Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Teoria Algébrica dos Números Generalizados de Colombeau

por

Manoel Fernandes de Araújo

sob orientação do

Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Outubro/2006
João Pessoa - PB

Teoria Algébrica dos Números Generalizados de Colombeau

por

Manoel Fernandes de Araújo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans - IME-USP (Orientador)

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva - UFPB

Prof. Dr. José Gomes de Assis - UFPB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Outubro/2006

Agradecimentos

A Deus, por tudo que ele representa para mim.

Ao Pofessor Dr. Orlando Stanley Juriaans, que compreende o verdadeiro sentido da palavra *orientação* e confiança.

Ao Professor Dr. *Antônio de Andrade e Silva*, pela força, *orientação* e compreensão.

Ao Professor Dr. *José Gomes de Assis*, pela *orientação* e compreensão.

A minha mãe Severina da Silva Araújo e aos meus irmãos .

A minha esposa Maria das Neves e minha filha Larissa Vitória Martins de Araújo.

Ao Júnio e a Sônia, pela amizade e atenção, competência e presteza no atendimento de secretaria.

Ao Professor Joselito Oliveira do Departamento de Matemática - UFRR - Campus do Paricarana Roraima.

A Henrique Filgueira Marinho.

A Maria Cristina Izidoro, pela amizade e atenção.

Dedicatória

A minha esposa Maria das Neves Martis, minha filha Larissa Vitótia Martins de Araújo, com muito amor e carinho, minha mãe severina da silva Araújo e em memória ao meu pai Severino Araújo.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar a teoria algébricas dos números generalizados de Colombeau. A teoria das funções generalizadas de Colombeau foi desenvolvida para viabilizar o produto de duas distribuições, que em geral não é possível na teoria clássica.

Estudaremos as propriedades algébricas e topológicas de $\overline{\mathbb{K}}$, e mostraremos que o conjunto $\mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$ das unidades de $\overline{\mathbb{K}}$ é aberto, denso e $\overline{\mathbb{K}}$ não é um domínio de integridade. E caracterizamos os ideais maximais de $\overline{\mathbb{K}}$, e trataremos da noção de Valor Pontual genera -lizado, introduzido por Obberguggenberger-Kunzinger. O qual é usado para dar uma nova abordagem das funções generalizados. E finalizaremos o nosso trabalho apresentando duas aplicações a E.D.P.

Abstract

The currente work has as objective to present the Algebric theory of the Colombeau's generalized function was developed to make viable the producto from two distributions that in general aren't possible on the classic theory.

We'll study the algebricals and topologicals from $\overline{\mathbb{K}}$ properties unities from $\overline{\mathbb{K}}$ is open and dense and $\overline{\mathbb{K}}$ isn't a Integrity Domain. Every maxima ideal from $\overline{\mathbb{K}}$ is closed and any $x \in \overline{\mathbb{K}}$, or is a unity or a divisor from zero. Well'also give the complete description of the maximals ideals from $\overline{\mathbb{K}}$. Finally, w'elltreat the notion from the Generilized Pontual value introducted by Obberguggenberg-Kunzinger, that is to give a new approach of the generilized functions, and we finish our work presenting two aplicatios to E.D.P.

Sumário

Introdução

O presente trabalho é baseado nos trabalhos de Aragona-Juriaans e D. Scarpalezos, [8] e [9]. O objetivo é fazer uma breve apresentação da teoria dos números e funções generalizadas de Colomebeau.

Esta teoria possibilita a multiplicação de duas distribuições, fato que nem sempre é possível na teoria das distribuições. A álgebra de funções generalizadas de Colombeau constitue de uma Álgebra Diferencial $\mathcal{G}(\Omega)$ contendo o espaço das funções suave $C_0^\infty(\Omega)$ como uma sub-álgebra.

A ideia básica da teoria das funções generalizadas de Colombeau é a regulariza ção por uma familia de funções dependendo deum parâmetro ε.

Faremos de início uma apresentação dos "números generalizados"que tende a ser uma ferramenta para o desenvolvimento do nosso Cálculo diferencial. Para tanto, necessitaremos apenas de conhecimentos básicas de Cálculo, Ágebra e Topologia.

Denotaremos por $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $\overline{\mathbb{K}}$ o anel comutativo com unidade dos números generalizados. Para cada subconjunto Ω não vazio aberto de $\mathbb{R}^n$, denotaremos por $\mathcal{G}(\Omega)$ a $\overline{\mathbb{K}}-$álgebra das funções generalizadas de Colombeau. A topologia introduzida sobre $\mathcal{G}(\Omega)$ será chamada topologia cortante, a qual é compatível com a estrutura álgebrica $\overline{\mathbb{K}}$.

Apresentaremos algumas propriedades das estruturas algébricas e topológicas de $\overline{\mathbb{K}}$. Para tanto, vamos precisar de algumas notações básicas como: $\mathbf{I} =]0,1]$, $\bar{\mathbf{I}} = [0,1]$, $\mathbf{I}_\eta =]0,\eta[$, $\forall\ \eta \in \mathbf{I}$ e $k \subset\subset \Omega$ é um subconjunto compacto de Ω.

Posteriormente, apresentaremos os primeiros resultados como: o conjunto $\mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$ das unidades de $\overline{\mathbb{K}}$ é aberto, denso e $\overline{\mathbb{K}}$ não é um domínio de integridade, o mesmo se mantém para $\mathcal{G}(\Omega)$. Todo ideal maximal de $\overline{\mathbb{K}}$ é fechado e qualquer $x \in \overline{\mathbb{K}}$ ou é uma unidade ou um divisor de zero. E daremos também uma visão mais exata da estrutura dos ideais maximais de $\overline{\mathbb{K}}$. Esse estudo é baseado em duas ferramentas básicas: a análise cuidadosa de zeros dos elementos representantes de $\overline{\mathbb{K}}$, segundo um conjunto $\mathcal{S}$ consistindo de subconjuntos de $]0,1]$. A cada $A \in \mathcal{S}$ associamos um elemento χ_A de $\overline{\mathbb{K}}$. Aqui χ_A tem como representante a função característica de A. E chamaremos atenção para o seguinte fato: $\overline{\mathbb{K}}$ não é noetheriano nem artiniano. E por outro lado, derivamos diversas caracterizações das unidades de $\overline{\mathbb{K}}$ e obtemos uma descrição completa dos ideais maximais de $\overline{\mathbb{K}}$.

Por último apresentaremos um Cálculo Diferencial nos moldes do Cálculo tradicional e faremos duas aplicações em Equações Diferenciais Parciais deste formalismo.

Capítulo 1

Os Números Generalizados de Colombeau

Nessa seção, apresentaremos números generalizados de Colombeau. Iniciaremos este capítulo com as definições básicas e fixaremos a terminologia. Os resultados neste capítulo têm como base o artigo [1].

Definição 1.1 *Uma álgebra* $\mathbf{W}$ *sobre o corpo* $\mathbb{K}$ *é um conjunto munido de operações de adição, multiplicação e multiplicação por escalar tal que*:

1. *($\mathbf{W}, +, .$) é um anel;*
2. *($\mathbf{W}, *$) é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$;*
3. *Se $c \in \mathbb{K}$, $x, y \in \mathbf{W}$, então $c(xy) = (cx)y = x(cy)$.*

Definição 1.2 *Um subconjunto não-vazio* $\mathbf{B}$ *de* $\mathbf{W}$ *é uma sub-álgebra se ele com as operações herdadas de* $\mathbf{W}$ *é uma álgebra.*

Definição 1.3 *Seja* $\mathcal{E}(\mathbb{K}) = \mathcal{F}(\mathbf{I}, \mathbb{K}) = \{\hat{x} : \mathbf{I} \to \mathbb{K}\}$ *o espaço de funções de* $\mathbf{I}$ *em* $(\mathbb{K})$. *Note que o mesmo é uma* $\mathbb{K}-$*álgebra. Aqui* $\mathbf{I} =]0, 1]$ *e* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K}) := \{\hat{x} : \mathbf{I} \to \mathbb{R} \quad | \quad \exists a \in \mathbb{R} \ \ tal\ que\ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^a} = 0\}.$$

Note $\mathcal{E}_M$ é uma $(\mathbb{K})$ sub-álgebra de $\mathcal{E}(\mathbb{K})$. Os elementos de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$ são chamados funções moderadas.

Seja

$$\mathcal{N}(\mathbb{K}) := \{\hat{x} : \mathbf{I} \to \mathbb{R} \quad | \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^a} = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}\}.$$

Seus elementos são chamados funções nulas.

Veremos mais adiante que $\mathcal{N}(\mathbb{K})$ é um ideal de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$.

Definição 1.4 *Se $\hat{x} \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$, definimos*

$$A(\hat{x}) := \{a \in \mathbb{R} | \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^a} = 0\}.$$

É fácil ver que, $A(\hat{x}) = \mathbb{R} \Leftrightarrow \hat{x} \in \mathcal{N}(\mathbb{K})$.

Definição 1.5 *Se $\hat{x} \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$, definimos $V(\hat{x}) := \sup A(\hat{x})$. (Valuação de $\hat{x}$)*

Lema 1.1 *Seja $\hat{x} \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$. Se $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^a} = 0$, então $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^b} = 0$,$\forall b < a \in \mathbb{R}$.*

Prova. Com efeito, $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^b} = \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^{a-b}.\frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^a}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{a-b}. \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^a} = 0$, $\forall b < a$. ∎

Como conseqüência desse mesmo lema, temos que existe $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que $A(\hat{x}) =]-\infty, a]$ ou $A(\hat{x}) =]-\infty, a[$. É claro então que, $a = V(\hat{x})$.

Observação 1.1 $V(\hat{x}) = \infty \Leftrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^\tau} = 0$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $\Leftrightarrow \hat{x} \in \mathcal{N}(\mathbb{K})$.

Proposição 1.1 *Sejam $\hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:*

1. $V(0) = \infty$
2. $V(\lambda\hat{x}) = V(\hat{x})$ *se* $\lambda \neq 0$
3. $V(\hat{x}.\hat{y}) \geq V(\hat{x}) + V(\hat{y})$.
4. $V(\hat{x} + \hat{y}) \geq \min\{V(\hat{x}), V(\hat{y})\}$.

Prova.

1. Seja $\hat{x} \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$. Pela observação acima, $0 \in \mathcal{N}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|0(\varepsilon)|}{\varepsilon^\tau} = 0$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $\Leftrightarrow V(0) = \infty$.

2. Seja $\hat{x} \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$. Suponhamos que exista $q < V(\hat{x})$ e $\delta > 0$. Então

   $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|\lambda\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{q-\delta}} = |\lambda|. \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{q-\delta}} = 0 \Leftrightarrow q - \delta \in\ A(\hat{x}),\ \forall\delta > 0$ com $\delta \to 0$. Logo

   $q \leq \sup A(\lambda\hat{x}) = V(\lambda\hat{x})$. Portanto, $q < V(\hat{x}) \leq V(\lambda\hat{x})$ com $\lambda \neq 0$.

   Vamos provar que $V(\hat{x}) \geq V(\lambda\hat{x})$ com $\lambda \neq 0$.

   Suponhamos que exista $V(\hat{x}) < q < V(\lambda\hat{x})$, então

   $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|\lambda\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{q}} = |\lambda|. \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{q}} = 0$ e portanto, $q \in V(\hat{x})$ já que $\lambda \neq 0$. Mas isso contraria a hipótese. portanto, $V(\lambda\hat{x}) = V(\hat{x})$.

3. Sejam $p = V(\hat{x}), q = V(\hat{y})$ e $\delta > 0$, então $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon).\hat{y}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{p+q-\delta}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{p-\frac{\delta}{2}}} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{y}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{q-\frac{\delta}{2}}} = 0$ pois, $p - \frac{\delta}{2} \in\ A(\hat{x})$ e $q - \frac{\delta}{2} \in\ A(\hat{y})$. Segue-se que $p + q - \delta \in\ A(\hat{x}.\hat{y}),\ \forall\delta > 0$ com $\delta \to 0$. Assim $p + q \leq supA(\hat{x}.\hat{y}) = V(\hat{x}.\hat{y})$. Portanto, $V(\hat{x}.\hat{y}) \geq V(\hat{x}) + V(\hat{y})$.

4. Sejam $\tau = \min\{V(\hat{x}), V(\hat{y})\}$, e $\delta > 0$. Temos que

   $$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|(\hat{x} + \hat{y})(\varepsilon)}{\varepsilon^{\tau-\delta}} \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}|(\varepsilon)}{\varepsilon^{\tau-\delta}} + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{y}|(\varepsilon)}{\varepsilon^{\tau-\delta}} = 0,$$

   pois $\tau - \delta \in\ A(\hat{x})$ e $\tau - \delta \in\ A(\hat{y})$. Logo $\tau - \delta \in\ A(\hat{x} + \hat{y}),\ \forall\delta > 0$. Portanto, $\tau \leq \sup A(\hat{x}+\hat{y}) = V(\hat{x}+\hat{y})$ e conseqüentemente, $V(\hat{x}+\hat{y}) \geq \tau = \min\{V(\hat{x}), V(\hat{y})\}$.

■

Corolário 1.1 *Se $\hat{x} \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$ e $\hat{z} \in \mathcal{N}(\mathbb{K})$, então $A(\hat{x} + \hat{z}) = A(\hat{x})$. Em particular, $V(\hat{x}) = V(\hat{x} + \hat{z})$.*

Prova.

Vamos mostrar que $A(\hat{x} + \hat{z}) \subset A(\hat{x})$ e $A(\hat{x}) \subset A(\hat{x} + \hat{z})$.

De fato, Se $a \in A(\hat{x} + \hat{z})$. Então

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon)+\hat{z}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a}} = 0$. Como $\hat{z} \in \mathcal{N}(\mathbb{K})$ temos que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{z}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{b}} = 0,\ \forall\ b \in \mathbb{R}$. Logo

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon) + \hat{z}(\varepsilon) - \hat{z}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a}} \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon) + \hat{z}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a}} + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{z}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a}} = 0.$$

Assim $a \in A(\hat{x})$ e portanto, $A(\hat{x} + \hat{z}) \subset A(\hat{x})$ e $V(\hat{x} + z) \leq V(\hat{x})$ e pela proposição 1.1, $V(\hat{x} + \hat{z}) \geq V(\hat{x})$ e portanto, temos a igualdade.

■

Corolário 1.2 *O conjunto das funções moderadas $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$ é um anel e $\mathcal{N}(\mathbb{K})$ é um ideal de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$.*

Prova.

Como $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K}) \subseteq \mathcal{F}(\mathbf{I}, \mathbb{K})$ é um anel, basta provar que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$ é subanel de $\mathcal{F}(\mathbf{I}, \mathbb{K})$.

Sejam $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$. Devemos provar que $\hat{x}_1 + \hat{x}_2$ e $\hat{x}_1.\hat{x}_2 \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$.

De fato, existem $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}_i(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a_i}} = 0$, $i = 1, 2$. Definindo $a := \min\{a_1, a_2\}$ e suponhamos que $a = a_1$. Então

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}_1(\varepsilon) + \hat{x}_2(\varepsilon)|}{\varepsilon^a} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}_1(\varepsilon) + \hat{x}_2(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a_1}} \leq \lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{|\hat{x}_1(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a_1}} + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}_2(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a_1}}).$$

Como $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}_1(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a_1}} = 0$, temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}_2(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a_1}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon^{a_2}}{\varepsilon^{a_1}}. \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}_2(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a_2}} = 0.$$

Pois, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon^{a_2}}{\varepsilon^{a_1}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{a_2 - a_1} \in \{0, 1\}$. Portanto, $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$.

Vamos provar que, $\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$. Suponhamos que $a = a_1 + a_2$. Então

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}_1(\varepsilon).\hat{x}_2(\varepsilon)|}{\varepsilon^a} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}_1(\varepsilon).\hat{x}_2(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a_1+a_2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}_1(\varepsilon).\hat{x}_2(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a_1}.\varepsilon^{a_2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}_1(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a_1}}. \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}_2(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a_2}} = 0.$$

Portanto, $\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$.

Provaremos agora que $\mathcal{N}(\mathbb{K})$ é um ideal de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$. Sejam $\hat{x}_0, \hat{x}_1 \in \mathcal{N}(\mathbb{K})$ e $\hat{x} \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$. Vamos provar que $\hat{x}_1 + \hat{x}_2$ e $\hat{x}_0.\hat{x}_1 \in \mathcal{N}(\mathbb{K})$.

De fato, como $\hat{x} \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$ segue-se que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^b} = 0$ por outro lado, $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \mathcal{N}(\mathbb{K})$ tem-se que $\forall a \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}_i(\varepsilon)|}{\varepsilon^a} = 0$, $i = 1, 2$. Assim

$$0 \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}_1(\varepsilon) + \hat{x}_2(\varepsilon)|}{\varepsilon^a} \leq \lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{|\hat{x}_1(\varepsilon)|}{\varepsilon^a} + \frac{|\hat{x}_2(\varepsilon)|}{\varepsilon^a}) = 0$$

que implica $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}_1(\varepsilon)+\hat{x}_2(\varepsilon)|}{\varepsilon^a} = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$. E

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon).\hat{x}_1(\varepsilon)|}{\varepsilon^a} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^b}.\frac{|\hat{x}_1(\varepsilon)|}{\varepsilon^{a-b}} = 0,$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$. Logo $\hat{x}_0 + \hat{x}_1$ e $\hat{x}_1.\hat{x}_2 \in \mathcal{N}(\mathbb{K})$. Portanto, $\mathcal{N}(\mathbb{K})$ é um ideal de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$.

$\blacksquare$

Definição 1.6 *O anel dos números generalizados de Colombeau é definido por*

$$\overline{\mathbb{K}} := \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K}) \big/ \mathcal{N}(\mathbb{K}).$$

Dizer que, se $x \in \overline{\mathbb{K}}$ *então,* $x = \hat{x} + \mathcal{N}(\mathbb{K})$.

Capítulo 2

Propriedades de $\overline{\mathbb{K}}$.

Nesse capítulo, apresentaremos algumas propriedades algébricas de $\overline{\mathbb{K}}$. As notações estabelicidas na seção anterior serão usadas aqui espontâneamente. A referência básica para este capítulo é o artigo [1].

Definição 2.1 *Uma métrica num espaço métrico X é uma função* $\mathbf{d} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *tal que* $\forall x, y, z \in \overline{\mathbb{K}}$, *satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\mathbf{d}(x, y) > 0$ se $x \neq y$ e $\mathbf{D}(x, x) = 0$;

2. $\mathbf{d}(x, y) = \mathbf{d}(y, x)$;

3. $\mathbf{d}(x, z) \leq \mathbf{d}(x, y) + \mathbf{d}(y, z)$.

Definição 2.2 *Uma métrica* $\mathbf{d}$ *sobre um espaço X é uma ultramétrica se*

$\mathbf{d}(x, y) \leq max\{\mathbf{d}(x, z), \mathbf{d}(z, y)\}$, $\forall x, y, z \in X$.

Definição 2.3 *Sejam* $x, y \in \overline{\mathbb{K}}$ *então* $\mathbf{D} : \overline{\mathbb{K}} \times \overline{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *onde*

$$\mathbf{D}(x, y) := \|x - y\| = \exp(-V(\hat{x} - \hat{y})) \in \mathbb{R}_+,$$

em partivular, $\mathbf{D}(x, 0) := ||x||$.

Os resultados da seção anterior mostram que $\mathbf{D}$ define uma ultra-métrica sobre $\overline{\mathbb{K}}$.

A topologia induzida por $\mathbf{D}$ é denominada a topologia cortante sobre $\overline{\mathbb{K}}$.

Definindo o elemento $\alpha_r \in \overline{\mathbb{K}}$, tem como representante $\hat{\alpha}_r(\varepsilon) := \varepsilon^r$ são unidade de $\overline{\mathbb{K}}$. Pois, como se vê facilmente, $\alpha_r \cdot \alpha_s = \alpha_{r+s}$. Também é claro que $V(\alpha_r) = r$. Logo $\|\alpha_r\| = \exp(-V(\hat{\alpha}_r)) = \exp(-r)$.

Lema 2.1 *Sejam $\alpha_r \in \overline{\mathbb{K}}$ e $\hat{x} \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$. Então $V(\hat{\alpha_r}\hat{x}) = r + V(\hat{x})$.*

Prova.

Seja $\hat{\alpha_r} \in \overline{\mathbb{K}}$. Então

$\tau < r + V(\hat{x}) \Leftrightarrow V(\hat{x}) > \tau - r$. Logo $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{|(\hat{\alpha_r}\hat{x})(\varepsilon)|}{\varepsilon^\tau} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{|\hat{\alpha_r}(\varepsilon)|}{\varepsilon^r}.\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{\tau-r}} = 0$. Pois, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{|\hat{\alpha_r}(\varepsilon)|}{\varepsilon^r} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\varepsilon^r}{\varepsilon^r} \to 1$, como $\tau - r < V(\hat{x})$ segue-se que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{\tau-r}} \to 0$. Assim $\tau \leq \sup A(\hat{\alpha_r}\hat{x}) = V(\hat{\alpha_r}\hat{x})$ e portanto, $\tau \leq V(\hat{\alpha_r}\hat{x})$.

Vamos provar que $r + V(\hat{x}) \geq V(\hat{\alpha_r}\hat{x})$. Suponhamos que exista

$V(\alpha_r x) < \tau < r + V(\hat{x}) \Leftrightarrow V(\hat{x}) < \tau - r$. Logo
$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{|(\alpha_r\hat{x})(\varepsilon)|}{\varepsilon^\tau} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{|\hat{\alpha_r}(\varepsilon)|}{\varepsilon^r}.\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{\tau-r}} = 0$ pois, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{|\hat{\alpha_r}(\varepsilon)|}{\varepsilon^r} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\varepsilon^r}{\varepsilon^r} \to 1$ e
$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{\tau-r}} \to 0$ se $\tau - r \leq V(\hat{x})$, o que é uma contradição. Portanto, $V(\hat{\alpha_r}\hat{x}) = r + V(\hat{x})$.

■

Proposição 2.1 **D** *é uma ultramétrica e satisfaz as seguintes propriedades.*

1. *Se* $\|x\| < \|y\|$ *então,* $\mathbf{D}(x, y) = \|y\|$;

2. $\|\lambda x\| = \|x\|$;

3. $\|x.y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$;

4. $\|\alpha_r.x\| = \|\alpha_r\| \cdot \|x\|$;

5. $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

Prova.

1. $\|x\| < \|y\| \Leftrightarrow \exp(-V(\hat{x})) < \exp(-V(\hat{y})) \Leftrightarrow V(\hat{x}) > V(\hat{y}) \Leftrightarrow A(\hat{y}) \subsetneq A(\hat{x})$. $\mathbf{D}(x, y) = \|y\| \Leftrightarrow \|y - x\| = \|y\| \Leftrightarrow \exp(-V(\hat{y} - \hat{x})) = \exp(-V(\hat{y})) \Leftrightarrow V(\hat{y} - \hat{x}) =$ $= V(\hat{y}) \Leftrightarrow A(\hat{y} - \hat{x}) = A(\hat{y})$. Vamos provar que, $A(\hat{y} - \hat{x}) \subset A(\hat{y})$ e $A(\hat{y}) \subset A(\hat{y} - \hat{x})$.

   Sejam $\hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$ e seja $r \in A(\hat{y})$. Então como $r \in A(\hat{x})$ temos que:

   $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|(\hat{y}-\hat{x})(\varepsilon)|}{\varepsilon^r} \leq \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{y}(\varepsilon)|}{\varepsilon^r} + \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^r} = 0$. Pelo fato de $r \in A(\hat{y})$ e $r \in A(\hat{x})$. Logo $r \in A(\hat{y} - \hat{x})$ e portanto, $A(\hat{y}) \subset A(\hat{y} - \hat{x})$.

   Seja $r \in A(\hat{y} - \hat{x})$. Afirmação: $r \leq V(\hat{y})$. Caso contrário, existe $\delta > 0$ tal que

   $r = V(\hat{y}) + \delta < V(\hat{x})$.

Logo

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{|\hat{y}(\varepsilon)|}{\varepsilon^r} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{|(\hat{y}-\hat{x})(\varepsilon)+\hat{x}|}{\varepsilon^r} \leq \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{|(\hat{y}-\hat{x})(\varepsilon)|}{\varepsilon^r} + \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{|\hat{x}(\varepsilon)|}{\varepsilon^r} = 0$. Pois, $r \in A(\hat{y}-\hat{x})$ e $r \in A(\hat{x})$. Assim, $r \in A(\hat{y})$ e $r \leq V(\hat{y})$, absurdo.

Portanto, $A(\hat{y}-\hat{x}) \subseteq]-\infty, V(\hat{x})] \Rightarrow V(\hat{y}-\hat{x}) \leq V(\hat{y})$, ou seja, $A(\hat{y}-\hat{x}) \subset A(\hat{y})$ e com isso, conclui-se que $A(\hat{y}-\hat{x}) = A(\hat{y}) \Leftrightarrow V(\hat{y}-\hat{x}) = V(\hat{y})$ e portanto, $\mathbf{D}(x,y) = \|y\|$.

2. Como $V(\lambda\hat{x}) = V(\hat{x})$, segue-se que

   $\|\lambda\hat{x}\| = \exp(-V(\lambda\hat{x})) = \exp(-V(\hat{x})) = \|x\|$.

3. Foi visto também que, $V(\hat{x}\hat{y}) \geq V(\hat{x}) + V(\hat{y})$. Logo

   $\|x.y\| = \exp(-V(\hat{x}\hat{y})) \leq \exp(-(V(\hat{x}) + V(\hat{y}))) = \exp(-V(\hat{x})).\exp(-V(\hat{y})) =$
   $= \|x\|.\|y\|$.

4. Sabendo-se que, $V(\hat{\alpha}_r.\hat{x}) = r + V(\hat{x})$ e $\|\alpha_r\| = \exp(-r)$ temos que

   $\|\alpha_r.x\| = V(\hat{\alpha}_r.\hat{x}) = \exp(-(r + V(\hat{x}))) = \exp(-r).\exp(-V(\hat{x})) = \|\alpha_r\|.\|x\|$.

5. Sabendo-se que, $(V(x+y)) \geq \min\{V(x), V(y)\}$ temos que $\|x+y\| =$
   $= \exp(-V(x+y)) \leq \max\{\exp(-V(x)), \exp(-V(y))\} = \max\{\|x\|, \|y\|\} \leq \|x\|+\|y\|$.

$\blacksquare$

Lema 2.2 *Seja $x \in \overline{\mathbb{K}} - \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então $\|x^n\| = \|x\|^n$. Em particular se $||x|| < 1$, então $x^n \to 0$, quando $n \to \infty$. Também existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\|\alpha_r.x\| = 1$.*

Prova. É fácil ver que $V(\hat{x}^n) = nV(\hat{x})$. Logo $\|x^n\| = \|x\|^n$. Se $\|x\| < 1$ então é claro que o referido limite é zero. Pois,

$\|x^n\| = \|x\|^n \Leftrightarrow \exp(-V(\hat{x}^n))) = \exp[-V(\hat{x})]^n = \exp[-nV(\hat{x})] \Leftrightarrow V(\hat{x}^n) =$
$= [V(\hat{x})]^n = nV(\hat{x}) \Leftrightarrow \mathbf{A}(x^n) = (\mathbf{A}(x))^n$.

Se $a \in \mathbf{A}(x^n)$, então $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{|\hat{x}(\varepsilon)|^n}{\varepsilon^a} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{|\hat{x}^n(\varepsilon)|}{\varepsilon^a} = 0$. Logo $a \in [\mathbf{A}(x)]^n$. Portanto,
$\mathbf{A}(x^n) \subset (\mathbf{A}(x))^n$.

Agora se $a \in (\mathbf{A}(x))^n$ então, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{|\hat{x}^n(\varepsilon)|}{\varepsilon^a} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{|\hat{x}(\varepsilon)|^n}{\varepsilon^a} = 0$. Logo $a \in \mathbf{A}(x)^n$. Portanto, $(\mathbf{A}(x))^n(\subset \mathbf{A}(x^n)$. Assim, conclui-se a igualdade.

Para provar a segunda parte do lema, definimos, $r := \ln \|x\|$. Então

$$\begin{aligned}
\|\alpha_r.x\| &= \|\alpha_r\|.\|x\| \\
&= \exp(-r).\|x\| \\
&= \exp[-\ln\|x\|].\|x\| \\
&= \exp[\ln(\frac{1}{\|x\|})].\|x\| \\
&= \frac{1}{\|x\|}.\|x\| \\
&= 1.
\end{aligned}$$

■

Observação 2.1 *A estrutura determinada por* $\mathbf{D}$ (*respectivamente,* $\mathbf{d}$) *sobre* $\overline{\mathbb{K}}$ (*respectivamente* $\mathcal{E}(\mathbb{K})$) *é chamada estrutura uniforme cortante sobre* $\overline{\mathbb{K}}$ (*respectivamente* $\mathcal{E}(\mathbb{K})$). *A topologia uniforme determinada por essa estrutura sobre* $\overline{\mathbb{K}}$ *será denominada topologia cortante sobre* $\overline{\mathbb{K}}$. *Ver [8] e [9]*

Teorema 2.1 $\overline{\mathbb{K}}$ *com a topologia cortante é uma álgebra completa.*

Veja [8] e [9].

Definição 2.4 *Seja* $a \in \overline{\mathbb{K}}$ *e* $r \in \mathbb{R}^*_+$. *Então:*

1. *Chamaremos de bola aberta de centro* a *e raio* r *ao conjunto*

$$\mathbf{B}(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \{x \in \overline{\mathbb{K}} : \|x - a\| < r\}.$$

2. *Chamaremos de bola fechada de centro* a *e raio* r *ao conjunto*

$$\mathbf{B}'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \{x \in \overline{\mathbb{K}} : \|x - a\| \leq r\}.$$

3. *Chamremos de esfera de centro* a *e raio* r *ao conjunto,*

$$\mathbf{S}(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \{x \in \overline{\mathbb{K}} : \|x - a\| = r\}.$$

Notação: $\mathbf{B_1}(x_0)$ representa a bola aberta de centro x_0 e raio 1.

Definição 2.5 *Seja* $x \in \overline{\mathbb{K}}$, *dizemos que* x *é associado a zero, onde denotamos por* $x \approx 0$, *se para algum representante* $\hat{x}$ *de* x *temos* $\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{x}(\varepsilon) = 0$. *Dois elementos* $x, y \in \overline{\mathbb{K}}$ *são associados, isto é,* $x \approx y \Leftrightarrow x - y \approx 0$.

Lema 2.3 *Seja* $\mathbf{B_1}$ *a bola de centro zero e raio* 1.

1. $x \in \mathbf{B_1}$ *se, e somente se,* $V(x) > 0$ *para todo representante* $\hat{x}$ *de* x.

2. $x \approx 0$;

3. $D(1, x) = \|1 - x\| = 1$.

Prova.

1. Seja $x \in \overline{\mathbb{K}}$, então:

   $V(x) > 0 \Leftrightarrow -V(x) < 0 \Leftrightarrow \exp(-V(x)) < \exp(0) = 1 \Leftrightarrow \|x\| < 1 \Leftrightarrow x \in \mathbf{B_1}$.

2. Vamos mostrar que $x \approx 0$.

   De fato,

   $x \in \mathbf{B_1} \Rightarrow V(x) > 0 \Rightarrow 0 \in \mathbf{A}(x) \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} x(\varepsilon) = 0$. Portanto, $x \approx 0$.

3. Se $\|x\| < 1$, então $\|1 - x\| = 1$, proposição 2.1.

$\blacksquare$

Definição 2.6 *O conjunto dos inversos de* $\overline{\mathbb{K}}$ *é dado por:*

$$\mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}}) = \{x \in \overline{\mathbb{K}} | \quad x \quad \textit{é uma unidade}\}.$$

A função Ψ definida por,

$$\begin{aligned} \Psi \ : \ \mathbb{R} \ &\longrightarrow \overline{\mathbb{K}} \\ r \quad &\longmapsto \quad \Psi(r) = \alpha_r \end{aligned}$$

é um monomorfismo de grupos. Pois: $\Psi(r + s) = \alpha_{r+s} = \varepsilon^{r+s} = \varepsilon^r.\varepsilon^s = \alpha_r.\alpha_s = \Psi(r)\Psi(s)$ e $\Psi(r) = \Psi(s) \Rightarrow \alpha_r = \alpha_s \Rightarrow \varepsilon^r = \varepsilon^s \Rightarrow r = s$. Como já observado, temos que a imagem de Ψ está contido em $\mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}}$.

Lema 2.4 *Seja* $x \in \overline{\mathbb{K}}$, *com* $\|x\| < 1$ *e seja* $y_n = \sum_{k=o}^{n} x^k = 1 + x + ... + x^n \to y$ *uma série convergente em* $\overline{\mathbb{K}}$, *então* $y(1 - x) = 1$, *isto é,* y *e* $1 - x$ *são invertíveis.*

Prova.

Dados $m, n, \varepsilon > 0$, escolhendo n_0 tal que $\|x\|^{n_0} < \varepsilon$.

$$\mathbf{D}(y_n, y_m) = \|y_m - y_n\| = \|\sum_{k=0}^{m} x^k - \sum_{j=0}^{n} x^k\| = \|\sum_{k=n+1}^{m} x^k\| = \|x^{n+1} + x^{n+2} + ... + x^m\|.$$

Lembrando que se $\|u\| \neq \|v\| \in \overline{\mathbb{K}}$, temos que $\mathbf{D}(u,v) = \max\{\|u\|, \|v\|\}$. Assim, se $\|x\| < 1$, então $\|x^j\| = \|x\|^j > \|x\|^{j+t}$, $\forall t > 0$. Em particular, $\|x^{n+1}\| = \|x\|^{n+1} > \|x\|^{n+2} > ... > \|x\|^m$. Logo $\|x^{n+1} + x^{n+2} + ... + x^m\| = \|x^{n+1}\| = \|x\|^{n+1}$. Portanto,

$\mathbf{D}(y_n, y_m) = \|x\|^{n+1} < \|x\|^{n_0} < \varepsilon$.

Portanto, a seqüência é de Cauchy e converge em $\overline{\mathbb{K}}$.

Agora, mostraremos que $1 - x \in \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$. De fato $y_n(1-x) = 1 - x^{n+1}$. Sendo $\|x\| < 1$ e tomando o limite em n obtemos que $y(1-x) = 1$. ■

Corolário 2.1 $\mathbf{B_1}(1) \subset \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$.

Lema 2.5 *Seja* $x \in \overline{\mathbb{K}}$ *com* $\|x\| < 1$. *Então* $1 + x \in \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$.

Prova.

Visto que, $1 - x \in \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$ com $\|x\| < 1$. Então $1 + x = 1 - (-x) \in \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$. Portanto, $1 + x \in \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$.

■

Teorema 2.2 $\mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}}) = \{v \in \overline{\mathbb{K}} | \ \exists \ \ u \in \overline{\mathbb{K}} \ \ , uv = 1\}$ *é aberto.*

Prova.

Seja $x_0 \in \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$, então $x_0 \neq 0$ e $\|x\| \neq 0$. Seja $z \in \mathbf{B}_r(x_0)$ então $|x_0 - z\| < r$, ou seja, $z = x_0 + (z - x_0) = x_0(1 + x_0^{-1}(z - x_0))$. Definindo $x := x_0^{-1}(z - x_0)$ temos que $z = x_0(1 + x)$. Vamos mostrar que, $\mathbf{B}_r(x_0) \subseteq \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$. De fato, se tomarmos $r < \frac{1}{\|x_0\|}$ temos que

$\|x\| = \|x_0^{-1}(z - x_0)\| \leq \|x_0^{-1}\|\|z - x_0\| \leq \|x_0^{-1}\|r < 1$. Logo, pelo lema acima, $1 + x \in \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$ o que implica em $z \in \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$. E portanto, $\mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$ é aberto. ■

2.1 ideais

Seja R um anel e $x \in R$. Então x é nilpotente se existir um número natural n tal que $x^n = 0$. Um ideal maximal $\mathbf{M}$ de R é um ideal próprio de R que não está propriamente contido em nenhum outro ideal de R.

Proposição 2.2 *Se* $\mathbf{a} \lhd \overline{\mathbb{K}}$ *é um ideal próprio então* $\mathbf{a}$ *tem interior vazio.*

Prova.

De fato, se $\mathbf{a}$ não tem interior vazio, então $\mathbf{a}$ contem uma vizinhança aberta de 0. Como a seqüência de unidades $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero, temos que a partir de um certo instante teriamos que $\alpha_n \in \mathbf{a}$, um absurdo já que $\mathbf{a}$ é um ideal próprio.

■

Lema 2.6 *$\overline{\mathbb{K}}$ é um anel reduzido, isto é, não tem elementos nilpotentes.*

Prova.

Seja x um elemento nilpotente. Então, existe $\mathbf{n} > 0$ inteiro tal que $x^{\mathbf{n}} = 0$. Logo $0 = \|x^n\| = \|x\|^n$. Portanto, $\|x\| = 0$ e conclui-se que $x = 0$. ■

Lema 2.7 *Seja $\mathbf{b}$ um ideal de $\overline{\mathbb{K}}$ e $\bar{\mathbf{I}}$ o fecho topológico de $\mathbf{b}$ em $\overline{\mathbb{K}}$. Então $\overline{\mathbf{b}} \lhd \overline{\mathbb{K}}$ é um ideal.*

Prova.

Vamos provar que $x, y \in \overline{\mathbf{b}}$ e $z \in \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$ tem-se que $x + y \in \overline{\mathbf{b}}$ e $xz \in \overline{\mathbf{b}}$.

De fato, se $x, y \in \overline{\mathbf{b}}$ então, existem $x_n, y_n \subseteq \overline{\mathbf{b}}$ tais que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Portanto,

$x_n + y_n \to x + y \Rightarrow x + y \in \overline{\mathbf{b}}$ e

$z \cdot x_n \to xz \Rightarrow xz \in \overline{\mathbf{b}}$.

■

Lema 2.8 *Seja $\mathbf{J} \lhd \overline{\mathbb{K}}$ um ideal maximal. Então $\mathbf{J}$ é fechado.*

Prova. Pelo Lema 2.7, o fecho $\overline{\mathbf{J}}$ de $\mathbf{J}$ é um ideal e $\mathbf{J} \subseteq \overline{\mathbf{J}} \subseteq \overline{\mathbb{K}}$. Se $\mathbf{J} \subsetneq \overline{\mathbf{J}}$ então, sendo $\mathbf{J}$ um ideal maximal, segue-se que $\overline{\mathbf{J}} = \overline{\mathbb{K}}$. Em particular $1 \in \overline{\mathbf{J}}$ e $\mathbf{B}_1(z) \subset \overline{\mathbf{J}} = \overline{\mathbb{K}}$. Como $1 \in \overline{\mathbf{J}}$, temos que existe $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbf{J}$ tal que $x_n \to 1$, implica que existe n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in \mathbf{B}_1(1)$. Portanto,

$x_n \in \mathbf{J} \cap \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$ e dai $1 \in \mathbf{J}$ o que implica em $\mathbf{J} = \overline{\mathbb{K}}$, o que é absurdo. Sendo J um ideal maximal, conclui-se que $\mathbf{J} = \overline{\mathbf{J}}$.

■

Capítulo 3

Funções Características

Nesse capítulo veremos um tipo especial de funções características e mostraremos que eles são relacionados com os ideais primos e maximais de $\overline{\mathbb{K}}$. Algumas das principais conseqüências dessa análise, são que, o conjunto das unidades de $\overline{\mathbb{K}}$ é aberto e denso e $\overline{\mathbb{K}}$ não é um domínio de integridade. A referência básica para este capítulo o artigo [1].

Definição 3.1 *Seja* $\mathcal{S}$=$\{\mathbf{A} \subset]0,1] \mid 0 \in \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{A}^c}\}$, *isto significa que zero é ponto de acumulação de* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}^c$.

Definição 3.2 *Seja* $\mathbf{A} \in \mathcal{S}$. *A função característica de* $\mathbf{A}$ *é a função*
$\hat{\chi}_{\mathbf{A}}(\varepsilon) \ : \mathbf{I} \longrightarrow \{0,1\}$ *definida por,*

$$\hat{\chi}_{\mathbf{A}}(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & se \quad \varepsilon \in \mathbf{A}^c \\ 1 & se \quad \varepsilon \in \mathbf{A} \end{cases}$$

Denotamos por χ_A a classe de $\hat{\chi}_{\mathbf{A}}$ em $\overline{\mathbb{K}}$.

Observação 3.1 *Note que se* $\mathbf{A} \in \mathcal{S}$, *então* $\mathbf{A}^c \in \mathcal{S}$ *e* $\hat{\chi}_{\mathbf{A}} \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$, *mas* $\hat{\chi}_{\mathbf{A}} \notin \mathcal{N}(\mathbb{K})$. *Assim* $\chi_{\mathbf{A}} \neq 0$ *em* $\overline{\mathbb{K}}$ *e* $\chi_{\mathbf{A}} \cdot \chi_{\mathbf{A}^c} = 0$. *Logo* $\chi_{\mathbf{A}}$ *e* $\chi_{\mathbf{A}^c}$ *são idepotentes ortogonais e ambos são divisores de zero.*

Lema 3.1 *Seja* $\mathbf{A} \in \mathcal{S}$*. Então*

1. $\chi^2_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}}$
2. $\chi_{\mathbf{A}^c} + \ \chi_{\mathbf{A}} = 1$
3. $\chi_{\mathbf{A}} \cdot \chi_{\mathbf{A}^c} = 0.$

Prova.

Vamos provar apenas o item **(1)**, pois As outras são óbvias.

$\chi^2_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}} . \chi_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A} \cap \mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}}$(idepotente em $\overline{\mathbb{K}}$). ■

Definição 3.3 *O ideal* $\mathbf{b}$ *de um anel comutativo* R *diz-se primo se tem a seguinte propriedade: se* $x \cdot y \in \mathbf{b}$*, então* $x \in \mathbf{b}$ *ou* $y \in \mathbf{b}$*.*

Definição 3.4 *Denotaremos por* $\mathbf{P}_*(\mathcal{S})$ *o conjunto de todos os subcojuntos* $\mathcal{F} \in \mathbf{P}(\mathcal{S})$*, que satisfazem as seguintes condições:*

1. *Para todo* $\mathbf{A} \in \mathcal{S}$*, temos ou* $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$ *ou* $\mathbf{A}^c \in \mathcal{F}$*, nunca ambos.*
2. *Se* $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$ *e* $T \in \mathcal{F}$*, então* $\mathbf{A} \cup T \in \mathcal{F}$*.*

Definição 3.5 *Seja* $\mathcal{F} \in \mathbf{P}_*(\mathcal{S})$ *e definimos por,*

$$g(\mathcal{F}) = \langle \chi_{\mathbf{A}} \mid \mathbf{A} \in \mathcal{F} \rangle,$$

o ideal de $\overline{\mathbb{K}}$ *gerado pelo conjunto de todas as funções caracteristícas de* $\mathbf{A}$ *tal que* $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$*.*

Lema 3.2 *Se* $\mathcal{F} \in \mathbf{P}_*(\mathcal{S})$*, então* $g(\mathcal{F})$ *é um ideal próprio de* $\overline{\mathbb{K}}$*.*

Prova. Suponha que $g(\mathcal{F}) = \overline{\mathbb{K}}$, então existem

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n \in \overline{\mathbb{K}} \quad e \\ \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n \in \mathcal{F} \end{cases}$$

tal que

$$1 = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i \chi_{\mathbf{A}_i}.$$

Agora, definimos

$$\mathbf{A} := \bigcap_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i^c \in \mathcal{F},$$

então
$$\mathbf{A}=\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{A}_{_i}\in\mathcal{F}.$$
Como $\mathbf{A}\in\mathcal{F}$ segue-se que $\mathbf{A}^c\in\mathcal{S}$. Agora, $\mathbf{A}_i\subset\mathbf{A}$ e logo $\forall i$ $\mathbf{A}\cap\mathbf{A}_i=\emptyset$. Consequentemente $\chi_{\mathbf{A}}.\chi_{\mathbf{A}_i}=0$.

Multiplicando por $\chi_{\mathbf{A}}$ a equação
$$1=\sum_{i=1}^{k}a_i\chi_{\mathbf{A}_i},$$
temos:
$$\chi_{\mathbf{A}}=\sum_{i=1}^{k}a_i\chi_{\mathbf{A}}\chi_{\mathbf{A}_i}=0.$$
Absurdo, pois $\mathbf{A}\in\mathcal{S}\Rightarrow\chi_{\mathbf{A}}\neq 0$. Portanto, $g(\mathcal{F})$ é um ideal próprio de $\overline{\mathbb{K}}$. ■

Definição 3.6 *Seja* $\mathbf{P}$ *um ideal primo de* $\overline{\mathbb{K}}$. *Definimos*
$$\mathcal{F}_{\mathbf{P}}:=\{\mathbf{A}\in\mathcal{S}\mid\chi_{\mathbf{A}}\in\mathbf{P}\}.$$

Lema 3.3 *Seja* $\mathbf{P}\lhd\overline{\mathbb{K}}$ *um ideal primo, então existe uma única família* $\mathcal{F}_{\mathbf{P}}\in\ \mathbf{P}_*(\mathcal{S})$ *tal que* $g(\mathcal{F}_{\mathbf{P}})\subseteq\mathbf{P}$.

Prova. Dado $A\in\mathcal{S}$ vamos provar que ou $\chi_{\mathbf{A}}\in\mathbf{P}$ ou $\chi_{\mathbf{A}^c}\in\mathbf{P}$, isto é, ambos não podem pertencer a $\mathbf{P}$.

De fato como $\chi_{\mathbf{A}}\cdot\chi_{\mathbf{A}^c}=0$. e $\chi_{\mathbf{A}}+\chi_{\mathbf{A}^c}=1$ segue-se pela primalidade de $\mathbf{P}$ que ou $\chi_{\mathbf{A}}$ ou $\chi_{\mathbf{A}^c}$ pertence a $\mathbf{P}$. Segue-se que ou $A\in\mathcal{F}_{\mathbf{P}}$ ou $A^c\in\mathcal{F}_{\mathbf{P}}$.

Agora, dados $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{F}_{\mathbf{P}}$ então, $\chi_{\mathbf{A}},\chi_{\mathbf{B}}\in\mathbf{P}$ e portanto, $\chi_{\mathbf{A}\cap\mathbf{B}}=\chi_{_A}\cdot\chi_{_B}\in\mathbf{P}$. Logo $\chi_{\mathbf{A}\cup\mathbf{B}}=\chi_{_A}+\chi_{_B}-\chi_{\mathbf{A}\cap\mathbf{B}}\in\mathbf{P}$. Logo $A\cap B\in\mathcal{F}_{\mathbf{P}}$. Portanto, $\mathcal{F}_{\mathbf{P}}\in\mathbf{P}_{_*}(\mathcal{S})$

■

Definição 3.7 *Sejam* $u\in\mathcal{E}_{_\mathcal{M}}$ *e* $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^*$. *Então*
$$\mathbf{N_a}(u):=\{\varepsilon\in\mathbf{I}\ \mid\ |u(\varepsilon)|<\varepsilon^a\}.$$

Definição 3.8 *Sejam* $x\in\overline{\mathbb{K}}$ *e* $\hat{x}$ *um representante de* x. *Então*
$$\mathbf{Z}(\hat{x}):=\{\varepsilon\in\mathbf{I}\ \mid\ \hat{x}(\varepsilon)=0\}.$$

Denotaremos o fecho de $\mathbf{Z}(\hat{x})$ *por* $\overline{\mathbf{Z}}(\hat{x})$.

Teorema 3.1 *Seja $x \in \overline{\mathbb{K}}$ então:*

a) *$x \in \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$ se, e somente se, $0 \notin \overline{\mathbf{Z}}(\hat{x})$ para todo representante $\hat{x}$ de x.*

b) *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *$x \notin \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$;*

ii) *Existe um representante $\hat{x}$ de x tal que $0 \in \overline{\mathbf{Z}}(\hat{x})$;*

iii) *x é um divisor de zero.*

Prova.

a)

$(\Longrightarrow)$

Seja $x \in \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$ e seja $\hat{x}$ um representante de x tal que $0 \in \overline{Z}(\hat{x})$. Então a classe $y := cl[\hat{y}] \in \overline{\mathbb{K}}$ da função característica de $Z(\hat{x})$ satisfaz $xy = 0$ e $y \neq 0$, isto é uma contradição, porque $x = 0 \notin \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$. Logo $0 \notin \overline{\mathbf{Z}}(\hat{x})$.

$(\Longleftarrow)$ Suponha que $x \notin \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$, então $\frac{1}{\hat{x}} \notin \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$. Logo, $\forall \tau \in \overline{\mathbb{K}}$ tem-se que ou $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|\frac{1}{\hat{x}}(\varepsilon)|}{\varepsilon^{\tau}} \neq 0$ ou este limite não existe.

Note também que se existir a tal que $|x(\varepsilon)| > \varepsilon^{a}$, então x seria inversível. Concluimos destes fatos que existe uma seqüência (ε_n^n) tal que $|x(\varepsilon)| > \varepsilon_n^n, \forall n$. Seja $A = \{\varepsilon_n^n | \ n \in \mathbb{N}\}$. Agora define $\hat{x}_* := \hat{x} - \chi_A$. Então $\hat{x}_*$ é um representante de x com $A \subset Z(\hat{x}_*)$, uma contradição.

b) i $\Rightarrow$ii Segue do item **a**.

b) ii $\Rightarrow$iii É claro que se $\hat{x}$ é um representante de x tal que $0 \in \overline{\mathbf{Z}}(\hat{x})$, e $\hat{y}$ é a função caracteristica de $\mathbf{Z}(\hat{x})$, então $y := cl(\hat{y}) \in \overline{\mathbb{K}}^*$ e $yx = 0$. Portanto, x é um divisor de zero.

b) iii $\Rightarrow$i Óbvio.

$\blacksquare$

Proposição 3.1 *O anel $\overline{\mathbb{K}}$ não é nem local e nem é um domínio de integridade.*

Prova. Consideremos as seguintes funções moderadas:

$\hat{x}(\varepsilon) := -\sin(\varepsilon^{-1})$ e $\hat{y}(\varepsilon) := 1 - \hat{x}(\varepsilon)$ com $\varepsilon \in \mathbf{I}$. Como $Z(\hat{x})$ e $Z(\hat{y})$ pertencem a $\mathcal{P}_*(\mathcal{S})$ temos que $x, y \in \overline{\mathbb{K}} \setminus \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$. Se $\overline{\mathbb{K}}$ fosse um anel local e denotando por $\mathbf{m}$ seu único ideal maximal, teriamos que $x, y \in \mathbf{m}$. Logo $x + y = -\sin(\varepsilon^{-1}) + 1 + \sin(\varepsilon^{-1}) = 1 \in \mathbf{m}$, uma contradição assim, $\overline{\mathbb{K}}$ não é um anel local.

Mostraremos agora a segunda afirmação. Define $\mathbf{A} := \{m^{-1} \mid m \in \mathbb{N}^*\}$ e sejam $\chi_{\mathbf{A}}$ e $\chi_{\mathbf{A}^c}$ as funções caracteristicas de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^c$ respectivamente. Então $\chi_{\mathbf{A}}$ e $\chi_{\mathbf{A}^c}$ são funções moderadas não nulas tais que $\chi_{\mathbf{A}} \cdot \chi_{\mathbf{A}^c} = 0$. Portanto, $\overline{\mathbb{K}}$ não é domínio de integridade.

■

Lema 3.4 *Seja $x \in \overline{\mathbb{K}}^*$ uma não unidade. Então:*

a) $\mathbf{Z}(\hat{x}) \in \mathcal{S}$ *para cada representante $\hat{x}$ tal que* $0 \in \overline{\mathbf{Z}}(\hat{x})$.

b) *para todo representante $\hat{x}$ de x tal que $0 \in \overline{\mathbf{Z}}(\hat{x})$ existe $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathbf{N_a}(\hat{x}) \in \mathcal{S}$.*

Prova.

a) Fixe um representante $\hat{x}$ de x tal que $0 \in \overline{\mathbf{A}}$, onde $\mathbf{A} := \overline{\mathbf{Z}}(\hat{x})$. Suponhamos que $0 \notin \overline{\mathbf{A^c}}$ então, existe $\eta > 0$ tal que $\varepsilon \notin \mathbf{A}^c$, $\forall \varepsilon < \eta$. Mas, $\hat{x}_{|]\mathbf{0,1}[} \equiv 0$ o que implica em $x = 0$, o que é uma contradição pois, $x \in \overline{\mathbb{K}}^*$. Portanto, o item **(a)** está provado.

b) Como $\mathbf{A} := \overline{\mathbf{Z}}(\hat{x})$ temos $\mathbf{A} \subset \mathbf{T}_\nu := \mathbf{N}_\nu(\hat{x})$ $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$ assim, por **(a)** segue-se que $0 \in \overline{\mathbf{T}}_\nu$, para cada $\nu \in \mathbb{N}^*$. Da suposição de que $0 \notin \overline{\mathbf{T}}_\nu(\hat{x})$ $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$ segue-se que existe $\eta(\nu) \in \mathbf{I}$ tal que $\hat{x}(\varepsilon)| < \varepsilon^{nu}, \forall \varepsilon \in \mathbf{I}_{\eta(\nu)}$. Logo $x = 0$, outra contradição. Portanto, o item **(b)** está provado.

■

Lema 3.5 *Dados $x \in \overline{\mathbb{K}}^*$ e $\mathcal{F} \in \mathbf{P}_*(\mathcal{S})$, as seguintes afirmação são equivalentes:*

1. $x \in g(\mathcal{F})$.

2. *Existe um representante $\hat{x}$ de x tal que $\mathbf{Z}(\hat{x})^c \in \mathcal{F}$ e assim, $\chi_{Z(\hat{x})^c} = 1 - \chi_{Z(\hat{x})} \in g(\mathcal{F})$.*

Prova.

$(i \Rightarrow ii)$ Como $x \in g(\mathcal{F})$ pelo lema 3.2 segue que $x \notin \mathbf{Inv}\overline{\mathbb{K}}$, logo pelo teorema 3.1 existe um representante x_* de x tal que $0 \in \overline{\mathbf{Z}}(x_*)$. Pelo lema 3.4, $\mathbf{A} := \overline{\mathbf{Z}}(x_*) \in \mathcal{S}$ e portanto, está provado caso $\mathbf{A}^c \in \mathcal{F}$. Assim, podemos supor que $\mathbf{A}^c \notin \mathcal{F}$ o que implica em $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$. Por (i) podemos escrever

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{\mathbf{A}_i},$$

onde $\mathbf{A}_i \in \mathcal{F}$ e $\mathbf{a}_i \in \overline{\mathbb{K}}$ para todo $i = 1, 2, 3..., k$. Como $x \notin \mathbf{Inv}\overline{\mathbb{K}}$, vimos que $x.\chi_{\mathbf{A}} = 0$. Assim $x = x(1 - \chi_{\mathbf{A}}) = x.\chi_{\mathbf{A}^c}$. Portanto,

$$x = x.\chi_{\mathbf{A}^c} = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{\mathbf{A}}.\chi_{\mathbf{A}^c} = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{\mathbf{A_i} \cap \mathbf{A^c}}.$$

E evidentemente, podemos supor sem perda de generalidade que,

$\chi_{\mathbf{A_i}\cap\mathbf{A^c}} \neq 0 \ \forall i = 1, 2, 3, ..., k.$

Agora definiremos, $\mathbf{U} := \bigcup_{i=1}^{k} \mathbf{A_i} \cap \mathbf{A^c}$ e $\mathbf{T} := \mathbf{A^c} \setminus \mathbf{U}$. Sendo $\mathbf{A_i} \cap \mathbf{A^c} \cap \mathbf{T} = \emptyset$ para cada $i = 1, 2, 3, ..., k$ temos que

$$x\chi_{\mathbf{T}} = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{\mathbf{A_i}\cap\mathbf{A^c}\cap\mathbf{T}} = 0.$$

Assim, $\hat{x} = x - x\chi_{\mathbf{T}}$ é um representante de x e definindo $\mathbf{Z}(\hat{x}) = \mathbf{A} \cup \mathbf{T} =: \mathbf{R}$. Logo, basta mostrar que $\mathbf{R^c} \in \mathcal{F}$. Como

$\chi_{\mathbf{A_i}\cap\mathbf{A^c}} \neq 0$, segue-se que $0 \in \overline{\mathbf{A_i} \cap \mathbf{A^c}} \quad (1 \leq i \leq K)$ e visto que $0 \in \overline{\mathbf{A}}^c \subset \overline{(\mathbf{A_i} \cap \mathbf{A^c})^c}$, obtemos que $\mathbf{A_i} \cap \mathbf{A^c} \in \mathcal{S}$ $(1 \leq i \leq k)$. O fato de $\mathbf{A_i} \in \mathcal{F}$ e $\mathbf{A_i} \cap \mathbf{A^c} \subset \mathbf{A_i}$ $(1 \leq i \leq k)$ nos dá que $\mathbf{A_i} \cap \mathbf{A^c} \in \mathcal{F}$. Portanto, $\mathbf{R^c} = U \in \mathcal{F}$.

$(i \Rightarrow ii)$ Seja $\hat{x}$ um representante de x tal que $\mathbf{Z}(\hat{x})^c \in \mathcal{F}$ e $\mathbf{A} := \mathbf{Z}(\hat{x})$. Como $x\chi_{A} = 0$ segue-se que $x = x - x\chi_{A} = x\chi_{A^c} \in \ g(\mathcal{F})$.

■

3.1 O Lema de Aproximação e algumas Conseqüências

O Lema que segue é essencial na demonstração dos resultados subseqüentes. Vamos denominar-lo o Lema da Aproximação. A sua demonstração pode ser encontrada em [1].

Lema 3.6 (Lema da Aproximação) *seja $x \in \overline{\mathbb{K}}^*$ uma não unidade. Então, se satisfaz uma e somente uma das condições abaixo:*

1. *Existe um representante $\hat{x}$ de x e $\mathbf{a} > 0$ tal que $\mathbf{A} := \mathbf{Z}(\hat{x}) \in \mathcal{S}$ e $|\hat{x}(\varepsilon)| \geq \varepsilon^{\mathbf{a}}$ para cada $\varepsilon \in \mathbf{A^c}$.*

2. *para todo representante $\hat{x}$ de x tal que $0 \in \overline{\mathbf{Z}}(\hat{x})$ existe uma seqüência $(\mathbf{A_n})_{n\geq 1}$ em $\mathcal{S}$ e uma seqüência $(\mathbf{a_n})_{n\geq 1}$ em $\mathbb{N}^*$ tais que:*

3. *$\mathbf{A_{n+1}} \subset \mathbf{A_n}$ e $\mathbf{A_{n+1}} > \mathbf{a_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$.*

4. *$|\hat{x}(\varepsilon)| \leq \varepsilon^{\mathbf{a_n}}$ $\forall \varepsilon \in \mathbf{A_n}$ e $|\hat{x}(\varepsilon)| \geq \varepsilon^{\mathbf{a_n}}$ $\forall \varepsilon \in \mathbf{A_n^c}$ sempre que $n \in \mathbb{N}^*$.*

5. *$x\chi_{A_{\mathbf{n}}} \to 0$ quando $\mathbf{n} \to \infty$.*

Prova. Ver- Tese de Antonio Ronaldo- IME-USP.

■

Dado $\mathbf{u} \in \mathcal{E}_{\mathbf{M}}(\mathbb{K})$ definiremos $\ominus_{\mathbf{u}} = \mathbf{cl}(\theta_{\mathbf{u}})$ e $\ominus_{\mathbf{u}}^{-\mathbf{1}} = \mathbf{cl}(\theta_{\mathbf{u}}^{-\mathbf{1}})$. Visto que $\ominus_{\mathbf{u}}. \ominus_{\mathbf{u}}^{-\mathbf{1}} = 1$, temos que eles são unidades.

Podemos agora dar uma descrição completa dos ideais maximais de $\overline{\mathbb{K}}$.

Teorema 3.2 *1. Para todo ideal maximal* $\mathbf{m}$ *de* $\overline{\mathbb{K}}$ *temos* $\mathbf{m} = \overline{g(\mathcal{F}_{\mathbf{m}})}$.

2. Para todo $\mathcal{F} \in \mathbf{P}_*(\mathcal{S})$ *o ideal* $\mathbf{m} = \overline{g(\mathcal{F}_{\mathbf{m}})}$ *é maximal e* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbf{m}}$.

Prova.

1. Seja $\mathbf{m}$ um ideal maximal de $\overline{\mathbb{K}}$. Pelo lema 3.3 existe uma única $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbf{m}}$ tal que $g(\mathcal{F}) \subset \mathbf{m}$. Seja $x \in \mathbf{m} \backslash g(\mathcal{F})$. Construiremos uma seqüência $(x_{\mathbf{m}})$ tal que $x_{\mathbf{m}} \to x$ em $\overline{\mathbb{K}}$.

   Vamos mostrar primeiro que, x satisfaz a condição (b) do lema 3.6. De fato, supondo que x satisfaz a condição (a) do lema 3.6, então existe um representante $\hat{x}$ de x e $\mathbf{a} > 0$ tal que $\mathbf{A} := \mathbf{Z}(\hat{x}) \in \mathcal{S}$ e $|\hat{x}(\varepsilon)| \geq \varepsilon^{\mathbf{a}}$ para cada $\varepsilon \in \mathbf{A}^{\mathbf{c}}$. Supondo que $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$ segue-se que $y := \ominus_{\hat{x}} x + \chi_{\mathbf{A}} \in \mathbf{m}$ e y claramente é uma unidade; uma contradição. Se, por outro lado, $\mathbf{A}^{\mathbf{c}} \in \mathcal{F}$, então temos que $x = x\chi_{\mathbf{A}^{\mathbf{c}}} = 1 - \chi_{\mathbf{A}} \in g(\mathcal{F})$.

   Logo, podemos supor que x satisfaz a condição (b) do lema 3.6. Seja $\hat{x}$ um representante de x tal que $0 \in \overline{\mathbf{Z}}(\hat{x})$ e considere as duas seqüências $(\mathbf{A}_{\mathbf{n}})$ e $(\mathbf{a}_{\mathbf{n}})$ associados a $(\hat{x})$ conforme a condição (b) do lema 3.6. Mostraremos que $\mathbf{A}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{c}} \in \mathcal{F}$ para cada $n \geq 1$. De fato, se não for o caso então existe $\nu \geq 1$ tal que $y := \ominus_{\hat{x}} x(1 - \chi_{\mathbf{A}_\nu}) + \chi_{\mathbf{A}_\nu} \in \mathbf{m}$ é uma unidade o que contradiz a hipótese.

   Portanto, segue-se que $(x\chi_{\mathbf{A}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{c}}})_{n \geq 1} \in g(\mathcal{F})$ e do lema 3.6 temos que $x\chi_{\mathbf{A}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{c}}} = x - x\chi_{\mathbf{A}_{\mathbf{n}}} \to x$ quando $n \to \infty$.

2. Pelo lema 3.2, $g(\mathcal{F})$ é um ideal próprio de $\overline{\mathbb{K}}$ e por isso está contido em um ideal maximal $\mathbf{m}$ de $\overline{\mathbb{K}}$. Além disso, do lema 3.3, conclui-se que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbf{m}}$. Portanto, pelo item anterior obtemos $\mathbf{m} = \overline{g(\mathcal{F}_{\mathbf{m}})}$.

■

Teorema 3.3 *Dado $x \in \overline{\mathbb{K}}$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $x \in \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$.

2. *Para todo representante $\hat{x}$ de x existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\alpha \in \mathbf{I}$ tal que $|\hat{x}(\varepsilon)| \geq \varepsilon^a$, $\forall\ \mathbf{I}_\alpha$.*

3. $\frac{1}{\hat{x}} \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\mathbb{K})$ *para cada representante $\hat{x}$ de x.*

Já foi provado que o grupo de unidades é um conjunto aberto na topologia cortante. Agora vamos mostrar que de fato ele é um subconjunto denso.

Teorema 3.4 $\mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$ *é um subconjunto aberto e denso de $\overline{\mathbb{K}}$.*

Prova.

Lembre-se que já foi provado que este conjunto é aberto e portanto, falta provar a densidade de $\mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$. Para isto, fixaremos

$x \in \overline{\mathbb{K}} \backslash \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$ e construiremos uma seqüência $(x_m)_{m \geq 1}$ em $\mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$ que converge para x. Suponha primeiro que x satisfaça a condição **(a)** do lema 3.6, então

$$x_m := x(1 - \chi_{\mathbf{A}}) + \alpha_m \chi_{\mathbf{A}} = x + \alpha_m \chi_{\mathbf{A}} (m \geq 1) \in \overline{\mathbb{K}}.$$

Do teorema 3.3, $x_m \in \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$ para cada $m \geq 1$ e é claro que $x_m \longrightarrow x$ já que,

$$\|x_m - x\| = \|\alpha_m \chi_{\mathbf{A}}\| = \|\alpha_m\| = \exp(-m) \longrightarrow 0$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Suponha agora que x satisfaça condição **(b)** do lema 3.6. Considerando as seqüências $(\mathbf{A}_m)_{m \geq 1}$ e $(\mathbf{a})_{m \geq 1}$ associados a $\hat{x}$ do lema 3.6 **(b)** temos

$$|\hat{x} \chi_{\mathbf{A^c_m}}(\varepsilon)| = |\hat{x}(\varepsilon)| \geq \varepsilon^{a_m}, \quad \forall\ \varepsilon \in \mathbf{A^c}_m \ \text{ com } m \geq 1. \quad \mathbf{(1.3.1)}$$

Definindo $x_m := x(1 - \chi_{\mathbf{A}}) + \alpha_m \chi_{\mathbf{A}}$, temos que $x_m \longrightarrow x$ quando $m \longrightarrow \infty$. De fato: $\|x_m - x\| = \|(\alpha_m - x)\chi_{\mathbf{A}_m}\| \leq \max\{\|\alpha_m \chi_{\mathbf{A}_m}\|,\ \|x\chi_{\mathbf{A}_m}\|\} = \max\{\|\alpha_m\|,\ \|x\chi_{\mathbf{A}_m}\|\} =$ $= \max\{\exp(-m)\|,\ |x\chi_{\mathbf{A}_m}\|\} \longrightarrow 0$ quando, $m \longrightarrow \infty$. Além disso, a desigualdade **(1.3.1)** junto com o teorema 3.3, conclui-se que $x_m \in \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$ para cada $m \geq 1$. Portanto, $\mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{K}})$ é denso em $\overline{\mathbb{K}}$.

■

Provaremos agora o último resultado importante deste capítulo.

Teorema 3.5 $\mathbb{K}$ *é algebricamente fechado em $\overline{\mathbb{K}}/\mathbf{m}$ para todo ideal maximal $\mathbf{m}$ de $\overline{\mathbb{K}}$.*

Prova.

Primeiramente assumiremos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e fixe $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}/\mathbf{m}$ que é algébrico sobre $\mathbb{C}$. Então $\mathbb{C}(\alpha)$ é uma extensão algébrico de $\mathbb{C}$ que é algebricamente fechado. Assim, $\mathbb{C}(\alpha) = \mathbb{C}$ e portanto, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Assumindo agora que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e seja $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}/\mathbf{m}$ algébrico sobre $\mathbb{R}$. Se $\alpha \notin \mathbb{R}$ então $\mathbb{R}(\alpha) \cong \mathbb{C}$. Assim $\mathbf{i} := \sqrt{-1} \in \overline{\mathbb{R}}/\mathbf{m}$ e portanto existe $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\mu := x^2 + 1 \in \mathbf{m}$. Como $\mu \in \mathbf{m}$ temos que μ é um divisor de zero. Logo pelo teorema 3.1, μ tem um representante $\hat{\mu}$ tal que $0 \in \hat{Z}(\hat{\mu})$. Assim, existe uma seqüência $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ em $\mathbf{I}$ tal que $\hat{\mu}(\varepsilon_n) = 0$, para todo $n \geq 1$.

Portanto, se $\hat{x}$ é um representante de x então,

$$\hat{x}^2(\varepsilon) + 1 = \hat{\mu}(\varepsilon) + \hat{w}(\varepsilon)$$

$\varepsilon \in \mathbf{I}$ onde, $\hat{w} \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$. Mas quando substituir $\varepsilon = \varepsilon_n (n \geq 1)$ na equação acima obtemos $\hat{x}^2(\varepsilon_n) + 1 = \hat{w}(\varepsilon_n) \longrightarrow 0$, uma contradição.

Outra forma de obter uma contradição é notar que $\mu \geq \varepsilon^2$, para ε suficientemente pequeno. Logo pelo teorema 3.3, μ é uma unidade e portanto não pode pertencer a $\mathbf{m}$.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Cálculo Diferencial de Colombeau

Neste capítulo veremos as noções básica do cálculo diferencial de Colombeau e faremos uma aplicação simples a equações diferenciais parciais. Os resultados deste capítulo estão baseados no trabalho de Aragona-Fernandes-Juriaans ([2]).

Definição 4.1 *Seja $U \subset \overline{\mathbb{K}}$ um conjunto aberto, $x_0 \in U$ e $f : U \to \overline{\mathbb{K}}$, diremos que f é diferenciável em x_0 se existir $z_0 \in \overline{\mathbb{K}}$ tal que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - z_0(x - x_0)}{\alpha_{-\ln \|x - x_0\|}} = 0.$$

Neste caso, f é dito diferenciável em x_0, escrevemos $D(f)(x_0) = z_0$ e chamaremos z_0 a derivada de f no ponto x_0.

O lema a seguir nos diz que esta definição faz sentido.

Lema 4.1 *Seja $U \subset \overline{\mathbb{K}}$ um conjunto aberto, $x_0 \in U$ e $f : U \to \overline{\mathbb{K}}$. Então existe no máximo um $z_0 \in \overline{\mathbb{K}}$ tal que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - z_0(x - x_0)}{\alpha_{-\ln \|x - x_0\|}} = 0.$$

Prova.

Suponhamos que existem $z_0, z_1 \in \overline{\mathbb{K}}$ que satisfazem a definição acima. E vamos provar que o limite é único. Então segue que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(z_0 - z_1)(x - x_0)}{\alpha_{-\ln \|x - x_0\|}} = 0.$$

Agora, se definirmos $x_n := x_0 + \alpha_n$, $x_n \to x_0$ quando $\alpha_n \to 0$. Logo

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{(z_0 - z_1)(x_n - x_0)}{\alpha_{-\ln\|x_n - x_0\|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(z_0 - z_1)\alpha_n}{\alpha_n} = z_0 - z_1 \Rightarrow z_0 = z_1.$$

Portanto, o limite é único.

■

Se f é diferenciável em x_0 podemos escrever $f(x) - f(x_0) = D(f)(x_0)(x - x_0) + E(x)$ com $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{E(x)}{\alpha_{-\ln\|x-x_0\|}} = 0$. Além disso,

$$D(f)(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n}.$$

Lema 4.2 *Seja $U \subset \overline{\mathbb{K}}$ um conjunto aberto e $f : U \to \overline{\mathbb{K}}$ diferenciável em x_0. Então f é contínua em x_0.*

Prova.

$f(x) - f(x_0) = D(f)(x_0)(x - x_0) + E(x)$ com $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{E(x)}{\alpha_{-\ln\|x-x_0\|}} = 0$. Visto que, $\|\alpha_{-\ln\|x-x_0\|}\| = \|x - x_0\|$ segue-se que $\lim\limits_{x\to x_0} E(x) = 0$. Portanto, f é contínua em x_0. ■

Proposição 4.1 *Seja $U \subset \overline{\mathbb{K}}$ um conjunto aberto, se $f, g : U \to \overline{\mathbb{K}}$ são funções diferenciáveis, então:*

1. *$f \pm g$ é diferenciável e $D(f \pm g) = D(f) \pm D(g)$;*

2. *fg é diferenciável e $D(fg) = gD(f) + fD(g)$;*

3. *Se $f(U)$ está contido no domínio de g, então $D(g \circ f) = (D(g) \circ f)D(f)$;*

4. *Se $g(x)$ é inversível para cada $x \in U$ temos que $D(\frac{f}{g}) = \frac{gD(f) - fD(g)}{g^2}$.*

A proposição nos diz, que esta noção de derivação satisfaz as propriedades usual da derivação do Cálculo Diferencial Ordinário.

Definição 4.2 *Seja $U \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ um conjunto aberto, se $f : U \to \overline{\mathbb{K}}$ e $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_0 = (x_{01}, ..., x_{0n}) \in U$. Seja $1 \le i \le n$ e suponha que existe um elemento $a_i \in \overline{\mathbb{K}}$ tal que,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_{01}, ..., x_{0i+h,...,x_{0n}}) - f(x_{01}, ..., x_{0i,...,x_{0n}}) - a_i h}{\alpha_{-\ln\|h\|}} = 0.$$

Definimos $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) := \alpha_i$ e chamaremos a derivada parcial de f com x_i a x_0 respectivamente. Dizemos que f é diferencial em x_0 se existe $a = (a_1, ..., a_n) \in \overline{\mathbb{K}}^n$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \Sigma_{1 \leq i \leq n} a_i (x_i - x_{0i})}{\alpha_{-\ln \|x - x_0\|}} = 0.$$

Pode ser verificado que todos os resultados conhecidos do Cálculo Diferencial continuem válidos neste contexto.

Por exemplo, se f é diferencial em x_0, então é contínua em x_0 e $\alpha_i' s$ na definição de f sendo diferenciável são exatamente as derivadas parciais em x_0. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o gradiente de f em x_0 é definido por,

$$\nabla f(x_0) := (\frac{\partial}{\partial x_1}(x_0), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(x_0)).$$

Definição 4.3 *Seja $U \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ um conjunto aberto e $f : U \to \overline{\mathbb{R}}^m$. Escrevendo*

$f = (f_1, ..., f_m)$, onde cada $f_i : U \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função. Dizemos que f é diferenciável em $x_0 \in U$ se cada f_i é diferenciável em x_0.

Observação 4.1 *f é diferenciável em x_0 se, e somente se, existe uma $\overline{\mathbb{R}}$-aplicação linear $T : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^m$ tal que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{\alpha_{-\ln \|x - x_0\|}} = 0.$$

A aplicação T é denotado por $Df(x_0)$.

4.1 Valores Pontuais Generalizados.

Consideremos $\mathbb{K}^n$ com a topologia produto e seja $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ um subconjunto aberto.

Definiremos:

$$\begin{aligned} x_\varepsilon \ : \ \mathbf{I} \times \Omega \ &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\varepsilon, x) \ &\longmapsto \ (x_\varepsilon). \end{aligned}$$

E

$$\Omega_M := \{(x_\varepsilon) \in \Omega^{\mathbf{I}} \ \mid \exists \ p, \eta > 0 \ \text{ com } \ \|x_\varepsilon\| \leq \varepsilon^{-p} \ \text{ para todo } \ \varepsilon \in \mathbf{I}_\eta\}.$$

Dois elementos $(x_\varepsilon), (y_\varepsilon) \in \Omega_M$ são ditos equivalentes, $x_\varepsilon \sim y_\varepsilon$, dado $\eta > 0$ existe $q > 0$ tal que $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \leq \varepsilon^q$ para todo $\varepsilon \in \mathbf{I}_\eta =]0, \eta[$.

Seja $\widetilde{\Omega} := \Omega_M \diagup \sim$. Note que se $\Omega = \mathbb{K}$, então $\widetilde{\Omega} = \overline{\mathbb{K}}$ e $\widetilde{\mathbb{K}}^n = \overline{\mathbb{K}}^n$.

Diremos que $(x_\varepsilon) \in \Omega_M$ é compactamente suportado (tem suporte compacto). Se existe $K \subset \Omega$ subconjunto compacto e $\eta > 0$ tal que $x_\varepsilon \in \ K$ se $\varepsilon < \eta$. Define o subconjunto $\widetilde{\Omega}_c$ por,

$$\widetilde{\Omega}_c := \{[x_\varepsilon] \ \mid \ (x_\varepsilon) \in \Omega_M \ \text{ e } \ (x_\varepsilon) \text{ tem suporte compacto}\}.$$

Ω pode ser imerso em $\widetilde{\Omega}_c$ pela aplicação canônica.

$$\begin{aligned} \pi : \Omega \ &\hookrightarrow \ \widetilde{\Omega}_c \\ x \ &\longmapsto \ \widetilde{x} = [(\varepsilon \longmapsto x)]. \end{aligned}$$

É fácil ver que a image de Ω em $\widetilde{\Omega}_c$ é um subconjunto discreto.

Definição 4.4 *Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Definiremos $\mathcal{E}\ (\Omega) := [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^{\mathbf{I}}$, onde $\mathbf{I} :=]0,1]$;*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_M(\Omega) \ &:= \ \{(u_\varepsilon))_{\varepsilon\in\mathbf{I}} \in \varepsilon(\Omega) : \forall\ K \subset\subset \Omega,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n\ \exists\ p \in \mathbb{N} \\ &\qquad \textit{tal que} \ \sup_{x\in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = O(\varepsilon^{-p}) \ \textit{quando} \ \varepsilon \to 0\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\Omega) \ &:= \ \{(u_\varepsilon))_{\varepsilon\in\mathbf{I}} \in \varepsilon(\Omega) : \forall\ K \subset\subset \Omega,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n\ \forall\ q \in \mathbb{N} \\ &\qquad \textit{temos} \ \sup_{x\in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = O(\varepsilon^{q}) \ \textit{quando} \ \varepsilon \to 0\}. \end{aligned}$$

Então, a álgebra de Colombeau $\mathcal{G}(\Omega)$ é definida como sendo o espaço quociente $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}/\mathcal{N}(\Omega)$ (isto é, $\mathcal{G}(\Omega)$=$\mathcal{E}_{\mathcal{M}}/\mathcal{N}(\Omega)$).

Observa-se que ε_M, o espaço de todas as seqüências moderadas, é uma álgebra diferencial e claramente, a maior sub-álgebra de ε em que $\mathcal{N}(\Omega)$ é um ideal diferencial (isto é, estável por derivadas parciais). Portanto, $\mathcal{G}(\Omega)$ é uma álgebra diferencial comutativa, associativa e satisfaz a regra de Leibniz.

Sejam $f \in \mathcal{G}(\Omega)$, $x \in \widetilde{\Omega}_c$ e (x_ε), $\hat{f}$ representantes de x e f respectivamente. Definiremos $f(x) := \mathbf{cl}(\varepsilon \in \mathbf{I} \longmapsto \hat{f}(\varepsilon, x_\varepsilon)) \in \overline{\mathbb{K}}$, como sendo o valor pontual generalizado de f em x, e

$$\kappa := \kappa_\Omega : \mathcal{G}(\Omega) \longmapsto \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}_c, \overline{\mathbb{K}})$$

por $\kappa(f)(x) := f(x)$, $x \in \widetilde{\Omega}_c$.

Teorema 4.1 (Oberguggenberger) *Seja* $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ *então,* $f \equiv 0$ *se, e somente se,* $\forall\, x \in \widetilde{\Omega}_c$ $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \widetilde{\Omega}_c$.

O que o teorema nos diz é que o domínio de uma função generalizada é $\widetilde{\Omega}_c$ e não Ω. O teorema a seguir mostra que de fato podemos tratar a teoria das funções generalizadas como uma teoria de cálculo diferencial, em que todas as regras e propriedades da teoria clássica continuam válidas.

Teorema 4.2 (Aragona-Fernandes-Juriaans) *Seja* $\kappa : \mathcal{G}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}_c, \overline{\mathbb{K}})$. *Então:*

1. $\kappa : \mathcal{G}(\Omega) \to \mathcal{F}(\widetilde{\Omega}_c, \overline{\mathbb{K}})$ *é um monomorfismo injetivo de* $\overline{\mathbb{K}}$*-álgebras.*

2. $\mathbf{Im}(\kappa) \subseteq C^\infty(\widetilde{\Omega}_c, \overline{\mathbb{K}})$.

3. $\forall\, \alpha$ *multi-índice e* $\forall f \in \mathcal{G}(\Omega)$ *tem-se que* $\kappa(\partial^\alpha f) = D^\alpha(\kappa(f))$.

Seja J um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{G}(J)$ e $a, b \in \widetilde{J}_c$. Definiremos,

$$\int_a^b f := [\varepsilon \longmapsto \int_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon} f_\varepsilon(t)dt],$$

onde (a_ε),(b_ε) e f_ε são representantes de a, b e f respectivamente e a segunda integral é a integral de Riemann. É fácil verificar que o elemento $\int_a^b f$ de $\overline{\mathbb{K}}$ está bem definido. Além do mais temos:

1. Se $g \in \xi(J)$, $\lambda \in \overline{\mathbb{K}}$ e $c \in \widetilde{J}_c$, então $\int_a^b \kappa(f + \lambda g) = \int_a^b \kappa(f) + \lambda \int_a^b \kappa(g)$;

2. Se $a, b \in J$, então $\int_a^b \kappa(f) = \lambda \int_a^b f$, onde a segunda integral é a integral das funções generalizadas.

Mostraremos agora que o Teorema Fundamental do Cálculo vale nessa estrutura, isto é, se J é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $a \in \widetilde{J}_c$, $f \in \mathcal{G}(J)$ e F é a função definida em $\widetilde{J}_c$ por $F(x) = \int_a^x f$ então F é uma função diferenciável e

$$F' = D\,(x \longmapsto \int_a^x f) = \kappa(f).$$

De fato, sejam $d \in J$ e a_ε e f_ε representantes de a e f respectivamente, então

$$F = [\varepsilon \longmapsto \int_a^d f_\varepsilon(t)dt] + \kappa(G) = \int_a^d \kappa(f) + \kappa(G) = \int_a^b \kappa(f) - \int_d^b \kappa(f) + \kappa(G),$$

onde $G := [(\varepsilon, y) \longmapsto \int_d^y f_\varepsilon(t)dt]$. Assim

$$F' = \kappa(f) - \kappa(f) + (\kappa(G))' = (\kappa(G))' = \kappa(G') = \kappa(f).$$

Esses resultados mostram a consistência da proposta e permite usar as principais técnicas do cálculo diferencial neste contexto.

Proposição 4.2 *Seja* $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{K}}^n$ *um subconjunto aberto, então vale as seguintes afirmações*:

1. $\mathbf{B_1(x)} \subset \widetilde{\Omega}_c \subset \mathbf{B_1'(0)}$, $\forall\ x \in \widetilde{\Omega}_c$.

2. $\widetilde{\Omega}_c$ *é um subconjunto aberto de* $\overline{\mathbb{K}}^n$.

Prova. Vamos provar apenas o item**(1)**. Sejam $x \in \widetilde{\Omega}_c$ e $y \in \overline{\mathbb{K}}^n$ tais que $\|x - y\| < 1$. Então $y - x \in \mathbf{B_1(0)}$. Tome $y \in \mathbf{B_1(x)} \Rightarrow \|x - y\| < 1$. Escrevendo $y = (y_1, ..., y_n)$ e $x = (x_1, ..., x_n)$ temos, $\|x - y\| = \max\{\|x_i - y_i\|\}$. Logo

$$\|x - y\| < 1 \Rightarrow \|x_i - y_i\| < 1 \Rightarrow \exp(-V(x_i - y_i)) < \exp(0) \Rightarrow V(x_i - y_i) > 0$$

o que implica em $0 \in A(\hat{x}_i - \hat{y}_i)$. Portanto,
$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} |\hat{x}_i - \hat{y}_i| = 0$, $\forall\ i$. Agora, $x \in \widetilde{\Omega}_c$ significa que, existe $K \subset\subset \Omega$ compacto de Ω e $\eta > 0$ tal que $x_\varepsilon \in K\ \forall \varepsilon < \eta$. Portanto, a seqüência de (x_ε) é limitada e existe um compacto L contendo K tal que $y_\varepsilon \in L$. Assim $y \in \widetilde{\Omega}_c$.

O resto das afirmações seguem do fato provado acima.

∎

Proposição 4.3 *Seja* $f \in C^\infty(\Omega) \subset \mathcal{G}(\Omega)$, $U := \kappa(f)(\widetilde{\Omega}_c)$, $V := f(\Omega)$ *e*

$$\widetilde{V}_c := \{x \in \widetilde{\Omega}_c) \ \ | \exists\ K \subset\subset V,\ \exists \eta \in \mathbf{I} \textit{ e existe } (x_\varepsilon) \textit{ tal que } x_\varepsilon \in K\ \forall \varepsilon \in \mathbf{I_n}\ \},$$

onde (x_ε) *é um representante de* x. *Então*:

1. $U \subset \widetilde{V}_c$ *e* $\kappa(f)$ *é uma função limitada;*

2. *Se* f *é uma aplicação aberta, então* $U = \widetilde{V}_c$ *e* U *é um subconjunto aberto de* $\widetilde{\mathbb{K}}_c$.

A função complexa $f : U \to \mathbb{C}$ diz-se holomorfa quando possui derivada $f'(z)$ em todos os pontos do aberto U.

Proposição 4.4 (Teorema da Aplicação Aberta) *Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (espaço das funções Holomorfas) é não constante, então $(\kappa(f))(\widetilde{W_c})$ é um subconjunto aberto, para todo aberto $W \subset \Omega$.*

Proposição 4.5 *Sejam Ω um conjunto aberto conexo, $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ e suponha que $\mathbf{Im}(\kappa(f))$ é um conjunto discreto. Então f é constante.*

Prova.

Visto que $\mathbf{Im}(\kappa(f))$ é um conjunto discreto segue-se que $0 = (\kappa(f))' = \kappa(f')$ e assim $f' = 0$. Portanto, f é constante. ∎

4.2 Aplicação

Daremos nesta seção uma aplicação simples da teoria desenvolvida até o presente momento. Veremos como os aspectos algébricos, topológios e analíticos da propsição 4.3 são usados para se obter resultados num contexto mais geral do que o contexto clássico.

Sejam $a_1, \cdots, a_n \in \overline{\mathbb{K}}$, não todos nulos, e considere o operador linear

$$L = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_{x_i}.$$

Vamos considerar a equação

$$L_a(u) = f.$$

Denotaremos por $\overline{\mathbb{C}}^* := \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

Teorema 4.3 *Seja Ω um conjunto aberto conexo de $\mathbb{C}^{\mathbf{n}}$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f \neq 0$. Se $a \in \overline{\mathbb{C}}^* \backslash \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{C}})$, então*

$$a \frac{\partial u}{\partial z_1} = f$$

não tem solução em Ω.

Prova.

Suponhamos que $a \notin \overline{\mathbb{C}}^* \backslash \mathbf{Inv}(\overline{\mathbb{C}})$. Então a é um divisor de zero. Logo, existe $b \in \overline{\mathbb{C}}^*$ tal que $ab = 0$. Agora suponhamos por absurdo, que exista $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$a \frac{\partial u}{\partial z_1} = f \text{ em } \Omega.$$

Então, multiplicando esta equação por b, obtemos

$$ab\frac{\partial u}{\partial z_1} = bf \Rightarrow bf = 0 \text{ em } \widetilde{\Omega}_c.$$

Assim $Im(\kappa(f)) \subset Ann(b)$, o anulador de b em $\overline{\mathbb{K}}$. Portanto, $\overline{\mathbb{K}}$ não tem ideais abertos, isto é, $Im(\kappa(f))$ tem interior vazio, o que é uma contradição já que f uma função holomorfa.

■

A prova da não existência de soluções da equação diferencial parcial acima leva-nos a seguinte pergunta: se este resultado pode ser generalizado para todo operador linear com coeficientes constante. O próximo resultado é uma resposta a esta pergunta.

Proposição 4.6 *Sejam Ω um subconjunto aberto conexo de $\mathbb{C}^n$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ não constante,*

$$L = \sum_1^n a_k \frac{\partial}{\partial z_k}$$

um operador linear com coeficientes constante $a_1, ..., a_n \in \overline{\mathbb{K}}$ e $J = \langle a_1, ..., a_n \rangle$ o ideal gerado pelos a_i's. Se existir $u \in \mathcal{G}(\Omega)$ tal que $L(u) = f$ então $J = \overline{\mathbb{K}}$.

Prova.

Suponhamos que J seja um ideal próprio de $\overline{\mathbb{K}}$. Se existe u tal que $L(u) = f$, então $\mathbf{Im}(\kappa(f)) \subset J$. Mas sabemos que J não é um ideal aberto em $\overline{\mathbb{K}}$ logo $\mathbf{Im}(\kappa(f))$ não é aberto. Pelo teorema 4.3, é uma contradição. Portanto, $J = \overline{\mathbb{K}}$.

■

Na teoria clássica, se

$$L = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k D^k$$

um operador com coeficientes cons-tante, então existe uma solução de $L(u)$ da forma $f(z) = \exp(\lambda z)$, onde

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k \lambda^k = 0.$$

Nosso próximo resultado mostra que este caminho clássico nem sempre da certo para neste contexto.

Proposição 4.7 *Sejam $\mathbf{A} \subset \mathcal{S}$ e L o operador diferencial definido por $L = \chi_{\mathbf{A}} D^2 + \chi_{\mathbf{A}^c} Id$. Então as soluções de $L(u) = 0$ são todas da forma $\chi_{\mathbf{A}} f$ com $D^2 f = 0$ e $\chi_{\mathbf{A}} \lambda^2 + \chi_{\mathbf{A}^c} \neq 0$ para todo $\lambda \in \overline{\mathbb{K}}$.*

Prova.

Se $D^2 f = 0$, *então*

$L(\chi_{\mathbf{A}} f) = (\chi_{\mathbf{A}} D^2 + \chi_{\mathbf{A}^c} Id)(\chi_{\mathbf{A}} f) = \chi_{\mathbf{A}} D^2(\chi_{\mathbf{A}} f) + \chi_{\mathbf{A}^c}\chi_{\mathbf{A}} f = \chi^2_{\mathbf{A}} D^2 f + 0f =$
$= 0 + 0 = 0$. *Como* $D^2 f = 0$ *e* $\chi_{\mathbf{A}}\chi_{\mathbf{A}^c} = 0$ *temos que* $L(\chi_{\mathbf{A}} f) = 0$.

Seja f *tal que* $L(f) = 0$. *Então*

$\chi_{\mathbf{A}} D^2 f + \chi_{\mathbf{A}^c} f = 0$, *assim* $\chi_{\mathbf{A}}[\chi_{\mathbf{A}} D^2 f + \chi_{\mathbf{A}^c} f] = 0$. *Logo,* $\chi_{\mathbf{A}} D^2 f = 0$ *e* $\chi_{\mathbf{A}^c} f = 0$. *Como* $1 = \chi_{\mathbf{A}} + \chi_{\mathbf{A}^c}$ *temos que*

$f = \chi_{\mathbf{A}} f + f\chi_{\mathbf{A}^c} = \chi_{\mathbf{A}} f$ *e* $D^2 f = 0$. *Se* $\chi_{\mathbf{A}}\lambda^2 + \chi_{\mathbf{A}^c} = 0$, *então*

$\chi_{\mathbf{A}^c}[\chi_{\mathbf{A}}\lambda^2 + \chi_{\mathbf{A}^c}] = 0$. *Portanto,* $\chi_{\mathbf{A}^c} = 0$, *o que é uma contradição pois,* $\chi_{\mathbf{A}^c} \neq 0$.

■

Vamos estudar agora a equação não homogênea: Sejam $g \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $L = \chi_{\mathbf{A}} D^2 + \chi_{\mathbf{A}^c} Id$. Se u é tal que $L(u) = g$, então $D^2(u) = \chi_{\mathbf{A}} g + \chi_{\mathbf{A}^c} D^2(g)$. Portanto, usando o nosso Teorema Fundamental do Cálculo segue-se que $u = h + u_0$, onde $L(u) = 0$ ($D^2(h) = 0$), $u_0 = \chi_{\mathbf{A}} G + \chi_{\mathbf{A}^c} g$ e $D^2(G) = g$. Logo, neste caso, a condição $J = \overline{\mathbb{K}}$ no teorema acima é também suficiente.

Referências Bibliográficas

[1] Aragona J., Juriaans S.O., *"Some Structural Properties of of the topological ring of Colombeau generalized numbers"2001. Comm 29: 2201-2230.*

[2] Aragona J., Fernandes R., Juriaans, S.O., *"A Discontinuous Colombeau Differential Calculus*, Monatsh". Math, 13-29 (2005)

[3] Juriaans S.O., Oliveira O.R.B., Scarpalezos D. , *"Algebraic theory of the topological algebra de Colombeau's generalized functions". 2003*

[4] Lima E.L. -*Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro 2003.

[5] Lima E.L. -*Análise no* $\mathbb{R}^n$, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro 1981.

[6] Hönig Chaim Samuel., *Aplicações de topologia e Análise*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro 1976.

[7] Gonçalves A., *Introdução a Álgebra*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro 1979.

[8] Scarpalezos D., *"Topologies dans les espaces de nouvelles functions generalisées de Colombeau"*. $\overline{\mathbb{C}}$-modules topologiques, Université Paris 7, 1993.

[9] Scarpalezos D., *"Colombeau's generalized functions: topological structures; microlocal properties". A simplified point of view*, CNRS-URA212, Université Paris 7, 1993.