



**COPPE/UFRJ**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE VIGAS SANDUÍCHE COM  
MÚLTIPLAS CAMADAS**

Flávia Carolina Leite Borges

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: Ney Roitman

Carlos Magluta

Rio de Janeiro

Abril de 2010

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE VIGAS SANDUÍCHE COM  
MÚLTIPLAS CAMADAS

Flávia Carolina Leite Borges

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO  
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:

---

Prof. Ney Roitman, D. Sc.

---

Prof. Carlos Magluta, D. Sc.

---

Eng. Ricardo Franciss, D. Sc.

---

Prof. Daniel Alves Castello, D. Sc.

---

Prof. José Antônio Fontes Santiago, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL.

ABRIL DE 2010

Flávia Carolina Leite Borges

Análise do Comportamento Dinâmico de Vigas  
Sanduíche com Múltiplas Camadas / Flávia Carolina Leite  
Borges. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

XIV, 92 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Ney Roitman

Carlos Magluta

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de  
Engenharia Civil, 2010.

Referencias Bibliográficas: p. 70-72.

1. Viga Sanduíche. 2. Parâmetros Modais. 3.  
Estruturas *Offshore*. I. Ney Roitman., *et al.* II.  
Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE,  
Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*“Nós somos aquilo que fazemos repetidas vezes, repetidamente. A Excelência, portanto  
não é um feito, mas um hábito”*

*Aristóteles*

*Aos meus pais, Ivo e Ceiza.*

*Ao Fred, por todo apoio.*

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais e ao Fred por todo apoio, incentivo e por realmente acreditarem em mim e em meus sonhos. Obrigada por ajudarem a torná-lo realidade.

Aos “pacientíssimos” orientadores, Ney e Magluta. Acho que vocês sabem como são importantes pra mim e como me ajudaram nesse caminho.

À minha família e meus amigos por estarem sempre presentes e na torcida.

Às “Queriiiiiiidas”, Lu, Michelle, Rosana, Alinha, Vanessa, Ana, Jessick e em especial Tatá.

Aos meninos, Hector, Diego T., Bruno, Nelson e Anderson, sempre dispostos a dar qualquer ajuda.

Ao Flavio e ao Arthur pela paciência durante os ensaios. Muito obrigada.

Aos professores sempre presentes.

Aos funcionários do LADEPIS e da COPPE pela ajuda.

À ANP pelo apoio financeiro.

A todos que de alguma forma contribuíram para que esse sonho se realizasse, muito obrigada.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

## ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE VIGAS SANDUÍCHE COM MÚLTIPLAS CAMADAS

Flávia Carolina Leite Borges

Abril/2010

Orientadores: Ney Roitman

Carlos Magluta

Programa: Engenharia Civil

Novas tecnologias têm sido desenvolvidas na engenharia, surgindo tipos de estruturas cada vez mais sofisticadas, com processos estruturais e construtivos de grande complexidade. No caso de estruturas offshore, o avanço tecnológico está associado à exploração em águas cada vez mais profundas, tornando-se necessário o conhecimento do comportamento dinâmico de tais estruturas e, portanto, dos parâmetros modais a serem utilizados, a fim de que se tenha um projeto adequado.

Esta pesquisa tem como objetivo o desenvolvimento de um modelo analítico para estimar frequências naturais e taxas de amortecimento estrutural de vigas sanduíche com múltiplas camadas onde os resultados serão avaliados através de testes experimentais em estruturas simples realizados em laboratório. Também serão apresentados como foi realizada a caracterização do material viscoelástico e os resultados de uma análise paramétrica, obtidos a partir do modelo analítico, onde são variadas as características físicas do material viscoelástico (MVE) e as espessuras das camadas de restrição e do MVE. Espera-se que com o aumento da taxa de amortecimento haja redução dos níveis de vibração e com isso as estruturas submetidas a vibrações tenham sua vida útil alongada, como é o caso dos risers.



Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

## DYNAMIC BEHAVIOR ANALYSIS OF MULTIPLE LAYERED SANDWICH BEAMS

Flávia Carolina Leite Borges

April / 2010

Advisors: Ney Roitman

Carlos Magluta

Department: Civil Engineering

New technologies have been developed in engineering and different types of structures more and more sophisticated and with great complexity appeared. In the case of offshore structures, this technological development is associated with the exploration in deep water, becoming necessary the knowledge of the dynamic behavior of such structures and, therefore, the modal parameters that will be used in order to have an appropriate design.

The main purpose of this paper is to develop and analyze the analytical formulation to predict the natural frequencies and the increment of structural damping of a multiple constrained layer sandwich beam. The analytical results will be evaluated through experimental tests in simple structures performed in laboratory. Also it will be presented the characterization of the viscoelastic material. The results of a parametrical analysis where the physical characteristics of the viscoelastic material and the thicknesses of the constraining and the viscoelastic layers are varied will also be shown. One expects that with the increase of the damping tax the vibration levels will be reduced and the structures, like risers, have their useful life prorogated.

## INDICE

### CAPÍTULO I

#### INTRODUÇÃO

I.1 – Motivação e Objetivos.....	1
I.2 – Histórico.....	3
I.3 – Organização do Texto.....	6

### CAPÍTULO II

MODELO ANALÍTICO DE VIGA SANDUÍCHE.....	7
---	---

### CAPÍTULO III

DESCRIÇÃO DOS TESTES E ANÁLISE DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS.....	15
---	----

III.1 – Descrição Sumária as STFT.....	15
III.2 – Influencia da Camada de Restrição em Função de sua Espessura e Número .....	17
III.2.1 – Vigas Sanduíche com Camadas de Restrição Engastadas .....	18
III.2.2 – Vigas Sanduíche com Camadas de Restrição Livres .....	26
III.2.2.1 – Análise da Influência do Número de Camadas de Restrição.....	27
III. 2.2.2. Análise da Influência da Espessura da Camada de Restrição.....	33

## **CAPÍTULO IV**

### **CARACTERIZAÇÃO DO MATERIAL VISCOELÁSTICO E CORRELAÇÃO TEÓRICA E EXPERIMENTAL.....38**

IV.1 – Caracterização do Material Viscoelástico.....38

IV.2 – Ajuste do Modelo Analítico para a situação de ensaio.....49

IV.3 – Sistema com Múltiplas Camadas .....51

## **CAPÍTULO V**

### **ESTUDO PARAMÉTRICO.....55**

V.1 – Primeiro Modo de Vibração.....55

V.2 – Segundo Modo de Vibração.....60

## **CAPÍTULO VI**

### **COMENTÁRIOS FINAIS E SUGESTÕES.....66**

### **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....70**

### **ANEXO I .....73**

## INDICE DE FIGURAS

Figura I. 1: Respostas típicas obtidas experimentalmente (Pitella, 2006).....	2
Figura I. 2: Riser rígido – plataforma P 18.....	3
Figura I.3: Esquema do sistema amortecedor do tipo viga sanduíche.....	5
Figura II. 1: Deslocamentos longitudinais ao longo de cada camada.....	8
Figura III. 1: Resposta da estrutura no domínio do tempo.....	16
Figura III. 2: Resposta da estrutura no domínio da frequência.....	16
Figura III. 2: Resposta da estrutura no domínio da frequência.....	17
Figura III. 4: (a) Viga usada como estrutura base; (b) Vigas A e B com uma camada de material viscoelástico e camada de restrição fixada ao apoio; (c) Viga A com uma camada de material viscoelástico e camada de restrição livre.....	19
Figura III. 5: (a) Viga B com duas camadas de material viscoelástico e restrição fixadas ao apoio; (b) Viga B com duas camadas de material viscoelástico e restrição, sendo uma fixada ao apoio e a outra livre; (c) Viga B com duas camadas de material viscoelástico e restrição, ambas livres.....	20
Figura III. 6: Viga sanduíche VS1 monitorada com sensores sem contato.....	21
Figura III. 7: Equipamentos utilizados nos testes.....	21
Figura III. 8: Frequências naturais referentes às vigas VA.....	22
Figura III. 9: Taxas de amortecimento (%) referentes às vigas VA.....	23
Figura III. 10: Frequências naturais referentes às vigas VB.....	24
Figura III. 11: Taxas de amortecimento (%) referentes às vigas VB.....	25
Figura III. 12: Vigas A (R1), B (R2) e C (R3) com (a) uma, (b) duas, (c) três e (d) quatro camadas de material viscoelástico e restrição livres.....	27
Figura III. 13: Frequências naturais referentes às vigas VA.....	28
Figura III. 14: Frequências naturais referentes às vigas VB.....	29
Figura III. 15: Frequências naturais referentes às vigas VC.....	29
Figura III. 16: Taxas de amortecimento referentes às vigas VA.....	30
Figura III. 17: Taxas de amortecimento referentes às vigas VB.....	31
Figura III. 18: Taxas de amortecimento referentes às vigas VC.....	33

Figura III. 19: Frequências naturais da viga sanduíche VS1c em função da espessura das camadas de restrição.....	34
Figura III. 20: Frequências naturais da viga sanduíche VS2c em função da espessura das camadas de restrição.....	34
Figura III. 21: Frequências naturais da viga sanduíche VS3c em função da espessura das camadas de restrição.....	35
Figura III. 22: Frequências naturais da viga sanduíche VS4 em função da espessura das camadas de restrição.....	36
Figura III. 23: Taxas de amortecimento da viga sanduíche VS1c em função da espessura das camadas de restrição.....	36
Figura III. 24: Taxas de amortecimento da viga sanduíche VS2c em função da espessura das camadas de restrição.....	37
Figura III. 25: Taxas de amortecimento da viga sanduíche VS3c em função da espessura das camadas de restrição.....	37
Figura III. 26: Taxas de amortecimento da viga sanduíche VS4c em função da espessura das camadas de restrição.....	37
Figura IV. 1: Aparato experimental utilizado no Método Direto.....	39
Figura IV. 2: Caixa de alumínio utilizada no ensaio do Método Direto (Silva, 2007).....	40
Figura IV. 3: Vista da caixa de alumínio com material viscoelástico e cantoneiras (Silva, 2007).....	41
Figura IV. 4: Esquema de montagem do Método Direto.....	41
Figura IV. 5: Correlação entre os deslocamentos medidos com excitação do tipo ruído branco.....	43
Figura IV. 6: Correlação entre os deslocamentos medidos com excitação harmônica.....	44
Figura IV. 7: Módulo de cisalhamento do MVE submetido à vibração harmônica e do tipo ruído branco.....	44
Figura IV. 8: Fator de perda do MVE submetido à vibração harmônica e do tipo ruído branco.....	45
Figura IV. 9: Módulo de Cisalhamento versus Frequência.....	47
Figura IV. 10: Fator de Perda versus Frequência.....	47

Figura IV. 11: Função polinomial do 3º grau ajustada para $G$ .....	48
Figura IV. 12: Função polinomial do 3º grau ajustada para $\eta$ .....	48
Figura IV. 13: Sistema com $n$ camadas (Nashif, 1985).....	52
Figura IV. 14: Sistema sanduíche com cinco camadas (a) original, (b) aproximada, (c) calculada.....	53
Figura V. 1: Variação da frequência natural do 1º modo de vibração com $H_3$ e com $G$ .....	56
Figura V. 2: Variação da frequência natural do 1º modo de vibração com $H_3$ e com $\eta$ .....	56
Figura V. 3: Variação da taxa de amortecimento do 1º modo de vibração com $H_3$ e $G$ .....	57
Figura V. 4: Variação da taxa de amortecimento do 1º modo de vibração com $H_3$ e $\eta$ .....	57
Figura V. 5: Variação da frequência natural do 1º modo de vibração com $H_2$ e $G$ .....	58
Figura V. 6: Variação da frequência natural do 1º modo de vibração com $H_2$ e $\eta$ .....	58
Figura V. 7: Variação da taxa de amortecimento do 1º modo de vibração com $H_2$ e $G$ .....	59
Figura V. 8: Variação da taxa de amortecimento do 1º modo de vibração com $H_2$ e $\eta$ .....	59
Figura V. 9: Variação da frequência natural do 2º modo de vibração com $H_3$ e com $G$ .....	60
Figura V. 10: Variação da frequência natural do 2º modo de vibração com $H_3$ e com $\eta$ .....	61
Figura V. 11: Variação da taxa de amortecimento do 2º modo de vibração com $H_3$ e $G$ .....	61
Figura V. 12: Variação da taxa de amortecimento do 2º modo de vibração com $H_3$ e $\eta$ .....	62
Figura V. 13: Variação da frequência natural do 2º modo de vibração com $H_2$ e $G$ .....	63
Figura V. 14: Variação da frequência natural do 2º modo de vibração com $H_2$ e $\eta$ .....	63
Figura V. 15: Variação da taxa de amortecimento do 2º modo de vibração com $H_2$ e $G$ .....	64
Figura V. 16: Variação da taxa de amortecimento do 2º modo de vibração com $H_2$ e $\eta$ .....	64

## INDICE DE TEBELAS

Tabela II. 1: Coeficientes $\alpha_n$ associados às condições de contorno de cada tipo de viga.....	14
Tabela III. 1: Características das vigas ensaiadas.....	18
Tabela III. 2: Frequências naturais (Hz) obtidas a partir da viga A.....	22
Tabela III. 3: Taxas de amortecimento (%) obtidas a partir da viga VA.....	23
Tabela III. 4: Frequências naturais (Hz) obtidas a partir da viga VB.....	24
Tabela III. 5: Taxas de amortecimento (%) obtidas a partir da viga VB.....	25
Tabela III. 6: Características das vigas ensaiadas.....	26
Tabela III. 7: Frequências naturais (Hz) obtidas a partir da viga VA.....	28
Tabela III. 8: Taxas de amortecimento (%) obtidas a partir da viga VA.....	30
Tabela III. 9: Razão das Taxas de Amortecimento das Vigas Sanduiche VS2c pelas Vigas Simples.....	32
Tabela IV. 1: Módulo de Cisalhamento, $G$ , e Fator de Perda, $\eta$ , obtidos.....	46
Tabela IV. 2: Coeficientes associados a vigas do tipo engastada- livre.....	49
Tabela IV. 3: Estimativa do Coeficiente $\alpha_n$ .....	50
Tabela IV. 4: Resultados obtidos a partir da formulação matemática (FM) para a viga de cinco camadas.....	52
Tabela IV. 6: Valores obtidos para frequência e taxa de amortecimento teóricos.....	53
Tabela IV. 7: Erro percentual entre valores experimentais e teóricos.....	54

# I. INTRODUÇÃO

## I. 1. Motivação e Objetivo

Com o avanço tecnológico da indústria na construção civil, tanto em materiais quanto em técnicas construtivas, estruturas cada vez mais esbeltas têm sido construídas. Essas estruturas, por serem mais flexíveis, apresentam frequências naturais cada vez mais baixas, tornando-se muito importante à verificação de seu comportamento dinâmico principalmente quando as frequências de excitação se aproximam das frequências naturais da estrutura, podendo conduzir esta a níveis de vibrações indesejáveis. Para reduzir estes níveis excessivos de vibração, distintos sistemas de controle passivo, ativo ou híbrido (passivo/ativo) podem ser usados para aumentar a capacidade de dissipação de energia, reduzindo as amplitudes de vibrações a níveis admissíveis e, conseqüentemente, aumentando a segurança estrutural e o conforto humano. Dentre as formas para reduzir as vibrações pode-se citar a utilização de materiais viscoelásticos. Estes materiais podem ser utilizados em conjunto com outros tipos de sistemas ou diretamente sobre a estrutura associados ou não a camadas de restrição. Quando estes são associados a camadas de restrição são conhecidos na literatura como “estruturas sanduíche” e permitem que sejam obtidas reduções substanciais nos níveis de vibração. Cabe ressaltar que este tipo de solução vem sendo aplicado com sucesso nas indústrias de construção civil, automobilística, naval, ferroviária e aeroespacial (OLSSON, 2000, VINSON, 2005, GALLIMORE, 2008).

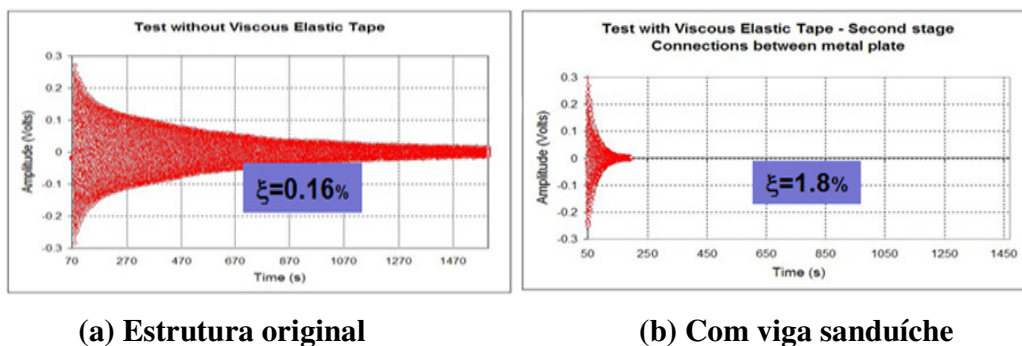
Uma aplicação para o conceito de viga sanduíche que vem sendo desenvolvida no Laboratório de Estruturas da COPPE/UFRJ está relacionada ao controle e redução de vibrações de *risers* rígidos (Magluta, Sclabin, Roitman, 2008). Estas estruturas são constituídas por tubos de aço e usualmente são dispostas em catenárias, tendo por objetivo conduzir o óleo ou gás entre os poços e as plataformas. Estas estruturas estão submetidas a



uma série de solicitações dinâmicas, dentre elas, pode-se destacar a que é induzida pelo desprendimento de vórtices quando a estrutura está submetida a correntes marinhas. Este tipo de solicitação leva os projetistas a tomar medidas preventivas para reduzir o processo de fadiga. Nesse caso a faixa de frequência é entre 0 e 5 Hz.

Diversas pesquisas como as de FAÍSCA (1998), PITELLA (2006), SILVA (2007) vêm sendo realizadas com o objetivo de minimizar os efeitos destas vibrações, sendo que no caso desta pesquisa busca-se a redução através do aumento substancial do amortecimento estrutural utilizando-se o conceito de “viga sanduíche” com materiais viscoelásticos. A grande diferença desta aplicação para as usuais está associada ao fato que as estruturas *offshore* operam em faixas de frequência bem inferiores, conduzindo assim, a necessidade de um desenvolvimento próprio para sua aplicação.

Para ilustrar as possibilidades desta abordagem são apresentados na Figura I. 1 dois resultados típicos obtidos experimentalmente em um viga metálica com seção reta tubular (Pitella, 2006). Na Figura I. 1.a observa-se a resposta no domínio do tempo da estrutura após ser excitada por um impacto, enquanto na Figura I. 1.b a resposta da mesma estrutura após ser aplicado o conceito de viga sanduíche. Comparando-se os dois resultados observa-se expressivo aumento da taxa de amortecimento que pode ser obtido utilizando-se material que possua grande capacidade de dissipar energia como é o caso de materiais viscoelásticos.



**Figura I. 1: Respostas típicas obtidas experimentalmente (Pitella, 2006)**

Um exemplo típico de aplicação poderia ser a utilização desse tipo de solução em *risers* rígidos, como ilustra a figura I. 2. Esse tipo de solução poderia funcionar como uma estratégia de controle visando à redução dos níveis de vibração, conduzindo a uma

atenuação das tensões cíclicas e com isto aumentando a vida útil desses elementos estruturais.



**Figura I. 2: Riser rígido – plataforma P 18.**

O principal objetivo desta dissertação é aprofundar os conhecimentos sobre o comportamento das “vigas sanduíche” visando obter informações a fim de otimizar sua eficiência. Para isto foram realizados uma série de testes experimentais e estudos paramétricos a fim de avaliar a influência do número e da espessura da camada de restrição na eficiência das vigas sanduíche.

## **I. 2. Histórico**

Desde o Império Romano o problema de amortecimento insuficiente e vibração excessiva já eram reconhecidos. Os oficiais treinavam seu regimento para marchar fora de cadência quando passavam por pontes a fim de que a frequência de ressonância não fosse excitada (Gallimore, 2008).

O conceito de estruturas sanduíche data de 1849, em Fairbairn, na Inglaterra (Vinson, 2005). No entanto, somente na década de 1930 alguns cientistas investigaram o amortecimento de metais.

Uma estrutura do tipo sanduíche foi utilizada pela primeira vez na Inglaterra durante a 2ª Guerra Mundial, no Mosquito Night Bomber (Vinson, 2005).

Com a 2ª Guerra Mundial houve um desenvolvimento nessa área, porém com poucas publicações. Nesta época muitos cientistas investigaram as propriedades e o comportamento mecânico de materiais poliméricos, mas não da composição destes com materiais metálicos. O primeiro grande avanço na aplicação de materiais que poderiam ser empregados com propriedades amortecedoras só ocorreu na década de 50 (Gallimore, 2008).

Os trabalhos de ROSS, KERWIN, UNGAR (1959) têm sido os mais referenciados e considerados para descrever o comportamento dos amortecedores viscoelásticos que são aplicados na superfície de estruturas.

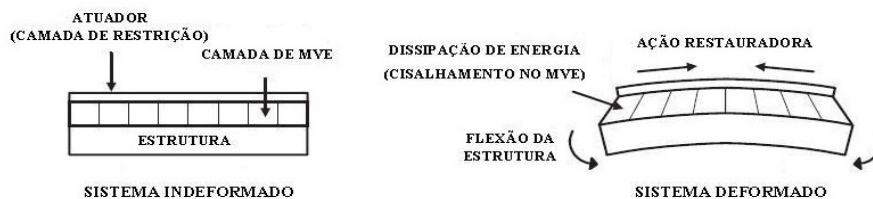
Um significativo esforço de pesquisas nessa área foi proveniente da indústria aeroespacial. Projetistas e fabricantes de aeronaves tentavam encontrar uma forma de reduzir as vibrações e ruídos sonoros transmitidos através dos painéis de fuselagem, sem o acréscimo significativo no peso. Adicionalmente, aproximadamente no meio da década de 60 a NASA financiou pesquisas nesta área.

Em 1966, na Holanda, PLANTEMA (1966) publicou o 1º livro de estruturas sanduíche, seguido por H. G. Allen, na Inglaterra, em 1969.

Nos anos 70, foram feitas pesquisas na Suécia, sob a liderança de Karl-Axel Olsson do Royal Institute of Technology, sobre o uso de estruturas sanduíche em cascos de navios. Estas pesquisas mostraram que, com projeto adequado, o casco poderia ser tão seguro quanto um feito simplesmente de aço (Vinson, 2005).

Desde os anos 70 tem havido uma abundante e freqüente investigação no desenvolvimento de tecnologias para adicionar amortecimento em estruturas com grande número de trabalhos publicados como DI TARANTO (1965), MEAD E MARKUS (1969), NASHIF (1985), OLSSON (2000) e VINSON (2003), facilitando a busca por informação.

A análise RKU foi desenvolvida para prever a resposta de um sistema dinâmico de três camadas, conhecido como viga sanduíche. Esse sistema é formado por uma camada de material viscoelástico compreendido entre duas camadas de material elástico, a estrutura base e a camada de restrição, como é mostrado na Figura I. 3.



**Figura I.3: Esquema do sistema amortecedor do tipo viga sanduíche**

De acordo com NASHIF (1985) é desejável que a restrição seja tão rígida quanto possível para que seja introduzida máxima tensão cisalhante na camada visco elástica, mas que não exceda a da estrutura base. A tensão máxima é obtida quando a restrição é do mesmo tipo e geometria da estrutura base. NASHIF (1985) também mostra que o fator de perda e a rigidez da viga sanduíche são influenciados pela variação da temperatura, uma vez que esta pode alterar substancialmente as características físicas dos materiais viscoelásticos. Outra característica deste tipo de sistema está associada ao uso de múltiplas camadas que tendem a aumentar o amortecimento, porém de maneira limitada. Isto se deve ao fato de que a maior parte da deformação por cisalhamento do material viscoelástico ocorre na primeira camada, próxima à estrutura.

Vários autores vêm tentando desenvolver pesquisas para prever a resposta de vigas sanduíche. Em (Di Taranto, 1965), é obtida a equação diferencial de 6ª ordem em função dos deslocamentos longitudinais para o sistema de três camadas, considerando condições de contorno arbitrárias, para obter as frequências naturais e os fatores de perda.

Em (Mead, Markus, 1969), a equação diferencial de 6ª ordem é considerada em função dos deslocamentos transversais, e condições de contorno em termos desses deslocamentos.

Em (Teng, Hu, 2001) é deduzida a equação da rigidez flexional de um sistema de três camadas, a partir dos deslocamentos longitudinais, chegando à equação do modelo RKU (Ross, Ungar, Kerwin, 1959).

Dentre as pesquisas desenvolvidas na COPPE pode-se citar a dissertação de FAÍSCA (1998), que apresenta alguns métodos para a caracterização experimental de materiais viscoelásticos, através da determinação do módulo de cisalhamento e do fator de perda. SILVA (2007), em sua dissertação, também faz a caracterização de materiais viscoelásticos, porém para baixas frequências. Em (Castello, *et. al.*) são determinados os

parâmetros constitutivos do MVE por meio de variáveis internas. Na tese de Doutorado de BARBOSA (2000) é proposta uma modelagem computacional de estruturas acopladas com camadas viscoelásticas visando o acréscimo do amortecimento. Em VASCONCELOS (2003) também é proposto o controle dinâmico de estruturas via mecanismos viscoelásticos. Na dissertação de PITELLA (2006), o material viscoelástico é utilizado como alternativa para aumentar o amortecimento em risers rígidos.

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um modelo analítico, baseado no trabalho de TENG e HU (2001), para estimar os parâmetros modais de uma viga sanduíche com múltiplas camadas. Este modelo é avaliado através de resultados experimentais obtidos em testes de estruturas simples realizados em laboratório.

### **I. 3. Organização do Texto**

Apresenta-se no Capítulo II a formulação matemática desenvolvida para vigas do tipo sanduíche com uma camada de material viscoelástico. No Anexo I são mostradas as formulações para duas, três e quatro camadas de material visco elástico e restrição.

No Capítulo III é apresentada a descrição da metodologia experimental utilizada, bem como a análise dos resultados obtidos. Os testes experimentais realizados tiveram como objetivo estimar os parâmetros modais de diferentes configurações de viga sanduíche a fim de correlacioná-los com os obtidos do modelo analítico desenvolvido e avaliar a influência do número e da espessura da camada de restrição nos parâmetros modais das vigas sanduíche. Neste capítulo também é realizada uma comparação entre os parâmetros modais obtidos experimentalmente para as vigas sanduíche com camada de restrição engastada e livre.

No Capítulo IV é apresentada a metodologia empregada para a caracterização do material viscoelástico utilizado, bem como uma correlação entre os resultados teóricos e experimentais obtidos.

Um estudo paramétrico foi realizado e sua descrição e resultados são apresentados no Capítulo V.

Finalmente, no Capítulo VI são apresentadas as conclusões sobre as análises realizadas.

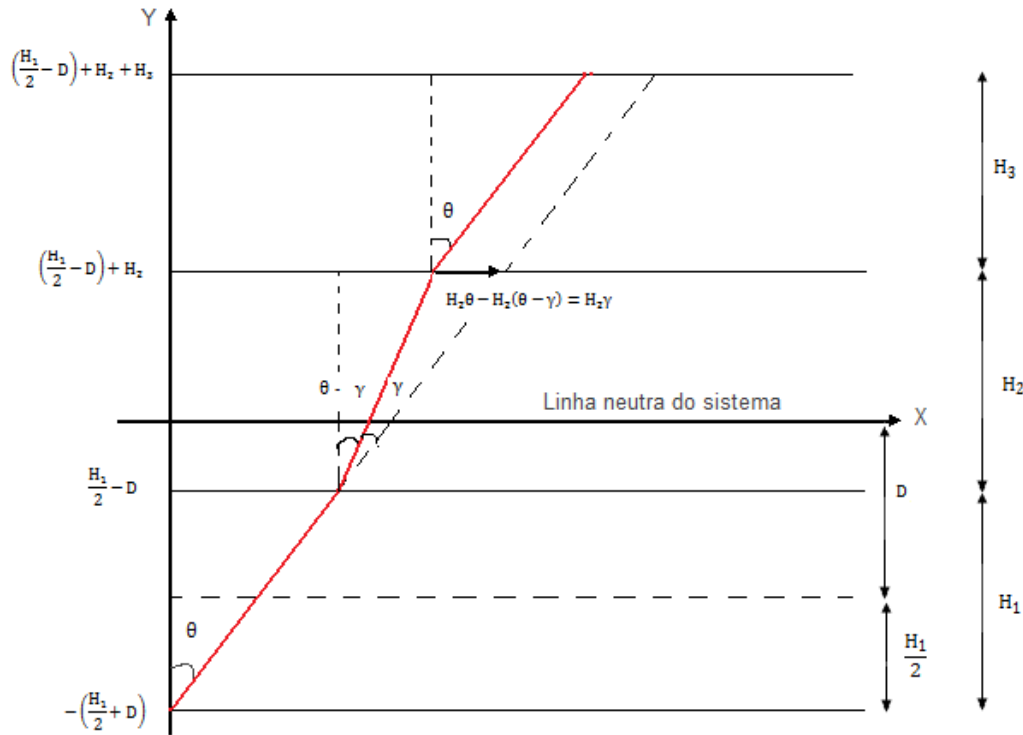
## II. MODELO ANALÍTICO DE VIGA SANDUÍCHE

Vários métodos têm sido desenvolvidos desde o final dos anos 50 para prever a resposta de vigas sanduíche. Dentre eles podemos destacar os trabalhos de ROSS, KERWIN E UNGAR (1959), conhecido na literatura como modelo RKU, KERWIN (1959), DI TARANTO (1965), MEAD E MARKUS (1968), NASHIF (1985), BARBOSA (2000), TENG E HU (2001), CASTELLO (2004) e GALLIMORE (2008). Deve-se destacar que todos os artigos encontrados referem-se a vigas sanduíche com apenas três camadas.

Este capítulo foi baseado na formulação apresentada por TENG e HU (2001) o qual deduz a equação da rigidez flexional de um sistema de três camadas a partir dos deslocamentos longitudinais, chegando à equação do modelo RKU. As formulações matemáticas para cinco e sete camadas foram obtidas a partir de uma generalização efetuada na de três camadas e são apresentadas no Anexo I.

### **Vigas Sanduíche com três camadas**

A Figura II. 1 mostra uma viga do tipo sanduíche, com três camadas onde a camada viscoelástica se encontra entre as duas camadas elásticas. As espessuras da estrutura base, da camada viscoelástica e da camada de restrição são denotadas, respectivamente, por  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$ , sendo  $D$  a distância da linha neutra do sistema de três camadas à linha neutra da estrutura base.



**Figura II. 1: Deslocamentos longitudinais ao longo de cada camada**

Essa análise assume que não há deslizamento entre as camadas, que a deformação por cisalhamento nas camadas elásticas e a tensão longitudinal na camada viscoelástica são desprezíveis, e que a seção plana em cada camada permanece plana após a deformação.

De acordo com TENG E HU (2001), os deslocamentos longitudinais ao longo de cada camada são:

$$u_1 = y\theta, \text{ com } y \text{ variando de } -\left(\frac{H_1}{2} + D\right) \text{ a } \left(\frac{H_1}{2} - D\right) \quad (\text{II. 1})$$

$$u_2 = y\theta - \left[y - \left(\frac{H_1}{2} - D\right)\right]\gamma, \text{ com } y \text{ variando de } \left(\frac{H_1}{2} - D\right) \text{ a } \left(\frac{H_1}{2} - D\right) + H_2 \quad (\text{II. 2})$$

$$u_3 = y\theta - H_2\gamma, \text{ com } y \text{ variando de } \left(\frac{H_1}{2} - D\right) + H_2 \text{ a } \left(\frac{H_1}{2} - D\right) + H_2 + H_3 \quad (\text{II. 3})$$

onde  $u_1, u_2$  e  $u_3$  são os deslocamentos longitudinais das camadas 1, 2 e 3 na direção  $x$ ,  $\theta$  é o ângulo de rotação da seção reta e  $\gamma$  é a distorção devido ao cisalhamento.

As deformações longitudinais nas camadas 1 a 3 são:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{II. 4})$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left[ y - \left( \frac{H_1}{2} - D \right) \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} \quad (\text{II. 5})$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} + H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \quad (\text{II. 6})$$

A partir da lei de Hook obtêm-se as tensões normais:

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 = E_1 y \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{II. 7})$$

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 = E_2 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - E_2 \left[ y - \left( \frac{H_1}{2} - D \right) \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} \quad (\text{II. 8})$$

$$\sigma_3 = E_3 \varepsilon_3 = E_3 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - E_3 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \quad (\text{II. 9})$$

onde  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões normais nas camadas 1, 2 e 3 e  $E_1, E_2$  e  $E_3$  são os módulos de elasticidade nas camadas 1, 2 e 3.

Devido ao carregamento externo, a viga vibra transversalmente. Assim, considerando uma espessura unitária, o equilíbrio de forças longitudinais na seção transversal é dado por:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+D\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)} \sigma_1 dy + \int_{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2} \sigma_2 dy + \int_{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2+H_3} \sigma_3 dy = 0 \quad (\text{II. 10})$$

Resolvendo cada uma das parcelas tem-se que:

$$\int_{-\left(\frac{H_1}{2}+D\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)} \sigma_1 dy = -K_1 D \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{II. 11})$$



$$\int_{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2} \sigma_2 dy = K_2(H_{21} - D) \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_2(H_{21} - D) \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2 \left(\frac{H_1}{2} - D\right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} \quad (\text{II. 12})$$

$$\int_{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2+H_3} \sigma_3 dy = K_3(H_{31} - D) \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_3 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \quad (\text{II. 13})$$

onde  $K_1, K_2, K_3$  são as rigidezas flexionais definidos por  $K_1 = E_1 H_1$ ,  $K_2 = E_2 H_2$ ,  $K_3 = E_3 H_3$ , e  $E_1, E_2, E_3$  são os módulos de elasticidade longitudinais dos materiais da estrutura base, camada viscoelástica e camada de restrição;  $H_{21} = \frac{H_1+H_2}{2}$ ,  $H_{31} = \frac{H_1+2H_2+H_3}{2}$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} -K_1 D \frac{\partial \theta}{\partial x} + K_2(H_{21} - D) \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_2(H_{21} - D) \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2 \left(\frac{H_1}{2} - D\right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_3(H_{31} - D) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ - K_3 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II. 14})$$

Assim,

$$D = \frac{K_2 H_{21} + K_3 H_{31} - \left(\frac{K_2}{2} + K_3\right) H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}}{K_1 + K_2 + K_3} \quad (\text{II. 15})$$

Como não há deslizamento entre as camadas, as tensões cisalhantes entre as camadas 2 e 3, e 2 e 1 podem ser expressas, respectivamente, por:

$$F_3 = \int_{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2+H_3} \sigma_3 dy \therefore \frac{\partial F_3}{\partial x} = \int_{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2+H_3} \frac{\partial \sigma_3}{\partial x} dy \quad (\text{II. 16})$$

$$\Rightarrow \tau_{23} = -\frac{\partial F_3}{\partial x} = -\int_{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2+H_3} \frac{\partial \sigma_3}{\partial x} dy = K_3(H_{31} - D) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - K_3 H_2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \quad (\text{II. 17})$$

$$F_1 = \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+D\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)} \sigma_1 dy \therefore \frac{\partial F_1}{\partial x} = \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+D\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} dy \quad (\text{II. 18})$$

$$\Rightarrow \tau_{21} = \frac{\partial F_1}{\partial x} = \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+D\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} dy = -K_1 D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (\text{II. 19})$$

Quando a tensão normal na camada viscoelástica é desprezada, a tensão cisalhante se aproxima a uma das anteriores.

A distorção  $\gamma$  pode ser expressa por:

$$\gamma = \frac{\tau_{21}}{G} = -\frac{K_1 D}{G} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \therefore \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{G\gamma}{K_1 D} \quad (\text{II. 20})$$

Se a vibração for harmônica, pode-se escrever  $\gamma = \gamma_0 e^{ipx}$  e  $\theta = \theta_0 e^{ipx}$ . Assim,

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = -p^2 \gamma \text{ e } \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -p^2 \theta \quad (\text{II. 21})$$

Portanto,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial x}}{\frac{\partial \theta}{\partial x}} = \frac{ip\gamma}{ip\theta} = \frac{ip\gamma}{ip\theta \frac{ip}{ip}} = \frac{ip\gamma}{\frac{-p^2\theta}{ip}} = \frac{ip\gamma}{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \frac{1}{ip}} = \frac{-p^2\gamma}{-\frac{G\gamma}{K_1 D}} = \frac{p^2 K_1 D}{G} \quad (\text{II. 22})$$

Assim, reescrevendo, tem-se:

$$D = \frac{K_2 H_{21} + K_3 H_{31} - \left(\frac{K_2}{2} + K_3\right) H_2 \frac{p^2 K_1 D}{G}}{K_1 + K_2 + K_3}$$

$$\therefore D = \frac{K_2 H_{21} + K_3 H_{31}}{K_1 + K_2 + K_3 + \left(\frac{K_2}{2} + K_3\right) H_2 \frac{p^2 K_1}{G}} \quad (\text{II. 23})$$

O momento fletor é dado por:

$$M = \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+D\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)} \sigma_1 y dy + \int_{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2} \sigma_2 y dy + \int_{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2+H_3} \sigma_3 y dy = B \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{II. 24})$$

onde B é a rigidez flexional do sistema de três camadas.

Resolvendo cada uma das parcelas tem-se que:

$$\int_{-\left(\frac{H_1}{2}+D\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)} \sigma_1 y dy = (B_1 + K_1 D^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{II. 25})$$

$$\int_{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2} \sigma_2 y dy = [B_2 + K_2 (H_{21} - D)^2] \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_2 \left[ \frac{H_2}{12} + \frac{1}{2} (H_{21} - D) \right] H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \quad (\text{II. 26})$$

$$\int_{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2}^{\left(\frac{H_1}{2}-D\right)+H_2+H_3} \sigma_3 y dy = [B_3 + K_3 (H_{31} - D)^2] \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_3 (H_{31} - D) H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \quad (\text{II. 27})$$

onde  $B_1 = E_1 \frac{H_1^3}{12}$ ,  $B_2 = E_2 \frac{H_2^3}{12}$ ,  $B_3 = E_3 \frac{H_3^3}{12}$ .

Assim, tem-se que:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + K_1 D^2 + K_2 (H_{21} - D)^2 + K_3 (H_{31} - D)^2 - \left[ \frac{K_2 H_2}{12} + \frac{K_2}{2} (H_{21} - D) + K_3 (H_{31} - D) \right] \left( \frac{H_{31} - D}{1 + g} \right) \quad (\text{II. 28})$$

onde  $g = \frac{G}{K_3 H_2 p^2}$ .

Para incorporar as parcelas de amortecimento na equação da rigidez flexional (II.28), é necessário substituir o cada termo a seguir pelo módulo complexo, isto é,

$$G \rightarrow G(1 + i\eta_2)$$

$$E_1 \rightarrow E_1(1 + i\eta_1)$$

$$E_2 \rightarrow E_2(1 + i\eta_2)$$

$$E_3 \rightarrow E_3(1 + i\eta_3)$$

$$B \rightarrow B(1 + i\eta),$$

onde  $\eta$ , é o fator de perda associado ao material visco-elástico.

Portanto,  $B$  passa a ser uma grandeza complexa e para que a equação da rigidez flexional (II. 28) seja solucionada basta igualar as partes real e imaginária, obtendo então as expressões de  $\eta$  e  $B$ . A frequência natural é estimada utilizando-se a parcela real de  $B$  (II.29), enquanto o fator de perda  $\eta$  é estimado pela razão entre as parcelas imaginária e real de  $B$  (II. 30).

Assim, frequência natural  $\omega$  e a taxa de amortecimento  $\xi$  da viga sanduíche podem ser determinadas a partir de:

$$\omega_n = \frac{a_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{\text{Re}(B)}{m}} \quad (\text{II. 29})$$

$$\eta = \frac{\text{Im}(B)}{\text{Re}(B)} \quad (\text{II. 30})$$

$$\xi = \frac{\eta}{2} \quad (\text{II. 31})$$

onde  $n$  é o modo desejado,  $L$  é o comprimento da viga,  $m$  é a massa total do conjunto, e  $a_n$  são os coeficientes associados às condições de contorno de cada tipo de viga, como mostrado na Tabela II. 1.

**Tabela II. 1: Coeficientes  $a_n$  associados às condições de contorno de cada tipo de viga**

$n$	Engastada - Livre	Bi-Engastada	Livre-Livre
1	1.875	4.730	0.000
2	4.694	7.853	0.000
3	7.855	10.995	4.730
$n > 4$	$\frac{(2n-1)\pi}{2}$	$\frac{(2n+1)\pi}{2}$	$\frac{(2n-3)\pi}{2}$

Há autores como KERWIN (1959), DI TARANTO (1965), MEAD e MARKUS (1969) que desenvolveram estratégias para obter a frequência natural e a taxa de amortecimento. Neste trabalho optou-se por determiná-las apenas algebricamente.

Cabe ressaltar que neste caso foi adotada a hipótese de que a contribuição para o amortecimento da estrutura original ( $\eta_1$ ) e da camada de restrição ( $\eta_3$ ) são desprezíveis, assim como o módulo de elasticidade longitudinal do MVE ( $E_2$ ).

### **III. DESCRIÇÃO DOS TESTES E ANÁLISE DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS**

Neste capítulo é apresentada a descrição da metodologia experimental utilizada, bem como a análise dos resultados obtidos.

Os ensaios foram realizados no Laboratório de Análise Dinâmica e Processamento de Imagens e Sinais, do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ, e tiveram como objetivo estimar os parâmetros modais de diferentes configurações de viga sanduíche a fim de correlacioná-los aos obtidos com o modelo analítico desenvolvido e avaliar a influência do número e da espessura da camada de restrição nos parâmetros modais das vigas sanduíche.

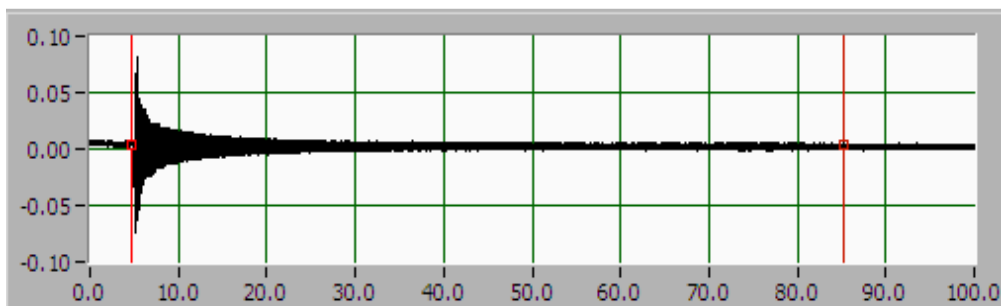
O método utilizado para a estimação dos parâmetros modais foi o *Short Time Fourier Transform* - STFT desenvolvido por BUCHER (2001), o qual é descrito sumariamente no próximo item. Maiores detalhes também em PITELLA (2006).

#### **III. 1. Descrição Sumária da STFT**

Essa técnica de processamento de sinais fornece a estimativa dos parâmetros modais utilizando-se as distribuições tempo-freqüência (TFD), já que neste domínio misto, não ortogonal nem ao tempo nem à freqüência, os vetores apresentam informação de ambos os domínios.

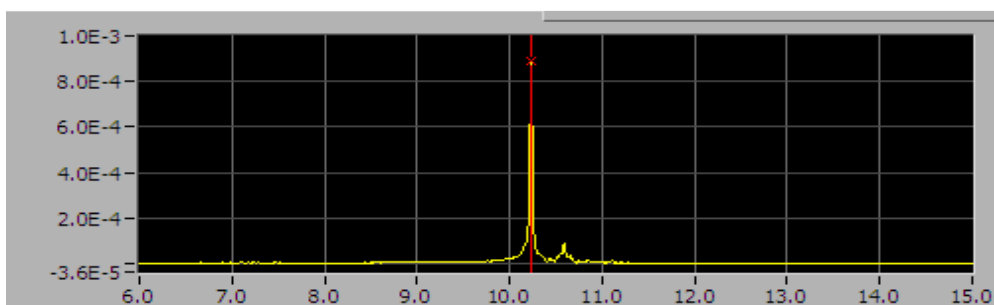
A metodologia baseia-se em separar da transformada tempo-freqüência as amplitudes ao longo do tempo, associadas a cada um dos picos de ressonância. Essas amplitudes têm a forma de uma função logarítmica, a partir da qual é possível extrair a taxa de amortecimento associada ao modo analisado.

A figura III. 1 mostra a resposta típica de um sensor de deslocamento no domínio do tempo, enquanto as figuras III .2 e III. 3 ilustram o espectro da resposta e a linha de crista da transformada tempo- freqüência (utilizada para estimar a taxa de amortecimento associada), na freqüência natural de um modo de vibração.



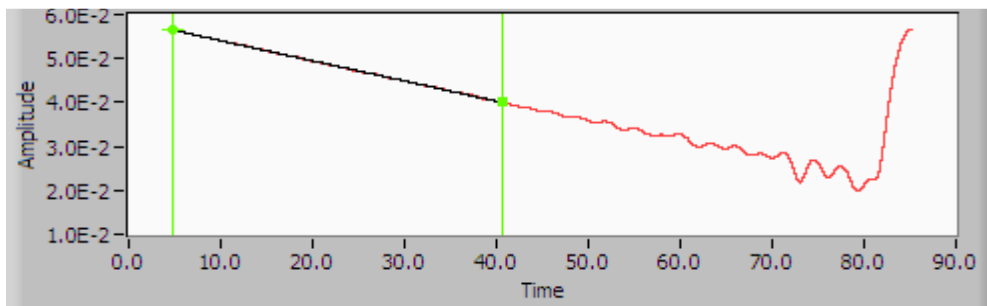
**Figura III. 1: Resposta da estrutura no domínio do tempo**

Na tela contendo o gráfico do sinal no tempo observam-se dois cursores que delimitam a região onde será calculada a TFD. Essa região deve ser selecionada com certa cautela, pois quanto menor for o trecho delimitado, menor será a precisão em frequência. Por outro lado, para estimativa de modos com amortecimento elevado, devem-se delimitar esses cursores próximos do instante inicial, já que esses modos têm curta duração (Bucher, 2001).



**Figura III. 2: Resposta da estrutura no domínio da frequência.**

Na tela com o espectro do sinal, o cursor deve ser posicionado no pico associado à frequência natural do modo desejado.



**Figura III. 3: Linha de crista da transformada tempo- freqüência**

Na tela indicativa da linha de crista da transformada tempo-freqüência, a inclinação da reta corresponde ao valor da taxa de amortecimento do trecho selecionado. Deve-se ressaltar que a estimativa da taxa de amortecimento é realizada através de um ajuste de mínimos quadrados do trecho selecionado.

### **III. 2. Influência da Camada de Restrição em função de sua Espessura e Número**

Com o intuito de avaliar a eficiência das vigas sanduíche em função da espessura da camada de restrição e do número de camadas foram realizados uma série de experimentos em vigas simples e sanduíche, de seção reta retangular, do tipo engastada em uma extremidade e livre na outra.

Foram testados dois tipos de vigas sanduíche: (i) com camada de restrição fixada ao apoio e (ii) com camada de restrição livre, i. é, livre para deslocamentos axiais. O objetivo principal dos testes das vigas do tipo (i) é que existe uma solução analítica pronta para uma camada de restrição (Caracciolo, Gasparetto, Giovagnoni, 2004) o que permite uma correlação com os resultados experimentais. O objetivo dos ensaios das vigas do tipo (ii) é que estes devem apresentar uma maior repetibilidade, já que a posição do engaste permanece inalterada em todos os testes devido ao fato de apenas serem adicionadas camadas à estrutura base existente. Outra razão para realizar essas duas configurações é devido ao fato de existir dúvidas em relação à forma final que este tipo de solução poderá ser aplicado em condições reais, como por exemplo, no caso dos *risers* em catenária, que é



uma das possíveis aplicações que vem sendo estudadas, conforme mencionado no Capítulo I desta dissertação.

Apresenta-se a seguir a descrição dos testes realizados e a análise dos resultados para as vigas sanduíche com camadas de restrição fixadas ao apoio e livres. O material viscoelástico utilizado em todos os testes foi a fita auto-adesiva dupla face VHB 4955, fabricado pela 3M, de densidade  $7.95E-07 \text{ Kg/mm}^3$  e 2 mm de espessura.

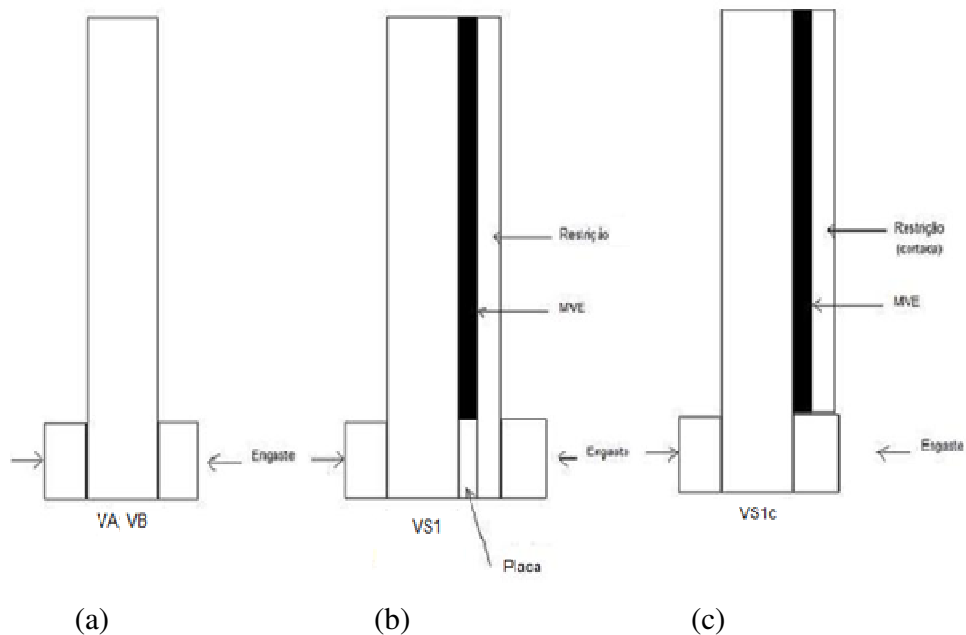
### III. 2.1. Vigas Sanduíche com Camadas de Restrição Engastadas

As vigas utilizadas como estrutura base e camadas de restrição são de alumínio e possuem as características apresentadas na Tabela III. 1.

**Tabela III. 1: Características das vigas ensaiadas**

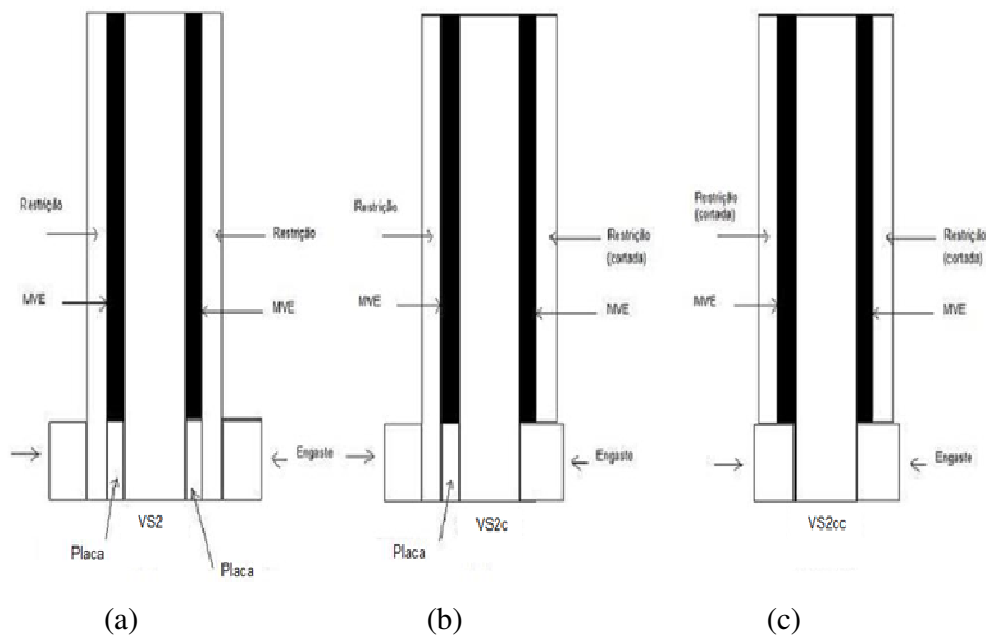
	Comprimento (mm)	Espessura (mm)
Estrutura Base (VA, VB)	1140.0	16.1
Camada de Restrição	1140.0	3.17

Foram confeccionadas duas estruturas base de mesmas dimensões, denominadas de VA e VB. Em uma primeira etapa a viga VA foi ensaiada, e posteriormente duas situações de vigas sanduíche foram testadas: uma com a camada de restrição fixada ao apoio em uma das extremidades, denominado de VS1 e outra livre sendo apenas a estrutura base engastada, denominada de VS1c. Na viga VS1, para garantir a condição de engaste, foi introduzida uma placa de alumínio com a mesma espessura da camada viscoelástica, conforme ilustrado na Figura III. 4 que também mostra um esquema das demais situações.



**Figura III. 4: (a) Viga usada como estrutura base; (b) Vigas A e B com uma camada de material viscoelástico e camada de restrição fixada ao apoio; (c) Viga A com uma camada de material viscoelástico e camada de restrição livre.**

Para a viga VB, os ensaios foram realizados com a estrutura simples, com uma e com duas camadas de material viscoelástico e restrição, denominadas, respectivamente de VS1 e VS2. Em seguida, foi retirado o engaste da restrição da viga VS2, primeiro de um lado (VS2c) e depois do outro (VS2cc). A Figura III. 5 mostra essas últimas situações.



**Figura III. 5: (a) Viga B com duas camadas de material viscoelástico e restrição fixadas ao apoio; (b) Viga B com duas camadas de material viscoelástico e restrição, sendo uma fixada ao apoio e a outra livre; (c) Viga B com duas camadas de material viscoelástico e restrição, ambas livres.**

Cada uma das vigas simples e sanduíche foram excitadas através de cinco impactos impostos próximos ao ventre do 6º modo de vibração. Deve-se ressaltar que, após cada teste, cada viga foi desmontada e montada novamente a fim de verificar a repetibilidade dos testes.

A Figura III. 6 apresenta uma vista da viga sanduíche VS1 e dos sensores de deslocamento sem contato utilizados para medir a resposta da estrutura. Estes sensores, do tipo indutivo, foram fixados em um perfil rígido posicionados nos ventres do 6º, 5º e 4º modos, já que, de acordo com estudo prévio, nestas locações seria possível captar as frequências naturais e as taxas de amortecimento até o 6º modo de vibração.

Os sensores utilizados foram do tipo LVDT, fabricante Balluff, com capacidade de medir de 0.5 a 2.0 mm, sem contato para não haver acréscimo de massa ou de amortecimento. A Figura III. 7 mostra uma vista dos equipamentos utilizados nestes testes.

Os parâmetros modais apresentados mais adiante são os valores estatísticos obtidos a partir de cada montagem, de cada sensor e de cada impacto, totalizando pelo menos 30 amostras.



**Figura III. 6: Viga sanduíche VS1 monitorada com sensores sem contato**



**Figura III. 7: Equipamentos utilizados nos testes**

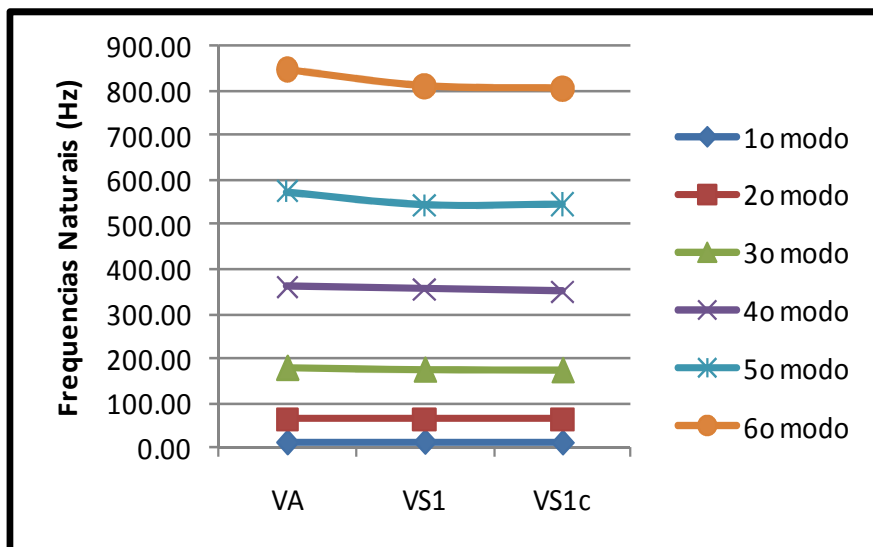
A Tabela III. 2 apresenta os valores médios e desvio padrão das frequências naturais obtidas experimentalmente a partir da viga A para os seis primeiros modos de vibração.

**Tabela III. 2: Freqüências naturais (Hz) obtidas a partir da viga A**

FREQ. NAT.(Hz)	VA		VS1		VS1c	
Modos	médias	desvios	médias	desvios	médias	desvios
1o	10.25	0.00	11.31	0.02	9.82	0.00
2o	63.38	0.00	63.37	0.17	63.70	0.04
3o	179.00	0.00	175.13	0.12	174.05	0.35
4o	360.21	0.01	354.66	0.85	349.11	0.15
5o	574.44	0.03	544.58	2.22	545.80	0.23
6o	848.32	0.12	809.85	0.19	804.43	1.19

Observa-se na Tabela III. 2 que, com exceção da freqüência natural associada ao 1º modo de vibração para a viga VS1, as freqüências naturais tendem a diminuir quando é acrescentada uma camada de material viscoelástico e restrição, fixada ao apoio ou livre.

Comparando-se os resultados da viga VS1 com os do sistema em que a restrição não é fixada (VS1c), observa-se que o 1º modo tem uma pequena diminuição da freqüência natural, e que os demais modos praticamente não são alterados. Esses resultados podem ser mais facilmente visualizados na Figura III. 8, a qual apresenta os mesmos resultados da Tabela III. 2.

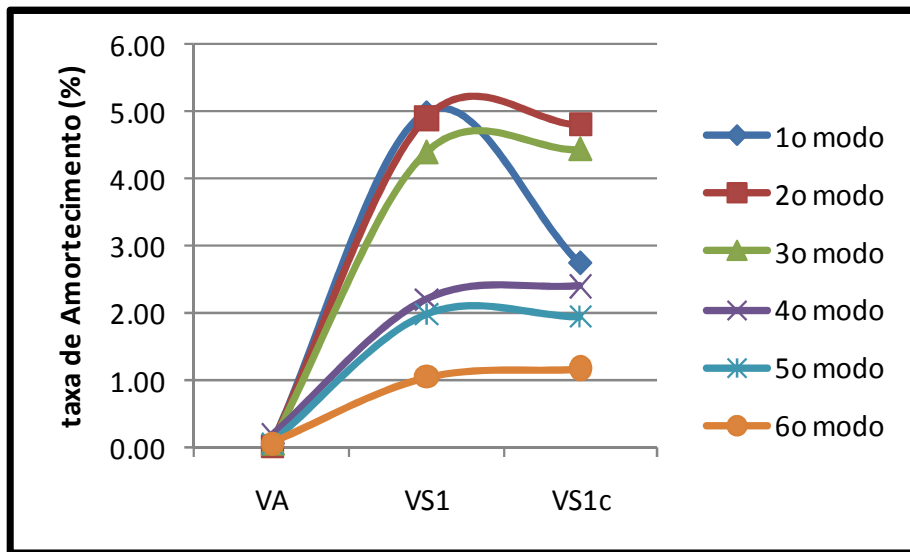


**Figura III. 8: Freqüências naturais referentes às vigas VA**

A Tabela III. 3 e a Figura III. 9 apresentam as taxas de amortecimento obtidas a partir da viga VA.

**Tabela III. 3: Taxas de amortecimento (%) obtidas a partir da viga VA**

TX. AMORT.(%)	VA		VS1		VS1c	
	médias	desvios	médias	desvios	médias	desvios
1o	0.05	0.00	4.98	0.11	2.74	0.01
2o	0.03	0.00	4.90	0.19	4.80	0.10
3o	0.06	0.00	4.39	0.01	4.44	0.04
4o	0.19	0.01	2.20	0.04	2.41	0.05
5o	0.07	0.08	1.99	0.16	1.95	0.09
6o	0.07	0.01	1.05	0.06	1.18	0.03



**Figura III. 9: Taxas de amortecimento (%) referentes às vigas VA**

Pode-se observar na Tabela III. 3 e na Figura III. 9 que a taxa de amortecimento aumenta expressivamente para todos os modos de vibração analisados quando a viga sanduíche VS1 é utilizada, sendo que no pior caso, para o 6º modo de vibração, esta é da ordem de 15 vezes maior que a obtida para a estrutura base.

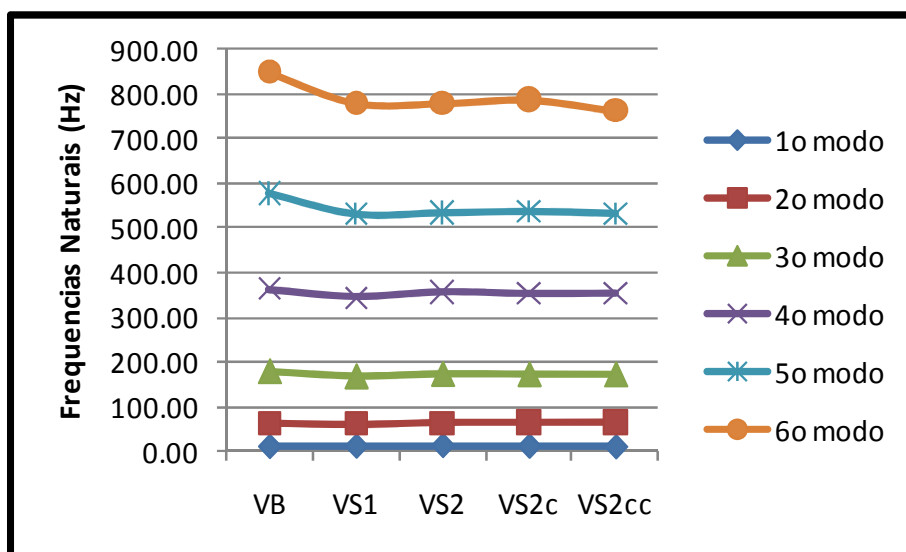
Quando a camada de restrição é liberada, a taxa de amortecimento do 1º modo de vibração diminui em relação ao obtido quando a restrição estava fixada, mas ainda é

bastante superior do que o da estrutura base. Nos outros modos de vibração a taxa de amortecimento apresenta pouca variação.

A tabela III. 4 e a Figura III. 10 apresentam as frequências naturais obtidas a partir da viga VB.

**Tabela III. 4: Frequências naturais (Hz) obtidas a partir da viga VB**

FREQ. NAT.(Hz)	VB		VS1		VS2		VS2c		VS2cc	
	médias	desvios	médias	desvios	médias	desvios	médias	desvios	médias	desvios
1o	10.24	0.00	11.03	0.02	12.34	0.05	10.95	0.02	9.82	0.01
2o	63.70	0.00	61.76	0.14	64.79	0.37	65.18	0.17	65.43	0.31
3o	179.26	0.00	168.08	0.23	173.29	0.90	172.63	0.48	172.33	0.41
4o	363.36	0.02	344.81	0.46	357.35	0.53	352.87	1.06	353.83	0.54
5o	578.47	0.00	531.77	0.92	534.52	3.66	537.41	8.01	533.29	10.87
6o	850.23	0.22	780.40	6.42	779.70	3.10	787.53	3.46	762.65	2.64



**Figura III. 10: Frequências naturais referentes às vigas VB**

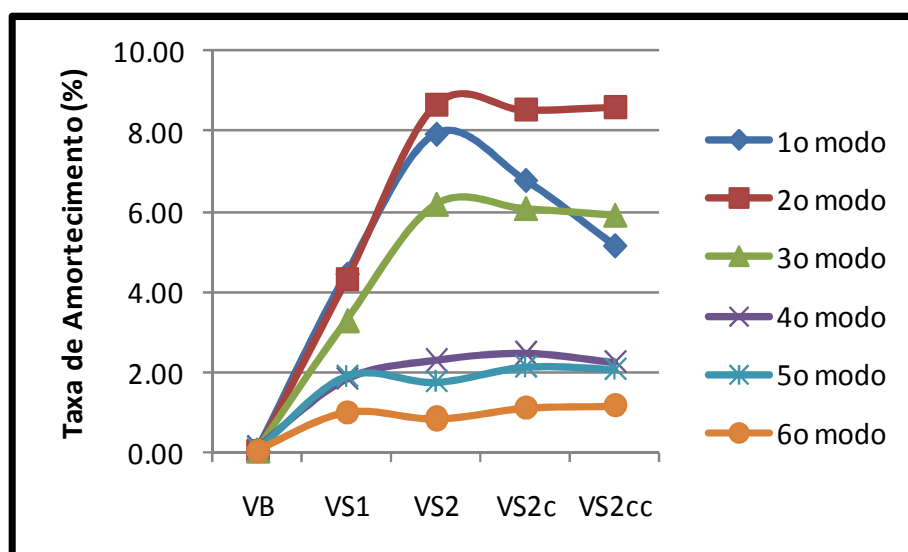
Na Tabela III. 4 e Figura III. 10 têm-se as mesmas conclusões que a Tabela III. 2 e Figura III. 8 ao se comparar a estrutura base com a viga com um sanduíche (VS1). Quando o 2º sanduíche é acrescentado (viga VS2), observa-se que a frequência natural tende a aumentar, principalmente para o 1º modo de vibração. Quando a camada de restrição é

liberada (VS2c), a frequência diminui para o 1º modo de vibração, mas quase não sofre alteração para os demais modos. O mesmo pode-se observar quando a 2ª restrição (VS2cc) é liberada.

A Tabela III. 5 e a Figura III. 11 apresentam as taxas de amortecimento obtidas a partir da viga VB.

**Tabela III. 5: Taxas de amortecimento (%) obtidas a partir da viga VB**

TX. AMORT.(%)	VB		VS1		VS2		VS2c		VS2cc	
	médias	desvios	médias	desvios	médias	desvios	médias	desvios	médias	desvios
1º	0.05	0.00	4.44	0.01	7.92	0.11	6.77	0.06	5.14	0.03
2º	0.04	0.00	4.32	0.05	8.65	0.20	8.52	0.20	8.60	0.20
3º	0.05	0.00	3.28	0.06	6.17	0.49	6.06	0.52	5.90	0.97
4º	0.14	0.01	1.84	0.04	2.31	0.05	2.48	0.26	2.26	0.30
5º	0.09	0.00	1.92	0.09	1.77	0.19	2.15	0.16	2.10	0.25
6º	0.06	0.00	1.02	0.17	0.85	0.06	1.12	0.03	1.18	0.05



**Figura III. 11: Taxas de amortecimento (%) referentes às vigas VB**

Observa-se na Tabela III. 5 e Figura III. 11 que há um aumento significativo da taxa de amortecimento, para os três primeiros modos de vibração, quando o 2º sanduíche (VS2) é instalado, chegando a ser por volta de duas vezes maior que a situação com um sanduíche



(VS1). Por outro lado, os 4º, 5º e 6º modos sofrem pouca alteração. Nota-se ainda que ao liberar as camadas de restrição (VS2c e VS2cc), a taxa de amortecimento associada 1º modo diminui, enquanto que para os outros modos tendem a se manter aproximadamente constantes.

Deve-se ressaltar que resultados experimentais obtidos de testes anteriores em vigas do tipo engastada- livre (Silva, 2007) também mostraram uma diminuição da taxa de amortecimento, associada ao 1º modo de vibração, quando a camada de restrição é liberada. Por outro lado, ensaios em vigas bi- apoiadas (Faísca, 1998) mostraram que a liberação das extremidades tende a aumentar o amortecimento. Desta forma, acredita-se que a taxa de amortecimento seja influenciada não apenas pela condição de contorno da camada de restrição, mas também pela forma modal. A combinação destes dois fatores pode criar uma variação do cisalhamento na camada viscoelástica conduzindo a um acréscimo ou uma diminuição da taxa de amortecimento.

### III. 2.2. Vigas Sanduíche com Camadas de Restrição Livres

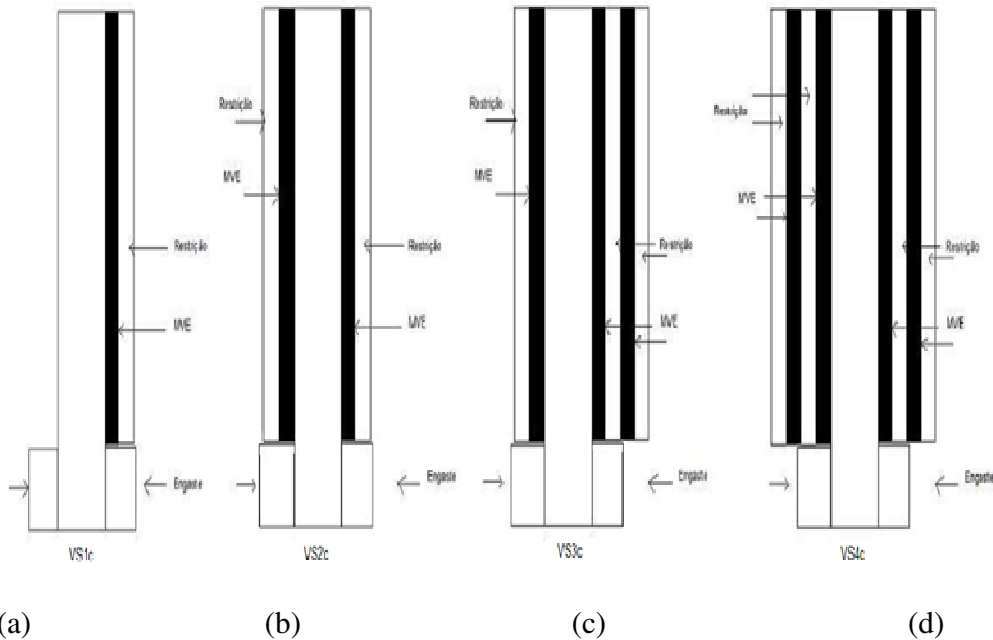
As vigas utilizadas como estrutura base e as camadas de restrição são de alumínio e possuem as características apresentadas na Tabela III. 6.

**Tabela III. 6: Características das vigas ensaiadas**

	Comprimento (mm)	Espessura (mm)
Estrutura Base (VA, VB, VC)	1250.0	16.1
Camada de Restrição R1	1250.0	2.0
Camada de Restrição R2	1250.0	3.17
Camada de Restrição R3	1250.0	6.3

Foram confeccionadas três estruturas base de mesmas dimensões, denominadas de VA, VB e VC. A restrição utilizada com a viga VA foi a R1, com a VB foi a R2 e com a VC foi a R3. Deve-se ressaltar que nestes testes as camadas de restrição das vigas estavam livres nas duas extremidades. Estes ensaios foram realizados com a estrutura base (VA, VB

e VC), uma (VS1c), duas (VS2c), três (VS3c) e quatro (VS4c) camadas de material visco e restrição, conforme ilustrado na Figura III. 12.



**Figura III. 12: Vigas A (R1), B (R2) e C (R3) com (a) uma, (b) duas, (c) três e (d) quatro camadas de material viscoelástico e restrição livres.**

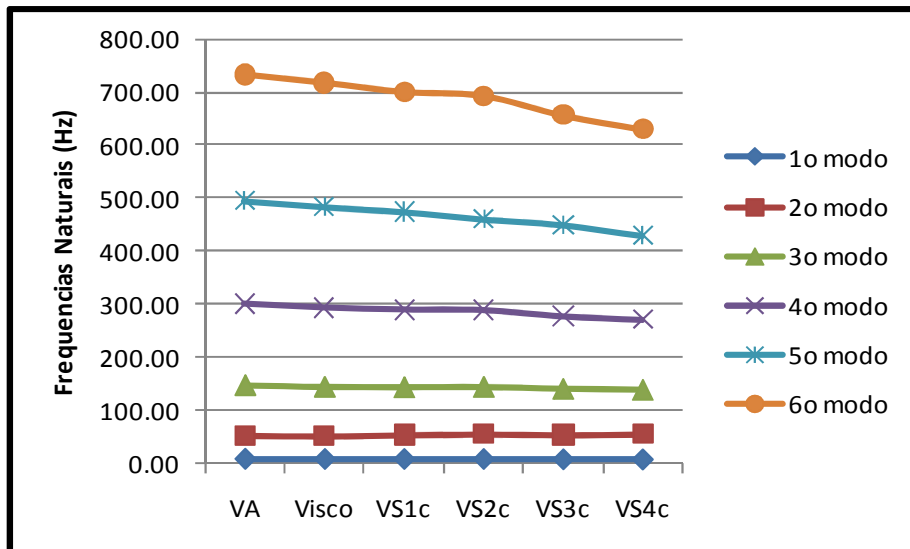
Como nesses testes foram variados o número e a espessura das camadas de restrição, torna-se possível, através da análise dos resultados experimentais, avaliar a influência destas características nos parâmetros modais.

### **III. 2.2.1: Análise da Influência do Número de Camadas de Restrição**

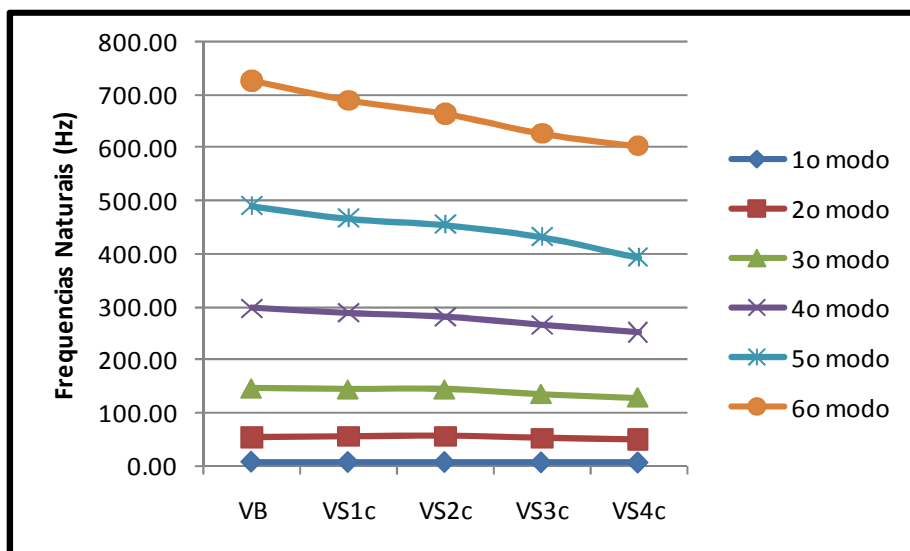
A Tabela III. 7 e a Figura III. 13 apresentam as frequências naturais obtidas a partir da viga VA, enquanto as Figuras III. 14 e III. 15 mostram estes mesmos gráficos obtidos a partir das vigas VB e VC, respectivamente.

**Tabela III. 7: Frequências naturais (Hz) obtidas a partir da viga VA**

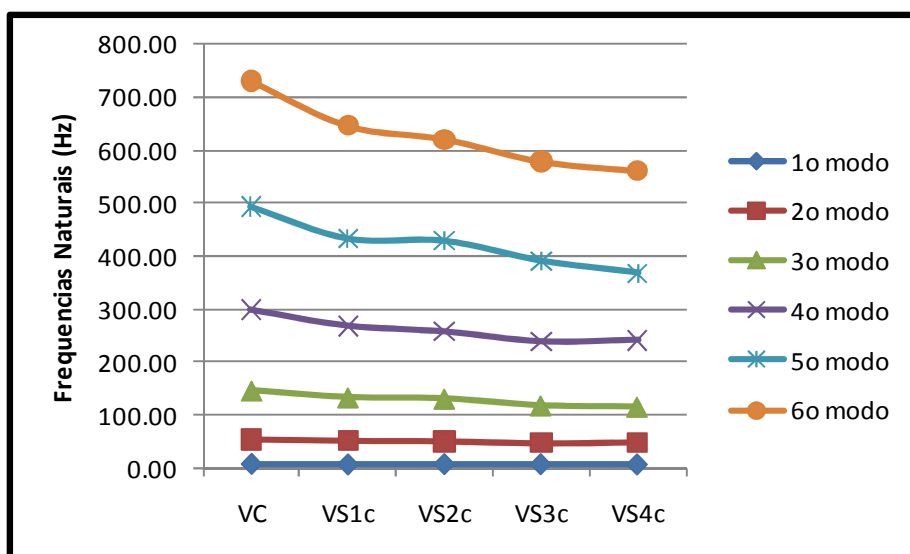
FREQ. NAT.(Hz)	VA		Visco		VS1c		VS2c		VS3c		VS4c	
	média	desvio	média	desvio	média	desvio	média	desvio	média	desvio	média	desvio
1o	8.75	0.00	8.56	0.00	8.41	0.01	8.26	0.00	7.89	0.01	7.57	0.03
2o	54.43	0.00	53.28	0.00	55.09	0.06	56.81	0.22	55.41	0.36	56.75	1.57
3o	149.20	0.02	146.10	0.00	145.48	0.16	146.04	1.44	142.45	1.54	140.75	1.51
4o	301.16	0.00	294.52	0.01	290.69	4.63	289.60	15.46	278.20	7.63	271.71	9.66
5o	495.52	0.01	484.44	0.01	474.65	5.53	460.76	12.13	449.90	10.15	429.54	15.89
6o	733.27	0.01	717.79	0.02	700.67	2.98	693.18	19.67	656.46	10.30	629.93	10.90



**Figura III. 13: Frequências naturais referentes às vigas VA**



**Figura III. 14: Frequências naturais referentes às vigas VB**



**Figura III. 15: Frequências naturais referentes às vigas VC**

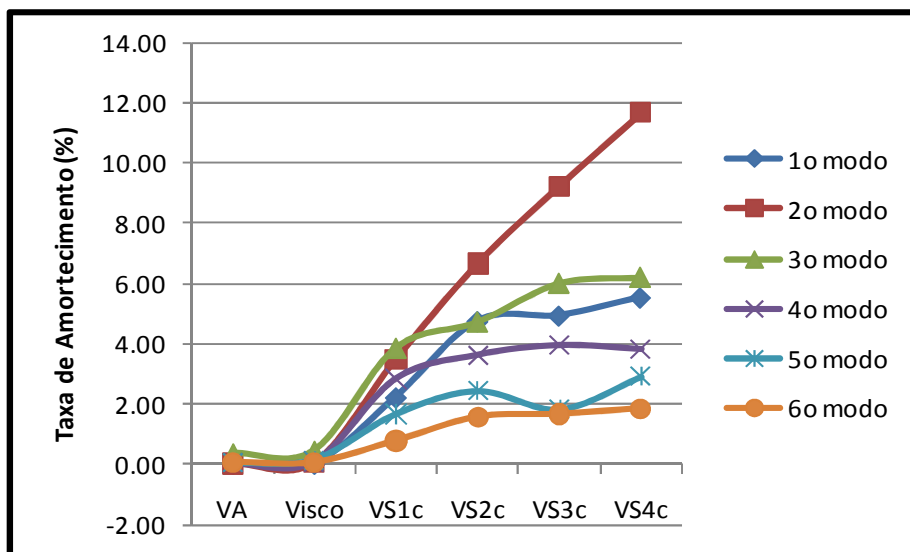
Observa-se na tabela III. 7 e nas Figuras III. 13 a III. 15 que, de uma forma geral, as frequências naturais tendem a diminuir quando se adicionam camadas de restrição, indicando que houve um maior acréscimo de massa do que rigidez em relação à viga simples. Deve-se destacar ainda que o decréscimo das frequências naturais relativos às vigas simples é pequeno, atingindo um valor máximo em torno de 25%, para o 5º modo de

vibração, referente à viga com maior espessura da camada de restrição (viga VC). Nota-se também que o comportamento dos três conjuntos de vigas é bastante semelhante.

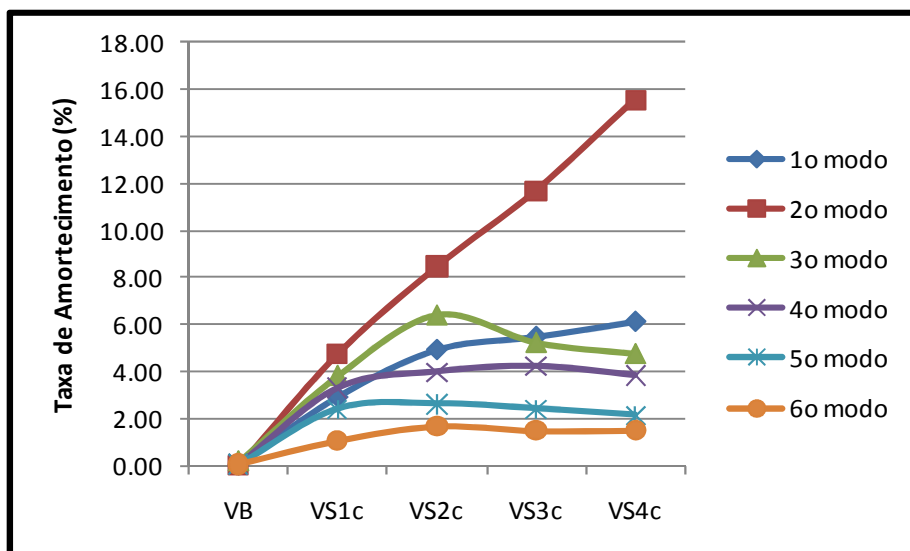
A Tabela III. 8 e a Figura III. 16 apresentam as taxas de amortecimento obtidas a partir da viga VA, enquanto as Figuras III. 17 e III. 18 mostram estes mesmos gráficos obtidos a partir das vigas VB e VC, respectivamente.

**Tabela III. 8: Taxas de amortecimento (%) obtidas a partir da viga VA**

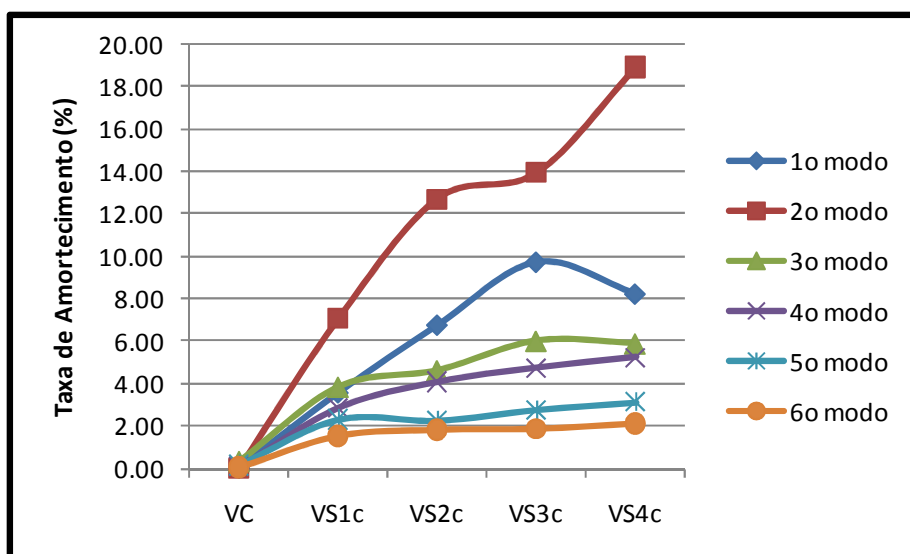
TX. AMORT.(%)	E_B		Visco		S_1c		S_2c		S_3c		S_4c		
	Modos	médias	desvios	médias	desvios	médias	desvios	médias	desvios	médias	desvios	médias	desvios
1o		0.04	0.00	0.04	0.00	2.23	0.02	4.75	0.31	4.93	0.07	5.54	0.02
2o		0.03	0.00	0.05	0.00	3.48	0.06	6.67	0.02	9.24	0.07	11.67	0.54
3o		0.37	0.00	0.45	0.00	3.86	0.07	4.73	0.56	6.02	0.13	6.21	0.79
4o		0.05	0.00	0.10	0.00	2.84	0.20	3.63	0.88	3.94	0.19	3.82	0.15
5o		0.04	0.00	0.15	0.00	1.68	0.26	2.45	0.13	1.83	0.41	2.92	0.09
6o		0.07	0.00	0.06	0.00	0.78	0.08	1.57	0.19	1.67	0.08	1.86	0.12



**Figura III. 16: Taxas de amortecimento referentes às vigas VA**



**Figura III. 17: Taxas de amortecimento referentes às vigas VB**



**Figura III. 18: Taxas de amortecimento referentes às vigas VC**

Analisando-se a Tabela III. 8 e as Figuras III. 16 a III. 18 nota-se que, conforme esperado, a instalação de somente uma camada de material viscoelástico não provoca acréscimo da taxa de amortecimento. Quando a restrição é adicionada à camada viscoelástica (viga VS1c) observa-se um aumento significativo da taxa de amortecimento para todos os modos de vibração, principalmente para os quatro primeiros. Quando o “2º sanduíche” é instalado (viga VS2c) as taxas de amortecimento aumentam ainda mais,

chegando a ser da ordem de duas vezes maior que a situação com um sanduíche (VS1c). Para o “3º” e “4º sanduíches” (VS3c e VS4c), observa-se, de uma forma geral, um leve aumento da taxa de amortecimento em relação a viga VS2c.

Desta forma pode-se concluir, através das análises apresentadas neste item, que a introdução de camadas de material viscoelástico e restrição tende a diminuir um pouco as frequências naturais e a aumentar significativamente as taxas de amortecimento. Apenas para dar uma idéia do acréscimo de amortecimento obtido, apresenta-se na Tabela III. 9 a razão da taxa de amortecimento da viga com dois sanduíches (VS2c) pela das vigas simples VA, VB e VC.

**Tabela III. 9: Razão das Taxas de Amortecimento das Vigas Sanduiche VS2c pelas Vigas Simples**

Modos	VS2c/VA	VS2c/VB	VS2c/VC
1º	58	101	121
2º	111	319	437
3º	11	35	14
4º	61	56	46
5º	39	33	14
6º	11	24	28

Na Tabela III. 9 as relações de espessuras entre a camada de restrição e a estrutura base são de 0.12, 0.20 e 0.39, respectivamente para as vigas VA, VB e VC. Desta forma, nota-se que o aumento da taxa de amortecimento depende não apenas da relação de espessuras, mas também do modo de vibração analisado. Deve-se ressaltar que a menor relação obtida é da ordem de 11 vezes, o que representa um acréscimo da taxa de amortecimento de 1100 % em relação à estrutura base, e que, conforme mostrado na Figura III. 11, as taxas de amortecimento das vigas sanduiche com camada de restrição livre (Figuras III. 16 a III. 18) são menores do que as com a restrição engastada.

### III. 2.2.2. Análise da Influência da Espessura da Camada de Restrição

A fim de avaliar a influência da espessura da camada de restrição nos parâmetros modais das vigas sanduíche, apresenta-se nas Figuras III. 19 a III. 22 a variação das frequências naturais obtidas experimentalmente em função da espessura da camada de restrição para as vigas VS1c, VS2c, VS3c e VS4c, respectivamente.

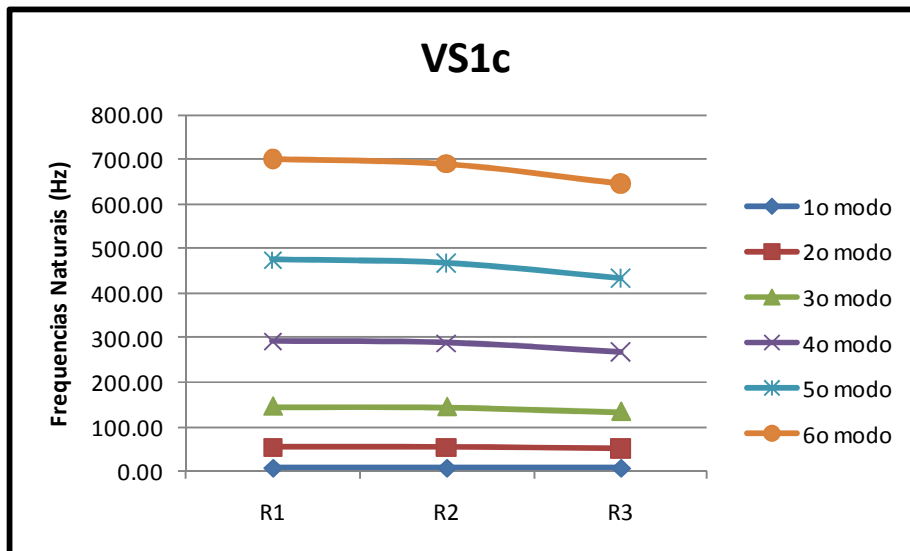
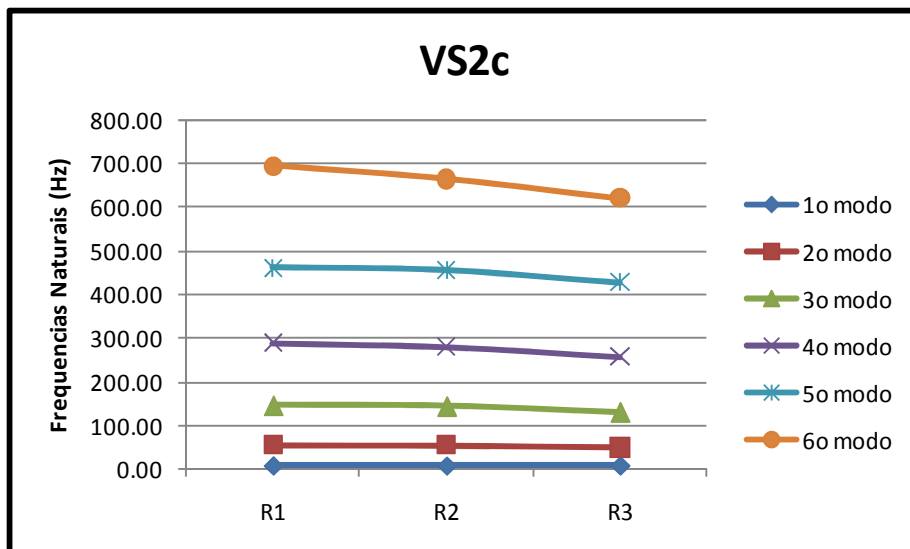
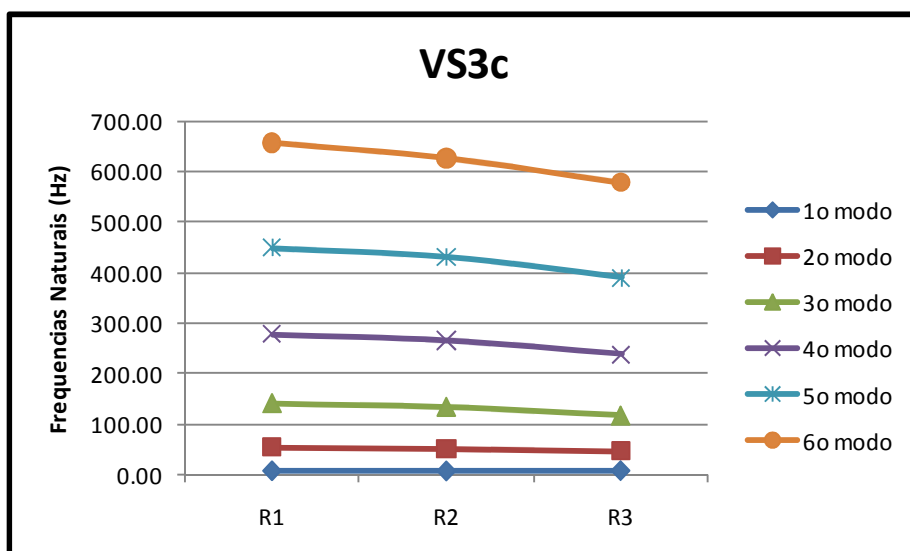


Figura III. 19: Frequências naturais da viga sanduíche VS1c em função da espessura das camadas de restrição

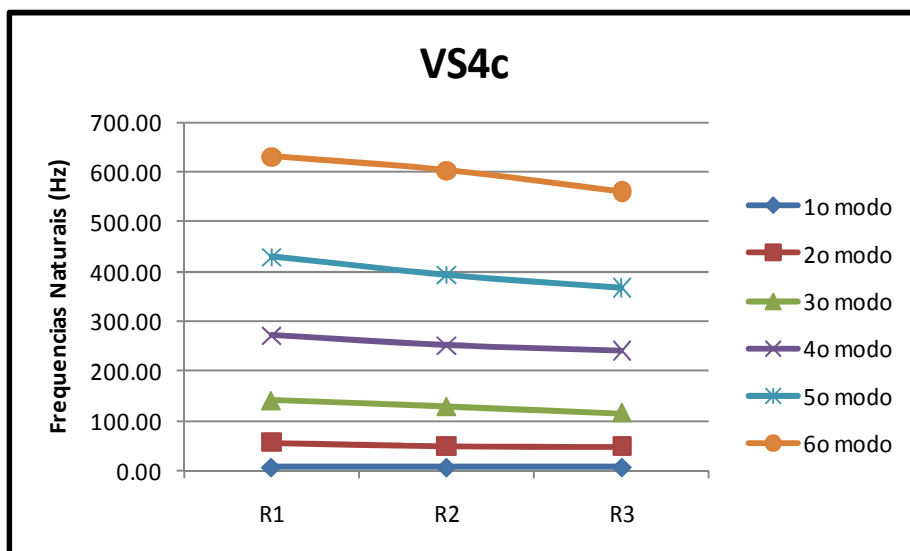




**Figura III. 20:** Frequências naturais da viga sanduíche VS2c em função da espessura das camadas de restrição



**Figura III. 21:** Frequências naturais da viga sanduíche VS3c em função da espessura das camadas de restrição



**Figura III. 22: Frequências naturais da viga sanduíche VS4 em função da espessura das camadas de restrição**

Observa-se nas Figuras III. 19 a III. 22 que, de uma forma geral, as frequências naturais tendem a diminuir quando se aumenta a espessura da camada de restrição, indicando que a contribuição da massa adicionada pela camada de restrição é maior do que a rigidez. Deve-se ressaltar que nas vigas VS1c a VS4c a camada de restrição é liberada, o que poderia explicar o fato da massa ter uma maior influência do que a rigidez.

As Figuras III. 23 a III. 26 mostram a variação das taxas de amortecimento obtidas experimentalmente em função da espessura da camada de restrição para as vigas VS1c, VS2c, VS3c e VS4c, respectivamente.

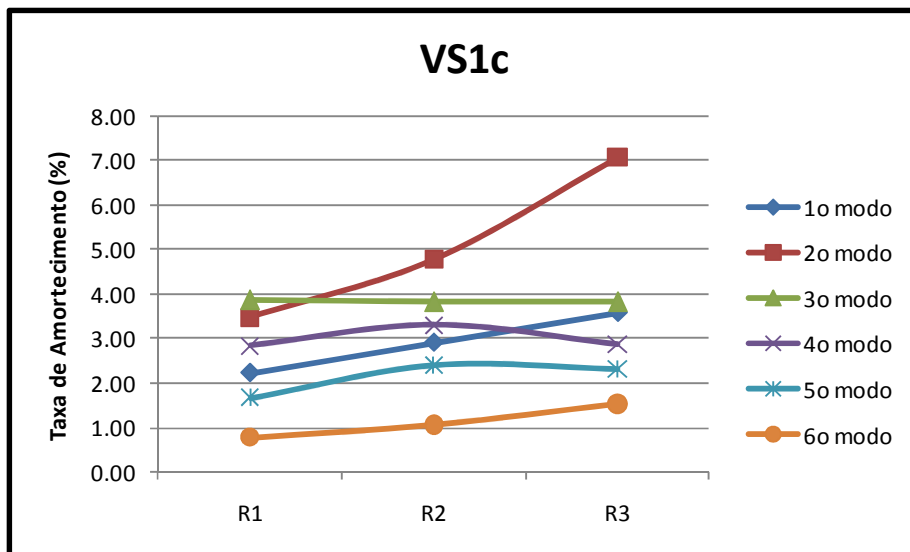


Figura III. 23: Taxas de amortecimento da viga sanduíche VS1c em função da espessura das camadas de restrição

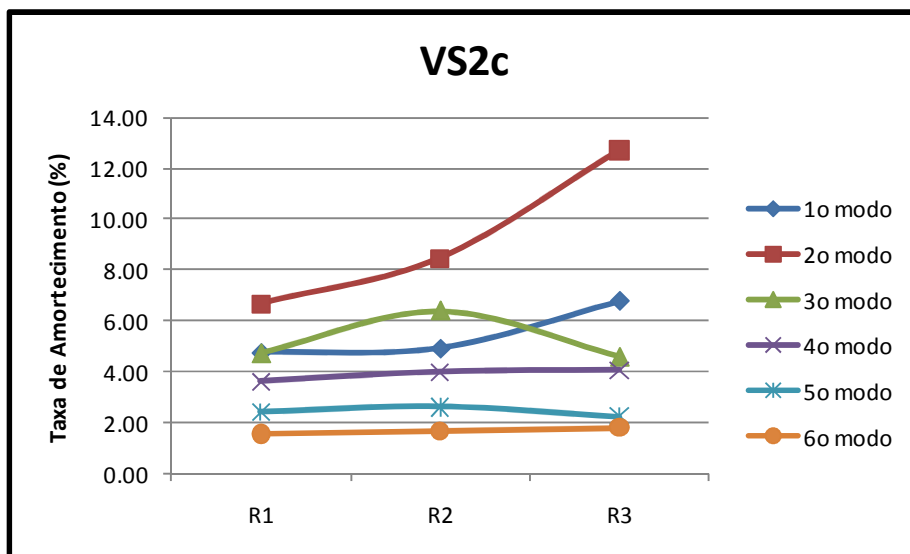
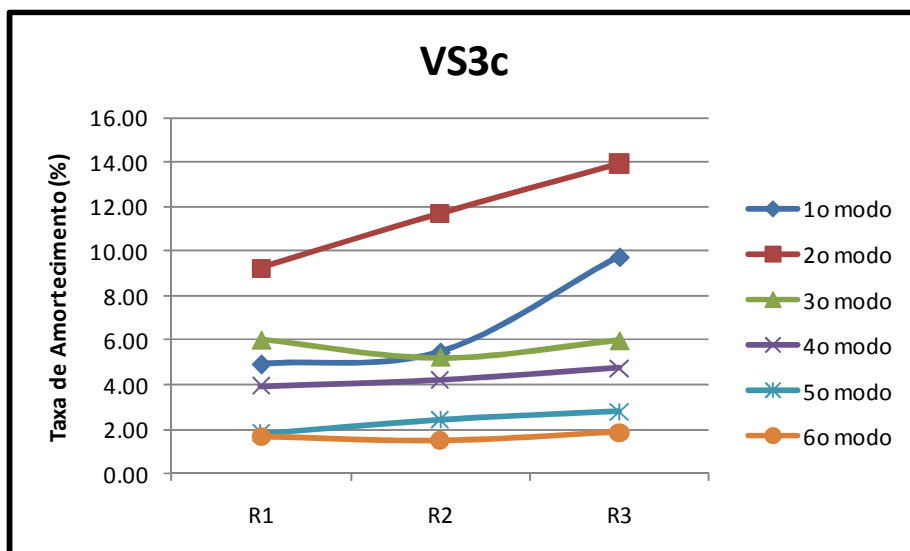
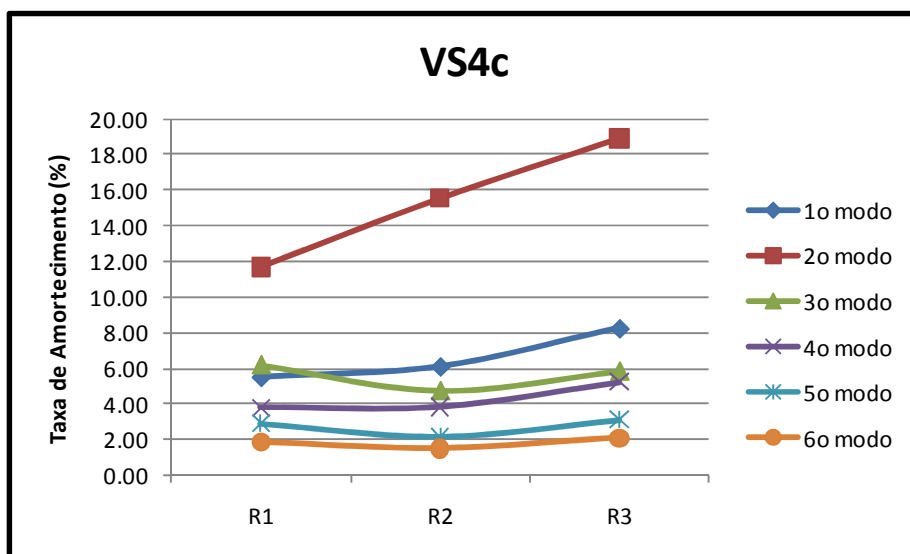


Figura III. 24: Taxas de amortecimento da viga sanduíche VS2c em função da espessura das camadas de restrição



**Figura III. 25: Taxas de amortecimento da viga sanduíche VS3c em função da espessura das camadas de restrição**



**Figura III. 26: Taxas de amortecimento da viga sanduíche VS4c em função da espessura das camadas de restrição**

Observa-se nas Figuras III. 23 a III. 26 que, com exceção do 3º modo de vibração, de uma forma geral as taxas de amortecimento tendem a aumentar quando se aumenta a espessura da camada de restrição. O 3º modo de vibração não mostra uma tendência clara, ora diminuindo, ora aumentando um pouco a taxa de amortecimento.

## **VI. CARACTERIZAÇÃO DO MATERIAL VISCOELÁSTICO E CORRELAÇÃO TEÓRICA E EXPERIMENTAL**

Neste capítulo será mostrado como foi realizada a caracterização do material viscoelástico (MVE) utilizado, ou seja, a estimação do módulo de cisalhamento,  $G$ , e do fator de perda,  $\eta$ , que representam a energia armazenada e a energia dissipada do MVE, respectivamente.

Também será mostrada a correlação entre os resultados obtidos experimentalmente para a viga com duas camadas de MVE e duas aproximações sugeridas por NASHIF (1985).

### **IV. 1. Caracterização do Material Viscoelástico**

Uma das formas mais usuais para descrever o comportamento reológico de materiais viscoelásticos é a representação em forma complexa. O módulo cisalhante complexo pode ser expresso através da seguinte equação:

$$G^* = G + i\eta G$$

Nesta equação a parte real representa a rigidez do material viscoelástico, a qual é a energia estocada, e a parte imaginária dividida pela parte real representa o fator de perda, que é a razão entre a energia dissipada por radiano e a energia estocada. A caracterização experimental dos materiais viscoelásticos pode ser dada através de suas propriedades – módulo cisalhante,  $G$ , e, fator de perda,  $\eta$ , as quais podem variar com a frequência.

De acordo com a literatura técnica existem alguns métodos para obtenção das propriedades dos materiais viscoelásticos ao longo da frequência:

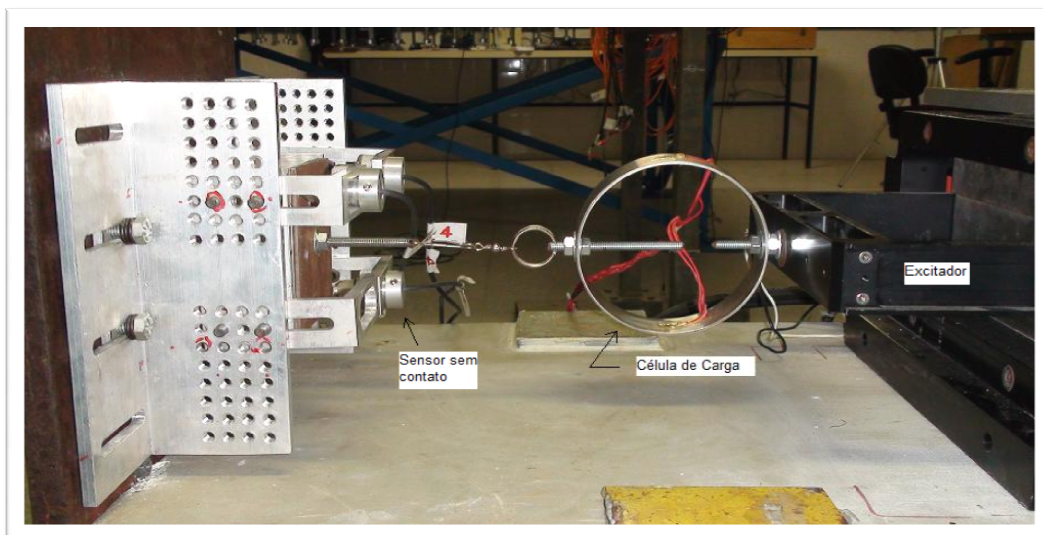
- Método de Ensaio de Rigidez com Aplicação Indireta de Força, ou Método Indireto (Masterson e Miles, 1995);

- Método Direto (Faísca, 1998), cuja denominação se deve ao fato de tanto a força aplicada, quanto a resposta de o sistema serem medidos diretamente.
- Método Padrão ASTM (ASTM, 1993);

O Método Indireto é assim denominado devido ao fato da força ser medida indiretamente através da aceleração relativa entre dois acelerômetros. Maiores detalhes sobre este método, assim como a sua formulação matemática podem ser encontrados na dissertação de FAÍSCA (1998), em (Silva, 2007) e em (Masterson e Miles, 1995). Este método apresenta a necessidade de gerar uma excitação de base, que para baixas frequências representa uma grande magnitude de deslocamento, sendo difícil se obter um excitador com essas características. Uma possível alternativa para contornar esse problema seria a utilização de acelerômetros com alta sensibilidade, mas quanto maior a sensibilidade do sensor, menor sua faixa de frequência de trabalho e maior seu peso e tamanho, tornando essa alternativa inviável (Magluta, Sclebin, Roitman, 2008). Por estas razões este método não foi utilizado no presente trabalho.

A formulação matemática do Método Direto pode ser encontrada na dissertação de FAÍSCA (1998).

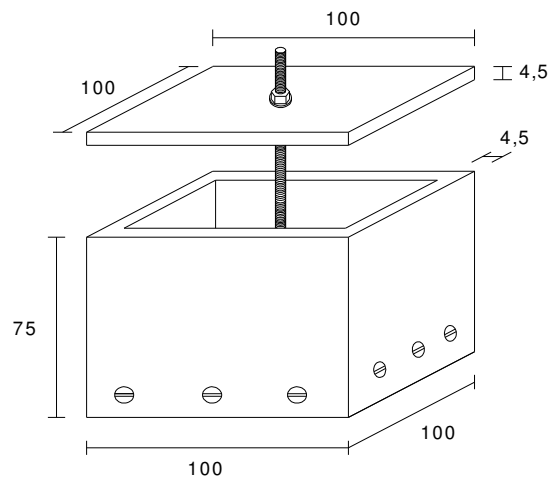
A Figura IV. 1 apresenta a instrumentação desenvolvida para a aplicação do Método Direto e suas características.



**Figura IV. 1: Aparato experimental utilizado no Método Direto**

A montagem é composta por duas cantoneiras de alumínio rígidas ligadas a uma caixa de alumínio, também rígida, através do material amortecedor. Esta montagem permite variar a área de contato do material amortecedor.

As dimensões externas da caixa de alumínio são: 100 mm x 100 mm x 75 mm e sua massa é de 743.3 g, considerando parafusos, porcas e uma tampa de aço da caixa com as seguintes dimensões: 100 mm x 100 mm x 4,5 mm. A Figura IV. 2 ilustra detalhadamente a caixa projetada para o ensaio.



**Figura IV. 2: Caixa de alumínio utilizada no ensaio do Método Direto (Silva, 2007)**

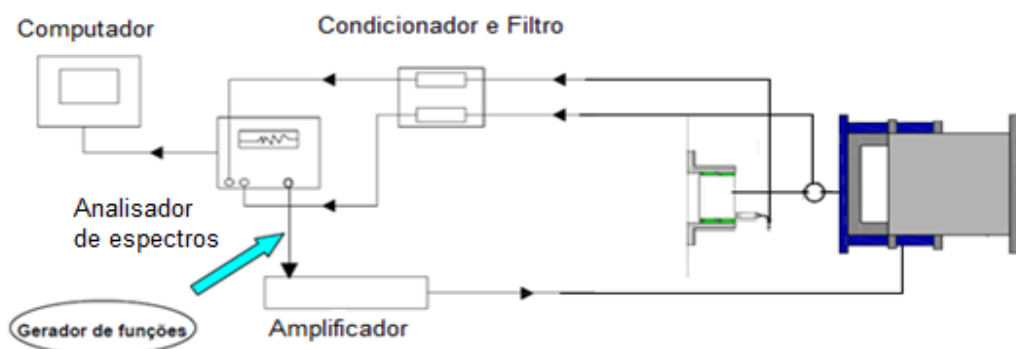
A área do material viscoelástico que une a caixa às cantoneiras também foi projetada visando otimizar a obtenção do módulo cisalhante,  $G$ , e do fator de perda,  $\eta$ . Isto foi realizado de forma a aumentar a magnitude da função de transferência,  $H_{yf}$ . Foram fixados oito pedaços de material viscoelástico VHB 4955 cada um com dimensões de 19 mm, 20 mm e 2 mm (comp., larg., esp.), sendo colocado quatro de cada lado, conforme mostrado na Figura IV. 3.



**Figura IV. 3: Vista da caixa de alumínio com material viscoelástico e cantoneiras**  
(Silva, 2007)

Durante o ensaio, um excitador eletromagnético de grande curso (9,15 cm pico a pico) impõe deslocamentos às cantoneiras através de funções harmônicas ou ruído branco. Para a medição dos deslocamentos relativos entre as cantoneiras e a caixa de alumínio (deslocamento sofrido pelo MVE) foram utilizados quatro sensores indutivos sem contato, um em cada extremidade da caixa. Uma célula de carga foi fixada na tampa da caixa de alumínio para medir a força.

Depois de condicionados e filtrados, os sinais no domínio do tempo dos sensores são transformados para o domínio da frequência através de um analisador de espectro. Esse analisador estima a função de transferência entre a força e os deslocamentos medidos tornando possível a determinação da rigidez complexa. A Figura IV. 4 mostra um esquema dos equipamentos utilizados.



**Figura IV. 4: Esquema de montagem do Método Direto**



O módulo de cisalhamento e o fator de perda são determinados a partir da rigidez complexa (Fáisca, 1998, Silva, 2007)

$$K(\omega) = H_{xf}(\omega) + m \cdot \omega^2 \quad (\text{IV. 1})$$

onde  $m$  é a massa da caixa de alumínio,  $\omega$  é a frequência angular obtida experimentalmente e  $H_{xf}(\omega)$  é a função de transferência entre força e deslocamento medidos.

Como  $H_{xf}(\omega)$  é uma função complexa, esta pode ser escrita na forma  $H_{xf}(\omega) = a + bi$  (IV. 2) onde  $a = |H_{xf}| \cdot \cos \theta$  (IV. 3) e  $b = |H_{xf}| \cdot \sin \theta$  (IV. 4).

O módulo de cisalhamento pode ser obtido por

$$G(\omega) = \frac{K(\omega) \cdot h}{2 \cdot d \cdot l} \quad (\text{IV. 5})$$

onde  $K(\omega)$  é a rigidez complexa,  $h$  a espessura do MVE,  $d$  a largura e  $l$  a soma dos comprimentos dos pedaços de MVE em cada lado da caixa. A constante “2” considera o fato de existir MVE em cada lado da caixa.

Assim, a partir de (IV. 1), (IV. 2) e (IV. 5) tem-se

$$G(\omega)_{Real} = \frac{[a + m\omega^2] \cdot h}{2 \cdot d \cdot l} \quad (\text{IV. 6})$$

$$G(\omega)_{Imag} = \frac{b \cdot h}{2 \cdot d \cdot l} \quad (\text{IV. 7})$$

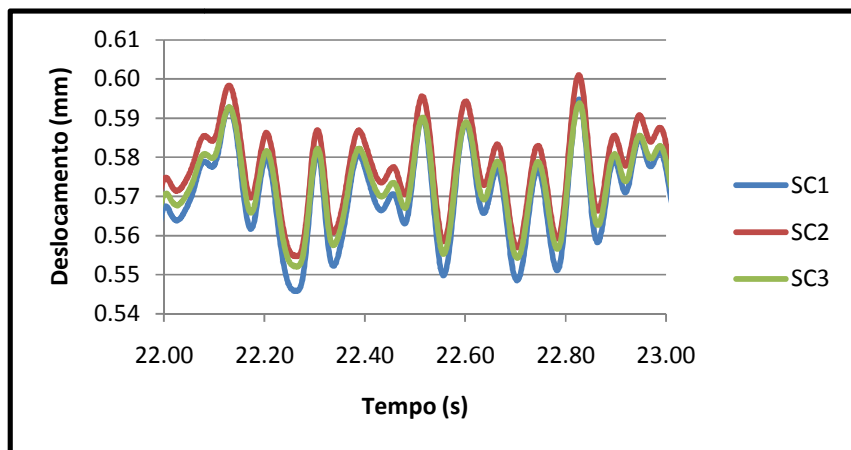
Portanto,

$$G(\omega) = \sqrt{G(\omega)_{Real}^2 + G(\omega)_{Imag}^2} \quad (\text{IV. 8})$$

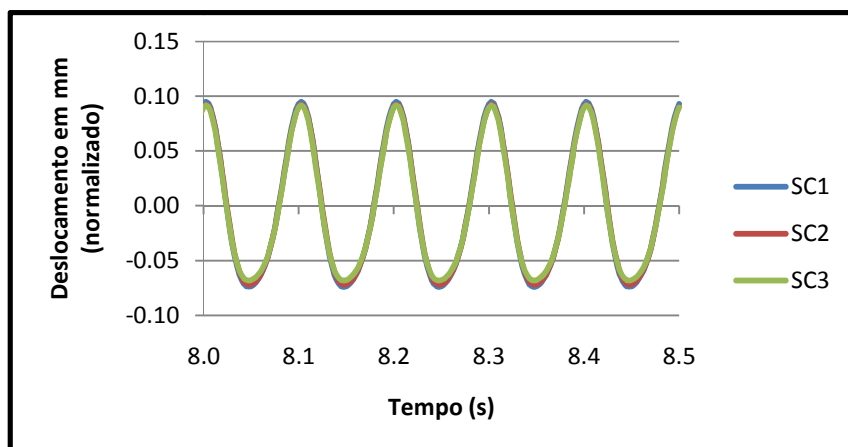
$$\eta(\omega) = \frac{G(\omega)_{Imag}}{G(\omega)_{Real}} \quad (\text{IV. 9})$$

Conforme mencionado anteriormente foram utilizados quatro sensores indutivos sem contato para medir o deslocamento do MVE. A fim de verificar a qualidade da montagem foram realizados alguns pré-testes com excitação harmônica e de ruído branco.

As Figuras IV. 5 e IV. 6 mostram, respectivamente, a comparação entre os deslocamentos medidos por três sensores em um teste com excitação do tipo ruído branco na faixa de 0 a 20 Hz e de do tipo harmônica. Observa-se nestas figuras que os deslocamentos obtidos são praticamente iguais, indicando que o aparato experimental desenvolvido é satisfatório para a realização dos testes. Deve-se ressaltar que houve um problema nos sinais do quarto sensor, e por esta razão este não é apresentado.



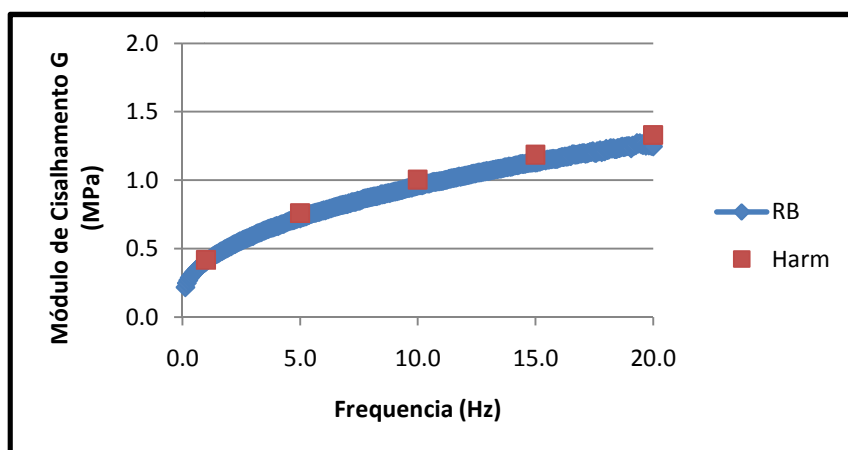
**Figura IV. 5: Correlação entre os deslocamentos medidos com excitação do tipo ruído branco**



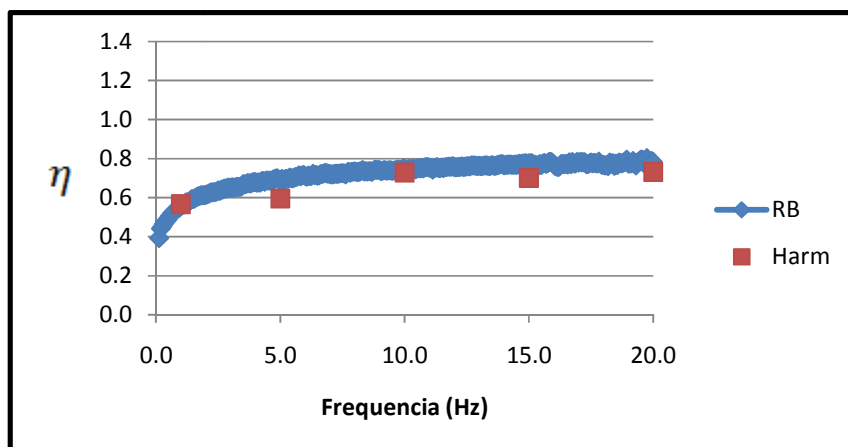
**Figura IV. 6: Correlação entre os deslocamentos medidos com excitação harmônica**

Inicialmente foi realizada uma excitação do sistema na faixa de operação do excitador (0 a 100 Hz), porém verificaram-se flutuações do excitador para frequências superiores a 20 Hz, e por esta razão somente foi possível realizar a caracterização do MVE, por este método, até 20 Hz.

Os resultados obtidos para o módulo de cisalhamento e para o fator de perda na faixa de frequência de 0 a 20 Hz, para excitação harmônica e do tipo ruído branco são mostrados nas Figuras IV. 7 e IV. 8, respectivamente.



**Figura IV. 7: Módulo de cisalhamento do MVE submetido à vibração harmônica e do tipo ruído branco**



**Figura IV. 8: Fator de perda do MVE submetido à vibração harmônica e do tipo ruído branco**

Observando-se as Figuras IV. 7 e IV. 8 nota-se que os resultados obtidos com a excitação harmônica e do tipo ruído branco são muito próximos, indicando que os dois tipos de excitação podem ser utilizados. Deve-se ressaltar, no entanto, que a execução do teste com excitação do tipo ruído branco é bem mais rápida.

Cabe ser comentado que há a expectativa da temperatura ter se mantido constante, mas que esta não foi controlada apesar do ambiente durante os testes ser sempre refrigerado.

O Método Padrão da ASTM (1993) é baseado na estimativa das frequências naturais e taxas de amortecimento de barras simples e de vigas sanduíche, onde a espessura da camada da estrutura base deve ser igual a da camada de restrição. Como neste trabalho os testes experimentais não contemplaram essa situação não foi possível utilizar este método para caracterização do MVE.

Devido ao fato das vigas utilizadas terem espessuras distintas torna-se um trabalho bastante árduo obter uma formulação analítica fechada para determinação das características do MVE como é o caso do Método da ASTM. Como um processo alternativo, foi realizado um estudo paramétrico, utilizando-se a rigidez flexional para o sistema de três camadas (II. 28), variando-se os parâmetros  $G$  e  $\eta$  de forma que a frequência natural e a taxa de amortecimento calculadas fossem o mais próximo possível das estimadas experimentalmente.

Neste procedimento, foram utilizados como dados de entrada, as frequências naturais e das taxas de amortecimento estimados para cada um dos modos de vibração das lâminas VA e VB. A fim de aumentar o número de dados na análise e de levar em consideração a dispersão verificada nos ensaios experimentais, além dos valores médios dos parâmetros de entrada foram utilizados uma combinação destes com os seus respectivos desvios padrão. Os resultados destas análises são apresentados na Tabela IV. 1 e nos gráficos das Figuras IV. 9 e IV. 10. Nestes gráficos são apresentados no eixo das abscissas a frequência média de cada modo de vibração e no eixo das ordenadas o parâmetro médio obtido e o parâmetro médio mais e menos um desvio padrão.

**Tabela IV. 1: Módulo de Cisalhamento,  $G$ , e Fator de Perda,  $\eta$ , obtidos**

Modos	Freq. (Hz)		$G$ (MPa)			$\eta$		
			m-d	m	m+d	m-d	m	m+d
1o	m-d	11.01	0.614	0.637	0.661	0.535	0.582	0.629
	m	11.17	0.870	0.895	0.919	0.582	0.629	0.676
	m+d	11.34	0.870	0.895	0.919	0.582	0.629	0.676
2o	m-d	61.67	0.896	0.946	0.995	0.817	0.911	1.005
	m	62.58	1.133	1.204	1.274	0.747	0.801	0.856
	m+d	63.49	1.310	1.387	1.463	0.667	0.739	0.810
3o	m-d	168.1	1.018	1.134	1.249	1.151	1.400	1.649
	m	171.88	2.054	2.468	2.883	0.581	0.808	1.035
	m+d	175.66	2.854	3.200	3.547	0.553	0.680	0.807
4o	m-d	344.4	5.923	6.534	7.145	0.296	0.344	0.392
	m	349.9	9.179	10.333	11.488	0.252	0.280	0.308
	m+d	355.4	10.024	12.333	14.643	0.236	0.264	0.292
5o	m-d	531.22	0.776	1.353	1.931	1.079	1.201	1.323
	m	538.38	1.532	2.687	3.841	0.662	1.036	1.410
	m+d	545.55	5.532	6.686	7.841	0.390	0.466	0.542
6o	m-d	786.58	2.000	2.000	2.000	0.756	0.854	0.952
	m	800.5	2.179	3.334	4.488	0.302	0.607	0.912
	m+d	814.41	6.179	7.334	8.488	0.259	0.282	0.305

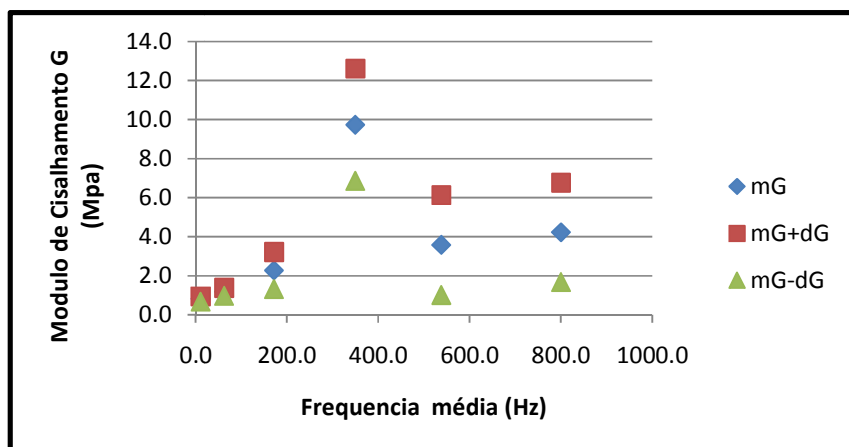


Figura IV. 9: Módulo de Cisalhamento versus Frequência

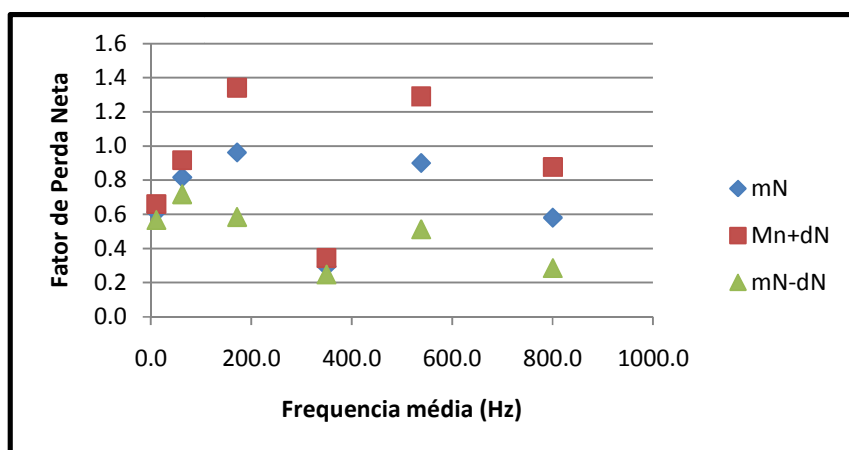


Figura IV. 10: Fator de Perda versus Frequência

Observa-se nas Figuras IV. 9 e IV. 10 que há grande dispersão tanto do módulo de cisalhamento, quanto do fator de perda, para os modos mais altos. Portanto, para análises futuras só serão usados o 1º e o 2º modos de vibração.

Assim como o ASTM, essa metodologia só obtém  $G$  e  $\eta$  para as frequências naturais da viga. Para obter os parâmetros para outras frequências o método deveria ser aplicado para vigas de vários comprimentos, tornando o processo muito trabalhoso. Além disso, para baixas frequências as vigas deveriam ter relações entre comprimento e espessura muito grandes, o que poderia desrespeitar as relações de dimensão necessárias para classificação da estrutura como viga, inviabilizando o processo.

Nas Figuras IV. 11 e IV. 12 são apresentados, respectivamente, os resultados para  $G$  e  $\eta$  versus frequência obtida através dos ensaios de ruído branco (RB) e com a metodologia desenvolvida (Ajuste). Nestas figuras também são apresentadas as curvas polinomiais do 3º grau ajustados aos pontos obtidos pelos dois métodos. Para esta análise foram considerados apenas alguns pontos obtidos do teste com excitação do tipo ruído branco a fim de que não fosse gerada nenhuma tendência na curva e os dois primeiros modos de vibração devido à dispersão observada nos resultados.

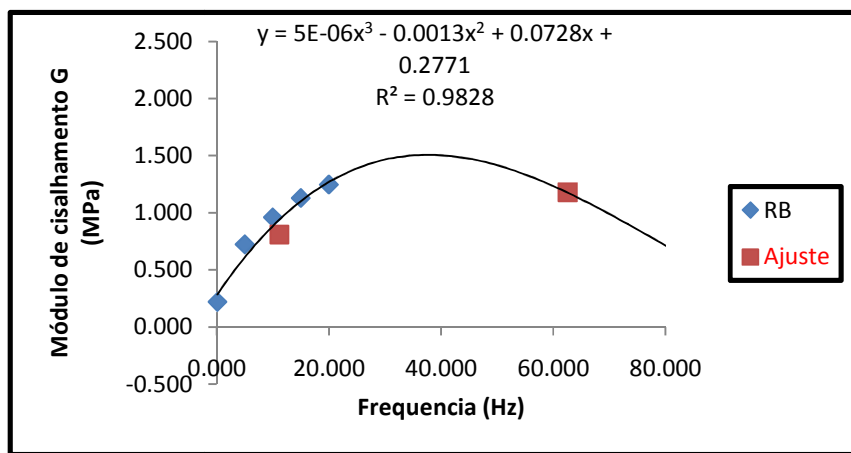


Figura IV. 11: Função polinomial do 3º grau ajustada para  $G$

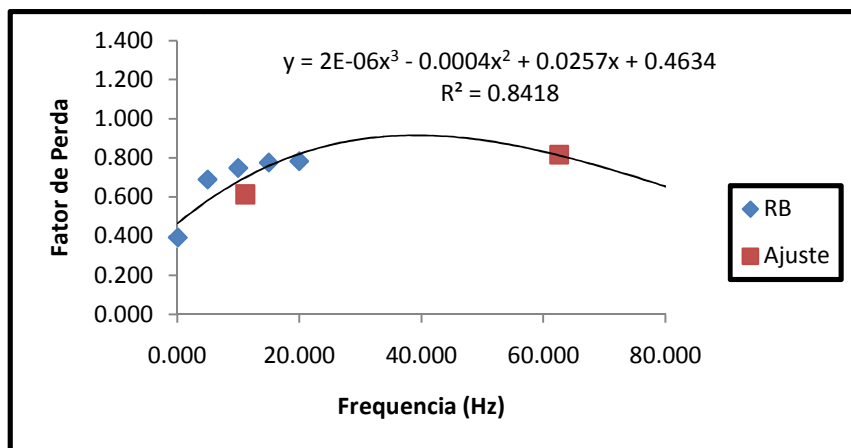


Figura IV. 12: Função polinomial do 3º grau ajustada para  $\eta$

## IV. 2. Ajuste do Modelo Analítico para a situação de ensaio

O modelo analítico da viga sanduíche, conforme mostrado no Capítulo II e em (Teng e Hu, 2001), foi desenvolvido levando em consideração as condições de contorno, isto é, as frequências naturais e taxas de amortecimento podem ser calculadas através de:

$$\omega_n = \frac{a_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{Re(B)}{m}},$$

$$\xi_n = \frac{Im(B)}{Re(B)}$$

onde  $L$  é o comprimento da viga e  $a_n$  corresponde aos coeficientes que representam as diversas condições de contorno que estas vigas podem ser ensaiadas. A fim de ilustrar este ponto na Tabela IV. 2 são apresentados os coeficientes para a situação da viga engastada e livre.

**Tabela IV. 2: Coeficientes associados a vigas do tipo engastada- livre**

Modo ( $n$ )	$a_n = p_n \cdot L$
1	1.875
2	4.694
3	7.8655
$n > 3$	$(2n - 1) \cdot \frac{\pi}{2}$

No entanto, o desenvolvimento teórico parte da premissa que as condições de contorno da viga de base e da camada de restrição são iguais. Na bibliografia técnica não foi encontrada nenhuma menção de uma solução analítica fechada para vigas sanduíche que tivesse a camada de restrição com condições de contorno distinta da estrutura de base. Com intuito de buscar uma solução aproximada para descrever o comportamento das vigas sanduíches ensaiadas, isto é, estrutura de base engastada e camada de restrição liberada, foi



realizada um estudo paramétrico como tentativa de encontrar novos coeficientes  $a_n$  que pudessem representar esta nova situação.

Este estudo paramétrico foi realizado utilizando-se a equação da rigidez flexional para o sistema de três camadas (II. 28) variando-se o valor de  $a_n$  a fim de obter numericamente os valores da frequência natural e da taxa de amortecimento estimados experimentalmente para as vigas sanduíche com camada de restrição liberada. Nesta análise o módulo de cisalhamento e o fator de perda do MVE utilizados foram aqueles obtidos a partir das equações apresentadas nas Figuras IV. 11 e IV. 12. Cabe ressaltar que essa análise foi realizada utilizando os resultados obtidos com as laminas VA (R1), VB (R2), VC (R3) e VAS1c apresentados no capítulo 3. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela IV. 3.

**Tabela IV. 3: Estimativa do Coeficiente  $a_n$**

Restrição Livre		Experimental		Ajustado		Calculado			ERRO (%)	
Vigas	Modos	$\omega$ (Hz)	Tx. Amort. (%)	G (Mpa)	$\eta$	$a_n$	$\omega$ (Hz)	Tx. Amort. (%)	$\omega$	Tx. Amort.
VA (R1)	1o	8.41	2.23	0.80	0.65	1.77	8.34	2.82	0.79	26.44
VB (R2)		8.25	2.92	0.79	0.65	1.73	8.23	4.53	0.33	55.19
VC (R3)		8.01	3.59	0.78	0.64	1.65	7.95	7.79	0.71	116.99
VA		9.82	2.74	0.87	0.68	1.73	9.77	4.81	0.47	75.60
VA (R1)	2o	55.09	3.48	1.18	1.00	4.78	55.60	4.60	0.93	32.29
VB (R2)		54.64	4.78	1.19	1.00	4.78	54.84	6.08	0.37	27.28
VC (R3)		51.59	7.07	1.26	1.00	4.70	52.28	8.94	1.33	26.39
VA		63.70	4.80	0.93	0.99	4.78	63.88	4.88	0.28	1.73

Como é possível observar na Tabela IV. 3, não foi possível obter um valor de  $a_n$  que minimizasse o erro entre frequências naturais e taxas de amortecimento simultaneamente. Neste caso optou-se em minimizar as frequências naturais, no entanto é possível obter outro conjunto de resultados no qual a taxa de amortecimento seria mais bem ajustada, porém a frequência se afastaria dos valores experimentais. Este fato provavelmente esta associado à grande sensibilidade que fator  $a_n$  possui em relação aos valores de  $G$  e de  $\eta$ , e que se ajusta melhor para a frequência do que para o amortecimento.

Cabe ressaltar que a estimativa experimental destes valores apresentou uma grande incerteza principalmente no que se refere ao valor de  $\eta$ .

Além disso, apesar dos valores obtidos para  $a_n$  não conseguirem minimizar os erros simultaneamente, estes estão dentro, de certa forma, de uma faixa esperada. Estes resultados também indicam que existem outros fatores, tais como, alterações no campo de tensões próximo a ligações livres que devem ser levadas em consideração para que seja possível descrever corretamente o comportamento destas vigas. Adicionalmente, como a viga em estudo é isostática, o engaste é de grande importância, pois é onde há grande concentração de tensões e a liberação destas conduz a um comportamento bem mais complexo do que o desenvolvimento analítico consegue reproduzir. Provavelmente este tipo de comportamento só consiga ser adequadamente reproduzido através de uma modelagem numérica mais sofisticada, como, por exemplo, através de Elementos Finitos.

Devido às incertezas verificadas não será possível realizar uma correlação entre os resultados experimentais e analíticos para as vigas sanduíche com várias camadas de restrição liberadas.

### **IV. 3. Sistema com Múltiplas Camadas**

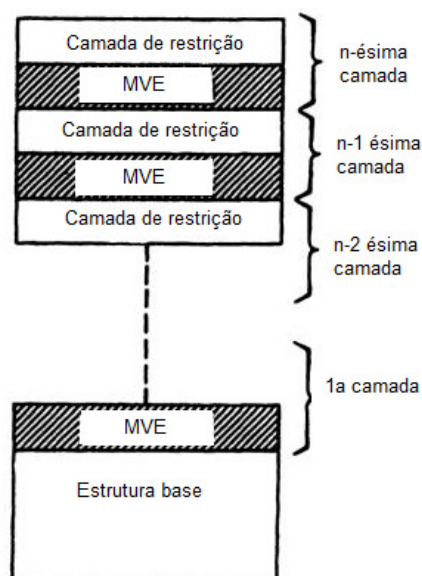
Sistemas com múltiplas camadas são utilizados objetivando o aumento do amortecimento estrutural. Espera-se que aumentando o número de camadas um nível maior de amortecimento seja introduzido no sistema. Contudo, muitos testes mostram que a maior parte do cisalhamento ocorre nas primeiras camadas (Nashif, 1985), ou seja, todas as outras camadas funcionam aumentando apenas a rigidez da camada de restrição, e conforme mostrado no capítulo III existe um limite superior para a espessura desta camada, a partir da qual o amortecimento para de crescer.

Na literatura não foi encontrada nenhuma formulação analítica para vigas com cinco camadas, sendo proposta neste trabalho (Anexo D) uma formulação baseada na generalização da formulação de três camadas. A fim de verificar se esta formulação apresentava consistência com os resultados experimentais é mostrado na Tabela IV. 4 a correlação entre os resultados obtidos para a viga VBS2. Conforme se pode observar nesta tabela os resultados em termos de frequência natural apresentam certa consistência, mas o mesmo não ocorre para a taxa de amortecimento. Vários estudos foram realizados na tentativa de melhorar esta correlação, no entanto, não foram bem sucedidos.

**Tabela IV. 4: Resultados obtidos a partir da formulação matemática (FM) para a viga de cinco camadas**

Modos	Experim.		FM		ERRO (%)	
	$\omega$ (Hz)	Tx. Amort. (%)	$\omega$ (Hz)	Tx. Amort. (%)	$\omega$	Tx. Amort.
1o	12.34	7.92	10.64	41.6	13.8	425.05
2o	64.79	8.65	72.4	40.9	11.75	372.4

Cabe ressaltar que este problema vem sendo estudado por diversos pesquisadores e não foi encontrado nenhum relato deste tipo de formulação. Como uma solução para esta dificuldade NASHIF (1985) sugere uma aproximação para estimar o comportamento de um sistema de múltiplas camadas como sendo a soma das espessuras de todas as camadas de restrição e usar como se fosse uma única camada de restrição. Outra aproximação sugerida seria obtida usando a equação do sistema de três camadas e trabalhando da última (mais afastada da estrutura base) para a primeira, como mostra a Figura IV. 13.



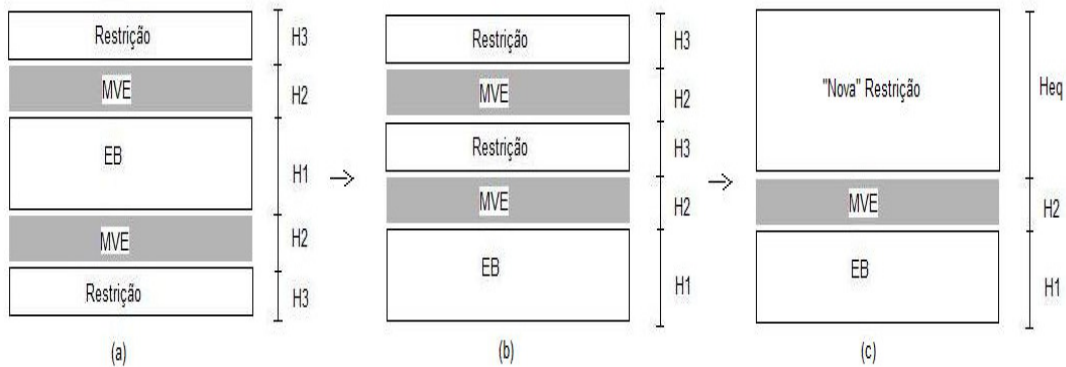
**Figura IV. 13: Sistema com  $n$  camadas (Nashif, 1985)**

Neste trabalho esta análise foi realizada para a viga VBS2 que possui cinco camadas, sendo duas de MVE e as restrições fixadas à base. Para a primeira aproximação basta que as espessuras das camadas de restrição sejam somadas. Para a segunda aproximação foi calculada uma espessura equivalente conforme ilustrada na Figura IV. 14.

A estrutura original é apresentada na figura IV. 4 (a) e por hipótese as camadas de restrição podem ser rearranjadas conforme ilustrada na figura IV. 4 (b). Finalmente, as três camadas mais externas podem ser aproximadas a uma equivalente, conforme ilustrada na figura IV. 4 (c), através da seguinte expressão:

$$H_{eq} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot Re(B)}{E_1}}$$

onde,  $B$  é estimado a partir dos dados das três camadas mais externas da Figura IV.15(b) e  $E_1$  é módulo de elasticidade da camada de restrição.



**Figura IV. 14: Sistema sanduíche com cinco camadas (a) original, (b) aproximada, (c) calculada**

Os valores das frequências e das taxas de amortecimento obtidos com as aproximações realizadas são apresentados na Tabela IV. 6, enquanto que os erros relativos aos resultados experimentais são apresentados na Tabela IV. 7.

**Tabela IV. 6: Valores obtidos para frequência e taxa de amortecimento teóricos**

Modos	Experim.		1ª aprox. (H3+H3)		2ª aprox. (Heq)	
	$\omega$ (Hz)	Tx. Amort. (%)	$\omega$ (Hz)	Tx. Amort. (%)	$\omega$ (Hz)	Tx. Amort. (%)
1o	12.34	7.92	12.05	8.9	12.22	9.7
2o	64.79	8.65	59.75	6.5	60.00	6.2

**Tabela IV. 7: Erro percentual entre valores experimentais e teóricos**

Modos	ERRO (%)			
	1ª aprox. (H3+H3) – Exp.		2ª aprox. (Heq) – Exp.	
	$\omega$	Tx. Amort.	$\omega$	Tx. Amort.
1º	2.4	12.1	1.0	23.0
2º	7.8	24.4	7.4	28.0

Com a Tabela IV. 7 é possível observar que os erros entre os valores obtidos com as aproximações sugeridas por NASHIF (1985) e os obtidos experimentalmente são baixos, verificando assim a consistência que as duas aproximações propostas são válidas para estimar estes parâmetros.

## V. ESTUDO PARAMÉTRICO

Neste capítulo serão mostrados resultados de uma análise paramétrica, obtidos a partir do modelo analítico calibrado com os resultados experimentais, onde são variadas as características físicas do material viscoelástico e as espessuras das camadas de restrição e do material viscoelástico, para os dois primeiros modos de vibração da viga sanduíche, com uma camada de material viscoelástico e uma de restrição engastada.

### V.1. Primeiro Modo de Vibração

A partir do modelo teórico foi realizado um estudo paramétrico a fim de verificar o comportamento da viga sanduíche. Para este estudo foi verificado como a frequência natural e a taxa de amortecimento do 1º modo de vibração da estrutura sanduíche se comporta em função das espessuras das camadas de restrição e do material viscoelástico, bem como de suas características, isto é, do módulo de cisalhamento e do fator de perda.

A frequência natural média encontrada experimentalmente para a estrutura base foi de 10.25 Hz, e a taxa de amortecimento de 0.05%. O módulo de cisalhamento do material viscoelástico,  $G$ , obtido experimentalmente para a frequência natural do 1º modo de vibração foi 0,96 MPa e o fator de perda,  $\eta$ , 0.72.

Nas Figuras V. 1 a V. 4 a razão entre a espessura da camada de restrição e da estrutura base encontra-se no eixo das abscissas. Nas Figuras V. 1 e V. 2, o eixo vertical apresenta a razão entre a frequência natural da viga sanduíche (S1) e da estrutura base (EB), enquanto nas Figuras V. 3 e V. 4 este eixo mostra essa mesma razão para as taxas de amortecimento. As Figuras V. 1 a V. 4 são apresentadas para diferentes módulos de cisalhamento e fatores de perda. Deve-se destacar que os valores das abscissas superiores ao valor um representam que a camada de restrição possui uma espessura maior do que a da estrutura principal. Estes valores foram utilizados somente para facilitar uma melhor visualização das tendências obtidas, mas na prática estes não têm sentido em serem utilizados.

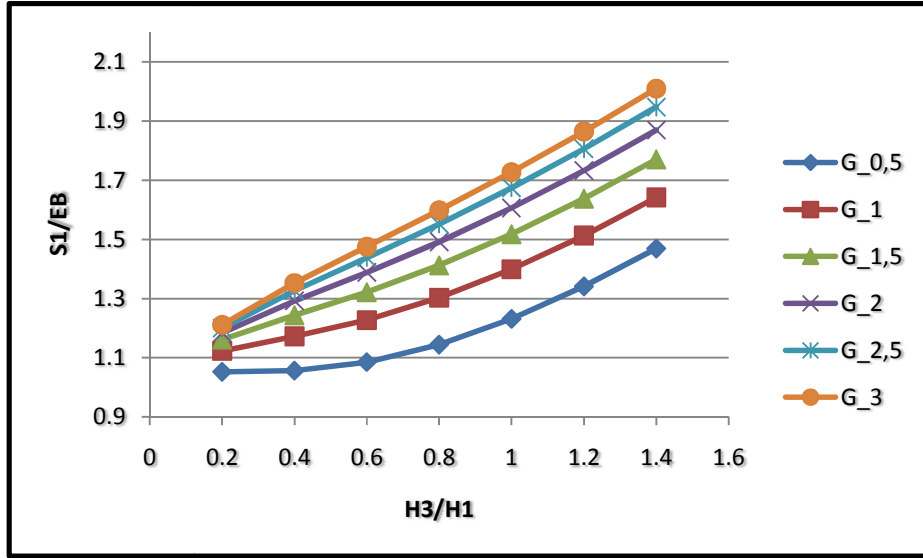


Figura V. 1: Variação da frequência natural do 1º modo de vibração com  $H_3$  e com  $G$

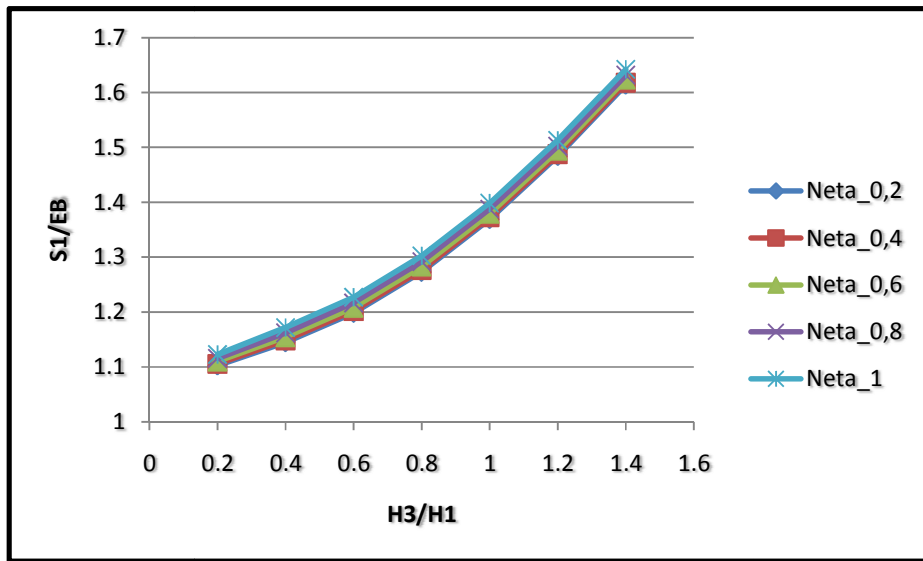
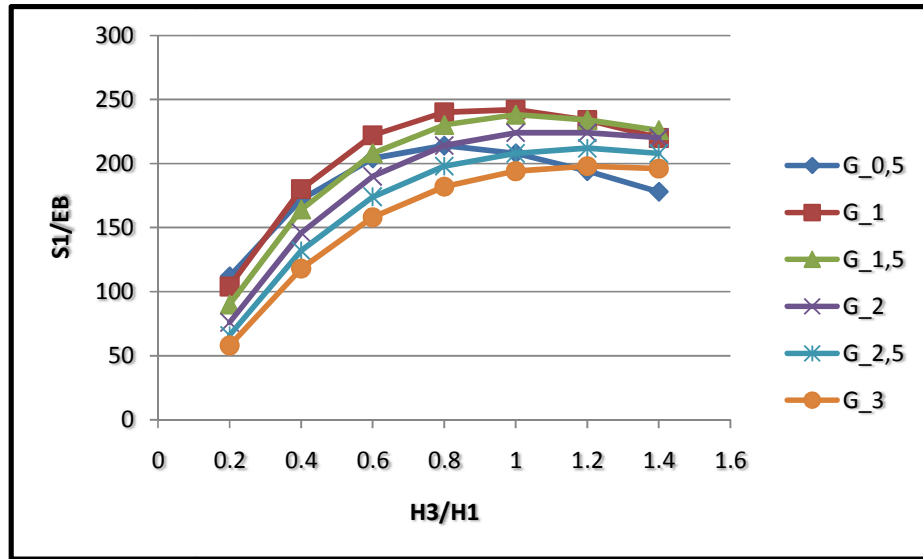
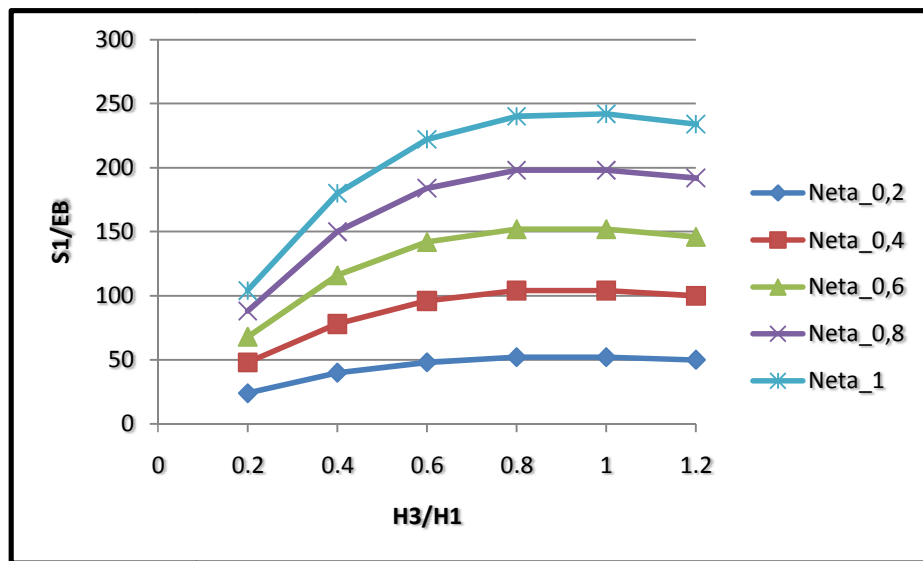


Figura V. 2: Variação da frequência natural do 1º modo de vibração com  $H_3$  e com  $\eta$



**Figura V. 3: Variação da taxa de amortecimento do 1º modo de vibração com  $H_3$  e  $G$**



**Figura V. 4: Variação da taxa de amortecimento do 1º modo de vibração com  $H_3$  e  $\eta$**

Pode-se observar nas Figuras V. 1 e V. 2 que a frequência natural aumenta com o acréscimo da espessura da camada de restrição e com o aumento, tanto do módulo de cisalhamento, quanto do fator de perda.

A taxa de amortecimento também aumenta com o acréscimo da camada de restrição apresentando neste caso seu máximo quando os valores de  $H_3$  e  $H_1$  são iguais. Este máximo surge em função da simetria, já que valores de  $H_3$  superiores a  $H_1$  representaria uma inversão de papéis, isto é, a estrutura de base passaria a ter a espessura de  $H_3$  enquanto a



camada de restrição possuiria a espessura  $H_1$  devido ao fato de que ambas estão fixadas a base.

Os gráficos das Figuras V. 5 a V. 8 apresentam no eixo das abscissas a razão entre as espessuras da camada viscoelástica e da estrutura base, e os eixos das ordenadas são iguais aos das Figuras V. 1 a V. 4.

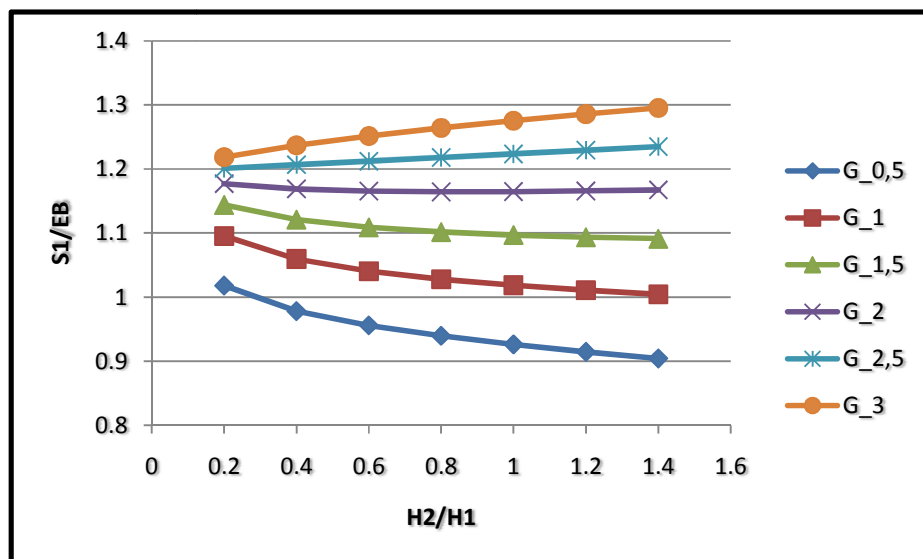


Figura V. 5: Variação da frequência natural do 1º modo de vibração com  $H_2$  e  $G$

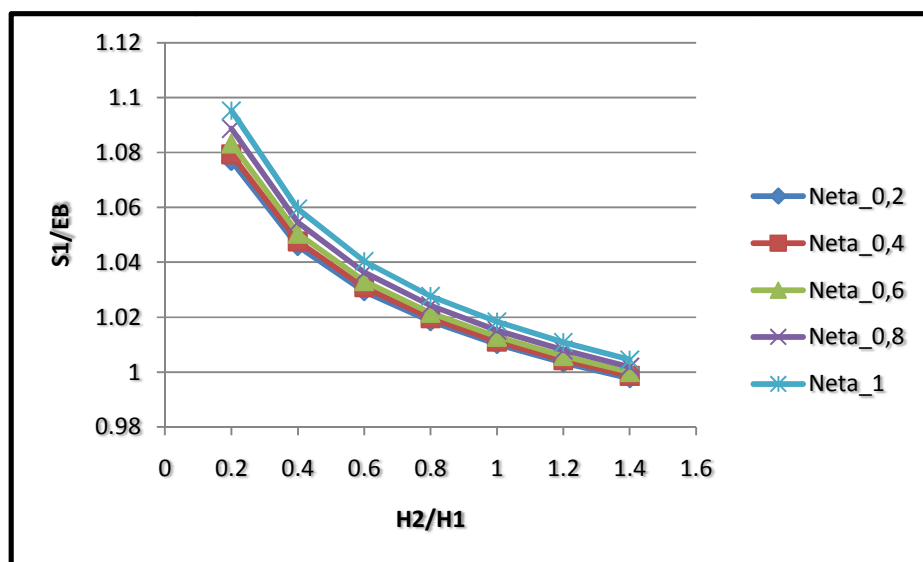


Figura V. 6: Variação da frequência natural do 1º modo de vibração com  $H_2$  e  $\eta$

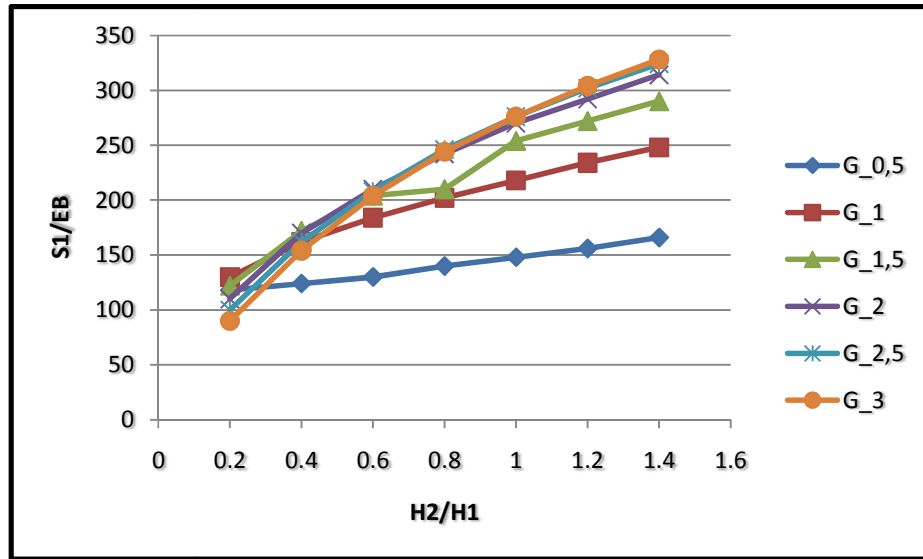


Figura V. 7: Variação da taxa de amortecimento do 1º modo de vibração com  $H_2$  e  $G$

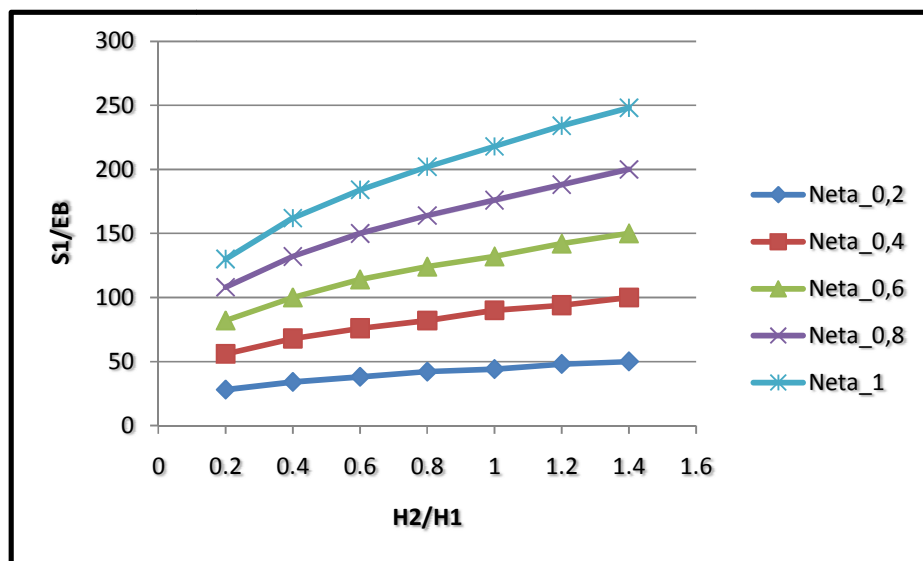


Figura V. 8: Variação da taxa de amortecimento do 1º modo de vibração com  $H_2$  e  $\eta$

Pode-se observar na Figura V. 5 que, com o aumento da espessura do material viscoelástico, a frequência natural diminui para valores de  $G$  menores que duas vezes o valor de  $G$  do material viscoelástico, e aumenta para valores maiores que estes. Na Figura V. 6 observa-se que a frequência natural diminui com o aumento da espessura do material viscoelástico.

Nota-se nas Figuras V. 7 e V. 8 que a taxa de amortecimento aumenta com o módulo de cisalhamento, com o fator de perda e com o incremento da espessura da camada viscoelástica.

## V. 2. Segundo Modo de Vibração

Para o 2º modo de vibração, a frequência natural média encontrada experimentalmente para a estrutura base foi de 63.38 Hz, e a taxa de amortecimento de 0.03%. O fator de perda e o módulo de cisalhamento encontrados a partir da caracterização descrita no capítulo IV foram 0,9 e 1,28 MPa respectivamente.

Assim como para o 1º modo de vibração, nas figuras V. 9 a V. 12 a razão entre a espessura da camada de restrição e da estrutura base encontra-se no eixo das abscissas. Nas Figuras V. 9 e V. 10, o eixo vertical apresenta a razão entre a frequência natural da viga sanduíche (S1) e da estrutura base (EB), enquanto nas Figuras V. 11 e V. 12 este eixo mostra essa mesma razão para as taxas de amortecimento. As Figuras V. 9 a V. 12 são apresentadas para diferentes módulos de cisalhamento e fatores de perda.

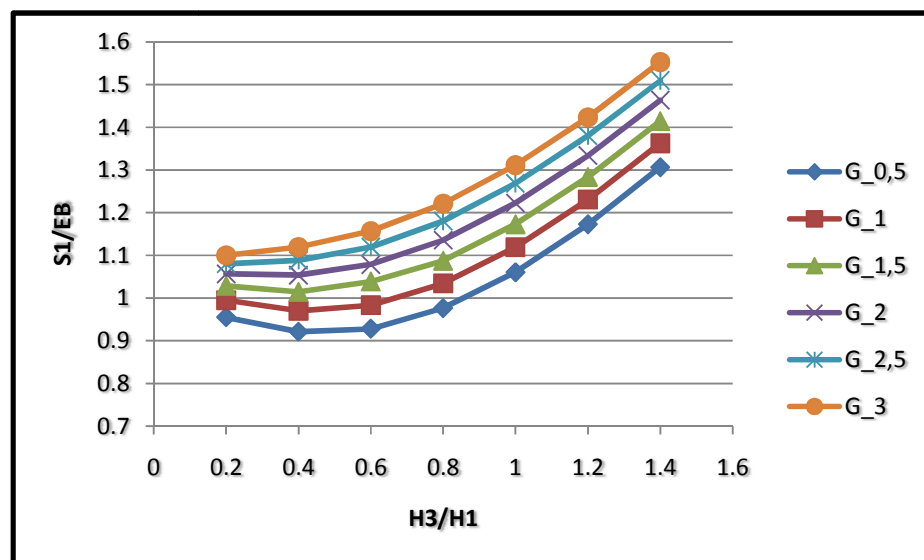


Figura V. 9: Variação da frequência natural do 2º modo de vibração com  $H_3$  e com  $G$

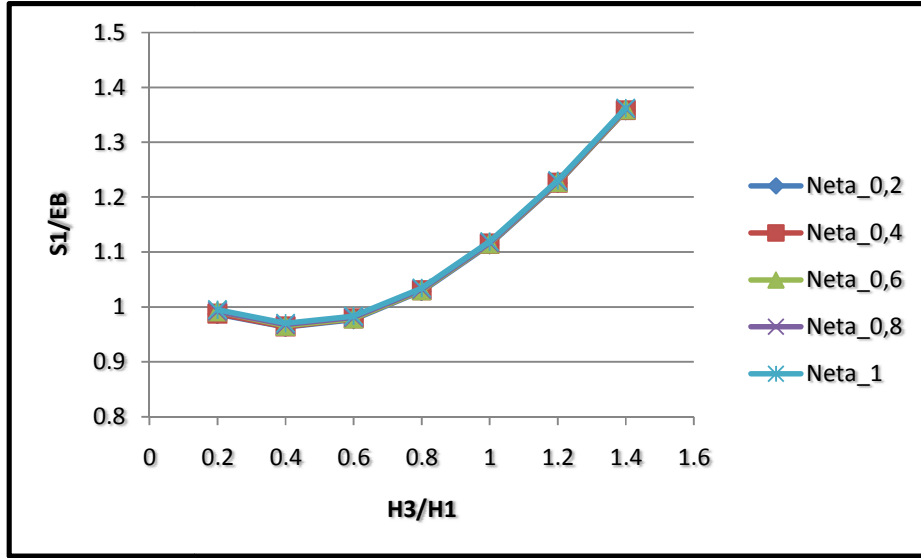


Figura V. 10: Variação da frequência natural do 2º modo de vibração com  $H_3$  e com  $\eta$

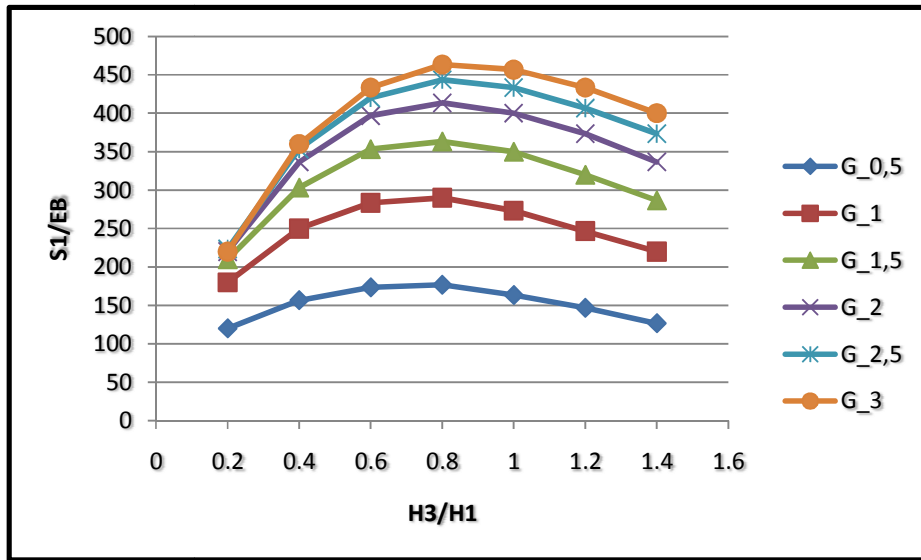
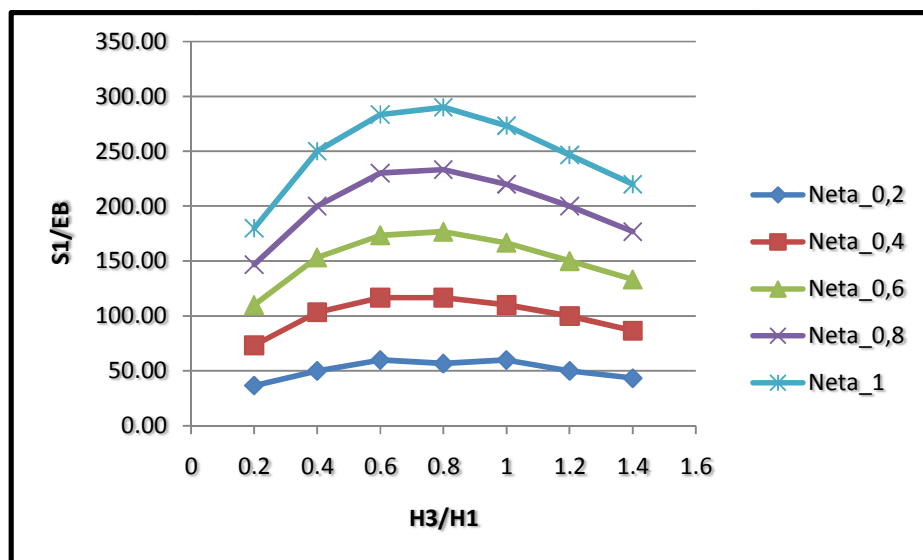


Figura V. 11: Variação da taxa de amortecimento do 2º modo de vibração com  $H_3$  e  $G$



**Figura V. 12: Variação da taxa de amortecimento do 2º modo de vibração com  $H_3$  e  $\eta$**

Com relação à frequência natural, Figuras V. 9 e V. 10, observa-se que esta tende a aumentar com o módulo de cisalhamento e com o incremento da espessura da camada de restrição, mas praticamente não sofre alteração com relação à variação do fator de perda.

A taxa de amortecimento, Figuras V. 11 e V. 12, também tende a aumentar com o acréscimo da camada de restrição, porém observa-se que há um valor máximo para o módulo de cisalhamento e para o fator de perda, sendo que este valor é para  $H_3$  igual a  $0.8H_1$  e não no ponto de simetria ( $H_1=H_3$ ). Este fato mostra que neste caso o máximo estaria indicando a existência de um ponto de ótimo para os dois parâmetros analisados.

Mantendo o padrão dos gráficos relativos ao 1º modo de vibração, as Figuras V. 13 a V. 16 apresentam no eixo das abscissas a razão entre as espessuras da camada viscoelástica e da estrutura base, e os eixos das ordenadas são iguais aos das Figuras V. 9 a V. 12.

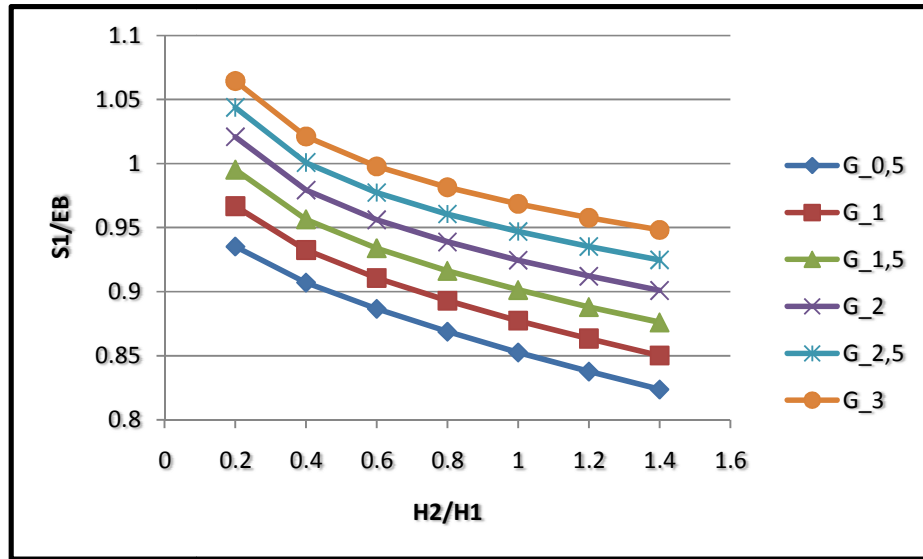


Figura V. 13: Variação da frequência natural do 2º modo de vibração com  $H_2$  e  $G$

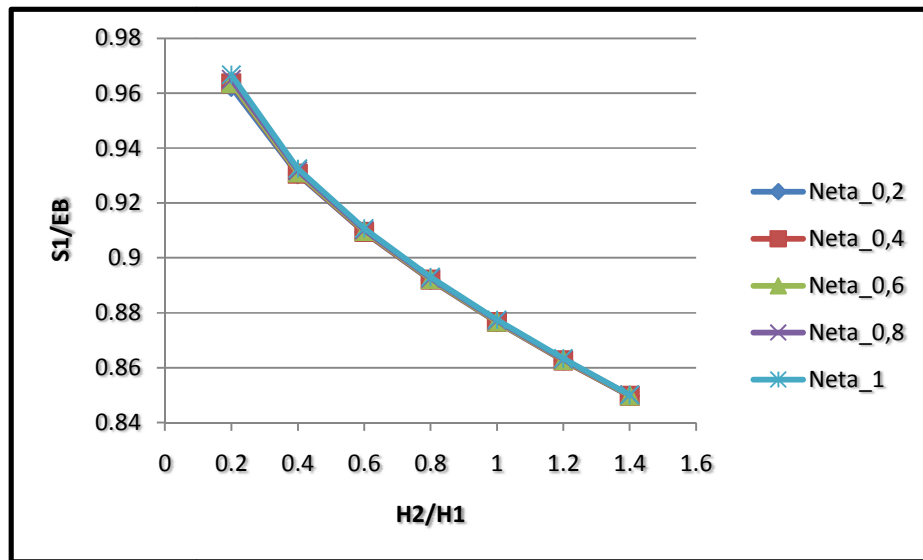


Figura V. 14: Variação da frequência natural do 2º modo de vibração com  $H_2$  e  $\eta$

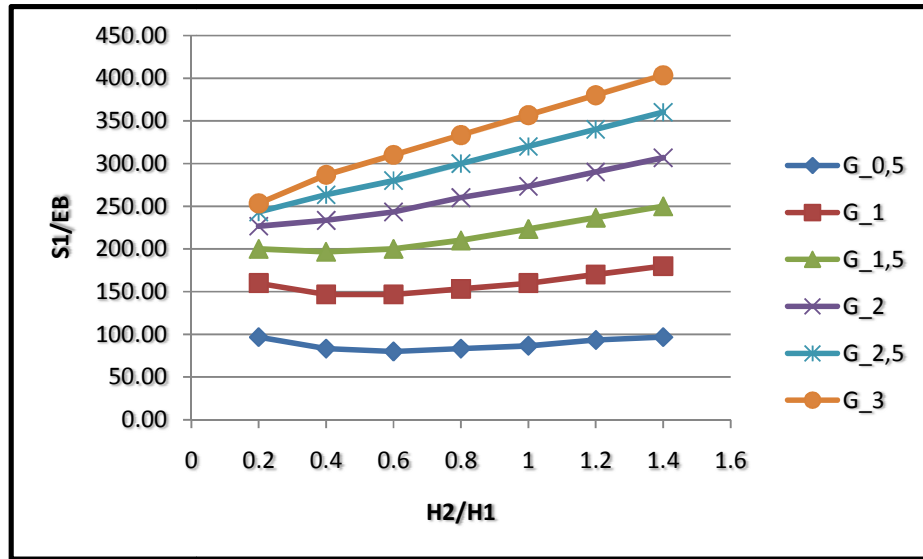


Figura V. 15: Variação da taxa de amortecimento do 2º modo de vibração com  $H_2$  e  $G$

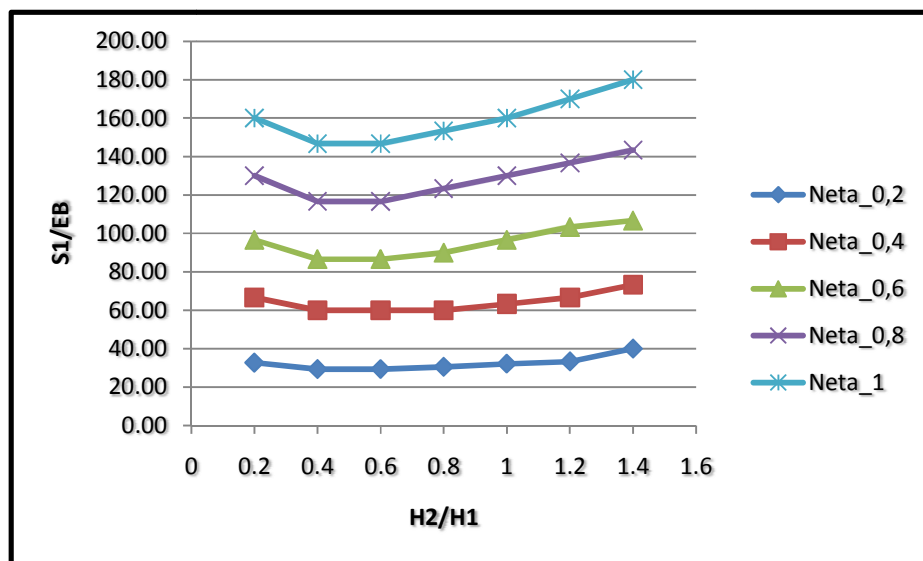


Figura V. 16: Variação da taxa de amortecimento do 2º modo de vibração com  $H_2$  e  $\eta$

Observando-se as figuras V. 13 e V. 14 pode se perceber que a frequência natural tende a diminuir com o incremento da espessura da camada viscoelástica e a aumentar com o acréscimo do módulo de cisalhamento, mas não sofre alteração com a variação do fator de perda.

Com relação à taxa de amortecimento, Figuras V. 15 e V. 16, observa-se que, de um modo geral, esta tende a aumentar com o aumento do módulo de cisalhamento, do fator de perda e da espessura do material viscoelástico a partir da relação  $H_2/H_1=0.6$ , enquanto na região entre 0.2 a 0.6 algumas situações apresentam uma redução da eficiência do sistema, indicando assim que esta região deveria ser evitada.

Deve-se ressaltar que apesar dos resultados apresentados serem bastante elucidativos sobre o comportamento do sistema, estes foram obtidos através de simulações numéricas de uma viga engastada e livre, e desta forma, não é garantido que estes possam ser generalizados para qualquer situação.



## VI. COMENTÁRIOS FINAIS E SUGESTÕES

Neste capítulo são apresentados os comentários finais e as principais conclusões obtidas neste trabalho, assim como algumas recomendações de trabalhos futuros.

Inicialmente observou-se, em relação às estruturas base VA e VB, que, de uma forma geral, as frequências naturais tendem a apresentar uma leve diminuição quando é acrescentada uma camada de material viscoelástico e restrição (VS1), sendo esta fixada ao apoio ou livre.

Comparando-se os resultados da viga VS1 com os do sistema em que a restrição não é fixada (VS1c), observa-se que o 1º modo de vibração tem uma pequena diminuição da frequência natural, e que os demais modos praticamente não são alterados.

Com relação à taxa de amortecimento, observa-se que esta aumenta expressivamente para todos os modos de vibração analisados quando a viga sanduíche VS1 (VA) é utilizada.

Quando a camada de restrição é liberada, a taxa de amortecimento do 1º modo de vibração diminui em relação ao obtido quando a restrição estava fixada, mas ainda é bastante superior do que o da estrutura base. Nos outros modos de vibração a taxa de amortecimento apresenta pouca variação.

Quando o 2º sanduíche é acrescentado (viga VS2), observa-se que a frequência natural tende a aumentar, principalmente para o 1º modo de vibração. Quando uma camada de restrição é liberada (VS2c), a frequência diminui para o 1º modo de vibração, mas quase não sofre alteração para os demais modos. O mesmo pode-se observar quando a 2ª restrição (VS2cc) é liberada.

Com relação à taxa de amortecimento da viga VB, observa-se que há um aumento significativo da taxa de amortecimento, para os três primeiros modos de vibração, quando o 2º sanduíche (VS2) é instalado, chegando a ser por volta de duas vezes maior que a situação com um sanduíche (VS1). Por outro lado, os 4º, 5º e 6º modos sofrem pouca alteração. Nota-se ainda que ao liberar as camadas de restrição (VS2c e VS2cc), a taxa de amortecimento associada 1º modo diminui, enquanto que para os outros modos tendem a se manter aproximadamente constantes.

Acredita-se que a taxa de amortecimento é influenciada não apenas pela condição de contorno da camada de restrição, mas também pela forma modal. A combinação destes dois fatores pode criar uma variação do cisalhamento na camada viscoelástica conduzindo a um acréscimo ou uma diminuição da taxa de amortecimento.

A partir dos ensaios realizados com as lâminas VA, VB e VC, de restrição livre, foi possível observar que, de uma forma geral, as frequências naturais tendem a diminuir quando se adicionam camadas de restrição, indicando que houve um maior acréscimo de massa do que rigidez em relação à viga simples.

No que diz respeito à taxa de amortecimento, com o acréscimo do “1º sanduíche” observa-se um aumento significativo da taxa de amortecimento para todos os modos de vibração. Quando o “2º sanduíche” é instalado as taxas de amortecimento aumentam ainda mais, mas para o “3º” e “4º sanduíches”, observa-se, de uma forma geral, um leve aumento da taxa de amortecimento em relação ao “2º”.

Assim, de forma geral, observa-se que a introdução de camadas de material viscoelástico e restrição tende a diminuir um pouco as frequências naturais e a aumentar significativamente as taxas de amortecimento.

Com relação à espessura das camadas de restrição, observa-se que, de forma geral, as frequências naturais tendem a diminuir quando se aumenta a espessura da camada de restrição, indicando que a contribuição da massa adicionada pela camada de restrição é maior do que a rigidez. As taxas de amortecimento tendem a aumentar quando se aumenta a espessura da camada de restrição.

No que diz respeito à caracterização do MVE, apesar de ainda haver alguns problemas, observou-se que os resultados obtidos com a excitação harmônica e do tipo ruído branco são muito próximos, indicando que os dois tipos de excitação podem ser utilizados.

Observou-se também que os valores de  $G$  e de  $\eta$  obtidos a partir do estudo paramétrico realizado são bem próximos dos obtidos com o Método Direto, para o primeiro modo de vibração. Além disso, os procedimentos devem ser melhorados para que seja possível reduzir as incertezas nas estimativas destes dois parâmetros, permitindo assim que as estimativas realizadas sejam mais próximas das reais.

Outro ponto observado neste trabalho é a limitação que a formulação utilizada tem para representar o comportamento da viga sanduíche com a restrição liberada. No estudo realizado não foi possível obter valores adequados de  $a_n$  que possibilitassem estimar as frequências naturais e as taxas de amortecimento, apesar dos valores obtidos ficarem dentro de uma faixa esperada. Este estudo serviu para demonstrar a necessidade de uma modelação mais detalhada desta condição possivelmente através de Elementos Finitos.

Para as vigas sanduíche com cinco camadas, observa-se que as aproximações sugeridas por NASHIF (1985) apresentam resultados para as frequências naturais e para as taxas de amortecimento bem próximos aos obtidos experimentalmente, verificando a consistência das aproximações propostas.

A partir do estudo paramétrico observou-se que:

- A frequência natural aumenta com o acréscimo da espessura da camada de restrição e com o aumento tanto do módulo de cisalhamento, quanto do fator de perda, para o 1º e para o 2º modos de vibração.
- A taxa de amortecimento também tende a aumentar com o acréscimo da camada de restrição, indicando que há um valor ótimo para o módulo de cisalhamento e para o fator de perda, tanto para o 1º modo quanto para o 2º modos.
- O aumento da espessura do material viscoelástico provoca, em geral, uma diminuição da frequência natural. Em relação ao 1º modo de vibração, a frequência natural tende a aumentar apenas para valores de  $G$  superiores a duas vezes o valor de  $G$  do MVE.
- A taxa de amortecimento aumenta com o incremento do módulo de cisalhamento, do fator de perda e da espessura da camada visco-elástica. Em relação ao 2º modo, este aumento ocorre para valores de  $H_2$  maiores que  $0.6H_1$ .

Finalmente cabe ressaltar que esta metodologia se mostrou bastante eficiente para redução dos níveis de vibrações, já que consegue elevar substancialmente o amortecimento estrutural, devendo, desta forma, ser amplamente empregada.

Como propostas de estudos futuros têm-se o desenvolvimento de uma metodologia mais precisa para a caracterização de materiais viscoelásticos principalmente para frequências superiores a 20 Hz, além de uma investigação melhor das formulações

analíticas que permitem a estimação dos parâmetros modais do sistema com várias camadas. Considerando aplicações futuras desta metodologia de redução de vibrações em estruturas reais, tais como *risers* rígidos, é fundamental o desenvolvimento de uma modelagem numérica mais eficiente que consiga melhor representar o comportamento deste mecanismo em diversas situações.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASTM - American Society for Testing and Materials, "Standard Test Method for Measuring Vibration-Damping Properties of Materials", New York, USA, Desig. E756, pp 779-785, 1993.
- BARBOSA, F. S., 2000, *Modelagem Computacional com Camadas Viscoelásticas Amortecedora*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- BUCHER, H. F., 2001, *Metodologias para Aplicação de Técnicas Tempo-Freqüência em Dinâmica Estrutural e ao Método dos Elementos de Contorno*, Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- CARACCILO, R., GASPARETTO, A., GIOVAGNONI, M., 2004. "An Experimental Technique for Complete Dynamic Characterization of Viscoelastic Material", *Journal of Sounds and Vibration* v. 272, pp. 1013-1032.
- CASTELLO, D. A., 2004, *Modelagem e Identificação de Materiais Viscoelásticos no Domínio do Tempo*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- CASTELLO, D, ROCHINHA, F, ROITMAN, N., MAGLUTA, C., 2008. "Constitutive parameter estimation of a viscoelastic model with internal variables", *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 22, p. 1840-1857.
- CLAUGH, R. W., Pezlen, J.J., *Dynamics of Structures*, Mc Graw-Hill Book Co.
- DI TARANTO, R. A., 1965, "Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite-Length Beams", *Journal of Applied Mechanics*, v. 87, pp. 881- 886.

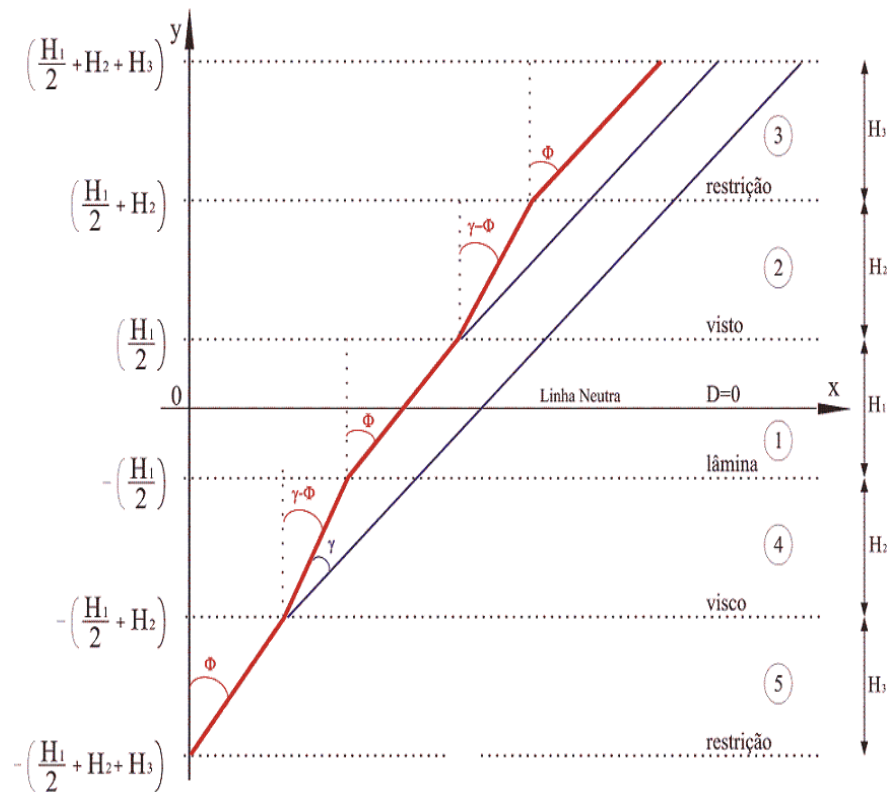
- FAISCA, R.G., 1998, *Caracterização de Materiais Viscoelásticos como Amortecedores Estruturais*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- GALLIMORE, C. A., 2008, *Passive Viscoelastic Costrained Layer Damping Application for a Small Aircraft Landing Gear System*, M.Sc. Thesis, Polytechnic Institute, Blacksburg, VA, USA.
- KERWIN Jr., E. M., 1959, “Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer”, *Journal of Acoustical Society of America*, v.31, nº7, pp.952-962.
- MAGLUTA, C., SCLEBIN, M. A., ROITMAN, N., 2008, *Desenvolvimento de Metodologias para caracterização de Materiais Viscoelásticos*. In: *Redução dos Níveis de Vibração em Risers Rígidos Através do Acréscimo de Amortecimento Estrutural*.
- MASTERSON P. A.; MILES, R. N., “Method for the Determination of Complex Shear Modulus of Viscoelastic Adhesives”, SPIE, New York, USA, v. 2445, pp. 276-281, 1995.
- MEAD, D., MARKUS, S., 1969, “The Forced Vibration of a Three Layered, Damped, Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 10, nº2, pp. 163-175.
- NASHIF, Ahid D., JONES, David I. G., HENDERSON, J. P., 1985, *Vibrational Damping*, A Wiley-Interscience Publication – John Wiley & Sons Inc..
- OLSSON, Karl-Axel et al., 2000, *Materials for Transportation Technology*, *EUROMAT*, vol. 1. Edited by P. J. Winkler, Alemanha.

- PITELLA, B. D. A., 2006, *Investigação na Eficiência de Materiais Viscoelásticos para redução de Vibrações em Risers*, Dissertação de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- PLANTEMA, Frederik J., 1966, *Sandwich Construction*, John Wiley and Sons, New York.
- ROSS, D., UNGAR, E., KERWIN, E., 1959, “Damping of Plate Flexural Vibration by Means of Viscoelastic Laminate Structures”, *Structural Damping*, New York, USA, pp. 49-88.
- SILVA, R. P., 2007, *Desenvolvimento de Metodologias para Caracterização de Materiais Visco Elásticos em Baixas Freqüências*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- TSO-LING TENG; NING-KAN HU, 2001, “Analysis of Damping Characteristics of Viscoelastic Laminated Beams”, *ELSEVIER*, pp. 3881-3892.
- VASCONCELOS, R. P., 2003, *Controle Dinâmico Estrutural via Mecanismos Viscoelásticos*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- VINSON, J. R., 2005, *Sandwich Structures: Past, Present, and Future*, Department of Mechanical Engineering, University of Delaware, Newark, DE, USA.
- VINSON, J. R., *The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials*.
- WILLS, R. L., WU, L., BERTHELOT, Y. H., 2001, “Determination of the Complex Young and Shear Dynamic Module of Viscoelastic Materials”, *Journal of Acoustical Society of America*, v. 109 n° 2, pp. 611-621.

# ANEXO I: FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DE VIGAS SANDUÍCHE COM MÚLTIPLAS CAMADAS

## I. Vigas Sanduíche com cinco camadas

A Figura A. I mostra um sistema de cinco camadas. Da mesma forma que no caso descrito no Capítulo 2, os deslocamentos longitudinais são:



**Figura A. I - Deslocamentos longitudinais ao longo de cada camada**



$$\begin{aligned}
u_1 &= y\theta - H_2\gamma, \text{ com } y \text{ variando de } -\frac{H_1}{2} \text{ a } \frac{H_1}{2}, \\
u_2 &= y\theta - H_2\gamma - \left[ y - \frac{H_1}{2} \right] \gamma = y\theta - \left[ y - \left( \frac{H_1}{2} + H_2 \right) \right] \gamma, \text{ com } y \text{ variando de } \frac{H_1}{2} \text{ a } \\
&\left( \frac{H_1}{2} + H_2 \right), \\
u_3 &= y\theta - 2H_2\gamma, \text{ com } y \text{ variando de } \left( \frac{H_1}{2} + H_2 \right) \text{ a } \left( \frac{H_1}{2} + H_2 + H_3 \right), \\
u_4 &= y\theta - \left[ y + \left( \frac{H_1}{2} + H_2 \right) \right] \gamma, \text{ com } y \text{ variando de } -\left( \frac{H_1}{2} + H_2 \right) \text{ a } -\frac{H_1}{2}, \\
u_5 &= y\theta, \text{ com } y \text{ variando de } -\left( \frac{H_1}{2} + H_2 + H_3 \right) \text{ a } -\left( \frac{H_1}{2} + H_2 \right).
\end{aligned}$$

onde  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  são os deslocamentos longitudinais das camadas 1, 2, 3, 4 e 5 na direção  $x$ ,  $\theta$  é o ângulo de rotação da seção reta e  $\gamma$  é a distorção devido ao cisalhamento.

As deformações longitudinais nas camadas 1 a 5 são:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
\varepsilon_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left[ y - \left( \frac{H_1}{2} - H_2 \right) \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
\varepsilon_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
\varepsilon_4 &= \frac{\partial u_4}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left[ y + \left( \frac{H_1}{2} + H_2 \right) \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
\varepsilon_5 &= \frac{\partial u_5}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x}.
\end{aligned}$$

A partir da Lei de Hook obtêm-se as tensões normais:

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 = E_1 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - E_1 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 = E_2 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - E_2 \left[ y - \left( \frac{H_1}{2} - H_2 \right) \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\sigma_3 = E_3 \varepsilon_3 = E_3 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2E_3 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\sigma_4 = E_2 \varepsilon_4 = E_2 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - E_2 \left[ y + \left( \frac{H_1}{2} + H_2 \right) \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\sigma_5 = E_3 \varepsilon_5 = E_3 y \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

onde  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$  são as tensões normais nas camadas 1 a 5 e  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$  são os módulos de elasticidade nas camadas 1 a 5.

Devido ao carregamento externo, a viga vibra transversalmente. Assim, considerando uma espessura unitária, o equilíbrio de forças longitudinais na seção transversal é dado por:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 0,$$

Resolvendo cada uma das parcelas tem-se que:

$$\int_{\frac{H_1}{2}}^{\frac{H_1}{2}} \sigma_1 dy = -K_1 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\int_{\frac{H_1}{2}}^{\left(\frac{H_1}{2}+H_2\right)} \sigma_2 dy = K_2 H_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_2 H_{21} \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_2 \left(\frac{H_1}{2} - H_2\right) \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\int_{\left(\frac{H_1}{2}+H_2\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}+H_2+H_3\right)} \sigma_3 dy = K_3 H_{31} \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2K_3 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\int_{\left(\frac{H_1}{2}+H_2\right)}^{\frac{H_1}{2}} \sigma_4 dy = -K_2 H_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + K_2 H_{21} \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_2 \left(\frac{H_1}{2} + H_2\right) \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\int_{-\left(\frac{H_1}{2}+H_2+H_3\right)}^{-\left(\frac{H_1}{2}+H_2\right)} \sigma_5 dy = K_3 H_{31} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

onde  $K_1 = E_1 H_1$ ,  $K_2 = E_2 H_2$ ,  $K_3 = E_3 H_3$ ,  $H_{21} = \frac{H_1+H_2}{2}$ ,  $H_{31} = \frac{H_1+2H_2+H_3}{2}$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} & K_3 H_{31} \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_2 H_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + K_2 H_{21} \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_2 \left(\frac{H_1}{2} + H_2\right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_1 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2 H_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ & - K_2 H_{21} \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_2 \left(\frac{H_1}{2} - H_2\right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_3 H_{31} \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2K_3 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \frac{2H_3H_{31}}{(K_1 + 2K_2 + 2K_3)H_2}$$

Como não há deslizamento entre as camadas, a tensão cisalhante entre as camadas 4 e 5 pode ser dada por:

$$F_5 = \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+H_2+H_3\right)}^{-\left(\frac{H_1}{2}+H_2\right)} \sigma_5 dy \therefore \tau_{45} = \frac{\partial F_5}{\partial x} = \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+H_2+H_3\right)}^{-\left(\frac{H_1}{2}+H_2\right)} \frac{\partial \sigma_5}{\partial x} dy = K_3H_{31} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

A distorção  $\gamma$  pode ser expressa por:

$$\gamma = \frac{\tau_{45}}{G} = \frac{K_3H_{31}}{G} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \therefore \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{G\gamma}{K_3H_{31}}$$

Analogamente ao caso anterior, se a vibração for harmônica, pode-se escrever

$$\gamma = \gamma_0 e^{ipx} \text{ e } \theta = \theta_0 e^{ipx}. \text{ Assim, } \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = -p^2 \gamma \text{ e } \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -p^2 \theta.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} &= \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial x}}{\frac{\partial \theta}{\partial x}} = \frac{ip\gamma}{ip\theta} = \frac{ip\gamma}{ip\theta} \frac{ip}{ip} = \frac{ip\gamma}{-p^2\theta} = \frac{ip\gamma}{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \frac{1}{ip}} = \frac{-p^2\gamma}{-\frac{G\gamma}{K_3H_{31}}} = -\frac{p^2 K_3 H_{31}}{G} \\ \Rightarrow \frac{2H_3H_{31}}{(K_1 + 2K_2 + 2K_3)H_2} &= -\frac{p^2 K_3 H_{31}}{G} \therefore G = -\frac{p^2 H_2}{2} (K_1 + 2K_2 + 2K_3) \end{aligned}$$

O momento fletor é dado por:

$$\begin{aligned}
 M = & \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+H_2+H_3\right)}^{-\left(\frac{H_1}{2}+H_2\right)} \sigma_5 y dy + \int_{\left(\frac{H_1}{2}+H_2\right)}^{\frac{H_1}{2}} \sigma_4 y dy + \int_{-\frac{H_1}{2}}^{\frac{H_1}{2}} \sigma_1 y dy + \\
 & + \int_{\frac{H_1}{2}}^{\left(\frac{H_1}{2}+H_2\right)} \sigma_2 y dy + \int_{\left(\frac{H_1}{2}+H_2\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}+H_2+H_3\right)} \sigma_3 y dy = B \frac{\delta \theta}{\delta x}
 \end{aligned}$$

onde  $B$  é a rigidez flexional do sistema.

Resolvendo cada uma das parcelas tem-se que:

$$\int_{-\frac{H_1}{2}}^{\frac{H_1}{2}} \sigma_1 y dy = B_1 \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\int_{\frac{H_1}{2}}^{\left(\frac{H_1}{2}+H_2\right)} \sigma_2 y dy = K_2 H_{21}^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_2 H_{21}^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} - B_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2 H_{21} \left( \frac{H_1}{2} - H_2 \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\int_{\left(\frac{H_1}{2}+H_2\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}+H_2+H_3\right)} \sigma_3 y dy = K_3 H_{31}^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} + B_3 \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2K_3 H_{31} H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\int_{\left(\frac{H_1}{2}+H_2\right)}^{\frac{H_1}{2}} \sigma_4 y dy = K_2 H_{21}^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_2 H_{21}^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} - B_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2 H_{21} \left( \frac{H_1}{2} + H_2 \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\int_{-\left(\frac{H_1}{2}+H_2+H_3\right)}^{-\left(\frac{H_1}{2}+H_2\right)} \sigma_5 y dy = K_3 H_{31}^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} + B_3 \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

onde,  $B_1 = E_1 \frac{H_1^3}{12}$ ,  $B_2 = E_2 \frac{H_2^3}{12}$ ,  $B_3 = E_3 \frac{H_3^3}{12}$ .

Assim, tem-se que:

$$B = [B_1 + 2B_2 + 2B_3 + 2K_2 H_{21}^2 + 2K_3 H_{31}^2] + \left[ 2B_2 + 2K_2 H_{21}^2 - 2K_2 H_{21} \left( \frac{H_1}{2} + H_2 \right) + 2K_3 H_{31} H_2 \right] \frac{p^2 K_3 H_{31}}{G}.$$

## II. Vigas Sanduíche com sete camadas

A Figura A. II mostra um sistema de sete camadas. Da mesma forma que no caso anterior, os deslocamentos longitudinais são:

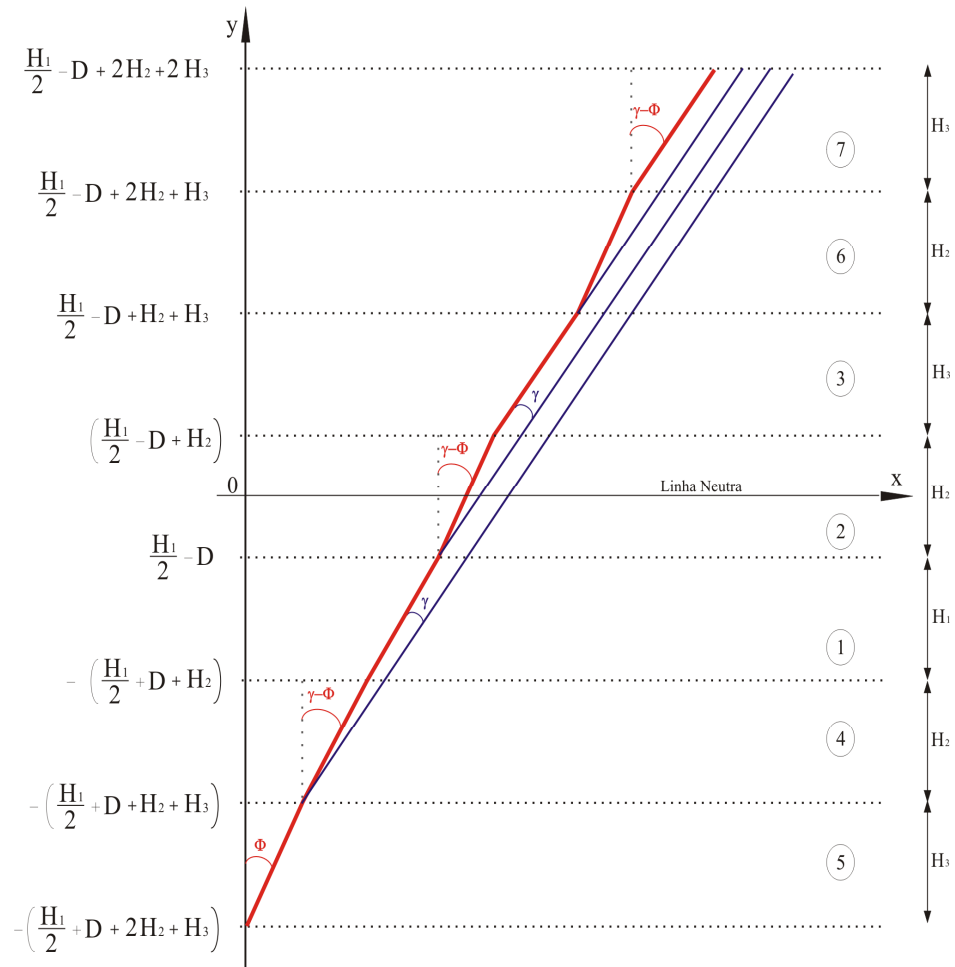


Figura A. II - Deslocamentos longitudinais ao longo de cada camada

$$\begin{aligned}
u_1 &= y\theta - H_2\gamma, \text{ com } y \text{ variando de } -\left(\frac{H_1}{2} + D\right) \text{ a } \left(\frac{H_1}{2} - D\right) \\
u_2 &= y\theta - H_2\gamma - \left[y - \left(\frac{H_1}{2} - D\right) + H_2\right]\gamma = y\theta - \left[y - \left(\frac{H_1}{2} - D + H_2\right)\right]\gamma, \text{ com } y \\
&\text{variando de } \left(\frac{H_1}{2} - D\right) \text{ a } \left(\frac{H_1}{2} - D + H_2\right) \\
u_3 &= y\theta - 2H_2\gamma, \text{ com } y \text{ variando de } \left(\frac{H_1}{2} - D + H_2\right) \text{ a } \left(\frac{H_1}{2} - D + H_2 + H_3\right) \\
u_4 &= y\theta - \left[y + \left(\frac{H_1}{2} + D + H_2\right)\right]\gamma, \text{ com } y \text{ variando de } -\left(\frac{H_1}{2} + D + H_2\right) \text{ a } -\left(\frac{H_1}{2} + \right. \\
&\left. D\right) \\
u_5 &= y\theta, \text{ com } y \text{ variando de } -\left(\frac{H_1}{2} + D + H_2 + H_3\right) \text{ a } -\left(\frac{H_1}{2} + D + H_2\right) \\
u_6 &= y\theta - 2H_2\gamma - \left[y - \left(\frac{H_1}{2} - D\right) + H_2 + H_3\right]\gamma = y\theta - \left[y - \left(\frac{H_1}{2} - D\right) + H_2 + \right. \\
&\left. H_3\right]\gamma, \text{ com } y \text{ variando de } \left(\frac{H_1}{2} - D\right) + H_2 + H_3 \text{ a } \left(\frac{H_1}{2} - D + 2H_2 + H_3\right) \\
u_7 &= y\theta - 3H_2\gamma, \text{ com } y \text{ variando de } \left(\frac{H_1}{2} - D + 2H_2 + H_3\right) \text{ a } \left(\frac{H_1}{2} - D + 2H_2 + \right. \\
&\left. 2H_3\right)
\end{aligned}$$

As deformações longitudinais são nas camadas 1 a 7 são:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
\varepsilon_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left[y - \left(\frac{H_1}{2} - D\right) + H_2\right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
\varepsilon_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
\varepsilon_4 &= \frac{\partial u_4}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left[y + \left(\frac{H_1}{2} + D + H_2\right)\right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
\varepsilon_5 &= \frac{\partial u_5}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x}
\end{aligned}$$



$$\varepsilon_6 = \frac{\partial u_6}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left[ y - \left( \frac{H_1}{2} - D \right) + H_2 - H_3 \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\varepsilon_7 = \frac{\partial u_7}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - 3H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

As tensões normais são:

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 = E_1 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - E_1 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 = E_2 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - E_2 \left[ y - \left( \frac{H_1}{2} - D \right) + H_2 \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\sigma_3 = E_3 \varepsilon_3 = E_3 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2E_3 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\sigma_4 = E_2 \varepsilon_4 = E_2 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - E_2 \left[ y + \left( \frac{H_1}{2} + D + H_2 \right) \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\sigma_5 = E_3 \varepsilon_5 = E_3 y \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\sigma_6 = E_2 \varepsilon_6 = E_2 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - E_2 \left[ y - \left( \frac{H_1}{2} - D \right) + H_2 - H_3 \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\sigma_7 = E_3 \varepsilon_7 = E_3 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - 3E_3 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

onde  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7$  são as tensões normais nas camadas 1 a 7 e  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7$  são os módulos de elasticidade nas camadas 1 a 7.

O equilíbrio longitudinal na seção transversal é dado por:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 = 0,$$

onde:

$$F_1 = \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+D\right)}^{\frac{H_1}{2}-D} \sigma_1 dy = -K_1 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_{\frac{H_1}{2}-D}^{\left(\frac{H_1}{2}-D+H_2\right)} \sigma_2 dy = \\ &= K_2(H_{21} - D) \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_2(H_{21} - D) \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2 \left(\frac{H_1}{2} - D\right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \end{aligned}$$

$$F_3 = \int_{\left(\frac{H_1}{2}-D+H_2\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D+H_2+H_3\right)} \sigma_3 dy = K_3(H_{31} - D) \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2K_3 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} F_4 &= \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+D+H_2\right)}^{-\left(\frac{H_1}{2}+D\right)} \sigma_4 dy = \\ &= -K_2(H_{21} + D) \frac{\partial \theta}{\partial x} + K_2(H_{21} + D) \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_2 \left(\frac{H_1}{2} + D\right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_2 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \end{aligned}$$

$$F_5 = \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+D+H_2+H_3\right)}^{-\left(\frac{H_1}{2}+D+H_2\right)} \sigma_5 dy = -K_3(H_{31} + D) \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
F_6 &= \int_{\left(\frac{H_1}{2}-D+H_2+H_3\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D+2H_2+H_3\right)} \sigma_6 dy = \\
&= K_2(H_{21} - D + H_2 + H_3) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
&\quad - K_2(H_{21} - D + H_2 + H_3) \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2 \left(\frac{H_1}{2} - D\right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_2 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2 H_3 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
F_7 &= \int_{\left(\frac{H_1}{2}-D+2H_2+H_3\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D+2H_2+2H_3\right)} \sigma_7 dy = K_3(H_{31} - D + H_2 + H_3) \frac{\partial \theta}{\partial x} - 3K_3 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}.
\end{aligned}$$

onde  $K_1 = E_1 H_1$ ,  $K_2 = E_2 H_2$ ,  $K_3 = E_3 H_3$ ,  $H_{21} = \frac{H_1 + H_2}{2}$ ,  $H_{31} = \frac{H_1 + 2H_2 + H_3}{2}$ .

Portanto,

$$\begin{aligned}
&-K_3(H_{31} + D) \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_2(H_{21} + D) \frac{\partial \theta}{\partial x} + K_2(H_{21} + D) \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_2 \left(\frac{H_1}{2} + D\right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_2 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
&\quad - K_1 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2(H_{21} - D) \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_2(H_{21} - D) \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2 \left(\frac{H_1}{2} - D\right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
&\quad + K_2 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_3(H_{31} - D) \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2K_3 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2(H_{21} - D + H_2 + H_3) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
&\quad - K_2(H_{21} - D + H_2 + H_3) \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2 \left(\frac{H_1}{2} - D\right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_2 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2 H_3 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
&\quad + K_3(H_{31} - D + H_2 + H_3) \frac{\partial \theta}{\partial x} - 3K_3 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0
\end{aligned}$$

$$\therefore D = \frac{K_2(H_{21} + H_2 + H_3) + K_3(H_{31} + H_2 + H_3) + \left[-K_1 H_2 + K_2 \left(\frac{H_1}{2} - H_{21} - 2H_2\right) - 5K_3 H_2\right] \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}}{K_1 + 3K_2 + 3K_3}$$

A tensão cisalhante entre as camadas 4 e 5 pode ser dada por:

$$F_5 = \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+D+H_2+H_3\right)}^{-\left(\frac{H_1}{2}+D+H_2\right)} \sigma_5 dy \therefore \tau_{45} = \frac{\partial F_5}{\partial x} = \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+D+H_2+H_3\right)}^{-\left(\frac{H_1}{2}+D+H_2\right)} \frac{\partial \sigma_5}{\partial x} dy = -K_3(H_{31} + D) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

A distorção  $\gamma$  pode ser expressa por:

$$\gamma = \frac{\tau_{45}}{G} = -\frac{K_3(H_{31} + D)}{G} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \therefore \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{G\gamma}{K_3(H_{31} + D)}$$

Da mesma forma que nos casos anteriores, se a vibração for harmônica, pode-se escrever  $\gamma = \gamma_0 e^{ipx}$  e  $\theta = \theta_0 e^{ipx}$ . Assim,  $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = -p^2 \gamma$  e  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -p^2 \theta$ .

Portanto,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial x}}{\frac{\partial \theta}{\partial x}} = \frac{ip\gamma}{ip\theta} = \frac{ip\gamma}{ip\theta} \frac{ip}{ip} = \frac{ip\gamma}{-p^2\theta} = \frac{ip\gamma}{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \frac{1}{ip}} = \frac{-p^2\gamma}{\frac{G\gamma}{K_3(H_{31} + D)}} = \frac{p^2 K_3 (H_{31} + D)}{G}$$

Assim a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$D = \frac{K_2(H_{21} + H_2 + H_3) + K_3(H_{31} + H_2 + H_3) + \left[-K_1 H_2 + K_2 \left(\frac{H_1}{2} - H_{21} - 2H_2\right) - 5K_3 H_2\right] \frac{p^2 K_3 (H_{31} + D)}{G}}{K_1 + 3K_2 + 3K_3}$$

$$\therefore D = \frac{GK_2(H_{21} + H_2 + H_3) + GK_3(H_{31} + H_2 + H_3) - \left[K_1 H_2 + K_2 \left(\frac{H_1}{2} - H_{21} - 2H_2\right) - 5K_3 H_2\right] p^2 K_3 (H_{31} + D)}{G(K_1 + 3K_2 + 3K_3) - \left[-K_1 H_2 + K_2 \left(\frac{H_1}{2} - H_{21} - 2H_2\right) - 5K_3 H_2\right]}$$

O momento fletor é dado por:

$$\begin{aligned}
M = & \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+D+H_2+H_3\right)}^{-\left(\frac{H_1}{2}+D+H_2\right)} \sigma_5 y \, dy + \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+D+H_2\right)}^{-\left(\frac{H_1}{2}+D\right)} \sigma_4 \, dy + \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+D\right)}^{\frac{H_1}{2}-D} \sigma_1 y \, dy + \int_{\frac{H_1}{2}-D}^{\left(\frac{H_1}{2}-D+H_2\right)} \sigma_2 y \, dy \\
& + \int_{\left(\frac{H_1}{2}-D+H_2\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D+H_2+H_3\right)} \sigma_3 y \, dy + \int_{\left(\frac{H_1}{2}-D+H_2+H_3\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D+2H_2+H_3\right)} \sigma_6 y \, dy + \int_{\left(\frac{H_1}{2}-D+2H_2+H_3\right)}^{\left(\frac{H_1}{2}-D+2H_2+2H_3\right)} \sigma_7 y \, dy \\
= & B \frac{\partial \theta}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
B = & K_1 D^2 + B_1 + 2K_2(H_{21} - D)^2 + 3B_2 + K_3(H_{31} - D)^2 + 3B_3 \\
& + K_3(H_{31} + D)^2 + K_2(H_{21} - D + H_2 + H_3)^2 + K_3(H_{31} - D + H_2 + H_3)^2 \\
& + \left[ K_1 H_2 D - 2K_2(H_{21} - D)^2 - 3B_2 + K_2(H_{21} - D) \left( \frac{H_1}{2} - D - H_2 \right) \right. \\
& - 2K_3 H_2 (H_{31} - D) + E_2 H_3 (H_{31} + D) \left( \frac{H_1}{2} + D \right) \\
& - K_2(H_{21} - D + H_2 + H_3)^2 + K_2(H_{21} - D - H_2 + H_3) - K_3(H_{31} - D \\
& \left. + H_2 + H_3) \right] \frac{p^2 K_3 (H_{31} + D)}{G},
\end{aligned}$$

onde,  $B_1 = E_1 \frac{H_1^3}{12}$ ,  $B_2 = E_2 \frac{H_2^3}{12}$ ,  $B_3 = E_3 \frac{H_3^3}{12}$ .

### III. Vigas Sanduíche com nove camadas

A Figura A. III mostra um sistema de cinco camadas. Da mesma forma que no caso anterior, os deslocamentos longitudinais são:

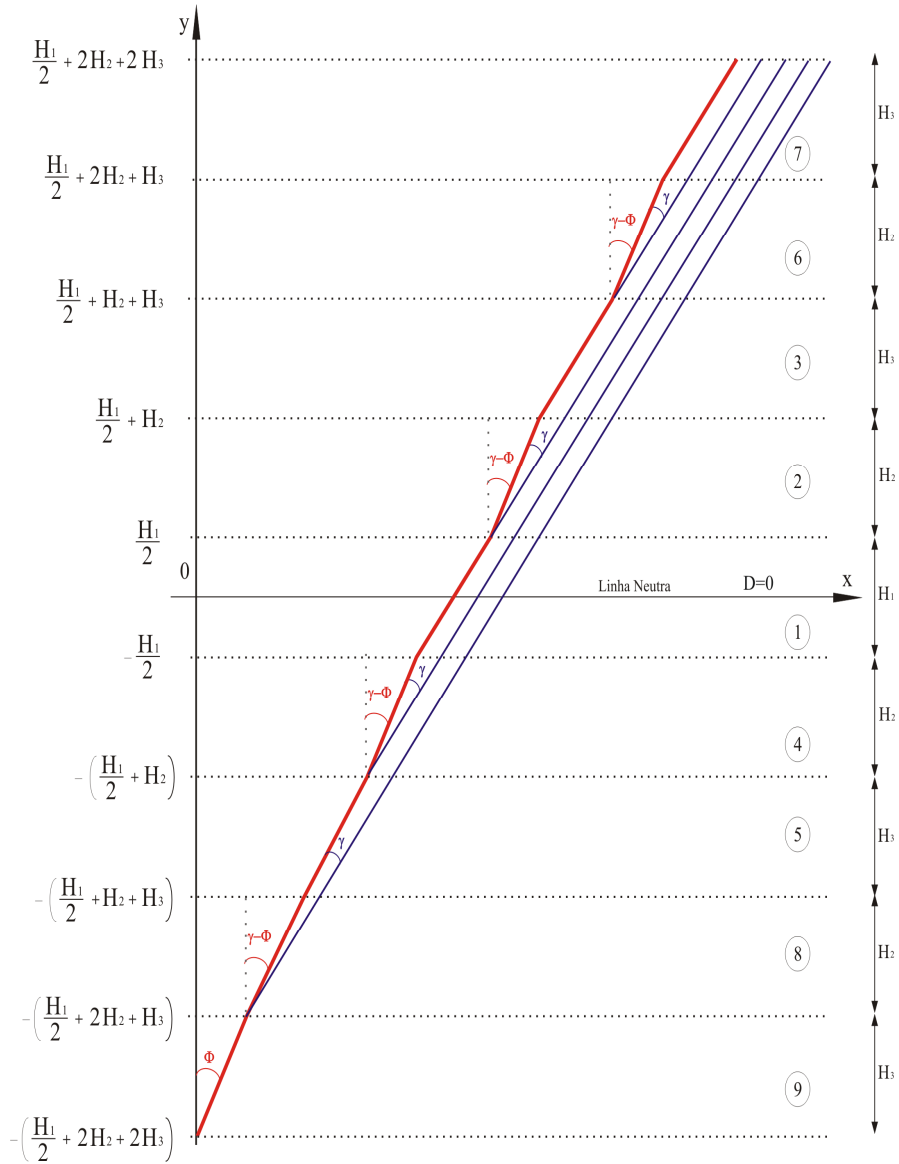


Figura A. III - Deslocamentos longitudinais ao longo de cada camada

$$\begin{aligned}
u_1 &= y\theta - 2H_2\gamma, \text{ com } y \text{ variando de } -\frac{H_1}{2} \text{ a } \frac{H_1}{2} \\
u_2 &= y\theta - 2H_2\gamma - \left(y - \frac{H_1}{2}\right)\gamma = y\theta - \left[y - \left(\frac{H_1}{2} - 2H_2\right)\right]\gamma, \text{ com } y \text{ variando de } \frac{H_1}{2} \text{ a } \\
&\left(\frac{H_1}{2} + H_2\right) \\
u_3 &= y\theta - 3H_2\gamma, \text{ com } y \text{ variando de } \left(\frac{H_1}{2} + H_2\right) \text{ a } \left(\frac{H_1}{2} + H_2 + H_3\right) \\
u_4 &= y\theta - H_2\gamma - \left[y + \left(\frac{H_1}{2} + H_2\right)\right]\gamma = y\theta - \left[y + \left(\frac{H_1}{2} + H_2\right)\right]\gamma, \text{ com } y \text{ variando de } \\
&-\left(\frac{H_1}{2} + H_2\right) \text{ a } -\frac{H_1}{2} \\
u_5 &= y\theta - H_2\gamma, \text{ com } y \text{ variando de } -\left(\frac{H_1}{2} + H_2 + H_3\right) \text{ a } -\left(\frac{H_1}{2} + H_2\right) \\
u_6 &= y\theta - 3H_2\gamma - \left[y - \left(\frac{H_1}{2} + H_2 + H_3\right)\right]\gamma = y\theta - \left[y - \left(\frac{H_1}{2} - 2H_2 + H_3\right)\right]\gamma, \text{ com } \\
&y \text{ variando de } \left(\frac{H_1}{2} + H_2 + H_3\right) \text{ a } \left(\frac{H_1}{2} + 2H_2 + H_3\right) \\
u_7 &= y\theta - 4H_2\gamma, \text{ com } y \text{ variando de } \left(\frac{H_1}{2} + 2H_2 + H_3\right) \text{ a } \left(\frac{H_1}{2} + 2H_2 + 2H_3\right) \\
u_8 &= y\theta - \left[y + \left(\frac{H_1}{2} + 2H_2 + H_3\right)\right]\gamma, \text{ com } y \text{ variando de } -\left(\frac{H_1}{2} + 2H_2 + H_3\right) \text{ a } \\
&-\left(\frac{H_1}{2} + H_2 + H_3\right) \\
u_9 &= y\theta, \text{ com } y \text{ variando de } -\left(\frac{H_1}{2} + 2H_2 + 2H_3\right) \text{ a } -\left(\frac{H_1}{2} + 2H_2 + H_3\right).
\end{aligned}$$

As deformações longitudinais nas camadas 1 a 9 são:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
\varepsilon_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left[y - \left(\frac{H_1}{2} - 2H_2\right)\right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
\varepsilon_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - 3H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
\varepsilon_4 &= \frac{\partial u_4}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left[y + \left(\frac{H_1}{2} + 2H_2\right)\right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
\varepsilon_5 &= \frac{\partial u_5}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
\varepsilon_6 &= \frac{\partial u_6}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left[y - \left(\frac{H_1}{2} - 2H_2 + H_3\right)\right] \frac{\partial \gamma}{\partial x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_7 &= \frac{\partial u_7}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - 4H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \varepsilon_8 &= \frac{\partial u_8}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left[ y + \left( \frac{H_1}{2} + 2H_2 + H_3 \right) \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \varepsilon_9 &= \frac{\partial u_9}{\partial x} = y \frac{\partial \theta}{\partial x}.\end{aligned}$$

As tensões normais são:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E_1 \varepsilon_1 = E_1 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2E_1 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \sigma_2 &= E_2 \varepsilon_2 = E_2 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - E_2 \left[ y - \left( \frac{H_1}{2} - 2H_2 \right) \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \sigma_3 &= E_3 \varepsilon_3 = E_3 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - 3E_3 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \sigma_4 &= E_2 \varepsilon_4 = E_2 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - E_2 \left[ y + \left( \frac{H_1}{2} + 2H_2 \right) \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \sigma_5 &= E_3 \varepsilon_5 = E_3 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - E_3 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \sigma_6 &= E_2 \varepsilon_6 = E_2 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - E_2 \left[ y - \left( \frac{H_1}{2} - 2H_2 + H_3 \right) \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \sigma_7 &= E_3 \varepsilon_7 = E_3 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - 4E_3 H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \sigma_8 &= E_2 \varepsilon_8 = E_2 y \frac{\partial \theta}{\partial x} - E_2 \left[ y + \left( \frac{H_1}{2} + 2H_2 + H_3 \right) \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \sigma_9 &= E_3 \varepsilon_9 = E_3 y \frac{\partial \theta}{\partial x}\end{aligned}$$

onde  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9$  são as tensões normais nas camadas 1 a 9 e  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9$  são os módulos de elasticidade nas camadas 1 a 9.

O equilíbrio longitudinal na seção transversal é dado por:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8 + F_9 = 0,$$



onde:

$$F_1 = -2K_1H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$F_2 = K_2H_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_2H_{21} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2 \left( \frac{H_1}{2} - 2H_2 \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$F_3 = K_3H_{31} \frac{\partial \theta}{\partial x} - 3K_3H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$F_4 = -K_2H_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + K_2H_{21} \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_2 \left( \frac{H_1}{2} + H_2 \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$F_5 = -K_3H_{31} \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_3H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$F_6 = K_2(H_{21} + H_2 + H_3) \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_2(H_{21} + H_2 + H_3) \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_2 \left( \frac{H_1}{2} + 2H_2 + H_3 \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$F_7 = K_3(H_{31} + H_2 + H_3) \frac{\partial \theta}{\partial x} - 4K_3H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$F_8 = -K_2(H_{21} + H_2 + H_3) \frac{\partial \theta}{\partial x} + K_2(H_{21} + H_2 + H_3) \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_2 \left( \frac{H_1}{2} + 2H_2 + H_3 \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$F_9 = -K_3(H_{31} + H_2 + H_3) \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

onde  $K_1 = E_1H_1$ ,  $K_2 = E_2H_2$ ,  $K_3 = E_3H_3$ ,  $H_{21} = \frac{H_1+H_2}{2}$ ,  $H_{31} = \frac{H_1+2H_2+H_3}{2}$ .

Portanto,

$$\begin{aligned}
& -2K_1H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2H_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_2H_{21} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2 \left( \frac{H_1}{2} - 2H_2 \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_3H_{31} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
& - 3K_3H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_2H_{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + K_2H_{21} \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_2 \left( \frac{H_1}{2} + H_2 \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_3H_{31} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
& - K_3H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_2(H_{21} + H_2 + H_3) \frac{\partial \theta}{\partial x} - K_2(H_{21} + H_2 + H_3) \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
& - K_2 \left( \frac{H_1}{2} + 2H_2 + H_3 \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} + K_3(H_{31} + H_2 + H_3) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
& - 4K_3H_2 \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_2(H_{21} + H_2 + H_3) \frac{\partial \theta}{\partial x} + K_2(H_{21} + H_2 + H_3) \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
& - K_2 \left( \frac{H_1}{2} + 2H_2 + H_3 \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} - K_3(H_{31} + H_2 + H_3) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0.
\end{aligned}$$

A tensão cisalhante entre as camadas 8 e 9 pode ser dada por:

$$\begin{aligned}
F_9 &= \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+2H_2+2H_3\right)}^{-\left(\frac{H_1}{2}+2H_2+H_3\right)} \sigma_9 dy \therefore \tau_{89} = \frac{\partial F_9}{\partial x} \\
&= \int_{-\left(\frac{H_1}{2}+2H_2+2H_3\right)}^{-\left(\frac{H_1}{2}+2H_2+H_3\right)} \frac{\partial \sigma_9}{\partial x} dy = -K_3(H_{31}+H_2+H_3) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

A distorção  $\gamma$  pode ser expressa por:

$$\gamma = \frac{\tau_{89}}{G} = -\frac{K_3(H_{31}+H_2+H_3)}{G} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \therefore \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = -\frac{G\gamma}{K_3(H_{31}+H_2+H_3)}.$$

Da mesma forma que nos casos anteriores, se a vibração for harmônica com número de onda  $p$ , pode-se escrever  $\gamma = \gamma_0 e^{ipx}$  e  $\theta = \theta_0 e^{ipx}$ . Assim,  $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = -p^2 \gamma$  e  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -p^2 \theta$ .

Portanto,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial x}}{\frac{\partial \theta}{\partial x}} = \frac{ip\gamma}{ip\theta} = \frac{ip\gamma}{ip\theta} = \frac{ip\gamma}{ip\theta} = \frac{ip\gamma}{ip\theta} = \frac{ip\gamma}{ip\theta} = \frac{-p^2\gamma}{\frac{G\gamma}{K_3(H_{31}+H_2+H_3)}} = \frac{p^2K_3(H_{31}+H_2+H_3)}{G}.$$

O momento fletor é dado por:

$$M = \sum_{j=1}^9 \frac{\partial \sigma_j}{\partial x} y dy = B \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} B &= B_1 + 4B_2 + 4B_3 + 2(K_2H_{21}^2 + K_3H_{31}^2) \\ &+ 2[K_2(H_{21} + H_2 + H_3)^2 + K_3(H_{31} + H_2 + H_3)^2] \\ &+ [-2(K_2H_{21}^2 - K_3H_{31}H_2) - 4B_2 + K_2H_2H_1 - 2K_2(H_{21} + H_2 + H_3)^2 \\ &- 4K_3(H_{31} + H_2 + H_3)H_2 \\ &+ K_2(H_{21} + H_2 + H_3)(H_1 + 2H_3)] \frac{p^2K_3(H_{31}+H_2+H_3)}{G}, \end{aligned}$$

onde,  $B_1 = E_1 \frac{H_1^3}{12}$ ,  $B_2 = E_2 \frac{H_2^3}{12}$ ,  $B_3 = E_3 \frac{H_3^3}{12}$ .

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)