



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Isilda Lucia de Carmargo Ribeiro

**FALTA DE DECAIMENTO EXPONENCIAL DE UM
SISTEMA ACOPLADO FRACAMENTE DISSIPATIVO**

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

BELÉM- PA

2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Isilda Lucia de Carmargo Ribeiro

**FALTA DE DECAIMENTO EXPONENCIAL DE UM
SISTEMA ACOPLADO FRACAMENTE DISSIPATIVO**

Dissertação apresentada do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - UFPA, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**

BELÉM - PA

2010

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação(CIP)

Biblioteca Central / UFPA, Belém - PA

Ribeiro, Isilda Lucia de Camargo, 1952

Falta de decaimento exponencial de um sistema acoplado fracamente dissipativo / Isilda Lucia de Camargo Ribeiro; orientador, Mauro de Lima Santos. - 2010

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2010.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Semigrupos. I. Título.

CDD:22. ed: 515.353

Isilda Lucia de Carmargo Ribeiro

**FALTA DE DECAIMENTO EXPONENCIAL DE UM SISTEMA
ACOPLADO FRACAMENTE DISSIPATIVO.**

Esta Dissertação foi julgada pelo Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Belém, 26 de março de 2010

Prof. Dr. Giovany de J. M. Figueiredo
(Coordenador do PPGME - UFPA)

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (**Orientador**)
Universidade Federal do Pará- UFPA-PPGME

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha (**Membro**)
Universidade Federal do Pará- UFPA-PPGME

Prof. Dr. Dilberto da S. Almeida Junior (**Membro**)
Universidade Federal do Pará- UFPA-PPGME

Agradecimento

A Deus que é onipresente, onisciente e onipotente;

Aos meus pais Olmiro Ferreira de Camargo e Florinda Fanton de Camargo que são exemplos de honestidade, dignidade e respeito para mim, meus irmãos e meus filhos;

A meus filhos Dalise, Fabrício e Fabiano que sempre acreditaram em mim;

Ao meu esposo Riael da Silva Ribeiro que esteve comigo em todos os momentos desta conquista;

À Universidade Federal do Pará - UFPA, pela oportunidade de realizar este curso;

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará - IFPA por ter permitido e facilitado a realização desse curso;

Ao meu orientador Prof. Dr. Mauro de Lima Santos pela atenção e paciência que sem elas seria muito difícil alcançar o objetivo;

Aos professores do curso de mestrado;

Aos colegas de mestrado que fizeram parte deste sonho realizado;

A Fundação de Apoio a Pesquisa do Pará - FAPESPA pelo apoio financeiro recebido durante o curso;

A todos aqueles que acreditaram e se alegraram com esta conquista.

"A dúvida permite extrair um núcleo de certeza, que cresce à medida que ela se radicaliza; é indubitável que, se duvido, penso."

Descartes

Conteúdo

Resumo	5
Abstract	6
Introdução	1
1 Teoremas e Definições Fundamentais	3
1.1 Alguns Resultados da Teoria de Semigrupo	3
1.2 Propriedades Assintóticas de um Semigrupo	15
2 Existência e Unicidade de Solução	20
2.1 Sistema Acoplado de Equações de Onda	20
2.2 Existência de Solução do Sistema Acoplado (P)	22
3 Falta de Decaimento Exponencial e Estabilidade Polinomial	25
3.1 Falta de Decaimento Exponencial	25
3.2 Decaimento Polinomial	28
Conclusão	34
Referências Bibliográficas	36
A Espaços de Sobolev	38
A.1 Imersões de Sobolev	39

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar existência, unicidade, e não decaimento exponencial e o decaimento polinomial do sistema acoplado de equações de onda abaixo apresentado

$$(P) \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty) \\ v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty) \\ u = v = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, +\infty) \\ u(x, 0), v(x, 0) = (u_0, v_0), & \text{em } \Omega \\ (u_t(x, 0), v_t(x, 0)) = (u_1(x), v_1(x)) & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Palavras-chaves: Semigrupo, não estabilidade exponencial, decaimento polinomial.

Abstract

In this we study the existence, uniqueness, non exponential stabilization and the polynomial decay of the following coupled system

$$(P) \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v = 0 & \text{in } \Omega \times (0, +\infty) \\ v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, +\infty) \\ u = v = 0 & \text{on } \Gamma \times (0, +\infty) \\ u(x, 0), v(x, 0) & = (u_0, v_0), \text{ in } \Omega \\ (u_t(x, 0), v_t(x, 0)) = (u_1(x), v_1(x)) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

We use semigroup technical, Gearhart Theorem and energy method.

Keywords: Semigroup, non exponential stabilization, polynomial decay.

Introdução

Este trabalho tem como objetivo estudar existência, unicidade, não decaimento exponencial e o decaimento polinomial do sistema acoplado de equações de onda utilizando as Técnicas de Semigrupo, introduzido na literatura no final da década de 1990[14] método esse que se aplica a uma variedade de problemas dissipativos. O sistema acoplado de equações de onda está representado no problema

$$(P) \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty) \\ v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty) \\ u = v = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, +\infty) \\ u(x, 0), v(x, 0) = (u_0, v_0) & \text{em } \Omega \\ (u - t(x, 0), v_t(x, 0)) = (u_1(x), v_1(x)) & \text{em } \Omega \end{cases}$$

onde Ω é um espaço de \mathbb{R}^n aberto, limitado com fronteira regular, $\Gamma = \partial\Omega$, e α é um número real positivo e suficientemente pequeno. O modelo acima representa as vibrações de duas membranas elásticas sujeitas a uma força elástica que atrai uma membrana à outra com o coeficiente α ,[6].

A equação de onda,[16]

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega \end{cases}$$

descreve um sistema conservativo. É também conhecido que a equação de onda com termo de amortecimento, ([16], [8], [11]).

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega \end{cases}$$

é exponencialmente estável.

Demonstraremos neste trabalho que o sistema de equações de onda, representado no problema (P) é bem posto e tem decaimento polinomial.

O sistema representado pelo problema (P) foi estudo por vários autores, dentre eles destacamos,

([1], [2]) e suas referências que mostraram que o sistema do problema (P) é bem posto e tem decaimento polinomial.

O diferencial é trabalhar com uma nova demonstração de decaimento polinomial, utilizando o teorema de Gearhart e argumentos de técnicas multiplicativas.

Esta dissertação é composta de três capítulos:

(i) O primeiro capítulo apresenta Teoremas e definições da Teoria de Semigrupo importantes para suporte e o desenvolvimento do trabalho;

(ii) o segundo capítulo trata sobre a existência e unicidade de solução do sistema de equações;

(iii) no terceiro capítulo mostraremos que o problema (P) não é exponencialmente estável.

Capítulo 1

Teoremas e Definições Fundamentais

Apresentaremos neste capítulo os principais aspectos da teoria de semigrupos, que usaremos nos seguintes capítulos

1.1 Alguns Resultados da Teoria de Semigrupo

Definição 1.1

Seja X um espaço de Hilbert real ou complexo equipado com o produto interno (\cdot, \cdot) e norma $\|\cdot\|$. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear densamente definido sobre X . Dizemos que A é dissipativo se para algum $x \in D(A)$, $\operatorname{Re}(Ax, x) \leq 0$

Definição 1.2

Uma família $S(t) (0 \leq t < \infty)$ de operadores lineares limitadas num espaço de Banach X é chamado de Semigrupo Fortemente Contínuo se

1. $S(0) = I$, (I é o operador identidade em X);
2. $S(s+t) = S(s)S(t)$, $\forall t, s \geq 0$;
3. Para cada $x \in X$, $S(t)x$ é contínua em t sobre $[0, \infty)$.

Para o semigrupo $S(t)$, definamos um operador denominado de A cujo domínio é $D(A)$ consistindo de pontos x tais que o limite

$$A_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h}, x \in D(A)$$

existe.

Dizemos que A é o gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)$. Dado um operador A , se A coincide com o gerador infinitesimal de $S(t)$, então dizemos que ele é o gerador infinitesimal do semigrupo fortemente contínuo $S(t)$, $t \geq 0$.

Definição 1.3

Dizemos que o semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ é fortemente contínuo (ou C_0 -semigrupo) se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x, \forall x \in X \quad (1.1)$$

a equação (1.1) é equivalente a seguinte equação

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\| = 0, \forall x \in X. \quad (1.2)$$

Definição 1.4

Dizemos que o semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ é uniformemente contínua, se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - I\| = 0$$

Chamaremos de classe C_0 ou simplesmente semigrupo fortemente contínuo. Esse semigrupo poderá ser denotado por e^{At} .

Definição 1.5

Se $\{S(t) : t > 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo em X , seu gerador infinitesimal é o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t},$$

onde

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

Observe que

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} S(t)x \Big|_{t=0},$$

para $x \in D(A)$.

Definição 1.6

Seja X um espaço de Banach real ou complexo e X^* seu dual. Indicaremos o valor $x^* \in X^*$ em $x \in X$ por (x^*, x) ou (x, x^*) . Para cada $x \in X$, definimos o conjunto dualidade $F(x) \subseteq X^*$ por

$$F(x) = \{x^* \in X^*, \operatorname{Re} \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

Observação 1.1

O teorema de Hahn-Banach assegura que $F(x) \neq \emptyset$

Definição 1.7

Um operador A é dissipativo se para todo $x \in D(A)$ existe um $x^* \in F(x)$ tal que $\operatorname{Re}(Ax, x^*) \leq 0$.

Teorema 1.1

Se $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo, então existem constante ω e $M \geq 0$ tal que

$$\|S(t)\| \leq M e^{\omega t}, \forall t \in [0, \infty[$$

Demonstração:

Vamos inicialmente mostrar que existe $\eta > 0$ tal que $\|S(t)\|$ é limitada, para $0 \leq t \leq \eta$. De fato, caso contrário, existiria uma sequência (t_m) , com

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = 0 \text{ e } \|S(t_m)\| \geq M.$$

Do teorema da Limitação Uniforme segue que, para algum $x \in X$, a sequência $\{\|S(t_m)x\|\}$ é ilimitada, o que contraria (1, 1). Logo, existem $M \geq 0$ e $\eta \geq 0$ tais que

$$\|S(t)\| \leq M, \text{ para } 0 \leq t \leq \eta.$$

Como $\|S(0)\| = 1$ e $M \geq 1$, seja $\omega = \eta^{-1} \log M$. Assim $M = e^{\omega \eta}$. Dado $t \geq 0$, existem $n \in \mathbb{N}$ e

$0 \leq \delta < \eta$, tais que $t = n\eta + \delta$, ou seja, $n = \frac{t}{\eta} - \frac{\delta}{\eta}$ e portanto, por propriedade de semigrupo, temos

$$\begin{aligned}
\| S(t) \| &= \| S(n\eta + \delta) \| = \| S(n\eta)S(\delta) \| \\
&= \| \underbrace{S(\eta + \eta + \cdots + \eta)}_{n \text{ vezes}} S(\delta) \| \\
&= \| \underbrace{S(\eta)S(\eta) \cdots S(\eta)}_{n \text{ vezes}} T(\delta) \| \\
&= \| [S(\eta)]^n S(\delta) \| = \| [S(\eta)]^n \| \| S(\delta) \| \\
&= \| S(\eta) \|^n \| S(\delta) \| \leq M^n M \\
&= M^{\frac{t}{\eta} - \frac{\delta}{\eta}} M \leq M^{\frac{t}{\eta}} M \leq e^{\omega t} M \\
&= M e^{\omega t}, \quad \forall 0 \leq t < \infty
\end{aligned}$$

Corolário 1.1

Se $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo- C_0 , então para cada $x \in X$, a função $t \mapsto S(t)x$ é contínua de \mathbb{R}^+ em X .

Demonstração Veja [13].

Definição 1.8

Seja $\{S(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo. Segue-se do Teorema 1.1, que existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\| S(t) \| \leq M e^{\omega t}$, para $t \geq 0$. Se $\omega = 0$, $\| S(t) \| \leq M$, o semigrupo é chamado uniformemente limitado. No caso, em que $\omega = 0$ e $M = 1$, o semigrupo é chamado de contrações.

Definição 1.9

Dizemos que e^{At} é exponencialmente estável se existe uma constante positiva μ e $M \geq 1$ tal que

$$\| e^{At} \| \leq M e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Aqui $\| \cdot \|$ denota a norma em $\mathcal{L}(X, X)$.

Definição 1.10

Seja A um operador definido sobre um espaço de Banach X . Denotaremos por $\rho(A)$ o grupo resolvente de A

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

Denotaremos por $\sigma(A)$ o espectro de A , que definiremos como o complementar de $\rho(A)$ respeito a \mathbb{C} , isto é, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Definição 1.11

Se A é um operador linear em X , não necessariamente limitado, o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A é o conjunto de todos os números complexos λ para os quais $\lambda I - A$ é inversível e $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador limitado em X . A família $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ é chamada de resolvente de A .

Definição 1.12 (Forma Bilinear)

Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert real. Um funcional $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamado uma forma bilinear se $B(\cdot, y)$ é linear para cada $y \in \mathcal{H}$ e $B(x, \cdot)$ é linear para cada $x \in \mathcal{H}$. B é chamado de limitado (contínuo) se existe uma constante k tal que

$$|B(x, y)| \leq k \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

B é chamado coercivo se existe uma constante $\delta > 0$ tal que

$$B(x, x) \geq \delta \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Corolário 1.2

Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$, então $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.

Demonstração Veja [13]

Teorema 1.2

Sejam A_0 gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo e $D(A^n)$ o domínio de A^n . Então $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$.

Demonstração Veja [13]

Teorema 1.3

Dado o operador linear (não limitado) A com domínio $D(A)$ denso no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, então A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em \mathcal{H} .

Teorema 1.4

Seja A um operador linear dissipativo em \mathcal{H} . Se $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$, então A é fechado (esse teorema caracteriza a definição do operador fechado).[3]

Teorema 1.5

Seja A dissipativo tal que $I_m(I - A) = X$. Se X é reflexivo então $\overline{D(A)} = X$ (caracteriza a densidade do domínio do operador A no espaço da energia \mathcal{H}). [3]

Teorema 1.6 (Stone)

A é gerador infinitesimal de um grupo de classe C_0 de operadores unitários num espaço de Hilbert \mathcal{H} se, e somente se, iA é auto-adjunto ($A = -A^*$). [3]

Teorema 1.7 (Teorema de Lax-Milgram)

Seja B uma forma bilinear, limitada, e coerciva sobre um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Então para cada funcional linear contínuo F em \mathcal{H} , existe um número $u \in \mathcal{H}$ tal que

$$B(x, u) = F(x), \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

As definições e a demonstração do Teorema de Lax-Milgram podem ser encontradas em [1].

Teorema 1.8

Sejam $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então:

1. $\forall x \in X, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(S)x ds = T(t)x;$
2. $\forall x \in X, \int_0^t T(S)x ds \in D(A)$ e $A \left(\int_0^t T(S)x ds \right) = T(t)x - x;$
3. $\forall x \in D(A)$ e $t \geq 0, T(t)x \in D(A)$ e $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \forall t > 0;$
4. $\forall x \in D(A)$ e $t, s \geq 0, T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$

Demonstração 1.1 Ver [13]**Teorema 1.9 (Hille - Yosida)**

Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações, se e somente se

1. A é fechado e $\overline{D(A)} = X;$
2. O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém R^+ e para todo $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração:

Como A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{T(t) : t \geq 0\}$, então A é fechado e $\overline{D(A)} = X$. Para cada $\lambda > 0$ e $x \in X$, seja $\mathbf{R}(\lambda) : X \rightarrow X$ definido por

$$\mathbf{R}(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt. \quad (1.3)$$

Como a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua e uniformemente limitada em $[0, \infty)$, a integral (1.3) existe como uma integral imprópria, segundo Riemann, e define um operador $\mathbf{R}(\lambda)$ linear limitado satisfazendo

$$\| \mathbf{R}(\lambda)x \| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \| T(t)x \| dt \leq \frac{1}{\lambda} \| x \|, \quad \forall \lambda > 0. \quad (1.4)$$

Além disso, multiplicando (1.3) por $\frac{T(h) - 1}{h}$, obtemos, para $h > 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{T(h) - 1}{h} \right) \mathbf{R}(\lambda)x &= \left(\frac{T(h) - 1}{h} \right) \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{T(h)}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(h)T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança $t + h = s$ na primeira integral, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{T(h) - 1}{h} \right) \mathbf{R}(\lambda)x &= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h} \left(\int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt + \int_h^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right) \\ &= \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) \left[\int_h^0 e^{-\lambda t} T(t)x dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right] + \frac{1}{h} \int_h^0 e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Como o lado direito de (1.5) converge para $\lambda \mathbf{R}(\lambda)x - x$, temos $\mathbf{R}(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$ e

$$A\mathbf{R}(\lambda)x = \lambda \mathbf{R}(\lambda)x - x. \quad (1.6)$$

Ou seja,

$$x = \lambda \mathbf{R}(\lambda)x - A\mathbf{R}(\lambda)x = (\lambda I - A)\mathbf{R}(\lambda)x.$$

Assim $(\lambda I - A)\mathbf{R}(\lambda)x = I$, para todo $\lambda > 0$. Para cada $x \in \mathcal{D}(A)$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Ax dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x dt \\ &= A \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x dt \right) = A\mathbf{R}(\lambda)x.\end{aligned}\tag{1.7}$$

De (1.6) e (1.7), obtemos $\mathbf{R}(\lambda)(\lambda I - A)x = x$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. Assim, para $\lambda > 0$, $\mathbf{R}(\lambda)$ é o inverso de $\lambda I - A$, e satisfaz a estimativa (1.4).

Os lemas seguintes são fundamentais na demonstração de (1) e (2).

Lema 1.1

Suponha que A satisfaz as condições (1) e (2) do teorema anterior e seja $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Então

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Demonstração

Suponhamos primeiramente que $x \in \mathcal{D}(A)$, logo de (1.6) e (1.7), obtemos

$$\| \lambda \mathbf{R}(\lambda, A)x - x \| = \| A\mathbf{R}(\lambda, A)x + x - x \| = \| \mathbf{R}(\lambda, A)Ax \|.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\| \mathbf{R}(\lambda, A)Ax \| \leq \| \mathbf{R}(\lambda, A) \| \| Ax \|.$$

Pelo item (2) do teorema anterior, temos

$$\| \mathbf{R}(\lambda, A) \| \| Ax \| \leq \frac{1}{\lambda} \| Ax \| \rightarrow 0,$$

quando $\lambda \rightarrow \infty$ em $\mathcal{D}(A)$ é denso em X e $\| \lambda \mathbf{R}(\lambda, A) \| \leq 1$, então $\lambda \mathbf{R}(\lambda, A)x \rightarrow x$, quando $\lambda \rightarrow \infty$, para todo $x \in X$.

Para todo $\lambda > 0$, consideremos a aproximação de Yosida A_λ de A dada por

$$A_\lambda = \lambda A \mathbf{R}(\lambda, A) = \lambda(\lambda \mathbf{R}(\lambda, A) - I) = \lambda^2 \mathbf{R}(\lambda, A) - \lambda I\tag{1.8}$$

É imediato que, para cada $\lambda > 0$, A_λ é um operador linear contínuo em X e é consequência imediata do lema (1.1) e de (1.8), que se $x \in \mathcal{D}(A)$, então

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax.$$

Lema 1.2

Seja A satisfazendo as condições (1) e (2) do teorema anterior. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então A_λ , é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações e^{tA_λ} . Além disso, para cada $x \in X$, $\lambda, \mu > 0$, temos

$$\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \| \leq \| A_\lambda x - A_\mu x \|, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.9)$$

Corolário 1.3

Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo de contrações $\{T(t) : t \geq 0\}$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x, \quad \forall x \in X. \quad (1.10)$$

Demonstração:

Do teorema anterior, segue que o lado direito de (1.10) define um C_0 -semigrupo de contrações $S(t)$ cujo gerador infinitesimal é A e pela unicidade do gerador infinitesimal, concluímos que $T(t) = S(t)$.

Corolário 1.4

Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{T(t) : t \geq 0\}$. O conjunto resolvente de A contém o semi-plano $\{\lambda : R\lambda > 0\}$ e para tais λ

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{1}{R\lambda}.$$

Demonstração:

O operador $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$ está bem definido para λ , satisfazendo $R\lambda > 0$.

Na prova da primeira parte do teorema anterior demonstrado que $R(\lambda) \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt = (\lambda I - A)^{-1}$, portanto $\rho(A) \supset \{\lambda : R\lambda > 0\}$ e a estimativa é imediata.

Teorema 1.10

Um operador A é dissipativo se e somente se

$$\| (\lambda I - A)x \| \geq \lambda \| x \|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A), \quad \lambda > 0.$$

Demonstração:

Suponhamos que A é dissipativo e sejam $\lambda > 0$ e $x \in \mathcal{D}(A)$. Se $x^* \in F(x)$ e $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$, então

$$\|(\lambda I - A)x\| \cdot \|x\| = \|\lambda x - Ax\| \cdot \|x^*\|. \quad (1.11)$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} \|\lambda x - Ax\| \cdot \|x^*\| &\geq |\langle \lambda x - Ax, x^* \rangle| \geq \operatorname{Re} \langle \lambda x - Ax, x^* \rangle = \operatorname{Re}(\langle \lambda x - x^* \rangle - \langle Ax, x^* \rangle) \\ &= \operatorname{Re} \langle \lambda x, x^* \rangle - \operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \\ &= \lambda \operatorname{Re} \langle x, x^* \rangle - \operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle. \end{aligned}$$

Como $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$, então

$$\lambda \operatorname{Re} \langle x, x^* \rangle - \operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \geq \lambda \operatorname{Re} \langle x, x^* \rangle = \lambda \|x\|^2.$$

portanto,

$$\|(\lambda I - A)x\| \cdot \|x\| \geq \lambda \|x\|^2. \quad (1.12)$$

Como $\|x\| \neq 0$, então de (1.12), segue o resultado.

Reciprocamente, seja $x \in \mathcal{D}(A)$ e suponhamos que

$$\lambda \|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\|, \quad \forall \lambda > 0.$$

Sejam $y_\lambda^* \in F(\lambda x - Ax)$ e $z_\lambda^* = \frac{y_\lambda^*}{\|y_\lambda^*\|}$, então $\|z_\lambda^*\| = 1$ e

$$\begin{aligned} \lambda \|x\| \leq \|\lambda x - Ax\| &= \|\lambda x - Ax\| \cdot \|z_\lambda^*\| = \langle \lambda x - Ax, z_\lambda^* \rangle = \langle \lambda x, z_\lambda^* \rangle - \langle Ax, z_\lambda^* \rangle \\ &= \lambda \operatorname{Re} \langle x, z_\lambda^* \rangle - \operatorname{Re} \langle Ax, z_\lambda^* \rangle \\ &\leq \lambda \operatorname{Re} |\langle x, z_\lambda^* \rangle| - \operatorname{Re} \langle Ax, z_\lambda^* \rangle. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\lambda \operatorname{Re} |\langle x, z_\lambda^* \rangle| - \operatorname{Re} \langle Ax, z_\lambda^* \rangle \leq \lambda \|x\| \cdot \|z_\lambda^*\| - \operatorname{Re} \langle Ax, z_\lambda^* \rangle = \lambda \|x\| - \operatorname{Re} \langle Ax, z_\lambda^* \rangle.$$

Logo, $\lambda \|x\| \leq \lambda \|x\| - \operatorname{Re} \langle Ax, z_\lambda^* \rangle$, $\forall \lambda > 0$. Portanto

$$\operatorname{Re} \langle Ax, z_\lambda^* \rangle \leq 0. \quad (1.13)$$

Dividindo a desigualdade(1.13) por $\lambda > 0$, obtemos

$$\|x\| \leq \operatorname{Re}\langle Ax, z_\lambda^* \rangle - \frac{1}{\lambda} \operatorname{Re}\langle Ax, z_\lambda^* \rangle,$$

o que resulta em

$$\operatorname{Re}\langle x, z_\lambda^* \rangle \geq \|x\| + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Re}\langle Ax, z_\lambda^* \rangle = \|x\| - \frac{1}{\lambda} \operatorname{Re}|\langle Ax, z_\lambda^* \rangle|.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\|x\| - \frac{1}{\lambda} \operatorname{Re}|\langle Ax, z_\lambda^* \rangle| \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda} \|Ax\| \cdot \|z_\lambda^*\|.$$

Assim,

$$\operatorname{Re}\langle x, z_\lambda^* \rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda} \|Ax\| \cdot \|z_\lambda^*\|. \quad (1.14)$$

Como a bola unitária em X^* é compacta na topologia fraca, $\{z_\lambda^* : \lambda > 0\}$, possui um ponto de acumulação $z^* \in X^*$, com $\|z^*\| \leq 1$. De (1.13) e (1.14) segue que $\operatorname{Re}\langle Ax, z^* \rangle \leq 0$ e $\operatorname{Re}\langle x, z^* \rangle \geq \|x\|$. Porém $\operatorname{Re}\langle x, z^* \rangle \leq |\langle x, z^* \rangle| \leq \|x\|$, portanto

$$\operatorname{Re}\langle x, z^* \rangle = \|x\|.$$

Fazendo $x^* = \|x\| z^*$, temos que $x^* \in F(x)$. De fato, temos

$$\operatorname{Re}\langle x^*, x \rangle = \operatorname{Re}\langle \|x\| z^*, x \rangle = \|x\| \operatorname{Re}\langle z^*, x \rangle = \|x\| \cdot \|x\| = \|x\|^2.$$

Daí vem que $\|x^*\| = \| \|x\| z^* \| = \|x\| \cdot \|z^*\| = \|x\|$. Portanto $x^* \in F(x)$.

Mostraremos, agora, que $\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$. De fato, sabemos que $\operatorname{Re}\langle Ax, z^* \rangle \leq 0$, logo $\operatorname{Re}\left\langle Ax, \frac{x^*}{\|x\|} \right\rangle \leq 0$. Ou ainda, $\frac{1}{\|x\|} \operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$. Portanto $\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$, e assim A é dissipativo.

Teorema 1.11 (Lumer-Phillips) *Seja A um operador linear em X com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em X .*

- i** *Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem, $R(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .*
- ii** *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações sobre X , então $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. Além disso, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e todo $x^* \in F(x)$, temos que $\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.*

Demonstração:

(i) Seja $\lambda > 0$, sendo A dissipativo temos

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \quad (1.15)$$

Visto que $R(\lambda_0 I - A) = X$, de (1.15) com $\lambda = \lambda_0$, segue-se que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado e, portanto fechado. Então $\lambda_0 I - A$ é fechado e assim A é fechado.

Se $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$, então de (1.15) segue que $\rho(A) \supseteq]0, \infty[$ e

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Do teorema de Hille-Yosida segue que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .

Para completar a prova de (i) resta mostrar que $R(\lambda I_A) = X$, para todo $\lambda > 0$. Consideremos o conjunto $\Lambda = \{\lambda; 0 < \lambda < \infty \text{ e } R(\lambda I - A) = X\}$. Se $\lambda \in \Lambda$, então por (1.15), $\lambda \in \rho(A)$. A interseção desta vizinhança com a reta real está contida em Λ e, portanto Λ é aberto. Por outro lado, seja $\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$, com $\lambda > 0$. Para cada $y \in X$, existe $x_n \in \mathcal{D}(A)$ tal que

$$\lambda_n x_n - A x_n = y \quad (1.16)$$

De (1.16) segue que $\|x_n\| \leq \frac{1}{\lambda_n} \|y\| \leq C$, para alguma constante $C > 0$. Assim

$$\lambda_m \|x_n - x_m\| \leq \|\lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| \leq |\lambda_n - \lambda_m| \|x_n\| \leq C|\lambda_n - \lambda_m|.$$

Portanto $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{D}(A)$. Logo, existe $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$. Então de (1.16), $Ax_n \rightarrow \lambda x - y$. Como A é fechado, $x \in \mathcal{D}(A)$ e $\lambda x - y = Ax$. Portanto, $R(\lambda I - A) = X$. Assim, Λ também é fechado em $(0, \infty)$ e como $\lambda_0 \in \Lambda$ por hipótese, segue que $\Lambda = (0, \infty)$.

(ii) Se A é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $T(t)$ em X , então pelo teorema de Hille-Yosida, $\rho(A) \supset]0, \infty[$ e portanto $R(\lambda I_A) = X$, para todo $\lambda > 0$. Além disso, se $x \in \mathcal{D}(A)$ e $x^* \in F(x)$, então

$$|\langle T(t)x, x^* \rangle| \leq \|T(t)x\| \cdot \|x^*\| \leq \|x\|^2.$$

Como

$$Re\langle T(t)x - x, x^* \rangle = Re\langle T(t)x, x^* \rangle - Re\langle x, x^* \rangle,$$

$$Re\langle T(t)x, x^* \rangle \leq \langle T(t)x, x^* \rangle \leq \|x\|^2, \quad \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2,$$

então

$$Re\langle T(t)x, x^* \rangle - Re\langle x, x^* \rangle \leq 0. \quad (1.17)$$

Dividindo (1.17) por $t > 0$ e fazendo $t \rightarrow \infty$, obtemos $Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

Corolário 1.5 *Seja A um operador com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração de classe C_0 sobre \mathcal{H} .*

Demonstração: Ver [1]

O teorema de Gearhart é fundamental na demonstração do principal resultado deste trabalho.

Teorema 1.12 (Gearhart) *Seja $S(t) = e^{At}$ um semigrupo de contrações de classe C_0 sobre um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Então $S(t)$ é exponencialmente estável se e somente se*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbf{R}\} \equiv i\mathbf{R}$$

e

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Demonstração: veja [5].

1.2 Propriedades Assintóticas de um Semigrupo

Teorema 1.13 *Seja $-A \in G(\mathcal{H}, M, 0)$ com A invertível. Se $T(t)$ é o semigrupo gerado pelo operador A no espaço \mathcal{H} (de Hilbert), então para todo $Y > 0$ são equivalentes:*

- (i) $\|T(t)A^{-y}\|_{L(\mathcal{H})} \leq \frac{C}{t^\beta}, \forall t > 0;$
- (ii) $\|T(t)A^{-y\alpha}\|_{L(\mathcal{H})} \leq \frac{C}{t^{\alpha\beta}}, \forall \alpha > 0;$

Demonstração:

Será feita para $\beta = 1$ pois o caso geral é análogo. Vamos supor inicialmente que (i) acontece, então temos

$$\|T(t)A^{-\eta y}\| = \|[T(\frac{t}{\eta})A^{-Y}]^\eta\| \leq \frac{(C)^\eta}{\frac{t}{\eta}} = \frac{(C\eta)}{t^\eta} \quad (1.18)$$

Seja $\theta \in (0, 1)$. Então

$$\|T(t)A^{-\eta Y \theta}\| = \|A^{\eta Y(1-\theta)} T(t)^\theta A^{-\eta Y(1-\theta)} A^{-\eta Y \theta}\| \leq \|A^{\eta Y} T(t)A^{-\eta y}\|^{1-\theta} \|T(t)A^{-\eta Y}\|^\theta$$

Usando (1.18) e o fato de $\|T(t)\| \leq M$, segue que

$$\|T(t)A^{-\eta Y \theta}\| \leq \frac{C'(\eta)}{t^{\eta\theta}} \quad \forall t > 0, \eta \in \mathbf{N}, \theta \in (0, 1) \quad (1.19)$$

Para $\alpha > 0$ e $\eta > \alpha$, definimos $\theta := \frac{\alpha}{\eta}$. Segue que $\theta \in (0, 1)$ e de (1.19) temos

$$\|T(t)A^{-Y\alpha}\| \leq \frac{C(n)}{t^\alpha}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Suponhamos agora que (ii) acontece. Fazendo $\sigma := Y\alpha$, segue da hipótese que

$$\|T(t)A^{-\sigma}\| \leq \frac{C(\alpha)}{t^\alpha}, \quad \forall t > 0 \quad (1.20)$$

Usando (1.20), temos

$$\|T(t)A^{-\eta\sigma}\| = \|T\left(\frac{t}{\eta}\right)A^\sigma\| \leq \frac{C(\alpha)}{t^{\eta\alpha}}, \quad \forall t > 0, \eta \in \mathbb{N} \quad (1.21)$$

Seja $\bar{\theta} \in (0, 1)$. De (1.21), temos

$$\|T(t)A^{-\eta\sigma\bar{\theta}}\| \leq \|A^{\eta\sigma}T(t)A^{\eta\sigma}\|^{1-\bar{\theta}} \|T(t)A^{-\eta\sigma}\|^{\bar{\theta}} \leq \frac{C(\alpha)}{t^{\eta\alpha\bar{\theta}}} \quad (1.22)$$

Tomando $\alpha > 0$ tal que $\eta > \frac{1}{\alpha}$ e definindo $\bar{\theta} := \frac{1}{\eta\alpha}$, temos

$$\bar{\theta} \in (0, 1), \quad \eta\sigma\bar{\theta} = Y, \quad \eta\alpha\bar{\theta} = 1$$

De (1.22) segue que (i) acontece.

Definição 1.13

Dizemos que e^{At} é analítico se e^{At} admite uma extensão $T(\lambda)$ para $\lambda \in \Delta_e$, onde $\Delta_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg \lambda| < \theta\}$, para algum $\theta > 0$ tal que $\lambda \rightarrow T(\lambda)$ é analítica e

1. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|T(\lambda)z - z\| = 0, \forall z \in X, \lambda \in \Delta_\theta;$
2. $T(\lambda + \mu) = T(\lambda)T(\mu), \forall \lambda, \mu \in \Delta_\theta$, ou equivalentemente, existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\|Ae_{At}\| \leq kt^{-1}, \forall t > 0.$$

Definição 1.14

Seja A um operador num espaço de Banach X . Chamaremos de cota superior do espectro de A ao valor

$$w_\sigma(A) = \sup\{Re\lambda; \lambda \in \sigma(A)\}$$

Definição 1.15

Seja A o gerador infinitesimal do semigrupo e^{At} de classe C_0 . Diremos que $w_0(A)$ é o tipo do semigrupo gerado por A se

$$w_0(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|e^{At}\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|e^{At}\|}{t}$$

Dizemos que o semigrupo e^{At} de classe C_0 possui a propriedade do crescimento determinada pelo espectro se

$$w_\sigma(T) = w_0(A)$$

Definição 1.16

Seja X e Y espaços métricos. Então $T : D(T) \rightarrow Y$ com domínio $D(T) \subset X$ é dito uma aplicação aberta, se para todo conjunto aberto de $D(T)$ a imagem é um conjunto aberto de Y

Teorema 1.14 Se $T(t)$ é um semigrupo analítico com gerador infinitesimal A definido num espaço X , então

$$T(t)x \in D(A^\infty) = \bigcap_{i=0}^{\infty} D(A^i) \quad \forall x \in X$$

De fato, sendo $T'(t) = AT(t)$, segue que $T^n(t) = A^n T(t)$. Logo, para todo $x \in X$, tem-se

$$\|A^n T(t)x\| = \|T^n(t)x\| \leq \|T'\left(\frac{t}{n}\right) x\| \leq \|T'\left(\frac{t}{n}\right)\|^n \|x\|$$

Podemos ver que

$$\|T'(t)\| \leq \frac{C}{t}$$

Portanto segue

$$\|A^n T(t)x\| \leq \frac{cn^n}{t^n} \|x\|^n$$

Donde segue o resultado. Nestas condições dizemos que T possui efeito regularizante.

O teorema seguinte nos dá a condição necessária e suficiente para determinar quando a taxa de crescimento do semigrupo é determinada pela cota superior do espectro.

Teorema 1.15 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 sobre um espaço de Hilbert. Então temos que*

$$w_0(A) = w_\sigma(A)$$

se, e somente se, para todo $\epsilon < 0$, existe M_ϵ tal que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq M_\epsilon \quad \forall \quad \operatorname{Re} \lambda \geq w_\sigma(A) + \epsilon$$

O teorema (1.15) nos diz que basta determinar a cota superior do espectro para encontrar a melhor taxa de decaimento. Quando essa propriedade é válida, diz-se que o semigrupo possui a propriedade do crescimento determinada pelo espectro (PCDE). Se A gera um semigrupo analítico e se a cota superior do espectro for negativa, então temos decaimento exponencial, [3].

Teorema 1.16 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $T(t)$.*

Se $w_\sigma(T) < 0$, então existem constantes $M \geq 1$ e $\mu > 0$ tal que:

$$\|T(t)\| \leq M e^{\mu t}$$

Demonstração:

Sendo A um gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, existem constantes $w \geq 0$, $M \geq 1$, $\delta > 0$ e uma vizinhança V de $\lambda = w$ tal que

$$\rho(A) \supset \sum = \{\lambda; |\arg(\lambda - w)| < \frac{\pi}{2} + \delta\} UV$$

e

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{|\lambda - w|} \quad \text{para } \lambda \in \sum$$

Além disso,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\tau e^{\lambda t} R(\lambda; A) d\lambda \tag{1.23}$$

onde τ é formado por

$$\tau_1 = \{\lambda = \rho e^{i\theta} + w; \rho \geq 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \delta\}$$

e $\tau_2 = \{\lambda = \rho e^{-i\theta} + w; \rho \geq 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \delta\}$ e é orientado de tal forma que $\lim \lambda$ cresça ao longo de τ . A convergência em (1.23) para $t > 0$ é na topologia uniforme do operador. Por hipótese, temos que $R(\lambda; A)$ é analítico numa vizinhança de

$$\Delta = \{\lambda; \operatorname{Re} \lambda > \sigma_1, |\arg(\lambda - w)| \geq \theta\}$$

onde $0 > \sigma_1 > w_\sigma(T)$. Do teorema de Cauchy segue que τ em (1.23) pode ser mudado sem variar o valor da integral para a trajetória τ onde τ' é composta por

$$\begin{aligned}\tau'_1 &= \left\{ \lambda = \rho e^{i\theta} + w : \rho \geq \frac{w - \sigma_1}{|\cos \theta|} \right\} \\ \tau'_2 &= \{ \operatorname{Re} \lambda = \sigma_1 : |\operatorname{Im} \lambda| \leq (w - \sigma_1) |\tan \theta| \} \\ \tau'_3 &= \left\{ \lambda = \rho e^{-i\theta} + w : \rho \geq \frac{w - \sigma_1}{|\cos \theta|} \right\}\end{aligned}$$

e é orientada de tal forma que $\operatorname{Im} \lambda$ cresça ao longo de τ' . Portanto,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi} i \int_{\tau'} e^{\lambda t} R(\lambda; A) d\lambda$$

Estimando $\|T(t)\|$ sobre τ'_i onde $i = 1, 2, 3$ encontramos para $t \geq 1$ e alguma constante M_1 , que

$$\|T(t)\| \leq M_1 e^{\sigma_1 t}.$$

Desde que

$$\|T(t)\| \leq M_2 \text{ para } 0 \leq t \leq 1,$$

então temos

$$\|T(t)\| \leq M e^{\sigma_1 t} \text{ para } t \geq 0$$

Donde segue a conclusão.

Observação: Na prova do teorema (1.16), [3], temos decaimento exponencial da forma $\|T(t)\| \leq M_1 e^{-\sigma_1 t}$ para todo $w_\sigma(T) < \sigma_1 < 0$. Em particular, para $\sigma_1 = w_\sigma(T) + \epsilon$, com $\epsilon > 0$ muito pequeno, temos decaimento exponencial com taxa dada pela cota superior do espectro. Em outras palavras temos o seguinte resultado:

Teorema 1.17 *Se $T(t)$ é um semi grupo analítico com gerador infinitesimal A , então T possui a propriedade do crescimento determinada pelo espectro.*

O teorema nos diz que se um semi grupo é analítico, então temos decaimento exponencial da solução do sistema com a melhor taxa de decaimento.

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução

2.1 Sistema Acoplado de Equações de Onda

Neste capítulo estudaremos a existência, a unicidade do sistema acoplado de equações de onda fracamente dissipativo descrito em (P)

$$(P) \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty) \\ v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, +\infty) \\ u = v = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, +\infty) \\ u(x, 0), v(x, 0) = (u_0, v_0), & \text{em } \Omega \\ (u_t(x, 0), v_t(x, 0)) = (u_1(x), v_1(x)) & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Sendo Ω um conjunto aberto limitado de \mathbb{R}^n com fronteira regular, isto é, $\Gamma = \partial\Omega$, onde u, v são deslocamentos verticais e α é um número real positivo suficientemente pequeno. Temos como condição de contorno

$$u = v = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0, \infty)$$

e as condições iniciais são:

$$\begin{cases} u(x, 0), v(x, 0) & = & (u_0, v_0), \text{ em } \Omega \\ (u_t(x, 0), v_t(x, 0)) & = & (u_1(x), v_1(x)) \text{ em } \Omega \end{cases}$$

Consideremos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \quad (2.1)$$

munido com o seguinte produto interno

$$\langle U, V \rangle = \int_{\Omega} [\nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 + \alpha(u_1 v_2 + u_2 v_1)] dx + \int_{\Omega} [u_3 v_3 + u_4 v_4] dx \quad (2.2)$$

onde:

$$U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T \text{ e } V = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T.$$

O funcional de energia $E : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, associado ao problema (P) citado acima é definido por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} uv dx \quad (2.3)$$

A norma utilizada neste trabalho é:

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega) \quad (2.4)$$

Consideremos o operador $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido no espaço de energia \mathcal{H} com domínio definido por:

$$D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2 \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

O operador A é definido por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ \Delta & -\alpha I & -I & 0 \\ -\alpha I & \Delta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o sistema acoplado, cujas equações estão no problema (P) acima citado, da seguinte forma: fazendo $\varphi = u_t$ e $\psi = v_t$ temos o problema de valor inicial ou problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dU(t)}{dt} &= AU(t) \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

com $U = (u, v, \varphi, \psi)^T$ e $U_0 = (u_0, v_0, u_1, v_1)^T$.

Usando o produto interno (2.5), obtermos

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle &= \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla u dx + \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla v dx + \alpha \int_{\Omega} \varphi v dx + \alpha \int_{\Omega} \psi u dx + \int_{\Omega} \Delta u \varphi dx + \int_{\Omega} -\varphi^2 dx \\ &\quad - \alpha \int_{\Omega} v \varphi dx + \int_{\Omega} \Delta v \psi dx - \alpha \int_{\Omega} u \psi dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla u dx + \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla v dx + \alpha \int_{\Omega} \varphi v dx + \alpha \int_{\Omega} \psi u dx - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \psi dx - \int_{\Omega} \varphi^2 dx - \int_{\Omega} v \varphi dx - \int_{\Omega} u \psi dx \\ &= - \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

Ou seja, A é um operador dissipativo.

2.2 Existência de Solução do Sistema Acoplado (P)

Usando os resultados: $\mathcal{D}(A)$ é denso em \mathcal{H} e o operador A é dissipativo, podemos demonstrar a existência de solução usando o teorema anterior.

O teorema a seguir prova que o sistema acoplado tem solução única.

Teorema 2.1 *O operador A é um gerador infinitesimal de semigrupo, $S(t)$, C_0 de contrações sobre o espaço \mathcal{H} .*

Demonstração

Como $D(A)$ é denso em \mathcal{H} (espaço de Hilbert) e A é um operador dissipativo, então para demonstrar o teorema enunciado, é suficiente provar que $0 \in \rho(A)$. De fato, da equação resolvente $\lambda U - AU = F$, considere $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$ (espaço de Hilbert).

Fazendo $\lambda = 0$, temos

$$-AU = F$$

onde $U = (u, v, \varphi, \psi)$. Substituindo na equação acima os valores de U , A e F podemos escrever

$$\varphi = f_1 \tag{2.7}$$

$$\psi = f_2 \tag{2.8}$$

$$\Delta u - \varphi - \alpha v = f_3 \tag{2.9}$$

$$\Delta v - \alpha u = f_4 \tag{2.10}$$

Como f_1 e $f_2 \in H_0^1(\omega)$ segue $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$.

Substituindo os valores de φ e ψ nas equações (2.9) e (2.10) e escrevendo convenientemente, temos

$$\Delta u - \varphi - \alpha v = f_1 + f_3 \tag{2.11}$$

$$\Delta v - \alpha u = f_4 \tag{2.12}$$

Multiplicando as equações (2.11) e (2.12) por $\theta_1, \theta_2 \in H_0^1(\Omega)$ respectivamente,

$$\int_{\Omega} \Delta u \theta_1 dx - \alpha \int_{\Omega} v \theta_1 dx = \int_{\Omega} (f_1 + f_3) \theta_1 dx \tag{2.13}$$

$$\int_{\Omega} \Delta v \theta_2 dx - \alpha \int_{\Omega} u \theta_2 dx = \int_{\Omega} f_4 \theta_2 dx \tag{2.14}$$

Aplicando a fórmula de Green e somando as equações acima temos a seguinte equação

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \theta_1 dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \theta_2 dx + \alpha \int_{\omega} (u \theta_2 + v \theta_1) dx = \int_{\Omega} [(f_1 + f_3) \theta_1 + f_4 \theta_2] dx \tag{2.15}$$

A equação (2.15) dá origem ao seguinte problema variacional $b((u, v), (\theta_1, \theta_2)) = \chi(\theta_1, \theta_2)$, $\forall \theta_1, \theta_2 \in H_0^1(\Omega)$ utilizado para determinar

$$u, v \in H_0^1(\Omega)$$

fazendo

$$b((u, v), (\theta_1, \theta_2)) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \theta_1 dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \theta_2 dx + \alpha \int_{\Omega} (u\theta_2 + v\theta_1) dx \quad (2.16)$$

$$\chi(\theta_1, \theta_2) = \int_{\Omega} [(f_1 + f_3)\theta_1 + f_4\theta_2] dx \quad (2.17)$$

Escrevendo convenientemente a equação (2.17)

$$\begin{aligned} \chi : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\theta_1, \theta_2) \rightarrow \chi(\theta_1, \theta_2) &= \int_{\Omega} [(f_1 + f_3)\theta_1 + f_4\theta_2] dx \\ &= \int_{\Omega} (f_1 + f_3)\theta_1 dx + \int_{\Omega} f_4\theta_2 dx \end{aligned}$$

Mostramos que χ é linear

$$\begin{aligned} \chi(\alpha(\theta_1, \theta_2) + \beta(\varphi_1, \varphi_2)) &= \chi(\alpha\theta_1 + \beta\varphi_1, \alpha\theta_2 + \beta\varphi_2) \\ &= \int_{\Omega} (f_1 + f_3)(\alpha\theta_1 + \beta\varphi_1) dx + \int_{\Omega} f_4\theta_2(\alpha\theta_2 + \beta\varphi_2) dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} (f_1 + f_3)\theta_1 dx + \beta \int_{\Omega} (f_1 + f_3)\varphi_1 dx + \alpha \int_{\Omega} f_4\theta_2 dx + \beta \int_{\Omega} f_4\varphi_2 dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} (f_1 + f_3)\theta_1 dx + \alpha \int_{\Omega} f_4\theta_2 dx + \beta \int_{\Omega} (f_1 + f_3)\varphi_1 dx + \beta \int_{\Omega} f_4\varphi_2 dx \\ &= \alpha\chi(\theta_1, \theta_2) + \beta\chi(\varphi_1, \varphi_2) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

que χ é contínua

$$|\chi(\theta_1, \theta_2)| = \left| \int_{\Omega} (f_1 + f_3)\theta_1 dx + \int_{\Omega} f_4\theta_2 dx \right| \quad (2.18)$$

$$\leq \left| \int_{\Omega} (f_1 + f_3)\theta_1 dx \right| + \left| \int_{\Omega} f_4\theta_2 dx \right| \quad (2.19)$$

$$\leq \int_a^b |(f_1 + f_3)||\theta_1| dx + \int_a^b |f_4||\theta_2| dx \quad (2.20)$$

$$\leq |(f_1 + f_3)|_{L^2(\Omega)} |\theta_1|_{L^2(\Omega)} + |f_4|_{L^2(\Omega)} |\theta_2|_{L^2(\Omega)} \quad (2.21)$$

Fazendo

$$|(f_1 + f_3)|_{L^2(\Omega)} = C_1 \text{ e } |f_4|_{L^2(\Omega)} = C_2$$

e usando a desigualdade de Poincaré obtemos

$$|\chi(\theta_1, \theta_2)| \leq C_1 |\theta_1|_{L^2(\Omega)} + C_2 |\theta_2|_{L^2(\Omega)} \quad (2.22)$$

$$\leq (C_1 \|\theta_1\| + C_2 \|\theta_2\|) H_0^1(\Omega) \quad (2.23)$$

escrevendo convenientemente a equação (2.16)

$$b : [H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)]^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$((u, v)(\theta_1, \theta_2)) \rightarrow b(u, v)(\theta_1, \theta_2) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \theta_1 dx + \int_{\Omega} \nabla v \nabla \theta_2 dx + \alpha \int_{\Omega} (u\theta_2 + v\theta_1) dx$$

Mostraremos que b é linear

$$\begin{aligned} b((u, v)(\theta_1, \theta_2)) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \theta_1 dx + \int_{\Omega} \nabla v \nabla \theta_2 dx + \alpha \int_{\Omega} (u\theta_1 + v\theta_2) dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla \theta_1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) \left(\int_{\Omega} |\nabla \theta_2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \alpha \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \theta_2^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \alpha \left(\int_{\Omega} v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \theta_1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Usando a desigualdade

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

obtemos que b é limitado

$$|b(u, v), (\theta_1, \theta_2)| \leq c(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2) (\|\theta_1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\theta_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2), \quad \forall (\theta_1, \theta_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Verificamos também que além de ser linear e limitado b é coercivo

$$b((u, v)(u, v)) = (\|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{H_0^1}^2 + 2\alpha \int_{\Omega} uv dx) \geq \beta(\|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{H_0^1}^2)$$

onde β é uma constante pequena e positiva.

Logo pelo Teorema de Lax Milgran o problema variacional tem solução única

$$(u, v) \in (H_0^1(\Omega))^2$$

Usando regularidade elíptica [12] segue-se que

$$(u, v) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^1(\Omega))^2$$

Finalmente, segue que existe uma única $U \in \mathcal{D}(A)$, portanto $0 \in \rho(A)$. Logo A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.

Capítulo 3

Falta de Decaimento Exponencial e Estabilidade Polinomial

3.1 Falta de Decaimento Exponencial

Aqui usaremos condições necessárias e suficientes por ser o semigrupo C_0 de contrações, exponencialmente estável no espaço de Hilbert. Este resultado foi obtido por Gearhart[5] e Huang[9] independentemente. Para isso considere o problema espectral

$$\begin{cases} -\Delta w_\nu = \lambda_\nu w_\nu & \text{em } \Omega \\ w_\nu = 0 & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

onde $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é crescente e

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \lambda_\nu = \infty$$

O teorema seguinte nos dá as condições necessárias e suficientes para que o semigrupo C_0 de contrações seja exponencialmente estável, isto é que o resolvente de A contém o eixo imaginário e a norma do operador $\| (i\beta I - A)^{-1} \|$ seja limitado.

Teorema 3.1 (Gearhart) *Seja $S(t) = e^{At}$ o semi grupo C_0 de contrações no espaço de Hilbert. Então $S(t)$ é exponencialmente estável se e somente se*

$$\rho(A) \subset \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \quad \text{e} \\ \overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \| (i\beta I - A)^{-1} \| < \infty$$

onde $\rho(A)$ é o resolvente de A . Usaremos o teorema (3.1) para provar a falta de estabilidade do semigrupo $S(t)$ demonstrando o teorema seguinte.

Teorema 3.2 *Seja $S(t)$ o semi grupo $-C_0$ de contrações gerado por A , e*

$$\begin{aligned} E_1(t) &:= E_1(t, u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + |\nabla u|^2 + v_t^2 + |\nabla v|^2 + 2\alpha uv) dx \\ E_2(t) &:= E_1(t, u, v), \quad E_3(t) := E_1(t, u_{tt}, v_{tt}) \end{aligned}$$

as energias associadas a (P). Então, segue que:

- (i) $S(t)$ não é exponencialmente estável, mas
- (ii) Existe uma constante positiva d , tal que

$$E_1(t) \leq \frac{d}{t} \sum_{j=1}^3 E_j(0), \quad \text{para todo } t > 0.$$

Demonstração Para provar (i), usamos o Teorema (3.1). Fazemos $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$ e $U(u, v, \varphi, \psi)$. Buscamos a solução do sistema,

$$i\lambda U - AU = F,$$

isto é

$$\begin{bmatrix} i\lambda u \\ i\lambda v \\ i\lambda \varphi \\ i\lambda \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ \Delta u - \alpha v - \varphi \\ \Delta v - \alpha u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

ou, de forma

$$\begin{aligned} i\lambda u - \varphi &= f_1 \\ i\lambda v - \psi &= f_2 \\ i\lambda \varphi - \Delta u + \alpha v + \varphi &= f_3 \\ i\lambda \psi - \Delta v + \alpha u &= f_4 \end{aligned} \quad (3.2)$$

z Consideremos $u = aw_\nu$, $v = bw_\nu$, $\varphi = cw_\nu$ e $\psi = dw_\nu$, com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Então fazendo $f_1 = f_2 = 0$ e $f_3 = f_4 = w_\nu$ em (3.2) e usando o problema espectral (3.1) obtemos

$$\begin{aligned} i\lambda u &= \varphi \\ i\lambda v &= \psi \\ -\lambda^2 aw_\nu + a\lambda_\nu w_\nu + \alpha bw_\nu + cw_\nu &= w_\nu \\ -\lambda^2 bw_\nu + b\lambda_\nu w_\nu + \alpha aw_\nu &= w_\nu \end{aligned} \quad (3.3)$$

Somando as duas últimas igualdade das equações (3.3), obtemos

$$-\lambda^2(a+b)w_\nu + (a+b)\lambda_\nu w_\nu + \alpha(a+b)w_\nu + cw_\nu = 2w_\nu, \quad (3.4)$$

Escolhendo $\lambda = \sqrt{\lambda_\nu + \alpha}$, e usando na equação (3.4), obtemos $c = 2$. Logo de forma análoga obtemos

$$\begin{aligned} a &= -\frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} \\ b &= -\left(\frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} + \frac{1}{\alpha}\right) \\ c &= 2 \\ d &= -\left(-2\alpha - i\frac{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}w_\nu, \\ v &= -\left(\frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} + \alpha + \frac{1}{\alpha}\right)w_\nu \\ \varphi &= 2w_\nu \\ \varphi &= -\left(-2\alpha + i\frac{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}{\alpha}\right)w_\nu \end{aligned} \quad (3.5)$$

Vamos mostrar que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty, \text{ quando } \nu \rightarrow \infty.$$

De fato, de (3.5), temos que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_{\Omega} \left| \left(\frac{-2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} \nabla w_\nu \right) \right|^2 dx + \int_{\Omega} \left| \left(\frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} + \frac{1}{\alpha} \right) \nabla w_\nu \right|^2 dx \\ &\quad + 2\alpha \int_{\Omega} \left(\frac{-2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} w_\nu \right) \left(\frac{2i}{\lambda_\nu + \alpha} \right) w_\nu dx + \int_{\Omega} \left| \left(\frac{-2\alpha + i\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}{\alpha} \right) \right|^2 dx \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.6)$$

quando $\nu \rightarrow \infty$. Lembrando que

$$\begin{aligned} i\lambda U - AU &= F \\ U(i\lambda I - A) &= F \\ U &= (i\lambda I - A)^{-1}F \end{aligned}$$

Segue de (3.6) e do teorema (3.1) que $S(t)$ não é exponencialmente estável.

3.2 Decaimento Polinomial

Nesta secção mostraremos que a energia associada ao problema (P) decai polinomialmente. Para isto usaremos o método de energia combinado com algumas desigualdades básicas.

Demonstraremos agora a parte (ii) do teorema (3.1). Multiplicando as equações acopladas do problema (P) por u_t e v_t respectivamente, integrando em Ω e aplicando a fórmula de Grenn, obtemos

$$\int_{\Omega} u_{tt}u_t dx - \int_{\Omega} \Delta u u_t dx + \int_{\Omega} \alpha v u_t dx + \int_{\Omega} u_t u_t dx = 0 \quad (3.7)$$

$$\int_{\Omega} v_{tt}v_t dx - \int_{\Omega} \Delta v v_t dx + \int_{\Omega} \alpha u v_t dx = 0 \quad (3.8)$$

Somando as equações (3.7) e (3.8) temos

$$\int_{\Omega} u_{tt}u_t dx + \int_{\Omega} v_{tt}v_t dx - \int_{\Omega} \Delta u u_t dx - \int_{\Omega} \Delta v v_t dx + \alpha \int_{\Omega} v u_t dx + \alpha \int_{\Omega} u v_t dx = - \int_{\Omega} u_t^2 dx \quad (3.9)$$

Analisando convenientemente os termos da equação (3.9)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} 2\alpha u v dx = \int_{\Omega} u_t^2 dx \quad (3.10)$$

Reorganizando os termos em (3.10)

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + v_t^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + 2\alpha u v) dx \right\} = - \int_{\Omega} u_t^2 dx$$

Conhecendo a definição de $E_1(t)$, temos que

$$\frac{d}{dt} E_1(t) = - \int_{\Omega} u_t^2 dx \quad (3.11)$$

Voltando às equações acopladas do problema (P)

$$u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v = 0$$

$$v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0$$

Derivando-as em relação à t e multiplicando por u_{tt} e v_{tt} respectivamente, integrando e somando as equações chegamos a equação (3.12)

$$\int_{\Omega} u_{ttt} \cdot u_{tt} dx + \int_{\Omega} v_{ttt} v_{tt} dx - \int_{\Omega} \Delta u_t u_{tt} dx - \int_{\Omega} \Delta v_t v_{tt} dx + \int_{\Omega} u_{tt}^2 dx + \int_{\Omega} \alpha u_t v_{tt} dx + \int_{\Omega} \alpha v_t u_{tt} dx = 0 \quad (3.12)$$

Analisando convenientemente os termos da equação acima, usando a fórmula de Green obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_{tt}^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v_{tt}^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla v_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} 2\alpha u_t v_t dx = - \int_{\Omega} u_{tt}^2 dx$$

Por definição

$$E_2(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_{tt}^2 + v_{tt}^2 + |\nabla u_t|^2 + |\nabla v_{tt}|^2 + 2\alpha u_t v_t) dx$$

Portanto

$$\frac{d}{dt} E_2(t) := - \int_{\Omega} u_{tt}^2 dx \quad (3.13)$$

Voltando as equações do problema (P), derivando duas vezes em relação à t , multiplicando por u_{ttt} e v_{ttt} respectivamente, integrando e somando as equações obtemos

$$\int_{\Omega} u_{tttt} u_{ttt} dx - \int_{\Omega} \Delta u_{tt} u_{ttt} dx - \int_{\Omega} \Delta v_{tt} v_{ttt} dx + \int_{\Omega} u_{ttt} u_{ttt} dx + \int_{\Omega} \alpha (u_{tt} v_{ttt} + v_{tt} u_{ttt}) dx = 0 \quad (3.14)$$

Analisando convenientemente cada termo da equação (3.14), aplicando a fórmula de Green obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_{ttt}^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v_{ttt}^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u_{tt}|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla v_{tt}|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} 2\alpha u_{tt} v_{tt} dx = - \int_{\Omega} u_{ttt}^2 dx$$

Por definição

$$E_3(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_{ttt}^2 + v_{ttt}^2 + |\nabla u_{tt}|^2 + |\nabla v_{tt}|^2 + 2\alpha u_{tt} v_{tt}) dx$$

Logo

$$\frac{d}{dt} E_3(t) := - \int_{\Omega} u_{ttt}^2 dx \quad (3.15)$$

Determinando outras funcionais para controlar alguns termos. Derivando a primeira equação do problema (P) em relação à t , multiplicando por v_t e integrando em Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} u_{ttt} v_t dx - \int_{\Omega} \Delta u_t v_t dx + \int_{\Omega} u_{tt} v_t dx + \int_{\Omega} \alpha v_t v_t dx = 0 \quad (3.16)$$

$$\int_{\Omega} u_{ttt} v_t dx - \int_{\Omega} \Delta u_t v_t dx + \int_{\Omega} u_{tt} v_t dx = -\alpha \int_{\Omega} v_t^2 dx \quad (3.17)$$

Usando a fórmula de Green e notando que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_{tt} v_t dx &= \int_{\Omega} u_{ttt} v_t dx + \int_{\Omega} u_{tt} v_t dx \\ \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \nabla u_t \cdot \nabla v dx \right) &= \int_{\Omega} \nabla u_{tt} \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \nabla u_t \cdot \nabla v_t dx \end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{d}{dt} \varphi_1(t) = \int_{\Omega} \nabla u_{tt} \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u_{ttt} \cdot v dx - \int_{\Omega} u_{ttt} \cdot v_t dx - \alpha \int_{\Omega} |v_t|^2 dx,$$

onde

$$\varphi_1(t) = \int_{\Omega} u_{tt}v dx + \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla v dx$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\frac{d}{dt} \varphi_1(t) \leq -\alpha \int_{\Omega} |v_t|^2 dx + \frac{1}{2\alpha} \int_{\Omega} |u_{ttt}|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} v_t dx - \int_{\Omega} \nabla u_{tt} \nabla v dx - \int_{\Omega} u_{ttt}v dx \quad (3.18)$$

Multiplicando a primeira equação do problema (P) por u , integrando em Ω e usando a fórmula de Green, obtemos

$$\int_{\Omega} u_{tt}u dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} u_t u dx = 0$$

Notando que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t u dx = \int_{\Omega} u_{tt} \cdot u dx + \int_{\Omega} |u_t|^2 dx$$

Obtemos

$$\frac{d}{dt} \varphi_2(t) = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \alpha \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \quad (3.19)$$

onde

$$\varphi_2(t) := \varphi_2(t; u, v) = \int_{\Omega} u_t u dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \quad (3.20)$$

De modo análogo, derivando duas vezes a primeira equação do problema (P) em relação a t , multiplicando por u_{tt} , integrando em Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} u_{ttt}u_{tt} dx + \int_{\Omega} \nabla u_{tt}u_{tt} dx + \int_{\Omega} u_{ttt}u_{tt} dx + \int_{\Omega} \alpha v_t v_{tt} dx = 0 \quad (3.21)$$

Analisando cada termo convenientemente, aplicando a fórmula de Green e substituindo na equação (3.21), obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_{ttt}u_{tt} dx - \int_{\Omega} u_{ttt}^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_{tt}|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_{tt}^2 dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \alpha u_{tt}v_t dx + \alpha \int_{\Omega} u_{tt}v_t dx = 0$$

onde

$$\varphi_3(t) = \int_{\Omega} u_{ttt}u_{tt} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_{tt}^2 dx + \alpha \int_{\Omega} u_{tt}v_t dx \quad (3.22)$$

Obtemos

$$\frac{d}{dt} \varphi_3(t) = - \int_{\Omega} |\nabla u_{tt}|^2 dx - \alpha \int_{\Omega} u_{tt}v_{tt} dx + \int_{\Omega} |u_{ttt}|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} u_{ttt}v_t dx \quad (3.23)$$

multiplicando a segunda equação do problema (P) por v , integrando em Ω e usando a fórmula de Green, obtemos

$$\int_{\Omega} v_{tt}v dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} uv dx = 0$$

Visto que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \cdot v_t dx = \int_{\Omega} v_t^2 dx + \int_{\Omega} v \cdot v_{tt} dx$$

obtemos

$$\frac{d}{dt} \varphi_4(t) = - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \alpha \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} |v_t|^2 dx \quad (3.24)$$

onde

$$\varphi_4 := \int_{\Omega} v_t v dx \quad (3.25)$$

Considere o seguinte funcional:

$$L(t) = N_1(E_1(t) + E_2(t) + E_3(t)) + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + N_2\varphi_3(t) + \epsilon_2\varphi_4(t) \quad (3.26)$$

derivando a equação (3.26) onde $N_1 > N_2 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$. então de (3.11),(3.13),(3.15),(3.18),(3.21),(3.22),(3.24)

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) &= N_1 \left\{ \frac{d}{dt} E_1(t) + \frac{d}{dt} E_2(t) + \frac{d}{dt} E_3(t) \right\} + \frac{d}{dt} \varphi_1(t) + \frac{d}{dt} \varphi_2(t) + N_2 \frac{d}{dt} \varphi_3(t) + \epsilon_2 \frac{d}{dt} \varphi_4(t) \\ &\leq -N_1 \left\{ \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \int_{\Omega} |u_{tt}|^2 dx + \int_{\Omega} |u_{ttt}|^2 dx \right\} - \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |v_t|^2 dx + \frac{1}{2\alpha} \int_{\Omega} |u_{ttt}|^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} u_{ttt} v dx + \int_{\Omega} u_{tt} \nabla v dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \alpha \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} u_t^2 dx - N_2 \int_{\Omega} |\nabla u_{tt}|^2 dx \\ &\quad + N_2 \alpha \int_{\Omega} u_{ttt} v_t dx + N_2 \int_{\Omega} u_{ttt}^2 dx - \epsilon \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \epsilon \alpha \int_{\Omega} uv dx + \epsilon \int_{\Omega} v_t^2 dx \end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Young e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) &\leq -N_1 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - N_1 \int_{\Omega} |u_{tt}|^2 dx - N_1 \int_{\Omega} u_{ttt}^2 dx - \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} v_t^2 dx + \frac{1}{2\alpha} \int_{\Omega} |u_{ttt}|^2 dx + \frac{1}{2\epsilon_1} \int_{\Omega} |u_{ttt}|^2 dx \\ &\quad + \frac{C(\Omega)\epsilon_1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2\epsilon_1} + \int_{\Omega} |\nabla u_{tt}|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \alpha \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\ &\quad - N_2 \int_{\Omega} |\nabla u_{tt}|^2 dx + N_2 \alpha \int_{\Omega} u_{ttt} v_t dx + N_2 \int_{\Omega} |u_{ttt}|^2 dx - \epsilon_2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \epsilon_2 \alpha \int_{\Omega} uv dx + \epsilon_1 \int_{\Omega} |v_t|^2 dx \end{aligned}$$

onde ϵ_1 é uma constante positiva. Logo escolhendo $N_1 > N_2 > 0$ e ϵ_2 e ϵ_1 bastante pequenos, com $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$, segue que existe $k > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -kE_1(t), \forall t > 0 \quad (3.27)$$

Da desigualdade (3.27) segue-se

$$E_1(t) \leq C_1 \sum_{j=1}^3 E_j(t) \leq L(t) \leq C_2 \sum_{j=1}^3 E_j(t) \quad (3.28)$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas. De (3.27) e (3.28) obtemos

$$E_1(t) \leq -\frac{1}{k} \frac{d}{dt} L(t) \quad (3.29)$$

e

$$L(0) \leq C_2 \sum_{j=1}^3 E_j(0) \quad (3.30)$$

Integrando (3.30) sobre $[0, t]$, temos

$$\int_0^t E_1(s) ds \leq \frac{L(0)}{K} \quad (3.31)$$

de onde segue que

$$\int_0^{+\infty} E_1(s) ds \leq \frac{L(0)}{K} \quad (3.32)$$

De (3.31) e (3.32) encontramos

$$\int_0^{+\infty} E_1(s) ds \leq \frac{L(0)}{k} \leq \frac{C_2}{K} \sum_{j=1}^3 E_j(0) \quad (3.33)$$

Observando que

$$\frac{d}{dt} \{tE_1(t)\} = E_1 + t \frac{d}{dt} E_1(t)$$

e

$$\frac{d}{dt} E_1(t) \leq 0$$

segue-se que

$$\frac{d}{dt} \{tE_1(t)\} \leq E_1(t) \quad (3.34)$$

Integrando (3.34) sobre $[0, t]$, temos

$$tE_1(t) \leq \int_0^t E_1(s)ds \leq \int_0^{+\infty} E_1(s)ds \quad (3.35)$$

De (3.33) e (3.34), obtemos

$$tE_1(t) \leq \frac{C_2}{K} E_j(0)$$

Fazendo $d = \frac{C_2}{K}$, obtemos

$$E_1(t) \leq \frac{1}{t} \left(\frac{C_2}{K} \right) \sum_{j=1}^3 E_j(0)$$

o que conclui a prova do resultado. O semigrupo $S(t)$ é polinomialmente estável do tipo $\frac{1}{t}$.

Conclusão

O modelo utilizado para obter a não estabilidade exponencial (P) pode ser aplicado a outros modelos. Mostraremos alguns exemplos específicos de sistemas acoplados de equações diferenciais parciais, que podemos estudar no contexto dos teoremas (3.2) e (3.1)

Modelo 1:

Consideremos o sistema acoplado de equações de onda

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, +\infty) \\
 & v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, +\infty) \\
 & u = v = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0, +\infty) \\
 & u(x, 0), v(x, 0) = (u_0, v_0), \quad \text{em } \Omega \\
 & (u_t(x, 0), v_t(x, 0)) = (u_1(x), v_1(x)) \quad \text{em } \Omega
 \end{aligned}$$

Usando os teoremas (3.2) e (3.1), concluímos que este sistema não é exponencialmente estável, porém é polinomialmente estável, onde

$$E_1(t) := E_1(t; u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |v_t|^2 + |\nabla v|^2 + 2\alpha|u - v|^2) dx.$$

Modelo 2:

Consideremos o sistema acoplado do tipo *Onda- Petrowsky*

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\
 v_{tt} \Delta^2 v + \alpha u = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\
 u = v = \Delta v = 0 & \text{sobre } \Omega, \\
 (u(0, x), v_t(0, x)) = (u_1(x), v_1(x)) & \text{em } \Omega.
 \end{array} \right.$$

o mesmo não possui estabilização exponencial, mas é polinomialmente estável, conforme os teoremas (3.2) e (3.1), onde

$$E_1 := E_1(t; u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |v_t|^2 + |\Delta v|^2 + 2\alpha uv) dx.$$

Modelo 3:

Consideremos o sistema acoplado do tipo *Onda-Petrowsky*

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} + \Delta^2 u + u_t + \alpha v = 0 & \text{in } \Omega \times]0, \infty[, \\ v_{tt} - \Delta v = \alpha u = 0 & \text{in } \Omega \times]0, \infty[, \\ u = \Delta u = v = 0 & \text{on } \Gamma \times], \infty[, \\ (u(0, x), v(0, x)) = (u_0(x), v_0(x)) & \text{in } \Omega, \\ (u_t(0, x), v_t(0, x)) = (u_1(x), v_1(x)) & \text{in } \Omega. \end{array} \right.$$

Usando o Teorema (3.1), conclui-se que não há estabilidade exponencial, mas há o decaimento polinomial onde:

$$E_1(t) := E_1(t; u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + |\Delta u|^2 + v_t^2 + |\nabla v|^2 + 2\alpha uv) dx.$$

Bibliografia

- [1] F. Alabau, P. Cannarsa and V. Komornik, **Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations.** J. Evol. Equ., 2, 127-150, (2002)
- [2] F. Alabau, **Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés.** C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 328, 1015-1020, (1999).
- [3] D. G. Figueiredo and E. Mitidieri, **A maximum principle for an elliptic system and applications to semilinear problems.** SIAM J. Math. Anal. 17, 836-849,(1986).
- [4] Z. Liu and S. Zheng, **Semigroups associated with dissipative systems.** In CRC Reseach Notes in Mathematics 398, Chapman & Hall, (1999).
- [5] L. Gearhart, **Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces.** Trans. Ams 236, 385-394, (1978).
- [6] A. E. H. Love, **Mathematical Theory of Elasticity.** Fourth Edition, Dover Publications, New York, (1942).
- [7] H. Matsuzawa, **Asymptotic profiles of variational for a FitzHugh-Nagumo-type elliptic system.** Nonlinear Analysis 63, 2545-2551, (2005).
- [8] A. Wiler, **Stability of wave equations with dissipative bounded conditions in bound-end domain.** Diff. and Integral Eqs., 7 (2), 345-366, (1994).
- [9] F. Huang, **Characteristic Condition for exponential stability of linnear dynamical systems in Hilbert space.** Ann. of Diff. Eqs. 1 (1), 43-56, (1985).
- [10] J. Pruss, **On the spectrum C_0 -semigroups.** Trans. AMS 28, 847-857, (1984).
- [11] D. L. Russell, **A general framework for the study of indirect damping mechanisms in elastic system.** J. Math. Anal. Appl., (2) 173, 339-358, (1993).

- [12] H. Brézis, **Analisis Funcional. Teoria y Aplicaciones**. Alianza Editorial, Madrid, Paris, (1948).
- [13] A. Pazy, **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**, springer - Velag, 1983.
- [14] R. A. Adams, **Sobolev Spaces**, Academic Press, New York, 1975.
- [15] E. Kreyszig, **Introductory functional analysis with applications**, John Wiley e Saons, 1978.
- [16] J. L. Lions, **Quelques méthodes de resolutions des problèmes aux limites non linéaris**, Dunod, Paris, 1969.

Apêndice A

Espaços de Sobolev

Nesta seção considere Ω um conjunto limitado de \mathbb{R}^n com medida de Lebesgue. Seja $p \geq 1$, chamaremos por $L^p(\Omega)$ a classe de todas as funções mensuráveis u , para as quais $|u|^p$ é uma função integrável sobre Ω . Em $L^p(\Omega)$ definimos a norma

$$\|u\|^p = \int_{\Omega} |u(x)|^p dx; \quad 1 \leq p < \infty,$$

Com esta norma $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach. No caso $p = \infty$, $L^p(\Omega)$ é o espaço formado por todas as funções u , essencialmente limitadas sobre Ω . Este espaço com norma

$$\|u\| \text{ em } L_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \text{ onde } x \in \Omega.$$

Também neste caso $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach. Quando $p = 2$, $L^p(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

e norma

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx$$

Além disso, sejam $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ e chamaremos por D^{α} o operador derivada de ordem $|\alpha|$, derivada de ordem $|\alpha|$, definido por

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Quando $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ definimos $D^{\alpha}u := u$. Com estas anotações definimos o espaço

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m \text{ no sentido das distribuições}\}$$

Seja a norma

$$\| u \|_{m,p}^p = \sum \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^p dx \quad (\text{onde } |\alpha| \leq m)$$

com esta norma $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de espaço de Sobolev de ordem m . Além disso, definimos o espaço de Banach $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo a fechadura de C_0^{∞} no espaço $W^{m,p}(\Omega)$, isto é

$$W_0^{m,p}(\Omega) = C_0^{\infty}(\Omega)W^{m,p}(\Omega)$$

Quando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ é chamado por $H^m(\Omega)$, e este espaço é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$(u, v)_{m,2} = \sum \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) D^{\alpha} v(x) dx$$

e norma dada por

$$\| u \|_{m,2}^2 = \sum \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^2 dx \quad (\text{onde } |\alpha| \leq m)$$

Num espaço de Banach X , definimos os espaços

$$L^p(0, T; X) = \{u : [0, T] \rightarrow X \text{ mensurável ; } t \rightarrow \| u \|_B \in L^p(0, T)\}$$

Em $L^p(0, T; X)$ definimos a norma

$$\| u \|_{L^{\infty}(0, T; X)} = \sup_{0 < t < T} \| u(x) \|_x$$

Então $L^p(0, T; X)$ para $1 \leq p \leq \infty$ é um espaço de Banach.

A.1 Imersões de Sobolev

Seja Ω um domínio limitado de \mathbb{R}^n com fronteira de classe C^m . Seja $m \leq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Então, temos as seguintes imersões compactas:

- i Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ implica que $W^{m,p}(\Omega)$ imersão $L^q(\Omega)$, para todo q pertencente a $[p, q]$ onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$
- ii Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ implica que $W^{m,p}(\Omega)$ imersão $L^q(\Omega)$, para todo $q \in [p, \infty]$.
- iii Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ implica que $W^{m,p}(\Omega)$ imersão $L^{\infty}(\Omega)$

sendo as imersões acima contínuas.

Neste caso

$$W^{m,p}(\Omega) \text{ imersões } C^k(\Omega) \text{ e } K = \left\| m - \frac{n}{p} \right\|$$

Desigualde de Hölder

Seja $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Desigualdade de Poincaré

Seja Ω um domínio aberto limitado de \mathbb{R}^n . Então existe uma constante positiva

$$C_p := C_p(\Omega, n), \text{ tal que}$$

$$\|u\|_{L^p}(\Omega) \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p}(\Omega), \text{ para todo } u \in W^{1,p_0}(\Omega)$$

onde C_p é a constante de Poincaré.

Teorema da divergência e fórmula de Green

Vale as seguintes fórmulas para um aberto limitado Ω bem regular.

i $\int_{\Omega} (\operatorname{div} F)(x)dx = \int_{\Gamma} F(x) \cdot \eta(x)d\Gamma, \quad F \in [H^1(\Omega)]^n$

ii $\int_{\Omega} v(x)\Delta u(x)dx = - \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot u(x)dx, \quad v \in H_0^1(\Omega), \quad u \in H^2(\Omega)$

iii $\int_{\Omega} v(x)\Delta u(x)dx = \int_{\Omega} \Delta v(x)u(x)dx, \quad v \in H^2(\Omega), \quad u \in H^2(\Omega)$

onde Ω é um aberto limitado do \mathbb{R}^n com fronteira de classe C^2 e $\eta(x)$ denota a norma exterior unitária no ponto $x \in \partial\Omega$. A função F integrada sobre $\partial\Omega$ é no sentido da função traço, isto é, $\int_{\Gamma} F(x) \cdot \eta(x)d\Gamma$ significa $\int_{\Gamma} (y_0 F)(x) \cdot \eta(x)d\Gamma$.

Teorema do valor médio para integrais

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Então, existe um número $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(s)ds = f(c)(b - a)$$

Teorema da Aplicação Aberta

Um operador linear limitado T de um espaço de Banach X em outro espaço de Banach X em outro espaço de Banach Y é uma aberta. Em particular, se T é bijetiva, T^{-1} é contínua.

Consideremos agora o problema de valor inicial não homogêneo

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= Au(t) + f(t), \quad t \geq 0 \\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

onde $f : [0, T] \rightarrow X$ e A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , $T(t)$.

Definição A.1 Uma função $u : [0, T) \rightarrow X$ é uma solução clássica de () sobre $[0, T)$ se u é contínua sobre $[0, T)$, continuamente diferenciável sobre $[0, T)$, $u(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$ e satisfaz () em $[0, T)$.

Definição A.2 Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , $T(t)$. Seja $x \in X$ e $f \in L^1(0, T; X)$. A função $u \in C([0, T]; X)$ dada por

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)