.

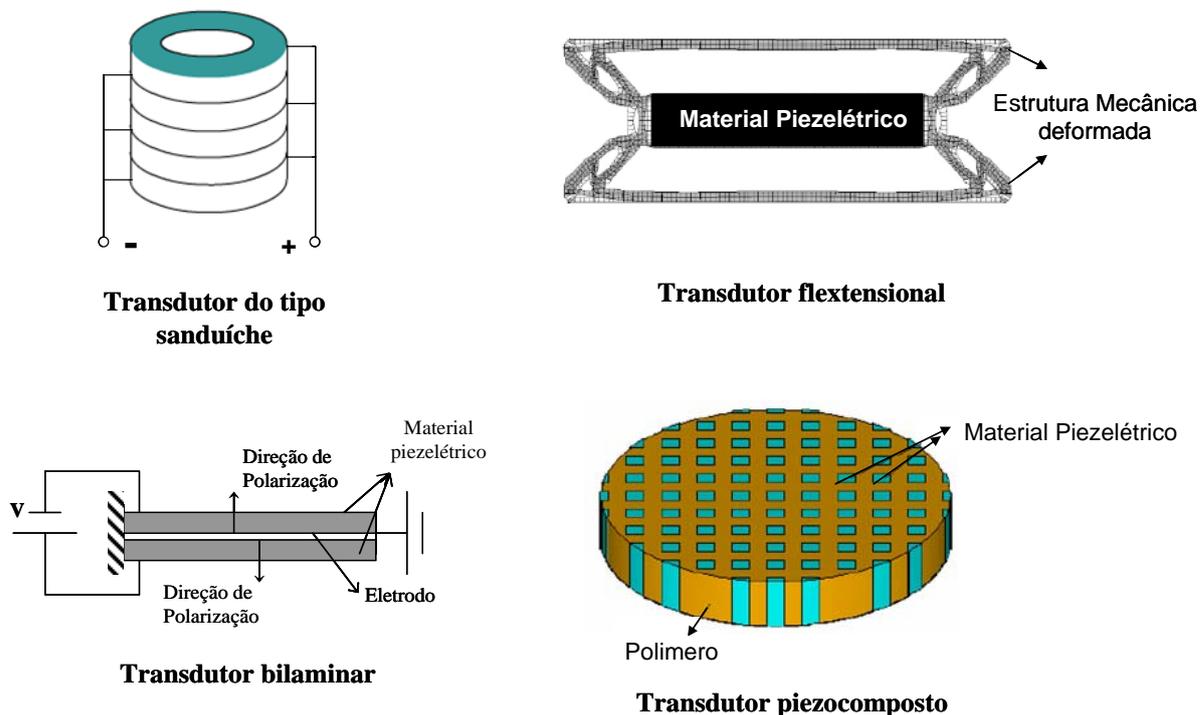


Figura 1.1. Exemplos dos diversos tipos de transdutores comumente encontrados na literatura.

Por outro lado, os transdutores flexensionais são essencialmente pilhas de cerâmicas piezelétricas ou uma única cerâmica piezelétrica conectada a alguma estrutura mecânica de amplificação de deslocamento; ver a Fig. 1.1. Referências desse tipo de transdutores são os transdutores *Moonie* (NEWNHAM et al., 1993; ONITSUKA et al., 1995), e os transdutores *Cymbal* (DOGAN et al., 1997; MEYER et al., 2002; NIEZRECKI et al., 2001). Esse tipo de transdutor é utilizado em aplicações de baixas frequências como em hidrofones, sonares, e atuadores (CARBONARI et al., 2005; ONITSUKA et al., 1995; SILVA et al., 2000).

Por último, os transdutores piezocompostos são amplamente utilizados em aplicações de ultra-som (GALLEGO-JUARÉZ, 1989). Basicamente, um transdutor piezocomposto é a combinação de um material piezelétrico (cerâmico ou polímero) e

um material não-piezolétrico (SAFARI, 1994; SMITH, 1989); ver a Fig. 1.1. Geralmente, esses piezocompostos oferecem grandes vantagens em relação aos materiais homogêneos, como alto fator de acoplamento eletromecânico, o qual mede a influência de um modo de vibrar específico na resposta do transdutor, e baixa impedância acústica, a qual é desejável para amplificar a sensibilidade das ondas emitidas pelo transdutor piezolétrico a meios sólidos ou líquidos (KRAUTKRAMER, KRAUTKRAMER, 1977; KINO, 2000;). No entanto, valores diferentes de desempenhos são obtidos conforme é modificada a razão dos materiais constituintes, a forma das inclusões, ou a topologia da célula unitária (GALLEGO-JUARÉZ, 1989; SILVA et al., 1999a).

Antes dos anos 70, os transdutores piezolétricos eram exclusivamente projetados utilizando técnicas de tentativa e erro ou modelos analíticos (KOSSOFF, 1966; SITTIG 1969), e eram otimizados através de otimização paramétrica (otimização de uma dimensão específica do transdutor, por exemplo, a espessura). Esses modelos analíticos eram geralmente unidimensionais e podiam ser aplicados somente a geometrias muito simplificadas, que em muitos casos produziam resultados muito afastados da realidade (BRISAUD, 1991). Assim, somente com a introdução, na década de 70, do conceito dos Elementos Finitos (EF), os engenheiros e cientistas em geral passaram a dispor de ferramentas mais sistemáticas para a modelagem de transdutores piezolétricos; especificamente, com a publicação dos trabalhos de Allik, Hugues (1970), para aplicações em sonares, e o trabalho de Sato et al. (1979) e Boucher et al. (1981), na detecção de imagens de ecografia médica. A esses trabalhos seguiram-se outros que explicitavam a implementação dos EF em aplicações piezolétricas (GUO et al., 1992; KHAROUF, HEYLIGER, 1994; LERCH, 1990; MEYER et al., 2002; NAILLON et al., 1983). A partir daí, a modelagem de transdutores com geometrias complexas em 2D e 3D tornaram-se viáveis. No entanto, a otimização desses transdutores era de natureza paramétrica, realizada, principalmente, através do levantamento de curvas de alguma resposta do transdutor em função de algum parâmetro específico, como no projeto de ressonadores e transdutores de ultra-som (CHALLANDE, 1990); ou através de testes experimentais, como no caso de transdutores flexensionais (DOGAN et al., 1994); ou pelo uso dos EF (GUO et al., 1992; KIM et al., 1995). Foi somente nos anos 90 que outras técnicas de otimização foram exploradas no projeto de transdutores piezolétricos, como a otimização de forma, para o projeto de

ressonadores (SIMSON, TARANUKHA, 1993), e a otimização topológica para: (i) o projeto de materiais piezocompostos (SIGMUND et al., 1998; SILVA et al., 1999a), (ii) o projeto de transdutores flexensionais (SILVA et al., 1999b), e (iii) o projeto de transdutores para ressonadores e geração de ondas acústicas (SILVA, KIKUCHI, 1999). A partir desses últimos trabalhos, a otimização topológica tem sido aplicada, freqüentemente, no projeto de transdutores piezelétricos numa ampla variedade de aplicações; por exemplo, projeto de motores piezelétricos (BURMANN et al., 2002; LOVEDAY et al., 2004; SILVA, 2003), micro-ferramentas piezelétricas com múltiplos graus de liberdade (CARBONARI et al., 2005), placas piezelétricas (KANG, TONG, 2008; KÖGL, SILVA, 2005), entre outros (CARDOSO, FONSECA, 2006; HA, CHO, 2006; WANG et al., 2006).

Por outro lado, o projeto otimizado de transdutores piezelétricos não tem sido limitado somente ao projeto da cerâmica em si. Outros enfoques têm sido explorados, como por exemplo, otimização simultânea do tamanho do transdutor piezelétrico e da sua posição ótima em estruturas inteligentes (CARBONARI et al., 2007a; SHENG, KAPANIA, 2001); otimização simultânea da posição do transdutor piezelétrico e dos parâmetros de controle, como ganho da realimentação (ZHANG et al., 2000), voltagem de excitação da cerâmica (LI et al., 2001b), ou o ângulo ótimo de polarização da piezocerâmica (GIBERT, AUSTIN, 2004); projeto ótimo do sistema eletrônico de excitação do transdutor (CHANDRASEKARAN et al., 2000); e projeto ótimo de transdutores flexensionais, onde simultaneamente é otimizada a cerâmica piezelétrica e a estrutura mecânica de amplificação acoplada (DU et al., 2000; FRECKER, CANFIELD, 2000; SILVA et al., 2000). Outros trabalhos sobre a otimização de transdutores piezelétricos podem ser encontrados em Frecker (2003).

Atualmente, a pesquisa em relação a transdutores piezelétricos avança em quatro tendências principais: (i) busca de novas aplicações, seja utilizando materiais menos explorados como polímeros piezelétricos (LANG, MUENSIT, 2006; LUSHCHEIKIN, 2006), ou novas aplicações em áreas emergentes de pesquisa como a micro-mecatrônica (DUTOIT et al., 2005; UCHINO, GINIEWICZ, 2003); (ii) aperfeiçoamento das técnicas de fabricação de materiais piezelétricos (JIN et al., 2005; SOMANI, KALITA, 2007); (iii) sinterização de novos materiais cerâmicos, seja fabricando novos materiais piezelétricos com propriedades gradadas ao longo de uma específica direção, ver a Seção 1.3, ou fabricando cerâmicas (não-gradadas)

baseadas em novas ligas de materiais (M'PEKO et al., 2005; YOON, et al. 2007); e (iv) análise e projeto de TPGF, ver a Seção 1.3.

## **1.3 Transdutores Piezelétricos com Gradação Funcional**

### **1.3.1 Materiais com Gradação Funcional**

Os Materiais com Gradação Funcional (MGF ou FGM - *Functionally Graded Materials*) são materiais compostos, cujas propriedades variam de forma gradual ou contínua ao longo de uma direção específica dentro do material. A variação de propriedades é, em geral, obtida através da mudança contínua da microestrutura do material (ABOUDI et al., 1999), ver a Fig. 1.2. Assim, uma característica importante do material com gradiente é que a fração volumétrica das fases varia continuamente entre 0% e 100% entre dois pontos da estrutura e, por conseguinte, entre essas duas regiões não existe uma interface definida; em outras palavras, o material A é gradativamente substituído pelo material B, constituindo-se, assim, um material composto com a fração de material A e material B variando suavemente através de uma zona de transição (KIEBACK et al., 2003; REITER et al., 1997; YIN et al., 2004;), ver a Fig. 1.2.

Uma vantagem desse tipo de estruturas MGF é a possibilidade de se aproveitar as propriedades dos materiais base constitutivos. Por exemplo, no caso do par de materiais base metal/cerâmica, pode-se projetar uma barreira térmica que possua numa face as propriedades térmicas da cerâmica: baixa condutividade térmica e alto ponto de fusão, e na outra face as propriedades do metal: alta resistência à tração e alta resiliência. Assim, tem-se um componente que aproveita as vantagens que oferece cada material base em uma única estrutura sem interfaces entre esses materiais (KOIZUMI, 1997). A ausência dessas interfaces de material proporciona outras características interessantes como: (i) diminuição da tensão térmica residual, (ii) diminuição da propagação do escoamento plástico da

fase dúctil e, (iii) diminuição das tensões mecânicas que surgem da diferença de rigidez entre as fases (EMBURY et al., 1996).

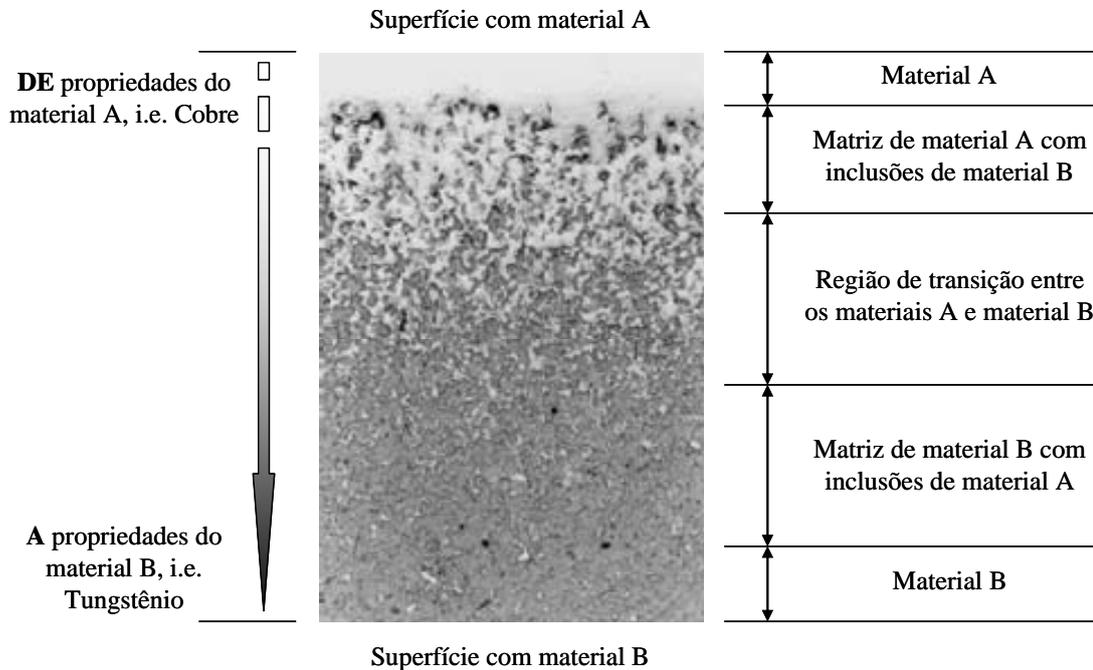


Figura 1.2. Microfotografia de um Material com Gradação Funcional (MGF); especificamente, de um MGF do tipo Tungstênio/cobre (KIEBACK et al., 2003).

O conceito de MGF é um conceito bio-inspirado (*bio-mimic*), já que esses materiais encontram-se na forma natural; por exemplo, em ossos e dentes de animais (HUANG, RAPOFF, 2003), e em árvores como o bambú (SILVA et al., 2006). A coroa dentária é um excelente exemplo do conceito de MGF em estruturas naturais, uma vez que esta requer alta resistência ao atrito e impacto na área externa (esmalte dos dentes) e uma estrutura interna dúctil por razões de fadiga e tenacidade (HEDIA, 2005; HUANG et al. 2007). Já em aplicações de Engenharia, o conceito de materiais MGF foi originalmente proposto ao redor de 1984-1985<sup>1</sup> (KOIZUMI, 1997) quando pesquisadores japoneses investigaram materiais avançados para a indústria aeroespacial; especificamente, com o intuito de desenvolver materiais que suportaram o gradiente de temperatura gerado nas espaçonaves no retorno à terra. Esse gradiente de temperatura é de aproximadamente 1000 °C entre a parte externa e interna da aeronave. Desde então, o desenvolvimento dos métodos de fabricação, projeto e aplicação dos MGF

<sup>1</sup> Embora desde 1972 alguns trabalhos teóricos já houvessem sido desenvolvidos, esses trabalhos são citados por Kieback et al. (2003).

tem sido foco de diversos grupos de pesquisa ao redor do mundo. Quanto à aplicação dos MGF, destacam-se, principalmente, o desenvolvimento de materiais MGF para aplicações térmicas (LEE et al., 1996; KAWASAKI, WATANABE, 1997); em Bioengenharia (POMPE et al., 2003); e em aplicações de desenho industrial ou projeto de produtos (KNOPPERS et al., 1998; JACKSON et al., 1998), como relógios, giletes, entre outros. A sua utilização no desenvolvimento de TPGF é um tópico ainda pouco explorado<sup>2</sup>, embora a partir do final dos anos 90 a pesquisa nessa direção esteja incrementando.

### **1.3.2 Transdutores Piezelétricos Baseados no Conceito de MGF**

Uma tendência tem sido o projeto e fabricação de transdutores piezelétricos baseados no conceito de MGF. Especificamente, nos TPGF, o material piezelétrico convencional (material homogêneo ou não-MGF) é substituído por um material gradado, ver Fig. 1.3, 1.4 e 1.5, onde algumas ou todas as propriedades podem mudar ao longo de uma direção específica, e várias funções ou leis de gradação podem ser utilizadas, ver a Fig. 1.3.

Como exemplo, pode-se considerar o caso específico de um transdutor bilaminar. Esse tipo de transdutor tradicionalmente é composto de dois materiais piezelétricos com direção de polarização oposta, que estão mecanicamente acoplados por uma fase metálica (eletrodo), ver a Fig. 1.4. Ao aplicar um campo elétrico no sentido da espessura o transdutor irá fletir, devido ao fato das duas camadas deformarem-se em sentidos opostos. Um problema crítico nesses transdutores bilaminares é a fadiga, quando sujeitos a excitação dinâmica, a qual depende essencialmente da distribuição de tensões no transdutor. Evidentemente, no transdutor bilaminar, essa distribuição não é uniforme devido à presença de interfaces nos materiais piezelétrico/metal, o que provoca concentração de tensões mecânicas, reduzindo significativamente a vida à fadiga e, portanto, a vida útil do transdutor. No entanto, utilizando o conceito de MGF nesse tipo de transdutor a interface entre materiais é eliminada, variando-se as propriedades suavemente do

---

<sup>2</sup> Maiores detalhes em [http://fgmdb.kakuda.jaxa.jp/others/e\\_product.html](http://fgmdb.kakuda.jaxa.jp/others/e_product.html).

centro do transdutor aos extremos. Dessa forma diminui-se a concentração de tensões mecânicas e aumenta-se a vida útil do transdutor ao ser eliminada a interface dos materiais constitutivos. Diversos autores têm ressaltado as vantagens desse tipo de gradação na redução das tensões máximas e no desempenho em transdutores piezelétricos bilaminares, como: Almajid et al. (2001); Elka et al. (2004); Kouvatov et al. (1999); Qiu et al. (2003); Shi, Chen (2004); Taya et al. (2003); Ying, Zhifei (2005); Zhifei (2002); Zhu, Meng (1995). De todos os trabalhos, destaca-se o trabalho de Qiu et al. (2003). Nesse trabalho demonstra-se o alto incremento obtido na durabilidade de transdutores piezelétricos bilaminares MGF submetidos a ensaios de vibração, em relação a transdutores não-MGF. Especificamente, em testes de durabilidade a baixa frequência, o transdutor bilaminar não-MGF quebra depois de 138h (ou  $10^7$  ciclos), enquanto o transdutor bilaminar MGF quebra depois de 300h ( $2,16 \times 10^7$  ciclos). Nos testes de durabilidade na primeira frequência de ressonância, a vida útil do transdutor não-MGF foi 25h ( $0,50 \times 10^6$  ciclos), enquanto a do transdutor MGF foi mais de 240h ( $5,18 \times 10^6$ ).

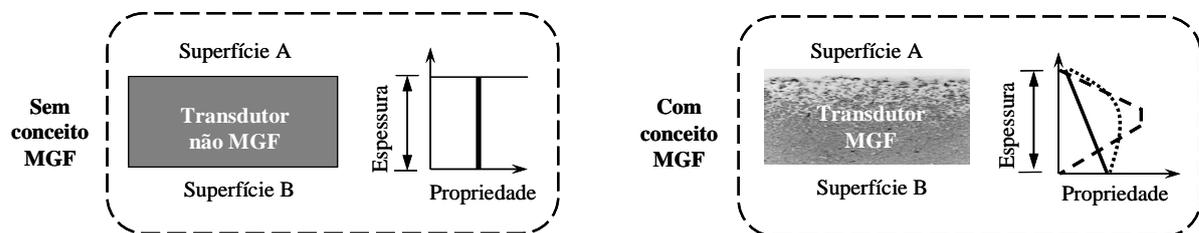


Figura 1.3. Representação de um material piezelétrico (não-MGF) e de um TPGF juntamente com exemplos de leis de gradação de material.

Por outro lado, utilizando como exemplo um transdutor de ultra-som, e utilizando o conceito MGF, podem ser reduzidas as interfaces entre materiais piezelétrico/não-piezelétrico: piezelétrico/camada-amortecimento e piezelétrico/camada-casamento, ver a Fig. 1.5. Isso reduz as ondas indesejáveis que ressoam entre as superfícies do disco piezelétrico, e permite aumentar a largura de banda do transdutor. Essas características, em particular, são desejáveis para melhorar a resolução de aquisição de imagens em aplicações de Ensaios não Destrutivos (END) e imagens médicas (KRAUTKRAMER, KRAUTKRAMER, 1977). Especificamente, nos transdutores tradicionais, quando um pulso elétrico é aplicado na cerâmica uniforme (não-MGF), duas ondas defasadas de ultra-som são geradas: uma para cada superfície da estrutura piezelétrica (superfícies A e B na Fig. 1.3, caso o eixo de

polarização seja ao longo da espessura). Isso gera uma redução na largura de banda, uma vez que se reduz o gradiente de tensão induzido pelo efeito piezoeletrico (YAMADA et al., 1998). No entanto, se o material piezoeletrico desse mesmo transdutor da Fig. 1.3 é gradado ao longo da espessura; por exemplo, de um material não ou pouco piezoeletrico a um material piezoeletrico, uma única onda é gerada e, portanto, uma maior largura de banda será obtida. Isto se explica pelo aumento do gradiente de tensões induzidas (YAMADA et al., 1998). Assim, por exemplo, numa modelagem unidimensional de transdutores de ultra-som, a tensão induzida é:  $T = -eE$ , onde  $e$  é a propriedade piezoeletrica, e  $E$  o campo elétrico aplicado. A força volumétrica (principal responsável pela geração de ondas de ultra-som) é:  $F = \partial T / \partial z$ , onde  $z$  é uma coordenada espacial. Portanto, se  $e$  é uma função de  $z$ , caso dos TPGF, é possível “ajustar” a constante piezoeletrica de forma que a distribuição de tensões tenha um grande gradiente, sendo numa das superfícies  $e \approx 0$  e  $F \approx 0$ , e na outra superfície  $e \gg 0$  e  $F \gg 0$ . Vários autores têm reportado as vantagens de se gerar ondas de ultra-som com TPGF: Guo et al. (2005); Ichinose et al. (2004); Yamada et al. (2001); Yamada et al. (2000); Yamada et al. (1999); Yamada et al. (1998).

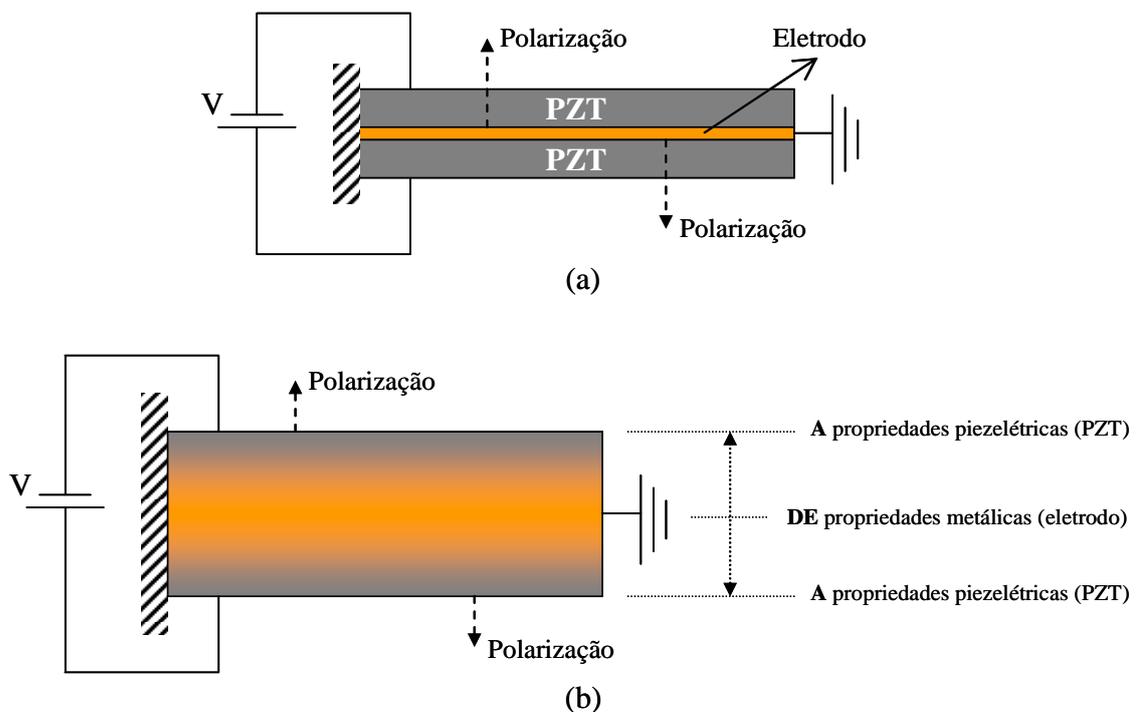


Figura 1.4. Conceito MGF em transdutores piezoeletricos bilaminares: (a) sem o conceito MGF; (b) utilizando o conceito MGF.

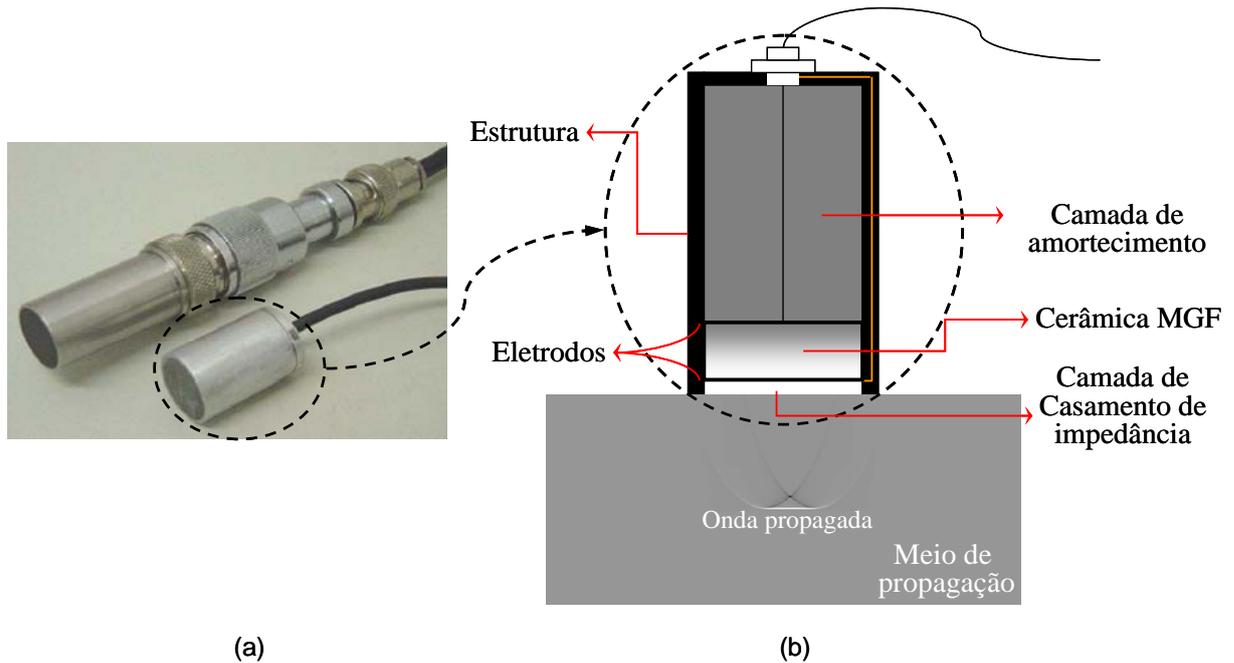


Figura 1.5. Conceito MGF em transdutores piezelétricos de ultra-som:  
 (a) foto de um transdutor piezelétrico de ultra-som; (b) esquema do mesmo transdutor de ultra-som com uma piezocerâmica MGF.

Embora haja vantagens já confirmadas dos TPGF em relação aos transdutores tradicionais, ainda falta muito por explorar. No entanto, as pesquisas vêm crescendo desde finais dos anos 90, e têm-se centralizado, principalmente, nas áreas de fabricação e modelagem de TPGF. A seguir é apresentada uma revisão do estado da arte no campo de fabricação, modelagem, e otimização de TPGF.

### Modelagem e simulação de TPGF

Desde que Zhu, Meng (1995) reportaram o primeiro trabalho sobre a fabricação de um TPGF, diversos trabalhos seguiram-se para demonstrar as vantagens do conceito MGF em estruturas piezelétricas. Esses trabalhos têm focado, principalmente, a modelagem analítica e numérica desse tipo de transdutor. Essa modelagem tem-se concentrado: (i) no projeto de vigas piezelétricas engastadas MGF ou atuadores bilaminares MGF (LEE, 2005; STEINHAUSEN et al., 2005; TAYA, et al., 2003; ZHONG, YU, 2007); (ii) no estudo de propagação de ondas através do material piezelétrico gradado e na geração de ondas de ultra-som (DU et

al., 2007; GUO et al. 2005; ICHINOSE, 2004; SAMADHIYA, MUKHERJEE, 2006; YAMADA et al. 2001; YAMADA et al. 2000; YAMADA et al. 1999; YAMADA et al. 1998); e (iii) no estudo do início, propagação e predição de trincas em materiais piezelétricos gradados (CHEN et al., 2004b; CHEN et al., 2003a; MA et al., 2005; UEDA, 2005; YONG, ZHOU, 2006).

A maior parte dos trabalhos relacionados com modelagem trata da aplicação de técnicas analíticas, as quais geralmente mudam uma única propriedade de material ao longo de uma única direção cartesiana. Com este fim Kruusing (2000) realizou a modelagem analítica de uma micro-viga engastada piezelétrica MGF submetida a uma carga normal no extremo livre, de forma a calcular a deflexão da micro-viga com gradação na constante elástica  $c_{11}$ . Nesse mesmo ano, Hauke et al. (2000) reportaram resultados experimentais e obtiveram uma forma de regressão linear para calcular a deflexão de uma viga piezelétrica engastada MGF. No modelo de Hauke et al. (2000) a constante piezelétrica  $d_{31}$  varia linearmente ao longo da espessura, a qual é discretizada em  $N$  camadas, enquanto as outras propriedades permanecem constantes. Já Shi et al. (2002) obtiveram soluções exatas para vigas piezelétricas engastadas MGF com um gradiente linear na densidade, para isso utilizaram a teoria bidimensional de elasticidade e a função de tensões de Airy apresentando a solução para diferentes condições de carga. Liu, Shi (2004) e Shi (2005) seguiram esse mesmo enfoque, mas gradando linearmente a constante piezelétrica  $g_{31}$ . Adicionalmente, Shi, Chen (2004) apresentaram a solução, para várias condições de carga, de uma viga piezeletrica MGF com variação ortotrópica da constante de material  $s_{33}$ , assumindo que a mesma varia de forma quadrática ao longo da espessura.

Por outro lado, seguindo esse enfoque analítico, outros trabalhos estão relacionados com o estudo dinâmico de TPGF<sup>3</sup>. No entanto, são poucos os trabalhos que têm seguido essa linha, entre eles, pode-se considerar o trabalho de Yang, Xiang (2007) e de Zhong, Yu (2006). O primeiro utiliza a teoria de viga de Timoshenko para encontrar, em TPGF tipo unilaminares e bilaminares, os modos de vibrar e as frequências naturais em condição livre-livre, e a resposta transiente. Já Zhong, Yu, 2006 desenvolveram um modelo exato para a modelagem de vibração

---

<sup>3</sup> Além de alguns trabalhos relacionados com a caracterização experimental da dinâmica de TPGF (Li et al., 2005a; Qiu et al., 2003).

livre e forçada em TPGF retangulares para várias condições de contorno (simplesmente apoiado e engastado nos seus dois extremos). Outra abordagem é o desenvolvimento de modelos analíticos que estudam a propagação de ondas acústicas emitidas por TPGF. Nesse caso, os modelos encontrados geralmente são modelos analíticos unidimensionais baseados nos tradicionais modelos equivalentes de representação de transdutores de ultra-som, como os modelos Mason, KLM, e Redwood (KINO, 2000). Essas técnicas modelam unicamente a cerâmica piezométrica gradada, sem considerar o transdutor de ultra-som como um todo; em outras palavras, sem considerar a camada de casamento de impedâncias (*matching*) e a camada de amortecimento (*backing*), ver a Fig. 1.5. Assim, por exemplo, Yamada et al. (1999) e Sakamura et al. (2000) estenderam o modelo Mason para explorar a gradação exponencial de propriedades piezométricas em cerâmicas com eixo de polarização ao longo da espessura, e Yamada et al. (2000), seguiram o mesmo procedimento, mas utilizando gradação linear.

Contudo, essas soluções analíticas são limitadas, já que é muito complexo encontrar esse tipo de solução para TPGF bidimensionais que considerem a gradação de várias propriedades de material ao mesmo tempo (sejam dielétricas, piezométricas e/ou elásticas). Para contornar esse problema, modelos numéricos simplificados foram desenvolvidos. Esses modelos consistem em aproximar a gradação ao longo de uma direção específica, geralmente ao longo da espessura, considerando uma aproximação multicamada (ALMAJID et al. 2001; LEE, 2005; TAYA et al., 2003). Na aproximação multicamada, ver a Fig. 1.6, o TPGF é dividido em camadas, onde cada uma possui propriedades constantes, as quais suavemente mudam entre camadas conforme a direção de gradação desejada. O primeiro trabalho reportado na literatura relacionado com esse tipo de modelagem é o artigo de Wu et al. (1996), os quais implementaram um gradiente de propriedades num transdutor bilaminar e demonstraram que a aplicação de um potencial elétrico produzia uma relativa uniformidade na distribuição de tensões, em contraste com os picos de tensões encontrados, até então, no centro da espessura de transdutores bilaminares. Por outro lado, Almajid et al. (2001) utilizaram uma modificação da teoria de laminação clássica de materiais compostos (*Classical Laminate Theory - CLT*) para estudar os deslocamentos e tensões mecânicas em transdutores bilaminares gradados. Além disso, utilizaram programas de Elementos Finitos (EF) comerciais para simular esse tipo de TPGF multicamadas em 3D (discretizados com

10 camadas ao longo da espessura), e compararam esses resultados com os obtidos por CLT modificado. Eles concluíram que o tipo de lei de gradação modifica a magnitude da tensão máxima na estrutura piezolétrica e o valor do deslocamento gerado; assim, uma função de gradação côncava resultou superior a funções lineares e convexas, havendo uma diferença de 25% na tensão mecânica máxima obtida por um modelo analítico baseado na CLT e a obtida pela modelagem de EF. Outros trabalhos, como o de Lee (2005), desenvolveram códigos de elementos finitos para TPGF multicamadas, onde cada camada é assumida ser uma estrutura não-MGF. Ele investigou os deslocamentos e tensões mecânicas de transdutores bilaminares submetidos a carregamentos eletro-térmicos com o programa desenvolvido. Adicionalmente, Taya et al. (2003) também utilizaram a teoria dos elementos finitos em estruturas multicamadas para examinar a conduta de TPGF tipo bilaminar, onde as propriedades de cada camada são homogeneizadas através do modelo de material Eshelby.

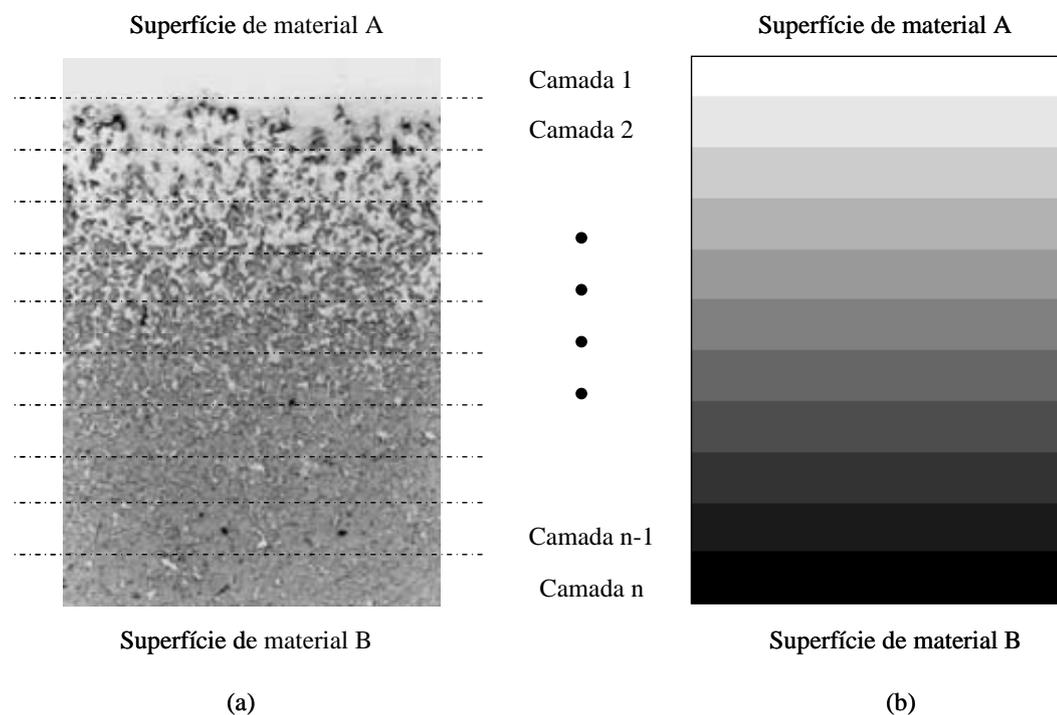


Figura 1.6. Aproximação multicamada da gradação contínua de material: (a) amostragem da gradação contínua da microestrutura de um MGF; (b) correspondente representação utilizando um modelo de material multicamada.

Por outro lado, esses modelos numéricos multicamadas também têm sido aplicados na solução de TPGF em aplicações de ultra-som, entre eles, o Método do Elemento

Espectral – MEE (*Spectral Element Method* – SEM) e o método de camadas finas (*Thin-Layer Method* – TLM). O primeiro foi utilizado por Samadhiya, Mukherjee (2006) para simular a propagação de ondas de ultra-som em fluidos, geradas por um TPGF com a constante piezométrica  $e_{33}$  gradada linearmente ou exponencialmente ao longo da espessura. Também foi variado o tempo de duração do pulso elétrico de entrada, determinando que a gradação linear reproduz melhor a excitação do sinal de excitação. O segundo método, TLM, foi utilizado por Chakraborty et al. (2005), e consiste numa combinação do Método dos Elementos Finitos (MEF) e do MEE, para estudar a propagação de ondas dentro do TPGF, e a propagação de ondas acústicas geradas pelo TPGF para meios externos de propagação.

Embora essas aproximações multicamadas permitam simular TPGF bi ou tridimensionais, e TPGF com gradação de mais de uma constante de material, elas não são suficientemente exatas para o cálculo de tensões mecânicas, pelo fato que as interfaces entre camadas geram concentradores de tensões; além disso, a sua resposta é dependente do número de camadas utilizadas para aproximar a variação de material (RUBIO et al., 2009a), e as propriedades especificadas mudam ao longo da direção de gradação de forma escalonada ou discreta e não de forma contínua como é esperado em estruturas MGF (ALMAJID et al. 2001; LEE, 2005; RUBIO et al., 2009a). Para reduzir esses problemas, próprios da aproximação multicamada, a gradação de material pode ser tratada de forma contínua através da formulação dos Elementos Finitos Gradados (EFG) (KIM, PAULINO, 2002; SANTARE, LAMBROS, 2000). A formulação de EFG incorpora o gradiente de material na escala do elemento finito, o qual resulta em uma mudança das propriedades contínua e suave entre EF. Seguindo essa idéia, Silva et al. (2007) estenderam a formulação original de EFG de estruturas não-piezométricas a problemas piezométricos em análise estática, utilizando elementos isoparamétricos de 4 e 8 nós por EF. Outros trabalhos têm estendido a formulação de EFG a problemas não-piezométricos em análise dinâmica (BANKS-SILLS et al. 2002; ZHANG, PAULINO, 2007).

Finalmente, no conhecimento do autor, até a data, nenhum trabalho tem tratado o projeto otimizado e sistemático de TPGF, a exceção dos recentes trabalhos de Carbonari et al., (2009) e Carbonari et al., (2007b). No primeiro trabalho aborda-se o projeto de micro-atuadores piezométricos utilizando o conceito MGF e o Método de Otimização Topológica (MOT). Já no segundo trabalho é apresentado o

projeto de TPGF tipo bilaminar em operação quase-estática utilizando o MOT (ver o Apêndice B para uma revisão do MOT) e a formulação de EFG. Outros trabalhos tratam o projeto otimizado de TPGF de forma aproximada, como os trabalhos de Liew et al., 2004a e Liew et al., 2004b. Liew et al., 2004a desenvolveram um algoritmo baseado em algoritmos evolucionários (*evolutionary algorithms*) para encontrar o valor ótimo de potencial elétrico de excitação e o ganho da realimentação, em aplicações de controle de estruturas formadas por materiais piezelétricos não-MGF separados por um material estrutural MGF (estruturas inteligentes tipo *sandwich*). Liew et al., 2004b realizou a mesma otimização, mas utilizando algoritmos genéticos e submetendo esse tipo de estruturas a um gradiente de temperatura.

### **Fabricação de TPGF**

A fabricação de TPGF basicamente baseia-se na metalurgia de pó (ICHINOSE, et al., 2004; LI et al., 2005b; TAKAGI, et al., 2003; ZHANG et al., 2006a) e na *Electrophoretic deposition* – EPD (CHEN et al., 2004a; LI et al., 2005a).

Na metalurgia de pó, o processo de fabricação de um TPGF pode geralmente ser dividido em duas etapas: uma primeira etapa de construção do gradiente espacial ou gradação, e a segunda, de consolidação dessa estrutura com gradiente (KIEBACK et al., 2003). Os processos de construção de gradiente conformam a estrutura de maneira descontínua, passo a passo, criando camadas com propriedades diferentes a partir de materiais base ou materiais granulados, ver Fig. 1.7(a). Assim, o gradiente é gerado pelo transporte ou difusão de material através da interface entre duas regiões ou camadas, cada uma com diferentes propriedades; em alguns casos, o material composto é submetido a campos externos (por exemplo, campos elétricos ou gravitacionais) para forçar o transporte de material e assim configurar o gradiente espacial (KIEBACK et al., 2003). Um processo típico de fabricação de TPGF, mediante metalurgia de pó, é a sinterização por jato de plasma ou *Spark Plasma Sintering* – SPS (MUNIR et al., 2006). Uma revisão da metalurgia de pó aplicada à fabricação de MGF pode ser encontrada em Kieback et al. (2003) e Miyamoto et al. (1999), e do método de SPS no capítulo 5 dessa tese.

Já a EPD consiste no movimento de partículas eletricamente carregadas de material em um meio de suspensão, ver Fig. 1.7(b). Assim, um campo elétrico introduzido no meio de suspensão induz a migração das partículas carregadas eletricamente até eletrodos com carga elétrica oposta. Esse movimento produz o depósito de material nesse eletrodo (eletrodeposição). Conseqüentemente, para fabricar TPGF basta ajustar a composição da suspensão ao longo do tempo (VAN Der BIEST et al., 2006), ver Fig. 1.7(b).

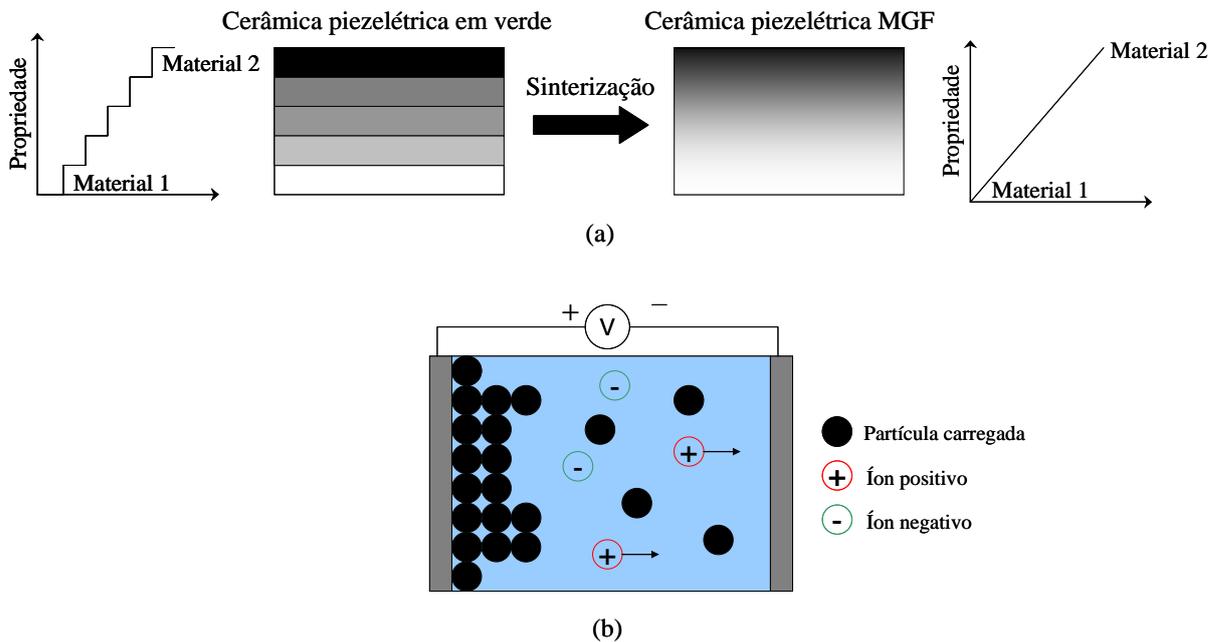


Figura 1.7. Fabricação de TPGF: (a) Princípio da sinterização a partir de cerâmicas em verde; (b) técnica de *Electrophoretic deposition*.

Por outro lado, são encontradas outras técnicas de fabricação de transdutores piezétricos. Assim, além do procedimento comum de gerar camadas com diversas composições para a sua posterior sinterização a altas temperaturas (ICHINOSE et al., 2004), os TPGF também foram fabricados através da geração de ranhuras ao longo das superfícies livres da cerâmica piezétrica, perpendiculares à espessura, as quais foram preenchidas com um polímero, ver a Fig.1.8(a). Nesse caso, a fração de volume do material piezétrico varia gradualmente na direção da espessura e, portanto, a constante piezétrica pode ser considerada efetivamente gradada. No entanto, essa aproximação não elimina os problemas originados pelas interfaces de material, mas é útil para investigar o comportamento dinâmico dos TPGF. Vários perfis de ranhuras têm sido desenvolvidos, em forma de V (YAMADA et al., 1998) e

em forma de U (GUO et al., 2005). Outro enfoque é a variação das constantes piezelétricas aplicando temperatura. Assim, aproveitando que a piezeletricidade de um material gradualmente diminui com o aumento da temperatura, e finalmente chega a zero se essa temperatura excede a temperatura de Curie, Yamada et al. (2000) submetem um disco cerâmico de PZT a um gradiente de temperatura entre 105 e 150 °C durante três horas, gerando um TPGF com gradação linear das propriedades piezelétricas ao longo da espessura, mantendo-se quase constantes as demais propriedades, ver a Fig. 1.8(b).

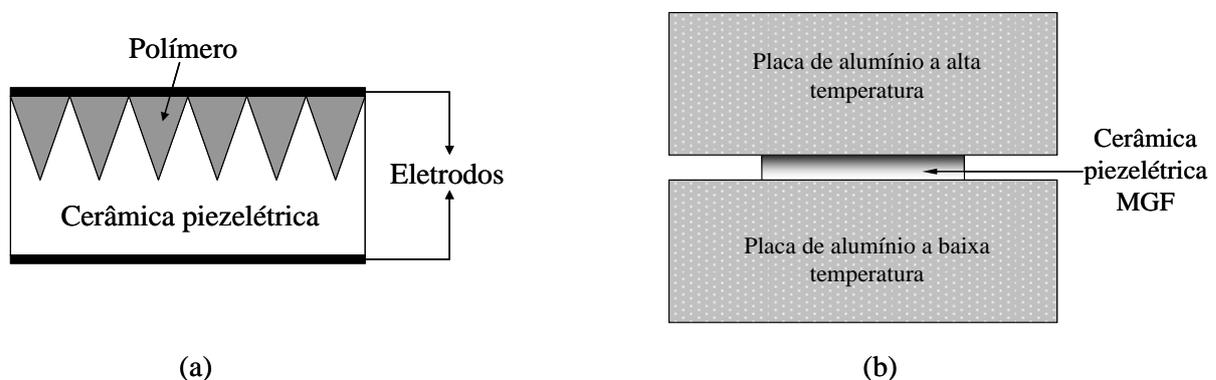


Figura 1.8. Fabricação de TPGF: (a) Através de ranhuras com diversos formatos (na figura com formato em V); (b) aplicando um gradiente de temperatura.

Em relação ao tipo de materiais utilizados na fabricação de TPGF, inicialmente, inclusões de cerâmicas dielétricas eram adicionadas a matrizes de cerâmicas piezelétricas para gerar TPGF tipo cerâmica/cerâmica, e assim reduzir a concentração de tensões em transdutores bilaminares (WU et al., 1996; ZHU, MENG, 1995). Não obstante, esses TPGF geralmente tinham propriedades mecânicas inferiores; por exemplo, menor resistência à fratura quando comparados com cerâmicas não-piezelétricas, e menor dureza quando comparados com metais. Propriedades superiores foram obtidas por Li et al. (2001a); eles adicionaram partículas de Platina (Pt) a Titanato Zirconato de Chumbo (PZT) para obter um TPGF do tipo PZT/Pt (LI et al., 2001a; TAKAGI et al., 2003). A adição de Pt resultou em propriedades piezelétricas gradadas junto com uma grande melhora nas propriedades mecânicas do TPGF. No entanto, o único inconveniente nesse tipo de gradação é o alto custo da Pt. Para solucionar esse problema, outros metais têm sido combinados com cerâmicas PZT; por exemplo, cerâmicas piezelétricas com Zinco, gerando cerâmicas PZT/ZnO/PZT (JIN et al., 2003); cerâmicas piezelétricas

La-PZT/Fe-PZT, utilizando Ferro, (ADIKARY et al., 2000); ou cerâmicas piezelétricas Cu/PZT, utilizando Cobre, (FANG et al. 2003). Como exemplo, no seu trabalho Jin, et al. (2003) utilizam esse enfoque de gradação cerâmica/metal para fabricar um transdutor bilaminar piezelétrico com propriedades cerâmicas (PZT) que mudam até propriedades metálicas (Zinco), na direção da espessura, das superfícies externas até o centro do transdutor; em outras palavras, Jin, et al. (2003) fabricaram cerâmicas bilaminares piezelétricas onde o óxido de Zinco (ZnO) é utilizado como um eletrodo interno e, ao mesmo tempo, como partículas de inclusão em matrizes de PZT. Adicionalmente, na literatura, também são encontradas diversas publicações de TPGF tipo cerâmica/metal que utilizam o elemento Prata (Ag) como inclusões metálicas (SHIH, THUAN (2004); ZHANG et al. (2006a); e ZHANG et al. (2006b)). Contudo, na fabricação de TPGF tipo cerâmica/metal corre-se o risco de oxidação durante o processo de sinterização a altas temperaturas.

Outras gradações têm sido geradas para TPGF, como materiais PNN-PZ-PT (QIU et al., 2003), onde as propriedades piezelétricas e dielétricas mudam ao longo da espessura de uma placa piezelétrica MGF. Adicionalmente, ligas de PMN-PT também têm sido utilizadas (HALL, et al., 2005).

### **Perspectivas atuais no projeto, modelagem e fabricação de TPGF**

Diversas conclusões antecipadas podem ser obtidas, as quais permitem vislumbrar a fronteira do conhecimento dos TPGF:

- a) A maioria dos trabalhos concentra-se em fabricar TPGF do tipo cerâmica/cerâmica e cerâmica/metal com gradações ao longo da espessura. No entanto, a utilização de outros materiais, como polímeros, pode ser interessante; por exemplo, um TPGF do tipo cerâmica/polímero pode evitar interfaces de material na maioria das atuais cerâmicas piezocompostas e entre as interfaces camada de casamento/cerâmica e camada de amortecimento/cerâmica em transdutores de ultra-som. No entanto, esse tipo de fabricação encontra diversos desafios; por exemplo, na fabricação de TPGF utilizando a técnica de SPS, a temperatura de sinterização entre cerâmicas e polímeros difere centenas de

graus Celsius, dificultando o processo. Adicionalmente, a literatura não reporta a fabricação de TPGF com gradação ao longo de outras direções diferentes da espessura.

- b) Atualmente, a modelagem e simulação de materiais MGF é um tópico de intensa pesquisa, onde procuram-se melhores modelos que representem o comportamento de gradação contínua das propriedades; em especial, no relacionado com a predição de quantidades locais como, concentração de tensões, falha mecânica, entre outros. No entanto, surge a necessidade de modelos tanto analíticos como numéricos mais abrangentes. No caso dos modelos analíticos é desejável modelar analiticamente TPGF bidimensionais, com gradação de uma ou mais constantes de material, e com gradação ao longo de outras direções, além da espessura. Por outro lado, no projeto de TPGF de ultra-som, os modelos analíticos atuais têm-se limitado a simular a cerâmica piezométrica gradada e não estudam configurações mais realísticas, a saber: (i) modelagem da propagação de ondas emitidas por TPGF de ultra-som em meios líquidos (aproximação muito adequada para simular a propagação de ondas em tecidos humanos), e (ii) modelagem de TPGF de ultra-som constituídos, além da cerâmica piezométrica, das camadas de amortecimento e a camada de casamento de impedâncias, ver a Fig. 1.5; a qual representa uma montagem mais próxima da realmente utilizada em ensaios não-destrutivos, por exemplo.
- c) No relacionado com a modelagem numérica, a aproximação multicamada deixa muito a desejar quando se trata do estudo de tensões mecânicas e do estudo em análise dinâmica desses transdutores. Os trabalhos que a literatura reporta, em relação à modelagem e simulação de TPGF, tratam na sua maioria na aproximação multicamada ou na aproximação com EFG na análise estática (SILVA et al., 2007); por conseguinte, ainda não têm sido publicadas aproximações numéricas que modelem a gradação contínua de TPGF em aplicações dinâmicas, ou seja, formulações que permitam a simulação de TPGF em análise modal, harmônica e/ou transiente, considerando gradação contínua de material.

d) Por último, a otimização de TPGF é uma área pouco explorada, como demonstrado pelo número de artigos submetidos na seção de otimização do principal congresso mundial na área de MGF, ocorrido no ano 2006, o *Multiscale and Functionally Graded Material Conference* (FGM-2006). Na época, somente sete trabalhos foram submetidos no simpósio *Topology Optimization*, em contraste com os 34 trabalhos submetidos no simpósio *Modeling and Simulation*. A maioria dos trabalhos se limita a modelar o transdutor baseando-se em uma função de gradação já pré-definida, geralmente linear ou exponencial, e em nenhum caso é utilizado algum método de otimização que encontre a “melhor” lei de gradação entre as inúmeras possíveis para otimizar o seu desempenho. Assim, a otimização nesse tipo de transdutores torna-se indispensável, uma vez que, como confirmado por diversos trabalhos (ALMAJID et al. 2001; LEE, 2005; TAYA et al., 2003), o desempenho dos TPGF muda conforme a função de gradação assumida.

As idéias anteriores direcionaram os objetivos propostos para o presente trabalho de doutorado.

## 1.4 Objetivos

Atualmente, os estudos na área de TPGF vêm sendo realizados seguindo duas linhas: (i) uma linha de modelagem e simulação analítica e numérica e, (ii) uma linha de trabalhos experimentais. Essa diferenciação se deve ao fato de que a fabricação desses materiais é custosa e extremamente sofisticada, estando disponível em apenas alguns centros do mundo. Assim, muitos grupos se dedicam à análise numérica e simulação computacional desenvolvendo modelos computacionais e extensivas simulações para entender o comportamento físico e posteriormente, ao final, prossegue-se com a fabricação de protótipos.

Neste trabalho, prioriza-se a contribuição do trabalho de doutorado na formulação e implementação de métodos computacionais de análise e projeto para TPGF. Assim, o objetivo principal é estudar e implementar a modelagem e projeto de

transdutores piezelétricos com gradação funcional utilizando métodos analíticos, o MEF, e o método de otimização topológica (MOT). Serão considerados os projetos de atuadores piezelétricos destinados à geração de deslocamentos, transdutores de ultra-som, e ressonadores. Embora não seja o foco principal, o trabalho também aborda a fabricação de TPGF, visando demonstrar a viabilidade de manufaturar as estruturas MGFs desenvolvidas de forma computacional. Sendo assim, o presente trabalho foi orientado pelos seguintes objetivos:

- Desenvolver modelos analíticos baseados na teoria da mecânica do contínuo, para geometrias simples de TPGF. Especificamente, modelar TPGF em aplicações de ultra-som; ou seja, modelar TPGF de ultra-som emitindo uma onda acústica em meios fluidos e modelar TPGF incluindo a cerâmica piezelétrica MGF, a camada de amortecimento e a camada de casamento de impedâncias;
- Formular e implementar o MEF piezelétrico que leve em conta a variação contínua das propriedades elásticas, piezelétricas e dielétricas, de forma a permitir a simulação de TPGF em análise dinâmica;
- Formular e implementar o problema de otimização topológica (OT) para o projeto genérico e sistemático de TPGF; em outras palavras, encontrar através do MOT a função de gradação ótima que permita otimizar o desempenho de TPGF, segundo diversas aplicações nas quais eles podem ser empregados: (i) transdutores de ultra-som; (ii) ressonadores piezelétricos; e (iii) atuadores piezelétricos flexionais;
- Fabricar protótipos de TPGF utilizando a técnica de *Spark Plasma Sintering* – SPS, visando demonstrar a possibilidade de fabricar os TPGF que foram modelados e projetados mediante os métodos computacionais aqui desenvolvidos.

## 1.5 Contribuições Científicas

Esta tese procura dar um passo à frente no avanço da Engenharia, no sentido de que não se limita à análise numérica em si de TPGF, mas procura realizar o projeto ótimo dos mesmos formulando, desenvolvendo e implementando métodos computacionais baseados em algoritmos de otimização topológica; um tópico quase inexplorado nessa área pela comunidade científica internacional. Assim, embora o MEF e o MOT sejam métodos computacionais tradicionais (o segundo mais recente) na área da Engenharia, as suas aplicações variam com a natureza de cada problema, exigindo que a formulação seja refeita para cada caso. Em particular, neste trabalho, a teoria de elementos finitos para materiais piezelétricos MGF utiliza o conceito de elementos finitos gradados, a qual não tem sido ainda formulada e implementada na literatura para estes materiais, em análise dinâmica. Já a utilização do método de otimização topológica no projeto de estruturas MGF convencionais é uma área recente (Paulino, Silva, 2005). Além disso, a extensão do MOT para o projeto de TPGF é um ponto significativo de contribuição que exige o desenvolvimento de uma nova formulação do problema de otimização do MOT que em nada se assemelha à desenvolvida para o projeto de transdutores piezelétricos tradicionais, embora seja inspirada nela.

Dessa forma, resumindo, as principais contribuições do trabalho de doutorado podem ser numeradas como:

- a)- Como se apresentou no item (b) da Seção “Perspectivas atuais no projeto, modelagem e fabricação de TPGF”, ainda não tem sido explorada a potencialidade do conceito MGF no projeto de TPGF de ultra-som, quando considerado o transdutor como um todo (piezocerâmica, camada de amortecimento, e camada de casamento de impedâncias) e, adicionalmente, quando simulados em aplicações de emissão de ondas de pressão em fluidos. Para este fim, são desenvolvidos modelos multicamadas e analíticos para o estudo, no domínio do tempo e da frequência, da propagação de ondas em líquidos emitidas por TPGF de ultra-som. São utilizadas diversas funções de gradação das propriedades piezelétricas: linear e exponencial. Adicionalmente, é

estudada a impedância elétrica nesse tipo de transdutores, e a gradação de propriedades ao longo da espessura e da direção radial de TPGF cilíndricos. Desse trabalho foram publicados dois artigos em congressos internacionais: *Multiscale and Functionally Graded Materials Conference 2006 - FGM2006* (RUBIO et al., 2008b) e *International Congress on Ultrasonic - ICU 2007* (RUBIO et al., 2007a), e um artigo em congresso nacional: *International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics – XII DINAME* (RUBIO et al., 2007b). Adicionalmente, foi publicado o artigo intitulado *Modeling of functionally graded piezoelectric ultrasonic transducers*, no *Ultrasonics*, periódico internacional com arbitragem, o qual compila todos os resultados analíticos e numéricos obtidos para TPGF de ultra-som (RUBIO et al., 2009a).

- b)- É desenvolvido um programa de elementos finitos que permite a modelagem de TPGF bidimensionais considerando análise modal, harmônica, e transiente. O programa está baseado no conceito de EFG e foi implementado utilizando o programa MATLAB<sup>TM</sup>. Adicionalmente, o programa, denominado *piezoEFG*, permite a gradação de todas as propriedades piezelétricas, dielétricas e elásticas, além da densidade, ao longo de qualquer direção cartesiana ( $x$  ou  $y$  no caso bidimensional), e permite o cálculo da impedância elétrica, o cálculo do Coeficiente de Acoplamento Eletromecânico (CAEM), e o cálculo da Constante Modal Piezelétrica (CMP). Parte dos resultados obtidos com o programa *piezoEFG* foram publicados no *19th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2007* (RUBIO et al., 2007c).
- c) É desenvolvido um código no programa MATLAB<sup>TM</sup>, chamado *piezoMgfOT*, o qual permite o projeto sistemático e genérico de TPGF, utilizando o Método de Otimização Topológica (MOT); em outras palavras, o programa encontra a gradação ótima de material (gradação das propriedades elásticas, piezelétricas, dielétricas, e densidade) em TPGF, de forma a alterar diversas características dinâmicas do transdutor. Várias implementações foram necessárias para cumprir esse objetivo, entre elas: (i) o EFG em análise modal e harmônica, o qual permite uma mudança contínua das propriedades dentro do elemento finito; (ii) a Aproximação Contínua da Distribuição de Material (ACDM), a qual permite obter

uma distribuição contínua das variáveis de projeto e, assim, obter um controle implícito do gradiente de material; (iii) o *Modal Assurance Criterion* (MAC) (EWINS, 1988; KIM; KIM, 2000), o qual permite busca o modo de vibrar desejado dentre aqueles que são calculados a cada passo iterativo do MOT; (iv) a Técnica de Projeção, que permite a obtenção de funções de gradação que representam mudanças suaves de material ao longo da direção de gradação e, por conseguinte, permite controlar de forma explícita o gradiente de material em TPGF; e por último (v) novas funções objetivo foram formuladas, e em outros casos, foi necessário modificar funções objetivo existentes na literatura, para cumprir com objetivos específicos, segundo diversas aplicações desses TPGF. Essas aplicações incluem:

- Projetar TPGF de ultra-som visando maximizar a frequência de um modo de vibrar definido pelo usuário, e assim obter TPGF de ultra-som que trabalhem em altas frequências de operação sem necessidade de diminuir excessivamente a sua espessura.
- Projetar ressonadores piezelétricos com gradação funcional; em outras palavras, projetar TPGF que vibrem segundo certo modo de vibrar e segundo certa frequência de ressonância, ambos os parâmetros previamente definidos pelo usuário.
- Projetar TPGF visando maximizar a representatividade de um modo de vibrar específico na resposta total do TPGF; em outras palavras, maximiza-se a conversão de energia elétrica aplicada (potencial elétrico aplicado nos eletrodos) em energia mecânica de saída (deslocamento), nesse modo em particular. Para esse fim, é maximizado o Coeficiente de Acoplamento EletroMecânico (*EletroMechanical Coupling Coefficient* – EMCC) ou CAEM, ou a Constante Modal Piezelétrica (CMP) do modo definido pelo usuário.
- Projetar TPGF visando aplicações de atuador; especificamente, foram projetados atuadores piezelétricos flexensionais gradados modificando o seu comportamento dinâmico mediante o MOT.

- Projetar TPGF de ultra-som tipo banda estreita e banda larga.

Como se pode observar, a implementação do MOT no projeto de TPGF, é uma abordagem complexa, que requer a implementação de conceitos nunca antes utilizados para o projeto de estruturas piezelétricas e estruturas MGF. Os resultados obtidos, relacionados com a modificação das características dinâmicas de TPGF utilizando o MOT, foram apresentados na *International Conference on Engineering Optimization - EngOpt 2008* (RUBIO et al., 2008c); no *10<sup>th</sup> International Symposium on Multiscale, Multifunctional & Functionally Graded Materials - FGM2008* (RUBIO et al., 2009d); na *19<sup>th</sup> International Conference on Adaptive Structures and Technologies, ICAST 2008* (RUBIO et al., 2008d); no *8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization* (RUBIO et al., 2009f); no *10th U.S. National Congress for Computational Mechanics* (RUBIO et al., 2009g); e no *2009 IEEE International Ultrasonics Symposium* (RUBIO et al., 2009h). Em adição, foi publicado um artigo em periódico internacional com arbitragem, o qual compila parte dos resultados obtidos mediante o MOT para o projeto de TPGF. O artigo se intitula *Toward Optimal Design of Piezoelectric Transducers Based on Multifunctional and Smoothly Graded Hybrid Material Systems*, publicado no *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* (RUBIO et al., 2009b). Por ultimo, alguns dos artigos publicados em congressos foram selecionados para publicação em periódicos, como é o caso do artigo publicado no *Physics Procedia* (RUBIO et al., 2009c) e no *Materials Science Forum* (RUBIO et al., 2009d).

- d) Por outro lado, fabricam-se TPGFs do tipo PZT-5A/Níquel. Essa combinação de materiais não se encontra reportada na literatura (ver a Seção “Fabricação de TPGF”). Adicionalmente, estuda-se a sua micro-estrutura e o seu comportamento dinâmico (curva de impedância elétrica).

## 1.6 Organização da Tese

A organização da tese segue a metodologia e etapas de trabalho necessárias para o desenvolvimento da mesma. Basicamente, antes de iniciar qualquer estudo torna-se necessário uma revisão bibliográfica que apresente o estado da arte do tema proposto e demarque os trabalhos que representarão contribuições no campo analisado. Essa revisão está presente no capítulo atual (capítulo 1), no caso dos TPGF. Por outro lado, antes de empreender um estudo de otimização de TPGF é indispensável justificar esse estudo e determinar a técnica de modelagem que mais se ajuste à gradação contínua de material presente em TPGF. Esse estudo exploratório do efeito MGF, quando aplicado a transdutores piezelétricos, especificamente, transdutores de ultra-som, é desenvolvido no capítulo 2. Assim, o capítulo 2 serve como “capítulo justificativa” para os capítulos subseqüentes, já que as conclusões preliminares nele apresentadas, justificam o desenvolvimento de novas ferramentas de análise para a modelagem de TPGF (capítulo 3), e o desenvolvimento de técnicas genéricas para o seu projeto (capítulo 4). Por outro lado, a fabricação de TPGF apresenta-se no capítulo 5. As conclusões, produto dos resultados apresentados ao longo do texto, são expressas no capítulo 6, acompanhadas de propostas para trabalhos futuros. No Apêndice A e Apêndice B é apresentado um texto complementar para o adequado entendimento de algumas expressões matemáticas relacionadas com os elementos finitos piezelétricos e o MOT, respectivamente. Por último, no Apêndice C e Apêndice D apresenta-se respectivamente a verificação numérica e a validação experimental do código de elementos finitos implementado para a simulação e modelagem de TPGF.

## 2 MODELAGEM ANALÍTICA E MULTICAMADA DE TPGF: APLICAÇÕES DE ULTRA-SOM

### 2.1 Introdução

Este capítulo explora o conceito MGF quando aplicado a transdutores piezelétricos. Essencialmente, durante o capítulo procura-se dar resposta a duas perguntas importantes, a saber:

- (i) *A aplicação do conceito MGF a transdutores piezelétricos acarreta alguma vantagem além das conhecidas na literatura?*
- (ii) *As técnicas atuais de projeto e modelagem simulam adequadamente esse tipo de transdutores?*

As respostas a essas perguntas justificam os objetivos propostos no capítulo 1, e direcionam a metodologia e trabalhos apresentados nos capítulos subseqüentes. Assim, uma vez que o campo de aplicação de transdutores piezelétricos é muito amplo (ver a Seção 1.2 do capítulo 1), para simplificar, o estudo é restrito a aplicações de ultra-som. Este campo de ação é de importância por duas razões principais: primeiro, em aplicações dinâmicas de TPGF, as aplicações de ultra-som são umas das menos exploradas na literatura (DU et al., 2007; GUO et al. 2005; SAMADHIYA, MUKHERJEE, 2006), em relação, por exemplo, a aplicações de atuação piezelétrica (CARBONARI et al., 2007b, LEE, 2005; STEINHAUSEN et al., 2005; TAYA, et al., 2003; ZHONG, YU, 2007). Segundo, o grupo ao qual pertence o autor (Laboratório de Sensores e Atuadores da Universidade de São Paulo), possui uma ampla experiência no estudo de transdutores não-MGF de ultra-som<sup>1</sup>; portanto, o autor pode aproveitar essa experiência para direcionar o seu trabalho na área de TPGF.

Para dar resposta às perguntas antes mencionadas, o capítulo é estruturado seguindo duas abordagens diferentes de modelagem: analítica e numérica. Na abordagem analítica é desenvolvido um modelo que permite simular TPGF de ultra-

---

<sup>1</sup> Atualmente são realizadas pelo grupo: medição de densidade e viscosidade de líquidos por ultra-som; transmissão acústica de dados; formação de imagem através de ondas acústicas na frequência de ultra-som; e ensaios não-destrutivos por ultra-som.

som quando as suas propriedades são gradadas linear e exponencialmente. Já na abordagem numérica são desenvolvidas rotinas computacionais baseadas numa aproximação multicamada, utilizando o método dos elementos finitos. Esta última abordagem é uma aproximação amplamente utilizada na literatura (ALMAJID et al. 2001; LEE, 2005; SAMADHIYA, MUKHERJEE, 2006; TAYA et al., 2003). Uma introdução a cada uma dessas abordagens é apresentada a seguir.

### **2.1.1 Introdução à modelagem analítica de TPGF de ultra-som**

Como mencionado anteriormente, este capítulo contribui no desenvolvimento de um modelo analítico para o projeto de TPGF, especificamente, visando aplicações de ultra-som. Os transdutores de ultra-som são utilizados na obtenção de imagens médicas e em ensaios não-destrutivos. O objetivo dos transdutores de ultra-som é emitir/receber uma onda acústica para/de um meio de propagação específico, água, sólido ou ar. Geralmente, eles estão compostos de um elemento ativo unido a dois elementos passivos, a camada de amortecimento ou *backing* e a camada de casamento de impedâncias ou *matching* (Fig. 2.1). O elemento ativo da maioria dos transdutores piezelétricos de ultra-som utilizados na atualidade é uma cerâmica piezelétrica, o qual é o componente encarregado de gerar/captar a onda de ultra-som. A camada de amortecimento deve possuir alta atenuação e uma impedância acústica próxima do material piezelétrico. Essa camada é utilizada para absorver a onda acústica emitida em sentido contrário à direção de propagação desejada e, conseqüentemente, reduzir a largura do pulso emitido pelo transdutor. Por último, a camada de casamento de impedância acústica, a qual geralmente possui um quarto do comprimento de onda da freqüência central do transdutor, tem como objetivo proteger o material piezelétrico e ao mesmo tempo transmitir o máximo possível de energia do elemento ativo para o meio de propagação.

Como foi comentado no capítulo 1, no caso dos TPGF de ultra-som, o elemento ativo piezelétrico não-MGF é substituído por um material piezelétrico com propriedades gradadas, ver a Fig. 2.1; portanto, todas ou algumas das suas propriedades variam ao longo de uma direção específica; geralmente, ao longo da sua espessura, seguindo diversas funções de gradação (RUBIO et al., 2009a;

CHAKRABORTY et al., 2005; GUO et al., 2005; ICHINOSE et al., 2004; SAMADHIYA et al., 2006; YAMADA et al., 2001; YAMADA et al., 2000; YAMADA et al., 1999; YAMADA et al., 1998). A abordagem de considerar a gradação das propriedades da cerâmica piezelétrica de ultra-som não é completamente nova. Desde os anos 60 alguns estudos têm reportado as vantagens na geração de ondas utilizando transdutores piezelétricos com propriedades não-uniformes (MICHELL; REDWOOD, 1969); no entanto, esses estudos começaram a ser amplamente explorados somente até finais dos anos 90 (CHAKRABORTY et al., 2005; GUO et al., 2005; ICHINOSE et al., 2004; SAMADHIYA et al., 2006; YAMADA et al., 2001; YAMADA et al., 2000; YAMADA et al., 1999; WU et al., 1996). Esses estudos mostraram que o conceito MGF pode ser aplicado a transdutores piezelétricos de ultra-som para obter maior largura de banda na resposta do transdutor e na redução de ondas de reflexão (RUBIO et al., 2009a; GUO et al., 2005; SAMADHIYA et al., 2006; YAMADA et al., 1999). Esse tipo de resposta é muito útil em aplicações de Ensaios não-Destrutivos (END) e aquisição de imagens em medicina; uma vez que a resolução axial na obtenção de imagens está relacionada com a frequência e com a largura do pulso. Assim, para uma dada frequência, quanto menor a largura do pulso ou maior a largura de banda, maior a resolução da imagem.

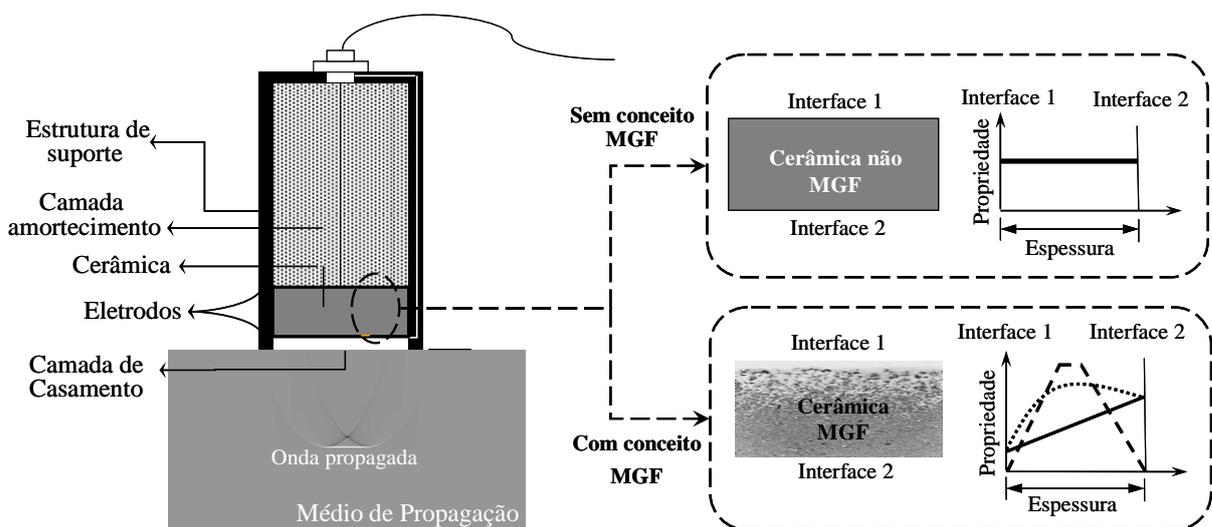


Figura 2.1. Representação esquemática do conceito MGF em transdutores de ultra-som.

Basicamente, os estudos analíticos relacionados com o projeto de TPGF de ultra-som tratam da extensão dos tradicionais modelos unidimensionais de redes ou

matrizes distribuídas, por exemplo, do modelo Redwood ou Mason (KINO, 2000), a modelos de TPGF. Entre esses trabalhos destacam-se os trabalhos de Yamada et al. (2001); e Yamada et al. (1999), os quais estendem esses modelos analíticos de redes a TPGF considerando funções de gradação linear (YAMADA et al., 2001) e exponencial (YAMADA et al., 1999) ao longo da espessura. No entanto, Yamada et al. (2001); e Yamada et al. (1999) não consideram o TPGF de ultra-som como um todo; em outras palavras, eles somente consideram a gradação da cerâmica piezelétrica e não incluem no seu modelo o efeito da camada de amortecimento ou *backing*, camada de casamento de impedâncias ou *matching*, perdas elétricas e mecânicas, nem sua aplicação na emissão de ondas acústicas de ultra-som.

Observando-se essas carências nos modelos analíticos atuais, é desenvolvido um modelo analítico que visa modelar TPGF de ultra-som incluindo a estrutura ativa ou material piezelétrico, sem ou com gradação, e dois elementos passivos: a camada de amortecimento e a camada de casamento de impedâncias. O modelo simula a transmissão de uma onda de pressão num fluido uma vez que a cerâmica piezelétrica é excitada com um pulso elétrico. O modelo desenvolvido é uma aproximação unidimensional da construção típica de um transdutor de ultra-som de banda-larga (GALLEGO-JUARÉZ, 1989; KINO, 2000), mostrado na Fig. 2.1. Essa modelagem envolve a extensão, para TPGF de ultra-som, de um modelo unidimensional inicialmente proposto para transdutores não-MGF, o modelo da matriz distribuída (LAMBERTI et al., 1987; LAMBERTI et al., 1997). Esse modelo da matriz distribuída permite modelar um transdutor composto de várias camadas de materiais (camada de amortecimento, piezocerâmica e camada de casamento de impedância) através de um produto de matrizes, sendo cada matriz correspondente a uma camada. O modelo unidimensional aqui desenvolvido para TPGF de ultra-som considera as perdas mecânicas e dielétricas, e uma variação linear e exponencial das constantes piezelétricas ao longo da espessura da piezocerâmica. Como resposta a uma excitação elétrica do TPGF de ultra-som, o modelo obtém a resposta temporal da propagação de um pulso de pressão num fluido, e a sua correspondente resposta em freqüência. Além disso, o modelo determina a impedância elétrica de entrada do TPGF de ultra-som e da piezocerâmica MGF de forma isolada.

### 2.1.2 Introdução à modelagem multicamada de TPGF de ultra-som

Outra abordagem implementada neste capítulo é utilizar métodos numéricos geralmente utilizados na procura de soluções aproximadas de transdutores piezelétricos não-MGF, com geometrias e condições de contorno complexas. Nesse caso, um dos métodos amplamente utilizados é o MEF (BATHE, 1996; LERCH, 1990; NAILLON et al., 1983). No entanto, a utilização do MEF na análise de TPGF tem sido limitada a uma aproximação multicamada. A aproximação multicamada consiste em discretizar o material piezelétrico em múltiplas camadas de material homogeneizado, na mesma direção da gradação, ver a Fig. 2.2. Dessa forma, cada camada pode ser modelada utilizando o tradicional MEF para materiais piezelétricos não-MGF (detalhes do MEF de estruturas piezelétricas se encontram no Apêndice A). A Fig. 2.2 apresenta uma representação dessa aproximação MEF-multicamada, onde pode ser observado que diversas leis de gradação (ou funções de gradação) podem ser utilizadas, sejam elas perfis lineares, côncavos, convexos, exponenciais, etc.

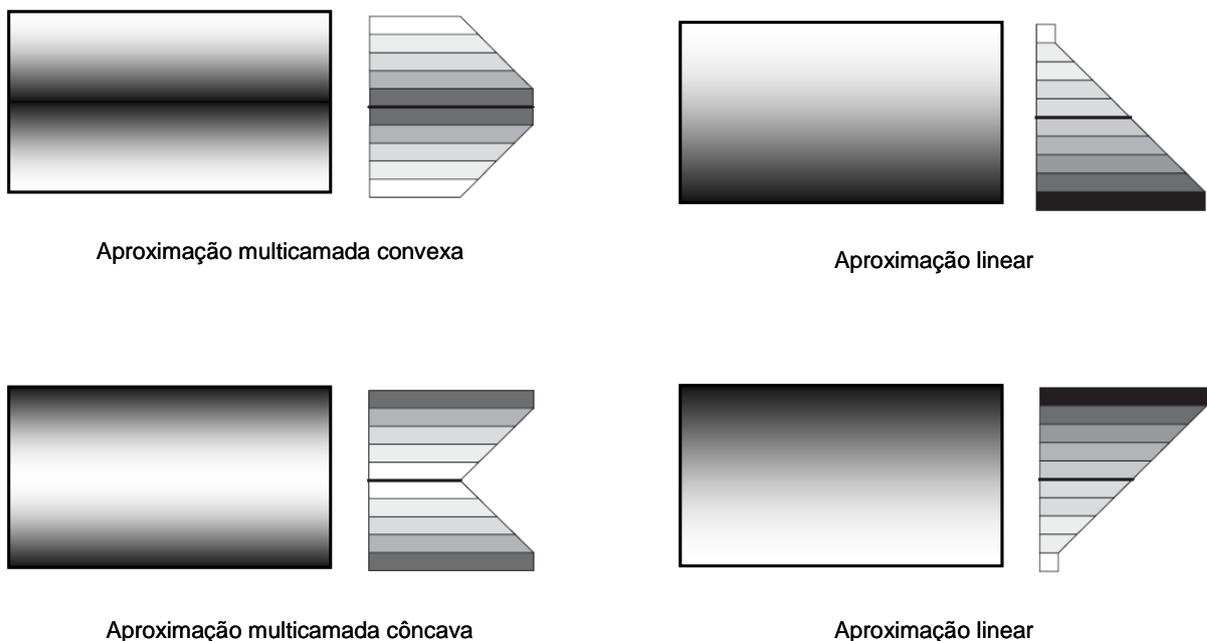


Figura 2.2. Aproximação multicamada de TPGF utilizando diversas leis de gradação.

A modelagem multicamada de TPGF de ultra-som é estudada por três motivos principais: (i) a aproximação multicamada é o método de modelagem mais

comumente utilizado no projeto de TPGF (ALMAJID et al. 2001; LEE, 2005; SAMADHIYA, MUKHERJEE, 2006; TAYA et al., 2003); portanto, considera-se instrutivo desenvolver esse tipo de modelagem para validar o modelo analítico desenvolvido. (ii) Considerando que não foi encontrado nenhum programa comercial de Elementos Finitos (EF) que simulará TPGF de ultra-som, a modelagem multicamada surge como uma boa aproximação que pode ser implementada em qualquer programa comercial de EF. Dessa forma, qualquer usuário com um programa comercial de EF pode aproveitar todas as funções de pré-processamento e pós-processamento que, geralmente, esses programas possuem. (iii) Por último, estudando o comportamento dinâmico dos TPGF de ultra-som utilizando a aproximação multicamada, pode ser avaliada a sua exatidão e adequação na modelagem desse tipo de transdutores, considerando-se que as interfaces entre camadas propiciam o surgimento de pontos concentradores de tensão.

Neste capítulo, a aproximação multicamada concentra-se no estudo do campo acústico gerado por TPGF de ultra-som bidimensionais. Essa análise tem sido abordada por outros trabalhos, os quais abordam o mesmo estudo através do método do elemento espectral (SAMADHIYA, MUKHERJEE, 2006), ou através do método de camadas finas (*Thin-Layer Method*) (CHAKRABORTY et al., 2005). No entanto, esses modelos numéricos assumem somente gradação ao longo da espessura e não exploram a gradação radial das propriedades da cerâmica piezolétrica MGF na geração de ondas de ultra-som. Assim, foram desenvolvidas rotinas APDL (*ANSYS Parametric Design Language*), no programa comercial de EF ANSYS™, para o estudo de TPGF de ultra-som bidimensionais.

O capítulo está organizado como segue: na Seção 2.2 apresenta-se a modelagem analítica de um TPGF de ultra-som considerando função de gradação linear e exponencial. Na Seção 2.3 apresenta-se a descrição do modelo multicamadas implementado. Na Seção 2.4 apresentam-se os resultados obtidos tanto com o modelo analítico como com o modelo multicamada, e na Seção 2.5 são apresentadas algumas considerações finais relacionadas com esses resultados.

## 2.2 Modelagem Analítica de TPGF de Ultra-Som

O ponto de partida na elaboração do modelo é considerar que as ondas acústicas propagam-se na direção  $z$  da piezocerâmica MGF apresentada na Fig. 2.3. Também é assumido que as dimensões laterais do TPGF são muito superiores que as dimensões em  $z$ , e que os deslocamentos das partículas e as componentes de campo elétrico sejam nulos nas direções  $x$  e  $y$ . Além disso, assume-se que o disco piezelétrico MGF tem uma variação contínua de propriedades piezelétricas ao longo da espessura.

O TPGF de ultra-som tem um disco piezelétrico de espessura  $t_c$ , uma impedância acústica  $\bar{Z}$ , e uma camada de casamento com espessura  $t_m$  e impedância acústica  $Z_m$ . O TPGF emite uma onda frontal num meio semi-infinito com impedância acústica  $Z_l$ , e uma onda em direção oposta em outro meio semi-infinito ou camada de amortecimento, este último com impedância  $Z_b$ ; ver a Fig. 2.3. Os termos  $F_i$  e  $v_i$  representam respectivamente as forças mecânicas e velocidades na interface de camadas  $i$ , para  $i = 1$  até 3.

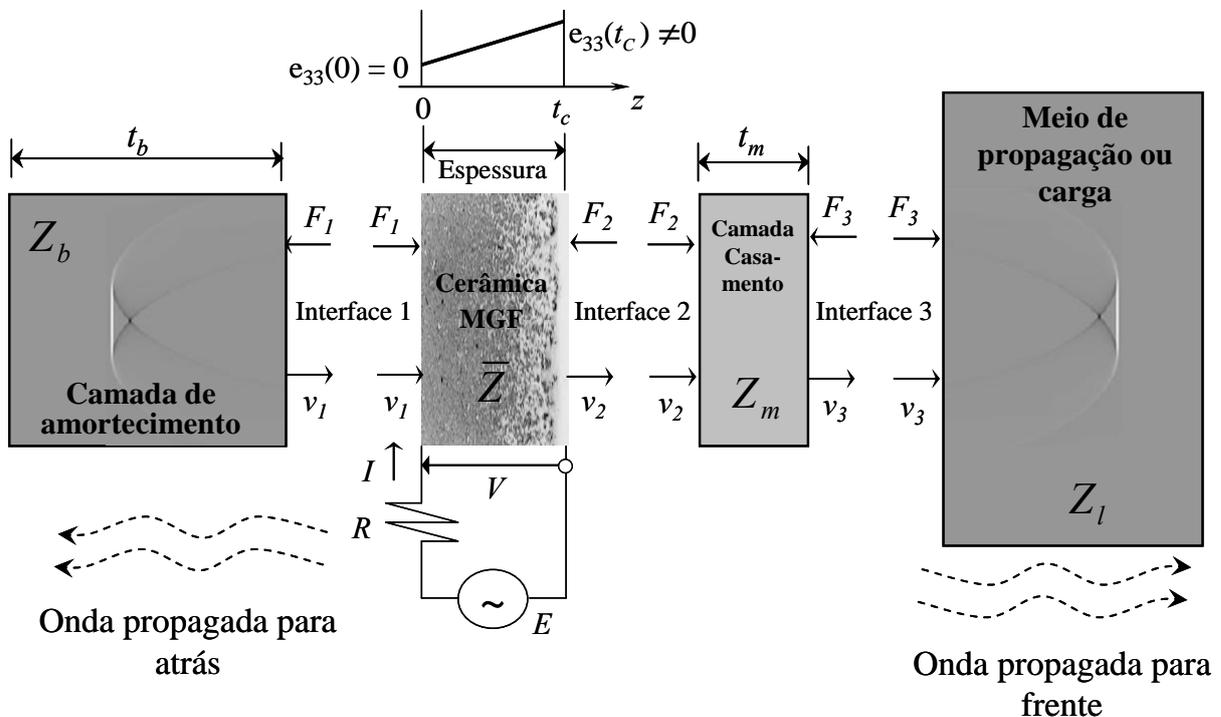


Figura 2.3. Diagrama de forças e velocidades atuantes nas interfaces de um TPGF.

Seguindo o modelo de matriz distribuída descrita por Lamberti et al. (1987), o TPGF de ultra-som (por enquanto, sem incluir a camada de casamento de impedâncias) pode ser representado por um sistema de três portas, ver a Fig. 2.4: uma elétrica e duas mecânicas. As portas mecânicas representam a interação acústica entre a piezocerâmica MGF com os meios semi-infinitos: meio de propagação da onda (também chamado carga) e a camada de amortecimento. A porta elétrica representa a interação entre a piezocerâmica MGF e o circuito de entrada elétrico. Este circuito tem um gerador de sinal ( $E$ ) com resistência interna ( $R$ ). Existe um sistema intermediário que representa a camada de casamento, que é modelado como um circuito com duas portas mecânicas, ver a Fig. 2.4. Conectando os dois sistemas obtém-se o modelo analítico que representa todo o TPGF de ultra-som. No entanto, uma última consideração é feita: assume-se a espessura dos eletrodos suficientemente pequena em comparação ao comprimento de onda acústica; assim, a perturbação gerada por esses eletrodos na onda de saída de pressão é insignificante.

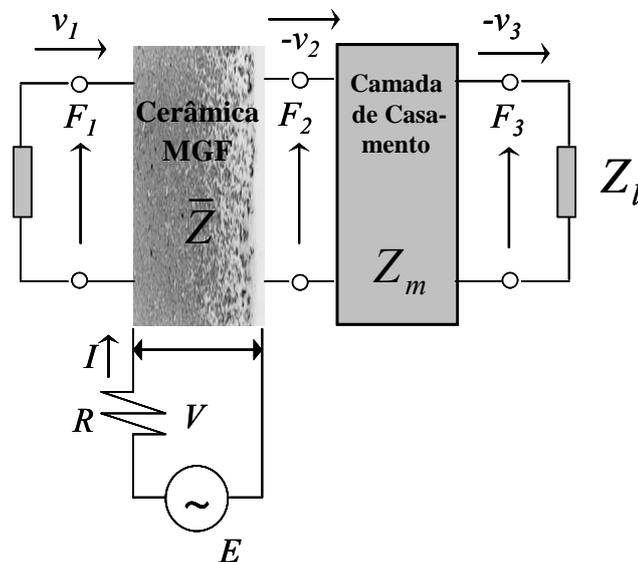


Figura 2.4. Circuito equivalente do TPGF.

O objetivo do modelo analítico é encontrar a relação entre a corrente elétrica ( $I$ ) e o potencial elétrico ( $V$ ) no circuito elétrico com a força ( $F_3$ ) e a velocidade ( $v_3$ ) transmitidas à carga ou meio de propagação das ondas de pressão. Para cumprir este objetivo, a dedução do modelo é dividida em três partes: (i) modelagem do

disco piezocerâmico MGF; (ii) modelagem da camada de amortecimento; e (iii) modelagem da camada de casamento.

### 2.2.1 Modelagem do disco piezelétrico MGF com gradação linear

Para modelar a cerâmica MGF segue-se o procedimento apresentado por Yamada et al. (2001), os quais desenvolveram o modelo analítico somente da piezocerâmica MGF (com gradação linear das propriedades piezelétricas ao longo da espessura) sem considerar a sua interação com a camada de casamento de impedância e a camada de amortecimento. Assim, partindo das equações constitutivas para o modelo unidimensional considerado (maiores detalhes dessas equações constitutivas encontram-se no Apêndice A), tem-se:

$$T_3 = c_{33}^E(z)S_3 - e_{33}(z)E_3 \quad (2.1)$$

$$D_3 = e_{33}(z)E_3 + \varepsilon_{33}^S E_3 \Rightarrow E_3 = \frac{D_3 - e_{33}(z)S_3}{\varepsilon_{33}^S} \quad (2.2)$$

onde  $T_3$  é a tensão;  $c_{33}^E$  é a constante elástica em campo elétrico constante;  $S_3$  é a deformação;  $E_3$  é o campo elétrico;  $D_3$  é o deslocamento elétrico;  $\varepsilon_{33}^S$  é a constante dielétrica em deformação constante; e  $e_{33}$  é a constante piezelétrica. Substituindo a eq.(2.2) na eq.(2.1) obtém-se:

$$T_3 = c_{33}^D S_3 - \frac{e_{33}(z)}{\varepsilon_{33}^S} D_3 \quad \text{com:} \quad c_{33}^D = c_{33}^E \left( 1 + \frac{e_{33}^2}{c_{33}^S \varepsilon_{33}^S} \right) \quad (2.3)$$

Já que uma das hipóteses diz que  $\partial D_3 / \partial z = 0$ , derivando a eq.(2.3) obtém-se:

$$\frac{\partial T_3}{\partial z} = c_{33}^D \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{D_3}{\varepsilon_{33}^S} \frac{\partial e_{33}(z)}{\partial z} \quad \text{considerando que:} \quad S_3 = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.4)$$

onde  $u_z$  é o deslocamento na direção  $z$ . Da eq.(2.4) a equação do movimento pode ser expressa como:

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = c_{33}^D \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{D_3}{\epsilon_{33}^S} \frac{\partial e_{33}(z)}{\partial z} \quad (2.5)$$

O modelo assume que a constante piezelétrica  $e_{33}(z)$  varia linearmente de  $e_{33}(0)$  até  $e_{33}(t_c)$ , entre  $z=0$  e  $z=t_c$ , como mostrado na Fig. 2.3. Neste caso,  $\partial e_{33}(z)/\partial z$  será expressa como:

$$\frac{\partial e_{33}(z)}{\partial z} = \frac{e_{33}(0) - e_{33}(t_c)}{t_c} \quad (2.6)$$

Assumindo que os deslocamentos  $u_z$  e  $D_3$  variam em forma senoidal com o tempo  $t$  ( $e^{j\omega t}$ ), obtém-se da eq.(2.5):

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + k^2 u_z = G \quad (2.7)$$

onde,  $\omega$  é a freqüência angular da entrada elétrica sinusoidal, e  $k$  é o número de onda, expresso como:

$$k = \frac{\omega}{v_p} \quad \text{com:} \quad v_p = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}} \quad (2.8)$$

sendo  $v_p$  a velocidade de onda longitudinal. O termo  $G$  é um parâmetro expresso por:

$$G = \frac{D_3}{\epsilon_{33}^S c_{33}^D} \left( \frac{e_{33}(0) - e_{33}(t_c)}{t_c} \right) \quad (2.9)$$

A solução da equação diferencial parcial da eq.(2.7) é (Yamada et al., 2001):

$$u_z = \left( B_1 \sin kz + B_2 \cos kz + \frac{G}{k^2} \right) e^{j\omega t} \quad (2.10)$$

sendo  $B_1$  e  $B_2$  constantes, as quais são determinadas a partir das condições iniciais do problema. Assim, assumindo que as velocidades nas interfaces 1 ( $v_1$ ) e 2 ( $v_2$ ), ver a Fig. 2.3, são (omite-se  $e^{j\omega t}$ ):

$$v_1 = \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)_{z=0} = j\omega u_z \Big|_{z=0} = j\omega \left( B_2 + \frac{G}{k^2} \right) \quad (2.11)$$

$$v_2 = \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)_{z=t_c} = -j\omega u_z \Big|_{z=t_c} = -j\omega \left( B_1 \sin kt_c + B_2 \cos kt_c + \frac{G}{k^2} \right) \quad (2.12)$$

Expressando  $B_1$  e  $B_2$  em termos de  $v_1$  e  $v_2$  e aplicando esse resultado na eq.(2.10), a seguinte expressão é encontrada para  $u_z$ :

$$u_z = \left( \frac{v_2 + v_1 \cos kt_c}{j\omega \sin kt_c} \right) \sin kz + \frac{v_1}{j\omega} \cos kz + \frac{G}{k^2} \left( 1 - \cos kz - \tan \frac{kt_c}{2} \sin kz \right) \quad (2.13)$$

Uma vez que  $D_3 = I/i\omega A$ , onde  $I$  é a corrente elétrica de excitação da piezocerâmica MGF e  $A$  é a área transversal do transdutor, as forças nas interfaces 1 ( $F_1$ ) e 2 ( $F_2$ ) são escritas como:

$$\begin{aligned} F_1 &= -A(T_3)_{z=0} = -A \left\{ -\frac{e_{33}(z)}{\varepsilon_{33}^S} D_3 + c_{33}^D \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\}_{z=0} \\ &= A \frac{e_{33}(0)}{\varepsilon_{33}^S} D_3 + \frac{Ac_{33}^D G}{k} \tan \frac{kt_c}{2} - j \frac{Ac_{33}^D k}{\omega} \frac{v_2 + v_1 \cos(kt_c)}{\sin(kt_c)} \\ &= \frac{\bar{e}_{33}(0)}{j\omega \varepsilon_{33}^S} I + \frac{\bar{Z}}{j \tan(kt_c)} v_1 + \frac{\bar{Z}}{j \sin(kt_c)} v_2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
F_2 = -A(T_3)_{z=t_c} &= -A \left\{ -\frac{e_{33}(z)}{\epsilon_{33}^S} D_3 + c_{33}^D \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\}_{z=t_c} \\
&= A \frac{e_{33}(t_c)}{\epsilon_{33}^S} D_3 - \frac{Ac_{33}^D G}{k} \tan \frac{kt_c}{2} - j \frac{Ac_{33}^D k}{\omega} \frac{v_1 + v_2 \cos(kt_c)}{\sin(kt_c)} \\
&= \frac{\bar{e}_{33}(t_c)}{j\omega \epsilon_{33}^S} I + \frac{\bar{Z}}{j \sin(kt_c)} v_1 + \frac{\bar{Z}}{j \tan(kt_c)} v_2
\end{aligned} \tag{2.15}$$

onde:

$$\bar{e}_{33}(0) = e_{33}(0) + \left( \frac{e_{33}(t_c) - e_{33}(0)}{kt_c} \right) \tan \left( \frac{kt_c}{2} \right) \tag{2.16}$$

$$\bar{e}_{33}(t_c) = e_{33}(t_c) - \left( \frac{e_{33}(t_c) - e_{33}(0)}{kt_c} \right) \tan \left( \frac{kt_c}{2} \right) \tag{2.17}$$

$$\bar{Z} = \rho v_p A = \sqrt{\rho c_{33}^D} A \tag{2.18}$$

denominando  $\bar{Z}$  a impedância característica do disco piezocerâmico MGF. A voltagem  $V$  na porta elétrica é expressa como:

$$\begin{aligned}
V &= -\int_{t_c}^0 E_3 dz = \frac{1}{\epsilon_{33}^S} \int_{t_c}^0 (D_3 - e_{33} S_3) dz \\
&= \frac{t_c D_3}{\epsilon_{33}^S} - \frac{1}{\epsilon_{33}^S} \left\{ e_{33}(t_c) u_z(t_c) - e_{33}(0) u_z(0) - \left( \frac{e_{33}(t_c) - e_{33}(0)}{t_c} \right) \int_0^{t_c} u_z dz \right\}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Agora aplicando à equação anterior, eq.(2.19), à expressão de  $u_z$  da eq.(2.13), encontra-se que  $V$  será dado por:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{j\omega C_0} \left\{ 1 + \frac{K_{dif}^2}{(kt_c)^2} \left( 1 - \frac{2}{kt_c} \tan \frac{kt_c}{2} \right) \right\} + \frac{\bar{e}_{33}(0)}{j\omega \epsilon_{33}^S} v_1 + \frac{\bar{e}_{33}(t_c)}{j\omega \epsilon_{33}^S} v_2 \\
&= \frac{1}{j\omega \bar{C}_0} I + \frac{\bar{e}_{33}(0)}{j\omega \epsilon_{33}^S} v_1 + \frac{\bar{e}_{33}(t_c)}{j\omega \epsilon_{33}^S} v_2
\end{aligned} \tag{2.20}$$

onde  $C_0 = \epsilon_{33}^S A / t_c$  é denominada a capacitância. Na eq.(2.20)  $K_{dif}$  cumpre o papel de um coeficiente de acoplamento eletromecânico proporcional à diferença das constantes piezelétricas na superfície da cerâmica MGF. O termo  $\bar{C}_0$  pode ser considerado como uma capacitância efetiva. Esses termos são expressos como:

$$\bar{C}_0 = \frac{C_0}{1 + \frac{K_{dif}^2}{(kt_c)^2} \left( 1 - \frac{2}{kt_c} \tan \left( \frac{kt_c}{2} \right) \right)} \tag{2.21}$$

$$K_{dif}^2 = \frac{[e_{33}(t_c) - e_{33}(0)]^2}{\epsilon_{33}^S c_{33}^D} \tag{2.22}$$

Das eq.(2.14), (2.15), e (2.20) a relação entre  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $V$  e  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $I$  pode ser estabelecida como:

$$F_1 = \frac{\bar{Z}}{j \tan(kt_c)} v_1 + \frac{\bar{Z}}{j \sin(kt_c)} v_2 + \frac{\bar{e}_{33}(0)}{j\omega \epsilon_{33}^S} I \tag{2.23}$$

$$F_2 = \frac{\bar{Z}}{j \sin(kt_c)} v_1 + \frac{\bar{Z}}{j \tan(kt_c)} v_2 + \frac{\bar{e}_{33}(t_c)}{j\omega \epsilon_{33}^S} I \tag{2.24}$$

$$V = \frac{\bar{e}_{33}(0)}{j\omega \epsilon_{33}^S} v_1 + \frac{\bar{e}_{33}(t_c)}{j\omega \epsilon_{33}^S} v_2 + \frac{1}{j\omega \bar{C}_0} I \tag{2.25}$$

ou em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z} & \bar{Z} & \bar{e}_{33}(0) \\ j \tan(kt_c) & j \sin(kt_c) & j \omega \epsilon_{33}^S \\ \bar{Z} & \bar{Z} & \bar{e}_{33}(t_c) \\ j \sin(kt_c) & j \tan(kt_c) & j \omega \epsilon_{33}^S \\ \bar{e}_{33}(0) & \bar{e}_{33}(t_c) & 1 \\ j \omega \epsilon_{33}^S & j \omega \epsilon_{33}^S & j \omega \bar{C}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

É importante observar que a matriz 3x3 da eq.(2.26), apresentada por Yamada et al. (2001), tem a mesma forma que a matriz para uma cerâmica não-MGF, obtida pelo modelo de Mason (KINO, 2000). Assim, para obter a expressão para uma cerâmica não-MGF basta substituir, na eq.(2.26), os termos  $\bar{e}_{33}(0)$  e  $\bar{e}_{33}(t_c)$  por  $e_{33}$ , e o termo  $\bar{C}_0$  por  $C_0$ .

## 2.2.2 Modelagem da camada de amortecimento

Uma vez estabelecida a relação entre as portas elétrica e mecânicas da piezocerâmica MGF, o passo a seguir é estabelecer a relação entre a cerâmica MGF e a camada de amortecimento. Para isto a tensão mecânica na interface 1,  $T_1$ , pode ser representada como<sup>2</sup>:

$$T_1 = \rho_1 c_1^p v_1 \Leftrightarrow -\frac{F_1}{A_b} = \rho_1 c_1^p v_1 \quad (2.27)$$

onde  $\rho_1$  e  $c_1^p$  são respectivamente a densidade e a velocidade de propagação da onda acústica no material da camada de amortecimento, e  $A_b$  é a área de contato efetiva entre essa camada e a piezocerâmica MGF. Fazendo a impedância acústica da camada de amortecimento,  $Z_b$ , igual a  $\rho_1 c_1^p A_b$ , a eq.(2.27) torna-se:

$$F_1 = -Z_b v_1 \quad (2.28)$$

<sup>2</sup> Esta expressão deriva de manipulações matemáticas entre a equação de onda e a expressão para a segunda lei de Newton, por ser muito conhecida na área de ultra-som não será desenvolvida aqui. Detalhes podem ser encontrados em Kino (2000) ou Krautkramer, Krautkramer (1977).

Escolhendo  $v_1$  como variável dependente na eq.(2.24) (aqui as velocidades  $v_1$  e  $v_2$  são consideradas em direção contrária àquela expressa na Fig. 2.3):

$$v_1 = \frac{j \sin(kt_c)}{\bar{Z}} F_2 - \cos(kt_c) v_2 - \frac{\bar{e}_{33}(t_c) \sin(kt_c)}{\bar{Z} \omega \epsilon_{33}^S} I \quad (2.29)$$

Substituindo esta expressão de  $v_1$  na eq.(2.23) encontra-se, da eq.(2.29), a entrada de corrente elétrica na piezocerâmica MGF em função das variáveis mecânicas na interface 2:

$$\begin{aligned} \cos(kt_c) F_2 - j \bar{Z} \sin(kt_c) v_2 + \frac{1}{j \omega \epsilon_{33}^S} (\bar{e}_{33}(0) - \bar{e}_{33}(t_c) \cos(kt_c)) I = \dots \\ - j \bar{\zeta} \sin(kt_c) F_2 + \bar{Z} \cos(kt_c) v_2 + \frac{\bar{\zeta} \bar{e}_{33}(t_c) \sin(kt_c)}{\omega \epsilon_{33}^S} I \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$I = j \omega \epsilon_{33}^S \left( \frac{\cos(kt_c) + j \bar{\zeta} \sin(kt_c)}{E} \right) F_2 - j \omega \epsilon_{33}^S \bar{Z} \left( \frac{\bar{\zeta} \cos(kt_c) + j \sin(kt_c)}{E} \right) v_2 \quad (2.31)$$

com  $E = \bar{e}_{33}(t_c) \cos(kt_c) - \bar{e}_{33}(0) + j \bar{\zeta} \bar{e}_{33}^2(t_c) \sin(kt_c)$  e  $\bar{\zeta} = Z_b / \bar{Z}$ . Por outro lado, substituindo a eq.(2.29) e eq.(2.31) na eq.(2.25) encontra-se o potencial elétrico de entrada em função das variáveis mecânicas na interface 2:

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{E} \left[ \frac{\epsilon_{33}^S}{C_0} (\cos(kt_c) + j \bar{\zeta} \sin(kt_c)) - \frac{\bar{e}_{33}^2(0) \sin(kt_c)}{\bar{Z} \omega \epsilon_{33}^S} \right] F_2 + \dots \\ \frac{1}{E} \left[ - \frac{\epsilon_{33}^S}{C_0} \bar{Z} (\bar{\zeta} \cos(kt_c) + j \sin(kt_c)) + \right. \\ \left. \frac{1}{j \omega \epsilon_{33}^S} ((\bar{e}_{33}^2(0) + \bar{e}_{33}^2(t_c)) \cos(kt_c) - 2 \bar{e}_{33}(0) \bar{e}_{33}(t_c) + j \bar{\zeta} \bar{e}_{33}^2(t_c) \sin(kt_c)) \right] v_2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Das eq.(2.32) e (2.31) obtém-se o modelo de matriz distribuída da piezocerâmica MGF junto com a camada de casamento, como:

$$\begin{pmatrix} V \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} F_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

com:

$$A_{11} = \frac{\varepsilon_{33}^S}{EC_0} (\cos(kt_c) + j\bar{\zeta} \sin(kt_c)) - \frac{\bar{e}_{33}^2(0) \sin(kt_c)}{E\bar{Z}\omega\varepsilon_{33}^S} \quad (2.34)$$

$$A_{12} = \frac{\varepsilon_{33}^S}{EC_0} \bar{Z} (\bar{\zeta} \cos(kt_c) + j\bar{\zeta} \sin(kt_c)) - \dots \quad (2.35)$$

$$\frac{1}{Ej\omega\varepsilon_{33}^S} [(\bar{e}_{33}^2(0) + \bar{e}_{33}^2(t_c)) \cos(kt_c) - 2\bar{e}_{33}(0)\bar{e}_{33}(t_c) + j\bar{\zeta} \bar{e}_{33}^2(t_c) \sin(kt_c)]$$

$$A_{21} = \frac{j\omega\varepsilon_{33}^S}{E} (\cos(kt_c) + j\bar{\zeta} \sin(kt_c)) \quad (2.36)$$

$$A_{22} = \frac{j\omega\varepsilon_{33}^S \bar{Z}}{E} (\bar{\zeta} \cos(kt_c) + j \sin(kt_c)) \quad (2.37)$$

### 2.2.3 Modelagem da camada de casamento de impedâncias

O material não-piezelétrico que representa a camada de casamento de impedância acústica é modelado por uma matriz que relaciona as forças e velocidades que agem em cada lado dessa camada, forças e velocidades das interfaces 2 e 3 da Fig. 2.3. O procedimento adotado para calcular a matriz de um material não-piezelétrico é bastante parecido com o de um material piezelétrico; portanto, não será desenvolvido neste trabalho, se encaminha o leitor para as referências: Kino (2000); Krautkramer, Krautkramer (1977); Lamberti et al. (1997); Lamberti et al. (1987).

A matriz que relaciona as forças e velocidades em ambas as interfaces da camada de casamento são:

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} F_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

com:

$$[M] = \begin{pmatrix} \cos(k_m t_m) & jZ_m \sin(k_m t_m) \\ j \frac{\sin(k_m t_m)}{Z_m} & \cos(k_m t_m) \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

onde  $k_m$  é o número de onda na camada de casamento.

Substituindo a eq.(2.38) na eq.(2.33) encontra-se o modelo de matriz distribuída para todo o TPGF de ultra-som (esse acoplamento equivale a “unir” o sistema piezocerâmica-MGF – camada-de-amortecimento com o sistema da camada de casamento):

$$\begin{pmatrix} V \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = [A][M] \begin{pmatrix} F_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

#### 2.2.4 Modelagem do disco piezelétrico MGF com gradação exponencial

O procedimento neste caso de gradação é muito similar ao caso de gradação linear anteriormente apresentado e está baseado no trabalho desenvolvido por Yamada et al. (1999); no entanto, quando é utilizada uma cerâmica gradada exponencialmente (de  $e_{33}$  até  $e_{33} = e_{33} \exp(-\alpha z)$ , com  $\alpha \geq 0$ ), a equação do movimento torna-se (assumindo que o deslocamento  $u_z$  e o deslocamento elétrico  $D_3$  variam em forma sinusoidal com o tempo  $t$  ( $e^{j\omega t}$ )):

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + k^2 u_z = H(\alpha^2 + k^2) \exp(-\alpha z) \quad (2.41)$$

onde  $k = \omega \sqrt{\rho/c_{33}^D}$  é o número de onda,  $\omega$  é a frequência angular da entrada elétrica sinusoidal, e  $H$  é um parâmetro expresso como:

$$H = -\frac{\alpha e_{33}(0)}{\alpha^2 + k^2} \frac{D_3}{\epsilon_{33}^S c_{33}^D} \quad (2.42)$$

A solução da equação eq.(2.41) é (Yamada et al., 1999):

$$u_z = (B_1 \sin kz + B_2 \cos kz + H \exp(-\alpha z)) e^{j\omega t} \quad (2.43)$$

sendo  $B_1$  e  $B_2$  constantes determinadas a partir das condições iniciais do problema.

As velocidades de partícula nas interfaces 1 ( $v_1$ ) e 2 ( $v_2$ ) são (omite-se  $e^{j\omega t}$ ):

$$v_1 = \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)_{z=0} = j\omega u_z|_{z=0} = j\omega (B_2 + H) \quad (2.44)$$

$$v_2 = \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)_{z=t_c} = -j\omega u_z|_{z=t_c} = -j\omega (B_1 \sin kt_c + B_2 \cos kt_c + H \exp(-\alpha t_c)) \quad (2.45)$$

Expressando  $B_1$  e  $B_2$  em termos de  $v_1$  e  $v_2$  e substituindo esse resultado na eq.(2.43), a seguinte expressão é encontrada para  $u_z$ :

$$u_z = \left( \frac{v_2 + v_1 \cos kt_c}{j\omega \sin kt_c} \right) \sin kz + \frac{v_1}{j\omega} \cos kz + H \left( \frac{\cos kt_c - \exp(-\alpha t_c)}{\sin kt_c} \sin kz \right) - \dots \quad (2.46)$$

Segundo o mesmo procedimento utilizado no caso de gradação linear, especificamente, a partir da eq.(2.14), mas utilizando a eq.(2.46), encontra-se a relação entre as forças, velocidades, nas interfaces 1 e 2 (ver a Fig. 2.3), potencial e corrente elétrica, como:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z} & \bar{Z} & \bar{e}_{33}(0) \\ \frac{j \tan(kt_c)}{j \omega \epsilon_{33}^S} & \frac{j \sin(kt_c)}{j \omega \epsilon_{33}^S} & \frac{\bar{e}_{33}(0)}{j \omega \epsilon_{33}^S} \\ \bar{Z} & \bar{Z} & \bar{e}_{33}(t_c) \\ \frac{j \sin(kt_c)}{j \omega \epsilon_{33}^S} & \frac{j \tan(kt_c)}{j \omega \epsilon_{33}^S} & \frac{\bar{e}_{33}(t_c)}{j \omega \epsilon_{33}^S} \\ \bar{e}_{33}(0) & \bar{e}_{33}(t_c) & 1 \\ \frac{j \omega \epsilon_{33}^S}{j \omega \epsilon_{33}^S} & \frac{j \omega \epsilon_{33}^S}{j \omega \epsilon_{33}^S} & \frac{1}{j \omega \bar{C}_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

onde:

$$F_1 = \frac{\bar{Z}}{j \tan(kt_c)} v_1 + \frac{\bar{Z}}{j \sin(kt_c)} v_2 + \frac{\bar{e}_{33}(0)}{j \omega \epsilon_{33}^S} I \quad (2.48)$$

$$F_2 = \frac{\bar{Z}}{j \sin(kt_c)} v_1 + \frac{\bar{Z}}{j \tan(kt_c)} v_2 + \frac{\bar{e}_{33}(t_c)}{j \omega \epsilon_{33}^S} I \quad (2.49)$$

$$V = \frac{\bar{e}_{33}(0)}{j \omega \epsilon_{33}^S} v_1 + \frac{\bar{e}_{33}(t_c)}{j \omega \epsilon_{33}^S} v_2 + \frac{1}{j \omega \bar{C}_0} I \quad (2.50)$$

As expressões anteriores (eq.(2.48), eq.(2.49), e eq.(2.50)) diferenciam-se das expressões equivalente do caso linear em relação à capacitância efetiva ( $\bar{C}_0$ ):

$$\bar{C}_0 = \frac{C_0}{1 + \frac{K_t^2}{(kt_c)^2} \left( \frac{\alpha k}{\alpha^2 + k^2} \right)^2 \left[ \frac{1 + \exp(-2\alpha t_c)}{\tan(kt_c)} - \frac{2 \exp(-2\alpha t_c)}{\sin(kt_c)} - \frac{\alpha(1 - \exp(-2\alpha t_c))}{k} \right] + \frac{K_t^2 \alpha (1 - \exp(-2\alpha t_c))}{2kt_c} \left( \frac{\alpha k}{\alpha^2 + k^2} \right)} \quad (2.51)$$

e em relação a:

$$\bar{e}_{33}(0) = e_{33}(0) + \left[ 1 + \left( \frac{\alpha k}{\alpha^2 + k^2} \right) \left( \frac{1}{\tan(kt_c)} - \frac{\exp(-\alpha t_c)}{\sin(kt_c)} - \frac{\alpha}{k} \right) \right] \quad (2.52)$$

$$\bar{e}_{33}(t_c) = e_{33}(t_c) + \left[ 1 + \left( \frac{\alpha k}{\alpha^2 + k^2} \right) \left( \frac{\exp(-\alpha t_c)}{\sin(kt_c)} - \frac{1}{\tan(kt_c)} - \frac{\alpha}{k} \right) \right] \quad (2.53)$$

com o coeficiente de acoplamento eletromecânico  $K_t$ , definido como:

$$K_t^2 = \frac{e_{33}(0)}{\sqrt{\epsilon_{33}^S c_{33}^D}} \quad (2.54)$$

Os outros termos das eq.(2.47) até eq.(2.54) não definidos nesta seção são os mesmos apresentados no caso da gradação linear.

Por outro lado, para terminar a formulação do modelo completo de um TPGF de ultra-som, considerando a gradação exponencial, deve-se seguir o procedimento

de matriz distribuída, o qual inclui a formulação para a camada de casamento de impedância (Seção 2.2.2) e a camada de amortecimento (Seção 2.2.3), conforme é expresso na eq.(2.33) e eq. (2.40), respectivamente.

### 2.2.5 Função de Transferência de Transmissão

A função de transferência de transmissão é definida em base aos termos  $T_{ij}$  da matriz  $[T]=[A][M]$  da eq.(2.40). Essa FTT é definida como a relação entrada/saída; assim, para um TPGF de ultra-som, essa relação é a razão entre a força mecânica que atua sobre o meio de propagação de onda ou carga ( $F_3$ ) e o potencial elétrico do gerador de sinal ( $E$ ) (LAMBERTI et al., 1997). Portanto, a FTT se expressa como:

$$FTT = \frac{F_3}{E} = \frac{Z_l}{T_{11}Z_l + T_{12} + R(T_{21}Z_l + T_{22})} \quad (2.55)$$

### 2.2.6 Cálculo da impedância elétrica do disco piezolétrico MGF com gradação linear e exponencial

A impedância elétrica do disco piezolétrico MGF é calculada assumindo que o TPGF de ultra-som não possui camada de casamento de impedâncias nem camada de amortecimento; além disso, é assumido que esse TPGF (reduzido à configuração geométrica de somente o disco piezolétrico MGF) esteja no vácuo. Conseqüentemente, em termos matemáticos, equivale a dizer que as impedâncias acústicas das camadas de amortecimento e casamento e da carga são zero ( $Z_b = Z_m = Z_l = 0$ ), e analogamente, que a força mecânica na interface 2 é também zero ( $F_2 = 0$ ).

Assim, com essas condições, e a partir da eq.(2.33) encontra-se a impedância elétrica do disco piezolétrico MGF,  $Z_{ele}$ , como:

$$Z_{ele} = \frac{V}{I} = \frac{A_{12}}{A_{22}} \quad (2.56)$$

$$Z_{ele} = \frac{1}{j\omega \bar{C}_0} + \frac{1}{j\bar{Z}(\omega \varepsilon_{33}^S)^2 \sin(kt_c)} \times [(\bar{e}_{33}^2(0) + \bar{e}_{33}^2(t_c))\cos(kt_c) - 2\bar{e}_{33}(0)\bar{e}_{33}(t_c)] \quad (2.57)$$

onde os termos  $\bar{C}_0$ ,  $\bar{e}_{33}(0)$ , e  $\bar{e}_{33}(t_c)$  mudam conforme a função de gradação considerada no disco piezelétrico MGF (linear ou exponencial). Por outro lado, a eq.(2.57) descreve a impedância elétrica na ausência de perdas elétricas e mecânicas.

Existem valores de frequência para os quais o módulo da impedância elétrica é zero. Esses valores de frequência são chamados de frequências de ressonância. Da mesma maneira, existem frequências em que a impedância elétrica do material piezelétrico tende a infinito. Esses valores são chamados de frequência de anti-ressonância. A Fig. A.7, do Apêndice A, mostra uma curva usual do módulo da impedância elétrica em função da frequência, considerando somente os modos de vibração de espessura.

### 2.2.7 Modelagem de perdas no TPGF

As equações utilizadas anteriormente para modelar analiticamente o TPGF, tanto no caso de gradação linear como exponencial, podem considerar a dissipação de energia que ocorre no transdutor. Neste trabalho decidiu-se modelar as perdas tanto elétricas como mecânicas do TPGF de ultra-som. Essa modelagem é realizada de forma análoga que no caso de transdutores não-MGF. Uma forma simples de modelar essas perdas é utilizar as equações anteriores e considerar as propriedades dos materiais como sendo números complexos ao invés de números reais, abordagem utilizada em diversos trabalhos (SHERRIT, MUKHERJEE, 1988; LAMBERTI et al., 2001). Assim, as perdas mecânicas são modeladas através da rigidez elástica complexa:

$$\hat{c}_{33}^D = c_{33}^D \left( 1 + \frac{j}{Q_m} \right) \quad (2.58)$$

onde  $Q_m$  é o fator de qualidade mecânica. Analogamente, as perdas elétricas são modeladas através da permissividade elétrica complexa:

$$\hat{\varepsilon}_{33}^D = \varepsilon_{33}^S \left( 1 - \frac{j}{Q_e} \right) \quad (2.59)$$

onde  $Q_e$  é o fator de qualidade elétrica.

### 2.3 Modelagem Multicamada de TPGF de Ultra-Som

A aproximação multicamada é realizada utilizando o software comercial ANSYS/Multiphysics™. As simulações são realizadas em modelos axissimétricos, os quais reduzem o custo computacional e aproximam a resposta em 3D. Também, o amortecimento é incluso nesses modelos, o qual está relacionado com as perdas elétricas e mecânicas do TPGF. Dois modelos são simulados: o modelo I representa um TPGF sem camada de amortecimento e casamento, somente a cerâmica piezoeétrica é simulada; e o modelo II representa o TPGF com camada de amortecimento e casamento, emitindo um pulso de ultra-som num fluido. Com o modelo I é explorada a influência de diversas funções de gradação na curva de impedância elétrica. Com o modelo II é estudado o efeito de diversas funções de gradação no pulso de pressão emitido pelo transdutor de ultra-som, considerando uma análise transiente. Com a finalidade de verificar o modelo analítico desenvolvido na seção anterior, em alguns casos, os resultados multicamadas são comparados com os resultados do modelo analítico. Para cada tipo de análise e modelo são implementadas rotinas na linguagem APDL (*ANSYS Parametric Design Language*). Além disso, é simulado o efeito de diversas leis de gradação das constantes de material; especificamente, são simulados os casos de gradação com funções lineares, exponenciais e escalonadas, ao longo da espessura e ao longo da direção radial da piezocerâmica.

### 2.3.1 Número de camadas

Nas aproximações multicamadas surge o problema de determinar o número de camadas que simule a conduta dos TPGF com o menor erro, em relação a uma aproximação contínua. Para contornar este problema, uma análise de convergência foi realizada para determinar o número de camadas a serem utilizadas nas simulações.

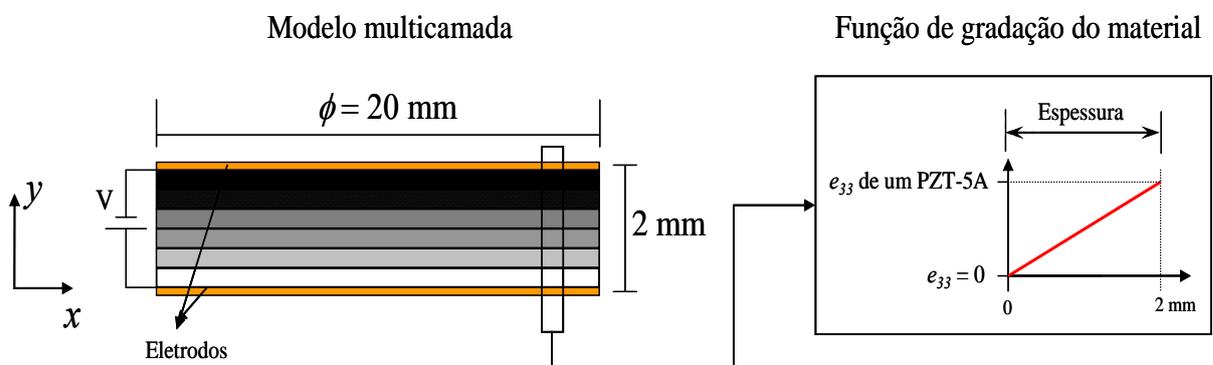


Figura 2.5. Modelo de um TPGF multicamada utilizado para simular a convergência do número de camadas.

Para realizar a análise de convergência varias simulações foram conduzidas para diferentes números de camadas; assim, o TPGF da Fig. 2.5 foi discretizado em 3, 10, 20, 50, e 80 camadas, utilizando uma função linear de graduação como a apresentada na Fig. 2.5, e utilizando as propriedades da Tabela 2.1. O TPGF da Fig. 2.5 representa uma estrutura multicamada com geometria cilíndrica, a qual é simulada no ANSYS<sup>TM</sup> com um modelo axi-simétrico através do elemento finito tipo PLANE 13 (ANSYS, 1994). Para todos os casos foi mantida sempre uma discretização com 8000 elementos finitos, com o fim de garantir que a convergência é motivada pelo número de camadas utilizadas e não pelo número de elementos finitos; ou em outras palavras, tornar os resultados independentes da convergência originada pela discretização da malha de elementos finitos. Por último, os contatos elétricos (eletrodos) são modelados como conjuntos de graus de liberdade elétricos acoplados na linha que simula cada eletrodo: linhas do topo e da base do TPGF da Fig. 2.5.

Tabela 2.1. Dados de materiais utilizados no projeto de TPGF de ultra-som.

Componente	Propriedade	Valor	
<b>Camada de amortecimento</b> (Tungstênio - Epoxy)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	11.000	
	Módulo de Young (N/m <sup>2</sup> )	8,02 x 10 <sup>10</sup>	
	Módulo de Poisson	0,3	
	Amortecimento	1,5 x 10 <sup>-8</sup>	
<b>Propriedades na base do disco piezolétrico</b> (no caso de gradação ao longo da espessura)	Propriedades Dielétricas	$\epsilon_0$ (F/m)	8,85 x 10 <sup>-12</sup>
		$\epsilon_{11}^S$	916 x $\epsilon_0$
		$\epsilon_{33}^S$	830 x $\epsilon_0$
	Propriedades Piezolétricas (C/m <sup>2</sup> )	$e_{31}$	-5,4
		$e_{33}$	15,8
		$e_{15}$	12,3
	Propriedades Elásticas (N/m <sup>2</sup> )	$c_{11}^E$	12,1 x 10 <sup>10</sup>
		$c_{12}^E$	7,54 x 10 <sup>10</sup>
		$c_{13}^E$	7,52 x 10 <sup>10</sup>
		$c_{33}^E$	11,1 x 10 <sup>10</sup>
		$c_{44}^E$	2,11 x 10 <sup>10</sup>
		$c_{66}^E$	0,5 x ( $c_{11}^E - c_{12}^E$ )
	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	7.500	
	Amortecimento	3 x 10 <sup>-9</sup>	
	Fator de qualidade mecânico	75	
Perdas dielétricas	20		
<b>Propriedades no topo do disco piezolétrico</b> (sem propriedades piezolétricas) (no caso de gradação ao longo da espessura)	Iguais às propriedades adotadas para a base do disco piezolétrico, mas com todas as constantes piezolétricas iguais a zero.		
<b>Camada de casamento</b> (Araldite)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	1.340	
	Módulo de Young (N/m <sup>2</sup> )	9,345 x 10 <sup>9</sup>	
	Módulo de Poisson	0,34	
	Amortecimento	3 x 10 <sup>-7</sup>	
<b>Fluido</b> (Água)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	998	
	Velocidade de propagação de onda acústica (m/s)	1.500	

Os resultados da Fig. 2.6 mostram os valores da primeira freqüência extensional ao longo da espessura segundo o número de camadas consideradas. É observado que a curva converge a partir de 20 camadas. Esses valores de freqüência são encontrados a través do desenvolvimento de uma análise harmônica quando um potencial elétrico unitário é aplicado entre os eletrodos. O resultado confirma que, como era esperada, a aproximação multicamada é altamente dependente do número de camadas utilizadas. Essa dependência também foi evidenciada em análise estática (RUBIO et al., 2009a). Os resultados da Seção 2.4 são obtidos utilizando TPGF de ultra-som gradados com 20 camadas.

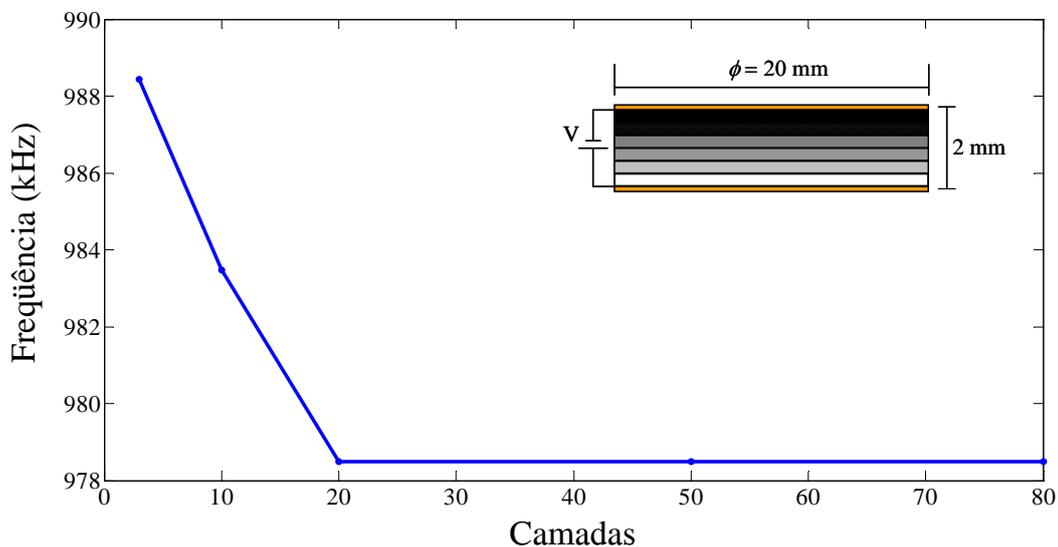


Figura 2.6. Convergência da aproximação multicamadas.

### 2.3.2 Descrição das funções de gradação

Quatro funções são utilizadas para representar a variação das constantes de material ao longo da espessura. Nesse caso, a piezocerâmica é gradada de uma camada com altas propriedades piezelétricas, na superfície inferior, até uma camada com baixas propriedades piezelétricas, na superfície superior da piezocerâmica, ver Fig. 2.7 e Tabela 2.1. A primeira é uma função linear, denominada *função 1*; a segunda é uma gradação aproximada por uma equação de quarta ordem, que representa uma variação lenta de material, e a qual é denominada *função 2*; a

terceira é uma função do tipo  $1/x$ , que representa uma mudança rápida nas propriedades, e a qual é denominada *função 3*; por último, uma função escalonada é utilizada (*função 4*). A *função 4* representa uma variação linear de propriedades entre as camadas 1 à 5, mantém constante as propriedades entre as camadas 6 à 15, e continua mudando as propriedades de forma linear entre as camadas 16 à 20. A Fig. 2.7 apresenta essas funções de gradação utilizando como exemplo a constante piezométrica  $e_{33}$ . Observa-se da Fig. 2.7 que essas quatro funções de gradação na verdade não são funções contínuas; pelo contrário, elas representam funções escalonadas, uma vez que o modelo analisado assume as propriedades uniformes no interior de cada camada, mudando somente de camada a camada.

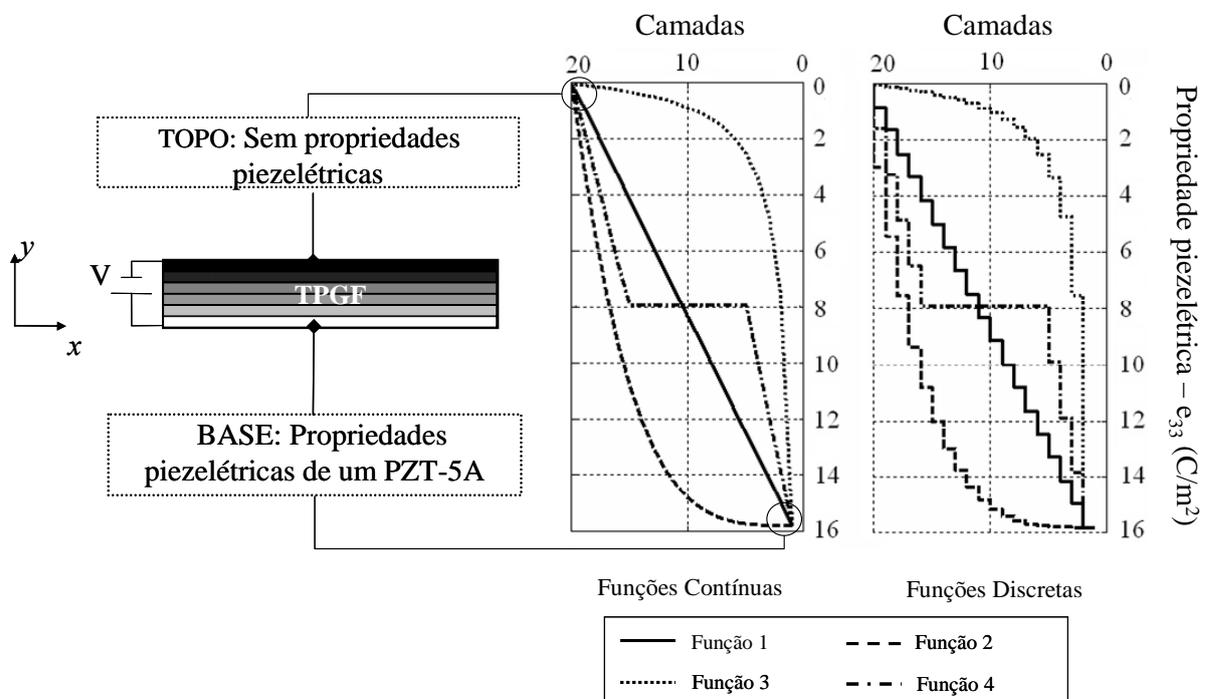


Figura 2.7. Diversas distribuições de material ao longo da espessura do TPGF, utilizando como exemplo a constante piezométrica  $e_{33}$ .

Para o caso de gradação na direção radial, o TPGF é gradado de uma camada com altas propriedades piezométricas, no centro da piezocerâmica, até uma camada de baixas propriedades piezométricas no extremo da parede cilíndrica do disco piezométrico, como apresentado na Fig. 2.8. No caso de gradação ao longo da direção radial, as propriedades em cada camada são mantidas constantes ao longo da espessura. Quatro funções de gradação são consideradas e, como no caso de gradação ao longo da espessura, são nomeadas *função 1* até *função 4*. A *função 1* é

uma função que muda as propriedades do meio da piezocerâmica até os extremos de forma linear. A *função 2* muda rapidamente a zero do centro ao extremo. Utilizando a *função 3*, as propriedades piezolétricas do TPGF experimentam uma descontinuidade nas duas últimas camadas (camadas mais próximas da superfície externa do disco piezolétrico). Nessas duas camadas, por exemplo, a propriedade piezolétrica  $e_{33}$  cai de  $9,5 \text{ C/m}^2$  a zero. Pelo contrário, nas outras três funções, essas mesmas duas camadas já possuem propriedades piezolétricas zero. Por último, a *função 4* corresponde a uma função escalonada.

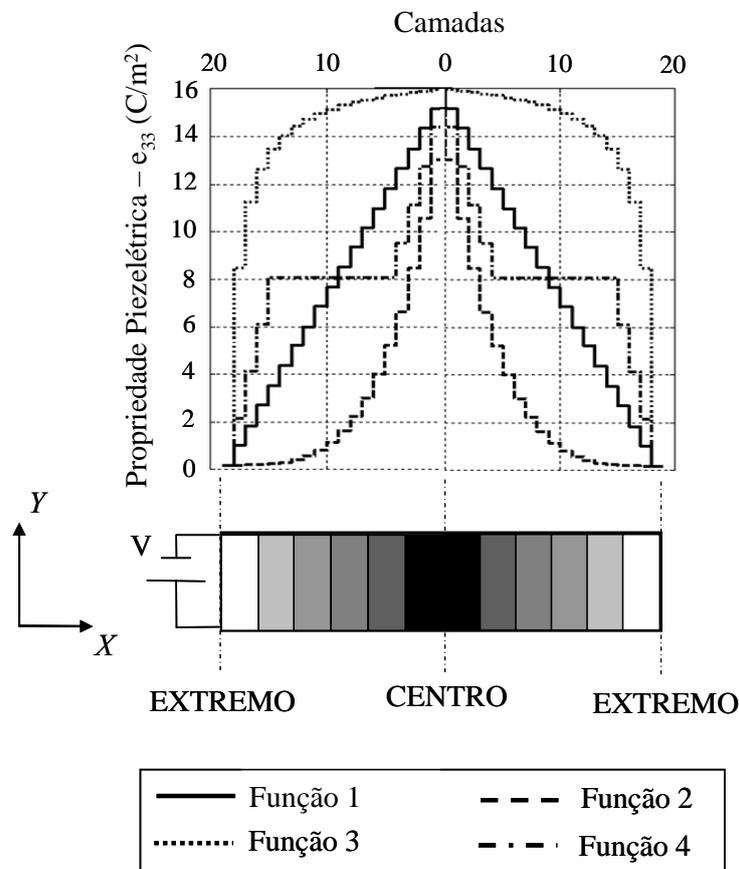


Figura 2.8. Diversas distribuições de material na direção radial do TPGF, utilizando como exemplo a constante piezolétrica  $e_{33}$ .

Esclarece-se que as distribuições de propriedades do TPGF foram escolhidas por motivos de comparação dentro desse trabalho, e podem representar distribuições não realísticas de um TPGF, uma vez que essas últimas estarão submetidas a considerações e restrições de fabricação. No entanto, um TPGF com gradação do tipo  $e_{33} = 0$ , na superfície superior da piezocerâmica, até  $e_{33} \neq 0$ , na superfície inferior, é factível de ser fabricado pelo método apresentado na Fig. 1.8(b) do capítulo 1.

Para o transdutor piezelétrico não-gradado somente material PZT-5A é utilizado para representar as propriedades do elemento ativo, ver Tabela 2.1.

## 2.4 Resultados

### 2.4.1 Resultados com o Modelo Analítico

A seguir serão apresentados resultados utilizando o modelo analítico descrito na Seção 2.2. Para obter a resposta em uma faixa de frequências de zero até alguns MHz é conveniente a sua implementação numérica. Para cumprir este objetivo, o modelo foi implementado utilizando o programa comercial MATLAB™. Dois tipos de resultados são contemplados: (a) encontrar a impedância elétrica do disco de material piezelétrico MGF, tanto para a gradação de material linear e exponencial; e (b) simular o TPGF de ultra-som emitindo um pulso curto em um meio de propagação líquido (água), quando excitado com: (i) um pulso curto (impulso elétrico); e (ii) uma onda elétrica de um ciclo de senóide de amplitude unitária. Neste último caso, a influência de mudanças na voltagem de excitação é analisada. Todos os resultados com TPGF de ultra-som são comparados com transdutores não-MGF. Nas simulações, as propriedades piezelétricas do disco piezelétrico mudam de zero,  $e_{33} = 0$ , (na superfície superior da piezocerâmica ou superfície em contacto com a camada de amortecimento, ver a Fig. 2.1) a propriedades piezelétricas de uma cerâmica PZT-5A,  $e_{33} \neq 0$ , (na superfície em contato com a camada de casamento de impedâncias). É importante mencionar que esta gradação é viável de ser fabricada através do método de gradiente de temperatura apresentado no capítulo 1 (YAMADA et al., 2000). As propriedades dos materiais utilizados nas simulações são apresentadas na Tabela 2.1. As dimensões do disco piezelétrico são 20 mm de diâmetro x 1 mm de espessura. No caso da gradação exponencial é considerado um valor de  $\alpha$  igual ao utilizado no trabalho de Yamada et al. (1999); assim, assume-se  $\alpha$  igual a 5000.

## Impedância elétrica de entrada do disco piezolétrico MGF

A impedância elétrica de entrada é computada através da eq.(2.57), que é utilizada quando o TPGF não possui camada de amortecimento nem de casamento de impedâncias; em outras palavras, quando somente o disco piezolétrico é analisado. Para o disco piezolétrico MGF e não-MGF, a Fig. 2.9 mostra as curvas de impedância elétrica de entrada (considerando modos de vibração na espessura). Para o caso MGF, tanto as funções de gradação linear e exponencial, para a propriedade piezolétrica  $e_{33}$ , são consideradas ao longo da espessura.

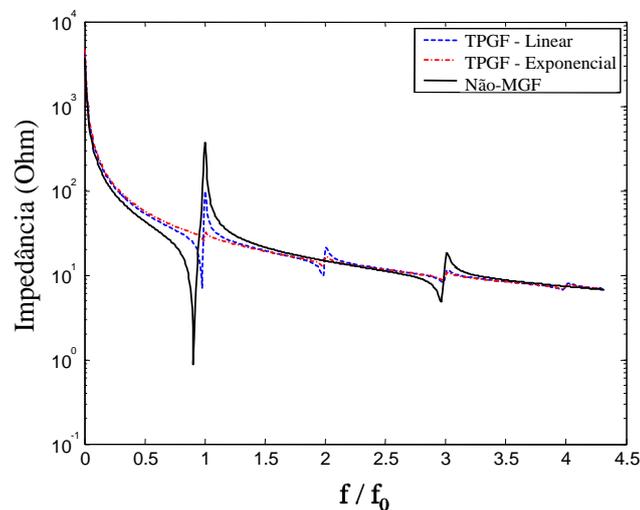


Figura 2.9. Curvas de impedância elétrica do disco piezolétrico MGF e não-MGF.

Da Fig. 2.9 observa-se que somente vibrações de ordem ímpar aparecem na resposta de impedância da piezocerâmica não-MGF, mas na piezocerâmica MGF aparecem respostas extras em adição à frequência fundamental e à resposta de ressonância de terceira ordem. Em outras palavras, a piezocerâmica MGF tem ambas as respostas de ressonância: modos pares e ímpares, tanto na gradação linear como exponencial.

## Resposta Impulsiva

A Fig. 2.10 mostra a resposta para TPGF e transdutores piezolétricos não-MGF emitindo uma onda de ultra-som em água, quando um pulso elétrico unitário é

aplicado na piezocerâmica. Em todos os casos considera-se nas simulações a camada de amortecimento e a camada de casamento de impedâncias.

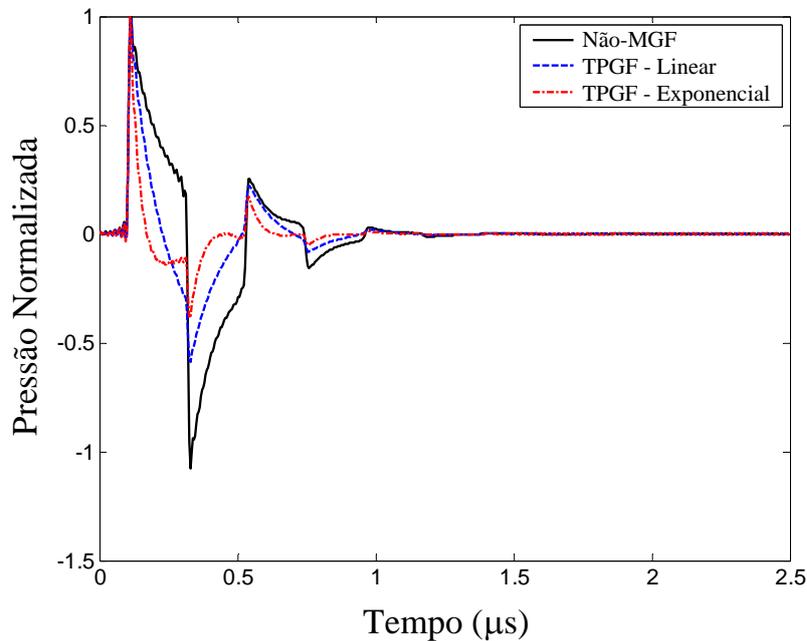


Figura 2.10. Resposta impulsiva normalizada na pressão.

Da Fig. 2.10 pode-se observar que a resposta para transdutores não-MGF exhibe dois pulsos principais, sendo que cada pulso parte simultaneamente das superfícies superior e inferior da piezocerâmica. Assim, o primeiro pulso é gerado na superfície inferior (a superfície da piezocerâmica mais próxima da água), e o segundo pulso é gerado na superfície oposta, superfície superior da piezocerâmica (próxima da camada de amortecimento, ver a Fig. 2.1). No caso dos TPGF de ultra-som esse segundo pulso é reduzido significativamente, uma vez que ele é gerado na superfície com baixos valores de constantes piezelétricas. Esse efeito é observado nos dois casos de gradação, tanto nas funções de gradação linear e exponencial (no caso exponencial a redução é superior a 50% da amplitude obtida com transdutores de ultra-som não-MGF). Dessa forma, esses TPGF de ultra-som emulam mais exatamente a forma do sinal elétrico de entrada (pulso elétrico de amplitude unitária). Adicionalmente, observa-se na Fig. 2.10 que para todas as funções de gradação a resposta do TPGF exhibe uma onda de pressão mais estreita no tempo que os transdutores piezelétricos não-MGF. Esse efeito significa que os TPGF de ultra-som, além de emular mais exatamente o sinal elétrico de entrada, podem emitir/receber sinais de pressão com maior largura de banda. Esse tipo de resposta

é desejável em aplicações de imagens médicas e END, onde a resolução axial das imagens é incrementada conforme aumenta a largura de banda do transdutor. Contudo, a gradação não reduz o número de pulsos subseqüentes aos dois primeiros pulsos principais. Tanto para os TPGF e não-MGF esses pulsos apresentam quase a mesma forma e magnitude.

### Excitação com um pulso elétrico senoidal

Neste caso, o TPGF de ultra-som e o transdutor piezelétrico de ultra-som não-MGF são excitados com um sinal elétrico de um ciclo de senóide com freqüência fundamental igual a  $f_0 = 2 \text{ MHz}$ <sup>3</sup>. Através do modelo analítico desenvolvido neste capítulo, ambos os transdutores (TPGF e não-MGF) são simulados considerando a camada de casamento e a camada de amortecimento, emitindo uma onda de pressão num fluido (água). Outras simulações são também realizadas considerando a mesma excitação elétrica, mas com diferentes freqüências de excitação; especificamente, são simulados os casos de  $2f_0$ ,  $3f_0$  e  $4f_0$ . A Fig. 2.11(a) mostra o espectro de freqüência desses diversos sinais de entrada. Como é esperado, conforme aumenta a freqüência fundamental do sinal de excitação, aumenta a largura de banda do sinal de entrada, mas diminui a sua magnitude. Por outro lado, a Fig. 2.11(b) mostra o espectro de freqüência da Função de Transferência de Transmissão (FTT) calculada através da eq.(2.55). Para o transdutor piezelétrico não-MGF observa-se que o espectro de freqüência cai a zero em todos os modos pares ( $f/f_0 = 2, 4, 6, \dots$ ), enquanto que para os TPGF de ultra-som (considerando tanto as funções de gradação linear e exponencial), o seu espectro de freqüência não cai a zero nem nos modos pares nem ímpares, o que equivale a obter transdutores piezelétricos de ultra-som com respostas em freqüência mais suavizadas em relação ao caso não-MGF. As duas curvas dos TPGF de ultra-som (linear e exponencial) são muito próximas nos modos de alta ordem; a principal diferença observa-se na magnitude do modo fundamental.

---

<sup>3</sup> Freqüências da ordem de 2 MHz a 3 MHz são muito utilizadas em imagens médicas; por exemplo, freqüências de 2 MHz são tipicamente utilizadas para obtenção de imagens cardíacas, uma vez que com elas obtém-se adequada penetração das paredes peitorais (CHEN et al., 2003b).

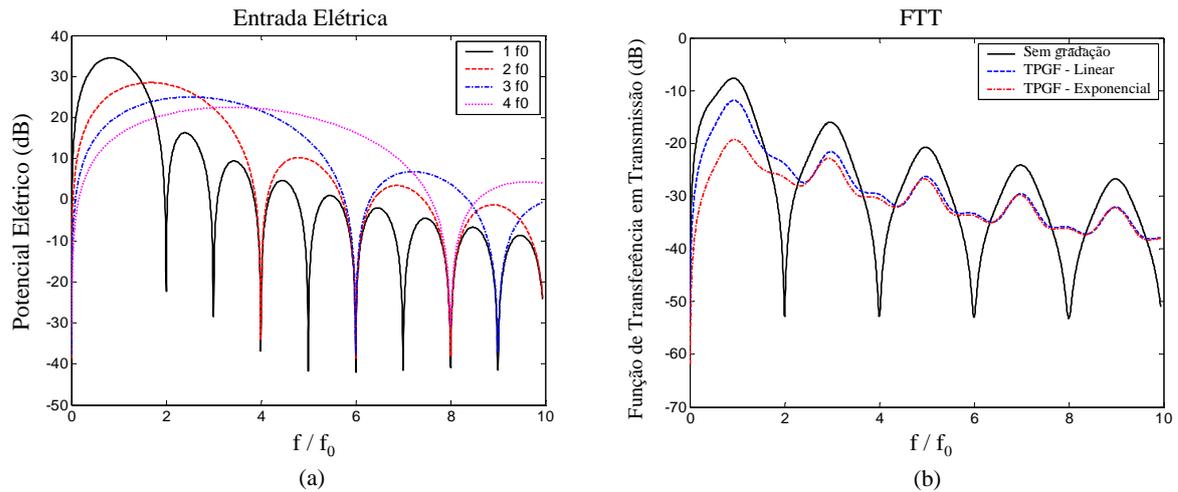


Figura 2.11. (a) Espectro de sinais de entrada com diferente frequência de excitação; (b) Espectro da Função de Transferência em Transmissão.

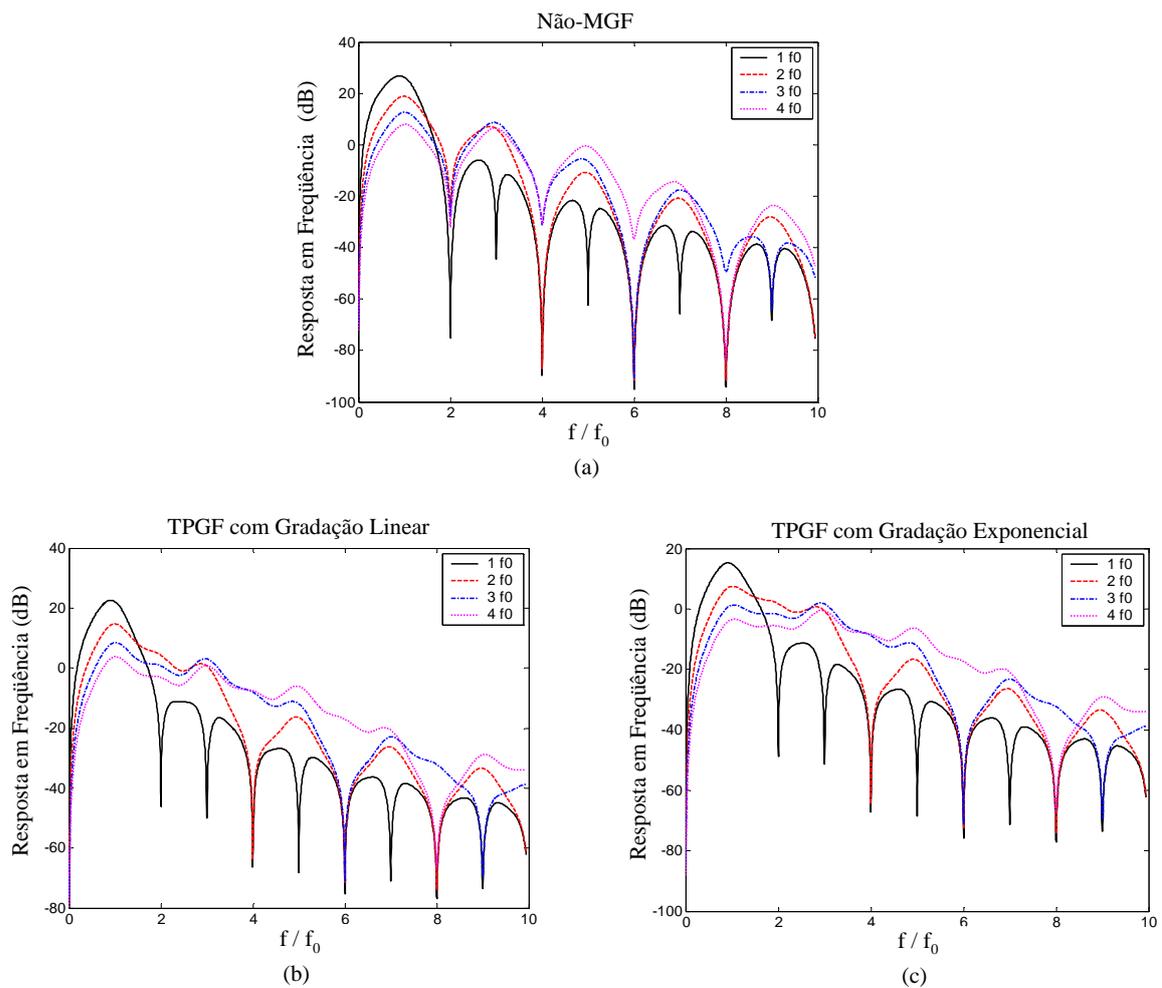


Figura 2.12. Espectro da resposta do transdutor piezoeletrico de ultra-som utilizando as entradas elétricas da Fig. 2.11(a). (a) Transdutor piezoeletrico não-MGF; (b) TPGF com função de gradação linear; (c) TPGF com função de gradação exponencial.

A Fig. 2.12 mostra o espectro de freqüência da resposta com e sem aplicar o conceito de MGF. Para todas as excitações, o TPGF de ultra-som exibe a maior largura de banda em relação aos transdutores não-MGF, exceto quando é utilizado um sinal elétrico de freqüência igual à fundamental. Este é um resultado lógico, uma vez que no domínio da freqüência a resposta de um sistema é o produto entre o espectro da FTT e o espectro do sinal de entrada. Em conseqüência, para um TPGF de ultra-som excitado com  $f_0$  o seu espectro cai a zero tanto nos modos pares como ímpares (exceto na freqüência fundamental), devido ao fato que o espectro do sinal elétrico de entrada com freqüência igual a  $f_0$  cai a zero nesses modos. Conseqüentemente, a largura de banda dos TPGF é limitada somente pelo espectro do sinal de entrada. Por outro lado, a largura de banda dos transdutores piezelétricos não-MGF é limitada tanto pelo espectro do sinal de entrada como pela largura de banda da sua FTT (para esses transdutores, o espectro da FTT cai sempre a zero nos modos pares). Assim, pode-se concluir que, para os TPGF, quanto maior é a largura de banda do sinal de entrada maior é a largura de banda da resposta do transdutor. No entanto, quanto maior é a largura de banda do sinal de entrada a resposta do transdutor apresenta menor sensibilidade; confirmando-se o fato bem conhecido de que existe uma relação inversa entre a largura de banda e a sensibilidade da resposta (CHEN et al., 2003b). Para finalizar, não foi observada uma diferença significativa nas curvas de resposta do TPGF de ultra-som com gradação linear e exponencial.

A maior largura de banda apresentada pelos TPGF ocorre porque, neste resultado, o pulso acústico é gerado principalmente da superfície com altos valores de propriedade piezelétrica (base da piezocerâmica), enquanto a superfície oposta (topo da piezocerâmica) gera pouca vibração (região sem ou com poucas propriedades piezelétricas). Em outras palavras, como explicado por Yamada, et al., (1998), a tensão piezelétrica induzida pelo efeito piezelétrico,  $T_3 = -e_{33} E_3$ , é maior na superfície com  $e_{33} \neq 0$  que na superfície com  $e_{33} = 0$ . Em conseqüência, a força volumétrica  $F_v = \partial T_3 / \partial z$  (derivada espacial da tensão piezelétrica induzida), a qual é responsável pela geração de ondas acústicas, é igual a zero na superfície sem propriedades piezelétricas, e possui o seu máximo na superfície oposta (YAMADA, et al., 1998). Assim, gera-se um único pulso de ultra-som, cuja transformada de Fourier produz uma resposta em freqüência “suavizada”. Pelo contrário, no caso

não-MGF, geram-se dois pulsos de ultra-som separados no tempo por  $\tau^4$ , cuja transformada de Fourier gera uma resposta em frequência com máximo em  $f_0 = 1/(2\tau)$ , e zero em  $2 f_0$ ,  $4 f_0$ ,  $6 f_0$ , e assim sucessivamente. No entanto, esse comportamento também representa um TPGF com menor potência de saída (potência liberada no fluido) que a liberada pelo transdutor não-MGF, uma vez que o TPGF tem menos “região efetiva” piezométrica que o transdutor convencional<sup>5</sup>. Essa redução na potência de saída se observa na Fig. 2.12, onde a magnitude do pulso emitido pelo TPGF no fluido apresenta menor magnitude que o pulso emitido pelo transdutor não-MGF; em especial, no primeiro pico de ressonância.

#### 2.4.2 Resultados com a Aproximação Multicamada

Dois casos de modelagem foram considerados: modelagem somente da cerâmica piezométrica (modelo I) e modelagem do TPGF como um todo (modelo II). Para o modelo I, um TPGF multicamada sem camada de casamento e amortecimento é simulado, obtendo-se a curva de impedância elétrica MGF. Os dados de material e da geometria do TPGF, para este caso, se apresentam na Tabela 2.1 e Tabela 2.2 (ver propriedades e geometria da piezocerâmica), respectivamente. Para o modelo II, um TPGF com camada de amortecimento e casamento é simulado, emitindo ondas de ultra-som num fluido, onde são simuladas tanto gradação de propriedades ao longo da espessura e ao longo da direção radial. Neste segundo caso, a geometria é similar àquela apresentada na Fig. 2.1, e as propriedades e geométricas de todos os componentes do TPGF são apresentadas na Tabela 2.1 e Tabela 2.2, respectivamente. Em todos os casos simulados, comparam-se os resultados entre TPGF e transdutores não-MGF. Para as simulações de transdutores não-MGF, o material utilizado é o material piezométrico PZT-5A. Finalmente, para o caso de gradação linear, os resultados obtidos na Seção 2.4.1 são comparados com os resultados multicamada desenvolvidos com o programa ANSYS/Multiphysics™.

---

<sup>4</sup> Tempo que depende da velocidade de propagação de onda e da espessura da cerâmica piezométrica

<sup>5</sup> Lembre-se também que a potência é uma função da força e da velocidade.

## Impedância elétrica de discos piezelétricos gradados ao longo da espessura

A impedância elétrica para a aproximação multicamada é calculada através da eq.(A.67) do Apêndice A. Para o seu cálculo é realizada uma análise harmônica sobre uma faixa de frequências de 0 até 10 MHz dividida com passos equidistantes de 0,02 MHz. O potencial elétrico de excitação do TPGF varia senoidalmente entre +/-1V. Assume-se gradação ao longo da espessura.

Tabela 2.2. Dimensões dos elementos utilizados na simulação multicamada de TPGF.

Componente	Dimensão – comprimento x largura (mm)
Camada de amortecimento	15 x 20
Piezocerâmica MGF	1 x 20
Camada de casamento	0,34 x 20
Domínio do fluido	12 x 30

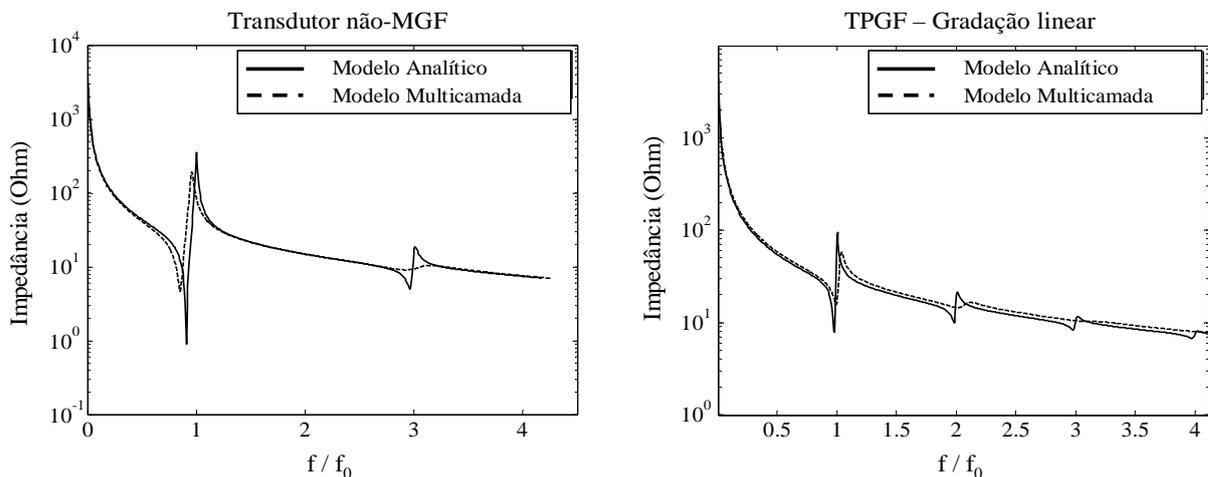


Figura 2.13. Comparação entre as curvas de impedância do modelo analítico e da aproximação multicamada.

A Fig. 2.13 mostra a curva de impedância elétrica normalizada na frequência, considerando-se somente os modos de vibração ao longo da espessura e a função de gradação linear. Observa-se que assim como no modelo analítico, a modelagem multicamada da piezocerâmica MGF produz modos de vibrar pares e ímpares, ao

contrário do disco piezelétrico não-MGF, onde somente modos ímpares são obtidos. Observa-se, também, que a aproximação multicamada e o modelo analítico geram curvas bem próximas uma da outra; no entanto, uma pequena diferença é notada, a qual se incrementa para modos de vibrar de ordem superior. Esta diferença pode ser atribuída ao fato que estão sendo comparados modelos de diferentes hierarquias. O modelo analítico é unidimensional e o modelo multicamada é bidimensional. Portanto, este último resulta ser mais exato ao considerar outros modos, como exemplo, modos de vibrar radiais.

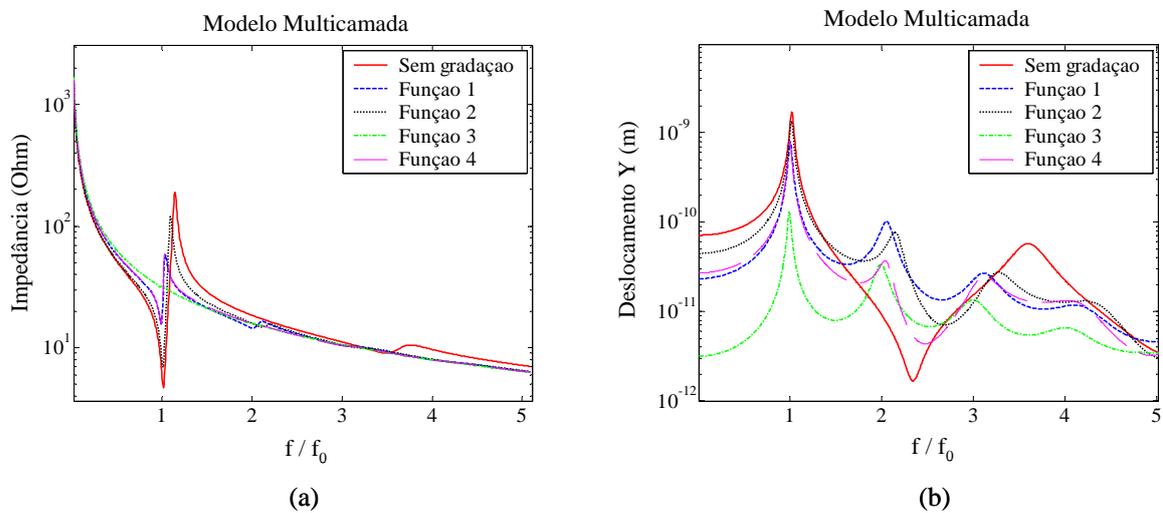


Figura 2.14. (a) Curva de impedância elétrica e (b) função de resposta em frequência (FRF) segundo a modelagem multicamada e várias funções de gradação de propriedades.

Por outro lado, a Fig. 2.14(a) mostra a curva de impedância, normalizada na frequência, para as funções de gradação apresentadas na Fig. 2.7. Essa mesma figura apresenta a função de resposta em frequência (FRF) do deslocamento vertical medido no ponto médio da superfície superior da piezocerâmica, e obtido da análise harmônica. Ambos gráficos são comparados com a curva de discos piezelétricos não-MGF. Observa-se, na Fig. 2.14(a) e 2.14(b), que as diferentes funções não modificam o número de modos de vibrar; continuam aparecendo modos pares e ímpares, e alta atenuação nos modos de alta ordem. Não obstante, a amplitude gerada em cada modo é modificada segundo a lei de gradação utilizada.

## TPGF multicamadas em aplicações de ultra-som

### - Gradação de Material ao longo da espessura

Nesta seção, o TPGF de ultra-som é excitado com meia onda seno de amplitude unitária e de frequência igual a 2 MHz. A Fig. 2.15 apresenta a comparação do modelo analítico e do modelo multicamada, com e sem o conceito de MGF, utilizando uma gradação linear ao longo da espessura. Apresentam-se as curvas no domínio do tempo e da frequência. Observa-se que o modelo multicamada gera uma onda de pressão que pode ser dividida em duas ondas principais: uma onda plana e a onda de borda (KINO, 2000; KRAUTKRAMER, KRAUTKRAMER, 1977). Além disso, o modelo multicamada permite observar na resposta o efeito da multi-reflexão de ondas dentro do disco piezelétrico. Estas ondas de multi-reflexão são observadas como ondas de pequena magnitude, similar a um ruído. Já o modelo analítico não captura os efeitos de onda de borda e de ondas de multi-reflexão, uma vez que se trata de um modelo unidimensional. No entanto, no referente à onda plana, as duas respostas (analítica e multicamada) são bem próximas.

Nas Fig. 2.16(a), 2.16(b), 2.16(c), e 2.16(d) apresentam-se as ondas de pressão radiadas pelo TPGF de ultra-som quando são utilizadas as quatro funções de gradação da Fig. 2.7. Apresenta-se somente a onda plana para facilitar a comparação. Observa-se que em todos os casos os TPGF geraram pulsos de onda plana de menor largura em relação aos transdutores não-gradados, o que é desejável para melhorar a resolução em aplicações de aquisição de imagens. Esta redução foi mais acentuada com a *função 3* e menos acentuada na *função 2*. Por outro lado, quando se utiliza a *função 3*, a diminuição na largura pode ser explicada pelo fato da cerâmica piezelétrica MGF representar um transdutor mais estreito com uma alta frequência fundamental ( $f_0$ ), isto porque com a *função 3* poucas camadas apresentam altos valores nas constantes piezelétricas (somente três camadas têm aproximadamente 60% das propriedades piezelétricas, ver a Fig. 2.7). Com a *função 2* acontece o contrário, 60% das propriedades piezelétricas são obtidas com 18 camadas; assim, a *função 2* representa um transdutor de maior espessura e com menor frequência fundamental  $f_0$ .

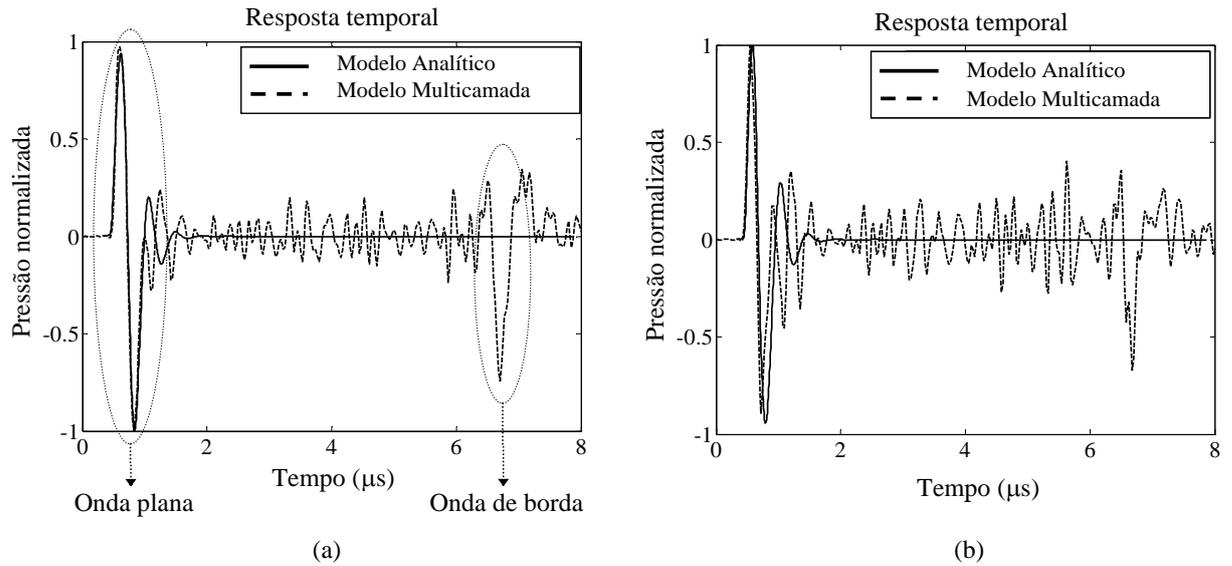


Figura 2.15. Comparação entre o modelo analítico e multicamada da onda de pressão emitida por um transdutor piezolétrico de ultra-som: (a) não-MGF; (b) TPGF utilizando uma função linear.

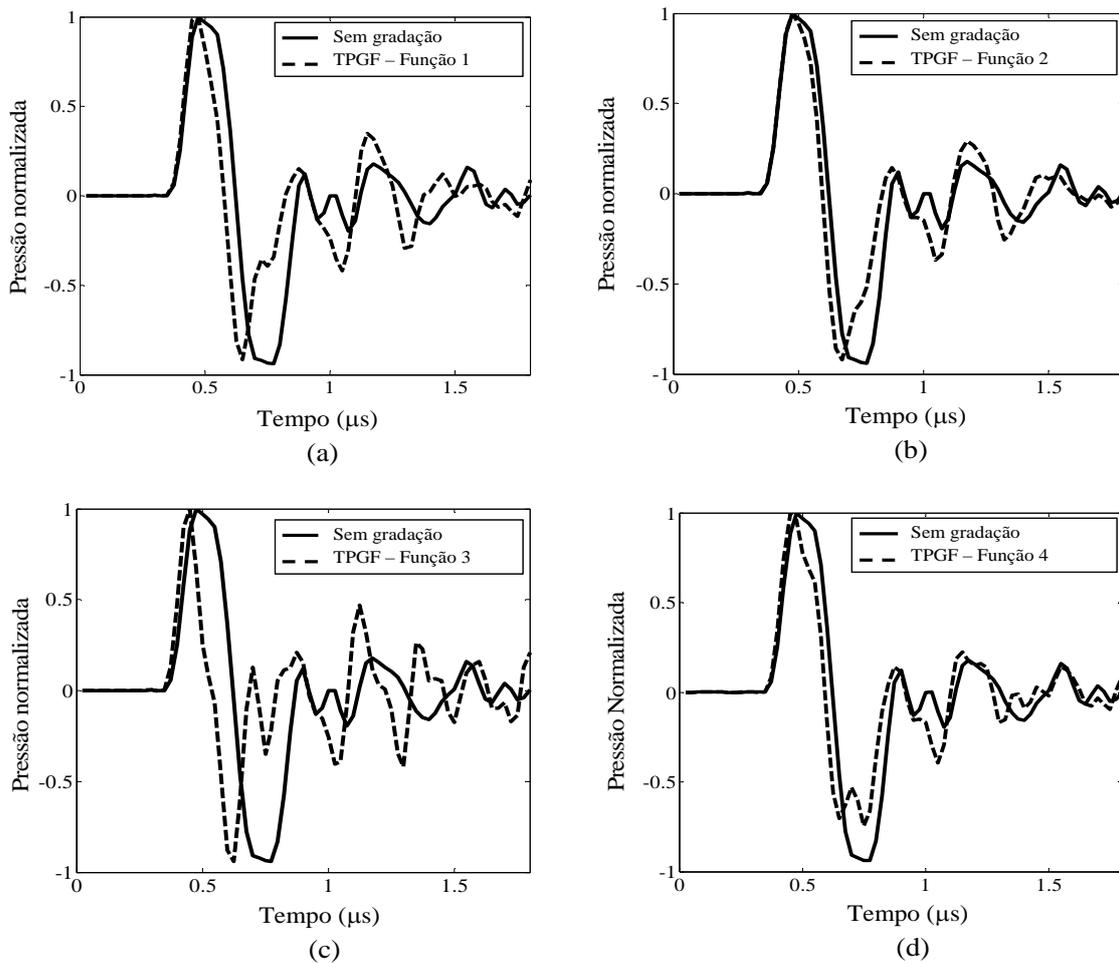


Figura 2.16. Resposta de onda de pressão utilizando o modelo multicamada e as funções de gradação ao longo da espessura da Fig. 2.7: (a) função 1; (b) função 2; (c) função 3; (d) função 4.

Por outro lado, na mesma Fig. 2.16, é notado que a magnitude do segundo pulso da onda plana normalizada, no transdutor não-gradado, é próxima de um. Já nos TPGF a magnitude desse segundo pulso pode ser menor. Especificamente, a maior redução na magnitude do segundo pulso é alcançada com a *função 4* ou função tipo escalonada, onde é alcançada uma redução na magnitude do segundo pulso maior do que 30%. Portanto, a forma da onda de entrada (um pulso elétrico de meia onda seno) pode-se reproduzir melhor utilizando um TPGF.

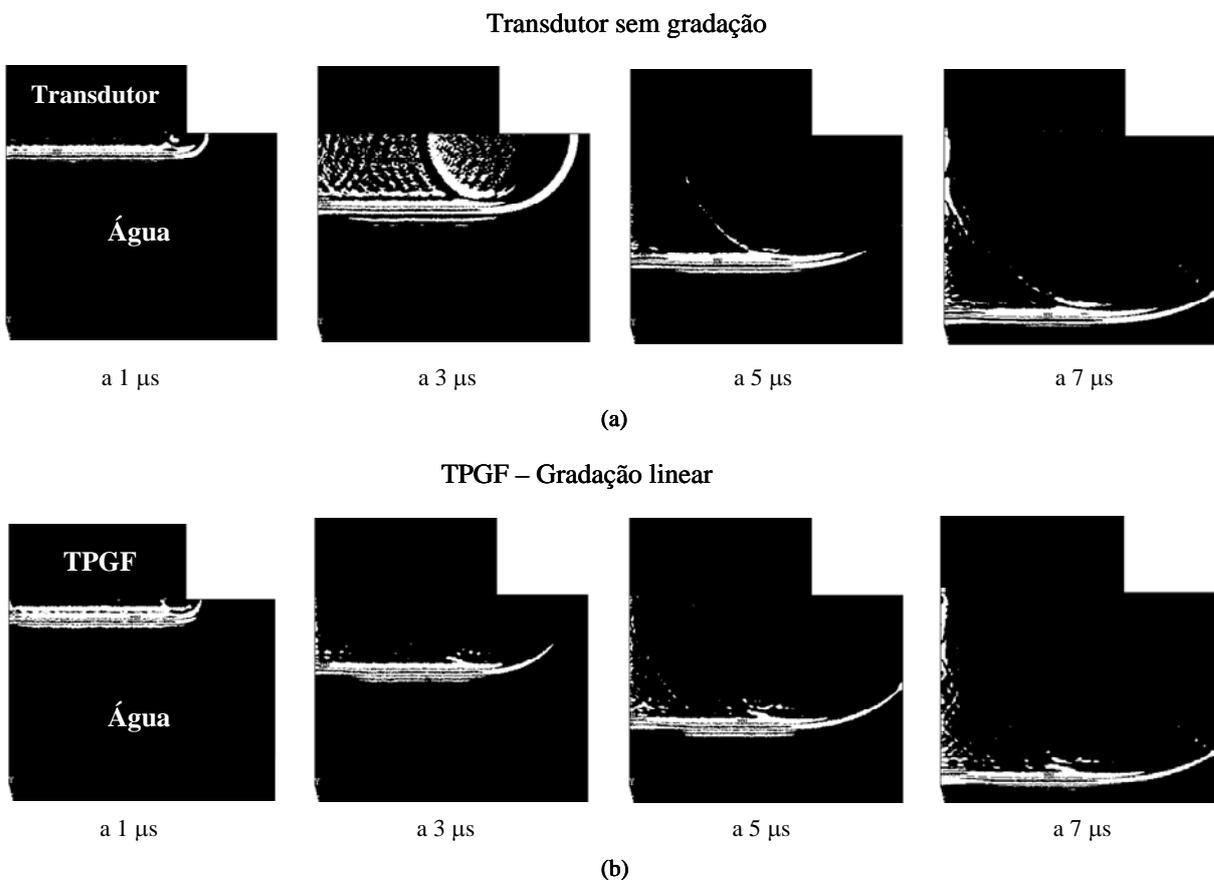


Figura 2.17. Frente de onda de pressão propagando-se num fluido utilizando a aproximação multicamada: (a) transdutor não-MGF; (b) TPGF com gradação linear.

Finalmente, a Fig. 2.17 mostra a propagação da onda de pressão gerada pelo TPGF de ultra-som (utilizando uma gradação linear) e aquela gerada pelo transdutor não-gradado, ambas propagando-se no meio fluido (água). Por razões de simetria (modelo axi-simétrico), na Fig. 2.17 somente a metade do transdutor é apresentado. Nessa figura é fácil deduzir que a frente de onda pode ser explicada como a interação entre a onda plana e a onda de borda (KINO, 2000; KRAUTKRAMER,

KRAUTKRAMER, 1977), tanto no caso gradado como não-gradado. A frente de onda corresponde a: (i) onda plana emitida pela região central do transdutor, e (ii) onda de borda, a qual apresenta uma forma toroidal, e se propaga em todas as direções a partir dos extremos do transdutor. Não são observadas diferenças substanciais entre as frentes de onda geradas pelo TPGF e o transdutor não-MGF quando é implementada uma gradação ao longo da espessura.

#### - Gradação de Material ao longo da direção radial

Nesta seção é analisado o efeito da gradação ao longo da direção radial na onda de pressão gerada pelo TPGF de ultra-som. Nas simulações é utilizado um modelo axi-simétrico com 20 camadas. São utilizadas as propriedades do TPGF da Tabela 2.1 e as dimensões da Tabela 2.2. A Fig. 2.18 mostra a forma das ondas de pressão para todas as funções de gradação apresentadas na Fig. 2.8, junto com a forma da onda de pressão do transdutor piezolétrico não-MGF. Além disso, a Fig. 2.19, Fig. 2.20, Fig. 2.21 e Fig. 2.22 mostram a representação instantânea da distribuição espacial do campo de pressão emitido pelo TPGF com gradação radial para a *função 1* até *4*, respectivamente, nos tempos 1, 3, 5, e 7  $\mu$ s. As Fig. 2.19 até Fig. 2.22 apresentam somente a metade do TPGF de ultra-som, devido à suposição de modelo axi-simétrico.

A Fig. 2.18 mostra o efeito da gradação radial na onda propagada no fluido; especificamente, observa-se que a onda de borda desaparece ou diminui, em especial, quando são utilizadas as *funções 1, 2 e 4*; uma vez que essas três funções reduzem as descontinuidades de propriedades piezolétricas no extremo do TPGF; em outras palavras, as ondas de borda são consideravelmente diminuídas devido à redução progressiva de vibração do centro do transdutor até o seu extremo. No entanto, utilizando a *função 3* observa-se que é formada uma onda de borda, mas com magnitude muito pequena. Essa pequena onda de borda forma-se devido à descontinuidade de propriedades piezolétricas que existe no extremo (lembre-se que utilizando a função 3 a propriedade piezolétrica  $e_{33}$  cai no extremo da piezocerâmica de 9,5 C/m<sup>2</sup> a zero). As Fig. 2.19 até Fig. 2.22 confirmam esses resultados observados na Fig. 2.18. Nessas figuras se observa que somente a onda plana está

presente na frente de onda emitida pelo TPGF de ultra-som, com exceção da Fig. 2.21, onde aparece uma pequena onda de borda produto de se utilizar a *função 3*. Em todos os casos de gradação radial a frente de onda é composta, quase que exclusivamente, pela onda plana, a qual é observada como um segmento de linha paralela à superfície inferior do TPGF. Já utilizando uma gradação ao longo da espessura ou utilizando um transdutor piezelétrico não-MGF, ver Fig. 2.17, a frente de onda de pressão é composta pela onda plana em adição às ondas de borda; essas últimas propagam-se em todas as direções desde o extremo do transdutor.

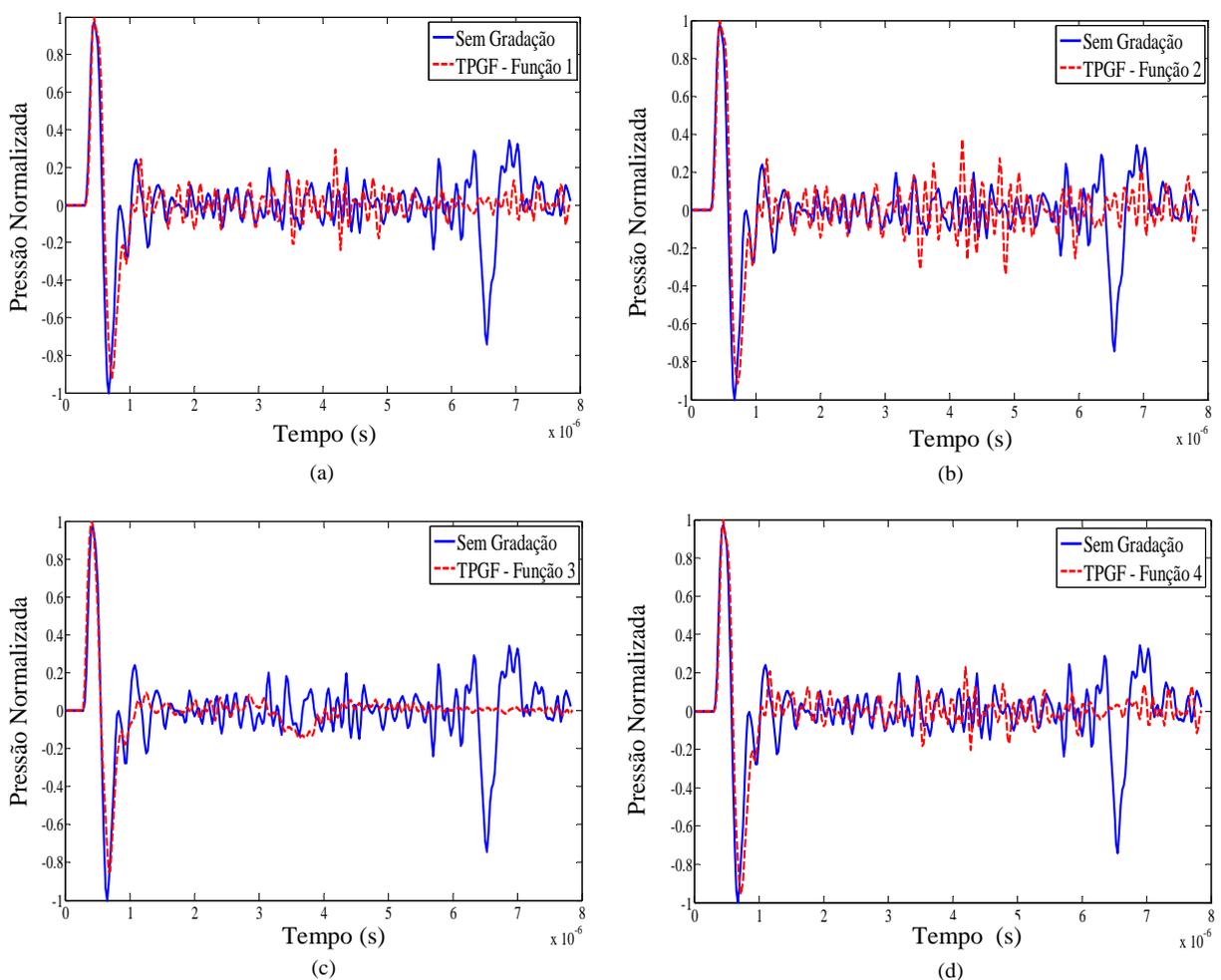


Figura 2.18. Onda de pressão normalizada emitidas pelo TPGF com gradação radial: (a) *função 1*; (b) *função 2*; (c) *função 3*; (d) *função 4*.

Essa redução da onda de borda, originada pela gradação radial do TPGF, é particularmente útil para diminuir o esforço na interpretação do campo de pressão em aplicações pulso-eco. Isto se deve ao fato que quando o pulso de pressão se aproxima do objeto refletor, este último re-radiará somente a onda plana incidente, e

não uma combinação de onda plana e ondas de borda. Em consequência, utilizando o conceito MGF, em transdutores piezelétricos de ultra-som, poder-se-ia retificar o sinal de pressão sem utilizar qualquer tipo de pós-processamento; por exemplo, transformações de Hilbert (VERA et al., 2007), para separar e medir a amplitude das ondas planas e das ondas de borda.

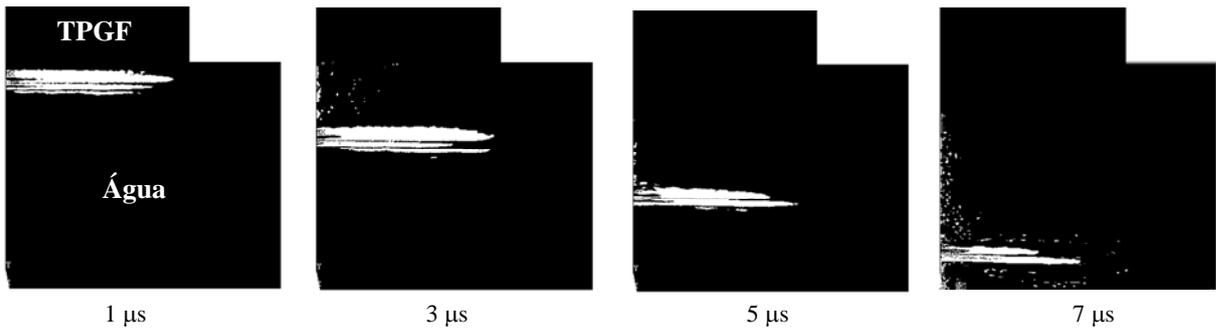


Figura 2.19. Distribuição espacial instantânea do campo de pressão gerado pelo TPGF considerando gradação radial do tipo *função 1*.

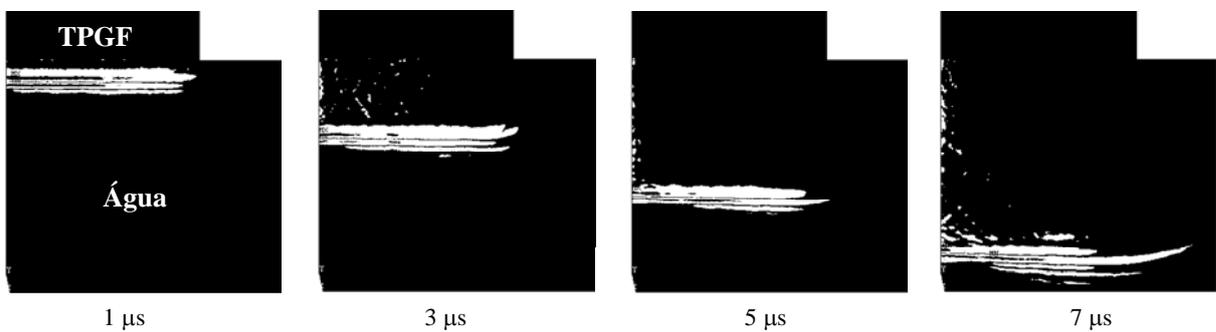


Figura 2.20. Distribuição espacial instantânea do campo de pressão gerado pelo TPGF considerando gradação radial do tipo *função 2*.

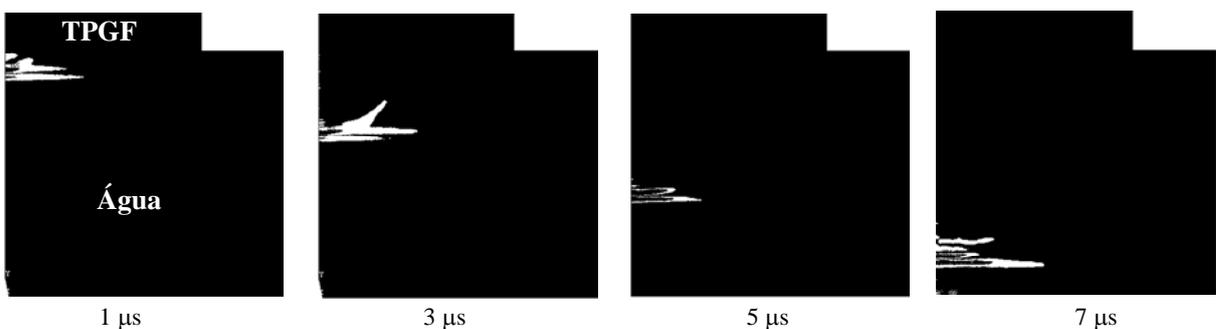


Figura 2.21. Distribuição espacial instantânea do campo de pressão gerado pelo TPGF considerando gradação radial do tipo *função 3*.

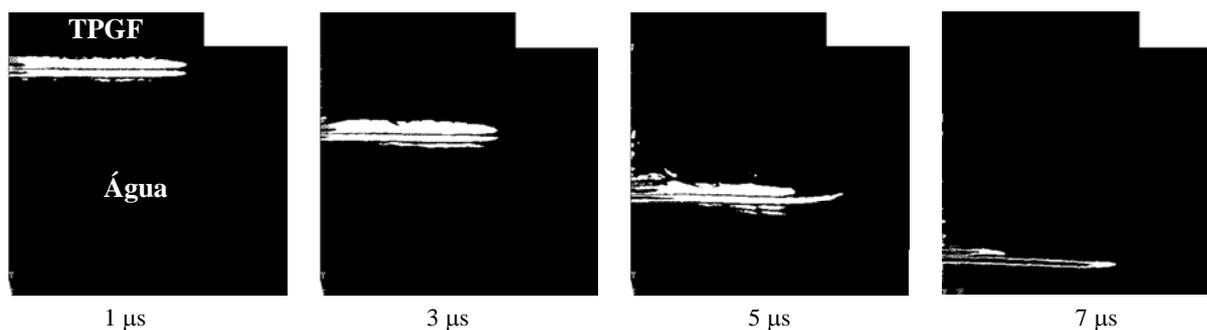


Figura 2.22. Distribuição espacial instantânea do campo de pressão gerado pelo TPGF considerando gradação radial do tipo *função 4*.

## 2.5 Considerações finais

Dos resultados anteriores se observa que o modelo analítico desenvolvido simula a conduta de TPGF, na aplicação específica de ultra-som. O modelo desenvolvido é computacionalmente econômico, já que poucos minutos são exigidos para cada simulação. Em relação aos trabalhos encontrados na revisão bibliográfica, ver o capítulo 1, esse modelo analítico representa uma contribuição no estudo dos TPGF de ultra-som (RUBIO et al., 2009a), uma vez que simula a configuração comumente usada em ultra-som (KINO, 2000) (representada pela camada de casamento de impedância, o elemento ativo ou material piezelétrico, e a camada de amortecimento), e não somente o disco piezelétrico MGF, ou elemento ativo, como em trabalhos anteriores (SAKAMURA et al., 1999; YAMADA et al., 2001; YAMADA et al., 1999).

Contudo, o modelo analítico desenvolvido para TPGF é limitado, já que um novo modelo tem que ser desenvolvido para cada nova função de gradação que deseje ser considerada (seguindo o procedimento apresentado na Seção 2.2). Além disso, o modelo assume a gradação de somente uma propriedade do disco piezelétrico MGF (constante piezelétrica  $e_{33}$ ) ao longo de somente uma única direção: espessura.

Embora o modelo analítico aqui desenvolvido permita uma primeira e rápida abordagem na simulação e projeto de TPGF, torna-se necessário a modelagem desse tipo de transdutores utilizando técnicas mais genéricas, como o MEF. Por

esse motivo, uma modelagem numérica e bidimensional foi desenvolvida. Essa abordagem numérica consiste em simular TPGF de ultra-som pela tradicional aproximação multicamadas, o qual permitiu estudar o efeito de diversas funções de gradação, e validar o modelo analítico. No entanto, essa técnica de simulação multicamada é computacionalmente custosa; em especial, ao simular a propagação de ondas em fluidos. Esse custo computacional se explica pela discretização que deve ser utilizada no modelo multicamada para capturar a propagação da onda num fluido. Essa discretização depende do comprimento de onda,  $\lambda$ , da velocidade de propagação no fluido,  $v_f$ , e da frequência fundamental da cerâmica,  $f_0$ . Assim, para um elemento finito quadrado, o tamanho máximo de cada lado do elemento deve ser (NADER, 2002):

$$\Delta x = \Delta y = \frac{\lambda}{20} \quad \text{com:} \quad \lambda = \frac{v_f}{f_0} \quad (2.60)$$

Portanto, para as simulações apresentadas na seção anterior, foi necessário uma discretização total, incluindo TPGF e fluido, de mais de 120.000 elementos finitos, e aproximadamente 12 horas de cálculo computacional por simulação<sup>6</sup>. Desse ponto de vista, o modelo analítico é bem mais rápido e permite obter uma primeira aproximação do problema, embora limitado a respostas unidimensionais (o modelo assume propagação de onda unidimensional), o que impede analisar propagação de ondas de borda, ou de multi-reflexão, mas com boa aproximação para o cálculo da curva de impedância elétrica e da onda plana de pressão.

Contudo, diversos aspectos interessantes dos TPGF de ultra-som podem ser ressaltados, em relação aos transdutores de ultra-som não-MGF. Entre eles pode-se mencionar:

- (a) A resposta de impedância obtida com o modelo analítico, para o disco piezoeletrico MGF, apresentou modos de ressonância nos modos pares e ímpares. Essa mesma conduta foi comprovada por vários autores, em especial por Yamada et al. (2001) e Yamada et al. (2000), os quais fabricaram e simularam discos piezoeletricos MGF com igual gradação de material

---

<sup>6</sup> Foi utilizado um computador com processador Pentium 4 Hyper Threading 3,2 GHz com 1 Mb de Cache e 4 Gb de memória DDRAM PC400.

(gradação linear e exponencial desde propriedades  $e_{33}(0) = 0$  até  $e_{33}(t_c) \neq 0$ ); portanto, essa particularidade na dinâmica de discos piezelétricos MGF pode ser utilizada como *benchmark* para o modelo aqui desenvolvido.

- (b) Quando foi considerado o TPGF de ultra-som como um todo (incluindo camada de amortecimento e camada de casamento de impedâncias) emitindo um pulso curto num meio fluido, observou-se que foram emitidos pulsos mais estreitos de pressão na água em relação aos transdutores não-MGF, os quais, por sua vez, replicaram melhor a forma do sinal de entrada. A primeira característica (pulsos mais estreitos) torna viável os TPGF em aplicações de aquisição de imagens, já a segunda, facilita o controle do sinal emitido.
- (c) Observou-se, também, que o espectro de frequência da FTT dos TPGF, e do sinal emitido por eles, é muito mais suavizado que aquele dos transdutores não-MGF, o que representa maior largura de banda.
- (d) As características anteriores tornam os TPGF atraentes em aplicações de aquisição de imagens. Basicamente, para obter boa qualidade de imagens, os transdutores piezelétricos são construídos para produzir ondas de pressão a frequências específicas. Geralmente, ondas de pressão de baixa frequência proporcionam penetração profunda no meio analisado (por exemplo, o corpo humano), mas produzem resolução fraca devido à largura dos pulsos transmitidos (CHEN et al., 2003b). Por outro lado, ondas de pressão de alta frequência proporcionam alta resolução, mas com pouca penetração. Em consequência, existe um balanço entre resolução e penetração. No entanto, se os TPGF são utilizados em conjunto com a técnica de imagens harmônicas (CHEN et al., 2003b) esse conflito pode ser solucionado. Essencialmente, a técnica de imagens harmônicas fundamenta-se no fato de que objetos que refletem ondas de ultra-som; por exemplo, tecidos humanos, desenvolvem e retornam suas próprias frequências não-fundamentais (CHEN et al., 2003b) (tipicamente, harmônicos da frequência fundamental  $f_0$ ). Sendo assim, utilizando um TPGF é possível excitar o objeto a ser detectado pela emissão de um pulso de pressão de baixa frequência ( $f_0$ ) e receber a onda refletida com maior frequência; por exemplo,  $2f_0$ . Observando a Fig. 2.11(b) encontra-

se que o TPGF permite emitir no primeiro harmônico sem muita perda de sensibilidade em relação aos transdutores não-MGF, e por sua vez, pode captar sinais com frequência igual ao segundo harmônico, caso contrário dos transdutores não-MGF, nos quais a FTT cai a zero para  $2f_0$ .

- (e) Por outro lado, a gradação de material na direção radial permitiu reduzir as ondas de borda no campo acústico produzido por TPGF; caso contrário da gradação ao longo da espessura, e dos transdutores não-MGF. Este fato torna-se interessante em aplicações pulso-eco em ensaios não-destrutivos, onde se facilita a interpretação das ondas refletidas pelo objeto analisado por ultra-som.
- (f) Por último, observou-se que o desempenho do TPGF varia segundo a lei de gradação utilizada; por exemplo, na análise multicamada com gradação ao longo da espessura, a *função 3* resulta em pulsos mais estreitos, e a *função 4* em melhor réplica da forma do sinal de entrada. Já no caso de gradação radial, as *funções 1, 2 e 4* diminuem significativamente a amplitude da onda de borda. Aqui a modelagem multicamada resultou bastante vantajosa, em relação ao modelo analítico, já que não é necessário desenvolver um novo modelo para cada lei de gradação; assim, uma vez programada a rotina APDL a mudança de parâmetros torna-se fácil e rápida. Contudo, a abordagem multicamada é limitada, já que é necessário determinar para cada problema o número de camadas que melhor aproxima a solução com gradação contínua.

Neste ponto, pode-se dar resposta às perguntas que motivaram o desenvolvimento de modelos para explorar o conceito MGF em transdutores piezelétricos. Assim:

- (i) *A aplicação do conceito MGF a transdutores piezelétricos acarreta alguma vantagem além das conhecidas na literatura?*

Sim, especificamente, na área de ultra-som, o conceito MGF permite melhorar a aquisição de imagens em ensaios não-destrutivos e em aplicações médicas, como comentado nos itens anteriores (b), (c), (d) e

(e). Portanto, justifica-se um estudo mais aprofundado no relacionado com o desenvolvimento de técnicas de projeto e modelagem de TPGF. Tópicos que serão tratados nos capítulos 3 e 4.

(ii) *As técnicas atuais de projeto e modelagem simulam adequadamente esse tipo de transdutores?*

Não, uma vez que os atuais TPGF são modelados mediante modelos analíticos que assumem excessivas simplificações (HAUKE et al., 2000; KRUUSING, 2000; LIU, SHI, 2004; SHI, 2005; SHI, CHEN, 2004; YAMADA et al., 1999; YANG, XIANG, 2007); caso exemplo, o desenvolvido neste capítulo, ou são modelados mediante abordagens multicamadas que aproximam de forma discreta as gradações contínuas próprias de estruturas MGF. Portanto, para contornar esse problema, no capítulo 3 é descrita uma formulação que permite a aproximação contínua das propriedades utilizando o conceito dos Elementos Finitos Gradados (EFG), em aplicações dinâmicas de TPGF. Por outro lado, dos exemplos obtidos com os modelos desenvolvidos neste capítulo, torna-se claro que as características dinâmicas do TPGF e, por conseguinte, o seu desempenho altera-se conforme a função de gradação utilizada (vide anterior item (f)). Fato que justifica o desenvolvimento de algoritmos de otimização que encontrem a função de gradação ótima segundo a aplicação do TPGF e os objetivos de projeto. O capítulo 4 trata dessa otimização através do Método de Otimização Topológica.

## 3 MODELAGEM DE TPGF MEDIANTE O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GRADADOS

### 3.1 Introdução

Como se comentou no capítulo anterior, os modelos analíticos resultam limitados para estudos mais aprofundados do comportamento de TPGF; em especial, porque geralmente eles estão limitados a modelos unidimensionais ou a modelos que permitem a variação de somente uma das constantes de material. Adicionalmente, os modelos multicamada, embora mais genéricos, são dependentes do número de camadas, e não representam adequadamente a gradação contínua de propriedades. Por conseguinte, outros métodos são necessários para encontrar uma descrição mais realista dos TPGF.

Neste capítulo apresenta-se uma nova abordagem, em análise dinâmica, que permite uma aproximação mais exata da gradação contínua das propriedades em TPGF, ao contrário da gradação escalonada e discreta representada pela abordagem multicamada (ver capítulo 2). Assim, a exploração da potencialidade da gradação contínua do material em transdutores piezelétricos torna-se viável. Essa abordagem consiste em modelar os TPGF através do conceito dos Elementos Finitos Gradados (EFG)<sup>1</sup>, o qual, até agora, somente foi implementado para materiais estruturais MGF (BANKS-SILLS et al. 2002; KIM, PAULINO, 2002; ZHANG, PAULINO, 2007), e TPGF em análise estática (CARBONARI et al., 2007b; SILVA et al., 2007). Por outro lado, no capítulo se questiona o uso da aproximação multicamada na modelagem de TPGF. Na literatura não foi encontrado um trabalho que realizou esse questionamento e, muito pelo contrário, a maioria dos trabalhos que utilizam a aproximação multicamada parte da idéia de que essa aproximação representa adequadamente o comportamento estático e/ou dinâmico dos TPGF simulados (ALMAJID et al. 2001; LEE, 2005; SAMADHIYA, MUKHERJEE, 2006; TAYA et al., 2003). Assim, a “avaliação” numérica da aproximação multicamada representa mais uma contribuição dessa tese.

---

<sup>1</sup> Maiores detalhes do conceito de EFG serão apresentados na Seção 3.3.

O programa implementado é denominado *piezoEFG*, e permite simular TPGF bidimensionais mediante o conceito de EFG. O código é implementado utilizando o programa MATLAB<sup>TM</sup>. O programa *piezoEFG* permite especificar gradações de propriedades em qualquer direção e de qualquer constante de material, seja elástica, piezométrica ou dielétrica, além de permitir a simulação estática e dinâmica (modal, harmônica e transiente) de materiais estruturais e estruturas piezométricas sem e com gradação de material. Assim, com a ajuda do programa *piezoEFG* pode-se comparar os resultados de gradações mais suavizadas (ou contínuas) com aqueles obtidos por aproximações multicamadas, estas últimas com gradações discretas.

O capítulo está estruturado como segue: na Seção 3.2 apresenta-se o fundamento teórico das diversas soluções das equações piezométricas mediante o MEF, implementadas no programa *piezoEFG*. Na Seção 3.3 é introduzido o conceito dos Elementos Finitos Gradados, e na Seção 3.4 é apresentada uma descrição do programa. Na Seção 3.5 são mostrados alguns resultados obtidos com o *piezoEFG*, incluindo as comparações com resultados multicamadas. Finalmente, na Seção 3.6 algumas considerações finais são apresentadas.

## 3.2 Soluções das Equações Piezométricas mediante o MEF

### 3.2.1 Análise Estática

A equação de equilíbrio geral de uma estrutura piezométrica pode ser expressa como<sup>2</sup>:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{Q}_p \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

<sup>2</sup> Ver o Apêndice A para maiores detalhes das equações de elementos finitos em problemas piezométricos.

onde os termos  $M_{uu}$ ,  $K_{uu}$ ,  $K_{u\varphi}$ , e  $K_{\varphi\varphi}$  são as matrizes de massa, rigidez, piezolétrica, e dielétrica, respectivamente. O termo  $C_{uu}$  representa a matriz de amortecimento. As expressões para essas matrizes apresentam-se na Seção A.5 do Apêndice A. A eq.(3.1) inclui os efeitos de massa, amortecimento e rigidez; no entanto, na análise estática os efeitos inerciais (massa) e do amortecimento são ignorados, com exceção dos efeitos de aceleração estática, como a ação da gravidade. Neste caso a eq.(3.1) reduz-se a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{Q}_p \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

### 3.2.2 Análise Modal

Através da análise modal são obtidas as freqüências naturais e os modos de vibrar de uma estrutura piezolétrica; ou em outras palavras, consiste na solução de um problema de autovalor e autovetor. Para essa análise, o programa *piezoEFG* resolve o seguinte sistema de equações (não é considerado o efeito das perdas mecânicas ou matriz de amortecimento) (LERCH, 1990):

$$-\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_u \\ \boldsymbol{\Psi}_\varphi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_u \\ \boldsymbol{\Psi}_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{com: } \lambda = \omega^2 \quad (3.3)$$

ou reduzidamente:

$$-\lambda \mathbf{M} \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{K} \boldsymbol{\Psi} = 0 \quad (3.4)$$

onde  $\lambda$  e  $\omega$  são o autovalor e a freqüência natural, respectivamente. As matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  representam as matrizes de massa e de rigidez total, e o vetor  $\boldsymbol{\Psi}$  representa o autovetor total. Para este tipo de análise, o programa *piezoEFG* deve solucionar dois casos diferentes de carregamento elétrico, os quais representam dois extremos, devido ao acoplamento piezolétrico, na curva de impedância elétrica, conforme se detalha no Apêndice A. Esses extremos são as condições de ressonância e a anti-

ressonância. As freqüências de ressonância são obtidas simulando uma estrutura piezelétrica em curto-circuito (condição de impedância elétrica mínima). No caso exemplo do transdutor piezelétrico mostrado na Fig. 3.1, essa condição consegue-se assumindo tensão elétrica nula em ambos os eletrodos (ver Fig. 3.1(a)). As freqüências de anti-ressonância são obtidas simulando uma estrutura piezelétrica na condição elétrica de circuito aberto (condição de impedância elétrica tendendo a infinito). Assim, voltando ao exemplo da Fig. 3.1, essa condição consegue-se aterrando um dos eletrodos e removendo a tensão elétrica do outro eletrodo (ver a Fig. 3.1(b)).

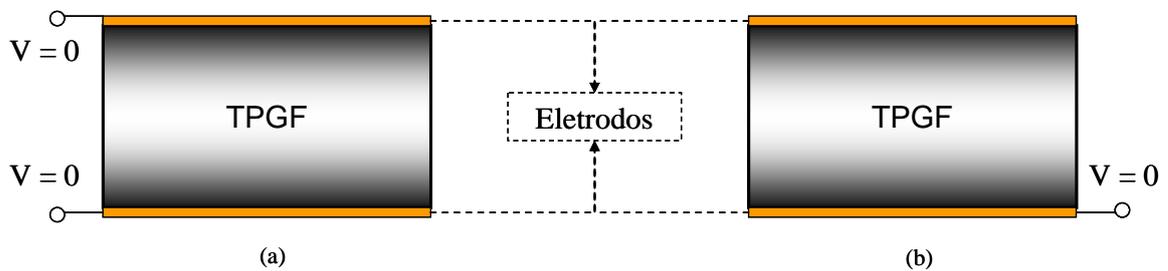


Figura 3.1. Excitação elétrica para determinar: (a) freqüências de ressonância; (b) freqüências de anti-ressonância.

Para detectar os modos de vibrar gerados pelo efeito piezelétrico, e sua correspondente freqüência natural, devem ser comparadas as freqüências naturais obtidas pela condição de ressonância com a condição de anti-ressonância. Assim, se os valores de freqüências nas duas condições são iguais (ou muito próximos) considera-se um modo de vibrar não-piezelétrico (modo de vibrar mecânico ou elástico). Se as freqüências forem afastadas uma da outra, o modo de vibrar é um modo piezelétrico (ou originado pelo acoplamento piezelétrico).

A solução dos problemas de autovalor e autovetor de uma estrutura piezelétrica apresenta diversas dificuldades não encontradas em estruturas não-piezelétricas. Especificamente, as dificuldades surgem porque a matriz de rigidez total  $\mathbf{K}$  do sistema de equações de elementos finitos é indefinida; em outras palavras, possui valores positivos e negativos. Esses valores negativos são introduzidos pela parte relacionada com a matriz dielétrica dessa matriz de rigidez total, matriz  $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$  (vide eq.(3.3)). Além disso, o problema torna-se mais complexo de solucionar, já que a matriz de massa total, matriz  $\mathbf{M}$ , é positiva semi-definida, por

causa dos termos iguais a zero relacionados aos graus de liberdade (GDL) elétricos (ver a eq.(3.3)).

Um método para resolver esses problemas de autovalor e autovetor piezelétricos é aplicar condensação estática ao sistema da eq.(3.3) para eliminar os GDL internos de potencial elétrico (uma vez que as cargas elétricas nodais internas são zero), mantendo na formulação somente os GDL de potencial elétrico dos eletrodos (esta abordagem é denominada formulação “H” e é apresentada no Apêndice A), como descrito em Naillon et al. (1983). A vantagem desse método consiste em que as matrizes obtidas são positivo-definidas, e então, o problema de autovalor pode ser resolvido diretamente pelos métodos tradicionais para estruturas não-piezelétricas (método de Lanczos, método de iteração de subespaço, método de iteração inversa, entre outros (COOK et al., 2001)). Entretanto, a banda da matriz de rigidez total é destruída, e por isso, deve-se lidar com a matriz inteira, o que aumenta a necessidade de memória, tornando-se inviável se o modelo de elementos finitos possui milhares de graus de liberdade.

Visando trabalhar com grandes discretizações, neste trabalho utiliza-se o esquema de armazenagem de matrizes de Yong, Cho (1994); Yong, Cho (1996). O esquema de armazenagem proposto pelos anteriores autores permite resolver a eq.(3.3) sem destruir a banda da matriz de rigidez total, o qual, em conjunto com um esquema de armazenagem das matrizes de elementos finitos na forma esparsa (somente aloca-se na memória os valores diferentes de zero), reduz os recursos de memória utilizados e indiretamente, o tempo de processamento. O esquema proposto por Yong, Cho (1994); Yong, Cho (1996) consiste em fatorizar, através da fatoração de Cholesky, apenas os termos mecânicos da matriz de massa total. Assim, a matriz  $M_{uu}$  da eq.(3.3), é armazenada da seguinte forma (fatoração Cholesky) (BATHE, 1996):

$$M_{uu} = L_{\mu} L_{\mu}^T \quad (3.5)$$

sendo que a matriz total de massa é definida como:

$$M = \begin{bmatrix} L_{\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{\mu}^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Por outro lado, a abordagem de Yong, Cho (1994); Yong, Cho (1996) consiste em fatorar a matriz de rigidez total na tradicional fatoração  $LDL^T$  (BATHE, 1996):

$$\mathbf{K} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T \quad (3.7)$$

Utilizando as eq.(3.6) e eq.(3.7), e após algumas manipulações matemáticas, reescreve-se a eq.(3.4) como:

$$\frac{1}{\lambda} \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\mu^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} \quad (3.8)$$

A eq.(3.8) pode ser transformada em um típico problema de autovalor e autovetor na forma:

$$\frac{1}{\lambda} \mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{V} \quad (3.9)$$

onde:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\mu^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\mu^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{L}^{-T} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Assim, uma vez solucionado o problema da eq.(3.9) encontram-se os autovalores do problema. Os autovetores são recuperados através da eq.(3.10).

### 3.2.3 Análise Harmônica

Nesta análise, assume-se como entrada uma excitação senoidal contínua e faz-se uma varredura com esse tipo de sinal em diferentes frequências. Em outras

palavras, com a análise harmônica se procura a amplitude de resposta, em estado estacionário, quando os carregamentos prescritos variam periodicamente. Assim, os termos de excitação externa da eq.(3.1) podem ser expressos, em forma complexa, como:

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_0 \exp(-j\Omega_c t) \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_p = \mathbf{Q}_0 \exp(-j\Omega_c t) \quad (3.12)$$

onde as amplitudes  $\mathbf{F}_0$  e  $\mathbf{Q}_0$  são números complexos,  $\Omega_c$  é a frequência circular do sinal de entrada, o termo  $t$  representa o tempo, e  $j = \sqrt{-1}$ .

Pode-se assumir como solução geral (ZIENKIEWICZ, TAYLOR, 1991):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \exp(-j\Omega_c t) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 \exp(-j\Omega_c t) \quad (3.13)$$

onde os termos  $\mathbf{u}_0$  e  $\boldsymbol{\varphi}_0$  são amplitudes complexas de deslocamento e potencial elétrico, respectivamente. Assim, substituindo a eq.(3.12) e eq.(3.13) na eq.(3.1) obtém-se:

$$\left( -\Omega_c^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + j\Omega_c \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \boldsymbol{\varphi}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{Q}_0 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Conseqüentemente, para cada frequência circular  $\Omega_c$  da excitação de entrada, resolve-se um problema estático equivalente do tipo:

$$\bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (3.15a)$$

com:

$$\bar{\mathbf{K}} = -\Omega_c^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + j\Omega_c \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.15a)$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \{ \mathbf{u}_0 \quad \boldsymbol{\varphi}_0 \}^T \quad (3.15b)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \{ \mathbf{F}_0 \quad \mathbf{Q}_0 \}^T \quad (3.15c)$$

Porém, mais que a resposta em uma freqüência de excitação específica, geralmente deseja-se encontrar a curva de resposta numa faixa de freqüências pré-definida; assim, a eq.(3.15) deve ser solucionada tantas vezes como determina um incremento de freqüência utilizado para “varrer” a faixa desejada.

### 3.2.4 Análise transiente

A análise transiente é utilizada para determinar, em contraste com a análise harmônica, a resposta da estrutura piezolétrica a carregamentos arbitrários, incluindo a resposta transiente e estacionária em relação ao tempo. Nesse caso, realiza-se uma integração no tempo para determinar essa resposta. Neste trabalho é utilizado o método implícito de integração de Newmark (COOK, et al., 2001), o qual apresenta a vantagem de que dependendo dos valores utilizados na integração, o método torna-se incondicionalmente estável em problemas lineares; em outras palavras, não depende do valor do passo de integração  $\Delta t$  para alcançar a convergência. Porém, a exatidão depende, além da discretização espacial, da discretização no tempo.

A integração pelo método de Newmark encontra a resposta no tempo  $n+1$ , a partir dos valores no tempo  $n$  (valores atuais dos graus de liberdade); assim (COOK, et al., 2001):

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix}_n + \Delta t \left( \gamma \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix}_{n+1} + (1-\gamma) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix}_n \right) \quad (3.16)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix}_n + \Delta t \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left( 2\beta \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix}_{n+1} + (1-2\beta) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix}_n \right) \quad (3.17)$$

Os termos  $\gamma$  e  $\beta$  são constantes que determinam as características do algoritmo, tal como a exatidão e a estabilidade numérica. Para trabalhar com uma solução incondicionalmente estável, neste trabalho assume-se o fator  $\gamma = 0,5$  e o fator  $\beta = 0,25$  (com erro no vetor  $\{\mathbf{u} \ \boldsymbol{\phi}\}^T$  igual a  $O(\Delta t^2)$ ) (COOK, et al., 2001). Solucionando

a eq.(3.17) para  $\{\ddot{\mathbf{u}} \quad \ddot{\boldsymbol{\varphi}}\}_{n+1}^T$ , e logo substituindo essa expressão na eq.(3.16), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left( \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix}_{n+1} - \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix}_n - \Delta t \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix}_{n+1} \right) - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix}_n \quad (3.18)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \left( \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix}_{n+1} - \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix}_n \right) - \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix}_n - \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix}_n \quad (3.19)$$

Agora, substituindo as equações anteriores na equação de equilíbrio geral, eq.(3.1), e depois solucionando para  $\{\mathbf{u} \quad \boldsymbol{\varphi}\}_{n+1}^T$ , o resultado encontrado é:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{eff} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix}_{n+1} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{Q}_p \end{Bmatrix}_{n+1} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \frac{1}{\beta \Delta t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix}_n + \frac{1}{\beta \Delta t} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix}_n + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix}_n \right\} + \dots \\ &\quad \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix}_n + \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix}_n + \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \end{Bmatrix}_n \right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde:

$$\mathbf{K}^{eff} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Com a eq.(3.20) e eq.(3.21) completam-se as expressões necessárias para encontrar a resposta temporal de estruturas piezelétricas.

### 3.3 Conceito dos Elementos Finitos Gradados

Para tratar a gradação contínua de material, a qual se fez explícita nas equações da Seção 3.2 pela sua dependência das coordenadas Cartesianas  $x$  e  $y$ , o enfoque dos

Elementos Finitos Gradados (EFG) resulta ser muito vantajoso (ZHANG, PAULINO, 2007). Isto é facilmente compreendido ao comparar os tradicionais Elementos Finitos Homogêneos (EFH) com os EFG. No caso dos EFH, as propriedades do material permanecem constantes dentro do elemento finito, ver a Fig. 3.2(a), sendo avaliadas no centróide de cada elemento. Já os EFG incorporam o gradiente das propriedades de material na escala do elemento finito, ver a Fig. 3.2(b); portanto, as propriedades dentro desse elemento mudam conforme uma lei de gradação específica. A abordagem dos EFGs é muito vantajosa para simular TPGF, uma vez que a transição de propriedades de um elemento finito a outro se faz de forma suave e contínua, sem que esses valores “pulem” de elemento a elemento, como se observou na aproximação multicamada apresentada no capítulo 2, ou como se observa no exemplo da Fig. 3.2(a), para uma variação exponencial de propriedades. Conseqüentemente, através da formulação de EFG é obtida uma suavização na distribuição de material, a qual resulta ser uma abordagem mais “natural” para simular a mudança de propriedades existente em TPGF.

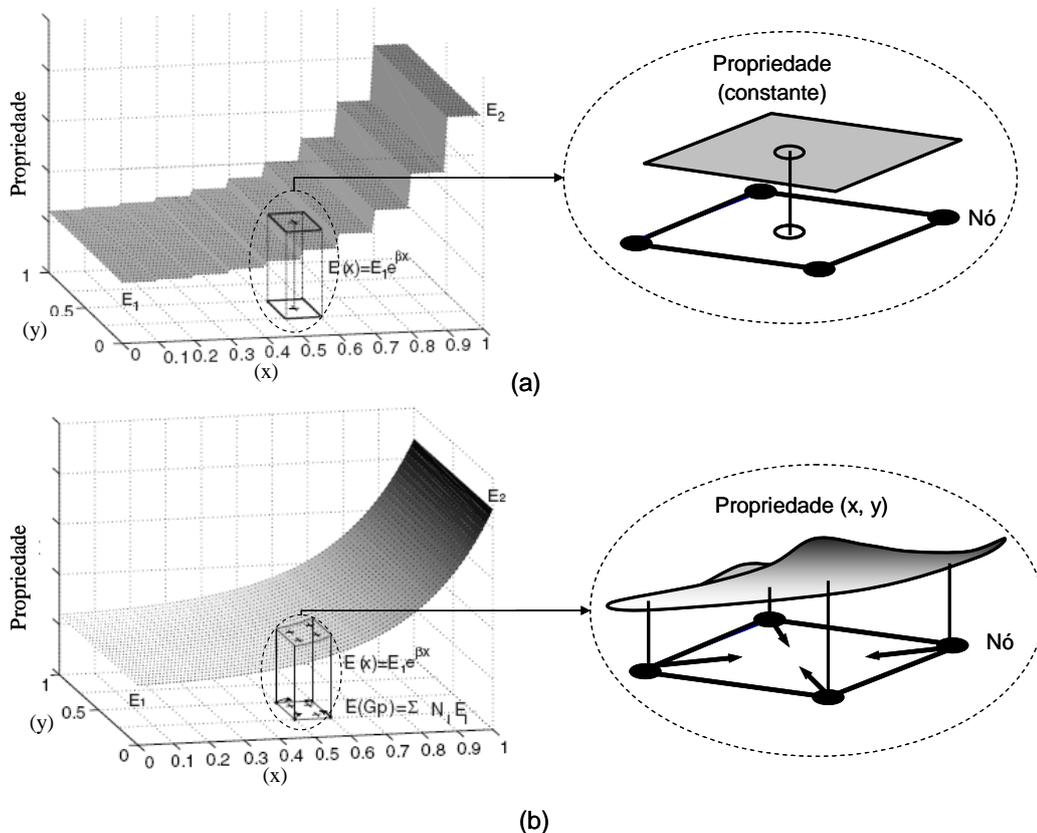


Figura 3.2. Conceito dos EFG utilizando como exemplo uma variação exponencial de material (figura adaptada de Zhang, Paulino (2007)). (a) Elemento Finito Homogêneo; (b) Elemento Finito Gradado.

Para realizar essa mudança contínua das propriedades, nos EFGs as propriedades do material dentro de cada elemento são avaliadas através de funções de interpolação em base a valores de propriedades nodais, denominada formulação isoparamétrica generalizada (KIM, PAULINO, 2002); geralmente, são utilizadas as mesmas funções de forma empregadas para interpolar a geometria, os deslocamentos, e potencias elétricos no interior do elemento finito.

No caso específico dos TPGF, as propriedades do material, em nível do elemento finito, são calculadas como (segundo a idéia da formulação isoparamétrica generalizada apresentada por Kim, Paulino (2002)):

- Propriedades elásticas ( $C_{ijkl}^E$ ), piezelétricas ( $e_{ikl}$ ), e dielétricas ( $\varepsilon_{ik}^S$ ):

$$C_{ijkl}^E = \sum_{n=1}^4 N_n (C_{ijkl}^E)_n, \quad e_{ikl} = \sum_{n=1}^4 N_n (e_{ikl})_n, \quad \varepsilon_{ik}^S = \sum_{n=1}^4 N_n (\varepsilon_{ik}^S)_n \quad \text{para } i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (3.22)$$

- Densidade do material ( $\rho$ ):

$$\rho = \sum_{n=1}^4 N_n \rho_n \quad (3.23)$$

onde  $N$  são as funções de forma do elemento retangular de quatro nós expressas no Apêndice A.

### 3.4 Descrição do Programa *piezoEFG*

Como se mencionou na introdução deste capítulo, atualmente a área de estruturas piezelétricas MGF carece de abordagens que permitam a simulação contínua das propriedades de material em análise dinâmica. As abordagens seguem procedimentos analíticos ou abordagens multicamadas, como as apresentadas no capítulo 2. Na literatura somente dois trabalhos abordam a gradação contínua de propriedades em estruturas piezelétricas utilizando o conceito dos EFG. O trabalho

de Silva et al., 2007 estende a formulação dos EFGs, inicialmente desenvolvida para problemas estruturais (KIM, PAULINO, 2002), a problemas multifísicos em análise estática, validando os resultados mediante modelos analíticos solucionados mediante o programa MAPLE™. Já o trabalho de Carbonari et al., 2007b utiliza essa mesma formulação de EFG multifísicos para encontrar a gradação ótima de propriedades em atuadores piezelétricos MGF em operação quase-estática. Assim, uma vez que os EFGs não têm sido aplicados a problemas piezelétricos em análise dinâmica, foi implementado um programa, em código MATLAB™, que permite esse tipo de simulações.

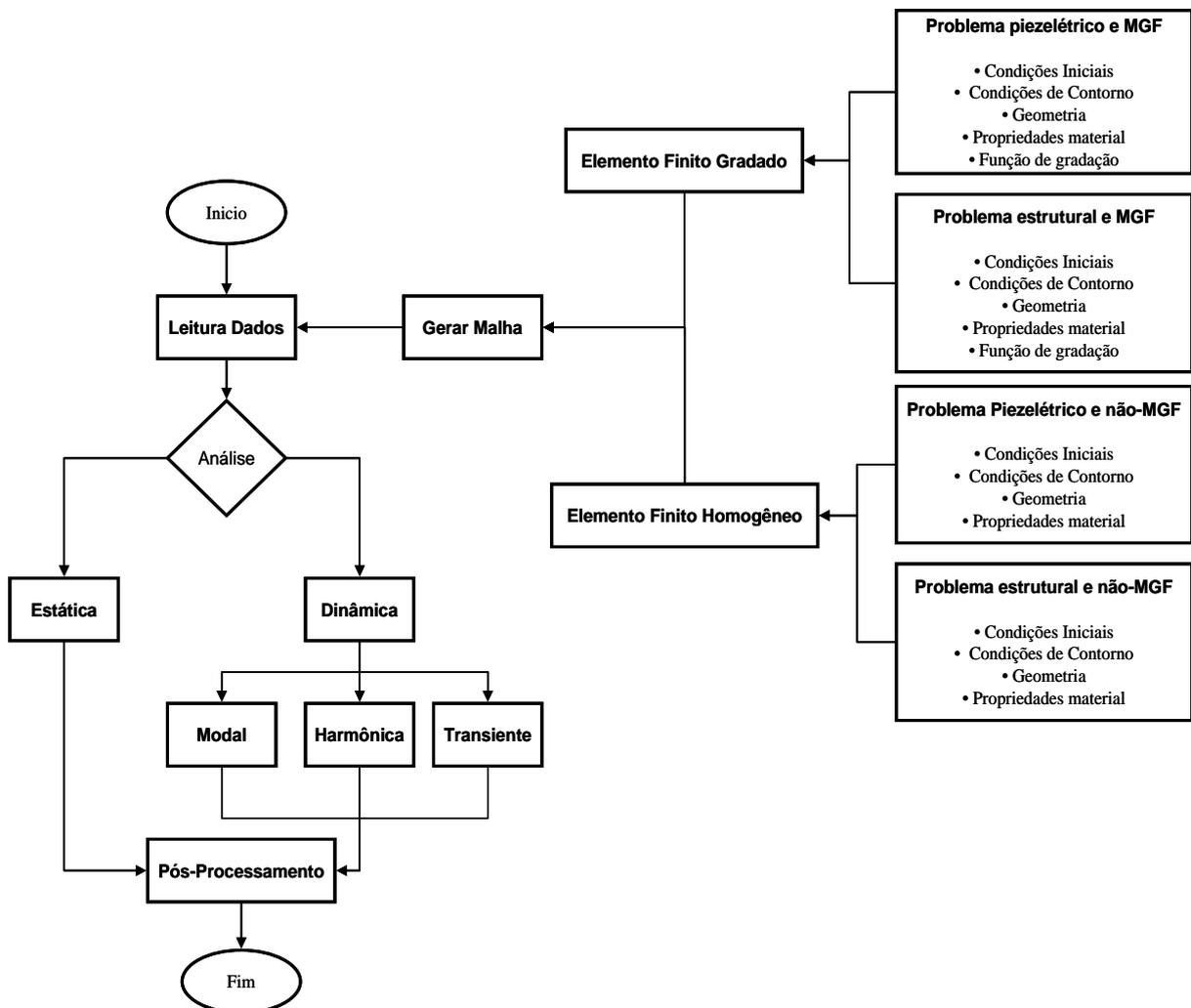


Figura 3.3. Fluxograma do programa *piezoEFG*.

O programa implementado é denominado *piezoEFG*, e permite simular TPGF e transdutores não-MGF bidimensionais em análise estática, modal, harmônica e

transiente (com a opção de solução de problemas bidimensionais em estado plano de tensões e deformações, e axi-simétricos). A Fig. 3.3 mostra o diagrama de fluxo do programa implementado.

Inicialmente, o usuário deve definir o tipo de problema que deseja solucionar, seja ele um problema estrutural ou piezolétrico, com ou sem propriedades gradadas. Além disso, o usuário deve definir a geometria da estrutura do transdutor analisado, as condições de contorno, as condições iniciais (para problemas transientes), e as propriedades de material. No caso de MGFs deve ser definida a lei de gradação das propriedades utilizando algum tipo de função matemática. Posteriormente, o programa escolhe o tipo de elemento a ser utilizado, seja EFG ou EFH. O elemento utilizado é um elemento finito quadrado Q4 com 4 nós por elemento. Para problemas estruturais somente 2 graus de liberdade por nó são definidos (deslocamentos verticais e horizontais), e para problemas piezolétricos, o elemento finito possui três graus de liberdade por nó: deslocamento vertical e horizontal, e potencial elétrico, ver a Fig. 3.4. Finalmente, o programa *piezoEFG* gera a malha de elementos finitos sobre o modelo geométrico definido pelo usuário. Esta primeira etapa pode ser definida de Pré-processamento.

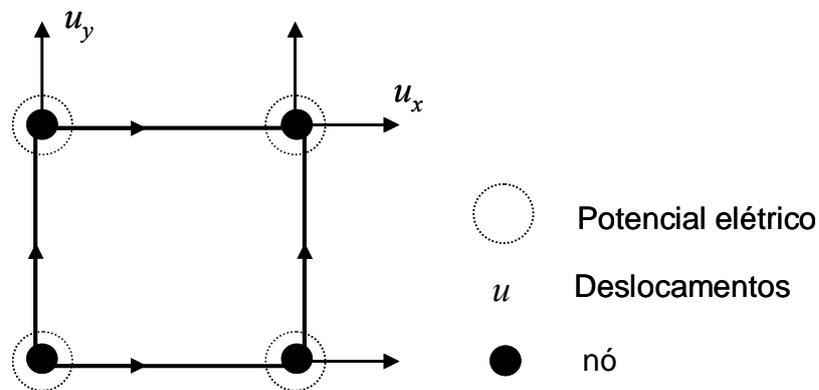


Figura 3.4. Elemento finito Q4 para problemas piezolétricos.

Após a leitura dos dados de Pré-processamento, o programa *piezoEFG* realiza a solução das equações de elementos finitos correspondente ao tipo de análise definida pelo usuário: estática, modal, harmônica ou transiente. Detalhes dessas equações e do procedimento para cada análise foram definidos na Seção 3.2. Para realizar todos os cálculos, o programa armazena as matrizes e vetores na forma

esparsa, assim, requisitos menores de armazenagem e de processamento são necessários possibilitando, por sua vez, a análise com grandes discretizações.

Finalmente, no Pós-processamento, o programa *piezoEFG* gera gráficos segundo o tipo de análise escolhido. Na análise estática, o programa gera as geometrias deformadas com ou sem a malha não-deformada, junto com a distribuição de deslocamentos, de tensões mecânicas, de potencial elétrico, de deslocamentos elétricos, e de campo elétrico. Na análise modal, o programa gera as geometrias deformadas para cada modo de vibrar (o número de modos apresentados é escolhido pelo usuário), além de gerar um arquivo \*.txt com as frequências naturais. Também, nesta análise, o programa permite apresentar as mesmas distribuições de variáveis físicas que na análise estática. Por outro lado, na análise harmônica, o programa *piezoEFG* mostra a curva de resposta em frequência dos deslocamentos e da impedância elétrica, nos graus de liberdade escolhidos pelo usuário. Finalmente, na análise transiente, o programa apresenta a curva de deslocamento ou potencial elétrico, velocidade, e aceleração ao longo do tempo de algum grau de liberdade previamente definido.

### 3.5 Resultados

Nesta seção apresentam-se resultados obtidos utilizando o programa *piezoEFG*. Os resultados concentram-se em duas abordagens diferentes. A primeira estuda o efeito do tamanho de malha, número de camada ou EFG, na resposta dos TPGF. Já a segunda estuda o efeito de mudar, de forma seletiva, grupos de propriedades de material (elásticas, dielétricas, e/ou piezelétricas), tanto na aproximação multicamada como com EFGs.

Nos exemplos, as propriedades são gradadas ao longo da espessura utilizando as seguintes funções de gradação:

$$C^E(y) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} e^{\mu_1 y}; \quad e(y) = \begin{bmatrix} 0 & e_{13} \\ 0 & e_{33} \\ e_{15} & 0 \end{bmatrix} e^{\mu_2 y}; \quad \epsilon^S(y) = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} e^{\mu_3 y} \quad (3.24)$$

onde  $C^E$ ,  $e$ ,  $\varepsilon^S$  são respectivamente a matriz de propriedades elásticas, piezelétricas, e dielétricas. Os termos  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , e  $\mu_3$  são os parâmetros de gradação do material para as propriedades elásticas, piezelétricas e dielétricas, respectivamente. Nos resultados a seguir assume-se  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , e  $\mu_3$  iguais a 85, 322 e 106, respectivamente, sendo empregados os mesmos valores definidos por Silva et al., 2007. Igualmente, todos os exemplos assumem um transdutor da forma, dimensões, e condições de contorno mostradas na Fig. 3.5(a), para as análises estática e transiente, e Fig. 3.5(b) para a análise harmônica e modal. O material piezelétrico PZT-5A é utilizado como material base (ver Tabela 2.1 do capítulo 2). Além disso, não são considerados efeitos de amortecimento, e assume-se estado plano de deformações.

### 3.5.1 Estudo de Convergência

Nesta seção, compara-se a aproximação multicamada, geralmente utilizada na literatura, com a abordagem por EFG, apresentada neste capítulo. Essa comparação tem duas finalidades: (i) avaliar a comparação multicamada em aplicações estáticas e dinâmicas, e (ii) verificar o programa *piezoEFG* (outras aproximações utilizadas para verificar o programa apresentam-se no Apêndice C). O procedimento utilizado consiste em observar o comportamento de ambas as abordagens conforme se muda o número de elementos finitos  $e$ , em conjunto, efetuar comparações em diversos tipos de análises: estático, harmônico, modal, e transiente. Os resultados mediante a abordagem multicamada são obtidos desenvolvendo um programa equivalente ao programa *piezoEFG*, mas que define propriedades iguais de material em todos os elementos finitos homogêneos (EFH) pertencentes a uma mesma camada.

A Fig. 3.6 apresenta os resultados de deslocamento nodal, em uma análise estática, ao mudar o número de EFG ou número de camadas, ao longo da espessura. Especificamente, os resultados mostram o valor de deslocamento vertical nodal, ao longo da espessura, no extremo livre da viga piezelétrica da Fig. 3.5(a), para as seguintes discretizações<sup>3</sup>: (60 x 5; 60 x 10; 60 x 20; 60 x 40) EFG, na

<sup>3</sup> A nomenclatura  $m \times n$  representa  $m$  elementos finitos (ou milímetros) na direção radial ou longitudinal (segundo o problema) e de  $n$  elementos finitos (ou milímetros) ao longo da espessura.

Fig. 3.6(a), e para (60 x 5; 60 x 10; 60 x 20; 60 x 40) camadas, na Fig. 3.6(b). Observa-se que para essas discretizações, os resultados utilizando o programa *piezoEFG* (formulação baseada em EFGs) convergem muito mais rápido que esses utilizando a abordagem multicamada e, em particular, a abordagem multicamada converge à solução com EFG. Em outras palavras, a abordagem por EFG é menos sensível ao tamanho de malha, ao longo da direção de gradação de material, que a abordagem multicamada. Essa mesma conclusão é mais evidente na Fig. 3.7. A Fig. 3.7 mostra o valor de tensão mecânica  $\sigma_{xz}$  no extremo livre da viga piezolétrica da Fig. 3.5(a), quando EFG ou EFH (abordagem multicamada) são utilizados. Em ambos casos, para facilitar a comparação, o cálculo de tensão é realizado no centro de cada elemento finito. Observa-se que a convergência se alcança após 10 EFG ao longo da direção de gradação de material (Fig. 3.7(a)); no entanto, no caso da abordagem multicamada (Fig. 3.7(b)), mesmo com 40 camadas ao longo da espessura ainda não é alcançada convergência na solução, e neste caso é observado que os valores de tensão mecânica convergem ao valor obtido mediante EFG. Esse resultado coloca em evidência a alta dependência dos resultados multicamada do número de camadas utilizadas para representar a gradação de material.

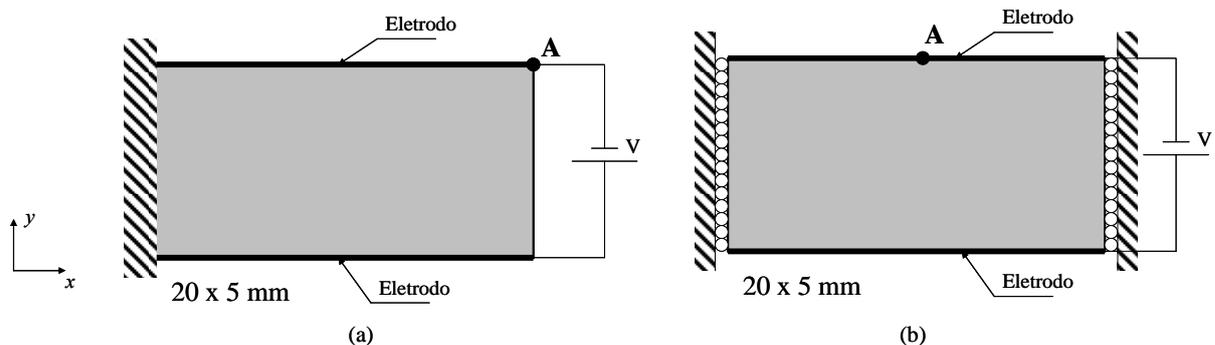


Figura 3.5. Transdutor piezolétrico utilizado para obter os resultados: (a) em análise estática e transiente; (b) em análise harmônica e modal.

Esse mesmo estudo de convergência foi realizado para uma análise dinâmica; especificamente, a Fig. 3.8 mostra os valores de frequência de ressonância dos seis primeiros modos de vibrar da viga piezolétrica apresentada na Fig. 3.5(b). Neste caso, a malha de elementos finitos permanece constante em todas as simulações, mas é alterado, na abordagem multicamada, o número de EFH por camada que

possuem propriedades homogêneas. Dessa forma, torna-se independente do tamanho de malha a convergência por camadas de material. Todos os resultados multicamada se comparam com o valor de frequência de ressonância obtido com uma malha de 60 x 40 EFG.

Da Fig. 3.8 pode-se observar que para todos os modos de vibrar, os valores multicamada convergem ao valor utilizando EFG. Essa convergência muda conforme o número do modo de vibrar considerado; assim, para os dois primeiros modos de vibrar a convergência é alcançada após 20 camadas de material, e para os modos de vibrar 3 e superiores existe uma diferença remanescente, incluso com 40 camadas de material. No entanto, observa-se que os valores de frequência de ressonância obtidos pela abordagem multicamada convergem sempre ao valor obtido mediante EFG, independente do modo de vibrar.

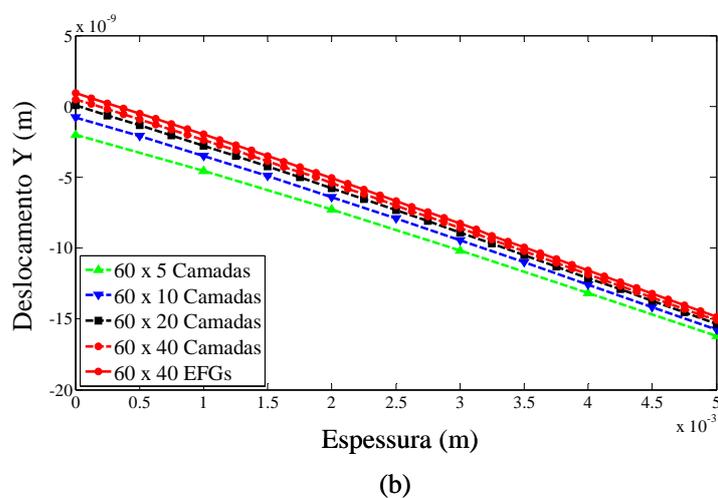
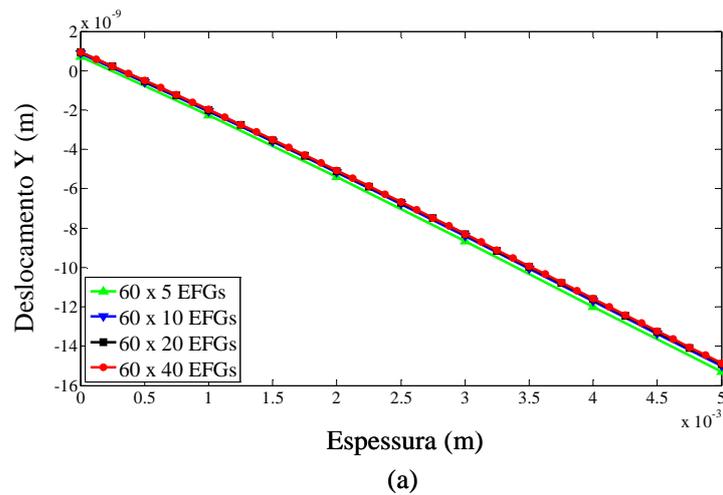
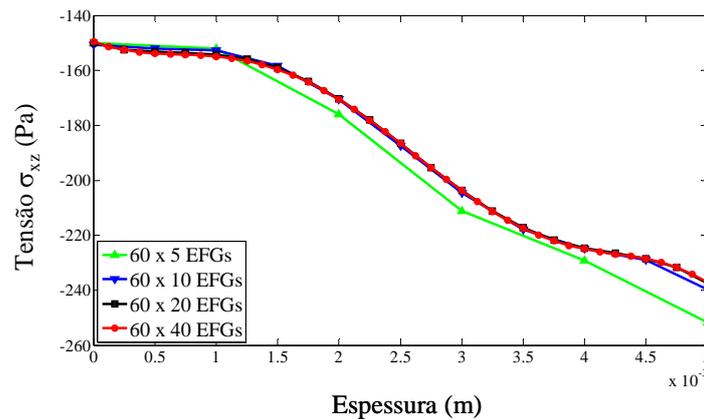


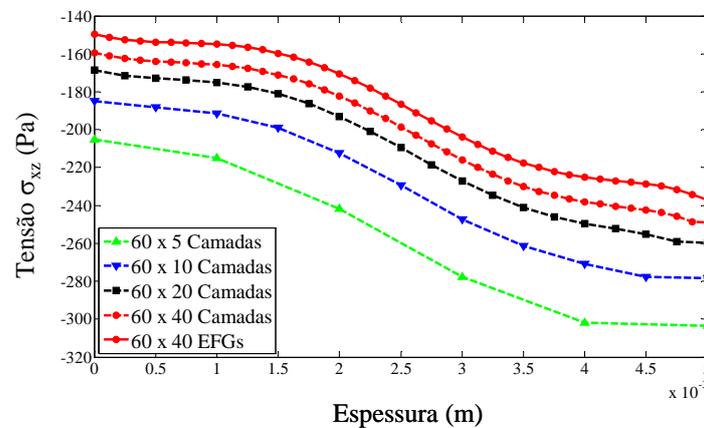
Figura 3.6. Estudo de convergência no valor do deslocamento vertical no extremo livre da viga piezelétrica da Fig. 3.5(a): (a) com EFG; (b) com a abordagem multicamada.

### 3.5.2 Estudo da mudança seletiva de propriedades

Nesta seção, é realizada uma comparação entre as duas abordagens (EFGs e multicamada), mantendo-se constante o tamanho de malha (60 x 40 EFG e 60 x 40 camadas), mas gradando seletivamente as propriedades de material por simulação; especificamente, quatro diferentes tipos de simulações foram consideradas (SILVA et al., 2007): (i) gradação simultânea de todas as propriedades de material ( $\mu_1 = 85, \mu_2 = 322, \mu_3 = 106$ ); (ii) gradação de somente as constantes dielétricas ( $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \mu_3 = 106$ ); (iii) gradação de somente as constantes piezelétricas ( $\mu_1 = 0, \mu_2 = 322, \mu_3 = 0$ ); e (iii), gradação de somente as constantes elásticas ( $\mu_1 = 85, \mu_2 = 0, \mu_3 = 0$ ). Para todos os quatro casos de simulação se realiza o estudo em análise estática, harmônica e transiente.



(a)



(b)

Figura 3.7. Estudo de convergência no valor de tensão mecânica  $\sigma_{xz}$  no extremo livre da viga piezelétrica da Fig. 3.5(a) (calculada no centro de cada EF): (a) com EFG; (b) com a abordagem multicamada.

Nos resultados, para os casos da análise estática e transiente utiliza-se o modelo da Fig. 3.5(a); especificamente, na análise estática mede-se o deslocamento vertical (resultados na Fig. 3.10) e tensão mecânica  $\sigma_{xz}$  (calculada no centro de cada elemento finito, vide Fig. 3.11) no extremo livre da viga, e na análise transiente mede-se, ao longo do tempo, o deslocamento vertical no ponto A da Fig. 3.5(a), ver Fig. 3.12. Adicionalmente, na análise transiente a viga é excitada por um pulso elétrico de meia onda seno, de magnitude igual a 100 V, como apresentado na Fig. 3.9, e a análise é desenvolvida até 8,5  $\mu\text{s}$  após a excitação, sem considerar amortecimento. Por outro lado, para a análise harmônica, calcula-se a função de resposta em frequência mecânica do deslocamento vertical no ponto A da Fig. 3.5(b), ver resultado na Fig. 3.13.

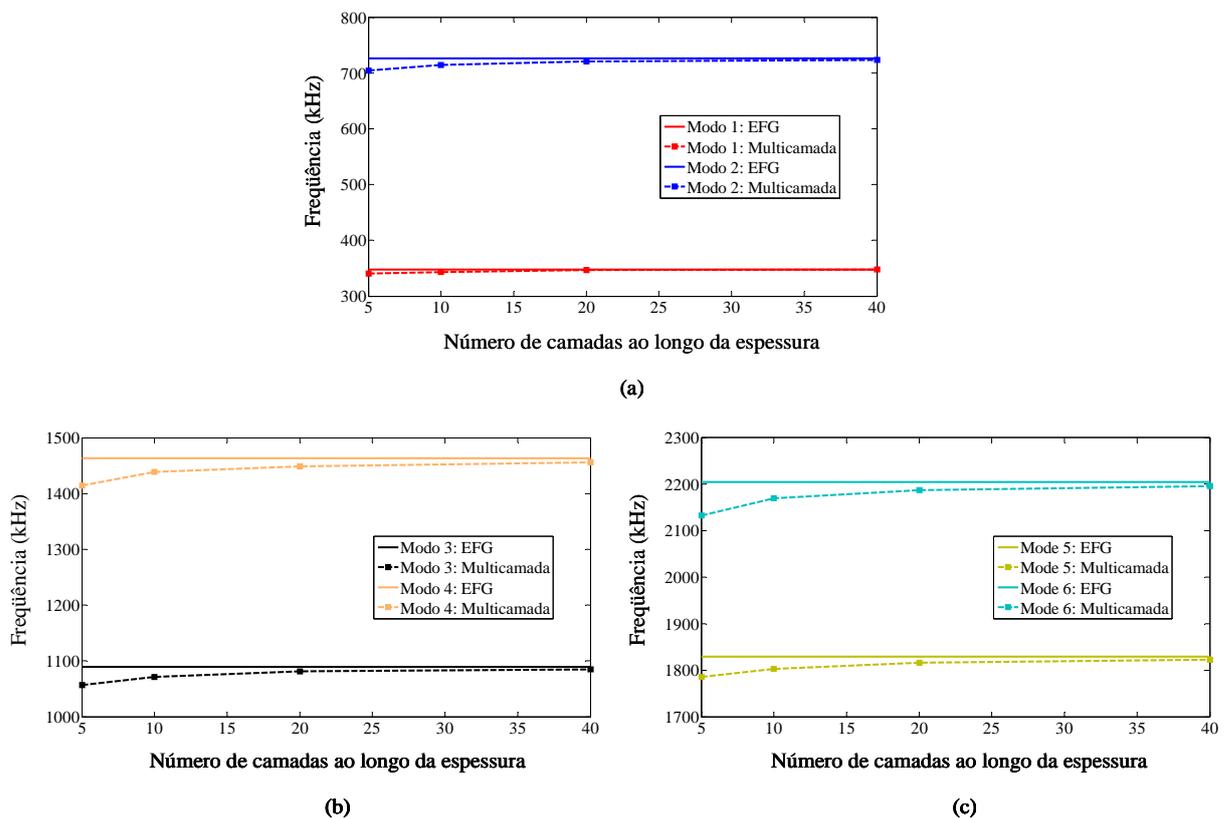


Figura 3.8. Estudo de convergência no valor de frequência de ressonância da viga piezolétrica da Fig. 3.5(b): (a) modos de vibrar 1 e 2; (b) modos de vibrar 3 e 4; (c) modos de vibrar 5 e 6.

Os resultados dessa comparação entre análises se apresentam nas Fig. 3.10 até Fig. 3.13. Observa-se que a gradação de cada conjunto de propriedades de material conduz a resultados diferentes; em outras palavras, o destaque é a variação de

resultados segundo as constantes gradadas. No entanto, para cada resultado em particular, a variação entre a aproximação multicamada e por EFG não é muito significativa. Especificamente, nos deslocamentos obtidos mediante uma análise estática (Fig. 3.10) observa-se que a variação de somente as propriedades dielétricas ou elásticas (Fig. 3.10(b) e Fig. 3.10(d)) conduz a resultados quase idênticos aos obtidos com os modelos multicamadas, mas a variação de somente as propriedades piezelétricas (Fig. 3.10(c)) ou de todas as propriedades simultaneamente (Fig. 3.10(a)) conduz a resultados multicamadas um pouco diferentes. Essa diferença é mais significativa ao observar a curva de tensão mecânica  $\sigma_{xz}$  da Fig. 3.11. Assim, em todos os casos, em especial na variação de somente as propriedades piezelétricas (Fig. 3.11(c)), ou de todas as propriedades simultaneamente (Fig. 3.11(a)), obtêm-se resultados diferentes entre as aproximações multicamada e por EFG. Essa conclusão não se aplica à mudança de somente as propriedades elásticas (Fig. 3.11(d)), onde as duas abordagens conduzem a curvas quase idênticas de tensão mecânica  $\sigma_{xz}$ . Desses resultados é claro que a maior variação entre a aproximação multicamada e por EFG se encontra quando as propriedades piezelétricas são gradadas, o qual representa o termo de “acoplamento” entre as equações elásticas e dielétricas (ver equações constitutivas de materiais piezelétricos no Apêndice A) e, portanto, é o termo mais “sensível” a mudanças e a uma representação mais exata da gradação contínua de propriedades, uma vez que afeta tanto o problema mecânico como elétrico de forma simultânea. Por outro lado, no caso da tensão mecânica, essas variações provavelmente também se devem ao grau das funções de interpolação dos elementos finitos, uma vez que seria mais interessante utilizar elementos de 8 nós, e não de 4 nós, como os aqui utilizados, para determinar a resposta de tensão de cada elemento finito.

Por outro lado, as Fig. 3.12 e Fig. 3.13 confirmam, em problemas transientes e harmônicos, o resultado obtido para análise estática; ou seja, confirma-se que a resposta do TPGF muda conforme o conjunto de propriedades que sejam gradadas; no entanto, para cada um desses conjuntos, a diferença de utilizar um modelo multicamada ou um modelo de EFG é muito pequena. Adicionalmente se confirma, em aplicações dinâmicas, que a maior diferença entre ambos os modelos é originada pela gradação das propriedades piezelétricas.

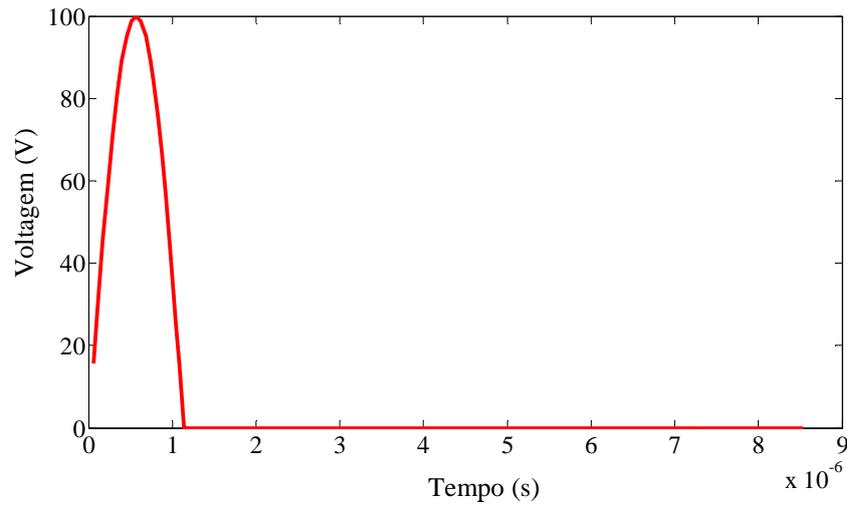
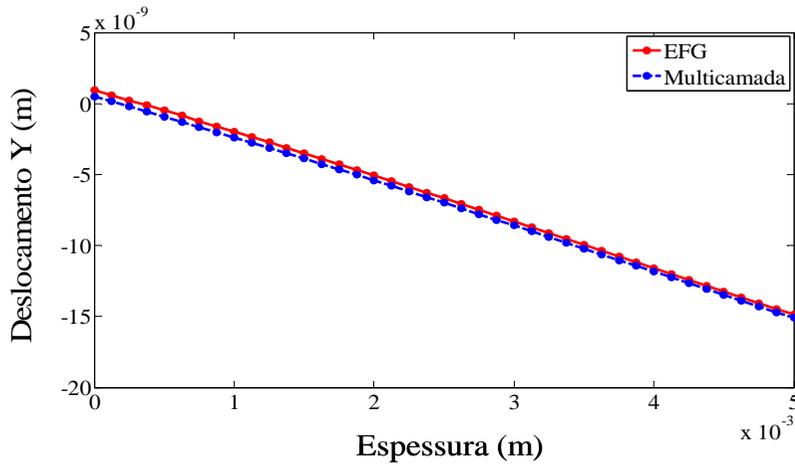
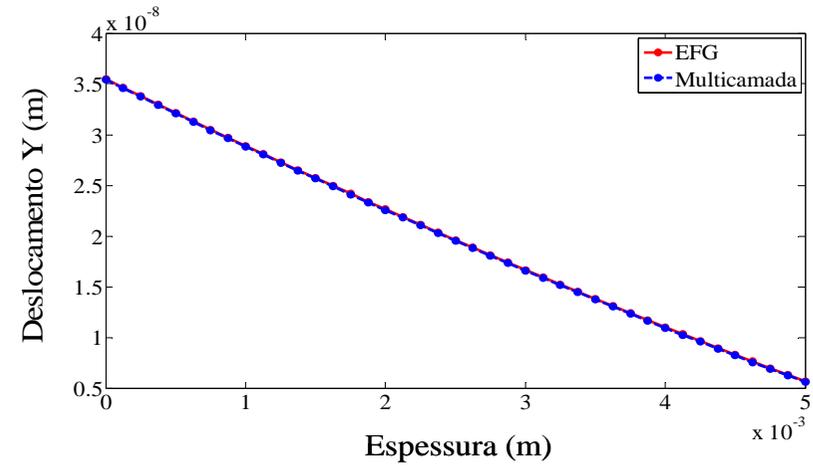


Figura 3.9. Excitação elétrica para o problema transiente apresentado na Fig. 3.12.

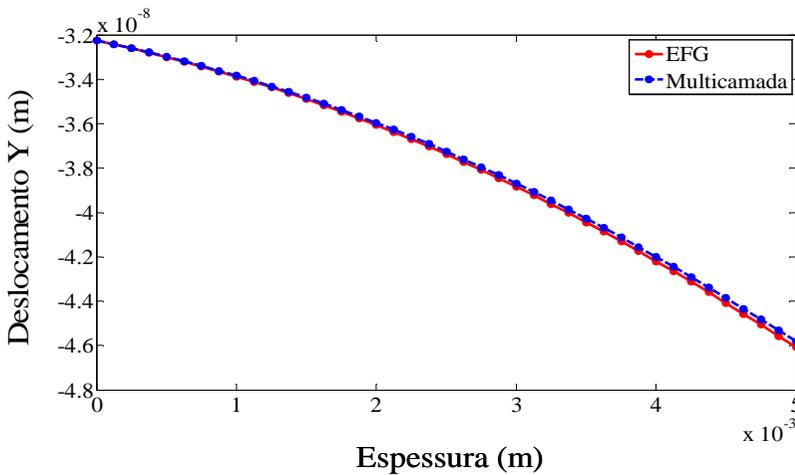
A diferença principal entre a abordagem multicamada e por EFG encontra-se nos resultados de uma análise harmônica; especificamente, quando intervém a gradação das propriedades piezelétricas, e quando se comparam os modos de vibrar de alta ordem. Assim, obtém-se alta correlação, no valor das frequências de ressonância e na magnitude, dos três primeiros modos de vibrar; a partir deles, essa diferença vai-se incrementando conforme aumenta a ordem do modo.



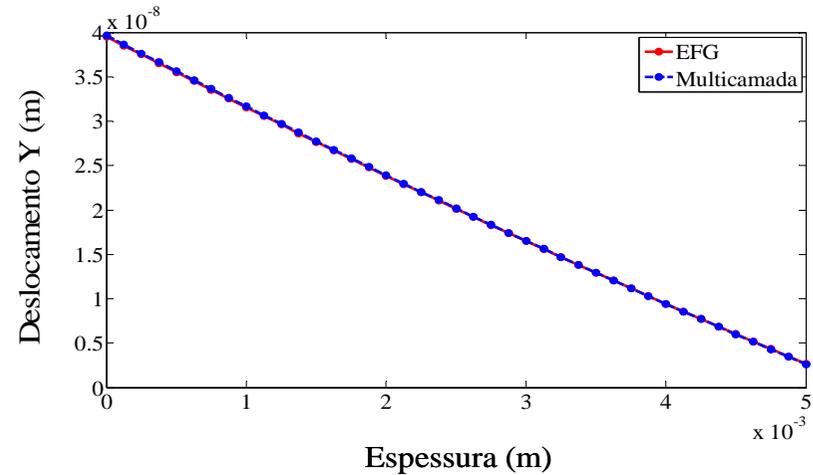
(a)



(b)

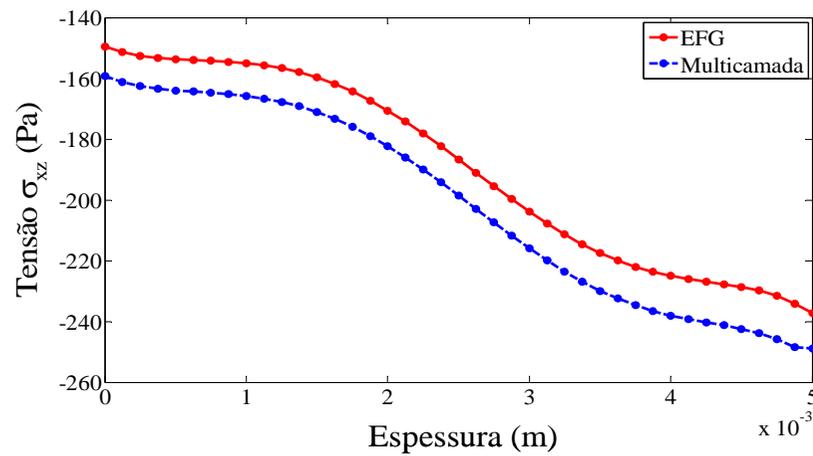


(c)

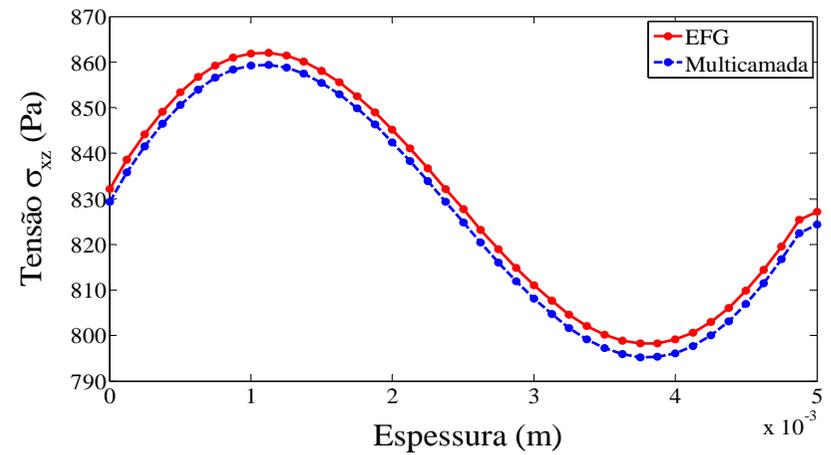


(d)

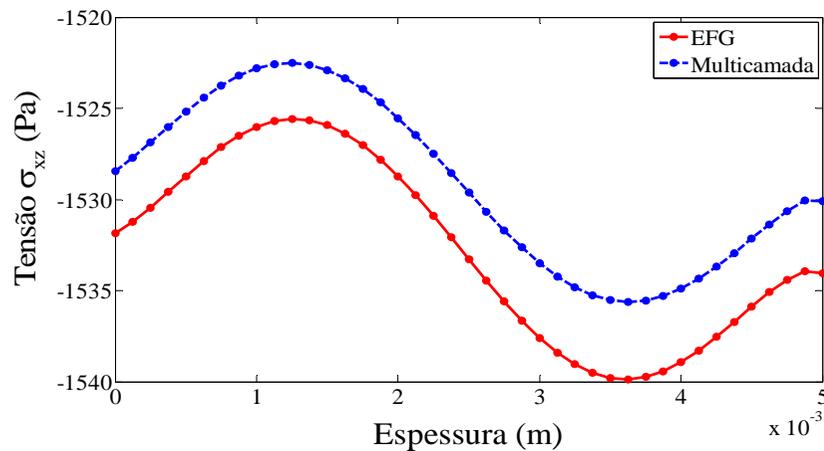
Figura 3.10. Comparação entre as abordagens por EFG e multicamada para diversas gradações de propriedades numa análise estática (deslocamento vertical no extremo livre da viga piezolétrica da Fig. 3.5(a)): (a) todas as propriedades de material ( $\mu_1 = 85$ ;  $\mu_2 = 322$ ;  $\mu_3 = 106$ ); (b) propriedades dielétricas ( $\mu_1 = 0$ ;  $\mu_2 = 0$ ;  $\mu_3 = 106$ ); (c) propriedades piezolétricas ( $\mu_1 = 0$ ;  $\mu_2 = 322$ ;  $\mu_3 = 0$ ); (d) propriedades elásticas ( $\mu_1 = 85$ ;  $\mu_2 = 0$ ;  $\mu_3 = 0$ ).



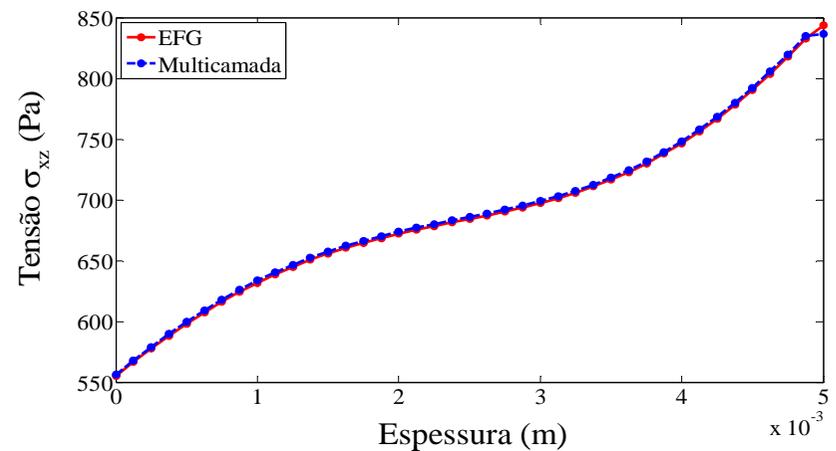
(a)



(b)

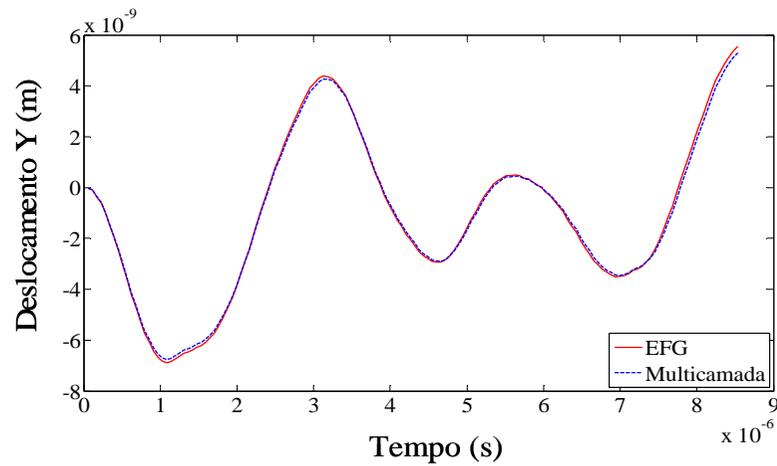


(c)

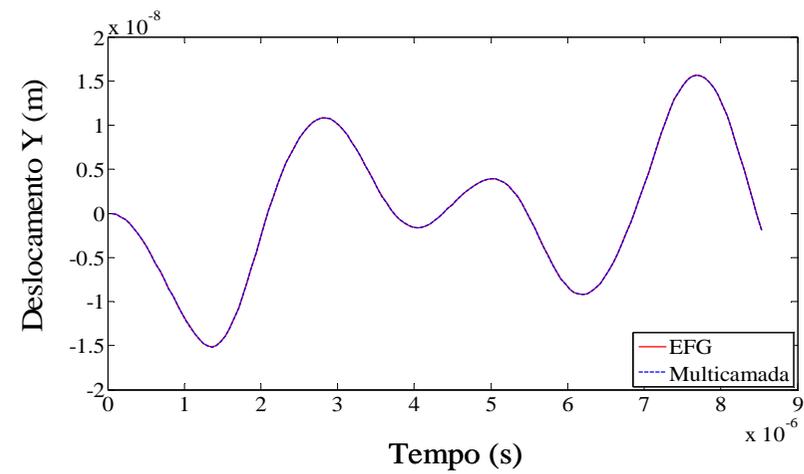


(d)

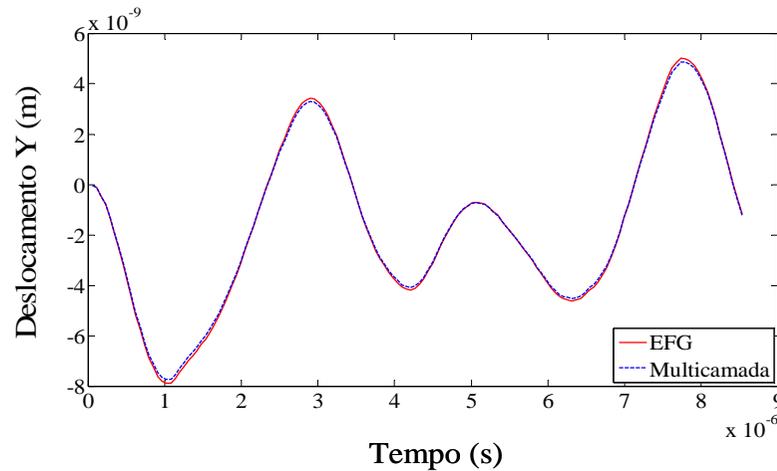
Figura 3.11. Comparação entre as abordagens por EFG e multicamada para diversas graduações de propriedades numa análise estática (tensão mecânica  $\sigma_{xz}$  calculada no centro de cada EF e no extremo livre da viga piezolétrica da Fig. 3.5(a)): (a) todas as propriedades de material ( $\mu_1 = 85$ ;  $\mu_2 = 322$ ;  $\mu_3 = 106$ ); (b) propriedades dielétricas ( $\mu_1 = 0$ ;  $\mu_2 = 0$ ;  $\mu_3 = 106$ ); (c) propriedades piezolétricas ( $\mu_1 = 0$ ;  $\mu_2 = 322$ ;  $\mu_3 = 0$ ); (d) propriedades elásticas ( $\mu_1 = 85$ ;  $\mu_2 = 0$ ;  $\mu_3 = 0$ ).



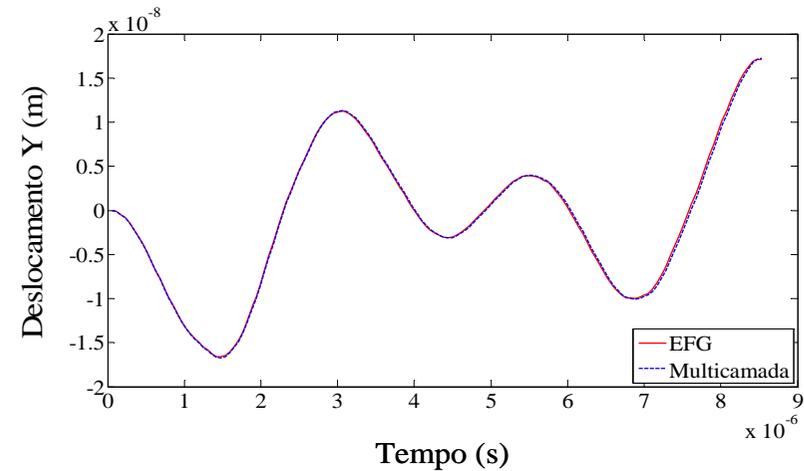
(a)



(b)

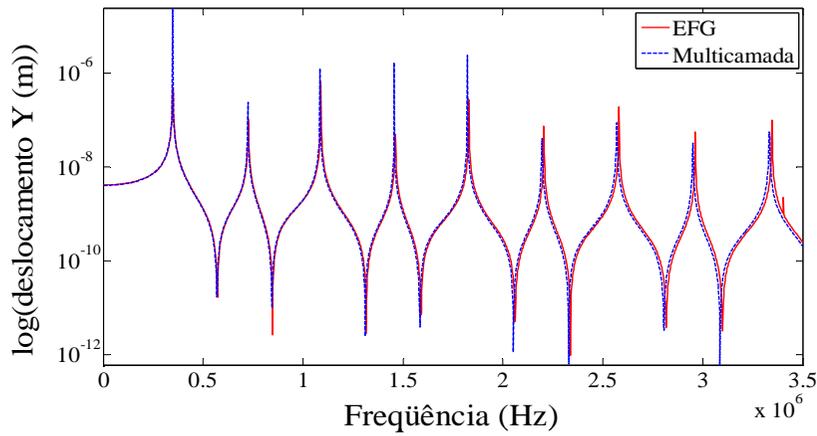


(c)

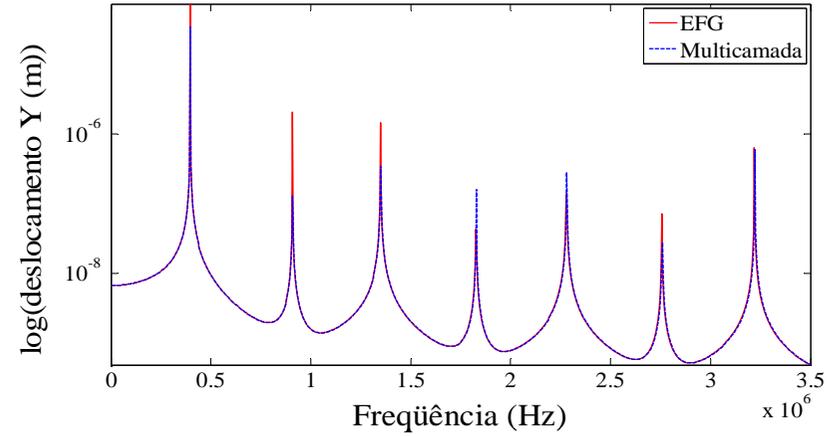


(d)

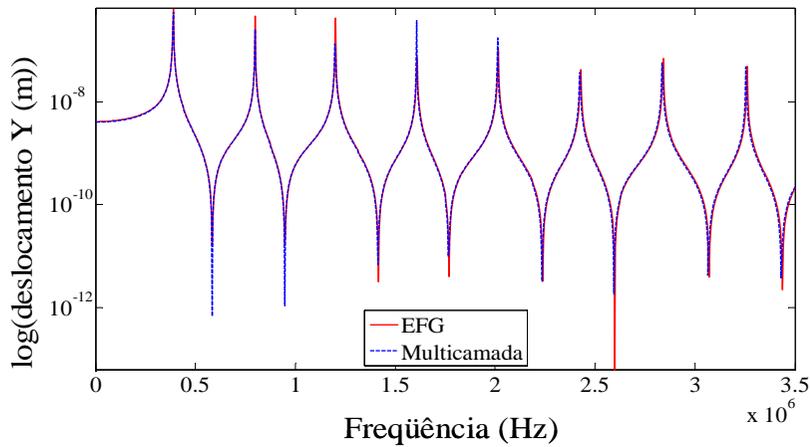
Figura 3.12. Comparação entre as abordagens por EFG e multicamada para diversas gradações de propriedades numa análise transiente (deslocamento vertical no ponto A da viga piezolétrica da Fig. 3.5(a)): (a) todas as propriedades de material ( $\mu_1 = 85$ ;  $\mu_2 = 322$ ;  $\mu_3 = 106$ ); (b) propriedades dielétricas ( $\mu_1 = 0$ ;  $\mu_2 = 0$ ;  $\mu_3 = 106$ ); (c) propriedades piezolétricas ( $\mu_1 = 0$ ;  $\mu_2 = 322$ ;  $\mu_3 = 0$ ); (d) propriedades elásticas ( $\mu_1 = 85$ ;  $\mu_2 = 0$ ;  $\mu_3 = 0$ ).



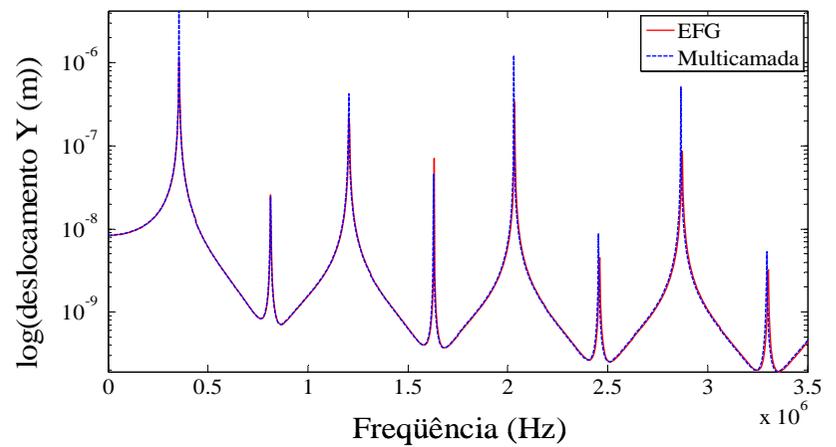
(a)



(b)



(a)



(d)

Figura 3.13. Comparação entre as abordagens por EFG e multicamada para diversas gradações de propriedades numa análise harmônica (deslocamento vertical no ponto A da viga piezolétrica da Fig. 3.5(b)): (a) todas as propriedades de material ( $\mu_1 = 85$ ;  $\mu_2 = 322$ ;  $\mu_3 = 106$ ); (b) propriedades dielétricas ( $\mu_1 = 0$ ;  $\mu_2 = 0$ ;  $\mu_3 = 106$ ); (c) propriedades piezolétricas ( $\mu_1 = 0$ ;  $\mu_2 = 322$ ;  $\mu_3 = 0$ ); (d) propriedades elásticas ( $\mu_1 = 85$ ;  $\mu_2 = 0$ ;  $\mu_3 = 0$ ).

### 3.6 Considerações finais

Neste capítulo foram modelados, com sucesso, TPGF utilizando o conceito dos Elementos Finitos Gradados, onde são utilizadas as mesmas funções de interpolação das coordenadas e deslocamentos para representar a variação de propriedades ao longo de uma determinada coordenada. Assim, foi explorada a potencialidade do programa *piezoEFG* para projetar esses TPGF utilizando diversos tipos de solução da equação de equilíbrio, eq. (3.1). As soluções incluíram projetar os TPGF em análise estática, modal, harmônica e transiente, variando todas ou algumas das propriedades elásticas, piezelétricas e/ou dielétricas ao longo da espessura.

Dos resultados é importante destacar que os modelos multicamadas resultam apropriados para simular TPGF sempre e quando uma análise de convergência do número de camadas seja desenvolvida, em adição à “tradicional” convergência do tamanho de malha. Contudo, a convergência do número de camadas sempre converge aos resultados obtidos mediante a formulação com EFG. Adicionalmente, observou-se que, na aproximação multicamada, um maior número de camadas é necessário para alcançar convergência; particularmente, com a aproximação por EFG a resposta de tensão mecânica converge após 10 EFG ao longo da direção de gradação, já com a aproximação multicamada 40 camadas não são suficientes para obter convergência, assumindo 1 EFH por camada de material, ver Fig. 3.7. O mesmo comportamento foi observado no cálculo da frequência de ressonância de modos de alta ordem (modos de ordem superior a três). Por último, não foi observada nenhuma diferença significativa, no custo computacional<sup>4</sup>, entre as abordagens multicamada e por EFG, considerando-se o mesmo tamanho de malha.

Por outro lado, dos exemplos apresentados neste capítulo ficou evidente, de novo, a dependência da resposta dos TPGF da função de gradação utilizada (essa dependência já tinha sido observada nos resultados do capítulo 2), e do conjunto de propriedades que sejam consideradas na gradação. Isso ratifica aplicar técnicas de otimização para o projeto de TPGF. Entre todas as propriedades, a gradação das propriedades piezelétricas afeta com maior intensidade a exatidão dos resultados

---

<sup>4</sup> Foi utilizado um computador com processador Intel Quad 9450 (2,66 GHz), com 12 Mb de Cache e 4 Gb de memória DDR3 (1066 MHz).

obtidos mediante a aproximação multicamada, se é tomado como ponto de referência os resultados obtidos mediante a formulação por EFG.

Finalmente, verificando numericamente o programa *piezoEFG*, para o projeto de estruturas piezelétricas MGF (para maiores detalhes da verificação do programa ver o Apêndice C), e uma vez demonstrada a superioridade da formulação por EFG, em relação à aproximação multicamada, a formulação por EFG surge como uma opção atrativa a ser utilizada no módulo de análise do projeto otimizado de TPGF; especificamente, no módulo de análise do MOT. Adicionalmente, com a implementação do programa *piezoEFG* se completou todo um conjunto de algoritmos que viabilizam a simulação e modelagem de TPGF. Esses algoritmos vão desde a modelagem analítica desenvolvida no capítulo 2, a qual permite simulações com muito pouco custo computacional, mas com poder de análise restrito por estar limitada a modelos unidimensionais, até abordagens numéricas mais exatas com modelos bidimensionais, como a aproximação multicamada e por EFG.

## 4 PROJETO DE TPGF UTILIZANDO O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA

### 4.1 Introdução

Para o projeto de atuadores piezelétricos, várias opções estão disponíveis na atualidade, desde as técnicas de tentativa e erro, passando pela otimização paramétrica, até a genérica e sistemática Otimização Topológica. Em todos os casos, assume-se que as propriedades permanecem uniformes para cada propriedade de material (elástica, piezelétrica e/ou dielétrica). No entanto, uma nova opção tem surgido nos últimos anos; especificamente, essa opção consiste em não manter uniformes essas propriedades e, pelo contrário, assumir que elas mudam seguindo uma função de gradação específica, ver a Fig. 4.1. Esses novos transdutores têm recebido o nome de Transdutores Piezelétricos com Gradação Funcional (TPGF). A idéia básica nos TPGF é assumir que todas ou algumas das suas propriedades mudam com as coordenadas Cartesianas ao longo de uma direção específica; geralmente, ao longo da direção radial ou longitudinal (segundo a forma do transdutor), ou ao longo da espessura, conforme é apresentado na Fig. 4.1. Contudo, o projeto desses transdutores ainda é uma área de pesquisa bastante inexplorada, tendo-se limitado o seu projeto a técnicas de tentativa e erro, ou aproximações multicamadas, conforme se apresentou no capítulo 2. Assim, o projeto otimizado ainda continua sem ser considerado na literatura, mesmo conhecendo-se (como confirmado no capítulo 2) que o desempenho desses transdutores muda com a função de gradação das propriedades. Daqui, surgem duas perguntas inevitáveis: (i) qual é a função de gradação que permite atingir um dado objetivo de projeto? E, (ii) é possível encontrar de forma genérica e sistemática essa função de gradação? Este capítulo procura responder a essas perguntas, especificamente, ao aplicar o Método de Otimização Topológica (MOT) para o projeto desses transdutores<sup>1</sup>.

O Método de Otimização Topológica tem sido aplicado para otimizar um amplo número de diversos sistemas mecânicos e multi-físicos (BENDSØE,

---

<sup>1</sup> Detalhes dos fundamentos teóricos do MOT e da sua aplicação no projeto de transdutores piezelétricos são encontrados no Apêndice B.

SIGMUND, 2003). Em problemas dinâmicos, a formulação original de Otimização Topológica (OT) utilizando Homogeneização foi aplicada por Diaz, Kikuchi (1992) para o problema de otimização de autovalores. O problema foi formulado como um problema de reforçamento no qual uma determinada estrutura é reforçada para maximizar autovalores especificados. Soto, Diaz (1993) consideraram o projeto ótimo de placas e a maximização de um ou dois autovalores de alta ordem. Ma et al. (1995) utilizaram a mesma formulação para maximizar a somatória de um determinado número de autovalores de baixa ordem, visando reduzir a comutação da ordem dos modos de vibrar durante o processo iterativo do MOT.

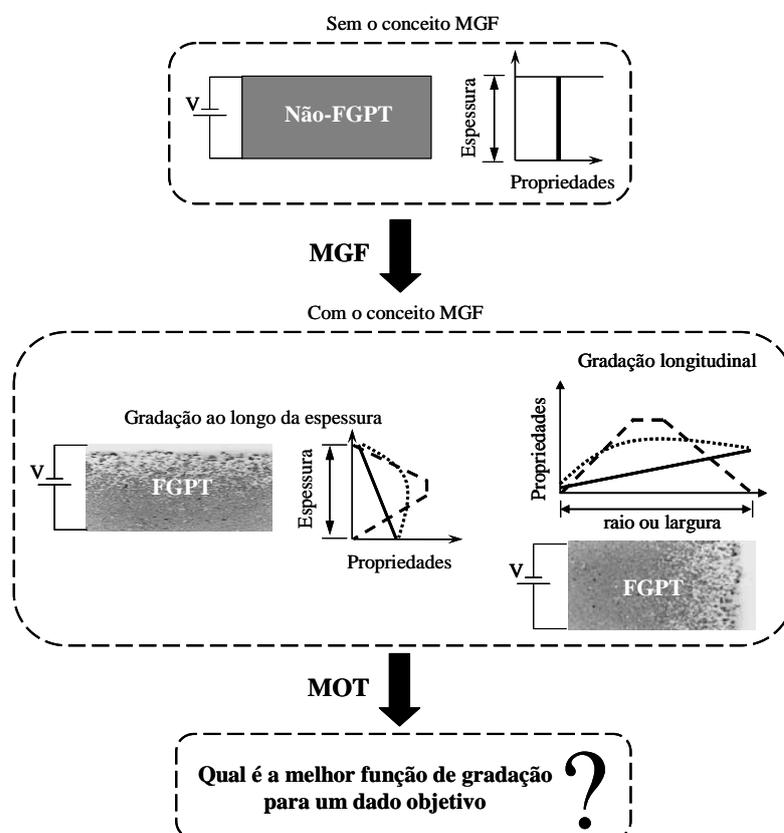


Figura 4.1. Princípio do projeto de TPGF através do MOT.

Para estruturas piezelétricas, o MOT tem sido aplicado para projetar materiais compostos inteligentes reforçados por barras piezelétricas (SIGMUND, TORQUATO, 1998), atuadores piezelétricos (KÖGL, SILVA, 2005), e transdutores piezelétricos (SILVA, KIKUCHI, 1999). No entanto, têm sido poucas as aplicações do MOT no projeto de estruturas piezelétricas baseadas no conceito de Materiais com Gradação

Funcional (MGF). Somente os trabalhos recentes de Carbonari et al. (2009) Carbonari et al. (2007b) apresentam o projeto de atuadores piezelétricos, considerando o MOT e o conceito de MGF, em operação quase-estática. No entanto, o projeto quase-estático não inclui diversos aspectos importantes que surgem na operação dinâmica de estruturas piezelétricas; especificamente, não trata a comutação de modos de vibrar durante o processo iterativo, nem funções objetivos não “suavizadas”, ou que não convergem pela drástica comutação de modos de vibrar e, por conseguinte, não trata com sensibilidades descontínuas dessas funções objetivo (Ma et al., 1995). Assim, faltam na atualidade, trabalhos que explorem a potencialidade do MOT para o projeto de estruturas piezelétricas, considerando operação dinâmica e o conceito de MGF; ou seja, trabalhos que explorem a modificação sistemática e genérica das características dinâmicas de TPGF. Preencher essa carência é o foco dos resultados apresentados neste capítulo.

Do anterior, pode-se definir como objetivos do presente capítulo:

- C1) Explorar as vantagens de utilizar o MOT para o projeto de TPGF, especificamente, para encontrar a função de gradação de propriedades que modifique as características dinâmicas desses TPGF.
- C2) Explorar as vantagens de utilizar o MOT para projetar TPGF que possuam modos de vibrar definidos pelo usuário e, simultaneamente, maximize uma determinada função objetivo. Essa procura por um modo de vibrar específico, durante o processo iterativo, é particularmente útil no projeto de motores piezelétricos e na geração de ondas acústicas. Neste último caso, geralmente requer-se que o transdutor piezelétrico vibre em um modo flexensional ao longo da espessura ou no modo mais próximo do modo ideal tipo pistão plano.

Por outro lado, este capítulo também contribui no projeto dos seguintes TPGF através do MOT:

- C3) Maximizar a primeira frequência de ressonância de TPGF, visando o projeto de atuadores gradados que trabalhem em aplicações quase-estáticas. Dessa

forma, o efeito de ressonância é afastado do regime de operação desses atuadores.

- C4) Maximizar a frequência de um modo de vibrar definido pelo usuário, visando a obtenção de TPGF que trabalhem em altas frequências de operação sem necessidade de diminuir excessivamente a sua espessura.
- C5) Projetar TPGF que vibrem segundo certo modo de vibrar e segundo certa frequência de ressonância, ambos os parâmetros previamente definidos pelo usuário. Assim, é possível projetar um ressonador piezelétrico gradado que vibre em um modo de espessura flexensional e com uma frequência pré-definida.
- C6) Maximizar o Coeficiente de Acoplamento EletroMecânico (*EletroMechanical Coupling Coefficient* – EMCC) ou CAEM, visando obter um TPGF com um modo de vibrar, definido pelo usuário, com maior representatividade na resposta do transdutor. Dessa forma, maximizando o CAEM de um modo de vibrar específico, maximiza-se a conversão de energia elétrica aplicada (potencial elétrico aplicado nos eletrodos) em energia mecânica de saída (deslocamento líquido) nesse modo em particular.
- C7) O objetivo anterior também pode ser alcançado maximizando a Constante Modal Piezelétrica (CMP), uma vez que a CMP é mais fácil de ser calculada durante o processo iterativo do MOT, conforme se explica no Apêndice A. O objetivo continua o mesmo, maximizar a representatividade de um modo de vibrar definido pelo usuário na resposta total do transdutor, mas utilizando a CMP.
- C8) Projetar TPGF tipo banda estreita e banda larga. No primeiro caso maximiza-se a CMP de um modo de vibrar definido pelo usuário e minimizam-se as CMPs dos modos adjacentes. Igualmente, afastam-se as frequências de ressonância desses modos adjacentes da frequência do modo particular selecionado pelo usuário. Por outro lado, no projeto de TPGF tipo banda larga

maximiza-se as CMPs de um conjunto de modos, todos adjacentes um do outro, além de aproximar as suas frequências de ressonância.

- C9) Por último, projetam-se atuadores piezelétricos que vibram seguindo configurações definidas pelo usuário. Dessa forma os deslocamentos em algumas regiões do domínio de projeto, num modo de vibrar desejado, são maximizados e/ou minimizados, encontrando-se simultaneamente a topologia e a gradação de propriedades do atuador. Esse tipo de projeto visa a sua aplicação em atuadores flexionais, sonares, e em motores piezelétricos.

Para alcançar os objetivos e contribuições anteriores, é necessário considerar diversas formulações para o êxito da implementação. Essas formulações serão explicadas em detalhe ao longo do capítulo e podem, resumidamente, ser expostas como<sup>2</sup>:

- A1) Para conseguir ao final da otimização um modo de vibrar definido pelo usuário foi necessário, depois de encontrados um conjunto de autovalores e autovetores, fazer a busca do modo de vibrar desejado dentre aqueles que foram calculados. Para fazer tal comparação numérica, foi utilizada a formulação do *Modal Assurance Criterion* (MAC) (EWINS, 1988; KIM; KIM, 2000). O MAC compara dois modos de vibrar e fornece o grau de correlação entre esses dois modos, permitindo assim o acompanhamento ao longo do processo iterativo do modo de vibrar desejado.
- A2) Por outro lado, enquanto os EFG permitem uma mudança contínua das propriedades dentro do elemento finito, uma implementação adequada do MOT ao projeto de TPGF exige, também, a garantia de uma mudança contínua das variáveis de projeto. A técnica implementada foi o conceito de Aproximação Contínua da Distribuição de Material (ACDM ou CAMD das suas

---

<sup>2</sup> Nesse capítulo também é utilizado o módulo de análise modal do programa *piezoEFG* desenvolvido no capítulo anterior. No MOT, esse módulo é utilizado para obter as frequências de ressonância e anti-ressonância dos TPGF. Assim, aplicando o conceito de EFG no MOT, obtém-se uma gradação contínua de material dentro do elemento finito baseado na informação de propriedades a nível nodal. Outro módulo do programa *piezoEFG* que também é utilizado neste capítulo é o módulo de análise harmônica, o qual permite validar os resultados obtidos mediante o MOT.

siglas em inglês). Embora esse conceito seja tipicamente implementado para reduzir as “instabilidades de tabuleiro” (BENDSØE, SIGMUND, 2003), neste capítulo é implementado, principalmente, para obter uma distribuição contínua das variáveis de projeto e, assim, obter um controle implícito do gradiente de material.

- A3) Por último, é implementada uma técnica de controle explícito de gradiente, baseada no trabalho de Guest et al. (2004). A técnica é denominada Técnica de Projeção, e consiste em projetar as variáveis, do plano de variáveis de projeto, a um novo plano de variáveis, chamadas pseudo-densidades do material. Dessa forma são obtidas, no projeto de TPGF, funções de gradação de material mais “suavizadas”, as quais representam mudanças graduais das propriedades ao longo da direção de gradação desejada.

A seguir serão detalhadas as idéias anteriores, tanto no relacionado às funções objetivo propostas, como à explicação das técnicas que foram utilizadas para conseguir esse projeto otimizado de TPGF através do MOT.

## **4.2 Formulações do MOT para o Projeto de TPGF**

Como mencionado anteriormente, diversas funções objetivo foram consideradas, conforme a aplicação do TPGF. Essas funções objetivo estão numeradas da função objetivo  $F_1$  até a função objetivo  $F_7$ . A seguir é explicada cada uma delas.

### **4.2.1 Maximização de Autovalores**

A maximização de autovalores é um problema interessante no projeto de atuadores gradados, uma vez que em atuadores operando em regime quase-estático o fenômeno de ressonância deve ser evitado; assim, a maximização da primeira frequência de ressonância ou do primeiro autovalor pode proporcionar uma alta

probabilidade de estabilidade dinâmica. Além disso, uma alta frequência fundamental  $f_0$ , garante uma operação linear numa banda ampla de baixas frequências. Adicionalmente, consegue-se um tempo de resposta menor, uma vez que esse tempo está relacionado por  $t = 1/f_0$ , (SILVA et al., 2000).

Por outro lado, se a frequência maximizada é diferente da primeira frequência de ressonância, é possível emular a operação de um transdutor com espessura menor à que efetivamente possui o TPGF; especificamente, existe uma relação inversa entre a frequência central de uma cerâmica piezolétrica e a sua espessura (KINO, 2000). Esse fato em concreto facilita a fabricação, já que seria possível fabricar um TPGF, para operações em alta frequência, com espessuras maiores em relação aos transdutores não-gradados.

A função multi-objetivo proposta, para alcançar os objetivos mencionados no parágrafo anterior, é formulada seguindo as idéias do artigo de Ma et al. (1995). Essa função é representada como:

$$F_I = \left( \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^m w_k \lambda_{r_k}^{-1} \right)^{-1} \quad \text{com} \quad \alpha = \sum_{k=1}^m w_k ; \quad \lambda_{r_k} = \omega_{r_k}^2 \quad (4.1)$$

onde  $w_k$  são os coeficientes peso para o modo de vibrar  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ),  $m$  é o número de modos considerados na função objetivo, e  $\lambda_{r_k}$  e  $\omega_{r_k}$  são respectivamente o autovalor e a frequência de ressonância do modo  $k$ .

É importante observar que a eq. (4.1) permite a otimização de um modo em particular ou a maximização simultânea de vários modos definidos pelo usuário do programa. Além disso, uma vez que a função objetivo é definida pela somatória de modos particulares, é possível reduzir as comutações próprias de problemas dinâmicos, já que se inclui a participação de vários modos no cálculo da função objetivo. No entanto, nesse último caso em particular, maximiza-se o valor médio das frequências de ressonância que constituem a somatória e, conseqüentemente, existe um compromisso na maximização dos  $m$  modos considerados na função  $F_I$  (Ma et al., 1995).

#### 4.2.2 TPGF com freqüências de ressonância específicas (projeto de ressonadores gradados)

No projeto de ressonadores é interessante projetar um transdutor que vibre com uma freqüência de ressonância desejada e, além disso, que vibre seguindo um modo de vibrar específico. O primeiro objetivo é conseguido minimizando a diferença entre a freqüência de ressonância do modo em particular, da iteração atual, com a freqüência de ressonância desejada, mediante a seguinte função objetivo:

$$F_2 = - \left[ \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\lambda_{0k}^2} (\lambda_{rk} - \lambda_{0k})^n \right]^{\frac{1}{n}} \quad \text{com} \quad \alpha = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\lambda_{0k}^2}; \quad \lambda_{rk} = \omega_{rk}^2; \quad n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8 \dots \quad (4.2)$$

onde  $\lambda_{rk}$  e  $\lambda_{0k}$  são o autovalor atual e o autovalor desejado ou definido pelo usuário para o modo  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), respectivamente. O termo  $m$  é o número de modos considerados na função multi-objetivo;  $n$  é uma potência dada pelo usuário, e  $\omega_{rk}$  são as freqüências de ressonância para o modo  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Já o segundo objetivo é alcançado mediante a técnica do Critério de garantia Modal (CGM) ou *Modal Assurance Criterion* (MAC), o qual será explicado adiante.

É importante ressaltar que a função objetivo  $F_2$  além de diminuir a diferença entre dois autovalores e permitir o projeto de ressonadores gradados com freqüências de ressonância específicas, também permite o projeto de TPGF com ausência de freqüências de ressonância indesejadas próximas da região da freqüência de ressonância desejada. Dessa forma será garantida a ausência de modos espúrios na região próxima da freqüência operacional. Está característica da função  $F_2$  é importante, já que a presença de modos não desejados na proximidade da freqüência de operação compromete o desempenho do transdutor em termos da sua resposta em freqüência. Além disso, abre a possibilidade de projetar TPGF com características uni-modais, ou seja, com uma freqüência de ressonância isolada, numa faixa de freqüências de operação.

### 4.2.3 Maximização do Coeficiente de Acoplamento EletroMecânico (CAEM)

A terceira função objetivo está relacionada com a maximização do Coeficiente de Acoplamento EletroMecânico ou CAEM ( $K$ ) para um modo ou um conjunto de modos de vibrar específicos, o qual quantifica a significância de cada modo na resposta total da estrutura piezolétrica. Assim, maximizando um determinado  $K$ , maximiza-se a representatividade desse modo em particular na resposta total do TPGF. A função multi-objetivo é proposta seguindo aquelas descritas por Silva, Kikuchi (1999) e Ma et al. (1995). Essa função é formulada como:

$$F_3 = \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sum_{k=1}^m w_k (K_k^2)^n \right) \right]^{1/n}; \quad \alpha = \sum_{k=1}^m w_k; \quad n = -1, -3, -5, -7 \dots; \quad K_k^2 = \frac{\lambda_{a_k} - \lambda_{r_k}}{\lambda_{r_k}} \quad (4.3)$$

onde  $K_k$  e  $w_k$  são os CAEMs e os coeficientes peso para o modo  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), respectivamente; e  $m$  é o número de modos considerados na função multi-objetivo. O termo  $n$  é uma potência dada pelo usuário. O termo  $K$ , que também é expresso pela eq.(A.72) do Apêndice A, é calculado através do autovalor (ou frequência) de ressonância,  $\lambda_r$ , e anti-ressonância,  $\lambda_a$ , do modo  $k$ .

Assim como na implementação da função objetivo  $F_2$ , neste caso pode-se também maximizar o valor de  $K$  de um modo específico mantendo-se a forma de vibrar previamente definida pelo usuário; em outras palavras, o usuário pode encontrar a gradação de propriedades que maximiza um ou um conjunto de  $K$  e que, simultaneamente, faz o TPGF vibrar de uma forma desejada para cada modo em particular. Esse último requisito visa a geração de ondas acústicas por parte do TPGF; geralmente, o modo desejado pelo usuário é o modo tipo pistão plano (GUO et al, 1992), ou algum outro modo de vibrar flexensional ao longo da espessura.

### 4.2.4 Maximização da Constante Modal Piezolétrica (CMP)

Neste caso encontra-se a função de gradação de propriedades do TPGF que maximiza a representatividade de um modo ou conjunto de modos de vibrar

específicos, mas utilizando a formulação de Constante Modal Piezelétrica apresentada na Seção A.7.3 do Apêndice A. O cálculo da CMP torna-se mais conveniente em implementações numéricas em relação ao cálculo do CAEM, uma vez que o seu cálculo depende somente das condições de contorno elétricas e da forma de vibrar do modo analisado (GUO, CAWLEY, 1992). Essa abordagem se diferencia da maximização do coeficiente  $K$  (eq.(4.3)), onde o cálculo dos autovalores de ressonância e anti-ressonância torna-se necessário. Para esta função objetivo, e como nos casos anteriores, é possível maximizar um ou um conjunto de CMPs mantendo-se a forma de vibrar definida pelo usuário.

A função objetivo  $F_4$ , que maximiza um conjunto de CMPs, é formulada analogamente à função objetivo  $F_3$ , e é expressa como:

$$F_4 = \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sum_{k=1}^m w_k (A_{r_k})^n \right) \right]^{\frac{1}{n}} \quad \text{com} \quad \alpha = \sum_{k=1}^m w_k ; \quad n = -1, -3, -5, -7 \dots ; \quad (4.4)$$

onde  $A_{r_k}$  representa a Constante Modal Piezelétrica e  $w_k$  os coeficientes peso do modo  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). De novo,  $m$  é o número de modos considerados na função multi-objetivo, e  $n$  é uma potência dada pelo usuário. O termo  $A_{r_k}$  é a expressão formulada pelas eq.(A.74) e eq.(A.75) do Apêndice A.

#### 4.2.5 Projeto de TPGF banda estreita e TPGF banda larga

Neste objetivo procura-se a função de gradação das propriedades de material que permita obter TPGF banda estreita e TPGF banda larga.

No caso dos TPGF banda estreita os seguintes objetivos devem ser alcançados: (i) maximizar a representatividade de um modo de vibrar em particular, neste caso baseado no cálculo da CMP; em outras palavras, maximizar a CMP do modo  $k$ ; (ii) minimizar as CMPs dos modos de vibrar adjacentes a esse modo  $k$ , os quais podem ser da ordem  $k + a_1$  com  $a_1 = 1, 2, \dots, A_1$ , ou da ordem  $k - a_2$  com  $a_2 = 1, 2, \dots, A_2$ , ou uma combinação de ambos. Os termos  $A_1$  e  $A_2$  representam o número de modos de vibrar utilizados na função multi-objetivo  $F_5$  adjacentes superiores e

inferiores, respectivamente. Além disso, deve-se (iii) maximizar as freqüências de ressonância dos modos  $k_1 = k + a_1$  com  $a_1 = 1, 2, \dots, A_1$ ; e (iv) minimizar as freqüências de ressonância dos modos  $k_2 = k - a_2$  com  $a_2 = 1, 2, \dots, A_2$ . Todos esses requisitos em conjunto conduzem ao projeto de um TPGF banda estreita tipo uni-modal; ou seja, um TPGF com alta representatividade na resposta de um único modo, com baixa contribuição nessa resposta dos modos adjacentes, e com as freqüências desses modos adjacentes afastadas da freqüência do modo com alta representatividade.

Os quatro objetivos anteriores podem ser expressos numa única função multi-objetivo, aqui denominada função  $F_5$ , e a qual é implementada, na forma mais geral, mediante a seguinte equação:

$$F_5 = w_k(A_{r_k}) - \left[ \frac{1}{\alpha_1} \left( \sum_{k_1=1}^{A_1} w_{1k_1} (A_{r_{k_1}})^{n_1} \right) \right]^{\frac{1}{n_1}} - \left[ \frac{1}{\alpha_2} \left( \sum_{k_2=1}^{A_2} w_{2k_2} (A_{r_{k_2}})^{n_2} \right) \right]^{\frac{1}{n_2}} + \dots \quad (4.5a)$$

$$\left[ \frac{1}{\alpha_3} \left( \sum_{k_3=1}^{A_3} w_{3k_3} (\lambda_{r_{k_3}})^{n_3} \right) \right]^{\frac{1}{n_3}} - \left[ \frac{1}{\alpha_4} \left( \sum_{k_4=1}^{A_4} w_{4k_4} (\lambda_{r_{k_4}})^{n_4} \right) \right]^{\frac{1}{n_4}}$$

com:

$$\alpha_1 = \sum_{k_1=1}^{A_1} w_{1k_1}; \quad \alpha_2 = \sum_{k_2=1}^{A_2} w_{2k_2}; \quad \alpha_3 = \sum_{k_3=1}^{A_3} w_{3k_3}; \quad \alpha_4 = \sum_{k_4=1}^{A_4} w_{4k_4}; \quad (4.5b)$$

$$n_i = -1, -3, -5, -7 \dots; \quad \text{com} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.5c)$$

onde  $A_k$ ,  $A_{r_{k_1}}$  e  $A_{r_{k_2}}$  representam a CMP do modo desejado com máxima representatividade, e os CMPs dos modos adjacentes superiores e inferiores, respectivamente; e  $w_k$ ,  $w_{i_{k_1}}$  ( $i = 1, 3$ ) e  $w_{j_{k_2}}$  ( $j = 2, 4$ ) representam os coeficientes peso para o modo desejado com máxima representatividade, e para os modos adjacentes superiores e inferiores, respectivamente. Finalmente,  $\lambda_{r_{k_1}}$  e  $\lambda_{r_{k_2}}$  representam os autovalores dos modos de vibrar de ordem superior e inferior ao modo  $k$ .

Por outro lado, para o projeto de TPGF banda larga os seguintes requisitos ou objetivos devem ser alcançados dentro de uma faixa de freqüências definida inicialmente pelo usuário: (i) maximizar a CMP do conjunto de modos pertencentes à faixa de freqüências selecionadas; e (ii) aproximar uma da outra as freqüências de

ressonância da banda de freqüências. Esses dois requisitos podem ser expressos pela seguinte equação:

$$F_{\delta} = \left[ \frac{1}{\alpha_1} \left( \sum_{k=1}^m w_k (A_{r_k})^{n_1} \right) \right]^{1/n_1} - \left[ \frac{1}{\alpha_2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\lambda_{0_k}^2} (\lambda_{r_k}^2 - \lambda_{0_k}^2) \right]^{1/n_2} \quad (4.6a)$$

com:

$$\alpha_1 = \sum_{k=1}^m w_k ; \quad \alpha_2 = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\lambda_{0_k}^2} ; \quad \lambda_{r_k} = \omega_{r_k}^2 ; \quad (4.6b)$$

$$n_1 = -1, -3, -5, -7... ; \quad n_2 = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8... \quad (4.6c)$$

onde  $m$  é o número de modos considerados dentro da faixa de freqüências desejada para o TPGF banda larga; os termos  $\lambda_{r_k}$  e  $\lambda_{0_k}$  são o autovalor atual e o autovalor desejado ou definido pelo usuário para o modo  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), respectivamente; e  $\omega_{r_k}$  são as freqüências de ressonância para o modo  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Observa-se que neste tipo de projeto, além de projetar-se um TPGF com uma banda desejada projeta-se, também, um TPGF tipo multi-modal, no qual um conjunto de modos contribui significativamente com a resposta total do transdutor. Como expresso por Silva, Kikuchi (1999) este tipo de transdutor pode ser utilizado como transdutores multi-modais Tonpiltz (YAO, BJORN, 1997), os quais são aplicados no projeto de sonares de alta resolução e exatidão.

Além do especificado anteriormente, tanto no projeto de TPGF banda larga e banda estreita, também é exigido que o transdutor oscile segundo a forma de um dado modo de vibrar definido pelo usuário; por exemplo, um modo de vibrar ao longo da espessura tipo flextensional (GUO et al., 1992).

#### 4.2.6 Projeto de TPGF em aplicações de atuador flextensional

Neste objetivo procura-se projetar atuadores piezelétricos em base ao conceito MGF. A motivação para esta aplicação parte da configuração dos atuadores

flexensionais, ver Fig. 4.2. Em essência, um atuador flexensional é formado por uma cerâmica piezolétrica acoplada a uma estrutura mecânica flexível, a qual permite converter, direcionar e amplificar os pequenos deslocamentos gerados pela cerâmica piezolétrica (ordem de nanômetros) (SILVA et al., 2000). A estrutura flexível acoplada pode ser interpretada como um mecanismo flexível, ou seja, um mecanismo em que o movimento é dado pela flexibilidade da estrutura ao invés da presença de juntas e pinos. Esses atuadores flexensionais têm aplicação tradicional em sonares, na atuação do avanço fino de ferramentas em máquinas CNC e grande aplicação em aparelhos que envolvem mecânica de precisão, como mecanismos de máquinas fotográficas, cabeçote leitor de um vídeo-cassete ou de um disco rígido de computador.

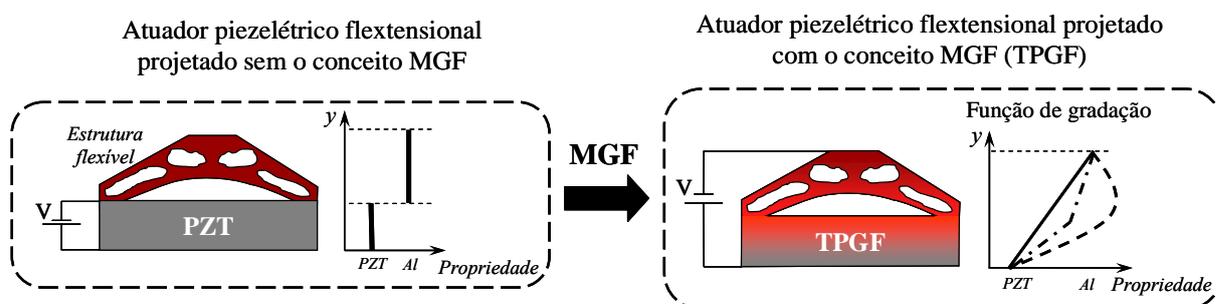


Figura 4.2. Princípio de atuadores piezolétricos flexensionais utilizando o conceito MGF.

Contudo, a interface existente entre o material piezolétrico e a estrutura flexível gera dois problemas importantes: (i) concentradores de tensões mecânicas, que reduzem, em aplicações dinâmicas, significativamente a sua resistência a fadiga e vida útil, e (ii) a cola utilizada para unir as duas estruturas (piezolétrica e não piezolétrica), gera não linearidades que dificultam a modelagem e controle de posição do atuador piezolétrico flexensional. Sendo assim, o conceito MGF surge como uma interessante opção para reduzir os problemas acima citados, uma vez que a interface entre materiais pode ser significativamente reduzida considerando uma graduação contínua de propriedades, conforme se apresenta na Fig. 4.2.

Os atuadores flexensionais possuem dois objetivos importantes de projeto, que são o deslocamento gerado e a força de blocagem (DOGAN et al., 1997). A força de blocagem é definida como sendo a máxima força suportada pelo atuador sem deformá-lo ou a força necessária para restaurar a forma não-deformada do

atuador, para certa voltagem aplicada durante a atuação. Assim, o objetivo de projeto em atuadores flexensionais gradados consiste em encontrar, mediante o MOT, a função de gradação e topologia que maximize e/ou minimize a amplitude de vibração gerada pelo atuador numa região (ou graus de liberdade), de um modo de vibrar específico  $k$  (a Fig 4.3 ilustra esses objetivos de projeto). Dessa forma, além de se projetar atuadores flexensionais gradados que maximizem uma amplitude de vibração desejada, estabelecem-se as bases para o projeto de motores piezelétricos, uma vez que maximizando ou minimizando deslocamentos específicos de um modo de vibrar, estar-se-ia configurando ou pré-determinado a forma de vibrar desejada. O último, em essência, consiste na base do projeto de motores piezelétricos (UCHINO e GINIEWICZ, 2003). Por outro lado, a força de blocagem não é considerada em forma explícita na função objetivo; no entanto, o problema é formulado em termos da flexibilidade média (SILVA et al., 2000), a qual está relacionada com a rigidez do atuador de modo a dar-lhe estabilidade estrutural. Na Seção 4.4.4 descreve-se a implementação do conceito de flexibilidade média para um atuador piezelétrico flexensional.

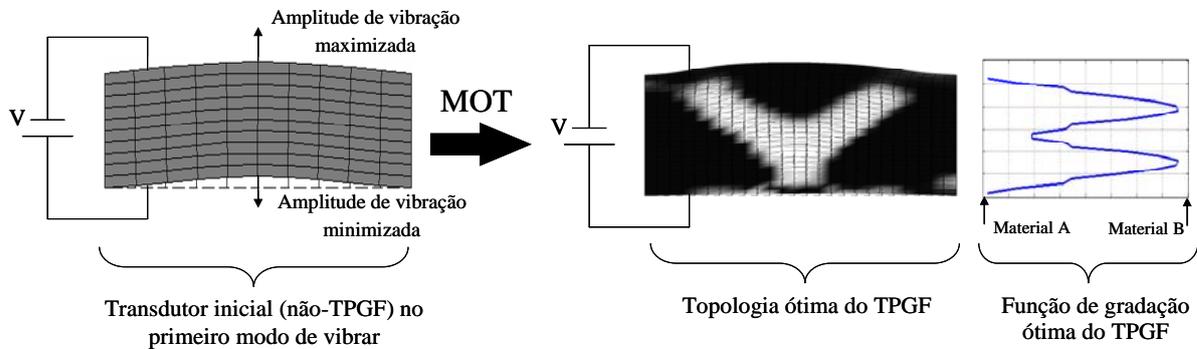


Figura 4.3. Esquema do projeto de atuadores piezelétricos flexensionais utilizando o MOT e o conceito MGF, encontrando-se a sua função de gradação e a sua topologia.

Baseado nas idéias anteriores, a função objetivo para o projeto de atuadores flexensionais gradados é formulada como:

$$F_7 = w_1 \left[ \sum_{k=1}^{m_1} w_{2k} \log \left( \left( \mathbf{t}_{max}^T \boldsymbol{\Psi}_{r_k} \right)^2 \right) - \sum_{k=1}^{m_2} w_{3k} \log \left( \left( \mathbf{t}_{min}^T \boldsymbol{\Psi}_{r_k} \right)^2 \right) \right] - (1 - w_1) \sum_{k=1}^{m_1+m_2} w_{4k} \log \left( L_{33_k}^2 \right) \quad (4.7)$$

onde  $m_1$  e  $m_2$  são o número de modos cuja amplitude de vibração deve ser maximizada e/ou minimizada, respectivamente. O vetor  $\Psi_r$  representa o autovetor em ressonância do modo de vibrar  $k$ , e os termos  $t_{max}$  e  $t_{min}$  são respectivamente vetores consistentes de zeros exceto para a posição correspondente ao grau de liberdade que se deseja maximizar ou minimizar, onde este valor é um. Já  $L_{33}$  representa o termo que quantifica a flexibilidade média, e o qual se descreve em detalhe na Seção 4.4.4. Por último, os termos  $w_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) representam os coeficientes peso para cada um dos objetivos.

### 4.3 Problema de Otimização

#### 4.3.1 Otimização da gradação de material

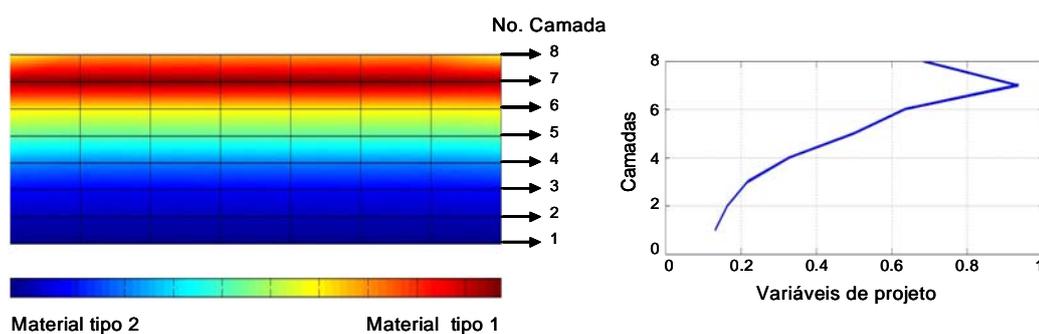
Para os seis primeiros objetivos propostos na seção anterior, o problema de otimização é formulado para encontrar a gradação de material do TPGF, a qual maximiza uma das funções multi-objetivo ( $F_1$  até  $F_6$ ) conforme uma restrição sobre as variáveis de projeto. Essa restrição é formulada para ter um controle explícito da fração de volume entre dois tipos de materiais a serem misturados.

O problema de otimização é formulado como:

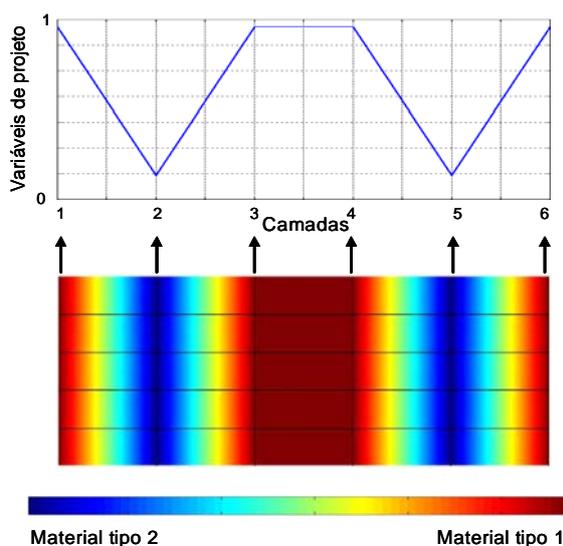
$$\begin{aligned}
 & \underset{\rho_{TOM}(x,y)}{\text{maximizar}} \quad F_i \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\
 & \text{tal que :} \quad \int_{\Omega} \rho_{TOM}(x,y) d\Omega - \Omega_s \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad 0 \leq \rho_{TOM}(x,y) \leq 1 \\
 & \quad \quad \quad -\rho(x,y)\omega^2 u_i = \frac{\partial}{\partial r_j} (C_{ijkl}^E(x,y) S_{kl} - e_{kij}(x,y) E_k) \quad \text{para } i, j, k, l = 1, 2, 3 \\
 & \quad \quad \quad \frac{\partial}{\partial r_j} (e_{ikl}(x,y) S_{kl} + \varepsilon_{ik}^S(x,y) E_k) = 0 \quad \text{para } i, j, k, l = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde  $\rho_{TOM}(x,y)$  é a variável de projeto (pseudo-densidade) na coordenada Cartesiana  $(x,y)$ , a qual não necessariamente representa a quantidade de material.

O termo  $\Omega_s$  descreve uma restrição na variável de projeto  $\rho_{TOM}$  relacionada com o material *tipo 1*, ver eq.(4.9), no domínio bidimensional  $\Omega$ . As duas últimas equações da eq.(4.8) representam as equações de equilíbrio e constitutivas de materiais piezelétricos MGF. Os termos  $C_{ijkl}^E$ ,  $e_{kij}$ ,  $\epsilon_{ik}^S$  e  $\rho$  são respectivamente as componentes do tensor de elasticidade (rigidez elástica em campo elétrico constante), do tensor de piezeletricidade, do tensor dielétrico (susceptibilidade dielétrica a deformação constante), e a densidade do material (ver o Apêndice A para maiores detalhes). Os termos  $x$  e  $y$  são as coordenadas Cartesianas para um modelo bidimensional. Além disso, na eq.(4.8),  $r_j$  representa as componentes de um vetor unitário no sistema de coordenadas Cartesianas,  $u_i$  representa as componentes de um tensor de deslocamentos, e  $\omega$  a frequência.



(a)



(b)

Figura 4.4. Problema de otimização tipo multicamada. (a) Gradação ao longo da espessura; (b) gradação na direção radial ou longitudinal.

Por outro lado, o modelo de material adotado está baseado no método das densidades<sup>3</sup> (BENDSØE, SIGMUND, 2003), o qual é expresso como:

$$\mathbf{E}^H(x, y) = \rho_{TOM}(x, y) \mathbf{E}_1 + (1 - \rho_{TOM}(x, y)) \mathbf{E}_2 \quad (4.9)$$

onde  $\mathbf{E}^H$  denota o tensor das propriedades de material “misturado”. O tensor  $\mathbf{E}_i$  está relacionado ao tensor de propriedades elásticas, piezelétricas ou dielétricas para o material *tipo i* ( $i = 1, 2$ ). O termo  $\rho_{TOM} = 1,0$  denota as propriedades do material *tipo 1*, e  $\rho_{TOM} = 0,0$  denota as propriedades do material *tipo 2*. Os dois tipos de material base (material *tipo 1* e *2*) não dependem das coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ ; em outras palavras, assumem-se homogêneos. Assim, esses materiais *tipo 1* e *2* representam os materiais base a serem “misturados” para constituir as propriedades do TPGF. Porém, a pseudo-densidade  $\rho_{TOM}(x, y)$  não representa a fração de volume real. No entanto, através das propriedades efetivas  $\mathbf{E}^H$  obtidas pelo MOT, é possível calcular a fração de volume real utilizando, por exemplo, os limites de Hashin-Strikhman (BENDSØE, SIGMUND, 1999).

Neste trabalho, pretende-se projetar TPGFs que possam ser fabricados mediante *Spark Plasma Sintering* (SPS); assim, o problema de otimização é formulado como um problema de otimização tipo multicamada; em outras palavras, as variáveis de projeto são consideradas iguais em cada interface entre camadas, segundo a direção de gradação: ao longo da espessura ou ao longo da direção radial ou longitudinal, ver a Fig. 4.4. Cada uma dessas interfaces é definida como a fronteira entre elementos finitos, após o problema inicial ter sido discretizado, e conseqüentemente, a variável de projeto é definida igual para todos os nós que pertencem a cada uma dessas interfaces, ver a Fig. 4.4. No entanto, o problema de otimização conserva a sua natureza contínua, uma vez que o conceito dos EFG interpola as propriedades de material dentro de cada elemento e, equivalentemente, as variáveis de projeto mudam continuamente entre elementos finitos, já que são definidas em nível nodal através do conceito CAMD, ver a Seção 4.4. Contudo, essa abordagem de otimização tipo multicamada implica trabalhar com malhas de elementos finitos homogêneas, para conservar a representação multicamada.

---

<sup>3</sup> Maiores detalhes dos modelos de material são encontrados na Seção B.4.2 do Apêndice B.

### 4.3.2 Otimização simultânea da gradação de material e topologia da estrutura

No caso do projeto de atuadores piezelétricos flexensionais gradados, o problema de otimização é formulado como:

$$\begin{aligned}
 & \underset{\rho_{1_{TOM}}(x,y), \rho_{2_{TOM}}(x,y)}{\text{maximizar}} && F_7 \\
 \text{tal que :} & && \int_{\Omega} \rho_{1_{TOM}}(x,y) d\Omega - \Omega_{s_1} \leq 0 \\
 & && \int_{\Omega} \rho_{2_{TOM}}(x,y) d\Omega - \Omega_{s_2} \leq 0 \\
 & && 0 \leq \rho_{1_{TOM}}(x,y) \leq 1 \\
 & && 0 \leq \rho_{2_{TOM}}(x,y) \leq 1 \\
 & -\rho(x,y)\omega^2 u_i = \frac{\partial}{\partial r_j} (C_{ijkl}^E(x,y)S_{kl} - e_{kij}(x,y)E_k) && \text{para } i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (4.10) \\
 & \frac{\partial}{\partial r_j} (e_{ikl}(x,y)S_{kl} + \varepsilon_{ik}^S(x,y)E_k) = 0 && \text{para } i, j, k, l = 1, 2, 3 \\
 & \int_{\Omega} S_{ij} C_{ijkl}^E(x,y)S_{kl} d\Omega + \int_{\Omega} S_{ij} e_{kij}(x,y)E_k d\Omega = \int_{\Gamma_i} t_i u_i d\Gamma \\
 & \int_{\Omega} E_i e_{ikl}(x,y)S_{kl} d\Omega - \int_{\Omega} E_i \varepsilon_{ik}^S(x,y)E_k d\Omega = 0
 \end{aligned}$$

onde  $\rho_{1_{TOM}}(x,y)$  representa a variável de projeto (pseudo-densidade), na coordenada Cartesiana  $(x,y)$ , que controla o material MGF e que define a topologia da estrutura, ver a Fig. 4.5 e eq.(4.11), e  $\rho_{2_{TOM}}(x,y)$  é a variável de projeto que define o tipo de material MGF obtido a partir dos materiais base *tipo 1* e *tipo 2*, ver a Fig. 4.5 e eq.(4.11). No domínio de projeto  $\Omega$ , os termos  $\Omega_{s_1}$  e  $\Omega_{s_2}$  descrevem respectivamente a restrição na variável de projeto  $\rho_{1_{TOM}}$  e  $\rho_{2_{TOM}}$ , respectivamente. Na eq.(4.10), as quatro últimas linhas representam as equações de equilíbrio de materiais piezelétricos MGF para análise modal e para análise estática (duas últimas equações). A análise estática é realizada para determinar o valor da flexibilidade média  $L_{33}$ , a qual, como explicado na Seção 4.4.4, é determinada aplicando num problema estático, onde a estrutura piezelétrica está em curto-circuito, os carregamentos auxiliares  $t_{i_3}$  e  $t_{i_4}$  nas regiões  $\Gamma_{t_3}$  e  $\Gamma_{t_4}$ , respectivamente, os quais

geram os deslocamentos  $u_{i_3}$  e  $u_{i_4}$ . Os carregamentos  $t_{i_3}$  e  $t_{i_4}$  são aplicados na mesma direção em que se deseja maximizar e minimizar a amplitude de vibração, respectivamente. Os outros termos da eq.(4.10) são os mesmos definidos na eq.(4.9) e na Seção A.2 do Apêndice A. Por último, neste caso, o problema de otimização também é abordado como um problema de otimização tipo multicamada, como apresentado na seção anterior.

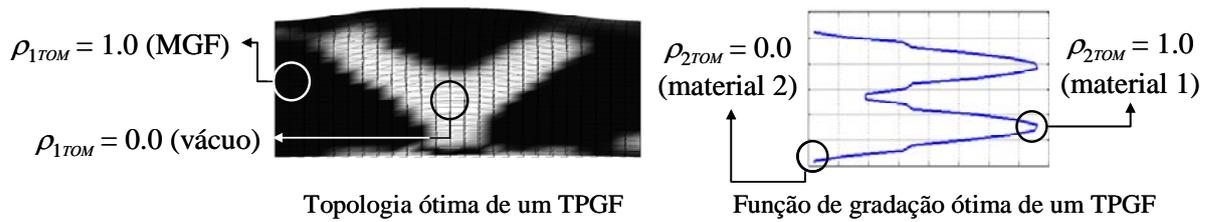


Figura 4.5. Representação do modelo de material utilizado no projeto de atuadores piezelétricos flexensionais gradados.

Em relação ao modelo de material, para as propriedades elásticas utiliza-se uma variação do modelo de material RAMP – *Rational Approximation of Material Properties* (STOLPE e SVANBERG, 2001), assim:

$$C^H(x, y) = C_3 + \left[ \frac{\rho_{1TOM}}{1 + p_1(1 - \rho_{1TOM})} \right] \left[ (\rho_{2TOM} C_1 + (1 - \rho_{2TOM}(x, y)) C_2) - C_3 \right] \quad (4.11)$$

onde  $p_1$  é o fator que penaliza as variáveis de projeto  $\rho_{1TOM}$  intermediárias, e o termo  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) representa as propriedades elásticas dos materiais base *tipo i* ( $i = 1, 2, 3$ ). Geralmente, o material *tipo 1* é um material piezelétrico, o material *tipo 2* é um material piezelétrico ou não-piezelétrico, e o material *tipo 3* representa propriedades do ar. Por último, o termo  $C^H$  representa as propriedades elásticas do material MGF.

Por outro lado, as propriedades dielétricas, piezelétricas e a densidade são expressas a partir do modelo de material SIMP, apresentado na eq.(B.3) do Apêndice B, da seguinte forma:

$$E^H(x, y) = \rho_{1TOM}^{p_2} (\rho_{2TOM}(x, y) E_1 + (1 - \rho_{2TOM}(x, y)) E_2) - (1 - \rho_{1TOM}^{p_2}(x, y)) E_3 \quad (4.12)$$

onde o termo  $E^H$  representa as propriedades dielétricas, ou piezelétricas, ou a densidade do material MGF, e as constantes  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) são as propriedades dos materiais base *tipo i* ( $i = 1, 2, 3$ ). De novo, o termo  $p_2$  é um fator de penalização para as variáveis de projeto  $\rho_{1_{TOM}}$  intermediárias.

Para todas as propriedades, quando  $\rho_{1_{TOM}} = 1.0$ , obtêm-se propriedades do material MGF, e quando  $\rho_{1_{TOM}} = 0.0$ , obtêm-se propriedades do ar (ver Fig. 4.5). Por outro lado, o termo  $\rho_{2_{TOM}} = 1.0$  denota as propriedades do material base *tipo 1*, e  $\rho_{2_{TOM}} = 0.0$  denota as propriedades do material base *tipo 2* (ver Fig. 4.5).

Como se observa da eq.(4.11) e eq.(4.12) é utilizada uma combinação dos modelos de materiais RAMP e SIMP já que, em análises dinâmica de estruturas, o modelo SIMP acarreta modos localizados em regiões onde a pseudo-densidade possui um valor baixo (NEVES et al., 1995); especificamente, os modos localizados ocorrem em áreas em que a variável de projeto tem o valor mínimo admissível ou perto desse valor. Essas áreas são mais flexíveis comparadas com as áreas em que a variável apresenta valores altos, e conseqüentemente controlarão os autovalores e autovetores mais baixos de toda a estrutura (PEDERSEN, 2000). Isso acontece pelo fato que, quando é utilizado o modelo de material SIMP (eq.(B.3) do Apêndice B), a convergência do problema é dependente dos valores adotados para o coeficiente de penalização do módulo de elasticidade ( $p_1$ ) e da densidade ( $p_2$ ). Especificamente, se for adotado, por exemplo,  $p_1 > p_2$  (valores típicos são  $p_1 = 3$  e  $p_2 = 1$  (PEDERSEN, 2000)), o módulo de elasticidade convergirá para zero mais rápido que a densidade quando o valor da variável de projeto se aproximar do seu valor mínimo. Ou em outras palavras, como o coeficiente de penalização elástico é maior que o coeficiente de penalização da densidade, a razão densidade/elasticidade tende ao infinito quando a variável de projeto tende a seu valor mínimo (KIYONO, 2008).

Para contornar esse problema, Stolpe e Svanberg (2001), Bendsøe e Sigmund (2003) e Hansen (2005) propõem um modelo alternativo, onde as propriedades elásticas são interpoladas utilizando a formulação RAMP. Nessa formulação, os problemas em áreas de baixa densidade são evitados, pois agora, a razão massa-rigidez é uma função côncava, já que qualquer valor de  $p_1$  e  $p_2$  pode ser utilizado, e nunca tenderá ao infinito a razão densidade/elasticidade. Um estudo detalhado da relação massa-rigidez (relação entre seus fatores de penalidade) se

apresenta em Kiyono (2008), o qual conclui que utilizando o modelo de material RAMP, nas propriedades elásticas, e o modelo de material SIMP, na densidade, pode-se utilizar qualquer valor de  $p_1$  e  $p_2$  para a razão massa-rigidez.

#### 4.4 Implementação Numérica do MOT para o projeto de TPGF

A formulação proposta neste capítulo está baseada em quatro idéias principais: (i) a formulação do Elemento Finito Gradado para problemas multi-físicos e dinâmicos, explicada no capítulo 3; (ii) a Aproximação Contínua da Distribuição de Material, a qual assume uma distribuição contínua das variáveis de projeto; (iii) a técnica de Critério de Garantia Modal ou *Modal Assurance Criterion* – MAC, aplicada para obter no final do processo iterativo do MOT o modo de vibrar desejado pelo usuário; e (iv) a Técnica da Projeção de Material, utilizada para o controle explícito do gradiente de material. As idéias não explicadas até o momento serão apresentadas nas seções seguintes, incluindo as bases do conceito de flexibilidade média que é utilizado no projeto dos atuadores piezelétricos flexensionais gradados.

##### 4.4.1 Aproximação Contínua da Distribuição de Material

Uma forma “natural” de representar a distribuição de material surge pela utilização da Aproximação Contínua de Distribuição de Material (ACDM) ou CAMD das suas siglas em inglês – *Continuous Approximation of Material Distribution* (MATSUI, TERADA, 2004; RAHMATALLA, SWAN, 2004). Na formulação de CAMD assume-se que as variáveis de projeto são variáveis nodais; assim, as variáveis de projeto dentro de cada elemento finito são interpoladas através de funções de interpolação; ver a Fig. 4.6. Esse fato gera uma distribuição contínua das variáveis de projeto, “suavizando” a mudança dos seus valores entre elementos finitos. Percebe-se que essa formulação é muito conveniente para representar estruturas MGF, já que representa mudanças contínuas de material ao longo do domínio de projeto. Essa

abordagem foi inicialmente implementada por Paulino, Silva (2005) para o projeto de estruturas não-piezolétricas MGF através do MOT.

O conceito CAMD fica claro observando-se a Fig. 4.6, utilizando como exemplo um elemento finito quadrado de 4 nós. Nela apresentam-se as duas formas de parametrização das variáveis de projeto: a forma tradicional, na qual se define cada variável de projeto em nível de cada elemento finito (BENDSØE, SIGMUND, 2003), criando-se assim um campo descontínuo, e a formulação CAMD, que cria um campo de variáveis de projeto contínuo (RAHMATALLA, SWAN, 2004).

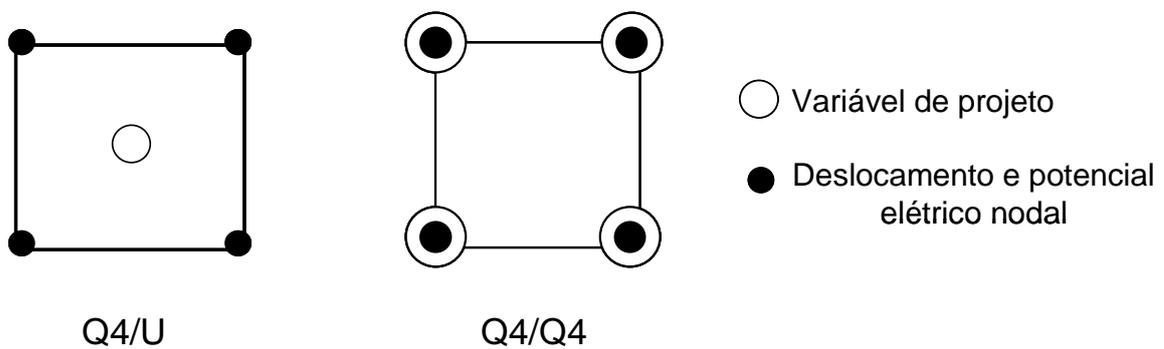


Figura 4.6. Tipos de elementos finitos utilizados no MOT. (a) Elemento tradicional (variáveis de projeto definidas por elemento); (b) elemento da formulação CAMD (variáveis de projeto por nó).

Neste trabalho utilizam-se as mesmas funções de interpolação utilizadas no MEF para interpolar as variáveis de projeto nodais dentro de cada elemento finito  $e$ . Assim, essa distribuição contínua de material consiste em definir a função pseudo-densidade (variável de projeto),  $\rho_{TOM}^e$ , de cada elemento finito  $e$  da seguinte forma:

$$\rho_{TOM}^e(x, y) = \sum_{i=1}^{n_d} \rho_{TOM_i}^n N_i(x, y) \quad (4.13)$$

onde  $\rho_{TOM_i}^n$  e  $N_i$  são a variável de projeto nodal e a função de forma do nó  $i$  ( $i = 1, \dots, n_d$ ), respectivamente, e  $n_d$  é o número de nós em cada Elemento Finito Gradado.

#### 4.4.2 Critério de Garantia Modal

Como mencionado, um objetivo importante na otimização de TPGF, além da maximização das funções objetivo antes definidas, é alcançar um modo de vibrar definido pelo usuário. Assim, por exemplo, na geração de ondas acústicas, para aplicações de TPGF em ensaios não destrutivos, ou aquisição de imagens médicas, é desejável que o transdutor piezoeletrico vibre no modo fundamental flexensional ao longo da espessura ou também conhecido como modo de pistão plano, ver a Fig. 4.7. Esse modo caracteriza-se por possuir uma alta representatividade na resposta do transdutor, ou em outras palavras, uma alta CMP; além disso, possui o maior deslocamento axial líquido, diferente de zero; e os deslocamentos nas superfícies superior e inferior do TPGF encontram-se em fase (ver Fig. 4.7). No entanto, ao otimizar problemas dinâmicos utilizando o MOT, que geralmente é um processo iterativo, surge o problema de “seguir” esse modo desejado pelo usuário ao longo de todo o processo. Como é observado na Fig. 4.7, a posição do modo desejado (neste caso o modo tipo pistão) muda drasticamente ao longo do processo iterativo, devido ao problema de inversão ou comutação de autovalores e autovetores.

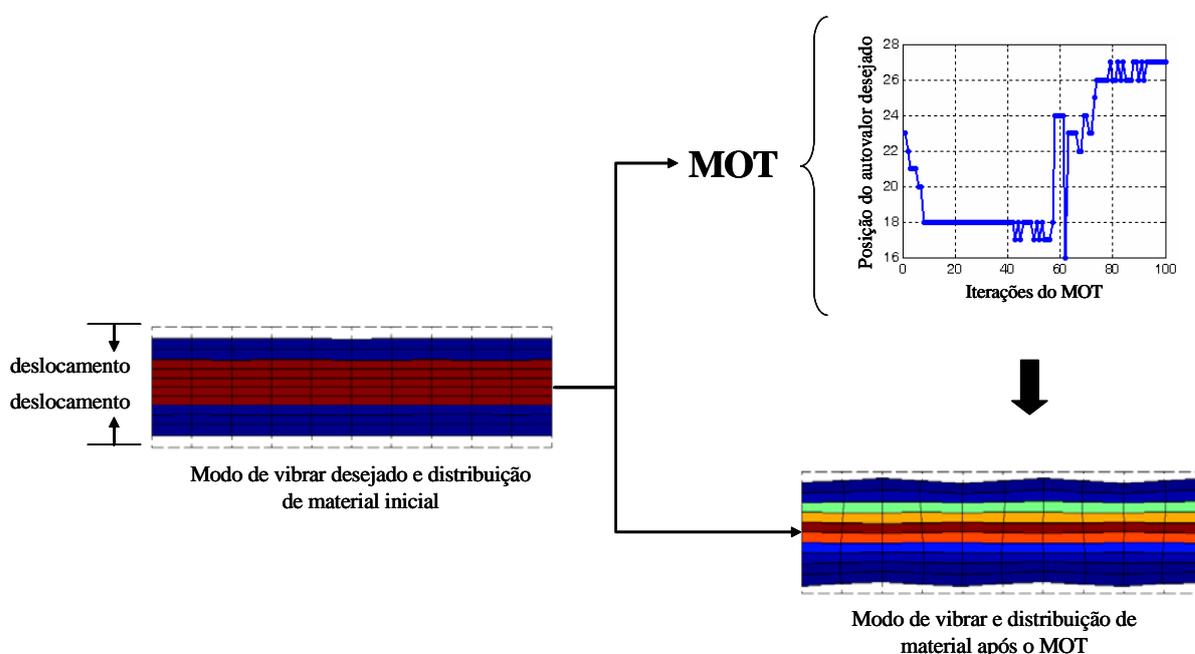


Figura 4.7. Representação da inversão de modos utilizando como exemplo o modo tipo pistão.

O problema de inversão de modos acontece pelo fato de que durante o processo iterativo de otimização as propriedades do material mudam de iteração a iteração, o que conduz a uma modificação do seu comportamento dinâmico. Assim, assumindo que o modo desejado seja o modo  $k$ , esse modo mudará de iteração a iteração à posição  $k + 1$  ou  $k + 2$  ou  $k - 1$  ou  $k - 2$ , ou a qualquer outra posição; entretanto, a otimização continuará otimizando os dados do modo  $k$ , o qual, na iteração atual, não representa o modo de vibrar inicialmente desejado (ver Fig. 4.7). Em consequência, torna-se necessário aplicar uma formulação que “siga” esse modo desejado ao longo de todo o processo iterativo.

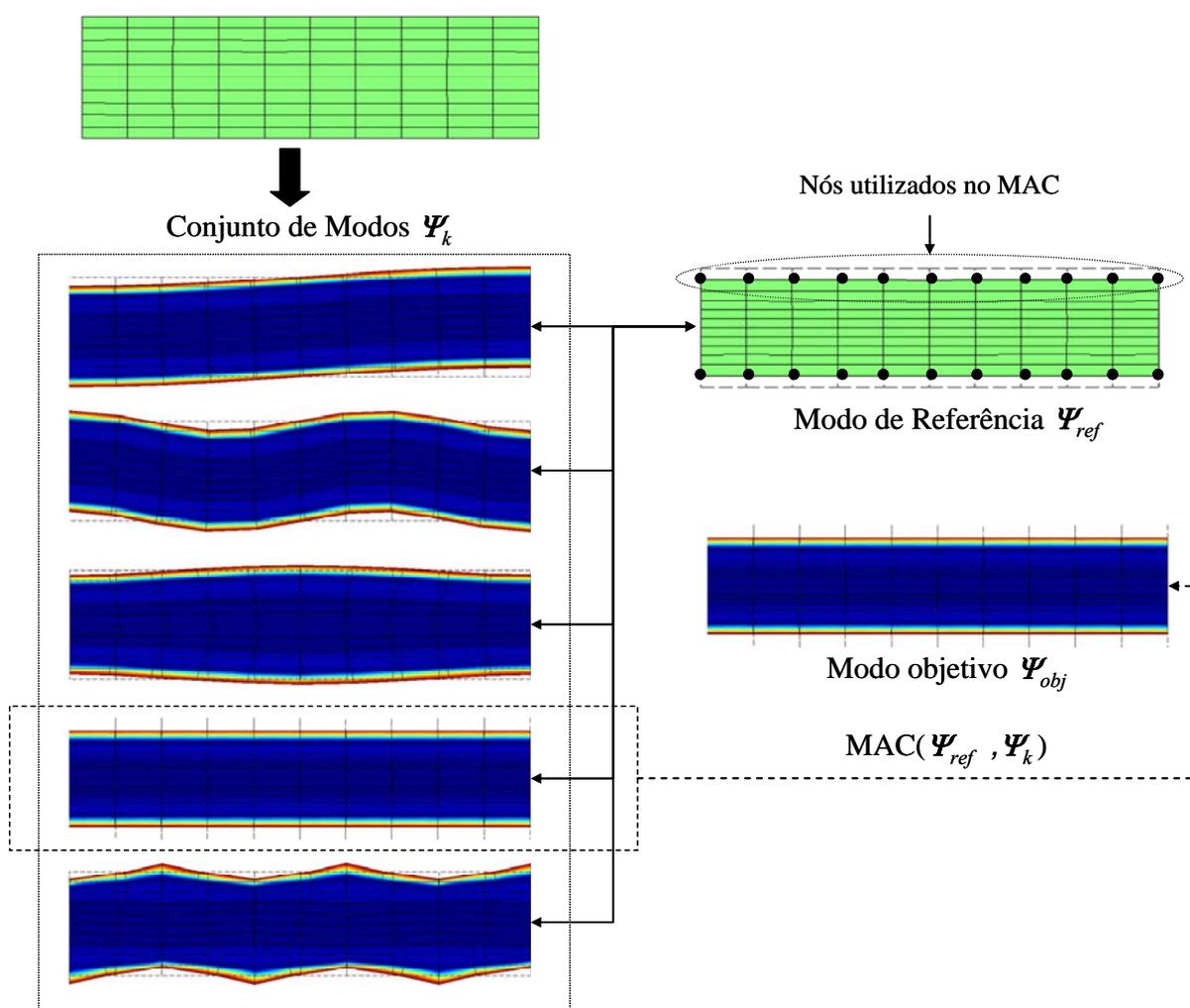


Figura 4.8. Representação esquemática do *Modal Assurance Criterion*.

Neste trabalho, para “seguir” o modo de vibrar desejado, é implementado o Critério de Garantia Modal ou MAC (KIM, KIM, 2000; EWINS, 1988). Em otimização

topológica, essa formulação foi inicialmente implementada para maximizar o autovalor associado com um modo de vibrar específico em estruturas não-piezelétricas (KIM, KIM, 2000); onde, o MAC é utilizado para comparar um modo de vibrar desejado ou definido pelo usuário,  $\Psi_{ref}$ , com o modo de vibrar obtido na iteração atual do processo de otimização topológica,  $\Psi_c$ . Neste trabalho, o MAC é estendido para estruturas piezelétricas, e é definido como (KIM, KIM, 2000):

$$\text{MAC}(\Psi_{ref}, \Psi_c) = \frac{|\Psi_{ref}^T \Psi_c|^2}{(\Psi_{ref}^T \Psi_{ref})(\Psi_c^T \Psi_c)} \quad (4.14)$$

O valor do MAC é uma quantidade escalar que varia entre 0,0 e 1,0. Quando o valor é igual a 1,0 os vetores  $\Psi_{ref}$  e  $\Psi_c$  representam exatamente o mesmo autovetor ou modo de vibrar. No entanto, é difícil definir com precisão os valores exatos que o MAC deveria assumir ao longo do processo iterativo, com o fim de garantir boa correlação. Neste trabalho, é aceito que valores de MAC superiores a 0,9 representam modos altamente correlacionados e valores de MAC menores que 0,05 representam modos não correlacionados (EWINS, 1988).

A implementação do MAC para o acompanhamento do modo desejado acarreta algumas vantagens, entre elas: (i) primeiro, os valores do MAC podem ser calculados satisfatoriamente, inclusive quando se trabalha com um pequeno conjunto de dados nodais; em outras palavras, é possível fazer a comparação em apenas alguns pontos. Esse fato é interessante quando se está interessado em otimizar o modo tipo pistão plano, uma vez que somente no cálculo do MAC são considerados os deslocamentos nodais do nós localizados na superfície superior e inferior do transdutor, ver Fig. 4.8. Este é uma fator importante no MOT, onde geralmente se trabalha com malhas muito discretizadas. (ii) Segundo, utilizando o MAC, o requisito de alcançar um modo desejado não é formulado como parte da função objetivo ou restrição do problema de otimização. Assim, utilizando os valores do MAC, os modos desejados são selecionados primeiro e logo a análise de sensibilidade é realizada, conforme será explicado na Seção 4.4.7. Para este fim, vários autovetores que representam diversos modos de vibrar, obtidos em cada passo de iteração do MOT, são comparados com o modo de vibrar ou autovetor de referência,  $\Psi_{ref}$ ; assim, o autovetor que tenha o valor de MAC mais próximo de 1,

com relação ao modo de referência, é selecionado como o modo objetivo  $\Psi_{obj}$ : modo que será utilizado nas etapas seguintes do processo iterativo do MOT, ver Fig. 4.8 e seção 4.4.7. Esse procedimento pode ser formulado como:

$$\Psi_{obj} = \Psi_k \quad \text{tal que} \quad \max_k \left[ \text{MAC}(\Psi_{ref}, \Psi_k) \right] \quad \text{com } k = 1, 2, \dots, n_m \quad (4.15)$$

onde  $n_m$  é o número de modos a serem comparados.

Por outro lado, o “acompanhamento” do modo tipo pistão é possível, também, utilizando a Constante Modal Piezelétrica (CMP). A idéia fundamenta-se em que esse modo de vibrar tipo pistão apresenta a maior representatividade na resposta do transdutor; ou em outras palavras, possui a maior Constante Modal Piezelétrica. Assim, após ter obtido a CMP de um conjunto de modos é possível obter aquela com maior valor e utilizar o autovetor do modo correspondente como o autovetor objetivo  $\Psi_{obj}$ . No entanto, essa abordagem resulta muito limitante, já que restringe o projeto de TPGF a se definir exclusivamente como modo de referência a configuração do modo tipo pistão; dessa forma, essa abordagem não foi considerada neste trabalho (somente a formulação do MAC, da eq.(4.14), foi utilizada para o “seguimento” do modo de vibrar desejado).

#### 4.4.3 Técnica de Projeção de Material

No projeto de TPGF, onde é procurada a gradação ótima de material que maximize objetivos específicos, podem-se obter oscilações bruscas da variável de projeto; ou seja, uma distribuição descontínua entre os materiais do *tipo 1* e *tipo 2*. Assim, os resultados não apresentam uma região de transição contínua, característica dos materiais MGF. Para obter uma distribuição contínua entre os materiais a serem gradados é utilizada uma Técnica de Projeção de Material baseada no trabalho de Guest et al. (2004), a qual permite um controle explícito do gradiente de material dentro do domínio de projeto fixo.

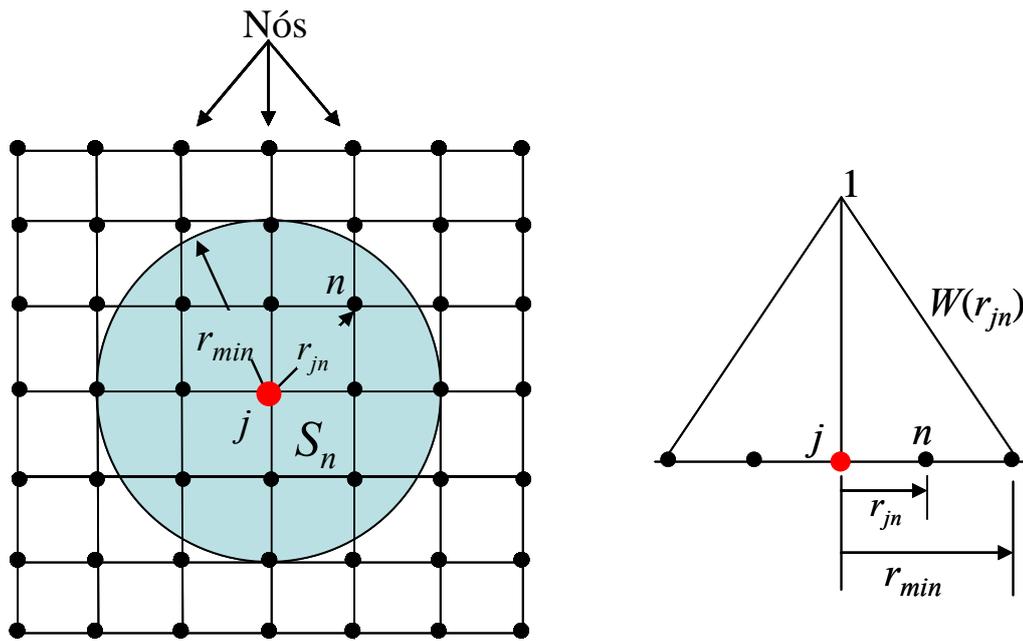


Figura 4.9. Princípio da Técnica de Projeção de Material.

Na Técnica de Projeção de Material é introduzida uma camada de pseudo-densidades nodais de material sobreposta à atual camada de variáveis nodais de projeto. Assim, para entender essa técnica, os conceitos de variável de projeto e pseudo-densidade devem ser separados. Até então, as pseudo-densidades, utilizadas no cálculo das propriedades do material, eram as próprias variáveis de projeto, as quais são utilizadas na rotina de otimização. Na Técnica de Projeção de Material, as pseudo-densidades passam a ser uma função das variáveis de projeto, ou seja, elas terão valores diferentes. Então, de acordo com Guest et al, (2004), a pseudo-densidade de cada nó do domínio de projeto é uma função que depende das variáveis de projeto associadas a um sub-conjunto de nós dentro de um raio de abrangência e das distâncias entre o nó central e cada nó dentro desse raio de abrangência, ver a Fig. 4.9. Assim, a Técnica de Projeção de Material emprega uma função de projeção que relaciona as variáveis de projeto nodais,  $\rho_{TOM}^n$ , com as pseudo-densidades nodais,  $\rho_{TOM}^p$ . Essa função de projeção é definida, na sua forma linear, como (GUEST et al., 2004):

$$\rho_{TOM_j}^p = f(\rho_{TOM_n}^n) = \frac{\sum_{n \in S_n} \rho_{TOM_n}^n W(r_{jn})}{\sum_{n \in S_n} W(r_{jn})} \quad \text{com} \quad r_{jn} = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_j\| \quad (4.16)$$

onde  $\rho_{TOM_n}^n$  é a variável de projeto do nó  $n$ ;  $\rho_{TOM_j}^p$  é a pseudo-densidade do nó  $j$ ; e  $S_n$  é o sub-conjunto de nós  $n$  sob a influência do nó  $j$ , ver a Fig. 4.9. Em outras palavras, o subdomínio  $S_n$  corresponde à área de um círculo com o seu centro localizado no nó  $j$  e de raio definido pelo usuário igual a  $r_{min}$ . Os vetores  $\mathbf{x}_j$  e  $\mathbf{x}_n$  representam as coordenadas Cartesianas do nó  $j$  e  $n$ , respectivamente. Por último,  $W$  representa uma função peso, a qual é dada por (GUEST et al., 2004):

$$W(r_{jn}) = \begin{cases} \frac{r_{min} - r_{jn}}{r_{min}} & \text{se } \mathbf{x}_n \in S_n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.17)$$

#### 4.4.4 Flexibilidade média

No projeto de atuadores piezelétricos flexensionais gradados deve-se considerar os efeitos de rigidez na função objetivo (ver eq.(4.7)), do contrário, a solução ótima obtida pode ser uma estrutura muito flexível, isto é, uma estrutura com quase nenhuma rigidez. Portanto, um termo estrutural deve ser definido na função objetivo de forma a fornecer suficiente rigidez. Na literatura relacionada ao projeto de atuadores piezelétricos e estruturas flexíveis em geral, esse termo é denominado flexibilidade média (MAEDA et al., 2006; SILVA et al., 2000; NISHIWAKI et al., 1998), e neste trabalho, é quantificado através do valor de  $L_{33}$ , na eq.(4.7).

Especificamente, a flexibilidade média é interpretada como a medida de rigidez na região  $\Gamma_{t_c}$ , do domínio de projeto  $\Omega$ , quando um carregamento  $t_c$  é aplicado em  $\Gamma_{t_c}$ . No caso do projeto de atuadores piezelétricos flexensionais gradados, essa flexibilidade é expressa como (SILVA et al., 2000):

$$L_{33} = \int_{\Omega} S_{ij}(u_i) C_{ijkl}^E(x, y) S_{kl}(u_i) d\Omega = \int_{\Gamma_{t_c}} t_{i_c} u_{i_c} d\Gamma \quad \text{para } i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad c = 3, 4 \quad (4.18)$$

onde os termos da eq.(4.18) são definidos na Seção A.2 do Apêndice A. A eq.(4.18) expressa a rigidez nas regiões  $\Gamma_{t_c}$  quando os carregamentos auxiliares  $t_{i_c}$  são

aplicados em  $\Gamma_{t_c}$ , para  $c = 3, 4$ . O subscrito 3 refere-se à direção em que se deseja maximizar a amplitude de vibração (ver eq.(4.7)), e o subscrito 4 à direção onde se deseja minimizá-los. Os deslocamentos  $u_{i_c}$  são o resultado de aplicar as cargas  $t_{i_c}$  nas regiões  $\Gamma_{t_c}$ , enquanto o atuador está na condição elétrica de curto-circuito.

#### 4.4.5 Problemas de otimização na forma discreta

É importante neste ponto ressaltar que com a adição de uma função linear de projeção é necessário redefinir o problema de otimização topológica dado na eq.(4.8) utilizando um novo espaço de variáveis. Assim, uma vez discretizado o domínio de projeto fixo  $\Omega$ , utilizando elementos finitos gradados retangulares do tipo Q4/Q4 (elemento finito de 4 nós com variáveis de projeto definidas nos nós), o problema de otimização, na sua forma discreta, é definido, para cada uma das funções multi-objetivo  $F_1$  até  $F_6$ , como (onde omite-se a dependência das equações da posição Cartesiana):

$$\begin{aligned}
 & \underset{\rho_{TOM_i}^n}{\text{maximizar}} \quad F_i \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\
 & \text{tal que :} \quad \sum_{i=1}^{N_{des}} \rho_{TOM_i}^n V_i - V^* \leq 0 \quad \text{para } i = 1 \dots N_{des} \\
 & \quad \quad \quad 0 \leq \rho_{TOM_i}^n \leq 1 \quad \text{para } i = 1 \dots N_{des} \\
 & \quad \quad \quad -\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_\varphi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

onde  $\rho_{TOM_i}^n$  é a variável de projeto do nó  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N_{des}$ ). Os termos  $V_i$  e  $V^*$  são respectivamente o volume atual no nó  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N_{des}$ ), e a restrição nas variáveis de projeto relacionadas com o material *tipo 1*. A constante  $N_{des}$  denota o número total de nós do domínio discretizado.

Para o caso da função objetivo  $F_7$  (projeto de atuadores flexensionais), o novo problema de otimização, após a discretização do domínio de projeto com elementos finitos gradados, torna-se:

$$\begin{aligned}
& \underset{\rho_{1_{TOM_i}}^n, \rho_{2_{TOM_i}}^n}{\text{maximizar}} && F_7 \\
& \text{tal que :} && \sum_{i=1}^{N_{des}} \rho_{1_{TOM_i}}^n V_i - V_{s_1}^* \leq 0 \quad \text{para } i = 1 \dots N_{des} \\
& && \sum_{i=1}^{N_{des}} \rho_{2_{TOM_i}}^n V_i - V_{s_2}^* \leq 0 \quad \text{para } i = 1 \dots N_{des} \\
& && 0 \leq \rho_{1_{TOM_i}}^n \leq 1 \quad \text{para } i = 1 \dots N_{des} \\
& && 0 \leq \rho_{2_{TOM_i}}^n \leq 1 \quad \text{para } i = 1 \dots N_{des} \\
& && -\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_u \\ \boldsymbol{\Psi}_\varphi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_u \\ \boldsymbol{\Psi}_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \\
& && \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix}_c = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{Q}_p \end{Bmatrix}_c \quad \text{para } c = 3, 4
\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde  $\rho_{1_{TOM_i}}^n$  e  $\rho_{2_{TOM_i}}^n$  representam as variáveis de projeto do nó  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N_{des}$ ). O termo  $V_i$  é o volume atual relacionado com o material MGF no nó  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N_{des}$ ) ou o volume atual relacionado com o material base *tipo 1* no nó  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N_{des}$ ). Por último, o termo  $N_{des}$  denota o número total de nós do domínio discretizado.

As duas últimas equações, da eq.(4.20), representam o estado de equilíbrio do sistema. Especificamente, a última equação representa a equação de equilíbrio em análise estática que deve ser resolvida para encontrar os vetores de deslocamentos  $\mathbf{u}_c$  ( $c = 3, 4$ ) que permitem determinar a flexibilidade média na forma discreta (SILVA et al., 2000). Nesse caso, os termos  $\mathbf{F}_{p_c}$  ( $c = 3, 4$ ) são forças auxiliares; ou seja, consiste num vetor de zeros com valor unitário nos graus de liberdade onde é desejado maximizar e/ou minimizar a amplitude de vibração de um modo específico.

#### 4.4.6 Análise de Sensibilidades

Os gradientes da função objetivo e restrições são chamados de sensibilidades do problema de otimização. O cálculo desses gradientes é importante devido à necessidade de linearização das funções objetivo em relação às variáveis de projeto, e dessa forma, poder solucionar o problema mediante Programação Linear

Seqüencial (PLS) (HAFTKA et al., 1990). A seguir é apresentado o cálculo das sensibilidades<sup>4</sup>, em relação às variáveis de projeto  $\rho_{TOM_i}^n$  e pseudo-densidades  $\rho_{TOM_j}^p$ . Em todos os casos, apresenta-se a forma discreta das sensibilidades; em outras palavras, do problema discretizado com elementos finitos.

Basicamente, em todos os casos, o gradiente de qualquer uma das funções objetivo  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) em relação às variáveis de projeto,  $\rho_{TOM_i}^n$ , resulta em uma expressão que depende da sensibilidade dos autovalores, e das matrizes de massa e rigidez. Como as pseudo-densidades  $\rho_{TOM_j}^p$  dependem das variáveis de projeto  $\rho_{TOM_i}^n$ , qualquer função objetivo  $F$  (omite-se o subscrito para simplificar) pode-se expressar como:

$$F \equiv F\left(\rho_{TOM_j}^p\left(\rho_{TOM_i}^n\right)\right) \quad (4.21)$$

onde a sensibilidade da função objetivo  $F$  em relação às variáveis de projeto é calculada seguindo a regra da cadeia como:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_{TOM_i}^n} = \sum_{j \in \Omega} \frac{\partial F}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \frac{\partial \rho_{TOM_j}^p}{\partial \rho_{TOM_i}^n} \quad (4.22)$$

onde:

$$\frac{\partial \rho_{TOM_j}^p}{\partial \rho_{TOM_i}^n} = \frac{W(r_{ij})}{\sum_{n \in S_n} W(r_{nj})} \quad (4.23)$$

A derivada da eq.(4.23) tem valor diferente de zero nos nós que utilizem o nó  $i$  na sua função de projeção. O termo  $S_n$  é definido segundo o esquema de projeção de material apresentado na Seção 4.4.3.

---

<sup>4</sup> A análise de sensibilidades está centrada no estudo das funções objetivo  $F_1$  até  $F_6$ , definidas anteriormente. A análise de sensibilidades da função objetivo dos atuadores flexionais ( $F_7$ ) não é apresentada, já que ela segue o mesmo procedimento de cálculo, exceto pelas operações adicionais pelo fato de ter duas variáveis de projeto,  $\rho_{1TOM_i}^n$  e  $\rho_{2TOM_i}^n$ , por nó  $i$ .

Em resumo, a sensibilidade da função objetivo  $F$ , em relação à variável de projeto  $\rho_{TOM_i}^n$  do nó  $i$ , é formulada como:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_{TOM_i}^n} = \sum_{j \in \Omega} \left( \frac{\partial F}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \frac{W(r_{ij})}{\sum_{n \in S_n} W(r_{nj})} \right) \quad (4.24)$$

Da eq.(4.24) observa-se que a variação da função objetivo  $F$  em relação à variável de projeto do nó  $i$  depende da variação dessa mesma função  $F$  em relação às pseudo-densidades nodais  $\rho_{TOM_j}^p$ .

### Sensibilidades para a Maximização de Autovalores (Função Objetivo $F_I$ )

No caso da função objetivo  $F_I$ , maximização de autovalores, a sensibilidade da função objetivo em relação à pseudo-densidade  $\rho_{TOM_j}^p$  é formulada como:

$$\frac{\partial F_I}{\partial \rho_{TOM_j}^p} = \left( \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^m w_k \lambda_{r_k}^{-1} \right)^{-2} \sum_{k=1}^m \left( w_k \frac{1}{\lambda_{r_k}^{-2}} \frac{\partial \lambda_{r_k}}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \right) \quad (4.25)$$

onde  $\partial \lambda_{r_k} / \partial \rho_{TOM_j}^p$  é a sensibilidade do  $k_j$ -ésimo autovalor em relação à pseudo-densidade  $\rho_{TOM_j}^p$ . Essa sensibilidade é escrita como (HAFTKA et al., 1990):

$$\frac{\partial \lambda_{r_k}}{\partial \rho_{TOM_j}^p} = \left\{ \begin{matrix} \Psi_u \\ \Psi_\varphi \end{matrix} \right\}_k^T \frac{\partial}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \Psi_u \\ \Psi_\varphi \end{matrix} \right\}_k - \lambda_{r_k} \left\{ \begin{matrix} \Psi_u \\ \Psi_\varphi \end{matrix} \right\}_k^T \frac{\partial}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \Psi_u \\ \Psi_\varphi \end{matrix} \right\}_k \quad (4.26)$$

Adicionalmente, através das eq.(A.39) e eq.(A.40), do Apêndice A, as seguintes derivadas podem ser obtidas (considerando um domínio de projeto bidimensional):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \mathbf{M}_{uu} &= \sum_{e=1}^{Nel} \iint \mathbf{N}_u^T \frac{\partial \rho(x,y)}{\partial \rho_{TOM}^p} \frac{\partial \rho_{TOM}^p}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \mathbf{N}_u \, dx \, dy \\
&= \sum_{e=1}^{nf} \iint \mathbf{N}_u^T \frac{\partial \rho(x,y)}{\partial \rho_{TOM}^p} N_j(x,y) \mathbf{N}_u \, dx \, dy
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \mathbf{K}_{uu} &= \sum_{e=1}^{Nel} \iint \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \mathbf{C}^E(x,y)}{\partial \rho_{TOM}^p} \frac{\partial \rho_{TOM}^p}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \mathbf{B}_u \, dx \, dy \\
&= \sum_{e=1}^{nf} \iint \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \mathbf{C}^E(x,y)}{\partial \rho_{TOM}^p} N_j(x,y) \mathbf{B}_u \, dx \, dy
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \mathbf{K}_{u\phi} = \sum_{e=1}^{nf} \iint \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \mathbf{e}^T(x,y)}{\partial \rho_{TOM}^p} N_j(x,y) \mathbf{B}_\phi \, dx \, dy \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \mathbf{K}_{\phi\phi} = \sum_{e=1}^{nf} \iint \mathbf{B}_\phi^T \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^S(x,y)}{\partial \rho_{TOM}^p} N_j(x,y) \mathbf{B}_\phi \, dx \, dy \tag{4.30}$$

onde o parâmetro  $N_{el}$  é o número total de elementos finitos gradados, e  $nf$  é o número de elementos conectados ao nó  $j$ ; assim, a montagem das matrizes de sensibilidades globais  $\partial \mathbf{K}_{uu} / \partial \rho_{TOM_j}^p$ ,  $\partial \mathbf{K}_{u\phi} / \partial \rho_{TOM_j}^p$ ,  $\partial \mathbf{K}_{\phi\phi} / \partial \rho_{TOM_j}^p$ , e  $\partial \mathbf{M}_{uu} / \partial \rho_{TOM_j}^p$  é desenvolvida considerando somente esses elementos finitos. As derivadas dos tensores de propriedades (elástico, piezoeétrico e dielétrico) e da densidade do material são obtidas facilmente a partir da eq.(4.9) do modelo de material, e das eq.(3.22) e eq.(3.23) do capítulo 3 (equações relacionadas com a interpolação das propriedades do material dentro de cada elemento finito através do conceito de elemento finito gradado).

### TPGF com frequências de ressonância específicas (Função Objetivo $F_2$ )

No caso da segunda função objetivo  $F_2$ , é desenvolvida a análise de sensibilidades a partir da eq.(4.2). Assim, derivando essa equação em relação às pseudo-densidade  $\rho_{TOM_j}^p$  obtêm-se as seguintes expressões:

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho_{TOM_j}^p} = -\frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\lambda_{0_k}^2} (\lambda_{r_k} - \lambda_{0_k})^n \right]^{\binom{1-n}{n}} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\lambda_{0_k}^2} \frac{1}{(\lambda_{r_k} - \lambda_{0_k})^{1-n}} \frac{\partial \lambda_{r_k}}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho_{TOM_j}^p} = -F_2^{(1-n)} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\lambda_{0_k}^2} \frac{1}{(\lambda_{r_k} - \lambda_{0_k})^{1-n}} \frac{\partial \lambda_{r_k}}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \quad (4.32)$$

onde o termo  $\partial \lambda_{r_k} / \partial \rho_{TOM_j}^p$  (variação do autovalor  $k$  em relação às pseudo-densidades  $\rho_{TOM}^p$  do nó  $j$ ) é expresso na eq.(4.26). Para encontrar a variação da função objetivo  $F_2$  em relação à variável de projeto  $\rho_{TOM_i}^p$  substitui-se a eq.(4.32) na eq.(4.24).

### Maximização do Coeficiente de Acoplamento EletroMecânico (Função Objetivo $F_3$ )

Esta análise de sensibilidade tem uma estreita relação com a análise de sensibilidades da função objetivo  $F_1$ , maximização de autovalores, uma vez que se pretende maximizar o CAEM de um ou um conjunto de modos definidos pelo usuário mediante expressões muito similares, ver a eq.(4.1) e eq.(4.3).

A partir da derivada da eq.(4.3) em relação à pseudo-densidade  $\rho_{TOM_j}^p$  encontra-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial F_3}{\partial \rho_{TOM_j}^p} = -\frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^m w_k (K_k^2)^n \right]^{\binom{1-n}{n}} \sum_{k=1}^m w_k \frac{1}{(K_k^2)^{1-n}} \frac{\partial K_k^2}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \rho_{TOM_j}^p} = -F_3^{(1-n)} \sum_{k=1}^m w_k \frac{1}{(K_k^2)^{1-n}} \frac{\partial K_k^2}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \quad (4.34)$$

onde a função objetivo  $F_3$  é expressa como:

$$F_3 = \left[ \frac{I}{\alpha} \left( \sum_{k=1}^m w_k (K_k^2)^n \right) \right]^{1/n}; \quad \alpha = \sum_{k=1}^m w_k; \quad n = -1, -3, -5, -7 \dots; \quad K_k^2 = \frac{\lambda_{a_k} - \lambda_{r_k}}{\lambda_{r_k}} \quad (4.35)$$

Neste caso é necessário desenvolver uma regra da cadeia para obter a variação do CAEM em relação às pseudo-densidades. Essa diferenciação é expressa como:

$$\frac{\partial K_k^2}{\partial \rho_{TOM_j}^p} = \frac{\partial}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \left( \frac{\lambda_{a_k} - \lambda_{r_k}}{\lambda_{r_k}} \right) \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial K_k^2}{\partial \rho_{TOM_j}^p} = \frac{\left( \frac{\partial}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \lambda_{a_k} - \frac{\partial}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \lambda_{r_k} \right) \lambda_{r_k} - (\lambda_{a_k} - \lambda_{r_k}) \frac{\partial}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \lambda_{r_k}}{\lambda_{r_k}^2} \quad (4.37)$$

Por conseguinte, a sensibilidade da função objetivo  $F_3$  em relação à variável de projeto  $\rho_{TOM_j}^n$  é determinada mediante a substituição da eq.(4.37) e eq.(4.35) na eq.(4.34), e dessa eq.(4.34) na eq.(4.24).

### Maximização da Constante Modal Piezelétrica (Função Objetivo $F_4$ )

No caso da maximização da CMP a sensibilidade da função objetivo  $F_4$  pode ser expressa como (a partir da derivação da eq.(4.4) em relação às pseudo-densidades  $\rho_{TOM}^p$ ):

$$\frac{\partial F_4}{\partial \rho_{TOM_j}^p} = -F_4^{(1-n)} \sum_{k=1}^m w_k \frac{1}{(A_{r_k})^{1-n}} \frac{\partial A_{r_k}}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \quad (4.38)$$

onde:

$$F_4 = \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sum_{k=1}^m w_k (A_{r_k})^n \right) \right]^{1/n} \quad \text{com} \quad \alpha = \sum_{k=1}^m w_k ; \quad n = -1, -3, -5, -7 \dots; \quad (4.39)$$

Observa-se que para determinar a sensibilidade da função objetivo  $F_4$  é necessário a derivada do termo  $\partial A_{r_k} / \partial \rho_{TOM_j}^p$ , o qual representa o gradiente da CMP do modo  $k$  em relação à pseudo-densidade  $\rho_{TOM}^p$  do nó  $j$ . Essa CMP pode ser expressa como (ver o Apêndice A para maiores detalhes do cálculo da CMP):

$$A_{r_k} = W_{r_k}^2 \quad \text{com} \quad W_{r_k} = \Psi_{r_k}^T W_F \quad \text{e} \quad W_F = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{u\varphi_p} \\ \mathbf{K}_{\varphi_o\varphi_p} \end{bmatrix} \mathbf{I}_p \quad (4.40)$$

assim, derivando  $A_{r_k}$  em relação às pseudo-densidades obtém-se:

$$\frac{\partial A_{r_k}}{\partial \rho_{TOM_j}^p} = 2W_{r_k} \left( \frac{\partial \Psi_{r_k}^T}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{u\varphi_p} \\ \mathbf{K}_{\varphi_o\varphi_p} \end{bmatrix} + \Psi_{r_k}^T \frac{\partial}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{u\varphi_p} \\ \mathbf{K}_{\varphi_o\varphi_p} \end{bmatrix} \right) \mathbf{I}_p \quad (4.41)$$

Observa-se na eq.(4.41) que o gradiente da CMP do modo  $k$  depende das condições de contorno elétricas e do gradiente do autovetor desse mesmo modo  $k$ . Dessa forma, não é necessário o cálculo da derivada de um autovalor (segundo foi apresentado nos três casos anteriores), mas da derivada de um autovetor.

Para calcular o termo  $\partial \Psi_{r_k} / \partial \rho_{TOM_j}^p$  diversos métodos podem ser aplicados.

Todos esses métodos procuram solucionar a dificuldade prática da singularidade no sistema de matrizes num problema modal. Esses métodos incluem o método das diferenças finitas (SUTTER et al., 1988), o método modal (FOX, KAPOOR, 1968), o método modal modificado (WANG, 1990), e o método de Nelson (NELSON, 1976), entre outros métodos iterativos (BOBILLOT, BALMÈS, 2006). O método das diferenças finitas utiliza uma fórmula de diferenças para aproximar numericamente as derivadas do autovetor, a qual requer o cálculo do autovetor nominal e da perturbação de ao menos um ponto do sistema analisado. Esse método é sensível aos erros de aproximação e de truncamento associados com o tamanho do passo considerado (SUTTER et al., 1988). Por outro lado, o método modal e o método

modal modificado aproximam a derivada do autovetor através de uma combinação linear de autovetores; a diferença principal entre esses dois métodos está na quantidade de modos utilizados na série de autovetores. No entanto, nos dois casos, a solução se aproxima da solução exata conforme são utilizados na combinação linear todos os modos existentes para o sistema analisado (WANG, 1990). Por último, o método de Nelson é um método analítico exato para o cálculo das derivadas dos autovetores (NELSON, 1976).

Para testar qual é o melhor método a ser utilizado na implementação formulada nesse capítulo, foi implementado o método modal, o método modal modificado e o método de Nelson. Para esses dois últimos casos, o cálculo das derivadas dos autovetores tornou-se muito ineficiente, devido ao alto custo computacional; especificamente, é necessário o cálculo da inversa da matriz de rigidez por iteração. Esse cálculo é computacionalmente muito custoso conforme aumenta o número de graus de liberdade (ou tamanho da malha) do TPGF discretizado. Pelo contrário, o método modal não requer esse cálculo de matriz inversa, mas requer um maior número de termos (autovetores) a serem considerados na combinação linear, em relação ao método modal modificado. Contudo, o método modal resultou mais eficiente, em termos de velocidade de processamento, que os outros dois casos.

O método modal expressa a derivada do autovetor do modo  $k$  como uma expansão em série do sistema de autovetores. A derivada aproximada é expressa como (SUTTER et al., 1988):

$$\frac{\partial \Psi_{r_k}}{\partial \rho_{TOM_j}^p} = \sum_{c=1}^{N_{modo}} a_{ijk} \Psi_{r_c} \quad (4.42)$$

onde  $N_{modo}$  é o número de modos utilizados na combinação linear. Os coeficientes  $a_{ijk}$  são calculados utilizando:

$$a_{ijk} = \frac{\Psi_{r_c}^T \left( \frac{\partial}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} - \lambda_{r_k} \frac{\partial}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \Psi_{r_k}}{\lambda_{r_k} - \lambda_{r_c}} \quad \text{para } c \neq k \quad (4.43)$$

e para  $c = k$ , o coeficiente  $a_{ijk}$  é determinado como:

$$a_{ijk} = -\frac{1}{2} \Psi_{r_k}^T \frac{\partial}{\partial \rho_{TOM_j}^p} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Psi_{r_k} \quad \text{para } c = k \quad (4.44)$$

assim, solucionando a eq.(4.42) através das eq.(4.43) e eq.(4.44), substituindo essa eq.(4.42) na eq.(4.41), e substituindo a eq.(4.41) na eq.(4.38), encontra-se o gradiente da função objetivo  $F_4$  em relação às pseudo-densidades. Finalmente, substituindo a eq.(4.38) na eq.(4.24) é encontrada a sensibilidade da função  $F_4$  em relação às variáveis de projeto  $\rho_{TOM_i}^n$ .

## Projeto de TPGF banda estreita e TPGF banda larga

O cálculo das sensibilidades das funções objetivo  $F_5$  e  $F_6$  são dedutíveis do cálculo das sensibilidades apresentadas para a maximização dos autovalores (eq.(4.26)) e a maximização da Constante Modal Piezelétrica (eq.(4.41)). Assim, não se considera necessário apresentar essa dedução.

### 4.4.7 Procedimento para o projeto de TPGF utilizando o MOT

A Fig. 4.10 apresenta o diagrama de fluxo do algoritmo de otimização para o projeto de TPGF. Inicialmente, o domínio de projeto é discretizado utilizando elementos finitos gradados e as variáveis de projeto são definidas para cada nó. O valor inicial das variáveis de projeto  $\rho_{TOM_i}^n$  é selecionado igual do valor inicial para as pseudo-densidades  $\rho_{TOM_j}^p$ <sup>5</sup>. A formulação proposta é implementada utilizando o programa

<sup>5</sup> Por simplicidade, nos termos  $\rho_{1TOM}^n$  e  $\rho_{2TOM}^n$ , é omitido o subscrito 1 e 2 quando se trata do projeto de atuadores piezelétricos flexensionais.

MATLAB™. Esse programa é denominado *piezoMgfOT*, para o cálculo das funções objetivo  $F_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), e é denominado *piezoFlexMOT*, para o cálculo de  $F_7$ .

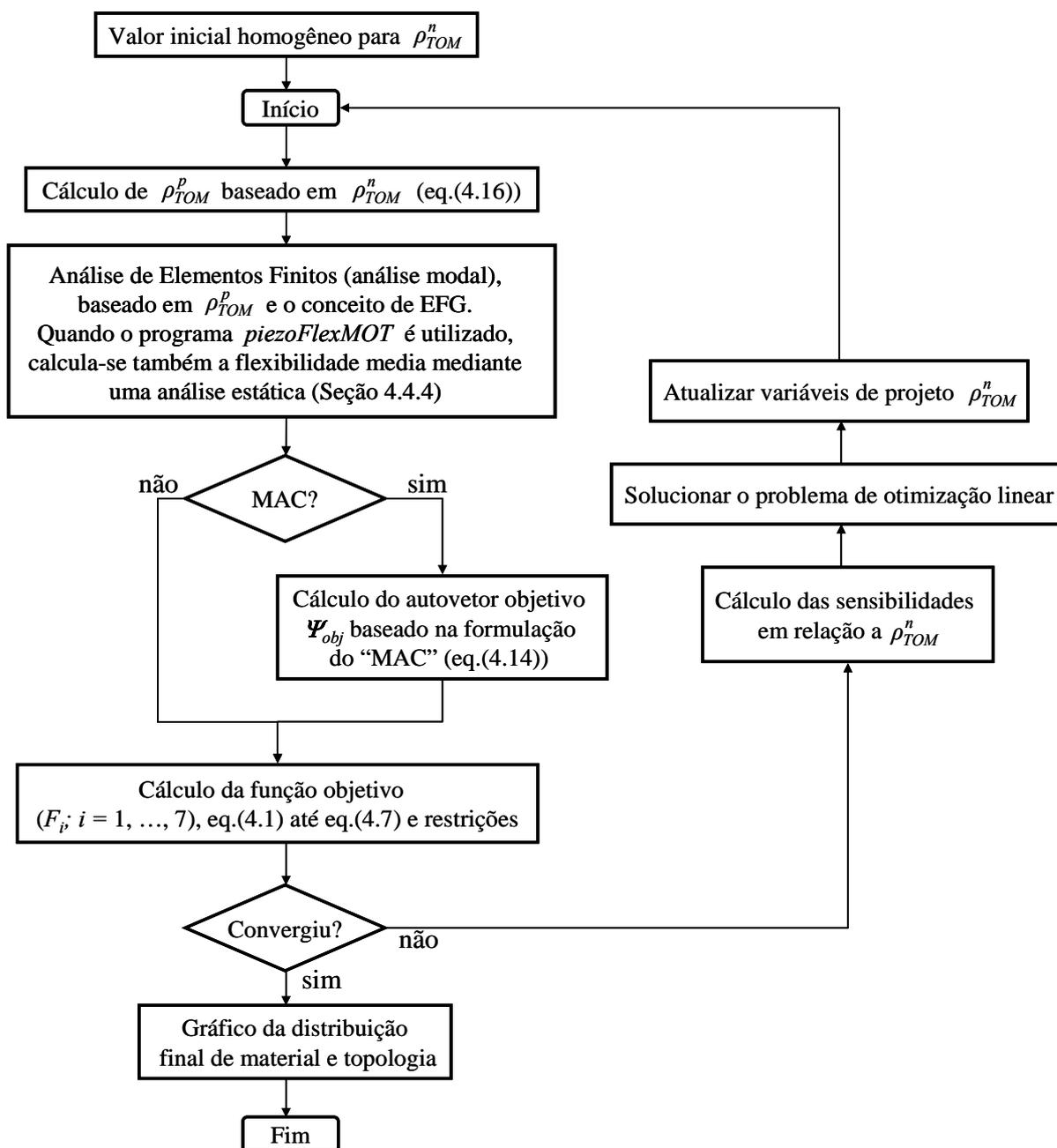


Figura 4.10. Diagrama de fluxo do procedimento de otimização.

Na discretização é utilizado o elemento finito gradado do tipo Q4/Q4, onde cada nó possui três graus de liberdade, dois mecânicos (deslocamento horizontal e vertical), e um grau de liberdade elétrico (potencial elétrico). Neste trabalho, a Programação Linear Seqüencial (PLS) é aplicada para solucionar o problema de otimização não-

linear (cada uma das sete funções objetivo definidas anteriormente). A PLS consiste da solução seqüencial de subproblemas lineares que são definidos através da expansão em séries de Taylor, ao redor das variáveis de projeto atual  $\rho_{TOM}^n$ , dos problemas de otimização não-lineares, ver a eq.(4.19) e eq.(4.20), em cada passo de iteração. A linearização requer as sensibilidades (gradientes) das funções objetivo e restrições em relação a  $\rho_{TOM_i}^n$  e  $\rho_{TOM_j}^p$ .

Quando a opção do cálculo do MAC é selecionada, os autovetores objetivos,  $\Psi_{obj}$ , são calculados primeiro, e posteriormente a análise de sensibilidade é desenvolvida sobre esses autovetores objetivos. Em conseqüência, os valores do MAC são calculados pela comparação, através da eq.(4.14), do modo de vibrar definido pelo usuário com os autovalores obtidos pela solução do problema modal, apresentado no capítulo 3, em cada iteração. Posteriormente, o autovetor com valor de MAC mais próximo de 1 é selecionado como o autovetor objetivo. No entanto, quando a forma do modo de vibrar muda drasticamente durante o processo iterativo, o modo de referência pode ser atualizado. Por outro lado, se a opção do cálculo do MAC não é selecionada, após a solução do problema modal é desenvolvida a análise de sensibilidades.

Adicionalmente, a cada iteração, limites móveis são definidos para as variáveis de projeto  $\rho_{TOM}^n$ . Tipicamente, durante o processo iterativo, as variáveis de projeto serão modificadas em 5 – 15% dos valores originais dessas variáveis. Após a otimização linear, um novo conjunto de variáveis de projeto  $\rho_{TOM}^n$  e pseudo-densidades  $\rho_{TOM}^p$  é obtido e atualizado no domínio de projeto até que a convergência é alcançada para a função objetivo em questão. O procedimento de otimização tem convergido quando a mudança nas variáveis de projeto de iteração a iteração é menor que  $10^{-3}$ . A distribuição final de material é encontrada pela projeção das variáveis de projeto sobre a camada das pseudo-densidades. A análise de elementos finitos utilizada para obter o campo de resposta (potenciais elétricos e deslocamentos nodais) está baseada unicamente nessa distribuição projetada de material.

## 4.5 Resultados do MOT aplicado ao projeto de TPGF

Para ilustrar o método proposto, para cada uma das sete funções objetivo definidas anteriormente, são apresentados exemplos de TPGF bidimensionais, os quais são projetados considerando estado plano de deformações. Para os resultados com as funções de gradação  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_4$ ,  $F_5$  e  $F_6$ , o domínio de projeto fixo é apresentado na Fig. 4.11(a). Para o resultado da maximização do CAEM, função  $F_3$ , é utilizado o domínio de projeto da Fig. 4.11(b). Nesses casos, o domínio de projeto fixo é definido como um retângulo com dimensões 20 mm x 5 mm, com as condições de contorno mecânicas, no lado direito e esquerdo do transdutor, definidas em cada esquema da Fig. 4.11, segundo o problema tratado. As condições de contorno elétricas, em todos os casos, correspondem a especificar uma voltagem de 100 V entre os eletrodos localizados na superfície superior e inferior do transdutor, ver a Fig. 4.11. O eletrodo terra corresponde ao eletrodo na superfície inferior.

Por outro lado, para a função objetivo  $F_7$ , utiliza-se o domínio de projeto definido na Fig. 4.11(c), com dimensões de 20 mm x 20 mm, e com as restrições mecânicas apresentadas na própria figura.

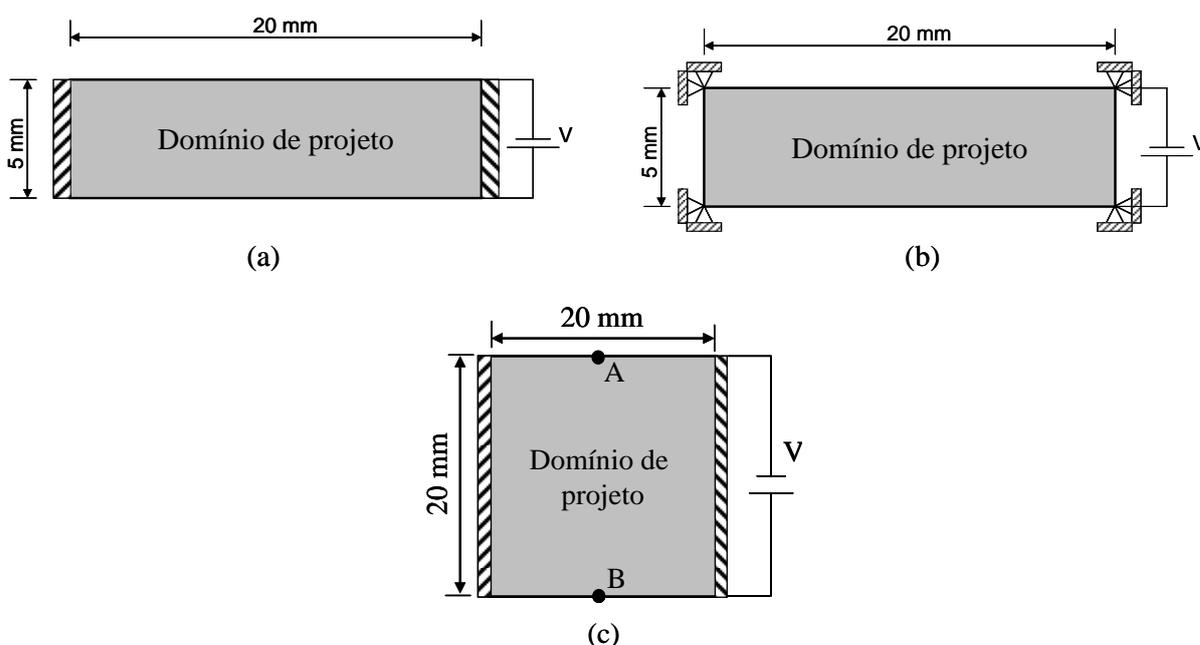


Figura 4.11. Domínios de projeto fixos: (a) para o problema das funções objetivo  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_4$ ,  $F_5$  e  $F_6$ ; (b) para o problema da função objetivo  $F_3$ ; (c) e para o problema da função objetivo  $F_7$ .

Tabela 4.1. Propriedades de materiais utilizados nos projetos de TPGFs.

Propriedades		PZT-5A	PZT-2	PZT-5H	Polímero Epóxi
Propriedades Dielétricas (F/m)	$\epsilon_0$	$8,85 \times 10^{-12}$	$8,85 \times 10^{-12}$	$8,85 \times 10^{-12}$	$8,85 \times 10^{-12}$
	$\epsilon_{11}^S$	$916 \times \epsilon_0$	$504 \times \epsilon_0$	$1.700 \times \epsilon_0$	$3,6 \times \epsilon_0$
	$\epsilon_{33}^S$	$830 \times \epsilon_0$	$260 \times \epsilon_0$	$1.470 \times \epsilon_0$	$3,6 \times \epsilon_0$
Propriedades Piezelétricas (C/m <sup>2</sup> )	$e_{31}$	-5,4	-109	-6,5	0,0
	$e_{33}$	15,8	9,0	23,30	0,0
	$e_{15}$	12,3	9,8	17,0	0,0
Propriedades Elásticas (N/m <sup>2</sup> )	$C_{11}^E$	$12,1 \times 10^{10}$	$13,5 \times 10^{10}$	$12,6 \times 10^{10}$	$9,34 \times 10^9$
	$C_{12}^E$	$7,54 \times 10^{10}$	$7,54 \times 10^{10}$	$7,59 \times 10^{10}$	$9,34 \times 10^9$
	$C_{13}^E$	$7,52 \times 10^{10}$	$7,52 \times 10^{10}$	$8,41 \times 10^{10}$	$9,34 \times 10^9$
	$C_{33}^E$	$11,1 \times 10^{10}$	$11,3 \times 10^{10}$	$11,7 \times 10^{10}$	$9,34 \times 10^9$
	$C_{44}^E$	$2,11 \times 10^{10}$	$2,11 \times 10^{10}$	$2,30 \times 10^{10}$	$9,34 \times 10^9$
	$C_{66}^E$	$2,28 \times 10^{10}$	$2,28 \times 10^{10}$	$2,50 \times 10^{10}$	$9,34 \times 10^9$
Densidade (kg/m <sup>3</sup> )		7.500	7.500	7.500	1.340

Tabela 4.2. Parâmetros utilizados no MOT.

Dados	Valor
Número de modos de vibrar computados na análise modal	60
Restrição de material <i>tipo 1</i> : cerâmica PZT-5A	80 %
Valor inicial para as variáveis de projeto $\rho_{TOM}^n$ e $\rho_{2_{TOM}}^n$	1 (equivalente a material <i>tipo 1</i> )

Como mencionado no início deste capítulo, a idéia principal é simultaneamente distribuir dois tipos de materiais dentro do domínio de projeto fixo. Em todos os casos de simulação, o material *tipo 1* é representado por uma cerâmica piezolétrica PZT-5A; assim, no início do processo iterativo do MOT, o domínio de projeto fixo contém somente material PZT-5A. Como material *tipo 2* diversos tipos de material são utilizados, piezolétricos e não-piezelétricos, de forma a mostrar a generalidade do método proposto. Como material não-piezelétrico utiliza-se uma resina polimérica tipo Epóxi (RUBIO et al., 2007a), e como material piezolétrico utilizam-se as cerâmicas PZT-2 (KINO, 2000) e PZT-5H (GUO et al., 1992). Em todos os casos, os materiais *tipo 2* foram escolhidos de forma a representar grandes mudanças de propriedades em relação às propriedades do material referência ou material *tipo 1*: cerâmica piezolétrica PZT-5A. A Tabela 4.1 apresenta as propriedades de todos os materiais utilizados durante as simulações. Por outro lado, a Tabela 4.2 apresenta alguns dados importantes utilizados no MOT.

#### **4.5.1 Caracterização dinâmica de um transdutor piezolétrico PZT-5A**

Uma vez que a idéia é alterar as características dinâmicas de um transdutor com propriedades de uma cerâmica piezolétrica PZT-5A, definido aqui como material *tipo 1*, é apresentada uma breve descrição do comportamento dinâmico de um transdutor piezolétrico homogêneo (PZT-5A), com as condições de contorno e dimensões da Fig. 4.11(a) e propriedades da Tabela 4.1. É utilizada uma discretização de 50 x 30 elementos finitos homogêneos. A malha é escolhida buscando um compromisso entre exatidão e custo computacional. Com esse fim, uma análise de convergência de malha é desenvolvida. A Fig. 4.12 mostra a curva de convergência obtida ao discretizar o domínio de projeto da Fig. 4.11(a) com 400 (20 x 20), 900 (30 x 30), 1200 (40 x 30), 1500 (50 x 30), 2400 (60 x 40), 3500 (70 x 50), e 5600 (80 x 70) elementos finitos, sem considerar nenhum tipo de gradação de material. Para cada um dos tamanhos de malha calcula-se um problema de autovalor e autovetor; especificamente, determina-se em cada caso o valor da frequência de ressonância do modo de vibrar tipo pistão. Observa-se que a convergência se alcança a partir de 1500 (50 x 30) elementos finitos, tanto no valor

da freqüência de ressonância do modo tipo pistão, como no valor do autovetor. Também se observa que incrementos adicionais no tamanho da malha somente acarretam incrementos no custo computacional acompanhados de melhoria reduzida na exatidão do modelo. Por exemplo, se a malha é incrementada a 5600 elementos finitos, a diferença no valor da freqüência de ressonância do modo tipo pistão é de somente 0,1%, em relação à malha de 1500 (50 x 30) elementos finitos. Adicionalmente, a densidade de malha é escolhida para que haja suficientes nós por comprimento de onda, em relação ao modo de mais alta ordem requerido na análise modal. Nesse caso, uma vez que a freqüência de maior ordem requerida é de 1 MHz, o comprimento de onda num meio PZT-5A, nessa freqüência, será de 4,39 mm; em conseqüência, com uma malha de 50 x 30 elementos finitos existem sempre 11 e 27 nós por comprimento de onda ao longo da espessura e da direção longitudinal, respectivamente.

Por outro lado, a Fig. 4.13 mostra os tipos de modos de vibrar obtidos pela análise de elementos finitos desenvolvida com o programa *piezoEFG* apresentado no capítulo 3. A Fig. 4.13 mostra, para cada modo de vibrar, a respectiva freqüência de ressonância. O número da ordem desse modo é apresentado para os modos de vibrar piezolétricos e, simultaneamente, é apresentado para os modos de vibrar piezolétricos em conjunto com os elásticos (entre parênteses).

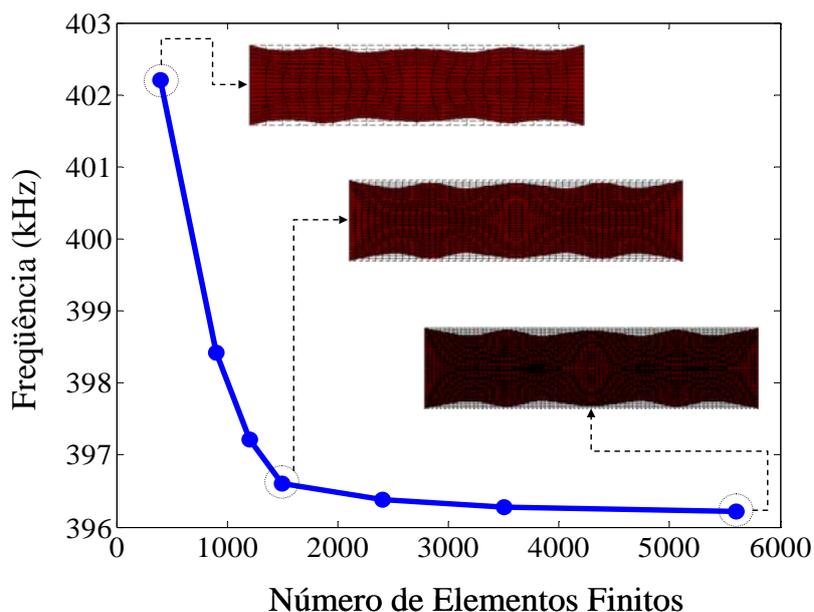


Figura 4.12. Curva de convergência para determinar o tamanho de malha adequado para as simulações.

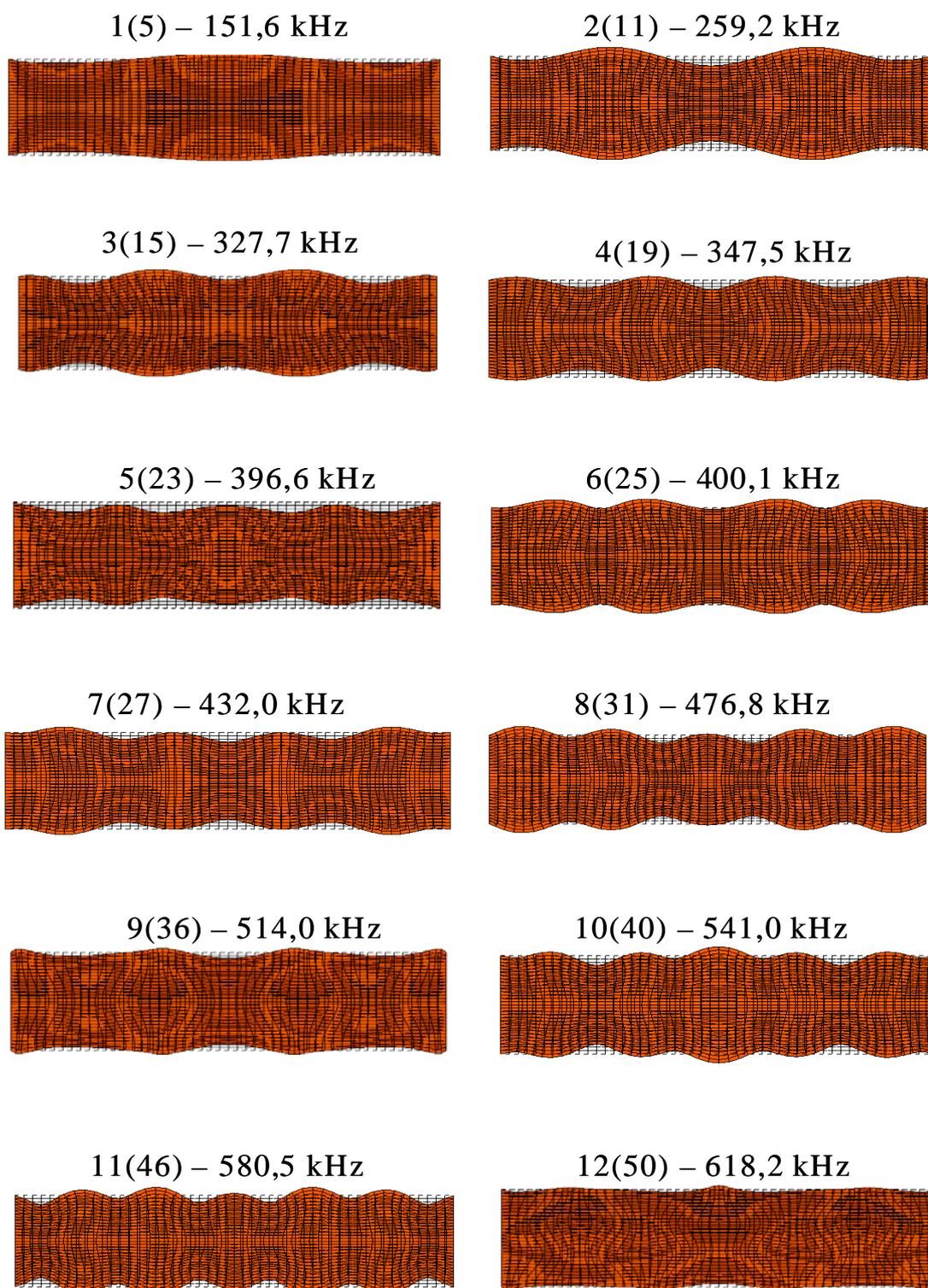


Figura 4.13. Diversos tipos de modo de vibrar para um transdutor piezolétrico uniforme de material PZT-5A, obtidos utilizando o programa *piezoEFG*.

Da Fig. 4.13 podem ser identificados dois tipos de modos de vibrar, segundo a classificação do Guo et al., 1992: modos ao longo da espessura de cisalhamento (modos TS) e modos ao longo da espessura extensionais (modos TE). Os modos

radiais (modos R) e modos de borda (modos E) não estão presentes nessa resposta, uma vez que as condições de contorno mecânicas (ver a Fig. 4.11(a)) não permitem o seu surgimento. Com os modos TS, o valor médio líquido do deslocamento vertical, das superfícies superior e inferior do transdutor, é zero, e com os modos TE, esse valor médio líquido é diferente de zero; em consequência, geralmente esses modos TE são os mais interessantes e os modos mais importantes na aplicação de discos cerâmicos piezelétricos. Adicionalmente, é observado que o modo piezelétrico número 5 (ou modo 23, incluindo modos de vibrar do tipo piezelétrico e elástico) apresenta o maior deslocamento líquido vertical, tanto na superfície superior e inferior do transdutor. Assim, esse modo número 5 é similar ao modo tipo pistão, dedutível da teoria de cerâmicas piezelétricas com modos de vibrar unidimensionais (GUO et al., 1992). Observa-se também, da Fig. 4.14(a), que esse modo de vibrar número 5 possui a maior CMP, e em consequência, é o modo com maior representatividade na resposta total do transdutor quando um potencial elétrico é aplicado.

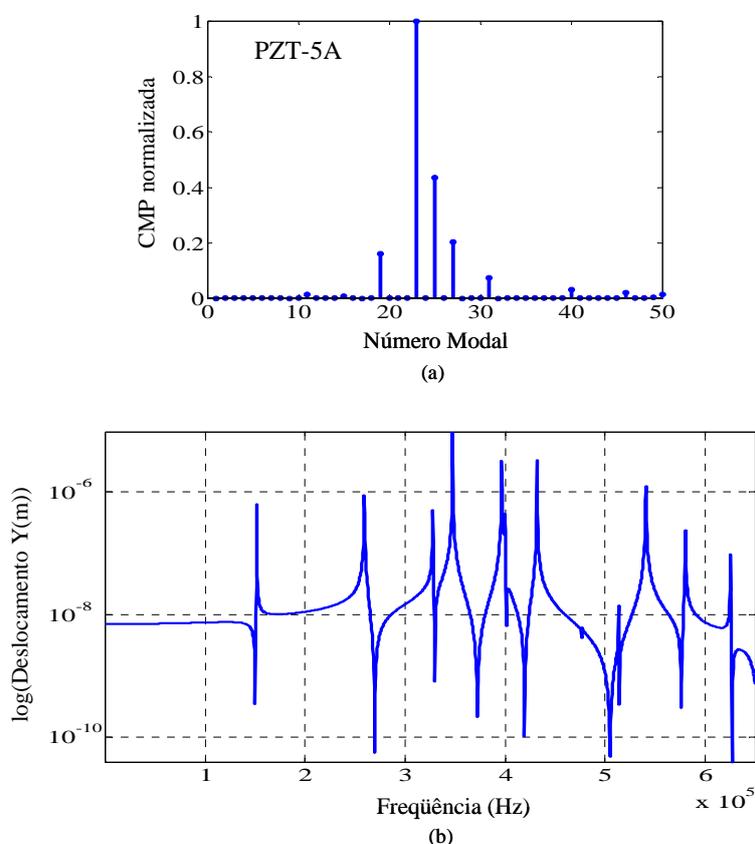


Figura 4.14. (a) Constante Modal Piezelétrica, (b) Função de Resposta em Frequência (FRF) mecânica axial no ponto central da superfície superior do transdutor piezelétrico de material PZT-5A.

Por último, a Fig. 4.14(b) mostra a correspondente Função de Resposta em Frequência (FRF) mecânica, calculada através do programa *piezoEFG* com uma resolução de 0,5 kHz. Essa resposta é o deslocamento axial no ponto central da superfície superior do transdutor não-gradado, quando excitado com um potencial elétrico igual a 100V. Na Fig. 4.14(b) é observado que picos aparecem na frequência de ressonância, o qual confirma os valores de frequência por modo da Fig. 4.13. Todos os 12 modos piezelétricos apresentados na Fig. 4.13 estão presentes na Fig. 4.14(b), embora alguns deles sejam muito fracos para serem observados no gráfico.

#### **4.5.2 Resultados para a maximização de autovalores**

Nesta seção os resultados são divididos em dois grupos. O primeiro grupo trata do projeto de TPGF com a frequência maximizada de um modo de vibrar específico, definido pelo usuário. Neste último caso, duas condições de contorno mecânicas são assumidas: (i) um transdutor na condição livre – livre, sendo restringido somente os deslocamentos horizontais no extremo direito e esquerdo, visando a redução dos modos de vibrar radiais e, por conseguinte, a obtenção de modos ao longo da espessura “puros” e, (ii) as condições de contorno mecânicas da Fig. 4.11(a). Já o segundo grupo trata do projeto de TPGF com maximização da primeira frequência de ressonância e sem utilizar a formulação MAC para autovalores.

#### **Maximização de frequências de ressonância de modos de vibrar específicos**

Nesta seção três tipos de projetos de TPGF serão considerados. O primeiro trata do projeto de TPGF sem condições de contorno mecânicas; ou seja, um TPGF livre-livre com graduação ao longo da espessura. O segundo trata o projeto do TPGF da Fig. 4.11(a) considerando a graduação ao longo da espessura. O terceiro trata o mesmo TPGF da Fig. 4.11(a), mas assumindo uma graduação ao longo da direção longitudinal. Em todos os casos assume-se como material *tipo 1* a cerâmica PZT-5A e como material *tipo 2* um material não-piezelétrico, uma resina polimérica epóxi (ver a Tabela 4.1), resultando assim num TPGF do tipo piezelétrico/não-piezelétrico. Por

outro lado, em todos os três casos, será considerado como o modo desejado, ou modo que deve ser “seguido” ao longo do processo iterativo do MOT, a forma de vibrar que mais se aproxime ao modo tipo pistão.

- *TPGF com condições de contorno livre-livre e gradação ao longo da espessura*

Neste caso é considerada a mesma estrutura da Fig. 4.11(a), mas sem nenhum tipo de restrição mecânica (exceto na direção longitudinal). A estrutura é discretizada mediante uma malha de 39 x 39 elementos finitos, e assume-se gradação ao longo da espessura. O modo desejado ao final do MOT é o modo tipo pistão, o qual pode ser observado na Fig. 4.16(a). Nesse modo de vibrar as superfícies superior e inferior do transdutor possuem todos os seus deslocamentos em fase, são planas, e paralelas entre si. Na Fig. 4.16(a) as linhas em traços e linhas sólidas representam a estrutura não-deformada e deformada, respectivamente. Por outro lado, somente um termo é utilizado na função multi-objetivo  $F_I$ ; assim, assume-se que na eq.(4.1)  $m$  e  $w$  são iguais a um.

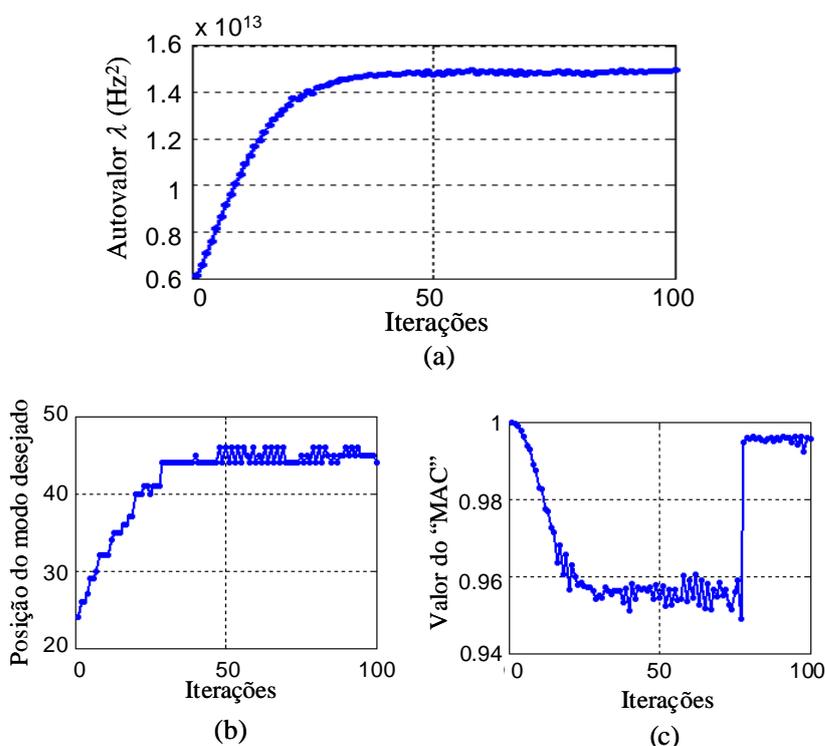


Figura 4.15. Histórico de diversas curvas para o TPGF livre-livre. (a) Valor do autovalor; (b) posição do modo desejado; (c) valor do MAC.

Na Fig. 4.15 observa-se a curva de convergência do autovalor maximizado, a posição do modo tipo pistão ao longo do processo iterativo, e o valor do MAC durante a otimização. Da Fig. 4.15(a) é observado que a curva de convergência do autovalor é uma curva monotônica, mostrando um incremento do autovalor de  $6,11 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$  até  $1,49 \times 10^{13} \text{ Hz}^2$ , representando um aumento de 144% em relação ao valor inicial do transdutor não-gradado ou composto de somente material PZT-5A. Observa-se, também na Fig. 4.15(b), que a “posição” do autovalor ao longo do processo iterativo converge ao modo de vibrar número 43; assim, pode-se afirmar que o modo de pistão mudou da posição número 24 (incluindo os modos de vibrar elásticos e piezelétricos), ao início do processo iterativo, até o modo de vibrar número 43, no final do processo iterativo. Essa inversão da ordem dos modos justifica o uso do MAC para maximizar a freqüência de ressonância de um modo de vibrar desejado, neste caso o modo tipo pistão. Essa utilidade do MAC para o “acompanhamento” do modo desejado fica evidente ao comparar a forma de vibrar do modo inicial da Fig. 4.16(a) com a forma do modo de vibrar ao final da otimização topológica, ver a Fig. 4.16(b). Da Fig. 4.16(b) é claro que o modo final corresponde ao modo tipo pistão. Além disso, observa-se que existe uma alta correlação entre esses modos de vibrar inicial e final, como o confirma a Fig. 4.15(c), sendo que o valor final do MAC foi de 0,996.

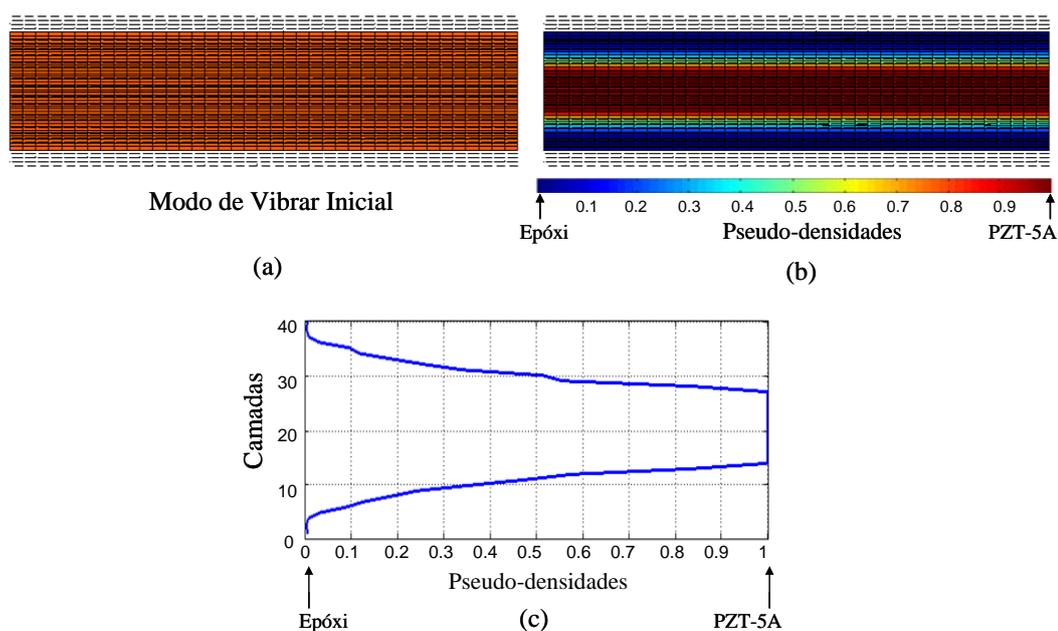


Figura 4.16. Exemplo do TPGF livre-livre. (a) Forma do modo desejado; (b) forma do modo de vibrar final; (c) distribuição de material final.

Por último, a Fig. 4.16(c) mostra a distribuição de material final, sem considerar a técnica de projeção. Assim, o TPGF possui nas regiões próximas do extremo superior e inferior propriedades de material não-piezelétrico (resina epóxi), e no meio, propriedades de material piezelétrico (PZT-5A).

- TPGF da Fig. 4.11(a) com gradação ao longo da espessura

Neste exemplo se maximiza a frequência de ressonância do modo de vibrar piezelétrico número 5 (ou modo número 23 quando são considerados tanto os modos piezelétricos e elásticos) da Fig. 4.13, já que é o modo de vibrar que mais se aproxima daquele tipo pistão, mas considerando as condições de contorno da Fig. 4.11(a); ou seja, projeta-se um transdutor com condições de contorno mecânicas diferentes do caso livre-livre. Essas condições de contorno mecânicas induzem, nas superfícies dos eletrodos, modos de vibrar de alta ordem que reduzem o paralelismo entre elas; como exemplo, observe-se o modo de vibrar piezelétrico número 5 da Fig. 4.13, para o caso do transdutor não-gradado com material PZT-5A. Na prática, é pouco provável ter um modo de vibrar do tipo pistão com as superfícies superior e inferior completamente planas, conforme foi apresentado no exemplo anterior.

Neste exemplo, uma malha de 50 x 30 elementos finitos gradados é utilizada. Outros parâmetros utilizados na otimização estão presentes na Tabela 4.2. Na função objetivo da eq.(4.1) somente um termo é utilizado; assim, assume-se nessa equação  $m = 1$  e o coeficiente peso  $w = 1$ .

A Fig. 4.17 mostra a curva de convergência do autovalor maximizado, da posição do modo desejado, e do valor do MAC ao longo do processo iterativo. Observa-se que um incremento de aproximadamente 112% é alcançado, uma vez que o conceito MGF permite incrementar o autovalor inicial de  $6,2095 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$  (correspondente ao transdutor não-gradado PZT-5A) até  $13,16 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$  (correspondente ao TPGF). No entanto, é observado na Fig. 4.17(a) que existe comutação ou inversão dos modos de vibrar durante o processo iterativo, o qual produz uma curva não suavizada na convergência dos autovalores. Esse fato é evidente na Fig. 4.17(b), onde é notado que o modo inicial (modo número 23 incluindo modos elásticos) se “move” para o modo de vibrar número 29 na iteração

10; posteriormente, esse modo passa a ser o modo de vibrar número 12 na iteração 12; logo, torna-se o modo número 34 na iteração 14, e finalmente, termina na posição correspondente ao modo número 35. Para reduzir essa inversão ou comutação de modos, e suavizar a convergência da curva dos autovalores, é necessário utilizar um valor de  $m$  diferente de 1, na eq.(4.1). No entanto, essa técnica não foi implementada nesse exemplo, já que o modo mais próximo do tipo pistão geralmente é um modo de alta ordem (incluindo os modos elásticos), o que obrigaria a expressar uma função objetivo com muitos termos e, assim, a trabalhar com um problema computacional muito custoso.

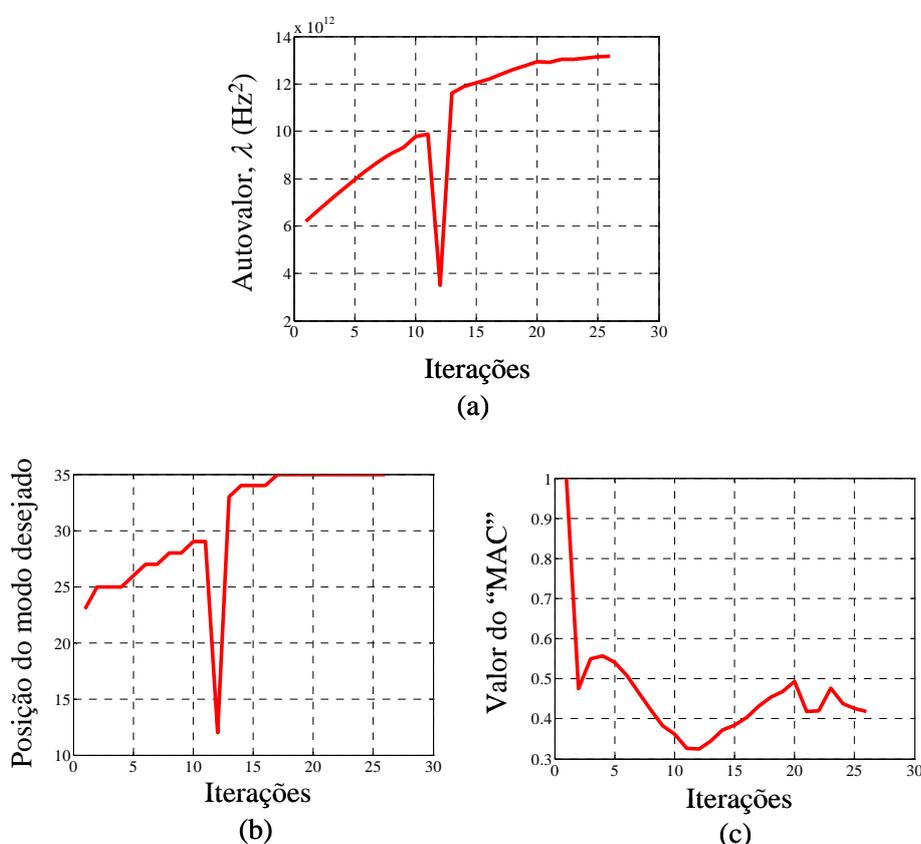


Figura 4.17. Histórico de diversas curvas para o TPGF da Fig. 4.11(a) com gradação ao longo da espessura. (a) Valor do autovalor; (b) posição do modo desejado; (c) valor do MAC.

Por outro lado, a Fig. 4.17(c) apresenta os valores do MAC ao longo do processo iterativo, esse valor muda de 1 a 0,41. No entanto, esse valor final representa uma boa correlação entre o modo de vibrar definido pelo usuário (modo de vibrar tipo pistão da Fig. 4.18(a)) e o modo alcançado ao final do processo iterativo do MOT. Esse fato é corroborado na Fig. 4.18, onde é observado que o modo de vibrar final

(modo número 35) é muito próximo do modo definido inicialmente (modo número 23), ver a Fig. 4.18(a) e Fig. 4.18(b). Assim, o modo de vibrar final corresponde a um modo flexensional ao longo da espessura, o qual gera um deslocamento axial líquido maior que zero nas superfícies superior e inferior do TPGF. Adicionalmente, o modo final vibra próximo ao modo de vibrar tipo pistão. Por último, a Fig. 4.18(c) mostra a função de distribuição de material final. Essa função representa um TPGF com material piezoeletrico PZT-5A no meio e regiões com propriedades aproximadas à resina epóxi nas superfícies superior e inferior. Como esperado, neste exemplo, a técnica de projeção exhibe uma curva de distribuição de material mais “suavizada” em relação ao caso em que não é utilizada essa técnica, ver a Fig. 4.18(c).

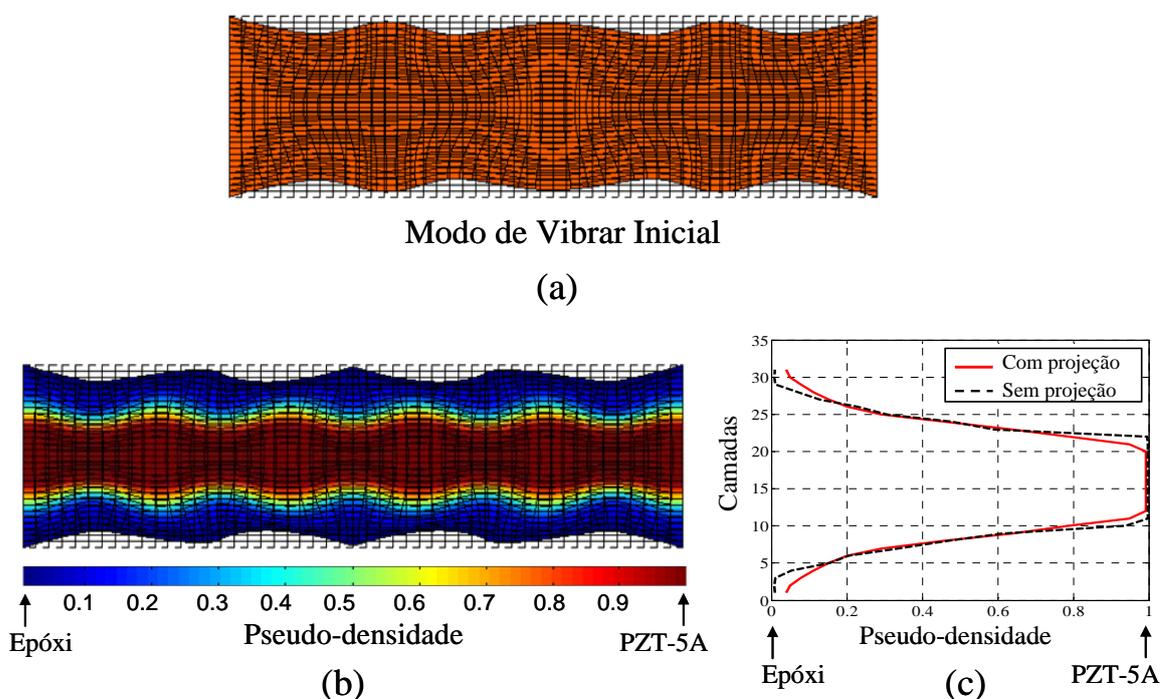


Figura 4.18. Exemplo do TPGF da Fig. 4.11(a) com gradação ao longo da espessura. (a) Forma do modo desejado; (b) forma do modo de vibrar final; (c) distribuição de material final.

Por último, a Fig. 4.19 mostra a Função de Resposta em Frequência (FRF) mecânica do deslocamento axial no ponto médio da superfície superior do TPGF da Fig. 4.18(b). Essa curva valida o resultado apresentado na Fig. 4.17(a); assim, observa-se que o autovalor final corresponde a modo de vibrar piezoeletrico com frequência de ressonância igual a 577,3 kHz. Em consequência, utilizando a técnica proposta neste capítulo é obtido um transdutor piezoeletrico com uma frequência de ressonância, no modo tipo pistão, incrementada em 46%, em relação à frequência

de ressonância inicial do transdutor não-gradado PZT-5A. Essa frequência inicial corresponde a 396,6 kHz.

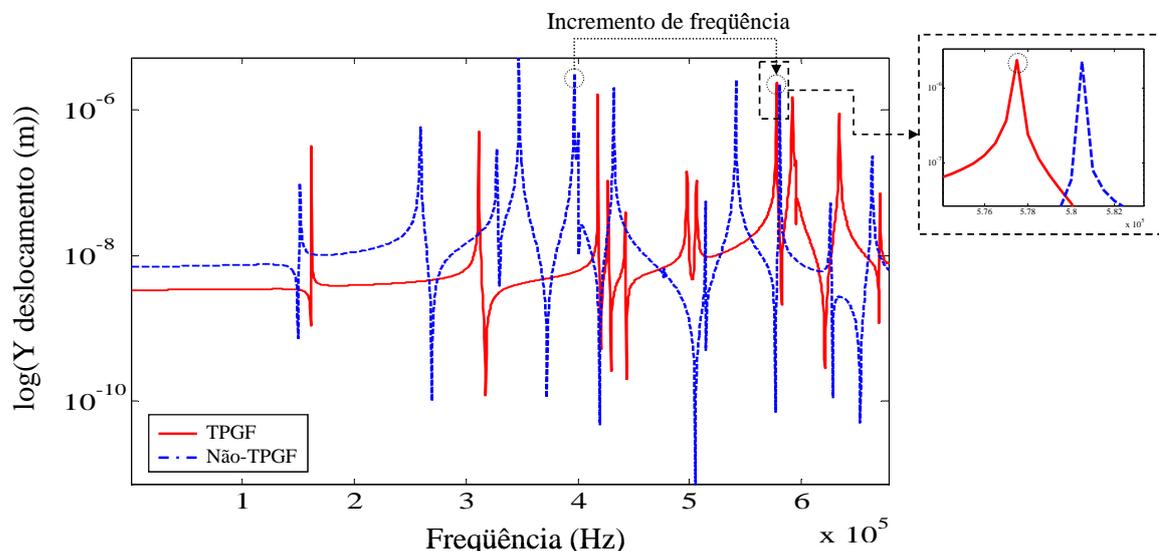


Figura 4.19. FRF mecânica do deslocamento axial no ponto central da superfície superior para o exemplo do TPGF da Fig. 4.18(b) com gradação ao longo da espessura.

- TPGF da Fig. 4.11(a) com gradação na direção longitudinal

Para o caso de maximização de autovalores é apresentado o mesmo exemplo anterior, mas considerando gradação ao longo da direção longitudinal. Utiliza-se uma malha de 25 x 25 elementos finitos gradados, como material *tipo 1* uma cerâmica piezeletrica PZT-5A e material *tipo 2* uma resina epóxi.

A Fig. 4.20 mostra o modo de vibrar final depois de finalizar o processo iterativo do MOT junto com a distribuição de material na direção longitudinal. Observa-se que esse modo de vibrar é muito próximo do modo tipo pistão desejado (ver a Fig. 4.18(a)). Também, observa-se que a curva de distribuição de material considerando a técnica de projeção segue o mesmo padrão do caso sem projeção, diferenciando-se na curvatura no canto superior e inferior; no entanto, neste caso de gradação, essa diferença não é muito significativa. A distribuição de material segue um padrão periódico ao longo da direção longitudinal; assim, repete-se a configuração de material mais-piezelétrico/menos-piezelétrico.

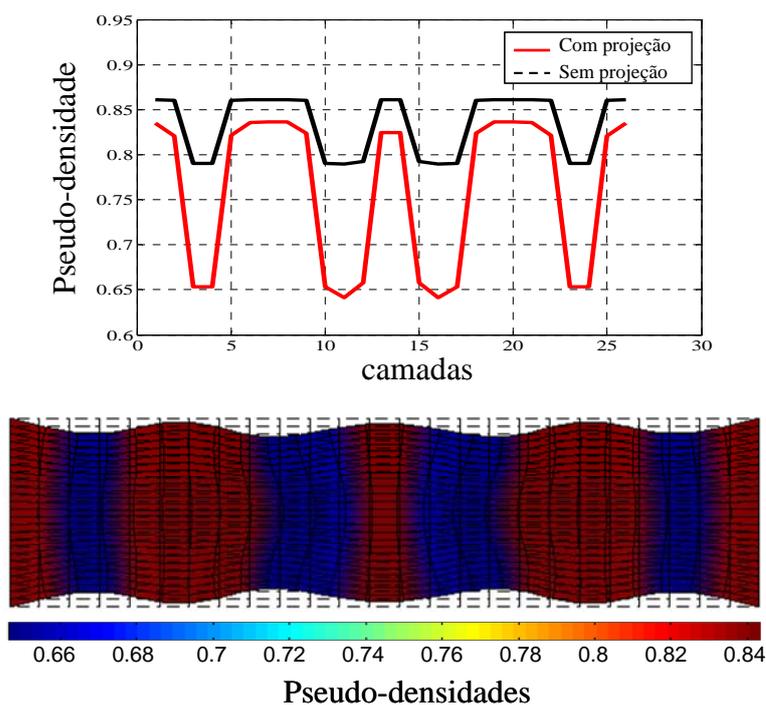


Figura 4.20. Forma do modo de vibrar e distribuição de material final no exemplo do TPGF da Fig. 4.11(a) com gradação na direção longitudinal.

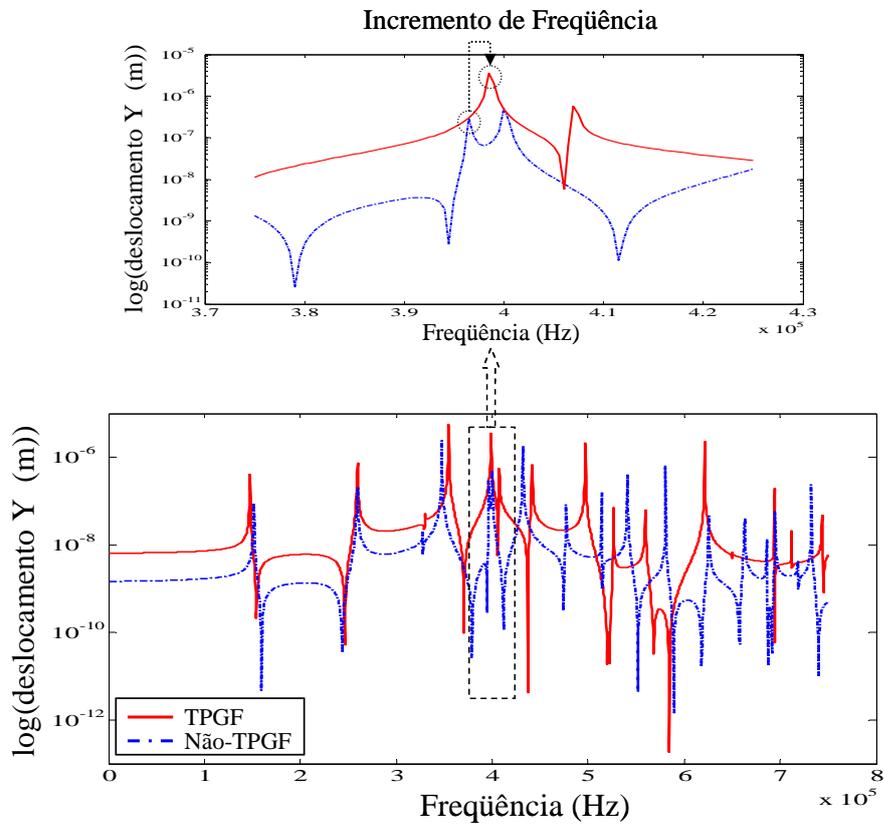


Figura 4.21. FRF mecânica do deslocamento axial no ponto central da superfície superior para o exemplo do TPGF da Fig. 4.20 com gradação na direção longitudinal.

Contudo, a gradação de material ao longo da direção longitudinal não exibe um incremento considerável da frequência de ressonância do modo tipo pistão. Assim, como apresentado na Fig. 4.21, essa frequência de ressonância incrementa-se de 396,6 kHz a 398,5 kHz. Esse aumento representa um incremento de 0,5% ou 1900 Hz; ver detalhe da Fig. 4.21. Esse incremento reduzido deve-se, provavelmente, às condições de contorno assumidas no problema. Assim, embora seja claro que esse incremento não é significativo, o exemplo abre a possibilidade da otimização da gradação ao longo de outras direções, o qual pode ser útil em outras aplicações, como na redução de ondas de borda de TPGF operando como transdutores de ultrassom, conforme foi apresentado no capítulo 2.

### **Maximização da primeira frequência de ressonância de TPGF**

Aqui é maximizada a primeira frequência de ressonância de TPGF, visando maximizar a faixa de operação, em aplicações quase-estáticas. Neste caso não é importante a obtenção de uma forma de vibrar específica, mas somente a maximização dessa primeira frequência de ressonância piezolétrica. O material *tipo 1* e *tipo 2* são as cerâmicas piezolétricas PZT-5A e PZT-2, respectivamente, ver a Tabela 4.1 para as propriedades. Esses tipos de materiais configuram um transdutor tipo piezolétrico/piezolétrico. Uma malha de 50 x 30 elementos finitos gradados é utilizada no MOT, e os cinco primeiros modos de vibrar são considerados na função multi-objetivo  $F_1$ ,  $m = 5$  na eq.(4.1). Todos os cinco coeficientes peso  $w$  são considerados iguais a 1. Adicionalmente, é considerada gradação somente ao longo da espessura. Outros dados utilizados no MOT estão presentes na Tabela 4.2.

O histórico da convergência da função objetivo  $F_1$ , a função final de distribuição de material, e a FRF axial mecânica são apresentadas na Fig. 4.22(a), 4.22(b) e 4.22(c), respectivamente. Nessa figura é mostrado que a técnica de projeção gera uma convergência mais rápida em relação ao caso de não-projeção. Adicionalmente, a técnica de projeção, como esperado, conduz a uma distribuição de material mais “suave”, reduzindo mudanças bruscas na distribuição de material. Assim, quando a técnica de projeção não é utilizada, o algoritmo de otimização gera uma distribuição de material com alto gradiente nas propriedades; em outras

palavras, gera uma distribuição tipo 0 – 1. Essa distribuição de material afasta-se da idéia de gradação contínua das propriedades que o conceito MGF sugere. A distribuição de material, tanto no caso com projeção e sem projeção, representa um TPGF com propriedades próximas de cerâmica piezolétrica PZT-2 na superfície superior, inferior e no meio do TPGF. Ao redor das camadas número 7 e 23, o TPGF apresenta propriedades próximas de cerâmica piezolétrica PZT-5A.

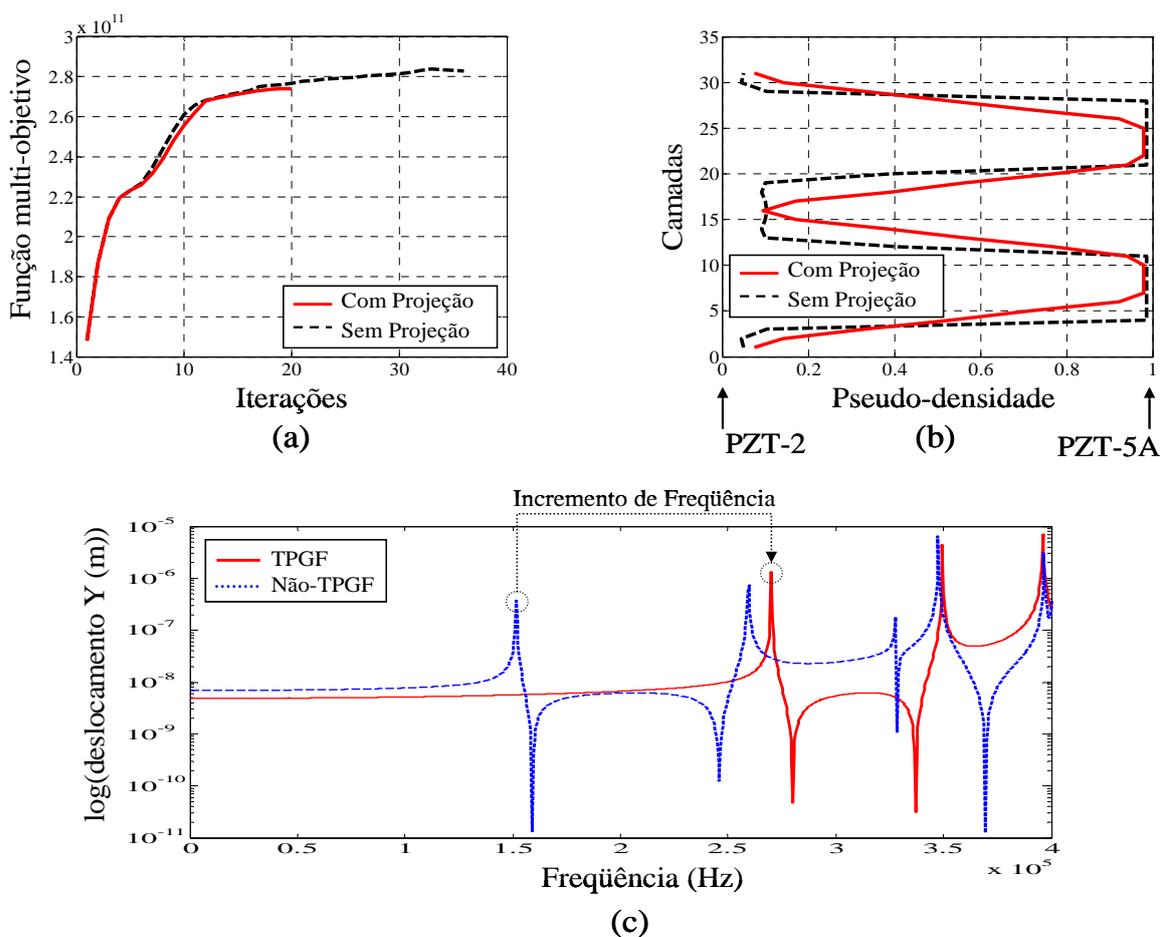


Figura 4.22. Maximização do primeiro autovalor de um TPGF. (a) histórico da convergência da função multi-objetivo  $F_7$ ; (b) função de gradação final; (c) FRF mecânica do deslocamento axial no ponto central da superfície superior.

Por outro lado, a Fig. 4.22(c) valida o resultado obtido. Observa-se desse gráfico que a primeira frequência de ressonância é incrementada de 151,6 kHz a 270 kHz. Esse incremento representa um aumento de 78% em relação à primeira frequência de ressonância do transdutor piezolétrico não-MGF com material PZT-5A. A nova primeira frequência de ressonância, ou seja, a primeira frequência de ressonância

do TPGF é maior inclusive que a segunda frequência de ressonância do transdutor inicial não-MGF com material PZT-5A (259,2 kHz).

#### 4.5.3 Resultados para o projeto de ressonadores gradados

Nesta seção são apresentados os resultados da maximização da função objetivo  $F_2$ , a qual visa projetar ressonadores piezelétricos gradados. Os requisitos básicos para esse projeto consistem em fazer que o TPGF vibre conforme uma frequência de ressonância e com a forma de um modo de vibrar previamente definidos pelo usuário. Em todos os exemplos apresentados nessa seção assume-se uma malha de 50 x 30 de elementos finitos gradados. Além disso, projetam-se ressonadores gradados do tipo piezelétrico/não-piezelétrico, onde o material *tipo 1* é uma cerâmica piezeletrica PZT-5A e o material *tipo 2* é uma resina epóxi, ver a Tabela 4.1 de propriedades de material. No MOT são utilizados os dados expressos na Tabela 4.2. O domínio de projeto é apresentado na Fig. 4.11(a). Por último, em todos os projetos desenvolvidos nesta seção assume-se gradação de material ao longo da espessura.

Dois projetos de ressonadores gradados são desenvolvidos: (i) projeto de um ressonador que vibre no modo tipo pistão e com um autovalor de ressonância igual a  $\lambda_{01} = 11,20 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ; e (ii) um ressonador com três autovalores de ressonância ( $\lambda_{01} = 5,80 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ;  $\lambda_{02} = 5,95 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ;  $\lambda_{03} = 6,10 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ; na eq.(4.2)), visando mudar a faixa de operação dinâmica do TPGF.

#### Projeto de um TPGF especificando o modo tipo pistão e a sua frequência

Nesse exemplo é projetado um TPGF com autovalor  $\lambda_{01} = 11,20 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$  no modo de vibrar tipo pistão. Para esse caso, na eq.(4.2) utiliza-se um valor de  $m = 1$ . A Fig. 4.23 mostra as curvas do histórico durante o processo de otimização da função objetivo, do autovalor do modo de vibrar tipo pistão, da ordem desse autovalor, e do valor do MAC. Da Fig. 4.23(a) observa-se que a função objetivo é minimizada, o qual

representa a minimização da diferença do valor atual (por iteração) do autovalor do modo tipo pistão e do autovalor desejado ( $\lambda_{0l} = 11,20 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ). No entanto, observa-se uma alta inversão de modos, o qual é representado na variação brusca da curva de convergência da função objetivo. Contudo, ao final do processo iterativo essa curva converge, mesmo que não seja de forma monotônica. Por outro lado, a Fig. 4.23(b) mostra que o valor de autovalor alcançado é de  $11,028 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ . Assim, a diferença entre o valor alcançado e o desejado corresponde a aproximadamente 2%, e obteve-se um incremento de 78% em relação ao autovalor inicial do transdutor não-gradado ( $6,2098 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ). Em termos de frequência de ressonância esses valores correspondem a: frequência inicial de 396,6 kHz, frequência desejada de 532,63 kHz, e frequência alcançada mediante o MOT de 528,52 kHz; por conseguinte, a diferença entre a frequência de ressonância desejada e a alcançada é de aproximadamente 1%.

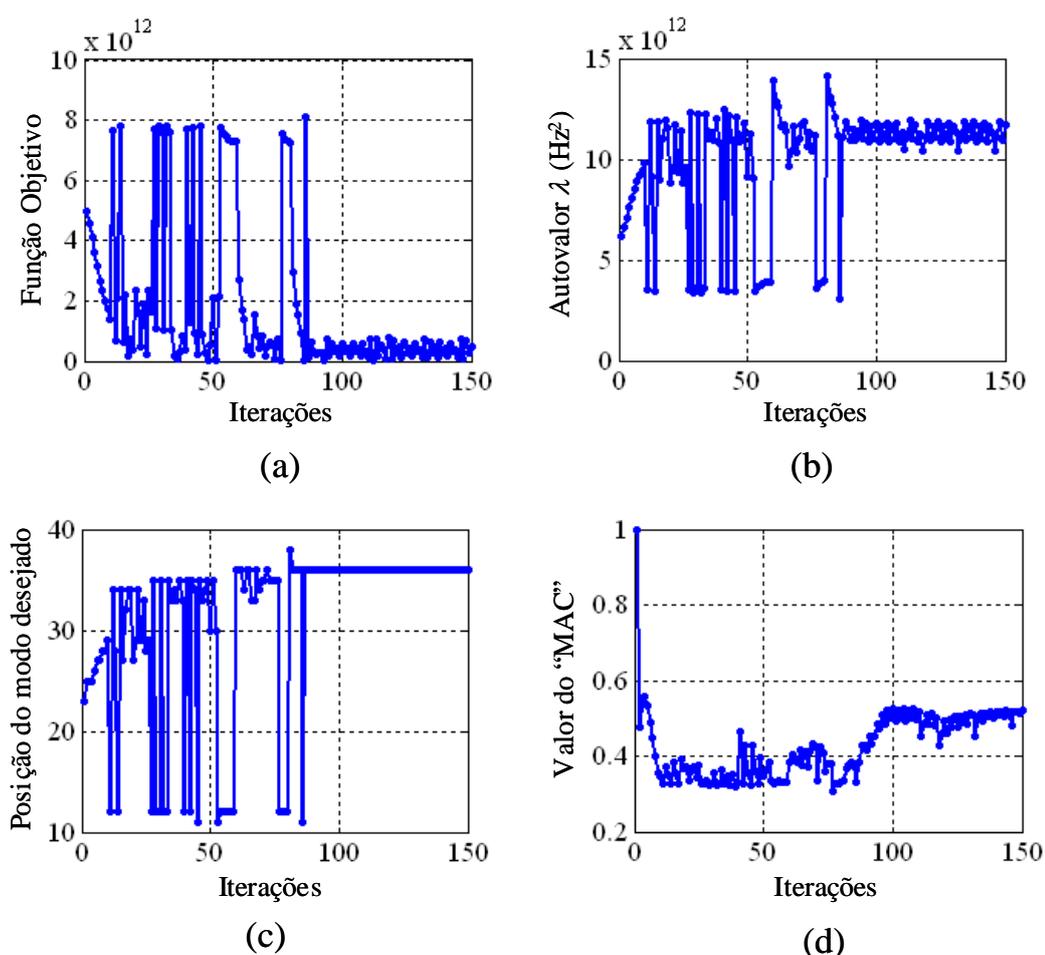


Figura 4.23. Histórico de diversas curvas para um TPGF vibrando a  $\lambda_{0l} = 11,20 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ . (a) Função objetivo; (b) valor do autovalor; (c) posição do modo desejado; (d) valor do MAC.

Adicionalmente, na Fig. 4.24(a) é mostrado o modo de vibrar alcançado. O modo alcançado corresponde ao modo de vibrar tipo pistão com uma correlação, em relação ao modo desejado (ver a Fig. 4.18(a)) e segundo a formulação do MAC, maior que 50% (ver a Fig. 4.23(d)). Já a Fig. 4.24(b) mostra a distribuição de material final com e sem a técnica de projeção de material, a qual configura um ressonador com propriedades próximas de um PZT-5A no meio, e com propriedades próximas da resina epóxi no extremo superior e inferior.

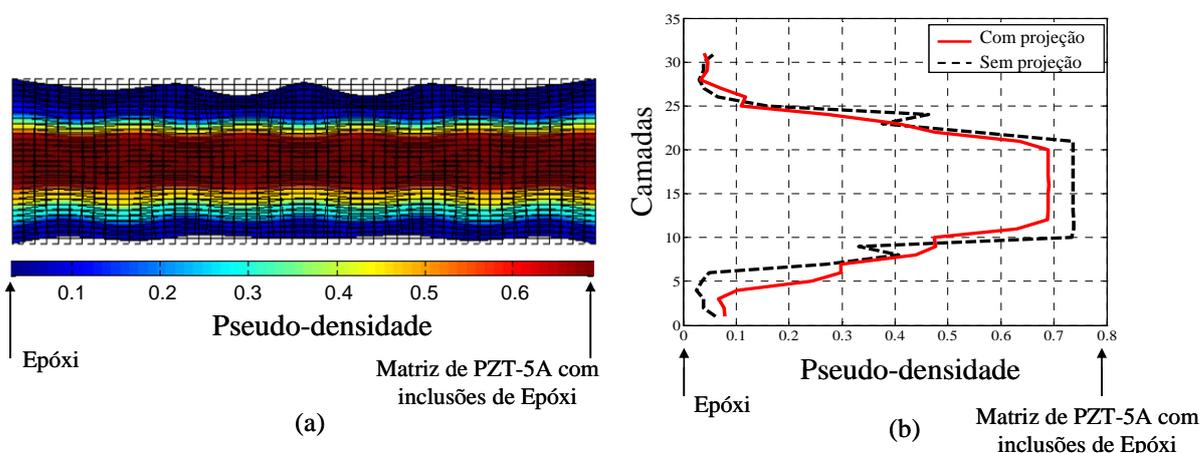


Figura 4.24. Exemplo de um TPGF vibrando a  $\lambda_{0I} = 11,20 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ . (a) Forma do modo de vibrar final; (b) distribuição de material final.

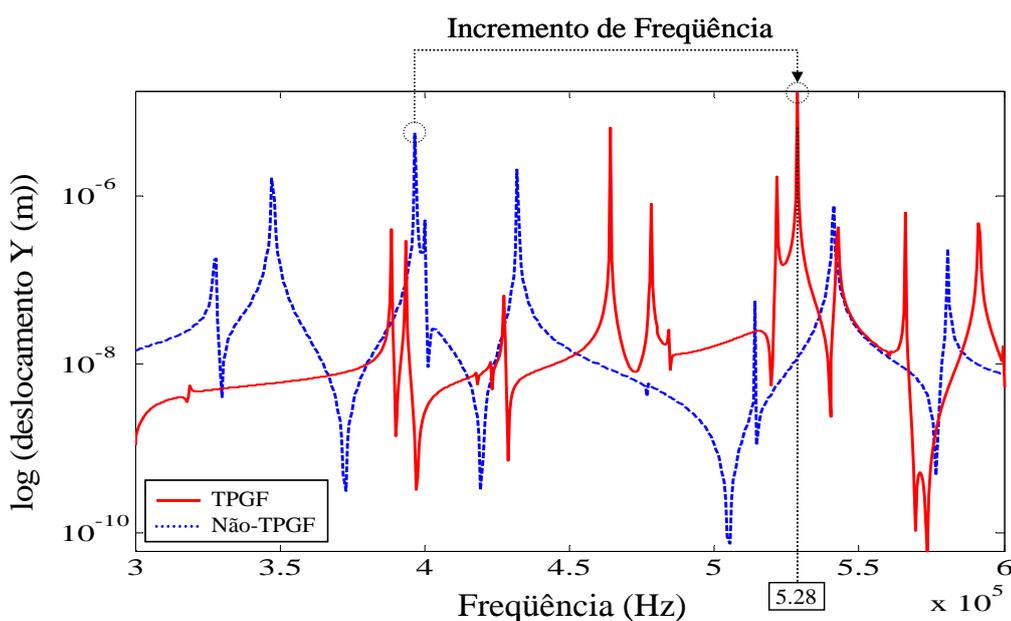


Figura 4.25. FRF mecânica do deslocamento axial no ponto central da superfície superior para um TPGF vibrando a  $\lambda_{0I} = 11,20 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ .

Por último, a Fig. 4.25 valida os resultados para o presente exemplo. Essa figura corresponde à FRF mecânica no centro da superfície superior do ressonador. Observa-se que efetivamente a frequência do modo de vibrar tipo pistão translada-se à frequência desejada; ou seja, a 528,52 kHz, e que nessa frequência obtém-se um pico de ressonância, confirmando assim que o modo obtido é um modo de vibrar piezelétrico.

### Projeto de um TPGF especificando três frequências e um modo de vibrar

Nesse exemplo é projetado um TPGF que vibra seguindo três frequências de ressonância definidas pelo usuário; nesse caso, o termo  $m$  na eq.(4.2) é igual a 3. Os autovalores desejados são:  $\lambda_{01} = 5,80 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ;  $\lambda_{02} = 5,95 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ;  $\lambda_{03} = 6,10 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ . Os modos de vibrar desejados correspondem aos modos piezelétricos 4, 5 e 7, da Fig. 4.13; ou 19, 23, e 27 incluindo os modos elásticos. Os autovalores iniciais correspondem a  $4,76 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ;  $6,20 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ; e  $7,37 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ , respectivamente. O modo tipo pistão corresponde ao termo  $m = 2$  na função multi-objetivo e deve ser mantido ao longo do processo de otimização.

Tabela 4.3. Resumo dos resultados para o exemplo três de ressonadores MGF.

Termo $m$ da eq.(4.2)	Número do Modo		Autovalor $\lambda \cdot 10^{12} (\text{Hz}^2)$				Frequência $\omega$ (kHz)			
	Inicial	Final	Inicial	Final	Desejado	Diferença	Inicial	Final	Desejado	Diferença
1	19	24	4,76	5,71	5,80	1,5%	347	380,3	383,3	0,7%
2	23	29	6,20	6,46	5,95	7,8%	396	404,5	388,2	4,0%
3	27	26	7,37	6,06	6,10	0,6%	432	391,7	393,0	0,3%

A Tabela 4.3 resume os resultados obtidos mediante a otimização topológica. Pode-se observar que a maior diferença corresponde ao termo  $m = 2$  na eq.(4.2), com uma diferença de aproximadamente 8% entre o autovalor obtido pelo MOT e o autovalor desejado. No entanto, em todos os casos a diferença é mantida em nível aceitável. Na maioria dos casos, a diferença é mantida menor que 2%. Por outro lado, como é exibido na Fig. 4.26(a), o modo do termo  $m = 2$  é mantido como um modo de vibrar

tipo pistão, conforme foi formulado no início do problema, existindo uma correlação média entre a forma de vibrar desejada (Fig. 4.18(a)) e a alcançada ao final do processo iterativo (Fig. 4.26(a)).

Neste exemplo é observada a vantagem no uso da técnica de projeção. Esse fato é confirmado ao comparar as curvas de distribuição de material sem e com a técnica de projeção, apresentadas na Fig. 4.26(b). No caso de não-projeção apresenta-se uma curva com grandes gradientes de material, os quais foram reduzidos significativamente ao utilizar a técnica de projeção. O material final apresenta pouca piezeletricidade, sendo a região média do TPGF aquela que exhibe maior piezeletricidade. No extremo superior e inferior do TPGF, o material é praticamente somente resina epóxi.

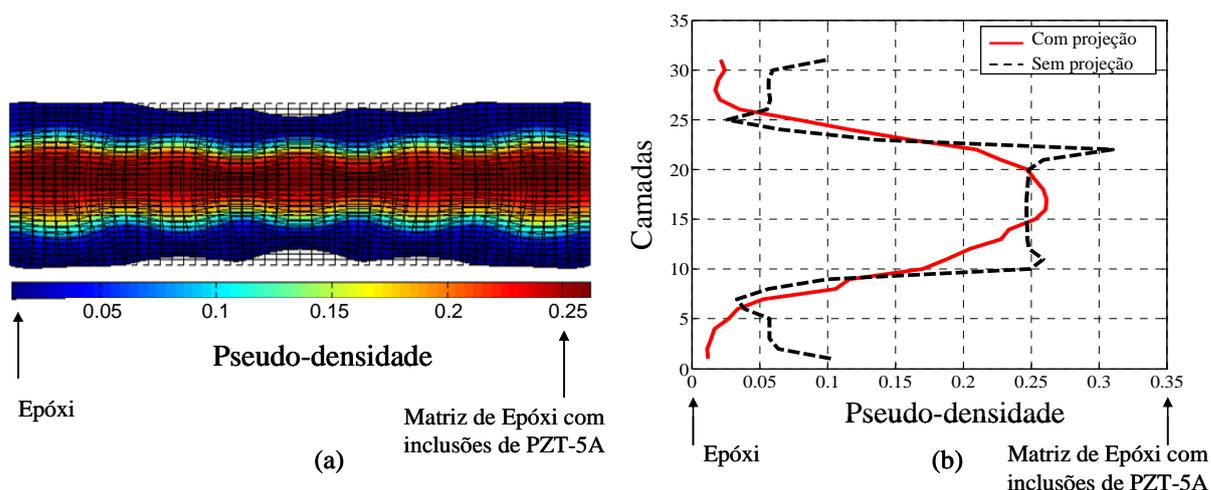


Figura 4.26. Exemplo de um TPGF vibrando a  $\lambda_{01} = 5,80 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ;  $\lambda_{02} = 5,95 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ;  $\lambda_{03} = 6,10 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ . (a) Forma do modo de vibrar final; (b) distribuição de material final.

O projeto desse tipo de TPGF vibrando com diversas freqüências de ressonância previamente definidas pelo usuário, torna-se interessante para mudar faixas de freqüências da sua resposta dinâmica. Assim, como observado na Fig. 4.27, a otimização dos modos iniciais 19, 23 e 27, que “cobriam” uma faixa de freqüências igual a 85 kHz (com o modo de vibrar tipo pistão na posição intermediária), foi reduzida a uma faixa de freqüências de 24 kHz (mantendo-se o modo de vibrar tipo pistão), o qual representa uma redução de aproximadamente 254%. Esse fato é interessante para o projeto de TPGF tipo banda estreita ou banda larga, como será apresentado na frente. O exemplo aqui apresentado aproxima-se de um TPGF tipo

banda larga. No entanto, para se comportar como verdadeiro TPGF de banda larga, na faixa de 380 kHz a 404 kHz, deve-se incrementar a representatividade dos modos de vibrar dessa faixa (modos finais número 24, 26, e 29). Esse assunto, a maximização da representatividade de um conjunto de modos em particular, será o tema central dos exemplos apresentados nas duas próximas seções.

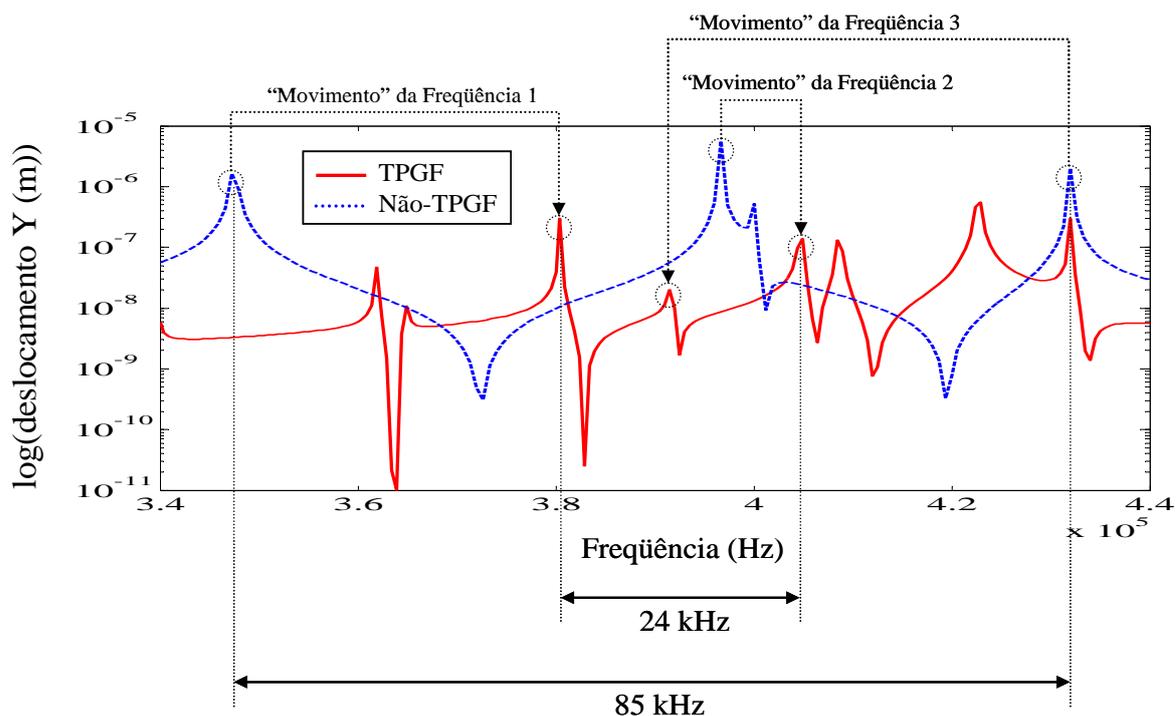


Figura 4.27. FRF mecânica do deslocamento axial no ponto central da superfície superior para um TPGF vibrando a  $\lambda_{01} = 5,80 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ;  $\lambda_{02} = 5,95 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ ;  $\lambda_{03} = 6,10 \times 10^{12} \text{ Hz}^2$ .

#### 4.5.4 Resultados de TPGF com CAEMs maximizados

Neste caso é maximizada a função multi-objetivo  $F_3$ . Esse caso consiste na maximização do Coeficiente de Acoplamento EletroMecânico, o qual mede a representatividade de um modo ou um conjunto de modos específicos na resposta total do transdutor. É utilizado o domínio de projeto da Fig. 4.11(b), e uma malha de 25 x 25 elementos finitos gradados. O material *tipo 1* é uma cerâmica piezolétrica PZT-5A, e o material *tipo 2* é uma resina epóxi. As propriedades desses materiais encontram-se na Tabela 4.1. Esse tipo de transdutor representa um transdutor

piezolétrico/não-piezolétrico. Assume-se gradação ao longo da espessura. Neste caso, é maximizado o Coeficiente de Acoplamento EletroMecânico do modo que mais se aproxima ao tipo pistão, ver a Fig. 4.28(a); assim, somente um termo é utilizado na função objetivo da eq.(4.3) ( $m = 1$ ).

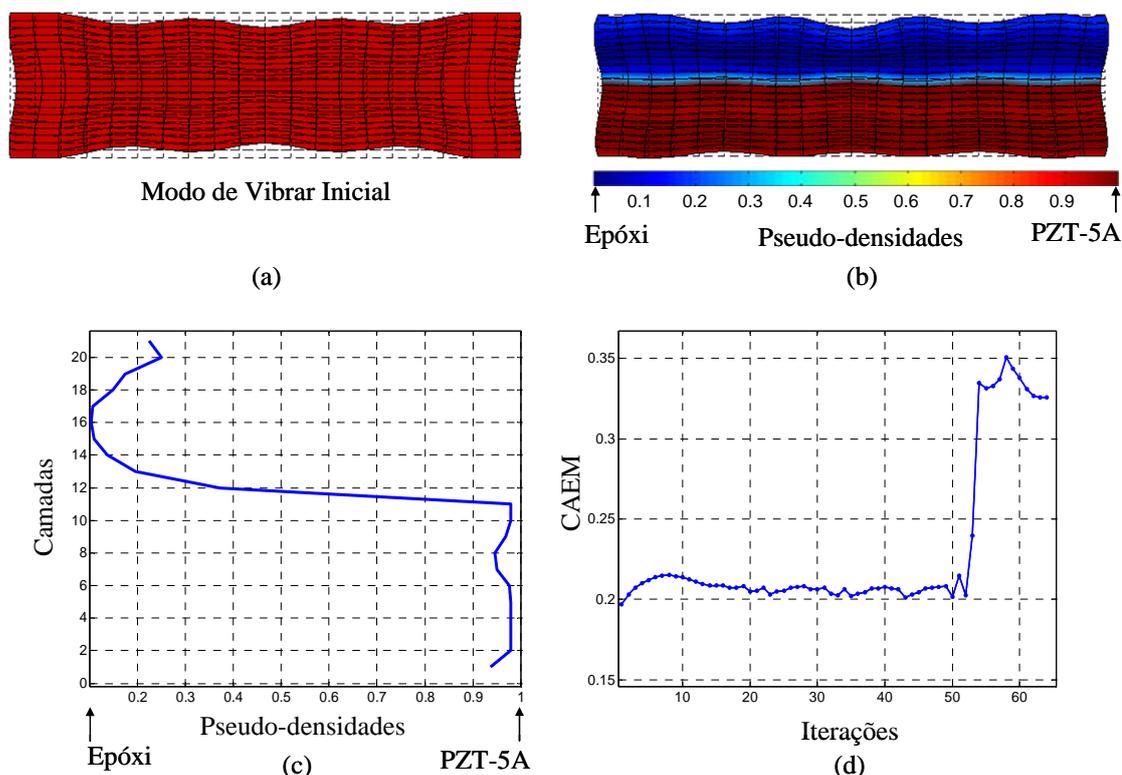


Figura 4.28. Exemplo de um TPGF com o CAEM maximizado do modo de vibrar tipo pistão. (a) Forma do modo desejado; (b) forma do modo de vibrar final; (c) distribuição de material final; (d) curva de convergência do CAEM.

A Fig. 4.28 apresenta os resultados obtidos para esse tipo de projeto. A Fig. 4.28(a) mostra o modo de vibrar inicial desejado, o qual se aproxima de um modo de vibrar tipo pistão, e a Fig. 4.28(b) mostra a forma de vibrar final obtida após o processo de otimização topológica. Observa-se uma alta correlação entre essas duas formas de vibrar: inicial e final. Neste último caso, exibe-se a distribuição de material com duas camadas de material facilmente diferenciáveis: da região central até a parte superior do TPGF, o material possui propriedades próximas de resina epóxi. Por outro lado, da região central até a parte inferior do transdutor, o material é muito próximo de PZT-5A. Essa gradação é confirmada na Fig. 4.28(c), a qual mostra a função de distribuição de material, que se apresenta como uma gradação suave de material devido à implementação da técnica de projeção. Por último, a Fig. 4.28(d) exibe a

curva de convergência do Coeficiente de Acoplamento EletroMecânico do modo tipo pistão. Observa-se que esse coeficiente é maximizado de 0,19 até 0,32, o qual representa um incremento de aproximadamente 65%, sendo simultaneamente conservado o modo de vibrar desejado.

Contudo, o resultado da Fig. 4.28 foi muito difícil de obter, uma vez que num processo iterativo como o MOT é complexo calcular com precisão as frequências de ressonância e anti-ressonância de um mesmo modo de vibrar (GUO, CAWLEY, 1992). O cálculo dessas duas frequências é fundamental para determinar o Coeficiente de Acoplamento EletroMecânico de um modo em particular (ver a eq.(A.72) no Apêndice A). Assim, foi necessário utilizar a Constante Modal Piezelétrica (CMP) para maximizar a representatividade de um modo específico na resposta do TPGF. Esse é o tema da próxima seção.

#### **4.5.5 Resultados de TPGF com CMPs maximizadas**

Nesta seção é maximizada a CMP de um modo ou um conjunto de modos definidos pelo usuário. Dois exemplos são apresentados para demonstrar a vantagem de implementar o MOT no projeto de TPGF com CMP maximizadas. O primeiro exemplo trata da maximização da CMP do modo de vibrar tipo pistão plano, visando o projeto de TPGFs tipo uni - modais. Já o segundo exemplo apresenta o resultado de maximizar um conjunto de CMPs, visando aumentar a transformação de energia elétrica em mecânica numa faixa de frequências. Nos dois casos é utilizado como domínio de projeto o mostrado na Fig. 4.11(a). Adicionalmente, esse domínio é discretizado com uma malha de 50 x 30 elementos finitos gradados, e é utilizado como material *tipo 1* uma cerâmica piezeletrica PZT-5A, e como material *tipo 2* uma cerâmica piezeletrica PZT-5H (a Tabela 4.1 apresenta as propriedades desses dois materiais). O modo tipo pistão deve ser mantido nos dois exemplos e corresponde ao exibido na Fig. 4.18(a). Outros dados utilizados na otimização podem ser encontrados na Tabela 4.2.

## Projeto de um TPGF tipo uni-modal

Para este exemplo, a Fig. 4.29 mostra a distribuição de material final, obtida após a otimização, a qual maximiza a CMP do TPGF vibrando no modo tipo pistão, e os modos de vibrar quando diversos valores de  $r_{min}$  são utilizados na Técnica de Projeção de Material, eq.(4.16). Especificamente, a Fig. 4.29 apresenta as funções de gradação quando não é utilizada a técnica de projeção e quando é utilizada a projeção com raios ( $r_{min}$ ) iguais a 1,1; 1,8, e 2,5. Observa-se que conforme o valor de  $r_{min}$  é incrementado são obtidas funções de gradação cada vez mais suavizadas, uma vez que o tamanho do subdomínio  $S_n$  aumenta. Essas distribuições de material representam um TPGF com propriedades próximas de PZT-5A no meio do transdutor e propriedades próximas de PZT-5H no extremo superior e inferior. Por outro lado, a mesma Fig. 4.29 mostra que em todos os casos simulados o modo de vibrar obtido está altamente correlacionado com o modo desejado tipo pistão (ver a Fig. 4.18(a)).

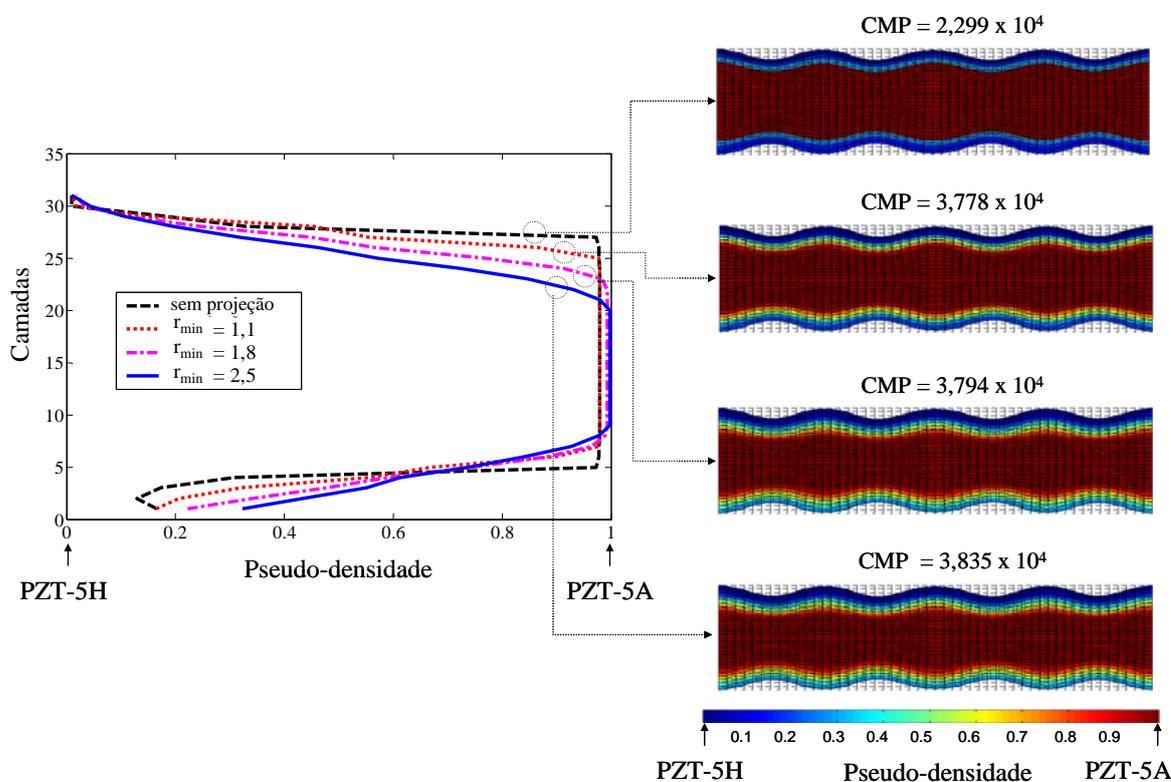


Figura 4.29. Exemplo de um TPGF com a CMP maximizada do modo de vibrar tipo pistão utilizando diversos valores de  $r_{min}$  na eq.(4.16).

Da Fig. 4.30(a) é claro que as configurações obtidas maximizam a CMP do modo de vibrar desejado; especificamente, se um raio  $r_{min}$  igual a 1,8 é utilizado, a distribuição de material encontrada permite incrementar a CMP desejada de  $2,299 \times 10^4$  até  $3,794 \times 10^4$ . Esse incremento é de 65%. Ou seja, a representatividade do modo de vibrar tipo pistão tem sido incrementada em 65% na resposta total do transdutor piezolétrico. Essa última afirmação é confirmada pela Fig. 4.30(b), a qual mostra a Constante Modal Piezolétrica normalizada dos 50 primeiros modos de vibrar (incluindo modos de vibrar piezolétricos e elásticos). Dessa Fig. 4.30(b) é observada a forte contribuição do modo tipo pistão (modo número 23) na resposta total; assim, a representatividade desse modo tipo pistão supera em 880% e 440% a representatividade do segundo e terceiro modo com maior CMP (modos adjacentes ao modo tipo pistão), respectivamente (modos número 18 e 26). Assim, o comportamento dinâmico do TPGF aqui projetado representa a conduta de um transdutor uni-modal.

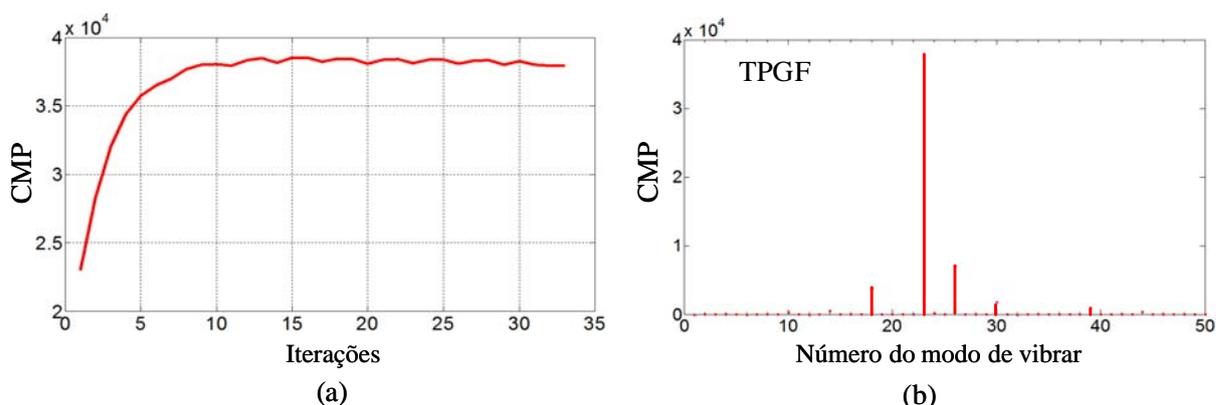


Figura 4.30. Exemplo de um TPGF com a CMP maximizada do modo de vibrar tipo pistão ( $r_{min} = 1,8$ ). (a) Curva de convergência da CMP; (b) CMPs dos primeiros cinquenta modos de vibrar.

### Projeto de um TPGF tipo multi-modal

No segundo exemplo é projetado um TPGF com conduta dinâmica tipo multi-modal, mas conservando-se o modo de vibrar tipo pistão da Fig. 4.18(a). Assim, maximizam-se a CMP do modo tipo pistão (modo inicial número 23, incluindo os modos elásticos, ver a Fig. 4.13), junto com o modo piezolétrico adjacente menor e

maior, modos número 19 e 25, respectivamente. Conseqüentemente, na função objetivo  $F_4$  são utilizados três termos ( $m = 3$ ). Todos os outros dados são iguais ao exemplo anterior.

A Fig. 4.31(a) mostra a forma de vibrar final após o processo de otimização. Esse modo representa um modo flextensional ao longo da espessura próximo do modo desejado tipo pistão (ver a Fig. 4.18(a)). Por outro lado, a Fig. 4.31(b) apresenta a distribuição de material final. Observa-se, ao igual dos exemplos anteriores, que a Técnica de Projeção de Material conduz a uma distribuição mais suavizada em relação ao caso sem projeção. Quando não é utilizada a Técnica de Projeção, o algoritmo de otimização tende a gerar distribuições discretas, valores das pseudo-densidades próximos de 0 ou 1. Com a Técnica de Projeção são obtidos valores intermediários. A distribuição de material final representa um TPGF com propriedades PZT-5A na superfície inferior e no centro do transdutor, e com propriedades PZT-5H na superfície superior.

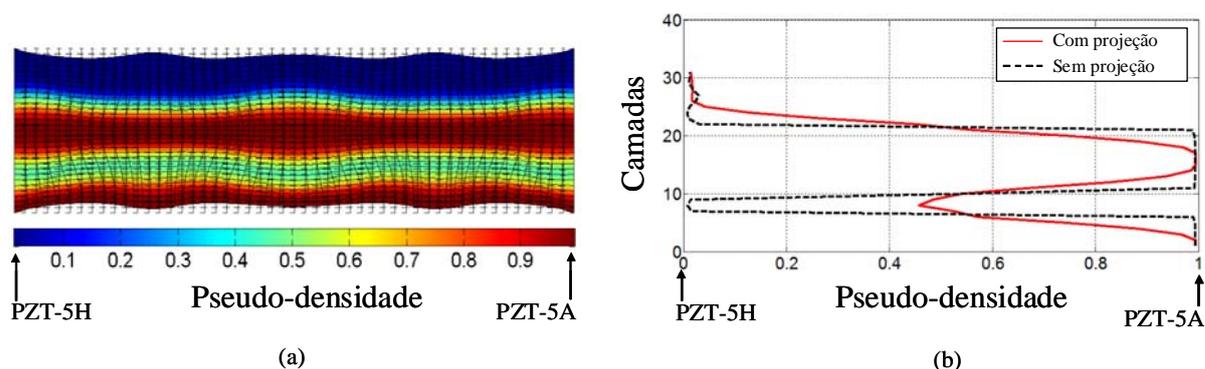


Figura 4.31. Exemplo de um TPGF tipo multi-modal. (a) Forma do modo de vibrar final; (b) distribuição de material final.

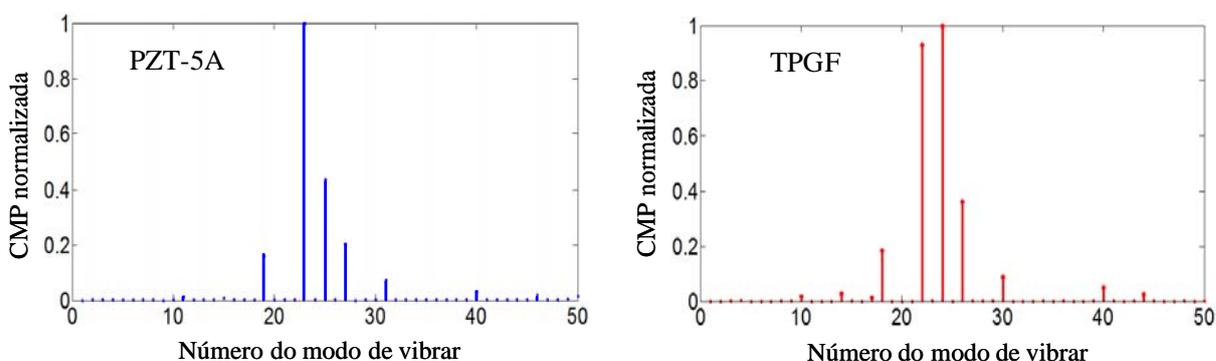


Figura 4.32. CMPs dos primeiros cinqüenta modos de vibrar de um transdutor não-MGF e de um TPGF tipo multi-modal projetado mediante o MOT.

A Fig. 4.32 mostra que o TPGF tem um comportamento dinâmico multi-modal (comportamento bi-modal); especificamente, dois modos de vibrar contribuem predominantemente com a resposta total do transdutor, o modo de vibrar final número 22 e 24. A CMP do modo de vibrar tipo pistão é incrementada aproximadamente 10%; o modo piezolétrico adjacente à direita é incrementado ao redor de 122%; e o modo piezolétrico adjacente à esquerda do modo tipo pistão é incrementado em 11%. Esse comportamento bi-modal fica mais claro ao comparar o comportamento dinâmico do transdutor inicial (transdutor PZT-5A da Fig. 4.32) com o do TPGF projetado mediante otimização topológica, ver a Fig. 4.32.

#### 4.5.6 Resultados de TPGF banda estreita e TPGF banda larga

No projeto de TPGF tipo banda larga e banda estreita foi utilizada uma malha de 50 x 30 elementos finitos gradados; como material *tipo 1* é utilizado um material piezolétrico PZT-5A, e como material *tipo 2* é utilizado um material piezolétrico PZT-5H. Em ambos casos, o domínio de projeto está exibido na Fig. 4.11(a), e o modo de vibrar desejado é o modo tipo pistão. Em todos os casos apresenta-se somente o resultado obtido utilizando a técnica de projeção com um raio de abrangência igual a  $r_{min} = 2$ .

#### Projeto de um TPGF banda estreita

A Fig. 4.33 mostra os resultados para o projeto de um TPGF tipo banda estreita. Maximizou-se a CMP do modo de vibrar número 23 no início da otimização, e minimizou-se o valor da CMP do modo adjacente à esquerda e direita do modo de vibrar número 23, modo de vibrar número 19 e 25, respectivamente (ver a Fig. 4.13 e Fig. 4.14 para identificar esses modos iniciais). Igualmente, objetivou-se o afastamento entre a frequência de ressonância do modo tipo pistão (modo de vibrar número 23) e dos dois modos de vibrar adjacentes (modos de vibrar 19 e 25). A Tabela 4.4 resume esses resultados.

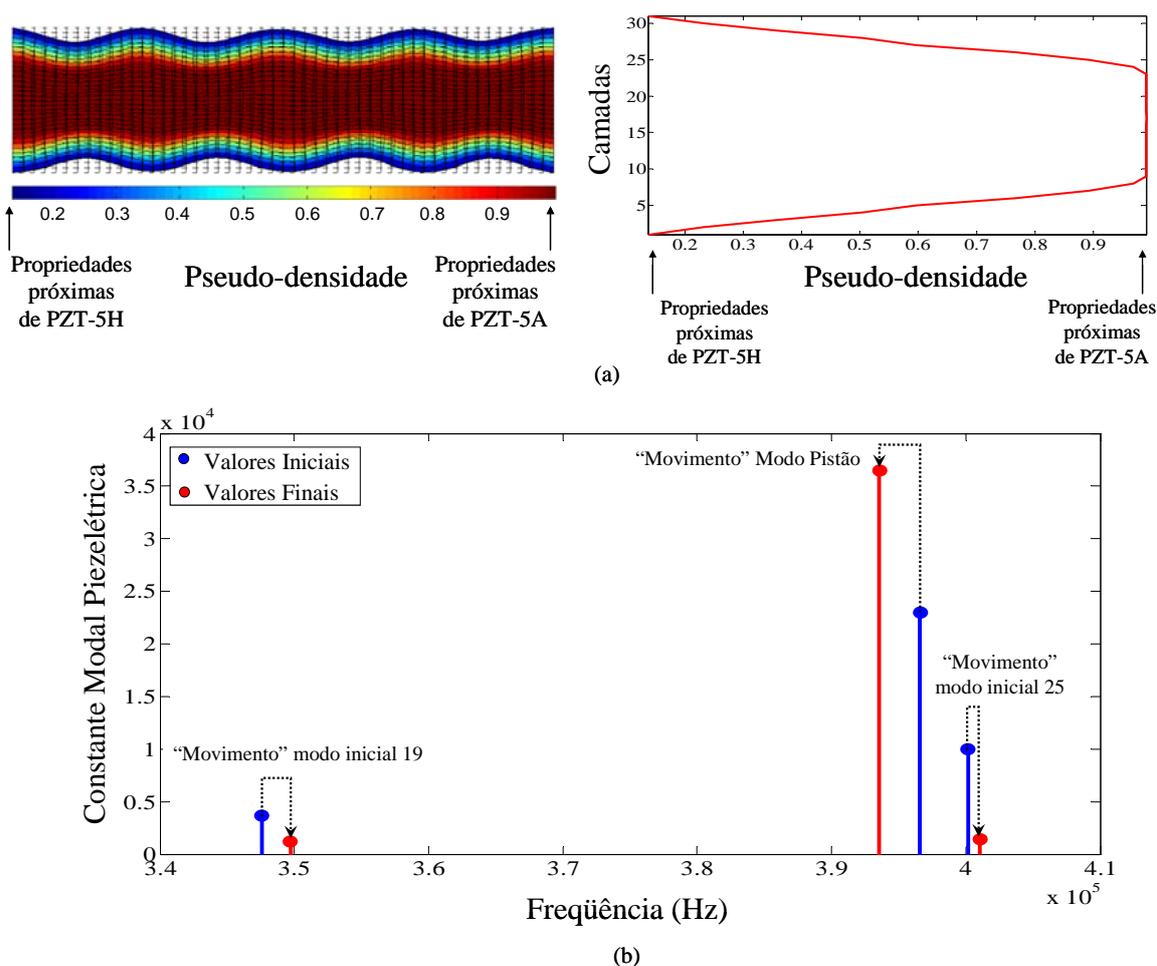


Figura 4.33. Exemplo de um TPGF banda estreita. (a) Forma do modo de vibrar final (modo final número 24) e distribuição de material final; (b) CMPs na faixa de 340 kHz a 410 kHz.

Tabela 4.4. Resumo dos resultados para o projeto de um TPGF tipo banda estreita.

Número do Modo		CMP ( $10^4$ )			Frequência (kHz)		
Inicial	Final	Inicial	Final	Diferença	Inicial	Final	Diferença
19	19	0,367	0,120	-67,3 %	347,57	349,74	0,6 %
23	24	2,299	3,647	58,6 %	396,61	393,62	-0,7 %
25	25	1,000	0,141	-85,9 %	400,17	401,06	0,2 %

A Tabela 4.4, em conjunto com a Fig. 4.33(b), mostra que efetivamente o modo desejado (modo final número 24) incrementa a sua CMP em aproximadamente 59%, enquanto os modos adjacentes finais número 19 e 25 diminuem a sua CMP em 67% e 86%, respectivamente. No entanto, a formulação não conseguiu afastar significativamente as frequências desses modos adjacentes da frequência do modo de vibrar tipo pistão (modo de vibrar final número 24); nesse caso, a diferença entre

os valores de freqüência de ressonância inicial e final foi menor que 1%. Contudo, uma vez que as CMPs dos modos finais adjacentes (modos de vibrar número 19 e 25) são menores em 294% e 249% respectivamente, em relação ao modo tipo pistão, as suas contribuições na resposta do TPGF operando na faixa de 340 - 410 kHz são desprezíveis; por conseguinte, pode-se afirmar que efetivamente o TPGF aqui projetado opera na faixa 340 - 410 kHz como um TPGF tipo banda estreita.

Por outro lado, da Fig. 4.33(a) pode-se observar que em efeito é alcançado o modo de vibrar tipo pistão no modo final número 24. Esse modo, e os resultados apresentados na Tabela 4.4, são obtidos mediante a função de distribuição de material da Fig. 4.33(a). Essa função representa uma distribuição de material PZT-5A no meio do transdutor, a qual gradualmente vai mudando para propriedades próximas de um material PZT-5H no extremo superior e inferior.

### **Projeto de um TPGF banda larga**

No caso do projeto de um TPGF banda larga, modifica-se o comportamento dinâmico do transdutor inicial PZT-5A na faixa de freqüência 340 – 410 kHz, o que corresponde aos modos iniciais número 19, 23 e 25 da Fig. 4.13 e Fig. 4.14. O modo tipo pistão está presente no modo de vibrar número 23. O objetivo deste projeto consiste em maximizar as CMPs dos modos de vibrar na faixa de freqüência desejada e aproximar a suas respectivas freqüências de ressonância.

A Tabela 4.5 e a Fig. 4.34 compilam os resultados obtidos. Observa-se da Fig. 4.34(a) que na faixa de freqüência desejada (340 – 410 kHz) conserva-se o modo de vibrar tipo pistão. Esse modo corresponde ao modo de vibrar final número 23, o qual mantém uma alta correlação com o modo de pistão desejado. A função de distribuição de material achada para o TPGF tipo banda larga se observa na Fig. 4.34(a). Essa função representa um TPGF com propriedades de um PZT-5H, na superfície superior e inferior, e no meio do transdutor. Ao redor da camada número 10 e 23, o transdutor apresenta propriedades próximas de um material piezelétrico PZT-5A.

Com a distribuição de material achada através do MOT se consegue um incremento das CMPs de todos os três modos considerados; assim, essas CMPs

foram incrementadas ao redor de 15%; 15% e 181%, nos modos de vibrar número 19, 23 (modo de vibrar tipo pistão) e 25, respectivamente (ver a Tabela 4.5 e a Fig. 4.34(b)). Igualmente, conseguiu-se aproximar as freqüências de ressonância de cada um desses modos, o qual é observado na Fig. 4.34(b). No entanto, ao igual que no projeto de TPGF banda estreita essa alteração nas freqüências foi menor ou igual a 1%.

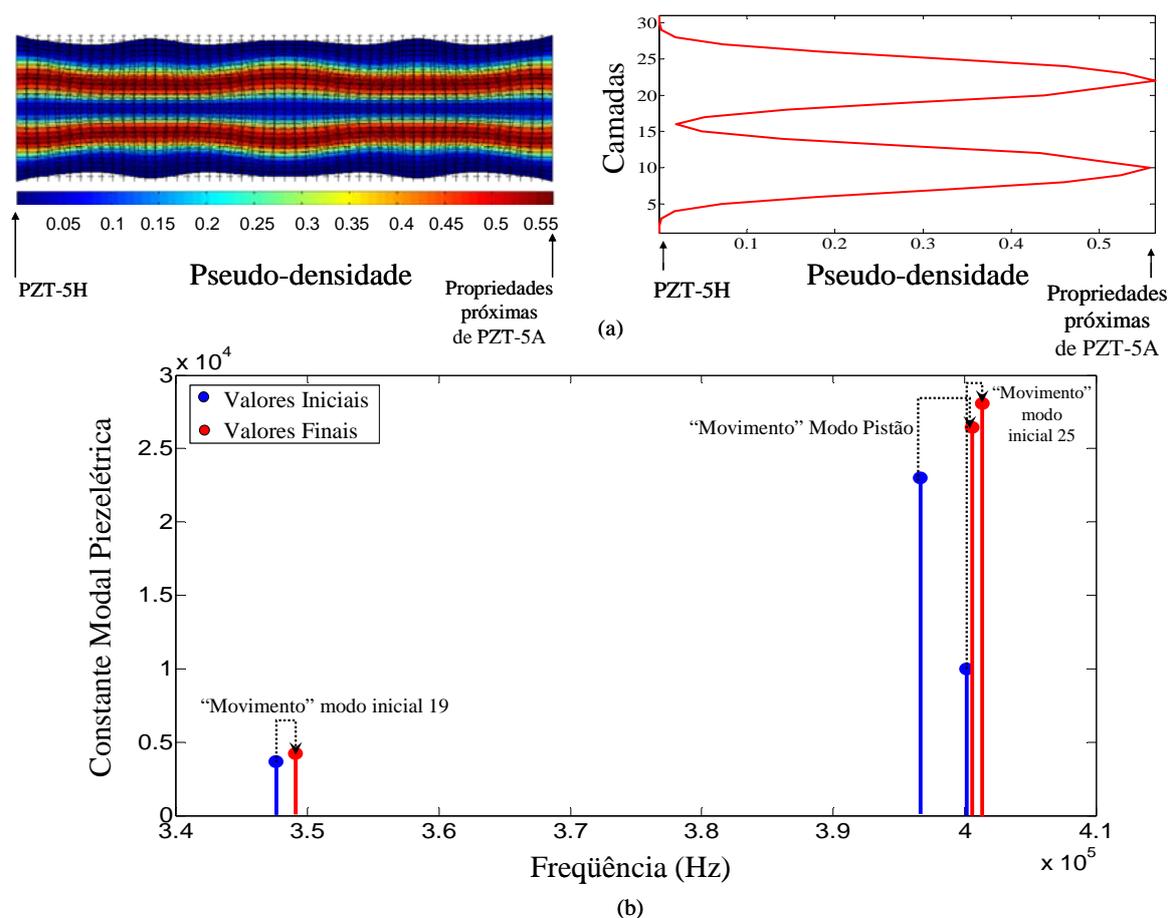


Figura 4.34. Exemplo de um TPGF banda larga. (a) Forma do modo de vibrar final e distribuição de material final; (b) CMPs na faixa de 340 kHz a 410 kHz.

Tabela 4.5. Resumo dos resultados para o projeto de um TPGF tipo banda larga.

Número do Modo		CMP (10 <sup>4</sup> )			Frequência (kHz)		
Inicial	Final	Inicial	Final	Diferença	Inicial	Final	Diferença
19	19	0,367	0,423	15,2%	347,57	349,04	0,4%
23	23	2,299	2,641	14,8%	396,61	400,58	1,0%
25	25	1,000	2,808	180,8%	400,17	401,37	0,2%

Para tornar o programa mais eficiente com relação à mudança dos valores de frequência de ressonância, em conjunto com mudanças dos valores de CMPs, podem-se formular novas funções objetivo para o projeto desse tipo de TPGF banda larga e banda estreita, ou podem-se procurar outros espaços de solução viáveis através da variação das condições e parâmetros de otimização iniciais.

#### 4.5.7 Resultados para atuadores piezelétricos flexensionais gradados

No projeto de atuadores piezelétricos flexensionais gradados é maximizada a função objetivo  $F_7$ , ver a eq.(4.7). Neste caso, utiliza-se o domínio de projeto da Fig. 4.11(c), e são combinados os materiais base PZT-5A (material *tipo 1*), resina epóxi (material *tipo 2*), e propriedades do ar (material *tipo 3*). O objetivo principal é maximizar a amplitude de vibração vertical do ponto A e minimizar essa do ponto B (ver Fig. 4.11(c)), do primeiro modo de vibrar ( $k = 1$ ). Esse primeiro modo é apresentado na Fig. 4.35(a), o qual é calculado assumindo um transdutor não-gradado, com propriedades de um material PZT-5A e tamanho de malha de 80 x 50 elementos finitos. Os outros parâmetros da otimização estão presentes na Tabela 4.2.

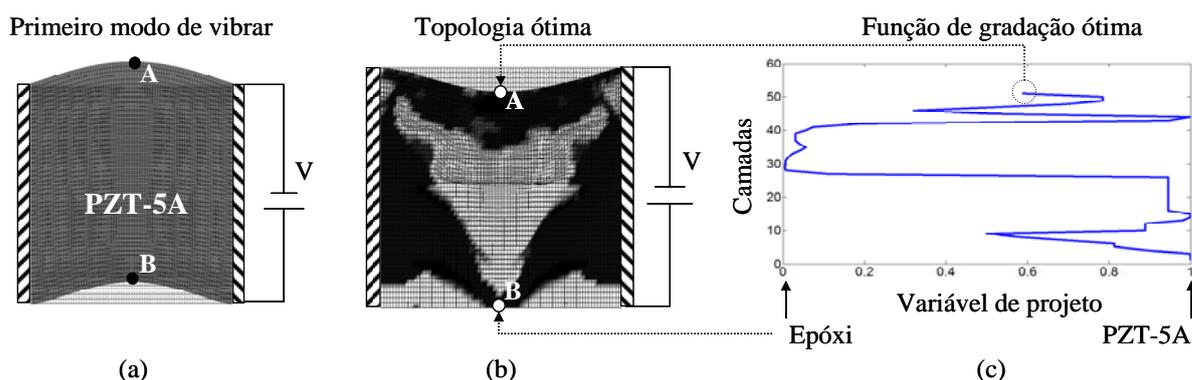


Figura 4.35. Exemplo de um atuador piezelétrico flexensional considerando o domínio de projeto da Fig. 4.11(c). (a) Primeiro modo de vibrar sem gradação; (b) topologia ótima encontrada com o MOT; (c) função de gradação de material ótima.

A Fig. 4.35(b) apresenta a topologia e distribuição de material ótima após o processo de otimização. Do atuador deformado observa-se que efetivamente a amplitude de

vibração relativa do ponto A é maximizada e no ponto B é significativamente minimizada, cumprindo-se assim com os objetivos de projeto. Esses resultados podem ser conferidos ao observar o histórico de convergência da amplitude de vibração relativa nos pontos A e B, ver a Fig. 4.36. Por outro lado, a gradação de material do atuador apresentado na Fig. 4.35(a) representa uma estrutura com regiões de resina epóxi próximas do meio, e regiões com valores altos de propriedades piezelétricas (propriedades próximas de um material PZT-5A) na base do atuador.

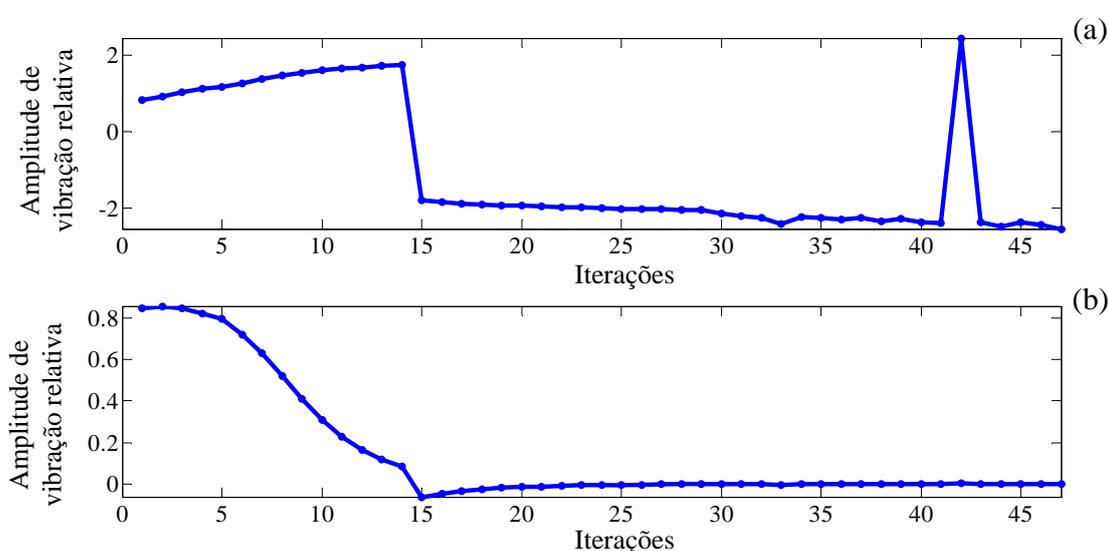


Figura 4.36. Curvas de convergência de: (a) amplitude de vibração relativa no ponto A da Fig. 4.35(b); (b) amplitude de vibração relativa no ponto B da Fig. 4.35(b).

Neste ponto, é importante ressaltar uma aplicação interessante dos programas desenvolvidos até agora nessa tese. Especificamente, estende-se, com pequenas modificações, o programa *piezoFlexMOT*, desenvolvido para o projeto de atuadores piezelétricos flexensionais gradados, para o projeto de estruturas não-piezelétricas, que serão chamadas de Estruturas com Gradação Funcional (EGF). Em essência, as modificações consistem somente em reduzir o problema piezelétrico (combinação de problemas mecânicos e elétricos) a um problema mecânico “puro”; o que é obtido, no programa *piezoFlexMOT*, não considerando o efeito das propriedades piezelétricas e dielétricas na resposta da estrutura. Para exemplificar essa aplicação, o programa *piezoFlexMOT* é utilizado para o projeto de uma EGF que vibra no primeiro modo seguindo parâmetros pré-definidos.

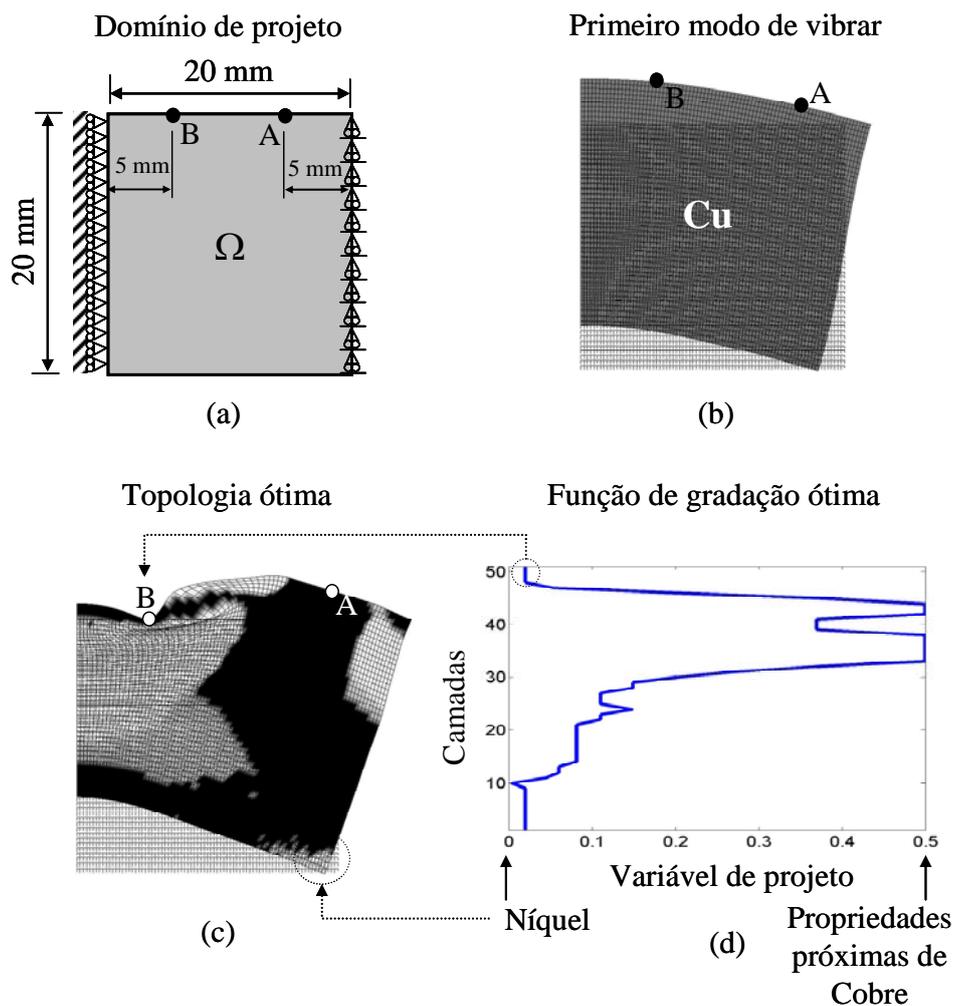


Figura 4.37. Exemplo de uma EGF: (a) domínio de projeto; (b) primeiro modo de vibrar sem gradação (somente Cobre); (c) topologia ótima encontrada com o MOT; (d) função de gradação de material ótima.

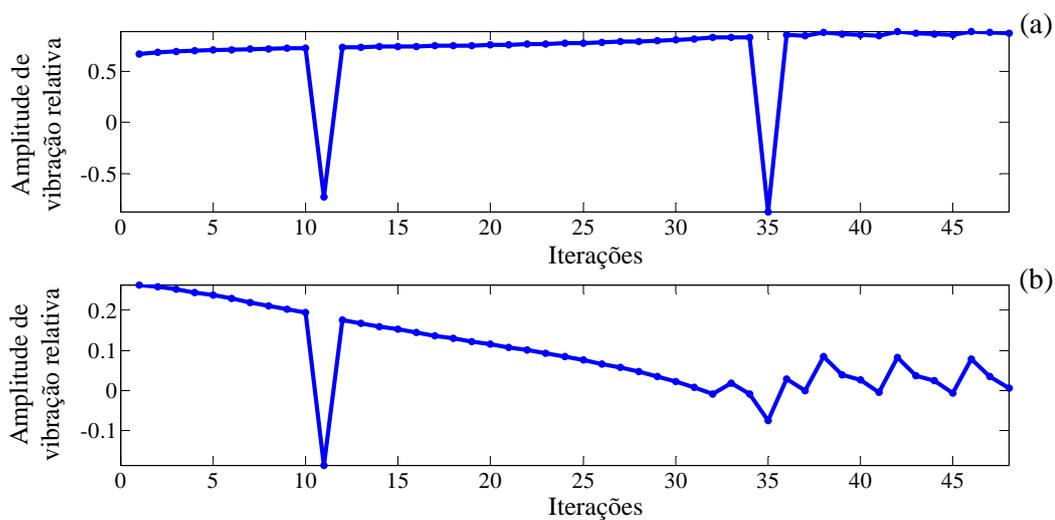


Figura 4.38. Curvas de convergência de: (a) amplitude de vibração relativa no ponto A da Fig. 4.37(c); (b) amplitude de vibração relativa no ponto B da Fig. 4.37(c).

O domínio de projeto da EGF é apresentado na Fig. 4.37(a), onde o objetivo principal é maximizar a amplitude de vibração no ponto A, e minimizar essa amplitude no ponto B, ambos requisitos para o primeiro modo de vibrar. Como materiais base utilizam-se Cobre e Níquel, e é assumido como material inicial somente Cobre ( $\rho_{2_{TOM}}^n = 1$ ), ao início do processo iterativo do MOT. As propriedades do Cobre e Níquel resumem-se na Tabela 4.6. Utiliza-se uma discretização de 80 x 50 elementos finitos, e o modo de vibrar inicial é calculado considerando um domínio de projeto com somente Cobre, Fig. 4.37(b).

Tabela 4.6. Propriedades utilizadas no exemplo da Fig. 4.37.

<b>Propriedade</b>	<b>Cobre</b>	<b>Níquel</b>
Módulo de Young (GPa)	115	200
Módulo de Poisson	0,34	0,31
Densidade (Kg/m <sup>3</sup> )	8940	8908

Após a otimização, observa-se da Fig. 4.37(c) que a topologia e a função de gradação ótima reduzem a amplitude de vibração relativa no ponto B e incrementa a do ponto A. Esses resultados são confirmados pelos gráficos apresentados na Fig. 4.38, onde é observado que a amplitude de vibração relativa do ponto A é incrementada e aquela do ponto B é minimizada ao longo do processo iterativo do MOT. Por outro lado, a função de gradação exibe uma EGF com propriedades próximas do Níquel, na base e no topo da estrutura, e propriedades de aproximadamente 50% Níquel e 50% Cobre, no intervalo limitado pelas camadas número 30 e 45, ver Fig. 4.37(d).

## 4.6 Considerações finais

Esse capítulo apresentou um estudo sistemático do projeto de TPGFs projetados mediante o Método de Otimização Topológica, com o objetivo principal de modificar, segundo a aplicação do transdutor, o seu comportamento dinâmico.

O MOT permitiu encontrar a gradação ótima de propriedades visando o aumento do desempenho de TPGFs, segundo seis (6) funções objetivo ( $F_i, i = 1, \dots, 6$ ). Cada uma dessas seis funções objetivo foi definida para satisfazer diversos requisitos, de acordo à aplicação do transdutor, entre eles, projeto de ressonadores piezelétricos, transdutores de ultra-som piezelétricos, e projeto de transdutores piezelétricos tipo banda larga e banda estreita. Adicionalmente, no projeto de atuadores piezelétricos flexensionais (função objetivo  $F_7$ ), encontram-se simultaneamente a topologia e a lei de gradação de material, visando configurar a forma de vibrar da estrutura num modo específico. Por último, em forma de exemplo, apresentou-se o projeto de uma EGF (estruturas gradadas não-piezelétricas), em aplicações dinâmicas.

As seguintes conclusões podem ser esboçadas dos resultados apresentados nesse capítulo:

- O MOT pode ser aplicado com êxito para o projeto sistemático e genérico de TPGFs; especificamente, para encontrar a gradação ótima de propriedades visando a maximização de alguma função objetivo.
- A formulação proposta neste capítulo é uma formulação genérica para o projeto de TPGF independente do tipo de material definido como material *tipo 1* ou material *tipo 2*. Assim, podem-se combinar dois tipos de materiais piezelétricos, para gerar TPGFs piezelétrico/piezelétrico, ou combinar um material piezelétrico com um material não-piezelétrico, para projetar TPGF piezelétrico/não-piezelétrico.
- A Técnica de Projeção de Material permite encontrar funções de gradação que representam mudanças suaves de propriedades ao longo da direção de gradação. Essas gradações suavizadas são desejadas para evitar mudanças bruscas de material e, por conseguinte, facilitar a manufatura do TPGF. Adicionalmente, a manufatura dos TPGF, projetados neste capítulo, torna-se viável pelo fato de utilizar uma estratégia de otimização tipo multicamada; assim, é possível fabricar TPGF através da técnica de SPS, uma vez que essa técnica se baseia na preparação preliminar de estruturas multicamadas em verde para a sua posterior sinterização por SPS. Algumas amostras de estruturas MGF, fabricadas pelo autor mediante SPS, serão apresentadas no próximo capítulo.

- A formulação do MAC permitiu “acompanhar” um modo de vibrar específico, do contrário, teria sido complexo prever com exatidão o modo desejado e definido pelo usuário a cada passo de iteração do MOT. Assim, foi possível projetar TPGF visando aplicações de ultra-som, através da alteração da sua conduta dinâmica, e mantendo-se o modo de vibrar tipo pistão, desejável para geração de ondas acústicas (lembre-se que o modo tipo pistão está associado a grandes valores de CMP).

- Os exemplos numéricos demonstraram que o MOT em conjunto com o conceito de MGF pode incrementar o valor de frequência de ressonância de modos previamente definidos pelo usuário, com incrementos superiores a 50%. Adicionalmente, o método proposto permite projetar ressonadores piezelétricos que vibram segundo modos e frequências de ressonância definidas no início do processo iterativo. Nesse caso, foram obtidos transdutores que vibram com diferenças menores que 1% dos valores de frequências de ressonância desejados, seguindo modos altamente correlacionados com os definidos pelo usuário. Por outro lado, foram projetados TPGF com incrementos superiores a 65% no valor inicial da CMP do modo de vibrar tipo pistão, o qual permite o projeto de TPGF tipo banda larga e banda estreita que podem ser aplicados como filtros, sonares de alta resolução, na aquisição de imagens médicas, ou em ensaios não-destrutivos.

- Já em relação ao projeto de TPGF, considerando a maximização da função objetivo  $F_7$ , introduziu-se a metodologia para o projeto de: (i) atuadores flexionais gradados, nos quais a interface entre a estrutura flexível elástica e o material piezelétrico é significativamente reduzida através do conceito MGF; e (ii) o exemplo apresentado na Fig. 4.35 abre a possibilidade de projetar motores piezelétricos gradados, uma vez que utilizando o conceito MGF e o MOT foi possível configurar a forma de vibrar de um modo específico, o qual é a base no projeto de motores piezelétricos do tipo *standing-wave*.

No caso de um motor do tipo *standing-wave* (KOC et al., 2002) são excitados dois modos de vibrar que possuem componentes de vibração ortogonais. Assim, uma única fonte de excitação (uma única cerâmica piezelétrica), acoplada a uma estrutura flexível, pode excitar dois modos de vibrar ao mesmo tempo, para gerar um movimento elíptico; sempre que a frequência de excitação for a média entre as

freqüências de ressonância dos modos excitados. Sendo assim, no caso de motores piezelétricos, pode-se utilizar o programa *piezoFlexMOT* para encontrar a função de gradação de material e a topologia que direcionem dois modos de vibrar próximos a assumir formar desejadas.

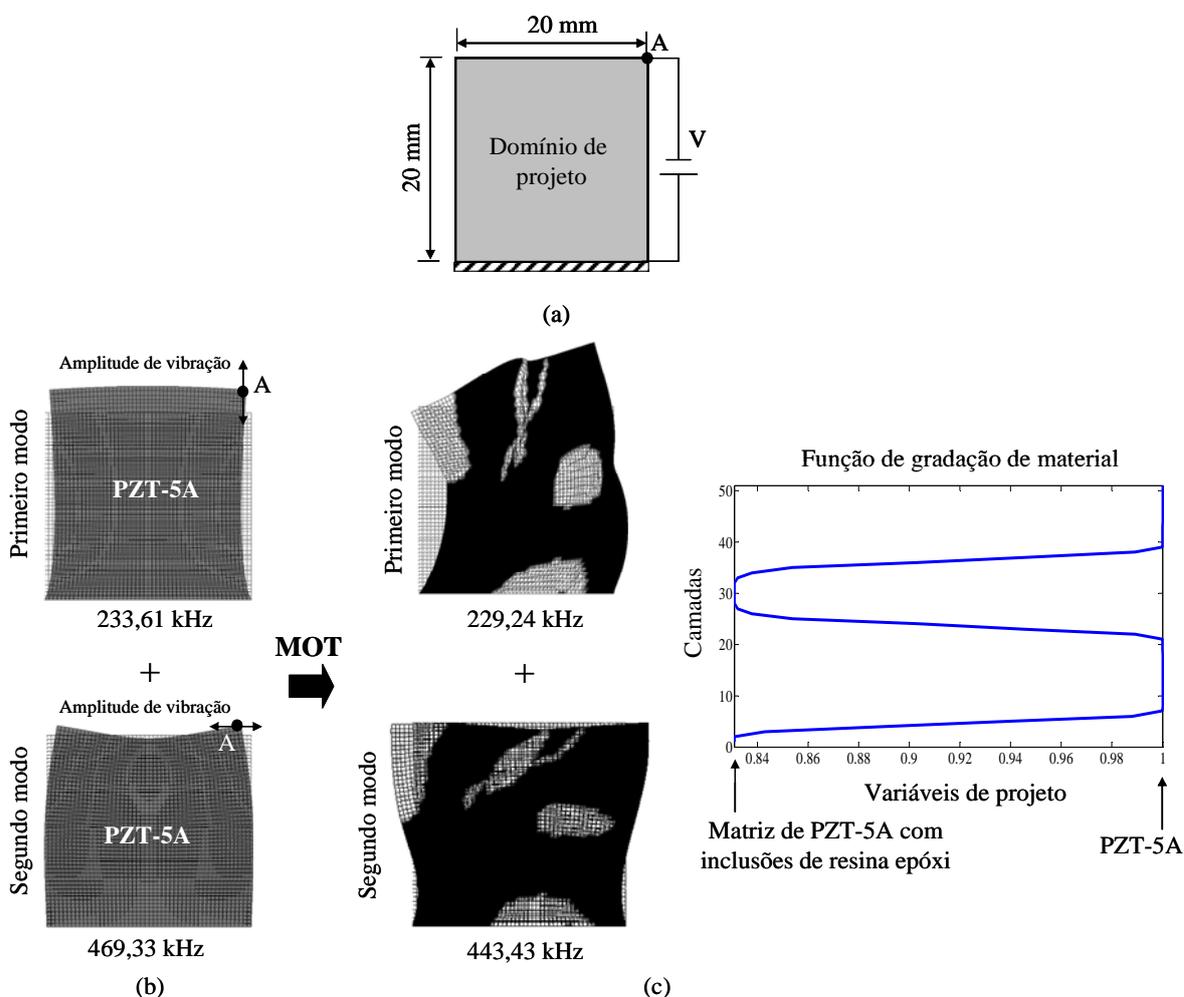


Figura 4.39. Exemplo do projeto preliminar de um motor piezelétrico MGF: (a) domínio de projeto; (b) primeiro e segundo modo de vibrar considerando somente material PZT-5A; (c) resultado utilizando o programa *piezoFlexMOT* (gradação de material e topologia ótima).

Como exemplo dessa aplicação do programa *piezoFlexMOT*, considere o domínio de projeto da Fig. 4.39(a), e como objetivo de projeto, maximizar as componentes de vibração ortogonais, no ponto A, dos dois primeiros modos de vibrar. Assim, para o primeiro modo, é maximizada a amplitude de vibração vertical relativa no ponto A, e para o segundo modo, a componente horizontal de vibração relativa no mesmo ponto A. No exemplo, é utilizada uma malha de 50 x 50 elementos finitos, e como material *tipo 1*, propriedades de PZT-5A, e material *tipo 2*, resina Epóxi. Os modos

de vibrar iniciais correspondem aos de uma estrutura composta somente de PZT-5A, ver Fig. 4.39(b), vibrando a 233,61 kHz e 469,33 kHz no primeiro e segundo modo, respectivamente.

Como se observa da Fig. 4.39(c), com o programa *piezoFlexMOT* foi possível obter a topologia e distribuição de material ótimas; resultados que, em conjunto, maximizam a amplitude de vibração vertical no ponto A no primeiro modo (com frequência de ressonância de 229,24 kHz) e, simultaneamente, maximizam a amplitude ortogonal no ponto A no segundo modo de vibrar (com frequência de ressonância de 443,43 kHz). Por conseguinte, as idéias utilizadas na implementação do programa *piezoFlexMOT* colocam as bases para o projeto sistemático e genérico de novos motores piezelétricos, mediante a utilização do MOT e do conceito de MGF.

## 5 FABRICAÇÃO PRELIMINAR DE TPGF

### 5.1 Introdução

Este capítulo visa apresentar a fabricação de TPGF mediante o método de Sinterização por Jato de Plasma ou *Spark Plasma Sintering* (SPS). Embora não seja o foco principal da tese, a qual está centrada na análise e projeto de TPGF, considera-se importante demonstrar que é viável a fabricação dos TPGF apresentados nos capítulos anteriores e, em geral, que é viável no Brasil a fabricação de TPGF.

Como foi comentado no capítulo 1, a fabricação de TPGF pode ser abordada mediante as técnicas da metalurgia de pó (ICHINOSE, et al., 2004; LI et al., 2005b; TAKAGI, et al., 2003; ZHANG et al., 2006a) e de *Electrophoretic deposition* – EPD (CHEN et al., 2004a; LI et al., 2005a). As amostras fabricadas seguem a primeira abordagem; especificamente, foram fabricadas utilizando a técnica de SPS. Vale salientar que a fabricação tornou-se possível devido ao fato de que o Laboratório de Sensores e Atuadores da EPUSP adquiriu no início do ano 2008 uma máquina de SPS, único equipamento dessa tecnologia na América do Sul. Por outro lado, além de apresentar a fabricação de TPGF, o capítulo descreve a metodologia que deve ser utilizada na sua caracterização. Assim, após a fabricação de TPGF mediante SPS: (i) observa-se a gradação microestrutural utilizando microscópio ótico e Microscópio Eletrônico de Varredura (MEV); (ii) caracterizam-se as amostras mediante análise de espectrometria; e (iii) é caracterizado o seu comportamento dinâmico mediante o levantamento da curva de impedância elétrica. É importante destacar que a fabricação de TPGF não é uma tarefa simples e, devido à sua complexidade, os primeiros trabalhos foram direcionados à fabricação e caracterização de EGF (maiores detalhes no Apêndice D), misturando-se materiais isotrópicos (Cobre e Níquel). Essa fabricação, além de permitir o aprendizado e a familiarização com os procedimentos próprios da SPS, permitiu validar experimentalmente o módulo mecânico do programa *piezoEFG* (vide Apêndice D).

O capítulo é organizado como segue: a Seção 5.2 apresenta os princípios da fabricação por SPS. Os detalhes da fabricação de TPGF (do tipo Níquel/PZT-5A)

são apresentados na Seção 5.3. Nessa mesma seção são apresentados os detalhes da caracterização microestrutural e dinâmica. Por último, a Seção 5.4 apresenta os comentários finais em relação aos resultados obtidos.

## 5.2 Sinterização por Jato de Plasma ou SPS

A Sinterização por Jato de Plasma é um processo de sinterização com aplicação simultânea de baixas voltagens, pulsos de alta densidade de corrente elétrica, e pressão uniaxial. Assim, na SPS utiliza-se corrente elétrica pulsada em combinação com aquecimento rápido e aplicação de pressão visando alcançar a sinterização final num curto período de tempo. A Figura 5.1(a) apresenta a configuração típica do sistema SPS (MUNIR et al., 2006). Na sinterização por SPS, as amostras em “verde” ou não-sinterizadas são colocadas diretamente num molde de grafite dentro de uma câmara de vácuo com resfriamento a base de água, onde punções de grafite atuam como eletrodos e como mecanismo de pressurização de deslocamento vertical. Todos os parâmetros são controlados por unidades de medição e controle de posição, corrente, vácuo e temperatura. A Figura 5.1(b) apresenta a máquina de SPS utilizada no Laboratório de Sensores e Atuadores da EPUSP, a qual se baseia na configuração apresentada na Figura 5.1(a).

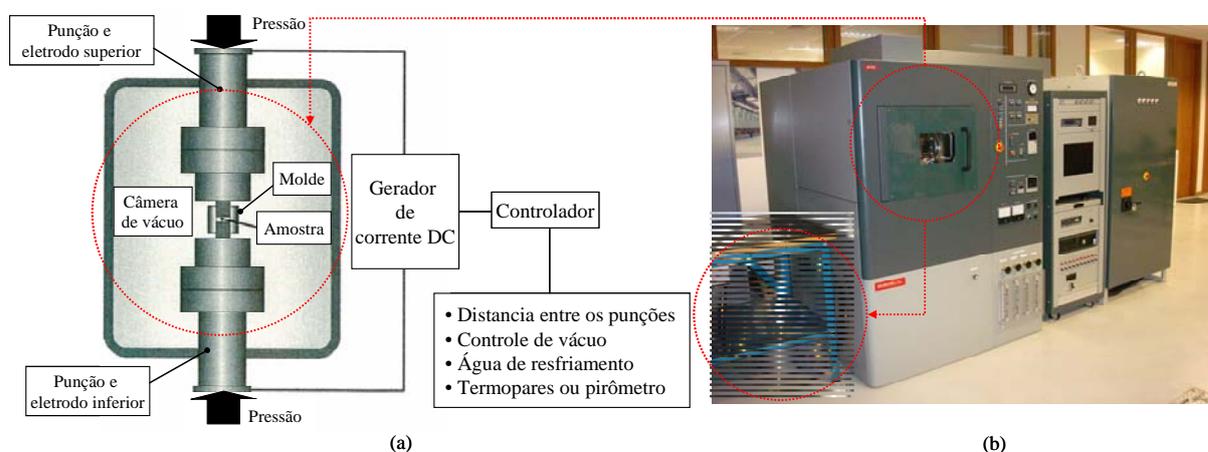


Figura 5.1. (a) Configuração típica de um sistema SPS; (b) fotografia da máquina SPS marca Dr. SINTER disponível na EPUSP.

O método de Sinterização por Jato de Plasma é similar ao método de prensagem a quente. Nesse último, o principal fator que promove a densificação é o aquecimento gerado por uma resistência elétrica e o fluxo plástico dos materiais devido à aplicação uniaxial de pressão. No caso do processo de SPS, além desses fatores, pulsos de voltagem com altas correntes são aplicados diretamente no molde de grafite e na estrutura em verde ou pó. A corrente elétrica é forçada a escolher o caminho com menor resistência, o qual normalmente corresponde aos pontos de contato entre partículas de pó, ver Fig. 5.2. O pó é aquecido pela descarga entre as partículas e pela corrente através do molde de grafite. Devido às descargas, as superfícies das partículas são ativadas e purificadas e um fenômeno de auto-aquecimento é gerado entre elas, permitindo que a transferência de calor e de massa seja efetuada de forma rápida (TOKITA, 2000). Normalmente, quando o pó é condutivo o aquecimento se deve ao efeito Joule, enquanto para pó não-condutivo, o aquecimento acontece pela transferência de calor desde o molde e desde os punções ao pó. A pressão uniaxial acelera os processos de difusão e densificação.

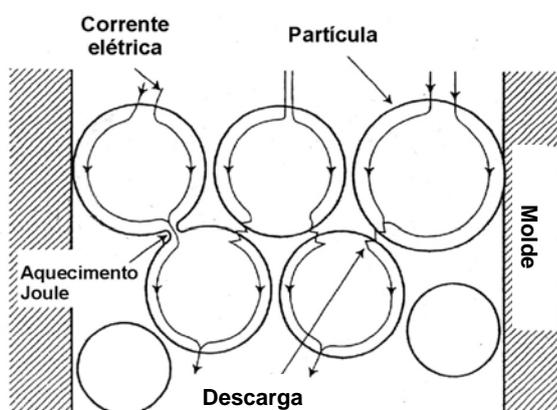


Figura 5.2. Fluxo dos pulsos de corrente elétrica através das partículas de pó (TOKITA, 2000).

A formação de jato de plasma durante o aquecimento gerado pelas descargas elétricas é tema de discussão na literatura atual (MAMEDOV, 2002; MUNIR et al., 2006), sendo que alguns autores preferem chamar o método de Sinterização por Corrente Elétrica Pulsada ou *Pulsed Electric Current Sintering* – PECS (MUNIR et al., 2006). Contudo, o processo de SPS ou PECS é caracterizado pela alta eficiência térmica devido ao aquecimento direto do molde de grafite e do pó a ser sinterizado, pela passagem de altas correntes alternadas. Esse processo oferece várias

vantagens em relação aos processos convencionais (prensagem a quente, prensagem isostática a quente, e sinterização sem pressão seguida de prensagem isostática a quente), incluindo a facilidade de operação, alta velocidade de sinterização, alta reprodutibilidade, segurança e confiabilidade, além de apresentar menor consumo energético, o qual é em torno de um terço a um quinto menor do que nos processos citados acima (MUNIR et al., 2006; TROMBINI, 2007). Adicionalmente, a importância da SPS, como ferramenta para a consolidação de pós, evidencia-se pelo grande número de artigos relacionados e publicados a partir da década passada. Munir et al. (2006) mostram que o crescimento no número de publicações relacionadas com SPS é exponencial a partir do ano 1994, sendo que a vasta maioria dos artigos provém do Japão, China e Coreia.

## **5.3 Fabricação de TPGFs**

### **5.3.1 Fabricação**

Nesta seção apresentam-se os resultados de fabricar TPGFs mediante a técnica de SPS. Diversas amostras de TPGF do tipo piezelétrico/metal foram manufaturadas; especificamente, combinando um material PZT-5A com Níquel. No entanto, na maioria dos casos, as amostras não podiam ser polarizadas, ou a consolidação dos pós era suficientemente débil para permitir a completa densificação da estrutura. Entre as tentativas, manufaturaram-se amostras de TPGF do tipo Ni-PZT, variando ao longo da espessura desde uma camada de 100% Níquel até uma de 100% PZT-5A, e amostras com porcentagem menores de Níquel (até 60% de Níquel). Entre os problemas apresentados destacam-se: (i) a obtenção de amostras eletricamente condutivas, o que impossibilita a sua polarização, e (ii) a esfoliação entre camadas. Contudo, resultados satisfatórios foram obtidos com a porcentagem de pós e distribuição de camadas como a observada na Fig. 5.3. Essa configuração de camadas em verde corresponde a uma estrutura que varia as suas propriedades desde uma camada de 1 mm de espessura com 40% Níquel (porcentagem de peso)

e 60% PZT-5A até uma camada de 2 mm de espessura com propriedades de PZT-5A “puro” (100% PZT-5A).

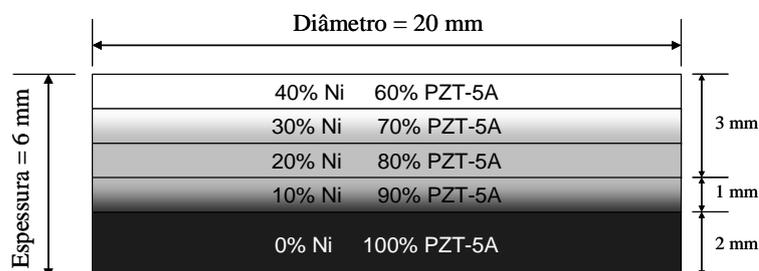


Figura 5.3. Estrutura de camadas em verde de um TPGF antes da sinterização.

A escolha de Níquel, como material a combinar com o PZT-5A, deve-se ao fato que é um material não reportado na literatura na manufatura de TPGF. Como comentado no capítulo 1, até agora, os TPGF manufaturados utilizam Platina (Pt) (LI et al., 2001a), Zinco (Zn) (JIN et al., 2003), Ferro (Fe) (ADIKARY et al., 2000), Cobre (Cu) (FANG et al. 2003), e Prata (SHIH, THUAN (2004); ZHANG et al. (2006a); ZHANG et al. (2006b)). Além disso, o Níquel, por ser um material relativamente econômico, pode ser amplamente utilizado em aplicações industriais; por exemplo, na manufatura de TPGF de ultra-som que gerem um único pulso acústico, como esses descritos no capítulo 2. Assim, nessas aplicações, os TPGF Ni-PZT aqui manufaturados gerariam, ao serem excitados eletricamente, um pulso de ultra-som muito maior da superfície com 100% de propriedades PZT-5A (superfície inferior na Fig. 5.3), em relação ao pulso gerado pela superfície oposta (40% Níquel e 60% PZT-5A).

Tabela 5.1. Parâmetros programados na máquina de SPS para fabricar um TPGF.

Passo	Tempo (min)	Temperatura (°C)	Carregamento (kN)
1	START	23	1
2	9	900	15.7
3	10	960	15.7
4	11	995	15.7
5	16	1000	15.7
6	17	0	15.7
7	END	0	1

Os parâmetros utilizados na fabricação são apresentados na Tabela 5.1. A sinterização é iniciada no passo número 1, configurando os valores iniciais de temperatura e pressão. Posteriormente, a temperatura é acrescentada de forma gradual, durante 11 minutos, desde 23 °C (temperatura ambiente) até o início da temperatura de sinterização (995-1000 °C), com uma pressão axial de 50 MPa (ou carregamento de 15,7 kN). A seguir, mantém-se durante 4 minutos a temperatura de sinterização e o carregamento de 15,7 kN. Para finalizar, inicia-se o processo de resfriamento.

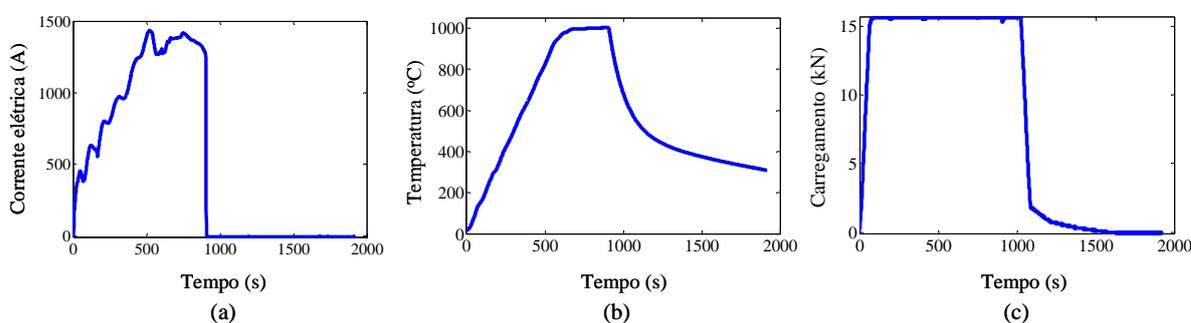


Figura 5.4. Evolução da (a) corrente elétrica, (b) temperatura e (c) carregamento durante o processo de sinterização de um TPGF do tipo Ni-PZT.

Utilizando os parâmetros da Tabela 5.1 foram fabricadas três amostras de TPGF Ni-PZT visando a sua caracterização experimental (microestrutura e impedância elétrica). Todas as amostras têm dimensões de 20 mm de diâmetro e 6 mm de espessura. A Fig. 5.4 mostra a evolução das três principais variáveis que intervêm no processo de sinterização de uma amostra de TPGF Ni-PZT: corrente elétrica (Fig. 5.4(a)); temperatura (Fig. 5.4(b)); e pressão (Fig. 5.4(c)). Observa-se que durante o aquecimento, a curva de temperatura “segue” a curva de corrente elétrica, e que após a corrente elétrica se tornar zero, começa o processo de resfriamento da amostra. Durante a manutenção da temperatura de sinterização, a corrente elétrica alcança o seu valor máximo, o qual oscila entre 1272 A e 1420 A. Um minuto após que a corrente elétrica chega a zero, o carregamento axial se reduz de 15,7 kN a 2 kN, e a partir desse valor, gradualmente vá diminuindo até 1 kN. Da Fig. 5.4(b) pode-se observar que a amostra é retirada da câmara de sinterização quando a temperatura chega a 308 °C.

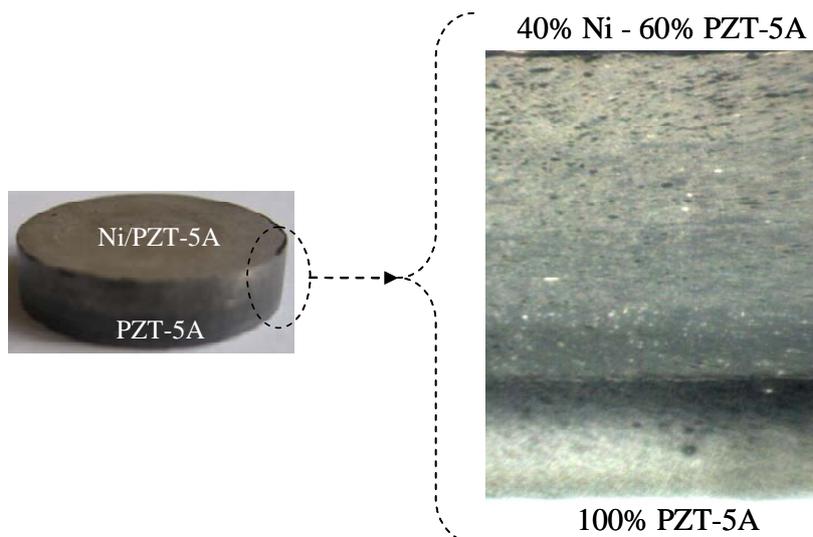


Figura 5.5. Amostra de um TPGF Ni-PZT fabricado utilizando a técnica de SPS.

Na Fig. 5.5 é apresentada uma das amostras de um TPGF Ni-PZT fabricada mediante SPS. Observa-se a gradação na parte externa da estrutura. Pode-se ver a gradação ao longo da espessura, de uma camada superior de cor mais clara (mistura de Ni e PZT-5A) até uma camada inferior de cor mais escura (100% PZT-5A). A aparência escura do PZT-5A é devido ao fato de que durante o processo de sinterização o PZT é reduzido (EIRAS, 2009); no entanto, como reportado por Eiras (2009), fazendo um tratamento a 600 – 700 °C em ar, por aproximadamente duas horas, as amostras se oxidam e recuperam a coloração “amarela” característica de materiais PZT. Por outro lado, a Fig. 5.5 mostra uma fotografia obtida com o equipamento Lupa do Departamento de Metalurgia da EPUSP, onde se observa a gradação, ao longo da espessura, de uma matriz de PZT-5A com inclusões de Níquel, na superfície superior, até uma camada de material PZT-5A “puro”.

### 5.3.2 Caracterização

#### Caracterização microestrutural

Nesta seção apresenta-se a caracterização da microestrutura de um TPGF fabricado por SPS. Os equipamentos utilizados são um microscópio ótico OM BX60 OLYMPS

e um microscópio eletrônico de varredura (MEV) PHILIPS XL-30, ambos disponíveis no Departamento de Metalurgia e de Materiais da EPUSP.

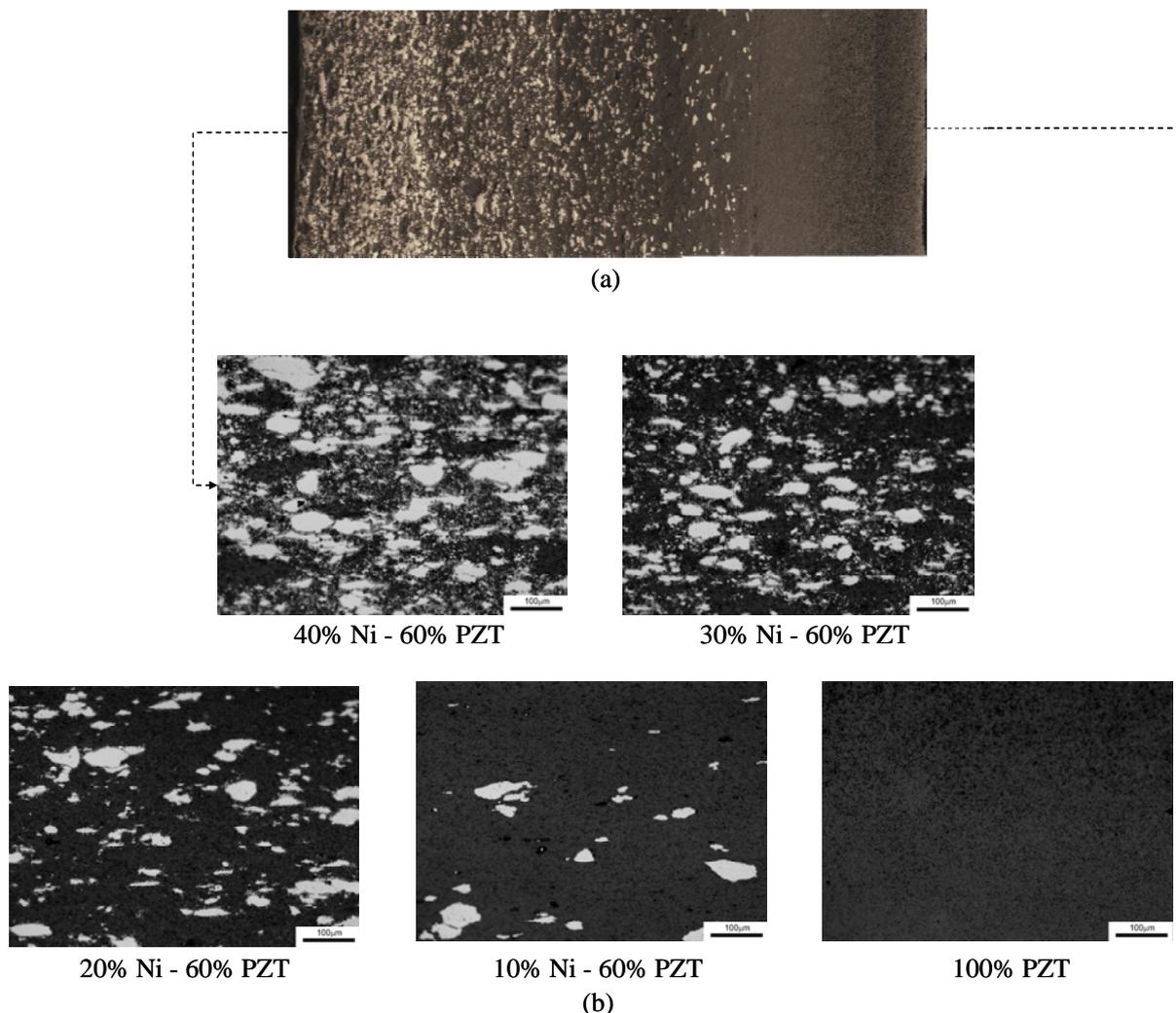


Figura 5.6. Microfotografias de um TPGF Ni-PZT utilizando diversos aumentos: (a) 100x; (b) 200x.

Primeiro é realizada uma etapa de preparação das amostras para a sua posterior observação no microscópio. A preparação consiste no corte e embutimento das amostras. Contudo, o processo de corte de um TPGF não é simples, uma vez que as cerâmicas piezelétricas são materiais frágeis. Assim, para evitar o início de trincas durante o processo de corte, as amostras são primeiramente embutidas em baquelita e, posteriormente, são cortadas ao longo da direção desejada (espessura do TPGF). Para o embutimento, é utilizado o equipamento EMBUTIDOR AUTOMÁTICO BUHLER – 3000 e, para o corte, é utilizada a cortadora de precisão ISOMET 4000 da BUEHLER. Após esse procedimento, as amostras embutidas são

lixadas com lixa número 400, 600, 1000 e 2600, e polidas em solução de diamante com tamanho de partícula de 6  $\mu\text{m}$ , 3  $\mu\text{m}$  e 1  $\mu\text{m}$ . Neste ponto, as amostras embutidas estão suficientemente preparadas para a sua observação no microscópio ótico. Microfotografias do TPGF do tipo Ni-PZT podem-se observar na Fig. 5.6.

Da Fig. 5.6(a) é observada a gradação contínua da microestrutura, de uma matriz de PZT-5A com inclusões de Níquel (lado esquerdo da Fig. 5.6(a)) até propriedades somente piezelétricas (lado direito da Fig. 5.6(a)). O Níquel aparece como áreas de cor branca, e o PZT como áreas de cor escura (cinza). Com aumentos de 200x é mais apreciável essa gradação da microestrutura (ver Fig. 5.6(b)), onde não são observados defeitos de fabricação como trincas nas interfaces ou esfoliamento entre camadas. Contudo, pode-se ver que na matriz de PZT aparecem inclusões ou pontos de cor preta. Esses pontos correspondem a regiões onde grãos de material piezelétrico têm sido arrancados durante o lixado e/ou polimento, e a áreas com alta concentração de carbono, o qual é produto da difusão do grafite desde o molde até as amostras (maiores detalhes dessa difusão do grafite serão apresentados na frente). Observa que essa concentração de carbono é maior perto da superfície externa da amostra (extremo direito da Fig. 5.6(a)), e a sua concentração vai-se reduzindo gradualmente até a metade da camada de 100% PZT-5A (ver a microfotografia dessa camada na Fig. 5.6(b)): aproximadamente 1 mm de profundidade.



Figura 5.7. Amostra embutida de um TPGF Ni-PZT após o processo de *Sputtering*.

Para verificar a gradação de propriedades ao longo da direção desejada, é realizado um estudo da composição química do TPGF Ni-PZT mediante uma análise de

Espectroscopia por Energia Dispersiva - EED ou *Energy Dispersive Spectrometry* - EDS.

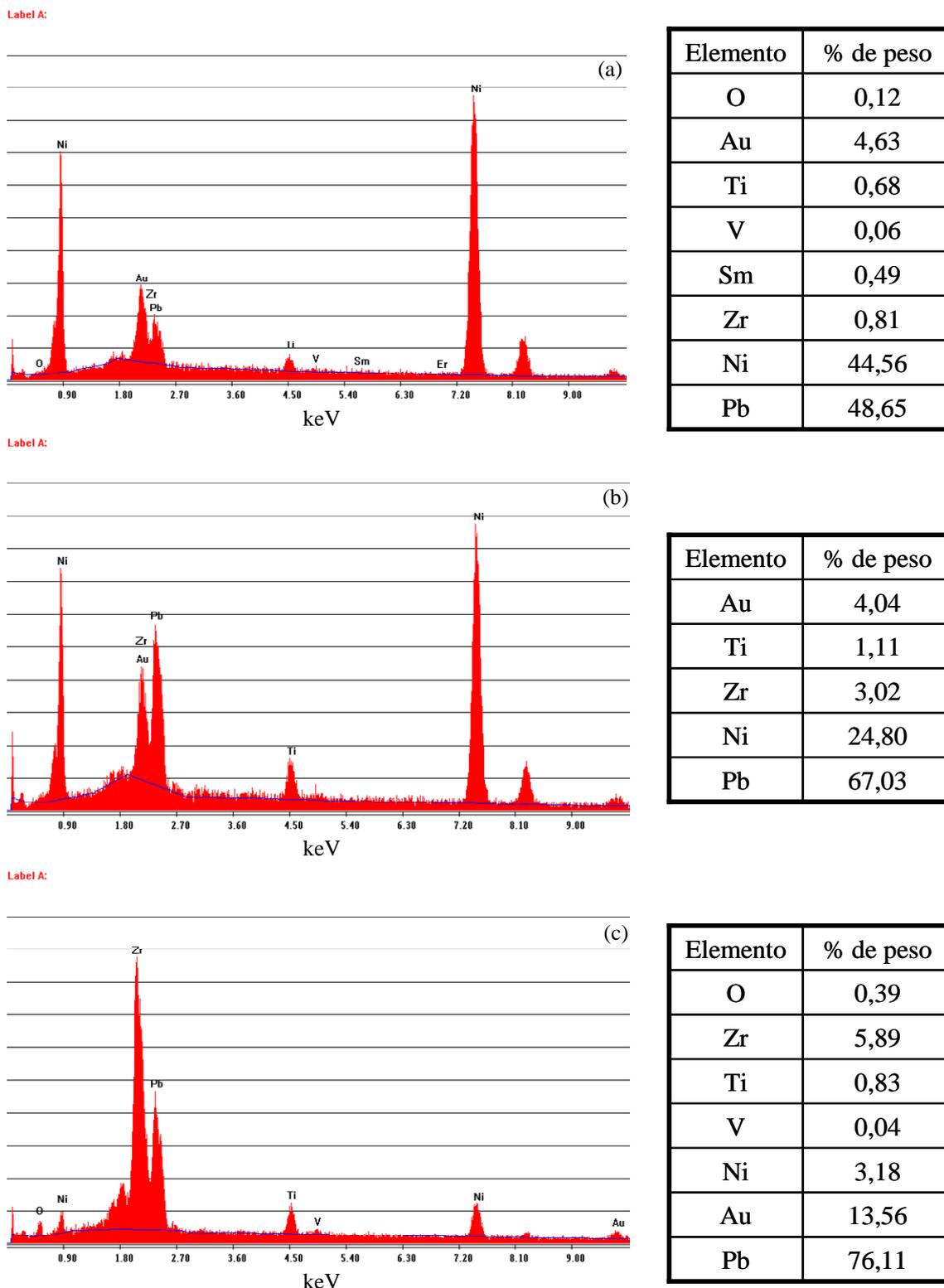


Figura 5.8. Composição química mediante espectrometria de três regiões ao longo da espessura de um TPGF Ni-PZT na: (a) camada 40% Ni - 60% PZT; (b) camada 20% Ni - 80% PZT; (c) 100% PZT.

Na EED, quando um feixe de elétrons incide sobre um material, os elétrons mais externos dos átomos e os íons constituintes são excitados, mudando de níveis energéticos. Ao retornarem para sua posição inicial, liberam a energia adquirida a qual é emitida em comprimento de onda no espectro de raios-x (GRIEKEN et al., 1986). Um detector instalado na câmara de vácuo do MEV mede a energia associada a esse elétron. Assim, como os elétrons de um determinado átomo possuem energias distintas, é possível, no ponto de incidência do feixe, determinar quais os elementos químicos estão presentes naquele local e assim identificar em instantes que material está sendo observado.

Antes de utilizar o MEV é necessário recobrir com ouro a superfície da amostra que será analisada (Fig. 5.7). Especificamente, materiais eletricamente não condutivos, como as cerâmicas piezelétricas, devem ser cobertos com uma camada de material condutivo para prevenir a acumulação de campos elétricos estáticos na amostra devido à irradiação elétrica durante a produção da imagem. Para as amostras de TPGF Ni-PZT deposita-se uma camada ultrafina de ouro pelo método de *Sputtering* de baixo vácuo ou de Pulverização catódica, utilizando-se a máquina BALZERS SCD050, disponível no Departamento de Metalurgia e de Materiais da EPUSP. Uma fotografia de uma amostra de TPGF Ni-PZT embutida, após o processo de *Sputtering*, observa-se na Fig. 5.7.

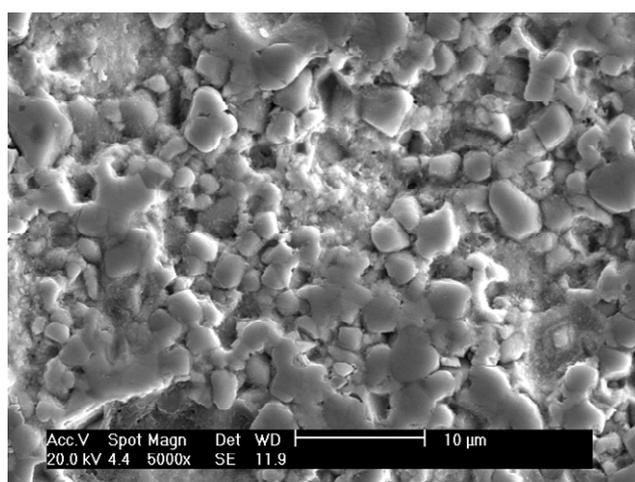


Figura 5.9. Microfotografia por MEV da camada de 100% PZT-5A.

A Fig. 5.8 apresenta os diagramas da composição química em três diferentes pontos ao longo da direção de gradação do TPGF Ni-PZT; especificamente, na camada

equivalente a 40% Ni - 60% PZT-5A (vide Fig. 5.8(a)), na camada intermediária ou camada com composição 20% Ni – 80% PZT-5A (vide Fig. 5.8(b)), e na camada equivalente a PZT-5A “puro” (vide Fig. 5.8(c)). Ao lado de cada figura é apresentada uma tabela que resume os valores percentuais de peso para cada um dos componentes químicos detectados pela técnica EED. É possível observar de cada um dos três gráficos da Fig. 5.8 que foram obtidas proporções de Níquel e material piezelétrico equiparáveis a essas definidas inicialmente nas camadas em verde, ver Fig. 5.3. Especificamente, para as camadas 40% Ni - 60% PZT-5A, 20% Ni - 80% PZT-5A e 100% PZT-5A as porcentagens de Níquel, detectados por EED, são 44.56% (ver Fig. 5.8(a)), 24.80% (ver Fig. 5.8(b)) e 3.18% (ver Fig. 5.8(c)), respectivamente. Esses últimos valores são próximos a esses definidos antes da sinterização, o qual evidência que de fato foi obtida uma variação, ao longo da espessura, das inclusões de Níquel na matriz de material piezelétrico.

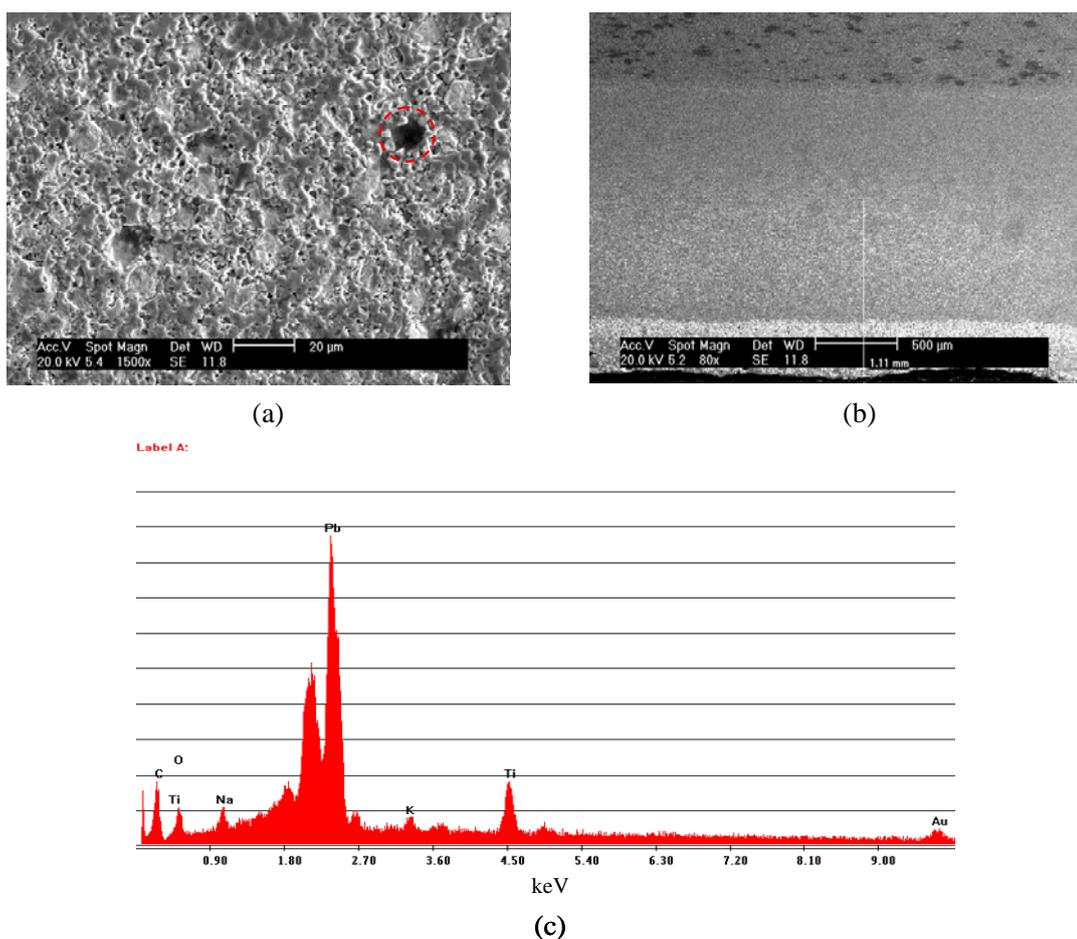


Figura 5.10. Difusão de grafite na camada de 100% PZT-5A: (a) microfotografia mostrando concentrações de carbono (pontos escuros); (b) posição em que foi detectada difusão de grafite; (c) análise espectral de regiões com carbono na coordenada apresentada na Fig. 5.10(b).

É interessante ressaltar que foram obtidos todos os elementos químicos esperados num material tipo PZT: titânio (Ti), zircônio (Zr), chumbo (Pb) e oxigênio (O). No entanto, nas duas primeiras camadas analisadas (Fig. 5.8(a) e Fig. 5.8(b)), é evidenciada pouca presença de zircônio na composição química. Um dos motivos é que na análise por EED, o feixe de elétrons é focalizado, por uma ou duas lentes condensadoras, num feixe com um ponto focal muito fino, com tamanho variando de 0,4 a 0,5 nm. Por tanto, a análise química se limita a esse ponto em particular. Outro motivo pode ser a interação química do Níquel com elementos químicos do PZT, que podem produzir precipitados com composição química equivalente a essa dos elementos adicionais encontrados na Fig. 5.8(a); por exemplo, vanádio (V) e samário (Sm) (o elemento Au aparece pela aplicação da camada de ouro por *Sputtering*).

Contudo, os resultados da Fig. 5.8 ressaltam a gradação contínua de Níquel ao longo da espessura de um TPGF Ni-PZT. Além disso, as amostras contêm suficientes propriedades piezelétricas de PZT que permitem a sua polarização e caracterização dinâmica (ver a seção seguinte).

Por outro lado, a Fig. 5.9 mostra a microestrutura da camada de 100% PZT-5A, utilizando 5000x aumentos no MEV. Observa-se que o tamanho de grão é razoavelmente uniforme, o qual apresenta forma esférica com diâmetro aproximado de 4  $\mu\text{m}$  – 6  $\mu\text{m}$ . Essa forma e tamanho de grão piezelétrico são equiparáveis a esses obtidos por outros autores (CHEN et al., 2004a; LI et al., 2005a). Nas outras camadas, a forma e tamanho de grão não foram observados devido ao fato que não foi possível encontrar uma solução química que permitisse o ataque simultâneo do Níquel e do PZT e, conseqüentemente, que revelará os contornos de grão das duas fases simultaneamente. Da Fig. 5.9 observa-se também a “perda” de grãos devido ao processo de lixado e polimento. Nessa mesma camada de 100% PZT pode-se observar o efeito da difusão de grafite, do molde em direção à amostra. Em particular, se é observada a amostra com menores aumentos, 1500x, resultam facilmente identificáveis regiões de cor preta (ver área dentro do círculo vermelho da Fig. 5.10(a)), as quais apresentam níveis razoáveis de carbono. O espectro químico apresentado na Fig. 5.10(c) prova que esses pontos em efeito possuem concentrações de carbono não encontradas em outras coordenadas da amostra (ver os espectros químicos da Fig. 5.8). Essa difusão do carbono é encontrada em profundidades superiores a 1 mm (ver Fig. 5.10(b)), a partir da superfície. Como se

comentou anteriormente, essa difusão de carbono pode ser um dos motivos que produzem a cor escura na camada de PZT-5A “puro”.

### Caracterização dinâmica: Impedância elétrica

Nesta seção apresenta-se a caracterização dinâmica de um TPGF do tipo Ni-PZT. A caracterização se limita ao levantamento da curva de impedância da estrutura, utilizando o impedômetro disponível no Laboratório de Sensores e Atuadores da EPUSP.

Antes de determinar a curva de impedância, os eletrodos são depositados na superfície superior e inferior do disco piezelétrico. Para esse fim utiliza-se tinta condutiva a base de Prata. Adicionalmente, a amostra de TPGF Ni-PZT deve ser polarizada. A polarização consistiu na aplicação de um campo elétrico enquanto a amostra está submersa num banho de óleo aquecido. A amostra foi polarizada a 80°C durante 1 hora num banho de óleo de azeite sob um campo elétrico d.c. de 0,5 kV/mm.

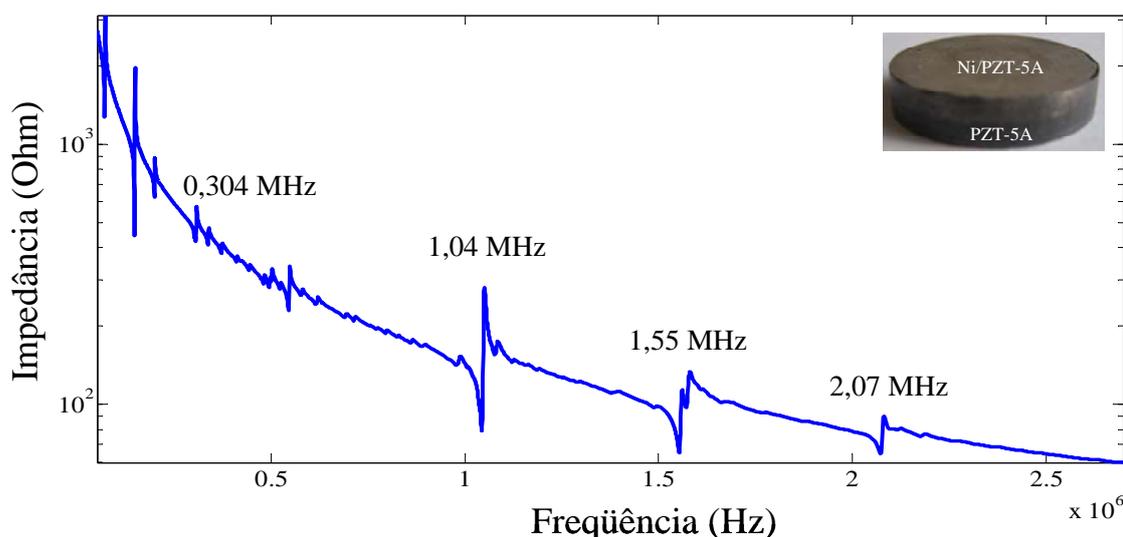


Figura 5.11. Curva de impedância experimental de um TPGF Ni-PZT.

A Fig. 5.11 mostra a curva de impedância elétrica experimental de uma amostra de TPGF Ni-PZT. A curva apresenta o comportamento característico de um transdutor

piezométrico (GUO et al., 1992). É interessante observar que o TPGF Ni-PZT vibra seguindo dois padrões diferentes: (i) em forma aproximada a como vibraria uma cerâmica piezométrica de espessura 2 mm (espessura da camada 100% PZT-5A do TPGF Ni-PZT), e (ii) de forma aproximada de um transdutor com baixas propriedades piezométricas de espessura igual a 6 mm (espessura total do TPGF Ni-PZT).

No primeiro caso, o TPGF Ni-PZT possui a sua freqüência fundamental em 1,04 MHz (modo extensional ao longo da espessura), o qual é um valor próximo do esperado teoricamente para um transdutor de 2 mm de espessura: 1,16 MHz. Os harmônicos dessa freqüência fundamental são as freqüências 1,55 MHz (segundo modo) e 2,07 (terceiro modo). Esse é um resultado que concorda com o esperado de um TPGF, segundo se apresentou no capítulo 2; ou seja, o TPGF Ni-PZT vibra no modo fundamental e nos modos pares e ímpares. Portanto, esse resultado confirma o observado ao nível microestrutural, que foi manufaturado um transdutor piezométrico com propriedades gradadas ao longo da espessura.

No segundo caso, o TPGF se comporta como um transdutor piezométrico com espessura igual a 6 mm. Em efeito, nesse caso teoricamente se esperaria a freqüência fundamental em 386 kHz, sendo que no caso experimental (Fig. 5.11), o valor do primeiro modo extensional ao longo da espessura é próximo de esse, igual a 304 kHz.

Esses resultados são interessantes já que ampliam o campo de aplicação dos transdutores piezométricos e demonstram a grande versatilidade alcançada com os TPGF; em especial, se é obtido o “controle” do desempenho dinâmico do transdutor através da definição da sua função ótima mediante o MOT (segundo se apresentou no capítulo 4).

## 5.4 Considerações finais

Embora existam diversas opções de gerar a gradação “efetiva” de propriedades numa cerâmica piezométrica como: (i) o empilhamento de cerâmicas comerciais coladas, ou (ii) pilhas de piezocompósitos 1-3, cada um com diferente *pitch*, todas

elas se afastam do conceito MGF: a gradação contínua de propriedades. Neste capítulo, apresentou-se a técnica de SPS como alternativa para a fabricação de MGF, a qual, embora não seja uma nova abordagem, representa os primeiros passos para a manufatura de TPGF no Brasil. Por esse motivo, como se apresenta no Apêndice D, realizou-se uma aproximação gradual da manufatura de TPGF; em outras palavras, mediante o projeto de EGF (vide Apêndice D) exploraram-se os procedimentos e abordagens necessários para manufaturar e caracterizar essas estruturas gradadas, sendo que essa experiência possibilitou a fabricação de materiais mais complexos, como os piezelétricos (foco da presente pesquisa). No entanto, os resultados aqui apresentados tiveram por finalidade demonstrar que a fabricação de TPGF é completamente viável e não pretendem servir como ferramenta de validação do programa *piezoEFG*, uma vez que a manufatura de TPGF resultou uma tarefa extremamente complexa, que requer conhecimentos especializados em materiais e manufatura de cerâmicas piezelétricas, tópicos os quais estão além dos objetivos propostos nesta tese. Contudo, o capítulo não está alheio a contribuições, uma vez que a manufatura de TPGF do tipo Ni-PZT não é reportada na literatura.

Por outro lado, diversas dificuldades ainda devem ser superadas para chegar a uma manufatura que permita aplicações industriais. Entre elas pode-se destacar:

- (i) *Dificuldades de sinterização.* No caso dos TPGF, inclusões metálicas dentro da matriz piezelétrica tornam regiões do transdutor eletricamente condutivas, o que impede a sua polarização. Por esse motivo, deve sempre ser realizado um estudo cuidadoso do conteúdo de material metálico que será misturado com o piezelétrico. O limite de material metálico está definido pela conectividade espacial das fases metálicas. Na amostras aqui apresentadas de Ni-PZT, esse limite foi de 40% de Níquel numa das camadas, o qual, curiosamente, é um valor aproximado ao qual tem chegado outros autores para outras misturas: 30% de Platina (TAKAGI et al., 2003) e 30% de Prata (ZHANG et al., 2006a). Além disso, como foi demonstrado através da Fig. 5.10, a difusão de grafite dentro do TPGF configura-se como um problema que, provavelmente, faz mudar as propriedades e coloração dos materiais piezelétricos.

- (ii) *Repetibilidade dos resultados.* Embora seja observado por diversas técnicas (inspeção visual, microfotografias mediante MEV e análise espectral) que existe uma efetiva gradação ao longo da espessura, não foi alcançada uma completa homogeneidade ao longo da direção radial das amostras, devido ao fato de que o gradiente de temperatura dentro da amostra gera diferentes taxas de difusão de material entre camadas. Um “paliativo” a esse problema pode ser a utilização de equipamento especializado na mistura dos pós, para cada camada em verde.
- (iii) *Curvas de gradação.* Para comparar a gradação de TPGF, fabricados mediante SPS, com modelos de MEF, deve ser utilizada, nas simulações, a mesma curva de gradação àquela obtida experimentalmente, para cada uma das propriedades de material (elásticas, dielétricas, e piezelétricas)<sup>1</sup>. Contudo, nos TPGF, intervêm, além das propriedades elásticas, as propriedades dielétricas e piezelétricas, as quais em conjunto somam dez constantes de propriedades, somente no caso bidimensional. Portanto, o problema, em relação ao de estruturas gradadas não-piezelétricas e isotrópicas (vide Apêndice D), torna-se muito mais complexo, já que não existe garantia de que o perfil de curva de uma das constantes seja a mesma função de gradação que descreve as outras propriedades. Conseqüentemente, a descrição detalhada da gradação de propriedades de um TPGF é um tópico aberto de pesquisa.

---

<sup>1</sup> A abordagem utilizada para validar o programa *piezoEFG* (“eixo” dos programas implementados para o projeto de TPGF) foi levantar a curva de propriedades elásticas em materiais isotrópicos, utilizando a curva de variação da dureza ao longo da direção de gradação de propriedades. Sendo esta uma abordagem que apresentou resultados satisfatórios (ver Apêndice D).

## 6 CONCLUSÕES

Na tese foi explorado o conceito MGF quando aplicado a transdutores piezelétricos. Esse estudo permitiu detectar novas aplicações dos TPGF, especificamente, em aplicações de ultra-som, e mostrou as vantagens quando o conceito é aplicado no projeto de transdutores flexensionais. O estudo foi possível devido ao desenvolvimento de novas ferramentas de modelagem, análise e projeto; especificamente: (i) modelagem analítica, (ii) simulação acústica utilizando tradicionais programas comerciais de EF, (iii) desenvolvimento de programas de EF utilizando EFG, e (iv) projeto genérico e sistemático de TPGF mediante o MOT. Adicionalmente, de forma experimental, mediante a técnica de SPS, foram validadas algumas dessas implementações numéricas e demonstrou-se a viabilidade de fabricar os TPGF apresentados ao longo do texto.

As seguintes conclusões podem ser delineadas das implementações computacionais e da fabricação e caracterização experimental:

- (a) Mediante o desenvolvimento de modelos analíticos, no capítulo 2, foi apresentada a metodologia para aplicar o modelo de matriz distribuída à modelagem de TPGF de ultra-som. Esses modelos analíticos foram verificados utilizando aproximações multicamada no programa comercial ANSYS<sup>TM</sup>, e através deles, pode-se constatar a maior largura de banda que pode ser obtida com os TPGF de ultra-som, em relação aos transdutores convencionais. Essa maior largura de banda potencializa a aplicação de TPGF em ensaios não-destrutivos e na aquisição de imagens médicas por ultra-som. Adicionalmente, mediante a modelagem analítica, foi possível constatar que os TPGF podem vibrar em modos de vibrar não existentes em transdutores convencionais; particularmente, considerando uma modelagem unidimensional, são observados, na curva de impedância, harmônicos pares e ímpares, em relação à frequência fundamental. Em contraste, nos transdutores não-gradados somente modos ímpares são observados. Desses resultados pode-se afirmar que um único TPGF pode emitir e/ou receber ondas acústicas num amplo espectro de frequência, o que até agora somente é possível mediante o controle de conjuntos de transdutores, cada um

operando com diferente frequência fundamental. Exemplificando, um único TPGF poderia emitir uma onda de ultra-som, na sua frequência fundamental ( $f_0$ ), em direção à caixa torácica de um ser humano (visando a obtenção de imagens cardíacas) e, simultaneamente, poderia captar a onda refletida do tecido humano, que usualmente retorna a  $2f_0$  (CHEN et al., 2003b). Já utilizando transdutores não-gradados, seria necessário utilizar um transdutor para emitir a  $f_0$ , e outro para captar a onda refletida pelo tecido humano, com frequência fundamental igual a  $2f_0$ .

- (b) Por outro lado, os modelos multicamadas implementados no programa comercial ANSYS<sup>TM</sup>, e apresentados no capítulo 2, permitiram simular TPGF de ultra-som com gradações ao longo da direção radial, utilizando diversas funções de gradação. Com essas simulações foi possível avaliar o efeito da gradação radial no perfil de onda que se propaga num fluido e, dependendo da função de gradação, observar a redução significativa das ondas de borda, o qual resulta vantajoso em aplicações pulso-eco.
- (c) Adicionalmente, os modelos analíticos e multicamadas confirmaram a necessidade de desenvolver ferramentas mais genéricas de modelagem, e a necessidade do projeto ótimo e sistemático de TPGF; especificamente, devido ao fato de que o desempenho dos TPGFs muda conforme a função de gradação utilizada. A resposta a esses requisitos foi o desenvolvimento de um programa de EF baseado na formulação dos EFG (programa *piezoEFG*), o qual foi apresentado no capítulo 3, e o desenvolvimento do projeto genérico de TPGF mediante o MOT (programas *piezoMgfOT* e *piezoFlexMOT*), apresentado no capítulo 4.
- (d) O programa *piezoEFG* é um software de EF genérico o suficiente para modelar TPGF considerando diversas análises: (i) estática, (ii) harmônica, (iii) modal e (iv) transiente.

Através do programa *piezoEFG* verificou-se a influência do tipo de função de gradação no desempenho dos TPGF, e a influência de gradar em forma seletiva um conjunto de propriedades; em outras palavras, estudou-se o comportamento dos TPGF quando somente são gradadas as propriedades

piezelétricas, dielétricas, elásticas, ou todas em conjunto. Esses resultados confirmaram e justificaram a utilização de técnicas de otimização para encontrar a função de gradação ótima de um TPGF, segundo a sua aplicação. Além disso, utilizando o programa *piezoEFG*, confirmou-se a superioridade dos EFG em relação à aproximação multicamada, uma vez que a resposta desta última sempre converge à primeira, conforme se aumenta o número de camadas na direção de gradação. Assim, os EFG foram selecionados como ferramenta de análise na otimização topológica.

- (e) Por outro lado, no capítulo 4, foram apresentados os resultados da otimização de TPGFs utilizando o MOT. Esses resultados mostraram a utilidade do MOT para encontrar a função de gradação de material ótima para determinados requisitos de projeto, e para modificar as características dinâmicas desses transdutores. Entre esses requisitos foi considerado o projeto de ressonadores MGF, TPGF tipo uni-modais e pluri-modais, e TPGF tipo banda larga e banda estreita. Assim, mediante o MOT, foi possível encontrar a função de gradação ótima que permite a um TPGF: (i) vibrar numa ou num conjunto de frequências definidas pelo usuário, (ii) maximizar uma ou várias frequências de ressonância, e (iii) maximizar o acoplamento eletromecânico de um ou um conjunto de modos de vibrar.

Além do anterior, o MOT também foi aplicado no projeto simultâneo da topologia e da função de gradação de transdutores piezelétricos flexensionais. Especificamente, mediante o MOT foi possível projetar esses transdutores com redução significativa da interface entre o material piezelétrico e a estrutura flexível acoplada. Assim, eliminando a interface nos transdutores piezelétricos flexensionais evita-se o uso de cola, a qual produz efeitos não-lineares, difíceis de modelar, e a qual reduz a confiabilidade do transdutor, uma vez que aumenta as probabilidades de deformação a altas temperaturas ou de descolagem durante a operação. Esses resultados são aplicáveis, também, ao projeto de motores piezelétricos e sonares, já que além de reduzir a interface entre materiais, com as vantagens citadas acima, são diminuídas as perdas por vibrações, devido ao fato que, como observado por Li et al. (2005a), as perdas por vibrações são proporcionais ao quadrado das tensões mecânicas.

- (f) Embora os temas tratados nos itens anteriores referentes à simulação, modelagem e projeto numérico de transdutores piezelétricos com gradação funcional (TPGF) representam contribuições científicas importantes à área de estruturas piezelétricas, na tese, além da verificação numérica, optou-se por demonstrar a viabilidade de fabricar TPGF, o qual, em paralelo, permitiu validar de forma experimental o programa de elementos finitos gradados *piezoEFG* (vide o Apêndice D).

No capítulo 5 apresentaram-se as idéias básicas para a fabricação de TPGF mediante a técnica de SPS. Além disso, caracterizaram-se as amostras fabricadas em nível microestrutural (utilizando microscópio ótico e MEV), caracterizou-se a sua composição química (mediante Espectroscopia por Energia Dispersiva) e caracterizou-se o seu comportamento dinâmico (determinando a curva de impedância elétrica). Em todos os casos é demonstrado que em efeito foi alcançada uma gradação contínua de propriedades ao longo da espessura.

Concluindo, com a fabricação, a tese contribui nas principais etapas do ciclo de projeto dos TPGF: simulação, modelagem, otimização, fabricação e caracterização.

Como se observa das conclusões anteriores, a tese explora o conceito MGF em transdutores piezelétricos num sentido abrangente, utilizando desde modelagem analítica e numérica, passando pelo seu projeto sistemático e genérico, e terminando com a sua fabricação e caracterização. Além disso, foca-se em diversas e importantes aplicações dos transdutores piezelétricos, como transdutores de ultrassom, ressonadores e atuadores piezelétricos flexensionais<sup>1</sup>.

Adicionalmente, as atividades desenvolvidas nesta tese foram complementadas mediante a publicação de artigos em congresso nacionais e internacionais<sup>2</sup>, e na publicação de dois trabalhos em periódicos internacionais com arbitragem:

---

<sup>1</sup> Uma descrição detalhada das contribuições da tese é apresentada na Seção 1.5 do capítulo 1.

<sup>2</sup> As publicações em congressos nacionais e internacionais encontram-se listadas no capítulo 7 de referencias bibliográficas, com a citação RUBIO, W. M.

- O artigo *Modeling of functionally graded piezoelectric ultrasonic transducers*, no periódico *Ultrasonics*, o qual trata dos tópicos apresentados no capítulo 2 (RUBIO et al., 2009a).
- O artigo *Toward optimal design of piezoelectric transducers based on multifunctional and smoothly graded hybrid material system*, no periódico *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, o qual trata alguns dos tópicos apresentados no capítulo 4 (RUBIO et al., 2009b).

Por último, outros artigos estão em preparação; os quais especificamente tratam: (i) do projeto, mediante o MOT, de transdutores piezelétricos flexensionais baseados no conceito MGF, cuja formulação é apresentada no capítulo 4, e (ii) da metodologia de fabricação e caracterização experimental de TPGFs e EGFs, apresentada no capítulo 5 e no Apêndice D.

## 6.1 Trabalhos futuros

Embora a tese envolva um amplo conjunto de atividades tanto computacionais como experimentais, ainda é possível aprimorar diversos aspectos dos trabalhos aqui apresentados, entre eles pode-se citar:

- (a) Para completar o “laboratório computacional” relacionado com o projeto e modelagem de TPGF pode-se estender o programa *piezoEFG* à modelagem de transdutores que incluam a camada de amortecimento, a camada de casamento de impedâncias, e que simulem aplicações de emissão de ondas acústicas dentro de sólidos ou fluidos. A vantagem dessa implementação é possibilitar a simulação dos TPGF de ultra-som como um todo, incluindo a formulação de EFG. Por outro lado, com essa implementação, além das propriedades da piezocerâmica, poder-se-ia gradar as propriedades da camada de casamento de impedâncias e da camada de amortecimento. Adicionalmente, utilizando essa implementação e baseado nas idéias apresentadas no capítulo 4, pode-se encontrar a função de gradação ótima e/ou topologia dessas camadas, em conjunto com as da piezocerâmica.

- (b) Como se observou no capítulo 2, utilizar o MEF para estudar o efeito MGF na onda acústica que se propaga num fluido demanda uma alta discretização, uma vez que, segundo a Condição de Courant (ZHANG, PAULINO, 2007), vide a eq.(2.60) do capítulo 2, o tamanho do elemento finito é proporcional ao comprimento de onda. Se fossem utilizados elementos finitos de tamanho superior ao do comprimento de onda, as bordas dos elementos atuaram como fronteiras que refletem as ondas acústicas. Assim, essa alta discretização que deve garantir-se para simular TPGF de ultra-som representa um alto custo computacional. Para solucionar esse problema, as equações de onda podem ser solucionadas no domínio da frequência e não no domínio do tempo, como acontece no caso do MEF. Para resolver esse tipo de problema pode-se utilizar a técnica do *Spectral Element Method* (SEM), a qual combina a generalidade do MEF com a Transformada de Fourier para solucionar a equação de onda no domínio da frequência (CHAKRABORTY et al., 2005).
- (c) Por outro lado, no MOT, as propriedades em cada ponto do domínio de projeto podem ser definidas utilizando técnicas diferentes a essas expressas no capítulo 4: modelos de mistura de material baseados no SIMP e no RAMP. Entre as alternativas, podem-se utilizar modelos que combinem simultaneamente a mistura de material ou de homogeneização de propriedades com modelos multicamadas. Por exemplo, pesquisadores como Buryachenko, Rammerstorfer (1998) modelam materiais multicamada MGF como compostos termoelásticos, com concentração de inclusões elípticas que são função das coordenadas Cartesianas, utilizando o Método Efetivo Multipartícula (*Multiparticle Effective Method*), desenvolvido pelo mesmo Buryachenko (1996).
- (d) Contudo, ainda há muito a explorar no relacionado com a fabricação e caracterização experimental de TPGF<sup>3</sup>. Por exemplo, pode ser explorada a mistura de novos materiais; por exemplo, como material piezelétrico pode-se utilizar titanato de bário (BaTiO<sub>3</sub>). Por outro lado, a maior contribuição seria a formulação de uma metodologia sistemática que permita o levantamento das

---

<sup>3</sup> Lembremos que o foco da tese é o desenvolvimento de modelos computacionais para a análise e projeto de TPGF.

curvas de gradação de cada uma das propriedades piezelétricas, dielétricas e elásticas em TPGF. Com essa metodologia seria possível: (i) verificar se as curvas de gradação experimentais correspondem às pré-definidas antes da sinterização, ou (ii) levantar as curvas de propriedades de novos TPGF, utilizando diversas combinações de materiais, as quais poderiam ser utilizadas nos programas computacionais para simular e analisar o seu comportamento estático e/ou dinâmico.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABOUDI, J.; PINDERA, M. J.; ARNOLD, S. M. Higher-order theory for functionally graded materials. *Composites Part B - Engineering*, v.30, n.8, p. 777–832, 1999.
- ACHDOU, Y. Numerical Optimization of a photocell. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.102. p.89-106, 1993.
- ADIKARY, S. U.; MENG, Z.; JIN, D. A resistivity gradient piezoelectric FGM actuator. *Journal of Materials Science and Technology*, v.16, n.04, p. 383-386, 2000.
- ALLAIRE, G.; CASTRO, C. A new approach for the optimal distribution of assemblies in a nuclear reactor. *Numerische Mathematik*, v.89, n.1, p.1-29, 2001.
- ALLIK, H.; HUGHES, T. J. R. Finite element method for piezoelectric vibration. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v.2, p. 151-157, 1970.
- ALMAJID, A.; TAYA, M.; HUDNUT, S. Analysis of out-of-plane displacement and stress field in a piezocomposite plate with functionally graded microstructure. *International Journal of Solids and Structures*, v.38, n.19, p. 3377-3391, 2001.
- ANANTHASURESH, G. K. **Optimal Synthesis Methods for MEMS**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003. 336p.
- ANANTHASURESH, G. K.; KOTA, S.; KIKUCHI, N. Strategies for systematic synthesis of compliant MEMS. *Dynamic Systems and Control*, v.2, p.677-686, 1994.
- ANDRADE, M. A. B. **Análise de Materiais Piezelétricos Compósitos para Aplicações em Transdutores de Ultra-Som**. 2006. 170p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo. 2006.
- ANSYS, **User's Manual for Revision 5.0: Theory**. v.4, 1994.
- AULD, B.A. **Acoustic Fields and Waves in Solids v.1**. Florida-EUA: Krieger Publishing Company, 2<sup>a</sup> ed., 1990.
- BANKS-SILLS, L.; ELIASI, R.; BERLIN Y. Modeling of functionally graded materials in dynamic analyses. *Composites, Part B*, v.33, p.7-15, 2002.
- BATHE, K.J. **Finite Elements Procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1996, 1037p.
- BEATON, C.F.; HEWITT, G.F.; LILEY, P.E. **Physical Property Data for the Design Engineer**. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1989, 394p.

- BENDSØE, M. P. Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem. *Structural Optimization*, v.1, p.192-202, 1989.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization**: theory, Methods and applications. Berlin: Springer, 2003.
- \_\_\_\_\_. Material Interpolations Schemes in Topology Optimization. *Archive of Applied Mechanics*, v.69, p.635-654, 1999.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.71, p.197-224. 1988.
- BENDSØE, M. P.; RODRIGUES, H. C. Integrated Topology and Boundary Shape Optimization of 2-D Solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.87, p.15-34, 1991.
- BENNETT, J.; HAYWARD, G. Design of 1-3 piezocomposite hydrophones using finite element analysis. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, v.44, n.3, p. 565-574, 1997.
- BIRMAN, V.; BYRD, W. L. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Applied Mechanical Review*, v.60, p. 195-216, 2007.
- BOBILLOT, A.; BALMÈS, E. Iterative computation of modal sensitivities. *AIAA Journal*, v.344, n.6, p.1332-1338, 2006.
- BOUCHER, D.; LAGIER, M.; MAERFELD, C. Computation of the vibrational modes for piezoelectric array transducers using a mixed finite element-perturbation method. *IEEE Transactions of Sonics and Ultrasonic*, v.28, n.5, p. 318-329, 1981.
- BOURDIN, B. Filters in Topology Optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.50, p.2143-2158. 2001.
- BRISAUD, M. Characterization of piezoceramics. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, v.38, n.6, p. 603-617, 1991.
- BUEHLER, M.; BETTIG, B.; PARKER, G. G. Topology optimization of smart structures using a homogenization approach. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v.15, n.8, p.655-667, 2004.
- BURYACHENKO V.; RAMMERSTORFER F. G. Micromechanics and nonlocal effects in graded random structure matrix composites. In: Bahei-el-Din, Y. A, Dvorak, G. J., et al., editors. Proceedings of the IUTAM-symposium on transformation problems in composite and active materials, p. 197-206, 1998.
- BURYACHENKO, V. A. The overall elastoplastic behavior of multiphase materials with isotropic components. *Acta Mechanica*, v.119, p.93-117, 1996.

- BURMANN, P.; RAMAN, A.; GARIMELLA, S. V. Dynamics and topology optimization of piezoelectric fans. *IEEE Transactions on Manufacturing Technology, Part A: Packaging Technologies*, v.25, n.4, p. 592-600, 2002.
- BYUN, J. K.; LEE, J. H.; PARK, I. H. Node-Based distribution of material properties for topology optimization of electromagnetic devices. *IEEE Transactions on Magnetic*, v.40, n.2, 2004.
- BYUN, J. K.; LEE, J. H.; PARK, I. H.; LEE, H. B.; CHOI, K.; HAN, S. Y. Inverse problem application of topology optimization method with mutual energy concept and design sensitivity. *IEEE Transactions on Magnetic*, v.36, n.41, p.1144-1147, 2000.
- CARBONARI, R. C.; SILVA E. C. N.; PAULINO, G. H. Multi-actuated functionally graded piezoelectric micro-tools design: A multiphysics topology optimization approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.77, n.3, p.301-336, 2009.
- CARBONARI, R. C.; SILVA E. C. N.; NISHIWAKI, S. Optimum placement of piezoelectric material in piezoactuator design. *Smart Materials and Structures*, v.16, p.1-14, 2007a.
- CARBONARI, R. C.; SILVA E. C. N.; PAULINO, G. H. Topology optimization design of functionally graded bimorph-type piezoelectric actuators. *Smart Materials and Structures*, v.16, p.2607-2620, 2007b.
- CARBONARI, R. C.; SILVA E. C. N.; NISHIWAKI, S. Design of piezoelectric multiactuated microtools using topology optimization. *Smart Materials and Structures*, v.14, p.1431-1447, 2005.
- CARDOSO, E., L. **Controle de Complexidade na Otimização Topológica de Estruturas Contínuas**. 2000. Dissertação (Mestrado) – PROMEC, UFRGS. 2000.
- CARDOSO, L. E.; FONSECA, J. S. Topology optimization of piezoelectric actuators considering geometric nonlinearities. *Solid Mechanics and Its Applications: UTAM Symposium on Topological Design Optimization of Structures, Machines and Materials. Status and Perspectives*. Edited by: Bendsøe, M. P.; Olhoff, N.; and Sigmund, O. p. 391-400, 2006.
- CARDOSO, E. L.; FONSECA, J. S. Complexity Control in the Topology Optimization of Continuum Structures. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v.25, n.3, p.293-301, 2003.
- CHAKRABORTY, A.; GOPALAKRISHNAN, S.; KAUSEL, E.; Wave propagation analysis in inhomogeneous piezo-composite layer by the thin layer method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.64, n.5, p. 567-598, 2005.

- CHALLANDE, P. Optimizing ultrasonic transducers based on piezoelectric composites using a finite-element method. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, v.37, n.2, p. 135-140, 1990.
- CHANDRASEKARAN, S.; LINDNER, D. K.; SMITH, R. C. Optimized design of switching amplifiers for piezoelectric actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v.11, n.4, p. 887-901, 2000.
- CHEN, S-N., WANG, G-J., CHIEN, M-C. Analytical modeling of piezoelectric vibration-induced micro power generation. *Mechatronics*, v.16, n.7, p. 379-387, 2006.
- CHEN, Y. H., MA, J., LI, T. Electrophoretic deposition and characterization of a piezoelectric FGM monomorph actuator. *Ceramics International*, v.30, n.7, p. 1807-1809, 2004a.
- CHEN, J., LIU, Z. X., ZOU, Z. Z. Crack initiation behavior of functionally graded piezoelectric material: prediction by the strain energy density criterion. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, v.41, n.1-3, p. 63-82, 2004b.
- CHEN, J., LIU, Z. X., ZOU, Z. Z. The central crack problem for a functionally graded piezoelectric strip. *International Journal of Fracture*, v.121, n.3-4, p. 81-94, 2003a.
- CHEN, J., PANDA, R., RAFTER, P. G., GURURAJA, T. R. Wideband piezoelectric transducer for harmonic imaging. United States Patent, patent No. US 6,532,819 B1, 2003b.
- CLAEYSSEN, F.; LETTY, R. L.; BARILLOT, F.; LHERMET, N.; FABBRO, H.; GUAY, P.; YORCK, M.; BOUCHILLOUX, P. Mechanisms based on piezo actuators. In: *Proceedings of the SPIE*, v. 4332, p. 225-233, 2001.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA M. E.; WITT, R. J. **Concepts and applications of finite element analysis**. United States: John Wiley & Sons, Inc. 4<sup>th</sup> ed., 2001. 719p.
- COX, S. J.; DOBSON, D. C. Band structure optimization of two-dimensional photonic crystals in h-polarization. *Journal of Computational Physics*, v.158, n.2, p.214-224, 2000.
- CRACKNELL, A. P. **Crystals and their structures**. Oxford, New York: Pergamon Press, 1969. 231p.
- DÍAZ, A. R.; BENDSØE, M. P. Shape optimization of structures for multiple loading situations using a homogenization method. *Structural Optimization*, v.4, p.17-22, 1992.
- DÍAZ, A. R.; KIKUCHI, N. Solution to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.35, p.1487-1502, 1992.

- DOBRUCKI, A. B.; PRUCHINCKI, P. Theory of piezoelectric axysymmetric bimorphs. *Sensors and Actuators A*, v.58, p. 203-212, 1997.
- DOGAN, A.; UCHINO, K.; NEWNHAM, R. E. Composite piezoelectric transducer with truncated conical endcaps "Cymbal". *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, v.44, n.3, p. 597-605, 1997.
- DOGAN, A.; YOSHIKAWA, S.; UCHINO, K.; NEWNHAM, R. E. The effect of geometry on the characteristics of the Moonie transducer and reliability issue. Proceedings of IEEE Ultrasonics Symposium, p. 935-939, 1994.
- DU, J. K., JIN, X. Y., WANG, J., XIAN, K. Love wave propagation in functionally graded piezoelectric material Layer. *Ultrasonics*, v.46, n.1, p. 13-22, 2007.
- DU, H.; LAU, G. K.; LIM, M. K.; QUI, J. Topological optimization of mechanical amplifiers for piezoelectric actuators under dynamic motion. *Smart Materials and Structures*, v.9, p. 788-800, 2000.
- DUTOIT, N. E.; WARDLE, B. L.; KIM, S. G. Design considerations for MEMS-scale piezoelectric mechanical vibration energy harvesters. *Integrated Ferroelectrics*, v.71, p. 121-160, 2005.
- ELKA, E.; ELATA, D.; ABRAMOVICH, H. The electromechanical response of multilayered piezoelectric structures. *Journal of Microelectromechanical Systems*, v.13, n.42, p. 332-341, 2004.
- EMBURY, J. D.; FREUND, L. B.; NEEDLEMAN, A.; SHIH, C. F.; SPAEPEN, F.; SURESH, S. Summary. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v.44, p.823-825, 1996.
- EWINS, D. J. **Modal testing: theory and practice**. Research Studies Press, England, 1988.
- FANG, M. H.; WEI, P.; WANG, R. G.; CAO, Z. Z.; JIAN, C.; LIKUN, H. Fabrication of Cu/PZT functionally graded actuators by spark plasma sintering. *Functionally Graded Materials VII*, v.423-425, p. 423-426, 2003.
- FOX, R. L.; KAPOOR, M. P. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA Journal*, v.6, p.2426-2429, 1968.
- FRECKER, M. Recent advances in optimization of smart structures and actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v.14, p. 207-216, 2003.
- FRECKER, M.; CANFIELD, S. Optimal design and experimental validation of compliant mechanical amplifiers for piezoceramic stack actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v.11, n.5, p. 360-369, 2000.
- FU, B.; HEMSEL, T.; WALLASCHEK, J. Piezoelectric transducer design via multiobjective optimization. *Ultrasonics*, v.41, n.1, p. 747-752, 2006.

- FUJII, D.; CHEN, B. C.; KIKUCHI, N. Composite Material Design of Two-Dimensional Structures Using Homogenization Design Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.50, p.2031-2051, 2001.
- FUKUSHIMA, J.; SUZUKI, K.; KIKUCHI, N. **Applications to Car Bodies:** Generalized Layout Design of Three-Dimensional Shells, Optimization of Large Structural Systems, Ed. Rozvany, G.I.N, Dordrecht: Kluwer, p.177-191, 1993.
- GALLEGO-JUARÉZ, J. A. Piezoelectric ceramic and ultrasonic transducers. *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, v. 22, p. 804-816, 1989.
- GIBERT, J. M.; AUSTIN, E. M. Inclusion of piezoelectric polarization in the design of a flextensional actuator. *Smart Structures and Materials 2004: Modeling, Signal Processing, and Control*. Edited by Smith, Ralph C. Proceedings of the SPIE, v.5383, p. 183-193, 2004.
- EIRAS, J.A. Relatório de caracterização de amostras PZT fabricadas pelo método de "Spark Plasma Sintering". [Mensagem pessoal via e-mail]. Mensagem recebida por: wilfredobw@gmail.com em 02 de setembro de 2009.
- GRIEKEN, R. V; MARKOWICZ, A.; TÖRÖK. S. Energy-dispersive X-ray spectrometry: present state and trends. *Fresenius's Journal of Analytical Chemistry*, v.324, n.8, p. 825-831, 1986.
- GUEST, J. M.; PREVOST, J. H.; BELYTSCHKO. Achieving Minimum Length Scale in Topology Optimization Using Nodal Design variables and Projection Functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.61, n.2, p.238-254, 2004.
- GUO, H.; CANNATA, J.; ZHOU, Q.; SHUNG, K. Design and fabrication of broadband graded ultrasonic transducers with rectangular kerfs. *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics, and frequency Control*, v.52, n.11, p. 2096-2102, 2005.
- GUO, N.; CAWLEY, P.; HITCHINGS, D. The finite element analysis of the vibration characteristics of piezoelectric discs. *Journal of Sound and Vibration*, v.159, n.1, p. 115-138, 1992.
- HA, Y., CHO, S. Design sensitivity analysis and topology optimization of eigenvalue problems for piezoelectric resonators. *Smart Materials and Structures*, v.15, p. 1513-1524, 2006.
- HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z; KAMAT, M. P. **Element of Structural Optimization.** Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers, 1990. 481p.
- HALL, A.; ALLAHVERDI, M.; AKDOGAN, E. K.; SAFARI, A. Development and Electromechanical Properties of Multimaterial Piezoelectric and Electrostrictive PMN-PT Monomorph Actuators. *Journal of Electroceramics*, v.15, n.2, p. 143-150, 2005.

- HANSEN, L. V. Topology optimization of free vibrations of fiber laser packages. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.29, n.5, p.341–348, 2005.
- HASSANI, B.; HINTON, E. A Review of Homogenization and Topology Optimization, I- Homogenization theory for media with periodic structure. *Computer and Structures*, v.69, p.707-717, 1998a.
- \_\_\_\_\_. A Review of Homogenization and Topology Optimization, II- Analytical and numerical solution of homogenization equations. *Computer and Structures*, v.69, p.719-738, 1998b.
- \_\_\_\_\_. A Review of Homogenization and Topology Optimization, III- Topology Optimization using optimality criteria. *Computer and Structures*, v.69, p.739-756. 1998c.
- HASHIN, Z. Analysis of composite materials, a survey. *Journal of Applied Mechanics*, v.50, p. 481-505, 1983.
- HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multipurpose materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v.11, p.127–140, 1963.
- HAUKE, T.; KOUVATOV, A.; STEINHAUSEN, R.; SEIFERT, W.; BEIGE, H.; LANGHAMMER, H. T.; ABICHT, H. Bending behavior of functionally graded materials. *Ferroelectrics*, v. 238, p. 195-202, 2000.
- HEDIA, H. S. Comparison of one-dimensional and two-dimensional functionally graded materials for the backing shell of the cemented acetabular cup. *Journal of Biomedical Materials Research Part B: Applied Biomaterials*, v.74B, n.2, p. 732–739, 2005.
- HEVERLY II, D. E.; WANG, K. W.; SMITH, E. C. Dual-Stack piezoelectric device with bidirectional actuation and improved performance. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 15, n.7, p. 565-574, 2004.
- HUANG, J.; RAPOFF, A. J. Optimization design of plates with holes by mimicking bones through nonaxisymmetric functionally graded material. *Journal of Materials: Design and Applications*, v.217, n.1, p. 23-27, 2003.
- HUANG, J.; VENKATARAMAN, S.; RAPOFF, A. J.; HAFTKA, R. T. Optimization of axisymmetric elastic modulus distributions around a hole for increased strength. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.25, n.4, p. 225-236, 2003.
- HUANG, J. H.; FADEL, G. M.; BLOUIN, V. Y.; GRUJICIC, M. Bi-objective optimization design of functionally gradient materials. *Materials & Design*, v.23, n.7, p. 657-666, 2002.
- HUANG, M.; WANG, R.; THOMPSON, V.; REKOW, D.; SOBOYEJO, W. Bioinspired design of dental multilayers. *Journal of Material Science: Materials in Medicine*, v.18, n.1, p. 57-64, 2007.

- HUANG, X-L.; SHEN, H-S. Vibration and dynamic response of functionally graded plates with piezoelectric actuators in thermal environments. *Journal of Sound and Vibration*, v.289, p. 25-53, 2006.
- ICHINOSE, N.; MIYAMOTO, N.; TAKAHASHI, S. Ultrasonic transducers with functionally graded piezoelectric ceramics. *Journal of the European Ceramic Society*, v.24, p. 1681-1685, 2004.
- IEEE – Standard on Piezoelectricity. Std. 176-1987. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, v.43, n.5, p. 717-772, 1996.
- IKEDA, T. **Fundamentals of Piezoelectricity**. Oxford University Press, 1996.
- IM, J-I.; KIM, S.; ROH, Y-R. Design and evaluation of piezoelectric bimorphs combined with multilayer actuator using FEM. *Journal of the Korean Physical Society*, v.32, p. 1251-1253, 1998.
- JACKSON, T. R.; PATRIKALAKIS, N. M.; SACHS, E. M.; CIMA, M. J. Modeling and designing components with locally controlled composition. In: Proceedings of 9th Solid Freeform Fabrication Proceedings, Austin-Texas-USA, 1998.
- JAFFE, B.; ROTH, R. S.; MARZULLO, S. Piezoelectric properties of lead zirconate-lead titanate solid solution ceramics. *Journal of Applied Physics*, v.25, p. 809-810, 1954.
- JENSEN, S. J. e SIGMUND, O. Systematic design of photonic crystal structures using topology optimization: Low-loss waveguide bends. *Applied Physics Letters*, v.84, n.12, 2004.
- JIN, M.; KIM, I.; KIM, J.; LEE, D.; AHN, C.; KWON, J.; LEE, J.; SONG, J.; JEONG, S. Piezoelectric Properties of 0.2[Pb(Mg<sub>1/3</sub>Nb<sub>2/3</sub>)]-0.8[PbTiO<sub>3</sub>-PbZrO<sub>3</sub>] Ceramics Sintered at a Low Temperature with the Aid of Li<sub>2</sub>O. *Journal of Electroceramics*, v.15, n.2, p. 119-122, 2005.
- JIN, D. R.; MENG, Z. Y.; ZHOU, F. Mechanism of resistivity gradient in monolithic PZT ceramics. *Materials Science and Engineering B-Solid State Materials for Advanced Technology*. v.99, n.1-3, p. 83-87, 2003.
- JONSMANN, J. **Technology development for topology optimized thermal microactuators**. 1999. 116p. Thesis (PhD). The Microelectronics Centre, Technical University of Denmark, 1999.
- JOSHI, S.; MUKHERJEE, A.; SCHMAUDER, S. Numerical characterization of functionally graded active materials under electrical and thermal fields. *Smart Materials and Structures*, v.12, p. 571-579, 2003b.
- KANG, Z.; TONG, L. Integrated optimization of material layout and control voltage for piezoelectric laminated plates. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v.19, p.889-904, 2008.

- KAWASAKI, A.; WATANABE, R. Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials. *Ceramics International*, v.23, n.1, p. 73-83, 1997.
- KHAROUF, N.; HEYLIGER, P. R. Axisymmetric free vibrations of homogeneous and laminated piezoelectric cylinders. *Journal of Sound and Vibration*, v.174, n.4, p. 539-561, 1994.
- KIEBACK, B.; NEUBRAND, A.; RIEDEL, H. Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering: A*, v.362, p. 81-105, 2003.
- KIYONO, C., Y. **Método de otimização topológica aplicado ao projeto de sonotrodos para transdutores piezelétricos**. 2008. Dissertação (Mestrado), EP-USP. 2008.
- KIM, T. S.; KIM, Y. Y. Mac-based mode-tracking in structural topology optimization. *Computers and Structures*, v.74, p. 375-383, 2000.
- KIM, J. H.; PAULINO, G. H. Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, v.69, n.4, p. 502-514, 2002.
- KIM, J.; VARADAN, V. V.; VARADAN, V. K. Finite element-optimization methods for the active control of radiated sound from a plate structure. *Smart Materials and Structures*, v.4, p. 318-326, 1995.
- KINO, G. **Acoustic Waves: Devices, Imaging, and Analog Signal Processing**. Corrected Ed., New Jersey: Prentice-Hall, Inc, 2000. 591p.
- KNOPPERS, G. E.; DIJKSTRA, J.; van VLIET, W. P. The design of graded materials objects. In: Proceedings of 9th Solid Freeform Fabrication Proceedings, Austin-Texas-USA, 1998.
- KÖGL, M.; SILVA, E. C. N. Topology optimization of smart structures: design of piezoelectric plate and shell actuators. *Smart Materials and Structures*, v.14, n.2, p. 387-399, 2005.
- KOIZUMI, M. FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, v.28, n.1-2, p. 1-4, 1997.
- KOHN, R. V.; STRANG, G. Optimal Design and Relaxation of Variational Problems, I. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v.39, p.113-137. 1986.
- KOHN, R. V.; VOGELIUS, M. Relaxation of a variational method for impedance computed tomography. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v.40, p.775-777, 1987.
- KOUVATOV, A.; STEINHAUSEN, A. R.; SEIFERT, A. W.; HAUKE, A. T.; LANGHAMMER, A. H.; BEIGEA, A. H.; ABICH, H. Comparison between

- bimorphic and polymorphic bending devices. *Journal of the European Ceramic Society*, v.19, p. 1153-1156, 1999.
- KOSSOFF, G. The effects of backing and matching on the performance of piezoelectric ceramic transducers. *IEEE Transactions of Sonic and Ultrasonic*, v.13, n.1, p. 20-30, 1966.
- KRAUTKRAMER, J.; KRAUTKRAMER, H. **Ultrasonic Testing of Materials**. Second Edition, New York: Springer-Verlag, 1977.
- KRUUSING, A. Analysis and optimization of loaded cantilever beam microactuators. *Smart Materials and Structures*, v.9, p. 186-196, 2000.
- LAMBERTI, N.; ESPINOSA, F. R. M.; IULA, A.; CAROTENUTO, R. Characterization of Piezoceramic Rectangular Parallelepipeds by Means of a Two-Dimensional Model. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, v.48, n.1, p. 113-120, 2001.
- LAMBERTI, N.; MONTERO de ESPINOSA, F.; IULA, A., CAROTENUTO, R. Two-dimensional modelling of multifrequency piezocomposites. *Ultrasonics*, v.37, n.8, p. 577-583, 2000.
- LAMBERTI, N.; CALIANO, G.; IULA, A.; PAPPALARDO, M. A New Approach for the Design of Ultrasono-Therapy Transducers. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, v.44, n.1, p. 77-84, 1997.
- LAMBERTI, N.; GIUA, P. E.; PAPPALARDO, M. Modello Matriciale e suo Impiego Nell'Ottimizzazione della Risposta Impulsiva del Trasduttore Multielemento. Relatório Técnico, Università di Salerno, 1987.
- LANG, S. B.; MUENSIT, S. Review of some lesser-known applications of piezoelectric and pyroelectric polymers. *Applied Physics A-Materials Science & Processing*, v.85, n.2, p. 125-134, 2006.
- LARSEN, U. D.; SIGMUND, O.; BOUWSTRA, S. Design and Fabrication of Compliant Mechanisms and Material Structures with Negative Poisson's Ratio. *Journal of Micro Electro Mechanical Systems "MEMS"*, v.6, n.2, p. 99-106, 1997.
- LE, C. H. **Achieving minimum scale and design constraints in topology optimization: a new approach**. 2006. 99p. Master thesis – University of Illinois at Urbana-Champaign, 2006.
- LEE, H. J. Layerwise laminate analysis of functionally graded piezoelectric bimorph beams. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v.16, n.4, p. 365-371, 2005.
- LEE, S. J.; BAE, J. E.; HINTON, E. Shell topology optimization using the layered artificial material model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.47, n.4, p. 843-867, 2000.

- LEE, W. Y.; STINTON, D. P.; BERNDT, C. C.; ERDOGAN, F.; LEE, Y. D.; MUTASIM, Z. Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coating applications. *Journal of the American Ceramic Society*, v.79, n.12, p. 3003–3012, 1996.
- LERCH, R. Simulation of piezoelectric devices by two- and three- dimensional finite elements. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, v.37, n.2, p. 233-247, 1990.
- LI, T., CHEN, Y. H., MA, J. Characterization of FGM monomorph actuators fabricated using EPD. *Journal of Materials Science*, v.40, n.14, p. 3601-3605, 2005a.
- LI, J.-F.; ZHANG, H. L., TAKAGI, K.; WATANABE, R. Porosity-graded piezoelectric ceramics: Processing and electric-induced displacement. *Materials Science Forum*, v.475-479, Part.1-5, p. 15617-1570, 2005b.
- LI, J.-F.; TAKAGI, K.; TERAOKUBO, N.; WATANABE, R. Electrical and Mechanical Properties of Piezoelectric Ceramic/Metal Composites in the Pb(Zr,Ti)O<sub>3</sub>/Pt System. *Applied Physical Letters*, v.79, n.15, p. 2441–2443, 2001a.
- LI, L. X.; SHEN, Y. P.; GAO, F. The optimal design of piezoelectric actuators for acoustic control. *Smart Materials and Structures*, v.10, p. 421-426, 2001b.
- LIN, X.; YUE, T., YANG, H.; HUANG, W. Phase evolution in laser rapid forming of compositionally graded Ti-Ni alloys. *Journal of Engineering Materials and Technology*, v.131, p. 041002(1-5), 2009.
- LIU, T. T.; SHI, Z. F. Bending behavior of functionally gradient piezoelectric cantilever. *Ferroelectrics*, v.308, p. 43-51, 2004.
- LIEW, K. M.; HE, X. Q.; RAY, T. On the use of computational intelligence in the optimal shape control of functionally graded smart plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.193, n.42-44, p. 4475-4492, 2004a.
- LIEW, K. M.; HE, X. Q.; MEQUID, S. A. Optimal shape control of functionally graded smart plates using genetic algorithms. *Computational Mechanics*, v.33, n.4, p. 245-253, 2004b.
- LOVEDAY, P. W.; LONG, C. S.; GROENWOLD, A. A. Ultrasonic motor resonator design using shape and topology optimization. *Smart Structures and Materials 2004: Smart Structures and Integrated Systems*. Edited by Flatau, Alison B. Proceedings of the SPIE, v.5390, p. 451-458, 2004.
- LUND, E.; STEGMANN, J. On structural optimization of composite shell structures using a discrete constitutive parameterization. *Wind Energy*, v.8, n.1, p. 109-124, 2005.
- LURIE, K. A.; CHERKAEV, A. V.; FEDOROV, A. V. Regularization of Optimal Design Problems for Bars and Plates I. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v.37, p.499-522. 1982a.

- \_\_\_\_\_. Regularization of Optimal Design Problems for Bars and Plates II. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v.37, p.523-543, 1982b.
- LUSHCHEIKIN, G. A. New polymer-containing piezoelectric materials. *Physics of the Solid State*, v.48, n.6, p.1023-2025, 2006.
- MA, L., NIE, W., WU, L. Z., ZHOU, Z. G. Scattering of the harmonic stress wave by cracks in functionally graded piezoelectric materials. *Acta Mechanica Sinica*, v.18, n.4, p. 295-301, 2005.
- MA, Z. D.; KIKUCHI, N.; CHENG, H. C. Topology Design for Vibration Structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.121, n.1-4, p.259-280, 1995.
- MAEDA, Y.; NISHIWAKI, S.; IZUI, K.; YOSHIMURA, M.; MATSUI, K.; TERADA, K. Structural topology optimization of vibrating structures with specified eigenfrequencies and eigenmode shapes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.67, p. 597-628, 2006.
- MARKWORTH, A. J.; SAUNDERS, J. A model of structure optimization for functionally graded material. *Materials Letters*, v.22, n.1-2, p. 103–107, 1995.
- MATSUI, K.; TERADA, K. Continuous approximation of material distribution for topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.59, n.14, p.1925-1944, 2004.
- MELLO, L. A. M.; LIMA, C. R.; AMATO, M. B. P.; LIMA, R. G.; SILVA, E. C. N.; Three-dimensional electrical impedance tomography: a topology optimization approach. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v.55, n.2, p. 531-540, 2008.
- MAMEDOV, V. Spark plasma sintering as advanced PM sintering method. *Powder Metallurgy*, v.45, n.4, p. 322-328, 2002.
- MENCIASSI, A.; EISINBERG, A.; CARROZZA, M. C.; DARIO, P. Force sensing microinstrument for measuring tissue properties and pulse in microsurgery. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v.8, n.1, p. 10-17, 2003.
- MEYER, R. J.; HUGHES, J. W.; MONTGOMERY, T. C.; MARKLEY, D. C.; NEWNHAM, R. E. Design of and fabrication improvements to the Cymbal transducer aided by finite element analysis. *Journal of Electroceramics*, v.8, n.2, p. 163-174, 2002.
- MEZA, J.; FRANCO, E.; FARIAS, M.; BUIOCHI, F.; SOUZA, M.; CRUZ, J. Medición del módulo de elasticidad en materiales de ingeniería utilizando La técnica de indentación instrumentada y de ultrasonido. *Revista de Metalurgia*, v.44, n.1, p. 52-65, 2008.
- MICHELL, A. G. M. The limits of economy of material in frame structures. *Philosophical Magazine*, v.8, p.589–597, 1904.

- MITCHELL R. F.; REDWOOD, M. The Generation of Sound by non-Uniform Piezoelectric Materials. *Ultrasonics*, v.7, n.2, p.123-124, 1969.
- MIYAMOTO, Y.; KAYSSER, W.A.; RABIN, B. H.; KAWASAKI, A.; FORD, R. G. **Functionally graded materials: Design, processing and applications.** London: Kluwer Academic Publishers, 1999. 332p.
- MOSTAFA, A.; FRECKER, M.; GURDAL, Z.; JOHNSON, T.; LINDNER, D. K. Design of a piezoelectric actuator and compliant mechanism combination for maximum energy efficiency. *Smart Materials and Structures*, v.14, p. 1421-1430, 2005.
- M'PEKO, J-C.; PEIXOTO, A. G.; JIMÉNEZ, E.; GAGGERO-SAGER, L. M. Electrical Properties of Nb-Doped PZT 65/35 Ceramics: Influence of Nb and Excess PbO. *Journal of Electroceramics*, v.15, n.2, p. 167-176, 2005.
- MUNIR, Z. A.; ANSEMI-TAMBURINI, U.; OHYANAGI, M. The effect of electric field and pressure on the synthesis and consolidation of materials: A review of the spark plasma sintering method. *Journal of Materials Science*, v.41, p. 763–777, 2006.
- NADER, G. **Desenvolvimento de técnicas de caracterização de transdutores piezelétricos.** 2002. 160p. Tese de Doutorado – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo. 2002.
- NAILLON, M.; COURSAINT, R. H.; BESNIER, F. Analysis of piezoelectric structures by a finite element method. *Acta Electronica*, v.25, n.4, p. 341-362, 1983.
- NAKASONE, P. H.; KIYONO, C. Y.; SILVA, E. C. N. Design of piezoelectric sensors, actuators, and energy harvesting devices using topology optimization. In: *Proceedings of 15th SPIE Annual International Symposium Smart Structures and Materials & Nondestructive Evaluation and Health Monitoring - Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems*, v.6932. p.1-11, 2008.
- NELSON, R. Simplified calculations of eigenvector derivatives. *AIAA Journal*, v.14, n.9, p.1201-1205, 1976.
- NEVES, M. M.; RODRIGUES, H.; GUEDES, J. M. Generalized Topology Design of Structures with a Buckling Load Criterion. *Structural Optimization*, v.10, p.71-18, 1995.
- NEWNHAM, R. E.; RUSCHAU, G. R. Smart Electroceramics. *Journal of the American Ceramic Society*, v. 74, n.3, p. 463-480, 1991.
- NEWNHAM, R. E.; DOGAN, A.; XU, Q. C.; ONITSUKA, K.; TRESSLER, J. F.; YOSHIKAWA, S. Flextensional “Moonie” actuators. In: *Proceedings of IEEE Ultrasonics Symposium*, p. 509-513, 1993.

- NIEZRECKI, C.; BREI, D.; BALAKRISHNAN, S.; MOSKALIK, A. Piezoelectric actuation: State of the art. *The Shock and Vibration Digest*, v.33, n.4, p. 269-280, 2001.
- NISHIWAKI, S.; SAITOU, K.; MIN, S. J.; KIKUCHI, N. Topology design considering flexibility under periodic loads. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.19, 2000.
- NISHIWAKI, S.; FRECKER, M. I.; MIN, S.; KIKUCHI, N. Topology Optimization of Compliant Mechanisms using the Homogenization Method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v.42, p.535-559, 1998.
- OLHOF, N.; BENDSØE, M. P.; RASMUSSEN, J. On CAD-integrated Structural Topology and Design Optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.89, p.259-279, 1991.
- OLIVER, W.C.; PHARR, G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology. *Materials Research Society*, v.19, p.3-20, 2004.
- ONITSUKA, K.; DOGAN, A.; TRESSLER, J. F.; XU, Q.; YOSHIKAWA, S.; NEWNHAM, R. E. Metal-Ceramic composite transducer, the "Moonie". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v.6, p. 447-455, 1995.
- OOTA, Y.; KAWAMURA, R.; TANIGAWA, Y.; IMAMURA, R. Optimization of material composition of nonhomogeneous hollow sphere for thermal stress relaxation making use of neural network. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.180, n.1-2, p. 185–201, 1999.
- PAULINO, G. H.; SILVA E. C. N.; LE, C.H. Optimal design of periodic functionally graded composites with prescribed properties. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.38, n.5, p. 469-489, 2009.
- PAULINO, G. H.; SILVA E. C. N. Design of Functionally Graded Structures Using Topology Optimization. *Materials Science Forum*, v. 492, p. 435-440, 2005.
- PEDERSEN, C. B. W. **On topology design of frame structures for crashworthiness**. 2002. Thesis (PhD) – Department of Mechanical Engineering, Solid Mechanics, Technical University of Denmark. 2002.
- PEDERSEN, N. L. Maximization of eigenvalues using topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.20, n.1, p.2–11, 2000.
- PEREZ, R.; AGNUS, J.; CLEVY, C.; HUBERT, A.; CHAILLET, N. Modeling, fabrication, and validation of a high-performance 2-dof piezoactuator for micromanipulation. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v.10, n.2, p. 161-171, 2005.
- PIEFORT, V. **Finite element modelling of piezoelectric active structures**. 2001. Tese de Doutorado, Brussels – Belgium, ULB – Université Libre de Bruxelles, 2001.

- POMPE, W.; WORCH, H.; EPPLE, M.; FRIESS, W.; GELINSKY, M.; GREIL, P.; HEMPEL, U.; SCHARNWEBER, D.; SCHULTE, K. Functionally graded materials for biomedical applications. *Materials Science and Engineering: A*, v.362, n.1-2, p. 40–60, 2003.
- PRAGER, W. A Note on Discretized Michell Structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.3, p.349-355, 1974.
- QIU, J. H.; TANI, J.; UENO, T.; MORITA, T.; TAKAHASHI, H. DU, H. J. Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators. *Smart Materials and Structures*, v.12, n.1, p. 115-121, 2003.
- RAI-CHOUDHURY, P. **MEMS and MOEMS Technology and Applications**. Bellingham, Washington, EUA: SPIE Press, 2000.
- RAHMATALLA, S. F.; SWAN, C. C. A Q4/Q4 continuum structural topology optimization implementation. *Structural Multidisciplinary Optimization*, v.27, p.130-135, 2004.
- REITER, T.; DVORAK, G. J.; TVERGAARD, V. Micromechanical models for graded composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v.45, n.8, p. 1281–1302, 1997.
- REYNAERTS, D.; PEIRS, J.; BRUSSEL, H. V. A mechatronic approach to microsystem design. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v.3, n.1, p. 24-33, 1998.
- RODRIGUES, H., C.; FERNADEZ, P. A material based model for topology optimization of thermoelastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.38, n.12, p.1951-1965, 1995.
- RUBIO, W. M.; BUIOCHI, F.; ADAMOWSKI, J. C.; SILVA, E. C. N. Modelling of functionally graded piezoelectric ultrasonic transducers. *Ultrasonics*, v.49, p.484-494, 2009a.
- RUBIO, W. M.; SILVA, E. C. N.; PAULINO, G. H. Toward Optimal Design of Piezoelectric Transducers Based on Multifunctional and Smoothly Graded Hybrid Material Systems. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v.20, p.1725-1746, 2009b.
- RUBIO, W. M.; BUIOCHI, F.; ADAMOWSKI, J. C.; SILVA, E. C. N. Topology Optimized Design of Functionally Graded Piezoelectric Ultrasonic Transducers. *Physics Procedia*, Ed. Elsevier, (in press), 2009c.
- RUBIO, W. M.; SILVA, E. C. N.; PAULINO, G. H. Topology Optimized Design of Functionally Graded Piezoelectric Resonators with Specified Resonance Frequencies. *Materials Science Forum*, v.631-632, p.305-310, 2009d.
- RUBIO, W. M.; SILVA, E. C. N.; BORDATCHEV, E. V.; ZEMAN, M. Topology optimized design, microfabrication and characterization of electro-thermally

driven microgripper. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v.20, p.669-681, 2009e.

RUBIO, W. M.; SILVA, E. C. N.; PAULINO, G. H. Optimal Design of Piezoelectric Transducers Based on Functional Material Gradation Concept. In: Proceedings of the 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Lisboa – Portugal, 2009f.

RUBIO, W. M.; SILVA, E. C. N.; PAULINO, G. H. Optimal Design of Functionally Graded Piezoelectric Actuators Considering Dynamic Analysis. In: Proceedings of the 10th U.S. National Congress for Computational Mechanics, Columbus – EUA, 2009g.

RUBIO, W.M.; SILVA, E.C.N. Toward design of functionally graded piezoelectric ultrasonic motors using topology optimization. In: Proceedings of the 2009 IEEE International Ultrasonics Symposium, Roma – Itália, 2009h.

RUBIO, W. M.; SILVA, E. C. N.; NISHIWAKI, S. Piezoresistive sensor design using topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.36, n.6, pp.571-583, 2008a.

RUBIO, W. M.; BUIOCHI, F.; ADAMOWSKI, J. C.; SILVA, E. C. N. Numerical and analytical design of functionally graded piezoelectric transducers. Multiscale and Functionally Graded Materials Conference 2006 – M&FGM2006, Hawaii – USA. In: American Institute of Physics Conference Proceedings, v.973, n.1, pp. 88-93, 2008b.

RUBIO, W. M.; SILVA, E. C. N. Design of functionally graded piezoelectric transducers maximizing selective eigenfrequency by using topology optimization method. In: Proceedings of International Conference on Engineering Optimization - EngOpt 2008, Rio de Janeiro – Brasil, 2008c.

RUBIO, W. M.; SILVA, E. C. N.; PAULINO, G. H. Maximizing the excitation strength at specific resonance frequencies of functionally graded piezoelectric transducers. In: Proceedings of the 19<sup>th</sup> International Conference on Adaptive Structures and Technologies, ICAST 2008, Ascona – Suíça, 2008d.

RUBIO, W. M.; BUIOCHI, F.; ADAMOWSKI, J. C.; SILVA, E. C. N. Modelling of functionally graded piezoelectric ultrasonic transducers. In: Proceedings of the International Congresses on Ultrasonic - ICU 2007, DOI: 10.3728/ICUltrasonics.2007.Vienna.1184\_rubio, Viena – Austria, 2007a.

RUBIO, W. M.; SILVA, E. C. N.; ADAMOWSKI, J. C. Design of resonators based on functionally graded piezoelectric material. In: Proceedings of XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics – XII DINAME, Ilhabela – Brasil, 2007b.

RUBIO, W. M.; SILVA, E. C. N.; BUIOCHI, F.; ADAMOWSKI, J. C. Modelling of FGM piezoelectric transducers using graded finite element concept. In: Proceedings of 19<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2007, Brasília – Brasil, 2007c.

- SAFARI, A. Development of piezoelectric composites for transducers. *Journal de Physique III*, v.4, n.7, p. 1129-1149, 1994.
- SAKAMURA, J-I.; YAMADA, K.; NAKAMURA, K. Equivalent network analysis of functionally graded piezoelectric transducers. *Japanese Journal of Applied Physics*, v.39, Part 1, n.5B, p. 3150-3151, 2000.
- SAMADHIYA, R., MUKHERJEE, A. Functionally graded piezoceramic ultrasonic transducers. *Smart Materials and Structures*, v.15, n.6, p. 1627-1631, 2006.
- SANTARE, M. H.; LAMBROS, J. Use of graded finite elements to model the behavior of nonhomogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics*, v.67, p. 819-822, 2000.
- SARAVANOS, D.A.; HEYLIGER, P. R. Mechanics and computational models for laminated piezoelectric beams, plates, and shells. *Applied Mechanics Review*, v.52, n.10, p.305-320, 1999.
- SATO, J.; KAWABUCHI, M.; FUKUMOTO, A. Dependence of the electromechanical coupling coefficient on the width-to-thickness ratio of plane-shaped piezoelectric transducers used for electronically scanned ultrasound diagnostics systems. *Journal of the Acoustical Society of American*, v.66, p. 1609-1611, 1979.
- SEELEY, C. E.; CHATTOPADHYAY, A.; BREI, D. Development of a polymeric piezoelectric C-block actuator using hybrid optimization technique. *AIAA Journal*, v.34, n.1, p. 123-128, 1996.
- SHENG, L.; KAPANIA, R. K. Genetic algorithms for optimization of piezoelectric actuator locations. *AIAA Journal*, v.39, n.9, p. 1818-1822, 2001.
- SHERRIT, S.; MUKHERJEE, B. K. The Use of Complex Material Constants to Model Dynamic Response of Piezoelectric Materials. 1998 IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings, p. 633-640, 1998.
- SHI, Z. F. Bending behavior of piezoelectric curved actuator. *Smart Materials and Structures*, v.14, p. 835-842, 2005.
- SHI, Z. F. General solution of a density functionally gradient piezoelectric cantilever and its applications. *Smart Materials and Structures*, v.11, p. 122-129, 2002.
- SHI, Z. F.; CHEN, Y. Functionally graded piezoelectric cantilever beam under load. *Archive of Applied Mechanics*, v.74, p. 237-247, 2004.
- SHIH; S.-J.; TUAN, W.-H. Solubility of Silver and Palladium in BaTiO<sub>3</sub>. *Journal of the American Ceramic Society*, v.87, n.3, p. 401-407, 2004.
- SIGMUND, O. Topology optimization: a tool for the tailoring of structures and materials. *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v.358, pp. 211-228, 2000.

- \_\_\_\_\_. A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural Multidisciplinary Optimization*, v.21, p.120-127, 2001.
- \_\_\_\_\_. On the Design of Compliant Mechanisms Using Topology Optimization. *Mechanics of Structures and Machines*, v.25, n.4, p.495-526, 1997.
- \_\_\_\_\_. Some inverse problems in topology design of materials and mechanics. In: D. Bestle and W. Schielen (eds), Symposium on optimization of mechanical systems, IUTAM, Kluwer, Netherlands, 1996.
- SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, v.16, p.68–75, 1998.
- SIGMUND, O.; TORQUATO, S.; AKSAY, I. A. On the design of 1-3 piezo-composites using topology optimization. *Journal of Materials Research*, v.32, n. 4, p. 1038-1048, 1998.
- SILLS, R.; ELIASI, Y. Modeling of functionally graded materials in dynamic analyses. *Composites: Part B*, v.33, p. 7–15, 2002.
- SILVA, E. C. N.; CARBONARI, R. C.; PAULINO, G. H. On Graded Elements for Multiphysics Applications. *Smart Materials and Structures*, v.16, p.2408-2428, 2007.
- SILVA, E. C. N. Topology optimization applied to the design of linear piezoelectric motors. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v.14, n.4-5, p. 309-322, 2003.
- SILVA, E. C. N.; NISHIWAKI, S.; KIKUCHI, N. Topology optimization design of flextensional actuators. *IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics, and Frequency Control*, v.47, n.3, p. 657-671, 2000.
- SILVA, E. C. N.; KIKUCHI, N. Design of piezoelectric transducers using topology optimization. *Smart Materials and Structures*, v.8, p. 350-364, 1999.
- SILVA, E. C. N.; NISHIWAKI, S.; FONSECA, J. S. O.; KIKUCHI, N. Optimization Methods Applied to Material and Flextensional Actuator Design Using the Homogenization Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.172, p.241-271, 1999.
- SILVA, E. C. N.; FONSECA, O. J. S.; MONTERO de ESPINOSA, F.; CRUMM, A. T.; BRADY, G. A.; HALLORAN, J. W.; KIKUCHI, N. Design of piezocomposite materials and piezoelectric transducers using topology optimization – Part I. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v.6, n.2, p. 117-182, 1999a.
- SILVA, E. C. N.; NISHIWAKI, S.; KIKUCHI, N. Design of piezocomposite materials and piezoelectric transducers using topology optimization – Part II. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v.6, n.3, p. 191-222, 1999b.

- SIMSON, E. A.; TARANUKHA, A. Optimization of the shape of a quartz resonator. *Acoustical Physics*, v.39, n.5, p. 472-476, 1993.
- SKAF, A.; NASSAR, F.; LEFEBVRE, B.; NONGAILLARD, B. A new acoustic technique to monitor bread dough during the fermentation phase. *Journal of Food Engineering*, v.93, p. 365-378, 2009.
- SITTIG, E. K. Effects of bonding and electrode layers on the transmission parameters of piezoelectric transducers used in ultrasonic digital delay lines. *IEEE Transactions of Sonic and Ultrasonic*, v.16, n.1, p. 2-9, 1969.
- SMITH, W. A. The role of piezocomposites in ultrasonic transducers. In: Proceedings of IEEE Ultrasonic Symposium, p. 755-765, 1989.
- SMITS, J. G.; DALKE, S. I.; COONEY, T. K. The constituent equations of piezoelectric bimorphs. *Sensors and Actuators A*, v.28, p. 41-61, 1991.
- SOMANI, V.; KALITA, S. J. Synthesis and characterization of nanocrystalline Barium Strontium Titanate powder via sol-gel processing. *Journal of Electroceramics*, v.18, n.1-2, p. 57-65, 2007.
- SOTO, C.A. Structural topology optimization: from minimizing compliance to maximizing energy absorption. *International Journal of Vehicle Design*, v.25, n.1/2, p.142-163, 2001.
- SOTO, C. A.; DÍAZ, A. R. Optimum Layout and Shape of Plate Structures Using Homogenization. In: Bendsøe M.P. and Mota S. C. A. Topology Design of Structures, p.407-420, 1993.
- STEINHAUSEN, R., LANGHAMMER, H. T., KOUVATOV, A. Z., PIENTSCHKE, C., BEIGE, H., ABICHT, H. P. Bending actuators based on monolithic barium titanate-stannate ceramics as functional gradient materials. *Current Research in Advanced Materials and Processes, Materials Science Forum*, v.494, p. 167-174, 2005.
- STOLPE, M., SVANBERG, K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.22, n.2, p. 116-124, 2001.
- STUMP, F. V.; SILVA, E. C. N.; PAULINO, G. H. Optimization of Material Distribution in Functionally Graded Structures with Stress Constraints. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v.23, n.6, p. 535-551, 2007.
- SUTTER, R. T.; CAMARDA, J. C.; WALSH, L. J.; ADELMAN, M. H. Comparison of several methods for calculating vibration mode shape derivatives. *AIAA Journal*, v.26, n.12, p.1506-1511, 1988.
- SUZUKI, K.; KIKUCHI, N. A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.93, p.291-318, 1991.

- SVANBERG, K. Global convergence of the stress ratio method for truss sizing. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.8, p.60-68, 1994a.
- \_\_\_\_\_. On the convexity and concavity of compliances. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.7, p.42-46, 1994b.
- \_\_\_\_\_. The Method of Moving Asymptotes - A New Method for Structural optimization. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v.24, p.359-373, 1987.
- SWAN, C. C.; KOSAKA, I. Voigt-Reuss Topology Optimization for Structures with Linear Elastic Material Behaviour. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v.40, n.1, p.3033-3057. 1997.
- TAKAGI, K.; LI, J.-F.; YOKOYAMA, S.; WATANABE, R. Fabrication and Evaluation of PZT/Pt Piezoelectric Composites and Functionally Graded Actuators. *Journal of the European Ceramic Society*, v.23, n.10, p. 1577-1583, 2003.
- TANIGAWA, Y.; MATSUMOTO, M. Optimization of material composition to minimize thermal stresses in nonhomogeneous plate subjected to unsteady heat supply. *JSME International Journal Series A-Solid Mechanics and Material Engineering*, v.40, n.1, p. 84–93, 1997.
- TAYA, M.; ALMAJID, A. A.; DUNN, M.; TAKAHASHI, H. Design of bimorph piezocomposite actuators with functionally graded microstructure. *Sensors and Actuators A-Physical*, v.107, n.3, p. 248–260, 2003.
- TIERSTEN, H. F. Hamilton's principle for linear piezoelectric media. *Proceedings of the IEEE*, v.55, n.8, p. 1523-1524, 1967.
- THOMAS, G. B., e FINNEY, R. L. **Calculus and Analytical Geometry**. 8.ed. Reading, MA: Addison – Wesley. 1992.
- THOMSEN, J. Topology Optimization of Structures Composed of One or Two Materials. *Structural Optimization*, v.5, p.108-115, 1992.
- TOKITA, M. Mechanism of Spark plasma sintering (SPS). *Proceeding of 2000 Powder Metallurgy World Congress*, p. 729-732, 2000.
- TROMBINI, V.; PALLONE, E. M.; MUNIR, Z. A.; TOMASI, R. Spark plasma sintering (SPS) de nanocompósitos de  $Al_2O_3$ - $ZrO_2$ . *Cerâmica*, v.53, p. 62-67, 2007.
- TURTELTAUB, S. Optimal non-homogeneous composites for dynamic loading. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.30, p. 101-112, 2005.
- TURTELTAUB, S. Optimal control and optimization of functionally graded materials for thermomechanical processes. *International Journal of Solids and Structures*, v.39, n.12, p. 3175-3197, 2002.
- TURTELTAUB, S. Optimal material properties for transient problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.22, p. 157-166, 2001.

- TURTELTAUB, S.; WASHABAUGH, P. Optimal distribution of material properties for an elastic continuum with structure-dependent body force. *International Journal of Solids and Structures*, v.36, n.30, p. 4587-4608, 1999.
- UCHINO, K.; GINIEWICZ, J. R. **Micromechatronics**. New York: Marcel Dekker, Inc. 2003, 489p.
- UEDA, S. Impact response of a functionally graded piezoelectric plate with a vertical crack. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, v.44, n. 3, p. 329-342, 2005.
- VAN der BIEST, O.; VANDEPERRE, L.; PUT, S.; ANNÉ, G.; VLEUGELS, J. Laminated and functionally graded ceramics by electrophoretic deposition. *Advances in Science and Technology*, v.45, p. 1075-1084, 2006.
- VERA, A.; MORENO, E.; LEIJA, L.; VÁZQUEZ, M. Optimization of hydrophone centering in circular ultrasonic transducer during field characterization using edge waves: a feasible study. *Japanese Journal of Applied Physics*, v.46, n.7, p.4321-4323, 2007.
- WALTERS, M. C.; SILVA E. C. N.; PAULINO, G. H. Modeling bamboo as a functionally graded material: Lessons for the analysis of affordable materials. *Journal of Materials Science*, v.41, p. 6991-7004, 2006.
- WANG, B. P. Improved approximate methods for computing eigenvector derivatives in structural dynamics. *AIAA Journal*, v.29, n.6, p.1018-1020, 1990.
- WANG, S.; KANG, J.; NOH, J. Topology optimization of a single-phase induction motor for rotary compressor. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 40, n.3, 2004.
- WANG, S. Y.; TAI, K.; QUEK, S. T. Topology optimization of piezoelectric sensors/actuators for torsional vibration control of composite plates. *Smart Materials and Structures*, v.15, p. 253-269, 2006.
- WINTER, A.; CORFF, B.; REIMANIS, I.; RABIN, B. Fabrication of graded nickel-alumina composites with a thermal-behavior-matching process. *Journal of the American Ceramic Society*, v.83, n.9, p. 2147-2154, 2004.
- WU, T.; RO, P. I.; KINGON, A. I., MULLING, F. J. Piezoelectric resonating structures for microelectronic cooling. *Smart Materials and Structures*, v.12, p. 181-187, 2003.
- WU, C. C. M.; KAHN, M.; MOY, W. Piezoelectric Ceramics with Functional Gradients: A New Application in Material Design. *Journal of the American Ceramic Society*, v.79, n.3, p. 809-12, 1996.
- XIA, Q.; WANG, M. Y. Simultaneous optimization of the material properties and the topology of functionally graded structures. *Computer-Aided Design*, v.40, n.6, p.660-675, 2008.

- YAMADA, K.; SAKAMURA, J-I.; NAKAMURA, K.. Broadband ultrasound transducers using effectively graded piezoelectric materials. *IEEE Ultrasonics Symposium*, p. 1085-1089, 1998.
- YAMADA, K.; SAKAMURA, J-I.; NAKAMURA, K. Equivalent network representation for thickness vibration modes in piezoelectric plates with an exponentially graded parameter. *Japanese Journal of Applied Physics*, v.39, Part 2, n.1A/B, p. 34-37, 1999.
- YAMADA, K.; YAMAZAKI, D.; NAKAMURA, K. Broadband ultrasound transducers using a plate with graded piezoelectric constant formed by an internal temperature gradient. *IEEE Ultrasonics Symposium*, p. 1017-1020, 2000.
- YAMADA, K.; SAKAMURA, J-I.; NAKAMURA, K. Equivalent network representation for thickness vibration modes in piezoelectric plates with a linearly graded parameter. *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics, and frequency Control*, v.48, n.2, p. 613-616, 2001.
- YANG, J.; XIANG, H. J. Thermo-electro-mechanical characteristics of functionally graded piezoelectric actuators. *Smart Materials and Structures*, v.16, p. 784-797, 2007.
- YAO, Q.; BJORNO, L. Broadband Tonpitz underwater acoustic transducers based on multimode optimization. *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, v.44, p.1060-1066, 1997.
- YAO, X.; HUANG, Z.; CHENG, L.; JIANG, D.; TAN, S.; MICHEL, D.; WANG, G.; MAZEROLLES, L.; PASTOL, J-L. Alumina-nickel composites densified by spark plasma sintering. *Materials Letters*, v.59, p.2314-2318, 2005.
- YING, C.; ZHIFEI, S. Exact solutions of functionally gradient piezothermoelastic cantilevers and parameter identification. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v.16, p.531-539, 2005.
- YIN, H. M.; PAULINO, G. H.; BUTTLAR, W. G.; SUN, L. Z. Effective thermal conductivity of two-phase functionally graded particulate composites. *Journal of Applied Physics*, v.98, n.6, p. 063704, 2005.
- YIN, H. M.; SUN, L. Z.; PAULINO, G. H. Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions. *Acta Materialia*, v.52, n.12, p. 3535–3543, 2004.
- YONG, H. D., ZHOU, Y. H. Transient anti-plane crack problem for two bonded functionally graded piezoelectric materials. *Archive of Applied Mechanics*, v.76, n.9-10, p. 497-509, 2006.
- YONG, Y. K. A new storage scheme for the Lanczos solution of large scale finite element models of piezoelectric resonators. *IEEE Ultrasonics Symposium*, v.1, p. 1633–1636, 1995.

- YONG, Y. K.; CHO, Y. Algorithms for eigenvalue problems in piezoelectric finite element analysis. *IEEE Ultrasonics Symposium*, v.1, p. 1057–1062, 1994.
- YONG, Y. K.; CHO, Y. Numerical algorithms for solutions of large eigenvalue problems in piezoelectric resonators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.39, n.6, p. 909–922, 1996.
- YOO, J.; KIKUCHI, N. Topology optimization in magnetic fields using the homogenization design method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 48, p.1463-1479, 2000.
- YOON, M-S.; KIM, Y-M.; KWEON, Y-S.; HONG, T-W.; LEE, Y-G.; RYU, S-L.; KIM, I-H.; KIM, H-J.; UR, S-C. Effects of ZnO on the piezoelectric properties of  $\text{Pb}(\text{Mn}_{1/3}\text{Sb}_{2/3})\text{O}_3\text{-Pb}(\text{Zr,Ti})\text{O}_3$  ceramics. *Journal of Electro-ceramics*, v.18, n.1-2, p. 73-75, 2007.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method**. 4.ed. London; New York: McGraw-Hill, 1991.
- ZHANG, Z-H.; WANG, F-C.; WANG, L.; LI, S-K. Ultrafine-grained copper prepared by spark plasma sintering process. *Material Science and Engineering A*, v.476, p. 201-205, 2008a.
- ZHANG, Z-H.; WANG, F-C.; WANG, L.; LI, S-K; SHEN, M.; OSAMU, S. Microstructural characteristics of large-scale ultrafine-grained copper. *Materials Characterization*, v.59, p. 329-333, 2008b.
- ZHANG, Z.; PAULINO, G. H. Wave propagation and dynamic analysis of smoothly graded heterogeneous continua using graded finite elements. *International Journal of Solids and Structures*, v.44, p. 3601-3626, 2007.
- ZHANG, H. L.; LI, J. F.; ZHANG, B. P. Fabrication and evaluation of PZT/Ag composites and functionally graded piezoelectric actuators. *Journal of Electroceramics*, v.16, n.4, p. 413-417, 2006a.
- ZHANG, H. L.; LI, J. F.; ZHANG, B. P. Sintering and piezoelectric properties of co-fired lead zirconate titanate/Ag composites. *Journal of the American Ceramic Society*. v.89, n.4, p. 1300-1307, 2006b.
- ZHANG, H.; LENNOX, B.; GOULDING, P. R.; LEUNG, A. Y. A float-encoded genetic algorithm technique for integrated optimization of piezoelectric actuator and sensor placement and feedback gains. *Smart Materials and Structures*, v.9, p. 552-557, 2000.
- ZHENG, B.; CHANG, C.-J.; GEA, H. C. Topology optimization of energy harvesting devices using piezoelectric materials. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.38, n.1, p. 17-23, 2009.
- ZHIFEI, S. General solution of a density functionally gradient piezoelectric cantilever and its applications. *Smart materials and Structures*, v.11, p. 122–129, 2002.

- ZHONG, Z., YU, T. Analytical solution of a cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*, v.67, n.3-4, p. 481-488, 2007.
- ZHONG, Z., YU, T. Vibration of a simply supported functionally graded piezoelectric rectangular plate. *Smart materials and Structures*, v.15, p. 1404–1412, 2006.
- ZHOU, S.; LI, Q. Design of graded two-phase microstructures for tailored elasticity gradients. *Journal of Material Science*, v.43, p.5157-5167, 2008.
- ZHOU, M.; ROZVANY, G. I. N. The COC Algorithm, Part II: Topological, Geometrical, and Generalized Shape Optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.89, p.309-336, 1991.
- ZHU, X. H.; MENG, Z. Y. Operational principle, fabrication and displacement characteristics of a functionally gradient piezoelectric ceramic actuator. *Sensors and Actuators A-Physical*, v.48, n.3, p.169-176, 1995.
- ZUIKER, J. R. Functionally graded materials: Choice of micromechanics model and limitations in property variation. *Journal of Engineering Materials and Technology, Transaction of ASME*, v.116, n.3, p. 428-437, 1994.

## APÊNDICE A: MODELAGEM DE TRANSDUTORES PIEZELÉTRICOS UTILIZANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

### A.1 Piezeletricidade

Essencialmente, o efeito piez elétrico ocorre na ausência de um centro de simetria na estrutura cristalina do material. Dentro dos 32 tipos cristalográficos existem 21 que não apresentam centro de simetria, dos quais 20 exibem piezeletricidade (o tipo número 21 é a classe cúbica 432) (CRACKNELL, 1969). Dez desses cristais são polares; em outras palavras, apresentam polarização instantânea por possuírem um dipolo elétrico na sua célula unitária. Os cristais desse subgrupo exibem piezeletricidade, além de piroeletricidade. Além disso, alguns desses dez cristais são ferroelétricos; em outras palavras, pode-se mudar a direção do dipolo mediante a aplicação de um campo elétrico. Essas classes cristalográficas piez elétricas são: 1, 2, m, 222, mm2, 4, -4, 422, 4mm, -42m, 3, 32, 3m, 6, -6, 622, 6mm, -62m, 23, -43m (CRACKNELL, 1969).

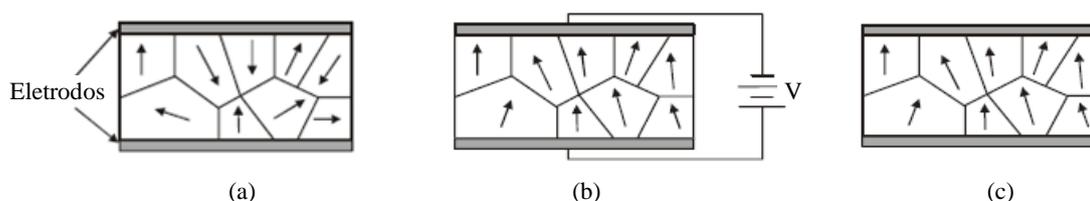


Figura A.1. Polarização do material piez elétrico. (a) Orientação aleatório dos dipolos antes da polarização; (b) Polarização; (c) Re-orientação dos dipolos elétricos após a polarização.

O efeito piez elétrico encontra-se presente em materiais naturais, como o quartzo, turmalina, e sal de Rochelle, os quais não apresentam centro de simetria na estrutura cristalina do material; porém, esse efeito é muito pequeno, o que conduziu ao desenvolvimento de matérias com propriedades melhoradas; por exemplo, os materiais cerâmicos ferroelétricos poli-cristalinos, como o titanato de bário ( $BaTiO_3$ ), e o titanato zirconato de chumbo (PZT); este último desenvolvido por Jaffe et al. (1954). Não obstante, nestes materiais a piezeletricidade deve ser induzida através

de um processo de polarização elétrica (KINO, 2000). Outros materiais que apresentam piezeletricidade quando polarizados são os polímeros à base de PVDF.

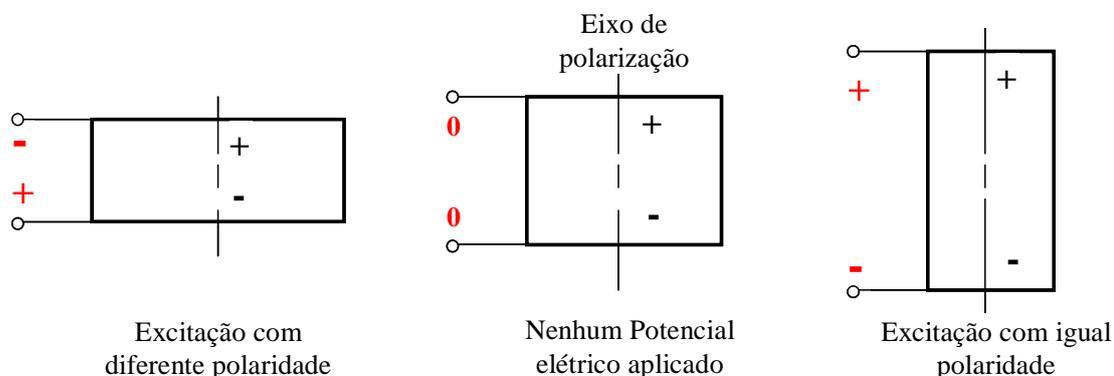


Figura A.2. Resposta mecânica de um material piezoelectrico a potenciais elétricos aplicados.

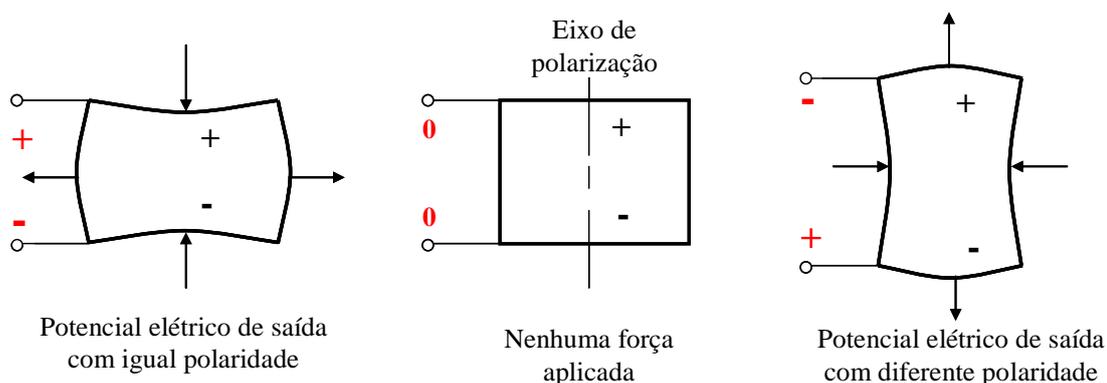


Figura A.3. Resposta elétrica de um material piezoelectrico à aplicação de forças externas.

As cerâmicas piezoelectricas são materiais constituídos de um conglomerado de cristais ferroelétricos orientados randomicamente (IKEDA, 1996). Elas geralmente são obtidas através da reação de vários óxidos, seguido de um aquecimento a altas temperaturas. Depois do aquecimento a cerâmica é geralmente isotrópica e não-piezoelectrica (no caso do PZT a estrutura cristalina é cúbica centrada nas faces), devido à orientação aleatória do domínio de Weiss (grupo de dipolos elétricos com orientação paralela), ver a Fig. A.1(a). O material cerâmico se torna piezoelectrico pelo aquecimento da cerâmica e a aplicação de um campo elétrico (geralmente maior a 2000 V/mm) na mesma direção na qual se deseja que os dipolos elétricos permaneçam alinhados, ver a Fig. A.1(b). Depois de retirar o campo elétrico de polarização, os dipolos não retornam a sua posição original e permanecem numa direção próxima àquela do campo elétrico de polarização, ver a Fig. A.1(c).

Conseqüentemente, o material possui agora uma polarização permanente (a cerâmica PZT polarizada tem uma estrutura anisotrópica: estrutura cristalina simétrica tetragonal) e responderá linearmente a campos elétricos ou pressões mecânicas, sempre e quando a cerâmica é excitada com magnitudes inferiores às necessárias para mudar a direção do domínio de Weiss (IKEDA, 1996).

Depois que a cerâmica é polarizada, um potencial elétrico aplicado com a mesma polaridade que a utilizada na polarização da cerâmica causa expansão ao longo desse eixo, ver a Fig. A.2, e a aplicação de um potencial elétrico com polaridade oposta produz uma contração da cerâmica, ver a Fig. A.2. Similarmente, um potencial elétrico com igual polaridade que o utilizado na polarização da cerâmica é obtido quando uma força de compressão é aplicada paralela ao eixo de polarização, ou uma força de tração perpendicular a esse eixo, ver a Fig. A.3; contrariamente, um potencial com polaridade invertida é o resultado de aplicar uma força de tração paralela ao eixo de polarização, ou de aplicar uma força de compressão perpendicular a esse eixo, ver a Fig. A.3.

## A.2 Equações do Efeito Piezelétrico

O efeito piezelétrico em um meio piezelétrico pode ser descrito utilizando um conjunto de equações básicas. As seguintes equações descrevem o efeito piezelétrico linear, as quais são expressas segundo a *IEEE Standard on Piezoelectricity* (IEEE, 1996), e as quais formam a base da formulação de Elementos Finitos (EF) de um meio piezelétrico apresentadas neste capítulo.

- As relações constitutivas para um meio piezelétrico mostram a relação entre as partes elétricas e mecânicas do sistema. Elas são formuladas segundo um sistema de coordenadas Cartesiano utilizando a notação de Einstein (AULD, 1990), e são dadas por:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= C_{ijkl}^E(x, y) S_{kl} - e_{kij}(x, y) E_k \\ D_i &= e_{ikl}(x, y) S_{kl} + \varepsilon_{ik}^S(x, y) E_k \end{aligned} \quad \text{onde: } i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (\text{A.1})$$

e onde:

$T_{ij}$  são componentes do tensor de tensões mecânicas, (N/m<sup>2</sup>),

$S_{kl}$  são componentes do tensor de deformações mecânicas,

$D_i$  são componentes do deslocamento elétrico, (C/m<sup>2</sup>),

$E_k$  são componentes do vetor de campo elétrico, (V/m),

$C_{ijkl}^E$  são componentes do tensor de constantes de rigidez elásticas avaliadas com campo elétrico constante, (N/m<sup>2</sup>),

$e_{ikl}$  são componentes do tensor de constantes piezelétricas, (C/m<sup>2</sup>),

$\varepsilon_{ik}^S$  são componentes do tensor de constantes dielétricas avaliadas com deformação constante, (F/m).

- Os componentes do tensor de deformação  $S_{kl}$  são definidos como:

$$S_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (\text{A.2})$$

onde  $u_l$  (m) é o componente número  $l$  do vetor de deslocamentos e, onde

$$u_{k,l} = \partial u_k / \partial x_l .$$

- Os campos elétrico e magnético, dentro do médio piezelétrico, são descritos pelas equações de Maxwell (AULD, 1990). Assim, o campo elétrico é derivado de um potencial elétrico escalar como:

$$E_i = -\phi_{,i} \quad (\text{A.3})$$

onde  $\phi$  (V) é o potencial elétrico. A seguinte equação de Maxwell é também necessária para descrever o meio piezelétrico:

$$D_{i,i} = 0 \quad (\text{A.4})$$

- Finalmente, a equação de movimento, sem considerar forças volumétricas, pode ser escrita como:

$$T_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (\text{A.5})$$

onde  $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>) representa a densidade do material, e  $\ddot{u}_i = \partial^2 u_i / \partial t^2$ , sendo  $t$  (s) o tempo. É importante ressaltar que o tensor de tensões mecânicas  $T_{ij}$  é simétrico (IEEE, 1996).

No entanto, a eq.(A.1) pode ser apresentada de forma mais compacta, através da seguinte equação tensorial (NAILLON et al., 1983):

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{c}^E \mathbf{S} - \mathbf{e}^T \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e} \mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

onde  $\mathbf{c}^E$  é o tensor de constantes elásticas de quarta ordem com os seus componentes calculados sob campo elétrico constante;  $\boldsymbol{\varepsilon}^S$  é o tensor de constantes dielétricas de segunda ordem com as suas componentes calculadas sob deformação constante;  $\mathbf{e}$  é o tensor de constantes piezelétricas de terceira ordem, ver a Seção A.4 para maiores detalhes desses tensores. O sobrescrito  $T$  indica transposta.

Como observado das equações anteriores, para modelar o comportamento dos materiais piezelétricos é necessário lidar com equações diferenciais parciais. Devido à complexidade da geometria e das condições de contorno dos problemas relacionados com transdutores piezelétricos, torna-se difícil encontrar uma solução analítica exata para o conjunto de equações diferenciais que governa o comportamento dos materiais piezelétricos, principalmente, quando se considera que as propriedades do material piezelétrico não permanecem constantes em relação à sua posição Cartesiana. Uma abordagem alternativa consiste em fazer algumas simplificações no problema original, de tal forma que o comportamento do transdutor piezelétrico possa ser descrito por modelos unidimensionais. Entretanto, existem fenômenos que ocorrem em materiais piezelétricos que não são previstos pelos modelos unidimensionais. Para prever estes fenômenos, é necessário utilizar métodos numéricos. Neste trabalho é utilizado o Método dos Elementos Finitos

(ALLIK, HUGHES, 1970; BATHE, 1996; LERCH, 1990; NAILLON et al., 1983; PIEFORT, 2001). Neste Apêndice A, a abordagem de EF para estruturas piezelétricas será apresentada sem considerar o efeito da gradação de material; no entanto, neste trabalho é implementado o conceito dos Elementos Finitos Gradados (KIM, PAULINO, 2002; SANTARE, LAMBROS, 2000) para considerar a gradação de material. O capítulo 3 apresenta em detalhe o programa desenvolvido para o estudo de TPGF baseado no conceito de Elementos Finitos Gradados.

### A.3 Descrição dos Tensores de Material

#### A.3.1 Notação reduzida das equações constitutivas

Voltando à eq.(A.1) e eq.(A.6), a última dessas equações representa uma versão reduzida da primeira; no entanto, essa redução não é direta, sendo necessário normalizar a transformação da notação de Einstein para a notação reduzida ou matricial. A notação reduzida consiste em substituir os índices  $ij$  e  $kl$ , da eq.(A.1) por  $p$  e  $q$ , onde  $i, j, k$  e  $l$  assumem valores 1, 2 e 3, e os índices  $p$  e  $q$  assumem valores 1, 2, 3, 4, 5 e 6 de acordo com a Tabela A.1 (ANDRADE, 2006).

Tabela A.1. Notação reduzida.

$ij$ ou $kl$	$p$ ou $q$
11	1
22	2
33	3
23 ou 32	4
31 ou 13	5
12 ou 21	6

Utilizando a notação reduzida pode-se re-escrever a eq.(A.1) como (ver eq.(A.6) para estabelecer a relação):

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & c_{14}^E & c_{15}^E & c_{16}^E \\ c_{21}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & c_{24}^E & c_{25}^E & c_{26}^E \\ c_{31}^E & c_{32}^E & c_{33}^E & c_{34}^E & c_{35}^E & c_{36}^E \\ c_{41}^E & c_{42}^E & c_{43}^E & c_{44}^E & c_{45}^E & c_{46}^E \\ c_{51}^E & c_{52}^E & c_{53}^E & c_{54}^E & c_{55}^E & c_{56}^E \\ c_{61}^E & c_{62}^E & c_{63}^E & c_{64}^E & c_{65}^E & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{31} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ e_{15} & e_{25} & e_{35} \\ e_{16} & e_{26} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7a})$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & \varepsilon_{12}^S & \varepsilon_{13}^S \\ \varepsilon_{21}^S & \varepsilon_{22}^S & \varepsilon_{23}^S \\ \varepsilon_{31}^S & \varepsilon_{32}^S & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7b})$$

### A.3.2 Efeitos de simetria

Os materiais analisados e estudados neste trabalho são cerâmicas de classe de simetria hexagonal da família  $6mm$ , como os diversos tipos de PZT. De acordo com as normas do IEEE Standards (IEEE, 1996), a direção de polarização é a direção  $z$ , ver a Fig. A.4(a). Porém neste trabalho, a direção de polarização também será assumida na direção  $y$ , ver a Fig. A.4(b), uma vez que essa é a direção da polarização que o software comercial de elementos finitos ANSYS considera nos modelos bidimensionais. Assim, de forma geral será assumida como direção de polarização a direção 3 na Fig. A.4.

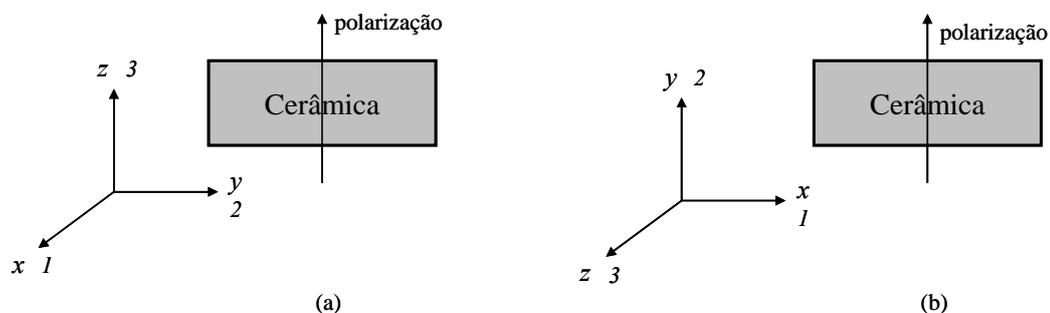


Figura A.4. Nomenclatura para as equações constitutivas piezelétricas. (a) Nomenclatura “tradicional”; (b) nomenclatura adotada pelo software ANSYS.

Os materiais piezelétricos são, elástica e piezeletricamente, anisotrópicos na direção 3 e isotrópicos no plano 12 (AULD, 1990). Para os materiais das classes hexagonais com anisotropia na direção  $z$ , e considerando efeitos de simetria (ANDRADE, 2006), é possível reduzir as 21 constantes do tensor elástico, as 18 constantes do tensor piezelétrico, e as 9 constantes do tensor dielétrico, para 5, 3, e 2 constantes, respectivamente. Assim, o tensor de permissividade elétrica é dado por (KINO, 2000):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^S = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

para esses mesmos materiais o tensor de constantes elásticas é dado por (KINO, 2000):

$$\boldsymbol{c}^E = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \quad \text{onde: } c_{66}^E = \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) \quad (\text{A.9})$$

e o tensor de constantes piezelétricas é dado por (KINO, 2000):

$$\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Portanto, as equações constitutivas de um material piezelétrico, ver a eq.(A.6), pode-se expressar como (adotando o sistema de coordenadas da Fig. A.4(a)):

$$\begin{Bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{xz} \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \\ S_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A.11a})$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \\ S_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A.11b})$$

Na eq.(A.11)  $x$ ,  $y$  e  $z$  ou 1, 2 e 3 representam as coordenadas Cartesianas conforme se apresentam na Fig. A.4(a). Para definir modelos bidimensionais, no programa ANSYS™, é necessário transformar esse sistema de coordenadas da Fig. A.4(a), uma vez que esse programa assume uma rotação de 90 graus nesse sistema coordenado, ver a Fig. A.4(b), trocando as direções  $y$  e  $z$ . Isto conduz à seguinte expressão, a ser inserida no ANSYS™, para as equações constitutivas do material piezelétrico (NADER, 2002)<sup>1</sup>:

$$\begin{Bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{xy} \\ T_{yz} \\ T_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{13}^E & c_{12}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{33}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{13}^E & c_{11}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{31} & 0 \\ 0 & e_{33} & 0 \\ 0 & e_{31} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A.12a})$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{33} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A.12b})$$

<sup>1</sup> É importante ressaltar que no caso de materiais isotrópicos essa transformação não se torna necessária devido à sua simetria.

### A.3.3 Estado Plano de Tensões Mecânicas

Quando uma estrutura piezolétrica possui uma configuração geométrica com largura (direção 1 na Fig. A.4) e comprimento (direção 2 na Fig. A.4) de dimensões comparáveis e muito maiores que a espessura (direção 3 na Fig. A.4), pode-se estabelecer a seguinte hipótese de Estado Plano de Tensões Mecânicas:

$$T_{zz} = T_{xz} = T_{yz} = D_z = 0 \quad (\text{A.13})$$

Assim, após modificações nas matrizes das equações constitutivas piezolétricas, eq.(A.11), em Estado Plano de Tensões Mecânicas elas assumem (NADER, 2002):

$$\begin{Bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{xy} \\ D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E} & c_{12}^E - \frac{c_{12}^E c_{13}^E}{c_{33}^E} & 0 & 0 & e_{31} - \frac{e_{31} c_{12}^E}{c_{33}^E} \\ c_{12}^E - \frac{c_{12}^E c_{13}^E}{c_{33}^E} & c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E} & 0 & 0 & e_{33} - \frac{e_{31} c_{13}^E}{c_{33}^E} \\ 0 & 0 & c_{66}^E & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & e_{15} & -\varepsilon_{11}^S & 0 \\ e_{31} - \frac{e_{31} c_{12}^E}{c_{33}^E} & e_{33} - \frac{e_{31} c_{13}^E}{c_{33}^E} & 0 & 0 & -\varepsilon_{33}^S - \frac{e_{31}^2}{c_{33}^E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \\ -E_x \\ -E_y \end{Bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

### A.3.4 Estado Plano de Deformações Mecânicas

Esta consideração é utilizada em corpos que possuem a espessura em dimensões muito superiores à largura e ao comprimento. As cargas mecânicas são distribuídas uniformemente em relação à espessura e atuam perpendicular a esta. Portanto, o Estado Plano de Deformações Mecânicas assume como hipótese que a componente do deslocamento na direção 3 é nula; assim,  $u_z = 0$ . Dessa forma:

$$S_{zz} = S_{xz} = S_{yz} = D_z = 0 \quad (\text{A.15})$$

Adicionalmente, no Estado Plano de Deformações Mecânicas assume-se, também, que a componente do campo elétrico da direção 3 é nula; assim:

$$E_z = 0 \quad (\text{A.16})$$

Dessa forma, a matriz que representa as equações constitutivas piezelétricas se altera para a forma (NADER, 2002):

$$\begin{Bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{xy} \\ D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & e_{31} \\ c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & c_{44}^E & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & e_{15} & -\varepsilon_{11}^S & 0 \\ e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & -\varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \\ -E_x \\ -E_y \end{Bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

### A.3.5 Formulação Axissimétrica

A transformação das propriedades do material do sistema tridimensional para um modelo bidimensional axissimétrico, ou seja, do sistema de coordenadas cartesianas  $x, y, z$  para o sistema de coordenadas cilíndricas  $r, \theta, z$ , dá-se como mostra a Fig. A.5. Essa hipótese assume que o corpo possui uma geometria axissimétrica sujeita a carregamentos axissimétricos.

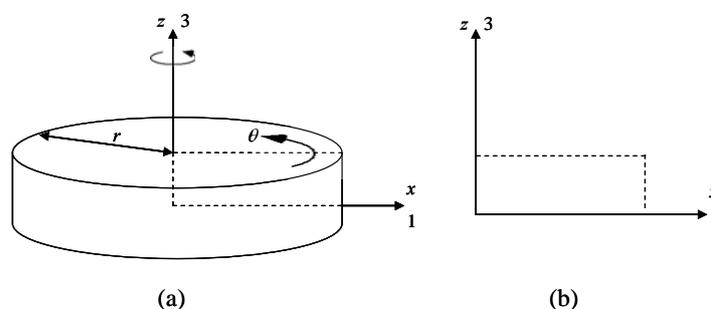


Figura A.5. (a) Sistema axissimétrico em (a) coordenadas cilíndricas (b) coordenadas cartesianas.

Neste tipo de formulação têm-se como hipótese:

$$T_{xz} = T_{yz} = S_{xz} = S_{yz} = D_z = 0 \quad (\text{A.18})$$

Assim, a matriz de equações constitutivas piezelétricas, eq.(A.11), pode ser reduzida, sendo dada por:

$$\begin{Bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{xy} \\ D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{13}^E & c_{12}^E & 0 & 0 & e_{31} \\ c_{13}^E & c_{33}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & e_{33} \\ c_{12}^E & c_{13}^E & c_{11}^E & 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & -\varepsilon_{11}^S & 0 \\ e_{31} & e_{33} & e_{31} & 0 & 0 & -\varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ E_x \\ E_y \end{Bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

#### A.4 Formulação Variacional de Problemas Piezelétricos

Nesta seção a formulação variacional para um corpo piezelétrico é apresentada, e a resolução do problema piezelétrico é apresentada utilizando o princípio de Hamilton<sup>2</sup> (TIERSTEN, 1967). Segundo esse princípio, os deslocamentos e potenciais elétricos que realmente ocorrem no problema são aqueles que satisfazem a seguinte equação (TIERSTEN, 1967):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (\text{A.20})$$

onde  $L$  é o Lagrangeano e  $W$  é o trabalho externo realizado pelas forças mecânicas e elétricas, e  $\delta$  representa o variacional. O Lagrangeano é dado por (PIEFORT, 2001):

$$L = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} - H \right) d\Omega \quad (\text{A.21})$$

<sup>2</sup> No entanto, é importante esclarecer que outras abordagens podem ser utilizadas, como o método de resíduos ponderados de Galerkin.

onde  $H$  é a entalpia elétrica, e  $\mathbf{u}$  o vetor de deslocamentos. A integração da eq.(A.21) é realizada sobre um corpo piezoeletrico de volume  $\Omega$ . Para o caso em que as forças que agem sobre o sistema são superficiais,  $\delta W$  é dado pela seguinte expressão:

$$\delta W = \int_S (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} - \delta \varphi Q) dS \quad (\text{A.22})$$

onde  $\mathbf{F}$  representa o vetor de forças superficiais,  $Q$  é a carga elétrica por unidade de área, e  $\varphi$  é o potencial elétrico. A entalpia  $H$  é dada por:

$$H = P - \mathbf{E}^T \mathbf{D} \quad (\text{A.23})$$

sendo  $\mathbf{E}$  o vetor de campo elétrico,  $\mathbf{D}$  o vetor de deslocamentos elétricos, e  $P$  a energia potencial dada por:

$$P = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{T} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{D} \quad (\text{A.24})$$

sendo  $\mathbf{S}$  o vetor de deformações e  $\mathbf{T}$  o vetor de tensões. Substituindo a eq.(A.24) na eq.(A.23), e substituindo a equação resultante na eq.(A.21), obtém-se:

$$L = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} - \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{T} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{D} \right) d\Omega \quad (\text{A.25})$$

Agora, substituindo as equações constitutivas de um material piezoeletrico, as quais se expressam segundo a eq.(A.6) (NAILLON et al., 1983), na eq.(A.25) obtém-se:

$$L = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{S}^T \mathbf{c}^E \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \mathbf{e}^T \mathbf{E} + \mathbf{E}^T \mathbf{e} \mathbf{S} + \mathbf{E}^T \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E} \right) d\Omega \quad (\text{A.26})$$

Substituindo a eq.(A.22) e eq.(A.26) no principio de Hamilton dado pela eq.(A.20), obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{\Omega} (\rho \delta \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} - \delta \mathbf{S}^T \mathbf{c}^E \mathbf{S} + \delta \mathbf{S}^T \mathbf{e}^T \mathbf{E} + \delta \mathbf{E}^T \mathbf{e} \mathbf{S} + \delta \mathbf{E}^T \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E}) d\Omega + \int_S (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} - \delta \varphi Q) dS \right) dt = 0 \quad (\text{A.27})$$

Agora, integrando por partes o primeiro termo da eq.(A.27) em relação ao tempo:

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho \delta \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dt = \rho \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{u}} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dt \quad (\text{A.28})$$

e substituindo a eq.(A.28) na eq.(A.27) obtém-se a expressão variacional para problemas piezelétricos:

$$\int_{\Omega} (-\rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} - \delta \mathbf{S}^T \mathbf{c}^E \mathbf{S} + \delta \mathbf{S}^T \mathbf{e}^T \mathbf{E} + \delta \mathbf{E}^T \mathbf{e} \mathbf{S} + \delta \mathbf{E}^T \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E}) d\Omega + \int_S (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} - \delta \varphi Q) dS = 0 \quad (\text{A.29})$$

## A.5 Formulação de Elementos Finitos para Problemas Piezelétricos

Na análise por Elementos Finitos (EF) a região contínua de análise,  $\Omega$ , é dividida e aproximada por um número finito de volumes menores,  $V^e$ . Esses volumes são os elementos no MEF. Em cada elemento finito são definidos alguns pontos, nomeados nós, onde as incógnitas, neste caso, os deslocamentos mecânicos e potencial elétrico, são determinados. A relação entre as incógnitas nodais de um elemento finito e as incógnitas de um ponto arbitrário, no mesmo elemento, são determinadas por funções de interpolação. Essas funções de interpolação são geralmente polinomiais (BATHE, 1996). A aproximação por Elementos Finitos (EF) implica assumir que o deslocamento  $\mathbf{u}$  e o potencial elétrico  $\varphi$ , para cada elemento finito  $e$ , são aproximados respectivamente por deslocamentos  $\mathbf{u}_i$ , potenciais elétricos  $\varphi_i$  nodais, e por funções de interpolação. Eles podem ser expressos como:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N}_u \mathbf{u}_i \quad (\text{A.30})$$

$$\varphi^e = N_\varphi \boldsymbol{\varphi}_i \quad (\text{A.31})$$

onde  $N_u$  e  $N_\varphi$  são as funções de interpolação ou de forma para o problema mecânico e elétrico, respectivamente. Derivando as eq.(A.30) e eq.(A.31) obtém-se a deformação  $S^e$  e o campo elétrico  $E^e$ , como:

$$S^e = B_u u_i \quad (\text{A.32})$$

$$E^e = -B_\varphi \boldsymbol{\varphi}_i \quad (\text{A.33})$$

onde,  $B_u$  e  $B_\varphi$  são as matrizes deslocamento-deformação e gradiente da voltagem, respectivamente. Essas matrizes podem ser expressas como:

$$B_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}^T N_u \quad (\text{A.34})$$

$$B_\varphi = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} N_\varphi \quad (\text{A.35})$$

sendo  $x$ ,  $y$  e  $z$  as coordenadas Cartesianas. Substituindo a eq.(A.30) e eq.(A.31) na eq.(A.29) a seguinte expressão é obtida (omite-se o subscrito  $i$ ):

$$\begin{aligned} & (\delta u^e)^T \left\{ - \left( \int_{V^e} \rho N_u^T N_u dV^e \right) \ddot{u}^e - \left( \int_{V^e} B_u^T c^E B_u dV^e \right) u^e - \left( \int_{V^e} B_u^T e^T B_\varphi dV^e \right) \varphi^e + \int_{S^e} N_u^T F dS^e \right\} + \dots \\ & (\delta \varphi^e)^T \left\{ - \left( \int_{V^e} B_\varphi^T e B_u dV^e \right) u^e + \left( \int_{V^e} B_\varphi^T \boldsymbol{\varepsilon}^S B_\varphi dV^e \right) \varphi^e - \int_{S^e} N_\varphi^T Q dS^e \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

onde  $V^e$  é o volume do elemento finito  $e$ . Igualando a zero os termos que multiplicam  $(\delta \mathbf{u}^e)^T$  e  $(\delta \varphi^e)^T$  na eq.(A.36) obtêm-se as equações piezelétricas descritas na forma de elementos finitos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu}^e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^e \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}^e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^e & \mathbf{K}_{u\varphi}^e \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^{eT} & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \boldsymbol{\phi}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p^e \\ \mathbf{Q}_p^e \end{Bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

onde:

$$\mathbf{F}_p^e = \int_{S^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{F} dS^e \quad ; \quad \mathbf{Q}_p^e = - \int_{S^e} \mathbf{N}_\varphi^T Q dS^e \quad (\text{A.38})$$

$$\mathbf{M}_{uu}^e = \iiint \mathbf{N}_u^T \rho(x, y, z) \mathbf{N}_u dx dy dz \quad ; \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu}^e &= \iiint \mathbf{B}_u^T \mathbf{c}^E(x, y, z) \mathbf{B}_u dx dy dz \quad ; \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^e &= \iiint \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}^T(x, y, z) \mathbf{B}_\varphi dx dy dz \quad ; \\ \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^e &= \iiint \mathbf{B}_\varphi^T \boldsymbol{\varepsilon}^S(x, y, z) \mathbf{B}_\varphi dx dy dz \quad ; \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

onde os termos  $\mathbf{M}_{uu}^e$ ,  $\mathbf{K}_{uu}^e$ ,  $\mathbf{K}_{u\varphi}^e$ , e  $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^e$  são as matrizes de massa, rigidez, piezelétrica, e dielétrica para um elemento finito  $e$ , respectivamente. Conforme a teoria de MEF, os vetores e matrizes da resposta global da estrutura resultam da montagem das contribuições de cada um dos elementos finitos (BATHE, 1996; ZIENKIEWICZ, TAYLOR, 1991).

A eq.(A.37) não leva em consideração as perdas mecânicas que ocorrem no material. Para modelar as perdas é necessário utilizar as equações de elementos finitos globais que considerem o amortecimento da estrutura piezelétrica (NADER, 2002), assim:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{Q}_p \end{Bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

onde  $C_{uu}$  é a matriz de amortecimento global. Existem diversas maneiras de calcular essa matriz, a maneira mais comum é considerar que a matriz  $C_{uu}$  é dada pela combinação da matriz de rigidez global  $K_{uu}$  e a matriz de massa global  $M_{uu}$ ; ou seja (BATHE, 1996):

$$C_{uu} = \alpha M_{uu} + \beta_a K_{uu} \quad (\text{A.42})$$

onde  $\alpha$  e  $\beta_a$  são as constantes de amortecimento. Há basicamente quatro tipos de amortecimento que podem ser modelados de acordo com os valores dessas constantes; assim, quando  $\alpha=0$  e  $\beta_a=0$  não há amortecimento; quando  $\alpha=0$  e  $\beta_a > 0$  se diz que existe amortecimento viscoso; quando  $\alpha > 0$  e  $\beta_a=0$  o amortecimento é proporcional à massa; e quando  $\alpha > 0$  e  $\beta_a > 0$  o amortecimento é denominado de Rayleigh (COOK et al., 2001).

## A.6 Elemento Finito Isoparamétrico para Problemas Piezelétricos

Nesse trabalho é considerado um elemento finito retangular de quatro nós, elemento Q4. O elemento retangular é apresentado na Fig. A.6(a) nas suas coordenadas naturais e na Fig. A.6(b) nas suas coordenadas físicas, entendendo que o sistema de coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$  é o sistema padrão ou local, enquanto que o sistema global é denominado sistema de coordenadas físicas  $(x, y)$  (BATHE, 1996; COOK et al., 2001; ZIENKIEWICZ, TAYLOR, 1991).

No espaço físico, as coordenadas locais  $(\xi, \eta)$  não necessariamente são ortogonais nem paralelas ao sistema de coordenadas global  $(x, y)$ . Na formulação isoparamétrica, os lados do elemento finito Q4 são divididos pelos eixos  $\xi$  e  $\eta$ . Os lados desse elemento têm coordenadas  $\xi = \pm 1$  e  $\eta = \pm 1$ , indiferente da forma ou tamanho físico do elemento finito e indiferente da sua orientação no sistema de coordenadas globais. O ponto  $\xi = \eta = 0$  é normalmente o centro do elemento, mas em geral não é o centróide do elemento físico. Mapeado dentro do espaço  $\xi\eta$ , o elemento é sempre um elemento quadrado como o mostrado na Fig. A.6(b).

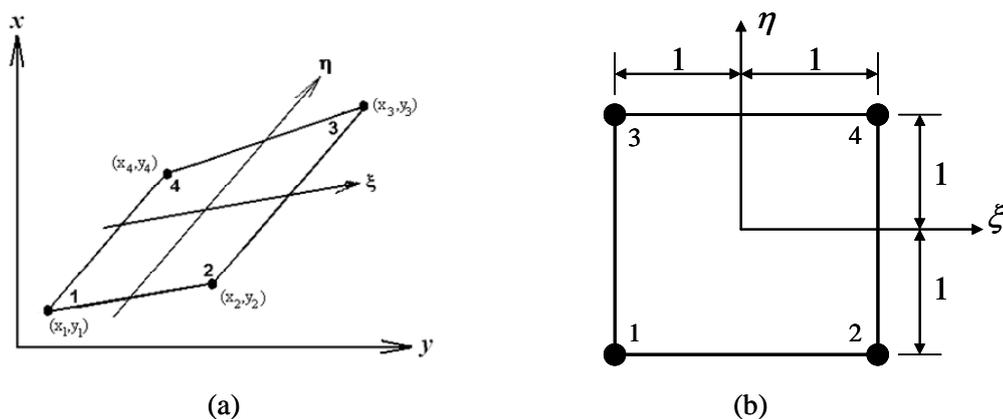


Figura A.6. (a) Elemento retangular bidimensional Q4 no espaço físico; (b) o mesmo elemento, mapeado no espaço  $\xi\eta$ .

Uma vez que o elemento é isoparamétrico, as mesmas funções de forma são utilizadas para interpolar tanto as coordenadas, deslocamentos e potencial elétrico, de um ponto dentro do elemento, a partir das coordenadas, deslocamentos e potenciais elétricos nodais. Assim, a partir das eq.(A.30) e eq.(A.31) temos para o elemento finito  $e$ :

$$\mathbf{x}^e = \begin{Bmatrix} \sum N_i x_i \\ \sum N_i y_i \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_u \mathbf{x}_i \quad (\text{A.43})$$

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \sum N_i u_{x_i} \\ \sum N_i u_{y_i} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}_i \quad (\text{A.44})$$

$$\varphi^e = \sum N_i \varphi_i = \mathbf{N}_\varphi \boldsymbol{\varphi}_i \quad (\text{A.45})$$

onde o índice  $i$  na somatória representa o número de nós,  $i = 1, \dots, 4$ . Os termos  $u_{x_i}$  e  $u_{y_i}$  representam os deslocamentos do nó  $i$  na direção horizontal e vertical, respectivamente, e  $x_i$ ,  $y_i$  representam as coordenadas do nó  $i$ . Adicionalmente:

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.46})$$

$$\mathbf{N}_\varphi = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (\text{A.47})$$

$$\mathbf{x}_i = [x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad x_4 \quad y_4]^T \quad (\text{A.48})$$

$$\mathbf{u}^e = [u_{x_1} \quad u_{y_1} \quad u_{x_2} \quad u_{y_2} \quad u_{x_3} \quad u_{y_3} \quad u_{x_4} \quad u_{y_4}]^T \quad (\text{A.49})$$

$$\boldsymbol{\varphi}_i = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4]^T \quad (\text{A.50})$$

As funções de forma são funções de interpolação de Lagrange e são expressas em coordenadas  $(\xi, \eta)$  como (COOK et al., 2001):

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Da eq.(A.51) observa-se que cada  $N_i$  assume um valor unitário quando  $\xi$  e  $\eta$  assumem a coordenada do nó  $i$ , mas é zero quando  $\xi$  e  $\eta$  assumem a coordenada de qualquer outro nó.

Por outro lado, assumindo um domínio bidimensional, os diferenciais  $\partial/\partial x$  e  $\partial/\partial y$  nas matrizes  $\mathbf{B}_u$  e  $\mathbf{B}_\varphi$  da eq.(A.32) e eq.(A.33), devem ser relacionados com os diferenciais  $\partial/\partial \xi$  e  $\partial/\partial \eta$  através da eq.(A.43). Assim (COOK et al., 2001):

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \quad (\text{A.52})$$

onde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i; & \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i; & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

As derivadas das coordenadas são combinadas na forma matricial e dadas por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.54})$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz Jacobiana de transformação de coordenadas. Relacionando a eq.(A.52) e eq.(A.54), os diferenciais de dois sistemas de coordenadas (local e global) podem ser expressos como (COOK et al., 2001):

$$\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \quad (\text{A.55})$$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (\text{A.56})$$

onde  $J$  é o determinante da matriz Jacobiana ( $J = \det \mathbf{J}$ ).

De maneira análoga, as derivadas das funções de forma dos nós  $i$  são relacionadas por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.57})$$

O determinante da matriz Jacobiana  $J$  pode ser observado como um fator escalar que multiplica  $d\xi d\eta$  para gerar o incremento de área física  $dx dy$ . Assim, as equações iniciais, eq.(A.39) e eq.(A.40), podem-se transformar às coordenadas locais do elemento finito  $e$ , para um elemento bidimensional em Estado Plano de tensões Mecânicas, como:

$$\mathbf{M}_{uu}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{N}_u t J d\xi d\eta \quad (\text{A.58})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{uu}^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_u^T \mathbf{c}^E \mathbf{B}_u t J d\zeta d\eta \\
\mathbf{K}_{u\varphi}^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}^T \mathbf{B}_\varphi t J d\zeta d\eta \\
\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_\varphi^T \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{B}_\varphi t J d\zeta d\eta
\end{aligned} \tag{A.59}$$

onde  $t$  representa a espessura do elemento finito  $e$ . No caso de um elemento finito piezelétrico Q4 bidimensional, em Estado Plano de Deformações Mecânicas, as eq.(A.39) e eq.(A.40) podem ser expressas como:

$$\mathbf{M}_{uu}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{N}_u J d\zeta d\eta \tag{A.60}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{uu}^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_u^T \mathbf{c}^E \mathbf{B}_u J d\zeta d\eta \\
\mathbf{K}_{u\varphi}^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}^T \mathbf{B}_\varphi J d\zeta d\eta \\
\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_\varphi^T \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{B}_\varphi J d\zeta d\eta
\end{aligned} \tag{A.61}$$

Já no caso de um elemento finito axissimétrico, as eq.(A.39) e eq.(A.40) podem ser escritas como:

$$\mathbf{M}_{uu}^e = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{N}_u r J d\zeta d\eta \tag{A.62}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{uu}^e &= 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_u^{axi^T} \mathbf{c}^E \mathbf{B}_u^{axi} r J d\zeta d\eta \\
\mathbf{K}_{u\varphi}^e &= 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_u^{axi^T} \mathbf{e}^T \mathbf{B}_\varphi r J d\zeta d\eta \\
\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^e &= 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_\varphi^T \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{B}_\varphi r J d\zeta d\eta
\end{aligned} \tag{A.63}$$

onde  $r$  é o raio do elemento finito, dado por:

$$r = x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \tag{A.64}$$

sendo que  $x_i$  é a coordenada na direção 1 ou  $x$  de cada nó, segundo se apresenta na Fig. A.5, e  $N_i$  é a função de forma de cada nó. Adicionalmente, no caso do elemento finito axissimétrico bidimensional, a matriz deslocamento-deformação  $B_u$ , da eq.(A.34), deve ser modificada como segue (COOK et al., 2001):

$$B_u^{axi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T N_u \quad (A.65)$$

## A.7 Características Dinâmicas de Estruturas Piezelétricas

### A.7.1 Impedância Elétrica

A impedância elétrica é uma quantidade característica de estruturas piezelétricas, a qual pode ser verificada facilmente por métodos experimentais. A importância da impedância elétrica consiste em que, em conjunto com a função de resposta mecânica em frequência, permite obter todas as frequências de ressonância e anti-ressonância da estrutura. As ressonâncias são as frequências naturais para o caso de contorno de eletrodos em curto-circuito, enquanto que as anti-ressonâncias são frequências naturais na condição de contorno de circuito elétrico em aberto. As ressonâncias são excitadas por um pulso de potencial elétrico, e as anti-ressonâncias por um pulso de carga elétrica. Assim, as frequências de ressonância ( $\omega_r$ ) são representadas pelos extremos mínimos e as frequências de anti-ressonância ( $\omega_a$ ) pelos extremos máximos da curva de impedância elétrica de entrada, ver a Fig. A.7.

Por outro lado, a curva de impedância elétrica em conjunto com a curva de resposta mecânica em frequência são muito úteis para detectar os modos de vibrar gerados pelo efeito piezelétrico. Basicamente, a análise modal produz como resultado um conjunto de modos que se compõe tanto de modos de vibrar piezelétricos (modos eletricamente excitáveis) como de modos não-piezelétricos.

Assim, uma forma de confirmar se um modo em particular é piezolétrico consiste em verificar nessas curvas (ou na curva de Função de Resposta em Freqüência (FRF) de deslocamento) se na freqüência analisada aparece um pico de ressonância (ver, a Fig. A.7); caso contrário trata-se de um modo elástico, ou modo não excitável eletricamente.

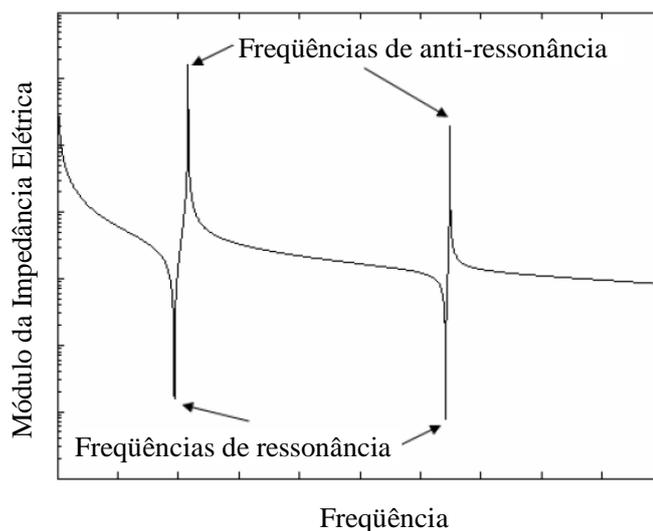


Figura A.7. Gráfico comum do módulo da impedância elétrica.

Para computar a impedância elétrica de entrada de um transdutor piezolétrico mediante o método dos elementos finitos, o transdutor deve ser excitado por uma função Delta de Dirac de carga elétrica em um dos eletrodos, enquanto o outro eletrodo é mantido como terra (LERCH, 1990); assim:

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_0 \delta(t) \quad (\text{A.66})$$

onde  $\mathbf{Q}_0$  é a amplitude do pulso de carga elétrica, e  $\delta(t)$  é a função Delta de Dirac. A impedância elétrica  $Z(\omega)$  é dada por (uma vez que  $\mathbf{I}(t) = d\mathbf{Q}(t)/dt$ ):

$$Z(\omega) = \frac{\boldsymbol{\varphi}(\omega)}{\mathbf{I}(\omega)} = \frac{f\{\boldsymbol{\varphi}_{el}(t)\}}{j\omega \mathbf{Q}_0} \quad (\text{A.67})$$

onde  $f\{\boldsymbol{\varphi}_{el}(t)\}$  é a transformada de Fourier do potencial elétrico no eletrodo excitado.

Na Seção A.7.3 é apresentado outro método para o cálculo da impedância elétrica de entrada, a qual se baseia na formulação matricial tipo H de elementos finitos para materiais piezelétricos (NAILLON et al., 1983).

### A.7.2 Coeficiente de Acoplamento Eletromecânico

Um importante parâmetro na análise de estruturas piezelétricas é a estimativa da significância de cada modo na resposta total da estrutura piezelétrica. Na literatura, uma das abordagens mais utilizada para medir essa significância é o Coeficiente de Acoplamento Eletromecânico (CAEM). O CAEM,  $K$ , é definido, em materiais piezelétricos como a relação entre energia elástica e dielétrica (LERCH, 1990), assim:

$$K^2 = \frac{E_m^2}{E_{st} E_d} \quad (\text{A.68})$$

onde  $E_{st}$  é a energia elástica,  $E_d$  é a energia dielétrica, e  $E_m$  representa a energia mútua. Em termos das matrizes de elementos finitos piezelétricos, esses três termos de energia podem ser escritos da seguinte forma (LERCH, 1990):

$$E_m = \frac{1}{4} (\mathbf{u}^T \mathbf{K}_{u\varphi} \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K}_{u\varphi}^T \mathbf{u}) \quad (\text{A.69})$$

$$E_{st} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} \quad (\text{A.70})$$

$$E_d = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\varphi} \quad (\text{A.71})$$

onde  $\mathbf{u}$  e  $\boldsymbol{\varphi}$  são respectivamente os deslocamentos e potenciais elétricos nodais.

A magnitude do coeficiente de acoplamento eletromecânico de um modo de vibrar piezelétrico específico representa a significância desse modo em particular em relação aos outros modos. Se o acoplamento de certo modo é da ordem de 50% ou maior, esse modo será fortemente excitado. Também, quanto maior for esse Coeficiente de Acoplamento Eletromecânico do modo de interesse, menores serão

as perdas mecânicas e elétricas, e maior será a largura de banda do transdutor piezelétrico (LERCH, 1990; NAILLON et al., 1983).

Um fato importante consiste em que o Coeficiente de Acoplamento Eletromecânico pode ser determinado pelas frequências de ressonância e anti-ressonância utilizando a seguinte aproximação (NAILLON et al., 1983):

$$K^2 = \frac{\omega_a^2 - \omega_r^2}{\omega_r^2} \quad (\text{A.72})$$

A eq.(A.72) permite o cálculo do Coeficiente de Acoplamento Eletromecânico a partir de dados experimentais; uma vez que os dados de frequências de ressonância e anti-ressonância, de uma estrutura piezelétrica, são simplesmente determinados através de um impedômetro. No entanto, essa equação é estritamente válida para modos de vibrar unidimensionais; por exemplo, o modo puro de vibrar ao longo da espessura. Ao contrário, a definição da eq.(A.68) não pressupõe nenhuma restrição.

### A.7.3 Constante Modal Piezelétrica

Enquanto o CAEM é muito útil quando se trabalha com dados experimentais ou quando se conhece a - priori a curva de impedância ou de resposta mecânica em frequência, resulta pouco útil em análises numéricas, onde apresenta sérias dificuldades na sua implementação. Principalmente, para calcular o CAEM é necessário identificar claramente as frequências de ressonância e a sua correspondente frequência de anti-ressonância de um modo piezelétrico específico. No entanto, ao trabalhar com Elementos Finitos, para a análise de estruturas piezelétricas, grandes dificuldades surgem na identificação exata desses valores. Entre essas dificuldades pode-se numerar: (i) ao calcular, mediante análise modal, as frequências de ressonância e anti-ressonância de um modo em particular, nem todos os valores obtidos correspondem a modos de vibrar piezelétricos; assim, é obtida uma “mistura” de modos de vibrar piezelétricos e elásticos; em conseqüência, a identificação desses modos piezelétricos não é direta. (ii) Entre os vetores que contém as frequências de ressonância e anti-ressonância não existe uma relação

um a um entre os valores obtidos; em outras palavras, não é possível afirmar, para um modo piezométrico em particular, que o valor de ressonância na posição  $x$  desse vetor de ressonâncias corresponde ao valor na posição  $x$  do vetor de anti-ressonância. (iii) Geralmente, cumpre-se a relação  $\omega_r < \omega_a$  (LERCH, 1990; NAILLON et al., 1983); no entanto, quando se simula uma estrutura piezométrica com alta densidade modal, particularmente ao redor do primeiro modo extensional ao longo da espessura, pode ocorrer que as frequências de anti-ressonância sejam menores às de ressonância, ou  $\omega_r > \omega_a$  (GUO, CAWLEY, 1992). Portanto, é evidente, das razões anteriores, que o CAEM apresenta sérias dificuldades na sua implementação numérica efetiva, ainda mais quando é implementado em métodos iterativos como o Método de Otimização Topológica (amplamente utilizado durante este trabalho).

Outro método para calcular a significância de um modo de vibrar específico foi proposto por Guo, Cawley (1992). O método consiste em adaptar a bem conhecida Constante Modal, de análise de vibrações, para avaliar a intensidade das ressonâncias em estruturas piezométricas. Esta abordagem é denominada, neste trabalho, Constante Modal Piezométrica (CMP). A vantagem de calcular a CMP consiste em não precisar calcular as frequências  $\omega_r$  e  $\omega_a$ , o que viabiliza a sua rápida implementação numérica.

Para explicar o cálculo da CMP é importante primeiro expor outra forma de apresentação das matrizes de elementos finitos piezométricas, a qual, como será apresentada mais na frente, conduz à formulação “H” do problema de elementos finitos piezométricos (até agora, ao longo do capítulo, tem sido apresentada a formulação “K”) (NAILLON et al., 1983). Essa nova formulação consiste em expressar, na forma explícita, o potencial elétrico nodal dos eletrodos; dessa forma, o problema de autovalor e autovetor de uma estrutura piezométrica podem ser expressos como:

$$-\lambda \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_{\varphi_g} \\ \Psi_{\varphi_o} \\ \Psi_{\varphi_p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\varphi_g} & K_{u\varphi_o} & K_{u\varphi_p} \\ K_{u\varphi_g}^T & K_{\varphi_g\varphi_g} & K_{\varphi_g\varphi_o} & K_{\varphi_g\varphi_p} \\ K_{u\varphi_o}^T & K_{\varphi_o\varphi_g} & K_{\varphi_o\varphi_o} & K_{\varphi_o\varphi_p} \\ K_{u\varphi_p}^T & K_{\varphi_p\varphi_g} & K_{\varphi_p\varphi_o} & K_{\varphi_p\varphi_p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_{\varphi_g} \\ \Psi_{\varphi_o} \\ \Psi_{\varphi_p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(A.73)

onde  $\lambda$  e  $\Psi$  são o autovalor e autovetor, respectivamente. Na eq.(A.73) o subscrito  $o$  denota os componentes correspondentes aos graus de liberdade elétricos dos nós não-eletrodos. O subscrito  $p$  denota os componentes correspondentes aos graus de liberdade elétricos do eletrodo onde é aplicada a excitação elétrica, e os subscritos  $g$  denota os componentes correspondentes aos graus de liberdade elétricos do eletrodo terra. O subscrito  $u$  indica graus de liberdade mecânico, e o subscrito  $\varphi$  indica graus de liberdade elétrico.

Essa nova formulação “explícita” permite obter a Constante Modal Piezelétrica. Assim, segundo o trabalho desenvolvido por Guo, Cawley (1992), uma vez obtidos, através da eq.(A.73), o autovalor e autovetor de um modo em particular  $k$ , a Constante Modal Piezelétrica,  $A_{r_k}$ , desse modo é uma função do autovetor

$\Psi_r = \{ \Psi_{u_r}, \Psi_{u_o}, \Psi_{u_p} \}^T$ , e pode ser escrita como:

$$A_{r_k} = W_{r_k}^2 \quad \text{com} \quad W_{r_k} = \Psi_{r_k}^T W_F \quad (\text{A.74})$$

onde  $W_F$  é o vetor de força nodal equivalente que converte a voltagem aplicada em força mecânica em cada nó dos elementos finitos. Quando uma estrutura piezelétrica está submetida a uma excitação de voltagem, o vetor de força nodal equivalente é dado por:

$$W_F = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{u\varphi_p} \\ \mathbf{K}_{\varphi_o\varphi_p} \end{bmatrix} \mathbf{I}_p \quad (\text{A.75})$$

onde  $\mathbf{I}_p$  é um vetor unitário de tamanho igual ao número de nós correspondentes ao eletrodo onde é aplicada a excitação elétrica.

Como mencionado anteriormente, a partir da eq.(A.73) podem-se formular as equações de Elementos Finitos na forma “H”, a qual é uma expressão muito utilizada na área de estruturas piezelétricas. Na formulação “H”, o potencial elétrico nodal dos eletrodos é explicitado nas equações de Elementos Finitos. Essa transformação (da equação na forma “K” para equação na forma “H”) é apresentada em detalhe no trabalho de Naillon et al. (1983).

Utilizando a formulação “H”, os autovalores e autovetores da estrutura piezelétrica podem ser encontrados solucionando o seguinte problema (são excluídos os graus de liberdade correspondentes ao eletrodo de referência ou terra):

$$-\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_u \\ V \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{uu} & \mathbf{H}_{u\varphi} \\ \mathbf{H}_{u\varphi}^T & -\mathbf{H}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_u \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.76})$$

onde:

$$\mathbf{H}_{uu} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\varphi_o} \mathbf{K}_{\varphi_o\varphi_o}^{-1} \mathbf{K}_{u\varphi_o}^T \quad (\text{A.77})$$

$$\mathbf{H}_{u\varphi} = \left( \mathbf{K}_{u\varphi_p} - \mathbf{K}_{u\varphi_o} \mathbf{K}_{\varphi_o\varphi_o}^{-1} \mathbf{K}_{\varphi_o\varphi_p} \right) \mathbf{I}_p \quad (\text{A.78})$$

$$\mathbf{H}_{\varphi\varphi} = \mathbf{I}_p^T \left( \mathbf{K}_{\varphi_p\varphi_p} - \mathbf{K}_{\varphi_o\varphi_p}^T \mathbf{K}_{\varphi_o\varphi_o}^{-1} \mathbf{K}_{\varphi_o\varphi_p} \right) \mathbf{I}_p \quad (\text{A.79})$$

onde  $V$  é a diferença de potencial elétrico entre os dois eletrodos da estrutura piezelétrica.  $\mathbf{K}_{\varphi_p\varphi_p}$  e  $\mathbf{K}_{\varphi_o\varphi_o}$  são as partes da matriz dielétrica que correspondem aos nós do eletrodo onde é aplicada a excitação elétrica e aos nós não-eletrodos, respectivamente. Os termos  $\mathbf{K}_{u\varphi_o}$ ,  $\mathbf{K}_{u\varphi_p}$ , e  $\mathbf{K}_{\varphi_o\varphi_p}$  são as correspondentes matrizes de acoplamento.

Baseado na formulação “H” pode-se obter outra expressão para o cálculo da impedância elétrica de entrada e da CMP. A nova expressão para impedância elétrica de entrada é (NAILLON et al., 1983):

$$Z(\omega) = \frac{-1}{i\omega \left( \frac{1}{V} \{ \mathbf{H}_{u\varphi} \}^T \{ \Psi_u \} + \{ \mathbf{H}_{\varphi\varphi} \} \right)} \quad (\text{A.80})$$

e para a CMP do modo de vibrar piezelétrico  $k$ , em ressonância:

$$A_r = \mathbf{H}_{u\varphi}^T \Psi_{u_{r,k}} \Psi_{u_{r,k}}^T \mathbf{H}_{u\varphi} \quad (\text{A.81})$$

## APÊNDICE B: MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

### B.1 Introdução

Nos últimos anos, a questão de como obter sistematicamente a estrutura ótima num domínio que atenda condições específicas de desempenho tem despertado muito interesse, já que se deseja gerar estruturas mais genéricas e otimizadas que as obtidas utilizando técnicas de tentativa e erro, as quais podem gerar soluções não ótimas do problema estrutural inicialmente proposto. Uma abordagem atual para o projeto ótimo de estruturas tem sido o Método de Otimização Topológica (MOT).

Existem essencialmente três métodos de otimização diferenciando-se, principalmente, pela definição dos parâmetros que mudam durante o processo de otimização – as variáveis de projeto. Essas categorias são: otimização paramétrica, otimização de forma e otimização topológica, as quais são apresentadas esquematicamente na Fig. B.1.

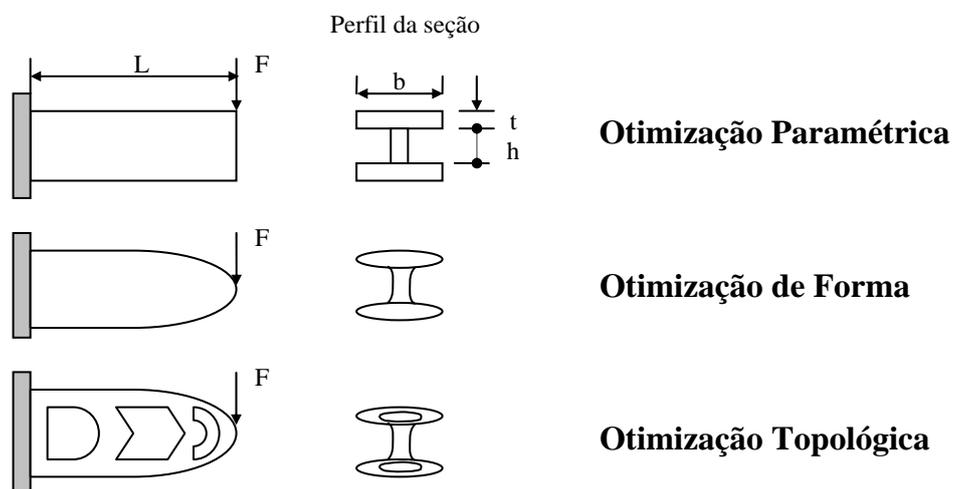


Figura B.1. Solução de um problema estrutural utilizando diferentes abordagens de otimização.

Na otimização paramétrica é assumida uma forma pré-definida para a estrutura e são escolhidas como variáveis de projeto algumas medidas, ou razão entre medidas, que caracterizam a geometria dessa estrutura. Assim, nesse caso nunca é alterada

a topologia inicial da estrutura, somente as suas dimensões; no exemplo da Fig. B.1 as dimensões  $b$ ,  $t$  e  $h$ .

Na otimização de forma, as variáveis de projeto podem ser as coordenadas de alguns pontos pertencentes ao contorno da peça ou, parâmetros mais abstratos como coeficientes de uma curva que representa a forma da peça; por exemplo, curvas *spline*. Trata-se de uma abordagem mais genérica que a anterior, já que a forma externa da estrutura é otimizada, ver Fig. B.1. Em outras palavras, a otimização é obtida através das modificações nas fronteiras de uma geometria que deve ser previamente definida. Nesse tipo de otimização, devido às formas complexas que podem ser obtidas, é utilizado em geral o Método de Elementos Finitos (MEF) para a análise das estruturas durante a otimização. A principal desvantagem da otimização de forma consiste na alteração da forma da estrutura e, por conseguinte, da malha de MEF, exigindo um remalhamento do domínio durante a otimização, o qual, em geral, não é fácil de implementar.

Já no MOT são geradas topologias diferentes à inicialmente propostas permitindo-se a presença de furos (não especificados na geometria inicial) na topologia da estrutura, ver Fig. B.1. Assim, são obtidas altas reduções de massa e um grande aumento de desempenho em comparação à otimização de forma. Além disso, neste método é eliminado o problema de remalhamento da malha de elementos finitos, como acontece na otimização de forma, ao trabalhar sempre com um domínio fixo.

Especificamente, o MOT soluciona o problema da distribuição de uma dada quantidade de material num domínio de projeto fixo sujeito a determinadas cargas e condições de contorno, tal que certa função objetivo seja extremizada; por exemplo, encontrar a topologia de uma estrutura com máxima rigidez para um dado volume de material. Na sua implementação, o MOT combina um módulo de análise e um módulo de otimização, ver Fig. B.2. O módulo de análise é utilizado para calcular a resposta da estrutura que pode ser, por exemplo, deflexão, deslocamento ou frequência de ressonância da estrutura. O módulo de análise mais utilizado na literatura é o método de elementos finitos (MEF), mas outros métodos numéricos de análise podem ser utilizados; no entanto, devem ser genéricos o suficiente de forma a lidar com estruturas de formas complexas resultantes do módulo de otimização. O módulo de análise é utilizado, também, para o cálculo das sensibilidades. Essa análise de sensibilidades corresponde a calcular a variação na resposta estrutural

devido a uma pequena variação nas variáveis de projeto, como as densidades ou áreas da seção transversal de cada elemento finito obtido da discretização do domínio inicial. Baseado na análise de sensibilidade, o módulo de otimização calcula os novos valores das variáveis de projeto que melhoram a função objetivo. Geralmente é necessário um processo iterativo que inclui o módulo de análise, seguido da análise de sensibilidade e do módulo de otimização, para encontrar a estrutura ótima.

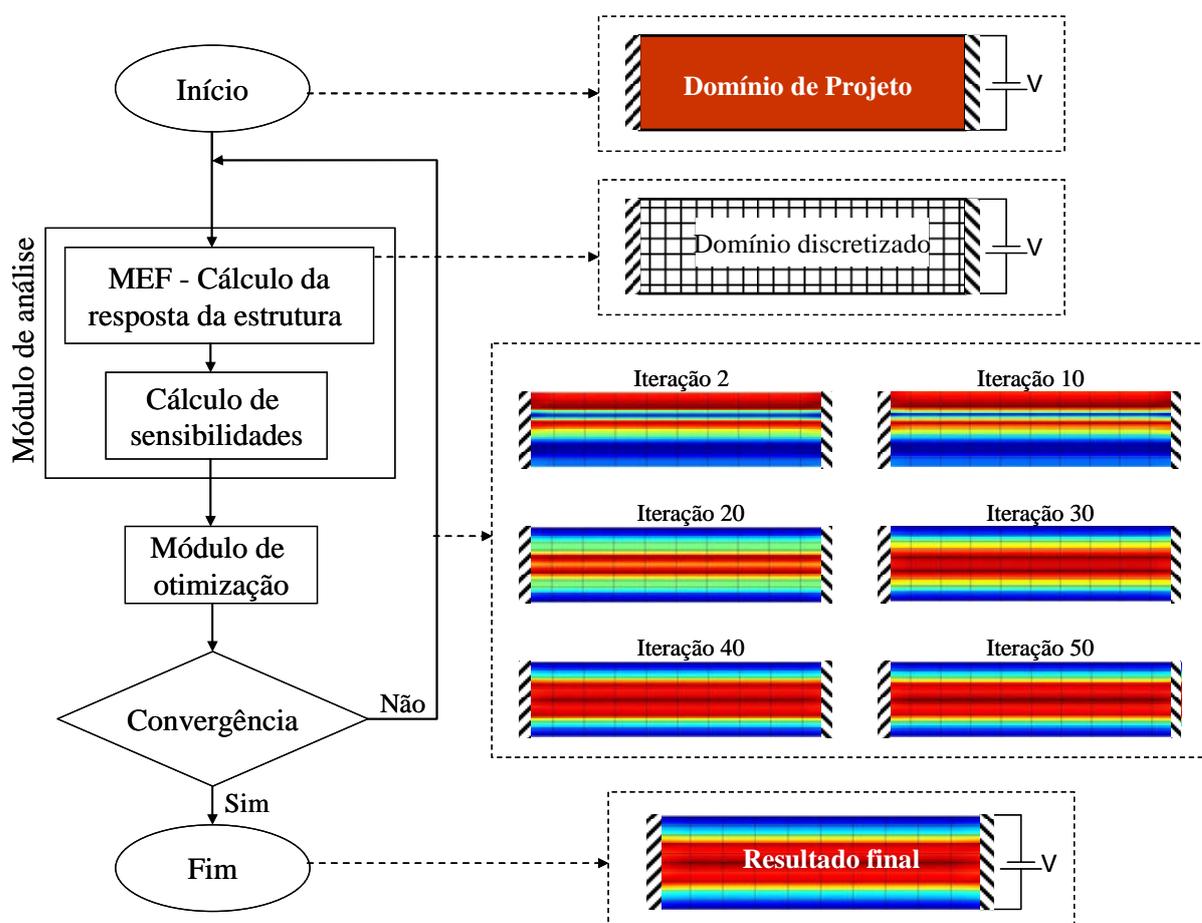


Figura B.2. Idéia básica do MOT aplicado na distribuição ótima de dois materiais.

Desde a sua introdução computacional (BENDSØE; KIKUCHI, 1988), o MOT tem ganho muita popularidade na área acadêmica e na indústria, e está sendo utilizado para desenvolver estruturas ótimas no setor automotivo, aeroespacial, aeronáutico, entre outros. Assim, a metodologia do MOT está bem estabelecida, tornando-se evidente em várias linhas de projetos. Dentre eles, os projetos de transdutores piezelétricos (SILVA et al., 1999a), projetos de micromecanismos flexíveis com

atuação térmica (JONSMANN, 1999), projetos de atuadores piezelétricos flexensionais (SILVA et al., 2000), projetos de estruturas sob atuação de campos magnéticos (YOO, KIKUCHI, 2000), implementação de flexibilidade com carga dinâmica (NISHIWAKI et al., 2000), e micromecanismos eletrotermomecânicos (RUBIO et al., 2009e, ANANTHASURESH, 2003). Outras tendências têm sido as aplicações do MOT na tomografia por impedância elétrica (KOHN, VOGELIUS, 1987; MELLO, et al. 2008); problemas eletromagnéticos (ACHDOU, 1993; BYUN et al., 2004; BYUN et al., 2000); física nuclear (ALLAIRE, CASTRO, 2001); projeto por impacto (PEDERSEN, 2002; SOTO, 2001); projeto sistemático de estruturas de cristal fotônico (COX, DOBSON, 2000; JENSEN, SIGMUND, 2004); projeto topológico de motores de indução (WANG et al., 2004); projeto de transdutores piezoresistivos (RUBIO et al., 2008a); projeto estrutural utilizando Materiais com Gradação Funcional (MGF) (PAULINO, SILVA, 2005); projeto de atuadores piezelétricos baseados no conceito MGF (RUBIO et al., 2009b; CARBONARI et al., 2009), entre outros (BENDSØE, SIGMUND, 2003).

Neste capítulo é introduzido o Método de Otimização Topológica (MOT). Essa introdução consiste de um breve histórico da sua aplicação no projeto de estruturas piezelétricas e estruturas MGF, na Seção B.2 e Seção B.3, respectivamente; a sua formulação e conceitos básicos, na Seção B.4; e na descrição dos principais problemas que surgem durante a implementação, na Seção B.5.

## **B.2 MOT Aplicado ao Projeto de Transdutores Piezelétricos**

O projeto de transdutores piezelétricos utilizando o MOT é relativamente recente, e se origina no final dos anos 90 com os trabalhos de Silva et al. (2000); Silva, Kikuchi (1999); Silva et al. (1999a), e Sigmund et al. (1998). No trabalho de Silva et al. (2000) é considerado o projeto de atuadores piezelétricos flexensionais em regime de operação quase-estática. Nesse trabalho, o problema é formulado em termos de energia e se divide em duas partes: transdução média e a flexibilidade média. A transdução média está relacionada com o deslocamento gerado pelo atuador em uma determinada direção e ponto da estrutura, quando a piezocerâmica estiver submetida a um determinado diferencial de potencial (ou cargas elétricas). Já a

flexibilidade média está relacionada com a rigidez do atuador de modo a dar-lhe estabilidade estrutural. Por outro lado, no trabalho de Silva, Kikuchi (1999) é proposto um método, baseado no MOT, para o projeto de transdutores piezelétricos em aplicações dinâmicas. Com esse fim, o problema de projetar um transdutor piezelétrico é posto como um problema de otimização de autovalor e/ou do Coeficiente de Acoplamento Eletromecânico (CAEM) de um modo de vibrar específico. Já Silva et al. (1999a), e Sigmund et al. (1998) projetaram piezocompostos com características ótimas para aplicações em hidrofones projetando, mediante o MOT, o elemento representativo de volume (ERV) do material piezelétrico, e calculando as propriedades efetivas do material mediante o método de homogeneização (SILVA et al., 1999a), e mediante o método das densidades, SIMP - *Simple Isotropic Material with Penalization* (SIGMUND et al. 1998).

A partir desses trabalhos pioneiros, segue-se toda uma exaustiva linha de pesquisa relacionada com o projeto ótimo de transdutores piezelétricos. Entre esses trabalhos, Silva (2003) aplicou o método de homogeneização no projeto conceitual de motores piezelétricos em operação quase-estática; nesse trabalho, o objetivo é encontrar a distribuição ótima de material para determinar movimentos desejados quando o motor do tipo “minhoca” é atuado por piezocerâmicas localizadas em lugares previamente definidos. Nesse projeto, a forma da piezocerâmica permanece fixa durante a otimização. Por outro lado, o método de homogeneização também tem sido aplicado para determinar o problema de otimização de piezocerâmicas que podem gerar deflexão em pontos desejados (BUEHLER et al., 2004). Nessa formulação, a microestrutura, no domínio de projeto, é caracterizada por um EVR contendo tanto material convencional como piezelétrico. Por outro lado, visando aplicações de microposicionamento, Carbonari et al. 2005 têm desenvolvido o projeto otimizado de micropiças atuadas piezeletricamente. Nesse trabalho, os autores otimizam simultaneamente a topologia da piezocerâmica e da estrutura flexível a ela acoplada. Adicionalmente, em atuadores flexensionais, a otimização simultânea da posição e topologia da estrutura piezelétrica foi abordada por Carbonari et al. 2007a, em aplicações de micro-posicionamento.

Outro trabalho relevante foi desenvolvido por Kögl, Silva (2005) no projeto de placas piezelétricas. Nesse trabalho, os valores ótimos de distribuição de material e da polarização do material piezelétrico foram determinados para maximizar um

deslocamento especificado de saída num ponto pré-definido da estrutura. Adicionalmente, o trabalho mostra que o valor do fator de penalização no modelo de material SIMP possui pouco efeito na distribuição ótima de material e polarização. Outros trabalhos que têm aplicado o MOT no projeto de placas piezelétricas têm sido desenvolvidos por Lee et al. (2000); Lund, Stegmann (2005); e Kang, Tong (2008).

Recentemente, o MOT tem sido aplicado no projeto de ressonadores piezelétricos, modificando a freqüência de ressonância do modo de vibrar com maior energia de vibração ao longo da espessura (HA, CHO, 2006); projeto de estruturas *energy harvesting* (NAKASONE et al., 2008; ZHENG et al., 2009); controle da vibração torsional de sensores e atuadores piezelétricos (WANG et al., 2006); e a extensão do conceito MGF ao projeto de estruturas piezelétricas tipo bilaminar (CARBONARI et al., 2007b) e ao projeto de micro-atuadores piezelétricos MGF flexensionais (CARBONARI et al., 2009), em regime quase-estático.

### **B.3 MOT Aplicado ao Projeto de Estruturas MGF**

Embora os materiais MGF sejam conhecidos desde início dos anos 80, somente no final dos anos 90 é que a pesquisa foi direcionada ao projeto otimizado dos mesmos. Esse projeto otimizado de estruturas MGF tem se centrado no projeto da distribuição ótima de propriedades, especialmente, em aplicações estruturais e térmicas, no projeto de materiais termo-elásticos, e no projeto de estruturas com restrições de tensões. Um dos primeiros trabalhos a aplicar métodos de otimização no projeto de estruturas MGF foi o de Markworth, Saunders (1995). Os autores realizam a otimização de um gradiente unidimensional de propriedades com o objetivo de maximizar ou minimizar o fluxo de calor na estrutura. Nesse trabalho, a fração volumétrica das fases do material é parametrizada por uma função quadrática e, nesse caso, os coeficientes da função passam a ser as variáveis de projeto.

Tratando também de problemas unidimensionais, Tanigawa, Matsumoto (1997) apresentam a otimização de uma placa com gradiente de propriedades na espessura, cujo objetivo é minimizar a máxima tensão mecânica durante a fase transiente de um carregamento térmico. Igualmente, Ootao et al. (1999) propõem o

uso de redes neurais para a modelagem do campo de temperatura e tensão de uma esfera oca sujeita a carregamentos térmicos. Para tratar o problema de otimização, os autores utilizam as redes neurais para definir, na parede da esfera, a distribuição de propriedades que minimiza a máxima tensão mecânica para um dado carregamento térmico transiente. Devido à simetria radial do problema, este também se reduz a um problema unidimensional, e a distribuição de densidade volumétrica passa a ser parametrizada por uma função com apenas um parâmetro, que é tratado como variável de projeto.

Os trabalhos anteriores têm como principal característica a definição a priori da distribuição espacial das propriedades, através de funções pré-definidas que representam essa distribuição. No entanto, outros autores têm proposto técnicas de otimização mais genéricas, como o trabalho de Turteltaub, Washabaugh (1999). Nesse trabalho, os autores maximizam a rigidez de uma estrutura sujeita a forças de campo mediante a distribuição de dois materiais utilizando o MOT. Outros trabalhos que seguem a mesma linha são os desenvolvidos por Turteltaub (2001) e Turteltaub (2002). Esses trabalhos tratam, mediante o MOT, o problema de distribuição ótima de material em estruturas MGF, em problemas termo-elásticos. Em Turteltaub (2001) é apresentado um método, baseado no MOT, capaz de definir o campo de propriedades necessário para se obter uma dada distribuição de temperatura, ao final de um intervalo de tempo, para uma placa sujeita a carregamentos térmicos. Por outro lado, Turteltaub (2002) faz uma expansão e generalização de seu trabalho anterior considerando um problema termo-elástico em análise transiente.

Atualmente, o projeto otimizado de materiais MGF, através do MOT, se direciona ao estudo de estruturas sujeita a carregamentos mecânicos dinâmicos (TURTELTAUB, 2005); à utilização do conceito dos Elementos Finitos Gradados em conjunto com o MOT para solucionar o problema de máxima rigidez estrutural (PAULINO, SILVA, 2005); o projeto de atuadores piezelétricos operando em regime quase-estático (CARBONARI et al., 2009); e o projeto de estruturas MGF com restrição de tensão mecânica (STUMP et al., 2007). Adicionalmente, o MOT tem sido aplicado no projeto de estruturas MGF com razão de Poisson negativa, onde são gradadas as propriedades de um material estrutural na macro-escala e micro-escala; no último caso, é projetado um elemento representativo de volume (ERV) com graduação (ZHOU, LI et al., 2008). Por último, o MOT tem sido aplicado no projeto do ERV gradado de materiais compostos, utilizando-se o método de

homogeneização (PAULINO et al., 2009) e, em combinação com o método de *level set*, tem sido aplicado para encontrar simultaneamente a gradação ótima de propriedades e a topologia ótima de uma estrutura MGF engastada, e de uma estrutura MGF tipo-ponte (XIA, WANG et al., 2008).

## **B.4 Conceitos Básicos do MOT**

O MOT se baseia em dois conceitos fundamentais, a saber: o domínio estendido fixo de projeto e o modelo de interpolação de material ou modelo de material. A seguir descrevem-se cada um destes conceitos.

### **B.4.1 Domínio Estendido Fixo de Projeto**

Ao contrário da otimização de forma, no MOT não são alterados os contornos externos do domínio da estrutura durante o processo de otimização. Esse domínio fixo durante a otimização que conterá a estrutura desconhecida, e que se encontra limitado pelos pontos de apoio da estrutura e os pontos de aplicação dos carregamentos, denomina-se domínio estendido fixo de projeto. Assim, no MOT remover-se-á e adicionar-se-á material dentro do espaço definido pelo domínio fixo na procura da topologia ótima, mas a sua forma inicial não é alterada. A Fig. B.3 ilustra este conceito. Sendo assim, o MOT pode ser observado como um método que encontra a função de distribuição ótima de dois ou mais materiais no interior de um domínio de projeto fixo, ver a Fig. B.3.

Na implementação numérica do módulo de análise, o domínio estendido fixo deve ser discretizado em elementos finitos que permanecerão inalterados durante o processo de otimização, sendo alterada somente a distribuição de material nos elementos. Isto facilita a implementação da análise de sensibilidade, uma vez que vale para todos os elementos do domínio estendido fixo a relação geral do cálculo da sensibilidade:

$$\frac{\partial}{\partial A_n} \int_{\Omega} q d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial A_n} d\Omega \quad (\text{B.1})$$

onde  $A_n$  é a variável de projeto do elemento  $n$ , e  $q$  é uma função contínua e diferenciável.

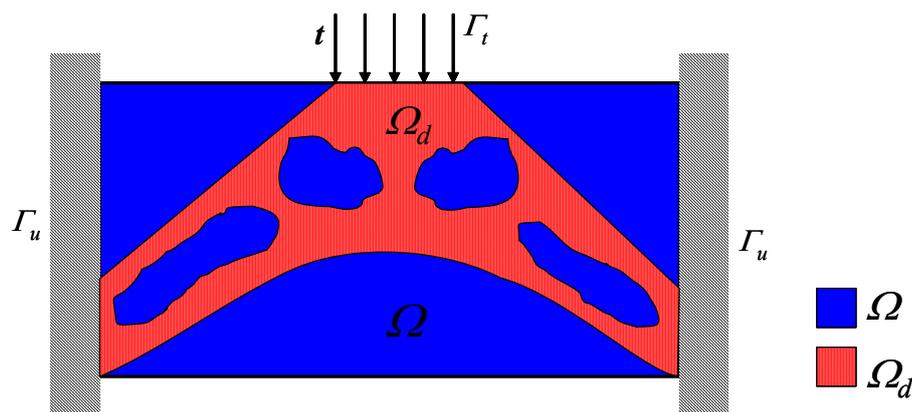


Figura B.3. Conceito do domínio estendido fixo.

#### B.4.2 Modelo de Material

No MOT geralmente dois tipos de materiais são utilizados para determinar a topologia ótima da estrutura. Essa distribuição de materiais pode ser definida como um problema de otimização de parâmetros discretos ou um problema do tipo 0-1; assim, o problema é definido por uma função discreta  $\chi(x, y)$  definida em cada coordenada Cartesiana  $(x, y)$  de um domínio de projeto fixo bi-dimensional,  $\Omega$ , da seguinte forma:

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x, y \in \Omega_d \\ 0 & \text{se } x, y \in \Omega \setminus \Omega_d \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

A utilização de valores discretos para a variação de material dentro do domínio de projeto fixo torna o problema mal posto, ou seja, sem solução. A solução para o problema anteriormente mencionado é a relaxação do problema de otimização,

permitindo-se que o material, em cada ponto do domínio de projeto, assuma valores intermediários, ao se passar da condição de ausência de material a sólido. Assim, define-se o conceito do modelo de material, o qual está relacionado com a forma de variar-se o material em cada ponto do domínio de projeto fixo, entre zero (geralmente ar) e um (sólido). A definição do modelo de material define o grau de relaxação do problema.

Existem vários modelos de material descritos na literatura que podem ser utilizados no MOT. Entre os principais destacam-se: o método de homogeneização (HASSANI, HINTON, 1998a; HASSANI, HINTON, 1998b; HASSANI, HINTON, 1998c), e o método das densidades (BENDSØE, 1989; BENDSØE, SIGMUND, 2003).

### **Método das Densidades**

O método das densidades tem obtido a preferência dos pesquisadores da área de Otimização Topológica por ser um modelo relativamente simples de implementar, em relação ao método de homogeneização, e por utilizar, geralmente, uma única variável de projeto: a densidade relativa do material (pseudo-densidade) em cada ponto do domínio estendido fixo de projeto,  $\Omega$ . Nas implementações do MOT, comumente utiliza-se a formulação SIMP. O SIMP consiste em uma equação matemática que define o valor da propriedade do material em cada ponto do domínio em função de uma pseudo-densidade (que nos problemas de otimização topológica geralmente é a variável de projeto), e a propriedade básica do material a ser distribuído. Este modelo de material pode ser expresso como:

$$\mathbf{E}^H(x, y) = \rho_{TOM}^p(x, y) \mathbf{E}^0 \quad (\text{B.3})$$

onde  $\mathbf{E}^0$  é o tensor que representa as propriedades do material base e  $\rho_{TOM}(x, y)$  é interpretada como uma função de distribuição contínua de densidade ou variável de projeto, a qual está definida no intervalo  $0 \leq \rho_{TOM}(x, y) \leq 1$ . Os termos  $x$  e  $y$  são as coordenadas Cartesianas de um ponto qualquer dentro do domínio de projeto

bidimensional  $\Omega$ , e  $p$  é o fator de penalidade da variável de projeto, o qual determina a natureza do problema: contínua ou discreta.

No modelo de material SIMP existe um conflito na magnitude do fator de penalização,  $p$ . Assim, com a utilização de um  $p$  pequeno (natureza mais contínua do que discreta do problema) geram-se as escalas de cinza ou valores de propriedades intermediárias de material (valores de propriedades entre dois materiais base; por exemplo, aço e PZT). Por outro lado, ao utilizarem-se valores de  $p$  muito altos; por exemplo,  $p = 9$ , (o que representa uma natureza mais discreta do que contínua), podem-se gerar problemas de convergência e de instabilidade numérica, devido à tendência de retornar ao problema discreto (limitar os valores da densidade de cada elemento somente a 0 ou 1).

A aproximação SIMP também tem sido chamada de aproximação de “material fictício”, já que se acreditava que nenhum material alcançaria as propriedades de material dadas pela eq.(B.3). No entanto, com o surgimento, nas duas últimas décadas, do conceito de materiais MGF a idéia de “material fictício” tem sido superada, uma vez que esses materiais possuem valores de propriedades intermediárias (escalas de cinza) atualmente fabricáveis, segundo alguns dos métodos apresentados no capítulo 1. Por outro lado, para o caso de materiais não-MGF, Bendsøe, Sigmund (1999) têm provado que a aproximação SIMP é fisicamente possível desde que uma simples condição sobre o fator  $p$  seja satisfeita (em problemas estruturais): o fator de penalidade deve ser maior ou igual a 3.

No projeto de materiais MGF, onde dois ou mais materiais são misturados, e onde o surgimento das escalas de cinza é desejado, o modelo de material SIMP, da eq.(B.3), pode ser expresso como (CARBONARI et al., 2007b):

$$\mathbf{E}^H(x, y) = \rho_{TOM}(x, y)\mathbf{E}_1 + (1 - \rho_{TOM}(x, y))\mathbf{E}_2 \quad (\text{B.4})$$

onde  $\rho_{TOM}(x, y)$  é uma função de distribuição contínua de pseudo-densidade ou variável de projeto, definida no intervalo  $0 \leq \rho_{TOM}(x, y) \leq 1$ , e  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$  representam os tensores constitutivos de dois materiais base diferentes. Quando o valor da pseudo-densidade  $\rho_{TOM}$  é igual a 1,  $\mathbf{E}^H$  representa as propriedades do material  $\mathbf{E}_1$  ( $\mathbf{E}^H = \mathbf{E}_1$ ); e quando o valor de pseudo-densidade é igual a 0,  $\mathbf{E}^H = \mathbf{E}_2$ . Valores

intermediários do valor da pseudo-densidade  $\rho_{TOM}$  geram o tensor constitutivo de um material MGF. Geralmente, a eq.(B.4) é denominada modelo Voigt ou lei da mistura para materiais rígidos, amplamente conhecida na área de materiais compósitos para o cálculo das suas propriedades efetivas. O Modelo Voigt assume que ambas as fases de um material composto (fases  $E_1$  e  $E_2$ ) estão sujeitas às mesmas deformações; assim, assume deformações constantes no compósito (VOIGT apud 1889 Aboudi (1999)). No caso que seja adotada a hipótese de que ambas as fases do material composto estão sujeitas à mesma tensão, o modelo Reuss (VOIGT apud 1889 Aboudi (1999)), ou lei da mistura para materiais flexíveis, determina que as propriedades efetivas do material possam ser expressas como:

$$\mathbf{E}^H(x, y) = [\rho_{TOM}(x, y)\mathbf{E}_1^{-1} + (1 - \rho_{TOM}(x, y))\mathbf{E}_2^{-1}]^{-1} \quad (\text{B.5})$$

onde de novo  $\rho_{TOM} = 1$  representa  $\mathbf{E}^H = \mathbf{E}_1$ , e  $\rho_{TOM} = 0$  representa  $\mathbf{E}^H = \mathbf{E}_2$ .

## B.5 Aspectos Numéricos do MOT

Na aplicação do MOT no projeto de estruturas MGF existem alguns problemas resultantes próprios da natureza discreta e do caráter computacional do método. Entre os principais pode-se mencionar: não-unicidade da solução, e a dependência da solução da discretização adotada no módulo de análise<sup>1</sup>. Todos esses problemas são descritos com detalhe em Bendsøe, Sigmund (2003).

### B.5.1 Não-unicidade da solução

Geralmente, os problemas de otimização tratados mediante o MOT são problemas não-lineares e não-convexos, exceto por algumas exceções, como o caso específico

---

<sup>1</sup> Outros problemas próprios da aplicação do MOT são: (i) escalas de cinza, e (ii) instabilidades de tabuleiro (BENDSØE, SIGMUND, 2003). No entanto, no projeto de estruturas MGF esses problemas não se tornam os principais e, por conseguinte, não serão detalhados nesta seção.

do projeto de uma estrutura com máxima rigidez para um dado volume de material. Essa natureza não-convexa do problema matemático leva a uma não-unicidade da solução; isto é, o ponto ótimo encontrado não é necessariamente o mínimo ou máximo global. Assim, a existência de mínimos locais conduz o algoritmo a diferentes soluções possíveis considerando o mesmo tamanho de malha e, em consequência, diferentes pontos de partida ou parâmetros iniciais do algoritmo de otimização interferem no resultado, obtendo-se diferentes soluções ótimas.

Na literatura encontram-se poucas soluções para esse problema. Essas soluções centram-se nas implementações do MOT baseado no modelo de material SIMP com um fator de penalidade maior que 1 ( $p > 1$ ). Nesses casos, para diminuir o problema da não-unicidade da solução utiliza-se o método da continuação (SVANBERG, 1994a; SVANBERG, 1994b) no qual, para o SIMP, inicia-se com um fator de penalização  $p = 1$  e gradualmente, durante o processo iterativo do MOT, aumenta-se o valor de  $p$  até que o projeto final seja obtido (BENDSØE; SIGMUND, 2003). A idéia, portanto, é fazer que durante o MOT a solução siga o “caminho” da curva não-convexa, mostrada esquematicamente na Fig. B.4, até alcançar, com os aumentos graduais de  $p$ , o mínimo local mais próximo do global (ponto 2) ao invés de terminar, por exemplo, com a solução local do ponto 1.

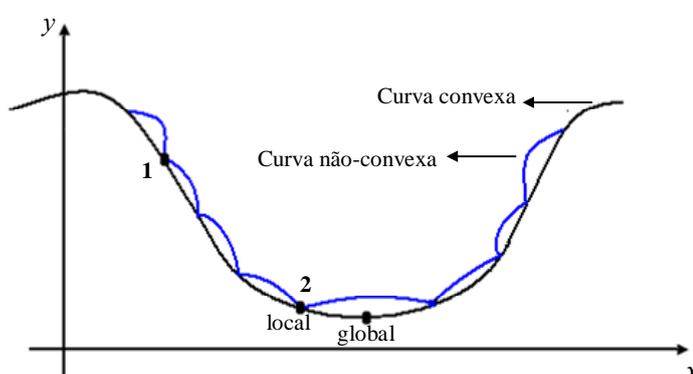


Figura B.4. Representação esquemática do Método da Continuação.

### B.5.2 Dependência de malha

O problema da dependência de malha consiste na obtenção de diferentes soluções para diferentes discretizações do domínio de projeto fixo e tamanho de malha.

Assim, o refinamento da malha de elementos finitos deveria resultar em uma melhor aproximação do problema real e não numa estrutura diferente como efetivamente acontece em problemas solucionados mediante o MOT. Varias técnicas têm sido utilizadas para reduzir este problema, entre as principais, incluem-se aumento de restrições no problema de otimização, ou utilização de filtros na implementação (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

O problema de dependência da malha pode ser dividido em duas categorias, conforme sua origem. Para os casos onde sempre se obtêm topologias diferentes, a medida que se aumenta a discretização da malha, o problema de dependência da malha é a manifestação numérica da não-existência de solução do problema. Existe também a possibilidade do problema não apresentar unicidade de solução. Essa situação pode ocorrer conforme as condições de contorno aplicadas ao problema. Por exemplo, no caso de uma barra sob tração uniaxial, as soluções de uma única barra de maior diâmetro ou de diversas barras de diâmetro menor, porém com a mesma área da barra única, apresentam a mesma rigidez (SIGMUND; PETERSSON, 1998).

Uma vez que a dependência da malha é uma manifestação numérica do fato do problema discreto de parâmetros distribuídos não possuir solução (ser mal-posto), uma forma de se evitar a dependência de malha é através da relaxação desse problema, tornando-o bem-posto. Essa é uma solução “natural” na implementação do MOT no projeto de estruturas MGF; uma vez que permite o surgimento de materiais com propriedades intermediárias (escala de cinza). O problema de dependência de malha também pode ser resolvido através da utilização de filtros espaciais. Os filtros substituem a possível função não-regular por uma função regularizada, que é obtida através da convolução desta com uma função suave (BOURDIN, 2001). Os filtros suavizam a distribuição espacial das variáveis de projeto ao longo do domínio estendido fixo, através de uma transformação matemática de cada variável do problema de otimização. Alguns trabalhos da literatura sugerem a aplicação do filtro sobre o campo de pseudo-densidades (SIGMUND, 2000), mas como essas pseudo-densidades geralmente são as variáveis de projeto, atualizadas a cada iteração durante o processo de otimização, ao aplicar esse filtro modificam-se os valores ótimos encontrados para essas variáveis, influenciando a otimização realizada. Outras abordagens aplicam a técnica de filtragem diretamente sobre os limites móveis na PLS (CARDOSO, FONSECA,

2003), o qual permite obter um controle sobre o gradiente da variável do problema sem impor uma mudança artificial sobre a distribuição das densidades, obtidas da otimização. Porém, essa abordagem influencia a convergência do método.

Para que a convergência da otimização não seja comprometida, Guest et al., (2004) propuseram uma técnica de projeção onde a pseudo-densidade de cada nó do domínio é uma função que depende das variáveis de projeto associadas a cada nó pertencente ao filtro e, além disso, depende das distâncias entre o nó central  $i$  e cada nó  $j$  dentro de um círculo de raio  $r_{min}$  (ver a Fig. 4.6 do capítulo 4). Este tipo de abordagem não influi na convergência do método de otimização, pois somente está alterando as pseudo-densidades e não seus limites móveis, e ainda garante a independência da malha da solução ótima. O capítulo 4 apresenta em detalhe a técnica de projeção inicialmente apresentada por Guest et al., (2004).

## APÊNDICE C: VERIFICAÇÃO NUMÉRICA DO PROGRAMA *piezoEFG*

Neste apêndice apresenta-se a validação numérica do programa *piezoEFG*, apresentado no capítulo 3. Três abordagens diferentes são utilizadas para validar o programa:

- (1) Obtém-se os resultados de transdutores piezelétricos não-MGF utilizando o módulo de MGF no programa *piezoEFG*. Esses resultados foram comparados com aqueles obtidos utilizando o programa comercial ANSYS™.
- (2) Comparam-se os resultados de simulações de TPGF em análise estática, utilizando o programa *piezoEFG*, com resultados obtidos da literatura. Nessas simulações, os resultados estão limitados à análise estática, uma vez que na literatura foi encontrado somente um trabalho que aplica o conceito dos EFGs em estruturas piezelétricas (SILVA et al., 2007).
- (3) Comparam-se os resultados obtidos mediante o programa *piezoEFG* com os obtidos mediante a aproximação multicamada. Essa abordagem e resultados foram apresentados no capítulo 3.

Nas Fig. C.1, C.2 e C.3 são apresentados os resultados considerando a abordagem (1) em uma análise estática, harmônica e transiente, respectivamente. A Fig. C.1 apresenta a resposta (deslocamento na direção Y, voltagem e tensão  $\sigma_{xz}$ ) de cada um dos nós localizados no extremo livre da viga piezelétrica da Fig. 3.5(a) do capítulo 3, ao longo da espessura. No caso da Fig. C.2 e C.3, a função de resposta em frequência mecânica e o histórico do deslocamento vertical ao longo do tempo são medidas no ponto A da Fig. 3.5(a) e 3.5(b) do capítulo 3, respectivamente. Na análise transiente, o programa *piezoEFG* oferece duas opções de análise: análise transiente com e sem amortecimento. No caso com amortecimento assume-se Amortecimento de Rayleigh com os parâmetros:  $\alpha = 2,5$  e

$\beta_a = 10^{-4}$  (LERCH, 1990), e na integração utilizam-se os seguintes parâmetros de Newmark:  $\gamma = 0,5$  e  $\beta = 0,25$ . Além disso, aplica-se um ciclo de senoide unitário como excitação elétrica do TPGF.

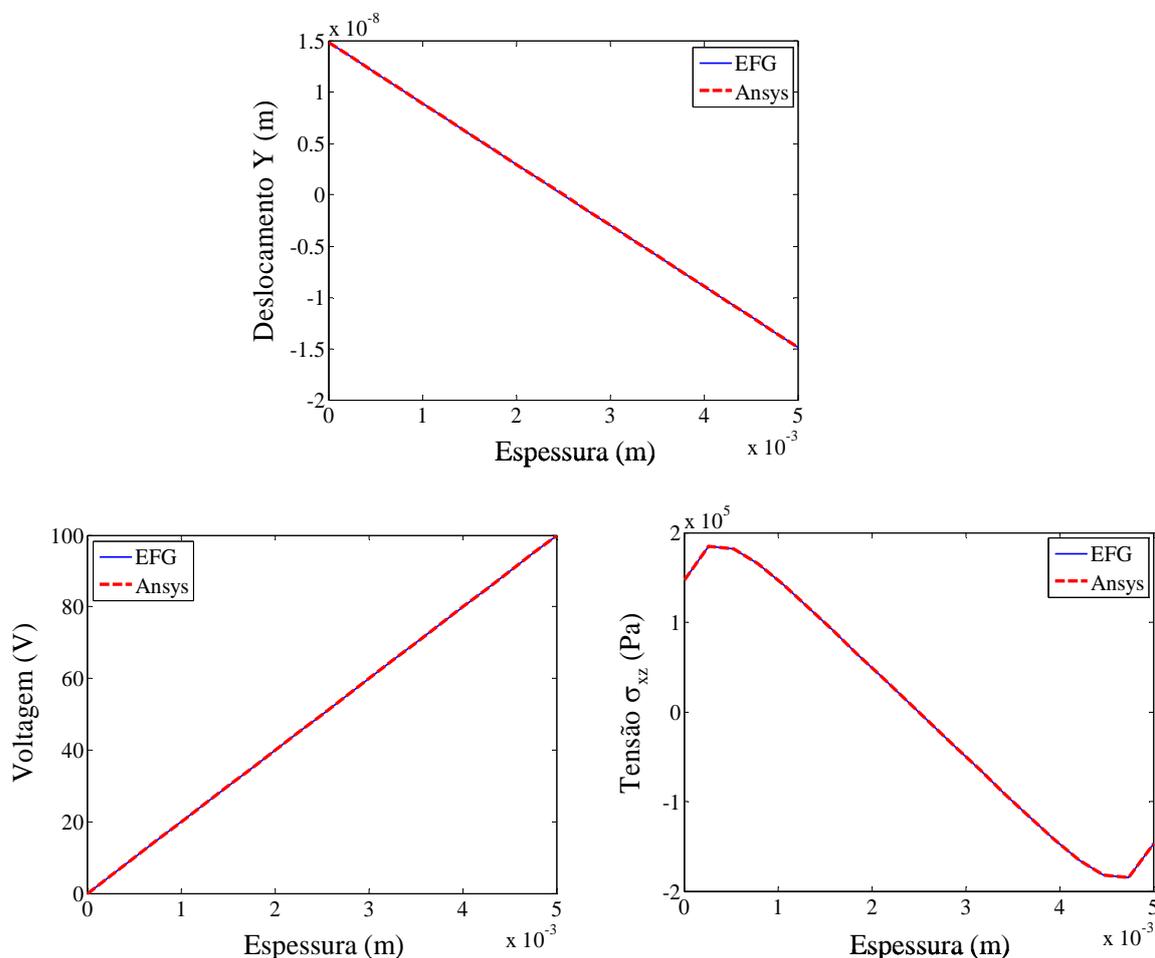


Figura C.1. Resultados em análise estática utilizando a abordagem (1).

Dos resultados com a abordagem (1) observa-se que para todos os tipos de análises (estático, harmônico e transiente) obtém-se a mesma resposta do transdutor não-gradado simulado no ANSYS (ver Fig. C.1, C.2 e C.3); em outras palavras, observa-se que utilizando o módulo MGF do programa *piezoEFG* com  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , e  $\mu_3$  iguais a zero na eq. (3.25) do capítulo 3, obtêm-se resultados iguais aos obtidos com o programa comercial ANSYS.

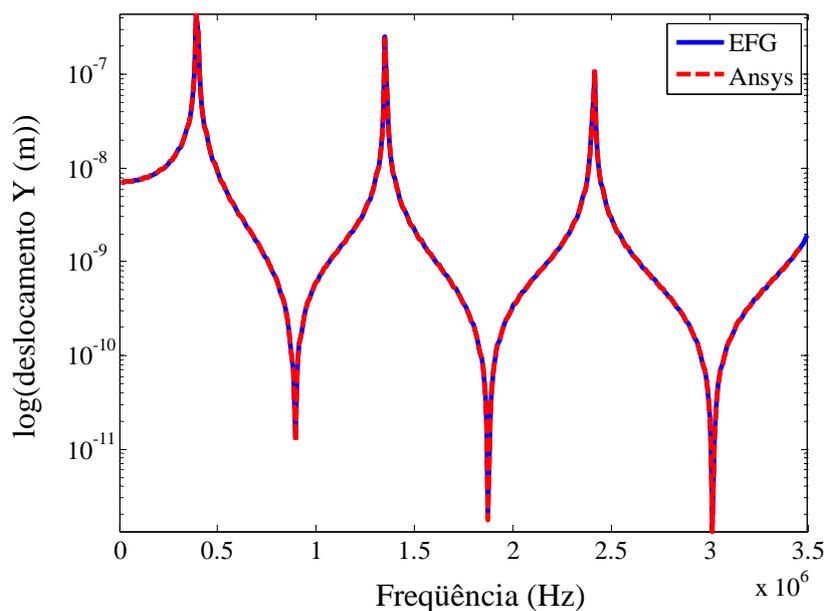


Figura C.2. Resultados em análise harmônica utilizando a abordagem (1).

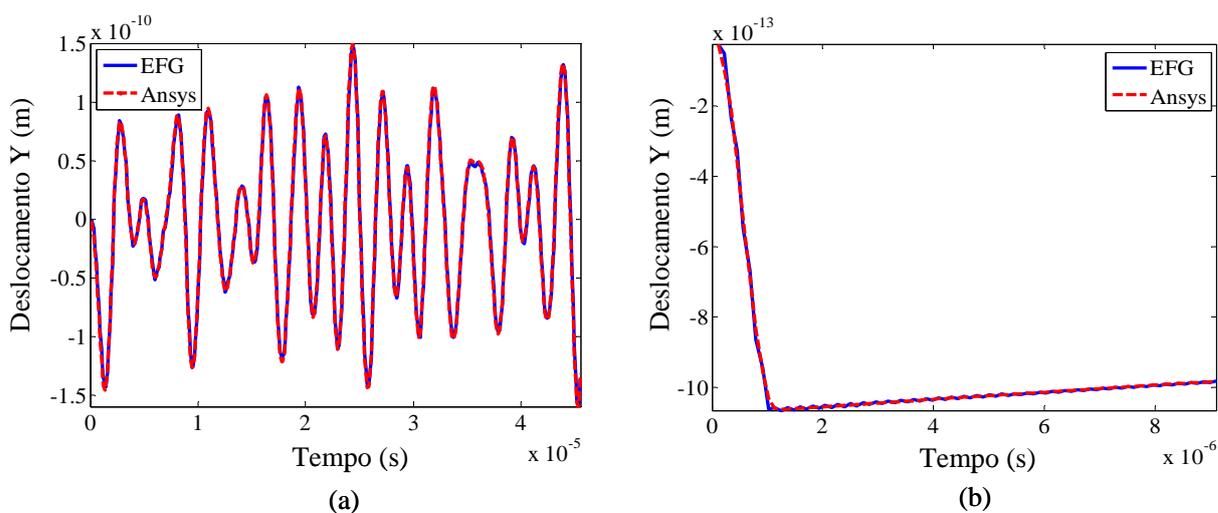
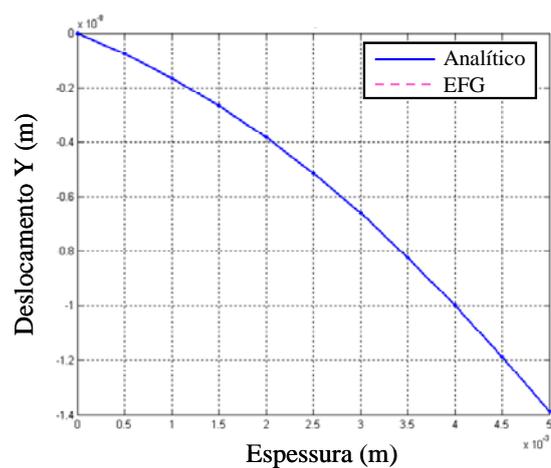
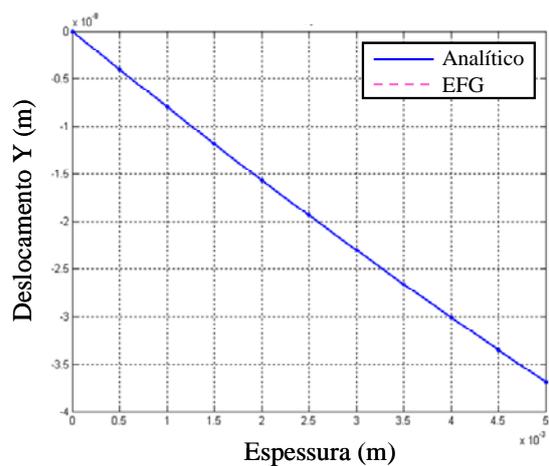
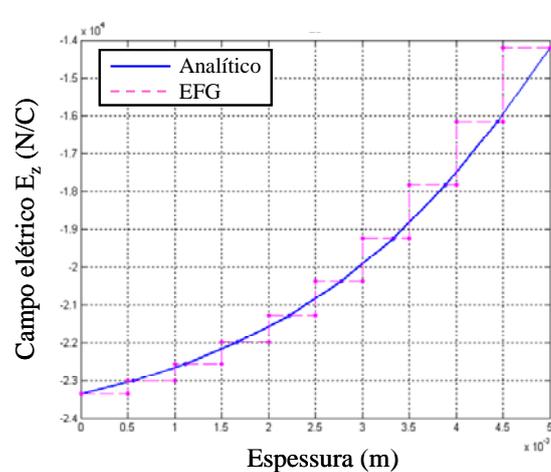
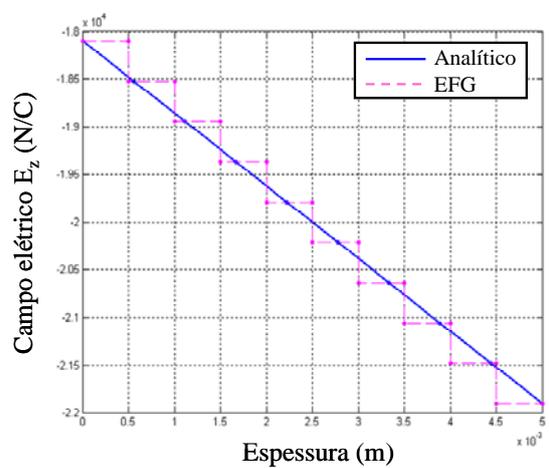


Figura C.3. Resultados em análise transiente utilizando a abordagem (1).  
(a) Sem amortecimento; (b) com amortecimento.

Por outro lado, a Fig. C.4 mostra os resultados segundo a abordagem (2). Os resultados analíticos estão baseados no recente trabalho desenvolvido por Silva et al., 2007. Os resultados da Fig. C.4 mostram o deslocamento vertical, e o campo elétrico  $E_z$ . Observa-se, em todas as respostas, ao igual que na abordagem (1), uma alta correlação entre os resultados analíticos e os resultados numéricos obtidos mediante o programa *piezoEFG*, em análise estática.



(a)



(b)

Figura C.4. Resultados em análise estática utilizando a abordagem (2), gradando somente as propriedades elásticas (figuras da esquerda) e gradando somente as propriedades piezolétricas (figuras da direita): (a) deslocamento vertical; (b) campo elétrico  $E_z$ .

## APÊNDICE D: FABRICAÇÃO DE ESTRUTURAS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL

### D.1 Descrição da fabricação

Para a fabricação das Estruturas com Gradação Funcional (EGF) foram utilizadas como matérias primas pós comerciais de Níquel (Ni) e Cobre (Cu). A utilização de Cu e Ni para a fabricação das EGF motivou-se pelo fato de que a temperatura de sinterização dos dois materiais é bem próxima, 900-1000°C para o Níquel (YAO et al., 2005), e 700-800°C para o Cobre (ZHANG et al., 2008); por conseguinte, a obtenção da temperatura ideal de sinterização não constitui um problema. Além disso, embora diversos trabalhos têm tratado a sinterização de Cu por SPS (ZHANG et al., 2008a; ZHANG et al., 2008b), ou de EGF do tipo Níquel-Alumina (WINTER et al., 2004) ou Níquel-Titânio (LIN et al., 2009), nenhum trata da sinterização de EGF do tipo Cu-Ni.

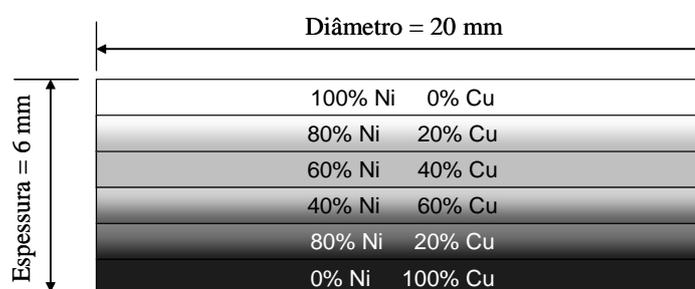


Figura D.1. Esquema da estrutura de camadas em verde antes da sinterização, junto com a porcentagem de material por camada.

A estrutura em verde está composta de 6 camadas (de aproximadamente 1 mm cada uma), variando a sua composição ao longo da espessura conforme apresentado na Fig. D.1. Além disso, para fins de pré-compactação, conforme cada camada em verde é empilhada é aplicada uma força axial de 5 kN. As dimensões da peça correspondem a um disco de 20 mm de diâmetro x 6 mm de espessura.

A taxa de aquecimento programada na máquina de SPS é apresentada na Fig. D.2(a), a qual corresponde a um incremento de temperatura desde 24°C até 700°C em 7 minutos, seguido de incrementos graduais de temperatura, num tempo

de 6 minutos, até a temperatura de sinterização de 800 °C. O tempo de permanência na temperatura de sinterização é de 4 minutos. O monitoramento das temperaturas de sinterização foi realizado utilizando-se um termopar, o qual mede a temperatura na parede do molde de grafite. Adicionalmente, a curva de pressão aplicada durante o processo de sinterização é observada na Fig. D.2(b). A pressão durante a sinterização é de 50 MPa (carregamento de 15,7 kN para uma amostra de diâmetro 20 mm). Esse carregamento muda num minuto de 1 kN a 15,7 kN, o qual é mantido durante 13 minutos.

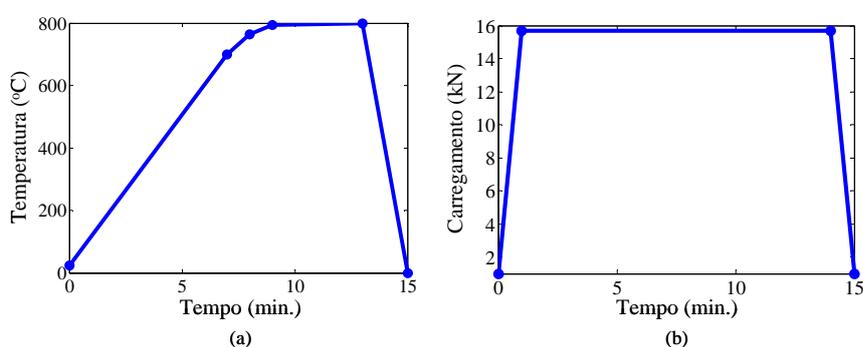


Figura D.2. (a) Taxa de aquecimento e (b) carregamento programado na máquina de SPS.

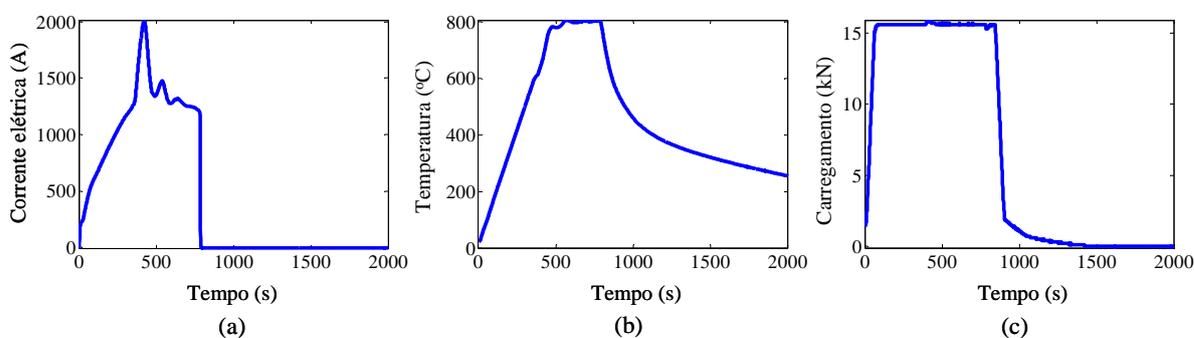


Figura D.3. Evolução da (a) corrente elétrica, (b) temperatura e (c) carregamento durante o processo de sinterização da EGF do tipo Cu-Ni.

A evolução das principais variáveis que intervêm no processo (corrente elétrica, pressão e temperatura), durante a sinterização, encontra-se na Fig. D.3. Da Fig. D.3(a) é observado que existe um incremento gradual da corrente elétrica até alcançar o valor máximo de 2000 A no tempo de 420 segundos, tempo que corresponde a 82% da temperatura de sinterização (ver Fig. D.3(b)); posteriormente, o valor de corrente se estabiliza ao redor de 1250 A, durante o período de manutenção da temperatura de sinterização (com pressão axial igual a 50 MPa ou

carregamento de 15,7 kN, ver Fig. D.3(c)). Finalmente, para resfriar a amostra, e ao final da sinterização, a corrente elétrica desce rapidamente a zero. A curva de temperatura apresenta um resfriamento gradual, gerado pelo intercâmbio de calor entre o molde de grafite e a câmara de vácuo, até a temperatura de 255 °C (aos 2000 segundos), quando a amostra é retirada da máquina SPS. Observa-se que as curvas de pressão e de temperatura seguem o padrão programado inicialmente (ver Fig. D.2), exceto pela etapa de resfriamento da amostra.

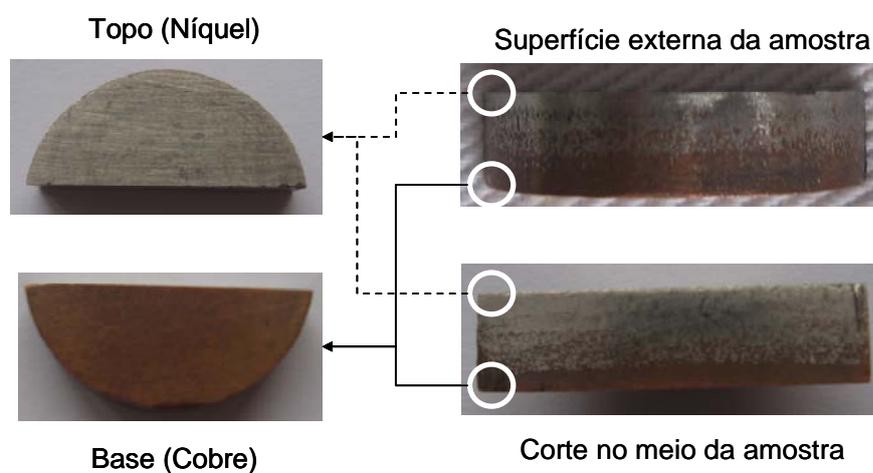


Figura D.4. Amostra de uma EGF do tipo Ni-Cu manufactured mediante a técnica de SPS.

A Fig. D.4 apresenta uma das amostras manufaturadas mediante a técnica de SPS. Observa-se que é obtida uma gradação tanto na superfície externa do disco como na parte interna (centro); no entanto, essa gradação não se apresenta uniforme ao longo da direção radial. O motivo dessa variação origina-se pela fabricação ainda “artesanal” no que diz respeito à mistura dos pós em cada uma das camadas em verde. Essa mistura é realizada manualmente. Contudo, como se mostrará na seção seguinte (caracterização das amostras) consegue-se completa compactação dos pós e uma efetiva gradação das propriedades, o que representa em efeito uma EGF.

## D.2 Caracterização

Nesta seção se apresentam diversos ensaios realizados com a finalidade de caracterizar as EGF fabricadas mediante a técnica de SPS. Foram fabricadas 4

amostras de EGF do tipo Ni-Cu, seguindo um procedimento idêntico ao apresentado na seção anterior. Algumas das amostras foram utilizadas em ensaios destrutivos e na obtenção das propriedades médias das estruturas fabricadas.

Os ensaios consistiram na caracterização da microestrutura mediante um microscópio ótico e mediante um microscópio eletrônico de varredura (MEV). Utilizando esse último, e mediante espectrometria, confere-se que efetivamente obteve-se uma gradação de propriedades ao longo da espessura. Além disso, determinou-se a dureza, mediante endentação Vicker, e o módulo de Young, mediante a técnica de ultra-som. Nesse último caso, foram fabricadas amostras não – MGF de Níquel e Cobre puro, seguindo o mesmo procedimento descrito anteriormente, dessa forma conferem-se experimentalmente as propriedades mecânicas das camadas de Ni e Cu puro da EGF (camadas 100% Cu e 100% Ni).

### **D.2.1 Caracterização microestrutural**

Para analisar a microestrutura da EGF do tipo Ni-Cu foi necessário cortar duas das amostras no meio, sendo que uma das metades de cada amostra foi preparada para ser observada no microscópio, e a outra metade foi preparada para o ensaio de dureza. Para dividir com precisão as amostras utilizou-se a cortadora metalográfica de precisão marca ISOMET 4000 da BUEHLER, disponível no Laboratório de Sensores e Atuadores da EPUSP.

Antes de ser levada ao microscópio, seja ótico ou MEV, as amostras devem ser embutidas numa estrutura de baquelita, de forma que possa ser preparada para a sua posterior observação. Para embutir utilizou-se uma EMBUTIDORA AUTOMÁTICA BUHLER – 3000, disponível no Laboratório de Fenômenos de Superfícies da EPUSP. Uma das amostras embutidas se apresenta na Fig. D.5. Posteriormente, a superfície livre da amostra embutida, ver Fig. D.5, deve ser polida até acabamento espelhado. Para esse fim, gradualmente a amostra embutida é lixada com lixa número 400, 600, 1000 e 2600. Em seguida, é lavada com água e sabão, e retirados todos os resíduos com álcool. A seguir, a amostra deve ser polida com pano utilizando uma POLITRIZ PLF FORTEL de mesa e utilizando abrasivos de diamante com diversos tamanhos de partícula. Primeiro com partículas de 6  $\mu\text{m}$ ,

onde ao final do polimento é conferida a ausência de riscos mediante microscópio ótico. Esse procedimento é repetido com tamanhos de partícula de diamante de 3  $\mu\text{m}$  e 1  $\mu\text{m}$ . Nesse ponto, a amostra embutida está pronta para ser observada no microscópio ótico; no entanto, visando utilizar o MEV realiza-se um polimento ainda mais refinado: polimento eletrolítico.

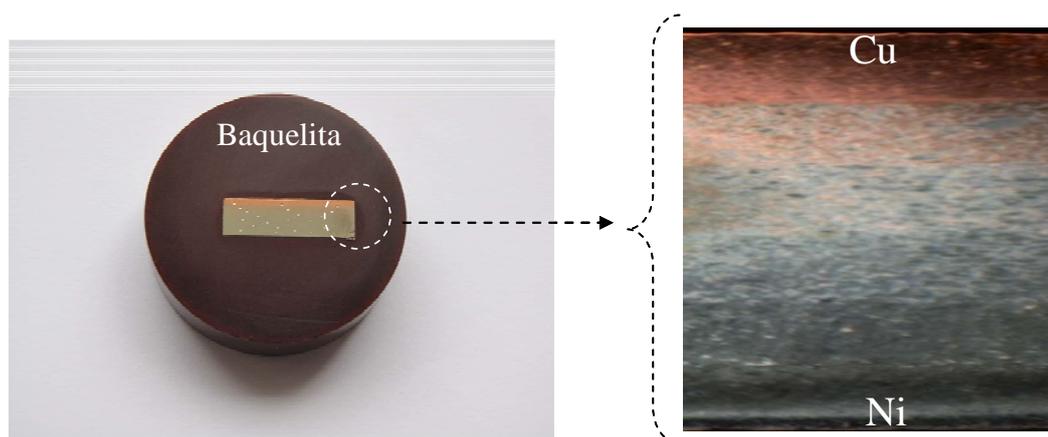


Figura D.5. Metade de uma amostra EGF do tipo Ni-Cu embutida em baquelita junto com uma imagem macro obtida com o equipamento Lupa do Departamento de Metalurgia da EPUSP.

O polimento eletrolítico é um ataque superficial, onde o metal que será polido atua como anodo dentro de um banho eletrolítico, de forma a eliminar todas as arestas superficiais, gerando-se ausência total de riscos. Essa etapa apresentou sérias dificuldades, uma vez que o polimento eletrolítico é favorável para amostras metálicas com composição química homogênea (metal puro, ligas com apenas uma fase) ou para ligas metálicas com mais de uma fase, mas que propiciem a corrosão homogênea das fases simultaneamente, o qual não é o caso das amostras Ni-Cu. Os melhores resultados foram obtidos submetido a amostra encapsulada num banho de metanol a 30% com acido nítrico (especialmente preparado para reduzir a oxidação na fase de Cobre). No entanto, algumas fases Ni-Cu foram sobre atacadas, já que apresentam resistência à corrosão diferente do Cobre. Contudo, esse sobre ataque não foi suficientemente grande ao ponto de inabilitar a análise microestrutural. Para realizar o polimento eletrolítico aplica-se uma voltagem de 20V durante 45 segundos e segue-se um ataque final com uma voltagem de 3V durante 8 segundos. Para o polimento eletrolítico foi utilizado o equipamento POLECTROL da STRUERS, disponível no Departamento de Metalurgia e de Materiais da EPUSP.

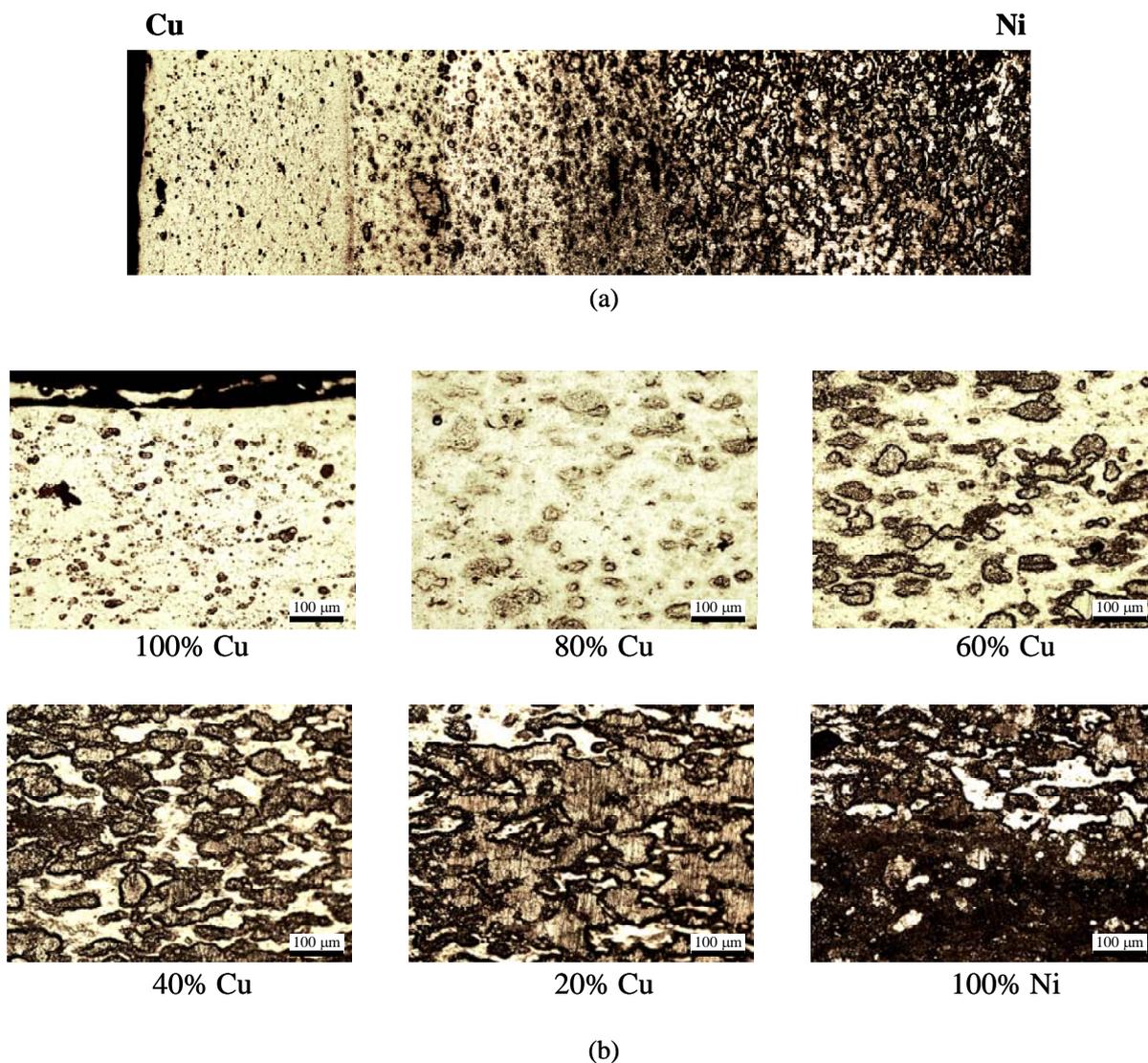
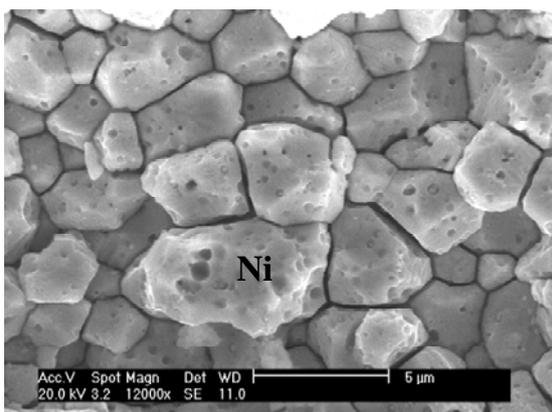


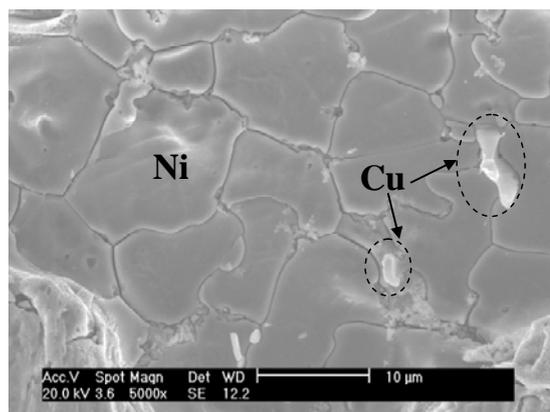
Figura D.6. Microfotografia da EGF Ni-Cu utilizando microscópio ótico a: (a) 100x; (b) 200x.

A Fig. D.6 mostra a microestrutura de uma das EGF Ni-Cu, utilizando o microscópio ótico OM BX60 OLYMPS com 100x (ver Fig. D.6(a)) e 200x (ver Fig. D.6(b)), disponível no Departamento de Metalurgia e de Materiais da EPUSP. Da Fig. D.6(b) observa-se a gradação contínua de microestrutura de Cobre (lado esquerdo da figura) até Níquel. A fase de cor amarela representa as regiões com maior concentração de partículas de Cobre e aquelas de cor marrom as áreas com maior concentração de partículas de Níquel. Na camada de Cobre “puro” ou camada 100% Cu (extremo esquerdo da Fig. D.6(a)) observam-se pontos pretos que representam áreas onde os grãos têm sido arrancados durante o processo de polimento das amostras. Esses pontos se observam em detalhe na Fig. D.6(b) (vide microfotografia da camada de 100% Cu ampliada a 200x). As partículas de Níquel são distribuídas

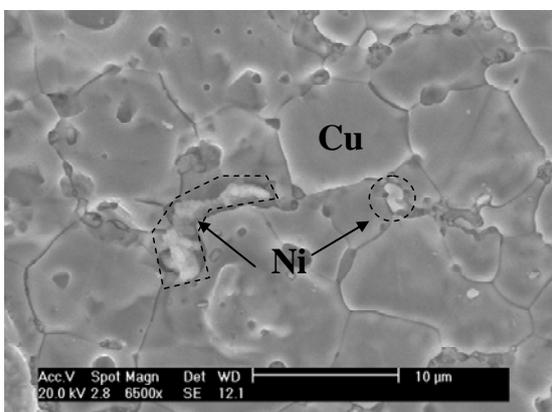
em forma relativamente uniforme, ao longo da direção de gradação (na pequena faixa na direção radial analisada pelo microscópio ótico), e não há evidência de aglomerados, ou de defeitos de sinterização ou trincas nas interfaces entre camadas. Contudo, da Fig. D.6(a) observa-se que as áreas que contêm Níquel foram sobre atacadas durante o processo de polimento eletrolítico, daí a sua coloração mais escura (marrom).



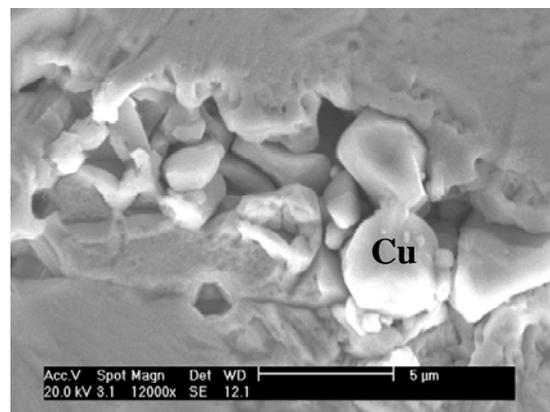
100% Ni



80% Ni, 20% Cu



20% Ni, 80% Cu



100% Cu

Figura D.7. Microfotografias mediante MEV da EGF Ni-Cu em diversas camadas.

A contínua dispersão de inclusões de Níquel numa matriz de Cobre se observa nas três primeiras microfotografias superiores da Fig. D.6(b), seguida de uma inversão nessa distribuição; ou seja, as inclusões de Cobre dispersam-se numa matriz de Níquel (ver as três microfotografias inferiores da Fig. D.6(b)).

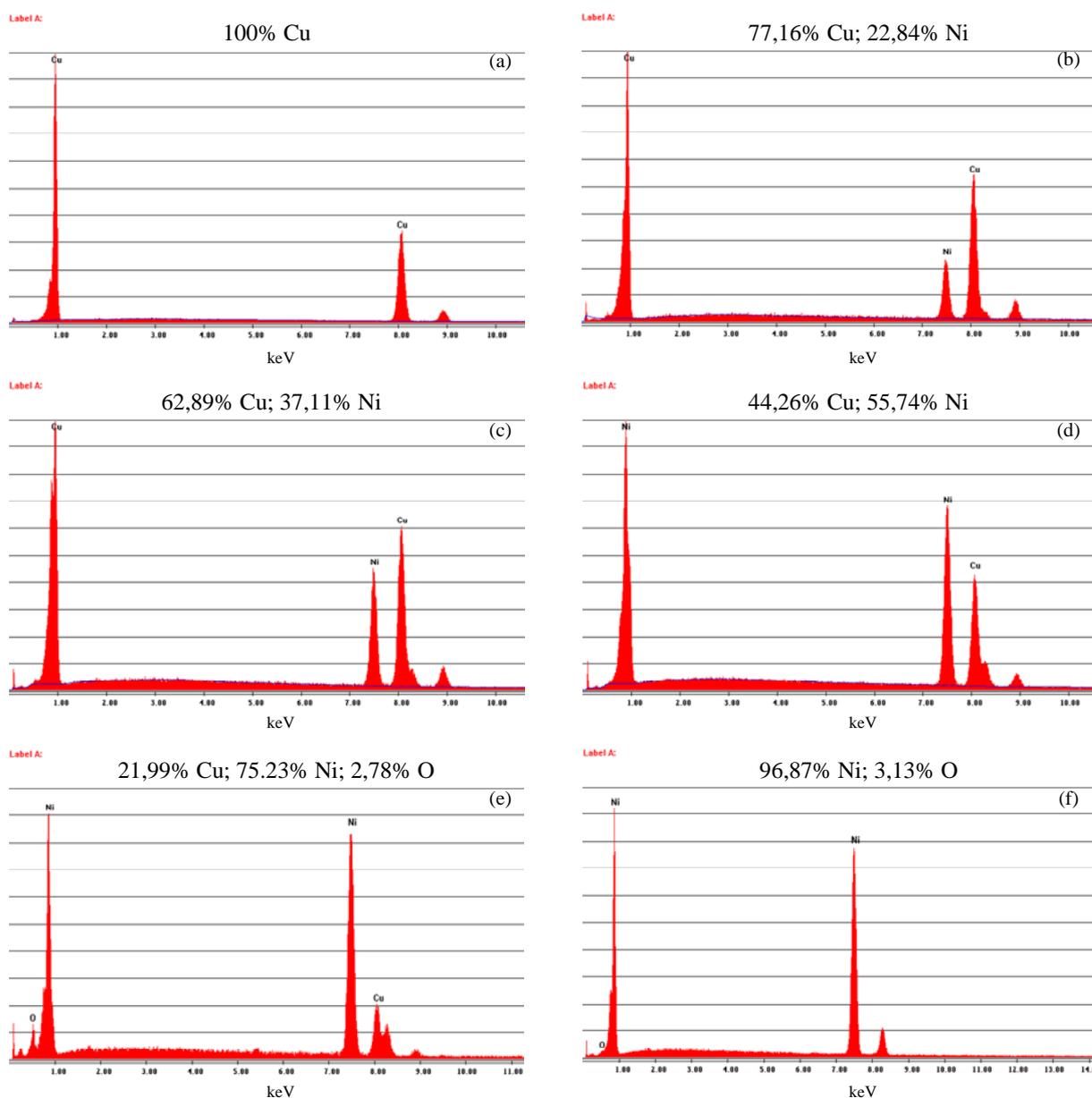


Figura D.8. Composição química mediante espectrometria das regiões correspondentes às camadas em verde: (a) 100% Cu; (b) 80% Cu - 20% Ni; (c) 60% Cu - 40% Ni; (d) 40% Cu - 60% Ni; (e) 20% Cu - 80% Ni; (f) 100% Ni. A unidade keV significa  $10^3$  elétrons-volt (energia adquirida por um elétron quando acelerado através de uma diferença de potencial de 1 volt)

Por outro lado, a Fig. D.7 mostra as microfotografias obtidas mediante o MEV (equipamento PHILIPS XL-30, disponível no Departamento de Metalurgia e de Materiais da EPUSP) para quatro das camadas de uma EGF. Na camada 100% Ni é observado que se obteve uma distribuição relativamente homogênea de grãos de Ni, os quais apresentam uma forma quase-redonda, com tamanho aproximado na faixa de 5 – 2,5  $\mu\text{m}$  de diâmetro. Já na camada com 80% Ni e 20% Cu são observadas as

inclusões de Cobre na matriz de Níquel. É interessante observar o tamanho dos grãos de Ni que, embora permaneçam com forma quase-redonda, aumentaram de tamanho, com diâmetro aproximado de 8  $\mu\text{m}$  a 10  $\mu\text{m}$ . Esse efeito deve-se ao gradiente de temperatura gerado ao longo da direção de gradação, durante o processo de sinterização. Já os grãos de Cobre apresentam forma irregular e estão distribuídos de forma não-uniforme. As observações levantadas em relação à microestrutura das duas camadas anteriores são invertidas para o caso em que existe maior concentração de Cobre. Assim, na camada 20% Ni e 80% Cu, pode-se ver que o tamanho de grão na matriz de Cobre é de forma arredondada com tamanho aproximado de 9  $\mu\text{m}$  de diâmetro, e as inclusões de Níquel se apresentam de forma irregular e aleatoriamente distribuídas.

O MEV também é utilizado para conferir a gradação efetiva de propriedades mediante uma análise EED. O procedimento consistiu em determinar, mediante a técnica de EED, a composição química de cada uma das regiões que correspondem às camadas em verde iniciais, ver a Fig. D.8. Observa-se que efetivamente a composição química de cada camada vai mudando em forma gradativa de Cobre (Fig. D.8(a)) até Níquel (Fig. D.8(f)), em proporções do peso aproximadas àquelas configuradas inicialmente para a estrutura em verde (vide Fig. D.1). Além disso, da Fig. D.8(e) e Fig. D.8(f) confirma-se a oxidação sofrida pelo Níquel durante o polimento eletrolítico, uma vez que aparecem porcentagens significativas de oxigênio, não presentes nas camadas com maior concentração de Cobre. O oxigênio revela a presença de Óxido de Níquel (NiO) na composição química das duas últimas camadas.

## **D.2.2 Determinação da dureza, densidade e módulo de Young**

### **Dureza Vickers**

Para determinar a dureza utilizam-se as duas metades não empregadas na análise microestrutural. Inicialmente, elas devem ser embutidas e, posteriormente, lixadas seguindo o procedimento descrito na seção anterior. É utilizado o durômetro

BUEHLER VMT7, disponível no Laboratório de Fenômenos de Superfícies da EPUSP, o qual mede a dureza Vickers com carga máxima de 50 Kgf. Para determinar a dureza Vickers é utilizada uma pirâmide de diamante com ângulo de diedro de  $136^\circ$ , a qual é comprimida, com uma força  $F$ , contra a superfície do material testado (ver Fig. D.9(a)). A dureza é determinada como o quociente entre a carga  $F$  e as diagonais da área projetada (vide Fig. D.9(a)) (OLIVER, PHARR, 2004; MEZA et al., 2008). Assim, a dureza Vickers é dada por:

$$HV = \frac{F}{A} = \frac{2F \sin \frac{136}{2}}{d^2} \approx 1.845 \frac{F}{d^2} \quad \text{onde:} \quad d = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (\text{D.1})$$

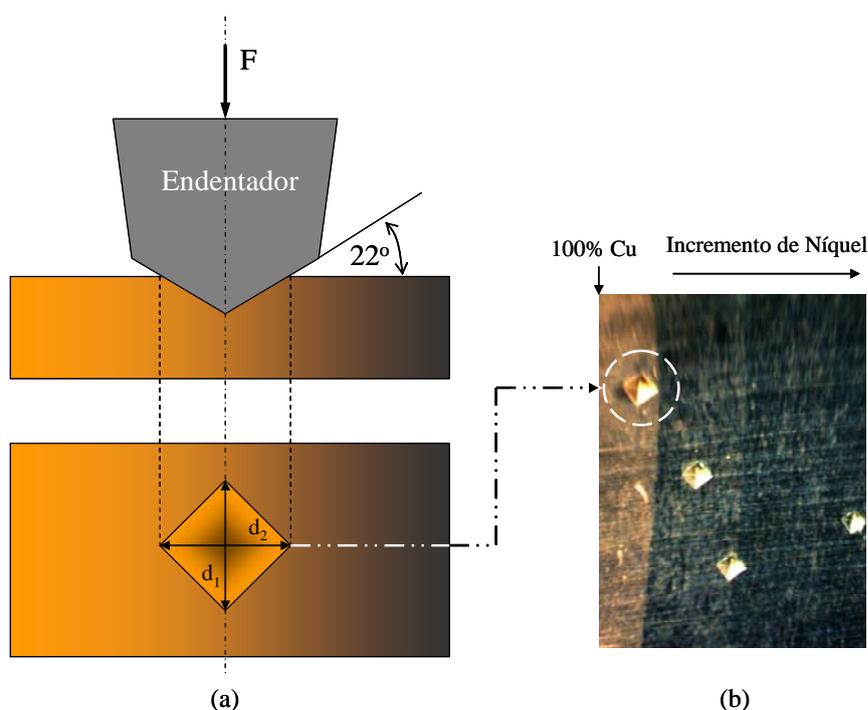


Figura D.9. (a) Esquema típico de um ensaio de dureza Vicker; (b) diversas impressões do endentador ao longo da espessura da EGF Ni-Cu.

A Fig. D.9(b) mostra as impressões deixadas pelo endentador numa das amostras Ni-Cu, aplicando uma carga axial de 5 kgf. A impressão dentro do círculo em traços representa a marca do endentador na região que representa a camada de 100% Cobre. É interessante observar como a área dessas impressões vai diminuindo conforme se incrementa a quantidade de Níquel por camada; em outras palavras, aumenta a dureza da camada conforme aumenta o seu conteúdo de Níquel. Essa afirmação é confirmada ao observar os dados da Tabela D.1. Nas medições, duas

amostras Ni-Cu foram utilizadas, onde três ensaios de dureza Vickers foram realizados para cada camada de cada amostra (a distribuição das impressões do endentador se observa na Fig. D.5). Na primeira camada (100% Cu) a dureza Vickers é ao redor de 60 kgf/m<sup>2</sup>, sendo que esse valor vai incrementando até chegar à faixa de 160 - 186 kgf/m<sup>2</sup>, na camada de 100% Níquel. Esses resultados mais uma vez confirmam que efetivamente houve uma gradação das propriedades (de Cobre até Níquel) ao longo da espessura da EGF; no entanto, ao longo da direção radial a gradação não foi completamente uniforme, uma vez que mesmo para uma mesma camada, diferentes ensaios, em diferentes posições na direção radial, geram diferentes valores de dureza Vickers. Contudo, as variações de dureza para uma mesma camada mantêm-se em faixas de valores relativamente pequenas. Essas variações se originam pelo fato que a difusão de partículas entre as camadas em verde durante o processo de sinterização não é uniforme; em outras palavras, o gradiente de temperatura na direção radial da amostra, durante a sinterização, gera difusão de massa não-uniforme.

Tabela D.1. Valores de dureza Vicker ao longo da espessura em duas amostras Ni-Cu.

Camadas	Amostra Ni-Cu número 1			Amostra Ni-Cu número 2		
	Medições (kgf/m <sup>2</sup> )			Medições (kgf/m <sup>2</sup> )		
100% Cu	60,9	58,6	59,7	58,4	64,8	69,5
80% Cu, 20% Ni	84,2	83,6	86,1	82,3	83,0	85,0
60% Cu, 40% Ni	106,8	105,3	129,0	120,8	125,8	102,7
40% Cu, 60% Ni	136,6	121,8	120,9	145,3	121,8	119,8
20% Cu, 80% Ni	164,6	163,2	144,4	157,9	133,2	123,7
100% Ni	174,5	173,0	185,3	186,2	160,3	161,1

Os valores de dureza apresentados na Tabela D.1 são utilizados para levantar a curva de variação média da dureza ao longo da direção de gradação. Essa curva se apresenta na Fig. D.10. Observa-se que a dureza varia de forma quase linear ao longo da espessura, de aproximadamente 60 Kgf/m<sup>2</sup>, na camada número 1 (100% Cu), até aproximadamente 175 Kgf/m<sup>2</sup>, na camada número 6 (100% Ni).

Embora não exista uma relação direta entre o valor de dureza e o valor do módulo de Young, alguns trabalhos (OLIVER e PHARR, 2004; MEZA et al., 2008) têm determinado as propriedades elásticas de materiais isotrópicos mediante ensaios instrumentados de nano-dureza, através do controle da curva de carga e do controle da profundidade de penetração do endentador. Esses resultados motivaram a suposição de que a curva da Fig. D.10 pode ser utilizada, em materiais isotrópicos, como uma curva “padrão” que represente a mudança do módulo de Young ao longo da direção de gradação. No entanto, antes de verificar essa suposição (ver Seção D.3), é necessário conhecer com precisão os valores extremos da curva; ou seja, os valores das camadas 100% Cu e 100% Ni. Assim, podem-se interpolar os valores do módulo de Young das outras camadas intermediárias, a partir desses valores “extremos”, seguindo a curva da Fig. D.10.

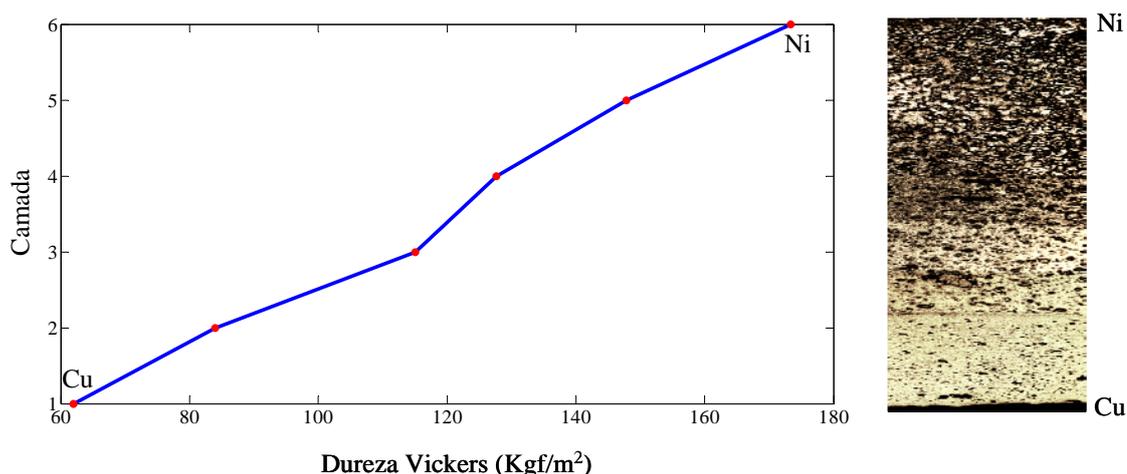


Figura D.10. Curva de variação da dureza Vickers ao longo da espessura de uma EGF do tipo Ni-Cu.

Para determinar as propriedades das camadas de 100% Cu e 100% Ni da EGF (aqui chamadas camadas de propriedades “puras” ou camadas não-MGF) fabricam-se duas amostras de Cobre e duas de Níquel, seguindo procedimento idêntico ao apresentado na Seção D.1. Dessa forma, reproduzem-se as propriedades das camadas de 100% Cu e 100% Ni. Cada uma das amostras corresponde a um cilindro de 20 mm de diâmetro e 6 mm de espessura, e é sinterizada a 800°C seguindo as curvas de temperatura e pressão da Fig. D.2.

## Densidade volumétrica

Antes de determinar experimentalmente o módulo de Young, encontra-se a densidade de cada uma das amostras não-MGF de Cobre e Níquel. Para determinar a densidade, utilizando um micrômetro se medem com precisão as dimensões de cada amostra Ni-Cu, e com uma balança de precisão METTLER TOLEDO AB 204 (com precisão de 0,0001 gramas) mede-se a sua massa. Assim, mediante a relação densidade = massa/volume é determinada a densidade de cada uma das amostras não-MGF.

Tabela D.2. Valores de densidade das amostras não-MGF de Cu e Ni e de outros parâmetros relacionados com o seu cálculo.

Dados	Amostras não-MGF de Cu		Amostras não-MGF de Ni	
	Amostra 1	Amostra 2	Amostra 1	Amostra 2
Diâmetro (mm)	19,966	19,874	20,015	20,054
Espessura (mm)	6,051	5,993	5,887	5,964
Peso (gr)	16,179	15,973	16,313	16,133
Densidade ( $\text{kg/m}^3$ ) – $\rho_1$	8539,9	8591,8	8807,2	8564,2
Densidade relativa (%)	95,5	96,1	98,9	96,2

A Tabela D.2 resume os resultados de densidade. Observa-se que em ambas medições, para cada amostra não-MGF, foram obtidos valores aproximados de densidade. Além disso, a densidade relativa das amostras sinterizadas de Cu e Ni “puro” foi acima de 95% em relação à densidade teórica ( $8940,0 \text{ kg/m}^3$  para o Cobre C10200 (BEATON et al., 1989) e  $8906,0 \text{ kg/m}^3$  para o Níquel 200 (BEATON et al., 1989)). Isso demonstra que houve completa consolidação dos pós durante o processo de sinterização. Esses resultados estão em concordância com esses obtidos por Zhang et al. (2008a), os quais demonstraram que a densidade relativa do Cobre muda conforme os parâmetros da sinterização, conseguindo-se alta consolidação dos pós (densidade relativa superior a 95%) quando a temperatura e pressão de sinterização são superiores a  $600 \text{ }^\circ\text{C}$  e  $30 \text{ MPa}$ , respectivamente. Isso demonstra que o procedimento e parâmetros adotados para fabricar as amostras foi o correto.

## Módulo de Young

O comportamento elástico das amostras não-MGF de Cu e Ni é determinado medindo a velocidade de propagação das ondas longitudinais e transversais que se propagam na amostra (KINO, 2000). Neste trabalho, a velocidade de onda transversal não foi determinada devido a dificuldades de montagem em razão às pequenas dimensões das amostras; por conseguinte, o foco direciona-se às ondas longitudinais.

Assumindo um material perfeitamente elástico (que cumpre a lei de Hooke), a velocidade de propagação de uma onda longitudinal que se propaga ao longo de uma barra infinitesimal, neste caso chamada de velocidade de onda extensional ( $V_e$ ), é expressada como (KINO, 2000):

$$V_e = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{D.2})$$

onde os termos  $\rho$  e  $E$  são a densidade e módulo de Young do material (Níquel ou Cobre), respectivamente. No entanto, se a razão de aspecto é diferente da de uma barra infinitesimal, a velocidade de propagação longitudinal ( $V_l$ ) é diferente da velocidade de onda extensional. Nesse caso, o termo  $V_l$  é definido como:

$$\frac{V_e}{V_l} = \sqrt{\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}} \quad (\text{D.3})$$

onde o termo  $\nu$  é o módulo de Poisson (KINO, 2000). Assim, a partir das eq.(D.2) e eq.(D.3) pode-se determinar o módulo de Young como:

$$E = \left[ \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \right] V_l^2 \rho \quad (\text{D.4})$$

Como se observa da eq.(D.4), depois de encontrar experimentalmente a velocidade de onda longitudinal e a densidade de cada amostra não-MGF, e utilizando o valor

teórico para o módulo de Poisson, podem-se determinar as propriedades elásticas das camadas 100% Cu e 100% Ni das EGF.

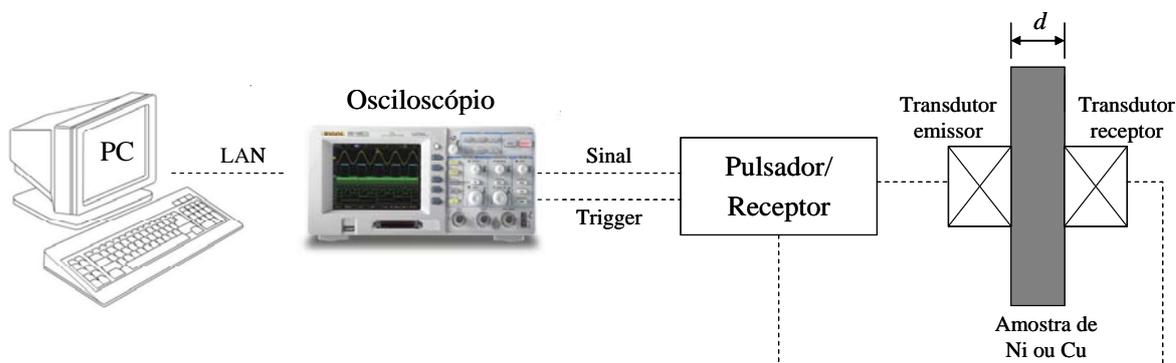


Figura D.11. Esquema da montagem utilizada para medir a velocidade de propagação de onda longitudinal em amostras não-MGF de Cobre e Níquel.

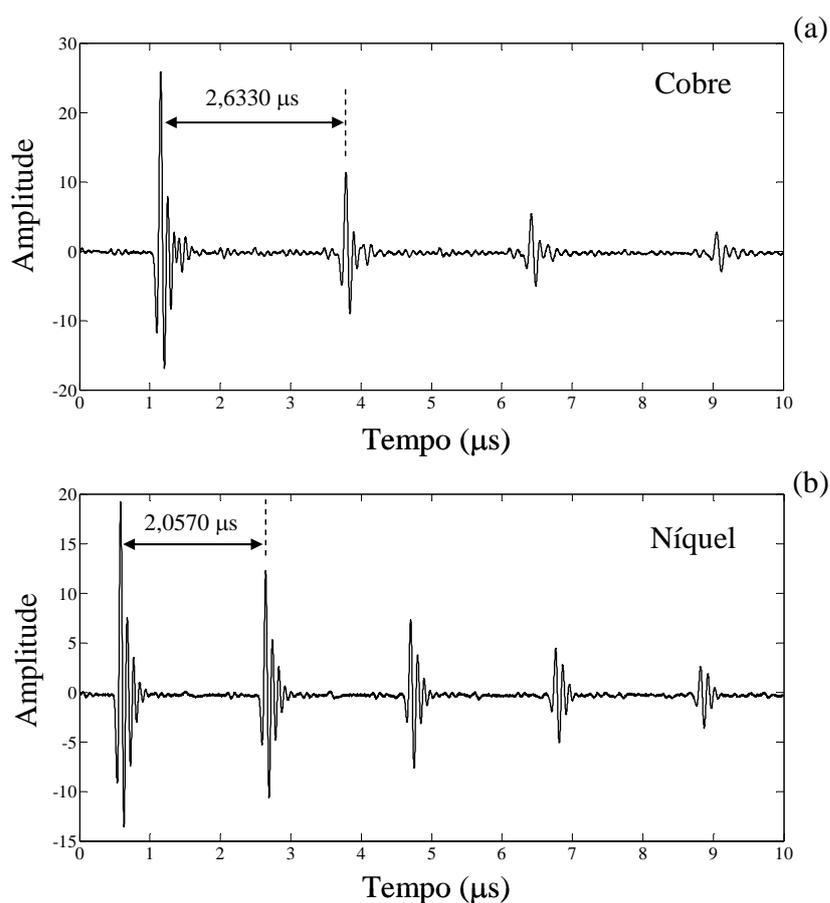


Figura D.12. Sinais obtidos utilizando a técnica de ultra-som e a montagem da Fig. D.11 para: (a) uma das amostras não-MGF de Cu; (b) uma das amostras não-MGF de Ni.

A técnica para determinar experimentalmente  $V_l$  utiliza dois transdutores piezelétricos de ondas longitudinais colocados em forma coaxial, ver montagem na

Fig. D.11. Um dos transdutores funciona como emissor e, o outro, como receptor. A amostra não-MGF, seja de Cu ou Ni, é colocada entre os transdutores piezelétricos e é medido o tempo que transcorre desde que o transdutor emissor é excitado até que o transdutor receptor capta a onda. Assim, a partir do tempo necessário para que a onda longitudinal percorra a espessura  $d$  (ver Fig. D.11), é calculada a velocidade de propagação longitudinal dentro do material.

A montagem experimental para medir as propriedades elásticas por ultra-som consiste num pulsador/receptor PANAMETRICS 5072PR e dois transdutores piezelétricos de 10 MHz (vide Fig. D.11). Os sinais foram digitalizados por um osciloscópio AGILENT INFIINIUM 54820A com resolução vertical de 8 bits, utilizando uma frequência de amostragem de 500MHz. Os sinais foram armazenados num computador para o seu processamento. Os sinais capturados através dessa montagem podem ser observados na Fig. D.12(a), para uma das amostras não-MGF de Cobre, e na Fig. D.12(b), para uma das amostras de Níquel.

Tabela D.3. Valores de Módulo de Young obtidos mediante a técnica de ultra-som.

<b>Dados</b>	<b>Amostras não-MGF de Cu</b>		<b>Amostras não-MGF de Ni</b>	
	<b>Amostra 1</b>	<b>Amostra 2</b>	<b>Amostra 1</b>	<b>Amostra 2</b>
Espessura (mm) - $d$	6,051	5,993	5,887	5,964
Tempo pico a pico ( $\mu$ s)	2,6330	2,6328	2,0570	2,0602
Velocidade de onda longitudinal (m/s) – $V_l$	4596,3	4552,6	5723,9	5789,7
Módulo de Poisson (BEATON et al., 1989)	0,326	0,326	0,322	0,322
Módulo de Young (GPa)	123,52	121,92	200,30	199,27

A Tabela D.3 resume: (i) os valores do tempo necessário para que a onda longitudinal percorra a espessura  $d$  (espessura de cada uma das duas amostras não-MGF de Cu e Ni apresentadas na Tabela D.2), (ii) os valores de velocidade de onda longitudinal calculados mediante a relação  $V_l = 2d/t$ , e (iii) os valores do módulo de Young calculados utilizando a eq.(D.4).

Da Tabela D.3 observa-se que os valores do módulo de Young obtidos mediante a técnica de ultra-som, para todas as amostras, são próximos dos valores

que se encontram na literatura: 113 GPa para Cobre C10200 (BEATON et al., 1989) e 214 GPa para Níquel 200 (BEATON et al., 1989). A diferença se deve ao fato que não foram sinterizados metais totalmente puros, o que incrementa as perdas por atenuação acústica; além disso, as diferenças no tamanho do grão e os defeitos gerados pela fabricação aumentam a dispersão das ondas acústicas. Contudo, os valores obtidos pela técnica de SPS são valores aceitáveis de elasticidade, e mantêm a relação existente entre os valores do módulo de Young do Cobre ( $E_c$ ) e do Níquel ( $E_n$ ). Segundo a literatura a relação é  $E_n/E_c = 1,89$  (BEATON et al., 1989), e para as estruturas aqui fabricadas mediante SPS essa relação é em média  $E_n/E_c = 1,63$ .

### D.3 Validação do programa *piezoEFG*

Os resultados obtidos na seção anterior podem ser utilizados para validar de forma experimental o programa *piezoEFG* apresentado no capítulo 3; no entanto, ao tratar-se de estruturas não-piezelétricas somente será validado o módulo de EF que realiza os cálculos do problema mecânico em TPGF. Contudo, a implementação do problema de EF elétrico, e do problema de acoplamento de domínios (o problema piezelétrico) não acarreta dificuldades adicionais que possam supor que estejam implementados de forma errada. Além disso, os resultados apresentados nesta seção servem de complemento às verificações numéricas e analíticas do programa *piezoEFG* apresentadas no Apêndice C. Sendo assim, todos esses resultados, em conjunto, validam o programa de elementos finitos apresentado no capítulo 3. Por outro lado, para a validação, não é utilizado um TPGF fabricado mediante SPS uma vez que esse tipo de verificação acarreta dificuldades adicionais que ainda são tema de estudo na literatura e no Laboratório de Sensores e Atuadores da EPUSP. Especificamente, seria necessário levantar com precisão a curva de gradação de cada uma das propriedades piezelétricas, dielétricas e elásticas, as quais num problema bidimensional resultam 10 curvas. Adicionalmente, o fato de validar o programa com uma gradação de materiais isotrópicos, e com valores de densidade entre materiais próximos, reduz-se significativamente a complexidade do problema.

O procedimento utilizado para validar o programa *piezoEFG* consiste em comparar a curva experimental da Função de Resposta em Freqüência (FRF) de deslocamento da EGF Ni-Cu com a curva obtida mediante o programa EF. No caso das EGF, isso acarreta o problema de como levantar essa curva experimental, uma vez que as pequenas dimensões das amostras dificultam a utilização de técnicas tradicionais para o cálculo da FRF, como excitação por impacto e métodos de extração por parâmetros modais (EWINS, 1988). A opção a ser utilizada foi inspirada pelo artigo de Skaf et al. (2009), os quais utilizam uma combinação de transdutores piezelétricos e estruturas não-piezelétricas para levantar a resposta em freqüência. A idéia é colar ou embutir um transdutor piezelétrico na estrutura que se deseja analisar e posteriormente, com o auxílio de um impedômetro, levantar a resposta em freqüência da estrutura assim acoplada. No entanto, a massa e dimensões do transdutor piezelétrico, em relação à estrutura não-piezelétrica, deve ser o suficientemente pequena para calcular com exatidão as freqüências da EGF.

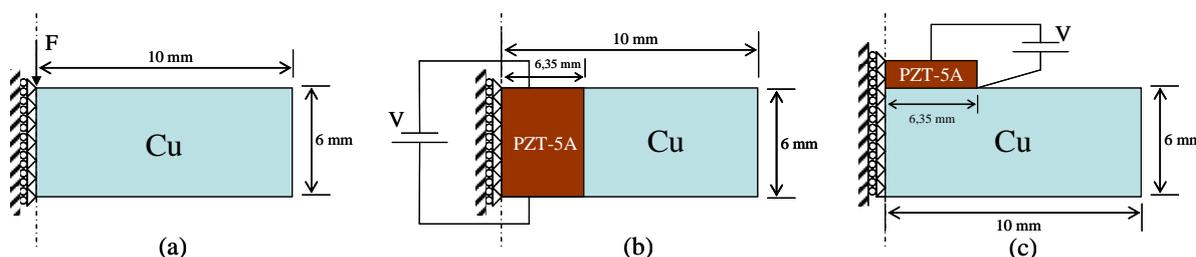


Figura D.13. Diversas montagens utilizadas para aproximar a resposta em freqüência de uma estrutura não-piezelétrica mediante a utilização de cerâmicas piezelétricas: (a) estrutura analisada; (b) modelo aproximado número 1; (c) modelo aproximado número 2.

Para encontrar as dimensões e a montagem do transdutor piezelétrico que melhor aproximem a FRF experimental, são testadas três montagens diferentes mediante EF (utilizando o programa ANSYS<sup>TM</sup>). A Fig. D.13(a) corresponde ao modelo axissimétrico da estrutura não-piezelétrica que se deseja analisar, considerando propriedades de Cobre. Neste caso, a excitação é provocada por uma força unitária aplicada no médio da estrutura. Já o primeiro modelo aproximado (modelo número 1 da Fig. D.13(b)), está baseado no trabalho de Skaf et al. (2009), os quais embutiram uma cerâmica piezelétrica no meio de uma estrutura não-piezelétrica visando reduzir a freqüência fundamental de um transdutor de ultra-som utilizado para inspecionar o processo de fermentação do pão. Eles concluíram que, utilizando uma cerâmica

piezolétrica de massa relativamente pequena em relação à da estrutura não-piezolétrica, podem-se aproximar, com bastante exatidão, as primeiras freqüências de ressonância dessa estrutura. Por outro lado, o modelo aproximado número 2 (ver Fig. D.13(c)), consiste em colar, no meio da estrutura não-piezolétrica que será analisada, uma cerâmica piezolétrica. Neste modelo foram testadas duas dimensões de espessura da cerâmica piezolétrica, segundo as piezocerâmicas disponíveis no Laboratório de Sensores e Atuadores da EPUSP: 1,38 mm (denominado modelo aproximado número 2a), e 0,378 (modelo 2b). Tanto no primeiro e segundo modelo, a excitação é gerada pela aplicação de uma voltagem na cerâmica piezolétrica, conforme é apresentado na Fig. D.13.

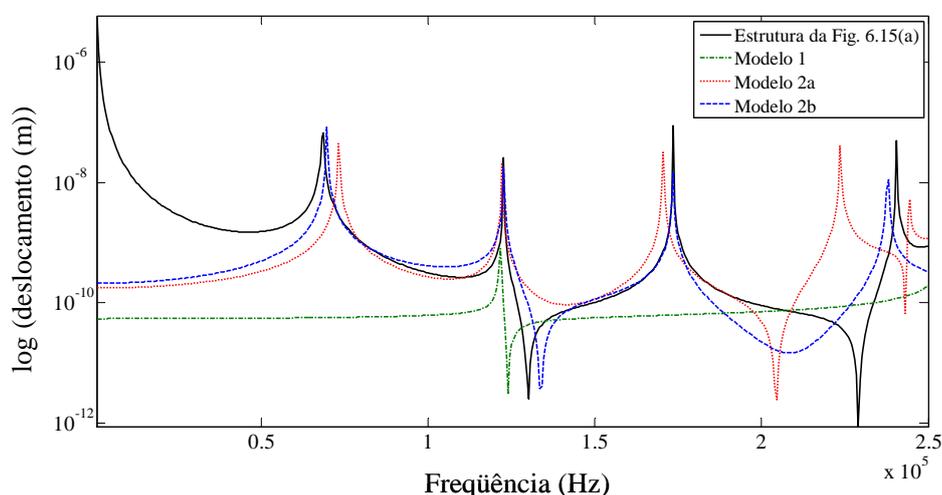


Figura D.14. Análise harmônica para os modelos geométricos da Fig. D.13.

Para todos os casos descritos acima é desenvolvida uma análise harmônica utilizando o programa ANSYS<sup>TM</sup>, com uma malha de 6000 elementos finitos quadrados de 4 nós, e assumindo modelos axissimétricos. Nos casos que é utilizada uma cerâmica piezolétrica, o material é assumido como PZT-5A. Nesse caso, a cerâmica é excitada com uma voltagem unitária. A Fig. D.14 mostra as curvas obtidas da análise harmônica para os diversos modelos geométricos. Pode-se observar que dos dois modelos aproximados, o modelo número 1 apresentou a maior diferença em relação ao valor da freqüência de ressonância. Isso se deve ao fato que ao tratar com uma estrutura com espessura relativamente grande (6 mm), a cerâmica piezolétrica possui maior massa em relação às utilizadas no modelo número 2, o que afeta substancialmente os resultados. Se para compensar esse

efeito, no modelo número 1, é simulada uma cerâmica piezolétrica com menor raio, na prática, acrescentam-se as dificuldades de embutir uma piezocerâmica muito esbelta e frágil, com pouca tolerância, no meio da estrutura não-piezolétrica. Por outro lado, dos modelos número 2, a curva da FRF de deslocamento do modelo 2b foi a que mais se aproximou da curva de resposta em freqüência da estrutura não-piezolétrica. Lembremos que nesse modelo 2b utiliza-se uma cerâmica piezolétrica de pouca espessura: 0,378 mm e, portanto, dinamicamente, se comporta de forma aproximada à estrutura da Fig. D.13(a). Contudo, da Fig. D.13 pode-se observar que o modelo 2b é valido somente para os primeiros modos de vibrar, sendo que nos modos de maior ordem aumenta a diferença em relação aos modos da estrutura não-piezolétrica. A Tabela D.4 resume os valores das três primeiras freqüências de ressonância de todos os casos simulados, onde o valor porcentual entre parênteses representa a diferença de cada um dos modelos em relação aos resultados obtidos com a Fig. D.13(a).

Tabela D.4. Freqüências de ressonância dos modelos mostrados na Fig. D.13.

<b>Modelo</b>	<b>Primeira freqüência</b>	<b>Segunda freqüência</b>	<b>Terceira freqüência</b>
<b>Estrutura da Fig. 6.15(a)</b>	68,5 kHz	122,5 kHz	173,5 kHz
<b>Modelo 1</b>	---	121,5 kHz (-0,8 %)	---
<b>Modelo 2a</b>	73,0 kHz (6,5 %)	122,0 kHz (-0,4 %)	170,5 kHz (-1,7 %)
<b>Modelo 2b</b>	69,5 kHz (1,5 %)	122,5 kHz (0 %)	173,5 kHz (0 %)

Baseado nos resultados apresentados na Fig. D.14 e na Tabela D.4 colou-se uma cerâmica piezolétrica PZT-5A de raio igual a 6,35 mm e espessura de 0,378 mm numa das amostras gradadas do tipo Ni-Cu anteriormente analisadas. Posteriormente, mediu-se a sua resposta em freqüência utilizando o impedômetro disponível no Laboratório de Sensores e Atuadores da EPUSP. Essa curva é apresentada na Fig. D.15. Nessa mesma figura apresenta-se a curva da FRF de deslocamento de uma EGF Ni-Cu obtida mediante o programa *PiezoEFG* e assumindo as seguintes especificações:

- (i) O módulo de Young muda ao longo da espessura seguindo a curva da Fig. D.10.

- (ii) O módulo de Young das camadas 100% Cobre e 100% Níquel é a média dos valores apresentados na Tabela D.3: 122,72 GPa para o Cobre e 199,78 GPa para o Níquel.
- (iii) O valor do módulo de Young, para as regiões intermediárias, é interpolado seguindo a curva da Fig. D.10 e a partir dos valores definidos para as camadas de 100% Cobre e 100% Níquel.
- (iv) A densidade e o módulo de Poisson são mantidos constantes ao longo da espessura com valores de  $8625,8 \text{ kg/m}^3$  e 0,324, respectivamente. Esses valores resultam, respectivamente, da média das quatro densidades apresentadas na Tabela D.2, e da média do módulo de Poisson da Tabela D.3.
- (v) A EGF Ni-Cu tem 19,95 mm de diâmetro e 5,96 mm de espessura.
- (vi) A malha utilizada é de 70 x 40 elementos finitos.

Após a simulação da EGF Ni-Cu, utilizando o programa *piezoEFG*, e após a medição experimental da curva de impedância de uma das amostras gradadas de Ni-Cu, obtive-se os resultados apresentados na Fig. D.15 e na Tabela D.5. Embora sejam curvas de magnitudes diferentes, de ambas podem-se extrair os valores de frequência de ressonância da estrutura. No caso experimental, esses valores correspondem aos picos com impedância elétrica tendendo a zero. No caso simulado com o programa *piezoEFG*, as frequências de ressonância correspondem aos picos da curva da sua FRF mecânica (deslocamentos), a qual se apresenta em linha contínua e cor vermelha na Fig. D.15(a). Como observado, os valores de frequência de ressonância dos quatro primeiros modos, no caso experimental e simulado, são próximos. A partir do quarto modo de vibrar, os valores simulados da frequência de ressonância se afastam desses obtidos de forma experimental, o qual já era previsível dos resultados apresentados na Fig. D.14. Contudo, na curva experimental, o modo de vibrar número 3 apresenta magnitude muito pequena para ser observada a simples vista da Fig. D.15(a). Na curva simulada, esse modo pode ser mais facilmente identificável, já que não é considerado nenhum tipo de amortecimento na análise harmônica. Na Fig. D.15(b) é mostrado, em detalhe, esse modo pouco visível na Fig. D.15(a), no intervalo de 225 - 242 kHz. Embora seja um modo de pequena magnitude, em relação aos dois primeiros modos, pela correlação

entre a curva experimental e a curva simulada pode-se concluir que é em efeito um modo de vibrar.

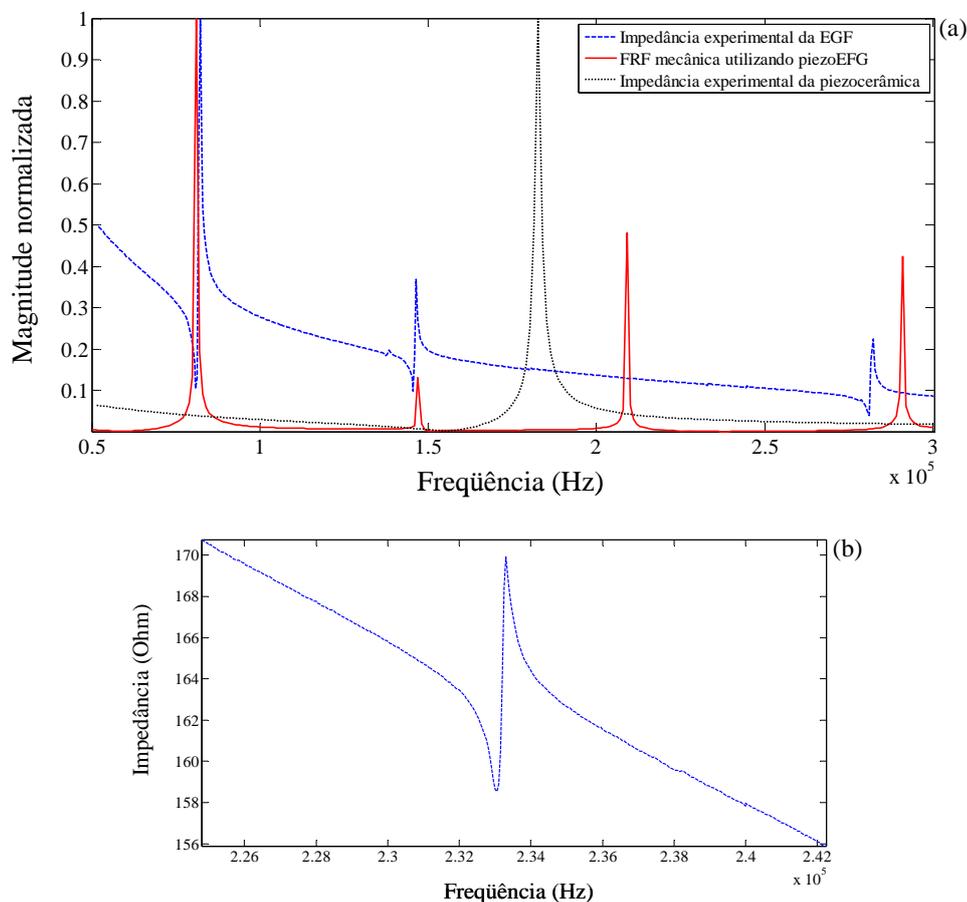


Figura D.15. Comparação das curvas de resposta em frequência de uma EGF Ni-Cu: (a) curva de impedância experimental e curva obtida mediante o programa *piezoEFG*; (b) detalhe da curva experimental no intervalo 225 – 242 kHz.

Tabela D.5. Valores de frequência de ressonância das curvas da Fig. D.15.

Modo de vibrar	Frequência de ressonância (kHz)		
	Programa <i>piezoEFG</i>	Experimental	Diferença (%)
<b>Modo 1</b>	81,00	80,97	0,04
<b>Modo 2</b>	147,00	145,58	0,96
<b>Modo 3</b>	209,00	233,05	-11,50
<b>Modo 4</b>	291,00	281,00	3,43

Adicionalmente, na Fig. D.15(a) é apresentada a curva de impedância experimental da piezocerâmica colada na EGF. Como se observa, na região analisada, o pico de ressonância da piezocerâmica não corresponde a nenhum dos picos das curvas relacionadas com a EGF, seja simulada ou experimental; conseqüentemente, pode-se afirmar que, em efeito, as curvas da Fig. D.15(a) representam o comportamento dinâmico de somente a EGF.

Na Tabela D.5 podem-se observar os valores das quatro primeiras freqüências de ressonância nos dois casos (experimental e simulado). Observa-se que o valor de freqüência de ressonância obtido com o programa *piezoEFG* varia entre 0,04% e 3,5% em relação ao valor experimental (exceto para o modo número 3, onde a diferença é de 11,5%). A maior diferença observada no modo de vibrar número 3 deve-se, provavelmente, à influência exercida pelo modo de vibrar gerado somente pela piezocerâmica; especificamente, na freqüência de 182,7 kHz, o qual faz “mover da posição esperada” o modo de vibrar número 3 da EGF. Embora sejam aceitáveis essas diferenças, elas originam-se pelas diversas suposições assumidas durante a simulação com o programa *piezoEFG*; por exemplo, uniformidade de graduação ao longo da direção radial, densidade e módulo de Poisson constantes e, utilização de valores médios para o módulo de Young nas camadas de 100% Ni e 100% Cu.

#### **D.4 Considerações finais**

Os resultados apresentados neste apêndice serviram para validar o módulo mecânico do programa *piezoEFG* e apresentar toda uma metodologia de fabricação e caracterização dessas estruturas, o qual serviu para adquirir os conhecimentos relacionados com a manufatura de MGF. Contudo, o conjunto de resultados representa contribuições na área; especificamente, a manufatura de EGF do tipo Ni-Cu não se reporta na literatura. Além disso, a validação experimental de um programa computacional, baseado no conceito de Elementos Finitos Gradados, é um tópico que, pelo conhecimento do autor, não tem sido tratado na literatura.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)