Extensão Supersimétrica do mapeamento de Hopf

Leonardo Faria Carvalho

Dissertação apresentada ao
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
para obtenção do título de
Mestre em Física

Orientador: Prof. Dr. Francesco Toppan

Rio de Janeiro, 3 de março de 2010

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a meus pais Desgenete e Maria José e a minhas irmãs Juliana e Emanuela principalmente pelo incentivo, educação e formação do meu caráter, sem os quais não estaria aqui hoje.

A minha namorada Kelly por tornar minha vida mais fácil com seu amor, paciência, confiança, lealdade e seu apoio.

Ao meu orientador o prof. Francesco Toppan por ter aceitado me orientar, por me ensinar, instruir e contribuir tanto para minha formação profissional como pessoal. Aos meus colegas do grupo de "Estruturas algébricas em Teoria dos campos"pelas discussões e seminários.

Aos meus amigos (em ordem alfabética) David pelo convívio e por fazer parte da minha vida, Edileuza pelas incontáveis coisas que passamos juntos, Marcão por ser amigo pra todas as horas, Ricardo por sua amizade que tornou minha estadia no Rio mais agradável e por último ao Weslley por todos esses anos sendo como um irmão para mim.

Agradeço ainda à CAPES/FAPERJ pelo apoio financeiro a este trabalho.

Resumo

Neste trabalho apresentamos a supersimetrização do mapeamento de Hopf. Para isso fazemos uma breve introdução à Mecânica Quântica Supersimétrica unidimensional $\mathcal{N}$-estendida. Foram apresentados explicitamente a construção das álgebras de Clifford, as Superálgebras de Lie e de Poincaré e por fim mostramos o algoritmo de construção das representações lineares da superálgebra.

Mostramos os quatro mapeamentos de Hopf bosônicos, e a extensão supersimétrica do primeiro mapeamento. Para os dois super multipletos não-lineares calculamos ações supersimétricamente invariantes, analisamos os modelos-σ associados (resultantes de um limite bosônico), e abordamos o problema da uniformização. Por fim mostramos algumas estruturas já conhecidas da extensão supersimétrica do segundo mapeamento de Hopf.
Palavras-chave: Mecânica Quantica Supersimétrica, Extensão Supersimétrica, Mapeamentos de Hopf.

Abstract

In this work we show the supersymmetric extension of Hopf maps. For this purpose we make a brief introduction to the one-dimensional $\mathcal{N}$-extended Supersymmetric Quantum Mechanics. We explicitly show the construction of representations of the Clifford Algebras, the Super-Lie and Super-Poincaré algebras and a method for the construction of the linear representations of Superalgebra.

We show the four Hopf maps and the Supersymmetric extension of the first map. To the non-linear multiplets we calculate the invariant supersimmetric action and the sigma-model associated, and we sketch about the uniformization problem. We also show some known structures of the Supersymmetric extension of the second Hopf map.

Keywords: Supersymmetric Quantum Mechanics, Supersymmetric Extension, Hopf Maps.

Sumário

Lista de Abreviaturas

irrep	Representação irredutível.
SUSY	Supersimetria.

Lista de Símbolos

u, x, w, z	Campos bosônicos com dimensão de massa 0.
ψ, μ, ξ, η	Campos fermiônicos com dimensão de massa 1/2.
f, g, h	Campos bosônicos com dimensão de massa 1.

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

A supersimetria é um dos conceitos mais importantes da física teórica nos últimos 30 anos. Apesar de nenhuma evidência experimental várias teorias supersimétricas continuaram sendo estudadas ao longo desses anos. A grande motivação se deve ao fato dessa teoria unificar férmions e bôsons no espaço plano (*supersimetria global*) e no espaço-tempo curvo (*supergravidade*); e ainda os métodos da supersimetria podem ser usados em várias áreas da física e não somente em física de partículas.

Um dos principais objetivos da física é a unificação das quatro interações conhecidas da natureza. O grande problema é incluir a gravidade quântica em um modelo teórico que a unifica com as outras interações (eletromagnetica, fraca e forte). Uma característica importante das teorias de campos supersimétricas é que elas exibem um comportamento ultravioleta melhor do que as teorias de campos usuais. É fato conhecido que não existe uma teoria de campos renormalizável para a gravitação. A fim de introduzir a gravidade em teorias de unificação, uma estratégia foi fazê-la supersimétrica (supergravidade) para obter teorias renormalizáveis. A supersimetria é um ingrediente fundamental nas generalizações das teorias de campos [1–3] atualmente investigadas. Lembramos aqui as teorias de objetos estendidos (supercordas) [4, 5], a teoria M [6, 7], as teorias em dimensões mais altas [6, 8] e as teorias de spin elevado [9].

Como já dissemos a característica mais fascinante da supersimetria é a unificação de férmions (matéria) e bôsons (interação). Até os anos sessenta acreditava-se que tal simetria fosse impossível no contexto das teorias quânticas de campos relativísticos (QFT), devido a vários teoremas de "no-go". Estes teoremas proíbem as transformações diretas da simetria entre campos de spins diferentes [10]. Isto significa que multipletos irredutíveis de grupos de simetria não podem conter partículas com massas diferentes ou com spins diferentes. A primeira possibilidade de evitar os teoremas de "no-go"foi proposta por Gel'fand e Likhtman [11] e Sakita e Gervais [12] em 1971, seguidos por Akulov e Volkov [13] e por Wess e Zumino [14]. A idéia nova era introduzir uma álgebra cujos elementos obedeçam as relações de anticomutatividade ou, equivalentemente, transformações de simetria com parâmetros de Grassmann. Este é precisamente o caso da álgebra de supersimetria (álgebra SUSY).

O primeiro modelo de mecânica quântica supersimétrica foi introduzido por Witten [15]. Neste trabalho foi estudado um "toy-model"supersimétrico num esquema não-relativístico. O modelo foi utilizado para testar os mecanismos de quebra espontânea da supersimetria. Tornou- se logo claro que este modelo não era somente um "toy-model", mas sim uma teoria que descreve propriedades básicas em várias áreas da física. Uma das razões é devida à grande área de aplicabilidade das teorias supersimétricas unidimensionais em vários contextos, como as teorias dos buracos negros extremais [16], na correspondência ADS-CFT [17](para AdS_2), para investigar a quebra parcial das supersimetrias estendidas, teorias superconformes [18].

Em física nuclear foram usados os métodos da mecânica quântica supersimétrica para calcular os espectros de átomos e íons diferentes. A simetria entre estados de energia dos átomos com números par e ímpar de nucleons tem a mesma álgebra que a SUSY QM [19]. Foi mostrado [20] que os potenciais dos núcleos núcleos são ligados por supersimetria e em [21] foi sugerido que os espectros do hélio e do hidrogênio são parceiros supersimétricos.

Assim, a mecânica quântica supersimétrica $\mathcal{N}$-estendida, onde $\mathcal{N}$ denota o número de cargas supersimétricas "raízes quadradas do hamiltoniano", se tornou uma classe de teorias presente em uma grande variedade de áreas da física.

Recentemente as representações off-shell da superálgebra unidimensional $\mathcal{N}$-estendida [15] foi substancialmente elucidada [22–31]. A superálgebra admite $\mathcal{N}$ geradores ímpares Q_I e apenas um gerador par (o hamiltoniano H) satisfazendo (2.40). Existe muita informação disponível sobre representações lineares minimais (também conhecidas como representações irredutíveis) [24–29], baseadas em um número mínimo de campos bosônicos dependentes do tempo (e o mesmo número de campos fermiônicos dependentes do tempo) pertencentes a um supermultipleto de (2.40), assim como representações lineares não-minimais (admitindo um número redutível mas indecomponível de campos), veja [25, 30, 31].

As representações lineares podem ser vistas em gráficos [26–29, 32] (os campos são representados por pontos e as supertransformações por linhas) e também podem ser caracterizadas por seu conjunto de campos (os campos são separados de acordo com sua dimensão de massa), e suas conectividades (número de linhas chegando aos pontos de uma dada dimensão de massa).

É conhecida uma construção sistemática de modelos sigma invariantes unidimensionais e $\mathcal{N}$-estendido para cada representação linear, veja [25, 33]. Este enfoque sistemático , alternativo à construção padrão baseada em supercampos vínculados veja [34, 35], já provou ser útil para construir ações invariantes para $\mathcal{N} > 4$.

Esta atividade é inspirada no "programa de oxidação" [36, 37], isto é, na construção de lagrangianas off-shell unidimensionais supersimetricamente invariantes para grandes valores de $\mathcal{N}$ como um passo preliminar na construção de modelos de dimensões mais altas. Além das representações lineares existe uma classe de realizações off-shell de (2.40) não-lineares (as supertransformações são funções não-lineares dos campos, e suas derivadas com relação ao tempo, pertencentes ao mltipleto). Essas representações não-lineares aparecem na literatura construidas por uma grande variedade de métodos [38–46].

Nesta dissertação construimos uma realização off-shell não-linear genuína para a superálgebra (2.40) em termos geométricos muito precisos, baseados na extensão supersimétrica dos mapeamentos de Hopf. Essencialmente um mapa bilinear entre dois espaços euclidianos ($\mathbf{R}^{2k} \mapsto \mathbf{R}^{k+1}$ para $k = 1, 2, 4, 8$) pode ser supersimetricamente estendido a um mapa conectando dois supermultipletos unidimensionais, off-shell e lineares. As restrições desses supermultipletos à esfera induz duas realizações não-lineares e off-shell de supersimetria (supermultipletos não-lineares). As esferas podem ser parametrizadas usando coordenadas estereográficas, coordenadas hiperesféricas, etc (neste trabalho fazemos o uso de projeções estereográficas que induzem supertransformações não-lineares locais). A extensão supersimétrica do mapeamento de Hopf é a generalização da fibração de Hopf $\mathbf{S}^{2k-1} \mapsto \mathbf{S}^{k}$ como um mapa conectando seus dois supermultipletos não-lineares off-shell. Apresentamos uma construção explicita para $k = 2$ (correspondendo ao primeiro mapeamento de Hopf) produzindo supermultipletos não-lineares de supersimetria $\mathcal{N} = 4$.

A grande virtude dessa construção é o apelo geométrico. Usando esse apelo construimos modelos sigma $\mathcal{N} = 4$ invariantes baseados nas supertransfomações não-lineares e investigamos o problema da uniformização associado ao limite bosônico. Este esquema pode ser aplicado as extensões supersimetricas do segundo e terceiro mapeamentos de Hopf.

Este trabalho está dividindo da seguinte forma: na seção 3.1 revisamos a base do formalismo que será estendido supersimétricamente. Na seção 3.2 construimos os supermultipletos de supersimetria off-shell $\mathcal{N} = 4$. Na seção 3.3 construimos ações de supersimetria off-shell $\mathcal{N} = 4$ para cada supermultipleto, em termos do prepotencial sem vínculos. A conexão entre as ações invariantes (obtidas do modelo-σ unidimensional) resultantes de um limite bosônico e o Problema da Uniformazação é destacada na seção 3.4. Por fim na seção 4.1 algumas estruturas da extensão supersimétrica dos segundo e terceiro mapeamentos de Hopf.

Capítulo 2

Mecânica Quântica Supersimétrica

2.1 Álgebras de Clifford

2.1.1 Álgebras de Clifford e álgebras divisionais

A álgebra de Clifford $Cl\big(p,q\big)$ associada a uma métrica $\eta_{\mu\nu}$ do espaço-tempo é construida a partir dos geradores Γ^{μ} que satisfazem a relação

$$\big\{\Gamma^{\mu}\Gamma^{\nu}+\Gamma^{\nu}\Gamma^{\mu}\big\}=2\eta^{\mu\nu}, \tag{2.1}$$

com $\eta^{\mu\nu}$ sendo representada por uma matriz diagonal de assinatura $\big(p,q\big)$, com p elementos positivos (+1) e q elementos negativos (-1).

Uma representação matricial irredutivel para álgebra de Clifford $Cl\big(p,q\big)$, realizada por matrizes $d\times d$ reais, é classificada de acordo com a matriz $S_{d\times d}$ mais geral que comuta com todos os geradores Γ^{μ}, veja [47]:

$$\big[S,\Gamma^{\mu}\big]=0,(\mu=1,2,...,D). \tag{2.2}$$

Essa álgebra pode ser classificada em

1. *Normal* ou *real*, se a matriz S mais geral é múltipla da identidade

$$S=\lambda\mathbf{1}. \tag{2.3}$$

2. *Quase complexo*, se S for a soma da matriz identidade e de outra matriz $\mathbf{J}$, tal que $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{1}$

$$S = a\mathbf{1} + b\mathbf{J}. \tag{2.4}$$

   As álgebras de Clifford deste tipo podem ter representações matriciais $d \times d$, com elementos reais, bem como representações matriciais $d/2 \times d/2$ com elementos complexos.

3. Uma álgebra de Clifford é chamada *quaterniônica* se existirem 3 matrizes $(d \times d)$ reais e linearmente independente E_1, E_2, E_3 que fecham a álgebra dos quatérnions

$$E_i E_j = -\delta_{ij} + \epsilon_{ijk} E_k, \tag{2.5}$$

   e a matriz S mais geral tem a forma

$$S = a\mathbf{1} + bE_1 + cE_2 + dE_3. \tag{2.6}$$

   Então estas álgebras de Clifford podem ser escritas por meio de matrizes $d \times d$ reais, ou por meio de matrizes $d/2 \times d/2$ complexas ou por meio de matrizes $d \times d$ quaterniônicas.

Todas as representações irredutíveis com realização real são únicas, exceto para $p - q \ mod \ 8 = 1, 5$. Estas assinaturas apresentam duas representações inequivalentes obtidas, uma a partir da outra, invertendo os sinais de todos os geradores Γ^μ: $\{\Gamma^\mu\} \mapsto \{-\Gamma^\mu\}$.

Vamos considerar os espinores como os elementos do espaço da representação do grupo $SO(p, q)$, que pode ser obtida através dos commutadores $\Sigma_{\mu\nu} = \left[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\right]$. Os espinores podem ser classificados em três tipos: real, complexo e quaterniônico, veja [47]. Em alguns espaços-tempos (com $D = (p+q)$ par, por exemplo, no caso complexo) as matrices Γ tem a forma

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\mu \\ \widetilde{\gamma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Para estas assinaturas é possível introduzir o operador de projeção de Weyl para os geradores da álgebra $so(p, q)$ ($\Sigma_{\mu\nu}$ neste caso é composta de blocos iguais, os diagonais sendo não nulos) e para os espinores,

$$P \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = A, \quad P \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \Psi_1. \tag{2.8}$$

Os espinores possuirão quiralidade e o espinor quiral/antiquiral terá dimensão duas vezes menor.

Os espinores com dimensão minimal para um dado espaço-tempo, projetados ou não, se chamam *espinores fundamentais* [48, 49]. A tabela a seguir representa a comparação entre as propriedades algebrico-divisionais de representações irredutíveis das álgebras de Clifford (Γ) e os espinores fundamentais associados (Ψ). Os espaços- tempos estão parametrizados por $\rho = p - q \ mod \ 8$.

ρ	Γ	Ψ
0	**R**	**R**
1	**R**	**R**
2	**R**	**C**
3	**C**	**H**
4	**H**	**H**
5	**H**	**H**
6	**H**	**C**
7	**C**	**R**

Tabela 2.1: Propriedades divisionais das irreps de Clifford e dos espinores fundamentais.

Para $\rho = 2, 3$, os espinores fundamentais possuem a estrutura divisional maior do que a representação de Clifford correspondente, enquanto para $\rho = 6, 7$ as matrizes Γ possuem estrutura divisional maior do que os espinores correspondentes.

2.1.2 Algoritmo de construção. Álgebras maximais e não-maximais

Nesta seção vamos apresentar um método para construir uma representação matricial da álgebra de Clifford para espaços-tempos de dimensão e assinatura arbitrários. Também introduziremos a noção de álgebras maximais e não-maximais.

Partindo de uma representação para a álgebra de Clifford (para um espaço-tempo com dimensão $D = p+q$), dada pelas D matrizes $\gamma^j_{d\times d}$, é possível construir $D+2$ matrizes $\Gamma^j_{2d\times 2d}$, para um espaço-tempo $(D+2)$-dimensional, usando um dos dois algoritmos

1. Primeiro algoritmo, para $(p,q) \mapsto (p+1,q+1)$

$$\Gamma^j \equiv \begin{pmatrix} 0 & \gamma^j \\ \gamma^j & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

2. Segundo algoritmo, para $(p,q) \mapsto (q+2,p)$

$$\Gamma^j \equiv \begin{pmatrix} 0 & \gamma^j \\ -\gamma^j & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

A primeira série de representações de Clifford pode ser obtida a partir da realização unidimensional de $Cl(1,0) \equiv 1$. Aplicando o algoritmo (2.9) ou (2.10) obtemos a representação para $Cl(2,1)$ com as matrizes τ_A (anti-simétrica), τ_1 e τ_2 (simétricas).

$$\tau_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Aplicando consecutivamente um dos dois algoritmos (2.9) e (2.10) a $Cl(1,0)$ obtemos toda a série $Cl(1,0) \mapsto Cl(2,1) \mapsto Cl(3,2) \mapsto \ldots$

As outras representações podem ser construidas usando as álgebras tipo $Cl(0,3+4m)$ como representações iniciais [48, 49]. A representação $Cl(0,3)$ inicia a fila quaterniônica. Usando as matrizes com elementos reais temos

$$\begin{aligned} & \tau_A \otimes \tau_1 \\ Cl(0,3) \equiv \quad & \tau_A \otimes \tau_2 \\ & \mathbf{1} \otimes \tau_A. \end{aligned} \tag{2.12}$$

A próxima representação, tipo real/octoniônico[1], é construída a partir de $Cl(0,7)$ que tem a

[1] O anticomutator destas sete matrizes 8×8 coincide com o anticomutador dos sete octônions imaginários ($e_i ej = -\delta_{ij} + C_{ijk}e_k$). A realização básica da álgebra de Clifford $Cl(0,7)$ pode ser descrita tantos pela sete matrizes acima, quanto por octônions imaginários. Vale a não associatividade desta última construção

forma

$$Cl(0,7) \equiv \begin{array}{c} \tau_A \otimes \tau_1 \otimes \mathbf{1} \\ \tau_A \otimes \tau_2 \otimes \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \otimes \tau_A \otimes \tau_1 \\ \mathbf{1} \otimes \tau_A \otimes \tau_2 \\ \tau_1 \otimes \mathbf{1} \otimes \tau_A \\ \tau_2 \otimes \mathbf{1} \otimes \tau_A \\ \tau_A \otimes \tau_A \otimes \tau_A \end{array} \tag{2.13}$$

As representações (2.12) e (2.13) possuem somente matrizes γ de tipo-tempo e anti-simétricas. Com (2.12) e (2.13) podemos construir todo o conjunto de representações iniciais[2] $Cl(0, 3 + 8m)$ e $Cl(0, 7 + 8m)$ para a álgebra de Clifford, veja [48, 49]).

No apêndice A temos uma tabela com as representações da álgebra de Clifford obtidas usando um dos dois algoritmos de construção.

Para construir as representações matriciais com elementos complexos usamos a condição $i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \tau_A$. As representações com entradas complexas são duas vezes menores do que as representações com elementos reais. Para espaços-tempos que possuem álgebras de Clifford quaterniônicas podemos ter representações matriciais com elementos reais, complexos ou quaterniônicos. No caso das entradas quaterniônicas as matrizes são quatro vezes menores do que matrizes reais. As unidades imaginárias quaterniônicas são representadas pelas 3 matrizes 4×4 (2.12).

O conceito de álgebra maximal e não-maximal pode ser entendido fazendo uma análise da tabela [A.1]. Cada coluna é iniciada com um número inteiro d, que é o tamanho das matrizes Γ com entradas reais. A assinatura é denominada como *(p,q)*. As assinaturas sublinhadas indicam as irreps iniciais ou as álgebras de Clifford *maximais primitivas* [48]. As outras assinaturas correspondem a álgebras de Clifford maximais.

As representações para espaços-tempos que não estão nesta tabela podem ser obtidas eliminando

[2] As representações ditas iniciais são aquelas que iniciam a construção de uma sequência de álgebras de Clifford usando os algoritmos (2.12) e (2.13), veja apêndice A.

um certo número das matrizes Γ de um conjunto maximal. Por exemplo, para obter a representação do espaço-tempo (3,1), podemos usar o processo $(3,2) \mapsto (3,1)$, eliminando uma matriz de tipo tempo. Estas irreps são chamadas de álgebras de Clifford *não-maximais*.

As representações $Cl(0,1)$ e $Cl(0,5)$ não são maximais porque podem ser obtidas de $Cl(1,2)$ e $Cl(0,7)$ respectivamente, eliminando duas matrizes Γ. Portanto as séries a iniciadas em $Cl(0,1)$ ou $Cl(0,5)$ são não-maximais. Por outro lado, elas apresentam uma estrutura complexa, que não está presente nas álgebras maximais correspondentes (a representação de $Cl(0,1)$, por exemplo, é a unidade imaginária i). Por isso incluímos as séries complexas entre as séries maximais, pois estas possuem uma estrutura divisional diferente da estrutura das álgebra das quais são obtidas (A estrutura de $Cl(0,1)$ é diferente da estrutura de $Cl(1,2)$ é o mesmo vale para $Cl(0,5)$ e $Cl(0,7)$).

2.1.3 Matrizes A, B e C: propriedades de conjugação

Em [50] são introduzidas três matrizes (sendo somente duas independentes) **A**,**B** e **C** associadas respectivamente às operações: Conjugação Hermitiana, Conjugação Complexa e Transposição, que atuam nas matrizes Γ.

A matriz **A** faz o papel de Γ^0 no espaço de Minkowski e introduz os espinores barrados. Em espaço-tempo de assinatura arbitrária *(p,q)*, **A** é o produto de todas as matrizes Γ tipo-tempo. Chamando Γ_s as matrizes gama do tipo-espaço e Γ_t as matrizes gama tipo-tempo, temos

$$\mathbf{A} = \Gamma_{t_1}\Gamma_{t_2}...\Gamma_{t_q}. \tag{2.14}$$

Para a operação de conjugação hermitiana temos veja [50]

$$(\Gamma^\mu)^\dagger = (-1)^{q+1}\mathbf{A}\Gamma\mathbf{A}^{-1}, \tag{2.15}$$

$$\mathbf{A}^T = \alpha\mathbf{A}, \tag{2.16}$$

$$\alpha = (-1)^{q(q-1)/2}. \tag{2.17}$$

Existe uma matrix $\mathbf{B}$ associada à conjugação complexa

$$\Gamma^\mu = \eta \mathbf{B}^{-1}(\Gamma)^*\mathbf{B}, \quad \eta = \pm 1 \tag{2.18}$$

onde o sinal de η pode ser escolhido. Podemos mostrar que $\mathbf{B}$ é uma matrix unitária e satisfaz

$$\mathbf{B}^*\mathbf{B} = \epsilon(\eta, p, q), \quad \epsilon = \pm 1. \tag{2.19}$$

O sinal de ϵ é uma função de η escolhido e de (p, q), podendo ser calculada pelo método de Scherk, [51]. O resultado para dimensões pares é

$$\epsilon = -\sqrt{2}\eta^q(-1)^{q(q+1)/2} cos\big[\frac{\pi}{4}(-1)^{q+1}(p+q+3)\big] \tag{2.20}$$

ou

$$\epsilon = cos\big[\frac{\pi}{4}(p-q)\big] - \eta sin\big[\frac{\pi}{4}(p-q)\big]. \tag{2.21}$$

A matriz de conjugação de carga é definida como

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}. \tag{2.22}$$

As propriedades das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ implicam em

$$\begin{aligned}
(\Gamma^\mu)^T &= (-1)^{q+1}\eta \mathbf{C}\Gamma^\mu\mathbf{C}^{-1} \\
\mathbf{C}\mathbf{C}^\dagger &= \mathbf{1} \\
\mathbf{A}^T &= \epsilon\eta^q(-1)^{q(q+1)/2}\mathbf{C}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

A matriz $\mathbf{A}$ é sempre dada pelo produto de todas as matrizes Γ_t, não importando a ordem. Duas matrizes $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_S$ e $\mathbf{C}_A$, são construidas tomando o produto de todas matrizes gama simétricas e o produto de todas as matrizes gama antissimétricas respectivamente. No caso de álgebras de Clifford maximais $\mathbf{C}_S = \mathbf{C}_A$.

Em um espaço-tempo D dimensional ($D = p + q$), com matrizes $\Gamma_{d\times d}$, a matriz $\mathbf{C}$ nos permite construir uma base para as matrizes $d \times d$ simétricas ou antissimétricas. Esta propriedade se deve ao fato do produto $\mathbf{C}\Gamma^{[\mu_1 \cdots \mu_k]}$ ser uma matriz simétrica ou antissimétrica, dependendo apenas do número k (número de matrizes $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma k$ que entra no produto antissimetrizado $\Gamma^{[\mu_1 \cdots \mu_k]}$).

Por analogia os produtos $\mathbf{A}\Gamma^{[\mu_1 \cdots \mu_k]}$, podem ser matrizes hermitianas ou anti-hermitianas.

2.2 Álgebras de Lie e Superálgebras de Lie

2.2.1 Álgebras de Lie

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K (para os nossos objetivos consideraremos K como o campo dos números reais R ou o corpo dos números complexos C). Uma álgebra de Lie [52] consiste de

1. Um espaço vetorial V, e

2. A operação de multiplicação entre dois elementos de V, $g_1 \circ g_2 \equiv [g_1, g_2]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

   - Fechamento da álgebra: se $g_1, g_2 \in V \Rightarrow [g_1, g_2] \in V$;
   - Anti-comutatividade
   $$[g_1, g_2] = -[g_2, g_1];$$
   - Identidade de Jacobi
   $$[g_1, [g_2, g_3]] + [g_2, [g_3, g_1]] + [g_3, [g_1, g_2]] = 0.$$

Seja s uma subálgebra de uma álgebra de Lie g,$s \subseteq g$. A subálgebra s se chama **subálgebra invariante** ou **ideal**, se para cada elemento $\gamma \in g$ e $\sigma \in s$ o produto $[\gamma, \sigma] \in s$.

Existe um processo de construção de álgebra invariantes. É claro que $g^{(1)} = [g, g]$ é uma subálgebra invariante da álgebra g. Continuando o processo obtemos toda a série de subálgebras invariantes

$$g \equiv g^{(0)} \supseteq g^{(1)} \supseteq g^{(2)} ... \supseteq g^{(n-1)} \supseteq g^{(n)} ...$$

Para as álgebras de dimensão finita existe um número n, para o qual $g^{(n-1)} \neq g^{(n)} = g^{(n+1)} = ...$

Se uma álgebra $g^{(n)}$ tem somente um elemento 0, a álgebra inicial g é dita **solúvel**. Uma álgebra **semisimples** não possui subálgebra invariantes solúveis. Uma álgebra **simples** não possui nenhuma subálgebra invariante. Uma álgebra de Lie arbitrária pode ser dividida em partes, que são álgebras soluveis e álgebras semisimples [53].

Uma álgebra semisimples pode ser descrita com dois tipos de geradores. A subálgebra maximal comutativa, que se chama subálgebra de Cartan de dimensão r e geradores $H_1, H_2, ..., H_r$ (o valor r é conhecido como o posto da álgebra). Os geradores restantes E_α são auto-operadores de $\overrightarrow{H}$ com autovalores $\overrightarrow{\alpha}$. Aqui $\overrightarrow{H}$ significa $(H_1, H_2, ..., H_r)$ e $\overrightarrow{\alpha}$ significa $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r)$. Os valores $\overrightarrow{\alpha}$ se chamam raízes da álgebra. Para cada raíz há exatamente um auto-operador $E_{\overrightarrow{\alpha}}$.

As relações canônicas de comutação escritas em termos das raízes $\overrightarrow{\alpha}$ são

$$\begin{aligned} \left[H_i, H_j\right] &= 0, \quad i, j = 1, 2, ..., r \\ \left[\overrightarrow{H}, E_{\overrightarrow{\alpha}}\right] &= \overrightarrow{\alpha} E_{\overrightarrow{\alpha}}, \\ \left[E_{\overrightarrow{\alpha}}, E_{-\overrightarrow{\alpha}}\right] &= \alpha \cdot \overrightarrow{H} \\ \left[E_{\overrightarrow{\alpha}}, E_{\overrightarrow{\beta}}\right] &= N_{\alpha,\beta} E_{\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Para cada espaço de raízes é possível escolher n vetores linearmente independentes como base. Duas bases são as bases mais utilizadas; a primeira usa os vetores ortogonais e_i como os elementos da base. A segunda usa como os elementos da base n raízes linearmente independentes a_i. Na base ortogonal uma raíz v tem a forma

$$v = \sum_1^n \beta^i e_i.$$

Uma raíz v se chama raíz positiva, se a primeira coordenada não nula β_i é maior do que zero. As raízes não nulas podem ser divididas em raízes positivas e raízes negativas. Na base das raízes a_i temos

$$v = \sum_1^n \beta^i \alpha_i,$$

onde todos os coeficientes β_i são números inteiros. A base com esta propriedade das raízes se chama **sistema de raízes simples**. Uma raíz positiva simples é uma raíz que não pode ser escrita como soma de duas outras raízes positivas.

Para investigar as álgebras de Lie é importante construir o espaço das raízes simples. Dynkin construiu um mecanismo elegante para obter informação sobre as propriedades das raízes simples da álgebra [54].

2.2.2 Superálgebras de Lie

Uma **superálgebra de Lie** g sobre um corpo K é uma álgebra Z_2-graduada. Neste caso o espaço vetorial g é a soma de dois espaços vetoriais g_0 e g_1 ($g = g_0 \oplus g_1$). O produto é definido satisfazendo as seguinte propriedades:

- $Z_2 - graduada$:

$$[g_a, g_b] \in g_{(a+b)mod2}. \tag{2.25}$$

- Anti-simetria graduada:

$$[X_i, X_j] = (-1)^{e_i e_j + 1}[X_j, X_i], \tag{2.26}$$

  onde X_i, X_j são geradores da superálgebra, $e_i = 0$ quando $X_i \in g_0$ e $e_i = 1$ quando $X_i \in g_1$

- Identidade de Jacobi generalizada:

$$(-1)^{e_i e_k}[X_i, [X_j, X_k]] + (-1)^{e_j ei}[X_j, [X_k, X_i]] + (-1)^{e_k e_j}[X_k, [X_i, X_j]] = 0. \tag{2.27}$$

Em física o espaço g_0 se chama parte bosônica de superálgebra e g_1 se chama parte fermiônica da superálgebra. O produto definido em (2.27) se chama **supercomutador** ou **super-bracket** de Lie. Para este produto será usada a notação $[[,]]$.

As definições de **subálgebra invariante de uma superálgebra**, de **superálgebra símples** e **superálgebra semisimples** são semelhantes às definições usadas nas álgebras de Lie; no lugar das álgebras e subálgebras de Lie usa-se a nomenclatura superálgebra e sua subálgebra.

Nem todas as propriedades das álgebras de Lie podem ser estendidas para as superálgebras. Por exemplo, diferentemente das álgebras de Lie, uma superálgebra de Lie semisimples não pode ser apresentada como a soma de superálgebras de Lie simples. As superálgebras têm supermatrizes como representações.

Vamos considerar uma matriz $(m+n)\times(p+q)$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz $m\times p$, $\mathbf{B}$ é uma matriz $m\times q$, $\mathbf{C}$ é uma matriz $n\times p$ e $\mathbf{D}$ é uma matriz $n\times q$. A matriz $\mathbf{M}$ se chama supermatriz par, se elementos de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{D}$ são números ordinários (bosônicos) e os elementos de $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ são números Grassmannianos. No caso contrário uma supermatriz se chama supermatriz ímpar. Para supermatrizes pares quadradas $(m = p, n = q)$ $M = M(m|n)$ podemos definir as operações de supertraço e superdeterminante como:

$$\begin{aligned} sTr(\mathbf{M}) = &\quad tr(\mathbf{A}) - tr(\mathbf{D}) \\ sdet(\mathbf{M}) = &\quad \tfrac{det(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})}{det(\mathbf{D})} = \frac{det(\mathbf{A})}{det((\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})} \end{aligned}$$

Seja g uma superálgebra. Definimos o produto bilinear, associado com uma representação matricial p de superálgebra como um mapeamento $g\times g \mapsto \Re$:

$$B_\pi(X,Y) = str(\pi(X),\pi(Y)), \forall X,Y \in g$$

Uma forma bilinear B numa superálgebra $g = g_0 \oplus g_1$ se chama **consistente**, se $B(X,Y) = 0$ para $\forall\ X \in g_0$ e para $\forall\ Y \in g_1$. Uma forma bilinear B se chama **supersimétrica**, se $B(X,Y) = (-1)^{e_X e_Y} B(Y,X)$ para $\forall\ X,Y \in g$. Uma forma bilinear B se chama invariante, se $B([[X,Y]],Z) = B(X,[[Y,Z]])$ para cada $X,Y,Z \in g$. Uma forma bilinear B se chama um **produto interno** em g, se ela é consistente, supersimétrica e invariante.

As raízes da superálgebra de Lie são definidas similarmente às raízes da álgebra de Lie. As raízes da superálgebra podem ser divididas em três classes:

1. raízes α com $(\alpha,\alpha) \neq 0$ e 2α não é uma raiz. Estas raízes se chamam raízes pares ou bosônicas;

2. raízes α, para que $(\alpha,\alpha) \neq 0$, mas 2α é também uma raíz (do tipo bosônico). Estas raízes se chamam raízes ímpares ou fermiônicas de comprimento não nulo;

3. raízes α, tal que $(\alpha, \alpha) = 0$. Estas raízes se chamam raízes fermiônicas de comprimento nulo (ou raízes isotrópicas decomprimento nulo).

As relações de comutação canônicas em termos das raízes de uma superálgebra são:

$$\begin{aligned} \left[H_i, H_j\right] &= 0 \\ \left[H_i, E_{\pm\alpha_j}\right] &= \pm a_{ij} E_{\pm\alpha_j} \\ \left[[E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_j}]\right] &= \delta_{ij} H_i \end{aligned} \tag{2.29}$$

Os coeficientes $a_{ij} = (\overrightarrow{\alpha_j})_i$ constroem uma matriz chamada *matriz de Cartan*.

Para cada superálgebra básica existe o sistema de raízes simples, para o qual o número de raízes ímpares é minimal. Este sistema de raízes se chama **sistema de raízes distinta**. A matriz de Cartan associadas é chama matriz de Cartan distinta. A definição de raízes simples de superálgebra é similar à definição das raízes simples de álgebra.

2.2.3 As superálgebras $sl(m|n)$

Uma superálgebra de Lie simples $g = g_0 \oplus g_0$ se chama **clássica** se a representação da subálgebra bosônica (par) g_0 sobre a parte ímpar g_1 é completamente redutível. Uma superálgebra de Lie classica se chama **básica**, se existe uma forma bilinear não degenerada invariante em g.

Uma série de superálgebras básicas é dada pelas superálgebras $A(m-1, m-1)$ ou $sl(m|m)/Z(m > 1)$. A superálgebra $sl(m|m)$ está definida como uma superálgebra de supertraço zero. Um múltiplo de unidade $\lambda \mathbf{1}_{2m}$ também satizfaz a condição $str(\lambda \mathbf{1}_{2m}) = 0$. O espaço unidimensional $Z = \lambda \mathbf{1}_{2m}$ é um ideal de superálgebra. Por isso podemos considerar o coset $sl(m|m)/Z$. Vamos considerar uma superálgebra $sl(m|m)/Z$.

A parte par desta superálgebra é $sl(m) \oplus sl(m)$, e a parte ímpar é a representação $(\bar{m}, m) + (m, \bar{m})$ da parte par. A superálgebra sl(m—m)/Z tem a seguinte representação supermatricial:

$$\left(\begin{array}{c|c} sl(m) & (\bar{m}, m) \\ \hline (m, \bar{m}) & sl(m) \end{array} \right)$$

A superálgebra $sl(m|m)/Z$ tem posto $2m - 2$ e dimensão $4m^2 - 2$ (sendo $2m^2 - 2$ geradores bosonicos e $2m^2$ geradores fermiônicos).

O sistema das raízes $\Delta = \Delta_0 \bigcup \Delta_1$ de $sl(m|m)/Z$ pode ser expresso através dos vetores ortogonais $\epsilon_1, ..., \epsilon_m$ e $\delta_1, ..., \delta_m$, tais que

$$\Delta_0 = \epsilon_i - \epsilon_j, \delta_i - \delta_j \text{ e } \Delta_1 = \epsilon_i - \delta_j, -\epsilon_i + \delta_j$$

O posto da superálgebra é $2m - 2$, mas o diagrama de Dynkin tem $2m - 1$ raízes. Assim, as $2m-1$ raízes simples não são linearmente independentes para a superálgebra $sl(m|m)/Z$. Para nossos objetivos usaremos a superálgebra $sl(2n|2n)^1$, que é uma superálgebra afim, construida através da superálgebra $sl(2n|2n)$.

2.2.4 As superálgebras afins $sl(2n|2n)$

Construção de álgebras afins.

Vamos considerar uma álgebra G com geradores $g_i, \;\; i = 1, ..., n$ e com as relações de comutação entre os geradores $[g_i, g_j] = f_{kij} g_k$ $(G \times G \mapsto G)$. A álgebra G é finita (tem um número finito de geradores).

Uma álgebra de laços é dada pelo produto direito $\tilde{G} = G \otimes C^\infty(S^1)$ dos geradores de G com os geradores das funções contínuas e infinitamente diferenciáveis sobre a esfera unidimensional S^1 (os geradores da álgebra $C^\infty(S^1)$ são dados pelos elementos da series de Fourier $e^{inx} \in S^1$). Os geradores da álgebra de laços são g_i^n, e as relações de comutacão são $[g_i^n, g_j^m] = f_{ij}^k g_k^{n+m}$. Esta álgebra tem um número infinito de geradores.

Uma álgebra afim [55] é construída a partir de uma álgebra de laços, através da adição de dois novos geradores: um gerador diferencial d e um gerador de extensão central c.

$$\tilde{G} \mapsto \hat{G} \equiv \tilde{G} \times C_d \times C_c.$$

O gerador d é o operador diferencial $d = -i\frac{d}{dx}$. O gerador c é uma extensão central, que adiciona um termo na álgebra para $n = m$. As relações comutacionais para uma álgebra afim são

$$\begin{aligned} \left[g_i^n, g_j^m\right] &= f_{ij}^k g_k^{n+m} + c\delta_{mn} Tr(g_i^n g_j^m) \\ \left[d, g_i^n\right] &= n g_i^n \\ \left[c, g_i^n\right] &= \left[c, g\right] = 0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

A construção das superálgebras afins, em geral, é feita similarmente á construção das álgebras afins. A superálgebra $sl(2|2)$, veja [56,57], contém quatro geradores bosônicos h_i da subálgebra de Cartan e um conjunto de geradores de raízes simples $e_i^{\pm}$, que podem ser escolhidas todas fermiônicas. As relações de (anti)comutação entre os geradores de Cartan e as raízes simples são dadas como

$$\begin{aligned} \left[h_i, e_j^{\pm}\right] &= \pm a_{ij} e_j^{\pm} \\ \left\{e_j^{+}, e_j^{-}\right\} &= \delta_{ij} h_j. \end{aligned} \tag{2.31}$$

com $i, j = 1, ..., 4$ e a_{ij} sendo a matriz de Cartan

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Para a superálgebra $sl(2n|2n)$ a matriz de Cartan tem a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & ... & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & ... & & \\ 0 & ... & & ... & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & ... & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

Vale lembrar que para uma superálgebra podem existir bases das raízes diferentes, para que as matrizes de Cartan são inequivalentes.

2.3 Supersimetria

2.3.1 Superálgebra de Poincaré

Uma superálgebra de Poincaré (ou super-Poincaré), ligada a um espaço-tempo com assinatura *(p,q)*, é um caso particular de superálgebra. A superálgebra de Poincaré consiste dos operadores bosônicos da álgebra de Poincaré usual, dos operadores de Lorentz $M_{\mu\nu} \in g_0$ e as translações $P_\mu \in g_0$, e dos operadores fermiónicos $Q_a \in g_1$. Os geradores $Q's$ são espinores da representação espinorial de *SO(p,q)* e tomam valores na álgebra de Grassmann (super-Poincaré inclui tambem os operadores de automorfismos U_k. Neste trabalho não consideramos estes operadores).

Uma supersimetria $\mathcal{N}$-estendida contém N conjuntos dos operadores Q_a que vamos chamar $Q_a^A, A = 1, ..., N$.

As relações(anti)-comutacionais da álgebra de super-Poincaré são:

$$\begin{aligned}
\left[M_{\mu\nu}, M_{\rho\lambda}\right] &= \eta_{\mu[\rho}M_{\lambda]\nu} - \eta_{\nu[\rho}M_{\lambda]\nu} \\
\left[P_\mu, M_{\nu\rho}\right] &= \eta_{\mu[\nu}P_{\rho]} \\
\left[P_\mu, P_\nu\right] &= 0 \\
\left[M_{\mu\nu}, Q_a^A\right] &= (C\Gamma_{[\mu\nu]}Q^A)_a \\
\left[P_\mu, Q_a^A\right] &= 0 \\
\left\{Q_a^A, Q_b^B\right\} &= \delta^{AB}(C\Gamma^\mu)_{ab}P_\mu
\end{aligned} \tag{2.34}$$

2.3.2 Superespaço

Para construir modelos físicos supersimétricos (i.e.invariantes com relação às álgebras de supersimetria) temos que respeitar a natureza anti-comutativa dos operadores de supersimetria Q_a^A. O espaço dos modelos supersimetricos consta das coordenadas bosónicas usuais x_μ e das coordenadas fermiônicas θ_a^A. Então, um superespaço tem estrutura: (x_μ, θ_a^A). De agora em diante vamos deixar o índice A e usá-lo somente nos casos necessários. As variáveis Grassmannianas e suas derivadas ∂_a satisfazem

$$
\begin{aligned}
\partial_a \theta^b = \delta_a^b \qquad \partial^a \theta_b = \delta_b^a \\
\theta_a \theta_b = -\theta_b \theta_a \quad \partial_a \partial_b = -\partial_b \partial_a
\end{aligned} \tag{2.35}
$$

onde para elevar e abaixar os índices espinoriais usamos a matriz de conjugação de carga.

Um supercampo é uma função das coordenadas bosônicas e das coordenadas fermiônicas: $V(x_\mu, \theta_a)$. Ele pode ser escrito como uma expanção em série de Taylor em coordenadas fermiônicas. A série é finita, porque o produto de duas coordenadas fermiônicas iguais desaparecem, $\theta_a \theta_a = 0$. Os coeficientes de expansão nas variáveis $\theta' s$ se chamam campos componentes e formam o multipleto supersimétrico. Por exemplo, um campo sobre o superespaço (x, θ_1, θ_2) tem forma:

$$
V(x, \theta_1, \theta_2) = \phi(x) + \theta_1 \psi_1(x) + \theta_2 \psi_2(x) + \theta_1 \theta_2 F(x) \tag{2.36}
$$

onde $\phi(x)$ e $F(x)$ são campos componentes bosônicos e $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ são campos componentes fermiônicos.

2.3.3 Derivada Covariante

Uma expansão em série das θ_a^A's dá os demais campos, que descrevem o multipleto. Se existe um operador, que anticomuta com todos os Q_a^A's, ele pode ser utilizado para construir as representações irredutíveis dentro de um supercampo. Este operador tambem fermiónico se chama derivada covariante D_a^A. A derivada covariante satisfaz a regra de Leibniz para derivadas.

Nos espaços-tempos que possuem espinores quirais e anti-quirais (os índices espinoriais quirais e antiquirais são geralmente denotados componto e sem ponto na literatura), as derivadas covariantes servem para introduzir supercampos quirais e antiquirais. Como exemplo, consideramos o espaço de Minkowski 4-dimensional [58]. As derivadas são definidas como:

$$
\begin{aligned}
D_a = & \quad \tfrac{\partial}{\partial \theta^a} + i\sigma^\mu_{a\dot{a}} \overline{\theta}^{\dot{a}} \partial_\mu \\
\overline{D}_{\dot{a}} = & \quad -\tfrac{\partial}{\partial \overline{\theta}^{\dot{a}}} - i\sigma^\mu_{a\dot{a}} \overline{\theta}^{\dot{a}} \partial_\mu .
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

As derivadas satisfazem as relações de anti-comutação:

$$
\begin{aligned}
D_a, \overline{D}_{\dot{a}} = & \quad -2i\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu \\
D_a, D_b = & \quad \overline{D}_{\dot{a}}, \overline{D}_{\dot{b}} = \quad 0
\end{aligned} \tag{2.38}
$$

D_a, $\overline{D}_{\dot{a}}$ anticomutam com Q_a, $\overline{Q}_{\dot{a}}$. Os supercampos quirais e antiquirais são definidos através do vínculo:

$$
\begin{aligned}
\overline{D}_{\dot{a}} = & \quad 0 \quad -campoquiral \\
D_a = & \quad 0 \quad -campo\ anti-quiral.
\end{aligned} \tag{2.39}
$$

2.4 Mecânica Quântica Supersimétrica $\mathcal{N}$-estendida

2.4.1 Supersimetria estendida uni-dimensional e álgebras de Clifford

Álgebra de supersimetria $\mathcal{N}$-estendida

Vamos considerar uma supersimetria $\mathcal{N}$-estendida num espaço unidimensional ($D = 1$) com coordenada temporal t como em [24]. A álgebra de supersimetria é:

$$
\begin{aligned}
\{Q_iQ_j + Q_jQ_i\} &= \eta_{ij}H \\
[H, Q_i] &= 0,
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

onde Q_i são os geradores fermiônicos de supersimetria ($i, j = 1, ..., N$) e H é um operador bosõnico que faz o papel de hamiltoniano $\left(H = -i\frac{d}{dt}\right)$. No caso geral a matriz diagonal η_{ij} é uma métrica pseudo-Euclideana com assinatura *(p,q)*, e a supersimetria associada se chama supersimetria do tipo $N =$ *(p,q)*. Para nossos objetivos vamos considerar daqui por diante apenas a supersimetria ordinária $\mathcal{N}$-estendida, ou seja com $q = 0$ e $\eta_{ij} = \delta_{ij}$.

As representações lineares e finitas de supersimetria (2.40) são multipletos finitos com o mesmo número de campos bosônicos e fermiônicos. O valor $\mathcal{N}$ da supersimetria e o número de campos bosônicos/fermiônicos nas representações irredutíveis estão ligados por:

$$N = 8l + n$$
$$d = 2^{4l} G(n) \tag{2.41}$$

onde $l = 0, 1, 2, ...$ e $n = 0, 1, ..., 8$. A função $G(n)$ é a função de Randon-Hurwitz, veja [24]:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$G(n)$	1	2	4	4	8	8	8	8

Tabela 2.2: Função de Randon-Hurwitz.

A propriedade de módulo 8 das representações de supersimetria $\mathcal{N}$-estendida é consequência da periodicidade de módulo 8 das álgebras de Clifford.

Até $N = 32$ o número de campos bosônicos/fermionicos nas representações é apresentado na tabela abaixo.

N=1 1	N=9 16	N=17 256	N=25 4096
N=2 2	N=10 32	N=18 512	N=26 8192
N=3 4	N=11 64	N=19 1024	N=27 16384
N=4 4	N=12 64	N=20 1024	N=28 16384
N=5 8	N=13 128	N=21 2048	N=29 32768
N=6 8	N=14 128	N=22 2048	N=30 32768
N=7 8	N=15 128	N=23 2048	N=31 32768
N=8 8	N=16 128	N=24 2048	N=32 32768

Tabela 2.3: Número de campos bosônicos/fermiônicos para cada supersimetria até $N = 32$.

Comprimento de representação. Equivalência entre as representações

Os campos bosônicos/fermiónicos que entram num multipleto podem ser agrupados de acordo a sua dimensionalidade ou "spin". O termo "spin"é útil e se torna mais natural quando chegamos a uma teoria $D = 1$ para as teorias de dimensões mais altas. O número l das dimensões (spins) diferentes numa representação, será chamada comprimento da representação. Num multipleto supersimétrico há no minimo dois estados com spins diferentes (os campos bosônicos com spin s e os campos fermiônicos com spin $s \pm 1/2$), assim o comprimento mínimo de uma representação é $l = 2$.

Cada representação de supersimetria $\mathcal{N}$-estendida pode ser indicada por $(d_1, d_2, ..., d_l)$, onde d_1 é o número de campos com spin mais baixo, d_i e d_{i+1} são os números de campos com spins s_i e s_{i+1}; $s_i - s_{i+1} = 1/2$. Por exemplo, para $N = 2$ temos as representações irredutíveis (1,2,1) e (2,2). O número $(\Sigma_{i-par} d_i)$ é igual a $(\Sigma_{i-impar} d_i)$.

Devido à dimensionalidade dos campos, a lei de transformação supersimétrica mais geral para os campos componentes $\Phi^i_{a_i} (i = 1, 2, ..., d)$ tem a forma:

$$\delta_\epsilon \Phi^i_{a_i} = \epsilon^\alpha \big(C^i_\alpha\big)^{a_{i+1}}_{a_i} \Phi^{i+1}_{a_{i+1}} + \epsilon^\alpha \big(\widetilde{C}^i_\alpha\big)^{a_{i-1}}_{a_i} \frac{d}{dt} \Phi^{i-1}_{a_{i-1}}. \tag{2.42}$$

Para os d_1 campos com spin minimal e para os d_l campos com spin maximal, a lei de transformação é simplesmente:

$$\delta_\epsilon \Phi^1_{a_1} = \epsilon^\alpha \big(C^1_\alpha\big)^{a_2}_{a_1} \Phi^2_{a_2}, \quad \delta_\epsilon \Phi^1_{a_l} = \epsilon^\alpha \big(\widetilde{C}^l_\alpha\big)^{a_{l-1}}_{a_l} \frac{d}{dt} \Phi^{l-1}_{a_{l-1}} \tag{2.43}$$

A última componente do multipleto se transforma como derivada total. No espaço unidimensional podemos redefenir os campos de spin s_l como $\Phi = \frac{d}{dt} \Psi^{l-1}_{a_l} + const$. A constante descreve representaçôes triviais. A dimensionalidade dos campos novos $\Psi^{l-1}_{a_l}$ coincide com a dimensionalidade dos campos $\Phi^{l-2}_{a_{l-2}}$. Além disso, os campos novos se transformam como

$$\delta_\epsilon \Psi^{l-2}_{a_l} = \epsilon^\alpha \big(\widetilde{C}^l_\alpha\big)^{a_{l-1}}_{a_l} \Phi^{l-1}_{a_{l-1}} \tag{2.44}$$

Assim, o multipleto inicial $(d_1, d_2, ..., d_l)$ é equivalente ao multipleto $(d_1, d_2, ..., d_{l-2} + dl, d_{l-1}, 0)$.

Repetindo esse procedimento $l - 1$ vezes, obtemos um multipleto de comprimento 2 (d, d), veja [**??**].

Supersimetria D=1 e álgebras de Clifford

Comparando as relações de anti-comutação das álgebras de Clifford (2.9) e das álgebras de supersimetria unidimensional (2.40) que atuam nos multipletos de comprimento minimal, podemos expressar os geradores como

$$Q_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \widetilde{\sigma}_i H & 0 \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

onde σ_i e $\widetilde{\sigma}_i$ são blocos que entram nas matrizes γ de tipo Weyl

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \widetilde{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.46}$$

os Q_i em (2.45) são matrizes com blocos bosônicos nulos e blocos fermiônicos não-nulos. Os operadores atuam nos multipletos irredutivéis que possuem forma de vetores colunas. Vamos chamar de *multipleto bosônico/fermiônico* se os campos que entram na metade superior do vetor coluna são campos bosônicos/fermiônicos.

Abaixo segue a conexão entre as representações das álgebras de Clifford de tipo Weyl e as irreps de comprimento minimal de supersimetria unidimensional:

dim. do espaço-tempo (Weyl-Clifford)	$\Leftrightarrow$	SUSY´s estendidas em 1-dim
D	=	N

O tamanho da matriz na álgebra de Clifford ($= 2d$) corresponde a soma dos números dos campos bôsonicos e fermiônicos ($d + d$) numa irrep de supersimetria estendida.

Transformação de vestimento

As representações de comprimento $l > 2$ podem ser construidas a partir das representações de comprimento minimal $l = 2$, usando uma redefinição dos geradores Q_i, que se chama transformação de vestimento, veja [24]:

$$Q_i \mapsto \widetilde{Q}_i^{(k)} = S^{(k)} Q_i {S^{(k)}}^{-1}. \tag{2.47}$$

A transformação de vestimento é realizada po matrizes diagonais $S^{(k)}(k = 1, ..., 2d)$ com elementos $s_{ij}^{(k)}$

$$s_{ij}^{(k)} = \delta_{ij}\big(1 - \delta_{jj} + \delta_{jk} H\big) \tag{2.48}$$

As propriedades de transformação de vestimento são as seguintes:

1. Os operadores matriciais, obtidos através das transformações de vestimento, possuem potências inteiras de H. Uma sub-classe dos operadores possuem somente potências não negativas de H $\big($não há entradas $\frac{1}{H}\big)$. Uma representação na qual os operadores Q_i pertencem a essa

sub-classe é uma representação local. O número N de supersimetria estendida corresponde ao número de operadores locais.

2. Uma representação local não é necessariamente irredutivel. Uma representação é irredutível se d e N satisfazem (2.41).

3. Uma transformação de vestimento muda o spin dos campos do multipleto original. Uma transformação $S^{(k)}$ muda o spin do campo $\Phi \mapsto \dot{\Phi}$.

Por exemplo o multipleto $(1,2,1) = (x;\psi 1, \psi_2; g)$ de SUSY $\mathcal{N} = 2$ pode ser obtido do multipleto raiz $(2,2) = (x_1, x_2; \psi_1, \psi_2)$ pela transformação

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{S} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ Hx_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} . \tag{2.49}$$

Usando que $H \propto \frac{d}{dt}$, podemos redefinir $x_1 = x$ e $Hx_2 = g$ para obtermos assim o multipleto $(1,2,1)$ do multipleto raiz $(2,2)$. Os operadores $Q_i, i = 1,2$ de SUSY que atuam em $(2,2)$ se transformam nos operadores $\tilde{Q}_i, i = 1,2$ que atuam em $(1,2,1)$ da seguinte maneira

$$\tilde{Q}_i = SQ_iS^{-1}. \tag{2.50}$$

Vamos considerar o multipleto bosônico (d,d) com d campos bosónicos com spin-0 e de campos fermiônicos com spin-1/2 como um exemplo: $(x_i, \psi_i) \equiv (d,d)_{s=0}, i = 1, ..., 4$. O índice s em $(d,d)_{s=0}$ denota o spin mais baixo do multipleto. O multipleto $S_{(k)}(d,d)$ corresponde a um multipleto $l = 3$ do tipo $(d-p, d, p)$. O multipleto mais geral $(d_1, d_2, ..., d_l)$ é recuperado como o resultado da transformação de vestimento do multipleto (d, d). Em [24] foi mostrado, que todos os multipletos $l = 3$ de forma $(d - p, d, p)$ são multipletos locais. Assim, para os multipletos de comprimento 3 o número de supersimetria N é o mesmo do multipleto (d, d) correspondente (o número de supersimetrias não diminue).

Supersimetrias oxidadas

Vamos chamar uma supersimetria $\mathcal{N}$-estendida de supersimetria oxidada, se ela está construída, veja (2.45), usando todo conjunto de matrizes Γ do tipo-Weyl (bloco-antidiagonal) de uma representação maximal da álgebra de Clifford. Mostramos a ligação entre supersimetrias e as álgebras de Cliford maximais na próxima tabela. A supersimetria construída sem usar todas as gamas de tipo Weyl de uma álgebra de Cliford maximal, se chama reduzida.

irreps de Clifford maximais	SUSY´s oxidadas	SUSY´s reduzidas
$Cl\big(2+8m,1\big)_{\mathbf{R}}$	$N=1+8m$	-
$Cl\big(3+8m,2\big)_{\mathbf{R}}$	$N=2+8m$	-
$Cl\big(4+8m,3\big)_{\mathbf{R}}$	$N=3+8m^{*}$	-
$Cl\big(5+8m,0\big)_{\mathbf{H}}$	$N=4+8m$	$N-1=3+8m^{**}$
$Cl\big(6+8m,1\big)_{\mathbf{H}}$	$N=5+8m^{**}$	-
$Cl\big(9+8m,0\big)_{\mathbf{R}}$	$N=8+8m$	$N-1=7+8m$ $N-2=6+8m$ $N-3=5+8m$

Tabela 2.4: SUSY´s $\mathcal{N}$-estendidas (oxidadas e reduzidas) e as representaçãoes de Clifford associadas.(*) Caso real. (**) Caso quaterniônico.

Na tabela acima $m = 0, 1, 2, ...$ é um número inteiro não negativo. As irreps de Clifford maximais (oxidadas) são reais se $p - q = 1 \ mod \ 8$, e do tipo quaterniônico se $p - q = 5 \ mod \ 8$.

irreps de Clifford	SUSY´s estendidas
$Cl\big(2+8m,1\big)_{\mathbf{R}}$	$N=1$
$Cl\big(3+8m,2\big)_{\mathbf{R}}$	$N=2$
$Cl\big(4+8m,3\big)_{\mathbf{R}}$	$N=3^{*}$
$Cl\big(5+8m,0\big)_{\mathbf{H}}$	$N=3^{**},4$
$Cl\big(6+8m,1\big)_{\mathbf{H}}$	$N=5^{**}$
$Cl\big(9+8m,0\big)_{\mathbf{R}}$	$N=5^{(*)},6,7,8$

Tabela 2.5: Relação entre supersimetrias $\mathcal{N}$-estendidas e as álgebras de Clifford para valores de N arbitrários.

$N=3^{(*)} \ mod \ 8$	real	oxidada
$N=3^{(**)} \ mod \ 8$	quaterniônica	reduzida
$N=5^{(*)} \ mod \ 8$	real	reduzida
$N=5^{(**)} \ mod \ 8$	quaterniônica	oxidada

Tabela 2.6: Duas possíveis construções: (*) real e (**) quaterniônica.

As supersimetrias estendidas $N = 3^{(*)}, 3^{(**)}, 5^{(*)}, 5^{(**)}$ são obtidas das seguintes construções:

$$
\begin{aligned}
Cl(4,3) &\mapsto N = 3^{(*)} \\
Cl(5,0) &\mapsto N = 4 \mapsto N = 3^{(**)} \\
Cl(9,0) &\mapsto N = 8 \mapsto N = 5^{(*)} \\
Cl(6,1) &\mapsto N = 5^{(**)}.
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

Capítulo 3

Extensão Supersimétrica do Mapeamento de Hopf

Neste capítulo detalhamos o trabalho relativo à dissertação "Supersymmetric Extension of the Hopf Maps: $\mathcal{N} = 4$ σ-models and the $S^3 \mapsto S^2$ Fibration"em arXiv: 0912.3279 [61].

Discutimos aqui quatro transformações de supersimetria off-shell unidimensional e $\mathcal{N} = 4$, seus modelos-σ unidimensionais associados e suas relações mútuas. Essas transformações sao definidas para

I) O supermultipleto "raiz"$(4,4)_{lin}$ linear (extensões supersimetricas de $\mathbf{R}^4$),

II) o supermultipleto $(3,4,1)_{lin}$ linear (extensões supersimetricas de $\mathbf{R}^3$),

III) o supermultipleto $(3,4,1)_{nl}$ não-linear definido na esfera $\mathbf{S}^3$ and

IV) o supermultipleto $(2,4,2)_{nl}$ não-linear definido na esfera $\mathbf{S}^2$.

O mapeamento $I \to II$ é a extensão supersimétrica do mapeamento bilinear $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, enquanto o mapeamento $II \to IV$ é a extensão supersimétrica do primeiro fibrado de Hopf $\mathbf{S}^3 \to \mathbf{S}^2$.

As restrições nas esferas $\mathbf{S}^3$, $\mathbf{S}^2$ sao expressas em termos de projeções estereográficas. Os supermultipletos não-lineares, cujas transformações são polinômios localmente diferenciáveis, não são equivalentes aos supermultipletos com os mesmos números de campos.

Os modelos-σ são determinados em termos de um prepotencial sem vínculos das coordenadas alvo. O Problema da Uniformização requer que solucionemos um problema inverso para o prepotencial.

Por fim incluimos no apêndice B a extensão supersimétrica do lema de Schur (isto é a propriedade real, complexa ou quaterniônica) a todos os supermultipletos lineares minimais até $\mathcal{N} \leq 8$.

3.1 Mapeamento de Hopf, o caso bosônico

Os quatro mapeamentos de Hopf (para $k = 1, 2, 4, 8$) podem ser representados pelo seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{2k} & \rightarrow & \mathbf{R}^{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{S}^{2k-1} & \rightarrow & \mathbf{S}^{k} \end{array}$$

que conecta quatro espaços (os espaços Euclidianos I e II, e as esferas III e IV) que podem ser identificadas por

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I} & \rightarrow & \mathbf{II} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{III} & \rightarrow & \mathbf{IV} \end{array}$$

As quatro flechas indicam os seguintes mapeamentos

- O mapeamento bilinear $p : I \rightarrow II$, que leva as coordenadas $\overrightarrow{u} \in \mathbf{R}^{2k}$ em $\overrightarrow{x} \in \mathbf{R}^{k+1}$ de acordo com:

  $$p : \overrightarrow{u} \mapsto x_i = u^T \gamma_i u, \tag{3.1}$$

  onde γ_i são as matrizes gamma euclidianas de $\mathbf{R}^{k+1}$;

- As restrições ρ, ρ' nas esferas, onde $\rho : I \rightarrow III$ e $\rho' : III \rightarrow IV$;

- O mapeamento de Hopf $h : II \rightarrow IV$.

Para $k = 1, 2, 4, 8$ o mapeamento (3.1) preserva a norma, permitindo induzir o mapa h partindo do mapa p:

$$u^T u = R \mapsto x^T x = r, com\ r = R^2. \tag{3.2}$$

Escolhendo $k = 2^l$ os quatro mapeamentos de Hopf h serão classificados como 0^o, 1^o, 2^o e 3^o mapeamentos de Hopf, para $l = 0, 1, 2, 3$ respectivamente.

Segue abaixo a descrição detalhada da *Extensão Supersimétrca do* 1^o *Mapeamento de Hopf* (k=2), correspondendo ao diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^4 & \rightarrow & \mathbf{R}^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{S}^3 & \rightarrow & \mathbf{S}^2 \end{array}$$

3.2 Extensão Supersimétrica

Na extensão supersimétrica, $\mathbf{R}^4$ é trocado por um multipleto raiz (4,4) de supersimetria $\mathcal{N}=4$ cujas componentes (alvo) bosônicas correspondem às coordenadas de $\mathbf{R}^4$. A tabela de multiplicação para I é:

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
u_1	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
u_2	ψ_2	$-\psi_1$	ψ_4	$-\psi_3$
u_3	ψ_3	$-\psi_4$	$-\psi_1$	ψ_2
u_4	ψ_4	ψ_3	$-\psi_2$	$-\psi_1$
ψ_1	$\dot{u}_1$	$-\dot{u}_2$	$-\dot{u}_3$	$-\dot{u}_4$
ψ_2	$\dot{u}_2$	$\dot{u}_1$	$-\dot{u}_4$	$\dot{u}_3$
ψ_3	$\dot{u}_3$	$\dot{u}_4$	$\dot{u}_1$	$-\dot{u}_2$
ψ_4	$\dot{u}_4$	$-\dot{u}_3$	$\dot{u}_2$	$\dot{u}_1$

(3.3)

Os multipletos de supersimetria off-shell estendidos à II, III e IV são induzidos aplicando o mapeamento p, a restrição ρ a (4,4) e a restrição ρ' ao supermultipleto induzido a II, respectivamente. Para nossos propósitos é conveniente definirmos as coordenadas alvo dos supermultipletos extendidos $III(IV)$ em termos das projeções estereográficas das coordenadas alvo de $I(II)$.

3.2.1 $(4,4)_{lin} \mapsto (3,4,1)_{lin}$

Este mapeamento é a extensão supersimétrica do mapeamento bilinear bosônico p dado em (3.1). Para $k=2$ podemos expressar as três matrizes γ_i como:

$$\gamma_1 = \tau_1 \otimes \mathbf{1}_2, \;\; \gamma_2 = \tau_A \otimes \tau_A, \;\; \gamma_3 = \tau_2 \otimes \mathbf{1}_2 \tag{3.4}$$

onde

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \tau_A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Com esta convenção os campos $x_i(i = 1, 2, 3)$, são dados explicitamente por:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2(u_1u_3 + u_2u_4) \\ x_2 &= 2(u_1u_4 - u_2u_4) \\ x_3 &= u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Este mapeamento é invariante sob a transformação $\sigma(\sigma^2 = -\mathbf{1})$ dada por

$$\sigma : u_1 \mapsto u_2,\ u_2 \mapsto -u_1,\ u_3 \mapsto u_4,\ u_4 \mapsto -u_3 \tag{3.7}$$

Partindo dos três campos bosônicos (3.6), usando (3.3) e definindo os seguintes campos

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 2(u_1\psi_3 + u_2\psi_4 + u_3\psi_1 + u_4\psi_2) \\ \mu_2 &= 2(u_1\psi_4 - u_2\psi_3 - u_3\psi_2 + u_4\psi_1) \\ \mu_3 &= 2(u_1\psi_1 + u_2\psi_2 - u_3\psi_3 - u_4\psi_4) \\ \mu_4 &= 2(u_1\psi_2 - u_2\psi_1 + u_3\psi_4 - u_4\psi_3) \\ f &= 2(u_1\dot{u}_2 - u_2\dot{u}_1 + u_3\dot{u}_4 - u_4\dot{u}_3) + 4(\psi_1\psi_2 + \psi_3\psi_4). \end{aligned} \tag{3.8}$$

fechamos o mapeamento $(4, 4)_{lin} \mapsto (3, 4, 1)_{lin}$ com a seguinte tabela de multiplicação:

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
x_1	μ_1	$-\mu_2$	$-\mu_3$	μ_4
x_2	μ_2	μ_1	$-\mu_4$	$-\mu_3$
x_3	μ_3	μ_4	μ_1	μ_2
μ_1	$\dot{x}_1$	$\dot{x}_2$	$\dot{x}_3$	$-f$
μ_2	$\dot{x}_2$	$-\dot{x}_1$	f	$\dot{x}_3$
μ_3	$\dot{x}_3$	$-f$	$-\dot{x}_1$	$-\dot{x}_2$
μ_4	f	$\dot{x}_3$	$-\dot{x}_2$	$\dot{x}_1$
f	$\dot{\mu}_4$	$-\dot{\mu}_3$	$\dot{\mu}_2$	$-\dot{\mu}_1$

(3.9)

Vale notar que o multipleto $(3,4,1)_{lin}$ também é obtido de (4,4) por outra transformação, o vestimento linear definido na seção [2.4.1], que essencialmente nos permite identificar o campo auxiliar f com a derivada temporal de um dos campos $u_i (i = 1,..,4)$, por exemplo $f = \dot{u}_4$. Assim, existem duas derivações para o supermultipleto $(3,4,1)_{lin}$, de SUSY $\mathcal{N} = 4$, partindo do multipleto raiz $(4,4)_{lin}$, também de SUSY $\mathcal{N} = 4$.

3.2.2 $(4,4)_{lin} \mapsto (3,4,1)_{nl}$

A transformação $(4,4) \mapsto (3,4,1)_{nl}$ é induzida identificando as três coordenadas alvo entrando em $(3,4,1)_{nl}$ com as coordenadas das projeção estereográfica da esfera $\mathbf{S}^3$ embutida em $\mathbf{R}^4$. Para $(4,4) \mapsto (3,4,1)_{nl}$ obtemos:

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{Ru_i}{R-u_4}, i = 1,2,3 \\ \xi_i &= \frac{R\psi_i}{R-u_4}, i = 1,2,3,4 \\ g &= \frac{Ru_4}{R-u_4}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

A tabela de multiplicação para esse multipleto é:

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
w_1	$\xi_1 + \frac{1}{R}(w_1\xi_4)$	$\xi_2 + \frac{1}{R}(w_1\xi_3)$	$\xi_2 - \frac{1}{R}(w_1\xi_2)$	$\xi_4 - \frac{1}{R}(w_1\xi_1)$
w_2	$\xi_2 + \frac{1}{R}(w_2\xi_4)$	$-\xi_1 + \frac{1}{R}(w_2\xi_3)$	$\xi_4 - \frac{1}{R}(w_2\xi_2)$	$-\xi_3 - \frac{1}{R}(w_2\xi_1)$
w_3	$\xi_3 + \frac{1}{R}(w_3\xi_4)$	$-\xi_4 + \frac{1}{R}(w_3\xi_3)$	$-\xi_1 - \frac{1}{R}(w_3\xi_2)$	$\xi_2 - \frac{1}{R}(w_3\xi_1)$
ξ_1	$\dot{w}_1 - \frac{1}{R}(w_1 g + \xi_1\xi_4)$	$-\dot{w}_2 + \frac{1}{R}(w_2 g - \xi_1\xi_3)$	$-\dot{w}_3 + \frac{1}{R}(w_3 g + \xi_1\xi_2)$	$-g$
ξ_2	$\dot{w}_2 - \frac{1}{R}(w_2 g + \xi_2\xi_4)$	$\dot{w}_1 - \frac{1}{R}(w_1 g + \xi_2\xi_3)$	$-g$	$\dot{w}_3 - \frac{1}{R}(w_3 g + \xi_1\xi_2)$
ξ_3	$\dot{w}_3 - \frac{1}{R}(w_3 g + \xi_3\xi_4)$	g	$\dot{w}_1 - \frac{1}{R}(w_1 g + \xi_2\xi_3)$	$-\dot{w}_2 + \frac{1}{R}(w_2 g - \xi_1\xi_3)$
ξ_4	g	$-\dot{w}_3 + \frac{1}{R}(w_3 g + \xi_3\xi_4)$	$\dot{w}_2 - \frac{1}{R}(w_2 g + \xi_2\xi_4)$	$\dot{w}_1 - \frac{1}{R}(w_1 g + \xi_1\xi_4)$
g	$\dot{\xi}_4$	$-\dot{\xi}_3$	$-\dot{\xi}_2$	$-\dot{\xi}_1$

(3.11)

O parâmetro constante R pode ser absorvido fazendo uma redefinição conveniente dos campos w, ξ, g, omitindo R nos numeradores em (3.10). Porém é conveniente usar essa definição para mostrar o limite $R \mapsto \infty$, no qual um supermultipleto $(3,4,1)_{lin}$ é re-obtido. Como consequência, $(3,4,1)_{nl}$ é mais geral que o supermultipleto com o mesmo número de campos. Porém a inversa não é verdadeira. Os campos que formam $(3,4,1)_{nl}$ são funções dos campos de $(4,4)$ e suas derivadas temporais. Não existe nenhum mapa $(3,4,1)_{lin} \mapsto (3,4,1)_{nl}$ ou vice versa.

É importante notar que a não-linearidade da transformação de SUSY para o multipleto $(3,4,1)_{nl}$ é a menor possível, pois os resultados são apenas combinações bilineares dos campos pertencentes a esse multipleto.

Estrutura quaterniônica

É possível expressar o multipleto $(3,4,1)_{nl}$ de SUSY $\mathcal{N} = 4$ em termos das constantes de estrutura quaterniônicas ou de $su(2)$. Um dos quatro geradores de SUSY pode ser linearizado (que será denotado por Q_0), enquanto os outros três geradores de SUSY restantes continuam não-lineares. A base covariante para $(3,4,1)_{nl}$ é escrita em termos dos campos bosônicos $\tilde{w}_i, \tilde{g}$ e em termos dos campos fermiônicos $\tilde{\xi}_i, \tilde{\xi}$, que são definidos em termos dos campos pertencentes ao multipleto raiz em (3.3)

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_i &= \frac{u_i}{1-u_4},\ i=1,2,3 \\
\tilde{\xi}_i &= \frac{\psi_i}{1-u_4} + \frac{u_I\psi_4}{(1-u_4)^2},\ i=1,2,3 \\
\tilde{\xi} &= \frac{\psi_4}{1-u_4},\ i=1,2,3 \\
\tilde{g} &= \frac{\dot{u_4}}{1-u_4}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

neste caso usamos $R = 1$ (veja equação (3.11)) sem perda de generalidade.

As transformações de SUSY atuando nos campos $\tilde{w}_i, \tilde{\xi}_i, \tilde{\xi}, \tilde{g}$ são

$$\begin{aligned}
Q_4\tilde{w}_i &= \tilde{\xi}_i \\
Q_4\tilde{\xi}_i &= \dot{\tilde{w}}_i \\
Q_4\tilde{\xi} &= \tilde{g} \\
Q_4\tilde{g} &= \dot{\tilde{\xi}}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

e também

$$\begin{aligned}
Q_i\tilde{w}_j &= \epsilon_{ijk}(\tilde{\xi}_k - \tilde{w}_k\tilde{\xi}) - (\delta_{ij} + \tilde{w}_i\tilde{w}_j)\tilde{\xi} + \tilde{w}_j\tilde{\xi}_i, \\
Q_i\tilde{\xi}_j &= -\epsilon_{ijk}(\dot{\tilde{w}}_k - \tilde{w}_k\tilde{g} - \tilde{\xi}_k\tilde{\xi}) - \tilde{w}_j(\dot{\tilde{w}}_i - \tilde{w}_i\tilde{g}) + (\tilde{w}_i\tilde{\xi}_j + \tilde{w}_j\tilde{\xi}_i)\tilde{\xi} + \delta_{ij}\tilde{g}, \\
Q_i\tilde{\xi} &= -\tilde{\xi}\tilde{\xi}_i - \dot{\tilde{w}}_i g, \\
Q_i\tilde{g} &= \dot{\tilde{\xi}}_i - \dot{\tilde{w}}_i\tilde{\xi} + \tilde{w}_i\dot{\tilde{\xi}}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Vale notar que nesta base covariante $(3,4,1)_{nl}$ um gerador de SUSY possui representação linear, enquanto os três restantes não possui mais estrutura bilinear, pois $Q_i\tilde{\xi}_j$ possui termos trilineares.

3.2.3 $(3,4,1)_l \mapsto (2,4,2)_{nl}$

Os resultados dessa seção são analogos ao da seção anterior. Assim segue apenas os resultados. Para $(3,4,1)_l \mapsto (2,4,2)_{nl}$

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{rx_1}{r-x_3}, \quad i=1,2 \\ \eta_j &= \frac{r\mu_1}{r-x_3}, \quad j=1,2,3 \\ h_1 &= \frac{r\dot{x}_3}{r-x_3} \\ h_2 &= \frac{rf}{r-x_3}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

A tabela de multiplicação completa para esse multipleto é:

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
z_1	$\eta_1 + \frac{1}{r}(z_1\eta_3)$	$-\eta_2 + \frac{1}{r}(z_1\eta_4)$	$-\eta_3 + \frac{1}{r}(z_1\eta_1)$	$\eta_4 + \frac{1}{r}(z_1\eta_2)$
z_2	$\eta_2 + \frac{1}{r}(z_2\eta_3)$	$\eta_1 + \frac{1}{r}(z_2\eta_4)$	$-\eta_4 + \frac{1}{r}(z_2\eta_1)$	$-\eta_3 + \frac{1}{r}(z_2\eta_2)$
η_1	$\dot{z}_1 - \frac{1}{r}(z_1h_1 + \eta_1\eta_3)$	$\dot{z}_2 - \frac{1}{r}(z_2h_1 + \eta_1\eta_4)$	h_1	$-h_2 - \frac{1}{r}(\eta_1\eta_2)$
η_2	$\dot{z}_2 - \frac{1}{r}(z_2h_1 + \eta_2\eta_3)$	$-\dot{z}_1 + \frac{1}{r}(z_1h_1 - \eta_2\eta_4)$	$h_2 - \frac{1}{r}(\eta_1\eta_2)$	h_1
η_3	h_1	$-h_2 - \frac{1}{r}(\eta_3\eta_4)$	$-\dot{z}_1 + \frac{1}{r}(z_1h_1 + \eta_1\eta_3)$	$-\dot{z}_2 + \frac{1}{r}(z_2h_1 + \eta_2\eta_3)$
η_4	$h_2 - \frac{1}{r}(\eta_3\eta_4)$	h_1	$-\dot{z}_2 + \frac{1}{r}(z_2h_1 + \eta_1\eta_4)$	$\dot{z}_1 - \frac{1}{r}(z_1h_1 + \eta_2\eta_4)$
h_1	$\dot{\eta}_3$	$\dot{\eta}_4$	$\dot{\eta}_1$	$\dot{\eta}_2$
h_2	$\dot{\eta}_4 - \frac{1}{r}(h_1\eta_4 - h_2\eta_3)$	$-\dot{\eta}_3 + \frac{1}{r}(h_1\eta_3 + h_2\eta_4)$	$\dot{\eta}_2 - \frac{1}{r}(h_1\eta_2 + h_2\eta_1)$	$-\dot{\eta}_1 + \frac{1}{r}(h_1\eta_1 + h_2\eta_2)$

(3.16)

Analogamente parâmetro constante r pode ser absorvido fazendo uma redefinição conveniente dos campos x, η, h, omitindo r nos numeradores em (3.15). Novamente é conveniente usar essa definição e $(3,4,1)_{nl}$ é mais geral que o supermultipleto com o mesmo número de campos. Porém a inversa não é verdadeira. Os campo que formam $(2,4,2)_{nl}$ são funções dos campos de $(3,4,1)_{lin}$ e suas derivadas temporais. Não existe nenhum mapa $(2,4,2)_{lin} \mapsto (2,4,2)_{nl}$ ou vice versa.

3.2.4 Vestimento não-linear $(3,4,1)_{nl} \mapsto (2,4,2)_{nl}$

A extensão supersimétrica do Mapeamento de Hopf é uma versão não-linear da transformação de vestimento, veja seção (2.4.1). O mapeamento $(3,4,1)_{nl} \mapsto (2,4,2)_{nl}$ é dado por

$$\begin{aligned}
z_i &= \frac{r}{R}w_i, \quad for \quad i=1,2, \\
\eta_j &= \frac{r}{R}\xi_j, \quad for \quad j=1,2,3,4, \\
h_1 &= \frac{r}{R}g, \\
h_2 &= \frac{r}{R}(\dot{w}_3 - w_3 g).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

este mapeamento requer a identificação ${Q_1}^{IV} = {Q_1}^{III}$ e ${Q_l}^{IV} = -{Q_l}^{III}$ para $l = 2,3,4$.

3.3 Modelos Sigma $\mathcal{N}$=4

Vamos agora construir um modelo-σ unidimensional e $\mathcal{N}$=4-invariante, no qual a variedade alvo é parametrizada pelas coordenadas alvo do supermultipleto associado. A construção de ações invariantes com a dimensão de massa correta do termo cinético segue a descrição da referência **??**.

A ação invariante $\mathcal{S} = \frac{1}{m}\int dt\mathcal{L}$ é escrita em termos da lagrangeana $\mathcal{L}$ dada por

$$\mathcal{L} = Q_1Q_2Q_3Q_4(F) \tag{3.18}$$

onde F é uma função prepotencial sem vínculos.

3.3.1 (4,4) Linear

Para o multipleto $(4,4)_l$, a lagrangeana correspondente $\mathcal{L}_I$ a menos de uma derivada total no tempo é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_I &= \varphi(\dot{u_1}^2 + \dot{u_2}^2 + \dot{u_3}^2 + \dot{u_4}^2 - \psi_1\dot{\psi_1} - \psi_2\dot{\psi_2} - \psi_3\dot{\psi_3} - \psi_4\dot{\psi_4}) + \\
&+ (\partial_1\varphi)(\dot{u_2}(\psi_1\psi_2 + \psi_3\psi_4) + \dot{u_3}(\psi_1\psi_3 - \psi_2\psi_4) + \dot{u_4}(\psi_1\psi_4 + \psi_2\psi_3)) + \\
&+ (\partial_2\varphi)(-\dot{u_1}(\psi_1\psi_2 + \psi_3\psi_4) + \dot{u_3}(\psi_1\psi_4 + \psi_2\psi_3) - \dot{u_4}(\psi_1\psi_3 - \psi_2\psi_4)) + \\
&+ (\partial_3\varphi)(-\dot{u_1}(\psi_1\psi_3 - \psi_2\psi_4) - \dot{u_2}(\psi_1\psi_4 + \psi_2\psi_3) - \dot{u_4}(\psi_1\psi_2 + \psi_3\psi_4)) + \\
&+ (\partial_4\varphi)(-\dot{u_1}(\psi_1\psi_4 + \psi_2\psi_3) + \dot{u_2}(\psi_1\psi_3 - \psi_2\psi_4) - \dot{u_3}(\psi_1\psi_2 + \psi_3\psi_4)) + \\
&+ (\Box\varphi)(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

onde Φ é escrita em termos da função prepotencial como:

$$\begin{aligned} \varphi &= \partial_1^2 F\left(u_1,u_2,u_3,u_4\right)+\partial_2^2 F\left(u_1,u_2,u_3,u_4\right)+\partial_3^2 F\left(u_1,u_2,u_3,u_4\right)+\partial_4^2 F\left(u_1,u_2,u_3,u_4\right) \\ &= \Box F\left(u_1,u_2,u_3,u_4\right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.3.2 (3,4,1) Linear

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{II} &= \phi(\dot{x_1}^2+\dot{x_2}^2+\dot{x_3}^2+f^2-\mu_1\dot{\mu_1}-\mu_2\dot{\mu_2}-\mu_3\dot{\mu_3}-\mu_4\dot{\mu_4})+ \\ &+ (\partial_1\phi)(\dot{x_2}(\mu_1\mu_2+\mu_3\mu_4)+\dot{x_3}(\mu_1\mu_3-\mu_2\mu_4)+f(\mu_1\mu_4+\mu_2\mu_3))+ \\ &+ (\partial_2\phi)(-\dot{x_1}(\mu_1\mu_2+\mu_3\mu_4)+\dot{x_3}(\mu_1\mu_4+\mu_2\mu_3)-f(\mu_1\mu_3-\mu_2\mu_4))+ \\ &+ (\partial_3\phi)(-\dot{x_1}(\mu_1\mu_3-\mu_2\mu_4)-\dot{x_2}(\mu_1\mu_4+\mu_2\mu_3)+f(\mu_1\mu_2+\mu_3\mu_4))+ \\ &+ (\Box\phi)(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4). \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} \phi\left(x_1,x_2,x_3\right) &= \partial_1^2 F\left(x_1,x_2,x_3\right)+\partial_2^2 F\left(x_1,x_2,x_3\right)+\partial_3^2 F\left(x_1,x_2,x_3\right) \\ &= \Box F\left(x_1,x_2,x_3\right) \end{aligned} \tag{3.22}$$

3.3.3 (3,4,1) Não-Linear

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{w_1^2+w_2^2+w_3^2} \\ A &= A(\rho)=\frac{d}{d\rho}F(\rho) \\ A' &= \frac{d}{d\rho}A(\rho). \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{III} \;=\; & \Big[\frac{2}{\rho}A + A'\Big]\big(\dot{w}_1^2 + \dot{w}_2^2 + \dot{w}_3^2 + g^2 - \xi_1\dot{\xi}_1 - \xi_2\dot{\xi}_2 - \xi_3\dot{\xi}_3 - \xi_4\dot{\xi}_4\big) + \\
& \frac{1}{\rho}\Big[\frac{2}{\rho^2}A - \frac{2}{\rho}A' - A''\Big]\Big[\dot{w}_1\Big(w_2\big(\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4\big) + w_3\big(\xi_1\xi_3 - \xi_2\xi_4\big)\Big) - \\
& -\dot{w}_2\Big(w_1\big(\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4\big) - w_3\big(\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3\big)\Big) - \dot{w}_3\Big(w_1\big(\xi_1\xi_3 - \xi_2\xi_4\big) + w_2\big(\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3\big)\Big) - \\
& -g\Big(w_1\Big(\xi_1\xi_4 + \xi_3\xi_4\Big) - w_2\Big(\xi_1\xi_3 - \xi_2\xi_4\Big) + w_3\big(\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4\big)\Big)\Big] + \Big[\frac{4}{\rho}A'' + A'''\Big]\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 + \\
& \frac{1}{R}\Big\{ - \Big[\frac{2}{\rho}A + A'\Big]\big(w_1\dot{w}_1 + w_2\dot{w}_2 + w_3\dot{w}_3\big)g - \Big[\frac{4}{\rho}A + 4A' + \rho A''\Big]\cdot \\
& \cdot\Big(\dot{w}_1\big(\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3\big) - \dot{w}_2\big(\xi_1\xi_3 - \xi_2\xi_4\big) + \dot{w}_3\big(\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4\big)\Big)\Big\} + \\
& \frac{1}{R^2}\Big\{\rho\Big[2A + \rho A'\Big]\big(\dot{w}_1^2 + \dot{w}_2^2 + \dot{w}_3^2 + 2g^2 - \xi_1\dot{\xi}_1 - \xi_2\dot{\xi}_2 - \xi_3\dot{\xi}_3 - \xi_4\dot{\xi}_4\big) - \Big[\frac{4}{\rho}A + 4A' + \rho A''\Big]\cdot \\
& \cdot\Big[\dot{w}_1\Big(w_2\big(\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4\big) + w_3\big(\xi_1\xi_3 - \xi_2\xi_4\big)\Big) - \dot{w}_2\Big(w_1\big(\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4\big) - \\
& -w_3\big(\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3\big)\Big) - \dot{w}_3\Big(w_1\big(\xi_1\xi_3 - \xi_2\xi_4\big) + w_2\big(\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3\big)\Big) + \\
& -2g^2\Big(w_1\big(\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3\big) - w_2\big(\xi_1\xi_3 - \xi_2\xi_4\big) + w_3\big(\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4\big)\Big)\Big] + \\
& 2\Big[\frac{4}{\rho}A + 14A' + 16\rho A'' + \rho^2 A'''\Big]\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\Big\} + \\
& \frac{1}{R^3}\Big\{2\rho\Big[2A - \rho A'\Big]\big(w_1\dot{w}_1 + w_2\dot{w}_2 + w_3\dot{w}_3\big)g - \rho\Big[6A - 6\rho A' - \rho^2 A''\Big]\cdot \\
& \cdot\Big(\dot{w}_1\big(\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3\big) - \dot{w}_2\big(\xi_1\xi_3 - \xi_2\xi_4\big) + \dot{w}_3\big(\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4\big)\Big)\Big\} + \\
& \frac{1}{R^4}\Big\{\rho^3\Big[2A + \rho A'\Big]g^2 + \rho\Big[6A + 6\rho A' + \rho^2 A''\Big]\Big(w_1\big(\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3\big) - w_2\big(\xi_1\xi_3 - \xi_2\xi_4\big) + \\
& w_3\big(\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4\big)\Big)g + \rho\Big[24A + 36\rho A' + 12\rho^2 A'' + \rho^3 A'''\Big]\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

3.3.4 (2,4,2) Não-Linear

$$
\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \\
A &= A(\rho) = \frac{d}{d\rho}F(\rho) \\
A' &= \frac{d}{d\rho}A(\rho).
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{IV} \;=\;& \Big[\frac{1}{\rho}A + A'\Big]\big(\dot z_1^2 + \dot z_2^2 + h_1^2 + h_2^2 - \eta_1\dot\eta_1 - \eta_2\dot\eta_2 - \eta_3\dot\eta_3 - \eta_4\dot\eta_4\big) + \frac{1}{\rho}\Big[\frac{1}{\rho^2}A - \frac{1}{\rho}A' - A''\Big] \\
& \Big[\big(\dot z_1 z_2 - \dot z_2 z_1\big)\big(\eta_1\eta_2 + \eta_3\eta_4\big) - h_1\Big(z_1\big(\eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_4\big) + z_2\big(\eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_3\big)\Big) - \\
& -h_2\Big(z_1\big(\eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_3\big) - z_2\big(\eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_4\big)\Big)\Big] + \Big[\frac{1}{\rho^3}A - \frac{1}{\rho^2}A' + \frac{2}{\rho}A'' + A'''\Big]\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4 + \\
& \frac{1}{r}\Big\{ -2\Big[\frac{2}{\rho}A + A'\Big]\big(z_1\dot z_1 + z_2\dot z_2\big)h_1 - 2\Big[\frac{1}{\rho}A + A'\Big]h_2\eta_3\eta_4 - \Big[\frac{1}{\rho}A + 3A' + \rho A''\Big]\cdot \\
& \cdot\Big(\dot z_1\big(\eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_4\big) + \dot z_1\big(\eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_3\big) - h_2\big(\eta_1\eta_2 + \eta_3\eta_4\big)\Big)\Big\} + \\
& \frac{1}{r^2}\Big\{\Big[\rho^2 A'\Big]\big(\dot z_1^2 + \dot z_2^2 + h_1^2 + h_2^2 - \eta_1\dot\eta_1 - \eta_2\dot\eta_2 - \eta_3\dot\eta_3 - \eta_4\dot\eta_4\big) + \Big[2\rho A\Big]\big(h_1^2 + h_2^2 - \\
& -\eta_3\dot\eta_3 - \eta_4\dot\eta_4\big) + \rho\Big[A + \rho A'\Big]h_1^2 + \Big[2A' + \rho A''\Big]\big(\dot z_1 z_2 - \dot z_2 z_1\big)\big(\eta_1\eta_2 + \eta_3\eta_4\big) - \\
& -2\Big[\frac{1}{\rho}A + A'\Big]\big(\dot z_1 z_2 - \dot z_2 z_1\big)\eta_3\eta_4 + \Big[\frac{3}{\rho}A + 7A' + 2\rho A''\Big]\Big(z_1\big(\eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_4\big) + \\
& z_2\big(\eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_3\big)\Big)h_1 + \Big[\frac{2}{\rho}A + 4A' + \rho A''\Big]\Big(z_1\big(\eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_3\big) + \\
& z_2\big(\eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_4\big)\Big)h_2 + 2\Big[-\frac{15}{\rho}A + 14A' + 12\rho A'' + \rho^2 A'''\Big]\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\Big\} + \\
& \frac{1}{r^3}\Big\{-2\Big[\rho^2 A'\Big]\big(z_1\dot z_1 + z_2\dot z_2\big)h_1 + 2\rho\Big[A + \rho^2 A'\Big]h_1\eta_3\eta_4 - \rho^2\Big[4A' - \rho A''\Big]\cdot \\
& \cdot\Big(\dot z_1\big(\eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_4\big) + \dot z_1\big(\eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_3\big) - h_2\big(\eta_1\eta_2 + \eta_3\eta_4\big)\Big)\Big\} + \\
& \frac{1}{r^4}\Big\{\Big[\rho^4 A'\Big]h_1^2 + \rho^2\Big[4A' + \rho A''\Big]\Big(z_1\big(\eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_4\big) + z_2\big(\eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_3\big)\Big)h_1 + \\
& \rho^2\Big[4A' + 8\rho A'' + \rho^2 A'''\Big]\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\Big\}.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

3.4 Problema de Uniformização

As ações $\mathcal{N} = 4$ supersimétricas definidas na seção anterior induz modelos-σ, Σ são mapas unidimensionais em uma variedade alvo de Riemann $\mathcal{M}_g$ dotada de uma métrica g

$$
\Sigma \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathcal{M}_g, \\ t & \mapsto & \vec{X}(t). \end{array}
\tag{3.27}
$$

$\vec{X}$ denota as coordenadas locais das variedades alvo. Estas denotam componentes de campos bosônicos (chamadas por essa razão de ”coordenadas alvo”) pertencentes a supermultipletos de supersimetria off-shell. Os outros campos bosônicos são campos auxiliares.

Os modelos-σ associados são construidos da seguinte forma:

1. Igualando todos os campos fermiônicos a zero no supermultipleto,

2. Resolvendo as equações algébricas de movimento para os campos auxiliares,

3. Reescrevendo a lagrangiana resultante como $\mathcal{L} = g_{ij}\dot{X}^i\dot{X}^j$.

A métrica g_{ij} é um funcional do prepotencial $F(\vec{X})$, isto é $g_{ij} \equiv g_{ij}[F(\vec{X})]$.

Para os supermultipletos lineares (veja (3.19) e (3.21)) a métrica induzida é conformalmente chata ($g_{ij} = \Phi(\vec{X})\delta_{ij}$). Em particular uma métrica chata constante é obtida para um prepotencial quadrático. Para uma variedade alvo bidimensional um caso especial do problema inverso é o antigo Problema de Uniformização discutido por Liouville. Uma métrica conformalmente chata admite uma curvatura constante em todo espaço se o fator conforme (normalizado adequadamente) Φ satisfaz a equação de Liouville $\Box\Phi = \exp(\Phi)$.

Para supermultipletos não-lineares as escolha de um prepotencial quadrático ($F \propto \rho^2$) não reproduz uma métrica constante. Abaixo detalhamos os resultados para os supermultipletos não-lineares.

- $(3,4,1)_{nl}$

  Para o supermultipleto $(3,4,1)_{nl}$ a métrica é diagonalizada quando expressamos as coordenadas alvo em termos de ρ, θ_1, θ_2, como

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \rho cos(\theta_1) sin(\theta_2), \\
w_2 &= \rho sin(\theta_1) sin(\theta_2), \\
w_3 &= \rho cos(\theta_2).
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

As componentes não-nulas da métrica ($g_{\rho\theta_1} = g_{\rho\theta_2} = g_{\theta_1\theta_2} = 0$) são

$$
\begin{aligned}
g_{\rho\rho} &= \frac{4\big(\rho^2+1\big)}{\rho}\Big[\rho F''(\rho)+F'(\rho)\Big] \\
g_{\theta_1\theta_1} &= \rho\big(\rho^2+1\big)sin(\theta_2)\Big[\rho F''(\rho)+F'(\rho)\Big], \\
g_{\theta_2\theta_2} &= \rho\big(\rho^2+1\big)\Big[\rho F''(\rho)+F'(\rho)\Big].
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

- $(2,4,2)_{nl}$

  Para o supermultipleto $(2,4,2)_{nl}$ com prepotencial $F(\rho)$ (3.26) a métrica é diagonalizada redefinindo as coordenadas alvo em termos de ρ, α como

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \rho\cos(\alpha), \\
z_2 &= \rho\sin(\alpha).
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

  As componentes não-nulas da métrica ($g_{\rho\alpha}=0$) são

$$
\begin{aligned}
g_{\rho\rho} &= \Big\{\rho^2\Big[F''(\rho)\Big]^2\big(4\rho^6+9\rho^4+6\rho^2+1\big)+2\rho\Big[F''(\rho)\Big]\Big[F'(\rho)\Big]\big(5\rho^4+6\rho^2+1\big)+ \\
&\quad \Big[F'(\rho)\Big]^2\big(6\rho^2+1\big)\Big\}\Big/\rho\Big\{\rho\Big[F''(\rho)\Big]\big(\rho^2+1\big)^2+\Big[F'(\rho)\Big]\big(3\rho^2+1\big)\Big\}, \\
g_{\alpha\alpha} &= \rho\Big\{\Big[F'(\rho)\Big]+\rho\big(\rho^2+1\big)\Big[F''(\rho)\Big]\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

Um problema inverso pode ser definido. Este consiste na determinação (partindo de (3.29) ou (3.31)) de um prepotencial F que reproduz uma dada métrica de referência $\widehat{g}_{ij}$.

Para o supermultipleto $(2,4,2)_{nl}$, o tensor de curvatura associado ao prepotencial quadrático é

$$
F = C\rho^2 \tag{3.32}
$$

é dado por

$$\mathcal{R} \;=\; \big[\rho^2 - 44\big]\big/\big[C(\rho^2+1)^2(\rho^2-8)^2\big]. \tag{3.33}$$

Escolhendo $C = \frac{11}{32}$ normalizamos $\mathcal{R}(0) = -2$ na origem.

Neste contexto o problema de Uniformização pode ser tratado através de expansões em séries de Taylor como segue. Podemos expressar F em potências de ρ^2 ($F = \sum_{i=1} C_i \rho^{2i}$) e ajustarmos os coeficientes para mantermos nulas as derivadas em ρ de R na origem. Se definirmos

$$F \;=\; N(\rho^2 + k\rho^4) \tag{3.34}$$

(isto é $C_1 = N$, $C_2 = kN$, $C_j = 0$ para $j = 2, 3, \ldots$) obtemos, então o correspondente escalar de curvatura $\mathcal{R}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(0) &= \big[(8k+1)(8k^2+18k+1)\big]\big/\big[8(2k+1)(2+k)N\big], \\ \mathcal{R}''|_{\rho=0} &= -\frac{1536k^7+6400k^6+8744k^5+4332k^4+266k^3-227k^2-39k+12}{4k(2k+1)^2(2+k)^2N} \end{aligned} \tag{3.35}$$

(as derivadas ímpares de $\mathcal{R}$ são todas nulas em $\rho = 0$).

Escolhendo $\mathcal{R}''|_{\rho=0} = 0$ então k é uma raiz fixa de um polinômio de 7^a ordem no numerador do lado direito da segunda equação. A única raiz real é

$$k \;\approx\; -1.97997. \tag{3.36}$$

A normalização $\mathcal{R}(0) = -2$ resulta para N o valor aproximado

$$N \;\approx\; 51.2779. \tag{3.37}$$

Esta escolha para o prepotencial produz uma métrica cuja curvatura é aproximadamente constante em uma vizinhança da origem.

Capítulo 4

Considerações Finais

4.1 2^o e 3^o mapeametos de Hopf

A extensão supersimétrica do mapeamento bilinear $p : \mathbf{R}^8 \to \mathbf{R}^5$ foi introduzida em [59] e usado para construir sistemas supersimétricos na presença de um monopolo de Yang $SU(2)$, veja também [60].

O supermultipleto raiz $(8, 8)$ corresponde a uma representação linear, off-shell e minimal para todos os valores $\mathcal{N} = 5, 6, 7, 8$. Por outro lado o mapeamento p é um mapa globalmente invariante sob $SU(2)$. De acordo com o Lema de Schur, cuja extensão supersimétrica é apresentada em [61], $\mathcal{N} = 5$ é o número máximo de geradores de supersimetria que atua em $(8, 8)$ e comuta com a álgebra $su(2)$. A extensão supersimétrica do mapeamento p produz o mapa linear $(8, 8) \to (5, 11, 10, 5, 1)$. As restrições nas esferas podem ser obtidas usando projeções estereográficas.

O supermultipleto $(5, 11, 10, 5, 1)$ é um vestimento linear de um supermultipleto $\mathcal{N} = 5$, não-minimal ”envelopante”cujo o conteúdo de campos, $(1, 5, 10, 10, 5, 1)$, é dado pelo binômio de Newton $(\mathcal{N} = 5)$. Quatro das supercargas podem ser usadas para construir lagrangeanas off-shel manifestamente $\mathcal{N} = 4$ invariante, como na seção 3.3, dependendo de um prepotencial (dependente de cinco coordenadas alvo bosônicas) sem vínculos . Impondo a invariância sob a quinta supercarga obtemos um vínculo para o prepotencial. A compatibilidade dessa construção não foi investigada em [59].

O uso da projeção estereográfica permite produzirmos realizações off-shell e não-lineares para $\mathcal{N} > 4$. Esperamos que a restrição $\mathbf{R}^8 \to \mathbf{S}^7$ produza uma realização não-linear para $\mathcal{N} = 8$ que é local e pode ser escrita em termos das constantes de estrutura octoniônicas. O uso de coordenadas hiperesféricas pode produzir realizações de supersimetria, baseada em funções trigonométricas, que são invariantes sob as transformações do grupo $SU(2)$.

Não existe obstrução para aplicarmos estes métodos ao terceiro mapeamento de Hopf. Neste caso o mapeamento bilinear bosõnico p agora mapea $\mathbf{R}^{16} \to \mathbf{R}^{9}$. Um supermultipleto raiz $(16, 16)$ carrega uma representação linear minimal para $\mathcal{N} = 9$. A extensão supersimétrica para p mapea o supermultipleto raiz em um supermultipleto $(\mathcal{N} = 9)$ $(9, 37, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1)$ linear, que é um vestimento linear do "supermultipleto envelopante"baseado no binômio de Newton $\mathcal{N} = 9$: $((1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1) \mapsto (9, 37, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1))$. Como antes, as restrições nas esferas podem ser obtidas usando projeções estereográficas.

Apêndice A

Tabela de Construção das Álgebras de Clifford

As colunas iniciam com o tamanho das matrizes Γ com entradas reais. A assinatura é denominada como (p, q).

	1	*	2	*	4	*	8	*	16	*	32
$\mathcal{R}$	$\underline{(1,0)}$	$\Rightarrow$	$(2,1)$	$\Rightarrow$	$(3,2)$	$\Rightarrow$	$(4,3)$	$\Rightarrow$	$(5,4)$	$\Rightarrow$	$(6,5)$
					$(1,2)$	$\Rightarrow$	$(2,3)$	$\Rightarrow$	$(3,4)$	$\Rightarrow$	$(4,5)$
				$\nearrow$							
$\mathcal{C}$			$\underline{(0,1)}$								
				$\searrow$							
					$(3,0)$	$\Rightarrow$	$(4,1)$	$\Rightarrow$	$(5,2)$	$\Rightarrow$	$(6,3)$
							$(1,4)$	$\Rightarrow$	$(2,5)$	$\Rightarrow$	$(3,6)$
						$\nearrow$					
$\mathcal{H}$					$\underline{(0,3)}$						
						$\searrow$					
							$(5,0)$	$\Rightarrow$	$(6,1)$	$\Rightarrow$	$(7,2)$
									$(1,6)$	$\Rightarrow$	$(2,7)$
								$\nearrow$			
$\mathcal{C}$							$\underline{(0,5)}$				
								$\searrow$	$(7,0)$	$\Rightarrow$	$(8,1)$
									$(1,8)$	$\Rightarrow$	$(2,9)$
								$\nearrow$			
$\mathcal{C}$							$\underline{(0,7)}$				
								$\searrow$	$(9,0)$	$\Rightarrow$	$(10,1)$

Tabela A.1: Construção das álgebras de Clifford. As assinaturas sublinhadas indicam as irreps iniciais, ou álgebras de Clifford maximais primitivas [48]

Apêndice B

Extensão do Lema de Schur a supermultipletos minimais lineares

O lema de Schur [47] trata da matriz $\mathbf{S}$ mais geral que comuta com todas as $p+q$ matrizes gama γ_i $(i = 1, ..., p+q)$ que define a álgebra de Clifford $Cl(p,q)$ sobre os reais. Existem três possíveis casos, dependendo do par (p,q):

- O caso real $(\mathbf{R})$, isto é, $\mathbf{S} = \lambda_0 \mathbf{1}$,
- o caso quase complexo $(\mathcal{C})$, no qual $\mathbf{S}$ é dado pela soma $\mathbf{S} = \lambda_0 \mathbf{1} + \lambda_1 \tau_1$, com $\tau_1^2 = -\mathbf{1}$,
- o caso quaterniônica $(\mathbf{H})$, no qual $\mathbf{S}$ é dado pela soma $\mathbf{S} = \lambda_0 \mathbf{1} + \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \tau_j$, com $\left[\tau_i, tau_j\right] = \epsilon_{ijk}\tau_k$ e $\tau_j^2 = -\mathbf{1}$.

Todos os coeficientes λ_k acima são números reais.

A conexão univoca [24] entre as irreps das álgebras de Clifford e as representações da superálgebra $\mathcal{N}$-estendida (2.40) (dada pelos supermultipletos raiz, com conteúdo de campos (n,n)) implica que a matriz $\mathbf{S}$ mais geral que comuta com os $\mathcal{N}$ operadores de supersimetria $\tilde{Q}_i$ pode ser obtida diretamente da irrep de Clifford associada, veja [61].

Os supermultipletos lineares de comprimento maior que 2 (com conteúdo de campo $(n_1, n_2, n_3, ...)$), veja [25], são expressos em termos dos operadores de supersimetria "vestidos"$\hat{Q}_i = D\tilde{Q}_i D^{-1}$, e os operadores D são operadores diagonais de vestimento como na seção 2.4.1,. A matriz mais geral $\mathbf{S}$ que comuta com todos os operadores "vestidos"$\hat{Q}_i$ impondo a condição $\left[\mathbf{S}, D\right]$. Como uma consequência, uma condição necessária mas não suficiente para $\mathbf{S}$ ser do tipo quase complexo/quaterniônico é que o conjunto n_i de campos do supermultipletos sejam todos pares.

Vamos escrever a classificação de Schur (**R, C e H**) de todos os supermultipletos lineares minimais até $\mathcal{N} \leq 8$. Para $\mathcal{N} \neq 5, 6$ são unicamente caracterizados por seus conteúdos de campos. Uma lista completa pode ser encontrada em [25]. Para $\mathcal{N} = 5, 6$ existem supermultipletos lineares com o mesmo conteúdo de campo, mas diferindo em termos das conectividades adimissíveis (veja [28]).

Os seguintes casos foram obtidos:

- para $\mathcal{N} = 1, 7, 8$ todos os supermultipletos lineares são do tipo **R**
- para $\mathcal{N} = 2$ o supermultipleto $(2, 2)$ é do tipo **C** ($(1, 2, 1)$ é do tipo **R**)
- para ambos $\mathcal{N} = 3, 4$ o supermultipleto $(4, 4)$ é do tipo **H**, $(2, 4, 2)$ é do tipo **C** e todos os outros supermultipletos são do tipo **R**.

Para $\mathcal{N} = 5$ os resultados são resumidos na tabela seguinte. O tipo de Schur é relatado na última coluna. As conectividades da referência [28] se encontram na terceira coluna. A decomposição em supermultipletos $\mathcal{N} = 4$ (veja [29]) se econtra na segunda coluna. As legendas (A,B,C) são introduzidas para distinguir os supermultipletos com o mesmo conteúdo de campo.

cont. de campo	decomp. $\mathcal{N}=4$	conectividades ψ_g	rótulos	Tipo de Schur
$(8,8)$	$(4,4)+(4,4)$	8_0		**H**
$(1,8,7)$	$(0,4,4)+(1,4,3)$	3_5+5_4		**R**
$(2,8,6)$	$(0,4,4)+(2,4,2)$	$2_5+2_4+4_3$	A	**C**
	$(1,4,3)+(1,4,3)$	6_4+2_3	B	**R**
$(3,8,5)$	$(0,4,4)+(3,8,5)$	$1_5+3_4+4_2$	A	**R**
	$(1,4,3)+(2,4,2)$	$2_4+5_3+1_2$	B	**R**
$(4,8,4)$	$(0,4,4)+(4,4,0)$	4_4+4_1	A	**H**
	$(1,4,3)+(3,4,1)$	$1_4+3_3+3_2+1_1$	B	**R**
	$(2,4,2)+(2,4,2)$	4_3+4_2	C	**C**
$(5,8,3)$	$(1,4,3)+(4,4,0)$	$4_3+3_1+1_0$	A	**R**
	$(2,4,2)+(3,4,1)$	$1_3+5_2+2_1$	B	**R**
$(6,8,2)$	$(2,4,2)+(4,4,0)$	$4_2+2_1+2_0$	A	**C**
	$(3,4,1)+(3,4,1)$	2_2+6_1	B	**R**
$(7,8,1)$	$(3,4,1)+(4,4,0)$	5_1+3_0		**R**
$(1,5,7,3)$	$(1,4,3)+(0,1,4,3)$	5_4		**R**
$(1,6,7,2)$	$(1,4,3)+(0,2,4,2)$	1_5+5_4		**R**
$(1,7,7,1)$	$(1,4,3)+(0,3,4,1)$	2_5+5_4		**R**
$(2,6,6,2)$	$(2,4,2)+(0,2,4,2)$	2_4+4_3		**C**
$(2,7,6,1)$	$(2,4,2)+(0,3,4,1)$	$1_5+2_4+4_3$		**R**
$(3,7,5,1)$	$(3,4,1)+(0,3,4,1)$	3_4+4_2		**R**

(B.1)

Uma tabela similar é produzida para os supermultipletos minimais lineares $\mathcal{N}=6$.

cont. de campo	conectividades ψ_g	rótulos	Tipo de Schur
$(8,8)$	8_0		**C**
$(1,8,7)$	2_6+6_5		**R**
$(2,8,6)$	2_6+6_4	A	**C**
	4_5+4_4	B	**R**
$(3,8,5)$	$2_5+2_4+4_3$	A	**R**
	6_4+2_3	B	**R**
$(4,8,4)$	4_4+4_2	A	**C**
	$2_4+4_3+2_2$	B	**R**
	8_3	C	**R**
$(5,8,3)$	$4_3+2_2+2_1$	A	**R**
	2_3+6_2	B	**R**
$(6,8,2)$	6_2+2_0	A	**C**
	4_2+4_1	B	**R**
$(7,8,1)$	6_1+2_0		**R**
$(1,6,7,2)$	6_5		**R**
$(1,7,7,1)$	1_6+6_5		**R**
$(2,6,6,2)$	6_4		**C**
$(2,7,6,1)$	1_6+6_4		**R**

(B.2)

Referências Bibliográficas

[1] S.J .Gates Jr., M.T. Grisaru, M. Rocek and W. Siegel, "Superspace, or One thousand and one lessons in supersymmetry", Front. Phys. 58 (1983) 1 and hep-th/0108200. 1

[2] A. Van Proeyen, "Tools for Supersymmetry", Lectures in spring school in Calimanesti, Romania. In hep-th/9910030. 1

[3] H.J.W. Müller-Kirsten and A. Wiedemann, "Supersymmetry", World Scientific, Singapore (1987). 1

[4] M.B. Green, J.H. Schwartz and E. Witten, "Superstring Theory" Vol.1 and 2, Cambridge Univ. Press (1987). 1

[5] J. Polchinski, "String Theory" Vol. 1 and 2, Cambridge University Press (1998). 1

[6] H. Lu, C.N. Pope, E. Sezgin and K.S. Stelle, *Nucl. Phys.* **B 456** (1995) 669 ; K.S. Stelle, "Revising Supergravity and Super Yang-Mills Renormalization" in "New Developments in Fundamental Interaction Theories", AIP 2001, eds. J. Lukierski and J. Rembielinski, p. 108. 1

[7] J. Lukierski and F. Toppan, *Phys. Lett.* **B 539**, (2002) 266. 1

[8] A. Sevrin, P. Spindel, W. Troost and A. Van Proeyen, *Phys. Lett.* **B 206** (1988) 71. 1

[9] D. Sorokin, "Introduction to the Classical Theory of Higher Spin", hep-th/0405069. 1

[10] S. Coleman and J. Mandula, *Phys. Rew.* **159** (1967)1251. 1

[11] Y.A. Gel'fand and E.P. Likhtman, JETP Lett. **13** (1971) 452 (versão inglês p. 323). 2

[12] J.L. Gervais and B.Sakita, *Nucl. Phys.* **B 34** (1971) 427. 2

[13] D.V. Volkov and V.P. Akulov, JETP Lett. **16** (1972) 621 (versão inglês p. 438). 2

[14] J. Wess and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B 70** (1974) 39. 2

[15] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 188** (1981), 513. 2

[16] P. Claus, M. Derix, R. Kallosh, J. Kumar, P.K. Townsend and A. Van Proeyen, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 4553; J.A. de Azcarraga, J.M. Izquierdo, J.C. Perez- Bueno and P.K. Townsend, *Phys. Rev.* **D 59** (1999) 084015; J. Michelson and A.Strominger, JHEP9909 (1999) 005. 2

[17] R. Britto-Racumio, J. Michelson, A. Strominger and A. Volovich, "Lectures on Superconformal Quantum Mechanics and Multi-Black Hole Moduli Spaces", hep-th/9911066. 2

[18] S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos and O. Lechtenfeld, *Nucl. Phys.* **B 684** (2004) 321; E. Ivanov, S. Krivonos and O. Lechtenfeld, JHEP0303 (2003) 014. 2

[19] A. Kosteleský e M.M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 2285; A. Kosteleský, Phys. Rev. **A 32** (1985) 1293, 3243. 2

[20] D. Baye, *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 28738. 2

[21] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 772; F. Iachello, Physica **D 15** (1985) 85. 2

[22] S.J. Gates Jr. and L. Rana, *Phys. Lett.* **B 352** (1995), 50 (hep-th/9504025). 2

[23] S.J. Gates Jr. and L. Rana, *Phys. Lett.* **B 369** (1996), 261 (hep-th/9510151). 2

[24] A. Pashnev and F. Toppan, *J. Math. Phys.* **42** (2001), 5257 (hep-th/0010135). 2, 21, 22, 24, 26, 49

[25] Z. Kuznetsova, M. Rojas and F. Toppan, *JHEP* **0603** (2006), 098 (hep-th/0511274). 2, 3, 49, 50

[26] C.F. Doran, M. G. Faux, S. J. Gates Jr., T. Hubsch, K. M. Iga and G. D. Landweber, math-ph/0603012. 2, 3

[27] C.F. Doran, M. G. Faux, S. J. Gates Jr., T. Hubsch, K. M. Iga and G. D. Landweber, hep-th/0611060. 2, 3

[28] Z. Kuznetsova and F. Toppan, *Mod. Phys. Lett.* **A 23** (2008), 37 (hep-th/0701225). 2, 3, 50

[29] Z. Kuznetsova and F. Toppan, Int. J. Mod. Phys. **A 23** (2008), 3947 (arXiv:0712.3176). 2, 3, 50

[30] C.F. Doran, M. G. Faux, S. J. Gates Jr., T. Hubsch, K. M. Iga, G. D. Landweber and R. L. Miller, arXiv:08060050. 2

[31] C.F. Doran, M. G. Faux, S. J. Gates Jr., T. Hubsch, K. M. Iga and G. D. Landweber, arXiv:08060051. 2

[32] M. Faux and S.J. Gates Jr., *Phys. Rev.* **D 71** (2005), 065002 (hep-th/0408004). 3

[33] M. Gonzales, M. Rojas and F. Toppan, *Int. J. Mod. Phys.* **A 24** (2009), 4317 (arXiv:0812.3942). 3

[34] S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos and O. Lechtenfeld, *Nucl. Phys.* **B 699** (2004), 226 (hep-th/0406015). 3

[35] E. Ivanov, O. Lechtenfeld and A. Sutulin, *Nucl. Phys.* **B 790** (2008), 493 (arXiv:0705.3064). 3

[36] S. J. Gates, W. D. Linch III, J. Phillips and L. Rana, *Grav. Cosmol.* **8** (2002), 96 (hep-th/0109109). 3

[37] F. Toppan, *POS* **IC2006**, 033 (hep-th/0610180). 3

[38] E. Ivanov and O. Lechtenfeld, *JHEP* **0309** (2003), 073 (arXiv:hep-th/0307111). 3

[39] E. Ivanov, S. Krivonos and O. Lechtenfeld, *Class. Quant. Grav.* **21** (2004), 1031 (arXiv:hep-th/0310299). 3

[40] S. Bellucci, A. Beylin, S. Krivonos and A. Shcherbakov, *Phys. Lett.* **B 633** (2006), 382. 3

[41] S. Bellucci, S. Krivonos and A. Marrani, *Phys. Rev.* **D 74** (2006), 045005. 3

[42] E. Ivanov, *Phys. Lett.* **B 639** (2006), 579 (arXiv:hep-th/0605194). 3

[43] S. Bellucci and A. Nersessian, *Phys. Rev.* **D 73** (2006), 107701. 3

[44] S. Bellucci, S. Krivonos, A. Marrani and E. Orazi, *Phys. Rev.* **D 73** (2006), 025011. 3

[45] S. Krivonos and A. Shcherbakov, arXiv: hep-th/0602113 3

[46] S. Bellucci, S. Krivonos, O. Lechtenfeld and A. Shcherbakov, arXiv: 0710.3832 3

[47] S. Okubo, *J. Math. Phys.* **32** (1991)1657; ibid. **32** (1991) 1669. 5, 6, 49

[48] H.L. Carrion, M. Rojas e F. Toppan, JHEP04(2003)040. xv, 7, 8, 9, 47

[49] F. Toppan, JHEP09 (2004) 016. 7, 8, 9

[50] T. Kugo e P. Townsend, *Nucl. Phys.* **B 221** (1983)357. 10

[51] J. Scherk, "Extended Supersymmetries and extended Supergravities Theories", em Recent Developments in Gravitation, Cargese(1978). 11

[52] A.O. Barut e R. Raczka, "Theory of Group Representations and Applications"Vol.1 e 2, World Scientific, Singapore, 2nd edit (1986). 12

[53] R. Gilmore, "Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications", Wiley, New York(1974). 13

[54] E.B. Dynkin, *Transl. Amer. Math. Soc.* (1) 9 (1962) 328. 14

[55] V.G. Kac, "Infinite dimensional Lie algebras", Cambridge Un. Press, 3rd ed. 1990, USA. 17

[56] J. Evans e T. Hollowood, *Phys. Lett.* **B 293** (1992) 403. 18

[57] L. Frappat, A. Sciarrino e P. Sorba, Commun. Math. Phys. 121 (1989)457. 18

[58] J. Wess e J.Bagger, "Supersymmetry and Supergravity", Princeton University Press, 2nd edit.(1992). 20

[59] M. Gonzales, Z. Kuznetsova, A. Nersessian, F. Toppan and V. Yeghikyan, *Phys. Rev.* **D 80** (2009), 025022 (arXiv:0902.2682). 45

[60] S. Bellucci, F. Toppan and V. Yeghikyan, arXiv:0905.3461; to appear in *J. Phys.* **A.** 45

[61] L. Faria Carvalho, Z. Kuznetsova, F. Toppan, "Supersymmetric Extension of Hopf Maps: $\mathcal{N}$=4 sigma-models and the $S^3 \mapsto S^2$ Fibration", arXiv:0912.3279. 29, 45, 49