Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Curso de Pós-graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Estudo da Dinâmica das Transformações Expansoras através do espectro do Operador de Perron-Frobenius

Ana Carla Percontini da Paixão

Salvador-Bahia

Fevereiro 2005

Estudo da Dinâmica das Transformações Expansoras através do espectro do Operador de Perron-Frobenius

por

Ana Carla Percontini da Paixão

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática Pura.

Aprovada por:

Prof. Dr Augusto Armando de Castro Júnior
(Orientador)

Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro (UFBA)

Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera (UFRGS)

Da Paixão, A.C.P.

"Estudo da dinâmica das transformações expansoras através do espectro do operador de Perron-Frobenius." / Ana Carla Percontini da Paixão. Salvador-Ba, 2005.

Orientador: Augusto Armando de Castro Júnior (Universidade Federal da Bahia). Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática da UFBA, 66 páginas.

Palavras-Chave: Transformações expansoras, Operador de transferência, Espectro do operador.

Aos meus pais, minha irmã e ao querido Geraldo.

“Nossas dúvidas são traidoras e nos fazem perder o que, com freqüência, poderíamos ganhar, por simples medo de arriscar.”

William Shakespeare

Agradecimentos

Agradeço a todos que me ajudaram com seu apoio e suas sugestões, entre os quais, não posso deixar de citar meu orientador, o professor Joseph e os colegas Jailson, Fábio e Josaphat. Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, a Coordenação da Pós-Graduação e a funcionária Tânia, pela ajuda em todas as ocasiões. Em fim, agradeço a todos os professores e colegas do Instituto.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a dinâmica das Transformações Expansoras.

Mostraremos que estas transformações possuem uma única probabilidade invariante e absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue.

Para tal, definiremos um operador, chamado operador de transferência, e veremos que tais probabilidades são seus pontos fixos. Veremos que sob a hipótese de que o Jacobiano det Df é Hölder–contínuo estas transformações exibem medidas invariantes absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue. Construiremos tais medidas e mostraremos que estas transformações exibem de maneira natural uma partição de Markov.

Mostraremos que o espectro do operador de transferência está contido no disco unitário e que os iterados deste operador são aproximados por uma seqüência de operadores de posto finito. Concluiremos, a partir desta aproximação, que seu espectro possui um número finito de autovalores com norma 1. Por fim, mostraremos que a medida construída é exata, e portanto SRB.

Abstract

In this work the Expanding Map's Dynamics will be studied.

It will be shown that these transformations have a unique invariant probability which is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure.

For this, an operator called transfer operator will be defined to show that those probabilities are their fixed points. It'll be seen that, under the hypotesis that the Jacobian det Df is Hölder–continuous, these transformations show invariant measures absolutely continuous with respect to Lebesgue measure. These measures will be constructed and it will be shown that these transformations show, in a natural way, a Markov partition.

It will be shown that the transfer operator's spectrum is contained in the disc with radius 1 and that this operator's iterates are approximated by an operator sequence of finite rank. It will be concluded, from this approximation, that its spectrum have a finite number of eigenvalue with modulus 1. Finally, it will be shown that the built measure is exact and so, SRB.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudaremos a dinâmica das Transformações Expansoras. Grosseiramente, uma transformação é chamada expansora se expande o comprimento de vetores tangentes a $\mathcal{M}$ na proporção de alguma constante uniforme $\sigma > 1$, isto é, localmente aumenta a distância entre pontos. Formalmente uma aplicação $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ de uma variedade compacta $\mathcal{M}$ é dita ser expansora se existe $\sigma > 1$ e alguma métrica riemanniana $|| \cdot ||$ em $\mathcal{M}$ tais que para todo $x \in \mathcal{M}$ e $v \in \mathrm{T}_x\mathcal{M}$ tem-se

$$||Df(x)v|| \geq \sigma ||v|| \tag{1}$$

Um exemplo destas transformações é uma aplicação f induzida de uma transformação linear $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $F(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ com $|\lambda| > 1\ \forall \lambda$ autovalor de F. Tal f é dada por $f : \mathrm{T}^n = \frac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n} \hookleftarrow$ com $f \circ \pi = \pi \circ F$, onde $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathrm{T}^n$ é a projeção canônica. Outro exemplo típico em dimensão 1 é o da função $z \mapsto z^2$, $z \in S^1$ onde $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

Resultados de Ruelle e Bowen(1976) mostram que se $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ é uma transformação expansora, então f tem uma única probabilidade física ou SRB (Sinai–Ruelle–Bowen). Nosso principal objetivo é construir estas medidas, que são invariantes e caracterizam o comportamento estocástico da maioria das órbitas de tais transformações. Mais precisamente estamos interessados em construir medidas SRB.

Dizemos que uma medida de probabilidade f-invariante μ é SRB para f se existe um conjunto de medida de Lebesgue positiva , constituído de pontos $x \in \mathcal{M}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu, \forall \varphi \in C^0(\mathcal{M})$$

O conjunto de pontos $x \in \mathcal{M}$ que satisfazem esta propriedade é chamado de *bacia* de μ, e denotado por $B(\mu)$. A bacia sempre é um conjunto f–invariante e se μ é ergódica então $B(\mu)$ tem μ-medida total.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 1 são revistos alguns conceitos fundamentais sobre medida e integração, análise funcional e da própria teoria ergódica. Alguns resultados são apresentados sem demonstrações, uma vez que estas podem ser facilmente encontradas nas referências bibliográficas. Em seguida introduziremos o operador de Perron–Frobenius, também conhecido como o operador de transferência. Estudaremos as propriedades relacionadas com este operador e veremos que grosso modo, ele é simplesmente o operador mudança de variáveis pelos ramos inversos de f. Provaremos que os pontos fixos do operador de transferência $\mathcal{L}$ são densidades de medidas invariantes absolutamente contínuas em relação à Lebesgue.

No Capítulo 2 com a hipótese do jacobiano det Df ser Hölder–contínuo, construiremos uma medida absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue. Mostraremos que a densidade desta medida (derivada de Radon–Nikodym em relação à medida do volume) é limitada inferiormente e superiormente.

No Capítulo 3 mostraremos que existem partições de Markov da transformação f, com diâmetro arbitrariamente pequeno.

No Capítulo 4 mostraremos que o operador de transferência, na verdade, todo seu iterado suficientemente grande é uma contração. Isto será feito aproximando o operador de transferência por uma seqüência de operadores de posto finito. Esta aproximação permite–nos estudar o espectro do operador de transferência através do espectro do operador de posto finito. Veremos que o espectro do operador de transferência está contido no disco unitário e que possui um único autovalor de norma 1 que será a densidade de uma medida f–invariante. Por fim, veremos que esta medida é exata e portanto, SRB.

Nesse contexto, nosso principal teorema será:

0.1 TEOREMA. *Se $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ é uma $C^{1+\nu}$ aplicação expansora, de uma variedade compacta conexa $\mathcal{M}$, para algum $\nu \in (0, 1]$, então f admite uma única medida invariante μ que é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue m; além disso, μ é exata (portanto ergódica), e $\dfrac{d\mu}{dm}$ é a única medida SRB de f.*

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos diversas definições e resultados necessários para a execução do trabalho. Fazemos uma breve citação de conceitos da Teoria Ergódica e Teoria da Medida e enunciamos alguns teoremas da Análise. Por se tratarem de resultados em sua maioria conhecidos do leitor, omitiremos ou resumiremos algumas demonstrações. Entretanto, as mesmas podem ser encontradas em $[4], [9], [11]$.

1.1 Noções Básicas

Consideremos que $\Lambda \neq \emptyset$ é um espaço métrico compacto, $\mathcal{A}$ sua σ-álgebra e $(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de probabilidades de Λ, onde $\mu : \mathcal{A} \to [0, 1]$ é uma medida, com $\mu(\Lambda) = 1$.

Seja $(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidades e $f : \Lambda \to \Lambda$. A transformação f é mensurável se $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Dizemos que f preserva medida (ou μ é uma medida f–invariante) se $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ qualquer que seja o conjunto mensurável $A \in \mathcal{A}$.

Se φ é uma função pertencente a $L^1(\Lambda)$, onde $L^1(\Lambda)$ é o conjunto das funções integráveis de Λ em $\mathbb{R}$, isto é, $L^1(\Lambda) = \{\varphi : \Lambda \to \mathbb{R}; \varphi \text{ é integrável}\}$, então dizemos que φ é f–invariante se $\varphi \circ f = \varphi$, para quase todo ponto (q.t.p) $x \in \Lambda$.

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade compacta. Dizemos que $\mu \in \Lambda$ é exata com respeito a f se para todo $A \in \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(\mathcal{A})$, temos $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$, onde $\mathcal{A}$ é a σ–álgebra dos borelianos de $\mathcal{M}$. Se $\mu \in \Lambda$ e é exata, então μ é ergódica.

1.1 TEOREMA. *(*Radon–Nikodym*).Seja $(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida σ-finita. Seja $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida com sinal σ–finita absolutamente contínua com respeito a μ. Então existe uma função* *mensurável* $f : \Lambda \to \mathbb{R}$ *semi–integrável tal que*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \forall A \in \mathcal{A}$$

A função f obtida no teorema de Radon–Nikodym é chamada de *derivada de Radon–Nikodym* ou *densidade* da medida ν em relação a medida μ, e denotada por $f = \dfrac{d\nu}{d\mu}$.

1.2 PROPOSIÇÃO. *Seja* $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ *uma transformação expansora e* $\mathcal{M}$ *uma variedade compacta.*

1. *Se* $f \in C^2 \Rightarrow Df$ *é Lipschitziana.*
2. Df *é Lipschitziana* $\Rightarrow \det\, Df$ *é Lipschitziana.*
3. $\det\, Df$ *é Lipschitziana* $\Rightarrow \log\, \det\, Df$ *é Lipschitziana.*

Prova.

1. $f \in C^2$ então $D^2 f$ é contínua, e como está definida num compacto $|D^2 f(x)| \leq M$. Logo, pela desigualdade do valor médio, $Df|_{\mathcal{U}}$ é localmente Lipschitziana, então para cada $x \in \mathcal{M}$, existem $\delta_x > 0$ e $c_x > 0$, $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$||Df(y) - Df(z)|| < c_x d(y, z), \forall y, z \in B(x, \delta_x).$$

Sejam $B(x_1, \delta_{x_1}) \dots B(x_k, \delta_{x_k})$ subcobertura finita da cobertura $\bigcup B(x, \delta_x)$, $\hat{c} = \max_{j=1,\dots,k}\{c_{x_j}\}$ e $\delta > 0$ um número de Lebesgue da cobertura $\mathcal{M} = \bigcup_{j\in\{1,..,k\}} B(x_j, \delta_{x_j})$.

Se $u, v \in \mathcal{M}$ e $d(u, v) < \delta$, existe $x_j \in \mathcal{M}$ *com* $u, v \in B(x_j, \delta_{x_j}) \Rightarrow$

$$||Df(u) - Df(v)|| < c_{x_j} d(u, v) < \hat{c} d(u, v).$$

Seja $\beta = \sup ||Df||$. Se u, v são tais que $d(u, v) \geq \delta$, então tomando $\tilde{c} = \max\{\hat{c}, \frac{2\beta}{\delta}\}$

$$||Df(u) - Df(v)|| \leq 2\beta \leq \tilde{c} \cdot \delta \leq \tilde{c} d(u, v).$$

Concluímos que Df é $\tilde{c}$-Lipschitz.

2. Considere um aberto convexo $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$.

Temos que Df é contínua e $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ é uma aplicação n-linear e portanto C^∞. Daí, $\det' Df$ é contínua e como Df está definida num compacto $\mathcal{M}$, tem-se $\| \det' Df \| \leq M$.
Considere um aberto convexo $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Pela desigualdade do valor médio $\det Df|_{\mathcal{U}}$ é localmente

Lipschitziana e portanto, analogamente ao caso anterior, globalmente Lipschitziana pois está definida num compacto.

3. Como f é expansora $\det Df > 1$, o que implica que log det Df está longe do zero, isto significa que $Dom(\log\det Df) = \mathcal{M}$.

Temos que

$$(\log\ \det\ Df(x))' = \frac{\det' Df(x) \cdot D^2 f(x)}{\det\ Df(x)}.$$

Observe que $(\log \det\ Df(x))'$ é contínua, e também limitada pois está definida num compacto e $\det Df(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{M}$. Portanto pela desigualdade do valor médio tem-se que log det $Df(x)|_{\mathcal{U}}$ é localmente Lipschitziana. Como está definida num compacto, pelo mesmo argumento de (1.) é globalmente Lipschitziana.

$\square$

A hipótese de que a transformação $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ é expansora implica, em particular, que a derivada Df é um isomorfismo em todo ponto. Logo, dado qualquer $x \in \mathcal{M}$ existe $\delta > 0$ tal que f é um difeomorfismo local, isto é, f leva difeomorficamente uma vizinhança $V(x)$ de x sobre a bola de raio δ em torno de $y = f(x)$. Como uma conseqüência disso e da conexidade e compacidade de $\mathcal{M}$, todos os pontos $y \in \mathcal{M}$ têm um mesmo número $k \geq 1$ de pré-imagens. Além disso, para qualquer pré-imagem x de um ponto $y \in \mathcal{M}$, existe uma aplicação $h : B(y,\delta) \to \mathcal{M}$ de classe C^1 tal que $f \circ h = id$, $h(y) = x$ e h contrai distâncias à taxa σ^{-1}.

Sendo $h = (f|_{V(x)})^{-1}$ pelo Teorema da Função Inversa temos o seguinte resultado

$$||Dh(y)|| = ||Df(h(y))^{-1}|| \ \leq\ \sigma^{-1}, \forall\, y \in Dom\, h\ . \tag{1.1}$$

As transformações h acima são chamadas ramos contrativos de f^{-1}. Mais geralmente, podemos definir ramos contrativos h^n de f^{-n}, $n \geq 1$ como segue.

Dado $y \in \mathcal{M}$ e $x \in f^{-n}(y)$, sejam $h_1, \ldots, h_n$ ramos contrativos de f^{-1} com

$$h_j(f^{n-j+1}(x)) = f^{n-j}(x)$$

para todo $1 \leq j \leq n$.

Então $h^n = h_n \circ \ldots . \circ h_1$ está bem definido em $B(y,\delta)$, pois cada h_j é uma contração e portanto sua imagem está contida numa bola de raio menor que δ em torno de $f^{n-j}(x)$, e $f^n \circ h^n = id$, $h^n(y) = x$.

1.3 Teorema. *(Teorema da Mudança de Variáveis) Sejam $g : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ um difeomorfismo de classe C^1 entre abertos $\mathrm{U}, \mathrm{V} \subset \mathbb{R}^m, \mathrm{X} \subset \mathrm{U}$ um compacto J-mensurável e $F : g(\mathrm{X}) \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então $F \circ g : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ é integrável e*

$$\int_{g(\mathrm{X})} F(y)dy = \int_{\mathrm{X}} F(g(\mathrm{X})) \cdot |\det \cdot g'(x)| dx \ . \tag{1.2}$$

No nosso contexto o teorema acima será enunciado da seguinte forma:

1.4 Teorema. *Sejam $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ uma transformação expansora, $h_j : A \to \mathcal{M}$ ramos contrativos de f, A um conjunto mensurável tal que $\mathrm{diam}(A) < \delta$ e $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então cada $\varphi \circ h_j : A \to \mathbb{R}$ é integrável e*

$$\int_{f^{-1}(A)} \varphi(x)dx = \sum_{j=1}^{grau(f)} \int_A \frac{\varphi \circ h_j(y)}{|\det Df(h_j(y))|} dy,$$

onde o grau de f é o número de pré-imagens por f de qualquer ponto $y \in \mathcal{M}$.

Seja $h_j(y) = x_j$, onde $y \in A$. Usando o teorema de mudança de variáveis, para um j fixo, temos que

$$\int_{h_j(A)} \varphi(x)dx = \int_A \varphi \circ h_j(y) \cdot |\det Dh_j(y)| dy.$$

Seja $k = grau(f)$, isto é, o número de pré-imagens por f de qualquer ponto $y \in \mathcal{M}$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_{f^{-1}(A)} \varphi(x)dx &= \sum_{j=1}^{k} \int_{h_j(A)} \varphi(x)dx \\
&= \sum_{j=1}^{k} \int_A \varphi \circ h_j(y) |\det Dh_j(y)| dy \\
&= \sum_{j=1}^{k} \int_A \varphi \circ h_j(y) |\det Df(h_j(y))|^{-1} dy \\
&= \int_A \sum_{f(x_j)=y} \frac{\varphi \circ h_j(y)}{|\det Df(h_j(y))|} dy \ .
\end{aligned}$$

$\square$

Dado $\nu > 0$, dizemos que $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ é $(\hat{a}, \nu)$–Hölder–contínua se existe alguma constante $\hat{a}$ tal que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \hat{a} \cdot d(x, y)^{\nu}$, para todo $x, y \in \mathcal{M}$. Denotamos por $C^{1+\nu}$ o espaço das funções φ tais que $D\varphi$ é ν–Hölder–contínuas.

1.5 PROPOSIÇÃO. *Se $f \in C^2$ então* log det $Df(x)$ *é $(\hat{C}, \nu)$–Hölder–contínua.*

Sejam $f : \mathcal{M} \circlearrowleft$ expansora e um aberto $B \subset \mathcal{M}$. Dizemos que $h^n : B \to \mathcal{M}$ é ramo contrativo de f^{-n} se $f^n(h^n(z)) = z$, $\forall z \in f^n(B)$ e

$$d(f^k(h^n(z)), f^k(h^n(w))) \leq \lambda^{n-k} d(z, w) \tag{1.3}$$

$\forall\, z, w \in f^n(B)$, $0 \leq k \leq n$ e $\lambda \in (\sigma^{-1}, 1)$, onde λ é a constante de contração.

1.6 LEMA. *(Distorção Limitada) Seja $\delta > 0$ tal que estão bem definidos (como difeomorfismos)os ramos contrativos de f^{-1}, para toda bola de raio δ. Seja $f \in C^{1+\nu}$ uma transformação expansora e seja* B *um aberto simplesmente conexo tal que* $\text{diam} f^j(\text{B}) < \delta$, $\forall\ j = 0, \ldots, n$. *Seja h um ramo contrativo de $f^{-1}|_{\bigcup_{j=1}^{n} f^j(\text{B})}$. Então* $\log|\det Df^j(h^n(\cdot))|$ *restrito a* $f^n(\text{B})$ *é uniformemente Hölder para $j = 1, \ldots, n$.*

Prova.

Tome $z, w \in f^n(\text{B})$ e escreva $x = h^n(z)$ e $y = h^n(w)$. Então,

$$|\log\ |\det Df^j(h^n(z))| - \log\ |\det Df^j(h^n(w))||$$

$$= |\log\ |\det Df^j(x)| - \log\ |\det Df^j(y)||. \tag{1.4}$$

Dados $x, y \in Dom\ f^j$, temos pela regra da cadeia

$$Df^j(x) = Df\left(f^{j-1}(x)\right).Df\left(f^{j-2}(x)\right)\ldots Df(x) = \prod_{k=0}^{j-1} Df\left(f^k(x)\right). \tag{1.5}$$

$$Df^j(y) = Df\left(f^{j-1}(y)\right).Df\left(f^{j-2}(y)\right)\ldots Df(y) = \prod_{k=0}^{j-1} Df\left(f^k(y)\right). \tag{1.6}$$

Usando propriedades de módulo e determinantes em (1.5) e (1.6) obtemos

$$\frac{\left|\det Df^j(x)\right|}{\left|\det Df^j(y)\right|} = \frac{\left|\det \prod_{k=0}^{j-1} Df\left(f^k(x)\right)\right|}{\left|\det \prod_{k=0}^{j-1} Df\left(f^k(y)\right)\right|} = \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\left|\det Df\left(f^k(x)\right)\right|}{\left|\det Df\left(f^k(y)\right)\right|}$$

Substituindo em (1.4) obtemos

$$\frac{\left|\det Df^j\,(x)\right|}{\left|\det Df^j\,(y)\right|} = \left|\log\frac{|\det Df^j(x)|}{|\det Df^j(y)|}\right| = \left|\log\prod_{k=0}^{j-1}\frac{\left|\det Df\left(f^k\,(x)\right)\right|}{\left|\det Df\left(f^k\,(y)\right)\right|}\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{j-1}\left|\log\,\frac{|\det Df(f^k(x))|}{|\det Df(f^k(y))|}\right|.$$

Usando (1.3) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{j-1}\left|\log\,\frac{|\det Df(f^k(x))|}{|\det Df(f^k(y))|}\right| &\leq \sum_{k=0}^{j-1}\hat{C}d(f^k(x),f^k(y))^{\nu}\\
&\leq \hat{C}\sum_{k=0}^{j-1}(\lambda^{n-k})d(z,w)^{\nu}\\
&\leq \hat{C}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k d(z,w)^{\nu}.
\end{aligned}$$

Tomando $C=\hat{C}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k$ obtemos

$$\frac{|\det Df^j(h^n(z))|}{|\det Df^j(h^n(w))|}\leq e^{Cd(z,w)^{\nu}}.$$

□

1.7 Corolário. *Sejam A e B dois conjuntos mensuráveis com medida positiva, tais que* $\operatorname{diam}(A)<\delta$ *e* $\operatorname{diam}(B)<\delta$. *Seja $h^n=h_1\circ\ldots\circ h_n$ com $n\in\mathbb{N}$, a composição de ramos contrativos partindo de A ou B. Para não sobrecarregar a notação, denotaremos ambos por h^n. Então existe $C_0>1$ tal que*

$$C_0^{-1}\frac{m(A)}{m(B)}\ \leq\ \frac{m(h^n(A))}{m(h^n(B))}\ \leq\ C_0\frac{m(A)}{m(B)},\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Prova.

Sejam A e B conjuntos mensuráveis tais que $\operatorname{diam}(A)<\delta$ e $\operatorname{diam}(B)<\delta$. Defina $Jh^n = |\det Dh^n(x)|$. Pelo teorema da mudança de variáveis,

$$\int_{h^n(A)}1.dm\ =\ \int_A Jh^n dm$$

donde

$$m(h^n(A)) = \int_A Jh^n dm$$

e podemos escrever

$$\frac{m(h^n(A))}{m(h^n(B))} = \frac{\displaystyle\int_A Jh^n dm}{\displaystyle\int_B Jh^n dm}.$$

Dados $z, w \in Domh^n$, temos

$$\frac{m(h^n(A))}{m(h^n(B))} = \frac{\displaystyle\int_A Jh^n(z)dz}{\displaystyle\int_B Jh^n(w)dw}. \tag{1.7}$$

Por (1.1) e pela distorção limitada para todo $z, w \in Dom\ h^n$

$$\frac{Jh^n(z)}{Jh^n(w)} = \frac{Jf^j(h^n(w))}{Jf^j(h^n(z))} \leq e^{Cd(w,z)} \leq e^{C\text{diam}(\mathcal{M})}.$$

Tomando $C_0 = e^{C\text{diam}(\mathcal{M})}$, $C_0 > 1$ obtemos

$$\frac{Jh^n(z)}{Jh^n(w)} \leq C_0 \ \Rightarrow \ Jh^n(z) \leq C_0 Jh^n(w).$$

Para algum $\hat{w} \in Dom\ h^n$

$$Jh^n(z) \leq C_0 Jh^n(\hat{w}). \tag{1.8}$$

Além disso, usando o teorema do valor médio para integrais tem-se

$$\int_B Jh^n(w)dw = Jh^n(\hat{w}).m(B) \tag{1.9}$$

para algum $\hat{w} \in Dom\ h^n$.

Donde

$$\frac{\displaystyle\int_B Jh^n(w)dw}{m(B)} = Jh^n(\hat{w}).$$

Voltando a (1.7) e usando as relações (1.8) e (1.9)

$$
\begin{aligned}
\frac{m(h^n(A))}{m(h^n(B))} &= \frac{\displaystyle\int_A Jh^n(z)dz}{\displaystyle\int_B Jh^n(w)dw} \\
&\leq \frac{\displaystyle\int_A C_0 Jh^n(\hat{w})dz}{\displaystyle\int_B Jh^n(w)dw} \\
&\leq \frac{C_0 Jh^n(\hat{w}).m(A)}{\displaystyle\int_B Jh^n(w)dw} \\
&\leq \frac{C_0 \displaystyle\int_B Jh^n(w)dw.m(A)}{m(B).\displaystyle\int_B Jh^n(w)dw} \\
&\leq C_0 \frac{m(A)}{m(B)}.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$\frac{m(h^n(A))}{m(h^n(B))} \leq C_0 \frac{m(A)}{m(B)}. \tag{1.10}$$

Permutando A e B, temos que

$$\frac{m(h^n(B))}{m(h^n(A))} \leq C_0 \frac{m(B)}{m(A)}.$$

Logo,

$$\frac{m(h^n(A))}{m(h^n(B))} \geq C_0^{-1} \frac{m(A)}{m(B)}. \tag{1.11}$$

Juntando (1.10) e (1.11) temos

$$C_0^{-1} \frac{m(A)}{m(B)} \leq \frac{m(h^n(A))}{m(h^n(B))} \leq C_0 \frac{m(A)}{m(B)}.$$

□

1.8 COROLÁRIO. *Sejam $\hat{A}$ e $\hat{B}$ dois conjuntos de medida positiva tais que* $\operatorname{diam}(f^n(\hat{A})) < \delta$ *e* $\operatorname{diam}(f^n(\hat{B})) < \delta$*, para um certo $n \in \mathbb{N}$. Então para a mesma constante $C_0 > 1$ do Corolário* *anterior temos*

$$C_0^{-1}\frac{m(f^j(\hat{A}))}{m(f^j(\hat{B}))} \leq \frac{m(\hat{A})}{m(\hat{B})} \leq C_0\frac{m(f^j(\hat{A}))}{m(f^j(\hat{B}))},\ \forall\, j = 0, \ldots, n\,.$$

Prova.

Seja $\hat{B} = h^j(B)$ e $\hat{A} = h^j(A)$. Então $f^j(\hat{B}) = B$ e $f^j(\hat{A}) = A$, para j fixo, com $\mathrm{diam}(f^j(\hat{B})) < \delta$ e $\mathrm{diam}(f^j(\hat{A})) < \delta$.

Do Corolário anterior temos

$$\frac{m(\hat{A})}{m(\hat{B})} \leq C_0\frac{m(A)}{m(B)} = C_0\frac{m(f^j(\hat{A}))}{m(f^j(\hat{B}))}$$

e

$$\frac{m(\hat{A})}{m(\hat{B})} \geq C_0^{-1}\frac{m(A)}{m(B)} = C_0\frac{m(f^j(\hat{A}))}{m(f^j(\hat{B}))}.$$

Logo,

$$C_0^{-1}\frac{m(f^j(\hat{A}))}{m(f^j(\hat{B}))} \leq \frac{m(\hat{A})}{m(\hat{B})} \leq C_0\frac{m(f^j(\hat{A}))}{m(f^j(\hat{B}))}.$$

□

1.9 Observação. *Note que a distorção e os Corolários acima são óbvios para um iterado fixo de f (ou h). No Corolário* 1.8 *a tese ocorre sem a hipótese de limitação para o diâmetro dos conjuntos.*

1.2 Operador de Transferência

Considere $C^{1+\nu}$ o espaço das funções ν–Hölder, sendo ν a constante de Hölder. Seja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ uma aplicação $C^{1+\nu}$ expansora em uma variedade compacta conexa $\mathcal{M}$ cujo diâmetro não é maior que 1 e cujo volume é normalizado, isto é, $m(\mathcal{M}) = 1$, onde m é a medida de Lebesgue.

Considere também um espaço conveniente de funções $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^0$.

Atuando no espaço das funções Hölder–contínuas, definimos o operador de transferência, ou operador de Perron–Frobenius, por

$$(\mathcal{L}\varphi)(y) := \sum_{f(x)=y} \frac{\varphi(x)}{|\det Df(x)|}$$

Dizemos que φ é $\log(\hat{a}, \nu)$–Hölder–contínua se existem $\hat{a} > 0$, $0 < \nu \leq 1$ tais que

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} \leq \exp \hat{a} d(x,y)^{\nu},\ \forall x, y \in \mathcal{M} \tag{1.12}$$

1.10 PROPOSIÇÃO. *Seja $\mathcal{L} : L^1(m) \to L^1(m)$ o operador de Perron–Frobenius de uma transformação f como anteriormente.*

1. *$\mathcal{L}$ é um operador linear;*
2. *$\mathcal{L}$ é positivo: $\varphi \geq 0 \Rightarrow \mathcal{L}\varphi(y) \geq 0$;*
3. *Se φ é $\log(\hat{a}, \nu)$–Hölder–contínua, então $\mathcal{L}\varphi(y)$ é $\log(\lambda\hat{a}, \nu)$–Hölder–contínua: para um $\hat{a}$ grande $\mathcal{L}$ melhora a regularidade das funções;*
4. *$\| \mathcal{L}\varphi \|_1 \leq \| \varphi \|_1$: $\mathcal{L}$ é uma contração.*

Prova.

1.Sejam φ e ψ Hölder–contínuas, a e b constantes e $y \in \mathcal{M}$. Então,

$$\mathcal{L}(a\varphi + b\psi)(y) = \sum_{f(x)=y} \frac{(a\varphi + b\psi)(x)}{|\det Df(x)|} =$$

$$\sum_{f(x)=y} \frac{a\varphi(x)}{|\det Df(x)|} + \sum_{f(x)=y} \frac{b\psi(x)}{|\det Df(x)|} =$$

$$a \sum_{f(x)=y} \frac{\varphi(x)}{|\det Df(x)|} + b \sum_{f(x)=y} \frac{\psi(x)}{|\det Df(x)|} =$$

$$a\mathcal{L}\varphi(y) + b\mathcal{L}\psi(y).$$

2. Seja $\varphi \geq 0 \Rightarrow \mathcal{L}\varphi(y) = \sum_{f(x)=y} \frac{\varphi(x)}{|\det Df(x)|} \geq 0.$

3. Seja $\varphi \in L^1$ e $x, y \in \mathcal{M}$

$$\exp\left[\log \mathcal{L}\varphi(x) - \log \mathcal{L}\varphi(y)\right] = \frac{\exp \log \mathcal{L}\varphi(x)}{\exp \log \mathcal{L}\varphi(y)} = \frac{\mathcal{L}\varphi(x)}{\mathcal{L}\varphi(y)} =$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{f(x_i)=x} \frac{\varphi(x_i)}{|\det Df(x_i)|}}{\displaystyle\sum_{f(y_i)=y} \frac{\varphi(y_i)}{|\det Df(y_i)|}} = \frac{\varphi(x_1)|\det Df(x_1)|^{-1} + \cdots + \varphi(x_j)|\det Df(x_j)|^{-1}}{\varphi(y_1)|\det Df(y_1)|^{-1} + \cdots + \varphi(y_j)|\det Df(y_j)|^{-1}}$$

$$\leq \frac{\varphi(x_1)|\det Df(x_1)|^{-1}}{\varphi(y_1)\cdot|\det Df(y_1)|^{-1}} + \cdots + \frac{\varphi(x_j)|\det Df(x_j)|^{-1}}{\varphi(y_j)|\det Df(y_j)|^{-1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{j} \frac{\varphi(x_i)|\det Df(x_i)|^{-1}}{\varphi(y_i)|\det Df(y_i)|^{-1}} = \sum_{i=1}^{j} \frac{\varphi(x_i)}{\varphi(y_i)} \cdot \frac{|\det Df(y_i)|}{|\det Df(x_i)|}.$$

Supondo que φ é $\log(\hat{a},\nu)$–Hölder–contínua, $\det Df$ é $\log(\hat{C},\nu)$–Hölder–contínua e que $\exists\delta > 0$ tal que dados $x, y \in \mathcal{M}$ com $d(x,y) < \delta$.

Escrevamos $f^{-1}(x) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ e $f^{-1}(y) = \{y_1, \ldots, y_k\}$, com $d(x_i,y_i) \leq \lambda d(x,y)$, para cada $i = 1, \ldots, k$, onde $\lambda \in (\sigma^{-1}, 1)$ é a constante de contração. Obtemos

$$\frac{\varphi(x_i)}{\varphi(y_i)} \leq e^{\hat{a}d(x_i,y_i)^{\nu}} \leq e^{\hat{a}\lambda d(x,y)^{\nu}}$$

e

$$\frac{|\det Df(y_i)|}{|\det Df(x_i)|} \leq e^{\hat{C}d(x_i,y_i)^{\nu}} \leq e^{\hat{C}\lambda d(x,y)^{\nu}}.$$

Daí,

$$\frac{\varphi(x_i)}{\varphi(y_i)} \cdot \frac{|\det Df(y_i)|}{|\det Df(x_i)|} \leq \exp \hat{a}(\lambda d(x,y))^{\nu} \cdot \exp \hat{C}(\lambda d(x,y))^{\nu} \leq$$

$$\exp\,[(\hat{a}+\hat{C})\lambda^{\nu}]d(x,y)^{\nu} \leq \exp \lambda\hat{\hat{a}}d(x,y)^{\nu}.$$

Para $\hat{\hat{a}}$ grande com $(\hat{a}+\hat{C})\lambda^{\nu} \leq \lambda\hat{\hat{a}}$.

4. Seja $\varphi \in L^1$ e A um conjunto mensurável. Sejam $\varphi^+ = \max\{\varphi, 0\}$ e $\varphi^- = -\min\{\varphi, 0\} = \max\{-\varphi, 0\}$. Então, φ^+ e $\varphi^- \in L^1$, $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ e $\| \varphi \| = \varphi^+ + \varphi^-$. Como $\mathcal{L}$ é um operador linear, tem-se

$$\mathcal{L}\varphi = \mathcal{L}(\varphi^+ - \varphi^-) = \mathcal{L}(\varphi^+) - \mathcal{L}(\varphi^-).$$

Conseqüentemente,

$$|\mathcal{L}\varphi| = |\mathcal{L}(\varphi^+ - \varphi^-)| \leq |\mathcal{L}(\varphi^+)| + |\mathcal{L}(\varphi^-)| = \mathcal{L}(\varphi^+) + \mathcal{L}(\varphi^-) = \mathcal{L}|\varphi|$$

e

$$\| \mathcal{L}\varphi \|_1 = \int_A |\mathcal{L}\varphi| d\mu \leq \int_A \mathcal{L}|\varphi| d\mu = \int_A |\varphi| d\mu = \| \varphi \|_1 .$$

□

Introduziremos agora o operador U_f e veremos que relação há entre ele e o operador de Perron-Frobenius.

Seja $(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : \Lambda \to \Lambda$ uma transformação que preserva μ. Se $\varphi : \Lambda \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável, então $\varphi \circ f$ é também uma função mensurável. Podemos assim considerar uma aplicação linear U_f no espaço das funções mensuráveis, definindo $\mathrm{U}_f(\varphi) := \varphi \circ f$. Decorre da definição de U_f que se $\varphi \geq 0$, então $\mathrm{U}_f(\varphi) \geq 0$, e portanto U_f é uma aplicação linear positiva.

Considere $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Dado $\mathrm{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, definimos o operador $\mathrm{A}^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, chamado *dual* de A por

$$\langle \mathrm{A}^* g, f \rangle = \langle g, \mathrm{A} f \rangle.$$

1.11 PROPOSIÇÃO. *O operador de Perron-Frobenius $\mathcal{L}$ é o dual do operador U_f.*

De fato, como conseqüência direta da fórmula de mudança de variáveis, se f é contínua, $f \in C^1$ e $Df(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathcal{M}$ tem-se

$$\int_X \varphi U_f \psi dm = \int_X \varphi(\psi \circ f) dm = \int_X \sum_{j=1}^{k} \frac{\varphi(x_j)}{|\det Df(x_j)|} \psi(x) dm = \int_X (\mathcal{L}\varphi) \psi dm,$$

isto é,

$$\int_X (\mathcal{L}\varphi) \psi dm = \int_X \varphi(\psi \circ f) dm.$$

□

Esta última igualdade representa a dualidade entre o operador $\mathcal{L}$ e o operador U_f.

Observemos agora que todo ponto fixo de $\mathcal{L}$ é a densidade de uma medida μ f-invariante.

De fato, se $\mathcal{L}(\varphi_1) = \varphi_1$, *com* $\varphi_1 \in C^0(X)$, $\psi \in C^0(X)$ e a integral indefinida é dada por $\mu = \displaystyle\int \varphi_1 dm$, temos que

$$\int_{\mathcal{M}} \psi \circ f d\mu = \int_{\mathcal{M}} \psi \circ f.\, \varphi_1 dm = \int_{\mathcal{M}} U_f(\psi)\varphi_1 dm = \int_{\mathcal{M}} \psi\mathcal{L}(\varphi_1) dm = \int_{\mathcal{M}} \psi\varphi_1 dm = \int_{\mathcal{M}} \psi d\mu.$$

Além disso, como $\varphi_1 \in \mathcal{L}^1(\mu) := \{f : X \to \mathbb{R} \text{ integrável}\}$, μ é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue.

Capítulo 2

Construção da medida SRB

Nesta seção provaremos que dada uma transformação expansora cujo jacobiano $\det Df$ é Hölder–contínuo existe uma única probabilidade invariante absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue limitada superiormente e inferiormente.

Dada $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ e μ uma medida qualquer em $\mathcal{M}$, denota-se por $f_*\mu$ e chama-se imagem de μ por f a medida definida por $f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ para cada conjunto mensurável $A \subset \mathcal{M}$. Note que μ é invariante por f se e somente se $f_*\mu = \mu$.

2.1 LEMA. *Se $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para μ na topologia fraca* então $\mu_n(A) \longrightarrow \mu(A)$ para todo conjunto aberto $A \subset \mathcal{M}$ cujo bordo ∂A satisfaz $\mu(\partial A) = 0$.*

Prova.

Sejam $g_j, g'_j : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ funções contínuas com $g_j > g'_j$, tal que em todo ponto tem-se

$$g_j \searrow \chi_{\bar{A}} \text{ e } g_j^{'} \nearrow \chi_A.$$

Donde

$$\int_{\bar{A}} g_j d\mu_n \;\geq\; \mu_n(\bar{A}) \; e \; \int_{\bar{A}} g_j d\mu \;\geq\; \mu(\bar{A}) = \mu(A)$$

e também

$$\int_A g'_j d\mu_n \;\leq\; \mu_n(A) \; e \; \int_A g'_j d\mu \;\leq\; \mu(A).$$

Desde que $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\bar{A}} g_j d\mu_n = \int_{\bar{A}} g_j d\mu \ \geq \ \mu(\bar{A}) = \mu(A). \tag{2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A} g'_j d\mu_n = \int_{A} g'_j d\mu \ \leq \ \mu(A). \tag{2.2}$$

Assim, para todo j

$$|\mu_n(A) - \mu(A)| = |\int \chi_A d\mu_n - \int \chi_A d\mu| \leq |\int_A g_j d\mu_n - \int_A g'_j d\mu| \leq$$

$$|\int_A g_j d\mu_n - \int_A g'_j d\mu_n + \int_A g'_j d\mu_n - \int_A g'_j d\mu| \leq$$

$$|\int_A (g_j - g'_j) d\mu_n| + |\int_A g'_j d\mu_n - \int_A g'_j d\mu|. \tag{2.3}$$

Analisemos o primeiro termo de (2.3).

Dado $\dfrac{\varepsilon}{3} > 0$, seja j_0 tal que $\mu(g_{j_0} - g'_{j_0}) \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$, isto é, $\int_A (g_{j_0} - g'_{j_0}) d\mu \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Desde que g_j, g'_j são monótonas, tem-se

$$|g_j - g'_j| < |g_{j_0} - g'_{j_0}|, \ \forall\, j > j_0.$$

Segue que,

$$|\int_A (g_j - g'_j) d\mu_n| \leq |\int_A (g_{j_0} - g'_{j_0}) d\mu_n|. \tag{2.4}$$

Desde que $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$, existe n_0 tal que $\forall n \geq n_0$

$$|\int_A (g_{j_0} - g'_{j_0}) d\mu_n| \xrightarrow{n\to\infty} |\int_A (g_{j_0} - g'_{j_0}) d\mu| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo, para todo $n \geq n_0$

$$|\int_A (g_{j_0} - g'_{j_0}) d\mu_n - \int_A (g_{j_0} - g'_{j_0}) d\mu| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Daí,

$$|\int_A (g_{j_0} - g'_{j_0}) d\mu_n| - |\int_A (g_{j_0} - g'_{j_0}) d\mu| \leq |\int_A (g_{j_0} - g'_{j_0}) d\mu_n - \int_A (g_{j_0} - g'_{j_0}) d\mu| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Segue que

$$|\int_A (g_{j_0} - g'_{j_0}) d\mu_n| \leq \frac{\varepsilon}{3} + |\int_A (g_{j_0} - g'_{j_0}) d\mu| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.5}$$

Agora, analisemos o segundo termo de (2.3)

Dado $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ tomando $j = j_0$ e $n \geq n_1$, desde que $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$ tem-se $\int_A g'_j d\mu_n \longrightarrow \int_A g'_j d\mu$,

isto é,

$$|\int_A g'_{j_0} d\mu_n - \int_A g'_{j_0} d\mu| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall n \geq n_1. \tag{2.6}$$

Logo, tomando $j = j_0$ e $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, de (2.5) e (2.6) obtemos

$$|\mu_n(A) - \mu(A)| \leq |\int_A (g_{j_0} - g'_{j_0}) d\mu_n| + |\int_A g'_{j_0} d\mu_n - \int_A g'_{j_0} d\mu| \leq \varepsilon.$$

□

2.2 TEOREMA. *Seja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ uma transformação expansora de uma variedade compacta conexa $\mathcal{M}$. Então f possui uma medida de probabilidade invariante μ da forma $d\mu = \rho dm$, onde ρ satisfaz $C_0 \leq \rho \leq C_o^{-1}$ e $|\rho(z) - \rho(w)| \leq \tilde{C} d(z, w)^\nu$, $\forall z, w \in \mathcal{M}$.*

Prova.

A prova se reduz a encontrar uma seqüência de probabilidades absolutamente contínuas μ_n cujas densidades são uniformemente limitadas superior e inferiormente, e que tem como ponto de acumulação alguma probabilidade invariante.

Defina $Jh^n := |\det Dh^n(x)|$. Considere $\delta > 0$, $y \in \mathcal{M}$ e A um conjunto bereliano contido em alguma bola $B = B(y, \delta)$, tal que estão bem definidos nesta bola, como difeomorfismos, os ramos contrativos de f^{-n}.

Do Corolário 1.7 sabemos que

$$C_0^{-1}\frac{m(A)}{m(B)} \leq \frac{m(h^n(A))}{m(h^n(B))} \leq C_0\frac{m(A)}{m(B)}.$$

Além disso, observe que $f_*^n m(A) = m(f^{-n}(A))$ é a soma dos termos $m(h^n(A))$ sobre todos os ramos contrativos de f^{-n}.

Daí,

$$C_0^{-1}m(A) \leq f_*^i m(A) \leq C_0 m(A) \Rightarrow C_0^{-1}m(A) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_*^i m(A) \leq C_0 m(A).$$

Definamos a seqüencia $\mu_n = \dfrac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_*^i m$ e seja μ o ponto de acumulação, na topologia $fraca^*$ dessa seqüência, isto é,

$$\mu = \lim_{n_k}\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^{n_k} m. \tag{2.7}$$

Note que a passagem ao limite não altera as cotas superior e inferior, ou seja, se μ é o ponto de acumulação (na topologia fraca*) da seqüência μ_n então,

$$C_0^{-1}m(A) \leq \mu \leq C_0 m(A).$$

Como $C_0^{-1}m(A) \leq \mu_n(A) \leq C_0 m(A)$ e $\mu_n(A) \xrightarrow{w^*} \mu(A)$ para todo aberto A com $\mu(\partial A) = 0$, do Lema 2.1 tem-se $\mu_n(A) \longrightarrow \mu(A)$, então

$$C_0^{-1}m(A) \leq \mu(A) \leq C_0 m(A). \tag{2.8}$$

Faremos um parênteses e mostraremos, no lema seguinte, que esta última relação vale para um boreliano qualquer.

2.3 LEMA. *Sejam μ e ν medidas borelianas finitas quaisquer e $C_0 > 0$ tal que*

$$C_0^{-1}\nu(A) \leq \mu(A) \leq C_0\nu(A),\ \forall A \in \mathcal{M} \text{ aberto com } \mu(\partial A) = 0.$$

Então

$$C_0^{-1}\nu(\mathbf{C}) \leq \mu(\mathbf{C}) \leq C_0\nu(\mathbf{C}),\ \forall\, \mathbf{C} \in \mathcal{M} \text{ boreliano.}$$

Prova.

Seja K um compacto. Para cada $r > 0$, seja $K_r := \{x \in \mathcal{M}, d(x, K) < r\}$ a r–vizinhança de K. Note que $\mu(\partial K_r) = 0$, exceto para um conjunto enumerável de valores de $r > 0$. De fato, suponha que não.

Suponha, por absurdo, que a coleção $\mathcal{K} := \{\partial K_r, \nu(\partial K_r) > 0\}$ seja não–enumerável.

Seja $\mathcal{P}$ uma partição enumerável de $(0, +\infty)$. Como $\mathcal{K}$ é não–enumerável, existe algum intervalo $[a, b) \in \mathcal{P}$, com $a > 0$ tal que $\hat{\mathcal{K}} = \{\partial K_r \in \mathcal{K}, 0 < a < \nu(\partial K_r) < b\}$ é não–enumerável.

Daí, tomando uma seqüência $\partial K_{r_j} \in \hat{\mathcal{K}}$, com $r_j \neq r_i$ para $i \neq j$, como os ∂K_{r_j} são dois a dois disjuntos, temos que

$$\nu(\bigcup \partial K_{r_j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(\partial K_{r_j}) \geq \sum_{j=1}^{\infty} a = +\infty$$

que é uma contradição.

Então podemos tomar para todo $t \in \mathbb{N}$, K_{r_t} aberto tal que $\mu(\partial K_{r_t}) = 0$, $\chi_{K_{r_t}}(x) \searrow \chi_K(x)$, $\forall x \in X$ e $\mu(K_{r_t}) \searrow \mu(K)$, quando $t \to \infty$, $t \in \mathbb{N}$.

De (2.8) temos que para cada K_{r_t} aberto, vale

$$C_0^{-1}\nu(K_{r_t}) \leq \mu(K_{r_t}) \leq C_0\nu(K_{r_t}) \tag{2.9}$$

mas,

$$\mu(K_{r_t}) = \int \chi_{K_{r_t}} d\mu$$

e

$$\nu(K_{r_t}) = \int \chi_{K_{r_t}} d\nu.$$

Daí,

$$C_0^{-1} \int \chi_{K_{r_t}} d\nu \leq \int \chi_{K_{r_t}} d\mu \leq C_0 \int \chi_{K_{r_t}} d\nu. \tag{2.10}$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona, tem-se que

$$\int \chi_{K_{r_t}} d\mu \to \int \chi_K d\mu = \mu(K).$$

$$\int \chi_{K_{r_t}} d\nu \to \int \chi_K d\nu = \nu(K).$$

Portanto, (2.10) fica

$$C_0^{-1}\nu(K) \leq \mu(K) \leq C_0\nu(K), \text{ para K compacto.} \tag{2.11}$$

Mostremos que a relação também vale para um boreliano.

Seja $\mathbf{C}$ um boreliano qualquer, existem compactos $K_n \subset \mathbf{C}$ tal que

$$\mu(K_n) \nearrow \mu(\mathbf{C}). \tag{2.12}$$

$$\nu(K_n) \nearrow \nu(\mathbf{C}). \tag{2.13}$$

Já sabemos que para K_n vale $C_0^{-1}\nu(K_n) \leq \mu(K_n) \leq C_0\nu(K_n)$.

De (2.12) e (2.13) tem-se

$$C_0^{-1}\nu(\mathbf{C}) \leq \mu(\mathbf{C}) \leq C_0\nu(\mathbf{C}). \tag{2.14}$$

□

Além disso, note que $\mu \ll m$. De fato, de (2.14) se $m(C) = 0 \Rightarrow \mu(C) = 0$.

Voltemos à prova do Teorema 2.2

Consideremos ρ como a densidade com respeito à m de um ponto de acumulação de $\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_*^i(m)$ na topologia $fraca^*$, onde $f_*^i m$ é a imagem de m pelo iterado f^i.

Para um k fixo e usando o teorema de Radon-Nikodym, temos $\forall\ A \in \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(\mathcal{A})$

$$\mu_k\,(A) = \int_A \frac{d\nu_k}{dm} dm. \tag{2.15}$$

Considere $\rho_k = \dfrac{d\nu_k}{dm}$. De (2.14) concluímos que μ_k tem densidade acotada inferiormente e superiormente.

$$C_0^{-1} m\,(A) \leq \int_A \rho_k dm \leq C_0 m\,(A) \Rightarrow C_0^{-1} \leq \rho_k \leq C_0.$$

Donde,

$$C_0^{-1} \leq \rho \leq C_0.$$

Vamos mostrar que a densidade ρ é Hölder–contínua.

Da fórmula de mudança de variáveis já sabemos que para todo $z \in Dom\ h^n$ vale

$$\mu_k(A) = \int_A Jh^n(z) d\mu_k. \tag{2.16}$$

Para $z, w \in \mathcal{M}$, $h_j(z) = x$ e $h_j(w) = y$, j fixo e comparando (2.15) com (2.16), obtemos

$$\frac{\rho_k(w)}{\rho_k(z)} = \frac{Jh^n(w)}{Jh^n(z)} = \frac{Jf(h_j(z))}{Jf(h_j(w))}.$$

Pela distorção limitada tem-se

$$\frac{Jf(h_j(z))}{Jf(h_j(w))} \leq \exp(Cd(z,w)^\nu).$$

Daí,

$$\frac{\rho_k(w)}{\rho_k(z)} \leq \exp(Cd(z,w)^\nu)$$

donde,

$$\frac{\rho(w)}{\rho(z)} \leq \exp(Cd(z,w)^\nu).$$

Portanto,

$$|\rho(z) - \rho(w)| = |\rho(z) \cdot (1 - \frac{\rho(w)}{\rho(z)})| \leq |\rho(z)| \cdot |\frac{\rho(w)}{\rho(z)} - 1| \leq C_0 \cdot Cd(z,w)^\nu \leq \hat{C}d(z,w)^\nu\ ,$$

onde $\tilde{C} = C_0 \cdot C$.

Note ainda que todo ponto de acumulação da seqüência $\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_*^i(m)$ é uma probabilidade invariante por f. De fato, como o espaço é compacto a seqüência $\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_*^i(m)$ tem algum ponto de acumulação, isto é, existe alguma subseqüência $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e alguma probabilidade $\mu \in \mathbb{M}_1(\mathcal{M})$ tais que

$$\mu = \lim_k \mu_{n_k} = \lim_k \frac{1}{n\,k} \sum_{i=0}^{n_k-1} f_*^i m.$$

Pela continuidade de f_* temos,

$$f_*\mu = f_*(\lim_k \frac{1}{n\,k} \sum_{i=0}^{n_k-1} f_*^i m) = \lim_k f_*(\frac{1}{n\,k} \sum_{i=0}^{n_k-1} f_*^i m) =$$

$$\lim_k \frac{1}{n\,k} \sum_{i=1}^{n_k} f_*^i m = \lim_k (\frac{1}{n\,k} \sum_{i=0}^{n_k-1} f_*^i m - \mu + f_*^{n_k} m).$$

Observe que $\lim_k \frac{1}{n\,k}\mu = 0$ e $\lim_k \frac{1}{n\,k} f_*^{n_k} m = 0$. O primeiro limite é óbvio, e o segundo decorre do fato da medida ser limitada, isto é,

$$\frac{1}{n_k} f_*^{n_k} m(E) = \frac{1}{n_k} m(f^{-n_k}(E)) \leq \frac{1}{n_k} \ ,$$

para todo conjunto mensurável $E \in \mathcal{A}$.

Assim, obtemos que

$$f_*\mu = \lim_k \frac{1}{n\,k} \sum_{i=0}^{n_k-1} f_*^i(m) = \mu \ ,$$

e portanto μ é invariante por f.

□

Capítulo 3

Construção da Partição de Markov

Dizemos que uma coleção $\Re = \{R_1, \ldots, R_n\}$ de abertos disjuntos é uma partição de Markov de $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ se:

(1) $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{R_i} = \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ uma variedade.

(2) diam $R_i < r, \forall\, i = 1, \ldots, n$ e para todo ramo contrativo $h : R_i \to \mathcal{M}$ de f^{-1} vale

$$h(R_i) \cap R_j \neq \emptyset \;\Rightarrow\; h(R_i) \subset R_j, \forall 1 \leq j \leq n.$$

3.1 Lema. *(Construção de Partição) Existem partições de Markov de f com diâmetro arbitrariamente pequeno.*

Prova.

Seja $\mathbf{B} = \{B_1, \ldots, B_l\}$ uma cobertura de $\mathcal{M}$ constituída de bolas abertas com diam$B_i < \epsilon, \forall i = 1, \ldots, l$.

Definamos para $n \geq 0$, $\mathcal{B}^{(n)} = \{h^n(B_i)/h^n : B_i \to \mathcal{M}$ é ramo contrativo de $f^{-n}\}$. Por indução sobre r definamos também

$B_i^{(0)} = B_i$.

$B_i^{(r)} = B_i^{(r-1)} \cup \left[\bigcup_{B \in \mathcal{B}^{(r)}; B \cap B^{(r-1)} \neq \emptyset} B\right]$, *para* $1 \leq i \leq l$.

$\hat{B}_i = \bigcup_{r=0}^{\infty} B_i^{(r)}$.

Para visualizar essa construção veja Figura (3.1).

1 Afirmação. *Seja $\lambda \in (\sigma^{-1}, 1)$ a constante de contração. Sejam $B_1, \ldots, B_l$ bolas cujos diâmetros*

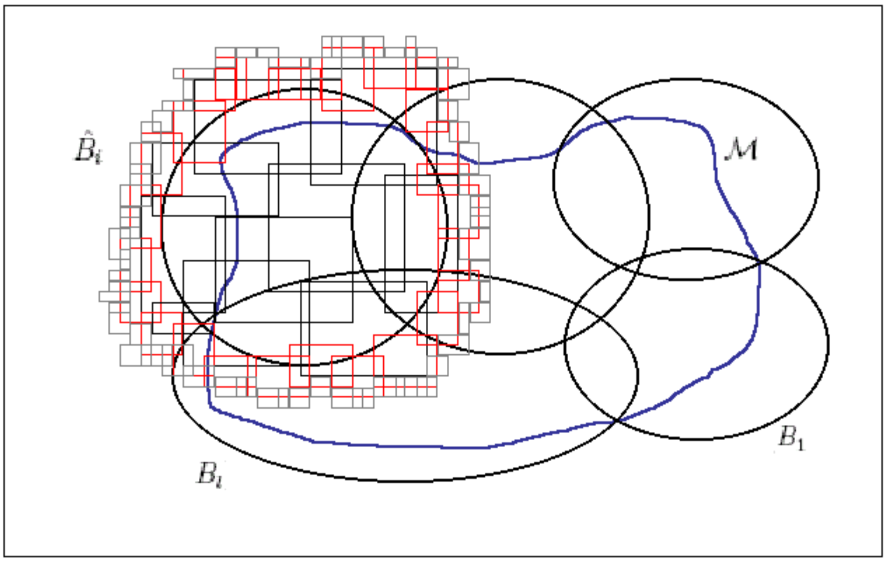

Figura 3.1: Construção de $\hat{B}_i$

são menores que $\varepsilon > 0$. *Então*

$$\operatorname{diam} h^r(B_i) \leq \lambda^r \varepsilon,\ i = 1, \ldots, l\ .$$

Prova.

Sejam x, y pertencentes respectivamente a $h(B_k)$ e $h(B_r)$, com $k = 1, \ldots, l$ e $r = 1, \ldots, l$ onde B_k e B_r são bolas de raio $\varepsilon > 0$ e $h's$ ramos contrativos de f^{-1}. Dados dois pontos quaisquer $w = h(a)$ e $z = h(b)$, $a, b \in B_k$ (ou $a, b \in B_r$) tais que $z, w \in h(B_k)$ (respectivamente $h(B_r)$). Pela convexidade de B_k e usando a desigualdade do valor médio temos que

$$d(w, z) \leq \lambda d(a, b) < \varepsilon\lambda$$

$$\Rightarrow \operatorname{diam} h(B_k) < \varepsilon\lambda\ (\textit{respectivamente} \operatorname{diam} h(B_r) < \varepsilon\lambda).$$

Suponha por indução que $\operatorname{diam} h^j(B_k) \leq \lambda^j \varepsilon$ para um certo $y \in \mathbb{N}$. Mostremos que resultado análogo vale para $h^{j+1}(B_k)$.

Dados dois pontos quaisquer $\tilde{w} = h(\tilde{a})$ e $\tilde{z} = h(\tilde{b})$, $\tilde{a}, \tilde{b} \in h^j(B_k)$ tal que $\tilde{w}, \tilde{z} \in h^{j+1}(B_k)$.

Pela convexidade de uma bola de raio $\varepsilon > 0$ contendo $\tilde{a}, \tilde{b}$, para a qual podemos supor que h está definida (estendendo h se necessário), usamos a desigualdade do valor médio e a hipótese de indução, obtendo

$$d(\tilde{w}, \tilde{z}) \leq \lambda d(\tilde{a}, \tilde{b}) < \lambda \cdot \lambda^j \varepsilon < \lambda^{j+1} \varepsilon.$$

□

2 Afirmação. *Tem-se que* diam $B_i^r \leq \epsilon + 2\epsilon\lambda + \ldots + 2\epsilon\lambda^r$.

Prova.

De fato, fixe uma bola B. Sejam $x, y \in B^{(1)} = B \cup \left[\bigcup_{B' \in \mathcal{B}^{(1)}; B' \cap B \neq \emptyset} B'\right]$, $B' = h'(B_i)$, $\forall i = 1, \ldots, l$.

Suponha que x, y pertencem respectivamente a $h'(B_k)$ e $h'(B_r)$, $k = 1, \ldots, l$ e $r = 1, \ldots, l$, onde B_k e B_r são bolas de raio $\varepsilon > 0$ e h's ramos contrativos (que por abuso de notação, denotaremos pela mesma letra h) de f^{-1}.

Por construção de $B^{(1)}$ temos que $h(B_k) \cap B \neq \emptyset$ e $h(B_r) \cap B \neq \emptyset$

Tomemos

$$\hat{x} \in h(B_k) \cap B$$

e

$$\hat{y} \in h(B_r) \cap B.$$

Então,

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, \hat{x}) + d(\hat{x}, \hat{y}) + d(\hat{y}, y) \\ &\leq \lambda\varepsilon + \text{diam}(B) + \lambda\varepsilon \\ &\leq 2\lambda\varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

Donde, diam $B^{(1)} \leq \varepsilon + 2\lambda\varepsilon$.

Suponha por indução que para a j-ésima etapa de construção $B^{(j)}$, obtemos

$$\text{diam } B^{(j)} \leq \varepsilon + 2\lambda\varepsilon + \ldots + 2\lambda^j\varepsilon \ .$$

Mostremos que um resultado similar vale para $j + 1$.

Dados $x, y \in B^{(j+1)}$, suponha que x e y pertencem respectivamente a $h^{(j+1)}(B_k)$ e $h^{(j+1)}(B_r)$.

Por construção de B^{j+1}

$$h^{(j+1)}(B_k) \cap B^{(j)} \neq \emptyset$$

e

$$h^{(j+1)}(B_r) \cap B^{(j)} \neq \emptyset.$$

Tomemos

$$\hat{x} \in h^{(j+1)}(B_k) \cap B^{(j)}$$

e

$$\hat{y} \in h^{(j+1)}(B_r) \cap B^{(j)}.$$

Já provamos que diam $h^{j+1}(B_k) \leq \lambda^{j+1}\varepsilon$.

Daí,

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,\hat{x}) + d(\hat{x},\hat{y}) + d(\hat{y},y) \\ &\leq \lambda^{j+1}\varepsilon + \operatorname{diam} B^{(j)} + \lambda^{j+1}\varepsilon \\ &\leq \lambda^{j+1}\varepsilon + (\varepsilon + 2\lambda\varepsilon + \ldots + 2\lambda^{j}\varepsilon) + \lambda^{j+1}\varepsilon \\ &\leq \varepsilon + 2\lambda\varepsilon + \ldots + 2\lambda^{j+1}\varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Como $\hat{B}_i = \bigcup_{r=0}^{\infty} B_i^{(r)}$ então diam $\hat{B}_i \leq \dfrac{\varepsilon}{1-\lambda}$, $1 \leq i \leq l$.

3 Afirmação. *Se $h : \hat{B}_i \to \mathcal{M}$ é ramo contrativo de f^{-1} e $h(B_i) \cap B_j \neq \emptyset$, então $h(\hat{B}_i) \subset \hat{B}_j$, pela própria construção dos $\hat{B}_j$ (veja que $h(B_i) \subset \hat{B}_j$).*

Prova.

Por simplicidade, sejam B, $\tilde{B}$ duas bolas e os conjuntos $\hat{B}$, $\hat{\tilde{B}}$ construídos com respeito a elas. Suponha que $h(B) \cap \tilde{B} \neq \emptyset$

Seja $\mathcal{A}_n = \{A^{(n)} \in \mathcal{B}^{(n)}, A^{(n)}$ entra na $n-$ ésima etapa de construção de $\hat{B}\} = \{A^{(n)} \in \mathcal{B}^{(n)}; A^{(n)} \cap B^{n-1} \neq \emptyset\}$. Ou seja, $A^{(n)}$ é a imagem de qualquer bola pelo $n-$ ésimo ramo contrativo que intersecta a $(n-1)-$ ésima etapa de construção de $\hat{B}$.

Considere $A^{(1)} = h(B_j)$ qualquer conjunto que entra na fase 1 de construção de $\hat{B}$ qualquer que seja a bola B_j. Isto é,

$A^{(1)} = h(B_j)$ para algum B_j, onde $h : B_j \to \mathcal{M}$ é ramo contrativo de f^{-1} e $A^{(1)} \cap B \neq \emptyset$.

Como h é um difeomorfismo local, segue que

$$A^{(1)} \cap B \neq \emptyset \Rightarrow h(A^{(1)}) \cap h(B) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow h(A^{(1)}) \cap \tilde{B}^{(1)} = h^2(B_j) \cap \tilde{B}^{(1)} \neq \emptyset.$$

Esta última implicação devido a $h(B) \subset \tilde{B}^{(1)}$.

Daí,

$$h(A^{(1)}) = h^2(B_j) \subset \tilde{B}^{(2)} \subset \hat{\tilde{B}}.$$

Suponha por indução que $h(A^{(n)}) \subset \tilde{B}^{(n+1)} \subset \hat{\tilde{B}}$, $\forall A^{(n)}$ que entra até a fase n de construção de $\hat{B}$.

Mostremos que vale que $h(A^{(n+1)}) \subset \tilde{B}^{(n+2)} \subset \hat{\tilde{B}}\ \forall\ A^{(n+1)}$ que entra até a fase $n+1$ de construção de $\hat{B}$.

Considere $A^{(n+1)} = h^{n+1}(B_j)$ qualquer conjunto que entra na fase $n+1$ de construção de $\hat{B}$, qualquer que seja a bola B_j. Isto é,

$A^{(n+1)} = h^{n+1}(B_j)$, onde $h^{n+1} : B_j \to \mathcal{M}$ é ramo contrativo de $f^{-(n+1)}$ e $A^{(n+1)} \cap A^{(j)} \neq \emptyset$, $0 \leq j \leq n$.

Por hipótese de indução temos

$$h(A^{(n)}) = h(h^n(B_k)) \subset \tilde{B}^{(n+1)}.$$

Por outro lado,

$$A^{(j)} \cap A^{(n+1)} \neq \emptyset \Rightarrow h(A^{(j)}) \cap h(A^{(n+1)}) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \tilde{B}^{(j+1)} \cap h(A^{(n+1)}) \neq \emptyset,\ 0 \leq j \leq n\ .$$

Daí,

$$\tilde{B}^{(j+1)} \cap h(h^{n+1}(B_k)) \neq \emptyset \Rightarrow h(A^{(n+1)}) \subset \tilde{B}^{(j+2)} \subset \hat{\tilde{B}}.$$

Logo, como $\hat{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{A^{(n)} \in \mathcal{A}_n\}$ e como já mostramos que cada $h(A^{(n)}) \subset \hat{\hat{B}}$, obtemos que $h(\hat{B}) \subset \hat{\hat{B}}$.

□

Seja $\Re$ a coleção dos abertos $R \subset \mathcal{M}$ tais que se $R \cap \hat{B}_j \neq \emptyset$ então $R \subset \hat{B}_j$ e tal que cada aberto $R \in \Re$ seja maximal com esta propriedade.

$\Re$ é uma coleção finita de abertos disjuntos tais que $\bigcup_{R\in\Re} \overline{R} = \mathcal{M}$.

Fica provado assim a condição (1) da definição anterior.

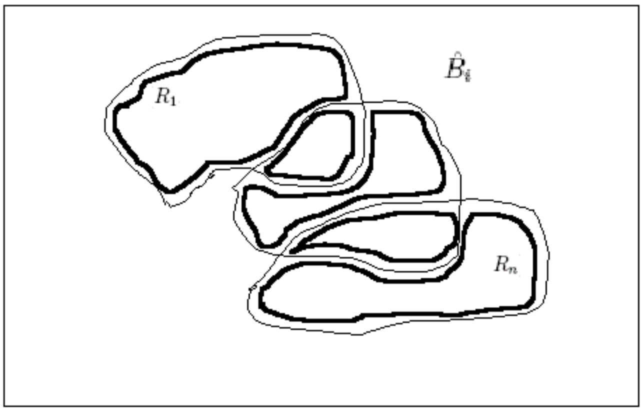

Figura 3.2: Retângulos da partição de Markov

Agora vamos mostrar que vale a condição (2) da definição. Para isso, usaremos a seguinte afirmação

4 Afirmação. *Os $h(\hat{B}_j)$ tais que $h(B_j) \cap B_1 \neq \emptyset$ cobrem $\hat{B}_1$.*

Prova.

De fato, se $x \in \hat{B}_1$ então $x \in h^{(n)}(D_n)$, onde $h^{(n)}$ é ramo contrativo de f^{-n} e $D_n \in \{B_1, \ldots, B_l\}$.

Além disso existe seqüência $h^{(j)}(D_j)$, $1 \leq j \leq n$ tal que $\hat{B}_1 \cap h^{(j+1)}(D_{j+1}) \neq \emptyset, 1 \leq j \leq n-1$ e $h^{(1)}(D_1) \cap B_1 \neq \emptyset$.

Suponhamos que $D_1 = B_j$ então $h(B_j) \cap B_1 \neq \emptyset$.

Pela construção dos $\hat{B}_j$ a seqüência $h^{(j-1)}(D_j), 1 \leq j \leq n$ está inteiramente contida em $\hat{B}_j$, onde $h^{(j-1)} = h^{-1} \circ h^j = f \circ h^j$.

Já sabemos que se $x \in \hat{B}_1 \Rightarrow x \in h^{(n)}(D_n) \Rightarrow x \in h(h^{(n-1)}(D_n)) \subset h(\hat{B}_j)$, logo os $h(\hat{B}_j)$

cobrem $\hat{B}_1$.

$\square$

Seja $R \in \Re$ tal que $h(R) \cap \hat{B}_1 \neq \emptyset$. Da afirmação, decorre que podemos encontrar B_j satisfazendo $h(B_j) \cap B_1 \neq \emptyset$ e $h(\hat{B}_j) \cap h(R) \neq \emptyset$ [veja que $h(R) \cap \hat{B}_1 \neq \emptyset \Rightarrow h(R) \cap h(\hat{B}_j)$, pois $h(\hat{B}_j)$ cobrem $\hat{B}_1$].

Portanto $\hat{B}_j \cap R \neq \emptyset$ e resulta que $R \subset \hat{B}_j$. Logo $h(R) \subset h(\hat{B}_j) \subset \hat{B}_1$ (pela afirmação 1). Daí, $h(R) \subset R'$ para algum $R' \in \Re$.

$\square$

5 Afirmação. *A fronteira dos $\hat{B}_j$ tem medida nula.*

Tal demonstração pode ser encontrada em [4].

Capítulo 4

Espectro do Operador de Transferência

Neste capítulo queremos provar que $\mathcal{L}$ é um operador linear limitado, seu espectro $\sigma(\mathcal{L})$ está contido no disco unitário $\{|\zeta| \leq 1\}$ e existe $\tau_0 < 1$ tal que $\sigma(\mathcal{L}) \cap \{|\zeta| \geq \tau_0\}$ consiste de um número finito de pontos cujos autoespaços são todos de dimensão finita.

A prova segue um caminho padrão usando duas propriedades que são contratividade e aproximação por operador de posto finito.

4.1 Contratividade fraca do operador de transferência

Tome $\Re = \{R_1, \ldots, R_n\}$ uma partição de Markov da variedade $\mathcal{M}$. Vamos assumir que esta partição é mixing, isto é, $\exists\, n_0$ tal que $f^{n_0}(R_l) = \mathcal{M},\ \forall\, R_l \in \Re$.

Embora não nos alonguemos sobre isso, é fato bem conhecido da teoria das transformações expansoras que se temos uma tal transformação C^2 definida numa variedade compacta conexa então suas partições de Markov associadas são mixing.

Escolhamos um espaço adequado de funções a saber

$$X := \{\varphi\,|_{R_l} \colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}, \varphi\,|_{R_l} \text{ é Lipschitziana}\}$$

e a norma $\|\cdot\|$ definida como segue

$$\|\varphi\| := \|\varphi\|_\infty + \|\varphi\|_h$$

onde

$$\| \varphi \|_\infty := \sup_{x \in \mathcal{M}} |\varphi(x)|.$$

$$\| \varphi \|_h := Lip(\varphi) = \sup_{x \in \mathcal{M}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{d(x,y)}.$$

Observe que $(X, \| \cdot \|)$ é um espaço de Banach.

1. $\| \cdot \|$ é uma norma em X.

De fato, dados $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in X$ e c um escalar, temos

a. $\| \varphi \| = \sup_{x \in \mathcal{M}} |\varphi(x)| + \sup \dfrac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{d(x,y)} = \sup\limits_{x \in \mathcal{M}} |\varphi(x)| + Lip(\varphi) \geq 0.$

b. $\| \varphi \| = 0 \Rightarrow \sup_{x \in \mathcal{M}} |\varphi(x)| + Lip(\varphi) = 0 \Rightarrow \sup_{x \in \mathcal{M}} |\varphi(x)| = 0 \Rightarrow \varphi \equiv 0.$

c. $\| c\varphi \| = \sup_{x \in \mathcal{M}} |c\varphi(x)| + Lip(c\varphi) = |c| \sup_{x \in \mathcal{M}} |\varphi(x)| + |c| Lip(\varphi) = |c||\varphi|.$

d.$\| \varphi_1 + \varphi_2 \| = \sup_{x \in \mathcal{M}} |\varphi_1(x) + \varphi_2(x)| + Lip(\varphi_1 + \varphi_2) \leq$

$$\sup_{x \in \mathcal{M}} |\varphi_1(x)| + \sup_{x \in \mathcal{M}} |\varphi_2(x)| + \sup_{x,y \in \mathcal{M}} \frac{|(\varphi_1 + \varphi_2)(x) - (\varphi_1 + \varphi_2)(y)|}{d(x,y)} \leq$$

$$\sup_{x \in \mathcal{M}} |\varphi_1(x)| + \sup_{x \in \mathcal{M}} |\varphi_2(x)| + \sup_{x,y \in \mathcal{M}} \frac{|\varphi_1(x) + \varphi_2(x) - \varphi_1(y) + \varphi_2(y)|}{d(x,y)} \leq$$

$$\sup_{x \in \mathcal{M}} |\varphi_1(x)| + \sup_{x \in \mathcal{M}} |\varphi_2(x)| + \sup_{x,y \in \mathcal{M}} \frac{|\varphi_1(x) - \varphi_1(y)|}{d(x,y)} + \sup_{x,y \in \mathcal{M}} \frac{|\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|}{d(x,y)} =$$

$$\sup_{x \in \mathcal{M}} |\varphi_1(x)| + \sup_{x,y \in \mathcal{M}} \frac{|\varphi_1(x) - \varphi_1(y)|}{d(x,y)} + \sup_{x \in \mathcal{M}} |\varphi_2(x)| + \sup_{x,y \in \mathcal{M}} \frac{|\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|}{d(x,y)}$$

$$= |\varphi_1| + |\varphi_2| \ .$$

2. $(X, \| \cdot \|)$ é um espaço de Banach.

Vamos mostrar que $(X, \| \cdot \|)$ é completo. Para tal provaremos que se $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy então existe uma aplicação $\varphi \in X$ tal que $\| \varphi_n - \varphi \| \to 0$.

Seja $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy. Então $\forall\ \dfrac{\varepsilon}{2} > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n, k > n_0$ vale

$$||\varphi_n - \varphi_k|| = ||\varphi_n - \varphi_k||_\infty + ||\varphi_n - \varphi_k||_h \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Em particular, fixado $x \in \mathcal{M}$, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$. De fato,

$$||\varphi_n(x) - \varphi_k(x)|| \leq ||\varphi_n - \varphi_k||_\infty \leq ||\varphi_n - \varphi_k|| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Defina $\varphi(x) := \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x)$. Vamos mostrar que

$$||\varphi_n - \varphi|| = \sup_{x\in\mathcal{M}} |(\varphi_n - \varphi)(x)| + \sup_{x,y\in\mathcal{M}} \frac{|(\varphi_n - \varphi)(x) - (\varphi_n - \varphi)(y)|}{d(x,y)} \leq \varepsilon.$$

Fixado $k \in \mathbb{N}$, como $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy e da definição de $||\cdot||_\infty$, temos

$$|(\varphi_n - \varphi_k)(x)| < ||\varphi_n - \varphi_k||_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\ n \geq n_0 \text{ e } k \geq n_0.$$

Fazendo $k \to \infty$, obtemos

$$|(\varphi_n - \varphi_k)(x)| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} |(\varphi_n - \varphi)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\ n \geq n_0 \text{ e } \forall x \in \mathcal{M}.$$

Desde que x é arbitrário,

$$||\varphi_n - \varphi||_\infty = \sup_{x\in\mathcal{M}} |(\varphi_n - \varphi)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\ n \geq n_0.$$

Por outro lado, fixados x e y arbitrários, $\forall\ n, k \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, da definição de $||\cdot||_h$ tem-se

$$\frac{|(\varphi_n - \varphi_k)(x) - (\varphi_n - \varphi_k)(y)|}{d(x,y)} \leq ||\varphi_n - \varphi_k||_h \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fazendo $k \to \infty$, obtemos

$$\frac{|(\varphi_n - \varphi_k)(x) - (\varphi_n - \varphi_k)(y)|}{d(x,y)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|(\varphi_n - \varphi)(x) - (\varphi_n - \varphi)(y)|}{d(x,y)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como x, y são arbitrários

$$||\varphi_n - \varphi||_h = \sup_{x,y\in\mathcal{M}} \frac{|(\varphi_n - \varphi)(x) - (\varphi_n - \varphi)(y)|}{d(x,y)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

daí,

$$||\varphi_n - \varphi|| = ||\varphi_n - \varphi||_\infty + ||\varphi_n - \varphi||_h \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \;\forall\; n \geq n_0.$$

Em particular, $(\varphi_n - \varphi) \in X$ e como X é um espaço vetorial segue que $\varphi = \varphi_n + (\varphi - \varphi_n) \in X$. Então $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ em X.

4.1 LEMA. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ como definido acima, tem-se*

1. $\mathcal{L}(X) \subset X$.
2. *Existe $K > 0$ tal que para todo $\varphi \in X$,*
$$\| \mathcal{L}\varphi \| \leq K|\varphi|_1 + \lambda \| \varphi \| \;\; .$$
3. $\mathcal{L} : X \to X$ *é operador limitado.*

Prova.

1. Tome $\varphi \in X$. Existe $\delta > 0$ tal que dados $y^{'}, y^{''} \in \mathcal{M}$, com $d(y^{'}, y^{''}) \leq \delta$, tem-se $f^{-1}(y') = \{x_1', \ldots, x_k'\}$ e $f^{-1}(y'') = \{x_1'', \ldots, x_k''\}$. Então

$$(\mathcal{L}\varphi)(y') = \sum_{i=1}^{k} \varphi(x_i')|\det Df(x_i')|^{-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(x_i')}{\varphi(x_i'')} \cdot \varphi(x_i'') \cdot \frac{|\det Df(x_i'')|}{|\det Df(x_i')|} \cdot |\det Df(x_i'')|^{-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \varphi(x_i'') \exp[\log \varphi(x_i') - \log \varphi(x_i'')] \cdot \exp[\log \det Df(x_i'') - \log \det Df(x_i')] \cdot |\det Df(x_i'')|^{-1}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \varphi(x_i'') \cdot |\det Df(x_i'')|^{-1} \cdot \exp[\hat{a} d(x_i', x_i'')] \exp[\hat{C} d(x_i', x_i'')]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \varphi(x_i'') \cdot |\det Df(x_i'')|^{-1} \cdot \exp[(\hat{a}+\hat{C})d(x_i', x_i'')]$$

$$\leq \exp[(\hat{a}+\hat{C})d(y', y'')] \sum_{i=1}^{k} \varphi(x_i'') \cdot |\det Df(x_i'')|^{-1}$$

$$= \exp \lambda d(y', y'')(\mathcal{L}\varphi)(y'').$$

Com $\lambda < 1$ *e* $(\hat{a}+\hat{C}) \leq \lambda$.

Isto mostra que $\log(\mathcal{L}\varphi)$ é lipschitziana. Logo, $\mathcal{L}\varphi \in X$.

□

Na primeira desigualdade acima usamos o fato de log det Df e log φ são lipschitzianas.

2. i) Estimativa 1: Existe $K_\infty > 0$ tal que $\forall \varphi$, $\| \mathcal{L}\varphi \|_\infty \leq K_\infty |\varphi|_1 + \lambda e^C \| \varphi \|_h$.

Prova.

Considere h ramo contrativo de f^{-1} e definamos $Jh_j(y) := \left| \dfrac{1}{\det Df(h_j(y))} \right|$. Seja R_l retângulo da Partição de Markov. Então,

$$\| \mathcal{L}\varphi|_{R_l} \|_\infty = \sup_{y \in R_l} \| \mathcal{L}\varphi(y)|_{R_l} \|_\infty$$

$$= \sup_{y \in R_l} \| \sum_{f(x_j)=y} \frac{\varphi \circ h_j(y)}{|\det Df(h_j(y))|} \| \leq \sum_{j=1}^{k} \sup_{y \in R_l} \| \varphi(h_j(y)) \cdot Jh_j(y) \|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \sup_{x \in h_j(R_l)} \| \varphi \| \cdot \sup_{y \in R_l} \| Jh_j(y) \| . \tag{4.1}$$

Fixemos um j e seja h_j um ramo contrativo.

Observe que,

$$\left| \varphi|_{h_j(R_l)} \right|_\infty \leq \frac{1}{m(h_j(R_l))} \int_{h_j(R_l)} \varphi dm + \sup_{x_1, x_2 \in\, h_j(R_l)} ess \, |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| . \tag{4.2}$$

Note também que $m(h_j(R_l)) = \int_{R_l} Jh_j(y)dy$

donde,

$$\frac{m(h_j(R_l))}{m(R_l)} = \frac{\int_{R_l} Jh_j(y)dy}{m(R_l)}.$$

Por outro lado, qualquer que sejam $y_1, y_2 \in R_l$ tal que $h_j(y_1) = x_1$ e $h_j(y_2) = x_2$ tem-se

$$\| Jh_j(y_1) \| = \| \frac{1}{\det Df(h_j(y_1))} \|$$

e

$$\| Jh_j(y_2) \| = \| \frac{1}{\det Df(h_j(y_2))} \|$$

daí,

$$\frac{\| Jh_j(y_1) \|}{\| Jh_j(y_2) \|} = \frac{\| \det Df(h_j(y_2)) \|}{\| \det Df(h_j(y_1)) \|} .$$

Sendo log det Df (C, ν)–Hölder–contínua tem-se

$$\frac{\| Jh_j(y_1) \|}{\| Jh_j(y_2) \|} \leq \exp C d(y_2, y_1).$$

Assim, supondo $d(y_2, y_1) = \text{diam}(R_l)$, tem-se

$$\frac{\| Jh_j(y_1) \|}{\| Jh_j(y_2) \|} \leq \exp C \text{diam}(R_l)$$

logo, para y_2 fixado obtemos

$$\| Jh_j(y_1) \| \leq \exp C \text{diam}(R_l) \cdot \| Jh_j(y_2) \| \ .$$

Supondo que $\text{diam}(R_l) < 1$, obtemos

$$\| Jh_j(y_1) \| \leq e^C \cdot \| Jh_j(y_2) \| \ .$$

Integrando ambos os membros em relação à m temos

$$\int_{R_l} \| Jh_j(y_1) \| \frac{dm}{m(R_l)} \leq \int_{R_l} e^C \| Jh_j(y_2) \| \frac{dm}{m(R_l)} \Rightarrow$$

$$\| Jh_j(y_1) \| \int_{R_l} \frac{dm}{m(R_l)} \leq \frac{e^C}{m(R_l)} \int_{R_l} \| Jh_j(y_2) \| dm \Rightarrow$$

$$\| Jh_j(y_1) \| \frac{1}{m(R_l)} \int_{R_l} dm \leq \frac{e^C}{m(R_l)} \int_{R_l} \| Jh_j(y_2) \| dm \Rightarrow$$

$$\| Jh_j(y_1) \| \leq e^C \frac{m(h_j(R_l))}{m(R_l)} \ . \tag{4.3}$$

Fazendo o produto de (4.2) e (4.3) obtemos

$$\| \varphi|_{h(R_l)} \| \cdot \| Jh_j(y) \| \leq$$

$$\left[\left| \frac{1}{m(h_j(R_l))} \int_{h(R_l)} \varphi dm \right| + \sup_{x_1, x_2 \in h(R_l)} ess \, |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \right] e^C \frac{m(h_j(R_l))}{m(R_l)}.$$

Daí,

$$\sum_{j=1}^{k} \sup_{x \in h_j(R_l)} \| \varphi \| \cdot \sup_{y \in R_l} \| Jh_j(y) \|$$

$$\leq \left[\left| \frac{1}{m(h_j(R_l))} \int_{h_j(R_l)} \varphi dm \right| + \sup_{x_1, x_2 \in h_j(R_l)} ess |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \right] e^C \frac{m(h_j(R_l)}{m(R_l)}. \tag{4.4}$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $\operatorname{diam}(\mathcal{M}) \leq 1$ o que implica em $\operatorname{diam}(h(R_k)) \ll \lambda < 1$, podemos escrever

$$\sup_{x_1, x_2 \in h(R_l)} ess \, |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \sup_{x_1, x_2 \in h(R_l)} ess \frac{|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|}{\operatorname{diam}(h(R_l))}$$

$$\leq \sup_{x_1, x_2 \in h(R_l)} ess \frac{|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|}{d(x_1, x_2)}.$$

Fazendo $\lambda = \text{diam}(h(R_l)) < 1$, teremos

$$\sup_{x_1,x_2 \in h(R_l)} ess \frac{|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|}{\lambda} \leq \sup_{x_1,x_2 \in h(R_l)} ess \frac{|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|}{d(x_1, x_2)}$$

logo,

$$\sup_{x_1,x_2 \in h(R_l)} ess\, |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \lambda \cdot \sup_{x_1,x_2 \in h(R_l)} ess \frac{|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|}{d(x_1, x_2)} \leq \lambda\, |\varphi|_h\, .$$

Voltando a (4.4)

$$\sum_{j=1}^{k} \sup_{x \in h_j(R_l)} \parallel \varphi \parallel \cdot \sup_{y \in R_l} \parallel Jh_j(y) \parallel \leq$$

$$\sum_{j=1}^{k} \left[\left| \frac{1}{m(h_j(R_l))} \int_{h(R_l)} \varphi dm \right| \cdot e^C \frac{m(h_j(R_l))}{m(R_l)} + \sup_{x_1,x_2 \in h(R_l)} ess\, |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|) \cdot e^C \frac{m(h_j(R_l))}{m(R_l)} \right] \leq$$

$$\sum_{j=1}^{k} \left[\frac{e^C \left| \int_{h_j(R_l)} \varphi\, dm \right|}{m(R_l)} + \lambda\, |\varphi|_h \cdot \frac{m(h_j(R_l))}{m(R_l)} \cdot e^C \right] =$$

$$\sum_{j=1}^{k} \left[\frac{e^C}{m(R_l)} \left| \int_{h_j(R_l)} \varphi\, dm \right| \right] + \lambda\, |\varphi|_h \cdot e^C \sum_{j=1}^{k} m(h_j(R_l)) =$$

$$\frac{e^C}{m(R_l)} \sum_{j=1}^{k} \left| \int_{h_j(R_l)} \varphi\, dm \right| + \lambda\, |\varphi|_h \cdot e^C \cdot m(\mathcal{M}) \leq$$

$$\frac{e^C}{\min\{m(R_l)\}}\, |\varphi|_1 + \lambda\, e^C\, |\varphi|_h\, .$$

Desde que $\sum_{j=1}^{k} m(h_j(R_l)) = m(\mathcal{M}) = 1$ e $\sum_{j=1}^{k} \left| \int_{h_j(R_l)} \varphi \right| \leq \int |\varphi|\, dm = |\varphi|_1$ e fazendo $K_\infty = \frac{e^C}{\min\{m(R_l)\}}$, encontramos

$$\parallel \mathcal{L}\varphi \parallel_\infty \leq K_\infty |\varphi|_1 + \lambda e^C \parallel \varphi \parallel_h\, .$$

□

ii) <u>Estimativa 2</u>: Existe $K_\infty > 0$ tal que $\forall \varphi$

$$\| \mathcal{L}\varphi \|_h \leq CK_\infty |\varphi|_1 + \lambda e^C (1+C) \| \varphi \|_h \ .$$

Prova.

Escreva $x_j = h_j(y_j)$ e tome $y_1, y_2 \in R_l$.

$$\| \mathcal{L}\varphi \|_h := \sup_{y_1,y_2 \in R_l} \frac{|\mathcal{L}\varphi(x_1) - \mathcal{L}\varphi(x_2)|}{d(x_1,x_2)} =$$

$$\sup_{x_1,x_2 \in h_j(R_l)} \frac{\left| \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\varphi \circ h_j(y_1)}{|\det Df(h_j(y_1))|} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\varphi \circ h_j(y_2)}{|\det Df(h_j(y_2))|} \right|}{d(y_1,y_2)} \leq$$

$$\sup_{x_1,x_2 \in h_j(R_l)} \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} |\varphi(h_j(y_1)) \cdot Jh_j(y_1) - \varphi(h_j(y_2)) \cdot Jh_j(y_2)|}{d(y_1,y_2)} \ . \tag{4.5}$$

Note que

$$|\varphi(h_j(y_1))Jh_j(y_1) - \varphi(h_j(y_2))Jh_j(y_2)| =$$

$$|\varphi(h_j(y_1))Jh_j(y_1) - \varphi(h_j(y_2))Jh_j(y_1) + \varphi(h_j(y_2))Jh_j(y_1) - \varphi(h_j(y_2))Jh_j(y_2)| \leq$$

$$|\varphi(h_j(y_1)) - \varphi(h_j(y_2))|\,|Jh_j(y_1)| + |\varphi(h_j(y_2))|\,|Jh_j(y_1) - Jh_j(y_2)| =$$

$$|\varphi(h_j(y_1)) - \varphi(h_j(y_2))|\,|Jh_j(y_1)| + |\varphi(h_j(y_2))|\,|Jh_j(y_2)| \left| \frac{Jh_j(y_1)}{Jh_j(y_2)} - 1 \right| =$$

$$|\varphi(h_j(y_1)) - \varphi(h_j(y_2))|\,|Jh_j(y_1)| + |\varphi(h_j(y_2))|\,|Jh_j(y_2)| \cdot Cd(y_1,y_2) \ , \tag{4.6}$$

onde C é a mesma da estimativa anterior.

Substituindo (4.6) em (4.5) temos

$$\sup_{x_1,x_2\in h_j(R_l)} \frac{\sum_{j=1}^{k} |\varphi(h_j(y_1))\cdot Jh_j(y_1) - \varphi(h_j(y_2))\cdot Jh_j(y_2)|}{d(y_1,y_2)} \leq$$

$$\sum_{j=1}^{k} \sup_{y_1,y_2\in R_l} \frac{|\varphi(h_j(y_1)) - \varphi(h_j(y_2))|\,|Jh_j(y_1)| + |\varphi(h_j(y_2))|\,|Jh_j(y_2)|\cdot Cd(y_1,y_2)}{d(y_1,y_2)} =$$

$$\sum_{j=1}^{k} \sup_{y_1,y_2\in R_l} \left(\frac{|\varphi(h_j(y_1)) - \varphi(h_j(y_2))|}{d(y_1,y_2)}|Jh_j(y_1)| + \frac{|\varphi(h_j(y_2))||Jh_j(y_2)|\cdot Cd(y_1,y_2)}{d(y_1,y_2)} \right) =$$

$$\sum_{j=1}^{k} \sup_{y_1,y_2\in R_l} |Jh_j(y_1)| \frac{|\varphi(h_j(y_1)) - \varphi(h_j(y_2))|}{d(y_1,y_2)} + C\sum_{j=1}^{k} \sup_{y_1,y_2\in R_l} |\varphi(h_j(y_2))||Jh_j(y_2)|.$$

Note que o segundo termo na expressão acima difere apenas por uma constante de (4.1) na estimativa anterior. Então

$$C\sum_{j=1}^{k} \sup_{y_1,y_2\in R_l} |\varphi(h_j(y_2))||Jh_j(y_2)| \leq C\left(K_\infty|\varphi|_1 + \lambda e^C \parallel \varphi \parallel_h\right). \tag{4.7}$$

Analisando o primeiro termo da soma acima, e usando a estimativa anterior, notamos que

$$\sup \parallel Jh_j(y_1) \parallel \leq e^C \cdot \frac{m(h(R_l))}{m(R_l)}$$

além disso,

$$\frac{|\varphi(h_j(y_1)) - \varphi(h_j(y_2))|}{d(y_1,y_2)} = \frac{|\varphi(h_j(y_1)) - \varphi(h_j(y_2))|}{d(h_j(y_1),h_j(y_2))} \cdot \frac{d(h_j(y_1),h_j(y_2))}{d(y_1,y_2)}$$

donde,

$$\frac{|\varphi(h_j(y_1)) - \varphi(h_j(y_2))|}{d(h_j(y_1),h_j(y_2))} = \parallel \varphi \parallel_{h_j}$$

e

$$\frac{d(h_j(y_1), h_j(y_2))}{d(y_1, y_2)} \leq \frac{\lambda d(y_1, y_2)}{d(y_1, y_2)} \leq \lambda.$$

Daí,

$$\sum_{j=1}^{k} \sup_{y_1, y_2 \in R_l} |Jh_j(y_1)| \frac{|\varphi(h_j(y_1)) - \varphi(h_j(y_2))|}{d(y_1, y_2)} \leq$$

$$e^C \sum_{j=1}^{k} \sup_{y_1, y_2 \in R_l} \frac{m(h_j(R_l))}{m(R_l)} \cdot \lambda \cdot \parallel \varphi \parallel_{h_j} \leq e^C \lambda \parallel \varphi \parallel_h . \tag{4.8}$$

Juntando (4.7) e (4.8) obtemos

$$\sum_{j=1}^{k} \sup_{y_1, y_2 \in R_l} |Jh_j(y_1)| \frac{|\varphi(h_j(y_1)) - \varphi(h_j(y_2))|}{d(y_1, y_2)} + C \sum_{j=1}^{k} \sup_{y_1, y_2 \in R_l} |\varphi(h_j(y_2))| |Jh_j(y_2)| \leq$$

$$\lambda e^C \parallel \varphi \parallel_h + C(K_\infty |\varphi|_1 + \lambda e^C \parallel \varphi \parallel_h) \leq$$

$$\lambda e^C \parallel \varphi \parallel_h + CK_\infty |\varphi|_1 + C\lambda e^C \parallel \varphi \parallel_h) \leq$$

$$CK_\infty |\varphi|_1 + \lambda e^C (1 + C) \parallel \varphi \parallel_h .$$

□

Juntando as duas estimativas concluímos que

$$\parallel \mathcal{L}\varphi \parallel \leq K_\infty |\varphi|_1 + \lambda e^C \parallel \varphi \parallel_h + CK_\infty |\varphi|_1 + \lambda e^C (1 + C) \parallel \varphi \parallel_h .$$

Desde que exista $\tilde{C}$ tal que para todo $\varphi \in X$ tenhamos $|\varphi|_1 \leq \tilde{C} \parallel \varphi \parallel_\infty$, obtemos

$$\parallel \mathcal{L}\varphi \parallel \leq K_\infty |\varphi|_1 + CK_\infty \tilde{C} \parallel \varphi \parallel_\infty + \lambda e^C (2 + C) \parallel \varphi \parallel_h .$$

Tomando $K = K_\infty$ e desde que as outras constantes são menores que λ obtemos

$$\| \mathcal{L}\varphi \| \leq K|\varphi|_1 + \lambda \| \varphi \| .$$

$\square$

3. Por definição $\| \mathcal{L}\varphi \| = \| \mathcal{L}\varphi \|_\infty + \| \mathcal{L}\varphi \|_h$. Das estimativas 1 e 2 anteriores temos

$$\| \mathcal{L}\varphi \| \leq K|\varphi|_1 + \lambda \| \varphi \| \leq (K+\lambda) \| \varphi \| .$$

Já que $|\varphi|_1 \leq \| \varphi \|_\infty \leq \| \varphi \|$.

Portanto o operador $\mathcal{L}$ é limitado.

$\square$

4.2 COROLÁRIO. $\sigma(\mathcal{L}) \subset \{|\xi| \leq 1\}$.

Prova.

Para mostrar que o espectro de $\mathcal{L}$ pertence ao disco unitário fechado, é suficiente mostrar que

$$\sup_n \| \mathcal{L}^n \| < \infty$$

já que se $\| \mathcal{L}^n \| \leq M \Rightarrow \sqrt[n]{\| \mathcal{L}^n \|} \leq \sqrt[n]{M} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\| \mathcal{L}^n \|} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = 1$

e, sendo $r(\mathcal{L}) = \sup \sqrt[n]{\| \mathcal{L}^n \|}$, concluiremos que o raio espectral estará contido no disco unitário.

Considere $\varphi \in X$ e $k \in \mathbb{N}$,

$$\| \mathcal{L}^k\varphi \| = \| \mathcal{L}(\mathcal{L}^{k-1}\varphi) \| \leq K|\mathcal{L}^{k-1}|_1 + \lambda \| \mathcal{L}^{k-1}\varphi \| \tag{4.9}$$

mas,

$$\| \mathcal{L}^{k-1}\varphi \| = \| \mathcal{L}(\mathcal{L}^{k-2}\varphi) \| \leq K|\mathcal{L}^{k-2}\varphi|_1 + \lambda \| \mathcal{L}^{k-2}\varphi \| .$$

Substituindo em(4.9) obtemos

$$\| \mathcal{L}^k\varphi \| \leq K|\mathcal{L}^{k-1}|_1 + \lambda \left(K|\mathcal{L}^{k-2}\varphi|_1 + \lambda \| \mathcal{L}^{k-2}\varphi \| \right)$$

donde,

$$\| \mathcal{L}^k\varphi \| \leq K|\mathcal{L}^{k-1}|_1 + \lambda K|\mathcal{L}^{k-2}\varphi|_1 + \lambda^2 \| \mathcal{L}^{k-2}\varphi \| \tag{4.10}$$

também temos que,

$$\| \mathcal{L}^{k-2}\varphi \| = \| \mathcal{L}(\mathcal{L}^{k-3}\varphi) \| \leq K|\mathcal{L}^{k-3}\varphi|_1 + \lambda \| \mathcal{L}^{k-3}\varphi \| .$$

Substituindo em (4.10) obtemos

$$\| \mathcal{L}^k\varphi \| \leq K|\mathcal{L}^{k-1}|_1 + \lambda K|\mathcal{L}^{k-2}\varphi|_1 + \lambda^2 K|\mathcal{L}^{k-3}\varphi|_1 + \lambda^3 \| \mathcal{L}^{k-3}\varphi \| .$$

Assim, procedendo desta forma até um número $k \in \mathbb{N}$ teremos,

$$\| \mathcal{L}^k\varphi \| \leq K|\mathcal{L}^{k-1}\varphi|_1 + \lambda K|\mathcal{L}^{k-2}\varphi|_1 + \lambda^2 K|\mathcal{L}^{k-3}\varphi|_1 + \ldots + \lambda^{k-1}K|\mathcal{L}^{k-k}\varphi|_1 + \lambda^k \| \mathcal{L}^{k-k}\varphi \| \leq$$

$$K\left(|\mathcal{L}^{k-1}\varphi|_1 + \lambda|\mathcal{L}^{k-2}\varphi|_1 + \lambda^2|\mathcal{L}^{k-3}\varphi|_1 + \ldots + \lambda^{k-1}|\varphi|_1\right) + \lambda^k \| \varphi \| .$$

Usaremos o fato de que $|\mathcal{L}\varphi|_1 \leq |\varphi|_1$ valendo também para seus iterados. De fato, note que para $n = 1$, tem-se $|\mathcal{L}\varphi|_1 \leq |\varphi|_1$. Suponha que esta propriedade é válida para $n = k$, isto é, $|\mathcal{L}^k\varphi|_1 \leq |\varphi|_1$. Teremos, para $n = k + 1$

$$|\mathcal{L}^{k+1}\varphi|_1 = |\mathcal{L}(\mathcal{L}^k\varphi)|_1 \leq |\mathcal{L}^k\varphi|_1 \leq |\varphi|_1.$$

Daí,

$$\| \mathcal{L}^k\varphi \| \leq K\left(|\varphi|_1 + \lambda|\varphi|_1 + \lambda^2|\varphi|_1 + \ldots + \lambda^{k-1}|\varphi|_1\right) + \lambda^k \| \varphi \| \Rightarrow$$

$$\| \mathcal{L}^k\varphi \| \leq K\left(\sum_{j=0}^{k-1}\lambda^j\right)|\varphi|_1 + \lambda^k \| \varphi \| . \tag{4.11}$$

Note que existe M_0 tal que $\forall\ \varphi \in X$ tem-se $|\varphi|_1 \leq M_0 \| \varphi \|_\infty$. De fato, em cada retângulo R_l da Partição de Markov, com $1 \leq l \leq n$, temos

$$|\varphi\ |_{R_l}\ |_1 = \int_{R_l} \varphi dm = m(R_l).$$

Por outro lado, $m(R_l) \leq \sup ess(|\varphi\ |_{R_l}\ |)m(R_l),\ \forall\ 1 \leq l \leq n$

Daí, para $X \subset M$ tem-se

$$|\varphi|_1 = m(X) \leq supess(|\varphi|).\sum_{k=1}^{n} m(R_l).$$

Fazendo $M_0 = \sum_{k=1}^{n} m(R_l)$, obtemos

$$|\varphi|_1 \leq M_0 \parallel \varphi \parallel_\infty .$$

Voltando a (4.11)

$\parallel \mathcal{L}^k \varphi \parallel \leq K \left(\sum_j \lambda^j \right) M_0 \parallel \varphi \parallel_\infty + \lambda^k \parallel \varphi \parallel \leq K_0 \parallel \varphi \parallel$, para alguma constante $K_0 = K \left(\sum_j \lambda^j \right) M_0$.

Segue que $\parallel \mathcal{L}^n \varphi \parallel < \infty$, donde $\sup_n \parallel \mathcal{L}^n \parallel < \infty$.

□

4.3 Lema. *Seja $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ e um operador de posto finito $P : X \to X$ tal que $\parallel \mathcal{L}^{n_0} - P \parallel < \varepsilon$.*

Prova.

Tome $\Re = \{R_1, \ldots, R_n\}$ uma partição de Markov da variedade $\mathcal{M}$. Para $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, considere a projeção de φ com respeito à m, $\pi_n : X \to \mathbb{R}$ e defina $\phi := \pi_n(\varphi)$ tal que $\phi|_{R_l} = \dfrac{\int_{R_l} \varphi}{m(R_l)}$, $1 \leq l \leq n$.

Considere os operadores $P_n : X \to X$ definidos por $P_n := (\mathcal{L} \circ \pi_n)(\varphi)$, que afirmamos ter posto finito. Para mostrar tal resultado vejamos primeiro que o espaço S das funções simples sobre a partição $\Re$ tem dimensão n.

De fato, $\mathbf{B} = \{\chi_{R_1}, \chi_{R_2}, \ldots, \chi_{R_n}\}$ forma uma base de S.

Seja $\eta \in S$, então $\eta = \alpha_1 \chi_{R_1} + \alpha_2 \chi_{R_2} + \ldots + \alpha_n \chi_{R_n}$.

Tome $x \in R_i$, com $1 \leq i \leq n$. Para $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, considere a seguinte combinação linear nula

$$\alpha_1 \chi_{R_1}(x) + \ldots + \alpha_i \chi_{R_i}(x) + \ldots + \alpha_n \chi_{R_n}(x) = 0$$

Daí, temos que

$$\alpha_j \chi_{R_j}(x) = \alpha_j \cdot 1 = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_j = 0, \text{ para } j = i$$

$$\alpha_j \chi_{R_j}(x) = 0, \ j \neq i, \text{ e } 1 \leq j \leq n \ .$$

Segue que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, logo $(\chi_{R_1}, \ldots, \chi_{R_n})$ é L.I. e o espaço S das funções simples tem dimensão finita n. Logo, a imagem $\pi_n(\varphi)$ tem dimensão finita n. Conseqüentemente o operador $(\mathcal{L}\circ\pi_n)(\varphi)$, por ser linear, aplicado a imagem $Im(\pi_n)$ de π_n, tem dimensão finita, no máximo n.

Afirmamos que $(\mathcal{L}\circ\pi_n)$ tem dimensão menor ou igual a n. De fato, Sejam $v_1,\ldots,v_n$ geradores de $Im(\pi_n)$. Tome $\phi_n \in Im(\pi_n)$. Escrevemos $\phi_n = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$. Aplicando o operador linear $\mathcal{L}$ ao elemento ϕ_n, obtemos

$$\mathcal{L}(\phi_n) = \mathcal{L}(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n) = \mathcal{L}(\beta_1 v_1) + \ldots + \mathcal{L}(\beta_n v_n)$$

$$= \beta_1\mathcal{L}(v_1) + \ldots + \beta_n\mathcal{L}(v_n),\ \beta_1,\ldots,\beta_n \in \mathbb{R}.$$

Os vetores $\mathcal{L}(v_1),\ldots,\mathcal{L}(v_n)$ geram o espaço onde está definido $\mathcal{L}\circ\pi_n$, porém eles podem não ser L.I., pois alguns dos vetores $v_1,\ldots,v_n$ podem estar no núcleo de $\mathcal{L}$. Assim, a dimensão de $\mathcal{L}\circ\pi_n$ é menor ou igual a n, logo, este é um operador de posto finito.

Agora, iremos mostrar que $\parallel \mathcal{L} - P_n \parallel \leq \tau_0$, para um certo τ_0 a ser definido mais adiante.

Considere o operador $P_n := \mathcal{L}(\pi_n(\cdot))$ e seja $\psi := \varphi - \pi_n\circ\varphi$. É conveniente escrever

$$\begin{aligned}(\mathcal{L} - P_n)(\varphi) &= (\mathcal{L} - \mathcal{L}(\pi_n(\cdot))(\varphi)\\ &= \mathcal{L}(\varphi) - \mathcal{L}(\pi_n(\varphi))\\ &= \mathcal{L}(\varphi - \pi_n(\varphi))\\ &= \mathcal{L}(\psi).\end{aligned}$$

Daí,

$$\parallel (\mathcal{L} - P_n)(\varphi) \parallel = \parallel \mathcal{L}(\psi) \parallel = \parallel \mathcal{L}(\psi) \parallel_\infty + \parallel \mathcal{L}(\psi) \parallel_h \tag{4.12}$$

donde,

$$\parallel \mathcal{L}(\psi) \parallel \leq \parallel \mathcal{L}(\psi) \parallel_\infty + (\parallel \mathcal{L}(\psi) \parallel_h .\mathrm{diam}\mathcal{M}) + \parallel \mathcal{L}(\psi) \parallel_h . \tag{4.13}$$

Note que, da definição de ψ, em cada retângulo R_l existe x_l tal que $\psi(x_l) = 0$. Então, $\parallel \mathcal{L}(\psi) \parallel_\infty = 0$ para algum $x_l \in R_l$.

Daí,

$$\| \mathcal{L}(\psi) \| \leq \| \mathcal{L}(\psi) \|_h (\text{diam}\mathcal{M} + 1). \tag{4.14}$$

Da estimativa 2 anterior, temos que

$$\| \mathcal{L}(\psi) \|_h \leq \sum_{j=1}^{k} \sup_{y_1,y_2 \in R_l} |Jh_j(y_1)| \frac{|\psi(h_j(y_1)) - \psi(h_j(y_2))|}{d(y_1,y_2)} + C \sum_{j=1}^{k} \sup_{y_1,y_2 \in R_l} |\psi(h_j(y_2))||Jh_j(y_2)|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \sup_{y_1,y_2 \in R_l} |Jh_j(y_1)| \frac{|\psi(h_j(y_1)) - \psi(h_j(y_2))|}{d(y_1,y_2)} + C \sup |\psi(x)| \sum_{j=1}^{k} |Jh_j(y_2)|.$$

De (4.8) temos que

$$\sum_{j=1}^{k} \sup_{y_1,y_2 \in R_l} |Jh_j(y_1)| \frac{|\psi(h_j(y_1)) - \psi(h_j(y_2))|}{d(y_1,y_2)} \leq e^C \lambda ||\psi||_h.$$

Então

$$\| \mathcal{L}(\psi) \|_h \leq e^C \lambda ||\psi||_h + C \sup |\psi(x)| \sum_{j=1}^{k} |Jh_j(y_2)|$$

$$\leq e^C \lambda ||\psi||_h + C \max\ \text{diam}(R_l).||\psi||_h. \sum_{j=1}^{k} |Jh_j(y_2)|$$

já que em cada retângulo R_l existe x_l tal que $\psi(x_l) = 0$. Supondo $\max\ \text{diam}(R_l) \leq \hat{\delta} C^{-1}$, onde $\hat{\delta} < 1$.

Logo,

$$\| \mathcal{L}(\psi) \|_h = \int_{\mathcal{M}} \| \mathcal{L}(\psi) \|_h \, dm \leq e^C \lambda ||\psi||_h + ||\psi||_h \hat{\delta}. \int_{\mathcal{M}} \sum_{j=1}^{k} |Jh_j(y_2)|$$

$$\leq ||\psi||_h (e^C \lambda + \hat{\delta}).$$

Mas, $\forall y \in R_l$ tem-se $||\psi||_h = ||\varphi||_h$, daí

$$\| \mathcal{L}(\psi) \|_h \leq ||\varphi||_h (e^C \lambda + \hat{\delta}) \ ,$$

com $e^C\lambda + \hat{\delta} < 1$.

Logo, $\| \mathcal{L}(\psi) \| \leq \| \varphi \|_h (e^C\lambda + \hat{\delta})(\text{diam}\mathcal{M} + 1)$.

Voltando a (4.12) temos

$$\begin{aligned} \| (\mathcal{L} - P_n)(\varphi) \| &= \| \mathcal{L}(\psi) \|_\infty + \| \mathcal{L}(\psi) \|_h \\ &\leq (e^C\lambda + \hat{\delta})(\text{diam}\mathcal{M} + 1) \| \varphi \|_h . \end{aligned}$$

Tome $\tau_0 = (e^C\lambda + \hat{\delta})(\text{diam}\mathcal{M} + 1)$. Como $\| \cdot \|_h \leq \| \cdot \|$ obtemos

$$\| (\mathcal{L} - P_n)(\varphi) \| \leq \tau_0 \| \varphi \|_h \leq \tau_0 \| \varphi \| .$$

Substituindo $\mathcal{L}$ por $\mathcal{L}^{n_0}$ na última desigualdade, λ será substituído por λ^n daí, τ_0 será menor que ε, desde que n_0 seja suficientemente grande.

□

4.2 Lacuna Espectral

Nesta seção vamos obter condições sobre o operador linear limitado T em um espaço de Banach complexo que são suficientes para verificar que a média $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j$ converge na topologia uniforme do operador.

Considere $\mathbf{L}(X)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de um espaço de Banach X nele mesmo e seja $T \in \mathbf{L}(X)$. Um número complexo θ é dito estar no *conjunto resolvente* $\rho(T)$ se $\theta I - T$ é uma bijeção com inversa limitada. $R(\theta; T) = (\theta I - T)^{-1}$ é chamado o *resolvente* de T em θ. Se $\theta \notin \rho(T)$, então θ é dito estar no *espectro* $\sigma(T)$ de T.

Chamamos $\mathcal{F}(T)$ a família de todas as funções f que são analíticas em alguma vizinhança (não necessariamente conexa) de $\sigma(T)$.

Um subconjunto de $\sigma(T)$ que é aberto e fechado em $\sigma(T)$ é chamado um conjunto espectral. Se σ é um conjunto espectral, existe uma função $f \in \mathcal{F}(T)$ que é identicamente um em σ e que se anula no resto de $\sigma(T)$. Definamos $E(\sigma; T) := f(T)$.

Se f é uma função analítica definida num anel (degenerado) do plano complexo, $A(z_0, 0, r) := \{z; 0 < |z - z_0| < r\}$, z_0 é chamado uma singularidade isolada de f.

Seja $f(z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(z - z_0)^p$ a expansão de Laurent de f que converge no anel $A(z_0, 0, r)$. Se um número finito de termos a_p, com $p < 0$, são não-nulos, z_0 é dito ser um *pólo* de f e o menor número n tal que $a_{-|n|} \neq 0$ é chamado de *ordem* do *pólo* z_0.

4.4 Lema. *O conjunto fechado $\sigma(T)$ é limitado e sem lacuna. Além disso*

$$sup|\sigma(T)| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| T^n \|} \leq \| T \|$$

Para $|\theta| > \sup|\sigma(T)|$ a série $R(\theta; T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\theta^{n+1}}$ converge na topologia uniforme do operador.

4.5 Teorema. *Se θ é um pólo de T de ordem α, então θ tem índice α. Além disso, um ponto isolado θ no espectro de T é um pólo de ordem α se e somente se*

$$(\theta I - T)^{\alpha} E(\theta; T) = 0, \ (\theta I - T)^{\alpha - 1} E(\theta; T) \neq 0$$

4.6 Lema. *Seja X um espaço de Banach e suponha que $x_n \xrightarrow{w} x$ em X. Então a seqüência $\| x_n \|$ é limitada.*

Prova.

Seja $x \in X$ e $\hat{x}(\cdot)$ um funcional linear em X^* que atribui a cada $l \in X^*$ o número $l(x)$. A aplicação $\mathbf{J} : x \to \hat{x}$ é uma isometria de X em X^{**}, não necessariamente sobrejetiva. Esta aplicação é também chamada de *inclusão canônica* ou *inclusão isométrica*.

Por hipótese $x_n \xrightarrow{w} x$, então dado $l \in X^*$ tem-se $l(x_n) \to l(x)$, isto é,

$$l(x_n - x) \longrightarrow 0.$$

Note que l é contínuo, logo limitado. Então existe uma constante N, tal que

$$\| l(x_n - x) \| < N.$$

Considere $x_n - x$ um funcional linear em X^{**}. Então, para um l fixo tem-se

$$\| (\hat{x}_n - \hat{x}).l \| = \| l(x_n - x) \|$$

Assim, $\| (\hat{x}_n - \hat{x}).l \|$ é limitado em n.

Pelo Teorema da limitação uniforme, $\| (\hat{x}_n - \hat{x}) \|$ é uniformemente limitado em X^{**}.

Usando a *inclusão canônica* $\mathbf{J} : X \hookrightarrow X^{**}$, concluímos que $\| x_n - x \|$ é uniformemente limitado em X.

□

Isto mostra que toda seqüência fracamente convergente é limitada na norma.

4.7 LEMA. *Seja* T *um operador em um espaço de Banach X e suponha que* $\{\frac{1}{n}\mathrm{T}^n\}$ *converge a zero na topologia fraca do operador com n tendendo a infinito. Então o espectro de* T *é um subconjunto do disco unitário* $\{z; |z| \leq 1\}$, *e qualquer pólo θ de* T *com* $|\theta| = 1$ *tem ordem um.*

Prova.

Seja X um espaço de Banach. Por hipótese a seqüência $\{\dfrac{1}{n}\mathrm{T}^n\}$ converge fracamente à zero.

Fixemos $x \in X$ e façamos $x_n = \dfrac{1}{n}\mathrm{T}^n(x) \xrightarrow{w} 0$.

Do lema anterior, para x fixo tem-se que a seqüência $\{\frac{1}{n}\mathrm{T}^n(x)\}$ é uniformemente limitada em X.

Escrevendo $T_n = \dfrac{1}{n}\mathrm{T}^n$, para um x fixo temos que $\| T_n(x) \|$ é uniformemente limitada em n.

Obtemos, pelo Princípio da limitação uniforme que $\| T_n \|$ é uniformemente limitado, ou seja, existe uma constante k tal que $\forall\ n$

$$\| \frac{1}{n}\mathrm{T}^n \| \leq k \Rightarrow \sqrt[n]{\| T^n \|} \ \leq \ \sqrt[n]{k}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| T^n \|} \ \leq \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k}$$

mas, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$, então $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| T^n \|} \ \leq \ 1$

$$\Rightarrow \ \limsup_{n\to\infty} \| \mathrm{T}^n \|^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

Segue do Lema 4.4 que

$$\sup |\sigma(\mathrm{T})| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| \mathrm{T}^n \|}$$

donde

$$|\sigma(\mathrm{T})| \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| \mathrm{T}^n \|} \leq 1.$$

Se θ é um pólo de T e $|\theta| = 1$, então 1 é um pólo de $\mathrm{T}_1 = \dfrac{\mathrm{T}}{\theta}$ e $\dfrac{\mathrm{T}_1^n}{n} \longrightarrow 0$ na topologia fraca do operador.

De fato, se θ é um pólo de T então $\mathrm{T}(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p(z-\theta)^p$. Para $p < 0$, p finito tem-se $a_p \neq 0$.

$$\mathrm{T}(z) = \lambda \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p(z-\theta)^p \;\Rightarrow$$

$$\mathrm{T}(z) = \lambda\theta \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p(\frac{z}{\theta}-1)^p \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{T}}{\theta}(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p(\frac{z}{\theta}-1)^p \;\therefore\; 1 \text{ é um pólo de } \mathrm{T}_1 = \frac{\mathrm{T}}{\theta}.$$

Como $\dfrac{\mathrm{T}^n}{n} \xrightarrow{w} 0$ tem-se que

$$\frac{\mathrm{T}_1^n}{n} = \frac{\mathrm{T}^n}{\theta n} \xrightarrow{w} 0.$$

Portanto para provar a segunda afirmação é suficiente tratar o caso em que 1 é um pólo de T.

Provaremos por contradição.

Suponha que a ordem do pólo 1 é ao menos dois. Segue do Teorema 4.5 que existe $x_0 \in E(1;\mathrm{T})X$ tal que $(I-\mathrm{T})x_0 \neq 0$, mas $(I-\mathrm{T})^2 x_0 = 0$.

Daí,

$$0 = (I-\mathrm{T})^2 x_0 = (I - 2\mathrm{T} + \mathrm{T}^2)x_0$$

$$\Rightarrow \mathrm{T}^2 x_0 = 2\mathrm{T}x_0 - Ix_0. \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{T}^3 x_0 &= \mathrm{T}\cdot\mathrm{T}^2 x_0 \\ &= \mathrm{T}(2\mathrm{T}x_0 - x_0) \\ &= 2\mathrm{T}^2 x_0 - \mathrm{T}x_0 \\ &= 2(2\mathrm{T}x_0 - x_0) - \mathrm{T}x_0 \\ &= 3\mathrm{T}x_0 - 2x_0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Observando (4.13) e (4.14), suponha por indução que a relação é válida para n.

$$\mathrm{T}^n x_0 = n\mathrm{T}x_0 - (n-1)x_0. \tag{4.17}$$

Vamos mostrar que a relação vale para $n+1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}^{n+1} &= \mathrm{T} \cdot \mathrm{T}^n x_0 \\
&= \mathrm{T}(n\mathrm{T}x_0 - (n-1)x_0) \\
&= n\mathrm{T}^2 x_0 - (n-1)\mathrm{T}x_0 \\
&= n(2\mathrm{T}x_0 - x_0) - (n-1)\mathrm{T}x_0 \\
&= 2n\mathrm{T}x_0 - nx_0 - n\mathrm{T}x_0 + \mathrm{T}x_0 \\
&= n\mathrm{T}x_0 + \mathrm{T}x_0 - nx_0 \\
&= (n+1)\mathrm{T}x_0 - nx_0.
\end{aligned}$$

Agora observe que (4.13) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{T}^2 x_0}{2} &= \frac{2\mathrm{T}x_0 - Ix_0}{2} \\
&= \mathrm{T}x_0 - \frac{x_0}{2} \\
&= \mathrm{T}x_0 - x_0 + x_0 - \frac{x_0}{2} \\
&= \frac{x_0}{2} + (\mathrm{T} - I)x_0.
\end{aligned}$$

Escrevendo (4.15) da mesma forma tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\mathrm{T}^n x_0 &= \mathrm{T}x_0 - \frac{(n-1)x_0}{n} - x_0 + x_0 \\
&= \mathrm{T}x_0 - x_0 + \frac{x_0}{n} \\
&= \frac{x_0}{n} + (\mathrm{T} - I)x_0.
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathrm{T}^n x_0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}x_0 + (\mathrm{T}-I)x_0.$$

Logo $(\mathrm{T}-I)x_0 = 0$, pois $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}x_0 \to 0$.

Assim, para todo $x^* \in X^*$, tem-se $x^*(\mathrm{T}-I)x_0 = 0$, o que é uma contradição.

□

Para provar o próximo Lema enunciaremos a Alternativa de Fredholm (vide [7], pg. 201)

4.8 Teorema. *(Alternativa de Fredholm) Seja $\mathcal{D}$ um subconjunto conexo aberto de $\mathbb{C}$. Seja $f : \mathcal{D} \to$ $\mathbf{L}(X)$ uma função analítica tal que $f(z)$ é compacta para cada $z \in \mathcal{D}$. Então, ou*

(a) $(I - f(z))^{-1}$ *existe para* $z \notin \mathcal{D}$.

ou

(b) $(I - f(z))^{-1}$ *existe para todo* $z \in \mathcal{D}\backslash S$ *onde* S *é um subconjunto discreto de* $\mathcal{D}$ *(i.e. um conjunto que não possui pontos limite em* $\mathcal{D}$*). Neste caso,* $(I - f(z))^{-1}$ *é meromorfa em* $\mathcal{D}$*, analítica em* $\mathcal{D}\backslash S$*, os resíduos nos pólos são operadores de posto finito, e se* $z \in S$ *então* $f(z)\psi = \psi$ *tem uma solução não nula em* X.

4.9 Lema. *Seja T um operador linear limitado cujo espectro está contido no disco unitário e seja $|T^{n_0} - K| < 1$ para algum inteiro positivo n_0 e algum operador compacto K. Então todo ponto espectral θ de T com $|\theta|^{n_0} > |T^{n_0} - K|$ é isolado e a correspondente projeção $E(\theta; T)$ tem dimensão da imagem finita.*

Prova.

Seja n_0 como na hipótese e seja ω uma primitiva da n-ésima raíz da unidade. Se $f \in \mathcal{F}(T)$ então $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$. Tomando ω raíz da unidade claramente os espaços

$$E(\theta;T) + E(\theta\omega;T) + \ldots + E(\theta\omega^{n-1};T) = E(\theta^n;T^n).$$

Note que alguns dos $E(\theta\omega^p;T)$ acima podem ser triviais.

Desde que a aplicação $\sigma \to E(\sigma)$ é um isomorfismo tem-se que $E(\theta\omega^p;T)E(\theta\omega^q;T) = 0$, $p \neq q$ e então se a dimensão da imagem de $E(\theta^n;T^n)$ é finita a dimensão da imagem de $E(\theta;T)$ também é finita. Além disso, se θ^n é um ponto isolado de $\sigma(T^n) = [\sigma(T)]^n$, então θ é um ponto isolado de $\sigma(T)$.

Portanto é suficiente provar o lema sobre a afirmação de que $n = 1$.

Seja $V = T - K$. Primeiro mostraremos que se $|\zeta| > |V|$ e se $(I - R(\zeta;V)K)^{-1}$ existe, então $R(\zeta;T)$ existe e é igual a $(I - R(\zeta;V)K)^{-1}R(\zeta;V)$.

Definamos $\dfrac{1}{A} := A^{-1}$. Esta notação será útil para introduzirmos um algebrismo que justifica heuristicamente a igualdade

$$[I - R(\zeta;V)K]^{-1}R(\zeta;V) = R(\zeta;T). \tag{4.18}$$

De fato, note que

$$[I - (\zeta I - V)^{-1}K]^{-1} = \left[I - \frac{K}{\zeta I - V}\right]^{-1} = \left[\frac{\zeta I - V - K}{\zeta I - V}\right]^{-1} =$$

$$\left[\frac{\zeta I - T}{\zeta I - V}\right]^{-1} = \frac{[\zeta I - T]^{-1}}{[\zeta I - V]^{-1}} = \frac{R(\zeta;T)}{R(\zeta;V)}.$$

Então,

$$[I - (\zeta I - V)^{-1}K]^{-1}R(\zeta;V) = \frac{R(\zeta;T)}{R(\zeta;V)} \cdot R(\zeta;V) = R(\zeta;T).$$

Por outro lado podemos escrever

$$\begin{aligned}
R(\zeta;V)(\zeta I - T) &= R(\zeta;V)(\zeta I - V - K) \\
&= R(\zeta;V)\zeta I - R(\zeta;V)V - R(\zeta;V)K \\
&= (\zeta I - V)^{-1}\zeta I - (\zeta I - V)^{-1}V - (\zeta I - V)^{-1}K \\
&= (\zeta I - V)^{-1}(\zeta I - V) - (\zeta I - V)^{-1}K \\
&= I - (\zeta I - V)^{-1}K \\
&= I - R(\zeta;V)K
\end{aligned}$$

isto é,

$$R(\zeta;V)(\zeta I - T) = I - R(\zeta;V)K. \tag{4.19}$$

Note também que

$$[(I - R(\zeta;V)K]^{-1}R(\zeta;V)] \cdot [\zeta I - T] = I. \tag{4.20}$$

De fato, por (4.19) temos

$$[(R(\zeta;V)(\zeta I - T))^{-1}R(\zeta;V)] \cdot [\zeta I - T] =$$
$$[(\zeta I - T)^{-1} \cdot R(\zeta;V)^{-1} \cdot R(\zeta;V)] \cdot [\zeta I - T] =$$
$$(\zeta I - T)^{-1} \cdot (\zeta I - T) = I.$$

Além disso temos

$$[\zeta I - T] \cdot [(I - R(\zeta;V)K]^{-1} \cdot R(\zeta;V)] = I. \tag{4.21}$$

De fato,

$$\begin{aligned}[\zeta I - T] \cdot [(I - R(\zeta;V)K]^{-1} \cdot R(\zeta;V)] &= (\zeta I - V)(\zeta I - V)^{-1}(\zeta I - T)[(I - R(\zeta;V)K)^{-1}R(\zeta;V)] \\ &= (\zeta I - V)R(\zeta;V)(\zeta I - T)[(I - R(\zeta;V)K)^{-1}R(\zeta;V)]\end{aligned}$$

De (4.19)

$$(\zeta I - V)R(\zeta;V)(\zeta I - T)[(I - R(\zeta;V)K)^{-1}R(\zeta;V)] =$$
$$(\zeta I - V)(I - R(\zeta;V)K)(I - R(\zeta;V)K)^{-1}R(\zeta;V) =$$
$$(\zeta I - V)R(\zeta;V) = (\zeta I - V)(\zeta I - V)^{-1} = I.$$

Observe que o operador $R(\zeta;V)K$ é compacto, pois é um produto de um compacto K por um limitado $R(\zeta;V)$ (pois $|V| < |\zeta| \Rightarrow |V|$ é limitado), e depende analiticamente de ζ.

Note que $|R(\zeta;V)| = \left|\dfrac{1}{\zeta I - V}\right| \overset{|\zeta|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Segue que para $|\zeta|$ suficientemente grande $|R(\zeta;V)K| < 1$, daí o número 1 não pertence ao espectro do operador $R(\zeta;V)K$, pois

$$\sup|\sigma(R(\zeta;V)K)| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(R(\zeta;V)K)|^n} < 1.$$

Logo, como 1 não pertence a $\sigma(R(\zeta;V)K)$ isto garante que a alternativa (a) do Teorema analítico de Fredholm não acontece, e que vale a alternativa (b), isto é, $(I - R(\zeta;V)K))^{-1}$ existe e é uma função analítica de ζ, no domínio $\{\zeta \in \mathbb{C}; |V| < |\zeta|\}$, exceto em um conjunto discreto de pontos nesse domínio. Voltando a (4.18) concluímos que $R(\zeta;T)$ existe no domínio $\{\zeta \in \mathbb{C}; |V| < |\zeta|\}$ exceto em um conjunto enumerável de pontos isolados. Ou seja, todo ponto espectral ζ de T é isolado, ou de outro modo, $\sigma(T) \subset \bigcup_{\zeta\in\sigma(K)} B(\zeta; \parallel V \parallel)$.

Seja $\theta \in \sigma(T)$ e $|\theta| > |V|$, resta mostrar que $E(\theta;T)$ tem dimensão da imagem finita.

Seja $B = B(\theta, r)$ uma bola de raio suficientemente pequeno para que $B \subset \{\zeta \in \mathbb{C}; |V| < |\zeta|\}$ e para que exista $(I - R(\zeta;V)K)^{-1}$, para todo $\zeta \in B$, $\zeta \neq \theta$. Seja $C \subset B$ um círculo centrado em θ.

Para $|\zeta|$ grande, a expansão de Laurent conduz à identidade

$$(I - R(\zeta;V)K)^{-1} = I + R(\zeta;V)K(I - R(\zeta;V)K)^{-1}. \tag{4.22}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(I - R(\zeta;V)K)^{-1} &= \frac{I}{I - R(\zeta;V)K}\\
&= I + R(\zeta;V)K + (R(\zeta;V)K)^2 + (R(\zeta;V)K)^3 + \ldots\\
&= I + R(\zeta;V)K\left[I + R(\zeta;V)K + (R(\zeta;V)K)^2 + \ldots\right]\\
&= I + R(\zeta;V)K.\left(\frac{I}{I - R(\zeta;V)K}\right)\\
&= I + R(\zeta;V)K.(I - R(\zeta;V)K)^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Por continuidade analítica, isto vale também em C.

Daí temos que

$$\begin{aligned}
R(\zeta;T) &= [I + R(\zeta;V)K(I - R(\zeta;V)K)^{-1}]R(\zeta;V)\\
&= R(\zeta;V) + R(\zeta;V)K(I - R(\zeta;V)K)^{-1}R(\zeta;V).
\end{aligned}$$

Desde que $R(\zeta;V)$ é analítica em C temos que para $f \in \mathcal{F}(T)$ vale

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)(\zeta I - T)^{-1}d\zeta.$$

Note que as vizinhanças não são conexas, daí f é constante em cada uma e é analítica.

fazendo $f(T) = E(\theta; T) = \begin{cases} 1, se\ \theta \in \sigma(T) \\ 0, se\ \theta \notin \sigma(T) \end{cases}$

obtemos

$$\begin{aligned} E(\theta; T) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C R(\zeta; T)d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C [R(\zeta; V) + R(\zeta; V)K(I - R(\zeta; V)K)^{-1}R(\zeta; V)]d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C R(\zeta; V)d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_C R(\zeta; V)K(I - R(\zeta; V)K)^{-1}R(\zeta; V)d\zeta. \end{aligned}$$

A primeira parcela da soma acima vai a zero pois ζ não pertence à $\sigma(V)$.

Logo,

$$E(\theta; T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} R(\zeta; V)K(I - R(\zeta; V)K)^{-1}R(\zeta; V)d\zeta. \tag{4.24}$$

O integrando é um operador compacto para cada ζ, pois é um produto de um compacto K por um limitado $R(\zeta; V)$.

Sabendo que o conjunto dos operadores compactos é fechado na topologia uniforme do operador, concluímos que a integral em (4.24) é um operador compacto.

Logo, $E(\theta; T)$ é um operador compacto. Mas, $E(\theta; T)$ é o operador identidade do subespaço $E(\theta; T)X$, e como um operador identidade num espaço de dimensão infinita não pode ser compacto, concluímos que o espaço $E(\theta; T)X$ tem dimensão finita.

□

4.3 Exatidão da medida SRB

Dados dois conjuntos A e B contidos em $\mathcal{M}$, definimos o *percentual* que A ocupa em B por

$$\frac{m(A \cap B)}{m(B)}.$$

4.10 LEMA. *Seja $A \subset \mathcal{M}$ um conjunto de medida positiva. Dado $0 < \beta' < 1$, existe δ tal que toda partição de Markov com diâmetro menor que δ possui um retângulo no qual A ocupa um percentual maior que β'.*

Prova.

Considere uma partição de Markov $\Re$ tal que $\text{diam}(R) < \delta$, $\forall R \in \Re$ e δ tão pequeno quanto queiramos. Seja A um conjunto de medida positiva, então A possui pontos de densidade. Se x_0 é um ponto de densidade de A, tomando $\beta' < \beta < 1$, existe r_0 tal que para toda bola $B(x_0, r)$ com $r \leq r_0$ temos que

$$\frac{m(A \cap B(x_0, r))}{m(B(x_0, r))} > \beta.$$

Afirmamos que existe um retângulo $R \in \Re$ tal que

$$\frac{m(A \cap R)}{m(R)} > \beta'.$$

De fato,

Definamos o anel $\hat{\mathbf{A}} := \hat{\mathbf{A}}(x_0, r_1, r_0)$ com $r_1 < r_0$, tal que $m(\hat{\mathbf{A}}) < (\beta - \beta').m(B(x_0, r))$.

Tome uma partição de Markov cujos retângulos têm diâmetro menor que $r_0 - r_1$. Sejam $R_1, \ldots, R_k$ todos os retângulos dessa partição que intersectam $B(x_0, r_1)$.

Como x_0 é ponto de densidade de A, temos

$$\frac{m(A \cap B(x_0, r_0))}{m(B(x_0, r_0))} > \beta.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\sum m(A \cap R_j)}{\sum m(R_j)} &\geq \frac{m(A \cap (\bigcup_1^k R_j))}{m(B(x_0, r_0))} \\
&\geq \frac{m(A \cap (B(x_0, r_0) \backslash \hat{\mathbf{A}}))}{m(B(x_0, r_0))} \\
&\geq \frac{m(A \cap B(x_0, r_0))}{m(B(x_0, r_0))} - \frac{m(\hat{\mathbf{A}})}{m(B(x_0, r_0))} \\
&\geq \beta - (\beta - \beta').\frac{m(B(x_0, r_0))}{m(B(x_0, r_0))} \\
&= \beta'
\end{aligned}$$

Então $\exists\, j$ tal que $\dfrac{m(A \cap R_j)}{m(R_j)} \geq \beta'$.

□

4.11 Lema. *Seja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ uma transformação expansora tal que f admite uma probabilidade μ absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue. Então μ é exata.*

Prova.

Seja A pertencente a σ-álgebra $\bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(\mathcal{A})$ tal que $A = f^{-n}(B_n)$, $\forall B_n \in \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(\mathcal{A})$. Logo $f^n(A) = B_n$, $\forall n$.

Suponha por absurdo que $0 < m(A) < 1$. Em particular, f é localmente um difeomorfismo logo preserva conjuntos de medida nula e de medida positiva, então $0 < m(B_n) < 1$.

Como $m(A) > 0$, existem pontos de densidade de A. Se $x_0 \in \mathcal{M}$ é ponto de densidade de A então existe o limite

$$\lim_{r\to 0} \frac{m(A \cap B(x_0, r))}{m(B(x_0, r))} = 1.$$

Ou seja, A ocupa um percentual (arbitrariamente) grande do volume de qualquer bola em torno de x_0 que tenha um raio suficientemente pequeno.

Considere alguma partição de Markov $\Re$. Vamos assumir que existe algum retângulo $R \in \Re$ e um $\gamma > 0$ tal que

$$\frac{m(A^c \cap R)}{m(R)} < \gamma.$$

Pelo Corolário 1.8 da distorção limitada existe uma constante $C_0 > 1$ tal que para um j fixo

$$C_0^{-1} \frac{m(f^j(A^c \cap R))}{m(R)} < \frac{m(A^c \cap R)}{m(R)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m(f^j(A^c \cap R))}{m(R)} < C_0 \frac{m(A^c \cap R)}{m(R)}$$

Onde $f^j(R)$ contém uma bola de raio γ_0 fixado.

Note que existe $\tilde{m}$ tal que para qualquer bola B_{γ_0} tem-se $f^{\tilde{m}}(B_{\gamma_0}) = \mathcal{M}$ e pelo Corolário 1.8 da distorção limitada existe uma constante $\tilde{C_0} > 1$ tal que

$$\frac{m(f^{j+\tilde{m}}(A^c \cap R))}{m(f^{j+\tilde{m}}(R))} < C_0 \cdot \tilde{C_0} \frac{m(A^c \cap R)}{m(R)}.$$

Observe que $m(f^{j+\tilde{m}}(R)) = m(\mathcal{M})$.

Então

$$\frac{m(f^{j+\tilde{m}}(A^c \cap R))}{m(\mathcal{M})} < C_0 \cdot \tilde{C_0} \cdot \gamma$$

daí,

$$\frac{m(f^{j+\tilde{m}}(A \cap R))}{m(\mathcal{M})} > 1 - C_0 \cdot \tilde{C_0} \cdot \gamma$$

$$\Rightarrow \frac{m(f^{j+\tilde{m}}(A))}{m(\mathcal{M})} > 1 - C_0 \cdot \tilde{C_0} \cdot \gamma$$

Note que $A = f^{-n}(B_n) \Rightarrow B_n = f^n(A)$, então podemos escrever

$$\frac{m(f^{j+\tilde{m}}(A \cap R))}{m(\mathcal{M})} = \frac{m(B_{j+\tilde{m}})}{m(\mathcal{M})} > 1 - C_0 \cdot \tilde{C_0} \cdot \gamma$$

Logo,

$$\frac{m(B^c_{j+\tilde{m}})}{m(\mathcal{M})} < C_0 \cdot \tilde{C_0} \cdot \gamma \tag{4.25}$$

Observe também que se $A = f^{-n}(B_n) \Rightarrow A^c = f^{-n}(B^c_n)$. Então, para simplificar a notação escreveremos $A^c = f^{-(j+\tilde{m})}(B^c_{j+\tilde{m}})$.

Pelo Lema 4.10 podemos considerar uma partição $\Re$ de Markov de $\mathcal{M}$ tal que A ocupa um percentual (arbitrariamente) grande de algum retângulo $R \in \Re$. Considere um refinamento $\Re'$ desta partição e tome um retângulo $R_l \in \Re'$.

Logo,

$$\begin{aligned} m(A^c) &= m(f^{-(j+\tilde{m})}(B^c_{j+\tilde{m}})) \\ &= \frac{m(\sum_l (f^{-(j+\tilde{m})}(B^c_{j+\tilde{m}} \cap R_l))}{m(\sum_l f^{-(j+\tilde{m})}(R_l))} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sum_l m(\sum_l (f^{-(j+\tilde{m})}(B^c_{j+\tilde{m}} \cap R_l))}{\sum_l m(f^{-(j+\tilde{m})}(R_l))} \\
&< C_0\tilde{C}_0 \frac{\sum_l m(B^c_{j+\tilde{m}} \cap R_l))}{\sum_l m(R_l)} \\
&< C_0\tilde{C}_0 \cdot (C_0\tilde{C}_0\gamma) \\
&< (C_0\tilde{C}_0)^2 \cdot \gamma
\end{aligned}
$$

Desde que $\sum_l m(R_l) = m(\mathcal{M}) = 1$ e $m(B^c_{j+\tilde{m}}) < C_0\tilde{C}_0\gamma \Rightarrow \sum_l m(B^c_{j+\tilde{m}} \cap R_l) < C_0\tilde{C}_0\gamma$.

Como m é equivalente a μ, segue que μ é exata.

□

4.4 Conclusão

Neste ponto podemos recuperar a medida como limite exponencialmente rápido dos iterados do operador de Perron– Frobenius. Mais precisamente a decomposição do espectro do operador de Perron–Frobenius induz uma decomposição do espaço de Banach X como soma direta dos subespaços invariantes E_0 e E_1, tal que em E_0 o espectro do operador de Perron–Frobenius é contrativo e em E_1 é unidimensional.

Devido à definição do operador de Perron–Frobenius como operador de mudança de variáveis é fácil determinar o espaço E_0. Vejamos.

4.12 PROPOSIÇÃO. *Seja* $E_0 = \{\varphi \in X; \int \varphi dm = 0\}$, *$E_0$ é invariante por $\mathcal{L}$. Além disso, E_0 é um subespaço fechado e tem codimensão* 1.

Prova.

De fato,

Seja $\varphi \in E_0$, então $\int \varphi dm = 0$, $\forall x \in \mathcal{M}$

Como $\mathcal{L}$ é o dual do operador $\psi \circ f$, tem-se que

$$\int (\mathcal{L}\varphi)\psi dm = \int \varphi(\psi \circ f) dm.$$

Se $\psi \equiv 1 \Rightarrow \int \varphi(\psi \circ f)dm = \int(\varphi \circ f)dm = \int \varphi dm = 0$.

Por outro lado,

$$\int (\mathcal{L}\varphi)\psi dm = \int (\mathcal{L}\varphi) \cdot 1dm = \int (\mathcal{L}\varphi)dm.$$

Logo, $\int(\mathcal{L}\varphi)dm = 0$ e portanto $\mathcal{L}(E_0) \subset E_0$.

Vejamos que E_0 é fechado, isto é, seja $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em E_0, se $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\varphi \in E_0$.

De fato, se $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ em X, temos que

$$\| \varphi_n - \varphi \| = \| \varphi_n - \varphi \|_\infty + \| \varphi_n - \varphi \|_h \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \| \varphi_n - \varphi \|_\infty \longrightarrow 0.$$

Daí, como $\displaystyle\int_{\mathcal{M}} \varphi_n = 0$ tem-se

$$\left|\int_{\mathcal{M}} \varphi dm\right| = \left|\int_{\mathcal{M}} \varphi dm - \int_{\mathcal{M}} \varphi_n dm\right| = \left|\int_{\mathcal{M}} (\varphi - \varphi_n)dm\right| \leq \int_{\mathcal{M}} |\varphi_n - \varphi|\, dm$$

$$\leq \| \varphi_n - \varphi \|_\infty \cdot \int_{\mathcal{M}} dm = \| \varphi_n - \varphi \|_\infty \longrightarrow 0.$$

Logo, $\displaystyle\int_{\mathcal{M}} \varphi dm = 0 \Rightarrow \varphi \in E_0$.

Resta ver que E_0 tem codimensão 1.

Dado $\varphi \in X$ podemos escrever $\varphi = \displaystyle\int_{\mathcal{M}} \varphi dm + (\varphi - \int_{\mathcal{M}} \varphi dm)$.

Observe que

$$\int_{\mathcal{M}} \varphi dm \in \{\phi \in X; \phi \text{ é constante}\} \;\approx\; \mathbb{R}$$

além disso,

$$(\varphi - \int_{\mathcal{M}} \varphi dm) \in E_0$$

pois

$$\int_{\mathcal{M}} (\varphi - \int_{\mathcal{M}} \varphi dm) dm = \int_{\mathcal{M}} \varphi dm - \int_{\mathcal{M}} \left(\int_{\mathcal{M}} \varphi dm \right) dm$$

$$= \int_{\mathcal{M}} \varphi dm - \int_{\mathcal{M}} \varphi dm \cdot \int_{\mathcal{M}} dm = \int_{\mathcal{M}} \varphi dm - \int_{\mathcal{M}} \varphi dm = 0.$$

Como o espaço das funções constantes $\{\varphi \in X; \varphi \text{ é constante}\}$ tem dimensão 1 E_0 tem codimensão 1.

□

Considere o autoespaço E_1 associado ao autovalor 1 como sendo o gerado por ρ, densidade da medida que é ponto fixo do operador $\mathcal{L}$.

4.13 Corolário. *O autoespaço E_1 está em soma direta com E_0.*

Prova.

Seja ρ a densidade da medida SRB e $E_1 = < \rho >$.

Assim, $\forall\ \xi \in E_1$ escrevemos $\xi = c \cdot \rho$.

Donde,

$\displaystyle\int_{\mathcal{M}} \xi dm = c \cdot \int_{\mathcal{M}} \rho dm = c$, pois $\displaystyle\int_{\mathcal{M}} \rho dm = \mu(\mathcal{M}) = 1.$

Se $\xi \in E_1 \cap E_0$ temos

$$\xi \in E_0 \Rightarrow \int_{\mathcal{M}} \xi dm = 0$$

e

$$\xi \in E_1 \Rightarrow \xi = c \cdot \rho \Rightarrow \xi = \int_{\mathcal{M}} \xi dm \cdot \rho$$
$$\Rightarrow \xi = 0 \cdot \rho \Rightarrow \xi = 0.$$

Daí,

$$E_1 \cap E_0 = \{0\}.$$

Como dimensão de E_1 é 1 e a codimensão de E_0 é 1 temos que

$$X = E_1 \bigoplus E_0.$$

□

4.14 LEMA. *Existe n_0 tal que $\forall n \geq n_0$ $\mathcal{L}^n \mid_{E_0}$ é contração.*

Prova.

Note que o raio espectral de $\mathcal{L}$ é dado por

$$r(\mathcal{L}) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| \mathcal{L}^n \mid_{E_0} \|} < \lambda.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $\forall n \geq n_0$ temos

$$\sqrt[n]{\| \mathcal{L}^n \mid_{E_0} \|} \leq \lambda + \varepsilon < 1$$

$$\Rightarrow \| \mathcal{L}^n \mid_{E_0} \| \leq (\lambda + \varepsilon)^n, \ \forall n \geq n_0$$

Donde,

$$\| \mathcal{L}^n \mid_{E_0} .\varphi_0 \| \leq (\lambda + \varepsilon)^n \| \varphi_0 \| .$$

Logo, $\| \mathcal{L}^n \mid_{E_0} \|$ é uma contração e converge exponencialmente rápido para zero.

Concluímos que $\mathcal{L} \mid_{E_0}$ possui em seu espectro a parte de $\sigma(\mathcal{L})$ que não está em $\{|\xi| \leq 1\}$, e que é contrativa.

□

4.15 TEOREMA. *$\mathcal{L}^n\varphi$ converge exponencialmente rápido à densidade da medida SRB.*

Prova.

Seja $\varphi \in X$ tal que $\displaystyle\int_{\mathcal{M}} \varphi dm \neq 0$. Como $X = E_1 \bigoplus E_0$, podemos escrever $\varphi = \varphi_1 + \varphi_0$, com $\varphi_1 \neq 0$, $\varphi_1 \in E_1$ e $\varphi_0 \in E_0$.

Então,

$$\mathcal{L}^n\varphi = \mathcal{L}^n\varphi_1 + \mathcal{L}^n\varphi_0.$$

Desde que φ_1 é ponto fixo de $\mathcal{L}$, temos também que $\mathcal{L}^n\varphi_1 = \varphi_1$, então

$$\| \mathcal{L}^n\varphi - \varphi_1 \| = \| \mathcal{L}^n\varphi - \mathcal{L}^n\varphi_1 \| = \| \mathcal{L}^n\varphi_0 \| \longrightarrow 0.$$

Ou seja, $\mathcal{L}^n\varphi$ converge exponencialmente rápido à φ_1, que é a densidade da medida SRB.

$\square$

Bibliografia

[1] **M. Viana**,*Stochastic Dynamics of Deterministic Systems*, Lecture Notes XXI Braz. Math. Colloq. IMPA, Rio de Janeiro, 1997.

[2] **M. Craizer**,*Teoria Ergódica das Transformações Expansoras*, Dissertação de Mestrado. IMPA, Rio de Janeiro, 1985.

[3] **M. Viana**,*Introdução à Teoria Ergódica*, Mini-curso. UFPe, Recife, 2003.

[4] **R. Mané**,*Introdução à Teoria Ergódica*, Projeto Euclides. IMPA, 1983.

[5] **L.S. Young**,*Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*, Ann. of Math. 147 (1998),585-650.

[6] **N. Dunford and J.T. Schwartz**,*Linear Operators*, Interscience Publishers. Inc, New York, 1958.

[7] **M. Reed and B. Simon**,*Methods of Modern Mathematical Physics, vol I: Functional Analysis*, Academic Press, New York and London, 1975.

[8] **César R. de Oliveira**,*Introdução à Análise Funcional*, Publicações Matemáticas. IMPA, 2001.

[9] **A. A. Castro**,*Curso de teoria da medida*,Projeto Euclides. IMPA, 2004.

[10] **Elon L. Lima**,*Curso de Análise I*, Projeto Euclides. IMPA, 1982.

[11] **Elon L. Lima**,*Curso de Análise II*, Projeto Euclides. IMPA, 1985.

[12] **Elon L. Lima**,*Espaços Métricos*, Projeto Euclides, 1983.

Universidade Federal da Bahia-UFBa
Instituto de Matemática/Depto. de Matemática

Campus de Ondina, Av. Adhemar de Barros s/n, CEP:40170-110
www.im.ufba.br/hpinst/mestrado