

MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MARCUS FELIPE VALLE

ESTIMATIVA DO COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM
UMA PLACA VIA MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Rio de Janeiro

2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

MARCUS FELIPE VALLE

**ESTIMATIVA DO COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR
EM UMA PLACA VIA MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Marcelo José Colaço – D.C.

Co-orientador: Prof. Francesco Scofano Neto – D.C.

Rio de Janeiro

2007

c2007

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha

Rio de Janeiro-RJ

CEP:22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmear ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e dos orientadores.

V181e Valle, Marcus Felipe

Estimativa do coeficiente de transferência de calor em uma placa via método das soluções fundamentais / Marcus Felipe Valle. – Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2007.

163p.: il., graf., tab.

Dissertação(mestrado) – Instituto Militar de Engenharia, 2007.

1. Problema Inverso. 2. Método das Soluções Fundamentais. 3. Métodos sem Malha

CDD 623.045

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

MARCUS FELIPE VALLE

**ESTIMATIVA DO COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR
EM UMA PLACA VIA MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Marcelo José Colaço – D.C.

Co-orientador: Francesco Scofano Neto – D.C.

Aprovada em 23 de abril de 2007 pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Marcelo José Colaço – D.C. do IME

Prof. Francesco Scofano Neto – D.C. do IME

Prof. Cap Aldélio Bueno Caldeira – D.C. do IME

Prof. Helcio Rangel Barreto Orlande – Ph.D. da UFRJ

Rio de Janeiro

2007

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, pelo apoio irrestrito que tive durante essa longa caminhada. Ao meu pai, muito obrigado por me incentivar a estar sempre na busca por novos conhecimentos. Meus sinceros agradecimentos à minha mãe e às minhas irmãs, que me deram força e me ajudaram em todos os momentos. Amo todos vocês!

Agradeço aos professores e funcionários do IME, os quais possibilitaram que eu me tornasse Mestre.

Ao professor Marcelo José Colaço, muito obrigado! Sem sua orientação eu não teria conseguido terminar este mestrado. Obrigado pelo tempo que você dedicou à este mestrado.

Ao professor Francesco Scofano Neto, muito obrigado pelas suas aulas e dicas, as quais ampliaram ainda mais meus conhecimentos.

Meus colegas do IME, muito obrigado! Em especial ao grande amigo Marcelo Elias, que sempre conversou e trocou idéias comigo. Quando cada um seguir o seu caminho, o Marcelo fará muita falta.

À CAPES, pela ajuda financeira através da concessão de uma bolsa de estudo.

Aos colegas da ABADÁ Capoeira. Se não fosse por eles, eu não teria evoluído nesta maravilhosa arte marcial, e essa longa caminhada no curso de mestrado seria muito mais estressante.

Ao grande amigo de infância Fabiano Giron, muito obrigado por ter animado minhas tardes com conversas através da Internet.

Ao grande amor da minha vida, Carina dos Santos Teixeira. Você vive em meu coração! Obrigado por tudo que você fez por mim. Te amo!

“O caminho é aberto com a coragem dos passos dados”
(AUTOR DESCONHECIDO)

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES.....	09
LISTA DE TABELAS.....	14
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS.....	16
1 INTRODUÇÃO.....	21
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	24
3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA.....	32
4 O MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS.....	35
4.1 Solução Fundamental.....	37
4.2 Aplicação do MSF aos Problemas Propostos.....	40
4.2.1 Justificativa da aproximação por frequências.....	40
4.2.2 Aplicação da aproximação por frequências ao MSF clássico.....	42
4.3 Problema Inverso.....	47
5 TÉCNICA DE REGULARIZAÇÃO.....	50
5.1 GMRES.....	51
5.2 SVD.....	52
6 ALGORITMO COMPUTACIONAL.....	54
7 RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO.....	55
7.1 Formas Funcionais do Coeficiente de Convecção.....	55
7.1.1 Constante.....	55
7.1.2 Parabólica.....	56
7.1.3 Quadrada.....	56
7.1.4 Triangular.....	56
7.1.5 Degrau.....	57
7.1.6 Linear.....	57

7.2	Problema Direto.....	58
7.2.1	Solução analítica x Diferenças finitas.....	58
7.2.2	Diferenças finitas x MSF.....	60
7.2.2.1	Diferenças finitas x MSF – Função constante.....	63
7.2.2.2	Diferenças finitas x MSF – Função parabólica.....	65
7.2.2.3	Diferenças finitas x MSF – Função quadrada.....	67
7.2.2.4	Diferenças finitas x MSF – Função triângulo.....	69
7.2.2.5	Diferenças finitas x MSF – Função degrau.....	71
7.2.2.6	Diferenças finitas x MSF – Função linear.....	73
7.3	Problema Inverso.....	75
7.3.1	Escolha da técnica de regularização – SVD x GMRES.....	75
7.3.2	Influência do número de pontos-fonte.....	81
7.3.3	As medidas intrusivas.....	82
7.3.4	Estimativa do coeficiente de convecção – Formulação 1.....	83
7.3.4.1	Forma funcional constante.....	84
7.3.4.2	Forma funcional parabólica.....	91
7.3.4.3	Forma funcional quadrada.....	98
7.3.4.4	Forma funcional triângulo.....	105
7.3.4.5	Forma funcional degrau.....	112
7.3.4.6	Forma funcional linear.....	119
7.3.5	Estabilidade do método.....	126
7.3.5.1	Constante.....	127
7.3.5.2	Parábola.....	129
7.3.5.3	Quadrado.....	132
7.3.5.4	Triângulo.....	134
7.3.5.5	Degrau.....	136
7.3.5.6	Linear.....	138
7.3.6	Influência da condutividade térmica.....	140
7.3.6.1	Constante.....	141
7.3.6.2	Parábola.....	143
7.3.6.3	Triângulo.....	145
7.4	Problema inverso – Formulação 2.....	146
7.4.1	Caso constante.....	147

7.4.2	Caso parabólico.....	149
7.4.3	Caso quadrado.....	151
7.4.4	Caso triangular.....	152
7.4.5	Caso degrau.....	154
7.4.6	Caso linear.....	155
8	CONCLUSÃO.....	157
9	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	160

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG. 3.1	Esquemática da geometria do problema.....	32
FIG. 4.1	Localização das singularidades (círculos pequenos) em uma fronteira fictícia no problema do método das soluções fundamentais.....	36
FIG. 4.2	Comportamento oscilatório de algumas funções de Bessel J_ν e Y_ν	44
FIG. 4.3	Esquemática da distribuição dos pontos de colocação (círculo) e pontos-fonte (cruz) em um problema inverso não-intrusivo.....	48
FIG. 7.1	Solução analítica.....	59
FIG. 7.2	Solução numérica.....	59
FIG. 7.3	Esquemática da distribuição dos pontos de colocação (círculo) e pontos-fonte (cruz) em um problema direto via o MSF.....	61
FIG. 7.4	Evolução do erro em função das frequências – Função constante.....	63
FIG. 7.5	Temperatura nos contornos – Função constante.....	64
FIG. 7.6	Temperatura – h_R constante – MDF.....	65
FIG. 7.7	Temperatura – h_R constante – MSF.....	65
FIG. 7.8	Evolução do erro em função das frequências – Função parabólica.....	65
FIG. 7.9	Temperatura nos contornos – Função parabólica.....	66
FIG. 7.10	Temperatura – h_R parabólico – MDF.....	67
FIG. 7.11	Temperatura – h_R parabólico – MSF.....	67
FIG. 7.12	Evolução do erro em função das frequências – Função quadrado.....	68
FIG. 7.13	Temperaturas nos contornos – Função quadrado.....	68
FIG. 7.14	Temperatura – h_R quadrado – MDF.....	69
FIG. 7.15	Temperatura – h_R quadrado – MSF.....	69
FIG. 7.16	Evolução do erro em função das frequências – Função triângulo.....	70
FIG. 7.17	Temperaturas nos contornos – Função triângulo.....	70
FIG. 7.18	Temperatura – h_R triangular – MDF.....	71
FIG. 7.19	Temperatura – h_R triangular – MSF.....	71
FIG. 7.20	Evolução do erro em função da frequência – Função degrau.....	72
FIG. 7.21	Temperatura nos contornos – Função degrau.....	72
FIG. 7.22	Temperatura – h_R degrau – MDF.....	73
FIG. 7.23	Temperatura – h_R degrau – MSF.....	73
FIG. 7.24	Evolução do erro em função da frequência – Função linear.....	74

FIG. 7.25	Temperaturas nos contornos – Função linear.....	74
FIG. 7.26	Temperaturas – h_R linear – MDF.....	75
FIG. 7.27	Temperaturas – h_R linear – MSF.....	75
FIG. 7.28	Comparação entre as estimativas dos coeficientes de convecção – Caso h_R constante.....	77
FIG. 7.29	Comparação entre as estimativas dos coeficientes de convecção – Caso h_R parabólico.....	79
FIG. 7.30	Comparação entre as estimativas dos coeficientes de convecção – Caso h_R linear.....	80
FIG. 7.31	Medidas intrusivas (pontos preto) a uma distância dx da origem, pontos-fonte (círculo) e parede com condição de contorno desconhecida (cruz)..	82
FIG. 7.32	Constante – Erros x Medidas – 5 cm.....	85
FIG. 7.33	Constante – Erros x Medidas – 4 cm.....	85
FIG. 7.34	Constante – Erros x Medidas – 3 cm.....	86
FIG. 7.35	Constante – Erros x Medidas – 2 cm.....	86
FIG. 7.36	Constante – Erros x Medidas – 1 cm.....	86
FIG. 7.37	Constante – Erros x Medidas – 9 mm.....	86
FIG. 7.38	Constante – Erros x Medidas – 8 mm.....	87
FIG. 7.39	Constante – Erros x Medidas – 7 mm.....	87
FIG. 7.40	Constante – Erros x Medidas – 6 mm.....	87
FIG. 7.41	Constante – Erros x Medidas – 5 mm.....	87
FIG. 7.42	Estimativa do coeficiente de convecção em função das medidas intrusivas – Constante.....	88
FIG. 7.43	Distribuição das temperaturas – Forma funcional constante.....	90
FIG. 7.44	Isolinhas – h_R constante – MDF.....	91
FIG. 7.45	Isolinhas – h_R constante – MSF.....	91
FIG. 7.46	Parábola – Erros x Medidas – 5 cm.....	92
FIG. 7.47	Parábola – Erros x Medidas – 4 cm.....	92
FIG. 7.48	Parábola – Erros x Medidas – 3 cm.....	93
FIG. 7.49	Parábola – Erros x Medidas – 2 cm.....	93
FIG. 7.50	Parábola – Erros x Medidas – 1 cm.....	93
FIG. 7.51	Parábola – Erros x Medidas – 9 mm.....	93
FIG. 7.52	Parábola – Erros x Medidas – 8 mm.....	94

FIG. 7.53	Parábola – Erros x Medidas – 7 mm.....	94
FIG. 7.54	Parábola – Erros x Medidas – 6 mm.....	94
FIG. 7.55	Parábola – Erros x Medidas – 5 mm.....	94
FIG. 7.56	Estimativa do coeficiente de convecção em função das medidas intrusivas – Parábola.....	95
FIG. 7.57	Distribuição de temperaturas nos contornos – Parábola.....	97
FIG. 7.58	Isolinhas – h_R parabólico – MDF.....	98
FIG. 7.59	Isolinhas – h_R parabólico – MSF.....	98
FIG. 7.60	Quadrado – Erros x Medidas – 5 cm.....	99
FIG. 7.61	Quadrado – Erros x Medidas – 4 cm.....	99
FIG. 7.62	Quadrado – Erros x Medidas – 3 cm.....	100
FIG. 7.63	Quadrado – Erros x Medidas – 2 cm.....	100
FIG. 7.64	Quadrado – Erros x Medidas – 1 cm.....	100
FIG. 7.65	Quadrado – Erros x Medidas – 9 mm.....	100
FIG. 7.66	Quadrado – Erros x Medidas – 8 mm.....	101
FIG. 7.67	Quadrado – Erros x Medidas – 7 mm.....	101
FIG. 7.68	Quadrado – Erros x Medidas – 6 mm.....	101
FIG. 7.69	Quadrado – Erros x Medidas – 5 mm.....	101
FIG. 7.70	Estimativa da forma funcional quadrado.....	102
FIG. 7.71	Comparação das temperaturas nos contornos – Função Quadrado.....	104
FIG. 7.72	Isolinhas – h_R quadrado – MDF.....	105
FIG. 7.73	Isolinhas – h_R quadrado – MSF.....	105
FIG. 7.74	Triângulo – Erros x Medidas – 5 cm.....	106
FIG. 7.75	Triângulo – Erros x Medidas – 4 cm.....	106
FIG. 7.76	Triângulo – Erros x Medidas – 3 cm.....	107
FIG. 7.77	Triângulo – Erros x Medidas – 2 cm.....	107
FIG. 7.78	Triângulo – Erros x Medidas – 1 cm.....	107
FIG. 7.79	Triângulo – Erros x Medidas – 9 mm.....	107
FIG. 7.80	Triângulo – Erros x Medidas – 8 mm.....	108
FIG. 7.81	Triângulo – Erros x Medidas – 7 mm.....	108
FIG. 7.82	Triângulo – Erros x Medidas – 6 mm.....	108
FIG. 7.83	Triângulo – Erros x Medidas – 5 mm.....	108
FIG. 7.84	Estimativa da temperatura nos contornos – $L = 2 \text{ cm} / 8dx$	110

FIG. 7.85	Isolinhas – h_R triangular – MDF.....	111
FIG. 7.86	Isolinhas – h_R triangular – MSF.....	111
FIG. 7.87	Estimativa do coeficiente de convecção – Função triângulo.....	112
FIG. 7.88	Degrau – Erros x Medidas – 5 cm.....	113
FIG. 7.89	Degrau – Erros x Medidas – 4 cm.....	113
FIG. 7.90	Degrau – Erros x Medidas – 3 cm.....	114
FIG. 7.91	Degrau – Erros x Medidas – 2 cm.....	114
FIG. 7.92	Degrau – Erros x Medidas – 1 cm.....	114
FIG. 7.93	Degrau – Erros x Medidas – 9 mm.....	114
FIG. 7.94	Degrau – Erros x Medidas – 8 mm.....	115
FIG. 7.95	Degrau – Erros x Medidas – 7 mm.....	115
FIG. 7.96	Degrau – Erros x Medidas – 6 mm.....	115
FIG. 7.97	Degrau – Erros x Medidas – 5 mm.....	115
FIG. 7.98	Estimativa da forma funcional degrau – $L = 5$ cm.....	117
FIG. 7.99	Comparação entre temperaturas – Função degrau – $L = 5$ cm – $4dx$	118
FIG. 7.100	Isolinhas – h_R degrau – MDF.....	119
FIG. 7.101	Isolinhas – h_R degrau – MSF.....	119
FIG. 7.102	Linear – Erros x Medidas – 5 cm.....	120
FIG. 7.103	Linear – Erros x Medidas – 4 cm.....	120
FIG. 7.104	Linear – Erros x Medidas – 3 cm.....	120
FIG. 7.105	Linear – Erros x Medidas – 2 cm.....	120
FIG. 7.106	Linear – Erros x Medidas – 1 cm.....	121
FIG. 7.107	Linear – Erros x Medidas – 9 mm.....	121
FIG. 7.108	Linear – Erros x Medidas – 8 mm.....	122
FIG. 7.109	Linear – Erros x Medidas – 7 mm.....	122
FIG. 7.110	Linear – Erros x Medidas – 6 mm.....	122
FIG. 7.111	Linear – Erros x Medidas – 5 mm.....	122
FIG. 7.112	Estimativa da função linear – $L = 1$ cm.....	123
FIG. 7.113	Comparação entre temperaturas – Função linear.....	125
FIG. 7.114	Isolinhas – h_R linear – MDF.....	126
FIG. 7.115	Isolinhas – h_R linear – MSF.....	126
FIG. 7.116	Representação gráfica da influência do ruído – Constante.....	128
FIG. 7.117	Estimativa – com e sem ruídos – Forma funcional constante.....	129

FIG. 7.118	Representação gráfica da influência do ruído – Parábola.....	130
FIG. 7.119	Estimativa – com e sem ruídos – Forma funcional parabólica.....	131
FIG. 7.120	Representação gráfica da influência do ruído – Quadrado.....	132
FIG. 7.121	Estimativa – com e sem ruídos – Forma funcional quadrada.....	133
FIG. 7.122	Representação gráfica da influência do ruído – Triângulo.....	134
FIG. 7.123	Estimativa – com e sem ruídos – Forma funcional triângulo.....	135
FIG. 7.124	Representação gráfica da influência do ruído – Degrau.....	137
FIG. 7.125	Estimativa – com e sem ruídos – Forma funcional degrau.....	138
FIG. 7.126	Representação gráfica da influência do ruído – Linear.....	139
FIG. 7.127	Estimativa – com e sem ruídos – Forma funcional linear.....	140
FIG. 7.128	Estimativa para diferentes condutividades térmicas – Constante.....	142
FIG. 7.129	Estimativas para diferentes tipos de condutividades térmicas – Parábola.	144
FIG. 7.130	Estimativas para diferentes tipos de condutividades térmicas – Triângulo.....	146
FIG. 7.131	Estimativas – Constante – $4dx$	148
FIG. 7.132	Estimativas – Constante – $6dx$	148
FIG. 7.133	Estimativas – Constante – $8dx$	148
FIG. 7.134	Estimativas – Parábola – $4dx$	149
FIG. 7.135	Estimativas – Parábola – $6dx$	149
FIG. 7.136	Estimativas – Parábola – $8dx$	150
FIG. 7.137	Estimativas – Quadrado – $4dx$	151
FIG. 7.138	Estimativas – Quadrado – $6dx$	151
FIG. 7.139	Estimativas – Quadrado – $8dx$	152
FIG. 7.140	Estimativas – Triângulo – $4dx$	153
FIG. 7.141	Estimativas – Triângulo – $6dx$	153
FIG. 7.142	Estimativas – Triângulo – $8dx$	153
FIG. 7.143	Estimativas – Degrau – $4dx$	154
FIG. 7.144	Estimativas – Degrau – $6dx$	154
FIG. 7.145	Estimativas – Degrau – $8dx$	155
FIG. 7.146	Estimativas – Linear – $4dx$	156
FIG. 7.147	Estimativas – Linear – $6dx$	156
FIG. 7.148	Estimativas – Linear – $8dx$	156

LISTA DE TABELAS

TAB. 7.1	Erros relativos percentuais entre a solução numérica e a solução analítica.....	59
TAB. 7.2	Total de iterações em função do fator de sobre-relaxação.....	61
TAB. 7.3	Erro médio quadrado para a forma funcional constante.....	77
TAB. 7.4	Erro médio quadrado para a forma funcional parabólica.....	78
TAB. 7.5	Erro médio quadrado para a forma funcional linear.....	80
TAB. 7.6	Localização das medidas intrusivas para cada caso selecionado.....	83
TAB. 7.7	Erro médio quadrado para a função constante em função das medidas.....	85
TAB. 7.8	Melhor largura em função do tipo de medida usada – Caso constante.....	89
TAB. 7.9	Tempo e frequência – Forma funcional constante.....	89
TAB. 7.10	Erro médio quadrado para a função parábola em função das medidas.....	92
TAB. 7.11	Melhor largura em função do tipo de medida usada – Caso parábola.....	96
TAB. 7.12	Tempo e frequência – Forma funcional parabólica.....	96
TAB. 7.13	Erro médio quadrado para a função quadrado em função das medidas.....	99
TAB. 7.14	Melhor largura em função do tipo de medida usada – Caso quadrado.....	103
TAB. 7.15	Tempo e frequência – Forma funcional quadrada.....	103
TAB. 7.16	Erro médio quadrado para a função triângulo em função das medidas.....	106
TAB. 7.17	Melhor largura em função do tipo de medida usada – Caso triângulo.....	109
TAB. 7.18	Tempo e frequência – Forma funcional triângulo.....	109
TAB. 7.19	Erro médio quadrado para a função degrau em função das medidas.....	113
TAB. 7.20	Melhor largura em função do tipo de medida usada – Caso degrau.....	116
TAB. 7.21	Tempo e Frequência – Forma funcional degrau.....	116
TAB. 7.22	Erro médio quadrado para a função degrau em função das medidas.....	119
TAB. 7.23	Melhor largura em função do tipo de medida usada – Caso linear.....	123
TAB. 7.24	Tempo e Frequência – Forma funcional linear.....	124
TAB. 7.25	Influência do ruído no erro médio quadrado – Função constante.....	127
TAB. 7.26	Influência do ruído no erro médio quadrado – Função parabólica.....	130
TAB. 7.27	Influência do ruído no erro médio quadrado – Função quadrado.....	132
TAB. 7.28	Influência do ruído no erro médio quadrado – Função triângulo.....	134
TAB. 7.29	Influência do ruído no erro médio quadrado – Função degrau.....	136
TAB. 7.30	Influência do ruído no erro médio quadrado – Função linear.....	139

TAB. 7.31	Influência da condutividade térmica na estimativa da forma funcional constante – $4dx$	141
TAB. 7.32	Influência da condutividade térmica na estimativa da forma funcional constante – $8dx$	142
TAB. 7.33	Influência da condutividade térmica na estimativa da forma funcional parabólica – $4dx$	143
TAB. 7.34	Influência da condutividade térmica na estimativa da forma funcional parabólica – $8dx$	143
TAB. 7.35	Influência da condutividade térmica na estimativa da forma funcional triângulo – $4dx$	145
TAB. 7.36	Influência da condutividade térmica na estimativa da forma funcional triângulo – $8dx$	145
TAB. 7.37	Comparação dos erros médios quadrados – Caso constante.....	147
TAB. 7.38	Comparação dos erros médios quadrados – Caso parabólico.....	149
TAB. 7.39	Comparação dos erros médios quadrados – Caso quadrado.....	151
TAB. 7.40	Comparação dos erros médios quadrados – Caso triangular.....	152
TAB. 7.41	Comparação dos erros médios quadrados – Caso degrau.....	154
TAB. 7.42	Comparação dos erros médios quadrados – Caso linear.....	155

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

ABREVIATURAS

CL	- Curva L
DSVD	- Damped Singular Value Decomposition
GMRES	- Generalized Minimal Residual Method
MDF	- Método das Diferenças Finitas
MEC	- Método dos Elementos de Contorno
MNC	- Método dos Nós de Contorno
MSF	- Método das Soluções Fundamentais
PD	- Princípio da Discrepância
RT	- Regularização de Tikhonov
SVD	- Singular Value Decomposition
TSVD	- Truncated Singular Value Decomposition
VCG	- Validação em Cruz Generalizada

SÍMBOLOS

A	- Matriz de interpolação
b	- Vetor contendo os valores das equações
D	- Matriz diagonal
dx e dy	- Distância entre pontos de colocação
e^x	- Exponencial
$E(T)$	- Erro médio quadrado
$f(x)$	- Função teste contínua
$G(x, y_j)$	- Solução fundamental
$G_{\kappa_i}(x, y_j)$	- Soluções fundamentais
H	- Altura
$H_0^{(1)}$	- Função de Hänkel do primeiro tipo e ordem zero
\tilde{H}_m	- Matriz de Hessenberg

h_L	- Coeficiente de transferência de calor por convecção
h_R	- Coeficiente de transferência de calor por convecção
$h_{máx}$	- Valor máximo do coeficiente de transferência de calor por convecção
i	- Número complexo ($\sqrt{-1}$)
i	- Subscrito contador de frequências
j	- Subscrito contador de pontos-fonte
J_0	- Função de Bessel do primeiro tipo e ordem zero
J_1	- Função de Bessel do primeiro tipo e primeira ordem
K	- Condutividade térmica da placa
K_0	- Função de Bessel modificada do segundo tipo e ordem zero
K_v	- Subespaço de Krilov
L	- Operador elíptico
L	- Largura
\ln	- Logaritmo natural
m	- Dimensão do subespaço
M	- Número total de frequências
\mathbf{n}	- Vetor normal com norma unitária
N	- Número de pontos-fonte
p	- Total de equações
Q_m	- Vetores ortonormais
r_j	- Vetor contendo as coordenadas da distância entre o ponto-fonte e o ponto de colocação
$sen(x)$	- Função seno de x
$span(x)$	- Subespaço vetorial
$T(x)$	- Temperatura aproximada
T_E	- Temperatura prescrita
T_L	- Temperatura ambiente
T_R	- Temperatura ambiente
\mathbf{U}	- Matriz coluna ortogonal
$u(x)$	- Aproximação da solução de um problema
v	- Ordem da função de Bessel

\mathbf{V}	- Matriz ortogonal
x	- Coordenada dos pontos de colocação
y_j	- Coordenada dos pontos-fonte
Y_0	- Função de Bessel do segundo tipo e ordem zero
Z	- Total de pontos de colocação
$\boldsymbol{\beta}$	- Vetor dos coeficientes desconhecidos
β_j	- Coeficientes desconhecidos
$\beta_{i,j}$	- Coeficientes desconhecidos
Γ	- Função Gamma
Δ	- Laplaciano
$\delta(x - y_j)$	- Funcional delta de Dirac
κ	- Freqüências
λ_m	- Autovalores
π	- Pi = 3.14159265
σ_i	- Valores singulares
ω	- Fator de sobre-relaxação
Ω	- Domínio do problema
$\partial\Omega$	- Contorno do domínio
$\frac{\partial}{\partial n}$	- Derivada parcial em relação ao vetor normal
$\frac{\partial}{\partial x}$	- Derivada parcial em relação à coordenada x
$\frac{\partial}{\partial y}$	- Derivada parcial em relação à coordenada y
∞	- Infinito
$*$	- Multiplicador por convolução
∇	- Gradiente
$\ r_j\ _{L=2}$	- Distância Euclidiana entre os pontos-fonte e os pontos de colocação

RESUMO

Este trabalho lida com a estimativa do coeficiente de transferência de calor em uma placa via o Método das Soluções Fundamentais, o qual é um método que não requer a discretização do domínio de interesse através de uma malha computacional. Para a resolução do sistema de equações lineares resultantes, foram testados métodos como o SVD (*Singular Value Decomposition*) e o GMRES (*Generalized Minimal Residual Method*). Foram estimadas diversas formas funcionais unidimensionais para o coeficiente de transferência de calor por convecção e, a fim de testar a eficiência do método das soluções fundamentais, foram comparados os valores obtidos por este método com os valores exatos do coeficiente de transferência de calor para medidas simuladas, com e sem erros experimentais. Nesta dissertação é considerado um problema de condução de calor bidimensional linear, com propriedades termofísicas constantes em um domínio sujeito a condições de contorno do tipo Dirichlet, Neumann e Robin.

Palavras-chaves: Problema Inverso, Método das Soluções Fundamentais, Métodos sem Malha

ABSTRACT

This work deals with the estimate of the heat transfer coefficient on a plate by means of the Method of Fundamental Solutions (MFS) which is a method that does not require domain discretization with a mesh. Since the resulting matrix equation is ill-conditioned, a regularized solution is obtained by employing the singular value decomposition (SVD) and the generalized minimal residual method (GMRES). It was estimated many unidimensional shape functions for the heat transfer coefficient and, in order to test the efficiency of this method, the obtained results by the method of fundamental solutions were compared with the exact results obtained by the simulated measurements from the direct problem using finite difference. In this work a bi-dimensional linear heat conduction problem is considered, with constant thermophysical properties over a finite medium subjected to Dirichlet, Neumann and Robin boundary conditions.

Keywords: Inverse Problem, Method of Fundamental Solutions, Meshfree Methods

1 INTRODUÇÃO

Em muitos problemas de engenharia as condições de contorno em um problema de transferência de calor não são conhecidas completamente, uma vez que há dificuldades técnicas na obtenção de dados. Por exemplo, parte do contorno do corpo em estudo é inacessível às medições diretas, ou a presença de sensores, tais como os termopares, não é viável devido às altas temperaturas nesta região. Portanto, os parâmetros desconhecidos são estimados através das técnicas de problemas inversos.

Os problemas inversos em transferência de calor aparecem naturalmente em muitas aplicações ou modelos matemáticos onde a transferência de calor é considerada. Estes problemas lidam com a estimativa de parâmetros desconhecidos, ou seja, enquanto que em um problema direto de condução de calor a causa é conhecida (as condições de contorno, por exemplo) e o efeito é determinado (a distribuição de temperatura no corpo), o problema inverso envolve a estimativa da causa em função do conhecimento do efeito. Matematicamente, os problemas inversos de transferência de calor são mal condicionados (ALIFANOV, 1994; COLAÇO, 1998; OZISIK e ORLANDE, 2000), ou seja, não garantem a existência da solução nem sua unicidade (ALIFANOV, 1994; COLAÇO, 1998; OZISIK e ORLANDE, 2000).

O desenvolvimento de métodos numéricos para o estudo de problemas em equações com derivadas parciais é um tópico de investigação pelas suas aplicações diretas em equacionamentos das situações físicas de engenharia. Devido ao desenvolvimento computacional, observou-se um crescimento da aplicação de novos métodos numéricos (ANTUNES, 2005), dentre os quais podemos citar os métodos sem malha (*meshless/meshfree methods*). Nestes métodos, não há necessidade de gerar malhas em seu domínio ou contorno, como acontece em métodos clássicos (diferenças finitas, elementos finitos, elementos de contorno, etc.). Esta particularidade é especialmente atrativa do ponto de vista da implementação em domínios com geometrias complicadas, em que grande parte do esforço computacional inerente aos métodos clássicos consiste precisamente na construção da malha.

O método das soluções fundamentais (MSF) foi introduzido por Kupradze e Aleksidze em 1964 (FAIRWEATHER e KARAGEORGHIS, 1998; PARTRIDGE e SENSALE, 2000;

SMYRLIS et al., 2001; KARAGEORGHIS, 2001; ALVES e CHEN, 2005; MARIN e LESNIC, 2005; COLAÇO et al., 2006; JIN e MARIN, 2007), sendo usado para a obtenção da solução numérica de certos problemas de valores de contorno elípticos. O MSF é um método sem malha, livre de integração. Sua idéia principal consiste em aproximar a solução do problema através da combinação linear de soluções fundamentais com respeito a certos pontos de singularidades (pontos-fonte) que estão localizados fora ou dentro do domínio. Portanto, o problema original é reduzido à determinação dos coeficientes desconhecidos das soluções fundamentais, fazendo com que a aproximação satisfaça as condições de contorno.

O objetivo principal desta dissertação de mestrado é mostrar como as formas funcionais dos coeficientes de transferência de calor em um problema inverso de transferência de calor podem ser estimadas via o método das soluções fundamentais. O problema considerado nesta dissertação é bidimensional, e o coeficiente de transferência de calor por convecção varia apenas com uma das coordenadas. Medidas simuladas são obtidas usando-se o método das diferenças finitas para variações conhecidas do coeficiente de transferência de calor por convecção. O MSF é, então, usado para estimar seus valores aproximados com precisão. Desta forma, ao se usar metodologias diferentes para a obtenção das medidas simuladas e para a obtenção dos valores exatos dos parâmetros desconhecidos, evita-se o chamado *crime inverso* (COLAÇO et al., 2006), o qual ocorre quando os mesmos (ou quase os mesmos) métodos teóricos são usados tanto para sintetizar quanto para inverter os dados em um problema inverso. O sistema linear de equações resultantes é altamente mal-condicionado e o método proposto para a resolução deste sistema é o GMRES, embora o método SVD também tenha sido usado, mas, com uma menor acurácia.

O presente trabalho é organizado da seguinte forma: o capítulo 2 mostra as revisões bibliográficas que levaram ao desenvolvimento do problema proposto, assim como uma introdução ao problema inverso via o método das soluções fundamentais. No capítulo 3 são apresentadas as formulações matemáticas dos problemas físicos considerados, bem como é abordado o uso da equação de Helmholtz nos problemas físicos propostos. No capítulo 4 é apresentado o método das soluções fundamentais, como também são mostradas suas aplicações e vantagens. É feita uma introdução aos pontos de colocação e pontos-fonte, assim como é feita uma abordagem teórica das soluções fundamentais. Além disso, é apresentada a justificativa da aproximação por frequências proposta por ALVES e CHEN (2005), como também é mostrada a aplicação desta aproximação ao método das soluções fundamentais

clássico e ao problema inverso. No capítulo 5 são abordadas as técnicas de regularização do sistema linear de equações gerado pelo método das soluções fundamentais. Dentre essas técnicas são citadas o método da decomposição dos valores singulares (SVD) e o método do mínimo residual generalizado (GMRES). No capítulo 6 é feita uma breve introdução ao algoritmo computacional usado para a solução do problema. No capítulo 7 são mostradas as formas funcionais dos coeficientes de transferência que calor que serão estimados. É feita uma demonstração do uso do MSF em problemas diretos e, por fim, apresentam-se os resultados obtidos para a solução do problema inverso, utilizando-se diferentes formas funcionais para a geração das medidas experimentais simuladas. No capítulo 8 são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Diz-se que um problema de transferência de calor é direto quando são conhecidas para a resolução do problema a forma geométrica do corpo, as propriedades físicas do material do corpo, a condição inicial, as condições de contorno e o termo de geração de energia. Seu objetivo é a determinação do campo de temperaturas no corpo considerado. Matematicamente, os problemas diretos são classificados como bem-postos e, para isso, sua solução deve existir, deve ser estável e única com relação aos dados de entrada (ALIFANOV, 1994; COLAÇO, 1998; OZISIK e ORLANDE, 2000).

Já os problemas inversos têm como objetivo a estimativa de uma ou mais de uma das características referidas anteriormente. Portanto, utilizam-se medidas experimentais de temperatura e/ou fluxo de calor tomadas em locais apropriados do corpo em estudo, a fim de se suprir, por exemplo, a falta de informações no contorno cuja condição de contorno seja desconhecida. Também pode se estimar pela metodologia dos problemas inversos a condutividade térmica e/ou o termo fonte no domínio. Matematicamente, os problemas inversos são classificados como mal-postos, e sua solução é, de modo geral, suscetível às instabilidades devido à perturbação nos dados de entrada (erros experimentais) (ALIFANOV, 1994).

Há diversas técnicas para a resolução dos problemas inversos de transferência de calor. Dentre elas temos as técnicas intrusivas e as não-intrusivas. Nas técnicas intrusivas é necessária a introdução de sensores no interior do corpo em estudo para a obtenção de dados, enquanto que nas técnicas não-intrusivas os dados obtidos através das condições de contorno conhecidas são suficientes.

Diversos métodos têm sido propostos no passado para a solução de problemas inversos, tais como o Método do Gradiente Conjugado para Estimativa de Função (COLAÇO, 1998; OZISIK e ORLANDE, 2000), o Método do Gradiente Conjugado para a Estimativa de Parâmetros (COLAÇO, 1998; OZISIK e ORLANDE, 2000), o Método da Regularização de Tikhonov (COLAÇO, 1998; OZISIK e ORLANDE, 2000), o Método de Especificação de Função de Beck (COLAÇO, 1998; OZISIK e ORLANDE, 2000), o Método de Molificação (COLAÇO, 1998; OZISIK e ORLANDE, 2000), o Método de Filtros Iterativos (COLAÇO,

1998; OZISIK e ORLANDE, 2000), o Método de Levenberg-Marquardt (COLAÇO, 1998; OZISIK e ORLANDE, 2000), dentre outros.

Embora tenha sido desenvolvido em 1964 por Kupradze e Aleksidze, o método das soluções fundamentais não foi extensivamente estudado pelo fato dos problemas propostos serem altamente mal-condicionados e devido ao sucesso de outros métodos, tais como o método dos elementos finitos e o método das diferenças finitas. Como resultado, o MSF durante as três primeiras décadas após 1964 esteve restrito à resolução de equações elípticas homogêneas, tais como a equação de Laplace e as equações bi-harmônicas (ALVES e CHEN, 2005). Ultimamente (ANTUNES, 2005; COLAÇO et al, 2006), devido ao avanço tecnológico dos computadores, as vantagens dos métodos sem-malhas sobre os métodos com malhas têm sido amplamente reconhecidas e estes métodos passaram a ser mais estudados pelos pesquisadores. Contudo, poucos autores têm aplicado o método das soluções fundamentais em problemas inversos de transferência de calor e, por isso, espera-se que esta dissertação de mestrado acrescente algo a mais neste nicho tão pouco explorado.

O método das soluções fundamentais é uma técnica iterativa sem malha bastante poderosa e tem sido usado com sucesso por outros autores, por exemplo, KARAGEORGHIS (2001), FAIRWEATHER et al. (2003), HON e WEI (2004), ANTUNES (2005), ALVES e CHEN (2005). Nos problemas de transferência de calor, o MSF tem sido usado tanto para a resolução de problemas diretos (GOLBERG, 1995; KATSURADA e OKAMOTO, 1996; PARTRIDGE e SENSALÉ, 2000; KARAGEORGHIS, 2001; SMYRLIS et al., 2001; FAIRWEATHER et al., 2003; YOUNG et al., 2004; CHANTASIRIWAN, 2004; CHEN et al., 2006) quanto para a resolução de problemas inversos (HON e WEI, 2004; MARIN e LESNIC, 2005; MARIN, 2005_(a); MARIN, 2005_(b); COLAÇO et al., 2006; JIN e ZHENG, 2006; JIN e MARIN, 2007; DONG et al., 2007; WEI et al., 2007).

Quando a equação diferencial parcial considerada envolve termos não-homogêneos, o MSF pode ser combinado com outros esquemas numéricos, tais como a integração do domínio (ALVES e CHEN, 2005), o método das reciprocidades múltiplas (ALVES e CHEN, 2005), o método da reciprocidade dual (com interpolação polinomial ou interpolação por uma função de base radial) (PARTRIDGE e SENSALÉ, 2000; FAIRWEATHER et al., 2003; ALVES e CHEN, 2005; ALVES e VALTCHEV, 2005), ou através do uso, como base para aproximar o termo não-homogêneo, das soluções fundamentais dos autovalores das equações associadas (ALVES E CHEN, 2005).

ALVES e CHEN (2005) utilizaram o MSF para a aproximação direta da equação de Helmholtz não-homogênea e para obter uma solução para a equação de Poisson. Foi desenvolvida uma metodologia onde um conjunto de frequências e pontos-fonte conduz a um método das soluções fundamentais estendido, usado para se aproximar uma função em um domínio fechado e obter uma aproximação direta para uma solução particular para a equação diferencial parcial. Neste método os coeficientes obtidos para cada frequência de teste são direta e independentemente re-escalados, dando uma aproximação simples para a solução particular.

FAIRWEATHER e KARAGEORGHIS (1998) investigaram profundamente o desenvolvimento do método das soluções fundamentais desde sua publicação por Kupradze e Aleksidze em 1964 até o ano de 1998, como também estudaram as principais aplicações do MSF durante esse período, dentre as quais podemos citar: problemas potenciais, problemas em elastostática e acústica, problemas bi-harmônicos, problemas com singularidades nos contornos, problemas sem contornos, problemas com condições de contorno não-lineares, problemas assimétricos e problemas transientes. Portanto, como pode ser observado, não houve aplicações do MSF em problemas inversos durante o período citado.

CHANTASIRIWAN (2004) comparou a performance do método das soluções fundamentais (MSF) com o método dos elementos de contorno (MEC) e o método dos nós de contorno (MNC) em um problema direto difusivo-convectivo bidimensional em regime permanente. O MEC converte a equação diferencial em questão em uma equação de integração de contorno. O MNC expressa a solução da equação diferencial como uma superposição linear de soluções fundamentais não-singulares. Já o MSF é similar ao MNC, exceto ao fato de que são usadas soluções fundamentais singulares. Chantasiriwan mostrou que os resultados obtidos com o MSF e o MNC são mais acurados que os resultados obtidos com o MEC.

PARTRIDGE e SENSALE (2000) combinaram o MSF com o método da reciprocidade dual de forma a lidar com problemas de difusão e difusão-convecção não-homogêneos usando subdomínios. Foram obtidos resultados acurados através desta técnica.

As soluções fundamentais de uma equação transiente podem ser obtidas através das seguintes formas: aplicando a transformada de Laplace para a remoção da variável tempo, usando diferenças finitas no tempo ou encontrando a solução fundamental da equação

diferencial parcial transiente. YOUNG et al. (2004) descreveram as aplicações do MSF em problemas diretos transientes de difusão de calor multidimensionais. Eles usaram a solução fundamental dependente do tempo da equação de difusão de calor. Os resultados obtidos nos testes mostraram boa comparação com os resultados obtidos para a solução analítica e para a equação de Helmholtz modificada.

CHEN et al. (2006) analisaram a acurácia e a estabilidade da implementação do método das soluções fundamentais em um problema direto. Eles mostraram que a decomposição dos valores singulares (SVD) não apresenta melhorias frente à eliminação de Gauss, desde que os dados obtidos sejam livres de erros de medição. Contudo, para casos onde há ruídos, mostrou-se que a decomposição truncada dos valores singulares (*Truncated Singular Value Decomposition*, TSVD) é mais eficiente que a eliminação de Gauss. Chen et al. sugerem que seja escolhido um número suficientemente grande de pontos de colocação e pontos-fonte, de modo que seja possível remover metade dos valores singulares sem perda de acurácia.

HON e WEI (2004) em 2004 foram os primeiros a aplicarem o método das soluções fundamentais para a resolução de um problema inverso de condução de calor. Hon e Wei combinaram o MSF com o método das funções de base radiais de modo a encontrar uma solução para o problema inverso. O sistema linear de equações gerado foi regularizado através da aplicação da regularização de Tikhonov e do método curva L. O problema abordado foi um problema transiente de difusão de calor e foram estimadas as temperaturas e fluxos de calor, como também o coeficiente de convecção. Os resultados obtidos com o uso destes métodos mostraram uma boa concordância com os valores exatos das variáveis desconhecidas.

MARIN e LESNIC (2005) aplicaram o método das soluções fundamentais ao problema de Cauchy associado com a equação de Helmholtz bidimensional. O sistema linear resultante foi regularizado através da aplicação da regularização de Tikhonov, enquanto que o parâmetro de regularização foi obtido através do método curva L. Eles analisaram a convergência e a estabilidade do método em relação ao aumento do número de pontos-fonte e ao aumento da distância entre os pontos-fonte e os contornos da solução do domínio, como também em relação ao nível de ruído adicionado aos dados de entrada. Verificou-se também que o sistema de equações lineares resultantes em um problema inverso não pode ser regularizado através de métodos diretos, uma vez que esta aproximação produz uma solução altamente instável devido ao fato do número de condição da matriz ser bastante grande quando o número de pontos de colocação e o número de pontos-fonte aumentam. Os resultados numéricos obtidos

mostraram que o método proposto é convergente em relação ao aumento do número de pontos-fonte e em relação ao aumento da distância entre a fronteira fictícia (que contém os pontos-fonte) e o contorno da solução do problema, e fica mais estável quando se diminui o nível de ruídos adicionado aos dados de entrada.

MARIN (2005_(a)) neste artigo propôs o uso do método das soluções fundamentais em um problema inverso tridimensional associado com a equação de Helmholtz. O sistema de equações lineares resultantes foi regularizado através da aplicação da regularização de Tikhonov de ordem zero, enquanto que a escolha do parâmetro de regularização foi feita através do método curva L. A solução fundamental da equação de Helmholtz encontrada para o caso tridimensional é diferente da solução fundamental para o caso bidimensional.

JIN e ZHENG (2006) propuseram o uso do método das soluções fundamentais para a resolução de um problema inverso de valor de contorno associado com a equação de Helmholtz, incluindo o problema de Cauchy. A solução do sistema linear resultante foi regularizada através da aplicação do método TSVD, enquanto que o parâmetro de regularização foi obtido através do uso do método curva L. Os resultados obtidos mostraram que o esquema proposto possui uma alta acurácia, é computacionalmente eficiente, estável em relação ao ruído adicionado aos dados e convergente em relação à diminuição do ruído adicionado aos dados e em relação ao aumento da distância entre a fronteira fictícia (que contém os pontos-fonte) e a fronteira do domínio físico. Jin e Zheng mostraram que, para domínios multi-conectados, os pontos-fonte podem ser postos dentro e fora do domínio físico. Não é indicado o uso de pontos-fonte dinâmicos nos problemas inversos via o MSF, uma vez que a aproximação dinâmica transforma um problema mal-posto em um problema não-linear mal-posto muito mais difícil. Os resultados obtidos com o uso do TSVD mostraram uma boa aproximação com a solução exata. Por fim, foi sugerido o uso do método GMRES para a resolução de sistema de equações lineares resultantes quando o tamanho deste sistema for muito grande.

DONG et al. (2007) propuseram o uso do método das soluções fundamentais na resolução de um problema bidimensional de condução de calor em um meio anisotrópico. Foram aplicados o método TSVD e o método curva L para a resolução do sistema linear de equações resultantes. Foi demonstrada a eficiência do método proposto em diferentes exemplos numéricos. Para a obtenção da solução fundamental da equação em questão,

primeiramente a equação diferencial em questão foi transformada em sua forma padrão através da troca das coordenadas espaciais.

COLAÇO et al. (2006) utilizaram o método das soluções fundamentais para a estimativa da distribuição da fonte de geração de calor em um problema linear de difusão de calor multidimensional. Foram empregadas apenas medidas não-intrusivas e a acurácia da aproximação da solução foi examinada através do uso de dados experimentais simulados contendo erros aleatórios na análise inversa. Os pontos-fonte foram considerados estáticos e uniformemente distribuídos dentro do domínio. Os resultados obtidos neste trabalho foram melhores que os resultados obtidos pelos mesmos autores em um problema em que a fonte de geração de calor foi estimada usando-se medidas intrusivas em um problema transiente unidimensional via o método dos gradientes conjugados com problemas adjuntos (COLAÇO et al., 2006 apud COLAÇO et al., 2003). Para aquele caso, a estimativa da fonte de geração de calor usando apenas dados experimentais não-intrusivos foi insatisfatória. Através do MSF foram estimadas funções contínuas e funções descontínuas. As funções contínuas foram bem capturadas, enquanto que para o caso da função quadrado a estimativa não capturou o formato da função, mas, seu pico foi muito bem capturado, assim como a localização da função quadrado. Para o caso onde foram considerados os ruídos adicionados aos dados de entrada, verificou-se que mesmo que o desvio padrão seja grande, a localização da fonte desconhecida ainda é bem capturada.

MARIN (2005_(b)) investigou a aplicação do método das soluções fundamentais ao problema de Cauchy para condução de calor em regime permanente em um material compósito bidimensional. Para a resolução do sistema de equações lineares resultantes, foi empregada a regularização de Tikhonov de ordem zero, enquanto que a escolha do parâmetro de regularização foi baseada no método da curva L. Em seus resultados numéricos Marin testou a estabilidade do método, e foi verificado que o erro médio quadrado das temperaturas, para qualquer parâmetro de regularização, decai quanto menor for o ruído adicionado aos dados de entrada, além de ter verificado que os resultados numéricos obtidos para a temperaturas são mais acurados que os resultados numéricos obtidos para o fluxo de calor, uma vez que o fluxo contém derivadas de primeira ordem da temperatura. Também foi observado que podem ser obtidos resultados numéricos acurados para os problemas propostos usando uma pequena quantidade de pontos-fonte, e que o aumento da quantidade de pontos-fonte além deste limite não altera significativamente o erro obtido. Além disso, quanto maior

for a distância dos pontos-fonte na fronteira fictícia ao domínio do problema, maior é a acurácia dos resultados obtidos. Por fim, o MSF é eficiente e fácil de adaptar aos domínios irregulares.

WEI et al. (2007) combinaram o método das soluções fundamentais com diferentes técnicas de regularização para a solução do problema de Cauchy em equações diferenciais parciais elípticas. Para resolver eficientemente a matriz resultante mal-posta, eles usaram três diferentes técnicas de regularização, com três diferentes escolhas para os parâmetros de regularização. As seguintes técnicas de regularização do sistema de equações resultantes foram utilizadas: regularização de Tikhonov (RT), decomposição amortecida dos valores singulares (*Damped Singular Value Decomposition*, DSVD) e decomposição truncada dos valores singulares (TSVD). Já a escolha dos parâmetros de regularização foi baseada nos seguintes métodos: princípio da discrepância (PD), curva L (CL) e validação em cruz generalizada (VCG). Os exemplos numéricos e comparações feitas mostraram que as técnicas RT e DSVD combinadas com os métodos VCG ou CL para a escolha dos parâmetros de regularização são mais eficientes quando a matriz resultante é quadrada, ou seja, o número de pontos de colocação é igual ao número de pontos-fonte. Para matrizes não-quadradas, o método CL gera uma aproximação aceitável, enquanto que o método VCG não funciona muito bem. A técnica DSVD sob as três técnicas de escolha de parâmetros não funciona muito bem quando o problema considerado envolve poucos dados especificados nos contornos, a não ser que boa parte dos contornos tenham dados especificados. Ademais, seus experimentos numéricos mostram que o PD funciona bem para as equações de Laplace e Helmholtz modificada, mas falha para a equação de Helmholtz na qual a matriz resultante é complexa.

JIN e MARIN (2007) utilizaram o método das soluções fundamentais para a estimativa da intensidade da fonte de geração de calor em um problema de condução de calor em regime permanente através das medidas das temperaturas e fluxos de calor nos contornos. Naquele estudo, a fonte de geração de calor é tomada de tal forma que satisfaça uma equação diferencial parcial de segunda ordem em uma base física. Entretanto, o problema foi transformado em uma equação diferencial parcial de quarta ordem, a qual pode convenientemente ser resolvida através do MSF. Para a resolução do sistema de equações resultante foi utilizado o método decomposição truncada dos valores singulares, enquanto que a escolha dos parâmetros de regularização foi baseada no método da curva L. Os pontos-fonte

foram considerados estáticos durante a solução do problema e foi assumido que não há conhecimento a priori dos ruídos adicionados aos dados quando foi testada a estabilidade do método. Os resultados obtidos mostraram que o MSF é uma alternativa competitiva aos outros métodos existentes para a solução de problemas inversos de estimativa de fontes de geração de calor em problema de condução de calor em regime permanente.

Tendo em vista os bons resultados obtidos até agora pelos autores citados anteriormente nesta revisão bibliográfica, neste trabalho serão estimadas as formas funcionais dos coeficientes de transferência de calor via o método das soluções fundamentais. Comparando esta dissertação com os artigos citados anteriormente, verifica-se que nesta dissertação serão usados um conjunto de pontos-fonte no interior do domínio, uma vez que apenas a parte real da solução fundamental de Helmholtz será usada, o que evita as singularidades dadas pela parte imaginária da solução fundamental. Além disso, esta dissertação tem como fator diferenciador a introdução de pontos de colocação distribuídos regularmente em parte do interior do domínio, os quais serão usados para simularem medidas intrusivas. Para a resolução do sistema linear de equações será empregado o método GMRES, uma vez que nenhum dos autores citados anteriormente fez uso deste método. Além disso, será abordada a influência de um conjunto de frequências na solução aproximada para a solução fundamental da equação de Helmholtz.

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

Nesta dissertação de mestrado considerou-se um problema linear de transferência de calor em regime permanente em um meio isotrópico de domínio Ω . A geometria do problema pode ser esquematizada na figura 3.1:

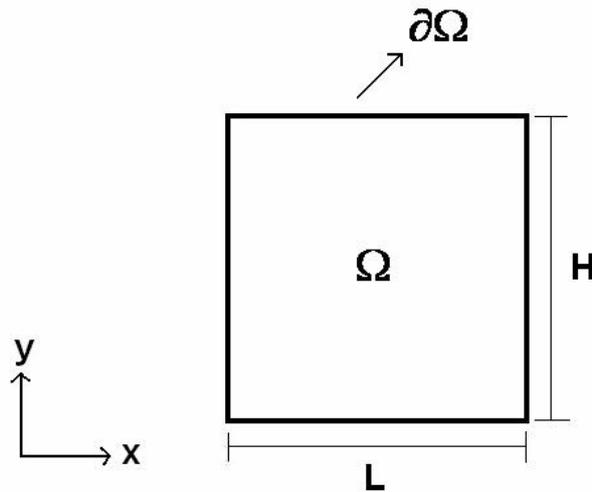


Figura 3.1 – Esquematização da geometria do problema

onde L representa a largura da placa e H representa a altura da placa.

São consideradas as seguintes formulações matemáticas:

Formulação 1: O problema de transferência de calor envolve condições de contorno do tipo Robin e Neumann, dadas pelas equações

$$\nabla^2 T = 0 \text{ no domínio } \Omega \quad (3.1)$$

$$K \frac{\partial T}{\partial x} = h_L (T - T_L) \text{ em } x = 0 \quad (3.2)$$

$$-K \frac{\partial T}{\partial x} = h_R (T - T_R) \text{ em } x = L \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } y = H \quad (3.4)$$

onde K é a condutividade térmica da placa, T_L e T_R são as temperaturas ambientes em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente, e h_L e h_R são os coeficientes de transferência de calor por

convecção em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente. O coeficiente de transferência de calor por convecção em $x = L$, h_R , é suposto desconhecido.

Formulação 2: Neste caso, assume-se que temos um problema de transferência de calor dado pelas seguintes equações matemáticas:

$$\nabla^2 T = 0 \text{ no domínio } \Omega \quad (3.5)$$

$$T = T_E \text{ em } x = 0 \quad (3.6)$$

$$-K \frac{\partial T}{\partial x} = h_R (T - T_R) \text{ em } x = L \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } y = H \quad (3.8)$$

onde K é a condutividade térmica da placa, T_R é a temperatura ambiente em $x = L$, h_R é o coeficiente de transferência de calor por convecção em $x = L$, e T_E é a temperatura prescrita em $x = 0$. O coeficiente de transferência de calor por convecção em $x = L$, h_R , é suposto desconhecido.

As duas formulações foram propostas visando estudar a influência da condição de contorno na estimativa do coeficiente de transferência de calor na face oposta à qual ela é aplicada. Para a resolução do problema inverso torna-se necessário o conhecimento de alguma informação extra, procurando contornar a falta de informação da condição de contorno na fronteira onde o coeficiente de transferência de calor é desconhecido. Tal informação pode ser obtida através de medidas de temperatura em certos pontos do domínio/fronteira. Neste trabalho foram usadas medidas simuladas de temperatura e/ou fluxo de calor. Contudo, de forma a evitar o chamado *crime inverso* (COLAÇO et al., 2006), os dados simulados obtidos através do problema direto foram obtidos pelo método das diferenças finitas, enquanto que o problema inverso foi resolvido através do uso do método das soluções fundamentais. Adicionalmente, nos problemas inversos considerados nesta dissertação foram feitas as seguintes observações: na formulação 1, em $x = 0$ o fluxo de calor é exato e a temperatura é medida. Já na formulação 2, em $x = 0$ a temperatura é exata e o fluxo de calor é medido.

As equações de Helmholtz aparecem em muitos problemas envolvendo propagação de onda e fenômenos de vibração. Elas são usadas freqüentemente para descrever problemas

envolvendo vibração de uma estrutura, cavidade acústica, ondas de radiação, propagação de ondas e condução de calor. Portanto, as equações (3.1) e (3.5) podem ser representadas pela equação de Helmholtz, a qual aparece quando se aplica a técnica de separação de variáveis às equações diferenciais consideradas.

4 O MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

O método das soluções fundamentais é uma técnica sem malha para a solução de certos problemas de valores de contorno elípticos. Foi publicado inicialmente em 1964 por Kupradze e Aleksidze (FAIRWEATHER e KARAGEORGHIS, 1998; PARTRIDGE e SENSALÉ, 2000; SMYRLIS et al., 2001; KARAGEORGHIS, 2001; ALVES e CHEN, 2005; MARIN e LESNIC, 2005; COLAÇO et al., 2006; JIN e MARIN, 2007), enquanto que sua formulação numérica foi dada por Mathon e Johnston em 1977 (FAIRWEATHER e KARAGEORGHIS, 1998; SMYRLIS et al., 2001; KARAGEORGHIS, 2001; MARIN e LESNIC, 2005; JIN e MARIN, 2007). Durante os últimos 40 anos o MSF tem sido continuamente desenvolvido por numerosos matemáticos e pesquisadores e, aparentemente, o MSF tem sido redescoberto independentemente por alguns pesquisadores em certos campos de estudo. Por esse motivo, o MSF na literatura da matemática ou da engenharia também é conhecido como o método desingularizado (*desingularized method*), o método da simulação de carga (*charge simulation method*), ou o método da superposição (*superposition method*).

O MSF somente é aplicável quando a solução fundamental da equação diferencial em questão é conhecida. O MSF tem sido usado com sucesso tanto para a resolução de equações elípticas homogêneas quanto para a resolução de equações elípticas não-homogêneas. Adicionalmente, como vantagens do MSF sobre os outros métodos sem-malha existentes, podem ser citadas: o MSF não requer uma discretização elaborada do contorno, não há necessidade de integrações sobre o contorno, a solução no interior do domínio é resolvida sem a necessidade de quadraturas extras, sua implementação é fácil e simples, e poucos dados de entrada são necessários.

A idéia principal do MSF consiste em aproximar a solução do problema através de uma combinação linear de soluções fundamentais com respeito a certas singularidades (também chamadas de pontos-fonte) que estão localizadas em uma fronteira fictícia fora do domínio, conforme esquematizado na figura 4.1. Segundo ALVES & CHEN (2005) e ALVES & VALTCHEV (2005) também há a possibilidade de se considerar os pontos-fonte dentro do domínio quando se leva em conta apenas as partes reais das soluções fundamentais.

Adicionalmente, JIN e ZHENG (2006) no artigo publicado utilizaram pontos-fonte dentro e fora do domínio em alguns dos problemas considerados.

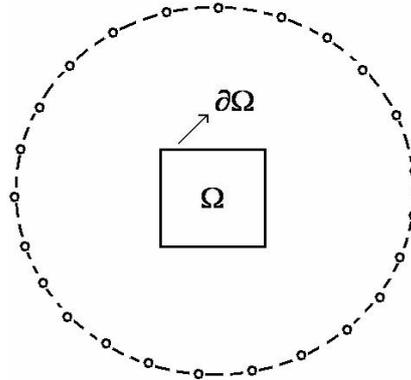


Figura 4.1 – Localização das singularidades (círculos pequenos) em uma fronteira fictícia no problema do método das soluções fundamentais

Os coeficientes desconhecidos das soluções fundamentais e as coordenadas dos pontos-fonte são encontrados fazendo com que a aproximação satisfaça as condições de contorno que, em geral, resulta em um problema não-linear. No caso linear, apenas os coeficientes desconhecidos são determinados, uma vez que os pontos-fonte se mantêm estáticos. No MSF a solução é aproximada através de uma função da forma

$$u(x) = \sum_{j=1}^N \beta_j G(x, y_j) \quad (4.1)$$

onde β_j são os coeficientes desconhecidos a serem determinados, G é a solução fundamental da equação diferencial elíptica em questão e N é o número de pontos-fonte considerados. Assim, o problema original é reduzido à determinação dos coeficientes desconhecidos das soluções fundamentais.

Embora a solução aproximada satisfaça a equação diferencial automaticamente, ela não satisfaz necessariamente as condições de contorno e os dados adicionais, sua acurácia depende da forma com que a condição de contorno é aproximada (KATSURADA e OKAMOTO, 1996; JIN e ZHENG, 2006). Tipicamente, isto é feito através dos métodos dos mínimos quadrados ou por colocação. Geralmente por colocação é mais fácil e pode produzir resultados altamente acurados, às vezes alcançando a precisão da máquina (CHEN et al., 2006).

Através do método de colocação, pode se aproximar as condições de contornos por meio de certos pontos de observação, também chamados de pontos de colocação, distribuídos nos contornos. Em geral, bons resultados são obtidos com pontos de colocação uniformemente distribuídos nos contornos e uma distribuição similar de pontos-fonte na fronteira fictícia. A estabilidade do método de colocação foi examinada e foi observado que, embora o método possa ser altamente mal-condicionado, a qualidade da solução numérica não é afetada. A quantidade de pontos-fonte e pontos de colocação necessários para a estabilidade e convergência do método ainda é uma questão em aberto (ALVES e VALTCHEV, 2005).

Para implementar o método, deve se determinar se os pontos-fonte são estáticos ou dinâmicos. Quando as coordenadas dos pontos-fonte são pré-determinadas, os pontos-fonte se mantêm fixos durante todo o processo computacional (caso estático). Quando as coordenadas dos pontos-fonte são determinadas junto com os coeficientes desconhecidos das soluções fundamentais, dizemos que os pontos-fonte são dinâmicos. No caso dinâmico temos um sistema de equações não-lineares que podem ser resolvidas usando métodos de minimização. Entretanto, sua resolução é mais difícil do ponto de vista computacional. Neste trabalho foram utilizados apenas pontos-fonte estáticos.

O MSF com pontos-fonte dinâmicos foi primeiramente proposto por Mathon e Johnston (FAIRWEATHER e KARAGEORGHIS, 1998; FAIRWEATHER et al., 2003). Os coeficientes desconhecidos e a localização dos pontos-fonte são determinados através da minimização do funcional

$$F(\beta, y) = \sum_{i=1}^Z |Bu(\beta, y; x_i)|^2 \quad (4.2)$$

onde β são os coeficientes a serem determinados, y são os pontos-fonte, x são os pontos de colocação, Z é o número total de pontos de colocação, e B é o operador que especifica as condições de contorno, as quais podem ser do tipo Dirichlet, Neumann ou Robin.

4.1 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Em termos da função delta de Dirac $\delta(x)$, uma solução fundamental $G(x, y)$ é a solução da equação não-homogênea

$$LG(x, y) = \delta(x - y_j) \quad (4.3)$$

onde L é um operador elíptico de segunda ordem em \mathfrak{R}^d e $\delta(x - y_j)$ é a função delta de Dirac.

A intuição que reside por trás da chamada *distribuição delta de Dirac* é que a mesma representa a densidade de uma grandeza concentrada em um único ponto. A função delta de Dirac pode ser vista como um funcional cujo valor é zero para qualquer $x \neq 0$ e que diverge em $x = 0$

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Em $x = 0$ tem-se uma concentração infinita de tal forma que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (4.5)$$

Considerando-se f como uma função teste contínua, tem-se a seguinte propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0) \quad (4.6)$$

Ou seja, o funcional delta de Dirac atua como um filtro, selecionando entre todos os valores possíveis de $f(x)$ seu valor no ponto $x = 0$.

O processo de determinação da solução fundamental não é fácil, e ela nem sempre pode ser encontrada. Há alguns casos simples em que é bem conhecida. Contudo, na maior parte não tem expressão explícita. Só algumas equações com coeficientes constantes têm solução fundamental conhecida (Laplace, calor, Helmholtz, elasticidade linear, entre outras), e há variações com a dimensão (1D, 2D ou 3D).

A motivação para encontrar a solução fundamental é que, uma vez determinada, é fácil achar a solução desejada da equação original. Para obter a solução fundamental de uma equação diferencial parcial, é preciso aplicar a transformada de Fourier à equação (4.3) e depois obter a solução fundamental $G(x, y)$ através da inversa da transformada de Fourier. Se a solução fundamental existe, a equação obedece à operação de convolução, a qual é denotada como

$$f * g \quad (4.7)$$

onde o asterisco (*) representa o multiplicador por convolução.

Suponha que se deseja procurar a solução de

$$Lf = g(x) \quad (4.8)$$

Aplicando o operador diferencial L à convolução, é sabido que

$$L(f * g) = (Lf) * g \quad (4.9)$$

desde que L contenha coeficientes constantes. Se f é a solução fundamental, o lado direito da equação se reduz para

$$\delta * g \quad (4.10)$$

De fato, pode-se verificar diretamente que este termo equivale a $g(x)$, uma vez que o funcional delta de Dirac atua como um elemento identidade para a convolução. Resumindo,

$$L(f * g) = (Lf) * g = \delta(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y)g(y)dy = g(x) \quad (4.11)$$

A solução fundamental $G(x, y)$ de um operador elíptico, geralmente falando, não é única. Para um mesmo operador elíptico pode haver várias representações de soluções fundamentais (VLADIMIROV, 1971; FAIRWEATHER e KARAGEORGHIS, 1998; JIN e ZHENG, 2006).

Fisicamente, a solução fundamental $G(x, y)$ pode ser interpretada como sendo a resposta no ponto x de um impulso infinitamente curto aplicado em y . Adicionalmente, função $G(x, y)$ é definida em qualquer lugar, exceto quando $x = y$, onde é singular.

A seguir são mostradas as soluções fundamentais de alguns operadores elípticos (VLADIMIROV, 1971):

- para o operador Laplace $L = \Delta$

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x - y|, & 2D \\ -\frac{1}{4\pi|x - y|}, & 3D \end{cases} \quad (4.12)$$

- para o operador Helmholtz $L = (\Delta + \kappa^2)$

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa|x-y|), & 2D \\ -\frac{e^{-i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}, & 3D \end{cases} \quad (4.13)$$

- para o operador Helmholtz modificado $L = (\Delta - \kappa^2)$

$$G(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} K_0(\kappa|x-y|), & 2D \\ -\frac{e^{-\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}, & 3D \end{cases} \quad (4.14)$$

onde x são os pontos de colocação, y são os pontos-fonte, κ são as frequências, $|x-y|$ denota a distância Euclidiana entre x e y , $H_0^{(1)}$ e K_0 são, respectivamente, a função de Hãkel do primeiro tipo de ordem zero e a função de Bessel modificada do segundo tipo de ordem zero. Para mais informações acerca das soluções fundamentais, uma boa referência é VLADIMIROV (1971).

4.2 APLICAÇÃO DO MSF AOS PROBLEMAS PROPOSTOS

4.2.1 JUSTIFICATIVA DA APROXIMAÇÃO POR FREQUÊNCIAS

Este trabalho utiliza um esquema desenvolvido por ALVES e CHEN (2005), onde um conjunto de frequências e pontos-fonte conduz a um MSF estendido, usado originalmente para aproximar uma função em um domínio com contorno e deduzir uma aproximação direta para uma solução particular da equação diferencial parcial.

A idéia deste MSF estendido consiste em modificar a equação (4.1) fazendo com que uma solução seja aproximada através de uma combinação linear de soluções fundamentais da forma

$$u(x) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \beta_{i,j} G_{\kappa_i}(x, y_j) \quad (4.15)$$

onde $\kappa_i \neq \kappa_j$ para $i \neq j$, $\{y_j\}_{j=1}^N$ são os pontos-fonte, M é o número de frequências, N é o número de pontos-fonte, $\beta_{i,j}$ são os coeficientes desconhecidos e G_{κ_i} são as soluções fundamentais.

A justificativa para aproximar a equação (4.1) na forma dada pela equação (4.15) é devido ao fato das funções

$$G_{\kappa_1}(x - y_1), \dots, G_{\kappa_M}(x - y_N)$$

serem linearmente independentes.

Para provar a justificativa acima, suponha, por contradição, que as funções $G_{\kappa}(x - y_j)$ são linearmente dependentes (ANTUNES, 2005; ALVES e CHEN, 2005), ou seja, suponha que é possível escrever $u(x) = 0$ em que os coeficientes $\beta_{i,j}$ não são todos simultaneamente nulos. Então, isso implicaria uma dependência linear até que o problema se reduza a uma frequência fixa e, tem-se

$$0 = u(x) = \sum_{j=1}^N \beta_j \delta(x - y_j) * G_{\kappa}(x - y_j) = \sum_{j=1}^N \beta_j (\delta(x - y_j) * G_{\kappa}(x - y_j))$$

Então

$$\left(\sum_{j=1}^N \beta_j \delta(x - y_j) \right) * G_{\kappa}(x - y_j) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^N \beta_j \delta(x - y_j) = 0$$

e como por hipótese os pontos y_j são distintos, então, por independência linear dos deltas de Dirac deve-se ter $\beta_j = 0$, $j = 1, \dots, N$ e, portanto, todos os coeficientes β_j deverão ser nulos, o que contradiz a hipótese da dependência linear.

4.2.2 APLICAÇÃO DA APROXIMAÇÃO POR FREQUÊNCIAS AO MSF CLÁSSICO

Nesta parte é mostrado como foi aplicado o método das soluções fundamentais modificado aos problemas propostos pelas formulações 1 e 2, os quais são dados pelas equações (3.1–3.4) e (3.5–3.8), respectivamente.

Baseado nas justificativas citadas na seção anterior e considerando a aproximação dada pela equação (4.15), podemos considerar a temperatura T como uma expansão de pontos-fonte da forma:

$$T(x) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \beta_{i,j} G_{\kappa_i}(x, y_j) \quad (4.16)$$

onde $\beta_{i,j}$ são os coeficientes desconhecidos e $G_{\kappa_i}(x, y_j)$ é a solução fundamental da equação de Helmholtz, dada por (VLADIMIROV, 1971):

$$G_{\kappa_i}(x, y_j) = \begin{cases} \frac{e^{i\kappa_i|x-y_j|}}{2i\kappa_i}, & 1D \\ \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa_i|x-y_j|), & 2D \\ -\frac{e^{-i\kappa_i|x-y_j|}}{4\pi|x-y_j|}, & 3D \end{cases} \quad (4.17)$$

onde M é o total de frequências, N é o número total de pontos-fonte, $\{y_j\}_{j=1}^N$ são os pontos-fonte distribuídos na fronteira fictícia e $\{\kappa_i\}_{i=1}^M$ são as frequências.

Esta dissertação lida apenas com casos bidimensionais da equação de Helmholtz. Portanto, neste caso a solução fundamental $G_{\kappa_i}(x, y_j)$ vale:

$$G_{\kappa_i}(x, y_j) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa_i|x-y_j|) \quad (4.18)$$

onde $H_0^{(1)}$ é a função de Hänkel de primeiro tipo de ordem zero, dada por $H_0^{(1)} = J_0 + iY_0$.

As funções J_0 e Y_0 na função de Hänkel representam as funções de Bessel de ordem zero, de primeiro e segundo tipo, respectivamente. Uma função de Bessel pode ser definida como uma representação de séries dadas por (ABRAMOWITZ e STEGUN, 1965)

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \quad (4.19)$$

onde ν representa a ordem da função e Γ é a função Gamma (ABRAMOWITZ e STEGUN, 1965), a qual se define pela integral

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx \quad (4.20)$$

e que converge para todo p quando $x \rightarrow \infty$.

A função de Bessel $Y_\nu(x)$ é dada por

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\text{sen}(\nu\pi)} \quad (4.21)$$

onde ν representa a ordem da função.

A função $J_0(x)$ converge para todo x e é analítica em $x=0$. A função $Y_0(x)$ tem uma singularidade logarítmica em $x=0$, isto é, $Y_0(x)$ se comporta como $\frac{2 \ln x}{\pi}$ quando $x \rightarrow 0$ por valores positivos. Na Fig. 4.2 pode ser visualizado o comportamento oscilatório das funções $J_0(x)$ e $Y_0(x)$.

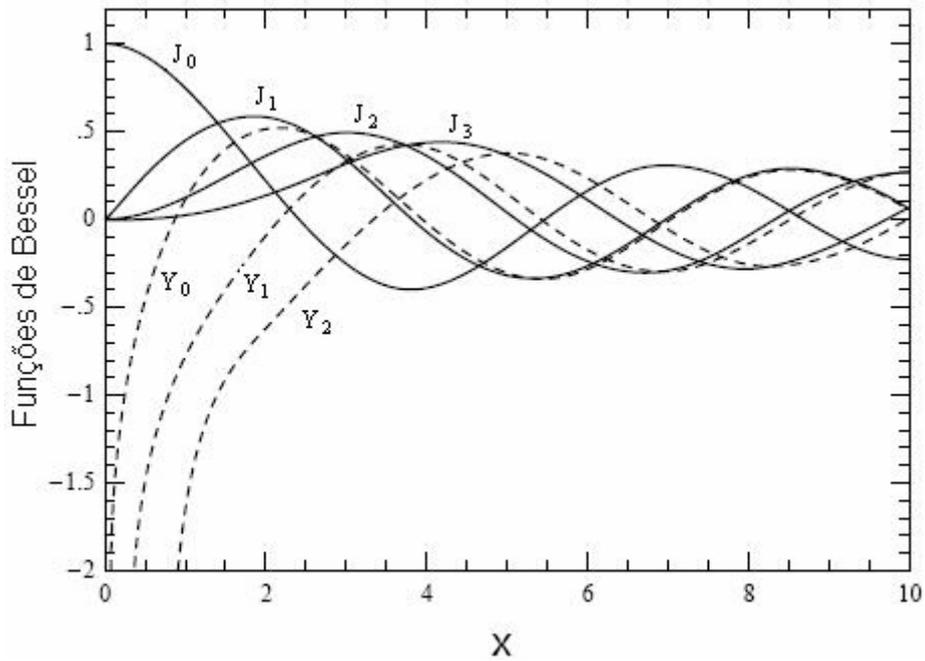


Figura 4.2 – Comportamento oscilatório de algumas funções de Bessel J_ν e Y_ν

Este comportamento pode ser previsto a partir das equações (4.19) e (4.21); na realidade, é o comportamento das soluções da equação de Bessel de ordem ν . A figura 4.2 foi adaptada de FLANNERY et al. (1992).

Aplicando a solução fundamental dada por (4.18) à equação (4.16), tem-se:

$$T(x) = \frac{i}{4} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \beta_{i,j} H_0^{(1)}(\kappa_i \|r_j\|) \quad (4.22)$$

onde κ_i representa as frequências e $\|r_j\|$ representa a distância Euclidiana entre os pontos de colocação e os pontos-fonte. Considerando (x_1, x_2) as coordenadas dos pontos de colocação e (y_1, y_2) as coordenadas dos pontos-fonte, a distância Euclidiana é representada por

$$\|r_j\| = \|x - y_j\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad (4.23)$$

Segundo ALVES e CHEN (2005), e ALVES e VALTCHEV (2005), uma vez que uma função real é aproximada, não há necessidade de se considerar a solução fundamental complexa, basta simplesmente se restringir à parte real da solução fundamental. De fato, uma vez que os resultados são baseados na função de Hänkel, $H_0^{(1)} = J_0 + iY_0$, fica claro que cada uma das partes, J_0 e Y_0 , serão usadas independentemente para aproximar a parte real e a parte complexa da solução do problema. Portanto, é suficiente usar apenas a função de Bessel

J_0 , a qual não apresenta nenhuma singularidade e é analítica para qualquer valor de x , para aproximar os valores da solução do problema. Adicionalmente, esta simplificação permite que os pontos-fonte sejam postos dentro do domínio, o que é semelhante ao Método dos Nós de Contorno (*Boundary Knot Method*) (ALVES e CHEN, 2005).

Considerando apenas as partes reais das soluções fundamentais, tem-se (ALVES e CHEN, 2005; COLAÇO et al., 2006):

$$G_{\kappa_i}(x, y_j) = \begin{cases} J_0(\kappa_i \|r_j\|), & 2D \\ \frac{\text{sen}(\kappa_i \|r_j\|)}{\|r_j\|}, & 3D \end{cases} \quad (4.24)$$

Com essa nova simplificação a equação (4.22) assume a forma:

$$T(x) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \beta_{i,j} J_0(\kappa_i \|r_j\|) \quad (4.25)$$

Para encontrar uma aproximação para o fluxo de calor (ANTUNES, 2005; COLAÇO et al., 2006), é necessário aplicar a derivada normal à equação (4.25):

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial n} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \beta_{i,j} \frac{\partial J_0(\kappa_i \|r_j\|)}{\partial n} \quad (4.26)$$

onde tem-se

$$\frac{\partial J_0(\kappa_i \|r_j\|)}{\partial n} = -J_1(\kappa_i \|r_j\|) \quad (4.27)$$

pelo que se obtém

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial n} = -\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{r_j}{\|r_j\|} \kappa_i \beta_{i,j} J_1(\kappa_i \|r_j\|) \quad (4.28)$$

e impondo o vetor normal a cada ponto de colocação $x \in \partial\Omega$, a equação final do fluxo de calor tem a forma:

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial n} = -\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_j}{\|r_j\|} \kappa_i \beta_{i,j} J_1(\kappa_i \|r_j\|) \quad (4.29)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal com norma unitária que aponta para o exterior do domínio, r_j representa as coordenadas cartesianas das distâncias entre os pontos de colocação e os pontos-fonte, e J_1 é a função de Bessel do primeiro tipo de segunda ordem.

O próximo passo a ser dado é adaptar as equações (4.25) e (4.29) às condições de contorno dos problemas dados pelas formulações 1 e 2 por meio de colocação. Assim, tem-se:

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \beta_{i,j} J_0(\kappa_i \|r_j\|) = T_0(x, y) \quad (4.30)$$

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_j}{\|r_j\|} \kappa_i \beta_{i,j} J_1(\kappa_i \|r_j\|) = \frac{q_{medido}(x, y)}{K} \quad (4.31)$$

onde K é a condutividade térmica da placa, T_0 e q_{medido} são as temperaturas e os fluxos de calor, respectivamente, medidos nos pontos de colocação situados no contorno considerado, de acordo com a condição de contorno do problema considerado. Assim, cada lado terá de 1 a 2 equações. Por exemplo, considere o problema dado pela Formulação 2. Pela equação (3.6) sabe-se que em $x = 0$ a fronteira possui temperatura prescrita T_E . Portanto, cada ponto de colocação considerado naquele lado será representado pela equação

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \beta_{i,j} J_0(\kappa_i \|r_j\|) = T_E(y) \quad (4.32)$$

Considere agora a superfície em $y = 0$, cuja condição de contorno é dada pela equação (3.8). Nesta parte não há fluxo de calor, a parede é adiabática. Portanto, cada ponto de colocação considerado nesta parede será representado pela equação

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_j}{\|r_j\|} \kappa_i \beta_{i,j} J_1(\kappa_i \|r_j\|) = 0 \quad (4.33)$$

Para os outros lados pode-se obter sua aproximação de acordo com as regras estabelecidas, devendo ser observado que, para os casos onde há troca de calor por convecção, cada ponto de colocação será representado por duas equações: uma para a temperatura e a outra para o fluxo de calor.

Todos os pontos de colocação geram um conjunto de equações que podem ser representadas matricialmente por

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b} \quad (4.34)$$

Onde \mathbf{A} é a matriz de interpolação, $\boldsymbol{\beta}$ é um vetor que possui os coeficientes a serem determinados e \mathbf{b} é o vetor dos dados das respectivas equações (lados direito das equações (4.30) ou (4.31)). A matriz \mathbf{A} tem dimensões $p \times (M \times N)$, onde p é o total de equações, M é o total de frequências e N é o total de pontos-fonte. O vetor $\boldsymbol{\beta}$ tem tamanho $M \times N$, e o vetor \mathbf{b} tem dimensão p .

Uma vez que o número de linhas é menor que o número de colunas, o sistema linear dado pela equação (4.34) será resolvido por mínimos quadrados, dado por

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (4.35)$$

A matriz resultante da equação (4.34) é altamente mal-condicionada. Uma solução acurada e estável é importante para obtermos resultados numéricos fisicamente aceitáveis.

Depois que os valores de $\boldsymbol{\beta}$ são encontrados, para achar os valores das temperaturas ou dos fluxos de calor em qualquer parte do contorno, basta substituir os valores de $\boldsymbol{\beta}$ nas equações (4.25) e (4.29). A aproximação funcional dada por (4.16) é consistente no senso de que ela não só aproxima a solução exata do problema nos contornos, como também no interior do domínio, bastando apenas substituir os valores de x nas equações (4.25) e (4.29) pelos valores das coordenadas do domínio.

4.3 PROBLEMA INVERSO

Em muitos problemas de engenharia as condições de contorno são incompletas, ou seja, em algumas partes do contorno há informações acerca de suas condições de contorno, noutras partes do contorno não há informações algumas a respeito das condições de contorno, ou a solução é prescrita somente em alguns pontos do interior do domínio. Estes são os chamados problemas inversos, e é bem conhecido que são sabidamente mal-postos, ou seja, a existência, a unicidade e a estabilidade de suas soluções não são sempre garantidas (ALIFANOV, 1994; COLAÇO, 1998; OZISIK e ORLANDE, 2000).

As técnicas de problemas inversos visam à estimativa de parâmetros ou funções desconhecidas. No caso desta dissertação, serão estimadas as formas funcionais do coeficiente de troca de calor por convecção via o MSF.

Pode-se verificar que não se conhece os dados do contorno em $x = L$ em ambos os problemas dados pelas formulações citadas anteriormente. Tem-se um problema de Cauchy onde um dos contornos não tem condição de contorno conhecida.

Para a resolução do problema inverso via o MSF, deve-se primeiramente distribuir os pontos de colocação apenas nos contornos onde suas condições de contornos sejam conhecidas. Portanto, na figura 4.3 pode ser esquematizado como fica a distribuição dos pontos de colocação nos problemas dados por ambas as formulações.

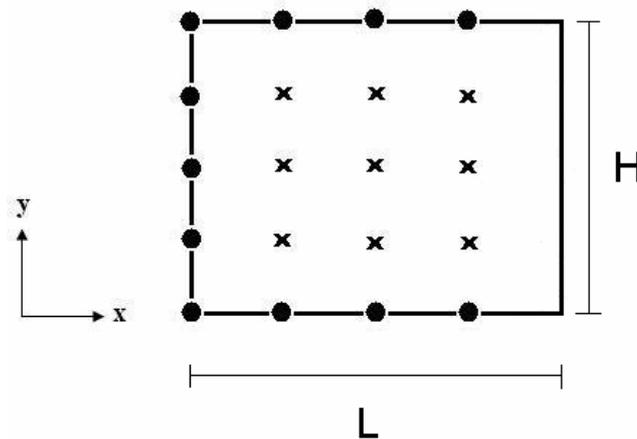


Figura 4.3 – Esquematização da distribuição dos pontos de colocação (círculo) e pontos-fonte (cruz) em um problema inverso não-intrusivo

A próxima etapa consiste em calcular os coeficientes desconhecidos do conjunto de equações que forma o sistema linear dado pela equação (4.34). Após calcular os valores de β , para encontrar os valores das temperaturas e fluxos de calor na parede desconhecida basta substituir β nas equações (4.25) e (4.29).

A fim de estimar o coeficiente de transferência de calor por convecção na parede onde a condição de contorno é desconhecida, é necessário substituir cada valor de temperatura e fluxo de calor, encontrados em seus respectivos pontos de colocação, na seguinte equação:

$$h_R = -K \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{(T - T_R)} \quad (4.36)$$

ou

$$h_R = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_j\|} \kappa_i \beta_{i,j} J_1(\kappa_i \|\mathbf{r}_j\|) \times \frac{K}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (\beta_{i,j} J_0(\kappa_i \|\mathbf{r}_j\|) - T_R)} \quad (4.37)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário, K é a condutividade térmica da placa e T_R é a temperatura ambiente no lado direito da placa.

5 TÉCNICA DE REGULARIZAÇÃO

Nesta seção serão descritos os esquemas numéricos para a regularização do conjunto de equações geradas pelo método, ou seja, será abordado o uso do método das soluções fundamentais em conjunto com o método do mínimo residual generalizado (GMRES) ou com o método das decomposições dos valores singulares (SVD).

Uma dificuldade inerente ao MSF resulta do fato de que o número de condição da matriz de interpolação é muito grande (JIN e ZHENG, 2006). O MSF pode ser visto como uma equação da integral de Fredholm do primeiro tipo (JIN e ZHENG, 2006), a qual é extremamente mal-posta, de acordo com a teoria das equações da integral (JIN e ZHENG, 2006). Consequentemente, como uma aproximação para o operador da integral, a matriz de interpolação é altamente mal-condicionada. Quando se lida com problemas diretos isso não representa um grande problema, visto que os dados de entrada conhecidos são exatos. Métodos bem estabelecidos, tais como o método LU, a eliminação de Gauss e o método dos mínimos quadrados produzem resultados acurados.

Entretanto, para os problemas inversos o fato da matriz de interpolação ser altamente mal-condicionada representa uma grande desvantagem. O agravante é o fato de que os dados experimentais para os problemas inversos são contaminados com erros de medição. Por esse motivo, os métodos clássicos falham em sua tarefa de gerar resultados acurados. Muitos métodos numéricos para tratar os problemas mal-postos procuram contornar o problema através da troca da matriz \mathbf{A} (geralmente com um número condicional grande) por outra matriz bem-condicionada cuja solução se aproxima da solução requerida. Dentre os métodos existentes para resolver o sistema de equações de maneira estável tem-se os métodos de regularização, por exemplo, o método da regularização de Tikhonov, ou o método da decomposição truncada dos valores singulares (TSVD), em conjunto com métodos para a escolha do parâmetro de regularização, tais como o método curva L e o método do princípio da discrepância. O método da decomposição dos valores singulares e o método dos mínimos residuais generalizados (GMRES) são outros exemplos de métodos indicados para atenuar o mal-condicionamento da matriz de interpolação.

5.1 GMRES

O GMRES é um método iterativo desenvolvido por Saad e Schultz (1986) utilizado na solução de sistemas de equações lineares de grande porte, esparsas e não simétricas (GOLUB e VAN LOAN, 2000).

Seja um sistema de equações lineares dada por $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. O método iterativo GMRES tem como objetivo minimizar $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_{L=2}$, ou seja, minimizar a norma do sistema através de

$$S_m = x_0 + \text{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{m-1}r_0\} = x_0 + K_v(A, r_0, m) \quad (5.1)$$

onde K_v representa o subespaço de Krilov, m é a dimensão do subespaço e $r_0 = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0$.

A idéia chave atrás deste algoritmo consiste em expressar x_m em termos de vetores do tipo Arnoldi, ou seja, o método GMRES procura um vetor do subespaço de Krilov de tal forma que a norma do resíduo seja mínima.

Após m etapas da iteração Arnoldi é feita a fatorização

$$AQ_m = Q_{m+1}\tilde{H}_m \quad (5.2)$$

onde as colunas de $Q_{m+1} = [Q_m q_{m+1}]$ são os vetores ortonormais de Arnoldi e

$$\tilde{H}_m = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & \cdots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & \cdots & h_{2m} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & h_{m,m-1} & h_{mm} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{m+1,m} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(m+1) \times m} \quad (5.3)$$

é a matriz superior de Hessenberg. Após a m -ésima etapa do GMRES, $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_m\|_{L=2}$ é minimizado sujeito à condição de que x_m tenha a forma $x_m = x_0 + Q_m y_m$ para algum $y_m \in \mathfrak{R}^m$. Se $q_1 = r_0 / \rho_0$, onde $\rho_0 = \|r_0\|_2$, segue-se que

$$\begin{aligned}
\|b - A(x_0 + Q_m y_m)\|_2 &= \|r_0 - A Q_m y_m\|_2 \\
&= \|r_0 - Q_{m+1} \tilde{H}_m y_m\|_2 \\
&= \|\rho_0 e_1 - \tilde{H}_m y_m\|_2
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Assim, y_m é a solução para um problema dos mínimos quadrados do tipo $(m+1)$ por m e a iteração do GMRES é dada por $x_m = x_0 + Q_m y_m$.

Uma maneira de melhorar este método é fazer uso dos pré-condicionadores. Um método pré-condicionado consiste na substituição do sistema linear

$$Ax = b \tag{5.5}$$

pelo sistema pré-condicionado

$$\tilde{A}x = \tilde{b} \tag{5.6}$$

onde $\tilde{A} = CA$, $\tilde{b} = Cb$, sendo C uma matriz inversível. A Idéia do pré-condicionamento é obter um sistema equivalente com uma matriz melhor condicionada que a matriz original. O método aqui proposto faz uso do pré-condicionador de Jacobi.

O algoritmo computacional contendo o método GMRES usado por esta dissertação foi obtido de FLANNERY et al. (1992).

5.2 SVD

A decomposição dos valores singulares (*Singular Value Decomposition*, SVD) consiste em decompor uma matriz A como o produto de uma matriz-coluna ortogonal U , uma matriz diagonal $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$, e a matriz ortogonal transposta V (FLANNERY et al., 1992; JIN e ZHENG, 2006; JIN e MARIN, 2007; WEI et al., 2007). Ou seja, a matriz A pode ser decomposta como

$$A = UDV^T \tag{5.7}$$

Usando (5.7), o sistema linear de equações dado por $Ax = b$ pode ser resolvido da seguinte maneira

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \quad (5.8)$$

onde \mathbf{u}_i e \mathbf{v}_i são os elementos das matrizes \mathbf{U} e \mathbf{V} , respectivamente, e n é o posto da matriz.

Tipicamente, o mal-condicionamento de \mathbf{A} se manifesta com a presença de pequenos valores singulares de \mathbf{A} . Uma medida conveniente do grau de condicionamento da matriz de interpolação é o número de condição, definido como

$$\text{Cond} = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \quad (5.9)$$

onde σ_1 e σ_n representam o maior e menor valor singular da matriz \mathbf{A} , respectivamente.

Assim como no caso do método GMRES, o algoritmo computacional contendo o método SVD usado por esta dissertação foi obtido de FLANNERY et al. (1992).

6 ALGORITMO COMPUTACIONAL

Nesta seção serão mostrados os passos para a resolução do problema inverso via o MSF.

Foram criados 2 programas: um para o problema direto via diferenças finitas, o qual fornece os dados simulados dos problemas descritos pelas Formulações 1 e 2, e um programa para o problema inverso via o MSF. Nesta seção pretende-se mostrar apenas o passo-a-passo para o problema inverso via o MSF.

Para a resolução do problema inverso via o MSF, segue-se as seguintes etapas:

- definir o total de pontos de colocação, pontos-fonte e frequências;
- definir as dimensões da placa em estudo;
- colocar cada ponto de colocação e cada ponto-fonte em uma coordenada específica;
- calcular as distâncias entre os pontos de colocação e os pontos-fonte;
- calcular os valores dos elementos da matriz de interpolação \mathbf{A} da equação (4.34);
- ler os dados dos pontos de colocação obtidos através do problema direto (lado direito da equação (4.34));
- empregar as rotinas dos métodos GMRES ou SVD para resolver o sistema linear resultante e calcular os valores dos coeficientes indeterminados β ;

Após determinar o valor dos coeficientes indeterminados β , pode se calcular a temperatura ou o fluxo de calor em qualquer parte da placa através da substituição dos valores de β nas equações (4.25) e (4.29), respectivamente.

Pode-se verificar que o método das soluções fundamentais é de fácil implementação computacional.

7 RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos obtidos tanto para o problema direto por diferenças finitas quanto para o problema inverso via o método das soluções fundamentais. Primeiramente serão definidas as formas funcionais que os coeficientes desconhecidos de transferência de calor por convecção assumirão. Resolveu-se validar o problema direto por diferenças finitas através de uma comparação com a solução analítica obtida para o caso cujo coeficiente de transferência de calor possui forma funcional constante. Além disso, fez-se uma comparação entre os dados obtidos do problema direto utilizando o método das diferenças finitas e os dados obtidos do problema direto através do método das soluções fundamentais. Em seguida são apresentados os resultados numéricos da solução do problema inverso via o método das soluções fundamentais, cujas medidas experimentais simuladas foram obtidas através do método direto por diferenças finitas.

Cabe ainda ressaltar que todos os resultados impressos aqui foram obtidos através de um computador Pentium® 4 CPU de 2,40 GHZ e 512 MB de memória. O compilador utilizado foi o Visual Fortran versão 6.0.

7.1 FORMAS FUNCIONAIS DO COEFICIENTE DE CONVECÇÃO

Neste trabalho, supõe-se que o coeficiente de troca de calor por convecção, h_R , satisfaz as formas funcionais mostradas nas subseções a seguir.

7.1.1 CONSTANTE

Neste caso, h_R possui valor constante em toda a altura H da placa.

$$h_R(y) = h_{máx} \quad \text{para } 0 \leq y \leq H \quad (7.1)$$

onde $h_{máx}$ é o valor máximo assumido para o coeficiente de transferência de calor.

7.1.2 PARABÓLICA

Assume-se que o coeficiente de transferência de calor por convecção tem uma forma funcional parabólica dada pelo polinômio

$$h_R(y) = ay^2 + by + c \quad (7.2)$$

onde as constantes a , b e c serão determinadas em função da dimensão da placa e dos valores máximos e mínimos que se deseja para o coeficiente de transferência de calor por convecção.

7.1.3 QUADRADA

A forma funcional quadrada apresenta descontinuidades na função, as quais são mais difíceis de serem estimadas com a solução do problema inverso. Matematicamente, ela pode ser representada por

$$h_R(y) = \begin{cases} 0 & \text{para } y < \frac{H}{3} \\ h_{m\acute{a}x} & \text{para } \frac{H}{3} \leq y \leq \frac{2H}{3} \\ 0 & \text{para } y > \frac{2H}{3} \end{cases} \quad (7.3)$$

onde H é o valor da altura da placa em estudo e $h_{m\acute{a}x}$ é o valor máximo que se deseja para a função.

7.1.4 TRIANGULAR

Assim como no caso da função quadrado, a forma funcional triangular é difícil de ser estimada, já que representa uma função com descontinuidade na primeira derivada. Matematicamente, ela é representada por

$$h_R(y) = \begin{cases} 0 & \text{para } y < \frac{H}{3} \\ \left(\frac{y - \frac{H}{3}}{\frac{H}{2} - \frac{H}{3}} \right) \times h_{m\acute{a}x} & \text{para } \frac{H}{3} \leq y \leq \frac{H}{2} \\ \left(\frac{\frac{2H}{3} - y}{\frac{2H}{3} - \frac{H}{2}} \right) \times h_{m\acute{a}x} & \text{para } \frac{H}{2} < y \leq \frac{2H}{3} \\ 0 & \text{para } \frac{2H}{3} < y \leq H \end{cases} \quad (7.4)$$

onde H é o valor da altura da placa em estudo e $h_{m\acute{a}x}$ é o valor máximo que se deseja para a função.

7.1.5 DEGRAU

A forma funcional degrau é matematicamente representada por

$$h_R(y) = \begin{cases} 0 & \text{para } y \leq \frac{H}{2} \\ h_{m\acute{a}x} & \text{para } y > \frac{H}{2} \end{cases} \quad (7.5)$$

onde H é a altura da placa do problema proposto.

7.1.6 LINEAR

Na forma funcional linear, assume-se que o coeficiente de transferência de calor por convecção seja representado matematicamente por

$$h_R(y) = \left(\frac{y-1}{H-1} \right) \times h_{m\acute{a}x} \quad \text{para } 0 \leq y \leq H \quad (7.6)$$

7.2 PROBLEMA DIRETO

7.2.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA x DIFERENÇAS FINITAS

Antes de prosseguir com a solução do problema inverso, é necessário validar a solução do problema direto pelo método numérico de diferenças finitas. Inicialmente, tal solução é comparada com a solução analítica para o caso com coeficiente de transferência de calor cuja forma funcional é constante. Nesta seção serão considerados somente os problemas dados pela formulação 1.

Considere um material com dimensões quadradas onde os lados medem 1 metro de largura. Assume-se que os coeficientes de transferência de calor h_L e h_R valem, respectivamente, 20.0 e 40.0 $\frac{W}{m^2C}$. A condutividade térmica do material é constante e vale 54.0 $\frac{W}{m^{\circ}C}$.

Uma vez que em $y = 0$ e $y = H$ as paredes são isoladas, pode-se considerar o problema como sendo unidimensional, cuja solução analítica obtida pelo princípio da superposição é dada por

$$T_A(x) = \left[\frac{H_R T_R + H_L (H_R T_L L + T_L)}{H_L + H_R + H_R H_L L} \right] \cdot [1 + H_L x] - H_L T_L x + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m \cos \lambda_m x + H_L \sin \lambda_m x}{\left[(\lambda_m^2 + H_L^2) \cdot \left(L + \frac{H_R}{\lambda_m^2 + H_R^2} \right) + H_L \right]} \cdot \left[\frac{\lambda_m \sin \lambda_m L - H_L \cos \lambda_m L + H_L}{\lambda_m} \right] \quad (7.7)$$

onde $H_L = \frac{h_L}{K}$, $H_R = \frac{h_R}{K}$, K é a condutividade térmica do material, h_L e h_R são os coeficientes de troca de calor em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente, L é a largura do material, T_L é a temperatura ambiente em $x = 0$ e λ_m são os autovalores, os quais são obtidos resolvendo-se a seguinte equação transcendental:

$$\tan \lambda_m L = \frac{\lambda_m (H_L + H_R)}{\lambda_m^2 - H_L H_R} \quad (7.8)$$

O problema direto foi então resolvido por diferenças finitas e os resultados obtidos comparados com a solução analítica. Na tabela 7.1 são apresentados os erros relativos percentuais da solução numérica por diferenças finitas em relação à solução analítica.

Tabela 7.1 – Erros relativos percentuais entre a solução numérica e a solução analítica

Malha	Coordenadas X e Y				
	X = 0.1m	x = 0.3m	x = 0.5m	x = 0.7m	x = 0.9m
	Y = 0.2m	y = 0.6m	y = 0.9m	y = 0.5m	y = 0.1m
10x10	0.84837	0.66930	0.45361	0.18694	0.18350
20x20	0.84837	0.66930	0.45580	0.18641	0.18350
40x40	0.84747	0.66930	0.45361	0.18694	0.18350
80x80	0.84747	0.66739	0.45749	0.18534	0.18579

Verifica-se pela tabela 7.1 que a solução numérica apresenta erros relativos da ordem de 0.18 - 0.85 %, sendo que os menores erros se encontram em distâncias afastadas de $x = 0$. Também pode ser visto na tabela 7.1 que um aumento no tamanho da malha para acima de 20x20 não apresenta uma queda significativa nos erros, uma vez que em diferentes coordenadas as malhas 10x10 e 40x40 apresentam praticamente os mesmos erros relativos. Cabe ainda ressaltar que para a solução analítica foram usados 115 autovalores.

Nas figuras 7.1 e 7.2 podem ser vistas as isolinhas de temperaturas para o caso analítico e numérico (malha 10x10), respectivamente.

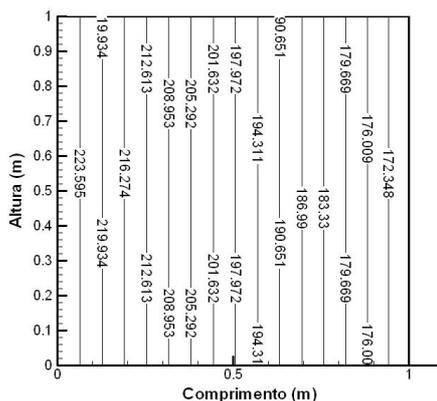


Figura 7.1 – Solução analítica

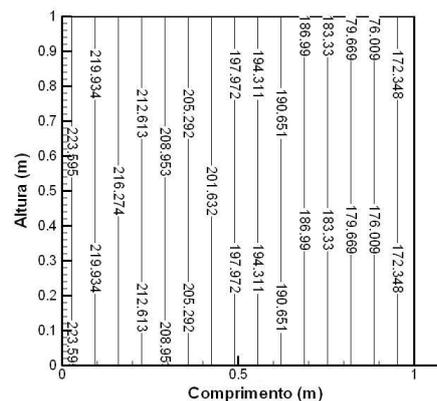


Figura 7.2 – Solução numérica

Observa-se nas figuras 7.1 e 7.2 que há uma boa concordância entre as isolinhas para ambos os casos. Portanto, pode se concluir que o método numérico por diferenças finitas obtida para este problema pode ser usado para representar o fenômeno de transferência de calor no material considerado.

7.2.2 DIFERENÇAS FINITAS x MSF

Também se resolveu validar a solução do problema direto por diferenças finitas através de uma comparação com os resultados obtidos de um problema direto com o uso do método das soluções fundamentais. Portanto, foram comparadas as temperaturas nos contornos da placa, obtidas através do método direto por diferenças finitas (MDF), com as temperaturas obtidas nos contornos da placa em um problema direto usando o método das soluções fundamentais. Foram consideradas na resolução do problema cada uma das formas funcionais citadas na seção 7.1.

Os dados simulados para o problema direto que foram usados no MSF foram obtidos através do problema direto por diferenças finitas, onde foi usada uma aproximação de segunda ordem para todas as derivadas. O sistema resultante do processo de discretização foi resolvido através do método de Gauss-Seidel com sobre-relaxação (SOR), o qual resulta num menor número de iterações. Para a escolha do fator de sobre-relaxação ω para o método de Gauss-Seidel com SOR foram utilizados os seguintes dados para o problema dado pela formulação 2:

$$\begin{aligned} H &= 0.20m & L &= 0.05m \\ T_E &= 300.0 \text{ }^\circ\text{C} & T_R &= 20.0 \text{ }^\circ\text{C} \\ K &= 54.0 \frac{W}{m^\circ\text{C}} & h_{m\acute{a}x} &= 120.0 \frac{W}{m^2 \text{ }^\circ\text{C}} \end{aligned}$$

Utilizou-se uma malha grosseira de 10x10 elementos e uma tolerância de 10^{-10} para um critério relativo de convergência no método de Gauss-Seidel com SOR. A evolução do número de iterações com a variação do coeficiente de sobre-relaxação ω para o problema direto por diferenças finitas pode ser observado na tabela 7.2.

Tabela 7.2 – Total de iterações em função do fator de sobre-relaxação ω

ω	Iterações
1.00	651
1.10	539
1.20	443
1.30	347
1.40	283
1.50	216
1.60	158
1.70	85
1.80	88
1.90	179

Pela tabela 7.2, verifica-se que o melhor valor do fator de sobre-relaxação para este caso corresponde a $\omega = 1.70$, uma vez que o número de iterações é menor. Foi observado que, para os problemas dados pela formulação 1, o valor do fator de sobre-relaxação que apresenta o menor número de iterações também vale $\omega = 1.70$.

Para a resolução do problema direto via o MSF, seguem-se os mesmos passos explicados na seção 4.2, com exceção de que haverá pontos de colocação em todas as partes do contorno, ao invés de se ter pontos de colocação em somente algumas partes do contorno, como no caso do problema inverso. Esquemáticamente, a distribuição dos pontos de colocação e dos pontos-fonte pode ser mostrada na figura 7.3:

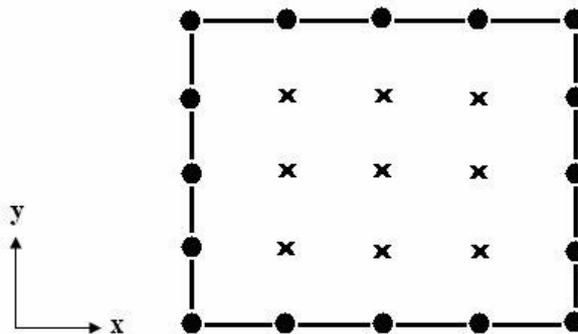


Figura 7.3 – Esquemática da distribuição dos pontos de colocação (círculo) e pontos-fonte (cruz) em um problema direto via o MSF

Antes de prosseguir com a resolução do problema direto via o MSF, é necessário definir um critério de parada. O critério de parada será baseado no erro médio quadrado das temperaturas, o qual é dado por

$$E(T) = \sqrt{\frac{1}{Z} \sum_{i=1}^Z (T_i - T_i^a)^2} \quad (7.9)$$

onde Z é o número do total de pontos de colocação, T_i são as temperaturas aproximadas obtidas através do problema direto via o método numérico das diferenças finitas, e T_i^a são as temperaturas aproximadas obtidas através do método das soluções fundamentais.

As frequências κ nas equações (4.25) e (4.29) variam unitariamente de 1 até 40. A melhor frequência é aquela que minimiza o erro médio quadrado dado pela equação (7.9). Deve-se variar as frequências no programa computacional até que o erro seja minimizado.

Para a resolução do sistema linear de equações que é formado, diferentes métodos podem ser usados, tais como o método LU, a eliminação de Gauss, o método SVD, a regularização de Tikhonov, entre outros. Tal justificativa se dá pelo fato de que nos problemas diretos os dados são exatos, sem erros.

Nas seções seguintes são exibidos os resultados encontrados para cada uma das formas funcionais citadas anteriormente, considerando somente o problema direto dado pela formulação 1. Deve-se destacar que foi usado o método no mínimo residual generalizado (GMRES) para a resolução do sistema de equações lineares dadas pela equação (4.34). Além disso, foram usados 36 pontos de colocação e 64 pontos-fonte igualmente distribuídos no contorno e no interior do domínio, respectivamente.

Antes de se prosseguir com o problema direto nas seções seguintes, é necessário definir algumas das propriedades termofísicas conhecidas e dimensões da placa que serão utilizadas pelas equações dadas pela formulação 1:

- $H = 0.20m$
- $L = 0.05m$
- $T_L = 300.0^\circ C$
- $T_R = 20.0^\circ C$
- $K = 54.0 \frac{W}{m^\circ C}$

- $h_L = 40.0 \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ C}$
- $h_{m\acute{a}x} = 120.0 \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ C}$

onde $h_{m\acute{a}x}$ é o valor máximo que terão cada uma das funções das formas funcionais definidas na seção 7.1.

Cabe ainda ressaltar que para os resultados obtidos nas seções quaternárias a seguir foram usadas apenas as temperaturas encontradas em cada ponto de colocação distribuídos no contorno do problema dado pela formulação 1. Ou seja, foram desprezados os fluxos de calor encontrados em cada ponto de colocação durante a determinação dos coeficientes desconhecidos β .

7.2.2.1 DIFERENÇAS FINITAS x MSF – FUNÇÃO CONSTANTE

Na figura 7.4 tem-se uma visualização da variação do desvio dos erros médios quadrados em função das frequências:

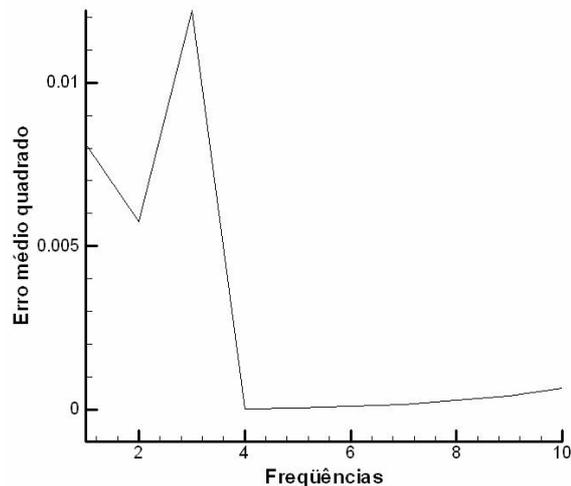


Figura 7.4 – Evolução do erro em função das frequências – Função constante

Neste caso pode-se verificar que o menor erro médio quadrado encontra-se para o valor de frequências $M = 4$, e que o erro cresce para valores maiores que 4. Portanto, não foi necessário verificar o erro médio quadrado para valores de frequências maiores que 10. Para

$M = 4$, o valor do erro médio quadrado encontrado foi de $E(T) = 1.699 \times 10^{-05}$ e o tempo computacional gasto para a resolução do problema foi de 0.1875 segundos.

Na figura 7.5 tem-se uma comparação das temperaturas obtidas para a resolução do problema direto tanto através do método das diferenças finitas quanto através do método das soluções fundamentais. É necessário dizer que a figura 7.5 representa as temperaturas em cada ponto de colocação situado nas 4 paredes do contorno. As temperaturas são dadas em graus Celsius.

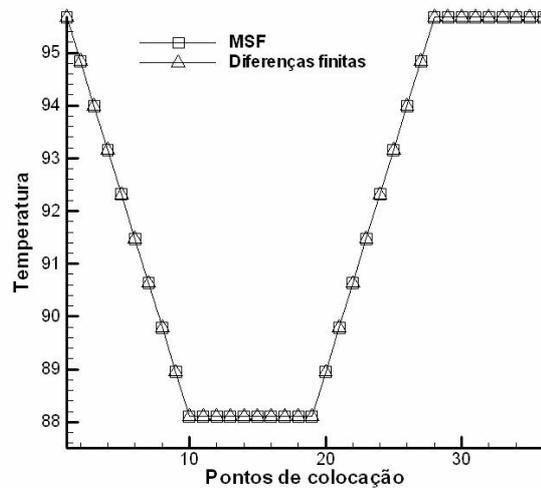


Figura 7.5 – Temperatura nos contornos – Função constante

Na figura 7.5, os pontos de colocação numerados de 1 a 10 representam os pontos situados em $y = 0$, os pontos de colocação numerados de 11 a 19 representam os pontos de colocação situados na parede em $x = L$, os pontos de colocação numerados de 20 a 27 representam os pontos situados em $y = H$, e os pontos de colocação restantes representam as temperaturas em $x = 0$. Nota-se a precisão com que a temperatura foi obtida através do problema direto via o método das soluções fundamentais. Além disso, verifica-se que em $x = 0$ e $x = L$ as temperaturas são constantes, embora o problema dado pela formulação 1 tenha troca de calor por convecção nestas coordenadas.

A comparação das temperaturas em função das isolinhas de temperatura pode ser visualizada nas figuras 7.6 e 7.7. Elas foram configuradas de forma que tivessem a mesma escala de temperatura.

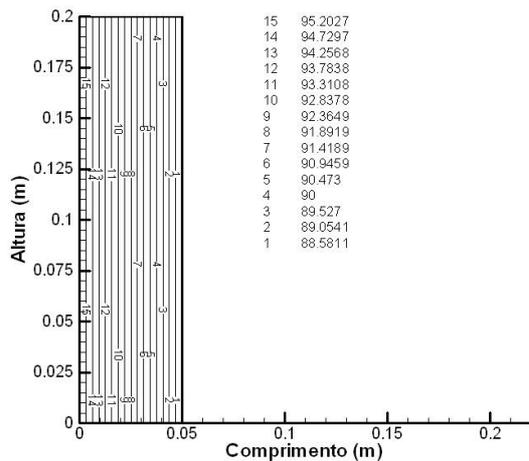


Figura 7.6 – Temperatura – h_R constante – MDF

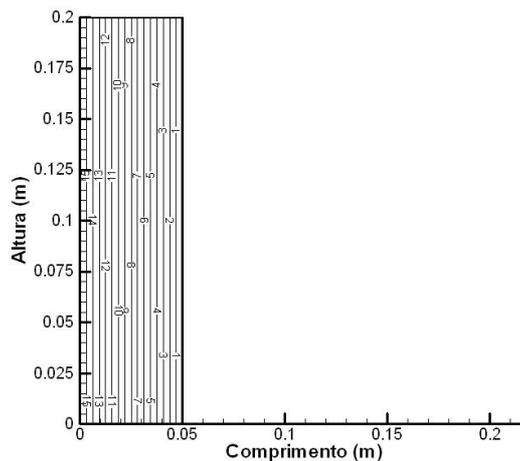


Figura 7.7 – Temperatura – h_R constante – MSF

Observa-se a excelente concordância entre as temperaturas obtidas tanto em função do método das soluções fundamentais, quanto em função do método das diferenças finitas (MDF).

7.2.2.2 DIFERENÇAS FINITAS x MSF – FUNÇÃO PARABÓLICA

O gráfico do desvio do erro médio quadrado em função das frequências para a forma funcional parabólica é mostrado na figura 7.8.

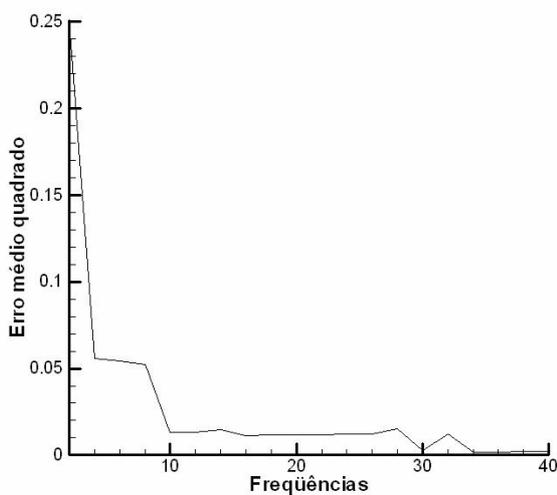


Figura 7.8 – Evolução do erro em função das frequências – Função parabólica

Pode-se observar que o erro decai conforme o número de frequências aumenta, sendo que o menor erro foi obtido para um total de frequências $M = 34$, cujo erro médio quadrado foi de $E(T) = 1.801 \times 10^{-03}$, um valor baixo. O tempo computacional gasto neste processo foi de aproximadamente 52 segundos. A seguir pode-se visualizar as temperaturas em cada contorno obtidas por cada um dos métodos (em graus Celsius):

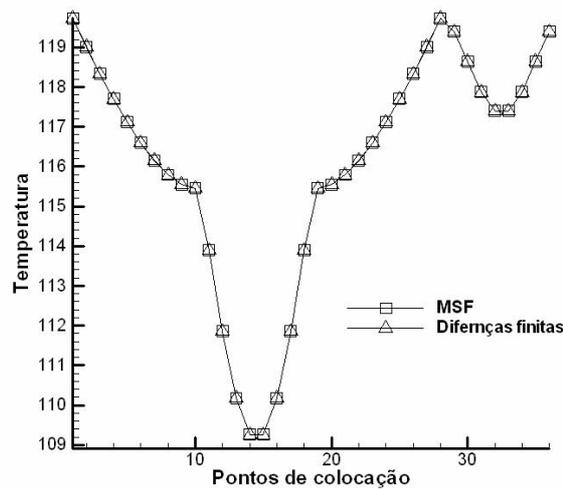


Figura 7.9 – Temperatura nos contornos – Função parabólica

Na figura 7.9, os pontos de colocação numerados de 1 a 10 representam os pontos situados em $y = 0$, os pontos de colocação numerados de 11 a 19 representam os pontos de colocação situados na parede em $x = L$, os pontos de colocação numerados de 20 a 27 representam os pontos situados em $y = H$, e os pontos de colocação restantes representam as temperaturas em $x = 0$. Observa-se a excelente concordância entre as temperaturas obtidas por cada um dos métodos.

As temperaturas em função das isolinhas de temperatura podem ser visualizadas nas figuras 7.10 e 7.11.

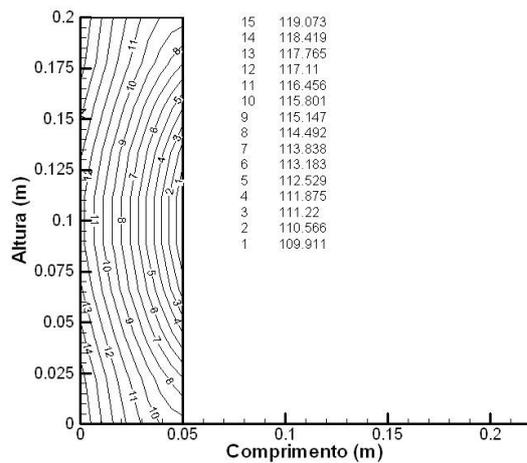


Figura 7.10 – Temperatura – h_R parabólico – MDF

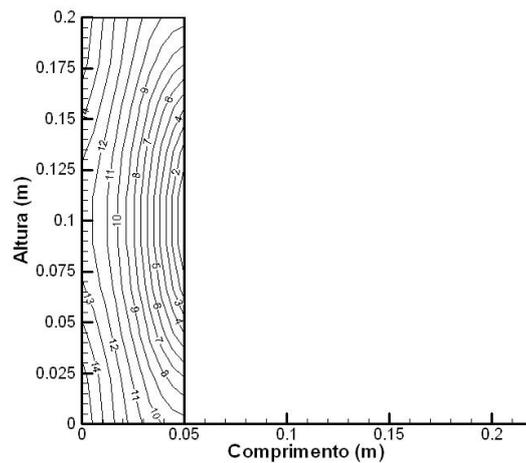


Figura 7.11 – Temperatura – h_R parabólico – MSF

Visualizando as figuras 7.10 e 7.11 verifica-se que o método das soluções fundamentais foi capaz de capturar o formato das isolinhas de temperatura em um problema onde o coeficiente de transferência de calor em $x = L$ apresenta forma funcional parabólica. Os gráficos foram configurados de modo que cada um deles tivesse a mesma escala de temperatura. Observa-se uma pequena discrepância entre as isolinhas de temperaturas obtidas para ambos os métodos.

7.2.2.3 DIFERENÇAS FINITAS x MSF – FUNÇÃO QUADRADA

O gráfico para o desvio do erro médio quadrado obtido quando se usa a forma funcional quadrada é mostrado na figura 7.12

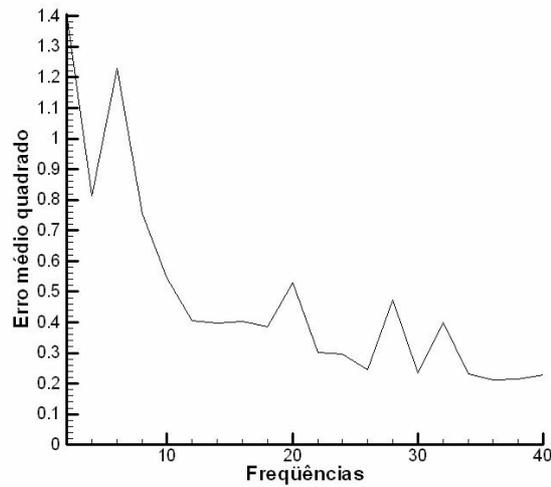


Figura 7.12 – Evolução do erro em função das frequências – Função quadrado

O menor erro foi obtido para um total de frequências $M = 36$, cujo erro médio quadrado vale $E(T) = 0.2120$. O tempo computacional gasto foi de 289 segundos.

Também foi verificada uma excelente concordância de temperaturas, conforme visto na figura 7.13, cuja temperatura é dada em graus Celsius:

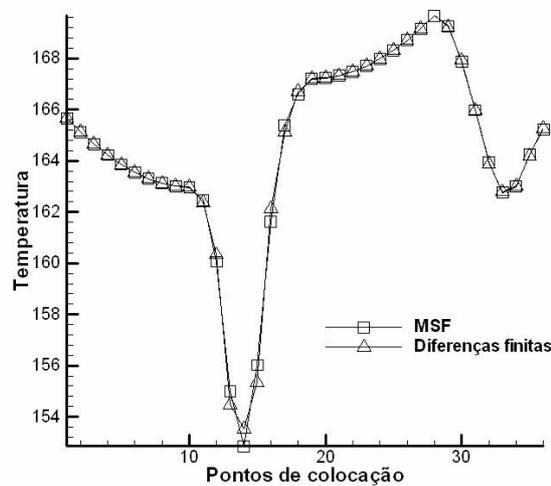


Figura 7.13 – Temperaturas nos contornos – Função quadrado

Na figura 7.13, os pontos de colocação numerados de 1 a 10 representam os pontos situados em $y = 0$, os pontos de colocação numerados de 11 a 19 representam os pontos de colocação situados na parede em $x = L$, os pontos de colocação numerados de 20 a 27 representam os pontos situados em $y = H$, e os pontos de colocação restantes representam as

temperaturas em $x = 0$. As temperaturas em função das isolinhas podem ser visualizadas nas figuras 7.14 e 7.15, onde nota-se que elas foram configuradas de forma que tivessem a mesma escala de temperatura.

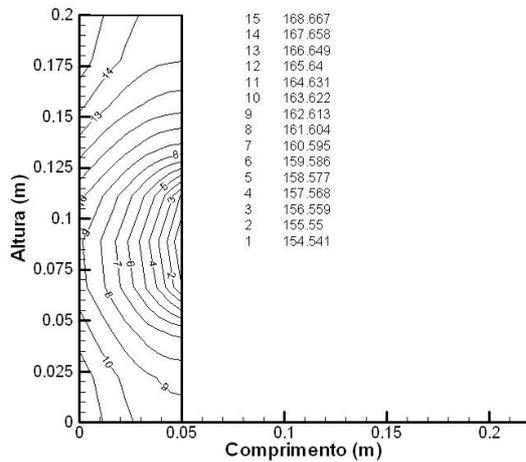


Figura 7.14 – Temperatura – h_R quadrado – MDF

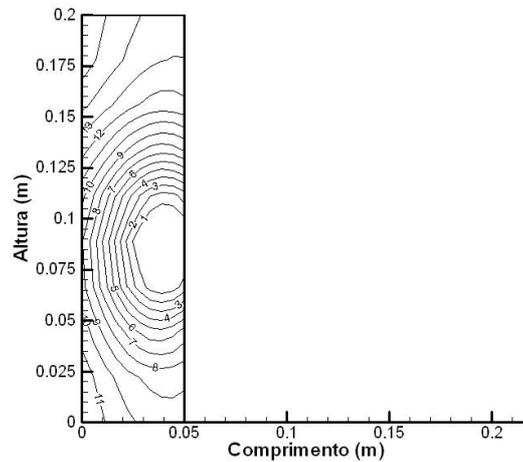


Figura 7.15 – Temperatura – h_R quadrado – MSF

Pelas figuras 7.13, 7.14 e 7.15 nota-se que, embora as temperaturas nos contornos tenham sido bem calculadas no problema direto com o uso do método das soluções fundamentais, a temperatura no interior do domínio não foi bem avaliada, o que pode indicar que o MSF tem dificuldade em resolver problemas cujas funções apresentam descontinuidades, ou que os dados simulados usados pelo MSF, os quais neste caso foram fornecidos pelo problema direto através do método das diferenças finitas com uma malha grosseira de 10×10 , precisam ser melhor aproximados através de uma malha maior. Além disso, embora não seja mostrado nesta dissertação, foi verificado que usar no método das soluções fundamentais apenas as temperaturas simuladas obtidas através do MDF não é suficiente para uma boa aproximação do campo de temperaturas, sendo necessário incluir os dados dos fluxos de calor no contorno durante a resolução do problema direto via o MSF.

7.2.2.4 DIFERENÇAS FINITAS x MSF – FUNÇÃO TRIÂNGULO

A evolução do erro em função do número de frequências pode ser visualizada na figura 7.16:

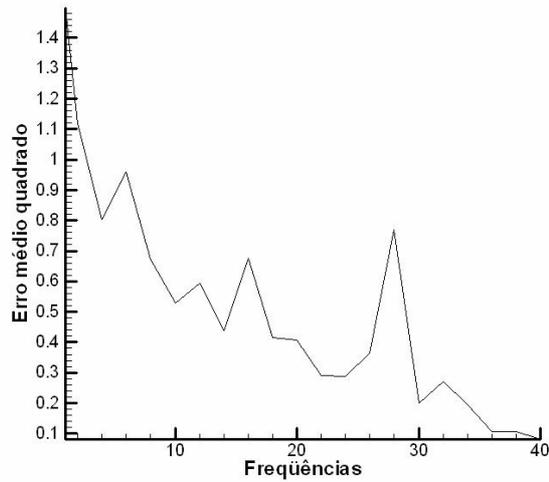


Figura 7.16 – Evolução do erro em função das frequências – Função triângulo

O menor erro ocorre para o valor de $M = 40$, ou seja, $E(T) = 0.0798$. O tempo computacional gasto foi de 355 segundos. O gráfico para as temperaturas pode ser visualizado na figura 7.17, onde se nota uma excelente concordância para as temperaturas obtidas nos contornos.

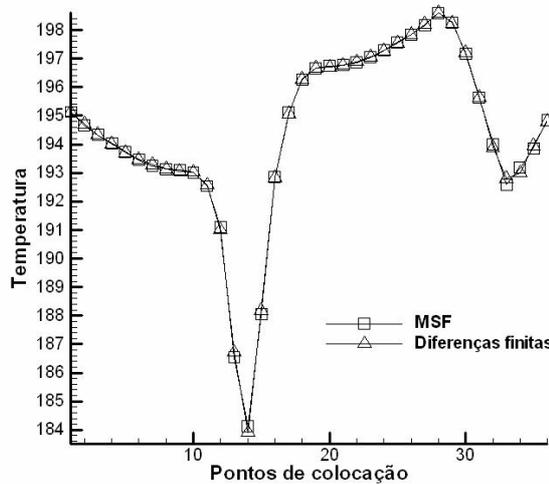


Figura 7.17 – Temperaturas nos contornos – Função triângulo

Na figura 7.17, os pontos de colocação numerados de 1 a 10 representam os pontos situados em $y = 0$, os pontos de colocação numerados de 11 a 19 representam os pontos de colocação situados na parede em $x = L$, os pontos de colocação numerados de 20 a 27 representam os pontos situados em $y = H$, e os pontos de colocação restantes representam as temperaturas em $x = 0$. As temperaturas são dadas em graus Celsius.

As temperaturas em função das isolinhas podem ser visualizadas nas figuras 7.18 e 7.19, onde nota-se que elas foram configuradas de forma que tivessem a mesma escala de temperatura.

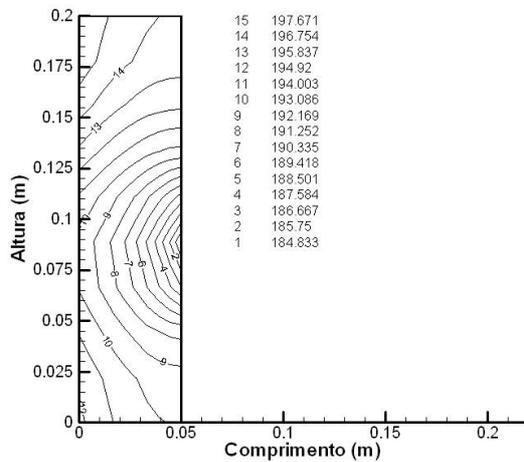


Figura 7.18 – Temperatura – h_R triangular – MDF

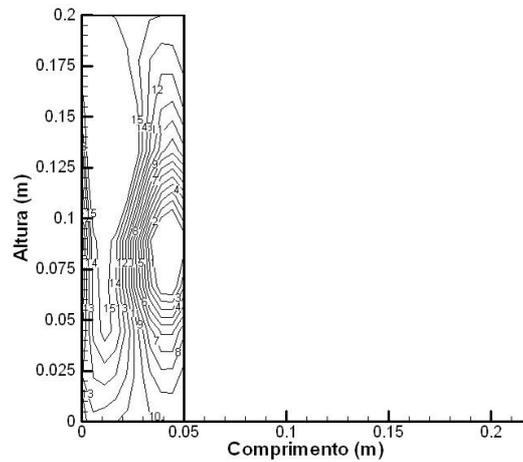


Figura 7.19 – Temperatura – h_R triangular – MSF

Assim como no caso das temperaturas obtidas em um problema cuja forma funcional do coeficiente de transferência de calor é quadrada, pode-se afirmar que o MSF não é eficiente para estimar a temperatura no domínio se a forma funcional do coeficiente de transferência de calor apresentar descontinuidade ou se a função da forma funcional apresenta descontinuidade na primeira derivada.

Como sugestões para obter resultados melhores têm-se os seguintes testes: usar mais de 40 frequências, usar um número maior de pontos de colocação, utilizar dados simulados obtidos através do problema direto via o método das diferenças finitas com uma malha bem refinada, ou utilizar no MSF os valores dos fluxos de calor obtidos nos pontos de colocação do problema considerado juntamente com os respectivos valores de temperaturas.

7.2.2.5 DIFERENÇAS FINITAS x MSF – FUNÇÃO DEGRAU

Verifica-se na figura 7.20 que o erro médio quadrado da função degrau decai conforme a frequência aumenta.

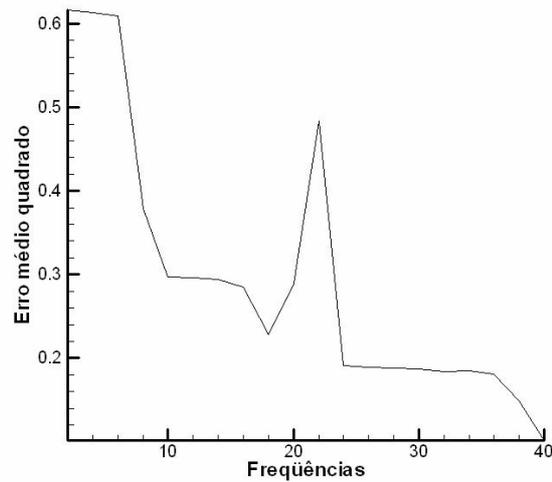


Figura 7.20 – Evolução do erro em função da frequência – Função degrau

O erro médio quadrado decai conforme se aumenta o número de frequências, sendo que o menor erro foi encontrado para um total de frequências $M = 40$, e seu valor vale $E(T) = 0.1011$. O tempo computacional gasto foi de 300 segundos. As temperaturas nos contornos obtidas através do MSF podem ser comparadas com as temperaturas obtidas via o método das diferenças finitas na figura 7.21.

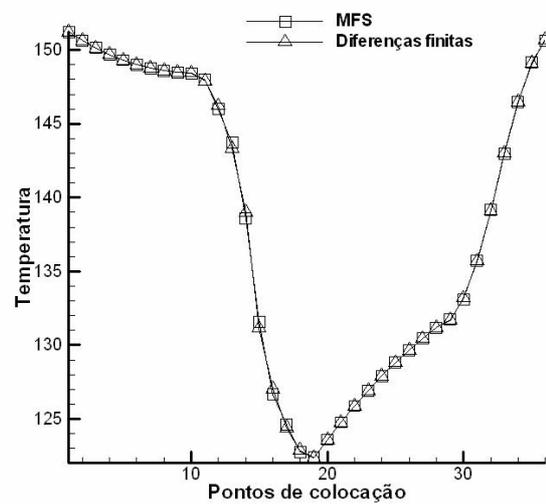


Figura 7.21 – Temperatura nos contornos – Função degrau

Na figura 7.21, os pontos de colocação numerados de 1 a 10 representam os pontos situados em $y = 0$, os pontos de colocação numerados de 11 a 19 representam os pontos de colocação situados na parede em $x = L$, os pontos de colocação numerados de 20 a 27 representam os pontos situados em $y = H$, e os pontos de colocação restantes representam as

temperaturas em $x = 0$. Nota-se a excelente concordância entre os resultados obtidos para as temperaturas nos contornos via o MSF.

As temperaturas em forma de isolinhas de temperatura podem ser visualizadas nas figuras 7.22 e 7.23, onde se ressalta que elas foram configuradas de forma que tivessem a mesma escala de temperatura.

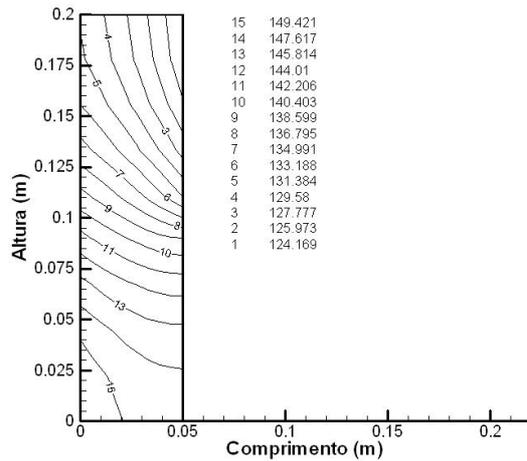


Figura 7.22 – Temperatura – h_R degrau – MDF

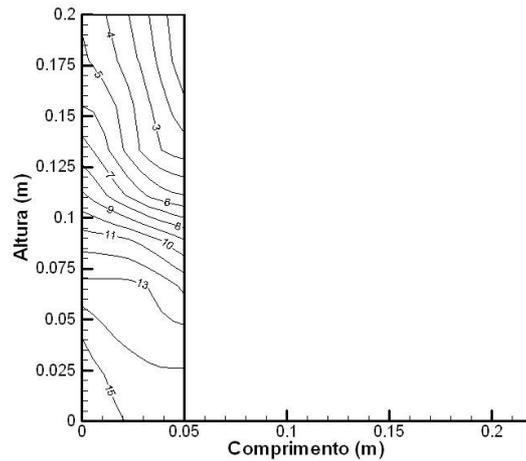


Figura 7.23 – Temperatura – h_R degrau – MSF

Observa-se que, embora as temperaturas nos contornos tenham sido bem estimadas, as isolinhas obtidas para cada um dos casos apresentam algumas diferenças quanto à localização, embora o formato das isolinhas para o caso obtido via o MSF tenha sido bem estimado.

7.2.2.6 DIFERENÇAS FINITAS x MSF – FUNÇÃO LINEAR

O erro para a função linear pode ser visualizado na figura 7.24:

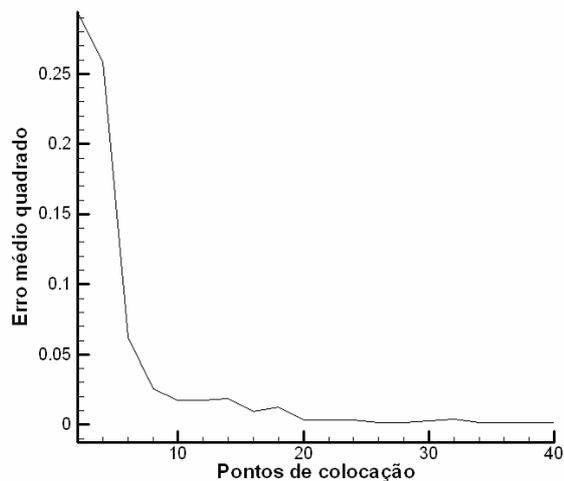


Figura 7.24 – Evolução do erro em função da frequência – Função linear

Observa-se que o erro médio quadrado decai conforme o número de frequências aumenta, sendo que o menor erro médio quadrado encontra-se para um total de frequências $M = 26$, onde $E(T) = 1.229 \times 10^{-03}$. O tempo computacional gasto foi de 61 segundos. A comparação entre as temperaturas nos contornos pode ser feita na figura 7.25.

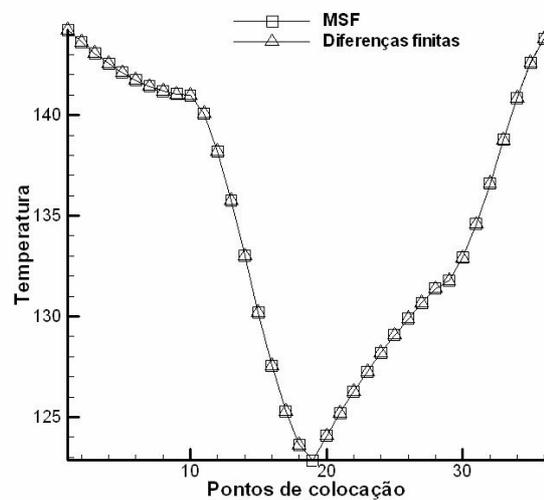


Figura 7.25 – Temperaturas nos contornos – Função linear

Observa-se a excelente concordância entre essas temperaturas, o que permite concluir que o método das soluções fundamentais recupera muito bem as informações no contorno do domínio.

As temperaturas no domínio propriamente dito podem ser visualizadas nas figuras 7.26 e 7.27, as quais mostram as isolinhas de temperaturas para cada caso.

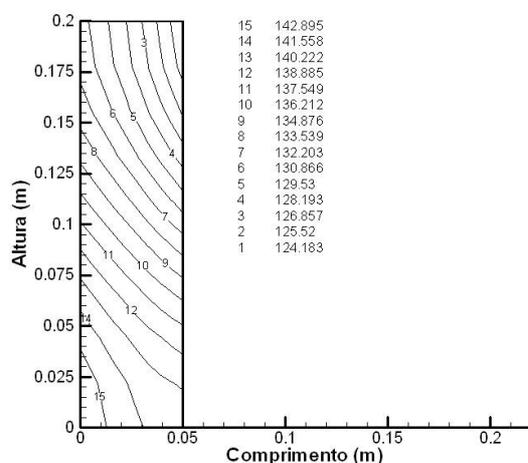


Figura 7.26 – Temperaturas – h_R linear – MDF

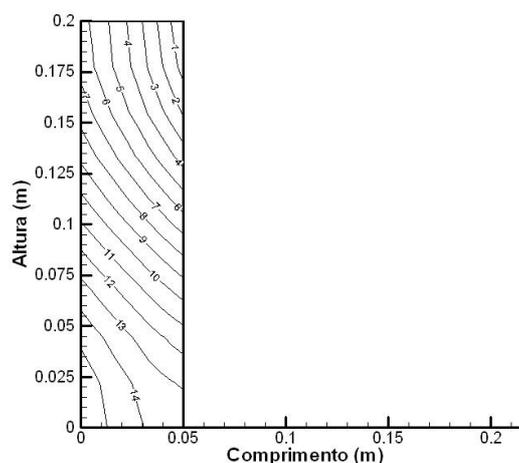


Figura 7.27 – Temperaturas – h_R linear – MSF

Observa-se nas figuras 7.26 e 7.27 que há uma excelente concordância entre os campos de temperaturas para ambos os métodos utilizados.

Verifica-se que as formas funcionais quadrado, triângulo e degrau são as que apresentam o maior tempo computacional gasto pelo método das soluções fundamentais para gerar um campo de temperatura, já que foi necessário um grande número de frequências ($M > 35$) para minimizar o erro médio quadrado das temperaturas.

Cabe ainda salientar que os dados anteriores provam a teoria dada por ALVES e CHEN (2005), conforme discutida na seção (4.2.1). Ou seja, as contribuições de novas frequências levam a uma solução aproximada satisfatória para as temperaturas.

7.3 PROBLEMA INVERSO

7.3.1 ESCOLHA DA TÉCNICA DE REGULARIZAÇÃO – SVD x GMRES

Nesta seção o enfoque é dado na escolha da técnica de regularização do sistema resultante de equações lineares dado pela equação (4.34). Para isso, foram feitas comparações entre os métodos SVD e GMRES em um problema inverso com medidas não-intrusivas

sujeito a 3 formas funcionais: constante, parábola e linear. Foram utilizados 26 pontos de colocação e 64 pontos-fonte uniformemente distribuídos no contorno e no interior do domínio, respectivamente, conforme esquematizado na figura 4.3.

Nesta seção, para efeito de comparação foram consideradas as equações propostas pela formulação 1, onde foram consideradas as seguintes propriedades termofísicas e dimensões da placa:

- $H = 0.20m$
- $L = 0.05m$
- $T_L = 300.0\text{ }^\circ C$
- $T_R = 20.0\text{ }^\circ C$
- $K = 54.0 \frac{W}{m^\circ C}$
- $h_L = 40.0 \frac{W}{m^2\text{ }^\circ C}$
- $h_{máx} = 120.0 \frac{W}{m^2\text{ }^\circ C}$

onde $h_{máx}$ é o valor máximo assumido por cada uma das funções das formas funcionais definidas na seção 7.1 e K é a condutividade térmica do aço carbono com uma liga de 0.5% de carbono (OZISIK, 1981). Nota-se que a placa é muito esbelta, já que a altura é 4 vezes maior que a largura. A justificativa para a escolha destes valores de altura e largura está no fato de que na prática muitos materiais são esbeltos, e deseja-se estimar o coeficiente de transferência de calor por convecção em uma placa com uma espessura muito pequena.

Nas tabelas (7.3–7.5) têm-se os erros médios quadrados para a estimativa de cada uma das formas funcionais, como também o tempo computacional gasto e o número de frequências usadas. Os erros médios quadrados foram obtidos através da equação (7.9), onde são comparadas as temperaturas estimadas através do MSF e as temperaturas exatas dadas pelo método das diferenças finitas. Para o método numérico por diferenças finitas foi utilizada uma malha grosseira de 10x10.

No cálculo do erro médio quadrado deveriam entrar os dados da fronteira em $x = 0$. Porém, nesta dissertação foi feito um teste ideal, onde no cálculo do erro médio quadrado são considerados os dados obtidos em cada contorno da placa.

Na tabela 7.3 são mostrados os erros médios quadrados das temperaturas obtidos durante a estimativa da forma funcional constante para cada uma das técnicas de regularização propostas, considerando medidas não-intrusivas. Também são mostrados o tempo computacional gasto e o número de freqüências utilizadas para cada técnica de regularização.

Tabela 7.3 – Erro médio quadrado para a forma funcional constante

Método	CONSTANTE		
	Erro médio quadrado	Tempo(s)	Freqüências
SVD	6.079e-03	0.2031	2
GMRES	1.814e-03	6.250e-02	2

Na figura 7.28 podem ser visualizadas as estimativas dos coeficientes de troca de calor por convecção para cada uma das técnicas propostas, considerando medidas não-intrusivas.

Os coeficientes são dados em $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$ e a distância considerada é a altura da placa.

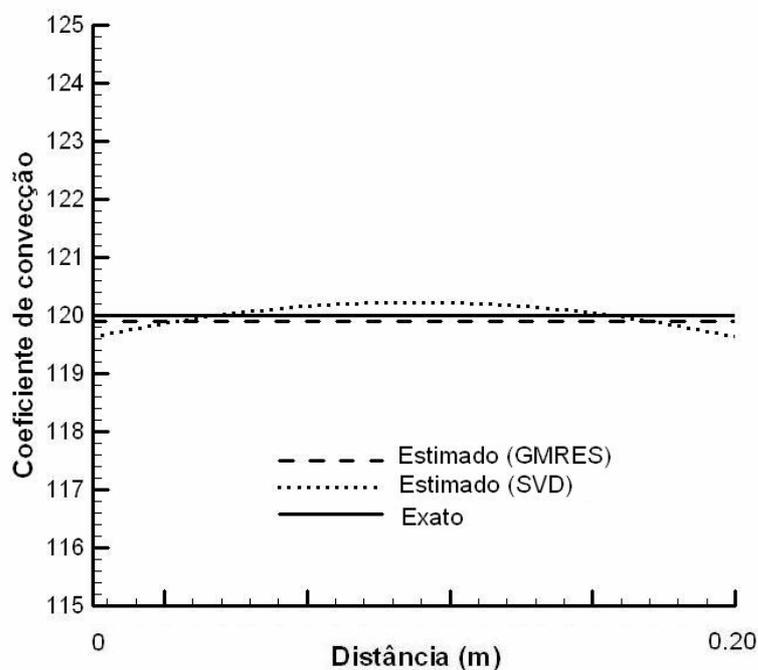


Figura 7.28 – Comparação entre as estimativas dos coeficientes de convecção – Caso h_R constante

Para a forma funcional constante, verifica-se que o método GMRES possui o menor erro médio quadrado quando comparado com o método SVD, como também teve o menor tempo computacional gasto. Para ambos os casos, os menores erros foram obtidos com o mesmo número de frequências. Além disso, pela figura 7.28 verifica-se que a estimativa do coeficiente de convecção com o uso do método GMRES está em melhor concordância com os dados exatos. Os dados exatos dos coeficientes de transferência de calor foram usados em diferenças finitas e correspondem à condição de contorno que foi estimada. Ambos os métodos SVD e GMRES resolveram um sistema linear cuja matriz de interpolação possui 36 linhas e 128 colunas, quando considerado o número ótimo de frequências ($M = 2$).

Na tabela 7.4 são mostrados os erros médios quadrados das temperaturas obtidos durante a estimativa do coeficiente de transferência de calor cuja forma funcional é parabólica e onde apenas dados não-intrusivos foram utilizados.

Tabela 7.4 – Erro médio quadrado para a forma funcional parabólica

	PARÁBOLA		
Método	Erro médio quadrado	Tempo(s)	Frequências
SVD	1.6918	98.6093	12
GMRES	0.9287	11.3281	30

Na figura 7.29 podem ser visualizadas as estimativas dos coeficientes de troca de calor por convecção para cada um dos métodos considerados. Os coeficientes são dados em $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$ e a distância considerada é a altura da placa.

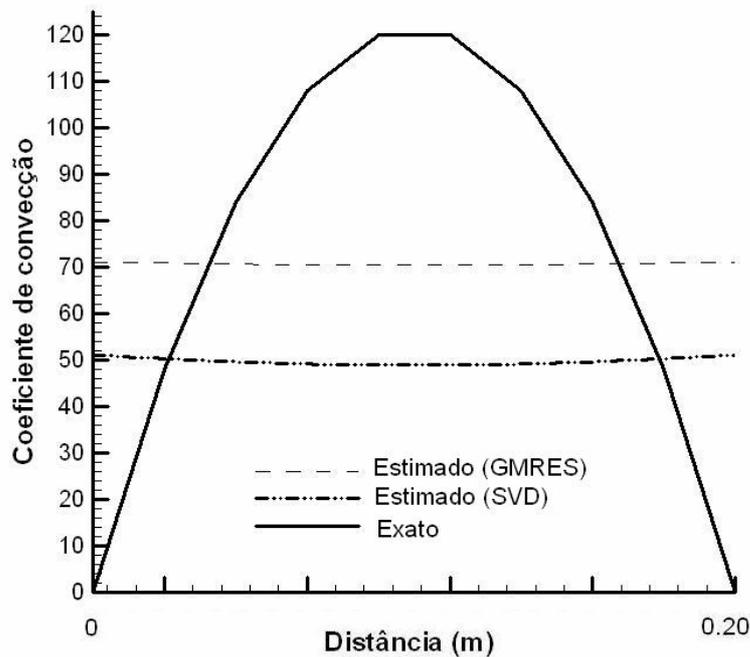


Figura 7.29 – Comparação entre as estimativas dos coeficientes de convecção - Caso h_R parabólico

Para a forma funcional parabólica com o uso do método SVD não se variou as frequências de 1 a 40, e sim de 1 a 20, uma vez que este método exigiu um grande esforço computacional. Para este intervalo considerado, o menor erro foi obtido com o uso de 12 frequências. Comparando os resultados, verifica-se que o método GMRES possui o menor erro médio quadrado, considerando um intervalo de frequências de 1 a 40. O tempo computacional gasto com o método SVD foi 9 vezes maior que o tempo computacional gasto com o método GMRES. Se fossem levadas em conta todas as frequências do intervalo de 1 a 40, a estimativa do erro médio quadrado e da forma funcional do problema dado com o método SVD levaria mais de 2 horas, enquanto que o método GMRES resolve o problema em alguns segundos. Visualizando a figura 7.29, pode se concluir que, para ambos os casos, a estimativa do coeficiente de transferência de calor por convecção foi muito pobre, uma vez que foram obtidas umas retas ao invés de umas parábolas. Além disso, pode se afirmar que usar só medidas não-intrusivas não foi suficiente para a obtenção de uma boa estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor por convecção. O método SVD resolveu um sistema linear cuja matriz de interpolação possui 36 linhas e 768 colunas, enquanto que o método GMRES resolveu um sistema linear cuja matriz de interpolação possui 36 linhas e 1920 colunas, considerando seus respectivos números ótimos de frequências.

Na tabela 7.5 são mostrados os erros médios quadrados obtidos durante a estimativa do coeficiente de transferência de calor cuja forma funcional é linear e onde apenas dados não-intrusivos foram utilizados.

Tabela 7.5 – Erro médio quadrado para a forma funcional linear

Método	LINEAR		
	Erro médio quadrado	Tempo(s)	Frequências
SVD	1.7598	484.2656	20
GMRES	0.5231	19.3750	26

Na figura 7.30 pode ser visualizada a estimativa da forma funcional linear usando cada uma das técnicas de regularização propostas nesta seção, e onde apenas dados não-intrusivos foram utilizados. Os coeficientes são dados em $\frac{W}{m^2 \cdot C}$ e a distância considerada é a altura da placa.

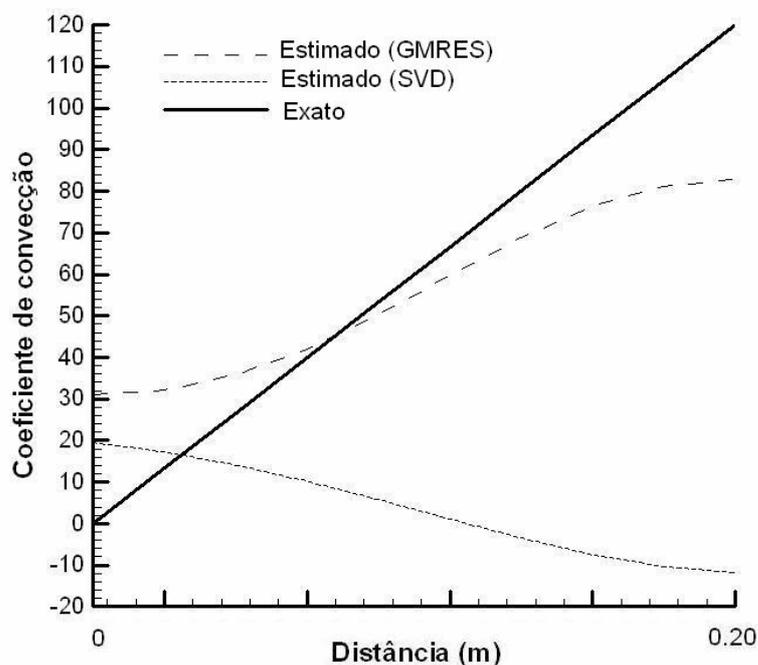


Figura 7.30 – Comparação entre as estimativas dos coeficientes de convecção - Caso h_R linear

Igualmente como no caso da função parabólica, verifica-se que para a forma funcional linear o tempo computacional gasto foi 25 vezes maior quando se usou o método SVD. Além disso, este método apresentou o maior erro médio quadrado em comparação com o método GMRES. Pela figura 7.30 verifica-se que a estimativa da forma funcional linear do coeficiente de convecção usando o método SVD foi pior do que a estimativa da forma funcional linear

usando o método GMRES. Além disso, assim como na estimativa da forma funcional parabólica, o uso de medidas não-intrusivas não fornece uma boa estimativa do coeficiente de transferência de calor por convecção tanto pelo uso do método numérico GMRES, quanto pelo uso do método numérico SVD. O método SVD resolveu um sistema linear cuja matriz de interpolação possui 36 linhas e 1280 colunas, enquanto que o método GMRES resolveu um sistema linear cuja matriz de interpolação possui 36 linhas e 1664 colunas.

Em função dos resultados obtidos anteriormente, pode-se concluir que o método a ser utilizado para a resolução do problema inverso via o método das soluções fundamentais será o método GMRES.

7.3.2 INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE PONTOS-FONTE

Uma vez que o uso do método das soluções fundamentais em problemas inversos ainda é bem recente – o primeiro uso do MSF para estimativa de parâmetros foi em 2004 (HON e WEI, 2004) – não há um consenso geral sobre a proporcionalidade entre o número total de pontos-fonte e pontos de colocação que devem ser usados por este método. De fato, CHEN et al. (2006) em seus problemas sugeriram que seja usado o maior número possível de pontos de colocação e pontos-fonte, sem estabelecer uma proporção entre eles. Já MARIN e LESNIC (2005) recomendaram que o total de pontos-fonte não ultrapasse o dobro do total de pontos de colocação. MARIN (2005_(b)) observou que foram obtidos resultados numéricos acurados para os seus problemas propostos usando uma pequena quantidade de pontos-fonte, e que o aumento da quantidade de pontos-fonte além deste limite não altera significativamente o erro obtido. Uma vez que não há uma proporção certa entre o número de pontos-fonte e pontos de colocação, nesta dissertação de mestrado foram usados apenas 64 pontos-fonte, um número bem maior que o total de pontos de colocação que são usados nos problemas desta dissertação de mestrado. Não foram feitos testes para diferentes quantidades de pontos-fonte. Mesmo assim, bons resultados foram obtidos para a estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor, conforme será visto mais adiante.

7.3.3 AS MEDIDAS INTRUSIVAS

Antes de serem apresentados os resultados obtidos, é preciso definir quais serão as medidas intrusivas no problema inverso de transferência de calor. A localização das medidas intrusivas depende do número de pontos de colocação que foram usados para medir a temperatura no interior da placa, como também é proporcional à largura L e a altura H da placa. De fato, as distâncias entre as coordenadas dx e dy dos pontos de colocação são dadas por

$$dx = \frac{L}{Z - 1} \quad (7.10)$$

e

$$dy = \frac{H}{Z - 1} \quad (7.11)$$

onde Z é o número total de pontos de colocação em uma direção. Neste trabalho foram usados 10 pontos de colocação em cada direção.

Nesta dissertação foi testada a influência da largura da placa na estimativa do coeficiente de transferência de calor por convecção, portanto, apenas as distâncias dx entre os pontos de colocação foram variadas, já que a altura se manteve fixa.

Foram feitas 4 medições de medidas intrusivas, cada uma delas separadamente e a uma distância da origem, mais precisamente, a uma distância dx , $4dx$, $6dx$ ou $8dx$ de $x = 0$. A figura 7.31 mostra a esquematização da distribuição das medidas intrusivas.

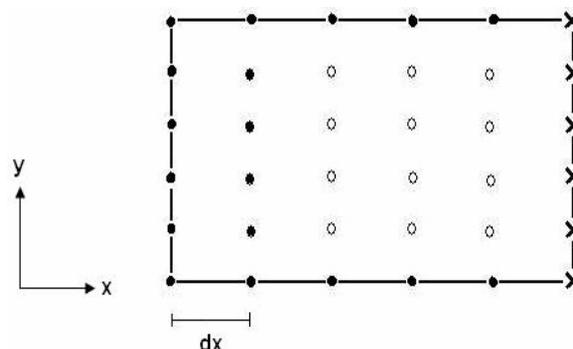


Figura 7.31 – Medidas intrusivas (pontos preto) a uma distância dx da origem, pontos-fonte (círculo) e parede com condição de contorno desconhecida (cruz)

Durante as estimativas das formas funcionais do coeficiente de transferência de calor, a largura L da placa variou de 5 cm até 5 mm. Na tabela 7.6 tem-se os valores, em metros, da distância para cada localização das medidas intrusivas, com $Z = 10$ na direção x .

Tabela 7.6 – Localização das medidas intrusivas para cada caso selecionado

Largura	Medidas Intrusivas (m)			
	1dx	4dx	6dx	8dx
5 cm	5.555e-03	0.0222	0.0333	0.0444
4 cm	4.444e-03	0.0178	0.0267	0.0355
3 cm	3.333e-03	0.0133	0.0200	0.0267
2 cm	2.222e-03	8.889e-03	0.0133	0.0178
1 cm	1.111e-03	4.444e-03	6.666e-03	8.888e-03
9 mm	1.000e-03	4.000e-03	6.000e-03	8.000e-03
8 mm	8.888e-04	3.555e-03	5.333e-03	7.111e-03
7 mm	7.777e-04	3.111e-03	4.666e-03	6.222e-03
6 mm	6.666e-04	2.666e-03	4.000e-03	5.333e-03
5 mm	5.555e-04	2.222e-03	3.333e-03	4.444e-03

7.3.4 ESTIMATIVA DO COEFICIENTE DE CONVECÇÃO – FORMULAÇÃO 1

Para a estimativa do coeficiente de transferência de calor por convecção foram consideradas as seguintes propriedades termofísicas e dimensões para a formulação 1:

- $H = 0.20m$
- $T_L = 300.0\text{ }^\circ C$
- $T_R = 20.0\text{ }^\circ C$
- $K = 54.0 \frac{W}{m^\circ C}$
- $h_L = 40.0 \frac{W}{m^2\text{ }^\circ C}$
- $h_{m\acute{a}x} = 120.0 \frac{W}{m^2\text{ }^\circ C}$

onde $h_{m\acute{a}x}$ é o valor máximo que terão as funções das formas funcionais definidas anteriormente. A largura L da placa irá variar de 5 cm até 5 mm, sendo que em cada caso

haverá seu respectivo valor para dx . A condutividade térmica K proposta nesta dissertação de mestrado é a da liga de aço carbono com 0.5% de carbono (OZISIK, 1981).

Nas seções quaternárias dadas a seguir são mostrados os erros médios quadrados das temperaturas para cada uma das estimativas das formas funcionais descritas na seção 7.1, como também são mostrados graficamente as comparações entre as formas funcionais exatas e as formas funcionais aproximadas obtidas via o MSF.

Cabe ainda ressaltar que para todas as estimativas apresentadas nas seções a seguir foram utilizados 26 pontos de colocação e 64 pontos-fonte para as medidas não-intrusivas, e 34 pontos de colocação e 64 pontos-fonte para as medidas intrusivas. O método GMRES resolveu um sistema linear de equações contendo 36 equações para o caso com medidas não-intrusivas e um sistema linear contendo 44 equações para o caso com medidas intrusivas. O número de incógnitas para ambos os casos (intrusivos e não-intrusivos) depende do número de frequências utilizadas. Os dados simulados necessários para o problema inverso foram obtidos através do uso dos valores exatos dos coeficientes de transferência de calor por convecção em um problema direto dado pela formulação 1 por diferenças finitas com o uso de uma malha grosseira (10x10). Ao contrário do problema direto via o MSF onde foram usadas apenas as temperaturas dos contornos para a obtenção do campo de temperatura, nos problemas inversos com o uso do MSF serão usados os fluxos de calor e/ou as temperaturas nas fronteiras com condição de contorno conhecidas, de acordo com a condição de contorno considerada.

É importante dizer que para o problema inverso dado pela formulação 1 nesta seção o fluxo de calor em $x = 0$ é exato e a temperatura em $x = 0$ é medida. Para o problema inverso dado pela formulação 2 no capítulo 7.4 o fluxo de calor em $x = 0$ é medido e a temperatura é exata.

7.3.4.1 FORMA FUNCIONAL CONSTANTE

Na tabela 7.7 pode se verificar o erro médio quadrado definido pela equação (7.9) para cada uma das larguras consideradas, como também o erro médio quadrado em função da localização das medidas intrusivas. A sigla “NI” significa medidas não-intrusivas.

Tabela 7.7 – Erro médio quadrado para a função constante em função das medidas

Largura	Erro Médio Quadrado – Função Constante				
	NI	1dx	4dx	6dx	8dx
5 cm	1.814e-03	1.788e-03	1.694e-03	1.525e-03	2.342e-04
4 cm	1.317e-03	1.295e-03	4.374e-03	1.078e-03	1.032e-04
3 cm	8.909e-04	3.215e-03	3.079e-03	9.545e-04	1.745e-03
2 cm	1.796e-03	1.620e-03	1.571e-03	1.535e-03	1.356e-03
1 cm	4.643e-04	4.611e-04	4.291e-04	3.828e-04	3.484e-04
9 mm	3.871e-04	3.986e-04	3.675e-04	3.264e-04	2.943e-04
8 mm	3.241e-04	3.427e-04	3.143e-04	2.770e-04	2.490e-04
7 mm	2.698e-04	6.110e-04	2.661e-04	4.869e-04	4.309e-04
6 mm	2.225e-04	5.122e-04	4.642e-04	4.064e-04	3.618e-04
5 mm	3.399e-04	4.199e-04	3.792e-04	3.319e-04	2.974e-04

Pela tabela 7.7 verifica se que, independente da medida ser intrusiva ou não-intrusiva, quando a largura da placa diminui, o erro médio quadrado tende a decrescer, sendo que há uma espessura ótima onde o erro é mínimo.

Para uma melhor interpretação dos dados da tabela 7.7, foram obtidos gráficos (figuras 7.32 – 7.41) nos quais se verificam os erros médios quadrados em função das medidas intrusivas ou não-intrusivas. Estes resultados têm por objetivo auxiliar na escolha da melhor posição para pôr os sensores que obterão as temperaturas e fluxos de calor para cada largura considerada. O eixo das abscissas contém as medidas não-intrusivas (valor 0) e as medidas intrusivas ($1dx$, $4dx$, $6dx$, $8dx$). O eixo das ordenadas contém os erros médios quadrados das temperaturas.

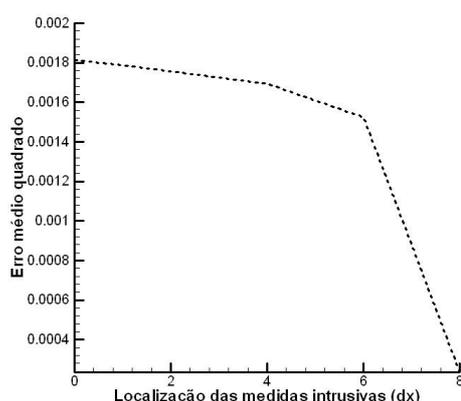


Figura 7.32 – Constante – Erros x Medidas – 5 cm

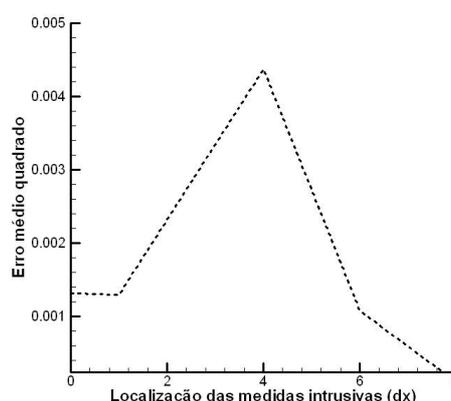


Figura 7.33 – Constante – Erros x Medidas – 4 cm

Nas figuras 7.32 e 7.33 verifica-se que o erro decresce conforme as medidas intrusivas se aproximam da parede com condição de contorno desconhecida, o que é de se esperar.

Verifica-se também, pela figura 7.33, que para uma largura de 4 cm a estimativa da forma funcional piora para medidas intrusivas a uma distância $4dx$ de $x = 0$.

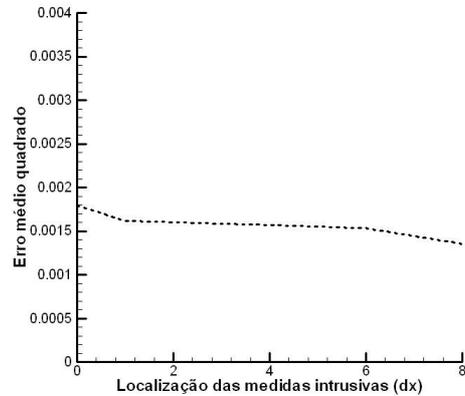
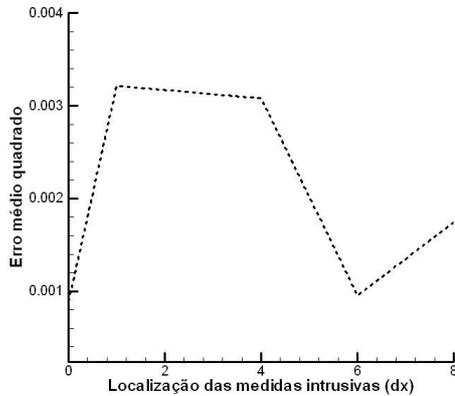


Figura 7.34 – Constante – Erros x Medidas – 3 cm Figura 7.35 – Constante – Erros x Medidas – 2 cm

Na figura 7.34 observa-se que para uma largura de 3 cm a melhor estimativa da forma funcional da função constante ocorre com medidas não-intrusivas, visto que o erro médio quadrado das medidas não-intrusivas é menor que o erro médio quadrado das medidas intrusivas a uma distância $6dx$ de $x = 0$, ou seja, o erro das medidas não-intrusivas vale 8.909×10^{-04} e o erro médio quadrado das medidas intrusivas a uma distância $6dx$ de $x = 0$ vale 9.545×10^{-04} (vide tabela 7.7). Na figura 7.35 verifica-se que a melhor estimativa da forma funcional constante em uma placa com largura de 2 cm ocorre quando se utilizam medidas intrusivas próximas à parede com condição de contorno desconhecida.

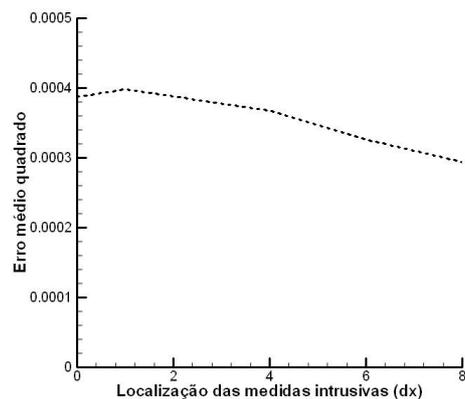
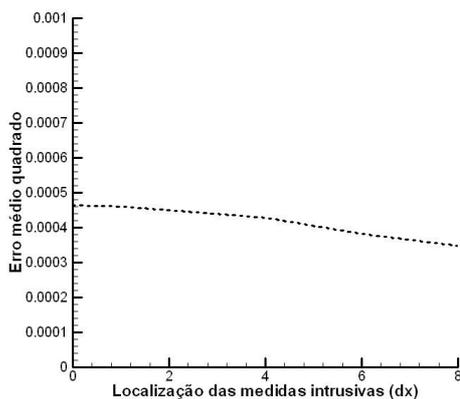


Figura 7.36 – Constante – Erros x Medidas – 1 cm Figura 7.37 – Constante – Erros x Medidas – 9 mm

Pelas figuras 7.36 e 7.37 verifica-se que em ambos os casos o erro médio quadrado das temperaturas decaem conforme as medidas intrusivas se aproximam da parede com condição de contorno desconhecida, ou seja, melhor é a estimativa da forma funcional constante.

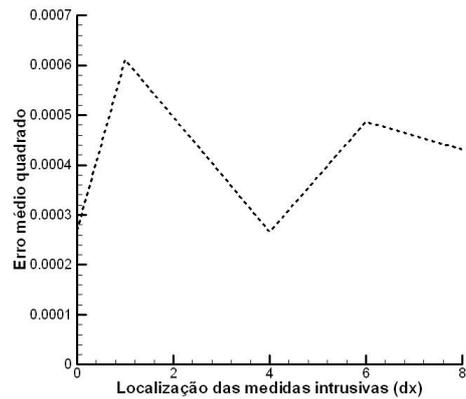
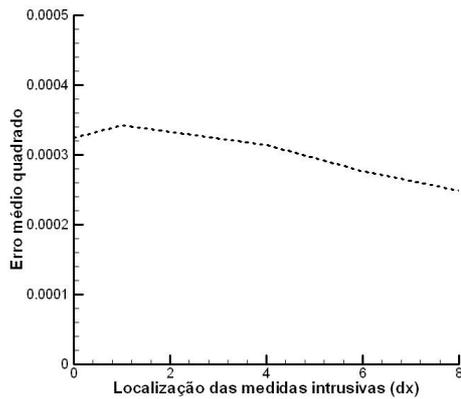


Figura 7.38 – Constante – Erros x Medidas – 8 mm Figura 7.39 – Constante – Erros x Medidas – 7 mm

Na figura 7.38 é observado que, para uma largura da placa de 8 mm, o erro médio quadrado decai conforme as medidas intrusivas se aproximam da parede com condição de contorno desconhecida. Já a figura 7.39 mostra que, para uma largura da placa de 7 mm, a melhor estimativa da forma funcional ocorre com medidas intrusivas a uma distância $4dx$ de $x = 0$. Mas, observa-se que não há muita diferença significativa entre o erro médio quadrado das medidas não-intrusivas e o erro médio quadrado das medidas intrusivas a uma distância $4dx$ de $x = 0$.

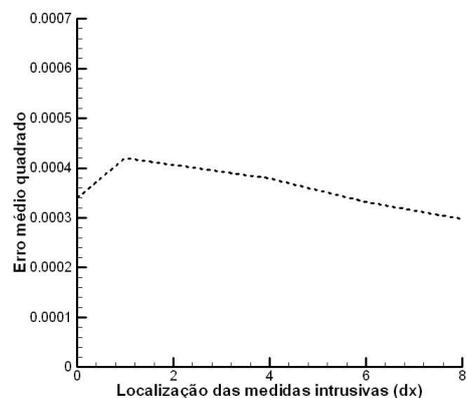
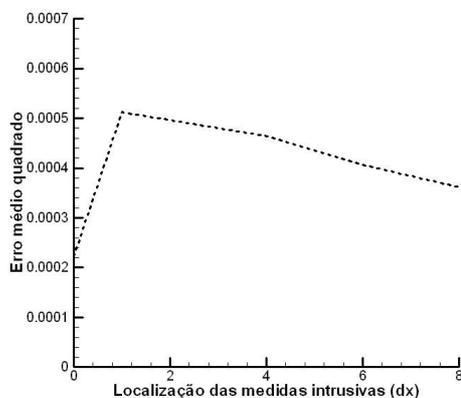


Figura 7.40 – Constante – Erros x Medidas – 6 mm Figura 7.41 – Constante – Erros x Medidas – 5 mm

A figura 7.40 mostra que para a estimativa da forma funcional constante em um material com largura de 6 mm é melhor utilizar medidas não-intrusivas, visto que o erro médio quadrado das temperaturas é menor. A figura 7.41 mostra que a estimativa da forma funcional constante melhora quando são usadas medidas intrusivas próximas à parede com condição de contorno desconhecida.

Em geral, pode se afirmar que, quanto mais próximas da parede desconhecida estiverem as medidas intrusivas, menor será o erro médio quadrado obtido. Além disso, visualizando as figuras (7.32–7.41) e a tabela 7.7, pode se verificar que não há muita diferença significativa entre os erros obtidos para cada uma das medidas intrusivas e não-intrusivas usadas, o que nos permite dizer que a acurácia da estimativa do coeficiente de transferência de calor por convecção é a mesma para cada uma das medidas consideradas, sejam elas intrusivas ou não. Tal fato pode ser comprovado na figura 7.42, a qual mostra a estimativa dos coeficientes de transferência de calor por convecção em uma placa com largura $L = 5 \text{ cm}$. Os coeficientes são dados em $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$ e, para auxiliar na localização das medidas intrusivas, consulte a tabela 7.6.

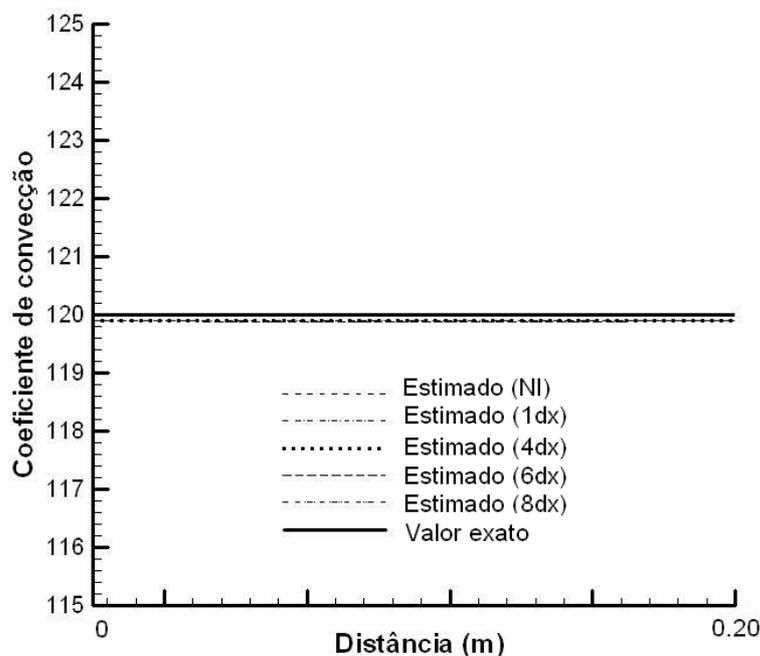


Figura 7.42 – Estimativa do coeficiente de convecção em função das medidas intrusivas – Constante

A figura 7.42 mostra a estimativa da forma funcional constante em uma placa com largura de 5 cm, e os diversos tipos de medidas (intrusivas e não-intrusiva). No eixo das abscissas é visualizada a altura da placa na parede cuja condição de contorno é desconhecida, e o eixo das ordenadas mostra os valores dos coeficientes de transferência de calor estimados e o valor do coeficiente exato. Pode se verificar que para a forma funcional constante a estimativa é a mesma, independente se forem usadas medidas intrusivas ou não-intrusivas.

Ao se considerar a influência da largura na estimativa da forma funcional constante, se verifica que cada tipo de medida utilizada terá uma largura ótima da placa onde a estimativa da forma funcional é melhor, uma vez que o erro médio quadrado é menor. Tal consideração pode ser vista na tabela 7.8.

Tabela 7.8 – Melhor largura em função do tipo de medida usada – Caso constante

Medida	Melhor largura
NI	6 mm
1dx	8 mm
4dx	7 mm
6dx	8 mm
8dx	4 cm

Uma vez que pela tabela 7.7 os erros médios quadrados das temperaturas para cada tipo de largura e para cada tipo de medida intrusiva ou não-intrusiva são baixos, pode se concluir que, para a estimativa do coeficiente de transferência de calor cuja forma funcional é constante, qualquer largura que o material possuir permitirá que seja bem estimada a forma funcional do coeficiente de transferência de calor.

O tempo computacional gasto e a melhor frequência para a estimativa da forma funcional constante com o menor erro médio quadrado podem ser visualizados na tabela 7.9. Este caso corresponde à estimativa em um material com largura $L = 5$ cm .

Tabela 7.9 – Tempo e frequência – Forma funcional constante

Medidas	Tempo(s)	Frequências
NI	6.250e-02	2
1dx	4.687e-02	2
4dx	4.687e-02	2
6dx	6.250e-02	2
8dx	6.250e-02	2

O MSF em conjunção com o GMRES foi extremamente rápido para a estimativa da forma funcional constante, como também poucas frequências foram necessárias para a estimativa da forma funcional constante. O método GMRES resolveu um sistema linear de equações contendo 36 equações e 128 incógnitas, para o caso só com medidas não-intrusivas, e um sistema linear com 44 equações e 128 incógnitas para o caso com medidas intrusivas.

O gráfico da distribuição das temperaturas nos contornos, considerando medidas não-intrusivas e uma largura da placa de 5 cm, pode ser visualizado na figura 7.43.

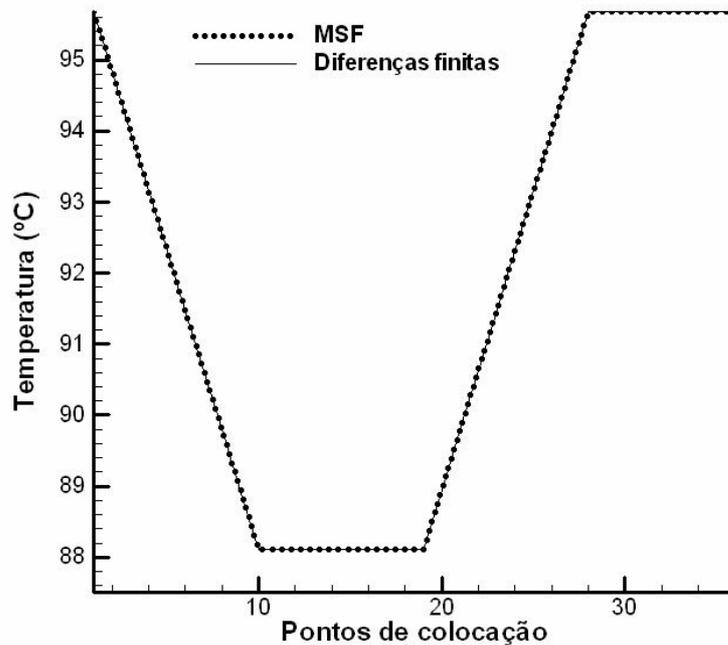


Figura 7.43 – Distribuição das temperaturas – Forma funcional constante

Na figura 7.43, os pontos de colocação numerados de 1 a 10 representam os pontos situados em $y = 0$, os pontos de colocação numerados de 11 a 19 representam os pontos de colocação situados na parede em $x = L$, os pontos de colocação numerados de 20 a 27 representam os pontos situados em $y = H$, e os pontos de colocação restantes representam as temperaturas em $x = 0$. Nota-se a excelente concordância entre os resultados obtidos para as temperaturas nos contornos via o MSF.

Também se comparou as isolinhas de temperaturas obtidas através do problema inverso via o MSF e as isolinhas de temperaturas obtidas através do problema direto com o uso do método das diferenças finitas usando os dados da formulação 1 e os valores exatos das formas funcionais dos coeficientes de transferência de calor por convecção descritos na seção 7.1. Tal comparação pode ser vista nas figuras 7.44 e 7.45.

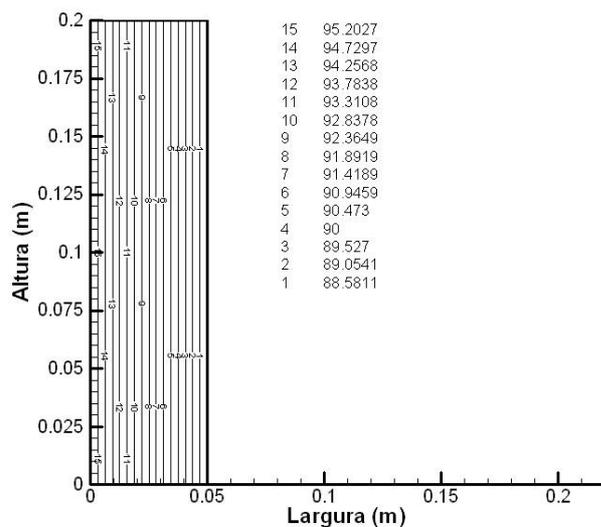


Figura 7.44 – Isolinhas – h_R constante – MDF

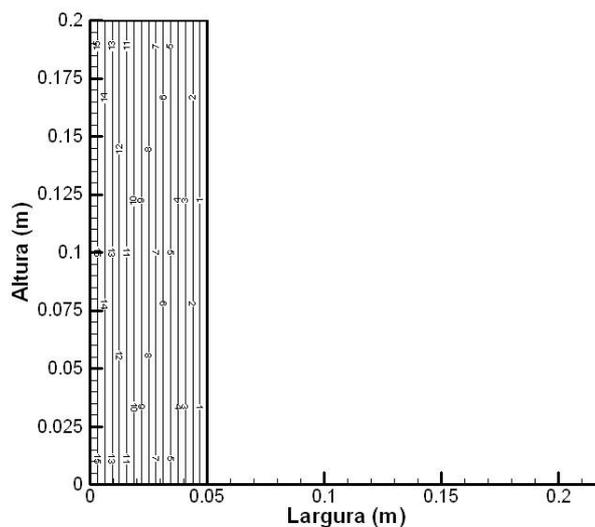


Figura 7.45 – Isolinhas – h_R constante – MSF

Observa-se nas figuras 7.44 e 7.45 a excelente concordância entre as isolinhas obtidas tanto através do problema direto via o MDF, quanto através do problema inverso via o MSF. Nestes gráficos foram consideradas medidas não-intrusivas de temperaturas e a largura da placa como sendo de 5 cm.

7.3.4.2 FORMA FUNCIONAL PARABÓLICA

Os erros médios quadrados para cada uma das larguras consideradas, como também os erros médios quadrados em função da localização das medidas intrusivas podem ser visualizados na tabela 7.10. Os erros foram obtidos a partir da equação (7.9), e a sigla “NI” significa medidas não-intrusivas.

Tabela 7.10 – Erro médio quadrado para a função parábola em função das medidas

Largura	Erro Médio Quadrado – Função Parábola				
	NI	1dx	4dx	6dx	8dx
5 cm	0.9287	0.9150	0.3136	0.2651	0.2452
4 cm	0.8809	0.8222	0.2557	0.2266	0.1696
3 cm	0.5033	0.5903	0.2368	0.1765	0.1393
2 cm	0.3503	0.3449	0.3047	0.1371	0.1155
1 cm	0.3416	0.2083	0.1908	9.767e-02	0.1076
9 mm	0.1958	0.2041	0.2160	0.1695	0.1348
8 mm	0.1993	0.2077	0.1952	0.1741	0.1393
7 mm	0.1983	0.2094	0.2068	6.664e-02	0.1632
6 mm	0.2109	0.2227	0.2046	7.083e-02	0.1776
5 mm	0.2252	0.2473	8.761e-02	0.2229	0.2045

Assim como no caso da função constante, pela tabela 7.10 se verifica que ao diminuirmos a largura da placa, para cada medida intrusiva ou não-intrusiva, o erro médio quadrado tende a decrescer, sendo que há uma espessura ótima onde o erro é mínimo. Observa-se que para larguras grandes, 4 cm e 5 cm, há uma grande discrepância entre os valores das medidas intrusivas e as medidas não-intrusivas.

Nas figuras (7.46 – 7.55) são visualizados os gráficos onde se comparam os erros médios quadrados em função das medidas intrusivas ou não-intrusivas para cada largura da placa. O eixo das abscissas contém as medidas não-intrusivas (valor 0) e as medidas intrusivas (1dx, 4dx, 6dx, 8dx). O eixo das ordenadas contém os erros médios quadrados das temperaturas.

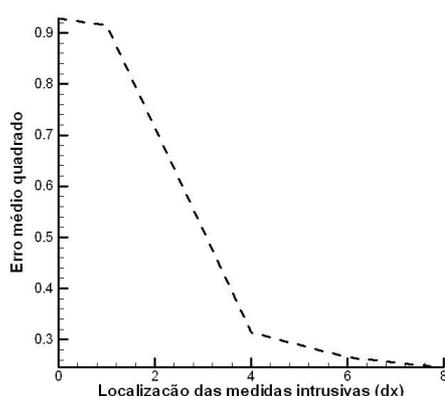


Figura 7.46 – Parábola – Erros x Medidas – 5 cm

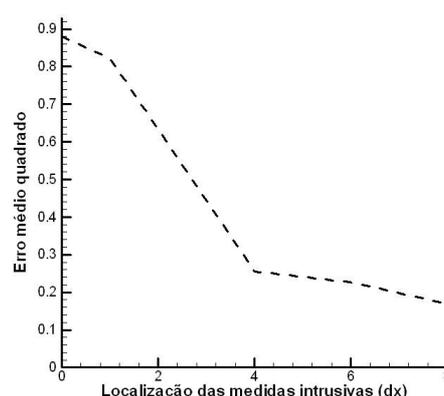


Figura 7.47 – Parábola – Erros x Medidas – 4 cm

Observando as figuras 7.46 e 7.47 verifica-se que há uma grande diferença entre os erros obtidos através de medidas não-intrusivas e os erros obtidos com o uso de medidas intrusivas

a partir de uma distância $4dx$ de $x = 0$. Com isso, pode-se concluir que não é possível estimar coeficientes de transferência de calor cuja forma funcional é parabólica somente com o uso de medidas não-intrusivas ou com medidas intrusivas longe da parede com condição de contorno desconhecida

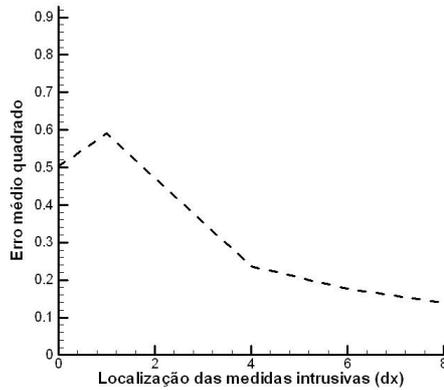


Figura 7.48 – Parábola – Erros x Medidas – 3 cm

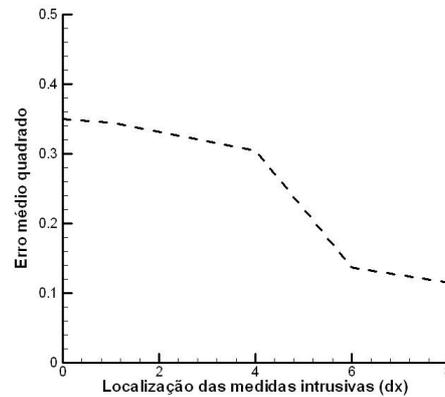


Figura 7.49 – Parábola – Erros x Medidas – 2 cm

As figuras 7.48 e 7.49 mostram que os erros médios quadrados decaem conforme as medidas intrusivas se aproximam das paredes com condição de contorno desconhecida. Para ambos os casos de largura da placa, os coeficientes de transferência de calor por convecção são melhor estimados com medidas intrusivas mais próximas da parede com condição de contorno desconhecida.

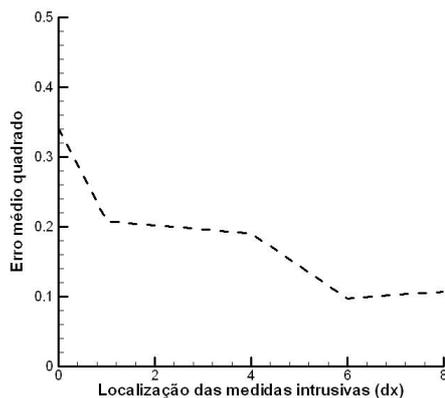


Figura 7.50 – Parábola – Erros x Medidas – 1 cm

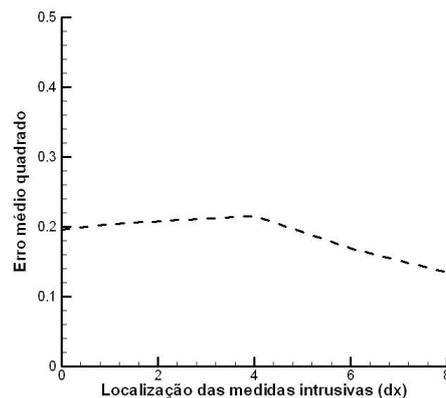


Figura 7.51 – Parábola – Erros x Medidas – 9 mm

Quando a placa possui largura de 1 cm verifica-se que a forma funcional parabólica do coeficiente de transferência de calor é melhor estimada com medidas intrusivas a uma distância $6dx$ de $x = 0$. A figura 7.51 mostra que as melhores estimativas dos coeficientes de

transferência de calor ocorrem em distâncias próximas à parede com condição de contorno desconhecida.

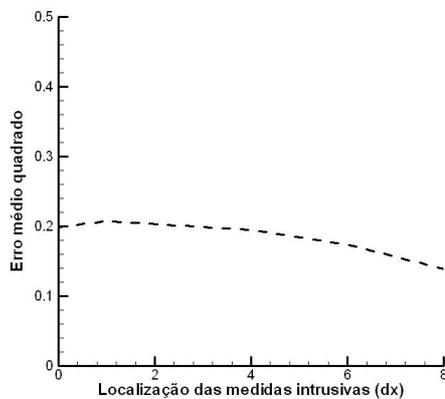


Figura 7.52 – Parábola – Erros x Medidas – 8 mm

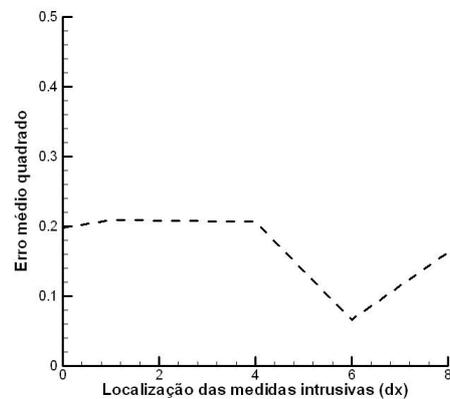


Figura 7.53 – Parábola – Erros x Medidas – 7 mm

Para uma largura do material de 8 mm, figura 7.52, o erro decai conforme as medidas intrusivas se aproximam da parede cuja condição de contorno é desconhecida. Nota-se, ainda, que os erros obtidos estão na faixa de 0.13 a 0.21. Pela figura 7.53 observa-se que em um material com largura de 7 mm o coeficiente de transferência de calor é melhor estimado com medidas intrusivas a uma distância δdx de $x = 0$.

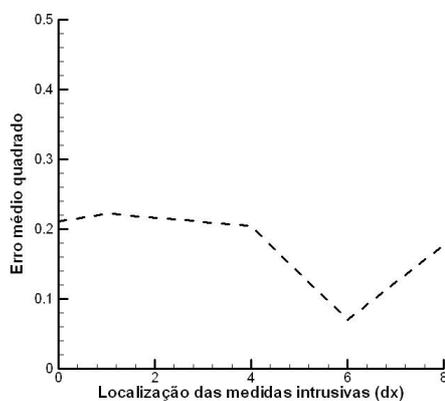


Figura 7.54 – Parábola – Erros x Medidas – 6 mm

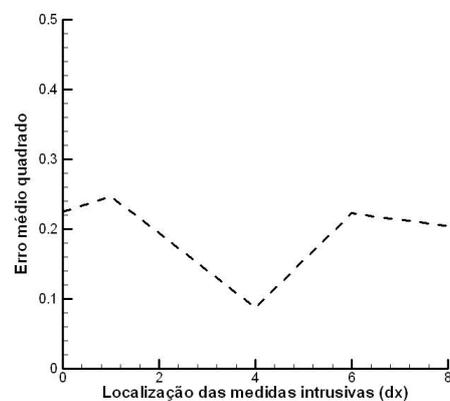


Figura 7.55 – Parábola – Erros x Medidas – 5 mm

As figuras 7.54 e 7.55 mostram que para larguras de 6 mm e 5 mm, respectivamente, as melhores estimativas dos coeficientes de transferência de calor ocorrem com medidas intrusivas afastadas da parede. Tal resultado é esperado, uma vez que quanto menor a largura, menos inclinado é o perfil de temperatura.

Em geral, pode-se verificar que o erro médio quadrado decresce conforme as medidas intrusivas se aproximam da parede com condição de contorno desconhecida. Para larguras L abaixo de 8 mm verifica-se que os erros médios quadrados são menores para medidas intrusivas afastada da parede desconhecida. Além disso, verifica-se uma grande discrepância entre os valores das medidas intrusivas e os valores das medidas não-intrusivas.

Na figura 7.56 verificam-se as estimativas dos coeficientes de troca de calor por convecção, em $x=L$, considerando a largura da placa como sendo de $L=5\text{ cm}$. Os coeficientes são dados em $\frac{W}{m^2\text{ }^\circ C}$ e, para auxiliar na localização das medidas intrusivas, consulte a tabela 7.6.

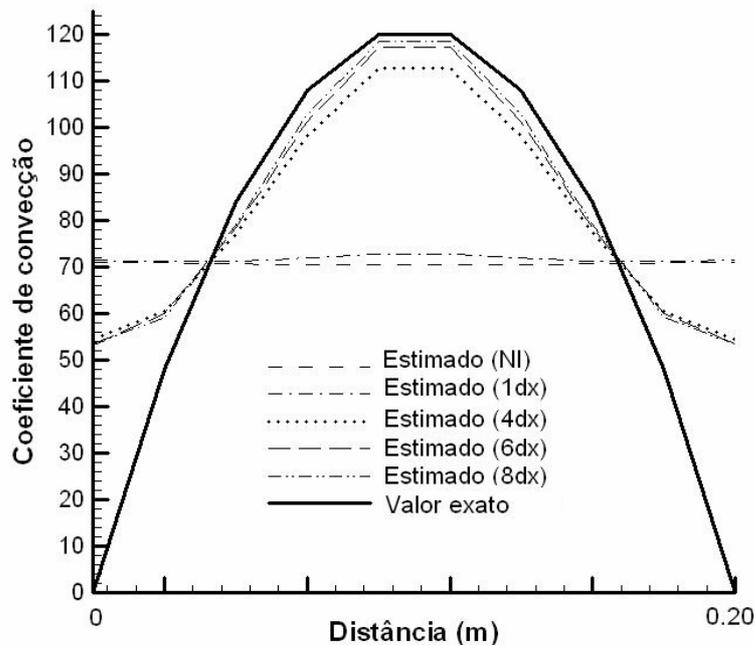


Figura 7.56 – Estimativa do coeficiente de convecção em função das medidas intrusivas - Parábola

Observa-se que, em uma placa com largura de 5 cm, quanto mais próximas as medidas intrusivas estiverem da parede com condição de contorno desconhecida, menor é o erro médio quadrado e melhor é a estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor por convecção. Não é possível estimar as formas funcionais somente com medidas não-intrusivas ou com medidas intrusivas muito afastadas da parede com condição de contorno desconhecida, conforme mostra a figura 7.56. Para a forma funcional parabólica verifica-se que para medidas intrusivas aproximadamente no meio da placa ($4dx$) a forma

funcional é bem capturada, portanto, não é necessário ir tão profundo na placa para obter uma estimativa precisa. Entretanto, os valores para $y = 0$ e $y = 0.20$ m estão longe dos valores exatos do coeficiente de transferência de calor, uma vez que esses pontos correspondem à junção com as fronteiras para $x = 0$ e $x = L$, respectivamente. Tais pontos possuem uma descontinuidade na condição de contorno, a qual muda de Robin para Dirichlet. Portanto, a enorme discrepância nos resultados para $y = 0$ e $y = 0.20$ m pode indicar que o MSF é incapaz de tratar de descontinuidades na condição de contorno, ou que é necessária uma maior quantidade de pontos de colocação na parede desconhecida durante a estimativa do coeficiente de transferência de calor na região.

Ao se considerar a influência da largura na estimativa da forma funcional parabólica, se verifica que cada tipo de medida utilizada terá uma largura ótima da placa onde a estimativa da forma funcional é melhor. Tal consideração pode ser vista na tabela 7.11.

Tabela 7.11 – Melhor largura em função do tipo de medida usada – Caso parábola

Medida	Melhor largura
NI	9 mm
1dx	9 mm
4dx	5 mm
6dx	7 mm
8dx	1 cm

Visualizando a tabela 7.11, e com o auxílio da tabela 7.10, pode se concluir que usar uma placa com larguras a partir de 5 mm é possível ter uma boa estimativa da forma funcional parabólica.

Na tabela 7.12 pode-se verificar o tempo computacional gasto e o número de frequências necessárias para a obtenção do menor erro médio quadrado em uma placa com largura $L = 5$ cm e forma funcional parabólica.

Tabela 7.12 – Tempo e frequência – Forma funcional parabólica

Medidas	Tempo (s)	Frequências
NI	11.3281	30
1dx	26.8281	40
4dx	42.2343	40
6dx	45.0156	40
8dx	24.4840	32

O método das soluções fundamentais é rápido, conforme pode ser visto na tabela acima. Todas as estimativas levaram menos de 1 minuto de tempo computacional gasto. Uma questão que fica em aberto é sobre o que aconteceria se o número de frequências fosse aumentado além do limite proposto de 40, ou seja, o que aconteceria com o erro médio quadrado. O método GMRES resolveu um sistema linear de equações contendo 36 equações e 1920 incógnitas, para o caso só com medidas não-intrusivas, e um sistema linear com 44 equações e 2560 incógnitas para os casos com medidas intrusivas e 40 frequências utilizadas.

O MSF é útil não só para estimar os coeficientes de troca de calor por convecção, como também estima muito bem as temperaturas do material. A figura 7.57 mostra a distribuição de temperatura em cada ponto de colocação situado no contorno do material, inclusive as temperaturas na parede desconhecida, para o caso com medidas intrusivas a uma distância $4dx$ de $x = 0$ e a largura da placa de 5 cm.

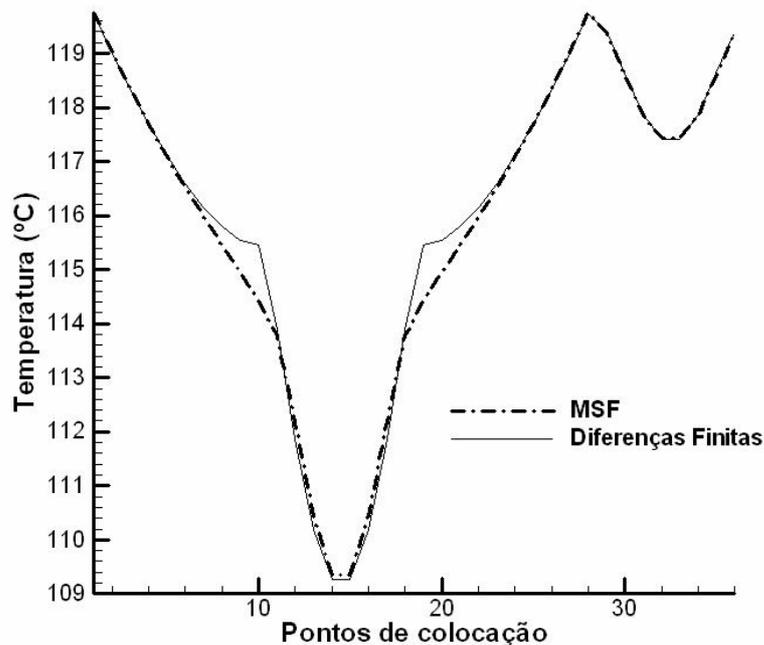


Figura 7.57 – Distribuição de temperaturas nos contornos – Parábola

Na figura 7.57, os pontos de colocação numerados de 1 a 10 representam os pontos situados em $y = 0$, os pontos de colocação numerados de 11 a 19 representam os pontos de colocação situados na parede em $x = L$, os pontos de colocação numerados de 20 a 27 representam os pontos situados em $y = H$, e os pontos de colocação restantes representam as temperaturas em $x = 0$.

Pela visualização da figura 7.57 verifica-se que ficam claros os pontos onde há descontinuidade devido às mudanças nas condições de contorno. De fato, as localizações onde há uma grande discrepância nas temperaturas correspondem ao local onde há mudanças nas condições de contorno, as quais o MSF não foi capaz de estimar corretamente, provavelmente devido à forma funcional do coeficiente de transferência de calor por convecção.

A comparação entre os valores da aproximação com precisão das isolinhas de temperaturas e os valores estimados obtidos através do MSF pode ser visualizada nas figuras 7.58 e 7.59, respectivamente. Foram consideradas medidas intrusivas de temperaturas a uma distância $4dx$ de $x = 0$ e considerou-se a placa como tendo largura de 5 cm.

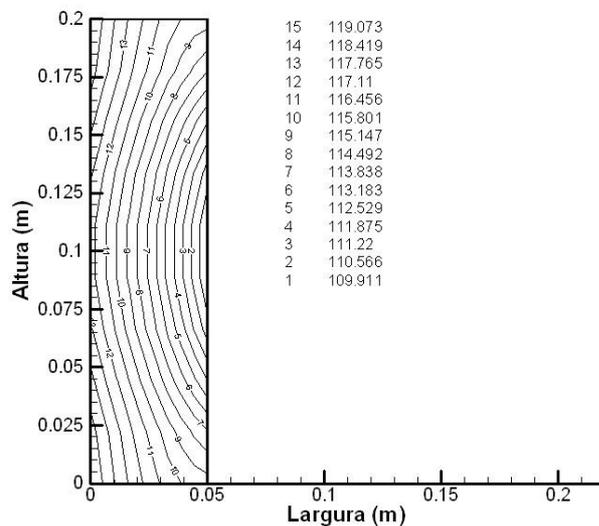


Figura 7.58 – Isolinhas – h_R parabólico – MDF

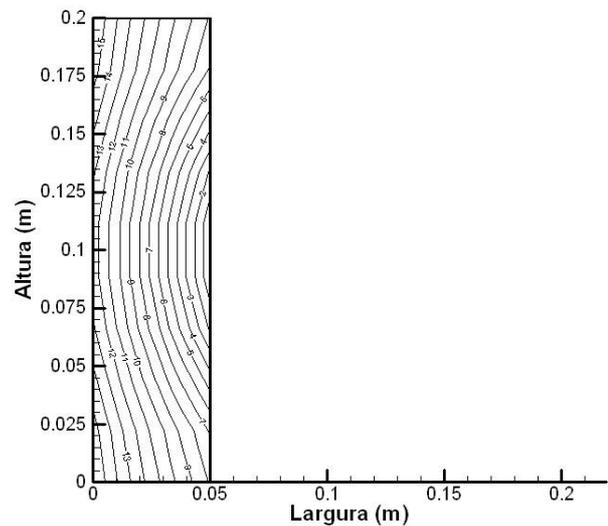


Figura 7.59 – Isolinhas – h_R parabólico – MSF

Comparando as figuras 7.58 e 7.59, observa-se que o campo de temperaturas obtido através do uso do MSF foi bem estimado. Entretanto, nota-se que próximo à $x = 0.05$ m há um pequeno desvio entre as isolinhas de temperaturas.

7.3.4.3 FORMA FUNCIONAL QUADRADA

A função quadrado é uma das mais difíceis de serem estimada, uma vez que esta possui uma descontinuidade na função. Os erros médios quadrados para cada caso podem ser visualizados na tabela 7.13. Os erros foram obtidos a partir da equação (7.9), e a sigla “NI” significa medidas não-intrusivas.

Tabela 7.13 – Erro médio quadrado para a função quadrado em função das medidas

Largura	Erro Médio Quadrado – Função Quadrado				
	NI	1dx	4dx	6dx	8dx
5 cm	1.8864	1.8563	0.7156	0.6072	0.5712
4 cm	1.8988	1.7823	0.6746	0.5818	0.5047
3 cm	1.5057	1.5573	0.6349	0.5104	0.5188
2 cm	1.7137	1.1788	1.0112	0.4787	0.4595
1 cm	0.7138	0.7923	0.5235	0.4662	0.4916
9 mm	0.7442	0.7291	0.5660	0.4816	0.5112
8 mm	0.7230	0.7517	0.6181	0.6623	0.5383
7 mm	0.6505	0.7136	0.6420	0.7046	0.5726
6 mm	0.6623	0.7814	0.7689	0.7556	0.7336
5 mm	0.9482	0.9048	0.8630	0.8419	0.8823

Os erros em função das medidas intrusivas e não intrusivas podem ser visualizados nas figuras (7.60 – 7.69).

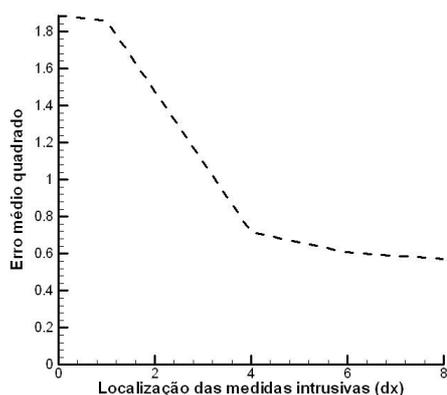


Figura 7.60 – Quadrado – Erros x Medidas – 5 cm

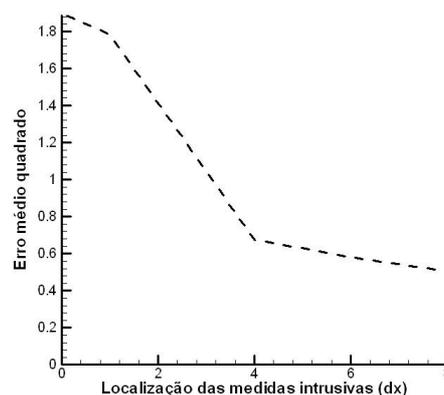


Figura 7.61 – Quadrado – Erros x Medidas – 4 cm

Nas figuras 7.60 e 7.61 observa-se que há uma grande discrepância entre os erros obtidos para as medidas não-intrusivas e para as medidas intrusivas a partir de uma distância a $4dx$ de $x = 0$. Em ambos os casos, os menores erros ocorrem com o uso de medidas intrusivas próximas à parede com condição de contorno desconhecida.

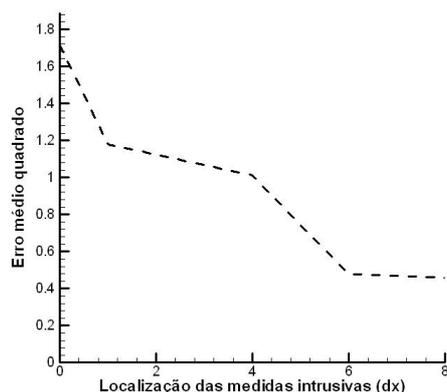
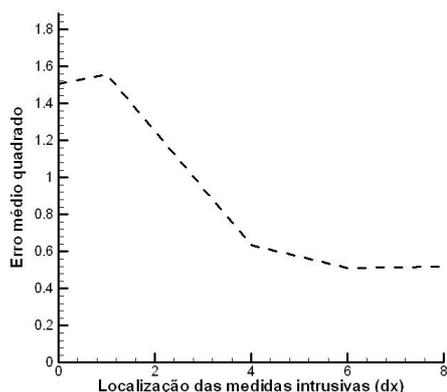


Figura 7.62 – Quadrado – Erros x Medidas – 3 cm Figura 7.63 – Quadrado – Erros x Medidas – 2 cm

Na figura 7.62, para o caso da placa com largura de 3 cm, observa-se o decaimento do erro conforme as medidas intrusivas se aproximam da parede com condição de contorno desconhecida, e verifica-se que o menor erro médio quadrado foi obtido com medidas intrusivas a uma distância $6dx$ de $x = 0$. A figura 7.63 mostra os erros para o caso da placa com largura de 2 cm, e verifica-se que o menor erro médio quadrado da temperatura ocorre a uma distância próxima à parede com condição de contorno desconhecida, ou seja, ocorre a uma distância $8dx$ de $x = 0$.

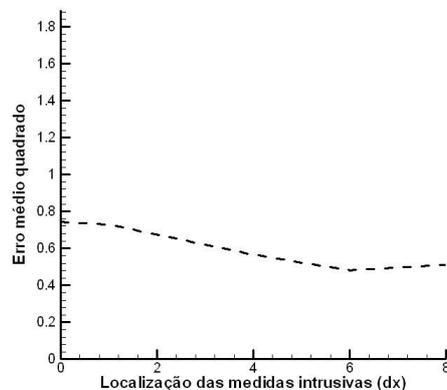
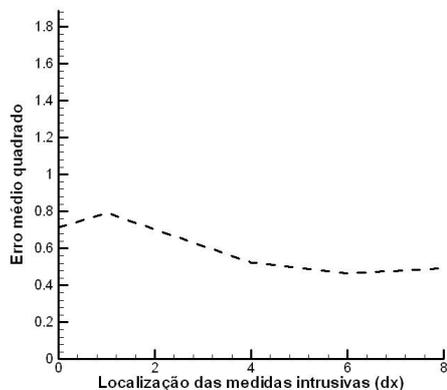


Figura 7.64– Quadrado – Erros x Medidas – 1 cm Figura 7.65 – Quadrado – Erros x Medidas – 9 mm

Visualizando as figuras 7.64 e 7.65 verifica-se que para ambos os casos as melhores estimativas da forma funcional quadrada ocorrem com medidas intrusivas a uma distância $6dx$ de $x = 0$.

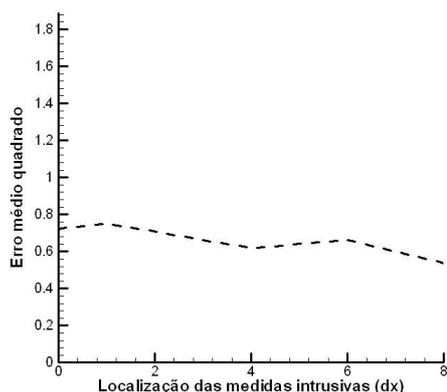


Figura 7.66 – Quadrado – Erros x Medidas – 8mm

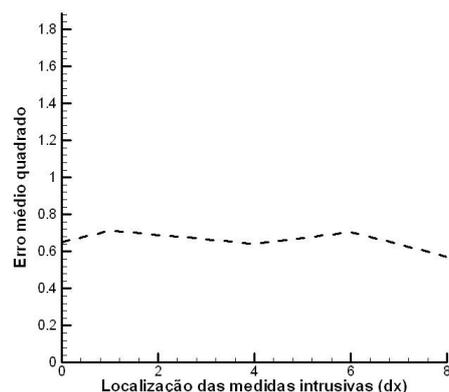


Figura 7.67 – Quadrado – Erros x Medidas – 7mm

Para materiais com larguras de 7 mm e 8 mm verifica-se que os erros médios quadrados obtidos estão na faixa de 0.5 a 0.7. Em ambos os casos as melhores estimativas das formas funcionais quadradas ocorreram com medidas intrusivas a uma distância $8dx$ de $x = 0$.

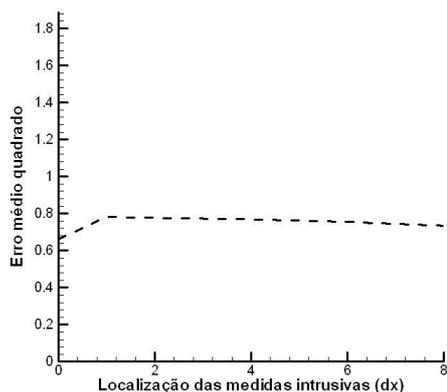


Figura 7.68 – Quadrado – Erros x Medidas – 6 mm

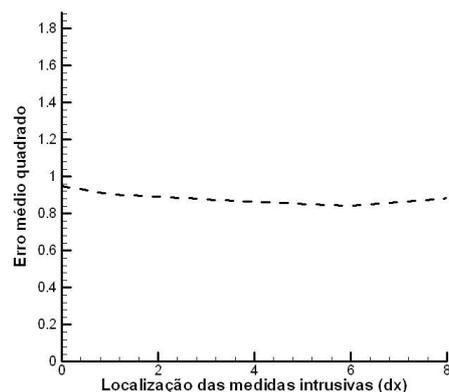


Figura 7.69 – Quadrado – Erros x Medidas – 5mm

Pela figura 7.68 observa-se que a estimativa da forma funcional quadrado melhora com medidas não-intrusivas quando a placa possui uma largura de 6 mm. Já a figura 7.69 mostra que para uma placa com 5 mm de largura a melhor estimativa da forma funcional quadrado ocorre com medidas intrusivas a uma distância $6dx$ de $x = 0$.

Pela tabela 7.13 verifica-se que o erro médio quadrado para a forma funcional quadrado é muito maior que os erros obtidos para as outras formas funcionais citadas anteriormente. É muito difícil estimar, via o MSF com as modificações propostas nesta dissertação de mestrado, uma função quadrado com medidas intrusivas longe da parede com condição de contorno desconhecida. É necessário que a largura da placa diminua até certo valor

($L = 2 \text{ cm}$) para que possamos estimar a forma funcional quadrado com o menor erro possível.

Na figura 7.70 pode se visualizar as estimativas das formas funcionais quadrado em uma placa com larguras $L = 5 \text{ cm}$ e $L = 2 \text{ cm}$, onde foram usadas medidas intrusivas a uma distância $8dx$ de $x = 0$. Também é mostrada a estimativa da forma funcional quadrado em uma placa com largura $L = 1 \text{ cm}$ e medidas intrusivas a uma distância $4dx$ de $x = 0$. Os coeficientes de transferência de calor são dados em $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$ e estimados em $x = L$.

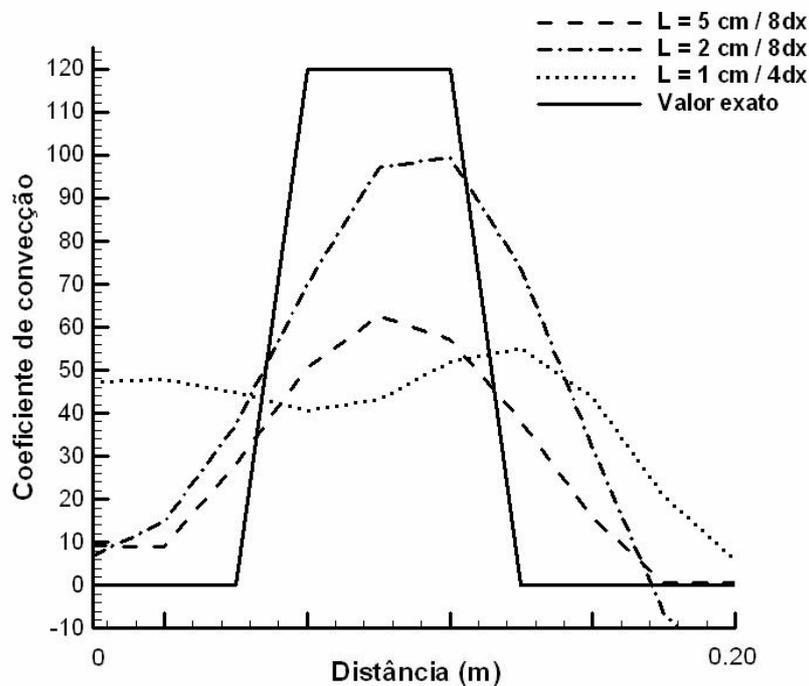


Figura 7.70 – Estimativa da forma funcional quadrado

Observa-se que quanto mais próximas as medidas intrusivas estiverem da parede com condição de contorno desconhecida, e quanto menor for a largura da placa até certo limite, menor é o erro médio quadrado das temperaturas e melhor é a estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor por convecção. Na figura 7.70 verifica-se que as medidas intrusivas a uma distância $8dx$ de $x = 0$ em uma placa com largura $L = 2 \text{ cm}$ estimam melhor o pico da forma funcional quadrado. Em geral, não é possível estimar as formas funcionais somente com medidas não-intrusivas ou com medidas muito afastadas da parede com condição de contorno desconhecida e, além disso, mesmo diminuindo a largura L da placa para abaixo de 2 cm não se obtém uma boa estimativa do coeficiente de convecção.

Para uma largura de 5 cm, $8dx$ equivale a 0.0444 m. Para uma largura de 2 cm, $8dx$ equivale a 0.0178 m. Para uma largura de 1 cm, $4dx$ equivale a 4.444×10^{-3} m.

Ao se considerar a influência da largura na estimativa da forma funcional quadrada, se verifica que cada tipo de medida utilizada terá uma largura ótima da placa onde a estimativa da forma funcional é melhor. Tal constatação pode ser vista na tabela 7.14.

Tabela 7.14 – Melhor largura em função do tipo de medida usada – Caso quadrado

Medida	Melhor largura
NI	7 mm
1dx	7 mm
4dx	1 cm
6dx	1 cm
8dx	2 cm

Pela tabela 7.14 pode se concluir que ao se estimar a forma funcional quadrada o material deverá ter no mínimo 1 cm de largura para uma melhor estimativa.

Na tabela 7.15 pode-se verificar o tempo computacional gasto e o número de frequências necessárias para a obtenção do menor erro médio quadrado em um material com largura $L = 5$ cm e forma funcional quadrado sujeito a vários tipos de medidas.

Tabela 7.15 – Tempo e frequência – Forma funcional quadrada

Medidas	Tempo (s)	Frequências
NI	40.7865	36
1dx	50.3593	38
4dx	79.3281	40
6dx	70.2187	40
8dx	32.3593	28

Todas as estimativas das formas funcionais do coeficiente de transferência de calor levaram menos de 2 minutos de tempo computacional gasto. Uma questão que fica em aberto é sobre o que aconteceria se o número de frequências fosse aumentado além do limite de 40, ou seja, o que aconteceria com o erro médio quadrado das temperaturas. O método GMRES resolveu um sistema linear de equações contendo 36 equações e 2304 incógnitas, para o caso só com medidas não-intrusivas, e um sistema linear com 44 equações e 2560 incógnitas para os casos com medidas intrusivas e 40 frequências utilizadas.

A estimativa da temperatura nos contornos para o caso com o menor erro médio quadrado – $L = 2$ cm e medidas intrusivas a uma distância $8dx$ de $x = 0$ – pode ser vista na figura 7.71.

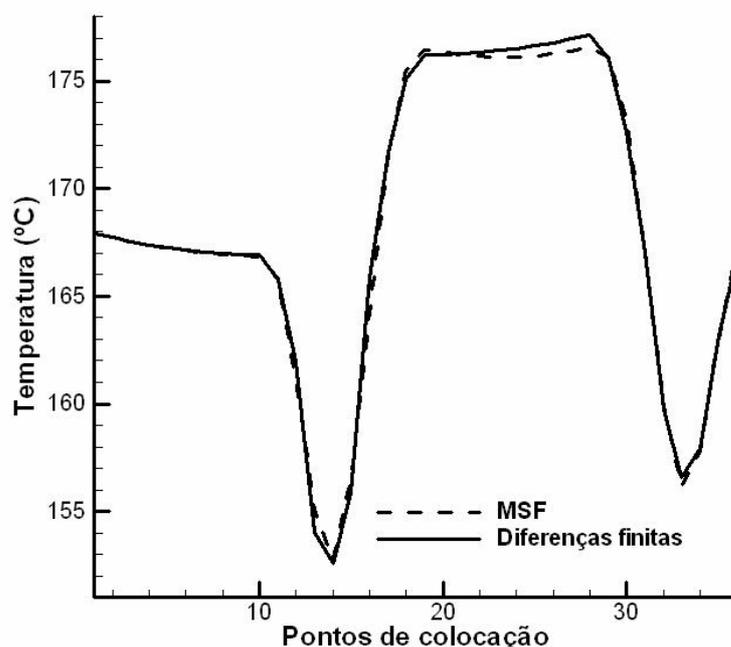


Figura 7.71 – Comparação das temperaturas nos contornos – Função Quadrado

Na figura 7.71, os pontos de colocação numerados de 1 a 10 representam os pontos situados em $y = 0$, os pontos de colocação numerados de 11 a 19 representam os pontos de colocação situados na parede em $x = L$, os pontos de colocação numerados de 20 a 27 representam os pontos situados em $y = H$, e os pontos de colocação restantes representam as temperaturas em $x = 0$.

Observa-se na figura 7.71 que as temperaturas nos contornos obtidas através do MSF estão em uma boa concordância com as temperaturas exatas obtidas através do problema direto via o método numérico das diferenças finitas. De fato, verificou-se até agora que o MSF foi capaz de estimar bem as temperaturas para cada uma das formas funcionais apresentadas. Observa-se que nos pontos onde ocorrem as estimativas da forma funcional (pontos 10-20), as temperaturas obtidas via o MSF apresentam um leve desvio em relação às temperaturas exatas obtidas pelo método das diferenças finitas. Ou seja, as localizações onde há uma discrepância nas temperaturas correspondem ao local onde há mudanças nas condições de contorno, as quais o MSF não foi capaz de estimar corretamente provavelmente devido à forma funcional do coeficiente de transferência de calor por convecção.

As figuras 7.72 e 7.73 apresentam as isolinhas de temperaturas para os dados aproximados com precisão através do MDF e para os dados estimados via o MSF,

respectivamente. As figuras foram configuradas de modo que tivessem a mesma escala de temperatura. Foi considerada uma placa com largura de 5 cm e medidas intrusivas de temperaturas a uma distância δdx de $x = 0$.

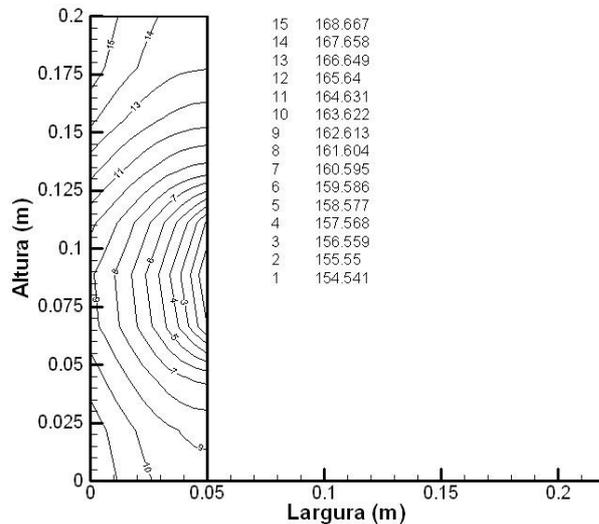


Figura 7.72 – Isolinhas – h_R quadrado – MDF

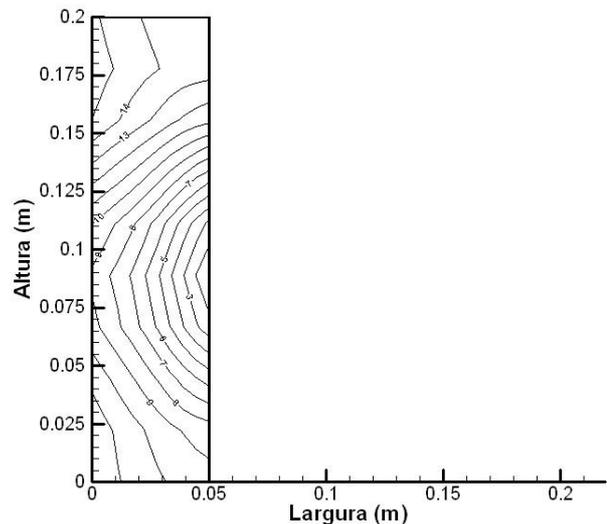


Figura 7.73 – Isolinhas – h_R quadrado – MSF

Comparando as figuras 7.72 e 7.73 nota-se que próximo à $y = 0.20$ m as isolinhas de número 14 e 15 apresentam um desvio notável. Entretanto, pode se observar que em geral houve uma boa estimativa do campo de temperaturas através do método das soluções fundamentais.

7.3.4.4 FORMA FUNCIONAL TRIÂNGULO

A forma funcional triângulo e a forma funcional quadrado são as mais difíceis de serem estimadas. A forma funcional triângulo possui uma descontinuidade na primeira derivada. Os erros médios quadrados para cada caso pode ser visualizado na tabela 7.16. A sigla “NI” significa medidas não-intrusivas.

Tabela 7.16 – Erro médio quadrado para a função triângulo em função das medidas

Largura	Erro Médio Quadrado – Função Triângulo				
	NI	1dx	4dx	6dx	8dx
5 cm	1.7371	1.6408	0.7368	0.6113	0.5875
4 cm	1.5618	1.6512	0.7131	0.5881	0.5216
3 cm	1.3489	1.5957	0.6186	0.5488	0.5436
2 cm	1.1989	1.2360	0.5427	0.4981	0.4210
1 cm	0.7619	0.8011	0.5074	0.4605	0.5123
9 mm	0.6804	1.0684	0.5296	0.4591	0.4324
8 mm	0.7995	0.8000	0.5863	0.6799	0.6920
7 mm	0.6749	1.0564	0.6207	0.7037	0.5213
6 mm	0.7002	1.0372	0.6533	0.7602	0.7486
5 mm	0.7552	1.0522	0.7050	0.9723	0.8102

Os erros em função das medidas intrusivas e não intrusivas podem ser visualizados nas figuras (7.74 – 7.83). O eixo das abscissas contém as medidas não-intrusivas (valor 0) e as medidas intrusivas ($1dx$, $4dx$, $6dx$, $8dx$). O eixo das ordenadas contém os erros médios quadrados das temperaturas.

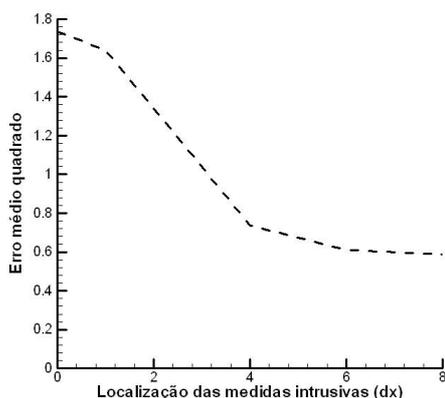


Figura 7.74 – Triângulo – Erros x Medidas – 5 cm

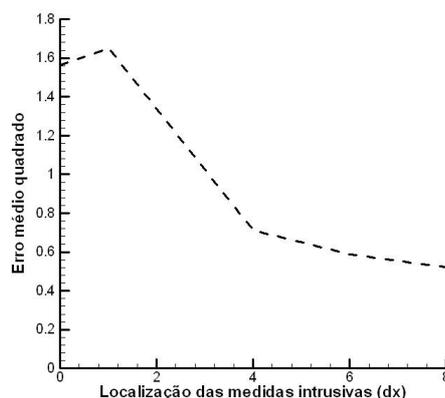


Figura 7.75 – Triângulo – Erros x Medidas – 4 cm

Ambas as figuras 7.74 e 7.75 mostram que o erro médio quadrado decai conforme as medidas intrusivas se aproximam da parede com condição de contorno desconhecida. Observa-se a grande diferença entre os valores dos erros médios obtidos para as medidas não-intrusivas e para as medidas intrusivas próximas à parede com condição de contorno desconhecida.

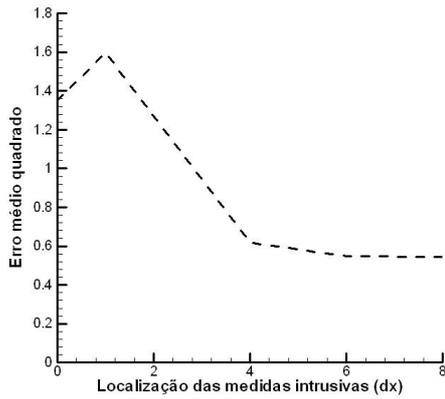


Figura 7.76 – Triângulo – Erros x Medidas – 3 cm

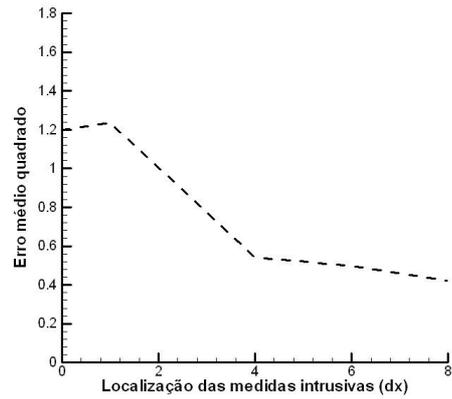


Figura 7.77 – Triângulo – Erros x Medidas – 2 cm

As figuras 7.76 e 7.77 mostram que para ambos os casos as melhores estimativas das formas funcionais do coeficiente de transferência de calor se encontram a uma distância δdx de $x = 0$.

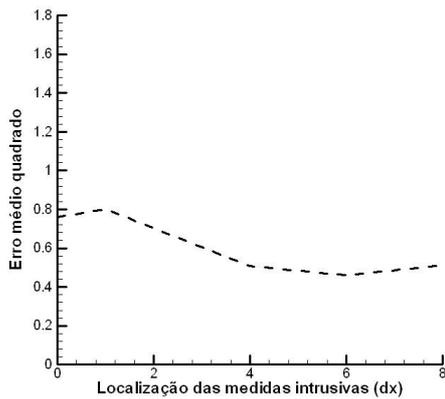


Figura 7.78 – Triângulo – Erros x Medidas – 1 cm

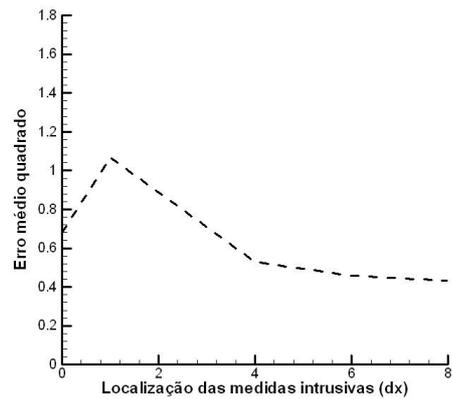


Figura 7.79 – Triângulo – Erros x Medidas – 9mm

Na figura 7.78 verifica-se que o menor erro médio quadrado das temperaturas para uma placa com largura de 1 cm é obtido com medidas intrusivas a uma distância δdx de $x = 0$. Já a figura 7.79 mostra que para uma placa com largura de 9 mm a melhor estimativa da forma funcional triângulo do coeficiente de transferência de calor ocorre em uma distância localizada a δdx de $x = 0$.

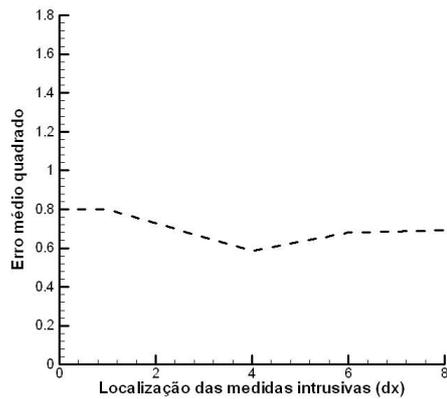


Figura 7.80 – Triângulo – Erros x Medidas – 8 mm

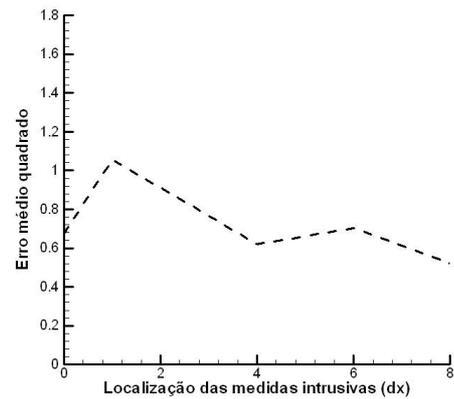


Figura 7.81 – Triângulo – Erros x Medidas – 7 mm

A figura 7.80 mostra que, para um material com largura de 8 mm, uma boa estimativa da forma funcional triângulo é obtida com medidas intrusivas localizadas a uma distância $4dx$ de $x = 0$. Já a figura 7.81 mostra que bons resultados são obtidos para a estimativa da forma funcional triângulo quando se utilizam medidas intrusivas próximas à parede desconhecida, para o caso de um material com largura de 7 mm.

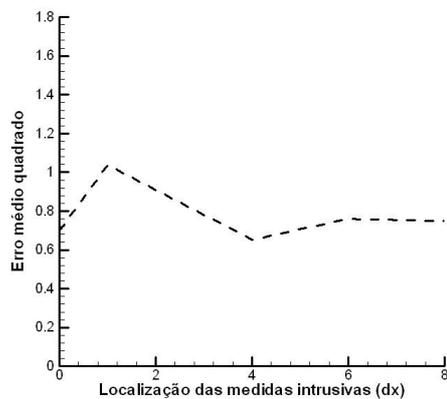


Figura 7.82 – Triângulo – Erros x Medidas – 6mm

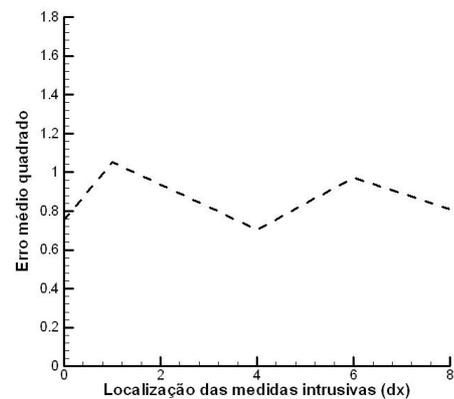


Figura 7.83 – Triângulo – Erros x Medidas – 5 mm

As figuras 7.82 e 7.83 mostram que a melhor estimativa da forma funcional triângulo em uma placa com largura de 6 mm e 5mm, respectivamente, ocorre quando se usam medidas intrusivas localizadas em uma distância a $4dx$ de $x = 0$. Isso é esperado já que para larguras menores da placa, menos inclinado é o perfil de temperatura.

Assim como no caso da forma funcional quadrado, o erro médio quadrado da forma funcional triângulo é muito grande para medidas não-intrusivas e medidas intrusivas longe da parede com condição de contorno desconhecida. Em geral, é necessário que os sensores estejam localizados o mais próximo possível da parede com condição de contorno

desconhecida para que o erro médio quadrado seja menor. Verificou-se que é necessário diminuir a largura L da placa para se obter uma melhor estimativa da forma funcional triângulo.

Ao se considerar a influência da largura na estimativa da forma funcional triângulo, se verifica que cada tipo de medida utilizada terá uma largura ótima da placa onde a estimativa da forma funcional é melhor, conforme visto na tabela 7.17.

Tabela 7.17 – Melhor largura em função do tipo de medida usada – Caso triângulo

Medida	Melhor largura
NI	7 mm
1dx	8 mm
4dx	1 cm
6dx	9 mm
8dx	2 cm

Verifica-se na tabela 7.17 que há uma grande divergência de valores encontrados, portanto, para cada medida intrusiva ou não-intrusiva utilizada a placa deverá ter uma largura específica.

O tempo computacional gasto e o número de frequências utilizado para a estimativa da forma funcional triângulo com largura $L = 5$ cm podem ser visualizados na tabela 7.18.

Tabela 7.18 – Tempo e frequência – Forma funcional triângulo

Medidas	Tempo(s)	Frequências
NI	35.7812	40
1dx	50.4687	38
4dx	64.0000	40
6dx	61.7343	40
8dx	87.3593	38

Pode se observar na tabela 7.18 que foram exigidos altos números de frequências para uma boa estimativa da forma funcional triângulo, já que esta forma funcional é de difícil estimativa. Todas as estimativas propostas neste caso levaram menos de 90 segundos para serem resolvidas. Uma questão que fica em aberto é se os erros médios quadrados das temperaturas diminuiriam se fosse aumentado o intervalo de frequências considerado para além das 40 frequências usadas. O método GMRES resolveu um sistema linear de equações contendo 36 equações e 2560 incógnitas, para o caso só com medidas não-intrusivas, e um sistema linear com 44 equações e 2560 incógnitas para os casos com medidas intrusivas e 40 frequências utilizadas.

A estimativa da temperatura nos contornos para o caso com largura $L = 2$ cm e medidas intrusivas a uma distância δdx de $x = 0$ pode ser visualizada na figura 7.84.

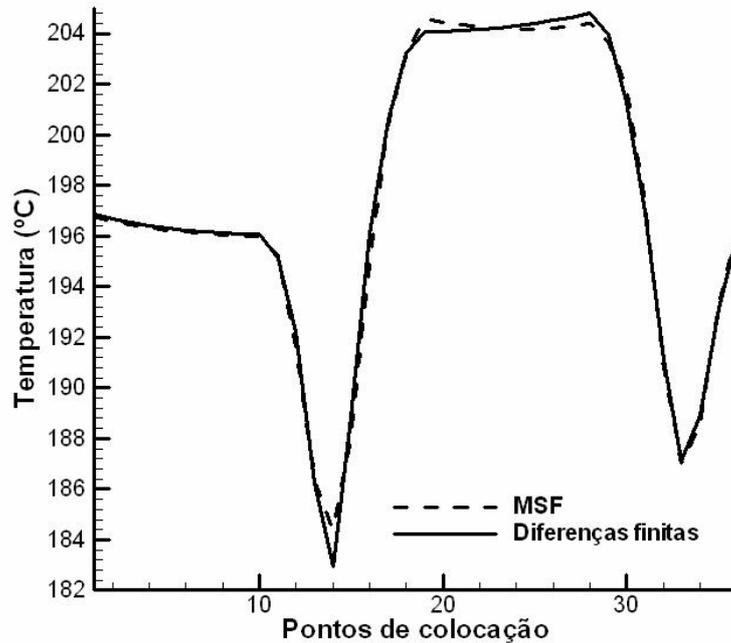


Figura 7.84 – Estimativa da temperatura nos contornos – $L = 2$ cm / δdx

Na figura 7.84, os pontos de colocação numerados de 1 a 10 representam os pontos situados em $y = 0$, os pontos de colocação numerados de 11 a 19 representam os pontos de colocação situados na parede em $x = L$, os pontos de colocação numerados de 20 a 27 representam os pontos situados em $y = H$, e os pontos de colocação restantes representam as temperaturas em $x = 0$.

Pode se verificar que a temperatura nos contornos do problema inverso foi bem estimada via o MSF, embora certos desvios sejam visíveis. De fato, nas localizações onde há uma grande discrepância nas temperaturas correspondem ao local onde há mudanças nas condições de contorno, as quais o MSF não foi capaz de estimar corretamente provavelmente devido à forma funcional do coeficiente de transferência de calor por convecção.

A comparação das temperaturas nos domínios em função das isolinhas de temperaturas pode ser vistas nas figuras 7.85 e 7.86, para os dados aproximados com precisão através do MDF e para os dados estimados via o MSF, respectivamente. Foi considerada uma placa com largura de 5 cm e medidas intrusivas a uma distância δdx de $x = 0$.

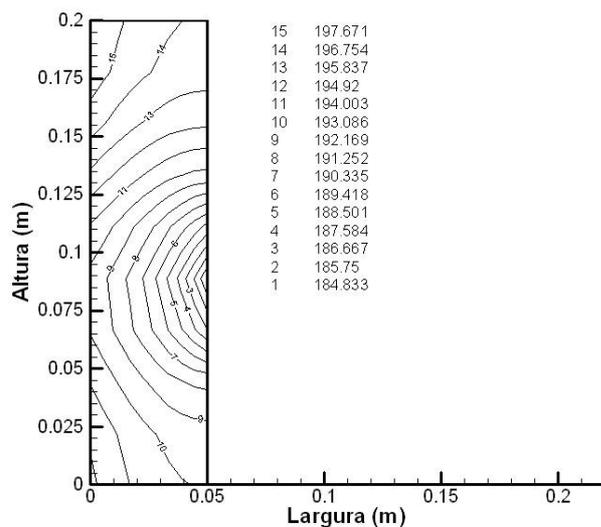


Figura 7.85 – Isolinhas – h_R triangular – MDF

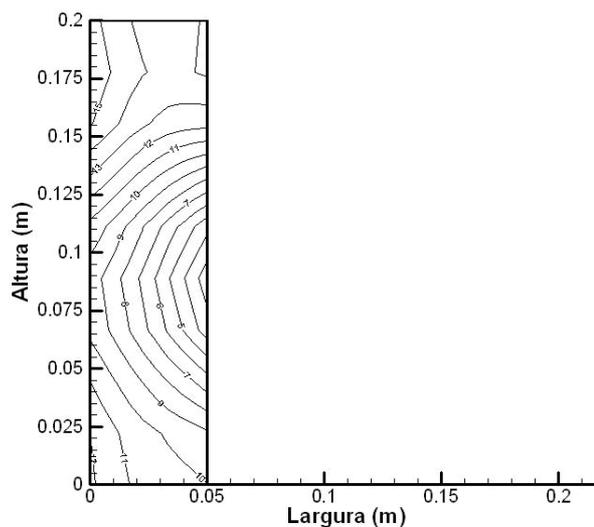


Figura 7.86 – Isolinhas – h_R triangular – MSF

Assim como no caso da forma funcional quadrada do coeficiente de transferência de calor por convecção, nota-se nas figuras 7.85 e 7.86 que há certas diferenças visíveis entre as isolinhas de temperaturas.

A seguir, tem-se uma visualização da estimativa do coeficiente de transferência de calor por convecção, em $x = L$, considerando a placa como tendo uma largura de $L = 5$ cm e diversas medidas intrusivas, conforme visto na figura 7.87. Os coeficientes são dados em

$$\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$$

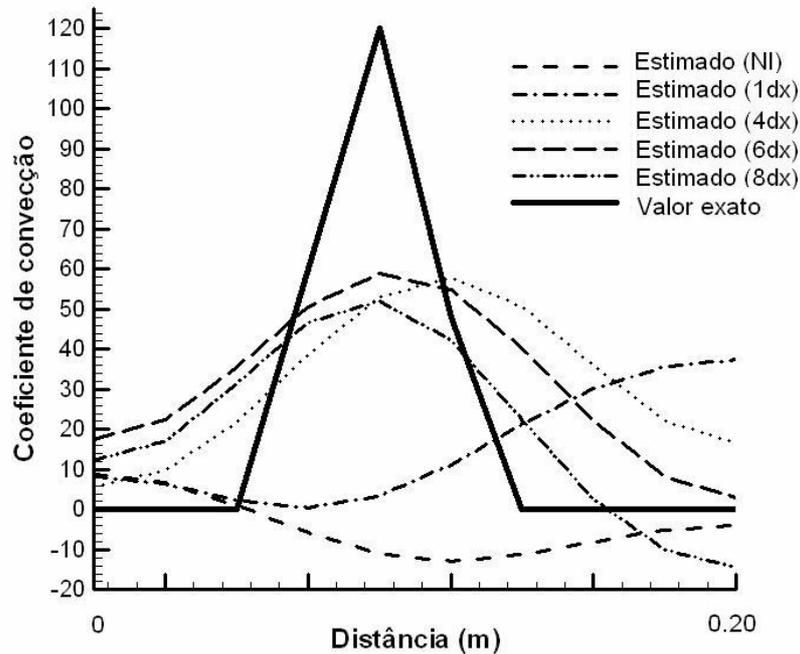


Figura 7.87 – Estimativa do coeficiente de convecção – Função triângulo

A figura 7.87 mostra que a melhor estimativa do pico da forma funcional triângulo ocorre com medidas intrusivas a uma distância de cerca de $6dx$ de $x = 0$ para o caso com $L = 5$ cm. Não é possível estimar bem a forma funcional triângulo somente com medidas não-intrusivas ou com medidas intrusivas muito afastadas da parede com condição de contorno desconhecida. Em geral, pode se afirmar que medidas intrusivas localizadas em uma distância a partir de $4dx$ de $x = 0$ para uma placa com largura de 5 cm estimam bem a forma funcional triângulo.

7.3.4.5 FORMA FUNCIONAL DEGRAU

A forma funcional degrau pode ser considerada uma alternativa à forma funcional quadrado, uma vez que ambas as funções possuem descontinuidades. Os erros médios quadrados para cada caso pode ser visualizado na tabela 7.19.

Tabela 7.19 – Erro médio quadrado para a função degrau em função das medidas

Largura	Erro Médio Quadrado – Função Degrau				
	NI	1dx	4dx	6dx	8dx
5 cm	1.8607	1.5212	0.4238	0.3779	0.2296
4 cm	1.3360	1.4101	0.4029	0.3915	0.3706
3 cm	0.7902	0.6859	0.3865	0.3463	0.3745
2 cm	0.4712	0.4076	0.3743	0.3688	0.3407
1 cm	0.5771	0.5013	0.4393	0.4324	0.4169
9 mm	0.5984	0.5256	0.4739	0.4615	0.4508
8 mm	0.4516	0.5751	0.5323	0.5090	0.5057
7 mm	0.4885	0.6089	0.5941	0.5744	0.5645
6 mm	0.5286	0.6816	0.6769	0.6701	0.6696
5 mm	0.6521	0.7921	0.7957	0.7966	1.0475

Comparando a tabela 7.19 com a tabela 7.13 verifica-se que a forma funcional degrau possui o menor erro médio quadrado quando comparado com a forma funcional quadrada. Além disso, verifica-se que os erros médios quadrados vão diminuindo conforme as medidas intrusivas se aproximam da parede com condição de contorno desconhecida.

O erro em função das medidas intrusivas e não-intrusivas pode ser visualizado nas figuras (7.88 – 7.97). O eixo das abscissas contém as medidas não-intrusivas (valor 0) e as medidas intrusivas ($1dx$, $4dx$, $6dx$, $8dx$). O eixo das ordenadas contém os erros médios quadrados das temperaturas.

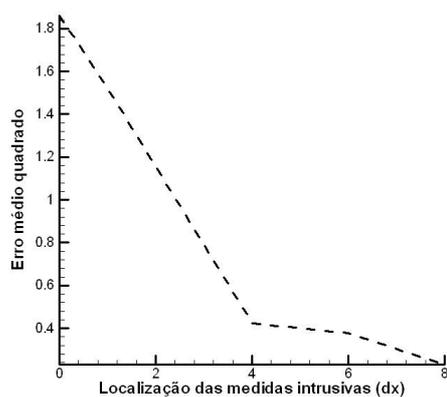


Figura 7.88 – Degrau – Erros x Medidas – 5 cm

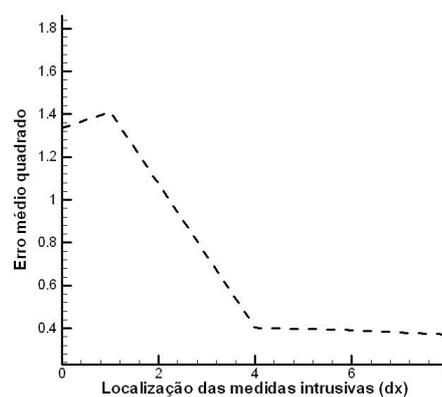


Figura 7.89 – Degrau – Erros x Medidas – 4 cm

Através das figuras 7.88 e 7.89 pode se verificar que há uma grande diferença entre os erros das estimativas obtidas com o uso de medidas não-intrusivas, e os erros obtidos com o uso de medidas intrusivas afastadas da origem. Para ambos os casos de dimensão do material,

verifica-se que os menores erros foram obtidos com medidas intrusivas localizadas a uma distância $8dx$ de $x = 0$.

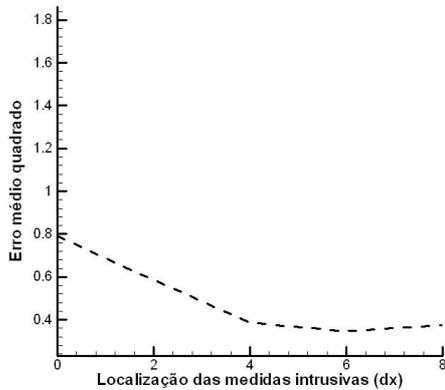


Figura 7.90 – Degrau – Erros x Medidas – 3 cm

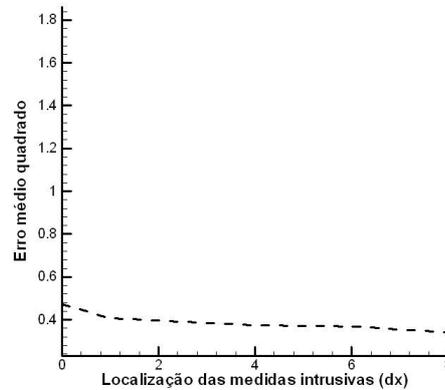


Figura 7.91 – Degrau – Erros x Medidas – 2 cm

A figura 7.90 mostra que o menor erro médio quadrado da temperatura para o material em estudo com uma largura de 3 cm foi obtido com o uso de medidas intrusivas localizadas em uma distância a cerca de $6dx$ de $x = 0$. Já para o caso visualizado na figura 7.91 verifica-se que os erros obtidos estão na faixa de 0.34 - 0.47. Além disso, as melhores estimativas da forma funcional degrau ocorrem com o uso de medidas intrusivas próximas à parede com condição de contorno desconhecida, neste caso, a uma distância $8dx$ de $x = 0$.

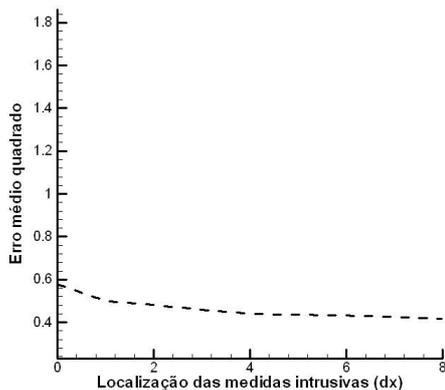


Figura 7.92 – Degrau – Erros x Medidas – 1 cm

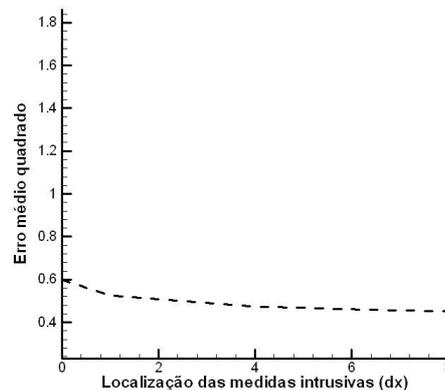


Figura 7.93 – Degrau – Erros x Medidas – 9 mm

Verifica-se nas figuras 7.92 e 7.93 que os erros obtidos com o uso de uma placa com as larguras consideradas nestes casos estão na faixa de 0.4 – 0.6. Para ambos os casos, observa-se que não há um decremento significativo nos erros a partir do uso de medidas intrusivas localizadas a uma distância $4dx$ de $x = 0$.

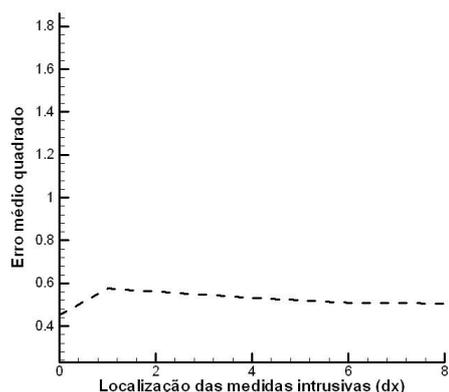


Figura 7.94 – Degrau – Erros x Medidas – 8 mm

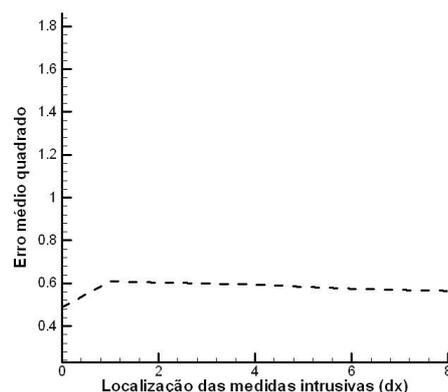


Figura 7.95 – Degrau – Erros x Medidas – 7 mm

Para as figuras 7.94 e 7.95 verifica-se que os menores erros médios quadrados foram obtidos com o uso de medidas não-intrusivas.

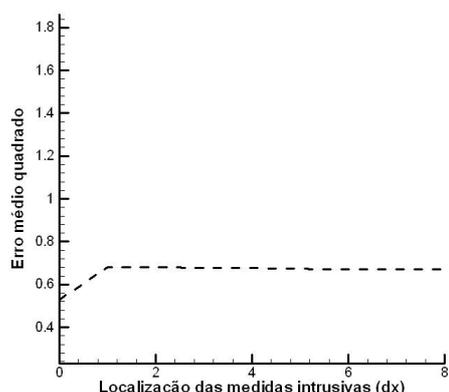


Figura 7.96 – Degrau – Erros x Medidas – 6 mm

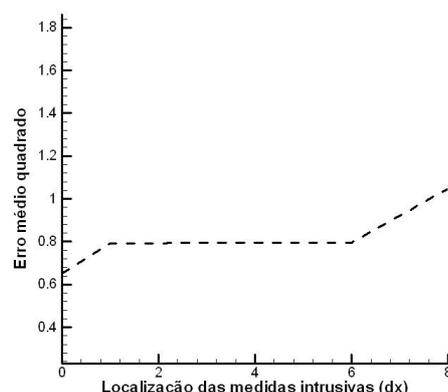


Figura 7.97 – Degrau – Erros x Medidas – 5 mm

Igualmente como nas figuras 7.94 e 7.95, as figuras 7.96 e 7.97 mostram que os menores erros médios das temperaturas são obtidos com o uso de medidas não-intrusivas. Isso é esperado, uma vez que para larguras menores da placa menos inclinado é o perfil de temperatura.

Em geral, verifica-se que o erro médio quadrado da temperatura diminui conforme as medidas intrusivas se aproximam da parede com condição de contorno desconhecida. Porém, observa-se que para larguras menores do que $L = 8$ mm o erro médio quadrado da temperatura tende a decair quando usamos medidas não-intrusivas para a forma funcional degrau, embora esta não seja bem estimada. Além da forma funcional degrau, a forma funcional quadrada também apresenta tal comportamento quando se utiliza uma placa com largura de 6 mm.

Ao se considerar a influência da largura na estimativa da forma funcional degrau, cada tipo de medida intrusiva ou não-intrusiva utilizada terá uma largura ótima da placa onde a estimativa da forma funcional é melhor, conforme visto na tabela 7.20.

Tabela 7.20 – Melhor largura em função do tipo de medida usada – Caso degrau

Medida	Melhor largura
NI	8 mm
1dx	2 cm
4dx	2 cm
6dx	2 cm
8dx	5 cm

Observa-se na tabela 7.20 que a maioria das medidas intrusivas estimam melhor a forma funcional degrau em uma placa do problema proposto cuja largura é de 2 cm. E, observando a tabela 7.19, verifica-se que para larguras abaixo de 2 cm o erro médio quadrado das temperaturas cresce. Portanto, pode-se concluir que para se estimar a forma funcional degrau, a largura mínima do material com as propriedades termofísicas propostas nesta dissertação deverá ser de 2 cm.

O tempo computacional gasto e o número de frequências utilizado para a estimativa da forma funcional degrau em uma placa com largura $L = 5 \text{ cm}$ podem ser visualizados na tabela 7.21.

Tabela 7.21 – Tempo e Frequência – Forma funcional degrau

Medidas	Tempo(s)	Frequências
NI	24.2343	32
1dx	48.8125	40
4dx	28.4065	28
6dx	88.8281	38
8dx	187.9062	40

Observa-se que o tempo de CPU aumenta conforme usamos medidas intrusivas próximas à parede com condição de contorno desconhecida. Tal fato deve-se à dificuldade do MSF em estimar funções que contém descontinuidades. O método GMRES resolveu um sistema linear de equações contendo 36 equações e 2048 incógnitas, para o caso só com medidas não-intrusivas, e um sistema linear com 44 equações e 2560 incógnitas para os casos com medidas intrusivas e 40 frequências utilizadas.

Na figura 7.98 têm-se as estimativas dos coeficientes de troca de calor por convecção sujeitos à forma funcional degrau em uma placa com largura $L = 5 \text{ cm}$. Os coeficientes são dados em $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$.

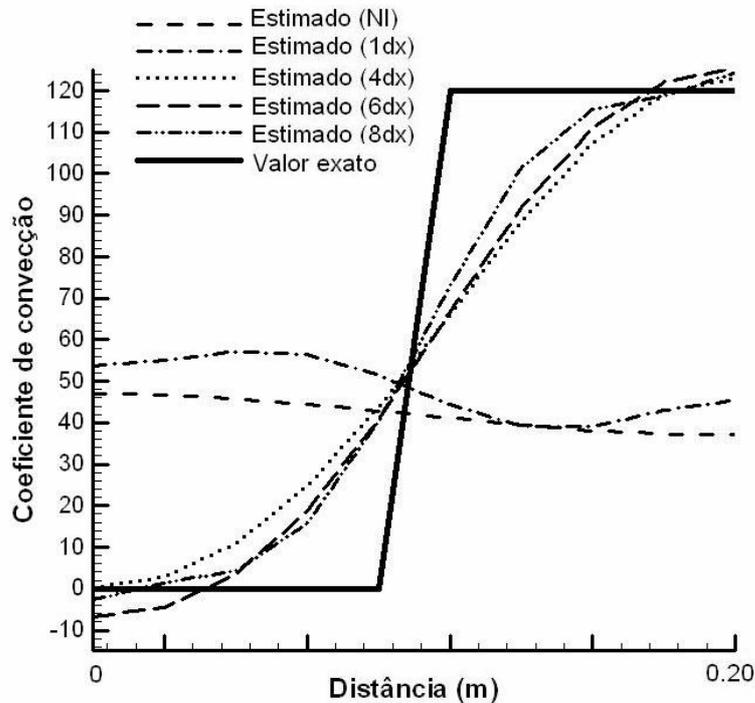


Figura 7.98 – Estimativa da forma funcional degrau – $L = 5 \text{ cm}$

Observa-se que para um material com largura de 5 cm todas as estimativas com medidas intrusivas a partir de uma distância a $4dx$ de $x = 0$ acompanham razoavelmente o formato da função degrau, ou seja, embora a descontinuidade não tenha sido bem capturada, sua variação total foi razoavelmente bem estimada, o que significa que o MSF modificado proposto nesta dissertação não é capaz de lidar com descontinuidades nas condições de contorno. Nota-se também que não é possível estimar a forma funcional degrau somente com medidas não-intrusivas, ou com medidas intrusivas muito afastadas da parede com condição de contorno desconhecida.

Embora o coeficiente de transferência de calor por convecção não tenha sido estimado com precisão, as temperaturas nos contornos são bem estimadas através do uso do MSF, conforme mostrado na figura 7.99.

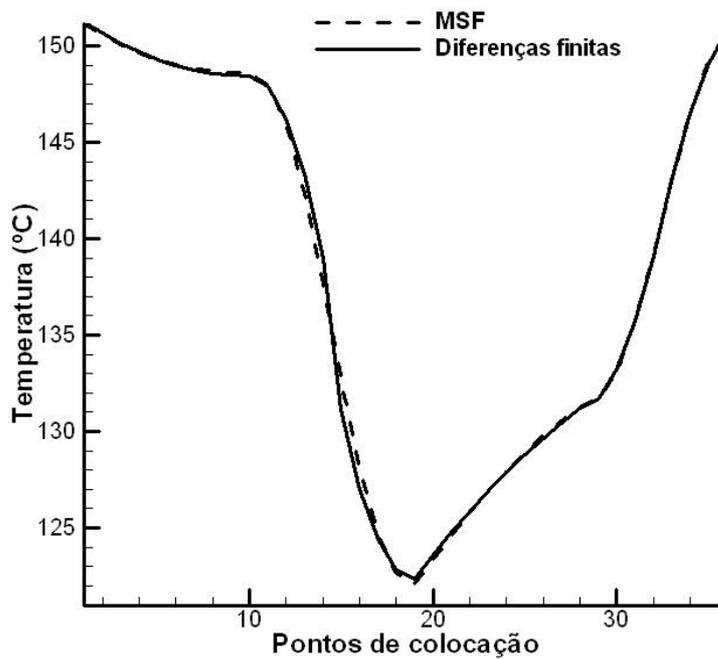


Figura 7.99 – Comparação entre temperaturas – Função degrau – $L = 5 \text{ cm} - 4dx$

Na figura 7.99, os pontos de colocação numerados de 1 a 10 representam os pontos situados em $y = 0$, os pontos de colocação numerados de 11 a 19 representam os pontos de colocação situados na parede em $x = L$, os pontos de colocação numerados de 20 a 27 representam os pontos situados em $y = H$, e os pontos de colocação restantes representam as temperaturas em $x = 0$.

Pode se verificar que a temperatura nos contornos do problema inverso foi bem estimada via o MSF, embora certos desvios sejam visíveis nos pontos de colocação numerados de 10 a 20. De fato, nas localizações onde há uma discrepância nas temperaturas correspondem ao local onde os coeficientes de transferência de calor estão sendo estimados, os quais o MSF não foi capaz de estimar corretamente provavelmente devido à forma funcional do coeficiente de transferência de calor por convecção.

A comparação entre as isolinhas de temperaturas para a estimativa da forma funcional degrau pode ser vista nas figuras 7.100 e 7.101. Considerou-se uma placa com largura de 5 cm e medidas intrusivas de temperatura a uma distância $4dx$ de $x = 0$.

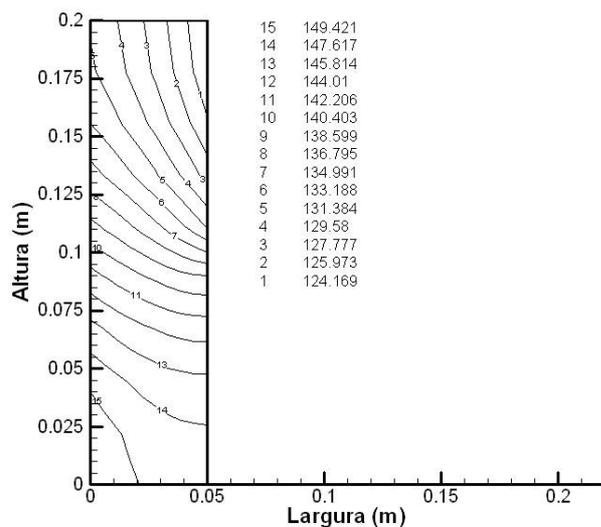


Figura 7.100 – Isolinhas – h_R degrau – MDF

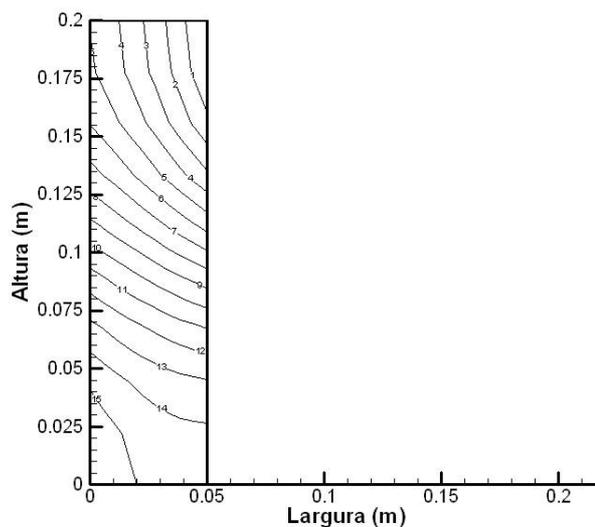


Figura 7.101 – Isolinhas – h_R degrau – MSF

Comparando as figuras 7.100 e 7.101 observa-se que houve uma excelente concordância entre as isolinhas de temperaturas dos valores aproximados obtidos pelo MDF e os valores estimados obtidos com o uso do MSF.

7.3.4.6 FORMA FUNCIONAL LINEAR

A forma funcional linear representa uma função simples. Os erros médios quadrados das temperaturas para cada caso pode ser visualizado na tabela 7.22.

Tabela 7.22 – Erro médio quadrado para a função degrau em função das medidas

Largura	Erro Médio Quadrado – Função Linear				
	NI	1dx	4dx	6dx	8dx
5 cm	0.5231	0.2599	0.1279	0.1249	9.082e-02
4 cm	0.3113	0.2217	0.1214	9.385e-02	6.652e-02
3 cm	0.1399	0.1954	9.518e-02	8.535e-02	4.549e-02
2 cm	0.1124	9.511e-02	7.938e-02	4.259e-02	3.968e-02
1 cm	9.158e-02	8.112e-02	7.826e-02	2.998e-02	2.800e-02
9 mm	8.733e-02	0.1009	9.874e-02	4.432e-02	3.173e-02
8 mm	9.163e-02	9.102e-02	8.800e-02	0.1159	2.675e-02
7 mm	9.608e-02	0.1646	0.1058	4.438e-02	6.407e-02
6 mm	0.1056	0.1219	0.1392	0.1317	7.322e-02
5 mm	0.1616	0.1443	0.1315	5.374e-02	0.1079

Observa-se na tabela 7.22 que os erros médios quadrados vão diminuindo conforme as medidas intrusivas se aproximam da parede com condição de contorno, e que diminuindo a largura da placa haverá um valor mínimo do erro médio quadrado para uma largura e medida intrusiva ou não-intrusiva utilizada.

Os gráficos (7.102 – 7.111) servem para ajudar na escolha da melhor posição para as estimativas com medidas intrusivas ou não-intrusivas em função do erro médio quadrado das temperaturas.

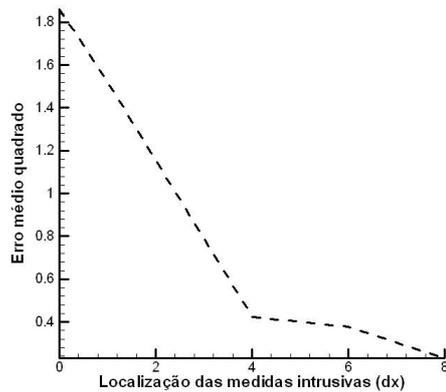


Figura 7.102 – Linear – Erros x Medidas – 5 cm

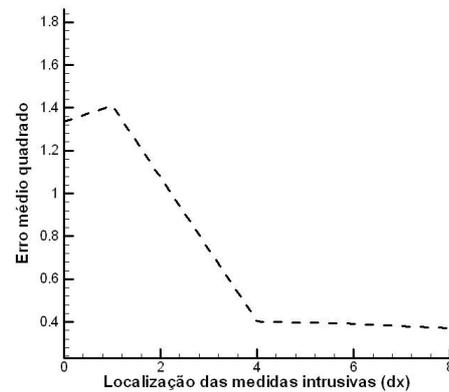


Figura 7.103 – Linear – Erros x Medidas – 4 cm

As figuras 7.102 e 7.103 mostram que há uma grande diferença entre os erros das estimativas com medidas não-intrusivas e os erros das estimativas com medidas intrusivas. Em ambos os casos as melhores estimativas das formas funcionais dos coeficientes de transferência de calor ocorrem com o uso de medidas intrusivas bem próximas à parede com condição de contorno desconhecida.

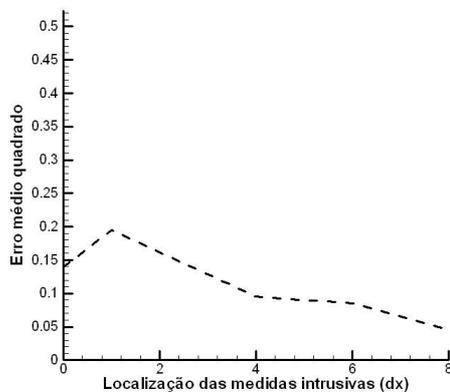


Figura 7.104 – Linear – Erros x Medidas – 3 cm

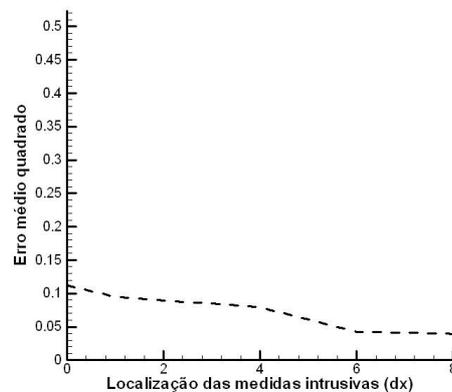


Figura 7.105 – Linear – Erros x Medidas – 2 cm

Para a figura 7.104 verifica-se que a melhor estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor em uma placa com 3 cm de largura ocorre com o uso de medidas intrusivas localizadas a uma distância $8dx$ de $x = 0$. Na figura 7.105 verifica-se que a melhor estimativa da forma funcional linear ocorre com o uso de medidas intrusivas localizadas a uma distância $8dx$ de $x = 0$. Mas, pode se observar que o uso de medidas intrusivas localizadas a uma distância $6dx$ de $x = 0$ é suficiente para se obter uma boa estimativa da forma funcional linear, visto que não há muita diferença entre os erros médios quadrados obtidos entre as distâncias $6dx$ e $8dx$.

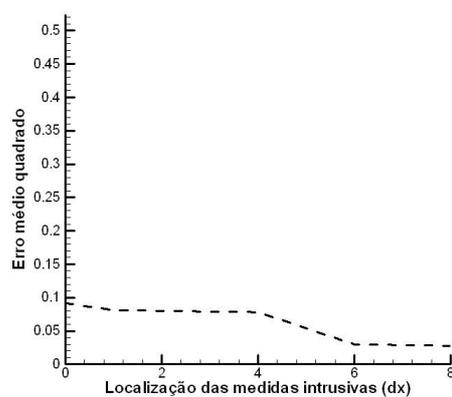


Figura 7.106 – Linear – Erros x Medidas – 1 cm

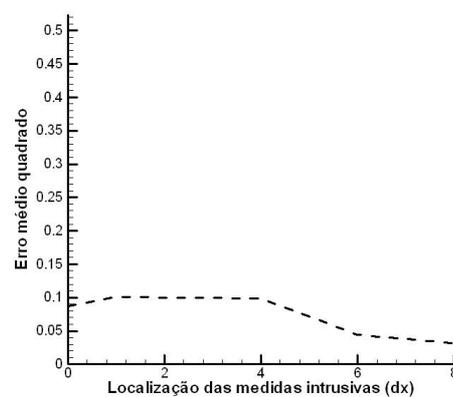


Figura 7.107 – Linear – Erros x Medidas – 9 mm

A figura 7.106 mostra que não há uma queda significativa no erro médio quadrado das temperaturas com o uso de medidas intrusivas localizadas em uma distância a partir de $6dx$ de $x = 0$ para uma placa com largura de 1 cm. A figura 7.107 mostra que para uma placa com largura de 9 mm a melhor estimativa da forma funcional linear ocorre com o uso de medidas intrusivas bem próximas à parede com condição de contorno desconhecida.

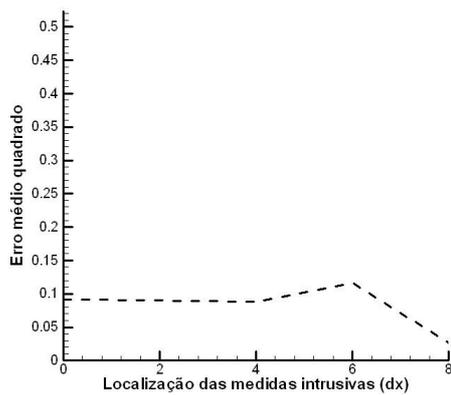


Figura 7.108 – Linear – Erros x Medidas – 8 mm

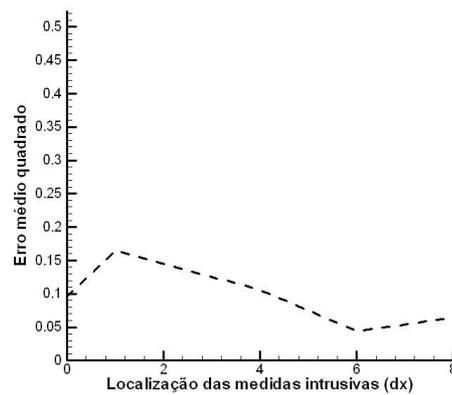


Figura 7.109 – Linear – Erros x Medidas – 7 mm

Para uma placa com largura de 8 mm, deve-se usar medidas intrusivas de medição de temperatura localizadas em uma distância a cerca de $8dx$ de $x = 0$, conforme mostrado na figura 7.108. Já a figura 7.109 mostra que a forma funcional linear pode ser bem estimada com o uso de medidas intrusivas de medição de temperatura localizadas em uma distância a cerca de $6dx$ de $x = 0$.

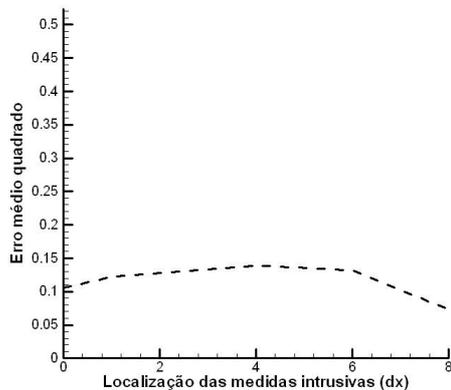


Figura 7.110 – Linear – Erros x Medidas – 6 mm

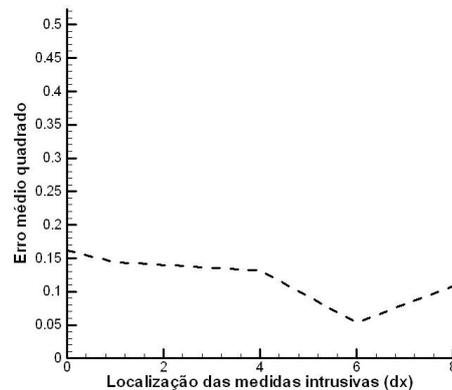


Figura 7.111 – Linear – Erros x Medidas – 5 mm

As figuras 7.110 e 7.111 mostram que as melhores estimativas das formas funcionais lineares acontecem com medidas intrusivas de temperaturas localizadas próximas às paredes com condições de contorno desconhecidas. Nota-se na figura 7.111 que para materiais com larguras de 5 mm é suficiente o uso de medidas intrusivas localizadas a uma distância $6dx$ de $x = 0$.

Para todas as larguras L verifica-se que o erro médio quadrado decai conforme nos aproximamos da parede com condição de contorno desconhecida, o que é de se esperar. As

estimativas para o coeficiente de transferência de calor por convecção considerando uma placa com largura $L = 1$ cm podem ser visualizadas na figura 7.112.

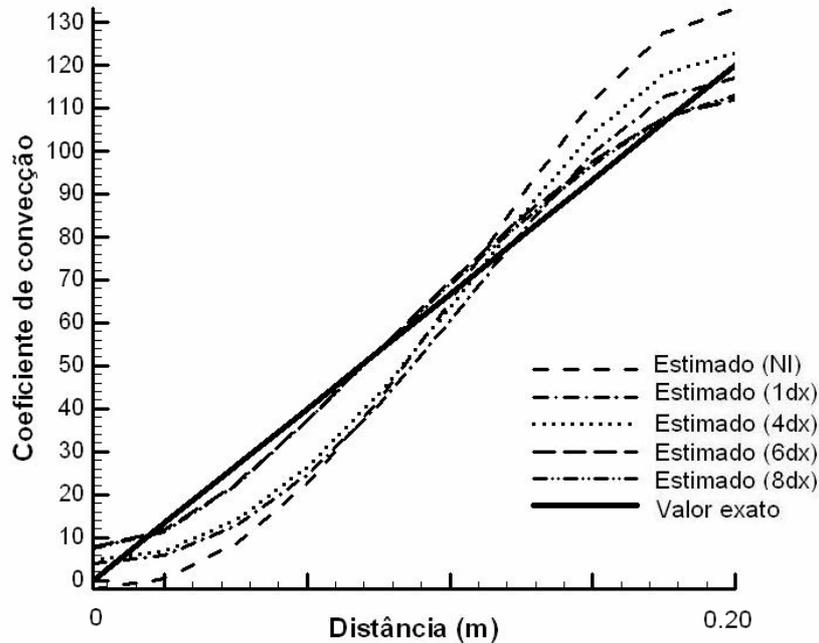


Figura 7.112 – Estimativa da função linear – $L = 1$ cm

De todas as estimativas vistas na figura 7.112, verifica-se que a estimativa com medidas intrusivas a uma distância $6dx$ de $x = 0$ em uma placa com largura de 1 cm é a que melhor se aproxima do valor exato do coeficiente de troca de calor por convecção.

Ao se considerar a influência da largura na estimativa da forma funcional linear, cada tipo de medida intrusiva ou não-intrusiva de temperatura utilizada terá uma largura ótima da placa onde a estimativa da forma funcional é melhor, conforme visto na tabela 7.23.

Tabela 7.23 – Melhor largura em função do tipo de medida usada – Caso linear

Medida	Melhor largura
NI	9 mm
1dx	1 cm
4dx	1 cm
6dx	1 cm
8dx	8 cm

Através da tabela 7.23 verifica-se que boa parte das melhores estimativas funcionais acontecem em uma placa com largura de 1 cm e, pela tabela 7.22, verifica-se que na maioria dos casos os erros médios quadrados das temperaturas crescem para larguras inferiores a 1

cm. Portanto, pode se concluir que a largura mínima da placa com as propriedades termofísicas propostas nesta dissertação deverá ser de 1 cm para se estimar a forma funcional linear.

O tempo computacional gasto e o número de frequências utilizado para a estimativa da forma funcional linear em uma placa com largura $L = 5 \text{ cm}$ podem ser visualizados na tabela 7.24.

Tabela 7.24 – Tempo e Frequência – Forma funcional linear

Medidas	Tempo(s)	Frequências
NI	19.3750	26
1dx	49.5156	32
4dx	40.1093	19
6dx	41.5000	30
8dx	33.0312	32

Observa-se que a estimativa da forma funcional linear levou menos de 1 minuto para cada uma das medidas intrusivas ou não-intrusivas de temperaturas consideradas. O método GMRES resolveu um sistema linear de equações contendo 36 equações e 1664 incógnitas, para o caso só com medidas não-intrusivas, e um sistema linear com 44 equações e 2048 incógnitas para os casos com medidas intrusivas e 32 frequências utilizadas. A estimativa da forma funcional linear só com medidas não-intrusivas foi a mais rápida de todas, provavelmente por causa da dimensão da matriz.

Na figura 7.113 tem-se uma comparação entre as temperaturas obtidas do problema inverso via o MSF e as temperaturas obtidas do problema direto da formulação 1 via o método das diferenças finitas. Foram consideradas medidas intrusivas obtidas a uma distância $1dx$ de $x = 0$ em uma placa com largura $L = 5 \text{ cm}$, ou seja, medidas intrusivas bem afastadas da parede com condição de contorno desconhecida.

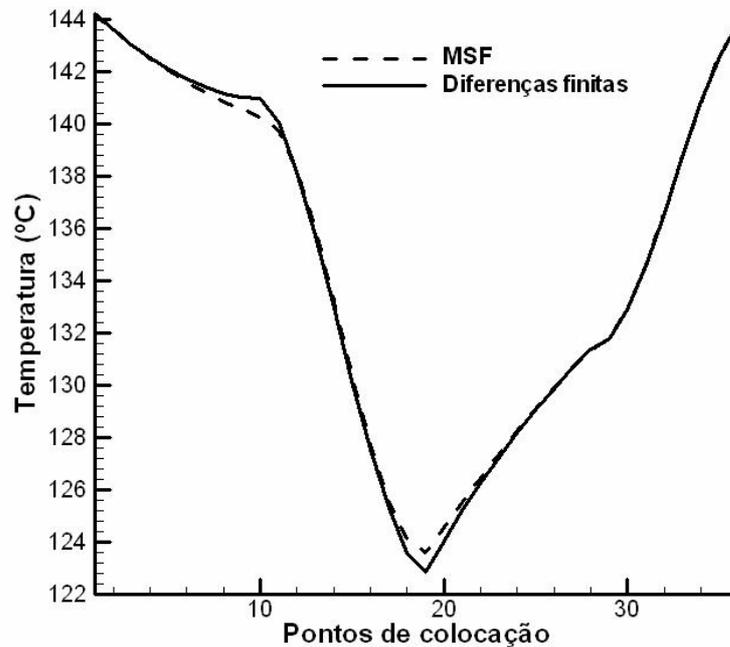


Figura 7.113 – Comparação entre temperaturas – Função linear

Na figura 7.113, os pontos de colocação numerados de 1 a 10 representam os pontos situados em $y = 0$, os pontos de colocação numerados de 11 a 19 representam os pontos de colocação situados na parede em $x = L$, os pontos de colocação numerados de 20 a 27 representam os pontos situados em $y = H$, e os pontos de colocação restantes representam as temperaturas em $x = 0$.

Embora certos desvios sejam visíveis nos pontos de colocação numerados de 10 a 20, pode se verificar que a temperatura nos contornos do problema inverso foi bem estimada via o MSF. De fato, nas localizações onde há uma discrepância nas temperaturas correspondem ao local onde os coeficientes de transferência de calor estão sendo estimados, muitos deles apresentando desvios do valor aproximado com precisão.

A comparação entre as isolinhas de temperaturas entre o valor aproximado e o valor estimado pode ser vista nas figuras 7.114 e 7.115.

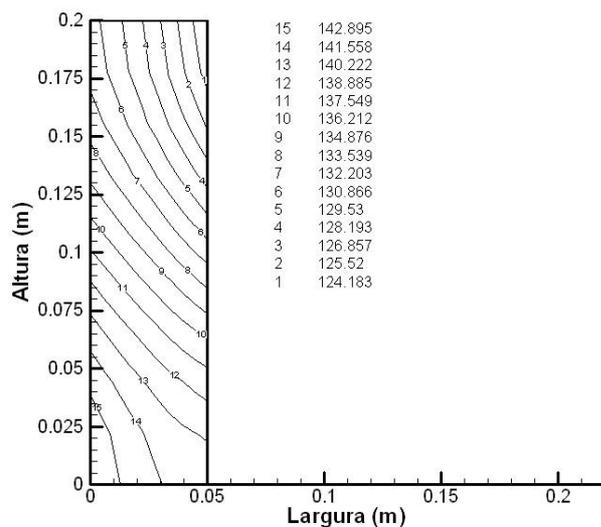


Figura 7.114 – Isolinhas – h_R linear – MDF

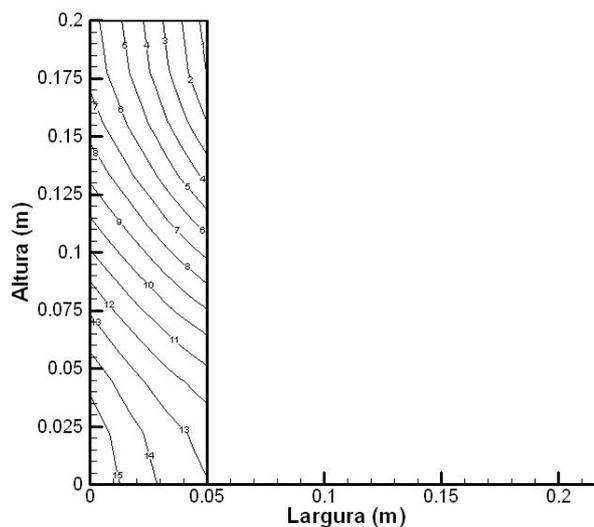


Figura 7.115 – Isolinhas – h_R linear – MSF

Observa-se que o MSF foi hábil não só na estimativa da forma funcional linear, como também foi capaz de capturar com precisão a distribuição de temperaturas no domínio do problema considerado pela formulação 1.

7.3.5 ESTABILIDADE DO MÉTODO

Nesta seção é estudada a estabilidade do método das soluções fundamentais em um problema inverso de transferência de calor. Para os problemas inversos, o fato da matriz de interpolação ser altamente mal-condicionada representa um grande problema. O que complica a situação é o fato de que os dados medidos para os problemas inversos são contaminados com erros de medição. Por esse motivo, a estabilidade do MSF modificado proposto nesta dissertação foi testada com o uso de medidas simuladas contendo ruídos, as quais são perturbadas através da seguinte equação:

$$\bar{T} = T + \sigma \varepsilon \quad (7.12)$$

onde \bar{T} é a temperatura perturbada, σ é o nível do ruído adicionado às medidas simuladas (1% ou 10%), ε são números aleatórios com distribuição gaussiana e não-uniforme no intervalo $[-1,1]$ e T é a temperatura estimada a ser perturbada.

Os dados das tabelas (7.25 – 7.30) foram obtidos considerando medidas intrusivas de temperatura localizadas a uma distância δdx de $x = 0$, para diferentes larguras do material

considerado e diferentes formas funcionais do coeficiente de transferência de calor por convecção.

7.3.5.1 CONSTANTE

A tabela 7.25 mostra a influência do nível de ruído adicionado às medidas simuladas em um problema inverso de transferência de calor cuja forma funcional do coeficiente de transferência de calor é constante.

Tabela 7.25 – Influência do ruído no erro médio quadrado – Função constante

Largura	Sem ruído	Ruído de 1%	Ruído de 10%
5 cm	1.525e-03	7.427e-03	6.422e-02
4 cm	1.078e-03	6.878e-03	6.440e-02
3 cm	9.545e-04	6.494e-03	6.463e-02
2 cm	1.535e-03	6.285e-03	6.415e-02
1 cm	3.828e-04	6.279e-03	6.470e-02
9 mm	3.264e-04	6.254e-03	6.476e-02
8 mm	2.770e-04	6.239e-03	6.482e-02
7 mm	4.869e-04	6.236e-03	6.485e-02
6 mm	4.064e-04	6.246e-03	6.493e-02
5 mm	3.319e-04	6.271e-03	6.498e-02

Assim como no caso das estimativas dos coeficientes de transferência de calor propostos na seção anterior, verifica-se que mesmo com os ruídos adicionados aos dados simulados para o problema inverso há uma largura ótima do material onde o erro médio quadrado obtido é mínimo. A tabela 7.25 pode ser representada graficamente na figura 7.116.

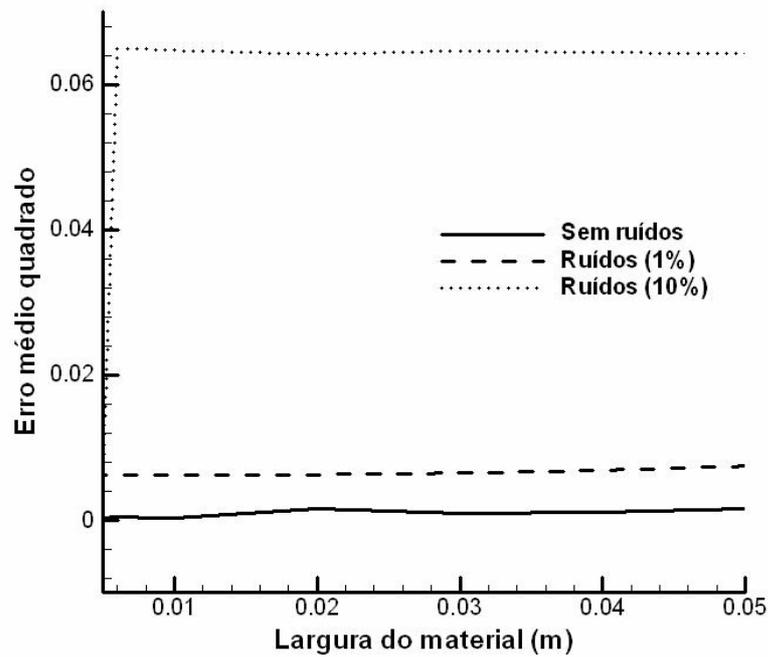


Figura 7.116 – Representação gráfica da influência do ruído – Constante

Pode se reparar que, em geral, os ruídos adicionados não mudam muito em função da largura da placa quando a forma funcional do coeficiente de transferência de calor considerado é constante. Há uma grande diferença entre os erros obtidos para cada tipo de ruídos e os dados sem ruídos.

A estimativa dos coeficientes de transferência de calor, com e sem ruídos, considerando uma placa com largura de 5 cm e medidas intrusivas localizadas a uma distância δdx de $x = 0$ pode ser visualizada na figura 7.117. Os coeficientes são dados em $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$.

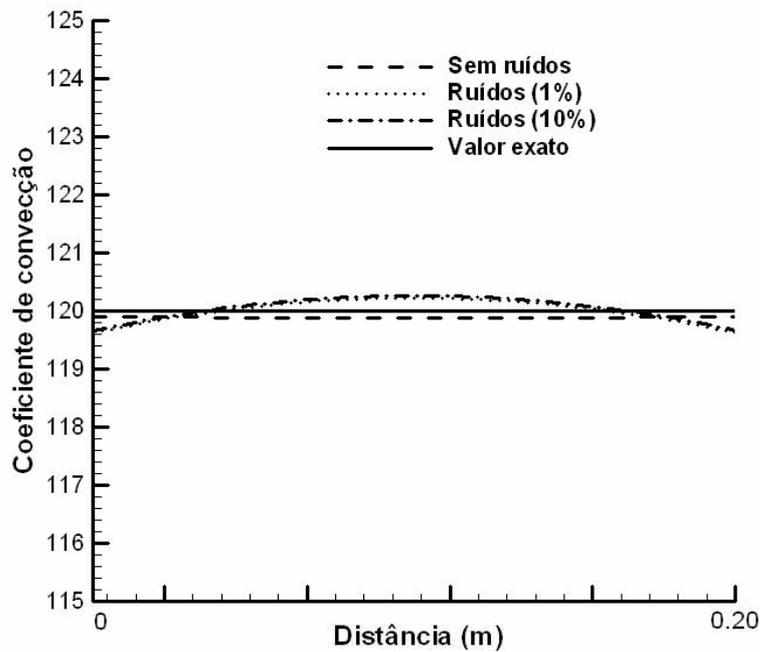


Figura 7.117 – Estimativa – com e sem ruídos – Forma funcional constante

Pode se observar pela figura 7.117 que, embora o erro médio quadrado para um valor de ruído adicionado de 10% seja muito maior que os erros dos outros casos, a estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor não foi prejudicada, e se aproximou bastante dos valores estimados para o caso com 1% de ruído adicionado aos dados exatos.

7.3.5.2 PARÁBOLA

Para o caso onde a forma funcional do coeficiente de transferência de calor é parabólica, os erros em função dos ruídos adicionados às medidas simuladas para o problema inverso podem ser vistos na tabela 7.26, onde foram consideradas medidas intrusivas a uma distância $6dx$ de $x = 0$.

Tabela 7.26 – Influência do ruído no erro médio quadrado – Função parabólica

Largura	Sem ruídos	Ruído de 1%	Ruído de 10%
5 cm	0.2651	0.3124	0.3302
4 cm	0.2266	0.2361	0.2491
3 cm	0.1765	0.1789	0.2059
2 cm	0.1371	0.1383	0.1851
1 cm	9.767e-02	0.1142	0.2270
9 mm	0.1695	0.1036	0.1066
8 mm	0.1741	9.301e-02	9.288e-02
7 mm	6.664e-02	8.294e-02	0.2191
6 mm	7.083e-02	7.485e-02	0.2358
5 mm	0.2229	0.2619	0.3545

Verifica-se na tabela 7.26 que mesmo com os ruídos adicionados aos dados simulados há uma largura ótima da placa onde o erro médio quadrado obtido é mínimo. Os erros da tabela 7.26 podem ser representados graficamente na figura 7.118.

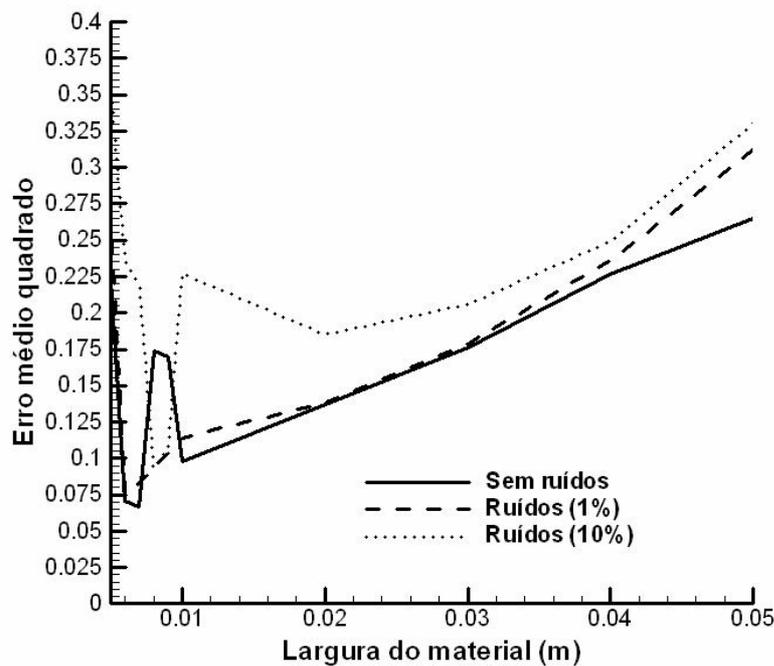


Figura 7.118 – Representação gráfica da influência do ruído - Parábola

Percebe-se pela figura 7.118 que para larguras menores que 0,01 m os ruídos adicionados apresentam erros médios quadrados que são oscilatórios em relação aos erros médios quadrados das medidas simuladas sem ruídos. Além disso, para um nível de ruído de 10% os erros obtidos diferem bastante dos erros obtidos para o caso sem ruídos e para o caso com 1% de ruído. Portanto, pode-se concluir que o método é estável em relação à diminuição do ruído

adicionado. Entre as larguras 0.02 m e 0.03 m verifica-se que os erros médios quadrados encontrados para o caso com 1% de ruído parecem igualar os erros médios obtidos para o caso sem ruídos.

A estimativa dos coeficientes de transferência de calor, com e sem ruídos, considerando uma placa com largura de 5 cm e medidas intrusivas localizadas a uma distância δdx de $x = 0$ pode ser visualizada na figura 7.119. Os coeficientes são dados em $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$.

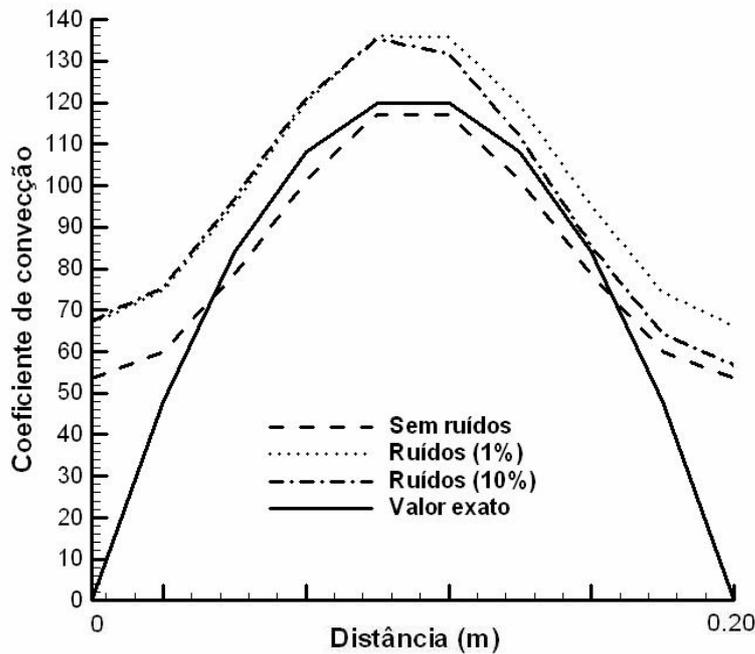


Figura 7.119 – Estimativa – com e sem ruídos – Forma funcional parabólica

Pela figura 7.119 verifica-se que o acréscimo de ruídos faz com que a estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor apresente certos desvios em relação ao valor exato e em relação ao valor estimado sem ruídos. Observa-se que as estimativas dos coeficientes de transferência de calor cujos dados de entrada apresentam ruídos se igualam até aproximadamente metade da altura da placa. Para distâncias além dessa altura as estimativas divergem de valor, sendo verificado que os dados com 10% de ruídos se aproximam melhor do valor exato. Tal fato pode ser justificado pelo acréscimo de frequências às equações (4.25) e (4.29), o que faz com que, mesmo com ruídos, haja uma aproximação ótima da temperatura e fluxo de calor, respectivamente, onde o erro médio quadrado é menor.

7.3.5.3 QUADRADO

Considerando a forma funcional do coeficiente de transferência de calor como sendo quadrada, e sabendo que foram usadas medidas intrusivas a uma distância δdx de $x = 0$, os erros médios quadrados para cada nível de ruído adicionado é apresentado na tabela 7.27.

Tabela 7.27 – Influência do ruído no erro médio quadrado – Função quadrado

Largura	Sem ruídos	Ruído de 1%	Ruído de 10%
5 cm	0.6072	0.6085	0.6261
4 cm	0.5818	0.5814	0.5844
3 cm	0.5104	0.5283	0.5480
2 cm	0.4787	0.4813	0.4966
1 cm	0.4662	0.4689	0.6793
9 mm	0.4816	0.6545	0.6186
8 mm	0.6623	0.6726	0.7100
7 mm	0.7046	0.7099	0.6381
6 mm	0.7556	0.7540	0.7970
5 mm	0.8419	0.8428	0.9046

Nota-se que para cada caso há uma largura ótima da placa onde o erro é mínimo. Os erros da tabela 7.27 podem ser representados graficamente na figura 7.120.

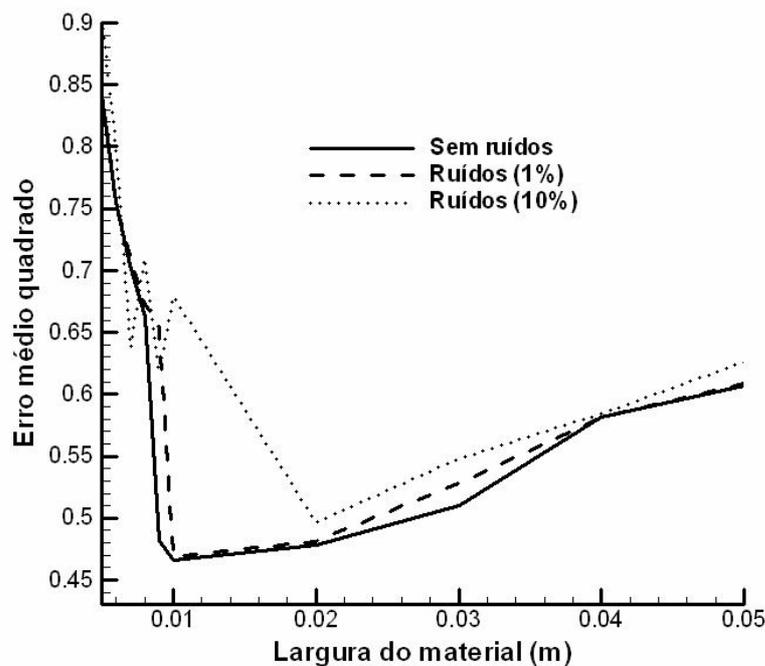


Figura 7.120 – Representação gráfica da influência do ruído – Quadrado

Nota-se na figura 7.120 que, para larguras abaixo de 0.01 m, os ruídos adicionados aos dados simulados faz com que os erros médios quadrados das estimativas com ruídos sejam oscilatórios em relação os erros dos dados sem ruídos. Para larguras maiores ou iguais a 0.01 m verifica-se que o método é estável em relação à diminuição dos ruídos adicionados às medidas simuladas para o problema inverso, notando-se que para certas larguras os erros dos dados com 1% de ruído se aproximam bastante dos erros dos dados estimados sem ruídos.

As estimativas das formas funcionais quadradas dos coeficientes de transferência de calor podem ser vistas na figura 7.121. Nesta figura é considerada uma placa com 5 cm de largura e medidas intrusivas localizadas a uma distância δdx de $x = 0$. Os coeficientes são dados em

$$\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$$

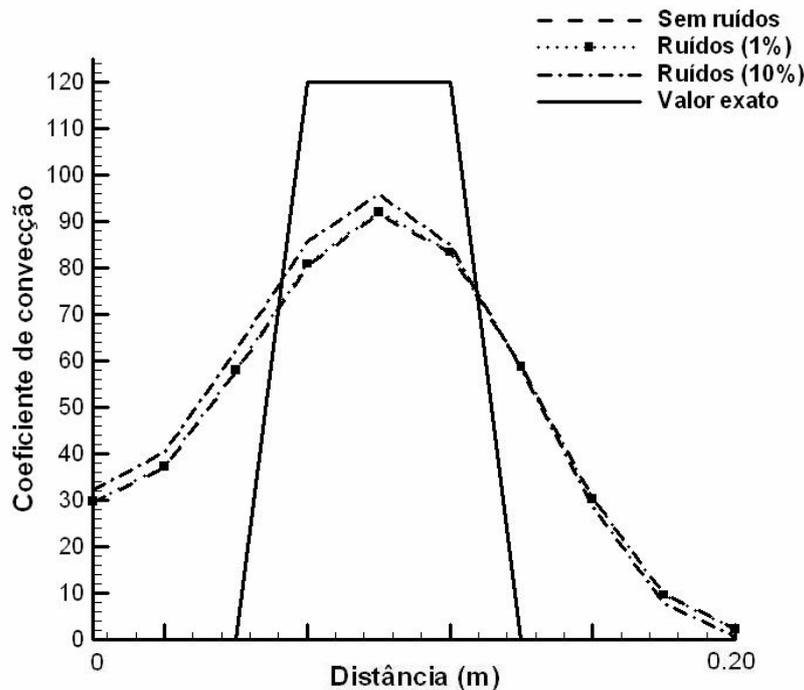


Figura 7.121 – Estimativa – com e sem ruídos – Forma funcional quadrada

Pode se concluir pela figura 7.121 que o método proposto é estável em relação à diminuição do ruído adicionado aos dados simulados para o problema inverso, o que é desejado. Embora a forma funcional quadrada não tenha sido bem estimada, sua variação em relação à distância foi bem capturada, com ou sem ruídos.

7.3.5.4 TRIÂNGULO

Considerando a forma funcional do coeficiente de transferência de calor como sendo triangular, os erros médios quadrados para cada nível de ruído adicionado é apresentado na tabela 7.28.

Tabela 7.28 – Influência do ruído no erro médio quadrado – Função triângulo

Largura	Sem ruídos	Ruído de 1%	Ruído de 10%
5 cm	0.6113	0.6114	0.6352
4 cm	0.5881	0.5899	0.5216
3 cm	0.5488	0.5506	0.5705
2 cm	0.4981	0.4856	0.5099
1 cm	0.4605	0.4943	0.5140
9 mm	0.4591	0.4887	0.4893
8 mm	0.6799	0.6850	0.7165
7 mm	0.7037	0.5278	0.5676
6 mm	0.7602	0.6191	0.8084
5 mm	0.9723	0.8724	0.7020

Nota-se que para cada caso há uma largura ótima do material onde o erro é mínimo. Os erros da tabela 7.28 podem ser representados graficamente na figura 7.122.

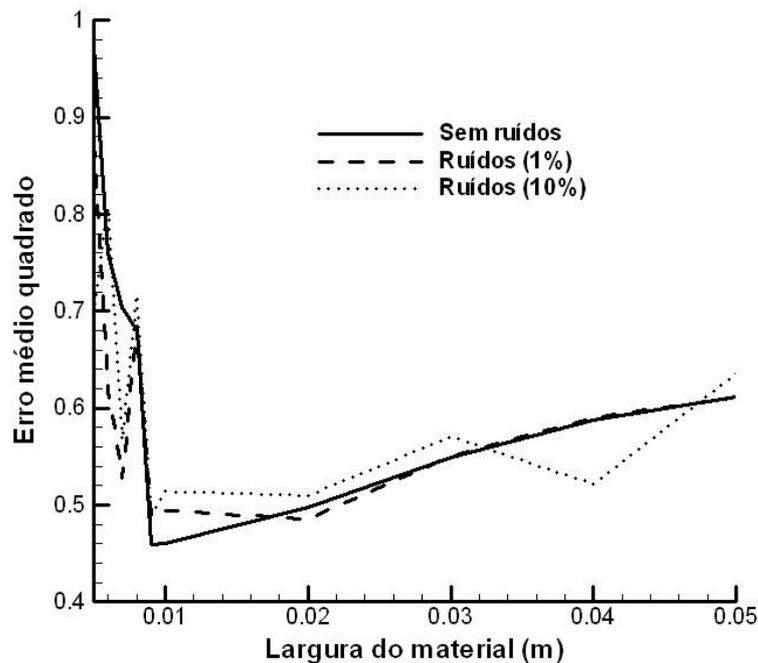


Figura 7.122 – Representação gráfica da influência do ruído - Triângulo

Verifica-se pela figura 7.122 que os erros obtidos para diferentes larguras das placas apresentam comportamento oscilatório, principalmente para larguras menores que 0.01 m. Observa-se que quando são adicionados ruídos de 10% às medidas simuladas para o problema inverso os erros médios quadrados obtidos são menores que os erros das outras medidas consideradas. Tal fato pode ser justificado pelo acréscimo de frequências às equações (4.25) e (4.29), o que faz com que, mesmo com ruídos, haja uma aproximação ótima da temperatura e fluxo de calor, respectivamente, onde o erro médio quadrado é menor.

As estimativas das formas funcionais triangulares dos coeficientes de transferência de calor podem ser vistas na figura 7.123. Nesta figura é considerado um material com 5 cm de largura e medidas intrusivas localizadas a uma distância δdx de $x = 0$. Os coeficientes são dados em $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$.

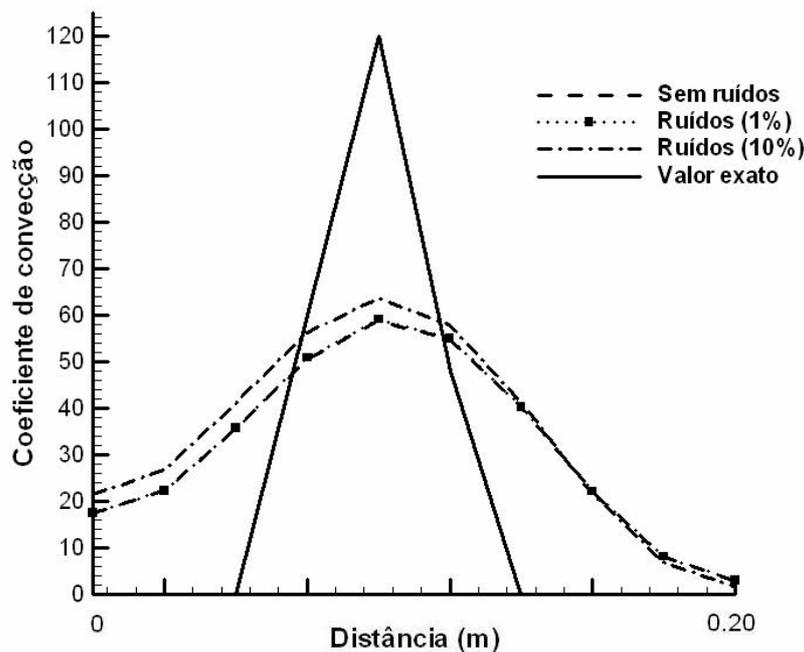


Figura 7.123 – Estimativa – com e sem ruídos – Forma funcional triângulo

Pela figura 7.123 observa-se que o método é estável em relação à diminuição dos ruídos adicionados aos dados, sendo observado que, para níveis de ruídos de 1%, a estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor parece se igualar à estimativa do coeficiente de transferência de calor sem ruídos. Tal fato também pode ser comprovado pela

visualização da figura 7.122, a qual mostra que os erros obtidos para níveis de ruídos de 1% parecem se igualar os erros para os casos sem ruídos.

7.3.5.5 DEGRAU

Considerando o coeficiente de transferência de calor como tendo a forma funcional degrau, os erros médios quadrados para cada nível de ruído adicionado é apresentado na tabela 7.29.

Tabela 7.29 – Influência do ruído no erro médio quadrado – Função degrau

Largura	Sem ruídos	Ruído de 1%	Ruído de 10%
5 cm	0.3779	0.3826	0.3888
4 cm	0.3915	0.2907	0.3789
3 cm	0.3463	0.4062	0.3894
2 cm	0.3688	0.3672	0.3729
1 cm	0.4324	0.4321	0.4325
9 mm	0.4615	0.4757	0.4714
8 mm	0.5090	0.5090	0.5168
7 mm	0.5744	0.6103	0.6461
6 mm	0.6701	0.6703	0.6750
5 mm	0.7966	0.7970	0.7935

Nota-se que para cada caso há uma largura ótima da placa onde o erro é mínimo. Os erros da tabela 7.29 podem ser representados graficamente na figura 7.124.

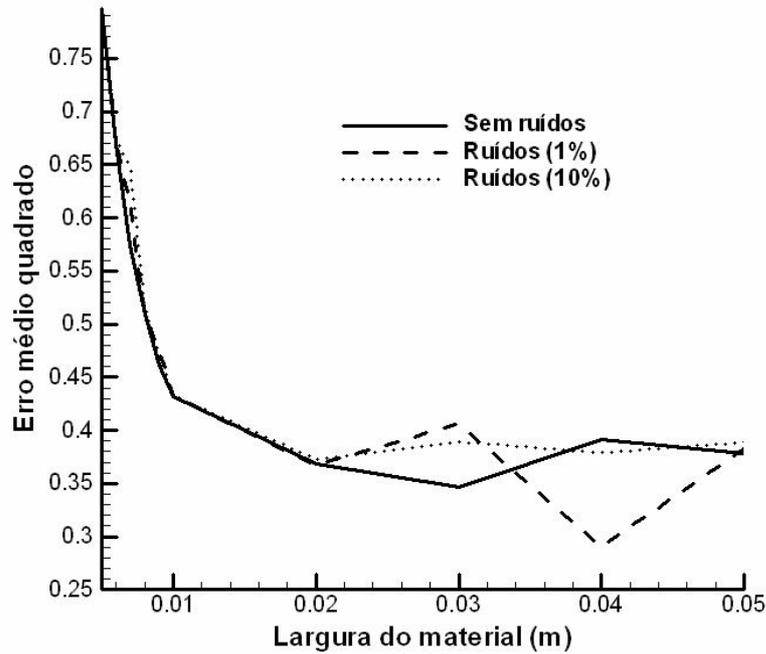


Figura 7.124 – Representação gráfica da influência do ruído – Degrau

Uma consequência da aproximação por frequências é que muitas vezes um ruído acrescentado às medidas simuladas para o problema inverso pode oferecer uma aproximação muito melhor que os dados sem ruídos, conforme visto na figura 7.124. Nota-se como os dados com ruídos oscilam em torno dos dados sem ruídos quando se considera um material com larguras acima de 0.02 m.

As estimativas das formas funcionais do coeficiente de convecção podem ser vistas na figura 7.125. Considera-se um material com largura $L = 5$ cm e medidas intrusivas a uma distância δdx de $x = 0$. Os coeficientes são dados em $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$.

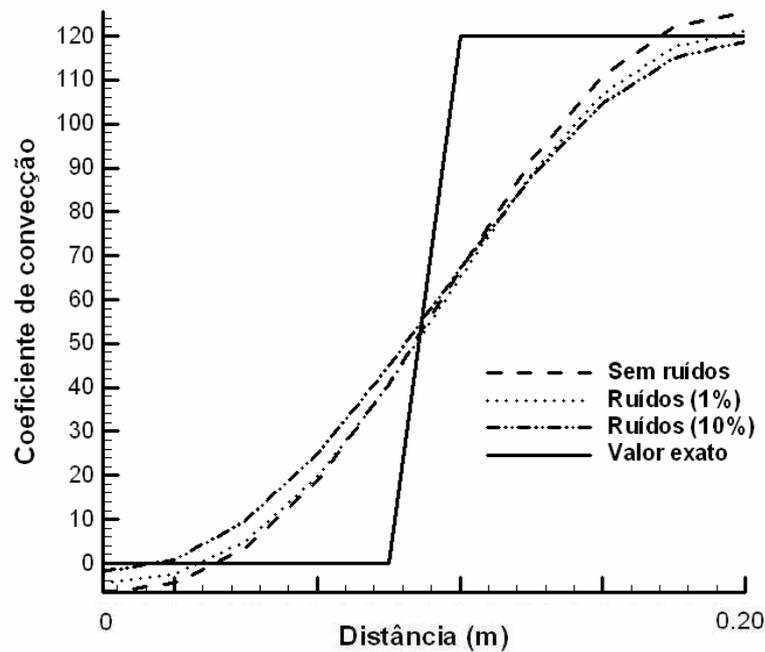


Figura 7.125 – Estimativa – com e sem ruídos – Forma funcional degrau

Observa-se na figura 7.125 que para todas as estimativas, com ruídos ou não, não foi possível capturar o formato da função degrau. Entretanto, sua variação total foi razoavelmente bem estimada. Pode se verificar ainda que não há muita diferença entre as estimativas dos coeficientes de transferência de calor com ou sem ruídos, indicando que o método é estável com a diminuição do nível de ruído adicionado.

7.3.5.6 LINEAR

Considerando o coeficiente de transferência de calor como tendo uma forma funcional linear, os erros médios quadrados para cada nível de ruído adicionado é apresentado na tabela 7.30.

Tabela 7.30 – Influência do ruído no erro médio quadrado – Função linear

Largura	Sem ruídos	Ruído de 1%	Ruído de 10%
5 cm	0.1249	0.1289	0.1555
4 cm	9.385e-02	0.1093	0.1328
3 cm	8.535e-02	8.988e-02	0.1017
2 cm	4.259e-02	6.985e-02	9.416e-02
1 cm	2.998e-02	5.343e-02	0.1045
9 mm	4.432e-02	4.485e-02	0.1131
8 mm	0.1159	0.1905	8.019e-02
7 mm	4.438e-02	0.1014	0.1878
6 mm	0.1317	0.1015	0.1646
5 mm	5.374e-02	0.1331	0.1452

Nota-se que para cada caso há uma largura ótima da placa onde o erro é mínimo. Os erros da tabela 7.30 podem ser representados graficamente na figura 7.126.

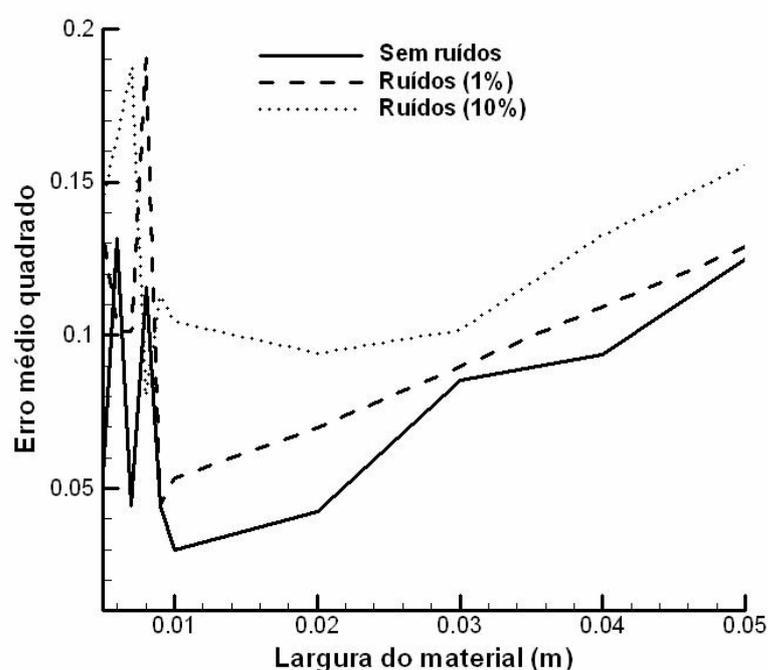


Figura 7.126 – Representação gráfica da influência do ruído - Linear

Pela figura 7.126 fica claro que o método é estável em relação à diminuição do nível de ruído adicionado às medidas simuladas necessárias ao problema inverso. Além disso, verifica-se que para larguras menores que 0.01 m os erros médios quadrados são oscilatórios em relação aos erros do caso sem ruídos.

A estimativa da forma funcional linear cujos dados simulados estão sujeitos aos ruídos pode ser vista na figura 7.127. A estimativa é para uma placa com largura $L = 5$ cm e

medidas intrusivas de temperatura a uma distância δdx de $x = 0$. Os coeficientes são dados em $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$.

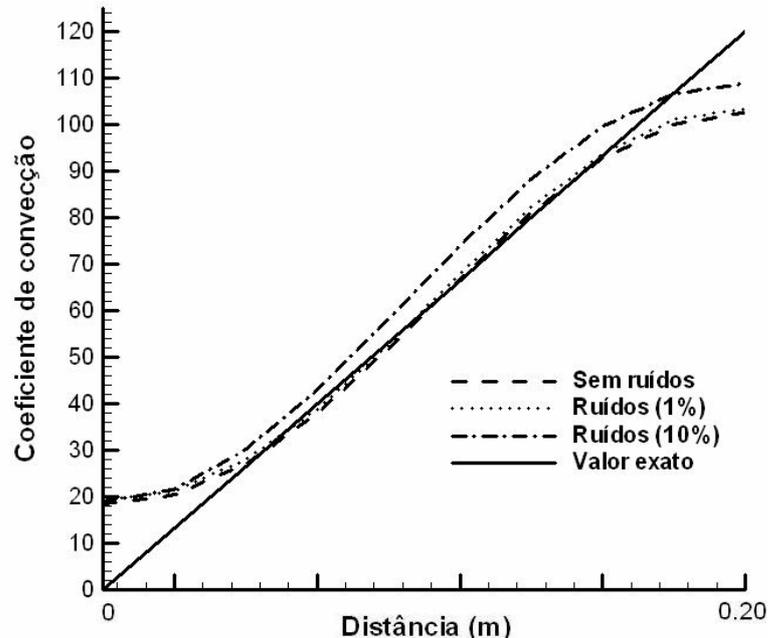


Figura 7.127 – Estimativa – com e sem ruídos – Forma funcional linear

Observa-se na figura 7.127 que a estimativa para o caso sem ruído e a estimativa para o caso com ruído de 1% parecem se igualar. Percebe-se que quanto mais se aproxima dos nós do contorno, a estimativa do coeficiente de transferência de calor piora. Isso pode indicar que o MSF proposto nesta dissertação não é capaz de lidar com mudanças nas condições de contorno do tipo Robin para Neumann. Além disso, nota-se a estabilidade do método quando se diminui o nível de ruído adicionado aos dados simulados para o problema inverso via o MSF.

7.3.6 INFLUÊNCIA DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA

Nesta seção o enfoque é dado na observação da influência da condutividade térmica do material na estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor. Portanto, para efeito de comparação foram testados dois outros valores de condutividade térmica: um 10 vezes maior e o outro 10 vezes menor que o valor da condutividade térmica usado até

agora, $K = 54.0 \frac{W}{m^{\circ}C}$. Foram testadas somente 3 formas funcionais do coeficiente de transferência de calor: constante, parábola e triângulo.

7.3.6.1 CONSTANTE

A influência da condutividade térmica do material na estimativa da forma funcional constante do coeficiente de transferência de calor por convecção pode ser visualizada na tabela 7.31, a qual mostra os erros médios quadrados das temperaturas para cada valor de condutividade térmica usada.

Tabela 7.31 – Influência da condutividade térmica na estimativa da forma funcional constante – $4dx$

Largura	$K = 5.4 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$	$K = 54 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$	$K = 540 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$
5 cm	1.201e-02	1.694e-03	4.275e-04
1 cm	4.072e-03	4.291e-04	9.090e-05
5 mm	1.584e-03	3.792e-04	4.948e-05

Na tabela 7.31 são considerados 3 tipos de materiais sujeitos às medidas intrusivas de temperatura a uma distância $4dx$ de $x = 0$. Verifica-se claramente que quanto maior a condutividade térmica da placa, melhor é a estimativa da forma funcional constante, uma vez que o erro médio quadrado das temperaturas é menor. Observa-se também que o erro médio quadrado diminui com a diminuição da largura da placa.

Na figura 7.128 são visualizadas as estimativas dos coeficientes de transferência de calor dos 3 tipos de materiais considerados na tabela 7.31. São consideradas as larguras dos materiais como sendo de 5 cm e foram usadas medidas intrusivas a uma distância $4dx$ de $x = 0$.

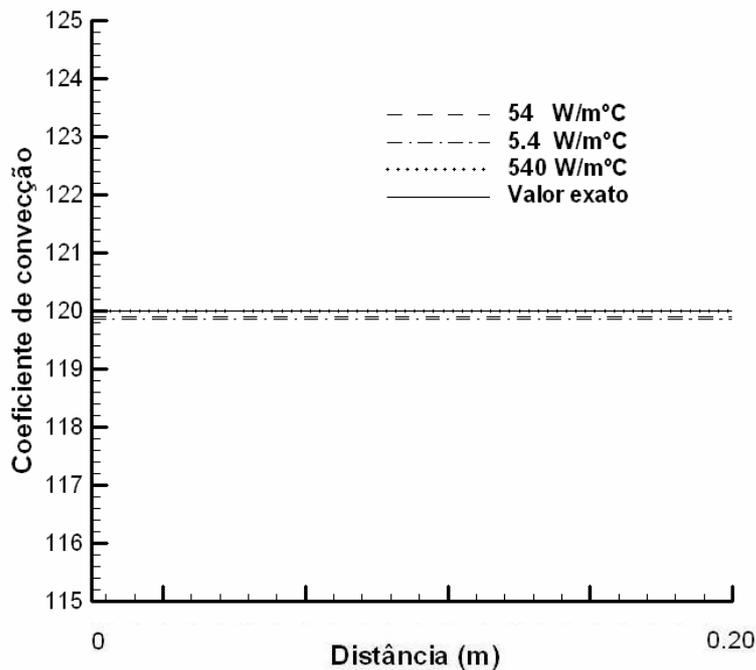


Figura 7.128 – Estimativa para diferentes condutividades térmicas – Constante

Observa-se claramente na figura 7.128 que quanto maior for a condutividade térmica da placa, melhor é a estimativa do coeficiente de transferência de calor, uma vez que as linhas para o valor exato (linha sólida) e para o valor estimado do material (linha pontilhada) se equivalem. Para condutividade térmica baixa, a estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor foi razoável. Materiais com condutividade térmica alta transmitem uma maior quantidade de calor por unidade de tempo, portanto, menos inclinado é o perfil de temperatura, e melhor é a estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor por convecção.

A tabela 7.32 tem o mesmo objetivo da tabela 7.31, com exceção de que foram usadas medidas intrusivas de temperaturas a uma distância δdx de $x = 0$.

Tabela 7.32 – Influência da condutividade térmica na estimativa da forma funcional constante – δdx

Largura	$K = 5.4 \text{ W/m}^\circ\text{C}$	$K = 54 \text{ W/m}^\circ\text{C}$	$K = 540 \text{ W/m}^\circ\text{C}$
5 cm	5.687e-04	2.342e-04	7.221e-05
1 cm	3.319e-03	3.484e-04	7.222e-05
5 mm	1.571e-03	2.974e-04	3.430e-05

Observa-se claramente a influência da condutividade térmica do material na estimativa da forma funcional constante, sendo observado que quanto maior a condutividade térmica, melhor a estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor. Além disso,

comparando as tabelas 7.31 e 7.32 observa-se que quanto mais próximas da parede com condição de contorno desconhecida forem as medidas intrusivas de medição de temperaturas, menor é o erro médio quadrado das temperaturas.

7.3.6.2 PARÁBOLA

A influência da condutividade térmica do material na estimativa da forma funcional parabólica pode ser visualizada na tabela 7.33, a qual mostra os erros médios quadrados das temperaturas no contorno da placa.

Tabela 7.33 – Influência da condutividade térmica na estimativa da forma funcional parabólica – $4dx$

Largura	$K = 5.4 \text{ W/m}^\circ\text{C}$	$K = 54 \text{ W/m}^\circ\text{C}$	$K = 540 \text{ W/m}^\circ\text{C}$
5 cm	3.2928	0.3136	6.263e-02
1 cm	2.3376	0.1908	2.050e-02
5 mm	1.7579	8.761e-02	1.667e-02

Observa-se a grande diferença que existe entre os erros médios quadrados das temperaturas de cada material considerado, sendo notado que quanto maior for a condutividade térmica, menor é o erro médio quadrado. Além disso, pode se verificar a influência da largura da placa no valor do erro médio quadrado.

A tabela 7.34 mostra os erros médios quadrados para três tipos de condutividades térmicas diferentes, considerando a forma funcional parabólica e medidas intrusivas a uma distância $8dx$ de $x = 0$.

Tabela 7.34 – Influência da condutividade térmica na estimativa da forma funcional parabólica – $8dx$

Largura	$K = 5.4 \text{ W/m}^\circ\text{C}$	$K = 54 \text{ W/m}^\circ\text{C}$	$K = 540 \text{ W/m}^\circ\text{C}$
5 cm	2.0853	0.2452	2.242e-02
1 cm	1.7248	0.1076	1.418e-02
5 mm	0.7635	0.2045	1.779e-02

Nota-se ao comparar a tabela 7.34 com a tabela 7.33, que quanto mais próximas as medidas intrusivas estiverem da parede com condição de contorno desconhecida, menor é o erro médio quadrado obtido. Também se verifica que, quanto maior a condutividade térmica, menor é o erro médio quadrado. A figura 7.129 mostra a estimativa da forma funcional parabólica para diferentes valores de condutividades térmicas, considerando as larguras dos materiais como sendo de 5 cm e medidas intrusivas de temperaturas a uma distância $8dx$ de $x = 0$.

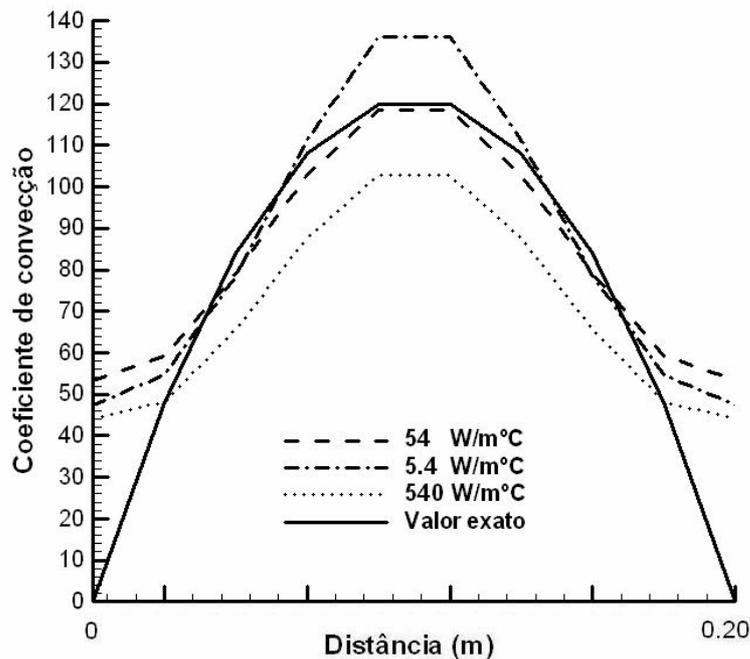


Figura 7.129 – Estimativas para diferentes tipos de condutividades térmicas – Parábola

Verifica-se que, para medidas intrusivas de temperaturas próximas à parede com condição de contorno desconhecida, a estimativa do coeficiente de transferência de calor para uma placa com condutividade de $54 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ foi muito bem capturada, exceto para distâncias próximas a $y = 0 \text{ m}$ e $y = 0.20 \text{ m}$. Considerando a placa com elevada condutividade térmica ($540 \text{ W/m}^\circ\text{C}$), verifica-se que os valores para $y = 0 \text{ m}$ e $y = 0.20 \text{ m}$ foram mais bem capturados do que os valores para os outros tipos de materiais. Contudo, o pico da função não foi bem estimado. Para o caso da placa com baixa condutibilidade térmica ($5.4 \text{ W/m}^\circ\text{C}$) verifica-se que a estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor não foi muito boa, uma vez que mais inclinado é o perfil de temperatura e pior fica a estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor. Portanto, pode-se afirmar que o MSF modificado proposto nesta dissertação não é capaz de estimar com acurácia a forma funcional do coeficiente de transferência de calor de um material com baixa condutividade térmica.

7.3.6.3 TRIÂNGULO

A influência da condutividade térmica do material na estimativa da forma funcional triângulo pode ser visualizada na tabela 7.35, a qual mostra o erro médio quadrado das temperaturas no contorno da placa.

Tabela 7.35 – Influência da condutividade térmica na estimativa da forma funcional triângulo – $4dx$

Largura	$K = 5.4 \text{ W/m}^\circ\text{C}$	$K = 54 \text{ W/m}^\circ\text{C}$	$K = 540 \text{ W/m}^\circ\text{C}$
5 cm	5.8371	0.7368	7.675e-02
1 cm	3.0735	0.5074	5.755e-02
5 mm	6.1353	0.7050	7.984e-02

Observa-se a grande diferença que existe entre os erros médios quadrados das temperaturas de cada material considerado, sendo notado que quanto maior for a condutividade térmica, menor é o erro médio quadrado. Além disso, pode se observar que as melhores estimativas da forma funcional triângulo ocorreram para uma largura de 1 cm da placa.

A tabela 7.36 mostra os erros médios quadrados para três tipos de condutividades térmicas diferentes, considerando a forma funcional triângulo e medidas intrusivas a uma distância $8dx$ de $x = 0$.

Tabela 7.36 – Influência da condutividade térmica na estimativa da forma funcional triângulo – $8dx$

Largura	$K = 5.4 \text{ W/m}^\circ\text{C}$	$K = 54 \text{ W/m}^\circ\text{C}$	$K = 540 \text{ W/m}^\circ\text{C}$
5 cm	4.1852	0.5875	5.972e-02
1 cm	2.1404	0.5123	4.924e-02
5 mm	5.7023	0.8102	0.1063

Quanto mais próximas da parede com condição de contorno desconhecida forem as medidas intrusivas de temperaturas, menor é o erro médio quadrado das temperaturas, conforme pode ser visto ao se comparar os dados das tabelas 7.36 e 7.35. A estimativa da forma funcional triângulo sob diferentes tipos de condutividades térmicas pode ser vista na figura 7.130. Considera-se a largura dos materiais como sendo de 1 cm, e foram utilizadas medidas intrusivas a uma distância $8dx$ de $x = 0$.

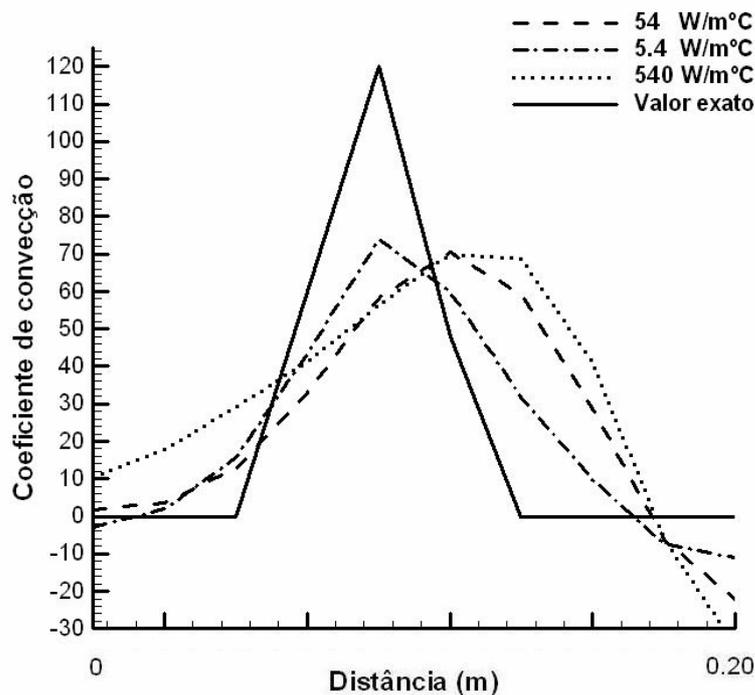


Figura 7.130 – Estimativas para diferentes tipos de condutividades térmicas – Triângulo

Nota-se pela figura 7.130 que quanto menor for a condutividade térmica do material, melhor é a estimativa da forma funcional triângulo. Percebe-se claramente que conforme a condutividade térmica vai diminuindo, o pico da estimativa da função triângulo vai se deslocando para o centro do material da placa, ou seja, a forma funcional estimada se aproxima melhor do valor exato da forma funcional do coeficiente de transferência de calor.

Comparando este caso com o caso da função parabólica e constante, percebe-se que para cada forma funcional do coeficiente de transferência de calor haverá um valor da condutividade térmica no qual a estimativa da forma funcional é melhor.

7.4 PROBLEMA INVERSO – FORMULAÇÃO 2

Nesta seção o objetivo principal é estimar as formas funcionais dos coeficientes de transferência de calor dados pela seção 7.1 em um problema inverso via o MSF cujo problema físico é dado pela formulação 2. Entretanto, nesta seção serão consideradas apenas medidas intrusivas de medição de temperatura localizadas em distâncias a partir do meio da placa. A única diferença entre o problema físico proposto pela formulação 1 e o problema físico

proposto pela formulação 2 está na condição de contorno em $x = 0$, a qual possui temperatura prescrita no caso da formulação 2.

É importante dizer que para o problema inverso dado pela formulação 2 as temperaturas em $x = 0$ são exatas e os fluxos de calor em $x = 0$ são medidos. Ou seja, será verificada a influência da medição do fluxo de calor na estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor por convecção.

Nas seções terciárias a seguir são comparados os resultados obtidos para cada uma das formas funcionais propostas na seção 7.1. Medidas simuladas são obtidas usando-se o método das diferenças finitas, com uma malha refinada de 100x100, para variações conhecidas do coeficiente de transferência de calor. Cabe ainda acrescentar que os dados foram simulados apenas para uma placa com largura $L = 5$ cm, altura $H = 20$ cm e condutividade térmica do aço carbono com 0,5% de carbono $\left(K = 54.0 \frac{W}{m^{\circ}C}\right)$, a mesma usada nos problemas anteriores.

7.4.1 CASO CONSTANTE

O erro médio quadrado das temperaturas para o problema físico dado pela formulação 2 cuja forma funcional é constante pode ser visualizado na tabela 7.37. O erro médio quadrado é dado pela equação (7.9).

Tabela 7.37 – Comparação dos erros médios quadrados – Caso constante

Problema físico	Medidas Intrusivas – Caso constante		
	$4dx$	$6dx$	$8dx$
Formulação 1	1.694e-03	1.525e-03	2.342e-04
Formulação 2	6.278e-03	5.443e-03	7.295e-04

Observa-se na tabela 7.37 que os erros médios quadrados das temperaturas para o problema físico dado pela formulação 2 são maiores que os erros obtidos para a formulação 1. Além disso, nota-se que conforme as medidas intrusivas de temperatura se aproximam da parede com condição de contorno desconhecida, melhor é a estimativa da forma funcional. De qualquer forma, verifica-se que os erros são muito baixos para este caso específico.

As figuras (7.131 – 7.133) mostram a comparação entre as estimativas das formas funcionais constantes obtidas tanto para o problema físico dado pela formulação 1, quanto para o problema físico dado pela formulação 2.

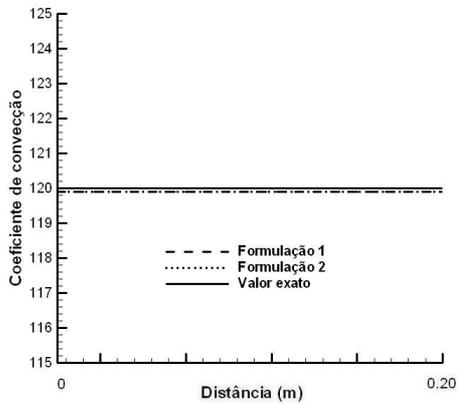


Figura 7.131 – Estimativas – Constante – $4dx$

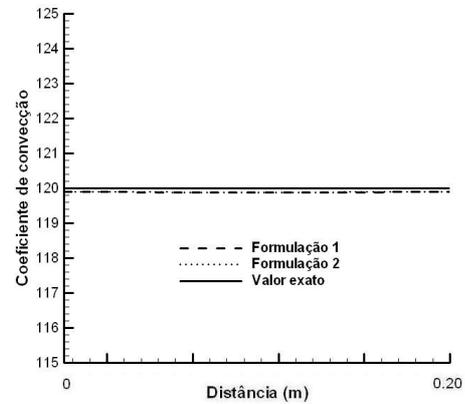


Figura 7.132 – Estimativas – Constante – $6dx$

Pelas figuras 7.131 e 7.132 observa-se que tanto para a formulação 1, quanto para a formulação 2, a forma funcional constante em cada caso foi bem estimada, não se notando uma diferença significativa entre elas, apesar dos erros médios quadrados da formulação 2 serem maiores que os erros médios quadrados da formulação 1.

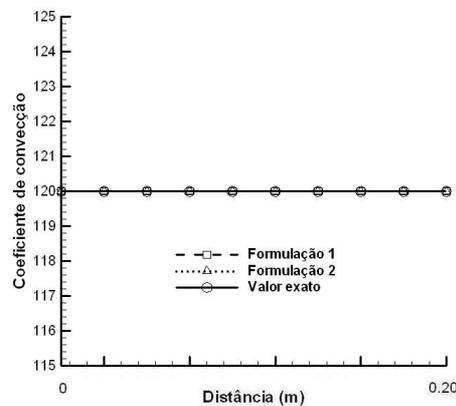


Figura 7.133 – Estimativas – Constante – $8dx$

Nota-se pela figura 7.133 que as estimativas da forma funcional constante para as duas formulações propostas estão em uma ótima concordância com o valor exato da forma funcional constante. Portanto, quanto mais próximas da parede com condição de contorno desconhecida estiverem as medidas intrusivas de temperatura, melhor é a estimativa da forma funcional constante.

As melhores aproximações para a forma funcional constante da formulação 2 ocorrem com um total de frequências $M = 2$, para todas as medidas intrusivas de temperatura aqui consideradas. O tempo computacional gasto foi menor que 1 segundo. O GMRES resolveu um conjunto de sistemas lineares de equações contendo 44 equações e 128 incógnitas para cada tipo de medida intrusiva considerada.

7.4.2 CASO PARABÓLICO

Para a forma funcional parabólica, a comparação dos erros médios quadrados para ambas as formulações pode ser vista na tabela 7.38.

Tabela 7.38 – Comparação dos erros médios quadrados – Caso parabólico

Problema físico	Medidas Intrusivas – Caso parabólico		
	$4dx$	$6dx$	$8dx$
Formulação 1	0.3136	0.2651	0.2452
Formulação 2	1.5987	1.0973	0.7062

Pode se observar na tabela 7.38 que a forma funcional parabólica para o problema físico dado pela formulação 2 não foi muito bem estimada, visto que, quando comparado os erros de ambas as formulações, os erros obtidos para a formulação 2 são elevados. Tal fato pode ser constatado nas figuras 7.134 – 7.136.

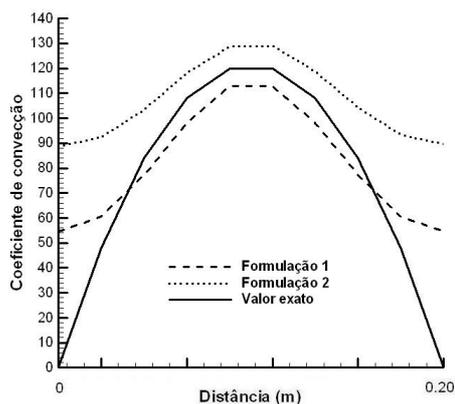


Figura 7.134 – Estimativas – Parábola – $4dx$

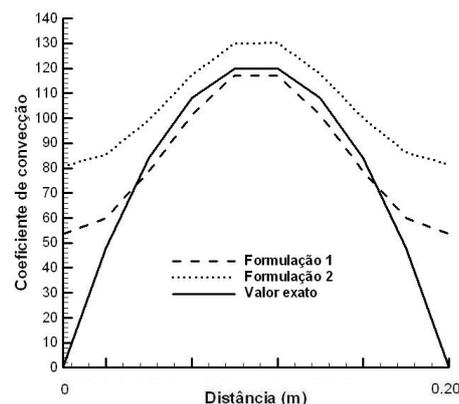


Figura 7.135 – Estimativas – Parábola – $6dx$

Observa-se nas figuras 7.134 e 7.135 que as estimativas das formas funcionais parabólicas para o problema físico dado pela formulação 2 ultrapassaram o valor máximo do pico da parábola $\left(h_{máx} = 120.0 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C} \right)$. Além disso, a forma funcional parabólica do

coeficiente de transferência de calor não foi muito bem estimada. Porém, nota-se que a estimativa da forma funcional melhora quando são utilizadas medidas intrusivas de temperatura próximas à parede com condição de contorno desconhecida.

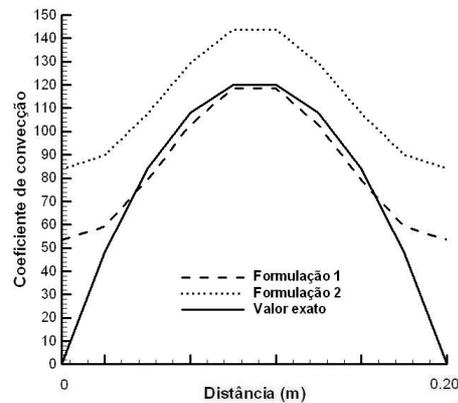


Figura 7.136 – Estimativas – Parábola – $8dx$

Observa-se pela figura 7.136 que mesmo com medidas intrusivas de temperaturas próximas à parede com condição de contorno desconhecida não foi possível estimar com precisão a forma funcional parabólica do coeficiente de transferência de calor por convecção. Pode-se concluir que estimar as formas funcionais dos coeficientes de transferência de calor por convecção através da medição do fluxo de calor em $x=0$ é menos eficiente que a estimativa das formas funcionais usando valores medidos de temperaturas.

Foram necessárias 40 frequências para obter uma estimativa da forma funcional parabólica para os casos com medidas intrusivas a uma distância a $4dx$ e $6dx$ de $x=0$. Nestes casos, o GMRES resolveu um sistema linear contendo 44 equações e 2560 incógnitas. Para o caso representado pela figura 7.136 o GMRES resolveu um sistema linear de equações contendo 44 equações e 2176 incógnitas. O tempo computacional máximo gasto foi de 75 segundos, para o caso com medidas intrusivas a uma distância $4dx$ de $x=0$.

Como medida futura para diminuir ainda mais o desvio do problema dado pela formulação 2, sugere-se aumentar o número de pontos de colocação na parede com condição de contorno desconhecida durante o cálculo da temperatura e fluxo de calor nesta região, como também verificar o que aconteceria com o erro médio quadrado se fosse aumentado o número de frequências para além de 40 frequências.

7.4.3 CASO QUADRADO

Para a forma funcional quadrada, a comparação dos erros médios quadrados para ambas as formulações pode ser vista na tabela 7.39.

Tabela 7.39 – Comparação dos erros médios quadrados – Caso quadrado

Problema físico	Medidas Intrusivas – Caso quadrado		
	$4dx$	$6dx$	$8dx$
Formulação 1	0.7156	0.6072	0.5712
Formulação 2	0.8087	0.7886	0.7521

Pela tabela 7.39 observa-se que o problema físico proposto pela formulação 2 apresenta o maior erro médio quadrado quando comparado com a formulação 1, para todos os casos de medidas intrusivas de temperatura considerado na tabela. As estimativas da forma funcional quadrada podem ser visualizadas nas figuras (7.137 – 7.139).

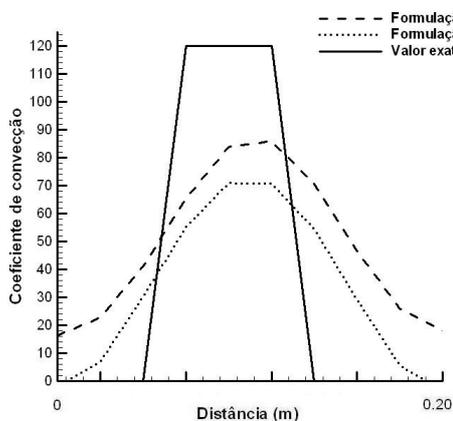


Figura 7.137 – Estimativas – Quadrado – $4dx$

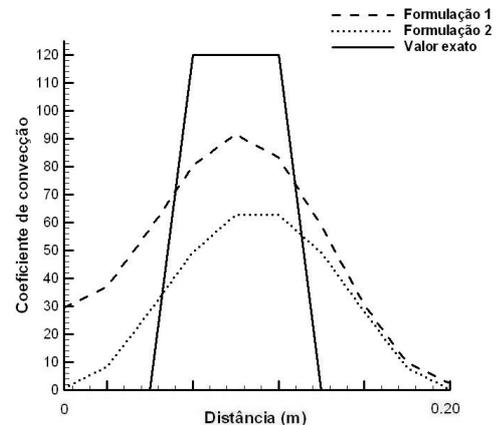


Figura 7.138 – Estimativas – Quadrado – $6dx$

Observa-se nas figuras 7.137 e 7.138 que, embora o erro médio quadrado para a formulação 2 tenha sido maior, a forma funcional parabólica foi melhor estimada em distâncias próximas a $y = 0$ e $y = 0,20$ m, ao contrário da estimativa para a formulação 1, que pega melhor o pico da função, mas não pega bem os valores em $y = 0$ e $y = 0,20$ m.

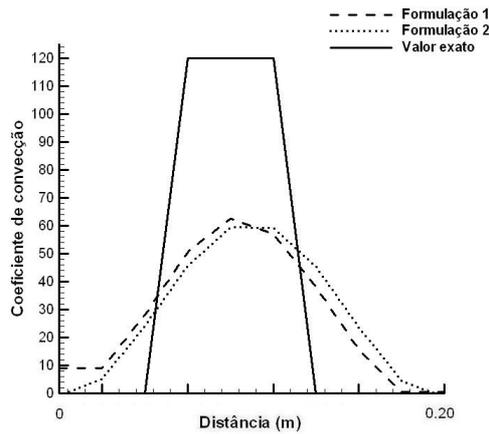


Figura 7.139 – Estimativas – Quadrado – $8dx$

Observa-se na figura 7.139 que as estimativas para a forma funcional quadrada com medidas intrusivas a uma distância $8dx$ de $x = 0$ se assemelham para ambas as formulações consideradas. Entretanto, nota-se que ambas as formulações não foram capazes de estimar corretamente o valor exato da forma funcional quadrada para todos os tipos de medidas intrusivas utilizadas.

O tempo computacional máximo gasto durante a estimativa da forma funcional quadrado foi de 42 segundos. O maior número de frequências usado foi $M = 39$, e o método GMRES resolveu um sistema linear contendo 44 equações e 2496 incógnitas.

7.4.4 CASO TRIANGULAR

Para a forma funcional triângulo, a comparação dos erros médios quadrados para ambas as formulações pode ser vista na tabela 7.40.

Tabela 7.40 – Comparação dos erros médios quadrados – Caso triangular

Problema físico	Medidas Intrusivas – Caso triangular		
	$4dx$	$6dx$	$8dx$
Formulação 1	0.7368	0.6113	0.5875
Formulação 2	0.9079	0.6995	0.6617

Da tabela 7.40 observa-se que o erro médio quadrado das temperaturas para a formulação 2 é maior em todos os casos de medidas intrusivas consideradas. A estimativa das formas funcionais triangulares para as medidas intrusivas consideradas na tabela 7.40 podem ser vistas nas figuras (7.140 – 7.142).

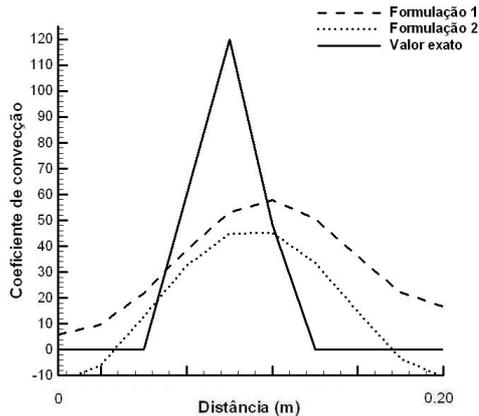


Figura 7.140 – Estimativas – Triângulo – $4dx$

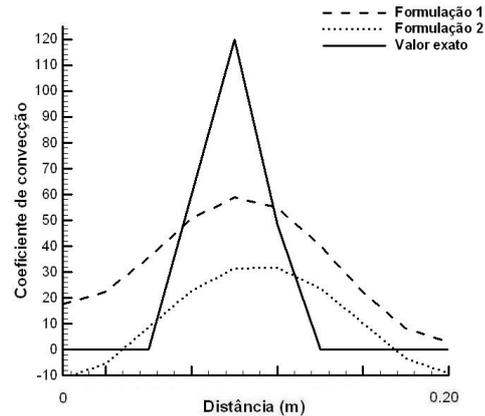


Figura 7.141 – Estimativas – Triângulo – $6dx$

Da figura 7.140 observa-se que a forma funcional triângulo para a formulação 2 foi razoavelmente estimada, notando-se que próximo à $y = 0$ e $y = 0,20$ m a estimativa da forma funcional foi melhor que a estimativa da formulação 1. Na figura 7.141 nota-se que o pico da forma funcional para a formulação 2 não foi bem estimado.

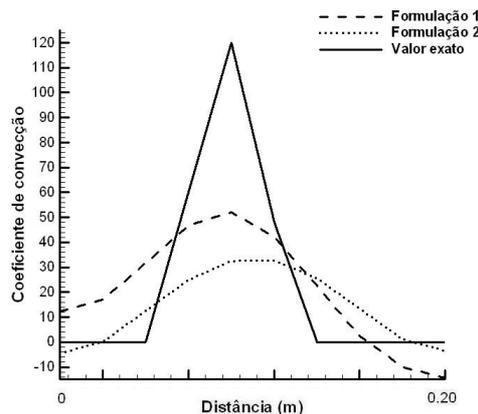


Figura 7.142 – Estimativas – Triângulo – $8dx$

Visualizando as figuras 7.140, 7.141 e 7.142 verifica-se que conforme as medidas intrusivas vão se aproximando da parede com condição de contorno desconhecida, o pico da forma funcional dado pelo problema da formulação 2 vai se achatando, e as estimativas próximas à $y = 0$ e $y = 0,20$ m se aproximam melhor do valor exato.

O tempo computacional máximo gasto foi de 36 segundos, e o número máximo de frequências utilizado foi $M = 40$, para medidas intrusivas a $8dx$ de $x = 0$. O método GMRES resolveu um sistema linear de equações contendo 44 equações e 2560 incógnitas.

7.4.5 CASO DEGRAU

Para a forma funcional degrau, a comparação dos erros médios quadrados para ambas as formulações pode ser vista na tabela 7.41.

Tabela 7.41 – Comparação dos erros médios quadrados – Caso degrau

Problema físico	Medidas Intrusivas – Caso degrau		
	$4dx$	$6dx$	$8dx$
Formulação 1	0.4238	0.3779	0.2296
Formulação 2	0.9625	0.7985	0.6687

Pela tabela 7.41 percebe-se uma diferença muito significativa entre os erros médios quadrados obtidos pela formulação 1 e os erros obtidos pela formulação 2. As estimativas das formas funcionais podem ser vistas nas figuras (7.143 – 7.145).

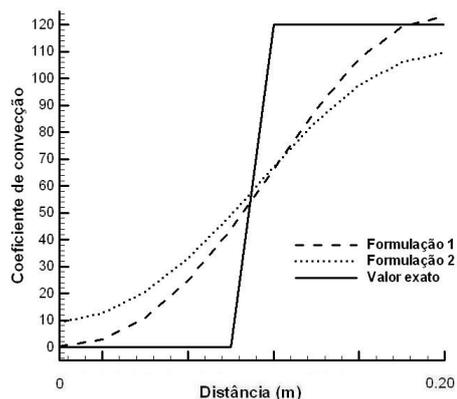


Figura 7.143 – Estimativas – Degrau – $4dx$

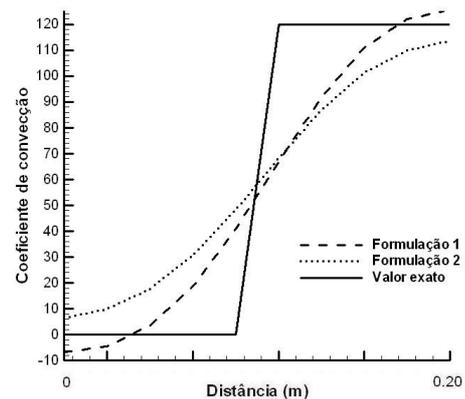


Figura 7.144 – Estimativas – Degrau – $6dx$

Nota-se pelas figuras 7.143 e 7.144 que a forma funcional degrau não foi muito bem estimada utilizando os dados do problema físico proposto pela formulação 2. Porém, nota-se que a estimativa melhora quando se aumenta a distância da localização das medidas intrusivas.

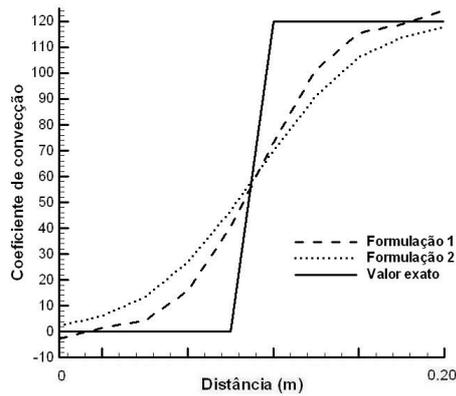


Figura 7.145 – Estimativas – Degrau – $8dx$

A figura 7.145 mostra que a forma funcional degrau para a formulação 2 foi bem estimada com medidas intrusivas de temperaturas próximas à parede com condição de contorno desconhecida. O formato da função exata não foi captado, mas sua variação funcional foi bem estimada.

O tempo computacional máximo utilizado foi de 139 segundos, para o caso com medidas intrusivas a uma distância $4dx$ de $x=0$. O número máximo de frequências utilizado foi $M = 29$, e o método GMRES resolveu um sistema linear contendo 44 equações e 1856 incógnitas.

7.4.6 CASO LINEAR

Para a forma funcional linear, a comparação dos erros médios quadrados para ambas as formulações pode ser vista na tabela 7.42.

Tabela 7.42 – Comparação dos erros médios quadrados – Caso linear

Problema físico	Medidas Intrusivas – Caso linear		
	$4dx$	$6dx$	$8dx$
Formulação 1	0.1279	0.1249	9.082e-02
Formulação 2	0.3797	0.3301	0.1948

Assim como no caso das outras formas funcionais, nota-se na tabela 7.42 que o erro médio quadrado para a formulação 2 foi maior que o erro médio quadrado para a formulação 1. As estimativas da forma funcional linear podem ser vistas nas figuras (7.146 – 7.148).

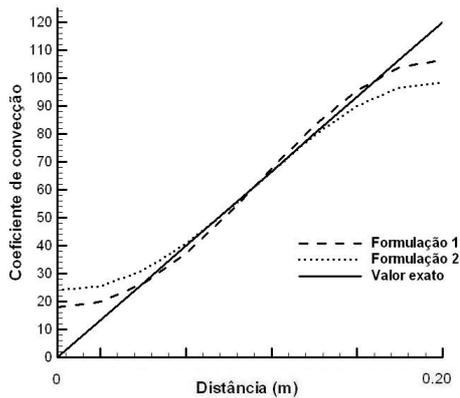


Figura 7.146 – Estimativas – Linear – $4dx$

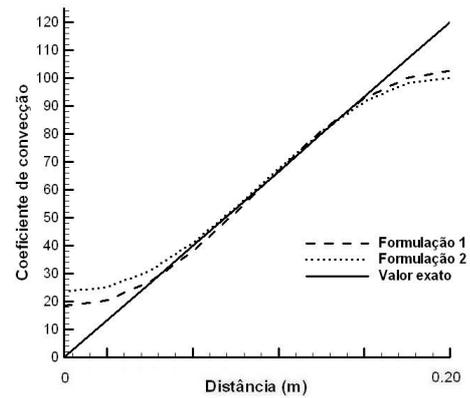


Figura 7.147 – Estimativas – Linear – $6dx$

Nota-se nas figuras 7.146 e 7.147 que, conforme as medidas intrusivas de temperatura se aproximam da parede com condição de contorno desconhecida, melhor é a estimativa da forma funcional linear.

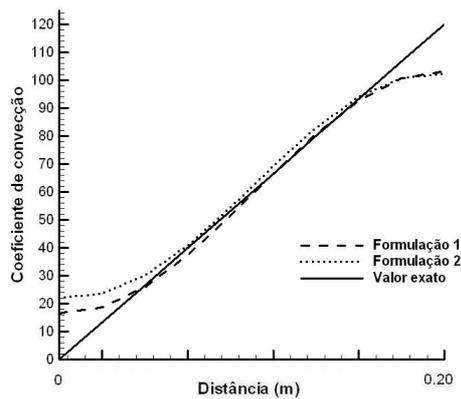


Figura 7.148 – Estimativas – Linear – $8dx$

A figura 7.148 mostra que para medidas intrusivas bem próximas à parede com condição de contorno desconhecida a estimativa da forma funcional em $y = 0$, para a formulação 2, é melhor do que a estimativa da forma funcional para medidas intrusivas de temperatura afastadas da parede com condição de contorno desconhecida. Em geral, pode se concluir que a estimativa da forma funcional linear em um problema inverso dado pela formulação 2 é boa.

O tempo computacional máximo gasto durante a estimativa da forma funcional linear foi de 11 segundos, e o número máximo de freqüências utilizado foi $M = 16$. Portanto, o método GMRES resolveu um sistema linear de equações contendo 44 equações e 1024 incógnitas.

8 CONCLUSÃO

Esta dissertação de mestrado utilizou o método das soluções fundamentais com as modificações propostas por ALVES e CHEN (2005), onde a contribuição de um conjunto de frequências conduz a um resultado bem mais aproximado. Como fator diferenciador, nos problemas aqui propostos foram usados pontos de colocação igualmente distribuídos no interior do domínio, os quais foram usados para simularem medidas intrusivas de temperaturas.

Como conclusão principal pode se dizer que o método das soluções fundamentais, com as modificações propostas nesta dissertação, foi capaz de estimar razoavelmente bem as formas funcionais desconhecidas dos coeficientes de transferência de calor através do uso de medidas intrusivas e medidas não-intrusivas. Além disso, como produto da estimativa verifica-se que o MSF foi capaz de recuperar as informações sobre as temperaturas nos contornos da placa.

Poucas formas funcionais do coeficiente de transferência de calor foram estimadas com precisão somente com medidas não-intrusivas de temperatura. Nesta dissertação, a única forma funcional que foi bem estimada somente com medidas não-intrusivas foi a forma funcional constante. Adicionalmente, não é possível estimar corretamente as formas funcionais do coeficiente de calor com o uso de medidas intrusivas longe da parede com condição de contorno desconhecida.

Cada forma funcional do coeficiente de transferência de calor terá um valor ótimo de largura da placa onde o erro médio quadrado é mínimo. Além disso, o valor desse erro dependerá da localização das medidas intrusivas de temperaturas.

Foi mostrado que para cada tipo de medidas intrusivas ou não-intrusivas de temperatura usadas na estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor há um número ótimo de frequências onde o erro mínimo quadrado das temperaturas é menor. Esse total de frequências também dependerá da largura da placa. Em geral, as melhores frequências são encontradas por meio de tentativa e erro.

Notou-se que houve dificuldade na recuperação das informações sobre as condições de contorno nas distâncias próximas aos “cotovelos” da placa. Isso pode indicar que o MSF

modificado proposto nesta dissertação não foi capaz de lidar com as mudanças nas condições de contorno que ocorrem nestes locais, ou pode indicar que um maior número de pontos de colocação é necessário para uma boa estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor.

Foi observado que muitas estimativas das formas funcionais dos coeficientes de transferência de calor utilizaram o valor máximo ($M = 40$) do intervalo de frequências considerado nesta dissertação. Portanto, fica-se na dúvida se um número maior de frequências além deste valor máximo melhoraria a estimativa da forma funcional, com uma significativa redução no valor do erro médio quadrado das temperaturas.

Embora não tenha sido abordado nesta dissertação, a estimativa do fluxo de calor nos contornos da placa não foi muito boa, sendo observado que os erros médios quadrados dos fluxos de calor eram muito grande. Tal fato também pode ser observado no trabalho publicado por MARIN (2005_(b)).

A estimativa das formas funcionais com o uso do GMRES para regularizar o sistema de equações gerado foi muito melhor do que com o uso do método SVD. De fato, é conhecido que o uso do método SVD para a resolução de matrizes esparsas é proibitivo, segundo pode ser constatado nesta dissertação e no artigo publicado por JIN e ZHENG (2006).

Observou-se que o método das soluções fundamentais é estável com relação à diminuição do nível de ruído adicionado aos dados exatos, além de ter sido verificado que um aumento no número de pontos de colocação também diminui o erro médio quadrado. Foi observado que, quando são considerados os ruídos adicionados aos dados exatos, a largura mínima da placa não poderá ser menor que 1 cm, uma vez que para larguras abaixo de 1 cm os erros médios quadrados das estimativas com ruídos oscilam muito em torno do valor exato.

Foram estimadas as formas funcionais dos coeficientes de transferência de calor sujeitos a diferentes valores para a condutividade térmica da placa. Verificou-se que, para as 3 formas funcionais propostas, cada uma delas apresentou uma estimativa diferente para cada valor da condutividade térmica. Adicionalmente, pode se afirmar que quanto maior foi a condutividade térmica, melhor é a estimativa da forma funcional do coeficiente de transferência de calor.

Foram estimadas as formas funcionais dos coeficientes de transferência de calor em dois problemas com condições de contorno diferentes, cujas formulações matemáticas são dadas

pela formulação 1 e pela formulação 2. Entretanto, a única diferença visível entre as condições de contorno propostas por estas formulações está na fronteira em $x = 0$: na formulação 1 há troca de calor por convecção, com coeficiente de transferência de calor por convecção constante, e na formulação 2 a fronteira possui temperatura prescrita. Foi observado que os erros médios quadrados obtidos para os problemas dados pela formulação 2 foram maiores que os erros médios quadrados dos problemas dados pela formulação 1. Isso pode ser justificado pelo fato de que na formulação 2 foram usadas medições de fluxos de calor em $x = 0$, enquanto que na formulação 1 foram medidas as temperaturas em $x = 0$.

Em geral, para os resultados apresentados aqui pode se concluir que o MSF modificado não foi capaz de estimar com uma boa precisão as formas funcionais dos coeficientes de transferência de calor, ou seja, o MSF não foi capaz de lidar com descontinuidades nas condições de contorno.

Como sugestão para trabalhos futuros, propõe-se aumentar o número de pontos de colocação nos contornos da placa, obter dados simulados para o problema inverso através do problema direto por diferenças finitas com uma malha mais refinada, aumentar o intervalo de frequências e colocar como critério de parada do algoritmo computacional o valor do residual calculado pelo método GMRES em relação à uma tolerância pré-estabelecida. Adicionalmente, pretende-se testar o mesmo problema proposto nesta dissertação utilizando a solução fundamental da equação de Laplace, como também se pretende estimar as formas funcionais dos coeficientes de transferência de calor usando dados experimentais. Também seria interessante testar a estimativa das formas funcionais dos coeficientes de transferência de calor em um problema tridimensional, além de se testar o método em outras geometrias.

9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRAMOWITZ M., STEGUN I.A.. **Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs, and mathematical tables.** New York: Dover. 1965.
- ALIFANOV O.M.. **Inverse heat transfer problems.** New York: Springer Verlag. 1994.
- ALVES C.J.S., CHEN C.S.. **A new method of fundamental solutions applied to nonhomogeneous elliptic problems.** Advances in Computational Mathematics. v. 23. p. 125-142. 2005.
- ALVES C.J.S., VALTCHEV S.S.. **Numerical comparison of two meshfree methods for acoustic wave scattering.** Engineering analysis with boundary elements. v. 29. p. 371-382. 2005.
- ANTUNES, Pedro R.S.. **Cálculo numérico de frequências de ressonância e modos de vibração recorrendo ao Método das Soluções Fundamentais.** Dissertação de Mestrado. Instituto Superior Técnico. Portugal. 2005.
- CHANTASIRIWAN S.. **Comparison of numerical methods for solving the convective-diffusive problem.** KMUTT Research and Development Journal. v. 27. n. 4. p. 427-437. 2004
- CHEN C.S., HOKWON A.C., GOLBERG M.A.. **Some comments on the ill-conditioning of the method of fundamental solutions.** Engineering Analysis with Boundary Elements. v. 30. p. 405-410. 2006.
- COLAÇO M.J., ORLANDE H.R.B., DULIKRAVICH G.S.D. e RODRIGUES F.A.. **A comparison of two solution techniques for the inverse problem of simultaneously estimating the spatial variations of diffusion coefficients and source terms.** Trabalho

apresentado no International Mechanical Engineering Congress & Exposition. Washington, DC. 2003.

COLAÇO M.J., ORLANDE H.R.B., ROBERTY N.C., ALVES C.J.S., LEITÃO V.. **On the use of MFS in linear inverse diffusion problems.** ENCIT. 2006.

COLAÇO, Marcelo José. **Problema inverso de estimativa do coeficiente de transferência de calor em uma placa resfriada por sprays.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 1998.

DONG C.F., SUN F.Y., MENG B.Q.. **A method of fundamental solutions for inverse heat conduction problems in an anisotropic medium.** Engineering Analysis with Boundary Elements. v. 31. p. 75-82. 2007.

FAIRWEATHER G., KARAGEORGHIS A., MARTIN P.A.. **The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems.** Engineering Analysis with Boundary Elements. v. 27. p. 759-769. 2003.

FAIRWEATHER G., KARAGEORGHIS A.. **The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems.** Advances in Computational Mathematics. v. 9. p. 69-95. 1998.

FLANNERY B. P., VETTERLING W.T., TEUKOLSKY S.A., PRESS W.H.. **Numerical recipes in Fortran 77: The art of scientific computing.** Cambridge: Cambridge University. 1992.

GOLBERG M.A.. **The method of fundamental solutions for Poisson's equation.** Engineering Analysis with Boundary Elements. v. 16. p. 205-213. 1995.

GOLUB G.H., VAN LOAN C.F., **Matrix computations.** Baltimore: Johns Hopkins University Press. 1996.

- HON Y.C., WEI T.. **A fundamental solution method for inverse heat conduction problem.** Engineering Analysis with Boundary Elements. v. 28. p. 489-495. 2004.
- JIN B., MARIN L.. **The method of fundamental solutions for inverse source problems associated with the steady-state heat conduction.** International Journal for Numerical Methods in Engineering. v. 69. p. 1570-1589. 2007.
- JIN B., ZHENG Y.. **A meshless method for some inverse problems associated with the Helmholtz equation.** Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering. v. 195. p. 2270-2288. 2006.
- KARAGEORGHIS A.. **The method of fundamental solutions for the calculation of the eigenvalues of the Helmholtz equation.** Applied Mathematics Letters. v. 14. p. 837-842. 2001.
- KATSURADA M., OKAMOTO H.. **The collocation points of the fundamental solution method for the potential problem.** Computers and Mathematics with Applications. v. 31. n. 1. p. 123-137. 1996.
- MARIN L.. **A meshless method for the numerical solution of the Cauchy problem associated with three-dimensional Helmholtz-type equations.** Applied Mathematics and Computation. v. 165. p. 355-374. 2005_(a).
- MARIN L.. **Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in two-dimensional functionally graded materials.** International Journal of Solids and Structures. v. 42. p. 4338-4351. 2005_(b).
- MARIN L., LESNIC D.. **The method of fundamental solutions for the Cauchy problem associated with two-dimensional Helmholtz-type equations.** Computers and Structures. v. 83. p. 267-278. 2005.
- OZISIK M.N. **Basic heat transfer.** London: Mcgraw-hill. 1981.

OZISIK M.N., ORLANDE H.R.B., **Inverse heat transfer: fundamentals and applications.**
New York: Taylor and Francis. 2000.

PARTRIDGE P.W., SENSALÉ B.. **The method of fundamental solutions with dual reciprocity for diffusion and diffusion-convection using subdomains.** Engineering Analysis with Boundary Elements. v. 24. p. 633-641. 2000.

SMYRLIS Y.S., KARAGEORGHIS A., GEORGIU G.. **Some aspects of the one-dimensional version of the method of fundamental solutions.** Computers and Mathematics with Applications. v. 41. p. 647-657. 2001

VLADIMIROV V.S.. **Equations of mathematical physics.** New York: Marcel Dekker. p. 139-156. 1971.

WEI T., HON Y.C., LING L.. **Method of fundamental solutions with regularization techniques for Cauchy problems of elliptic operators.** Engineering Analysis with Boundary Elements. 2007. doi:10.1016/j.enganabound.2006.07.010.

YOUNG D.L., TSAI C.C., MURUGESAN K., FAN C.M., CHEN C.W.. **Time-dependent fundamental solutions for homogeneous diffusion problems.** Engineering Analysis with Boundary Elements. v. 28. p.1463-4173. 2004.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)