O Limite de Bekenstein para o Modelo $O(N)$ no Regime de Acoplamento Forte

Thiago Santos Magalhães

22 de dezembro de 2009

Thiago Santos Magalhães

O Limite de Bekenstein para o Modelo $O(N)$ no Regime de Acoplamento Forte

Orientador:

Nami Fux Svaiter

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA

Rio de Janeiro - RJ
Dezembro / 2009

Resumo

Neste trabalho vamos discutir uma teoria de campos escalares com simetria interna $O(N)$ e auto-interação no regime de acoplamento forte. Vamos considerar que o sistema está confinado num hipercubo de lado L e em equilíbrio térmico com um reservatório térmico à temperatura β^{-1}. O objetivo é investigar em quais situações este sistema assume um limite máximo para a sua entropia, conhecido como limite de Bekenstein, relacionando a razão entre a entropia S e a energia média E do sistema com seu tamanho característico. Com a ajuda da expansão de acoplamento forte é possível calcular estas quantidades e mostrar em quais situações o limite de Bekenstein é, ou não, violado. Também vamos discutir o limite de grandes valores de N mostrando que, no regime de acoplamento forte, não há um limite superior para o número de espécies de partículas para o sistema.

Abstract

In this work we discuss a scalar field theory with $O(N)$ internal symmetry and self-interaction in the strong coupling regime. We consider that the system is confined in a hypercube of side L and in thermal equilibrium with a thermal reservoir at temperature β^{-1}. The objective is to investigate in which situations this system has a maximal limit for its entropy, known as Bekenstein bound, relating the quocient between the entropy S and the mean energy E of the system with its characteristic size. With the help of the strong coupling expansion it is possible to calculate these quantities and show in which situations the Bekenstein bound is, or not, violated. We will also discuss the limit of large values of N showing that, in the strong coupling regime, there is no superior limit for the number of particle species in the system.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Classicamente, a entropia pode ser entendida como uma medida do espaço de fases disponível para um sistema. Se conseguimos definir um sistema confinado a uma região finita do espaço-tempo, não é difícil encontrar razões para afirmar que o espaço de fases acessível a este sistema seja finito, e assim somos levados a supor que existe um limite máximo para a entropia de sistemas nesta situação. Esta idéia não parece absurda, uma vez que sempre é esperado que a quantidade de informação numa determinada região do espaço-tempo seja limitada.

Contudo, não sabemos como encontrar uma relação matemática expressando este limite máximo de entropia apenas com estes argumentos. Para conseguir encontrar esta relação, e determinar quais características do sistema estão ligadas a esta limitação, foi necessário o desenvolvimento de várias idéias em termodinâmica de buracos negros. Isto se deve ao fato de que o processo de formação de buracos negros viola a segunda lei da termodinâmica, que diz que a entropia de um dado sistema não deve diminuir. É conhecido que buracos negros estacionários devem ser caracterizados apenas por três quantidades: massa, carga e momento angular. Isto é curiosamente conhecido como o teorema que diz que buracos negros "não tem cabelos" e é resultado de trabalhos de Hawking, Israel e Carter [1], [2], [3], [4], [5]. Portanto, se observamos uma estrela que colapsa para formar um buraco negro estacionário, segundo o teorema, o estado final deste processo é único, isto é, vários estados iniciais da estrela colapsante levam a um mesmo estado final estacionário. Mas este comportamento evidencia que o espaço de fases acessível a esta estrela "encolhe", ou que sua entropia diminui após o processo. Na verdade, como o estado final é único, ele nem mesmo possui entropia.

Além disso, não é claro como se determina a entropia de um buraco negro. A resposta para esta questão está no teorema da área [4]. Este teorema diz que se um observador distante vê um sistema de matéria atravessando o horizonte de eventos de um buraco negro, ele constata um aumento na área deste horizonte. Se considerarmos que o observador vê a entropia do sistema de matéria "se perder" atrás do horizonte, é possível pensar que o aumento da área do horizonte se manifesta como uma compensação à perda de entropia. Sempre que matéria atravessa o horizonte de eventos, ela irá atingir a singularidade e acrescentar sua massa à do buraco negro. De fato, a área do horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild em 4 dimensões está diretamente ligada à sua massa pela relação $A = 16\pi M^2$. Baseado nestas idéias, Bekenstein sugeriu que um buraco negro deve ter uma entropia associada diretamente proporcional à area de seu horizonte [6], [7], [8]. Hawking estabeleceu que a relação entre a entropia de um buraco negro e a área de seu horizonte é [9]

$$S_{BN} = \frac{1}{4} A \,. \tag{1.1}$$

Apenas o teorema da área não resolve o problema da violação da segunda lei. Para contornar este problema, foi necessário estabelecer uma segunda lei da termodinâmica generalizada [8] que diz que apenas a entropia total, isto é, a entropia do buraco negro somada à do sistema de matéria, não deve diminuir. Com isto, mesmo que um observador veja a entropia do sistema diminuir, a variação da entropia do buraco negro, associada ao aumento da área de seu horizonte, deve ser maior que a entropia perdida para o observador de forma a garantir a validade da segunda lei generalizada. Esta conclusão deixa claro que, se um sistema contendo matéria puder ter sua entropia arbitrariamente grande, a segunda lei generalizada pode ser violada [10]. Este limite deve se aplicar a qualquer sistema contendo matéria com auto-gravidade desprezível, ou seja, o sistema não deve ser capaz de formar buracos negros ou causar instabilidades gravitacionais quando se aproxima de um buraco negro.

O limite de Bekenstein é uma constatação sobre como a natureza se comporta e deve ser pensado como um limite universal, mas há vários argumentos que mostram que é possível haver violações deste limite [11]. Unruh e Wald [12] [13] argumentaram que o limite de Bekenstein não é nem necessário nem suficiente para que a segunda lei generalizada seja válida, uma vez que um sistema atraído por um buraco negro sofre aceleração e, portanto, experimenta radiação Unruh [14]. Com isto, a entropia da radiação Unruh deveria balancear a entropia da matéria tida como perdida atrás do horizonte e o limite de Bekenstein pode ser violado. Bekenstein respondeu a esta objeção argumentando que a radiação Unruh só é de fato importante em situações muito específicas [15]. Outra objeção diz respeito à energia de ponto-zero renormalizada de teorias de campos quantizados. Se esta energia tiver sinal negativo, há argumentos que dizem que o limite de Bekenstein deve ser violado [16]. Embora seja possível argumentar que a energia das fronteiras que confinam os campos possam compensar a energia negativa do ponto-zero e tornar a energia total positiva, não há consenso de que isto resolve o problema da violação do limite de Bekenstein.

Se considerarmos a idéia de que este limite de entropia pode ser violado, podemos nos perguntar se é possível determinar, para um dado sistema de matéria com auto-gravidade desprezível limitado a uma região finita do espaço-tempo, se o limite de Bekenstein é sempre válido ou em quais circunstâncias ele é ou não violado. O trabalho de Alcalde, Menezes e Svaiter [16] foi o primeiro a investigar as condições de existência do limite de Bekenstein para teorias com interação. Eles investigaram uma teoria escalar com interação do tipo $g_0\varphi^p$ no regime de acoplamento forte confinado a um hipercubo de lado L com condições de contorno de Dirichlet e estabeleceram, para este modelo, em quais circunstâncias o limite de Bekenstein é válido e em quais é violado. A idéia do presente trabalho é dar continuidade a estas investigações, aplicando o método empregado na referência [16] para o caso de uma teoria escalar com simetria interna $O(N)$, conhecido como modelo $O(N)$. Investigaremos este modelo no regime de acoplamento forte também confinado a um hipercubo de lado L com condições de contorno de Dirichlet.

O modelo $O(N)$ é um multipleto de N campos escalares. O campo φ deve ser considerado um iso-vetor de N componentes $\vec{\varphi} = (\varphi_1\,;\,\varphi_2\,;\,...\,;\,\varphi_N)$. Com isto, a lagrangeana do modelo $O(N)$ é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}\,m_0^2\,\varphi^2 - \frac{g_0}{p\,!}\,\varphi^p\,, \tag{1.2}$$

onde $\varphi^2 = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i^2$ e $\varphi^p = (\varphi^2)^{p/2}$.

É possível escrever a versão euclideana d-dimensional da teoria escalar com simetria $O(N)$ e interação $g_0\varphi^p$ e relacionar a energia média e a entropia do sistema com o gerador funcional das funções de Schwinger $Z[V, \vec{h}\,]$ da teoria, onde $\vec{h}$ é a fonte que se acopla aos campos. Neste ponto, também vamos considerar que o sistema está em equilíbrio térmico com um reservatório a temperatura β^{-1} e condições de contorno periódicas em β. Se considerarmos que a fonte $\vec{h}$ é constante, temos uma função geradora das funções de Schwinger $Z(V, \vec{h}\,)$.

Teorias de campo com interação não são solúveis exatamente e precisam ser estudadas com a ajuda de alguma expansão perturbativa. A expansão mais comum é a de acoplamento fraco, baseada no limite em que a constante de acoplamento g_0 é pequena em relação aos outros parâmetros da teoria. A expansão de acoplamento forte é outra expansão perturbativa baseada no fato de que a constante de acoplamento é grande e, desta forma, a parte gaussiana da ação é tratada como uma perturbação em relação à parte com interação [17]. No nosso caso, vamos considerar que a auto-interação é forte o suficiente para que seja possível usar a expansão de acoplamento forte. No regime de acoplamento forte, é possível separar $\ln Z(V, \vec{h}\,)$ em dois termos: um que depende da função geradora de valor independente e outro que depende da função zeta espectral. Todas as informações dos contornos e condições de contorno são introduzidas no problema pela função zeta espectral.

Um dos problemas de utilizar a expansão de acoplamento forte é que a função geradora de valor independente não é bem definida. Esta função geradora é caracterizada por não possuir o termo cinético e, portanto, descreve uma situação em que todos os pontos do espaço-tempo flutuam independentes entre si, sem haver propagação de informação [18]. Este é o primeiro termo da expansão perturbativa de acoplamento forte e deve estar bem definido para que a expansão faça sentido. A solução para este problema foi apresentada por Klauder que, através de uma mudança na medida funcional, foi encontrada uma solução finita não-trivial para este tipo de modelo [19]. No caso do modelo $O(N)$, esta solução é encontrada para o limite de grandes valores de N [20]. Há argumentos que dizem que não é possível haver um número grande de espécies de partículas num modelo fisicamente razoável e, portanto, o limite de N grande deve violar o limite de Bekenstein

[11]. Contudo, será mostrado que, no regime de acoplamento forte, a solução de Klauder para o modelo $O(N)$ independe de N no limite $N \to \infty$ e, portanto, o problema das espécies não está presente.

1.1 Organização

O assunto discutido abrange vários tópicos importantes em Teoria Quântica de Campos. Neste trabalho, todos os tópicos necessários para a aplicação do método serão apresentados. No capítulo 2, o limite de Bekenstein é discutido com maior riqueza de detalhes e é demonstrado para o caso do buraco negro de Schwarzschild, que é o modelo mais comum para buracos negros sem carga e rotação. O capítulo 3 apresenta a expansão de acoplamento forte e sua relação com a função geradora de valor independente para o modelo $O(N)$. Neste capítulo mostramos como podemos incluir as informações das fronteiras e condições de contorno no problema relacionando o logaritmo da função geradora euclideana com a função geradora de valor independente e a função zeta de Riemann generalizada. Também vemos como calcular a entropia específica e energia média de um sistema deste tipo. No capítulo 4, calculamos a contribuição do modelo $O(N)$ na entropia e energia e mostramos que o resultado não interfere nas condições para existência ou violação do limite de Bekenstein. O capítulo 5 traz, enfim, quais as condições em que o sistema obedece ou viola o limite de entropia. Veremos que a existência ou não deste limite está diretamente ligada ao sinal da energia de ponto-zero. Investigamos também os limites de altas e baixas temperaturas e suas relações com a energia do vácuo. O capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho e sugestões de novas investigações na mesma área. Durante todo o trabalho, vamos considerar $\hbar = G = k = c = 1$.

Capítulo 2

O limite de Bekenstein

A entropia pode ser vista como uma medida do espaço de fases disponível para um sistema. Portanto, se consideramos um sistema que tenha, no máximo, energia E confinado a uma região finita do espaço, não é difícil imaginar razões para que a entropia deste sistema tenha um limite superior. Classicamente, não temos nenhuma ferramenta capaz de evidenciar a forma matemática deste limite. A solução reside na termodinâmica de buracos negros, que permite chegar a uma expressão que relaciona a razão S/E com o raio efetivo R capaz de circunscrever totalmente o sistema, toda vez que R é bem definido. Para tal, é necessário que o sistema a se considerar tenha auto-gravidade desprezível e que o espaço-tempo onde está inserido favoreça a formação de buracos negros estacionários.

2.1 A extensão máxima de Kruskal

A métrica de Schwarzschild foi uma das primeiras soluções de vácuo encontradas para as equações de Einstein. Ela descreve o espaço-tempo em volta de uma esfera massiva sem carga e sem rotação, portanto é uma solução com simetria esférica. Esta solução é estática, ou seja, não depende explicitamente de um parâmetro de tempo, contudo isto não indica que não há evolução no modelo. Sejam (r, θ, ϕ) as coordenadas polares esféricas usuais e t a coordenada tipo-tempo. A métrica de Schwarzschild tem a forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2\right). \tag{2.1}$$

Esta solução possui singularidades em $r = 0$ e $r = 2M$, porém apenas a primeira é uma singularidade real do espaço-tempo. A segunda é uma singularidade de coordenadas e pode ser removida. Entretanto, a superfície definida por $r = 2M$ estabelece uma superfície onde, para $r < 2M$, as coordenadas r e t invertem os papéis que tinham na região definida por $r > 2M$. Se r era uma coordenada tipo-espaço e t uma coordenada tipo-tempo em $r > 2M$, para $r < 2M$ a coordenada t passa a ser tipo-espaço e r tipo-tempo. A solução de Schwarzschild sugere que nenhuma linha de universo dentro da superfície $r = 2M$ a atravessa de dentro para fora, mas também sugere que qualquer partícula na região definida por $r > 2M$ leva um tempo infinito para alcançar esta superfície. Por isto, dizemos que a superfície $r = 2M$ define um horizonte de eventos. Este comportamento deve-se ao fato de que a escolha de coordenadas da métrica de Schwarzschild tem uma singularidade em $r = 2M$, mas é possível fazer uma escolha de coordenadas que remove esta singularidade. Eddington e Finkelstein escolheram uma nova coordenada temporal de maneira que geodésicas radiais nulas cruzando o horizonte de fora para dentro sejam linhas retas. A escolha da nova coordenada de tempo é

$$t \rightarrow \bar{t} = t + 2M \ln (r - 2M) \tag{2.2}$$

e a nova métrica tem a forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\bar{t}^{\,2} - \frac{4M}{r} d\bar{t}\, dr - \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2\right). \tag{2.3}$$

A métrica (2.3) é regular em toda a região $0 > r > \infty$, mas não é mais simétrica por reversão temporal [figura 2: diagrama E-F]. É possível obter uma solução reversa no tempo escolhendo a coordenada temporal t^* como

$$t \rightarrow t^* = t - 2M \ln (r - 2M). \tag{2.4}$$

Um espaço-tempo com uma geometria afim é dito máximo se toda geodésica emanando de um ponto arbitrário do espaço-tempo pode ser extendida para valores infinitos do parâmetro afim nas duas direções ou termina numa singulraidade real [21]. Este não é o caso da métrica de Eddington-Finkelstein. A extensão máxima da solução de Schwarzschild foi encontrada por Kruskal usando os parâmetros de tempo avançado e retardado, que são duas coordenadas nulas dadas, respectivamente, por

$$v = \bar{t} + r \qquad ; \qquad w = t^* - r. \tag{2.5}$$

O elemento de linha de Kruskal é

$$ds^2 = \frac{16M^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{2M}\right) dt'^{\,2} - \frac{16M^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{2M}\right) dx'^{\,2} - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \varphi^2\right), \tag{2.6}$$

onde

$$t' = \frac{1}{2}\left(e^{v/4m} - e^{-w/4m}\right) \qquad ; \qquad x' = \frac{1}{2}\left(e^{v/4m} + e^{-w/4m}\right) \tag{2.7}$$

As escolhas de coordenadas em (2.7) foram as escolhas feitas por Kruskal. Agora, todos os cones de luz são cones de 45° e todas as geodésicas radiais são linhas retas. Uma geodésica que começa em $r = 4m$, ou seja, fora do horizonte de eventos, pode ir de encontro à singularidade futura e é possível que sinais enviados pelo sistema antes de atravessar o horizonte possam escapar. A extensão máxima de Kruskal evidencia que existe uma singularidade real em $r = 0$, um horizonte de eventos passado e outro futuro. Um objeto que atravessa o horizonte de eventos futuro não retorna e todos os sinais enviados por ele após a passagem pelo horizonte não escapam de lá. Da mesma forma, um sinal enviado de dentro do horizonte passado é incapaz de chegar a um observador no futuro. Estes processos levantaram a questão sobre o que acontece com a informação de um sistema que atravessou um horizonte de eventos.

2.2 Limite de Bekenstein

Considere um espaço-tempo com geometria que permita a formação de buracos negros, um sistema de matéria com massa-energia total E e um buraco negro de massa M neste espaço-tempo. Seja R o raio da menor esfera que é capaz de circunscrever o sistema de matéria e que ele tenha auto-gravidade fraca, ou seja, o sistema não formará um buraco negro e não é capaz de criar instabilidades gravitacionais quando se aproxima de um buraco negro.

Vamos agora considerar a situação em que este sistema de matéria é atraído por um buraco negro e atravessa seu horizonte de eventos, de forma que a sua entropia se perde para um observador distante. Neste caso, a área do horizonte de eventos do buraco negro irá aumentar, aumentando a sua entropia. É um resultado conhecido dos estudos de termodinâmica de buracos negros que, quando um sistema de energia E atravessa o horizonte de eventos e acrescenta sua massa-energia à do buraco negro, a área do horizonte de eventos aumenta, pelo menos, uma quantidade $8\pi ER$ [15].

$$A_F = A_I + 8\pi ER, \tag{2.8}$$

onde A_F e A_I são, respectivamente, as áreais final e inicial do horizonte.

A segunda lei generalizada da termodinâmica diz que a entropia total do sistema não pode diminuir após o processo. Para um observador distante, a entropia total inicial do sistema é

$$S_I = \frac{1}{4}A_I + S_M, \tag{2.9}$$

onde S_M é a entropia da matéria. A segunda lei generalizada diz que a entropia final S_F deve ser maior que a entropia inicial S_I após o processo. Para o mesmo observador distante, a entropia total do sistema após o processo é a nova entropia do buraco negro, já que para ele a entropia do sistema de matéria está perdida atrás do horizonte. Com isto, a entropia final total é

$$S_F = \frac{1}{4}\left(A_I + 8\pi ER\right). \tag{2.10}$$

A segunda lei generalizada diz que $S_F > S_I$. Assim, é fácil ver que se a entropia associada ao sistema que atravessa o horizonte for maior que $2\pi ER$, haverá violação da segunda lei generalizada. Com isto, podemos escrever uma forma geral para este limite de entropia [10]:

$$\frac{S_M}{E} \leq 2\pi R. \tag{2.11}$$

A forma completa da expressão acima é $S/E \leq 2\pi kR/\hbar c$. É interessante notar que a constante de Newton não está presente, evidenciando que o limite se aplica a sistemas onde a gravidade não é importante.

Bekenstein e Schiffer [10], [15], [22] mostraram casos assegurando que este limite é obedecido por todos os sistemas fisicamente razoáveis com auto-gravidade fraca. Mas ainda assim há argumentos que sugerem muitos casos onde o limite de Bekenstein é violado. Bekenstein, em contrapartida, respondeu que todos os casos que violam o limite não são, de alguma forma, fisicamente razoáveis; seja porque os modelos tem problema em incluir toda a massa gravitante presente no sistema em E, ou então porque o conteúdo de matéria pode ser questionável pois há a presença de um grande número de espécies.

O problema de aplicar este limite a casos onde a gravidade é importante consiste na dificuldade de definir R no espaço-tempo em torno do sistema, que tende a ser altamente curvado. Entretanto, para sistemas com simetria esférica, pode-se definir R em termos da área da superfície. Um buraco negro de Schwarzschild em 4 dimensões, por exemplo, tem o raio de seu horizonte de eventos definido por $R = 2E$. Como a sua entropia $S_{BN} = A/4$, pode-se verificar que este tipo de buraco negro satura exatamente o limite de Bekenstein.

2.3 O problema das espécies

Uma objeção ao limite de Bekenstein diz respeito ao número de espécies de partículas que podem estar presentes num sistema. Teoricamente, é possível escrever teorias de campos com lagrangeanas contendo um número arbitrariamente grande de espécies de partículas. Em alguns casos, é possível relacionar a entropia com o número N de espécies presentes no sistema, de forma que um número arbitrariamente grande de espécies pode vir a violar o limite de Bekenstein.

Se o limite de Bekenstein é considerado um limite geral que não deve ser violado, também é possível limitar o número de espécies de partículas que um sistema pode conter. Desta forma, uma pergunta que surge é se o limite de Bekenstein sugere que modelos com várias espécies de partículas não são fisicamente razoáveis no limite onde N é grande.

No caso do modelo $O(N)$, muitas vezes é interessante estudar este limite. Contudo, a tentativa de determinar um limite superior para a entropia deste modelo pode, a princípio, trazer também um limite para o número de espécies N a ser considerado, e o limite $N \to \infty$ deveria violar o limite de Bekenstein em qualquer situação. Entretanto, o regime de acoplamento forte fornece uma solução para a razão entropia-energia independente de N, mostrando que o caso que vamos considerar neste trabalho não limita o número de espécies de partículas do modelo. Este fato nos leva a crer que não é necessário considerar que sistemas físicos com um número arbitrariamente grande de espécies não sejam fisicamente razoáveis.

Capítulo 3

A expansão de acoplamento forte e a função zeta espectral

Teorias com interação precisam ser estudadas com a ajuda de algum método perturbativo. O método mais comum consiste em considerar que a interação é fraca e, assim, é possível realizar uma expansão em potências da constante de acoplamento. O primeiro termo desta expansão perturbativa é a teoria livre e, conforme vamos considerando ordens superiores em g_0, os diagramas que representam as interações vão aparecendo na teoria.

Contudo, este método não é aplicável a qualquer situação física que podemos encontrar. A cromodinâmica quântica, que é a melhor candidata para uma teoria que descreva as interações fortes, reside num regime onde a constante de acoplamento da teoria é grande e a expansão de acoplamento fraco não pode ser usada. Neste caso, faz-se necessário um outro tipo de expansão perturbativa.

A expansão perturbativa de acoplamento forte é capaz de trazer soluções para estes casos considerando que a constante de acoplamento é grande, de forma que a parte gaussiana da ação pode ser considerada como uma perturbação ao termo de interação. A diferença principal entre esta expansão e a de acoplamento fraco é que ela é feita em potências inversas de g_0. O primeiro termo da expansão é o gerador funcional de valor independente $Q_0(\vec{h}\,)$, que não é bem definido. Este gerador funcional descreve uma situação onde os campos flutuam independentemente no espaço e não há propagação de informação de um ponto a outro. Para que a expansão de acoplamento forte possa ser utilizada, é necessário dar sentido a este gerador funcional. Realizando uma mudança na medida funcional e utilizando argumentos de simetria, Klauder chegou a uma solução finita não-trivial para $Q_0(\vec{h}\,)$ [18].

Com o auxílio desta expansão, é possível separar o gerador funcional das funções de Schwinger conexas $\ln Z(V,\vec{h}\,)$ em dois termos: um que depende de $Q_0(\vec{h}\,)$ e outro que depende da função zeta espectral, que traz todas as informações sobre as fronteiras que confinam os campos. Como vamos estudar um modelo de campos confinados a uma região finita do espaço euclideano, não há divergências associadas à função zeta espectral.

Se é possível calcular $\ln Z(V,\vec{h}\,)$, podemos encontrar a energia média e a entropia do sistema através das relações

$$E(\beta,\Omega) = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z(\beta,\Omega,\vec{h}\,)|_{\vec{h}=0} \tag{3.1}$$

$$S(\beta,\Omega) = \left(1-\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\ln Z(\beta,\Omega,\vec{h}\,)|_{\vec{h}=0} \tag{3.2}$$

onde β é o inverso da temperatura e Ω é o volume do sistema em $d-1$ dimensões.

3.1 A expansão de acoplamento forte

Vamos considerar N campos escalares com auto-interação do tipo $(g_0\,\varphi^p)$, definidos num espaço de Minkowski d-dimensional onde $Z[V,\vec{h}\,]$ é o gerador funcional das funções de Green da teoria. A teoria euclideana pode ser encontrada por extensão analítica para o tempo imaginário. A contraparte euclideana do gerador funcional das funções de Green é o gerador funcional das funções de Schwinger completas da teoria, que é dado pela expressão

$$Z(V,\vec{h}\,) = \mathcal{N}\int\mathcal{D}\varphi\,\exp\left[\int d^dx\left(\frac{1}{2}\,(\partial_\mu\vec{\varphi}\,)^2-\frac{1}{2}\,m_0^2\,\varphi^2-\frac{g_0}{p\,!}\,\varphi^p+\vec{h}\cdot\vec{\varphi}\right)\right], \tag{3.3}$$

onde $\mathcal{N}$ é uma normalização, V é o volume do espaço euclideano onde os campos estão definidos, $\mathcal{D}\varphi$ é uma medida funcional e $\vec{h}$ é a fonte que se acopla aos campos. É importante lembrar que os campos e a fonte são funções da posição no espaço, ou seja, $\vec{\varphi}(x)\equiv\vec{\varphi}$

e $\vec{h}(x) \equiv \vec{h}$. Como os campos estão confinados a uma região finita do espaço-tempo, é preciso restringir o espaço das funções onde a integral funcional deve ser evaluada. Também é importante enfatizar que $\vec{\varphi}(x)$ deve ser visto como um N-isovetor e, portanto, a fonte deve ser um isovetor do mesmo tipo para que se acople a todas as componentes do campo. Ainda temos que

$$(\partial_\mu \vec{\varphi}\,)^2 = \sum_{i=1}^{N} (\partial_\mu \varphi_i)^2 \quad ; \quad \varphi^p = \left(\varphi^2\right)^{p/2} .$$

No regime de acoplamento forte, podemos considerar a parte gaussiana da equação (3.3) como uma perturbação em relação à parte com interação. Realizando uma integração por partes, o gerador funcional da equação (3.3) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} Z(V,\vec{h}\,) \;&=\; \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^dx \int d^dy \, \vec{\varphi}(x)\, K(m_0; x-y)\, \vec{\varphi}(y)\right] \times \\ &\quad \times \exp\left[\int d^dx \left(-\frac{g_0}{p\,!}\, \varphi^p(x) + \vec{h}(x)\cdot\vec{\varphi}(x)\right)\right], \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde o kernel $K(m_0; x-y)$ é definido por

$$K(m_0; x-y) = \left(-\triangle + m_0^2\right) \delta^d(x-y) \tag{3.5}$$

com o operador laplaciano d-dimensional sendo denotado por $\triangle$.

A integral funcional que define $Z(V,\vec{h}\,)$ é invariante com respeito à escolha da parte quadrática da ação. Com isto, vamos realizar uma mudança da expansão de acoplamento forte, que separa o gerador funcional numa parte contendo os termos cinéticos da ação e outra contendo o gerador funcional de valor independente $Q_0(\sigma,\vec{h}\,)$. Realizando a troca usual $\vec{\varphi}(x) \to \delta/\delta\vec{h}(x)$, a equação (3.4) fica reescrita como [23]

$$Z(V,\vec{h}\,) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^dx \int d^dy \, \frac{\delta}{\delta\vec{h}(x)}\, K(m_0,\sigma; x-y)\, \frac{\delta}{\delta\vec{h}(y)}\right] Q_0(\sigma,\vec{h}\,) \tag{3.6}$$

onde o gerador funcional de valor independente é definido por

$$Q_0(\sigma,\vec{h}\,) = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\varphi\, \exp\left[d^dx\left(-\frac{1}{2}\sigma {m_0}^2\,\varphi^2(x) - \frac{g_0}{p\,!}\,\varphi^p(x) + \vec{h}(x)\cdot\vec{\varphi}(x)\right)\right] \qquad (3.7)$$

e o kernel modificado é definido pela expressão

$$K(m_0,\sigma;x-y) = \big(-\triangle + (1-\sigma)m_0^2\big)\,\delta^d(x-y). \qquad (3.8)$$

O parâmetro σ deve ser complexo e definido na região $0 \leq \mathrm{Re}(\sigma) < 1$. $\mathrm{Re}(\sigma)$ não deve ser igual a 1, já que este valor introduz divergências infravermelhas. A normalização $\mathcal{N}$ pode ser encontrada através da condição $Q_0(\sigma,\vec{h}\,)|_{\vec{h}=0} = -1$. Note que

$$\frac{\delta}{\delta\vec{h}(x)}\,K(m_0,\sigma;x-y)\,\frac{\delta}{\delta\vec{h}(y)} \;\equiv\; \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta}{\delta h_i(x)}\,K(m_0,\sigma;x-y)\,\frac{\delta}{\delta h_i(y)}.$$

A expansão da exponencial em (3.6) fornece uma expansão perturbativa que tem a forma

$$Z(V,\vec{h}\,) = \sum_{j=1}^{\infty} Z^{(j)}(V,\vec{h}\,) \qquad (3.9)$$

e onde o primeiro termo da série é o gerador funcional de valor independente $Q_0(\sigma,\vec{h}\,)$. A expansão é desenvolvida em torno deste gerador funcional estático. A principal característica de $Q_0(\sigma,\vec{h}\,)$ é o fato de que os campos definidos em pontos diferentes do espaço flutuam totalmente desacoplados, uma vez que não há termo cinético no gerador funcional. À medida que consideramos ordens mais altas na expansão perturbativa, as propagações de informação de um ponto a outro vão aparecendo. Este tipo de modelo será apresentado com mais detalhes no capítulo 4.

3.2 Cálculo de $\ln Z$

As equações (3.1) e (3.2) relacionam, respectivamente, a energia média e a entropia de um dado sistema físico com o logaritmo do gerador funcional das funções de Schwinger, que gera as funções de Schwinger conexas. Pode ser muito difícil calcular $\ln Z(V,\vec{h}\,)$

exatamente, mas a expansão de acoplamento forte fornece uma maneira de relacionar este logaritmo com $Q_0(\sigma, \vec{h}\,)$ e a função zeta espectral relacionada ao operador $D = (-\triangle + (1-\sigma)m_0^2)$ definido na equação (3.8).

Partindo da equação (3.6), realizando a expansão da exponencial pegando até a segunda ordem da série, temos

$$Z(V, \vec{h}\,) = Q_0(\sigma, \vec{h}\,) - \frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta}{\delta h_i(x)}\, K(m_0, \sigma; x-y)\, \frac{\delta}{\delta h_i(y)}\, Q_0(\sigma, \vec{h}\,) \quad (3.10)$$

Se multiplicarmos e dividirmos (3.10) por $Q_0(\sigma, \vec{h}\,)$, é possível escrever o gerador funcional das funções de Schwinger conexas como

$$\ln Z(V, \vec{h}\,) = \ln \left[\frac{1}{Q_0} \left(Q_0 - \frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta}{\delta h_i(x)}\, K(m_0, \sigma; x-y)\, \frac{\delta}{\delta h_i(y)}\, Q_0 \right) \right] \quad (3.11)$$

onde $Q_0 \equiv Q_0(\sigma, \vec{h}\,)$. Neste ponto é conveniente escolher a fonte $\vec{h}(x)$ constante, ou seja, não depende do ponto no espaço. Com isto, as derivadas funcionais tornam-se derivadas usuais de funções. A solução não-trivial de Klauder para o gerador funcional de valor independente para o modelo $O(N)$ depende apenas do módulo de $\vec{h}$ e também não depende de x. Denotando o $|\vec{h}|$, simplesmente por h, é possível reescrever (3.11) da forma

$$\ln Z(V, h\,) = \ln \left(1 - \frac{1}{2Q_0} \frac{\partial^2}{\partial\, h^2} Q_0 \int d^d x \int d^d y\, K(m_0, \sigma; x-y) \right) \quad (3.12)$$

Com a fonte constante, $\ln Z(V, h\,)$ deixa de ser um funcional e torna-se uma função geradora, assim como $Q_0(\sigma, h)$. Utilizando a expressão

$$\ln(1+x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1}\, \frac{x^j}{j} \quad (3.13)$$

e pegando apenas a primeira ordem da expansão, podemos reescrever a equação (3.12) como

$$\ln Z(V,h\,) = -\frac{1}{2Q_0(\sigma,h)}\frac{\partial^2}{\partial h^2}\,Q_0(\sigma,h)\int d^dx\int d^dy\,K(m_0,\sigma;x-y). \tag{3.14}$$

Na equação (3.14), a integral dupla é igual ao traço do operador $D = (-\triangle + (1-\sigma)m_0^2)$:

$$\mathrm{tr}\,D = \mathrm{tr}\,e^{\ln D} = \mathrm{tr}\;(I + \ln D + \,...\,) = \mathrm{tr}\,I + \mathrm{tr}\,\ln D + \,...$$

É conhecido que a função zeta espectral associada ao operador D obedece a seguinte relação [24]:

$$\ln\left(\det D\right) = \frac{d}{ds}\zeta_D(s)\Big|_{s=0}. \tag{3.15}$$

Usando o fato que $\mathrm{tr}\,\ln D = \ln\left(\det D\right)$, a equação (3.14) fica

$$\ln Z(V,h) = \frac{1}{Q_0(\sigma,h)}\frac{\partial^2}{\partial\,h^2}\,Q_0(\sigma,h)\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\,\zeta_D(s)\Big|_{s=0}\right), \tag{3.16}$$

onde α é uma constante divergente e $\zeta_D(s)$ é a função zeta espectral associada ao operador D. A função zeta espectral é definida por [25]

$$\zeta_D(s) = \sum_n \lambda_n^{-s} \tag{3.17}$$

onde λ_n são os autovalores do operador D, que dependem das condições de contorno do problema. Para podermos usar esta expressão e calcular a energia média e a entropia do modelo $O(N)$, é preciso evaluar a integral funcional contida em $Q_0(\sigma,h)$, calcular a função zeta espectral e lidar com a divergência vindo da constante α, que pode ser renormalizada com auxílio da segunda lei da termodinâmica. Este procedimento será mostrado com detalhes no capítulo 5. A solução de Klauder para o gerador funcional de valor independente será apresentada no capítulo 4.

3.3 Cálculo da função zeta espectral

A presença de fronteiras que confinam os campos altera os autovalores do operador D definido na equação (3.14). Com isto, a função zeta espectral está diretamente ligada ao operador D e seus autovalores são determinados pelas condições de contorno do problema. Vamos considerar um hipercubo de lado L confinando o sistema em questão, ou seja, o sistema é finito em todas as dimensões espaciais de forma que $x_i \in [0, L]$ e o índice i vai de 1 até $d-1$.

Considerando que o sistema está em equilíbrio térmico com um reservatório à temperatura β^{-1}, vamos assumir condições periódicas sobre o tempo euclideano (condições de Kubo-Martin-Schwinger) e condições de Dirichlet nas dimensões espaciais. Com estas condições de contorno, o operador D passa a ter um espectro discreto e a função zeta espectral tem um valor finito. O espectro do operador D com as condições de contorno dadas é dado por

$$\lambda_{n_1, \dots, n_d} = \Big[\Big(\frac{n_1 \pi}{L} \Big)^2 + \dots + \Big(\frac{n_{d-1} \pi}{L} \Big)^2 + \Big(\frac{2 n_d \pi}{\beta} \Big)^2 + (1-\sigma) m_0^2 \Big] \tag{3.18}$$

onde n_1 , ... , n_d são números inteiros diferentes de zero, já que escolhemos condições de contorno de Dirichlet. A zeta espectral fica

$$\zeta_D(s) = \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \sum_{n_d=-\infty}^{\infty}{}' \lambda_{n_1, \dots, n_d}^{-s} \tag{3.19}$$

onde s é um parâmetro complexo e $\vec{n}_{d-1} = (n_1, n_2, ..., n_{d-1})$. O símbolo "linha" presente no somatório indica que o modo zero não está sendo considerado na soma. A série acima converge para $\mathrm{Re}\, s > \frac{d}{2}$ e sua extensão analítica define uma função meromórfica de s analítica em $s = 0$. Para realizar esta extensão analítica, é necessário introduzir um parâmetro arbitrário μ com dimensão de massa para que o procedimento retorne um resultado adimensional. Usando n como um índice geral, temos que

$$\zeta_{\mu D}(s) = \sum_{n}^{\infty} (\mu^{-2} \lambda_n)^{-s} = \mu^{2s} \sum_{n}^{\infty} \lambda_n^{-s} = \mu^{2s} \zeta_D(s), \tag{3.20}$$

portanto, a derivada da função zeta em relação ao parâmetro s possui dois termos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\,\zeta_{\mu D}(s)|_{s=0} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\,\zeta_D(s)|_{s=0} + \frac{1}{2}\ln\mu^2\,\zeta_D(s)|_{s=0}. \tag{3.21}$$

Esta propriedade é conhecida como "*scaling*". No nosso caso, é possível mostrar que o valor da função zeta espectral em $s = 0$ é zero e, com isto, nossos resultados não dependem do parâmetro arbitrário μ. A função zeta de Epstein é definida pela relação

$$Z_p(a_1,...,a_p;2s) = \sum_{\vec{n}_p=-\infty}^{\infty} \left((a_1n_1)^2 + ... + (a_pn_p)^2\right)^{-s}. \tag{3.22}$$

Para mostrar que a zeta se anula em $s = 0$, é necessário utilizar a seguinte representação da função zeta de Epstein [26]:

$$\begin{aligned}(\pi\eta)^{-s}\,\Gamma(s)Z_p(a_1,...,a_p;2s) \quad &= \quad -\frac{1}{s} + \frac{2}{p-2s} + \eta^{-s}\int_{\eta}^{\infty} dx\,x^{s-1}\left(\vartheta(0,...,0;a_1^2x,...,a_p^2x) - 1\right)\\ &+\eta^{(2s-p)/2}\int_{1/\eta}^{\infty} dx \quad x^{(p-2s)/2-1}\left(\vartheta(0,...,0;x/a_1^2,...,x/a_p^2) - 1\right)\end{aligned} \tag{3.23}$$

onde $\eta^{p/2} = a_1\,a_2\,...\,a_p$, e a função de Jacobi generalizada ϑ é definida por:

$$\vartheta(z_1,...,z_p;x_1,...,x_p) = \prod_{i=1}^{p}\vartheta(z_i;x_i) \tag{3.24}$$

com $\vartheta(z;x)$ sendo a função de Jacobi dada por

$$\vartheta(z;x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi(2nz-n^2x)}. \tag{3.25}$$

A representação (3.23) fornece uma extensão analítica para a função zeta de Epstein exceto para um polo em $p = 2s$. Em $s = 0$, para qualquer $p \geq 1$, temos

$$Z_p(a_1,...,a_p\,;2s)\big|_{s=0} = -1\,, \tag{3.26}$$

dado que as integrais em (3.23) convergem, $\Gamma(0) \to \infty$ e

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{\Gamma(s)\,s}=1.$$

Vamos agora definir a função $Z_p^{(q)}(a_1,...,a_p;2s)$ dada por

$$Z_p^{(q)}(a_1,...,a_p;2s)=\sum_{n_1,...,n_q=1}^{\infty}\;\sum_{n_{q+1},...,n_p=-\infty}^{\infty}\left((a_1n_1)^2+...+(a_pn_p)^2\right)^{-s}. \tag{3.27}$$

Observando que

$$Z_p(a_1,...,a_p;2s)|_{s=0}=Z_p(a_2,...,a_p;2s)|_{s=0}+2Z_p^{(1)}(a_1,...,a_p;2s)|_{s=0},$$

é possível mostrar por indução que $Z_p^{(q)}(a_1,...,a_p;2s)|_{s=0}=0$, desde que $0<q<p$. A função zeta generalizada do operador D é equivalente a $Z_p^{(p-1)}(a_1,...,a_p;2s)|_{s=0}$, como pode ser visto comparando as equações (3.27) e (3.19). Logo

$$\zeta_D(s)\Big|_{s=0}\equiv Z_p{}^{(p-1)}(a_1,...,a_p;2s)|_{s=0}=0. \tag{3.28}$$

Com isto, mostramos que $\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\,\zeta_{\mu D}(s)|_{s=0}=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\,\zeta_D(s)|_{s=0}$ e não temos problemas com "*scaling*". Isto ocorre por causa da escolha das condições de contorno de Dirichlet. Diferentes escolhas de condições de contorno, de Neumann por exemplo, mudam o espectro do operador D e a derivada da função zeta espectral pode conter termos adicionais por conta do "*scaling*". A escolha de condições de contorno de Neumann também introduz o modo zero na soma em (3.19), o que compromete a convergência da função zeta.

Feitas estas considerações, podemos agora calcular a derivada de $\zeta_D(s)$. Rearrumando a equação (3.18), podemos escrever a derivada da função zeta espectral em $s=0$ como

$$\frac{d}{ds}\,\zeta_D(s)\Big|_{s=0}=-\sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty}\sum_{n_d=-\infty}^{\infty}\left(\ln\!\left(\left(\frac{\pi\,\beta\,q}{L}\right)^2+(2\pi n_d)^2\right)+\ln\!\left(1+\frac{a^2\beta^2}{4n_d^2L^2+q^2\beta^2}\right)\right), \tag{3.29}$$

onde $\vec{n}_{d-1}=(n_1,n_2,...,n_{d-1})$, $q^2=n_1^2+n_2^2+...+n_{d-1}^2$ e $a^2=\left(\frac{(1-\sigma)m_0^2L^2}{\pi^2}\right)$. Usando a seguinte identidade [27]

$$\ln\Big(\Big(\frac{\pi\,\beta\,q}{L}\Big)^2 + (2\pi n_d)^2\Big) = \int_1^{(\frac{\pi\,\beta\,q}{L})^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2\pi n_d)^2} + \ln\Big(1 + (2\pi n_d)^2\Big) \tag{3.30}$$

e também a relação

$$\sum_{n_d=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\theta^2 + (2\pi n_d)^2} = \frac{1}{2\theta}\Big(1 + \frac{2}{e^\theta - 1}\Big), \tag{3.31}$$

é possível reescrever a soma dupla do primeiro termo de (3.29) como uma soma simples em $\vec{n}_{d-1}$. Para isto, é necessário substituir (3.31) na integral em (3.30) e realizar a integral resultante, notando que $d\,(\theta^2) = 2\theta d\theta$. A equação (3.29) pode ser reescrita como

$$\sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} \ln\Big(\Big(\frac{\pi\,\beta\,q}{L}\Big)^2 + (2\pi n_d)^2\Big) = 2\sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \int_1^{\left(\frac{\pi\,\beta\,q}{L}\right)} d\theta\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^\theta - 1}\Big) + \alpha_1 \tag{3.32}$$

onde

$$\alpha_1 = \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} \ln\Big(1 + (2\pi n_d)^2\Big). \tag{3.33}$$

Realizando a integração em θ, encontramos que a soma dupla em (3.29) pode ser escrita como

$$\Sigma_1 = 2\sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left(\frac{\pi\,\beta\,q}{2L} + \ln\Big(1 - e^{-\frac{\pi\,\beta\,q}{L}}\Big)\right) + \alpha_2\,, \tag{3.34}$$

com

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \sum_{\vec{n}_d=1}^{\infty} \left(1 + 2\ln(1 - e^{-1})\right). \tag{3.35}$$

É claro ver que α_2 é um termo divergente. Contudo, α_2 não depende de β e com isto pode ser eliminado usando a terceira lei da termodinâmica. As relações (3.1) e (3.2) também deixam claro que termos independentes de β não contribuem para as propriedades termodinâmicas do sistema uma vez que tanto E quanto S dependem de derivadas em relaçao a beta de $\ln Z$.

Ainda falta escrever o segundo termo da equação (3.29) de uma maneira tratável. Para isto, lembramos que $\sum_i \ln(x_i) = \ln\left(\prod_i x_i\right)$ e faremos uso da seguinte identidade matemática já conhecida [28] [29]

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{a^2}{n^2+b^2}\right)=\frac{\sinh^2(\pi\sqrt{a^2+b^2})}{\sinh^2(\pi\, b)}\,, \tag{3.36}$$

e assim conseguimos eliminar totalmente a soma em n_d. O segundo termo de (3.29) pode ser escrito como

$$\Sigma_2 = 2\sum_{\vec{n}_{d-1}}^{\infty}\ln\left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi\beta}{2L}\sqrt{q^2+a^2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi\beta q}{2L}\right)}\right). \tag{3.37}$$

Com estes resultados, podemos escrever a derivada da função zeta generalizada em $s=0$ como

$$\frac{d}{ds}\,\zeta_D(s)\Big|_{s=0} = -2\sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi\beta}{2L}\sqrt{q^2+a^2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi\beta q}{2L}\right)}\right)+\ln\left(1-e^{-\frac{\pi\,\beta\, q}{L}}\right)+\frac{\pi\,\beta\, q}{2L}\right]-\alpha_2\,. \tag{3.38}$$

Este resultado mostra a contribuição vindo das fronteiras que confinam os campos e corresponde ao segundo termo da equação (3.16). Para que possamos usar a expansão de acoplamento forte, ainda temos que encontrar uma solução finita não-trivial para a função geradora de valor independente para o modelo $O(N)$ e lidar com a divergência vindo da constante α em (3.16). No próximo capítulo vamos mostrar a solução de Klauder para a função geradora de valor independente e calculá-la explicitamente para o limite de grandes valores de N.

Capítulo 4

A função geradora de valor independente para o modelo $O(N)$

Teorias não-renormalizáveis consistem num dos desafios atuais da Teoria Quântica de Campos. Teorias de perturbação aplicadas a este tipo de modelos levam a um número infinito de contratermos e não é possível encontrar resultados finitos. Métodos de renormalização levam a soluções triviais que nem sempre são de alguma utilidade [18] [30]. Contudo, não é razoável pensar que teorias não-renormalizáveis devam simplesmente ser descartadas, como se a natureza tivesse preferência apenas por teorias bem comportadas [19]. As teorias de valor independente são um exemplo de teorias não-renormalizáveis. O modelo não possui um termo de gradiente e, com isto, seu propagador é $(m^2)^{-1}$ em vez do propagador usual $(p^2 + m^2)^{-1}$ e não há cortes de altos momentos numa teoria de perturbação usual.

Apesar destas dificuldades, é possível dar sentido às funções geradoras de valor independente de teorias escalares com uma componente e do modelo $O(N)$. A solução encontrada por Klauder não se reduz à teoria livre quando a cons-tante de acoplamento tende a zero e, para o modelo $O(N)$, é possível encontrar um resultado não-trivial para o limite de $N \to \infty$ [19] [20].

Neste capítulo, vamos mostrar o esquema da solução de Klauder para uma teoria escalar de uma componente. A generalização para N componentes é direta, de forma que é possível calcular a integral funcional para o limite de grandes valores de N.

4.1 Solução para teoria escalar com uma componente

Para que seja possível utilizar a expansão de acoplamento forte, é necessário dar sentido à função geradora $Q_0(\sigma, h)$ definida pela equação (3.7). O principal problema deste modelo é a falta do termo de gradiente, que faz com que não haja propagação de informação de um ponto do espaço-tempo para outro. Não há sentido físico que possa ser associado a este modelo sozinho, mas encontrar uma solução não-trivial para a teoria é importante para o estudo do regime de acoplamento forte, assim como é um exemplo de modelo não-renormalizável que possui solução finita encontrada por métodos não convencionais.

A função geradora de valor independente para uma teoria escalar com auto-interação do tipo $(\lambda\phi)^p$, onde ϕ é um campo escalar com uma componente e λ é a constante de acoplamento, é dada por

$$Q_0(\sigma, h) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\int d^dx \left(-\frac{1}{2}\sigma {m_0}^2 \phi^2(x) - \frac{\lambda}{p!}\phi^p(x) + h(x)\phi(x)\right)\right). \qquad (4.1)$$

O parâmetro σ é definido de maneira similar à mostrada na seção 3.1. A ausência de propagação de informação leva a um comportamento independente em todo ponto do espaço-tempo. Esta característica pode ser interpretada como uma simetria que está diretamente ligada ao fato de que $Q_0(\sigma, h)$ tem uma estrutura do tipo [citar Klauder]

$$Q_0(h) = \exp\left(-\int L\left[h(x)\right] dx\right).$$

A idéia principal da solução de Klauder consiste em fazer uma mudança na medida funcional. Para isto, algumas considerações devem ser feitas. Vamos fazer $h(x) = h\xi_\Delta(x)$ onde $\xi_\Delta(x) \equiv 1$ com $x \in \Delta$ e $\xi_\Delta(x) \equiv 0$ com $x \notin \Delta$. Neste caso especial, podemos escrever

$$Q_0(h) = \exp\left(-\Delta L\left[h\right]\right) \qquad (4.3)$$

e a mudança na medida funcional é definida pela relação

$$\exp\left(-\Delta L\left[h\right]\right) = \int e^{ihu}\, d\mu_\Delta(u), \tag{4.4}$$

onde $\mu_\Delta(u)$ é uma medida associada a cada $\Delta > 0$. Foi realizada a mudança de variável $x \to u$, mas devemos observar que, apesar das considerações feitas, $Q_0(h\xi_\Delta(x))$ continua sendo uma função característica de h. O funcional $L[h]$ pode, então, ser representado como

$$L[h] = \lim_{\Delta\to 0} \int \frac{1}{\Delta}\left(1 - e^{ihu}\right) d\mu_\Delta(u). \tag{4.5}$$

Escrevendo o limite acima na sua forma mais geral e considerando interações pares, a função $Q_0(h)$ pode ser escrita como [31]

$$Q_0(h) = \exp\left[\int dx \int \left(1 - \cos(hu)\right)\, d\chi(u)\right], \tag{4.6}$$

onde a nova medida funcional $d\chi(u)$ se relaciona com os parâmetros da teoria e é definida por

$$d\chi(u) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma {m_0}^2 u^2 - \frac{\lambda}{p!}u^p\right]\frac{du}{|u|}, \tag{4.7}$$

de modo que a função geradora de valor independente pode ser escrita como

$$Q_0(\sigma, h) = \mathcal{N} \exp\left[\int d^d x \int \left(1 - \cos(hu)\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma {m_0}^2 u^2 - \frac{\lambda}{p!}u^p\right)\frac{du}{|u|}\right]. \tag{4.8}$$

A normalização $\mathcal{N}$ pode ser encontrada através da condição $Q_0(\sigma, h)|_{\sigma=h=0} = -1$. Esta solução não se reduz à teoria livre se fizermos $\lambda \to 0$ e, portanto, não é uma solução trivial do modelo *a priori* não-renormalizável. As integrais em (4.8) convergem e, com isto, fica evidente que é possível encontrar um resultado finito para modelos de valor independente.

4.2 Solução de Klauder para o modelo $O(N)$

A generalização da solução apresentada na seção anterior para N campos escalares, ou modelo $O(N)$, é linear. As mudanças de variáveis e mudanças das medidas funcionais são similares. Contudo, é importante notar que a fonte $\vec{h}(x)$ passa a ser um vetor de N componentes, assim como a nova variável $\vec{u}$, i.e., teremos N variáveis u_i, o que dificulta o cálculo da integral. Utilizando os mesmos argumentos de simetria da seção anterior, a solução de Klauder para a função geradora de valor independente para o modelo $O(N)$ é dada por [18]

$$Q_0(\sigma, \vec{h}\,) = \exp\left(-\frac{c_N}{2V}\int d^dx \int \left(1 - \cos(\vec{h}\cdot\vec{u})\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma\, {m_N}^2 u^2 - \frac{g_N}{p\,!}u^p\right) \frac{d^N u}{|u|^N}\right) \tag{4.9}$$

onde c_N, m_N e g_N são novos parâmetros dependentes de N. Lembrando que $\vec{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_N)$ e $\vec{h} = (h_0, h_1, \ldots, h_N)$, podemos usar um sistema de coordenadas polares N-dimensionais para resolver a integral em (4.9). Este sistema de coordenadas é definido por

$$\begin{cases} u_0 = |u| \cos\theta_1 \\ u_1 = |u| \cos\theta_2 \sin\theta_1 \\ \ldots \\ u_{N-1} = |u| \sin\theta_{N-1} \ldots \sin\theta_1 \end{cases}, \tag{4.10}$$

com o elemento de volume N-dimensional dado por

$$d^N u = |u|^{N-1} d|u|\, d\Omega_N \tag{4.11}$$

onde

$$d\Omega_N = \prod_{l=1}^{N-1} \sin^{N-1-l}\theta_l d\theta_l. \tag{4.12}$$

Com isto, a equação (4.9) pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
Q_0(\sigma,h) \;\; &= \;\; \exp\left[-\frac{c_N}{2V}\int [1-\cos\left(h\,|\,u|\,\cos\theta_1\right)] \times \right. \\
& \left. \times \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma\, {m_N}^2 u^2 - \frac{g_N}{p\,!}u^p\right)\frac{d|\,u|}{|\,u|}\, \sin^{N-2}(\theta_1)\, d\theta_1\, d\Omega_{N-1}\right], \quad (4.13)
\end{aligned}
$$

onde a integral em $d\Omega_{N-1}$ dá a superfície de uma esfera unitária em $N-1$ dimensões. A partir deste ponto é necessário ressaltar as importâncias de estudar o limite $N \to \infty$. Na equação (4.9), todos os parâmetros dependem de N, de forma que a expansão de acoplamento forte fornece potências cada vez mais altas de N à medida que usamos ordens superiores. A utilidade de encontrar a solução para a função geradora de valor independente para $N \to \infty$ reside no fato de que, neste limite, é possível escrever estes parâmetros de forma que eles perdem sua dependência em N e g_N passa a ser o parâmetro efetivo da expansão, assim como no caso $N = 1$ [23]. O advento da cromodinâmica quântica como um candidato plausível para a teoria que descreve as interações fortes ratifica a importância de se estudar campos com um grande número de componentes no regime de acoplamento forte.

No limite de grandes valores de N, usando a mudança de variáveis $|\,u| \to v = |\,u|^2/(N-2)$, é possível escrever a integral em θ_1 como

$$
Q_0(\sigma,h) = \exp\left(-\frac{1}{2V}\int d^dx \int \frac{dv}{v}\left[1-\exp\left(-\frac{1}{2}h^2 v\right)\right]\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma m^2 v - \frac{g}{p\,!}v^{p/2}\right)\right). \quad (4.14)
$$

Esta solução válida para $N \to \infty$ não possui mais parâmetros dependentes de N e as integrais podem ser calculadas, dando sentido a esta função geradora e, assim, permitindo encontrar o fator

$$
Y = \frac{1}{Q_0(\sigma,h)}\frac{\partial^2}{\partial\, h^2}\, Q_0(\sigma,h) \quad (4.15)
$$

presente na equação (3.16).

4.3 Cálculo de $Q_0(\sigma, h)$ para $N \to \infty$

Para calcular as integrais presentes na equação (4.14), vamos definir $E(m, \sigma, g, h)$ dado por

$$E(m, \sigma, g, h) = \int_0^\infty \frac{dv}{v} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}h^2 v\right)\right] \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma m^2 v - \frac{g}{p\,!} v^{p/2}\right) \tag{4.16}$$

Podemos usar uma expansão em série da função exponencial, notando que a série obtida converge uniformemente no intervalo $[0, \infty)$, e integrar $E(m, \sigma, g, h)$ termo por termo. Não é difícil mostrar que

$$E(m, \sigma, g, h) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \frac{h^{2k}}{k!} \int_0^\infty dv\, v^{k-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma m^2 v - \frac{g}{p\,!} v^{p/2}\right). \tag{4.17}$$

O parâmetro σ foi introduzido para fazer com que o operador D não fosse singular, portanto pode ser escolhido de maneira que torne os cálculos tratáveis. Com isto, sem perda de generalidade, podemos fazer a escolha $\sigma = 0$. Então temos

$$E(m, \sigma, g, h)|_{\sigma=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \frac{h^{2k}}{k!} \int_0^\infty dv\, v^{k-1} \exp\left(-\frac{g}{p\,!} v^{p/2}\right) \tag{4.18}$$

Vamos agora usar a seguinte representação para a função gama [28]

$$\int_0^\infty dx\, x^{\nu-1} \exp(-\mu\, x^p) = \frac{1}{p}\, \mu^{-\frac{\nu}{p}}\, \Gamma\left(\frac{\nu}{p}\right), \quad \mathrm{Re}(\mu) > 0 \quad \mathrm{Re}(\nu) > 0 \;\; p > 0. \tag{4.19}$$

Usando a identidade (4.19) comparando-a com a integral em (4.18), podemos escrever

$$E(m, \sigma, g, h)|_{\sigma=0} = \sum_{k=1}^{\infty} j(p, k) \frac{h^{2k}}{g^{2k/p}}, \tag{4.20}$$

com os coeficientes $j(p, k)$ dados por

$$j(p,k) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{(p\,!)^{2k/p}}{p\,k!}\,\Gamma\left(\frac{2k}{p}\right) \tag{4.21}$$

Substituindo as equações (4.20) e (4.21) na equação (4.14), obtemos a função geradora de valor independente para $\sigma = 0$ que pode ser escrita como

$$Q_0(\sigma,h)|_{\sigma=0} = \exp\left[-\frac{1}{2\Omega\beta}\int_0^\beta d\tau \int d^{d-1}x \sum_{k=1}^{\infty} j(p,k)\frac{h^{2k}}{g^{2k/p}}\right]. \tag{4.22}$$

O intuito de calcular estas integrais é encontrar o fator Y definido em (4.15) presente na expressão de $\ln Z$. Precisamos então calcular a derivada segunda de $Q_0(\sigma,h)$. Portanto temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial h^2} Q_0(\sigma,h)|_{\sigma=0} \;=\; & \left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} j(p,k)\,(2k)(2k-1)\,\frac{h^{2k-2}}{g^{2k/p}}\right)\times \\ & \times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} j(p,k)\frac{h^{2k}}{g^{2k/p}}\right) + J(g,p,h),\end{aligned} \tag{4.23}$$

onde $J(g,p,h)$ é dado por

$$J(g,p,h) = \left(\frac{1}{4}\sum_{k,\,q=0}^{\infty} j(p,k,q)\,(2k)(2q)\,\frac{h^{2k+2q-2}}{g^{(2k+2q)/p}}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} j(p,k)\frac{h^{2k}}{g^{2k/p}}\right), \tag{4.24}$$

e $j(p,k,q) = j(p,k)\,j(p,q)$. Nós estamos interessados no caso $h = 0$, portanto $J(g,p,h)$ não contribui para a derivada segunda da função geradora. Da mesma forma, no primeiro termo de (4.23), apenas o termo $k = 1$ é diferente de zero para $h = 0$. Lembrando também da condição de normalização $Q_0(\sigma,h)|_{h=\sigma=0} = -1$, podemos escrever

$$\frac{1}{Q_0(\sigma,h)}\frac{\partial^2}{\partial h^2} Q_0(\sigma,h)\Big|_{h=\sigma=0} = \frac{1}{p}\left(\frac{p\,!}{g}\right)^{\frac{2}{p}}\Gamma\left(\frac{2}{p}\right). \tag{4.25}$$

Para simplificar as contas do próximo capítulo, vamos definir

$$\Phi(p) = \frac{1}{p}\,p\,!^{\frac{2}{p}}\,\Gamma\left(\frac{2}{p}\right). \tag{4.26}$$

Feitos estes cálculos, podemos agora calcular a entropia S e a energia média E para o modelo $O(N)$ nestas circunstâncias e investigar as propriedades da razão S/E. No próximo capítulo, vamos mostrar como lidar com as divergências vindo da constante α e da energia do ponto-zero. Vamos ver que o sinal da energia do vácuo é crucial para estabelecer em quais circunstâncias o limite de Bekenstein é, ou não, violado.

Capítulo 5

Limite de entropia para o modelo $O(N)$ no regime de acoplamento forte

Até o momento, concentramos os esforços nos métodos para calcular $\ln Z(\beta, \Omega, h)|_{h=0}$ que, por simplicidade, vamos passar a denotar por $\ln Z(\beta, \Omega)$. Com posse das equações (4.25) e (3.38), substituindo-as em (3.16), encontramos a relação

$$\ln Z(\beta, \Omega) = -\Phi(p)\, g^{-2/p} \left(\frac{\alpha'}{2} + I_2(\beta) \right) \tag{5.1}$$

onde $\alpha' = \alpha + \alpha_2$ e $I_2(\beta)$ é definido por

$$I_2(\beta) = \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left[\ln \left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi\beta}{2L} \sqrt{q^2 + a^2} \right)}{\sinh\left(\frac{\pi\beta q}{2L} \right)} \right) + \ln\left(1 - e^{-\frac{\pi\beta q}{L}} \right) + \frac{\pi\beta q}{2L} \right]. \tag{5.2}$$

É possível simplificar mais a forma de escrever $\ln Z(\beta, \Omega)$. Para isto, vamos definir as quantidades C_1 e C_2 que não dependem de β:

$$C_1 = -\frac{\alpha'}{2} \Phi(p)\, g^{-2/p} \qquad ; \qquad C_2 = -\frac{2C_1}{\alpha'} \tag{5.3}$$

e a quantidade $\ln Z(\beta, \Omega)$ pode ser escrita, de uma forma geral, como

$$\ln Z(\beta, \Omega) = C_1 - C_2\, I_2(\beta) \tag{5.4}$$

É importante observar que C_1 possui a divergência vindo de α' enquanto C_2 é finito e, na verdade, corresponde ao termo Y definido em (4.15). Tanto a entropia quanto a energia média do sistema estão relacionadas com a derivada em relação a β de $\ln Z(\beta, \Omega)$, que tem a forma simples

$$\frac{d}{d\beta} \ln Z(\beta, \Omega) = -C_2 \frac{d}{d\beta} I_2(\beta). \tag{5.5}$$

A derivada de $I_2(\beta)$ é facilmente calculável. Observando que

$$\frac{d}{d\beta} \ln\left(1 - e^{-\frac{\pi\beta q}{L}}\right) = \frac{\pi q}{L} \frac{e^{-\frac{\pi\beta q}{L}}}{1 - e^{-\frac{\pi\beta q}{L}}} = \frac{\pi q}{L} \frac{1}{e^{\frac{\pi\beta q}{L}} - 1} \tag{5.6}$$

$$\frac{d}{d\beta}\left[-\ln\left(\sinh\left(\frac{\pi\beta q}{2L}\right)\right)\right] = -\frac{\pi q}{2L} \coth\left(\frac{\pi\beta q}{2L}\right) \tag{5.7}$$

obtemos o resultado

$$\frac{d}{d\beta} I_2(\beta) = \frac{\pi}{2L} \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left[\left(\sqrt{q^2+a^2}\, \coth\Big(\frac{\pi\beta}{2L}\sqrt{q^2+a^2}\Big) - q\, \coth\Big(\frac{\pi\beta\, q}{2L}\Big)\right) + \frac{2\, q}{e^{\frac{\pi\,\beta\, q}{L}} - 1} + q\right] \tag{5.8}$$

5.1 A energia média e entropia

Substituindo a equação (5.8) na definição (3.1), chegamos à seguinte expressão para a energia média do sistema:

$$E(\beta, \Omega) = \frac{C_2 \pi}{2L} \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left[\left(\sqrt{q^2+a^2}\, \coth\Big(\frac{\pi\beta}{2L}\sqrt{q^2+a^2}\Big) - q\, \coth\Big(\frac{\pi\beta\, q}{2L}\Big)\right) + \frac{2\, q}{e^{\frac{\pi\,\beta\, q}{L}} - 1} + q\right] \tag{5.9}$$

e para o caso sem massa, ou seja, para $a = 0$, encontramos um simples resultado para a $E(\beta, \Omega)$:

$$E(\beta, \Omega)|_{a=0} = \frac{\pi}{2L} \Phi(p)\, g^{-2/p} \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left(\frac{2\, q}{e^{\frac{\pi\,\beta\, q}{L}} - 1} + q\right), \tag{5.10}$$

onde usamos a equação (5.3) que define C_2. A equação acima possui a interpretação de ser somas no espaço de fases sobre a energia média de cada modo. Contudo, a energia do ponto-zero está presente e, não renormalizada, leva a um resultado divergente. A energia de ponto-zero é definida por

$$E_0 = \frac{\pi}{2L} \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} q = \frac{\pi}{2L} \sum_{\vec{n}_{d-1}=1}^{\infty} \left(n_1^2 + n_2^2 + ... + n_{d-1}^2\right)^{1/2}. \tag{5.11}$$

É possível encontrar a extensão analítica da função zeta de Epstein no plano complexo em $s = -1/2$ para regularizar a energia de Casimir. A estrutura das divergências da extensão analítica da zeta de Epstein é bem conhecida [26] [32] [33] [34]. Os detalhes do cálculo da regularização da energia do vácuo utilizando a função zeta podem ser encontrados na referência [35]É possível que haja ambiguidade na definição da energia do ponto zero renormalizada por conta das propriedades de "*scaling*", contudo, já mostramos que no nosso caso a função zeta em $s = 0$ é nula e, com isto, a energia de Casimir não depende do parâmetro μ já apresentado na seção 3.3. Daqui em diante, vamos denotar a energia de ponto-zero renormalizada por $E_0^{(r)}$.

A entropia definida pela equação (3.2) pode ser escrita como

$$S = C_1 - C_2 I_2(\beta) + \beta C_2 \frac{d}{d\beta} I_2(\beta) = C_1 - \beta C_2 \left(\frac{I_2(\beta)}{\beta} - \frac{d}{d\beta} I_2(\beta) \right). \tag{5.12}$$

Este resultado evidencia que renormalizar apenas a energia do ponto-zero não é suficiente para que S tenha um valor finito, pois ainda temos a divergência vindo de C_1. Para contornar este problema, é necessário usar a terceira lei da termodinâmica que diz que, à temperatura zero, qualquer sistema termodinâmico deve estar em um estado único não-degenerado que, portanto, tem sua entropia igual a zero. Lembrando que $\beta = 1/T$, a terceira lei da termodinâmica pode ser simplesmente expressa pela expressão

$$\lim_{\beta \to \infty} S(\beta, \Omega) = 0. \tag{5.13}$$

Analisando os limites das funções que compõem $I_2(\beta)$ e $\frac{d}{d\beta} I_2(\beta)$, vemos que

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{I_2(\beta)}{\beta}=\lim_{\beta\to\infty}\frac{d}{d\beta}I_2(\beta)=\frac{\pi a^2}{2L}\sum_{\vec{n}_{d-1}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{q^2+a^2}+q}+\frac{\pi}{2L}\sum_{\vec{n}_{d-1}}^{\infty}q\,. \tag{5.14}$$

Estudando o limite $\beta\to\infty$ da equação (5.12) e usando (5.14), vemos que a terceira lei da termodinâmica fornece

$$\lim_{\beta\to\infty}S(\beta,\Omega)=C_1=0. \tag{5.15}$$

Este foi o último procedimento de renormalização para encontrar um resultado finito para $\ln Z(\beta,\Omega)$ e $S(\beta,\Omega)$ e agora podemos analisar S/E como uma quantidade finita que, dependendo do sinal da energia do ponto-zero renormalizada, pode ter um limite superior ou não. Os casos em que a entropia do sistema em questão obedece ao limite de Bekenstein serão mostrados a seguir.

5.2 Limite superior para S/E

Estamos interessados em calcular a razão S/E e estudar os limites superiores da função encontrada. Utilizando as equações (3.1) e (3.2), podemos escrever

$$\frac{S}{E}=\frac{-\ln Z(\beta,\Omega)+\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z(\beta,\Omega)}{\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z(\beta,\Omega)}=\beta-\ln Z(\beta,\Omega)\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z(\beta,\Omega)\right)^{-1}. \tag{5.16}$$

Usando o fato de que C_1 pôde ser renormalizado a zero através da terceira lei da termodinâmica, temos que $\ln Z(\beta,\Omega)=-C_2I_2(\beta,\Omega)$ e, considerando o caso em que a massa é zero ($a=0$), podemos calcular o quociente S/E:

$$\frac{S}{E}=\beta-\frac{C_2\sum_{\vec{n}_{d-1}}^{\infty}\left[\ln\left(1-e^{-\frac{\pi\beta q}{L}}\right)+\frac{\pi\beta q}{2L}\right]}{C_2\frac{\pi}{2L}\sum_{\vec{n}_{d-1}}^{\infty}\left[\frac{2q}{e^{\frac{\pi\beta q}{L}}-1}+q\right]}=$$

$$=\frac{\xi\left(\sum_{\vec{n}_{d-1}}^{\infty}\frac{\pi q}{e^{\pi\xi q}-1}\right)-\sum_{\vec{n}_{d-1}}^{\infty}\ln\left(1-e^{-\pi\xi q}\right)}{\frac{1}{L}\left[\sum_{\vec{n}_{d-1}}^{\infty}\frac{\pi q}{e^{\pi\xi q}-1}+\frac{\pi}{2}\sum_{\vec{n}_{d-1}}^{\infty}q\right]}, \tag{5.17}$$

onde $\xi = \beta/L$. O sistema está confinado em um hipercubo de lado L, portanto o raio da menor hiperesfera $(d-1)$-dimensional capaz de circunscrever totalmente o sistema é dado por

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{d-1}L. \tag{5.18}$$

Com isto, podemos escrever a razão da entropia com a energia média da seguinte forma

$$\frac{S}{E} = 2\pi R T_d(\xi), \tag{5.19}$$

onde

$$T_d(\xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{d-1}} \frac{\xi P_d(\xi) + R_d(\xi)}{P_d(\xi) + \epsilon_d^{(r)}} \tag{5.20}$$

com $\epsilon_d^{(r)} = L E_0^{(r)}$ e as funções positivas $P_d(\xi)$ e $R_d(\xi)$ definidas por

$$P_d(\xi) = \sum_{\vec{n}_{d-1}}^{\infty} \pi q \left(e^{\pi\xi q} - 1\right)^{-1} \tag{5.21}$$

$$R_d(\xi) = -\sum_{\vec{n}_{d-1}}^{\infty} \ln\left(1 - e^{-\pi\xi q}\right). \tag{5.22}$$

A equação (5.19) mostra que a razão S/E terá um valor máximo toda vez que a função $T_d(\xi)$ for menor ou igual a 1 para todos os valores de ξ. As funções $P_d(\xi)$ e $R_d(\xi)$ são positivas, de forma que $T_d(\xi)$ terá um valor divergente somente se o sinal da energia do ponto zero renormalizada for negativo. Neste caso, é possível encontrar um ponto ξ_0 que obedece à relação $P_d(\xi_0)+\epsilon_d^{(r)} = 0$ onde o limite para a entropia é invalidado. Vemos então que o sinal da energia do vácuo é importante para estabelecer o limite de Bekenstein.

Para situações em que a energia do vácuo é positiva, a função $T_d(\xi)$ possui um valor máximo para um certo valor de ξ que será denotado por ξ_m. Note que, se para um certo valor de ξ_m, a identidade $R_d(\xi_m) = \epsilon_d^{(r)}\xi_m$ é satisfeita, o valor da função $T_d(\xi_m)$ é máximo. Portanto, a equação que determina ξ_m é

$$R_d(\xi_m) - \epsilon_d^{(r)}\xi_m = 0 \tag{5.23}$$

Se a equação (5.23) for obedecida, neste ponto, temos

$$T_d(\xi_m) = \frac{\xi_m}{\pi\sqrt{d-1}}. \tag{5.24}$$

Se este valor for menor que 1, comprova-se para esta situação que o sistema obedece o limite de Bekenstein.

Está claro que determinar as situações onde a energia do ponto-zero é positiva ou negativa é crucial para determinar quando existe um limite de entropia para o sistema. Existe uma relação direta entre o sinal de $\epsilon_d^{(r)}$ e o número de dimensões d do problema. Toda vez que o número de dimensões do espaço-tempo for ímpar e $d \leq 29$, é conhecido que a energia do vácuo tem sinal positivo e o limite de Bekenstein é válido para todos os valores de ξ. Por outro lado, para valores de d pares menores que 29 e quaisquer valores maiores que 29, a energia do vácuo é negativa e o limite é invalidado [35]. Além disso, é necessário verificar se, nas situações em que a energia do ponto-zero é positiva, o valor da função $T_d(\xi_m)$ não é maior que 1. Para isto, vamos definir uma função auxiliar $R'_d(\xi) > R_d(\xi)$ para qualquer ξ. Se usarmos esta função na equação (5.23), vamos determinar um valor $1 > \xi'_m > \xi_m$. A função $R'_d(\xi)$ é definida pela integral

$$R'_d(\xi) = -\int_{\Omega_R} d\Omega_{d-1} \int_0^\infty dr\, r^{d-2} \ln\left(1 - e^{-\pi\,\xi\, r}\right)\,, \tag{5.25}$$

onde o domínio angular de integração Ω_R corresponde à região onde $r_i > 0$. A integral pode ser resolvida [29] e o resultado é

$$R'_d(\xi) = S_{d-1}\,\Gamma(d-1)\,\zeta(d)\left(\frac{1}{\pi\xi}\right)^{d-1}. \tag{5.26}$$

onde o termo angular S_{d-1} é dado por

$$S_{d-1} = \frac{(\sqrt{\pi})^{d-1}}{2^{d-2}\Gamma(\frac{d-1}{2})}. \tag{5.27}$$

Através da equação (5.23), encontramos o seguinte valor para ξ'_m:

$$\xi'_{max} = \left(\frac{2}{(2\sqrt{\pi})^{d-1}} \frac{\Gamma(d-1)\,\zeta(d)}{\Gamma(\frac{d-1}{2})\,\varepsilon_d^{(r)}} \right)^{\frac{1}{d}} , \tag{5.28}$$

De forma que

$$T_d(\xi_m) \;=\; \frac{\xi_m}{\pi\sqrt{d-1}} \;<\; \frac{\xi'_m}{\pi\sqrt{d-1}} \tag{5.29}$$

A tabela I mostra os valores renormalizados de $\epsilon_d^{(r)}$ para $d = 3$ até $d = 31$, que estão de acordo com o esperado [16].

d	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**
$\varepsilon_d^{(r)}$	4.1×10^{-2}	6.2×10^{-3}	1.1×10^{-3}	2.2×10^{-4}	4.4×10^{-5}	9.4×10^{-6}
$T_d(\xi_{max}) <$	0.3763	0.2645	0.2303	0.2130	0.2025	0.1953

d	**15**	**17**	**19**	**21**	**23**	**25**
$\varepsilon_d^{(r)}$	2.0×10^{-6}	4.5×10^{-7}	1.0×10^{-8}	2.2×10^{-8}	5.0×10^{-9}	1.1×10^{-9}
$T_d(\xi_{max}) <$	0.1901	0.1861	0.1829	0.1804	0.1784	0.1769

d	**27**	**29**	**31**
$\varepsilon_d^{(r)}$	2.3×10^{-10}	3.0×10^{-11}	-1.1×10^{-11}
$T_d(\xi_{max}) <$	0.1761	0.1781	no maximum

A expressão (5.19) não tem a mesma forma de (2.11). Contudo, também é possível encontrar uma função $T'_d(\xi)$ que é sempre maior que $T_d(\xi)$ para qualquer valor de ξ e escrever

$$\frac{S}{E} < 2\pi R T'_d(\xi), \tag{5.30}$$

onde

$$T'_d(\xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{d-1}} \frac{\xi P'_d(\xi) + R'_d(\xi)}{P''_d(\xi) + \epsilon_d^{(r)}} \tag{5.31}$$

com

$$P'_d(\xi) > P_d(\xi) \qquad ; \qquad P''_d(\xi) < P_d(\xi) \tag{5.32}$$

Da mesma forma que para $R'_d(\xi)$, as funções auxiliares $P'_d(\xi)$ e $P''_d(\xi)$ são definidas pelas integrais

$$P'_d(\xi) = \pi \int_{\Omega_R} d\Omega_{d-1} \int_0^\infty dr\, r^{d-1} \left(e^{\pi\,\xi\, r} - 1\right)^{-1} \tag{5.33}$$

$$P''_d(\xi) = \pi \int_{\Omega_R} d\Omega_{d-1} \int_1^\infty dr\, r^{d-1} \left(e^{\pi\,\xi\, r} - 1\right)^{-1} . \tag{5.34}$$

O resultado destas integrais é [29]

$$P'_d(\xi) = \pi S_{d-1} \Gamma(d) \zeta(d) \Big(\frac{1}{\pi\xi}\Big)^d \tag{5.35}$$

$$P''_d(\xi) = \pi S_{d-1} \Big(\Gamma(d)\zeta(d) - f(d)\Big) \Big(\frac{1}{\pi\xi}\Big)^d, \tag{5.36}$$

onde $f(d)$ é dado por

$$f(d) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{(d+l-1)l!}. \tag{5.37}$$

Para encontrar a função $T'_d(\xi)$, que é sempre maior que $T_d(\xi)$, é necessário substituir as equações (5.35), (5.36) e (5.26) na equação (5.31). Com um pouco de álgebra, não é difícil mostrar que

$$T'_d(\xi) = \frac{h_1(d)}{\varepsilon_d^{(r)}\, \xi^{d-1} + h_2(d)\, \xi^{-1}}\, , \tag{5.38}$$

onde

$$h_1(d) = \frac{S_{d-1}}{\pi^d \sqrt{d-1}} \zeta(d) \Big(\Gamma(d) + \Gamma(d-1) \Big) \,, \tag{5.39}$$

$$h_2(d) = \frac{S_{d-1}}{\pi^{d-1}} \Big(\Gamma(d) \, \zeta(d) - f(d) \Big) \,. \tag{5.40}$$

Mesmo conseguindo encontrar uma função sempre maior que $T_d(\xi)$ para qualquer valor de ξ, o sinal da energia do vácuo ainda é crucial para a existência do limite de Bekenstein. Contudo, se estudarmos o limite de altas temperaturas, ou seja, $\xi \to 0$, vemos que

$$\lim_{\xi \to 0} T_d'(\xi) = \frac{h_1(d)}{h_2(d)} \, \xi \tag{5.41}$$

e a dependência em $\epsilon_d^{(r)}$ não está mais presente. Isto ocorre pois, no limite de altas temperaturas, a energia térmica é capaz de compensar a energia do ponto-zero renormalizada com sinal negativo e o limite de entropia é sempre válido. Entretanto, no limite de baixas temperaturas, temos

$$\lim_{\xi \to \infty} T_d'(\xi) = \frac{h_1(d)}{\epsilon_d^{(r)}} \, \xi^{1-d} \tag{5.42}$$

e o problema do sinal da energia do vácuo ainda está presente.

Capítulo 6

Conclusões

O limite de Bekenstein deve, a princípio, ser obedecido por qualquer sistema com auto-gravidade desprezível. Neste trabalho, estudamos um sistema de N campos escalares confinados com auto-interação do tipo $(g_0\varphi^p)$ no regime de acoplamento forte. A energia do ponto-zero renormalizada é capaz de invalidar o limite de Bekenstein se tiver sinal negativo.

Para altas temperaturas, o limite de Bekenstein tem a forma

$$\frac{S}{E} < 2\pi R \frac{h_1(d)}{h_2(d)}\,\xi \tag{6.1}$$

e o limite de entropia existe em qualquer situação devido à presença de energia térmica suficiente para compensar o sinal negativo da energia do vácuo. Para baixas temperaturas, temos

$$\frac{S}{E} < 2\pi R \frac{h_1(d)}{\epsilon_d^{(r)}}\,\xi^{1-d} \tag{6.2}$$

e apenas as energias das fronteiras macroscópicas que confinam o sistema poderiam compensar a energia negativa do vácuo levando a uma energia positiva total que validaria o limite de Bekenstein [36], mas esta ainda é uma questão em aberto na literatura. Para altas temperaturas, a dimensão na direção imaginária (tempo) desaparece e o sistema se comporta como um sistema clássico onde flutuações quânticas estão ausentes e, por isso, a energia do vácuo não influencia na validade do limite de entropia.

Foi possível calcular a energia média e entropia do sistema usando a solução de Klauder para a função geradora de valor independente para o modelo $O(N)$ no limite de grandes valores de N. Algumas objeções ao limite de Bekenstein dizem respeito ao número de espécies de partículas que um sistema físico pode ter, o que levaria a um valor crítico N_c tal que o limite de Bekenstein é violado para $N > N_c$. A solução de Klauder para $N \to \infty$ não depende de N e este comportamento evidencia que não há um N_c no nosso caso. Além disso, apesar da energia média e da entropia dependerem diretamente do resultado obtido no capítulo 4 para $\frac{\partial}{\partial h} Q_0(\sigma, h)|_{h=\sigma=0}$, a razão S/E não depende deste fator e todas as características das funções que definem o limite de Bekenstein vem da função zeta espectral que contem as informações sobre as fronteiras que confinam o sistema. Por isso, o resultado obtido para N campos no regime de acoplamento forte é similar ao obtido na referência [citar Gabriel] que considera apenas um campo escalar.

Outra característica importante do resultado é o fato do restulado ser independente da constante de acoplamento g. Portanto, apesar de estarmos num regime onde a constante de acoplamento é grande, os resultados levam a crer que são equivalentes aos de uma teoria livre e o limite de Bekenstein deve ser válido também para estes casos.

O método da função zeta espectral pode ser util para calcular o limite de Bekenstein para outras geometrias das fronteiras que confinam os campos, desde que o espectro do operador D seja conhecido e a função zeta associada possa ser calculada. Outras condições de contorno podem trazer complicações como a presença do modo zero e "*scaling*", tornando os cálculos muito mais complicados ou intratáveis. É possível continuar as investigações do limite de Bekenstein para campos fermiônicos e para teorias de campo descritas por modelos com liberdade assintótica.

Referências Bibliográficas

[1] Carter, B., Phys. Rev. Lett. **26**, 331 (1970).

[2] Israel, W., Phys. Rev. **164**, 1776 (1967).

[3] Israel, W., Commun. Math. Phys. **8**, 245 (1968).

[4] Hawking, S. W., Phys. Rev. Lett. **26**, 1344 (1971).

[5] Hawking, S. W., Commun. Math. Phys. **25**, 152 (1972).

[6] Bekenstein, J. D., Nuovo Cim. Lett. **4**, 737 (1972).

[7] Bekenstein, J. D., Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973).

[8] Bekenstein, J. D., Phys. Rev. D **9**, 3292 (1974).

[9] Hawking, S. W., Nature **248**, 30 (1974).

[10] Bekenstein, J. D., Phys. Rev. D **23**, 287 (1981).

[11] Bousso, R., Rev. Mod. Phys. **74**, 825874 (2002).

[12] Unruh, W. G. e R. M. Wald, Phys. Rev. D **25**, 942 (1982).

[13] Unruh, W. G., and R. M. Wald, Phys. Rev. D **27**, 2271 (1983).

[14] Unruh, W. G., Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).

[15] Bekenstein, J. D., Phys. Rev. D **27**, 2262 (1983).

[16] Alcalde, M. A., Menezes, G. e Svaiter, N. F., Phys. Rev. D **77**, 125024 (2008).

[17] Svaiter, N. F., Physica A **345** 517-537 (2005).

[18] Klauder, J. R., *Beyond Conventional Quantization*, Cambridge University Press (1999).

[19] Klauder, J. R., Ann. of Phys. **117**, 19-55 (1979).

[20] Klauder, J. R., Phys. Rev. D **13**, 257 (1976).

[21] D' Inverno, R., *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press (1992).

[22] Schiffer, M., e J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **39**, 1109 (1989).

[23] Parga, N., Toussaint, D. e Fulco, J. R., Phys. Rev. D **20**, 887 (1979).

[24] Hawking, S. W., Commun. Math. Phys. **55**, 133 (1977).

[25] Elizalde, *Zeta regularization techniques with applications*, World Scientific Publishing Company (1994).

[26] Ambjorn, J. e Wolfram, S., Ann. Phys. (N.Y.) **147**, 1 (1983).

[27] J. I. Kapusta, *"Finite-temperature Field Theory"*, Cambridge University Press (1989).

[28] Gradshteyn, I. S. e Ryzhik, I. M., *Tables of Integrals, Series and Products* (Academic Press Inc.. New York, 1980)

[29] Prudnikov, A. P., Brychkov, Y. A. e Marichev, O. I., *Integrals and Series* (Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986), Vols. 1, 2.

[30] Wilson, K. G. e Kogut, B. J. Kogut, Phys. Rep. **12C**, 75 (1974).

[31] Lukacs, E., *Charachteristic Functions*, Hafner, New York (1970) 2ª ed.; Gel'Fand, I. M. e Vilenkin, N. Ya. *Generalized Functions Vol. 4: Applications of Harmonic Analysis*, Academic Press, New York (1964)

[32] Ford, H. L., Phys. Rev. D **21**, 933 (1980).

[33] Kirsten, K., J. Math. Phys. (N.Y.) **32**, 3008 (1991).

[34] Ford, H. L., Svaiter, N. F., Phys. Rev. D **51**, 6981 (1995).

[35] F. Caruso, N. P. Neto, B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D43**, 1300 (1991).

[36] Bousso, R., J. High Energy Phys., **02**, 025 (2004).

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo