

LUÍS AUGUSTO MOTTA MELLO

ESTUDO DO AUMENTO DO DESEMPENHO DE UM SISTEMA DE
TOMOGRÁFIA DE IMPEDÂNCIA ELÉTRICA ATRAVÉS DO MÉTODO
DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

São Paulo

2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

LUÍS AUGUSTO MOTTA MELLO

ESTUDO DO AUMENTO DO DESEMPENHO DE UM SISTEMA DE
TOMOGRAFIA DE IMPEDÂNCIA ELÉTRICA ATRAVÉS DO MÉTODO
DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Doutor em Engenharia.

São Paulo

2010

LUÍS AUGUSTO MOTTA MELLO

ESTUDO DO AUMENTO DO DESEMPENHO DE UM SISTEMA DE
TOMOGRAFIA DE IMPEDÂNCIA ELÉTRICA ATRAVÉS DO MÉTODO
DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Doutor em Engenharia.

Área de Concentração: Engenharia de
Controle e Automação Mecânica

Orientador: Prof. Livre-Docente Emílio
Carlos Nelli Silva

São Paulo

2010

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 22 de fevereiro de 2010.

Assinatura do autor

Assinatura do orientador

FICHA CATALOGRÁFICA

Mello, Luis Augusto Motta

Estudo do aumento do desempenho de um sistema de tomografia de impedância elétrica através do método de otimização topológica / L.A.M. Mello. -- São Paulo, 2010.

247p.

Edição Revisada

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1.Tomografia 2.Topologia (Otimização) 3.Imageamento (Bio-engenharia) 4. Sistemas lineares I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

AGRADECIMENTOS

Gostaria, em primeiro lugar, de agradecer à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo suporte financeiro fornecido através de bolsa de Doutorado, sem o qual não poderia ter realizado este trabalho.

Agradeço a todos os colegas do grupo de otimização pelo companheirismo.

Agradeço ao professor Marcelo Britto Passos Amato pelas sugestões dadas para melhoria do trabalho. Também agradeço ao professor Raul Gonzalez Lima pelas discussões sobre os mais variados aspectos relacionados à tomografia e também pelas sugestões. Ainda, agradeço ao professor Gláucio H. Paulino por discussões sobre diversos temas relacionados ao meu trabalho e pela ajuda relacionada à minha viagem. Finalmente, agradeço ao professor Eric de Sturler, pela ajuda durante a minha estadia em Blacksburg, pelas discussões valiosas e colaboração. Agradeço a todos os professores citados por sempre incentivarem o meu trabalho.

Agradeço ao professor Emílio Carlos Nelli Silva principalmente por toda a ajuda e pelo constante incentivo ao meu trabalho.

Finalmente, agradeço à minha família.

RESUMO

A Tomografia de Impedância Elétrica é uma técnica de obtenção de imagens do interior de um corpo, mediante grandezas elétricas medidas em sua superfície. Matematicamente, a técnica determina as distribuições de condutividades e permissividades elétricas num dado modelo do corpo, as quais reproduzem as medidas de correntes e potenciais elétricos em eletrodos fixados ao corpo. Nesse caso, as distribuições de condutividades e permissividades representam a solução de um problema não-linear e mal-posto, o qual é instável e apresenta mínimos locais, requerendo técnicas de inversão específicas. Um sistema de Tomografia de Impedância Elétrica aplicado à obtenção de imagens de valores absolutos possui, atualmente, limitações. São algumas delas a obtenção de distribuições de propriedades suaves e de valores geralmente subestimados, a sensibilidade elevada ao erro de posicionamento dos eletrodos (com relação ao modelo) e ao erro nos valores de parâmetros de contato, a sensibilidade elevada aos ruídos de medição, os tempos elevados de processamento, dentre outros. Com o intuito de abordar as limitações, melhorando o desempenho do sistema de Tomografia de Impedância Elétrica de imagens absolutas, são então propostas e avaliadas ferramentas baseadas no Método de Otimização Topológica no atual trabalho. Mais especificamente, avaliam-se: 1) um método para obtenção de parâmetros de contato em conjunto com uma imagem e um método de regularização baseado no controle explícito da variação espacial da imagem, 2) uma formulação para acomodação de incertezas, 3) uma formulação para correção do posicionamento de eletrodos, 4) uma formulação para projeto de eletrodos e 5) um novo solucionador de sistemas lineares de larga escala. Os resultados mostram a efetividade da maioria das técnicas propostas, e sugerem os novos tópicos de pesquisa em Tomografia de Impedância Elétrica.

Palavras-chave: Tomografia de Impedância Elétrica. Imagens Médicas. Otimização Topológica. Método de Otimização Topológica baseado em Confiabilidade. Posicionamento de eletrodos. Solução de Sistemas Lineares de larga escala.

ABSTRACT

Electrical Impedance Tomography images the interior of a body based on electrical quantities measured on the surface of it. Mathematically, the technique finds the electric admittivity distribution in a given body model which reproduces the boundary measurements of electric currents and potentials on electrodes attached to that body. Therefore, the admittivity distribution is the solution of a non-linear and ill-posed problem, which is unstable and have local minima, requiring specific inversion techniques. Electrical Impedance Tomography systems which obtain images corresponding to absolute values present limitations. For instance, the results are usually smooth and underestimated, the sensitivity to errors in the positioning of electrodes and wrong values of contact parameters and the sensitivity to measurement noise are high, the data processing time is high, etc. In this work, techniques based on the Topology Optimization Method intended for improving the performance of the particular Electrical Impedance Tomography system applied to absolute images are proposed and evaluated. More specifically, the following techniques are evaluated: 1) a method intended to obtain contact parameters together with images, and a regularization method based on the explicit control of the spatial variation regarding the image, 2) a formulation applied to handle uncertainties, 3) a formulation applied to correct the position of electrodes, 4) a formulation applied to design electrodes, 5) and a new solver for large-scale linear systems. Results show the effectiveness of most of the proposed techniques, and suggest new research topics in Electrical Impedance Tomography.

Keywords: Electrical Impedance Tomography. Medical images. Topology Optimization. Reliability-based Topology Optimization. Electrodes Placement. Large-scale linear system solution.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 Esquema do corpo tomografado. Os eletrodos são mostrados no contorno do domínio e I é a corrente aplicada num eletrodo qualquer. (a) Protocolo de excitação adjacente. (b) Protocolo de excitação diametral. (c) e (d) Dois padrões de corrente diferentes para o caso do protocolo de excitação adjacente. 2
- Figura 2 Abordagem de solução do problema de otimização, realizada (a solução) através do chamado Método da Alternância. Esse método é explicado no texto. 28
- Figura 3 (a) Seção central do fantoma numérico (imagem a ser estimada). (b) Malha do modelo de fantoma numérico. (c) Malha onde se estima a imagem para os resultados de contrastes elevados (5548 elementos). (d) Malha onde se estima a imagem para os resultados de contrastes moderados (13130 elementos). 31
- Figura 4 Imagens de resistividade obtidas (unidades: Ωm ; fantoma numérico mostrado na Figura 3(a)). (a) Sem ruído. (b) Considerando-se ruído. 33
- Figura 5 Distribuição de resistividades obtida (unidades: Ωm). Os valores finais máximo e mínimo de parâmetros de contato obtidos são iguais a $0,0017\Omega\text{m}^2$ e $0,0005\Omega\text{m}^2$. Gama de valores de resistividade mostrada: (a) de $17\Omega\text{m}$ a $10^6\Omega\text{m}$; (b) de $17\Omega\text{m}$ a $125\Omega\text{m}$ (a cor cinza corresponde a resistividades acima de $125\Omega\text{m}$). 34
- Figura 6 Distribuição de resistividades obtida (unidades: Ωm). (a) As resistividades dos nós da superfície lateral da malha de estimação são fixados em $17\Omega\text{m}$. (b) Apenas uma iteração para cada conjunto de parâmetros é permitida no Método da Alternância. 35
- Figura 7 Distribuição de resistividades obtida (unidades: Ωm). São mostradas as respostas anteriores para a nova gama de valores considerada. A cor cinza corresponde a resistividades acima de $125\Omega\text{m}$. (a) Resultados mostrados na Figura 4(a). (b) Resultados mostrados na Figura 6(a). (c) Resultados mostrados na Figura 6(b). 36
- Figura 8 Distribuição de resistividades obtida (unidades: Ωm). 37
- Figura 9 (a) Esquema do fantoma experimental. (b) Imagem a ser estimada. (c) Foto de fantoma semelhante ao utilizado (tal fantoma também é empregado pelo grupo do Projeto Temático). 39
- Figura 10 Distribuição de resistividades obtida (unidades: Ωm ; respostas para o fantoma da Figura 9(b)). O efeito dos modelos de eletrodo é negligenciado. Gama de valores de

resistividade mostrada: (a) de $17\Omega\text{m}$ a $10^6\Omega\text{m}$; (b) de $17\Omega\text{m}$ a $125\Omega\text{m}$ (a cor cinza corresponde a resistividades acima de $125\Omega\text{m}$).....	40
Figura 11 Ilustração mostrando as abordagens probabilística (em (a)) e determinística (em (b)) num problema de otimização estrutural. Um esboço da estrutura ótima é mostrado, para cada caso.	44
Figura 12 Vetor posição \mathbf{U} e versor \mathbf{n} no espaço normalizado 2D. É mostrado o índice de confiabilidade, dado pela distância plotada, o hiperplano M e as distintas regiões do espaço. Neste caso em particular, $\mathbf{n} = -\mathbf{A}_1 / \sqrt{\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1}$	54
Figura 13 Representação ilustrativa da função $c^*(s_k, u_m) - \bar{c} = 0$ no espaço normalizado, com R igual a 2.	56
Figura 14 Fluxograma do programa de MOTC. As setas mostram o fluxo de dados através do programa. O losango indica a etapa de verificação da convergência e “s” e “n”, sim e não, respectivamente.	77
Figura 15 (a) Esquema do domínio tomografado. Três regiões definidas apresentam estatísticas diferentes. Doze eletrodos são utilizados. (b) Malha do fantoma numérico, discretizada em 512 elementos triangulares e 289 nós. (c) Malha onde se estima a imagem, discretizada em 128 elementos triangulares e 81 nós.	78
Figura 16 Valores médios de resistividade plotados no Matlab para os fantasmas 1 e 2 (vide APÊNDICE B). Os valores máximo e mínimo plotados são 500 e $4\Omega\text{m}$, respectivamente, sendo o inverso dos mesmos empregados como limites na otimização (vide eq.(2.3.1)).	81
Figura 17 Valores médios de resistividade plotados no Matlab para o fantoma 3 (vide APÊNDICE B). Os valores máximo e mínimo plotados são, novamente, 500 e $4\Omega\text{m}$, respectivamente, sendo o inverso dos mesmos utilizados como limites na otimização (vide eq.(2.3.1)).	81
Figura 18 Resultado determinístico para o fantoma 1. $F_{\text{det}1} = 6,6864 \cdot 10^{-6}$	83
Figura 19 Resultado para o fantoma 1 utilizando o MOTC com $\delta = 0,01$. $P_f \approx 1$	83
Figura 20 Resultado para o fantoma 1 utilizando o MOTC com $\delta = 0,001$. $P_f \approx 1$	84
Figura 21 Resultado para o fantoma 1 utilizando o MOTC com $\delta = 0,0001$. $P_f \approx 1$	84
Figura 22 Resultado para o fantoma 1 utilizando o MOTC com $\delta = 0,00001$. $P_f \approx 1$	85
Figura 23 Resultado para o fantoma 1 utilizando o MOTC com $\delta = 0,000001$. $P_f = 0$	85
Figura 24 Resultado para o fantoma 1 utilizando o MOTC com $\delta = F_{\text{det}1}$. $P_f = 0,5013054841$.	86
Figura 25 Resultado determinístico para o fantoma 2. $F_{\text{det}2} = 7,6475 \cdot 10^{-6}$	87
Figura 26 Resultado para o fantoma 2 utilizando o MOTC com $\delta = 0,001$. $P_f \approx 1$	87

Figura 27 Resultado para o fantoma 2 utilizando o MOTC com $\delta=0,00001$. P_f = $0,0002234025$	88
Figura 28 Resultado para o fantoma 2 utilizando o MOTC com $\delta=0,000001$. P_f = $0,0300269143$ (solução oscila bastante, chegando até a $P=0,0108518059$).....	88
Figura 29 Resultado para o fantoma 2 utilizando o MOTC com $\delta=F_{\text{det}2}$. $P_f=0,0036111398$ (solução oscila bastante, chegando até a $P=0,0284419677$).....	89
Figura 30 Resultado determinístico para o fantoma 3. $F_{\text{det}3}=9,6947 \cdot 10^{-6}$	90
Figura 31 Resultado para o fantoma 3 utilizando o MOTC com $\delta=0,001$. $P_f=0,9993417029$	90
Figura 32 Resultado para o fantoma 3 utilizando o MOTC com $\delta=0,0001$. $P_f=0,7913311623$	91
Figura 33 Resultado para o fantoma 3 utilizando o MOTC com $\delta=0,00001$. P_f = $0,5332138698$	91
Figura 34 Resultado para o fantoma 3 utilizando o MOTC com $\delta=F_{\text{det}3}$. $P_f=0,5213362734$. 92	
Figura 35 Malha de estimação da imagem, mostrando os nós cujas variáveis são consideradas como aleatórias.	94
Figura 36 Resultado para o fantoma 1 utilizando o MOTC com $\delta=0,00001$	94
Figura 37 Resultado para o fantoma 3 utilizando o MOTC com $\delta=0,00001$	95
Figura 38 Valores médios de resistividade plotados no Matlab para o fantoma 1C, considerando-se a malha menos discretizada da Figura 15(c). Os valores máximo e mínimo plotados são 500 e 4 Ω m, respectivamente, sendo o inverso dos mesmos empregados como limites na otimização.	97
Figura 39 Esquema de uma seção do modelo de corpo tomografado. Hachuras indicam o eletrodo. Por simplicidade, são mostrados apenas quatro domínios Θ_i	103
Figura 40 Processo de correção da posição dos eletrodos. A ilustração na parte superior esquerda da figura mostra a posição real dos eletrodos e condições de contorno correspondentes, para um padrão de corrente qualquer. A parte inferior mostra o processo iterativo de correção do posicionamento inicialmente assumido, e conseqüente mudança das condições de contorno, que deve ser realizada a cada iteração.	104
Figura 41 Esquema de uma seção da malha de estimação de elementos finitos. Hachuras indicam a representação de MEF do eletrodo. Por simplicidade, a malha externa é composta por apenas uma camada de elementos quadriláteros e dividida em apenas quatro subdomínios Ω_i	108

Figura 42 Modelo utilizado na imposição de condições de contorno de correntes elétricas. Por simplicidade, são mostrados apenas três elementos finitos.	109
Figura 43 Domínio de otimização Ω_i , mostrando as variáveis de otimização nodais e as relações entre elas, impostas pelo programa de MOT.	112
Figura 44 Modelo de elementos finitos simplificado, mostrando, para duas condições de contorno distintas, os dois casos diferentes de distribuição de potenciais elétricos resultantes. Por simplicidade, condições de contorno de corrente, iguais para os dois casos, não são mostradas.	118
Figura 45 (a) Malha do fantoma numérico (a região onde há eletrodos é destacada); (b) malha de MEF de estimação, ou seja, onde se obtém a imagem e o posicionamento dos eletrodos, mostrando os domínios de otimização em cores diferentes.	120
Figura 46 (a) Distribuição que emula arranjo de eletrodos, no fantoma; (b) imagem a ser estimada (fantoma); (c) distribuição inicial de condutividades referente aos eletrodos (na malha de estimação, Figura 45(b)). (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	122
Figura 47 (a) Eletrodos dados (nas posições corretas); (b) imagens de condutividade obtidas. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	123
Figura 48 (a) Eletrodos obtidos; (b) imagens de condutividade obtidas. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	123
Figura 49 (a) Eletrodos obtidos; (b) imagens de condutividade obtidas. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	124
Figura 50 Eletrodos e imagens de condutividade obtidos: (a) e (b) raio da projeção igual a 10mm; (c) e (d) raio da projeção igual a 50mm; (e) e (f) raio da projeção igual a 100mm. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	125
Figura 51 (a) Distribuição que emula arranjo de eletrodos no fantoma; (b) imagem a ser estimada (fantoma). (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	126
Figura 52 Distribuição inicial de condutividades referente aos eletrodos (na malha de estimação, Figura 45(b)). Com exceção do eletrodo no domínio de otimização superior, todos os eletrodos ocupam posições semelhantes às do fantoma (Figura 51(a)). (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	127
Figura 53 (a) Eletrodos dados (nas posições corretas); (b) imagens de condutividade obtidas. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	127
Figura 54 (a) Eletrodos obtidos; (b) imagens de condutividade obtidas. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	128
Figura 55 Malha dos domínios de otimização, mostrando os nós, em vermelho (e indicados por setas), cuja condutividade é fixada em $10^{-6}(\Omega m)^{-1}$	128

Figura 56 Distribuição inicial de condutividades referente aos eletrodos (na malha de estimaco, Figura 45(b)), utilizada para obteno das respostas na Figura 57. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	130
Figura 57 (a) Eletrodos obtidos; (b) imagens de condutividade obtidas. A sugesto inicial é dada na Figura 56. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	130
Figura 58 (a) Eletrodos obtidos; (b) imagens de condutividade obtidas. A sugesto inicial é igual à mostrada na Figura 53(a). (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	130
Figura 59 (a) Eletrodos obtidos; (b) imagens de condutividade obtidas. A sugesto inicial é igual à mostrada na Figura 53(a) e o número de iteraes é diferente do considerado nos demais resultados. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	131
Figura 60 (a) Eletrodos obtidos; (b) imagens de condutividade obtidas. A distribuio de condutividades do domnio de otimizao na posio sul é fixada. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$) .	131
Figura 61 Imagens obtidas para eletrodos fixos ao longo do processo iterativo. As posies de eletrodos consideradas, mostradas nas figuras (a), (c), (e) e (g), so responsáveis pela obteno das imagens mostradas nas figuras (b), (d), (f) e (h), respectivamente. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	133
Figura 62 Distribuio inicial de condutividades referente aos eletrodos (na malha de estimaco, Figura 45(b)), utilizada para obteno das respostas na Figura 63. Nota-se que a posio inicial de todos os eletrodos está incorreta. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	134
Figura 63 (a) Eletrodos obtidos; (b) imagens de condutividade obtidas. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	134
Figura 64 (a) Distribuio inicial de condutividades referente aos eletrodos (na malha de estimaco, Figura 45(b)), utilizada para obteno das respostas na atual figura; (b) eletrodos obtidos; (c) imagens de condutividade obtidas. A distribuio de condutividades do domnio de otimizao na posio sul é fixada. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	135
Figura 65 (a) Distribuio inicial de condutividades referente aos eletrodos (na malha de estimaco, Figura 45(b)), utilizada para obteno das respostas na atual figura; (b) eletrodos obtidos; (c) imagens de condutividade obtidas. As distribuies de condutividades dos domnios de otimizao nas posies sul e sudoeste so fixadas. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	136
Figura 66 Reproduo da figura da seo 4.1. É mostrado o esquema de uma seo do modelo de corpo tomografado. Hachuras indicam o eletrodo.	146
Figura 67 Representao dos limites de Hashin-Shtrikman-Walpole (---) e de $\sigma_g = (\mathbf{N}_g \boldsymbol{\rho})^p \sigma_A + (1 - (\mathbf{N}_g \boldsymbol{\rho})^p) \sigma_B$ (---), para um dado valor de p e num ponto qualquer do g-	

ésimo elemento. Os valores de σ_A e σ_B , neste caso, são iguais a $0,06(\Omega m)^{-1}$ e a $10^{-6}(\Omega m)^{-1}$, respectivamente.	148
Figura 68 (a) A malha de MEF considerada nas primeiras investigações, mostrando os domínios de otimização em cores diferentes; (b) arranjo convencional de eletrodos; (c) imagem a ser estimada (fantoma). (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	153
Figura 69 Minimização de F_{\min} (γ_{\min} na eq.(4.2.10), é o décimo quinto valor). (a) Eletrodos otimizados (unidades: $(\Omega m)^{-1}$); (b) valores singulares de \mathbf{J}	155
Figura 70 (a) Imagens de condutividade obtidas com os eletrodos convencionais ($\lambda=10^{-12}$). (b) Imagens de condutividade obtidas com os eletrodos otimizados (considerando-se F_{\min} e $\lambda=10^{-15}$). (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	156
Figura 71 Maximização de F_{\max} . (a) Eletrodos otimizados (unidades: $(\Omega m)^{-1}$); (b) valores singulares de \mathbf{J}	156
Figura 72 (a) Imagens de condutividade obtidas com os eletrodos convencionais. (b) Imagens de condutividade obtidas com os eletrodos otimizados (considerando-se F_{\max}). (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	157
Figura 73 Aproximação para a distribuição de condutividades do fantoma na malha menos discretizada. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	158
Figura 74 Maximização de F_{\max} . (a) Eletrodos otimizados (unidades: $(\Omega m)^{-1}$); (b) valores singulares de \mathbf{J}	159
Figura 75 (a) Resultado da interpretação dos eletrodos otimizados; (b) Imagem a ser estimada. Ambas as distribuições correspondem à malha mais discretizada, a malha do fantoma. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	160
Figura 76 Imagens de condutividade obtidas com os eletrodos convencionais ((a) e (b)) e com os eletrodos otimizados ((c)). (a) $\lambda=5 \cdot 10^{-5}$; (b) $\lambda=10^{-5}$; (c) $\lambda=5 \cdot 10^{-4}$. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)	161
Figura 77 Fantoma numérico considerado. Condutividades dadas pela eq.(2.3.1). Malha com 53692 nós e 267051 elementos tetraédricos.	184
Figura 78 Distribuição final (ótima) típica de resistividades.	184
Figura 79 Número de iterações do RMINRES(100,10) (nr) por iteração de estimação da imagem (ni), para o método da continuação. A “continuação 1” corresponde a uma mudança de 10^{-9} para 10^{-10} em rtol e a “continuação 2” a uma mudança de 10^{-8} para 10^{-10}	186

Figura 80 (a) Número de iterações (nr) do RMINRES por iteração de estimação da imagem (ni). (b) Tempo do RMINRES por iteração de estimação da imagem (ni). O parâmetro DSR utilizado pelo RMINRES é igual a 10. Varia-se DSK.....	188
Figura 81 (a) Número de iterações (nr) do RMINRES por iteração de estimação da imagem (ni). (b) Tempo do RMINRES por iteração de estimação da imagem (ni). O parâmetro DSK utilizado pelo RMINRES é igual a 100. Varia-se DSR.....	189
Figura 82 Dois esquemas do corpo tomografado. (a) Antes da mudança do “hardware” de medição pelo grupo do Projeto Temático de TIE; (b) após a mudança do “hardware de medição”; as diferenças de potencial podem ser medidas entre dois eletrodos quaisquer (não somente entre vizinhos), o que é sugerido na figura.	215
Figura 83 Esquema do fantoma, mostrando o domínio, as 3 regiões mencionadas no texto e os 12 eletrodos utilizados. A malha não foi desenhada para facilitar a visualização.....	223
Figura 84 Distribuição referente ao fantoma 3 (médias).....	226
Figura 85 Distribuição referente aos fantasmas 1 e 2 (médias).....	226
Figura 86 Malha do fantoma numérico, discretizada em 512 elementos triangulares e 289 nós.	227
Figura 87 Representação esquemática da relação entre as variáveis ρ e γ nos dois espaços (vide eq.(APÊNDICE C.1)) para a técnica de Projeção, considerando-se um único nó no espaço original (referente à variável ρ_f). Neste caso, um peso w_{fj} é inversamente proporcional à distância entre os nós j e f	230
Figura 88 Representação esquemática da relação entre as variáveis ρ e γ nos dois espaços, segundo equação (APÊNDICE C.3), considerando-se um único nó no espaço de projeção, o qual corresponde a γ_1 . Neste caso, pesos são unitários.....	232
Figura 89 Esboço mostrando a superfície de falha no espaço padronizado.....	241
Figura 90 Malhas, condições de contorno e distribuições de condutividade utilizadas na verificação numérica do modelo considerado na correção do posicionamento dos eletrodos pelo MOT. (a) Consideram-se elementos com material que emula vazio. (b) Elementos de material do tipo vazio não são considerados. Para ambos os modelos, eletrodos são destacados em laranja, condições de contorno de correntes em ciano, e referência é representada por pequeno triângulo, na parte inferior das figuras.....	244
Figura 91 Densidades de corrente considerando (a) malha com elementos com material que emula vazio, e (b) malha sem elementos de material do tipo vazio. Em ambos os casos,	

detalhes à direita, mostram aproximação da região mais importante (com maior variação da densidade) das malhas.....246

Figura 92 Potenciais elétricos para (a) malha com elementos com material que emula vazio, e (b) malha sem elementos de material do tipo vazio. Retiram-se os elementos referentes ao material vazio (da figura (a)), para melhor comparação.....247

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dados utilizados no processo de estimação.	79
--	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

2D	bidimensional
3D	tridimensional
CAMD	“Continuous Approximation of Material Distribution”
CG	“Conjugate Gradient”
CMAME	“Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering”
DIOM	“Direct IOM”
DQGMRES	“Direct QGMRES”
DSK	máximo número de vetores de Lanczos mantido para, periodicamente, atualizar o subespaço aproximadamente invariante reciclado
DSR	dimensão do subespaço reciclado
DVS	Decomposição em Valores Singulares
DVSTG	decomposição em valores singulares truncada generalizada
EPUSP	Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
FDA	“Food and Drug Administration”
FOM	“Full Orthogonalization Method”
FOM(m)	“restarted FOM”
FORM	“First-Order Reliability Method”
GLPK	“GNU Linear Programming Kit”
GMRES	“Generalized Minimal Residual”
GNU	“GNU is Not Unix”
GPGPU	“General-Purpose computation on Graphics Processing Units”
IME	Instituto de Matemática e Estatística
IOM	“Incomplete orthogonalization Method”
LD	linearmente dependentes
LI	linearmente independentes
MEMS	sistemas microeletromecânicos
MGS	Gram-Schmidt modificado
MINRES	“Minimal Residual”
MODC	Método de Otimização de Projeto baseado em Confiabilidade
MOT	Método de Otimização Topológica

MOTC	Método de Otimização Topológica baseado em Confiabilidade
PEEP	“positive end-expiratory pressure”
PETSc	“Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation”
PL	Programação Linear
PSL	Programação Linear Seqüencial
PMP	Ponto Mais Provável
QGMRES	“quasi-GMRES”
RMINRES	“recycling MINRES”
SIMP	“Solid Isotropic Material with Penalization”
SORM	“Second-Order Reliability Method”
TIE	Tomografia de Impedância Elétrica
UTI	Unidade de Terapia Intensiva

LISTA DE SÍMBOLOS

σ	condutividade escalar elétrica (mais especificamente, a sua amplitude, de valor real)
ϕ_j	potencial escalar elétrico (mais especificamente, a sua amplitude, de valor real) para o j-ésimo padrão de corrente
∇	vetor gradiente
\mathbf{K}_{Tj}	matriz de condutividade para o j-ésimo padrão de corrente
\mathbf{V}_{Tj}	vetor de potenciais elétricos nodais para o j-ésimo padrão de corrente
\mathbf{I}_{Tj}	vetor de correntes elétricas nodais para o j-ésimo padrão de corrente
σ_g	distribuição da condutividade elétrica no g-ésimo elemento finito
σ_A	limite superior para os valores das condutividades
σ_B	limite inferior para os valores das condutividades
nd_g	número de nós do g-ésimo elemento finito
N_{gw}	função de forma do g-ésimo elemento finito referente ao w-ésimo nó
ρ_{gw}	“pseudo-densidade” ou variável de otimização definida num nó do elemento
p	fator ou coeficiente de penalização
t_{el}	espessura do modelo de eletrodo
σ_{Ael}	limite superior de condutividade para o modelo de eletrodo
σ_{Bel}	limite inferior de condutividade para o modelo de eletrodo
ρ_i	i-ésima variável de otimização para o modelo de eletrodo
F	função objetivo ou função erro
ne	número de padrões de corrente aplicados
np	número de pontos (eletrodos) de medição
$\phi_{ij}=\phi_{ij}(\rho_f,\rho_i)$	potencial do eletrodo i, para o padrão de corrente j, calculado do modelo de elementos finitos
ϕ_{ij0}	potencial correspondente a ϕ_{ij} , tomado no corpo a ser tomografado ou de um fantoma
ρ_f	variável nodal de otimização referente á imagem do corpo tomografado
N	número total de variáveis nodais de otimização
w_{Fij}	peso aplicado para retirar o potencial ϕ_{ij} da otimização

$P(.)$	operador probabilidade
s_k	k-ésima variável de otimização no caso do MOTC
r_m	m-ésima variável aleatória fixa
R	número total de variáveis aleatórias consideradas no problema de MOTC
c	função custo genérica
\bar{c}	valor limite para a função custo c
f_n	função genérica de cada variável aleatória r_m utilizada na definição do problema MOTC
\bar{P}_n	probabilidade limite na restrição de probabilidade
g_q	restrição determinística de desigualdade genérica
g_{eq}	restrição determinística de igualdade genérica
s_{kl}	restrição lateral inferior para a k-ésima variável de otimização, no caso do MOTC
s_{ku}	restrição lateral superior para a k-ésima variável de otimização, no caso do MOTC
n_{ev}	número de eventos considerados
e_i	variável que indica falha se igual a zero e uma situação onde não há falha, se igual a um
P_f	probabilidade de falha do evento dado pela união dos eventos $e_i=0$
P_{Nf}	probabilidade de não haver falha
e_f	variável que indica falha ($e_f=0$) se qualquer e_i é igual a zero e o caso contrário se todos os e_i são iguais a um
β	índice de confiabilidade
M	função genérica linear
r_i	variável aleatória
\mathbf{R}	vetor de variáveis aleatórias r_i
a_i	coeficiente auxiliar que não depende de \mathbf{R}
b	coeficiente auxiliar que não depende de \mathbf{R}
b_i	coeficiente auxiliar que não depende de \mathbf{R}
c	coeficiente auxiliar que não depende de \mathbf{R}
\mathbf{U}	vetor de variáveis gaussianas u_j de média nula e covariância unitária
$E[.]$	média

$\text{Var}[\cdot]$	variância
$\text{Cov}[\cdot]$	covariância
$\Phi(\cdot)$	função distribuição cumulativa
$d_{(0,M=0)}$	distância do hiperplano $M=0$ à origem
\mathbf{n}	vetor unitário normal ao plano $M=0$ no espaço dado pela variável u_m (ou espaço normalizado)
M_q	função qualquer não necessariamente linear
Q	função não-linear nas variáveis aleatórias
Ξ_P	região qualquer
$\Xi_{P_{Q \leq 0}}$	região de mesma dimensão que Ξ , onde $Q \leq 0$
Q^*	função Q no espaço normalizado
c^*	função c no espaço normalizado
\mathbf{Z}	vetor auxiliar de variáveis aleatórias, de covariância diagonal
$\text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T]$	matriz de covariância para as variáveis de \mathbf{R}
\mathbf{V}	matriz ortogonal com vetores coluna iguais aos autovetores ortonormais de $\text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T]$
$\mathbf{T}(\cdot)$	transformação de Rosenblatt, de variáveis de um vetor de distribuição qualquer para um vetor com variáveis de distribuição gaussiana, matriz de covariância igual à identidade e médias nulas
δ	limite para a função F
$\mathbf{E}[\mathbf{R}]$	vetor de médias das variáveis do vetor \mathbf{R}
\mathbf{U}_{PMP}	vetor de variáveis aleatórias padronizadas \mathbf{U} no PMP
R_P	número total de variáveis aleatórias consideradas no problema de MOTC com segmentação do domínio da imagem
N_{MC}	número total de variáveis estimadas à partir da formulação de MOTC para estimação de médias, variâncias e covariâncias
\mathbf{A}_{pj}	matriz que contém apenas os valores 0, 1 e -1, selecionando diferenças de potenciais obtidas de \mathbf{V}_{Tj} a serem comparadas com o vetor de entrada de medidas
$\Delta \mathbf{V}_{0j}$	vetor de entrada de medidas de diferenças de potenciais
c_{ij}	elemento na i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz de covariância
$\text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T]$	
\mathbf{V}_k	k -ésimo autovetor contido em \mathbf{V} , ou seja, é a k -ésima coluna de \mathbf{V}
α_k	autovalor correspondente a \mathbf{V}_k

V_{kl}	l-ésima componente de V_k
F_m	autovetor de $(\text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I})$
ζ_m	autovalor de $(\text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I})$
\mathbf{F}	matriz cujas colunas são iguais a F_m
Δ	matriz diagonal de autovalores ζ_m de $(\text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I})$
$(\Delta)_{m,m}$	elemento da m-ésima linha e m-ésima coluna de Δ
\mathbf{B}_{ijk}	vetor lado-direito auxiliar utilizado na obtenção de gradientes no
MOTC	
a_{Mk}	variável obtida por normalização no MOTC
$F_{\text{det}i}$	valores finais de F obtidos com o algoritmo determinístico para o i-ésimo fantoma de MOTC
Ψ_{ia}	a-ésima região limite do i-ésimo eletrodo, a qual limita o domínio Θ_i
Θ_i	domínio de eletrodo
$\bar{\phi}$	potencial virtual no interior do domínio tomografado, do domínio da interface de contato e dos domínios de otimização referentes aos eletrodos, segundo teoria para determinação do posicionamento ótimo dos eletrodos
$\bar{\phi}_s$	potencial virtual em $\partial\Omega_i$
$\partial\Omega_i$	porção do contorno $\partial\Omega$ onde se aplica a componente normal da densidade de corrente
$\partial\Omega$	contorno do domínio Ω
Ω	domínio representativo do corpo tomografado, da interface de contato e das regiões onde estão os eletrodos, segundo teoria para determinação do posicionamento ótimo dos eletrodos
J_n	densidade normal de corrente
dv	elemento infinitesimal de volume
ds	elemento infinitesimal de superfície
J_{ni}	densidade normal de corrente aplicada ao domínio Θ_i
$\partial\Omega_{fi}$	superfície do domínio Θ_i
I_{Tij}	corrente nominal aplicada ao i-ésimo eletrodo do corpo segundo o j-ésimo padrão de corrente
Ω_i	domínio correspondente a Θ_i , dividido em elementos finitos
σ_{em}	condutividade no m-ésimo elemento finito de eletrodo
ρ_{em}	variável adimensional no m-ésimo elemento finito de eletrodo que

define a sua condutividade

\mathbf{N}_{em}	matriz de funções de forma do m-ésimo elemento finito de eletrodo
$\boldsymbol{\rho}_{em}$	m-ésimo vetor de variáveis nodais de otimização do elemento de eletrodo
ρ_{en}	n-ésima variável nodal de otimização dos elementos de eletrodo
$\mathbf{0}$	vetor de zeros
$\mathbf{1}$	vetor com valores unitários
Γ_{ab}	conjunto de nós pertencentes a $\Omega_a \cap \Omega_b$
I_{eijk}	correntes nodais superficiais constantes aplicadas aos elementos de eletrodo
V_{ijk}	potenciais nodais superficiais nos elementos de eletrodo
Ω_i^*	domínio Ω_i sem as superfícies de intersecção com os domínios vizinhos
n_T	número de nós contidos na superfície do eletrodo
ρ_{eik}	é a k-ésima variável de otimização do nó superficial do i-ésimo eletrodo
V_{nij}	potencial nominal do eletrodo
\mathbf{K}_e	matriz dos elementos do modelo da interface de contato
a_{el}	largura dos elementos do modelo de eletrodo
\mathbf{K}_{es}	matriz simplificada dos elementos do modelo da interface de contato
$\boldsymbol{\rho}_e$	vetor de variáveis nodais de otimização dos elementos de eletrodo, as quais determinam a posição, geometria e material dos eletrodos na correção do posicionamento e projeto dos mesmos
$\boldsymbol{\rho}$	vetor de variáveis nodais de otimização referentes à imagem do corpo tomografado
$\boldsymbol{\rho}_{el}$	vetor de variáveis de otimização do modelo de interface de contato
\mathbf{A}_{pej}	matriz cuja estrutura determina os potenciais nominais de cada eletrodo
\mathbf{V}_{0j}	vetor de entrada de medidas de potenciais
n_{Tdi}	número total de nós superficiais no domínio Ω_i^* do i-ésimo eletrodo
$\boldsymbol{\sigma}$	vetor de condutividades nodais do corpo tomografado
n_{ct}	número de nós referentes ao corpo tomografado
n_d	número de nós total da malha de MEF
\mathbf{K}_T	matriz \mathbf{K}_{Tj} independente padrões de corrente, ou seja, para apenas um referencial (terra) para todos os padrões

λ	parâmetro de regularização
\mathbf{J}	matriz de sensibilidade
σ_s	componente de σ
\mathbf{T}_j	matriz auxiliar que seleciona potenciais calculados de \mathbf{V}_{T_j} a serem comparados às medidas
\mathbf{U}	matriz ortonormal esquerda, contendo os vetores singulares de \mathbf{J}
\mathbf{Z}	matriz ortonormal direita, contendo os vetores singulares de \mathbf{J}
\mathbf{S}	matriz diagonal de valores singulares de \mathbf{J}
v_n	valor singular de \mathbf{J}
\mathbf{U}_n	n-ésima coluna de \mathbf{U}
\mathbf{E}_n	vetor componente da imagem
\mathbf{Z}_n	n-ésima coluna de \mathbf{Z} .
η_n	autovalor de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$
F_{\min}	função minimizada no projeto de eletrodo
no	número de nós de eletrodo
η_{\max}	autovalor máximo de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$
η_{\min}	autovalor mínimo de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$
F_{\max}	função maximizada no projeto de eletrodos
F_g	função otimizada no projeto de eletrodo
$\boldsymbol{\eta}$	vetor de autovalores η_n
\mathbf{D}	matriz dada por $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$
\mathbf{G}_q	q-ésimo autovetor de \mathbf{D}
\mathbf{G}_{pq}	q-ésimo autovetor de \mathbf{D} , de norma unitária
e	erro normalizado
n	tamanho do sistema linear genérico $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{B}$
\mathbf{A}	matriz de sistema linear genérico
\mathbf{X}	vetor-resposta de sistema linear genérico
\mathbf{B}	vetor do lado direito de sistema linear genérico
$\mathbf{X}_0+\Theta$	subespaço onde se busca a solução do sistema genérico, através de métodos de Projeção
m	dimensão dos subespaços $\mathbf{X}_0+\Theta$ e Ξ
\mathbf{X}_0	alguma sugestão inicial para \mathbf{X}
$\tilde{\mathbf{X}}$	aproximação de \mathbf{X} , obtida através de métodos de Projeção

Ξ	subespaço auxiliar utilizado na solução de sistemas lineares através de métodos de Projeção
Δ	vetor auxiliar pertencente a Θ
\mathbf{R}_0	resíduo inicial
\mathbf{W}_S	matriz cujos vetores-coluna formam uma base para Ξ
\mathbf{V}_S	matriz de vetores-coluna LI formando uma base para Θ
\mathbf{Y}	é o vetor incógnita de um passo do processo iterativo, ou de um passo de projeção
$\ \mathbf{Y}\ _{\mathbf{A}}$	\mathbf{A} -norma do vetor \mathbf{Y}
θ_{\max}	máximo autovalor de \mathbf{A}
θ_{\min}	mínimo autovalor de \mathbf{A}
\mathbf{X}^*	solução correta do sistema linear genérico
χ_{\min}	autovalor mínimo de $(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)$
Θ_i	Θ correspondente à i-ésima iteração
\mathbf{K}_m	subespaço de Krylov
$\mathbf{p}_{m-1}(\mathbf{A})$	polinômio de \mathbf{A} , de grau m-1
\mathbf{L}_m	subespaço equivalente a Ξ para o caso particular dos Métodos de Subespaços de Krylov, para a m-ésima iteração
\mathbf{R}_m	resíduo para a m-ésima iteração
\mathbf{V}_{Sj}	j-ésimo vetor-coluna de \mathbf{V}_S
\mathbf{W}_{Sj}	j-ésimo vetor-coluna de \mathbf{W}_S
\mathbf{U}_{Rj}	j-ésima matriz cujos vetores-coluna formam base para o subespaço reciclado
rtol	tolerância relativa
nr	número de iterações do RMINRES
ni	iteração corrente da estimação da imagem
τ	volume genérico
S	superfície do domínio
\mathbf{n}_S	vetor normal que aponta para fora do domínio
n_s	coordenada na direção e sentido de \mathbf{n}_S
$\partial\tau_I$	região de S onde se aplica corrente elétrica
$\partial\tau_V$	região de S onde se aplica potencial elétrico
μ	constante auxiliar

Λ_{nj}	densidade normal de corrente correspondente à j-ésima distribuição de potencial no domínio, aplicada a $\partial\tau_V$
ξ_j	corrente, correspondente à j-ésima distribuição de potencial no domínio, aplicada a $\partial\tau_V$
τ_δ	volume interior onde são prescritos valores de potenciais eletricos
C_{ij}	covariância das variáveis aleatórias correspondentes aos nós i e j
σ_i	desvio padrão referente ao nó i
R_m	m-ésima região do domínio do fantoma numérico referente ao atlas anatômico
$\text{dist}(i,j)$	distância entre os nós i e j
$\max(\text{dist}(i,j))$	maior distância entre nós
γ_j	variável de otimização no subespaço (auxiliar) dado pela transformação da técnica de Projeção
S_{Pf}	conjunto selecionado de nós no espaço auxiliar
w_{fj}	peso utilizado na técnica de Projeção, função de informações sobre os nós f, no espaço original, e j, no espaço auxiliar
Y_i	variável normalizada auxiliar de média nula e variância unitária
\mathbf{R}_M	matriz de covariâncias cujo elemento da linha i e coluna j é dado por $\text{Cov}[Y_i, Y_j]$
$\Phi_k(\cdot, \mathbf{R}_M)$	função de distribuição cumulativa para um conjunto de k variáveis normais e normalizadas, de matriz de covariâncias \mathbf{R}_M
$\varphi_k(\cdot, \mathbf{R}_M)$	função densidade de probabilidades para um conjunto de k variáveis normais e normalizadas, de matriz de covariâncias \mathbf{R}_M
$g(\mathbf{U})$	função quadrática nas variáveis aleatórias padronizadas
a_{Qi}	coeficiente auxiliar independente de \mathbf{U}
b_{Qi}	coeficiente auxiliar independente de \mathbf{U}
c_Q	coeficiente auxiliar independente de \mathbf{U}
δ_{Qi}	coeficiente auxiliar independente de \mathbf{U}
M_Q	função auxiliar, quadrática nas variáveis aleatórias padronizadas
A_Q	coeficiente auxiliar, função de a_{Qi} , δ_{Qi} e u_i
B_Q	coeficiente auxiliar, função de b_{Qi} e u_i
f_{A_Q}	função densidade de probabilidades de A_Q

F_{B_Q}	função distribuição cumulativa de B_Q
∇Q_{PMP}	vetor gradiente de Q no PMP
D_{PMP}	matriz simétrica (hessiana) de derivadas segundas da função não-linear
Q no PMP	
A_{TVj}	j -ésimo coeficiente da aproximação de TVEDT, $j=1,2,3$
A_q	matriz auxiliar utilizada no cálculo de A_{TVj}
κ_i	i -ésima curvatura da função limite

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Motivação: Limitações da TIE	10
1.2 Objetivos	14
1.3 Contribuições Científicas.....	16
1.4 Organização do Texto.....	19
2 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADO À TOMOGRAFIA DE IMPEDÂNCIA ELÉTRICA	20
2.1 Introdução.....	20
2.2 Equações Constitutivas e Obtenção dos Potenciais Elétricos 24	
2.3 Método de Otimização Topológica.....	25
2.4 Resultados e Discussão.....	29
2.4.1 Resultados Numéricos.....	30
2.4.2 Resultado Experimental	38
2.5 Conclusão	40
3 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA BASEADO EM CONFIABILIDADE APLICADO À TOMOGRAFIA DE IMPEDÂNCIA ELÉTRICA.....	42
3.1 Introdução.....	42
3.2 Formulação Genérica do MOTC	47

3.2.1	Cálculo das Probabilidades Segundo o FORM.....	52
3.3	Formulações do MOTC Aplicadas à TIE	59
3.3.1	Formulação para Obtenção das Médias: Formulação Padrão 60	
3.3.2	Formulação para Obtenção das Médias e Condutividades Determinísticas: Segmentação do Domínio da Imagem	61
3.3.3	Formulação para Obtenção das Médias, Variâncias e Covariâncias.....	61
3.4	Análise de Sensibilidade.....	63
3.5	Implementação	75
3.6	Resultados	77
3.6.1	Resultados: Formulação para Obtenção das Médias ou Formulação Padrão	82
3.6.2	Resultados: Formulação para Obtenção das Médias e Condutividades Determinísticas	93
3.6.3	Resultados: Formulação para Obtenção das Médias, Variâncias e Covariâncias.....	95
3.7	Conclusão e Observações	99
4	DETERMINAÇÃO DO POSICIONAMENTO ÓTIMO DOS ELETRODOS PELO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.....	100
4.1	Correção do Posicionamento dos Eletrodos pelo Método de Otimização Topológica.....	100
4.1.1	Fundamentação Teórica	102

4.1.2	Implementação Numérica.....	106
4.1.3	Definição do Problema de Estimação da Imagem, Parâmetros de Contato e Correção dos Eletrodos, e Cálculo dos Gradientes	114
4.1.4	Resultados.....	119
4.1.5	Conclusão	136
4.2	Metodologia para Projeto dos Eletrodos pelo Método de Otimização Topológica Aplicados à Tomografia de Impedância Elétrica	139
4.2.1	Introdução.....	139
4.2.2	Estimação das Condutividades do Corpo.....	141
4.2.3	Otimização Topológica Aplicada ao Projeto dos Eletrodos 145	
4.2.4	Resultados e Discussão	152
4.2.5	Conclusões.....	161
5	MÉTODO DE SUBESPAÇOS DE KRYLOV COM O CONCEITO DE RECICLAGEM	163
5.1	Introdução.....	163
5.2	Solução de Sistemas Lineares: Métodos Iterativos e Diretos 165	
5.3	Métodos de Projeção	167
5.3.1	Métodos de Projeção Unidimensionais.....	170
5.4	Métodos de Subespaços de Krylov	172

5.4.1	Exemplos de Métodos de Subespaços de Krylov e suas Características Principais	174
5.4.2	Obtenção da Base de K_m	175
5.5	Reciclagem dos Subespaços de Krylov	176
5.5.1	Método de RMINRES	178
5.6	Exemplos da Técnica de Reciclagem Aplicada à TIE ...	180
5.6.1	Implementação	180
5.6.2	Resultados Numéricos	182
5.7	Conclusão e Observações	190
6	CONCLUSÕES	192
7	TRABALHOS FUTUROS.....	195
	REFERÊNCIAS.....	199
	APÊNDICE A – UTILIZAÇÃO DE DADOS DE DIFERENÇAS DE POTENCIAIS ELÉTRICOS: RESULTADOS TEÓRICOS	214
	APÊNDICE B – ATLAS ANATÔMICO NUMÉRICO	221
	APÊNDICE B.1 – Implementação	222
	APÊNDICE C – TÉCNICA DE PROJEÇÃO.....	229
	APÊNDICE D – APRIMORAMENTO DO ALGORITMO DE MOTC PROPOSTO: REFINANDO O CÁLCULO DA PROBABILIDADE P.....	233
	APÊNDICE D.1 – Aproximação de $Q=0$ por Superfície Poliédrica	234

APÊNDICE D.2 – Aproximação de $Q=0$ por Superfície Quadrática
..... 237

**APÊNDICE E – VERIFICAÇÃO NUMÉRICA DO
MODELO DE MEF UTILIZADO244**

1 INTRODUÇÃO

A Tomografia de Impedância Elétrica (TIE) é uma técnica de obtenção de condutividades e permissividades elétricas do interior de um corpo mediante os valores de potenciais elétricos medidos em eletrodos posicionados ao redor do corpo, e mediante quaisquer outras informações sobre as quais se tenha conhecimento. Um caso típico de informação complementar referente à área médica é a posição e/ou valor da propriedade em certos locais do corpo, a geometria do corpo, valor da(s) corrente(s) elétrica(s) aplicada(s), etc.. Os potenciais são induzidos por correntes elétricas de baixa amplitude aplicadas também através de eletrodos, considerando-se frequência de excitação fixa (MELLO et al., 2008; VAUHKONEN et al., 1999; HEIKKINEN et al., 2002) ou várias frequências diferentes (GRANOT; RUBINSKY, 2007; KIM et al., 2007d; MCEWAN; CUSICK; HOLDER, 2007; OH; WOO; HOLDER, 2007) (no atual trabalho, utiliza-se frequência fixa). Matematicamente, pode-se dizer que o tomógrafo de impedância elétrica resolve o chamado problema inverso, o qual é não-linear e mal-posto (TIKHONOV; ARSENIN, 1977; KAIPPIO; SOMERSALO, 2005), ou seja, estima através de um algoritmo matemático, as condutividades e permissividades num modelo do corpo tomografado que reproduzem, aproximadamente, as medidas realizadas.

Vários padrões de corrente, ou seja, várias configurações diferentes de aplicação de corrente, segundo um ou mais protocolos de excitação (diametral, adjacente, etc., vide Figura 1), devem ser utilizados, com o intuito de aumentar a fidelidade da imagem obtida. Na Figura 1, nota-se que o protocolo determina a posição relativa entre os eletrodos de excitação, enquanto que padrões de corrente determinam a posição dos mesmos com relação a um ponto fixo no domínio, para dada posição relativa (tais idéias podem ser transferidas para fantasmas de geometrias quaisquer, considerando-se as adaptações necessárias). Em todos os casos vistos na Figura 1 e em qualquer outro caso, considera-se que os nomes dos protocolos (adjacente, diametral, etc.) são mantidos quando, numa mudança do arranjo experimental, o aterramento é substituído por uma corrente em oposição de fase com relação à corrente I aplicada a um eletrodo (vide Figura 1).

A imagem é obtida através de “hardware” e “software” dedicados, sendo que o primeiro é responsável pela coleta de dados e por mostrar a imagem estimada, e o segundo é

responsável pelo tratamento dos dados, ou seja, por achar uma solução aproximada para o problema inverso relacionado.

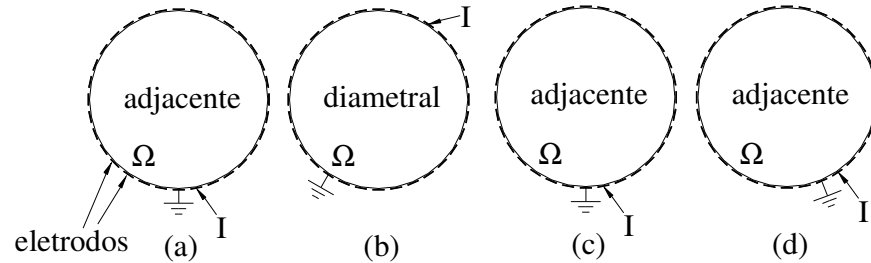


Figura 1 Esquema do corpo tomografado. Os eletrodos são mostrados no contorno do domínio e I é a corrente aplicada num eletrodo qualquer. (a) Protocolo de excitação adjacente. (b) Protocolo de excitação diametral. (c) e (d) Dois padrões de corrente diferentes para o caso do protocolo de excitação adjacente.

A TIE possui diversas áreas de aplicação. Na geofísica (LUKASCHEWITSCH; MAASS; PIDCOCK; 2003), auxilia na localização de depósitos subterrâneos de minerais e diferentes formações geológicas. Kim et al. (2001b), por sua vez, sugerem a utilização da TIE na visualização de escoamentos bifásicos que ocorrem, sob condições normais e acidentais, em plantas nucleares, trocadores de calor em geral, e sistemas de bombeamento de gás e óleo. É importante saber as características do fluxo bifásico, uma vez que a distribuição dos tipos de fluido influencia o controle, otimização e a segurança do processo. Vilhunen et al. (2002) sugerem a detecção de imperfeições em filmes resistivos protetores de próteses, em que um problema potencial é a corrosão. Finalmente, Ruuskanen et al. (2006) propõem a utilização da TIE na determinação da distribuição da concentração para obter o melhor esquema de controle aplicado a processos de mistura industriais entre dois líquidos e entre um líquido e um sólido.

Na área médica, apresentam-se várias aplicações, como por exemplo, a mamografia (CHOI et al., 2007; KAO et al., 2007), a monitoração do fluxo sanguíneo e de órgãos como o coração (BROWN et al., 1994), a detecção de derrames no cérebro (CLAY; FERREE, 2002) e a monitoração do pulmão (AMATO, 2001; TRIGO; LIMA; AMATO, 2004; VALLEJO, 2007b; MELLO et al., 2008), representando essa última aplicação o principal foco do atual trabalho (no entanto, vários dos métodos e abordagens propostos no atual trabalho podem ser empregados em várias áreas de aplicação da TIE; um exemplo é o eficiente método de solução de sistemas lineares discutido no capítulo 5, e outro é a metodologia de projeto de eletrodos, discutida no capítulo 4).

A mamografia é talvez um dos temas mais mencionados atualmente na literatura de TIE e em estágio mais avançado de implementação. De fato, o dispositivo comercial T-SCAN, mencionado por Choi et al. 2007 e utilizado na detecção de cânceres de mama, é aprovado pelo órgão norte-americano “Food and Drug Administration” (FDA). Os mesmos autores (CHOI et al., 2007), desenvolveram um algoritmo aplicado à obtenção de imagens de câncer de mama numa geometria típica da mamografia, chamada de “geometria da mamografia”. Segundo essa geometria, o seio é comprimido por duas placas paralelas onde se fixam os eletrodos, sendo o modelo considerado um paralelepípedo com eletrodos dispostos nas posições correspondentes. Argumenta-se que as propriedades elétricas de um tumor de mama, ou seja, a condutividade e a permissividade elétrica, são significativamente diferentes daquelas do tecido normal, justificando-se o uso da TIE. Tal comentário também é realizado nos trabalhos referentes à Tomografia de Impedância Elétrica por Ressonância Magnética, como será visto adiante. O modelo adotado, com uma distribuição de condutividades homogênea, é validado através da confrontação com um tanque experimental, e um algoritmo de estimação da imagem por TIE é proposto. Com um sistema com trinta e dois (32) eletrodos, perturbações de metal e ágar em forma de cubos de 5 e 6mm de lado, respectivamente, puderam ser detectados a uma distância de 15mm da superfície.

Além deste trabalho, Kao et al. (2007) estudam “arrays” de eletrodos para a TIE aplicada à mamografia, para a aquisição simultânea de dados de TIE e raios-X. A combinação de dois métodos diferentes também vem sendo estudada em outras aplicações.

Paralelamente, Freimark et al. (2007) avaliaram um aparelho de monitoração: o PulmoTraceTM, CardioInspect, da Universidade de TelAviv, aparelho aplicado à monitoração de edemas pulmonares que combina a TIE e a chamada técnica de medições de bioimpedância. Tal sistema é formado, dentre outros, por algoritmo de estimação paramétrico de impedâncias e por um cinto com oito eletrodos preso ao tórax, e é capaz de determinar a resistividade de ambos os pulmões. Foram feitos testes em pacientes com falência congestiva cardíaca, sujeitos a tratamento diurético por infusão intravenosa, mostrando desidratação dos pulmões e correlação significativa entre variação da resistividade dos pulmões e eliminação de urina. Tais testes serviram para reforçar a importância do sistema para diagnóstico. O trabalho de Freimark et al. (2007), assim como os anteriores, mostra alguns interessantes exemplos de aplicações da TIE.

Ao aplicar corrente a um corpo qualquer através de um (ou mais) eletrodo(s), deve-se esperar que ela se espalhe pelo volume interno e que a distribuição da corrente elétrica

resultante varie em qualquer direção (não seja constante), quer seja devido à geometria do corpo, à distribuição interna de material ou às condições de contorno. Isto significa que um modelo matemático fiel do fenômeno elétrico que ocorre no interior do corpo deve ser tridimensional (3D), ao custo do aumento do tempo e da quantidade de memória utilizados pelo “software” com relação a uma aproximação bidimensional (2D) (sobretudo os tempos). A utilização de modelo 3D de condutividades é justificada experimentalmente por Halter, Hartov e Paulsen (2007), no caso da obtenção de imagens de TIE do seio, por exemplo.

A impedância da interface de contato entre o eletrodo e a superfície do corpo (ou impedância de contato), que modela a interação eletroquímica entre o eletrodo e o meio tomografado (KIM et al. 2007a), é fortemente capacitiva, depende da frequência da corrente aplicada e costuma ser alta em relação à impedância dos tecidos internos (PAULSON; PIDCOCK; MCLEOD, 2004; HUA et al., 1993). Assim, além do modelo 3D mencionado, outro modelo deve ser empregado: o modelo de eletrodo, como o “modelo completo de eletrodo” (VAUHKONEN et al., 1999; HEIKKINEN et al., 2002; VILHUNEN et al., 2002), por exemplo.

O “software” para tratamento de dados, responsável pela solução aproximada do problema inverso, possui diversas variantes, mas todas elas podem ser divididas nas seguintes etapas comuns: a leitura de dados, uma etapa de pré-processamento dos dados (cujas peculiaridades dependem da próxima etapa), a obtenção, propriamente dita, de solução aproximada do problema inverso, e a escrita dos cálculos referentes à resposta obtida. A solução do problema inverso ainda pode ser dividida numa etapa de solução do chamado problema direto, seguida de uma etapa de estimação de parâmetros, as quais podem ser realizadas uma única vez ou segundo um processo iterativo.

O problema direto é o problema bem-posto resolvido para obtenção dos potenciais elétricos dados os demais valores necessários pelo modelo, sendo tais potenciais utilizados na estimação de parâmetros. Os valores necessários pelo modelo são: a geometria do corpo tomografado, as correntes elétricas superficiais (ou densidades de corrente normais), os valores de potenciais prescritos e as permissividades e condutividades elétricas do corpo. Pode ser resolvido por métodos analíticos (HYARIC; PIDCOCK, 2001) e numéricos, como o MEF (BABAEIZADEH; BROOKS; ISAACSON, 2007; KIM et al., 2007a; MURPHY; MUELLER; NEWELL, 2007; ZHAO et al., 2007; MELLO et al., 2008) e o Método dos Elementos de Contorno (KORTSCHAK; WEGLEITER; BRANDSTATTER, 2007;

BABAEIZADEH; BROOKS; ISAACSON, 2007; ZHAO et al., 2007), sendo provavelmente o mais difundido o MEF.

Já a estimação fornece, com base na solução do problema direto, uma solução para o problema inverso. O Método de Otimização Topológica (MOT) (BENDSØE; KIKUCHI, 1988; BENDSØE; SIGMUND, 2003; SILVA; NISHIWAKI; KIKUCHI, 2000; YIN; ANANTHASURESH, 2001; LIMA, 2002; LARSEN; SIGMUND; BOUWSTRA, 1997; SIGMUND, 2000; CHEN; SILVA; KIKUCHI, 2001; TCHERNIAK, 2002; MELLO et al., 2008; LIMA et al., 2007) e o Método de Otimização Topológica baseado em Confiabilidade (MOTC, em inglês “Reliability-based Topology Optimization”) (KHARMANDA et al., 2004; JUNG; CHO, 2004; YOUN et al., 2004; KANG; KIM; WANG, 2004; MOON; KIM; WANG, 2004), dos quais trata este trabalho, o filtro de Kalman (VAUHKONEN; KARJALAINEN; KAIPIO, 1998; KIM et al., 2001a; KIM et al., 2003; TRIGO; LIMA; AMATO, 2004; KIM et al., 2007b) e os métodos baseados no algoritmo de Newton-Raphson (KORTSCHAK; WEGLEITER; BRANDSTATTER, 2007; HEIKKINEN et al., 2002; VILHUNEN et al., 2002; VAUHKONEN et al., 1999; VAUHKONEN, 2004), são exemplos de métodos de estimação.

O MOT resolve um problema de otimização com restrições, utilizando-se de métodos matemáticos para maximização ou minimização de funções (chamadas funções objetivo) com restrições, como a programação matemática (vide a seção 2.3 para uma explicação mais detalhada dos termos mencionados). O MOTC (KHARMANDA et al., 2004), por sua vez, pode ser visto como uma extensão do MOT, para o qual incertezas no modelo ou incertezas de medição são levadas em conta na solução do problema de otimização.

O MOTC originou-se na área estrutural, como será mencionado novamente e exemplificado no capítulo 3. O MOT, por sua vez, é um método difundido na literatura, sendo aplicado à otimização estrutural (BENDSØE; KIKUCHI, 1988; BENDSØE; SIGMUND, 2003) no projeto de mecanismos flexíveis (SILVA; NISHIWAKI; KIKUCHI, 2000; YIN; ANANTHASURESH, 2001; LIMA, 2002), no projeto de materiais com propriedades especiais (LARSEN; SIGMUND; BOUWSTRA, 1997; SIGMUND, 2000), sistemas MicroEletroMecânicos (MEMS) (CHEN; SILVA; KIKUCHI, 2001), estruturas sujeitas ao impacto (BENDSØE; SIGMUND, 2003), estruturas ressonantes para aplicação em micro-motores, micro-garras, etc. (TCHERNIAK, 2002), em TIE (MELLO et al., 2008; LIMA et al., 2007), dentre outros. O MOT é discutido com mais detalhes no capítulo 2.

Com o intuito de se estudar os princípios físicos relacionados à TIE, desenvolver e aprimorar um dispositivo de TIE, e, ainda, estudar estratégias de ventilação pulmonar artificial, foi proposto o Projeto Temático FAPESP nº 01/05303-4 (AMATO, 2001) no qual este trabalho se inseriu, coordenado pelo Prof. Marcelo Britto Passos Amato, do Departamento de Pneumologia da Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo. A motivação surgiu da observação de que, dentre os milhões de pacientes (por ano) submetidos à ventilação artificial no Brasil, grande parte estava sujeita à ocorrência de complicações pulmonares e até mesmo óbitos pela falta de um dispositivo capaz de monitorar a ventilação. Tal projeto foi realizado, em conjunto, pelos professores da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP) (Prof. Emílio Carlos Nelli Silva, Prof. Marcos de Guerra Tsuzuki, Prof. Raul Gonzalez Lima) e por uma professora do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (Profª. Joyce Bevilacqua). Envolveu a construção de “hardware” e o desenvolvimento de “software” para a obtenção da imagem, e o desenvolvimento de bases teóricas e algoritmos para a implementação clínica da TIE.

A percepção de que a TIE (dentre tantas outras técnicas existentes), que já vinha sendo estudada por outras universidades no mundo (KIM; WEBSTER; TOMPKINS, 1983; SANTOSA; VOGELIUS, 1990; MATHERALL, 1998; CHENEY; ISAACSON, 1995; CHENEY; ISAACSON; GOBLE, 1992; CHENEY; ISAACSON; NEWELL, 1992; CHENEY, et al., 1992; CHENEY et al., 1991), poderia ser aprimorada para a aplicação mencionada, se deu através de estudos preliminares realizados na Unidade de Terapia Intensiva Respiratória do Hospital das Clínicas, com um monitor rudimentar construído pela Universidade de Sheffield (e aperfeiçoado pelo grupo do Dr. Marcelo Britto Passos Amato).

De fato, a TIE se adapta excelentemente ao caso do pulmão, uma vez que uma pequena mudança na quantidade de ar presente altera drasticamente a propriedade do tecido pulmonar. Assim, a relação ruído/sinal mostra-se favorável. Nessas condições, é possível conceber a aplicação de uma corrente de baixa intensidade, a qual não causa lesão aos tecidos e pode ser estendida por dias seguidos, numa mesma região (AMATO, 2001). Isso faz da TIE, não-invasiva de radiação não-ionizante, uma técnica vantajosa em relação às técnicas de tomografia tradicionais, como a de raios-X. Outras vantagens são, basicamente, o preço, o tamanho reduzido, o que dá margem à sua instalação ao leito de um paciente em Unidade de Terapia Intensiva (UTI), e a simplicidade na utilização.

Finalmente, é importante salientar que, atualmente, Frerichs et al. (2007) ressaltam o potencial da TIE em se tornar uma nova ferramenta para monitorar a ventilação regional dos

pulmões ao lado do leito. Em seu trabalho, foram realizados testes de reprodutibilidade em regiões de interesse de distribuições, referentes à ventilação regional dos pulmões, durante a ventilação mecânica. Tais testes, realizados em porcos e para aumentos repetidos do “PEEP” (“positive end-expiratory pressure” ou pressão positiva residual ao final da expiração), mostram reprodutibilidade de resultados excelente, com padrões de distribuição bastante próximos. Aparentemente, um sistema comercial de TIE para aquisição de dados foi utilizado. Ainda, Luepschen et al. (2007) citam a TIE dinâmica como potencial ferramenta clínica na monitoração de mudanças da distribuição da ventilação nos pulmões, necessitando no momento, no entanto, ser devidamente caracterizada. Argumentam que é necessário considerar cenários de aplicação onde mudanças de condutividade rápidas e diferentes são encontradas. Comentam, por outro lado, que novas estratégias de ventilação estão associadas com mudanças de fluidos corporais e ventilação regional, as quais podem facilmente ser detectadas pela TIE. Assim, realizam testes em animais para investigar se a TIE é capaz de monitorar, tanto quantitativamente quanto qualitativamente, o recrutamento dos pulmões durante testes de modificação – por passos – do “PEEP”. Concluem, dentre outros aspectos, que a TIE parece ser apta a determinar a situação do recrutamento quando combinada à utilização de outros parâmetros fisiológicos. Também mencionam, baseados em seus resultados, que a TIE pode ser importante na individualização de estratégias de ventilação.

Contudo, é relevante destacar que diversas técnicas de obtenção de propriedades elétricas, não-invasivas, de radiação não-ionizante e cuja relação ruído/sinal também tem se mostrado favorável – as quais são algumas das importantes vantagens da TIE sobre técnicas de tomografia tradicionais – foram propostas e vêm sendo estudadas, conforme é visto na literatura especializada. Porém, a TIE possui diversas vantagens, principalmente quando se considera a monitoração do pulmão.

Uma dessas técnicas é a Tomografia de Impedância Elétrica por Ressonância Magnética (KIM et al., 2007c; KWON et al., 2007; LEE et al., 2007; NAM et al., 2007; PARK et al., 2007; PARK; LEE; KWON, 2007), mais recente que a TIE e, até o momento, com respostas melhores para distribuições de condutividade internas. Esta técnica utiliza medidas de potencial elétrico em eletrodos e medidas de densidade de fluxo magnético obtidos por ressonância magnética para estimar a distribuição de condutividades. As desvantagens com relação à TIE estão relacionadas às questões da portabilidade e do preço, já que aparelhos de ressonância são maiores e mais caros que os de TIE. Além disso, o desenvolvimento do sistema de tomografia ainda se encontra em fase de estudos. Justifica-se seu uso em situações

em que se dispõe do equipamento de ressonância e se está interessado nas propriedades de condutividade dos corpos, como em alguns casos do exame do câncer de mama.

Outra técnica, associada a um menor volume de publicações, foi o da Tomografia Magnetoacústica por Indução Magnética (LI; XU; HE, 2007; MA; HE, 2007), também recente. Segundo essa técnica, expõe-se o corpo a ser tomografado a dois tipos de campos magnéticos: um estático, o qual gera forças de Lorentz, e um variante no tempo, o qual induz correntes parasitas ou de Foucault no corpo. Da interação entre as forças e as correntes, surgem vibrações acústicas no corpo, as quais se propagam como ondas sonoras. Tais ondas são medidas através de transdutores posicionados ao redor do corpo e tais medidas são utilizadas no processo de estimação da imagem (em todos os trabalhos, os quais são citados em seguida, obtém-se a distribuição de condutividades). Os trabalhos dedicam-se, via de regra e por enquanto, apenas a fantomas experimentais simplificados e simulações, o que representa uma desvantagem do método. Porém, a resolução espacial é elevada e resultados simulados apresentam contraste elevado.

Uma terceira técnica é denominada Tomografia de Indução Magnética, estudada por Tanguay, Gagnon e Guardo (2007), em que, diferentemente da TIE, a corrente é induzida por excitação de campos magnéticos variantes no tempo criados por bobinas externas. Segundo a lei de Faraday, correntes são induzidas no meio em resposta a esta perturbação externa. Então, os potenciais resultantes são medidos através de eletrodos posicionados na superfície do corpo. Concluem que, para a configuração de eletrodos e bobinas testada, a TIE é a melhor solução, apresentando melhor resolução. Porém, propõem a utilização das duas técnicas, em conjunto e, de fato, desenvolveram um “hardware” para isso. Além deles, Merwa e Schafetter (2007) estudam a resolução e distorção da imagem de condutividade para um sistema proposto, reconhecendo o problema de resoluções baixas do método. A diferença principal para o trabalho anterior fica por conta dos potenciais de medida, induzidos em bobinas receptoras. Citam como vantagem em relação à TIE, porém, o fato de não haver contato com o corpo, o que indica que fenômenos originados devido ao contato entre o corpo e os eletrodos não acontecem.

Ainda há outra técnica mencionada na literatura, a Espectroscopia de Impedância Elétrica, ou TIE de múltiplas frequências (GRANOT; RUBINSKY, 2007; KIM et al., 2007d; MCEWAN; CUSICK; HOLDER, 2007; OH; WOO; HOLDER, 2007; OH et al., 2007; GOHARIAN et al., 2007), segundo a qual excitações de múltiplas frequências são utilizadas na obtenção da imagem. A desvantagem da TIE de múltiplas frequências está relacionada ao

“hardware” de medição, mais complexo que o da TIE de frequência única, como a abordada no atual trabalho.

Cita-se, ainda, a Tomografia de Campo Elétrico, uma nova técnica (KORJENEVSKY; TUYKIN, 2007). Destacam como vantagem sobre a TIE não haver a necessidade de fixar os eletrodos na superfície do corpo. Como vantagem sobre a Tomografia de Indução Magnética, citam a utilização de “hardware” e “software” de estimação mais simples. Os estudos, porém, estão num estágio ainda inicial de desenvolvimento (são mostrados resultados numéricos e de fantasmas experimentais relativamente simples no artigo). Na realidade, este método é semelhante à Tomografia de Capacitância Elétrica (KORTSCHAK; WEGLEITER; BRANDSTATTER, 2007; WATZENIG; BRANDNER; STEINER, 2007; SOLEIMANI et al., 2007), no caso em que o corpo é não-condutivo, como em aplicações industriais. No entanto, ele tem a vantagem de também poder ser aplicado no caso de corpos consideravelmente condutivos, como em aplicações médicas. Isso ocorre porque mudanças de fase entre campos elétricos transmitidos e recebidos, as quais guardam relação com a permissividade e condutividade do meio, podem ser medidas, sendo as mudanças de fase relacionadas ao fenômeno chamado relaxação de Maxwell-Wagner no meio condutivo heterogêneo. Apesar disso, o método costuma, tradicionalmente, ser considerado inadequado para aplicações relacionadas à obtenção de condutividades, segundo os autores.

Finalmente, Wuegmueller et al. (2007), num trabalho ainda em desenvolvimento (mas extremamente interessante), estudam a modelagem do corpo humano como um canal de comunicação ou um canal de transmissão elétrica (de corrente, mais especificamente), sendo a idéia originada na transmissão “sem fio” de dados. A técnica é baseada no conceito de acoplamento galvânico e o estudo consiste na análise da atenuação do sinal (com a frequência) transmitido pelo corpo e na análise da distribuição de correntes elétricas em locais específicos do corpo, tanto numericamente como em seres humanos (a atenuação é definida em termos das voltagens nos eletrodos de transmissão e recepção).

Dadas as vantagens da TIE, mostra-se a importância de se escolher tal técnica, dentre as demais técnicas mencionadas, para a monitoração do pulmão. Porém, o futuro das técnicas de estimação de imagens de propriedades elétricas consiste, provavelmente, na combinação de duas ou mais das técnicas mencionadas, o que vem sendo sugerido por alguns trabalhos, como mostrado. Em qualquer caso, justifica-se o estudo de algumas das principais limitações do sistema de TIE, realizado na seqüência, com o intuito de melhorar o seu desempenho.

1.1 Motivação: Limitações da TIE

Em muitos trabalhos descritos na literatura, utilizam-se métodos determinísticos para solução do problema inverso de TIE, ou seja, modelam-se parâmetros como determinísticos. Os métodos mais comuns são os métodos baseados no algoritmo de Newton-Raphson (KORTSCHAK; WEGLEITER; BRANDSTATTER, 2007; HEIKKINEN et al., 2002; VILHUNEN et al., 2002; VAUHKONEN et al., 1999), os baseados em gradientes (LIMA et al., 2007; MELLO et al., 2008) e métodos de um passo baseados na linearização do problema inverso (os quais podem ser vistos como um caso especial do algoritmo de Newton-Raphson) (HYARIC; PIDCOCK, 2001; VAUHKONEN et al., 1999). Nesses casos, valores médios de medidas e demais parâmetros são admitidos corretos, o que implica em aproximações satisfatórias em casos em que a incerteza sobre os parâmetros é suficientemente pequena, ou seja, quando é suficientemente pequena a variação em torno da média. Em outras palavras, a noção de probabilidade não é considerada na estimação da imagem em TIE quando são utilizados métodos determinísticos.

Porém, em algumas áreas como na área médica, por exemplo, as incertezas referentes ao modelo adotado e as incertezas relacionadas às medições (de valores de potenciais e correntes elétricas, por exemplo), causadas devido a influências externas, aos próprios aparelhos utilizados no processo de medição e/ou à natureza dinâmica das propriedades elétricas dos materiais e tecidos no interior do corpo, são significativas. Portanto, não há, na prática, certeza sobre as imagens obtidas, o que significa que a elas está associado um determinado nível de confiabilidade. Nessas condições, deve-se utilizar um método coerente, baseado, por exemplo, na teoria de Probabilidades (KAPIO; SOMERSALO, 2005), para a obtenção de imagens de TIE, o que dá origem ao chamado estimador de parâmetros probabilístico. De fato, alguns autores como Vauhkonen, Karjalainen e Kaipio (1998), Kolehmainen et al. (1998), Heikkinen et al. (2002), Trigo, Lima e Amato (2004), West et al. (2004) e, recentemente, Adler, Dai e Lionheart (2007), Kim et al. (2007b), Herrera (2007) e Watzenig e Fox (2009), utilizam tal abordagem. Porém, algumas questões ainda precisam se aperfeiçoadas. No caso do filtro de Kalman, por exemplo (VAUHKONEN; KARJALAINEN; KAPIO, 1998; KIM et al., 2001a; KIM et al., 2003; TRIGO; LIMA; AMATO, 2004; KIM et al., 2007b), utiliza-se a dinâmica da distribuição de propriedades do corpo tomografado para

tornar a estimação mais eficiente. No entanto, ou efeitos de “trilha” ou, para um parâmetro de regularização diferente, artefatos periféricos e posições incorretas são relatados nas respostas por Adler, Dai e Lionheart (2007) (artefatos são equivalentes a perturbações indesejadas). Por efeito de “trilha” se entende o efeito da imagem estimada, segundo o qual a distribuição mostra o caminho utilizado pela perturbação, como um rastro. Ainda, nos trabalhos de Vauhkonen, Karjalainen e Kaipio (1998), Kolehmainen et al. (1998), Heikkinen et al. (2002), Trigo, Lima e Amato (2004), Adler, Dai e Lionheart (2007) e Kim et al. (2007b), resultados experimentais apresentam valores subestimados e as interfaces não são bem definidas, ou seja, não é possível localizá-las de maneira precisa através da imagem obtida. Por fim, os métodos relatados em Herrera (2007), West et al. (2004) e Watzenig e Fox (2009), baseados nas técnicas de “Simulated Annealing” (Recozimento Simulado) e “Markov chain Monte Carlo” (os dois últimos trabalhos), têm apresentado respostas relativamente precisas, mas elevados tempos de processamento (o que tem sido estudado). No atual trabalho, um método probabilístico que leva em conta tais questões e é baseado no MOT é proposto.

Como mencionado no início do capítulo, uma série de informações conhecidas são utilizadas em TIE, como as medidas de geometria do corpo. Porém, nem sempre é possível obter tais informações. Um caso típico se relaciona ao posicionamento dos eletrodos: pode ser inviável precisar a posição dos eletrodos na superfície do corpo tomografado ou região tomografada por intermédio de técnicas de medição tradicionais. Além disso, pode não ser possível efetuar a correção manual do posicionamento, quer seja pela indisponibilidade de tais medidas, quer seja por questões de tempo. Um exemplo ocorre numa situação de emergência, em que um instante a mais pode significar um óbito. O problema é que quando a posição dos eletrodos no modelo não corresponde à posição física dos mesmos, artefatos indesejáveis na imagem podem ser obtidos. Isso tanto (e principalmente) no caso de imagens referentes a valores absolutos de propriedades (VALLEJO et al., 2006), quanto no caso de valores relativos (GRAHAM; ADLER, 2007; SOLEIMANI; LABERGE; ADLER, 2006). Nesses casos, é interessante que o próprio algoritmo que obtém as condutividades e permissividades elétricas no interior do corpo possa determinar a posição física dos eletrodos e corrigir o modelo. Alguns trabalhos foram propostos, como em Vallejo et al. (2006) e Soleimani, Laberge e Adler (2006). Porém, reportam algumas simplificações, como detalhado adiante no texto. Um método desenvolvido com o intuito de resolver tais questões é proposto nessa tese.

Outra informação normalmente indisponível é o parâmetro de contato referente a cada eletrodo do modelo de eletrodo, ou seja, a resistividade da interface de contato multiplicada

pela espessura da mesma. Em alguns casos, nota-se que ela pode ser reduzida bem como seus efeitos, através da utilização de um material para o eletrodo com impedância próxima à impedância do tecido onde está fixado (PAULSON; PIDCOCK; MCLEOD, 2004). Porém, na área médica, foco principal do trabalho, isso não é possível porque o material dos eletrodos costuma apresentar propriedades elétricas bem diferentes das da pele. Uma saída para este problema é, como no caso anterior, a estimação, como discutido por Heikkinen et al. (2002) e Vilhunen et al. (2002). No entanto, também mencionam a dificuldade de determinação dos parâmetros juntamente com a imagem do interior do corpo através de algoritmos convencionais. No atual trabalho, propõe-se um algoritmo que, através da utilização de informações diversas disponíveis, determina ambos os tipos de incógnitas (imagem e parâmetros de contato) para um nível de erro aceitável. O mesmo deve ser capaz de obter imagens de resistividades com contrastes referentes a diferenças da ordem de grandeza de $10^6 \Omega\text{m}$, além de variações espaciais próximas de variações discretas (como no caso de um copo mergulhado em água), o que é importante do ponto de vista clínico na monitoração do pulmão (MELLO et al.; 2008), mas não é mencionado na literatura.

Admitindo um posicionamento correto dos eletrodos, pode-se notar que esse influencia o desempenho do sistema de TIE. No trabalho de Graham e Adler (2007), investigam-se algumas configurações de posicionamento de eletrodos (sete delas) para uma geometria fixa dos mesmos, uma geometria cilíndrica do fantoma experimental (um tanque) e o protocolo de excitação adjacente (cabe advertir que o termo “fantoma” está já bastante difundido na comunidade de TIE e é definido na literatura e em MELLO – 2005). As configurações são comparadas em relação à razão sinal sobre ruído, ao condicionamento da matriz de sensibilidade, à resolução obtida, ao erro de posicionamento vertical e radial, magnitude da condutividade, imunidade ao ruído, imunidade aos erros de posicionamento dos eletrodos e, finalmente, em relação à obtenção de artefatos. A matriz de sensibilidade, equivalente ao chamado Jacobiano, é, de forma genérica, a matriz que contém as derivadas dos potenciais elétricos calculados pelo modelo, com relação às incógnitas do problema de tomografia. Concluem, dados os testes realizados, que todas as configurações são equivalentes quando não se consideram o ruído ou o erro de posicionamento, ou seja, em condições ideais. Porém, em condições reais, a configuração “planar” apresentou os melhores resultados, sendo esta dada por dois conjuntos de eletrodos dispostos em dois planos paralelos cada, igualmente espaçados e alinhados verticalmente. Além desse trabalho, pode-se citar o de Halter, Hartov e Paulsen (2007). Nesse trabalho, os autores justificam experimentalmente, o uso de modelos

3D de condutividade na TIE do seio. A idéia é estudar a razão custo/benefício inerente ao problema 3D. Além disso, propõe-se o importante estudo do número apropriado de “arrays” de eletrodos. Um sistema com 64 eletrodos é empregado em fantasmas salinos cilíndricos, de elevado contraste. Relatam que, para o caso de estudo, as medidas em múltiplos “arrays” melhoram a informação na direção axial, por exemplo, mostrando diferenças significativas para as medidas no plano. Finalmente, Huang, Yu e Chung (2007) implementaram o que chamaram, ao pé-da-letra, de TIE rotacional. Em seu trabalho, num suporte em forma de tubo cilíndrico, contendo os eletrodos na face interior, é acoplado um motor de passo, o que os permite mudar a posição dos eletrodos com precisão. Isto significa que mais medidas estão disponíveis e, portanto, o problema torna-se “menos mal-posto”. De fato, resultados experimentais mostraram melhorias na resolução, dentre outras. Os trabalhos de Graham e Adler (2007), Halter, Hartov e Paulsen (2007) e Huang, Yu e Chung (2007) “trazem à tona”, então, uma importante discussão, resumida na seguinte interrogativa: qual a melhor posição dos eletrodos na TIE? Ainda sugerem a próxima: qual a melhor geometria e material? Tais perguntas, relacionadas ao projeto dos eletrodos, podem ser respondidas através da utilização do MOT, o que é discutido no atual trabalho.

Finalmente, deve-se salientar que a TIE aplicada à área médica, bem como qualquer outra aplicação, busca imagens 3D com resolução elevada (em Amato (2001), em vista de enfoque clínico, menciona-se a importância de um modelo e algoritmo que permitam uma resolução espacial menor que 10mm, para um tórax adulto) no menor tempo possível. Porém, um aumento na resolução está relacionado, dentre outros aspectos, a um aumento da discretização do modelo e conseqüente diminuição no tamanho de cada “voxel” (ou elemento, no caso do MEF). Assim, um aumento na resolução causa o aumento no tempo de obtenção da imagem de TIE, o qual pode ser proibitivo num caso 3D prático. Alguns trabalhos mencionam a paralelização da solução dos problemas diretos, por exemplo (vide Molinari et al. (2001)), como abordagem para reduzir tempos para dada discretização. Porém, não se retrata uma técnica capaz de agir diretamente na redução do tempo de solução do problema direto, o que é feito no atual trabalho. Deve-se mencionar que a solução de problemas diretos compreende a etapa mais custosa, computacionalmente, de um algoritmo de estimação de imagens de TIE de valores absolutos.

Além dos problemas citados, têm-se ainda questões envolvendo o “hardware” de TIE, as quais não serão, porém, tratadas no presente trabalho. Dentre tais questões, provavelmente a mais importante está relacionada aos ruídos de medição. Fabrizi et al. (2007), por exemplo,

analisam três sistemas de TIE com respeito às características de ruído para determinar o sistema mais indicado à aplicação para monitoração de indivíduos sujeitos a ataques epiléticos. Relata-se a existência de um ruído próximo ao branco, o qual aumenta conforme os casos de estudo se tornam mais complexos. Ainda, Hartinger, Gagnon e Guardo (2007) estudam a consideração de imperfeições de “hardware” na estimação de TIE. Argumenta-se que erros a que os algoritmos são sensíveis originam-se, geralmente, da modelagem incorreta ou de medidas imprecisas. Ainda mencionam que algoritmos de imagens absolutas e algoritmos baseados em diferenças na frequência são sensíveis a erros de medida (algoritmos baseados em diferenças na frequência – no tempo – estimam imagens da diferença entre propriedades em que as propriedades são obtidas para duas frequências distintas – dois instantes de tempo distintos). Seguindo este raciocínio, propõem uma alternativa aos modelos de erros de medida presentes na literatura, através da incorporação de um modelo de imperfeições do “hardware” de medição. Resultados com o modelo, à partir de dados de um fantoma experimental formado por uma malha de resistores, mostram artefatos menores do que no caso sem o modelo, sobretudo para imagens de diferenças de frequência.

Tem-se, assim, uma idéia das principais dificuldades relacionadas à TIE em aplicações atuais. Essas dificuldades motivam os tópicos desenvolvidos nessa tese.

1.2 Objetivos

Como mencionado anteriormente, a TIE é utilizada nos mais diversos campos de aplicação existentes com sucesso. Porém, essa técnica (especificamente de imagens referentes a valores absolutos de propriedades) possui limitações, as quais foram discutidas no texto.

O objetivo principal deste trabalho de Doutorado é: estudar técnicas para aprimorar o sistema de TIE de imagens absolutas através do MOT, tendo-se em vista as limitações do sistema mencionadas na seção anterior, ou seja, as limitações referentes aos programas de estimação 3D de imagens em conjunto com parâmetros de contato, aos algoritmos de estimação probabilísticos, aos algoritmos de correção da posição dos eletrodos, à inexistência de estudo para determinação da melhor posição, geometria e material dos eletrodos e, finalmente, à questão do tempo de execução do algoritmo de estimação. São, então, propostos e avaliados: uma nova regularização e um método para obtenção de parâmetros de contato em

conjunto com uma imagem 3D, uma formulação para acomodação de incertezas, uma formulação para correção do posicionamento de eletrodos, uma formulação para o projeto de eletrodos e um novo solucionador de MEF, sendo todos os tópicos relacionados ao MOT.

Assim, os objetivos são, especificamente:

- Obter imagens experimentais 3D de TIE através de um algoritmo de MOT e propor um algoritmo baseado no MOT, para obtenção de imagens 3D de TIE em conjunto com os já citados parâmetros de contato, como tratado no capítulo 2 deste texto. As imagens devem ser obtidas em fantasmas que emulem situações reais de aplicação prática da TIE na área médica.
- Propor e estudar a aplicabilidade no contexto da TIE, de um estimador probabilístico de parâmetros fundamentado no MOTC (KHARMANDA et al., 2004; MAUTE; FRANGOPOL, 2003), um método capaz de gerar estimativas segundo um critério de otimização e que leva em conta incertezas inerentes ao problema (incertezas de algumas variáveis). Utiliza-se, nesse caso, a probabilidade como função objetivo para o problema de otimização. A formulação é capaz de obter os valores absolutos de condutividades dos materiais presentes no interior do domínio tomografado com certo nível de confiabilidade.
- Propor e avaliar algoritmos de correção do posicionamento e projeto dos eletrodos pelo MOT, aplicados à TIE. Ainda, propor um método de aplicação de corrente nos eletrodos correspondentes ao modelo de MEF, obtendo-se, portanto, um modelo de aplicação de corrente nos eletrodos. No projeto dos eletrodos, será estudada a otimização da sensibilidade ao ruído e também será estudada a otimização do condicionamento da matriz de sensibilidade (a qual está relacionada ao problema de MOT de estimação da imagem, como discutido na seção 4.2).
- Implementar e testar um algoritmo de solução de sistemas lineares, aplicado ao problema direto de MEF na TIE, para reduzir o tempo de estimação da imagem para dada discretização do modelo de MEF. Tal algoritmo é baseado no conceito de reciclagem de Subespaços de Krylov, um conceito tratado adiante, aplicado a seqüências de sistemas lineares que surgem no problema de otimização. Como o algoritmo age diretamente sobre o tempo utilizado para solucionar os problemas de MEF em TIE, atua sobre o “gargalo” do programa de MOT e dos demais programas utilizados na solução do problema inverso com imagens absolutas, como o algoritmo de Gauss-Newton (KORTSCHAK; WEGLEITER;

BRANDSTATTER, 2007; HEIKKINEN et al., 2002; VILHUNEN et al., 2002), por exemplo. O algoritmo foi implementado em colaboração com o doutor Shun Wang, e com os professores Gláucio H. Paulino, da “University of Illinois at Urbana-Champaign” (IL, EUA), e Eric de Sturler, da “Virginia Tech” (VA, EUA), com os quais o orientador do atual trabalho tem sólida relação acadêmica.

Finalmente, como objetivos secundários da pesquisa proposta, mencionam-se:

1. participar de um Projeto Temático sobre TIE, que envolve várias áreas do conhecimento, como Engenharia, Matemática e Medicina;
2. interagir com os profissionais destas áreas
3. e contribuir para o desenvolvimento de um tomógrafo de TIE para ser empregado em aplicações médicas de Pneumologia, trazendo grandes benefícios às pessoas submetidas à ventilação forçada do pulmão (como visto no início do capítulo, juntamente aos detalhes sobre o Projeto Temático citado).

1.3 Contribuições Científicas

Alguns dos temas propostos como objetivos do atual trabalho tiveram grande aceitação por parte da comunidade científica internacional. Tal fato foi evidenciado pela aceitação de cinco resumos em congressos internacionais e pela apresentação de quatro dos cinco trabalhos correspondentes (sendo duas apresentações “Keynote Lectures”, ambas realizadas pelo orientador do autor do trabalho). Tais evidências também se apresentam através do estabelecimento da interação entre o aluno, o professor Gláucio H. Paulino da “University of Illinois at Urbana-Champaign”, e o professor Eric de Sturler da “Virginia Tech”, e através da publicação de dois artigos em periódicos internacionais (MELLO et al., 2008; LIMA et al., 2007), um deles o periódico “IEEE Transactions on Biomedical Engineering” (de índice de impacto superior a 1,5), e do envio de mais um artigo para o periódico internacional “Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering” (CMAME), de índice de impacto superior a 2, para publicação.

Em síntese, este trabalho de doutorado apresenta as seguintes contribuições científicas, as quais serão descritas em detalhes no decorrer do texto:

- a) foi desenvolvido um algoritmo baseado no MOT, o qual, considerando-se algumas regularizações, estima distribuições de condutividade em conjunto com os parâmetros de contato, o que vinha sendo descrito como uma limitação da TIE de imagens absolutas (HEIKKINEN et al., 2002). Tal algoritmo foi testado com dados simulados. Além disso, foram estimados contrastes e gradientes espaciais de propriedades extremamente elevados com dados numéricos e experimentais, o que representa uma vantagem em relação aos demais métodos da literatura. Dois artigos baseados no tema foram publicados em periódicos internacionais (MELLO et al., 2008; LIMA et al., 2007).
- b) São propostas (e avaliadas) três formulações distintas, aplicadas ao MOTC, compreendendo diferentes funções objetivo, restrições e variáveis de otimização (vide capítulo 3). Uma delas é baseada na literatura e utilizada por Youn et al. (2004) e Yang e Gu (2004), segundo a qual as variáveis nodais padronizadas, que definem as condutividades no domínio, são consideradas como variáveis aleatórias e as variáveis de otimização são as médias das mesmas. A segunda formulação considera, com base em conhecimento prévio do problema, parte das variáveis como determinísticas e parte delas como aleatórias, com o intuito de acelerar o processo de estimação e obter imagens qualitativamente e quantitativamente melhores. A terceira formulação é inédita na literatura de MOTC (até o momento), e considera como incógnita (além da própria imagem) a matriz de covariâncias das variáveis aleatórias do problema de TIE, como discutido, em detalhes, no capítulo 3. As três formulações representam contribuições à área de TIE e a segunda e a terceira trazem contribuições tanto à área de TIE quanto à de MOTC, não sendo citadas em trabalhos na literatura de conhecimento do autor. Um artigo em MOTC aplicado à TIE que emprega a primeira formulação foi aceito para publicação em Anais de Congresso internacional.
- c) Propôs-se uma formulação determinística para determinação da posição real dos eletrodos na superfície do corpo tomografado baseada no MOT. Resultados 2D simplificados sugerem a importância da utilização do método proposto em casos práticos. Testes em modelos 3D, por exemplo, poderiam comprovar a capacidade de detecção de rotações de eletrodos, o que é teoricamente possível através do método proposto, mas não é possível, atualmente, através dos métodos usuais. A fundamentação da técnica e desenvolvimento correspondentes são detalhados no capítulo 4.

- d) Propôs-se formulação, também baseada no MOT e determinística, para projeto dos eletrodos tendo como objetivo minimizar o mau-condicionamento do problema de TIE – mais especificamente, da matriz de sensibilidade – e minimizar a sensibilidade ao ruído. Essa formulação foi desenvolvida em conjunto com o professor Raul Gonzalez Lima da EPUSP, envolvido no Projeto Temático de TIE. Semelhante à anterior em diversos aspectos, tal formulação foi implementada e testada em casos 2D. A fundamentação teórica e desenvolvimento constam da seção 4.2. Ambas as abordagens representam contribuições científicas importantes para a área de TIE. De fato, um artigo no tema foi publicado em Anais de Congresso internacional, um resumo foi aceito para publicação em Anais de Congresso internacional, e o tema foi incluído em projeto submetido para o “National Institute of Health”, que foi aceito.
- e) Através do conceito de reciclagem de Subespaços de Krylov, obteve-se a melhoria da relação de compromisso entre o tamanho dos elementos finitos (o qual determina a precisão do modelo e, dentre outros fatores, a resolução da imagem) e o tempo de processamento da imagem 3D, como visto no capítulo 5, em que um problema com 53692 nós e 267051 elementos tetraédricos de TIE é solucionado. A redução no tempo de processamento de cada sistema linear resolvido com relação ao caso sem a reciclagem, nas proximidades da convergência do problema de MOT, foi de 20%. A redução do tempo total de processamento foi de, aproximadamente, 21%. Porém, como mostrado em artigo recentemente submetido para publicação no periódico internacional CMAME, esses tempos podem ser reduzidos ainda mais. Tal trabalho representa uma contribuição científica importante na área de TIE de imagens absolutas, em que a solução de sistemas de MEF costuma ser realizada por métodos diretos ou iterativos simples. De fato, não há menção na literatura – do conhecimento do autor – de uma malha de MEF com a discretização reportada acima, que seja utilizada na estimação de imagem de TIE (menciona-se em Graham e Adler (2007), uma malha com 4205 nós e 21504 elementos tetraédricos). Um artigo no tema foi publicado em Anais de Congresso internacional, outro submetido para periódico internacional, como mencionado, e um resumo foi aceito em Congresso internacional.

1.4 Organização do Texto

Este texto está organizado da seguinte maneira. No capítulo 2, são apresentados o MOT e algumas respostas obtidas com o método. No capítulo 3, os estudos referentes ao MOTC são relatados. No capítulo 4, o algoritmo empregado na correção da posição dos eletrodos pelo MOT é proposto e testado. No mesmo capítulo, propõe-se metodologia para projeto de eletrodos de TIE através do MOT. No capítulo 5 os estudos relacionados ao Método de Projeção em Subespaços de Krylov com reciclagem são descritos. No capítulo 6 são apresentadas as conclusões e no capítulo 7, a continuação do trabalho. Então, apresentam-se as referências bibliográficas consideradas no trabalho. Finalmente, no APÊNDICE A, mostra-se a fundamentação matemática por trás da utilização de diferenças de potenciais na estimação da imagem e no APÊNDICE B, o Atlas Anatômico Numérico empregado no algoritmo de MOTC. Ainda, no APÊNDICE C, descreve-se a técnica de Projeção, mencionada no capítulo 2, e no APÊNDICE E, apresenta-se a verificação numérica do modelo de MEF discutido na seção 4.1.

2 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADO À TOMOGRAFIA DE IMPEDÂNCIA ELÉTRICA

No atual capítulo, descrevem-se os aspectos teóricos, a implementação e resultados referentes a um algoritmo desenvolvido para a obtenção simultânea de parâmetros de contato e imagens absolutas 3D de TIE pelo MOT. Tal algoritmo se destina à reconstrução de distribuições de propriedades discretas (interfaces definidas) e contrastes, tanto elevados quanto moderados, e foi implementado para ser aplicado (o algoritmo) à área médica. É importante salientar que a teoria exposta e os assuntos relacionados à implementação também servem de base para os estudos mostrados e discutidos neste texto com relação ao MOTC (vide capítulo 3), e para os estudos aplicados à correção do posicionamento dos eletrodos (vide capítulo 4). O algoritmo de MOT, como implementado no atual capítulo, também é descrito em Mello et al. (2008).

2.1 Introdução

No capítulo 1, descreveu-se a TIE e foram mencionadas várias de suas aplicações. Ainda, foi citado que o atual trabalho, bem como em Mello et al. (2008), o foco principal são imagens absolutas de propriedades. A importância de tais imagens reside no fato de que permitem, na prática, que se detecte um pneumotórax ou sejam distinguidas algumas doenças pulmonares, como um derrame pleural de uma atelectasia (AMATO, 2001).

Vários artigos na literatura se propõem a obter imagens nestas condições. São citados alguns desses na seqüência, destacando suas peculiaridades, vantagens e desvantagens no contexto específico da obtenção de imagens de distribuições discretas de materiais.

Babaeizadeh, Brooks e Isaacson (2007), por exemplo, desenvolveram um método 3D de TIE para domínios em que as distribuições de propriedade são suficientemente bem aproximadas por funções constantes por partes, com interfaces correspondentes conhecidas. Assume-se que a visualização prévia das interfaces por outra técnica é realizada o que,

juntamente com as hipóteses de condutividade constante por partes e um pequeno número de regiões distintas, torna o problema menos mal-posto. Um modelo baseado no Método dos Elementos de Contorno é proposto para resolver o problema direto, mas tanto o MEF quanto este último são implementados para resolver o problema inverso, sendo a matriz de sensibilidade calculada para cada caso. A conclusão a que se chega com respeito à comparação entre os dois métodos é a de que ambos têm desempenho semelhante, devendo ser escolhidos com base na eficiência computacional e na necessidade de se modelarem anisotropias (o que não se pode realizar com o Método dos Elementos de Contorno), por exemplo. Simulações numa geometria em forma de tórax, com perturbações representando o coração e os pulmões, são realizadas. Nesse caso, obtêm-se erros de menos de 8% nos valores de condutividade calculados, mesmo quando são simulados fatores complicadores à estimação observados na prática, como erros na localização das interfaces entre materiais, valores relativamente baixos da razão sinal/ruído de medição, e valores não constantes das distribuições, dentre outros. Porém, a hipótese de conhecimento prévio das posições das interfaces entre materiais no interior do domínio, impede a aplicação de seu algoritmo à área médica e, portanto, ao atual trabalho. Além disso, não se emprega um modelo de eletrodo, o que limita a aplicação à casos em que o material dos eletrodos e do substrato têm impedâncias elétricas de valores próximos, conforme sugere o trabalho de Paulson, Pidcock e Mcleod (2004).

Eckel e Kress (2007), por outro lado, relatam estudos teóricos para o caso do problema inverso de TIE 2D para obtenção da distribuição de condutividades, considerando-se regiões distintas bem definidas (assim, utilizam a aproximação da condutividade por função constantes por partes). Sua abordagem baseia-se na obtenção de sistema de equações de integrais não-lineares a partir do qual, iterativamente via linearização, o formato das regiões (chamadas de sub-domínios pelos autores) de condutividade constante e os valores de condutividades são obtidos. Determinam-se os diversos parâmetros de regularização através de algoritmo genético, e o valor inicial das condutividades para tal algoritmo é obtido através do método da fatorização, que será citado novamente na seqüência. Exemplos numéricos mostram a viabilidade do método. Porém, tempos de processamento não são relatados, os quais costumam ser relativamente expressivos no caso de algoritmos genéticos (BENDSØE; SIGMUND, 2003). Ainda, é relatada a obtenção (estimação) de apenas contrastes moderados. Finalmente, não se utiliza um modelo de eletrodo, o que é reportado como trabalho futuro. Tais fatores limitam a aplicação à área médica.

Diferentemente desses autores, há os que consideram um modelo de eletrodo, como mostrado na seqüência.

Um algoritmo híbrido para resolver o problema inverso de TIE é proposto por Hu et al. (2007), combinando o subespaço de Krylov (dado pelo vetor igual ao Jacobiano multiplicado pela variação das condutividades, e pela matriz dada pela transposta do Jacobiano multiplicada pelo Jacobiano; vide capítulo 5 para definição do subespaço de Krylov) com a regularização de Tikhonov para uma regularização dupla. Comparam-se as regularizações propostas com a regularização de Tikhonov e com regularização por decomposição em valores singulares truncada, através de resultados numéricos simulados. Resultados experimentais também são apresentados, indicando que a técnica proposta pode reduzir o tempo de processamento e melhorar a resolução das imagens obtidas, sendo o parâmetro de regularização dado pelo método da curva L (PRESS et al., 1999). Como nota, resolve-se o problema de mínimos quadrados linearizado com a solução restringida ao Subespaço de Krylov mencionado, o que, segundo descrito, reduz o número de condicionamento do problema, aumenta a imunidade ao ruído de medida e ainda reduz custos computacionais. Ainda, a dimensão do subespaço é escolhida com base no nível do ruído de medida do sistema.

Kim et al. (2007a) dedicam-se à mamografia e sua geometria especial (definida no capítulo 1), focando no modelo completo de eletrodo aplicado a este caso. Correntes são injetadas no meio através de dois conjuntos planares e paralelos de eletrodos, dispostos acima e abaixo do meio. Experimentos em tanques com solução salina são realizados, mostrando a vantagem do modelo completo sobre o “gap-model”, o qual não leva em conta a condutividade dos eletrodos e as propriedades elétricas da interface. Tais experimentos mostram melhorias relativas tanto na precisão do modelo do problema direto quanto nas imagens obtidas.

Zhao et al. (2007) argumentam que o método de Gradientes Conjugados é bastante utilizado na estimação da imagem em TIE (como em Molinari et al. (2001)), embora o tempo de processamento seja elevado, quer seja pelas baixas taxas de convergência, quer seja pelo alto custo computacional de se empregar um pré-condicionador, o qual tem a função de aumentar a taxa de convergência. Assim, propõem o método de Gradientes Conjugados de Schur para resolver o problema inverso. A idéia é dividir o espaço de solução em dois subespaços. A parte principal da solução, ou parte mais significativa, pertence ao subespaço de dimensão menor e pode ser obtida através de um método direto. A solução para o outro subespaço (o subespaço complementar de Schur) representa um termo de correção, com

norma menor, obtida – a solução – através do algoritmo de Gradientes Conjugados padrão. Como o sistema referente ao termo de correção tem número de condicionamento relativamente baixo, o algoritmo é eficiente computacionalmente. Comparações interessantes com o algoritmo de Gradientes Conjugados em simulações são mostradas, e resultados experimentais indicam que o novo algoritmo é potencialmente um método importante a ser considerado. Como nota, no caso experimental, o subespaço de Krylov de dimensão igual a 20 é utilizado como subespaço de dimensão menor.

Apesar dos importantes desenvolvimentos mencionados, Hu et al. (2007) relatam apenas respostas 2D e as imagens correspondentes apresentam distribuições relativamente suaves (com relação às imagens originais). Ainda, Zhao et al. (2007) empregam o algoritmo desenvolvido na obtenção de contrastes moderados, impossibilitando sua aplicação à detecção de um pneumotórax, por exemplo, e imagens de distribuições relativamente suaves também são geradas. Finalmente, um método para cálculo dos parâmetros de contato do modelo completo de eletrodo utilizado não é proposto nem por esses autores, e nem por Kim et al. (2007a) e, de fato, os autores Hu et al. (2007) e Zhao et al. (2007) nem mesmo relatam o valor do parâmetro empregado. A inexistência de um método sistemático para cálculo de parâmetros de contato foi descrita por Heikkinen et al. em 2002, como uma limitação da TIE de imagens absolutas.

Murphy, Mueller e Newell (2007), porém, os quais desenvolveram o algoritmo D-bar, remediaram tal problema. Tal algoritmo é implementado num domínio de geometria elíptica no trabalho mencionado, e é aplicado na obtenção de imagens de materiais condutivos e isolantes. Além disso, é baseado em prova de unicidade do problema inverso em meios condutivos 2D dada por Nachman (1996). São obtidas respostas experimentais de condutividades absolutas num tanque de solução salina, utilizando-se o MEF. Mostra-se que há redução significativa de artefatos na imagem estimada e aumento da resolução quando o formato do domínio é modelado corretamente. Porém, apenas respostas 2D são relatadas, limitando o uso clínico do algoritmo na monitoração do pulmão.

Com o intuito de resolver a questão das limitações citadas, o autor implementou, conforme mencionado, um programa de MOT aplicado à área médica, para a obtenção de distribuições 3D de valores absolutos de condutividades elétricas no interior de um corpo pela TIE, à partir de medições de potenciais no contorno e de dados de potenciais simulados (tal programa é resultado do aperfeiçoamento de um programa criado durante os estudos para conclusão do Mestrado – MELLO, 2005). Como vantagens em relação aos demais métodos

da literatura, o MOT é capaz de estimar tanto contrastes e gradientes espaciais de propriedades extremamente elevados, quanto contrastes moderados, o que é mostrado nesse capítulo. Além disso, o algoritmo implementado obteve, com dados simulados, distribuições de condutividade em conjunto com os parâmetros de contato, considerando-se apenas algumas regularizações. Distribuições formadas por dois materiais distintos foram obtidas. Porém, a formulação de MOT permite que se trabalhe com mais materiais distintos, sendo as distribuições tanto (aproximadamente) discretas (YIN; ANANTHASURESH, 2001) quanto contínuas (STUMP; SILVA; PAULINO, 2006).

A teoria referente ao programa de MOT engloba uma série de tópicos. Destacam-se a modelagem do fenômeno físico de fluxo de corrente num corpo, incluindo a interface com os eletrodos, a obtenção de potenciais elétricos no modelo do corpo através do MEF e de um solucionador para sistemas lineares, o cálculo de gradientes e a solução do problema de otimização propriamente dito. Será agora explicitado um breve resumo sobre a teoria relacionada a cada tópico. Maiores detalhes podem ser vistos em Mello (2005), Kaipio e Somersalo (2005) e Guest, Prévost e Belytschko (2004).

2.2 Equações Constitutivas e Obtenção dos Potenciais Elétricos

Considerou-se um meio puramente condutivo – a validade desta hipótese está fundamentada no fato de que a frequência de excitação da corrente elétrica é baixa –, linear e isotrópico (MELLO et al., 2008). Portanto, partindo das equações de Maxwell, pode-se concluir que a seguinte equação diferencial:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi_j) = 0 \quad (2.2.1)$$

determina a condução ou fluxo de corrente no interior do corpo tomografado, onde σ é a condutividade elétrica, ϕ_j é o potencial escalar elétrico (mais especificamente, a sua amplitude, de valor real) para o caso do j -ésimo padrão de corrente, e ∇ é o vetor gradiente (vide Kaipio e Somersalo (2005)). Além disso, utilizaram-se condições de contorno de fluxo de corrente e potenciais elétricos impostos (MELLO et al., 2008).

Resolve-se a equação diferencial para obtenção da distribuição de potenciais elétricos no domínio através da introdução do Princípio dos Potenciais Virtuais (BATHE, 1996) e do MEF (BATHE, 1996; COOK et al., 2002). Partindo-se desse princípio, considera-se então, através do MEF, o conceito de discretização em elementos finitos e se assumem conhecidos os potenciais em cada elemento. Assim, transforma-se o problema da forma integral, obtido a partir da formulação do Princípio dos Potenciais Virtuais, para uma forma matricial do tipo

$$\mathbf{K}_{Tj} \mathbf{V}_{Tj} = \mathbf{I}_{Tj}, \quad (2.2.2)$$

de solução tratável. Diz-se que o MEF torna o problema tratável porque uma solução aproximada pode ser obtida em qualquer caso para a forma matricial (desde que a matriz possa ser invertida), ao passo que existe um número finito de soluções analíticas conhecidas e para casos específicos para a forma diferencial do problema. Na eq.(2.2.2), \mathbf{K}_{Tj} é a matriz de condutividade, \mathbf{V}_{Tj} é o vetor de potenciais elétricos nodais e \mathbf{I}_{Tj} é o vetor de correntes elétricas nodais, todos para o caso do j-ésimo padrão de corrente. Como o MEF é empregado, não há restrições acerca da geometria do domínio. Utilizou-se o Método dos Gradientes Conjugados para Sistemas Esparsos baseado no Método dos Gradientes Biconjugados para Sistemas Esparsos proposto em Press et al. (1999) para solução de tal sistema linear no atual capítulo.

Além disso, um modelo de eletrodo foi adotado para descrição do fluxo de corrente elétrica na interface de contato entre a pele e os eletrodos. Esse modelo, estendido para o caso 3D pelo autor (MELLO, 2005; MELLO et al., 2008), representa o eletrodo e a delgada interface entre o mesmo e a pele, cuja impedância é elevada, fortemente capacitiva e depende da frequência (a impedância pode ser reduzida, como citado no capítulo 1, escolhendo-se um material para o eletrodo de impedância próxima à do tecido em contato, conforme argumentam Paulson, Pidcock e Mcleod (2004)). Ainda, resulta em matrizes e vetores de elementos finitos e é baseado no modelo proposto por Hua et al. (1993), implementado com êxito em casos de obtenção de imagens 2D pela TIE.

2.3 Método de Otimização Topológica

A obtenção da imagem foi interpretada como o problema de se encontrar a distribuição de material que minimizasse a diferença entre os valores de potenciais medidos em eletrodos

(considerando-se os vários padrões de corrente aplicados), localizados no contorno do corpo tomografado, e os valores de potenciais nos eletrodos presentes no modelo de MEF de tal corpo (ou seja, nos eletrodos no domínio ou malha de estimação da imagem). Esse problema é mal-posto (TIKHONOV; ARSENIN, 1977), admitindo diferentes soluções, as quais são dadas por diferentes distribuições de condutividades no domínio de estimação. Além disso, a sensibilidade à variação de propriedades depende da posição, podendo ser relativamente baixa em locais mais afastados dos eletrodos (BACRIE; GOUSSARD; GUARDO, 1997; AYA et al., 2006). O MOT tem como principal vantagem a possibilidade de inclusão de várias restrições no problema de estimação da imagem, na forma de igualdades, desigualdades, filtros espaciais (CARDOSO, 2000; MELLO, 2005), etc., o que reduz, significativamente, o efeito das dificuldades mencionadas, sendo tais restrições funções matemáticas baseadas em informações sobre a imagem obtidas previamente.

Considerando-se a existência de dois materiais no corpo tomografado, foi utilizado o seguinte modelo de material (chamado de CAMD: “Continuous Approximation of Material Distribution”, e proposto por Matsui e Terada (2004)), ou seja, a condutividade elétrica foi expressa pela seguinte equação:

$$\sigma_{elg} = \left(\sum_{w=1}^{nd_g} N_{gw} \rho_{gw} \right)^p \sigma_A + \left[1 - \left(\sum_{w=1}^{nd_g} N_{gw} \rho_{gw} \right)^p \right] \sigma_B, \quad 0 \leq \rho_{gw} \leq 1, \quad (2.3.1)$$

onde σ_{elg} é distribuição da condutividade elétrica no g-ésimo elemento finito, σ_A e σ_B são os limites para os valores das condutividades, nd_g é o número de nós do g-ésimo elemento finito, N_{gw} é uma função de forma do g-ésimo elemento finito referente ao w-ésimo nó (BATHE, 1996) e ρ_{gw} é a “pseudo-densidade” (MELLO, 2002) ou variável de otimização definida num nó do elemento (o nome variável de projeto costuma ser utilizado em Engenharia, ao invés de variável de otimização, como em Bendsøe e Sigmund (2003)).

Para as grandezas σ_A e σ_B , foram utilizados os mesmos valores dos materiais presentes no corpo tomografado (ou, aproximadamente os mesmos valores no caso experimental), o que significa utilizar a hipótese de valores conhecidos (ou aproximadamente conhecidos no caso experimental). O coeficiente p , inteiro e maior que zero (0), é o chamado fator de penalização. Quando é maior que um (1), implica no favorecimento de condutividades próximas de σ_B e também na suavização da resposta da otimização, ou seja, na imposição de um filtro espacial

(MATSUI; TERADA, 2004). Além disso, utilizando-se p maior que 1 em conjunto com uma restrição adequada (MELLO, 2005), pode-se reduzir a quantidade de material com condutividades entre 0 e 1 de maneira mais significativa.

No caso do modelo de eletrodo, uma vez que tanto as condutividades quanto as espessuras são desconhecidas (segundo a hipótese de Hua et al. (1993) e como já sugerido no capítulo 1), tais termos também foram definidos como incógnitas do MOT, dando origem ao quociente propriedade dividido por espessura. Nesta situação, o modelo de material é dado pela equação

$$\left(\frac{\sigma_{el}}{t_{el}}\right)_i = \rho_i \left(\frac{\sigma_{Ael}}{t_{Ael}}\right) + (1 - \rho_i) \left(\frac{\sigma_{Bel}}{t_{Bel}}\right), \quad 0 \leq \rho_i \leq 1, \quad (2.3.2)$$

onde $(\sigma_{el}/t_{el})_i$ é a i -ésima incógnita, t_{el} é a espessura correspondente, σ_{Ael}/t_{Ael} e σ_{Bel}/t_{Bel} são os limites para os valores das incógnitas e ρ_i é a i -ésima variável de otimização. O mesmo índice i visto na função objetivo (vide definição dos problemas de otimização abaixo) foi empregado neste caso, pois se utilizaram tantas incógnitas quantos foram os pontos de medição ou eletrodos considerados. O termo dado pela resistividade correspondente a σ_{el} multiplicada por t_{el} é chamado parâmetro de contato do modelo de eletrodo, ou, simplesmente, parâmetro de contato.

O problema de otimização proposto, esquematizado na Figura 2, é dado por:

$$\underset{\rho_f, \rho_i}{\text{Minimizar}} \quad F = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{np} w_{Fij} (\phi_{ij} - \phi_{ij0})^2 \quad (2.3.3)$$

Talque equações de MEF
 equações dos modelos de material
 $0 \leq \rho_f \leq 1$
 $0 \leq \rho_i \leq 1$
 $f = 1 \dots N$

onde F é a função objetivo, ne é o número de padrões de corrente aplicados, np o de pontos (eletrodos) de medição, $\phi_{ij} = \phi_{ij}(\rho_f, \rho_i)$ é o potencial do eletrodo i , para o padrão de corrente j , calculado do modelo de MEF, ϕ_{ij0} é o potencial correspondente tomado no corpo a ser tomografado ou de um fantoma, ou seja, é entrada do sistema, ρ_f é uma variável nodal de

otimização, N é o número total destas variáveis, ou seja, é igual ao número de nós da malha de elementos finitos sem os modelos de eletrodo, e w_{Fij} é um peso aplicado para retirar o potencial correspondente da otimização, no caso de haver alguma imprecisão de medida (num caso experimental) ou alguma imprecisão no cálculo de ϕ_{ij0} ou ϕ_{ij} . Finalmente, as restrições de desigualdade mostradas são denominadas restrições de caixa ou laterais.

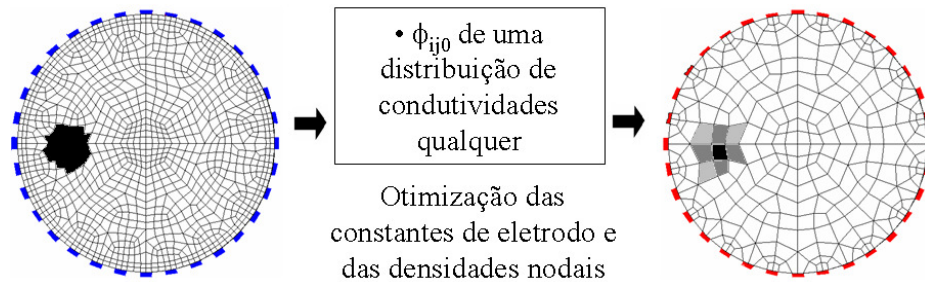


Figura 2 Abordagem de solução do problema de otimização, realizada (a solução) através do chamado Método da Alternância. Esse método é explicado no texto.

A solução do problema (2.3.3) foi obtida através da Programação Linear Sequencial (PLS), que combina uma série de problemas de Programação Linear (PL) (VANDERPLATZ, 1984), num processo iterativo (HAFTKA; GÜRDAL, 1999; MELLO, 2005) a partir de um valor inicial fornecido para o programa até a convergência para o valor ótimo (neste trabalho, foi empregado o método Simplex de PL, visto em detalhes em Press et al. (1999)). Tal método se utiliza da informação dos gradientes da função objetivo e restrições, os quais foram calculados através do método adjunto (HAFTKA; GÜRDAL, 1999). Em outras palavras, os gradientes são computados através da imposição de padrões de corrente fictícios, de tal forma que a quantidade de soluções de sistemas lineares seja reduzida com relação ao método direto (HAFTKA; GÜRDAL, 1999). Isso implica em menores tempos computacionais e menos propagação de erros para o valor do gradiente. O cálculo do gradiente de F , em particular, é mostrado em seguida, no capítulo 3.

Em cada iteração de PLS, limites móveis auxiliares são impostos às variáveis de otimização, com o intuito de validar a função linearizada e forçar a convergência do MOT (vide Mello (2005)). Tais limites foram atualizados a cada iteração e obtidos com base na variação dos valores das variáveis de otimização.

Novamente, uma das vantagens do MOT é a relativamente simples adição de restrições ao problema de otimização, exigindo apenas a obtenção dos gradientes das mesmas. Além

disso, sabe-se que a PLS reduz a propagação de erros numéricos ao longo do processo iterativo (VALLEJO, 2007b).

Na solução do problema (2.3.3), problemas de convergência podem surgir no processo iterativo de otimização devido às grandes diferenças entre as magnitudes das derivadas da função objetivo em relação às variáveis dadas por ρ_f e ρ_i , se um esquema seletivo para atualização dos limites móveis não for adotado (MELLO et al., 2008). Uma vez que o ajuste seletivo dos limites, com base no tipo de variável de otimização, representa uma questão em aberto, optou-se por dividir o procedimento de otimização em dois processos iterativos diferentes, englobados por um processo iterativo global. No primeiro estágio, as condutividades nodais do passo anterior são mantidas constantes, e apenas os valores de ρ_i são otimizados. Então, num segundo estágio, um novo conjunto de valores nodais de condutividades é obtido, mantendo os parâmetros de contato fixos. Esses dois procedimentos de otimização formam um passo global. O algoritmo começa de uma sugestão inicial para as resistividades e parâmetros de contato e continua até a convergência da solução. Tal abordagem é chamada de Método da Alternância e é empregada nas investigações com fantasmas numéricos realizadas no atual trabalho.

Ainda, por motivos discutidos na seção de respostas (seção 2.4), utilizou-se o modelo de eletrodo em “curto-circuito” (o que equivale ao “gap-model”) em resultados experimentais, o que significa que os efeitos da interface de contato foram negligenciados. Nessa situação, alguns nós superficiais da malha padrão (sem considerar a interface de contato) são selecionados para representar os eletrodos e igualdade de potencial nos nós referentes a um eletrodo é imposta, para cada um deles; além disso, o problema (2.3.3) é resolvido apenas em ρ_f . Essa abordagem é utilizada em Mello et al. (2008).

2.4 Resultados e Discussão

Nesta seção, serão apresentadas algumas imagens geradas com o software implementado, examinando tanto um fantoma numérico quanto um fantoma experimental. Em todos os exemplos, uma corrente senoidal de baixa intensidade é aplicada e todos os cálculos são realizados num PC. A amplitude do sinal de corrente é de 1mA pico-a-pico.

A malha de estimação é menos discretizada que a malha do fantoma, para emular situação real¹. Trinta e dois eletrodos quadrados (10mm de lado) são uniformemente posicionados ao longo da superfície da malha de estimação e do fantoma numérico. São também fixados, uniformemente, 32 eletrodos em forma de barra ao fantoma experimental e ao seu modelo (vide subseção 2.4.2). Uma vez que são utilizados somente 32 eletrodos, não se pode assegurar unicidade da solução (KOHN; MCKENNEY, 1990).

Para executar medidas, um par de eletrodos adjacentes é excitado eletricamente, sendo o potencial num deles então fixado como nulo. Este procedimento, que define um padrão de corrente (vide capítulo 1), é repetido, mudando-se o par de eletrodos adjacentes. Trinta e dois padrões são aplicados.

2.4.1 Resultados Numéricos

Na atual subseção, os potenciais elétricos ϕ_{ij0} , mencionados na definição do problema de MOT na seção 2.3, são obtidos através de análises de MEF do fantoma numérico mostrado na Figura 3. Portanto, apenas dados numéricos são considerados.

¹ Assim, evita-se o chamado “inverse crime” (KAIPIO; SOMERSALO, 2005).

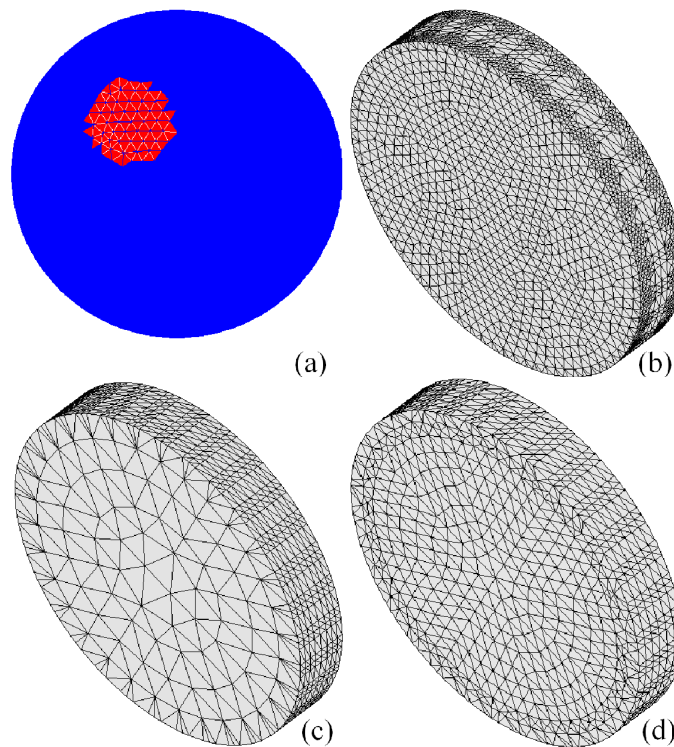


Figura 3 (a) Seção central do fantoma numérico (imagem a ser estimada). (b) Malha do modelo de fantoma numérico. (c) Malha onde se estima a imagem para os resultados de contrastes elevados (5548 elementos). (d) Malha onde se estima a imagem para os resultados de contrastes moderados (13130 elementos).

O fantoma é um domínio cilíndrico de diâmetro igual a 220mm e de espessura 35 mm, dividido em 34359 elementos tetraédricos com quatro nós cada (vide Figura 3(b)). A distribuição de resistividades é aproximadamente uniforme ao longo de seu eixo central. A Figura 3(a) mostra a seção central do fantoma. Todos os parâmetros de contato são iguais a $0,01\Omega\text{m}^2$ e os elétrodos são colocados na camada central da superfície lateral externa da malha 3D.

Nas primeiras investigações realizadas, que se referem aos resultados com contraste elevado, a maior parte do fantoma (região basal) apresenta resistividade de $17\Omega\text{m}$ (cujo inverso é igual a σ_A na eq.(2.3.1)), e o objeto menor apresenta resistividade igual a $10^6\Omega\text{m}$ (cujo inverso é igual a σ_B na eq.(2.3.1)). De uma perspectiva médica, esta condição pode representar um pneumotórax. Embora o ar tenha uma resistividade maior, $10^6\Omega\text{m}$ é um valor elevado o suficiente para informar o médico da ocorrência de um pneumotórax (MELLO et al., 2008). Como nota, um valor de ordem de grandeza comparável, $2 \cdot 10^5\Omega\text{m}$, foi adotado como resistividade do ar no interior do tórax no modelo do problema direto (BROWN et al., 2002).

Por outro lado, a resistividade máxima do parênquima pulmonar raramente excede $20\Omega\text{m}$, um valor alcançado apenas quando a respiração atinge as proximidades do limite de capacidade máxima do pulmão. Nessas condições, para simular uma situação em que a hiperdistensão, atelectasia ou pneumonia são as preocupações médicas, as quais são hipóteses diagnósticas quando o contraste de resistividade entre as regiões parenquimal normal e abnormal é relativamente muito menor (uma região tem resistividade de 2 a 5 vezes maior que a outra, no máximo) e o nível do contraste é desconhecido, é realizada outra investigação. Nesse caso, as resistividades do fantoma numérico são alteradas para $4\Omega\text{m}$ para a região basal (cujo inverso é igual a σ_A na eq.(2.3.1)), e $8\Omega\text{m}$ para a inclusão, e a restrição de limite superior para as resistividades é desabilitada.

A estimação da imagem é realizada numa malha de 5548 elementos tetraédricos de 4 nós (veja Figura 3(c)) nas investigações de contraste elevado e de 13130 elementos do mesmo tipo (veja Figura 3(d)) nas demais, referentes a contrastes moderados. O número de elementos foi aumentado, pois não foi possível atingir uma resolução espacial satisfatória com a primeira malha quando a hipótese de que se conhece o limite superior para os valores de resistividade não foi empregada na obtenção da imagem. As seguintes respostas são obtidas utilizando-se o Método da Alternância.

Resultados com Contrastes Elevados

Os resultados são mostrados na Figura 4, enquanto o resultado na Figura 4(b) inclui ruído numérico². A imagem central corresponde à seção central do domínio e as outras imagens a seções externas (como nas demais respostas). No início do processo de otimização, o valor de p (vide (2.3.1)) é igual a 1; no entanto, é alterado para 2 depois que a convergência do processo iterativo global do Método da Alternância ocorre. O algoritmo inicia à partir de uma distribuição uniforme de resistividades igual a $17\Omega\text{m}$, que também é igual ao valor mínimo permitido (σ_A na eq.(2.3.1); o máximo é $10^6\Omega\text{m}$). Os parâmetros de contato iniciais são iguais a $0,0011\Omega\text{m}^2$.

² Um ruído uniformemente distribuído e de média nula é considerado, sendo o valor máximo adicionado ou subtraído ao valor de potencial Φ_{ij0} , igual a 15% do valor do mesmo potencial.

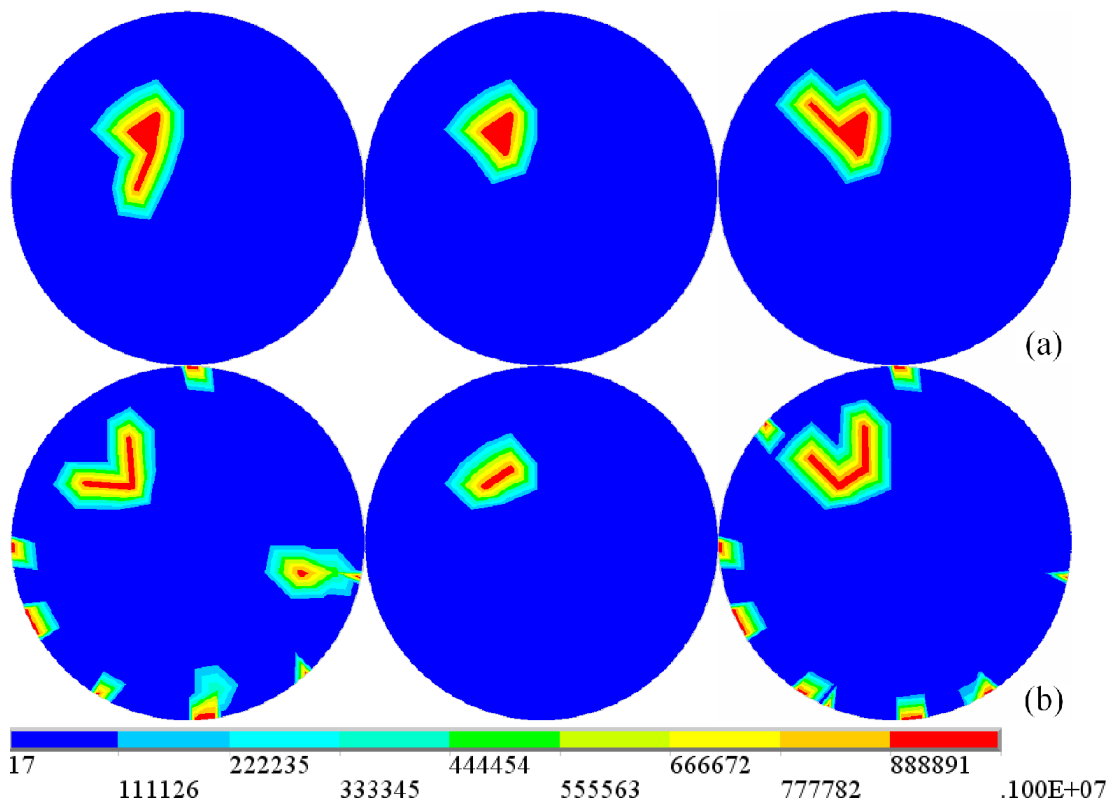


Figura 4 Imagens de resistividade obtidas (unidades: Ωm ; fantoma numérico mostrado na Figura 3(a)). (a) Sem ruído. (b) Considerando-se ruído.

De acordo com os resultados, a posição correta do objeto e valores absolutos corretos de resistividades foram obtidos, embora a geometria seja ligeiramente diferente. Além disso, alguns artefatos na periferia da imagem são gerados quando ruído numérico é adicionado a ϕ_{ij0} . Os valores finais de parâmetros de contato que correspondem à Figura 4(a) (sem ruído) variam entre 0,0192 e 0,0233 Ωm^2 . A gama aumenta quando ruído é introduzido (Figura 4(b)): de 0,0184 a 0,0234 Ωm^2 . Conforme comentado (MELLO et al., 2008) acredita-se que as discrepâncias entre resultados e o fantoma são devidos, principalmente, às diferenças entre a malha de estimação e a do fantoma. Além disso, acredita-se que o ruído agrava tal condição.

Na abordagem pelo Método da Alternância, as respostas são profundamente dependentes das sugestões iniciais de condutividades fornecidas ao programa. Por exemplo, quando o algoritmo inicia o processo iterativo com resistividades nodais iguais a 34 Ωm , e parâmetros de contato iguais a 0,0011 Ωm^2 , os valores máximo e mínimo de tais parâmetros encontrados são iguais a, aproximadamente, 0,0017 e 0,0005 Ωm^2 , respectivamente. Ao contrário dos outros resultados, o mínimo está muito próximo do limite imposto (σ_{Ael}/t_{Ael} na eq.(2.3.2)). O resultado é mostrado na Figura 5, obtido sem ruído. Isso sugere que, mesmo se os potenciais em eletrodos de corrente e de referência não são considerados, o algoritmo pode

produzir artefatos periféricos e um objeto com diâmetro incorreto se os parâmetros de contato são incorretos.

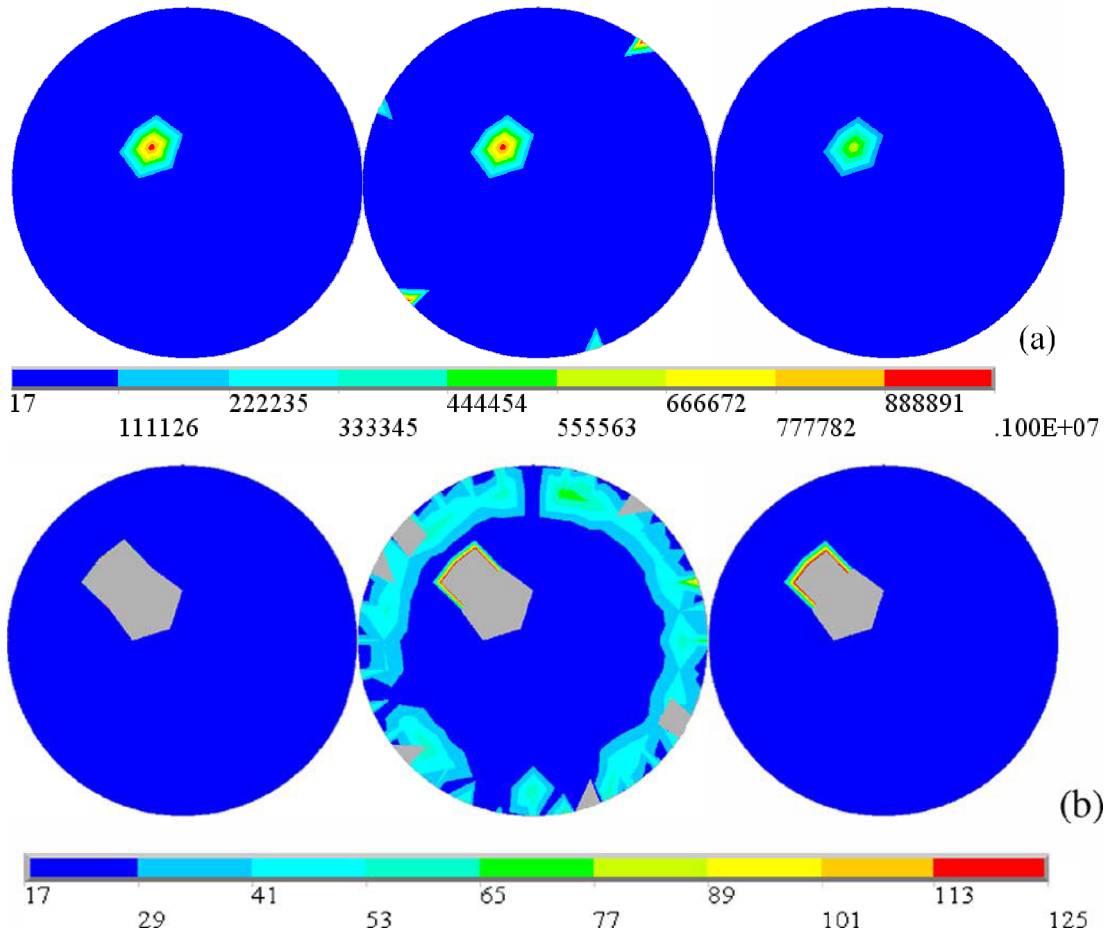


Figura 5 Distribuição de resistividades obtida (unidades: Ωm). Os valores finais máximo e mínimo de parâmetros de contato obtidos são iguais a $0,0017\Omega\text{m}^2$ e $0,0005\Omega\text{m}^2$. Gama de valores de resistividade mostrada: (a) de $17\Omega\text{m}$ a $10^6\Omega\text{m}$; (b) de $17\Omega\text{m}$ a $125\Omega\text{m}$ (a cor cinza corresponde a resistividades acima de $125\Omega\text{m}$).

Uma maneira de aumentar os valores ótimos de parâmetros de contato e, por conseguinte, melhorar a fidelidade da imagem é fixar as resistividades nodais da região anular superficial do modelo (a mesma região onde se fixam os eletrodos) em $17\Omega\text{m}$, o valor utilizado no fantoma. Outra maneira é impedir que ocorra a convergência dos dois processos iterativos incorporados no Método da Alternância, permitindo apenas uma iteração para cada um deles. Seguindo tais protocolos, parâmetros de contato entre $0,0074$ e $0,0119\Omega\text{m}^2$ e entre $0,0007$ e $0,0095\Omega\text{m}^2$ são gerados, respectivamente. As imagens correspondentes (Figura 6(a) e (b)) são, de fato, mais precisas que o resultado da Figura 5. Diferenças também se tornam aparentes quando o intervalo de resistividades plotado é reduzido, como mostrado na Figura 7.

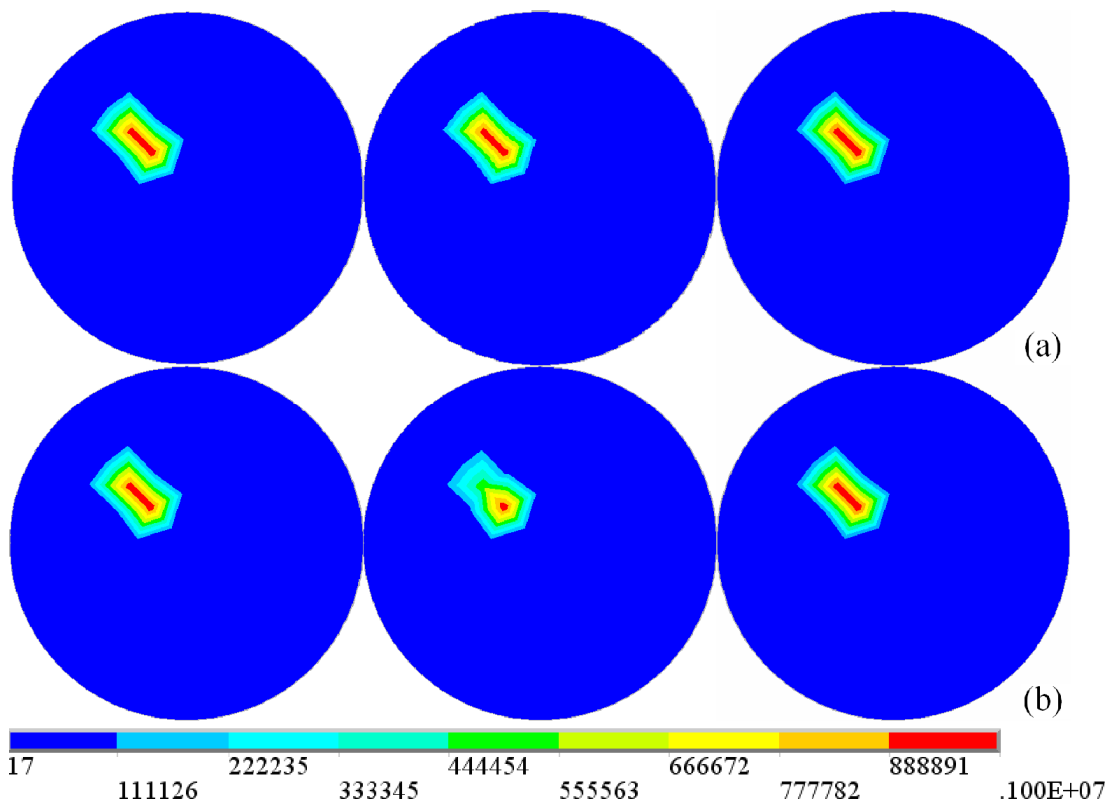


Figura 6 Distribuição de resistividades obtida (unidades: Ωm). (a) As resistividades dos nós da superfície lateral da malha de estimação são fixados em $17\Omega\text{m}$. (b) Apenas uma iteração para cada conjunto de parâmetros é permitida no Método da Alternância.

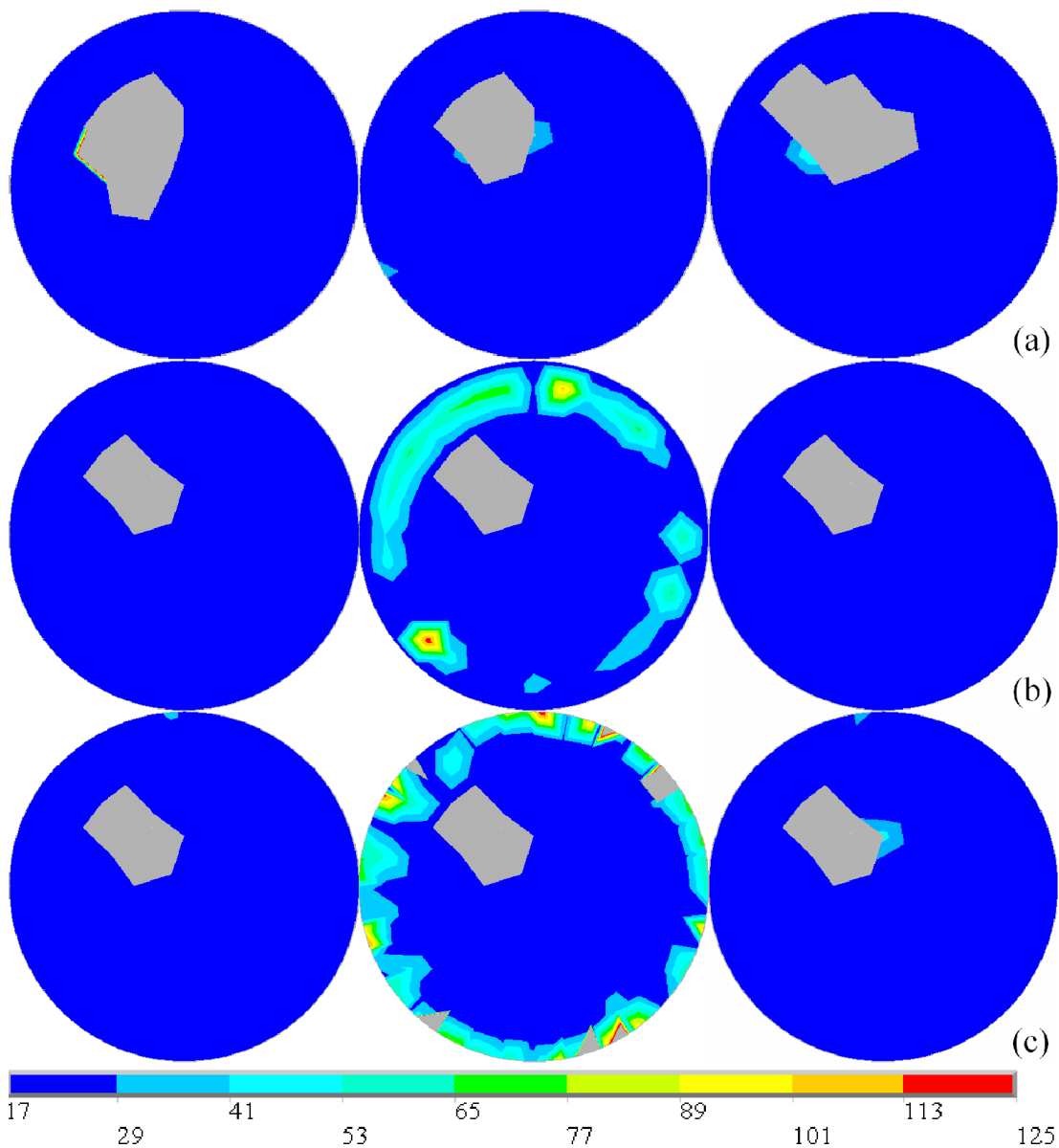


Figura 7 Distribuição de resistividades obtida (unidades: Ωm). São mostradas as respostas anteriores para a nova gama de valores considerada. A cor cinza corresponde a resistividades acima de $125\Omega\text{m}$.

(a) Resultados mostrados na Figura 4(a). (b) Resultados mostrados na Figura 6(a). (c) Resultados mostrados na Figura 6(b).

Seguindo o raciocínio de que relativamente pequenos erros nas imagens (comparando com a magnitude do intervalo de valores estimados) ocorrem, mesmo quando os parâmetros de contato obtidos são próximos de $0,001\Omega\text{m}^2$ ou menores, uma nova abordagem pode ser proposta para ser aplicada em testes experimentais. Isso é discutido na subseção 2.4.2.

Resultados com Contrastes Moderados

Os resultados são mostrados na Figura 8. Neste caso, são obtidos também os parâmetros de contato através do Método da Alternância. O fator de penalização p (vide (2.3.1)) permanece unitário durante todo o processo iterativo, uma vez que a restrição de valor máximo de resistividade é mantida desligada ao longo do processo. Ainda, o valor inicial de resistividade na otimização é $4\Omega\text{m}$, igual ao valor mínimo permitido, ou seja, empregado como restrição de limite inferior. O valor inicial para os parâmetros de contato é $0,0011\Omega\text{m}^2$.

Um esquema explícito de controle do gradiente espacial de condutividades é adotado. Em tal abordagem, uma transformação linear é aplicada às variáveis de otimização nodais de tal forma que cada uma é igual à soma ponderada de novas variáveis nodais dividida pela soma dos pesos. Os pesos são funções constantes por partes, iguais a um para nós no interior da região dada por um raio prescrito e zero em caso contrário. Nessas condições, uma solução suave de condutividades é forçada. Tal esquema possui o nome de técnica de Projeção e é discutido, em detalhes, no APÊNDICE C (inclusive, discute-se a escolha do peso no atual trabalho).

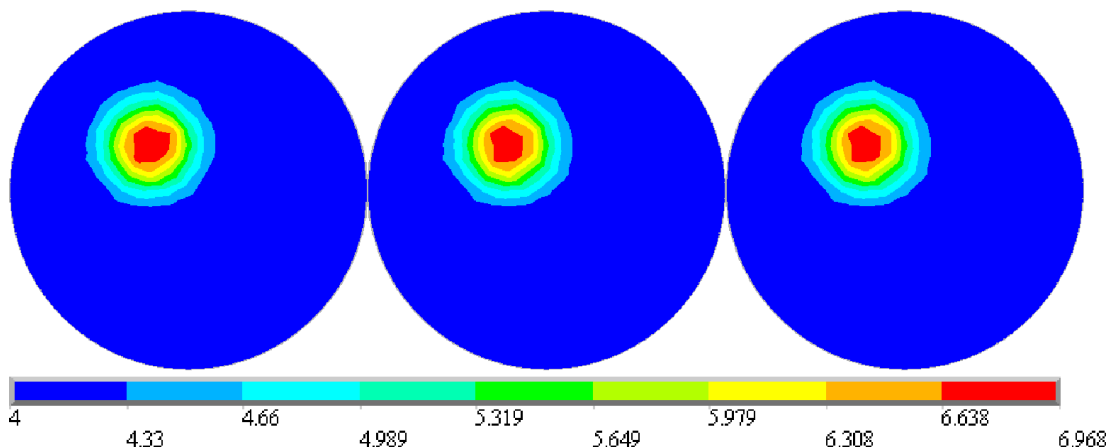


Figura 8 Distribuição de resistividades obtida (unidades: Ωm).

A posição correta da inclusão, bem como uma geometria satisfatória são obtidas, como é visto na figura. Valores absolutos de resistividade dentro de um erro de 15% foram obtidos, o que é informativo do ponto de vista clínico/médico. Além disso, não há artefatos periféricos para a gama de valores plotada e os valores finais de parâmetros de contato variam entre $0,0120$ a $0,0131\Omega\text{m}^2$, os quais estão relativamente mais próximos dos valores utilizados no

fantoma numérico considerado. Essa maior proximidade era esperada já que a diferença entre discretizações das malhas de estimação e do fantoma numérico não é tão acentuada quanto a considerada nos outros exemplos numéricos.

2.4.2 Resultado Experimental

Nesta subseção, um fantoma experimental, no qual se medem valores de potenciais elétricos ϕ_{ij0} , é utilizado. Tal fantoma é dado por um recipiente cilíndrico com 32 eletrodos em barra (vide Figura 9) de 35mm por 10mm. O recipiente é cheio com 35mm de solução salina (NaCl), de concentração igual a 0,3 g/L. A resistividade da solução utilizada é de, aproximadamente, $17\Omega\text{m}$ e o diâmetro é 220mm, igual ao diâmetro interno do recipiente. O pequeno círculo mostrado na Figura 9(b) representa um objeto de vidro presente no recipiente ($10^6\Omega\text{m}$, vide Philips (1960)). Este exemplo de contraste elevado novamente representa um pneumotórax. As condutividades da solução salina e do vidro mostradas são utilizadas como valores extremos permitidos (σ_A e σ_B , respectivamente) na eq.(2.3.1). O coeficiente de penalização p , mostrado na mesma equação, é igual a 1 no início do processo iterativo e é modificado para 2 quando a convergência referente ao laço global do Método da Alternância ocorre. Uma nova malha de estimação com 11623 elementos tetraédricos de quatro nós é gerada.

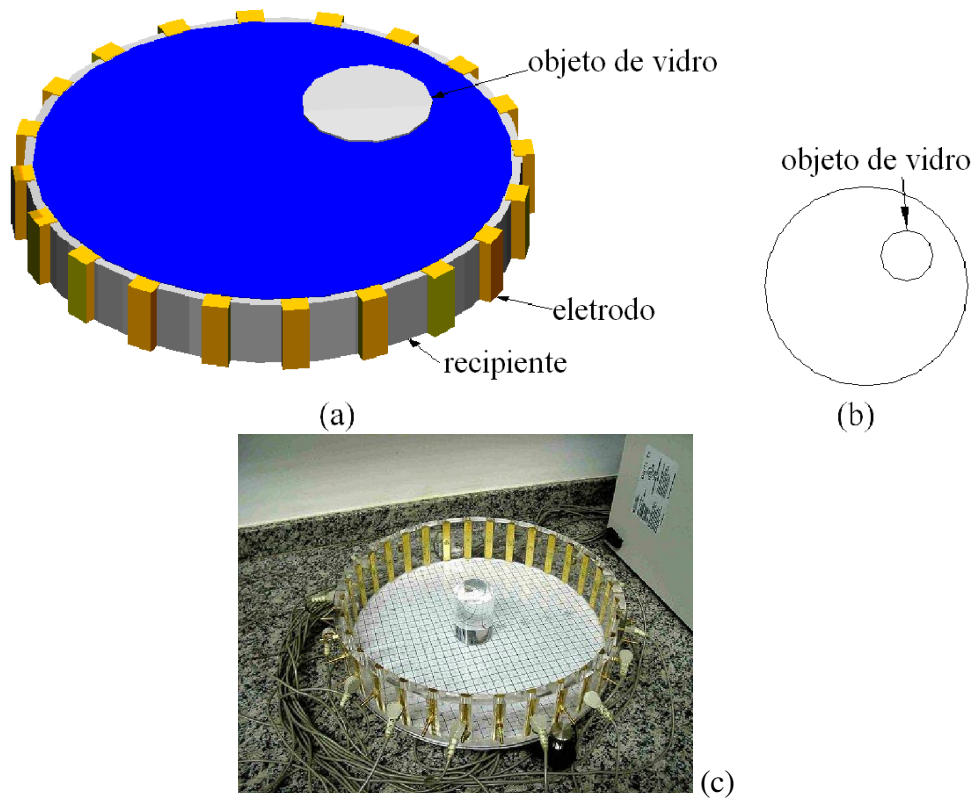


Figura 9 (a) Esquema do fantoma experimental. (b) Imagem a ser estimada. (c) Foto de fantoma semelhante ao utilizado (tal fantoma também é empregado pelo grupo do Projeto Temático).

De acordo com os resultados numéricos na subseção 2.4.1, imagens satisfatórias foram obtidas mesmo quando parâmetros de contato de valores relativamente baixos foram estimados. Desta maneira, e assumindo-se parâmetros de contato do recipiente da Figura 9 desprezíveis, o modelo de eletrodo “gap-model” foi utilizado na avaliação experimental do algoritmo. Portanto, conforme comentado na seção 2.3, o Método da alternância não foi empregado. Os resultados são mostrados na Figura 10.

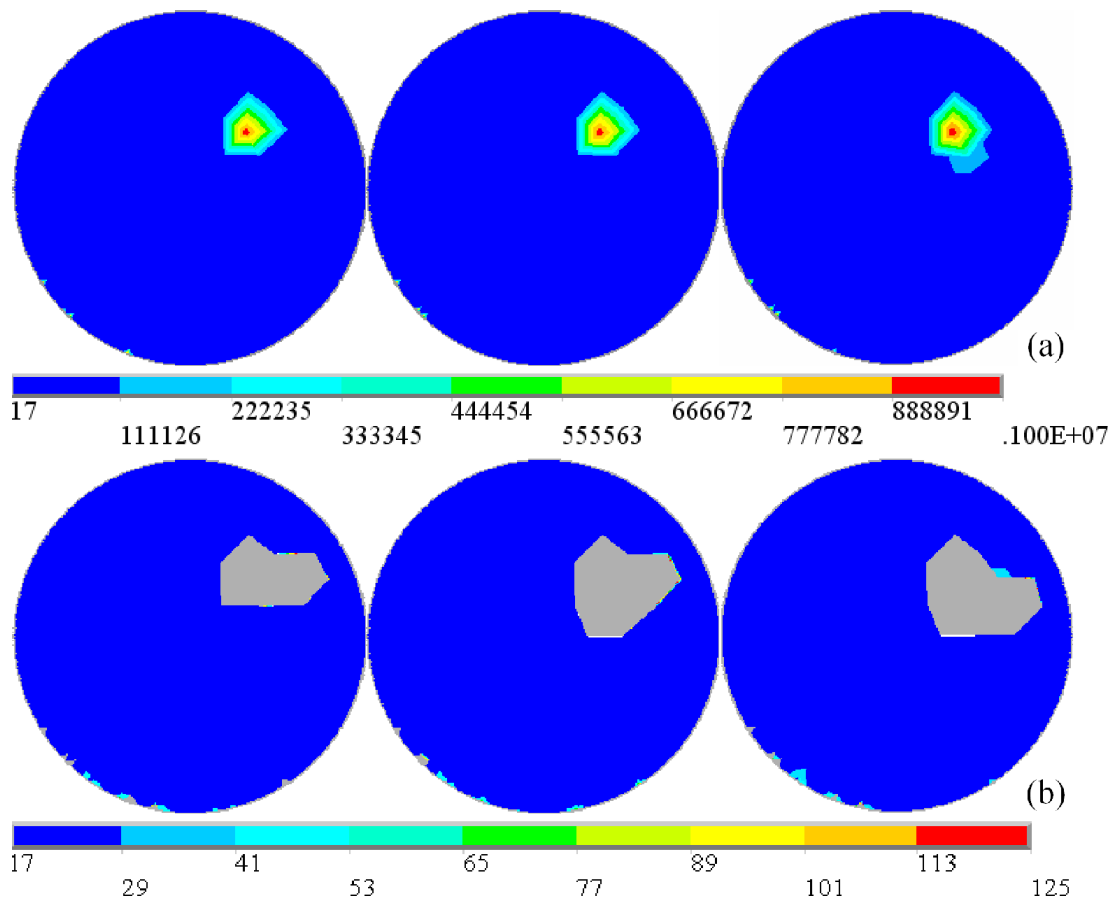


Figura 10 Distribuição de resistividades obtida (unidades: Ωm ; respostas para o fantoma da Figura 9(b)). O efeito dos modelos de eletrodo é negligenciado. Gama de valores de resistividade mostrada: (a) de $17\Omega\text{m}$ a $10^6\Omega\text{m}$; (b) de $17\Omega\text{m}$ a $125\Omega\text{m}$ (a cor cinza corresponde a resistividades acima de $125\Omega\text{m}$).

O programa implementado foi apto a detectar o objeto de vidro no interior da solução salina. Posições corretas e valores absolutos de resistividade corretos foram encontrados, e apenas poucos artefatos na região da periferia da imagem ocorreram, o que sugere que o modelo “gap-model” é uma escolha plausível (neste caso). No entanto, a região de resistividade elevada é menor que a região real.

2.5 Conclusão

Algumas características do MOT e do algoritmo implementado, aplicados à solução do problema mal-posto e não-linear de TIE 3D, são mostradas. Resultados numéricos, por sua vez, mostram a capacidade de obtenção das resistividades de dois materiais, mesmo com a

adição de ruído ou quando o nível de contraste é desconhecido. Considerando também as respostas experimentais, as imagens sugerem que o algoritmo é potencialmente capaz de monitorar a ventilação pulmonar imposta pela ventilação mecânica, incluindo a possibilidade de detecção de um pneumotórax.

O Método da Alternância foi testado. É mostrado que o resultado final depende dos valores iniciais considerados para as variáveis de otimização. No entanto, quando algumas características do fantoma são conhecidas (como a resistividade de regiões periféricas) e utilizadas, as imagens tornam-se, conseqüentemente, mais precisas.

Os resultados experimentais (quando comparados aos numéricos) indicam que o efeito da utilização na estimação, de parâmetros de contato menores que os do fantoma é menos expressivo nesses casos (na realidade, considera-se a resistividade da interface de contato nula através do “gap-model”). Acredita-se que isso ocorre devido aos valores de resistividades de contato do aparato experimental serem desprezíveis.

Como meio de melhorar a imagem, é sugerida a imposição de restrições à distribuição de condutividades nodais, baseadas na distância para os eletrodos. A distância é indicada uma vez que a sensibilidade a mudanças de resistividade em regiões periféricas é maior que em regiões mais afastadas (BACRIE; GOUSSARD; GUARDO, 1997; AYA et al., 2006). Ainda, sugerem-se refinar a malha adaptativamente, para aumentar a resolução espacial em locais específicos do modelo, e a segmentação da imagem (diferente da técnica discutida no capítulo 3), para obtenção de uma imagem com maior resolução em resistividade (vide Mello et al. (2008) para uma explicação da técnica de segmentação).

3 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA BASEADO EM CONFIABILIDADE APLICADO À TOMOGRAFIA DE IMPEDÂNCIA ELÉTRICA

Neste capítulo, descrevem-se a **fundamentação teórica, a implementação e o teste** da metodologia MOTC aplicada à obtenção de imagens absolutas de TIE, levando-se em conta o caráter incerto das diferenças de potenciais medidas e das próprias condutividades. Variáveis associadas a incertezas são modeladas como aleatórias e, então, geram-se resultados médios numéricos de valores absolutos de condutividades a partir dos dados do Atlas Anatômico Numérico descrito no APÊNDICE B. Alternativamente, para o caso de incertezas reduzidas referentes a uma parte das variáveis e incertezas elevadas referentes às variáveis restantes, propõe-se programa que modela o primeiro grupo como variáveis determinísticas e o segundo como aleatórias (nesse caso, estimam-se, novamente, as médias das variáveis aleatórias, além das próprias incógnitas determinísticas). Finalmente, assumindo-se que as covariâncias de variáveis aleatórias não são conhecidas (com exceção das covariâncias de medidas de potenciais, as quais podem ser calculadas diretamente), propõe-se algoritmo para estimá-las em conjunto com as médias das variáveis aleatórias. Ao final do capítulo, descrevem-se as conclusões gerais e, no APÊNDICE D, maneiras de se aprimorar o algoritmo proposto. Como nota, um Atlas Anatômico Numérico emula um Atlas Anatômico real (KAPIO; SOMERSALO, 2005), um conjunto de dados de medidas de uma ou mais variáveis associadas a incertezas (como potenciais), fonte de informação previamente obtida e utilizada na estimação de TIE, mais especificamente na determinação de aproximações para a densidade de probabilidade e para os momentos das variáveis aleatórias.

3.1 Introdução

A natureza incerta de algumas variáveis do problema de TIE, que se reflete em incertezas em seus valores, se apresenta em variáveis como os potenciais elétricos medidos nos eletrodos, como citado. Tais incertezas nos valores de potenciais se devem aos próprios

aparelhos de medição e a eventuais agentes externos, sendo, nesse caso, conhecidas por ruídos ou erros de medição (METHERALL, 1998; AMATO, 2001; TRIGO, 2001), e à natureza dinâmica das propriedades elétricas dos materiais e tecidos no interior do corpo.

Além dos potenciais, outras fontes de incertezas podem ser relevantes, como as relacionadas às correntes elétricas impostas ao meio condutivo tomografado, ou as relacionadas à determinação (medição) da geometria do corpo tomografado e das posições dos eletrodos no contorno, dentre outras, o que resulta em valores incertos dos valores das variáveis correspondentes e, conseqüentemente, da função de erro e da imagem estimada.

Com o intuito de se levar em conta tais incertezas na obtenção da imagem, gerando-se resultados mais confiáveis, o autor propõe utilizar o chamado MOTC. Tal método, bem como o método semelhante Método de Otimização de Projeto baseado em Confiabilidade (MODC, ou “Reliability-based Design Optimization”), é, em essência, probabilístico e tem sido aplicado em diversos trabalhos, nos mais diversos campos do conhecimento. No MODC, alternativamente ao MOTC, as variáveis são parâmetros de um sistema definido (como espessuras, áreas, etc.) advindos do chamado problema de otimização de parâmetros.

Outros métodos como a otimização de projeto robusta (MAUTE; FRANGOPOL, 2003), por exemplo, também levam em conta incertezas em variáveis do problema. Porém, a otimização robusta em especial, é baseada numa análise puramente determinística, mais especificamente na maximização do desempenho (função objetivo) determinístico do sistema, com a redução – ou, se possível, minimização – simultânea da sensibilidade do desempenho com respeito aos parâmetros que exibem comportamento estatístico.

Como exemplo de uma das maneiras de se reduzir a sensibilidade do desempenho, considera-se um caso de otimização estrutural (BENDSØE; SIGMUND, 2003; KHARMANDA et al., 2004; MAUTE; FRANGOPOL, 2003), para o qual um carregamento concentrado, de média nula e desvio padrão σ , é aplicado num ponto qualquer do domínio de otimização (onde se pode encontrar a estrutura ótima), na direção x (vide Figura 11). Maximiza-se a rigidez estrutural (a qual representa o desempenho) com restrição de volume total de material (situação usual na área de otimização estrutural). A sensibilidade da rigidez é reduzida através, por exemplo, da utilização de dois carregamentos determinísticos concentrados e de sentidos opostos aplicados no domínio de otimização, no mesmo ponto e na mesma direção anteriores (conforme é visto na Figura 11), emulando o carregamento incerto.

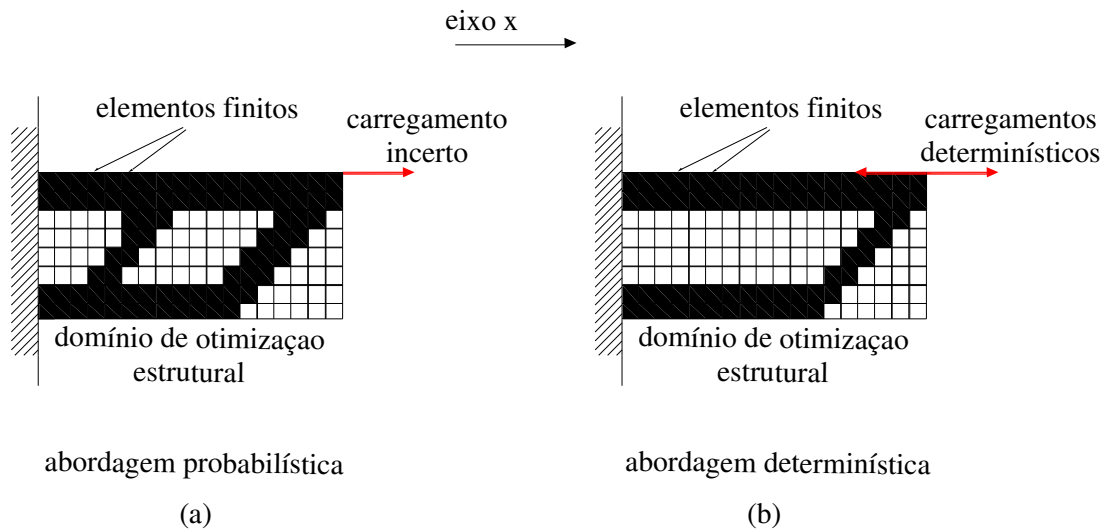


Figura 11 Ilustração mostrando as abordagens probabilística (em (a)) e determinística (em (b)) num problema de otimização estrutural. Um esboço da estrutura ótima é mostrado, para cada caso.

Como a análise no caso da otimização de projeto robusta é puramente determinística, a probabilidade de ocorrência de eventos indesejados não é levada em conta, diretamente, na solução do problema de otimização. Na prática, obtêm-se normalmente estruturas subestimadas (mesmo sendo o desempenho pouco sensível às incertezas, como discutido anteriormente). É difícil traçar um paralelo entre esse problema estrutural e o de TIE, mas pode-se afirmar, com segurança, que se as probabilidades não são levadas em conta na obtenção da imagem quando existem incertezas nos dados de TIE e nos modelos, existe a chance de que a imagem não corresponda à imagem real. Ainda, pode-se dizer que a chance aumenta com o aumento das incertezas sobre dados e que o erro cometido não é quantificado (nem mesmo aproximadamente).

A vantagem do MOTC e do MODC sobre a otimização robusta, os quais remediaram os problemas citados no parágrafo anterior, reside, justamente, na obtenção de distribuições espaciais de propriedades que atendem a requisitos de probabilidade ou são ótimos num sentido probabilístico. Tais requisitos são atendidos porque são impostas restrições sobre a probabilidade de ocorrência de determinados eventos e/ou são otimizadas probabilidades de ocorrência de eventos.

Como pode ser visto na leitura sobre os trabalhos de MOTC, a utilização de uma abordagem probabilística no contexto da otimização topológica surge de maneira bastante natural. Em primeiro, modelam-se variáveis associadas a incertezas como variáveis aleatórias (PAPOULIS; PILLAI, 2002). Então, dado que as funções envolvidas no problema de otimização determinístico, ou seja, a função objetivo e restrições, dependem de variáveis

aleatórias, as próprias funções podem também ser vistas como variáveis aleatórias; desta maneira, pode-se calcular a probabilidade do evento: *ser determinada função do problema de otimização maior que um determinado valor*, por exemplo, e, naturalmente, buscar os parâmetros que minimizem tal probabilidade ou que façam com que uma restrição aplicada ao valor da probabilidade seja obedecida. Isso corresponde justamente a um problema de MOTC, mostrando a naturalidade da extensão de um problema determinístico ao equivalente probabilístico no caso do MOT, o que pode ser encarado como uma vantagem do MOTC. Além disso, os importantes conceitos utilizados no MOT, como o modelo de material, são também introduzidos de maneira natural no contexto do MOTC.

Alguns autores como Vauhkonen, Karjalainen e Kaipio (1998), Kolehmainen et al. (1998), Kim et al. (2001a), Heikkinen et al. (2002), Kim et al. (2003), Trigo, Lima e Amato (2004), West et al. (2004) e, recentemente, Adler, Dai e Lionheart (2007), Kim et al. (2007b), Herrera (2007) e Watzenig e Fox (2009), utilizam técnicas que, da mesma maneira que o MOTC ou o MODC, empregam requisitos probabilísticos na determinação da imagem, dando origem a estimadores de parâmetros probabilísticos diversos. Porém, há algumas questões em aberto no momento, considerando-se a área médica.

No caso do filtro de Kalman, por exemplo (VAUHKONEN; KARJALAINEN; KAIPIO, 1998; KIM et al., 2001a; KIM et al., 2003; TRIGO; LIMA; AMATO, 2004; KIM et al., 2007b), utiliza-se a dinâmica da distribuição de propriedades do corpo tomografado para tornar a estimação mais eficiente. No entanto, os efeitos de “trilha” ou artefatos periféricos e posições incorretas, erros obtidos para diferentes parâmetros de regularização, são relatados nas respostas por Adler, Dai e Lionheart (2007). Por efeito de “trilha” se entende o efeito da imagem estimada, segundo o qual a distribuição mostra o caminho da perturbação, ou seja, sua posição em instantes anteriores, como um rastro. Além disso, nos trabalhos de Vauhkonen, Karjalainen e Kaipio (1998), Kolehmainen et al. (1998), Kim et al. (2001a), Heikkinen et al. (2002), Kim et al. (2003), Trigo, Lima e Amato (2004), Adler, Dai e Lionheart (2007) e Kim et al. (2007b), resultados experimentais apresentam valores subestimados e as interfaces não são bem definidas, ou seja, não é possível localizá-las de maneira precisa através da imagem obtida. O MOTC surge como importante alternativa aos métodos mencionados, uma vez que deriva do MOT, incorporando, como explicado anteriormente, conceitos importantes como restrições e o modelo de material, os quais reduzem, significativamente, os problemas das imagens estimadas explicitados. De fato, o MOT tem apresentado desempenho superior em situações importantes no contexto da TIE

pulmonar (MELLO et al., 2008). Por fim, os métodos relatados em Herrera (2007), West et al. (2004) e Watzenig e Fox (2009), baseados nas técnicas de “Simulated Annealing” (Recozimento Simulado) e “Markov chain Monte Carlo” (os dois últimos artigos), têm apresentado respostas relativamente precisas. Porém, os tempos de processamento costumam ser elevados (o que tem sido estudado).

Finalmente, é importante ressaltar que as variáveis aleatórias consideradas são modeladas como variáveis gaussianas correlacionadas. De fato, nota-se que as medidas em TIE – diferenças de voltagens – e os parâmetros que definem a imagem (esses últimos no caso de desvios padrão reduzidos), podem ser bem aproximados por tais variáveis. Porém, nem sempre a aproximação normal será a mais adequada (a distribuição do tipo Beta – vide Neto e Cymbalista (2000) – parece ser mais adequada para representar os parâmetros que definem a imagem). Nessa situação, como mostrado por Madsen, Krenk e Lind (2006), através da transformação de variáveis de Rosenblatt, pode-se transformar um conjunto de variáveis aleatórias de distribuições quaisquer num conjunto em que tais variáveis se distribuem normalmente, desde que se conheça a função densidade de probabilidade das variáveis originais. Por ser tal transformação, atualmente, apenas aplicada à área de MOTC, pode-se dizer que sua utilização representa uma vantagem do método com relação aos demais métodos aplicados à TIE. A desvantagem, o aumento do tempo de processamento, será eliminada (ou tornada desprezível) no futuro com a utilização de “softwares” e “hardwares” de melhor desempenho, acredita o autor.

A seguir, a formulação de um problema genérico de MOTC é proposta e a teoria associada é analisada, e, na seqüência, formulações aplicadas ao problema de TIE são propostas e discutidas. Então, são mostradas a implementação e as respostas referentes às formulações mencionadas. Cabe ressaltar que os métodos de otimização baseados em confiabilidade estão relativamente difundidos, são aplicados nas mais diversas áreas (MAUTE; FRANGOPOL, 2003; ALLEN; MAUTE, 2004; KHARMANDA et al., 2004; JUNG; CHO, 2004; YOUN et al., 2004; KANG; KIM; WANG, 2004; MOON; KIM; WANG, 2004) e que bastantes esforços na área da teoria estão sendo realizados para torná-los cada vez mais eficientes (QU; HAFTKA, 2004; YANG; GU, 2004; KHARMANDA; OLHOFF; EL-HAMI, 2004; KHARMANDA; MOHAMED; LEMAIRE, 2004). Porém, não há trabalhos no tema aplicados à TIE.

3.2 Formulação Genérica do MOTC

Um problema genérico de MOT, em que todos os parâmetros são considerados determinísticos, pode ser definido da maneira mencionada na seção 2.3, segundo a qual há uma função objetivo e restrições de desigualdade e igualdade. Tais expressões matemáticas dependem de uma série de variáveis, as quais podem ser consideradas como fixas ou constantes, e um conjunto de variáveis de otimização. Como exemplo de variáveis fixas correspondentes ao problema de TIE, podem-se citar os valores das correntes impostas, as dimensões do corpo/objeto tomografado, etc. e, no caso das variáveis de otimização, a variável nodal normalizada de otimização dos nós internos das malhas, a qual define a imagem (ou variável de otimização da imagem), os parâmetros de contato e as variáveis que determinam a posição dos eletrodos.

No presente trabalho, uma variável associada a incertezas, seja ela fixa ou de otimização, é modelada como uma variável aleatória e contínua, ou seja, apresenta uma função densidade de probabilidade contínua (NETO; CYMBALISTA, 2000). No caso de pelo menos uma variável aleatória estar presente no problema de otimização, restrições e demais índices de desempenho, contínuos em tais variáveis, também estão associados a uma função densidade de probabilidade contínua (PAPOULIS; PILLAI, 2002). Alia-se então, naturalmente, o MOT à noção de confiabilidade, definindo-se o seguinte problema genérico, comum a grande parte dos trabalhos de MOTC citados anteriormente:

$$\begin{aligned}
 & \underset{s_k}{\text{Maximizar}} && P(c(s_k, r_m) - \bar{c} \leq 0) \\
 & \text{Tal que} && P(f_n(s_k, r_m) \geq 0) \geq P_n \\
 & && g_q(s_k) \geq 0 \\
 & && g_{eq}(s_k) = 0 \\
 & && s_{kl} \leq s_k \leq s_{ku} \\
 & && k = 1 \dots N, m = 1 \dots R
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

onde $P(\cdot)$ é o operador probabilidade, s_k é a k -ésima variável de otimização, r_m é a m -ésima variável aleatória, uma variável fixa (fixa no sentido de que não é otimizada), e R é o número total de variáveis aleatórias consideradas no problema. Nesta formulação, genérica, assume-se

que s_k pode ser tanto do tipo variável de distribuição, como médias e desvios padrão, quanto do tipo variável determinística, à qual não está associada incerteza, conforme a nomenclatura de Madsen, Krenk e Lind (2006), sendo que o modelo determina o tipo de variável. Por exemplo, as variáveis de otimização da imagem do problema determinístico da seção 2.3 podem ser modeladas, segundo esta nova abordagem, como variáveis aleatórias e, nesse caso, estão associadas a variáveis de otimização de distribuição. Por outro lado, os parâmetros de contato, dados na eq.(2.3.2) no problema determinístico, podem estar associados a variáveis de otimização determinísticas. Isso é possível do ponto de vista matemático, ou seja, pode-se resolver o problema proposto considerando-se uma variável determinística ou de distribuição.

Porém, do ponto de vista físico, dado que medidas de potenciais com incertezas são consideradas no processo de estimação no contexto da TIE, é mais coerente considerar a imagem e parâmetros de contato como variáveis aleatórias e, portanto, as variáveis de otimização como do tipo variável de distribuição. Ainda assim, pode-se utilizar a aproximação de variáveis determinísticas, desde que se saiba de antemão que uma determinada região do corpo, por exemplo, apresentará relativamente pouca variação em torno de um valor médio (e, conseqüentemente, pequena covariância com outras regiões). Outro caso em que seria possível utilizar tal aproximação seria numa situação em que a função erro tivesse sensibilidade relativamente baixa à variação das variáveis. A dificuldade nesse último caso reside no cálculo da sensibilidade, dada pela derivada da função com relação às variáveis. Isso ocorre porque a derivada é uma função das demais variáveis do problema, o que significa que deve ser calculada para todos os valores possíveis, ou, ao menos, seu valor máximo global deve ser computado. Em Kharmanda et al. (2004), procedimento de obtenção das derivadas é adotado; porém, tal procedimento não é informado. Ainda, as derivadas são calculadas com relação às médias das variáveis, e não com relação às mesmas. Assim, sugere-se a utilização da primeira abordagem, baseada em informações conhecidas. Tal abordagem é utilizada no atual trabalho. A segmentação do domínio da imagem em parte determinística e parte não-determinística é também discutida em Vallejo (2007a).

Voltando ao problema proposto, o objetivo é encontrar as variáveis de otimização que maximizem a probabilidade da função custo c ser menor do que ou igual a um valor \bar{c} , sendo obedecida a restrição à probabilidade da função f_n ser maior do que ou igual a zero, o que significa que não há falha (ou um comportamento indesejável do sistema). \bar{P}_n é a probabilidade limite. Além disso, as variáveis de otimização devem satisfazer as restrições

determinísticas, representadas pelas funções g_q e g_{eq} , e as restrições laterais, dadas por s_{kl} e s_{ku} .

Na solução do problema (3.2.1), o problema reside na dificuldade de se encontrar, para um caso genérico, a densidade de probabilidade associada a c - \bar{c} , ou a f_n , funções de cada variável aleatória r_m . Além disso, pode não ser possível calcular as integrais referentes às probabilidades analiticamente, e métodos alternativos como integração numérica ou simulação podem consumir muito tempo, conforme mencionam Madsen, Krenk e Lind (2006). Propõe-se, então, neste trabalho, um método para solucionar tal problema, ao qual está associado (ao método) uma série de hipóteses. Tais hipóteses, o método em si utilizado, e respostas serão descritas no texto seguinte.

Como último comentário, pode-se argumentar que o mais indicado seria trabalhar não somente com os eventos dados por $c \leq \bar{c}$ e $f_n \geq 0$, mas também com as possíveis intersecções entre eles. Desta maneira, pode-se argumentar que a solução do problema deve ser representada pelas variáveis de otimização que fazem com que a probabilidade de que todos os eventos (ou alguns deles) sejam a favor da segurança seja maximizada, ou que seja (a probabilidade) maior que um determinado valor considerado apropriado. Em outras palavras, considera-se, na presente discussão, que o mais correto seria resolver, por exemplo,

$$\begin{aligned} \text{Maximizar}_{s_k} \quad & P\left(\{c(s_k, r_m) \leq \bar{c}\} \cap \{f_1(s_k, r_m) \geq 0\} \cap \dots \cap \{f_C(s_k, r_m) \geq 0\}\right) \\ \text{Tal que} \quad & g_q(s_k) \geq 0 \\ & g_{eq}(s_k) = 0 \\ & s_{kl} \leq s_k \leq s_{ku} \\ & k = 1 \dots N, m = 1 \dots R \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

ou

$$\begin{aligned} \text{Maximizar}_{s_k} \quad & g_q(s_k) \\ \text{Tal que} \quad & P\left(\{c(s_k, r_m) \leq \bar{c}\} \cap \{f_1(s_k, r_m) \geq 0\} \cap \dots \cap \{f_C(s_k, r_m) \geq 0\}\right) \geq \bar{P} \\ & g_{eq}(s_k) = 0 \\ & s_{kl} \leq s_k \leq s_{ku} \\ & k = 1 \dots N, m = 1 \dots R \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

ou ainda um outro arranjo em que apareçam eventos dados por outras intersecções ($P(\{c(s_k, r_m) \leq \bar{c}\} \cap \{f_C(s_k, r_m) \geq 0\})$, por exemplo).

No entanto, conforme mostraram Christensen e Murotsu (1986), existem limites para os valores de probabilidade de intersecções, definidos com base nas probabilidades dos eventos separados, conforme se segue. Para obter tais limites, parte-se das seguintes inequações dadas por Christensen e Murotsu (1986):

$$\max_{i=1}^{n_{ev}} P(e_i = 0) \leq P_f \leq 1 - \prod_{i=1}^{n_{ev}} (1 - P(e_i = 0)), \quad (3.2.4)$$

onde n_{ev} é o número de eventos considerados, e_i é uma variável que indica falha se igual a zero (e uma situação onde não há falha, se igual a um) e P_f é a probabilidade de falha do evento dado pela união dos eventos $e_i=0$. Nesse caso e considerando-se que a probabilidade de falha é igual a 1 menos a probabilidade do caso contrário, tem-se que

$$1 - \min_{i=1}^{n_{ev}} P(e_i = 1) \leq 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n_{ev}} (e_i = 1)\right) \leq 1 - \prod_{i=1}^{n_{ev}} P(e_i = 1) \quad (3.2.5)$$

e, então,

$$\prod_{i=1}^{n_{ev}} P(e_i = 1) \leq P\left(\bigcap_{i=1}^{n_{ev}} (e_i = 1)\right) = P(e_f = 1) = P_{Nf} \leq \min_{i=1}^{n_{ev}} P(e_i = 1), \quad (3.2.6)$$

onde P_{Nf} é a probabilidade de não haver falha e e_f é uma variável que indica falha ($e_f=0$) se qualquer e_i é igual a zero e o caso contrário se todos os e_i são iguais a um.

Portanto, quando se maximiza a probabilidade de um dos eventos, sujeito às restrições de maior ou igual nas probabilidades dos outros eventos, conforme mostrado na primeira formulação genérica citada anteriormente, age-se, implicitamente, a favor da segurança, uma vez que a probabilidade de ocorrerem todos os eventos em conjunto, ou parte deles, será sempre maior ou igual à probabilidade dos eventos multiplicada. Porém, isso não é condição suficiente para que se tenha um resultado confiável, mas apenas uma condição necessária, uma vez que o limite é fortemente dependente do número de eventos considerados.

Assim, se a todos os eventos é atribuída uma probabilidade de 99,9% de chance de ocorrência com, por exemplo, 1000 eventos considerados, tem-se um limite inferior para a

intersecção de todos, dado em (3.2.6), de aproximadamente 36,77%, o que significa que a ocorrência do evento intersecção tem probabilidade de ocorrência de, no mínimo, 36,77%. Isso não representa informação confiável, apesar da resposta estar a favor da segurança. Por outro lado, considerando-se um pequeno aumento para 99,99% de chance para cada evento, tem-se um salto no valor do limite para 90,48%, o que pode ser informativo em aplicações práticas.

Como conclusão, no estudo de um problema com muitos eventos (para qualquer que seja a aplicação visada), resolvido pela formulação em (3.2.1), em que se está interessado no evento dado pela intersecção dos eventos considerados (ou de alguns deles), é indicado checar a multiplicação das probabilidades no fim de cada otimização. Se o valor do resultado for elevado, isso significa que a resposta é confiável; caso contrário, o máximo que se pode extrair da resposta se refere ao limite inferior de confiabilidade o que, sendo pequeno, não é informativo. Assim, deve-se ter o cuidado de fornecer limites de probabilidade elevados, e também se deve obter um valor da probabilidade maximizada alto o suficiente para que o fato do limite inferior em (3.2.6) ser obedecido, represente uma condição suficiente para se ter uma resposta confiável.

Como nota, trabalhar com a probabilidade de eventos formados por intersecções de outros eventos, como pode ser visto em Mogami et al. (2006), por exemplo, reduz o número de índices de confiabilidade calculados (tal índice será descrito na subseção seguinte), mas aumenta a complexidade no cálculo dos gradientes do problema de otimização. Não há um estudo, do conhecimento do candidato, para determinar qual abordagem (por eventos simples ou intersecções) seria mais vantajosa, computacionalmente. Porém, também não se conhece trabalho em que uma equação em forma fechada para mais de dois eventos, seja fornecida (em Mogami et al. (2006), consideram-se dois eventos, apenas). Finalmente, menciona-se que, na literatura (como em Madsen, Krenk e Lind (2006) ou Christensen e Murotsu (1986), por exemplo), esse tipo de teoria associada a intersecções de eventos está relacionada ao cálculo de probabilidades para os chamados sistemas em série, para os quais a falha ocorre se qualquer evento simples de falha ocorre (daí o nome sistema em série).

3.2.1 Cálculo das Probabilidades Segundo o FORM

Nesse trabalho, o cálculo das probabilidades é baseado no conceito do índice de confiabilidade β e no FORM (“First-Order Reliability Method”) (MAUTE; FRANGOPOL, 2003; JUNG e CHO, 2004; YOUN et al., 2004; MADSEN, KRENK e LIND, 2006). Primeiramente, descreve-se o procedimento do cálculo de probabilidades no caso em que as funções $c - \bar{c}$ e f_n são lineares nas variáveis aleatórias e, logo em seguida, descreve-se e discute-se a aproximação do FORM. A primeira etapa serve de motivação e ajuda na explicação do método (FORM).

Chamando-se, genericamente, as funções $c - \bar{c}$ e f_n de M tem-se, no caso em que são lineares, a seguinte representação:

$$M = a_1 r_1 + \dots + a_R r_R + b = \mathbf{A}_R^T \mathbf{R} + b, \quad (3.2.7)$$

onde r_i é uma variável aleatória qualquer, \mathbf{R} é o vetor de variáveis aleatórias (tal vetor é dado por $\mathbf{R} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_R]^T$) e a_i e b são coeficientes que não dependem de \mathbf{R} . Consideram-se variáveis gaussianas e correlacionadas, como mencionado no início do capítulo.

Agora, suponha-se que é feita uma mudança de variável de tal forma que:

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}_R \mathbf{U} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{B}_R^{-1} (\mathbf{R} - \mathbf{c}), \quad (3.2.8)$$

onde \mathbf{U} (dado por $\mathbf{U} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_R]^T$) é um vetor de variáveis gaussianas de média nula e covariância unitária, ou seja

$$\mathbf{E}[\mathbf{U}] = \mathbf{0}, \quad \text{Cov}[\mathbf{U}, \mathbf{U}^T] = \mathbf{I}, \quad (3.2.9)$$

o que será mostrado no final da presente subseção, ser possível de se realizar. Nessa situação, tem-se que

$$M = (\mathbf{A}_R^T \mathbf{B}_R) \mathbf{U} + b + \mathbf{A}_R^T \mathbf{c} = \mathbf{A}_1^T \mathbf{U} + b_1 \quad (3.2.10)$$

e, como variáveis gaussianas de covariância unitária são não-correlacionadas e, portanto, independentes, e como a combinação linear de variáveis gaussianas independentes é também uma variável gaussiana, M é gaussiana de média

$$E[M] = \mathbf{b} + \mathbf{A}_R^T \mathbf{c} = b_1 \quad (3.2.11)$$

e variância

$$\text{Var}[M] = \mathbf{A}_R^T \mathbf{B}_R \mathbf{B}_R^T \mathbf{A}_R = \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1. \quad (3.2.12)$$

Assim, a probabilidade de um evento dado pelo valor da função M ser menor ou igual a zero é (NETO; CYMBALISTA, 2000):

$$\begin{aligned} P(M \leq 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1(\xi-b_1)^2}{2\sqrt{\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1}}} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{b_1}{\sqrt{\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1}}} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv = \Phi\left(-\frac{b_1}{\sqrt{\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1}}\right), \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

para a qual, na segunda igualdade, utilizou-se que

$$\xi = v\sqrt{\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1} + b_1. \quad (3.2.14)$$

Paralelamente, pode-se afirmar que a distância do hiperplano $M=0$ à origem é igual ao valor absoluto da projeção do vetor posição sobre o vetor unitário normal ao plano (GIACAGLIA, 1985). O vetor unitário (versor) normal a $M=0$ no espaço dado pela variável u_m (ou espaço normalizado) é $\pm \mathbf{A}_1 / \sqrt{\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1}$ e, como a posição é dada pelo vetor \mathbf{U} , a distância mencionada é igual a:

$$d_{(0,M=0)} = \left| \pm \mathbf{A}_1^T \mathbf{U} / \sqrt{\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1} \right| = \left| b_1 / \sqrt{\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1} \right|. \quad (3.2.15)$$

Os vetores citados são mostrados na Figura 12.

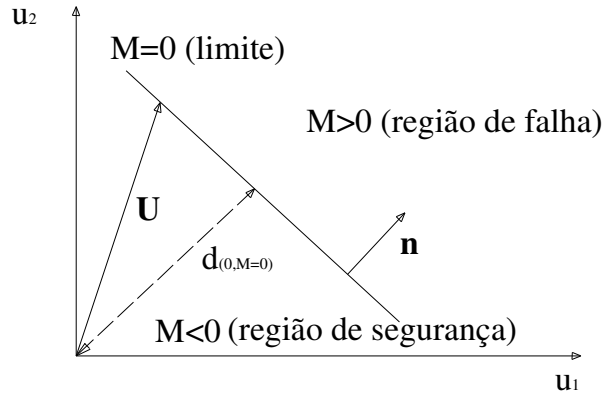


Figura 12 Vetor posição \mathbf{U} e versor \mathbf{n} no espaço normalizado 2D. É mostrado o índice de confiabilidade, dado pela distância plotada, o hiperplano M e as distintas regiões do espaço. Neste caso em particular, $\mathbf{n} = -\mathbf{A}_1 / \sqrt{\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1}$.

Isso significa que a probabilidade de $M \leq 0$ (eq.(3.2.13)) pode ser dada, alternativamente, por

$$\begin{aligned}
 P(M \leq 0) &= \Phi \left(-\text{sinal} \left(\frac{b_1}{\sqrt{\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1}} \right) \left| \frac{b_1}{\sqrt{\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1}} \right| \right) = \\
 &= \Phi \left(-\text{sinal}(b_1) \left| \frac{b_1}{\sqrt{\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1}} \right| \right) = \Phi(-\text{sinal}(b_1)\beta)
 \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

ou seja, por uma função da distância do hiperplano à origem, sendo o termo β igual a essa distância ($\beta = d_{(0,M=0)}$ na eq.(3.2.15)). Tal termo é chamado de índice de confiabilidade (vide Figura 12) para o caso especial em que M é linear nas variáveis aleatórias. Generalizando-se, o índice de confiabilidade β será definido como a distância entre a origem e $M_q=0$ no espaço normalizado, sendo M_q uma função qualquer e não necessariamente linear.

Para cálculo da probabilidade de $M \leq 0$, não seria preciso definir a variável β . Porém, como já mencionado, o exposto acima é para o caso de M , uma função linear, servindo apenas como motivação para o caso não-linear descrito a seguir em que β tem papel preponderante. Em seguida, tal afirmativa será justificada.

Agora, considerando uma função não-linear Q nas variáveis aleatórias, não se pode afirmar que a eq.(3.2.16) valha. Porém, no caso em que uma aproximação linear no ponto

mais próximo da origem é satisfatória, ou seja, se a função não-linear é bem aproximada por uma função linear no ponto dado por β no espaço normalizado, a equação é uma boa aproximação para a probabilidade de $Q \leq 0$. O cálculo da probabilidade empregando-se tal aproximação é conhecido por FORM, sendo o método mais utilizado na teoria de MOTC e MODC atualmente. É importante salientar que, mesmo que a função não-linear seja conhecida explicitamente nas variáveis aleatórias, não se pode dizer que a aproximação linear é satisfatória, sendo necessário, em primeiro lugar, obter a função no espaço normalizado – vide Madsen, Krenk e Lind (2006).

Uma maneira de explicitar o quão boa pode ser a aproximação do FORM é citada em seguida. Em primeiro lugar, deve-se notar que a função densidade de probabilidade conjunta no espaço normalizado decai muito rapidamente, mais especificamente com $e^{-\frac{1}{2}d^2}$, sendo d a distância à origem. Pode-se calcular a probabilidade de Q ser menor ou igual a zero, através de

$$P(Q \leq 0) = \int_{\Xi_{P_{Q \leq 0}}} e^{-\frac{1}{2}d^2} d\Xi_p \quad (3.2.17)$$

onde Ξ_p se refere a uma região qualquer e $\Xi_{P_{Q \leq 0}}$ àquela, de mesma dimensão que Ξ_p , onde $Q \leq 0$. Portanto, a região de integração que dá a maior contribuição à probabilidade de $Q \leq 0$ (ou mesmo $M \leq 0$) está localizada nas proximidades do ponto mais próximo à origem. Assim, a aproximação da função não-linear pela linear em tal ponto determina a precisão do FORM no cálculo da probabilidade na eq.(3.2.17).

Portanto, já foi mostrado que o método FORM pode ser uma boa alternativa. Além disso, não é sempre possível, no caso de um problema de TIE, obter a função Q explicitamente nas variáveis aleatórias, o que torna impossível o cálculo da integral para obtenção da probabilidade do evento $Q \leq 0$. Isso ocorre, por exemplo, no caso da função F ou função de erro (vide seção 2.3), para a qual a relação funcional entre F e as variáveis aleatórias que representam as condutividades, é dada por equações de elementos finitos, as quais não podem ser resolvidas simbolicamente em casos práticos, ou seja, tipicamente com milhares de variáveis.

Assim, mostram-se algumas das vantagens de se calcular a probabilidade de um evento com base na obtenção de β combinada com o cálculo mostrado na eq.(3.2.16), sendo o índice de confiabilidade dado pela solução do problema:

$$\text{Minimizar}_{u_m} \quad \sqrt{\mathbf{U}^T \mathbf{U}} \quad (3.2.18)$$

$$\begin{aligned} \text{Tal que} \quad \mathbf{U} &= [u_1 \quad u_1 \quad \dots \quad u_R]^T \\ Q^*(s_k, u_m) &= 0 \\ m &= 1 \dots R \end{aligned}$$

resolvido no espaço normalizado (onde Q é dado por Q^*). A solução desse problema é chamada de Ponto Mais Provável (PMP). β_c e o PMP são vistos na Figura 13 no caso em que $Q^* = c^*(s_k, u_m) - \bar{c}$.

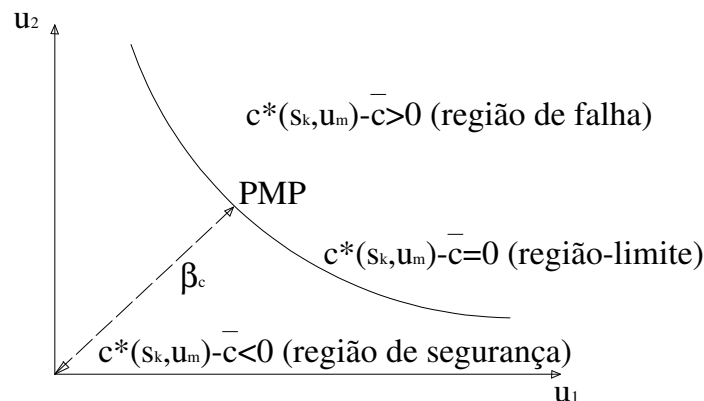


Figura 13 Representação ilustrativa da função $c^*(s_k, u_m) - \bar{c} = 0$ no espaço normalizado, com R igual a 2.

Adotando-se o mesmo desenvolvimento no cálculo de probabilidades para o caso do problema (3.2.1), são obtidos um PMP e um índice de confiabilidade para cada restrição de probabilidade, e um para a função objetivo baseada na probabilidade. Tal abordagem é conhecida, na literatura relacionada ao MOTC, como Abordagem do Índice de Confiabilidade.

Desta forma, para solução do problema (3.2.1), são alternados, num processo iterativo global, os problemas (3.2.18) (realizado para obtenção dos índices de confiabilidade) no caso da Abordagem do Índice de Confiabilidade, e uma iteração do problema (3.2.1). Em outras

palavras, a cada iteração global corresponde uma iteração do problema (3.2.1) e a solução do problema (3.2.18).

Resolvem-se os problemas (3.2.1) e (3.2.18) através de um algoritmo de PLS e do algoritmo de Rackwitz e Fiessler (que resolve um problema de otimização não-linear com uma restrição), respectivamente, sendo o último citado em detalhes em Madsen, Krenk e Lind (2006). Portanto, os gradientes da função objetivo e restrições, das distâncias $\sqrt{\mathbf{U}^T \mathbf{U}}$ e das restrições referentes aos problemas do tipo (3.2.18) foram calculados. Foram utilizadas, para cálculo dos gradientes da função objetivo e restrições, fórmulas analíticas disponíveis na literatura relacionada (KHARMANDA et al., 2004; MAUTE; FRANGOPOL, 2003; ALLEN; MAUTE, 2004; MADSEN; KRENK; LIND, 2006), conforme será descrito em seguida.

Mostra-se agora, como achar \mathbf{B}_R e \mathbf{c} na eq.(3.2.8), ou seja, como fazer a mudança de variáveis dada na eq.(3.2.8), para que sejam introduzidas variáveis aleatórias cujos momentos satisfaçam a eq.(3.2.9), o que não foi feito antes para facilitar a leitura.

Em primeiro, faz-se com que

$$\mathbf{Z} = \mathbf{V}^T \mathbf{R}, \quad (3.2.19)$$

onde \mathbf{V} é a matriz ortogonal com vetores coluna iguais aos autovetores ortonormais de $\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T]$. Nesse caso, a covariância de \mathbf{Z} é dada por

$$\mathbf{Cov}[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^T] = \mathbf{V}^T \mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{V}, \quad (3.2.20)$$

cuja diagonal é formada pelos autovalores de $\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T]$, ordenados de acordo com a ordem dos autovetores em \mathbf{V} . Além disso

$$\mathbf{E}[\mathbf{Z}] = \mathbf{V}^T \mathbf{E}[\mathbf{R}]. \quad (3.2.21)$$

Ainda resta fazer com que a covariância seja unitária e a média nula, ou seja, resta fazer uma mudança de variáveis de \mathbf{Z} para \mathbf{U} . Fazendo

$$\mathbf{U} = (\mathbf{Cov}[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^T])^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{Z} - \mathbf{E}[\mathbf{Z}]), \quad (3.2.22)$$

tem-se que

$$\mathbf{E}[\mathbf{U}] = (\mathbf{Cov}[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^T])^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{E}[\mathbf{Z}] - \mathbf{E}[\mathbf{Z}]) = \mathbf{0} \quad (3.2.23)$$

e

$$\mathbf{Cov}[\mathbf{U}, \mathbf{U}^T] = \left((\mathbf{Cov}[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^T])^{-\frac{1}{2}} \right)^T \mathbf{Cov}[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^T] (\mathbf{Cov}[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^T])^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{I}. \quad (3.2.24)$$

Finalmente, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (\mathbf{Cov}[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^T])^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{V}^T \mathbf{R} - \mathbf{E}[\mathbf{Z}]) = \\ &= (\mathbf{V}^T \mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{V})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^T (\mathbf{R} - \mathbf{E}[\mathbf{R}]) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{R} = \left((\mathbf{V}^T \mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{V})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^T \right)^{-1} \mathbf{U} + \mathbf{E}[\mathbf{R}] \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

geralmente representadas, as primeiras igualdades, por $\mathbf{U}=\mathbf{T}(\mathbf{R})$. Um resultado importante a ser adiantado, o qual será empregado no cálculo dos gradientes utilizados na rotina de PLS, diz respeito às derivadas do vetor \mathbf{U} com relação à média de r_i , uma das variáveis do vetor \mathbf{R} . Pode-se notar que

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{E}[\mathbf{R}]} = -(\mathbf{V}^T \mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{V})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^T, \quad (3.2.26)$$

onde a derivada de um vetor qualquer \mathbf{Vec}_1 em relação a um vetor qualquer \mathbf{Vec}_2 é definida como:

$$\frac{\partial \mathbf{Vec}_1}{\partial \mathbf{Vec}_2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Vec}_{11}}{\partial \mathbf{Vec}_{21}} & \frac{\partial \mathbf{Vec}_{11}}{\partial \mathbf{Vec}_{22}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{Vec}_{11}}{\partial \mathbf{Vec}_{2tam}} \\ \frac{\partial \mathbf{Vec}_{12}}{\partial \mathbf{Vec}_{21}} & \frac{\partial \mathbf{Vec}_{12}}{\partial \mathbf{Vec}_{22}} & & \frac{\partial \mathbf{Vec}_{12}}{\partial \mathbf{Vec}_{2tam}} \\ \frac{\partial \mathbf{Vec}_{21}}{\partial \mathbf{Vec}_{21}} & \frac{\partial \mathbf{Vec}_{21}}{\partial \mathbf{Vec}_{22}} & & \frac{\partial \mathbf{Vec}_{21}}{\partial \mathbf{Vec}_{2tam}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{Vec}_{1tam}}{\partial \mathbf{Vec}_{21}} & \frac{\partial \mathbf{Vec}_{1tam}}{\partial \mathbf{Vec}_{22}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{Vec}_{1tam}}{\partial \mathbf{Vec}_{2tam}} \\ \frac{\partial \mathbf{Vec}_{21}}{\partial \mathbf{Vec}_{21}} & \frac{\partial \mathbf{Vec}_{21}}{\partial \mathbf{Vec}_{22}} & & \frac{\partial \mathbf{Vec}_{21}}{\partial \mathbf{Vec}_{2tam}} \end{bmatrix}, \quad (3.2.27)$$

\mathbf{Vec}_{ij} é o j -ésimo elemento do vetor \mathbf{Vec}_i e tam é o número de elementos de ambos os vetores.

3.3 Formulações do MOTC Aplicadas à TIE

São propostas e avaliadas três formulações distintas, com base em diferentes problemas práticos (que diferem entre si devido às informações disponíveis). Todas elas podem ser obtidas partindo da formulação genérica de MOTC (vide problema (3.2.1)).

Como citado, variáveis associadas a incertezas são modeladas como aleatórias. Então, segundo a primeira formulação proposta, ou formulação padrão, geram-se resultados médios numéricos de valores absolutos de condutividades a partir dos dados do Atlas Anatômico Numérico descrito no APÊNDICE B.

Alternativamente, para o caso de incertezas reduzidas referentes a uma parte das variáveis e incertezas elevadas referentes às variáveis restantes, propõe-se a segunda formulação, segundo a qual se modela o primeiro grupo como variáveis determinísticas e o segundo como aleatórias (nesse caso, estimam-se, novamente, as médias das variáveis aleatórias, além das próprias incógnitas determinísticas). Assume-se, portanto, que as posições das regiões de incertezas reduzidas e elevadas são conhecidas. Tal abordagem corresponde à segmentação do domínio em parte determinística e parte não-determinística (VALLEJO, 2007a). A idéia, aqui, é tentar obter resultados mais precisos, e acelerar o processo de estimação, uma vez que o tamanho de \mathbf{U} é reduzido através dessa abordagem (o que reduz, por sua vez, o número de variáveis a serem obtidas na solução do problema (3.2.18)).

Para as duas formulações mencionadas, assume-se conhecida a matriz de covariância para todas as variáveis aleatórias (as covariâncias e variâncias de valores de medidas de

potenciais elétricos podem ser obtidas facilmente através das próprias medidas realizadas). Isso inclui covariâncias e variâncias de “pixels”, e covariâncias de “pixels” e medidas de potenciais.

Porém, a matriz de covariância nem sempre será previamente conhecida, ou seja, nem sempre a informação obtida cirurgicamente ou por outro método de estimação de imagem, por exemplo, estará disponível. A mudança do pulmão de um estado são para um estado com pneumotórax alteraria a estatística da imagem, o que exigiria obtenção de nova matriz. Nesses casos, os quais podem ser estendidos para outras mudanças de estado do pulmão e outras aplicações de TIE, seria interessante colocar tanto as covariâncias e variâncias de “pixels” quanto as covariâncias de um “pixel” e uma medida de diferença de potencial, como variáveis de otimização (incógnitas). Como nota, a covariância das diferenças de potenciais provavelmente provê, nas situações de insegurança sobre a veracidade da estatística da imagem, um bom indicativo – o qual, provavelmente, pode ser convertido em informações médicas importantes – de que as demais covariâncias foram alteradas.

Assumindo-se, então, que as covariâncias e variâncias de “pixels”, e as covariâncias de “pixels” e medidas de potenciais não estão disponíveis para a estimação da imagem, propõe-se algoritmo para estimá-las em conjunto com as médias das variáveis aleatórias de “pixels” (a segmentação não é considerada nesse caso).

3.3.1 Formulação para Obtenção das Médias: Formulação Padrão

A formulação é baseada na literatura e utilizada por Youn et al. (2004) e Yang e Gu (2004) na área de projeto mecânico. As incógnitas do problema determinístico do MOT definido na seção 2.3 são consideradas como variáveis aleatórias e as variáveis de otimização são as médias das mesmas.

A formulação é da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \underset{s_k}{\text{Maximizar}} && P\left(c(s_k, r_m) - \bar{c} \leq 0\right) \\ & \text{Tal que} && s_{kl} \leq s_k \leq s_{ku} \\ & && k = 1 \dots N, \quad m = 1 \dots R \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

em que s_k é uma variável de distribuição do tipo média, a média de cada valor nodal representativo da imagem, c é a função objetivo determinística citada na seção 2.3, \bar{c} é o limite para c , chamado de δ , e r_m representa uma medida de diferença de potenciais entre eletrodos ou um valor nodal representativo da imagem (neste capítulo, consideram-se como hipóteses, por simplicidade, parâmetros de contato dados e determinísticos, bem como posições de eletrodos; as correntes elétricas também são modeladas como determinísticas).

3.3.2 Formulação para Obtenção das Médias e Condutividades Determinísticas: Segmentação do Domínio da Imagem

Neste caso, a formulação é da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \underset{s_k}{\text{Maximizar}} && P(c(s_k, r_m) - \bar{c} \leq 0) \\ & \text{Tal que} && s_{kl} \leq s_k \leq s_{ku} \\ & && k=1..N, m=1..R_p \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

em que s_k pode ser tanto uma variável de distribuição do tipo média, a média de cada valor nodal representativo da imagem, quanto uma variável de otimização determinística. Novamente, r_m representa uma medida de diferença de potenciais entre eletrodos ou um valor nodal representativo da imagem. No entanto, alguns valores nodais referentes à imagem são determinísticos e, portanto, $R_p < R$. Os demais parâmetros são os mesmos identificados na subseção anterior. Detalhes sobre o número e posições de nós cujos parâmetros são tratados como determinísticos são mostrados na seção de resultados.

3.3.3 Formulação para Obtenção das Médias, Variâncias e Covariâncias

A formulação é da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \underset{s_k}{\text{Maximizar}} \quad P(c(s_k, r_m) - \bar{c} \leq 0) \\ & \text{Tal que} \quad s_{kl} \leq s_k \leq s_{ku} \\ & \quad k = 1 \dots N_{MC}, \quad m = 1 \dots R \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

em que s_k pode ser uma variável de distribuição do tipo média, a média de cada valor nodal representativo da imagem, ou uma variável de distribuição do tipo variância ou covariância. Os demais parâmetros são os mesmos identificados na subseção 3.3.1. As covariâncias e variâncias incógnitas são as referentes aos valores nodais de nós distintos representativos da imagem (ou de um mesmo nó, no caso das variâncias), e as referentes a um valor nodal representativo da imagem e um valor de medida de potencial elétrico. Uma vez que a matriz de covariância é simétrica, e como parte das covariâncias é dada (a parte referente às medidas de potenciais), pode-se notar que devem ser estimadas $N_{MC} = N[(N-1)/2 + 2 + (\text{número de medidas})]$ variáveis de otimização.

As restrições s_{kl} e s_{ku} para as médias são iguais a 0 e 1, respectivamente, da mesma maneira que nas formulações anteriores. No caso das variâncias, assume-se apenas que s_{kl} é igual a zero. Para as covariâncias, nenhuma restrição é imposta (na realidade, para efeito de implementação, assume-se, por outro lado, valor elevado para s_{ku} no caso da variância e valores elevados em módulo para s_{ku} e s_{kl} no caso da covariância, sendo s_{kl} negativo; entende-se por valor elevado um valor que não é atingido ao longo do processo iterativo de estimação dos parâmetros).

Vale lembrar que a probabilidade, em qualquer formulação, é calculada pelo FORM e, portanto, seu cálculo está associado à obtenção do índice de confiabilidade, o que significa que o problema (3.2.18) deve ser resolvido.

Ainda, menciona-se ser relevante considerar formulação similar à (3.3.3) no caso em que parâmetros não-gaussianos sejam utilizados. Assim, pode-se utilizar uma função polinomial de grau elevado como densidade de probabilidade de cada variável aleatória (ou se considerar a distribuição Beta) e resolver o problema de otimização adicionando-se os coeficientes do polinômio (ou os parâmetros da distribuição Beta) ao conjunto de variáveis de otimização. A dificuldade principal de tal abordagem é a obtenção da distribuição conjunta de probabilidades para todas as variáveis aleatórias, incluindo, eventualmente, variáveis gaussianas. Finalmente, ainda no caso de parâmetros não-gaussianos (ou da presença de

parâmetros gaussianos e não-gaussianos), pode-se considerar uma função polinomial de grau elevado como densidade conjunta de probabilidades e resolver o problema de otimização adicionando-se os coeficientes do polinômio ao conjunto de variáveis de otimização. Ambos os estudos corresponderiam a contribuições científicas importantes, mas não foram abordados nesse trabalho.

3.4 Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade segue a mesma estrutura mencionada no livro de Madsen, Krenk e Lind (2006), para o caso das derivadas com respeito às médias e às próprias variáveis determinísticas. A sensibilidade referente às variâncias e covariâncias é inédita na literatura, mas trabalho semelhante pode ser visto no livro de Haftka e Gürdal (1999), no caso da otimização estrutural.

Em primeiro, derivando-se “lado direito” da eq.(3.2.16) com relação ao vetor de médias $\mathbf{E}[\mathbf{R}]$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \mathbf{E}[\mathbf{R}]} &= \frac{\partial \Phi(-\text{sinal}(b_1)\beta)}{\partial \mathbf{E}[\mathbf{R}]} = \frac{\partial \Phi(-\text{sinal}(b_1)\beta)}{\partial (\text{sinal}(b_1)\beta)} \frac{\partial (\text{sinal}(b_1)\beta)}{\partial \mathbf{E}[\mathbf{R}]} = \\ &= \text{sinal}(b_1) \frac{\partial \Phi(-\text{sinal}(b_1)\beta)}{\partial (\text{sinal}(b_1)\beta)} \frac{\partial (\beta)}{\partial \mathbf{E}[\mathbf{R}]} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

onde a derivada de um escalar qualquer esc em relação a um vetor qualquer \mathbf{Vec} é definida

$$\text{como: } \frac{\partial \text{esc}}{\partial \mathbf{Vec}} = \left[\frac{\partial \text{esc}}{\partial \text{Vec}_1} \quad \frac{\partial \text{esc}}{\partial \text{Vec}_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \text{esc}}{\partial \text{Vec}_{\text{tam}}} \right]^T, \text{ Vec}_i \text{ é o } i\text{-ésimo elemento do vetor } \mathbf{Vec} \text{ e}$$

tam é o número de elementos do vetor \mathbf{Vec} . Na eq.(3.4.1), P e β correspondem a um evento qualquer, e a primeira derivada do “lado direito” da igualdade é dada, segundo Allen e Maute (2004), por

$$\frac{\partial \Phi(-\text{sinal}(b_1)\beta)}{\partial (\text{sinal}(b_1)\beta)} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2}{2}}. \quad (3.4.2)$$

Além disso, é importante ressaltar que o vetor $\mathbf{E}[\mathbf{R}]$ contém, segundo se assumiu nesse trabalho, as médias dos potenciais elétricos medidos, o que significa que nem todas as derivadas no vetor $\frac{\partial P}{\partial \mathbf{E}[\mathbf{R}]}$ são utilizadas na estimação (só aquelas referentes aos valores médios das variáveis nodais).

Deve-se, então, calcular a derivada de β com respeito a $\mathbf{E}[\mathbf{R}]$. Esta é dada por:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{E}[\mathbf{R}]} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{U}_{\text{PMP}}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{U}_{\text{PMP}}}{\partial \mathbf{E}[\mathbf{R}]}, \quad (3.4.3)$$

onde o vetor \mathbf{U}_{PMP} é o vetor de variáveis aleatórias padronizadas no PMP.

Neste caso, dado que:

$$\beta = \left(\mathbf{U}_{\text{PMP}}^T \mathbf{U}_{\text{PMP}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.4.4)$$

tem-se que:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{U}_{\text{PMP}}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{U}_{\text{PMP}}^T \mathbf{U}_{\text{PMP}} \right)^{-\frac{1}{2}} 2 \mathbf{U}_{\text{PMP}} = \frac{1}{\beta} \mathbf{U}_{\text{PMP}}. \quad (3.4.5)$$

Ao mesmo tempo, dada uma transformação genérica de variáveis de um vetor de distribuição qualquer para um vetor de variáveis de distribuição gaussiana

$$\mathbf{U} = \mathbf{T}(\mathbf{R}), \quad (3.4.6)$$

obtem-se

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{E}[\mathbf{R}]} = \frac{1}{\beta} \mathbf{U}_{\text{PMP}}^T \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{R}_{\text{PMP}})}{\partial \mathbf{E}[\mathbf{R}]}, \quad (3.4.7)$$

a qual, dada a transformação vista na seção 3.2 e a eq.(3.2.26):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{E}[\mathbf{R}]} = -(\mathbf{V}^T \text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{V})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^T,$$

assume a forma

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{E}[\mathbf{R}]} = -\frac{1}{\beta} \mathbf{U}_{\text{PMP}}^T (\mathbf{V}^T \text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{V})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^T. \quad (3.4.8)$$

Finalmente, obtém-se, a partir da eq.(3.4.1), da eq.(3.4.2) e da eq.(3.4.8),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathbf{E}[\mathbf{R}]} &= \text{sinal}(b_1) \frac{\partial \Phi(-\text{sinal}(b_1)\beta)}{\partial (\text{sinal}(b_1)\beta)} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{E}[\mathbf{R}]} = \\ &= \text{sinal}(b_1) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} \right) \frac{1}{\beta} \mathbf{U}_{\text{PMP}}^T (\mathbf{V}^T \text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{V})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^T. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Agora, descreve-se a análise de sensibilidade do problema de determinação de β . Nesse caso, obtém-se:

$$\frac{\partial \left(\sqrt{\sum_{m=1}^R (u_m)^2} \right)}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial (\sqrt{\mathbf{U}^T \mathbf{U}})}{\partial \mathbf{U}} = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U} \quad (3.4.10)$$

e

$$\frac{\partial (c^* - \bar{c})}{\partial \mathbf{U}} = \left(\frac{\partial (\mathbf{T}(\mathbf{U})^{-1})}{\partial \mathbf{U}} \right)^T \frac{\partial (c - \bar{c})}{\partial \mathbf{R}}. \quad (3.4.11)$$

A derivada de $c - \bar{c}$ com relação à r_m (ρ_m , especificamente) é obtida pelo método adjunto e descrita, em detalhes, em Mello (2005). Porém é descrita aqui para facilitar o entendimento, e segue a mesma lógica citada no caso da obtenção da posição do eletrodo, sendo, na verdade, um caso particular daquela situação, em que a corrente e a matriz \mathbf{A}_{p_j} são

constantes na variável de otimização (vide subsecção 4.1.3). O desenvolvimento é realizado considerando-se medidas de diferenças de potenciais.

Tem-se que

$$c - \bar{c} = F - \delta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{ne} (\mathbf{A}_{Pj} \mathbf{V}_{Tj} - \Delta \mathbf{V}_{0j})^T (\mathbf{A}_{Pj} \mathbf{V}_{Tj} - \Delta \mathbf{V}_{0j}) - \delta, \quad (3.4.12)$$

onde a matriz \mathbf{A}_{Pj} contém apenas os valores 0, 1 e -1, selecionando diferenças de potenciais obtidas de \mathbf{V}_{Tj} a serem comparadas com o vetor de entrada de medidas $\Delta \mathbf{V}_{0j}$. Deve-se mencionar que \mathbf{V}_{Tj} é obtido através do MEF, para um valor qualquer de potencial prescrito em qualquer região onde não há eletrodos, conforme justificado no APÊNDICE A.

Ainda, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}_{Tj}}{\partial \mathbf{r}_m} \mathbf{V}_{Tj} + \mathbf{K}_{Tj} \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \mathbf{r}_m} &= \frac{\partial \mathbf{I}_{Tj}}{\partial \mathbf{r}_m} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \mathbf{r}_m} &= \mathbf{K}_{Tj}^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{K}_{Tj}}{\partial \mathbf{r}_m} \mathbf{V}_{Tj} \right) \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}^T}{\partial \mathbf{r}_m} = \left(-\frac{\partial \mathbf{K}_{Tj}}{\partial \mathbf{r}_m} \mathbf{V}_{Tj} \right)^T \mathbf{K}_{Tj}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

tem-se que:

$$\frac{\partial (c - \bar{c})}{\partial \mathbf{r}_m} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_m} = - \sum_{j=1}^{ne} \left[\mathbf{V}_{Tj}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{Tj}}{\partial \mathbf{r}_m} \mathbf{K}_{Tj}^{-1} \mathbf{A}_{Pj}^T (\mathbf{A}_{Pj} \mathbf{V}_{Pj} - \Delta \mathbf{V}_{0j}) \right]. \quad (3.4.14)$$

Com base em

$$\mathbf{R} = \left((\mathbf{V}^T \mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{V})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^T \right)^{-1} \mathbf{U} + \mathbf{E}[\mathbf{R}],$$

resultado mostrado na subsecção 3.2.1 (mais especificamente, na eq.(3.2.25)), tem-se que

$$\frac{\partial (\mathbf{T}(\mathbf{U})^{-1})}{\partial \mathbf{U}} = \left((\mathbf{V}^T \mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{V})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^T \right)^{-1}. \quad (3.4.15)$$

Assim, tem-se o resultado final para a derivada de $c^* - \bar{c}$ em relação ao vetor \mathbf{U} na eq.(3.4.11).

A derivada da probabilidade P com relação a ρ_f , variável de otimização nodal determinística (vide capítulo 2), é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \rho_f} &= \frac{\partial \Phi(-\text{sinal}(b_1)\beta)}{\partial \rho_f} = \frac{\partial \Phi(-\text{sinal}(b_1)\beta)}{\partial (\text{sinal}(b_1)\beta)} \frac{\partial (\text{sinal}(b_1)\beta)}{\partial \rho_f} = \\ &= \text{sinal}(b_1) \frac{\partial \Phi(-\text{sinal}(b_1)\beta)}{\partial (\text{sinal}(b_1)\beta)} \frac{\partial (\beta)}{\partial \rho_f} . \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Nesse caso, deve-se calcular a derivada de β com relação à variável ρ_f , que é dada por (considerando-se a eq.(3.4.4) e a eq.(3.4.5)):

$$\frac{\partial \beta}{\partial \rho_f} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{U}_{\text{PMP}}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{U}_{\text{PMP}}}{\partial \rho_f} = \frac{1}{\beta} \mathbf{U}_{\text{PMP}}^T \frac{\partial \mathbf{U}_{\text{PMP}}}{\partial \rho_f} . \quad (3.4.17)$$

Dado que \mathbf{U}_{PMP} pode ser expresso como a soma da origem (um ponto de coordenadas nulas) com o vetor que aponta para o ponto \mathbf{U}_{PMP} , pode-se escrever:

$$\mathbf{U}_{\text{PMP}} = -\beta \frac{\nabla Q^*}{|\nabla Q^*|} = -\frac{\beta}{|\nabla Q^*|} \frac{\partial Q^*}{\partial \mathbf{U}_{\text{PMP}}} , \quad (3.4.18)$$

onde Q^* é $Q = c(s_k, r_m) - \bar{c}$ no espaço normalizado (vide subseção 3.2.1), ou seja, $Q^* = c^*(s_k, u_m) - \bar{c}$. Utilizando-se a eq.(3.4.17) e a eq.(3.4.18), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial \rho_f} &= \frac{1}{\beta} \mathbf{U}_{\text{PMP}}^T \frac{\partial \mathbf{U}_{\text{PMP}}}{\partial \rho_f} = \\ &= - \left(\frac{1}{|\nabla Q^*|} \frac{\partial Q^*}{\partial \mathbf{U}_{\text{PMP}}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{U}_{\text{PMP}}}{\partial \rho_f} = - \frac{1}{|\nabla Q^*|} \frac{\partial Q^*}{\partial \rho_f} . \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

Substituindo-se essa na eq.(3.4.16), obtém-se, finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \rho_f} &= \frac{\partial \Phi(-\text{sinal}(b_1)\beta)}{\partial \rho_f} = \frac{\partial \Phi(-\text{sinal}(b_1)\beta)}{\partial(\text{sinal}(b_1)\beta)} \frac{\partial(\text{sinal}(b_1)\beta)}{\partial \rho_f} = \\ &= -\frac{\text{sinal}(b_1)}{|\nabla Q^*|} \frac{\partial \Phi(-\text{sinal}(b_1)\beta)}{\partial(\text{sinal}(b_1)\beta)} \frac{\partial Q^*}{\partial \rho_f}. \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

No caso dos elementos c_{ij} da matriz de covariância $\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T]$ e com base na eq.(3.4.1) até a eq.(3.4.7), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial c_{ij}} &= \text{sinal}(b_1) \frac{\partial \Phi(-\text{sinal}(b_1)\beta)}{\partial(\text{sinal}(b_1)\beta)} \frac{\partial(\beta)}{\partial c_{ij}} = \\ &= -\text{sinal}(b_1) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} \right) \frac{1}{\beta} \mathbf{U}_{\text{PMP}}^T \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{R}_{\text{PMP}})}{\partial c_{ij}}. \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Dada a eq.(3.2.25), pode-se então obter a seguinte equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial c_{ij}} &= -\text{sinal}(b_1) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} \right) \frac{1}{\beta} \mathbf{U}_{\text{PMP}}^T \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{R}_{\text{PMP}})}{\partial c_{ij}} = \\ &= -\text{sinal}(b_1) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} \right) \frac{1}{\beta} \mathbf{U}_{\text{PMP}}^T \frac{\partial \left((\mathbf{V}^T \mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{V})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^T (\mathbf{R}_{\text{PMP}} - \mathbf{E}[\mathbf{R}]) \right)}{\partial c_{ij}}. \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

Numa análise de tal equação, nota-se que o termo $(\mathbf{V}^T \mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{V})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^T$ pode ser escrito como:

$$(\mathbf{V}^T \mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{V})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{V}_1}{\sqrt{\alpha_1}} & \frac{\mathbf{V}_2}{\sqrt{\alpha_2}} & \dots & \frac{\mathbf{V}_R}{\sqrt{\alpha_R}} \end{bmatrix}^T, \quad (3.4.23)$$

onde \mathbf{V}_k é o k-ésimo autovetor contido em \mathbf{V} , ou seja, é a k-ésima coluna de \mathbf{V} e α_k é o k-ésimo autovalor correspondente.

Assim, a eq.(3.4.22) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial c_{ij}} &= -\text{sinal}(b_1) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} \right) \frac{1}{\beta} \mathbf{U}_{\text{PMP}}^T \frac{\partial \left[\begin{matrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \dots & \mathbf{V}_R \\ \sqrt{\alpha_1} & \sqrt{\alpha_2} & \dots & \sqrt{\alpha_R} \end{matrix} \right]^T}{\partial c_{ij}} (\mathbf{R}_{\text{PMP}} - \mathbf{E}[\mathbf{R}]) = \\ &= -\text{sinal}(b_1) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} \right) \frac{1}{\beta} \mathbf{U}_{\text{PMP}}^T \left[\begin{matrix} \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_1}{\sqrt{\alpha_1}} \right)}{\partial c_{ij}} & \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_2}{\sqrt{\alpha_2}} \right)}{\partial c_{ij}} & \dots & \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_R}{\sqrt{\alpha_R}} \right)}{\partial c_{ij}} \end{matrix} \right]^T (\mathbf{R}_{\text{PMP}} - \mathbf{E}[\mathbf{R}]) \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

Para obtenção das derivadas mostradas na eq.(3.4.24), baseia-se na teoria de sensibilidade do autovetor (vide Haftka e Gürdal (1999) para uma discussão sobre a teoria, bem como discussão sobre diversos outros trabalhos relacionados ao tópico). Considera-se, então, o seguinte autoproblema:

$$(\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I}) \mathbf{V}_k = \mathbf{0}, \quad (3.4.25)$$

onde \mathbf{V}_k tem módulo unitário, como já mencionado.

Assim, dividindo-se a eq.(3.4.25) por $\sqrt{\alpha_k}$ e derivando-se o resultado, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{V}_k}{\partial c_{ij}} \frac{1}{\sqrt{\alpha_k}} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial c_{ij}} \frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} + (\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I}) \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} \right)}{\partial c_{ij}} = \mathbf{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I}) \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} \right)}{\partial c_{ij}} = - \left(\frac{\partial \mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{V}_k}{\partial c_{ij}} \frac{1}{\sqrt{\alpha_k}} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial c_{ij}} \frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} \right)}{\partial c_{ij}} = (\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I})^{-1} \left[\left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial c_{ij}} \mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T]}{\partial c_{ij}} \right) \frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} \right] \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

A derivada de $\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T]$ com relação a c_{ij} é igual à matriz de zeros de dimensão igual à de $\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T]$, com um valor unitário na posição dada pela intersecção da linha “i” com a coluna “j”. Deve-se notar que a inversa $(\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I})^{-1}$ não será, de fato, obtida, uma vez que a

matriz é singular (será, ao invés disso, utilizado um método alternativo na solução do sistema linear relacionado a tal matriz).

Agora, suponha-se conhecido $\frac{\partial \alpha_k}{\partial c_{ij}}$. De fato, multiplicando-se a primeira das equações na eq.(3.4.26) por \mathbf{V}_k e lembrando que \mathbf{V}_k tem módulo unitário e que $(\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I})\mathbf{V}_k = \mathbf{0}$, o que significa que

$$[(\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I})\mathbf{V}_k]^T = \mathbf{0}^T \Rightarrow \mathbf{V}_k^T (\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I})^T = \mathbf{0}^T, \quad (3.4.27)$$

obtém-se

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial c_{ij}} = \mathbf{V}_k^T \frac{\partial \mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T]}{\partial c_{ij}} \mathbf{V}_k = V_{ki} V_{kj}, \quad (3.4.28)$$

onde V_{ki} é a i -ésima componente de \mathbf{V}_k .

Nesse caso, substituindo-se a eq.(3.4.28) na última das equações na eq.(3.4.26), obtém-se:

$$\frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} \right)}{\partial c_{ij}} = (\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I})^{-1} \begin{bmatrix} \frac{(V_{ki} V_{kj} V_{k1})}{\sqrt{\alpha_k}} \\ \frac{(V_{ki} V_{kj} V_{k2})}{\sqrt{\alpha_k}} \\ \vdots \\ \frac{(V_{ki} V_{kj} V_{k(i-1)})}{\sqrt{\alpha_k}} \\ \frac{(V_{ki} V_{kj} V_{ki}) (V_{kj})}{\sqrt{\alpha_k} \sqrt{\alpha_k}} \\ \frac{(V_{ki} V_{kj} V_{k(i+1)})}{\sqrt{\alpha_k}} \\ \vdots \\ \frac{(V_{ki} V_{kj} V_{kR})}{\sqrt{\alpha_k}} \end{bmatrix}. \quad (3.4.29)$$

Assim, pode-se resolver tal sistema de equações para k de 1 a R , transpor os resultados e substituir na eq.(3.4.24) para calcular a sensibilidade da probabilidade com relação a c_{ij} .

Examinando a eq.(3.4.29), pode-se notar que os autovetores e autovalores de $(\text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I})$, chamados aqui de \mathbf{F}_m e ζ_m obedecem:

$$(\text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I} - \zeta_m \mathbf{I}) \mathbf{F}_m = (\text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - (\alpha_k + \zeta_m) \mathbf{I}) \mathbf{F}_m = \mathbf{0}. \quad (3.4.30)$$

Esse problema é, portanto, semelhante ao problema na eq.(3.4.25), o que significa que $\mathbf{V}_m = \mathbf{F}_m$ e que $\alpha_k + \zeta_m = \alpha_m$, o que significa, por sua vez, que o autovalor de $(\text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I})$, ou seja, ζ_m , é dado por $\zeta_m = \alpha_m - \alpha_k$ (essa equação mostra que se $k=m$, o autovalor ζ_m será nulo e que $(\text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I})$ pode ter autovalores negativos; também mostra que se a multiplicidade de $\alpha_k = a^*$, o número de autovalores nulos de $(\text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I})$ será igual a a^*). Nessas condições, pode-se escrever a eq.(3.4.29) como

$$(\text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I}) \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} \right)}{\partial \mathbf{c}_{ij}} = \mathbf{F} \mathbf{\Delta} \mathbf{F}^T \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} \right)}{\partial \mathbf{c}_{ij}} = \mathbf{B}_{ijk} \Rightarrow \mathbf{\Delta} \mathbf{F}^T \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} \right)}{\partial \mathbf{c}_{ij}} = \mathbf{F}^T \mathbf{B}_{ijk}, \quad (3.4.31)$$

onde \mathbf{F} é a matriz cujas colunas são iguais a \mathbf{F}_m , $\mathbf{\Delta}$ é a matriz diagonal de autovalores ζ_m de $(\text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I})$ ($(\mathbf{\Delta})_{m,m} = \zeta_m$, onde $(\mathbf{A})_{i,j}$ indica o elemento da matriz genérica \mathbf{A} da i -ésima linha e j -ésima coluna), \mathbf{B}_{ijk} é o vetor lado-direito na eq.(3.4.29). Tais equações, obtidas considerando-se que a matriz \mathbf{F} possui vetores-coluna ortonormais, são verdadeiras para quaisquer autovalores, mesmo que tenham multiplicidade maior que a unidade (BATHE, 1996).

Utilizando-se a eq.(3.4.29) e a eq.(3.4.31), pode-se então obter:

$$\Delta \mathbf{F}^T \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} \right)}{\partial c_{ij}} = \mathbf{F}^T \begin{bmatrix} \frac{(\mathbf{V}_{ki} \mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{kl})}{\sqrt{\alpha_k}} \\ \frac{(\mathbf{V}_{ki} \mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{k2})}{\sqrt{\alpha_k}} \\ \vdots \\ \frac{(\mathbf{V}_{ki} \mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{k(i-1)})}{\sqrt{\alpha_k}} \\ \frac{(\mathbf{V}_{ki} \mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{ki}) (\mathbf{V}_{kj})}{\sqrt{\alpha_k} \sqrt{\alpha_k}} \\ \frac{(\mathbf{V}_{ki} \mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{k(i+1)})}{\sqrt{\alpha_k}} \\ \vdots \\ \frac{(\mathbf{V}_{ki} \mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{kR})}{\sqrt{\alpha_k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^R \frac{\mathbf{V}_{ki} \mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{kl} \mathbf{V}_{li}}{\sqrt{\alpha_k} \sqrt{\alpha_k}} & \frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{li}}{\sqrt{\alpha_k}} \\ \sum_{l=1}^R \frac{\mathbf{V}_{ki} \mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{kl} \mathbf{V}_{2l}}{\sqrt{\alpha_k} \sqrt{\alpha_k}} & \frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{2i}}{\sqrt{\alpha_k}} \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{l=1}^R \frac{\mathbf{V}_{ki} \mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{kl} \mathbf{V}_{Rl}}{\sqrt{\alpha_k} \sqrt{\alpha_k}} & \frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{Ri}}{\sqrt{\alpha_k}} \end{bmatrix}. \quad (3.4.32)$$

Dada a equação anterior, pode-se notar que se $k=1$, por exemplo, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^R \frac{\mathbf{V}_{ki} \mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{kl} \mathbf{V}_{li}}{\sqrt{\alpha_k}} - \frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{li}}{\sqrt{\alpha_k}} &= \sum_{l=1}^R \frac{\mathbf{V}_{li} \mathbf{V}_{lj} \mathbf{V}_{ll} \mathbf{V}_{li}}{\sqrt{\alpha_1}} - \frac{\mathbf{V}_{lj} \mathbf{V}_{li}}{\sqrt{\alpha_1}} = \frac{\mathbf{V}_{li} \mathbf{V}_{lj}}{\sqrt{\alpha_1}} \left(\sum_{l=1}^R \mathbf{V}_{li}^2 - 1 \right) = 0 \\ \sum_{l=1}^R \frac{\mathbf{V}_{ki} \mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{kl} \mathbf{V}_{nl}}{\sqrt{\alpha_k}} - \frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{ni}}{\sqrt{\alpha_k}} &= \sum_{l=1}^R \frac{\mathbf{V}_{li} \mathbf{V}_{lj} \mathbf{V}_{ll} \mathbf{V}_{nl}}{\sqrt{\alpha_1}} - \frac{\mathbf{V}_{lj} \mathbf{V}_{ni}}{\sqrt{\alpha_1}} = -\frac{\mathbf{V}_{lj} \mathbf{V}_{ni}}{\sqrt{\alpha_1}}, \quad n \neq 1 \end{aligned}, \quad (3.4.33)$$

pois a norma dos autovetores é unitária e os mesmos são ortogonais (portanto, $\sum_{l=1}^R \mathbf{V}_{li} \mathbf{V}_{nl} = 0$

para n diferente de 1). Isso significa que o k -ésimo elemento do vetor do lado direito da eq.(3.4.32) será sempre nulo e que os demais, como o n -ésimo por exemplo, serão iguais a

$$-\frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{ni}}{\sqrt{\alpha_k}}.$$

Assim, e lembrando que o elemento da diagonal da k -ésima linha de Δ é nulo (pelo menos), mostra-se que se a multiplicidade dos autovalores de $\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T]$ é igual a 1, o lado

direito da eq.(3.4.32) pertence ao $\text{range}(\Delta)$. Portanto, o sistema para obtenção de $\mathbf{F}^T \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} \right)}{\partial c_{ij}}$

na eq.(3.4.32) é um sistema possível, com infinitas soluções. Porém, se a multiplicidade é maior que a unidade, mais de um elemento da diagonal de Δ será nulo e, nesse caso, deve-se

chegar se o elemento correspondente do lado direito ($\frac{V_{pj} V_{ni}}{\sqrt{\alpha_p}}$, para o p-ésimo elemento da diagonal de Δ) também o será, o que dependerá das componentes dos autovetores.

Voltando à eq.(3.4.32) e considerando o caso de multiplicidade unitária dos autovalores, tem-se, então:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F}^T \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} \right)}{\partial c_{ij}} &= \left[\frac{V_{kj} V_{1i}}{\sqrt{\alpha_k}} \quad \frac{V_{kj} V_{2i}}{\sqrt{\alpha_k}} \quad \dots \quad \frac{V_{kj} V_{(k-1)i}}{\sqrt{\alpha_k}} \quad 0 \quad \frac{V_{kj} V_{(k+1)i}}{\sqrt{\alpha_k}} \quad \dots \quad \frac{V_{kj} V_{Ri}}{\sqrt{\alpha_k}} \right]^T \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} \right)}{\partial c_{ij}} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \frac{V_{kj} V_{1i}}{(\alpha_1 - \alpha_k) \sqrt{\alpha_k}} \\ \frac{V_{kj} V_{2i}}{(\alpha_2 - \alpha_k) \sqrt{\alpha_k}} \\ \vdots \\ \frac{V_{kj} V_{(k-1)i}}{(\alpha_{k-1} - \alpha_k) \sqrt{\alpha_k}} \\ \frac{a_k}{(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sqrt{\alpha_k}} \\ \frac{V_{kj} V_{(k+1)i}}{(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sqrt{\alpha_k}} \\ \vdots \\ \frac{V_{kj} V_{Ri}}{(\alpha_R - \alpha_k) \sqrt{\alpha_k}} \end{bmatrix} = \sum_{n=1, n \neq k}^R \left(\frac{V_{kj} V_{ni}}{(\alpha_k - \alpha_n) \sqrt{\alpha_k}} \right) \mathbf{V}_n + a_k \mathbf{V}_k \end{aligned} \quad (3.4.34)$$

onde a_k é obtida por condição de normalização. Assim, se a derivada $\frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} \right)}{\partial c_{ij}}$ deve ter norma unitária, faz-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} \right)^T}{\partial \mathbf{c}_{ij}} \frac{\partial \left(\frac{\mathbf{V}_k}{\sqrt{\alpha_k}} \right)}{\partial \mathbf{c}_{ij}} &= \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{li}}{(\alpha_1 - \alpha_k) \sqrt{\alpha_k}} \\ \frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{2i}}{(\alpha_2 - \alpha_k) \sqrt{\alpha_k}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{(k-1)i}}{(\alpha_{k-1} - \alpha_k) \sqrt{\alpha_k}} \\ \mathbf{a}_k \\ \frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{(k+1)i}}{(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sqrt{\alpha_k}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{Ri}}{(\alpha_R - \alpha_k) \sqrt{\alpha_k}} \end{bmatrix}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{li}}{(\alpha_1 - \alpha_k) \sqrt{\alpha_k}} \\ \frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{2i}}{(\alpha_2 - \alpha_k) \sqrt{\alpha_k}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{(k-1)i}}{(\alpha_{k-1} - \alpha_k) \sqrt{\alpha_k}} \\ \mathbf{a}_k \\ \frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{(k+1)i}}{(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sqrt{\alpha_k}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{Ri}}{(\alpha_R - \alpha_k) \sqrt{\alpha_k}} \end{bmatrix} = \Rightarrow \quad (3.4.35) \\
\Rightarrow \mathbf{a}_k &= \pm \sqrt{1 - \sum_{n=1, n \neq k}^R \left(\frac{\mathbf{V}_{kj} \mathbf{V}_{ni}}{(\alpha_k - \alpha_n) \sqrt{\alpha_k}} \right)^2}
\end{aligned}$$

A eq.(3.4.34) é obtida também por Haftka e Gürdal (1999). No entanto, o caso tratado no livro refere-se a um problema estrutural, relacionado à dinâmica de estruturas. Além disso, a condição de normalização é diferente da dada na eq.(3.4.35).

No mesmo livro (HAFTKA e GÜRDAL, 1999), mostra-se como utilizar a condição de normalização segundo a qual o valor máximo de cada autovetor deve ser igual a um (ao invés da condição de norma unitária), para tornar a matriz $(\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] - \alpha_k \mathbf{I})$ não-singular através da redução de sua ordem, o que é possível no caso da multiplicidade do autovalor correspondente ser unitária. Ainda, dada a derivada obtida da solução do sistema não-singular, a qual é referente ao autovetor normalizado através de seu valor máximo, mostra-se como obter a derivada para o caso da normalização original (baseada na norma do autovetor). Finalmente, Haftka e Gürdal (1999) apresentam uma alternativa para a eq.(3.4.34) cuja soma ponderada de autovetores converge mais rapidamente (considerando-se menos termos na soma) para o valor exato da soma.

Substituindo a segunda equação da eq.(3.4.34) na eq.(3.4.24), obtém-se, finalmente, a derivada da probabilidade P em relação a um elemento da matriz de covariância $\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T]$.

É relevante, ainda, mencionar que além da análise para solução do sistema para obtenção das derivadas dos autovetores, Haftka e Gürdal (1999) também mencionam as dificuldades para o caso de autovalores repetidos. Porém, citam que a experiência mostrou que pequenas diferenças nos autovalores costumam ser suficientes para evitar tais dificuldades. Ainda, mencionam que a junção de autovalores freqüentemente tem efeito adverso no desempenho estrutural, o que pode, por exemplo, levar a dificuldades no controle

de estruturas, para as quais os autovalores representariam, então, frequências naturais de vibração. Nesse caso, restrições seriam utilizadas, como por exemplo, $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \dots$ (ou, na prática, $\alpha_1 + \delta_{aux1} \geq \alpha_2 + \delta_{aux2} \geq \alpha_3 + \delta_{aux3} \dots$, com δ_{auxi} , parâmetro auxiliar, relativamente pequeno). Tal abordagem poderia ser utilizada no caso atual, desde que fosse mostrado que a matriz de covariância, a qual é construída através da soma de multiplicações de vetores do tipo $\mathbf{Vec} \cdot \mathbf{Vec}^T$, tem todos os autovalores distintos, de fato. No entanto, uma análise do fantoma abordado no presente trabalho mostra que os autovalores são, para a precisão da máquina (computador) empregada nos testes, distintos.

3.5 Implementação

Na implementação, foram seguidas, basicamente, as seguintes fases:

1. Em primeiro, lêem-se os dados da malha de MEF de estimação, gerada no software Matlab, os dados referentes aos parâmetros de contato, considerados conhecidos, e os demais dados de entrada, advindos do Atlas Anatômico gerado por um programa escrito também no Matlab (vide APÊNDICE B). São esses demais dados: valores médios de potenciais e a matriz de covariância das variáveis aleatórias. *No caso em que termos da matriz de covariância são incógnitas do problema de otimização, a matriz procedente do Atlas é utilizada apenas para comparação com o resultado final;*
2. inicia-se a fase de pré-processamento, representada pelos cálculos que podem ser realizados de antemão, uma vez que geram valores constantes ao longo do processo iterativo, e pelas inicializações de valores de variáveis (como das variáveis de otimização). São os cálculos principais: a obtenção das matrizes do modelo de eletrodo (para cada parâmetro de contato) e a obtenção das “pseudo-matrizes” de elementos finitos, ou seja, das matrizes de elementos finitos divididas pela integral da condutividade elétrica do elemento finito em questão;
3. inicia-se o processo iterativo, dado por duas etapas principais: na primeira, de posse dos dados anteriores (das fases 1 e 2), e com o valor atual da média das variáveis nodais, *das covariâncias, variâncias e variáveis determinísticas, dependendo da formulação utilizada* (dados, os valores, como sugestão inicial, ou obtidos através do algoritmo de PL,

conforme descrito no item ii a seguir), calcula-se o valor do índice de confiabilidade através de um processo iterativo, que corresponde ao cálculo das variáveis nodais e dos potenciais elétricos da iteração corrente. Então, de posse de todos esses dados, atualiza-se a média das variáveis nodais (*e, dependendo da formulação empregada, também as variáveis consideradas determinísticas ou as variâncias e covariâncias das variáveis aleatórias*) através da solução de problema de otimização linearizado, o que corresponde à segunda etapa principal. Essas duas etapas são detalhadas em seguida:

- i. num processo iterativo, resolve-se o MEF, calculam-se os gradientes necessários (dados pela eq.(3.4.10) à eq.(3.4.15)) e, através do algoritmo de Rackwitz e Fiessler, citado em detalhes em Madsen, Krenk e Lind (2006) (utilizado para solução de um problema de otimização não-linear com uma restrição), obtêm-se variáveis aleatórias atualizadas;
- ii. após a convergência do processo mencionado em i, a atualização das médias dos valores nodais *e das variáveis de otimização determinísticas (se for o caso)*, é então realizada, tendo-se como base os valores de variáveis aleatórias obtidas, além dos dados externos e os de pré-processamento. O procedimento é: calcular os gradientes (vide eq.(3.4.9) para o caso da otimização das médias e a eq.(3.4.20) para o caso de variáveis determinísticas), calcular os limites móveis e então resolver o problema linearizado de otimização através da rotina de PL “linprog” do Matlab. *No caso da estimação das médias dos valores nodais em conjunto com variâncias e covariâncias, numa iteração atualizam-se as médias e, na seguinte, as variâncias e covariâncias, num procedimento semelhante ao Método da Alternância, pelo mesmo motivo utilizado como justificativa na seção 2.3. Nesse caso em particular, o procedimento é: calcular os gradientes (vide eq.(3.4.9) para o caso da atualização das médias e as equações eq.(3.4.24), eq.(3.4.34) e, eventualmente, a eq.(3.4.35), para o caso das covariâncias e variâncias das variáveis aleatórias), calcular os limites móveis e então resolver o problema linearizado de otimização através da rotina de PL “linprog” do Matlab.* Algumas peculiaridades importantes referentes à etapa ii são mostradas em Mello (2005). Em tal trabalho, mostram-se, em detalhes, derivadas da matriz de MEF, por exemplo, bem como o cálculo dos limites móveis e a argumentação utilizada na realização do cálculo, dentre outros detalhes. De qualquer maneira, cabe informar que os limites são calculados com base na oscilação das variáveis de otimização,

sendo reduzidos se há oscilação da variável em questão e aumentados em caso contrário.

As duas etapas i e ii vão sendo realizadas até que ocorra a convergência global. O valor da penalização permaneceu igual a 1 para todas as simulações, o que é justificado em seguida;

4. no final, as imagens são geradas, as quais serão apresentadas e discutidas neste texto.

O fluxograma das fases é mostrado na Figura 14.

Em termos de implementação do algoritmo de MOTC levando em conta a otimização de termos da matriz de covariância (vide formulação (3.3.3)), deve-se salientar que, uma vez que a matriz $\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T]$ muda a cada iteração, o cálculo de \mathbf{V} , dado pela solução do autoproblema da matriz $\mathbf{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T]$ (vide eq.(3.4.25)), precisa ser realizado em cada iteração. Assim, e dada a discussão na seção anterior (3.4), pode-se notar que a formulação (3.3.3) é mais custosa computacionalmente que as formulações (3.3.1) e (3.3.2).

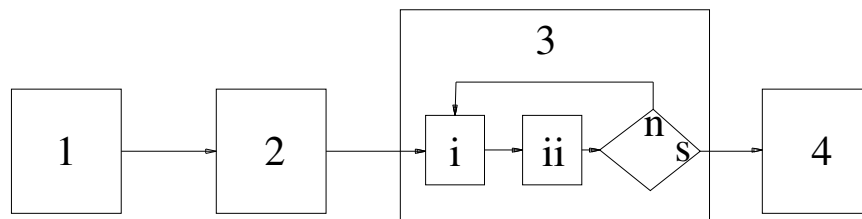


Figura 14 Fluxograma do programa de MOTC. As setas mostram o fluxo de dados através do programa. O losango indica a etapa de verificação da convergência e “s” e “n”, sim e não, respectivamente.

3.6 Resultados

Nos resultados desta seção, considera-se que as variáveis aleatórias são todas gaussianas (como mencionado no início do capítulo), sendo uma simplificação plausível (como explicado no APÊNDICE B, sobre o Atlas Anatômico). Além disso, considera-se que as variáveis em \mathbf{R} são correlacionadas. Levando-se em conta tais hipóteses, a transformação \mathbf{T} é dada como mostrado na subseção 3.2.1.

Conforme visto também no APÊNDICE B, são variados nos testes, basicamente, o tamanho da perturbação, o vetor de médias de entrada, ou seja, o de valores de potenciais médios “medidos”, e a matriz de covariância das variáveis aleatórias (ou seja, as antigas variáveis nodais de otimização do problema determinístico – ρ_k , como visto na seção 2.3 – e os potenciais elétricos “medidos”). Para simplificar e para mudar o foco para outros aspectos mais importantes, o valor do coeficiente de penalização (vide eq.(2.3.1)) permaneceu igual a 1 para todas as simulações. O esquema do domínio tomografado, mostrando as três regiões de estatísticas diferentes como descrito no APÊNDICE B (desvios padrão e médias são diferentes), é mostrado na Figura 15. As malhas utilizadas na estimação e no fantoma numérico são mostradas na mesma figura.

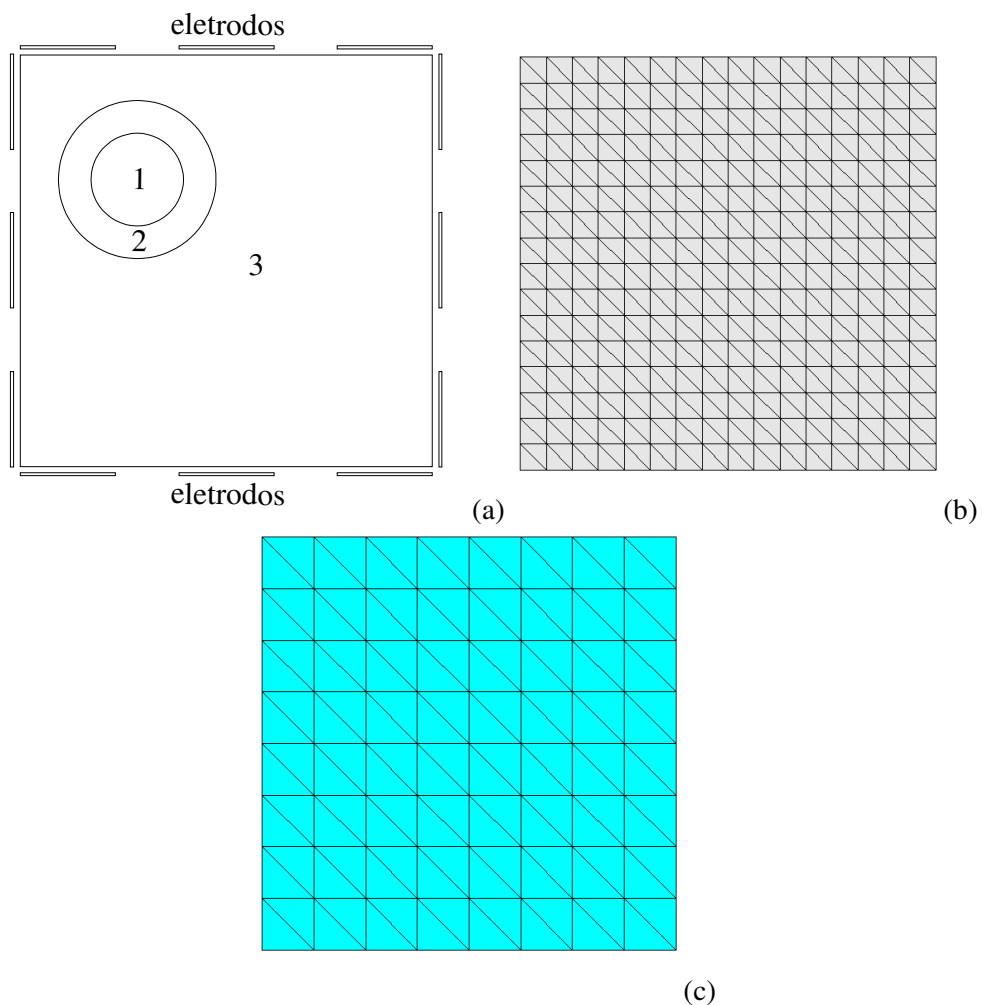


Figura 15 (a) Esquema do domínio tomografado. Três regiões definidas apresentam estatísticas diferentes. Doze eletrodos são utilizados. (b) Malha do fantoma numérico, discretizada em 512 elementos triangulares e 289 nós. (c) Malha onde se estima a imagem, discretizada em 128 elementos triangulares e 81 nós.

Como mencionado, consideram-se dados os parâmetros de contato. Esses são obtidos na malha de estimação de maneira determinística, para o caso em que são medidos potenciais num fantoma com parâmetros de contato iguais a $0,01\Omega\text{m}^2$ e com uma distribuição uniforme de condutividades igual a $0,25(\Omega\text{m})^{-1}$. Ainda na determinação dos parâmetros, considera-se a condutividade de $0,25(\Omega\text{m})^{-1}$ também na malha de estimação, da mesma maneira realizada em Mello (2005) e citada anteriormente (vide seção 2.3). Espera-se que os parâmetros de contato obtidos dessa maneira acomodem as discrepâncias entre valores de potenciais das malhas de estimação e do fantoma, de forma que a imagem gerada com os parâmetros obtidos seja satisfatória (a argumentação que justifica essa expectativa também está presente no trabalho de Mello (2005)).

Demais dados utilizados na obtenção das respostas vistas em seguida são listados na Tabela 1 e no capítulo referente ao Atlas Anatômico (APÊNDICE B).

Com os dados tabelados e com os valores médios de resistividades nodais mostrados na Figura 16 para os fantasmas 1 e 2, e na Figura 17 para o 3, definidos no capítulo sobre o Atlas Anatômico – APÊNDICE B –, são obtidas as respostas mostradas a seguir. Valores finais de probabilidade, conforme as legendas das figuras, são dados por P_f .

As respostas de MOTC são confrontadas com aquelas obtidas através de um programa equivalente, determinístico. Em outras palavras, o algoritmo descrito no capítulo 2 foi utilizado, admitindo-se dados os parâmetros de contato (calculados como mencionado na atual seção) e considerando-se todos os demais parâmetros determinísticos. As médias de potenciais geradas pelo Atlas Anatômico são utilizadas na estimação. Além disso, os dados da Tabela 1 também foram empregados nesse caso.

Tabela 1 - Dados utilizados no processo de estimação.

Descrição da grandeza	Valor numérico
Número de nós da malha de estimação	81
Número de elementos estruturados da malha de estimação	128
Corrente elétrica (pico à pico)	1mA
Parâmetros de contato dos eletrodos do fantoma	$0,01\Omega\text{m}^2$

Número de eletrodos – np	12
Número de padrões de corrente – ne	12
Dimensões dos eletrodos retangulares	10 mm x 35 mm
Dimensões frontais do fantoma e da malha de estimacão	300 mm x 300 mm
Espessura ou altura das mesmas malhas	35 mm
σ_A	$0,25 (\Omega m)^{-1} (= 4\Omega m)$
σ_B	$0,002 (\Omega m)^{-1} (= 500\Omega m)$
Coeficiente de penalizacão p	1
Valor inicial das variáveis nodais de otimizacão (valores médios das antigas variáveis nodais determinísticas)	1 (correspondente a uma distribuicão uniforme de $4\Omega m$)

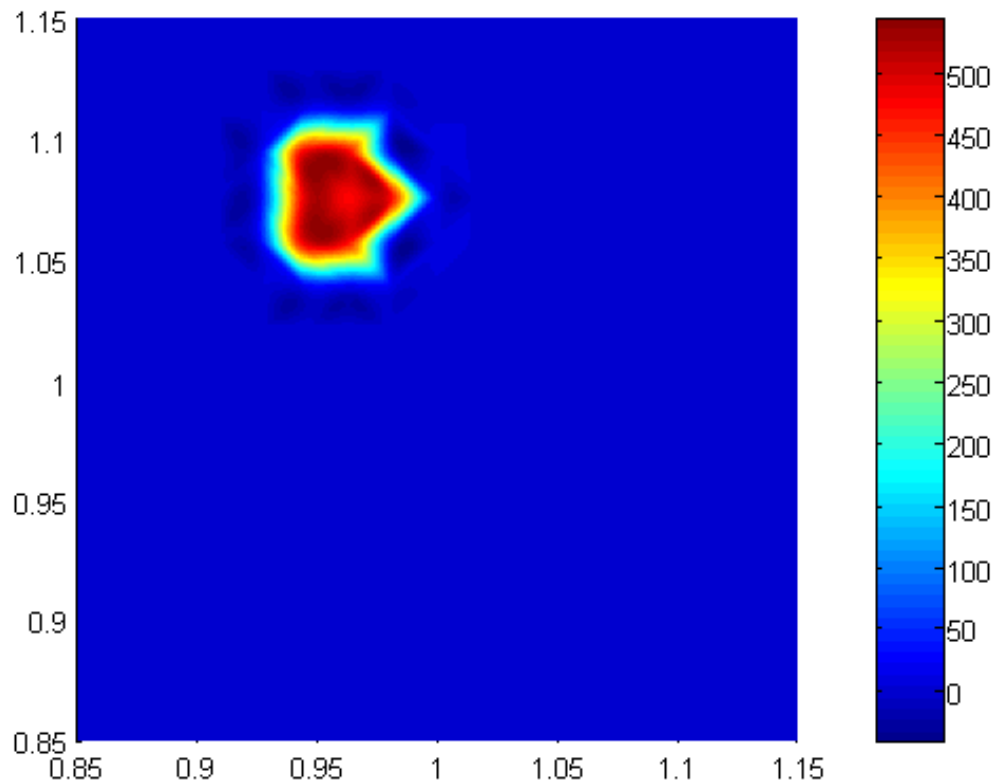


Figura 16 Valores médios de resistividade plotados no Matlab para os fantasmas 1 e 2 (vide APÊNDICE B). Os valores máximo e mínimo plotados são 500 e $4\Omega\text{m}$, respectivamente, sendo o inverso dos mesmos empregados como limites na otimização (vide eq.(2.3.1)).

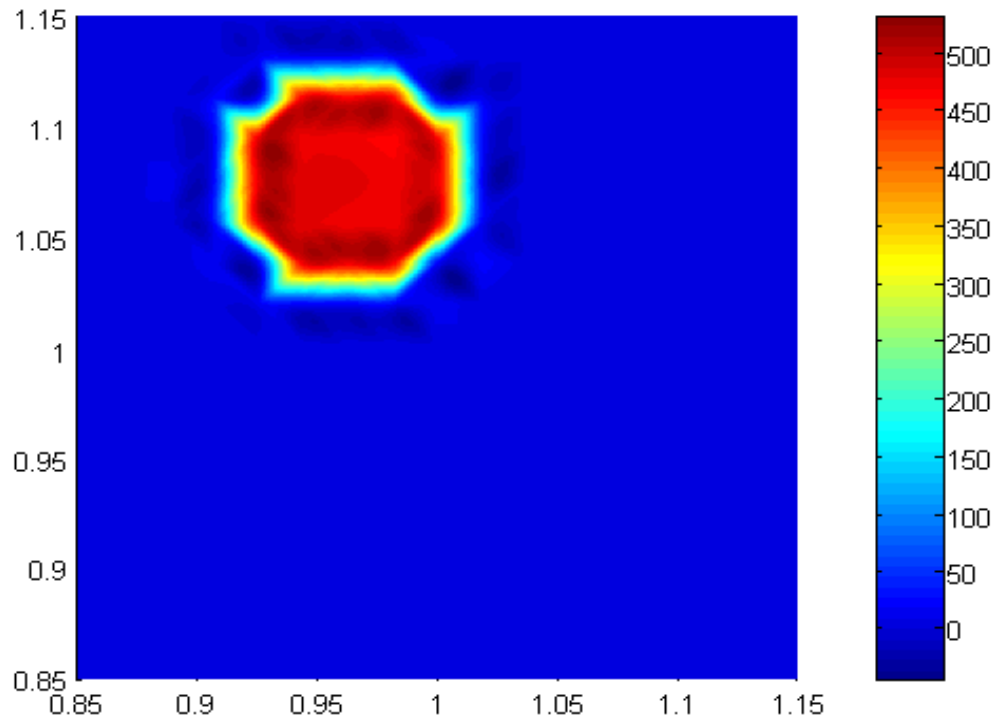


Figura 17 Valores médios de resistividade plotados no Matlab para o fantasma 3 (vide APÊNDICE B). Os valores máximo e mínimo plotados são, novamente, 500 e $4\Omega\text{m}$, respectivamente, sendo o inverso dos mesmos utilizados como limites na otimização (vide eq.(2.3.1)).

Finalmente, deve-se mencionar que uma probabilidade exatamente igual a 1, que corresponde ao caso em que o termo $-\text{sign}(b_1)\beta$ é igual a $+\infty$ (vide eq.(3.2.16)), não foi obtida pelo algoritmo. Porém, tal termo é maior que 5 para várias respostas, o que corresponde a valores de probabilidade extremamente próximos de 1. Também se deve mencionar que as respostas mostradas na Figura 18, na Figura 25 e na Figura 30 foram obtidas com o algoritmo determinístico. Nesse caso, os valores finais de F (vide seção 2.3) são dados por F_{deti} para o i -ésimo fantoma. Valores de F para as respostas do MOTC não são fornecidos, uma vez que, segundo a teoria de MOTC discutida anteriormente, o valor de F é somente calculado para que se compute a probabilidade. Como justificado, a probabilidade, aproximada, é computada no PMP, o qual pertence à superfície $F-\delta=0$. Assim, a menos dos erros de aproximação gerados pelo algoritmo de Rackwitz e Fiessler, o valor de F deve ser sempre igual a δ .

3.6.1 Resultados: Formulação para Obtenção das Médias ou Formulação Padrão

Nessa subseção, considera-se a correlação entre as variáveis aleatórias em \mathbf{R} dada pelo Atlas Anatômico, da maneira vista no APÊNDICE B. Nas respostas, serão variados o valor de δ (o limite para o valor de F, conforme mencionado na seção 3.3) e o fantoma empregado.

Nota-se que, para δ fixo e próximo do valor obtido no caso do algoritmo determinístico, o algoritmo de MOTC se comporta relativamente bem (em relação às demais respostas) diante de incertezas para os três fantasmas (vide Figura 24, Figura 29 e Figura 34 para os fantasmas 1, 2 e 3, respectivamente), em termos de imagens obtidas. O pior caso obviamente é o do fantoma 2, o qual apresenta os maiores desvios e a menor perturbação. Além disso, deve-se mencionar que a resposta referente ao fantoma 2 apresentou problemas de convergência. É importante, no entanto, exibir as respostas referentes ao fantoma 2, pois essas sugerem as limitações do MOTC, ou seja, o tamanho mínimo de perturbação e o valor máximo de incertezas com os quais se pode trabalhar.

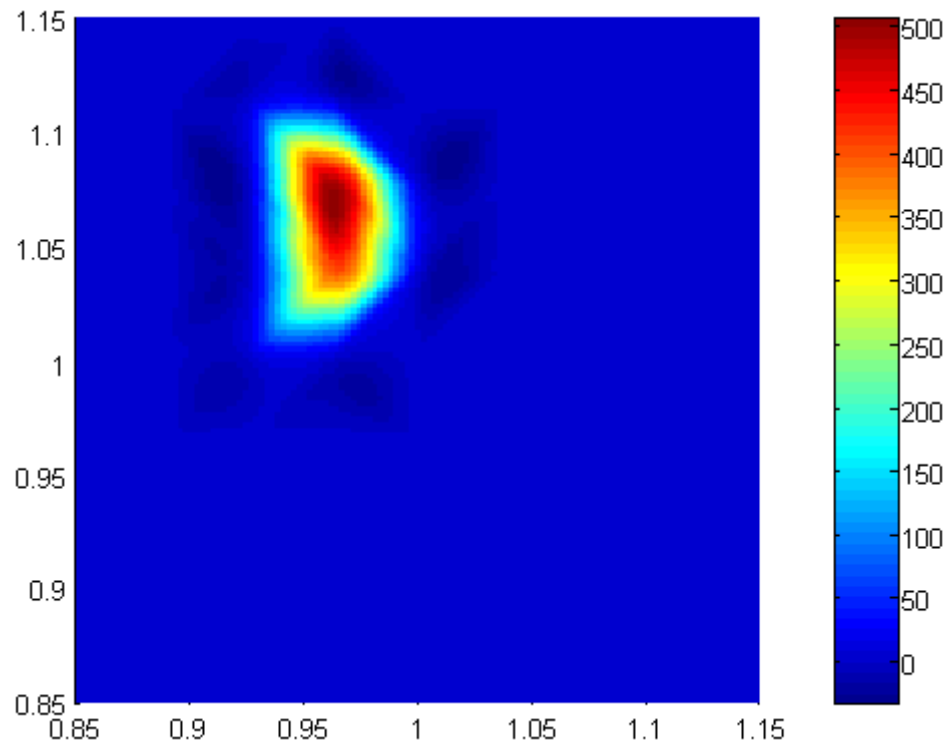


Figura 18 Resultado determinístico para o fantoma 1. $F_{\text{fidel}}=6,6864 \cdot 10^{-6}$.

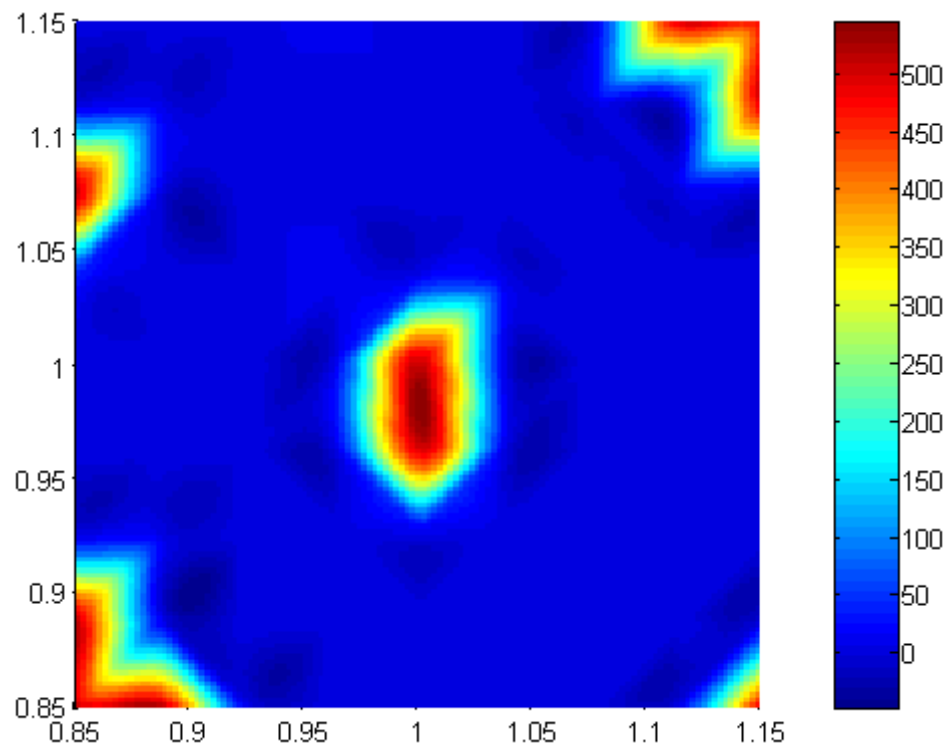


Figura 19 Resultado para o fantoma 1 utilizando o MOTC com $\delta=0,01$. $P_f \approx 1$.

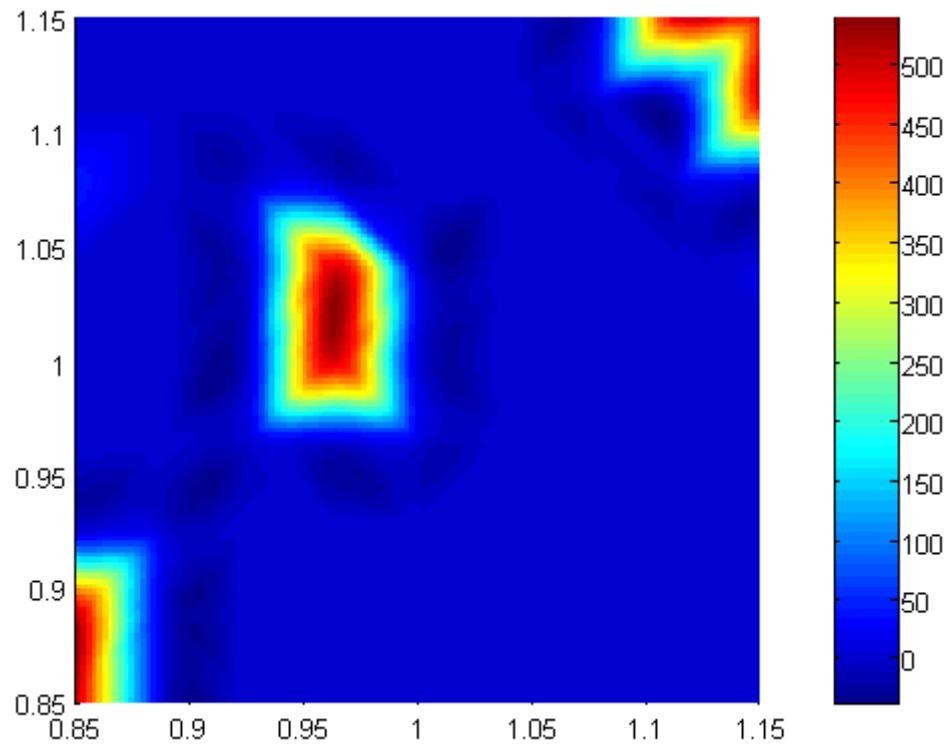


Figura 20 Resultado para o fantoma 1 utilizando o MOTC com $\delta=0,001$. $P_f \approx 1$.

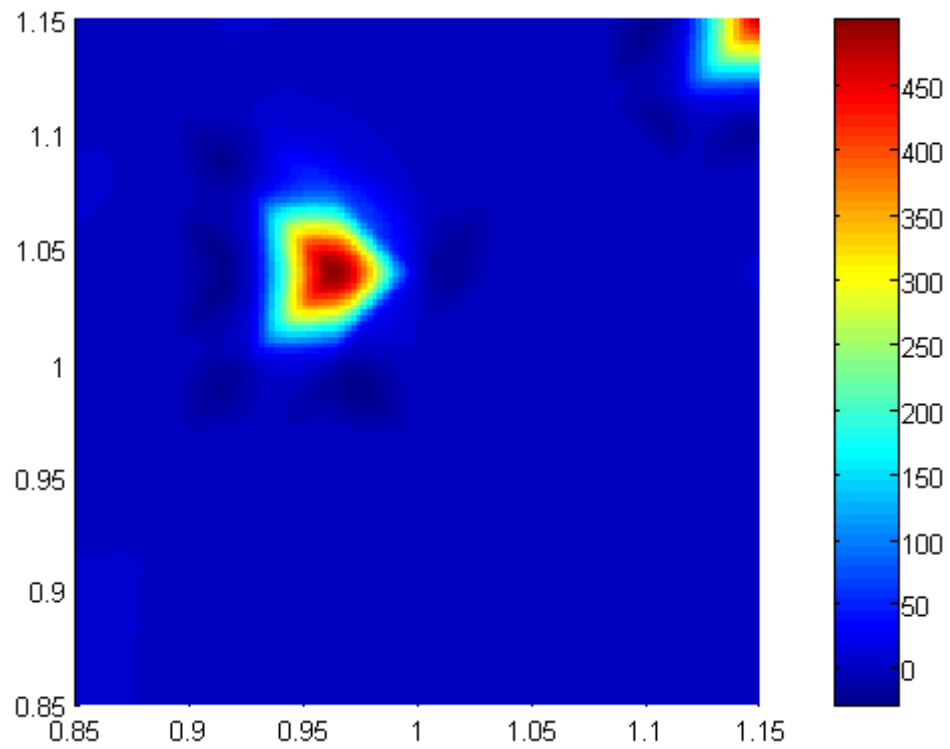


Figura 21 Resultado para o fantoma 1 utilizando o MOTC com $\delta=0,0001$. $P_f \approx 1$.

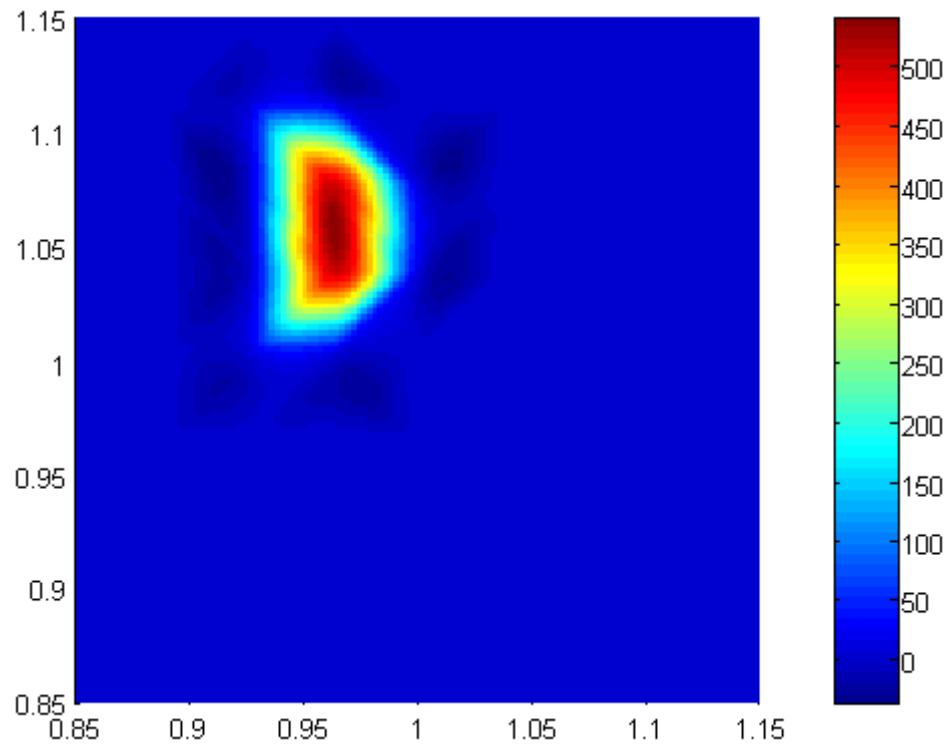


Figura 22 Resultado para o fantoma 1 utilizando o MOTC com $\delta=0,00001$. $P_f \approx 1$.

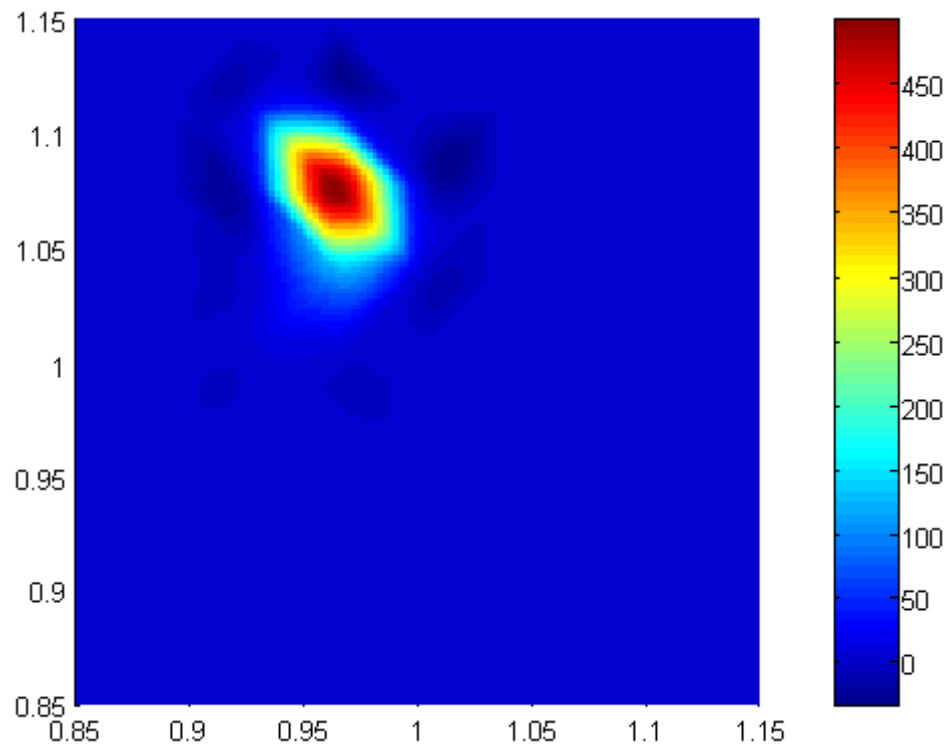


Figura 23 Resultado para o fantoma 1 utilizando o MOTC com $\delta=0,00001$. $P_f = 0$.

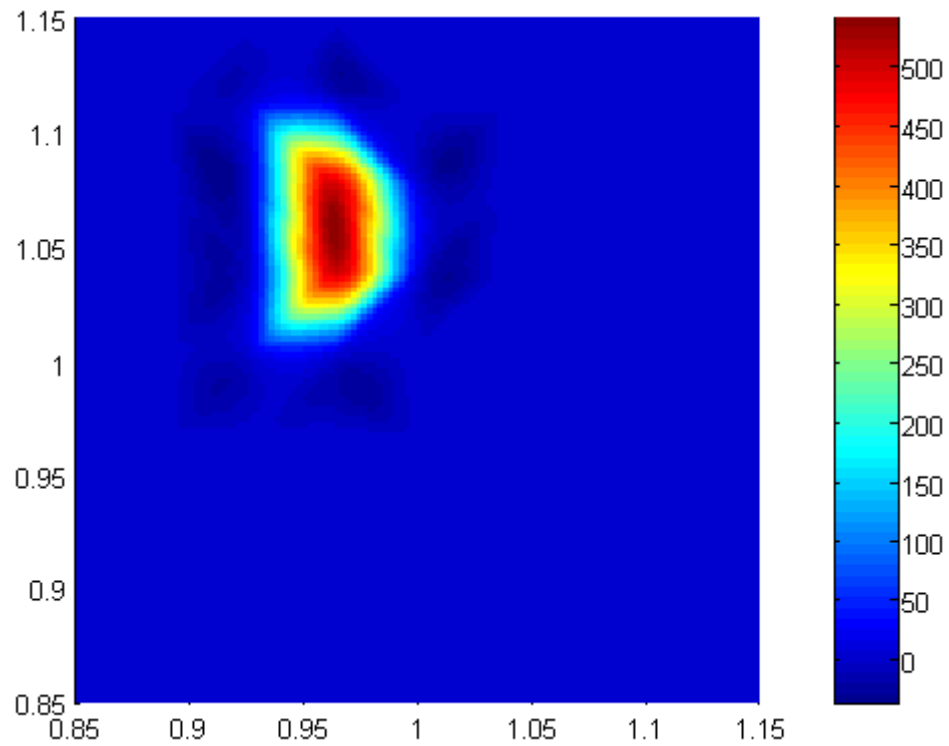


Figura 24 Resultado para o fantoma 1 utilizando o MOTC com $\delta = F_{\text{fdeti}}$. $P_f = 0,5013054841$.

Então, fixando-se o nível de incerteza, o que é feito considerando-se um mesmo fantoma, e variando-se δ , são obtidas as respostas mostradas na Figura 19 até a Figura 24 para o fantoma 1, na Figura 26 até a Figura 29 para o fantoma 2 e na Figura 31 até a Figura 34 para o fantoma 3. Mostra-se que as imagens são cada vez mais satisfatórias quando δ se aproxima de F_{fdeti} (pode-se mesmo notar que pioram no caso em que $\delta < F_{\text{fdeti}}$, o que é visto na Figura 23 e na Figura 28, por exemplo).

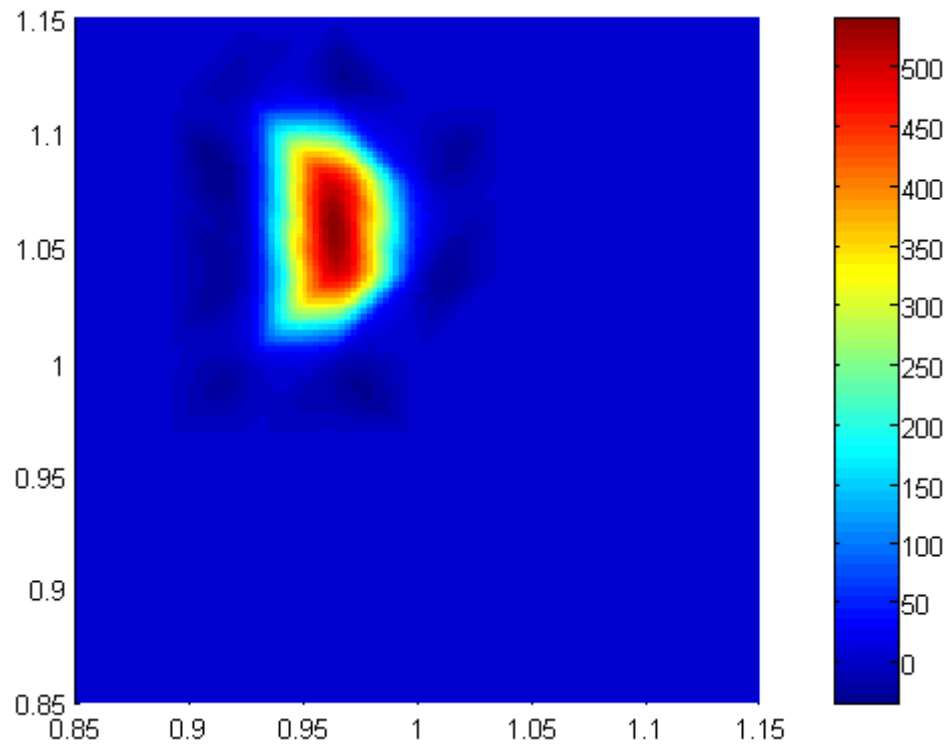


Figura 25 Resultado determinístico para o fantoma 2. $F_{\text{fdet}2} = 7,6475 \cdot 10^{-6}$.

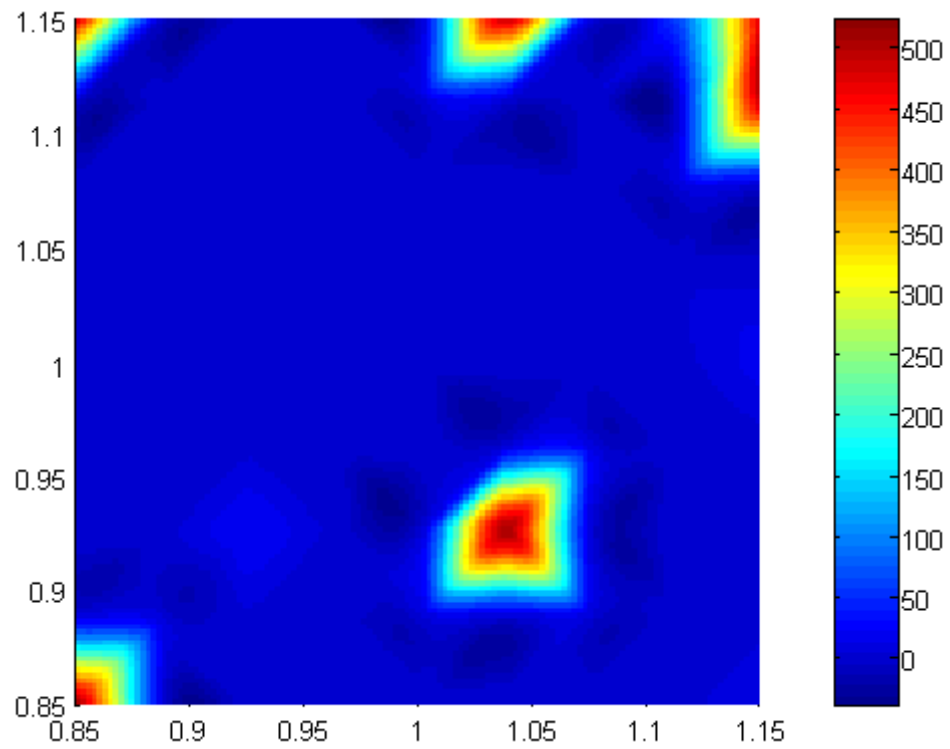


Figura 26 Resultado para o fantoma 2 utilizando o MOTC com $\delta=0,001$. $P_f \approx 1$.

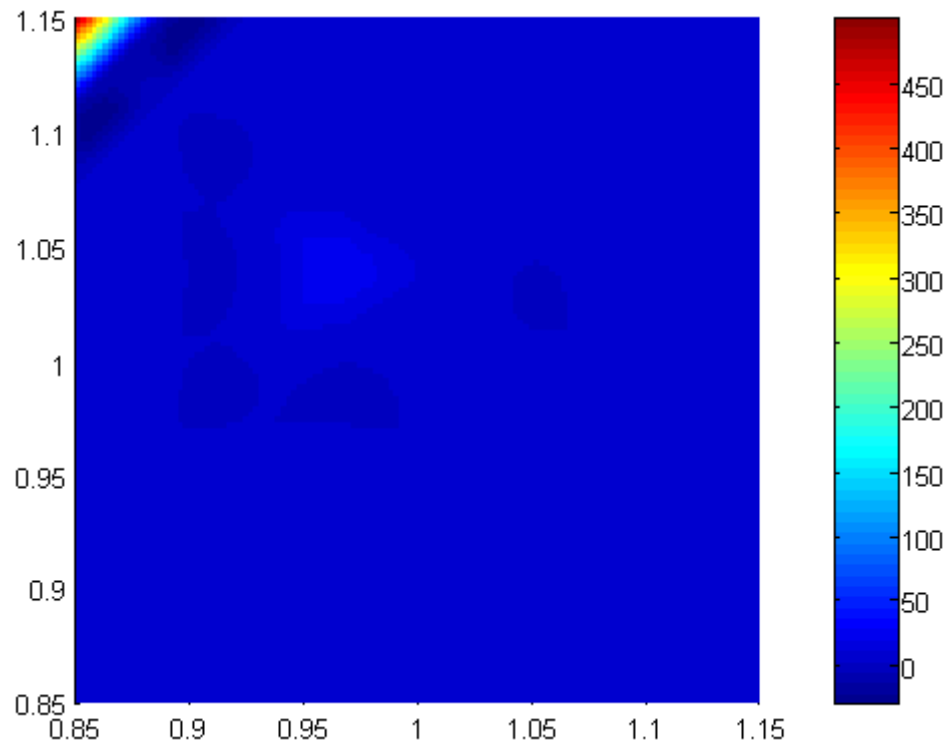


Figura 27 Resultado para o fantoma 2 utilizando o MOTC com $\delta=0,00001$. $P_f=0,0002234025$.

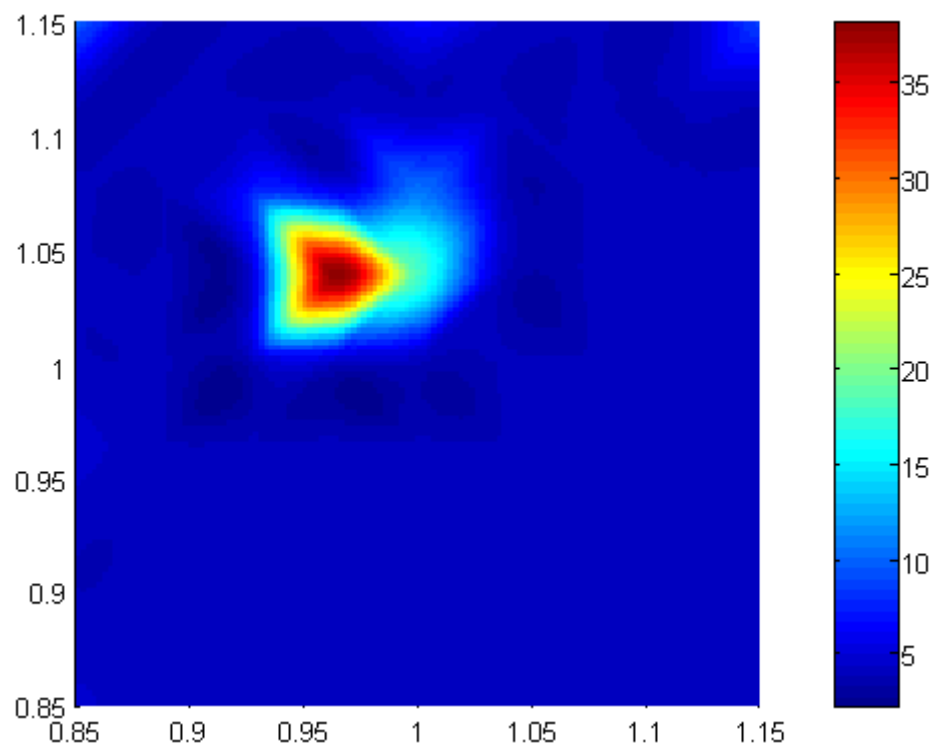


Figura 28 Resultado para o fantoma 2 utilizando o MOTC com $\delta=0,000001$. $P_f=0,0300269143$
(solução oscila bastante, chegando até a $P=0,0108518059$).

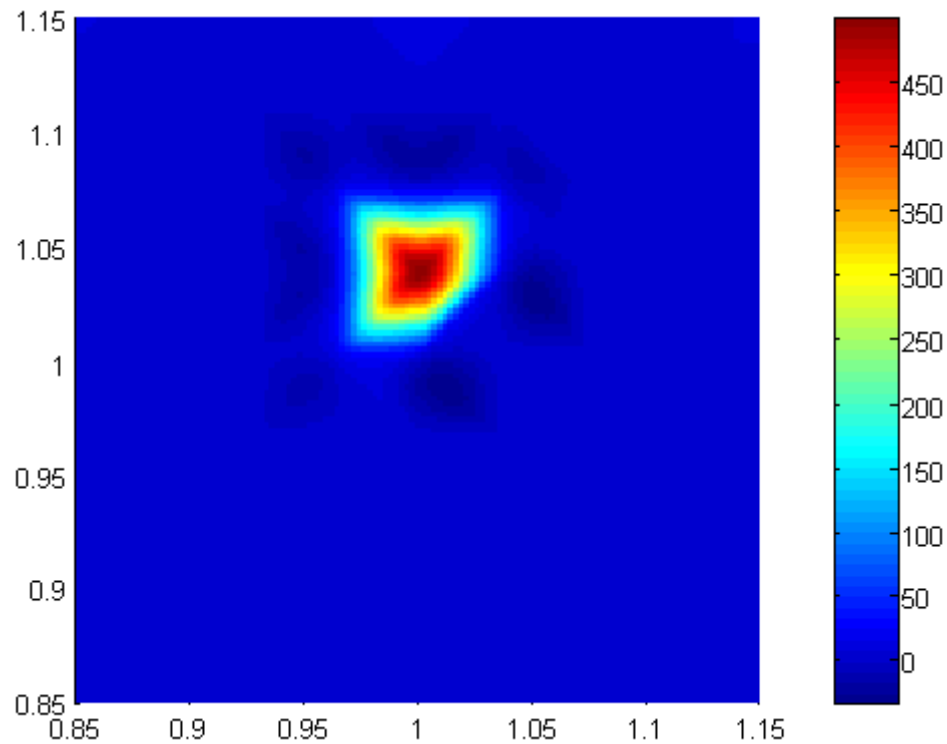


Figura 29 Resultado para o fantoma 2 utilizando o MOTC com $\delta = F_{\text{fdet}2}$. $P_f = 0,0036111398$ (solução oscila bastante, chegando até a $P = 0,0284419677$).

Nota-se que se δ é elevado com relação ao valor de $F_{\text{fdet}i}$, em qualquer fantoma, $F - \delta$ não é um indicativo adequado de imagem satisfatória, pois a probabilidade final obtida é alta para diferentes imagens do fantoma (e de qualidades diferentes). Refinando-se ainda mais as malhas de finitos de estimação e do fantoma, com o intuito de se melhorar o modelo, acredita-se poder utilizar um valor nulo de δ (ou próximo disso), o que remediará a questão da escolha do valor desta variável (testes nesse sentido não foram, porém, realizados neste trabalho). Deve-se salientar que, quanto maior a discretização, melhor a aproximação do caso real, ao menos teoricamente. Assim, o limite para o refinamento máximo das malhas deve ser observado apenas para impedir que o algoritmo de MOTC seja custoso demais, computacionalmente, inviabilizando sua aplicação.

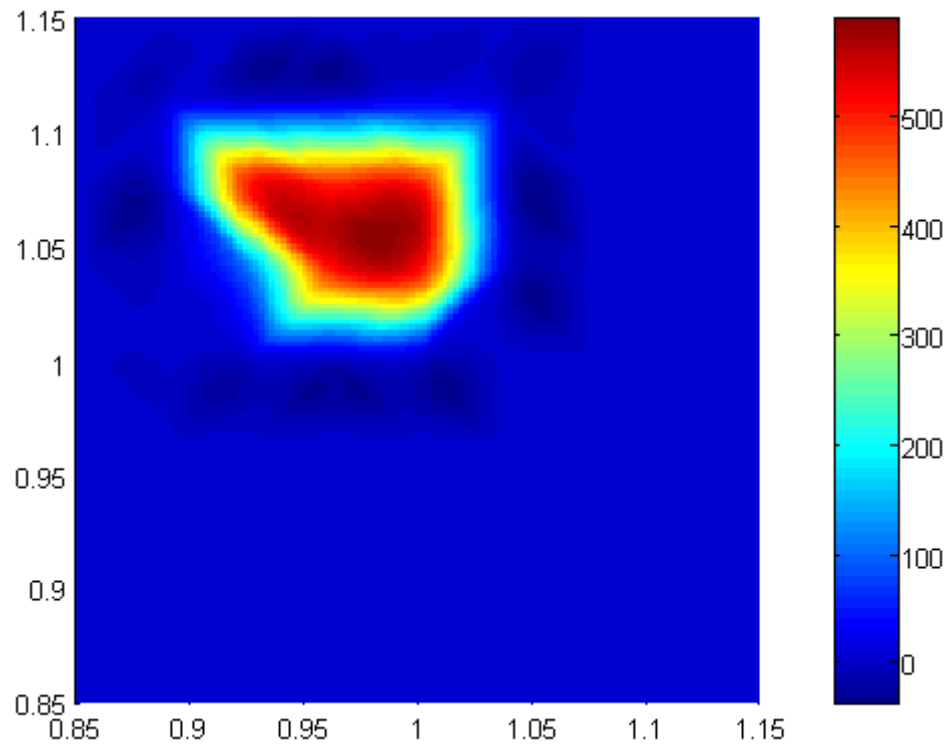


Figura 30 Resultado determinístico para o fantoma 3. $F_{\text{fdet}3} = 9,6947 \cdot 10^{-6}$.

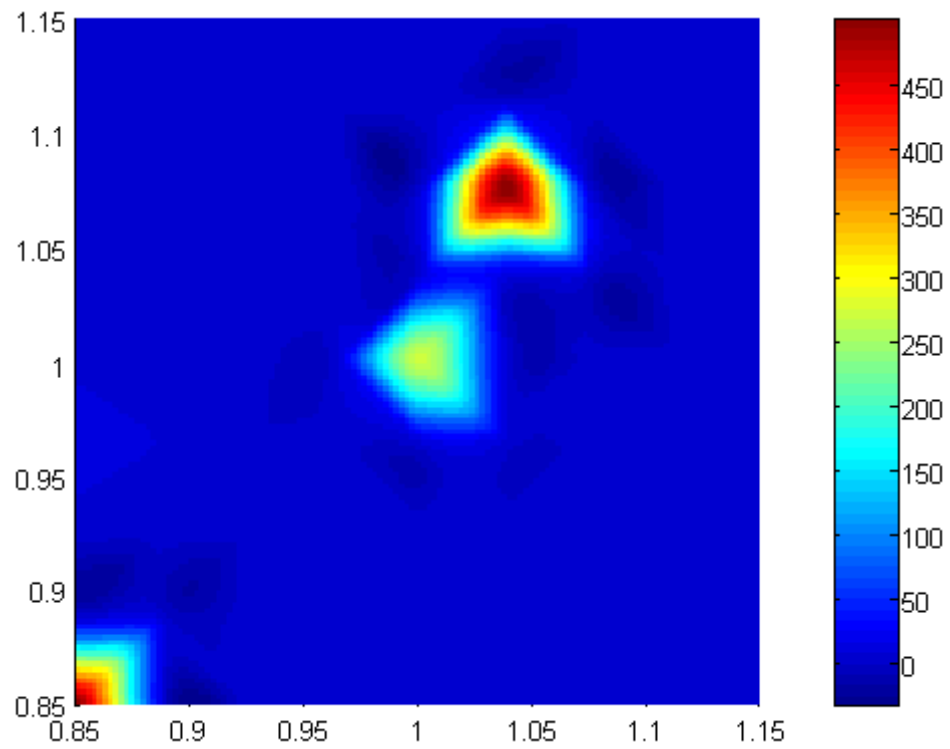


Figura 31 Resultado para o fantoma 3 utilizando o MOTC com $\delta=0,001$. $P_f = 0,9993417029$.

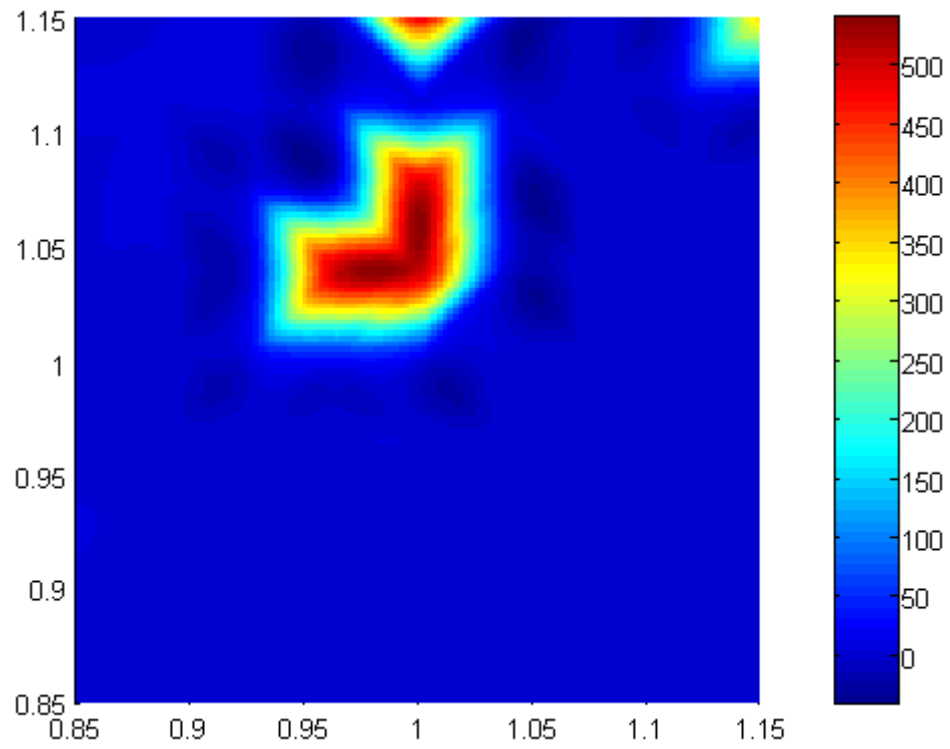


Figura 32 Resultado para o fantoma 3 utilizando o MOTC com $\delta=0,0001$. $P_f=0,7913311623$.

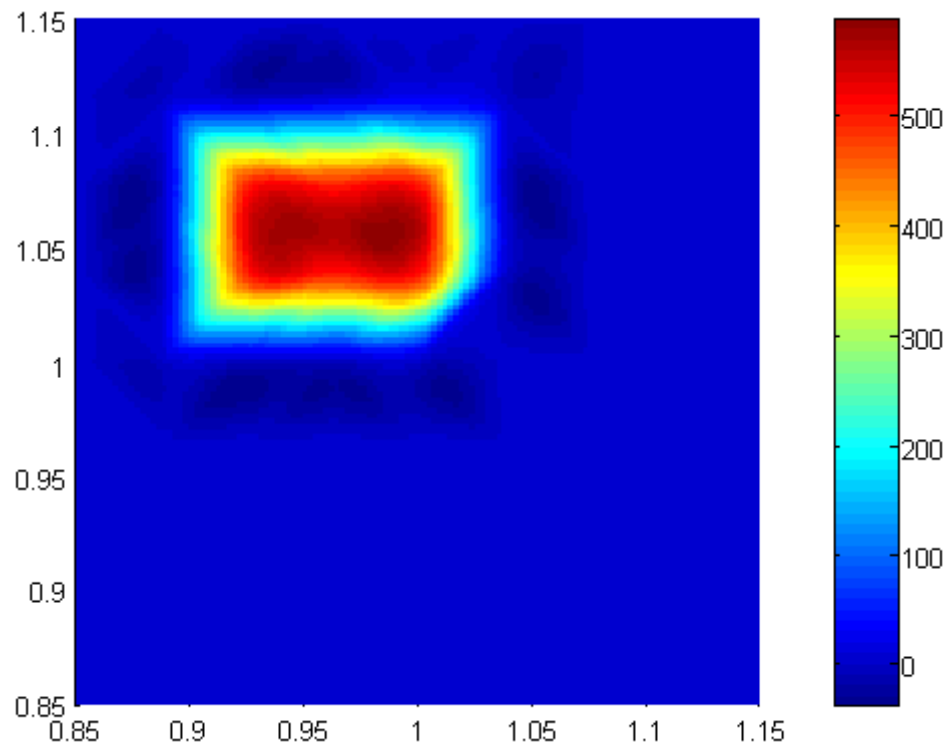


Figura 33 Resultado para o fantoma 3 utilizando o MOTC com $\delta=0,00001$. $P_f=0,5332138698$.

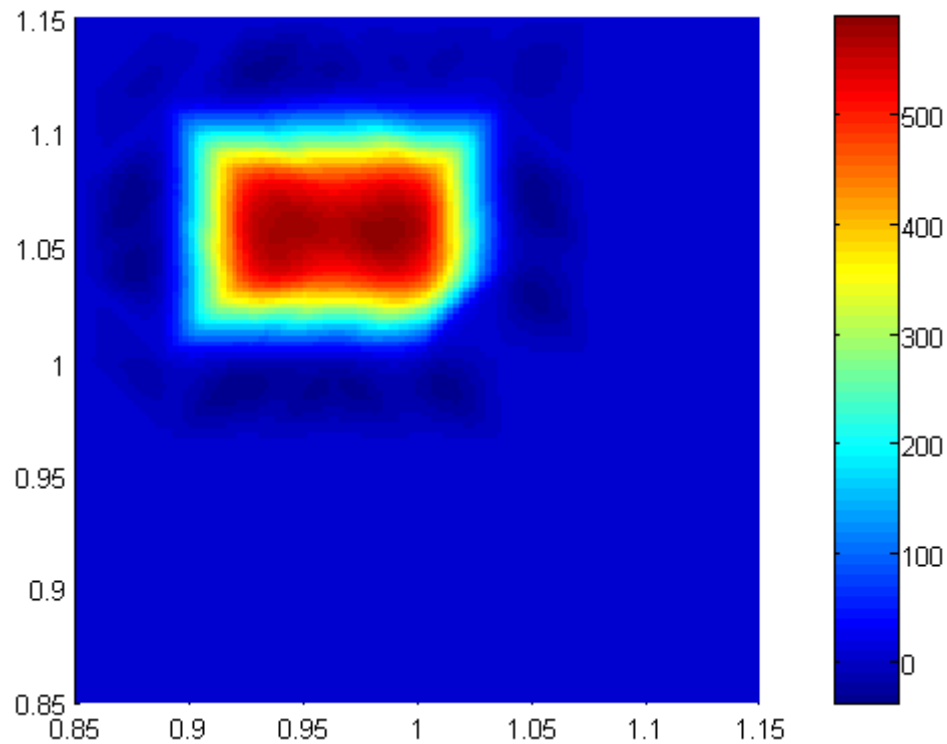


Figura 34 Resultado para o fantoma 3 utilizando o MOTC com $\delta = F_{\text{fide}t3}$. $P_f = 0,5213362734$.

Finalmente, deve-se mencionar que, apesar da resposta determinística parecer satisfatória, tanto visualmente quanto pelo valor da função objetivo determinística, não há embasamento probabilístico para que ela possa ser aceita como tal, o que foi citado como vantagem do MOTC sobre o MOT. Tanto a Figura 30 quanto a Figura 34, por exemplo, mostram imagens ligeiramente diferentes do fantoma. Porém, somente a segunda delas acusa uma probabilidade (maximizada) de aproximadamente 50% de que F seja menor que δ , ou seja, de que a imagem atenda o requisito básico de qualidade, dadas as incertezas nas medidas e na imagem. Isso mostra a importância do embasamento probabilístico, indicando que o MOTC representa uma abordagem conservadora. Considera-se no caso citado, que o valor de δ utilizado (igual a $F_{\text{fide}t3}$) para obtenção da imagem na Figura 34 seja tal que o evento “ F menor que δ ”, seja um indicativo apropriado o suficiente de uma imagem satisfatória.

Deve-se aliar o algoritmo de MOTC criado a restrições probabilísticas para que se tenham mais informações para a estimação da imagem, o que costuma ser feito nos trabalhos de TIE, como no trabalho de Kolehmainen et al. (1998), por exemplo. Nessas condições, é provável que a imagem seja mais satisfatória, ou seja, mais próxima do fantoma, desde que a malha onde é estimada tenha resolução suficiente.

O tempo de processamento associado às respostas, obtidas no Matlab, é de, aproximadamente, 60 minutos num PC AMD Athlon 3200 (3.2GHz, e um só núcleo de processamento) com 1GB de RAM. Porém, tal tempo pode ser reduzido pela otimização do código, com pré-alocação, por exemplo, pela paralelização (MOLINARI et al., 2001), e/ou através da utilização de máquinas atuais, mais modernas que a utilizada. Ainda, a abordagem citada por Nguyen, Song e Paulino para eliminação do “loop” interno de cálculo do índice de confiabilidade, a etapa 3i da seção 3.5 sobre implementação do algoritmo, pode ser bastante eficaz na redução do tempo total do algoritmo de MOTC para a formulação padrão (e também para a formulação estudada na seqüência, na subseção 3.6.2), uma vez que o “loop” mencionado é, justamente, a etapa mais custosa do algoritmo nesse caso (e também no caso da formulação de segmentação). O programa determinístico demora em torno de 1 minuto para obter a imagem.

3.6.2 Resultados: Formulação para Obtenção das Médias e Condutividades Determinísticas

Nessa subseção, consideram-se, novamente, a correlação entre as variáveis aleatórias em \mathbf{R} dada pelo Atlas Anatômico, da maneira vista no APÊNDICE B, e também as médias de potenciais elétricos dadas pelo Atlas. No entanto, **assumindo-se conhecida a região onde as condutividades nodais apresentam maior incerteza e assumindo-se incertezas para as variáveis das regiões restantes desprezíveis**, consideram-se as variáveis referentes aos nós indicados na Figura 35 como as únicas variáveis aleatórias, correspondendo a variáveis de otimização do tipo média. As variáveis restantes são, então, consideradas como determinísticas e associadas a variáveis de otimização determinísticas. É importante mencionar que essa mudança corresponde à redução das dimensões da matriz de covariância, uma vez que, de 81 variáveis aleatórias correspondentes aos 81 nós da malha de estimação, consideram-se, segundo essa formulação e conforme indica a Figura 35, apenas 9 variáveis aleatórias em nós.

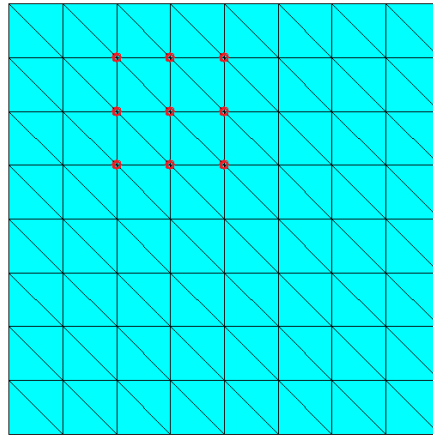


Figura 35 Malha de estimação da imagem, mostrando os nós cujas variáveis são consideradas como aleatórias.

Nas respostas, mantém-se o valor de δ igual a 0,00001, próximo do valor de F_{fdeti} , o qual rendeu bons resultados na subseção anterior. Consideram-se os fantasmas 1 e 3.

Na Figura 36 e, principalmente, na Figura 37, nota-se que a qualidade das imagens é inferior à obtida com a formulação padrão (vide Figura 22 e Figura 33). No caso do fantoma 1 (Figura 36), a diferença é, principalmente, quantitativa, ou nos valores de resistividades. Porém, no caso do fantoma 3 (Figura 37), a perturbação não foi detectada corretamente.

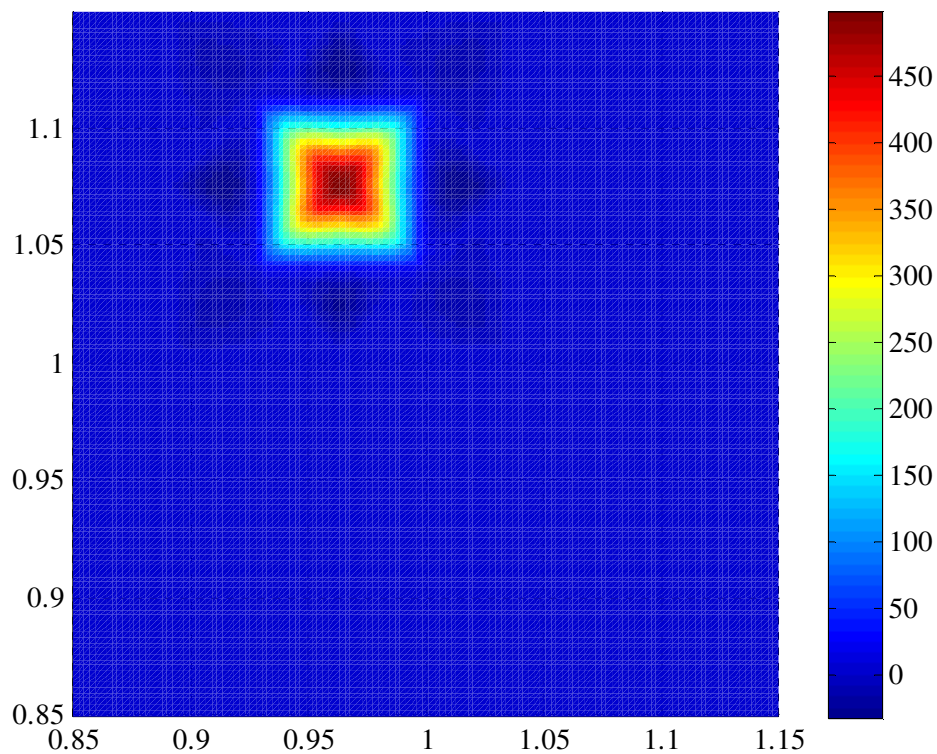


Figura 36 Resultado para o fantoma 1 utilizando o MOTC com $\delta=0,00001$.

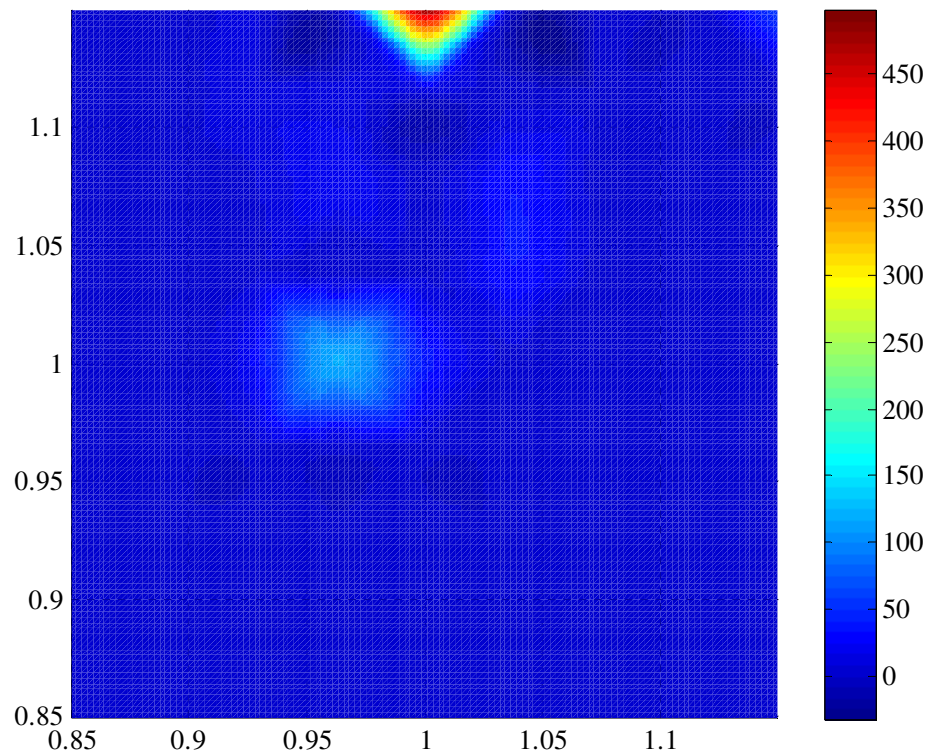


Figura 37 Resultado para o fantoma 3 utilizando o MOTC com $\delta=0,00001$.

Essas respostas mostram a dificuldade de se trabalhar com a segmentação, e sugerem que as incertezas nas regiões consideradas determinísticas devem ser ainda mais reduzidas que as consideradas no atual trabalho (vide APÊNDICE B, para descrição detalhada dos valores considerados), para que o emprego da aproximação seja efetivo.

3.6.3 Resultados: Formulação para Obtenção das Médias, Variâncias e Covariâncias

Nessa subseção, consideram-se conhecidas apenas as médias dos potenciais elétricos medidos nos eletrodos, dadas pelo Atlas Anatômico (vide APÊNDICE B).

Diferentemente das subseções anteriores, resolve-se, **para efeito de teste**, problema de estimação em que as malhas do fantoma e de estimação são iguais. O fantoma 1 é considerado, mas, como citado, a malha na Figura 15(c) é utilizada na confecção do fantoma (ao invés da malha na Figura 15(b), como nos casos anteriores), dando origem ao chamado fantoma 1C. Os valores médios de resistividades nodais para tal fantoma são mostrados na Figura 38. Ainda, o valor de δ é igual a 0,0000001 (valor próximo do obtido na solução do

problema determinístico semelhante, considerando-se também malhas iguais para o fantoma e para a estimação, e as médias das medidas de potenciais do fantoma – dadas pelo Atlas Anatômico – como entradas na estimação) e os parâmetros de contato são iguais aos do fantoma, de valor $0,01\Omega\text{m}^2$. Demais dados são idênticos aos utilizados nos resultados anteriores.

Finalmente, apenas o elemento da primeira linha e primeira coluna da matriz é estimado (variância para o primeiro “pixel”), admitindo-se demais valores dados. O método utilizado para estimação é descrito na seção 3.5.

Nesse caso, obtém-se resposta exatamente igual à distribuição mostrada na Figura 38. O valor de variância, por sua vez, apresenta uma discrepância de, aproximadamente, 5% do valor correto (empregado no fantoma), que é igual a, aproximadamente, $4,6.10^{-7}$.

Apesar das respostas serem informativas, o algoritmo demora quatro vezes mais do que no caso em que se estimam apenas as médias, considerando-se dados todos os elementos da matriz de covariância, ou seja, utilizando-se a formulação padrão (deve-se notar que a matriz de covariância tem, para a malha de estimação considerada – vide Figura 15(c) –, mais de dez mil incógnitas). Isso corresponde a, aproximadamente, quatro horas de testes num PC AMD Turion X2 Ultra Dual-Core Mobile ZM-80, com 2.1GHz e 3GB de RAM, contra uma hora do algoritmo rodando a formulação padrão. Além disso, notou-se que a taxa de convergência das médias é significativamente menor. De fato, considerando-se apenas as iterações de atualização das médias, ou seja, sem contar as iterações em que se atualiza a variância, mais iterações foram realizadas no caso da estimação das médias e da variância do que no caso da estimação somente das médias.

Acredita-se que esse exemplo mostre, claramente, que a estimação da matriz de covariância pelo método proposto não é, atualmente, viável.

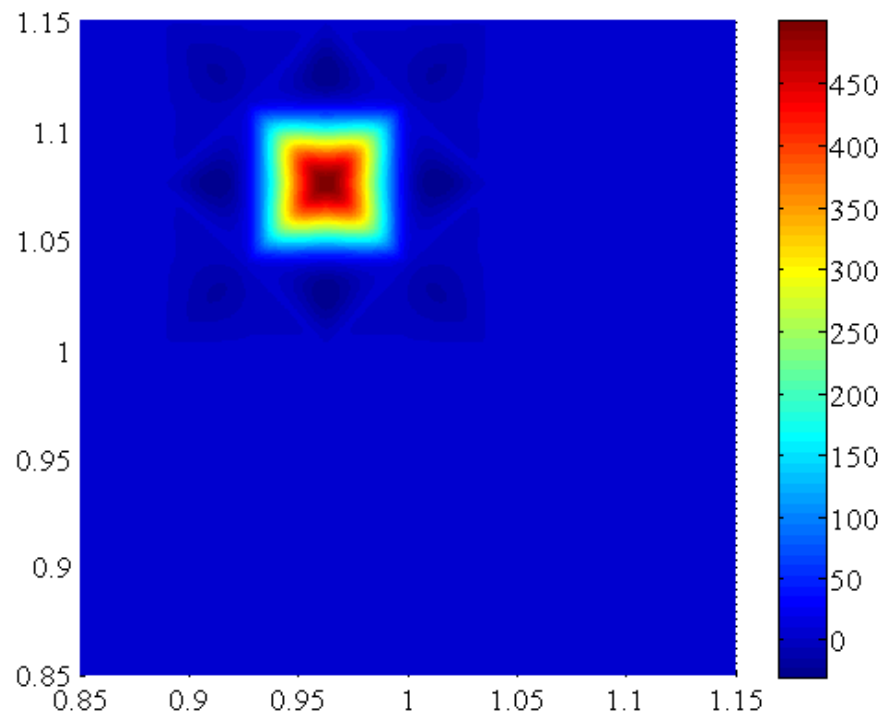


Figura 38 Valores médios de resistividade plotados no Matlab para o fantoma 1C, considerando-se a malha menos discretizada da Figura 15(c). Os valores máximo e mínimo plotados são 500 e $4\Omega\text{m}$, respectivamente, sendo o inverso dos mesmos empregados como limites na otimização.

Cabe mencionar que, apesar disso, testes com os fantasmas 1 e 3 foram realizados – sem considerar, portanto, malhas iguais para a estimação e o fantoma – e com a estimação de todas as incógnitas da matriz de covariância. No entanto, esse caso mostrou-se ainda mais desafiador. Isso porque, ao longo do processo iterativo, a linearização do problema para a posterior solução por PL levou à obtenção de autovalores negativos da matriz em diversas iterações. Numa análise da eq.(3.4.9), pode-se notar que cada termo do gradiente da probabilidade referente às médias depende de uma soma ponderada dos inversos das raízes quadradas dos autovalores da matriz. Isso significa que, por diversas vezes no processo iterativo, ocorreu do gradiente ser formado por números complexos, o que inviabiliza a solução do problema de PL pela rotina “linprog” do Matlab.

Como solução, impôs-se restrição a todos os autovalores da matriz de covariância (restrição de maior ou igual a um valor pequeno, maior que zero). No entanto, os autovalores de uma matriz dependem de forma não-linear dos seus elementos. Assim, na solução do problema linearizado, não se garante que a restrição não-linear seja respeitada, o que deve ser então checado a cada iteração. Isso, de fato, foi realizado no trabalho e percebeu-se que, em todas as iterações verificadas, a restrição original (não-linear), não foi respeitada. Isso exige que os limites móveis sejam reduzidos e o problema de PL seja resolvido novamente,

considerando-se o gradiente fixo (dado pela eq.(3.4.24) e pela eq.(3.4.34)), sendo esse procedimento repetido até que se verifique que a resposta do problema linearizado respeita as restrições não-lineares (ou seja, é adicionado um novo “loop” interno, agora para a solução do problema de PL). No problema de estimação considerado, há 189 autovalores que devem ser positivos, ou seja, 189 restrições não-lineares a serem respeitadas. Na prática, verificou-se que a obtenção da solução do problema linearizado (com restrições) é lenta e se torna cada vez mais lenta com a diminuição dos limites móveis. Uma rotina de PL eficiente e programada em C foi, então, testada nesse caso (a rotina recebe os dados do programa de Matlab e devolve o resultado do problema linearizado). No entanto, ao contrário do que se esperava, a rotina, pertencente ao pacote GLPK (“GNU Linear Programming Kit”) do Projeto GNU (“GNU is Not Unix” um acrônimo recursivo), rendeu tempos comparáveis aos obtidos no Matlab.

Como alternativa, estudou-se realizar exatamente o mesmo procedimento, ou seja, com redução dos limites móveis e verificação dos autovalores, mas sem considerar as 189 restrições. No entanto, a taxa de convergência desse algoritmo mostrou-se extremamente lenta, uma vez que os autovalores permanecem bastante próximos de zero ao longo do processo iterativo global, o que exige limites móveis limitados.

Então, estudou-se a viabilidade de uma técnica de otimização que modificasse o domínio de otimização de tal sorte que as restrições aos autovalores, incorporadas na função objetivo, fossem sempre atendidas. Segundo o método empregado, o método de Ponto Interior ou “Interior Penalty Function Method” (HAFTKA; GÜRDAL, 1999), parâmetros vão sendo ajustados pelo usuário ao longo do processo iterativo de tal forma que a solução do problema sem restrições resolvido tende, assintoticamente, à solução do problema restringido original. Na prática, no entanto, o mínimo do problema não restringido deve ser obtido por um método de aproximação, como o método de PLS. Utilizando-se o método de Ponto Interior aliado à PLS, notou-se que a taxa de convergência ainda continuou lenta (deve-se notar que a linearização imposta pela PLS causa problemas similares aos citados anteriormente).

Esses testes mostram que ainda há grandes desafios na implementação prática do MOTC para estimação de médias e elementos da matriz de covariância das variáveis aleatórias.

3.7 Conclusão e Observações

Em primeiro, pode-se dizer que o algoritmo proposto de MOTC obteve, em vários casos, respostas mostrando localizações corretas das perturbações, bem como geometrias aproximadamente corretas. Ainda, gradientes de propriedade do material abruptos e elevados contrastes foram mostrados, o que foi mencionado como vantagem do MOTC frente aos algoritmos reportados na literatura.

Aparentemente, o valor de δ deve ser próximo de F_{deti} , o que rendeu imagens próximas às do fantoma e valores finais de probabilidade coerentes no caso da formulação padrão (vide subseção 3.6.1). Isso sugere um método de cálculo de δ , ou seja, o método de solução do problema determinístico com valores de medidas de potenciais dadas pelas médias das mesmas. Porém, o valor correto a ser empregado representa, atualmente, uma incógnita, sendo a forma de obtê-lo uma questão em aberto. Como mencionado, refinando-se ainda mais as malhas de finitos de estimação e do fantoma, com o intuito de se evitar o problema da discrepância entre as variáveis obtidas e as utilizadas no fantoma, acredita-se poder utilizar um valor nulo de δ . Isso então remediaria a questão da escolha do valor correto.

As respostas obtidas com a segmentação do domínio (vide subseção 3.6.2) mostram a dificuldade de se trabalhar com a técnica e sugerem que as incertezas nas regiões consideradas determinísticas devem ser ainda mais reduzidas que as consideradas no atual trabalho, para que o emprego da aproximação seja efetivo. Ainda, apesar de ser possível do ponto de vista teórico e, como sugerem as respostas, precisa, a estimação de elementos da matriz de covariância em conjunto com as médias dos “pixels” da imagem (vide subseção 3.6.3) mostrou-se inviável com relação ao tempo de processamento. A conclusão é a de que variâncias e covariâncias incógnitas devem ser obtidas de antemão, por método alternativo.

Finalmente, deve-se notar que valores máximo e mínimo de resistividade para as estruturas encontradas no corpo humano e, freqüentemente, em outras aplicações, podem ser verificados. Assim, como explicitado na seção 3.1, seria plausível considerar uma distribuição do tipo Beta para as condutividades, o que também é possível através da teoria do MOTC (MADSEN; KRENK; LIND, 2006).

4 DETERMINAÇÃO DO POSICIONAMENTO ÓTIMO DOS ELETRODOS PELO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Nesse capítulo, discute-se a correção do posicionamento dos eletrodos pelo MOT e também o projeto dos eletrodos pelo MOT. O motivo para reunir ambos os tópicos num capítulo é que o modelo adotado e a metodologia para solução dos problemas são os mesmos. A determinação da posição ótima é baseada na otimização de um índice de desempenho. A diferença entre os tópicos reside, sobretudo, no índice de desempenho utilizado em cada caso, como será discutido.

4.1 Correção do Posicionamento dos Eletrodos pelo Método de Otimização Topológica

Existe um problema potencial em todas as aplicações de TIE: pode ser inviável ou até impossível precisar a posição dos eletrodos na superfície do corpo ou região tomografada por intermédio de técnicas de medição tradicionais. Ainda, pode não ser possível efetuar a correção manual do posicionamento, tanto no modelo quanto no corpo, devido a questões de tempo e/ou limitações físicas.

Numa situação de emergência médica, por exemplo, em que um instante a mais possa implicar num óbito, considera-se alguma estimativa aproximada da posição na superfície do corpo. Ainda, tal posição pode mudar com a movimentação do paciente, como quando há respiração. Além disso, por questões de conforto e/ou mandatórias, muitas vezes o paciente não pode ser movido (SADLEIR et al., 2008), o que impede a correção física do posicionamento. Outro exemplo tem origem em aplicações geológicas. Nesses casos, os eletrodos geralmente estão sujeitos a agentes externos e, portanto, suas posições também podem ser alteradas ao longo do tempo sem que seja, no entanto, efetuada a correção (num caso de eletrodos subterrâneos, por exemplo). Finalmente, em situações de aplicação

industrial de difícil acesso, como em oleodutos, a questão do erro da posição pode representar sérias restrições à produção (na indústria, o tempo é sempre fator preponderante).

Na presença de tais erros, ou seja, quando a posição dos eletrodos no modelo não corresponde à posição física dos mesmos, artefatos indesejáveis na imagem podem ser obtidos (VALLEJO et al., 2006; SOLEIMANI; LABERGE; ADLER, 2006). Nesse caso, é interessante que o próprio algoritmo que obtém as impedâncias elétricas no interior do corpo possa determinar a posição física dos eletrodos e corrigir o modelo, de maneira eficiente. Deve-se ressaltar que os dois últimos exemplos de aplicações da TIE mencionados não estão no escopo do trabalho, mas foram citados para reforçar a necessidade de se estudar abordagens para detectar o erro de posicionamento dos eletrodos e corrigi-lo.

Seguindo essa necessidade, uma abordagem por diferenças finitas foi implementada pelo grupo do Projeto Temático (VALLEJO et al., 2006), para obtenção da localização real dos eletrodos e correção de uma estimativa inicial. Nesse caso, a atualização da posição num domínio cilíndrico, em que apenas o problema 2D é considerado, se dá através de um processo iterativo com base na matriz de sensibilidade. Os coeficientes da matriz, derivadas de potenciais elétricos com relação à variação da posição angular de cada eletrodo, são calculados por diferenças finitas. Um dos problemas com esta abordagem, simples de se implementar e computacionalmente rápida, reside no fato de que tais derivadas são aproximações e também na dificuldade de escolha dos denominadores de diferenças finitas. Tais denominadores devem ser determinados com base na curvatura da função objetivo, o que nem sempre é possível de se precisar. Além disso, mesmo num caso hipotético em que se conhece a curvatura, essa não fornece um valor fechado para os denominadores, mas um intervalo cujos limites são baseados na experiência com o problema.

Retornando à análise do artigo, uma solução iterativa dividida em três fases, uma para cada tipo de variável (imagem, parâmetros de contato e posição dos eletrodos), foi proposta, sendo a etapa de obtenção da posição dos eletrodos baseada no algoritmo de “Black-Box”. Soleimani, Laberge e Adler (2006) utilizam abordagens semelhantes. Porém, apenas um Jacobiano, o qual está associado à imagem e às posições dos eletrodos, é gerado, e o problema inverso é resolvido em apenas uma iteração. Apesar disso, apresentam-se resultados 3D.

As questões citadas nos parágrafos anteriores motivam o presente estudo. Desenvolveu-se, portanto, formulação de MOT determinístico para correção da posição de eletrodos, em conjunto com a estimação da imagem. O problema com as derivadas foi resolvido através da obtenção de uma expressão analítica e fechada para seu cálculo, como será explicitado nas

próximas seções. Além disso, através do MOT, a correção se dá iterativamente, o que permite a aplicação do algoritmo a casos arbitrários (a solução em apenas uma iteração, da maneira descrita por Soleimani, Laberge e Adler (2006), admite pequenas modificações para a posição inicial, fornecida previamente).

No que se segue, é exposta a teoria relacionada a essa nova abordagem. Ainda, testes para um caso 2D simplificado são realizados, mostrando o potencial da técnica proposta.

4.1.1 Fundamentação Teórica

A função objetivo usual, divulgada na seção 2.3 (ou seja, a diferença elevada ao quadrado entre medidas e cálculos num modelo) é utilizada na detecção do erro de posicionamento dos eletrodos. Com o intuito de corrigir tal erro e ainda obter a imagem, minimiza-se a função objetivo com relação às posições dos eletrodos na superfície do modelo e com relação aos parâmetros que definem a imagem. A técnica de correção baseia-se no Método da Alternância (vide seção 2.3), ou seja, dividem-se incógnitas em grupos e obtêm-se, posteriormente, as mesmas através de processos iterativos em série, encadeados. Detalhes sobre essa técnica são mostrados na seção 2.3 para o caso em que as incógnitas são a imagem e os parâmetros de contato referentes aos eletrodos. Os grupos mencionados, que se referem à imagem e à posição dos eletrodos, são definidos na sequência.

A representação esquemática do modelo de um corpo tomografado pode ser vista na Figura 39. Para efeito da correção do posicionamento, consideram-se conhecidos o número de eletrodos fixados ao corpo e a posição das regiões limites Ψ_{ia} (com índices a, b ou outros) vistas na mesma figura, as quais limitam os domínios Θ_i onde os eletrodos podem ser encontrados.

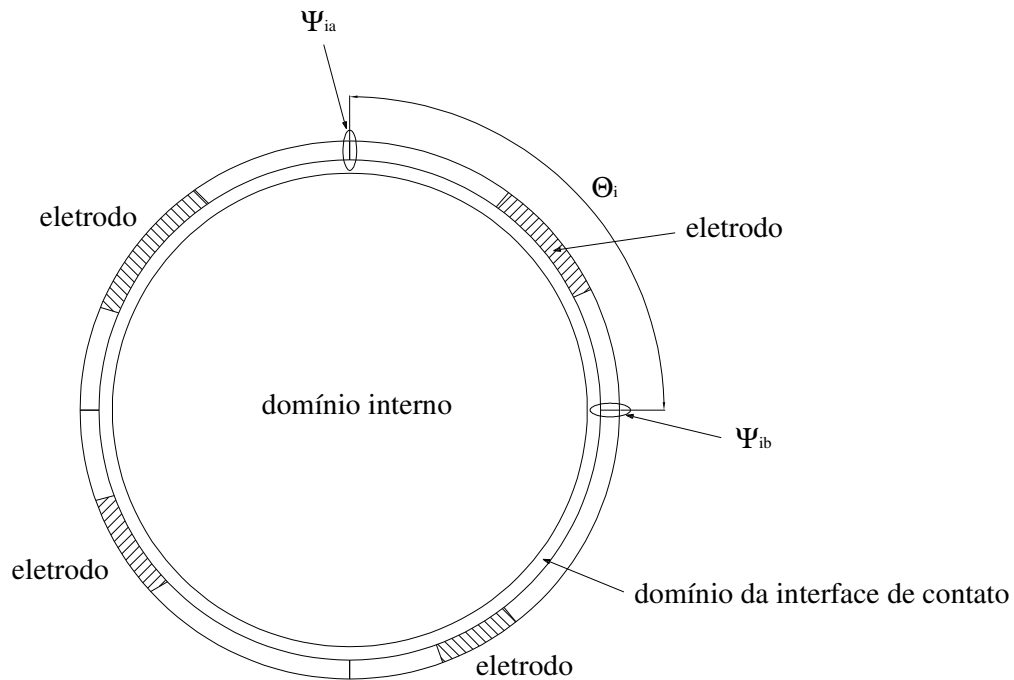


Figura 39 Esquema de uma seção do modelo de corpo tomografado. Hachuras indicam o eletrodo. Por simplicidade, são mostrados apenas quatro domínios Θ_i .

A abordagem utilizada para a correção da posição dos eletrodos baseia-se na imposição de que a propriedade do material em cada domínio Θ_i possa assumir valor igual à propriedade do material do eletrodo ou o valor nulo, dando origem ao “material do tipo vazio” (sendo as distribuições de ambas as propriedades, incógnitas). Ainda, as três regiões distintas do modelo vistas na Figura 39 (o domínio interno, o domínio da interface de contato e o domínio dado pela união de Ψ_{ia} e Θ_i , para todos os índices), são consideradas contínuas e conectadas.

Como explicado no capítulo 2, a equação que rege o fenômeno eletromagnético no interior do corpo, na aplicação à área médica, é a eq.(2.2.1). Aplicando-se as mesmas hipóteses citadas na seção 2.2 (as quais simplificam as leis de Maxwell), pode-se considerar que essa equação também rege o fenômeno físico no interior dos domínios Θ_i e das interfaces de contato entre eles e o corpo. Dado que as 3 regiões da Figura 39 são contínuas e conectadas, pode-se, então, escrever a forma fraca da eq.(2.2.1), ou forma integral – obtida pelo Princípio dos Potenciais Virtuais (BATHE, 1996) ou através do Cálculo Variacional e utilizada para introdução do MEF – dada por

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{\phi} \cdot (\sigma \nabla \phi) dv = \int_{\partial\Omega_1} \bar{\phi}_s J_n ds \quad (4.1.1)$$

onde Ω é domínio dado pela união dos domínios interno, do domínio da interface de contato e dos domínios de otimização dos eletrodos (incluindo as interfaces), $\bar{\phi}$ é o potencial virtual em Ω e $\bar{\phi}_s$ é o potencial virtual em $\partial\Omega_i$, porção do contorno $\partial\Omega$ de Ω , onde se aplica a componente normal da densidade de corrente J_n (correspondente à condição de contorno de Neumann). Ainda, dv e ds são elementos infinitesimais de volume e de superfície, respectivamente.

A abordagem proposta, com a introdução do “material do tipo vazio”, naturalmente cria a necessidade de se desenvolver um mecanismo de imposição de condições de contorno a um contorno que é função das variáveis do problema de otimização, ou seja, um contorno "móvel", conforme ilustra a Figura 40. De fato, existe literatura disponível de MOT sobre o assunto em diversas áreas do conhecimento ligado ao projeto em Engenharia, como nos trabalhos de Fuchs e Moses (2000), Buhl (2002) e Rauli e Maute (2005), por exemplo. Porém, não existe técnica semelhante, destinada à TIE, que seja conhecida pelo candidato.

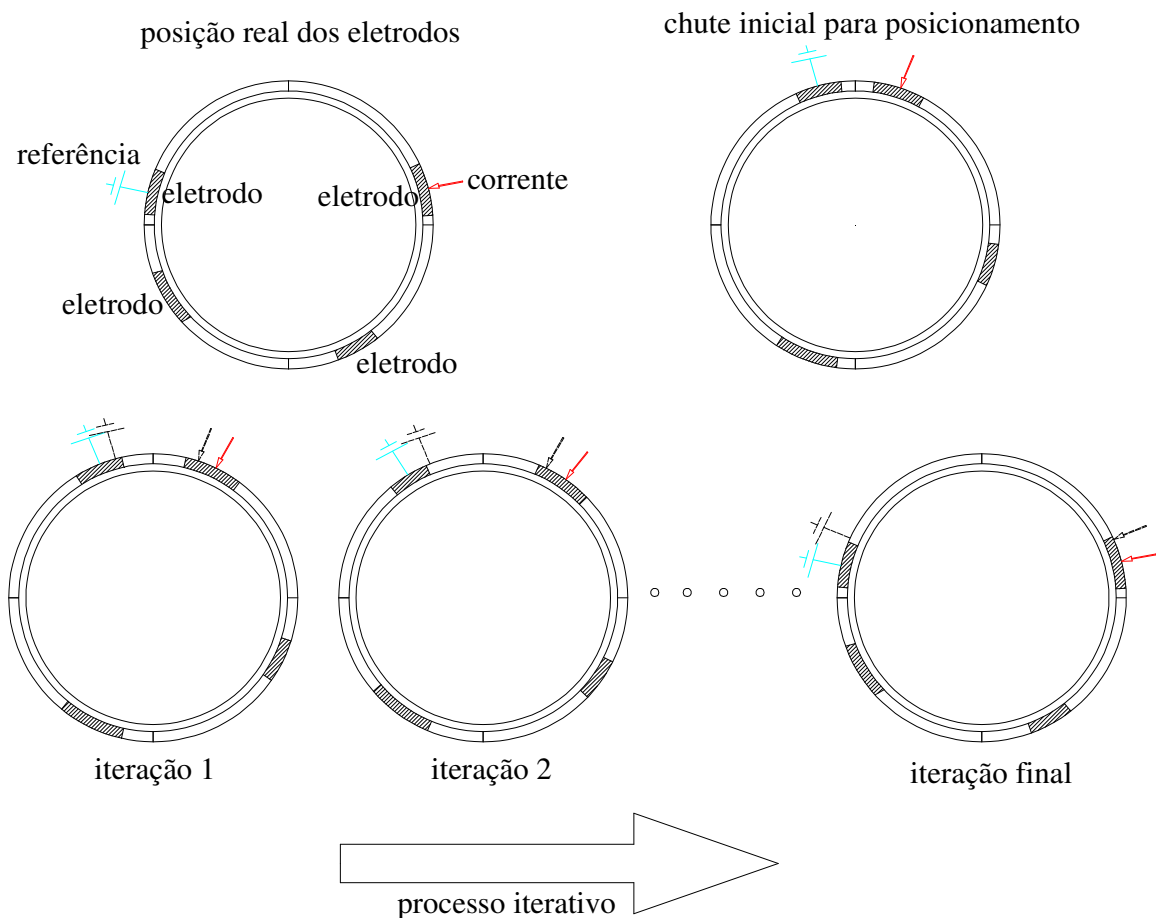


Figura 40 Processo de correção da posição dos eletrodos. A ilustração na parte superior esquerda da figura mostra a posição real dos eletrodos e condições de contorno correspondentes, para um padrão

de corrente qualquer. A parte inferior mostra o processo iterativo de correção do posicionamento inicialmente assumido, e conseqüente mudança das condições de contorno, que deve ser realizada a cada iteração.

No presente trabalho, para aplicação das condições de contorno de Newmann ao contorno “móvel”, impõe-se que a densidade de corrente normal à superfície do domínio Θ_i , correspondente ao eletrodo de corrente (ou seja, eletrodo onde se aplica corrente), seja uma função da condutividade, sendo nula no caso da condutividade ser nula e igual a um valor máximo em caso contrário. Além disso, impõe-se densidade de corrente normal nula nos demais locais do domínio. Por fim, como restrição ao problema de otimização, impõe-se que a corrente total aplicada à superfície do domínio Θ_i do eletrodo de corrente seja igual à corrente nominal aplicada ao eletrodo correspondente do corpo tomografado, ou seja, que:

$$\int_{\partial\Omega_{\Theta_i}} \mathbf{J}_{ni} \cdot d\mathbf{s} = I_{Tij} \quad (4.1.2)$$

onde J_{ni} é a densidade normal de corrente aplicada ao domínio Θ_i , $\partial\Omega_{\Theta_i}$ é a superfície do mesmo domínio e I_{Tij} é a corrente nominal aplicada ao i -ésimo eletrodo do corpo segundo o j -ésimo padrão de corrente. Essa equação é freqüentemente utilizada na literatura nos modelos de eletrodo consagrados (HUA et al., 1993; VAUHKONEN et al., 1999). Sua utilização como restrição será discutida, em detalhes, adiante no texto.

Finalmente, não se propõe técnica para correção do posicionamento do eletrodo de aplicação de potenciais elétricos e/ou técnica de aplicação de potencial elétrico a esse eletrodo – o qual é modelado como um único nó da malha de MEF –, pois as medidas compreendem diferenças de potenciais. Tal fato será justificado na subseção 4.1.3.

Mais detalhes da abordagem de aplicação de condições de contorno de Newmann (como a relação funcional entre a densidade de corrente J_{ni} e a condutividade da superfície de Θ_i), particularizada para o caso do modelo discretizado em elementos finitos, são mostrados em seguida. A abordagem por MEF, introduzida com base na eq.(4.1.1), é empregada por ser o MEF um método numérico. Isso é necessário, pois o problema de correção da posição é baseado na equação mostrada no problema (2.3.3) e, portanto, na obtenção dos potenciais elétricos do modelo. Fantasmas reais apresentam geometrias, estruturas internas e condições de contorno tais que a obtenção dos potenciais, analiticamente, torna-se impossível. Assim, o MEF torna o problema de correção da posição tratável.

4.1.2 Implementação Numérica

Admite-se, na atual subseção e daqui por diante no capítulo, que a abordagem de MEF foi empregada (partindo-se da eq.(4.1.1)), dando origem ao esquema representado na Figura 41. Detalhes sobre a teoria de MEF podem ser vistos em Mello (2005), para o caso da TIE, e em Bathe (1996), de forma genérica.

Considerando-se, então, o modelo de MEF da Figura 41 e os artifícios citados anteriormente (na subseção 4.1.1), uma série de implementações numéricas são realizadas.

Em primeiro lugar, com a introdução do MEF, o eletrodo passa a ser representado por elementos finitos doravante denominados elementos de eletrodo, presentes numa malha auxiliar externa dividida em subdomínios Ω_i (vide Figura 41). Além disso, consideram-se os elementos da interface de contato dispostos em uma única camada, e conectados aos elementos externos da malha interna e aos elementos internos da malha externa de elementos de eletrodo, como também é visto na Figura 41.

Em segundo lugar, tratam-se as propriedades (condutividades) dos eletrodos como funções de variáveis de otimização (como feito para a imagem, conforme eq.(2.3.1)), sendo os seus valores definidos entre a propriedade do material que compõe o eletrodo e a propriedade de um material que emula o vazio, de valor relativamente pequeno (valor não-nulo é utilizado para evitar mau-condicionamento numérico). Em outras palavras, o problema discreto (com dois valores de condutividade admitidos) é relaxado (BENDSØE; SIGMUND, 2003). Isso significa que alguns locais da malha auxiliar externa representam o eletrodo, outros o material que emula o vazio, e ainda outros um combinado de ambos, segundo o seguinte modelo de material:

$$\begin{aligned}\sigma_{em} &= \rho_{em} \sigma_A + (1 - \rho_{em}) \sigma_B = \\ &= \rho_{em} (\sigma_A - \sigma_B) + \sigma_B\end{aligned}\quad (4.1.3)$$

com

$$\rho_{em} = \mathbf{N}_{em} \mathbf{p}_{em}, \quad \mathbf{0} \leq \rho_{em} \leq \mathbf{1}, \quad (4.1.4)$$

(esta última equação com termos semelhantes aos da eq.(2.3.1)) onde m se refere ao m -ésimo elemento de eletrodo, o índice “e” às variáveis de otimização de eletrodo, σ_A e σ_B são, novamente, os limites para os valores das condutividades (sendo σ_A a condutividade do eletrodo e σ_B a condutividade do material que emula o vazio), \mathbf{N}_{em} é a m -ésima matriz de funções de forma do elemento de eletrodo, \mathbf{p}_{em} é o m -ésimo vetor de variáveis nodais de otimização ρ_{en} do elemento de eletrodo, $\mathbf{0}$ é um vetor de zeros e $\mathbf{1}$ um vetor com valores unitários. O vetor \mathbf{p}_{em} tem número de coeficientes igual ao número de nós dos elementos de eletrodo. Ainda, como mostrado na eq.(4.1.4), impõem-se restrições laterais a ρ_{en} , iguais a zero e um, o que significa que estas podem atingir valores entre zero e um, como no capítulo 2.

Deve-se notar que o material que emula o vazio (chamado de material vazio ou do tipo vazio deste ponto em diante) ou ausência de material, possui resistência relativamente elevada em comparação à do material do eletrodo. Porém, essa resistência não é infinita, o que significa que pode haver passagem de corrente por esse material especial, ainda que em pequena quantidade. Esse efeito, de fato, ocorreu no caso de um mínimo local obtido pelo algoritmo de otimização, como mostrado nos testes realizados (vide subseção 4.1.4, Figura 48). Para distribuições de condutividade referentes a eletrodos de geometrias convencionais, no entanto, as correntes são desprezíveis, como mostrado no APÊNDICE E, sob o tópico referente à análise do modelo proposto através do “software” comercial ANSYS® 11.

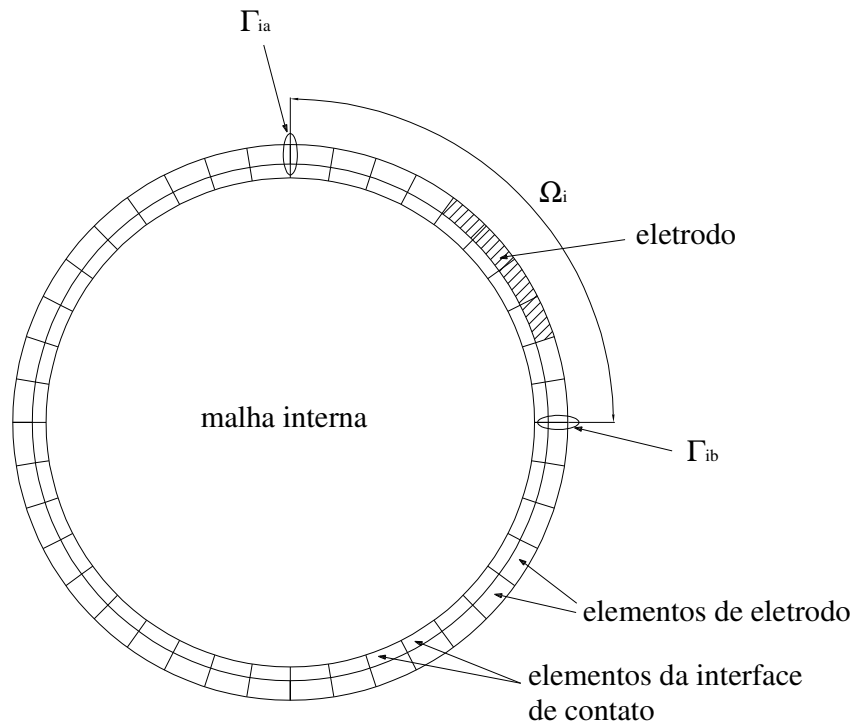


Figura 41 Esquema de uma seção da malha de estimacão de elementos finitos. Hachuras indicam a representacão de MEF do eletrodo. Por simplicidade, a malha externa é composta por apenas uma camada de elementos quadriláteros e dividida em apenas quatro subdomínios Ω_i .

Finalmente, conforme sugerido, há a necessidade de desenvolvimento de novo modelo de MEF para a interface de contato entre o corpo e os eletrodos, uma vez que, segundo a nova abordagem, eletrodos são representados por elementos finitos. Esse desenvolvimento será mostrado aqui e baseia-se em quase todas as hipóteses adotadas para o modelo de eletrodo utilizado até então (nos capítulos 2 e 3): assume-se que as espessuras são relativamente pequenas (com relação às demais dimensões do modelo, como a largura do eletrodo), que o contato entre o eletrodo e a superfície do corpo tomografado é total e que a condutividade da interface, ou do modelo, é constante para um mesmo eletrodo. A hipótese não mais utilizada é, obviamente, a de que o potencial elétrico na superfície metálica do eletrodo é constante, muito embora os valores não vão diferir muito no novo modelo, uma vez que a condutividade do material do eletrodo será assumida elevada, como é na realidade. Assume-se, no entanto, que os elementos da interface têm geometria bastante próxima à de paralelepípedos, o que deve ser verificado após a construção da malha de MEF. Como será mostrado, parte-se, na determinacão do novo modelo da interface de contato, do desenvolvimento realizado em Mello (2005).

Na seqüência, trata-se da forma numérica da técnica de aplicacão de condições de contorno de corrente elétrica aos elementos de eletrodo. Além disso, define-se o potencial

nominal do eletrodo, mencionam-se as informações empregadas na correção do posicionamento e, finalmente, descreve-se o novo modelo da interface de contato.

Imposição das Condições de Contorno de Correntes Elétricas e Cálculo do Potencial Nominal do Eletrodo

Na Figura 42, é representado o arranjo apresentado a seguir. Simulando-se o efeito de imposição de corrente, aplicam-se correntes nodais constantes I_{eijk} a quase todos os nós superficiais (de potencial V_{ijk}) dos elementos de eletrodo de um domínio de otimização de um eletrodo de corrente, onde i indica o domínio Ω_i em questão, j o padrão de corrente e k o nó superficial utilizado – tal numeração em k abrange todos os nós superficiais em Ω_i . A corrente I_{eijk} varia de acordo com a variável nodal de otimização do nó k correspondente, como será mostrado a seguir. Não é aplicada corrente aos nós em Γ_{ab} (visto na Figura 41), para a e b quaisquer. Isso é feito porque Γ_{ab} representa a interface entre os subdomínios Ω_a e Ω_b , onde, por hipótese, não há eletrodos.

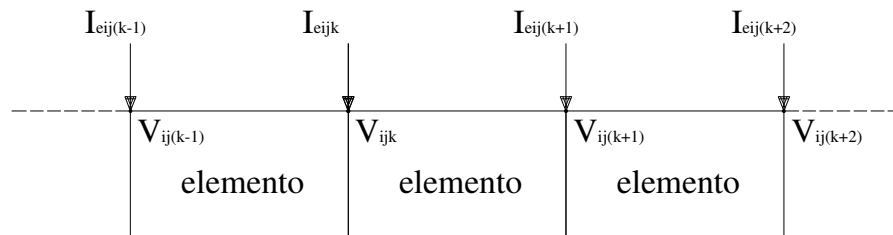


Figura 42 Modelo utilizado na imposição de condições de contorno de correntes elétricas. Por simplicidade, são mostrados apenas três elementos finitos.

Além disso, impõe-se que

$$\sum_{\Omega_i^*} I_{eijk} = I_{Tij}, \quad (4.1.5)$$

que é a forma numérica da eq.(4.1.2), onde Ω_i^* é igual a Ω_i sem as superfícies de intersecção com os domínios vizinhos (ou seja, a somatória não é feita com os nós em Γ_{ab}).

A corrente I_{eijk} é dada por:

$$I_{eijk} = \frac{I_{Tij} \rho_{eik}}{n_T}, \quad (4.1.6)$$

onde n_T é o número de nós que compreende a superfície do eletrodo, um dado do problema uma vez que se assume conhecido o tamanho de cada eletrodo e se conhece o tamanho de cada elemento de eletrodo, e ρ_{eik} é a k -ésima variável de otimização do nó superficial do eletrodo. O termo n_T independe de i porque o tamanho dos elementos de eletrodo e dos eletrodos será considerado constante em toda a malha externa (a abordagem de MOT, porém, permite que se utilize n_{Ti}). Nota-se que a corrente I_{eijk} dada, varia de I_{Tij}/n_T quando ρ_{eik} é igual a 1, ou seja, quando o nó contém material de eletrodo, até 0, ou seja, quando o nó corresponde ao material vazio.

As correntes I_{eijk} obtidas considerando-se todos os valores possíveis de i , j e k , formam o conjunto de novos vetores de correntes elétricas nodais, sendo um vetor para cada j -ésimo padrão de corrente. Cada vetor é utilizado na obtenção dos potenciais elétricos pelo MEF, como mencionado anteriormente na seção 2.2, conforme a equação mostrada a seguir:

$$\mathbf{K}_{Tj} \mathbf{V}_{Tj} = \mathbf{I}_{Tj}, \quad (4.1.7)$$

onde \mathbf{I}_{Tj} e \mathbf{V}_{Tj} , nesse caso, são os novos vetores de correntes e de potenciais referentes ao j -ésimo padrão de corrente, respectivamente, dados para as novas correntes nodais consideradas. Tais vetores, diferentemente da seção 2.2, contêm coeficientes referentes aos nós da malha interna, da interface de contato e das regiões Ω_i (similarmente, a matriz \mathbf{K}_{Tj} é formada pelas matrizes dos elementos da malha interna, da interface de contato e das regiões Ω_i).

O potencial nominal do eletrodo é o potencial assumido para determinado eletrodo, calculado através do modelo. Esse potencial é comparado ao potencial correspondente do fantoma. Como aproximação para o valor de potencial nominal do eletrodo em Ω_i , utilizou-se a soma dos potenciais nodais na superfície de Ω_i^* , multiplicados pelas variáveis nodais correspondentes e divididas por n_T . Portanto, o potencial é dado por:

$$V_{nij} = \sum_{\Omega_i^*} \frac{V_{ijk} \rho_{eik}}{n_T} \quad (4.1.8)$$

Os potenciais na superfície de Ω_i^* correspondentes aos eletrodos apresentam valores próximos, uma vez que a condutividade utilizada para representar o eletrodo é relativamente elevada.

Imposição de Informações sobre o Eletrodo

Considerando-se o modelo descrito até este ponto, garante-se que o valor exato de corrente nominal I_{Tij} será aplicado ao domínio.

Porém, não é feita qualquer restrição acerca da conectividade dos nós de eletrodo, o que significa que a importante informação de que os eletrodos são estruturas contínuas não foi utilizada.

Para que o eletrodo seja formado, preferencialmente, de elementos de eletrodo cheios vizinhos, ou seja, conectados, é avaliada a técnica de Projeção mostrada no trabalho de Guest, Prévost e Belytschko (2004) e mencionada no APÊNDICE C.

Também, faz-se com que todos os nós alinhados perpendicularmente à superfície do eletrodo tenham o mesmo valor de variável de otimização (vide Figura 43), uma informação óbvia dada a geometria padrão de um eletrodo.

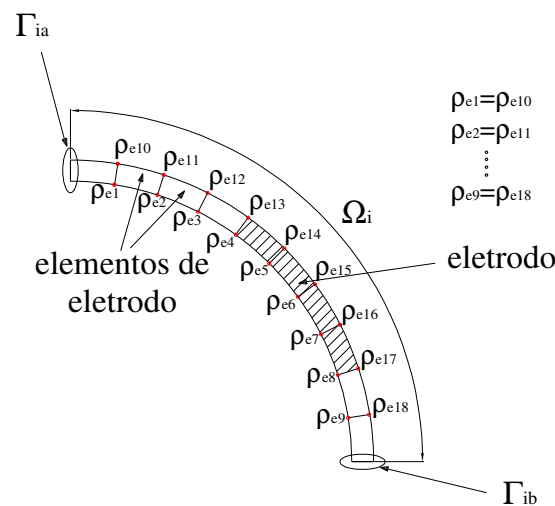


Figura 43 Domínio de otimização Ω_i , mostrando as variáveis de otimização nodais e as relações entre elas, impostas pelo programa de MOT.

Novo Modelo da Interface de Contato

Segundo a teoria discutida no atual capítulo, eletrodos são representados por elementos finitos. Portanto, como citado anteriormente, há a necessidade de desenvolvimento de novo modelo de MEF para a interface de contato entre o corpo e os eletrodos, diferente do modelo baseado no modelo de Hua et al. (1993) e citado em Mello (2005), segundo o qual a interface integra os eletrodos, modelados como as faces externas dos elementos da interface e representados, após consideração de hipóteses, por um nó em cada eletrodo.

Para determinação do novo modelo, parte-se da etapa em que se dispõe da matriz de elementos finitos de cada elemento que compõe o modelo de eletrodo, citado (o modelo) no trabalho de Mello (2005). Dessa maneira, inicia-se da etapa anterior à consideração das hipóteses admitidas, mencionadas na subseção 4.1.2 e na subseção atual, o que significa que a matriz se refere à interface de contato, apenas. Tal matriz é igual a

$$\mathbf{K}_c = \frac{\sigma_{el}}{9t_{el}} \begin{bmatrix} 2t_{el}^2 + a_{el}^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a_{el}^2 & -t_{el}^2 + \frac{1}{4}a_{el}^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a_{el}^2 & t_{el}^2 - a_{el}^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 - \frac{1}{2}a_{el}^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 - \frac{1}{4}a_{el}^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 - \frac{1}{2}a_{el}^2 \\ & 2t_{el}^2 + a_{el}^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a_{el}^2 & -t_{el}^2 + \frac{1}{4}a_{el}^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 - \frac{1}{2}a_{el}^2 & t_{el}^2 - a_{el}^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 - \frac{1}{2}a_{el}^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 - \frac{1}{4}a_{el}^2 \\ & & 2t_{el}^2 + a_{el}^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a_{el}^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 - \frac{1}{4}a_{el}^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 - \frac{1}{2}a_{el}^2 & t_{el}^2 - a_{el}^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 - \frac{1}{2}a_{el}^2 \\ & & & 2t_{el}^2 + a_{el}^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 - \frac{1}{2}a_{el}^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 - \frac{1}{4}a_{el}^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 - \frac{1}{2}a_{el}^2 & t_{el}^2 - a_{el}^2 \\ & S & I & M & & 2t_{el}^2 + a_{el}^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a_{el}^2 & -t_{el}^2 + \frac{1}{4}a_{el}^2 \\ & & & & & & 2t_{el}^2 + a_{el}^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a_{el}^2 \\ & & & & & & & 2t_{el}^2 + a_{el}^2 \end{bmatrix}, \quad (4.1.9)$$

onde σ_{el}/t_{el} é o inverso do parâmetro de contato, t_{el} é a espessura do elemento e a_{el} é sua largura.

No presente trabalho, a região da interface de contato para cada eletrodo, anteriormente representada (em Mello (2005)) por quatro elementos finitos hexaédricos, será representada por tantos elementos hexaédricos quantos forem os elementos da região Ω_i , como mostrado na Figura 41. De fato, há duas camadas semelhantes de elementos nessa figura, uma contendo os elementos de eletrodo e a outra os elementos da interface. Assim, ao invés de montar uma matriz para a região da interface como em Mello (2005), dado que o tamanho varia de problema para problema, pode-se aplicar a hipótese de espessura ao quadrado desprezível (HUA et al., 1993) à matriz acima, o que rende

$$\mathbf{K}_{es} = \frac{a_{el}^2 \sigma_{el}}{9t_{el}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ & & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ & & & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -1 \\ & & & & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ S & I & M & & & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ & & & & & & 1 & \frac{1}{2} \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1.10)$$

e, na montagem da matriz global do problema de MEF, tomar o cuidado de considerar a hipótese de condutividade constante na interface referente a cada eletrodo.

Desta forma, obtém-se o novo modelo de interface de contato em que, comparando-se

com o modelo de eletrodo utilizado anteriormente, não há mais a “figura” do eletrodo representado pela face externa dos elementos do modelo (englobando os nós presentes em tal face). Além disso, consideram-se elementos em toda a face lateral do corpo e não somente na região logo abaixo do eletrodo, como fora feito no modelo de eletrodo. Nessas condições, deve-se verificar, por simulação, se os efeitos de “shunting” são acentuados nos elementos do novo modelo **que não se encontram sob os eletrodos**. Tais efeitos correspondem ao desvio de corrente, ou seja, à ocorrência de componentes de correntes elétricas paralelas ao eletrodo, as quais não ocorreriam numa situação experimental. Conforme o artigo de Hua et al. (1993), os efeitos de “shunting” são desprezíveis mesmo sob os eletrodos.

Se tais efeitos forem acentuados, deve-se estudar uma abordagem para evitá-los, sugerindo-se um modelo em que sejam desprezíveis. Por exemplo, pode-se empregar a multiplicação de \mathbf{K}_{es} de cada elemento por uma função das variáveis de otimização dos nós do elemento de eletrodo adjacente, sendo a função nula (ou próxima disso, para evitar singularidades) quando as variáveis dos nós forem nulas, igual a um quando as variáveis forem iguais a um, e assumir valores intermediários nos casos restantes. A idéia por trás dessa abordagem, mencionada sucintamente, é emular a retirada de um elemento de interface de contato quando o elemento de eletrodo adjacente acusar a ausência do eletrodo.

4.1.3 Definição do Problema de Estimação da Imagem, Parâmetros de Contato e Correção dos Eletrodos, e Cálculo dos Gradientes

O problema de estimação da imagem, parâmetros de contato e correção da posição dos eletrodos, conforme sugerido pelo texto anterior, pode ser dado por:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & \mathbf{F} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{ne} (\mathbf{A}_{Pej} \mathbf{V}_{Tj} - \mathbf{V}_{0j})^T (\mathbf{A}_{Pej} \mathbf{V}_{Tj} - \mathbf{V}_{0j}) \\
& \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_{el}, \boldsymbol{\rho}_e \\
\text{Tal que} \quad & \sum_{\Omega_i^*} \frac{I_{Tij} \rho_{eik}}{n_T} = I_{Tij} \\
& \text{equações de MEF} \\
& \text{equações do modelo de material,} \quad (4.1.11) \\
& \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\rho} \leq \mathbf{1} \\
& \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\rho}_{el} \leq \mathbf{1} \\
& \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\rho}_e \leq \mathbf{1}
\end{aligned}$$

onde a primeira restrição de igualdade é obtida substituindo-se a eq.(4.1.6) na eq.(4.1.5), $\boldsymbol{\rho}_e$ é o vetor de variáveis nodais de otimização dos elementos de eletrodo (tal vetor contém ρ_{en} e ρ_{eik} , sendo que a última variável representa um conjunto contido no conjunto dado por ρ_{en}), $\boldsymbol{\rho}$ é o vetor de parâmetros da imagem e $\boldsymbol{\rho}_{el}$ é o vetor de parâmetros referentes à interface de contato, semelhantes aos parâmetros do modelo de eletrodo (vide o capítulo 2 para uma descrição detalhada de tais parâmetros). Ainda, a matriz \mathbf{A}_{Pej} , cuja estrutura determina os potenciais nominais de cada eletrodo e as medidas de potenciais, diferenciais, está relacionada à eq.(4.1.8) e é formada, portanto, pelos valores 0 e ρ_{eik}/n_T . Como nota, o problema em (2.3.3) é um caso particular do problema em (4.1.11).

Para a função objetivo em (4.1.11), obtém-se a seguinte derivada:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} &= \sum_{j=1}^{ne} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_{Pej}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} \mathbf{V}_{Tj} + \mathbf{A}_{Pej} \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} \right)^T (\mathbf{A}_{Pej} \mathbf{V}_{Tj} - \mathbf{V}_{0j}) = \\
&= \sum_{j=1}^{ne} \left[\mathbf{V}_{Tj}^T \frac{\partial \mathbf{A}_{Pej}^T}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} (\mathbf{A}_{Pej} \mathbf{V}_{Tj} - \mathbf{V}_{0j}) + \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}^T}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} \mathbf{A}_{Pej}^T (\mathbf{A}_{Pej} \mathbf{V}_{Tj} - \mathbf{V}_{0j}) \right] \quad (4.1.12)
\end{aligned}$$

e, como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{K}_{Tj}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} \mathbf{V}_{Tj} + \mathbf{K}_{Tj} \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} &= \frac{\partial \mathbf{I}_{Tj}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} \Rightarrow \mathbf{K}_{Tj} \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} = \frac{\partial \mathbf{I}_{Tj}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} - \frac{\partial \mathbf{K}_{Tj}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} \mathbf{V}_{Tj} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} &= \mathbf{K}_{Tj}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_{Tj}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} - \frac{\partial \mathbf{K}_{Tj}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} \mathbf{V}_{Tj} \right) \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}^T}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} = \left(\frac{\partial \mathbf{I}_{Tj}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} - \frac{\partial \mathbf{K}_{Tj}}{\partial \boldsymbol{\rho}_{en}} \mathbf{V}_{Tj} \right)^T \mathbf{K}_{Tj}^{-1}, \quad (4.1.13)
\end{aligned}$$

tem-se que:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_{en}} = \sum_{j=1}^{ne} \left[\mathbf{V}_{Tj}^T \frac{\partial \mathbf{A}_{Pej}^T}{\partial \rho_{en}} (\mathbf{A}_{Pej} \mathbf{V}_{Tj} - \mathbf{V}_{0j}) + \left(\frac{\partial \mathbf{I}_{Tj}}{\partial \rho_{en}} - \frac{\partial \mathbf{K}_{Tj}}{\partial \rho_{en}} \mathbf{V}_{Tj} \right)^T \mathbf{K}_{Tj}^{-1} \mathbf{A}_{Pej}^T (\mathbf{A}_{Pej} \mathbf{V}_{Tj} - \mathbf{V}_{0j}) \right]. \quad (4.1.14)$$

Deve-se explicitar que a dependência de \mathbf{I}_{Tj} na variável de otimização foi salientada na subseção 4.1.2 e se deve ao fato de que, segundo o modelo adotado, a densidade de corrente normal depende das variáveis de otimização do problema.

No caso das restrições de corrente, tem-se a seguinte equação:

$$\sum_{k=1}^{n_{Tdi}} \frac{\mathbf{I}_{Tij} \rho_{eik}}{n_T} = \mathbf{I}_{Tij} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n_{Tdi}} \frac{\rho_{eik}}{n_T} = 1, \quad (4.1.15)$$

onde n_{Tdi} é o número total de nós superficiais no domínio Ω_i^* do i -ésimo eletrodo. Tal equação é linear nas variáveis de otimização. Portanto, o gradiente da restrição é dado pelos coeficientes que multiplicam as variáveis e por valores nulos, referentes a variáveis nodais não presentes na restrição.

O cálculo das derivadas referentes ao modelo de material e às matrizes \mathbf{A}_{Pej} e \mathbf{I}_{Tj} é relativamente simples e, dessa maneira, não será relatado. A derivada de F com relação ao vetor $\boldsymbol{\rho}_{ei}$ é dada por caso particular da eq.(4.1.14), para o qual as derivadas de \mathbf{A}_{Pej} e \mathbf{I}_{Tj} são nulas. Novamente, a derivada de um escalar qualquer esc em relação a um vetor qualquer \mathbf{Vec}

é definida como: $\frac{\partial esc}{\partial \mathbf{Vec}} = \left[\frac{\partial esc}{\partial Vec_1} \quad \frac{\partial esc}{\partial Vec_2} \quad \dots \quad \frac{\partial esc}{\partial Vec_{tam}} \right]^T$, Vec_i é o i -ésimo elemento do

vetor \mathbf{Vec} e tam é o número de elementos do vetor \mathbf{Vec} . A derivada de \mathbf{K}_{Tj} pode ser vista, em detalhes, em Mello (2005). Finalmente, a derivada de F com relação ao vetor $\boldsymbol{\rho}$ não foi utilizada, pois a etapa de estimação da imagem pelo Método da Alternância é realizada considerando-se o método de Levenberg-Marquardt (VAUHKONEN, 2004), o qual é descrito em mais detalhes na subseção 4.2.2.

Como último comentário, a eq.(4.1.15) é importante para mostrar que medidas de diferenças de potenciais do modelo adotado são indiferentes à posição de aplicação e valor do potencial aplicado. São, por conseguinte, imunes ao erro de posicionamento do eletrodo de imposição de potencial (modelado como um ponto ou nó, no caso da malha de MEF), o que significa que não é necessária a correção do posicionamento de tais eletrodos (conforme sugerido na subseção 4.1.1).

De fato, como sugerido no APÊNDICE A, a diferença entre dois conjuntos de potenciais nodais para condições de contorno de corrente semelhantes e condições de contorno de potenciais diferentes, sendo a diferença de valores entre os potenciais impostos igual a μ , será igual a esse mesmo valor. Assim, os potenciais nodais V_{ijk} na eq.(4.1.8) devem obedecer $V_{ijk}(c+\mu) = V_{ijk}(c) + \mu$, onde “c” é um valor qualquer da condição de contorno de potencial. Pode-se, portanto, dada a mesma equação (eq.(4.1.8)), escrever:

$$V_{naj}(c) - V_{nbj}(c) = \sum_{k=1}^{n_{Tda}} \frac{V_{ajk} \rho_{eak}}{n_T} - \sum_{k=1}^{n_{Tdb}} \frac{V_{bjk} \rho_{ebk}}{n_T} \quad (4.1.16)$$

e

$$\begin{aligned} V_{naj}(c + \mu) - V_{nbj}(c + \mu) &= \\ &= \sum_{k=1}^{n_{Tda}} \frac{(V_{ajk} + \mu) \rho_{eak}}{n_T} - \sum_{k=1}^{n_{Tdb}} \frac{(V_{bjk} + \mu) \rho_{ebk}}{n_T} = \quad , \quad (4.1.17) \\ &= V_{naj}(c) - V_{nbj}(c) + \mu \left(\sum_{k=1}^{n_{Tda}} \frac{\rho_{eak}}{n_T} - \sum_{k=1}^{n_{Tdb}} \frac{\rho_{ebk}}{n_T} \right) \end{aligned}$$

onde “a” e “b” são dois eletrodos quaisquer. Tais equações descrevem o valor de diferenças de potencial nominal, ou seja, de diferenças de potenciais entre dois eletrodos no modelo. Os dois casos são mostrados na Figura 44.

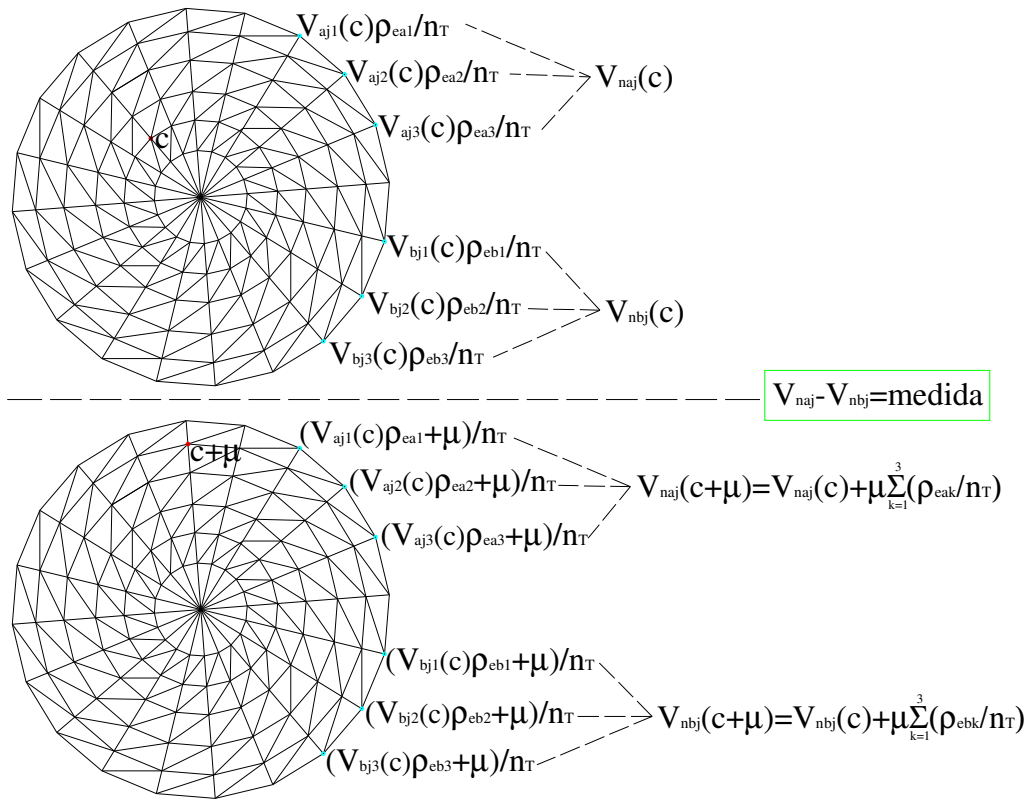


Figura 44 Modelo de elementos finitos simplificado, mostrando, para duas condições de contorno distintas, os dois casos diferentes de distribuição de potenciais elétricos resultantes. Por simplicidade, condições de contorno de corrente, iguais para os dois casos, não são mostradas.

Assim (dada a eq.(4.1.17)), a variação das diferenças de potenciais entre os eletrodos para uma variação no valor e posição da referência (potencial imposto), nas condições mencionadas nessa análise, será igual a:

$$\begin{aligned} V_{naj}(c+\mu) - V_{nbj}(c+\mu) - (V_{naj}(c) - V_{nbj}(c)) &= \\ &= \mu \left(\sum_{k=1}^{n_{Tda}} \frac{\rho_{eak}}{n_T} - \sum_{k=1}^{n_{Tdb}} \frac{\rho_{ebk}}{n_T} \right) \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Portanto, mostra-se que as diferenças de potenciais entre eletrodos não serão constantes em qualquer situação.

Porém, levando-se em conta a restrição eq.(4.1.15) utilizada $(\sum_{k=1}^{n_{Tdi}} (\rho_{eik}/n_T) = 1)$, e substituindo-a na eq.(4.1.18), tem-se que:

$$\begin{aligned}
V_{n_{aj}}(c + \mu) - V_{n_{bj}}(c + \mu) - (V_{n_{aj}}(c) - V_{n_{bj}}(c)) &= \\
= \mu \left(\sum_{k=1}^{n_{Tda}} \frac{\rho_{eak}}{n_T} - \sum_{k=1}^{n_{Tdb}} \frac{\rho_{ebk}}{n_T} \right) &= \quad . \quad (4.1.19) \\
= \mu(1 - 1) = 0 &
\end{aligned}$$

Portanto, a afirmação de que medidas de diferenças de potenciais do modelo adotado são indiferentes à posição de aplicação e valor do potencial aplicado é verdadeira.

Assim, as medidas serão, de fato, imunes ao erro de posicionamento do eletrodo de imposição de potencial. Solicita-se, apenas, que esse eletrodo seja modelado como um ponto. Ainda, teoricamente, o valor de potencial imposto, utilizado para solução do sistema linear de MEF, pode ser um valor qualquer.

4.1.4 Resultados

São mostrados, na atual subseção, resultados obtidos com o método baseado em MOT proposto. Respostas considerando-se simplificações são citadas, com o intuito de expor o potencial da abordagem discutida.

Nessas condições, resultados gerados por um algoritmo de MOT no caso de um problema 2D e uma resistência de contato nula são apresentadas (o que significa que não se emprega modelo de interface de contato e, portanto, o problema em (4.1.11) não depende de ρ_{el}). Obtêm-se, ainda, resultados numéricos, ou seja, para fantasmas numéricos, considerando-se uma malha mais discretizada para o fantoma (768 elementos e 427 nós, vide Figura 45(a)) que para a malha de estimação (com 266 elementos e 152 nós, vide Figura 45(b)).

Ambas as malhas têm diâmetros aproximadamente iguais a 300mm, incluindo os domínios de eletrodos (coloridos, na Figura 45(a) e na Figura 45(b)). Ainda, as imagens e posições de eletrodo são obtidas pelo Método da Alternância, considerando-se no máximo 100 iterações para cada um dos dois conjuntos de parâmetros (imagem e eletrodos), totalizando 4000 iterações. O Método da Alternância é discutido em detalhes na seção 2.3, para o caso em que se estimam ρ e ρ_{el} , ou seja, a imagem e os parâmetros de contato.

Como pode ser visto na Figura 45(b), apenas seis domínios de otimização são considerados, correspondendo a seis eletrodos. Além disso, apenas três medidas são consideradas para cada um dos seis padrões adjacentes de corrente utilizados (eletrodos

vizinhos são excitados com correntes elétricas de mesma magnitude e valores opostos), o que significa que $n_p=3$, $n_e=6$ e que apenas 18 medidas são utilizadas. Isso porque os potenciais nos nós onde se aplicam correntes apresentam erros numéricos significativos, os quais variam demasiadamente com a variação da qualidade das malhas de elementos finitos. Dessa maneira, e como diferenças de potenciais entre dois eletrodos adjacentes são tomadas como medidas, pode-se notar que somente é possível utilizar, no máximo, 3 medidas por padrão de corrente.

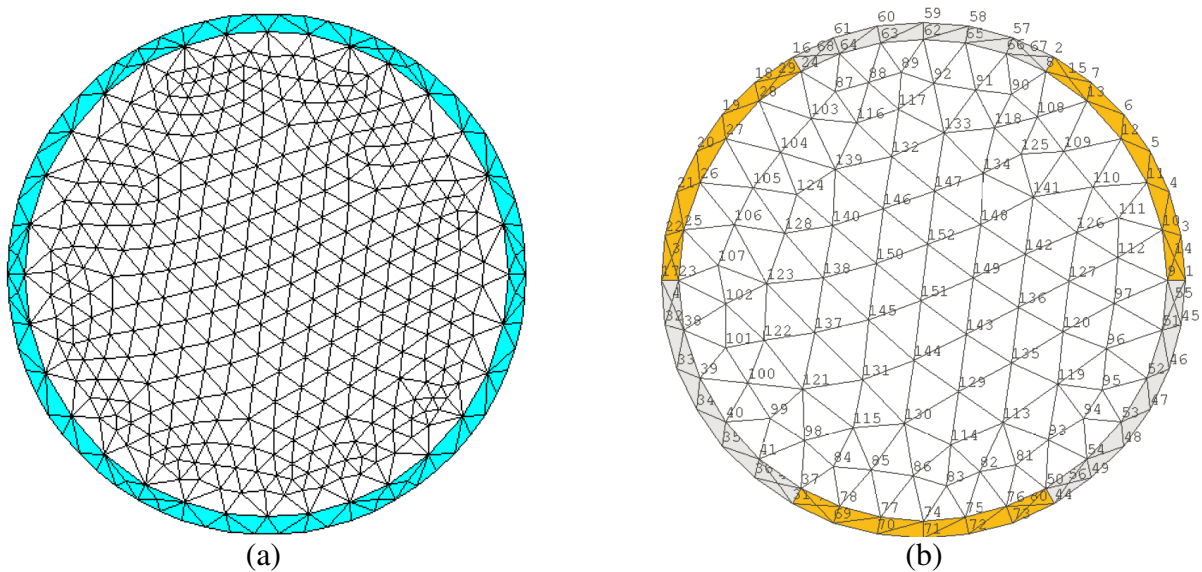


Figura 45 (a) Malha do fantoma numérico (a região onde há eletrodos é destacada); (b) malha de MEF de estimação, ou seja, onde se obtém a imagem e o posicionamento dos eletrodos, mostrando os domínios de otimização em cores diferentes.

A Figura 45(b) também mostra nós no contorno entre domínios de otimização (nós 1, 9, 2, 8, 16, 24, 17, 23, 31, 37, 44, 50), os quais possuem resistividade mínima e não são incluídos na otimização para representar a ausência de contato entre eletrodos vizinhos. As correntes elétricas são iguais a 1mA e os valores de σ_A e σ_B são iguais a $100(\text{m}\Omega)^{-1}$ e $10^6(\text{m}\Omega)^{-1}$, respectivamente. O valor de σ_A é ilustrativo, podendo ser ainda maior na prática para eletrodos de cobre, por exemplo. O critério de convergência para a estimação da imagem é: o módulo da mudança de $2F$ (vide o problema (4.1.11)) deve ser menor que 10^{-11} . A imagem inicial utilizada na estimação da imagem corresponde a uma distribuição uniforme de condutividade igual a $0,25(\text{m}\Omega)^{-1}$, e a distribuição inicial de condutividades referente aos eletrodos, utilizada na estimação da posição dos mesmos, é variada nos testes.

Na seqüência, utiliza-se o modelo proposto referente à Figura 45(b) na estimação da imagem e do correto posicionamento dos eletrodos, considerando-se os dados mencionados

na atual subseção. Nos testes realizados, em primeiro, avaliam-se as regularizações propostas. Mais especificamente, avaliam-se a técnica de Projeção e a restrição de condutividades nodais iguais em nós alinhados radialmente, descritas na subseção: “Imposição de Informações sobre o Eletrodo”. Então, as regularizações julgadas úteis são utilizadas na correção da posição e estimação da imagem baseadas em situações práticas hipotéticas. A verificação (numérica) do modelo proposto referente à Figura 45(b) através do “software” comercial ANSYS® 11, para um caso de eletrodos de geometrias convencionais (como os considerados nas análises seguintes), mostrando que as correntes são, de fato, desprezíveis nos elementos de material vazio, por sua vez, é discutida (a verificação) no APÊNDICE E.

Respostas para a Estimação da Imagem e Posição Correta dos Eletrodos: Avaliação da Imposição de Informações sobre o Eletrodo

Nos primeiros testes, avaliam-se a técnica de Projeção e a restrição de condutividades nodais iguais em nós alinhados radialmente, descritas na subseção: “Imposição de Informações sobre o Eletrodo”. Considera-se uma distribuição inicial de condutividades referente aos eletrodos, utilizada na estimação da posição dos mesmos, igual à distribuição uniforme de valor igual a $100(\text{m}\Omega)^{-1}$ (vide Figura 46(c)). O fantoma está representado na Figura 46(a) e na Figura 46(b), em que a distribuição de condutividades emulando os eletrodos e o vazio (na malha auxiliar externa, sendo os lados dos elementos omitidos para melhor visualização da distribuição) e a distribuição de condutividades representativa da imagem são mostradas, respectivamente. Ambas as distribuições são estimadas pelo algoritmo proposto.

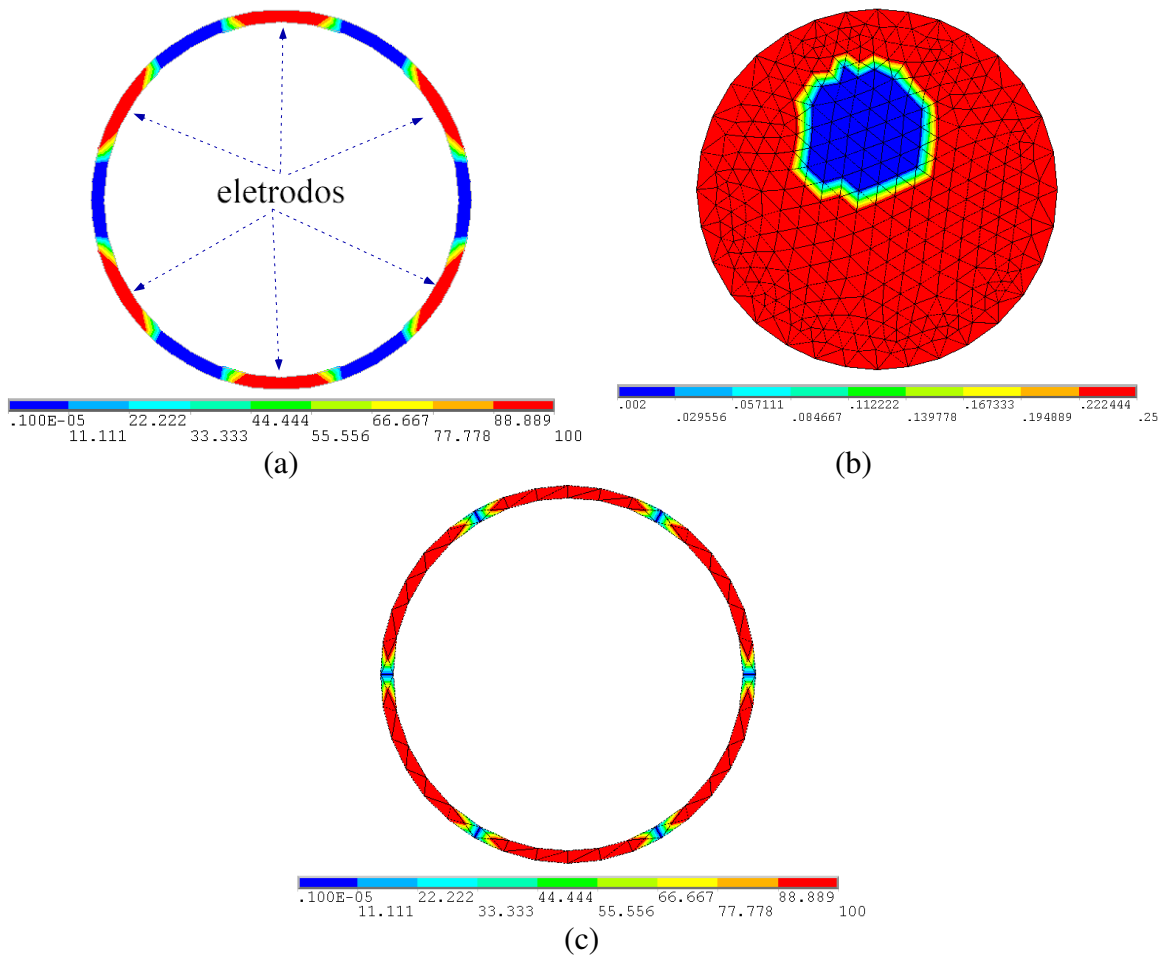


Figura 46 (a) Distribuição que emula arranjo de eletrodos, no fantoma; (b) imagem a ser estimada (fantoma); (c) distribuição inicial de condutividades referente aos eletrodos (na malha de estimação, Figura 45(b)). (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

Para referência, a imagem obtida com os eletrodos nas posições corretas – ou seja, com posições aproximadamente iguais às da Figura 46(a) – é mostrada na Figura 47(b) (os eletrodos são mostrados na Figura 47(a)).

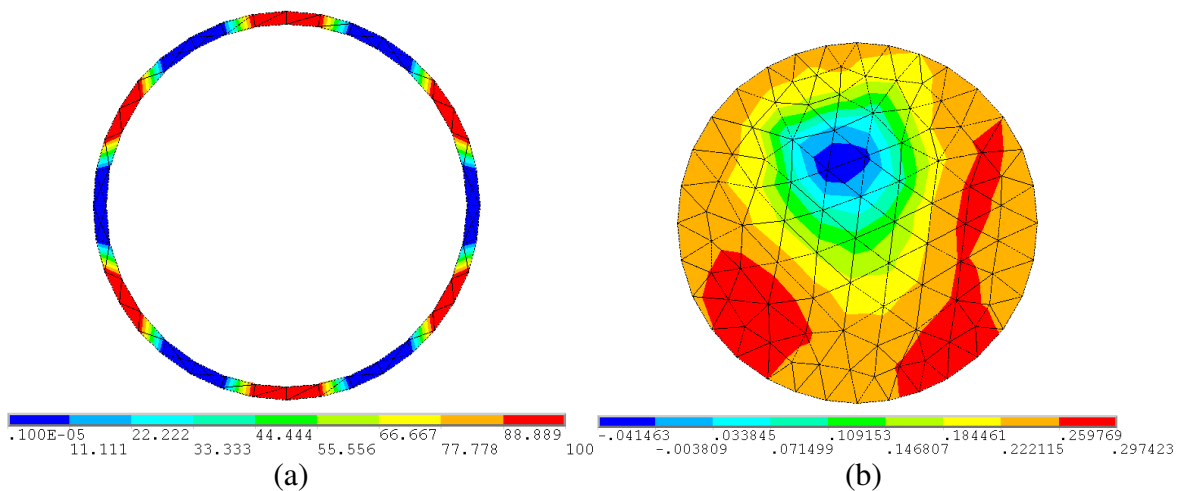


Figura 47 (a) Eletrodos dados (nas posições corretas); (b) imagens de condutividade obtidas. (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

Sem considerar a imposição de informações sobre os eletrodos (como a técnica de Projeção, por exemplo), pode-se obter a distribuição representativa do posicionamento dos eletrodos mostrada na Figura 48(a). Ainda, a imagem obtida é mostrada na Figura 48(b).

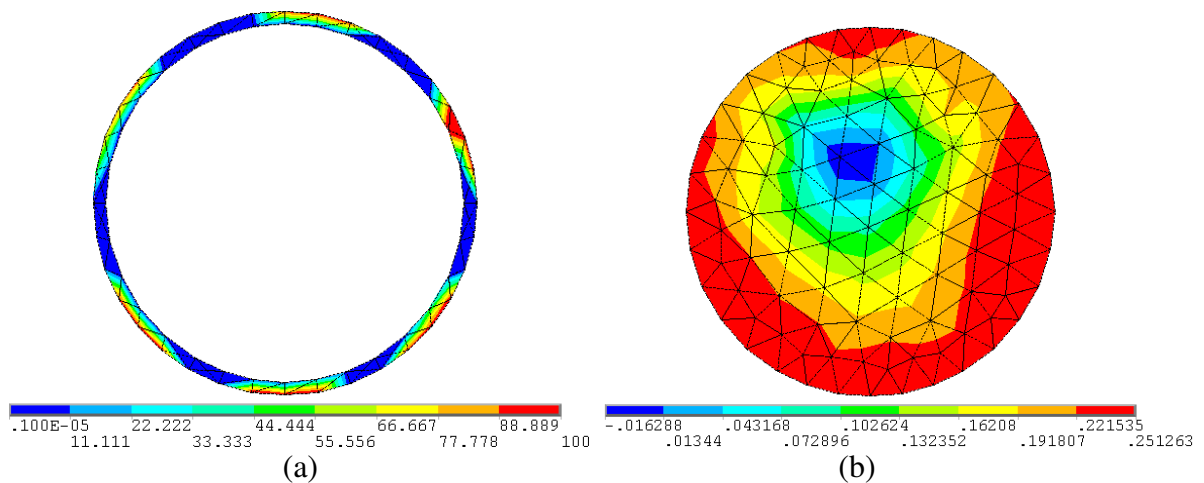


Figura 48 (a) Eletrodos obtidos; (b) imagens de condutividade obtidas. (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

Nota-se que, apesar de uma imagem próxima da imagem verdadeira e das posições das porções superficiais dos eletrodos estarem próximas das posições corretas, além de eletrodos conectados e de valores de condutividade máximos (corretos) serem obtidos naturalmente, os quais representam pontos positivos da abordagem proposta, o contato dos eletrodos com o domínio da imagem não foi detectado pelo algoritmo (conforme indicado pela existência de material de condutividade baixa ao redor de quase toda a porção interna – em contato com o domínio da imagem – dos domínios de otimização, como visto na Figura 48(a)). Obviamente,

o índice de desempenho F não é um bom indicativo da mudança do valor da condutividade na região de contato mencionada, pelo menos no caso das condições empregadas nos atuais testes.

Como sugerido na subseção 4.1.2, faz-se, agora, com que todos os nós alinhados perpendicularmente (aproximadamente) à superfície do eletrodo tenham o mesmo valor de variável de otimização. Nesse caso, obtêm-se as respostas da Figura 49. Novamente, uma imagem próxima da imagem verdadeira, posições das porções superficiais dos eletrodos próximas das posições corretas e eletrodos conectados foram obtidos naturalmente. Porém, nesse caso, as propriedades abaixo da camada superficial da malha correspondente aos elementos de eletrodo também apresentam valores próximos dos reais.

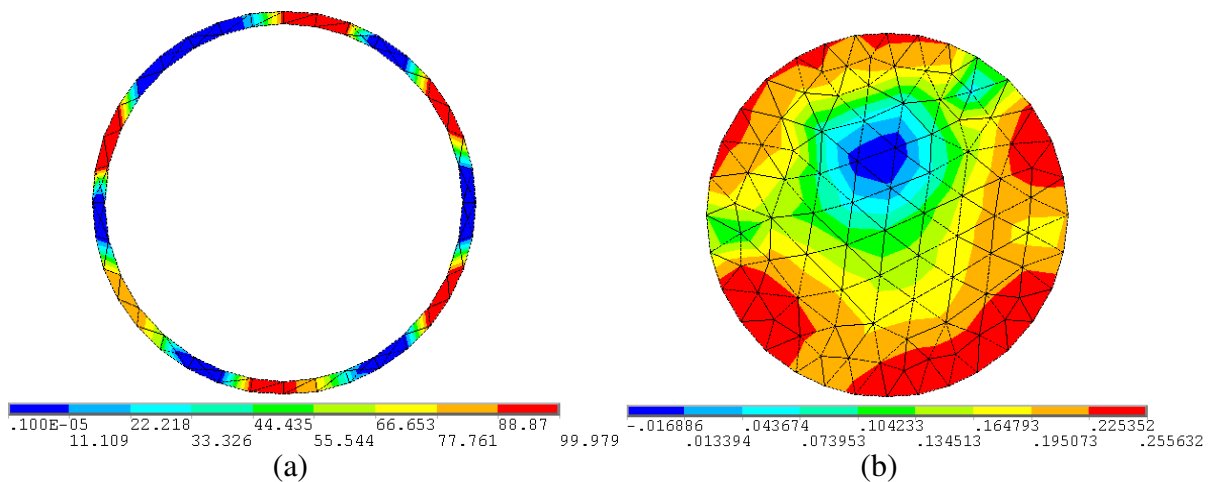


Figura 49 (a) Eletrodos obtidos; (b) imagens de condutividade obtidas. (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

Nos próximos resultados, considera-se a técnica de Projeção (GUEST, PRÉVOST e BELYTSCHKO, 2004), discutida no APÊNDICE C. Utiliza-se a mesma função (APÊNDICE C.1) e funções peso lineares mostradas na Figura 87 do mesmo apêndice. No entanto, não se impõe que os nós alinhados perpendicularmente (aproximadamente) à superfície do eletrodo tenham o mesmo valor de variável de otimização.

Nessas condições, obtêm-se as repostas da Figura 50. Nota-se que as posições dos eletrodos mostram-se demasiadamente incorretas e, de fato, a perturbação da imagem do fantoma não foi detectada. A única exceção, ou seja, a única imagem que acusa a existência de perturbação, ocorre quando o raio utilizado na técnica de Projeção é relativamente pequeno (igual a 10mm), uma vez que esse caso se aproxima da situação da Figura 48. Assim, a técnica não será utilizada nos próximos testes.

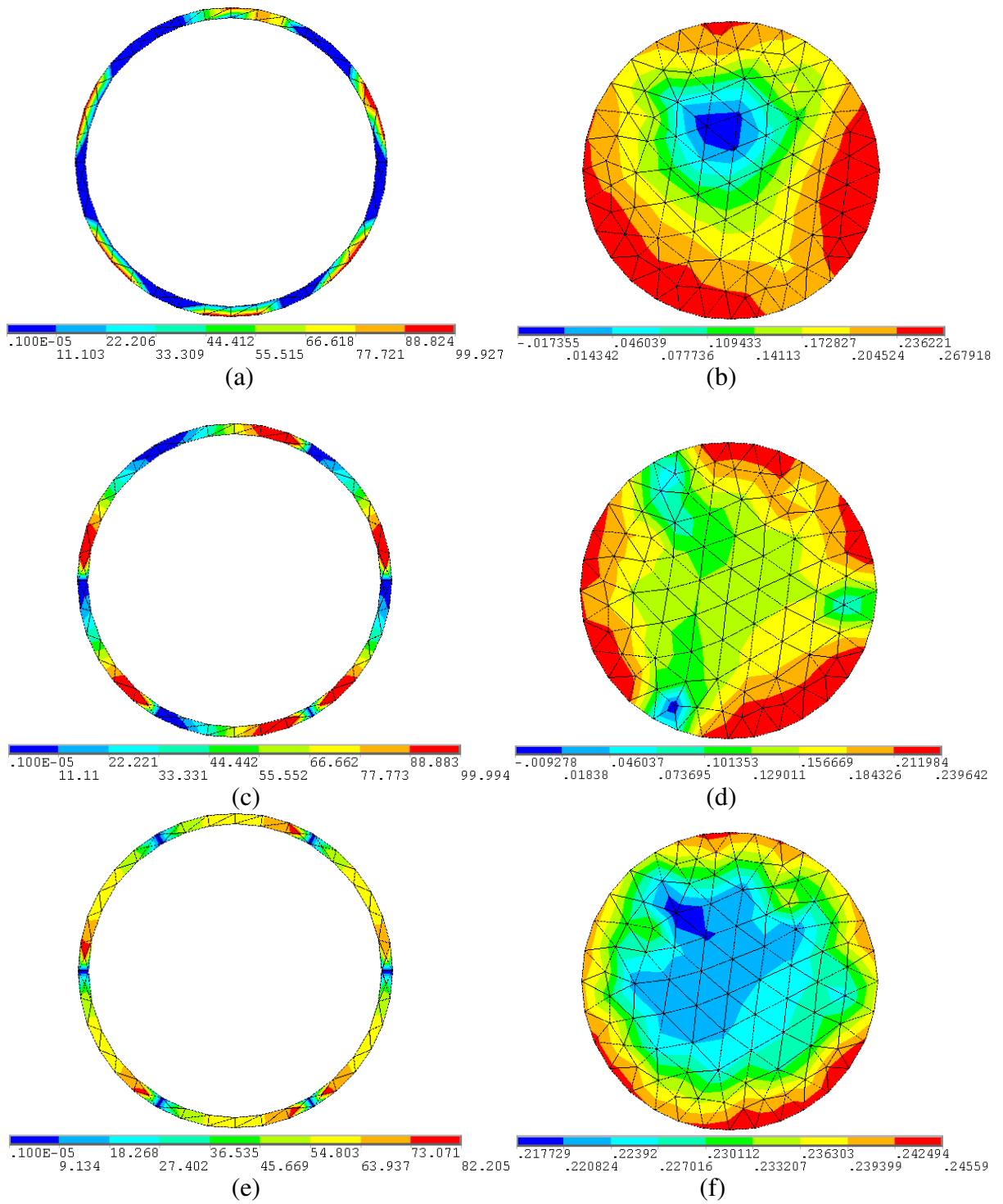


Figura 50 Eletrodos e imagens de condutividade obtidos: (a) e (b) raio da projeção igual a 10mm; (c) e (d) raio da projeção igual a 50mm; (e) e (f) raio da projeção igual a 100mm. (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

Respostas para a Estimação da Imagem e Posição Correta dos Eletrodos: Avaliação em Situações Práticas Simuladas

Nos próximos testes, consideram-se eletrodos estreitos para melhor avaliação do algoritmo, uma vez que podem se mover por uma região maior (os domínios de otimização são mantidos iguais aos mostrados na Figura 45(b)). Ainda, consideram-se correções de posicionamento baseadas em situações práticas hipotéticas simuladas. Dessa maneira, utiliza-se o fantoma representado na Figura 51(a) e na Figura 51(b), em que a distribuição de condutividades emulando os eletrodos e o vazio e a distribuição de condutividades representativa da imagem (igual à imagem considerada nos testes anteriores) são mostradas, respectivamente. Nota-se que a distribuição referente aos eletrodos, nesse caso, emula um deslocamento (relativamente grande) de um dos eletrodos devido a um fator externo. Ainda, considera-se a distribuição inicial de condutividades referente aos eletrodos mostrada na Figura 52(a), a qual é utilizada na estimação da posição dos mesmos (a imagem interna inicial é homogênea, como mencionado anteriormente).

Finalmente, dada a efetividade da regularização nos testes anteriores, faz-se com que todos os nós alinhados perpendicularmente (aproximadamente) à superfície do eletrodo tenham o mesmo valor de variável de otimização, da mesma maneira que nas respostas da Figura 49.

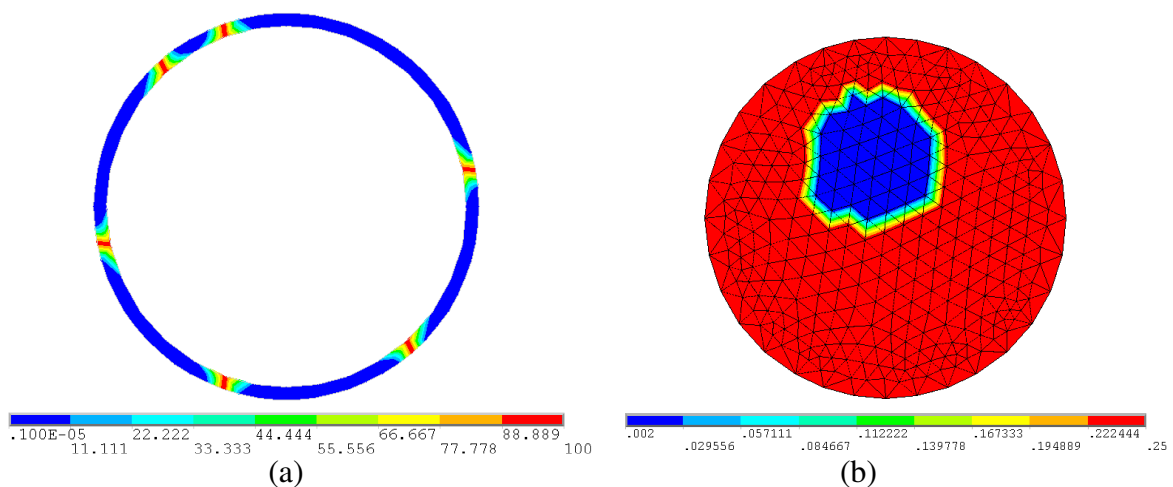


Figura 51 (a) Distribuição que emula arranjo de eletrodos no fantoma; (b) imagem a ser estimada (fantoma). (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

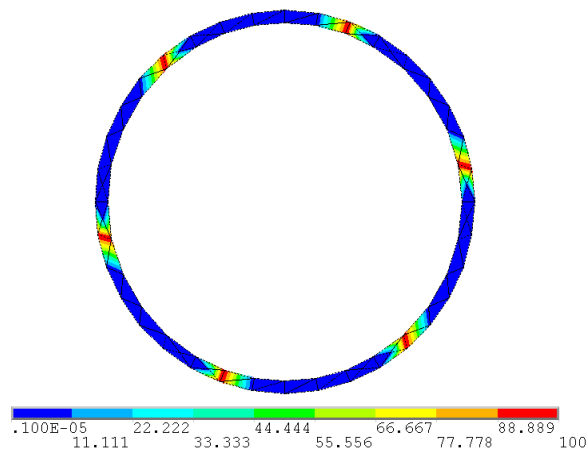


Figura 52 Distribuição inicial de condutividades referente aos eletrodos (na malha de estimação, Figura 45(b)). Com exceção do eletrodo no domínio de otimização superior, todos os eletrodos ocupam posições semelhantes às do fantoma (Figura 51(a)). (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

Para referência, a imagem obtida com os eletrodos nas posições corretas – ou seja, com posições aproximadamente iguais às da Figura 51(a) – é mostrada na Figura 53(b) (os eletrodos são mostrados na Figura 53(a)).

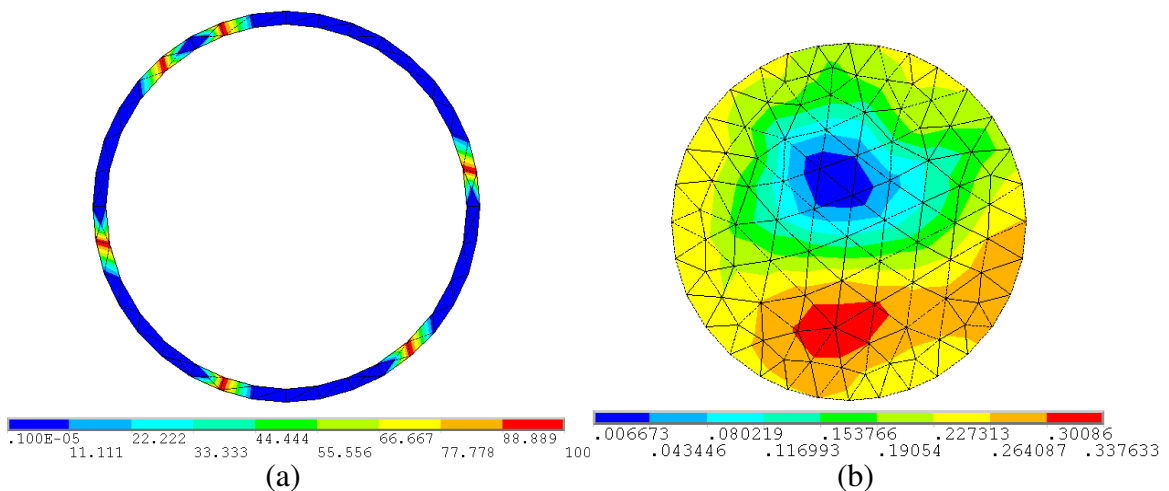


Figura 53 (a) Eletrodos dados (nas posições corretas); (b) imagens de condutividade obtidas. (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

Nas condições mencionadas, obtém-se a distribuição representativa do posicionamento dos eletrodos mostrada na Figura 54(a). Ainda, a imagem obtida é mostrada na Figura 54(b). Pode-se notar, comparando-se a Figura 54(a) com a Figura 51(a), que a movimentação do eletrodo superior foi, de fato, detectada e corrigida. No entanto, os domínios de otimização inferior e o inferior à direita (posições sul e sudeste) apresentam distribuições de condutividade incorretas (apesar da posição das regiões de condutividade superior ser

aproximadamente correta). Ao mesmo tempo, a posição da perturbação resistiva da imagem está ligeiramente incorreta.

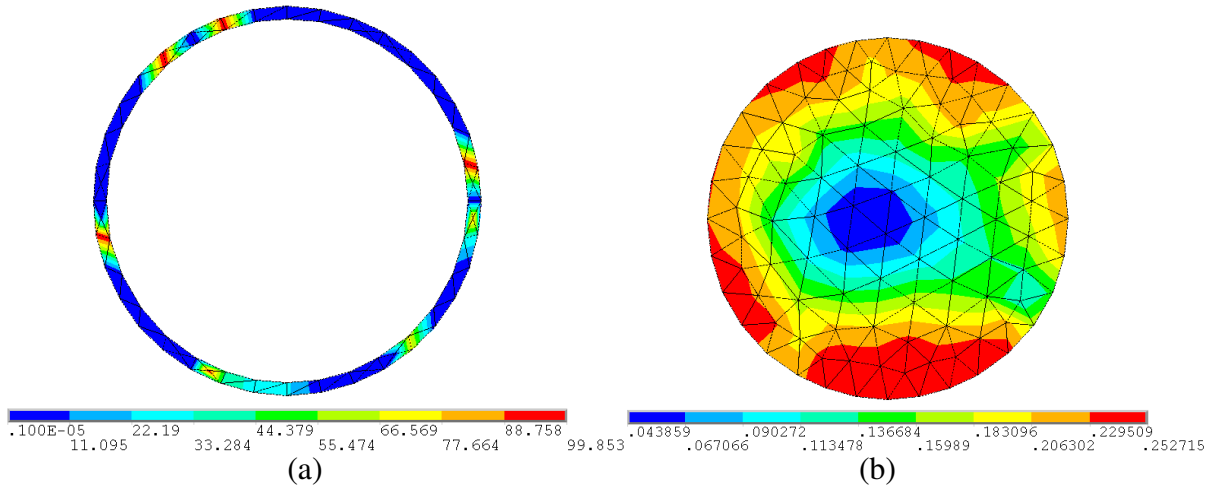


Figura 54 (a) Eletrodos obtidos; (b) imagens de condutividade obtidas. (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

Uma saída para corrigir as pequenas discrepâncias mencionadas é tentar empregar informação adicional sobre a malha de MEF utilizada e sobre o posicionamento real dos eletrodos no fantoma.

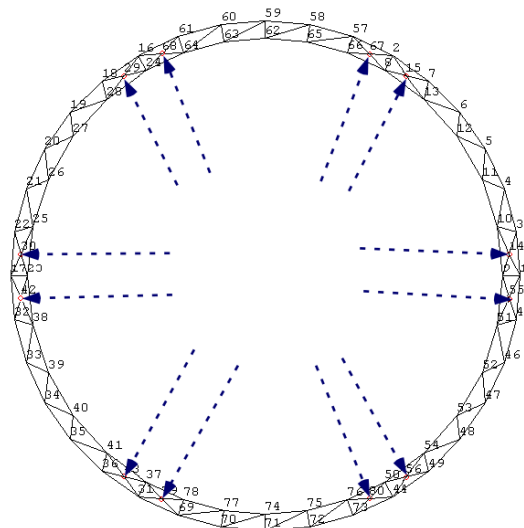


Figura 55 Malha dos domínios de otimização, mostrando os nós, em vermelho (e indicados por setas), cuja condutividade é fixada em $10^{-6}(\Omega\text{m})^{-1}$.

Nota-se, numa análise detalhada da Figura 54(a), que, em alguns nós indicados na Figura 55, os valores de condutividade obtidos estão bastante incorretos. Assim, e observando-se que os nós citados, de fato, não têm ligação com a superfície dos domínios de

otimização, o que significa que não podem fazer parte do eletrodo, fixam-se seus valores de condutividade com os valores esperados (ou seja, $10^{-6}(\text{m}\Omega)^{-1}$). Tal imposição de informação é mantida nas respostas seguintes da seção.

Assumindo-se, então, que o deslocamento do eletrodo superior tenha sido notado pelo usuário do “software” de estimação da imagem, o qual, no entanto, não pode precisar sua nova posição, suponha-se que a nova sugestão inicial seja dada na Figura 56. Nesse caso, a resposta final é bastante próxima da resposta mostrada na Figura 54, como pode ser visto na Figura 57. Isso significa que tanto a sugestão inicial mais próxima do fantoma (ou da posição real dos eletrodos), quanto a utilização da informação citada no parágrafo anterior, não foram efetivas. Mesmo utilizando-se a distribuição exatamente igual à da Figura 53(a) como sugestão inicial (praticamente a mesma distribuição do fantoma), obtêm-se, como mostrado na Figura 58, valores ainda incorretos e próximos das demais respostas mostradas (porém, ligeiramente piores, como pode ser visto pela movimentação do eletrodo referente ao domínio de otimização na posição sudoeste, e pela própria imagem).

Pode-se argumentar que o grande número de iterações para correção do posicionamento dos eletrodos (100 iterações, como já citado) considerando-se a sugestão inicial para a imagem, homogênea, possa ser a responsável pelo posicionamento final incorreto estimado. No entanto, mantendo-se a sugestão inicial para o posicionamento dos eletrodos (e, como nos demais testes, para a imagem) e utilizando-se 4 iterações para a correção da posição (ao invés das 100 iterações utilizadas anteriormente), seguida de 4 iterações para a estimação da imagem (ao invés das 100 iterações utilizadas anteriormente), e considerando-se a realização de 250 procedimentos iguais ao mencionado, ou seja, 250 iterações globais do Método da Alternância (ao invés das 20 iterações realizadas nos testes anteriores), totalizando-se 4000 iterações como nos testes anteriores, obtêm-se as respostas mostradas na Figura 59, bastante semelhantes às anteriores, ou seja, ainda com problemas.

Portanto, dados os testes com eletrodos estreitos mencionados, conclui-se que as informações e regularizações utilizadas são insuficientes para detectar o erro de posicionamento apresentado na Figura 51(a).

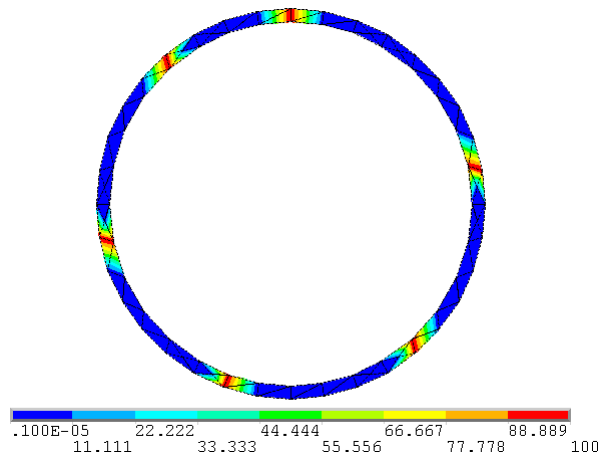


Figura 56 Distribuição inicial de condutividades referente aos eletrodos (na malha de estimação, Figura 45(b)), utilizada para obtenção das respostas na Figura 57. (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

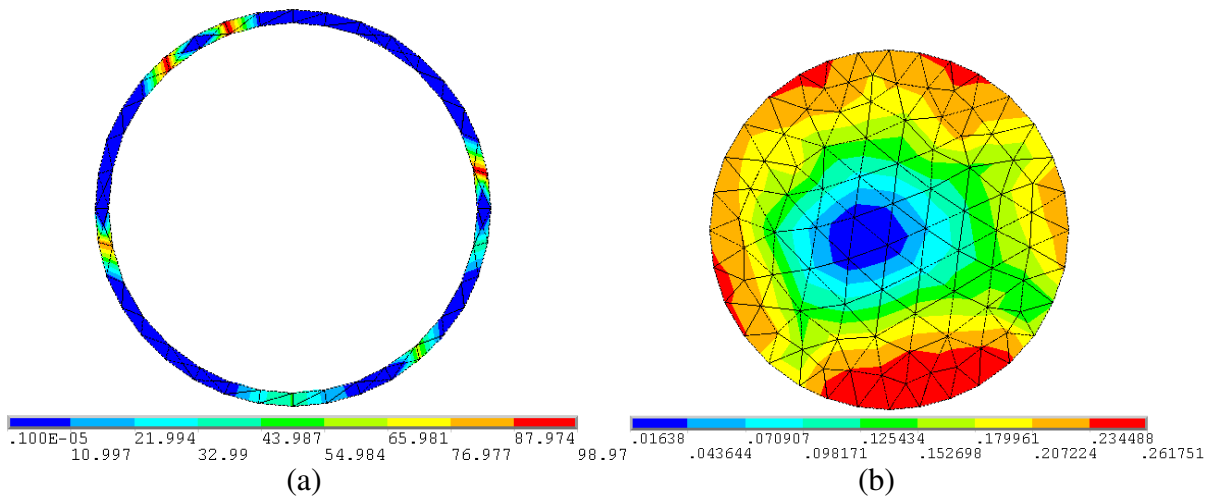


Figura 57 (a) Eletrodos obtidos; (b) imagens de condutividade obtidas. A sugestão inicial é dada na Figura 56. (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

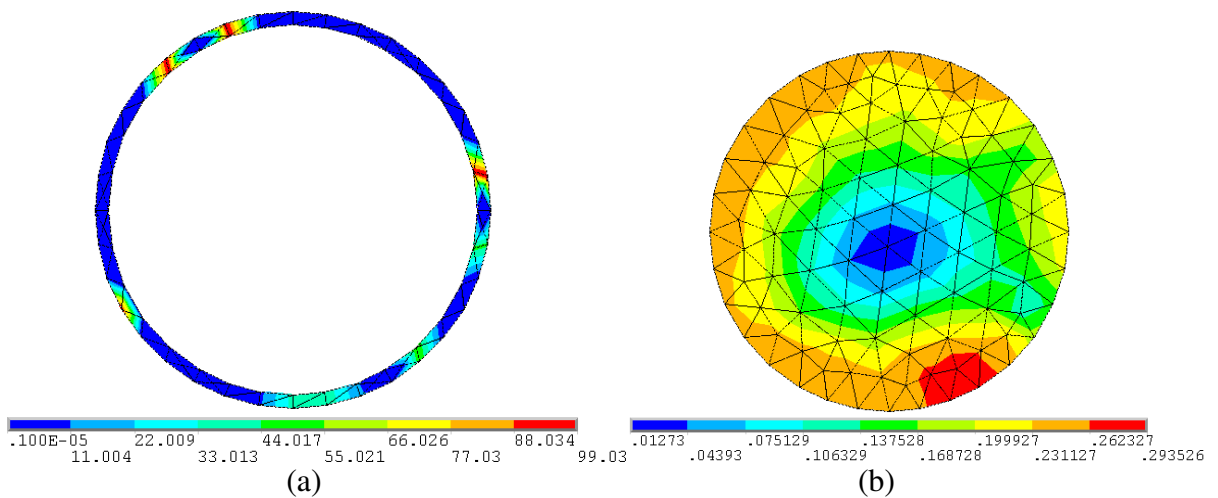


Figura 58 (a) Eletrodos obtidos; (b) imagens de condutividade obtidas. A sugestão inicial é igual à mostrada na Figura 53(a). (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

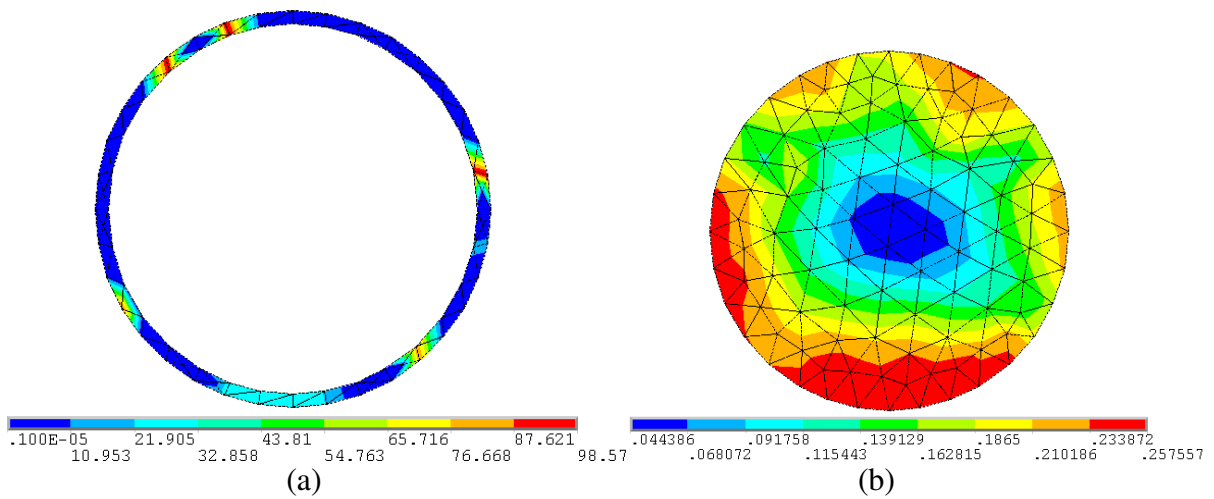


Figura 59 (a) Eletrodos obtidos; (b) imagens de condutividade obtidas. A sugestão inicial é igual à mostrada na Figura 53(a) e o número de iterações é diferente do considerado nos demais resultados. (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

Por outro lado, fixando-se a distribuição de condutividades do domínio de otimização na posição sul, o qual apresentou alguns problemas como relatado anteriormente, e considerando-se a sugestão inicial da Figura 52, obtém-se então os resultados mostrados na Figura 60. Nota-se, agora, que os eletrodos são exatamente iguais aos da Figura 53(a) e muito próximos dos eletrodos do fantoma (Figura 51(a)). A imagem é apenas ligeiramente diferente da imagem da Figura 53(b).

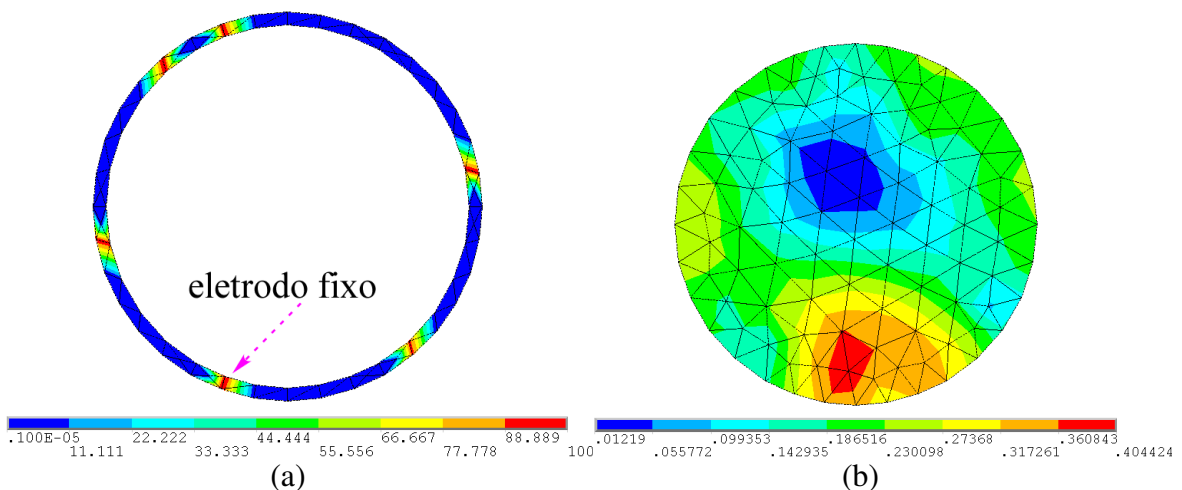


Figura 60 (a) Eletrodos obtidos; (b) imagens de condutividade obtidas. A distribuição de condutividades do domínio de otimização na posição sul é fixada. (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

Esse resultado otimista sugere que, se respostas de valores de condutividade 0-1 (ou aproximadamente 0-1), ou seja, discretas e de valores máximos e mínimos (apenas), são

obtidas nos domínios de otimização, resultados bastante fiéis ao fantoma são obtidos. De fato, variando-se o posicionamento do eletrodo fixo dentro do domínio de otimização na posição sul, e mantendo-se os demais eletrodos fixos nas posições iguais às mostradas na Figura 60(a) ao longo do processo iterativo, obtêm-se os resultados mostrados na Figura 61, os quais, com exceção da Figura 61(a) e Figura 61(b), as quais correspondem a um eletrodo (na região sul) bastante próximo do mostrado na Figura 60(a), são de qualidade substancialmente inferior à do resultado da Figura 60. Ainda, os valores finais da função erro são menores para o resultado da Figura 60. Assim, sugerir-se-ia a penalização das condutividades intermediárias, o que pode ser realizado através do modelo CAMD de material (MATSUI; TERADA, 2004), por exemplo.

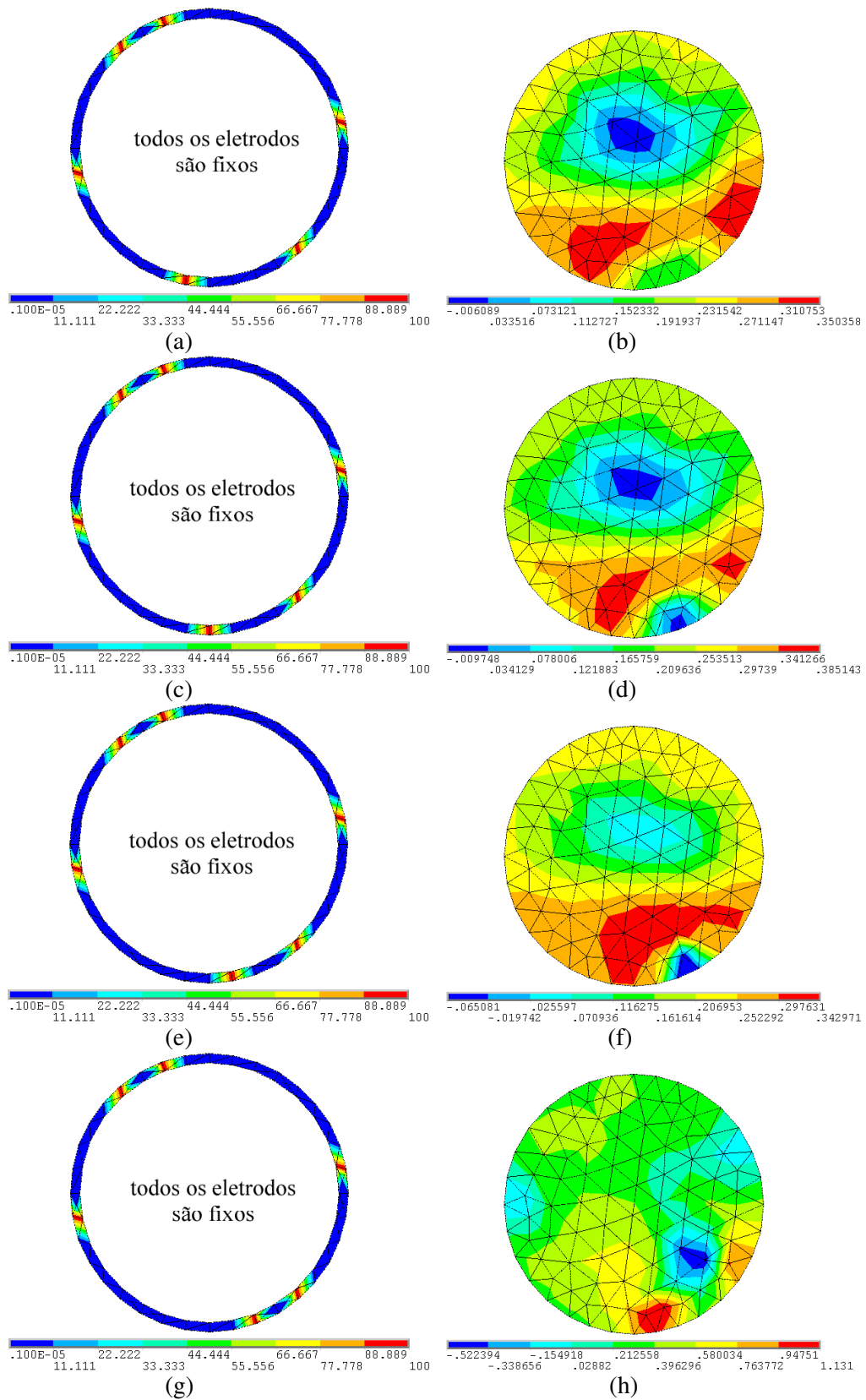


Figura 61 **Imagens obtidas para eletrodos fixos ao longo do processo iterativo.** As posições de eletrodos consideradas, mostradas nas figuras (a), (c), (e) e (g), são responsáveis pela obtenção das imagens mostradas nas figuras (b), (d), (f) e (h), respectivamente. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)

Por fim, para uma sugestão inicial igual a da Figura 62, ou seja, um caso de erro generalizado da posição inicial (isto é, um erro na posição de todos os eletrodos), obtêm-se os resultados mostrados na Figura 63. Os três eletrodos superiores (dos domínios de otimização nas regiões norte, nordeste e noroeste), estão corretos, mas os três inferiores apresentam problemas de posicionamento e material obtido. A perturbação na imagem, por sua vez, está em posição incorreta e as condutividades também estão incorretas.

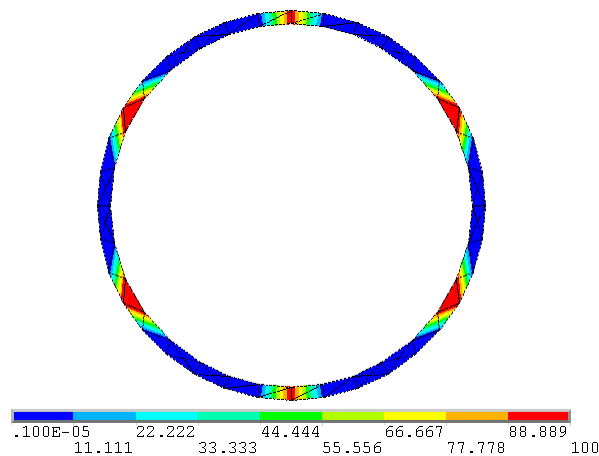


Figura 62 Distribuição inicial de condutividades referente aos eletrodos (na malha de estimação, Figura 45(b)), utilizada para obtenção das respostas na Figura 63. Nota-se que a posição inicial de todos os eletrodos está incorreta. (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

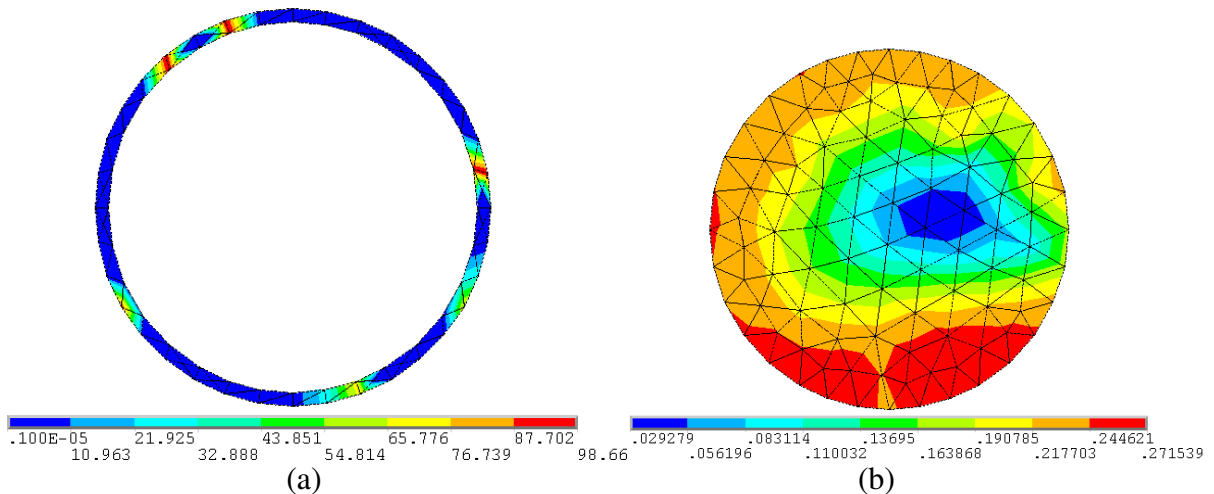


Figura 63 (a) Eletrodos obtidos; (b) imagens de condutividade obtidas. (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

Novamente, fixando-se o eletrodo da região sul (o que significa que a sugestão inicial é dada pela Figura 64(a)), obtêm-se os resultados da Figura 64(b) e Figura 64(c). Os eletrodos agora estão bastante próximos do fantoma (mostrado na Figura 51(a)). No entanto, a imagem apresenta uma perturbação errônea na parte inferior. Ainda, mais iterações foram necessárias

para a obtenção dos resultados mostrados, os quais representam situações práticas mais críticas (300 iterações para correção dos eletrodos e 300 para a estimação da imagem, além de 60 iterações globais, totalizando 36000 iterações).

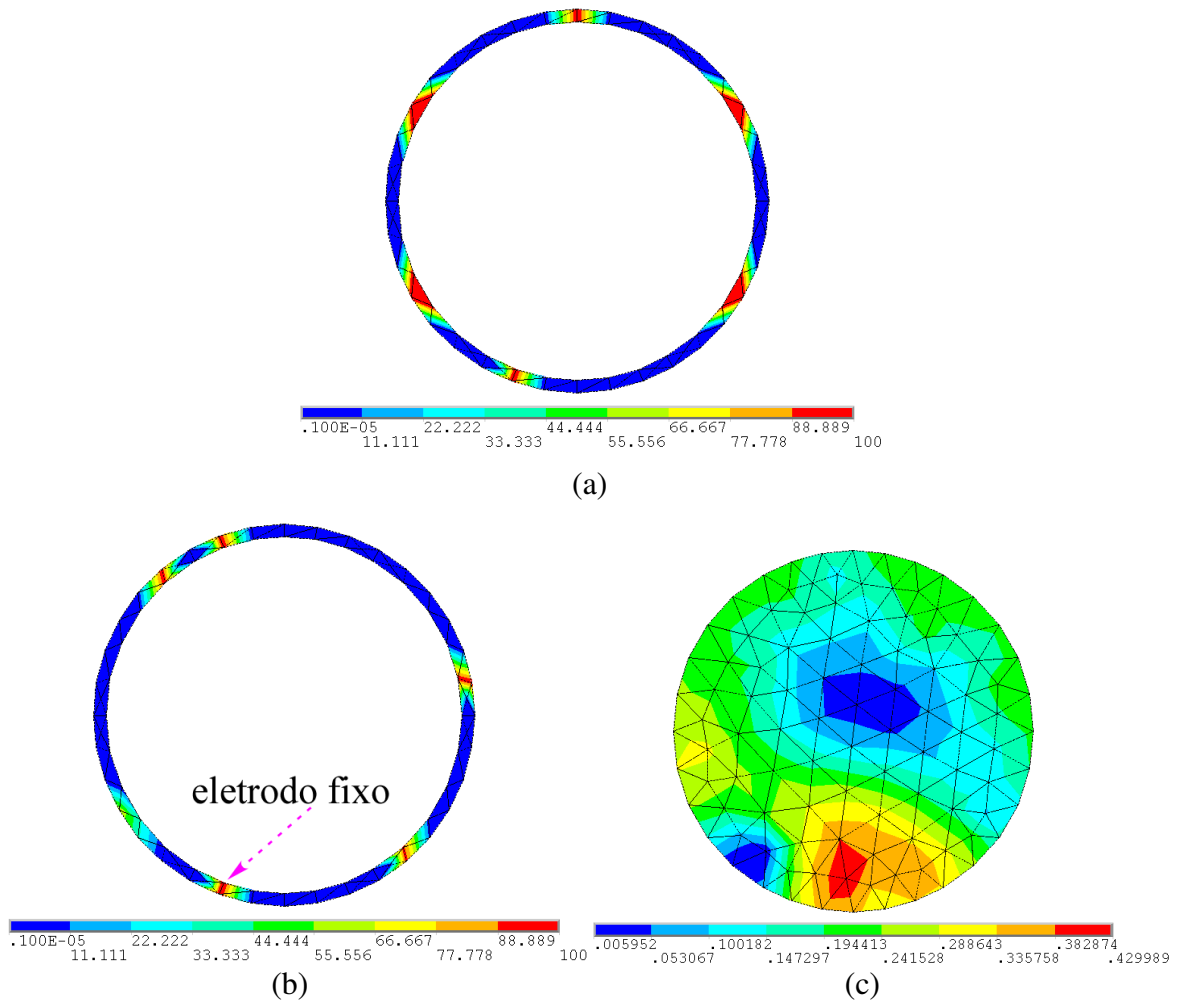


Figura 64 (a) Distribuição inicial de condutividades referente aos eletrodos (na malha de estimação, Figura 45(b)), utilizada para obtenção das respostas na atual figura; (b) eletrodos obtidos; (c) imagens de condutividade obtidas. A distribuição de condutividades do domínio de otimização na posição sul é fixada. (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

Então, fixando-se os eletrodos das posições sul e sudoeste, o que rende uma posição inicial igual à mostrada na Figura 65(a), obtêm-se as respostas da Figura 65(b) e da Figura 65(c). Novamente, consideram-se, no máximo, 100 iterações para cada um dos dois conjuntos de parâmetros (imagem e eletrodos), totalizando 4000 iterações.

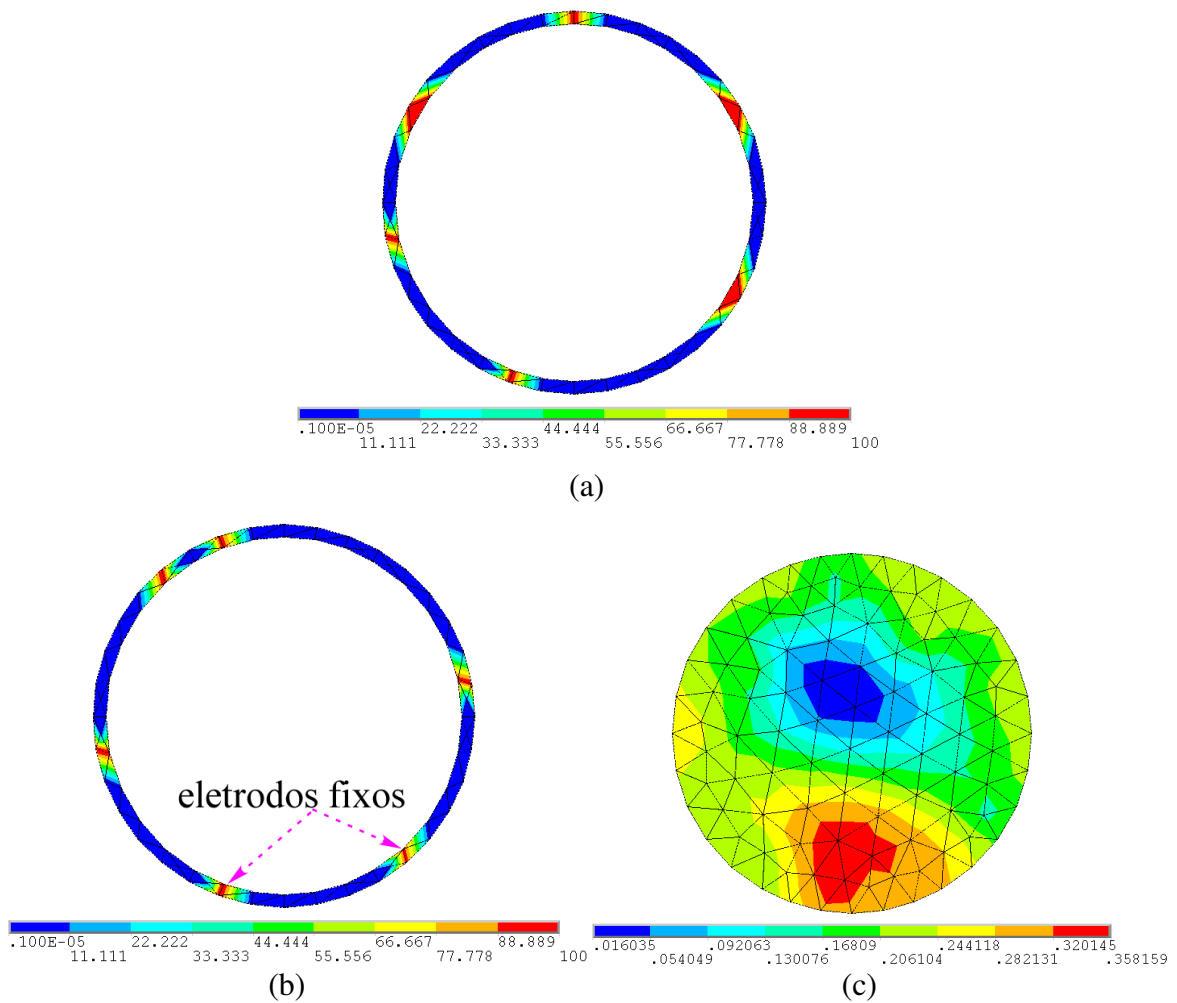


Figura 65 (a) Distribuição inicial de condutividades referente aos eletrodos (na malha de estimação, Figura 45(b)), utilizada para obtenção das respostas na atual figura; (b) eletrodos obtidos; (c) imagens de condutividade obtidas. As distribuições de condutividades dos domínios de otimização nas posições sul e sudoeste são fixadas. (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

Esses resultados finais (a partir da Figura 63) corroboram a observação de que, se respostas de distribuições 0-1 de condutividade são obtidos nos domínios de otimização, resultados bastante fiéis ao fantoma são obtidos.

4.1.5 Conclusão

Foi proposto um método de determinação da posição de eletrodos de TIE através do MOT. Mostra-se, através da estimação do posicionamento correto da perturbação na imagem e de posições aproximadamente corretas para os eletrodos (mesmo considerando-se apenas

seis eletrodos e 18 medições de potenciais elétricos), que o algoritmo tem potencial para ser utilizado numa situação prática de TIE.

Mostra-se que a informação de que todos os nós alinhados perpendicularmente à superfície do eletrodo têm o mesmo valor de variável de otimização foi importante na obtenção de respostas mais próximas do fantoma. Porém, a técnica de Projeção, considerando-se funções lineares (a função (APÊNDICE C.1) e funções peso lineares, mostradas na Figura 87 do mesmo apêndice), não foi efetiva na obtenção da posição correta dos eletrodos, apesar de ter gerado, de fato, estruturas conectadas, o que motivou sua utilização (vide subseção 4.1.2, sob o título: “Imposição de Informações sobre o Eletrodo”).

No caso de eletrodos estreitos, foi considerada a correção de posicionamento baseada em situações práticas hipotéticas simuladas. Assim, emulou-se um deslocamento (relativamente grande) de um dos eletrodos devido a um fator externo. Porém, mesmo com a detecção e correção do erro da posição, feita através da utilização de uma sugestão inicial para os eletrodos próxima do fantoma, não foi possível obter uma imagem correta. Por outro lado, fixando-se a distribuição de condutividades do domínio de otimização na posição sul, o qual apresentou alguns problemas, foram obtidos resultados muito próximos do fantoma. Através desses e da análise da estimação de imagens com eletrodos discretos 0-1 fixos, foi notado que, se respostas de valores de condutividade 0-1 (ou aproximadamente 0-1) são obtidas nos domínios de otimização, resultados bastante fiéis ao fantoma são obtidos. Resultados posteriores em outras situações corroboraram essa conclusão. Assim, sugerir-se-ia a penalização das condutividades intermediárias, o que pode ser realizado através do modelo CAMD de material (MATSUI; TERADA, 2004), por exemplo.

Além da penalização, sugere-se, em trabalhos futuros, utilizar modelos de MEF 3D. Assim, poderá ser avaliada a capacidade do método proposto de detectar e corrigir não somente translações de eletrodos, mas também eventuais rotações (no plano da superfície de fixação), as quais podem ocorrer, em se tratando da monitoração do pulmão, durante a movimentação do paciente ou de seu tórax (na respiração, por exemplo). Isso poderia ser uma vantagem com relação aos métodos propostos por Vallejo et al. (2006) e Soleimani, Laberge e Adler (2006), os quais, diferentemente do método baseado em MOT proposto, não podem detectar rotações. Além disso, sugere-se utilizar o novo modelo para a interface de contato entre os eletrodos e o corpo, com o intuito de obter respostas experimentais.

Em casos médicos práticos, raramente são utilizados eletrodos com a espessura na proporção mostrada nos testes. Nessa situação, sugere-se a utilização de elementos finitos de

eletrodo unidimensionais na superfície da malha interna (ou 2D, no caso de domínios 3D), o que pode, ainda, simplificar o processo de implementação clínica da abordagem de MOT proposta bem como a aplicação de informações conhecidas a respeito dos eletrodos, diminuir a velocidade de estimação e reduzir o espaço de soluções possíveis do problema de otimização, impedindo a obtenção de eventuais mínimos locais sem sentido físico. Ainda, isso resolveria a questão da sensibilidade reduzida da função F à distribuição de propriedades abaixo da superfície dos domínios de otimização.

4.2 Metodologia para Projeto dos Eletrodos pelo Método de Otimização Topológica Aplicados à Tomografia de Impedância Elétrica

4.2.1 Introdução

Vários algoritmos têm sido propostos para resolver o problema inverso não-linear de TIE e obter valores absolutos de propriedades. Eles, normalmente, são baseados em métodos iterativos como os métodos de Newton (VAUHKONEN, 2004) ou o filtro de Kalman, mas perturbações relativamente pequenas podem ser recuperadas utilizando-se um método de aproximação linear (POLYDORIDES; MCCANN, 2002). Essencialmente, métodos de Newton minimizam a função erro igualando suas derivadas com respeito à distribuição de propriedades a zero e resolvendo o sistema não-linear obtido através dos métodos baseados no método de Newton-Raphson. Os três métodos de solução do problema inverso de TIE mencionados dão origem à chamada matriz de sensibilidade (VAUHKONEN, 2004), ou matriz Jacobiana (DEHGHANI et al., 2005), a qual relaciona um vetor de mudanças de propriedades em “pixels” e um vetor que contém as mudanças correspondentes em potenciais calculados.

A matriz de sensibilidade tem, na maioria dos casos, problemas de posto (POLYDORIDES; MCCANN, 2002), já que o número medidas consideradas costuma ser menor que o número de “pixels”, além de serem algumas linhas da matriz linearmente dependentes, não acrescentando informação para a solução do problema inverso. Além disso, pode ser mal-condicionada, dando origem a um problema instável e, portanto, a uma solução incorreta (VAUHKONEN, 2004). Geralmente, são empregados métodos de regularização (VAUHKONEN, 2004; DEHGHANI et al., 2005), os quais dão origem a uma solução estável. O método de Tikhonov e a decomposição em valores singulares truncada generalizada (DVSTG) (POLYDORIDES; MCCANN, 2002) são exemplos de métodos de regularização, e a primeira é, provavelmente, a técnica mais utilizada.

No caso da regularização de Tikhonov, um termo de regularização é acrescentado à função erro, formado de um parâmetro de regularização positivo multiplicado por um

funcional que penaliza altas frequências espaciais e elevados contrastes. Um parâmetro de regularização λ para o método de Tikhonov (e, eventualmente, para o DVSTG) controla o compromisso existente entre o mau-condicionamento da matriz regularizada e a suavização da distribuição de propriedades estimada. Especificamente, a distribuição pode ser suave porque as componentes de imagem referentes aos valores singulares mais baixos da matriz Jacobiana, as quais são responsáveis pelos detalhes da imagem (ou regiões de variação espacial de alta frequência), são atenuadas pelo procedimento de regularização.

Graham e Adler (2007) reportaram a dependência do mau-condicionamento da matriz de sensibilidade com posições de eletrodos. Porém, não abordaram o melhor posicionamento, geometria ou distribuição das propriedades dos mesmos (ou seja, não foi considerado o melhor material para se fabricar um eletrodo, seja a propriedade em seu interior constante – como usual – ou não). Com o intuito de otimizar o posicionamento, geometria e material dos eletrodos levando-se em conta a redução do mau-condicionamento da matriz de sensibilidade, utiliza-se, no atual trabalho, um algoritmo baseado no MOT (BENDSØE; SIGMUND, 2003). O mau-condicionamento é reduzido minimizando-se a diferença ao quadrado entre os valores singulares máximo e mínimo da matriz de sensibilidade. Mostra-se, na ausência de ruído de medição, que o condicionamento é drasticamente melhorado quando comparado ao condicionamento de um sistema simulado de TIE com configuração convencional de eletrodos.

No entanto, alguns valores singulares da matriz de sensibilidade podem ser vulneráveis ao ruído (principalmente os menores valores) (POLYDORIDES; MCCANN, 2002). De fato, mostra-se que a otimização do condicionamento pode dar origem a valores singulares sensíveis a níveis de ruído particulares. Nesse caso, é desejável manter os valores singulares acima de certos níveis, os quais dependem da variância do ruído, conforme discutido por Polydorides e Mccann (2002). No mesmo trabalho, obtiveram-se melhorias na resolução e redução da sensibilidade ao ruído com menos eletrodos utilizando uma abordagem por segmentação. A partir dessa técnica, conjuntos de mais de um eletrodo aplicam correntes elétricas ao corpo e os potenciais são medidos como usualmente (utilizando um eletrodo, apenas). Além deles, Dehghani et al. (2005) mostraram que alguns tipos de excitação elétrica são mais robustos ao ruído. No entanto, a otimização do formato, posição e material dos eletrodos não foi abordada até o momento, na literatura.

Portanto, nesta seção (4.2), também é proposta a utilização do MOT na determinação do posicionamento, formato e propriedade ótimos dos eletrodos para redução da sensibilidade ao

ruído, maximizando-se a soma dos valores singulares da matriz de sensibilidade e mantendo um valor razoável do parâmetro de regularização λ , com o intuito de reduzir a reconstrução de sinais de ruído na distribuição de propriedades referente à imagem. O valor máximo do parâmetro de regularização é verificado ao final do processo de otimização para que se evite o mau-condicionamento da matriz de sensibilidade devido à obtenção de valores singulares elevados.

Os resultados são testados utilizando-se um fantoma numérico, através de uma abordagem baseada em métodos de Newton para determinar a distribuição de propriedades no interior de um domínio. Em outras palavras, os eletrodos otimizados são empregados na estimação da imagem como forma de se avaliar seu desempenho. O modelo matemático do corpo é baseado no MEF, sendo exatamente o mesmo modelo utilizado na seção 4.1. Assim, considera-se a distribuição de potenciais elétricos nodais dada por $\mathbf{K}_{Tj}\mathbf{V}_{Tj}=\mathbf{I}_{Tj}$, conforme a eq.(4.1.7). Porém, como apenas um referencial é usado para $j=1\dots ne$, $\mathbf{K}_{Tj}=\mathbf{K}_T$.

O texto é organizado da seguinte maneira: na subseção 4.2.2, o método utilizado para obter uma imagem de TIE (**particular da atual seção 4.2**) é descrito. Na subseção 4.2.3, é proposta a formulação de MOT aplicada ao projeto dos eletrodos, incluindo-se a análise de sensibilidade. Na subseção 4.2.4, são apresentados os resultados e na subseção 4.2.5, as conclusões.

4.2.2 Estimação das Condutividades do Corpo

Como mencionado no trabalho, o problema inverso de TIE é frequentemente baseado na minimização da função de erro de valores de potenciais elétricos:

$$F = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_{\text{com}}(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{V}_0)^T (\mathbf{V}_{\text{com}}(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{V}_0), \quad (4.2.1)$$

onde $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{R}^{nct \times 1}$ é o vetor de condutividades nodais, sendo que é assumido que a condutividade de cada elemento finito depende de valores nodais, da mesma forma que os potenciais elétricos, e nct é o número de nós referentes ao corpo tomografado. Ainda, o vetor $\mathbf{V}_0 \in \mathbf{R}^{(ne \times np) \times 1}$ contém valores de medidas, $\mathbf{V}_{\text{com}}(\boldsymbol{\sigma}) \in \mathbf{R}^{(ne \times np) \times 1}$, nesse caso, contém

valores de potenciais calculados através do modelo, correspondentes às medidas, ne é novamente o número de padrões de corrente e np é o número de medidas para cada padrão.

Neste trabalho, a função dada por F, adicionada do termo de regularização (VAUHKONEN, 2004) citado na subsecção anterior, é minimizada igualando-se suas derivadas com respeito à distribuição de propriedades a zero, e resolvendo o sistema não-linear obtido através dos métodos baseados no método de Newton-Raphson (BATHE, 1996) (alternativamente, métodos relacionados ao gradiente da função erro, como o MOT, podem ser utilizados na minimização). O método usual de Levenberg-Marquardt (VAUHKONEN, 2004) foi escolhido (é similar ao método padrão de Tikhonov, descrito em Polydorides e Mccann – 2002), o qual, iterativamente, resolve o seguinte problema linear (DEHGHANI et al., 2005):

$$\boldsymbol{\sigma}_{it+1} = \boldsymbol{\sigma}_{it} + (\mathbf{J}^T(\boldsymbol{\sigma}_{it})\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}_{it}) + \lambda\mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}^T(\boldsymbol{\sigma}_{it})(\mathbf{V}_{\text{com}}(\boldsymbol{\sigma}_{it}) - \mathbf{V}_0), \quad (4.2.2)$$

onde “it” representa uma iteração e λ é o parâmetro de regularização, o qual é positivo e controla o compromisso entre o mau-condicionamento da matriz regularizada $(\mathbf{J}^T\mathbf{J} + \lambda\mathbf{I}) \in \mathbf{R}^{\text{nct} \times \text{nct}}$ e a suavização da distribuição de condutividades estimada, como mencionado na subsecção anterior. A matriz $\mathbf{J} \in \mathbf{R}^{(\text{nexnp}) \times \text{nct}}$ é a matriz de sensibilidade, que pode ser dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \frac{\partial \mathbf{V}_{T1}}{\partial \sigma_1} & \mathbf{T}_1 \frac{\partial \mathbf{V}_{T1}}{\partial \sigma_2} & \dots & \mathbf{T}_1 \frac{\partial \mathbf{V}_{T1}}{\partial \sigma_{\text{nct}}} \\ \mathbf{T}_2 \frac{\partial \mathbf{V}_{T2}}{\partial \sigma_1} & \mathbf{T}_2 \frac{\partial \mathbf{V}_{T2}}{\partial \sigma_2} & \dots & \mathbf{T}_2 \frac{\partial \mathbf{V}_{T2}}{\partial \sigma_{\text{nct}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{T}_{\text{ne}} \frac{\partial \mathbf{V}_{T\text{ne}}}{\partial \sigma_1} & \mathbf{T}_{\text{ne}} \frac{\partial \mathbf{V}_{T\text{ne}}}{\partial \sigma_2} & \dots & \mathbf{T}_{\text{ne}} \frac{\partial \mathbf{V}_{T\text{ne}}}{\partial \sigma_{\text{nct}}} \end{bmatrix}, \quad (4.2.3)$$

onde a matriz $\mathbf{T}_j \in \mathbf{R}^{\text{np} \times \text{nd}}$, descrita na próxima subsecção, seleciona potenciais calculados de \mathbf{V}_{Tj} a serem comparados às medidas e nd é o número de nós total da malha de MEF, incluindo nós no domínio de otimização (vide subsecção 4.2.3).

Como nota, pode-se mostrar que os autovalores da matriz regularizada $(\mathbf{J}^T\mathbf{J} + \lambda\mathbf{I})$ são iguais aos autovalores de $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$, acrescidos de λ . Assim e como o número de condição da

matriz regularizada pode ser definido como o seu maior autovalor dividido pelo menor, mostra-se como o parâmetro de regularização atua sobre o mau-condicionamento de $(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I})$.

É relevante mencionar que métodos baseados em gradientes, como a (PLS), obtêm a distribuição de condutividades que minimiza a F linearizada num espaço restringido (para garantir que a função linearizada seja uma boa aproximação para F, conforme discutido anteriormente no texto), seguindo um processo iterativo. Por outro lado, pode-se mostrar que o gradiente de F é uma combinação linear das linhas de \mathbf{J} , o que pode ser notado à partir da análise da equação do gradiente vista em Mello et al. (2008) (ou nos capítulos anteriores). Portanto, sem elaborar demasiadamente a idéia, acredita-se que o aumento do desempenho do sistema de TIE através da mudança dos valores singulares de \mathbf{J} tenha impacto positivo no gradiente e, portanto, no desempenho dos métodos baseados em gradientes aplicados à TIE.

A Decomposição em Valores Singulares (DVS) (POLYDORIDES; MCCANN, 2002) de \mathbf{J} dá a seguinte equação:

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{Z}^T, \quad (4.2.4)$$

onde $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{(ne \times np) \times (ne \times np)}$ e $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{nct \times nct}$ são as matrizes ortonormais contendo os chamados vetores singulares de \mathbf{J} e $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{(ne \times np) \times nct}$, uma matriz diagonal, contém os valores singulares de \mathbf{J} . Uma vez que \mathbf{U} e \mathbf{Z} são matrizes ortonormais, o seguinte desenvolvimento, baseado na eq.(4.2.4) e na eq.(4.2.2), pode ser realizado:

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z} \mathbf{S}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{Z}^T + \lambda \mathbf{I})(\boldsymbol{\sigma}_{it+1} - \boldsymbol{\sigma}_{it}) &= \mathbf{Z} \mathbf{S}^T \mathbf{U}^T (\mathbf{V}_{com} - \mathbf{V}_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{Z}^T (\mathbf{Z} \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{Z}^T + \lambda \mathbf{I})(\boldsymbol{\sigma}_{it+1} - \boldsymbol{\sigma}_{it}) &= \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{S}^T \mathbf{U}^T (\mathbf{V}_{com} - \mathbf{V}_0) \Rightarrow . \\ \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_{it+1} - \boldsymbol{\sigma}_{it} &= \mathbf{Z} (\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{U}^T (\mathbf{V}_{com} - \mathbf{V}_0) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Pode ser visto que cada elemento da diagonal da matriz diagonal $(\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \lambda \mathbf{I})^{-1}$ é igual a $\frac{1}{(v_n^2 + \lambda)}$ para $1 \leq n \leq (ne \times np)$ e igual a $\frac{1}{\lambda}$ se $(ne \times np) < n \leq nct$, onde v_n é um valor singular de \mathbf{J} . Assim, $(\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{S}^T \in \mathbb{R}^{nct \times (ne \times np)}$ é dada por:

$$(\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} \frac{v_1}{(v_1^2 + \lambda)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{v_2}{(v_2^2 + \lambda)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{v_{(ne \times np)}}{(v_{(ne \times np)}^2 + \lambda)} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

e

$$(\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{U}^T (\mathbf{V}_{\text{com}} - \mathbf{V}_0) = \begin{bmatrix} \frac{v_1}{(v_1^2 + \lambda)} \mathbf{U}_1^T (\mathbf{V}_{\text{com}} - \mathbf{V}_0) \\ \vdots \\ \frac{v_{(ne \times np)}}{(v_{(ne \times np)}^2 + \lambda)} \mathbf{U}_{(ne \times np)}^T (\mathbf{V}_{\text{com}} - \mathbf{V}_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\text{nct} \times 1} \quad (4.2.7)$$

onde $\mathbf{U}_n \in \mathbb{R}^{(ne \times np) \times 1}$ é a n-ésima coluna de \mathbf{U} .

Finalmente, utilizando-se a eq.(4.2.7) e a última equação de (4.2.5), pode-se obter:

$$\boldsymbol{\sigma}_{it+1} - \boldsymbol{\sigma}_{it} = \sum_{n=1}^{ne \times np} \mathbf{E}_n = \sum_{n=1}^{ne \times np} \left[\frac{v_n}{v_n^2 + \lambda} \mathbf{U}_n^T (\mathbf{V}_{\text{com}} - \mathbf{V}_0) \right] \mathbf{Z}_n, \quad (4.2.8)$$

onde $\mathbf{E}_n \in \mathbb{R}^{\text{nct} \times 1}$ é uma (imagem) componente da solução e $\mathbf{Z}_n \in \mathbb{R}^{\text{nct} \times 1}$ é a n-ésima coluna de \mathbf{Z} .

Esta última equação representa maneira alternativa de se expressar o método padrão de Tikhonov, baseada na DVS de \mathbf{J} . Ela mostra como cada componente da solução (\mathbf{E}_n) em cada iteração pode ser filtrada (ou seja, receber um peso menor na composição da imagem) quando o parâmetro de regularização é relativamente elevado. Além disso, ela ilustra porque os menores valores singulares estão mais sujeitos ao ruído. Portanto, tal equação motiva os presentes estudos.

4.2.3 Otimização Topológica Aplicada ao Projeto dos Eletrodos

Como mencionado na subseção 4.2.1, considera-se o MOT (BENDSØE; SIGMUND, 2003) na obtenção do posicionamento, formato e distribuição de propriedades (particularmente, as condutividades) dos eletrodos: (a) para reduzir o mau-condicionamento da matriz de sensibilidade e (b) para reduzir a sensibilidade ao ruído. A razão pela qual o MOT é utilizado é porque ele é usualmente baseado na PLS, a qual soluciona um problema não-linear através da solução de uma série de problemas linearizados, sujeitos a restrições. Dessa maneira, pode-se reduzir o espaço de solução, limitando as soluções possíveis às soluções de interesse. Além disso, o processo de busca baseado em PLS é extremamente eficiente se comparado ao processo de tentativa e erro, especialmente no caso em que a variação da propriedade do material do eletrodo é contínua.

Com o intuito de obter uma expressão simples para o gradiente da função objetivo, evitando-se, assim, derivar diretamente o problema de DVS, utilizam-se os autovalores de $\mathbf{J}^T \mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n_{ct} \times n_{ct}}$ ao invés dos valores singulares de \mathbf{J} , os quais estão relacionados por

$$\eta_n = v_n^2, \text{ para } n \leq (n_e \times n_p). \quad (4.2.9)$$

Portanto, a seguinte função é minimizada para reduzir o mau-condicionamento:

$$F_{\min}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}_e) = (\eta_{\max} - \eta_{\min})^2, \quad (4.2.10)$$

onde $\boldsymbol{\rho}_e \in \mathbb{R}^{n_o \times 1}$ é, como na seção 4.1, o vetor de parâmetros que determinam as posições, geometrias e material dos eletrodos, n_o é o número de nós de eletrodo e η_{\max} e η_{\min} são os autovalores máximo e mínimo de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$, respectivamente. O valor mínimo, aqui, refere-se ao menor valor dentro do conjunto de autovalores teoricamente maiores que zero, cujo número é igual ao posto de \mathbf{J} .

Por outro lado, otimiza-se a seguinte função para maximizar a soma de valores singulares:

$$F_{\max}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}_e) = \sum_{n=1}^{ne \times np} \eta_n. \quad (4.2.11)$$

Com o intuito de obter eletrodos otimizados, utiliza-se procedimento e modelo semelhantes aos adotados na correção do posicionamento dos eletrodos, e descritos, em detalhes, na seção 4.1. A diferença ocorre pelo fato de que materiais intermediários fazem sentido no contexto atual.

Consideram-se, novamente, domínios condutivos conectados ao domínio da imagem, nos quais podem existir eletrodos. Os domínios são mostrados na Figura 66. Nesse caso, o problema se torna o de determinar funções de condutividade em cada domínio (o domínio de otimização).

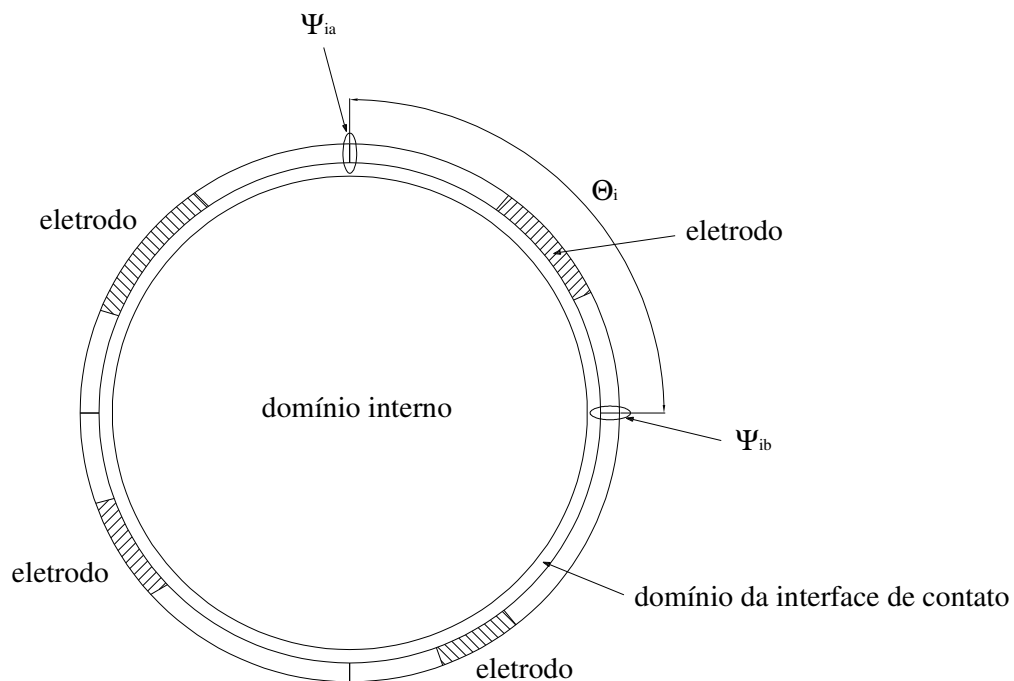


Figura 66 Reprodução da figura da seção 4.1. É mostrado o esquema de uma seção do modelo de corpo tomografado. Hachuras indicam o eletrodo.

Então, o domínio é dividido em elementos finitos e a teoria de MOT é aplicada. Portanto, um modelo de material é definido. Considera-se, novamente, o modelo de material CAMD (MATSUI; TERADA, 2004) e permitem-se valores intermediários de material, sendo a condutividade do elemento dada pela eq.(4.1.3) e pela eq.(4.1.4).

Como comentado, o mesmo “mecanismo” de imposição de condições de contorno citado na seção 4.1, bem como a mesma definição de potenciais nominais, são utilizados no

atual. Assim, consideram-se válidas a eq.(4.1.5), a eq.(4.1.6) e a eq.(4.1.8), ou seja, a restrição à quantidade de corrente aplicada a cada eletrodo, a corrente aplicada a cada nó superficial dos domínios de otimização e o potencial nominal, respectivamente. Além disso, considera-se válido o novo modelo da interface de contato mencionado na subseção 4.1.2, o qual não é, porém, utilizado nos atuais resultados, por simplicidade. Com o “mecanismo” proposto, modifica-se, novamente, o sistema na equação $\mathbf{K}_T \mathbf{V}_{Tj} = \mathbf{I}_{Tj}$ (referente ao modelo do corpo), uma vez que as correntes na eq.(4.1.6) obtidas considerando-se todos os valores possíveis de i , j e k , formam um conjunto de novos vetores de correntes elétricas nodais, sendo um vetor para cada j -ésimo padrão de corrente. Ainda, a matriz \mathbf{T}_j (definida na subseção 4.2.2) é igual à matriz \mathbf{A}_{Pej} , definida na subseção 4.1.3.

Quanto à matriz \mathbf{K}_T especificamente, considerando-se modelo semelhante ao adotado na correção do posicionamento dos eletrodos (seção 4.1), essa passa a conter não somente as matrizes dos elementos da malha interna, mas também dos domínios de otimização. No entanto, não se impõem informações prévias sobre os eletrodos da maneira realizada na subseção 4.1.2 (sob o título: “Imposição de Informações sobre o Eletrodo”).

Com base na discussão na atual subseção, pode-se então propor o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}
 & \text{Otimizar}_{\rho} \quad F_g = F_g(\sigma, \rho) \\
 & \text{Tal que} \quad \sum_{\Omega_i^*} \frac{\mathbf{I}_{Tij} \rho_{eik}}{n_T} = \mathbf{I}_{Tij} \\
 & \quad \text{equações de MEF} \quad , \\
 & \quad \text{equações do modelo de material} \\
 & \quad \mathbf{0} \leq \rho \leq \mathbf{1}
 \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

onde F_g é igual a F_{\min} ou F_{\max} , dependendo do problema considerado.

Considerações sobre o Modelo de Material: Limites de Hashin-Shtrikman

Com base na discussão de Bendsøe e Sigmund sobre a viabilidade da fabricação de um dispositivo obtido para uma aplicação qualquer pelo MOT (BENDSØE; SIGMUND, 2003), pode-se questionar se é possível encontrar um compósito (ou um material composto qualquer), no caso um material bifásico, cuja relação entre a fração volumétrica de um dos materiais componentes e a condutividade (para o caso especial estudado neste trabalho) seja dada pelas equações eq.(4.1.3) e eq.(4.1.4), ou seja, obedeça às equações do modelo de material.

A resposta a essa questão depende de uma série de fatores, como a possibilidade de construção da microestrutura do material. Porém, a condição necessária para que um material isotrópico composto, com duas fases de materiais isotrópicos lineares, cuja relação entre a fração volumétrica de um dos materiais e a condutividade seja dada pelo modelo de material possa ser fabricado, é que a função desse modelo de material, a eq.(4.1.3) por exemplo, obedeça aos limites de Hashin-Shtrikman. Tais limites são representados na Figura 67, juntamente com uma função σ_g (num ponto qualquer de um g-ésimo elemento) que os obedece.

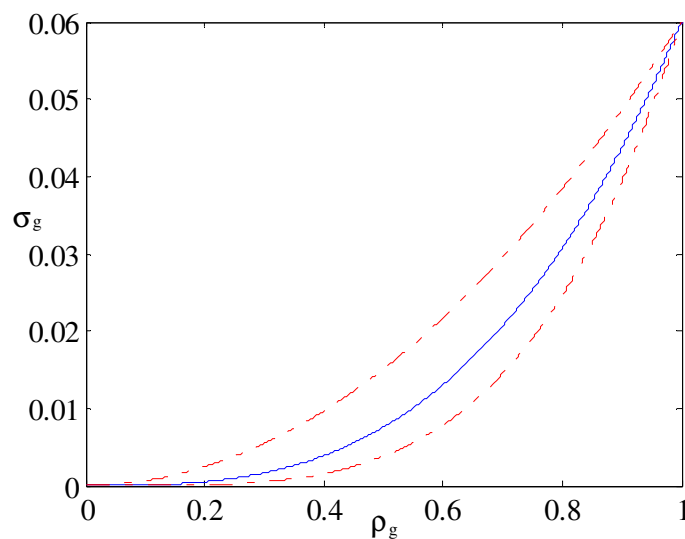


Figura 67 Representação dos limites de Hashin-Shtrikman-Walpole (---) e de $\sigma_g = (\mathbf{N}_g \boldsymbol{\rho})^p \sigma_A + (1 - (\mathbf{N}_g \boldsymbol{\rho})^p) \sigma_B$ (---), para um dado valor de p e num ponto qualquer do g-ésimo elemento. Os valores de σ_A e σ_B , neste caso, são iguais a $0,06(\Omega\text{m})^{-1}$ e a $10^{-6}(\Omega\text{m})^{-1}$, respectivamente.

Como já mencionado, os limites representam apenas condições necessárias. Assim, não se pode garantir que o material bifásico possa ser fabricado. Porém, os próprios Bendsøe e Sigmund (2003) propõem um método, baseado no MOT, para desenvolvimento de microestruturas fabricáveis, cuja relação entre o volume do material A presente na microestrutura e a propriedade considerada obedecem, de fato, ao modelo de material. Muito embora a condutividade elétrica não seja uma propriedade abordada através do método mencionado, como foram o módulo de elasticidade ou o coeficiente efetivo de deformação térmica, por exemplo, acredita-se que a metodologia proposta pelos autores, genérica, possa ser aplicada no contexto de materiais condutivos.

Pode-se citar abordagem alternativa à utilização dos limites. Propõe-se, inicialmente, uma microestrutura factível e, variando parâmetros da mesma, calcula-se a fração de volume de seus materiais constituintes e a propriedade efetiva correspondente. Seguindo-se tal procedimento, obtém-se um modelo de material fisicamente possível, o qual é então utilizado no processo de otimização. A desvantagem de tal abordagem está no fato de que não se impõe restrição à função obtida para o modelo de material, a qual pode vir a penalizar valores particulares de condutividade e produzir resultados ótimos de desempenho inferior.

No atual trabalho, não será abordada a fabricação dos eletrodos em si, mas somente o seu projeto através do MOT. Nessas condições, não será empregado um modelo de material que obedeça, a rigor, aos limites de Hashin-Shtrikman. Porém, conforme mencionado anteriormente, há abordagens para que se assegure que o eletrodo ótimo possa ser fabricado.

Como nota final a respeito das considerações sobre o modelo de material adotado e os limites de Hashin-Shtrikman, deve-se mencionar que não é necessário, no caso da utilização de um modelo de material para obtenção de uma imagem do interior de um corpo por TIE, considerar as abordagens mencionadas aplicadas ao projeto. O motivo para isso reside no fato de que, na estimação da imagem, já se sabe de antemão (ao contrário do caso do projeto), que os resultados da otimização pelo MOT existem, uma vez que os materiais ótimos, nesse caso, correspondem às estruturas biológicas presentes no interior do corpo.

Análise de Sensibilidade

O gradiente de F_g é dado por

$$\mathbf{grad}(F_g) = \left[\frac{\partial F_g}{\partial \boldsymbol{\eta}} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \rho_{e1}} \quad \frac{\partial F_g}{\partial \boldsymbol{\eta}} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \rho_{e2}} \quad \dots \quad \frac{\partial F_g}{\partial \boldsymbol{\eta}} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \rho_{e_{no}}} \right]^T \in \mathbf{R}^{no \times 1}, \quad (4.2.13)$$

onde ρ_{el} é uma componente de $\boldsymbol{\rho}_e$ e

$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_{(ne \times np)}]^T \in \mathbf{R}^{(ne \times np) \times 1}. \quad (4.2.14)$$

Os elementos da matriz $\frac{\partial F_g}{\partial \boldsymbol{\eta}} \in \mathbf{R}^{1 \times (ne \times np)}$, por sua vez, são dados, no caso em que F_g é igual a F_{\min} (vide eq.(4.2.10)), por

$$\begin{aligned} & 2(\eta_{\max} - \eta_{\min}) && \text{se } \eta_n = \eta_{\max} \\ & -2(\eta_{\max} - \eta_{\min}) && \text{se } \eta_n = \eta_{\min} \\ & 0 && \text{em caso contrário} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Por outro lado, a matriz é dada por $\mathbf{1} \in \mathbf{R}^{1 \times (ne \times np)}$, se F_g for igual a F_{\max} (vide eq.(4.2.11)).

Para obter o vetor $\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \rho_{e1}} \in \mathbf{R}^{(ne \times np) \times 1}$, faz-se $\mathbf{D} = \mathbf{J}^T \mathbf{J}$ e deriva-se o seguinte autoproblema (BATHE, 1996):

$$(\mathbf{D} - \gamma_q \mathbf{I}) \mathbf{G}_q = 0, \quad (4.2.16)$$

onde $\mathbf{G}_q \in \mathbf{R}^{nct \times 1}$ é o q-ésimo autovetor de \mathbf{D} .

Assim, escolhendo-se um valor particular de \mathbf{G}_q , \mathbf{G}_{pq} , o qual satisfaz

$$\mathbf{G}_{pq}^T \mathbf{G}_{pq} = 1, \quad (4.2.17)$$

a seguinte equação pode, finalmente, ser obtida:

$$\frac{\partial \eta_q}{\partial \rho_{e1}} = \mathbf{G}_{pq}^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \rho_{e1}} \mathbf{G}_{pq}. \quad (4.2.18)$$

A derivada de \mathbf{D} , por sua vez, é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \rho_{e1}} = \left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \rho_{e1}} \right)^T \mathbf{J} + \mathbf{J}^T \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \rho_{e1}}, \quad (4.2.19)$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \rho_{e1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{p1} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_{T1}}{\partial \sigma_1 \partial \rho_{e1}} + \frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial \rho_{e1}} \frac{\partial \mathbf{V}_{T1}}{\partial \sigma_1} & \mathbf{A}_{p1} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_{T1}}{\partial \sigma_2 \partial \rho_{e1}} + \frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial \rho_{e1}} \frac{\partial \mathbf{V}_{T1}}{\partial \sigma_2} & \dots & \mathbf{A}_{p1} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_{T1}}{\partial \sigma_{nd} \partial \rho_{e1}} + \frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial \rho_{e1}} \frac{\partial \mathbf{V}_{T1}}{\partial \sigma_{net}} \\ \mathbf{A}_{p2} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_{T2}}{\partial \sigma_1 \partial \rho_{e1}} + \frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial \rho_{e1}} \frac{\partial \mathbf{V}_{T2}}{\partial \sigma_1} & \mathbf{A}_{p2} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_{T2}}{\partial \sigma_2 \partial \rho_{e1}} + \frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial \rho_{e1}} \frac{\partial \mathbf{V}_{T2}}{\partial \sigma_2} & \dots & \mathbf{A}_{p2} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_{T2}}{\partial \sigma_{nd} \partial \rho_{e1}} + \frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial \rho_{e1}} \frac{\partial \mathbf{V}_{T2}}{\partial \sigma_{net}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{pne} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_{Tne}}{\partial \sigma_1 \partial \rho_{e1}} + \frac{\partial \mathbf{T}_{ne}}{\partial \rho_{e1}} \frac{\partial \mathbf{V}_{Tne}}{\partial \sigma_1} & \mathbf{A}_{pne} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_{Tne}}{\partial \sigma_2 \partial \rho_{e1}} + \frac{\partial \mathbf{T}_{ne}}{\partial \rho_{e1}} \frac{\partial \mathbf{V}_{Tne}}{\partial \sigma_2} & \dots & \mathbf{A}_{pne} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_{Tne}}{\partial \sigma_{nd} \partial \rho_{e1}} + \frac{\partial \mathbf{T}_{ne}}{\partial \rho_{e1}} \frac{\partial \mathbf{V}_{Tne}}{\partial \sigma_{net}} \end{bmatrix}. \quad (4.2.20)$$

Baseando-se na derivada de $\mathbf{K}_T \mathbf{V}_{Tj} = \mathbf{I}_{Tj}$, podem-se obter:

$$\mathbf{K}_T \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \sigma_s} + \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \sigma_s} \mathbf{V}_{Tj} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \sigma_s} = -\mathbf{K}_T^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \sigma_s} \mathbf{V}_{Tj} \quad (4.2.21)$$

e

$$\mathbf{K}_T \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \rho_{e1}} + \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \rho_{e1}} \mathbf{V}_{Tj} = \frac{\partial \mathbf{I}_{Tj}}{\partial \rho_{e1}} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \rho_{e1}} = \mathbf{K}_T^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_{Tj}}{\partial \rho_{e1}} - \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \rho_{e1}} \mathbf{V}_{Tj} \right) \quad (4.2.22)$$

e, ainda, derivando-se a primeira das equações em (4.2.21) com relação a ρ_{e1} ,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \rho_{e1}} \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \sigma_s} + \mathbf{K}_T \frac{\partial^2 \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \sigma_s \partial \rho_{e1}} + \frac{\partial^2 \mathbf{K}_T}{\partial \sigma_s \partial \rho_{e1}} \mathbf{V}_{Tj} + \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \sigma_s} \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \rho_{e1}} = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \mathbf{K}_T \frac{\partial^2 \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \sigma_s \partial \rho_{e1}} = - \left(\frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \rho_{e1}} \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \sigma_s} + \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \sigma_s} \frac{\partial \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \rho_{e1}} \right) \quad . \quad (4.2.23) \\
& \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{V}_{Tj}}{\partial \sigma_s \partial \rho_{e1}} = \mathbf{K}_T^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \rho_{e1}} \mathbf{K}_T^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \sigma_s} \mathbf{V}_{Tj} - \mathbf{K}_T^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \sigma_s} \mathbf{K}_T^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_{Tj}}{\partial \rho_{e1}} - \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \rho_{e1}} \mathbf{V}_{Tj} \right)
\end{aligned}$$

onde se utilizou a segunda das equações em (4.2.21), a segunda das equações em (4.2.22), e o fato de que a derivada segunda de \mathbf{K}_T é nula. A derivada segunda mencionada é nula porque a derivada primeira com relação a σ_s dá origem a uma matriz cujos elementos dependem, apenas, de parâmetros da imagem.

Novamente, o cálculo das derivadas referentes ao modelo de material e à matriz \mathbf{A}_{pej} é relativamente simples e, dessa maneira, não será relatado. A derivada de \mathbf{K}_{Tj} com relação a ρ_1 pode ser vista, em detalhes, em Mello (2005), e a derivada da mesma matriz em relação a σ_s pode ser obtida de maneira similar. Finalmente, no caso das restrições de corrente, as equações correspondentes são, tal qual na seção 4.1, lineares nas variáveis de otimização. Portanto, o gradiente de cada restrição é dado pelos coeficientes que multiplicam as variáveis.

4.2.4 Resultados e Discussão

Discutem-se, nessa seção, tanto resultados considerando-se malhas iguais para a estimação e para o fantoma, quanto resultados para os quais se utiliza malha mais discretizada para o fantoma. Em todos os casos, obtêm-se resultados numéricos, ou seja, para fantasmas numéricos.

Comparam-se os resultados obtidos pelo algoritmo de MOT proposto com uma distribuição baseada num arranjo convencional de eletrodos. Um arranjo particular com eletrodos relativamente grandes foi escolhido uma vez que esse tipo de eletrodo é conhecido por reduzir a sensibilidade do sistema de TIE à resistência de contato (PAULSON; PIDCOCK; MCLEOD, 2004).

Resultados Considerando-se Malhas Iguais para a Estimação e para o Fantoma

A distribuição baseada no arranjo convencional de eletrodos pode ser vista na Figura 68(b). Os dois conjuntos de eletrodos (com eletrodos otimizados e convencionais) são comparados qualitativamente (através de imagens estimadas) e quantitativamente, utilizando-se o erro normalizado:

$$e = \frac{\|\sigma_{\text{exato}} - \sigma_{\text{estimado}}\|_2}{\|\sigma_{\text{exato}}\|_2} \tag{4.2.24}$$

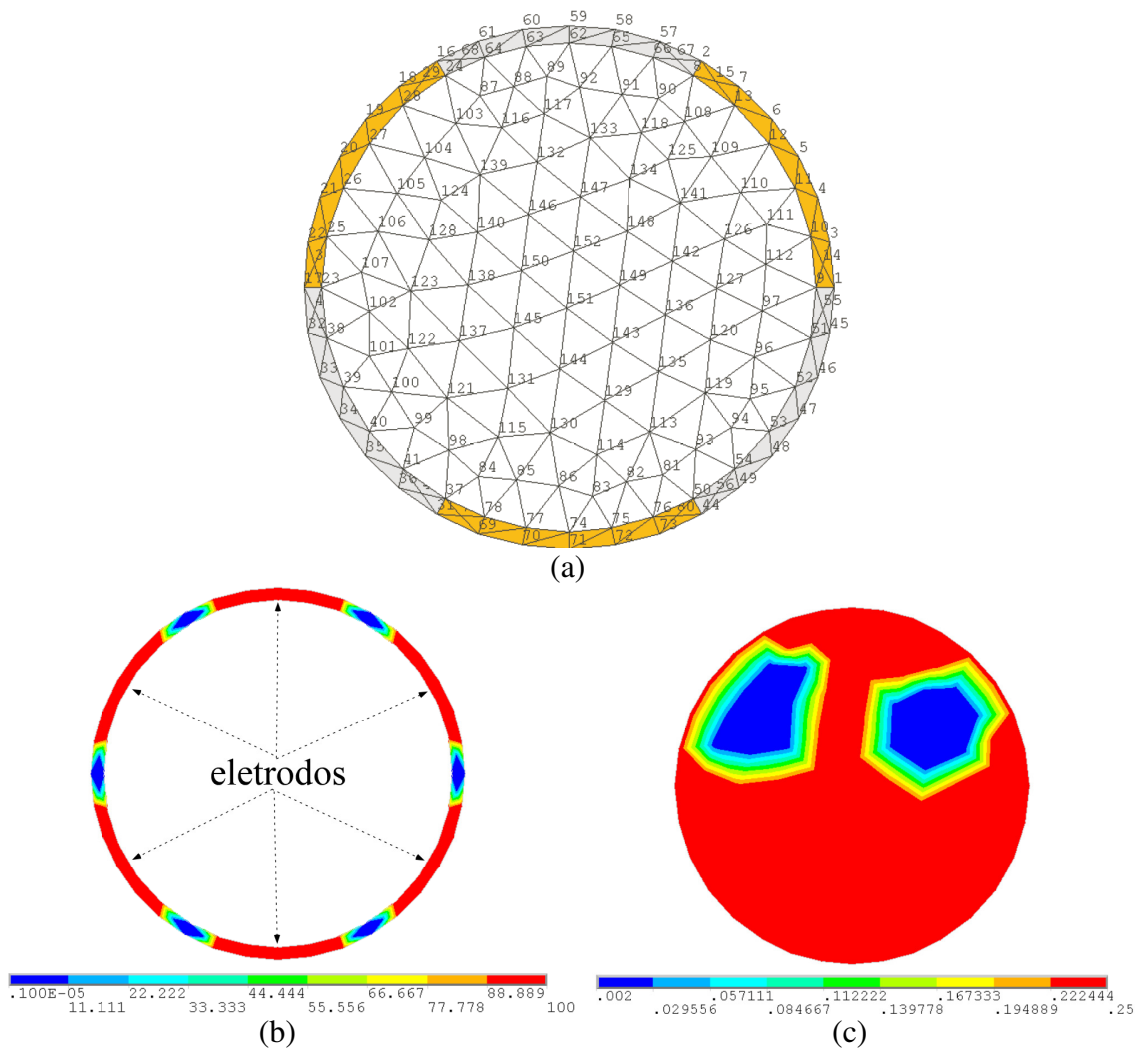


Figura 68 (a) A malha de MEF considerada nas primeiras investigações, mostrando os domínios de otimização em cores diferentes; (b) arranjo convencional de eletrodos; (c) imagem a ser estimada (fantoma). (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

Como pode ser visto na Figura 68(a), apenas seis domínios de otimização são considerados, correspondendo a seis eletrodos. Ainda, uma das seis possíveis medidas para cada padrão de corrente são excluídas do conjunto de medidas (portanto, $n_p=5$), com o intuito de se emular um caso real, e o padrão adjacente é considerado, o que significa que $n_e=6$ (num caso real, todas as medidas em eletrodos de corrente são, normalmente, desconsideradas).

A malha (com 266 elementos e 152 nós) é utilizada para obter posições e geometrias de eletrodos pelo MOT, dada a distribuição de condutividades da imagem. É também empregada para gerar as medidas de potenciais dados os eletrodos otimizados e a imagem (ou seja, é utilizada como malha do fantoma numérico), e para estimar a imagem baseando-se nas medidas e nos eletrodos. Uma vez que a malha do fantoma é a mesma malha utilizada para estimar as imagens, o modelo exato é considerado na estimação da imagem, conforme mencionado no início da seção. No entanto, como será de fato mostrado na seqüência, as características principais das respostas são mantidas no caso dos resultados finais, em que o fantoma apresenta malha mais discretizada.

A Figura 68(a) também mostra nós no contorno entre domínios de otimização (nós 1, 9, 2, 8, 16, 24, 17, 23, 31, 37, 44, 50), os quais são excluídos da otimização. A imagem utilizada para obter as medidas e otimizar o posicionamento e geometria dos eletrodos é a mesma e é mostrada na Figura 68(c) (na prática, a imagem empregada para otimizar os eletrodos pode ser uma imagem média no tempo).

As correntes elétricas são iguais a 1mA e os valores de σ_A e σ_B são iguais a $100(\text{m}\Omega)^{-1}$ e $10^{-6}(\text{m}\Omega)^{-1}$, respectivamente (sendo o valor de σ_A , novamente, ilustrativo). O critério de convergência para a estimação da imagem é: o módulo da mudança de $\|\mathbf{V}_{\text{com}}(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{V}_0\|_2$ (vide eq.(4.2.1)) deve ser menor que 10^{-11} . Finalmente, a imagem inicial utilizada na estimação da imagem corresponde a uma distribuição uniforme igual a $0,25(\text{m}\Omega)^{-1}$.

Em primeiro lugar, o problema dado pela função objetivo F_{min} é resolvido e os resultados correspondentes são discutidos. Então, são mostradas as imagens obtidas com os eletrodos otimizados e os eletrodos convencionais. Na seqüência, procedimento semelhante, relativo a F_{max} , é considerado.

Os eletrodos otimizados considerando-se F_{min} são mostrados na Figura 69. Na mesma figura, os valores singulares do arranjo convencional e os valores singulares dos eletrodos otimizados são mostrados, indicando que os valores singulares otimizados são mais próximos

uns dos outros, como esperado. As condutividades ótimas sugerem um material gradado (STUMP; SILVA; PAULINO, 2006).

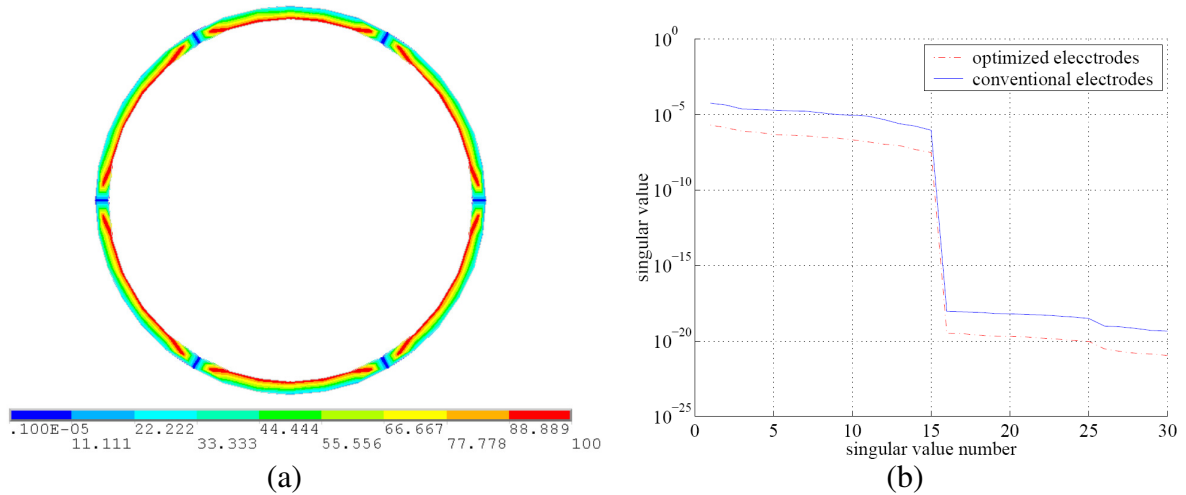


Figura 69 Minimização de F_{\min} (γ_{\min} na eq.(4.2.10), é o décimo quinto valor). (a) Eletrodos otimizados (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$); (b) valores singulares de \mathbf{J} .

Como comentado na subseção 4.2.2, λ atua sobre o mau-condicionamento da matriz regularizada $(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I})$ (vide eq.(4.2.2)). De fato, se o arranjo convencional é utilizado para obter as imagens, um processo iterativo convergente pode ser obtido para $\lambda=10^{-21}$, e uma solução útil para $\lambda=10^{-12}$, no máximo (soluções úteis são definidas como aquelas em que se distingue a perturbação (ou perturbações) considerada(s)). Porém, utilizando-se os eletrodos otimizados, uma solução convergente pode ser obtida para $\lambda=10^{-24}$, e uma solução útil para $\lambda=10^{-15}$, representando aumentos de desempenho sensíveis no tocante ao condicionamento do problema. Para soluções úteis, os valores do erro normalizado “e” para os arranjos convencional e otimizado são iguais a 1,029 e 0,744, respectivamente. As imagens correspondentes são mostradas na Figura 70. Porém, para um ruído branco de média nula e desvio padrão igual a 10^{-4} somado às medidas, não se obteve imagem útil (as imagens apresentam valores de propriedades muito próximos, gradientes reduzidos e frequências espaciais aquém do desejado para valores mais elevados de λ , e valores de condutividade mais altos que $100(\text{m}\Omega)^{-1}$ e uma imagem ruidosa para valores menores do parâmetro de regularização).

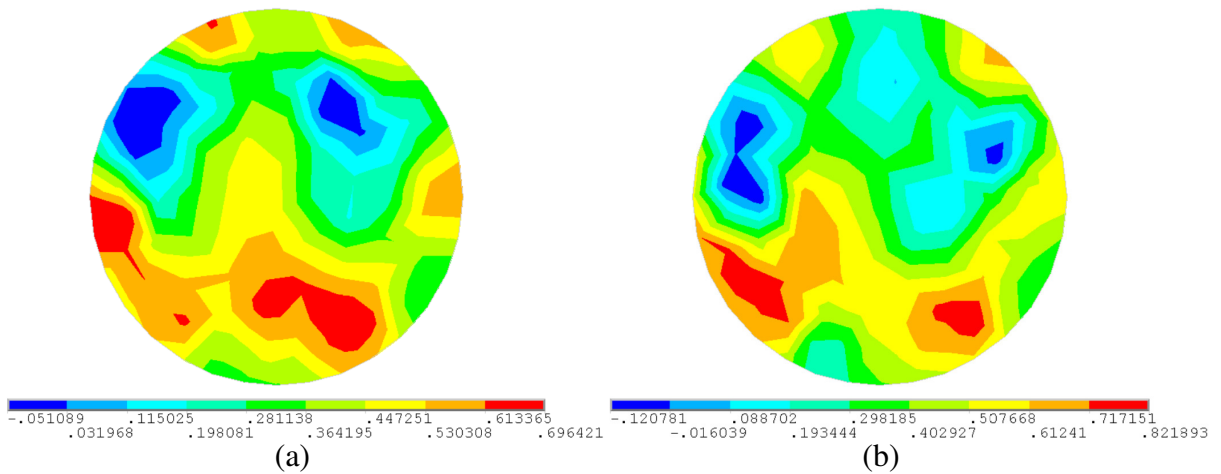


Figura 70 (a) Imagens de condutividade obtidas com os eletrodos convencionais ($\lambda=10^{-12}$). (b) Imagens de condutividade obtidas com os eletrodos otimizados (considerando-se F_{\min} e $\lambda=10^{-15}$). (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

Os eletrodos otimizados considerando-se F_{\max} e os valores singulares de ambos os arranjos de eletrodos são mostrados na Figura 71. Na mesma figura, pode-se notar que os valores singulares dos eletrodos otimizados são significativamente diferentes dos valores do arranjo convencional. Além disso, uma solução aproximadamente discreta (0-1) foi, naturalmente, obtida.

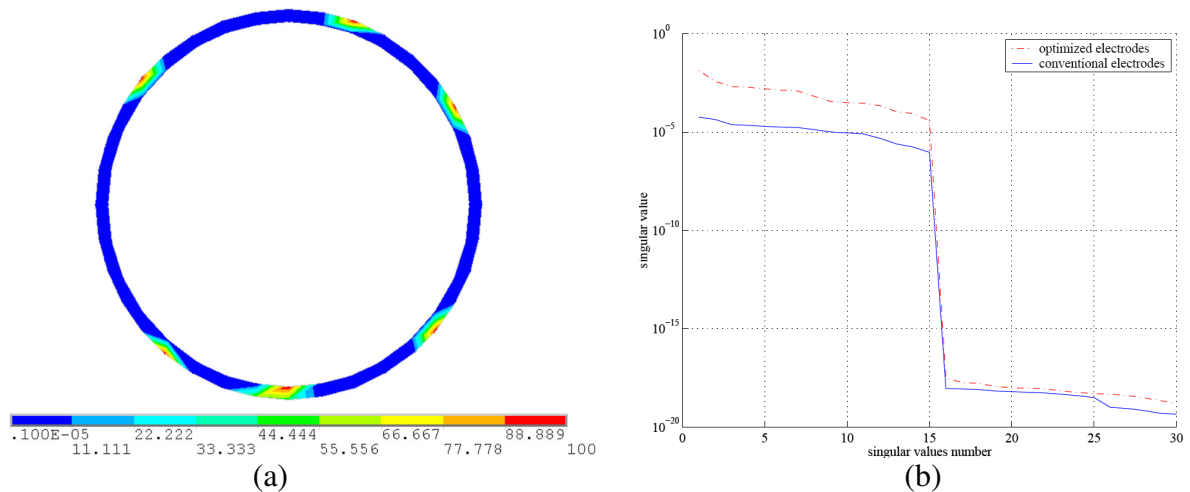


Figura 71 Maximização de F_{\max} . (a) Eletrodos otimizados (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$); (b) valores singulares de **J**.

As imagens obtidas com o arranjo convencional e o otimizado para $\lambda=10^{-10}$ são mostrados na Figura 72. O mesmo ruído descrito anteriormente foi utilizado³. O valor médio do erro normalizado “e” e o desvio padrão para os eletrodos convencionais são iguais a 3,908 e 0,502, respectivamente, considerando quatro imagens estimadas (é importante mencionar que as imagens das figuras são as melhores imagens obtidas dentro do conjunto de quatro imagens citado). Por outro lado, o valor médio de “e” e o desvio padrão correspondente aos eletrodos otimizados são iguais a 1,093 e 0,187, respectivamente.

Os menores desvios padrão mostram que o arranjo otimizado é mais robusto ao ruído. Além disso, os resultados sugerem que o aumento nos valores singulares foi suficiente para reduzir a ocorrência de artefatos de imagem causados pelos sinais de ruído. Vale notar que o condicionamento da matriz regularizada não é um problema no caso dos valores singulares obtidos e o valor de $\lambda (=10^{-10})$ considerado.

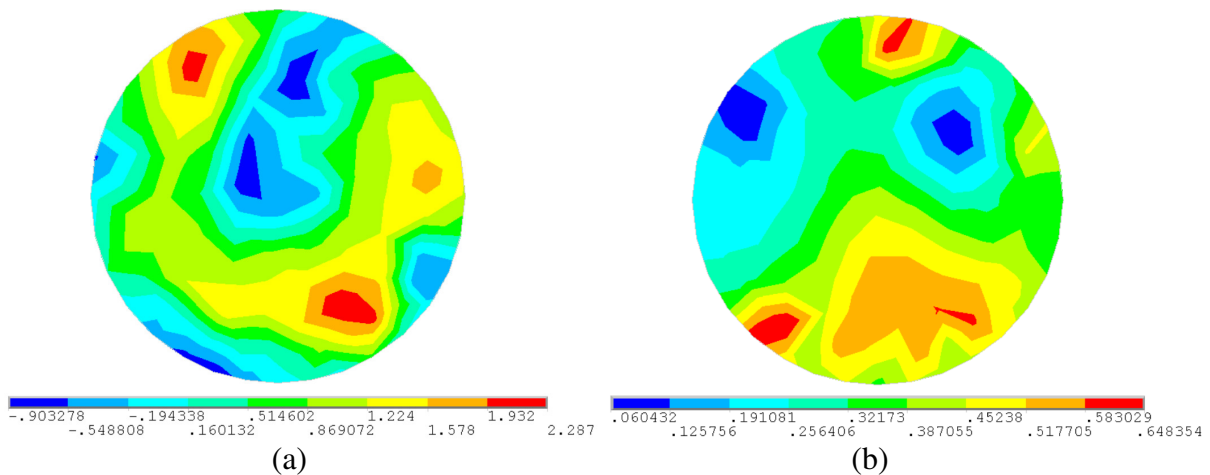


Figura 72 (a) Imagens de condutividade obtidas com os eletrodos convencionais. (b) Imagens de condutividade obtidas com os eletrodos otimizados (considerando-se F_{\max}). (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

Finalmente, é interessante mencionar que, considerando-se seis eletrodos uniformemente posicionados e com aproximadamente o mesmo tamanho, geometria e material dos eletrodos otimizados mostrados na Figura 71, o valor médio do erro normalizado e o desvio padrão obtidos na estimação da imagem são iguais a 2,394 e 0,497, respectivamente. Esse resultado mostra que a posição dos eletrodos tem, de fato, influência no desempenho do sistema.

³ É importante citar que o ruído branco dá origem a dois conjuntos de medidas diferentes, mesmo sendo obtidos para as mesmas condições de contorno e demais parâmetros do modelo. Nesse caso, para analisar as respostas, é preciso considerar mais de uma imagem, como realizado.

Resultados Considerando-se Malha do Fantoma Mais Discretizada do que a Malha de Estimação

Dado que as últimas repostas são mais importantes do ponto de vista experimental, foram realizados testes apenas com o índice F_{\max} (o que não diminui a importância dos testes anteriores com F_{\min} , uma vez que é interessante combinar os dois índices, conforme será discutido nas conclusões).

Em primeiro lugar, utiliza-se a malha com 266 elementos e 152 nós citada anteriormente na obtenção das posições, geometrias e materiais ótimos dos eletrodos pelo MOT, dada uma aproximação para a distribuição de condutividades da imagem previamente obtida (a aproximação é mostrada na Figura 73 e a imagem real na Figura 75(b)). Os resultados da otimização são mostrados na Figura 74 (eletrodos e valores singulares).

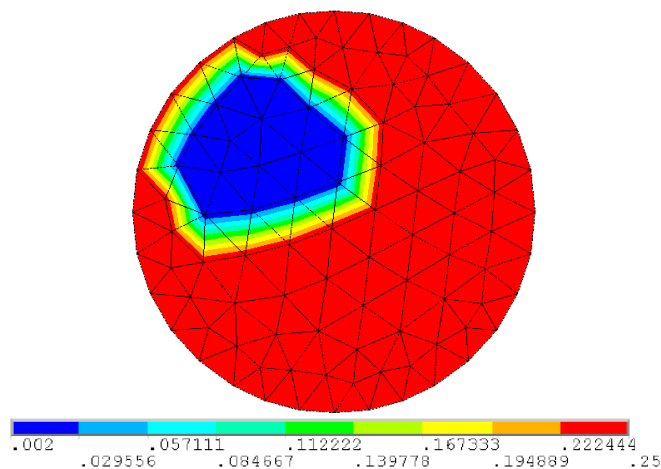


Figura 73 Aproximação para a distribuição de condutividades do fantoma na malha menos discretizada. (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$)

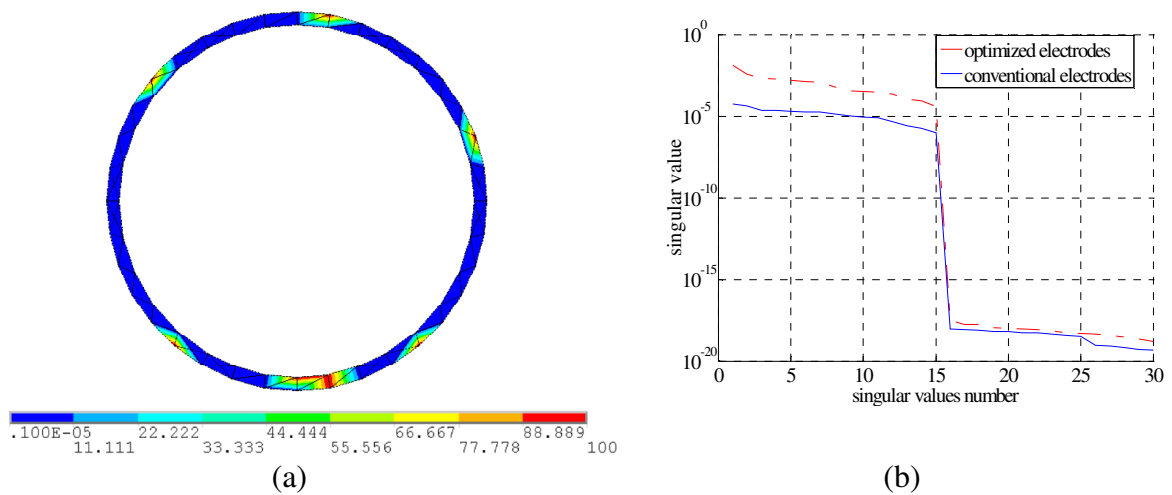


Figura 74 Maximização de F_{\max} . (a) Eletrodos otimizados (unidades: $(\Omega\text{m})^{-1}$); (b) valores singulares de \mathbf{J} .

O seguinte procedimento de avaliação das respostas ótimas, o qual emula a fabricação dos eletrodos otimizados seguida de testes experimentais num objeto real, foi realizado:

1. os resultados são interpretados numa malha mais refinada, a malha do fantoma, com 768 elementos e 427 nós. A interpretação, que emula a fabricação dos eletrodos, consiste na obtenção, manual ou não, de uma aproximação para as respostas. No presente trabalho, determina-se, por algoritmo, o nó da malha mais discretizada mais próximo a cada nó da malha menos discretizada, e atribui-se a ele o valor nodal otimizado. O resultado da interpretação é mostrado na Figura 75(a).
2. Em seguida, dada a interpretação dos eletrodos otimizados e a imagem do fantoma, a qual também está contida na malha mais discretizada (como visto na Figura 75(b)), obtêm-se as medidas de potenciais.
3. Finalmente, dadas as medidas e os eletrodos otimizados, estima-se a imagem considerando-se a primeira malha, menos discretizada. A etapa de obtenção de medidas e estimação da imagem emula testes experimentais num objeto real.

Deve-se notar que a imagem utilizada para obter as medidas (ou seja, a imagem do fantoma) e a imagem utilizada na otimização dos eletrodos não é mais a mesma. Isso é importante para mostrar a robustez da metodologia.

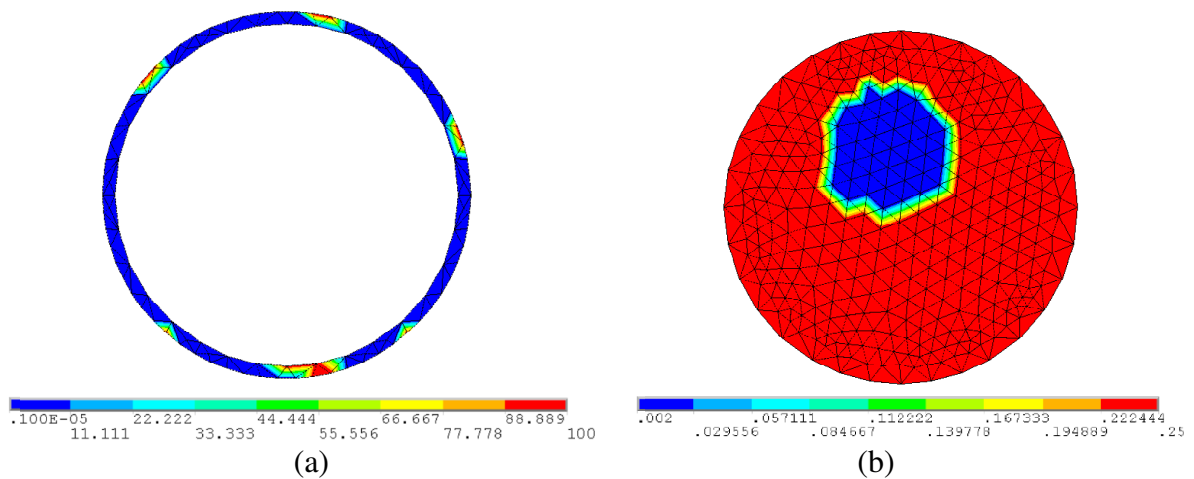


Figura 75 (a) Resultado da interpretação dos eletrodos otimizados; (b) Imagem a ser estimada. Ambas as distribuições correspondem à malha mais discretizada, a malha do fantoma. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)

Na atual subseção, não se emprega mais o erro normalizado “e” (vide eq.(4.2.24)). O motivo reside no fato de que as melhorias nas imagens estimadas, obtidas com os eletrodos otimizados, são suficientes para comprovar a superioridade desses eletrodos. Finalmente, apenas três medidas são consideradas para cada um dos seis padrões adjacentes de corrente utilizados (pelo mesmo motivo citado na subseção 4.1.4), o que significa que $n_p=3$ e $n_e=6$. Ainda, o ruído considerado, Gaussiano e de média nula, teve o desvio padrão ligeiramente modificado para $5 \cdot 10^{-5}$. Os demais dados são semelhantes aos do caso anterior (subseção anterior), como o valor das correntes elétricas, critério de convergência, etc..

Nas condições mencionadas, são obtidas as imagens mostradas na Figura 76. Nesta subseção, também são mostradas as melhores imagens para um conjunto de quatro imagens estimadas, conforme feito anteriormente. Novamente, a imagem para os eletrodos ótimos foi a mais robusta, apresentando variação de uma imagem para outra expressivamente menor que a variação apresentada pelas imagens obtidas com o arranjo de eletrodos convencionais.

Pode-se notar que os eletrodos ótimos foram responsáveis pela obtenção de uma imagem cuja perturbação pôde ser detectada, mesmo utilizando-se um número reduzido de medidas. Ainda, valores de condutividades próximos aos do fantoma foram estimados. Porém, o mesmo não pode ser afirmado no caso dos eletrodos convencionais, os quais passaram de imagens extremamente suaves a ruidosas, para uma pequena mudança do valor do parâmetro de regularização (de $5 \cdot 10^{-5}$ a 10^{-5}).

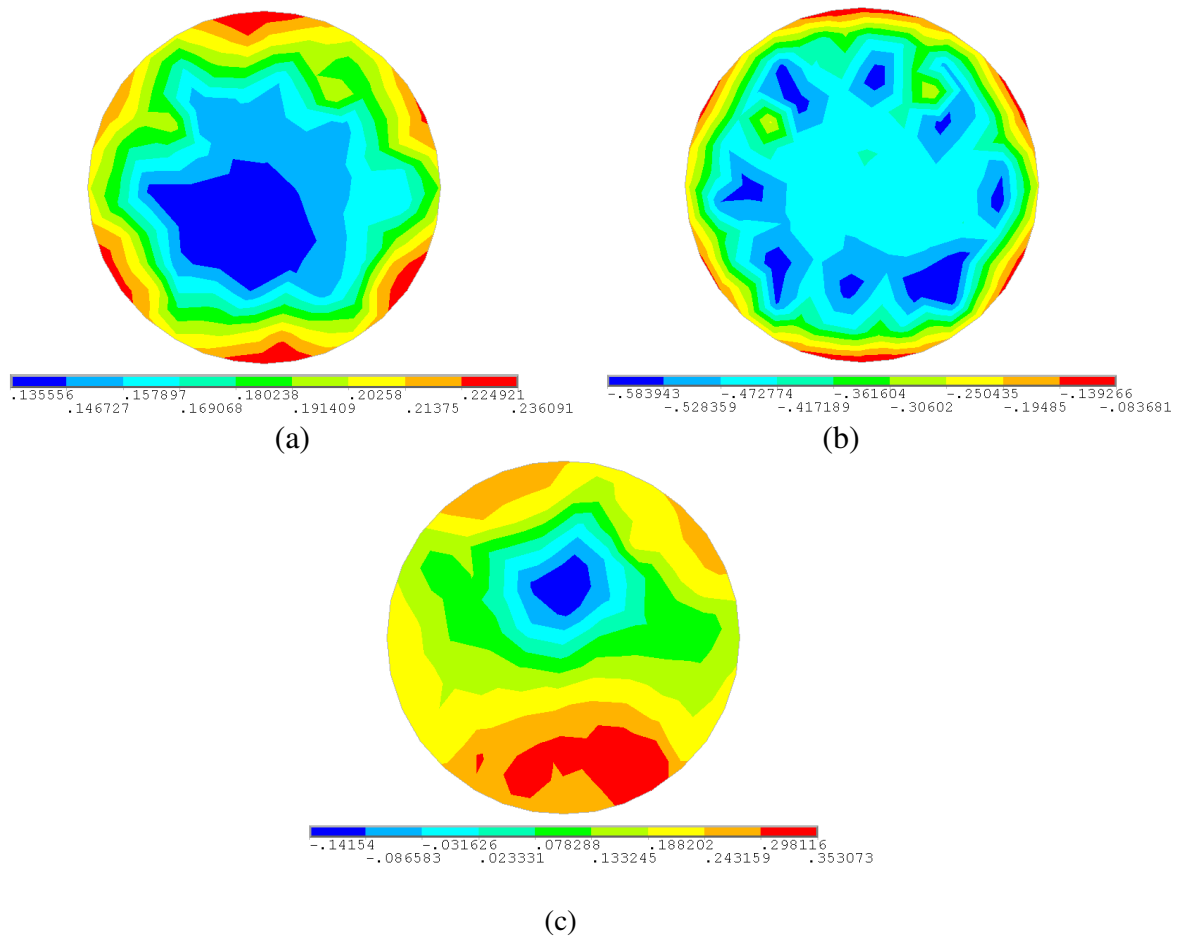


Figura 76 Imagens de condutividade obtidas com os eletrodos convencionais ((a) e (b)) e com os eletrodos otimizados ((c)). (a) $\lambda=5 \cdot 10^{-5}$; (b) $\lambda=10^{-5}$; (c) $\lambda=5 \cdot 10^{-4}$. (unidades: $(\Omega m)^{-1}$)

4.2.5 Conclusões

Na atual seção 4.2, foi proposta uma metodologia para o projeto de eletrodos aplicado à TIE. Um problema extremamente mal-condicionado e também um problema apresentando um nível de ruído elevado (POLYDORIDES; MCCANN, 2002) são abordados considerando-se a metodologia, mostrando que os eletrodos otimizados obtiveram um desempenho superior. É também mostrado que a geometria, posição e material dos eletrodos podem ter impacto significativo na estimação de imagem.

Como alternativas às funções objetivo utilizadas, pode-se propor minimizar a sensibilidade do sistema de TIE a erros de posicionamento dos eletrodos (GRAHAM; ADLER, 2007), ou a sensibilidade a erros nos valores de parâmetros de contato. Ainda, pode-se propor a combinação entre funções, como a combinação linear entre F_{\min} e F_{\max} , com o

intuito de reduzir o mau-condicionamento do problema e, ao mesmo tempo, obter uma configuração de eletrodos com sensibilidade reduzida ao ruído. É possível, também, que mais valores singulares ótimos acima de um determinado valor sejam obtidos com a combinação mencionada do que com F_{\max} apenas, o que seria interessante em termos da resolução da imagem estimada, conforme comentam Polydorides e Mccann (2002) e Dehghani et al. (2005). Por fim, é importante continuar os estudos refinando-se a malha de MEF, utilizando-se elementos 3D e empregando-se o novo modelo para a interface de contato entre os eletrodos e o corpo mencionado. Ainda, segundo sugerem resultados na literatura (GRAHAM e ADLER, 2007), deve-se considerar no projeto, imagens com mais detalhes que as utilizadas no atual trabalho, o que, provavelmente, irá gerar resultados ainda melhores (com relação aos eletrodos convencionais).

5 MÉTODO DE SUBESPAÇOS DE KRYLOV COM O CONCEITO DE RECICLAGEM

5.1 Introdução

Como mencionado, a TIE estima as distribuições de permissividades e condutividades num dado modelo de um corpo, as quais reproduzem as medidas na superfície de correntes e potenciais em eletrodos fixados ao corpo. As distribuições representam a solução de um problema inverso não-linear e mal-posto. Várias combinações de eletrodos de corrente podem ser escolhidas e, portanto, muitos valores de potenciais elétricos induzidos podem ser utilizados na estimação das distribuições, com o intuito de reduzir o espaço de soluções.

Como também já citado, no caso da monitoração da ventilação pulmonar, o interesse principal do atual trabalho, a obtenção de valores de condutividade absolutos é relevante, uma vez que esses valores absolutos permitem distinguir algumas patologias pulmonares (AMATO, 2001). Imagens 3D também têm mostrado sua relevância na área médica, sendo justificada, experimentalmente, a sua utilização (HALTER; HARTOV; PAULSEN, 2007).

Vários algoritmos têm sido propostos para resolver o problema inverso e não-linear, estimando os valores absolutos de condutividade (VAUHKONEN et al., 1999; MOLINARI et al., 2001; HEIKKINEN et al., 2002; VILHUNEN et al., 2002; VAUHKONEN et al., 2004; LIMA et al., 2007; MELLO et al., 2008). Eles são normalmente baseados em métodos iterativos como o Método de Gauss-Newton (VAUHKONEN et al., 1999; HEIKKINEN et al., 2002; VILHUNEN et al., 2002), como já discutido, o MOT (LIMA et al., 2007; MELLO et al., 2008), etc. Além disso, o MEF é freqüentemente empregado para modelar o corpo (VAUHKONEN et al., 1999; MOLINARI et al., 2001; HEIKKINEN et al., 2002; VILHUNEN et al., 2002; VAUHKONEN et al., 2004; LIMA et al., 2007; MELLO et al., 2008), o que significa que sistemas lineares devem ser resolvidos. Uma vez que são consideradas várias combinações de eletrodos de corrente, os sistemas lineares têm diferentes vetores referentes ao “lado direito” da equação matricial, ou, simplesmente, diferentes “lados direitos”. Métodos iterativos são normalmente utilizados ao invés de métodos diretos devido à maior rapidez e à quantidade de memória necessária relativamente baixa, mesmo para vários

“lados direitos” (vide Van Der Vorst (2003)). Porém, métodos diretos também são reportados (VAN DEN DOEL; ASCHER, 2007).

Uma das metas principais da TIE é alcançar resolução espacial alta a baixos tempos computacionais. Porém, quando se aumenta a resolução, o que é feito, dentre outras maneiras, refinando-se a malha de elementos finitos, o tempo computacional também aumenta, especialmente no caso de malhas 3D. Então, há uma relação de compromisso entre o tamanho dos elementos e o tempo gasto para se obter uma imagem de TIE, o qual pode, de fato, ser proibitivo num caso 3D prático (o compromisso vem sendo estudado na área de TIE, como em Goharian, Jegatheesan e Moran (2007)). Assim, algoritmos de TIE costumam apresentar resoluções relativamente baixas devido a malhas pouco refinadas, conforme mencionam Graham e Adler (2007), por exemplo (apesar disso, a resolução temporal pode ser bastante elevada, conforme ponderam Adler, Dai e Lionheart (2007)).

A importância da resolução reside não somente na possibilidade de identificação de estruturas complexas, como estudado por Sabatier e Sebu (2007), mas também na modelagem numérica precisa em termos de discretização do modelo. Dehghani e Soleimani (2007) tratam dos erros de modelagem numérica relacionada à TIE 3D, mostrando que, embora os dados estimados na superfície do modelo possam apresentar erros dentro de um nível aceitável, o campo interno, o qual é utilizado na estimação da imagem (no cálculo do gradiente da função objetivo, no caso do MOT), pode conter erros devido à má discretização, o que resulta na obtenção de artefatos na imagem.

Nota-se, dado o exposto acima, que existe a necessidade de redução do tempo computacional em TIE. Baseando-se nessa necessidade, emprega-se, neste trabalho, uma técnica nova (WANG; STURLER; PAULINO, 2007), baseada em métodos iterativos de solução de sistemas lineares, para reduzir tal tempo e, portanto, para estudar a questão da solução de compromisso mencionada. A técnica é denominada reciclagem e é aplicada para diminuir o tempo e número de iterações de cada solução de MEF, o “gargalo” da estimação das condutividades. O MOT é empregado para resolver o problema inverso, dadas as suas vantagens com relação aos métodos mencionados na literatura, conforme é citado no capítulo 2. Porém, como será explicado, a técnica não pressupõe um método específico de estimação. Como nota, Van den Doel e Ascher (2007) discutem, em seu trabalho teórico, problemas de larga escala de estimação de parâmetros distribuídos, referentes a uma equação diferencial parcial elíptica, concluindo que os métodos iterativos são mais úteis na solução do problema inverso do que na solução do problema direto. Isso sugere a utilização da técnica da

reciclagem na solução dos sistemas lineares referentes à correção iterativa da imagem por métodos baseados no método de Newton-Raphson ou Gauss-Newton. A correção iterativa da imagem – mostrando os sistemas mencionados – é exemplificada na seção 4.2, na eq.(4.2.2).

A reciclagem utiliza o fato de que as mudanças nas matrizes dos sistemas lineares durante o processo de otimização iterativo são pequenas, para acelerar a convergência da solução de cada sistema. Além disso, a técnica pode ser aplicada aos sistemas lineares utilizados no cálculo do gradiente da função objetivo durante uma iteração.

Como explicitado, métodos iterativos simples ou métodos diretos são normalmente utilizados. Nessas condições, a reciclagem torna possível obter resoluções ainda não alcançadas no caso 3D, o que significa que o trabalho traz contribuições científicas importantes na área de TIE.

Com o intuito de fundamentar a escolha de um método iterativo ao invés de um método direto, e de explicar o conceito de reciclagem, um conceito novo na literatura e tema central deste capítulo, será exposta a teoria relacionada à solução de sistemas lineares, partindo da explicação dos métodos de solução diretos e iterativos, como será visto na seção seguinte. É interessante citar a teoria de métodos iterativos para explicar a reciclagem, pois a reciclagem está embasada em tal teoria.

5.2 Solução de Sistemas Lineares: Métodos Iterativos e Diretos

Nesta seção, discute-se a solução de sistemas lineares através dos dois tipos de métodos existentes: os métodos diretos e os métodos iterativos, estes últimos equivalentes aos Métodos de Projeção citados em seguida, onde se enquadram os Métodos de Subespaços de Krylov. Procura-se mencionar os “prós” e “contras” dos dois tipos de métodos e, baseado nisso, procura-se justificar o uso de um método iterativo no presente trabalho. Deve-se ressaltar que os Métodos de Projeção não devem ser confundidos com a técnica de Projeção citada no APÊNDICE C, sendo tópicos diferentes (apesar de ambos estarem relacionados a projeções).

Os motivos que levam a se optar por métodos iterativos são economia de espaço em computador e, em determinadas situações, tempo computacional. Por outro lado, métodos diretos, como eliminação de Gauss, levam à solução exata na ausência de erros de

arredondamento. Porém, mesmo com a presença desses erros, podem-se aplicar técnicas de pivotamento que reduzem a sensibilidade a tais erros.

Em contrapartida, os métodos iterativos requerem conhecimento prévio do problema e dos próprios métodos iterativos disponíveis, os quais se aplicam a determinados tipos de problemas, como será explicado nas próximas seções. Os métodos diretos, por outro lado, apresentam a desvantagem de se tornarem relativamente custosos no tocante ao tempo e ao armazenamento computacionais, com o aumento do número de incógnitas.

Levando-se todos estes argumentos em consideração e também os requisitos necessários para solução de problemas modernos de Engenharia, pode-se dizer que é mais indicado o uso de métodos iterativos. Para substanciar esta última afirmação no tocante ao número de cálculos realizado (e, conseqüentemente, no tocante ao tempo utilizado), será considerado o exemplo mencionado em Van der Vorst (2003).

Em tal exemplo, considera-se um sistema esparso linear, n por n , relacionado à discretização, não necessariamente regular (ou seja, correspondendo a uma malha não necessariamente regular), de uma equação diferencial parcial de segunda ordem referente a um problema 3D. Como exemplo, pode-se citar um sistema proveniente da formulação de MEF.

Considera-se também o método direto conhecido como eliminação de Gauss, que consiste de uma fase de fatoração da matriz do sistema linear, seguida de uma fase de solução dividida em dois passos. A fase de fatoração é utilizada para vários vetores de carregamento (ou, generalizando, “lados direitos”). Como o enfoque do atual trabalho está na solução de problemas com vários “lados direitos”, o custo computacional da fatoração não é levado em conta.

Após a fase de fatoração, a solução do sistema propriamente dita é realizada. Tal solução corresponde a um número de operações de ponto flutuante, ou flops, que varia com (ou é proporcional a) $n^{5/3}$.

Para comparar com os métodos iterativos ou de Projeção, deve-se ser um pouco mais específico. Considera-se, para tanto, uma matriz simétrica e positiva-definida correspondente ao sistema linear em questão. Tal caso corresponde às matrizes de elementos finitos que definem a relação entre potenciais e correntes elétricas nesta tese. Pode-se mostrar que o número de flops é proporcional a $n^{4/3}$, aproximando-se de $n^{4/3}$ conforme cresce o n .

Isso quer dizer que, para 10^6 incógnitas, são realizadas, aproximadamente, 10^{10} e 10^8 flops para métodos diretos e iterativos, respectivamente. É interessante notar que, no caso de

problemas 2D, métodos diretos e iterativos apresentam números de flops semelhantes. Porém, ainda assim é mais vantajoso considerar métodos iterativos, uma vez que a memória utilizada costuma, tipicamente, ser menor por mais de uma ordem de magnitude, tanto em casos 2D quanto 3D.

Mostra-se, assim, a importância da utilização dos métodos iterativos, ou de Projeção, e a vantagem com respeito aos diretos. Na sequência, os métodos iterativos são detalhados.

Antes disso, porém, é interessante citar as vantagens dos métodos iterativos mencionadas pelo próprio Gauss (provavelmente o primeiro a propor tais técnicas), especificamente falando do método de Gauss-Seidel, como curiosidade. Deve-se, inicialmente, notar que se está referindo à terceira década de 1800, aproximadamente, e que, dessa maneira, cálculos eram realizados no papel. A primeira vantagem mencionada é que é possível calcular aproximações com precisão arbitrária, o que significa que apenas algumas iterações podem ser utilizadas. Isso torna o método relativamente rápido. Ainda, o resíduo tem de ser calculado a cada iteração como parte do processo iterativo, dando ao usuário a oportunidade de observar a qualidade da aproximação. Finalmente, erros não intencionais obtidos numa iteração qualquer pelo usuário são corrigidos nas próximas iterações.

5.3 Métodos de Projeção

Métodos de Projeção, no caso especial do conjunto dos números reais, extraem aproximações num subespaço de \mathbb{R}^n para a solução de sistemas lineares

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad (5.3.1)$$

com \mathbf{A} uma matriz pertencente a $\mathbb{R}^{n \times n}$ e \mathbf{X} e \mathbf{B} vetores de \mathbb{R}^n . O nome projeção se dá pelo fato de que projeções ortogonais e oblíquas são realizadas pelos métodos, ou seja, eles podem ser interpretados em termos de projeções de vetores. Tal fato não será explorado no texto, mas pode ser visto, em detalhes, em Saad (2003), e a teoria específica sobre projeções pode ser vista em Giacaglia (1985). Tal interpretação auxilia na obtenção de resultados teóricos importantes a respeito dos métodos acerca da convergência, como pode ser visto também em Saad (2003).

A idéia principal dos Métodos de Projeção é a seguinte: para um subespaço $\mathbf{X}_0 + \Theta$ onde se procura a solução, de dimensão m , m restrições representando condições de ortogonalidade são impostas para que se obtenha a aproximação para a solução, sendo \mathbf{X}_0 alguma sugestão inicial para ela. Mais especificamente, o resíduo de aproximação $\mathbf{B} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}}$, onde $\tilde{\mathbf{X}}$ é o vetor aproximação, é restringido para ser ortogonal à base de um outro subespaço Ξ de dimensão m , ou seja, a m vetores linearmente independentes (LI) ou, conforme a terminologia de Saad (2003), o vetor aproximação é restringido para ser ortogonal a Ξ . Tais condições de ortogonalidade são denominadas condições de Petrov-Galerkin (SAAD, 2003).

Dado o parágrafo anterior, vê-se que se está interessado no seguinte problema:

$$\text{Achar } \tilde{\mathbf{X}} \in \mathbf{X}_0 + \Theta \text{ tal que } \mathbf{B} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}} \perp \Xi \quad (5.3.2)$$

ou, para $\tilde{\mathbf{X}}$ dado (convenientemente) por $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_0 + \Delta$ e \mathbf{R}_0 definido como $\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{X}_0$, no seguinte problema modificado:

$$\text{Achar } \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_0 + \Delta, \Delta \in \Theta \text{ tal que } (\mathbf{R}_0 - \mathbf{A}\Delta, \mathbf{W}) = 0, \forall \mathbf{W} \in \Xi \quad (5.3.3)$$

onde (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) é o produto interno euclidiano entre os vetores \mathbf{Y} e \mathbf{Z} , como definido em Saad (2003), e \mathbf{R}_0 é denominado resíduo inicial.

A maioria dos Métodos de Projeção utiliza uma sucessão das soluções acima para encontrar uma solução para o problema inicial, atualizando os subespaços Θ e Ξ e a sugestão inicial, dada então pela aproximação mais recente. *Ocorre que, para dada matriz \mathbf{A} e para dados subespaços Θ e Ξ , interessantes propriedades de convergência podem ser alcançados, o que justifica o exposto acima.*

Os Métodos de Projeção são divididos em Métodos de Projeção ortogonal e oblíqua. No primeiro caso, Θ é o mesmo que Ξ e no segundo, os subespaços são diferentes, podendo ou não apresentar relações entre si. A estrutura de tais Métodos de Projeção pode ser dada como se segue, o que irá facilitar o entendimento mostrado nas próximas seções.

Dada uma matriz \mathbf{V}_S de vetores-coluna LI formando uma base para Θ , e uma matriz \mathbf{W}_S cujos vetores-coluna formam uma base para Ξ , pode-se, dado o exposto, escrever:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{V}_S \mathbf{Y} \quad (5.3.4)$$

onde se utilizou que Δ é igual a $\mathbf{V}_S \mathbf{Y}$, uma vez que pertence a Θ (assim, pode ser escrito como combinação linear dos vetores LI de sua base), e \mathbf{Y} é o vetor incógnita de um passo do processo iterativo, ou de um passo de projeção. Considerando-se a condição de ortogonalidade, ou seja, a de que o resíduo deve ser ortogonal a qualquer vetor de Ξ , essa se traduz na seguinte equação

$$\mathbf{W}_S^T \mathbf{A} \mathbf{V}_S \mathbf{Y} = \mathbf{W}_S^T \mathbf{R}_0 \quad (5.3.5)$$

onde também se utilizou que Δ é igual a $\mathbf{V}_S \mathbf{Y}$. Assim:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{V}_S (\mathbf{W}_S^T \mathbf{A} \mathbf{V}_S)^{-1} \mathbf{W}_S^T \mathbf{R}_0 \quad (5.3.6)$$

ou seja, assume-se que $\mathbf{W}_S^T \mathbf{A} \mathbf{V}_S$, matriz $m \times m$, é não-singular, o que pode não ser verdade mesmo quando \mathbf{A} é não-singular (SAAD, 2003).

A estrutura é, então, a seguinte: selecionar os subespaços Θ e Ξ , achar bases para os mesmos, calcular o resíduo, resolver o problema dado pela eq.(5.3.5) e, finalmente, atualizar a aproximação através da eq.(5.3.6), tudo isso para cada iteração.

Ocorre que a solução do sistema linear na eq.(5.3.5) é relativamente simples. No caso do algoritmo de “Steepest Descent”, por exemplo, a matriz a ser invertida na eq.(5.3.5) tem dimensão unitária, ou seja, é um escalar. Já no caso dos Métodos de Subespaços de Krylov, a estrutura da matriz \mathbf{A} dá origem a casos distintos, como visto em Saad (2003). Para matrizes simétricas, têm-se os algoritmos “Generalized Minimal Residual” (GMRES) ou o “Minimal Residual” (MINRES), em que o problema referente à eq.(5.3.5) é dado por um problema de minimização de norma euclidiana (como se define em Saad (2003)) e, geralmente, a solução é obtida através da técnica de rotações de Given (SAAD, 2003; WANG; STURLER; PAULINO, 2007). Ainda, no caso da matriz \mathbf{A} ser simétrica e positiva-definida, pode-se utilizar o método de Gradientes Conjugados (“Conjugate Gradient”, (CG)) e, nesse caso, a solução do sistema na eq.(5.3.5) é realizada implicitamente. Em qualquer dos casos mencionados, a solução é dada por uma série de multiplicações matriciais e vetoriais, e por atualizações de valores vetoriais.

Em seguida, Métodos de Projeção Unidimensionais, os quais se enquadram nessa estrutura, são mostrados, incluindo suas peculiaridades e vantagens. Então, os Métodos de Subespaços de Krylov são discutidos na seqüência. Tais Métodos, como também os Unidimensionais, formam **um sub-grupo dos Métodos de Projeção**, como já mencionado. Portanto, também se enquadram na estrutura citada.

5.3.1 Métodos de Projeção Unidimensionais

Esses métodos são particularizações segundo as quais $m=1$, ou seja, os subespaços tratados anteriormente são de dimensão 1 em qualquer iteração para solução do sistema na eq.(5.3.1). Isto significa que $\mathbf{W}_s^T \mathbf{A} \mathbf{V}_s$ é escalar, o que torna a implementação do método, baseada na inversão desta quantidade, extremamente simples.

Considerando-se ambos \mathbf{W}_s e \mathbf{V}_s iguais ao resíduo da iteração anterior, tem-se um Método de Projeção ortogonal para o caso em que $m=1$. Além disto, considerando-se uma matriz \mathbf{A} simétrica e positiva-definida, pode-se provar que o algoritmo baseado em tal método converge para qualquer sugestão inicial. Tal algoritmo é chamado de algoritmo de “Steepest Descent”. Cada passo do processo iterativo minimiza a \mathbf{A} -norma do erro da aproximação, conforme provado em Saad (2003), sendo a aproximação obtida no subespaço $\mathbf{X}_0 + \Theta$ e a \mathbf{A} -norma (de um vetor \mathbf{Y} qualquer) dada por:

$$\|\mathbf{Y}\|_{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}\mathbf{Y}, \mathbf{Y})^{\frac{1}{2}}. \quad (5.3.7)$$

Como a aproximação é da forma $\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_i \left((\mathbf{A}\mathbf{R}_i)^T \mathbf{R}_i \right)^{-1} \mathbf{R}_i$ (vide eq.(5.3.6)), em que i indica a iteração, e \mathbf{R}_i é o negativo do gradiente da função \mathbf{A} -norma, o qual fornece (localmente) a direção de maior taxa de redução da função, justifica-se o nome do algoritmo.

Ainda no caso de \mathbf{V}_s ser igual ao resíduo da iteração anterior e utilizando-se \mathbf{W}_s igual à matriz \mathbf{A} (na eq.(5.3.1)) multiplicada pelo mesmo resíduo, mas relaxando-se a hipótese de simetria, ou seja, considerando a matriz \mathbf{A} apenas positiva-definida, tem-se o método (da família dos Métodos de Projeção oblíqua) mais geral “Minimal Residual Iteration”. Prova-se a sua convergência em Saad (2003).

Finalmente, para matrizes não positivas-definidas e não-simétricas, ou seja, para solução de problemas ainda mais gerais, pode-se utilizar o método “Residual Norm Steepest Descent”, o qual converge no caso de \mathbf{A} ser não-singular. Provas de convergência e detalhes sobre os métodos estão presentes em Saad (2003).

Deve-se ressaltar que não há conhecimento, por parte do autor, de um resultado teórico que prove para qualquer caso, que um dos métodos citados acima é mais vantajoso do que o outro, no sentido de ser mais rápido. Assim, não se comenta se é mais vantajoso utilizar o método de “Steepest Descent” no caso de matrizes \mathbf{A} positivas-definidas que o método “Minimal Residual Iteration”, por exemplo, apesar de ter sido provada a convergência de ambos os métodos para o caso da matriz mencionada.

Sendo um pouco mais específico para o caso dos métodos “Steepest Descent” e “Minimal Residual Iteration”, o que é feito baseando-se na análise de ambos descrita em Saad (2003), nota-se que uma operação de multiplicação de matriz por vetor a mais é realizada no método “Minimal Residual Iteration”, por iteração. Porém, as fórmulas referentes à convergência dos métodos são dadas em termos do erro de aproximação no caso do “Steepest Descent”, e em termos do resíduo da iteração corrente no caso do “Minimal Residual Iteration”. As fórmulas são dadas por

$$\|\mathbf{X}_* - \mathbf{X}_{i+1}\|_{\mathbf{A}} = \frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{\theta_{\max} + \theta_{\min}} \|\mathbf{X}_* - \mathbf{X}_i\|_{\mathbf{A}} \quad \text{para o "Steepest Descent"} \quad (5.3.8)$$

e

$$\|\mathbf{R}_{i+1}\|_2 = \left(1 - \frac{\left(\frac{\chi_{\min}}{2} \right)^2}{(\|\mathbf{A}\|_2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{R}_i\|_2 \quad \text{para o "Minimal Residual Iteration"}, \quad (5.3.9)$$

onde θ_{\max} e θ_{\min} são autovalores máximo e mínimo de \mathbf{A} , respectivamente, \mathbf{X}_* é a solução correta do sistema e χ_{\min} é autovalor mínimo de $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$. Nessas condições, têm-se duas maneiras diferentes (referentes aos dois métodos) de se determinar o número aproximado de iterações necessário para se obter uma solução satisfatória e, conseqüentemente, o tempo utilizado (o número de operações por iteração, como sugerido, está disponível para

comparação). Assim, torna-se impossível comparar os métodos correspondentes de forma precisa, quanto ao tempo de computação.

Portanto, com as fórmulas de convergência como dadas, as quais fornecem uma idéia do número de iterações empregado na obtenção da solução do problema, dispõe-se apenas de uma maneira um tanto quanto inconsistente de se comparar e selecionar o método iterativo mais adequado para um problema particular. Tal fato também ocorre no caso dos Métodos de Subespaços de Krylov.

5.4 Métodos de Subespaços de Krylov

Os Métodos de Projeção em Subespaços de Krylov ou, simplesmente, Métodos de Subespaços de Krylov, são Métodos de Projeção tanto ortogonais quanto oblíquos, em que Θ correspondente à i -ésima iteração, Θ_i , é dado por $m=i$ vetores e é igual a K_m

$$K_m = \text{span}\{\mathbf{R}_0, \mathbf{A}\mathbf{R}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{R}_0, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{R}_0\} \quad (5.4.1)$$

o chamado subespaço de Krylov dado para \mathbf{A} e \mathbf{R}_0 , sendo o “span” dos vetores o subespaço dado por suas combinações lineares, com coeficientes reais neste caso específico. Como comentário, o “span”, ou, equivalentemente, “span” linear, é um conceito que pode ser aplicado, diretamente, a espaços vetoriais complexos, como visto em Saad (2003).

O fato de se utilizar K_m implica que o m -ésimo resultado da projeção, \mathbf{X}_m , é dado pelo vetor sugestão inicial \mathbf{X}_0 , adicionado a um vetor do tipo $\mathbf{p}_{m-1}(\mathbf{A})\mathbf{R}_0$, sendo \mathbf{p}_{m-1} um polinômio de grau $m-1$. Assim, tem-se que

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \approx \mathbf{X}_m = \mathbf{X}_0 + \mathbf{p}_{m-1}(\mathbf{A})\mathbf{B} - \mathbf{p}_{m-1}(\mathbf{A})\mathbf{A}\mathbf{X}_0 = (\mathbf{1} - \mathbf{p}_{m-1}(\mathbf{A})\mathbf{A})\mathbf{X}_0 + \mathbf{p}_{m-1}(\mathbf{A})\mathbf{B}. \quad (5.4.2)$$

No caso em que $\mathbf{X}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \approx \mathbf{p}_{m-1}(\mathbf{A})\mathbf{B}$ o que, na situação em que \mathbf{A} é suficientemente bem-condicionada, significa que $\mathbf{A}^{-1} \approx \mathbf{p}_{m-1}(\mathbf{A})$. Por outro lado, partindo dessa última igualdade aproximada, e substituindo-a no primeiro termo do “lado direito” ($(\mathbf{1} - \mathbf{p}_{m-1}(\mathbf{A})\mathbf{A})\mathbf{X}_0$)

na eq.(5.4.2), obtém-se que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \approx \mathbf{p}_{m-1}(\mathbf{A})\mathbf{B}$ para qualquer \mathbf{X}_0 . O resultado contido nessa última frase indica que \mathbf{p}_{m-1} é, de fato, uma aproximação para a inversa \mathbf{A}^{-1} .

A escolha de Ξ , ou L_m como se faz no caso dos Métodos de Subespaços de Krylov (onde, novamente, m é o número de vetores que formam tal subespaço e também o número da iteração corrente), juntamente ao tipo de matriz \mathbf{A} em questão, que pode levar a simplificações e a resultados teóricos interessantes sobre a aproximação (\mathbf{X}_m) obtida, são os principais fatores que diferem os métodos e algoritmos. Porém, diferentes implementações também levam à algoritmos diferentes, apesar de alguns deles serem, até mesmo, matematicamente semelhantes (SAAD, 2003). Deve-se ressaltar, como mostrado por Saad (2003), que nem sempre a dimensão de L_m (ou K_m) é igual a m .

Como exemplo dos diferentes métodos e fatores que os diferem, há, para um mesmo L_m , o método GMRES e o método MINRES, este último um método menos custoso computacionalmente e utilizado no caso em que \mathbf{A} é simétrica. Como outro exemplo, há o método “Full Orthogonalization Method” (FOM) e o “restarted FOM” (FOM(m)), uma versão do primeiro em que detalhes de implementação são alterados com o intuito de reduzir o custo computacional.

Convém lembrar que Métodos de Subespaços de Krylov também se encaixam na estrutura para solução dos sistemas lineares citada anteriormente (vide seção 5.3), uma vez que são classificados como Métodos de Projeção. Assim, são escolhidas bases para K_m e L_m (depois de selecionado o subespaço L_m) e calculado o termo $(\mathbf{W}_S^T \mathbf{A} \mathbf{V}_S)^{-1}$, empregado no cálculo de \mathbf{X}_m pela eq.(5.3.6) adaptada ao processo iterativo (isto é, empregando-se os índices m).

Dessa maneira, as bases de K_m e L_m devem ser tais que sua extensão ao longo do processo iterativo para abranger mais vetores deve (preferencialmente) ser simples. A necessidade da extensão da base ocorre porque o número de vetores que forma os espaços, diferentemente do caso dos Métodos de Projeção Unidimensionais, aumenta ao longo do processo. Isso implica, no caso do aumento simultâneo da dimensão do espaço (o que não precisa, como explicitado na atual seção, necessariamente acontecer), num aumento do número de vetores da base necessários.

Os métodos e algoritmos correspondentes mais comuns da classe dos Métodos de Subespaços de Krylov serão descritos (em mais detalhes) em seguida.

5.4.1 Exemplos de Métodos de Subespaços de Krylov e suas Características Principais

A diferenciação entre métodos segue a terminologia de Van der Vorst (2003), a não ser em casos especiais, devidamente indicados.

No caso em que $L_m=K_m$, tem-se, para uma matriz genérica, o método FOM citado anteriormente. Como variações desse, têm-se os métodos seguintes: 1) FOM(m), segundo o qual o algoritmo para obtenção de \mathbf{X}_m é reiniciado após m iterações com $\mathbf{X}_0=\mathbf{X}_m$; 2) “Incomplete orthogonalization Method” (IOM), para o qual a base de K_m (e, conseqüentemente, de L_m) é obtida truncando-se a recorrência utilizada para sua obtenção; e 3) “Direct IOM” (DIOM), em que fórmulas simplificadas são obtidas explorando-se estruturas especiais de matrizes que surgem do processo de obtenção da base no método IOM, segundo é visto, em detalhes, em Saad (2003). A idéia dos três últimos métodos é reduzir o custo e a memória computacional empregados pelo FOM.

Se \mathbf{A} é, também, simétrica, tem-se o algoritmo de Lanczos (segundo a terminologia de Van der Vorst (2003), esse é um caso especial em que um nome próprio denomina um método). O método correspondente é mais rápido e menos custoso computacionalmente que o FOM. Quando \mathbf{A} é, **também**, positiva-definida, tem-se, pelo menos teoricamente, o algoritmo de CG.

Saad (2003) mostra que, partindo-se de Lanczos, podem-se obter, ainda, outros algoritmos. Também mostra que o conceito de \mathbf{A} -ortogonalidade (com vetores \mathbf{A} -ortogonais ou conjugados) deve ser empregado para obtenção formal do CG. A afirmativa contida na última frase surge de resultados teóricos matemáticos, apresentados pelo mesmo autor de maneira formal através de uma proposição (SAAD, 2003).

No caso em que $L_m=\mathbf{A}K_m$, obtêm-se os métodos de minimização da norma euclidiana do resíduo \mathbf{R}_m , o que pode ser provado (prova-se que o fato de o resíduo ser ortogonal a $\mathbf{A}K_m$ é equivalente a ser a norma euclidiana do mesmo mínima). Tais métodos derivam do método genérico (ou seja, para \mathbf{A} genérica) GMRES. Da mesma forma que o FOM, têm variantes: o “restarted GMRES”, semelhante ao FOM(m) (semelhante, neste contexto, significa que as mesmas idéias de redução de custo são utilizadas nos dois métodos), o “quasi-GMRES” (QGMRES), semelhante ao IOM, e o “Direct QGMRES” (DQGMRES), semelhante ao DIOM.

Quando \mathbf{A} é, também, simétrica, obtêm-se relações de recorrência que levam ao chamado método de MINRES.

Finalizando, além dos mencionados, há ainda outros métodos e algoritmos que podem ser encontrados na literatura (vide Saad (2003) e Van der Vorst (2003), além de Mackey (2003)). Ainda, deve-se mencionar que o fato de \mathbf{A} ser simétrica leva aos mesmos tipos de simplificações tanto para GMRES quanto para FOM e seus derivados, o que leva Saad (2003) a classificar o MINRES como uma subdivisão dos algoritmos de Lanczos. Tais simplificações permitem que se evite o armazenamento de toda a base de \mathbf{K}_m e ainda permitem realizar menos cálculos para a obtenção da aproximação \mathbf{X}_m . Isso leva, por sua vez, a algoritmos utilizando menos memória e mais rápidos, conforme já comentado.

5.4.2 Obtenção da Base de \mathbf{K}_m

Como mencionado na seção 5.4, necessita-se de uma base de \mathbf{K}_m que possa facilmente ser estendida ao longo do processo iterativo, ou seja, com o aumento de m .

Conforme ponderou Van der Vorst (2003), a base dada pelos vetores $\mathbf{R}_0, \mathbf{A}\mathbf{R}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{R}_0, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{R}_0$, que formam uma base de simples extensão de fato, não é atrativa do ponto de vista numérico. Isso acontece, pois o ângulo entre os vetores diminui com o aumento de m , o que os torna linearmente dependentes (LD) para algum m , em aritmética de precisão finita.

Além disso, ortogonalizar a base mencionada, obtendo-se a base do subespaço de Krylov buscada, também não é um procedimento atrativo do ponto de vista numérico. Isso acontece porque, como mencionado no parágrafo anterior, o conjunto de vetores original da base torna-se mal-condicionado com o aumento de m e os vetores correspondentes tendem a se tornar LD no caso de aritmética de precisão finita. Assim a ortogonalização completa, a qual requer vetores LI, não pode ser realizada.

A solução é a obtenção da base através do processo ou método de Arnoldi, o qual é amplamente utilizado na área de Métodos de Subespaços de Krylov e gera uma base ortonormal para o subespaço de Krylov através, freqüentemente, do procedimento conhecido como procedimento de Gram-Schmidt modificado (MGS) (SAAD, 2003; VAN DER VORST, 2003). Porém, pode-se utilizar também o procedimento de reflexões de Householder

ao invés do MGS, uma implementação mais confiável no sentido de fornecer maior precisão (VAN DER VOST, 2003). O procedimento de reflexões de Householder não será discutido no presente texto.

Deve-se mencionar que tais procedimentos sempre podem parar antes da obtenção de todos os vetores da base. O algoritmo baseado no MGS é visto abaixo:

- Algoritmo baseado no método de Arnoldi com MGS, particularizado para a matriz \mathbf{A}
- i. Escolher vetor \mathbf{V}_{S1} da base, com norma igual a 1
 - ii. Para $j=1, 2, \dots, m$, fazer
 - iii. Calcular $\mathbf{W}_{Sj}:=\mathbf{A}\mathbf{V}_{Sj}$;
 - iv. Para $i=1, \dots, j$, fazer
 - v. $h_{ij}=(\mathbf{W}_{Sj}, \mathbf{V}_{Si})$;
 - vi. $\mathbf{W}_{Sj}:= \mathbf{W}_{Sj}-h_{ij}\mathbf{V}_{Si}$;
 - vii. fim
 - viii. $h_{j+1,j}=\|\mathbf{W}_{Sj}\|_2$. Se $h_{j+1,j}=0$, parar
 - ix. $\mathbf{V}_{S(j+1)}=\mathbf{W}_{Sj}/h_{j+1,j}$;
 - x. fim

onde \mathbf{V}_{Sj} é o j -ésimo vetor da base, ortogonal aos anteriores, e m é a dimensão do subespaço referente à base. Ajustando-se \mathbf{V}_{S1} , pode-se provar que uma base para o subespaço de Krylov de \mathbf{A} e \mathbf{R}_0 é obtida.

O que se faz na prática, é adaptar tal algoritmo à estrutura para solução dos sistemas lineares citada anteriormente (vide seção 5.3), sendo a matriz \mathbf{V}_S , mostrada na seção 5.3 (vide, por exemplo, a eq.(5.3.4)), a matriz contendo os \mathbf{V}_{Sj} como colunas, e sendo a aproximação para a solução \mathbf{X}_m calculada a cada nova obtenção de um novo \mathbf{V}_{Sj} . Maiores detalhes sobre tal procedimento são vistos, em detalhes, em Saad (2003).

5.5 Reciclagem dos Subespaços de Krylov

O conceito de reciclagem de subespaços, mencionado na literatura relacionada a métodos modernos de solução de sistemas lineares, pode ser visto em diversos artigos, como em Kilmer e Sturler (2006), Parks et al. (2006) e Wang, Sturler e Paulino (2007).

A idéia por trás dos métodos que utilizam a reciclagem de Subespaços de Krylov, ou apenas métodos de reciclagem neste texto, é utilizar informações obtidas durante a solução de um sistema na solução do seguinte, com o intuito de se abreviar a convergência. Segundo Parks et al. (2006), a reciclagem compreende a seleção judiciosa e uso de um subespaço do subespaço de Krylov gerado na solução de um sistema, para reduzir o número de iterações na solução do próximo sistema. Dado o próprio nome da técnica, nota-se que a reciclagem pode ser aplicada a qualquer método de solução de sistemas lineares baseado em subespaços de Krylov.

O parágrafo anterior sugere que a reciclagem é utilizada quando se pretende resolver uma seqüência de sistemas lineares, ou seja, quando os mesmos não estão disponíveis simultaneamente (PARKS et al., 2006). Também sugere que os sistemas devam mudar pouco (ou lentamente) de um para o outro, o que é mencionado por Wang, Sturler e Paulino (2007) e Parks et al. (2006), sendo que a extensão da mudança determina o quão efetiva pode ser a técnica de reciclagem.

Tais situações surgem, por exemplo, no caso em que: 1) o “lado direito” muda com o tempo, como na modelagem dos fenômenos não-lineares e dinâmicos de fadiga e fratura, por exemplo, ou 2) em problemas de otimização. Cada passo de carregamento no problema dinâmico corresponde a uma matriz e um vetor de carregamento que dependem da solução do passo anterior (BATHE, 1996), o que significa que ambos são alterados e que apenas um sistema está disponível por passo (PARKS et al., 2006). Problemas estáticos não-lineares, casos particulares do caso dinâmico citado, também se enquadram nos requisitos mencionados no parágrafo anterior.

Com relação à otimização da qual trata, especificamente, esta tese, alguns sistemas a serem resolvidos estão, ao contrário do que foi especificado, disponíveis simultaneamente para uma mesma distribuição de variáveis de otimização (ou seja, numa mesma iteração da otimização). Isso ocorre porque há diversos padrões de corrente reais e diversos padrões de corrente fictícios utilizados na obtenção do gradiente da função objetivo (ou seja, há diversos “lados direitos”), como pode ser visto na eq.(4.1.14), onde n é o número de padrões de corrente reais, \mathbf{K}_{Tj} equivale a \mathbf{A} no atual capítulo, o vetor \mathbf{I}_{Tj} ($=\mathbf{K}_{Tj}\mathbf{V}_{Tj}$) corresponde ao j -ésimo padrão real de corrente e o vetor $\mathbf{A}_{Pej}^T(\mathbf{A}_{Pej}\mathbf{V}_{Tj} - \mathbf{V}_{0j})$ corresponde ao j -ésimo padrão fictício de corrente.

Essa disponibilidade simultânea de sistemas suscita o uso de técnicas de paralelização (MOLINARI et al., 2001) ou dos chamados “Block Krylov Methods”, tratados em Saad

(2003) e citados e utilizados em Kilmer e Sturler (2006), os quais têm grande importância, na prática, na solução de sistemas com múltiplos “lados direitos”. O mesmo ocorre na literatura na solução de problemas de otimização relacionados à área de mecanismos flexíveis (SILVA; NISHIWAKI; KIKUCHI, 2000; YIN; ANANTHASURESH, 2001; LIMA, 2002).

Porém, a cada sistema disponível simultaneamente ($\mathbf{K}_{T_j}^{-1} \mathbf{A}_{Pej}^T (\mathbf{A}_{Pej} \mathbf{V}_{T_j} - \mathbf{V}_{0j})$ na eq.(4.1.14), por exemplo) pode ser aplicada a reciclagem. Isso ocorre porque cada sistema preenche, isoladamente, os requisitos que sugerem o uso dessa técnica, ou seja, os sistemas não estão disponíveis simultaneamente e as matrizes e os “lados direitos” mudam pouco de um sistema a outro. Essas mudanças citadas ocorrem devido à dependência das matrizes \mathbf{K}_{T_j} na distribuição de propriedades.

As informações obtidas durante a solução do sistema anterior e utilizadas no atual, as quais são empregadas através de técnicas de reciclagem, como explicitado, podem ser diversas e utilizadas de diversas maneiras diferentes (KILMER; STURLER, 2006; PARKS et al., 2006; WANG; STURLER; PAULINO, 2007). No trabalho de Parks et al. (2006), por exemplo, recicla-se o subespaço o qual é mantido com o intuito de se minimizar a perda de ortogonalidade com respeito ao subespaço descartado. Desta maneira e lembrando que existe uma enorme quantidade de Métodos de Subespaços de Krylov, pode-se perceber que há vários métodos de solução de sistemas baseados em reciclagem. Um desses é citado em detalhes como exemplo, na seqüência. Além disso, tal método baseado em reciclagem foi utilizado em estudos realizados e relatados no atual texto.

5.5.1 Método de RMINRES

No trabalho de Wang, Sturler e Paulino (2007), é utilizado o algoritmo de MINRES e são reciclados os vetores harmônicos de Ritz da matriz \mathbf{A} (MACKEY, 2003), dispostos na matriz \mathbf{U}_{R_j} , sendo tais vetores aproximações para os autovetores de \mathbf{A} referentes a autovalores baixos. Têm-se, da união entre o MINRES e a reciclagem, o algoritmo de RMINRES (“recycling MINRES”).

Os vetores harmônicos de Ritz são obtidos com respeito ao subespaço dado pela combinação linear dos vetores de Lanczos e dos vetores harmônicos de Ritz da mesma matriz e determinados da mesma maneira que \mathbf{U}_{R_j} , ambos os conjuntos de vetores calculados no ciclo

anterior. Como nota, os vetores de Lanczos são os vetores ortogonais que formam a base do Subespaço de Krylov no caso especial em que \mathbf{A} é simétrica, e um ciclo é formado por várias iterações (vide seção anterior para a discussão sobre vetores ortogonais e base do Subespaço de Krylov). Tal divisão do processo iterativo em ciclos é empregada para poupar memória, uma vez que, por convenção, todos os vetores de Lanczos de um ciclo são mantidos para a determinação de \mathbf{U}_{Rj} .

Os vetores de Ritz aproximam um subespaço invariante (WANG; STURLER; PAULINO, 2007), sendo utilizados no próximo sistema linear (não é necessário reutilizar o subespaço reciclado entre ciclos, como é mencionado em Wang, Sturler e Paulino (2007), sendo tal subespaço apenas atualizado).

Então, na incorporação do subespaço reciclado para solução do próximo sistema, adapta-se o processo de Arnoldi (vide seção anterior) para que cada novo vetor do subespaço a que pertence a aproximação atual da solução do problema (5.3.1), \mathbf{X}_m , seja ortogonal ao subespaço dado pela combinação linear de vetores função dos vetores de Ritz obtidos (ou ortogonal à imagem do subespaço reciclado). Além disso, cada nova aproximação pertence ao subespaço dado pelo subespaço reciclado e pelos vetores obtidos pelo processo de Arnoldi. De fato, o método de Wang, Sturler e Paulino (2007) citado, como também os demais métodos de reciclagem, enquadram-se na estrutura referente aos Métodos de Projeção citada na seção 5.3. A solução do sistema na eq.(5.3.5), por exemplo, é obtida através da técnica de rotações de Given (SAAD, 2003; WANG; STURLER; PAULINO, 2007).

Como comentário, ressalta-se que, uma vez que a solução de um sistema linear qualquer pode ser escrita como combinação linear dos autovetores da matriz correspondente, as aproximações de autovetores são boas opções para construir um subespaço de onde obter soluções. Além disso, o mesmo comentário pode ser feito no caso de sistemas com diversos “lados direitos” e somente uma matriz. Assim, a reciclagem como realizada no trabalho de Wang, Sturler e Paulino (2007) em especial, também é indicada para problemas em que os “lados direitos” mudam, significativamente, de um sistema a outro, mas não influem na matriz dos sistemas lineares. Tal característica é explorada no atual trabalho. Porém, é importante perceber que a paralelização ou os “Block Krylov Methods” seriam mais indicados no caso de múltiplos “lados direitos” (principalmente a técnica de paralelização).

Deve-se ressaltar, finalmente, que os métodos baseados em reciclagem são métodos extremamente novos. Assim, não há até o momento, discussões teóricas mais elaboradas que sejam do conhecimento do autor deste texto, sobre a convergência dos algoritmos

correspondentes à técnica (há discussões em apenas alguns casos). Essa questão é admitida por Parks et al. (2006) em seu artigo, em que discute, de maneira interessante (mas não completa), a convergência do método “Generalized Conjugate Residual with inner Orthogonalization and Deflated Restarting”.

5.6 Exemplos da Técnica de Reciclagem Aplicada à TIE

Na presente seção, utiliza-se a abordagem determinística mencionada no capítulo 2 para obtenção de imagens de TIE, considerando-se a técnica de reciclagem. Detalhes sobre tal caso são dados no que se segue, em que um fantoma simplificado é descrito. É importante ressaltar que não há perda de generalidade na aplicação da técnica de reciclagem apenas ao caso determinístico, uma vez que o MOTC aplicado à TIE também está associado à solução de sistemas lineares em série com pequena variação de um sistema para outro. Assim e segundo visto na subseção 5.5.1, também é sugerida a utilização da técnica, a qual irá reduzir os tempos de processamento.

5.6.1 Implementação

O trabalho é realizado a partir do algoritmo de solução de equações matriciais lineares, implementado e (gentilmente) cedido pelo doutor Shun Wang e pelos professores Gláucio H. Paulino, da “University of Illinois at Urbana-Champaign” (IL, EUA), e Eric de Sturler, da “Virginia Tech” (VA, EUA). Tal algoritmo é escrito em linguagem C++ e baseado em programação orientada a objeto, o que facilita sua integração a outros programas e sua extensão, mantendo alta eficiência. Ainda, utiliza como base a ferramenta de livre acesso denominada PETSc (“Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation”), que compreende uma série de estruturas de dados e rotinas em C/C++ para solução de equações diferenciais parciais, englobando solucionadores de sistemas lineares e pré-condicionadores. Tal ferramenta, por sua vez, utiliza-se dos pacotes LAPACK e BLAS, que fornecem uma série de rotinas de solução de sistemas lineares e de operações matriciais, por exemplo.

Como geralmente se faz no caso dos pacotes dedicados à solução de sistemas lineares ou problemas de otimização, por exemplo, tanto o código cedido e o PETSc devem ser compilados para que, então, chamadas às suas funções possam ser realizadas dentro de um programa qualquer. Não serão dados detalhes do procedimento utilizado na compilação, desnecessários ao entendimento do atual texto.

É importante mencionar que o pacote promove o armazenamento da matriz \mathbf{A} de forma indexada, descartando o armazenamento dos zeros, e realiza alocação dinâmica (como padrão), o que pode tornar a montagem de uma matriz de grande porte extremamente lenta em relação ao tempo de solução do sistema para o caso em estudo, conforme se verificou. Porém, também permite que se faça a alocação estática, o que é útil quando se sabe, de antemão, o número aproximado de coeficientes não-nulos da matriz (algo plausível e realizado no presente estudo). Com a flexibilidade de escolha do tipo de alocação, pode-se considerar um compromisso satisfatório entre o tempo e o espaço de memória necessários. Neste trabalho, 100 posições na matriz foram pré-alocadas para cada linha da matriz \mathbf{A} , a qual corresponde a, aproximadamente, 53000 incógnitas.

Ainda, é utilizado o pré-condicionador baseado na Fatorização Incompleta de Cholesky, implementado no pacote PETSc. Esse é o único pré-condicionador, dada a implementação do doutor Shun Wang (até o presente momento), que pode ser utilizado juntamente ao solucionador empregado e aliado à técnica de reciclagem. Além disso, o sistema linear não é escalado, uma vez que a gama de valores de condutividade consideradas no problema de teste do atual trabalho é expressivamente menor que a gama considerada em Wang, Sturler e Paulino (2007).

Três PCs foram empregados nos testes vistos em seguida, para tornar mais eficiente a geração das repostas. A técnica de paralelização (MOLINARI et al., 2001), no entanto, não foi empregada. Foram eles o PC1, com processador Intel® Core™ 2 Quad Q6700 2.66GHz e aproximadamente 8GB de RAM, o PC2, um Intel® Core™ 2 Quad Q6600 2.4GHz e aproximadamente 4GB de RAM, e o PC3, um Dell Dimension DIM4700 com processador Intel® Pentium® 4 3.4GHz e aproximadamente 1GB de RAM. Utilizou-se o sistema operacional Linux, mais especificamente o MANDRIVA no caso do PC1 e do PC3, e o Ubuntu, no caso do PC2. A utilização de cada um deles será reportada.

5.6.2 Resultados Numéricos

Baseando-se no trabalho de Wang, Sturler e Paulino (2007), demonstra-se o desempenho do algoritmo de RMINRES mencionado anteriormente. Um problema 3D de TIE de grande porte é considerado e a análise referente à seleção de parâmetros do solucionador, bem como a importância da aplicação do método da continuação na tolerância (WANG; STURLER; PAULINO, 2007), explicada em seguida, são mostradas.

A Figura 77 mostra a malha do fantoma utilizado e a distribuição de resistividades correspondente. Pode-se notar que uma distribuição típica de testes em TIE é considerada. Considera-se a aplicação de corrente diretamente aos nós superficiais da malha, mais especificamente em 32 nós igualmente espaçados (aproximadamente) ao redor do domínio, sendo que cada eletrodo é representado por um nó. Portanto, não se emprega modelo de eletrodo ou modelo de interface de contato, e não se utiliza o Método da Alternância (vide capítulo 2). Aplica-se uma configuração diferencial de corrente entre dois eletrodos vizinhos (uma corrente positiva a um deles e o negativo do mesmo valor ao vizinho), o que permite considerar 32 padrões de corrente, sendo imposto potencial (nulo) a apenas um nó no interior da malha de MEF. Dada a frase anterior, nota-se que as correntes estão em oposição de fase, sendo seu valor 1mA absoluto.

São medidos 32 potenciais elétricos por padrão de corrente, sendo as 1024 medidas resultantes empregadas no processo de obtenção da imagem. Finalmente, como outra simplificação, o mesmo modelo é utilizado tanto na geração dos dados quanto na obtenção da imagem. Tais simplificações citadas não invalidam os resultados, mas apenas acarretam em alterações pouco significativas no desempenho do solucionador RMINRES em casos de modelos mais precisos, como mostram resultados recentemente obtidos pelo aluno e submetidos para publicação no periódico internacional CMAME. Isso acontece porque a eficácia do solucionador depende, sobretudo, da qualidade da aproximação do subespaço reciclado, o que depende, por sua vez, de quanto (e como) muda a matriz de condutividade de uma iteração de MOT para a outra.

Nenhum tipo de filtro ou restrição é utilizado, a não ser as restrições laterais, de valores correspondentes aos extremos encontrados no fantoma, da mesma maneira que na maioria dos resultados do capítulo 2. É considerada a continuação na penalização, feita de 1 a 2 numa única etapa. Como no capítulo 2, utiliza-se a PLS para solução do problema não-linear de otimização de TIE. Como critério de convergência, utiliza-se o número máximo de iterações

de 100 para cada valor de p (vide eq.(2.3.1)), num total de 200 iterações ao todo. Os valores finais da função objetivo e da sua variação são citados nos testes quando necessário. Para cada padrão de corrente e também entre iterações de estimação da imagem, utiliza-se o resultado do sistema linear resolvido anteriormente na solução do próximo sistema, o que reduz o erro inicial e, portanto, aumenta a velocidade de convergência da solução de tais sistemas. Os valores iniciais de variáveis de otimização (iguais a 1) correspondem a uma distribuição uniforme de resistividade igual a $4\Omega\text{m}$. Todos os testes são realizados segundo a discretização mostrada na Figura 77, na qual se comenta o tamanho da malha utilizada.

Comenta-se, finalmente, que como o número de iterações do processo iterativo para estimação da imagem é 200, e são resolvidos 64 sistemas lineares para cada iteração (os quais diferem apenas pelos “lados direitos”), sendo 32 para os padrões de corrente reais e 32 para os padrões de corrente fictícios, são resolvidos, ao todo, 12800 sistemas. Ainda, obtém-se a solução referente a um dos padrões de corrente reais seguida da solução referente ao padrão de corrente fictício associado a tal padrão de corrente real, nessa ordem, o que é realizado para os 32 padrões (vide seção 5.5 para definição dos padrões de corrente reais e fictícios). Considerando-se o algoritmo de RMINRES, isso significa que os subespaços reciclados vão sendo utilizados em cada solução, conforme mencionado na seção 5.5.

Variam-se nos testes, dentre outros, a dimensão do subespaço reciclado de um sistema para o outro (DSR) e a máxima dimensão do subespaço de Krylov (ou máximo número de vetores de Lanczos) mantido para, periodicamente, atualizar o subespaço aproximadamente invariante que será reciclado (DSK) (WANG; STURLER; PAULINO, 2007). O algoritmo correspondente a tais parâmetros é dado por $\text{RMINRES}(\text{DSK}, \text{DSR})$, como em Wang, Sturler e Paulino (2007).

A Figura 78 mostra uma imagem típica estimada para os casos estudados, sendo as particularidades encontradas, referentes aos testes de estudo, vistas em seguida.

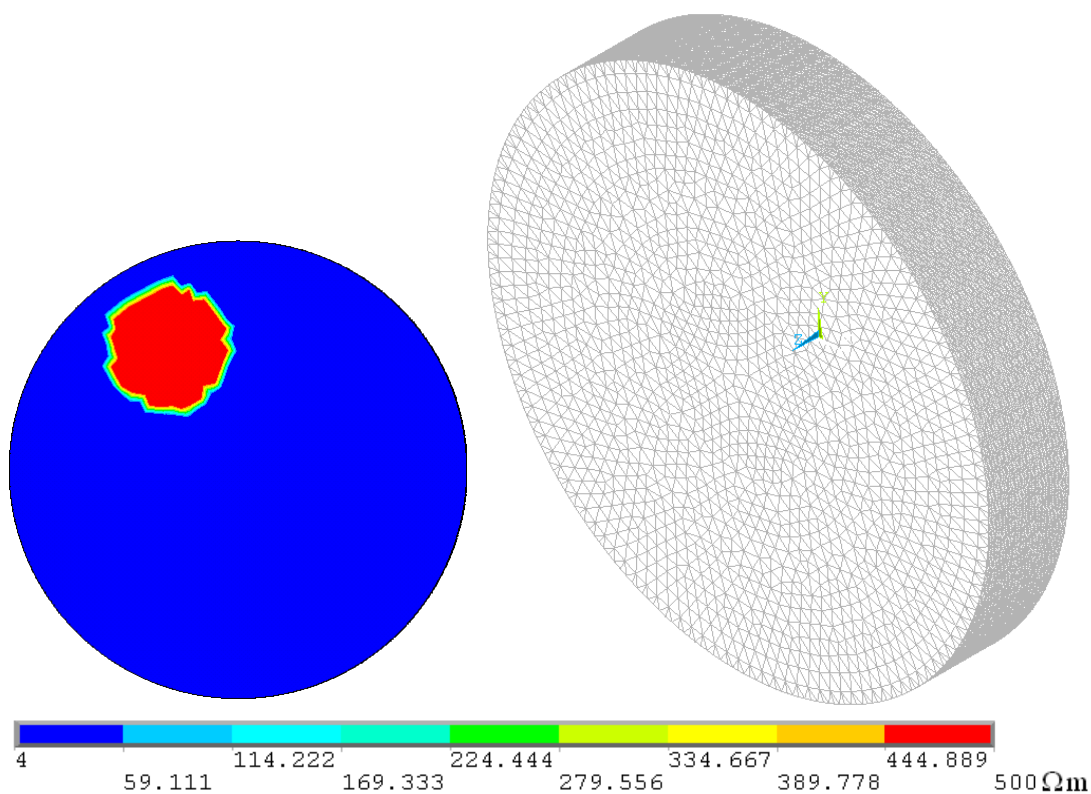


Figura 77 Fantoma numérico considerado. Condutividades dadas pela eq.(2.3.1). Malha com 53692 nós e 267051 elementos tetraédricos.

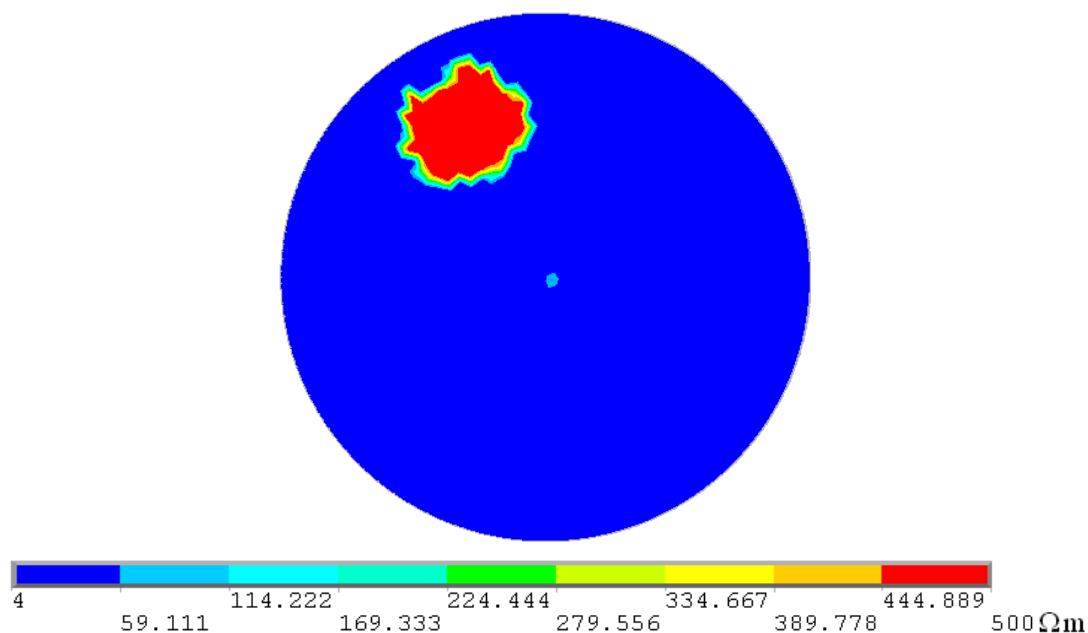


Figura 78 Distribuição final (ótima) típica de resistividades.

Em primeiro lugar nos testes, estuda-se a influência do método da continuação realizado na tolerância relativa do algoritmo RMINRES(100,10) no desempenho do mesmo, a qual é responsável por acusar a convergência. Assume-se a convergência se:

$$\|\mathbf{R}_m\|_2 < \text{rtol} \|\mathbf{B}\|_2, \quad (5.6.1)$$

onde rtol é a tolerância relativa, \mathbf{R}_m é a resíduo da m -ésima iteração e \mathbf{B} é o “lado direito” da equação. A finalidade do método da continuação é reduzir o número de iterações na solução dos sistemas lineares no início do processo iterativo. Isso pode ser realizado porque, para $p=1$, o resultado da otimização não é definitivo, o que implica que soluções aproximadas dos sistemas lineares podem ser aceitas. O PC3 é utilizado neste teste. O resultado de tal abordagem é mostrado na Figura 79, onde são plotados números de iterações para o primeiro padrão de corrente real versus iteração corrente do processo iterativo de estimação da imagem. O salto no número de iterações corresponde à mudança de p e da tolerância, as quais ocorrem ao mesmo tempo de 1 para 2 e 10^{-9} a 10^{-10} no caso da “continuação 1” mostrada na Figura 79, e de 10^{-8} a 10^{-10} no caso da “continuação 2” (10^{-10} é a mesma tolerância utilizada nos cálculos de potenciais do fantoma).

Valores finais de função objetivo próximos, como nos demais resultados desta seção, foram verificados (2.124×10^{-7} , 2.463×10^{-7} e 3.091×10^{-7} para “continuação 2”, “continuação 1” e para o caso sem continuação, respectivamente). Além disso, nota-se um significativo aumento do número de iterações após a mudança de p (mais ou menos, à partir da iteração 120), o que é atribuído ao efeito da técnica de reciclagem em conjunto com o aumento médio da variação das variáveis de otimização entre iterações de estimação da imagem. O aumento do valor máximo da variação para o caso sem continuação – linha contínua na figura – quando o valor 2 é atribuído a p , por exemplo, chega a ser de mais de duas vezes os valores observados no início da continuação. Isso faz com que o subespaço reciclado represente uma aproximação relativamente mais pobre. O mesmo efeito é visualizado nas demais respostas.

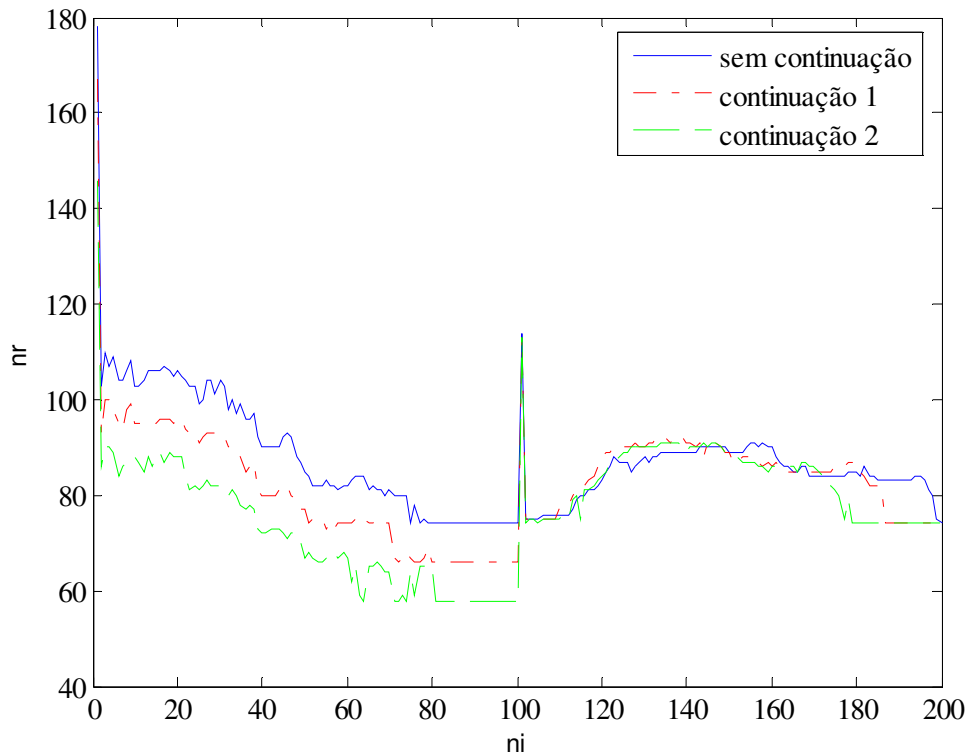


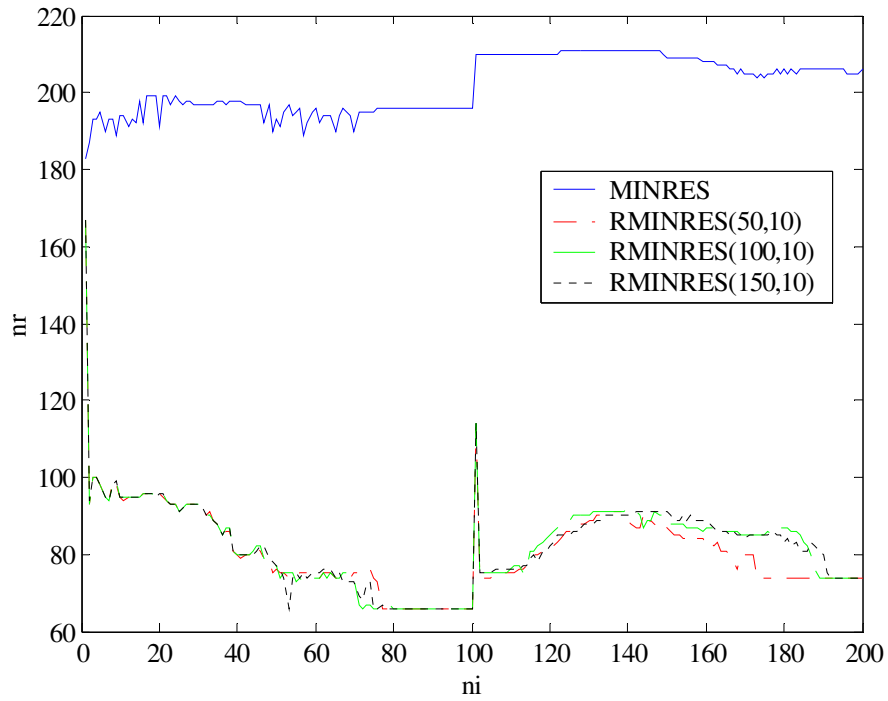
Figura 79 Número de iterações do RMINRES(100,10) (nr) por iteração de estimação da imagem (ni), para o método da continuação. A “continuação 1” corresponde a uma mudança de 10^{-9} para 10^{-10} em rtol e a “continuação 2” a uma mudança de 10^{-8} para 10^{-10} .

Então, nos próximos testes, divididos em dois conjuntos distintos, variam-se DSR e DSK. A continuação, tanto em p quanto na tolerância relativa, é novamente utilizada.

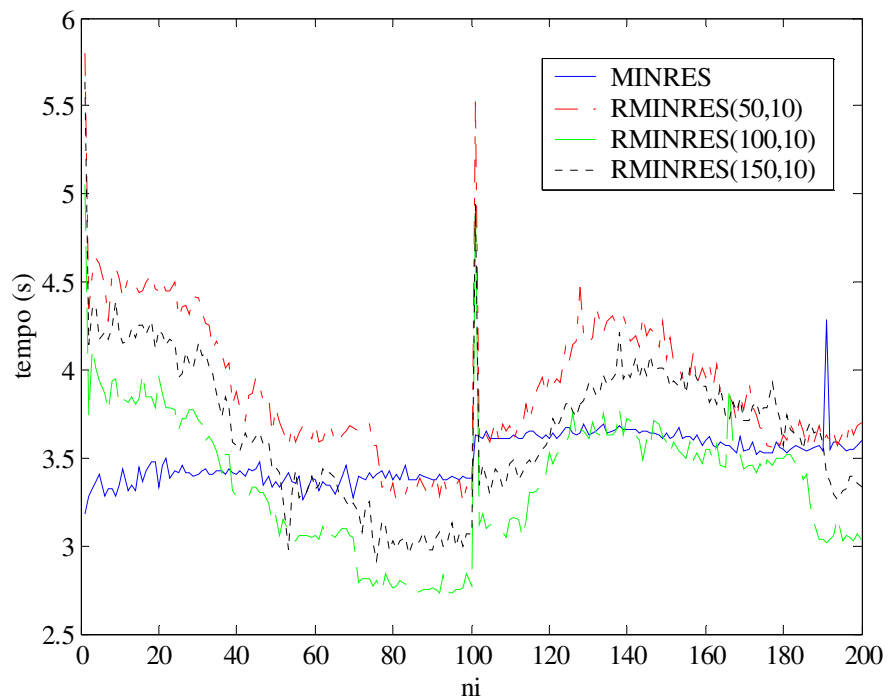
No primeiro teste, utiliza-se o PC2, fixa-se DSR=10 e varia-se DSK. Os resultados de iterações do RMINRES para o primeiro padrão real de corrente aplicado, bem como os tempos empregados, são mostrados na Figura 80. Nota-se redução significativa do número de iterações utilizadas pelo solucionador ao longo do processo iterativo, com relação ao número inicial de iterações, sendo a redução maior ao final do processo, quando a distribuição de propriedades se modifica menos de uma iteração da estimação da imagem para outra. Nota-se, também, que o aumento de DSK considerado não foi suficiente para diminuir, de forma significativa, o número de iterações do solucionador (atribui-se em Wang, Sturler e Paulino (2007) a diminuição do número de iterações à obtenção de uma aproximação mais precisa ao subespaço invariante). Porém, os tempos de obtenção de cada resposta para os diferentes parâmetros DSK foram diferentes, mostrando um valor ótimo para DSK=100, apesar do aumento (com relação a DSK=50) do número de operações causado pelo aumento do subespaço de Krylov mantido. De fato, valores maiores de DSK acarretam em aumentos

modestos do número de multiplicações matriciais e do tempo de processamento do solucionador de autovetores empregado, os quais são limitados (os aumentos), porém, pelo número de iterações para cada solução de MEF, conforme comentam Wang, Sturler e Paulino (2007).

Então, fixa-se $DSK=100$, variando-se DSR . O PC1 é utilizado, nesse caso. Nota-se, na Figura 81, a qual se refere ao primeiro padrão fictício de corrente aplicado, reduções significativas nos tempo e, sobretudo, no número de iterações do solucionador com relação aos valores das iterações iniciais de estimação da imagem e ao MINRES. Percebe-se, também, que o número de iterações inicial do RMINRES é significativamente menor que na situação da Figura 79 referente aos testes anteriores, para todos os valores de DSR . Isso se deve ao fato de que a solução do sistema linear, considerando-se o primeiro padrão fictício de corrente, é realizada após a solução do sistema com o primeiro padrão de corrente real (conforme já citado), quando um subespaço reciclado já está disponível. Deve-se comentar que o aumento de DSR de 0 (MINRES) para 20, foi efetivo na redução do número de iterações do solucionador e, de 0 para 10, na redução do tempo por solução. Porém, para $DSR=20$, os tempos do MINRES e RMINRES(100,20) tornam-se comparáveis. Isso sugere a existência de DSR ótimo. Por fim, pode-se mencionar que tanto no artigo de Wang, Sturler e Paulino (2007) quanto nos testes realizados no atual trabalho, observa-se que o algoritmo é mais sensível no tocante á redução do número de iterações que do tempo, o que pode ser visto na Figura 81 (comparam-se, no artigo, os resultados com $DSR=5, 10$ e 20 , e $DSK=100$ para, aproximadamente, 10^5 incógnitas).

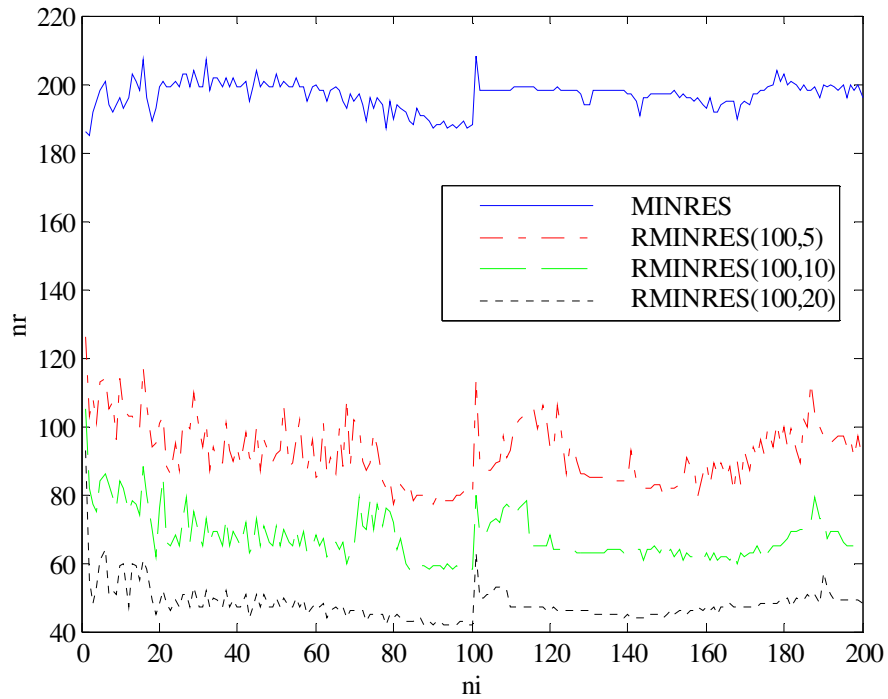


(a)

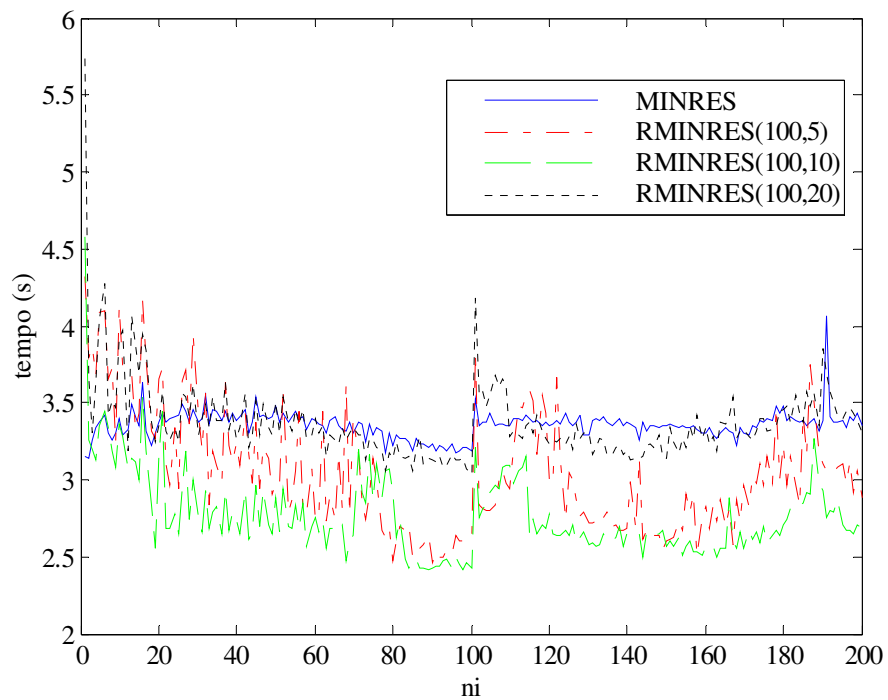


(b)

Figura 80 (a) Número de iterações (nr) do RMINRES por iteração de estimação da imagem (ni). (b) Tempo do RMINRES por iteração de estimação da imagem (ni). O parâmetro DSR utilizado pelo RMINRES é igual a 10. Varia-se DSK.



(a)



(b)

Figura 81 (a) Número de iterações (nr) do RMINRES por iteração de estimação da imagem (ni). (b) Tempo do RMINRES por iteração de estimação da imagem (ni). O parâmetro DSK utilizado pelo RMINRES é igual a 100. Varia-se DSR.

Finalmente, comparam-se os algoritmos RMINRES(100,10) e CG no PC1, esse último (CG) utilizado no caso da TIE uma vez que as matrizes de MEF são simétricas e positivas-

definidas, para o que se prova a convergência e se obtém um método extremamente eficiente (vide subseção 5.4.1, em que mais detalhes sobre o algoritmo de CG são descritos, e Saad (2003), para mais detalhes). Ambos os algoritmos utilizam o mesmo pré-condicionador (baseado, novamente, na Fatorização Incompleta de Cholesky) e, para cada padrão de corrente e também entre iterações de estimação da imagem, utiliza-se o resultado do sistema linear resolvido anteriormente na solução do próximo sistema. Comparam-se, especificamente, os tempos necessários para que a variação máxima das variáveis de otimização seja menor que $2 \cdot 10^{-2}$, com p igual a 2, o que ocorreu com uma iteração de estimação de diferença. Os resultados obtidos, que correspondem a, aproximadamente, 13 horas e 20 minutos para o CG e 11 horas e meia para o RMINRES, sugerem que a extensão do conceito de reciclagem para o algoritmo de CG pode vir a tornar a obtenção da imagem ainda mais rápida do que nos testes aqui relatados. Deve-se mencionar que o CG realizou, em média, 205 iterações para o caso do primeiro padrão de corrente real considerado, com desvio padrão aproximado de 7 iterações. Além disso, cada conjunto de, aproximadamente, 200 iterações foi obtido em 3,4 segundos, em média.

Como nota final, menciona-se que, em nenhum dos casos descritos, a memória RAM total utilizada ultrapassou 1GB. Ainda, cita-se que resultados semelhantes foram recentemente submetidos para publicação, baseando-se no atual estudo. Nesses, melhorias no solucionador foram propostas, o que resultou num desempenho superior ao do algoritmo de CG.

5.7 Conclusão e Observações

Investigaram-se, no atual capítulo, as vantagens da utilização do RMINRES no contexto da TIE.

Conforme foi mostrado, a técnica de reciclagem, através da implementação do RMINRES, foi efetiva na redução de tempos de processamento e do número de iterações referentes à solução dos sistemas lineares propostos. Essa efetividade foi verificada nos testes relacionados à variação dos parâmetros DSK e DSR. Ainda, o RMINRES mostrou-se mais eficaz até mesmo que o algoritmo de CG.

Menciona-se a relevância de se aliar a reciclagem ao conceito de “Block Krylov Methods”, utilizado na solução de sistemas com vários “lados direitos”, como explicitado anteriormente. Além disso, deve-se citar a importância da paralelização (MOLINARI et al., 2001) do código de otimização, no tocante à solução de sistemas lineares com vários “lados direitos”. Tal abordagem pode ser aplicada em conjunto com a reciclagem e, provavelmente, com os “Block Krylov Methods”, o que representaria reduções ainda mais significativas no tempo de processamento total para obtenção da imagem de TIE. A paralelização é um assunto específico e de teoria extensa. Ao mesmo tempo, o resultado da aplicação de tal técnica na obtenção de imagens pelo MOT pode ser estimado. Acredita-se que a redução de tempo no emprego da técnica será, por iteração de PLS, aproximadamente igual ao tempo de solução de todos os sistemas em série menos o tempo de solução do sistema mais lento entre todos os sistemas da série (admitindo-se que o número de sistemas resolvidos não influa no tempo de solução dos sistemas em paralelo), acrescido – o tempo de solução do sistema mais lento – do tempo de transferência de dados entre o programa principal e os programas secundários, os quais resolvem cada sistema (acredita-se que o tempo de transferência de dados entre o programa principal e os programas secundários seja desprezível no caso da ordem de grandeza – referente ao número de graus de liberdade – considerada).

Ainda, sugerem-se testes com outros pré-condicionadores, como o pré-condicionador algébrico “multigrid” (SOLEIMANI; POWELL; POLYDORIDES, 2005) e o pré-condicionador “multilevel” discutido em Wang (2007), chamado de pré-condicionador MSPAI, ou “Multilevel Sparse Approximate Inverse”, a ser aplicado em conjunto com técnicas de refinamento adaptativo de malha. Tal pré-condicionador é mais rápido que o pré-condicionador baseado na Fatorização Incompleta de Cholesky utilizado no trabalho citado, para malhas suficientemente bem discretizadas, tipicamente para problemas de grande porte.

Finalmente, sugere-se a utilização de GPGPU, ou “General-Purpose computation on Graphics Processing Units”, ou seja, propõe-se a utilização dos processadores de alta performance e muitos núcleos das unidades de processamento de gráficos para acelerar o processo de convergência na estimação da imagem através da paralelização. No entanto, a melhor maneira de se paralelizar o código, nesse caso em especial, ainda deve ser estudada. Além disso, deve-se estudar se é possível utilizar a técnica de reciclagem, e se a mesma é eficaz nesse contexto.

6 CONCLUSÕES

No atual trabalho, resultados determinísticos de MOT (capítulo 2) mostram a capacidade de obtenção das resistividades em simulações (numéricas e experimentais) de casos clínicos, o que sugere a potencialidade do algoritmo desenvolvido na monitoração da ventilação pulmonar, incluindo a possibilidade de detecção de um pneumotórax. Um caso em que se considera um contraste moderado, baseando-se em condições clínicas normais, e um caso considerando-se um nível de ruído de medição severo, são abordados. O Método da Alternância, em conjunto com a consideração de características conhecidas do fantoma, gerou imagens satisfatórias. Por fim, os resultados experimentais mostraram a importância do “gap-model”, o qual pode, portanto, ser utilizado em algumas aplicações especiais.

No caso das respostas de MOTC (capítulo 3) considerando-se a formulação padrão (subseção 3.6.1) pode-se dizer, em primeiro lugar, que localizações corretas das perturbações, bem como geometrias aproximadamente corretas, foram obtidas. Ainda, gradientes espaciais de propriedade do material acentuados e contrastes elevados foram estimados, o que foi mencionado como vantagem do MOTC frente aos algoritmos reportados na literatura. Foi sugerido um método de cálculo de δ e proposto o refinamento das malhas para resolver a questão da escolha de tal variável. Além disso, foram propostas algumas melhorias ao algoritmo, com o intuito de se aumentar sua aplicabilidade. No entanto, o algoritmo mostrou-se lento com respeito a algoritmos relatados na literatura. A conclusão é a de que testes para redução dos tempos são necessários. Porém, como já relatado no capítulo 3 (e como será descrito, novamente, no próximo), há maneiras eficazes de acelerar o processo de estimação de MOTC.

As respostas obtidas com a segmentação do domínio (vide subseção 3.6.2) mostram a dificuldade de se trabalhar com a técnica e sugerem que as incertezas nas regiões consideradas determinísticas devem ser ainda mais reduzidas que as consideradas no atual trabalho, para que o emprego da aproximação seja efetivo. Ainda, apesar de ser possível do ponto de vista teórico e, como sugerem as respostas, precisa, a estimação de elementos da matriz de covariância em conjunto com as médias dos “pixels” da imagem (vide subseção 3.6.3) mostrou-se inviável com relação ao tempo de processamento. A conclusão é a de que variâncias e covariâncias incógnitas devem ser obtidas de antemão, por método alternativo.

Foi desenvolvido um método de correção da posição de eletrodos de TIE através do MOT, relatado no capítulo 4 (seção 4.1). Mostrou-se, através da estimação do posicionamento correto da perturbação na imagem e de posições aproximadamente corretas para os eletrodos, para um modelo bidimensional e dados simulados (mesmo considerando-se apenas seis eletrodos e 18 medições de potenciais elétricos), que o algoritmo tem potencial para que possa ser utilizado numa situação prática. Além disso, mostrou-se que a informação de que todos os nós alinhados perpendicularmente à superfície do eletrodo têm o mesmo valor de variável de otimização foi importante na obtenção de respostas mais próximas do fantoma, e concluiu-se que o uso da penalização de condutividades intermediárias tem potencial e deve ser estudado. No entanto, a técnica de Projeção (considerando-se funções lineares), em particular, não auxiliou na obtenção de resultados mais precisos.

Propôs-se, também, uma metodologia para o projeto de eletrodos aplicado à TIE no mesmo capítulo (mas na seção 4.2). Um problema extremamente mal-condicionado e também um problema apresentando um nível de ruído elevado (POLYDORIDES; MCCANN, 2002) são abordados considerando-se a metodologia, mostrando que os eletrodos otimizados obtiveram um desempenho superior no caso de modelos 2D simplificados. Ainda, mostra-se que a posição dos eletrodos, isoladamente (sem levar em conta variações de geometria e material), teve impacto na sensibilidade do sistema ao ruído. Conclui-se que a técnica tem potencial de aplicação na área médica e que os eletrodos atuais, representados pelos eletrodos denominados convencionais, podem estar bastante distantes de soluções ótimas. Finalmente, na abordagem de resoluções mais elevadas, ou seja, na estimação de imagens com mais detalhes, acredita-se que a sensibilidade do sistema a ruídos de medição seja ainda maior. O trabalho de Graham e Adler (2007), apesar de abordar a estimação de imagens 3D, sugere o mesmo. Nessa situação, é possível e provável que os eletrodos ótimos tenham excelente desempenho na estimação da imagem.

Investigaram-se as vantagens da utilização do RMINRES no contexto da TIE (capítulo 5), o qual foi efetivo na redução de tempos de processamento e do número de iterações referentes à solução dos sistemas lineares propostos. Essa efetividade foi verificada nos testes relacionados à variação dos parâmetros DSK e DSR. Ainda, o RMINRES mostrou-se mais eficaz até mesmo que o algoritmo de CG. Conclui-se que, nas condições dos testes realizados, ou seja, na solução dos sistemas lineares de TIE (problemas diretos) em seqüência, o método RMINRES é o método mais indicado para problemas de TIE de larga escala, tipicamente com dezenas de milhares de variáveis (ou mais). O nível de vantagem do RMINRES no contexto

da solução dos sistemas lineares em paralelo, em que os espaços de reciclagem são obtidos em paralelo e utilizados no sistema seguinte, mas considerando-se uma nova imagem obtida no processo iterativo de estimação da mesma, ainda necessita ser estudado. No entanto, deve-se levar em conta que a monitoração pode ser um processo relativamente lento e, nesse caso, ao longo do tempo, o algoritmo de RMINRES iria se tornar mais eficaz que o algoritmo de CG. Além disso, é possível que, considerando-se uma imagem estimada da região do tórax como sugestão inicial para posterior estimação, ou seja, considerando-se sugestão inicial mais próxima da imagem final, a taxa de aumento do desempenho do RMINRES no processo iterativo seja maior que a relatada nos testes (deve-se lembrar que a imagem inicial nos testes, corresponde a uma condutividade homogênea no corpo).

Por fim, através dos resultados no APÊNDICE A, conclui-se que, medindo-se diferenças de potenciais entre eletrodos, o modelo de TIE se torna imune ao erro de posicionamento do eletrodo de referência (ou eletrodo de potencial fixo). Ainda, não é necessário utilizar várias matrizes de elementos finitos no processo de estimação, uma para cada referência. Pode-se escolher uma referência qualquer (nó e valor de potencial elétrico qualquer) e utilizá-la, qualquer que seja a posição do eletrodo de referência real (fixado ao aparato experimental ou corpo tomografado).

7 TRABALHOS FUTUROS

Como meio de melhorar a qualidade das imagens mostradas no capítulo 2, é sugerida a imposição de restrições à distribuição de condutividades nodais baseadas (as restrições) na distância para os eletrodos. A distância é indicada uma vez que a sensibilidade a mudanças de resistividade em regiões periféricas é maior que em regiões mais afastadas (BACRIE; GOUSSARD; GUARDO, 1997; AYA et al., 2006). Ainda, sugerem-se refinar a malha adaptativamente, para aumentar a resolução espacial em locais específicos do modelo, e a segmentação da imagem (diferente da técnica discutida no capítulo 3), para obtenção de uma imagem com maior resolução em resistividade (vide Mello et al. (2008) para uma explicação da técnica de segmentação).

Como mencionado no capítulo 3, assumem-se variáveis aleatórias gaussianas nos testes com o MOTC. Isso representa uma aproximação no caso das condutividades elétricas em determinadas regiões do corpo humano, uma vez que, diferentemente dessas propriedades, variáveis gaussianas não são limitadas e apresentam uma geometria característica da densidade de probabilidades, em forma de sino. Porém, para pequenas variações em torno da média, o que ocorre em alguns locais no corpo, a aproximação gaussiana é satisfatória. Para variações mais acentuadas, sugere-se utilizar uma distribuição do tipo Beta (NETO; CYMBALISTA, 2000). Tal distribuição, do ponto de vista de implementação do código de MOTC para a obtenção da imagem, bem como no tocante à fundamentação teórica envolvida, representa um fator complicador, uma vez que envolve a transformação de Rosenblatt (MADSEN; KRENK; LIND, 2006). Não se sabe atualmente, por exemplo, se a densidade de probabilidade conjunta, necessária à implementação, é simples de ser obtida. A vantagem da distribuição Beta é que ela é definida entre valores máximo e mínimo, sendo nula fora desse intervalo, e pode ser modificada através de parâmetros, disponibilizando uma grande quantidade de curvas a serem utilizadas.

Para abordar a questão do valor ótimo de δ , sugere-se refinar ainda mais as malhas de finitos de estimação e do fantoma, com o intuito de se melhorar o modelo. Assim, acredita-se poder utilizar um valor nulo de δ , remediando a questão da escolha do valor dessa variável. Deve-se salientar novamente que, quanto maior a discretização, melhor a aproximação do caso real, ao menos teoricamente. Assim, o limite para o refinamento máximo das malhas

deve ser observado apenas para impedir que o algoritmo de MOTC seja custoso demais, computacionalmente, inviabilizando sua aplicação.

Para redução do tempo de estimação do algoritmo de MOTC, sugere-se a otimização do código com pré-alocação, por exemplo, a paralelização (MOLINARI et al., 2001), e/ou a utilização de computadores mais atuais, mais modernos que o utilizado nos testes do capítulo 3. Ainda, sugere-se a abordagem citada por Nguyen, Song e Paulino para eliminação do “loop” interno de cálculo do índice de confiabilidade, a etapa $3i$ da seção 3.5 sobre implementação do algoritmo, a qual pode ser bastante eficaz na redução do tempo total do algoritmo de MOTC para a formulação padrão e para a segmentação, uma vez que o “loop” mencionado é, justamente, a etapa mais custosa do algoritmo considerando-se essas duas formulações.

Finalmente, propõe-se comparar o algoritmo de MOTC desenvolvido com algoritmos de estimação baseados nas técnicas de “Simulated Annealing” (Recozimento Simulado) (HERRERA, 2007) e “Markov chain Monte Carlo” (WATZENIG e FOX, 2009; WEST et al., 2004), os quais são precisos no contexto considerado no atual trabalho (contrastes elevados e gradientes de propriedades abruptos), mas apresentam tempos de processamento elevados, como já mencionado, o que tem sido estudado (vide referências citadas).

No contexto da correção da posição dos eletrodos (seção 4.1), propõe-se o teste da técnica de Projeção em conjunto com a função linear dada na equação (APÊNDICE C.1) para a transformação referente à projeção, testando pesos constantes por partes (vide APÊNDICE C), os quais foram efetivos na obtenção de imagens (como relatado em 2.4.1). Sugere-se ainda, utilizar modelos de MEF 3D. Assim, poderá ser avaliada a capacidade do método proposto de detectar não somente translações de eletrodos, mas também eventuais rotações. Além disso, (1) sugere-se utilizar o novo modelo para a interface de contato entre os eletrodos e o corpo (vide subseção 4.1.2 para descrição do novo modelo para a interface de contato), com o intuito de obter respostas experimentais, (2) e propõe-se, como encorajam as respostas, utilizar funções penalizadoras para favorecer resultados de distribuições discretas de eletrodos (em outras palavras, com variáveis nodais de parâmetros extremos, ou seja, iguais a zero ou um). Finalmente, deve-se ressaltar que, em casos médicos práticos, raramente são utilizados eletrodos com a espessura na proporção mostrada nos testes. Nessa situação, sugere-se a utilização de elementos finitos de eletrodo unidimensionais na superfície da malha interna (ou 2D, no caso de domínios 3D), o que pode, ainda, simplificar o processo de implementação clínica da abordagem de MOT proposta bem como a aplicação de informações conhecidas a

respeito dos eletrodos, diminuir a velocidade de estimação e reduzir o espaço de soluções possíveis do problema de otimização, impedindo a obtenção de eventuais mínimos locais sem sentido físico. Ainda, isso resolveria a questão da sensibilidade reduzida da função F à distribuição de propriedades abaixo da superfície dos domínios de otimização (vide subseção 4.1.4 para uma discussão sobre tal efeito).

Como alternativas às funções objetivo utilizadas no projeto dos eletrodos (seção 4.2), pode-se propor minimizar a sensibilidade do sistema de TIE a erros de posicionamento dos eletrodos (GRAHAM; ADLER, 2007), ou a sensibilidade a erros nos valores de parâmetros de contato. Ainda, pode-se propor a combinação entre funções, como a combinação linear entre F_{\min} e F_{\max} , com o intuito de reduzir o mau-condicionamento do problema e, ao mesmo tempo, obter uma configuração de eletrodos com sensibilidade reduzida ao ruído. É possível, também, que mais valores singulares ótimos acima de um determinado valor sejam obtidos com a combinação mencionada do que com F_{\max} apenas, o que seria interessante em termos da resolução da imagem estimada, conforme comentam Polydorides e Mccann (2002) e Dehghani et al. (2005). Por fim, é importante refinar a malha de MEF, utilizar elementos 3D e empregar o novo modelo para a interface de contato entre os eletrodos e o corpo mencionado. Ainda, segundo sugerem resultados na literatura (GRAHAM e ADLER, 2007), deve-se considerar no projeto, imagens com mais detalhes que as utilizadas no atual trabalho, o que, provavelmente, irá gerar resultados ainda melhores (com relação aos eletrodos convencionais).

Quanto à técnica de reciclagem discutida no capítulo 5, menciona-se a relevância de aliá-la ao conceito de “Block Krylov Methods”, utilizados na solução de sistemas com vários “lados direitos”, como explicitado no mesmo capítulo. Além disso, deve-se citar a importância da paralelização (MOLINARI et al., 2001) do código de otimização no tocante à solução de sistemas lineares com vários “lados direitos”. Tal abordagem pode ser aplicada em conjunto com a reciclagem e, provavelmente, com os “Block Krylov Methods”, o que representaria, possivelmente, reduções ainda mais significativas no tempo de processamento total para obtenção da imagem de TIE. Uma estimativa da redução do tempo de estimação da imagem associada (a redução) à paralelização é relatada no capítulo 5. Ainda, sugerem-se testes com outros pré-condicionadores, como o pré-condicionador algébrico “multigrid” (SOLEIMANI; POWELL; POLYDORIDES, 2005) e o pré-condicionador “multilevel” discutido em Wang (2007), chamado de pré-condicionador MSPAI, a ser aplicado em conjunto com técnicas de refinamento adaptativo de malha; os pré-condicionadores

mencionados têm mostrado ótimos resultados na área de TIE e na área estrutural, respectivamente. Finalmente, sugere-se a realização de testes experimentais, com sugestões iniciais mais próximas do esperado, e propõe-se a utilização de GPGPU, ou “General-Purpose computation on Graphics Processing Units”, ou seja, propõe-se a utilização dos processadores de alta performance e muitos núcleos das unidades de processamento de gráficos para acelerar o processo de convergência na estimação da imagem através da paralelização. No entanto, a melhor maneira de se paralelizar o código, nesse caso em especial, ainda deve ser estudada. Além disso, deve-se estudar se é possível utilizar a técnica de reciclagem, e se a mesma é eficaz nesse contexto.

REFERÊNCIAS⁴

ADLER, A.; DAI, T.; LIONHEART, W.R.B. Temporal image reconstruction in electrical impedance tomography. *Physiological Measurement*, v.28, p.S1-S11, 2007.

ALLEN, M.; MAUTE, K. Reliability-based design optimization of aeroelastic structures. *Struct Multidisc Optim*, v.27, p.228-242, 2004.

AMATO, M.B.P. **Novas Estratégias em Ventilação Artificial: Diagnóstico e Prevenção do Barotrauma/ Biotrauma Através da Tomografia de Impedância Elétrica (TIE)**. São Paulo: publicação própria, 2001. (Sumário do Projeto Temático FAPESP, processo 01/05303-4).

AYA J.C.C. et al. Regularizations for a black box back-projection EIT algorithm. *ABCM Symp. Series in Bioengineering*, v.1, p.1-9, 2006.

BABAEIZADEH, S.; BROOKS, D.H.; ISAACSON, D. 3-D Electrical Impedance Tomography For Piecewise Constant Domains With Known Internal Boundaries. *IEEE Transactions On Biomedical Engineering*, v.54, p.2-10, 2007.

BACRIE, C.C.; GOUSSARD, Y.; GUARDO, R. Regularized Reconstruction in Electrical Impedance Tomography Using a Variance Uniformization Constraint. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v.16, p.562-571, 1997.

BATHE, K.J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

BENDSØE, M.P.; KIKUCHI, N. Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.71, p.197-224, 1988.

BENSØE, M.P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. New York: Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 2003. (ISBN: 3-540-42992 1)

BLUE, R.S.; ISAACSON, D.; NEWELL, J.C. Real-Time Three-Dimensional Electrical Impedance Imaging. *Physiol. Meas.*, v.21, p.15-26, 2000.

⁴ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

BROWN et al. Cardiac and Respiratory Related Electrical Impedance Changes in the Human Thorax. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v.41, 729-734, 1994.

BROWN, B.H. et al. Neonatal lungs – Can absolute lung resistivity be determined non-invasively? *Med. Biol. Eng. Comput.*, v.40, p.388-394, 2002.

BUHL, T. Simultaneous topology optimization of structure and supports. *Struct. Multidisc. Optim.*, v.23, p.336-346, 2002.

CARDOSO, E.L. **Controle de Complexidade na Otimização Topológica de estruturas Contínuas**. 2000. 120p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2000.

CHATEAUX, J.F.; NADI, M. Comparison of Performances of Electrical Impedance Tomography Evaluated with 2-D and 3-D Models. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, v.48, p.1874-1878, 2000.

CHEN, B.C.; SILVA, E.C.N.; KIKUCHI, N. Advances in computational design and optimization with application to MEMS. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v.52, p.23-62, 2001.

CHENEY, M.; ISAACSON, D. “Issues in Electrical Impedance Imaging”, *IEEE Computational Sci. Eng.*, v.2, p.53 – 62, 1995.

CHENEY, M.; ISAACSON, D.; GOBLE, J.C. Electrical Impedance Tomography in Three Dimensions. *Appl. Computational Electromagn. Soc. J.*, v.7, p.128-148, 1992.

CHENEY, M.; ISAACSON, D.; NEWELL, J.C. “Electrical Impedance Tomography”, *SIAM review*, v.41, p.85-101, 1992.

CHENEY, M. et al. A Layer-stripping Reconstruction Algorithm for Impedance Imaging. In: *Proc. Ann. Int. Conf. IEEE EMBS, Paris, 1992. Anais. Paris 1992.* p.1694-1695.

CHENEY, M. et al. A Layer-stripping Reconstruction Algorithm for Impedance Imaging. In: *Proc. Ann. Int. Conf. IEEE EMBS, Orlando, 1991. Anais. Orlando,* p.3-4.

CHOI, M.H. et al. A reconstruction algorithm for breast cancer imaging with electrical impedance tomography in mammography geometry. *IEEE Transactions On Biomedical Engineering*, v.54, p.700-710, 2007.

CHRISTENSEN, P.T.; MUROTSU, Y. **Application of Structural Systems Reliability Theory**. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

CHURCHILL, R.V.; BROWN, J.W. **Complex Variables and Applications**. Fifth edition McGraw-Hill, Inc., 1990.

CLAY, M.T.; FERREE, T.C. Weighted regularization in electrical impedance tomography with applications to acute cerebral stroke. *IEEE Trans. Med. Imag.*, v.21, p.629–637, 2002.

COOK, R.D. et al. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4.ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002.

DEAK, I. Three Digit Accurate Multiple Normal Probabilities. *Numerische Mathematik*, v.35, p.369-380, 1980.

DEGHANI, H. et al. Excitation Patterns in Three-Dimensional Electrical Impedance Tomography. *Physiol. Meas.*, v.26, p.S185-S197, 2005.

DEGHANI, H.; SOLEIMANI, M. Numerical modeling errors in electrical impedance tomography. *Physiological Measurement*. v.28, p.S45-S55, 2007.

DITLEVSEN, O. Taylor Expansion of Series System Reliability. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, v.110, p.293-307, 1984.

ECKEL, H.; KRESS, R. Nonlinear integral equations for the inverse electrical impedance problem. *Inverse Problems*, v.23, p.475-491, 2007.

FABRIZI, L. et al. Analysis of resting noise characteristics of three EIT systems in order to compare suitability for time difference imaging with scalp electrodes during epileptic seizures. *Physiological Measurement*, v.28, p.S217-S236, 2007.

FREIMARK et al. Monitoring lung fluid content in CHF patients under intravenous diuretics treatment using bio-impedance measurements. *Physiological Measurement*, v.28, p.S269-S277, 2007.

FRERICHS et al. Reproducibility of regional lung ventilation distribution determined by electrical impedance tomography during mechanical ventilation *Physiological Measurement*, v.28, p.S261-S267, 2007.

FUCHS, M.B.; MOSES, E. Optimal structural topologies with transmissible loads. *Struct. Multidisc. Optim.*, v.19, p.263-273, 2000.

GIACAGLIA, G.E.O. *Vetores e geometria analitica - elementos de álgebra linear*. 3ª edição São Paulo: Nobel, 1985.

GOHARIAN, M.; JEGATHEESAN, A.; MORAN, G.R. Dogleg trust-region application in electrical impedance tomography. *Physiological Measurement*, v.28, p.555-572, 2007.

GOHARIAN, M. et al. A novel approach for EIT regularization via spatial and spectral principal component analysis. *Physiological Measurement*, v.28, p.1001-1016, 2007.

GRAHAM, B.M.; ADLER, A. Electrode placement configurations for 3D EIT. *Physiological Measurement*, v.28, p.S29-S44, 2007.

GRANOT, Y.; RUBINSKY, B. Methods of optimization of electrical impedance tomography for imaging tissue electroporation. *Physiological Measurement*, v.28, p.1135-1147, 2007.

GUEST, J.K.; PRÉVOST, J.H.; BELYTSCHKO, T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v.61, p.238-254, 2004.

HAFTKA, R.T.; GÜRDAL, Z. **Elements of Structural Optimization**. 3.ed. Kluwer Netherlands: Academic Publishers, 1999.

HALTER, R.J.; HARTOV, A.; PAULSEN, K.D. Experimental justification for using 3D conductivity reconstructions in electrical impedance tomography. *Physiological Measurement*, v.28, p.S115-S127, 2007.

HARTINGER, A.E.; GAGNON, H.; GUARDO, R. Accounting for hardware imperfections in EIT image reconstruction algorithms. *Physiological Measurement*, v.28, p.S13-S27, 2007.

HEIKKINEN et al. Simultaneous reconstruction of electrode contact impedances and internal electrical properties: I. Laboratory experiments. *Measurement Science and Technology*, v.13, p.1855-1861, 2002.

HERRERA, C.N.L. Algoritmo de Tomografia por Impedância Elétrica baseado em *Simulated Annealing*. 2007. 59p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2007.

HU et al. A hybrid reconstruction algorithm for electrical impedance tomography. *Measurement Science & Technology*, v.18, p.813-818, 2007.

HUA, P. et al. Finite Element Modeling of Electrode-Skin Contact Impedance in Electrical Impedance Tomography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v.40, p.335-343, 1993.

HUANG, C.N.; YU, F.M.; CHUNG, H.Y. Rotational electrical impedance tomography. *Measurement Science & Technology*, v.18, p.2958-2966, 2007.

HYARIC, A.L.; PIDCOCK, M.K. An Image Reconstruction Algorithm for Three-Dimensional Electrical Impedance Tomography. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, v.48, p.230-235, 2001.

JUNG, H.S.; CHO S. Reliability-based topology optimization of geometrically nonlinear structures with loading and material uncertainties. *Finite Element in Analysis and Design*, v.43, p.311-331, 2004.

KAIPIO, J.; SOMERSALO, E. **Statistical and Computational Inverse Problems**. New York: Springer Science+Business Media, Inc., 2005.

KANG, J.; KIM, C.; WANG, S. Reliability-based topology optimization for electromagnetic systems. *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, v.23, p.715-723, 2004.

KAO T.J. et al. A compensated radiolucent electrode array for combined EIT and mammography. *Physiological Measurement*, v.28, S291-S299, 2007.

KHARMANDA, G., MOHAMED, A.; LEMAIRE, M. Efficient reliability-based design optimization using a hybrid space with application to finite element analysis. *Struct. Multidisc. Optim.*, v.24, p.233-245, 2004.

KHARMANDA, G.; OLHOFF, N.; EL-HAMI, A. Optimum values of structural safety factors for a predefined reliability level with extension to multiple limit states. *Struct. Multidisc. Optim.*, v.27, p.421-434, 2004.

KHARMANDA, G. et al. Reliability-based topology optimization. *Struct. Multidisc. Optim.*, v.26, p.295-307, 2004.

KILMER, M.E.; STURLER, E. Recycling subspace information for diffuse optical tomography. *SIAM J. Sci. Comput.*, v.27, p.2140-2166, 2006.

KIM, Y.; WEBSTER, J.G.; TOMPKINS, W.J. Electrical Impedance Imaging of the Thorax. *J. Microwave Power*, v.18, p.245-257, 1983.

KIM, K.Y. et al. Image reconstruction in time-varying electrical impedance tomography based on the extended Kalman filter. *Meas. Sci. Technol.*, v.12, p.1032-1039, 2001.

KIM, M.C. et al. Regularization Methods in Electrical Impedance Tomography Technique for the Two-Phase Flow Visualization. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, v.28, p.773-782, 2001.

KIM, K.Y. et al. Dynamic Electrical Impedance Tomography with Known Internal Structures. *Inverse Problems in Engineering*, v.11, p.1-19, 2003.

KIM et al. Reliability-Based Topology Optimization of Laser Scanned Model. In: 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, Albany, New York, 2004. **Anais**. Albany, 2004.

KIM, B.S. et al. The complete electrode model for EIT in a mammography geometry. *Physiological Measurement*, v.28, p.S57-S69, 2007.

KIM, S. et al. Moving interfacial boundary estimation in stratified flow of two immiscible liquids using electrical resistance tomography. *Measurement Science & Technology*, v.18, p.1257-1269, 2007.

KIM, H.J. et al. Conductivity imaging of canine brain using a 3 T MREIT system: postmortem experiments. *Physiological Measurement*, v.28, p.1341-1353, 2007.

KIM, B.S. et al. A method for analyzing electrical impedance spectroscopy data from breast cancer patients. *Physiological Measurement*, v.28, p.S237-S246, 2007.

KOHN R.V.; MCKENNEY, A. Numerical implementation of a variational method for electrical impedance tomography. *Inv. Prob.*, v.6, p.389-414, 1990.

KOLEHMAINEN V. et al. A Bayesian approach and total variation priors in 3D Electrical Impedance Tomography. In: Proceedings of the 20th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, Hong Kong, 1998. **Anais**. v.20, 1998.

KORJENEVSKY, A.V.; TUYKIN, T.S. Electric field tomography: setup for single-channel measurements. *Physiological Measurement*, v.28, p.S279-S289, 2007.

KORTSCHAK, B.; WEGLEITER, H.; BRANDSTATTER, B. Formulation of cost functionals for different measurement principles in nonlinear capacitance tomography. *Measurement Science & Technology*, v.18, p.71-78, 2007.

KWON et al. Noise analysis and MR pulse sequence optimization in MREIT using an injected current nonlinear encoding (ICNE) method. *Physiological Measurement*, v.28, p.1391-1404, 2007.

LARSEN, U.D.; SIGMUND, O.; BOUWSTRA, S. Design and Fabrication of Compliant Mechanisms and Material Structures with Negative Poisson's Ratio. *Journal of Micro Electro Mechanical Systems*, "MEMS", v.6, p.99-106, 1997.

LEE et al. Optimization of current injection pulse width in MREIT. *Physiological Measurement*, v.28, p.N1-N7, 2007.

LI, X.; XU, Y.; HE, B. Imaging electrical impedance from acoustic measurements by means of magnetoacoustic tomography with magnetic induction (MAT-MI). *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v.54, p.323-330, 2007.

LIMA, C.R. **Projeto de Mecanismos Flexíveis Usando o Método de Otimização Topológica**. 2002. 146p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2002.

LIMA, C.R. Estudo da Obtenção de Imagens de Tomografia por Impedância Elétrica (TIE) do Pulmão pelo Método de Otimização Topológica (MOT). São Paulo: publicação própria, 2003. (Primeiro Relatório Científico FAPESP).

LIMA, C.R.; LIMA, R.G.; SILVA, E.C.N. Image Reconstruction Based On Topology Optimization And Applied To Electrical Impedance Tomography. In: XII International Conference on Electrical Bioimpedance & V Impedance Electrical Tomography, Gdansk, 2004. **Anais**. São Paulo, 2004.

LIMA, C.R. et al. Electrical impedance tomography through constrained sequential linear programming: a topology optimization approach. *Measurement Science & Technology*. v.18, p.2847-2858, 2007.

LUEPSCHEN, H. et al. Protective ventilation using electrical impedance tomography. *Physiological Measurement*, v.28, p.S247-S260, 2007.

LUKASCHEWITSCH, M.; MAASS, P.; PIDCOCK, M. Tikhonov regularization for electrical impedance tomography on unbounded domains. *Inverse Problems*, v.19, p.585-610, 2003.

MA, Q.Y.; HE, B. Investigation on magnetoacoustic signal generation with magnetic induction and its application to electrical conductivity reconstruction. *Physics in Medicine and Biology*, v.52, p.5085-5099, 2007.

MACKEY, G.E. **Reusing Krylov Subspaces for Sequences of Linear Systems**. 2003. 80p. Dissertação (Mestrado) – Graduate College of the University of Illinois at Urbana-Champaign. Urbana, Illinois, 2003.

MADSEN, H.O.; KRENK, S.; LIND, N.C. **Methods of Structural Safety**. New York: Dover Publications, Inc., 2006.

MATSUI, K.; TERADA, K. Continuous Approximation of Material Distribution for Topology Optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.59, p.1925-1944, 2004.

MAUTE, K.; FRANGOPOL, D.M. Reliability-based design of MEMS mechanisms by topology optimization. *Computers and Structures*, v.81, p.813-824, 2003.

MCEWAN, A.; CUSICK, G.; HOLDER, D.S. A review of errors in multi-frequency EIT instrumentation. *Physiological Measurement*, v.28, p.S197-S215, 2007.

METHERALL, P. **Three Dimensional Electrical Impedance Tomography of the Human Thorax**. 1998. 227p. Tese (Doutorado) – Department of Medical Physics and Clinical Engineering, University of Sheffield. Western Bank, Sheffield, 1998.

MELLO, L.A.M. **Desenvolvimento de um Software de Otimização Topológica Aplicado a Peças e Estruturas num Domínio Bidimensional**. 2002. 74p. Trabalho de Formatura – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2002.

MELLO, L.A.M. Estudo da Obtenção de Imagens Tridimensionais de Tomografia por Impedância Elétrica pelo Método de Otimização Topológica. 2005. 150p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2005.

MELLO, L.A.M. et al. Three-Dimensional Electrical Impedance Tomography: a Topology Optimization Approach. IEEE transactions on Biomedical Engineering, v.55, 531-540, 2008.

MERWA, R.; SCHARFETTER, H. Magnetic induction tomography: evaluation of the point spread function and analysis of resolution and image distortion. Physiological Measurement, v.28, p.S313-S324, 2007.

MOGAMI K. et al. Reliability-based structural optimization of frame structures for multiple failure criteria using topology optimization techniques. Struct. Multidisc. Optim., v.32, p.299–311, 2006.

MOLINA, N.A.V. **Redução de Erro Numérico no Filtro Estendido de Kalman Aplicado à Tomografia por Impedância Elétrica.** 2002. 152p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2002.

MOLINARI, M. et al. Efficient Non-Linear 3D Electrical Tomography Reconstruction. In: 2nd World Congress on Industrial Process Tomography, Hannover, 2001. **Anais.** Hannover, 2001. p. 424-432. (ISBN: 0 85316 2247)

MOON, H.; KIM, C.; WANG, S. Reliability-Based Topology Optimization of Thermal Systems Considering Convection Heat Transfer. In: 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, Albany, New York, 2004. **Anais.** Albany, 2004.

MURPHY, E.K.; MUELLER, J.L.; NEWELL, J.C. Reconstructions of conductive and insulating targets using the D-bar method on an elliptical domain. Physiological Measurement, v.28, p.S101-S114, 2007.

NAM, H.S. et al. Conductivity imaging with low level current injection using transversal J-substitution algorithm in MREIT. Physics In Medicine And Biology, v.52, p.6717-6730, 2007.

NACHMAN, A.I. Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem. Ann. Math., v.143, p.71–96, 1996.

NETO, P.L.O.C.; CYMBALISTA, M. **Probabilidades**. 15ª reimpressão, Brasil: Editora Edgard Blücher Ltda., 2000.

NGUYEN, T.H.; SONG, J.; PAULINO, G.H. Single-Loop System Reliability Based Design Optimization (SRBTO) Using Matrix-based System Reliability (MSR) Method. Boletim Interno, University of Illinois, Urbana, Illinois, USA.

OH, T.I.; WOO, E.J.; HOLDER, D. Multi-frequency EIT system with radially symmetric architecture: KHU Mark1. *Physiological Measurement*, v.28, p.S183-S196, 2007.

OH et al. Calibration methods for a multi-channel multi-frequency EIT system. *Physiological Measurement*, v.28, p.1175-1188, 2007.

PAPOULIS, A.; PILLAI, S.U. **Probability, Random Variables and Stochastic Processes**. 4th edition McGraw-Hill Higher Education, 2002.

PARK, C.; LEE, B.I.; KWON, O.I. Analysis of recoverable current from one component of magnetic flux density in MREIT and MRCDI. *Physics In Medicine and Biology*, v.52, p.3001-3013, 2007.

PARK et al. Measurement of induced magnetic flux density using injection current nonlinear encoding (ICNE) in MREIT. *Physiological Measurement*, v.28, p.117-127, 2007.

PARKS, M.L.; STURLER, E.; MACKEY, G.; JOHNSON D.D.; SPANDAN, M. Recycling Krylov Subspaces for Sequences of Linear Systems. *SIAM J. Sci. Comput.*, v.28, p.1651-1674, 2006.

PAULSON, K.S., PIDCOCK M.K., MCLEOD, C.N. A Probe for Organ Impedance Measurement. *IEEE transactions on Biomedical Engineering*, v.51, 1838-1844, 2004.

PHILLIPS, C.J. **Glass: Its Industrial Applications**. New York: Reinhold, 1960.

PRESS, W.H. et al. *Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1999.

POLYDORIDES, N.; MCCANN H. Electrode Configurations for Improved Spatial Resolution in Electrical Impedance Tomography, *Meas. Sci. Technol.*, v.13, p.1862-1870, 2002.

QU, X.; HAFTKA, R.T. Reliability-based design optimization using probabilistic sufficiency factor. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.27, p.314-325, 2004.

RAULI, M.; MAUTE, K. Topology optimization of electrostatically actuated microsystems. *Struct. Multidisc. Optim.*, v.30, p.342-359, 2005.

RICE, S.O. Distribution of Quadratic Forms in Normal Random Variables Evaluation by Numerical Integration. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, v.1, p.438-448, 1980.

RUBEN, H. An Asymptotic Expansion for the Multivariate Normal Distribution and Mill's Ratio. *Journal of Research NBC (Mathematics and Mathematical Physics)*, v.68B, p.3-11, 1964.

RUUSKANEN et al. Using process tomography as a sensor for optimal control. *Applied Numerical Mathematics*, v.56, p.37-54, 2006.

SAAD, Y. **Iterative Methods for Sparse Linear Systems**. 2nd edition Philadelphia: SIAM, 2003.

SABATIER, P.C.; SEBU, C. On the resolving power of electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, v.23, p.1895-1913, 2007.

SADLEIR, R.J. et al. Imaging and quantification of anomaly volume using an eight-electrode "hemiarrray" EIT reconstruction method. *Physiological Measurement*, v.29, p.913-927, 2008.

SANTOSA, F.; VOGELIUS, M. A Backprojection Algorithm for Electrical Impedance Imaging. *SIAM J. Appl. Math.*, v.50, p.216-243, 1990.

SIGMUND, O. On the Design of Compliant Mechanisms using Topology Optimization. *Mechanics of Structures and Machines*, v.25, p.495-526, 1997.

SIGMUND, O. Topology optimization: a tool for the tailoring of structures and materials. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, v.358, p.211-227, 2000.

SILVA, E.C.N.; NISHIWAKI, S.; KIKUCHI, N. Topology Optimization Design of Flexensional Actuators. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, v.47, p.657-671, 2000.

SOLEIMANI M.; POWELL C.E.; POLYDORIDES, N. Improving the forward solver for the complete electrode model in eit using algebraic multigrid. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v.24, p.577-583, 2005.

SOLEIMANI M.; LABERGE, C.G.; ADLER, A. Imaging of conductivity changes and electrode movement in EIT. *Physiological Measurement*, v.27, p.S103-S113, 2006.

SOLEIMANI, M. et al. Dynamic imaging in electrical capacitance tomography and electromagnetic induction tomography using a Kalman filter. *Measurement Science & Technology*, v.18, p.3287-3294, 2007.

SONG, J; KANG, W.H. System reliability and sensitivity under statistical dependence by matrix-based system reliability method. *Structural Safety*, v.31, p.148-156, 2009.

STUMP, F.V.; SILVA, E.C.N.; PAULINO, G.H. Optimization of material distribution in functionally graded structures with stress constraints. *Commun. Numer. Meth. Eng.*, v.23, p.535-551, 2006.

STURLER, E. Truncation strategies for optimal Krylov subspace methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, v.36, p.864-889, 1999.

TANGUAY, L.F.; GAGNON, H.; GUARDO, R. Comparison of applied and induced current electrical impedance tomography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v.54, p.1643-1649, 2007.

TCHERNIAK, D. Topology optimization of resonating structures using SIMP method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.54, p.1605-1622, 2002.

TIKHONOV, A.N.; ARSENIN, V.Y. **Solutions of Ill-Posed Problems**. Washington D.C.: Winston V.H. & Sons N.W., 1977.

TRIGO, F.C. **Filtro Estendido de Kalman Aplicado à Tomografia por Impedância Elétrica**. 2001. 113p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2001.

TRIGO, F.C.; LIMA, R.G.; AMATO, M.B.P. Electrical Impedance Tomography Using the Extended Kalman Filter. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v.51, p.72-81, 2004.

TVEDT, L. Two Second-Order Approximations to the Failure Probability. Veritas Report RDIV/20-004-83, Det norske Veritas, Oslo, Norway, 1983.

VALLEJO, M.F.M. **Algoritmo de Tomografia por Impedância Elétrica utilizando Programação Linear como Método de Busca da Imagem.** 2007. 60p. Exame de Qualificação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2007.

VALLEJO, M.F.M. **Algoritmo de Tomografia por Impedância Elétrica utilizando Programação Linear como Método de Busca da Imagem.** 2007. 95p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2007.

VALLEJO, M.F.M. et al. An algorithm for real time estimation of electrode position in Electrical Impedance Tomography. In: Technology Meets Surgery International 4, Dundee, Scotland, 2006. **Anais.** Dundee, 2006.

VAN DER VORST, H.A. **Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems.** Cambridge University Press, 2003.

VAN DEN DOEL, K.; ASCHER, U.M. Dynamic level set regularization for large distributed parameter estimation problems. *Inverse Problems*, v.23, p.1271-1288, 2007.

VANDERPLATZ, G.N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Applications.** McGraw-Hill, 1984.

VAUHKONEN, M.; KARJALAINEN, P.A.; KAIPIO, J.P. A Kalman Filter Approach to Track Fast Impedance Changes in Electrical Impedance Tomography, *IEEE Trans Biomed Eng.*, v.45, p.486-493, 1998.

VAUHKONEN, P.J. et al. Three-Dimensional Electrical Impedance Tomography Based on the Complete Electrode Model. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v.46, p.1150-1160, 1999.

VAUHKONEN, P.J. **Image Reconstruction in Three-Dimensional Electrical Impedance Tomography.** 2004. Tese (Doutorado) – Department of Applied Physics, University of Kuopio, Kuopio, Finlândia, 2004.

VAUHKONEN, P.J. et al. Iterative Image Reconstruction in Three-Dimensional Electrical Impedance Tomography. In: *Inverse Problems, Design and Optimization Symposium*, Rio de Janeiro, 2004. **Anais.** Rio de Janeiro, 2004.

VILHUNEN et al. Simultaneous reconstruction of electrode contact impedances and internal electrical properties: I. Theory. *Measurement Science and Technology*, v.13, p.1848-1854, 2002.

VILHUNEN et al. Detection of faults in resistive coatings with an impedance-tomography-related approach. *Measurement Science and Technology*, v.13, p.865-872, 2002.

WANG, S.; STURLER, E.; PAULINO, G.H. Large-scale topology optimization using preconditioned Krylov subspace methods with recycling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.69, p.2441-2468, 2007.

WANG, S. **Krylov subspace methods for topology optimization on adaptive meshes.** 2007. Tese (Doutorado) – University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, 2007.

WATZENIG, D.; BRANDNER, M.; STEINER, G. A particle filter approach for tomographic imaging based on different state-space representations. *Measurement Science & Technology*, v.18, p.30-40, 2007.

WATZENIG, D.; FOX, C. A review of statistical modeling and inference for electrical capacitance tomography. *Measurement Science & Technology*, v.20, p.1-22, 2009.

WEXLER A.; FRY B.; NEUMAN M.R. Impedance Computed Tomography Algorithm and Systems. *Appl. Optics*, v.24, p.3985 – 3992, 1985.

WOO, E.J. et al. A Robust Image Reconstruction Algorithm and its Parallel Implementation in Electrical Impedance Tomography. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, v.12, p.137-146, 1993.

WEGMUELLER, M.S. et al. An attempt to model the human body as a communication channel. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v.54, p.1851-1857, 2007.

WEST, R.M. et al. Markov chain Monte Carlo Techniques and spatial-temporal modelling for medical EIT. *Physiological Measurement*, v.25, p.181-194, 2004.

YANG, R.J.; GU, L. Experience with approximate reliability-based optimization methods. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.26, p.152-159, 2004.

YIN, L.; ANANTHASURESH, G.K. Topology Optimization of Compliant Mechanisms with Multiple Materials Using a Peak Function Material Interpolation Scheme. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.23, p.49-62, 2001.

YOUN, B.D. et al. Reliability-based design optimization for crashworthiness of vehicle side impact. *Struct. Multidisc. Optim.*, v.26, p.272-283, 2004.

APÊNDICE A – UTILIZAÇÃO DE DADOS DE DIFERENÇAS DE POTENCIAIS ELÉTRICOS: RESULTADOS TEÓRICOS

Após a mudança do hardware de medição promovida no grupo do Projeto Temático de TIE, passaram a ser medidas diferenças de potenciais entre dois eletrodos diferentes (vide Figura 82). O problema de TIE, após esta mudança, passou então a ser o de minimização da diferença entre deltas de potenciais medidos, entre dois eletrodos, e deltas correspondentes, de potenciais calculados. Assim, comparam-se diferenças de potenciais medidas e calculadas pelo MEF. Ao mesmo tempo, passou-se a aplicar corrente por um eletrodo e retirar o mesmo valor por outro, não sendo prescrito nenhum valor de potencial no caso da cuba de medição ou do paciente (vide Figura 82). Para que as diferenças de potenciais medidas e calculadas possam ser coerentemente comparadas, o modelo matemático deve acompanhar esse novo arranjo e deve prever o comportamento resultante. No entanto, necessita-se de uma referência para que o problema matemático referente ao cálculo dos potenciais elétricos possa ser resolvido.

Nesta seção mostra-se, para o caso contínuo, como abordar tal problema, calculando-se diferenças de potenciais entre eletrodos para serem comparados aos valores medidos, à partir dos potenciais elétricos obtidos para um valor de potencial de referência qualquer, imposto numa região qualquer. O caso numérico (MEF) é uma extensão desse caso geral, mas não será, no entanto, tratado.

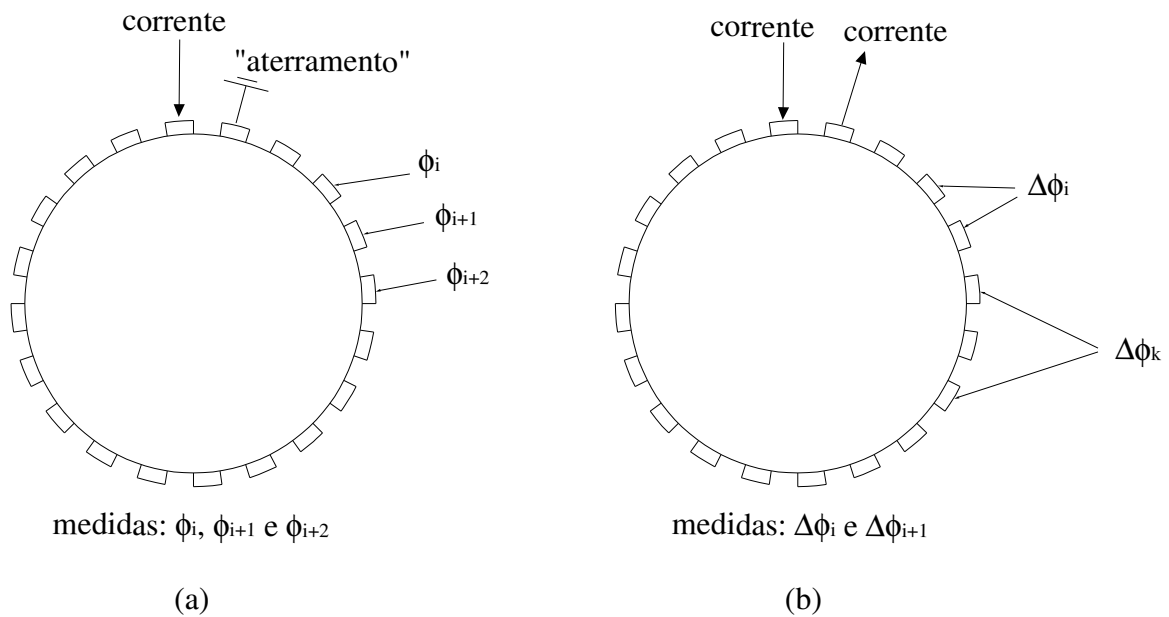


Figura 82 Dois esquemas do corpo tomografado. (a) Antes da mudança do “hardware” de medição pelo grupo do Projeto Temático de TIE; (b) após a mudança do “hardware de medição”; as diferenças de potencial podem ser medidas entre dois eletrodos quaisquer (não somente entre vizinhos), o que é sugerido na figura.

Considere-se um corpo cujo modelo seja dado pela eq.(2.2.1) e apresente, devido a correntes elétricas quaisquer aplicadas aos eletrodos, um determinado valor de potencial elétrico numa dada região. Considere-se, paralelamente a isso, a aplicação de um potencial elétrico ao modelo do corpo, sendo a região e o valor correspondentes à região e valor mencionados, e considere-se também que os demais parâmetros, ou seja, a geometria e condições de contorno, sejam semelhantes. Nessas condições, espera-se que a proximidade entre os potenciais elétricos nos dois casos seja ditada pela qualidade do modelo.

Fixando-se, então, a precisão do modelo como suficiente, considere-se a aplicação de um potencial elétrico a esse modelo, na mesma região citada no parágrafo anterior e de mesmo valor, acrescido de uma constante qualquer, e considere-se também que os demais dados, ou seja, a geometria e condições de contorno sejam os mesmos. Se, nesse caso, **todos os potenciais elétricos forem acrescidos do mesmo valor da constante**, a diferença entre os potenciais de duas regiões ou pontos quaisquer do domínio do modelo se conserva. Portanto, para precisão suficiente do modelo, mostra-se que diferenças de potenciais entre eletrodos do modelo obtidos para um valor de potencial de referência qualquer e num local qualquer, podem ser comparados aos valores medidos. Para atingir o objetivo do atual capítulo, mencionado anteriormente, resta provar a sentença em negrito.

Para tanto, imaginem-se duas distribuições que satisfazem a eq.(2.2.1) V_1 e V_2 . Assim,

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V_1) = 0 \text{ e } \nabla \cdot (\sigma \nabla V_2) = 0 \quad (\text{APÊNDICE A.1})$$

e valem

$$\nabla \cdot [\sigma \nabla (V_1 - V_2)] = 0 \quad (\text{APÊNDICE A.2})$$

e

$$(V_1 - V_2) \nabla \cdot [\sigma \nabla (V_1 - V_2)] = 0. \quad (\text{APÊNDICE A.3})$$

Assim, integrando-se no domínio considerando a função, pelo menos, contínua por partes, tem-se

$$\int_{\tau} (V_1 - V_2) \nabla \cdot [\sigma \nabla (V_1 - V_2)] dv = 0. \quad (\text{APÊNDICE A.4})$$

Porém, tem-se que

$$\nabla \cdot [(V_1 - V_2) \sigma \nabla (V_1 - V_2)] = (V_1 - V_2) \nabla \cdot [\sigma \nabla (V_1 - V_2)] + \sigma [\nabla (V_1 - V_2)]^2 \quad (\text{APÊNDICE A.5})$$

e, portanto,

$$\int_{\tau} \nabla \cdot [(V_1 - V_2) \sigma \nabla (V_1 - V_2)] dv - \int_{\tau} \sigma [\nabla (V_1 - V_2)]^2 dv = 0. \quad (\text{APÊNDICE A.6})$$

Define-se que o gradiente de $V_1 - V_2$ elevado ao quadrado, corresponde ao produto escalar de tal gradiente.

Ainda, do Teorema da Divergência, ou Teorema de Gauss, tem-se que

$$\begin{aligned}
\int_{\tau} \nabla \cdot [(V_1 - V_2) \sigma \nabla (V_1 - V_2)] dv &= \\
&= \oint_S (V_1 - V_2) \sigma \nabla (V_1 - V_2) \cdot d\mathbf{a} = \quad , \quad (\text{APÊNDICE A.7}) \\
&= \oint_S (V_1 - V_2) \sigma \nabla (V_1 - V_2) \cdot \mathbf{n}_S da
\end{aligned}$$

onde S é a superfície do domínio e \mathbf{n}_S é o vetor normal que aponta para fora do domínio. Com a eq.(APÊNDICE A.6) e a eq.(APÊNDICE A.7),

$$\oint_S (V_1 - V_2) \sigma \frac{\partial (V_1 - V_2)}{\partial n_S} da - \int_{\tau} \sigma [\nabla (V_1 - V_2)]^2 dv = 0. \quad (\text{APÊNDICE A.8})$$

Analisando-se a primeira parcela, tem-se que

$$\begin{aligned}
\oint_S (V_1 - V_2) \sigma \frac{\partial (V_1 - V_2)}{\partial n_S} da &= \\
&= \int_{\partial\tau_1} (V_1 - V_2) \sigma \left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_S} \right)_p - \left(\frac{\partial V_2}{\partial n_S} \right)_p \right] da + , \quad (\text{APÊNDICE A.9}) \\
&\quad + \int_{\partial\tau_v} (V_{1p} - V_{2p}) \sigma \frac{\partial (V_1 - V_2)}{\partial n_S} da
\end{aligned}$$

onde p indica que a função foi prescrita e $\partial\tau_1 \cup \partial\tau_v = S$. O primeiro termo é considerado nulo pois, por hipótese inicial, considera-se que

$$\sigma \left(\frac{\partial V_1}{\partial n_S} \right)_p = \sigma \left(\frac{\partial V_2}{\partial n_S} \right)_p. \quad (\text{APÊNDICE A.10})$$

O segundo termo da primeira parcela é igual a

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\tau_v} (V_{2p} + \mu - V_{2p}) \sigma \frac{\partial(V_1 - V_2)}{\partial n_s} da = \\
& = \mu \int_{\partial\tau_v} \sigma \frac{\partial V_1}{\partial n_s} da - \mu \int_{\partial\tau_v} \sigma \frac{\partial V_2}{\partial n_s} da = \quad , \quad (\text{APÊNDICE A.11}) \\
& = \mu \int_{\partial\tau_v} \Lambda_{n1} da - \mu \int_{\partial\tau_v} \Lambda_{n2} da = \mu(\xi_1 - \xi_2)
\end{aligned}$$

para o que se admitiu que

$$V_{1p} = V_{2p} + \mu , \quad (\text{APÊNDICE A.12})$$

como já havia sido sugerido que seria feito, sendo μ constante em $\partial\tau_v$. Finalmente, as correntes ξ_1 e ξ_2 obedecem $\xi_1 = \xi_2 = 0$, uma vez que não se aplica corrente pelo contorno onde se impõe potencial.

Portanto, a eq.(APÊNDICE A.8) fica igual a

$$\int_{\tau} \sigma [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dv = 0. \quad (\text{APÊNDICE A.13})$$

Assim, e como a condutividade é assumida estritamente positiva e o gradiente da subtração é elevado ao quadrado, obtém-se

$$\nabla(V_1 - V_2) = 0 \quad (\text{APÊNDICE A.14})$$

no domínio, o que é equivalente a

$$V_1 - V_2 = \text{cte} , \quad (\text{APÊNDICE A.15})$$

também no domínio. Assim e analisando-se a eq.(APÊNDICE A.12), vê-se que:

$$V_1 - V_2 = \text{cte} = \mu . \quad (\text{APÊNDICE A.16})$$

Pode-se, portanto, concluir que o potencial no domínio é acrescido de um valor constante quando o potencial na borda do mesmo apresenta acréscimo do mesmo valor. Isso significa que qualquer valor de potencial prescrito na superfície do domínio pode ser utilizado no cálculo das diferenças de potenciais, já que elas se conservam.

Agora, analisa-se o caso em que a diferença de μ com relação aos potenciais prescritos é considerada no interior do domínio (estritamente). Nesse caso, a eq.(APÊNDICE A.9) fica

$$\oint_S (V_1 - V_2) \sigma \frac{\partial(V_1 - V_2)}{\partial n_s} da =$$

$$= \int_S (V_1 - V_2) \sigma \left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_s} \right)_p - \left(\frac{\partial V_2}{\partial n_s} \right)_p \right] da = 0, \quad (\text{APÊNDICE A.17})$$

dada a eq.(APÊNDICE A.10). Assim, a eq.(APÊNDICE A.8) também resulta na eq.(APÊNDICE A.13), a qual pode ser escrita, no caso em que os potenciais são prescritos na região interior qualquer τ_μ , como

$$\int_{\tau - \tau_\mu} \sigma [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dv + \int_{\tau_\mu} \sigma [\nabla(V_{1p} - V_{2p})]^2 dv = 0, \quad (\text{APÊNDICE A.18})$$

onde $\tau - \tau_\mu$ é o volume total menos a região τ_μ . Assim, dada a eq.(APÊNDICE A.12), que pode ser utilizada neste contexto também, e dado que μ é constante na região τ_μ , a segunda parcela é nula, o que significa que a eq.(APÊNDICE A.15) também vale aqui, mas para o domínio $\tau - \tau_\mu$. Finalmente, resta considerar que, na interface entre as duas regiões consideradas, τ_μ e $\tau - \tau_\mu$, vale que

$$V_{1p} = (V_1)_{\tau - \tau_\mu} \quad \text{e} \quad V_{2p} = (V_2)_{\tau - \tau_\mu}. \quad (\text{APÊNDICE A.19})$$

Assim, a diferença de potenciais na interface é igual a μ e, como vale a eq.(APÊNDICE A.15) em $\tau - \tau_\mu$, vale, em todo o volume, a seguinte

$$V_1 - V_2 = \text{cte} = \mu. \quad (\text{APÊNDICE A.20})$$

Portanto, dados os resultados do atual capítulo, pode-se concluir que o potencial no domínio é acrescido de um valor constante quando o potencial em qualquer região do mesmo, seja a região uma superfície externa ou um volume interno, apresenta acréscimo do mesmo valor. Isso significa que qualquer valor de potencial prescrito em qualquer posição do domínio pode ser utilizado no cálculo das diferenças de potenciais, já que elas se conservam.

Finalmente, deve-se ressaltar que o desenvolvimento relatado se refere a potenciais prescritos em regiões dadas por volumes ou superfícies, sendo que o caso de regiões pontuais (MEF), utilizado no presente trabalho, não é abordado. Porém, apesar da falta da prova formal, não há razão para se acreditar que os resultados não possam ser estendidos para o caso pontual. Pode-se, na extensão, utilizar o conceito de limite de funções (CHURCHILL; BROWN, 1990), por exemplo, fazendo com que a região volumétrica tenda à pontual. No algoritmo de otimização relatado no capítulo 3, são obtidas as diferenças de potenciais no modelo à partir dos potenciais calculados considerando-se o potencial nulo num nó qualquer da malha.

Considerando-se, então, válidos os resultados do capítulo no caso de potenciais impostos nodais, pode-se afirmar que a inversão de apenas uma matriz de condutividade global é necessária para obtenção de diferenças de potenciais elétricos no modelo, qualquer que seja o padrão de corrente considerado.

APÊNDICE B – ATLAS ANATÔMICO NUMÉRICO

Um Atlas Anatômico é, segundo descrito por Kaipio e Somersalo (2005), o nome que pode ser dado a um conjunto de dados correspondente a uma série de medidas feitas a respeito de uma ou mais variáveis aleatórias. Assim, dadas 100 medidas de potenciais elétricos correspondentes à diferença de potencial entre dois eletrodos, tem-se o Atlas Anatômico correspondente a esta medida. O Atlas é obviamente uma fonte de informação que deve ser utilizada no processo de estimação da imagem em TIE.

Alguns exemplos de medidas que podem estar disponíveis são, como já explicitado, os potenciais elétricos, além das correntes elétricas, medidas de geometria do corpo e, como mencionado no livro de Kaipio e Somersalo (2005), os ruídos de medida e dados sobre a imagem obtidos, por exemplo, de outros métodos de estimação da imagem e/ou cirurgicamente.

Tais medidas – ou seja, o Atlas – são utilizadas na determinação de uma aproximação para a distribuição da densidade de probabilidade e na determinação dos momentos aproximados das variáveis aleatórias correspondentes às medidas. A estatística de segunda ordem de um vetor \mathbf{X} de variáveis aleatórias, por exemplo, pode ser aproximada por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbf{X}] &\approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{x}^j \\ \mathbf{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^T] &\approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{x}^j (\mathbf{x}^j)^T - \mathbf{E}[\mathbf{x}] \mathbf{E}[\mathbf{x}]^T, \end{aligned} \quad (\text{APÊNDICE B.1})$$

onde $\mathbf{E}[\cdot]$ é o operador média e $\mathbf{Cov}[\cdot]$ a covariância do vetor, definidos da forma padrão (NETO; CYMBALISTA, 2000), \mathbf{x}^j é o j -ésimo vetor de medidas ou realizações de cada variável aleatória e N é o número total de medidas ou realizações.

O algoritmo de MOTC implementado necessita da média e da covariância, calculadas, em análise preliminar, apenas para as variáveis que representam a imagem (variáveis de otimização) e para os valores de potenciais elétricos medidos, além de necessitar (o algoritmo) da densidade de probabilidade das variáveis aleatórias, para ser implementado.

Assim, em seguida, é mostrado como é gerado um Atlas Anatômico de forma numérica, aplicado à TIE, e como são obtidas aproximações dos momentos através do Atlas, baseando-

se na eq.(APÊNDICE B.1). A distribuição de densidade de probabilidade conjunta para as variáveis aleatórias do problema é determinada paralelamente, com base em hipóteses e no conhecimento aproximado de um Atlas Anatômico real.

APÊNDICE B.1 – Implementação

É importante ressaltar que se buscou emular uma situação real, simplificando-a tanto quanto razoável e necessário.

Assumem-se variáveis aleatórias gaussianas. Esta hipótese pode representar uma aproximação não satisfatória em algumas situações, uma vez que variáveis gaussianas não são limitadas, podendo assumir quaisquer valores reais, o que não ocorre com as condutividades elétricas do corpo humano, por exemplo. De fato, assume-se um limite superior existente para os valores de condutividade médios, bem como um limite inferior. Além disso, variáveis gaussianas apresentam uma geometria característica da densidade de probabilidades, a qual pode não ser realística. As mesmas observações não podem, porém, se feitas a respeito das medições de potencial elétrico, que se distribuem de forma aproximadamente gaussiana. Contudo, no caso de pequenas variações em torno da média, o que ocorre em alguns locais no corpo humano, a aproximação gaussiana é satisfatória.

Pode-se utilizar no caso das variáveis que definem as condutividades, uma distribuição do tipo Beta (NETO; CYMBALISTA, 2000). Tal distribuição, do ponto de vista de implementação do código de MOTC para a obtenção da imagem, bem como no tocante à fundamentação teórica envolvida, representa um fator complicador, uma vez que envolve a transformação de Rosenblatt para variáveis não-gaussianas (MADSEN; KRENK; LIND, 2006). Não se sabe no presente momento, por exemplo, se a densidade de probabilidade conjunta, necessária à implementação, é simples de ser obtida. A vantagem de tal distribuição Beta é que ela é definida entre valores máximo e mínimo, sendo nula fora desse intervalo, e pode ser modificada através de parâmetros. Isso permite que uma grande quantidade de curvas de densidade de probabilidade esteja disponível e, portanto, espera-se que algumas delas sejam suficientemente plausíveis tendo-se em vista dados experimentais.

É importante lembrar que ainda se aplicam os conceitos de malha do fantoma e malha de estimação, menos refinada. O desenvolvimento seguinte é realizado para a malha do fantoma, sendo o caso contrário anunciado com antecedência.

APÊNDICE B.1.1 – Determinação do Atlas Anatômico Numérico Simplificado

Seguindo o raciocínio citado anteriormente de que se busca, na medida do possível, emular a situação real, são, em primeiro lugar, definidas três regiões distintas no fantoma. São elas duas regiões onde a variação (desvio padrão) dos valores de propriedades medidas é relativamente pequena (regiões 1 e 3) e uma região de transição onde a variação é relativamente maior (região 2). Estas são mostradas na Figura 83. A região 1 pode corresponder ao ar, a 3 a um tecido que não o pulmão e a região 2 a uma região onde, muito provavelmente, está a interface, ou seja, assume-se que pouco se sabe a respeito da posição da interface.

Então, dividem-se as três regiões em elementos finitos e atribuem-se valores de desvio padrão a cada região, com base no que se discutiu no parágrafo anterior. Dessa maneira, pode-se definir parte da diagonal da matriz de covariância, formada por coeficientes referentes aos nós que representam a imagem. Os valores correspondentes são citados no final da subseção.

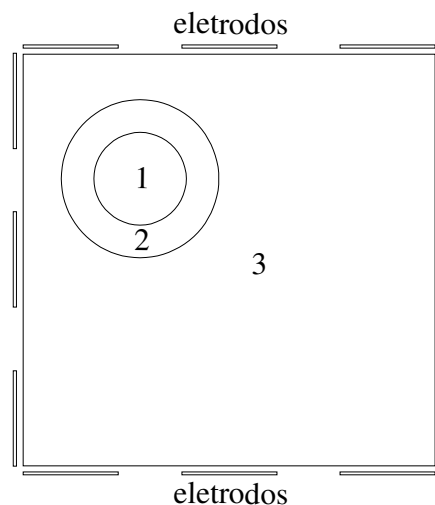


Figura 83 Esquema do fantoma, mostrando o domínio, as 3 regiões mencionadas no texto e os 12 eletrodos utilizados. A malha não foi desenhada para facilitar a visualização.

Então, impõe-se que as covariâncias para os pares de variáveis aleatórias correspondente aos nós são dadas por:

$$C_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \in R_1 \text{ e } j \in R_3 \text{ (ou } vice\ versa) \\ 0,9\rho_i\rho_j, & \text{se } i, j \in R_a, \text{ onde } a=1 \text{ ou } 3 \\ 0,9\rho_i\rho_j \left(1 - \frac{\text{dist}(i,j)}{\max(\text{dist}(i,j))}\right), & \text{se } i, j \in R_2 \\ 0,9\rho_i\rho_j \left(1 - \frac{\text{dist}(i,j)}{\max(\text{dist}(i,j))}\right)^2, & \\ & \text{se } i \in R_m \text{ e } j \in R_{m+1} \text{ (ou } vice\ versa) \end{cases} \quad (\text{APÊNDICE B.1.1})$$

onde C_{ij} é a covariância das variáveis aleatórias correspondentes aos nós i e j , os desvios padrão σ_i e σ_j se referem aos nós i e j , respectivamente, R_m é a m -ésima região do domínio, $\text{dist}(i,j)$ retorna a distância entre os nós i e j , $\max(\text{dist}(i,j))$ retorna a maior distância entre nós, e o termo

$$p = \left(1 - \frac{\text{dist}(i, j)}{\max(\text{dist}(i, j))}\right), \quad (\text{APÊNDICE B.1.2})$$

pondera a multiplicação de acordo com a distância entre nós. Obtém-se, assim, a matriz de covariância da imagem.

Em seguida, atribuem-se valores médios às três regiões. Os valores são dados na seqüência. De posse do vetor de médias e da matriz de covariância da imagem, obtém-se uma seqüência de dados de imagens distribuídas segundo tal matriz e vetor, da maneira explicada a seguir. Isso é feito a partir do gerador de números gaussianos do programa Matlab, que gera vetores de variáveis gaussianas cuja covariância é igual à matriz unidade e a média é nula. De posse de tais vetores, da matriz de covariância da imagem e da média, aplica-se uma

transformação linear de variáveis: $\mathbf{R} = \left((\mathbf{V}^T \text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{V})^{\frac{1}{2}} \mathbf{V}^T \right)^{-1} \mathbf{U} + \mathbf{E}[\mathbf{R}]$, vista na

eq.(3.2.25), que leva de um vetor de variáveis distribuídas fornecido pelo Matlab, a um vetor distribuído na forma da matriz de covariância e o vetor de médias mencionados. Assim, obtém-se uma seqüência de dados (vetores) referentes a variáveis aleatórias gaussianas distribuídas segundo a matriz de covariância e o vetor de médias construídos, o que significa que a seqüência de dados de imagem citada no início do parágrafo é gerada.

Finalmente, as variáveis são trazidas para os limites 0 e 1 se esses são ultrapassados. Obtém-se então o Atlas Anatômico referente às imagens.

Em síntese, geram-se fantasmas em que a região 2 mostra interface entre materiais das regiões 1 e 3 bem definida, mas com formatos variados. Podem surgir alguns artefatos indesejáveis em casos raros na região (2), como pequenas estruturas desconectadas da região 1 (ou 3) com a propriedade de material típica dessa última região. Esse fato também está atribuído à malha utilizada, que pode favorecer o aparecimento de tais artefatos. Porém, como são raros, aceita-se esse problema. Dadas as características das três regiões, pode-se notar que a aproximação gaussiana nas regiões 1 e 3 é plausível, mesmo com a idéia de limite superior ou inferior, uma vez que são forçadas pequenas variações das variáveis de uma imagem do Atlas para outra nestas regiões – além de serem as variações das variáveis realizadas em conjunto ou em bloco numa mesma região.

De posse das imagens, ou seja, do Atlas Anatômico da imagem, parte-se, então, para o Atlas de valores de potencial “medidos”.

O Atlas Anatômico dos valores de “medidas” de potencial é simplesmente obtido através da solução de elementos finitos referente à cada imagem do Atlas Anatômico de imagem, sendo que, neste trabalho, a cada “medida” de potencial calculado referente a uma imagem do Atlas, foi adicionado um ruído branco gaussiano de média nula e desvio padrão igual ao máximo valor de “medida”, dividido por 100.

Quanto aos valores numéricos utilizados para obtenção de cada Atlas, foram testados três tipos de situações, referidas por fantasmas 1, 2 e 3. Para o fantoma 3, os valores médios da região 2 foram dados por 0,5 para as variáveis de otimização, o que é equivalente a uma condutividade exatamente igual à soma dos valores de condutividade máximo e mínimo considerados, dividida por 2, e o desvio padrão igual a 1, sendo que os valores de variáveis maiores que 1 ou menores que 0 foram jogados para os limites. Ainda, a região 3 foi definida pelo círculo de diâmetro 0,1m e a região 2 pelo anel entre o diâmetro anterior, exclusive, e o diâmetro de 0,15m, centradas as circunferências externas nas coordenadas (0,9611; 1,075)m, medidas à partir do centro do fantoma (estando, o centro, nas coordenadas (1;1)m, segundo a Figura 84). Tal fantoma é mostrado na Figura 84. Para o fantoma 2, foram mantidos os mesmos dados, mudando-se, apenas, os diâmetros, ou seja, os tamanhos das três regiões de comportamentos estatísticos diferentes, para 0,055m e 0,1m (vide Figura 85). Finalmente, no caso do fantoma 1, mudou-se o valor médio da variável de otimização em 2 para 1 e o desvio padrão para 0,01, mantendo-se os diâmetros anteriores (vide Figura 85). Esses três casos,

dados pelos três fantasmas, mostram o desempenho do algoritmo em situações diversas. Nos dois últimos casos (fantomas 2 e 3), a incerteza é elevada e, no caso do fantoma 1, tem-se uma situação mais amena.

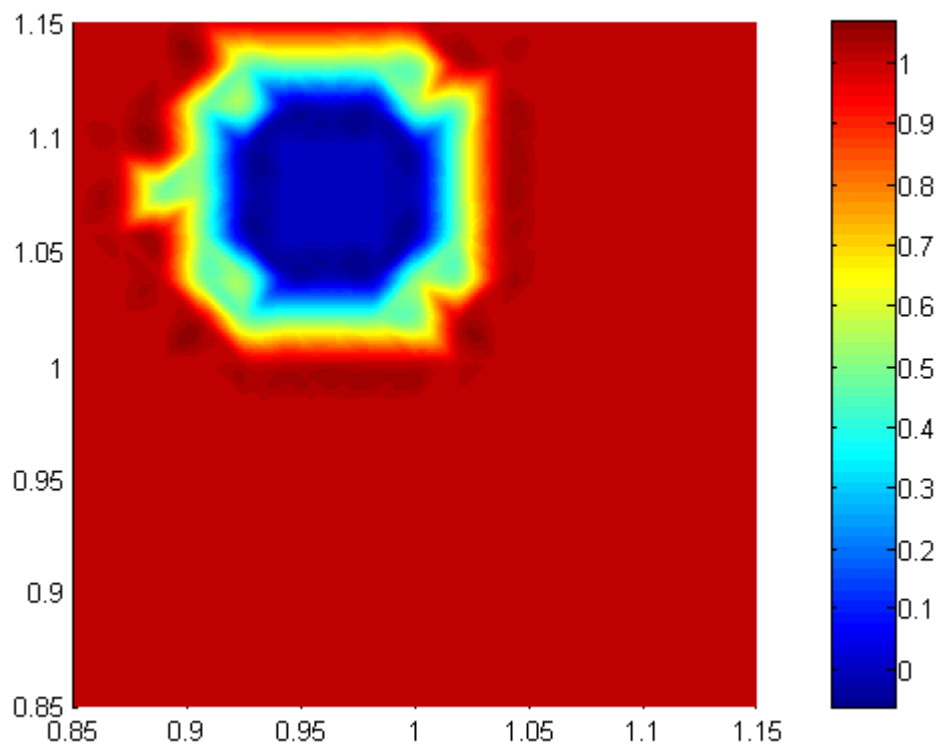


Figura 84 Distribuição referente ao fantoma 3 (médias).

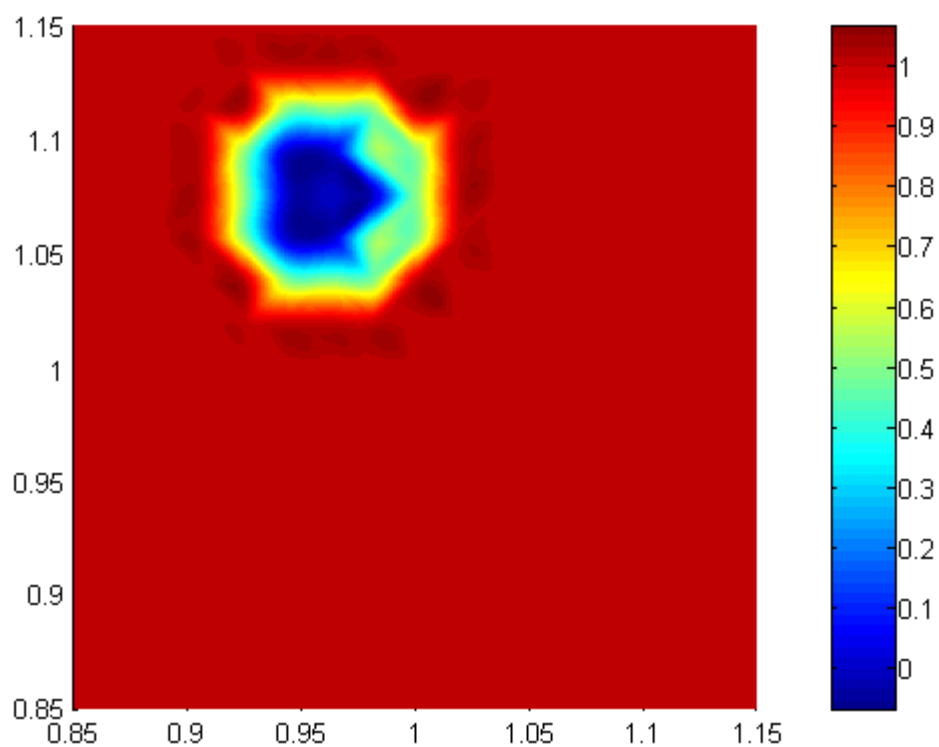


Figura 85 Distribuição referente aos fantasmas 1 e 2 (médias).

Demais dados, comuns para os três fantasmas, são: uma malha estruturada com 512 elementos triangulares (289 nós) é utilizada (vide Figura 86); o desvio padrão das regiões 1 e 3 é igual a 0,001; foram considerados 12 eletrodos e 12 padrões de corrente adjacentes, ou seja, remove-se corrente por um eletrodo e injeta-se pelo vizinho; e medem-se diferenças de potenciais entre eletrodos vizinhos, não se levando em conta as medidas dos eletrodos onde há passagem de corrente. Além disso, o parâmetro de contato é igual a $0.01\Omega\text{m}^2$; a corrente elétrica utilizada é igual à 1mA pico a pico; a espessura das malhas de estimação e do fantoma é igual a 0,035m; e foram geradas 1000 imagens de fantoma para construção do Atlas Anatômico, com obtenção da matriz de covariância da imagem e das diferenças de potenciais elétricos “medidas”, e com a obtenção das médias dos valores de diferenças de potenciais. Finalmente, os valores máximos e mínimos considerados para as condutividades elétricas médias, tanto no caso do fantoma quanto no caso da otimização, foram de $0,25(\Omega\text{m})^{-1}$ e $0,002(\Omega\text{m})^{-1}$, respectivamente. Tais valores são próximos do máximo e mínimo encontrados no interior do corpo humano, pelo menos no tocante à região da caixa torácica.

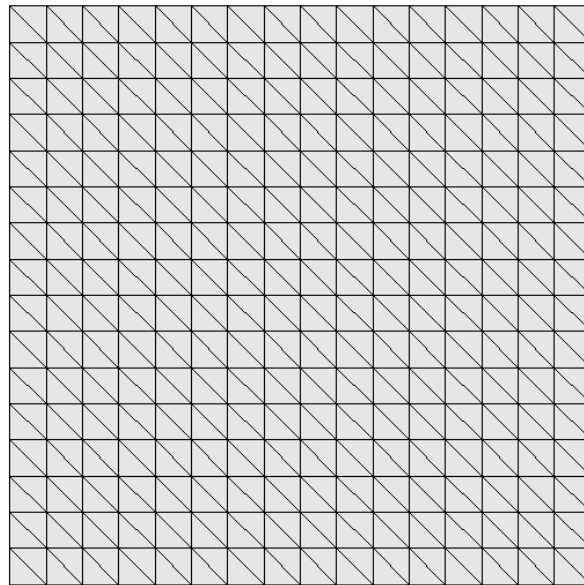


Figura 86 Malha do fantoma numérico, discretizada em 512 elementos triangulares e 289 nós.

APÊNDICE B.1.2 – Determinação da Média e da matriz de Covariância Referente à malha de Estimação

De posse dos dois Atlas, foi calculada a matriz de covariância da imagem e dos potenciais para a malha de estimação, além do vetor de valores médios de potenciais, a serem utilizados pelo algoritmo de obtenção de imagem (os valores médios de imagens, também disponíveis no fim dos cálculos, não foram considerados como fonte de informação adicional no trabalho). Para tanto, aplicou-se procedimento similar ao que seria utilizado na prática, realizado a partir de um mapeamento com base em informação cirúrgica ou com base em valores de “pixels” obtidos por outro método de obtenção de imagens.

O procedimento é: primeiro, define-se um sistema de coordenadas para as duas malhas, a do fantoma e a de estimação; em seguida, encontra-se o parâmetro (variável aleatória) do fantoma, correspondente ao parâmetro da malha de estimação, ou seja, o que está mais próximo. Isso é feito para cada parâmetro, elaborando-se um mapeamento dado por um vetor (neste trabalho, os parâmetros são as variáveis aleatórias nodais referentes à imagem). Então, com base no mapeamento, seleciona-se, dentro das imagens de fantasmas geradas anteriormente, as imagens correspondentes na malha de estimação. Finalmente, de posse desse Atlas de imagens na malha de estimação e do Atlas de potenciais obtido na malha do fantoma, calcula-se a matriz de covariância e o vetor de médias referente à malha de estimação (vale lembrar que o Atlas de potenciais é o mesmo para as duas malhas, uma vez que a correspondência entre tais potenciais de cada malha, dada pela correspondência entre os eletrodos nas duas malhas, se conserva.

APÊNDICE C – TÉCNICA DE PROJEÇÃO

A técnica de Projeção, utilizada como regularização para o problema inverso, permite realizar o controle explícito da variação espacial das condutividades (GUEST; PRÉVOST; BELYTSCHKO, 2004), conforme será comentado no texto.

Segundo essa técnica, o problema de otimização é projetado num subespaço do espaço de soluções original do problema por intermédio de uma transformação ou projeção conhecida, como por exemplo (GUEST; PRÉVOST; BELYTSCHKO, 2004),

$$\rho_f = \frac{\sum_{\gamma_j \in S_{pf}} \gamma_j w_{fj}}{\sum_{\gamma_j \in S_f} w_{fj}}, \quad (\text{APÊNDICE C.1})$$

onde ρ_f é a variável de otimização no espaço original, γ_j é a variável de otimização no novo subespaço, S_{pf} é o conjunto selecionado de nós (não necessariamente) vizinhos ao f -ésimo nó no novo espaço e w_{fj} é um peso ajustado, inversamente proporcional à distância entre os nós j e f , por exemplo, sendo que, neste trabalho, as posições dos nós nos dois espaços coincidem. Utiliza-se, no caso mencionado em especial, a informação (previamente obtida) de que a resposta é representada por uma distribuição suave de variáveis de otimização. A relação entre as variáveis na eq.(APÊNDICE C.1) para os pesos citados é representada na Figura 87. Contudo, podem-se utilizar funções peso e relações entre ρ_f e γ_j diferentes, dependendo do problema em questão (GUEST; PRÉVOST; BELYTSCHKO, 2004). A liberdade de poder empregar vários tipos de pesos e funções de projeção (incluindo não-lineares) representa vantagem da técnica de Projeção.

No caso mostrado na subseção 2.4.1 para contrastes moderados, por exemplo, a transformação considerada também é linear, mas aplicada de tal forma que cada variável nodal de otimização é ponderada por funções constantes por partes, iguais a 1 dentro de certo raio ao redor do nó f e 0 em caso contrário. Em outras palavras, w_{fj} é unitário dentro do raio ao redor de f e 0 em caso contrário.

Tal caso foi aplicado em conjunto com as seguintes ações: manteve-se o valor do coeficiente p (vide eq.(2.3.1)) igual a 1 e não foi considerado o limite inferior para as condutividades, podendo ultrapassar o valor de σ_B na eq.(2.3.1). Implementaram-se tais ações,

pois se considerou que o nível de contraste do corpo tomografado era desconhecido, o que é justificado do ponto de vista médico na subseção 2.4.1.

Na situação relatada nos dois últimos parágrafos, uma solução suave também é forçada. Porém, diferentemente do que ocorre com outros pesos (o que foi verificado por simulações), podem-se obter regiões relativamente extensas na imagem em que, aproximadamente da mesma maneira que no fantoma, há gradientes espaciais de resistividade praticamente nulos (no fantoma são nulos de fato). Em outras palavras, podem-se obter regiões relativamente extensas e praticamente planas na imagem, o que também representa informação considerada conhecida, por hipótese (vide a subseção 2.4.1 para uma discussão sobre essa hipótese).

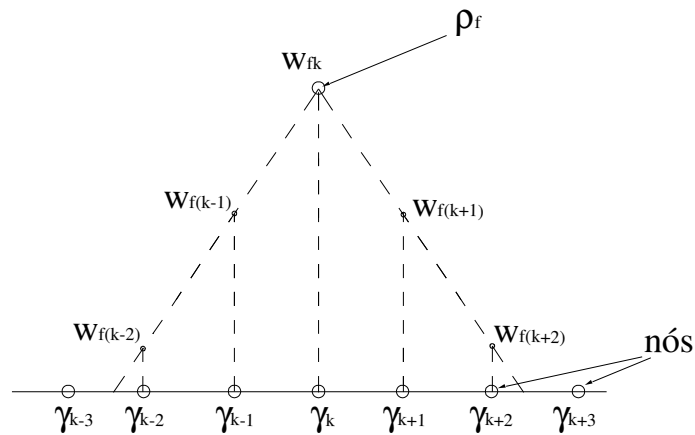


Figura 87 Representação esquemática da relação entre as variáveis ρ e γ nos dois espaços (vide eq.(APÊNDICE C.1)) para a técnica de Projeção, considerando-se um único nó no espaço original (referente à variável ρ_f). Neste caso, um peso w_{fj} é inversamente proporcional à distância entre os nós j e f .

Para implementar a técnica de Projeção, o problema de otimização deve ser resolvido nas novas variáveis nodais γ . Dado o problema de LP, isso significa que a regra da cadeia de derivação deve ser aplicada para obtenção dos gradientes da função objetivo e restrições. Assim e dada a eq.(APÊNDICE C.1), tem-se que

$$\nabla(H) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \gamma_1} \\ \frac{\partial H}{\partial \gamma_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial \gamma_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial \rho_2}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial \rho_N}{\partial \gamma_1} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial \rho_2}{\partial \gamma_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial \gamma_N} & \dots & \dots & \frac{\partial \rho_N}{\partial \gamma_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \rho_1} \\ \frac{\partial H}{\partial \rho_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial \rho_N} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{w_{11}}{\sum_{j \in S_{p1}} w_{1j}} & \frac{w_{21}}{\sum_{j \in S_{p2}} w_{2j}} & \dots & \frac{w_{N1}}{\sum_{j \in S_{pN}} w_{Nj}} \\ \frac{w_{12}}{\sum_{j \in S_{p1}} w_{1j}} & \frac{w_{22}}{\sum_{j \in S_{p2}} w_{2j}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{w_{1N}}{\sum_{j \in S_{p1}} w_{1j}} & \dots & \dots & \frac{w_{NN}}{\sum_{j \in S_{pN}} w_{Nj}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \rho_1} \\ \frac{\partial H}{\partial \rho_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial \rho_N} \end{bmatrix} \quad .(\text{APÊNDICE C.2})$$

onde H representa a função objetivo ou uma restrição qualquer. Isso fornece os gradientes nas novas variáveis de otimização. O cálculo do gradiente de F em relação a ρ_f , em particular, é visto no capítulo 3.

A matriz mostrada na eq.(APÊNDICE C.2) é construída numa etapa de pré-processamento utilizada no algoritmo, o que torna o processo de Projeção extremamente interessante no contexto da TIE. Isso acontece porque, de posse de tal matriz, a implementação compreende apenas uma multiplicação da mesma por vetor(es) gradiente(s) nas variáveis originais do problema. Assim, tem-se uma etapa relativamente rápida em comparação às demais etapas realizadas durante o processo iterativo para determinação da imagem. Portanto, a técnica de Projeção apresenta não somente a vantagem do controle explícito da variação espacial das condutividades, como também um baixo custo computacional relativo.

Propõe-se o teste da técnica de Projeção no contexto da correção da posição dos eletrodos (capítulo 4), utilizando-se a função linear dada na eq.(APÊNDICE C.1) para a

transformação referente à projeção, testando pesos constantes por partes, os quais foram efetivos na obtenção de imagens, como relatado em 2.4.1. O emprego de pesos constantes, em conjunto com a utilização de um grupo de funções de projeção lineares especiais (contido no grupo de funções lineares dado pela eq.(APÊNDICE C.1)), que indicam que duas ou mais variáveis nodais têm o mesmo valor, como é mostrado em seguida para duas variáveis nodais

$$\rho_f = \gamma_j \quad \text{e} \quad \rho_{f+1} = \gamma_j, \quad (\text{APÊNDICE C.3})$$

não é interessante, como será discutido. Os pesos são unitários e S_{Pf} e S_{Pf+1} contém apenas o j -ésimo nó. Isso corresponde a reduzir a dimensão do espaço de solução do problema de otimização, como sugere a Figura 88, e se baseia no conhecimento prévio sobre o tamanho e geometria do eletrodo. Assim, dependendo da escolha das variáveis, perdem-se algumas posições fisicamente possíveis dos eletrodos, o que significa que a resolução imposta pela transformação pode não ser suficiente para detectar a posição corretamente.

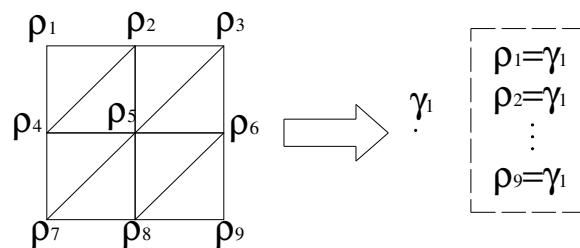


Figura 88 Representação esquemática da relação entre as variáveis ρ e γ nos dois espaços, segundo equação (APÊNDICE C.3), considerando-se um único nó no espaço de projeção, o qual corresponde a γ_1 . Neste caso, pesos são unitários.

APÊNDICE D – APRIMORAMENTO DO ALGORITMO DE MOTC PROPOSTO: REFINANDO O CÁLCULO DA PROBABILIDADE P

Já foi mencionado que o FORM, utilizando uma aproximação linear para a função Q (vide subseção 3.2.1) no espaço normalizado, obtém uma aproximação para a probabilidade de $Q \leq 0$. Ainda, comentou-se que, uma vez que a região de integração que dá a maior contribuição à probabilidade de $Q \leq 0$ (ou mesmo $M \leq 0$) está localizada nas proximidades do ponto mais próximo à origem (ou PMP), a aproximação da função não-linear pela linear em tal ponto determinaria a precisão do FORM no cálculo da probabilidade.

Nessas condições, pode-se notar que: 1) se o raio (raios) de curvatura da função não-linear no ponto mais próximo no espaço padronizado é (são) pequeno(s) em relação ao índice de confiabilidade correspondente, ou 2) se o problema para obtenção do índice de confiabilidade (problema (3.2.18)) apresenta mais de um mínimo local com valores dos índices correspondentes aproximadamente de mesma magnitude, a aproximação da função não-linear pela linear no PMP seria relativamente ruim. Como consequência, o cálculo da probabilidade pelo FORM seria relativamente pobre.

Portanto, se pelo menos uma das duas condições anteriores forem observadas, podem-se utilizar formas alternativas de cálculo de P . Como formas de aumentar a precisão do cálculo referente a uma superfície $Q=0$ nas condições do parágrafo anterior, podem-se propor procedimentos distintos, baseados em aproximações e/ou limites (MADSEN; KRENK; LIND, 2006).

Um desses procedimentos é baseado na aproximação de $Q=0$ por uma superfície quadrática no PMP, para a obtenção de uma melhor aproximação local de $Q=0$. A outra é a aproximação de $Q=0$ por um conjunto de superfícies planas para a obtenção de uma melhor aproximação global. Tais superfícies planas provêm de linearizações de Q em diversos pontos diferentes, não necessariamente PMP's.

Ainda, podem-se combinar os dois procedimentos mencionados, utilizando-se então superfícies quadráticas distintas ou combinações de superfícies quadráticas distintas e lineares, obtidas de aproximações de $Q=0$ por superfícies em vários pontos diferentes da

função, para uma aproximação de Q ainda mais precisa que as anteriores. Tal caso não será tratado neste trabalho.

Na seqüência, discutem-se as abordagens de aproximação por superfície quadrática e por superfícies lineares (esse último caso chamado, alternativamente, de aproximação por superfície poliédrica – MADSEN, KRENK e LIND, 2006), mencionando-se a forma de se obter a probabilidade aproximada correspondente a cada abordagem. Tais discussões possuem caráter teórico, sendo descritos os aspectos mais importantes das abordagens, e mostrado o desempenho por meio de um exemplo simples, aplicado apenas ao caso da aproximação quadrática. A implementação e teste das abordagens no contexto da TIE fogem do escopo do presente trabalho.

APÊNDICE D.1 – Aproximação de $Q=0$ por Superfície Poliédrica

Nesse caso, segundo Madsen, Krenk e Lind (2006), considera-se o conjunto ou região onde não há falha ou região de segurança a região limitada por k hiperplanos. Para cada um deles, define-se uma função linear:

$$M_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{R} + b_i, \quad (\text{APÊNDICE D.1})$$

para a qual:

$$E[M_i] = \mathbf{A}_i^T E[\mathbf{R}] + b_i \quad (\text{APÊNDICE D.2})$$

$$\text{Var}[M_i] = \mathbf{A}_i^T \text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{A}_i \quad (\text{APÊNDICE D.3})$$

$$\text{Cov}[M_i, M_j] = \mathbf{A}_i^T \text{Cov}[\mathbf{R}, \mathbf{R}^T] \mathbf{A}_j \quad (\text{APÊNDICE D.4})$$

Considera-se então, seguindo o que foi definido no atual capítulo, que um ponto pertence à região de segurança se $M_i \leq 0$, para $i=1..k$. Nesse caso, se está interessado na probabilidade

$$\begin{aligned}
 P &= P(\{M_1 \leq 0\} \cap \{M_2 \leq 0\} \cap \dots \cap \{M_k \leq 0\}) = \\
 &= P\left(\bigcap_{i=1}^k M_i \leq 0\right)
 \end{aligned}
 \tag{APÊNDICE D.5}$$

Seguindo a abordagem de Madsen, Krenk e Lind (2006), define-se então um conjunto de variáveis normalizadas auxiliares Y_i , definidas por:

$$Y_i = \frac{M_i - E[M_i]}{D[M_i]}, \tag{APÊNDICE D.6}$$

onde $D[M_i] = \sqrt{\text{Var}[M_i]}$. Tais variáveis, bem como as variáveis dispostas no vetor em \mathbf{R} e a variável M_i (conforme discutido na subseção 3.2.1), distribuem-se segundo distribuições normais. As novas variáveis Y_i têm médias nulas, variâncias unitárias e covariâncias dadas por:

$$\text{Cov}[Y_i, Y_j] = \frac{\text{Cov}[M_i, M_j]}{D[M_i]D[M_j]}. \tag{APÊNDICE D.7}$$

Utilizando-se então:

$$a_i = \frac{E[M_i]}{D[M_i]}, \tag{APÊNDICE D.8}$$

e a matriz de covariâncias \mathbf{R}_M , cujo elemento da linha i e coluna j é dado por $\text{Cov}[Y_i, Y_j]$, a probabilidade P na eq.(APÊNDICE D.5) pode então ser dada por

$$\begin{aligned}
 P &= P\left(\bigcap_{i=1}^k M_i \leq 0\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^k Y_i \leq a_i\right) = \Phi_k(\mathbf{a}, \mathbf{R}_M) = \\
 &= \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{a_2} \dots \int_{-\infty}^{a_k} \varphi_k(y_1, y_2, \dots, y_k; \mathbf{R}_M) dy_1 dy_2 \dots dy_k
 \end{aligned}
 \tag{APÊNDICE D.9}$$

onde $\Phi_k(\mathbf{a}, \mathbf{R}_M)$ é a função de distribuição cumulativa para um conjunto de k variáveis normais e normalizadas, de matriz de covariâncias \mathbf{R}_M e limites dados por $\mathbf{a}=[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k]^T$. Ainda, $\varphi_k(y_1, y_2, \dots, y_k, \mathbf{R}_M)$ é a função densidade de probabilidades correspondente.

Ocorre que a função $\Phi_k(\mathbf{a}, \mathbf{R}_M)$, da mesma forma que as probabilidades no problema (3.2.1) para uma única função (c- \bar{c} ou f_n), não pode ser computada em qualquer caso.

Portanto, uma expansão em séries de Taylor para matriz particular \mathbf{R}_M foi proposta por Ditlevsen (1984) e uma aproximação numérica por Deak (1980). Além disso, uma aproximação por expansão de $\Phi_k(-\mathbf{a}, \mathbf{R}_M)$ para o módulo de \mathbf{a} tendendo ao infinito (na prática, para valores elevados dos limites de integração) foi proposta por Ruben (1964) e limites baseados numa particular matriz \mathbf{R}_M são dados em Madsen, Krenk e Lind (2006).

Uma maneira interessante de resolver tal questão é através da teoria discutida na seção 3.2, para o caso de sistemas em série (MADSEN; KRENK; LIND, 2006). Em tal seção, discutiu-se uma maneira de trabalhar com limites para valores de probabilidade de intersecções de eventos baseados nos valores de probabilidade para eventos simples. Mostrou-se que quando se maximiza a probabilidade de um dos eventos, sujeito às restrições de maior ou igual nas probabilidades dos outros eventos, conforme mostrado na primeira formulação genérica citada (vide problema (3.2.1)), age-se, implicitamente, a favor da segurança, uma vez que a probabilidade de todos os eventos em conjunto, ou parte deles, será sempre maior ou igual à probabilidade dos eventos multiplicada. Ainda, concluiu-se que, no estudo de um problema com muitos eventos, resolvido pela formulação em (3.2.1), em que se está interessado no evento dado pela intersecção dos eventos considerados (ou de alguns deles), seria indicado checar a multiplicação das probabilidades no fim de cada otimização, sendo a resposta confiável no caso do valor do resultado ser elevado. Portanto, no cálculo da probabilidade na eq.(APÊNDICE D.9) e na solução de um problema de otimização de MOTC baseado na mesma equação, pode-se propor trabalhar com as probabilidades dos eventos simples.

Finalmente, um método interessante pode ser encontrado em Song e Kang (2009). Tal método determina as probabilidades e gradientes das mesmas no caso de sistemas em série (e também outros tipos de sistema, como o sistema em paralelo, em que a falha ocorre no caso em que dois ou mais componentes do sistema falham). Representa, provavelmente, a abordagem mais indicada no caso de superfícies poliédricas, uma vez que o cálculo de probabilidades de diversos tipos de sistemas e/ou intersecções de eventos é realizado

eficientemente do ponto de vista computacional, através de simples operações matriciais (SONG; KANG, 2009).

APÊNDICE D.2 – Aproximação de $Q=0$ por Superfície Quadrática

Considera-se uma função quadrática genérica nas variáveis padronizadas. Tal função pode ser transformada para (MADSEN; KRENK; LIND, 2006):

$$g(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{m-1} a_{Q_i} (u_i - \delta_{Q_i})^2 + \sum_m^n b_{Q_i} u_i - c_Q, \quad (\text{APÊNDICE D.10})$$

Através de uma rotação do sistema de coordenadas (cartesiano, nesse caso). De fato, no caso de uma função genérica bidimensional, pode-se mostrar que o ângulo existe para qualquer que seja o conjunto de parâmetros da função quadrática original.

A função $g(\mathbf{U})$, ou M_Q , pode ser expressa como:

$$M_Q = A_Q + B_Q - c_Q, \quad (\text{APÊNDICE D.11})$$

em que as variáveis A_Q e B_Q são dadas por:

$$\begin{aligned} A_Q &= \sum_{i=1}^{m-1} a_{Q_i} (u_i - \delta_{Q_i})^2 \\ B_Q &= \sum_m^n b_{Q_i} u_i \end{aligned} \quad (\text{APÊNDICE D.12})$$

Como o vetor \mathbf{U} possui variáveis normais não-correlacionadas e, portanto, independentes, segue que A_Q e B_Q são também independentes (MADSEN; KRENK; LIND, 2006). Assim, P pode ser obtida como:

$$P = 1 - \int_{-\infty}^{a_1} f_{A_Q}(a) [1 - F_{B_Q}(c_Q - a)] da, \quad (\text{APÊNDICE D.13})$$

onde a é variável de integração, f_{A_Q} é função densidade de probabilidades de A_Q e F_{B_Q} função distribuição cumulativa de B_Q . Além disso, B_Q é distribuída de acordo com a distribuição normal e A_Q é combinação linear de variáveis distribuídas segundo distribuições chi-quadrado não-centrais.

Ocorre que nem sempre é possível obter uma distribuição exata e conveniente para A_Q , conforme mencionam Madsen, Krenk e Lind (2006). Assim, não há resultados genéricos para P nesse caso, tendo sido propostos métodos numéricos (RICE, 1980).

Assim, Madsen, Krenk e Lind (2006) propuseram trabalhar com o caso especial de uma superfície hiperparabólica. Ocorre que uma aproximação de segunda ordem da superfície não-linear no PMP, em conjunto com uma transformação de variáveis ortogonal e manipulação algébrica (MADSEN; KRENK; LIND, 2006) gera, justamente, a superfície hiperparabólica, o que se encaixa exatamente nas pretensões deste trabalho. Tal aproximação de segunda ordem, obtida através de expansão em séries de Taylor, rende:

$$0 = Q \approx \nabla Q_{\text{PMP}}^T (\mathbf{U} - \mathbf{U}_{\text{PMP}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{U} - \mathbf{U}_{\text{PMP}})^T \mathbf{D}_{\text{PMP}} (\mathbf{U} - \mathbf{U}_{\text{PMP}}), \quad (\text{APÊNDICE D.14})$$

onde $\nabla Q_{\text{PMP}} = \nabla Q(\mathbf{U}_{\text{PMP}})$ é o vetor gradiente no PMP e a matriz simétrica $\mathbf{D}_{\text{PMP}} = \mathbf{D}(\mathbf{U}_{\text{PMP}})$ é a matriz (hessiana) de derivadas segundas da função não-linear no mesmo ponto, ou seja, seu elemento na i -ésima linha e j -ésima coluna é dado por:

$$D_{ij}(\mathbf{U}_{\text{PMP}}) = \frac{\partial^2 Q(\mathbf{U}_{\text{PMP}})}{\partial u_i \partial u_j}. \quad (\text{APÊNDICE D.15})$$

Através da transformação e manipulação mencionadas e descritas em Madsen, Krenk e Lind (2006), obtém-se uma fórmula de cálculo da probabilidade P . Sendo o cálculo complicado, Tvedt⁵ apud Madsen, Krenk e Lind (2006), propôs uma aproximação para $1-P$, ou seja, a probabilidade de falha, dada então por:

⁵ TVEDT, L. Two Second-Order Approximations to the Failure Probability. Veritas Report RDIV/20-004-83, Det norske Veritas, Oslo, Norway, 1983.

$$1 - P \approx A_{TV1} + A_{TV2} + A_{TV3}, \quad (\text{APÊNDICE D.16})$$

onde

$$A_{TV1} = \Phi(-\beta) [\det(\mathbf{I} + 2\beta \mathbf{A}_q)]^{-1/2}, \quad (\text{APÊNDICE D.17})$$

$$A_{TV2} = [\beta \Phi(-\beta) - \varphi(\beta)] \left\{ [\det(\mathbf{I} + 2\beta \mathbf{A}_q)]^{-1/2} - [\det(\mathbf{I} + 2(\beta+1)\mathbf{A}_q)]^{-1/2} \right\}, \quad (\text{APÊNDICE D.18})$$

$$A_{TV3} = (\beta+1) [\beta \Phi(-\beta) - \varphi(\beta)] \left\{ [\det(\mathbf{I} + 2\beta \mathbf{A}_q)]^{-1/2} - \text{Re} \left[[\det(\mathbf{I} + 2(\beta+i)\mathbf{A}_q)]^{-1/2} \right] \right\}, \quad (\text{APÊNDICE D.19})$$

ou em termos de curvaturas no PMP (o exemplo tratado na subseção seguinte utiliza o cálculo da curvatura da função no PMP, como será descrito):

$$A_{TV1} = \Phi(-\beta) \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \beta \kappa_j)^{-1/2}, \quad (\text{APÊNDICE D.20})$$

$$A_{TV2} = [\beta \Phi(-\beta) - \varphi(\beta)] \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \beta \kappa_j)^{-1/2} - \prod_{j=1}^{n-1} (1 - (\beta+1) \kappa_j)^{-1/2} \right\}, \quad (\text{APÊNDICE D.21})$$

$$A_{TV3} = (\beta+1) [\beta \Phi(-\beta) - \varphi(\beta)] \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \beta \kappa_j)^{-1/2} - \text{Re} \left[\prod_{j=1}^{n-1} (1 - (\beta+i) \kappa_j)^{-1/2} \right] \right\}, \quad (\text{APÊNDICE D.22})$$

onde \mathbf{A}_q depende do gradiente ∇Q_{PMP} e da matriz \mathbf{D} , além da matriz relacionada à transformação ortogonal mencionada. Assume-se que as matrizes $\mathbf{I} + 2\beta \mathbf{A}_q$ e $\mathbf{I} + 2(\beta+1)\mathbf{A}_q$ são positivas definidas. A técnica ou método, denominado de SORM na literatura (“Second-Order Reliability Method”), tem se mostrado preciso em vários casos, conforme comentado por Madsen, Krenk e Lind (2006) e sugerido pelo exemplo retirado da mesma fonte e descrito na seqüência. Ainda, a implementação dessa técnica mostra-se plausível, sendo os gradientes de 1-P obtidos como mencionado anteriormente no caso do FORM, a não ser pela derivada de \mathbf{A}_q .

APÊNDICE D.2.1 – Exemplo da Aproximação de TVEDT

No exemplo, retirado de Madsen, Krenk e Lind (2006), consideram-se apenas duas variáveis aleatórias, as quais são independentes e não gaussianas. A função densidade de probabilidades de cada uma delas é:

$$f_{R_i}(r_i) = 2(1-r_i), \quad r_i \in [0,1], \quad i=1,2 \quad (\text{APÊNDICE D.23})$$

e a função limite é:

$$g(r_1, r_2) = 1,8 - r_1 - r_2. \quad (\text{APÊNDICE D.24})$$

Nessas condições, pode-se calcular a probabilidade de falha para o problema, dada por:

$$P_F = \int_{0,8}^1 \int_{1,8-r_1}^1 4(1-r_1)(1-r_2) dr_2 dr_1 = 2,67 \times 10^{-4}, \quad (\text{APÊNDICE D.25})$$

a qual corresponde a:

$$\beta_F = -\Phi^{-1}(P_F) = 3,46. \quad (\text{APÊNDICE D.26})$$

O mapeamento no espaço normal padronizado é dado, segundo a transformação de Rosenblatt (MADSEN; KRENK; LIND, 2006), como:

$$\begin{aligned} u_1 &= \Phi^{-1}(F_{R_1}(r_1)) = \Phi^{-1}(1 - (1-r_1)^2) \\ u_2 &= \Phi^{-1}(F_{R_2}(r_2)) = \Phi^{-1}(1 - (1-r_2)^2) \end{aligned} \quad (\text{APÊNDICE D.27})$$

(na eq.(3.4.6), a transformação \mathbf{T} corresponde à transformação de Rosenblatt num caso genérico). Assim, a função de falha no espaço normal padronizado pode ser dada, em sua forma paramétrica, como:

$$\begin{aligned} (u_1, u_2) &= (u_1(t), u_2(t)) = \\ &= (\Phi^{-1}(1 - (1-t)^2), \Phi^{-1}(1 - (t-0,8)^2)), \quad 0,8 \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{APÊNDICE D.28})$$

Um esboço da superfície de falha correspondente pode ser vista na Figura 89.

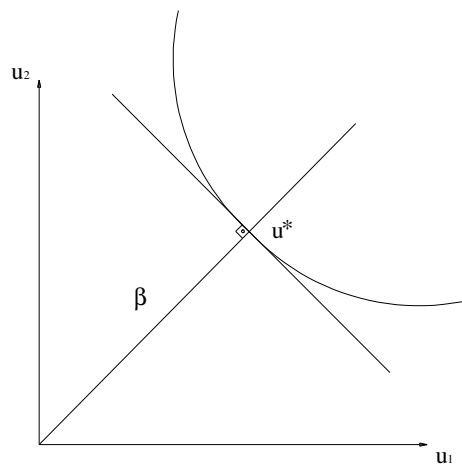


Figura 89 Esboço mostrando a superfície de falha no espaço padronizado.

Nessas condições, o PMP é dado por:

$$(u_1, u_2) = (u_1(t = 0,9), u_2(t = 0,9)) = (2,32, 2,32). \quad (\text{APÊNDICE D.29})$$

Para comparação, o índice de confiabilidade determinado pelo PMP, e a probabilidade de falha obtida através do FORM e do mesmo índice (conforme visto, anteriormente, no atual capítulo), seriam iguais a:

$$\begin{aligned} \beta_{\text{FFORM}} &\approx 3,28 \Rightarrow \\ \Rightarrow P_{\text{FFORM}} &\approx \Phi(-\beta_{\text{F}}) = . \quad (\text{APÊNDICE D.30}) \\ &= 5,01 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Continuando, a curvatura no PMP, em termos da representação paramétrica da função de falha, é dada por

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} \left. \frac{du_1}{dt} \right|_{t=0,9} & \left. \frac{du_2}{dt} \right|_{t=0,9} \\ \left. \frac{d^2u_1}{dt^2} \right|_{t=0,9} & \left. \frac{d^2u_2}{dt^2} \right|_{t=0,9} \end{vmatrix}}{\left(\left(\left. \frac{du_1}{dt} \right|_{t=0,9} \right)^2 + \left(\left. \frac{du_2}{dt} \right|_{t=0,9} \right)^2 \right)^{3/2}} = \quad (\text{APÊNDICE D.31})$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 7,512 & -7,512 \\ 56,23 & 56,23 \end{vmatrix}}{(7,512^2 + 7,512^2)^{3/2}} = 0,7046$$

Com a curvatura e utilizando-se a eq.(APÊNDICE D.16), a eq.(APÊNDICE D.20), a eq.(APÊNDICE D.21) e a eq.(APÊNDICE D.22), obtém-se a aproximação para a probabilidade de falha para o caso da aproximação de segunda ordem da função de falha, como se segue:

$$\begin{aligned} P_{\text{FSORM}} &\approx A_{\text{TV1}} + A_{\text{TV2}} + A_{\text{TV3}} = \\ &= 2,75 \times 10^{-4} - 6,66 \times 10^{-6} - 5,10 \times 10^{-6} =, \quad (\text{APÊNDICE D.32}) \\ &= 2,63 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

o que rende:

$$\beta_{\text{FSORM}} \approx -\Phi^{-1}(2,63 \times 10^{-4}) = 3,47. \quad (\text{APÊNDICE D.33})$$

Pode-se notar que a aproximação é, de fato, melhor que o para o caso linear (FORM), o que era de se esperar dada a função no espaço padronizado. A função F relacionada ao problema de TIE é também não-linear nas variáveis aleatórias. Assim, é provável que uma aproximação quadrática seja mais satisfatória que a linear, sobretudo se várias superfícies quadráticas forem usadas na aproximação, de maneira semelhante à discutida no caso linear, ou seja, no caso da superfície poliédrica.

Ainda, deve-se notar que a estimativa baseada em FORM estava incorreta, mas foi conservadora, diferentemente da aproximação SORM. Essa última, de fato, gerou uma estimativa subestimada da probabilidade de falha. Essa não é, no entanto, uma vantagem do

FORM com relação ao SORM. O que ocorre é que a superfície não-linear é convexa (vide Figura 89) e, portanto, a área de integração da função densidade de probabilidades para o caso da linearização reduz-se significativamente. Assim, pode-se notar que o contrário ocorreria no caso de uma superfície côncava (ou seja, a estimativa de FORM estaria, também, subestimada). Concluindo, a menos que se prove que a função erro e demais funções envolvidas na estimação da imagem em TIE são convexas, não se pode afirmar que a aproximação FORM será sempre conservadora.

APÊNDICE E – VERIFICAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO DE MEF UTILIZADO

Como comentado na seção subseção 4.1.2, o material que emula o vazio possui resistência relativamente elevada em comparação à do material do eletrodo. Porém, essa resistência não é infinita, o que significa que pode haver passagem de corrente por esse material especial, ainda que em pequena quantidade. Esse efeito, de fato, ocorreu no caso de um mínimo local obtido pelo algoritmo de otimização, como mostrado nos testes realizados (vide subseção 4.1.4, Figura 48). Para distribuições de condutividade referentes a eletrodos de geometrias convencionais, no entanto, as correntes são desprezíveis, como mostrado em seguida.

Na verificação, considera-se a distribuição de condutividades mostrada na Figura 90(a) e na Figura 90(b), para comparação. É possível notar que a condutividade é constante no elemento, o que significa que o modelo adotado é uma aproximação do utilizado na subseção 4.1.4. Isso ocorre, pois o programa comercial utilizado não dispõe de elemento com condutividade linear. Os valores de condutividades são: vermelho – $0,25(\text{m}\Omega)^{-1}$, azul – $0,002(\text{m}\Omega)^{-1}$ (perturbação), branco – $10^{-6}(\text{m}\Omega)^{-1}$ (vazio), laranja – $100(\text{m}\Omega)^{-1}$ (eletrodos), iguais aos utilizados nos testes subseqüentes.

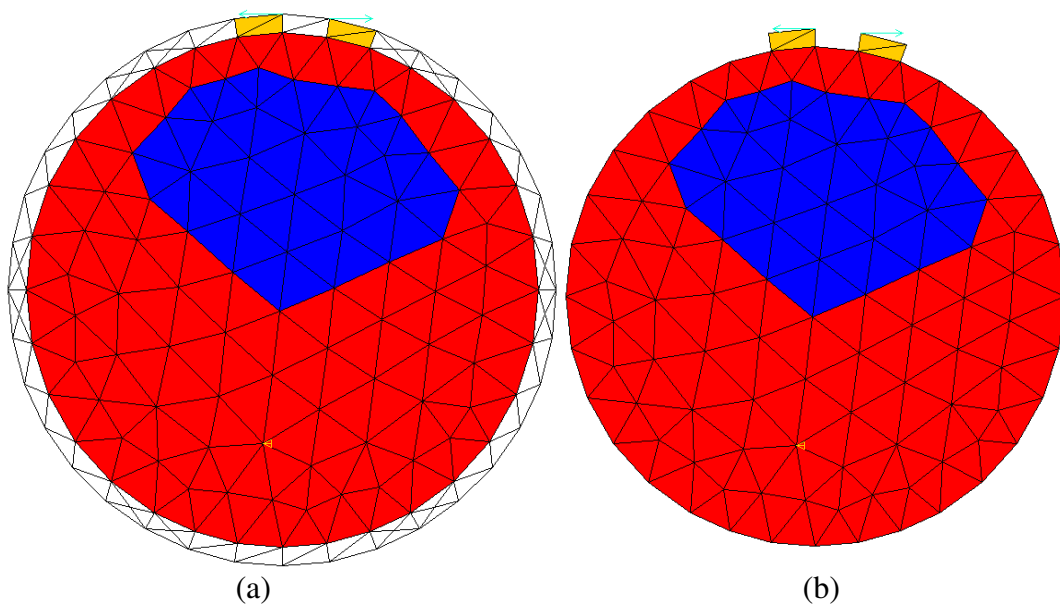


Figura 90 Malhas, condições de contorno e distribuições de condutividade utilizadas na verificação numérica do modelo considerado na correção do posicionamento dos eletrodos pelo MOT. (a)

Consideram-se elementos com material que emula vazio. (b) Elementos de material do tipo vazio não são considerados. Para ambos os modelos, eletrodos são destacados em laranja, condições de contorno de correntes em ciano, e referência é representada por pequeno triângulo, na parte inferior das figuras.

Ainda, é possível notar que uma situação limite é adotada, segundo a qual os eletrodos estão bastante próximos e a perturbação encontra-se próxima ao contorno, “dificultando” a entrada de corrente. Correntes nodais são então aplicadas aos nós indicados nas figuras e uma referência é escolhida, como indicado nas mesmas.

Resolvendo o problema de MEF para os modelos, materiais e condições de contorno mostrados, obtêm-se os vetores densidade de corrente mostrados na Figura 91(a) e na Figura 91(b). Os valores são plotados nos centróides dos elementos finitos. Nota-se, da Figura 91(a), que os vetores nos elementos de material vazio nem mesmo aparecem na figura, o mesmo ocorrendo para a perturbação. Na realidade, tem-se, no máximo (considerando-se todos os pontos dos dois elementos de material vazio presentes entre os dois eletrodos), $2 \cdot 10^{-7}$ para a magnitude do vetor densidade de corrente (nos demais elementos de material vazio, a densidade de corrente é ainda menor). Ainda, as duas figuras mostram resultados, visualmente, muito próximos.

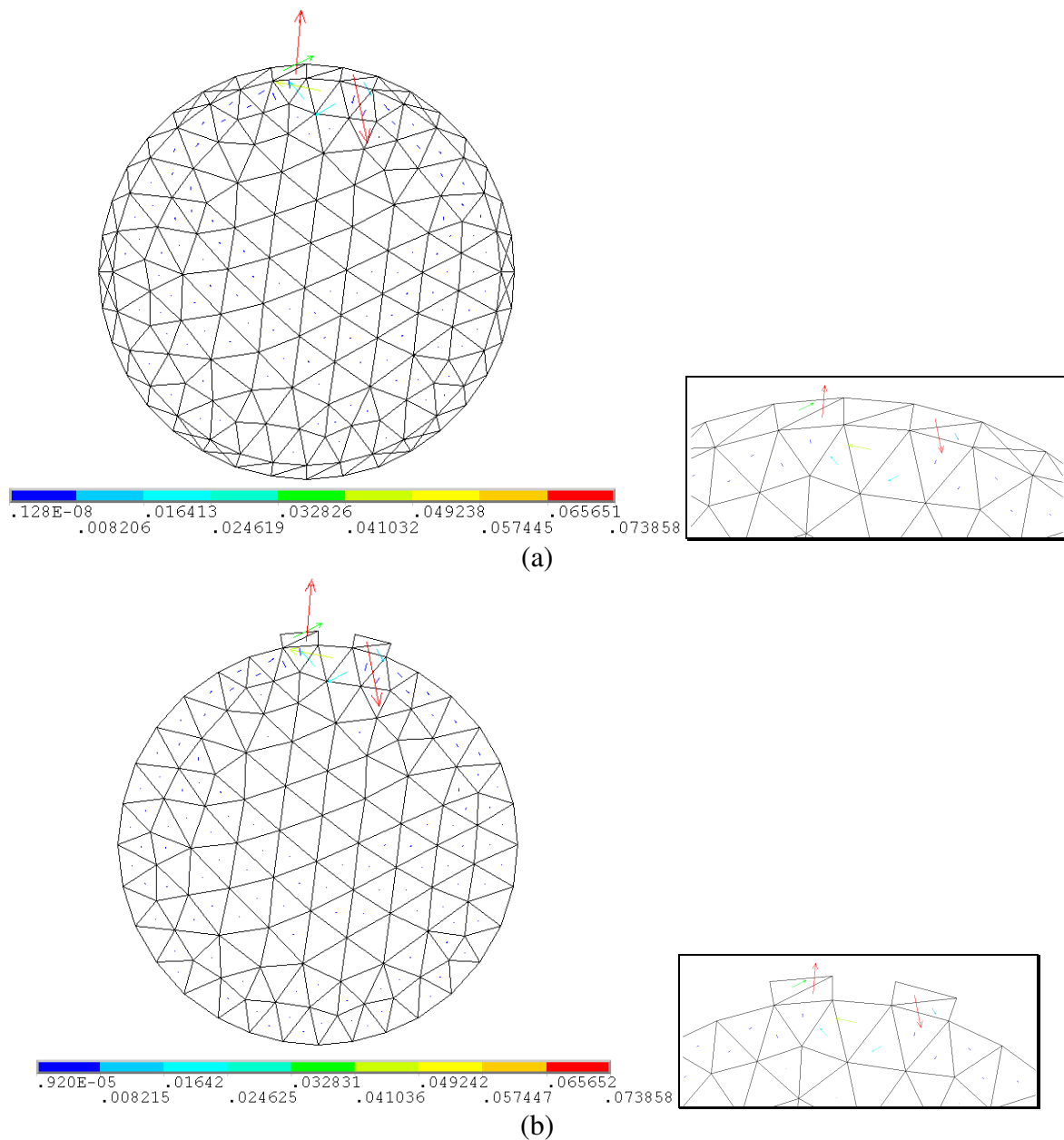


Figura 91 Densidades de corrente considerando (a) malha com elementos com material que emula vazio, e (b) malha sem elementos de material do tipo vazio. Em ambos os casos, detalhes à direita, mostram aproximação da região mais importante (com maior variação da densidade) das malhas.

Quanto aos potenciais elétricos, têm-se dois resultados idênticos, como mostrado na Figura 92. Na Figura 92(a), retiram-se os elementos referentes ao material vazio, para melhor comparação.

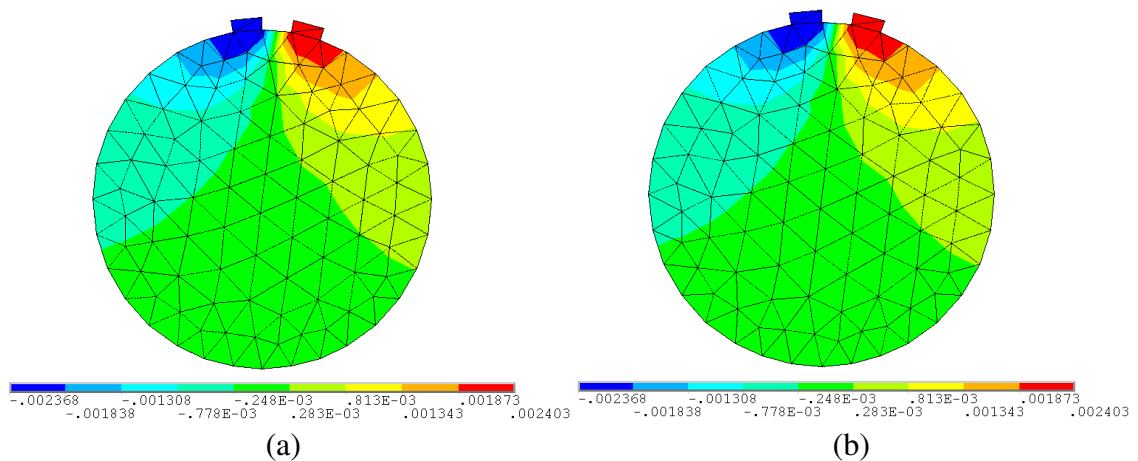


Figura 92 Potenciais elétricos para (a) malha com elementos com material que emula vazio, e (b) malha sem elementos de material do tipo vazio. Retiram-se os elementos referentes ao material vazio (da figura (a)), para melhor comparação.

Nessas condições, considera-se que o material do tipo vazio se comporta, aproximadamente, como a “ausência de material”, ou material de condutividade nula, e que o modelo utilizado na correção do posicionamento dos eletrodos (seção 4.1) é, portanto, adequado.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)