MARCOS ROBERTO MARCIAL

# PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEARES COM POTENCIAIS SINGULARES E OU NÃO SINGULARES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae.*

**VIÇOSA**
**MINAS GERAIS - BRASIL**
**2010**

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e Classificação da Biblioteca Central da UFV**


T

M319p
2010

Marcial, Marcos Roberto, 1979-
Problemas elíptcos semilineares com potenciais singulares e ou não singulares / Marcos Roberto Marcial – Viçosa, MG, 2010.
iv, 53f. : il. (algumas col.); 29cm.

Orientador: Olimpio Hiroshi Miyagaki
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 52-53.

1. Equaçẽs diferenciais slípticas. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Equações diferenciais não-lineares. I. Universidade Federal de Viçosa. II. Título.

CDD 22.ed. 515.3533

MARCOS ROBERTO MARCIAL

# PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEARES COM POTENCIAIS SINGULARES E OU NÃO SINGULARES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 26 de Fevereiro de 2010.

Prof. Fábio Rodrigues Pereira

Profª. Maria José Alves

Prof. Paulo César Carrião
(Co-orientador)

Prof. Sandro Vieira Romero
(Co-orientador)

Prof. Olímpio Hiroshi Miyagaki
(Orientador)

*A minha família,*
*e aos meus amigos.*

# Agradecimentos


- Agradeço primeiro a Deus que é o criador de todas as coisas.
- A minha família, meus pais, meus irmãos Mateus e Bruna, pelo incentivo, pela compreensão e pelas orações.
- Ao professor Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki (orientador), pela paciência, pela competência e confiança.
- Aos professores, Paulo César Carrião e Sandro Vieira Romero pela co-orientação.
- Aos professores, Fábio Rodrigues Pereira e Maria José Alves pela participação na minha banca e pelas sugestões finais.
- À Coordenação do mestrado em matemática na UFV juntamente com todos os professores do programa.
- Aos meus colegas de curso, Vinícius, Tatiana, Lílian, João, Poliana, Luciano, Diogo, Marcos e todos que participaram diretamente ou indiretamente desta minha caminhada na UFV.
- À CAPES pelo suporte financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

# Sumário

# Resumo

MARCIAL, Marcos Roberto, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2010. **Problemas elípticos semilineares com potenciais singulares e ou não singulares**. Orientador: Olimpio Hiroshi Miyagaki. Co-orientadores: Paulo César Carrião e Sandro Vieira Romero.

Neste trabalho, estudamos duas classes de problemas elípticos modelado em domínios ilimitados. Primeiro trabalhamos com o problema elíptico semilinear

$$-\Delta u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad u \not\equiv 0,$$

onde assumiremos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e ímpar. Provamos a existência de uma solução radial positiva, este resultado é devido a Berestycki-Lions [2]. Em segundo lugar, tratamos o problema

$$-\Delta u + V(|x|)u = f(u), \quad u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}),$$

onde o potencial $V > 0$ é uma função mensurável e singular na origem. Provamos a existência de solução radial positiva. No caso onde $f$ é ímpar, mostramos que o problema tem um número infinito de soluções radiais. Resultados de não existência para potenciais particulares também serão tratados. Estes resultados são devido a Badiale-Rolando [1].

# Abstract

MARCIAL, Marcos Roberto, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, february 2010. **Elliptics semilineares problems with singular potentials or not singular**. Adviser: Olimpio Hiroshi Miyagaki. Co-Advisers: Paulo César Carrião and Sandro Vieira Romero.

In this work we studed two classes of elliptic problems modeled in a bounded domains. First of all we deal with the semilinear elliptic problem

$$-\Delta u = f(u) \text{ in } \mathbb{R}^N, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad u \not\equiv 0,$$

where we always assume that $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is an odd and continuous functions. We proved the existence of positive radial solution wich is result due to Berestycki-Lions [2]. Secondly, treated the problem

$$-\Delta u + V(|x|)u = f(u), \quad u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$$

where the potencial $V > 0$ is mensurable and singular at the origin. We proved the existence of positive radial solutions. If $f$ odd, we showed that the problem has infinitely many radial solutions. Nonexistence results for one particular potencials and nonlinearities are also given. These results are due to Badiale-Rolando [1].

# Introdução

Trataremos neste trabalho de duas classes de problemas elípticos modelados em domínios ilimitados, onde provaremos resultados de existência quando o potencial é singular e não singular. Vale ressaltar que o primeiro resultado é devido a Berestycki-Lions [2], enquanto que o segundo resultado é devido a Badiale-Rolando em [1]

No primeiro capítulo, estudaremos o seguinte problema elíptico semilinear

$$(P_0) \qquad \begin{cases} -\Delta u = g(u), \text{ em } I\!R^N, \ N \geq 3, \\ \\ u \in H^1(I\!R^N), \quad u \not\equiv 0, \end{cases}$$

onde $H^1(\Omega)$ denota o espaço de Sobolev usual, $\Delta$ é o operador laplaciano, e $g : I\!R \to I\!R$ é uma função contínua e ímpar, (daí $g(0) = 0$), satisfazendo

$$(a_1) \qquad -\infty < \liminf_{s \to 0^+} \frac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s \to 0^-} \frac{g(s)}{s} = -m \equiv g'(0) < 0,$$

$$(a_2) \qquad -\infty \leq \limsup_{s \to +\infty} \frac{g(s)}{s^l} \leq 0, \ l = \frac{N+2}{N-2}, \ N \geq 3,$$

$$(a_3) \qquad \text{existe } \tau > 0 \text{ tal que } G(\tau) = \int_0^\tau g(s) ds > 0.$$

Este tipo de equação aparece, por exemplo, quando se procura “ondas solitárias”ou “ondas estacionárias”numa equação não linear de Klein-Gordon ou Schr$\ddot{o}$dinger, respectivamente.

O problema $(P_0)$ modelado em domínios limitados foi estudado respectivamente em [12, 13, 16] . Por outro lado Berestycki-Lions em [2] provaram que o problema $(P_0)$ modelado em domínio ilimitado possui uma solução.

No segundo capítulo estudaremos o seguinte problema elíptico não linear com potenciais singulares:

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u = f(u) \\ \\ u \in D^{1,2}(I\!R^N; I\!R), \quad N \geq 3, \end{cases}$$

onde o potencial $V : [0, +\infty) \to (0, +\infty]$ é uma função mensurável, a função não linear $f : I\!R \to I\!R$ é contínua e $V$ e $f$ satisfazem :

$(V_\alpha)$ existem $A, \alpha > 0$ tal que $V(s) \geq As^{-\alpha}$ para quase todo $s > 0$;
$(f_p)$ existem $M > 0$ e $p > 2$ tais que $|f(s)| \leq M|s|^{p-1}$ para todo $s \in I\!R$.

Novas hipóteses sobre $V$ e $f$ bem como as restrições sobre os expoentes $\alpha$ e $p$ serão impostas mais a adiante veja (Por exemplo ). Com respeito às propriedades de integrabilidade do potencial, assumiremos que $V$ satisfaz:

$(V)_1$ $V \in L^1(a, b)$ para algum intervalo aberto limitado $(a, b)$, com $b > a > 0$.

Deixe-nos salientar que pressuposto $(V_\alpha)$ temos que $V$ é singular na origem. Outras sigularidades são permitidas por $(V)_1$.

Nosso objetivo é apresentar resultados de existência para o problema $(P_1)$, devido a Badiale-Rolando em [2]. O caso mais simples em que os pressupostos de nossos resultados estão satisfeitos é dada pelo problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \frac{A}{|x|^\alpha} u = |u|^{p-2}u \\ \\ u \in D^{1,2}(I\!R^N; I\!R), \quad N \geq 3, \end{cases} \tag{1}$$

onde $A > 0$, $\alpha > 0$. Neste caso, exibiremos um resultado de não existência de soluções para este problema em particular. Terracine em [15] provou que o problema $(P_1)$ possui uma solução quando $\alpha = 2$ e $p = 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$. Além disso, neste trabalho o autor mostrou que o problema (1) não possui solução quando $\alpha = 2$ e $p \neq 2^*$, ou, $\alpha \neq 2$ e $p = 2^*$. Outro impotante trabalho que trata o problema $(P_1)$ é devido a Badiale-Rolando [1], neste paper o autor mostra que o problema $(P_1)$ possui solução quando $\alpha \in (0, 2)$ e $p \in (2^\alpha, 2^*)$, onde $2^\alpha = \frac{2N}{N-2\alpha}$, $N \geq 3$.

# Capítulo 1

# Problema elíptico semilinear sem potenciais singulares

## 1.1 Considerações iniciais

Estudaremos neste capítulo um resultado de existência para o seguinte problema elíptico semilinear:

$$(P_0) \qquad \begin{cases} -\Delta u = g(u), \text{ em } I\!R^N, \ N \geq 3, \\ u \in H^1(I\!R^N), \quad u \not\equiv 0, \end{cases}$$

onde assumiremos que $g : I\!R \to I\!R$ é uma função contínua e ímpar .

Problemas do tipo $(P_0)$ surgem em diversos outros contextos da física (por exemplo, a aproximação clássica em mecânica estatística, falso vácuo na cosmologia, óptica não-linear, propagação de laser, etc).

O funcional $S(u)$ associado a $(P_0)$ é definido por

$$S(u) = \frac{1}{2}\int_{R^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{I\!R^N} G(u)dx, \tag{1.1}$$

onde $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(t)dt$. O funcional $S(u)$ é também chamado de "ação" associado com $(P_0)$ (quando $(P_0)$ é olhada como uma equação no espaço euclidiano).

Existem estudos importantes e bem conhecidos na literatura sobre problemas elípticos semilineares com valor de fronteira modelados em domínios limitados de $I\!R^N$. Evidentemente, um forte contraste entre os problemas elípticos com fronteira definida em domínio limitado e problemas elípticos cuja condição de fronteira é um domínio não limitado é a falta de compacidade da imersão de Sobolev. Isso acarreta grandes dificuldades no caso do segundo problema para pesquisadores que trabalham em domínios ilimitados.

Uma primeira abordagem natural ao tratar o problema $(P_0)$ seria a aproximação da solução de $(P_0)$ pela solução de um problema análogo na bola $B_R = \{x \in I\!R^N : |x| < R\}$, isto é, primeiramente resolve-se o problema

$$\begin{cases} -\Delta u_R = g(u_R) \quad \text{em} \quad B_R \\ u_R\big|_{\partial B_R} = 0 \end{cases}.$$

Uma das dificuldades enfrentadas a priori é a ausência de limites, (isto é, a solução independente de $R$). Este método, desenvolvida em [16], exige algumas restrições de natureza técnica sobre o termo não-linear $g$. Neste trabalho usaremos uma construção apropriada cuja finalidade é obtermos imersões compactas. Esta restrição pode ser transparente por causa de entes "autônomos"de $(P_0)$ e a possibilidade de utilizar uma mudança de variável em $I\!R^N$. O fato de que $g$ é "autônomo"(isto é, depende apenas de $u$), e do operador ser o Laplaciano (ou operador elíptico com coeficientes constantes) constituem as principais restrições sobre o método que será apresentado.

Uma característica especial de $(P_0)$ é a sua invariância sobre o grupo de translação e rotação, ou seja, se $\Re$ é uma rotação em $I\!R^N$ e $C \in I\!R^N$ é um vetor fixo, então para qualquer solução $u$ de $(P_0)$ a função $v$ definida por $v(x) = u(\Re x + C)$ é também a solução de $(P_0)$. Tal indeterminação não estará presente no que se segue, uma vez que nosso objetivo é procurar soluções radiais de $(P_0)$, isto é, solução $u$ com simetria esférica, $u$ depende apenas de $|x|$. Tais soluções também são chamadas de "particle-like".

## 1.2 Resultado principal

Presumiremos no nosso trabalho que a dimensão do espaço é $N \geq 3$. Sabemos que $g : I\!R \to I\!R$ é uma função contínua, ímpar, logo $g(0) = 0$. Suponha ainda que a função $g$ satisfaz as seguintes condições:

$(a_1)\qquad -\infty < \liminf_{s\to 0^+} \dfrac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s\to 0^-} \dfrac{g(s)}{s} = -m \equiv g'(0) < 0,$

$(a_2)\qquad -\infty \leq \limsup_{s\to\infty} \dfrac{g(s)}{s^l} \leq 0, l = \dfrac{N+2}{N-2},\ N \geq 3,$

$(a_3)\qquad$ existe $\tau > 0$ tal que $G(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau g(s)ds > 0.$

O resultado principal deste capítulo é:

**Teorema 1.1 (Berestycki-Lions)** *Suponha $N \geq 3$ e que $g$ satisfaz $(a_1) - (a_3)$. Então $(P_0)$ possui uma solução $u$ tal que:*

*i) $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$.*

*ii) $u$ é esfericamente simétrica: $u(x) = u(r)$, onde $r = |x|$ e $u$ decresce com respeito a $r$.*

*iii) $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.*

*iv) $u$ junto com suas derivadas a menos de ordem 2 tem decaimento exponencial no infinito*

$$|D^\alpha(u(x))| \leq Ce^{-\delta|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

*para algum $C,\ \delta > 0$ e para $|\alpha| \leq 2$.*

Para provarmos este teorema utilizaremos o método de minimização com vínculo que será detalhado mais à frente seção 1.4. Na verdade construiremos um outro problema cuja solução satisfaz $(P_0)$ e mostraremos que a solução do referido problema verifica as condições $(i) - (iv)$ do teorema 1.1

Passemos agora a alguns exemplos mais simples onde se aplica o teorema (1.1).

**Exemplo 1.2** *Considere a equação*

$$\begin{cases} -\Delta u + mu = \lambda |u|^{p-1}u \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad u \not\equiv 0 \end{cases}, \tag{1.2}$$

*onde $\lambda$ e $m$ são constantes positivas e $p > 1$.*

Esta equação foi estudada por S. Pohožaev em [11]. Neste trabalho o autor mostrou que (1.2) possui uma solução se e somente se $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ e não possui solução se $p \geq \frac{N+2}{N-2}$. Note que se $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, as condições $(a_1) - (a_3)$ são trivialmente satisfeitas e se $p \geq \frac{N+2}{N-2}$ o resultado de não-existência segue da identidade de Pohožaev a qual será apresentada na próxima seção.

O método de Pohožaev para resolver o problema (1.2) consiste em maximizar

$$\frac{\lambda}{p+1}\int_{I\!R^N} |u|^{p+1}dx$$

sobre o conjunto

$$\left\{u \in H^1(I\!R^N) : \ \frac{1}{2}\int_{I\!R^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{m}{2}\int_{I\!R^N} u^2 dx = 1\right\}$$

Este vínculo faz com que apareça um multiplicador de Lagrange $\theta$ e através do qual obtemos uma solução positiva de

$$-\Delta u + mu = \lambda\theta u^p.$$

Mostraremos que o multiplicador de lagrange $\theta$ é positivo, e pode ser removido olhando para a solução $v = \sigma u, \ \sigma > 0$ . O problema foi também estudado por Berger [3, 4]e por Coffman [6], mostrando que ela possui infinitas soluções distintas usando a mesma homogeineidade especial de (1.2).

**Exemplo 1.3**

$$\begin{cases} -\Delta u + mu = \lambda|u|^{p-1}u - \mu|u|^{q-1}u \quad em \quad I\!R^N \\ u \in H^1(I\!R^N), \quad u \not\equiv 0 \end{cases}, \tag{1.3}$$

*onde* $\lambda, \mu$ *e* $m$ *são constantes positivas e* $1 < p, q$.

Aqui as hipóteses do Teorema 1.1 são reduzidas para $1 < p < max\left(\frac{N+2}{N-2}, q\right)$ e existência de $\tau > 0$ tal que

$$G(\tau) = \frac{\lambda}{p+1}\tau^{p+1} - \frac{\mu}{q+1}\tau^{q+1} - \frac{m}{2}\tau^2 > 0.$$

A segunda condição $(a_2)$ é automaticamente verificada se $1 < q < p < l$. De fato, note que neste caso

$$g(u) = \lambda|u|^{p-1}u - \mu|u|^{q-1}u - mu,$$

.

$$\lim_{s\to\infty} \frac{g(s)}{s^l} = \frac{\lambda s^p - \mu s^q - ms}{s^l} = 0.$$

Portanto o Teorema 1.1 se aplica para $1 < q < p < \frac{N+2}{N-2} = l$. Strauss em [13] mostrou a existência de um número infinito de soluções do problema (1.3). O caso em que $q \leq \frac{N+2}{N-2} \leq p$ será tratado na próxima seção, onde provaremos a não existência de soluções não triviais para (1.3), utilizando a identidade de Pohožaev.

Finalmente quando $p < q$, o teorema 1.1 se aplica se existir $\tau > 0$ tal que $G(\tau) > 0$. Utilizando a identidade de Pohožaev pode-se mostrar que (1.3) não tem solução se $G(\tau) < 0 \ \forall \ \tau > 0$. Assim a condição $(a_3)$ é necessária e suficiente.

## 1.3 Identidade de Pohožaev

Se $u$ é solução do problema $(P_0)$, então $u$ juntamente com suas derivadas suficientemente pequenas no infinito necessariamente satisfazem

$$\frac{N-2}{2} \int_{I\!R^N} |\nabla u|^2 dx = N \int_{I\!R^N} G(u) dx \tag{1.4}$$

onde $G$ sempre denotará a função $G(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau g(s)ds$. A equação (1.4) é chamada identidade de Pohožaev. Antes de ser mais preciso, vamos dar um argumento formal explicitando (1.4). Defina dois funcionais

$$T(u) = \int_{I\!R^N} |\nabla u|^2 dx, \qquad V(u) = \int_{I\!R^N} G(u) dx.$$

$\big($Por analogia $\frac{1}{2}T(u)$ corresponde a energia cinética, enquanto que $V(u)$ corresponde a energia potencial. Assim $S(u) = \frac{1}{2}T(u) - V(u)\big)$.

Considere agora a seguinte mudança de variável em $I\!R^N$: para $\sigma > 0$ defina $u_\sigma(x) = u(\frac{x}{\sigma})$. Através de um simples cálculo nós obtemos que:

$$T(u_\sigma) = \sigma^{N-2} T(u), \qquad V(u_\sigma) = \sigma^N V(u).$$

Assim $S(u_\sigma) = \frac{\sigma^{N-2}}{2} T(u) - \sigma^N V(u)$. Daí se $u$ é solução de (1.1), pelo menos informalmente podemos interpretá-la como um ponto crítico do funcional $S$. Deste modo temos $\frac{d}{d\sigma} S(u_\sigma)_{\sigma=1} = 0$ o qual é precisamente (1.4).

O procedimento argumentado acima não é rigoroso, por duas razões pelo menos, em primeiro lugar necessitamos saber se $S \in C^1$ sobre o espaço onde está definido e precisamos mostrar que $\frac{d}{d\sigma}u_\sigma(x)\Big|_{\sigma=1} = -\nabla u(x).x$ está bem definida.

**Lema 1.4** *(Identidade de Pohožaev)*
*Seja $\Omega$ um aberto de classe $C^1$, $g : I\!R \to I\!R$ uma função contínua onde*

$$G(u) = \int_0^u g(s)ds \ \ e \ u \in H_0^1(\Omega) \cap H_{loc}^2(\overline{\Omega})$$

*é uma função satisfazendo*

$$-\Delta u = g(u) \tag{1.5}$$

*no sentido "fraco". Se além disso $G(u) \in L^1(\Omega)$ e $\eta(\sigma)$ designa o vetor normal exterior à $\partial\Omega$, então para todo $z^* \in I\!R^N$ fixo, u satisfaz a identidade*

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2(\sigma - z^*).\eta(\sigma)d\sigma = N\int_\Omega G(u(x))dx. \tag{1.6}$$

*Em particular se $\Omega = I\!R^N$, para $1 \leq j \leq N$ temos,*

$$\int_\Omega |\partial_j u(x)|^2 dx = \int_\Omega |\partial_1 u(x)|^2 dx,$$

$$(N-2)\int_\Omega |\partial_j u(x)|^2 dx = 2\int_\Omega G(u(x))dx,$$

*ou seja,*

$$\frac{N-2}{2}\int_{I\!R^N} |\nabla u|^2 dx = N\int_{I\!R^N} G(u)dx. \tag{1.7}$$

**Demonstração:** Seja $\phi_0$ uma função de classe $C^\infty$ sobre $[0,\infty)$ tal que

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t \geq 2. \end{cases}$$

Para $j \geq 1$ tome $\phi_j(x) := \phi_0(\frac{|x|}{j})$. Daí

$$\nabla\phi_j(x) \overset{\text{R. cadeia}}{=} \phi_0'\left(\frac{|x|}{j}\right) \cdot \left(\frac{x_1}{j|x|}, \ldots, \frac{x_N}{j|x|}\right) = \frac{1}{j|x|}\phi_0'\left(\frac{|x|}{j}\right).x$$

Logo $||\nabla\phi_j(x)|| \leq c$ independe de $j$ e

$$|x||\nabla\phi_j(x)| \leq \frac{|x|}{j}\phi_0'\left(\frac{|x|}{j}\right) \leq C||\phi_0'||_\infty$$

Para cada $i$ fixo, multipliquemos os dois membros de (1.5) por $(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\phi_j(x)$. Agora, usando o fato de $\partial_i G(u(x)) = g(u(x))\partial_i u(x)$ e em seguida integrando por partes o lado direito da equação obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(u(x))(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\phi_j(x)dx &= \int_\Omega (x_i - z_i^*)\phi_j(x)\partial_i G(u(x))dx \\
&= -\int_\Omega (\phi_j(x) + (x_i - z_i^*)\partial\phi_j(x))G(u(x))dx + \\
&\quad \int_{\partial\Omega} (\sigma_i - z_i^*)\phi_j(\sigma)G(u(\sigma))\eta(\sigma)d\sigma \\
&= -\int_\Omega (\phi_j(x) + (x_i - z_i^*)\partial\phi_j(x))G(u(x))dx,
\end{aligned}$$

e por passagem ao limite onde utilizamos o Teorema da Convergência Dominada e o fato de $\partial_i\phi_j(x)$ tender a zero quando $j \to \infty$, nós obtemos:

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega g(u(x))(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\phi_j(x)dx = -\int_\Omega G(u(x))dx. \tag{1.8}$$

Para resolver a outra parte usaremos a identidade

$$v\Delta u = div(v\nabla u) - \nabla u \nabla v \quad \text{válida em } \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \tag{1.9}$$

e em seguida aplica-se o Teorema da Divergência.

$$-\int_\Omega \Delta u(x).(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\phi_j(x)dx =$$

$$-\int_\Omega div[(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\phi_j(x)\nabla u(x)]dx + \int_\Omega \nabla\big((x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\phi_j(x)\big).\nabla u(x)dx =$$

$$-\int_{\partial\Omega} (\sigma_i - z_i^*)\partial_i u(\sigma)\phi_j(\sigma)\nabla u(\sigma)\eta(\sigma)d\sigma + \int_\Omega e_i\partial_i u(x)\phi_j(x).\nabla u(x)dx +$$
$$\int_\Omega (x_i - z_i^*)\nabla(\partial_j u(x)\phi_j(x)).\nabla u(x)dx =$$

$$H(\sigma) + \int_\Omega |\partial_i u(x)|^2\phi_j(x)dx + \int_\Omega (x_i - z_i^*)\nabla(\partial_i u(x))\phi_j.\nabla u(x)dx +$$
$$\int_\Omega (x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\nabla\phi_j(x).\nabla u(x)dx =$$

$$H(\sigma) + \int_\Omega |\partial_i u(x)|^2\phi_j(x)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (x_i - z_i^*)\phi_j(x)\partial_j[|\nabla u(x)|^2]dx +$$
$$\int_\Omega (x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\nabla u(x).\nabla\phi_j(x)dx =$$

$$H(\sigma) + E_{1j} + E_{2j} + E_{3j}.$$

onde

$$\begin{aligned} H(\sigma) &= -\int_{\partial\Omega} (\sigma_i - z_i^*)\partial_i u(\sigma)\phi_j(\sigma)\nabla u(\sigma)\eta(\sigma)d\sigma, \\ E_{1j} &= \int_\Omega |\partial_i u(x)|^2\phi_j(x)dx, \\ E_{2j} &= \frac{1}{2}\int_\Omega (x_i - z_i^*)\phi_j(x)\partial_j[|\nabla u(x)|^2]dx \end{aligned}$$

e

$$E_{3j} = \int_\Omega (x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\nabla u(x).\nabla\phi_j(x)dx$$

Quando $j \to \infty$, $E_{3j} \to 0$ e $E_{1j} \to \int_\Omega |\partial_i u(x)|^2 dx$, pois $\phi_j = 1$ e $\nabla\phi_j \to 0$. Agora quanto a $E_{2j}$, utilizamos integração por partes.

$$\begin{aligned} E_{2j} &= \frac{1}{2}\int_\Omega (x_i - z_i^*)\partial_i[|\nabla u(x)|^2]dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\phi_j - \frac{1}{2}\int_\Omega (x_i - z_i^*)\partial_i\phi_j(x)|\nabla u(x)|^2dx + \\ & \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2(\sigma_i - z_i^*)\phi_j(\sigma)\eta_i(\sigma)d\sigma. \end{aligned}$$

Quando $j \to \infty$

$$E_{2j} = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2(\sigma_i - z_i^*)\eta_i(\sigma)d\sigma.$$

Finalmente usando as relações acima, temos

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2(\sigma_i - z_i^*)\eta_i(\sigma)d\sigma - \int_{\partial\Omega} (\sigma_i - z_i^*)\partial_i u(\sigma)\nabla u(\sigma).\eta(\sigma)d\sigma =$$

$$-\int_\Omega G(u(x))dx.$$

Como isso vale para cada $i = 1, \ldots, N$ e o gradiente $\nabla u(\sigma)$ é paralelo a $\eta(\sigma)$, temos

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2(\sigma - z^*).\eta(\sigma)d\sigma = N\int_\Omega G(u(x))dx.$$

Agora, se $\Omega = I\!R^N$, então $\partial\Omega = \emptyset$, logo

$$\frac{N-2}{2}\int_{I\!R^N} |\nabla u(x)|^2dx = N\int_{I\!R^N} G(u(x))dx$$

e

$$||\partial_i u||^2_{L^2(I\!R^N)} = ||\partial_1 u||^2_{L^2(I\!R^N)} \qquad \text{para } i = 1, \ldots, N.$$

□

### 1.3.1 Algumas consequências da identidade de Pohožaev

Mostraremos a seguir que as condições $(a_1) - (a_3)$ são "quase"necessárias para a existência de uma solução do problema $(P_0)$.

($a$) A hipótese ($a_3$) é uma condição necessária, visto que se $u$ é solução de ($P_0$), então segue da identidade de Pohožaev que

$$\int_{I\!R^N} G(u)dx = \frac{N-2}{2N}\int_{I\!R^N} |\nabla u|^2 dx > 0$$

($b$) Para justificar a hipótese ($a_2$), consideremos um caso de potência pura, a equação (1.2) vista no exemplo 1.2 da seção 1.1, por exemplo. Note que neste exemplo temos

$$g(u) = \lambda|u|^{p-1}u - mu, \quad \lambda,\ m > 0.$$

Se $u$ satisfaz a equação (1.2), então multiplicando por $u$ e integrando em $I\!R^N$ temos

$$\int_{I\!R^N} |\nabla u|^2 dx = \int_{I\!R^N} g(u)udx.$$

Por outro lado segue da identidade de Pohožaev (ver equação (1.7)) que

$$\int_{I\!R^N} g(u)udx = \int_{I\!R^N} |\nabla u|^2 dx = \frac{2N}{N-2}\int_{I\!R^N} G(u)dx$$

daí

$$\int_{I\!R^N} (\lambda|u|^{p-1}u - mu)udx = \frac{2N}{N-2}\left[\int_{I\!R^N}\left(\frac{\lambda|u|^{p+1}}{p+1} - \frac{mu^2}{2}\right)dx\right]$$

ou seja,

$$\lambda\left(\frac{1}{p+1} - \frac{N-2}{2N}\right)\int_{I\!R^N} |u|^{p+1}dx = \frac{m}{N}\int_{I\!R^N} u^2 dx > 0.$$

Como $\lambda$ e $m$ são constantes positivas temos que

$$\frac{1}{p+1} > \frac{N-2}{2N}, \quad \text{isto é} \quad p < \frac{N+2}{N-2} = l.$$

Portanto (1.2) não possui solução quando $p \geq l$, como comentamos na seção 1.2. Por outro lado, sabemos da literatura [13, 4, 11] que quando $p < l$ (1.2) admite infinitas soluções radiais. Deste exemplo, vemos que a hipótese ($a_2$) é necessária onde $l = \frac{N+2}{N-2}$ é denominado "expoente crítico".

($c$) Consideraremos agora a hipótese ($a_1$). Afirmamos que ($a_1$) é "quase" necessária no sentido de que se $g'(0) > 0$, então ($P_0$) não tem solução radial. Sabemos que se $u \in H^1(I\!R^N)$ é esfericamente simétrica, então por um resultado de Strauss [13] (Ver apêndice, lema A.4) existe uma constante $C$ dependendo apenas da dimensão do espaço, no caso $N$, tal que

$$u(x) \leq C||u||_{H^1(I\!R^N)}||x||^{-\frac{N-1}{2}},$$

na verdade temos $|u(x)| = o\big(|x|^{-\frac{N-1}{2}}\big)$ quando $|x| \to +\infty$. Aqui $f(x) = o(|h|)$ quando $|x| \to \infty$ se $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(h)}{|h|} = 0$.

Sejam $m = g'(0) > 0$ e $q(r) = m - \frac{g(u(r))}{u(r)}$. Considerando o caso $N = 3$ e assumindo $g \in C^2$ numa vizinhança de 0, temos que $q(r) = o(r^{-1})$. De fato

$$\begin{aligned} g(s) &= g(0) + g'(0)s + g''(0)\frac{s^2}{2} \\ &= ms + g''(0)\frac{s^2}{2}. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} \frac{g(u(r))}{u(r)} &= m\frac{u(r)}{u(r)} + g''(0)\frac{u(r)^2}{2u(r)} \\ &= m + g''(0)\frac{u(r)}{2}, \end{aligned}$$

logo $\frac{q(r)}{r} = -g''(0)\frac{u(r)}{2r}$, enquanto que $u$ satisfaz a equação linear

$$-\Delta u + q(r)u = mu \quad \text{em} \quad I\!R^3,$$

mas isto é impossível, pois viola um resultado de Kato [10] o qual diz que o operador linear de Schrödinger $-\Delta + q(r)$ não possui autovalores positivos associados à auto-funções em $L^2(I\!R^3)$ sob a condição de que $q(r) = o(r^{-1})$.

$(d)$ Uma outra consequência da identidade de Pohožaev é o seguinte corolário:

**Corolário 1.5** *Se $u$ é uma solução qualquer de $(P_0)$, então*

$$S(u) = \frac{1}{N}T(u) > 0.$$

**Demonstração:**

$$S(u) = \frac{1}{2}T(u) - V(u),$$

Segue do lema 1.4 que

$$\frac{N-2}{2}\int_{I\!R^N} |\nabla u|^2 dx = N\int_{I\!R^N} G(u)dx$$

daí,

$$V(u) = \frac{N-2}{2N}T(u),$$

logo
$$S(u)=\frac{1}{2}T(u)-\frac{N-2}{2N}T(u)=\frac{1}{N}T(u)>0.$$

Com intuito de mostrar uma situação onde a equação (1.3) não admite solução não trivial, vamos retornar ao exemplo 1.3,

$$\begin{cases} -\Delta u+mu=\lambda|u|^{p-1}u-\mu|u|^{q-1}u \quad \text{em} \quad I\!R^N \\ u\in H^1(I\!R^N), \quad u\not\equiv 0 \end{cases}.$$

Da identidade de Pohožaev é facil ver que se $q\leq \frac{N+2}{N-2}\leq p$ a equação acima não possui nenhuma solução não trivial. De fato,

$$\int_{I\!R^N}|\nabla u|^2dx=\int_{I\!R^N}\big(\lambda|u|^{p-1}u-\mu|u|^{q-1}u-mu\big)udx.$$

Por outro lado, segue da identidade de Pohožaev que

$$\int_{I\!R^N}|\nabla u|^2dx=\frac{2N}{N-2}\int_{I\!R^N}G(u)dx, \quad G(u)=\int_0^u g(s)ds$$

onde $g(u)=\lambda|u|^{p-1}u-\mu|u|^{q-1}u-mu$. Daí segue que

$$\frac{2N}{N-2}\left[\int_{I\!R^N}\left(\frac{\lambda}{p+1}|u|^{p+1}-\frac{\mu}{q+1}|u|^{q+1}-\frac{m}{2}u^2\right)dx\right]=\int_{I\!R^N}(\lambda|u|^{p+1}-\mu|u|^{q+1}-mu^2)dx,$$

ou seja,

$$\lambda\left(\frac{1}{p+1}-\frac{N-2}{2N}\right)\int_{I\!R^N}|u|^{p+1}dx+\mu\left(-\frac{1}{q+1}+\frac{N-2}{2N}\right)\int_{I\!R^N}|u|^{q+1}dx=\frac{m}{N}\int_{I\!R^N}u^2>0.$$

Como $\frac{1}{p+1}-\frac{N-2}{2N}>0$ e $-\frac{1}{q+1}+\frac{N-2}{2N}>0$, então $p<\frac{N+2}{N-2}=l$ e $q>\frac{N+2}{N-2}$. Portanto, se $q\leq\frac{N+2}{N-2}\leq p$ conclui-se que a equação (1.3) não admite solução não trivial como já havíamos afirmado anteriormente.

## 1.4 Método de minimização com vínculo

Um método natural para resolver $(P_0)$ seria olhar diretamente para o ponto crítico do funcional $S$ no espaço $H^1(I\!R^N)$. Nosso objetivo é modificar $g$

de modo que o funcional $S$ seja de classe $C^1$ em $H^1(I\!R^N)$, para isso usaremos Teorema A.7 .

A primeira dificuldade que enfrentamos ao atacar o problema, é o fato de $S$ não ser limitado superiormente, nem inferiormente em $H^1(I\!R^N)$. De fato, a ilimitação superior se dá devido a presença do termo gradiente, pois se designarmos por $(e_n)$ uma base ortogonal para $H^1(I\!R^N)$, como

$$\int_{I\!R^N} |\nabla e_n|^2 dx = ||e_n||^2_{H_1(I\!R^N)} = 1,$$

segue que, dado $t > 0$ e $n$ fixo,

$$\lim_{t\to\infty} S(te_n) = \frac{1}{2}\int_{I\!R^N} |\nabla te_n|^2 dx - \int_{I\!R^N} G(te_n)dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{2} - \int_{I\!R^N} G(te_n)dx \to +\infty,$$

pois $\displaystyle\int_{I\!R^N} G(u)dx \overset{(a_2)}{\leq} C\int_{I\!R^N} |u|^{l+1}dx < \infty$. Portanto segue que o funcional $S$ não é limitado superiormente. Para mostrar que $S$ não é limitado inferiormente vamos utilizar a hipótese $(a_3)$ e a mudança de variável da seção 3.1. De $(a_3)$ temos que existe $w \in H_1(I\!R^N)$ tal que

$$V(w) = \int_{I\!R^N} G(w)dx > 0.$$

Esta afirmação será devidamente justificada na demonstração do próximo teorema (1.6). Utilizando a mudança de variável da seção 1.3, isto é, $w_\sigma(x) = w(\frac{x}{\sigma}) =$, temos

$$S(w_\sigma) = \frac{\sigma^{N-2}}{2}T(w) - \sigma^N V(w).$$

Como $V(w) > 0$, segue que $S(w_\sigma) \to -\infty$ quando $\sigma \to +\infty$ como queríamos.

Outra dificuldade está no fato de $S$ não satisfazer condições do tipo $(PS^-)$ ou $(PS^+)$, isso é pelo fato de estarmos em $I\!R^N$, então possivelmente a afirmação acima pode ocorrer, mas sob algumas condições à frente tal compacidade será resgatada.

Antes de olharmos para o ponto crítico do funcional $S$, consideremos o problema de minimização com vínculo. Inicialmente precisamos modificar a função $g$ de modo que $V$ seja de classe um funcional de $C^1$ em $H^1(I\!R^N)$. Vamos definir a nova função $\tilde{g}$ como segue:

Seja $\tau$ um número real fixo, defina

$(i)$ $\tilde{g} =: g(s)$ Se $g(s) \geq 0$ para todo $s \geq \tau$;
e

$(ii)$ se existir $s_0 \geq \tau$ tal que $g(s_0) = 0$, defina

$$\tilde{g}(s) \quad = \begin{cases} g(s), & \text{em } [0, s_0] \\ 0 & \text{para } s \geq s_0. \end{cases}$$

Para $s \leq 0$, $\tilde{g}$ é definida (como $g$) por $\tilde{g}(s) = -g(-s)$. Primeiramente podemos observar que $\tilde{g}$ satisfaz as condições $(a_1) - (a_3)$. Além disso, segue do princípio do máximo que soluções do problema $(P_0)$ com $\tilde{g}$ são também soluções de $(P_0)$ com $g$. Sabemos do caso $(ii)$ acima que uma solução $u$ com $\tilde{g}$ satisfaz $|u| < s_0$, então $\tilde{g}(u) = g(u)$. Logo não há perda de generalidade em substituir $\tilde{g}$ por $g$. Doravante vamos sempre adotar por convenção que foi substituido $g$ por $\tilde{g}$, e no entanto manteremos a mesma notação $g$.

Com estas modificações, $g$ satisfaz uma condição mais fraca

$$(a_2)_{bis} \qquad \lim_{s \to \pm\infty} \frac{|g(s)|}{s^l} = 0 \text{ com } l = \tfrac{N+2}{N-2}.$$

Agora utilizando o teorema A.7 (ver apêndice) segue que $V(w) = \displaystyle\int_{I\!R^N} G(w)dx$ está bem definido e é de classe $C^1$ no espaço $H^1(I\!R^N)$.

Consideremos então o seguinte problema com vínculo:

$$\text{minimize}\big\{T(w); w \in H^1(I\!R^N), V(w) = 1\big\}. \tag{1.10}$$

Note que o problema (1.10) conduz a solução de $(P_0)$. Sabemos que se $u$ resolve (1.10), então como $T$ e $V$ são de classe $C^1$ em $H^1(I\!R^N)$, pelo Teorema de Multiplicadores de Lagrange existe um multiplicador de lagrange $\theta$ tal que $T'(u) = \theta V'(u)$, isto é, (pelo menos no sentido de distribuição)

$$-\Delta u = \theta g(u) \;\text{ em }\; I\!R^N \tag{1.11}$$

Vamos mostrar mais à frente que $\theta > 0$. Daí, tomando $u_\sigma(x) = u(\frac{x}{\sigma})$, $\sigma > 0$; temos

$$-\Delta u_\sigma = \frac{\theta}{\sigma^2} g(u_\sigma) \;\text{ em }\; I\!R^N.$$

Logo escolhendo $\sigma = \sqrt{\theta}$ temos a solução de $(P_0)$.

**Teorema 1.6** *Sob as mesmas hipóteses do teorema* 1.1 *o problema de minimização* (1.10) *possui uma solução* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *a qual é positiva, esfericamente simétrica e decrescente com* $r = |x|$*. Além disso, existe um multiplicador de Lagrange* $\theta > 0$ *tal que* $u$ *satisfaz* (1.11)*. Assim* $u_\sigma$*, para* $\sigma = \sqrt{\theta}$ *é uma solução de* $(P_0)$*.*

**Demonstração:** Dividiremos a demonstração do teorema em 5 etapas enumeradas a seguir:

1. O conjunto $\Big\{w \in H^1(\mathbb{R}^N), V(w) = 1\Big\}$ é não vazio.
2. Selecionar uma sequência minimizante adequada.
3. Estimar a *priori* a seqüência minimizante.
4. Passagem ao limite.
5. Conclusão.

**Primeira etapa** :
Mostraremos que o conjuto $\Big\{w \in H^1(\mathbb{R}^N), V(w) = 1\Big\}$ é não vazio. Note que este é o único lugar onde a hipótese $(a_3)$ é usada.

Seja $\tau > 0$ tal que $G(\tau) > 0$. Para $R > 1$ defina a seguinte função:

$$w_R(x) \;\; = \begin{cases} \tau & \text{para } |x| < R \\ \tau(R + 1 - r) & \text{para, } r = |x| \in [R, R+1] \\ 0 & \text{para } |x| > R + 1. \end{cases}$$

Como $w_R \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla w_R \in L^2(\mathbb{R}^N)$, então $w_R \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Agora usando $|.|$ para denotar a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável do $\mathbb{R}^N$, verifica-se que

$$V(w_R) \geq G(s)|B_R| - |B_{R+1} - B_R|\Big(\max_{s\in[0,1]} |G(s)|\Big).$$

Então, existem constantes $C, C' > 0$ tais que $V(w_R) \geq CR^N - C'R^{N-1}$ para $R > 0$ suficientemente grande. Isto mostra que $V(w_R) > 0$ para algum $R > 0$ fixo. Então fazendo um mudança de variável em $w_R$, $w_{R,\sigma}(x) = w_R(\frac{x}{\sigma})$, temos que:

$$V(w_{R,\sigma}) = \sigma^N V(w_R).$$

Então para um $\sigma > 0$ apropriado obtemos $V(w_{R,\sigma}) = 1$.

**Segunda etapa** :
Selecionaremos uma sequência minimizante adequada. Da etapa acima, mais a definição de ínfimo segue que existe uma sequência $u_n \in H^1(I\!R^N)$ tal que $V(u_n) = 1$ e

$$\lim_{n\to\infty} T(u_n) = I \equiv \inf \{T(w);\ w \in H^1(I\!R^N),\ V(w) = 1\} \geq 0.$$

Seja $u_n^*$ denotando um rearranjamento esférico de Schwartz de $|u_n|$ (a definição e algumas propriedade da simetrização de Schwartz serão descritas no apêndice, seção $A.4$). Temos que $u_n^* \in H^1(I\!R^N)$, $V(u_n^*) = 1$, e $I \leq T(u_n^*) \leq T(u_n)$. Isto significa que $(u_n^*)$ é também uma sequência minimizante. Substituindo $(u_n)$ por $(u_n^*)$, assumiremos de agora em diante que, para todo $n$ $u_n$ é não negativa, esfericamente simétrica e não crescente com $r = |x|$.

**Terceira etapa** :
Faremos uma estimativa para $(u_n)$, isto é, mostraremos que $||u_n||_{H^1(I\!R^N)}$ é limitada. Para $s \geq 0$ defina $g_1(s) = (g(s) + ms)^+$ e $g_2(s) = g_1(s) - g(s)$ (aqui $a^+ = \max(a, 0)$, parte positiva de $a$). Estendendo $g_1$ e $g_2$ como funções ímpares para $s \leq 0$ Otemos que $g = g_1 - g_2$ com $g_1, g_2 \geq 0$, e mais

$$g_1(s) = o(s),\ \text{quando } s \to 0; \quad \lim_{s\to\infty} \frac{g_1(s)}{s^l} = 0,\ \text{onde } l = \frac{N+2}{N-2} \tag{1.12}$$

e

$$g_2(s) \geq ms, \qquad \forall s \geq 0 \tag{1.13}$$

De fato,
se $g(s) + ms \leq 0$, (1.12) é imediata, pois $g_1 \equiv 0$. Agora se $g(s) + ms > 0$, com $s > 0$ então $g_1(s) = g(s) + ms$, daí

$$\lim_{s\to 0} \frac{g_1(s)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{g(s) + ms}{s} = -m + m = 0$$

e

$$\lim_{s\to\infty} \frac{g_1(s)}{s^l} = \lim_{s\to\infty} \frac{g(s) + ms}{s^l} = 0.$$

Portanto 1.12 se verifica. O caso $s \leq 0$ é análogo.

Quanto a (1.13), temos que se
$g(s) \leq 0,\ s \geq 0 \quad \Rightarrow$
$g_1(s) = ms \quad \Rightarrow g_2(s) = ms - g(s) \leq ms,$
agora se $g(s) > 0 \quad \Rightarrow \quad g_2(s) = ms$, portanto $g_2(s) \geq ms$, para todo $s \geq 0$.

Seja $G_i(z) = \int_0^z g_i(s)ds,\ i = 1, 2....$ Segue de (1.12), (1.13) que para qualquer $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$G_1(s) \leq C_\epsilon |s|^{l+1} + \epsilon G_2(s), \qquad \forall s \in I\!R. \tag{1.14}$$

Agora como $T(u_n) \to I$, então a sequência $||\nabla u_n||_{L^2(I\!R^N)}$ é limitada. Segue-se do teorema de imersões de Sobolev (Ver apêndice A.2) $(D^{1,2}(I\!R^N) \hookrightarrow L^{2^*}(I\!R^N))$, que $||u_n||_{L^{2^*}(I\!R^N)} \leq C$, onde $2^* = l + 1 = \frac{2N}{N-2}$ (aqui a constante $C$ é positiva e independente $n$).

Escrevendo $V(u_n) = 1$, temos

$$\int_{I\!R^N} G_1(u_n)dx = \int_{I\!R^N} G_2(u_n)dx + 1. \tag{1.15}$$

Agora tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$ em (1.14) e usando (1.15), temos $\int_{I\!R^N} G_2(u_n)dx \leq C$. Logo por (1.13) segue-se que

$$\frac{m}{2} \int_{I\!R^N} u_n^2 \leq \int_{I\!R^N} G_2(u_n) \leq C.$$

Asim, pelo que obtemos acima, $||u_n||_{H^1(I\!R^N)}$ é limitada. Daí segue-se da imersão contínua $H^1 \hookrightarrow L^p$ que

$$||u_n||_{L^p(I\!R^N)} \leq C \quad \text{para qualquer } 2 \leq p \leq 2^*.$$

4° etapa:
Passagem ao limite. Inicialmente observemos que $u_n(x) \to 0$ quando $|x| \to +\infty$ uniformemente com respeito a $n$. De fato, sabemos das duas últimas etapas que $u_n$ é radial, não crescente e limitada em $L^2(I\!R^N)$. Daí segue-se do lema radial A.6 (ver apêndice) que $|u_n(x)| \leq C|x|^{-\frac{N}{2}},\ x \in I\!R^N$, com $C$ independente de $n$. Agora como $u_n$ é limitada em $H^1(I\!R^N)$ podemos extrair uma subsequência de $u_n$, novamente denotada por $u_n$, tal que $u_n$ converge fracamente em $H^1(I\!R^N)$ e quase sempre em $I\!R^N$ para a função $u \in H^1(I\!R^N)$. Observe que $u \in H^1(I\!R^N)$ é esfericamente simétrica e não crescente com $r$.

Agora, seja $Q(s) = s^2 + |s|^{l+1}$, usando (1.12), obtemos

$$\frac{G_1(s)}{Q(s)} \to 0 \quad \text{quando} \quad s \to \infty \quad \text{e quando} \quad s \to 0. \tag{1.16}$$

Sabemos também que

$$\sup_n \int_{I\!R^N} Q(u_n)dx < +\infty, \tag{1.17}$$

$$G_1(u_n) \to G_1(u) \quad \text{quase sempre em} \quad I\!R^N e \tag{1.18}$$

$$u_n(x) \to 0 \quad \text{quando} \quad |x| \to +\infty, \quad \text{uniformemente com respeito a} \quad n. \tag{1.19}$$

Por (1.16(-(1.19) o lema de compacidade de Strauss (ver apêndice, Teorema A.3) nos garante:

$$\int_{I\!R^N} G_1(u_n)dx \to \int_{I\!R^N} G_1(u)dx \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Do Lema de Fatou's (ver apêndice lema A.11) na equação (1.15) deduzimos que

$$\int_{I\!R^N} G_1(u)dx \geq \int_{I\!R^N} G_2(u)dx + 1,$$

isto é, $V(u) \geq 1$. Por outro lado, também sabemos que

$$T(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} T(u_n) = I$$

(ver apêndice, Corolário A.14).

Suponha agora por contradição que $V(u) > 1$. Então, usando a mudança de variável $u_\sigma(x) = u(\frac{x}{\sigma})$, obtemos que $V(u_\sigma) = \sigma^N V(u) = 1$ para algum $\sigma$, $0 < \sigma < 1$. Também temos $T(u_\sigma) = \sigma^{N-2}T(u) \leq \sigma^{N-2}I$. Pela definição de $I$, $T(u_\sigma) \geq I$. Mas isto implicaria em $I = 0$, ou seja, $T(u) = 0$, logo $u = 0$ ($u$ não pode ser uma constante não nula por causa de seu decaimento ), contradizendo $V(u) > 1$. Portanto $V(u) = 1$ e $T(u) = I > 0$; disto, $u$ é solução do problema de minimização (1.10).

5° etapa:(conclusão)

Como $T$ e $V$ são de classe $C^1$ em $H^1(I\!R^N)$ (Ver apêndice teorema A.8), existe um multiplicador de Lagrange $\theta$ tal que $\frac{1}{2}T'(u) = \theta V'(u)$. Primeiramente observemos que $\theta \neq 0$. De fato, se fosse $\theta = 0$ teríamos $u = 0$ que é impossível.

Vamos supor então que $\theta < 0$. Observe que $V'(u) \neq 0$ ($V'(u) = 0$ daria $g(u) \equiv 0$, o que implica em $u \equiv 0$ pois $g(s) \neq 0$ para $s > 0$ pequeno, contradizendo assim o fato de $V(u) = 1$, resultado obtido na etapa anterior. Considere então a função $w \in \mathfrak{D}(I\!R^N)$ tal que

$$\langle V'(u), w\rangle = \int_{I\!R^N} g(u)w dx > 0.$$

Como $V(u + \epsilon W) \simeq V(u) + \epsilon\langle V'(u), w\rangle$ e

$$T(u + \epsilon w) \simeq T(u) + 2\epsilon\langle V'(u), w\rangle \quad \text{para} \quad \epsilon \to 0 \quad \text{e} \quad \theta < 0.$$

podemos encontrar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $v = u + \epsilon w$ satisfaça $V(v) > V(u) = 1$ e $T(v) < T(u) = I$. Novamente por uma mudança de variável, existe $\sigma \in (0,1)$ tal que $V(v_\sigma) = 1$ e $T(v_\sigma) < I$, pois $I$ é ínfimo que é um absurdo. Portanto segue que $\theta > 0$.

Então $u$ satisfaz, ao menos em $H^1$, a equação

$$-\Delta u = \theta g(u) \quad \text{em} \quad I\!R^N$$

e então $u(./\sqrt{\theta}) = u_{\sqrt{\theta}}$ é uma solução do problema $(P_0)$. $\square$

**Lema 1.7** *Sob as condições $(a_1), (a_2)_{bis}$, se $u$ é uma solução esfericamente simétrica de $(P_0)$, então $u \in C^2(I\!R^N)$.*

**Demonstração:** Note que $u$ satisfaz a equação

$$-\Delta u = q(x)u \quad \text{em } I\!R^N, \tag{1.20}$$

onde $q(x) = \dfrac{g(u(x))}{u(x)}$. Usando $(a_2)_{bis}$, temos

$$\left|q(u)\right| = \left|\frac{g(u)}{u}\right| \leq c|u|^{l-1} = c|u|^{\frac{4}{N-2}}.$$

Como $u \in H^1(I\!R^N)$, temos também que $u \in L^{2^*}(I\!R^N)$(Teorema de imersões de Sobolev). Notando que $2^* = \dfrac{4}{N-2}.\dfrac{N}{2}$ e usando a estimativa acima vemos que $q \in L^{\frac{N}{2}}(I\!R^N)$. Agora aplicando um resultado de Brezis & Kato ver [13], concluímos que $u \in L^p_{loc}(I\!R^N)$ para $1 \leq p < \infty$. Usando um argumento clássico (na bola $B_R$) mostramos que $u \in L^\infty_{loc}(I\!R^N)$. Então por uma estimativa em $L^p$ temos que $u \in W^{2,p}_{loc}(I\!R^N)$ para qualquer $p < +\infty$ e assim $u \in C^{1,\alpha}(I\!R^N)$, com $\alpha \in (0,1)$.

Como $u$ satisfaz a equação (ver apêndice A.12)

$$-u_{rr} - \frac{N-1}{r}u_r = g(u), \quad r \in (0, +\infty), \tag{1.21}$$

nós já sabemos que $u_{rr}$ é contínua, exceto possivelmente na origem 0. Vamos colocar $v(r) = g(u(r))$; $v$ é contínua em $[0, +\infty)$. Reescrevendo (1.21) como

$$-\frac{d}{dr}(r^{N-1}u_r) = r^{N-1}v(r)$$

e integrando de 0 a $r$ temos

$$r^{N-1}u_r = -\int_0^r s^{N-1}v(s)ds.$$

Com uma mudança de variável temos

$$u_r = -r\int_0^1 t^{N-1}v(rt)dt$$

ou

$$\frac{u_r}{r} = -\int_0^1 t^{N-1}v(rt)dt.$$

Como

$$\int_0^1 t^{N-1}v(rt)dt \to \frac{v(0)}{N} \quad \text{quando } r \to 0,$$

usando (1.21) deduzimos que $u_{rr}(0)$ existe e $u_{rr}(0) = \dfrac{v(0)}{N}$ quando $r \to 0$. Então $u \in C^2(I\!R^N)$. Observamos também que $u > 0$ em $I\!R^N$ pelo princípio do máximo e que $u$ é uma função decrescente de $r$, pois pelo princípio do máximo forte $u'(r) < 0$ para todo $r > 0$. $\square$

**Lema 1.8** *Sob as condições* $(a_1), (a_2$ *bis*$)$*, se* $u$ *é uma solução esfericamente simétrica de* $(P_0)$*, então*

$$|D^\alpha u(x)| \le Ce^{-\delta|x|}, \qquad x \in I\!R^N$$

*para algum* $C, \delta > 0$ *e para* $|\alpha| \le 2$*.*

**Demonstração:** O decaimento exponencial no infinito segue de um argumento de um exercício de equação diferencial. Segue do lema 1.7 que $u$ é de classe $C^2(I\!R^N)$; por conseguinte satisfaz a equação (1.21). Fazendo $v = r^{\frac{(N-1)}{2}}u$; então $v$ satisfaz

$$v_{rr} = \left[q(r) + \frac{b}{r^2}\right]v$$

onde $q(r) = -\dfrac{g(u(r))}{u(r)}$ e $b = \dfrac{(N-1)(N-3)}{4}$. Para $r$ suficientemente grande, digamos $r \ge r_0$, temos

$$q(r) + \frac{b}{r^2} \ge \frac{m}{2}$$

(lembramos que $u(r) \to 0$ quando $r \to 0$ pelo lema radial, ver apêndice).

Seja $w = v^2$; então $w$ verifica

$$\frac{1}{2}w_{rr} = v_r^2 + \left[q(r) + \frac{b}{r^2}\right]w. \geq \left[q(r) + \frac{b}{r^2}\right]w.$$

Então para $r \geq r_0$ obtemos $w_{rr} \geq mw$ e $w \geq 0$.

Agora seja $z = e^{-\sqrt{m}r}(w_r + \sqrt{m}w)$. Nós temos $z_r = e^{-\sqrt{m}r}(w_{rr} - mw) \geq 0$; então $z$ é não decrescente em $(r_0, +\infty)$. Se existir $r_1 \geq r_0$ tal que $z(r_1) > 0$, então $z(r) \geq z(r_1) > 0$ para todo $r \geq r_1$. Isto implica que

$$w_r + \sqrt{m}w \geq (z(r_1))e^{\sqrt{m}r}, \quad \forall r \geq r_1,$$

onde $w_r + \sqrt{m}w$ não é integrável em $(r_1, +\infty)$. Mas $v^2$ e $vv_t$ são integráveis próximo do $\infty$ para $u \in H^1(I\!R^N)$, então $w_r$ e $w$ também são integráveis, uma contradição. Daí $z(r) \leq 0$ para $r \geq r_1$. Isto implica que

$$(e^{\sqrt{m}r}w)_r = e^{\sqrt{m}r}\big(\sqrt{m}w + w_r\big) = e^{2\sqrt{m}r}z \leq 0 \quad \text{para } r \geq r_1.$$

Então $w(r) \leq Ce^{-\sqrt{m}r}$, de fato, seja $f(r) = e^{\sqrt{m}r}w(r)$, $r \geq r_1$, como $(e^{\sqrt{m}r}w)_r \leq 0$, f é decrescente, ou seja, $f(r) \leq f(r_1) = C$. Portanto $e^{\sqrt{m}r}w(r) \leq C$, o que implica que $w(r) \leq Ce^{-\sqrt{m}r}$.

Como $w = v^2$ e $v = r^{\frac{(N-1)}{2}}u$, temos

$$|u(r)| \leq Cr^{-\frac{N-1}{2}}e^{-\frac{\sqrt{m}}{2}r} \quad \text{para } r \geq r_1, \tag{1.22}$$

para certas constantes positivas $C$ e $r_1$.

Para obtermos o decaimento exponencial de $u_r$, observe que $u_r$ satisfaz

$$(r^{N-1}u_r)_r = -r^{N-1}g(u). \tag{1.23}$$

Então usando $(a_1)$ e o decaimento exponencial de $u$ é fácil ver que para $r$ suficientemente grande, digamos $r \geq r_0$ nós temos

$$m_1|u| \leq |g(u)| \leq m_2|u|, \quad \text{onde } m_2 \geq m_1 > 0.$$

Daí integrando (1.23) em $(r, R)$, usando (1.22) e deixando $r, R \to +\infty$ mostramos que $r^{N-1}u_r$ tem um limite quando $r \to \infty$ e novamente por (1.22) esse limite só pode ser zero. Integrando (1.22) em $(r, +\infty)$ temos que $u_r$ tem decaimento exponencial. Por fim o decaimento exponencial de $u_{rr}$ (logo de $|D^\alpha u(x)|$ para $|\alpha| \leq 2$) segue imediatamente da equação (1.21). $\square$

## 1.5 Conclusão

Juntando os resultados, do Teorema 1.6, Lema 1.7 e Lema 1.8 provamos o resultado principal enunciado neste capítulo, o Teorema 1.1 devido a Berestycki-Lions em [2].

# Capítulo 2

# Problema elíptico semilinear com um potencial singular

Neste capítulo estudaremos o seguinte problema elíptico semilinear

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u = f(u) \\ \\ u \in D_1^2(I\!R^N; I\!R), \quad N \geq 3 \end{cases}$$

onde o potencial $V : [0, +\infty) \to (0, +\infty]$ é uma função mensurável. A função não linear $f : I\!R \to I\!R$ é contínua e $V$ e $f$ satisfazem as seguintes condições:

$(V_\alpha)$ existem $A, \alpha > 0$ tais que $V(s) \geq As^{-\alpha}$ para quase todo $s > 0$;

$(f_p)$ existem $M > 0$ e $p > 2$ tais que $|f(s)| \leq M|s|^{p-1}$ para todo $s \in I\!R$;

$(V)_1$ $V \in L^1(a, b)$ para algum intervalo aberto limitado $(a, b)$, com $b > a > 0$.

Provaremos um resultado de existência de uma solução radial e um resultado de existência de infinitas soluções radiais para o problema $(P_1)$ e um resultado de não existência no caso em que $V$ é um potencial particular dado por $V(s) = \frac{A}{|s|^\alpha}$ e $f$ é tal que $f(u) = |u|^{p-2}u$ com $A, \alpha > 0$ e $f \in C^0(I\!R; I\!R)$. Estes esultados são devido a Badiale-Rolando em [1].

## 2.1 Espaço de Sobolev com peso

Seja $N \geq 3$ e assuma que $V : [0, +\infty) \to (0, +\infty]$ é uma função mensurável satisfazendo $(V_\alpha)$ e $(V)_1$.

Nosso objetivo é estudar o espaço de Sobolev $X$ com peso $V$ dado por:

$$X := X(I\!R^N; V) := \left\{ u \in D^{1,2}(I\!R^N) : \int_{I\!R^N} V(|x|)u^2 dx < +\infty \right\}. \qquad (2.1)$$

Sabemos que o espaço de Sobolev

$$D^{1,2} := D^{1,2}(I\!R^N) := \left\{ u \in L^{2^*}(I\!R^N);\ \nabla u \in L^2(I\!R^N) \right\}$$

equipado com a norma $||u||_{D^{1,2}} := ||\nabla u||_{L^2}$ é um espaço de Hilbert, o qual pode ser visto como um completamento do espaço $C_c^\infty(I\!R^N)$ com relação a norma $||.||_{D^{1,2}}$. Lembremos que convergência fraca em $D^{1,2}$ implica em convergência pontual em $I\!R^N$ (a menos de subsequência quase sempre).

Como a convergência no espaço de Lebesgue com peso $L^2(I\!R^N; V(|x|)dx)$ implica em convergência pontual (a menos de subsequência e em quase todo ponto), o espaço $X = D^{1,2}(I\!R^N) \cap L^2\big(I\!R^N; V(|x|)dx\big)$ é um espaço de Hilbert com respeito a norma $||u||^2 := \langle u, u \rangle$ induzida pelo produto escalar

$$\langle u, v \rangle := \int_{I\!R^N} \big(\nabla u \nabla v + V(|x|)uv\big) dx \quad \text{para todo } u, v \in X(I\!R^N; V).$$

Note que a hipótese $(V)_1$ garante a inclusão $C_c^\infty(B_b \backslash \overline{B}_a) \subset X$. De fato, dado $u \in X$ $\displaystyle\int_{I\!R^N} V(|x|)u^2 dx < \infty$. Com efeito, seja $u \in C_c^\infty(B_b \backslash \overline{B}_a)$, logo

$$\int_{B_b \backslash \overline{B}_a} V(|x|)u^2 dx \overset{u \in C^\infty_{(B_b \backslash \overline{B}_a)}}{\leq} c \int_{B_b \backslash \overline{B}_a} V(|x|) dx \overset{(V)_1}{<} \infty.$$

Utilizando-se da imersão contínua $X \hookrightarrow D^{1,2}$, temos que convergência fraca em $X$ implica em convergência pontual em $I\!R^N$ (a menos de subsequência e em quase todo ponto). Como uma consequência disso, o subespaço

$$X_r := X_r(I\!R; V) := \left\{ u \in X(I\!R^N; V) : u(x) = u(gx) \quad \text{para todo } g \in O(N) \right\},$$

onde $O(N)$ é o grupo ortogonal de $I\!R^N$ é não vazio por $(V)_1$ e fechado em $X$, portanto um espaço de Hilbert. De fato, que $X_r$ é não vazio, é trivial, pois a função identicamente nula está contida nele. Agora vamos mostrar que ele realmente é fechado.

De fato, seja $u_n \in C_c^\infty$, $u_n \in X_r$ tal que $u_n \xrightarrow{X_r} u$, onde $c = B_b \setminus \overline{B}_a$ para $0 < a < b$. Temos

$$\begin{array}{ccc} u_n(x) & = & u_n(gx) \\ {\scriptstyle q.s.}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q.s.} \\ u(x) & = & u(gx) \end{array}$$

Da unicidade de limite segue que $u$ é invariante por grupos ortogonais, ou seja, $u \in X_r$, e assim podemos concluir que $X_r$ é fechado como queríamos.

**Proposição 2.1** *A imersão $X_r(I\!\!R^N; V) \hookrightarrow L^{2^*_\alpha}(I\!\!R^N)$ é continua, onde $2 + \frac{2\alpha}{N-2}$ para $\alpha \in (0, \infty)$.*

**Demonstração:** A prova desta afirmação segue do lema radial [2] combinado com $(V_\alpha)$. O lema radial faz a seguinte estimativa

$$\forall\, u \in D^{1,2}_{rad}(I\!\!R^N; V) \quad |u(x)| \leq C_N ||\nabla u||_{L^2(I\!\!R^N)} |x|^{-\frac{N-2}{2}} \quad \text{para quase todo } x \in I\!\!R^N \tag{2.2}$$

Dado $u \in X_r$, temos

$$\begin{aligned} |u(x)|^{2^*_\alpha} &= |u(x)|^2 |u(x)|^{\frac{2\alpha}{N-2}} \overset{(2.2)}{\leq} |u(x)|^2 C ||\nabla u||^{\frac{2\alpha}{N-2}}_{L^2(I\!\!R^N)} |x|^{-\alpha} \\ &\overset{(V_\alpha)}{\leq} A^{-1} C ||\nabla u||^{\frac{2\alpha}{N-2}}_{L^2(I\!\!R^N)} V(|x|)|u(x)|^2 \end{aligned}$$

para quase todo $x \in I\!\!R^N$, logo,

$$\int_{I\!\!R^N} |u|^{2^*_\alpha} dx \leq C\big(||\nabla u||^2_{L^2(I\!\!R^N)}\big)^{\frac{\alpha}{N-2}} \int_{I\!\!R^N} V(|x|) u^2 dx \leq C ||u||^{\frac{\alpha}{N-2}} ||u||^2.$$

Portanto $||u||_{L^{2^*_\alpha}(I\!\!R^N)} \leq C||u||$. □

**Corolário 2.2** *As imersões*

$$X_r(I\!\!R^N; V) \hookrightarrow L^p(I\!\!R^N) \quad \textit{para} \quad 0 < \alpha < 2 \;\; \textit{e}\; p \in [2^*_\alpha, 2^*]. \tag{2.3}$$

*e*

$$X_r(I\!\!R^N; V) \hookrightarrow L^p(I\!\!R^N) \quad \textit{para} \quad \alpha > 2 \;\; \textit{e}\; p \in [2^*, 2^*_\alpha]. \tag{2.4}$$

*são contínuas.*

**Demonstração:** Para mostrar (2.3) e (2.4) basta usarmos interpolação, proposição 2.1 e as desigualdades de Sobolev. $\square$

**Proposição 2.3** *As imersões (2.3) e (2.4) são compactas para* $p \neq 2^*, 2^*_\alpha$.

**Demonstração:** Dada $u_n \in X_r$ uma sequência limitada temos para algum $u \in X_r$ $u_n \rightharpoonup u$ em $X_r$ (a menos de subsequência precisamos mostrar que $u_n \to u$ em $L^p$). Para isso seja $P(s) = |s|^p$ e $Q(s) = |s|^{2^*} + |s|^{2^*_\alpha}$. É fácil ver que $\lim\limits_{|s|\to\infty} \dfrac{P(s)}{Q(s)} = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{P(s)}{Q(s)} = 0$. Então usando o lema de compacidade de Strauss Teorema A.3, concluímos que $u_n \overset{L^p}{\to} u$ . Para isso devemos mostrar que as seguintes condições valem:

$(i)$ $\lim\limits_{|s|\to\infty} |u_n(x) - u(x)| \to 0$ uniformemente com respeito a $n$;

$(ii)$ $|u_n - u|^p \to 0$ quase sempre em $I\!R^N$;

$(iii)$ $\sup\limits_n \displaystyle\int_{I\!R^N} Q(u_n - u)dx < +\infty$.

Na verdade $(i)$ segue do lema radial, estimativa apresentada em (2.3) mais o fato de $\big\{||\nabla(u_n - u)||_{L^2}\big\}$ ser limitado. Quanto à $(ii)$, como $u_n \rightharpoonup u$ em $X_r$, segue que a menos de subsequência $u_n(x) \to u(x)$ pontualmente, isto é quase sempre em $I\!R^N$, daí $|u_n - u|^p \to 0$ quase sempre em $I\!R^N$. Finalmente passemos agora para $(iii)$. Como

$$\begin{aligned} \sup_n \int_{I\!R^N} Q\big((u_n - u)(x)\big)dx &= \sup_n \int_{I\!R^N} \big(|u_n - u|^{2^*} + |u_n - u|^{2^*_\alpha}\big)dx \\ &= ||u_n - u||^{2^*_\alpha}_{L^{2^*_\alpha}} + ||u_n - u||^{2^*}_{L^{2^*}} \end{aligned}$$

$(iii)$ segue da das imersões contínuas (2.3) e (2.4) mais a limitação de $\big\{||u_n - u||\big\}$. $\square$

**Proposição 2.4** *Se* $u \in X_r(I\!R^N; V)$ *então existe* $C = C(N, \alpha, A) > 0$ *tal que*

$$\int_{I\!R^N} |u|^{2^*_\alpha - 1}|v|dx \leq C||u||^{2^*_\alpha - 1}||v|| \quad \textit{para todo } v \in X(I\!R^N; V).$$

**Demonstração:** Temos

$$\begin{aligned} \int_{I\!R^N} |u|^{2^*_\alpha - 1}|v|dx &= \int_{I\!R^N} |x|^{\frac{\alpha}{2}}|u|^{2^*_\alpha - 1}\frac{|v|}{|x|^{\frac{\alpha}{2}}}dx \leq \left(\int_{I\!R^N} |x|^\alpha |u|^{2(2^*_\alpha - 1)}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{I\!R^N} \frac{v^2}{|x|^\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{I\!R^N} |x|^\alpha |u|^{2(2^*_\alpha - 1)}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(A^{-1}\int_{I\!R^N} V(|x|)v^2dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*_\alpha - 1}|v|dx \leq C\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |u|^{2(2^*_\alpha - 1)}dx\bigg)^{\frac{1}{2}}||v||.$$

Agora escrevendo $2(2^*_\alpha - 1) = 2 + \frac{4\alpha}{N-2}$ e usando a estimativa (2.2) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |u|^{2(2^*_\alpha - 1)}dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x|^\alpha}|x|^{2\alpha}|u|^{\frac{4\alpha}{N-2}}dx \leq C||\nabla u||^{\frac{4\alpha}{N-2}}_{L^2(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x|^\alpha}|x|^{2\alpha}|x|^{-\frac{N-2}{2}\frac{4\alpha}{N-2}}dx \\
&= C||\nabla u||^{\frac{4\alpha}{N-2}}_{L^2(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x|^\alpha}dx \leq A^{-1}C||\nabla u||^{\frac{4\alpha}{N-2}}_{L^2(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u^2dx \\
&= C||u||^{\frac{4\alpha}{N-2}}||u||^2 = C||u||^{2(2^*_\alpha - 1)},
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração, ou seja

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*_\alpha - 1}|v|dx \leq C||u||^{2^*_\alpha - 1}||v|| \quad \text{para todo } v \in X(\mathbb{R}^N; V).$$

$\square$

**Proposição 2.5** *Se $u \in X_r(\mathbb{R}^N; V)$ então existe $C = C(N) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^* - 1}|v|dx \leq C||u||^{2^* - 1}||v|| \quad \textit{para todo } v \in X(\mathbb{R}^N; V).$$

**Demonstração:** Tome $s = 2^*$ e $s' = \frac{2^*}{2^*-1}$, daí usando a desigualdade de Hölder temos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^* - 1}|v|dx &\leq \bigg(\int_{\mathbb{R}^N} \big(|u|^{2^*-1}\big)^{s'}dx\bigg)^{\frac{1}{s'}}\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^s dx\bigg)^{\frac{1}{s}} \\
&= \bigg[\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}dx\bigg)^{\frac{1}{2^*}}\bigg]^{2^*-1}\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*}dx\bigg)^{\frac{1}{2^*}} \\
&\leq C||u||^{2^*-1}||v||.
\end{aligned}$$

$\square$

**Proposição 2.6** *Se $u \in X_r(\mathbb{R}^N; V)$ então existe $C = C(N, \alpha, A)$ tal que para todo $p \in [2^*_\alpha, 2^*]$ ou $p \in [2^*, 2^*_\alpha]$, de acordo com a alternativa $\alpha \in (0, 2)$ ou $(2, +\infty)$, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}|v|dx \leq C||u||^{p-1}||v|| \quad \textit{para todo } v \in X(\mathbb{R}^N; V).$$

**Demonstração:**

De fato, para $\lambda, \mu \in (0,1)$ fixo tal que $p = \lambda 2^*_\alpha + \mu 2^*$ e $\lambda + \mu = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{I\!R^N} |u|^{p-1}|v|dx &= \int_{I\!R^N} |u|^{\lambda(2^*_\alpha-1)+\mu(2^*-1)}|v|^\lambda |v|^\mu dx = \int_{I\!R^N} \big(|u|^{2^*_\alpha-1}|v|\big)^\lambda \big(|u|^{2^*-1}|v|\big)^\mu dx \\
&\le \left(\int_{I\!R^N} |u|^{2^*_\alpha-1}|v|dx\right)^\lambda \left(\int_{I\!R^N} |u|^{2^*_\alpha-1}|v|dx\right)^\mu \\
&\le C\big(||u||^{2^*_\alpha-1}||v||\big)^\lambda \big(||u||^{2^*-1}||v||\big)^\mu = C||u||^{p-1}||v||
\end{aligned}$$

$\square$

## 2.2 Identidade de Pohožaev e resultados de não existência

Vamos provar um resultado de não existência para o problema (1), antes enunciaremos e provaremos dois lemas.

**Lema 2.7** *Seja $A, \alpha > 0$ e $f \in C^0(I\!R; I\!R)$. Assuma também que $u \in C^2(I\!R^N \backslash \{0\})$ é uma solução clássica para a equação*

$$-\Delta u + \frac{A}{|x|^\alpha}u = f(u) \qquad em \quad I\!R^N\backslash\{0\}, \quad N \ge 3. \tag{2.5}$$

*Defina $F(s) := \displaystyle\int_0^s f(t)dt$ para todo $s \in I\!R$. Se*

$$\int_{I\!R^N} \left(|\nabla u|^2 + \frac{u^2}{|x|^\alpha} + |F(u)|\right)dx < +\infty \tag{2.6}$$

*então*

$$\frac{N-2}{2}\int_{I\!R^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{N-\alpha}{2}\int_{I\!R^N} \frac{Au^2}{|x|^\alpha}dx = N\int_{I\!R^N} F(u)dx. \tag{2.7}$$

**Demonstração:**
Primeiramente consideremos as seguintes identidades em $I\!R^N\backslash\{0\}$:

*i)* $\quad (x \cdot \nabla u)\Delta u = div\left[(x\cdot\nabla u)\nabla u - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 x\right] + \frac{N-2}{2}|\nabla u|^2;$

$ii) \quad (x\cdot\nabla u)\dfrac{Au}{|x|^\alpha} = div\left[\dfrac{A}{2}\dfrac{u^2}{|x|^\alpha}x\right] - \dfrac{N-\alpha}{2}\dfrac{Au^2}{|x|^\alpha};$

$iii) \quad (x\cdot\nabla u)f(u) = div\Big[F(u)x\Big] - NF(u).$

Para $R_2 > R_1 > 0$, multiplicando (2.5) por $(x\cdot\nabla u)$ e aplicando o Teorema da Divergência no aberto $\Omega := \Omega_{R_1,R_2} := B_{R_2}\backslash\overline{B_{R_1}}$, nós temos:

$$-\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nabla u)(\nabla u\cdot\nu)d\sigma + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(|\nabla u|^2+\frac{Au^2}{|x|^\alpha}\right)x\cdot\nu d\sigma - \int_{\partial\Omega}F(u)x\cdot\nu d\sigma$$
$$= \frac{N-2}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx + \frac{N-\alpha}{2}\int_\Omega\frac{Au^2}{|x|^\alpha}dx - N\int_\Omega F(u)dx \qquad (2.8)$$

onde $\nu(x)$ é o vetor normal exterior a $\partial\Omega$ em $x$ e $d\sigma$ é a $(N-1)$-dimensional medida de $\partial\Omega$. Note que $\partial\Omega = \partial B_{R_1}\cup\partial B_{R_2}$ e

$$\left|\int_{\partial B_{R_i}}(x\cdot\nabla u)(\nabla u\cdot\nu)d\sigma\right| \;\leq\; R_i\int_{\partial B_{R_i}}|\nabla u|^2d\sigma \qquad (2.9)$$

$$\left|\int_{\partial B_{R_i}}\left(|\nabla u|^2+\frac{Au^2}{|x|^\alpha}\right)x\cdot\nu d\sigma\right| \;=\; R_i\int_{\partial B_{Ri}}\left(|\nabla u|^2+\frac{Au^2}{|x|^\alpha}\right)d\sigma \qquad (2.10)$$
$$\left|\int_{\partial B_{R_i}}F(u)x\cdot\nu d\sigma\right| \;\leq\; R_i\int_{\partial B_{R_i}}|F(u)|d\sigma \qquad (2.11)$$

para $i=1,2$. Agora tomemos uma sequência $R_{1,n}\to 0$ com $R_{1,n}>0$, tal que

$$R_{1,n}\int_{\partial B_{Ri}}\left(|\nabla u|^2+\frac{u^2}{|x|^\alpha}+|F(u)|\right)d\sigma\to\infty. \qquad (2.12)$$

A existência de tal sequência se dá pelo fato da equação (2.7) ser limitada. De fato, mostremos a existência de tal sequência usando um argumento de contradição. Se fosse

$$\lambda := \liminf_{R_1\to 0^+} R_1\int_{\partial B_{R_1}}\left(|\nabla u|^2+\frac{u^2}{|x|^\alpha}+|F(u)|\right)d\sigma > 0$$

teríamos

$$\forall\; R_1\in(0,\rho)\quad \int_{\partial B_{R_1}}\left(|\nabla u|^2+\frac{u^2}{|x|^\alpha}+|F(u)|\right)d\sigma > \frac{\lambda}{2R_1}$$

para algum $\rho > 0$, e disto tiramos que

$$\int_{B_\rho}\Big(|\nabla u|^2+\frac{u^2}{|x|^\alpha}+|F(u)|\Big)dx=\int_0^\rho dR_1\int_{\partial B_{R_1}}\Big(|\nabla u|^2+\frac{u^2}{|x|^\alpha}+|F(u)|\Big)d\sigma=+\infty$$

o que é uma contradição com a hipótese (2.6). Então recordando (2.9)-(2.11), de (2.12) deduzimos

$$-\int_{\partial B_{R_{1,n}}}(x\cdot\nabla u)(\nabla u\cdot\nu)d\sigma+\int_{\partial B_{R_{1,n}}}\Big[\frac{1}{2}\Big(|\nabla u|^2+\frac{Au^2}{|x|^\alpha}\Big)-|F(u)|\Big]x\cdot\nu d\sigma\to 0$$

de modo que avaliando (2.8) para $R_1 = R_{1,n}$ e passando ao limite quando $n\to\infty$, obtemos

$$-\int_{\partial B_{R_2}}(x\cdot\nabla u)(\nabla u\cdot\nu)d\sigma+\frac{1}{2}\int_{\partial B_{R_2}}\Big(|\nabla u|^2+\frac{Au^2}{|x|^\alpha}\Big)x\cdot\nu d\sigma-\int_{\partial B_{R_2}}F(u)x\cdot\nu d\sigma=$$

$$\frac{N-2}{2}\int_{\partial B_{R_2}}|\nabla u|^2dx+\frac{N-\alpha}{2}\int_{\partial B_{R_2}}\frac{Au^2}{|x|^\alpha}dx=N\int_{\partial B_{R_2}}F(u)dx. \tag{2.13}$$

Novamente prosseguindo com o mesmo argumento usado acima inferimos a existência de uma sequência $R_{2,n}\to+\infty$ tal que

$$R_{2,n}\int_{\partial B_{R_{2,n}}}\Big(|\nabla u|^2+\frac{u^2}{|x|^\alpha}+|F(u)|\Big)d\sigma\to 0\quad\text{quando } n\to\infty.$$

Então usando novamente (2.9)-(2.11), (2.13) obtemos o resultado desejado. □

**Lema 2.8** *Seja $u\in C^2(\mathbb{R}^N\backslash\{0\};\mathbb{R})$ uma solução clássica para a equação*

$$-\Delta u+\frac{A}{|x|^\alpha}u=|u|^{p-2}u \qquad em \quad \mathbb{R}^N\backslash\{0\},\quad N\geq 3. \tag{2.14}$$

*Se $u\in\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)\cap L^2(\mathbb{R}^N;|x|^{-\alpha}dx)\cap L^p(\mathbb{R}^N)$ então*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla u|^2+\frac{Au^2}{|x|^\alpha}\Big)dx=\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p dx. \tag{2.15}$$

**Demonstração:**
Multiplicando (2.14) por $u$ e usando a identidade $u\Delta u = div\big[u\nabla u\big]-|\nabla u|^2$ em $\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ temos:

$$-div\big[u\nabla u\big]+|\nabla u|^2+\frac{Au^2}{|x|^\alpha}=|u|^p.$$

Agora aplicando o Teorema da Divergência no aberto $\Omega := B_{R_2}\backslash\overline{B}_{R_1}$, teremos

$$-\int_{\partial B_{R_1}} u(u\nabla u\cdot\nu)d\sigma-\int_{\partial B_{R_2}} u(\nabla u\cdot\nu)d\sigma+\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^2+\frac{Au^2}{|x|^{\alpha}}\right)dx=\int_{\Omega}|u|^p dx$$

usando também o fato que $\nu(x)=-\frac{x}{R_1}$ em $\partial B_{R_1}$ e $\nu(x)=\frac{x}{R_2}$ em $\partial B_{R_2}$ temos

$$\frac{1}{R_1}\int_{\partial B_{R_1}} u(u\nabla u\cdot x)d\sigma-\frac{1}{R_2}\int_{\partial B_{R_2}} u(\nabla u\cdot x)d\sigma+\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^2+\frac{Au^2}{|x|^{\alpha}}\right)dx=\int_{\Omega}|u|^p dx.$$

Agora, como $\frac{2^*}{2^*-1}=\frac{2N}{N+2}<2$ e $\frac{N-1}{N}=\frac{1}{2^*}+\frac{1}{2}$, usando as desigualdades de Schwartz e Hölder e o fato de $x\in B_{R_i}$ temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{R_i}\int_{\partial B_{R_1}} u(\nabla u.x)d\sigma\right| &\leq \frac{1}{R_i}\int_{\partial B_{R_1}}|u||\nabla u||x|d\sigma\leq\int_{\partial B_{R_i}}|u||\nabla u|d\sigma\\
&\leq \left(\int_{\partial B_{R_i}}|u|^{2^*}d\sigma\right)^{\frac{1}{2^*}}\left(\int_{\partial B_{R_i}}|\nabla u|^{\frac{2^*}{2^*-1}}d\sigma\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}}\\
&= \left(\int_{\partial B_{R_i}}|u|^{2^*}d\sigma\right)^{\frac{1}{2^*}}\left(\int_{\partial B_{R_i}}|\nabla u|^{\frac{2N}{N+2}}|1|d\sigma\right)^{\frac{N+2}{2N}}
\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\partial B_{R_i}}|\nabla u|^{\frac{2N}{N+2}}|1|d\sigma\right)^{\frac{N+2}{2N}} &\leq \left[\left(\int_{\partial B_{R_i}}\left(|\nabla u|^{\frac{2N}{N+2}}\right)^{\frac{N+2}{N}}d\sigma\right)^{\frac{N}{N+2}}\right]^{\frac{N+2}{2N}} c\left[\left(R_i\right)^{\frac{2}{N+2}}\right]^{\frac{N+2}{2N}}\\
&= c\left(\int_{B_{R_i}}|\nabla u|^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\left(R_i^{N-1}\right)^{\frac{1}{N}},
\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{R_i}\int_{\partial B_{R_1}} u(\nabla u.x)d\sigma\right| &\leq C\left(\int_{\partial B_{R_i}}|u|^{2^*}d\sigma\right)^{\frac{1}{2^*}}\left(\int_{B_{R_i}}|\nabla u|^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}R_i^{\frac{N-1}{N}}\\
&= C\left(R_i\int_{\partial B_{R_i}}|u|^{2^*}d\sigma\right)^{\frac{1}{2^*}}\left(R_i\int_{\partial B_{R_i}}|\nabla u|^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Agora como na demonstração do lema 2.7, podemos tomar $R_{1,n}\to 0^+$ e $R_{2,n}\to+\infty$ tal que

$$R_{i,n}\int_{\partial B_{R_i}}\left(|u|^{2^*}+|\nabla u|^2\right)d\sigma\to 0$$

e a conclusão se segue.

Apresentaremos agora um teorema que sob algumas condições impostas aos expoentes $\alpha$ e $p$, garante na região hachurada da figura abaixo que o problema (1) não possui solução.

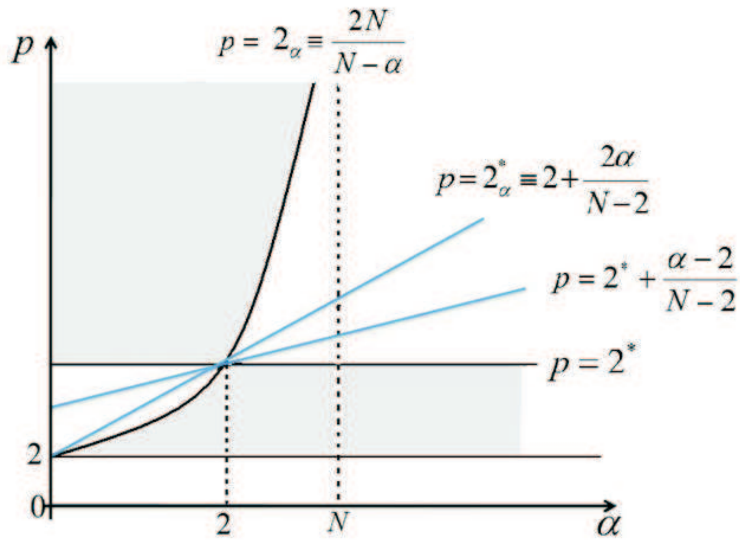


Figura 1.1

**Teorema 2.9 (Badiale-Rolando)** *Dado $A > 0$ se $\alpha \in (0,2)$ e $p \notin (2_\alpha, 2^*)$ ou $\alpha = 2$ e $p \neq 2^*$, ou $\alpha \in (2, N)$ e $p \notin (2^*, 2_\alpha)$, ou $\alpha \geq N$ e $p \leq 2^*$, então a equação*

$$-\Delta u + \frac{A}{|x|^\alpha} u = |u|^{p-2}u \qquad em \quad I\!R^N \backslash \{0\}$$

*não tem solução clássica não trivial $u \in C^2(I\!R^N \backslash \{0\}; I\!R^N)$ tal que $u \in \mathcal{D}^{1,2}(I\!R^N) \cap L^2\big(I\!R^N; |x|^{-\alpha}dx\big) \cap L^p(I\!R^N)$.*

**Demonstração:** Vamos supor que a tese deste teorema é falsa, daí, podemos usar os lemas 2.7 e 2.8 com $f(u) = |u|^{p-2}u$ e $F(u) = \dfrac{|u|^P}{p}$. Levando (2.14) em (2.7), obtemos

$$\left(\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p}\right) \int_{I\!R^N} |\nabla u|^2 dx = \left(\frac{N}{p} - \frac{N-\alpha}{2}\right) \int_{I\!R^N} \frac{Au^2}{|x|^\alpha} dx$$

o qual é impossível para $u \neq 0$ se $\left(\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p}\right)\left(\frac{N}{p} - \frac{N-\alpha}{2}\right) < 0$. Como esta inequação é equivalente às hipóteses do teorema, chegamos a uma contradição. $\square$

**Observação 2.10** *No caso em que $\alpha = 2$ e $p = 2^*$, a equação (2.14) admite soluções. Isto foi provado em [8].*

## 2.3 Resultados de existência

Para apresentarmos nossos resultados de existência precisamos de algumas notações.

Para $N \geq 3$ e para quaisquer funções mensuráveis $V : [0, +\infty) \to (0, +\infty]$ satisfazendo $(V)_1$, nós vamos considerar o espaço de sobolev com peso

$$X := X(\mathbb{R}^N; V) := \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u^2 dx < +\infty \right\}.$$

definido em (2.1).

**Observação 2.11** *Note que $(V)_1$ garante $X \neq \emptyset$. De fato, basta tomar $u$ uma função tendo como suporte compacto na bola $B_b \setminus B_a$.*

Nossos resultados de existência dependem de $(V_\alpha), (f_p)$ e $(V)_1$, combinados convenientemente com algumas condições que serão enumeradas a seguir:

$(V)_2$ existem $B, \beta, \mu_0 > 0$ tais que $V(\mu s) \leq \mu^{-\beta} B V(s)$ para quase todo $\mu > \mu_0$ e $s > 0$;

$(f)_1$ existe $\vartheta > 2$ tal que $\vartheta F(s) \leq f(s)s$ para todo $s \in \mathbb{R}$;

$(f)_2$ $F(s_*) > 0$ para algum $s_* \in \mathbb{R}$;

$(f)_3$ $F(s) > 0$ para todo $s \in (0, +\infty)$;

$(f)_4$ $f(s) \geq 0$ para todo $s \leq 0$;

$(f)_5$ $f$ é ímpar;

$(V)_p$ existe $m > 0$ tal que $F(s) \geq m|s|^p$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

**Observação 2.12** *Uma observação importante é o fato de que a hipótese $(V)_2$ garante que o potencial $V$ está em $L^\infty(c, +\infty)$ para algum $c > 0$ (Em particular, $(V)_2 \Rightarrow (V)_1$).*

De fato, suponha que $V(S_n) \to +\infty$, onde $S_n = u_n$, com $u_n \to +\infty$. Então por um lado, temos $V(S_n) \to +\infty$, por outro lado, usando $(V)_2$, temos

$$V(S_n) = V(u_n \frac{S_n}{u_n}) \leq u_n^{-\beta} B V(\frac{S_n}{u_n}) = u_n^{-\beta} V(1) \to 0$$

o que é uma contradição, portanto a observação feita acima procede.

Antes de enunciarmos nossos resultados de existência vamos dar alguns exemplos de potenciais satisfazendo $(V_\alpha)$ e $(V)_2$:

**Exemplo 2.13** *Se $V : [0, +\infty) \to (0, +\infty]$ satisfaz*

$$As^{-\alpha} \leq V(s) \leq Cs^{-\alpha}$$

*para algum $C \geq A > 0$ e para quase todo $s > 0$, então as suposições $(V_\alpha)$ e $(V)_2$ se verificam com $\beta = \alpha$, $B \geq \dfrac{C}{A}$ e $\mu_0 > 0$ qualquer.*

**Exemplo 2.14** *Para quaisquer $A > 0$ e $\alpha \geq \beta > 0$ a função*

$$V(s) = \begin{cases} +\infty & \text{para } s = 0 \\ As^{-\alpha} & \text{para } s \in (0, 1] \\ As^{-\beta} & \text{para } s \in [1, +\infty) \end{cases}$$

*satisfaz $(V_\alpha)$ e $(V)_2$ com $B = \mu_0 = 1$.*

**Exemplo 2.15** *Para qualquer $s_0 > 0$, $A > 0$ e $\alpha \geq \beta > 0$, as suposições $(V_\alpha)$ e $(V)_2$ se verificam para a função*

$$V(s) = \begin{cases} +\infty & \text{para } s \in [0, s_0] \\ B(s - s_0)^{-\beta} & \text{para } s \in (s_0, +\infty) \end{cases}$$

*provado que $B = B(s_0, A, \alpha, \beta) > 0$ é suficientemente grande.*

### 2.3.1 Teoremas principais

**Teorema 2.16 (Badiale-Rolando)** *Seja $f \in C^0(I\!R, I\!R)$ satisfazendo $(f)_1$ e $V$ uma função mensurável definida de $[0, +\infty)$ em $(0, +\infty]$ satisfazendo $(V)_1$. Assuma que $(V_\alpha)$ e $(f_p)$ se verificam com $\alpha \in (0, 2)$ e $p \in (2^*_\alpha, 2^*)$, ou $\alpha \in (2, +\infty)$ e $p \in (2^*, 2^*_\alpha)$. Assuma também que $V$ satisfaz $(V)_2$ e $f$ satisfaz*

*$(f)_2$, ou $f$ satisfaz $(f)_3$. Então o problema $(P_1)$ tem uma solução radial não trivial $u \in X(I\!R^N; V)$ e*

$$\int_{I\!R^N} (\nabla u \cdot \nabla h + V(|x|)uh)dx = \int_{I\!R^N} f(u)hdx \quad \text{para todo } h \in X(I\!R^N; V). \tag{2.16}$$

*Se $(f)_4$ se verificar também, temos que a solução $u$ é não negativa.*

**Teorema 2.17 (Badiale-Rolando)** *Seja $f \in C^0(I\!R, I\!R)$ satisfazendo $(f)_1$ e $(f)_5$, e $V$ uma função mensurável definida de $[0, +\infty)$ em $(0, +\infty]$ satisfazendo $(V)_1$. Assuma que $(V_\alpha)$,$(f_p)$ e $(F_p)$ se verificam com $\alpha \in (0, 2)$ e $p \in (2^*_\alpha, 2^*)$, ou $\alpha \in (2, +\infty)$ e $p \in (2^*, 2^*_\alpha)$. Então existem em $X(I\!R^N; V)$ infinitas soluções radiais para o problema $(P_1)$ no sentido de (2.16).*

Veja figura abaixo, a região hachurada com linhas verticais indica onde o problema $(P_1)$ admite solução.

## 2.4 Prova dos Teoremas principais (Teoremas 2.16 e 2.17)

Vamos assumir que $f \in C^0(I\!R; I\!R)$ satisfaz $(f)_1$ e $V : [0, +\infty) \to (0, +\infty]$ é uma função mensurável satisfazendo $(V)_1$. Nós também vamos assumir que $(V_\alpha)$ e $(f_p)$ se verificam com $\alpha \in (0, 1)$ e $p \in (2^*_\alpha, 2^*)$, ou $\alpha \in (2, +\infty)$ e $p \in (2^*, 2^*_\alpha)$. Seja $F(s) := \displaystyle\int_0^s f(t)dt$ e seja $N \geq 3$. Antes de apresentar a prova dos teoremas 2.16 e 2.17, apresentemos alguns fatos preliminares.

Inicialmente vamos olhar para os pontos críticos do funcional

$$I : X_r(I\!R^N; V) \to I\!R \quad \text{definido por}$$

$$I(u) := \frac{1}{2} \int_{I\!R^N} \big(|\nabla u|^2 + V(|x|)u^2\big)dx - \int_{I\!R^N} F(u)dx \quad \forall u \in X_r(I\!R^N; V). \tag{2.17}$$

Usando $(f_p)$ e as imersões 2.3 e 2.4 obtemos que $I$ é um funcional de classe $C^1$ em $X_r$ e cuja derivada de Fréchet $I'(u)$ em qualquer $u \in X_r$ é dada por

$$I'(u)h = \langle u, h \rangle - \int_{I\!R^N} f(u)hdx \quad \text{para todo } h \in X_r(I\!R^N; V).$$

O lema que enunciaremos a seguir mostra que qualquer ponto crítico de $I$ é uma solução do problema $(P_0)$.

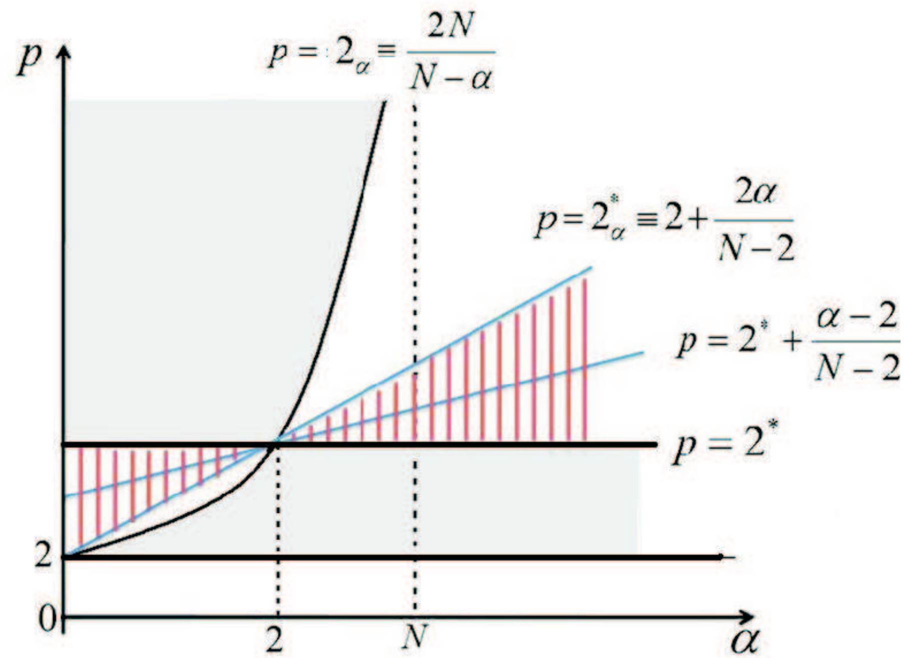


Figura 2.1:

**Lema 2.18** *Todo ponto crítico de* $I : X_r(I\!\!R^N; V) \to I\!\!R$ *satisfaz a equação*

$$\int_{I\!\!R^N} (\nabla u \cdot \nabla h + V(|x|)uh)dx = \int_{I\!\!R^N} f(u)hdx \quad \textit{para todo } h \in X(I\!\!R^N; V). \tag{2.18}$$

**Demonstração:** Seja $u \in X_r$. Para $h \in X$ definimos

$$T(u)h := \int_{I\!R^N} \big(\nabla u.\nabla h + V(|x|)uh\big)dx - \int_{I\!R^N} f(u)hdx.$$

O funcional $T(u)$ está bem definido e é contínuo em $X$, isto é, $T(u) \in X'$, pois

$$\left|\int_{I\!R^N} f(u)hdx\right| \le \int_{I\!R^N} |f(u)||h|dx \le M\int_{I\!R^N} |u|^{p-1}|h|dx \le C||u||^{p-1}||h|| \quad \forall h \in X.$$

Usamos a hipótese $(f_p)$ mais a proposição 2.6. Pelo teorema da representação de Riesz existe um único $\tilde{u} \in X$ tal que $T(u)h = \langle \tilde{u}, h\rangle$ para todo $h \in X$. Usando a mudança de variável $x \overset{\varphi}{\mapsto} g^{-1}y$, como $|J_\varphi| = 1$, pois $g$ é ortogonal, segue então que $\langle \tilde{u}, h(g.)\rangle = \langle \tilde{u}(g^{-1}.), h\rangle$ e $T(u)h(g.) = T(u)h$ para todo $h \in X$ e $g \in O(N)$. Logo $\langle \tilde{u}(g^{-1}.), h\rangle = \langle \tilde{u}, h\rangle$. Isto significa que $\tilde{u}(g^{-1}.) = \tilde{u}$ para todo $g \in O(N)$, isto é, $\tilde{u} \in X_r$. Agora assuma que $I'(u) = 0$ em $X_r'$. Então $\langle \tilde{u}, h\rangle = T(u)h = I'(u)h = 0$ para todo $h \in X_r$ implica que $\tilde{u} = 0$. Como existe um único $\tilde{u} \in X$ tal que $T(u)h = \langle \tilde{u}, h\rangle$ para todo $h \in X$, temos $T(u)h = 0$ para todo $h \in X$, ou seja, a equação (2.18) se verifica.

**Lema 2.19** *O funcional* $I : X_r(I\!R^N; V) \to I\!R$ *satisfaz a condição de Palais Smale.*

**Demonstração:** Seja $(u_n) \subset X_r$ tal que $I(u_n)$ é limitado e $I'(u_n) \to 0$ em $X_r'$. Mostraremos que $(u_n)$ tem uma subsequência convergente em $X_r$. Como

$$I(u_n) := \frac{1}{2}\int_{I\!R^N} \big(|\nabla u_n|^2 + V(|x|)u_n^2\big)dx - \int_{I\!R^N} F(u_n)dx \qquad \text{(a)}$$

e

$$I'(u_n)u_n := \int_{I\!R^N} \big(|\nabla u_n|^2 + V(|x|)u_n^2\big)dx - \int_{I\!R^N} f(u_n)u_n dx \qquad \text{(b)},$$

Calculando o módulo da diferença entre o produto da equação $(a)$ por $\vartheta$ e $(b)$ obtemos $(\big|\vartheta(a) - (b)\big|)$:

$$\begin{aligned} \Big|\vartheta I(u_n) - I'(u_n)u_n\Big| &\ge \int_{I\!R^N} f(u_n)u_n dx - \vartheta\int_{I\!R^N} F(u_n)dx + (\frac{\vartheta}{2} - 1)||u_n||^2 \\ &\overset{(f)_1}{\ge} \vartheta\int_{I\!R^N} F(u_n)dx - \vartheta\int_{I\!R^N} F(u_n)dx + \frac{\vartheta - 2}{2}||u_n||^2 \\ &= \frac{\vartheta-2}{2}||u_n||^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\vartheta-2}{2}||u_n||^2 \le \big|\vartheta I(u_n) - I'(u_n)u_n\big| \le \big|\vartheta I(u_n)\big| + \big|I'(u_n)u_n\big| \le C + C'||u_n||,$$

onde $C, C'$ são constantes. Disto segue que $||u_n||$ é limitada em $X_r$, assim a menos de subsequência temos $u_n \rightharpoonup u$ em $X_r$. Usando a proposição 2.3 temos que $u_n \to u$ em $L^p$ para algum $u \in X_r$.

De $(f_p)$ temos que $|f(u_n)u_n| \leq M|u_n|^p$. Como $u_n \to u$ em $L^p$, $u \in X_r$, então $u_n \to u$ quase sempre, daí existe $h \in L^p$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x)$ e assim

$$|f(u_n)u_n| \leq M|u_n|^p \leq M|h(x)|^p = H(x) \in L^1.$$

Como $f$ é contínua e $u_n \to u$ quase sempre, então $f(u_n)u_n \to f(u)u$ quase sempre. Usando então o Teorema da convergência dominada (ver apêndice teorema A.10) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx \to \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx.$$

Como $I'(u_n)u_n \to 0$, então

$$||u_n||^2 \to \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx, \text{ logo } ||u_n||^2 \to \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx.$$

Agora $I'(u_n)u$ também converge para zero, assim, usando a convergência fraca e novamente o Teo. da Convergência Dominada, obtemos

$$\langle u_n, u\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)udx \to ||u_n||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)dx,$$

Assim $\int_{rn} f(u)udx = ||u||^2$.

Consequentemente, $||u_n||^2 \to ||u||^2$, logo como $X_r$ é um espaço de Hilbert segue que $u_n \to u$ em $X_r$.

Provemos agora um lema técnico .

**Lema 2.20** *Assuma que $V$ satisfaz $(V)_2$ e seja $F \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ satisfazendo a condição $(f)_2$. Então existe $u \in X_r(\mathbb{R}^N; V)$ tal que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx > 0.$

**Demonstração:** Como $V$ satisfaz $(V)_2$ deduzimos que $V \in L^\infty(c', +\infty)$ para algum $c' > 0$(Ver observação 2.12). Daí $C_c^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_c') \subset X$. A fim de provar o lema, para qualquer $R \geq 3$ vamos tomar $\Phi_R \in C_c^\infty(c, +\infty)$ tal que $0 \leq \Phi_R \leq 1$, com

$$\Phi_R(t) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t \leq c' + 1 \text{ ou } t \geq c' + 1 + R \\ 1 & \text{para} \quad c' + 2 \leq t \leq c' + R. \end{cases}$$

Agora para todo $x \in I\!R^N$ defina $u_R(x) := \Phi_R(|x|)$, note que $u_R \in X_r$, pois

$$u_R(gx) = \Phi_R(|gx|) = \Phi_R(|g||x|) = \Phi_R(|x|),\ \forall g \in O(N) \text{ e } u_R \in X.$$

Temos também que $u_R$ satisfaz $suppu_R \subset B_{c'+1+R} \setminus \overline{B}_{c'+1}$, $0 \leq u_R \leq 1$ em $I\!R^N$ e $u_R = 1$ em $\overline{B}_{c'+R} \setminus B_{c'+2}$. Usando a condição $(f)_2$ temos que

$$\int_{I\!R^N} F(s_* u_R)dx = \int_{\overline{B}_{c+R}\setminus B_{c+2}} F(s_*)dx + \int_{B_{c+1+R}\setminus \overline{B}_{c+1}} F(s_* u_R)dx \overset{R\to+\infty}{\to} +\infty.$$

$\square$

Passemos agora á prova dos teoremas 2.16 e 2.17.

**Prova do teorema 2.16**

Aplicaremos o Teorema do passo da montanha, (ver apêndice Teorema A.16).

Usando as imersões (2.3) e (2.4) e a suposição $(f_p)$, obtemos:

$$\left|\int_{I\!R^N} F(u)dx\right| \overset{(f_p)}{\leq} C\int_{I\!R^N} |u|^p dx \overset{(2.3)-(2.4)}{\leq} C||u||^p.$$

Daí

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{I\!R^N} F(u)dx \geq \frac{1}{2}||u||^2 - C||u||^p \quad \text{para todo } u \in X_r. \tag{2.19}$$

Como $p > 2$, isto prova a geometria do passo da montanha próximo da origem, ou seja, existem $\delta, \rho > 0$ tais que para todo $u \in X_r$ com $||u|| = \rho$, obtemos $I(u) \geq \delta$ (basta tomar $||u||$ suficientemente pequeno).

Vamos mostrar agora que existe $\tilde{u} \in X_r$ tal que $||\tilde{u}|| > \rho$ e $I(\tilde{u}) \leq 0$.

Primeiro assuma $(V)_2$ e $(f)_2$. Tome $u \in X_r$ tal que $\int_{I\!R^N} F(u)dx > 0$ (isso é possível graças ao lema 2.20), e defina $u_n(x) := u(\mu_n^{-1}x)$ onde $(\mu_n) \subset (\mu_0, +\infty)$ é uma sequência qualquer divergindo tal que $(V)_2$ se verifica para qualquer $\mu = \mu_n$ e para quase todo $s > 0$. Então $u_n \in X_r$ é tal que

$$\begin{aligned}
||u_n||^2 &= \mu_n^{N-2}\int_{I\!R^N} |\nabla u|^2 dx + \mu_n^N \int_{I\!R^N} V(\mu_n|x|)u^2 dx \\
&\overset{(V)_\alpha}{\geq} \mu_n^{N-2}\int_{I\!R^N} |\nabla u|^2 dx + A\mu_n^{N-\alpha}\int_{I\!R^N} \frac{u^2}{|x|^\alpha}dx \\
&= \mu_n^{N-2}K + \mu_n^{N-\alpha}K' \to +\infty \qquad K, K' constantes.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac{1}{2}\mu_n^{N-2}\int_{I\!R^N}|\nabla u|^2dx + \frac{1}{2}\mu_n^N\int_{I\!R^N}V(\mu_n|x|)u^2dx - \mu_n^N\int_{I\!R^N}F(u)dx \\ &\overset{(V)_2}{\leq} \frac{1}{2}\mu_n^{N-2}\int_{I\!R^N}|\nabla u|^2dx + \frac{B}{2}\mu_n^{N-\beta}\int_{I\!R^N}V(|x|)u^2dx - \mu_n^N\int_{I\!R^N}F(u)dx \to -\infty \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Agora vamos assumir a hipótese $(f)_3$. De $(f)_1$ temos que existe $\vartheta > 2$ tal que $\vartheta F(s) \leq f(s)s$ para todo $s \in I\!R$, logo como $F(s) = \int_0^s f(t)dt$, temos $\vartheta F(s) \leq F'(s)s$. Resolvendo a equação diferencial $\frac{dF}{F(s)} \geq \vartheta\frac{ds}{s}$, temos $F(s) \geq F(1)s^\vartheta$. De fato

$$\int_1^s \frac{dF(s)}{F(s)} \geq \vartheta\int_1^s \frac{ds}{s},$$

logo

$$\ln\frac{F(s)}{F(1)} \geq \ln s^\vartheta,$$

ou seja, $F(s) \geq F(1)s^\vartheta$.

Daí para algum $\lambda > 1$ e $u \in X_r$ não negativo temos

$$\begin{aligned} \int_{I\!R^N}F(\lambda u) &= \int_{\lambda u\geq 1}F(\lambda u)dx + \int_{0\leq\lambda u<1}F(\lambda u)dx \\ &\geq F(1)\lambda^\vartheta\int_{\lambda u\geq 1}u^\vartheta dx \geq F(1)\lambda^\vartheta\int_{u\geq 1}u^\vartheta dx. \end{aligned}$$

Como $\vartheta > 2$, temos

$$\begin{aligned} I(\lambda u) &= \frac{1}{2}\lambda^2||u||^2 - \int_{I\!R^N}F(\lambda u)dx \\ &\leq \frac{\lambda^2}{2}||u|| - F(1)\lambda^\vartheta\int_{u\geq 1}u^\vartheta dx \to -\infty \quad \text{quando } \lambda \to +\infty. \end{aligned}$$

Portanto $I$ satisfaz a geometria do passo da montanha. Logo o Teorema do passo da montanha (ver apendice A.16) mais o lema 2.19 garantem a existência de um ponto crítico de $I$ não trivial. Pelo lema 2.18 isto resolve $(P_0)$ no sentido de (2.16).

Finalmente observamos de $(f)_4$ que qualquer $u$ satisfazendo (2.16) é não negativo. De fato, de $(f)_3, (f)_1$ e $(f)_4$ temos $f(u)u^- \geq 0$ quase sempre em

$I\!R^N$, onde $u^-$ é a parte negativa de $u$. Então se $u$ satisfaz (2.16), temos

$$0=\int_{I\!R^N}\nabla u\cdot\nabla u^- dx+\int_{I\!R^N}V(|x|)uu^- dx-\int_{I\!R^N}f(u)u^- dx\leq -||u^-||^2 \Rightarrow ||u^-||\leq 0$$

pois

$$\begin{aligned}\int_{I\!R^N}\big(\nabla u\cdot\nabla u^-+V(|x|)uu^-\big)dx &= \int_{I\!R^N}\big(\nabla(u^+-u^-)\nabla u^-+V(|x|)(u^+-u^-)u^-\big)dx\\ &= -\Big(\int_{I\!R^N}|\nabla u^-|^2dx+\int_{I\!R^N}V(|x|)(u^-)^2dx\Big)\\ &= -||u^-||^2\end{aligned}$$

Portanto como $u^-=0$ e $u=u^+-u^-$ segue que $u=u^+$ como queríamos. $\square$

**Prova do teorema 2.17**

Aqui vamos usar o simétrico do Teorema do Passo da Montanha (ver apêndice teorema A.17). Precisamos primeiramente mostrar que o funcional $I$ definido em (2.18) é par. De fato, de $(f)_5$ temos $f(u)=-f(-u)$, daí

$$F(-u)=\int_0^{-u}f(s)ds\overset{(f)_5}{=}-\int_0^{-u}f(-s)dx\overset{t=-s}{=}\int_0^{u}f(t)dt=F(u),$$

isto é, $F$ é par e daí segue que

$$I(-u)=\frac{1}{2}||-u||^2-\int_{I\!R^N}F(-u)dx=\frac{1}{2}||u||^2-\int_{I\!R^N}F(u)dx=I(u),\ \text{para todo}\ u\in X_r.$$

Agora podemos aplicar o simétrico do teorema do passo da montanha. Tendo em conta (2.19) e lema 2.19, necessitamos somente mostrar que $I$ satisfaz a seguinte condição geométrica: para qualquer subespaço $Y\neq\{0\}$ de $X_r$ cuja dimensão é finita, existe $R>0$ tal que para todo $u\in Y$ com $||u||>R$, temos que $I(u)\leq 0$. De fato, seja $Y$ um subespaço de $X_r$ cuja dimensão é finita. Tome $u\in Y$, segue de $(F_p)$ que

$$\int_{I\!R^N}F(u)dx\geq m\int_{I\!R^N}|u|^pdx.$$

Como as normas são equivalentes em $Y$, temos $\int_{I\!R^N}F(u)dx\geq C||u||^p$, e como $p>2$ temos

$$I(u)=\frac{1}{2}||u||^2-\int_{I\!R^N}F(u)dx\leq\frac{1}{2}||u||^2-C||u||^p\leq 0,\quad \text{onde,}||u||\geq R,$$

para $R$ suficientemente grande. Portanto segue o resultado, ou seja, existe uma sequência ilimitada de valores críticos para o funcional $I$. Usando o lema 2.18 obtemos o resultado desejado. $\square$

# Apêndice A

# Apêndice

Nós vamos apresentar aqui alguns resultados que foram utilizados no texto.

## A.1 Espaços de funções

Vamos lembrar as definições e algumas propriedades de alguns espaços de funções,

**Definição A.1** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\Omega$ aberto. Nós denotamos por $C_c^\infty(\Omega)$ o conjunto de todas funções reais $C^\infty$ com suporte compacto em $\Omega$. Nós também assumiremos que o leitor esteja familiarizado com o espaço de Sobolev $H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$. Sabemos que, para $N \geq 3$ e $2^* = \frac{2N}{(N-2)}$, o espaço*

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N); \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\}$$

*com produto escalar e norma*

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx, \qquad ||u|| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

*é um espaço de Hilbert. Também sabemos que $D_0^{1,2}(\Omega)$ é o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $D_1^2(\mathbb{R}^N)$.*

**Teorema A.2 (Teorema de Imersões de Sobolev)** *As seguintes imersões são
contínuas:*

$$
\begin{array}{lll}
(1.1) & H^1(I\!R^N) \hookrightarrow L^p(I\!R^N), & 2 \leq p < \infty,\ N = 1, 2, \\
(1.2) & H^1(I\!R^N) \hookrightarrow L^p(I\!R^N), & 2 \leq p \leq 2^*,\ N \geq 3, \\
(1.1) & D^{1,2}(I\!R^N) \hookrightarrow L^{2^*}(I\!R^N), & 2 \leq p \leq 2^*,\ N \geq 3,
\end{array}
$$

## A.2 Lema de compacidade de Straus

**Teorema A.3** *Sejam $P$ e $Q : I\!R \to I\!R$ duas funções contínuas satisfazendo*

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \to o \text{ quando } |s| \to +\infty. \tag{A.1}$$

*Se $u_n : I\!R^N \to I\!R$ é uma sequência de funções mensuráveis, tal que*

$$\sup_n \int_{I\!R^N} |Q(u_n(x))| dx < \infty. \tag{A.2}$$

*e*

$$P(u_n(x)) \to v(x) \text{ quase sempre, em } I\!R^N, \text{ quando } n \to +\infty, \tag{A.3}$$

*então para qualquer conjunto de Borel $B$ limitado temos*

$$\int_B |P(u_n(x)) - v(x)| dx \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

*Se além disso assumirmos que*

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \to 0 \text{ quando } s \to 0. \tag{A.4}$$

*e*

$$u_n(x) \to 0 \text{ quando } |x| \to +\infty, \text{ uniformemente com respeito a } n, \tag{A.5}$$

*então $P(u_n)$ converge para $v \in L^1(I\!R^N)$ quando $n \to +\infty$.*

(Ver demonstração em [2] página 338).

## A.3 Alguns lemas radiais

**Lema A.4** *Seja $N \geq 3$; toda função radial $u \in H^1(I\!R^N)$ é quase sempre igual a função $U(x)$, contínua para $x \neq 0$ e tal que*

$$|U(x)| \leq C_N |x|^{\frac{(1-N)}{2}} ||u||_{H^1(I\!R^N)}, \quad |x| \geq \alpha_N, \tag{A.6}$$

*para algum $\alpha_N \geq 0$, onde $C_N$ depende apenas da dimensão $N$.*

(Ver demonstração em [2] página 340).

Apresentaremos o lema radial para o espaço $\mathcal{D}^{1,2}(I\!\!R^N)$.

**Lema A.5** *Seja $N \geq 3$. Toda função radial $u \in \mathcal{D}^{1,2}(I\!\!R^N)$ é quase sempre igual a função $U(x)$, contínua para $x \neq 0$ e tal que*

$$|U(x)| \leq C_N |x|^{\frac{(2-N)}{2}} ||u||_{\mathcal{D}^{1,2}(I\!\!R^N)}, \quad |x| \geq 1, \tag{A.7}$$

*onde $C_N$ depende apenas da dimensão $N$.*

(Ver demonstração em [2] página 340)

**Lema A.6** *Se $u \in L^p(I\!\!R^N)$, com $1 \leq p < +\infty$, é uma função radial não decrescente (i.e. $0 \leq u(x) \leq u(y)$ se $|x| \geq |y|$), então temos*

$$|u(x)| \leq |x|^{\frac{-N}{p}} \left( \frac{N}{|S^{N-1}|} \right)^{\frac{1}{p}} ||u||_{L^p(I\!\!R^N)}, \quad x \neq 0. \tag{A.8}$$

(Ver demonstração em [2] página 341)

## A.4 Simetrização de Schwartz

Enunciaremos nesta seção, sem provar algumas propriedades da simetrização de Schwartz. Primeiro nós recordamos da definição de simetrização ou reagrupamento esférico de uma função. Seja $f \in L^1(I\!\!R^N)$: então $f^*$, a simetrização de Schwartz de $f$, é uma função radial, não crescente em $r$, mensurável tal que para qualquer $\alpha > 0$.

$$m\{f^* \geq \alpha\} = m\{|f| \geq \alpha\},$$

onde $m$ é a medida de Lebesgue. Disto é óbvio que

$$\int_{I\!\!R^N} F(f)dx = \int_{I\!\!R^N} F(f^*)dx$$

para toda função contínua $F$ tal que $F(f)$ é integrável.

Uma propriedade fundamental da aplicação $f \mapsto f^*$ é a seguinte:

*Inequação de Riesz.* Sejam $f, g \in L^2(I\!R^N)$; então

$$\int_{I\!R^N} f(x)g(x)dx \leq \int_{I\!R^N} f^*(x)g^*(x)dx. \tag{A.9}$$

Desta inequação nós tiramos que

$$||f^* - g^*||_{L^2(I\!R^N)} \leq ||f - g||_{L^2(I\!R^N)}, \quad f, g \in L^2(I\!R^N). \tag{A.10}$$

Uma outra consequência importante da inequação de Riesz é o seguinte resultado:

Seja $u \in D^{1,2}(I\!R^N)$. Se $N \geq 3$ (respectivamente em $H^1(I\!R^N)$ para qualquer $N$). Então $u^*$ pertence a $D^{1,2}(I\!R^N)$ (respectivamente , em $H^1(I\!R^N)$) nós temos

$$\int_{I\!R^N} |\nabla u^*(x)|^2 dx \leq \int_{I\!R^N} |\nabla u(x)|^2 dx. \tag{A.11}$$

**Teorema A.7** *Seja $\Omega \subset I\!R^N$ um domínio regular limitado, com $N \geq 3$. Seja $g \in C(I\!R)$ tal que $g(0) = 0$ e*

$$\limsup_{|s| \to +\infty} \frac{|g(s)|}{|s|^l} < +\infty \quad \text{onde} \quad l = \frac{N+2}{N-2}. \tag{A.12}$$

*Então o funcional*

$$V(u) = \int_\Omega G(u(x))dx, \quad \text{onde} \quad G(t) = \int_0^t g(s)ds,$$

*está bem definido e é da classe $C^1$ no espaço $H^1(\Omega)$. Temos também que*

$$\langle V'(u), v\rangle = \int_\Omega g(u(x))v(x)dx, \quad u, v \in H^1(\Omega). \tag{A.13}$$

(Ver demonstração em [2] página 342).

**Teorema A.8** *Seja $N \geq 3$ e $g \in C(I\!R)$ satisfazendo $g(0) = 0$, a condição (A.12), e*

$$\limsup_{\substack{s \to +\infty \\ s \neq 0}} \frac{|g(s)|}{|s|} < +\infty \quad \text{onde} \quad l = \frac{N+2}{N-2}. \tag{A.14}$$

*Então o funcional*

$$V(u) = \int_{I\!R^N} G(u(x))dx, \quad \text{onde} \quad G(t) = \int_0^t g(s)ds,$$

*está bem definido e é da classe* $C^1$ *no espaço* $H^1(I\!\!R^N)$. *Temos também que*

$$\langle V'(u), v\rangle = \int_{I\!\!R^N} g(u(x))v(x)dx, \quad u, v \in H^1(I\!\!R^N). \tag{A.15}$$

.

(Ver demonstração em [2] página 342).

## A.5 Alguns resultados importantes de integração

**Teorema A.9 (Teorema da convergência monótona)** *Seja* $(f_n)$ *uma sequência crescente de funções de* $L^1$ *tal que* $\sup_n \int f_n < \infty$.

*Então* $f_n(x)$ *converge quase sempre em* $\Omega$ *para um limite finito denotado por* $f(x)$*; Mais,* $f \in L^1$ *e* $||f_n - f||_{L^1} \to 0$.

**Teorema A.10 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue)** *Seja* $(f_n)$ *uma sequência de funções em* $L^1$. *Suponhamos que*

*a)* $f_n(x) \to f(x)$ *em quase todo ponto de* $\Omega$*;*

*b)* *existe uma função* $g \in L^1$ *tal que para cada* $n$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *para quase todo ponto em* $\Omega$.

*Então* $f \in L^1(\Omega)$ *e* $||f_n - f||_{L^1} \to 0$.

**Lema A.11 (lema de Fatou's)** *Seja* $(f_n)$ *uma sequência de funções de* $L^1$ *tal que*

1. *para cada* $n$, $f_n(x) \geq 0$ *em quase todo ponto em* $\Omega$*;*
2. $\sup_n \int f_n < \infty$.

*Para cada* $x \in \Omega$ *ponha* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

*Então* $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

## A.6 Alguns resultados importantes

**Proposição A.12** *Como $u$ satisfaz a equação $-\Delta u = g(u)$ em $I\!R^N$, temos*

$$-u_{rr} - \frac{N-1}{r}u_r = g(u), \quad r \in (0, +\infty)$$

De fato, como $u(x) = u(|x|) = u\left(\sqrt{\sum x_i^2}\right)$, $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$,

então como $r = \sqrt{\sum x_i^2}$, temos $r_{x_i} = \frac{x_i}{r}$. Agora

$$\begin{array}{rcl} u_{x_i} & = & u'(r).r_{x_i} \qquad = \quad u'(r)\frac{x_i}{r} \\ u_{x_i x_i} & = & u''(r)(\frac{x_i}{r})^2 + u'(r)(\frac{r^2 - x_i^2}{r^3}). \end{array}$$

Daí

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = u'' + \frac{u'}{r}n - \frac{u'}{r} = u'' + \frac{1}{r}(n-1)u'.$$

$\square$

**Teorema A.13** *Seja $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $1 < p < \infty$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $f \cdot g \in L^1$ e*

$$\int |fg| \leq ||f||_{L_p}||g||_{L^q}.$$

*Em particular, se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e se verifica a* **desigualdade de interpolação**

$$||f||_{L^r} \leq ||f||_{L^p}^{\alpha}||f||_{L^q}^{1-\alpha} \quad \textit{onde } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

**Desigualdade de Cauchy-Schwartz:** Todo produto escalar satisfaz

$$|\langle u, v \rangle| \leq ||u||.||v|| \quad \text{para todo } u, v \in X,$$

onde $X$ é um espaço de Hilbert.

**Corolário A.14** *Seja $\varphi : X \to (-\infty, +\infty)$ uma função convexa semicontínua inferiormente (para topologia forte). Então $\varphi$ é semicontínua inferiormente para a topologia fraca $\sigma(X, X')$. Em particular, se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(X, X')$, então*

$$\varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n).$$

*Em particular temos se $x_n \rightharpoonup x$, então $||x|| \leq \liminf ||x_n||$.*

(Ver demonstração em [5], página 38).

**Definição A.15** *Seja $H$ um espaço de Hilbert. Dizemos que um funcional $C^1(H, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de* **Palais Smale** *(PS) se qualquer sequência $\{u_n\} \subset H$ tal que $\{\Phi(u_n)\}$ é limitada e $\Phi'(u_n) \to 0$, possui uma subsequência convergente.*

**Teorema A.16 (Teorema do Passo da Montanha)** *Suponha que $E \in C^1(V)$ satisfaz Palais Smale (PS), $V$ é um espaço de Banach. Assuma*

(1) $E(0) = 0$;

(2) *Existe $\rho > 0$, $\alpha > 0$ tal que $||u|| = \rho$, então $E(u) \geq \alpha$;*

(3) *Existe $\bar{u} \in V$ tal que $||\bar{u}|| \geq \rho$ e $E(\bar{u}) < \alpha$.*

*Defina*

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in C^0([0,1]; V) \ ; \ \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = \bar{u} \right\}$$

*então*

$$\beta := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} E(\gamma(t))$$

*é um valor crítico.*

(Ver demonstração em [14] página 101).

**Teorema A.17 (Simétrico do Teorema do Passo da Montanha)** *Suponha que $V$ é um espaço de Banach de dimensão infinita e suponha que $E \in C^1(V)$ satisfaz Palais Smale, $E(u) = E(-u)$ para todo $u$, e $E(0) = 0$. Suponha que $V = V^+ \oplus V^-$, onde $V^+$ tem dimensão finita e assuma as seguintes condições:*

(1) *Existe $\alpha > 0$, $\rho > 0$ tal que se $||u|| = \rho$, $u \in V^+$, então $E(u) \geq \alpha$.*

(2) *Para qualquer subspaço $W \subset V$ de dimensão finita existe $R = R(W)$ tal que $E(u) \leq 0$ para $u \in W$, $||u|| \geq R$.*

*Então $E$ possui uma sequência ilimitada de valores críticos.*

(Ver demonstração em [14] página 106).

**Teorema A.18 (Princípio do Máximo Forte)** *Seja* $\Omega \subset I\!R^N$ *aberto limitado e conexo,* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *e* $-\Delta u \geq 0$ *em* $\Omega$*. Então temos uma das alternativas:*

*ou* $u$ *é constante (e então* $\Delta u = 0$*)*

*ou* $u(x) > \inf\limits_{\Omega} u$*, para todo* $x \in \Omega$*, isto é, o ínfimo é atingido em* $\partial\Omega$*.*

# Referências Bibliográficas


[1] M. Badiale, Rolando S., *A note on nonlinear elliptic problems with singular potential*, Rend. lincei Math. Appl. 17 (2006), 1-13.

[2] H. Berestycki, P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations, I - Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. 82 (1983), 313-345.

[3] M. S. Berger, *Nonlinearity and nonlinear functional analysis*, Academic Press, New York (1979).

[4] M. S. Berger, *On the existence and structure of stationary states for a nonlinear Klein-Gordon equation*, J. Func. Anal. 9, (1972) 249-261.

[5] H. Brézis, *Análisis functional Teoria y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[6] C. V. Coffman, *Uniqueness of the ground state solution for* $\Delta u - u + u^3 = 0$ *and a variational characterization of other solutions*, Arch. Rat Mech. Anal. 46 (6) (1972) 81-95.

[7] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis* , Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985.

[8] V. Felli, M. Schneider, *Perturbation results of critical elliptic equations of Caffarelli-Kohn- Nirenberg type*, J. Differential Equations 191 (2003), 121-142.

[9] T. Kato, *Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient*, Comm. Pure Applied Math. 12 (1959) 403-425.

[10] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications to differential equation*, Springer-Verlag, (Paris, New York) 1993.

[11] S. I. Pohožaev, *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Sov. Math Doklady 5,(1965) 1408-1411.

[12] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, no. 65, Providence 1986.

[13] W. A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Commun. Math. Phys. 55 (1977), 149-172.

[14] M. Struwe, *Variational methods*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1990.

[15] S. Terracini, *On positive entire solutions to a class of equations with singular coefficient and critical exponent*, Adv. Differential Equations 1 (1996), 241-264.

[16] M. Willem, *Minimax theorem*, Birkhäuser, Berlin, 1996.