



**Universidade Estadual Paulista**

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA INTEGRAL  
GENERALIZADA NO ESCOAMENTO  
POTENCIAL EM CONTRAÇÕES**

*Luís Henrique Gazeta de Souza*

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

**Orientador: Prof. Dr. João Batista Aparecido**

Ilha Solteira, Julho de 2009.

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

## FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação  
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP – Ilha Solteira.

S729a Souza, Luís Henrique Gazeta de.  
Aplicação da transformada integral generalizada no escoamento potencial em contrações / Luís Henrique Gazeta de Souza. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2009  
123 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Ciências Térmicas, 2009

Orientador: João Batista Aparecido

1. Contrações. 2. Transformadas integrais. 3. Potencial de escoamento.

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

**TÍTULO:** APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NO ESCOAMENTO POTENCIAL EM CONTRAÇÕES

**AUTOR:** LUIS HENRIQUE GAZETA DE SOUZA  
**ORIENTADOR:** Prof. Dr. JOAO BATISTA APARECIDO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA MECÂNICA , Área: CIÊNCIAS TÉRMICAS, pela Comissão Examinadora:

  
Prof. Dr. JOAO BATISTA APARECIDO  
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Prof. Dr. CASSIO ROBERTO MACEDO MAIA  
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Prof. Dr. ALCIDES PADILHA  
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru

Data da realização: 30 de julho de 2009.

*Dedico este trabalho a minha mãe Nilza Gazeta, meu pai Mauro de Souza (in memoriam) e as minhas avós Maria (in memoriam) e Albertina, estímulos que me impulsionaram a buscar meus ideais.*

## **AGRADECIMENTOS**

---

*Primeiramente a Deus pela vida, pelas oportunidades, força e coragem.*

*A toda minha família pelo apoio, amor, carinho, confiança, disponibilidade em todos os momentos, pela compreensão nos momentos de ausência.*

*A você que fez tanta coisa por mim, que me ajudou nos momentos que mais precisei, que acreditou que eu poderia vir a ser um mestre, a você sou e serei sempre grato. Muito obrigado por todo o aprendizado Professor Titular João Batista Aparecido.*

*À banca examinadora, por aceitar contribuir na discussão e certamente no enriquecimento deste trabalho.*

*Ao Professor Doutor João Batista Campos Silva, pela confiança, amizade e contribuições oferecidas ao meu trabalho.*

*Aos Professores Doutores Edson Del Rio Vieira e Sergio Said Mansur pelo pioneirismo em iniciar estudos que contribuíram para a construção desta dissertação.*

*A Inês Aparecido pela amizade, por sempre fortalecer meu espírito em muitas situações em que precisei contribuindo assim para o meu trabalho.*

*A Dirigente Regional de Ensino da Diretoria de Ensino de Andradina, Selênia Witter de Melo pelo apoio e confiança.*

*Aos amigos professores coordenadores: Paulo Sérgio e Lia Carvalho e a Supervisora Yara por incentivar os meus estudos e a toda Oficina Pedagógica da Diretoria de Ensino de Andradina pelos momentos de formação e contribuição.*

*A professora coordenadora de Matemática da Diretoria de Ensino de Andradina Sylvania Cintra pela sua firme atitude de me incentivar e contribuir.*

*A equipe escolar da E.E Nasib Cury pelo incentivo e confiança.*

*As amigas Rejane Monteiro e Isabel Sanches pela amizade, ânimo e força que vocês me deram durante todo o processo.*

*Ao meu avô Francisco e meu padrasto Gilberto Marques pela amizade e compreensão.*

*Aos amigos da Republica: Gustavo Musardo, Leonildo Vioto, Rafael Polido, Jean Felix Cabette, Lucas Giroto, Ricardo Agudo Romão, Eli Jorge, Ruddy e Fredy Franco por todos os momentos de compreensão, amizade, coragem e força que vocês me deram contribuindo para que eu conquistasse meu objetivo, obrigado amigos. A muitos de vocês serei eternamente grato.*

*Na vida, sempre há a necessidade de companheirismo, doses de afeto, sinceridade e de pessoas que sempre lembram suas boas características e que tecem elogios sempre na hora que é preciso. Isso foi colocado em minha vida em Ilha Solteira por cinco mulheres que fizeram a diferença. Por isso é que agradeço a oportunidade dessa amizade que tenho com a Adriana Vieira, Fabiana de Oliveira, Ceci, Mariza e Jussara Zachi.*

*Aos amigos Odacir Neves, Alexandre Belletti, Adriano Domingues, Márcia Regina, Diego por todos os momentos felizes compartilhados.*

*Aos amigos João Paulo e Luiz Fernando pela amizade duradoura, confiança, conquistas e apoio na continuidade de meus estudos.*

*Aos meus primos Eli Carlos e Flávia de Souza por todo o carinho, amizade e confiança que em mim depositaram.*

*Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, professores da FEIS – Unesp campus de Ilha Solteira.*

*Aos funcionários da FEIS- Unesp campus de Ilha Solteira, Elias Amaral, Elaine, Fátima, Adelaide, Onilda e Márcia que me forneceram apoio e condições para o desenvolvimento deste projeto.*

*“Os problemas significativos que enfrentamos não podem ser resolvidos no mesmo nível de pensamento em que estávamos quando o criamos”*

*Albert Einstein*



Realiza-se a formulação matemática do escoamento potencial no interior de contrações bidimensionais usando sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas. Para tal considera-se que as geometrias das contrações sejam bidimensionais no sistema de coordenadas cartesianas e bidimensionais com simetria axial no sistema de coordenadas cilíndricas. A formulação é adaptada a partir das equações tridimensionais de Euler em coordenadas cartesianas e cilíndricas, fazendo-se as hipóteses de bidimensionalidade, regime permanente, fluido invíscido e escoamento irrotacional.

O formalismo diferencial do escoamento potencial no interior de contrações bidimensionais é formalmente resolvido utilizando-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG – cuja fundamentação está na expansão de funções-quadrado-integráveis em séries de funções ortogonais.

Desenvolveu-se algoritmos computacionais, em linguagem computacional Fortran 95, para simular as soluções formais obtidas e produzir resultados numéricos que possibilitassem a análise do escoamento potencial nas referidas contrações.

Realizou-se extensivos testes numéricos para quatro famílias de geometrias das contrações, sendo que cada família ainda possuía diferentes funções modeladoras do formato de suas paredes, bem como os parâmetros razão e esbeltez e razão de contração.

Analisou-se os resultados visando sintetizar aspectos e características de como as contrações operam e que formatos são mais adequados ou não.

**Palavras-chave:** Contrações, transformadas integrais, potencial de escoamento.

## ***ABSTRACT***

---

It was done the mathematical formulation for potential flow inside two-dimensional contractions using both Cartesian and cylindrical coordinate systems. To achieve such aim it was considered that contraction geometries are two-dimensional in the Cartesian coordinate system and two-dimensional with axial symmetry in cylindrical system. Formulation is adapted from tri-dimensional Euler equations in Cartesian and cylindrical coordinate systems, doing hypothesis such as: two-dimensionality, steady flow regime, inviscid fluid and irrotational flow.

Differential formulae that models potential flow inside two-dimensional contraction is formally solved using Generalized Integral Transform Technique – GITT – which is based upon orthogonal series expansion of square-integrable functions.

It was developed some computational algorithms, using Fortran 95 computational language, to simulate the obtained formal solutions and to produce numerical results that allows potential flow analysis for referred contractions.

It was done comprehensive numerical tests for four families of contraction geometries, being that each family yet has different contraction wall modeling functions, as well length and contraction ratios.

Results were analyzed aiming to synthesize aspects and characteristics of how contractions operate and which forms are more adequate or not.

**Keywords:** Contractions, integral transform, potential flow

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 3.1– GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO. ....	27
FIGURA 3.2– GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO COM CONDIÇÕES DE CONTORNO. ....	28
FIGURA 3.3– GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO COM EIXOS ADIMENSIONAIS. ....	28
FIGURA 3.4- CONDIÇÕES DE CONTORNO ADIMENSIONAIS E GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO. ...	29
FIGURA 3.5- CONDIÇÕES DE CONTORNO NA VARIÁVEL DEPENDENTE MODIFICADA. ....	30
FIGURA 3.6 - PRESSÃO AO LONGO DE UMA LINHA DE CORRENTE. ....	37
FIGURA 4.1- GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO COM SIMETRIA CILÍNDRICA. ....	42
FIGURA 4.2– GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO COM CONDIÇÕES DE CONTORNO. ....	43
FIGURA 4.3– GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO COM EIXOS ADIMENSIONAIS. ....	44
FIGURA 4.4- CONDIÇÕES DE CONTORNO ADIMENSIONAIS E GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO. ...	45
FIGURA 4.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO NA VARIÁVEL DEPENDENTE MODIFICADA. ....	46
FIGURA 5.1– FUNÇÕES DE PAREDE PARA CONTRAÇÃO: A) COM $\varepsilon \in I_\varepsilon$ ; E B) COM $\varepsilon \notin I_\varepsilon$ . .....	58
FIGURA 5.2 DIFERENTES CASOS DA FUNÇÃO $F(X)$ . ....	61
FIGURA 5.3- DERIVADA DE PRIMEIRA ORDEM PARA AS VÁRIAS FUNÇÕES $F(X)$ . ....	62
FIGURA 5.4- DERIVADA DE SEGUNDA ORDEM PARA AS VÁRIAS FUNÇÕES $F(X)$ . ....	63
FIGURA 5.5- GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO COM EXTENSÃO NA ENTRADA. ....	64
FIGURA 5.6- FUNÇÕES $F(X)$ PARA A PAREDE, COM EXTENSÃO NA ENTRADA DA CONTRAÇÃO. .....	66
FIGURA 5.7- DERIVADAS PRIMEIRAS DAS FUNÇÕES $F(X)$ , PARA CONTRAÇÕES COM EXTENSÃO NA ENTRADA. ....	67
FIGURA 5.8- DERIVADAS SEGUNDAS DAS FUNÇÕES $F(X)$ , PARA CONTRAÇÕES COM EXTENSÃO NA ENTRADA. ....	68
FIGURA 5.9- GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO COM EXTENSÃO NA SAÍDA. ....	69
FIGURA 5.10- FUNÇÕES $F(X)$ PARA A PAREDE, COM EXTENSÃO NA SAÍDA DA CONTRAÇÃO..	71
FIGURA 5.11- DERIVADAS PRIMEIRAS DAS FUNÇÕES $F(X)$ , PARA CONTRAÇÕES COM EXTENSÃO NA SAÍDA. ....	72
FIGURA 5.12- DERIVADAS SEGUNDAS DAS FUNÇÕES $F(X)$ , PARA CONTRAÇÕES COM EXTENSÃO NA SAÍDA. ....	73
FIGURA 5.13- GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO COM EXTENSÃO NA ENTRADA E NA SAÍDA. ....	74
FIGURA 5.14- FUNÇÕES $F(X)$ PARA A PAREDE, COM EXTENSÃO NA ENTRADA E NA SAÍDA DA CONTRAÇÃO. ....	76
FIGURA 5.15- DERIVADAS PRIMEIRAS DAS FUNÇÕES $F(X)$ , PARA CONTRAÇÕES COM EXTENSÃO NA ENTRADA E NA SAÍDA. ....	77
FIGURA 5.16- DERIVADAS SEGUNDAS DAS FUNÇÕES $F(X)$ , PARA CONTRAÇÕES COM EXTENSÃO NA ENTRADA E NA SAÍDA. ....	78
FIGURA 6.1- TESTE DE CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES DE $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ E $C_{pw}(X)$ , PARA $N = 5, 10, 15, 20, 25$ E $30$ . ....	83
FIGURA 6.2- LINHA DE CORRENTE, COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE E CAMPO DE PRESSÃO PARA CONTRAÇÃO COM: FUNÇÃO A1, $R_c = \frac{1}{8}$ , e $R_s = 1$ . ....	85
FIGURA 6.3- LINHA DE CORRENTE, COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE E CAMPO DE PRESSÃO PARA CONTRAÇÃO COM: FUNÇÃO A1, $R_c = \frac{1}{8}$ , e $R_s = 1$ . ....	86

FIGURA 6.4- DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE $U(R_s, Y)$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA: FUNÇÃO A1, $R_c = 1/8$ , e $R_s = 1, 2, 3$ .	87
FIGURA 6.5- DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ PARA: FUNÇÃO A1, $R_c = 1/8$ , e $R_s = 1, 2, 3$ .	88
FIGURA 6.6- DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA: FUNÇÃO A3, $R_c = 1/8$ , e $R_s = 1, 2, 3$ .	89
FIGURA 6.7- CAMPO VETORIAL DE VELOCIDADE GRAFADO SOBRE O CAMPO DE VELOCIDADE AXIAL PARA: FUNÇÃO A3, $R_s = 1$ (A) E $R_s = 3$ (B).	90
FIGURA 6.8- LINHA DE CORRENTE, COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE E CAMPO DE PRESSÃO PARA CONTRAÇÃO COM: FUNÇÃO A1, $R_c = 1/2$ , e $R_s = 1$ .	91
FIGURA 6.9 -DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE $U(R_s, Y)$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA: FUNÇÃO A1, $R_c = 15/16, 3/4, 1/2, 1/4, 1/8$ e $R_s = 1$ .	92
FIGURA 6.10- DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ PARA: FUNÇÃO A1, $R_c = 15/16, 3/4, 1/2, 1/4, 1/8$ e $R_s = 1$ .	93
FIGURA 6.11- DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA: FUNÇÃO A3, $R_c = 15/16, 3/4, 1/2, 1/4, 1/8$ e $R_s = 1$ .	94
FIGURA 6.12- LINHA DE CORRENTE, COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE E CAMPO DE PRESSÃO PARA CONTRAÇÃO COM: FUNÇÃO A2, $\varepsilon = +\varepsilon_c$ ; $R_c = 1/8$ e $R_s = 1$ .	95
FIGURA 6.13- LINHA DE CORRENTE, COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE E CAMPO DE PRESSÃO PARA CONTRAÇÃO COM: FUNÇÃO A2, $\varepsilon = -\varepsilon_c$ ; $R_c = 1/8$ e $R_s = 1$ .	96
FIGURA 6.14- LINHA DE CORRENTE, COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE E CAMPO DE PRESSÃO PARA CONTRAÇÃO COM: FUNÇÃO A2, $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ; $R_c = 1/8$ e $R_s = 1$ .	97
FIGURA 6.15- LINHA DE CORRENTE, COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE E CAMPO DE PRESSÃO PARA CONTRAÇÃO COM: FUNÇÃO A3, $R_c = 1/8$ e $R_s = 1$ .	98
FIGURA 6.16- LINHA DE CORRENTE, COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE E CAMPO DE PRESSÃO PARA CONTRAÇÃO COM: FUNÇÃO A4, $R_c = 1/8$ e $R_s = 1$ .	99
FIGURA 6.17- DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA: FUNÇÕES A1-A4, $R_c = 1/8$ e $R_s = 1$ .	100
FIGURA 6.18- LINHA DE CORRENTE, COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE E CAMPO DE PRESSÃO PARA CONTRAÇÃO COM: FUNÇÃO B2, $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ , $\alpha = 0,1$ ; $R_c = 1/8$ e $R_s = 1$ .	101
FIGURA 6.19- DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA FUNÇÃO B1, $R_c = 1/8$ , $R_s = 1$ , $\alpha = 0,1; 0,2; 0,3$ .	102
FIGURA 6.20 - DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA FUNÇÃO B2, $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ , $R_c = 1/8$ , $R_s = 1$ , $\alpha = 0,1; 0,2; 0,3$ .	102
FIGURA 6.21 - DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA FUNÇÃO B2, $\varepsilon = -\varepsilon_c$ , $R_c = 1/8$ , $R_s = 1$ , $\alpha = 0,1; 0,2; 0,3$ .	103
FIGURA 6.22 - DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA FUNÇÃO B3, $R_c = 1/8$ , $R_s = 1$ , $\alpha = 0,1; 0,2; 0,3$ .	104
FIGURA 6.23 - LINHA DE CORRENTE, COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE E CAMPO DE PRESSÃO PARA CONTRAÇÃO COM: FUNÇÃO C2, $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ , $\beta = 0,1$ ; $R_c = 1/8$ e $R_s = 1$ .	105

FIGURA 6.24 - DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA FUNÇÃO C1, $R_c = 1/8$ , $R_s = 1$ , $\beta = 0,1; 0,2; 0,3$ .....	106
FIGURA 6.25 - DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA FUNÇÃO C2, $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ , $R_c = 1/8$ , $R_s = 1$ , $\beta = 0,1; 0,2; 0,3$ .....	106
FIGURA 6.26 - DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA FUNÇÃO C2, $\varepsilon = -\varepsilon_c$ , $R_c = 1/8$ , $R_s = 1$ , $\beta = 0,1; 0,2; 0,3$ .....	107
FIGURA 6.27 - DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA FUNÇÃO C3, $R_c = 1/8$ , $R_s = 1$ , $\beta = 0,1; 0,2; 0,3$ .....	107
FIGURA 6.28 - LINHA DE CORRENTE, COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE E CAMPO DE PRESSÃO PARA CONTRAÇÃO COM: FUNÇÃO D2, $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ , $\gamma = 0,05$ ; $R_c = 1/8$ e $R_s = 1$ ..	109
FIGURA 6.29 - DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA FUNÇÃO D1, $R_c = 1/8$ , $R_s = 1$ , $\gamma = 0,05; 0,1; 0,15$ .....	110
FIGURA 6.30 - DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA FUNÇÃO D2, $\varepsilon = -0,803$ , $R_c = 1/8$ , $R_s = 1$ , $\gamma = 0,05; 0,1; 0,15$ .....	110
FIGURA 6.31 - DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA FUNÇÃO D2, $\varepsilon = -\varepsilon_c$ , $R_c = 1/8$ , $R_s = 1$ , $\gamma = 0,05; 0,1; 0,15$ .....	111
FIGURA 6.32 - DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADE NORMALIZADA $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ E COEFICIENTE DE PRESSÃO $C_{pw}$ PARA FUNÇÃO D3, $R_c = 1/8$ , $R_s = 1$ , $\gamma = 0,05; 0,1; 0,15$ .....	111
FIGURA 7.1 - LINHA DE CORRENTE, COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE E CAMPO DE PRESSÃO PARA CONTRAÇÃO COM: FUNÇÃO A2, $R_c = 1/8$ , e $R_s = 1$ .....	113
FIGURA 7.2 - LINHA DE CORRENTE, COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE E CAMPO DE PRESSÃO PARA CONTRAÇÃO COM: FUNÇÃO A2, $R_c = 1/8$ , e $R_s = 3$ .....	114
FIGURA 7.3 - LINHA DE CORRENTE, COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE E CAMPO DE PRESSÃO PARA CONTRAÇÃO COM: FUNÇÃO A2, $R_c = 1/2$ , e $R_s = 1$ .....	115

## *LISTA DE SÍMBOLOS*

---

### SÍMBOLOS ARÁBICOS

- A1* função polinomial de 3<sup>o</sup> grau que descreve uma geometria de contração de forma simplificada.
- A2* função polinomial de 4<sup>o</sup> grau que descreve uma geometria de contração de forma simplificada.
- A3* função polinomial de 5<sup>o</sup> grau que descreve uma geometria de contração de forma simplificada.
- A4* função cossenoidal que descreve uma geometria de contração de forma simplificada.
- B1* função polinomial de 3<sup>o</sup> grau que descreve uma geometria de contração com extensão na entrada.
- B2* função polinomial de 4<sup>o</sup> grau que descreve uma geometria de contração com extensão na entrada.
- B3* função polinomial de 5<sup>o</sup> grau que descreve uma geometria de contração com extensão na entrada.
- B4* função cossenoidal que descreve uma geometria de contração com extensão na entrada.
- C1* função polinomial de 3<sup>o</sup> grau que descreve uma geometria de contração com extensão na saída.
- C2* função polinomial de 4<sup>o</sup> grau que descreve uma geometria de contração com extensão na saída.
- C3* função polinomial de 5<sup>o</sup> grau que descreve uma geometria de contração com extensão na saída.

$C4$	função cossenoidal que descreve uma geometria de contração com extensão na saída.
$C_{pw}$	coeficiente de pressão junto à parede de contração.
$D1$	função polinomial de 3º grau que descreve uma geometria de contração com extensão na entrada e na saída da contração.
$D2$	função polinomial de 4º grau que descreve uma geometria de contração com extensão na entrada e na saída da contração.
$D3$	função polinomial de 5º grau que descreve uma geometria de contração com extensão na entrada e na saída da contração.
$D4$	função cossenoidal que descreve uma geometria de contração com extensão na entrada e na saída da contração.
$F(X)$	função prescrita para parede de contração adimensionalizada
$I_\varepsilon$	intervalo ao qual pertence $\varepsilon$ arbitrado.
$L_1, L_3$	comprimento indicador na geometria de contração.
$L_2$	comprimento ao longo da linha de centro da contração.
$N$	ordem de truncamento da serie.
$p(x, y)$	pressão no escoamento.
$R_C$	razão de contração.
$R_e$	comprimento da extensão na parede de contração.
$R_S$	razão de esbeltez.
$\bar{U}_s$	velocidade uniforme calculada na saída da contração.
$U_w$	componente do vetor velocidade na direção x na parede de contração.
$U(x, y)$	componente do vetor velocidade na direção x.
$V_w$	componente do vetor velocidade na direção y na parede de contração.
$V(x, y)$	componente do vetor velocidade na direção y.
$y_{LC(x)}$	coordenada y ao longo de uma dada linha de corrente.

## SÍMBOLOS GREGOS

$\alpha, \beta, \gamma$	extensão adimensional na geometria de contração.
$\varepsilon$	parâmetro a ser arbitrado ao polinômio de 4º grau que descreve a parede da contração.
$\varepsilon_c$	parâmetro crítico.
$\Phi_m$	autofunções ortonormais.
$\mu, \lambda$	autovalores dos problemas auxiliares.
$\tilde{\Psi}_i^+$	variável dependente transformada .
$\delta$	delta de Kronecker.
$\Psi^*$	linhas de corrente de referência.
$\omega_{x,y,z}$	vorticidade nas direções x, y e z.
$\nabla^2 ( )$	laplaciano.



## *SUMÁRIO*

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>18</b>
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	18
1.2 OBJETIVOS .....	20
1.3 ESCOPO DO TRABALHO.....	20
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>22</b>
<b>3 FORMULAÇÃO EM COORDENADAS CARTESIANAS.....</b>	<b>25</b>
3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA .....	25
3.2 A FUNÇÃO $F(X)$ QUE DESCREVE A PAREDE DA CONTRAÇÃO. ....	30
3.3 APLICANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NA DIREÇÃO DO EIXO Y.....	31
3.4 APLICANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NA DIREÇÃO X.....	34
3.5 DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO .....	36
3.6 COMPONENTES DA VELOCIDADE JUNTO A PAREDE E COEFICIENTE DE PRESSÃO.....	38
3.7 MEDIDA DA UNIFORMIDADE DA VELOCIDADE NA SAÍDA DA CONTRAÇÃO.....	39
<b>4 FORMULAÇÃO EM COORDENADAS CILÍNDRICAS.....</b>	<b>40</b>
4.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA .....	40
4.2 A FUNÇÃO $F(Z)$ QUE DESCREVE A PAREDE DA CONTRAÇÃO.....	46
4.3 APLICANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NA DIREÇÃO R. ....	46
4.4 APLICANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NA DIREÇÃO Z .....	49
4.5 COMPONENTES DA VELOCIDADE JUNTO A PAREDE E COEFICIENTE DE PRESSÃO.....	52
4.6 . MEDIDA DA UNIFORMIDADE DA VELOCIDADE NA SAÍDA DA CONTRAÇÃO.....	53
<b>5 FUNÇÕES USADAS PARA MODELAR O FORMATO DA PAREDE DA CONTRAÇÃO.....</b>	<b>54</b>
5.1 CASO A: GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO NA FORMA SIMPLIFICADA.....	54
5.1.1 FUNÇÃO POLINOMIAL DE TERCEIRO GRAU – A1.....	55
5.1.2 FUNÇÃO POLINOMIAL DE QUARTO GRAU – A2.....	56
5.1.3 FUNÇÃO POLINOMIAL DE QUINTO GRAU – A3.....	59
5.1.4 FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA COSSENOIDAL – A4.....	60
5.1.5 COMPARAÇÃO DAS FUNÇÕES DO CASO “A” .....	60
5.2 CASO B: GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO COM EXTENSÃO NA ENTRADA	63
5.3 CASO C: GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO COM EXTENSÃO NA SAÍDA.....	68
5.4 CASO D: GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO COM EXTENSÃO NA ENTRADA E NA SAÍDA .....	73
5.5 RELEITURA DA FUNÇÃO $F(X)$ .....	78
5.6 FUNÇÕES DE PAREDE PARA CONTRAÇÕES USANDO COORDENADAS CILÍNDRICAS. ....	80

<b>6</b>	<b>RESULTADOS E SUA ANÁLISE PARA ESCOAMENTO POTENCIAL EM CONTRAÇÕES CARTESIANAS.....</b>	<b>81</b>
6.1	CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES.....	82
6.2	RESULTADOS E SUA ANÁLISE PARA O CASO “A” .....	83
6.2.1	INFLUÊNCIA DA RAZÃO DE ESBELTEZ.....	84
6.2.2	INFLUÊNCIA DA RAZÃO DE CONTRAÇÃO .....	90
6.2.3	INFLUÊNCIA DA FUNÇÃO DE PAREDE DA CONTRAÇÃO .....	94
6.3	RESULTADOS E SUA ANÁLISE PARA O CASO “B” .....	100
6.4	RESULTADOS E SUA ANÁLISE PARA O CASO “C” .....	104
6.5	RESULTADOS E SUA ANÁLISE PARA O CASO “D” .....	108
<b>7</b>	<b>RESULTADOS E SUA ANÁLISE PARA ESCOAMENTO POTENCIAL EM CONTRAÇÕES CILÍNDRICAS COM SIMETRIA AXIAL .....</b>	<b>112</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>116</b>

# **1 INTRODUÇÃO**

## ***1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS***

O estudo de escoamento de fluidos sempre foi e continuará sendo realizado e discutido em razão de sua grande importância nas aplicações industriais e materiais.

Problemas de transportes, energia elétrica, combustão, irrigação, controle de inundação, abastecimento de água, disposição de esgoto, movimento de projéteis, oleodutos, gasodutos, dentre inúmeros outros, envolvem o movimento e transportes de fluidos.

Durante muito tempo, técnicas analíticas clássicas foram aplicadas para a obtenção de solução de problemas diversos da engenharia, como um todo. No entanto, para os problemas que envolvem geometrias de contração, apesar de se tratar de um problema geometricamente simples, apresenta grande complexidade hidrodinâmica e não possui solução analítica. Desta forma, a solução do problema por métodos numéricos permite a caracterização do escoamento.

Assim, diante da necessidade de se obter soluções de problemas mais realísticos, diversas técnicas numéricas foram e continuam sendo desenvolvidas, tais como: Método de Elementos Finitos, Diferenças Finitas, Volumes Finitos dentre outros. A Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG por fornecer solução analítica, permite a obtenção de soluções mais precisas para este tipo de problema.

O estudo da contração em escoamentos é importante, pois há uma necessidade comum nas indústrias em geral, mais especificamente, indústrias químicas e petrolíferas de se abordar nesse contexto, o comportamento da dinâmica dos fluidos.

Pesquisas experimentais em mecânica dos fluidos podem ser validadas cientificamente na medida em que se estudam geometrias de contração.

As contrações são parte integrante de todos os túneis aerodinâmicos e hidrodinâmicos, utilizados para pesquisas básicas, ensaios ou modelamento de escoamentos. A contração é responsável pela uniformização das linhas de corrente, objetivando um perfil uniforme, de baixa intensidade turbulenta e de camada limite de pequena espessura na seção de testes. Uma vez que a pressão total permanece constante a velocidade média é reduzida. Informações sobre contração em túneis aerodinâmicos podem ser obtidas em Bradshaw & Pankhurst, (1964) e Gorecki (1989).

Segundo Doolan & Morgans, (2007), o principal propósito de se estudar estruturas de contrações é a melhoria na qualidade de teste. Em seus experimentos conseguiram obter resultados satisfatórios.

Apesar da simplicidade da geometria do problema, uma complexidade no estudo da dinâmica do fluido através da contração se instala, fornecendo uma difícil solução analítica das equações que regem o problema, necessitando assim de uma solução numérica aproximada.

As equações que modelam o problema, a equação de Laplace, por possuir derivadas de quarta ordem devido a função corrente eliminar a equação da continuidade, requerem uma análise computacional mais apurada.

Computacionalmente, para se obter resultados satisfatórios, deve-se realizar a discretização das equações que modelam o problema que se pretende estudar, utilizando para isso, uma ferramenta matemática específica.

Nesse sentido, a Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG) será utilizada para se obter valores do perfil de velocidades nas direções  $x$  e  $y$  do campo de escoamento. O método será aplicado em um modelo de contração em coordenadas retangulares e cilíndricas bidimensional para um fluido ideal.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG), é uma ferramenta que permite a solução das mais variadas geometrias de contração. Basicamente, essa técnica consiste em transformar a equação diferencial parcial ou conjunto de equações diferenciais parciais, em um sistema de equações diferenciais ordinárias acoplado e infinito, o qual é truncado em uma ordem suficientemente grande e resolvido numericamente.

Esse método tem sido utilizado com êxito em vários problemas da área de ciências térmicas e também nos problemas que envolvem geometrias de contração, alcançando-se excelentes resultados não só do ponto de vista da precisão de solução, mas também se tem mostrado bastante eficiente sob a ótica de custos computacionais demonstrado ainda

viabilidade na solução de problemas típicos em engenharia, com taxas de convergência satisfatórias.

## ***1.2 OBJETIVOS***

Nessa pesquisa tem-se por objetivos:

- Efetuar a formulação matemática das equações diferenciais parciais que modelam o escoamento potencial no sistema de coordenadas cartesianas bidimensional, bem como no sistema de coordenadas cilíndricas bidimensional com simetria axial;
- Estabelecer conjunto pertinente de condições de contorno para o escoamento potencial em contrações descritas nos sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas;
- Aplicar a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG na obtenção de solução formal das equações diferenciais que modelam o escoamento potencial no interior de contrações bidimensionais;
- Desenvolver código computacional para simular o formalismo desenvolvido utilizando a TTIG, visando obter resultado para o escoamento potencial em contrações;
- Analisar os resultados obtidos visando entender e explicitar a influência dos parâmetros razão de esbeltez e razão de contração; e da função que modela o formato da parede da contração.

## ***1.3 ESCOPO DO TRABALHO***

Este trabalho é composto de oito capítulos, cujos assuntos são resumidos a seguir.

**Capítulo 1. Introdução.** Neste capítulo apresenta-se uma motivação abordando os principais aspectos da pesquisa desenvolvida, apresentando alguns conceitos e justificativa para o estudo de Contrações e a utilização da Técnica da Transformada Integral Generalizada. As metas principais dessa pesquisa também foram descritas aqui.

**Capítulo 2. Revisão Bibliográfica.** Neste capítulo é apresentada algumas referências sobre o tema abordado para enriquecer, contribuir e subsidiar o estudo sobre contrações e técnicas de resoluções.

**Capítulo 3. Formulação em Coordenadas Cartesianas.** Apresenta-se neste capítulo a formulação matemática do problema estudado, abordando as equações governantes em coordenadas cartesianas, a definição do modelo de contração a ser utilizado, e as considerações empregadas na solução do problema.

**Capítulo 4. Formulação em Coordenadas Cilíndricas.** Assim como feito no capítulo 3, é apresentada aqui a formulação matemática para o problema, abordando as equações governantes do problema estudado em coordenadas cilíndricas.

**Capítulo 5. Funções Usadas para Modelar o Formato da Parede da Contração.**

Neste capítulo é feita uma análise das funções que podem descrever a parede da Contração utilizando derivadas de primeira e segunda ordem, pois é desejável que a função seja de classe  $C^2$ , em seu intervalo de definição.

**Capítulo 6. Resultados e sua análise para o Escoamento Potencial em Contrações Cartesianas.** Pretende-se, neste capítulo, apresentar e analisar parte dos resultados obtidos na simulação numérica do escoamento potencial no interior de contrações descritas utilizando-se o sistema de coordenadas cartesiano.

**Capítulo 7. Resultados e sua Análise para Escoamento Potencial em Contrações Cilíndricas com Simetria Axial.** Assim como feito no capítulo 6, pretende-se analisar parte dos resultados obtidos na simulação numérica do escoamento potencial no interior de contrações descritas utilizando-se o sistema de coordenadas cilíndrico.

**Capítulo 8. Conclusão.** Apresenta-se neste capítulo as principais conclusões, dos resultados encontrados com relação a convergência da expansão em séries, e influência das razões de contração e esbeltez, bem como sugestões para trabalhos futuros.

## **2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Existem muitos modelos que são utilizados para se abordar as geometrias de contração. Algumas aproximações analíticas ou métodos numéricos estão sendo aplicados na intenção de melhorar e aperfeiçoar a investigação das diversas vertentes que circundam esse assunto.

De forma mais particular, a resolução de problemas de contração por meio de simulações numéricas se torna importante para o avanço científico – tecnológico já que conseguem caracterizar e mapear de maneira geral um escoamento. Também é possível economizar muitas horas de experimentação produzindo resultados computacionais.

Muitas soluções analíticas obtidas através de modelamentos e aproximações, tem sido propostos na literatura no intuito de conseguir estudar e testar diferentes seções transversais de geometria de contração.

Geralmente, trabalha-se com a solução das equações de Stokes-Beltrami para a função corrente de duas dimensões com eixo geométrico axissimétrico.

Tulapurkara & Bhalla, (1998) relacionaram quinze diferentes formas de geometrias de contração axissimétricas. Essas soluções produziram uma infinidade de linhas de corrente no escoamento com gradientes de pressão toleráveis.

Durst e Loy (1985) realizaram testes em escoamentos laminares e newtonianos comparando dados experimentais e numéricos através de uma contração.

Monpean (2002) produziu uma simulação numérica de escoamentos de fluidos newtonianos e viscoelásticos com baixo número de Reynolds através de uma contração plana. Para isso, utilizou-se um modelo denominado Oldroyd – B obtendo-se ótimos resultados.

Aboubacar et al (2002) utilizou contrações axissimétricas e planares para se estudar o escoamento viscoelástico. Para esses escoamentos utilizou-se a condição de *creeping flow*, ou seja, com Reynolds nulo. Foi comparado as linhas de corrente apresentadas durante o escoamento e o desprendimento e a geração de vórtices.

É importante ressaltar que toda a análise do comportamento dos escoamentos através de contrações só é possível devido ao tratamento que se realiza nas equações governantes do problema para que seja viabilizada uma simulação numérica em um ambiente de programação.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG, é uma das principais ferramentas numéricas utilizadas para se obter soluções aproximadas de problemas matemáticos que partem de um modelo físico, como por exemplo, os problemas de Mecânica dos Fluidos, mais especificamente neste trabalho, as contrações. Por isso, é necessário um estudo mais profundo sobre sua aplicabilidade em diversas vertentes para enriquecer ainda mais o trabalho proposto.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada consiste em transformar a equação diferencial parcial que modela a situação problema que se pretende resolver em um sistema infinito de equações diferenciais acopladas que deve ser truncado com uma ordem suficientemente grande para depois ser resolvido numericamente. Em seguida utiliza-se a fórmula de inversão para se obter o potencial original.

**Özişik** & Murray (1974) foram um dos pioneiros a utilizar a TTIG que consistia em tratar coeficientes de contorno variáveis. Muitas idéias foram surgindo com o objetivo de estender esse procedimento para problemas mais complexos. Assim, segundo (Cotta, 1993) a Técnica da Transformada Integral Generalizada abrange problemas da seguinte categoria:

- Problemas envolvendo equações com coeficientes variáveis;
- Problemas envolvendo condições de contorno com coeficientes variáveis;
- Problemas com contornos móveis;
- Problemas em que a complexidade esta associada ao problema auxiliar;
- Problemas não-lineares.

Para a aplicação da TTIG, Cotta (1993), apresenta alguns passos básicos:

1. Escolher um problema auxiliar associado, (evitando-se problemas computacionalmente complexos);
2. Obter o par transformada – inversa apropriado;
3. Aplicar a transformada Integral na equação diferencial parcial original, resultando em um sistema de equações diferenciais ordinárias;



4. Resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, truncando-o com uma ordem suficientemente grande para então resolvê-lo numericamente;
5. Utilizar a fórmula da inversa para construir o potencial original.

Muitos outros pesquisadores utilizaram a TTIG para resolver os mais variados problemas. Muitos desses resultados podem ser encontrados em Cotta (1993). Como a TTIG tem a capacidade de tratar dificuldades especiais, tais como: não linearidades, coeficientes variáveis não separáveis e domínios irregulares ela tem atraído uma atenção muito considerável e o número de pesquisadores atuando nessa área tem aumentado. Uma indicação deste crescimento foi o aparecimento de três outros textos sobre o assunto (Cotta e Mikhailov, 1997), (Cotta, 1998) e (Santos, Quaresma e Lima, 2001).

Utilizando a TTIG, problemas de autovalores descritos por equações diferenciais parciais também podem ser transformados em problemas de autovalores algébricos, os quais são resolvidos utilizando códigos computacionais disponíveis na literatura. Mikhailov e Cotta (1994) apresentaram uma formulação para os operadores que frequentemente aparecem em fenômenos de difusão de calor e massa.

Campos Silva et al (1992) utilizou a TTIG no problema de desenvolvimento simultâneo da velocidade e temperatura em escoamento laminar de fluido newtoniano, em um canal de placas paralelas.

Aparecido, Vieira e Silva (2000) aplicaram a TTIG para estudar os campos de velocidades de escoamentos subsônicos e incompressíveis na geometria de contração de um túnel de vento com seção transversal retangular em coordenadas cartesianas.

A TTIG também foi utilizada com sucesso na solução de problemas inversos de convecção, termicamente em desenvolvimento, em dutos retos de seção transversal em forma de setor circular segundo trabalho de Özişik & Aparecido (1998,1999a,b; 2001) e na solução de problemas não lineares unidimensionais de difusão térmica em sólidos, com mudança de fase na fronteira, por Diniz & Aparecido (1990), Diniz *et al* (1992) e Diniz *et al* (1993).

Após essas considerações, fica claro que a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG é uma ferramenta que dá suporte ao objeto de estudo, sistematiza toda a problematização e compatibiliza a descrição das equações governantes do problema em um ambiente de programação computacional.

O estudo do comportamento de fluidos escoando em contração com certeza pode ser melhor analisado e discutido quando abordado utilizando a TTIG.

### 3 FORMULAÇÃO EM COORDENADAS CARTESIANAS

A formulação matemática do escoamento em regime permanente, incompressível, invíscido e irrotacional no interior de contrações utilizando o sistema de coordenadas cartesianas é apresentada. A solução do equacionamento é realizada usando a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG.

#### 3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Para obter um modelo numérico que forneça dados sobre as componentes do vetor velocidade, pressão e linha de corrente no escoamento de fluidos dentro de uma contração, a respectiva formulação matemática deve ser desenvolvida.

Neste trabalho, a situação a ser estudada, neste capítulo, será a de escoamento irrotacional bidimensional, a ser representado em coordenadas cartesianas no interior de contrações, de fluido invíscido utilizando o conceito de linha de corrente.

A função linha de corrente é definida de tal forma que atenda a equação da continuidade. A equação da continuidade para escoamentos em regime permanente pode ser escrita como

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \mathbf{u} \equiv u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}. \quad (3.1.1a-b)$$

Assim, pode-se escrever uma definição para a função linha de corrente,  $\Psi(x, y)$ , como segue

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3.1.2a-b)$$

O vetor vorticidade  $\boldsymbol{\omega}$  para escoamentos bidimensionais pode ser escrito da seguinte forma

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (3.1.3)$$

então

$$\omega_x \equiv 0, \quad \omega_y \equiv 0 \quad \text{e} \quad \omega_z \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} . \quad (3.1.4a-c)$$

Sob a hipótese de irrotacionalidade a equação (3.1.4c) torna-se

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 . \quad (3.1.5)$$

Substituindo as definições de  $u$  e  $v$ , Eqs. (3.1.2a-b), na equação (3.1.5), tem-se

$$\omega_z = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right] = 0 . \quad (3.1.6)$$

Desta forma consegue-se escrever a equação para a função linha de corrente na forma apresentada a seguir

$$\nabla^2 \Psi(x, y) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 . \quad (3.1.7)$$

A equação (3.1.7) é chamada de Equação de Laplace. Contém derivadas de segunda ordem e portanto, para sua solução são necessárias duas condições de contorno para cada eixo.

Particularmente, o problema a ser modelado aqui consiste num escoamento no interior da contração apresentada logo em seguida.  $L_1$  e  $L_3$  são respectivamente comprimentos

indicados na figura 3.1,  $L_2$  é o comprimento ao longo da linha de centro da contração e  $f(x)$  é função unidimensional prescrita.

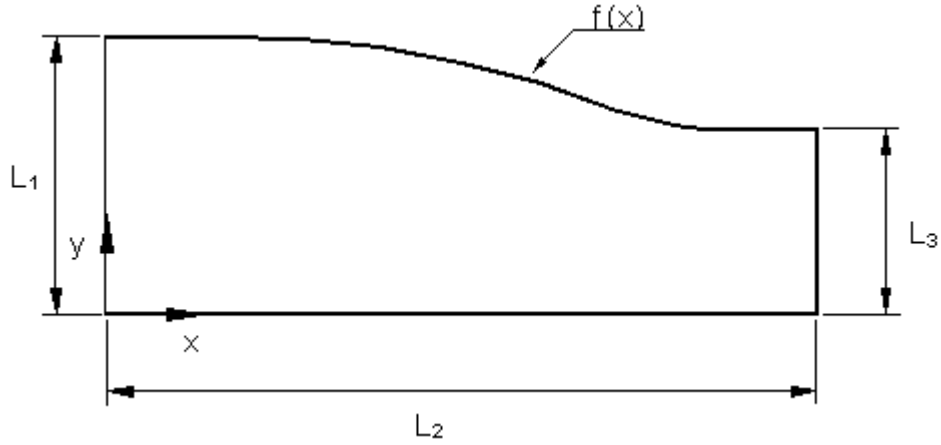


Figura 3.1– Geometria da contração.

A Equação de Laplace que modela o escoamento e as condições de contorno para esse tipo de problema são:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (3.1.8a)$$

$$\Psi(0, y) = u_o y \quad y \in (0, L_1), \quad (3.1.8b)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \right|_{x=L_2} = 0 \quad y \in (0, L_3), \quad (3.1.8c)$$

$$\Psi(x, 0) = 0 \quad x \in [0, L_2], \quad (3.1.8d)$$

$$\Psi(x, f(x)) = u_o L_1 \quad x \in [0, L_2]. \quad (3.1.8e)$$

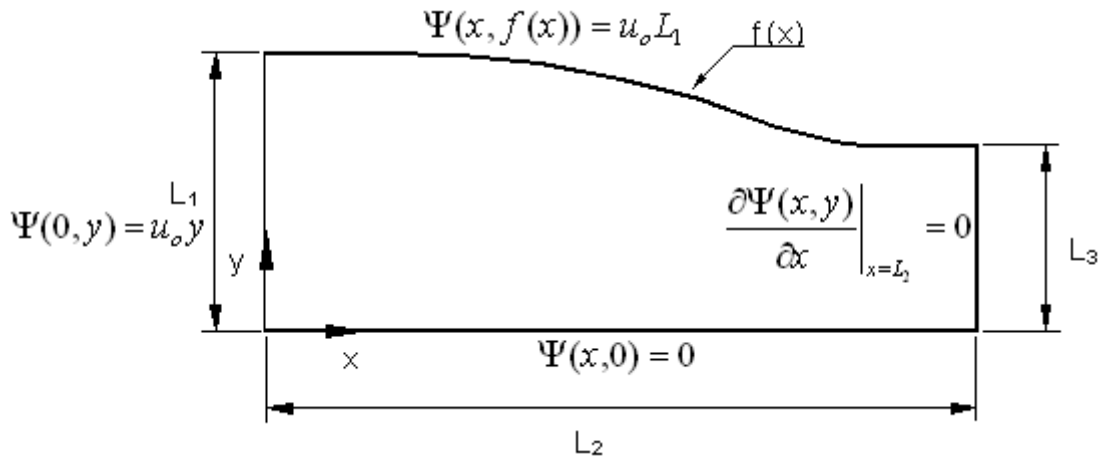


Figura 3.2– Geometria da contração com condições de contorno.

Pode-se definir variáveis adimensionais como segue:

$$X \equiv \frac{x}{L_1}, R_s \equiv \frac{L_2}{L_1}, Y \equiv \frac{y}{L_1}, R_c \equiv \frac{L_3}{L_1}, F(X) \equiv \frac{f(x)}{L_1} \text{ e } \Psi^*(X, Y) \equiv \frac{\Psi(x, y)}{u_o L_1}. \quad (3.1.9a-f)$$

Os parâmetros  $R_c$ , equações (3.1.9b), e  $R_s$ , equações (3.1.9d), são denominadas, respectivamente, de razão de contração e razão de esbeltez.

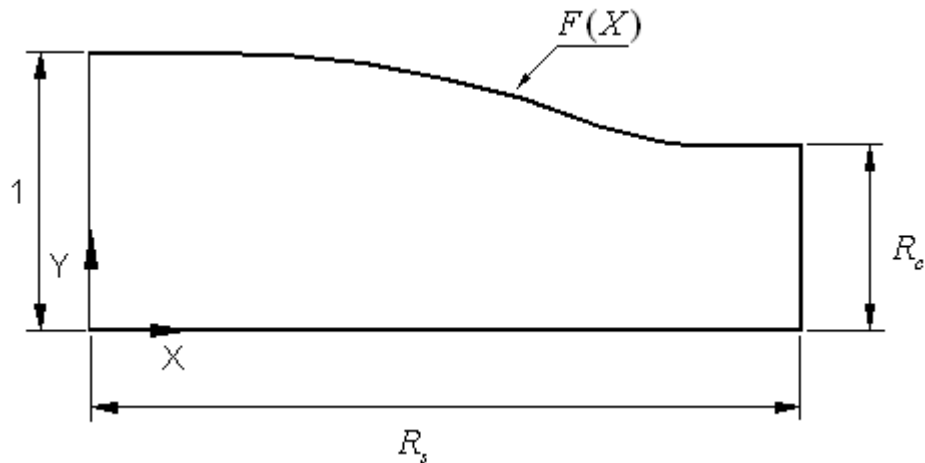


Figura 3.3– Geometria da contração com eixos adimensionais.

Re-escrevendo as equações (3.1.8a-e) e considerando as adimensionalizações, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \Psi^*(X,Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi^*(X,Y)}{\partial Y^2} = 0, \quad (3.1.10a)$$

$$\Psi^*(0,Y) = Y, \quad Y \in (0,1) \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial \Psi^*(X,Y)}{\partial X} \right|_{X=R_s} = 0, \quad Y \in (0,R_c) \quad (3.1.10b-c)$$

$$\Psi^*(X,0) = 0 \quad \text{e} \quad \Psi^*(X,F(X)) = 1, \quad X \in [0,R_s]. \quad (3.1.10d-e)$$

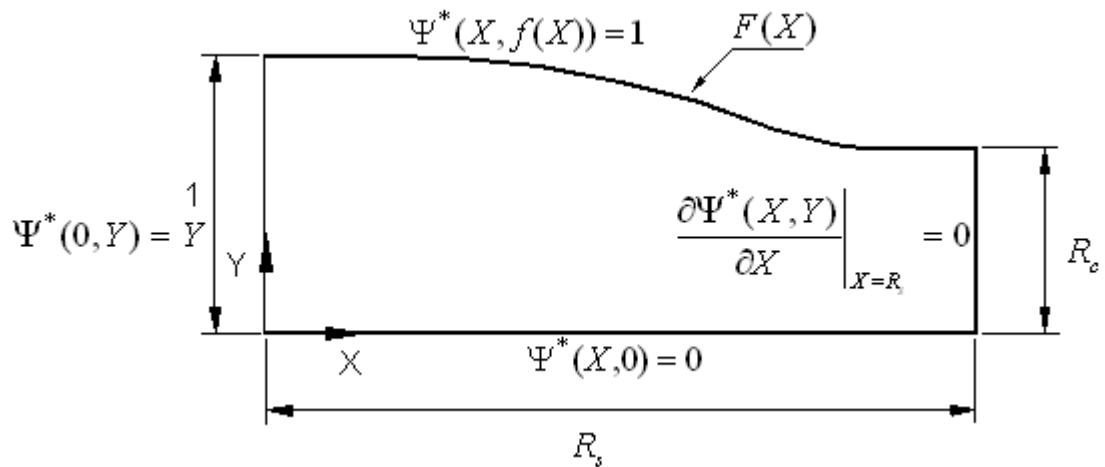


Figura 3.4- Condições de contorno adimensionais e geometria da contração.

Como consequência da adimensionalização dos parâmetros que compõem o equacionamento, as componentes do vetor velocidade tornam-se:

$$U(X,Y) \equiv \frac{u(x,y)}{u_o} = \frac{\partial \Psi^*(X,Y)}{\partial Y}, \quad \text{e} \quad V(X,Y) \equiv \frac{v(x,y)}{u_o} = -\frac{\partial \Psi^*(X,Y)}{\partial X}. \quad (3.1.11a-b)$$

As condições de contorno (3.1.10b-e) não são homogêneas, sendo assim é possível torná-las homogêneas já que o problema de auto-valor necessita. Desta forma, altera-se a variável dependente  $\Psi^*(X,Y)$  da seguinte forma

$$\Psi^*(X,Y) = \Psi^+(X,Y) + \frac{Y}{F(X)} \quad (3.1.12)$$

Assim, as equações (3.1.9a-e) são modificadas para:

$$\frac{\partial^2 \Psi^+(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi^+(X, Y)}{\partial Y^2} = YH(X), \quad (3.1.13a)$$

$$\Psi^+(X, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \Psi^+(X, F(X)) = 0, \quad X \in [0, R_s], \quad (3.1.13b-c)$$

$$\Psi^+(0, Y) = 0, \quad Y \in (0, 1) \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial \Psi^+(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=R_s} = \frac{Y}{F^2(X)} \left. \frac{dF(X)}{dx} \right|_{X=R_s} = 0, \quad Y \in (0, R_c) \quad (3.1.13d-e)$$

Na qual  $H(X)$  é representa a seguinte expressão de classe  $C^2$

$$H(X) \equiv -\frac{d^2 F^{-1}(X)}{dX^2} = \frac{1}{F^2(X)} \left[ \frac{d^2 F(X)}{dX^2} - \frac{2}{F(X)} \frac{dF^2(X)}{dX} \right]. \quad (3.1.14)$$

Desta forma, as novas condições de contorno dispostas na Figura 3.5, da geometria da contração apresenta-se,

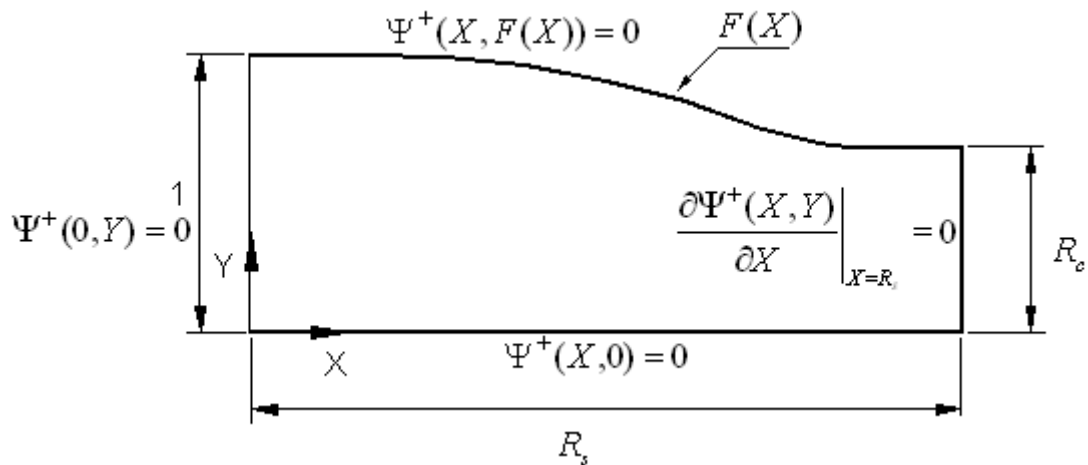


Figura 3.5- Condições de contorno na variável dependente modificada.

### 3.2 A FUNÇÃO $F(X)$ QUE DESCREVE A PAREDE DA CONTRAÇÃO.

$F(X)$  é uma função que descreve um dos contornos da contração em estudo.

Essa função deve ter algumas características especiais, pois como se pode observar, existe na formulação (3.1.14) derivadas de segunda ordem e por isso para que o sistema de

equações não seja singular, essa função deve ser pelo menos de classe  $C^2$  dentro do intervalo  $[0, R_s]$ , ou seja,  $F(X) \in C^2(\Omega)$  e  $F(X) > 0$ , significando que suas primeira e segunda derivadas devem ser contínuas nesse domínio. Conseqüentemente,  $F(X)$  deve ter uma transição contínua entre a entrada e a saída da contração.

Note também que é necessário para se obter a condição homogênea em (3.1.13e) que o formato da parede da contração,  $F(X)$ , atenda à restrição (3.1.13e).

Então, para definir a geometria de contração no mínimo as seguintes restrições devem ser satisfeitas:

$$F(0) = 1, \quad F(R_s) = R_c, \quad \left. \frac{dF(X)}{dX} \right|_{X=0} = 0, \quad \left. \frac{dF(X)}{dX} \right|_{X=R_s} = 0. \quad (3.2.1a-d)$$

### **3.3 APLICANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NA DIREÇÃO DO EIXO Y.**

Com o objetivo de preparar a equação (3.1.13a) e suas condições de contorno (3.1.13b-e) que regem o escoamento invíscido e irrotacional no interior de uma dada contração, para produzir simulações numéricas, pode-se escolher, de acordo com Aparecido (1997), o seguinte problema auxiliar de autovalor, na direção Y:

$$\frac{d^2\psi(X, Y)}{dY^2} + \lambda^2(X)\psi(X, Y) = 0, \quad 0 < Y < F(X). \quad (3.3.1a)$$

A equação (3.3.1a) estará sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\psi(X, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \psi[X, F(X)] = 0. \quad (3.3.1b-c)$$

Resolvendo a equação diferencial ordinária, com X parametrizado, tem-se como solução as seguintes autofunções ortonormais

$$\psi_i(X, Y) = \sqrt{\frac{2}{F(X)}} \sin[\lambda_i(X)Y], \quad i = 1, 2, \dots, \infty, \quad (3.3.2a)$$

na qual



$$\lambda_i(X) = \frac{i\pi}{F(X)}, \quad i = 1, 2, \dots, \infty, \quad (3.3.2b)$$

são os autovalores.

Usando o conjunto das autofunções ortonormais  $\psi_i(X), i = 1, 2, \dots, \infty$  pode-se definir uma transformada integral relacionada ao eixo  $Y$ , e também a respectiva transformada inversa (Cotta, 1993), como segue:

$$\text{Transformada: } \tilde{\Psi}_i^+(X) = \int_0^{F(X)} \psi_i(X, Y) \Psi^+(X, Y) dY, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \infty, \quad (3.3.3)$$

$$\text{Transformada Inversa: } \Psi^+(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(X, Y) \tilde{\Psi}_i^+(X). \quad (3.3.4)$$

Visando transformar a equação diferencial original (3.1.12a), deve-se multiplicá-la pelas autofunções  $\psi_i(X), i = 1, 2, \dots, \infty$ . A equação do problema de autovalor auxiliar (3.3.1a) deve ser multiplicada pela variável dependente da equação (3.1.12a),  $\Psi^+(X, Y)$ . As equações resultantes são subtraídas uma da outra e a equação final é integrada sobre domínio  $[0, F(X)]$ , levando em consideração as condições de contorno, associadas ao eixo  $Y$ , das equações (3.1.12a e 3.3.1.a). A equação resultante desse processo torna-se

$$\frac{d^2 \tilde{\Psi}_i^+(X)}{dX^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ B_{ij}(X) \frac{d\tilde{\Psi}_j^+(X)}{dX} + C_{ij}(X) \tilde{\Psi}_j^+(X) \right] - \lambda_i^2(X) \tilde{\Psi}_i^+(X) = H(X) \tilde{g}_i(X), \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad (3.3.5)$$

na qual

$$B_{ij}(X) = 2 \int_0^{F(X)} \psi_i(X, Y) \frac{\partial \psi_j(X, Y)}{\partial X} dY = \begin{cases} 0, & \text{para } i = j \\ \frac{4(-1)^{i+j} ij \left[ \frac{dF(X)}{dX} \right]}{(i^2 - j^2) F(X)}, & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (3.3.6)$$

$$C_{ij}(X) = \int_0^{F(X)} \psi_i(X, Y) \frac{\partial^2 \psi_j(X, Y)}{\partial X^2} dY =$$

$$= \begin{cases} -\frac{3+4(i\pi)^2}{12} \left[ \frac{dF(X)}{dX} \right]^2 / F^2(X), & i = j; \\ \frac{2\pi^2(-1)^{i+j+1}(ij)^2}{(i^2 - j^2)^2} \frac{i^2 \left[ 3 \frac{dF^2(X)}{dX} / F(X) - \frac{d^2 F(X)}{dX^2} \right] + j^2 \left[ \frac{d^2 F(X)}{dX^2} + \frac{dF^2(X)}{dX} / F(X) \right]}{F(X)}, & i \neq j. \end{cases}$$
(3.3.7)

e

$$\tilde{g}_i(X) = H(X) \int_0^{F(X)} \psi_i(X, Y) dY. \quad (3.3.8)$$

A equação (3.3.5) define um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes variáveis descritos nas equações (3.3.6-7).

Para se obter as condições de contorno para o sistema de equações (3.3.5), é necessário transformar as condições de contorno primitivas associadas à direção X, equações (3.1.12d-e). Para que isso seja possível, basta multiplicar as referidas equações por  $\psi_i(X)$  e integrar ao longo do intervalo  $[0, F(X)]$ . O resultado desse processo são as equações a seguir:

$$\int_0^{F(X)} \psi_i(X, Y) \Psi^+(0, Y) dY = 0 \Rightarrow \tilde{\Psi}_i^+(0) = 0, \quad (3.3.9a)$$

$$\int_0^{F(X)} \psi_i(X, Y) \frac{\partial \Psi^+(X, Y)}{\partial X} dY \Big|_{X=R_s} = 0 \Rightarrow \frac{d\tilde{\Psi}_i^+(X)}{dX} \Big|_{X=R_s} = 0. \quad (3.3.9b)$$

### 3.4 APLICANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NA DIREÇÃO X

Para transformar o sistema de equações diferenciais ordinárias (3.3.5) submetido às condições de contorno (3.3.8a-b) escolheu-se, segundo Aparecido (1997), um problema auxiliar de autovalor definido no eixo X conforme segue

$$\frac{d^2\phi(X)}{dX^2} + \mu^2\phi(X) = 0, \quad 0 < X < R_s \quad (3.4.1a)$$

sujeito às condições de contorno

$$\phi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d\phi(X)}{dX} \right|_{X=R_s} = 0. \quad (3.4.1b-c)$$

A solução da equação diferencial ordinária (3.4.1a) sujeita às condições de contorno (3.4.1b-c) leva à obtenção das autofunções ortonormais associadas ao eixo X

$$\phi_m(X) = \sqrt{\frac{2}{R_s}} \sin(\mu_m X), \quad m = 1, 2, \dots, \infty, \quad (3.4.2)$$

na qual

$$\mu_m = \frac{(2m-1)\pi}{2R_s}, \quad m = 1, 2, \dots, \infty, \quad (3.4.3)$$

são os autovalores.

Usando o conjunto das autofunções ortonormais  $\phi_m(X)$ ,  $m = 1, 2, \dots, \infty$ , pode-se definir a transformada integral associada ao eixo X e a respectiva transformada inversa

$$\text{Transformada: } \bar{\Psi}_{im}^+ = \int_0^{R_s} \phi_m(X) \tilde{\Psi}_i^+(X) dX, \quad m = 1, 2, \dots, \infty, \quad (3.4.4)$$

$$\text{Transformada Inversa: } \tilde{\Psi}_i^+(X) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(X) \bar{\Psi}_{im}^+. \quad (3.4.5)$$

Para transformar o sistema de equações diferenciais ordinárias (3.3.5) basta multiplicá-las pelas autofunções  $\phi_m(X)$ ,  $m = 1, 2, \dots, \infty$ . Adicionalmente, a equação auxiliar do problema de autovalor na direção X, deve ser multiplicada por  $\tilde{\Psi}_i^+(X)$ ,  $i = 1, 2, \dots, \infty$ . As equações

resultantes são subtraídas e integradas no domínio  $[0, R_s]$ . Após a integração e considerando as condições de contorno, (3.4.1.b,c), associadas ao eixo  $X$ , a equação resultante é

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{ijmn} + C_{ijmn} - D_{iimn} \delta_{ij} - \mu_m^2 \delta_{ij} \delta_{mn}) \bar{\Psi}_{jn}^+ = \tilde{g}_{im}, \quad i, m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4.6)$$

O sistema de equações acima é constituído por um sistema algébrico infinito. Para obter resultados numéricos, o sistema (3.4.6) deve ser truncado em uma ordem finita suficientemente grande de acordo com a precisão desejada ou conforme os recursos computacionais disponíveis. Deste modo, truncando cada uma das expansões em série, (3.3.4) e (3.4.5), para números de termos iguais a  $N$ , cada, tem-se um sistema algébrico finito, como segue

$$\sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N (B_{ijmn} + C_{ijmn} - D_{iimn} \delta_{ij} - \mu_m^2 \delta_{ij} \delta_{mn}) \bar{\Psi}_{jn}^+ = \tilde{g}_{im}, \quad i, m = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.4.7)$$

na qual

$$\bar{\Psi}_{jn}^+ = \int_0^{R_s} \phi_n(X) \tilde{\Psi}_j^+(X) dX, \quad (3.4.8a)$$

$$B_{ijmn} = \int_0^{R_s} B_{ij}(X) \phi_m(X) \frac{d\phi_n(X)}{dX} dX, \quad C_{ijmn} = \int_0^{R_s} C_{ij}(X) \phi_m(X) \phi_n(X) dX, \quad (3.4.8b-c)$$

$$D_{iimn} = (i\pi)^2 \int_0^{R_s} \frac{\phi_m(X) \phi_n(X)}{P^2(X)} dX, \quad \bar{\tilde{g}}_{im} = \int_0^{R_s} \phi_m(X) H(X) \tilde{g}_i(X) dX. \quad (3.4.8d-e)$$

A equação (3.4.7) é um sistema linear algébrico e pode ser escrito na forma matricial como

$$\mathbf{A} \Phi = \mathbf{g}, \quad (3.4.9)$$

na qual  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada e representa a contribuição dos coeficientes  $B_{ijmn}$ ,  $C_{ijmn}$ ,  $D_{iimn} \delta_{ij}$ , e  $\mu_m^2 \delta_{ij} \delta_{mn}$ . Os  $\delta$ 's são os deltas de Kronecker, os vetores  $\Phi$  e  $\mathbf{g}$  são definidos como

$$\Phi \equiv [\bar{\Psi}_{11}, \bar{\Psi}_{12}, \dots, \bar{\Psi}_{1N}, \bar{\Psi}_{21}, \bar{\Psi}_{22}, \dots, \bar{\Psi}_{2N}, \dots, \bar{\Psi}_{N1}, \bar{\Psi}_{N2}, \dots, \bar{\Psi}_{NN}]^T, \quad (3.4.10a)$$

$$\mathbf{g} \equiv [g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1N}, g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2N}, \dots, g_{N1}, g_{N2}, \dots, g_{NN}]^T. \quad (3.4.10b)$$

A solução simbólica do sistema linear algébrico é dado por

$$\Phi = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{g}. \quad (3.4.11)$$

Após a obtenção de  $\Phi$  com a solução do sistema algébrico linear, equação (3.4.9), tem-se os elementos  $\widetilde{\Psi}_{im}^+$  e então, utilizando as fórmulas de inversão para as expressões correspondentes aos eixos X e Y, obtém-se a função linha de corrente que resulta

$$\Psi^*(X, Y) = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N \psi_i(X, Y) \phi_m(X) \widetilde{\Psi}_{im}^+ + \frac{Y}{F(X)}. \quad (3.4.12)$$

Tendo obtido a função linha de corrente (3.4.12), é possível calcular os componentes do campo de velocidade U e V do escoamento no interior da contração.

Usando as relações entre campo de velocidade e linha de corrente, tem-se

$$U(X, Y) = \frac{\partial \Psi^*(X, Y)}{\partial Y} = F^{-1}(X) + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial \psi_i(X, Y)}{\partial Y} \phi_m(X) \widetilde{\Psi}_{im}^+, \quad (3.4.13a)$$

$$V(X, Y) = -\frac{\partial \Psi^*(X, Y)}{\partial X} = \frac{Y}{F^2(X)} \frac{dF(X)}{dX} - \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N \left[ \frac{\partial \psi_i(X, Y)}{\partial X} \phi_m(X) + \psi_i(X, Y) \frac{d\phi_m(X)}{dX} \right] \widetilde{\Psi}_{im}^+. \quad (3.4.13b)$$

### 3.5 DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO

Para calcular a pressão em um dado ponto do escoamento no interior de uma contração, utiliza-se aqui, a equação de Euler

$$\rho \mathbf{g} - \nabla p = \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \quad (3.5.1)$$

na qual  $\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$ .

A equação (3.5.1) pode ser escrita para o escoamento bidimensional, em regime permanente, invíscido e irrotacional na entrada da contração,  $x = 0$ , da seguinte forma

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{x=0} = -\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \equiv 0. \quad (3.5.2)$$

Integrando a equação (3.5.2) no intervalo  $[0,y]$ , tem-se que

$$\int_0^y \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{x=0} dy = 0 \Rightarrow p(0,y) - p(0,0) = 0 \Rightarrow p(0,y) = p(0,0) = cte, \quad y \in [0, L_1]. \quad (3.5.3)$$

Na Figura 3.6 apresenta-se, simbolicamente, a distribuição de pressão ao longo de uma linha de corrente. Note que em conformidade com a equação (3.5.3) a pressão na entrada da contração é constante, em consequência das condições de contorno estabelecidas para o campo de velocidade e para a função linha de corrente.

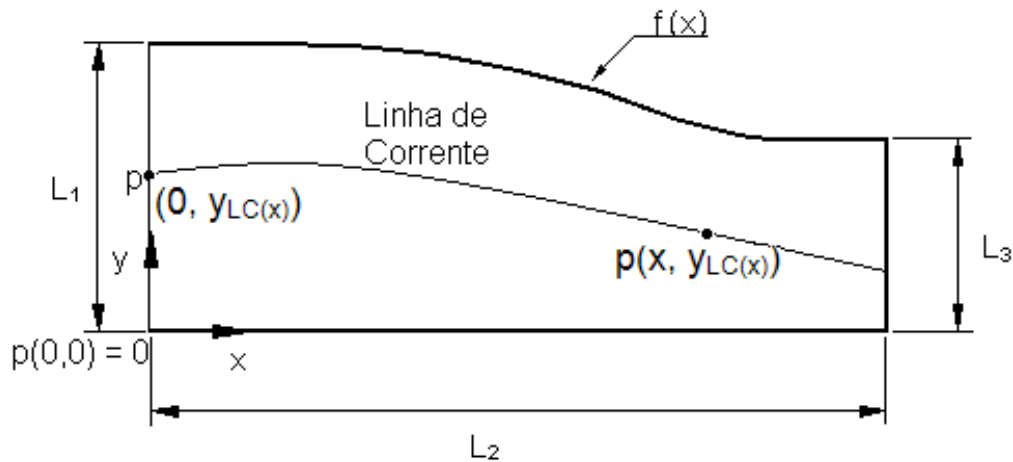


Figura 3.6 - Pressão ao longo de uma linha de corrente.

Na Figura 3.6,  $y_{LC(x)}$  significa um dado  $y$  ao longo de uma dada linha de corrente - LC.

Aplicando a equação de Bernoulli, ao longo de uma linha de corrente tem-se

$$\frac{p(x, y_{LC(x)})}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{u^2}{2} = \frac{p(0, y_{LC(x)})}{\rho} + \frac{u_0^2}{2} \Rightarrow p(x, y) = p(0,0) + \frac{\rho}{2} (u_0^2 - v^2 - u^2) \quad (3.5.4)$$

Para adimensionalizar a expressão (3.5.2), basta realizar as substituições  $x = XL_1$ ,  $y = YL_1$ ,  $u = Uu_0$  e  $v = Vv_0$ . Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\rho L_1 \partial Y} &= -\frac{u_0^2}{L_1} U \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{u_0^2}{L_1} V \frac{\partial V}{\partial Y} \Rightarrow \frac{\partial p}{\rho \partial Y} = -u_0^2 \left( U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial (p/u_0^2 \rho)}{\partial Y} = - \left( U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right). \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Portanto, neste a distribuição de pressão adimensional é dada por  $P = p / (\rho u_0^2 / 2)$ .

Dividindo a equação de Bernoulli, (3.5.4), por  $\rho u_0^2$ , resulta

$$\frac{p(x, y)}{\rho u_0^2} = \frac{p(0,0)}{\rho u_0^2} + \frac{\rho}{2\rho u_0^2} (u_0^2 - v^2 - u^2) \Rightarrow P(X, Y) = P(0,0) + \frac{1 - (V^2 + U^2)}{2}. \quad (3.5.6)$$

Com isso tem-se uma expressão que possibilita o cômputo da distribuição de pressão no escoamento dentro da contração.

### 3.6 COMPONENTES DA VELOCIDADE JUNTO A PAREDE E COEFICIENTE DE PRESSÃO

As componentes do campo de velocidade na parede e o coeficiente de pressão são representados aqui, respectivamente, por  $U_w(X)$ ,  $V_w(X)$  e  $Cp_w(X)$ .

Utilizando as expressões de  $U(X, Y)$  e  $V(X, Y)$  descritas em (3.4.13a-b), consegue-se escrever  $U_w(X)$  e  $V_w(X)$  aplicando  $Y = F(X)$ .

A partir da equação (3.5.6) que possibilita o cálculo da distribuição de pressão, consegue-se obter o coeficiente de pressão junto à parede, de acordo com a sua definição

$$Cp_w(X) \equiv \frac{2[p(x, f(x)) - p(0,0)]}{\rho u_0^2} = P(X, F(X)) - P(0,0) = 1 - U_w^2(X) - V_w^2(X), \quad (3.6.1)$$

na qual

$$U_w(X) \equiv U(X, F(X)) = F^{-1}(X) + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial \psi_i(X, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=F(X)} \phi_m(X) \bar{\Psi}_{im}^+. \quad (3.6.2)$$

$$V_w(X) \equiv V(X, F(X)) = \frac{Y}{F^2(X)} \frac{dF(X)}{dX} - \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N \left[ \frac{\partial \psi_i(X, Y)}{\partial X} \Big|_{Y=F(X)} \phi_m(X) + \psi_i(X, Y) \frac{d\phi_m(X)}{dX} \right] \bar{\Psi}_{im}^+. \quad (3.6.3)$$

### 3.7 MEDIDA DA UNIFORMIDADE DA VELOCIDADE NA SAÍDA DA CONTRAÇÃO

É desejável que na saída da contração a distribuição de velocidade seja a mais uniforme possível. Isto se deve ao fato de que, em geral, logo após o final da contração vem a seção de testes. Pode-se então definir um indicador de qualidade baseado no quanto uma dada contração consegue produzir distribuição de velocidade próxima àquela uniforme obtida usando o princípio da conservação da massa.

Definindo a componente  $U(X,Y)$  do campo de velocidade, na saída da contração,  $X = R_s$ , como segue

$$U_s(Y) \equiv U(R_s, Y), \quad (3.7.1)$$

e sabendo que a velocidade uniforme,  $\bar{U}_s$ , segundo o princípio da conservação, na saída da contração é

$$\bar{U}_s = R_c^{-1}. \quad (3.7.2)$$

Assim, pode-se definir uma medida, ou seja, uma norma para quantificar a não-uniformidade da distribuição de velocidade,  $\Delta U_s$ , não saída da contração

$$\Delta U_s \equiv \frac{\int_0^{R_c} |U_s(Y) - \bar{U}_s| dY}{\bar{U}_s R_c} = \int_0^{R_c} |U_s(Y) - \bar{U}_s| dY. \quad (3.7.3)$$



## **4 FORMULAÇÃO EM COORDENADAS CILINDRICAS**

A formulação matemática do escoamento em regime permanente, incompressível, invíscido e irrotacional no interior de contrações utilizando o sistema de coordenadas cilíndricas é também outra vertente apresentada. A solução do equacionamento é realizada usando a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG, assim como feito no Capítulo 3.

### **4.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA**

Para obter um modelo numérico que forneça dados sobre as componentes do vetor velocidade, o campo de pressão e linha de corrente no escoamento de um fluido ideal no interior de uma contração com simetria cilíndrica, a respectiva formulação matemática deve ser desenvolvida.

Para esse desenvolvimento, é considerada a geometria da contração com simetria axial, ou seja, o escoamento segue o mesmo padrão quando visto em qualquer plano meridional utilizando como referência o eixo Z.

Da mesma forma que utilizamos a equação da continuidade para a obtenção da formulação que refere ao capítulo 3, será empregada aqui a equação da continuidade em sua formulação cilíndrica utilizando o conceito de linhas de corrente.

A equação da continuidade em sua formulação em coordenadas cilíndricas se apresenta na forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (4.1.1)$$

Como hipótese, o escoamento não possui velocidades e variações tangenciais, assim,  $w = 0$  e  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial\theta} = 0$ . Escrevendo a equação (3.1.1a), novamente, tem-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (4.1.2)$$

Pode-se agora calcular o vetor  $\boldsymbol{\omega}$  para esse tipo de escoamento fazendo

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \omega_r \mathbf{r} + \omega_\theta \boldsymbol{\theta} + \omega_z \mathbf{z} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{r} & \boldsymbol{\theta} & \mathbf{z} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \\ v & 0 & u \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) \boldsymbol{\theta} \quad (4.1.3)$$

então

$$\omega_r \equiv 0, \quad \omega_\theta \equiv \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \quad \text{e} \quad \omega_z \equiv 0 \quad (4.1.4a-c)$$

Sob a hipótese de irrotacionalidade a equação (3.1.4b) torna-se

$$\omega_\theta \equiv \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (4.1.5)$$

Assim, pode-se escrever uma definição para a função linha de corrente  $\Psi(z, r)$ , como segue,

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (4.1.6a-b)$$

Substituindo as igualdades (3.1.6a-b) na equação (3.1.5) tem-se

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = 0 \quad (4.1.7a-b)$$

Multiplicando a equação (3.1.7b) por  $-r$ , escreve-se, finalmente, a equação governante para o escoamento com geometria axial no interior da contração que apresenta como

$$\frac{\partial^2 \Psi(z, r)}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(z, r)}{\partial r} \right] = 0. \quad (4.1.8)$$

A equação (4.1.8) contém derivadas de segunda ordem e por, portanto, para sua solução são necessárias duas condições de contorno para cada eixo.

Supõem-se para esse escoamento que as forças inerciais prevalecem sob as viscosas. Também é bem conhecido que este modelo falha próximo das paredes sólidas, mas neste caso o maior interesse é sobre a região distante da parede, para qual essa aproximação é suficientemente boa.

Fisicamente, o problema consiste de um escoamento que está chegando à face  $r_1$  e saindo pela face  $r_2$ .  $L$  é o comprimento ao longo da linha de centro da contração e  $f(z)$  é a função prescrita unidimensional que descreve a parede da contração. A Figura 4.1 mostra a geometria para o problema.

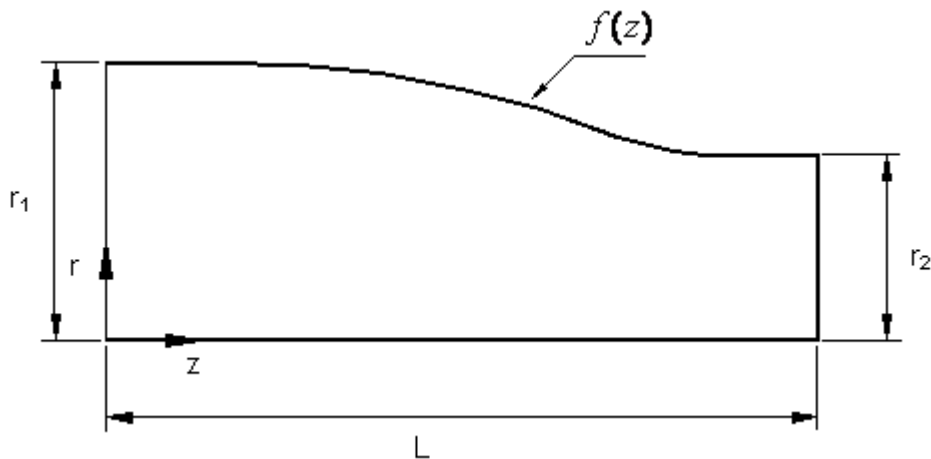


Figura 4.1- Geometria da contração com simetria cilíndrica.

A Equação que modela o escoamento e as condições de contorno para esse tipo de problema são:

$$\frac{\partial^2 \Psi(z, r)}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(z, r)}{\partial r} \right] = 0 \quad (4.1.9a)$$

$$\Psi(0, r) = u_o \frac{r^2}{2} \quad r \in (0, r_1), \quad (4.1.9b)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi(z, r)}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad r \in (0, r_2), \quad (4.1.9c)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi(z, r)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad z \in [0, L], \quad (4.1.9d)$$

$$\Psi[z, f(z)] = u_o \frac{r_1^2}{2} \quad z \in [0, L]. \quad (4.1.9e)$$

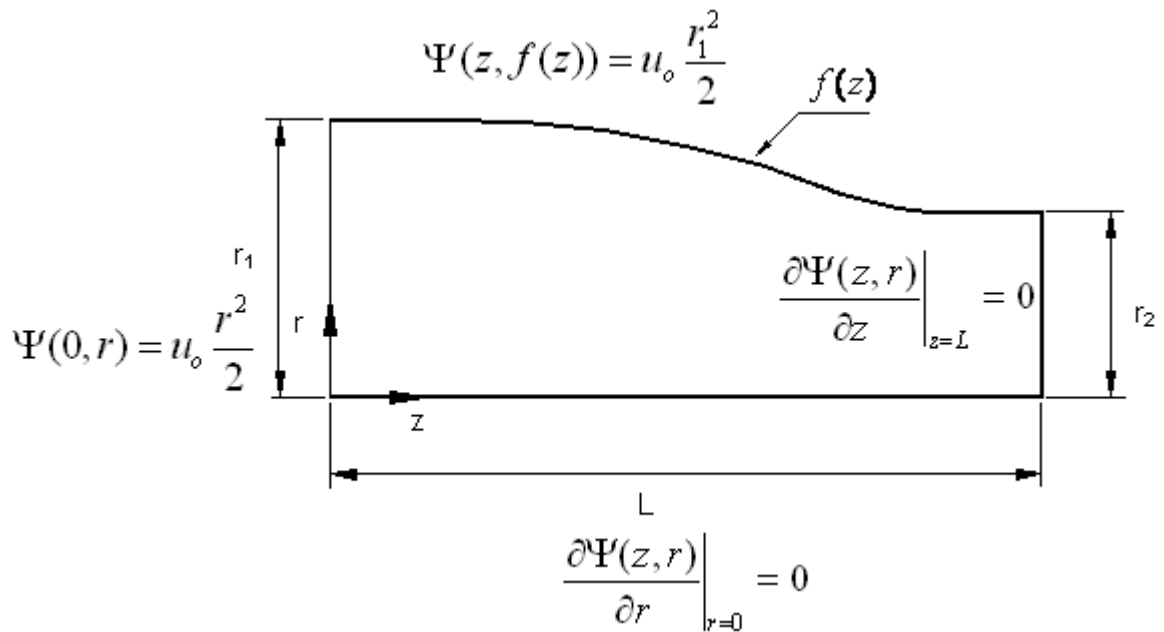


Figura 4.2– Geometria da contração com condições de contorno.

Pode-se definir variáveis adimensionais como segue:

$$Z \equiv \frac{z}{r_1}, R_s \equiv \frac{L}{r_1}, R \equiv \frac{r}{r_1}, R_c \equiv \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2, F(Z) \equiv \frac{f(z)}{r_1} \quad \text{e} \quad \Psi^*(Z, R) \equiv \frac{\Psi(z, r)}{u_o r_1^2}. \quad (4.1.10a-f)$$

Os parâmetros  $R_c$ , equações (4.1.10b), e  $R_s$ , equações (4.1.10d), são denominadas, respectivamente, de razão de contração e razão de esbeltez.

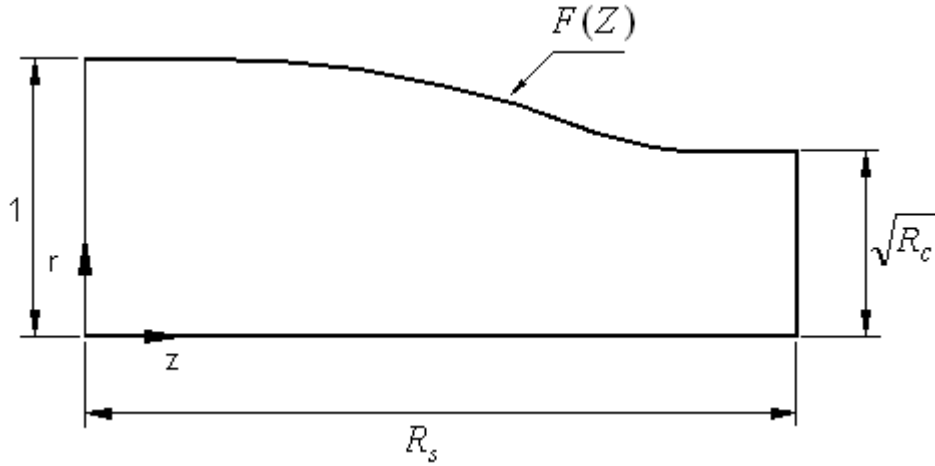


Figura 4.3– Geometria da contração com eixos adimensionais.

Re-escrevendo as equações (4.1.9a-e) e considerando as adimensionalizações, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \Psi^*(Z, R)}{\partial Z^2} + R \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^*(Z, R)}{\partial R} \right] = 0, \quad (4.1.11a)$$

$$\Psi^*(0, R) = \frac{R^2}{2}, \quad R \in (0, 1) \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial \Psi^*(Z, R)}{\partial Z} \right|_{Z=R_s} = 0, \quad R \in (0, \sqrt{R_c}); \quad (4.1.11b-c)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi^*(Z, R)}{\partial R} \right|_{R=0} = 0, \quad Z \in [0, R_s] \quad \text{e} \quad \Psi^*[Z, P(Z)] = \frac{1}{2}, \quad Z \in [0, R_s]. \quad (4.1.11d-e)$$

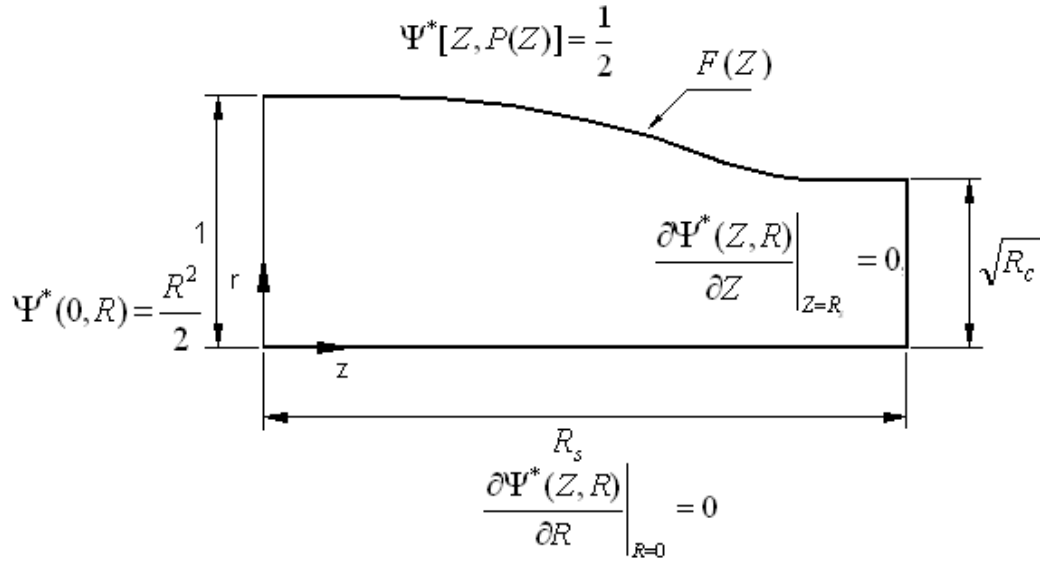


Figura 4.4- Condições de contorno adimensionais e geometria da contração.

Como conseqüência da adimensionalização dos parâmetros que compõem o equacionamento, as componentes do vetor velocidade tornam-se:

$$U(Z, R) \equiv \frac{u(z, r)}{u_o} = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^*(Z, R)}{\partial R}, \quad \text{e} \quad V(Z, R) \equiv \frac{v(z, r)}{u_o} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^*(Z, R)}{\partial Z} \quad (4.1.12a-b)$$

As condições de contorno (4.1.11b-e) não são homogêneas, sendo assim é possível torná-las homogêneas alterando a variável dependente  $\Psi^*(X, Y)$  da seguinte forma

$$\Psi^*(Z, R) = \Psi^+(Z, R) + \frac{R^2}{2F^2(Z)}. \quad (4.1.13)$$

Assim, as equações (4.1.11a-e) são modificadas para:

$$\frac{\partial^2 \Psi^+(Z, R)}{\partial Z^2} + R \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^+(Z, R)}{\partial R} \right] = G(Z, R) = R^2 \left[ \frac{1}{F^3} \frac{d^2 F}{dZ^2} - \frac{3}{F^4} \left( \frac{dF}{dZ} \right)^2 \right], \quad (4.1.14a)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi^+(Z, R)}{\partial R} \right|_{R=0} = 0, \quad Z \in [0, R_s] \quad \text{e} \quad \Psi^+[Z, F(Z)] = 0, \quad Z \in [0, R_s], \quad (4.1.14b-c)$$

$$\Psi^+(0, R) = 0, \quad R \in (0, 1) \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial \Psi^+(Z, R)}{\partial Z} \right|_{Z=R_s} = 0, \quad R \in (0, \sqrt{R_c}). \quad (4.1.14d-e)$$

Desta forma, as novas condições de contorno dispostas na Figura 4.5, da geometria da contração, apresentam-se,

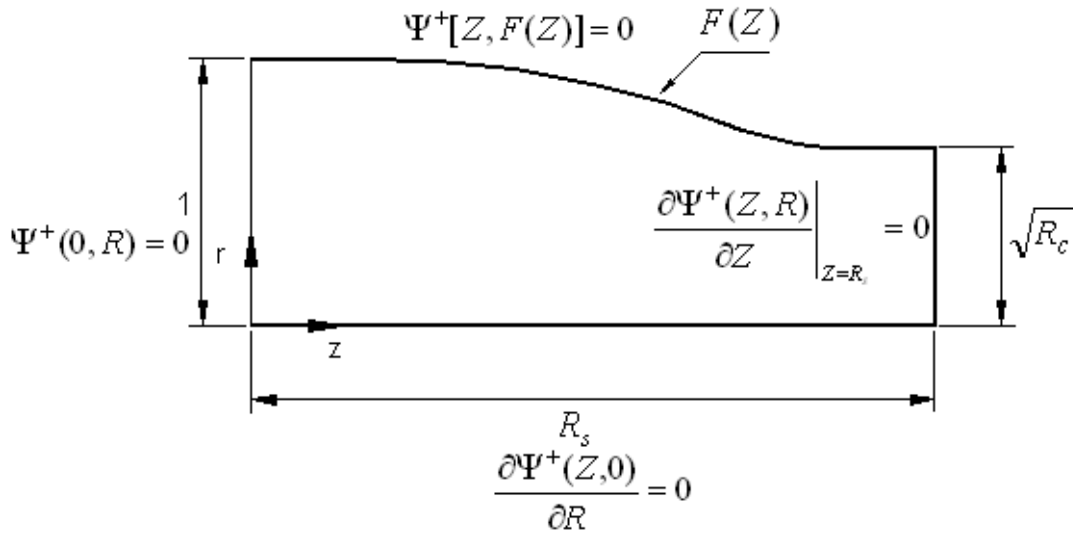


Figura 4.5 Condições de contorno na variável dependente modificada.

## 4.2 A FUNÇÃO $F(Z)$ QUE DESCREVE A PAREDE DA CONTRAÇÃO.

A função  $F(Z)$  deve atender todos os aspectos que mencionados para a função  $F(X)$ , no capítulo 3. No Capítulo 5, algumas opções para a  $F(X)$  e  $F(Z)$  serão estabelecidas.

## 4.3 APLICANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NA DIREÇÃO $R$ .

A fim de transformar as equações que governam o problema, apresentado acima, é escolhido, de acordo com Aparecido (1997) o seguinte problema de autovalor

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \psi(Z, R)}{\partial R} \right] + \lambda^2(Z) \psi(Z, R) = 0, \quad 0 < R < P(Z). \quad (4.3.1a)$$

A equação (4.3.1a) estará sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial \psi(Z, R)}{\partial R} \right|_{R=0} = 0 \quad \text{e} \quad \psi(Z, R) \Big|_{R=F(Z)} = 0. \quad (4.3.1b-c)$$

Resolvendo a equação diferencial ordinária, com  $Z$  parametrizado, tem-se como solução as seguintes autofunções ortonormais

$$\psi_i(Z, R) = \frac{\sqrt{2}}{F(Z)J_0[\lambda_i F(Z)]} R J_1(\lambda_i R), \quad i = 1, 2, \dots, \infty, \quad (4.3.2a)$$

na qual os autovalores são obtidos através da seguinte equação

$$J_1[\lambda_i F(Z)] = 0 \Rightarrow \lambda_i(Z) = \frac{i\text{-ésima raiz de } J_1}{F(Z)}, \quad i = 1, 2, \dots, \infty. \quad (4.3.2b)$$

$J_0$  e  $J_1$  são funções de Bessel do primeiro tipo e ordens zero e um, respectivamente.

Usando o conjunto das autofunções ortonormais  $\psi_i(Z, R)$ ,  $i = 1, 2, \dots, \infty$  pode-se definir uma transformada integral relacionada ao eixo  $R$ , e também a respectiva transformada inversa (Cotta, 1993), como segue:

$$\text{Transformada: } \tilde{\Psi}_i^+(Z) = \int_0^{F(Z)} \frac{1}{R} \psi_i(Z, R) \Psi^+(Z, R) dR, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \infty, \quad (4.3.3)$$

$$\text{Transformada Inversa: } \Psi^+(Z, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(Z, R) \tilde{\Psi}_i^+(Z). \quad (4.3.4)$$

Visando transformar a equação diferencial parcial original (4.1.14a), deve-se multiplicá-la pelas autofunções  $\frac{\psi_i(Z, R)}{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, \infty$ . Paralelamente, a equação do problema de autovalor auxiliar (4.3.1a) deve ser multiplicada pela variável dependente da



equação (4.1.14a),  $\frac{\Psi^+(Z, R)}{R}$ . As equações resultantes são subtraídas uma da outra e a equação resultante é integrada sobre domínio  $[0, F(Z)]$ , levando em consideração as condições de contorno, associadas ao eixo R, das equações (4.1.14a e 4.3.1.a). A equação resultante desse processo torna-se

$$\frac{d^2 \tilde{\Psi}_i^+(Z)}{dZ^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ a_{ij}(Z) \frac{d \tilde{\Psi}_j^+(Z)}{dZ} + b_{ij}(Z) \tilde{\Psi}_j^+(Z) \right] - \lambda_i^2(Z) \tilde{\Psi}_i^+(Z) = \tilde{g}_i, \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad (4.3.5)$$

na qual

$$a_{ij}(Z) = 2 \int_0^{F(Z)} \frac{1}{R} \psi_i(Z, R) \frac{\partial \psi_j(Z, R)}{\partial Z} dR \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{ii}(Z) = 0 \\ a_{ij}(Z) = \frac{4\lambda_i^*}{\lambda_i^{*2} - \lambda_j^{*2}} \frac{1}{F} \frac{dF}{dZ} \end{cases} \quad (4.3.6a)$$

$$b_{ij}(Z) = \int_0^{F(Z)} \frac{1}{R} \psi_i(Z, R) \frac{\partial^2 \psi_j(Z, R)}{\partial Z^2} dR \quad (4.3.6b)$$

e  $\lambda^*$  é a raiz das funções de Bessel, então

$$\begin{cases} b_{ii}(Z) = -\frac{\lambda_i^*}{3} \frac{1}{F^2} \left( \frac{dF}{dZ} \right)^2, \quad \text{para } i = j \\ b_{ij}(Z) = \frac{-2\lambda_i^* \lambda_j^*}{\lambda_i^{*2} - \lambda_j^{*2}} \left[ \left( 3 + \frac{4\lambda_i^*}{\lambda_i^{*2} - \lambda_j^{*2}} \right) \frac{1}{F^2} \left( \frac{dF}{dZ} \right)^2 - \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dZ^2} \right], \quad \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (4.3.6c)$$

e

$$\tilde{g}_i(Z) = \int_0^{F(Z)} \frac{1}{R} \psi_i(Z, R) G(Z, R) dR = -\frac{\sqrt{2}}{\lambda_i^*} \left[ \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dZ^2} - \frac{3}{F^2} \left( \frac{dF}{dZ} \right)^2 \right]. \quad (4.3.7)$$

A equação (4.3.5) define um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes variáveis descritos nas equações (4.3.6-7).

Para se obter as condições de contorno para o sistema de equações (4.3.5), é necessário transformar as condições de contorno primitivas associadas à direção R, equações

(4.1.14d-e). Para que isso seja possível, basta multiplicar as referidas equações por  $\frac{\psi_i(Z,R)}{R}$  e integrar ao longo do intervalo  $[0,F(Z)]$ . O resultado desse processo são as equações a seguir:

$$\int_0^{F(Z)} \frac{1}{R} \psi_i(Z,R) \Psi^+(0,R) dR = 0 \Rightarrow \tilde{\Psi}_i^+(0) = 0, \quad (4.3.8a)$$

$$\int_0^{F(Z)} \frac{1}{R} \psi_i(Z,R) \frac{\partial \Psi^+(Z,R)}{\partial Z} dR \Big|_{Z=R_s} = 0 \Rightarrow \frac{d\tilde{\Psi}_i^+(Z)}{dZ} \Big|_{Z=R_s} = 0. \quad (4.3.8b)$$

#### 4.4 APLICANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NA DIREÇÃO Z

Para transformar o sistema de equações diferenciais ordinárias (4.3.5) submetido às condições de contorno (4.3.8a-b) escolheu-se, segundo Aparecido (1997), um problema auxiliar de autovalor definido no eixo Z conforme segue

$$\frac{d^2 \phi(Z)}{dZ^2} + \mu^2 \phi(Z) = 0, \quad 0 < Z < R_s \quad (4.4.1a)$$

sujeito às condições de contorno

$$\phi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d\phi(Z)}{dZ} \Big|_{Z=R_s} = 0. \quad (4.4.1b-c)$$

A solução da equação diferencial ordinária (4.4.1a) sujeita às condições de contorno (4.4.1b-c) leva à obtenção das autofunções ortonormais associadas ao eixo Z

$$\phi_m(Z) = \sqrt{\frac{2}{R_s}} \sin(\mu_m Z); \quad (4.4.2a)$$

na qual

$$\mu_m = \frac{(2m-1)\pi}{2R_s}, \quad m = 1, 2, \dots, \infty, \quad (3.4.2b)$$

são os autovalores.

Usando o conjunto das autofunções ortonormais  $\phi_m(Z)$ ,  $m = 1, 2, \dots, \infty$ , pode-se definir a transformada integral associada ao eixo  $Z$  e a respectiva transformada inversa

$$\text{Transformada: } \overline{\Psi}_{im}^+ = \int_0^{R_s} \phi_m(Z) \tilde{\Psi}_i^+(Z) dZ, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \infty, \quad (4.4.3a)$$

$$\text{Transformada Inversa: } \tilde{\Psi}_i^+(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(Z) \overline{\Psi}_{im}^+. \quad (4.4.3b)$$

Para transformar o sistema de equações diferenciais ordinárias (4.3.5) basta multiplicá-las pelas autofunções  $\phi_m(Z)$ ,  $m = 1, 2, \dots, \infty$ . Adicionalmente, a equação auxiliar do problema de autovalor na direção  $Z$ , deve ser multiplicada por  $\tilde{\Psi}_i^+(Z)$ ,  $i = 1, 2, \dots, \infty$ . As equações resultantes são subtraídas e integradas no domínio  $[0, R_s]$ . Após a integração e considerando as condições de contorno, (4.4.1.b,c), associadas ao eixo  $Z$ , a equação resultante é

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{ijmn} + B_{ijmn} - C_{iimn} \delta_{ij} - \mu_m^2 \delta_{ij} \delta_{mn}) \overline{\Psi}_{jn}^+ = \tilde{g}_{im}, \quad i, m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4.4)$$

O sistema de equações acima define um sistema algébrico infinito. Para obter resultados numéricos, o sistema (4.4.4) deve ser truncado em uma ordem finita suficientemente grande de acordo com a precisão desejada ou conforme os recursos computacionais disponíveis. Para números de termos iguais a  $N$ , tem-se um sistema algébrico finito, como segue

$$\sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N (A_{ijmn} + B_{ijmn} - C_{iimn} \delta_{ij} - \mu_m^2 \delta_{ij} \delta_{mn}) \overline{\Psi}_{jn}^+ = \tilde{g}_{im}, \quad i, m = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.4.5)$$

na qual

$$\overline{\Psi}_{jn}^+ = \int_0^{R_s} \phi_n(Z) \tilde{\Psi}_j^+(Z) dZ, \quad (4.4.6a)$$

$$A_{ijmn} = \int_0^{R_s} a_{ij}(Z) \phi_m(Z) \frac{d\phi_n(Z)}{dZ} dZ, \quad B_{ijmn} = \int_0^{R_s} b_{ij}(Z) \phi_m(Z) \phi_n(Z) dZ, \quad (4.4.6b-c)$$

$$D_{iimn} = (i - \text{ésima raiz de } J_1)^2 \int_0^{R_s} \frac{\phi_m(Z)\phi_n(Z)}{F^2(Z)} dZ, \quad \bar{\tilde{g}}_{im} = \int_0^{R_s} \phi_m(Z)\tilde{g}_i(Z)dZ. \quad (4.4.6d-e)$$

A equação (4.4.5) é um sistema linear algébrico e pode ser escrito na forma matricial como

$$\mathbf{A}\Phi = \mathbf{g}, \quad (4.4.7)$$

na qual  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada que representa a contribuição dos coeficientes  $B_{ijmn}$ ,  $C_{ijmn}$ ,  $D_{iimn}\delta_{ij}$ , e  $\mu_m^2\delta_{ij}\delta_{mn}$ . Os  $\delta$ 's são os deltas de Kronecker, os vetores  $\Phi$  e  $\mathbf{g}$  são definidos como

$$\Phi \equiv [\bar{\tilde{\Psi}}_{11}, \bar{\tilde{\Psi}}_{12}, \dots, \bar{\tilde{\Psi}}_{1N}, \bar{\tilde{\Psi}}_{21}, \bar{\tilde{\Psi}}_{22}, \dots, \bar{\tilde{\Psi}}_{2N}, \dots, \bar{\tilde{\Psi}}_{N1}, \bar{\tilde{\Psi}}_{N2}, \dots, \bar{\tilde{\Psi}}_{NN}]^T, \quad (4.4.8a)$$

$$\mathbf{g} \equiv [g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1N}, g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2N}, \dots, g_{N1}, g_{N2}, \dots, g_{NN}]^T. \quad (4.4.8b)$$

A solução simbólica do sistema linear algébrico é dada por

$$\Phi = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}. \quad (4.4.9)$$

Após a obtenção de  $\Phi$  com a solução do sistema algébrico linear, equação (4.4.7), tem-se os elementos  $\bar{\tilde{\Psi}}_{im}^+$  e então, utilizando as fórmulas de inversão para as expressões correspondentes aos eixos  $Z$  e  $R$ , obtém-se a função linha de corrente que resulta

$$\Psi^*(Z, R) = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N \psi_i(Z, R)\phi_m(Z)\bar{\tilde{\Psi}}_{im}^+ + \frac{R^2}{2F^2(Z)}. \quad (4.4.10)$$

Tendo obtido a função linha de corrente (3.4.10), é possível calcular os componentes do campo de velocidade  $U$  e  $V$  do escoamento no interior da contração.

Usando as relações entre campo de velocidade e linha de corrente, tem-se

$$U(Z, R) = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^*(Z, R)}{\partial R} = F^{-2}(Z) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial \psi_i(Z, R)}{R \partial R} \phi_m(Z)\bar{\tilde{\Psi}}_{im}^+ \quad (4.4.11a)$$

$$V(Z, R) = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^*(Z, R)}{\partial Z} = R \frac{F'(Z)}{F^3(Z)} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial \psi_i(Z, R)}{R \partial Z} \phi_m(Z) + \psi_i(Z, R) \frac{d\phi_m(Z)}{R dZ} \right] \bar{\Psi}_{im}^+ \quad (4.4.11b)$$

#### 4.5 COMPONENTES DA VELOCIDADE JUNTO A PAREDE E COEFICIENTE DE PRESSÃO

As componentes do campo de velocidade na parede e o coeficiente de pressão são representados aqui, respectivamente, por  $U_w(Z)$ ,  $V_w(Z)$  e  $Cp_w(Z)$ .

Utilizando as expressões de  $U(Z, R)$  e  $V(Z, R)$  descritas em (4.4.11a-b), consegue-se escrever  $U_w(Z)$  e  $V_w(Z)$  aplicando em  $R = F(Z)$  assim:

$$U_w(Z) \equiv U[Z, F(Z)] = F^{-2}(Z) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial \psi_i(Z, R)}{\partial R} \Big|_{R=F(Z)} \phi_m(Z) \bar{\Psi}_{im}^+ \quad (4.5.1)$$

$$V_w(Z) \equiv V(Z, F(Z)) = \frac{F'(Z)}{F^2(Z)} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial \psi_i(Z, R)}{R \partial Z} \Big|_{R=F(Z)} \phi_m(Z) \bar{\Psi}_{im}^+ . \quad (4.5.2)$$

Consegue-se também obter o cálculo da distribuição de pressão na parede de acordo com a definição

$$Cp_w(Z) \equiv \frac{2(p_w - p_o)}{\rho u_0^2} = 1 - U_w^2(Z) - V_w^2(Z) \quad (4.5.3)$$

na qual  $p_o$  é a pressão na entrada,  $Z = 0$ .

#### 4.6 MEDIDA DA UNIFORMIDADE DA VELOCIDADE NA SAÍDA DA CONTRAÇÃO

Semelhante ao que ocorre em contrações cartesianas, também em contrações cilíndricas é desejável que na saída distribuição de velocidade seja a mais uniforme possível. Isto se deve ao fato de que, em geral, logo após o final da contração vem a seção de testes. Pode-se, em analogia ao desenvolvido no capítulo 3, então definir um indicador de qualidade baseado no quanto uma dada contração consegue produzir distribuição de velocidade próxima àquela uniforme obtida usando o princípio da conservação da massa.

Definindo a componente  $U(Z,R)$  do campo de velocidade, na saída da contração,  $Z = R_s$ , como segue

$$U_s(R) \equiv U(R_s, R), \quad (4.6.1)$$

e sabendo que a velocidade uniforme,  $\bar{U}_s$ , segundo o princípio da conservação, na saída da contração é

$$\bar{U}_s = R_c^{-1}. \quad (4.6.2)$$

Assim, pode-se definir uma medida, norma, para quantificar a não-uniformidade da distribuição de velocidade,  $\Delta U_s$ , na saída da contração e que leve em consideração a curvatura existente em coordenadas cilíndricas

$$\Delta U_s \equiv \frac{2 \int_0^{\sqrt{R_c}} |U_s(R) - \bar{U}_s| R dR}{\bar{U}_s R_c} = 2 \int_0^{\sqrt{R_c}} |U_s(R) - \bar{U}_s| R dR. \quad (4.6.3)$$

## 5 FUNÇÕES USADAS PARA MODELAR O FORMATO DA PAREDE DA CONTRAÇÃO

Conforme mencionado, rapidamente, no capítulo 3, a função que modela o formato da parede da contração deve atender a certos requisitos de continuidade. Como na formulação apresentada nos capítulos 3 e 4 aparecem a função e suas derivadas de primeira e segunda ordem, então é desejável, é importante que a função seja de classe  $C^2$ , em seu intervalo de definição.

A seguir apresenta-se o desenvolvimento de algumas funções de natureza polinomial e uma trigonométrica. Também se desenvolve funções polinomiais e trigonométrica, mas que são contínuas por partes.

Apresenta-se também a formulação da função de parede e suas respectivas derivadas utilizando o sistema de coordenadas cartesiano. A formulação obtida é muito semelhante à obtida para coordenadas cilíndricas. Ao final do capítulo apresenta-se as modificações necessárias para se adaptar a formulação para contrações modeladas em coordenadas cilíndricas.

### 5.1 CASO A: GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO NA FORMA SIMPLIFICADA

Nesse caso A, trata-se de modelar a geometria da contração tal como apresentada na Figura 3.3.

As restrições relativamente à função da parede da contração são:

$$F(0) = 1 \quad \text{e} \quad F(R_s) = R_c. \quad (5.1.1a-b)$$

Contração é acessório que faz a ligação entre duas partes de tubulações, as quais possuem paredes paralelas. Assim, a derivada primeira da função de parede é nula na tubulação imediatamente antes da contração e na tubulação imediatamente após a contração. Por continuidade a primeira derivada da função deve ser nula na entrada e na saída da contração. Assim, as restrições para as primeiras derivadas da função tornam-se:

$$\left. \frac{dF(X)}{dX} \right|_{X=0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{dF(X)}{dX} \right|_{X=R_s} = 0. \quad (5.1.2a-b)$$

Para as derivadas de segunda ordem pode-se realizar arrazoado semelhante ao efetuado para as de primeira ordem. Nesse caso as restrições são:

$$\left. \frac{d^2F(X)}{dX^2} \right|_{X=0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^2F(X)}{dX^2} \right|_{X=R_s} = 0. \quad (5.1.3a-b)$$

As restrições apresentadas anteriormente são as mais importantes. Seria possível também fazer restrições sobre derivadas acima de segunda ordem.

### **5.1.1 FUNÇÃO POLINOMIAL DE TERCEIRO GRAU – A1**

Um polinômio de terceiro grau possui quatro parâmetros e, portanto, pode representar até quatro restrições. Aplicando ao polinômio

$$F(X) = a + bX + cX^2 + dX^3, \quad (5.1.1.1a)$$

as restrições (5.1.1a-b) e (5.1.2a-b) obtém-se a função de parede e em conseqüência suas respectivas derivadas apresentadas a seguir

$$F(X) = 1 + (R_c - 1) \left[ 3 \left( \frac{X}{R_s} \right)^2 - 2 \left( \frac{X}{R_s} \right)^3 \right] = 1 + (R_c - 1) \left( \frac{X}{R_s} \right)^2 \left[ 3 - 2 \left( \frac{X}{R_s} \right) \right], \quad (5.1.1.1b)$$



$$\frac{dF(X)}{dX} = \frac{6(R_c - 1)}{R_s} \left[ \left( \frac{X}{R_s} \right) - \left( \frac{X}{R_s} \right)^2 \right] = \frac{6(R_c - 1)}{R_s} \left( \frac{X}{R_s} \right) \left[ 1 - \left( \frac{X}{R_s} \right) \right], \quad (5.1.1.1c)$$

$$\frac{d^2F(X)}{dX^2} = \frac{6(R_c - 1)}{R_s^2} \left[ 1 - 2 \left( \frac{X}{R_s} \right) \right]. \quad (5.1.1.1d)$$

Nesse caso, como não houve restrições sobre as segundas derivadas elas assumem os seguintes valores nas extremidades do intervalo de definição

$$\left. \frac{d^2F(X)}{dX^2} \right|_{X=0} = \frac{6(R_c - 1)}{R_s^2} \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^2F(X)}{dX^2} \right|_{X=R_s} = \frac{-6(R_c - 1)}{R_s^2} \quad (5.1.1.2a-b)$$

A segunda derivada do polinômio de terceiro grau anula-se para  $X = X^* = R_s/2$ , ou seja, na metade do intervalo  $[0, R_s]$ . No intervalo  $[0, R_s/2)$  a derivada segunda será negativa e no intervalo  $(R_s/2, R_s]$  será positiva porque  $R_c < 1$ . A posição  $X^*$  é o local onde há inflexão na curvatura da curva. Para  $X < X^*$  a curvatura da curva é negativa e para  $X > X^*$  a curvatura é positiva.

### 5.1.2 FUNÇÃO POLINOMIAL DE QUARTO GRAU - A2

Polinômios de quarto grau

$$F(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 \quad (5.1.2.1a)$$

possuem cinco parâmetros por determinar. As equações (5.1.1a-b) e (5.1.2a-b) formam um conjunto de quatro restrições. Utilizando essas quatro restrições pode-se determinar quatro dos parâmetros como função do quinto parâmetro que fica indeterminado. Realizando procedimento similar ao descrito para o polinômio de terceiro grau obtém-se o seguinte polinômio de quarto grau e respectivas derivadas de primeira e segunda ordem

$$F(X) = 1 + [\varepsilon + 3(R_c - 1)]\left(\frac{X}{R_s}\right)^2 - 2[\varepsilon + (R_c - 1)]\left(\frac{X}{R_s}\right)^3 + \varepsilon\left(\frac{X}{R_s}\right)^4, \quad (5.1.2.1b)$$

$$\frac{dF(X)}{dX} = \frac{2}{R_s} \left\{ [\varepsilon + 3(R_c - 1)]\left(\frac{X}{R_s}\right) - 3[\varepsilon + (R_c - 1)]\left(\frac{X}{R_s}\right)^2 + 2\varepsilon\left(\frac{X}{R_s}\right)^3 \right\}, \quad (5.1.2.1c)$$

$$\frac{d^2F(X)}{dX^2} = \frac{2}{R_s^2} \left\{ [\varepsilon + 3(R_c - 1)] - 6[\varepsilon + (R_c - 1)]\left(\frac{X}{R_s}\right) + 6\varepsilon\left(\frac{X}{R_s}\right)^2 \right\}. \quad (5.1.2.1d)$$

O parâmetro  $\varepsilon$  precisa ser arbitrado, no entanto, esse arbitramento deve-se ser de tal modo que a função parede obtida represente uma contração e não uma expansão ou formas mais complexas. Parte das informações contidas nas restrições (5.1.2a-b) podem ser usadas para estabelecer limites no arbitramento de  $\varepsilon$ .

Ao se fazer na equação (5.1.2.1b) o parâmetro  $\varepsilon$  igual a zero, isto é  $\varepsilon = 0$ , o polinômio passa de quarto grau para terceiro grau, exatamente o mesmo da equação (5.1.1.1b), e, portanto com inflexão de curvatura na posição  $X = X^* = R_s/2$ .

Para o polinômio de quarto grau é razoável supor que quando são definidos valores de  $\varepsilon$  diferentes de zero, o ponto de inflexão, no intervalo  $[0, R_s]$ , será deslocado a um ponto que difere da metade da relação de esbeltez. Seguindo esta idéia, pode se imaginar um valor crítico adequado,  $\varepsilon_{cr}$  para  $\varepsilon$  que produzirá um ponto de inflexão no início do intervalo, significando  $X = X^* = 0$ . Matematicamente, esta idéia leva à seguinte formulação

$$\left. \frac{d^2F(X)}{dX^2} \right|_{X=X^*=0} = \frac{2}{R_s^2} [\varepsilon_{c,i} + 3(R_c - 1)] \equiv 0 \Rightarrow \varepsilon_{c,i} = -3(R_c - 1) = 3(1 - R_c) > 0. \quad (5.1.2.2a-b)$$

Ao arbitrar-se  $\varepsilon = \varepsilon_{c,i} > 0$  na equação (5.1.2.1d), a derivada segunda terá duas raízes já que é um polinômio de segunda ordem. Uma raiz está em  $X = X^* = 0$  conforme foi considerado inicialmente, a outra raiz está em  $X = X^* = 2R_s/3$ , significando que a função de parede terá dois pontos de inflexão dentro do intervalo, um deles na extremidade  $X = 0$  e o outro a dois terços do comprimento adimensional da contração.

Da mesma forma pode-se encontrar um valor crítico associado ao deslocamento do ponto de inflexão da curvatura para o final do intervalo  $X = X^* = R_s$  denominado de  $\varepsilon_{c,f}$  para

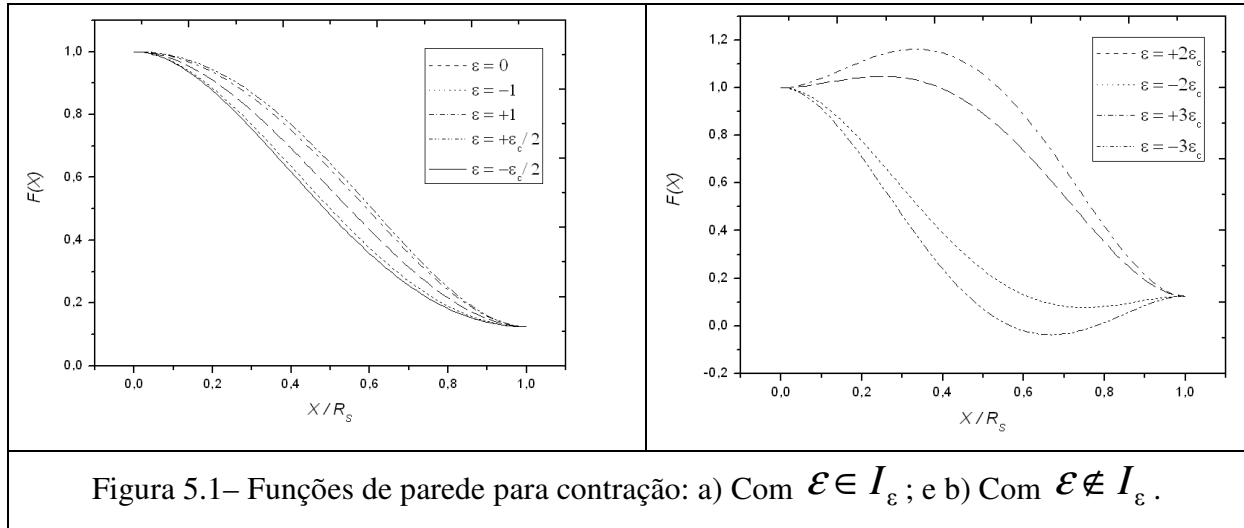
$\varepsilon$ . Para essa posição a segunda derivada do polinômio de quarta ordem sob essa condição torna-se

$$\left. \frac{d^2 F(X)}{dX^2} \right|_{X=X^*=R_s} = \frac{2}{R_s^2} \{ [\varepsilon_{c,f} + 3(R_c - 1)] - 6[\varepsilon_{c,f} + (R_c - 1)] + 6\varepsilon_{c,f} \} \equiv 0 \Rightarrow \varepsilon_{c,f} = 3(R_c - 1) < 0. \quad (5.1.2.2c-d)$$

Note-se que  $\varepsilon_{c,f} = -\varepsilon_{c,i} \Leftrightarrow \varepsilon_{c,i} = -\varepsilon_{c,f} \equiv \varepsilon_c \equiv 3(1 - R_c) > 0$ . Destes resultados, conclui-se que o parâmetro  $\varepsilon$  deve pertencer ao seguinte intervalo,  $I_\varepsilon$

$$I_\varepsilon = \{ \varepsilon_{c,f} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{c,i} \} = \{ -\varepsilon_c \leq \varepsilon \leq +\varepsilon_c \}, \quad (5.1.2.2e)$$

caso contrário a função de parede produzida não representará uma contração, conforme pode ser visto nas Figuras 5.1a,b.



A figura (5.1a) mostra que as diferentes funções possuem um comportamento monótono aceitável para  $\varepsilon$  dentro do intervalo  $I_\varepsilon$ . As funções na figura (5.1b) para  $\varepsilon$  fora do intervalo  $I_\varepsilon$  mostram um comportamento divergente inaceitável para a contração.

### 5.1.3 FUNÇÃO POLINOMIAL DE QUINTO GRAU - A3

O polinômio de terceiro grau desenvolvido anteriormente atende às restrições (5.1.1a-b) e (5.1.2a-b) e não atende às restrições (5.1.3a-b).

O polinômio de quarto grau, apresentado anteriormente, também atende às restrições (5.1.1a-b) e (5.1.2a-b) e pode atender mais uma restrição conforme o valor arbitrado para o parâmetro  $\epsilon$ , dentro de seu intervalo de definição. Mas, não pode atender às condições (5.1.3a-b) simultaneamente. Os polinômios que podem fazê-lo são os de quinto grau

$$F(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 + fX^5, \quad (5.1.3.1a)$$

o qual após a aplicação das restrições (5.1a,b), (5.2a,b) e (5.3a,b), torna-se

$$F(X) = 1 + (R_c - 1) \left[ 10 \left( \frac{X}{R_s} \right)^3 - 15 \left( \frac{X}{R_s} \right)^4 + 6 \left( \frac{X}{R_s} \right)^5 \right], \quad (5.1.3.1b)$$

cujas primeira e segunda derivadas são:

$$\frac{dF(X)}{dX} = \frac{30(R_c - 1)}{R_s} \left[ \left( \frac{X}{R_s} \right)^2 - 2 \left( \frac{X}{R_s} \right)^3 + \left( \frac{X}{R_s} \right)^4 \right], \quad (5.1.3.1c)$$

$$\frac{d^2F(X)}{dX^2} = \frac{60(R_c - 1)}{R_s} \left[ \left( \frac{X}{R_s} \right) - 3 \left( \frac{X}{R_s} \right)^2 + 2 \left( \frac{X}{R_s} \right)^3 \right]. \quad (5.1.3.1d)$$

Note-se que o polinômio de quinto grau também apresenta ponto de inflexão de curvatura na metade do intervalo  $[0, R_s]$ , isto é, na posição  $X = X^* = R_s/2$ , semelhante ao que ocorre com o polinômio de terceiro grau.

#### 5.1.4 FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA COSSENOIDAL – A4

Uma das funções trigonométricas que pode ser usada para representar a geometria de uma contração é

$$F(X) = a + b \cos(cX + d), \quad (5.1.4.1a)$$

a qual possui quatro parâmetros e, portanto pode atender a quatro restrições, no caso aquelas expressas nas equações (5.1.1a-b) e (5.1.2a-b). Após aplicação das referidas restrições a função e suas respectivas primeira e segunda derivadas tornam-se

$$F(X) = 1 + \frac{(R_c - 1)}{2} \left[ 1 - \cos\left(\pi \frac{X}{R_s}\right) \right], \quad (5.1.4.1b)$$

$$\frac{dF(X)}{dX} = \frac{\pi}{R_s} \frac{(R_c - 1)}{2} \operatorname{sen}\left(\pi \frac{X}{R_s}\right), \quad (5.1.4.1c)$$

$$\frac{d^2F(X)}{dX^2} = \left(\frac{\pi}{R_s}\right)^2 \frac{(R_c - 1)}{2} \cos\left(\pi \frac{X}{R_s}\right). \quad (5.1.4.1d)$$

#### 5.1.5 COMPARAÇÃO DAS FUNÇÕES DO CASO “A”

Na Figura 5.2 apresenta-se os gráficos das quatro funções desenvolvidas para o Caso A, sendo que a função A2 é apresentada para dois valores do parâmetro  $\varepsilon$ . Os dois casos da função A2, para  $\varepsilon = +\varepsilon_c$  e  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ , são os extremos. A primeira tem menor taxa de mudança próximo da entrada da contração e maior taxa de mudança próximo da saída. A segunda tem comportamento inverso: muda rapidamente no início e lentamente no final. Entre esses dois extremos estão o polinômio de terceiro grau e a função trigonométrica cossenoidal. Ligeiramente diferenciada dessas duas está o polinômio de quinta ordem, o qual tem variações mais suaves na entrada e na saída e maior taxa de variação na região central do intervalo. Note-se que em todos os casos as funções iniciam com valor igual à unidade, no início do intervalo, e variam monotonamente até o final da contração onde terminam com valor igual a  $R_c$ .

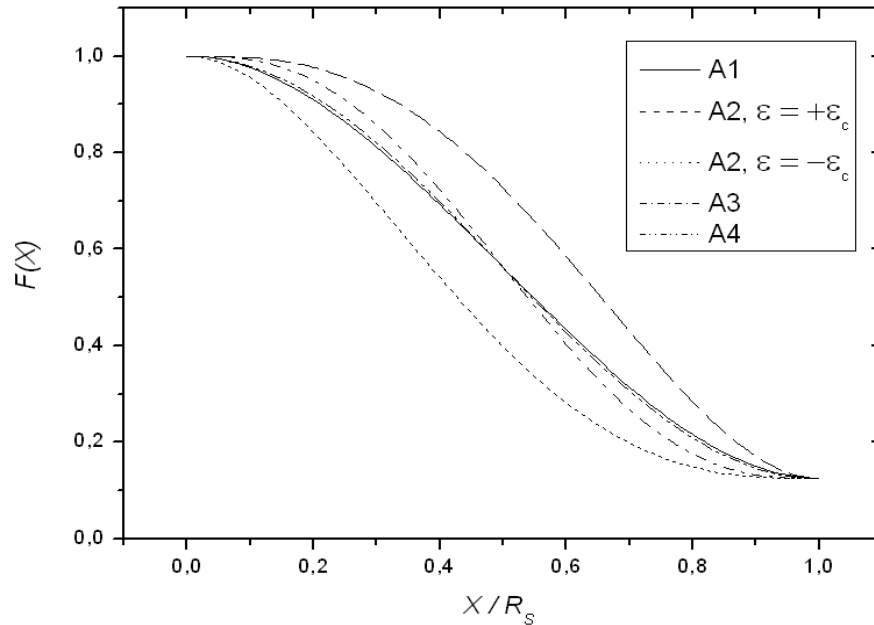


Figura 5.2 Diferentes casos da função  $F(X)$ .

As taxas de variações das funções  $F(X)$  podem ser observadas na Figura 5.3 onde se apresenta os gráficos de suas derivadas. Nota-se que todos os valores das derivadas são negativos, isso se deve ao fato das funções serem monótonas decrescentes. Todas as derivadas são contínuas, iniciando com o valor nulo e terminando também com valor nulo, em conformidade com as restrições impostas às funções. Os polinômios de terceiro e quinto graus, e a função cossenoidal apresentam derivadas simétricas em relação à posição  $X = R_s/2$ . As funções representadas pelo polinômio de quarto grau, nos casos em que  $\varepsilon = +\varepsilon_c$  e  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ , não apresentam simetria em suas primeiras derivadas em relação à posição  $X = R_s/2$ . Note que o polinômio de quarto grau, para  $\varepsilon = +\varepsilon_c$ , apresenta maiores valores absolutos de sua derivada para  $X > R_s/2$ , e que o polinômio para  $\varepsilon = -\varepsilon_c$  apresenta os maiores valores absolutos para  $X < R_s/2$ . O polinômio de quinto grau é a função que apresenta o maior valor absoluto de sua derivada, sendo que esse máximo ocorre na posição  $X < R_s/2$ . Em consequência esse polinômio apresenta as menores derivadas, em valor absoluto, em ambas as partes inicial e final da contração.

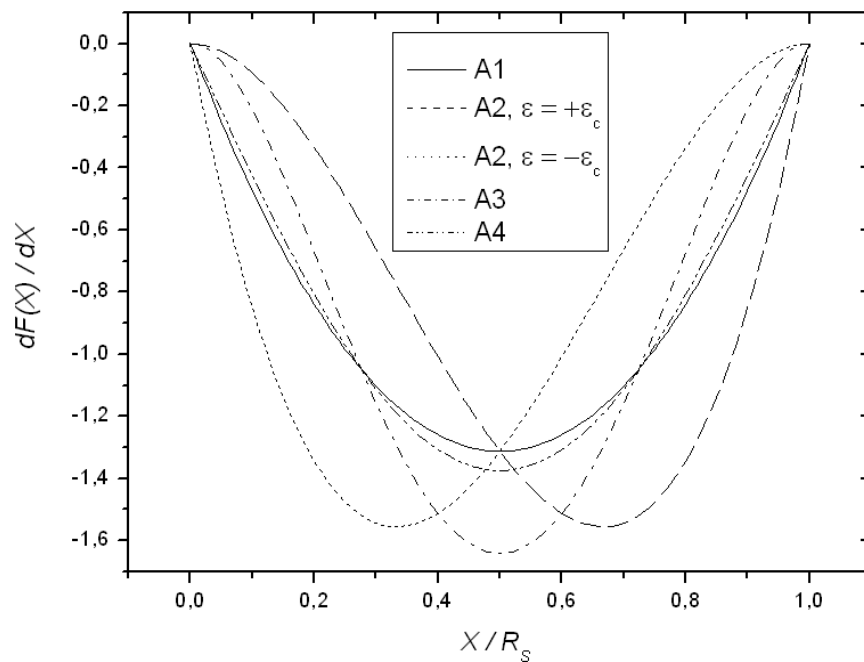


Figura 5.3- Derivada de primeira ordem para as várias funções  $F(X)$ .

As derivadas segundas das funções  $F(X)$  são apresentadas na Figura 5.3. Todas são contínuas no intervalo de definição, mas apenas o polinômio do quinto grau atende completamente às restrições (5.1.3a-b). O polinômio de quarto grau para  $\varepsilon = +\varepsilon_c$  atende à restrição (5.1.3a), mas não atende à (5.1.3b), enquanto para  $\varepsilon = -\varepsilon_c$  atende à restrição (5.1.3b) e não atende à (5.1.3a). O polinômio de terceiro grau e a função cossenoidal não atendem às restrições (5.1.3a) e (5.1.3b). Excetuando as posições das extremidades do intervalo,  $X = 0$  e  $X = R_s$ , todas as segundas derivadas anulam-se apenas uma vez dentro do intervalo  $[0, R_s]$ , significando que no domínio mudam de curvatura negativa para positiva apenas uma vez. Essa propriedade é fundamental para a definição de funções de parede para contrações. Os polinômios de terceiro e quinto grau, e a função cossenoidal apresentam antissimetria em relação à posição  $X = R_s/2$ . O polinômio de quarto grau, nas duas versões apresentadas, não apresenta em suas segundas derivadas nem simetria, nem antissimetria. Os valores numéricos para as segundas derivadas de todas as funções analisadas mostram que no início do intervalo a curvatura da parede é negativa, depois passa por um ponto de inflexão intermediário e finalmente passa a ter curvatura positiva.

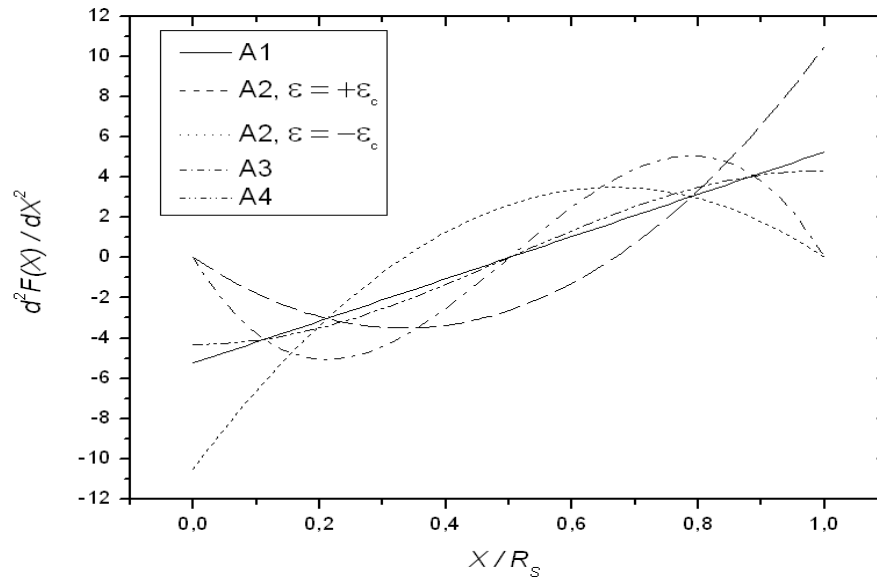


Figura 5.4- Derivada de segunda ordem para as várias funções  $F(X)$ .

## 5.2 CASO B: GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO COM EXTENSÃO NA ENTRADA

O denominado caso “B” refere-se à geometria mostrada na Figura 5.5 cuja principal diferença em relação ao caso “A” é que na região de entrada da contração existe uma parte, comprimento  $R_e$ , cujas paredes são paralelas, e, portanto  $F(X)$  para essa parte é igual à unidade. Essa extensão tem por objetivo verificar se a adição de uma extensão na região de entrada melhora, ou não, a uniformidade do escoamento na saída da contração. A fração de  $R_s$  ocupada por  $R_e$  foi definida  $\alpha$ , como segue

$$\alpha \equiv \frac{R_e}{R_s} \Leftrightarrow R_e = \alpha R_s. \quad (5.2.1a-b)$$

Essencialmente, as funções usadas no caso “B” são “as mesmas” utilizadas no caso “A”, porém no caso “A” a função  $F(X)$  está definida sobre o intervalo  $[0, R_s]$ , enquanto no caso “B” a função  $F(X)$ , redenominada de  $F^*(X)$ , está definida sobre o intervalo  $[R_e, R_s]$ . No intervalo  $[0, R_e)$  a função  $F(X)$  é igual à unidade. Matematicamente, então define-se

$$F(X) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq X < R_e \\ F^*(X), & \text{se } R_e \leq X \leq R_s \end{cases}. \quad (5.2.2)$$



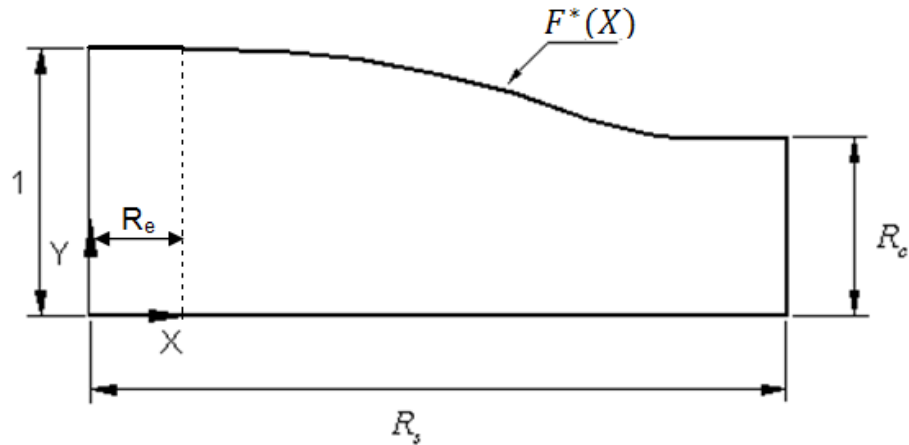


Figura 5.5- Geometria da contração com extensão na entrada.

As restrições (5.1.1a-b), (5.1.2a-b) e (5.1.3a-b) que se aplicam para a função  $F(X)$  devem ser adaptadas para a função  $F^*(X)$ , resultando

$$F^*(R_e) = 1 \quad \text{e} \quad F^*(R_s) = R_c, \quad (5.2.3a-b)$$

$$\left. \frac{dF^*(X)}{dX} \right|_{X=R_e} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{dF^*(X)}{dX} \right|_{X=R_s} = 0, \quad (5.2.4a-b)$$

$$\left. \frac{d^2F^*(X)}{dX^2} \right|_{X=R_e} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^2F^*(X)}{dX^2} \right|_{X=R_s} = 0. \quad (5.2.5a-b)$$

O desenvolvimento das funções  $F^*(X)$  é semelhante àquele já apresentado, anteriormente, nesse capítulo. Assim, nas próximas seções o procedimento não é repetido apresentando-se apenas as funções resultantes.

**Polinômio de terceiro grau – B1** – e respectivas primeira e segunda derivadas:

$$F^*(X) = 1 + (R_c - 1) \left[ 3 \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^2 - 2 \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^3 \right], \quad (5.2.6a)$$

$$\frac{dF^*(X)}{dX} = \frac{6(R_c - 1)}{R_s - R_e} \left[ \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right) - \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^2 \right], \quad (5.2.6b)$$

$$\frac{d^2F^*(X)}{dX^2} = \frac{6(R_c - 1)}{(R_s - R_e)} \left[ 1 - 2 \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right) \right]. \quad (5.2.6c)$$

**Polinômio de quarto grau – B2 –** e respectivas derivadas:

$$F^*(X) = 1 + [\varepsilon + 3(R_c - 1)] \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^2 - 2[\varepsilon + (R_c - 1)] \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^3 + \varepsilon \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^4, \quad (5.2.7a)$$

$$\frac{dF^*(X)}{dX} = \frac{2}{R_s - R_e} \left\{ [\varepsilon + 3(R_c - 1)] \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right) - 3[\varepsilon + (R_c - 1)] \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^2 + 2\varepsilon \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^3 \right\}, \quad (5.2.7b)$$

$$\frac{d^2F^*(X)}{dX^2} = \frac{2}{(R_s - R_e)^2} \left\{ [\varepsilon + 3(R_c - 1)] - 6[\varepsilon + (R_c - 1)] \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right) + 6\varepsilon \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^2 \right\}. \quad (5.2.7c)$$

Função e derivadas de primeira e segunda ordem para o **polinômio de quinto grau – B3:**

$$F^*(X) = 1 + (R_c - 1) \left[ 10 \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^3 - 15 \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^4 + 6 \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^5 \right], \quad (5.2.8a)$$

$$\frac{dF^*(X)}{dX} = \frac{30(R_c - 1)}{R_s - R_e} \left[ \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^2 - 2 \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^3 + \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^4 \right], \quad (5.2.8b)$$

$$\frac{d^2F^*(X)}{dX^2} = \frac{60(R_c - 1)}{(R_s - R_e)^2} \left[ \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right) - 3 \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^2 + 2 \left( \frac{X - R_e}{R_s - R_e} \right)^3 \right]. \quad (5.2.8c)$$

A **função trigonométrica cossenoidal – B4 –** e suas derivadas de primeira e segunda ordem são apresentadas a seguir:

$$F^*(X) = 1 + \frac{(R_c - 1)}{2} \left[ 1 - \cos\left(\pi \frac{X - R_e}{R_s - R_e}\right) \right], \quad (5.2.9a)$$

$$\frac{dF^*(X)}{dX} = \frac{\pi}{R_s - R_e} \frac{(R_c - 1)}{2} \sin\left(\pi \frac{X - R_e}{R_s - R_e}\right), \quad (5.2.9b)$$

$$\frac{d^2F^*(X)}{dX^2} = \left(\frac{\pi}{R_s - R_e}\right)^2 \frac{(R_c - 1)}{2} \cos\left(\pi \frac{X - R_e}{R_s - R_e}\right). \quad (5.2.9c)$$

Conforme mencionado anteriormente as funções do caso “B” são assemelhadas com as do caso “A”, com a diferença que na região a partir da entrada da contração até o comprimento  $R_e$  a função permanece unitária e após essa posição passa a variar e essa variação é qualitativamente semelhante àquela descrita para as funções do caso “A”. O comportamento das funções do caso “B” pode ser observado na Figura 5.6.

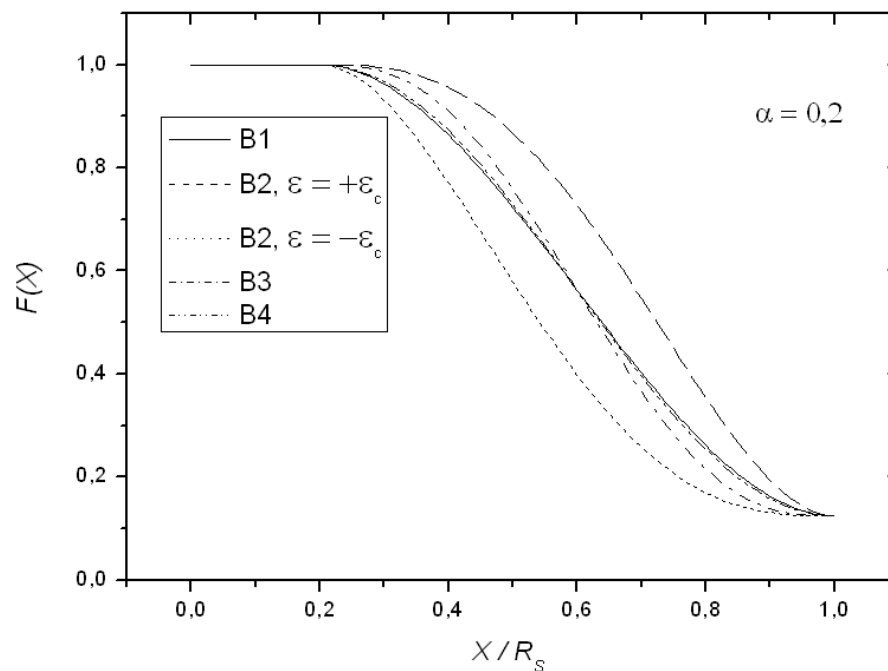


Figura 5.6- Funções  $F(X)$  para a parede, com extensão na entrada da contração.

Na Figura 5.7 pode-se visualizar as derivadas primeiras das funções  $F(X)$ . Todas são contínuas no intervalo de definição  $[0, R_s]$  e todas apresentam valores negativos ou nulos mostrando a monotonicidade das funções.

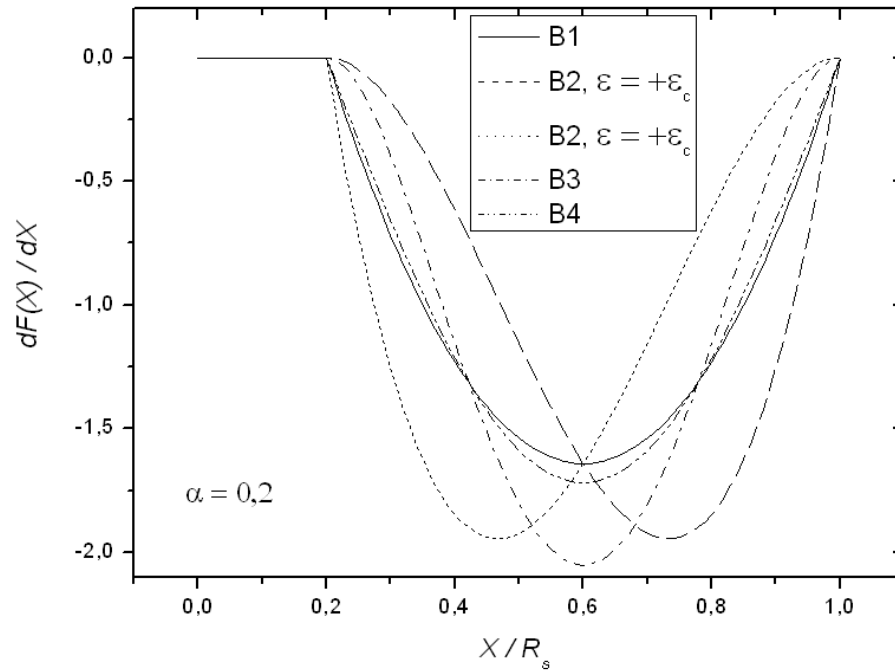


Figura 5.7- Derivadas primeiras das funções  $F(X)$ , para contrações com extensão na entrada.

As derivadas segundas das funções  $F(X)$  podem ser analisadas na Figura 5.8. A única derivada segunda totalmente contínua no intervalo  $[0, R_s]$  e que atende ambas as restrições (5.2.5a-b) é aquela correspondente ao polinômio de quinto grau – B3. O polinômio de quarto grau – B2 – para  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ , atende apenas a restrição (5.2.5b), apresentando uma descontinuidade no intervalo  $[0, R_s]$ , na posição  $X = R_e$ . Para  $\varepsilon = +\varepsilon_c$  o polinômio de quarto grau é contínuo sobre todo o intervalo  $[0, R_s]$ , mas não atende à restrição (5.2.5b). O polinômio de terceiro grau e a função cossenoidal não atendem às restrições (5.2.514a-b) e ainda apresentam uma descontinuidade na posição  $X = R_e$ .

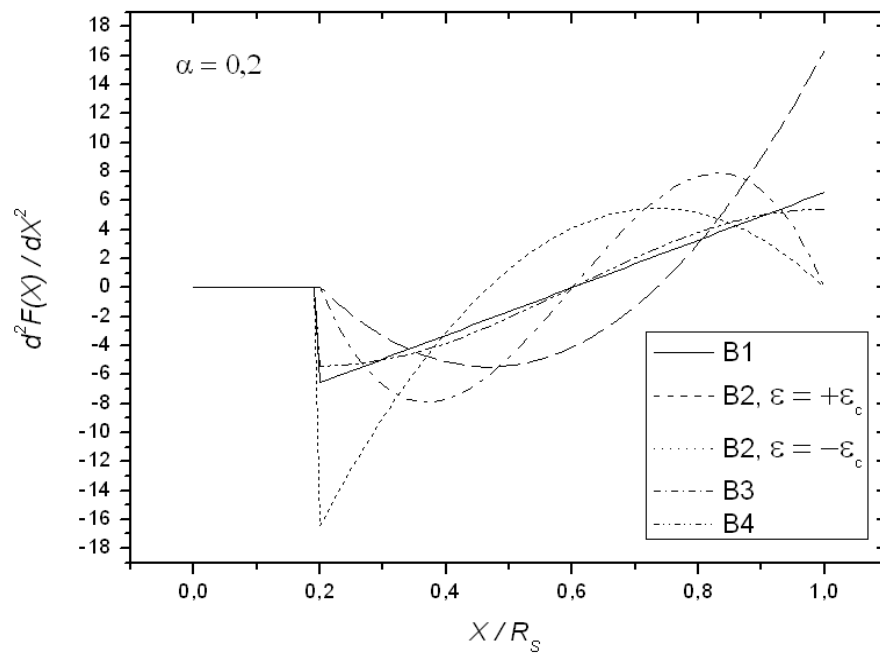


Figura 5.8- Derivadas segundas das funções  $F(X)$ , para contrações com extensão na entrada.

### 5.3 CASO C: GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO COM EXTENSÃO NA SAÍDA

Na Figura 5.9 é mostrada a geometria do chamado caso “C” cuja principal diferença em relação ao caso “B” é que a parte constante da função  $F(X)$ , no caso “C”, está na região de saída da contração, em região com comprimento  $R_e$ , cujas paredes são paralelas, e  $F(X)$  é igual a  $R_c$ , no intervalo  $(R_s - R_e, R_s]$ . O objetivo desse acréscimo é verificar se a adição de uma extensão na região de saída melhora a uniformidade do escoamento na saída daquela região. A fração de  $R_s$  ocupada por  $R_e$  foi definida  $\beta$ , como segue

$$\beta \equiv \frac{R_e}{R_s} \Leftrightarrow R_e = \beta R_s . \quad (5.3.1a-b)$$

As funções usadas no caso “C” são assemelhadas às utilizadas no caso “B”, porém no caso “B” o trecho constante da função  $F(X)$  está definido sobre o intervalo  $[0, R_e)$ , enquanto no caso “C” a parte constante da função  $F(X)$ , está definida sobre o intervalo  $(R_s - R_e, R_s]$ . Então se pode definir

$$F(X) = \begin{cases} F^*(X), & \text{se } 0 \leq X \leq (R_s - R_e) \\ R_c, & \text{se } (R_s - R_e) < X \leq R_s \end{cases} \quad (5.3.2)$$

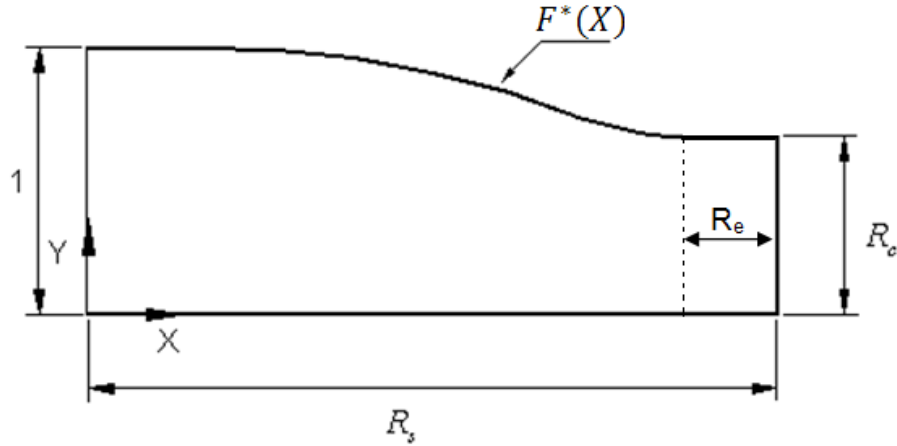


Figura 5.9- Geometria da contração com extensão na saída.

As restrições (5.2.3a-b), (5.2.4a-b) e (5.2.5a-b) que se aplicam para o caso “B” podem ser adaptadas para o caso “C”, resultando

$$F^*(0) = 1 \quad \text{e} \quad F^*(R_s - R_e) = R_c, \quad (5.3.3a-b)$$

$$\left. \frac{dF^*(X)}{dX} \right|_{X=0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{dF^*(X)}{dX} \right|_{X=R_s - R_e} = 0, \quad (5.3.4a-b)$$

$$\left. \frac{d^2F^*(X)}{dX^2} \right|_{X=0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^2F^*(X)}{dX^2} \right|_{X=R_s - R_e} = 0. \quad (5.3.5a-b)$$

Realizando-se procedimentos semelhantes aqueles efetuados para os casos “A” e “B” obtém-se as funções que modelam o formato das paredes das contrações para o caso “C”. A seguir apresenta-se as formulações resultantes.

**Polinômio de terceiro grau – C1** – e respectivas derivadas:

$$F^*(X) = 1 + (R_c - 1) \left[ 3 \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right)^2 - 2 \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right)^3 \right], \quad (5.3.6a)$$

$$\frac{dF^*(X)}{dX} = \frac{6(R_c - 1)}{R_s - R_e} \left[ \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right) - \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right)^2 \right], \quad (5.3.6b)$$

$$\frac{d^2F^*(X)}{dX^2} = \frac{6(R_c - 1)}{(R_s - R_e)^2} \left[ 1 - 2 \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right) \right]. \quad (5.3.6c)$$

Função e respectivas derivadas de primeira e segunda ordem para o **polinômio de quarto grau – C2**:

$$F^*(X) = 1 + [\varepsilon + 3(R_c - 1)] \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right)^2 - 2[\varepsilon + (R_c - 1)] \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right)^3 + \varepsilon \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right)^4, \quad (5.3.7a)$$

$$\frac{dF^*(X)}{dX} = \frac{2}{R_s - R_e} \left\{ [\varepsilon + 3(R_c - 1)] \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right) - 3[\varepsilon + (R_c - 1)] \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right)^2 + 2\varepsilon \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right)^3 \right\}, \quad (5.3.7b)$$

$$\frac{d^2F^*(X)}{dX^2} = \frac{2}{(R_s - R_e)^2} \left\{ [\varepsilon + 3(R_c - 1)] - 6[\varepsilon + (R_c - 1)] \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right) + 6\varepsilon \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right)^2 \right\}. \quad (5.3.7c)$$

**Polinômio de quinto grau – C3** – e suas derivadas de primeira e segunda ordem:

$$F^*(X) = 1 + (R_c - 1) \left[ 10 \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right)^3 - 15 \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right)^4 + 6 \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right)^5 \right], \quad (5.3.8a)$$

$$\frac{dF^*(X)}{dX} = \frac{30(R_c - 1)}{R_s - R_e} \left[ \left( \frac{x}{R_s - R_e} \right)^2 - 2 \left( \frac{x}{R_s - R_e} \right)^3 + \left( \frac{x}{R_s - R_e} \right)^4 \right], \quad (5.3.8b)$$

$$\frac{d^2F^*(X)}{dX^2} = \frac{60(R_c - 1)}{(R_s - R_e)^2} \left[ \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right) - 3 \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right)^2 + 2 \left( \frac{X}{R_s - R_e} \right)^3 \right]. \quad (5.3.8c)$$

A função trigonométrica cossenoidal – C4 – e suas derivadas de primeira e segunda ordem são expressas por:

$$F^*(X) = 1 + \frac{(R_c - 1)}{2} \left[ 1 - \cos\left(\pi \frac{X}{R_s - R_e}\right) \right], \quad (5.3.9a)$$

$$\frac{dF^*(X)}{dX} = \frac{\pi}{R_s - R_e} \frac{(R_c - 1)}{2} \operatorname{sen}\left(\pi \frac{X}{R_s - R_e}\right), \quad (5.3.9b)$$

$$\frac{d^2F^*(X)}{dX^2} = \left(\frac{\pi}{R_s - R_e}\right)^2 \frac{(R_c - 1)}{2} \cos\left(\pi \frac{X}{R_s - R_e}\right). \quad (5.3.9c)$$

As funções e respectivas derivadas de primeira e segunda ordem, correspondentes ao caso “C” são representadas graficamente nas Figuras 5.10-12. A partir do valor unitário no início da contração todas as funções decaem monotonicamente até atingir na região da saída da contração um valor constante, característico desse caso.

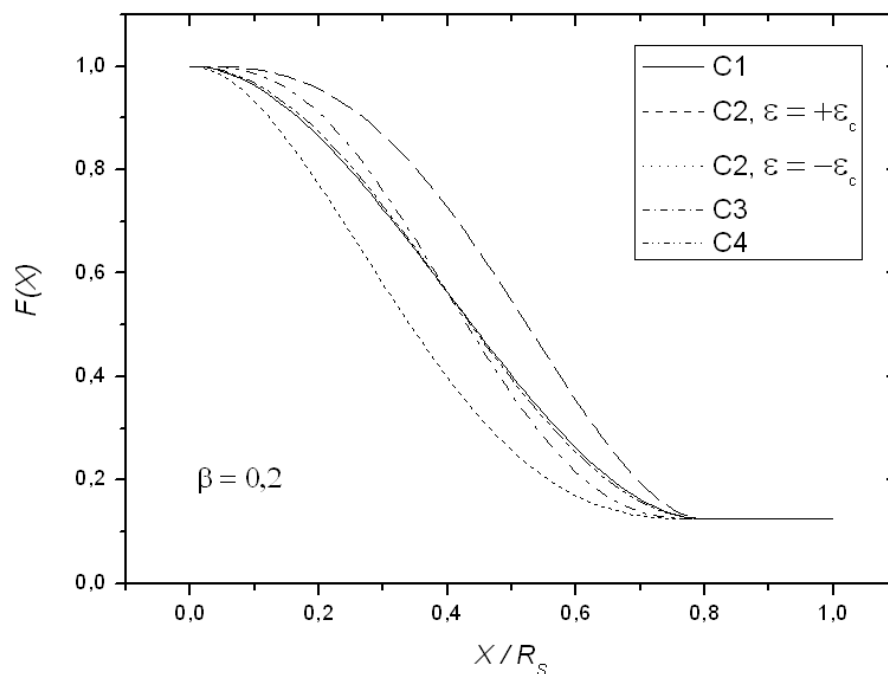


Figura 5.10- Funções  $F(X)$  para a parede, com extensão na saída da contração.



Concordando com a monotonicidade apresentada na Figura 5.10, as derivadas primeiras, Figura 5.11, apresentam todos seus valores negativos ou nulos. Todas as curvas são contínuas e atendem ambas as restrições (5.3.4a-b).

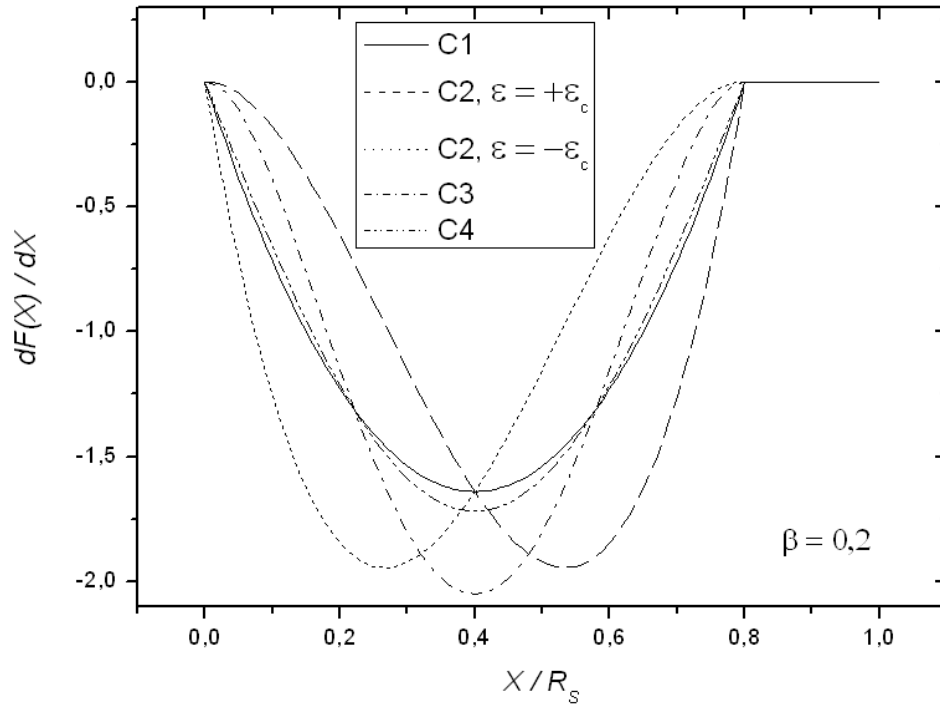


Figura 5.11- Derivadas primeiras das funções  $F(X)$ , para contrações com extensão na saída.

Relativamente, às derivadas segundas, Figura 5.12, qualitativamente os comportamentos nos casos “B” e “C” são semelhantes. A principal diferença é que a posição dentro do domínio  $[0, R_s]$  onde havia descontinuidade era  $X = R_e$  para o caso “B” e mudou para a posição  $X = R_s - R_e$ , no caso “C”. Novamente, a segunda derivada do polinômio de quinto grau – C3 – é a única contínua em todo o intervalo  $[0, R_s]$  e que atende ambas as restrições (5.3.5a-b).

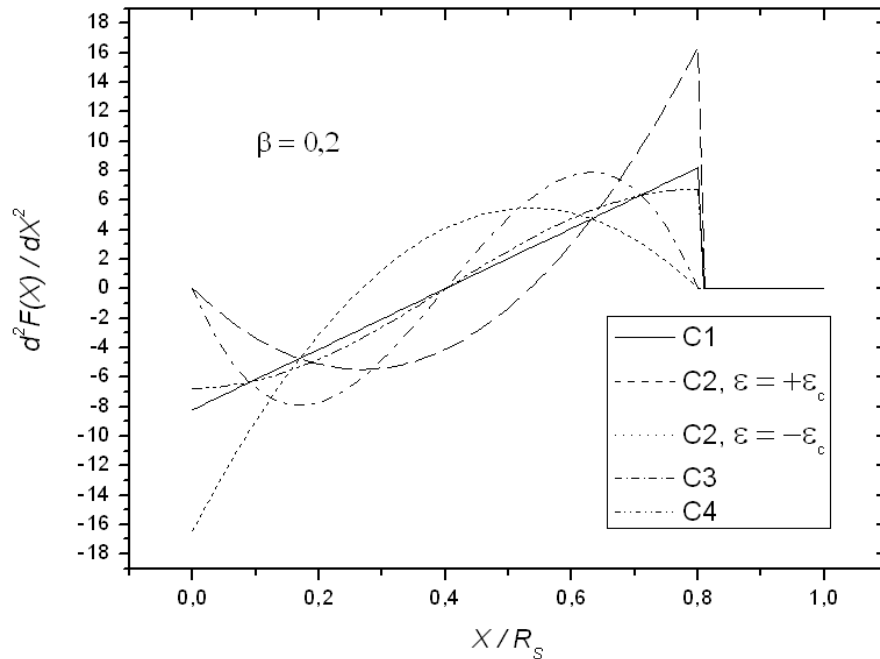


Figura 5.12- Derivadas segundas das funções  $F(X)$ , para contrações com extensão na saída.

#### 5.4 CASO D: GEOMETRIA DA CONTRAÇÃO COM EXTENSÃO NA ENTRADA E NA SAÍDA

A geometria do denominado caso “D” é apresentada na Figura 5.13, a qual de certa forma é uma espécie de combinação dos casos “B” e “C” visto que possui extensões tanto na região da entrada quanto na da saída da contração. Nesse caso a função  $F(X)$ , é constante e igual à unidade no intervalo  $[0, R_e]$ , constante e igual a  $R_c$  no intervalo  $(R_s - R_e, R_s]$ , e com variação monótona decrescente no intervalo  $[R_e, R_s - R_e]$ . O objetivo desses dois acréscimos é verificar se a adição dessas extensões nas regiões de entrada e de saída da contração melhora a uniformidade do escoamento na saída da contração. Na análise feita nesse trabalho as extensões adicionais na entrada e na saída da contração são de mesma dimensão e iguais a  $R_e$ , cada uma. A fração de  $R_e$  por  $R_s$  foi definida  $\gamma$ , como segue

$$\gamma \equiv \frac{R_e}{R_s} \Leftrightarrow R_e = \gamma R_s. \quad (5.4.1a-b)$$

As funções usadas no caso “D” são assemelhadas àquelas utilizadas nos casos “B” e “C”, porém no caso “D” o trecho variável da função  $F(X)$  está definido sobre o intervalo

$[R_e, R_s - R_e]$ , e permanecendo constante, por partes, no restante do intervalo  $[0, R_s]$ . Pode-se definir a função  $F(X)$  como segue

$$F(X) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq X < R_e \\ F^*(X), & \text{se } R_e \leq X \leq (R_s - R_e) \\ R_c, & \text{se } (R_s - R_e) < X \leq R_s \end{cases} \quad (5.4.2)$$

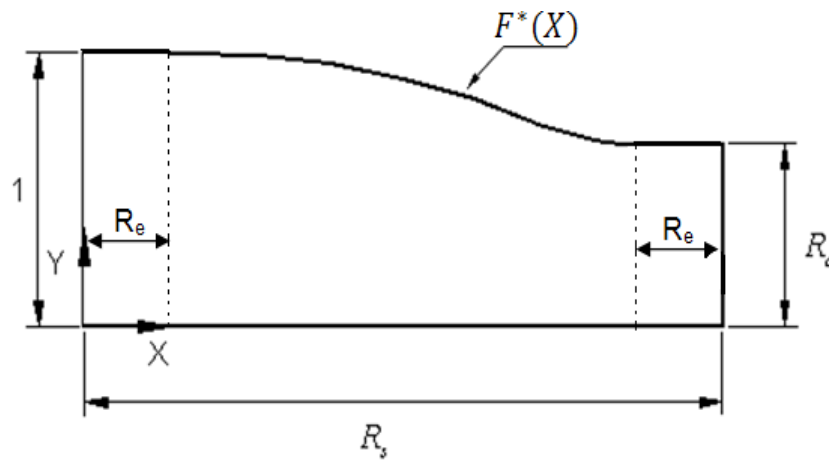


Figura 5.13- Geometria da contração com extensão na entrada e na saída.

As restrições (5.2.3a), (5.2.4a) e (5.2.5a) que se aplicam para o caso “B” e as restrições (5.3.3b), (5.3.4b) e (5.3.5b) que se aplicam sobre o caso “C” podem ser adaptadas para o caso “D”, resultando

$$F^*(R_e) = 1 \quad \text{e} \quad F^*(R_s - R_e) = R_c, \quad (5.4.3a-b)$$

$$\left. \frac{dF^*(X)}{dX} \right|_{X=R_e} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{dF^*(X)}{dX} \right|_{X=R_s-R_e} = 0, \quad (5.4.4a-b)$$

$$\left. \frac{d^2 F^*(X)}{dX^2} \right|_{X=R_e} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^2 F^*(X)}{dX^2} \right|_{X=R_s-R_e} = 0. \quad (5.4.5a-b)$$

A obtenção das respectivas funções para o caso “D” pode ser realizada de modo similar aqueles usados nos casos “A”, “B” e “C”. A seguir apresenta-se resumo das funções e suas respectivas derivadas de primeira e segunda ordem:

**Polinômio de terceiro grau – D1:**

$$F^*(X) = 1 + (R_c - 1) \left[ 3 \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^2 - 2 \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^3 \right], \quad (5.4.6a)$$

$$\frac{dF^*(X)}{dX} = \frac{6(R_c - 1)}{R_s - 2R_e} \left[ \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right) - \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^2 \right], \quad (5.4.6b)$$

$$\frac{d^2F^*(X)}{dX^2} = \frac{6(R_c - 1)}{(R_s - 2R_e)} \left[ 1 - 2 \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right) \right]. \quad (5.4.6c)$$

**Polinômio de quarto grau – D2:**

$$F^*(X) = 1 + [\varepsilon + 3(R_c - 1)] \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^2 - 2[\varepsilon + (R_c - 1)] \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^3 + \varepsilon \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^4, \quad (5.4.7a)$$

$$\frac{dF^*(X)}{dX} = \frac{2}{R_s - 2R_e} \left\{ [\varepsilon + 3(R_c - 1)] \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right) - 3[\varepsilon + (R_c - 1)] \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^2 + 2\varepsilon \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^3 \right\}, \quad (5.4.7b)$$

$$\frac{d^2F^*(X)}{dX^2} = \frac{2}{(R_s - 2R_e)^2} \left\{ [\varepsilon + 3(R_c - 1)] - 6[\varepsilon + (R_c - 1)] \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right) + 6\varepsilon \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^2 \right\}. \quad (5.4.7c)$$

**Polinômio de quinto grau – D3:**

$$F^*(X) = 1 + (R_c - 1) \left[ 10 \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^3 - 15 \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^4 + 6 \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^5 \right], \quad (5.4.8a)$$

$$\frac{dF^*(X)}{dX} = \frac{30(R_c - 1)}{R_s - 2R_e} \left[ \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^2 - 2 \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^3 + \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^4 \right], \quad (5.4.8b)$$

$$\frac{d^2 F^*(X)}{dX^2} = \frac{60(R_c - 1)}{(R_s - 2R_e)^2} \left[ \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right) - 3 \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^2 + 2 \left( \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e} \right)^3 \right]. \quad (5.4.8c)$$

#### Função trigonométrica cossenoidal D4:

$$F^*(X) = 1 + \frac{(R_c - 1)}{2} \left[ 1 - \cos\left(\pi \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e}\right) \right], \quad (5.4.9a)$$

$$\frac{dF^*(X)}{dX} = \frac{\pi}{R_s - 2R_e} \frac{(R_c - 1)}{2} \operatorname{sen}\left[\left(\pi \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e}\right)\right], \quad (5.4.9b)$$

$$\frac{d^2 F^*(X)}{dX^2} = \left(\frac{\pi}{R_s - 2R_e}\right)^2 \frac{(R_c - 1)}{2} \cos\left[\left(\pi \frac{X - R_e}{R_s - 2R_e}\right)\right]. \quad (5.4.9c)$$

Nas Figuras (5.14-16) apresenta-se a função  $F(X)$  e suas respectivas primeira e segunda derivadas. Por inspeção da Figura 5.14 nota-se que, conforme esperado, inicialmente, a função permanece constante e igual à unidade. Após a posição  $X/R_s = \gamma = 0,2$  a função começa a decrescer monotonicamente até à posição  $(X - R_e)/R_s = \gamma = 0,8$ , a partir da qual torna-se, novamente, constante e igual a  $R_c$ , no caso  $R_c = 1/8$ .

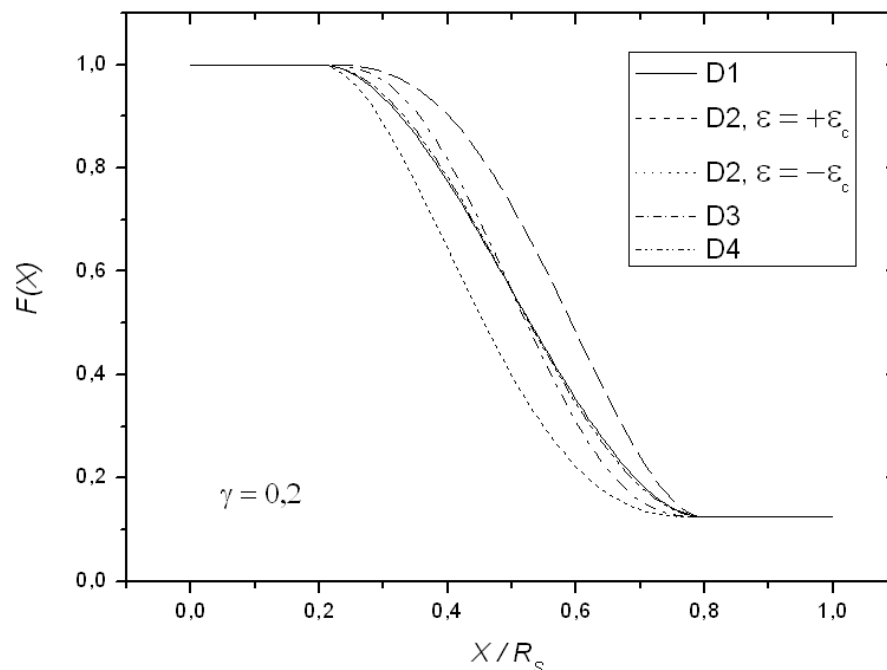


Figura 5.14- Funções  $F(X)$  para a parede, com extensão na entrada e na saída da contração.

As primeiras derivadas das funções  $F(X)$ , Figura 5.15, são todas contínuas e com valores negativos ou nulos comprovando o comportamento de decaimento monótono da função.

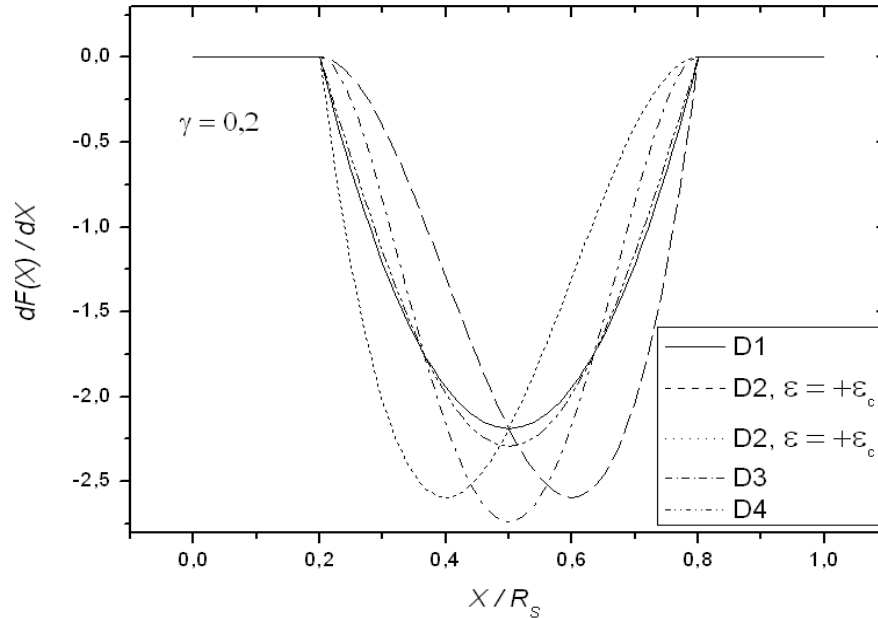


Figura 5.15- Derivadas primeiras das funções  $F(X)$ , para contrações com extensão na entrada e na saída.

Na Figura 5.16 são mostradas as derivadas segundas das funções  $F(X)$ . Das apresentadas apenas a correspondente ao polinômio de quinto grau – D3 – é contínua sobre todo o domínio de definição  $[0, R_s]$  e atende a ambas as restrições (5.4.5a-b). As restantes não atendem a uma ou a ambas restrições (5.4.5a-b), e, portanto possuem uma ou duas descontinuidades no intervalo  $(0, R_s)$ .

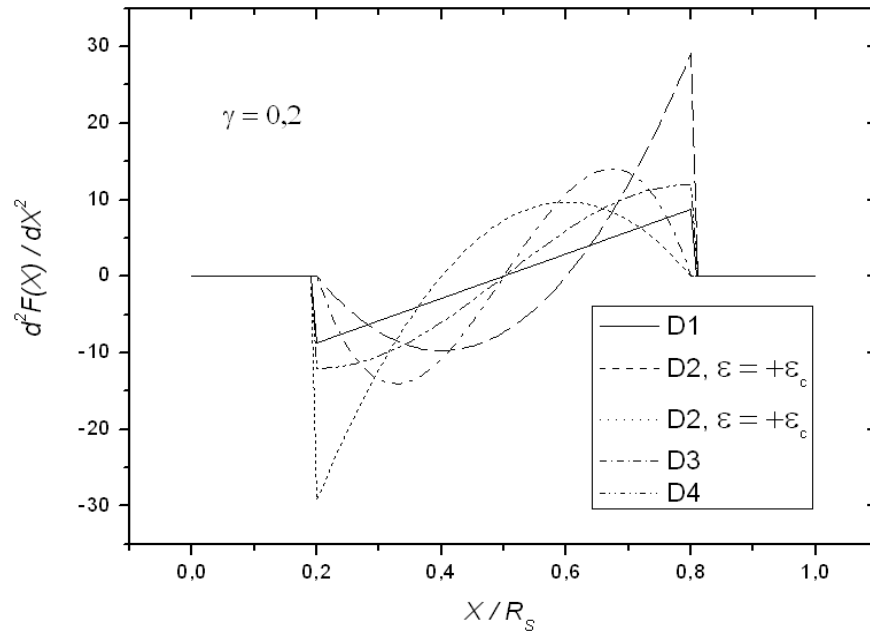


Figura 5.16- Derivadas segundas das funções  $F(X)$ , para contrações com extensão na entrada e na saída.

## 5.5 RELEITURA DA FUNÇÃO $F(X)$

Nessa seção faz-se uma releitura da definição da função  $F(X)$  e das restrições que a ela pode-se aplicar. Genericamente, a função  $F(X)$  pode ser definida como contínua, de classe  $C^k(\Omega)$ , monotonicamente decrescente no intervalo  $\Omega \equiv [0, R_s]$ , e que atenda às seguintes condições:

$$F(0) \equiv 0, \quad F(R_s) \equiv R_c; \quad (5.5.1a-b)$$

$$\left. \frac{dF(X)}{dX} \right|_{X=0} \equiv 0, \quad \left. \frac{dF(X)}{dX} \right|_{X=R_s} \equiv 0; \quad (5.5.1c-d)$$

$$\left. \frac{d^2F(X)}{dX^2} \right|_{X=0} \equiv 0, \quad \left. \frac{d^2F(X)}{dX^2} \right|_{X=R_s} \equiv 0; \quad (5.5.1e-f)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\left. \frac{d^{(k)}F(X)}{dX^{(k)}} \right|_{X=0} \equiv 0, \quad \left. \frac{d^{(k)}F(X)}{dX^{(k)}} \right|_{X=R_s} \equiv 0. \quad (5.5.1g-h)$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis independente e dependente

$$F(X) \equiv 1 + (R_c - 1)G(\hat{X}), \quad 0 < R_c < 1, \quad \hat{X} \equiv \frac{X}{R_s} \Leftrightarrow G(\hat{X}) = \frac{F(X) - 1}{R_c - 1}, \quad (5.5.2a-b)$$

as equações (5.37a-h) são substituídas por

$$G(0) \equiv 0, \quad G(1) \equiv 1; \quad (5.5.2a-b)$$

$$\left. \frac{dG(\hat{X})}{d\hat{X}} \right|_{\hat{X}=0} \equiv 0, \quad \left. \frac{dG(\hat{X})}{d\hat{X}} \right|_{\hat{X}=1} \equiv 0; \quad (5.5.3c-d)$$

$$\left. \frac{d^2G(\hat{X})}{d\hat{X}^2} \right|_{\hat{X}=0} \equiv 0, \quad \left. \frac{d^2G(\hat{X})}{d\hat{X}^2} \right|_{\hat{X}=1} \equiv 0; \quad (5.5.3e-f)$$

⋮

$$\left. \frac{d^{(k)}G(\hat{X})}{d\hat{X}^{(k)}} \right|_{\hat{X}=0} \equiv 0, \quad \left. \frac{d^{(k)}G(\hat{X})}{d\hat{X}^{(k)}} \right|_{\hat{X}=1} \equiv 0. \quad (5.5.3g-h)$$

A equação (5.5.2a) é uma transformação linear não-singular e, portanto inversível. O domínio da função  $F(X)$  é  $[0, R_s]$  e a imagem é  $[1, R_c]$ . No equacionamento usando a função  $G(\hat{X})$  o domínio da função é  $[0, 1]$  e a imagem  $[0, 1]$ , portanto normalizados e destituídos dos parâmetros  $R_s$  e  $R_c$ .

Entende-se que o uso de  $G(\hat{X})$ , no modelamento de funções de parede de contrações, em comparação com o uso de  $F(X)$ , seja ligeiramente mais vantajoso.



## **5.6 FUNÇÕES DE PAREDE PARA CONTRAÇÕES USANDO COORDENADAS CILÍNDRICAS.**

No capítulo 3 o sistema coordenado utilizado foi o cartesiano e um ponto no plano foi representado por  $(X, Y)$ . No capítulo 4 utilizou-se coordenadas cilíndricas e um ponto no plano de interesse era representado por  $(R, Z)$ .

Portanto a formulação para a função modeladora do formato da parede da contração desenvolvida no capítulo 5, para coordenadas cartesianas, pode ser usada em coordenadas cilíndricas desde que se troque o eixo  $X$  – sistema-cartesiano pelo eixo  $Z$  – sistema-cilíndrico. Em consequência deve-se trocar  $F(X)$  por  $F(Z)$ .

Deve-se lembrar que a dimensão da saída da contração  $R_c$ , no sistema de coordenadas cartesiano, torna-se  $R_c^{1/2}$ , no sistema de coordenadas cilíndrico, devido à curvatura do sistema e também da definição do que é razão de contração.

## 6 RESULTADOS E SUA ANÁLISE PARA ESCOAMENTO POTENCIAL EM CONTRAÇÕES CARTESIANAS

Nesse capítulo pretende-se apresentar e analisar parte dos resultados obtidos na simulação numérica do escoamento potencial no interior de contrações descritas utilizando-se o sistema de coordenadas cartesianas.

Para a obtenção de resultados numéricos utilizou-se programação computacional do equacionamento apresentado no capítulo 3. As variáveis dependentes que se calculou, basicamente, foram: função linha de corrente,  $\Psi^*(X,Y)$ ; componentes  $U(X,Y)$  e  $V(X,Y)$ ; e campo de pressão,  $P(X,Y)$ . Para o cômputo dessas distribuições variou-se os parâmetros razão de esbeltez,  $R_s$ ; razão de contração,  $R_c$ ; e as funções  $F(X)$ .

Baseando-se na formulação desenvolvida no capítulo 3 pode-se calcular a matriz  $\mathbf{A}$  e o vetor  $\mathbf{g}$ , da equação (3.4.9). Resolvendo-se o sistema linear (3.4.9) obtém-se o vetor das incógnitas  $\Phi$ . A função linha de corrente  $\Psi^*(X,Y)$  é calculada utilizando-se a equação (3.4.12), as componentes  $U(X,Y)$  e  $V(X,Y)$  do vetor velocidade são obtidas usando-se as equações (3.4.13a,b) e o campo de pressão é determinado usando-se a equação (3.5.6). As grandezas  $U_w(X)$ ,  $V_w(X)$  e  $C_{p,w}(X)$  são as componentes do vetor velocidade e o campo de pressão, respectivamente, junto à parede da contração.

Contrações em geral são utilizadas para produzir escoamentos, relativamente, bem comportados em sua seção transversal de saída. A maior organização do escoamento na saída da contração é obtida através da aceleração do escoamento durante sua passagem pela contração e que, por conseguinte também aumenta sua velocidade média. Em escoamentos acelerados, em geral, o gradiente de pressão é favorável (valores negativos), embora em geometrias complexas possa haver pequenas regiões do escoamento com gradientes desfavoráveis (valores positivos). Assim, não é desejável que haja em uma contração gradientes desfavoráveis de pressão.

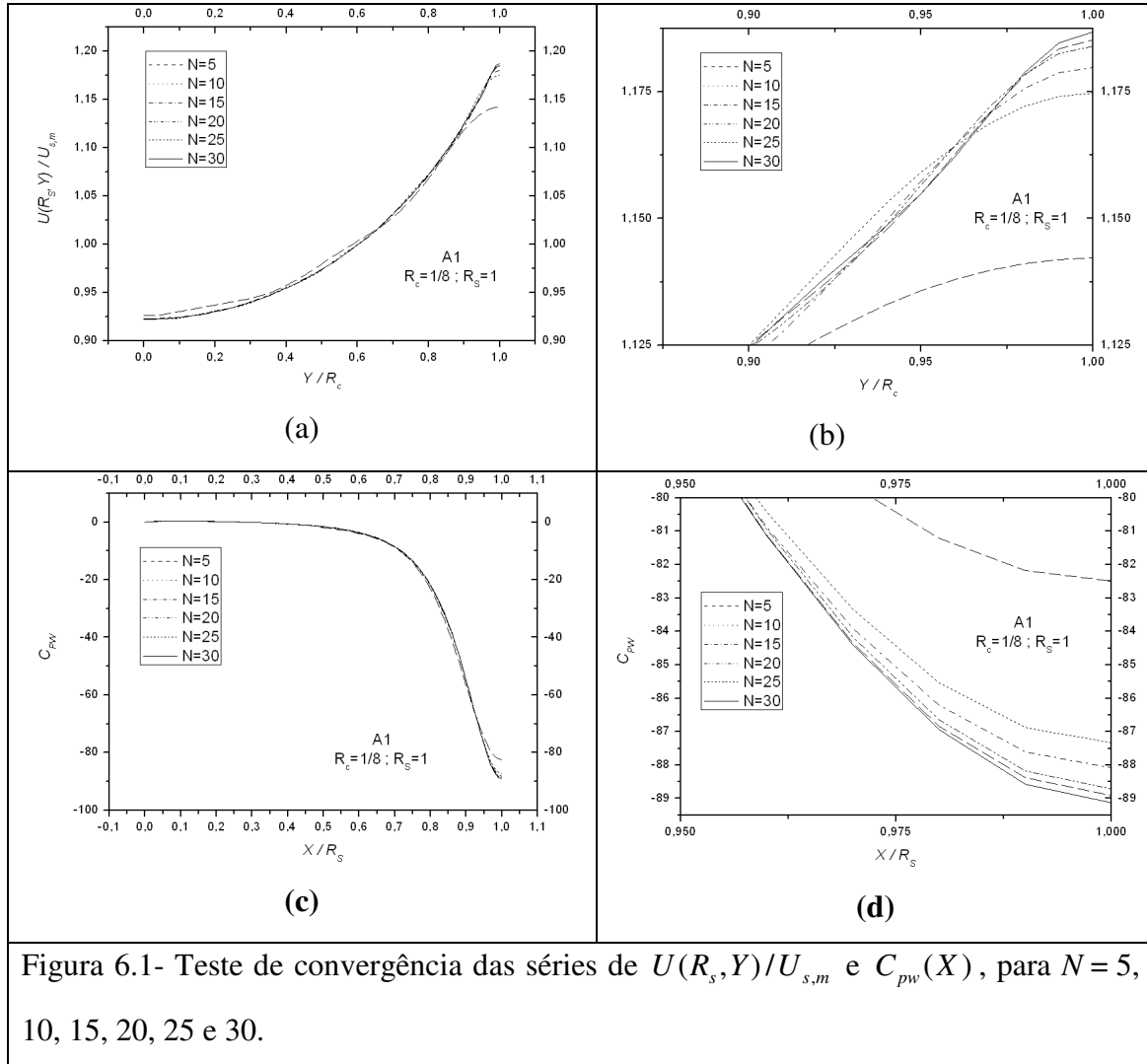
Enfim, nesse trabalho, considera-se que uma dada contração deva produzir *escoamento o mais uniforme possível na sua saída e não apresentar gradiente adverso de pressão ao longo de sua parede.*

## 6.1 CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES

Rigorosamente, as séries existentes nas equações (3.4.12), (3.4.13) e (3.5.6) seriam infinitas, no entanto, se possível, o cômputo de uma série infinita demandaria um tempo também infinito. Assim, visando reduzir o tempo de processamento de infinito e inviável, truncam-se as séries para um número finito,  $N$ , de termos para cada expansão. Como naquelas fórmulas houve duas expansões então elas possuem no todo  $N^2$  termos, cada uma. Para expansão em séries de funções quadrado-integráveis esse truncamento produz resultados que convergem para os, respectivos, valores-verdadeiros que seriam obtidos caso se usasse as séries com infinitos termos (Apostol, 1974). Como as funções existentes nesse trabalho são finitas e definidas sobre domínio finitos então são quadrado-integráveis e, portanto suas expansões em série são convergentes.

Na Figura 6.1 (a) apresenta-se a componente de velocidade  $U(X,Y)$  na saída da contração,  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ , ressalte-se que nessa figura exceto para  $N = 5$ , as outras curvas estão bastante próximas e, portanto convergindo para a função valor-verdadeiro. Para maior discernimento entre as várias curvas apresenta-se na Figura 6.1 (b) o detalhamento das curvas na vizinhança de  $Y/R_c = 1$ . Ali, nota-se também que à medida que  $N$  aumenta as curvas tendem para a função valor-verdadeiro. Nas Figuras (6.1) (c) e (d) também percebe-se a convergência da série correspondente à  $C_{pw}(X)$ .

Os resultados apresentados são relativos à função de parede A1 – polinômio de terceiro grau - com parâmetros  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$ , mas foram testadas as mais variadas combinações e sempre as séries apresentaram comportamento de convergência.



## 6.2 RESULTADOS E SUA ANÁLISE PARA O CASO "A"

Nesta seção apresenta-se os resultados para o caso "A". Foram realizados testes numéricos variando os valores de  $R_s$  e  $R_c$ , bem como para as funções  $F(X)$ . Como a totalidade de dados gerada foi grande então apresenta-se de forma sintética aqueles resultados que se considerou mais significativos ao processo de análise e que pudessem levar à compreensão do escoamento e daí tirar conclusões.

### 6.2.1 INFLUÊNCIA DA RAZÃO DE ESBELTEZ

Procura-se nessa subseção apresentar os dados e analisar qual a influência da razão de esbeltez sobre o escoamento. Para tal faz-se variar o parâmetro  $R_s = 1, 2, 3$ , mantendo to o restante constante. Na Figura 6.2 apresenta-se resultados típicos para linha de corrente,  $\Psi^*(X,Y)$ ; componentes do vetor velocidade,  $U(X,Y)$  e  $V(X,Y)$ ; e campo de pressão,  $P(X,Y)$ , para a função A1,  $R_s = 1$  e  $R_c = 1/8$ . Na distribuição de velocidade axial  $U(X,Y)$  nota-se que, em geral, a velocidade aumenta na direção do escoamento, ou seja o escoamento acelera-se devido à existência da contração. O incremento não é uniforme e inclusive existe uma região do escoamento, próximo à posição  $(0,1)$ , na qual a velocidade,  $U$ , decai ligeiramente. Nessa região na qual primeiramente o escoamento encontra a contração vai ocorrer uma região com pequena estagnação caracterizada pelo acréscimo na pressão e decréscimo na velocidade. A componente de velocidade meridional,  $V$ , inicialmente nula, vai aumentando em valor absoluto até, aproximadamente a posição  $X \cong 0.8$ , a partir daí ela começar a decair em valor absoluto até anular-se na saída da contração. As maiores modificações na distribuição da velocidade  $V$  ocorrem principalmente na região próxima à parede da contração. Na direção do escoamento a área disponível da seção transversal da contração diminui, por definição, em conseqüência as velocidades aumentam, portanto a energia cinética aumenta e a pressão diminui. Então, os resultados apresentados na Figura 6.2, e em outras que sucedem, estão em concordância com a física subjacente da mecânica de fluidos invíscidos.

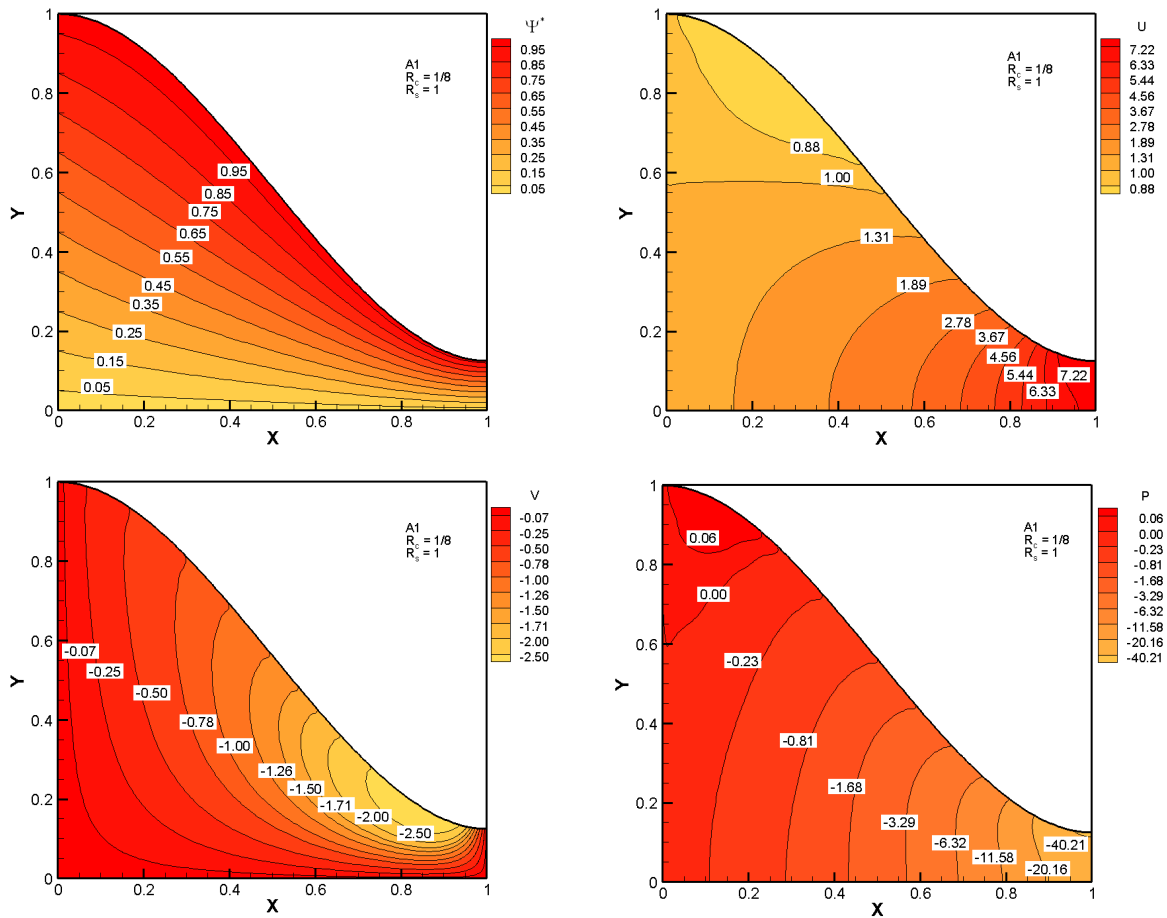


Figura 6.2- Linha de corrente, componentes do vetor velocidade e campo de pressão para contração com: função A1,  $R_c = \frac{1}{8}$ , e  $R_s = 1$ .

Apresenta-se na Figura 6.3 os resultados para o escoamento em contração com  $R_c = \frac{1}{8}$ , e  $R_s = 3$ , ou seja, uma contração mais alongada do que aquela apresentada na Figura 6.2. Nesse caso,  $R_s = 3$ , percebe-se que as distribuições da componente de velocidade  $U$  e o campo de pressão são mais paralelos, e, portanto mais uniformes, do que aqueles apresentados para  $R_s = 1$ , Figura 6.2. O valor máximo da velocidade  $V$ , em valor absoluto, é menor para o caso  $R_s = 3$  do que para o caso  $R_s = 1$ . Comparando-se os dois casos nota-se que o escoamento para  $R_s = 3$  é mais uniforme do que aquele para  $R_s = 1$ . A razão física da diferença é que para uma contração com maior esbelteza, maiores valores de  $R_s$ , existe mais espaço e, portanto mais tempo para que as porções de fluidos desloquem-se com acelerações menores.

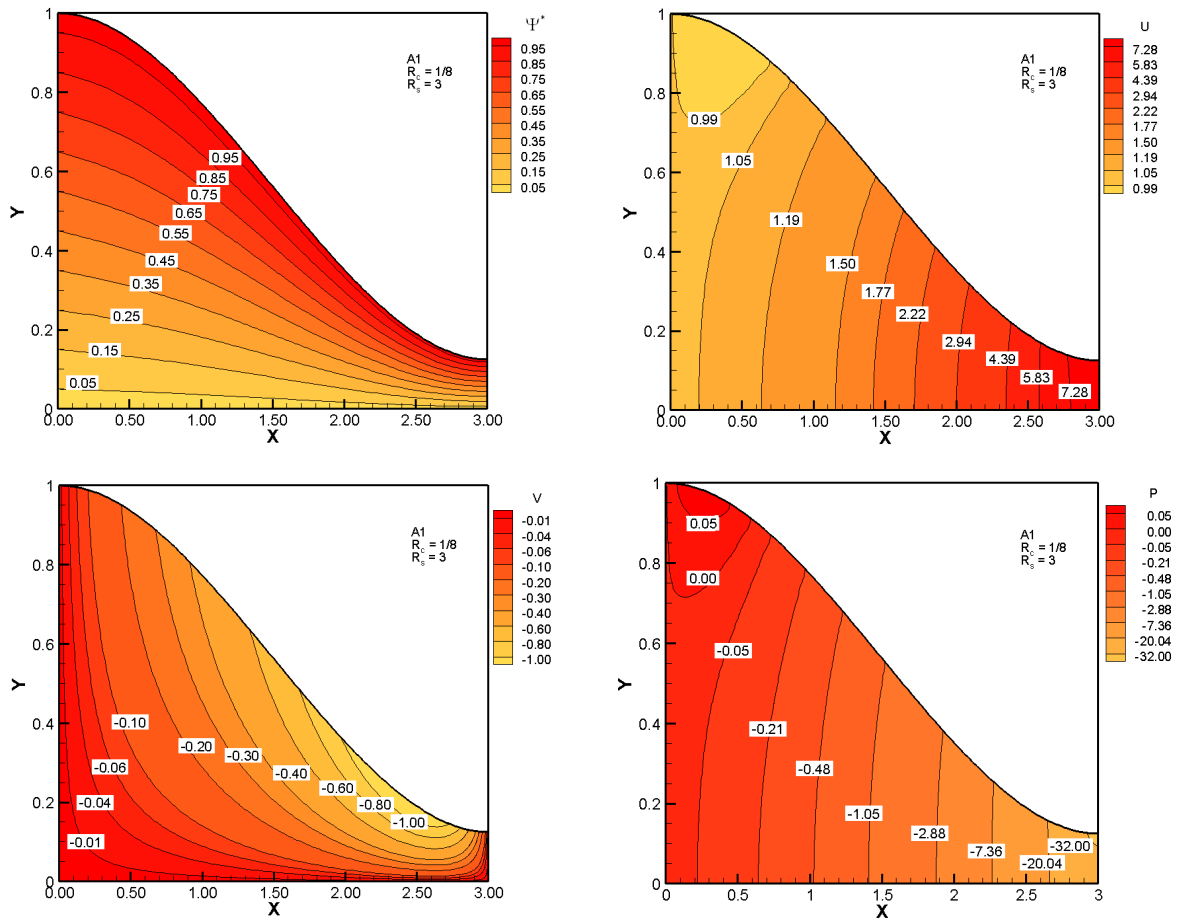


Figura 6.3- Linha de corrente, componentes do vetor velocidade e campo de pressão para contração com: função A1,  $R_c = 1/8$ , e  $R_s = 1$ .

Para consolidar o conhecimento sobre a influência da esbelteza da contração sobre o escoamento fez-se várias simulações, para diferentes valores de  $R_s$ . Na Figura 6.4 mostra-se resultados para a velocidade axial na saída da contração,  $U(R_s, Y)$ , e o coeficiente de pressão,  $C_{pw}$ , obtidos variando  $R_s = 1, 2, 3$ , e mantendo a função A1 e a razão de contração,  $R_c = 1/8$ , constantes. Percebe-se, analisando os resultados da Figura 6.4, que à medida que a razão de esbelteza aumenta o perfil de velocidade axial na saída da contração,  $U(R_s, Y)$ , torna-se mais uniforme; e o perfil do coeficiente de pressão,  $C_{pw}(X)$ , tem menor variação menos intensa na região de saída da contração, tendo inclusive menor valor absoluto. Interessante notar que no intervalo  $[0, R_s/2]$  ocorre pouca variação do coeficiente de pressão, indicando que a contração com parede modelada pela função A1 é pouco efetiva, nesse intervalo, para converter energia de pressão em energia cinética. A maior parte da conversão ocorre no

intervalo  $(R_s/2, R_s]$ . Conclui-se então que se aumentando a razão de esbeltez produz-se escoamentos mais uniformes na saída da contração, para uma dada função de parede e razão de contração. No entanto, não se pode aumentar o comprimento da contração ilimitadamente por razões de espaço e de custo.

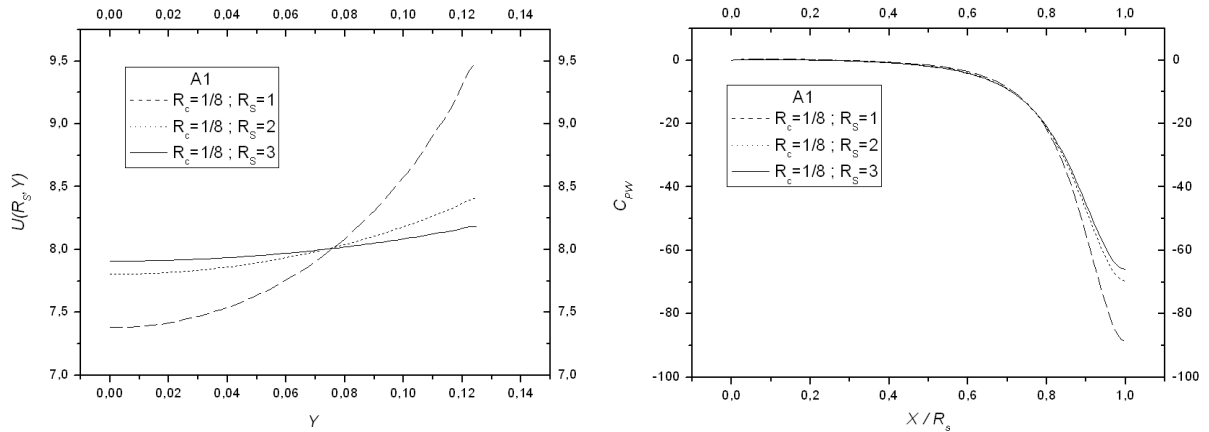


Figura 6.4- Distribuição de velocidade  $U(R_s, Y)$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para: função A1,  $R_c = 1/8$ , e  $R_s = 1, 2, 3$ .

Visando generalizar e comparar resultados a velocidade axial na saída da contração,  $U(R_s, Y)$ , pode ser normalizada resultando na velocidade axial normalizada,  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ , cujos resultados podem ser apreciados à Figura 6.5. Como  $U_{s,m}$ , nesse caso é constante, visto que  $U_{s,m} = R_c^{-1}$ , conforme capítulo 3, então a Figura 6.5 é “igual” à Figura 6.4, porém com escalas diferentes para os eixos das ordenadas e das abscissas. O “igual” anterior significa: com o mesmo conteúdo informacional.



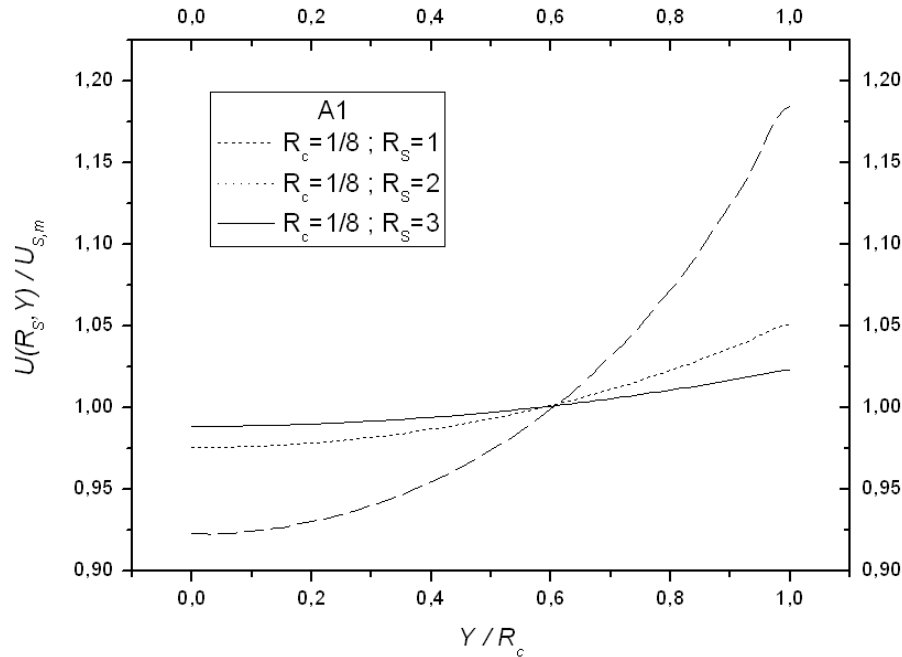


Figura 6.5- Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  para: função A1,  $R_c = 1/8$ , e  $R_s = 1, 2, 3$ .

A influência da razão de esbeltez também foi avaliada para outras funções de parede da contração, além da função A1 apresentada anteriormente. Na Figura 6.6 estão os resultados para a velocidade axial normalizada,  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$ , e o coeficiente de pressão,  $C_{pw}$ , calculados com a função A3 e os parâmetros  $R_c = 1/8$ , e  $R_s = 1, 2, 3$ . Nota-se que as velocidades normalizadas mais uniformes na saída da contração são aquelas correspondentes às contrações mais longas. Também para contrações mais longas o coeficiente de pressão apresenta os menores valores em módulo. Esses aspectos mencionados concordam completamente com aqueles correspondentes nas Figuras 6.4 e 6.5. Algo diferente que não ocorre na Figura 6.4, para a função A1, é que ocorre na região final da contração, para a função A3, Figura 6.6, gradientes adversos de pressão. No caso da ocorrência, indesejada, de gradientes adversos de pressão pode-se atenuá-los ou mesmo eliminá-los através do aumento da razão de esbeltez. Na Figura 6.6 a distribuição de velocidade mais desuniforme corresponde aos parâmetros  $R_c = 1/8$ , e  $R_s = 1$ , os quais correspondem também aos mais intensos gradientes adversos de pressão que se estendem por uma região também maior. Comparando as velocidades axiais normalizadas existentes nas Figuras 6.4 e 6.6 nota-se que no caso correspondente à função A3 os perfis são mais uniformes do que para a função A1. Isto se deve ao fato de que no caso da função A1 os gradientes de pressão são todos

favoráveis e, relativamente, intensos, portanto com tendência a acelerar o escoamento e produzir maiores e desuniformes velocidades. No caso da função A3 os gradientes de pressão são adversos ou, aproximadamente, nulos, na região final da contração. Os gradientes adversos junto à parede tendem a frear o escoamento e produzir perfil mais uniforme na saída da contração. Depreende-se dessas informações que o gradiente de pressão deve ser favorável, porém com magnitude não muito intensa.

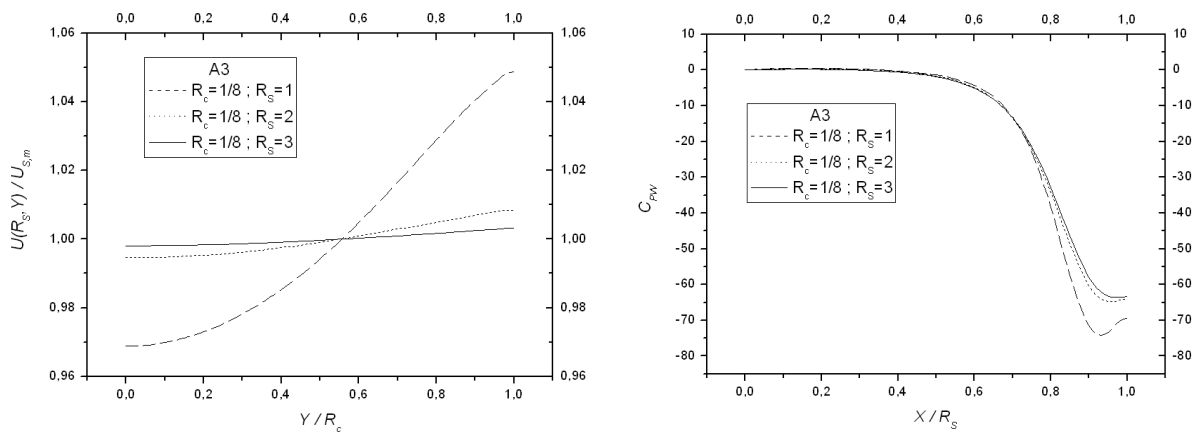


Figura 6.6- Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para: função A3,  $R_c = 1/8$ , e  $R_s = 1, 2, 3$ .

Para maior e melhor entendimento da formação de gradientes adversos de pressão em contrações apresenta-se o campo vetorial de velocidade, Figura 6.7. Na posição  $X/R_s = 0,8$  da Figura 6.7(a) nota-se que o vetor velocidade tangente à parede forma um ângulo com o eixo  $X$  de, aproximadamente,  $45^\circ$ . Significando que as duas componentes do vetor velocidade têm magnitudes absolutas iguais ou semelhantes. Na Figura 6.7(b), para a posição  $X/R_s = 0,8$ , percebe-se que o ângulo que o vetor velocidade forma com a horizontal é menor que  $45^\circ$ , significando que a componente  $V$  é menor que a  $U$ . Desse fato decorre que para posições homólogas nas paredes das duas contrações a energia cinética,  $(U^2 + V^2)/2$ , é maior naquela que tem a menor razão de esbeltez, e, por conseguinte naquela posição a pressão será menor. Quando o escoamento aproxima-se da saída da contração a componente meridional da velocidade tende à nulidade e a componente axial tende a  $R_c^{-1}$ . Como nos dois casos a razão de contração é igual então a velocidade média axial na saída da contração também é igual. Portanto, as energias cinéticas médias finais nas duas situações são iguais ou bem próximas. Assim, poderão ocorrer situações nas quais a referida variação de energia cinética no

escoamento ao longo da parede propicie o aparecimento de gradientes adversos de pressão, caracterizado pelo aumento da pressão ao longo de uma linha de corrente, na direção do escoamento.

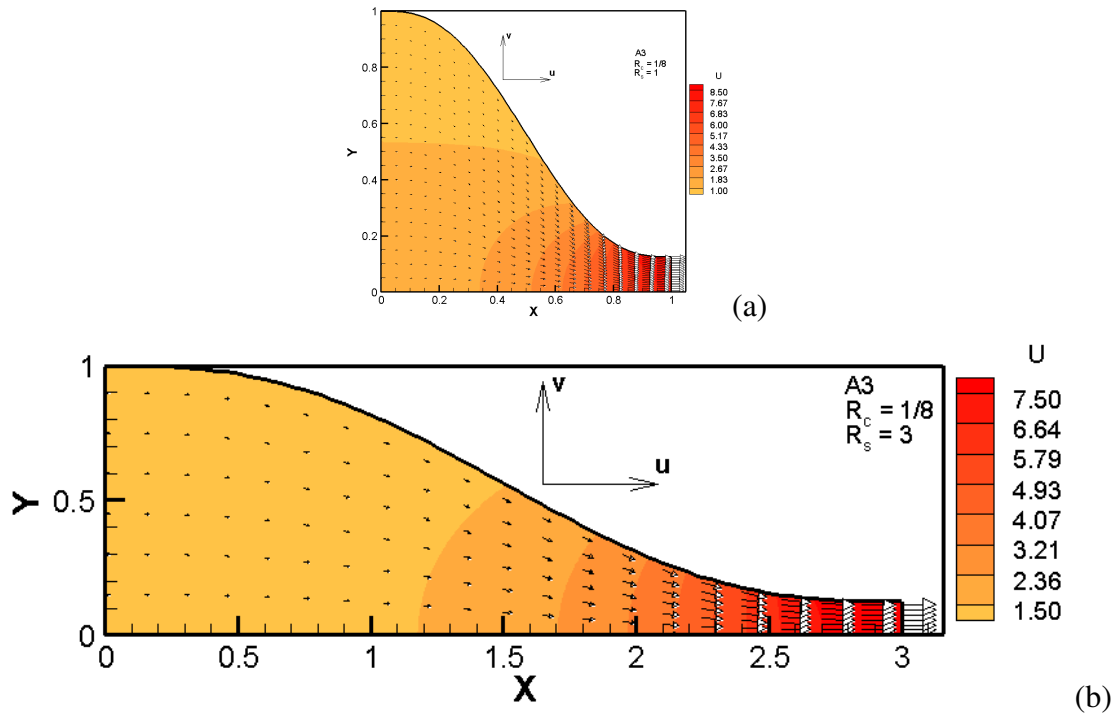


Figura 6.7- Campo vetorial de velocidade grafado sobre o campo de velocidade axial para: função A3,  $R_s = 1$  (a) e  $R_s = 3$  (b).

## 6.2.2 INFLUÊNCIA DA RAZÃO DE CONTRAÇÃO

Nessa subseção dedica-se a estabelecer a natureza da influência que a razão de contração exerce sobre a velocidade axial na saída da contração e no coeficiente de pressão ao longo de sua parede. Para realizou-se várias experimentações numéricas variando a razão de contração e mantendo o restante inalterado.

Na Figura 6.2 apresentou os resultados para: função A1,  $R_c = 1/8$ , e  $R_s = 1$ , na Figura 6.8 disponibiliza-se os resultados para: função A1,  $R_c = 1/2$ , e  $R_s = 1$ . A interpretação física desses resultados é semelhante à apresentada na seção anterior. Quando a contração aumenta, menores valores da razão de contração, as velocidades axiais e meridionais aumentam, a energia cinética aumenta e a pressão diminui.

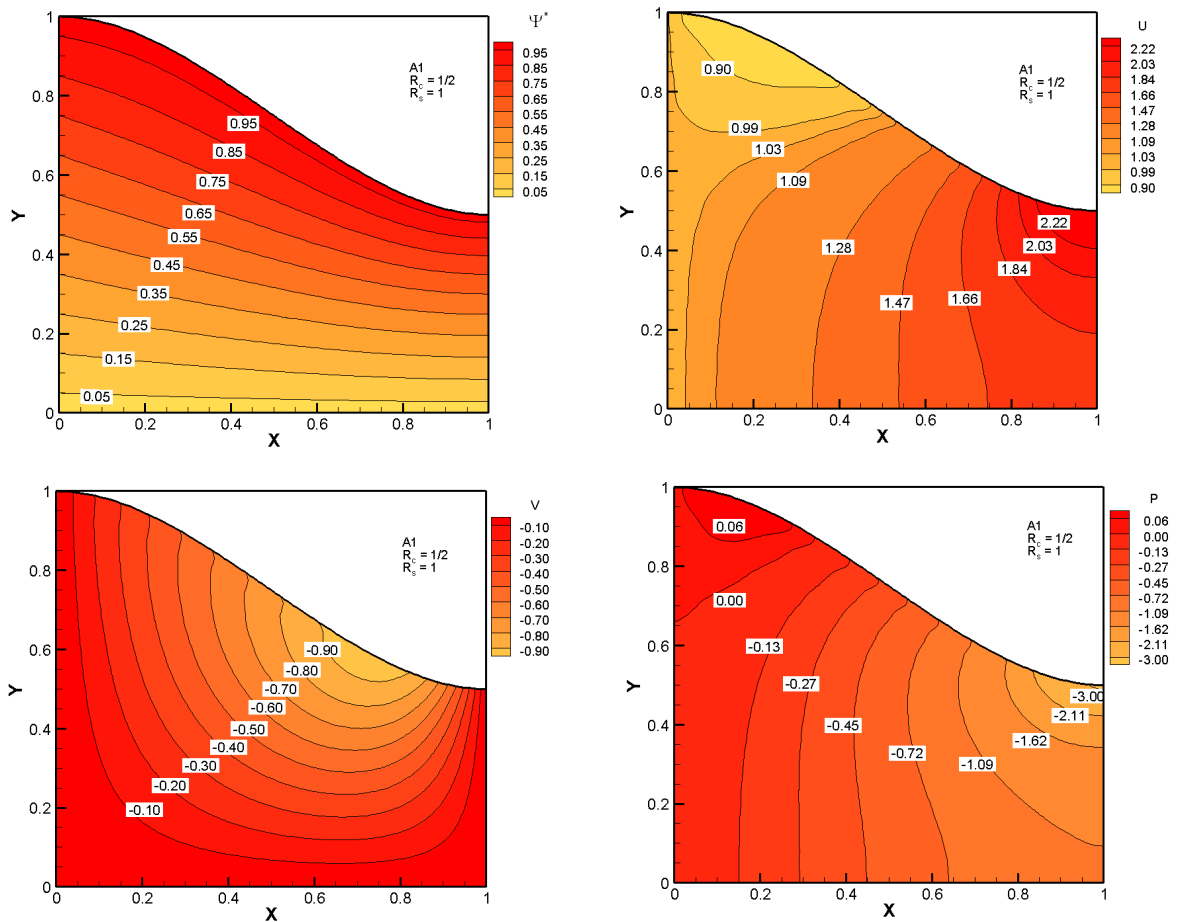


Figura 6.8- Linha de corrente, componentes do vetor velocidade e campo de pressão para contração com: função A1,  $R_c = \frac{1}{2}$ , e  $R_s = 1$ .

Fixou-se  $R_s = 1$  e variou-se  $R_c = \frac{15}{16}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ , os resultados obtidos para a velocidade axial na saída da contração,  $U(R_s, Y)$ , e o coeficiente de pressão,  $C_{pw}$ , são mostrados na Figura 6.9. Entende-se que à medida que a contração aumenta, significando menores valores de  $R_c$ , a magnitude da velocidade axial aumenta e o coeficiente de pressão diminui. Nesse trabalho o coeficiente de pressão é combinação linear do campo de pressão, na parede da contração, assim pode-se analisar tanto em termos de coeficiente de pressão como de campo de pressão. Para  $R_c = \frac{1}{8}$  a velocidade axial é no entorno de  $U(R_s, Y) \approx 8$ , para  $R_c = \frac{3}{4}$  no entorno de  $U(R_s, Y) \approx \frac{4}{3}$ , assim sucessivamente.

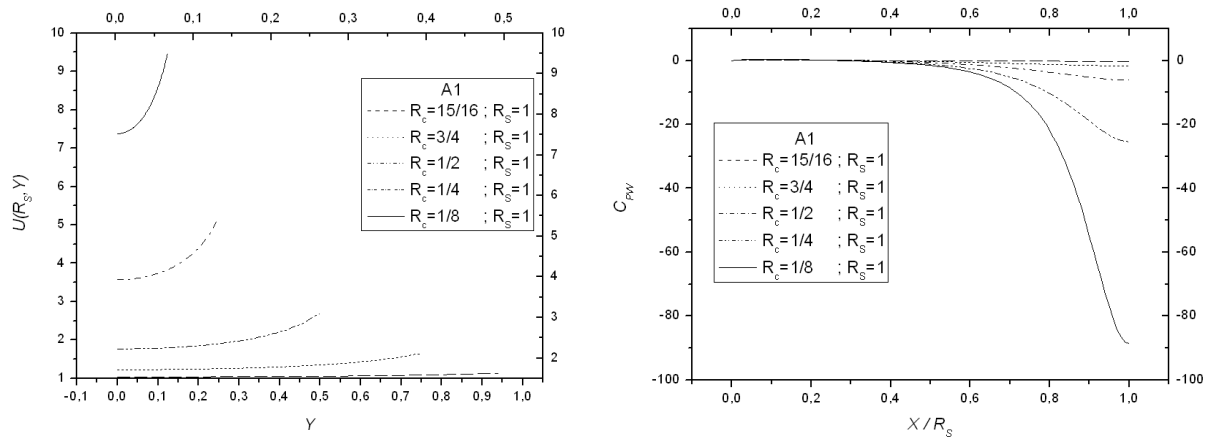


Figura 6.9 -Distribuição de velocidade  $U(R_s, Y)$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para: função A1,  $R_c = 15/16, 3/4, 1/2, 1/4, 1/8$  e  $R_s = 1$ .

Conforme mencionado na subseção anterior introduziu-se o conceito de velocidade axial normalizada na saída da contração para efetivar comparações e estabelecer padrões. Apresenta-se, Figura 6.10, a distribuição de velocidade axial normalizada para a função A1,  $R_s = 1$  e alguns valores significativos para a razão de contração  $R_c = 15/16, 3/4, 1/2, 1/4, 1/8$ . Percebe-se que as duas distribuições mais desuniformes são as correspondentes a  $R_c = 1/2, 1/4$  e as duas mais uniformes são as relacionadas com  $R_c = 15/16, 1/8$ , ficando em posição intermediária aquela associada a  $R_c = 3/4$ . Fica claro que existe relação não linear entre a velocidade axial normalizada e a razão de contração. Quando a razão de contração tende à unidade a contração tende a desaparecer e a distribuição de velocidade tende à uniformidade completa. No outro extremo, quando a razão de contração fica pequena, por exemplo,  $R_c = 1/8$ , a desuniformidade da distribuição de velocidade axial aumenta, mas a velocidade axial média aumenta em proporção maior e, portanto a uniformidade da distribuição de velocidade axial normalizada aumenta. Porém em geral a razão de contração é um dos objetivos de um projeto-de-contração. Razões de contração próximas da unidade não apresentam grande interesse prático, pois, pouco elevaria a velocidade na saída da contração. Assim, em geral, fixa-se um razão de contração desejada e variam-se os outros parâmetros ou funções. Em relação ao coeficiente de pressão quanto menor a razão de contração,  $R_c$ , maior será seu decaimento ao longo da parede da contração, na direção do escoamento.

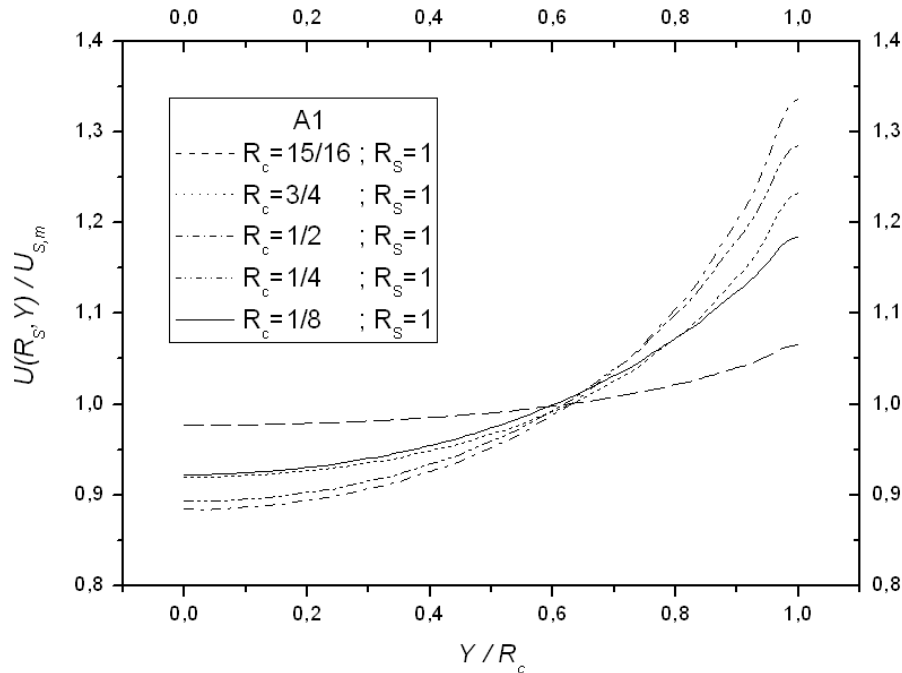


Figura 6.10- Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  para: função A1,  $R_c = 15/16, 3/4, 1/2, 1/4, 1/8$  e  $R_s = 1$ .

Foram realizados testes numéricos extensos e comprovou-se que, para várias funções que modelam a parede da contração, a relação não linear entre uniformidade na distribuição da velocidade axial normalizada e a razão de contração também está presente. Como exemplo adicional mostra-se os resultados obtidos usando-se a função A3,  $R_s = 1$ , e  $R_c = 15/16, 3/4, 1/2, 1/4, 1/8$ , nesse caso também a distribuição mais desuniforme está associada a  $R_c = 1/2$ , sendo que para outros valores da razão de contração, maiores ou menores, os perfis de velocidade normalizada são mais uniformes. Quando a razão de contração aumenta o respectivo coeficiente de pressão também aumenta. Esses resultados são semelhantes aos obtidos usando a função A1, para os mesmos parâmetros  $R_c$  e  $R_s$ . Para função A3 também ocorre gradiente adverso de pressão para  $R_c = 1/4, 1/8$ , sendo mais intenso para  $R_c = 1/8$ .

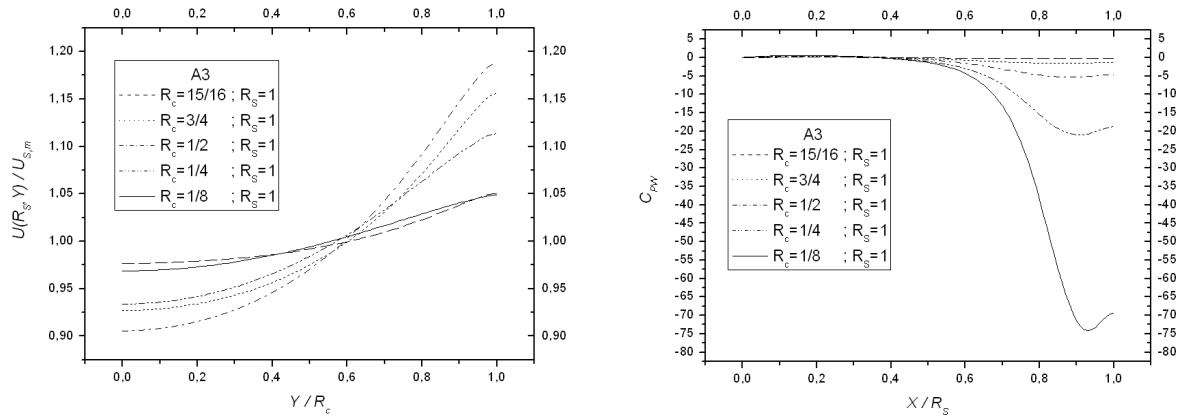


Figura 6.11- Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para: função A3,  $R_c = 15/16, 3/4, 1/2, 1/4, 1/8$  e  $R_s = 1$ .

### 6.2.3 INFLUÊNCIA DA FUNÇÃO DE PAREDE DA CONTRAÇÃO

Nessa subseção procura-se apresentar resultados e analisar a influência da função que modela o formato da parede da contração,  $F(X)$ . Para tal fixou-se a razão de esbelteza,  $R_s = 1$ , a razão de contração,  $R_c = 1/8$ , e variou-se a função de parede para as opções: A1-A4. Sendo que para a função A2 ainda se considerou três subcasos para:  $\varepsilon = +\varepsilon_c, -\varepsilon_c, -0,803\varepsilon_c$ .

Os resultados para a função A1 com  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$  foram apresentados nas Figuras 6.2, 6.4 e 6.5. Os resultados para as demais funções A2-A4 com  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$  são apresentadas nas Figuras 6.12-17. Na Figura 5.2 nota-se que a função A2 com  $\varepsilon = +\varepsilon_c$  apresenta maiores valores que a função A1 no intervalo  $(0, R_s)$  significando que, proporcionalmente, o fluido acelera-se mais, por exemplo, no intervalo  $[0, R_s/2]$  para a função A1 do que para a função A2, em conseqüência a aceleração do fluido no intervalo  $[R_s/2, R_s]$  será maior para a função A2 do que para a função A1. Comparando-se a distribuição de velocidade meridional,  $V$ , para a função A1, Figura 6.2, e para a função A2,  $\varepsilon = +\varepsilon_c$ , Figura 6.12, percebe-se que  $V$  tem maior valor absoluto para a função A2,  $\varepsilon = +\varepsilon_c$ , e o local onde essa velocidade máxima, em valor absoluto, ocorre está mais próximo da saída da contração do onde ocorre o máximo, em valor absoluto, para a função A1. Então, para a função A2,  $\varepsilon = +\varepsilon_c$ , a energia cinética será maior na região próxima da saída da contração e o coeficiente de pressão será menor.

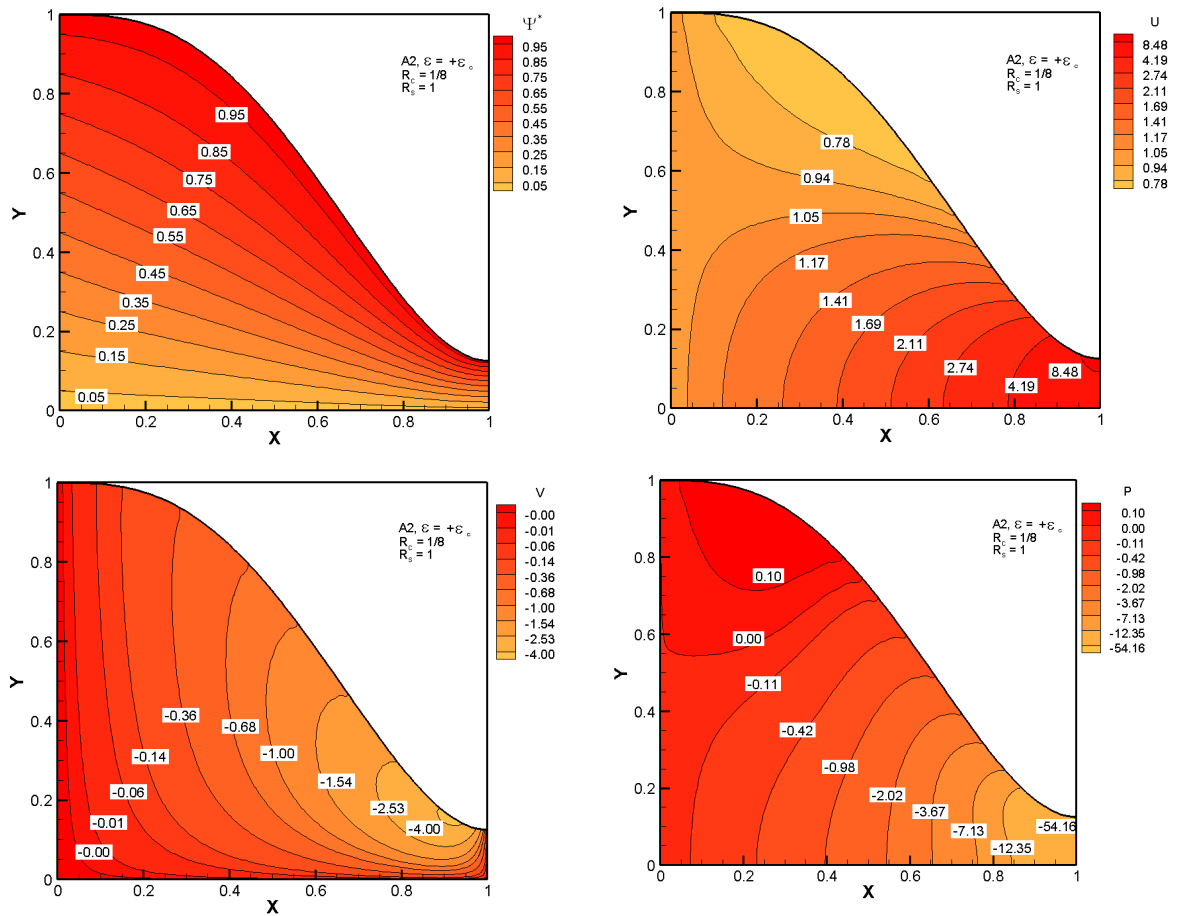


Figura 6.12- Linha de corrente, componentes do vetor velocidade e campo de pressão para contração com: função A2,  $\varepsilon = +\varepsilon_c$ ;  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$ .

Os valores para a função A2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ ;  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$ , são menores do que os da função A1 no intervalo  $(0, R_s)$ , Figura 5.2. Assim, para função A2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ , o escoamento será mais acelerado no intervalo  $[0, R_s/2]$  do que ocorre para a função A1. E no intervalo  $[R_s/2, R_s]$  o escoamento será menos acelerado no caso da função A2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$  do que para a função A1. Em conseqüência a distribuição de velocidade axial normalizada será mais uniforme para a função A2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ , do que para a função A1, porém para a primeira haverá gradiente adverso de pressão, Figura 6.17.



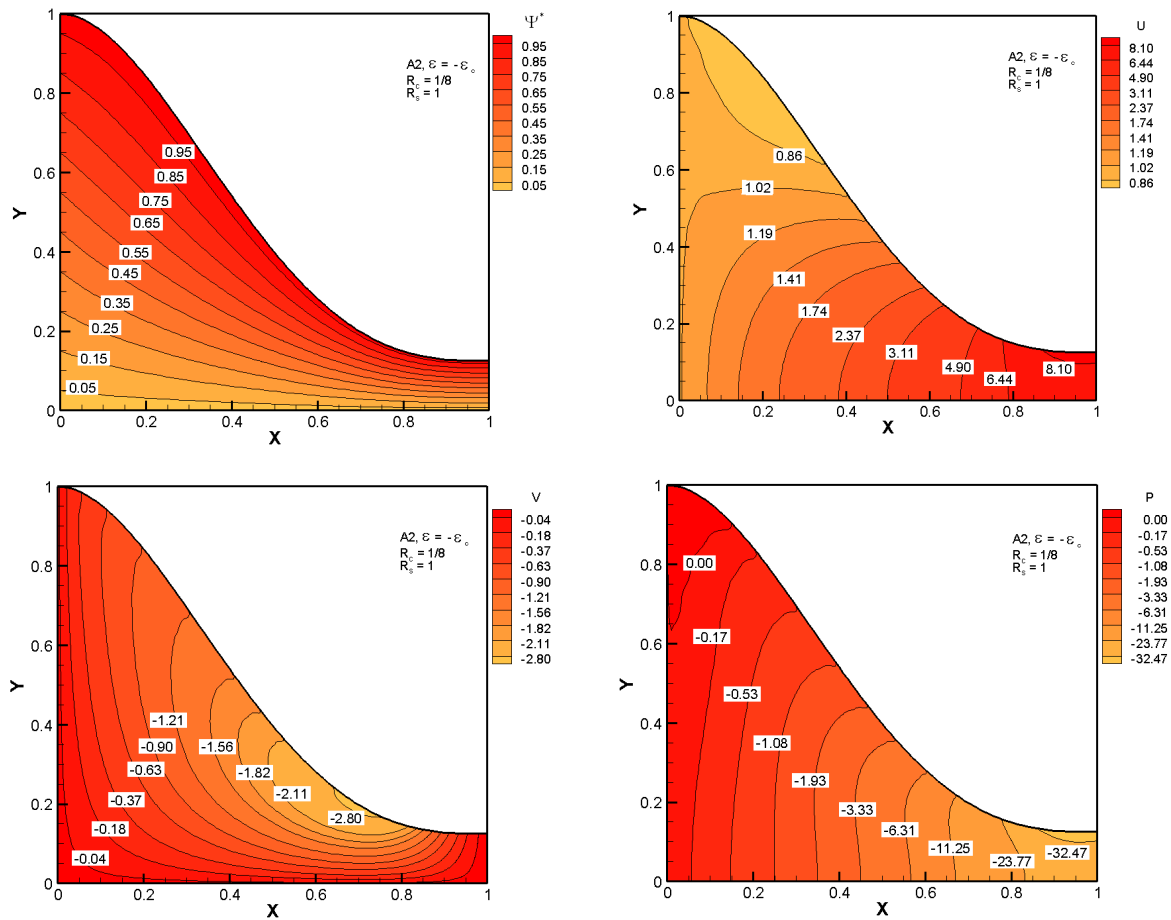


Figura 6.13- Linha de corrente, componentes do vetor velocidade e campo de pressão para contração com: função A2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ ;  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$ .

Para a função A2,  $\varepsilon = +\varepsilon_c$ ;  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$ , ocorre a mais desuniforme das distribuições de velocidade axial normalizada e o gradiente de pressão é favorável, Figura 6.17, e no caso da função A2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ ;  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$ , o perfil de velocidade axial normalizada é o mais uniforme, porém apresentando gradiente adverso de pressão. Realizou-se, então, vários experimentos numéricos visando encontrar um valor de  $\varepsilon$  que produzisse um perfil de velocidade axial normalizada, relativamente, uniforme e que não apresentasse gradiente adverso de pressão. O valor encontrado foi  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ . Nas Figuras 6.14 e 6.17 apresenta-se os resultados para essa função A2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ;  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$ . Na Figura 6.17 percebe-se que a distribuição da velocidade axial normalizada continua, relativamente, uniforme e a distribuição de pressão na apresenta gradiente adverso de pressão.

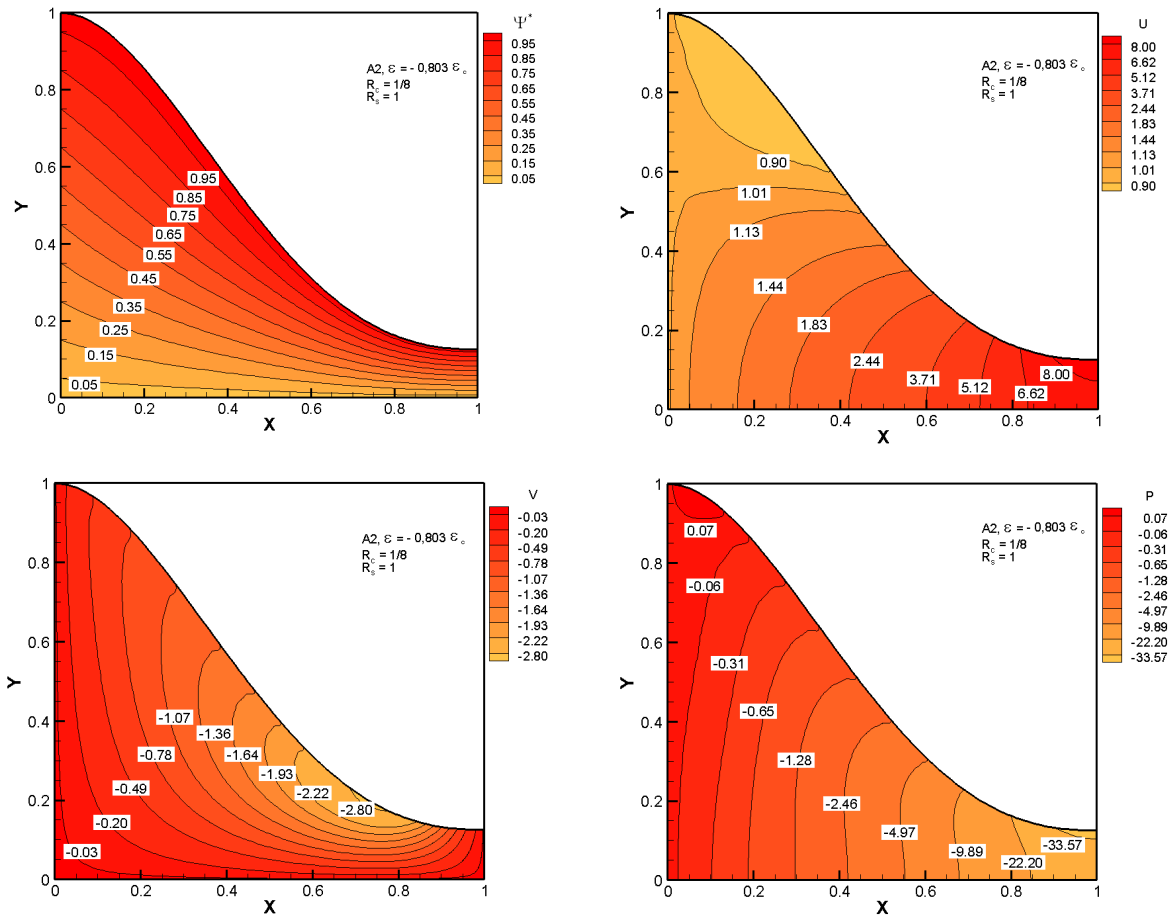


Figura 6.14- Linha de corrente, componentes do vetor velocidade e campo de pressão para contração com: função A2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ;  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$ .

A função A3 é bem assemelhada com a função A1, no intervalo  $(0, R_s/2)$  os valores da primeira são ligeiramente maiores do que os da segunda, e no intervalo  $(R_s/2, R_s)$  ocorre o inverso. A principal vantagem da função A3 sobre a A1 é que a primeira atende às restrições de derivadas de segunda ordem nulas nos dois extremos do domínio de definição. Os resultados para a função A3 são apresentados nas Figuras 6.15 e 6.17, nota-se que o perfil de velocidade axial normalizado para a função A3 é, praticamente, igual aquele obtido para a função A2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ;  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$ , porém com gradiente adverso de pressão.

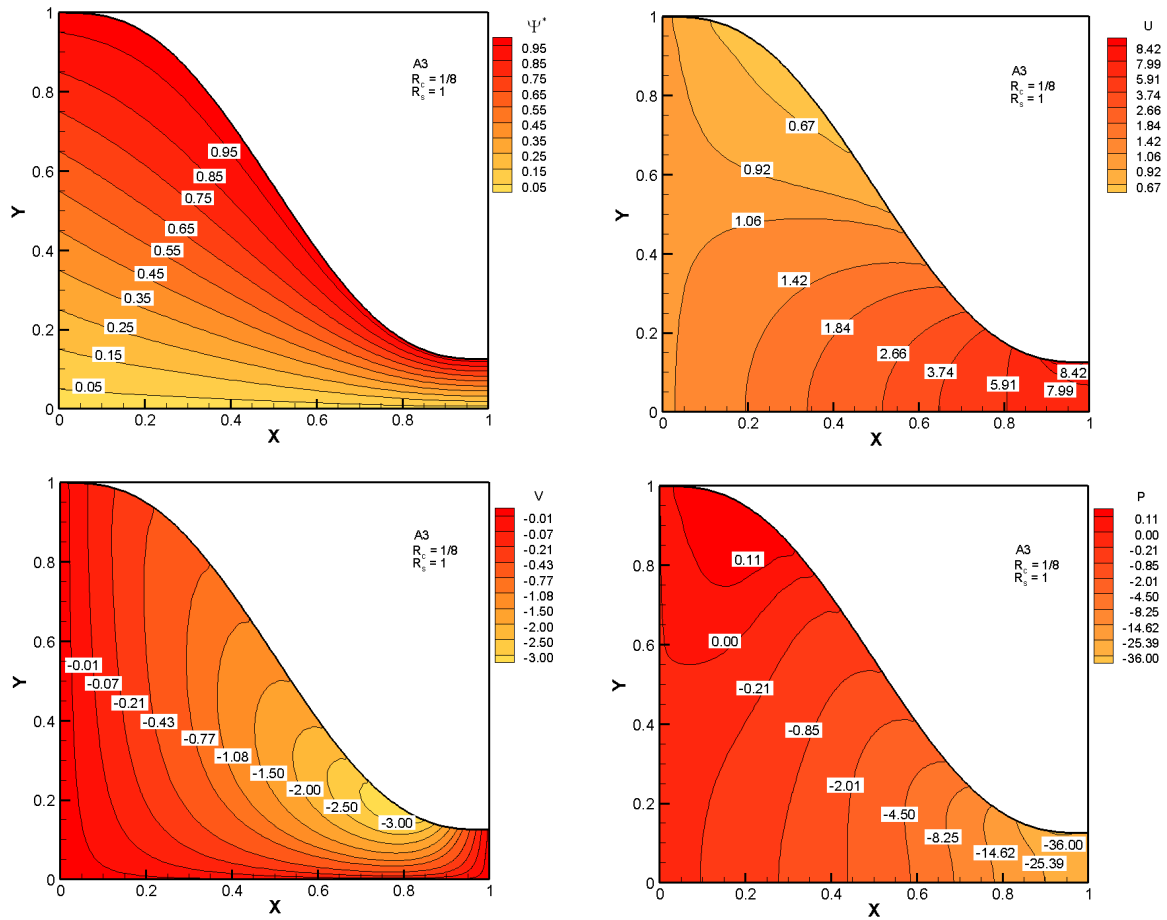


Figura 6.15- Linha de corrente, componentes do vetor velocidade e campo de pressão para contração com: função A3,  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$ .

A função A4 é muito assemelhada com a função A1, Figura 5.2. Suas primeiras e segundas derivadas também o são, Figuras 5.3 e 5.4. Portanto, os resultados obtidos para a função A4,  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$ , também são muito semelhantes aqueles obtidos para a função A1,  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$ , conforme pode ser comprovado nas Figuras 5.16 e 5.17. Assim, a função A4 não será mais considerada no rol de funções sendo analisadas, visto que a função A1 leva a resultados representativos para as duas.

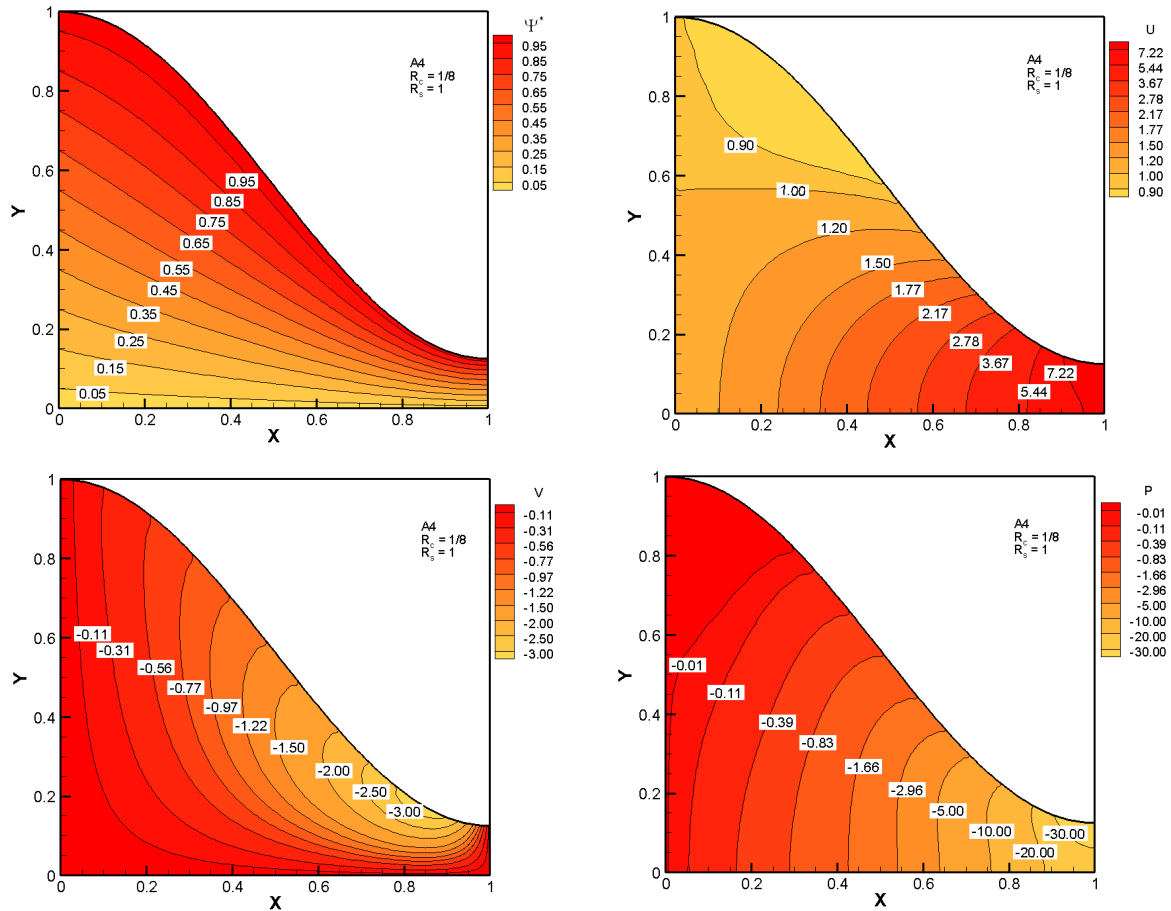


Figura 6.16- Linha de corrente, componentes do vetor velocidade e campo de pressão para contração com: função A4,  $R_c = \frac{1}{8}$  e  $R_s = 1$ .

A reunião de resultados significativos para as funções A1-A4 é feita na Figura 5.7. Quanto à distribuição da velocidade axial normalizada a função que leva a distribuição mais desuniforme é a A2,  $\varepsilon = +\varepsilon_c$ ;  $R_c = \frac{1}{8}$  e  $R_s = 1$ . Em posição intermediária estão os resultados para as funções A1 e A4 que conforme explanação anterior produz resultados bastante próximos. As três que produziram distribuições de velocidade axial normalizada as mais uniformes foram A2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ ; A2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ; e A3. Das três apenas a A2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ , não apresenta gradiente adverso de pressão. A que apresentou o perfil normalizado mais uniforme foi a função A3, porém apresentando gradiente adverso de pressão. É interessante mencionar que de acordo com o analisado sobre a razão de esbelte, gradientes adversos de pressão podem ser eliminados aumentando o comprimento da contração, se factível.

A função que levou à distribuição de velocidade axial normalizada mais uniforme e sem gradiente adverso de pressão foi a A2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ .

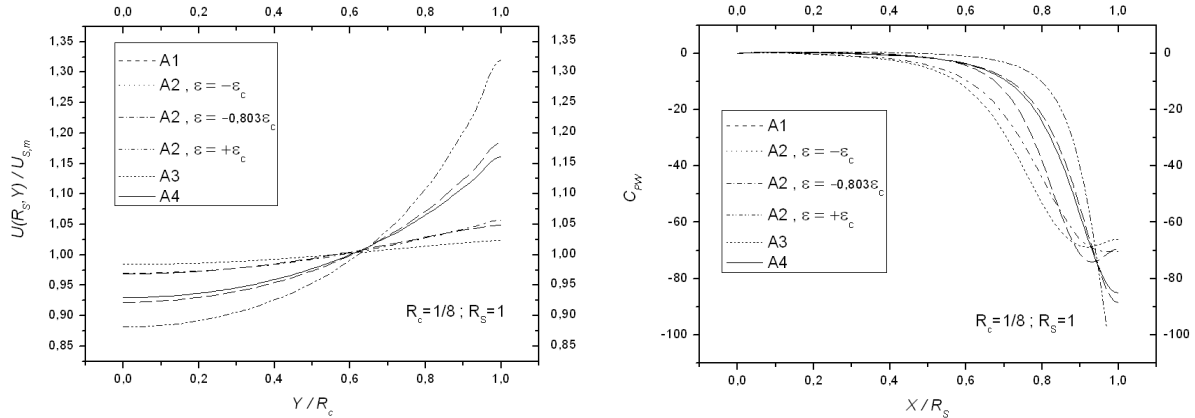


Figura 6.17- Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para: funções A1-A4,  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$ .

### 6.3 RESULTADOS E SUA ANÁLISE PARA O CASO “B”

No caso “B” procura-se investigar a influência que ocorre no escoamento no interior da contração quando se introduz no início da contração um trecho em que a função  $F(X)$  é constante e igual à unidade. A descrição desse caso e as características da função de parede podem encontradas no capítulo 5, mais especificamente nas Figuras 5.6-8. Foram realizados extensos testes numéricos variando os parâmetros,  $R_s$  e  $R_c$ , e as funções  $F(X)$ , na Figura 6.18 são apresentados os resultados para a função B2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ,  $\alpha = 0,1$ ;  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$ . Esse subcaso foi escolhido para apresentação de resultados porque a função correspondente A2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ,  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$ , foi a que apresentou os melhores resultados nas comparações que se fez quando da análise dos resultados do caso “A”. Nas Figuras 6.19-22 são apresentados resultados correspondentes às funções B1, B2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ ; B2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ; e B3. Os resultados correspondentes às funções B2,  $\varepsilon = +\varepsilon_c$ ; e B4 não são apresentados, pois, considerou-se na análise apresentada anteriormente, caso “A”, que essas duas funções levam aos piores resultados.

O parâmetro adimensional  $\alpha$ , Equação (5.2.1a), é a métrica associada com o tamanho  $R_c$ , Equação 5.10b, da extensão no início da contração. Nos resultados da Figura 6.18 utilizou-se  $\alpha = 0,1$  e nos das Figuras 6.19-22 utilizou-se  $\alpha = 0; 0,1; 0,2; 0,3$ . Lembrando que, por exemplo, a função B3 para  $\alpha = 0$  é o mesmo que a função A3, e assim, sucessivamente, para as outras funções.

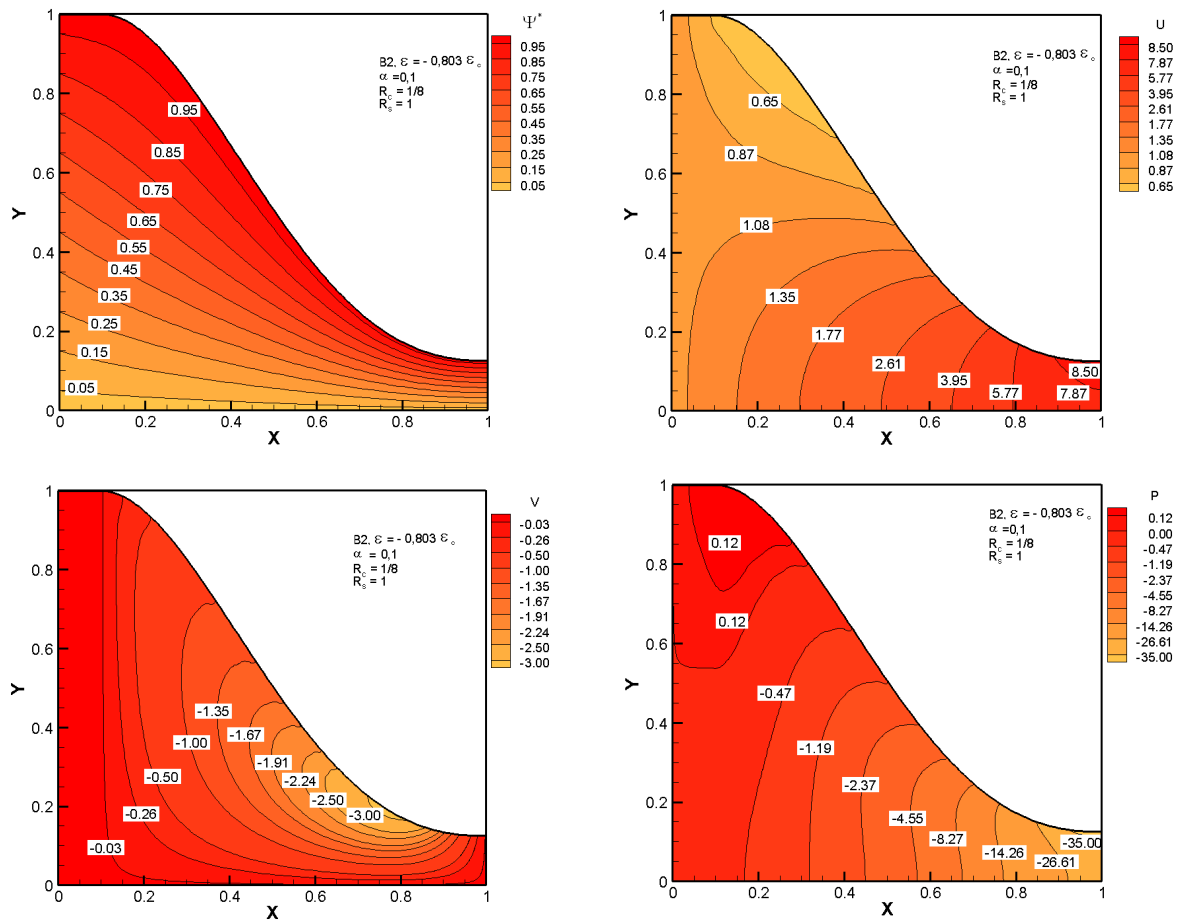


Figura 6.18- Linha de corrente, componentes do vetor velocidade e campo de pressão para contração com: função B2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ,  $\alpha = 0,1$ ;  $R_c = \frac{1}{8}$  e  $R_s = 1$ .

Para a função B1 são apresentados, Figura 6.19, os resultados para a velocidade axial normalizada e o coeficiente de pressão, correspondentes a diferentes valores de  $\alpha = 0; 0,1; 0,2;$  e  $0,3$ . Embora, para  $\alpha = 0,1$  a distribuição de velocidade axial normalizada tenha se tornado mais uniforme, para todos os outros valores não nulos de  $\alpha$  os perfis tornaram-se mais desuniformes e os coeficientes de pressão passaram todos a apresentar gradiente adverso de pressão. Assim, como regra geral, para a função B1 a introdução de extensão no início da contração causa um efeito desfavorável.

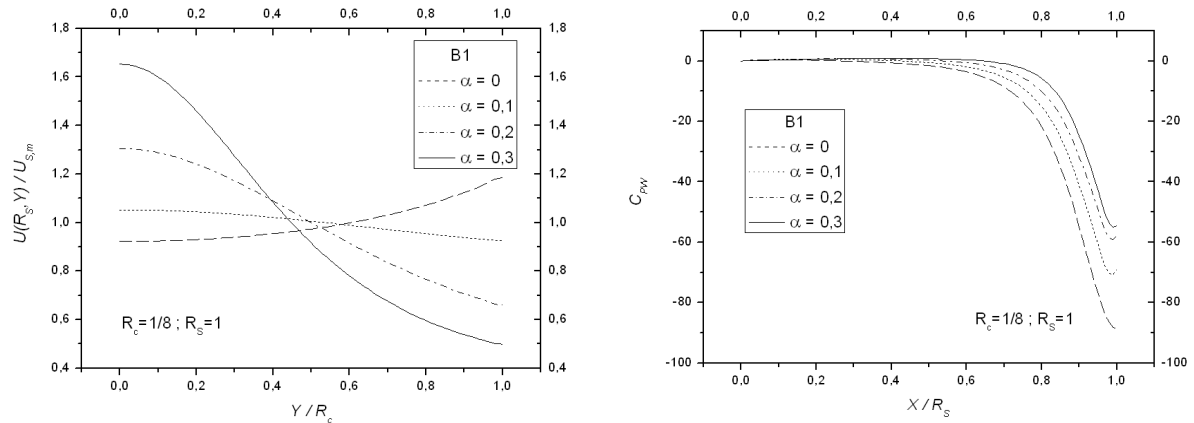


Figura 6.19- Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para função B1,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ ,  $\alpha = 0,1; 0,2; 0,3$ .

Na Figura 6.20 são apresentados os resultados para a função B2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ,  $\alpha = 0,1; 0,2; 0,3$ , mantidos os parâmetros restantes. Claramente, a uniformidade da distribuição de velocidade axial normalizada piora à medida que  $\alpha$  varia de  $\alpha = 0,1$  para  $\alpha = 0,3$ , e todas são piores do que aquela que corresponde a  $\alpha = 0$ , isto é a função A2. O aspecto positivo que se pode mencionar é que não aparece gradiente adverso de pressão. De qualquer forma para a função B2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ,  $\alpha \geq 0,1$  os resultados pioraram com a introdução de extensão na entrada da contração.

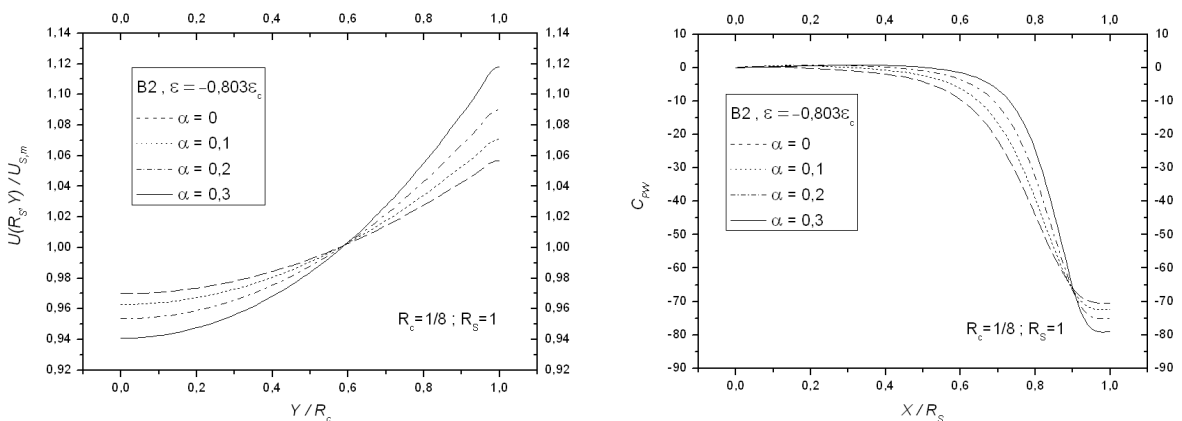


Figura 6.20 - Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para função B2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ ,  $\alpha = 0,1; 0,2; 0,3$ .

Para a função B2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ ,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ ,  $\alpha = 0,1; 0,2; 0,3$ , os resultados são mostrados na Figura 6.21, nesse subcaso também a uniformidade da velocidade axial

normalizada piora à medida que o parâmetro  $\alpha$  aumenta. O coeficiente de pressão que apresentava gradiente adverso de pressão para  $\alpha = 0$ , continuou apresentando para  $\alpha \neq 0$ , porém com intensidades mais acentuadas para maiores valores de  $\alpha$ . Assim, os resultados pioraram para  $\alpha \neq 0$  quando comparado com aqueles associados a  $\alpha = 0$ .

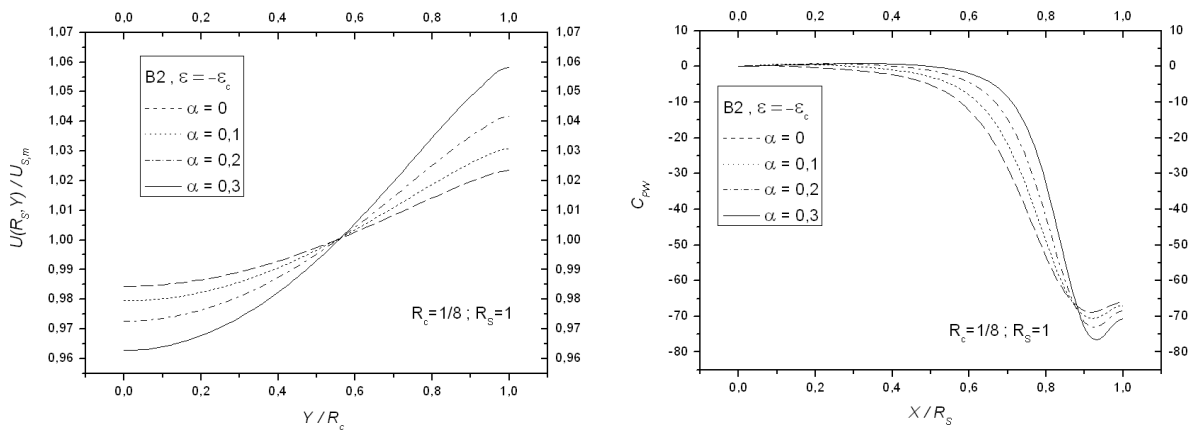


Figura 6.21 - Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para função B2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ ,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ ,  $\alpha = 0,1; 0,2; 0,3$ .

Qualitativamente, os resultados correspondentes à função B3, Figura 6.22, são semelhantes àqueles da função B2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ , Figura 6.21. A distribuição de velocidade axial normalizada torna-se mais desuniforme à medida que o parâmetro  $\alpha$  aumenta e o coeficiente de pressão que apresentava gradiente adverso de pressão, para  $\alpha = 0$ , continua a mantê-los para  $\alpha \neq 0$ . Então também para a função B3 os resultados pioram com a introdução de extensão na entrada da contração.

A conclusão referente ao caso “B” é que a introdução de extensão na entrada da contração faz aumentar a desuniformidade da distribuição de velocidade axial normalizada. Quanto maior for o tamanho da extensão considerada maior será a desuniformidade causada ao perfil de velocidade axial normalizada. Em relação ao coeficiente de pressão os resultados também pioraram, quando, para  $\alpha = 0$ , não havia gradiente adverso de pressão, para  $\alpha \neq 0$ , passa-se a tê-los; quando, para  $\alpha = 0$ , os havia, então para  $\alpha \neq 0$ , suas intensidades são incrementadas.

A opção por geometrias do caso “B” devem ser evitadas, pois, consomem espaço útil, destinado a  $R_c$ , e pioram os resultados.



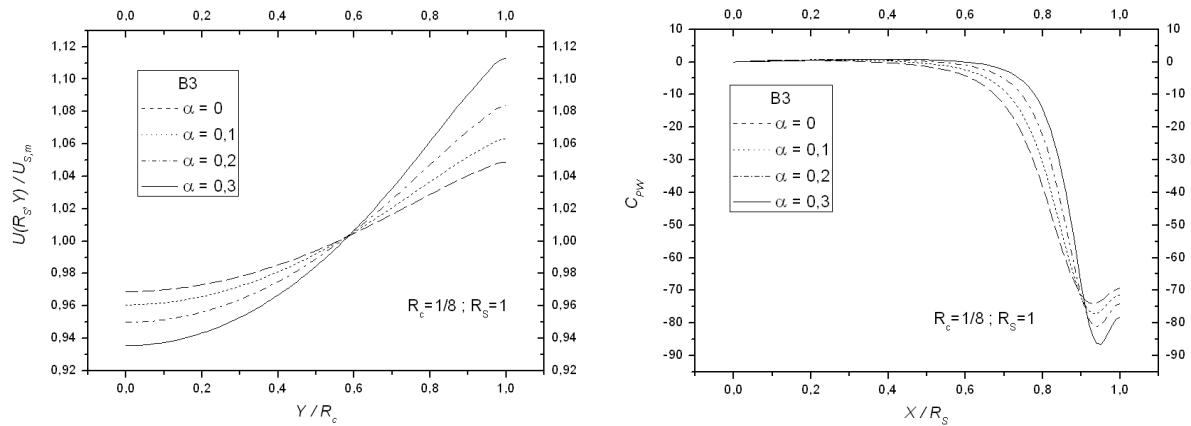


Figura 6.22 - Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para função B3,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ ,  $\alpha = 0,1; 0,2; 0,3$ .

#### 6.4 RESULTADOS E SUA ANÁLISE PARA O CASO "C"

O caso "C" caracteriza-se por considerar uma extensão na saída da contração conforme apresentado no capítulo 5, Figura 5.9. Os formatos das funções de parede relativas a esse caso podem ser vistas na Figura 5.10, e suas primeira e segunda derivadas nas Figuras 5.11-12.

Para esse caso foram realizados variados testes numéricos para valores dos parâmetros  $R_s$  e  $R_c$ , para os subcasos das funções de parede C1; C2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ; C2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ , C3, e com o parâmetro  $\beta = 0,1; 0,2; 0,3$ .

Para os parâmetros  $R_s = 1$ ,  $R_c = 1/8$  e  $\beta = 0,1$  são mostrados na Figura 6.23 os resultados correspondentes à função C2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ . Comparando-se esses resultados com os correspondentes A2 e B2 nota-se que a distribuição de velocidades ficou mais uniforme não região próxima à saída da contração.

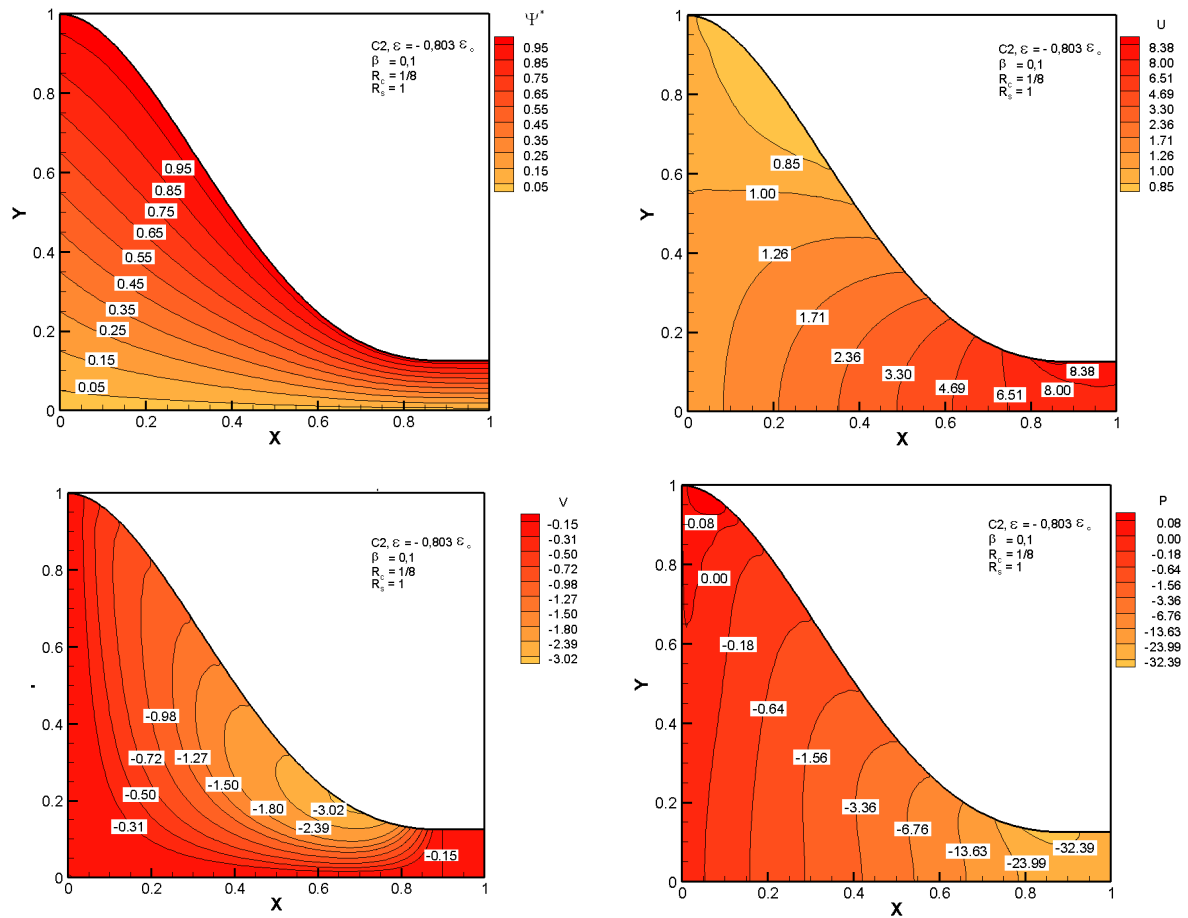


Figura 6.23 - Linha de corrente, componentes do vetor velocidade e campo de pressão para contração com: função C2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ,  $\beta = 0,1$ ;  $R_c = \frac{1}{8}$  e  $R_s = 1$ .

Os resultados relativos à função C1 para  $\beta = 0,1; 0,2; 0,3$ , mantidos os outros parâmetros, são apresentados na Figura 6.24. Nota-se que com a introdução de extensão ao final da contração a velocidade axial normalizada uniformiza-se bastante se comparada com a correspondente ao caso sem extensão, caso “A”. De  $\beta = 0$ , contração sem extensão (caso “A”), a  $\beta = 0,1$ ; contração com extensão correspondente a 10% de seu comprimento total, o perfil de velocidade axial uniformizou-se bastante. De  $\beta = 0,1$  a  $\beta = 0,2$  houve pequeno incremento na uniformização; e de  $\beta = 0,2$  a  $\beta = 0,3$  as curvas na Figura 6.24, praticamente, confundem-se. Para  $\beta = 0$  o coeficiente de pressão não apresenta gradiente adverso de pressão. Para  $\beta = 0,1; 0,2; 0,3$  todas as curvas do coeficiente de pressão apresentam gradiente adverso de pressão. Quanto maior o valor de  $\beta$  mais intenso o gradiente adverso e ocorrendo mais para o interior da contração. Quanto à posição onde ocorre o menor valor para o coeficiente de pressão é claro que está associado ao local onde ocorre a transição da função  $F^*(X)$  para o trecho constante de  $F(X)$ . Quanto à intensidade do gradiente está associada ao

fato de que quanto maior o valor de  $\beta$  maior será a inclinação da função  $F^*(X)$  na região final de seu intervalo de definição e maiores serão as velocidades meridionais,  $V$ ; maiores serão as energias cinéticas e, portanto maiores serão os gradientes adversos de pressão.

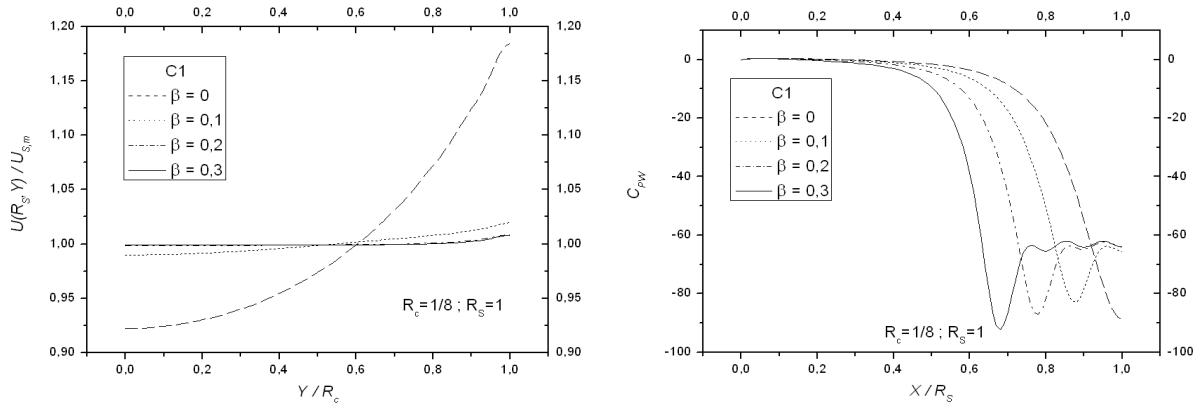


Figura 6.24 - Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para função C1,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ ,  $\beta = 0,1; 0,2; 0,3$ .

Quando se utiliza a função C2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ , para modelar a função parede da contração,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ , para  $\beta = 0,1; 0,2; 0,3$ ; obtêm-se os resultados apresentados na Figura 6.25. Qualitativamente, os resultados são semelhantes aos obtidos para a função C1. Quantitativamente, as distribuições de velocidade axial são mais uniformes do que as correspondentes à função C1. Quanto ao coeficiente de pressão, que não possuía gradiente adverso para  $\beta = 0$ , passa a possuir para  $\beta \neq 0$ , mais intensos para maiores valores de  $\beta$ .

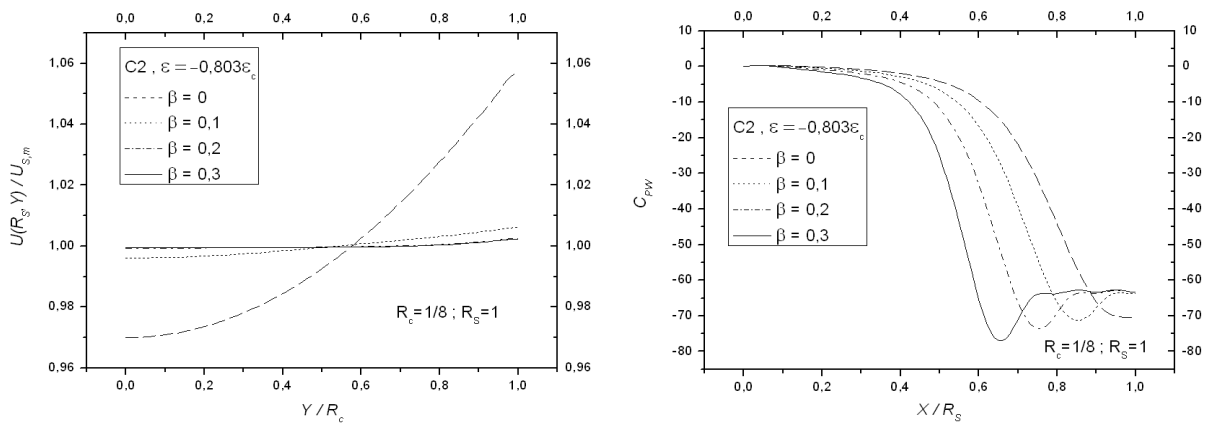


Figura 6.25 - Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para função C2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ ,  $\beta = 0,1; 0,2; 0,3$ .

Para a função C2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ , variando  $\beta = 0,1; 0,2; 0,3$ , para  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ , obtêm-se resultados, Figura 6.26, muito semelhantes aqueles obtidos para C2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ . Apenas duas pequenas diferenças: as distribuições de velocidade axial são, levemente, mais uniformes no caso  $\varepsilon = -\varepsilon_c$  do que no caso  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ . E os respectivos gradientes adversos de pressão são mais acentuados. No subcaso da função C2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ , mesmo para  $\beta = 0$  havia gradiente adverso de pressão.

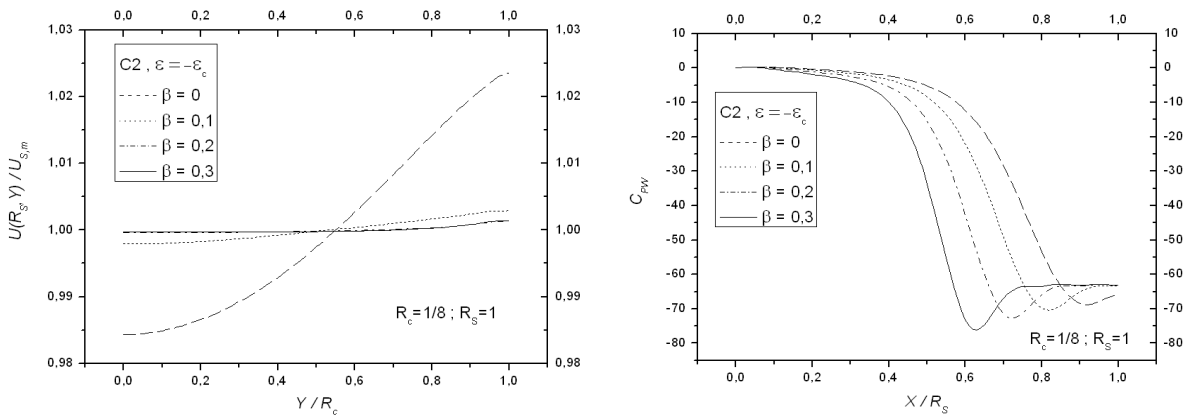


Figura 6.26 - Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para função C2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ ,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ ,  $\beta = 0,1; 0,2; 0,3$ .

Os resultados para a função C3, Figura 6.27, também são muito assemelhados aos da função C2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ , apresentando, aproximadamente, o mesmo nível de uniformidade no perfil de velocidade axial normalizada. A diferença mais notável é que para o subcaso da função C3 os gradientes adversos de pressão são mais intensos do que para a função C2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ .

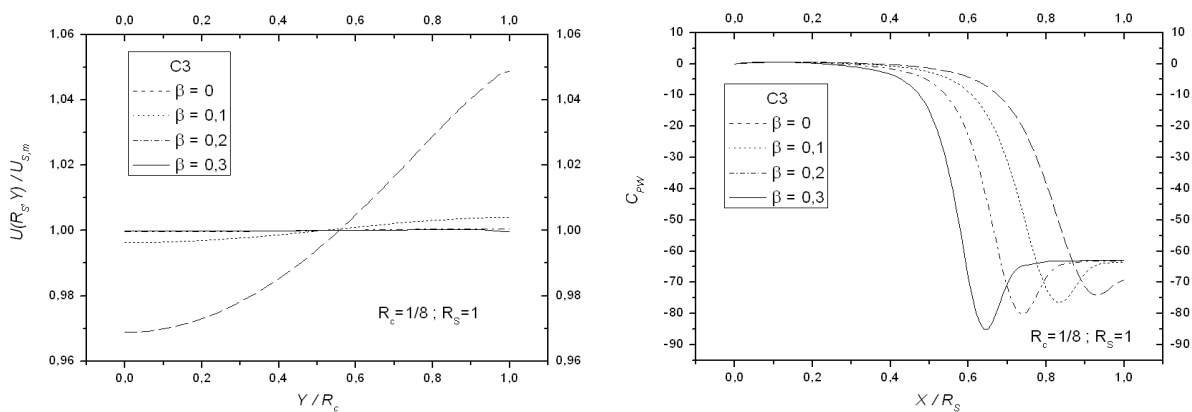


Figura 6.27 - Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para função C3,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ ,  $\beta = 0,1; 0,2; 0,3$ .

Conclui-se que a adição de um trecho com seção transversal constante ao final da contração tem o papel de aumentar a uniformização da distribuição de velocidade axial, embora ao custo de produzir e/ou aumentar a intensidade do gradiente adverso de pressão. Esse “efeito colateral” do aparecimento e/ou aumento do gradiente adverso de pressão pode ser mitigado aumentando-se o comprimento,  $R_s$ , da contração.

Nota-se que quando há muita uniformidade na velocidade axial na região da saída da contração é porque há gradiente adverso de pressão ou está na iminência de haver. De outra forma: quando há gradiente adverso de pressão ele tende a frear o escoamento na região onde ocorre. No caso da saída de contrações esse fato leva a velocidades mais uniformes. Escoamento com gradientes favoráveis tendem a acelerar o escoamento na região que ocorre e no caso de contrações leva a aumentar a desuniformidade da distribuição de velocidade axial.

Pelos resultados obtidos entende-se que a adição de extensão na saída de contração é favorável para aumentar a uniformidade do escoamento, mas que deve-se realizar pesquisas adicionais para evitar ou mitigar a existência de gradientes adversos de pressão na região anterior à saída da contração.

No caso “C” a função que produziu distribuição de velocidade axial com maior uniformidade e menores intensidades de gradientes adversos de pressão foi a C2 para  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ . A outra que se aproximou bastante da C2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ , foi a C2 para  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ , a qual apresentou os melhores resultados no caso “A”.

## **6.5 RESULTADOS E SUA ANÁLISE PARA O CASO “D”**

O caso “D” é um tipo de combinação dos casos “B” e “C”. Da análise feita dos casos “A”, “B” e “C” constatou-se que o caso “B” não é adequado, pois, o seu uso aumenta a desuniformidade da distribuição de velocidade axial na saída da contração. Também se constatou no caso “C” que seu uso é favorável para aumentar a uniformidade da velocidade axial na saída da contração, embora tenha-se que tomar medidas relativas ao gradiente adverso de pressão que, em geral, tende a ocorrer. Assim, é provável que o caso “D” leve a resultados piores do que no caso “C” e a melhores do que no caso “B”. Na Figura 6.28 apresenta-se resultados típicos para a função D2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ,  $\gamma = 0,05$ ;  $R_c = \frac{1}{8}$  e  $R_s = 1$ . Note que no caso  $\gamma = 0,05$  corresponde, em termos de espaço ocupado, a  $\alpha = 0,1$  ou  $\beta = 0,1$ , conforme Figura 5.13.

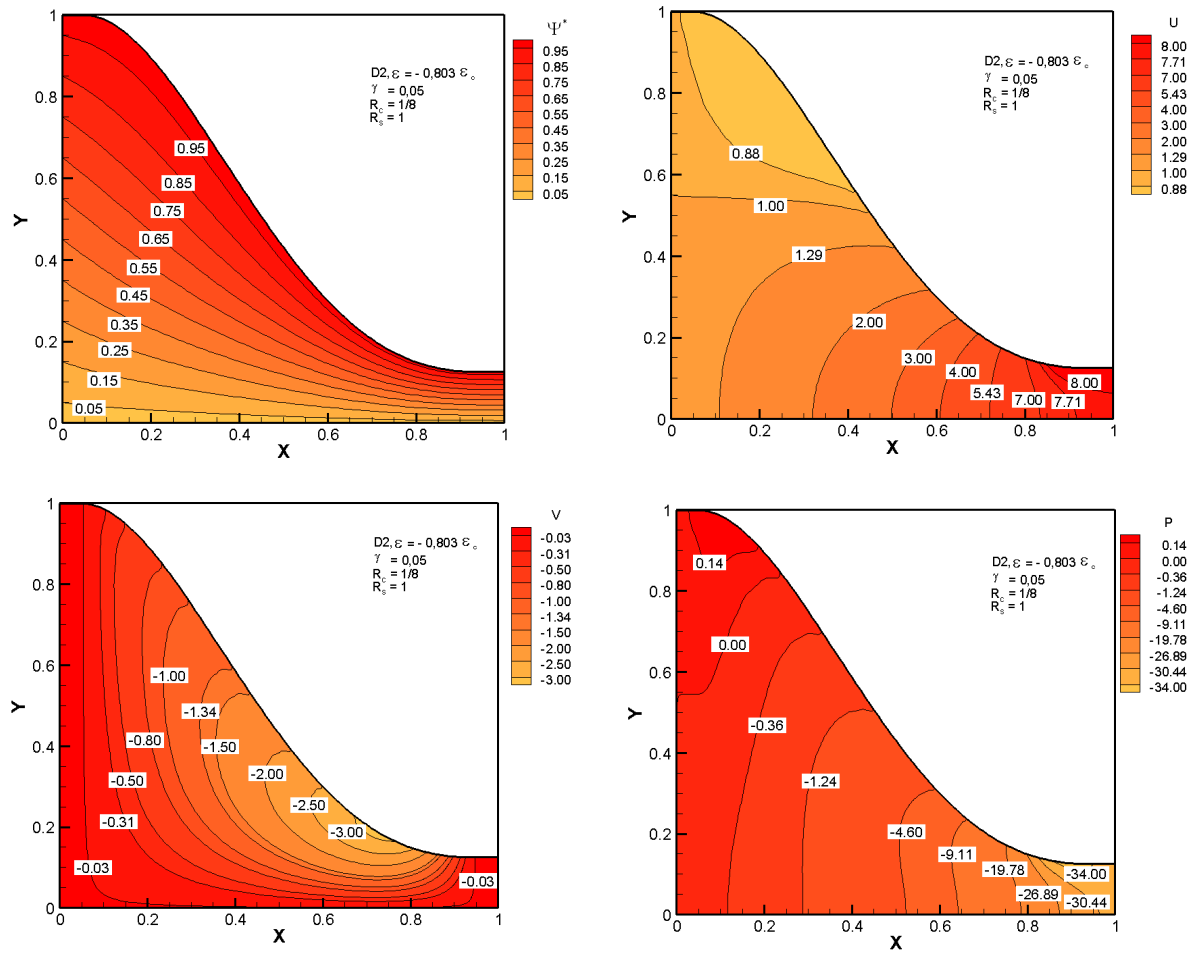


Figura 6.28 - Linha de corrente, componentes do vetor velocidade e campo de pressão para contração com: função D2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_0$ ,  $\gamma = 0,05$ ;  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 1$ .

Para a função D1,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$  variou-se  $\gamma = 0,05; 0,1; 0,15$  e os resultados obtidos para a velocidade axial normalizada e para o coeficiente de pressão estão mostrados na Figura 6.29. Percebe-se, comparando com os resultados correspondentes do caso “C”, que a uniformidade do perfil de velocidade piorou no caso “D” e também apresenta gradiente adverso de pressão.

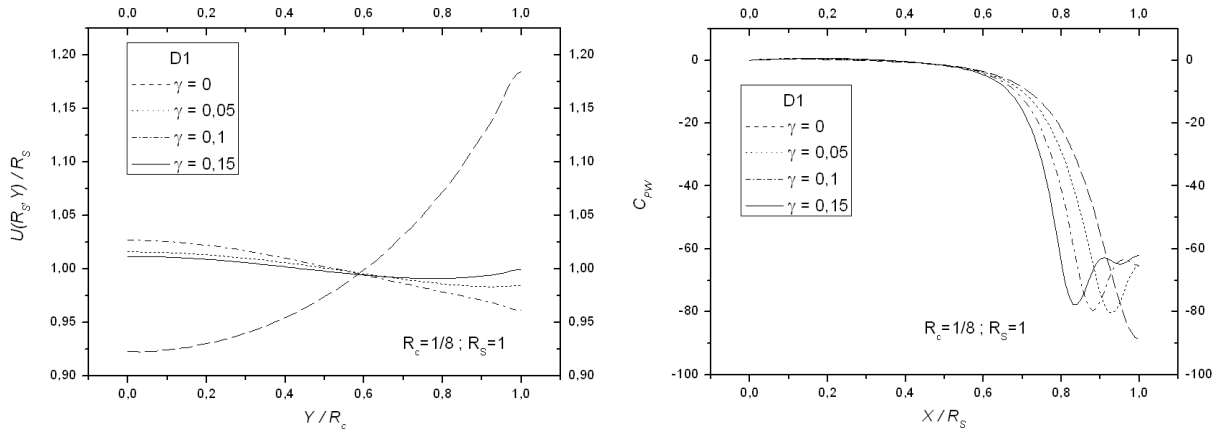


Figura 6.29 - Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para função D1,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ ,  $\gamma = 0,05; 0,1; 0,15$ .

Os resultados da distribuição de velocidade axial e coeficiente de pressão, Figura 6.30, para a função D2,  $\varepsilon = -0,803$ ,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ , com  $\gamma = 0,05; 0,1; 0,15$  foram melhores dos que os apresentados para a função D1, porém piores dos que os respectivos do caso “C”, função C2,  $\varepsilon = -0,803$ , Figura 6.25.

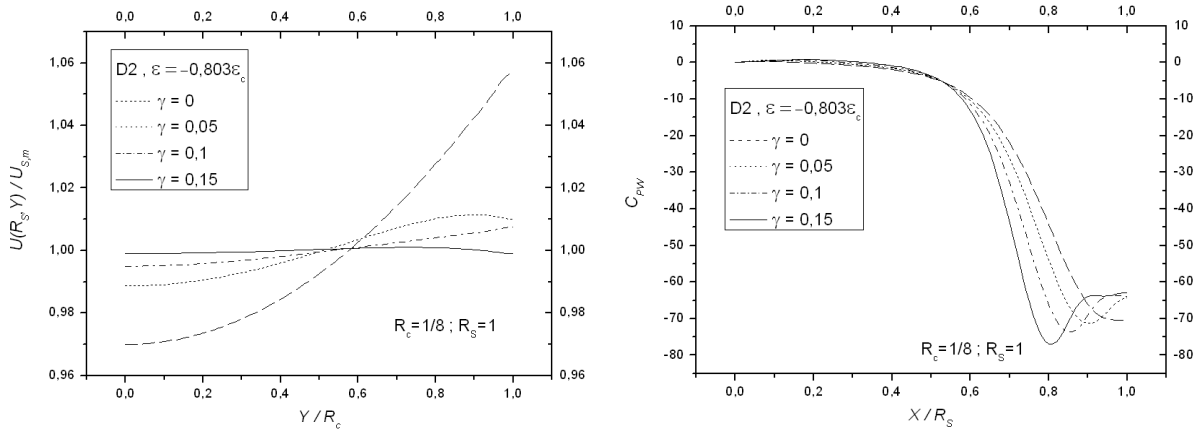


Figura 6.30 - Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para função D2,  $\varepsilon = -0,803$ ,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ ,  $\gamma = 0,05; 0,1; 0,15$ .

Na Figura 6.31 são apresentados os resultados da distribuição de velocidade axial e do coeficiente de pressão para a função D2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ ,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ , variando o parâmetro  $\gamma = 0,05; 0,1; 0,15$ . Esse caso apresenta os melhores resultados no caso “D”, porém piores que os respectivos do caso “C”, relativos à função C2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ .

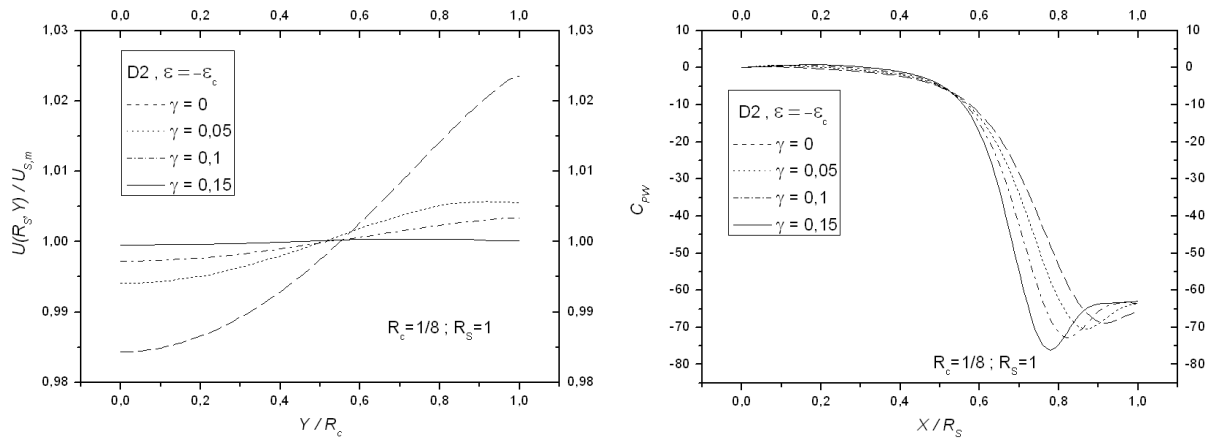


Figura 6.31- Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para função D2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ ,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ ,  $\gamma = 0,05; 0,1; 0,15$ .

Em relação à função D3 mostra-se os resultados para a velocidade axial e o coeficiente de pressão na Figura 6.32. Esses resultados também são piores que aqueles obtidos quando usando a função C3.

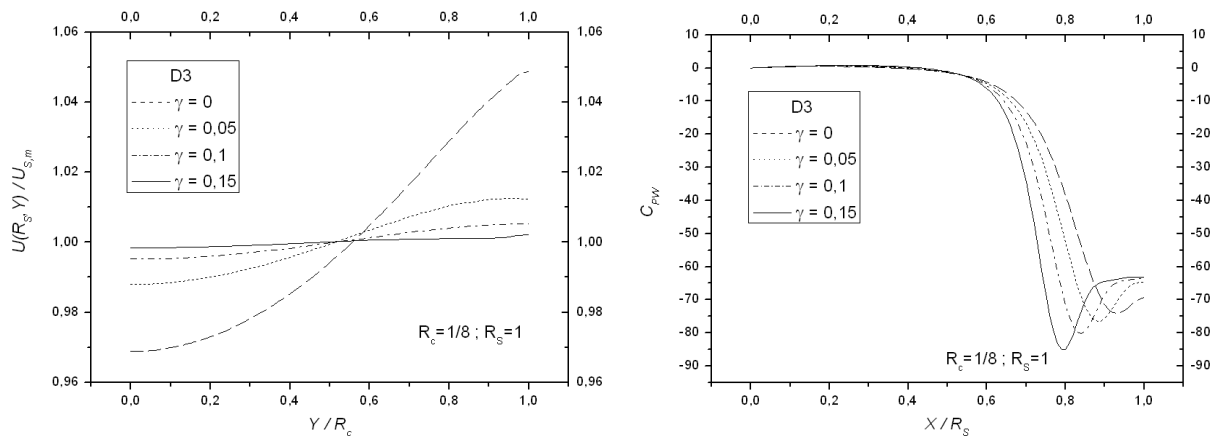


Figura 6.32 - Distribuição de velocidade normalizada  $U(R_s, Y)/U_{s,m}$  e coeficiente de pressão  $C_{pw}$  para função D3,  $R_c = 1/8$ ,  $R_s = 1$ ,  $\gamma = 0,05; 0,1; 0,15$ .

Dos resultados apresentados para o caso “D” e de sua análise fica estabelecido que a colocação de extensões na entrada e na saída da contração piora a uniformidade da distribuição de velocidade axial normalizada na saída da contração, em relação os resultados obtidos no caso “C”. A principal razão do aumento da desuniformidade da velocidade axial no caso “D” em relação ao caso “C” está associada à extensão existente na entrada da contração, conforme visto no caso “B” essa adição leve a piorar a uniformidade do escoamento. Assim, entende-se que o uso do caso “D” em contrações deve ser evitado.



## 7 RESULTADOS E SUA ANÁLISE PARA ESCOAMENTO POTENCIAL EM CONTRAÇÕES CILÍNDRICAS COM SIMETRIA AXIAL

Após a análise construída nos capítulos 5 e 6 sobre o formato da parede da contração – funções que podem descrevê-las, e a análise dos escoamentos no interior de contrações descrito para quatro geometrias diferentes, em coordenadas cartesianas, percebe-se que para a análise em coordenadas cilíndricas, todos esses fatores devem ser observados.

Desta forma serão apresentados e discutidos nesse capítulo, a função que produziu uniformidade na distribuição da velocidade axial e que não possui gradiente adverso de pressão ( $A2, \varepsilon = -\varepsilon_c$ ). A influência dos parâmetros  $R_s$  e  $R_c$  também serão discutidos porém sua influência já foi sistematizada na subseção 6.2.1 e 6.2.2.

Inicialmente foram plotadas as figuras para o caso  $A2, \varepsilon = -\varepsilon_c$  que é a geometria de contração na forma simplificada na direção  $R$  e  $Z$  com razão de contração  $R_c = 1/8$  e  $R_c = 1/2$  e razão de esbeltez  $R_s = 1$  e  $R_s = 3$ .

Observando a figura 7.1 e 7.2 logo adiante, em relação a razão de esbeltez variando os parâmetros  $R_s = 1$  e  $R_s = 3$ . Nota-se que em 7.1 a velocidade axial  $U(Z,R)$  aumenta, ou seja, o escoamento acelera-se devido a existência da contração, fato esse já observado no capítulo anterior. Porém existe uma região do escoamento próxima a posição  $(0,1)$ , na qual a velocidade  $U(R, Z)$  cai ligeiramente, pois nessa região onde o escoamento encontra a contração vai ocorrer uma pequena estagnação caracterizada pelo acréscimo de pressão e decréscimo de velocidade.

A componente da velocidade meridional  $R$  inicialmente vai aumentando e depois começa a decair em módulo até anular-se na saída da contração.

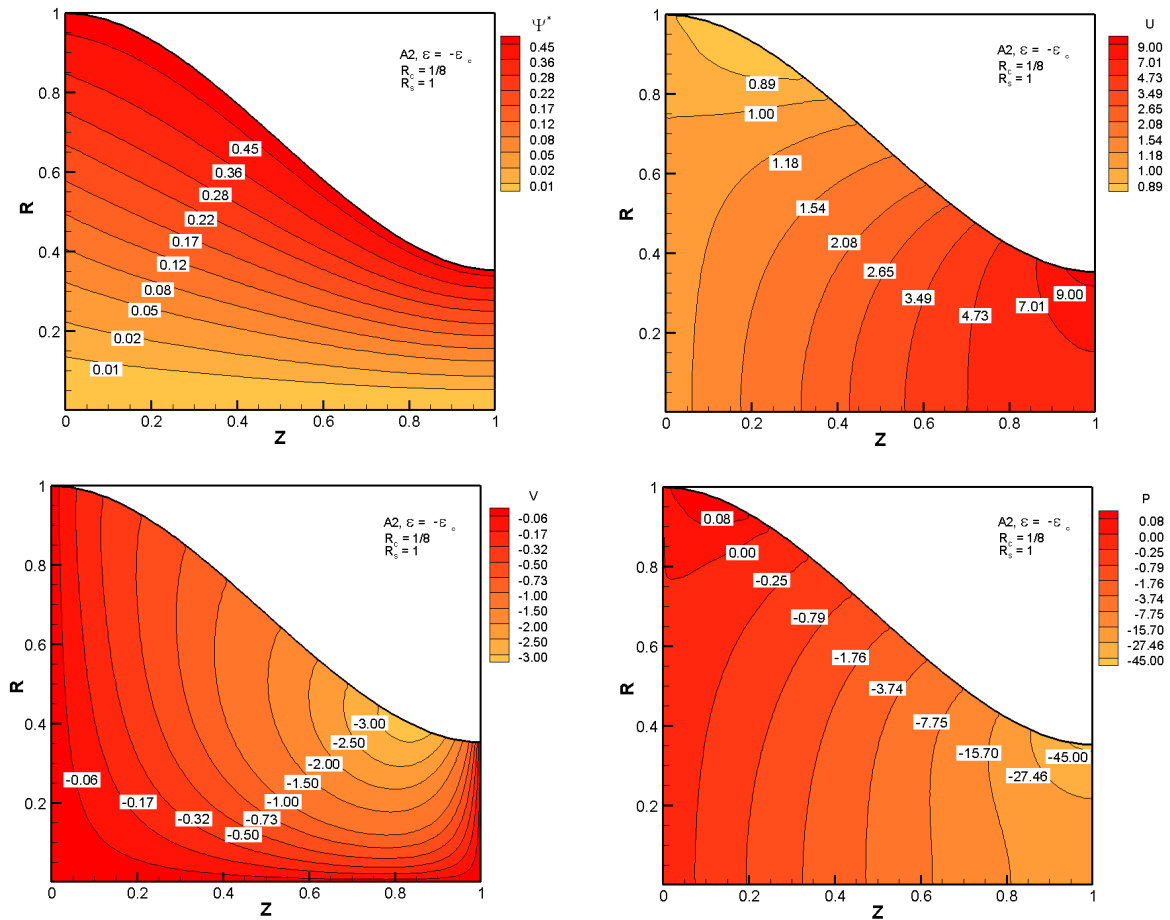


Figura 7.1 - Linha de corrente, componentes do vetor velocidade e campo de pressão para contração com: função A2,  $R_c = 1/8$ , e  $R_s = 1$ .

Apresenta-se na figura 7.2 os resultados para o escoamento  $R_c = 1/8$  e  $R_s = 3$ , ou seja, uma contração mais alongada do apresentada em 7.1. Nesse caso, percebe-se que a distribuição de velocidade  $U$  e o campo de pressão são mais paralelos e, portanto, mais uniformes do que aqueles apresentados para  $R_s = 1$ . Comparando-se os dois resultados, nota-se que o escoamento para  $R_s = 3$  é mais uniforme do que aquele para  $R_s = 1$ . Tal fato também foi observado em coordenadas cartesianas.

Analisando a influenciada razão de contração, deve-se observar as figuras 7.2 e 7.3 onde são apresentadas para a função A2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ ,  $R_c = 1/8$ , e  $R_c = 1/2$ .

Assim como foi discutido na subseção 6.2.2, em coordenadas cartesianas, também em coordenadas cilíndricas verifica-se que quando a contração aumenta, ou seja, para menores valores de  $R_c$ , as velocidades axiais e meridionais aumentam, a energia cinética aumenta e a pressão diminui, seguindo o mesmo padrão descrito na figura 6.9.

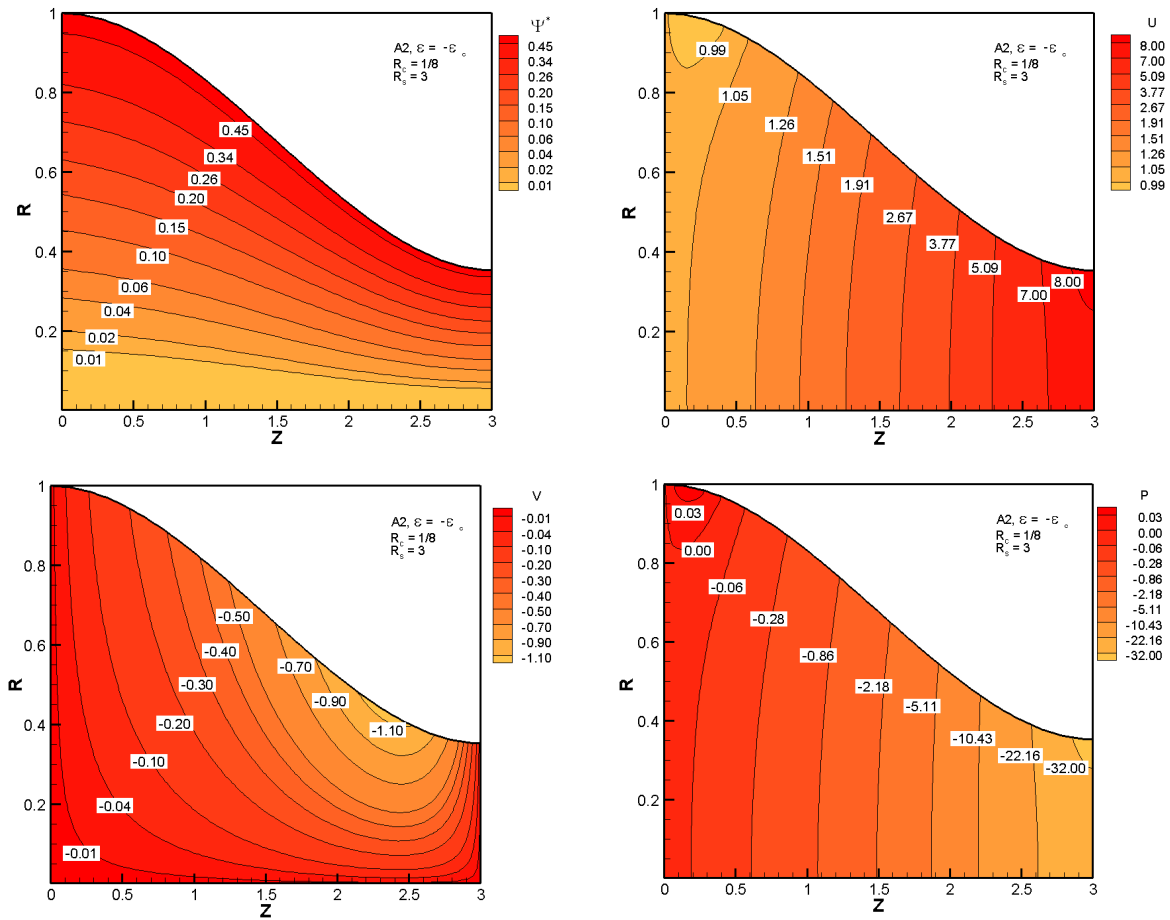


Figura 7.2 - Linha de corrente, componentes do vetor velocidade e campo de pressão para contração com: função A2,  $R_c = \frac{1}{8}$ , e  $R_s = 3$ .

É importante colocar que não existe relação linear entre a velocidade axial normalizada e razão de contração. Quando  $R_c$  tende a unidade, a contração tende a desaparecer e a distribuição de velocidade tende a uniformidade completa.

Porém, contrações próximas a unidade pouco elevaria a velocidade na saída da contração.

Quando  $R_c$  fica pequeno, por exemplo,  $R_c = \frac{1}{8}$  da figura 7.2, a velocidade axial possui desuniformidade, mas a velocidade axial média aumenta em proporção maior, contudo a uniformidade de velocidade axial normalizada aumenta.

Analisando agora a função que descreve a parede da contração, assim como dito anteriormente no início do capítulo, foi plotado apenas, para coordenadas cilíndricas, o caso A2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ , por apresentar ótimos resultados no que se refere a influência da geometria para a determinação dos campos  $\Psi^*$ , U, V e P.

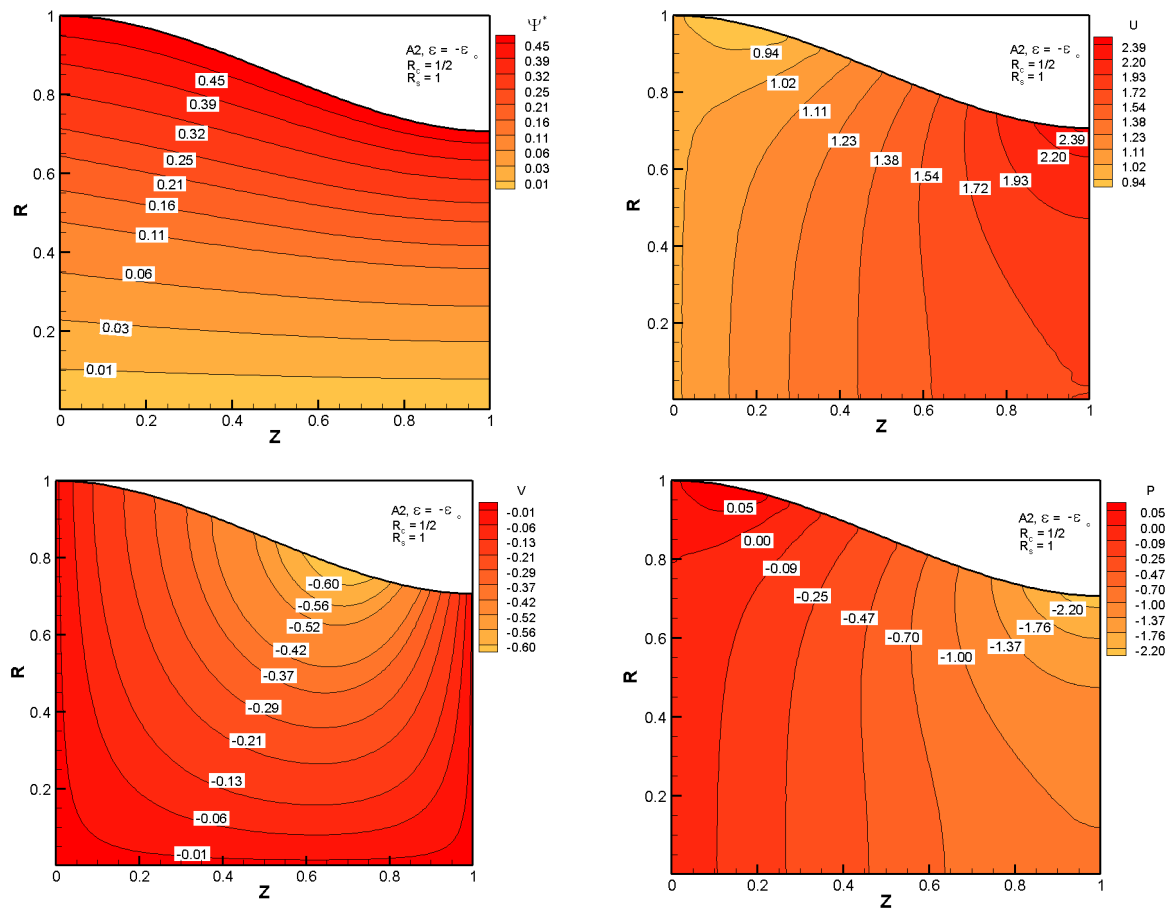


Figura 7.3 - Linha de corrente, componentes do vetor velocidade e campo de pressão para contração com: função A2,  $R_c = \frac{1}{2}$ , e  $R_s = 1$ .

As outras geometrias, casos B, C e D que apresentam extensões na entrada, na saída e simultaneamente na entrada e na saída das contrações, respectivamente, como citados no capítulo 6, apresentam uniformidades na distribuição de velocidades, porém como consequência, gradientes adversos de pressão, ou não possuem gradientes adversos de pressão, mas não possuem perfis de velocidades uniformes.

O caso D que é a união dos casos B e C, desuniformiza os perfis de velocidade e acrescenta gradientes adversos de pressão. Não é uma geometria que deve ser utilizada.

Voltando a figura 7.1, pode-se dizer que os escoamentos no interior da contração descrita pela função A2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ ,  $R_c = \frac{1}{8}$ , e  $R_s = 1$  será mais acelerado no intervalo  $[0, R_s/2]$ . No intervalo  $[R_s/2, R_s]$  o escoamento será menos acelerado. Em decorrência deste fato, a velocidade axial normalizada será mais uniforme e não haverá gradientes adversos de pressão.

## 8 CONCLUSÃO

Nesse capítulo estabelecem-se as principais conclusões a que se chegou ao longo do desenvolvimento desse trabalho.

Quanto à convergência da expansão em séries, os experimentos numéricos comprovaram que ao aumentar-se o número de termos na expansão os resultados são convergentes. Esse fato numérico está em concordância com a teoria de que a expansão em série de função quadrado-integrável é convergente.

Em relação à influência da razão de esbeltez constatou-se que ao se aumentar o valor de  $R_s$ , tornando a contração mais longa, o escoamento na saída da contração torna-se mais uniforme. Se o gradiente de pressão for adverso na região da saída da contração, ao aumentar-se o valor de  $R_s$  o gradiente adverso reduz-se em intensidade.

Quando a razão de contração  $R_c$  for próximo da unidade a velocidade  $U$ , normalizada, é bastante uniforme. Quando se vai diminuindo o valor de  $R_c$ , a partir da unidade, o escoamento normalizado na saída da contração vai-se tornando mais desuniforme. Entretanto, para valores ainda menores de  $R_c$  a uniformidade normalizada do escoamento volta a aumentar. Grandes contrações, baixos valores de  $R_c$ , associadas com pequenas razões de esbeltez tendem a produzir gradientes adversos de pressão na região da saída da contração. Existe relação não linear entre uniformidade na velocidade axial normalizada e razão de contração.

Para o caso “A” variando-se a função  $F(X)$  não opções elencadas: A1; A2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ ; A2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ; A2,  $\varepsilon = +\varepsilon_c$ ; A3 e A4; constatou-se que a função que produz a maior uniformidade na distribuição de velocidade axial e que não possui gradiente adverso de pressão é a A2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ; e que a função que produz os resultados mais desuniformes

para a velocidade axial normalizada é a A2,  $\varepsilon = +\varepsilon_c$ . Constatou-se também que as funções A1 e A4 são muito semelhantes e levam também a resultados muito semelhantes.

Concluiu-se que a introdução de extensão no início da contração, caso “B”, faz aumentar a desuniformidade da distribuição de velocidade axial normalizada. Quanto maior for o tamanho da extensão considerada, maior será a desuniformidade causada ao perfil de velocidade. Em relação ao coeficiente de pressão os resultados também pioraram à medida que o comprimento da extensão aumenta. A opção por geometrias do caso “B” devem ser evitadas, pois, consomem espaço útil, destinado a  $R_e$ , e pioram os resultados.

Em relação às geometrias do caso “C”, nas quais introduz-se extensão ao final da contração, concluiu-se a uniformização da distribuição de velocidade axial aumenta com o aumento do comprimento da extensão, embora ao custo de produzir e/ou aumentar a intensidade do gradiente adverso de pressão. Esse efeito do aparecimento e/ou aumento do gradiente adverso de pressão pode ser evitado ou diminuído, aumentando-se o comprimento,  $R_y$ , da contração.

Nota-se que quando há boa uniformidade na velocidade axial na região da saída da contração é porque há gradiente adverso de pressão ou está na iminência de haver. Pois, quando há gradiente adverso de pressão ele tende a frear o escoamento na região onde ele ocorre. Escoamento com gradientes favoráveis tendem a acelerar-se naquela região, e no caso de contrações leva a aumentar a desuniformidade da distribuição de velocidade axial.

Pelos resultados obtidos e análises efetuadas entende-se que a adição de extensão na saída de contração é favorável para aumentar a uniformidade do escoamento, mas que deve-se realizar pesquisas adicionais para evitar ou diminuir a existência de gradientes adversos de pressão na região anterior, próxima, à sua saída.

No caso “C” a função que produziu distribuição de velocidade axial com maior uniformidade e menores intensidades de gradientes adversos de pressão foi a C2 para  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ .

O caso “D” combina características dos casos “B” e “C”. Como o caso “B” tende a desuniformizar o perfil de velocidade axial normalizada na saída da contração também o caso “D” tende a fazê-lo, embora em menor intensidade. Deve-se evitar o uso desse tipo de geometria em contrações.

Enfim, fazendo um resumo das conclusões pode-se afirmar, dentro do escopo deste trabalho, que:

- Ao se aumentar o comprimento de um conjunto de contrações, mantidas as outras características, as distribuições de velocidade axial na saída da contração tendem a ser tornar mais uniformes. Os gradientes adversos de pressão, se houver, tendem a reduzir de intensidade.
- Existe relação não linear entre a uniformidade do perfil de velocidade axial normalizada e a razão de contração. Para valores da razão de contração próximo da unidade ou próximos da nulidade, os perfis normalizados tendem a ser mais uniformes. Para valores intermediários da razão de contração a uniformidade da distribuição de velocidade axial normalizada diminui.
- As geometrias de contração do caso “C” tendem a produzir melhores resultados do que nos casos “A”, “B” e “D”. Os casos “B” e “D” devem ser evitados.
- No caso “C” as funções que levaram a melhores resultados foram: C2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ ; C2,  $\varepsilon = -0,803\varepsilon_c$ ; e C3; com prevalência da C2,  $\varepsilon = -\varepsilon_c$ . As que levaram aos piores resultados foram: C1; C2,  $\varepsilon = +\varepsilon_c$ ; e C4.

Duas possíveis complementações a esse trabalho são:

- Desenvolver e testar, numericamente, um conjunto de funções de parede para o caso “C” que produzam boa uniformidade na distribuição de velocidade axial normalizada na saída da contração e elimine, ou reduza bastante, o gradiente adverso de pressão que, em geral, ali aparece.
- Sintetizar via otimização (problema inverso) o formato da função parede de contração que atinja dois objetivos: maximize a uniformidade da distribuição de velocidade axial normalizada na saída da contração e minimize a intensidade dos gradientes adversos de pressão na região próxima à saída da contração.

---

**REFERÊNCIAS**

ABOUBACAR, M.; MATALLAH, H.H.R.; TAMADDON, J.; WEBSTER, M.F. Numerical prediction of extensional flows in contraction geometries: hybrid finite volume/element method. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, Amsterdam, v.104, p.125–164, 2002.

ALFREDINI, P. **Orifícios, bocais e vertedores**. 2.ed. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2000. (Notas de Aula).

APARECIDO, J.B.; COTTA, R.M. Analytical solutions to parabolic multi-dimensional diffusion problems within irregularly shaped domains. In: WROBEL, L. C.; BREBIA, C.A.; NOWAC, A.J. (Ed.). **Advanced computational methods in heat transfer**, Berlin: Springer-Verlag, 1990b. v.1, p. 27-38.

APARECIDO, J.B.; COTTA, R.M. Laminar flow inside hexagonal ducts. **Computational Mechanics**, Berlin, v.6, n.2, p.93-100, 1990a.

APARECIDO, J.B.; COTTA, R.M. Laminar thermally developing flow inside right-angulary triangular ducts. **Applied Scientific Research**, Dordrecht, v.49, p.355-368, 1992.

APARECIDO, J.B.; COTTA, R.M.; OZISIK, M.N. Analytical solutions to two-dimensional diffusion type problems in irregular geometries. **Journal of the Franklin Institute**, Elmsford, v.326, p.421-434, 1989.

APARECIDO, J.B. **Fundamentos da solução de uma classe de equações do tipo convectivo-difusivo**. 1994. Tese (Livre-Docente em Mecânica dos Fluidos) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 1994.

APARECIDO, J.B. How to choose eigenvalue problems when using generalized integral transforms to solve thermal convection: diffusion Problems. In: PROCEEDINGS OF THE BRASILIAN CONGRESS OF MECHANICS ENGINEERING, 14., 1997, Bauru. **Proceedings of the...** Bauru: Unesp, 1997. CD-ROM.



APARECIDO, J.B.; OZISIK, M.N. Laminar forced convection inside circular sector tube. In: WORKSHOP SOBRE A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA, 2., 1996, Rio de Janeiro. **Workshop...** Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 1996. p.8 -12.

APARECIDO, J.B.; OZISIK, M.N. **Laminar forced convection inside circular sector tube with variable boundary condition.** In: BRASILIAN CONGRESS OF ENGINEERING AND THERMAL SCIENCE, ENCIT, 7., 1998, Rio de Janeiro. **Congress of the...** Rio de Janeiro: S.n.,1998. CD-ROM.

APARECIDO, J. B. **Transformada integral generalizada no escoamento laminar e transferência de calor em dutos retilíneos de geometria arbitrária.** Tese (Doutorado) - Instituto Tecnológico da Aeronáutica-ITA, São José dos Campos, 1998.

APARECIDO, J.B.; VIEIRA, E.D.R.; CAMPOS-SILVA, J.B. Analysis of a low speed wind tunnel contraction by generalized integral transform technique. In: BRAZILIAN CONGRESS OF THERMAL ENGINEERING AND SCIENCE-ENCIT, 8., 2000, Porto Alegre. 2000. **Congress of the...** Porto Alegre: S.n., 2000. (Paper S01P10.).

APARECIDO, J.B.; VIEIRA, E.D.R.; CAMPOS-SILVA, J.B. Flowfield and flow parameters for flow inside a low speed wind tunnel contraction with circular cross-section. In: BRAZILIAN CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 16., 2001, Uberlândia. **Proceedings....** Uberlândia: UFB, 2001. (Paper TRB2453).

APOSTOL, T.M. **Análisis matemático.** Barcelona: Editorial Reverté, 1974.

BRADSHAW, P.; PANKHURST, R.C. The design of low-speed wind tunnels. **Progress in Aeronautical Science**, Oxford, v.5, n.1964, p.1-69, 1964.

CAMPOS-SILVA, J.B.; COTTA, R.M.; APARECIDO, J.B. Analytical solutions to simultaneously developing laminar flow inside parallel-plate channels. **International Journal Heat Mass Transfer**, Oxford, v. 35, n. 4, p. 887-895, 1992.

COTTA, R.M.; MIKHAILOV, M.D. **Heat conduction: lumped analysis, integral transforms, symbolic computation.** Hardcover: John Wiley & Son, 1997.

COTTA, R.M. Hybrid numerical: analytical approach to nonlinear diffusion problems. **Numerical Heat Transfer**, New York, v.17, p.217-226, 1990.

COTTA, R.M. **Integral transforms in computational head and fluid flow.** Boca Raton: CRC Press, 1993.

COTTA, R.M. **The integral transform method in thermal and fluids sciences and engineering.** New York: Begell House, 1998.

CORADIN, H.T.; BRONDANI, W.M.; MATTIUSI, E.M.; FRANCO, A.T.; MORALES, R. E.M.; MARTINS, A.L. Simulação numérica do escoamento de um fluido de perfuração viscoelástico através de uma contração brusca. In: CONGRESSO BRASILEIRA DE P&D EM PETRÓLEO E GÁS-PDPETRO, 4., 2007, Campinas. **Anais...** Campinas: Unicamp, 2007. (Paper 2.2.0083-1).

DINIZ, A.J.; APARECIDO, J.B. Analytical solution to ablation problem with transient heat flux, In: NATIONAL THERMAL SCIENCE MEETING, 1990, Itapema. **National...** Itapema: S.n. 1990. p.329-333.

DINIZ, A.J.; CAMPOS-SILVA, J.B.; APARECIDO, J.B.; ZAPAROLI, E.L. Thermal protection in sphere using ablation process. In: NORTH-NORTHEAST CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 2., 1992, João Pessoa. **Proceedings of the...** João Pessoa: S.n., 1992. p.9-16.

DINIZ, A.J.; APARECIDO, J.B.; ZAPAROLI, E.L. Solution to thermal problem with nonlinear couplings, In: BRAZILIAN CONGRESS OF MECH. ENG., 12., 1993, Brasília. **Proceedings of the...** Brasília: UnB, 1993. p. 577-580.

DOOLAN, C.J.; MORGANS, R.C. **Numerical evaluation and optimization of low speed wind tunnel contractions.** Adelaide: University of Adelaide, 2007.

DURST, F.; LOY, T. Investigation of laminar flow in a pipe with a sudden contraction of cross sectional area. **Computers & Fluids**, New York, v.13, p.15-36, 1985.

EDWARDS, C.H.; PENNEY, D.E. **Equações diferenciais elementares com problemas de contorno**. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1995.

GORECKI, J.P. **Túneis aerodinâmicos**. São José dos Campos: Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA, 1989.

HONIG, C.S. **Análise funcional e o problema de Sturm-Liouville**. São Paulo : Edgard Blucher, 1978.

LIMA, P.H.; ALVES, T.A.; MASHIBA, M.H.S.; QUENZER, M.C.L.; MANSUR, S.S.; VIEIRA, E.D.R.; WOISKI, E.R. **Planejamento e desenvolvimento de um túnel aerodinâmico do tipo soprador visando o ensino e a pesquisa em engenharia**. 3.ed. Nova Friburgo: Instituto Politécnico, 2004. (Paper CRE04 – AA01).

LINDGREN, B.; JOHANSSON, A.V. **Design and evaluation of a low-speed wind-tunnel with expanding corners**. Stockholm: Royal Institute of Technology Department of Mechanics, 2002. (Technical Reports SE-100 44).

MOMPEAN, G. On predicting abrupt contraction flows with differential and algebraic viscoelastic models. **Computers & Fluids**, New York, v.31, p.935–956, 2002.

SAGAN, H. **Boundary and eigenvalue problems in mathematical physics**. New York: Dover Publications, 1989.

SANTOS, C.A.C.; QUARESMA, J.N.N.; LIMA, J.A. **Convective heat transfer in ducts: the integral transform approach**. Rio de Janeiro: ABCM, 2001. (Mechanical Engineering Series of the ABCM, E-papers).

SARGISON, J.E.; WALKER, G.J.; ROSSI, R. Design and calibration of a wind tunnel with a two dimensional contraction. In: AUSTRALASIAN FLUID MECHANICS CONFERENCE THE UNIVERSITY OF SYDNEY, 15., 2004, Sydney. **Proceedings of the...** Sydney: S.n.,

2004. Disponível em: <<http://eprints.utas.edu.au/162/1/AFMC00183.pdf>>. Acesso em: 12 jan. 2010.

MIKHAILOV, M.D.; COTTA, R.M. Integral transform solutions of eigenvalue problems. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, Chichester, v.10, p. 827-835, 1994.

TAIRA, N.M.; PIMENTA, M.M.. **Numerical and experimental contraction studies**. In: BRAZILIAN SYMPOSIUM ON FLOW MEASUREMENT, 2., São Paulo, 1995. **Proceedings of the...** São Paulo: USP, 1995. p.353-363.

TULAPURKARA, E.G. Studies on thwaites method for wind tunnel contraction. **Aeronautical Journal**, London, v84, pp.167-169, 1980.

TULAPURKARA, E.G.; BHALLA, V.V.K. Experimental investigation of morel's method for wind tunnel contraction. **Journal of Fluids Engineering**, New York, v.110, p.45-47, 1988.

UBEROI, M.S. Effect of wind-tunnel contraction on free-stream turbulence. **Journal of the Aeronautical Sciences**, Easton, v.23, p.756-764, 1956.

VIEIRA, E.D.R. **Qualitative and quantitative study of flow around non-aerodynamics bodies using hydrodynamics flow visualization techniques**. 1997. 200 f. Thesis (D.Sc.) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA, São José dos Campos, 1997.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)