

Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Estatística  
Junho de 2009

Estudo comparativo de testes de hipótese multivariados  
para matrizes de covariâncias via simulação de Monte Carlo  
e suas aplicações em Controle de Qualidade

Aluna: Letícia Pereira Pinto

Orientadora: Profa. Dra. Sueli Aparecida Mingoti

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Letícia Pereira Pinto

# Estudo comparativo de testes de hipótese multivariados para matrizes de covariâncias via simulação de Monte Carlo e suas aplicações em Controle de Qualidade

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientadora: Profa. Dra. Sueli Aparecida Mingoti.

Belo Horizonte, junho de 2009  
Instituto de Ciências Exatas  
Universidade Federal de Minas Gerais

## Resumo

A utilização dos testes de hipótese multivariados, em lugar de vários testes univariados feitos simultaneamente, é mais apropriada uma vez que consideram a correlação existente entre as variáveis. Nesta dissertação, será apresentado um estudo detalhado de alguns testes estatísticos para a matriz de covariâncias para  $p=2, 3$  e  $5$  variáveis. Os testes estatísticos tradicionais utilizados na literatura, da razão de verossimilhança e da variância generalizada, serão comparados a alguns testes propostos nesta dissertação a saber: adaptações do teste de Sullivan et al. (2007) usando a distribuição qui-quadrado e as idéias de Hayter e Tsui (1994), três testes que utilizam os autovalores da matriz de covariâncias e o teste da transformação da informação contida na matriz de covariâncias para uma variável univariada  $Y$ . Nessa comparação, também foram usados os testes exatos, exceto para os testes da transformação de  $Y$ , que foram feitos utilizando a distribuição normal como aproximação. As comparações foram realizadas em termos do tamanho do teste, do poder e do valor do ARL (*Average Run Length*). Alguns exemplos em controle estatístico de processos serão apresentados, pela vasta aplicabilidade dos testes nessa área.

A avaliação do desempenho dos testes propostos e a comparação com os testes tradicionais, foram feitas através de simulação Monte Carlo. Pelo estudo de simulações, verificou-se que os testes propostos nesta dissertação se mostraram mais efetivos que o teste da variância generalizada, em todos os tamanhos de amostras, e da razão de verossimilhança, em pequenas amostras, exceto os testes da transformação de  $Y$ .

Palavras-chave: Testes Estatísticos Multivariados; Matriz de covariâncias; Variância generalizada; Controle de Qualidade; Monte Carlo.

## Abstract

The use of multivariate hypothesis tests, instead of several univariate tests made simultaneously, is more appropriated because they take into account the correlation among the variables. In this dissertation, we will show a detailed study of some covariance matrix statistical tests for  $p=2, 3$  and  $5$  variables. A comparison is performed between the standard statistical tests used in the literature, such as, the likelihood ratio and the generalized variance, with some tests proposed in this dissertation: adaptation of the Sullivan et al. (2007) test (using the chi-squared distribution and Hayter and Tsui's (1994) methodology, three tests based on the eigenvalues of covariance matrix and the transformation of information contained in the covariance matrix test to an univariate variable  $Y$ . In the comparison, the exact tests were also used, except the  $Y$  transformation test. The comparisons were performed in terms of power, type I error and ARL (*Average Run Length*). Some examples in statistical process control will be presented due to its wide applicability in this area.

Monte Carlo simulation was used to evaluate the proposed tests and to compare them with the standard tests. The results of the simulation study showed that proposed tests are more effective than generalized variance test, for all sample sizes, and better than likelihood ratio, for small size samples, except the  $Y$  transformation.

Key words: Multivariate Statistical Tests; Covariance Matrix; Generalized Variance; Quality Control; Monte Carlo.

## Agradecimentos

Agradeço a Profa. Dra. Sueli Aparecida Mingoti pela dedicada e competente orientação do meu trabalho.

Gostaria de agradecer os meus amados pais (Roldão e Emília), irmãs (Patrícia, Rita e Viviane) e esposo, pelo apoio e incentivo extremo.

Gostaria também, de expressar a minha gratidão aos meus amigos, Fernanda Colenghi e Elias Krainski, pela ajuda no *software R* e ao meu esposo, Frederico Ferreira Campos, filho, pela ajuda no MATLAB e no  $\LaTeX$ .

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Objetivos . . . . .	6
1.2	Organização . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Testes estatísticos multivariados para observações independentes</b>	<b>8</b>
2.1	Cartas ou gráficos de controle . . . . .	8
2.2	Average Run Length (ARL) . . . . .	10
2.3	Distribuição normal multivariada . . . . .	13
2.3.1	Estimação do vetor de médias e matriz de covariâncias . . . . .	15
2.3.2	Matriz de informação de Fisher para a normal multivariada . . . . .	17
2.4	Testes estatísticos existentes para matrizes de covariâncias tratados nesta dissertação . . . . .	18
2.4.1	Teste da razão de verossimilhança . . . . .	19
2.4.2	Teste do determinante . . . . .	19
2.4.3	Estudo sobre a distribuição exata de $ S $ . . . . .	22

---

2.4.4	Teste de Sullivan et al. . . . . .	23
2.5	Testes propostos e avaliados nesta dissertação . . . . .	24
2.5.1	Adaptação do teste de Sullivan et al. (2007) testada nesta dissertação	24
2.5.2	Adaptação do teste de Hayter e Tsui (1994) para os autovalores de $\Sigma$ . . . . .	30
2.5.3	Adaptação do teste $T^2$ de Hotelling para autovalores de $\Sigma$ . . . . .	31
2.5.4	Teste dos autovalores usando o número de condição . . . . .	32
2.5.5	Transformação da informação contida na matriz de covariâncias para uma variável univariada . . . . .	33
2.6	Exemplos de aplicação . . . . .	36
2.7	Exemplo 1 . . . . .	36
2.8	Exemplo 2 . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Comparação dos testes estatísticos: caso da distribuição normal bivariada</b>	<b>43</b>
3.1	Estimação da probabilidade de rejeição de $H_0$ sob a hipótese nula e sob a hipótese alternativa . . . . .	43
3.2	Estimação do ARL . . . . .	44
3.3	Modelos simulados da distribuição normal bivariada . . . . .	45
3.4	Análise dos resultados das observações simuladas da distribuição normal bi- variada . . . . .	47
3.4.1	Resultados dos processos bivariados ( $p=2$ ) . . . . .	48



---

3.4.2	Comparação do poder teórico com o obtido via simulação . . . . .	59
3.4.3	Análise dos <i>ARL sob controle e fora de controle</i> . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Comparação dos testes estatísticos: caso da distribuição normal <math>p</math>-variada</b>	<b>69</b>
4.1	Modelos simulados da distribuição normal multivariada . . . . .	69
4.2	Análise dos resultados das observações simuladas da distribuição normal multivariada . . . . .	72
4.2.1	Resultados dos testes estatísticos para os processos multivariados ( $p=3$ )	72
4.2.2	Análise dos <i>ARL sob controle e fora de controle</i> - $p=3$ . . . . .	79
4.2.3	Resultados dos testes estatísticos para os processos multivariados ( $p=5$ )	83
4.2.4	Análise dos <i>ARL sob controle e fora de controle</i> - $p=5$ . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>92</b>
5.1	Comentários gerais sobre os resultados . . . . .	92
5.2	Propostas para trabalhos futuros . . . . .	97
<b>A</b>	<b>Tabelas</b>	<b>98</b>
<b>B</b>	<b>Poder teórico</b>	<b>102</b>
<b>C</b>	<b>Processos bivariados - <math>n=5</math></b>	<b>105</b>

# Lista de Figuras

2.1	Carta de controle para a média do processo . . . . .	12
2.2	Distribuição normal bivariada . . . . .	14
2.3	Comparação da elipse de confiança com os limites de controle univariados . .	15
2.4	Distribuição exata do $ S $ . . . . .	22
2.5	Comparação da estatística de teste com a distribuição qui-quadrado . . . . .	27
2.6	Gráfico de controle $ S $ para a força de resistência e o diâmetro . . . . .	41
2.7	Gráfico de controle da razão de verossimilhança para a força de resistência e o diâmetro . . . . .	42
2.8	Gráfico de controle $\chi^2$ adaptado para a força de resistência e o diâmetro . . .	42
3.1	Curva poder para o teste da transformação para variância . . . . .	60
3.2	Curva poder para o teste da transformação para o desvio padrão - desvio padrão	61
3.3	Curva poder para o teste da transformação para o desvio padrão - amplitude	61
3.4	Curva poder para o teste de Sullivan usando a distribuição $\chi^2$ - n=10 e 25 .	62
3.5	Curva poder para o teste de Sullivan usando a distribuição $\chi^2$ - n=50 e 100 .	63

---

3.6	Curva poder para o teste do autovalor usando $T^2$ de Hotelling - $n=10$ e $25$ . . . . .	64
3.7	Curva poder para o teste do autovalor usando $T^2$ de Hotelling - $n=50$ e $100$ . . . . .	65
5.1	Fluxograma de escolha dos testes nos processos bivariados . . . . .	94
5.2	Fluxograma de escolha dos testes nos processos multivariados ( $p=3$ ) . . . . .	95
5.3	Fluxograma de escolha dos testes nos processos multivariados ( $p=5$ ) . . . . .	96

# Lista de Tabelas

2.1	Resultados do teste de normalidade de Shapiro-Wilk . . . . .	22
2.2	Teste de aderência para Qui-quadrado . . . . .	27
2.3	Obtenção da constante $C_{R,\alpha}$ no caso da distribuição normal $k_0$ -variada . . . . .	29
2.4	Significância dos testes (p-valor) . . . . .	40
2.5	Dados para o Exemplo 2 . . . . .	41
3.1	Modelos simulados com $p=2$ variáveis . . . . .	46
3.2	Medidas de comparação entre os modelos simulados sob $H_0$ e $H_1$ - $p = 2$ . . . . .	47
3.3	Distância de Mahalanobis entre os parâmetros em $H_0$ e $H_1$ para os testes de Sullivan et al. adaptado e dos autovalores - $p = 2$ . . . . .	47
3.4	Abreviações utilizadas para os testes de hipóteses . . . . .	49
3.5	Estimativas do Nível de Significância e Poder dos testes - $p=2$ ; $n=10, 25$ . . . . .	51
3.6	Estimativas do Nível de Significância e Poder dos testes - $p=2$ ; $n=50, 100$ . . . . .	52
3.7	Estimativas do Poder mínimo e máximo dos testes - $p=2$ . . . . .	57
3.8	Probabilidade de percepção da mudança de parâmetros nas $m$ primeiras amostras . . . . .	59

---

3.9	<i>ARL sob controle e fora de controle</i> de processos com distribuição normal bivariada	67
3.10	<i>ARL sob controle e fora de controle</i> de processos com distribuição normal bivariada	68
4.1	Modelos simulados com $p=3$ variáveis . . . . .	70
4.2	Medidas de comparação entre os modelos simulados sob $H_0$ e $H_1$ - $p = 3$ . .	71
4.3	Distância de Mahalanobis entre os parâmetros em $H_0$ e $H_1$ para os testes de Sullivan et al. e dos autovalores - $p = 3$ . . . . .	72
4.4	Estimativas do Nível de Significância e Poder dos testes - $p=3$ , $n=10$ . . . .	74
4.5	Estimativas do Nível de Significância e Poder dos testes - $p=3$ , $n=25$ . . . .	75
4.6	Estimativas do Nível de Significância e Poder dos testes - $p=3$ , $n=50$ . . . .	76
4.7	Estimativas do Nível de Significância e Poder dos testes - $p=3$ , $n=100$ . . . .	77
4.8	Estimativas do Poder mínimo e máximo dos testes - $p=3$ . . . . .	78
4.9	Probabilidade de percepção da mudança de parâmetros nas $m$ primeiras amostras	79
4.10	<i>ARL sob controle e fora de controle</i> de processos com distribuição normal $p=3$ . .	81
4.11	<i>ARL sob controle e fora de controle</i> de processos com distribuição normal $p=3$ . .	82
4.12	Modelos simulados com $p=5$ variáveis . . . . .	83
4.13	Modelos simulados com $p=5$ variáveis . . . . .	84
4.14	Medidas de comparação entre os modelos simulados sob $H_0$ e $H_1$ - $p = 5$ . .	85
4.15	Distância de Mahalanobis entre os parâmetros em $H_0$ e $H_1$ para os testes de Sullivan et al. e dos autovalores - $p = 5$ . . . . .	85
4.16	Estimativas do Nível de Significância e Poder dos testes - $p=5$ variáveis . . .	86

---

4.17	Probabilidade de percepção da mudança de parâmetros nas m primeiras amostras	89
4.18	<i>ARL sob controle e fora de controle</i> de processos com distribuição normal $p=5$ . . .	90
4.19	<i>ARL sob controle e fora de controle</i> de processos com distribuição normal $p=5$ . . .	91
A.1	Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis . . . . .	98
A.2	Distribuição acumulada da amplitude relativa $W$ . . . . .	99
A.3	Distribuição acumulada da amplitude relativa $W$ . . . . .	100
A.4	Distribuição acumulada da amplitude relativa $W$ . . . . .	101
C.1	Estimativas do Nível de Significância e Poder dos testes - $p=2$ ; $n=5$ . . . . .	105
C.2	<i>ARL sob controle e fora de controle</i> de processos com distribuição normal bivariada	106

# Capítulo 1

## Introdução

O teste de hipótese é uma das técnicas importantes de inferência estatística, muito utilizado em várias áreas do conhecimento. É realizado quando se deseja verificar se algum parâmetro da distribuição da variável de interesse condiz com um valor especificado. Para isso, algum estimador do parâmetro cujo valor é obtido a partir dos dados amostrais é usado para testar essa afirmação.

Há situações em que várias variáveis são medidas numa mesma população. Uma alternativa seria realizar um teste para cada variável separadamente. No entanto, essa metodologia pode levar a erros na tomada de decisão, pois as variáveis, em geral, são correlacionadas entre si e quanto maior o número de variáveis, mais complexa torna-se a análise por métodos comuns de estatística univariada. A utilização dos testes multivariados, em lugar de testes univariados feitos simultaneamente somente foi possível devido ao recente avanço das tecnologias computacionais e da aquisição de dados. Assim, a mensuração de várias variáveis conjuntamente, em qualquer linha de pesquisa, vem se mostrando cada vez mais eficaz e os medidores mais precisos, fornecendo maior confiabilidade nas medidas.

O teste de hipótese multivariado é utilizado no controle estatístico de processos (CEP) na área da Estatística industrial. A exigência do consumidor e a competição do mercado faz com que as empresas necessitem de testes eficientes para monitorar as diversas características de qualidade presentes no processo produtivo e de serviços.

Outras aplicações ocorrem na Engenharia Elétrica (Ramirez et al., 2004), na Economia (Lima e Issler, 2003), na Psicologia, na Química, na Física, nos estudos com dados geológicos e espaciais (Teruiya et al., 2001), nos estudos epidemiológicos (Costa et al., 2003) etc. Pela sua aplicabilidade em diversas áreas de pesquisa, torna-se relevante estudá-los. Na maioria dos casos, o objetivo dos testes multivariados é identificar mudanças no vetor de médias ou na matriz de covariâncias populacionais.

Um dos testes de hipóteses multivariados mais conhecidos é o  $T^2$  de Hotelling (1947), usado para comparação de vetores de médias populacionais. Assumindo que a distribuição de probabilidade conjunta das  $p$  variáveis aleatórias é normal  $p$ -variada, pode-se construir o elipsóide de confiança que permite verificar se o processo está ou não sob controle considerando-se todas as características simultaneamente. A estatística de teste  $T^2$ , é estimada de forma a fornecer valores que medem a distância entre cada observação do processo e o vetor de média amostral (sendo essa distância ponderada pela inversa da matriz de covariâncias do processo) e está relacionada com a equação deste elipsóide de confiança. Assim, a estatística proposta por Hotelling, além de incorporar a correlação entre as variáveis, permite que o nível de significância global do teste permaneça fixo, ao contrário dos testes univariados múltiplos que exigem uma correção do nível de significância usado em cada teste, sendo que em geral, a correção é a de Bonferroni(1936).

Em controle de qualidade é comum comparar o poder dos testes por meio da medida de desempenho denotada por *Average Run Length (ARL)* traduzido em alguns textos como *NMA - número médio de amostras* - (Ver Costa et. al, 2005). Sob a hipótese nula, tem-se o *ARL sob controle* que representa o número esperado de amostras a serem observadas do processo até a ocorrência de um alarme falso, isto é, um problema é sinalizado sem que de fato ocorra; sob hipótese alternativa, o *ARL fora de controle* representa o número esperado de amostras a serem observadas do processo até a ocorrência de um alarme verdadeiro, isto é, o gráfico sinaliza uma mudança no processo.

A maioria das pesquisas tem foco no monitoramento do vetor de médias com considerável atenção na estatística  $T^2$  de Hotelling. O monitoramento de mudanças na variabilidade dos processos multivariados tem recebido uma menor atenção na literatura, apesar do fato de



que ser capaz em detectar mudanças na variabilidade do processo é muitas vezes mais crítico na sua melhoria de qualidade que a detecção de mudanças no vetor de médias (Yeh et al., 2004). Uma revisão detalhada de alguns métodos estatísticos para testar a estrutura de variabilidade de processos multivariados é apresentada em Yeh et al. (2006).

Para testar se a matriz de covariâncias do processo é igual a uma matriz particular, Alt (1985) apresenta uma forma de monitoramento que é a extensão direta do gráfico de controle univariado da variância amostral  $S^2$ . Na estatística de teste  $W$ , o traço ( $tr(S)$ ) e o determinante ( $|S|$ ) da matriz de covariâncias amostral aparecem. O teste proposto por Alt é na realidade o teste da razão de verossimilhança no caso da distribuição normal multivariada (Anderson, 1958, 2003).

Dado um processo multivariado de interesse, a variabilidade, descrita pela matriz de covariâncias  $\Sigma$ , é usualmente monitorada pelo gráfico  $|S|$  baseado no determinante da matriz de variâncias-covariâncias amostral que segundo Djauhari (2005) leva a uma estimação viciada dos limites de controle. Djauhari, apresenta um novo gráfico de controle melhorado tendo seus limites não viciados, menor *Comprimento Médio da Sequência (ARL)* e sendo mais sensível que o teste tradicional  $|S|$  à detecção de mudanças na variabilidade do processo, o que foi verificado nos resultados obtidos nesta dissertação. O gráfico tradicional  $|S|$  assume a distribuição normal como a distribuição do  $|S|$ . No entanto, sabe-se que  $|S|$  tem distribuição aproximadamente normal apenas para grandes amostras, mas em controle de qualidade é comum o uso de pequenas amostras (ver Aparisi et al., 1999; Silva e Mingoti, 2008). É importante destacar que o teste tradicional da variância generalizada pode apresentar falhas na detecção de matrizes diferentes, já que, essas podem ter o mesmo determinante; um exemplo será dado na Seção 2.4.2.

Após a detecção da presença de causas especiais no processo estatístico, existe a necessidade de identificar qual (quais) característica (s) provocou (provocaram) o problema detectado, o que é facilitado por um passo diagnóstico que procura identificar quando a mudança ocorreu e quais parâmetros mudaram. Existem várias formas de tentar identificar os parâmetros que alteraram causando a rejeição de  $H_0$ . Uma delas é fazer o gráfico de controle univariado para cada um dos parâmetros da matriz de covariâncias. Souza e Rigão

(2005) apresentam uma outra forma que utiliza a análise de componentes principais.

Outro teste de hipótese, proposto recentemente por Sullivan et al. (2007) considera um vetor de parâmetros  $\theta$  formado pelos elementos do vetor de médias e pelos elementos da matriz de covariâncias teórica do processo. Os parâmetros são estimados maximizando a função de verossimilhança sob a hipótese de normalidade  $p$ -variada. O interessante no teste de Sullivan et al. (2007) é a possibilidade de comparação dos parâmetros da matriz de covariâncias um a um, percebendo assim, a ocorrência de uma mudança e quais os parâmetros foram responsáveis por ela, em vez de usar-se apenas uma medida de redução da matriz de covariâncias como nos testes do determinante e do traço. O método pode ser utilizado mesmo que as observações sejam provenientes de uma distribuição não normal.

Em Yeh et al. (2004) é proposto o uso do gráfico de controle da razão da log-verossimilhança móvel exponencialmente ponderada (EWMLR), para monitorar pequenas mudanças de variabilidade nos processos normais multivariados, baseado na média móvel exponencialmente ponderada (EWMA) do logaritmo da razão de verossimilhança para processos normais multivariados.

Recentemente, Grigoryan e He (2005) propuseram um gráfico de controle do  $|S|$  para o caso de amostragem dupla. Chang e Zhang (2007) propuseram uma forma de controle da variabilidade para processos multivariados autocorrelacionados. Machado et al. (2008) apresentaram o gráfico de controle VMAX, baseado na maior das variâncias amostrais das características de qualidade, para o monitoramento de processos normais bivariados. O gráfico VMAX também é proposto com amostragem dupla. Segundo os autores, o gráfico VMAX possui um desempenho melhor que o gráfico da variância generalizada e melhor capacidade de diagnóstico, e no caso de amostragem dupla, em geral, possui um desempenho melhor que o gráfico de  $|S|$ , exceto em alguns casos onde as duas variáveis são afetadas pela causa especial e o tamanho da segunda amostra é muito grande.

## 1.1 Objetivos

Esta dissertação tem como objetivo principal avaliar o teste proposto por Sullivan et al. (2007), no que, se refere a testar apenas a matriz de covariâncias; compará-lo com os testes estatísticos já existentes na literatura, como o teste do determinante e o de razão de verossimilhança (Morrison, 1976; Alt, 1985); e estendê-lo para situações, nas quais, se tem um número de variáveis maior que 2, uma vez que Sullivan et al. (2007) abordaram apenas o caso de  $p=2$  e não realizaram nenhuma comparação com outros testes estatísticos.

Além disso, tem-se objetivos secundários relacionados a construção de novos testes de hipóteses, que são uma adaptação do teste de Sullivan et al. (2007) usando as idéias dos testes  $T^2$  de Hotelling e de Hayter e Tsui (1994), originalmente propostos para comparar o vetor de médias populacional; um teste fundamentado na transformação da informação da matriz de covariâncias em uma variável univariada possibilitando assim, o uso de gráficos de controle univariados para monitorar a estrutura de variabilidade de processos multivariados e outros três testes que utilizam os autovalores da matriz de covariâncias, sendo dois desses uma adaptação dos testes de Hayter e Tsui (1994) e de Hotelling (1947), e por último um que usa o número de condição (Campos, filho, 2007 e Greene, 1997). A idéia de se usar autovalores, é devida ao fato que matrizes diferentes com o mesmo determinante podem ter autovalores diferentes, o que poderia permitir ao teste com autovalores detectar uma diferença que não é percebida pelo teste do determinante. Os gráficos de controle multivariados abordados nessa dissertação foram construídos através da distribuição assintótica e exata das estatísticas de teste quando possível.

Com o objetivo de comparar a eficácia dos testes na sinalização de alarmes verdadeiros quando o processo está fora de controle e de alarmes falsos quando o processo está sob controle, foram estimados as probabilidades de erros do tipo I e II, o poder do teste e os valores do *ARL sob controle* e do *ARL fora de controle* via simulação de Monte Carlo.

Devido a importância dos testes multivariados para a matriz de covariâncias em controle de qualidade, os testes estatísticos abordados também foram avaliados visando identificar quais seriam os mais apropriados para utilização nessa área considerando-se a questão de

implementação prática.

Vale ressaltar que na pesquisa bibliográfica realizada não foi encontrada, na literatura nenhuma comparação dos testes estudados nesta dissertação e uma outra contribuição deste trabalho, é a elaboração de novos testes para o monitoramento da matriz de covariâncias.

O estudo de simulação desenvolvido nesta dissertação foi implementado no *software* MATLAB R2007b.

## 1.2 Organização

O conteúdo desta dissertação está organizado em cinco capítulos e dois apêndices. No Capítulo 2, são abordados alguns conceitos gerais e os testes multivariados que serão utilizados para o monitoramento da variabilidade com exemplos de aplicação. No Capítulo 3, é desenvolvida a estratégia de execução das simulações dos processos normais bivariados e apresentado os resultados obtidos da comparação dos testes, de modo a identificar aqueles de melhor desempenho. No Capítulo 4, é desenvolvida a estratégia de execução das simulações dos processos normais  $p$ -variados com  $p=3$  e  $5$ , sendo apresentados os resultados obtidos da comparação dos testes, de modo a identificar aqueles de melhor desempenho. No Capítulo 5, são apresentadas as considerações finais deste trabalho e finalmente, no Apêndice A são apresentadas as tabelas de fatores para construção de gráficos de controle univariados para desvios padrão e para amplitudes, e da distribuição acumulada da amplitude relativa  $W$ , no Apêndice B são mostrados os cálculos dos poderes teóricos para os testes, nos quais, isso é possível e no Apêndice C são apresentados os resultados obtidos para os processos bivariados com tamanho de amostra  $n=5$ .

## Capítulo 2

# Testes estatísticos multivariados para observações independentes

Este capítulo apresenta os gráficos de controle que são técnicas estatísticas usadas para descrever o que se entende por controle estatístico e o ARL (*Average Run length*), uma medida utilizada para avaliar a qualidade da carta de controle. Serão discutidos alguns métodos de monitoramento da variabilidade no caso multivariado, fundamentados na distribuição normal, que serão tratados nesta dissertação.

### 2.1 Cartas ou gráficos de controle

Convivemos com a variação em todos os aspectos de nossas vidas. Oscilam os preços, as cotações nas bolsas, as taxas de inflação, as características dos produtos gerados ao longo dos processos de produção, tanto em manufatura quanto em serviços, os faturamentos das empresas, e, muitas vezes, os humores das pessoas. Assim, é necessário aprender a identificar as variabilidades, buscar as suas causas e tomar ações corretivas, pois a variação tenta dizer algo a respeito de um processo e quando a variabilidade é reduzida a qualidade é melhorada.

Na década de 1920, Walter Andrew Shewhart interpretou a variabilidade como sendo passível de duas possibilidades, aquela que ocorre dentro dos limites definidos pelo acaso e aquela que está fora destes limites. Estando fora dos limites ele acreditava que as causas pudessem ser identificadas, ou seja, elas seriam assinaláveis. Desta forma, para verificar a estabilidade e a existência de causas especiais que atuam sobre o processo, é comum utilizar as cartas de controle univariadas de Shewhart (1926). Essas cartas são construídas a partir do valor de uma estatística  $T(x)$  que é calculada para cada amostra do processo e logo em seguida os valores dessa estatística são colocados em um gráfico ou carta de controle.

A partir da média ou da variabilidade do processo são estabelecidos os limites de controle. Considerando-se que a distribuição da característica de qualidade seja normal, os limites de controle para o gráfico de  $\bar{X}$  são definidos por:

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= \mu + k\sigma/\sqrt{n} \\ \text{LC} &= \mu \\ \text{LIC} &= \mu - k\sigma/\sqrt{n} \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde LSC e LIC são os limites superior e inferior de controle, respectivamente, LC é a linha central que representa  $\mu$ , a média do processo,  $\sigma$  é o desvio padrão e  $n$  é o tamanho da amostra também chamado em controle de qualidade de subgrupos racionais. É comum, utilizar-se o valor  $k = 3$  para a obtenção dos limites o que gera uma carta de controle com probabilidade de erro do tipo I (alarme falso) igual a  $\alpha = 0,0027$ .

Na prática, os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  são desconhecidos e estimados através de amostras aleatórias do processo de interesse. Esta é chamada Fase 1 em controle de qualidade. Após determinados os valores de  $\mu$  e  $\sigma$ , os limites em (2.1) passam a ser usados para monitorar o processo, o que é chamado de Fase 2. Nesta dissertação, entretanto, será abordado apenas a situação em que os parâmetros a serem monitorados já estão pré-especificados.

A carta de controle é um instrumento que, ao longo do século XX, provou ser altamente efetivo no monitoramento da variação dos processos sendo de simples utilização.

É comum que um produto ou processo possua várias características de qualidade que

precisam ser monitoradas conjuntamente. Os gráficos univariados de Shewhart passam a não serem os mais adequados, pois as características de qualidade podem apresentar correlação entre si, o que prejudica o desempenho destes para sinalizar uma falta de controle e pode levar a erros na tomada de decisões.

Suponha  $p$  características da qualidade estatisticamente independentes para um determinado produto. Se o gráfico  $\bar{x}$  com  $P(\text{Erro tipo I}) = \alpha$  é mantido para cada uma das  $p$  características, então a probabilidade de erro do tipo I para o procedimento de controle conjunto é:

$$\alpha_{\text{total}} = 1 - (1 - \alpha)^p$$

e a probabilidade de que todas as  $p$  médias teóricas estejam simultaneamente dentro de seus limites de controle é  $(1 - \alpha)^p$ . Considere duas cartas de controle construídas separadamente, com a probabilidade de erro do tipo I igual a  $\alpha = 0,0027$ , de um processo normal bivariado. A probabilidade de erro do tipo I para o procedimento de controle conjunto é igual a  $\alpha_{\text{total}} = 0,00539$  que é praticamente duas vezes maior que o  $\alpha$  pré-estabelecido originalmente. Portanto, é importante estudar-se cartas de controle multivariadas, já que, procuram manter o valor de  $\alpha_{\text{total}}$  fixado pelo pesquisador, levando-se em consideração as correlações existentes entre as características de qualidade. Esse assunto será apresentado na Seção 2.3.

## 2.2 Average Run Length (ARL)

O desempenho de um gráfico de controle pode ser avaliado em termos da sensibilidade para detectar desvios nos parâmetros que estão sendo monitorados. Esta sensibilidade pode ser medida pelo número esperado de amostras a serem coletadas até que o gráfico sinalize a ocorrência de um desvio, isto é, pelo *Comprimento Médio da Seqüência (ARL)*, também conhecido como NMA, que representa o número médio de amostras necessário até que a primeira sinalize uma condição fora de controle. O (ARL) pode ser expresso como:

$$ARL = \frac{1}{P(\text{o valor de } T(x) \text{ esteja fora dos limites de controle})}$$

Esse sinal pode ser um alarme falso, sendo que a probabilidade de que um valor amostral de  $T(x)$  esteja fora dos limites de controle por razões puramente aleatórias e não devido a mudanças no processo é igual a  $\alpha$ ; ou um alarme verdadeiro, sendo que a probabilidade de detectar-se no gráfico de controle uma mudança significativa no processo quando ela de fato existe é dada por  $1 - \beta$ , onde  $\beta$  a probabilidade de erro do tipo II que ocorre quando o processo está fora de controle, mas não há qualquer sinalização sobre o fato no gráfico de controle. Duas medidas de desempenho são utilizadas para avaliar a qualidade da carta de controle, o *ARL sob controle* (*Average Run Length in control*) e o *ARL fora de controle* (*Average Run Length out of control*). Essas medidas são definidas, respectivamente, por:

$$ARL \text{ sob controle} = \frac{1}{\alpha}$$

$$ARL \text{ fora de controle} = \frac{1}{1 - \beta}$$

Os valores de ARL são fundamentados nos seguintes fatos: considerando-se a variável aleatória  $Y$  como o número de amostras aleatórias independentes observadas do processo até que se obtenha o primeiro alarme falso, então  $Y$  tem uma distribuição geométrica com esperança e variância dadas por:

$$E(Y) = \frac{1}{\alpha} \quad \text{e} \quad \text{Var}(Y) = \frac{1 - \alpha}{\alpha^2}$$

Analogamente, se  $Z$  é a variável aleatória que representa o número de amostras aleatórias observadas do processo até que se obtenha o primeiro alarme verdadeiro, então  $Z$  tem uma distribuição geométrica com esperança e variância dados por:

$$E(Z) = \frac{1}{1 - \beta} \quad \text{e} \quad \text{Var}(Z) = \frac{\beta}{(1 - \beta)^2}$$

Se o processo está sob controle, o tempo necessário para o gráfico de controle emitir um alarme falso deverá ser aumentado para que a taxa de alarmes falsos seja reduzida e se estiver fora de controle, este tempo deverá ser curto para que a mudança seja detectada rapidamente.



Como ilustração, suponha uma carta de controle de Shewhart com probabilidade de erro do tipo I especificada em  $\alpha = 0,1$  e de erro do tipo II especificada em  $\beta = 0,8594$ . Quando o processo está sob controle estatístico, o *Comprimento Médio da Seqüência* será:

$$ARL \text{ sob controle} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,1} = 10$$

Esse valor do ARL obtido indica que se o processo se mantiver sob controle um sinal de fora de controle ocorrerá, em média, após 10 amostras, isto é, um alarme falso ocorre, em média, a cada 10 amostras. Quando o processo está fora de controle estatístico, o *Comprimento Médio da Seqüência* será:

$$ARL \text{ fora de controle} = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{1 - 0,8594} = 7,1124,$$

ou seja, é necessário, em média, aproximadamente 7 amostras para a carta detectar a mudança real no processo, a partir de sua ocorrência.

A Figura 2.1 apresenta uma ilustração das situações descritas. Em (a) nenhuma mudança foi realizada na média do processo, mas a 10<sup>a</sup> amostra apresenta um valor fora dos limites de controle. Já em (b), ocorreu uma mudança na 10<sup>a</sup> amostra que foi detectada, somente na 7<sup>a</sup> amostra coletada após o momento da mudança.

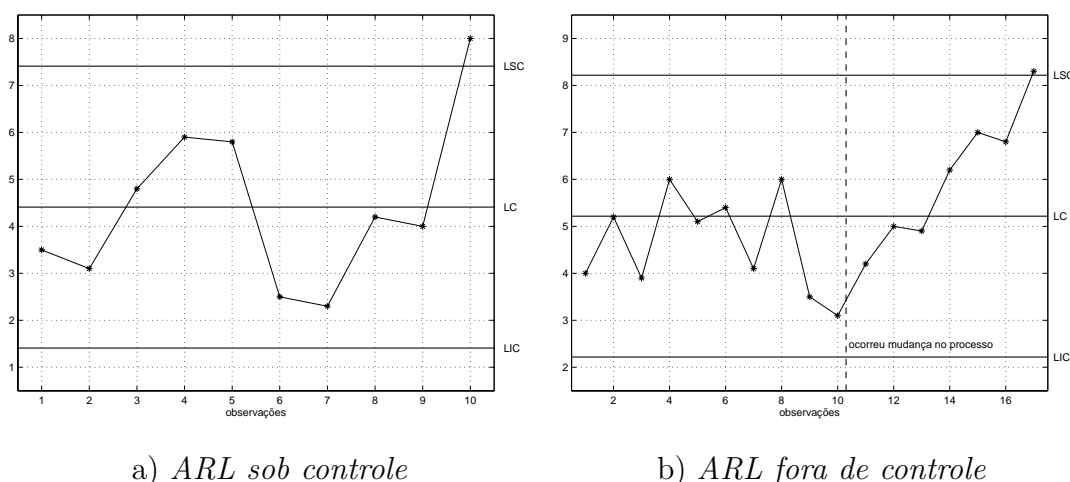


Figura 2.1: Carta de controle para a média do processo

A análise conjunta do *ARL sob controle* e do *ARL fora de controle* indica a eficácia da carta de controle. Quanto maior for o *ARL sob controle* e menor for o *ARL fora de controle*

mais eficiente é a carta, pois consegue perceber rapidamente a falta de controle do processo quando ele sofre alguma modificação e demora a acusar falta de controle quando ele não sofre qualquer modificação.

## 2.3 Distribuição normal multivariada

A função densidade de uma distribuição normal univariada com média  $\mu$  e variância  $\sigma$  pode ser escrita como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}, \text{ sendo } -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty \text{ e } \sigma > 0.$$

Seja  $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_p]'$  o vetor aleatório contendo  $p$  variáveis aleatórias,  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_p]'$  o vetor de médias de  $\mathbf{X}$  e  $\Sigma$  a matriz de variâncias e covariâncias de  $\mathbf{X}$ , positiva definida.

A função densidade da distribuição normal  $p$ -variada é dada por:

$$f(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\},$$

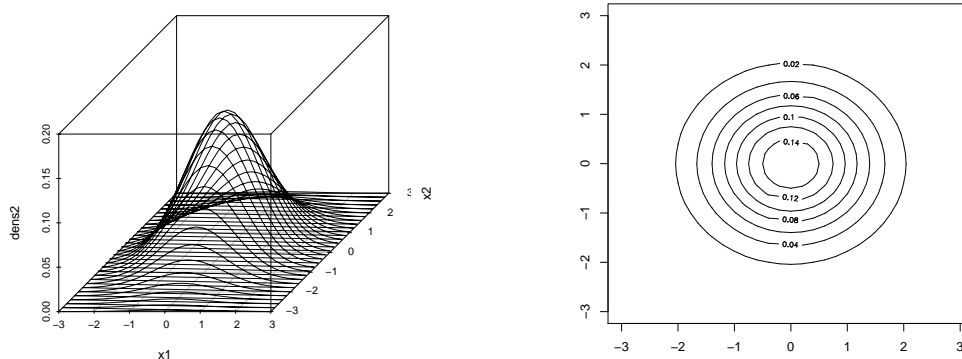
sendo  $-\infty < x_j < \infty$ ,  $-\infty < \mu_j < \infty$ ,  $|\Sigma|$  é o determinante da matriz de covariâncias  $\Sigma$ , de dimensão  $p \times p$ , e  $j=1,2, \dots, p$ .

No caso de um vetor aleatório de dimensão 2, ou seja,  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$  diz-se que tem distribuição normal bivariada com vetor de médias  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)'$  e matriz de covariâncias  $\Sigma_{2 \times 2}$ , e a sua função densidade é usualmente expressa por (Johnson e Wichern, 2002):

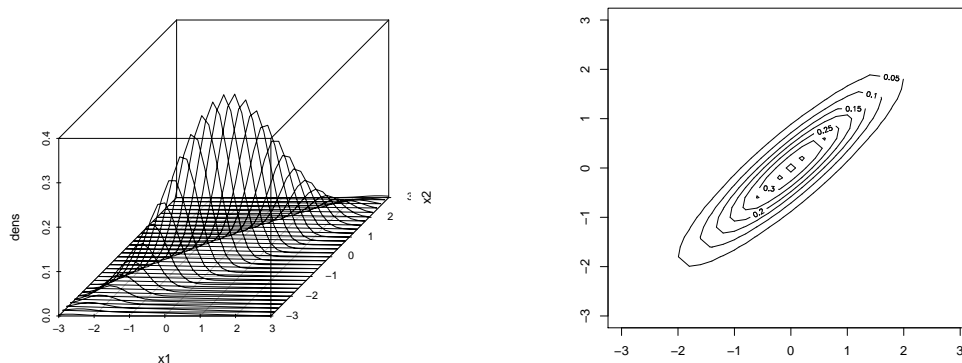
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho_{12}^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)} \left[ \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right)^2 + \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right)^2 - 2\rho_{12} \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right) \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right) \right] \right\},$$

sendo  $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$ ,  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\sigma_{11}, \sigma_{22} \in \mathbb{R}_+^2$  e  $|\rho_{12}| < 1$ , que representa o coeficiente de correlação entre as variáveis  $X_1$  e  $X_2$ , onde  $\sigma_{jj} = \sigma_j^2$  denota a variância da variável  $X_j$ .

As Figuras 2.2 (a) e (b) mostram alguns gráficos genéricos da distribuição normal bivariada. Os gráficos foram gerados com os mesmos valores do vetor de médias e das variâncias. Percebe-se que quando o coeficiente de correlação  $\rho$  é próximo de 1, a superfície de resposta fica mais concentrada ao redor do vetor de médias da distribuição e quando  $\rho$  é zero, a superfície fica mais dispersa ao redor do vetor de médias. É possível mostrar que para  $\Sigma$



a)  $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_{11} = \sigma_{22} = 1$  e  $\rho_{12} = 0$



b)  $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_{11} = \sigma_{22} = 1$  e  $\rho_{12} = 0,9$

Figura 2.2: Distribuição normal bivariada

conhecida a distribuição da variável  $(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$  tem distribuição qui-quadrado com  $p$  graus de liberdade (Anderson, 2003). Assim, uma elipse de confiança para o vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}$ , com  $(1 - \alpha)100\%$  de confiança é dada por:

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \leq \chi_{p,(1-\alpha)}^2\}$  onde  $\chi_{p,(1-\alpha)}^2$  é tal que,  $P[\chi_p^2 \leq \chi_{p,(1-\alpha)}^2] = 1 - \alpha$ . Quando  $n=1$  essa é a equação que define a região de confiança para a média.

Para ilustrar a utilização de cartas de controle univariadas para o controle do processo multivariado, considere um processo, no qual,  $\mathbf{X}$  tem distribuição normal bivariada com as

médias das variáveis iguais a zero, as variâncias iguais a 1 e a correlação entre as variáveis igual a 0,9. Quando sobrepomos os limites de controle univariados calculados através das expressões definidas na equação (2.1) com  $k=3$  (o que equivale a utilizar um nível de significância individual de  $\alpha = 0,0027$  para cada carta) sobre a elipse de confiança do processo (obtida através da distribuição qui-quadrado com  $p$  graus de liberdade a um nível de significância global de  $\alpha = 0,0027$ ), obtém-se os resultados da Figura 2.3, na qual, observa-se que existe uma diferença entre as regiões de controle fornecidas pela elipse de confiança e o cruzamento dos limites de controle univariados. Percebe-se que existe uma região que possui amostras fora dos limites de controle univariados, porém estão dentro da elipse de confiança e outra região que possui amostras dentro dos limites de controle univariados, mas estão fora da elipse de confiança. Esse fato mostra a importância de se utilizar a densidade conjunta das variáveis quando se faz o monitoramento de processos multivariados.

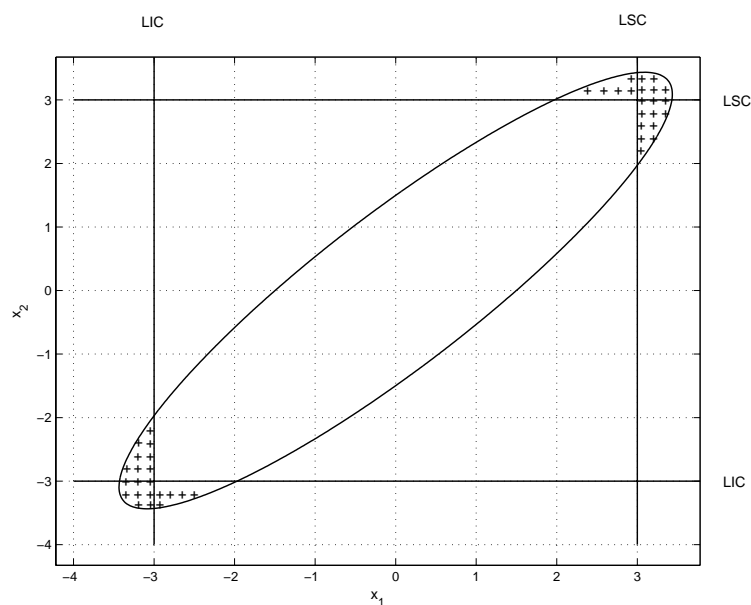


Figura 2.3: Comparação da elipse de confiança com os limites de controle univariados

### 2.3.1 Estimação do vetor de médias e matriz de covariâncias

Em geral, os parâmetros  $\mu$  e  $\Sigma$  são desconhecidos e estimados a partir das amostras aleatórias observadas no processo. Suponha uma amostra aleatória de tamanho  $n > 1$ , denotada por  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ , sendo  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip})$  o  $i$ -ésimo vetor amostral onde

$X_{ij}$  é a observação da  $j$ -ésima variável no elemento amostral  $i$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ . A média amostral da  $j$ -ésima variável é dada por:

$$\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ij}$$

e o vetor de médias amostral  $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_p)$ . A matriz de variâncias e covariâncias amostral é dada por:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix}$$

onde  $S_{jj} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  é a estimativa da variância da variável  $X_j$  e  $S_{jk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)(X_{ik} - \bar{X}_k)$ ,  $j, k = 1, 2, \dots, p$  ( $j \neq k$ ) é a estimativa da covariância entre as variáveis  $X_j$  e  $X_k$ .

Esses estimadores são não-viciados para  $\mu$  e  $\Sigma$  (ver Anderson, 2003). Existem outros estimadores para a matriz de covariâncias  $\Sigma$  como de máxima-verossimilhança e o de diferenças sucessivas, entre outros. No entanto, nesta dissertação usaremos apenas a matriz  $S$ . Maiores detalhes, sobre outros estimadores, podem ser obtidos em Timm (2002) e Anderson (2003).

A matriz de correlação amostral é dada por:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & R_{12} & \cdots & R_{1p} \\ R_{21} & 1 & \cdots & R_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{p1} & R_{p2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $R_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sqrt{S_{ii}S_{jj}}}$   $-1 \leq R_{ij} \leq 1$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, p$ , é a correlação amostral entre as variáveis  $X_i$  e  $X_j$  e é um estimador da matriz de correlação teórica das variáveis  $X_j, j = 1, 2, \dots, p$ .

### 2.3.2 Matriz de informação de Fisher para a normal multivariada

Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de uma população normal  $p$ -variada com vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}$  e a matriz de covariâncias  $\Sigma$ , ou seja,  $X_1, \dots, X_n \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ . Como  $X_1, \dots, X_n$  são independentes e identicamente distribuídos a função de densidade conjunta é o produto das densidades marginais (que também são normais). Então, pode-se escrever que

$$f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \prod_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})\right)$$

Sendo  $\mathbf{x}_i$  um vetor  $p \times 1$ . Após algumas manipulações algébricas (ver Johnson e Wichern, 2002, cap. 4) a expressão acima pode ser reescrita como

$$= (2\pi)^{-np/2} |\Sigma|^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}\left[\Sigma^{-1} \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})'\right)\right]\right)$$

que vista como função de  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\Sigma$  é a função de verossimilhança de uma amostra de tamanho  $n$  de uma distribuição normal multivariada. O logaritmo da função de verossimilhança pode ser escrito como (Johnson e Wichern, 2002; Seber, 1984)

$$\begin{aligned} \log L(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) &= -\frac{np}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(|\Sigma|) - \frac{1}{2} \text{tr}\left[\Sigma^{-1} \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})'\right)\right] \\ &= -\frac{np}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(|\Sigma|) - \frac{1}{2} \text{tr}[\Sigma^{-1}(Q + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})')] \\ &= -\frac{np}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(|\Sigma|) - \frac{1}{2} \text{tr}[\Sigma^{-1}Q] - \frac{n}{2} \text{tr}[\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})'] \end{aligned}$$

$\frac{Q}{n} = \frac{(n-1)}{n} S$ , a matriz de covariâncias amostral, e  $\bar{X}$ , a média amostral, são as estimativas de máxima-verossimilhança de  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\Sigma$ , respectivamente. De Seber (1984), o  $\log L(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  é máximo para qualquer  $\Sigma$ , não nula e positiva definida, quando  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{X}$ .

$$\log L(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \Sigma) = -\frac{np}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(|\Sigma|) - \frac{n}{2} \text{tr}\left[\frac{\Sigma^{-1}Q}{n}\right]$$

Se  $\theta_i$  e  $\theta_j$  são elementos ou função de elementos de  $\Sigma^{-1}$ , então, estimativas de  $\Sigma$  podem ser obtidas das relações (Beyer, 1978)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log L(\hat{\mu}, \Sigma) &= \frac{1}{2} \text{tr} \frac{\partial \Sigma^{-1}}{\partial \theta_i} (\Sigma - Q) \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log L(\hat{\mu}, \Sigma) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left( \frac{\partial^2 \Sigma^{-1}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) (\Sigma - Q) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \Sigma^{-1} \frac{\partial \Sigma^{-1}}{\partial \theta_i} \Sigma^{-1} \frac{\partial \Sigma^{-1}}{\partial \theta_j} \right] \end{aligned}$$

$$I_{i,j} = -E \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log L(\mu, \Sigma) \right]$$

A matriz de informação de Fisher para a distribuição normal multivariada tem uma forma especial. Seja  $\mu(\theta) = [\mu_1(\theta), \mu_2(\theta), \dots, \mu_p(\theta)]'$  e  $\Sigma(\theta)$  a matriz de covariâncias. Então, o elemento típico  $I_{i,j}$ ,  $0 \leq i, j < p$ , da matriz de informação de Fisher para  $X \sim N(\mu(\theta), \Sigma(\theta))$  através do Wikipédia on-line<sup>1</sup> (10 dez. 2008) é

$$I_{i,j} = \frac{\partial \mu}{\partial \theta_i} \Sigma^{-1} \frac{\partial \mu'}{\partial \theta_j} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \Sigma^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta_i} \Sigma^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta_j} \right]$$

onde  $\frac{\partial \mu}{\partial \theta_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial \theta_i} & \frac{\partial \mu_2}{\partial \theta_i} & \dots & \frac{\partial \mu_p}{\partial \theta_i} \end{bmatrix}$  e  $\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Sigma_{1,1}}{\partial \theta_i} & \frac{\partial \Sigma_{1,2}}{\partial \theta_i} & \dots & \frac{\partial \Sigma_{1,p}}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial \Sigma_{2,1}}{\partial \theta_i} & \frac{\partial \Sigma_{2,2}}{\partial \theta_i} & \dots & \frac{\partial \Sigma_{2,p}}{\partial \theta_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Sigma_{p,1}}{\partial \theta_i} & \frac{\partial \Sigma_{p,2}}{\partial \theta_i} & \dots & \frac{\partial \Sigma_{p,p}}{\partial \theta_i} \end{bmatrix}$ .

## 2.4 Testes estatísticos existentes para matrizes de covariâncias tratados nesta dissertação

Monitorar a variabilidade é uma parte importante de qualquer procedimento de controle. Segundo Montgomery (2004, p.338), “assim como é importante monitorar o vetor de médias do processo  $\mu$  no caso multivariado, é também importante monitorar a variabilidade do processo”, o que é representada pela matriz de covariâncias  $\Sigma$ . A seguir serão apresentados

<sup>1</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate\\_normal\\_distribution](http://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution)

alguns testes estatísticos existentes para matrizes de covariâncias, objetos de discussão desta dissertação.

### 2.4.1 Teste da razão de verossimilhança

Uma forma de monitoramento da variabilidade é apresentada por Alt (1985). Equivale a um teste de hipótese, no qual, a matriz de covariâncias do processo é igual a uma matriz particular,  $\Sigma_0$ , isto é,  $H_0: \Sigma = \Sigma_0$  versus  $H_1: \Sigma \neq \Sigma_0$ . Dada uma amostra de tamanho  $n$ , a estatística de teste é dada por:

$$W = -pn + pn \ln(n) - n \ln \left( \frac{|A|}{|\Sigma_0|} \right) + \text{tr}(\Sigma_0^{-1}A)$$

onde  $A = (n - 1)S$ ,  $S$  é a matriz de covariâncias amostral e  $\text{tr}$  é o operador traço. Sob normalidade  $p$ -variada, se o valor de  $W$  estiver acima do limite superior de controle definido por  $\text{LSC} = \chi_{\alpha, p}^2_{(p+1)/2}$ , então o processo será considerado fora de controle.

Embora este teste tenha sido apresentado por Alt (1985) dentro do contexto de controle de qualidade, ele é anterior a esta data sendo encontrado em Anderson (1958) e Morrison (1976). Korin (1968) propôs uma correção para a estatística  $W$  com vista a melhorar a aderência para a distribuição qui-quadrado, principalmente para tamanhos de amostras menores. A estatística  $W$  modificada, chamada de  $W^*$ , é dada por (ver Timm, 2002)

$$\begin{aligned} W^* &= \left[ 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(n-1)(p+1)} \right] (n-1) [\ln|\Sigma_0| - \ln|S| + \text{tr}(S\Sigma_0^{-1}) - p] \\ &= \left[ 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(n-1)(p+1)} \right] (n-1) \left[ \ln \frac{|\Sigma_0|}{|S|} + \text{tr}(S\Sigma_0^{-1}) - p \right] \end{aligned}$$

### 2.4.2 Teste do determinante

Outra abordagem se baseia na variância amostral generalizada,  $|S|$ . O gráfico de controle para o determinante da matriz de covariâncias teórica  $|\Sigma|$ , quando  $\Sigma$  é previamente



estabelecida, a  $(1 - \alpha)100\%$  é definido por:

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= |\Sigma| \left( 1 + z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} \right) \\ \text{LC} &= |\Sigma| \\ \text{LIC} &= \max \left( 0, |\Sigma| \left( 1 - z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} \right) \right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde

$$b_1 = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{i=1}^p (n-i) \quad e$$

$$b_2 = \frac{1}{(n-1)^{2p}} \prod_{i=1}^p (n-i) \left\{ \prod_{j=1}^p (n-j+2) - \prod_{j=1}^p (n-j) \right\}$$

Em geral, os limites de controle são obtidos pelo uso da distribuição normal assintótica de  $|S|$ . Pode-se mostrar que (Djauhari 2005):

$$E(|S|) = b_1 |\Sigma| \quad e \quad \text{Var}(|S|) = b_2 |\Sigma|^2.$$

Assim,  $|S|/b_1$  é um estimador não viciado de  $|\Sigma|$ ; onde  $|S|$  é o determinante da matriz de covariâncias amostral  $S$ . Em termos práticos de controle de qualidade para cada amostra  $i$  de tamanho  $n$  do processo, a estatística  $|S_i|$  é determinada e seu valor é colocado num gráfico que tem os limites como na equação (2.2). O processo é declarado como fora de controle se  $|S_i|$  ultrapassar algum dos limites. Embora a variância amostral generalizada seja uma medida de dispersão multivariada amplamente usada, ela apresenta falhas na detecção de matrizes diferentes, pois estas podem ter o mesmo determinante. Como ilustração, observe as seguintes matrizes de covariâncias:

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 2,32 & 0,4 \\ 0,4 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Os determinantes dessas matrizes são  $|\Sigma_1| = |\Sigma_2| = 1$ , no entanto, essas matrizes transmitem informações diferentes sobre a variabilidade do processo e sobre a correlação entre as variáveis. No caso de  $\Sigma_1$  a correlação entre  $X_1$  e  $X_2$  é zero, enquanto que em  $\Sigma_2$  a correlação é 0,37. Além disto, para a construção do gráfico de controle é assumido que  $|S|$  tem distribuição normal, sendo que na verdade esta distribuição é apenas assintótica.

Anderson (1958; 2003) mostra a distribuição exata de  $|S|$ . Seja  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  uma amostra aleatória de uma distribuição normal  $p$ -variada. O determinante da matriz de covariâncias amostral  $|S|$  tem a mesma distribuição que a variável aleatória

$$\left[ \frac{|\Sigma|}{(n-1)^p} \right] \prod_{k=1}^p Z_k, \quad (2.3)$$

onde  $Z_k$  são independentes e  $Z_k \sim \chi_{n-k}^2$ ;  $k = 1, 2, \dots, p$ .

Na Seção 2.4.3, será apresentado um estudo sobre a distribuição exata e assintótica de  $|S|$ .

Djauhari (2005) propõe o gráfico de controle melhorado para  $|\Sigma|$ , no qual, os limites de controle a  $(1 - \alpha)100\%$  são dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= |\Sigma_0| \left( \frac{b_1}{b_3} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{b_2}{b_3^2 + b_4}} \right) \\ \text{LC} &= |\Sigma_0| \frac{b_1}{b_3} \\ \text{LIC} &= \max \left( 0, |\Sigma_0| \left( \frac{b_1}{b_3} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{b_2}{b_3^2 + b_4}} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde  $b_3 = \frac{1}{\{(n-1)\}^p} \prod_{k=1}^p \{(n-1) - k + 1\}$  e

$$b_4 = \frac{1}{\{(n-1)\}^{2p}} \prod_{i=1}^p \{(n-1) - i + 1\} \times \left[ \prod_{j=1}^p \{(n-1) - j + 3\} - \prod_{j=1}^p \{(n-1) - j + 1\} \right].$$

Segundo Djauhari, os limites calculados desta forma são mais precisos que os usados para o gráfico do determinante. Embora, tenha construído uma correção para os limites de controle, a distribuição por ele utilizada para a construção do gráfico, continua sendo a normal  $p$ -variada.

### 2.4.3 Estudo sobre a distribuição exata de $|S|$

É importante verificar qual é a distribuição do determinante da matriz de covariâncias amostral,  $|S|$ , pois a não utilização da distribuição exata para amostras menores pode provocar erros, na determinação dos limites de controle. Como ilustração, na Figura 2.4, são apresentados alguns histogramas, construídos para valores amostrais  $|S|$ . Os histogramas foram gerados a partir de amostras aleatórias de tamanho  $n$  de uma distribuição normal bivariada com vetor de médias nulo e matriz de covariâncias dada por  $\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 2,32 & 0,4 \\ 0,4 & 0,5 \end{bmatrix}$ . Foram considerados valores de  $n=5, 7, 10, 25, 50$  e  $100$ .

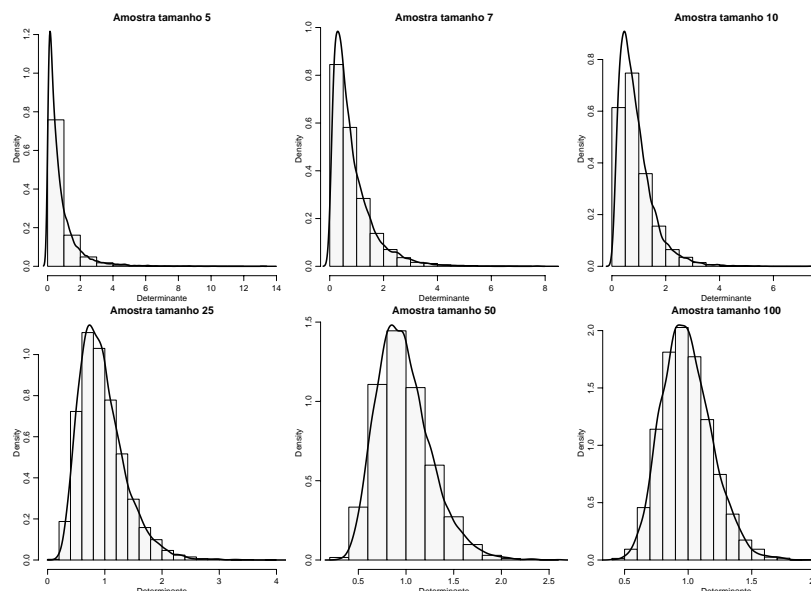


Figura 2.4: Distribuição exata do  $|S|$

Para verificar a adequação da distribuição normal aos dados amostrais foi realizado o teste de aderência de Shapiro-Wilk para a distribuição normal (ver Tabela 2.1).

Tabela 2.1: Resultados do teste de normalidade de Shapiro-Wilk

	<b>n</b>					
	5	7	10	25	50	100
<b>p-valor</b>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0747	0,5699	0,8447

Observa-se que a distribuição do  $|S|$  para pequenas amostras não se aproxima da dis-

tribuição normal. Apenas para  $n \geq 50$ , o determinante da matriz de covariâncias amostral tem distribuição próxima à normal (Anderson 2003).

#### 2.4.4 Teste de Sullivan et al.

Sullivan et al. (2007) propuseram um procedimento de análise que pode ser aplicado para dois grupos de observações homogêneas consecutivas quaisquer, sendo um grupo de observações que antecede e um após o ponto de mudança identificado, dos parâmetros do processo.

Suponha que as distribuições antes (A) e depois (B) da mudança sejam descritas pelo vetor de parâmetros  $\theta$ , com  $k_0$  elementos. Para observações independentes e identicamente distribuídas, provenientes de uma normal multivariada,  $\theta$  consiste dos elementos do vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}$  e da matriz de covariâncias  $\Sigma$ . Por exemplo, para uma distribuição normal bivariada teríamos  $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_{1,2}, \sigma_2^2)'$  ou, alternativamente, como  $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \rho_{1,2}, \sigma_2)'$ . Desta forma,  $\theta_A$  representa o vetor de parâmetros para o grupo A e o vetor  $\hat{\theta}_A$  contém as estimativas de máxima verossimilhança desses parâmetros. Analogamente, para o grupo B, tem-se  $\theta_B$  e  $\hat{\theta}_B$ .

A diferença dos vetores de parâmetros  $\delta = (\theta_A - \theta_B)$  é estimada por  $\hat{\delta} = (\hat{\theta}_A - \hat{\theta}_B)$ , tendo  $k_0$  diferenças entre os parâmetros estimados. Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros têm distribuição assintoticamente normais multivariadas de acordo com as condições de regularidade gerais (ver Casella e Berger, 2002).

A forma quadrática  $\chi_{A,B}^2 = \hat{\delta}^T \hat{\Sigma}_{\hat{\delta}}^{-1} \hat{\delta}$  tem distribuição assintótica qui-quadrado com  $k_0$  graus de liberdade, onde  $\Sigma_{\hat{\delta}}$  e  $\hat{\Sigma}_{\hat{\delta}}$  são as matrizes de covariâncias teórica e estimada de  $\hat{\delta}$ , respectivamente.

A hipótese nula corresponde a não mudança no vetor de parâmetros, ou seja, um vetor diferença,  $\delta = \theta_A - \theta_B = 0$ .

A matriz de covariâncias  $\Sigma_{\hat{\delta}}$  usada por Sullivan et al. (2007) em suas simulações, é a

matriz de informação de Fisher, satisfeitas as condições de regularidades (Ver Casella e Berger, 2002). Essa matriz é estimada encontrando-se uma expressão algébrica para o valor esperado da matriz Hessiana, que é então avaliada nos valores dos estimadores de máxima verossimilhança.

É importante ressaltar, que nesse artigo os autores consideraram apenas o caso bivariado através de exemplos, tanto para distribuição normal quanto para dados não normais, mas não realizaram comparações com outros testes.

## 2.5 Testes propostos e avaliados nesta dissertação

Nesta seção serão apresentadas algumas propostas de testes para matrizes de covariâncias que são objetivos desta dissertação, com o intuito de avaliar se estas têm um bom desempenho. A primeira é uma adaptação do teste de Sullivan et al. (2007) considerando-se a distribuição  $\chi^2$ , como também a estatística proposta por Hayter e Tsui (1994) na comparação do vetor de médias. A segunda é uma adaptação da estatística  $T^2$  de Hotelling e do teste de Hayter e Tsui para os autovalores da matriz de covariâncias  $\Sigma$  e a terceira é uma transformação da informação contida em  $\Sigma$  numa variável univariada.

### 2.5.1 Adaptação do teste de Sullivan et al. (2007) testada nesta dissertação

No artigo de Sullivan et al. (2007) é descrito um procedimento para encontrar os parâmetros que provavelmente são responsáveis pela rejeição da hipótese nula, quando isto ocorre. Nesta dissertação não será abordado esse procedimento. No entanto, pretende-se fazer uma adaptação do teste de Sullivan para o caso, no qual, se tem uma amostra de tamanho  $n$  e o objetivo é testar  $H_0 : \Sigma = \Sigma_0$  versus  $H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0$ . Supondo o vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}$  sob controle, o objetivo é avaliar apenas  $\Sigma_0$ .

Seja  $\boldsymbol{\theta}^* = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p, \rho_{ij}, i \neq j)'$ . Então, a hipótese nula pode ser escrita como

$H_0: \theta^* = \theta_0^*$  versus  $H_1: \theta^* \neq \theta_0^*$ , onde  $\theta_0^* = (\sigma_{10}, \sigma_{20}, \dots, \sigma_{p0}, \rho_{ij0}, i \neq j)'$  é pré-estabelecido. Utilizando-se as idéias propostas no artigo de Sullivan et al. (2007) dado uma amostra de tamanho  $n$ , a estatística de teste seria dada por:

$$\chi^2 = (\hat{\theta}^* - \theta_0^*)' \Sigma_{\hat{\theta}^*}^{-1} (\hat{\theta}^* - \theta_0^*) \quad (2.5)$$

sendo  $\hat{\theta}^*$  o estimador de máxima-verossimilhança de  $\theta$  e  $\Sigma_{\hat{\theta}^*}^{-1}$  a matriz de covariâncias estimada de  $\hat{\theta}^*$ . Sob  $H_0$  a estatística (2.5) teria distribuição assintótica  $\chi^2$  com  $k_0$  graus de liberdade, onde  $k_0$  é o número de parâmetros estimados em  $\theta_0^*$ .

A possível vantagem deste teste em relação ao de razão de verossimilhança de Alt (1985) e do determinante amostral  $|S|$ , vem do fato que a estatística em (2.5) compara todos os parâmetros um a um com suas estimativas amostrais, não havendo assim, uma redução da informação da matriz de covariâncias estimada via determinante ou traço. Inicialmente, espera-se que um teste como esse apresente um poder maior que o teste de Alt e do determinante, o que será discutido no capítulo 3 desta dissertação. Vale lembrar, que até onde se tem conhecimento, esta idéia ainda não foi testada por outros autores. Essa adaptação foi testada para o caso bivariado e para valores de  $p$  iguais a 3 e 5.

### a) Adaptação usando a distribuição qui-quadrado

Como um exemplo, seja  $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \rho_{12}, \sigma_2)'$  o vetor de parâmetros para uma distribuição normal bivariada. Considerando-se  $\mu_1$  e  $\mu_2$  pré-especificados, este estudo está voltado para o vetor de parâmetros que contém apenas os elementos da matriz de covariâncias. Assim,  $\theta^* = (\sigma_1, \rho_{12}, \sigma_2)'$  e  $\hat{\theta}^*$  é o vetor que contém as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros em  $\theta^*$ .

Para testar se  $H_0: \theta^* = \theta_0^*$  versus  $H_1: \theta^* \neq \theta_0^*$ , o que é equivalente a  $H_0: \theta^* - \theta_0^* = \delta^* = 0$  versus  $H_1: \theta^* - \theta_0^* = \delta^* \neq 0$  necessita-se da matriz de covariâncias de  $\hat{\delta}^*$  que pode ser obtida através da matriz de Informação de Fisher (ver Seção 2.3.2). A estatística de teste será dada por  $\chi^2 = \hat{\delta}' \hat{\Sigma}_{\hat{\delta}}^{-1} \hat{\delta}$ , que sob  $H_0$ , tem distribuição assintótica  $\chi_{k_0}^2$ , onde  $k_0$  é o número de parâmetros estimados em  $\theta^*$ . Para o caso de  $p = 2$  e uma amostra de tamanho

n, pode ser mostrado que sob  $H_0$  (Sullivan et al., 2007), tem-se:

$$\Sigma_{\delta} = \begin{bmatrix} d & -e & f \\ -e & h & -g \\ f & -g & i \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

onde  $d = \frac{\sigma_1^2}{2n}$ ,  $e = \frac{\rho_{1,2}(\rho_{1,2}^2 - 1)\sigma_1}{2n}$ ,  $f = \frac{\rho_{1,2}^2\sigma_1\sigma_2}{2n}$ ,  $g = \frac{\rho_{1,2}(\rho_{1,2}^2 - 1)\sigma_2}{2n}$ ,  $h = \frac{(\rho_{1,2}^2 - 1)^2}{n}$  e  $i = \frac{\sigma_2^2}{2n}$ , sendo os valores  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\rho_{1,2}$ ,  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$ ,  $\sigma_{1,2}$  como especificados em  $H_0$ .

Na Figura 2.5, é apresentada a comparação de alguns histogramas, construídos para valores amostrais da estatística  $\chi^2$  de Sullivan et al. em comparação com os valores da distribuição qui-quadrado. Para cada situação, mostrada na Figura 2.5, foram geradas 10000 amostras de tamanho fixo  $n=5, 7, 10, 25, 50$  e  $100$  com  $p=2$  variáveis sendo que, as amostras geradas tinham distribuição normal bivariada com vetor de médias  $\mu = (0, 0)'$  e com matriz de covariâncias  $\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 2,32 & 0,4 \\ 0,4 & 0,5 \end{bmatrix}$ . Para cada  $n$ , a estatística  $\chi^2$  foi calculada da seguinte forma:

$$\chi^2 = (\hat{\theta}_{\text{amostral}}^* - \theta_{\text{teórico}}^*)' \Sigma_{\hat{\theta}^*}^{-1} (\hat{\theta}_{\text{amostral}}^* - \theta_{\text{teórico}}^*) \quad (2.7)$$

onde  $\theta_{\text{teórico}}^* = (1, 5232, 0, 3714, 0, 7071)'$ , considerando  $\theta_0^* = (\sigma_1, \rho_{1,2}, \sigma_2)'$ , e

$$\Sigma_{\hat{\theta}} = \begin{bmatrix} d & -e & f \\ -e & h & -g \\ f & -g & i \end{bmatrix}$$

$$d = \frac{2,32}{2n}, \quad e = \frac{-0,58}{2n}, \quad f = \frac{0,26}{2n}, \quad g = \frac{-0,24}{2n}, \quad h = \frac{0,53}{n} \quad \text{e} \quad i = \frac{0,5}{2n}.$$

Para verificar a adequação da estatística qui-quadrado como distribuição da estatística de teste, foi calculada a função de densidade teórica da distribuição  $\chi_{3,0,05}^2$ , traçada sobre o histograma da estatística (2.7) e realizado o teste de Kolmogorov-Sminorv para aderência em relação a distribuição qui-quadrado com 3 graus de liberdade (ver Tabela 2.2). Percebe-se que para  $n=5, 7, 10$  e  $25$  a distribuição da estatística  $\chi^2$  de Sullivan et al. não se aproxima da

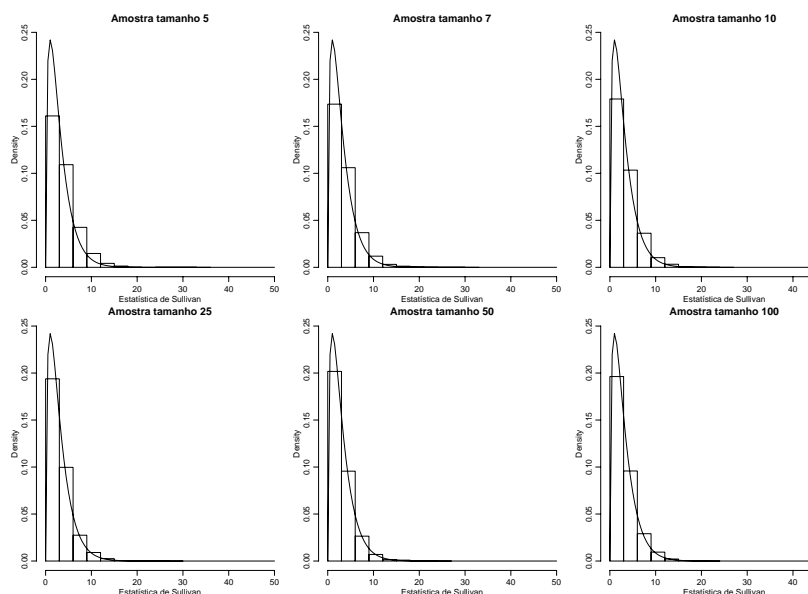


Figura 2.5: Comparação da estatística de teste com a distribuição qui-quadrado

distribuição teórica qui-quadrado. Para  $n=50$  e  $100$  observa-se que a distribuição amostral de (2.7) aproxima-se da qui-quadrado. Como é comum o uso de amostras menores que  $50$  em controle de qualidade, a utilização da  $\chi^2$  como distribuição de referência não seria adequada.

Tabela 2.2: Teste de aderência para Qui-quadrado

Teste de Kolmogorov-Smirnov				
n				
5	7	10	25	100
0,0000	0,0000	0,0000	0,0406	0,4781

**b) Adaptação usando o teste de Hayter-Tsui**

Seja o vetor  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_0)$ . Com base no artigo de Hayter e Tsui (1994), para cada variável  $X_j$  os limites de  $(1 - \alpha)$  100% de confiança para a média  $\mu_j$ ,  $0 < \alpha < 1$ , são dados pela equação:

$$P \left( \left| \frac{X_j - \mu_j}{\sqrt{\sigma_{jj}}} \right| \leq C_{R,\alpha}, \text{ para todo } 1 \leq j \leq p \right) = 1 - \alpha$$

o que significa dizer que a probabilidade de que o intervalo  $[X_j - \sqrt{\sigma_{jj}} C_{R,\alpha} ; X_j + \sqrt{\sigma_{jj}} C_{R,\alpha}]$



contenha o verdadeiro valor  $\mu_j$ , para  $1 \leq j \leq p$  é igual a  $1 - \alpha$ . A escolha do valor crítico  $C_{R,\alpha}$ , depende da matriz de correlação teórica  $P_{p \times p}$  do vetor aleatório  $\mathbf{X}$ . Desse modo, o processo é considerado fora de controle, em relação ao vetor de médias, quando:

$$M = \max_{1 \leq j \leq p} \left| \frac{X_j - \mu_j^0}{\sqrt{\sigma_{jj}}} \right| > C_{R,\alpha}$$

sendo  $\mu_j^0$  o valor pré-estabelecido para  $\mu_j$  sob  $H_0$ ,  $j = 1, \dots, p$ . O valor de  $C_{R,\alpha}$  é obtido através de um algoritmo que envolve a simulação de amostras de uma população normal  $p$ -variada com vetor de médias zero e matriz de covariâncias  $P_{p \times p}$ . (ver Mingoti e Glória, 2005).

Hayter e Tsui propõem que intervalos de confiança sejam feitos separadamente para cada variável levando-se em consideração a correlação existente entre as variáveis medidas. Esses intervalos permitem a identificação automática das variáveis responsáveis pela situação de falta de controle do processo no que se refere ao vetor de médias.

Nesta dissertação, é proposta a seguinte adaptação para testar o vetor que contém apenas os parâmetros da estrutura de variabilidade do processo.

Seja o vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}$  fixo e  $\theta^* = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p, \rho_{kj}, k \neq j)'$ . Para testar  $H_0 : \theta^* = \theta_0^*$  versus  $H_1 : \theta^* \neq \theta_0^*$ , sendo  $\theta_0^* = (\sigma_{10}, \sigma_{20}, \dots, \sigma_{p0}, \rho_{kj0}, k \neq j)'$ , o vetor com valores pré-especificados para  $\theta^*$ . Para facilitar a expressão, seja  $\theta_{0j}^* = \sigma_{j0}$ ,  $j = 1, \dots, p$  e  $\theta_{0kj}^* = \rho_{kj0}$ ,  $k \neq j, j = 1, \dots, p$ .

Então, adaptando o teste para o vetor de médias de Hayter e Tsui,  $H_0$  será rejeitada se:

$$M = \max_{\substack{0 \leq k \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \left[ \left| \frac{\hat{\theta}_{0kj} - \theta_{0kj}}{[\text{Var}(\hat{\theta}_{0kj})]^{1/2}} \right| \right] > C_{R,\alpha}.$$

O valor de  $C_{R,\alpha}$  é tal que,

$$P \left( \left| \frac{\hat{\theta}_{0kj} - \theta_{0kj}}{[\text{Var}(\hat{\theta}_{0kj})]^{1/2}} \right| \leq C_{R,\alpha}, \quad 1 \leq j \leq p \text{ e } 0 \leq k \leq p \right) = 1 - \alpha$$

$0 < \alpha < 1$ . Os valores de  $\text{Var}(\hat{\theta}_{0kj})$  serão determinados pela matriz de informação de Fisher assim, como na adaptação apresentada em **(a)** desta Seção.

Como ilustração, seja uma amostra de tamanho  $n$  e suponha  $p=2$ . Neste caso,  $\theta^* = (\sigma_1, \sigma_2, \rho_{12})'$ . Sendo assim,  $\theta_{001}^* = \sigma_{10}$ ,  $\theta_{002}^* = \sigma_{20}$  e  $\theta_{012}^* = \rho_{120}$ , são os valores pré-estabelecidos para os parâmetros em  $\theta_0^*$ .

A estatística de teste será:

$$M = \max_{\substack{0 \leq k \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \left[ \left| \frac{\hat{\theta}_{0kj} - \theta_{0kj}}{[\text{Var}(\hat{\theta}_{0kj})]^{1/2}} \right| \right] > C_{R,\alpha}$$

que é equivalente a

$$M = \max \left[ \left| \frac{\hat{\sigma}_{10} - \sigma_{10}}{[\text{Var}(\hat{\sigma}_{10})]^{1/2}} \right|, \left| \frac{\hat{\rho}_{120} - \rho_{120}}{[\text{Var}(\hat{\rho}_{120})]^{1/2}} \right|, \left| \frac{\hat{\sigma}_{20} - \sigma_{20}}{[\text{Var}(\hat{\sigma}_{20})]^{1/2}} \right| \right]$$

sendo os valores de  $\text{Var}(\hat{\sigma}_{10})$ ,  $\text{Var}(\hat{\rho}_{120})$  e  $\text{Var}(\hat{\sigma}_{20})$  obtidos de acordo com a matriz de covariâncias dada em (2.6), p. 26. O valor da constante  $C_{R,\alpha}$  será determinado por um processo de simulação de acordo com o algoritmo da Tabela 2.3. A matriz de correlação  $P$  será obtida a partir da matriz de covariâncias descrita em (2.6).

---

Tabela 2.3: Obtenção da constante  $C_{R,\alpha}$  no caso da distribuição normal  $k_0$ -variada

---

1. Gere  $M=10000$  (ou mais) vetores de observações de uma distribuição normal  $k_0$  variada, com vetor de médias nulo e matriz de covariâncias igual a  $P$  dada por (2.6) sob  $H_0$ , isto é,  $Z^i = (Z_1, Z_2, \dots, Z_{k_0})'$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ .
  2. Para cada amostra  $i$  calcule a estatística  $M^i = \max_{1 \leq i \leq k_0} |Z^i|$ .
  3. Ordene os valores de  $M^i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , e encontre a ordenada (quantil) correspondente a probabilidade  $(1 - \alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Esse valor corresponde ao  $C_{R,\alpha}$ .
-

## 2.5.2 Adaptação do teste de Hayter e Tsui (1994) para os autovalores de $\Sigma$

A matriz  $\Sigma_{p \times p}$  pode ser escrita em termos dos seus autovalores e seus autovetores da forma

$$\Sigma_{p \times p} = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i e_i', \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$$

Quando  $\mathbf{X}$  tem distribuição normal  $p$ -variada, pode-se mostrar que os  $\hat{\lambda}_j$  são assintoticamente independentes e (Anderson, 1958; 2003):

$$\frac{\lambda_j - \hat{\lambda}_j}{\lambda_j \sqrt{2/(n-1)}} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad j = 1, \dots, p$$

onde  $\hat{\lambda}_j$  é o autovalor  $j$  da matriz de covariância amostral  $S_{p \times p}$ ,  $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_p > 0$ . Assim, a matriz de correlação dos  $\hat{\lambda}_j$ , assintoticamente, é a identidade.

Deste modo, pode-se pensar em construir um teste de hipótese para comparação de matrizes de covariâncias de uma forma mais detalhada, envolvendo os autovalores, ou seja, não apenas através de medidas de redução como o determinante e o traço. Isso vem do fato que embora existam matrizes diferentes com o mesmo determinante e traço, em geral, os autovalores são diferentes. Como ilustração, no exemplo mostrado na Seção 2.4.2, p. 20, onde as matrizes  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  foram consideradas, os determinantes são iguais a um, porém os autovalores são diferentes, pois  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  para a matriz  $\Sigma_1$  e  $\lambda_1 = 2,4040$  e  $\lambda_2 = 0,4160$  para a matriz  $\Sigma_2$ .

Considere  $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_p)'$  e as hipóteses  $H_0 : \lambda = \lambda_0$  versus  $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$  onde  $\lambda_0 = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, \dots, \lambda_{p0})'$  é o vetor que contém os autovalores teóricos de  $\Sigma_{p \times p}$ ,  $\lambda_{10} \geq \lambda_{20} \geq \dots \geq \lambda_{p0}$ .

Novamente, baseando-se no trabalho de Hayter e Tsui (1994) para comparação do vetor de médias, propõe-se que os limites de controle de  $(1 - \alpha) 100\%$ ,  $0 < \alpha < 1$ , para cada  $\lambda_j$ ,

sejam dados por:

$$P \left( \left| \frac{\hat{\lambda}_j - \lambda_{j0}}{\sigma_{\hat{\lambda}_j}} \right| \leq C_{R,\alpha}, \text{ para } 1 \leq j \leq p \right) = 1 - \alpha$$

onde, sob  $H_0$ ,  $\sigma_{\hat{\lambda}_j} = \lambda_{j0} \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ ,  $j = 1, \dots, p$ ,  $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_p$ . Assim,  $H_0$  é rejeitada e o processo é considerado fora de controle se

$$M = \max_{1 \leq j \leq p} \left| \frac{\hat{\lambda}_j - \lambda_{j0}}{\sigma_{\hat{\lambda}_j}} \right| > C_{R,\alpha}$$

O valor de  $C_{R,\alpha}$  é obtido por meio de uma simulação da normal  $p$ -variada com vetor de médias  $\boldsymbol{\mu} = (0, \dots, 0)'$  e matriz de covariâncias  $P_{p \times p}$  igual a matriz identidade, por um procedimento semelhante ao descrito na Tabela 2.3.

Pode ser mostrado que a distribuição exata dos autovalores  $\hat{\lambda}_j, j = 1, \dots, p$ , não é normal (ver Anderson, 1958). No entanto, dado a complexidade da distribuição exata, nesta dissertação será utilizada apenas a distribuição assintótica.

### 2.5.3 Adaptação do teste $T^2$ de Hotelling para autovalores de $\Sigma$

Uma outra adaptação que pode ser trabalhada para testar  $H_0: \lambda = \lambda_0$  contra  $H_1: \lambda \neq \lambda_0$ , é a do teste  $T^2$  de Hotelling originalmente construído para comparação do vetor de médias da distribuição normal  $p$ -variada (Anderson 2003).

Sob  $H_0$ , a distribuição da estatística

$$T^2 = (\hat{\lambda} - \lambda_0)' \Sigma_{\hat{\lambda}}^{-1} (\hat{\lambda} - \lambda_0)$$

é uma qui-quadrado com  $p$  graus de liberdade, sendo  $\Sigma_{\hat{\lambda}}^{-1}$  dado por:

$$\Sigma_{\hat{\lambda}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{2\lambda_{10}^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{2\lambda_{20}^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{n-1}{2\lambda_{p0}^2} \end{bmatrix}$$

A idéia de se utilizar os testes  $T^2$  de Hotelling e de Hayter e Tsui para o vetor de autovalores de  $\Sigma$  já foi introduzida e avaliada no trabalho de Silva (Silva e Mingoti, 2008) sob orientação da Prof. Sueli A. Mingoti num projeto de Iniciação Científica. No entanto, a avaliação foi feita para poucos casos e necessita de um aprimoramento, sendo uma motivação para a inclusão desses testes nesta dissertação.

#### 2.5.4 Teste dos autovalores usando o número de condição

Medir a quase singularidade de uma matriz  $A$  pelo seu determinante não é confiável, já que, um determinante próximo de zero não indica necessariamente que a matriz é malcondicionada. Por exemplo, considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 10^{-4} \\ 10^{-4} & 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 10,0 & 19,8 \\ 10,0 & 19,9 \end{bmatrix}$$

sendo  $\det(A) = -9,9 \times 10^{-9}$  e  $\det(B) = 1$ . No entanto,  $A$  é bem-condicionada e  $B$  é malcondicionada.

O malcondicionamento de uma matriz está associado à proximidade da singularidade da matriz. Para medir o quanto uma matriz é malcondicionada é mais apropriado o uso do número de condição,  $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ , onde  $\|\cdot\|$  significa uma norma qualquer. Um caso

particular é

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \begin{cases} \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}, & \text{se } A = A' \\ \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}, & \text{se } A \neq A', \end{cases}$$

pois  $\lambda(A^{-1}) = \lambda^{-1}(A)$ , sendo os  $\lambda_i$  os autovalores de  $A$  e  $\sigma_i$  os seus valores singulares. Uma matriz é considerada malcondicionada se o número de condição for grande,  $\kappa(A) \gg 1$ , para alguns autores  $\kappa(A) > 20$  já é considerado um valor elevado (Greene, 1997).

Suponha uma matriz  $C$ , com autovalores  $\hat{\lambda}(C) = (10; 0,1)'$  e  $\det(C) = 1$ , indicando que  $C$  é não singular e  $\kappa_2(C) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{10}{0,1} = 100$ , logo, a matriz  $C$  é malcondicionada. Mais informações sobre condicionamento de matrizes podem ser obtidas em Campos, filho (2007).

No exemplo mostrado na Seção 2.4.2, p. 20, as matrizes  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  consideradas apresentam determinantes semelhantes e iguais a um, porém os números de condição são diferentes, pois  $\kappa_2(\Sigma_1) = 1$  e  $\kappa_2(\Sigma_2) = 5,7788$ . Assim, a idéia é criar um teste de hipótese para comparação de matrizes de covariâncias utilizando o número de condição, já que, matrizes diferentes com o mesmo determinante, em geral, apresentam números de condição diferentes.

### 2.5.5 Transformação da informação contida na matriz de covariâncias para uma variável univariada

Uma outra idéia sugerida por Silva e Mingoti (2008) é a transformação da informação contida na matriz de covariâncias em uma variável unidimensional que pudesse avaliar se o processo está ou não sob controle estatístico no que se refere a sua estrutura de variabilidade. Para facilitar o entendimento, considere  $p=2$  e a variável  $Y = X_1 + X_2$ , sendo  $X_1$  e  $X_2$  as variáveis aleatórias de interesse. Então,

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2 \text{cov}(X_1, X_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2 \sigma_{12}$$

Assim, se  $\Sigma_0$  é conhecida, tem-se a variância teórica de  $Y$  ( $\sigma_Y^2$ ). Para testar:

$$H_0: \sigma_Y^2 = \sigma_0^2 \text{ contra } H_1: \sigma_Y^2 \neq \sigma_0^2$$

pode-se usar o teste qui-quadrado univariado. Dada uma amostra de tamanho  $n$  do vetor aleatório  $\mathbf{X}$  os limites do gráfico de controle de  $(1 - \alpha)$  100% para a variabilidade de  $Y$  são dados por (Costa et al., 2005):

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= \frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi_{n-1, \alpha/2}^2 \\ \text{LC} &= \sigma_0^2 \\ \text{LIC} &= \frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

sendo  $\chi_{n-1, \alpha/2}^2$  e  $\chi_{n-1, (1-\alpha)/2}^2$  os quantis de ordem  $\alpha/2$  e  $1 - \alpha/2$ , respectivamente da distribuição qui-quadrado com  $(n - 1)$  graus de liberdade.

Alternativamente, pode-se testar  $H_0: \sigma_Y = \sigma_0$  contra  $H_1: \sigma_Y \neq \sigma_0$ . Nesse caso, é possível construir um gráfico de controle univariado para monitorar o desvio padrão de  $Y$ . Isto pode ser feito através do uso do desvio padrão amostral ou da amplitude amostral. Seja  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  as observações independentes de  $Y$ . Define-se amplitude amostral como  $R = \max(Y_1, \dots, Y_n) - \min(Y_1, \dots, Y_n)$ . Utilizando-se a aproximação normal para a distribuição de  $R$ , tem-se que os limites de controle, a  $(1 - \alpha)$  100%, para a amplitude de  $Y$  são dados por:

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= d_2 \sigma_0 + z_{\alpha/2} d_3 \sigma_0 \\ \text{LC} &= d_2 \sigma_0 \\ \text{LIC} &= \max\{0, d_2 \sigma_0 - z_{\alpha/2} d_3 \sigma_0\} \end{aligned}$$

onde  $d_2$  e  $d_3$  são constantes tabeladas para diferentes valores de  $n$  (ver Apêndice A) e que tem a função de construir um estimador não viciado para  $\sigma_Y$ , uma vez que  $E(R) = d_2 \sigma_0$  e o desvio padrão de  $R$  é  $d_3 \sigma_0$ .

Também é possível monitorar-se o desvio padrão de  $Y$  através do gráfico do desvio padrão

amostral de  $Y$ ,  $S$ , cujos limites a  $(1 - \alpha)$  100% são dados por (Costa et al., 2005):

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= c_4 \sigma_0 + z_{\alpha/2} \sqrt{1 - c_4^2} \sigma_0 \\ \text{LC} &= c_4 \sigma_0 \\ \text{LIC} &= \max \{ 0, c_4 \sigma_0 - z_{\alpha/2} \sqrt{1 - c_4^2} \sigma_0 \} \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde  $c_4$  é uma constante tabelada para diferentes valores de  $n$  (ver Apêndice A) e que tem a função de construir um estimador não viciado para  $\sigma_Y$ , uma vez que  $E(S) = c_4 \sigma_0$  e o desvio padrão de  $S$  é  $\sqrt{1 - c_4^2} \sigma_0$ .

Pode-se generalizar esta idéia para  $p > 2$  como segue. Seja a variável  $Y = X_1 + \dots + X_p$ , sendo  $X_1, \dots, X_p$  as variáveis aleatórias de interesse. Então,

$$\text{Var}(Y) = \sum_{j=1}^p \sigma_j^2 + \sum_{k < j} \sigma_{kj}.$$

e os limites de controle para  $\sigma_Y^2$  ou  $\sigma_Y$  seriam calculados como em (2.8) e (2.9). Estudos mais aprofundados sobre os gráficos de amplitude e desvio padrão amostral para observações independentes, podem ser obtidos em Costa et al. (2005) e Montgomery (2004). Sabe-se que as distribuições da amplitude e desvio padrão amostrais são normais apenas assintoticamente, sendo que para pequenas amostras há uma diferença acentuada entre os limites calculados pela distribuição normal e pela distribuição exata. Nesta dissertação serão estudados os gráficos construídos pela distribuição exata e pela distribuição normal.

O interesse em reduzir a informação da matriz de covariâncias numa variável unidimensional é devido a simplificação do teste construído, uma vez que os usuários de controle de qualidade conhecem os gráficos dados em (2.8) e (2.9), mas são menos familiares com os testes multivariados.



## 2.6 Exemplos de aplicação

Serão apresentadas duas situações para demonstrar a aplicabilidade dos testes em detectar mudanças na variabilidade de um processo normal bivariado. No exemplo 1, serão utilizados os testes do determinante, da razão de verossimilhança, dos autovalores de  $\Sigma$ , das adaptações do teste de Sullivan et al. (2007) e da transformação da informação contida na matriz de covariâncias para uma variável univariada tratados nesta dissertação. No exemplo 2, apenas os testes do determinante, da razão de verossimilhança e de Sullivan et al. usando a distribuição qui-quadrado serão utilizados para demonstrar a aplicação em controle de qualidade.

## 2.7 Exemplo 1

Para estudar a estabilidade no processo de produção é realizada uma análise usando uma amostra contendo  $n=10$  espécimes de fibra. As importantes características de qualidade que devem ser monitoradas conjuntamente, são a força de resistência ( $X_1$ ) e o diâmetro de uma fibra têxtil ( $X_2$ ). Suponha que se queira testar  $H_0 : \Sigma = \Sigma_0$  contra  $H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0$ . Seja a matriz de covariâncias teórica  $\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1,23 & 0,79 \\ 0,79 & 0,83 \end{bmatrix}$  e  $S = \begin{bmatrix} 2,8 & 2,69 \\ 2,69 & 2,8 \end{bmatrix}$  a matriz de covariâncias amostral proveniente da amostra de tamanho  $n=10$ , sendo  $\rho_{12} = 0,7818$  a correlação teórica entre  $X_1$  e  $X_2$ , e  $\hat{\rho}_{12} = 0,9607$  a correlação amostral. Observando-se  $S$  e  $\Sigma_0$ , percebe-se claramente que a matriz de covariâncias do processo foi alterada. Neste sentido, é importante avaliar quais testes seriam capazes de detectar essa diferença.

Baseando-se no gráfico de controle tradicional para a variância amostral generalizada  $|S|$ , tem-se os limites de controle a 99,73%:

$$\text{LSC} = 1,2616; \quad \text{LC} = 0,3968; \quad \text{LIC} = 0.$$

Como o determinante da matriz de covariâncias amostral,  $|S|$ , é igual a 0,6039 e está dentro dos limites de controle, a nível de 0,27% de significância, pode-se concluir que não houve

mudança na variabilidade do processo (p-valor= 0,2729 >  $\alpha$ ).

A mesma conclusão é obtida pelo teste proposto por Djauhari (2005) uma vez que os limites de controle a 99,73%, neste caso são:

$$\text{LSC} = 1,0964; \text{LC} = 0,3968; \text{LIC} = 0$$

e o determinante da matriz de covariâncias amostral  $|S|$  está dentro dos limites de controle.

Utilizando o teste proposto por Alt (1985), o valor da estatística de teste é  $W = 12,3334$  e  $W^* = 11,6313$ . Assumindo  $\alpha = 0,27\%$ , o limite crítico  $\chi_{3,0,0027}^2 = 14,1563$ . Como  $W$  e  $W^*$  são menores que esse valor, então não se rejeita  $H_0$  (p-valor= 0,0063 >  $\alpha$ ). Logo, pode-se concluir, a 0,27% de significância, que a matriz de covariâncias do processo é igual a  $\Sigma_0$ , ou seja, não houve mudança na sua estrutura de variabilidade. Considere o vetor de parâmetros que contém os elementos da matriz de covariâncias amostral  $\theta^* = (\sigma_1, \rho_{12}, \sigma_2)' = (1,6733, 0,9607, 1,6733)'$ . A diferença dos vetores de parâmetros é

$$\delta = \theta^* - \theta_0^* = (0,5643, 0,1788, 0,7623)' \text{ e } \Sigma_{\delta^*} = \begin{bmatrix} 0,0615 & 0,0169 & 0,0309 \\ 0,0169 & 0,0151 & 0,0138 \\ 0,0309 & 0,0138 & 0,0415 \end{bmatrix}.$$

Para testar  $H_0 : \delta = 0$  contra  $H_1 : \delta \neq 0$ , sob  $H_0$ , o valor da estatística de teste é  $\chi^2 = 14,6005$ . Assumindo  $\alpha = 0,27\%$ , o limite crítico  $\chi_{k,\alpha}^2 = \chi_{3,0,0027}^2 = 14,1563$ . Como  $\chi^2 = 14,6005 > 14,1563$ , então a hipótese nula é rejeitada (p-valor = 0,0022 <  $\alpha$ ). Logo, a 0,27% de significância, há evidências de que houve mudança na matriz de covariâncias do processo.

Suponha o vetor de médias pré-especificado,  $\mu' = (115,59, 1,06)$ , e  $\theta^* = (\sigma_1, \rho_{1,2}, \sigma_2)' = (1,6733, 0,9607, 1,6733)'$ . Para testar  $H_0 : \theta^* = \theta_0^*$  contra  $H_1 : \theta^* \neq \theta_0^*$ , sob  $H_0$ , a estatística de teste é dada por:

$$M = \max_{\substack{0 \leq k \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \left[ \left| \frac{\hat{\theta}_{0kj} - \theta_{0kj}}{[\text{Var}(\hat{\theta}_{0kj})]^{1/2}} \right| \right] =$$

$$= \max \left[ \left| \frac{0,5643}{0,248} \right|, \left| \frac{0,1788}{0,123} \right|, \left| \frac{0,7623}{0,204} \right| \right] = 3,7419$$

O valor de  $C_{R,\alpha} = 3,2542$  é obtido a partir de um procedimento de simulação semelhante ao explicado na Seção 2.5.1 (Tabela 2.3, p. 29). A matriz de correlação  $P$  utilizada no procedimento para o cálculo do  $C_{R,\alpha}$  é dada a partir da matriz de covariâncias descrita em

$$(2.6) \quad P = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,5529 & 0,6113 \\ 0,5529 & 1,0000 & 0,5529 \\ 0,6113 & 0,5529 & 1,0000 \end{bmatrix}.$$

Como  $M = 3,7419 > 3,2542$ , rejeita-se a hipótese nula (p-valor =  $0,0002 < \alpha$ ). Logo, a nível de 0,27% de significância, pode-se concluir que houve mudança na matriz de covariâncias do processo.

Seja  $H_0: \lambda = \lambda_0$  contra  $H_1: \lambda \neq \lambda_0$  onde  $\lambda_0 = (1,8449, 0,2151)'$  é o vetor que contém os autovalores teóricos de  $\Sigma_0$ , em ordem decrescente.

Usando a adaptação do teste de Hayter e Tsui (1994), os limites de controle a 99,73% para cada  $\lambda_j$ , são dados por:

$$P \left( \left| \frac{\hat{\lambda}_j - \lambda_{j0}}{\hat{\sigma}_{\hat{\lambda}_j}} \right| \leq C_{R,\alpha}, \text{ para } 1 \leq j \leq p \right) = 1 - \alpha$$

onde  $\hat{\sigma}_{\hat{\lambda}_1} = 0,8697$  e  $\hat{\sigma}_{\hat{\lambda}_2} = 0,1014$ .

O valor de  $C_{R,\alpha} = 3,2093$  é obtido a partir de um procedimento de simulação semelhante ao explicado na Seção 2.5.1 (Tabela 2.3, p. 29). A matriz de correlação  $P$  utilizada no procedimento para o cálculo do  $C_{R,\alpha}$  é a matriz identidade.

Os autovalores da matriz de covariâncias amostral são  $\hat{\lambda} = (5,49, 0,11)'$ . A estatística  $M = \max_{1,2} \left| \frac{\hat{\lambda}_j - \lambda_{j0}}{\hat{\sigma}_{\hat{\lambda}_j}} \right| = \max(4,1912, 1,0365) = 4,1912$ .

Como esse valor é maior que 3,2093, então, rejeita-se a hipótese nula (p-valor =  $0,0001 < \alpha$ ). Então, a nível de 0,27% de significância, pode-se concluir que o processo não está sob controle estatístico, no que, se refere a matriz de covariâncias.

Pelo teste usando a estatística  $T^2$  tem-se:

$$T^2 = (\hat{\lambda} - \lambda_0)' \hat{\Sigma}_{\hat{\lambda}}^{-1} (\hat{\lambda} - \lambda_0) = 18,6399$$

$$\text{onde } \Sigma_{\hat{\lambda}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{2\lambda_{10}^2} & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{2\lambda_{20}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3221 & 0 \\ 0 & 97,2805 \end{bmatrix} \text{ e } (\hat{\lambda} - \lambda_0) = (3,6451, -0,1051)'$$

Assumindo  $\alpha = 0,27\%$ , o limite crítico é dado por  $\chi_{\alpha,p}^2 = \chi_{0,0027,2}^2 = 11,8290$ . Como  $T^2 = 18,6399 > 11,8290$ , então, rejeita-se  $H_0$  (p-valor =  $0,000089 < \alpha$ ). Portanto, a  $0,27\%$  de significância, há evidências de que o processo não está sob controle com respeito a matriz de covariâncias do processo.

Usando o número de condição tem-se:

$$\kappa_2(S) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{5,49}{0,11} = 49,9091.$$

Os limites de controle a  $99,73\%$  são:

LSC = 108,1198; LIC = 1,3871. Como o valor de  $\kappa_2(S) = 49,9091$  está dentro dos limites de controle, não se rejeita a  $H_0$  (p-valor =  $0,0153 > \alpha$ ). Assim, pode-se concluir, a  $0,27\%$  de significância, que não houve mudança na estrutura de variabilidade.

Para testar  $H_0 : \sigma_Y^2 = \sigma_0^2$  contra  $H_1 : \sigma_Y^2 \neq \sigma_0^2$  sendo  $\sigma_0^2 = 3,64$ , pode-se usar o teste qui-quadrado univariado. Os limites de controle a  $99,73\%$  para a variabilidade de  $Y$ , são:

$$\text{LSC} = 10,9577; \quad \text{LC} = 3,64; \quad \text{LIC} = 0,5020.$$

Pela matriz de covariâncias amostral  $S$  tem-se que a variância estimada de  $Y$   $\sigma_Y^2 = 2,8 + 2,8 + 2(2,69) = 10,9800$ . Como esse valor está fora dos limites de controle, rejeita-se a hipótese nula. Assim, com  $0,27\%$  de significância, há evidências de que a variância da variável transformada  $Y$  difere da variância teórica, indicando que o processo não está sob controle com relação a matriz de covariâncias.

Suponha que se deseja testar  $H_0 : \sigma_Y = \sigma_0$  versus  $H_1 : \sigma_Y \neq \sigma_0$ . Para monitorar o desvio

padrão de  $Y$  através do gráfico de desvio padrão amostral  $S$ , os limites de controle a 99,73%, são:

$$LSC = 3,1841; \quad LC = 1,8558; \quad LIC = 0,5275.$$

Assim,  $\hat{\sigma}_Y = 3,3136$  está fora dos limites de controle. Portanto, com 0,27% de significância, há evidências de que o desvio padrão da variável transformada  $Y$  difere do desvio padrão teórico, indicando que o processo não está sob controle, no que, se refere a matriz de covariâncias. Este exemplo ilustra a efetividade das adaptações propostas para o teste de Sullivan et al. (2007) comparadas com os testes tradicionais da variância generalizada e da razão de verossimilhança, pois estas foram capazes de perceber a alteração da matriz de covariâncias postulada na hipótese nula. Em termos de probabilidade de significância, pela Tabela 2.4, verifica-se que os testes de Sullivan adaptado usando as idéias de Hayter e Tsui, dos autovalores adaptados usando Hayter e Tsui e  $T^2$  de Hotelling são os mais sensíveis na percepção de mudança na estrutura de variabilidade.

Tabela 2.4: Significância dos testes (p-valor)

Testes	DT	DD	RV	SQ	SHT	AHT	ATH	ANC	TV	TDP
p-valor	0,2729	0,2729	0,0063	0,0022*	0,0002*	0,0001*	0,0001*	0,0153	0,2771	0,0005*
(*) significativo a 0,27%										

## 2.8 Exemplo 2

A título de ilustração do uso dos testes em controle de qualidade, considere agora que  $m=20$  amostras independentes foram coletadas com  $n=10$  espécimes de fibra em cada. Na Tabela 2.5, são apresentadas as médias amostrais, as variâncias e covariâncias, os valores das estatísticas correspondentes aos testes da variância generalizada, da razão de verossimilhança e de Sullivan adaptado usando a distribuição qui-quadrado. Os limites críticos de cada teste estão apresentados no rodapé. A matriz  $\Sigma_0$  é a mesma considerada no exemplo 1, assim como, os limites de controle construídos anteriormente de acordo com cada teste.

A 7ª coluna da Tabela 2.5 apresenta os determinantes das matrizes de covariâncias

Tabela 2.5: Dados para o Exemplo 2

Amostra $i$	Médias Amostrais		Variâncias e Covariâncias			Estatística do Gráfico de Controle			
	Força de resistência ( $\bar{x}_1$ )	Diâmetro ( $\bar{x}_2$ )	$S_{1i}^2$	$S_{2i}^2$	$S_{12i}$	$ S_i $	$W_i$	$W_i^*$	$\chi^2$
1	115,25	1,04	1,25	0,87	0,80	0,4475	0,0388	0,0477	0,0586
2	115,91	1,06	1,26	0,85	0,81	0,4149	0,0672	0,0042	0,0051
3	115,05	1,09	1,30	0,90	0,82	0,4976	0,0391	0,1456	0,1794
4	116,21	1,05	1,02	0,85	0,81	0,2109	2,3155	1,4498	1,4249
5	115,90	1,07	1,16	0,73	0,80	0,2068	2,1580	1,2869	1,2483
6	115,55	1,06	1,01	0,80	0,76	0,2304	1,6399	0,9097	0,9911
7	114,98	1,05	1,25	0,78	0,75	0,4125	0,1342	0,0606	0,0765
8	115,25	1,10	1,40	0,83	0,80	0,5220	0,2068	0,3439	0,4350
9	116,15	1,09	1,19	0,87	0,83	0,3464	0,3950	0,1398	0,1543
10	115,92	1,05	1,17	0,86	0,95	0,1037	7,5001	5,5653	3,0030
11	115,75	0,99	1,45	0,79	0,78	0,5371	0,4638	0,6064	0,7815
12	114,90	1,06	1,24	0,82	0,81	0,3607	0,2536	0,0469	0,0533
13	116,01	1,05	1,26	0,55	0,72	0,1746	3,5784	2,4376	2,6278
14	115,83	1,07	1,17	0,76	0,75	0,3267	0,4022	0,0925	0,1108
15	115,29	1,11	1,23	0,89	0,82	0,4223	0,0832	0,0352	0,0428
16	115,63	1,04	1,24	0,91	0,83	0,4395	0,0718	0,0614	0,0749
17	115,47	1,03	1,20	0,95	0,70	0,6500	1,1801	1,4408	2,1995
18	115,58	1,05	1,18	0,83	0,79	0,3553	0,2706	0,0487	0,0573
19	115,72	1,06	1,31	0,89	0,76	0,5883	0,4242	0,6538	0,9071
20	115,40	1,04	1,29	0,85	0,68	0,6341	1,0490	1,2974	2,0812

LSC =  $\chi_{p(p+1)/2, \alpha}^2 = \chi_{k, \alpha}^2 = \chi_{3, 0,0027}^2 = 14, 1563$ .

amostrais que foram representados no gráfico da Figura 2.6. Nota-se que nenhum ponto excedeu os limites de controle, podendo-se concluir que o processo está sob controle, no que, se refere a matriz de covariâncias, de acordo com o teste tradicional da variância generalizada.

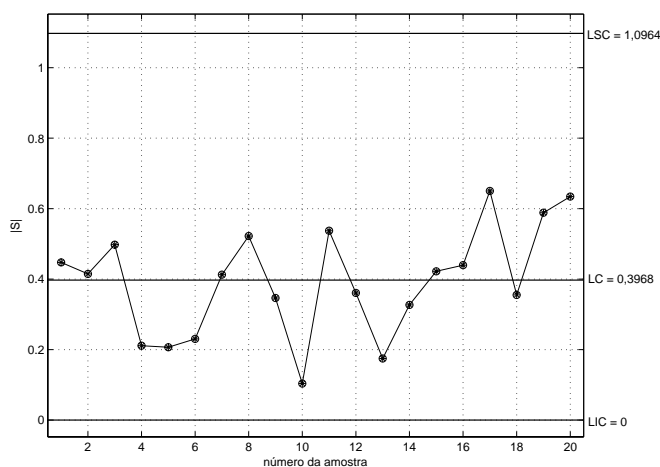


Figura 2.6: Gráfico de controle  $|S|$  para a força de resistência e o diâmetro

A estatística  $W_i$  e a estatística modificada  $W_i^*$  se encontram, respectivamente, na 8ª e na 9ª colunas da Tabela 2.5. A Figura 2.7 apresenta o gráfico de controle da razão de verossimilhança, com relação a estatística  $W_i$ . Apesar de nenhum ponto exceder o limite superior de controle, percebe-se que a 10ª amostra está destoante em relação as demais.

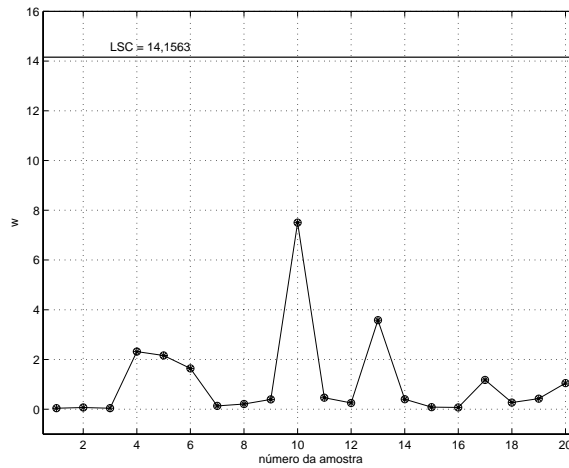


Figura 2.7: Gráfico de controle da razão de verossimilhança para a força de resistência e o diâmetro

Os valores amostrais da estatística de teste  $\chi^2 = \hat{\delta}'_i \Sigma_{\hat{\delta}_i}^{-1} \hat{\delta}_i$  estão apresentados na 10ª coluna da Tabela 2.5 e o gráfico de controle está na Figura 2.8. Nota-se que nenhum ponto excedeu o limite superior de controle, podendo concluir-se que o processo está sob controle estatístico.

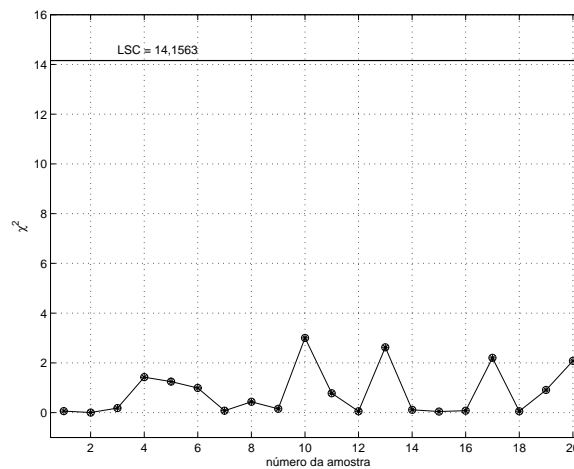


Figura 2.8: Gráfico de controle  $\chi^2$  adaptado para a força de resistência e o diâmetro

## Capítulo 3

# Comparação dos testes estatísticos: caso da distribuição normal bivariada

### 3.1 Estimação da probabilidade de rejeição de $H_0$ sob a hipótese nula e sob a hipótese alternativa

A avaliação do desempenho de todos os testes foi realizada via simulação de Monte Carlo. Amostras de tamanho  $n$  foram geradas sob a hipótese nula e sob a hipótese alternativa com o objetivo de estimar-se o nível de significância do teste (probabilidade de alarme falso em controle de qualidade) e o poder do teste (probabilidade de alarme verdadeiro em controle de qualidade). Para cada teste a região crítica foi construída utilizando-se o nível de significância nominal de 5% (valor escolhido para efeito de comparação). Para cada tamanho de amostra  $n$ , foram geradas 10.000 amostras independentes (sob  $H_0$  e sob  $H_1$ ) sendo contabilizada a proporção de rejeições de  $H_0$ . Esse procedimento foi repetido 50 vezes, tendo-se no final o valor médio e mediano das probabilidades estimadas do erro do tipo I e do poder do teste. Além disso, o poder teórico foi calculado nos testes para os quais isso era possível de modo a validar a simulação (como será visto na Seção 3.4.2).

Para alguns testes o desempenho foi avaliado quando a distribuição da estatística de teste



era aproximada por alguma distribuição conhecida (normal para o teste do determinante; qui-quadrado para os testes de Sullivan et al. adaptado, da razão de verossimilhança e dos autovalores) como também quando a região crítica foi construída sob a distribuição exata da estatística de teste sob  $H_0$ .

A distribuição exata da estatística de teste foi obtida via simulação para os testes do determinante, da razão de verossimilhança, de Sullivan adaptado e dos autovalores. Para determinar os limites de controle dos denominados testes exatos, foram geradas  $M=50000$  amostras aleatórias de tamanho fixo  $n=5, 10, 25, 50$  e  $100$  com  $p$  variáveis sendo que, as amostras geradas tinham distribuição normal  $p$ -variada com vetor de médias nulo e com matriz de covariâncias  $\Sigma_0$  estipulada na hipótese nula  $H_0$ .

Em cada teste, para cada amostra  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ), a estatística de teste foi calculada. A distribuição empírica foi então construída com base nesses  $M$  valores e as ordenadas que determinam a região crítica do teste, foram determinadas de acordo com o nível de significância nominal estipulado para o teste. Assim, para o teste do determinante foram obtidos os limites superior e inferior e para os testes da razão de verossimilhança, de Sullivan adaptado e dos autovalores foi obtido os limites superiores.

## 3.2 Estimação do ARL

Em cada seqüência de 10.000 amostras de tamanho  $n$ , o número de amostras geradas até a ocorrência da primeira rejeição de  $H_0$  foi utilizada como uma estimativa do *ARL*. Quando as amostras eram geradas sob  $H_0$ , esta representava a estimativa do *ARL sob controle*, que teoricamente deveria ser igual a  $20 = 1/0,05$ , e quando eram geradas sob a hipótese alternativa, a estimativa representava o *ARL fora de controle*. Após as 50 repetições desse procedimento, foi obtido o *ARL* médio sob controle e fora de controle.

### 3.3 Modelos simulados da distribuição normal bivariada

A hipótese nula é a de que a matriz de covariâncias do processo é igual a uma matriz particular,  $H_0: \Sigma = \Sigma_0$ , pré-estabelecida. Para cada  $\Sigma_0$  foram geradas amostras de tamanho  $n=5, 10, 25, 50$  e  $100$ , conforme o descrito na Seção 3.1. As matrizes de covariâncias nos modelos simulados foram escolhidas de acordo com o determinante ( $|\Sigma|$ ), o traço ( $tr$ ), os autovalores ( $\lambda$ ), o número de condição ( $\kappa_2$ ), a correlação entre as variáveis ( $\rho$ ) e a variância ( $\sigma_y^2$ ) da variável  $Y = X_1 + X_2$ , de modo a possibilitar a comparação dos testes com relação ao poder de percepção de mudanças na variabilidade e na correlação. Os modelos utilizados nas simulações estão apresentados na Tabela 3.1, ordenados de acordo com os valores do determinante de  $\Sigma_1$ , matriz estabelecida na hipótese alternativa.

Em cada caso as estruturas diferem na correlação e na variância da variável  $X_2$ . Os casos 2, 3, 4 e 5 apresentam determinantes aproximadamente iguais,  $|\Sigma_1| = |\Sigma_0| = 1$ , mas no caso 2 as variáveis apresentam uma correlação negativa, no caso 3 as variáveis não são correlacionadas, no caso 4 as variáveis são bem correlacionadas e com valor bem diferente de  $H_0$  e no caso 5 as variáveis são pouco correlacionadas. Nos casos 6, 7, 8 e 9 as variáveis têm aproximadamente a mesma correlação e similares à correlação em  $H_0$ . A matriz  $\Sigma_1$  dos casos 1, 2 e 5 apresenta apenas uma mudança na estrutura de correlação em relação a  $\Sigma_0$ . Já a matriz  $\Sigma_1$  dos casos 6 e 7 apresenta uma mudança considerável na variância da variável  $X_2$  em relação a  $\Sigma_0$  e dos casos 8 e 9 tem-se uma mudança brusca na variância da variável  $X_2$ .

Inicialmente as amostras foram geradas para o caso em que a hipótese nula ( $H_0: \Sigma = \Sigma_0$ ) era verdadeira, isto é, as amostras eram provenientes da distribuição normal bivariada com vetor de médias nulo,  $\boldsymbol{\mu} = (0, 0)'$  e matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ . Posteriormente, as amostras foram geradas sob a hipótese alternativa ( $H_1: \Sigma = \Sigma_1$ ), ou seja, agora a matriz de covariâncias era dada de acordo com cada caso apresentado na Tabela 3.1, situações onde ocorreram mudanças na matriz de covariâncias, com o objetivo de avaliar o desempenho dos testes em detectar tais mudanças. Essas mudanças foram divididas em três situações,

a primeira representa os casos (6 e 9) onde ocorreram mudanças apenas na variância, a segunda representa os casos (1, 2 e 5) onde ocorreram mudanças apenas na correlação e a terceira com os casos (3, 4, 7 e 8) onde ocorreram mudanças na variância e na correlação.

Tabela 3.1: Modelos simulados com p=2 variáveis

Simulação sob a hipótese nula								
$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 2,32 & 0,40 \\ 0,40 & 0,50 \end{bmatrix}$	$ \Sigma_0 $	Traço	$\sigma_Y^2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\rho_{12}$	$\kappa_2$	
	1	2,82	3,62	2,404	0,4159	0,371	5,7802	

Simulação sob a hipótese alternativa								
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2,32 & 0,65 \\ 0,65 & 0,50 \end{bmatrix}$	Caso	$ \Sigma_1 $	Traço	$\sigma_Y^2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\rho_{12}$	$\kappa_2$
	1	0,7375	2,82	4,12	2,528	0,292	0,60	8,6575
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2,32 & -0,4 \\ -0,4 & 0,5 \end{bmatrix}$	2	1	2,82	2,02	2,4040	0,4159	-0,371	5,7793
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	3	1	2	2	1	1	0	1
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2,32 & 0,90 \\ 0,90 & 0,80 \end{bmatrix}$	4	1,0460	3,12	4,92	2,7380	0,3820	0,6606	7,1675
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2,32 & 0,30 \\ 0,30 & 0,50 \end{bmatrix}$	5	1,07	2,82	3,42	2,3682	0,4518	0,2785	5,2417
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2,32 & 0,45 \\ 0,45 & 0,63 \end{bmatrix}$	6	1,259	2,95	3,85	2,432	0,517	0,372	4,7041
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2,32 & 0,50 \\ 0,50 & 0,75 \end{bmatrix}$	7	1,49	3,07	4,07	2,466	0,604	0,379	4,0828
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2,32 & 0,57 \\ 0,57 & 1,00 \end{bmatrix}$	8	1,99	3,32	4,46	2,534	0,785	0,374	3,2280
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2,32 & 0,80 \\ 0,80 & 2,00 \end{bmatrix}$	9	4	4,32	5,92	2,975	1,344	0,371	2,2135

A Tabela 3.2 apresenta os modelos simulados levando-se em consideração a razão entre os determinantes, os traços, os desvios padrão e as variâncias da variável Y, os maiores autovalores, os menores autovalores, as correlações de  $X_1$  e  $X_2$  e os números de condição sob a hipótese alternativa e sob hipótese nula. Na Tabela 3.3 tem-se a distância de Mahalanobis,  $d_s = (\theta_1 - \theta_0)' \Sigma_\delta^{-1} (\theta_1 - \theta_0)$ , para o teste de Sullivan, e  $d_\lambda = (\lambda - \lambda_0)' \Sigma_\lambda^{-1} (\lambda - \lambda_0)$  para o teste dos autovalores, sendo  $\theta_1 = (\sigma_1, \rho_{12}, \sigma_2)'$ ,  $\theta_0 = (\sigma_{10}, \rho_{120}, \sigma_{20})'$ ,  $\delta = \theta_1 - \theta_0$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)'$  e  $\lambda_0 = (\lambda_{10}, \lambda_{20})'$ .

Tabela 3.2: Medidas de comparação entre os modelos simulados sob  $H_0$  e  $H_1$  -  $p = 2$

Caso	$ \Sigma_1 / \Sigma_0 $	Traço <sub>1</sub> /Traço <sub>0</sub>	$\sigma_{y1}/\sigma_{y0}$	$\sigma_{y1}^2/\sigma_{y0}^2$	$\lambda_1/\lambda_{10}$	$\lambda_2/\lambda_{20}$	$\rho_1/\rho_0$	$\kappa_{21}/\kappa_{20}$
1	0,74	1,00	1,07	1,14	1,05	0,70	1,63	1,50
2	1,00	1,00	0,75	0,56	1,00	1,00	-1,00	1,00
3	1,00	0,71	0,74	0,55	0,42	2,40	0	0,17
4	1,05	1,11	1,17	1,36	1,14	0,92	1,78	1,24
5	1,07	1,00	0,97	0,94	0,99	1,09	0,75	0,91
6	1,26	1,05	1,03	1,06	1,01	1,24	1,00	0,81
7	1,49	1,09	1,06	1,12	1,03	1,45	1,02	0,71
8	2,00	1,18	1,11	1,23	1,05	1,89	1,01	0,56
9	4,00	1,53	1,28	1,64	1,24	3,23	1,00	0,38

Tabela 3.3: Distância de Mahalanobis entre os parâmetros em  $H_0$  e  $H_1$  para os testes de Sullivan et al. adaptado e dos autovalores -  $p = 2$

Caso	Distância de Mahalanobis							
	Sullivan et al.				Autovalores			
	n=10	n=25	n=50	n=100	n=10	n=25	n=50	n=100
1	0,8250	2,0625	4,1250	8,2500	0,4137	1,1031	2,2521	4,5502
2	8,4480	21,1200	42,2400	84,4800	0	0	0	0
3	9,0478	22,6194	45,2389	90,4778	10,4058	27,7488	56,6538	114,4638
4	2,1366	5,3415	10,6829	21,3659	0,1168	0,3114	0,6357	1,2845
5	0,1320	0,3300	0,6600	1,3200	0,0344	0,0918	0,1875	0,3788
6	0,3233	0,8081	1,6163	3,2326	0,2695	0,7187	1,4673	2,9645
7	1,0771	2,6927	5,3854	10,7709	0,9253	2,4674	5,0377	10,1782
8	3,6960	9,2400	18,4799	36,9599	3,6111	9,6295	19,6603	39,7218
9	21,6000	54,0000	108,0000	216,0000	22,6607	60,4285	123,3748	249,2674

### 3.4 Análise dos resultados das observações simuladas da distribuição normal bivariada

Nesta seção, serão apresentados os resultados obtidos nas simulações dos dados gerados a partir da distribuição normal bivariada. Inicialmente, será mostrado o poder dos testes com o nível de significância nominal de 5%. Em seguida, será comparado o poder teórico com o obtido nas simulações dos testes da transformação  $Y = X_1 + X_2$ ; de Sullivan adaptado usando a distribuição qui-quadrado e dos autovalores usando  $T^2$  de Hotelling. Por fim, é apresentada a análise dos *ARL sob controle e fora de controle*.

### 3.4.1 Resultados dos processos bivariados ( $p=2$ )

A proporção média, das 50 repetições, de rejeições da hipótese nula para cada um dos testes discutidos nesta dissertação (Capítulo 2) sob a hipótese nula e alternativa estão apresentadas nas Tabelas 3.5 e 3.6. Em todas as tabelas o sinal “\*” indica as situações simuladas, nas quais, o determinante da matriz de covariâncias sob  $H_0$  é igual ou próximo do determinante sob  $H_1$  e o sinal “o” indica que o traço de  $\Sigma_1$  é igual ou próximo ao traço de  $\Sigma_1$ . Para amostras pequenas,  $n=5$  (ver Apêndice C) e  $n=10$ , nota-se que o teste da razão de verossimilhança aproximado pela qui-quadrado apresenta uma taxa de rejeição sob  $H_0$  (19% e 10%, respectivamente) muito acima do valor nominal (5%) e as adaptações propostas para o teste de Sullivan et al. apresentaram uma taxa muito acima (10%) para amostras de tamanho  $n=5$  e uma taxa acima, porém mais razoável (7%) para  $n=10$ . Isto é perfeitamente explicado, pelo fato de que a aproximação da qui-quadrado, é válida apenas para grandes amostras. Uma alternativa, utilizada em controle de qualidade, para reduzir o risco de alarmes falsos  $\alpha = P(\text{ERRO tipo I})$  das adaptações propostas para o teste de Sullivan et al. seria aumentar a amplitude dos limites de controle. O teste da razão de verossimilhança aproximado, atingiu o nível de significância estimado de 5% somente para amostras de tamanho 100. Sendo assim, a comparação deste teste com os demais será realizada apenas para amostras de tamanho 25, 50 e 100, já que, o aumento do nível de significância tende a aumentar o poder e neste caso, a comparação estaria prejudicada se considerarmos o nível de significância nominal de 5% estabelecido a priori para construção dos testes.

A Tabela 3.4 mostra as siglas utilizadas para os testes e as respectivas estatísticas de teste. Nesta os testes, nos quais, aparece a palavra “exato” se referem àqueles em que a distribuição exata da estatística de teste foi obtida via simulação, como descrito na Seção 3.1 deste capítulo.

Para facilitar a discussão inicialmente serão apresentados, de um modo geral, os resultados obtidos para cada teste separadamente e posteriormente será apresentada uma análise conjunta.

Tabela 3.4: Abreviações utilizadas para os testes de hipóteses

Testes	Abreviação	Estatística de teste
Determinante tradicional	DT	$ \Sigma $
Determinante Djauhari	DD	$ \Sigma $
Determinante exato	DE	$ \Sigma $
Razão de verossimilhança aproximada	RV	$W = -pn + pn \ln(n) - n \ln \left( \frac{ (n-1)S }{ \Sigma_0 } \right) + tr(\Sigma_0^{-1}(n-1)S)$
Razão de verossimilhança exata	RVE	$W = -pn + pn \ln(n) - n \ln \left( \frac{ (n-1)S }{ \Sigma_0 } \right) + tr(\Sigma_0^{-1}(n-1)S)$
Sullivan et al. usando $\chi^2$	SQ	$\chi^2 = \hat{\delta}' \hat{\Sigma}_{\hat{\delta}}^{-1} \hat{\delta}$
Sullivan et al. usando Hayter-Tsui	SHT	$M = \max_{\substack{0 \leq k \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \left[ \left  \frac{\hat{\theta}_{0kj} - \theta_{0kj}}{[\text{Var}(\hat{\theta}_{0kj})]^{1/2}} \right  \right]$
Sullivan et al. exato	SE	$\chi^2 = \hat{\delta}' \hat{\Sigma}_{\hat{\delta}}^{-1} \hat{\delta}$
Autovalores usando Hayter-Tsui	AHT	$M = \max_{1 \leq j \leq p} \left  \frac{\hat{\lambda}_j - \lambda_{j0}}{\sigma_{\hat{\lambda}_j}} \right $
Autovalores usando $T^2$ Hotelling	ATH	$T^2 = (\hat{\lambda} - \lambda_0)' \Sigma_{\hat{\lambda}}^{-1} (\hat{\lambda} - \lambda_0)$
Autovalores usando número de condição	ANC	$\kappa_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$
Autovalores exato	AE	$T^2 = (\hat{\lambda} - \lambda_0)' \Sigma_{\hat{\lambda}}^{-1} (\hat{\lambda} - \lambda_0)$
Transformação variância	TV	$\sigma_y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12}$
Transformação desvio padrão	TDP	$\sigma_y$
Transformação amplitude	TA	$R = \max(X_1 + X_2) - \min(X_1 + X_2)$

### A) Teste do determinante

Percebe-se que a medida em que  $H_0$  se distancia de  $H_1$  o poder dos testes que utilizam o determinante aumenta para todos os tamanhos de amostra. Nos casos onde a matriz  $\Sigma_1$ , diferente de  $\Sigma_0$  mas, apresenta determinante próximo do  $|\Sigma_0|$ , o teste do determinante não consegue perceber essa diferenciação, mesmo para as amostras maiores. Os testes que usam o determinante tiveram os piores desempenhos, com exceção do caso 7, para amostras de tamanho  $n=10$  e  $25$ , do caso 8, para amostras de tamanho  $n=25, 50$  e  $100$ , e do caso 9, para amostras de tamanho  $n=25, 50$  e  $100$ , onde ocorreram mudanças mais expressivas na variabilidade de  $X_2$  e são situações, nas quais, o determinante de  $\Sigma_1$  é bem diferente do  $|\Sigma_0|$  (1,5 vezes maior). Em geral, o teste melhorado do  $|\Sigma|$  proposto por Djauhari apresentou um desempenho melhor que o teste do determinante tradicional. Vale ressaltar que o teste de Djauhari teve um pior desempenho em relação ao determinante exato, somente no caso 1 em todos os tamanhos de amostra. Assim, a aproximação da distribuição do determinante pela distribuição normal não é o fato responsável pelos valores de poder inferiores obtidos pelos testes do determinante tradicional e do melhorado proposto por Djauhari.

### B) Teste da razão de verossimilhança

Nota-se que a medida em que  $H_0$  se distancia de  $H_1$  o poder do teste da razão de verossimilhança exata aumenta, para todos os tamanhos de amostra e o poder do teste da razão de verossimilhança aproximada pela distribuição  $\chi^2$ , aumenta para os tamanhos de amostra  $n=25, 50$  e  $100$ . Percebe-se também, que com o aumento dessa distância entre  $H_0$  e  $H_1$  e do tamanho de amostra,  $n=25, 50$  e  $100$ , a diferença entre o poder dos testes da razão de verossimilhança aproximada e da razão de verossimilhança exata diminui, o que é esperado, já que, com o aumento do tamanho de amostra a distribuição da estatística de teste do teste da razão de verossimilhança tem uma aproximação cada vez mais próxima da distribuição  $\chi^2$ . No caso 2, embora o determinante e o traço sejam semelhantes em  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_1$ , o teste da razão de verossimilhança apresenta um poder alto (mínimo de 0,91), para amostras de tamanho  $n \geq 25$ . Nas amostras de tamanho  $n=10$ , o teste da razão de verossimilhança exata apresenta desempenho superior aos testes que usam o determinante. Isso porque o teste da razão de verossimilhança usa o traço da matriz  $\Sigma_0^{-1}$  juntamente com o  $|\Sigma_0|$  comparados com  $|S|$  e  $tr(S)$ , da matriz de covariâncias amostral  $S$ . Assim, consegue perceber diferenças internas da matriz, o que o teste do determinante não consegue. Já no caso 5, os testes da razão de verossimilhança e do teste do determinante não apresentaram um bom desempenho porque internamente as matrizes  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_1$  são muito semelhantes. A matriz de covariâncias  $\Sigma_1$  do caso 3, apresenta uma mudança expressiva tanto na variabilidade quanto na correlação, porém o  $|\Sigma_1| = |\Sigma_0|$  e a razão entre os traços = 0,71. O teste da razão de verossimilhança apresenta um valor de poder muito superior ao teste do determinante, isto é, consegue perceber uma informação que o teste do determinante não consegue. Portanto, o teste da razão de verossimilhança é mais eficaz que o teste do determinante, pois consegue captar diferenças dos elementos da matriz. Em geral, o teste da razão de verossimilhança apresentou os maiores valores de poder depois dos testes de Sullivan adaptados. Nos casos 6 e 7 apresentou poderes inferiores (de 0,10 a 0,15 e de 0,22 a 0,40, respectivamente), para as amostras de tamanho até  $n=50$ , sendo superior apenas ao teste da transformação de  $Y$ .

Tabela 3.5: Estimativas do Nível de Significância e Poder dos testes -  $p=2$ ;  $n=10$ , 25

		n=10															
		Média da proporção de rejeições da hipótese nula															
		DT	DD	DE	RV	RVE	SQ	SHT	SE	AHT	ATH	ANC	AE	TV	TDP	TA	
	$\Sigma_0 =$	2,32 0,40 0,40 0,50	0,03	0,05	0,05	0,10	0,05	0,07	0,07	0,05	0,05	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	
o 1	$\Sigma_1 =$	2,32 0,65 0,65 0,50	0,01	0,01	0,06	0,18	<u>0,10</u>	0,06	0,04	0,04	0,04	0,05	<u>0,08</u>	0,05	0,07	0,07	
o * 2	$\Sigma_1 =$	2,32 -0,40 -0,40 0,50	0,03	0,05	0,05	0,53	0,39	<u>0,64</u>	<u>0,66</u>	<u>0,59</u>	0,05	0,04	0,05	0,05	0,15	0,11	
* 3	$\Sigma_1 =$	1 0 0 1	0,03	0,05	0,05	0,63	<u>0,49</u>	<u>0,65</u>	<u>0,53</u>	<u>0,60</u>	0,17	0,16	0,33	0,17	0,16	0,11	
* 4	$\Sigma_1 =$	2,32 0,90 0,90 0,80	0,04	0,06	0,05	0,27	<u>0,16</u>	<u>0,17</u>	<u>0,17</u>	<u>0,13</u>	0,07	0,07	0,06	0,08	<u>0,13</u>	<u>0,15</u>	<u>0,14</u>
o * 5	$\Sigma_1 =$	2,32 0,30 0,30 0,50	0,04	0,06	0,05	0,10	0,05	<u>0,10</u>	<u>0,10</u>	<u>0,07</u>	0,05	0,05	0,05	0,06	0,05	0,04	
o 6	$\Sigma_1 =$	2,32 0,45 0,45 0,63	0,07	<u>0,10</u>	0,07	0,10	0,05	<u>0,11</u>	<u>0,11</u>	<u>0,08</u>	<u>0,08</u>	<u>0,08</u>	0,06	<u>0,09</u>	0,06	0,06	
7	$\Sigma_1 =$	2,32 0,50 0,50 0,75	0,12	<u>0,16</u>	0,11	0,14	0,07	<u>0,17</u>	<u>0,17</u>	<u>0,14</u>	0,13	0,12	0,07	0,13	0,07	0,07	
8	$\Sigma_1 =$	2,32 0,57 0,57 1,00	0,23	<u>0,28</u>	0,20	0,27	0,18	<u>0,36</u>	<u>0,35</u>	<u>0,31</u>	<u>0,26</u>	0,25	0,10	<u>0,27</u>	0,09	0,10	
9	$\Sigma_1 =$	2,32 0,80 0,80 2,00	0,60	0,66	0,57	0,77	0,69	<u>0,84</u>	<u>0,83</u>	<u>0,81</u>	0,64	0,63	0,19	0,65	0,24	0,26	

		n=25															
		Média da proporção de rejeições da hipótese nula															
		DT	DD	DE	RV	RVE	SQ	SHT	SE	AHT	ATH	ANC	AE	TV	TDP	TA	
	$\Sigma_0 =$	2,32 0,40 0,40 0,50	0,03	0,04	0,05	0,07	0,05	0,06	0,06	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	
o 1	$\Sigma_1 =$	2,32 0,65 0,65 0,50	0,01	0,02	0,10	<u>0,28</u>	<u>0,23</u>	0,11	0,10	0,10	0,08	0,09	<u>0,25</u>	0,10	0,08	0,09	
o * 2	$\Sigma_1 =$	2,32 -0,40 -0,40 0,50	0,04	0,05	0,05	<u>0,91</u>	<u>0,89</u>	<u>0,95</u>	<u>0,96</u>	<u>0,94</u>	0,04	0,05	0,05	0,05	0,43	0,40	
* 3	$\Sigma_1 =$	1 0 0 1	0,03	0,04	0,05	<u>0,96</u>	<u>0,95</u>	<u>0,96</u>	<u>0,91</u>	<u>0,96</u>	0,66	0,75	<u>0,97</u>	0,77	0,45	0,41	
* 4	$\Sigma_1 =$	2,32 0,90 0,90 0,80	0,05	0,06	0,05	<u>0,52</u>	<u>0,47</u>	<u>0,41</u>	<u>0,39</u>	<u>0,38</u>	0,09	0,09	0,14	0,09	0,22	0,24	
o * 5	$\Sigma_1 =$	2,32 0,30 0,30 0,50	0,05	0,06	0,06	<u>0,08</u>	0,06	<u>0,10</u>	<u>0,10</u>	<u>0,09</u>	0,06	0,06	<u>0,11</u>	0,06	0,05	0,05	
o 6	$\Sigma_1 =$	2,32 0,45 0,45 0,63	0,11	0,13	0,09	0,10	0,08	0,13	0,13	0,11	0,13	0,12	0,14	0,13	0,06	0,06	
7	$\Sigma_1 =$	2,32 0,50 0,50 0,75	<u>0,22</u>	<u>0,25</u>	<u>0,18</u>	<u>0,22</u>	<u>0,19</u>	<u>0,28</u>	<u>0,28</u>	<u>0,26</u>	<u>0,26</u>	<u>0,25</u>	<u>0,21</u>	<u>0,26</u>	0,08	0,09	
8	$\Sigma_1 =$	2,32 0,57 0,57 1,00	0,48	0,51	0,42	<u>0,57</u>	<u>0,53</u>	<u>0,64</u>	<u>0,64</u>	<u>0,62</u>	<u>0,59</u>	<u>0,58</u>	0,40	<u>0,59</u>	0,13	0,15	
9	$\Sigma_1 =$	2,32 0,80 0,80 2,00	<u>0,94</u>	<u>0,94</u>	<u>0,92</u>	<u>0,99</u>	<u>0,99</u>	<u>0,99</u>	<u>0,99</u>	<u>0,99</u>	<u>0,97</u>	<u>0,97</u>	0,72	<u>0,97</u>	0,46	0,48	





### C) Teste de Sullivan

As adaptações propostas nesta dissertação para o teste de Sullivan et al. (2007) apresentaram poder superior em relação aos demais testes em estudo. O teste de Sullivan et al. adaptado usando a distribuição qui-quadrado apresentou os poderes máximos nas amostras de tamanho  $n=10$ , exceto no caso 1, onde ocorreu mudança apenas na correlação entre as variáveis. Para amostras maiores ( $n=50$  e  $100$ ), em geral, está entre os testes que tiveram os poderes máximos (mínimo de 0,12) em todos os casos. O teste de Sullivan et al. adaptado usando as idéias de Hayter e Tsui em comparação com todos os testes, em geral, apresentou maiores poderes em todos os tamanhos de amostra, juntamente com o teste de Sullivan et al. adaptado usando a distribuição qui-quadrado e da distribuição exata. No caso 2, as adaptações para o teste de Sullivan et al. e o teste de Sullivan et al. exato apresentaram um poder alto (mínimo de 0,59) para amostras de tamanho  $n \geq 10$ , conseguindo captar apropriadamente a diferença de  $\Sigma_1$  para  $\Sigma_0$ . É importante salientar que as adaptações propostas para o teste de Sullivan et al. usando a distribuição qui-quadrado e as idéias de Hayter e Tsui e a distribuição exata apresentaram desempenhos bem semelhantes. Apesar de terem apresentado poderes maiores que os outros testes nos casos 5 e 6, os valores são muito baixos em todos os tamanhos de amostra (em torno de 0,10 para  $n=10$  e 25; e 0,18 para  $n=50$ . Apenas para  $n=100$  alcança um poder de 0,30 no caso 6).

Nota-se que nas amostras pequenas,  $n=10$ , as adaptações propostas para o teste de Sullivan et al. e a distribuição exata são melhores que o teste da razão de verossimilhança exata mesmo para pequenas distâncias entre  $H_0$  e  $H_1$ . Com o aumento dessa distância os poderes obtidos para as adaptações propostas para o teste de Sullivan et al. aumentam numa escala muito maior que do teste da razão de verossimilhança exata. A medida que o tamanho de amostra aumenta as adaptações propostas para o teste de Sullivan et al. e o teste da razão de verossimilhança apresentam desempenhos semelhantes para todas as distâncias entre  $H_0$  e  $H_1$ . Pode-se perceber também, que os testes de Sullivan et al. adaptados são melhores que os testes que utilizam o determinante para qualquer distância entre  $H_0$  e  $H_1$  inclusive para amostras menores. Com o aumento do tamanho de amostra os testes de Sullivan et al. propostos nesta dissertação e os testes que utilizam o determinante tem desempenhos semelhantes nos casos onde as distâncias entre  $H_0$  e  $H_1$  são maiores, como já é esperado.

Com o aumento do tamanho de amostra a diferença entre o poder dos testes de Sullivan et al. adaptado usando a distribuição qui-quadrado e usando a distribuição exata diminui, o que é explicado pelo fato de que a aproximação qui-quadrado é válida somente para grandes amostras. Em alguns casos, o teste de Sullivan et al. adaptado usando a distribuição qui-quadrado teve um desempenho levemente melhor que aquele usando a distribuição exata, para amostras de tamanho  $n=10$  e  $25$ , mas isso pode ser devido ao fato que o valor do nível de significância estimado era levemente maior que  $5\%$  ( $\alpha = 0,07$  e  $0,06$  para  $n=10$  e  $25$ ).

Em relação ao bom desempenho da adaptação proposta nesta dissertação, para o teste de Sullivan et al. de acordo com as idéias de Hayter e Tsui (1994), é importante salientar que esse fato é muito positivo uma vez que este teste permite que o usuário identifique automaticamente qual o parâmetro está em desacordo com a hipótese nula quando esta é rejeitada. No entanto, isto não é imediato no teste de Sullivan et al. adaptado usando a distribuição qui-quadrado e a exata, tendo-se neste caso a necessidade de buscar outros meios para identificar os parâmetros responsáveis pela rejeição de  $H_0$ . Sob esse aspecto o teste de Sullivan et al. adaptado usando as idéias de Hayter e Tsui leva vantagem em relação aos outros testes.

#### D) Teste dos autovalores

Uma diferença mais significativa em relação a  $\Sigma_0$  nos modelos simulados no que se refere aos autovalores, pode ser percebida nos casos 1, 3, 4, 7, 8 e 9. Os poderes dos testes dos autovalores de  $\Sigma$  usando a adaptação do teste de Hayter e Tsui, usando a adaptação do teste  $T^2$  de Hotelling com distribuição qui-quadrado e exata são praticamente iguais para todos os tamanhos de amostra. O teste dos autovalores de  $\Sigma$  usando o número de condição tem o poder maior em relação aos demais que utilizam os autovalores no caso 1, para todos os tamanhos de amostra (mínimo= $0,08$  e máximo= $0,64$ ); no caso 3, para os tamanhos de amostra  $n=10$  e  $25$  (mínimo= $0,33$  e máximo= $0,97$ ); e nos casos 4 e 5, para amostras de tamanho  $n=25$ ,  $50$  e  $100$  que embora o seu poder seja maior que dos outros testes que usam os autovalores, esse poder não é alto (para  $n=100$  é  $0,28$  para o caso 4 e  $0,14$  para o caso 5). É importante ressaltar, que o teste do número de condição apresentou um poder maior nos casos onde ocorreu uma mudança positiva na correlação das variáveis envolvidas no processo

de simulação. O teste dos autovalores usando o número de condição foi melhor que os testes que utilizam autovalores nos casos 1, 3, 4 e 5. Nos casos 2 e 6, onde  $\kappa_2(\Sigma_1)$  é próximo do  $\kappa_2(\Sigma_0)$  todos os testes dos autovalores apresentaram poderes baixos (máximo de 0,05 para o caso 2 e de 0,32 para o caso 6) e bem próximos aos obtidos pelos testes que utilizam o determinante (máximo de 0,05 para o caso 2 e de 0,27 para o caso 6).

Nas amostras de tamanho  $n=10$ , as adaptações propostas para o teste dos autovalores baseadas nas idéias de Hayter e Tsui e no teste  $T^2$  de Hotelling são melhores que o teste do determinante tradicional (teste da variância generalizada) para todas as distâncias entre  $H_0$  e  $H_1$ . Com o aumento dessas distâncias o desempenho desses testes é semelhante aos que utilizam o determinante. O teste dos autovalores usando o número de condição é melhor que o teste da variância generalizada nos casos onde as distâncias entre  $H_0$  e  $H_1$  são pequenas, para todos os tamanhos de amostra.

A diferença entre o poder dos testes dos autovalores de  $\Sigma$  usando a adaptação do teste  $T^2$  de Hotelling e dos autovalores de  $\Sigma$  exato, diminui com o aumento do tamanho de amostra, já que, a estatística utilizada pelo primeiro teste tem aproximação pela  $\chi^2$  para grandes amostras.

É importante salientar que os testes dos autovalores foi implementado considerando-se que os autovalores estimados  $\hat{\lambda}_i, i = 1, 2, \dots, p$ , são aproximadamente independentes e com distribuição normal. Essa suposição somente se verifica para grandes amostras. Assim, uma possibilidade de melhoria de desempenho dos testes dos autovalores seria implementá-lo sem a suposição de normalidade e independência buscando usar a distribuição exata (Anderson, 2003).

### **E) Teste da transformação**

Os testes que usam a transformação  $Y = X_1 + X_2$  não tiveram bom desempenho de um modo geral, perdendo em alguns casos para os testes do determinante. Apenas para amostras maiores o poder melhora nos casos em que  $H_0$  e  $H_1$  eram bem diferentes, no que se refere a variância de  $\sigma_y^2$ . Com o aumento do tamanho de amostra o desempenho do teste da transformação  $Y$  quando se usa a amplitude amostral piora em relação aos que usam o

desvio padrão amostral e a variância (na faixa de 0,07 a 0,10). Nota-se que a medida em que  $H_0$  se distancia de  $H_1$  os poderes dos testes da transformação  $Y$  quando se usa o desvio padrão amostral e a variância aumentam, para todos os tamanhos de amostras. Estes têm desempenhos inferiores e bem parecidos, exceto nos casos 2, 3 e 4, onde apresentaram um poder superior (mínimo de 0,11 para os casos 2 e 3, e de 0,13 para o caso 4) ao dos testes que utilizam o determinante (mínimo de 0,03 para os casos 2 e 3, e de 0,04 para o caso 4) e mais próximo do poder obtido pelas adaptações propostas para o teste de Sullivan et al. (2007) para amostras de tamanho  $n \geq 50$  (casos 2 e 3) e para amostras de tamanho  $n=10$  (caso 4). Nos casos 6, 7, 8 e 9 tiveram um desempenho pior que o teste da variância generalizada, em todos os tamanhos de amostra, e melhor nos casos 1, 2, 3 e 4. À medida em que o tamanho de amostra aumenta, o poder do teste da transformação para o desvio padrão  $Y$  quando se usa a amplitude, é menor que dos outros testes que utilizam a transformação.

### F) Conclusões gerais sobre o caso $p=2$

Na Tabela 3.7 a situação 1 engloba as matrizes que possuem determinantes próximos do  $|\Sigma_0|$  (casos 1, 4 e 5), a situação 2 engloba as matrizes que possuem determinantes intermediários (casos 6 e 7), a situação 3 engloba as matrizes que possuem determinantes bem maiores que o  $|\Sigma_0|$  (casos 8 e 9), as situações 4 e 5 englobam as matrizes que possuem determinantes similares ao  $|\Sigma_0|$  (casos 2 e 3, respectivamente). Sendo que no caso 2 tem-se uma mudança na correlação, inclusive de sinal, e no caso 3 tem-se variáveis não correlacionadas. Nesta tabela, apresenta-se os valores (médios) mínimos e máximos observados para os testes, sendo que os maiores valores são destacados em negrito. Percebe-se que as adaptações propostas para o teste de Sullivan et al. (2007) e a distribuição exata possuem valores (mínimos e máximos) de poder maiores em todas as situações. Os testes da razão de verossimilhança aproximada pela qui-quadrado e exata possuem valor mínimo de poder inferior ao de Sullivan apenas nas situações 1 e 3. Mas apresenta um dos maiores valores (máximos) de poder em todas as situações. Na situação 3, somente o teste da transformação de  $Y$  quando se usa a amplitude obteve valor máximo de poder inferior (0,62) em relação aos demais testes em estudo. Os testes da transformação de  $Y$  quando se usa a variância e o desvio padrão está entre os testes que obtiveram valores máximos de poder superiores (mínimo=0,94), nas situações 3, 4 e 5, e inferiores na situação 2 (máximo=0,15).

Tabela 3.7: Estimativas do Poder mínimo e máximo dos testes -  $p=2$

Situação		Média da proporção de rejeições da hipótese nula														
		DT	DD	DE	RV	RVE	SQ	SHT	SE	AHT	ATH	ANC	AE	TV	TDP	TA
1	MIN	0,01	0,02	0,05	0,08	0,05	<b>0,10</b>	<b>0,10</b>	<b>0,09</b>	0,06	0,06	<b>0,11</b>	0,06	0,05	0,05	0,04
	MAX	0,20	0,22	0,30	<b>0,99</b>	<b>0,99</b>	<b>0,98</b>	<b>0,97</b>	<b>0,98</b>	0,48	0,49	0,64	0,50	0,61	0,62	0,29
2	MIN	<b>0,11</b>	<b>0,13</b>	0,09	<b>0,10</b>	0,08	<b>0,13</b>	<b>0,13</b>	<b>0,11</b>	<b>0,13</b>	<b>0,12</b>	<b>0,14</b>	<b>0,13</b>	0,06	0,06	0,06
	MAX	0,57	0,58	0,53	<b>0,71</b>	<b>0,70</b>	<b>0,74</b>	<b>0,74</b>	<b>0,74</b>	<b>0,70</b>	<b>0,71</b>	0,53	<b>0,71</b>	0,14	0,15	0,09
3	MIN	0,48	0,51	0,42	0,57	0,53	<b>0,64</b>	<b>0,64</b>	<b>0,62</b>	0,59	0,58	0,40	0,59	0,13	0,15	0,12
	MAX	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>0,94</b>	<b>0,94</b>
4	MIN	0,04	0,05	0,05	<b>0,91</b>	<b>0,89</b>	<b>0,95</b>	<b>0,96</b>	<b>0,94</b>	0,04	0,05	0,05	0,05	0,43	0,40	0,24
	MAX	0,05	0,05	0,05	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	0,05	0,05	0,05	0,05	0,98	0,98	0,61
5	MIN	0,03	0,04	0,05	<b>0,96</b>	<b>0,95</b>	<b>0,96</b>	<b>0,91</b>	<b>0,96</b>	0,66	0,75	<b>0,97</b>	0,77	0,45	0,41	0,24
	MAX	0,04	0,05	0,05	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>0,99</b>	<b>0,98</b>

Os casos em que as distâncias entre os parâmetros sob as hipóteses nula e alternativa são pequenas, os testes apresentaram comportamentos muito semelhantes para as amostras de tamanho  $n=10$ . As diferenças de poder são mais expressivas para os tamanhos de amostra maiores, nos testes de Sullivan adaptado usando a distribuição qui-quadrado, adaptado usando as idéias de Hayter e Tsui e Sullivan exato (ver Tabela 3.2). No caso 3, onde a matriz  $\Sigma_1$  é muito diferente da matriz  $\Sigma_0$ , nas amostras de tamanho  $n=10$  somente os testes de Sullivan usando a distribuição qui-quadrado e exato conseguiram perceber essa diferenciação, mas com desempenhos moderados (65% e 60%, respectivamente). Em geral, os testes da transformação da variável  $Y$  tiveram o pior desempenho para todos os tamanhos de amostra, porém apresentaram desempenhos superiores aos obtidos pelos testes do determinante. Nos casos onde ocorreram alterações mais expressivas no coeficiente de correlação, os testes dos autovalores usando o número de condição e da razão de verossimilhança exata apresentaram valores de poder maiores em relação aos demais testes em estudo. Os testes que utilizam o determinante apresentaram os menores poderes. Entre eles o teste melhorado do  $|\Sigma|$  proposto por Djauhari é o melhor. Em geral, para pequenas amostras  $n=10$ , o teste Sullivan adaptado usando a distribuição qui-quadrado se destaca em relação aos outros testes em estudo, exceto no caso 1, onde houve uma mudança apenas no coeficiente de correlação, sendo os testes dos autovalores usando o número de condição e da razão de verossimilhança exata os melhores (poder=0,08 e 0,10, respectivamente). A medida que se aumenta o tamanho de amostra o teste da razão de verossimilhança apresenta desempenho cada vez mais próximo ao do teste de Sullivan. As adaptações propostas nesta dissertação para o teste de Sullivan se

mostraram mais efetivas que os testes tradicionais da variância generalizada e da razão de verossimilhança, principalmente nas amostras de tamanho  $n=10$ .

Os testes de Sullivan (adaptado usando a distribuição qui-quadrado, usando as idéias de Hayter e Tsui e exato) são os melhores para o caso bivariado seguido do teste da razão de verossimilhança. Os testes que utilizam os autovalores apresentaram um desempenho superior ao teste do determinante tradicional, porém inferior ao desempenho dos testes de Sullivan e da razão de verossimilhança. Os resultados obtidos indicam que para o caso bivariado os testes que utilizam a transformação  $Y = X_1 + X_2$  não são recomendáveis, já que, existem outros testes melhores que eles, se o propósito for identificar a mudança na primeira amostra logo após a sua ocorrência.

### G) Conclusões em controle de qualidade sobre o caso $p=2$

Em controle de qualidade as amostras são retiradas rotineiramente. As informações ao longo do tempo vão sendo combinadas de modo que, em algum momento após a mudança, essa será percebida, mesmo que não seja na primeira amostra.

Seja  $Y$ : o número de amostras até que se obtenha o primeiro sucesso. (sucesso = alarme verdadeiro)

$Y \sim$  Geométrica  $(1-\beta)$

$P[Y=y] = (1 - \beta)(\beta)^{y-1}, y = 0, 1, 2, \dots$ ; poder do teste =  $1 - \beta$ .

A probabilidade de que o teste consiga captar a mudança de parâmetros nas  $m$  primeiras amostras após a sua ocorrência será  $\sum_{y=1}^m P[Y = y]$ . Na Tabela 3.8 essas probabilidades estão apresentadas para as  $m=3$  primeiras amostras de cada teste. Para o teste do determinante, foram mostrados apenas os valores para o teste exato, já que, os testes do determinante tradicional e proposto por Djauhari obtiveram um poder menor ou igual (0,04 e 0,05, respectivamente).

Como ilustração, considere os casos 2, 3 e 5 para  $p=2, n=25$ . Percebe-se que no caso 2, na terceira amostra após a ocorrência da mudança os testes da transformação de  $Y$  quando se usa a variância e o desvio padrão são competidores com os testes da razão de verossimilhança e as adaptações do teste de Sullivan et al. No caso 3, com 2 amostras após a ocorrência

Tabela 3.8: Probabilidade de percepção da mudança de parâmetros nas  $m$  primeiras amostras

p=2 - n=25									
Testes	caso 2			caso 3			caso 5		
	m=1	m=2	m=3	m=1	m=2	m=3	m=1	m=2	m=3
<b>DE</b>	0,0500	0,0975	0,1426	0,0500	0,0975	0,1426	0,0600	0,1164	0,1694
<b>RV</b>	0,9100	0,9919	0,9993	0,9600	0,9984	0,9999	0,0800	0,1536	0,2213
<b>RVE</b>	0,8900	0,9879	0,9987	0,9500	0,9975	0,9999	0,0600	0,1164	0,1694
<b>SQ</b>	0,9500	0,9975	0,9999	0,9600	0,9984	0,9999	0,1000	0,1900	0,2710
<b>SHT</b>	0,9600	0,9984	0,9999	0,9100	0,9919	0,9993	0,1000	0,1900	0,2710
<b>SE</b>	0,9400	0,9964	0,9998	0,9600	0,9984	0,9999	0,0900	0,1719	0,2464
<b>AHT</b>	0,0400	0,0784	0,1153	0,6600	0,8844	0,9607	0,0600	0,1164	0,1694
<b>ATH</b>	0,0500	0,0975	0,1426	0,7500	0,9375	0,9844	0,0600	0,1164	0,1694
<b>ANC</b>	0,0500	0,0975	0,1426	0,9700	0,9991	1,0000	0,1100	0,2079	0,2950
<b>AE</b>	0,0500	0,0975	0,1426	0,7700	0,9471	0,9878	0,0600	0,1164	0,1694
<b>TV</b>	0,4300	0,6751	0,8148	0,4500	0,6975	0,8336	0,0500	0,0975	0,1426
<b>TDP</b>	0,4000	0,6400	0,7840	0,4100	0,6519	0,7946	0,0500	0,0975	0,1426

da mudança os testes que utilizam os autovalores são comparáveis com os testes da razão de verossimilhança e as adaptações do teste de Sullivan et al. E com 3 amostras, os testes da transformação de  $Y$  quando se usa a variância e o desvio padrão também podem ser considerados bons testes para os casos 2 e 3.

Como em controle de qualidade o processo de coleta de dados é repetido ao longo do tempo, a escolha do melhor teste deve visar os custos, o tempo de coleta e a sua dificuldade de implementação. Sendo assim, se critérios como o apresentado na Tabela 3.8 forem considerados, para o caso bivariado, testes que não possuem um poder muito elevado na primeira amostra podem eventualmente se tornarem alternativas interessantes como por exemplo, o teste da transformação  $Y = X_1 + X_2$  que transforma um problema multivariado em algo univariado.

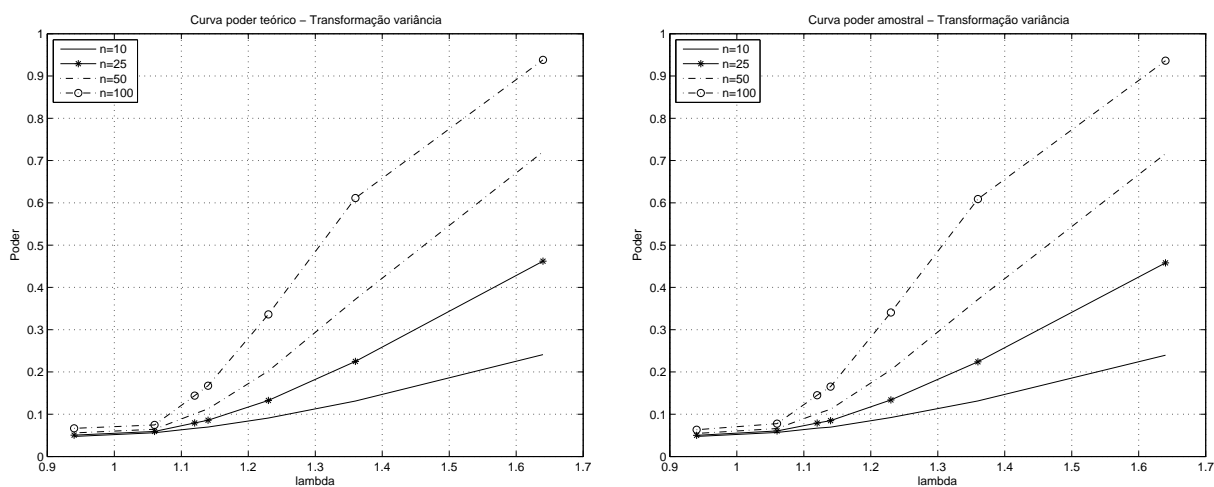
### 3.4.2 Comparação do poder teórico com o obtido via simulação

Foi realizado um estudo comparativo entre o valor do poder teórico e o obtido nas simulações para os testes de Sullivan e dos autovalores adaptados usando a distribuição  $\chi^2$ , e para os testes da transformação  $Y$ , já que, para esses testes é possível calcular o poder analiticamente, como é mostrado no Apêndice B desta dissertação. O objetivo era avaliar se



os valores de poder obtidos nas simulações eram semelhantes ao poder teórico desses testes.

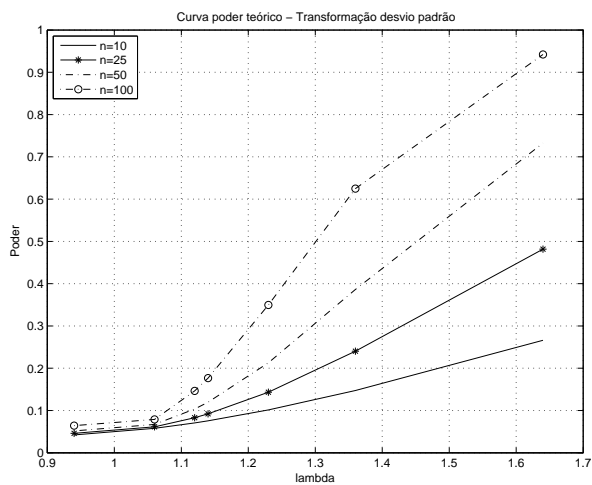
Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 3.1–3.7, onde as curvas representam o poder teórico e simulado. Através dessas, pode-se perceber que o poder obtido nas simulações para todos os modelos é praticamente idêntico ao valor do poder teórico. O poder obtido via simulação para o teste de Sullivan usando a distribuição qui-quadrado nas pequenas amostras,  $n=10$ , diferencia do poder teórico, o que era esperado, já que, a estatística de teste,  $\chi^2$ , utilizada por este tem distribuição qui-quadrado apenas para grandes amostras. No eixo das abcissas estão expressos os valores  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, 9$  para cada teste. Para os testes da transformação de Y quando se usa a variância, o desvio padrão e a amplitude esses valores representam o fator de aumento sofrido pelo desvio padrão, indo de  $\sigma_0$  para um valor  $\sigma_1 = \lambda\sigma_0$  e pela variância, indo de  $\sigma_0^2$  para um valor  $\sigma_1^2 = \lambda^2\sigma_0^2$  (Ver Tabela 3.2, p. 47). Nos testes de Sullivan e dos autovalores usando a distribuição qui-quadrado, para cada n os valores  $\lambda_i; i = 1, 2, \dots, 9$  são as distâncias expressas na Tabela 3.3, p. 47.



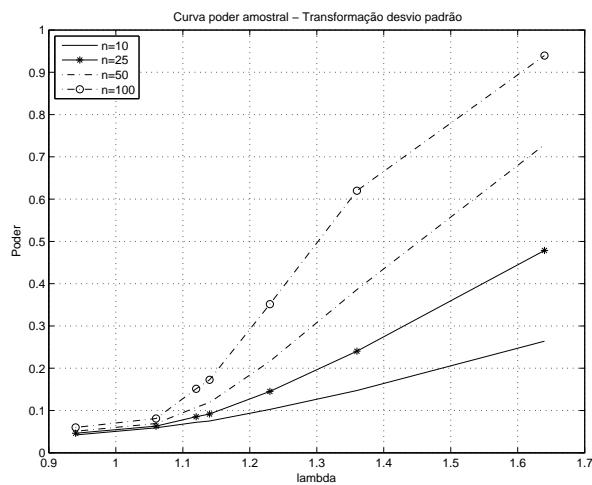
(a) Curva poder teórico

(b) Curva poder da simulação

Figura 3.1: Curva poder para o teste da transformação para variância

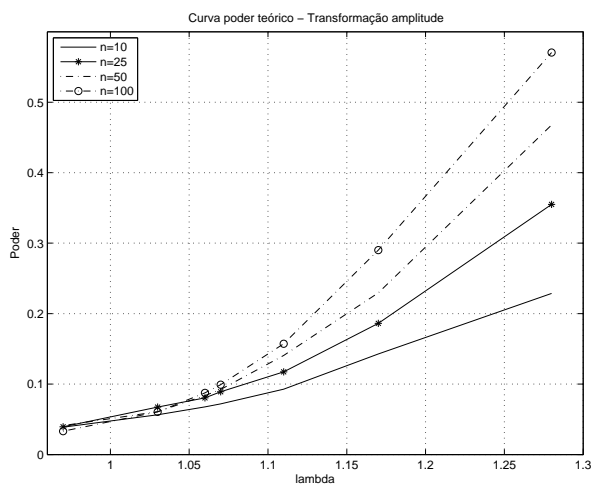


(a) Curva poder teórico

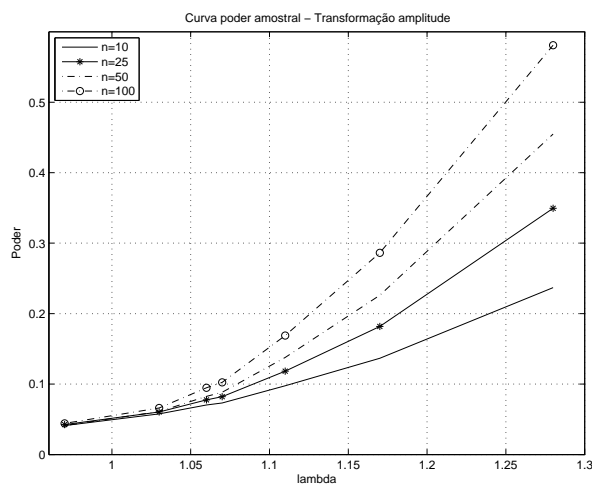


(b) Curva poder da simulação

Figura 3.2: Curva poder para o teste da transformação para o desvio padrão - desvio padrão

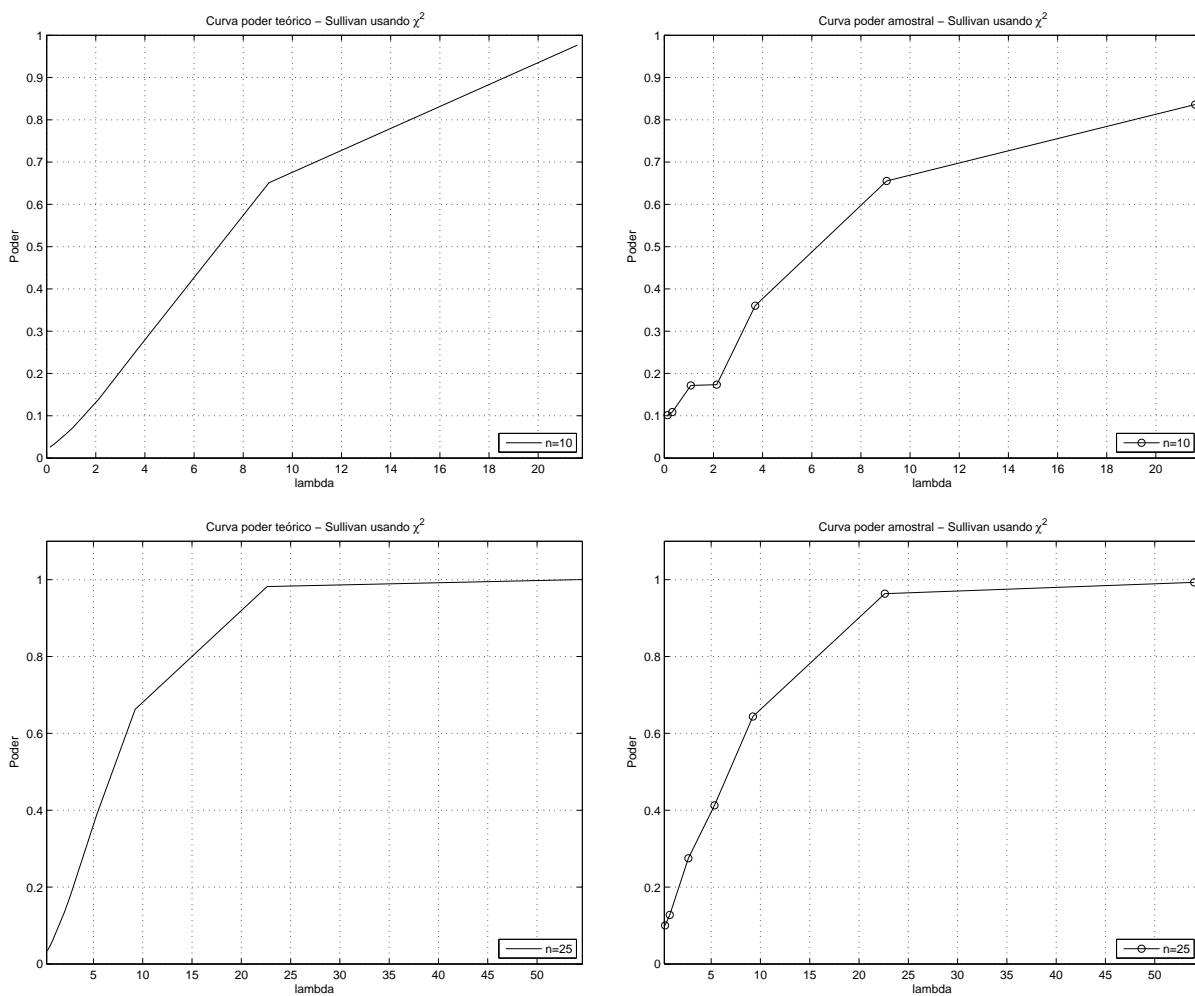


(a) Curva poder teórico



(b) Curva poder da simulação

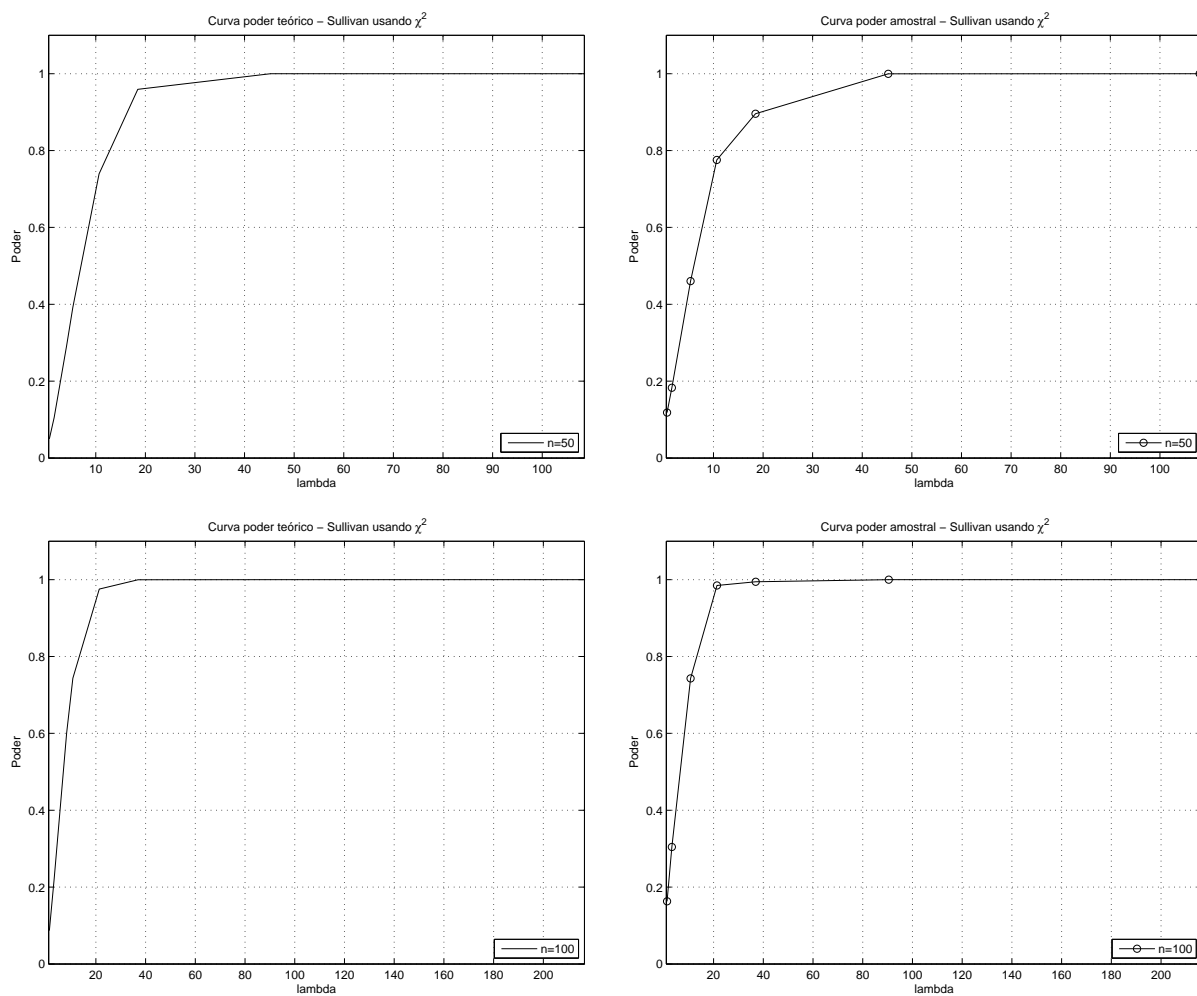
Figura 3.3: Curva poder para o teste da transformação para o desvio padrão - amplitude



(a) Curva poder teórico

(b) Curva poder da simulação

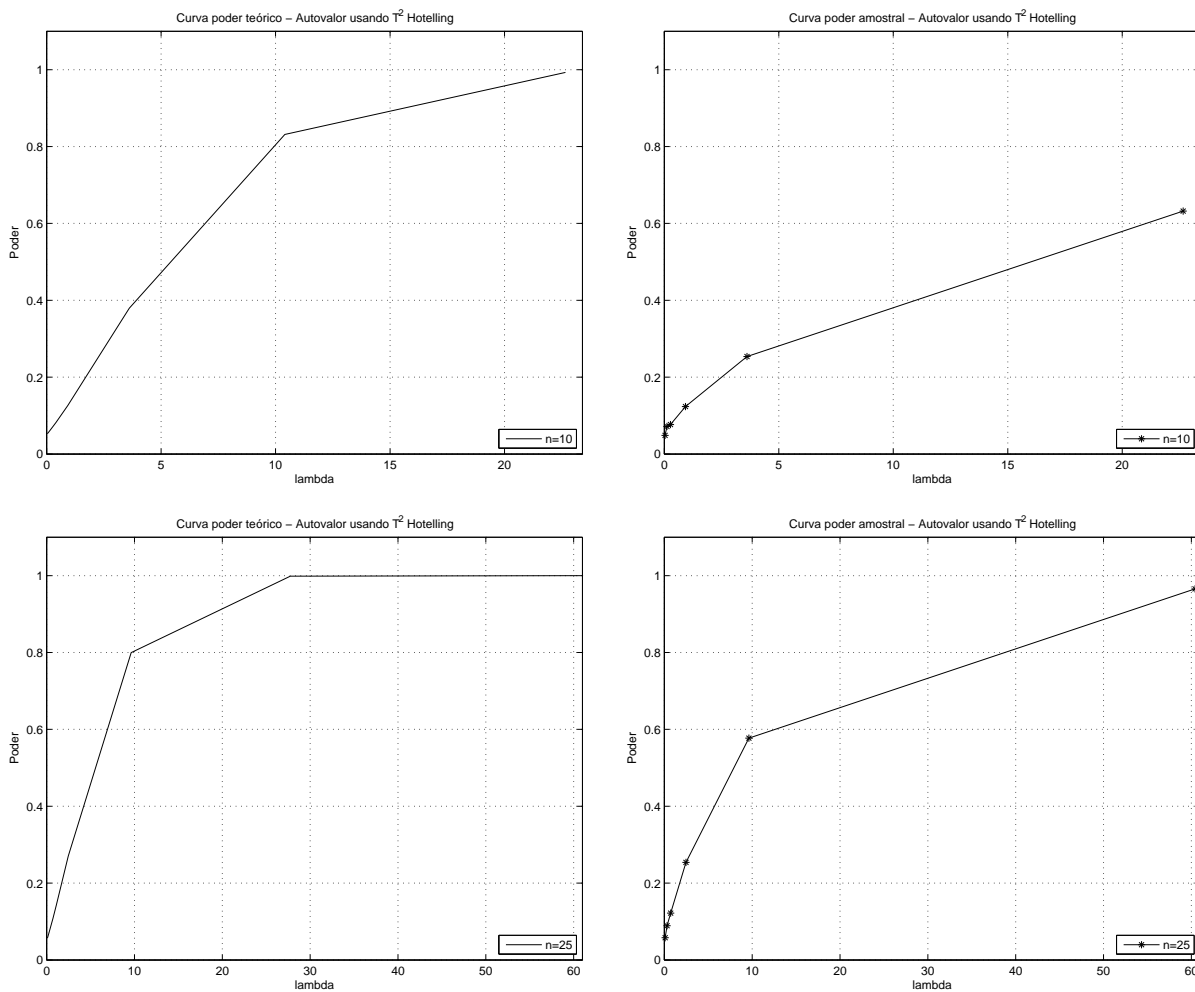
Figura 3.4: Curva poder para o teste de Sullivan usando a distribuição  $\chi^2$  -  $n=10$  e  $25$



(a) Curva poder teórico

(b) Curva poder da simulação

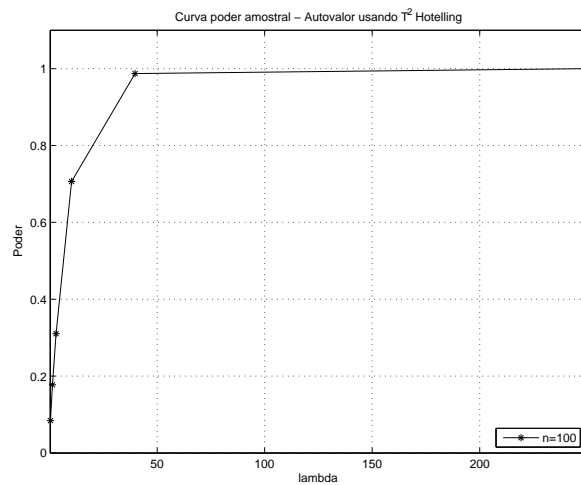
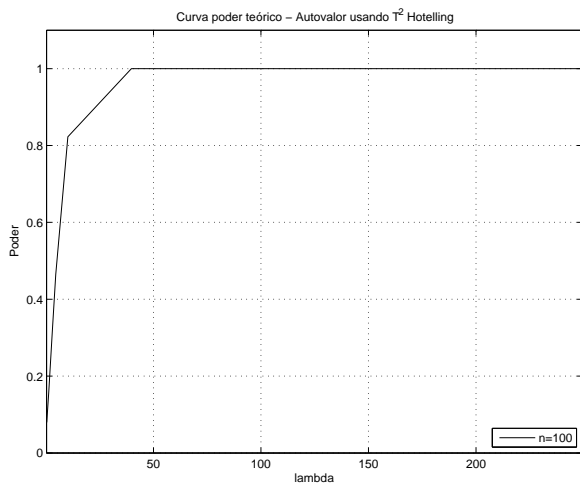
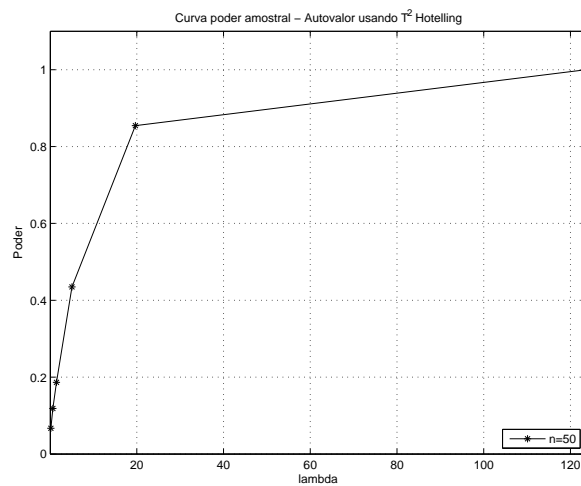
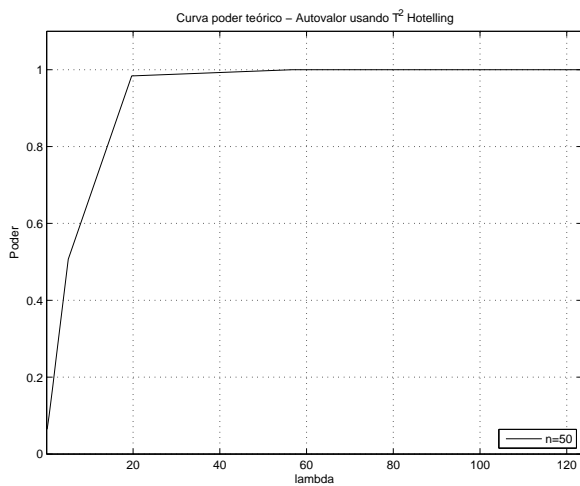
Figura 3.5: Curva poder para o teste de Sullivan usando a distribuição  $\chi^2$  -  $n=50$  e  $100$



(a) Curva poder teórico

(b) Curva poder da simulação

Figura 3.6: Curva poder para o teste do autovalor usando  $T^2$  de Hotelling -  $n=10$  e  $25$



(a) Curva poder teórico

(b) Curva poder da simulação

Figura 3.7: Curva poder para o teste do autovalor usando  $T^2$  de Hotelling - n=50 e 100

### 3.4.3 Análise dos *ARL sob controle e fora de controle*

As médias dos *ARL sob controle e fora de controle* para cada modelo simulado estão apresentadas nas Tabelas C.2 e 3.10. O teste ideal é aquele que tem o maior *ARL sob controle* e menor *ARL fora de controle*. Assim, é capaz de detectar rapidamente a falta de controle do processo quando ele sofre alguma modificação e demora a acusar falta de controle quando ele não sofre modificação. As conclusões obtidas pela análise dos resultados dos *ARL's* são semelhantes à análise do poder. É possível observar que o teste tradicional da variância generalizada apresentou maiores *ARL fora de controle* que o teste melhorado  $|\Sigma|$  proposto por Djauhari. Para  $n=10$  percebe-se que o teste da razão de verossimilhança apresentou o menor *ARL sob controle* devido ao fato que obteve um nível de significância estimado de 10% e não 5% como deveria ser, e o teste do determinante tradicional apresentou o maior *ARL sob controle* devido ao fato que teve um nível de significância estimado igual a 3%.

Nota-se que as adaptações propostas para o teste de Sullivan se mostraram mais eficientes que os outros testes, já que, apresentaram os menores *ARL fora controle e ARL sob controle* próximo de 20. Os testes da transformação de Y apresentaram elevados *ARL fora controle* em relação aos outros testes propostos nesta dissertação. No caso 3 os testes da razão de verossimilhança, as adaptações propostas para o teste de Sullivan e dos autovalores usando o número de condição são os mais eficientes, já que, apresentaram menores *ARL fora controle*.

Tabela 3.9: *ARL sob controle e fora de controle* de processos com distribuição normal bivariada

<b>n=10</b>										
Testes	ARL sob controle	ARL fora de controle								
		caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6	caso 7	caso 8	caso 9
D. Trad	31,82	126,06	36,46	31,82	25,24	24,24	16,88	10,54	4,58	1,50
D. Djau	22,78	69,74	18,84	22,78	19,88	18,42	11,92	7,58	3,26	1,40
D. Ex	21,16	14,22	22,32	21,16	20,44	18,76	16,06	11,38	5,88	1,58
R. Vero	8,92	4,56	1,84	1,76	3,64	8,64	11,36	9,16	3,58	1,28
R. Vero Ex	18,78	8,78	2,58	2,08	5,54	22,04	19,40	16,38	5,90	1,46
Sul. $\chi^2$	14,28	17,68	1,50	1,66	6,32	11,82	12,02	7,52	2,56	1,18
Sul. HT	17,06	27,58	1,48	1,90	6,28	13,02	12,28	7,36	2,74	1,16
Sul. Ex	20,32	23,12	1,50	1,80	8,20	15,58	14,44	9,06	2,74	1,18
Auto HT	24,76	26,12	20,26	6,14	19,98	20,88	12,78	7,68	3,86	1,54
Auto T <sup>2</sup> H	25,82	27,46	20,24	6,90	16,60	26,14	15,24	8,42	4,30	1,48
Auto NCond	19,50	6,82	19,66	1,98	9,66	9,58	9,34	8,48	6,48	2,94
Auto Ex	22,26	20,22	18,32	6,48	16,20	20,98	13,32	7,44	3,84	1,48
T. Var	20,66	15,40	7,04	6,94	8,08	21,04	17,10	14,42	12,02	5,14
T. Desv Pad	20,24	14,50	8,36	8,22	7,64	22,08	15,68	13,88	11,16	4,60
T. Amp	18,88	13,98	10,84	11,54	9,10	21,22	17,14	12,94	12,06	4,96

<b>n=25</b>										
Testes	ARL sob controle	ARL fora de controle								
		caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6	caso 7	caso 8	caso 9
D. Trad	24,18	135,70	26,82	24,18	19,88	17,14	8,80	5,40	1,86	1,06
D. Djau	20,60	46,90	20,02	20,60	16,52	14,80	8,10	4,48	1,76	1,06
D. Ex	18,40	10,54	19,36	18,40	17,52	15,78	10,64	6,16	2,12	1,08
R. Vero	15,68	3,42	1,02	1,06	1,76	11,74	10,66	5,20	1,68	1,06
R. Vero Ex	18,60	4,42	1,02	1,10	1,90	14,72	11,96	6,08	1,94	1,06
Sul. $\chi^2$	16,78	8,74	1,02	1,04	2,46	10,36	7,50	3,68	1,50	1,04
Sul. HT	14,98	9,14	1,02	1,08	2,14	10,58	7,92	3,48	1,48	1,04
Sul. Ex	17,50	11,64	1,02	1,06	2,50	11,10	7,92	4,36	1,58	1,04
Auto HT	23,18	12,96	25,80	1,46	11,36	17,60	8,44	3,08	1,58	1,10
Auto T <sup>2</sup> H	24,58	11,08	22,32	1,28	12,04	19,50	7,96	3,48	1,60	1,08
Auto NCond	20,64	3,06	20,64	1,00	5,46	10,38	8,18	4,58	2,78	1,52
Auto Ex	21,24	10,60	20,86	1,24	10,92	17,18	7,64	3,36	1,60	1,08
T. Var	16,70	11,40	2,38	2,30	3,84	14,88	14,58	13,16	7,36	1,68
T. Desv Pad	16,76	11,08	2,70	2,36	3,36	15,44	14,80	11,98	7,00	1,62
T. Amp	19,58	10,82	3,80	3,98	4,06	25,68	16,42	12,86	9,90	2,56



Tabela 3.10: *ARL sob controle e fora de controle* de processos com distribuição normal bivariada

<b>n=50</b>										
Testes	ARL sob controle	ARL fora de controle								
		caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6	caso 7	caso 8	caso 9
D. Trad	25,10	17,84	30,50	25,10	20,06	18,22	6,68	2,54	1,32	1,00
D. Djau	22,70	13,24	26,62	22,70	17,94	16,34	6,40	2,38	1,28	1,00
D. Ex	21,46	5,86	27,16	21,46	19,80	21,22	8,50	3,38	1,46	1,00
R. Vero	16,38	1,90	1,00	1,00	1,20	11,50	6,64	2,04	1,14	1,00
R. Vero Ex	19,10	2,04	1,00	1,00	1,22	12,08	6,94	2,06	1,16	1,00
Sul. $\chi^2$	17,56	3,32	1,00	1,00	1,38	7,10	5,26	1,82	1,10	1,00
Sul. HT	18,26	3,72	1,00	1,00	1,40	7,72	6,70	1,90	1,12	1,00
Sul. Ex	18,14	3,94	1,00	1,00	1,40	7,72	5,78	1,82	1,10	1,00
Auto HT	24,16	4,68	26,36	1,02	7,24	15,42	5,20	1,86	1,12	1,00
Auto T <sup>2</sup> H	21,58	4,40	24,38	1,00	7,68	14,70	5,36	1,98	1,14	1,00
Auto NCond	16,84	2,54	23,54	1,00	6,84	8,10	5,46	2,98	1,42	1,04
Auto Ex	21,08	4,06	23,70	1,00	7,54	14,26	5,04	1,96	1,14	1,00
T. Var	16,66	8,06	1,28	1,10	3,08	16,42	13,96	8,46	5,04	1,44
T. Desv Pad	17,10	6,84	1,28	1,16	3,06	15,14	13,62	8,26	5,02	1,42
T. Amp	22,50	8,22	3,16	1,72	3,84	21,48	14,12	10,04	5,90	2,34

<b>n=100</b>										
Testes	ARL sob controle	ARL fora de controle								
		caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6	caso 7	caso 8	caso 9
D. Trad	19,72	4,90	23,52	19,72	16,22	13,28	3,56	1,58	1,04	1,00
D. Djau	17,58	4,56	22,36	17,58	15,30	11,42	3,52	1,58	1,04	1,00
D. Ex	18,26	2,80	18,88	18,26	16,04	14,36	4,42	1,68	1,04	1,00
R. Vero	21,56	1,22	1,00	1,00	1,02	8,08	3,80	1,48	1,00	1,00
R. Vero Ex	22,20	1,22	1,00	1,00	1,02	8,08	4,02	1,50	1,00	1,00
Sul. $\chi^2$	20,06	1,30	1,00	1,00	1,02	6,04	3,14	1,32	1,00	1,00
Sul. HT	20,66	1,48	1,00	1,00	1,04	7,36	3,28	1,28	1,00	1,00
Sul. Ex	20,06	1,34	1,00	1,00	1,02	6,34	3,14	1,40	1,00	1,00
Auto HT	20,16	1,90	20,32	1,00	6,20	16,04	3,40	1,44	1,00	1,00
Auto T <sup>2</sup> H	23,18	1,84	21,26	1,00	4,86	13,98	3,16	1,40	1,00	1,00
Auto NCond	23,18	1,60	22,28	1,00	3,54	6,26	3,46	1,82	1,10	1,00
Auto Ex	22,78	1,84	20,70	1,00	4,86	13,42	3,12	1,40	1,00	1,00
T. Var	19,94	5,82	1,06	1,00	1,62	14,52	14,16	7,32	2,26	1,08
T. Desv Pad	20,58	5,68	1,08	1,00	1,62	16,24	13,26	6,56	2,26	1,08
T. Amp	17,36	9,82	1,62	1,52	3,32	21,48	17,64	11,26	6,06	1,62

## Capítulo 4

# Comparação dos testes estatísticos: caso da distribuição normal $p$ -variada

### 4.1 Modelos simulados da distribuição normal multivariada

A hipótese nula é a de que a matriz de covariâncias do processo é igual a uma matriz particular,  $H_0: \Sigma = \Sigma_0$ , pré-estabelecida. Para cada  $\Sigma_0$  foram geradas amostras de tamanho  $n=10, 25, 50$  e  $100$ , conforme o descrito na Seção 3.1 do Capítulo 3. As matrizes de covariâncias nos modelos simulados foram escolhidas novamente de acordo com o determinante ( $|\Sigma|$ ), o traço ( $tr$ ), os autovalores ( $\lambda$ ), o número de condição ( $\kappa_2$ ), a correlação entre as variáveis ( $\rho$ ) e a variância ( $\sigma_y^2$ ) da variável  $Y = \sum_{i=1}^p X_i$ , considerando  $p=3$  e  $5$  variáveis, de modo a possibilitar a comparação dos testes com relação ao poder de percepção de mudanças na variabilidade e na correlação. Os modelos utilizados nas simulações para  $p=3$  variáveis estão apresentados na Tabela 4.1, ordenados de acordo com os valores do determinante de  $\Sigma_1$ , matriz estabelecida na hipótese alternativa.

Tabela 4.1: Modelos simulados com  $p=3$  variáveis

Simulação sob a hipótese nula											
$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0,6 & 0,6 \\ 0,6 & 1 & 0,8 \\ 0,6 & 0,8 & 1 \end{bmatrix}$	$ \Sigma_0 $	Traço	$\sigma_Y^2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\rho_{12}$	$\rho_{13}$	$\rho_{23}$	$\kappa_2$	
	0,22	3	7	2,34	0,46	0,20	0,60	0,60	0,80	11,69	
Simulação sob a hipótese alternativa											
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,7 & 0,6 \\ 0,7 & 1 & 0,9 \\ 0,6 & 0,9 & 1 \end{bmatrix}$	Caso	$ \Sigma_1 $	Traço	$\sigma_Y^2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\rho_{12}$	$\rho_{13}$	$\rho_{23}$	$\kappa_2$
	1	0,096	3,00	7,40	2,47	0,437	0,088	0,70	0,60	0,90	27,8747
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0,6 & -0,8 \\ -0,6 & 1 & 0,8 \\ -0,8 & 0,8 & 1 \end{bmatrix}$	2	0,13	3,00	1,80	2,47	0,40	0,13	-0,60	-0,80	0,80	19,07
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 1 & -0,75 \\ 0,2 & -0,75 & 1 \end{bmatrix}$	3	0,22	3,00	2,50	1,76	1,13	0,11	0,30	0,20	-0,75	16,09
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}$	4	0,25	2,75	2,75	2,00	0,50	0,25	0	0	0	8,00
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 1 & 0,8 \\ 0,2 & 0,8 & 1 \end{bmatrix}$	5	0,33	3,00	5,60	1,93	0,87	0,19	0,30	0,20	0,80	10,02
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,8 \\ 0 & 0,8 & 1 \end{bmatrix}$	6	0,36	3,00	4,60	1,80	1,00	0,20	0	0	0,80	9,00
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,72 & 0,72 \\ 0,72 & 1,2 & 0,96 \\ 0,72 & 0,96 & 1,2 \end{bmatrix}$	7	0,37	3,60	8,40	2,81	0,55	0,24	0,60	0,60	0,80	11,69
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$	8	0,50	3,00	6,00	2,00	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	4,00
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 1 \end{bmatrix}$	9	0,73	3,00	5,00	1,67	0,73	0,60	0,30	0,30	0,40	2,78
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,6 & 0,6 \\ 0,6 & 4 & 0,8 \\ 0,6 & 0,8 & 1 \end{bmatrix}$	10	2,14	6,00	10,00	4,36	1,25	0,39	0,30	0,60	0,40	11,10

Os casos 1-10 representam situações onde ocorreram mudanças na matriz de covariâncias, com o objetivo de avaliar o desempenho dos testes em detectar tais mudanças. Essas mudanças foram divididas em três situações, a primeira representa o caso (10) onde ocorreu mudança apenas na variância da variável  $X_2$ , a segunda representa os casos (1, 2, 3, 5, 6, 8 e 9) onde ocorreram mudanças apenas nas correlações e a terceira sendo os casos (4 e 7) onde ocorreram mudanças nas variâncias e nas correlações.

Em cada caso as estruturas diferem na correlação e nas variâncias das variáveis  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ . O caso 3 apresenta  $|\Sigma_1| = |\Sigma_0| = 0,22$  e  $tr(\Sigma_1) = tr(\Sigma_0) = 3,00$ , mas as variáveis  $X_2$  e  $X_3$  são altamente correlacionadas negativamente. Os casos 1, 2, 5, 6, 8 e 9 apresentam traços iguais,  $tr(\Sigma_1) = tr(\Sigma_0) = 3,00$ , mas no caso 2 as variáveis são altamente correlacionadas negativamente, no caso 6 somente as variáveis  $X_2$  e  $X_3$  são correlacionadas, no caso 1 ocorreu um aumento nas correlações entre  $X_1$  e  $X_2$  e entre  $X_2$  e  $X_3$ , no caso 5 somente  $X_2$  e  $X_3$  são altamente correlacionadas e nos casos 8 e 9 as variáveis são pouco correlacionadas. A matriz  $\Sigma_1$  do caso 7 apresenta uma mudança nas variâncias das variáveis  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  em relação a  $\Sigma_0$ .

A Tabela 4.2 apresenta os modelos simulados levando-se em consideração a razão entre os determinantes, os traços, as variâncias da variável  $Y$ , os autovalores, as correlações e os números de condição sob a hipótese alternativa e sob hipótese nula. Na Tabela 4.3 tem-se a distância de Mahalanobis para os testes de Sullivan et al. e dos autovalores.

Tabela 4.2: Medidas de comparação entre os modelos simulados sob  $H_0$  e  $H_1 - p = 3$

Caso	$ \Sigma_1 / \Sigma_0 $	$tr(\Sigma_1)/tr(\Sigma_0)$	$\sigma_{y1}^2/\sigma_{y0}^2$	$\lambda_1/\lambda_{10}$	$\lambda_2/\lambda_{20}$	$\lambda_3/\lambda_{30}$	$\rho_{12}/\rho_{120}$	$\rho_{13}/\rho_{130}$	$\rho_{23}/\rho_{230}$	$\kappa_{21}/\kappa_{20}$
1	0,44	1,00	1,06	1,06	0,95	0,44	1,17	1,00	1,13	2,38
2	0,59	1,00	0,26	1,06	0,87	0,65	-1,00	-1,33	1,00	1,63
3	1,00	1,00	0,36	0,75	2,46	0,55	0,50	0,33	-0,94	1,38
4	1,14	0,92	0,39	0,85	1,09	1,25	0	0	0	0,68
5	1,50	1,00	0,80	0,82	1,89	0,95	0,50	0,33	1,00	0,86
6	1,64	1,00	0,66	0,77	2,17	1,00	0	0	1,00	0,77
7	1,68	1,20	1,20	1,20	1,19	1,20	1,00	1,00	1,00	1,00
8	2,27	1,00	0,86	0,85	1,09	2,50	0,83	0,83	0,63	0,34
9	3,32	1,00	0,71	0,71	1,59	3,00	0,50	0,50	0,50	0,24
10	9,73	2,00	1,43	1,86	2,72	1,95	0,50	1,00	0,50	0,95

Tabela 4.3: Distância de Mahalanobis entre os parâmetros em  $H_0$  e  $H_1$  para os testes de Sullivan et al. e dos autovalores -  $p = 3$ 

Caso	Distância de Mahalanobis							
	Sullivan et al.				Autovalores			
	n=10	n=25	n=50	n=100	n=10	n=25	n=50	n=100
1	1,7147	4,2867	8,5734	17,1468	1,4203	3,7875	7,7329	15,6235
2	74,6914	186,7284	373,4568	746,9136	0,6540	1,7439	3,5604	7,1935
3	305,1586	762,8965	1,5258x10 <sup>3</sup>	3,0516x10 <sup>3</sup>	10,7144	28,5716	58,3338	117,8580
4	78,1158	195,2894	390,5788	781,1575	0,4059	1,0825	2,2100	4,4652
5	5,7099	14,2747	28,5494	57,0988	3,6974	9,8597	20,1303	40,6715
6	15,5556	38,8889	77,7778	155,5556	6,3447	16,9192	34,5434	69,7919
7	0,5466	1,3665	2,7329	5,4659	0,5400	1,4400	2,9400	5,9400
8	11,4506	28,6265	57,2531	114,5062	10,2497	27,3325	55,8038	112,7464
9	22,1056	55,2641	110,5281	221,0562	19,8951	53,0535	108,3176	218,8457
10	83,4328	208,5820	417,1639	834,3278	20,5501	54,8003	111,8840	226,0514

## 4.2 Análise dos resultados das observações simuladas da distribuição normal multivariada

Nesta seção são apresentados os resultados de desempenho dos testes obtidos nas simulações dos dados gerados a partir da distribuição normal multivariada para  $p=3$  e 5 variáveis.

### 4.2.1 Resultados dos testes estatísticos para os processos multivariados ( $p=3$ )

As Tabelas 4.4 – 4.7 mostram a proporção média de rejeição da hipótese nula para cada um dos testes tratados nesta dissertação sob a hipótese nula e alternativa. Em todas as tabelas o sinal “\*” indica as situações simuladas, nas quais, o determinante da matriz de covariâncias sob  $H_0$  é igual ou próximo do determinante sob  $H_1$  e o sinal “o” indica que o traço de  $\Sigma_1$  é igual ou próximo ao traço de  $\Sigma_0$ . É possível perceber que para amostras de tamanho  $n=10$  os testes da razão de verossimilhança aproximada, de Sullivan et al. adaptado usando a distribuição qui-quadrado e as idéias de Hayter e Tsui apresentaram uma taxa de rejeição sob  $H_0$  muito acima do valor nominal (14%, 14% e 11%, respectivamente). O teste de

Sullivan et al. adaptado usando as idéias de Hayter e Tsui atingiu o nível de significância de 5% somente para amostras de tamanho  $n=100$ , enquanto os outros testes mencionados ainda apresentam nível de significância acima de 5% para  $n=100$  (6%). Os testes do determinante tradicional e proposto por Djauhari apresentaram nível de significância abaixo de 5% para  $n=10$  e 25 (3%) gerando consequências no poder destes testes. Sendo assim, nas pequenas amostras,  $n=10$ , serão utilizadas as distribuições exatas dos testes do determinante, da razão de verossimilhança e de Sullivan et al. adaptado para comparação com os demais testes em estudo, já que, conseguiram atingir o nível de significância de 5% mantendo-se uma comparação justa.

Todos os testes são pouco poderosos para distâncias pequenas entre  $H_0$  e  $H_1$  em pequenas amostras,  $n=10$  (máximo=0,16). Nota-se que o poder dos testes aumenta à medida que o tamanho de amostra aumenta, como era esperado. Com o aumento do tamanho de amostra,  $n=50$  e 100, os poderes dos testes da razão de verossimilhança aproximada pela qui-quadrado e da razão de verossimilhança exata são semelhantes, o mesmo ocorre com os testes de Sullivan et al. adaptado usando a distribuição qui-quadrado e exato. O teste dos autovalores usando o número de condição apresenta maiores valores de poder dentre os testes que utilizam os autovalores nos casos 1, 2, 4, 8 e 9 em todos os tamanhos de amostra. O aumento do número de variáveis afetou negativamente o desempenho dos testes que utilizam o determinante que obtiveram poderes muito baixos em relação aos demais testes em estudo. Nos casos 3 e 4, obtiveram um poder máximo de 0,05 e 0,11, respectivamente, enquanto os testes da razão de verossimilhança exata e de Sullivan et al. exato já apresentam poder 1,00 nas amostras de tamanho  $n=10$ .

Tabela 4.4: Estimativas do Nível de Significância e Poder dos testes -  $p=3, n=10$

		n=10																
		Média da proporção de rejeições da hipótese nula																
		DT	DD	DE	RV	RVE	SQ	SHT	SE	AHT	ATH	ANC	AE	TV	TDP	TA		
	$\Sigma_0 =$	1 0,6 0,6 0,6 1 0,8 0,6 0,8 1	0,02	0,03	0,05	0,14	0,05	0,14	0,11	0,05	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05		
o 1	$\Sigma_1 =$	1 0,7 0,6 0,7 1 0,9 0,6 0,9 1	0,0005	0,0013	<u>0,11</u>	0,35	<u>0,16</u>	0,10	0,07	0,02	0,04	0,06	<u>0,15</u>	0,09	0,06	0,06		
o 2	$\Sigma_1 =$	1 -0,6 -0,8 -0,6 1 0,8 -0,8 0,8 1	0,002	0,005	0,07	1,00	<u>0,97</u>	1,00	0,99	<u>1,00</u>	0,04	0,05	0,08	0,07	0,69	0,60		
o * 3	$\Sigma_1 =$	1 0,3 0,2 0,3 1 -0,75 0,2 -0,75 1	0,02	0,03	0,05	1,00	<u>1,00</u>	1,00	1,00	<u>1,00</u>	0,29	0,30	0,06	0,34	0,42	0,34		
o * 4	$\Sigma_1 =$	2 0 0 0 0,5 0 0 0 0,25	0,03	0,05	0,06	0,96	<u>0,88</u>	1,00	0,99	<u>0,98</u>	0,04	0,03	0,07	0,04	0,35	0,27		
o 5	$\Sigma_1 =$	1 0,3 0,2 0,3 1 0,8 0,2 0,8 1	0,05	0,09	0,09	0,31	0,16	0,50	0,31	<u>0,30</u>	<u>0,19</u>	<u>0,18</u>	0,05	<u>0,21</u>	0,06	0,04		
o 6	$\Sigma_1 =$	1 0 0 0 1 0,8 0 0,8 1	0,07	0,11	0,10	0,52	0,34	0,75	0,63	<u>0,57</u>	0,24	0,23	0,05	0,26	0,10	0,07		
7	$\Sigma_1 =$	1,2 0,72 0,72 0,72 1,2 0,96 0,72 0,96 1,2	0,07	0,12	<u>0,11</u>	0,13	0,05	0,19	0,18	0,07	<u>0,12</u>	<u>0,11</u>	0,05	<u>0,14</u>	0,08	0,09		
o 8	$\Sigma_1 =$	1 0,5 0,5 0,5 1 0,5 0,5 0,5 1	0,14	0,20	0,19	0,41	0,24	0,66	0,52	<u>0,48</u>	0,13	0,13	0,18	0,16	0,05	0,04		
o 9	$\Sigma_1 =$	1 0,3 0,3 0,3 1 0,4 0,3 0,4 1	0,26	0,34	0,32	0,59	0,41	0,84	0,71	<u>0,70</u>	0,32	0,32	0,34	0,36	0,08	0,05		
10	$\Sigma_1 =$	1 0,6 0,6 0,6 4 0,8 0,6 0,8 1	0,70	0,77	0,75	0,98	<u>0,95</u>	0,99	0,95	<u>0,97</u>	0,73	0,74	0,05	0,77	0,16	0,17		

Tabela 4.5: Estimativas do Nível de Significância e Poder dos testes -  $p=3$ ,  $n=25$

		n=25																
		Média da proporção de rejeições da hipótese nula																
		DT	DD	DE	RV	RVE	SQ	SHT	SE	AHT	ATH	ANC	AE	TV	TDP	TA		
	$\Sigma_0 =$	1 0,6 0,6 0,6 1 0,8 0,6 0,8 1	0,03	0,03	0,05	0,08	0,05	0,09	0,07	0,05	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	
o 1	$\Sigma_1 =$	1 0,7 0,6 0,7 1 0,9 0,6 0,9 1	0,0001	0,004	0,31	0,58	<u>0,49</u>	0,16	0,04	0,08	0,27	0,26	<u>0,51</u>	0,32	0,06	0,06	0,06	
o 2	$\Sigma_1 =$	1 -0,6 -0,8 -0,6 1 0,8 -0,8 0,8 1	0,001	0,002	0,15	1,00	<u>1,00</u>	1,00	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	0,08	0,11	0,20	0,14	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>0,93</u>	
o * 3	$\Sigma_1 =$	1 0,3 0,2 0,3 1 -0,75 0,2 -0,75 1	0,03	0,04	0,05	1,00	<u>1,00</u>	1,00	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	0,79	<u>0,86</u>	0,12	<u>0,88</u>	<u>0,93</u>	<u>0,91</u>	0,70	
o * 4	$\Sigma_1 =$	2 0 0 0 0,5 0 0 0 0,25	0,05	0,07	0,06	1,00	<u>1,00</u>	1,00	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	0,07	0,07	0,13	0,08	<u>0,86</u>	0,84	0,60	
o 5	$\Sigma_1 =$	1 0,3 0,2 0,3 1 0,8 0,2 0,8 1	0,14	0,17	0,14	0,55	0,49	0,73	0,45	<u>0,65</u>	<u>0,52</u>	<u>0,52</u>	0,06	<u>0,54</u>	0,10	0,08	0,05	
o 6	$\Sigma_1 =$	1 0 0 0 1 0,8 0 0,8 1	0,19	0,22	0,19	0,87	<u>0,84</u>	0,96	<u>0,91</u>	<u>0,93</u>	0,67	0,67	0,08	0,69	0,24	0,21	0,12	
7	$\Sigma_1 =$	1,2 0,72 0,72 0,72 1,2 0,96 0,72 0,96 1,2	<u>0,21</u>	<u>0,24</u>	<u>0,21</u>	0,11	0,08	0,18	<u>0,15</u>	0,11	<u>0,18</u>	<u>0,18</u>	0,05	<u>0,20</u>	0,11	0,13	0,11	
o 8	$\Sigma_1 =$	1 0,5 0,5 0,5 1 0,5 0,5 0,5 1	0,41	0,45	0,41	0,74	0,69	0,89	<u>0,79</u>	<u>0,84</u>	0,55	0,55	0,53	0,57	0,07	0,06	0,04	
o 9	$\Sigma_1 =$	1 0,3 0,3 0,3 1 0,4 0,3 0,4 1	0,69	0,73	0,69	0,93	<u>0,91</u>	0,98	<u>0,94</u>	<u>0,97</u>	<u>0,88</u>	<u>0,90</u>	<u>0,87</u>	<u>0,91</u>	0,17	0,15	0,09	
10	$\Sigma_1 =$	1 0,6 0,6 0,6 4 0,8 0,6 0,8 1	<u>0,99</u>	<u>0,99</u>	<u>0,99</u>	1,00	<u>1,00</u>	1,00	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>0,98</u>	<u>0,99</u>	0,05	<u>0,99</u>	0,28	0,30	0,22	



Tabela 4.6: Estimativas do Nível de Significância e Poder dos testes -  $p=3, n=50$

		n=50																
		Média da proporção de rejeições da hipótese nula																
		DT	DD	DE	RV	RVE	SQ	SHT	SE	AHT	ATH	ANC	AE	TV	TDP	TA		
	$\Sigma_0 =$	1 0,6 0,6 0,6 1 0,8 0,6 0,8 1	0,03	0,04	0,05	0,06	0,05	0,07	0,06	0,05	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	
o 1	$\Sigma_1 =$	1 0,7 0,6 0,7 1 0,9 0,6 0,9 1	0,20	0,32	0,59	<u>0,91</u>	<u>0,89</u>	0,47	0,15	0,37	<u>0,87</u>	<u>0,80</u>	<u>0,83</u>	<u>0,82</u>	0,06	0,07	0,06	
o 2	$\Sigma_1 =$	1 -0,6 -0,8 -0,6 1 0,8 -0,8 0,8 1	0,06	0,11	0,29	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	0,26	0,30	0,37	0,32	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>0,99</u>	
o * 3	$\Sigma_1 =$	1 0,3 0,2 0,3 1 -0,75 0,2 -0,75 1	0,03	0,04	0,05	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>0,99</u>	<u>1,00</u>	0,20	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	0,90	
o * 4	$\Sigma_1 =$	2 0 0 0 0,5 0 0 0 0,25	0,07	0,08	0,08	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	0,15	0,15	0,24	0,16	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	0,84	
o 5	$\Sigma_1 =$	1 0,3 0,2 0,3 1 0,8 0,2 0,8 1	0,25	0,27	0,23	<u>0,86</u>	<u>0,84</u>	<u>0,93</u>	0,71	<u>0,92</u>	<u>0,83</u>	<u>0,83</u>	0,08	<u>0,84</u>	0,17	0,15	0,07	
o 6	$\Sigma_1 =$	1 0 0 0 1 0,8 0 0,8 1	0,34	0,37	0,33	<u>0,99</u>	<u>0,99</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>0,94</u>	<u>0,94</u>	0,13	<u>0,95</u>	0,49	0,46	0,21	
7	$\Sigma_1 =$	1,2 0,72 0,72 0,72 1,2 0,96 0,72 0,96 1,2	<u>0,38</u>	<u>0,41</u>	<u>0,37</u>	0,17	0,14	0,24	0,20	0,20	0,29	<u>0,30</u>	0,05	<u>0,31</u>	0,17	0,18	0,12	
o 8	$\Sigma_1 =$	1 0,5 0,5 0,5 1 0,5 0,5 0,5 1	0,70	0,72	0,68	<u>0,96</u>	<u>0,96</u>	<u>0,99</u>	<u>0,96</u>	<u>0,98</u>	<u>0,93</u>	<u>0,93</u>	<u>0,89</u>	<u>0,93</u>	0,10	0,09	0,05	
o 9	$\Sigma_1 =$	1 0,3 0,3 0,3 1 0,4 0,3 0,4 1	<u>0,94</u>	<u>0,95</u>	<u>0,93</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	0,33	0,31	0,14	
10	$\Sigma_1 =$	1 0,6 0,6 0,6 4 0,8 0,6 0,8 1	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	0,05	<u>1,00</u>	0,47	0,48	0,28	

Tabela 4.7: Estimativas do Nível de Significância e Poder dos testes -  $p=3$ ,  $n=100$

		n=100																
		Média da proporção de rejeições da hipótese nula																
		DT	DD	DE	RV	RVE	SQ	SHT	SE	AHT	ATH	ANC	AE	TV	TDP	TA		
	$\Sigma_0 =$	1 0,6 0,6 0,6 1 0,8 0,6 0,8 1	0,04	0,04	0,05	0,06	0,05	0,06	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05		
o 1	$\Sigma_1 =$	1 0,7 0,6 0,7 1 0,9 0,6 0,9 1	0,79	0,82	<u>0,90</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>0,98</u>	0,70	<u>0,96</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>0,99</u>	<u>1,00</u>	0,07	0,08	0,06	
o 2	$\Sigma_1 =$	1 -0,6 -0,8 -0,6 1 0,8 -0,8 0,8 1	0,36	0,40	0,54	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	0,67	0,69	0,67	0,70	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	
o * 3	$\Sigma_1 =$	1 0,3 0,2 0,3 1 -0,75 0,2 -0,75 1	0,04	0,05	0,05	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	0,37	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>0,98</u>	
o * 4	$\Sigma_1 =$	2 0 0 0 0,5 0 0 0 0,25	0,10	0,11	0,09	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	0,29	0,32	0,46	0,33	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>0,95</u>	
o 5	$\Sigma_1 =$	1 0,3 0,2 0,3 1 0,8 0,2 0,8 1	0,43	0,44	0,39	<u>0,99</u>	<u>0,99</u>	<u>1,00</u>	<u>0,94</u>	<u>1,00</u>	<u>0,99</u>	<u>0,99</u>	0,12	<u>0,99</u>	0,32	0,30	0,11	
o 6	$\Sigma_1 =$	1 0 0 0 1 0,8 0 0,8 1	0,59	0,60	0,55	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	0,25	<u>1,00</u>	0,82	0,81	0,34	
7	$\Sigma_1 =$	1,2 0,72 0,72 0,72 1,2 0,96 0,72 0,96 1,2	<u>0,64</u>	<u>0,66</u>	<u>0,61</u>	0,33	0,31	0,40	0,31	0,37	0,45	0,50	0,05	0,51	0,28	0,29	0,14	
o 8	$\Sigma_1 =$	1 0,5 0,5 0,5 1 0,5 0,5 0,5 1	<u>0,93</u>	<u>0,94</u>	<u>0,92</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	0,17	0,16	0,07	
o 9	$\Sigma_1 =$	1 0,3 0,3 0,3 1 0,4 0,3 0,4 1	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	0,62	0,61	0,22	
10	$\Sigma_1 =$	1 0,6 0,6 0,6 4 0,8 0,6 0,8 1	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	<u>1,00</u>	0,06	<u>1,00</u>	0,73	0,74	0,36	

Na Tabela 4.8 a situação 1 engloba as matrizes que possuem determinantes similares ou próximos do  $|\Sigma_0|$  (casos 3 e 4), a situação 2 engloba as matrizes que possuem determinantes intermediários (casos 1, 5, 6 e 7), a situação 3 engloba as matrizes que possuem determinantes maiores que o  $|\Sigma_0|$  (casos 8 e 9), a situação 4 engloba a matriz cujo determinante é bem maior que o  $|\Sigma_0|$  (caso 10) e a situação 5 engloba a matriz que carrega informações contrárias a  $\Sigma_0$  (casos 2). Nota-se que o teste de Sullivan et al. exato obteve os maiores valores (mínimo e máximo) de poder em todas as situações, exceto na situação 2, onde obteve valor mínimo de poder inferior (0,02) aos demais testes em estudo. O teste da razão de verossimilhança exata apresentou valores mínimos de poder baixos nas situações 2 e 3 (0,05 e 0,24, respectivamente). Na situação 3 todos os testes apresentaram altos valores máximos de poder exceto os testes da transformação de  $Y$  (máximo=0,62). Em geral, os testes que usam os autovalores apresentaram poder máximo superior aos do teste do determinante exato, em todas as situações.

Tabela 4.8: Estimativas do Poder mínimo e máximo dos testes -  $p=3$ 

Situação		Média da proporção de rejeições da hipótese nula									
		DE	RVE	SE	AHT	ATH	ANC	AE	TV	TDP	TA
1	MIN	0,05	<b>0,88</b>	<b>0,98</b>	0,04	0,03	0,06	0,04	0,35	0,27	0,21
	MAX	0,09	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	0,46	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>0,98</b>
2	MIN	<b>0,09</b>	0,05	0,02	0,04	<b>0,06</b>	0,05	<b>0,09</b>	<b>0,06</b>	0,04	0,04
	MAX	0,90	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>0,99</b>	<b>1,00</b>	0,82	0,81	0,34
3	MIN	0,19	0,24	<b>0,48</b>	0,13	0,13	0,18	0,16	0,05	0,04	0,04
	MAX	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	0,62	0,61	0,22
4	MIN	0,75	<b>0,95</b>	<b>0,97</b>	0,73	0,74	0,05	0,77	0,16	0,17	0,16
	MAX	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	0,06	<b>1,00</b>	0,73	0,74	0,36
5	MIN	0,07	<b>0,97</b>	<b>1,00</b>	0,04	0,05	0,08	0,07	0,69	0,60	0,48
	MAX	0,54	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	0,67	0,69	0,67	0,70	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>	<b>1,00</b>

Percebe-se que o teste de Sullivan et al. exato é o melhor para o caso  $p=3$  variáveis, seguido do teste da razão de verossimilhança exata. Apesar de terem apresentado desempenhos melhores que no caso  $p=2$  variáveis, os testes da transformação de  $Y$ , em geral, resultaram em poderes inferiores em relação aos outros testes, sendo pior que o teste do determinante em alguns casos (1, 7, 8, 9 e 10), situações 2, 3 e 4 na Tabela 4.8 (apresentando poder mínimo=0,05 e máximo=0,82).

Como o cálculo do poder teórico para  $p=3$  variáveis é similar ao que foi mostrado para  $p=2$  no Apêndice B, os resultados desse cálculo não serão mostrados nesta dissertação.

### Conclusões em controle de qualidade sobre o caso $p=3$

Na Tabela 4.9 estão apresentadas as probabilidades de percepção de mudanças dos parâmetros nas  $m=3$  primeiras amostras de cada teste. Para os testes do determinante, da razão de verossimilhança e adaptações de Sullivan et al., foram mostrados apenas os valores para o teste exato, já que, apresentaram um nível de significância diferente (0,03; 0,08 e 0,09, respectivamente) do nível de significância nominal de 5%.

Como ilustração, considere os casos 3, 6 e 10 para  $p=3, n=25$ . Percebe-se que no caso 3, na

Tabela 4.9: Probabilidade de percepção da mudança de parâmetros nas  $m$  primeiras amostras

p=3 - n=25									
Testes	caso 3			caso 6			caso 10		
	m=1	m=2	m=3	m=1	m=2	m=3	m=1	m=2	m=3
<b>DE</b>	0,05	0,10	0,14	0,19	0,34	0,47	0,99	0,99	1,00
<b>RVE</b>	1,00	1,00	1,00	0,84	0,97	1,00	1,00	1,00	1,00
<b>SE</b>	1,00	1,00	1,00	0,93	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
<b>AHT</b>	0,79	0,96	0,99	0,67	0,89	0,96	0,98	1,00	1,00
<b>ATH</b>	0,86	0,98	1,00	0,67	0,89	0,96	0,99	1,00	1,00
<b>ANC</b>	0,12	0,23	0,32	0,08	0,15	0,22	0,05	0,10	0,14
<b>AE</b>	0,88	0,99	1,00	0,69	0,90	0,97	0,99	1,00	1,00
<b>TV</b>	0,93	1,00	1,00	0,24	0,42	0,56	0,28	0,48	0,63
<b>TDP</b>	0,91	0,99	1,00	0,21	0,38	0,51	0,30	0,51	0,66

segunda amostra após a ocorrência da mudança todos são bons testes, com exceção do teste dos autovalores usando o número de condição e do determinante exato. No caso 6, com 2 amostras após a ocorrência da mudança os testes que utilizam os autovalores, exceto o teste que usa o número de condição, são comparáveis com os testes da razão de verossimilhança exata e de Sullivan et al. exato. Nos casos 6 e 10, os testes da transformação de  $Y$  não são bons, pois só irão detectar a mudança com muito atraso.

#### 4.2.2 Análise dos $ARL$ sob controle e fora de controle - $p=3$

Nas Tabelas 4.10 e 4.11 são apresentadas as médias dos  $ARL$  sob controle e fora de controle para cada modelo simulado, para  $p=3$ . Em termos de  $ARL$  sob controle, os testes do determinante tradicional e de Djauhari apresentaram os maiores valores, isso porque têm

um nível de significância estimado igual a 0,02 para  $n=10$ , enquanto que os testes da razão de verossimilhança e de Sullivan et al. adaptado usando a distribuição qui-quadrado apresentaram valores baixos, devido ao fato que para  $n=10$  têm nível de significância estimado igual a 0,14 e não 5%, como deveria ser. Pode-se perceber que os testes de Sullivan et al. exato, da razão de verossimilhança exata e dos autovalores exatos são os mais eficientes, por apresentarem os menores  $ARL$  fora de controle e  $ARL$  sob controle próximo de  $20 = \frac{1}{\alpha}$ . Os testes da transformação de  $Y$  apresentaram  $ARL$  fora de controle elevados em relação aos demais, como no caso  $p=2$  variáveis.

Tabela 4.10: *ARL sob controle e fora de controle* de processos com distribuição normal  $p=3$

<b>n=10</b>											
Testes	ARL sob controle	ARL fora de controle									
		caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6	caso 7	caso 8	caso 9	caso 10
D. Trad	71,94	2204,10	435,78	68,00	48,22	19,54	16,20	15,72	7,14	3,52	1,36
D. Djau	36,74	796,40	204,24	34,42	21,60	12,36	9,60	9,26	4,76	2,80	1,24
D. Ex	19,92	1,08	15,48	20,26	1,64	13,30	10,72	10,16	5,26	2,96	1,28
R. Vero	8,32	2,58	1,00	1,00	1,06	3,10	2,04	8,12	3,32	1,80	1,00
R. Vero Ex	23,16	1,82	1,02	1,00	1,00	5,92	2,70	21,98	5,10	2,86	1,04
Sul. $\chi^2$	6,66	9,02	1,00	1,00	1,00	1,88	1,30	4,74	1,66	1,18	1,00
Sul. HT	7,96	12,88	1,00	1,00	1,02	2,80	1,52	6,90	1,96	1,34	1,04
Sul. Ex	21,96	16,32	1,00	1,00	1,00	3,14	1,76	13,26	2,26	1,48	1,00
Auto HT	29,96	21,04	23,54	3,98	22,98	5,68	4,00	8,72	8,62	3,00	1,48
Auto T <sup>2</sup> H	28,84	15,62	18,30	3,82	26,28	5,50	4,44	9,30	8,10	3,24	1,42
Auto NCond	18,66	1,30	12,58	23,82	4,62	25,54	27,00	18,66	5,80	2,86	21,46
Auto Ex	21,46	7,62	14,34	3,48	14,32	4,88	4,02	7,18	7,42	2,88	1,34
T. Var	18,42	20,50	1,02	1,36	3,06	14,60	9,78	13,54	17,88	11,96	6,20
T. Desv Pad	18,24	27,88	1,04	1,48	3,92	19,88	16,36	13,64	20,88	14,74	5,20
T. Amp	20,44	17,50	2,46	3,70	4,08	26,02	19,86	12,26	26,04	18,74	6,42

<b>n=25</b>											
Testes	ARL sob controle	ARL fora de controle									
		caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6	caso 7	caso 8	caso 9	caso 10
D. Trad	37,44	2948,20	1270,64	37,44	18,96	6,32	5,40	5,00	3,02	1,56	1,02
D. Djau	26,58	276,32	426,58	25,74	14,90	5,74	4,68	4,18	2,28	1,48	1,02
D. Ex	21,30	1,00	5,50	21,22	1,08	6,06	5,14	4,74	3,02	1,56	1,02
R. Vero	12,06	1,58	1,00	1,00	1,00	2,08	1,18	8,78	1,54	1,22	1,00
R. Vero Ex	18,94	1,20	1,00	1,00	1,00	2,20	1,20	11,62	1,60	1,26	1,00
Sul. $\chi^2$	10,90	6,66	1,00	1,00	1,00	1,42	1,04	5,00	1,28	1,16	1,00
Sul. HT	14,08	28,74	1,00	1,00	1,00	2,72	1,14	6,78	1,42	1,28	1,00
Sul. Ex	23,10	1,18	1,00	1,00	1,00	1,74	1,08	9,28	1,32	1,18	1,00
Auto HT	21,72	4,08	11,92	1,24	14,52	1,72	1,32	3,84	2,12	1,24	1,04
Auto T <sup>2</sup> H	25,74	3,72	6,90	1,18	15,54	1,80	1,30	4,90	2,12	1,16	1,00
Auto NCond	17,12	1,00	3,92	7,24	4,36	18,16	16,88	17,12	2,00	1,30	22,86
Auto Ex	20,92	1,62	6,18	1,18	7,24	1,80	1,28	4,28	2,12	1,16	1,00
T. Var	24,12	15,64	1,00	1,02	1,18	11,36	4,60	7,40	17,10	6,10	2,90
T. Desv Pad	25,42	16,24	1,00	1,02	1,28	12,52	5,32	6,92	17,72	6,70	2,54
T. Amp	25,08	22,30	1,02	1,54	1,66	18,52	7,00	9,58	23,70	12,06	4,16

Tabela 4.11: *ARL sob controle e fora de controle* de processos com distribuição normal  $p=3$

<b>n=50</b>											
Testes	ARL sob controle	ARL fora de controle									
		caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6	caso 7	caso 8	caso 9	caso 10
D. Trad	27,90	5,56	17,24	27,62	14,38	4,58	3,36	2,90	1,32	1,04	1,00
D. Djau	23,14	3,48	8,64	22,50	11,82	4,28	2,92	2,66	1,30	1,04	1,00
D. Ex	19,52	1,00	3,48	20,10	1,02	4,70	3,52	3,04	1,36	1,04	1,00
R. Vero	15,00	1,12	1,00	1,00	1,00	1,10	1,00	6,28	1,04	1,02	1,00
R. Vero Ex	17,46	1,02	1,00	1,00	1,00	1,10	1,00	7,22	1,04	1,02	1,00
Sul. $\chi^2$	11,50	2,34	1,00	1,00	1,00	1,06	1,00	4,02	1,02	1,02	1,00
Sul. HT	18,66	7,30	1,00	1,00	1,00	1,42	1,00	5,06	1,06	1,02	1,00
Sul. Ex	16,56	1,00	1,00	1,00	1,00	1,08	1,00	4,78	1,02	1,02	1,00
Auto HT	21,94	1,18	4,04	1,00	6,68	1,16	1,02	4,02	1,12	1,00	1,00
Auto T <sup>2</sup> H	22,62	1,22	3,94	1,00	6,20	1,14	1,02	3,98	1,08	1,02	1,00
Auto NCond	19,56	1,00	2,92	6,66	3,02	12,76	8,36	19,56	1,14	1,02	14,20
Auto Ex	20,44	1,06	3,94	1,00	4,12	1,14	1,02	3,80	1,08	1,00	1,00
T. Var	24,06	13,76	1,00	1,00	1,00	5,86	2,44	6,16	8,74	3,78	2,16
T. Desv Pad	24,96	14,46	1,00	1,00	1,00	6,36	2,52	6,16	9,54	4,22	2,16
T. Amp	21,40	19,40	1,06	1,14	1,12	12,42	3,88	9,14	22,08	8,56	3,70

<b>n=100</b>											
Testes	ARL sob controle	ARL fora de controle									
		caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6	caso 7	caso 8	caso 9	caso 10
D. Trad	19,76	1,18	2,44	19,48	9,60	2,58	1,94	1,84	1,06	1,00	1,00
D. Djau	18,64	1,14	2,28	18,42	8,74	2,50	1,88	1,82	1,06	1,00	1,00
D. Ex	15,08	1,00	1,80	17,04	1,00	3,30	2,10	1,86	1,08	1,00	1,00
R. Vero	21,14	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	3,58	1,00	1,00	1,00
R. Vero Ex	22,76	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	3,62	1,00	1,00	1,00
Sul. $\chi^2$	13,72	1,02	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	2,68	1,00	1,00	1,00
Sul. HT	23,10	1,38	1,00	1,00	1,00	1,02	1,00	3,58	1,00	1,00	1,00
Sul. Ex	17,80	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	2,76	1,00	1,00	1,00
Auto HT	22,22	1,00	1,52	1,00	3,42	1,00	1,00	2,78	1,00	1,00	1,00
Auto T <sup>2</sup> H	22,04	1,00	1,32	1,00	3,18	1,00	1,00	2,46	1,00	1,00	1,00
Auto NCond	20,88	1,00	1,58	2,72	2,18	8,66	3,90	20,88	1,00	1,00	17,60
Auto Ex	21,90	1,00	1,32	1,00	2,34	1,00	1,00	2,26	1,00	1,00	1,00
T. Var	19,58	10,70	1,00	1,00	1,00	4,04	1,16	4,60	7,68	1,52	1,50
T. Desv Pad	19,64	12,12	1,00	1,00	1,00	4,30	1,18	4,38	8,06	1,56	1,48
T. Amp	19,16	11,80	1,00	1,02	1,02	8,64	3,06	7,60	13,44	5,36	3,62

### 4.2.3 Resultados dos testes estatísticos para os processos multi-variados ( $p=5$ )

O modelo usado para simulação sob a hipótese nula é apresentado na Tabela 4.12. Os casos de 1–7, mostrados na Tabela 4.13, foram utilizados nas simulações sob a hipótese alternativa e estão ordenados de acordo com o  $|\Sigma_1|$ . As matrizes de covariâncias nos modelos simulados foram escolhidas de modo que na sua composição se tenha altas correlações, baixas correlações e misturas dessas.

O caso 3 apresenta  $|\Sigma_1| = |\Sigma_0| = 0,04$  e  $tr(\Sigma_1) = tr(\Sigma_0) = 5,00$ , mas a matriz  $\Sigma_1$  apresenta uma mudança na estrutura de correlação em relação a  $\Sigma_0$ . Os casos 4 e 7 também apresentam traços semelhantes,  $tr(\Sigma_1) = tr(\Sigma_0) = 5,00$ , porém no caso 4 as variáveis são correlacionadas e no caso 7 as variáveis são não correlacionadas. A matriz  $\Sigma_1$  dos casos 2 e 6 apresenta uma mudança apenas na estrutura de correlação em relação a  $\Sigma_0$ . Já a matriz  $\Sigma_1$  dos casos 2 e 5 apresenta uma mudança considerável na variabilidade das variáveis em relação a  $\Sigma_0$ .

Cada caso apresentado na Tabela 4.12, representa uma situação onde ocorreram mudanças na matriz de covariâncias que foram divididas em três situações. A primeira representa os casos (2 e 5) onde ocorreram mudanças apenas na estrutura de variabilidade, a segunda representa os casos (3, 4 e 7) onde ocorreram mudanças apenas nas correlações e a terceira sendo os casos (1 e 6) onde ocorreram mudanças nas estruturas de variabilidade e de correlação.

Tabela 4.12: Modelos simulados com  $p=5$  variáveis

Simulação sob a hipótese nula								
	Autovalores		Correlações		$ \Sigma_0 $	Traço	$\sigma_Y^2$	$\kappa_2$
$\Sigma_0 =$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,534 & 0,731 & 0,703 & 0,712 \\ 0,534 & 1 & 0,730 & 0,585 & 0,512 \\ 0,731 & 0,730 & 1 & 0,618 & 0,588 \\ 0,703 & 0,585 & 0,618 & 1 & 0,673 \\ 0,712 & 0,512 & 0,588 & 0,673 & 1 \end{bmatrix}$	$\lambda =$	$\begin{bmatrix} 3,56 \\ 0,60 \\ 0,36 \\ 0,31 \\ 0,17 \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} \rho_{12} = 0,534; & \rho_{13} = 0,731 \\ \rho_{14} = 0,703; & \rho_{15} = 0,712 \\ \rho_{23} = 0,730; & \rho_{24} = 0,585 \\ \rho_{25} = 0,512; & \rho_{34} = 0,618 \\ \rho_{35} = 0,588; & \rho_{45} = 0,673 \end{matrix}$	0,04	5,00	17,77	20,45



Tabela 4.13: Modelos simulados com  $p=5$  variáveis

Simulação sob a hipótese alternativa								
	Caso	Autovalores	Correlações		$ \Sigma_1 $	Traço	$\sigma_Y^2$	$\kappa_2$
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1,16 & 0,42 & 0,85 & 0,82 & 0,83 \\ 0,42 & 1 & 0,55 & 0,68 & 0,59 \\ 0,85 & 0,55 & 1 & 0,62 & 0,68 \\ 0,82 & 0,68 & 0,62 & 1 & 0,67 \\ 0,83 & 0,59 & 0,68 & 0,67 & 1 \end{bmatrix}$	1	$\lambda = \begin{bmatrix} 3,74 \\ 0,69 \\ 0,36 \\ 0,31 \\ 0,08 \end{bmatrix}$	$\rho_{12} = 0,389$ $\rho_{14} = 0,757$ $\rho_{23} = 0,547$ $\rho_{25} = 0,594$ $\rho_{35} = 0,682$	$\rho_{13} = 0,787$ $\rho_{15} = 0,767$ $\rho_{24} = 0,679$ $\rho_{34} = 0,617$ $\rho_{45} = 0,673$	0,02	5,16	18,56	49,48
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0,950 & 0,507 & 0,695 & 0,668 & 0,676 \\ 0,507 & 0,950 & 0,694 & 0,556 & 0,486 \\ 0,695 & 0,694 & 0,950 & 0,587 & 0,559 \\ 0,668 & 0,556 & 0,587 & 0,950 & 0,639 \\ 0,676 & 0,486 & 0,559 & 0,639 & 0,950 \end{bmatrix}$	2	$\lambda = \begin{bmatrix} 3,381 \\ 0,566 \\ 0,340 \\ 0,298 \\ 0,165 \end{bmatrix}$	$\rho_{12} = 0,534$ $\rho_{14} = 0,703$ $\rho_{23} = 0,730$ $\rho_{25} = 0,512$ $\rho_{35} = 0,588$	$\rho_{13} = 0,731$ $\rho_{15} = 0,712$ $\rho_{24} = 0,585$ $\rho_{34} = 0,618$ $\rho_{45} = 0,673$	0,03	4,75	16,88	20,45
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0,5 & 0,3 & 0,3 \\ 0,8 & 1 & 0,5 & 0,6 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 & 1 & 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 0,6 & 0,7 & 1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,3 & 0,6 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$	3	$\lambda = \begin{bmatrix} 3,058 \\ 0,989 \\ 0,546 \\ 0,327 \\ 0,080 \end{bmatrix}$	$\rho_{12} = 0,8$ $\rho_{14} = 0,3$ $\rho_{23} = 0,5$ $\rho_{25} = 0,3$ $\rho_{35} = 0,6$	$\rho_{13} = 0,5$ $\rho_{15} = 0,3$ $\rho_{24} = 0,6$ $\rho_{34} = 0,7$ $\rho_{45} = 0,5$	0,04	5,00	15,20	38,22
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,8 & 1 & 0,5 & 0,6 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 1 & 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 & 0,7 & 1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$	4	$\lambda = \begin{bmatrix} 2,876 \\ 0,980 \\ 0,740 \\ 0,296 \\ 0,107 \end{bmatrix}$	$\rho_{12} = 0,8$ $\rho_{14} = 0,3$ $\rho_{23} = 0,5$ $\rho_{25} = 0,3$ $\rho_{35} = 0,3$	$\rho_{13} = 0,3$ $\rho_{15} = 0,3$ $\rho_{24} = 0,6$ $\rho_{34} = 0,7$ $\rho_{45} = 0,5$	0,07	5,00	14,20	26,77
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1,16 & 0,619 & 0,848 & 0,816 & 0,826 \\ 0,619 & 1,16 & 0,847 & 0,679 & 0,594 \\ 0,848 & 0,847 & 1,16 & 0,717 & 0,682 \\ 0,816 & 0,679 & 0,717 & 1,16 & 0,781 \\ 0,826 & 0,594 & 0,682 & 0,781 & 1,16 \end{bmatrix}$	5	$\lambda = \begin{bmatrix} 4,128 \\ 0,691 \\ 0,415 \\ 0,364 \\ 0,202 \end{bmatrix}$	$\rho_{12} = 0,534$ $\rho_{14} = 0,703$ $\rho_{23} = 0,730$ $\rho_{25} = 0,512$ $\rho_{35} = 0,588$	$\rho_{13} = 0,731$ $\rho_{15} = 0,712$ $\rho_{24} = 0,585$ $\rho_{34} = 0,618$ $\rho_{45} = 0,673$	0,09	5,80	20,62	20,45
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,534 & 0,731 & 0,703 & 0,712 \\ 0,534 & 1 & 0,730 & 0,585 & 0,512 \\ 0,731 & 0,730 & 1 & 0,618 & 0,588 \\ 0,703 & 0,585 & 0,618 & 1 & 0,952 \\ 0,712 & 0,512 & 0,588 & 0,952 & 2 \end{bmatrix}$	6	$\lambda = \begin{bmatrix} 3,948 \\ 1,129 \\ 0,451 \\ 0,295 \\ 0,177 \end{bmatrix}$	$\rho_{12} = 0,534$ $\rho_{14} = 0,703$ $\rho_{23} = 0,730$ $\rho_{25} = 0,362$ $\rho_{35} = 0,416$	$\rho_{13} = 0,731$ $\rho_{15} = 0,504$ $\rho_{24} = 0,585$ $\rho_{34} = 0,618$ $\rho_{45} = 0,673$	0,11	6,00	19,33	22,31
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	7	$\lambda = \begin{bmatrix} 1,00 \\ 1,00 \\ 1,00 \\ 1,00 \\ 1,00 \end{bmatrix}$	$\rho_{12} = 0$ $\rho_{14} = 0$ $\rho_{23} = 0$ $\rho_{25} = 0$ $\rho_{35} = 0$	$\rho_{13} = 0$ $\rho_{15} = 0$ $\rho_{24} = 0$ $\rho_{34} = 0$ $\rho_{45} = 0$	1,00	5,00	5,00	1,00

A Tabela 4.14 apresenta os modelos simulados levando-se em consideração a razão entre os determinantes, os traços, as variâncias da variável  $Y$  e os números de condição sob a hipótese alternativa e sob hipótese nula. Na Tabela 4.15 tem-se a distância de Mahalanobis para os testes de Sullivan et al. e dos autovalores.

Tabela 4.14: Medidas de comparação entre os modelos simulados sob  $H_0$  e  $H_1$  -  $p = 5$

Caso	$ \Sigma_1 / \Sigma_0 $	$tr(\Sigma_1)/tr(\Sigma_0)$	$\sigma_{y1}^2/\sigma_{y0}^2$	$\kappa_{21}/\kappa_{20}$
1	0,50	1,03	1,04	2,42
2	0,75	0,95	0,95	1,00
3	1,00	1,00	0,86	1,87
4	1,75	1,00	0,80	1,31
5	2,25	1,16	1,16	1,00
6	2,75	1,20	1,09	1,09
7	25,00	1,00	0,28	0,05

Tabela 4.15: Distância de Mahalanobis entre os parâmetros em  $H_0$  e  $H_1$  para os testes de Sullivan et al. e dos autovalores -  $p = 5$

Caso	Distância de Mahalanobis							
	Sullivan et al.				Autovalores			
	n=10	n=25	n=50	n=100	n=10	n=25	n=50	n=100
1	5,6370	14,0925	28,1850	56,3700	1,5598	4,1595	8,4923	17,1579
2	0,0641	0,1603	0,3206	0,6411	0,0562	0,1500	0,3062	0,6187
3	84,2342	210,5854	421,1708	842,3417	4,6179	12,3145	25,1420	50,7972
4	102,1448	255,3621	510,7241	$1,0214 \times 10^3$	7,8422	20,9126	42,6966	86,2645
5	0,5934	1,4835	2,9670	5,9341	0,5760	1,5360	3,1360	6,3360
6	11,4582	28,6456	57,2912	114,5825	3,9878	10,6341	21,7112	43,8656
7	157.6014	394.0036	788.0071	$1.5760 \times 10^3$	141.8413	378.2434	772.2470	$1.5603 \times 10^3$

A Tabela 4.16 mostra a proporção média estimada de rejeição da hipótese nula para cada um dos testes tratados nesta dissertação sob a hipótese nula e alternativa. Nesta o sinal “\*” indica as situações simuladas, nas quais, o determinante da matriz de covariâncias sob  $H_0$  é igual ou próximo do determinante sob  $H_1$  e o sinal “o” indica que o traço de  $\Sigma_1$  é igual ou próximo ao traço de  $\Sigma_0$ . Novamente, para amostras de tamanho  $n=10$ , percebe-se que o teste da razão de verossimilhança aproximada pela qui-quadrado e as adaptações propostas para o teste de Sullivan et al. apresentaram uma taxa de rejeição sob  $H_0$  muito acima do valor nominal (mínimo=7% e máximo=30%). Enquanto, os testes do determinante tradicional e proposto por Djauhari apresentaram uma taxa muito abaixo do valor nominal (0,1%), não conseguindo atingir o nível de significância de 5% nem para as amostras de tamanho  $n=100$ .



O teste da razão de verossimilhança aproximada pela distribuição qui-quadrado apresentou uma taxa acima, porém razoável para amostras de tamanho  $n=50$  e  $100$  (7% e 6%, respectivamente). Os testes de Sullivan et al. adaptado usando a distribuição qui-quadrado e as idéias de Hayter e Tsui apresentaram uma taxa razoável apenas para amostras de tamanho  $n=100$  (7%). Assim, apesar de não atingirem o nível de significância de 5%, o teste da razão de verossimilhança aproximado pela qui-quadrado é comparável com os demais para amostras de tamanho  $n=50$  e  $100$ , e as adaptações propostas para o teste de Sullivan et al., somente é comparável para amostras de tamanho  $n=100$ .

É importante salientar que teoricamente um tamanho de amostra  $n=10$  não é adequado para realizar testes multivariados que envolvem a matriz de covariâncias para  $p=5$ . Isso vem do fato que para  $p=5$ , o número de parâmetros envolvidos na estimação da matriz de covariâncias teórica  $\Sigma$  é  $\frac{p(p+1)}{2} = \frac{5(6)}{2} = 15$ , ou seja, seria necessário  $n > 15$  para qualquer estimação. O efeito do tamanho de amostra menor que 15 é maior em testes que usam em sua formulação a inversão da matriz de covariâncias amostral, como o teste da razão de verossimilhança, por exemplo. Deste modo, a inflação do nível de significância para os testes desta natureza já era esperado para  $p=5$ .

O teste dos autovalores usando  $T^2$  de Hotelling apresentou maior poder dentre os demais que utilizam os autovalores, exceto no caso 1, onde percebe-se que o teste dos autovalores usando o número de condição é melhor. O teste dos autovalores usando  $T^2$  de Hotelling apresentou um poder muito próximo do obtido pelo teste exato dos autovalores.

Os testes que utilizam o determinante tiveram o pior desempenho em relação aos outros testes em estudo. Entre eles, como nos casos de  $p=2$  e  $3$ , destacou-se o teste do  $|\Sigma|$  proposto por Djauhari, que com o aumento do tamanho de amostra obteve poderes cada vez mais próximos dos valores obtidos pelo teste do determinante exato. O teste da transformação de  $Y$  quando se usa a variância apresentou um melhor desempenho que os demais testes que usam a transformação, mas permaneceu com poderes baixos em relação aos outros testes tratados nesta dissertação mesmo em casos onde ocorreram grandes mudanças, como em  $p=2$  e  $3$ . A medida que o tamanho de amostra aumenta o poder do teste da razão de verossimilhança se aproxima do poder do teste da razão de verossimilhança exata. No caso

2, os testes não conseguiram perceber a diferenciação da matriz  $\Sigma_1$  porque é igual a  $\Sigma_0$  em termos de correlação, embora sejam diferentes em termos de covariâncias. Os testes de Sullivan et al. exato e da razão de verossimilhança exata apresentam comportamentos muito próximos e são os melhores comparados com os demais testes em estudo, para amostras de tamanho  $n=10$  e  $25$ . Para amostras maiores, os testes da razão de verossimilhança, razão de verossimilhança exata, de Sullivan et al. adaptado usando as idéias de Hayter e Tsui, usando a distribuição qui-quadrado e exato são semelhantes.

A qualidade das aproximações pela distribuição qui-quadrado e pela distribuição normal é influenciada pelo número de variáveis, pois o aumento do número de variáveis afetou drasticamente o nível de significância dos testes que utilizam tais aproximações. Para os testes que usam o determinante o nível de significância estimado ficou muito abaixo de 5% e para os testes da razão de verossimilhança e de Sullivan et al. adaptado ficou muito acima de 5%. Portanto, o uso da distribuição exata nestes casos é essencial quando se tem  $p > 2$  variáveis, já que, é teoricamente mais adequada em relação as aproximações pela distribuição qui-quadrado ou pela distribuição normal.

### **Conclusões em controle de qualidade sobre o caso $p=5$**

Na Tabela 4.17 estão apresentadas as probabilidades de percepção de mudanças dos parâmetros nas  $m=3$  primeiras amostras. Foram mostrados apenas os valores para o teste exato, já que, os testes do determinante, da razão de verossimilhança e adaptações de Sullivan et al. apresentaram um nível de significância diferente (0,02; 0,11 e 0,13, respectivamente) do nível de significância nominal de 5%.

Como ilustração, considere os casos 1, 3 e 6 para  $p=5$ ,  $n=25$ . Nota-se que no caso 1, na terceira amostra após a ocorrência da mudança os testes que usam os autovalores são bons competidores ao teste da razão de verossimilhança exata. Enquanto, nos casos 3 e 5 eles já são comparáveis a partir da segunda amostra, exceto o teste que usa o número de condição, que não é um bom teste para esses casos, pois só vai detectar a mudança com muito atraso.

Quanto maior o número de variáveis envolvidas no processo, maior terá que ser o tamanho de amostra para que se tenha um resultado confiável. Assim, os testes que utilizam os

Tabela 4.17: Probabilidade de percepção da mudança de parâmetros nas  $m$  primeiras amostras

p=5 - n=25									
Testes	caso 1			caso 3			caso 6		
	m=1	m=2	m=3	m=1	m=2	m=3	m=1	m=2	m=3
<b>DE</b>	0,15	0,28	0,39	0,05	0,10	0,14	0,30	0,51	0,66
<b>RVE</b>	0,73	0,93	0,98	1,00	1,00	1,00	0,76	0,94	0,99
<b>SE</b>	0,33	0,55	0,70	1,00	1,00	1,00	0,75	0,94	0,98
<b>AHT</b>	0,31	0,52	0,67	0,59	0,83	0,93	0,62	0,86	0,95
<b>ATH</b>	0,33	0,55	0,70	0,72	0,92	0,98	0,63	0,86	0,95
<b>ANC</b>	0,43	0,68	0,81	0,23	0,41	0,54	0,05	0,10	0,14
<b>AE</b>	0,33	0,55	0,70	0,72	0,92	0,98	0,63	0,86	0,95

autovalores, da razão de verossimilhança exata e de Sullivan et al. exato merecem destaque em termos de implementação, já que, podem ser usados inclusive para amostras pequenas. E também, os testes que usam as idéias de Hayter e Tsui, pois estes mostram os parâmetros que provocaram a mudança.

#### 4.2.4 Análise dos $ARL$ sob controle e fora de controle - p=5

As médias dos  $ARL$  sob controle e fora de controle estão apresentadas nas Tabelas 4.18 e 4.19 de cada modelo simulado, para  $p=5$ . É possível observar, como na análise do poder, que para  $p > 2$  é necessário a utilização da distribuição exata para o determinante, já que, os testes do determinante tradicional e de Djauhari apresentaram valores altíssimos de  $ARL$  sob controle, devido ao fato do nível de significância estimado destes ser muito abaixo do nível de significância de 5% (0,001 e 0,004, respectivamente) para  $n=10$ . Nota-se que os testes da razão de verossimilhança e de Sullivan et al. usando a distribuição qui-quadrado tiveram valores baixos de  $ARL$  sob controle, já que, apresentaram um nível de significância estimado muito acima do valor nominal de 5%, para  $n=10$  têm  $\hat{\alpha}=0,30$  e  $0,23$ , respectivamente. Pode-se perceber que os testes que utilizam a distribuição exata (Sullivan et al., da razão de verossimilhança e dos autovalores) apresentaram menores  $ARL$  fora de controle e  $ARL$  sob controle próximo de  $20 = \frac{1}{\alpha}$ , sendo assim, os mais eficientes. Os testes da transformação de  $Y$  apresentaram  $ARL$  fora de controle elevados em relação aos demais, como no caso  $p=2$  e 3 variáveis.

Tabela 4.18: *ARL sob controle e fora de controle* de processos com distribuição normal  $p=5$

n=10								
Testes	ARL sob controle	ARL fora de controle						
		caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6	caso 7
D. Trad	1024,78	2558,14	2256,26	905,72	251,84	127,08	82,96	2,52
D. Djau	257,12	1932,72	476,40	230,80	85,70	47,12	30,14	1,86
D. Ex	15,98	11,50	14,66	16,58	13,02	8,70	7,70	1,30
R. Vero	3,22	1,62	2,64	1,10	1,10	3,50	1,64	1,00
R. Vero Ex	16,78	4,50	16,16	1,24	1,26	21,14	4,16	1,08
Sul. $\chi^2$	4,06	2,82	4,18	1,10	1,06	3,76	1,94	1,00
Sul. HT	4,86	4,08	4,94	1,58	1,40	4,26	1,98	1,00
Sul. Ex	17,36	7,10	18,26	1,28	1,26	15,34	4,38	1,00
Auto HT	24,72	15,40	30,32	5,24	3,88	10,18	4,16	1,58
Auto T <sup>2</sup> H	19,76	8,38	25,44	3,10	3,26	9,76	3,66	1,52
Auto NCond	16,48	13,46	16,48	16,50	18,74	16,48	19,20	1,74
Auto Ex	19,96	8,90	25,76	3,20	3,46	9,76	4,08	1,52
T. Var	20,92	22,56	24,20	15,64	13,50	13,40	18,30	1,72
T. Desv Pad	20,78	18,24	24,86	22,46	20,00	11,90	15,02	2,14
T. Amp	22,30	17,60	25,86	26,62	22,98	14,18	16,50	2,42

n=25								
Testes	ARL sob controle	ARL fora de controle						
		caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6	caso 7
D. Trad	106,06	2583,02	425,86	98,66	15,26	7,92	5,48	1,00
D. Djau	72,58	1491,46	245,86	64,62	11,54	6,32	3,68	1,00
D. Ex	18,88	6,60	14,70	18,82	7,54	3,94	3,06	1,00
R. Vero	7,98	1,18	7,08	1,00	1,00	6,42	1,18	1,00
R. Vero Ex	24,36	1,52	16,48	1,00	1,00	15,12	1,26	1,00
Sul. $\chi^2$	7,58	1,90	7,56	1,00	1,00	4,18	1,14	1,00
Sul. HT	9,20	2,88	9,74	1,02	1,00	5,92	1,34	1,00
Sul. Ex	21,74	2,90	22,46	1,00	1,00	10,54	1,26	1,00
Auto HT	26,08	3,04	40,96	1,66	1,44	6,66	1,40	1,00
Auto T <sup>2</sup> H	20,18	2,80	22,82	1,40	1,28	5,92	1,46	1,00
Auto NCond	19,76	2,24	19,76	4,48	13,18	19,76	19,24	1,00
Auto Ex	20,18	2,80	22,82	1,40	1,28	5,92	1,46	1,00
T. Var	17,72	16,90	18,48	14,70	10,68	11,30	17,14	1,00
T. Desv Pad	19,74	15,72	18,36	18,66	11,62	10,54	18,04	1,00
T. Amp	24,24	17,76	26,96	24,84	20,88	12,18	16,24	1,04

Tabela 4.19: *ARL sob controle e fora de controle* de processos com distribuição normal  $p=5$

n=50								
Testes	ARL sob controle	ARL fora de controle						
		caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6	caso 7
D. Trad	70,76	2914,86	276,90	46,08	8,38	2,98	2,12	1,00
D. Djau	43,98	47,90	126,00	34,18	6,56	2,68	2,06	1,00
D. Ex	17,74	3,46	13,16	17,86	5,14	2,52	1,98	1,00
R. Vero	18,16	1,00	13,74	1,00	1,00	8,52	1,00	1,00
R. Vero Ex	23,64	1,00	18,94	1,00	1,00	11,28	1,02	1,00
Sul. $\chi^2$	11,62	1,04	10,96	1,00	1,00	4,70	1,00	1,00
Sul. HT	11,86	1,58	11,52	1,00	1,00	6,04	1,04	1,00
Sul. Ex	22,02	1,18	24,50	1,00	1,00	8,22	1,02	1,00
Auto HT	26,70	1,10	37,78	1,02	1,06	4,18	1,10	1,00
Auto T <sup>2</sup> H	20,02	1,20	23,74	1,00	1,00	3,44	1,12	1,00
Auto NCond	20,18	1,20	20,18	1,96	8,26	20,18	22,36	1,00
Auto Ex	19,76	1,18	21,14	1,00	1,00	3,32	1,12	1,00
T. Var	19,42	16,82	20,48	10,68	6,84	6,44	15,10	1,00
T. Desv Pad	19,72	16,64	21,70	11,60	7,56	6,18	13,04	1,00
T. Amp	23,32	20,44	22,30	22,22	16,96	10,66	16,62	1,02

n=100								
Testes	ARL sob controle	ARL fora de controle						
		caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6	caso 7
D. Trad	35,14	3,56	29,18	30,10	3,30	1,62	1,36	1,00
D. Djau	28,42	2,82	14,70	26,52	2,76	1,54	1,30	1,00
D. Ex	19,46	1,94	8,34	16,82	2,68	1,54	1,22	1,00
R. Vero	14,08	1,00	10,56	1,00	1,00	3,74	1,00	1,00
R. Vero Ex	18,40	1,00	14,50	1,00	1,00	4,32	1,00	1,00
Sul. $\chi^2$	10,48	1,00	10,38	1,00	1,00	2,72	1,00	1,00
Sul. HT	12,26	1,18	13,24	1,00	1,00	4,60	1,00	1,00
Sul. Ex	20,12	1,00	17,42	1,00	1,00	3,70	1,00	1,00
Auto HT	18,70	1,00	14,50	1,00	1,00	2,42	1,00	1,00
Auto T <sup>2</sup> H	17,62	1,02	13,12	1,00	1,00	2,30	1,00	1,00
Auto NCond	19,76	1,00	19,76	1,08	3,48	19,76	13,16	1,00
Auto Ex	16,46	1,02	12,14	1,00	1,00	2,30	1,00	1,00
T. Var	16,90	17,94	19,00	6,30	3,68	5,30	11,52	1,00
T. Desv Pad	19,24	16,68	19,42	6,60	3,74	4,82	10,90	1,00
T. Amp	18,34	14,06	20,24	13,54	10,52	8,78	11,24	1,00



## Capítulo 5

# Considerações finais

### 5.1 Comentários gerais sobre os resultados

Durante as simulações realizadas nos processos bivariados, foi possível observar de uma maneira geral, que as adaptações propostas nesta dissertação para o teste de Sullivan et al. se mostraram mais efetivas na percepção de alteração na matriz de covariâncias, sendo mais adequadas para o monitoramento da estrutura de variabilidade de processos multivariados. Verificase que o teste melhorado do  $|\Sigma|$  proposto por Djauhari tem um desempenho melhor que o teste tradicional da variância generalizada, confirmando a afirmação do autor, mas ainda insatisfatório na maioria dos casos em termos de poder. É importante salientar que os resultados obtidos no estudo de simulação, evidenciam a fragilidade do teste da variância generalizada, que ainda é um teste muito utilizado em situações práticas.

O teste da razão de verossimilhança aproximado pela qui-quadrado possui a característica de apresentar as proporções de rejeição da hipótese nula, quando esta é verdadeira, acima do nível de significância nominal especificado para amostras de tamanho  $n=10$ , nos processos bivariados, e para amostras de tamanho  $n=10$  e  $25$ , nos processos com  $p=3$  e  $5$  variáveis. Assim, não é um bom teste para situações onde as amostras são pequenas.

As adaptações propostas para o teste de Sullivan et al. tiveram resultado satisfatório, apresentando os maiores poderes, nos processos simulados com  $p=2$  e 3 variáveis, e resultado insatisfatório para  $p=5$  variáveis, pois as taxas de rejeição da hipótese nula foram muito acima do nível de significância nominal de 5%. Neste caso, o teste de Sullivan et al. exato é o indicado para  $p=5$ .

Os testes fundamentados na transformação da informação da matriz de covariâncias em uma variável univariada  $Y$  tiveram o desempenho melhorado com o aumento do número de variáveis envolvidas no processo ( $p=3$  e 5), porém continuaram não aconselháveis para uso geral. Mas para o caso bivariado, são recomendáveis, embora menos poderoso, para uso em controle de qualidade pela sua facilidade de implementação.

Percebe-se que o aumento do número de variáveis afeta o nível de significância dos testes do determinante, que utiliza a aproximação normal, da razão de verossimilhança e das adaptações do teste de Sullivan et al., que utiliza a aproximação qui-quadrado, sendo fundamental a utilização da distribuição exata, nestes casos.

Os testes que utilizam os autovalores com o aumento do número de variáveis apresentaram poderes cada vez mais superiores em relação aos testes que usam o determinante. Nos casos bivariados, o teste dos autovalores usando o número de condição é mais efetivo, apresentando poderes maiores, que os outros testes que usam os autovalores na detecção de mudanças na matriz de covariâncias, porém os poderes foram inferiores ao teste da razão de verossimilhança e às adaptações propostas nesta dissertação para o teste de Sullivan et al. Nos casos onde ocorrem mudanças apenas na correlação entre as variáveis o teste dos autovalores usando o número de condição apresentou um desempenho superior, exceto no caso 2 para  $p=2$  variáveis, onde ocorreu uma mudança de sinal na correlação entre as variáveis.

Com o intuito de orientar o leitor na escolha de qual teste utilizar, elaboramos os fluxogramas que são apresentados nas Figuras 5.1– 5.3. A situação I representa os casos onde ocorrem mudanças apenas na variância, a situação II onde ocorrem mudanças apenas na correlação e a situação III onde ocorrem mudanças na variância e na correlação. Os casos referentes a cada situação para  $p=2$  variáveis estão descritos na página 46, para  $p=3$  variáveis na página 71 e para  $p=5$  na página 83.

É importante lembrar que o uso dos testes discutidos nesta dissertação é amplo, ou seja, não está restrito apenas a controle de qualidade.

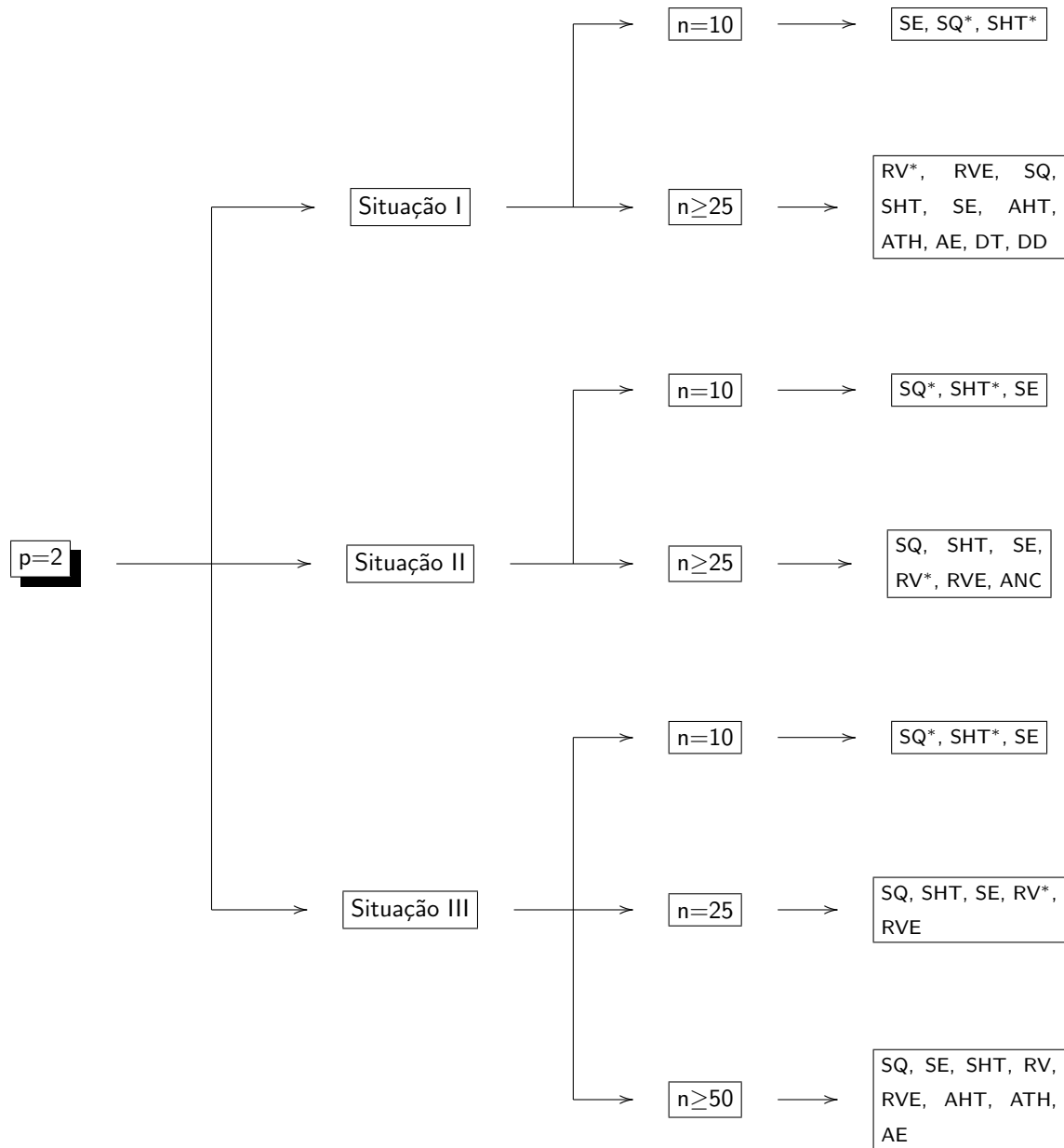


Figura 5.1: Fluxograma de escolha dos testes nos processos bivariados

\* Testes com valor do nível de significância um pouco acima de 5% (aproximadamente 7%)

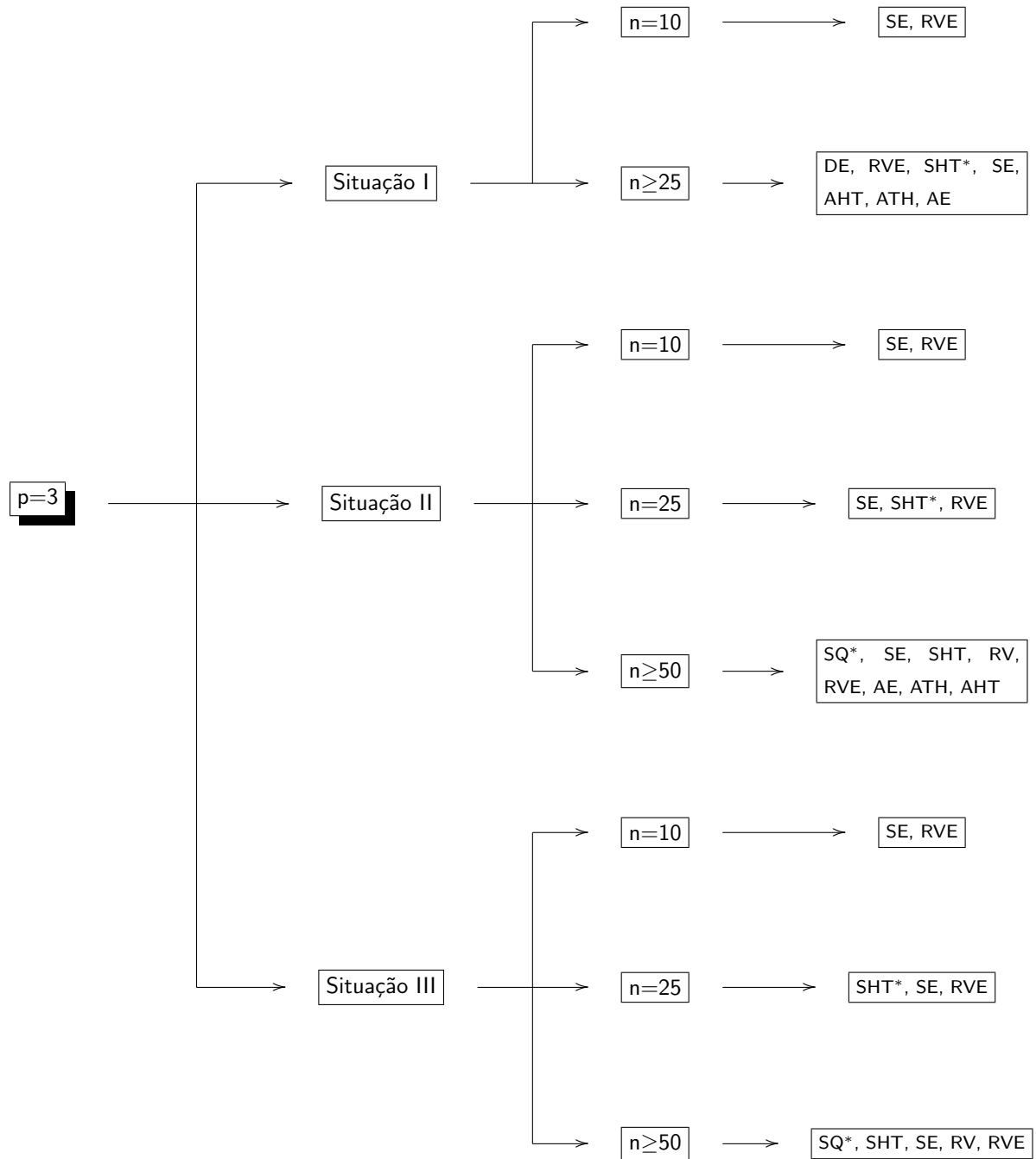


Figura 5.2: Fluxograma de escolha dos testes nos processos multivariados ( $p=3$ )

\* Testes com valor do nível de significância um pouco acima de 5% (aproximadamente 7%)

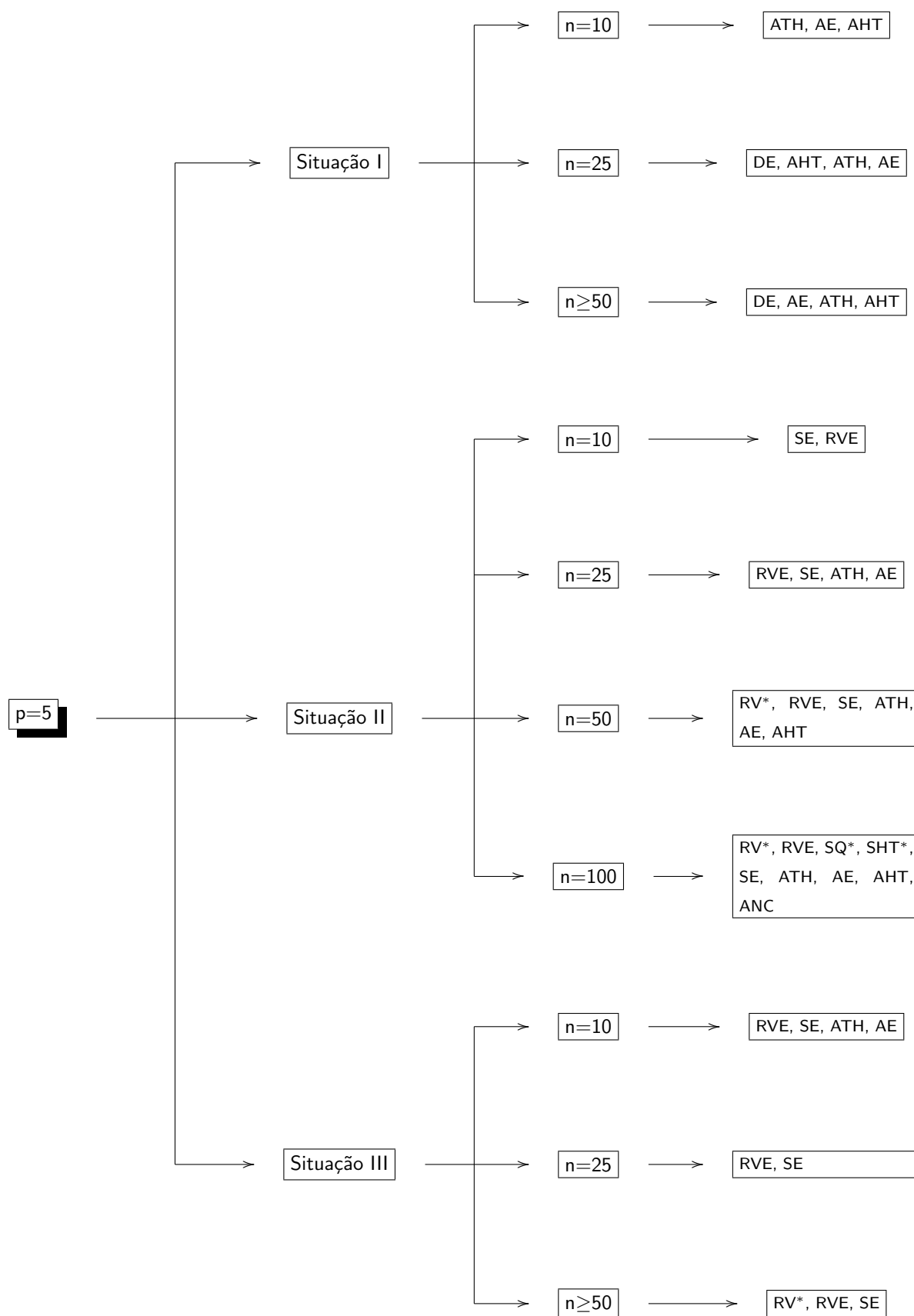


Figura 5.3: Fluxograma de escolha dos testes nos processos multivariados ( $p=5$ )

\* Testes com valor do nível de significância um pouco acima de 5% (aproximadamente 7%)

## 5.2 Propostas para trabalhos futuros

Sugere-se para trabalhos futuros:

- (1) a possibilidade de combinar os testes de modo a obter um de melhor qualidade;
- (2) estudar o comportamento do teste de Sullivan et al. proposto nesta dissertação para os casos em que  $p > 5$  variáveis, já que, aparentemente esse sofre um pouco o efeito do aumento do número de variáveis.
- (3) estudar o efeito da não normalidade nos testes propostos;
- (4) melhorar os testes dos autovalores utilizando a distribuição exata em vez da distribuição normal aproximada e com suposição de independência (Anderson, 2003).

Seria também interessante comparar os melhores testes estudados nesta dissertação com o teste VMAX proposto por Machado et al. (2008).

# Apêndice A

## Tabelas

Tabela A.1: Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis

Observações na amostra	Gráficos para desvio padrão	Gráficos para amplitude	
	$c_4$	$d_2$	$d_3$
2	0,7979	1,128	0,853
3	0,8862	1,693	0,888
4	0,9213	2,059	0,880
5	0,9400	2,326	0,864
6	0,9515	2,534	0,848
7	0,9594	2,704	0,833
8	0,9650	2,847	0,820
9	0,9693	2,970	0,808
10	0,9727	3,078	0,797
11	0,9754	3,173	0,787
12	0,9776	3,258	0,778
13	0,9794	3,336	0,770
14	0,9810	3,407	0,763
15	0,9823	3,472	0,756
16	0,9835	3,532	0,750
17	0,9845	3,588	0,744
18	0,9854	3,640	0,739
19	0,9862	3,689	0,734
20	0,9869	3,735	0,729
21	0,9876	3,778	0,724
22	0,9882	3,819	0,720
23	0,9887	3,858	0,716
24	0,9892	3,895	0,712
25	0,9896	3,931	0,708
Para $n > 25$	$c_4 \cong \frac{4(n-1)}{4n-3}$		

Tabela A.2: Distribuição acumulada da amplitude relativa W

W <sub>0</sub>	n												
	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90	100
1,00	0,0450	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,05	0,0535	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,10	0,0629	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,15	0,0733	0,0016	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,20	0,0847	0,0022	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,25	0,0970	0,0030	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,30	0,1104	0,0041	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,35	0,1247	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,40	0,1400	0,0071	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,45	0,1562	0,0092	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,50	0,1733	0,0117	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,55	0,1913	0,0148	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,60	0,2101	0,0184	0,0014	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,65	0,2296	0,0227	0,0020	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,70	0,2498	0,0278	0,0027	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,75	0,2706	0,0336	0,0037	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,80	0,2920	0,0403	0,0049	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,85	0,3138	0,0479	0,0065	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,90	0,3361	0,0565	0,0084	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,95	0,3587	0,0661	0,0108	0,0017	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,00	0,3816	0,0768	0,0137	0,0023	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,05	0,4046	0,0886	0,0173	0,0032	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,10	0,4277	0,1015	0,0215	0,0043	0,0009	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,15	0,4508	0,1155	0,0265	0,0058	0,0012	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,20	0,4739	0,1307	0,0323	0,0076	0,0018	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,25	0,4969	0,1470	0,0390	0,0099	0,0024	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,30	0,5196	0,1645	0,0468	0,0127	0,0034	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,35	0,5421	0,1829	0,0556	0,0161	0,0045	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,40	0,5643	0,2025	0,0655	0,0202	0,0061	0,0018	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,45	0,5861	0,2229	0,0766	0,0251	0,0080	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,50	0,6075	0,2443	0,0890	0,0309	0,0104	0,0034	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,55	0,6283	0,2665	0,1025	0,0377	0,0135	0,0047	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,60	0,6487	0,2894	0,1174	0,0455	0,0172	0,0063	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,65	0,6685	0,3130	0,1335	0,0545	0,0216	0,0083	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,70	0,6877	0,3372	0,1509	0,0647	0,0270	0,0109	0,0017	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,75	0,7063	0,3617	0,1696	0,0762	0,0333	0,0141	0,0024	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,80	0,7242	0,3867	0,1894	0,0890	0,0407	0,0181	0,0034	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,85	0,7415	0,4119	0,2103	0,1031	0,0492	0,0229	0,0048	0,0009	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2,90	0,7581	0,4372	0,2323	0,1186	0,0590	0,0287	0,0065	0,0014	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
2,95	0,7739	0,4625	0,2553	0,1355	0,0702	0,0355	0,0089	0,0021	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000



Tabela A.3: Distribuição acumulada da amplitude relativa W

W <sub>0</sub>	n												
	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90	100
3,00	0,7891	0,4878	0,2792	0,1538	0,0827	0,0435	0,0119	0,0031	0,0008	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000
3,05	0,8036	0,5129	0,3039	0,1734	0,0966	0,0528	0,0156	0,0045	0,0013	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000
3,10	0,8174	0,5378	0,3292	0,1942	0,1120	0,0634	0,0203	0,0063	0,0019	0,0006	0,0002	0,0001	0,0000
3,15	0,8305	0,5623	0,3551	0,2163	0,1288	0,0754	0,0257	0,0087	0,0029	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000
3,20	0,8429	0,5864	0,3814	0,2396	0,1472	0,0889	0,0323	0,0117	0,0042	0,0015	0,0005	0,0002	0,0001
3,25	0,8546	0,6099	0,4080	0,2638	0,1669	0,1039	0,0399	0,0155	0,0059	0,0022	0,0008	0,0003	0,0001
3,30	0,8657	0,6329	0,4348	0,2890	0,1881	0,1205	0,0488	0,0202	0,0081	0,0032	0,0013	0,0005	0,0002
3,35	0,8761	0,6553	0,4617	0,3150	0,2105	0,1386	0,0591	0,0257	0,0109	0,0046	0,0019	0,0008	0,0003
3,40	0,8859	0,6769	0,4885	0,3417	0,2342	0,1582	0,0710	0,0323	0,0143	0,0063	0,0027	0,0012	0,0005
3,45	0,8951	0,6978	0,5150	0,3688	0,2591	0,1793	0,0844	0,0399	0,0184	0,0084	0,0038	0,0017	0,0008
3,50	0,9037	0,7180	0,5413	0,3964	0,2849	0,2018	0,0995	0,0489	0,0234	0,0111	0,0052	0,0024	0,0011
3,55	0,9117	0,7373	0,5672	0,4242	0,3115	0,2257	0,1162	0,0595	0,0293	0,0144	0,0070	0,0033	0,0016
3,60	0,9192	0,7558	0,5926	0,4522	0,3390	0,2508	0,1346	0,0716	0,0362	0,0183	0,0092	0,0045	0,0022
3,65	0,9261	0,7735	0,6173	0,4801	0,3669	0,2769	0,1547	0,0854	0,0443	0,0232	0,0119	0,0061	0,0031
3,70	0,9326	0,7903	0,6414	0,5078	0,3954	0,3040	0,1764	0,1010	0,0538	0,0290	0,0153	0,0080	0,0041
3,75	0,9386	0,8062	0,6648	0,5352	0,4241	0,3320	0,1996	0,1183	0,0649	0,0360	0,0196	0,0105	0,0056
3,80	0,9441	0,8212	0,6874	0,5623	0,4528	0,3605	0,2242	0,1373	0,0783	0,0444	0,0250	0,0138	0,0076
3,85	0,9493	0,8355	0,7090	0,5887	0,4816	0,3896	0,2502	0,1583	0,0939	0,0545	0,0316	0,0181	0,0102
3,90	0,9540	0,8488	0,7299	0,6146	0,5102	0,4189	0,2774	0,1807	0,1114	0,0665	0,0399	0,0236	0,0139
3,95	0,9583	0,8614	0,7497	0,6397	0,5384	0,4484	0,3055	0,2049	0,1308	0,0807	0,0501	0,0307	0,0187
4,00	0,9623	0,8731	0,7686	0,6640	0,5661	0,4779	0,3345	0,2306	0,1519	0,0972	0,0624	0,0397	0,0251
4,05	0,9660	0,8841	0,7866	0,6874	0,5932	0,5071	0,3643	0,2576	0,1749	0,1157	0,0770	0,0508	0,0334
4,10	0,9693	0,8943	0,8036	0,7099	0,6197	0,5360	0,3945	0,2859	0,1996	0,1363	0,0941	0,0643	0,0438
4,15	0,9724	0,9038	0,8196	0,7315	0,6454	0,5645	0,4250	0,3151	0,2258	0,1588	0,1137	0,0803	0,0565
4,20	0,9752	0,9126	0,8347	0,7520	0,6702	0,5923	0,4556	0,3452	0,2535	0,1830	0,1350	0,0988	0,0718
4,25	0,9777	0,9208	0,8488	0,7715	0,6941	0,6194	0,4861	0,3760	0,2825	0,2090	0,1575	0,1198	0,0897
4,30	0,9800	0,9283	0,8620	0,7899	0,7169	0,6457	0,5164	0,4071	0,3124	0,2364	0,1818	0,1431	0,1099
4,35	0,9821	0,9352	0,8744	0,8074	0,7387	0,6710	0,5462	0,4385	0,3432	0,2654	0,2080	0,1685	0,1325
4,40	0,9840	0,9416	0,8858	0,8237	0,7594	0,6954	0,5755	0,4700	0,3748	0,2954	0,2358	0,1957	0,1572
4,45	0,9857	0,9474	0,8964	0,8391	0,7790	0,7186	0,6040	0,5013	0,4067	0,3265	0,2635	0,2216	0,1836
4,50	0,9873	0,9527	0,9062	0,8534	0,7976	0,7408	0,6317	0,5322	0,4388	0,3584	0,2956	0,2500	0,2114
4,55	0,9887	0,9576	0,9153	0,8668	0,8150	0,7618	0,6585	0,5625	0,4708	0,3907	0,3270	0,2799	0,2405
4,60	0,9899	0,9620	0,9236	0,8792	0,8313	0,7817	0,6842	0,5922	0,5027	0,4234	0,3593	0,3111	0,2705
4,65	0,9911	0,9660	0,9313	0,8906	0,8465	0,8005	0,7088	0,6210	0,5342	0,4561	0,3922	0,3432	0,3012
4,70	0,9921	0,9696	0,9383	0,9012	0,8607	0,8180	0,7322	0,6491	0,5650	0,4887	0,4254	0,3761	0,3326
4,75	0,9930	0,9729	0,9446	0,9110	0,8738	0,8344	0,7545	0,6757	0,5951	0,5208	0,4570	0,4095	0,3645
4,80	0,9938	0,9759	0,9505	0,9199	0,8860	0,8497	0,7754	0,7014	0,6243	0,5524	0,4916	0,4444	0,3968
4,85	0,9945	0,9786	0,9557	0,9281	0,8972	0,8639	0,7952	0,7258	0,6525	0,5833	0,5242	0,4767	0,4294
4,90	0,9952	0,9810	0,9605	0,9356	0,9075	0,8771	0,8137	0,7490	0,6794	0,6132	0,5563	0,5101	0,4622
4,95	0,9958	0,9832	0,9649	0,9425	0,9170	0,8892	0,8310	0,7709	0,7052	0,6421	0,5875	0,5430	0,4951

Tabela A.4: Distribuição acumulada da amplitude relativa W

W <sub>0</sub>	n												
	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90	100
5,00	0,9963	0,9851	0,9688	0,9487	0,9257	0,9004	0,8470	0,7913	0,7297	0,6698	0,6178	0,5752	0,5279
5,05	0,9967	0,9869	0,9723	0,9543	0,9336	0,9106	0,8619	0,8107	0,7528	0,6963	0,6470	0,6079	,5604
5,10	0,9971	0,9884	0,9755	0,9594	0,9407	0,9199	0,8757	0,8286	0,7746	0,7214	0,6734	0,6382	0,5923
5,15	0,9975	0,9898	0,9783	0,9640	0,9472	0,9285	0,8884	0,8453	0,7951	0,7452	0,7017	0,6659	0,6234
5,20	0,9978	0,9911	0,9809	0,9681	0,9531	0,9362	0,9000	0,8608	0,8141	0,7676	0,7270	0,6940	0,6535
5,25	0,9981	0,9922	0,9832	0,9718	0,9584	0,9432	0,9106	0,8750	0,8318	0,7885	0,7509	0,7206	0,6825
5,30	0,9983	0,9931	0,9852	0,9751	0,9632	0,9496	0,9203	0,8880	0,8482	0,8080	0,7734	0,7458	0,7101
5,35	0,9985	0,9940	0,9870	0,9781	0,9675	0,9553	0,9290	0,9001	0,8633	0,8262	0,7945	0,7696	0,7363
5,40	0,9987	0,9948	0,9886	0,9807	0,9713	0,9605	0,9371	0,9107	0,8772	0,8430	0,8140	0,7917	0,7609
5,45	0,9989	0,9954	0,9900	0,9831	0,9747	0,9651	0,9443	0,9208	0,8899	0,8584	0,8321	0,8137	0,7839
5,50	0,9990	0,9960	0,9913	0,9852	0,9778	0,9692	0,9508	0,9299	0,9017	0,8725	0,8487	0,8316	0,8053
5,55	0,9992	0,9965	0,9924	0,9871	0,9805	0,9729	0,9566	0,9381	0,9120	0,8855	0,8625	0,8504	0,8252
5,60	0,9993	0,9970	0,9934	0,9887	0,9830	0,9762	0,9618	0,9454	0,9216	0,8973	0,8781	0,8653	0,8436
5,65	0,9994	0,9974	0,9943	0,9902	0,9851	0,9792	0,9665	0,9520	0,9303	0,9080	0,8909	0,8816	0,8604
5,70	0,9995	0,9977	0,9950	0,9914	0,9870	0,9818	0,9707	0,9580	0,9380	0,9176	0,9025	0,8938	0,8759
5,75	0,9995	0,9980	0,9957	0,9926	0,9887	0,9841	0,9744	0,9633	0,9450	0,9265	0,9131	0,9061	0,8901
5,80	0,9996	0,9983	0,9963	0,9936	0,9902	0,9861	0,9777	0,9681	0,9513	0,9344	0,9227	0,9175	0,9030
5,85	0,9997	0,9985	0,9968	0,9944	0,9915	0,9879	0,9806	0,9722	0,9569	0,9415	0,9313	0,9275	0,9147
5,90	0,9997	0,9988	0,9972	0,9952	0,9926	0,9895	0,9832	0,9739	0,9599	0,9478	0,9390	0,9380	0,9253
5,95	0,9997	0,9989	0,9976	0,9958	0,9936	0,9908	0,9855	0,9791	0,9663	0,9534	0,9459	0,9449	0,9349
6,00	0,9998	0,9991	0,9979	0,9964	0,9945	0,9920	0,9874	0,9821	0,9702	0,9585	0,9521	0,9524	0,9435
6,05	0,9998	0,9992	0,9982	0,9969	0,9952	0,9931	0,9892	0,9846	0,9737	0,9629	0,9576	0,9589	0,9512
6,10	0,9998	0,9993	0,9985	0,9974	0,9959	0,9940	0,9907	0,9870	0,9768	0,9669	0,9625	0,9647	0,9581
6,15	0,9999	0,9994	0,9987	0,9977	0,9965	0,9948	0,9921	0,9889	0,9795	0,9703	0,9667	0,9712	0,9642
6,20	0,9999	0,9995	0,9989	0,9981	0,9970	0,9955	0,9933	0,9907	0,9818	0,9734	0,9706	0,9745	0,9696
6,25	0,9999	0,9996	0,9990	0,9984	0,9974	0,9961	0,9943	0,9922	0,9839	0,9743	0,9724	0,9786	0,9744
6,30	0,9999	0,9996	0,9992	0,9986	0,9978	0,9966	0,9951	0,9935	0,9857	0,9784	0,9768	0,9822	0,9786
6,35	0,9999	0,9997	0,9993	0,9988	0,9981	0,9971	0,9959	0,9946	0,9873	0,9805	0,9794	0,9852	0,9823
6,40	0,9999	0,9997	0,9994	0,9990	0,9984	0,9975	0,9966	0,9956	0,9886	0,9822	0,9816	0,9879	0,9855
6,45	0,9999	0,9998	0,9995	0,9991	0,9986	0,9978	0,9971	0,9965	0,9900	0,9820	0,9823	0,9903	0,9884
6,50	1,0000	0,9998	0,9996	0,9993	0,9988	0,9981	0,9977	0,9972	0,9908	0,9851	0,9853	0,9924	0,9909
6,55	1,0000	0,9998	0,9996	0,9994	0,9990	0,9984	0,9981	0,9979	0,9918	0,9863	0,9867	0,9943	0,9930
6,60	1,0000	0,9999	0,9997	0,9995	0,9991	0,9986	0,9984	0,9984	0,9925	0,9873	0,9864	0,9956	0,9949
6,65	1,0000	0,9999	0,9997	0,9996	0,9993	0,9987	0,9987	0,9989	0,9932	0,9881	0,9891	0,9971	0,9965
6,70	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9994	0,9989	0,9990	0,9992	0,9937	0,9889	0,9901	0,9984	0,9979
6,75	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9995	0,9990	0,9992	0,9997	0,9942	0,9895	0,9909	1,0000	0,9991
6,80	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9995	0,9992	0,9994	0,9999	0,9946	0,9901	0,9916	1,0000	1,0000
6,85	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9992	0,9996	1,0000	0,9950	0,9906	0,9922	1,0000	1,0000
6,90	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9993	0,9998	1,0000	0,9953	0,9910	0,9927	1,0000	1,0000
6,95	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9994	0,9999	1,0000	0,9956	0,9913	0,9932	1,0000	1,0000
7,00	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9995	1,0000	1,0000	0,9958	0,9916	0,9935	1,0000	1,0000

## Apêndice B

### Poder teórico

#### B.1. Poder teórico para adaptação do teste $T^2$ de Hotelling para autovalores $\Sigma$

Seja  $T^2 = (\hat{\lambda} - \lambda_0)' \Sigma^{-1} (\hat{\lambda} - \lambda_0)$ . Se  $H_0: \lambda = \lambda_0$  vs  $H_1: \lambda \neq \lambda_0$ , onde  $\lambda_0 = (\lambda_{10}, \dots, \lambda_{p0})'$  é o vetor que contém os autovalores teóricos de  $\Sigma_{p \times p}$ ,  $\lambda_{10} \geq \lambda_{20} \geq \dots \geq \lambda_{p0}$ .

$T^2$  é uma forma quadrática com  $A = \Sigma^{-1}$ ,  $\text{posto}(A)=p$ ,  $A\Sigma A = \Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1} = \Sigma^{-1} = A$  ou  $A\Sigma$  é idempotente, logo, sob  $H_0$ ,  $T^2 = (\hat{\lambda} - \lambda_0)' \Sigma^{-1} (\hat{\lambda} - \lambda_0) \sim \chi_p^2$ .

Seja  $c$  o valor crítico, tal que,  $P[T^2 > c | H_0] = \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Seja  $H_1: \lambda = \lambda^* = \lambda_0 + d$ ;  $d = (d_1, \dots, d_p)'$ .

$X \sim N_p(0, \Sigma_1)$ . Então, o poder do teste será dado por:

$P[(\hat{\lambda} - \lambda_0)' \Sigma^{-1} (\hat{\lambda} - \lambda_0) > c | X \sim N_p(0, \Sigma_1); \lambda^*]$ . Mas

$$T^2 = (\hat{\lambda}^* - \lambda_0)' \Sigma^{-1} (\hat{\lambda}^* - \lambda_0) \sim \chi_{p,\lambda}^2, \text{ onde } \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{2\lambda_{10}^2} & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{2\lambda_{20}^2} \end{bmatrix},$$

$p = \text{posto}(\Sigma_1)$  - graus de liberdade - e  $\lambda = d' \Sigma^{-1} d$  é o parâmetro de não centralidade.

#### B.2. Poder teórico para o teste de Sullivan adaptado usando a distribuição qui-quadrado

Seja  $\chi^2 = (\hat{\theta} - \theta_0)' \Sigma^{-1} (\hat{\theta} - \theta_0)$ , onde  $\theta = (\sigma_1, \rho_{12}, \sigma_2)'$ . Se  $H_0: \theta = \theta_0$  vs  $H_1: \theta \neq \theta_0$   $\chi^2$  é uma forma quadrática com  $A = \Sigma^{-1}$ ,  $\text{posto}(A)=k$ ,  $A\Sigma A = \Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1} = \Sigma^{-1} = A$  ou

$A\Sigma$  é idempotente, logo,  $\chi^2 = (\hat{\theta} - \theta_0)' \Sigma^{-1} (\hat{\theta} - \theta_0) \sim \chi_k^2$ .

Seja  $c$  o valor crítico, tal que,  $P[\chi^2 > c \mid H_0] = \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Seja  $H_1: \theta = \theta^* = \theta_0 + d; d = (d_1, d_2, \dots, d_{p(p+1)/2})'$ .

$X \sim N_p(0, \Sigma_1)$ . Então, o poder do teste será dado por:

$P[(\hat{\theta} - \theta_0)' \Sigma^{-1} (\hat{\theta} - \theta_0) > c \mid X \sim N_p(0, \Sigma_1); \theta^*]$

$\chi^2 = (\hat{\theta}^* - \theta_0)' \Sigma^{-1} (\hat{\theta}^* - \theta_0) \sim \chi_{p, \lambda}^2$ , onde  $p = \text{posto}(\Sigma_1)$  - graus de liberdade -,  $\lambda = d' \Sigma^{-1} d$  é

o parâmetro de não centralidade e  $\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{2n} & -\frac{\rho_{12}(\rho_{12}^2-1)\sigma_1}{2n} & \frac{\rho_{12}^2\sigma_1\sigma_2}{2n} \\ -\frac{\rho_{12}(\rho_{12}^2-1)\sigma_1}{2n} & \frac{(\rho_{12}^2-1)^2}{n} & -\frac{\rho_{12}(\rho_{12}^2-1)\sigma_2}{2n} \\ \frac{\rho_{12}^2\sigma_1\sigma_2}{2n} & -\frac{\rho_{12}(\rho_{12}^2-1)\sigma_2}{2n} & \frac{\sigma_2^2}{2n} \end{bmatrix}$ .

### B.3. Poder teórico para transformação da informação contida na matriz de covariâncias para uma variável univariada

#### a) Variância de $Y$ ( $\sigma_Y^2$ )

Seja  $H_0: \sigma_Y^2 = \sigma_{Y0}^2$  vs  $H_1: \sigma_Y^2 \neq \sigma_{Y0}^2$

Sob  $H_0$ ,  $P[s_Y^2 > c_2] + P[s_Y^2 < c_1] = \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$

$$P\left[\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_0^2} > \frac{(n-1)c_2}{\sigma_0^2}\right] + P\left[\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_0^2} < \frac{(n-1)c_1}{\sigma_0^2}\right]$$

$$P\left[\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_0^2} > \frac{(n-1)c_2}{\sigma_0^2} \mid X \sim N(0; \sigma_Y^2)\right] + P\left[\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_0^2} < \frac{(n-1)c_1}{\sigma_0^2} \mid X \sim N(0; \sigma_Y^2)\right]$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

$$\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_1^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{\sigma_1^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Sob  $H_1$ , o poder do teste é igual a  $P\left[\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_1^2} > \frac{(n-1)c_2}{\sigma_1^2}\right] + P\left[\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_1^2} < \frac{(n-1)c_1}{\sigma_1^2}\right]$

$$c_2 = \text{LSC} = \frac{\sigma_0^2 \chi_{1-\alpha/2; n-1}^2}{\sigma_1^2} \quad \text{e} \quad c_1 = \text{LIC} = \frac{\sigma_0^2 \chi_{\alpha/2; n-1}^2}{\sigma_1^2}$$

$$= P\left[\chi_{n-1}^2 > \frac{\sigma_0^2 \chi_{1-\alpha/2; n-1}^2}{\sigma_1^2}\right] + P\left[\chi_{n-1}^2 < \frac{\sigma_0^2 \chi_{\alpha/2; n-1}^2}{\sigma_1^2}\right]$$

$$\sigma_1^2 = \lambda \sigma_0^2, \quad \text{logo,} \quad \lambda = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}$$

$$= P\left[\chi_{n-1}^2 > \frac{\chi_{1-\alpha/2; n-1}^2}{\lambda}\right] + P\left[\chi_{n-1}^2 < \frac{\chi_{\alpha/2; n-1}^2}{\lambda}\right]$$

**b) Desvio padrão de Y ( $\sigma_Y$ )**

Seja  $H_0: \sigma_Y = \sigma_{Y0}$  vs  $H_1: \sigma_Y \neq \sigma_{Y0}$

**b.1) usando o desvio padrão amostral**

Sob  $H_0$ ,  $P[s_Y > LSC] + P[s_Y < LIC] = \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$

$$s_Y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$P[s_Y^2 > LSC^2] + P[s_Y^2 < LIC^2] = \alpha$$

$$\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

$$P\left[\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_0^2} > \frac{(n-1)c_2^2}{\sigma_0^2} \mid X \sim N(0; \sigma_Y^2)\right] + P\left[\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_0^2} < \frac{(n-1)c_1^2}{\sigma_0^2} \mid X \sim N(0; \sigma_Y^2)\right]$$

$$\text{Sob } H_1, \text{ o poder do teste é dado por } P\left[\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_1^2} > \frac{(n-1)c_2^2}{\sigma_1^2}\right] + P\left[\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_1^2} < \frac{(n-1)c_1^2}{\sigma_1^2}\right]$$

$$c_2 = LSC = c_4\sigma_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{1-c_4^2}\sigma_0 = \sigma_0(c_4 + z_{\alpha/2}\sqrt{1-c_4^2}), \text{ logo, } c_2^2 = \sigma_0^2(c_4 + z_{\alpha/2}\sqrt{1-c_4^2})^2$$

$$c_1 = LIC = c_4\sigma_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{1-c_4^2}\sigma_0 = \sigma_0(c_4 - z_{\alpha/2}\sqrt{1-c_4^2}), \text{ logo, } c_1^2 = \sigma_0^2(c_4 - z_{\alpha/2}\sqrt{1-c_4^2})^2$$

$$= P\left[\chi_{n-1}^2 > \frac{(n-1)\sigma_0^2(c_4 + z_{\alpha/2}\sqrt{1-c_4^2})^2}{\sigma_1^2}\right] + P\left[\chi_{n-1}^2 < \frac{(n-1)\sigma_0^2(c_4 - z_{\alpha/2}\sqrt{1-c_4^2})^2}{\sigma_1^2}\right]$$

$$\sigma_1^2 = \lambda\sigma_0^2, \text{ logo, } \lambda = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}$$

$$= P\left[\chi_{n-1}^2 > \frac{(n-1)(c_4 + z_{\alpha/2}\sqrt{1-c_4^2})^2}{\lambda}\right] + P\left[\chi_{n-1}^2 < \frac{(n-1)(c_4 - z_{\alpha/2}\sqrt{1-c_4^2})^2}{\lambda}\right]$$

**b.2) usando a amplitude amostral (R)**

Sob  $H_0$ ,  $P[R < c_1] + P[R > c_2] = P\left[\frac{R}{\sigma} < \frac{c_1}{\sigma}\right] + P\left[\frac{R}{\sigma} > \frac{c_2}{\sigma}\right] = \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , sendo

$$c_1 = LIC = (d_2 - z_{\alpha/2}d_3)\sigma_0$$

$$c_2 = LSC = (d_2 + z_{\alpha/2}d_3)\sigma_0$$

$$\text{Sob } H_1, \text{ Poder do teste} = P\left[\frac{R}{\sigma_1} < \frac{(d_2 - z_{\alpha/2}d_3)\sigma_0}{\sigma_1}\right] + P\left[\frac{R}{\sigma_1} > \frac{(d_2 + z_{\alpha/2}d_3)\sigma_0}{\sigma_1}\right]$$

$$\sigma_1 = \lambda\sigma_0, \text{ logo, } \lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$$

$$= P\left[W < \frac{(d_2 - z_{\alpha/2}d_3)}{\lambda}\right] + P\left[W > \frac{(d_2 + z_{\alpha/2}d_3)}{\lambda}\right]$$

## Apêndice C

# Processos bivariados - n=5

Tabela C.1: Estimativas do Nível de Significância e Poder dos testes - p=2; n=5

		n=5																
		Média da proporção de rejeições da hipótese nula																
		DT	DD	DE	RV	RVE	SQ	SHT	SE	AHT	ATH	ANC	AE	TV	TDP	TA		
	$\Sigma_0 =$	2,32	0,40															
		0,40	0,50															
o 1	$\Sigma_1 =$	2,32	0,65															
		0,65	0,50															
o * 2	$\Sigma_1 =$	2,32	-0,40															
		-0,40	0,50															
* 3	$\Sigma_1 =$	1	0															
		0	1															
* 4	$\Sigma_1 =$	2,32	0,90															
		0,90	0,80															
o * 5	$\Sigma_1 =$	2,32	0,30															
		0,30	0,50															
o 6	$\Sigma_1 =$	2,32	0,45															
		0,45	0,63															
7	$\Sigma_1 =$	2,32	0,50															
		0,50	0,75															
8	$\Sigma_1 =$	2,32	0,57															
		0,57	1,00															
9	$\Sigma_1 =$	2,32	0,80															
		0,80	2,00															

Tabela C.2: *ARL sob controle e fora de controle* de processos com distribuição normal bivariada

Testes	n=5									
	<i>ARL sob controle</i>	<i>ARL fora de controle</i>								
		caso 1	caso 2	caso 3	caso 4	caso 5	caso 6	caso 7	caso 8	caso 9
D. Trad	37,34	100,76	37,34	37,34	31,82	31,82	22,68	14,40	9,64	2,94
D. Djau	17,62	37,88	17,62	17,62	14,66	14,66	12,28	9,60	5,94	2,14
D. Ex	17,82	17,90	17,82	17,82	17,26	17,32	13,18	10,78	8,34	2,54
R. Vero	5,38	4,02	2,66	2,60	4,22	4,68	6,54	5,38	4,72	1,94
R. Vero Ex	21,26	14,00	5,34	5,32	15,56	21,64	20,82	21,08	11,34	3,02
Sul. $\chi^2$	9,46	14,94	2,08	2,18	7,32	6,52	7,02	5,72	3,84	1,52
Sul. HT	9,14	16,40	2,34	2,70	6,94	7,58	7,14	6,38	3,36	1,54
Sul. Ex	25,14	39,48	2,90	2,96	13,84	15,52	14,84	10,76	5,58	1,68
Auto HT	17,72	21,10	21,10	24,68	13,86	16,38	12,92	10,78	8,08	3,32
Auto T <sup>2</sup> H	21,30	19,80	20,08	28,94	13,86	19,68	15,20	12,78	8,70	3,30
Auto NCond	17,16	17,14	19,14	12,64	18,86	16,46	13,80	14,46	14,70	14,98
Auto Ex	17,22	18,66	19,46	26,40	12,40	17,80	13,82	10,30	7,82	2,98
T. Var	21,32	14,70	19,90	16,80	8,44	20,40	18,20	16,22	11,76	5,92
T. Desv Pad	19,76	13,50	37,60	40,32	8,48	27,32	16,76	14,92	10,44	5,32
T. Amp	19,04	13,08	43,28	46,68	7,26	25,16	16,82	13,04	9,94	5,42

# Referências Bibliográficas

- Alt, F. (1985). Multivariate quality control. in: Johnson, n. l. e kotz, s., ed., *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Wiley .
- Anderson, T. W. (1958). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, New York: John Wiley.
- Anderson, T. W. (2003). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, New York: John Wiley.
- Aparisi, F., Jabaioyes, J. & Carrion, A. (1999). Statistical propertis of the  $|s|$  multivariate control chart, *Communication in Statistics - Theory and Methods* **28**(11): 2671–2686.
- Beyer, W. H. (1978). *Standard Mathematical Tables*, West Palm Beach: CRC.
- Bonferroni, C. E. (1936). Teoria statistica delle classi e calcolo delle probabilità, *Pubblicazioni del R Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Firenze* (8): 3–62.
- Campos, filho, F. F. (2007). *Algoritmos numéricos*, Rio de Janeiro: LTC.
- Casella, G. & Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference*, Australia; Pacific Grove, CA: Duxbury: Thomson Learning Academic Resource Center.
- Chang, I. & Zhang, K. (2007). Statistical process control for variance shift detections of multivariate autocorrelated processes, *Quality Technology et. Quantitative Management* **4**(3): 413–435.
- Costa, A. F. B., Epprecht, E. K. & Carpinetti, L. C. R. (2005). *Controle estatístico de qualidade*, São Paulo: Atlas.



- Costa, M., Barreto, S. & Giatti, L. (2003). Condições de saúde, capacidade funcional, uso de serviços de saúde e gastos com medicamentos da população idosa brasileira: um estudo descritivo baseado na pesquisa nacional por amostra de domicílio, *Cadernos de saúde pública* **19**(3).
- Djauhari, M. A. (2005). Improved monitoring of multivariate process variability, *Journal of Quality Technology* **37**(1): 32–39.
- Greene, W. H. (1997). *Econometric analysis*, Upper Saddle River: Prentice-Hall.
- Grigoryan, A. & He, D. (2005). Multivariate double sampling  $|s|$  charts for controlling process variability, *International Journal of Production Research* **43**(4): 715–730.
- Hayter, A. J. & Tsui, K.-L. (1994). Identification and quantification in multivariate quality control problems, *Journal of Quality Technology* **26**(3): 197–208.
- Hotelling, H. (1947). *Multivariate Quality Control*, New York: McGraw-Hill.
- Johnson, R. A. & Wichern, W. D. (2002). *Applied Multivariate Statistical Analysis*, New Jersey: Prentice Hall.
- Korin, B. P. (1968). On the distribution of a statistic used for testing a covariance matrix, *Biometrika* **55**(1): 171–178.
- Lehmann, E. L. & Casella, G. (1999). *Theory of Point Estimation*, New York: Springer.
- Lima, A. M. C. & Issler, J. V. (2003). A hipótese das expectativas na estrutura a termo de juros no brasil: uma aplicação de modelos de valor presente, *Revista brasileira de economia* **57**(4).
- Machado, M. A. G., Magalhães, M. S. & Costa, A. F. B. (2008). Gráfico de controle v<sub>max</sub> para o monitoramento da matriz de covariâncias, *Produção*. **18**(2): 222–239.
- Mingoti, S. A. & Glória, F. A. A. (2005). Comparando os métodos paramétrico e não-paramétrico na determinação do valor crítico do teste estatístico de médias proposto por hayter e tsui, *Revista Produção* **15**(2): 251–262.
- Montgomery, D. C. (2004). *Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade*, Rio de Janeiro: LTC.

- Morrison, D. F. (1976). *Multivariate Statistical Methods*, New York: McGraw-Hill.
- Ramirez, E. F. F. & Calil, S. J. (2004). Análise da aquisição de equipamentos médicos utilizando redes neurais artificiais, *Anais IX congresso brasileiro de informática em saúde*.
- Seber, G. A. F. (1984). *Multivariate observations*, New York: John Wiley.
- Shapiro, S. S. & Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples), *Biometrika* **52**: 591–609.
- Shewhart, W. A. (1926). Quality control charts, *Bell System Technical Journal* .
- Silva, R. A. & Mingoti, S. (2008). Estudos de testes estatísticos para matriz de covariâncias de processos multivariados, *Relatório técnico de iniciação científica para fapemig/ prpf*, Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG.
- Souza, A. M. & Rigão, M. H. (2005). Identificação de variáveis fora de controle em processos produtivos multivariados, *Revista Produção* **15**(1): 74–86.
- Sullivan, J. H., Stoumbos, Z. G., Mason, R. L. & Young, J. C. (2007). Step-down analysis for change in the covariance matrix and other parameters, *Journal of Quality Technology* **39**(1): 66–84.
- Teruiya, R. K., Paradella, W. R., Santos, A. R., Veneziani, P. & Cunha, E. R. S. P. (2001). Análise de produtos integrados utilizando imagens tm-landsat, sarex e dados aerogamaespectrométricos no reconhecimento geológico do granito cigano, província mineral de carajás, pa, *Anais X SBSR*, Foz do Iguaçu, 21-26 Abril 2001. INPE.
- Timm, N. H. (2002). *Applied Multivariate Analysis*, New York: Springer Verlag.
- Yeh, A. B., Huwang, L. & Wu, Y.-F. (2004). A likelihood-ratio-based ewma control chart for monitoring variability of multivariate normal processes, *IIE Transactions* **36**: 865–879.
- Yeh, A. B., Lin, D. K. J. & Mcgrath, R. N. (2006). Multivariate control charts for monitoring covariance matrix: A review, *Quality Technology et. Quantitative Management* **3**(4): 415–436.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)